



HAL
open science

Application de la théorie des jeux à l'optimisation du routage réseau - solutions algorithmiques

Octave Boussaton

► **To cite this version:**

Octave Boussaton. Application de la théorie des jeux à l'optimisation du routage réseau - solutions algorithmiques. Informatique [cs]. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2010. Français. NNT : . tel-00605791

HAL Id: tel-00605791

<https://theses.hal.science/tel-00605791>

Submitted on 4 Jul 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Application de la théorie des jeux à l'optimisation du routage
réseau - solutions algorithmiques

Octave Boussaton

16 février 2010

Remerciements

Je remercie du plus profond de mon coeur, Solène Jouault, qui m'a aidé de façon inestimable et qui m'a supporté, dans tous les sens du terme, pendant cette thèse. Je souhaite également remercier de nombreuses personnes pour avoir contribué, à titres divers, à l'élaboration de ce document, j'adresse mes remerciements les plus chaleureux et sincères :

- A mes collègues et amis que j'ai cotoyés tout au long de ces trois années, dans l'ordre à-peu-près chronologique : Matthieu Kaczmarek, Emmanuel Hainry, Romain Péchoux, Anne Bonfante, Florent Garnier, Philippe Beaucamps, Daniel Reynaud, Wadie Guizany, Mathieu Hoyrup et Joan Calvet.
- A mon directeur de thèse Dominique Barth et mon encadrante Johanne Cohen pour leur encadrement et pour m'avoir donné de bonnes pistes et intuitions de recherche, ainsi qu'à Olivier Bournez pour son aide précieuse.
- Aux membres de l'équipe CARTE au sein de laquelle j'ai travaillé pendant trois ans et avec lesquels j'ai pu échanger des idées, Jean-Yves Marion, Guillaume Bonfante et Isabelle Gnaedig.
- Aux membres du PRiSM que j'ai cotoyés et avec qui j'ai eu des échanges très enrichissants : Thierry Mautor, Sandrine Vial, Sylvie Delaet, Franck Quessette et Chahinez Hamlaoui.
- A Sébastien Tixeuil, Jean-Claude Konig et Bruno Tuffin qui ont accepté d'être les rapporteurs de mon manuscrit.
- Aux autres membres de mon jury de thèse, Dominique Mery et Nicolas Lesauze.
- A mes parents, mes frères et mes amis de longue date qui m'ont toujours beaucoup aidé, Fulbert, Evariste, Maarten, Jean-Marc, Fabrice, Fred, Hieub, Jerome, Raphaël, Sylvain, Dogan, Delphine, Naomi, Mathieu, Mélanie, Maxime et quelques autres

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 1 |
| 2 | Contexte | 5 |
| 2.1 | Les bases de la communication réseau | 6 |
| 2.1.1 | Les réseaux IP | 7 |
| 2.1.2 | Le réseau local | 8 |
| 2.2 | Internet et le routage interdomaine | 9 |
| 2.2.1 | Une vue globale d' Internet | 9 |
| 2.3 | Le protocole BGP (Border Gateway Protocol) | 12 |
| 2.3.1 | Nature des accords entre opérateurs | 12 |
| 2.4 | Conclusion | 18 |
| 3 | Notions de théorie des jeux | 21 |
| 3.1 | Quelques champs d'application | 22 |
| 3.2 | Représentation des jeux | 22 |
| 3.2.1 | Stratégie dominante, théorème du minimax | 25 |
| 3.2.2 | Le concept d'utilité | 26 |
| 3.3 | Jeu constituant et jeux répétés | 27 |
| 3.3.1 | Le jeu constituant | 28 |
| 3.3.2 | L'équilibre de Nash pur | 29 |
| 3.3.3 | Les stratégies dans les jeux répétés | 30 |
| 3.3.4 | L'équilibre de Nash mixte | 31 |
| 3.4 | Conclusion | 31 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Jeux de tarifications | 33 |
| 4.1 | Jeu de tarification | 34 |
| 4.1.1 | Modèle général | 34 |
| 4.1.2 | Spécification d'un jeu de tarification circulaire à deux joueurs et m sources | 36 |
| 4.1.3 | Les dynamiques de jeu | 37 |
| 4.1.4 | Principe de l'étude des cas proposés | 38 |
| 4.2 | Les joueurs myopes | 39 |
| 4.2.1 | Premier jeu : une source, "Plus court chemin" | 39 |
| 4.2.2 | Premier jeu : une source, choix déterministe | 41 |
| 4.2.3 | Deuxième jeu : deux sources, "Plus court chemin" | 42 |
| 4.2.4 | Deuxième jeu : deux sources, Equiprobable | 45 |
| 4.2.5 | Deuxième jeu : deux sources, déterministe | 47 |
| 4.2.6 | Conclusion sur la méthode des joueurs myopes | 49 |
| 4.3 | Les joueurs fictifs | 49 |
| 4.3.1 | Equilibre de Nash dans le jeu à deux joueurs et deux sources | 50 |
| 4.3.2 | Etude de l'évolution du jeu | 51 |
| 4.3.3 | La dynamique des joueurs fictifs est déterministe | 52 |
| 4.3.4 | Convergence vers l'équilibre de Nash | 54 |
| 4.3.5 | Conclusion sur la méthode des joueurs fictifs | 57 |
| 4.3.6 | Généralisation de la méthode des joueurs fictifs pour le jeu à m sources | 58 |
| 4.4 | Limitation des joueurs fictifs | 61 |
| 4.4.1 | Evolution du jeu | 62 |
| 4.4.2 | Application des joueurs fictifs | 63 |
| 4.4.3 | Résultats de simulations | 64 |
| 4.5 | Conclusion | 65 |
| 5 | Etat de l'art | 67 |
| 5.1 | Jeux de congestion et jeux de potentiel | 68 |
| 5.1.1 | Les jeux de congestion | 68 |
| 5.1.2 | Les jeux de potentiel | 70 |
| 5.2 | Dynamique d'un jeu d'ordonnement | 71 |
| 5.2.1 | Modèle | 71 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.2.2 | Equilibres dans les jeux d'ordonnancement | 72 |
| 5.3 | De l'ordonnancement au routage | 73 |
| 5.4 | Inefficacité des équilibres | 75 |
| 5.4.1 | Modèle de routage de Wardrop | 77 |
| 5.4.2 | Le prix de l'anarchie | 79 |
| 5.5 | Conclusion | 81 |
| 6 | Jeux de routage | 83 |
| 6.1 | Préliminaires : deux cas classiques de routage | 84 |
| 6.1.1 | L'effet Pigou | 84 |
| 6.1.2 | Le paradoxe de Braess | 85 |
| 6.2 | Définition du problème de routage étudié | 87 |
| 6.2.1 | Utilité associée à un chemin | 88 |
| 6.2.2 | Déroulement d'une partie | 90 |
| 6.3 | Description de l'approche utilisée | 91 |
| 6.3.1 | Caractérisation du problème | 91 |
| 6.3.2 | Approximation de la trajectoire | 92 |
| 6.4 | Méthode générale de preuve de convergence | 94 |
| 6.4.1 | La théorie de la stabilité de Lyapunov | 94 |
| 6.4.2 | Stabilité au sens de Lyapunov | 95 |
| 6.4.3 | La méthode directe de Lyapunov | 96 |
| 6.5 | Propriétés de convergence pour notre jeu de routage | 98 |
| 6.5.1 | Une fonction de potentiel | 99 |
| 6.5.2 | Temps de convergence vers un ϵ -équilibre de Nash | 101 |
| 6.6 | Conclusion | 103 |
| 7 | Raffinement du jeu de routage | 105 |
| 7.1 | Définition du jeu MICRO | 107 |
| 7.1.1 | Profil de jeu et chemin choisi | 108 |
| 7.1.2 | Déroulement d'une partie | 111 |
| 7.2 | Description de l'approche utilisée | 112 |
| 7.2.1 | Dynamique du jeu | 115 |
| 7.3 | Convergence du jeu MICRO | 115 |
| 7.3.1 | Une fonction de potentiel | 116 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 7.4 | Conclusion | 118 |
| 8 | Simulations | 119 |
| 8.1 | Principes du simulateur et des tests | 120 |
| 8.1.1 | Déroulement de l'algorithme et réseaux de tests | 121 |
| 8.2 | Résultats de simulations | 121 |
| 8.2.1 | Résultats sur le réseau 2×2 à commodité unique | 124 |
| 8.2.2 | Résultats sur le réseau 3×3 à commodité unique | 128 |
| 8.3 | Réseaux à plusieurs commodités | 129 |
| 8.3.1 | Résultats sur le réseau 3×3 à deux commodités | 130 |
| 8.3.2 | Résultats sur le réseau 5×5 à trois commodités | 130 |
| 8.3.3 | Résultats sur le réseau $3 \times 3 \times 4$ à trois commodités | 131 |
| 8.3.4 | Résultats sur le réseau $5 \times 5 \times 6$ à trois commodités | 132 |
| 8.4 | Conclusion | 133 |
| 9 | Conclusion | 135 |
| 10 | Annexe | 141 |
| 10.1 | Annexe I : Différentes classes de jeux | 141 |
| 10.2 | Annexe II : éthique, moralité et théorie des jeux | 143 |
| 10.3 | Annexe III : Jeux de tarification | 147 |
| 10.4 | Annexe IV : Détails de simulations | 147 |
| 10.4.1 | Réseau 3×3 à commodité unique et 128 joueurs | 147 |
| 10.4.2 | Réseau 3×3 à deux commodités et 128 joueurs | 154 |
| 10.4.3 | Réseau 5×5 à trois commodités et 300 joueurs | 159 |
| 10.4.4 | Réseau $3 \times 3 \times 4$ à trois commodités et 192 joueurs | 164 |
| 10.4.5 | Réseau $5 \times 5 \times 6$ à trois commodités et 192 joueurs | 169 |
| | Bibliographie | 175 |

Chapitre 1

Introduction

Le présent ouvrage étudie la pertinence de l'utilisation de la théorie des jeux dans la modélisation et la résolution de certains problèmes liés au routage de l'information dans des réseaux informatiques. Ces problèmes mettent en jeu de nombreux acteurs qui adaptent sans cesse leur comportement à leur environnement. La théorie des jeux permet de modéliser le comportement de ces acteurs pour comprendre la mécanique d'un système étendu en étudiant ses rouages, de définir des stratégies et de se faire une idée de leur efficacité, d'étudier les conséquences de certains événements, etc.

La théorie des jeux en tant que *discipline* est couramment répertoriée comme une branche des mathématiques appliquées. Elle est tout indiquée, et employée, dans des domaines variés allant de l'économie, la biologie, les relations internationales, à la production industrielle ou même la prospection publicitaire en passant par la simulation de conflits armés¹ ou encore la mise en place d'aide humanitaire.

Ses objectifs sont multiples puisqu'il s'agit à la fois de capturer/ observer des comportements, de trouver des réponses appropriées à des changements dans l'environnement, mais aussi de traquer des configurations d'équilibres (voire l'opposé : de monopole/ domination de la part d'un ou plusieurs des acteurs) dans des situations stratégiques où la bonne fortune d'un joueur dépend des actions de tous les autres.

Dans les milieux académiques, la naissance de cette discipline remonte à 1944 avec la parution de *Theory of games and economic behavior* par Von Neumann et Morgenstern

¹Voir à ce sujet (entre autres) les "Global War Games". Par exemple, depuis 1887, le *Naval War College* aux Etats-Unis (Newport, Rhode Island) à recours à des "jeux de guerre" pour simuler différents cas de figures, c'est devenu avec le temps un véritable laboratoire pour développer des plans de guerre. Pratiquement toutes les opérations navales Américaine du 20^{ème} siècle ont été préalablement testées au NWC.

[50]. Néanmoins, il existe de nombreuses prémisses à cette *officialisation* bien plus tôt dans l'histoire de l'humanité. On peut mentionner par exemple les fameux problèmes ancestraux de partage de troupeaux de moutons ou de chameaux, certains contes des mille et une nuits, le non moins célèbre pari de Pascal ou encore certains travaux de Bernouilli, Cournot ou Darwin. Qu'il s'agisse des temps passés ou à venir, des notions telles que le marchandage, le partage, l'anticipation, l'apprentissage, la duperie, le bluff, l'envie de gagner plus en travaillant moins, etc. ont toujours fait partie de la nature humaine. De manière plus ou moins consciente, les hommes ont toujours eu et auront toujours des réflexions ou des considérations sur lesquelles nous pourrions mettre l'étiquette "Théorie des jeux". C'est une boîte à outils en même temps qu'un mode opératoire, une puissante méthodologie.

Dans cette thèse, nous nous intéressons particulièrement à l'aspect détection/ identification de situations d'équilibres dans des problèmes de routage modélisés sous forme de jeux. Le cadre d'étude original est le routage BGP (Border Gateway Protocol) dans le réseau Internet, son fonctionnement et sa possible amélioration. C'est ce que nous présentons dans le chapitre 2.

Il existe bien des problèmes dont on peut dire qu'ils sont des problèmes de routage, ils peuvent traiter d'appels téléphoniques, de répartition de flots de données (*DATA* en Anglais) ou de flux de circulation routière. Les méthodes de résolution des problèmes de routage informatique d'aujourd'hui nous viennent d'économistes, d'ingénieurs civils, de biologistes et mêmes de psychologues. Le chapitre 3 présente brièvement quelques champs d'applications de la théorie des jeux, plusieurs notions fondamentales ainsi que différents moyens courants de représenter un problème sous forme de jeu, d'après les joueurs et des informations dont ils disposent.

Dans cette thèse nous considérons deux angles pour aborder la problématique du routage avec des partenaires économiques concurrents. Le premier angle abordé dans le chapitre 4 correspond à fixer un certain coût de transit pour les noeuds du réseau. Nous parlerons de jeux de tarification et nous présenterons la dynamique dite des "joueurs fictifs" (*Fictitious players* en Anglais, c'est une méthode où un joueur fait une estimation des stratégies adverses en fonction du déroulement du jeu déjà connu) ainsi qu'un résultat de convergence dans le cas d'une topologie simple impliquant deux joueurs. C'est une extension des résultats de Robinson qui a montré dans [60] que la méthode des joueurs fictifs permettait de détecter des équilibres de Nash dans des jeux à sommes nulles.

Le chapitre 5 passe en revue l'existant sur la problématique de l'ordonnancement et de

ce que l'on appelle les *jeux de potentiel* ou jeux de congestion. Ceci constitue la base de nos travaux sur le routage. La notion de fonction de potentiel au sens de Beckmann et al. [8] y est également introduite.

Le chapitre 6 aborde la problématique du routage d'après le second angle de vue, la répartition des flots d'informations. Il présente une méthode d'apprentissage distribuée des équilibres de Nash, à information très incomplète.

Le chapitre 7 présente une heuristique d'approximation de la méthode présentée dans le chapitre 6, l'idée étant d'améliorer les performances de l'algorithme d'apprentissage en termes de complexité de calcul et de place mémoire pour représenter les stratégies des joueurs.

Enfin le chapitre 8 donne des résultats de simulations effectuées sur des jeux de routage à partir de la représentation donnée dans le chapitre 7.

En fin de document se trouve une annexe qui donne quelques remarques supplémentaires et générale sur la théorie des jeux ainsi que des résultats détaillés sur les problèmes que nous étudions dans les chapitres 4 et 7.

Chapitre 2

Contexte

The reasonable man adapts himself to the world ; the unreasonable one persists in trying to adapt the world to himself. Therefore all progress depends on the unreasonable man.

(George Bernard Shaw)

Internet a énormément évolué depuis une quinzaine d'années. Aujourd'hui il est administré par des milliers d'entités autonomes privées en compétition. Le routage est devenu beaucoup plus complexe qu'il ne l'était à l'époque de *NSFNet*¹. Le passage du public au privé a fait apparaître de nouvelles problématiques : économiques et politiques chez les différents opérateurs.

Les motivations pour les opérateurs à améliorer les conditions de routage réseau (en général ou dans leur réseau particulier) viennent d'abord de l'usage qu'en font les utilisateurs. Nous distinguons ici plusieurs catégories d'utilisations pour préciser les choses.

Tout d'abord il y a les applications coûteuses, à la fois en débit, ou bande passante, mais aussi en temps de connexion comme par exemple :

- le streaming video et/ou audio,
- le téléchargement volumineux en HTML (par opposition au téléchargement par FTP)

¹National Science Foundation Network. Réseau TCP/IP régional et académique qui a pris progressivement le pas sur ARPANET depuis 1986.

qui est en général plus flexible : fonction “resume”, option mode passif, type de fichiers binaire/ ASCII, etc.). En effet, la possibilité d’effectuer des achats d’albums musicaux ou de logiciels, téléchargeables, produit du trafic et peut amplifier un effet de congestion.

Les améliorations envisageables portent sur la vitesse de transmission, la capacité des connexions, c’est-à-dire sur l’infrastructure du réseau.

Ensuite, il y a les applications qui, sans nécessairement être très coûteuses en bande passante, demandent un *ping*² le plus faible possible et une connexion longue durée comme par exemple la vidéoconférence, le calcul parallèle ou les jeux en réseaux . Les améliorations possibles ici peuvent porter sur le routage en lui même : comment l’optimiser de façon automatique, sans forcément remettre en question l’infrastructure du réseau.

Enfin, certaines applications demandent une connexion stable et possiblement longue, sans que le *ping* soit primordial comme l’IRC³ et bien d’autres. Peuvent s’ajouter à cette liste, des raisons de sécurité impliquant tous types de changement dans un réseau comme par exemple l’isolement physique d’une sous-partie de celui-ci.

Les activités légales possiblement gourmandes en bande passante se sont multipliées au cours des quelques dernières années. Par exemple “Youtube.com”, créé en février 2005 seulement est le troisième site le plus visité au monde aujourd’hui (d’après *Alexa.com*), l’utilisation du *peer to peer*, type *BitTorrent*, et de la “video à la demande” s’amplifie, etc.

Nous pouvons dire que c’est tout simplement l’utilisation grandissante d’internet, c’est-à-dire sa croissance dans tous les sens du terme, qui fait que les fournisseurs d’accès sont contraints d’optimiser leurs services comme en témoigne le graphe en figure 2.1 qui montre un usage pour le moins grandissant depuis dix ans.

2.1 Les bases de la communication réseau

Aujourd’hui, différentes technologies, à savoir la télévision, la radio, les télécommunications et plus généralement les “données” sont amenées à interagir, à se mélanger⁴. Ces

²Ou temps de latence, c’est-à-dire le temps écoulé entre le moment où le client envoie un message au serveur et le moment où le client peut observer que son message a été pris en compte.

³*Internet Relay Chat*, créée par le Finlandais Jarkko Oikarinen en 1988, on peut le voir comme l’ancêtre des logiciels de messagerie existant de nos jours.

⁴Les services et les appareils modernes comme les téléphones portables ou les systèmes de caméras de surveillance, etc. sont un bon exemple de ce mélange de technologies : ils permettent une communication indépendante du moyen physique de transmission.

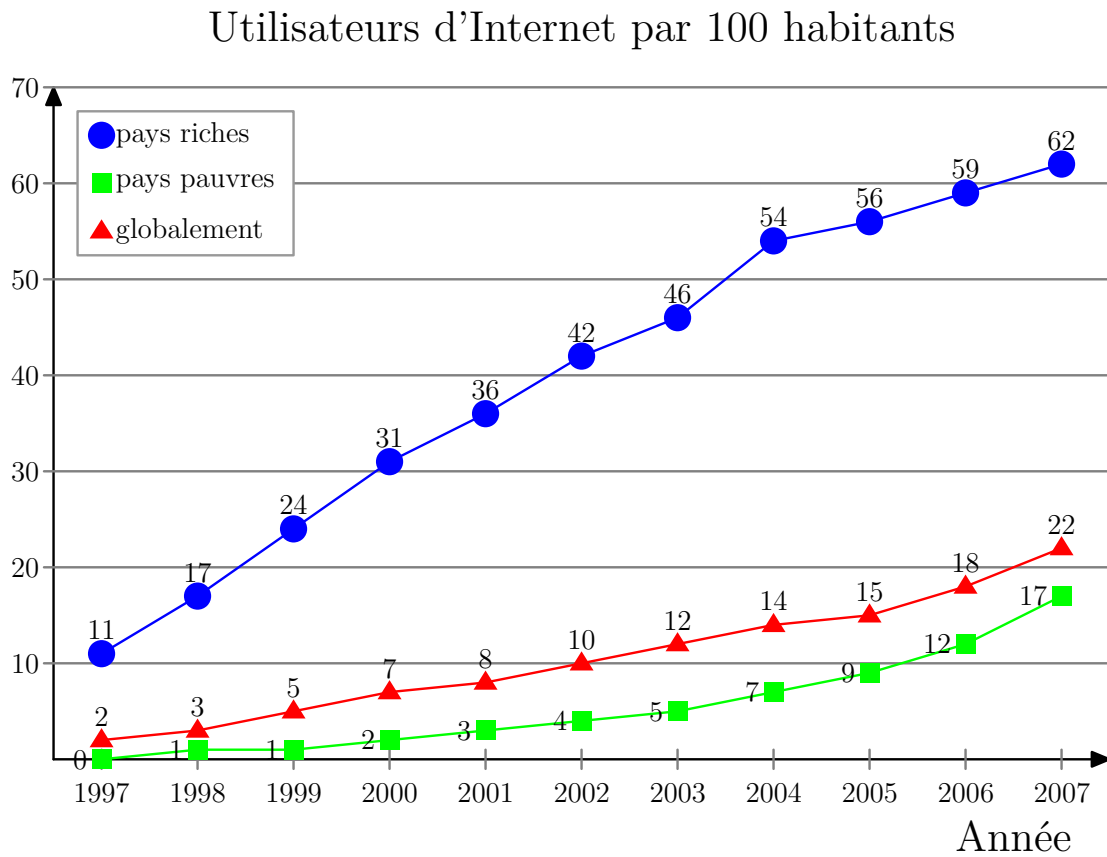


FIG. 2.1 – Evolution de la population ayant accès à Internet sur dix ans (source *International Telecommunication Union*).

mélanges qui modifient grandement notre perception de la communication en général (de l'information ou tout simplement : entre les gens) ont lieu à grande échelle, c'est-à-dire sur toute la planète. Il y a encore peu de standards mais au cœur de ce "réseau de réseaux", il y a les réseaux IP⁵.

2.1.1 Les réseaux IP

Internet est ce qui témoigne le plus clairement de cette *convergence*, c'est en partie dû au fait que le protocole internet TCP/IP est devenu un standard, il est implémenté pour

⁵ou *IP-based network*

presque tous les services existants⁶.

Tout réseau est composé de deux éléments fondamentaux, les nœuds et les liens. Dans un réseau IP, un nœud correspond à un appareil, comme un ordinateur ou un téléphone, qui peut communiquer avec d'autres nœuds par l'intermédiaire d'un lien (un câble, un fil électrique, etc.).

On différencie trois types de techniques de communication dans un réseau IP qui sont, par ordre chronologique d'apparition, la commutation de circuits (comme les réseaux téléphoniques d'antan), la commutation de messages et la commutation de paquets.

Un réseau qui fonctionne en commutation de circuits implique la création d'un circuit fermé et dédié entre deux nœuds lors d'une communication. Les limites évidentes de cette technique sont la congestion et la capacité perdue, de plus, si une panne survient, la communication est rompue et doit être rétablie d'une autre manière.

Les réseaux IP sont à commutation de paquets, ce qui est censée faire meilleur usage de la capacité totale du réseau et minimiser les risques de problèmes comme les déconnexions. Les messages transmis au sein d'un tel réseau sont divisés en plusieurs morceaux ou paquets qui sont tous envoyés à la même adresse de destination mais qui ne suivent pas nécessairement le même chemin pour y parvenir.

La commutation de messages est proche de la commutation de paquets, chaque message est transmis sans être préalablement scindé en plusieurs morceaux.

2.1.2 Le réseau local

La communication digitale dans un réseau se heurte à divers problèmes qui concernent par exemple les formats de paquets transmis, les vitesses de transmissions, des pertes de puissance des signaux, la congestion dans le temps ou dans l'espace, etc. L'analogie avec le langage oral humain est assez directe, en effet il est difficile, voire impossible, de comprendre quelqu'un qui parle dans une langue inconnue ni quelqu'un qui parle trop lentement ou pas assez fort, etc.

Un réseau local ou LAN⁷ sert à connecter entre eux plusieurs appareils sur une petite distance. Un réseau local convient à des espaces restreints comme par exemple un bureau, une "salle informatique", une (petite) entreprise, etc. Les appareils sont connectés entre

⁶IP pour Internet Protocol et TCP pour Transfert Control Protocol. TCP remonte au début des années 80 (voir RFC 761 et RFC 793), TCP/IP de la fin des années 80 (voir RFC 1122)

⁷*Local Area Network.*

eux soit directement, soit par l'intermédiaire d'un switch ou d'un routeur qui assure le bon déroulement des communications entre les diverses "stations". A cette fin, plusieurs protocoles sont utilisés qui dépendent entre autres de la topologie du réseau⁸.

Les différents réseaux locaux (ou LAN) existants n'ont ni les mêmes besoins ni les mêmes raisons d'être mais ils ont besoin de communiquer entre eux, ainsi il faut pouvoir interconnecter les réseaux locaux. Une interconnexion de LANs est appelée WAN pour *Wide Area Network*, c'est ce qu'est Internet, un immense agrégat de LANs et d'ensembles de LANs.

Les comportements et les solutions des différents fournisseurs d'accès ne font pas toujours bon ménage, ceci pour au moins deux raisons : la nature du réseau Internet peut changer d'un pays à l'autre et il n'existe pas de modèle économique bien défini quant au fonctionnement de ce que l'on appelle l'interdomaine. Une certaine continuité technique dans la gestion des communications et des ressources serait appréciable (d'un point de vue maintenance tout du moins) et il en va de même pour ce qui est des échanges commerciaux entre opérateurs.

2.2 Internet et le routage interdomaine

Nous allons décrire les principes de base du fonctionnement du routage interdomaine et les deux types d'interconnexion couramment pratiquées que sont les accords de transit, qui sont tarifés, et les accords de peering.

2.2.1 Une vue globale d' Internet

On pourrait croire qu'Internet fonctionne aussi simplement qu'il est représenté en figure 2.2 qui en est une vision abstraite très simplifiée. Un utilisateur se connecterait au réseau via le routeur de son fournisseur d'accès ou ISP (*Internet Service Provider* en Anglais) qui se connecterait lui même à un autre routeur dans ce qui est un graphe connecté de routeurs, et tous ces routeurs s'échangeraient joyeusement des informations quant aux meilleurs chemins, la congestion du réseau, etc. Ce n'est malheureusement pas le cas. En réalité, une grande partie de ce que recouvre l'appellation "services internet", y compris l'infrastructure, est fournie par des entreprises commerciales en compétition les unes avec les autres.

La coopération requise pour la bonne connectivité globale ne va généralement pas de pair avec l'objectif de faire le maximum de profits puisque c'est au détriment d'un ou

⁸On peut mentionner les réseaux en étoile ou en anneau (voir *token ring*).

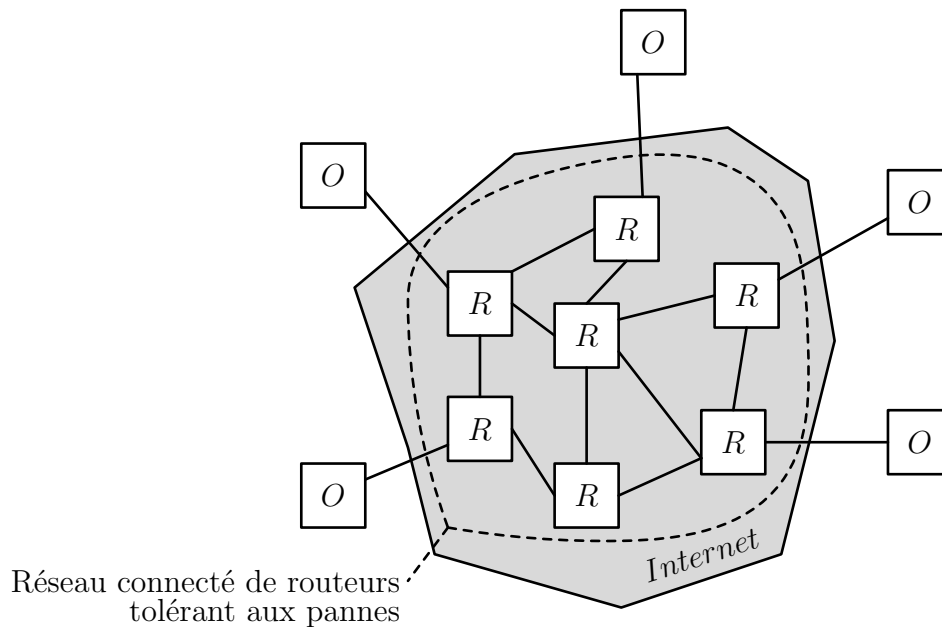


FIG. 2.2 – Vision simplifiée d’Internet. Les “O” indiquent des ordinateurs personnels et les “R” des routeurs.

plusieurs concurrents, les mêmes avec lesquels il faut aussi coopérer pour maintenir une bonne connectivité.

La figure 2.2 représente une vision un peu plus proche de la réalité où les différents ISP coopèreraient pour assurer la connectivité globale du réseau. Néanmoins, un élément important n’apparaît pas, ce sont les différences de tailles entre les ISP, certains sont plus importants (plus gros) et plus connectés que d’autres. Les ISP dits de niveau 3 sont très localisés géographiquement et ont un petit nombre d’utilisateurs (abonnés). Les ISPs de niveau 2 opèrent au niveau d’une région, d’un état ou d’un pays. Ceux de niveau 1 ont une fenêtre d’action globale, c’est-à-dire que leurs tables de routage contiennent des chemins vers tous les préfixes internet existants. Ils ont accès à l’intégralité du réseau sans devoir recourir à d’autres ISP⁹.

Le protocole historique de routage Internet est BGP¹⁰. Il a progressivement permis à Internet de devenir complètement décentralisé en supprimant le *backbone*¹¹ NSFnet entre

⁹Le nombre d’ISP de niveau 1 fluctue, il y a cinq ans ils étaient quatre, aujourd’hui il y en a dix en tout, dont huit basés aux Etats-unis, un au Japon, et un en Suède.

¹⁰voir RFC 1771.

¹¹A l’origine, le backbone est le réseau constitué des ISP de niveau 1. La signification de ce terme dévie

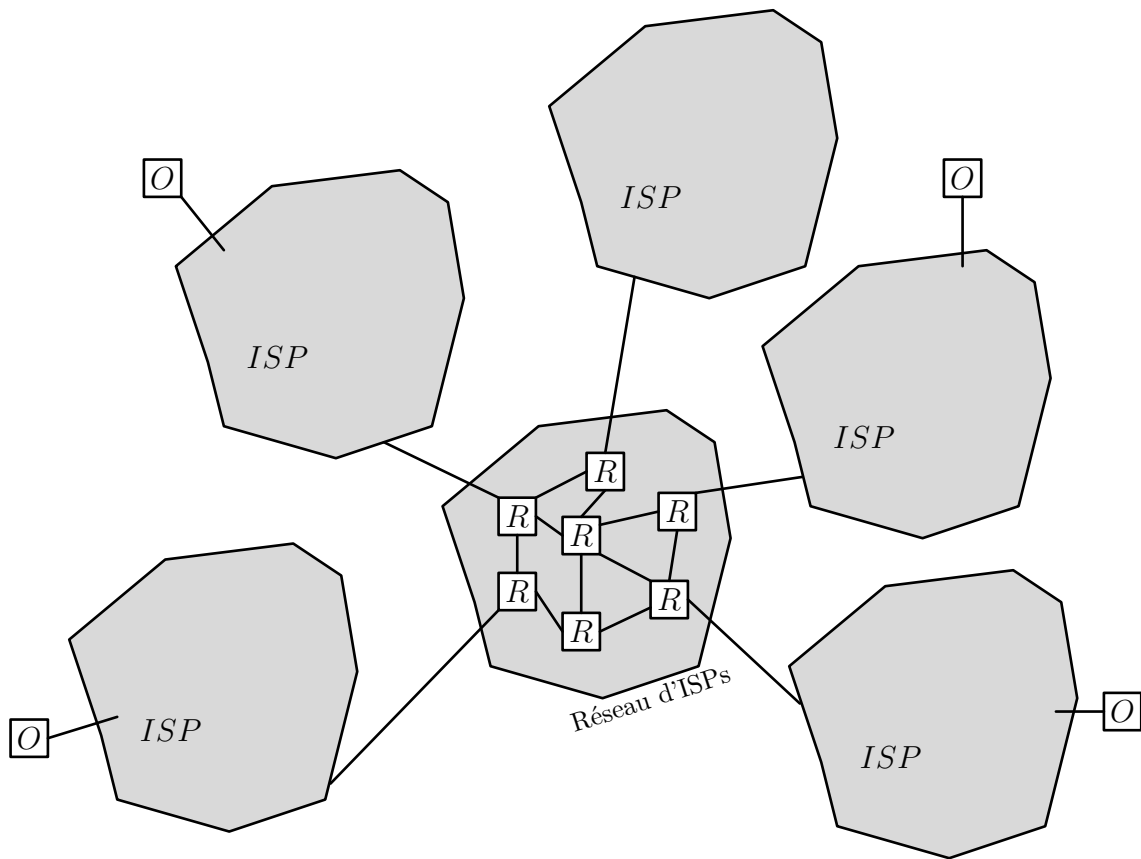


FIG. 2.3 – Vision plus réaliste d’Internet

1991 et 1996 où l’on commence à parler de “points d’accès” au réseau. Depuis 1996, BGP4 permet des échanges d’informations entre les routeurs des différents AS. Il sert aux communications interdomaine. Chaque opérateur est libre en interne d’appliquer ou non les recommandations données par BGP, basé essentiellement sur l’utilisation de vecteurs de chemins.

Au cours des années, de nombreuses modifications furent apportées au routage interdomaine et à la flexibilité de BGP dans ce routage. Pour permettre aux différents ISP de contrôler leur routage interne, le protocole est devenu très complexe. Il dépend de nombreux mécanismes qui peuvent interférer l’un l’autre. De plus, cette complexité a fait surgir des problèmes de sécurité, de risques accrus qu’une mauvaise configuration soit massivement

avec le temps et pour certains, le backbone regroupe de plus en plus de machines. Voir par exemple le *Opte project* (<http://www.opte.org/maps>) qui tente de cartographier Internet.

dommageable et des conflits entre les ISP.

2.3 Le protocole BGP (Border Gateway Protocol)

Aujourd'hui, Internet est composé de milliers d'entités privées appelées *Autonomous Systems*, chaque AS administrant une plus ou moins petite partie du vaste système. Un AS est une université, une entreprise, un groupe industriel, etc. Les plus petits AS comme les universités achètent en général des prestations à des ISPs. Les ISPs régionaux font de mêmes avec les ISP nationaux etc.¹².

Il est apparu qu'un routage des informations/ communications selon une politique du plus court chemin n'est pas toujours suffisante pour satisfaire aux exigences (économiques, techniques ou politiques) des différents opérateurs. Aujourd'hui, les ISP laissent de plus en plus de champ libre aux AS quant à l'organisation de leur routage interne, ceux-ci peuvent ainsi modifier directement les réglages des routeurs qu'ils utilisent. On parle de *politique de routage* pour désigner les différents intérêts qu'a le propriétaire d'un ou plusieurs routeurs dans ses choix de routes, de propagation et d'échange d'information.

Sur la figure 2.4, nous pouvons voir quelques interactions encore plus réalistes par rapport aux figures précédentes. Un ISP *X* est connecté à un autre ISP auquel il achète un service (l'accès au réseau) et également à des clients auxquels il vend à son tour des services. En plus, *X* est aussi connecté à deux ISPs (*Z* et *Y*) avec lesquels il échange des informations de routage via BGP.

2.3.1 Nature des accords entre opérateurs

Qu'il y ait des ASs aux motivations différentes implique des relations commerciales différentes entre chacun, ceci se traduit au final par l'existence de politiques de routage différentes. Il y a deux formes prévalentes d'interconnexion AS-AS. D'abord le *transit fournisseur-client* où un ISP fournit un accès à toutes les destination de sa table de routage. Le trafic est presque toujours significatif dans une relation commerciale entre deux AS. Le fournisseur demande une rémunération en échange de l'acheminement de paquets à travers son réseau. Ensuite il y a les relations de *peering* où deux AS, par exemple deux ISP coopèrent en s'autorisant un accès mutuel à leurs tables de routage. L'ensemble d'intérêt

¹²cf. RFC 1930. L'organisation qui maintient tout ceci à jour est une entreprise à but non lucratif, la *Internet Corporation for Assigned Names and Numbers* (ICANN) basée en Californie.

ici est la base de clients de chacun. Comme le *transit*, le *peering* est un arrangement commercial, mais il n'implique pas forcément de grand arrangements financiers. Si le *peering* payant est de mise dans certaines régions du monde, il est bien souvent un simple échange de bons procédés, tant que la différence de trafic entre les deux partis n'est pas démesurée. Les accords de *peering* sont le plus souvent confidentiels : la loi n'oblige pas à les rendre publics.

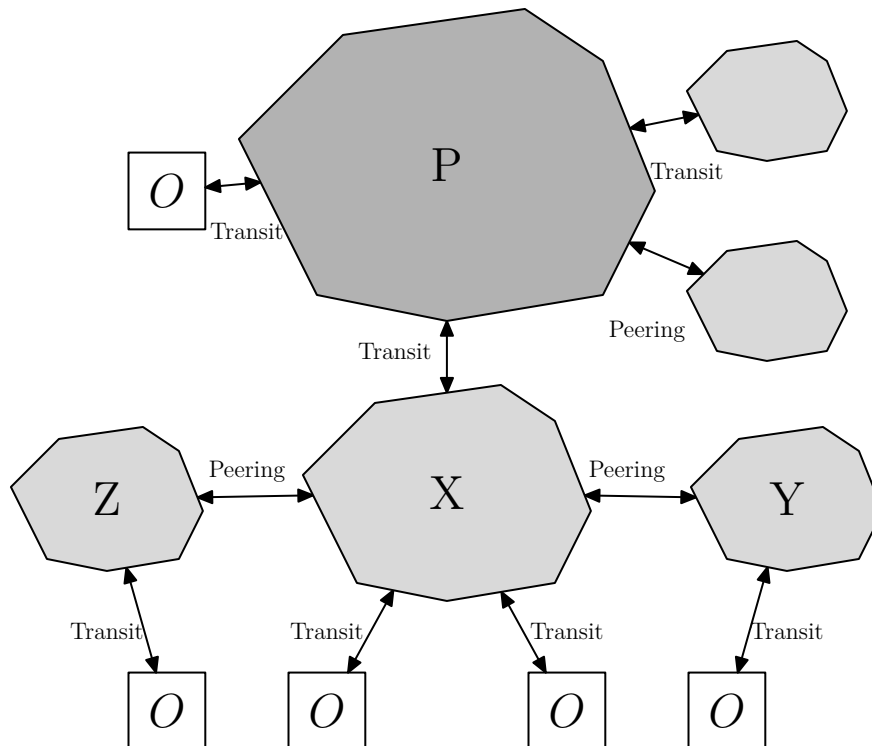


FIG. 2.4 – Vision encore plus réaliste

Un élément important à noter sur les accords de *peering* est qu'ils sont bien souvent établis entre deux concurrents commerciaux. La raison principale du recours au *peering* est que les deux partis observent que beaucoup de leurs paquets sont directement destinés à un utilisateur de l'autre AS. Dans ces conditions, la meilleure option pour un AS serait de rapatrier les clients du concurrent chez lui mais ce n'est évidemment pas toujours faisable. La seconde meilleure option serait d'éviter les coûts de transit envers leur propre ISP, en mettant en place une liaison gratuite pour les échanges de trafic entre eux. Les accords de *transit* génèrent des revenus, ceux de *peering*, non et ils sont renégociés fréquemment. Des

trafics asymétriques sont forcément problématiques et qui plus est, les accords de *peering* sont bien souvent convenus entre deux ISP se battant pour la même clientèle.

Un accord de routage sur des préfixes IP que donne un AS *A* à un AS *B* est une promesse (de la part de *B*) qu'il fera suivre tous les paquets envoyés par *A* dont la destination contient le préfixe concerné par l'accord. Une bonne manière de penser l'économie liée à internet est de voir les ISPs comme des péages qui vendent à des utilisateurs l'accès à leur table de routage. La vitesse de transmission est un paramètre déterminant pour fixer les prix des transactions.

Vers des politiques de routage

Il ne faut pas oublier que la raison d'exister de la plupart des AS est économique. Pour cette raison, ils sélectionnent avec précautions quelles routes exporter aux AS voisins¹³. Pour un ISP, les routes de ses utilisateurs sont les plus importantes car ceux-ci doivent avoir l'impression que toute personne connectée à internet peut les joindre et vice-versa : qu'il a accès à l'intégralité du réseau. Il est donc dans l'intérêt d'un ISP de faire connaître ses propres utilisateurs, c'est-à-dire d'exporter des routes pour les atteindre à ses voisins. Plus le trafic engendré par un utilisateur est important, plus l'ISP lui demande un prix élevé, que ce soit sous forme d'abonnement ou de coût de transit ponctuel.

Les AS veillent donc au trafic qu'ils hébergent et ils sont très sélectifs. En général, il n'est même pas dans leur intérêt de fournir (permettre) du transit pour le compte de leur propre fournisseur d'accès. Par contre, il est dans leur intérêt d'exporter des entrées sélectionnées de leur table de routage aux ISP voisins avec lesquels ils ont des accord de *peering*. Ils sont en général peu enclins à étendre leurs ressources si cela ne leur procure pas un profit immédiat.

Tout comme les AS décident quelles routes ils exportent, ils décident celles qu'ils vont inscrire dans leurs tables de routage. C'est là qu'ils interviennent dans le routage BGP. Ils manipulent certains paramètres des chemins dont ils ont connaissance et les interprètent à leur façon.

Par exemple, quand un routeur prend connaissance d'une route vers un utilisateur par l'intermédiaire d'un autre AS, il doit s'assurer que cette route ne traverse pas d'autres AS inutilement. Un AS importe des nouvelles routes selon l'ordre préférentiel de provenance

¹³C'est-à-dire qu'il prend garde à ce que le trafic qui vient de l'extérieur et/ou qui y va, lui apporte un certain profit.

suivant :

particulier (client) > AS *peer* > ISP

Cette règle est implémentée dans BGP4 et elle prévaut sur toutes les autres règles si elle est activée. Dans le cas contraire, le routeur prendra en compte, par exemple, la longueur de telle portion du chemin dans tel AS, etc.

Les principaux objectifs de BGP sont donc d'être évolutif, de laisser un certain degré de liberté aux AS et de permettre une certaine "coopération compétitive" nécessaire au bon fonctionnement du réseau.

Bien que BGP n'ait pas été conçu pour détecter rapidement les pannes ni pour y remédier, il autorise l'existence de plusieurs liens entre deux ASs pour augmenter le degré général de tolérance aux pannes et diminuer les risques de congestion. En fait, si une panne est détectée, un routeur envoie un message *withdrawal* à ses voisins (suppression de route). Pour éviter des oscillations massives dans la répartition du trafic, un phénomène d'atténuation (*damping*) est mis en place grâce à un timer par les routeurs détectant des fautes, ainsi tous les routeurs de l'AS ne sont pas prévenus en même temps, qu'il s'agisse de la détection d'une nouvelle faute ou de la résolution d'un problème (voir [5, 71]). Nous n'en dirons pas plus sur les pannes et leurs résolutions dans cette présentation de BGP, le lecteur peut se reporter aux références en fin de chapitre pour plus de détails.

La propagation des routes dans un AS

Il y a deux types de sessions BGP, les eBGP : entre deux routeurs de différents AS, et les iBGP : entre deux routeurs d'un même AS¹⁴. En général, un AS dispose de plusieurs routeurs impliqués dans des sessions eBGP, chacun de ces routeurs obtient des informations sur une sous-partie des préfixes connus. Les routeurs eBGP doivent faire connaître les routes vers l'extérieur à tous les autres routeurs de l'AS en respectant deux critères :

- Pas de boucle : après la prise en compte des informations obtenue par eBGP, toutes les routes figurant dans la table de routage doivent être exemptes de boucle.
- Visibilité complète : un des buts initiaux de BGP est de traiter chaque AS comme un bloc monolithique. Ceci signifie que tous les routeurs eBGP d'un AS doivent communiquer entre eux afin d'avoir une vue complète de l'extérieur et des meilleures routes.

¹⁴Deux types de sessions sont différenciées car elles n'ont pas la même finalité mais il s'agit exactement du même protocole.

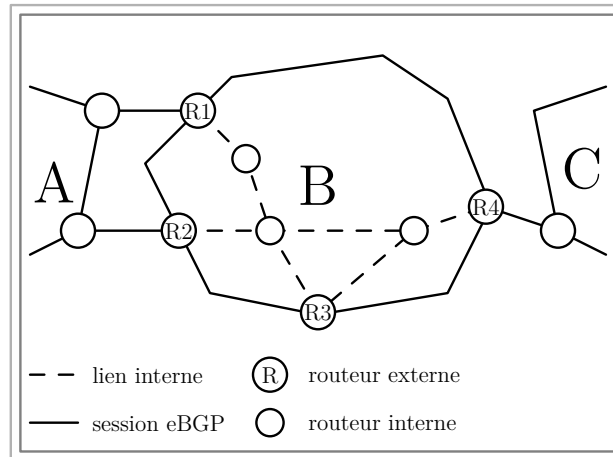


FIG. 2.5 – Exemple de topologie avec un ISP connecté à deux autres

En figure 2.5 est représenté un sous réseau BGP. Les sessions BGP sont établies entre deux routeurs aux frontières de deux AS voisins. Ces sessions servent à échanger des routes entre AS. Ces *border routers* propagent ensuite les routes apprises aux routeurs internes (non connectés directement à un routeur d'un AS voisin) ainsi qu'aux autres *border routers* à l'aide d'une session iBGP.

Les routeurs d'un AS communiquent entre eux à l'aide d'un IGP¹⁵ pour apprendre la topologie interne de l'AS qu'ils constituent et optimiser les chemins entre eux. Chaque routeur doit donc combiner des informations BGP et IGP pour construire sa propre table de routage servant à cartographier leurs liens de sortie sur des plus court chemins jusqu'aux *border routers*.

BGP est un protocole incrémental. Une fois qu'une table de routage complète est échangée entre deux AS, seulement des notifications de mise à jour de ces informations sont échangés. Ces changements peuvent consister en l'ajout d'une nouvelle route, l'élimination ou la modification d'une route existante.

Dans le format de BGP, un message d'update contient plusieurs champs parmi lesquels : une liste de préfixes annoncés, une liste de préfixes supprimés et un ensemble d'attributs de routes caractérisant les routes annoncées. Le tableau en figure 2.6 donne les principaux de ces attributs.

¹⁵Internal Gateway Protocol

| Attribut | Description |
|--|---|
| Préférence locale | Première chose considérée lors de la sélection d'une route, ce n'est pas lié aux routes apprises par eBGP mais pris en compte pour les routes importées et préservées en iBGP. |
| Prochain saut | Adresse IP du prochain routeur sur le chemin. |
| Chemin (AS) | Séquence de tous les AS traversés par la route. |
| <i>MED</i> (Multiple Exit Discriminator) | Utilisé pour comparer plusieurs routes d'un AS voisin. L'AS voisin peut utiliser cet attribut pour indiquer sur quel routeur il préfère recevoir du trafic pour telle ou telle destination. |

FIG. 2.6 – Principales étapes du processus de décision de BGP

Nous avons dit que BGP permettait aux AS d'exprimer leur politique de routage en configurant les routeurs et en manipulant les attributs des routes, nous allons brièvement examiner les degrés de liberté laissés aux AS pour déterminer leur politique de routage.

Les paramètres du processus de décision

Lorsqu'un routeur BGP dans un AS dispose de plusieurs routes pour atteindre une destination donnée, en absence de politique de routage, il choisit automatiquement celle de plus court chemin vis à vis du nombre d'AS traversés. Dans l'optique de laisser du champ libre aux opérateurs, les messages d'annonce de nouvelle route contiennent plusieurs informations en fonction desquelles les AS altèrent le routage préconisé par BGP en prenant leurs propres décisions. Le résultat de ceci est ce qui est appelé le *processus de décision* interne, il consiste en une série de règles ordonnées. Le tableau en figure 2.7 présente ces règles dans leur ordre de préférence réel.¹⁶

Dans ce tableau, "aucun" signifie que la valeur de l'attribut est fixée par le protocole. Un attribut de route peut donc être modifié de deux façons :

- Localement : par exemple LOCAL_PREF est réglée localement et propagé dans toute l'AS et filtré avant d'être éventuellement annoncé à un ou plusieurs voisins.
- Voisin : par exemple, l'attribut MED : voir la description dans le tableau 2.6 ou [5] pour plus d'informations sur ce paramètre.

¹⁶Certains ISP permettent la désactivation de telle ou telle règle par leur AS client mais l'ordre reste en général toujours le même.

| Priorité | Règle | Local/ voisin |
|----------|-------------|-------------------|
| 1 | LOCAL_PREF | local |
| 2 | ASPATH | voisin |
| 3 | MED | voisin |
| 4 | eBGP > iBGP | aucun (protocole) |
| 5 | IGP_PATH | local |
| 6 | ROUTER_ID | aucun |

FIG. 2.7 – Différentes règles permettant à un routeur BGP de choisir une route

Dans le tableau 2.7 LOCAL_PREF correspond à “Préférence locale” du tableau 2.6, AS_PATH à “Chemin (AS)” et ROUTER_ID à “Prochain saut”. eBGP > iBGP signifie que les informations des routeurs externes sont considérées plus fiables que celles des routeurs interne, enfin IGP_PATH permet à un routeur interne de déterminer le plus court chemin pour atteindre le meilleur routeur externe.

Le but des AS est d’obtenir un ensemble de *border routers* aussi bons les uns que les autres pour tous les préfixes. “Aussi bons” ici signifie équivalents du point de vue des quatre premières étapes du processus de décision.

2.4 Conclusion

Comme nous l’avons vu, la principale fonction de BGP est de fournir des informations de routage réseau spécifiquement restreintes aux longueurs physiques des chemins que prennent les communications aux différents AS. Les informations que ceux-ci s’échangent ensuite sont manipulées puis utilisées pour construire un graphe de connectivité inter-AS dépourvu de boucle et qui respecte les politiques de routage de chacun.

Pour plus d’informations sur l’organisation d’Internet et du routage interdomaine, on peut se reporter à [5, 71, 59] ou aux documents libres d’accès de l’IETF¹⁷ par exemple. Le lecteur peut également consulter un ouvrage récent : *The future of the Internet - and how to stop it* [78], qui, sans être trop technique, présente les différents conflits d’intérêt au niveau

¹⁷*Internet Engineering Task Force*, c’est une organisation à but non lucratif qui développe et vante divers standards Internet. Les différents groupes qui la constituent travaillent en étroite coopération avec le W3C et les normes ISO/IEC et traite en particulier de l’évolution du standard TCP/ IP et d’autres protocoles Internet généraux. C’est une organisation ouverte à tous sans adhésion. Les participants sont volontaires même si leurs travaux sont financés par leurs employeurs. L’actuel *chairman* est financé par la société de sécurité VeriSign et la NSA.

mondial et aborde la question du futur d'Internet pour ce qui est de la sécurité en général, des *copyrights*, des droits d'accès etc.

Dans les chapitres 6 et 7, nous verrons une méthode d'apprentissage des meilleurs chemins parmi plusieurs disponibles. Le réseau dans ces jeux peut être vu (*i*) soit comme Internet dans son entier et un joueur serait alors un routeur externe qui apprendrait une route inconnue via des sessions iBGP imbriquées; (*ii*) soit comme un AS très étendu et complexe, par exemple un ISP de niveau 1, un joueur serait un routeur de cet AS qui apprendrait les meilleurs chemins jusqu'à un routeur externe donné via des sessions IGP.

Chapitre 3

Notions de théorie des jeux

The universe may have a purpose, but nothing we know suggests that, if so, this purpose has any similarity to ours.

(Bertrand Russell)

Les problèmes étudiés dans le cadre de la théorie des jeux sont des objets mathématiques bien définis. Un jeu comprend un ensemble de joueurs ayant chacun un ensemble d'actions possibles et une fonction de gain à valeur pour chaque combinaison possible d'actions. Il y a de nombreuses catégories de jeux (voir l'annexe 1 qui en liste quelques unes).

Dans la première partie de ce chapitre nous allons présenter quelques champs d'applications importants de la théorie des jeux qui l'ont influencée. De toutes les disciplines qui y font appel, la biologie est sans doute celle qui a apporté le plus de modifications conceptuelles à la théorie des jeux (nombreuses discussions sur le *bien-être* ou l'*utilité*, théorie des jeux évolutionnaires, notion de *fitness* (adaptation à l'environnement) et de stratégie évolutionnairement stable). Dans la seconde partie nous allons mentionner plusieurs notions de base comme les *jeux coopératifs*, qui sont en général représentés à l'aide d'une *fonction caractéristique* et les *jeux non-coopératifs* en *forme normale*. Enfin nous allons introduire ce qu'est un équilibre au sens de Nash.

3.1 Quelques champs d'application

L'application de la théorie des jeux aux *sciences* politiques porte sur des questions de partage équitable, d'économie publique, de bien-être social moyen, etc. Des modèles théoriques ont été développés dans lesquels les joueurs sont des électeurs des pays, des politiciens ou des lobbies. Voir [21] par exemple.

En économie, elle sert à anticiper des stratégies financières d'entreprises qui veulent maximiser leurs profits en minimisant les risques à travers l'étude des comportements des firmes concurrentes, du marché, des consommateurs, etc.

En biologie, l'intérêt est porté sur la notion de *fitness* (bien-être) et d'équilibres pouvant se maintenir dans le temps. Maynard-Smith et Price développent le concept de Evolutionarily Stable Strategy (ESS) [70]. Ainsi sous l'influence de la sélection naturelle, il existerait un certain phénotype comportemental (stratégie) qui, s'il est adopté par la majorité de la population, peut protéger celle-ci de l'invasion d'une population de mutants (individus de phénotypes différents). Des biologistes ont étudié des phénomènes d'organisations spontanées et l'émergence de la communication animale au moyen de jeux de signaux [69].

La théorie des jeux joue un rôle de plus en plus important en informatique théorique et logique pour formaliser des sémantiques de jeux ou des systèmes multi-agents. La théorie des jeux algorithmiques implique la construction d'algorithmes, une vision informatique de la complexité et l'emploi de la théorie des jeux classique. Pour une application originale à la frontière entre la biologie et la théorie des jeux évolutionnaires, le lecteur peut se reporter aux travaux de Karl Sims sur les *Evolved Virtual Creatures* par exemple [68, 67].

En sciences sociales, la théorie des jeux sert à analyser le comportement des populations humaines. L'idée qu'il est possible de prédire le comportement humain à grande échelle a été critiquée [70, 72] car les humains dans les "jeux" se comportent de façon à maximiser leur "bien-être", c'est le modèle de l'*homo-économicus* [54, 53]. Dans la réalité, trop de facteurs individuels font dévier le modèle théorique comme l'irrationalité, le remord, l'altruisme, etc. Si certaines notions d'équilibre justifient le comportement d'une population équilibrée, la question de savoir comment elle peut y parvenir reste ouverte.

3.2 Représentation des jeux

Un jeu peut être décrit comme une situation dans laquelle au moins un agent peut agir pour maximiser son gain en anticipant les réponses d'un ou plusieurs autres agents, les

agents sont appelés des *joueurs*. Les joueurs sont généralement supposés rationnels, c'est-à-dire qu'ils agissent pour leur propre bien et dans le respect de la nature, des *règles* de sociétés, etc.

Pour spécifier un jeu, il est important de savoir de quelles informations disposent les joueurs pour faire leurs choix. Dans le cas le plus simple, les joueurs ont une information complète sur le jeu (les Echecs ou le jeu de Go par exemple), ce qui signifie qu'ils connaissent tous les règles du jeu et que lorsqu'ils doivent faire un choix, ils connaissent le déroulement complet du jeu jusqu'à ce stade. Dans tous les autres cas, nous parlons de jeux à information incomplète, les connaissances des joueurs sont bien définies et limitées.

Le niveau d'information des joueurs sur le jeu est lié à la façon de le représenter. Un jeu peut être séquentiel ou simultané. Si un jeu implique des choix successifs de la part des participants, il est crucial de savoir à quel moment tel joueur dispose de telle information. Si les jeux à information complète sont les plus simples (logiquement parlant), c'est que tant qu'ils sont finis, il est possible d'énumérer tous les cas de figures. Les deux façons les plus courantes pour représenter un jeu sont les suivantes :

Forme extensive ou arbre de jeu

Il s'agit d'un graphe dirigé particulier, un arbre. C'est un ensemble de *nœuds* connectés à d'autres nœuds par des arêtes correspondant à des événements ou décisions ou actions.

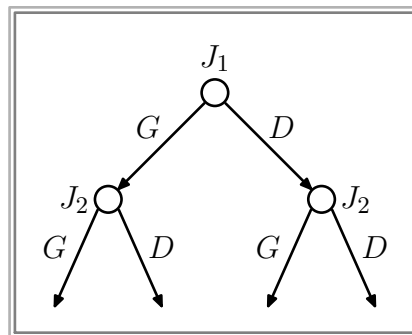


FIG. 3.1 – Représentation d'un jeu sous forme d'arbre

La figure 3.1 représente un jeu à deux joueurs (J_1 et J_2) dans lequel ceux-ci devraient choisir G (gauche) ou D (droite) l'un après l'autre. Les quatre flèches indiquent quatre issues possibles pour le jeu. Cette représentation est commode pour étudier un jeu séquentiel par

“induction à rebours” (*backward induction* en Anglais), c’est-à-dire en partant de la fin - d’une issue particulière - et en *remontant* l’arbre afin d’identifier différentes situations plus ou moins favorables.

Forme normale ou stratégique

Dans un tableau sont donnés les gains des joueurs en fonction de leurs stratégies. C’est particulièrement adapté à un jeu comme “Pierre-Feuille-Ciseau” comme dans la figure 3.2. Les gains du joueur 1 sont en haut à droite dans les cases, ceux du joueur 2 sont en bas à gauche. Par exemple, lorsque le joueur 1 joue Feuille et que le joueur 2 joue Pierre, le joueur 1 gagne et la valeur de 1 symbolise sa victoire, la valeur de gain de -1 du joueur 2 symbolise sa défaite.

| | | Joueur 1 | | |
|----------|---------|----------|---------|---------|
| | | Pierre | Feuille | Ciseau |
| Joueur 2 | Pierre | 0 0 | 1 -1 | -1 1 |
| | Feuille | -1 1 | 0 0 | 1 -1 |
| | Ciseau | 1 -1 | -1 1 | 0 0 |

FIG. 3.2 – Jeu du Pierre-Feuille-Ciseau

Cette représentation est également appelée forme matricielle ou en tableau, elle est généralement utilisée pour les jeux dans lesquels l’ordre de jeu n’a aucune importance.

Le jeu du Pierre-Feuille-Ciseau représenté en figure 3.2 est un jeu particulier car ce que remporte l’un des joueurs est perdu par l’autre. Il s’agit d’un jeu à somme nulle. Dans ce jeu, aucun des joueurs n’a de stratégie dominante (voir section 2.2.2). C’est un jeu très particulier et qui a été très étudié, voir par exemple [10]. Au fil des années et des recherches en économie, en biologie, etc. différentes classifications sont apparues, quelques classes de jeu couramment rencontrées sont répertoriées en annexe.

3.2.1 Stratégie dominante, théorème du minimax

Les notions de stratégies dominante et de stratégies dominées sont des concepts importants en théorie des jeux.

Définition 3.2.1 (Stratégie dominante) *Supposons qu'un joueur dispose de plusieurs stratégies dont s_1 et s_2 , nous disons que la stratégie s_1 domine la stratégie s_2 si le fait jouer s_1 donne toujours des résultats équivalents ou meilleurs à ceux obtenus en jouant s_2 . Nous pouvons caractériser de façon symétrique une stratégie dominée.*

La figure 3.3 représente un jeu d'élection en forme normale où le résultat d'un vote dépend de l'attitude que deux partis politiques choisissent d'adopter. Nous supposons qu'ils ont tous deux le choix entre "apporter son soutien", "s'opposer fermement" et "se faire oublier". La combinaison de leurs attitudes détermine l'issue du scrutin. Dans la matrice de gain en figure 3.3, les chiffres indiqués dans les cases du tableau indiquent les pourcentages de voix allant à A (score en haut à droite) et à B (score en bas à gauche) en fonction des choix des deux partis. L'un recevant le complément de l'autre. Par exemple, lorsque le parti A soutient la motion et que le parti B décide de se faire oublier, le parti A récolte 80% des voix et le parti B le complémentaire : 20%. Nous supposons que l'objectif des deux partis est de maximiser leur pourcentage de votes obtenus lors du résultat final.

| | | Parti A | | |
|---------|---------|----------|----------|----------|
| | | Soutien | Oppose | Oubli |
| Parti B | Soutien | 60 40 | 80 20 | 35 65 |
| | Oppose | 20 80 | 25 75 | 30 70 |
| | Oubli | 80 20 | 75 25 | 40 60 |

FIG. 3.3 – Un jeu d'élection

A priori, il n'y a pas de décision qui s'impose pour le parti A . Le parti B , lui, peut observer d'entrée que s'opposer lui apportera toujours un plus grand pourcentage de voix, peu importe ce que fait le parti A . Une fois que le parti A se rend compte de ceci, il va choisir de se faire oublier et ainsi obtenir 30% des suffrages, 70% allant au parti B . Cet élément du tableau correspond à ce que l'on appelle parfois un *point de selle* ou (*saddlepoint* en Anglais).

Une méthode commune pour identifier ces situations facilement est de trouver ce que l'on appelle les valeurs *minimax* et *maximin*. Ici, le parti A commence par déterminer les pourcentages minimaux qu'il peut obtenir avec chacune de ses stratégies. Dans ce jeu, c'est 20, 25 et 30. La plus grande de ses valeurs est appelée le maximin.

Pour le parti B , la réflexion est similaire, ses trois gains les plus faibles sont 20, 70 et 20. B a tout intérêt, afin de maximiser son pourcentage, à minimiser celui du parti A , c'est-à-dire : chercher le minimax de celui-ci¹.

Le théorème du minimax prouvé par Von Neumann en 1928 dit que tout jeu fini à deux joueurs et à somme constante a une solution en stratégies pures ou mixtes. En d'autres termes, dans un tel jeu où A et B sont les deux joueurs, il y a une valeur v et une stratégie pour chacun des deux joueurs telles que, si A joue sa stratégie *maximin*, son gain sera au moins égal à v et que si B adopte sa stratégie *minimax*, le gain de A sera au plus de v . Ainsi, A et B ont tous deux intérêt à orienter leur stratégie de façon à ce que leur gain soit de v .

Nous définissons une notion supplémentaire qui va nous servir par la suite que nous appelons la *non-dominance*.

Définition 3.2.2 (La non-dominance) *Supposons qu'un joueur dispose de plusieurs stratégies dont s_1 , si le fait de jouer la stratégie s_1 ne constituent **jamais** une meilleure réponse pour le joueur, alors nous disons que la stratégie s_1 est non dominante (ou jamais dominante).*

3.2.2 Le concept d'utilité

Par définition, un joueur, ou un agent, est une entité qui n'est pas indifférente à son *avenir*, elle a donc des préférences. Les théoriciens des jeux qui veulent étudier des processus

¹Nous pouvons remarquer que le jeu change un peu si les deux partis ne cherchent pas seulement à maximiser leur pourcentage de voix mais à "gagner" le vote, dans le sens dépasser 50% mais le parti B reste toujours vainqueur.

de décision rationnels ont besoin d'ordonner ces préférences, c'est de là que vient le concept de l'*utilité*.

L'utilité traduit le *bien-être* relatif - ou la satisfaction - d'un joueur dans une situation donnée. Comme il faut pouvoir discerner différents degrés d'utilité, nous nous référons souvent à une valeur chiffrée sur un intervalle². Par exemple, il est possible d'évaluer le bien-être relatif d'un ensemble de pays en comparant leurs P.I.B. ou le bien-être d'un animal par sa propension à répondre à certains stimuli (se nourrir, chasser, etc.). Dans le cas des individus, nous évaluons ce bien-être relatif par leur propre perception de la situation qui, sans introduire de psychologie comportementale, doit rester subjective. Un agent vise à maximiser son utilité d'un point de vue purement technique et clairement défini³.

La fonction d'utilité est l'outil mathématique servant à ordonner les préférences des joueurs, elle associe une série de choix préférentiels à des valeurs numériques. Par exemple si Tetsuo préfère les pommes aux poires et les poires aux bananes, nous pouvons associer respectivement les valeurs 3, 2, et 1 à ces trois fruits pour spécifier ses préférences. Certains auteurs s'intéressent strictement à l'ordre des préférences en négligeant la magnitude des valeurs (c'est-à-dire, sur cet exemple, qu'une seule pomme serait préférable à quatre bananes).

Cette notion d'utilité a été longuement débattue dans "l'histoire des jeux" mais pour ce qui nous intéresse ici, il suffit de comprendre que l'utilité est directement lié au "gain", c'est simplement une mise à l'échelle (du joueur) ou une normalisation de celui-ci sur un intervalle.

3.3 Jeu constituant et jeux répétés

La répétition d'un jeu, avec connaissance des résultats intermédiaires, change souvent fondamentalement son déroulement (les meilleurs coups et la conclusion). Par exemple, il peut être utile de prendre, ponctuellement, le risque de perdre *pour voir*, pour tester les réactions des autres joueurs. Il est aussi possible de mettre en place des stratégies de communication au moyen des coups joués afin de comprendre les réactions des adversaires, analyser leurs stratégies, jouer de façon plus ou moins agressive (pour impressionner) ou craintive (afin de mettre en confiance), etc.

²Souvent $[-1, 1]$. Sur $[0, 1]$ dans les jeux des chapitres 6 et 7 ici.

³La conception actuelle de l'utilité trouve son origine dans la "*Revealed Preference Theory*" développée par l'économiste Américain Paul Samuelson en 1938.

Il peut également se développer des phénomènes de réputation qui vont influencer les choix stratégiques des autres joueurs. Ainsi, dans le célèbre dilemme du prisonnier [58], le fait de savoir que l'on va se confronter plusieurs fois à une personne qui n'avoue jamais mais se venge cruellement, ou au contraire à une personne qui avoue toujours, change radicalement la stratégie optimale. Enfin, le fait que le nombre total de parties soit connu à l'avance ou non peut avoir des effets importants sur le résultat, l'ignorance du nombre de coups rapprochant du jeu avec un nombre infini de coup, alors que sa connaissance rapproche paradoxalement du jeu à un seul coup.

Dans un jeu répété, les stratégies des joueurs peuvent prendre des formes plus complexes que par exemple "jouer face" pour quelqu'un qui jouerait à un jeu *statique* ou *unique* "Pile ou Face" puisqu'elles sont supposées spécifier le comportement des joueurs dans n'importe quelle situation.

Un jeu répété est en fait tout simplement un jeu ordinaire joué plusieurs fois de suite. Un jeu ordinaire étant un jeu *unique* dans lequel les joueurs décident simultanément d'effectuer une certaine action⁴.

Un jeu répété au sens strict est un jeu *stationnaire*, ou constituant, répété plusieurs fois. Les conditions de jeu sont les mêmes pour toute répétition ou *instance* du jeu constituant : même nombre de joueurs, même ensemble de stratégies pour chacun, mêmes fonctions de gains et/ou d'utilités, même méthodes de mises à jour des stratégies. Les joueurs déterminent leur stratégie optimale en fonction de *l'histoire* du jeu. Nous allons d'abord décrire le jeu constituant qui permet de construire le jeu répété.

3.3.1 Le jeu constituant

Dans tous les travaux rapportés ici, nous considérons un jeu non-coopératif dans lequel les joueurs sélectionnent simultanément une action. Chaque joueur veut maximiser son utilité personnelle en prenant en compte les choix attendus des autres participants.

Supposons qu'il y a un nombre fini n de joueurs et que chacun dispose d'un ensemble d'actions possibles noté \mathcal{P}_i pour le joueur i (si $i \in \{1, \dots, n\}$). La stratégie du joueur i , notée q_i , est typiquement un vecteur de probabilités indexé sur les éléments de \mathcal{P}_i , chaque composante du vecteur donne la probabilité de jouer cette action. L'espace de stratégies du

⁴On peut également envisager un jeu ordinaire ou statique dans lequel les joueurs choisissent simultanément plusieurs actions. Si les joueurs ont k choix à réaliser, leur espace de stratégie est alors de dimension k .

joueur i est noté \mathcal{S}_i .

D'un point de vue mathématique, l'ensemble de stratégies de tout joueur i est compact et convexe⁵. Il est équivalent de supposer que les joueurs choisissent des stratégies pures dans un ensemble compact de stratégies ou qu'ils choisissent des distributions de probabilités sur un ensemble fini de stratégies pures (stratégies mixtes). L'ensemble des distributions de probabilités sur un ensemble fini de stratégies pures est alors compact.

L'espace de stratégies du jeu est défini comme l'ensemble des vecteurs stochastiques des joueurs, il est noté $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^n \mathcal{S}_i$.

En pratique, chaque joueur choisit une action $p_i \in \mathcal{P}_i$, ce choix est dicté par sa stratégie. Un vecteur $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ est appelé un profil d'actions et $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ un profil de stratégies du jeu. Remarquons que $A \in \mathcal{S}$ et $Q \in \mathcal{S}$, nous disons que A est un *coin* de \mathcal{S} .

Les fonctions de gain des joueurs sont toujours continues et bornées. Soit $d_i(P) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de gain qui a tout joueur i lui associe son gain pour un profil d'actions donné.

Si nous notons $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ un vecteur contenant les fonctions de gains de tous les joueurs, et N l'ensemble des joueurs, dans la théorie des jeux répétés, le triplet $\{N, \mathcal{S}, d\}$ permet de définir un jeu constituant. Nous posons comme axiome que les joueurs sont rationnels dans le sens où ils veulent maximiser leur utilité, et qu'ils savent que tous les autres le sont aussi.

3.3.2 L'équilibre de Nash pur

Il s'agit d'un état dans lequel aucun joueur ne souhaite modifier sa stratégie, étant donnée celle des autres qu'il suppose *définitive*. Tout comme le résultat obtenu avec la méthode du minimax précédemment.

Définition 3.3.1 *Le vecteur d'actions $P^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ est un équilibre de Nash pur du jeu si et seulement si $\forall i \in N$ et $\forall p \in \mathcal{P}_i$, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$d_i(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) \geq d_i(p_1^*, p_2^*, \dots, p_{i-1}^*, p, p_{i+1}^*, \dots, p_n^*) \quad (3.1)$$

Cette définition signifie que dans un état d'équilibre de Nash pur, (i) il n'est pas possible pour le joueur i d'augmenter ses gains si lui seul change de stratégie et que les autres se conforment à leur stratégie d'équilibre et (ii) il en va de même pour tous les joueurs.

⁵Un ensemble A de dimension fini est borné s'il existe un nombre positif K tel que pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in A$, alors $\sum_j |x_j| \leq K$. Il est fermé si et seulement si pour toute suite convergente $\{t\}_n$ dans A , $\lim_{n \rightarrow \infty} t \in A$. Il est convexe si et seulement si pour tout x et $x' \in A$ et $k \in [0, 1]$, $kx + (1-k)x' \in A$.

Ce théorème en théorie des jeux classiques a un équivalent en théorie des jeux répétés communément admis comme *Folk Theorem*⁶. L'équilibre de Nash en stratégie mixte prend tout son sens dans le cas de jeux répétés.

3.3.3 Les stratégies dans les jeux répétés

Pour clarifier les choses, nous appelons dorénavant *jeu* l'intégralité du processus et "partie t " la t^{ieme} partie de celui-ci (ou partie au temps t). La répétition de plusieurs parties permet aux joueurs de conditionner leurs choix présents et ceux à venir sur ceux passés, ce qui peut conduire par exemple à l'émergence de comportements coopératifs ou agressifs par rapport au jeu constituant. Une chose est sûre c'est que la répétition fait apparaître de nouvelles solutions.

Comme il y a répétition, il y a *histoire*. L'histoire du jeu répété à l'instant t est l'ensemble des actions choisies par tous les joueurs entre la première partie et la partie qui précède celle en cours ($t - 1$). Si l'histoire du joueur i ne correspond pas nécessairement à la stratégie exacte du joueur i , c'est bien la stratégie *effective* de celui-ci, c'est-à-dire telle qu'elle serait perçue par un observateur extérieur.⁷

Voici quelques types de stratégies possibles dans le cas des jeux répétés, selon l'importance et la place que les joueurs accordent à l'histoire du jeu.

- Les stratégies dites en boucle ouverte où le joueur ne tient pas compte de l'histoire du jeu. Au contraire, il décide initialement une séquence d'actions, cela signifie donc qu'il applique ce *programme* quel que soit le comportement de ses adversaires. A première vue, toute la dimension dynamique du jeu répété est éliminée, ceci est vrai pour le joueur concerné mais nous remarquons qu'elle peut aussi avoir un intérêt si les autres joueurs jouent différemment et prennent en compte, eux, l'histoire du jeu.
- Les stratégies en feedback : un joueur tient compte d'une partie de l'histoire *récente*, c'est-à-dire les quelques dernières parties. Par exemple s'il ne tient compte que de la dernière partie, nous parlons de joueur *myope* [29].
- Les stratégies en boucle fermée où le joueur tient compte de l'histoire complète du jeu, initialement, il choisit une séquence de règles de décision, une par partie et au

⁶En théorie des jeux, les "*folk theorem*" constituent une classe de théorèmes admises par la communauté, l'un deux implique par exemple que dans les jeux répétés, n'importe quelle issue du jeu est réalisable (peut se produire) du moment que pour cette issue, les conditions de "minimax" sont respectées.

⁷Remarquons que, de la même façon, il est possible de traquer l'histoire des profils de stratégies (c'est-à-dire la suite des $Q(t)$ tout au long du jeu) mais ce n'est pas l'objet des jeux répétés au sens strict du terme.

temps t , il applique la règle correspondante.

3.3.4 L'équilibre de Nash mixte

En fonction de l'état du jeu, c'est-à-dire de l'ensemble des stratégies de tout le monde (Q), un joueur peut estimer ses gains, si nous notons $g_i(Q) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ cette espérance de gain pour le joueur i lorsque le jeu est dans l'état Q , nous pouvons définir formellement un équilibre de Nash mixte ainsi

Définition 3.3.2 *Le vecteur des stratégies de tous les joueurs $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ est un équilibre de Nash mixte du jeu, si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall q_i \in \mathcal{S}_i$, alors*

$$g_i(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*) \geq g_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) \quad (3.2)$$

Nash [49] a prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.3.3 *Tout jeu ayant un nombre fini de stratégies pures admet un équilibre en stratégies mixtes.*

3.4 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre des notions essentielles de théorie des jeux. Les problèmes étudiés dans cette thèse (chapitres 4, 6 et 7) ne sont pas étudiés en tant que jeu répétés au sens strict du terme. Les joueurs que nous définirons, ne déduisent pas leur stratégie optimale en fonction de l'histoire du jeu une fois que celui-ci prend fin. Leur objectif est d'atteindre, selon un processus Markovien, la stratégie optimale lors de la dernière répétition du jeu constituant. Nous allons commencer par étudier un jeu de tarification dans le chapitre suivant qu'il sera commode de représenter sous forme matricielle.

Chapitre 4

Jeux de tarifications

Lorsque tu fais quelque chose, sache que tu auras contre toi, ceux qui voulaient faire la même chose, ceux qui voulaient le contraire et l'immense majorité de ceux qui ne voulaient rien faire.

(Confucius)

Nous avons décrit dans le second chapitre la politique de routage d'un AS comme étant tout ce qui caractérise ses choix de routes et de propagation d'informations aux autres AS, rivaux et amis. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à un élément essentiel de la politique de routage d'un AS dans le cas des accords de transit : sa politique de tarification est l'ensemble de tout ce qui caractérise le prix qu'il demande pour le service qu'il rend (transmission de messages) de façon à maximiser ses gains.

Comme nous l'avons vu avec les étapes et les règles du processus de décision de BGP, les problèmes de tarification liés à Internet sont plus complexes en réalité que ce que nous allons présenter ici. Notre abstraction avec un nombre très restreint de joueurs et de transmissions permet néanmoins de cerner certains mécanismes fondamentaux. Nous nous intéressons au cas particulier où plusieurs AS sont connectés en série, nous disons qu'ils forment un réseau circulaire, ou en anneau. Un de ces AS est vu comme la destination unique, les deux AS adjacents à cette destination sont les joueurs en compétition, tous les autres AS jouent le rôle de sources. Chaque source émet une transmission qui doit parvenir à la destination (voir la figure 4.1 où les sources sont représentées en anneau). La discussion porte sur la

répartition du trafic, soit l'ensemble des transmissions, entre les joueurs.

Tout problème dans lequel plusieurs protagonistes s'affrontent implique autant de points de vues différents quant à la qualité d'une solution¹ donnée. Ainsi, lorsqu'il s'agit d'évaluer un système, nous pouvons nous placer du point de vue d'un joueur en particulier, d'un groupe de joueurs (en faisant des moyennes par exemple) ou encore du jeu dans son intégralité. Les critères d'évaluations ne sont clairement pas toujours les mêmes. Tout comme les AS qui constituent Internet sont des entités indépendantes avec leurs objectifs propres, les joueurs ici veulent maximiser leur gain égoïstement. Nous allons présenter ici deux méthodes d'apprentissage égoïste et nous montrerons que l'une d'entre elles est efficace pour apprendre la meilleure stratégie dans le cas du jeu à deux joueurs.

4.1 Jeu de tarification

On pourra rapprocher le problème abordé ici des duopôles de Cournot² ou des compétitions de Bertrand³ en économie dans lesquels deux firmes se partagent un marché [3, 20, 41]. Il en diffère toutefois par la nature du marché en question, celui-ci est dispersé en plusieurs sources qui n'ont pas toutes la même facilité d'accès au service. Nous allons considérer des jeux à deux joueurs puis, brièvement en fin de chapitre, envisager un portage du jeu à trois joueurs qui reste un problème ouvert.

4.1.1 Modèle général

Nous représentons le réseau pour un jeu de tarification au moyen d'un graphe non orienté symétrique fortement connexe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. Une transmission d'information dans ce réseau est caractérisée par un couple (source, destination). Nous supposons que m transmissions peuvent prendre place simultanément. L'ensemble des transmissions est appelé une spécification de trafic, elle est notée :

$$\mathcal{W} = \{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_m, t_m)\}.$$

¹Etat final du système.

²Antoine Augustin Cournot (1801-1877), économiste, mathématicien et philosophe français, son étude sur les duopôles est déclinée en termes d'offre et de demande, deux firmes en compétition s'affrontent sur la production et la vente d'un même bien.

³Joseph Louis François Bertrand (1822-1900), mathématicien français, il considère des prix marginaux pour caractériser un état d'équilibre, la quantité produite n'entre pas en ligne de compte.

où $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, s_j est le nœud source de la $j^{\text{ième}}$ transmission et t_j son nœud destination.

Soit N un ensemble de n joueurs, chacun est associé à un sommet différent et il demande un prix de passage $p_i \in [1, \text{prix_max}]$, avec prix_max un paramètre global du jeu.

L'ensemble de stratégies du joueur i (pour $i \in \{1, \dots, n\}$) est noté $\mathcal{P}_i = \{1, 2, \dots, \text{prix_max}\}$. $\mathcal{P} = \prod_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ est l'ensemble de stratégies du jeu. A la partie t , le joueur i demande le prix $p_i(t)$ et obtient un certain gain noté $g_i(t)$. Nous appelons profil de prix, ou d'actions, l'ensemble des prix choisis (ou actions jouées) par tous les joueurs, ce profil au temps t est noté $p(t) = \{p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)\}$. Si nous notons \mathcal{H} l'histoire du jeu, définie comme la *trace* des actions choisies par les joueurs au cours du temps, alors à la partie t ,

$$\mathcal{H}(t) = [p(0), p(1), \dots, p(t-1)].$$

La distribution des prix demandés par le joueur i au cours du jeu est notée $q_i(t)$, c'est un vecteur de probabilités⁴ ayant prix_max éléments. Nous notons $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ l'état du jeu. Soit $\#_j^i(t)$ le nombre total de fois que le joueur i a demandé le prix j depuis le début de la partie. D'après cette notation, lors de toute partie t et pour tout joueur i :

$$\forall j \in \{1, \dots, \text{prix_max}\}, q_{i,j}(t) = \frac{\#_j^i}{t}. \quad (4.1)$$

Définition 4.1.1 *Un jeu de tarification est défini par les éléments suivants :*

- un graphe G ,
- un ensemble de joueurs noté N ,
- une spécification W comme définie plus tôt,
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, une fonction de gains $d_i(\cdot) : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à tout profil de prix p associe au joueur i son gain. Soit à toute partie t , pour tout joueur i :

$$d_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = g_i$$

L'histoire du jeu \mathcal{H} est une connaissance commune à tous les joueurs.

⁴Vecteur dont la somme des composantes vaut 1.

4.1.2 Spécification d'un jeu de tarification circulaire à deux joueurs et m sources

Nous considérons un ensemble d'AS particulier : ils sont reliés entre eux en série de façon à former une structure circulaire (ou un réseau en anneau). Un de ces AS est vu comme la *destination*, notée D dans les illustrations. Deux AS sont adjacents à la destination, ils sont donc en position de force par rapport aux autres car en liaison directe avec elle. Ils perçoivent un prix pour chaque transmission. J_1 et J_2 sont nos deux joueurs ici (voir figure 4.1). Nous supposons qu'ils n'émettent pas de transmission eux-mêmes.

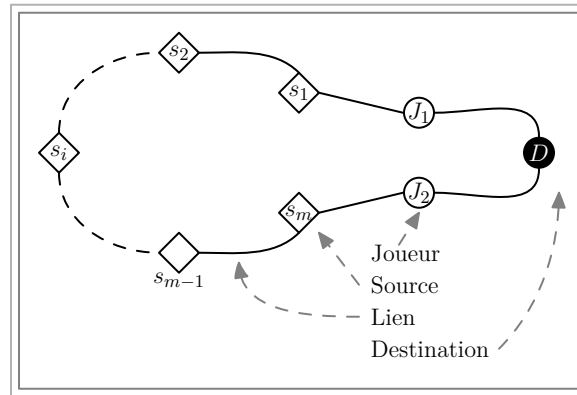


FIG. 4.1 – Jeu de tarification circulaire à deux joueurs et m sources

Remarque: Comme nous allons le voir, la spécification du jeu permet souvent aux joueurs de déterminer “eux-mêmes” un *prix maximum* (dans le sens où ce prix correspond à une stratégie dominée par un prix inférieur), auquel cas le paramètre *prix_max* devient obsolète. Quoiqu’il en soit, tous les jeux de ce chapitre sont traités en prenant en compte le prix maximum dans le sens donné ici, nous pouvons le vérifier simplement d’après les matrices de gains.

Le jeu est répété dans le temps, les joueurs adaptent le prix qu’ils demandent de partie en partie, en fonction de leur gain et/ ou de la stratégie de l’adversaire. Les AS qui ne sont pas directement adjacents à la destination lui transmettent un message, leur préférence va vers le chemin de moindre coût, les sommets correspondants sur le graphe sont appelés les *sources* (les sommets notés s_1, \dots, s_m en figure 4.1). Nous supposons enfin qu’un message

traversant un AS source occasionne un coût de 1 pour celui qui l'émet⁵.

Nous considérons le message comme unité de mesure pour quantifier le trafic dans le réseau. Ainsi, le trafic total a une cardinalité de m . D'après la structure du réseau dans ces jeux, chaque source peut choisir à tout instant entre deux chemins pour transmettre son message, il faut donc un moyen de les départager s'ils sont de mêmes coûts, nous envisageons trois façons de faire.

Définition 4.1.2 (*En cas de chemins de mêmes coûts*)

Tout message émis par une source dans ce jeu peut être acheminé selon deux chemins différents. Nous supposons que le chemin de moindre coût est toujours sélectionné. Si les coûts sont identiques, nous envisageons les trois modes suivants :

- “Equiprobable”, le message prendra l'une ou l'autre route à égale probabilité.
- “Déterministe”, qui reviendra ici à préférer le joueur 1 au joueur 2 (remarquons qu'il y a un cas symétrique à celui-ci, nous admettons que les conclusions auxquelles nous parviendrons s'y transposent directement).
- “Plus court chemin” (couplé à “Equiprobable” si même coût et même longueur).

4.1.3 Les dynamiques de jeu

Nous allons comparer les résultats obtenus selon deux méthodes de comportements différentes appelées la dynamique du joueur myope et la dynamique des joueurs fictifs.

Comme décrit dans [29], la dynamique du joueur myope correspond à jouer, lors de la partie t , l'action qui correspond à la meilleure réponse pour la partie $t - 1$.

La dynamique des joueurs fictifs consiste quant à elle à faire comme si l'on jouait contre un ou plusieurs “joueurs fictifs” dont les stratégies seraient données par l'histoire du jeu. A chaque partie, un joueur qui joue selon cette méthode joue donc la meilleure réponse possible qu'il peut opposer à l'histoire complète du jeu. Elle fut introduite par G.W. Brown en 1951 dans [12].

La différence entre les deux méthodes tient à la taille de l'histoire à laquelle un joueur oppose sa meilleure réponse possible. Nous employons donc le terme “joueur myope” pour bien marquer la différence entre les deux dynamiques de jeu, cette idée de myopie évoquant parfaitement la vision très limitée qu'a le joueur de l'histoire du jeu : une partie seulement.

⁵Ceci est tout à fait arbitraire, nous pouvons par exemple voir ce prix non nul comme une façon simple de prendre en compte les distances parcourues donc le temps de transmissions plus élevé.

Définition 4.1.3 (La dynamique du Joueur Myope)

Lors de toute partie t , le joueur J_i joue la meilleure réponse qu'il peut opposer aux actions des adversaires lors de la partie $t - 1$, c'est-à-dire le prix P tel que :

$$p_i(t) = \max_{P \in \mathcal{P}_i} [d_i(p_1(t-1), p_2(t-1), \dots, p_{i-1}(t-1), P, p_{i+1}(t-1), \dots, p_n(t-1))].$$

La fonction de gain définie plus tôt est définie sur des stratégies pures (tous les joueurs ont choisi un prix). Nous étendons maintenant cette fonction aux stratégies mixtes afin de pouvoir exprimer des espérances de gains. Soit $h_{i,P}$ l'espérance de gains du joueur i lorsqu'il demande le prix P

$$h_{i,P}(Q) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n} d_i(j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, P, j_{i+1}, \dots, j_n) \prod_{s \neq i} q_{s, j_s}.$$

Définition 4.1.4 (La dynamique des Joueurs Fictifs)

Lors d'une partie t donnée, un joueur J_i qui joue selon la méthode des joueurs fictifs jouera l'action qui correspond à la meilleure réponse qu'il peut opposer à l'histoire complète du jeu $\mathcal{H}(t)$. C'est-à-dire le prix $P \in \mathcal{P}_i$ qui maximise **son espérance de gain**, ce prix est tel que :

$$p_i(t) = \max_{P \in \mathcal{P}_i} [h_{i,P}(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{i-1}(t), P, q_{i+1}(t), \dots, q_n(t))].$$

Les premiers résultats sur la méthode des joueurs fictifs nous viennent de Robinson [60] en 1951. Elle a démontré qu'elle permettait d'apprendre des équilibres de Nash purs dans des jeux à sommes nulles à deux joueurs.

Dans ce qui suit, nous supposons que tous les joueurs utilisent la même dynamique de jeu. Nous allons d'abord étudier quelques instances de jeux de tarifications selon la dynamique du joueur myope puis celle des joueurs fictifs. Puis nous verrons quelques cas où cette dernière est capable d'apprendre des équilibres de Nash, qu'ils soient purs ou mixtes.

4.1.4 Principe de l'étude des cas proposés

Nous allons maintenant étudier plusieurs instances de jeux de tarifications conformément aux trois modes de décision proposés plus tôt (donc en trois déclinaisons pour chaque jeu).

- D'abord nous donnons une description du jeu et sa matrice de gains.
- Ensuite nous regardons ce que donne l'élimination des stratégies dominées et si cela seul permet de faire émerger une situation stable. Dans les illustrations, les matrices

de gains comportent des colonnes et des lignes grisées de différents niveaux de gris. Les stratégies les plus claires disparaissent en premier, les plus foncées ensuite.

- Nous présentons graphiquement l'évolution du jeu dans le temps à l'aide d'un “diagramme de stratégies” qui contient toutes les actions/ réponses possibles pour les joueurs⁶. Toutes les transitions ou changements de stratégies sont fléchées sur ces diagrammes, les flèches noires pleines correspondent à des transitions que feraient deux joueurs myopes, les cases entourées en pointillées correspondent à un équilibre de Nash.
- Enfin nous concluons sur la pertinence de la dynamique étudiée.

4.2 Les joueurs myopes

Nous commençons par étudier la version la plus simple possible du jeu qui ne comporte qu'une seule source de trafic, comme présenté en figure 4.2.

4.2.1 Premier jeu : une source, “Plus court chemin”

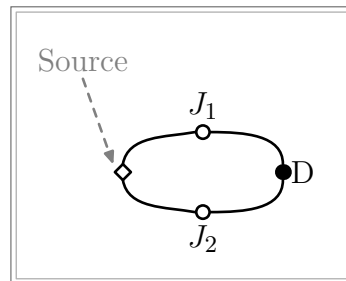


FIG. 4.2 – Jeu de tarification à une source unique et deux joueurs

Les *modes de jeu* Equiprobable et Plus court chemin reviennent au même dans ce cas.

Elimination des stratégies dominées

D'après la matrice de gains donnée en figure 4.3, nous pouvons procéder à l'élimination des stratégies dominées, ainsi dans l'ordre :

- Pour le joueur 1, les stratégies 2 et 3 dominent la stratégie 4.

⁶Nous admettons qu'à la première partie, les joueurs jouent complètement au hasard.

| | | Joueur 1 | | | | Règles de remplissage: |
|----------|---|----------|---|-----|---|--|
| | | Prix | 1 | 2 | 3 | |
| Joueur 2 | 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | si $p_1 < p_2$: $g_1 = p_1$, $g_2 = 0$ |
| | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | si $p_1 = p_2$: $g_1 = \frac{1}{2}p_1$, $g_2 = \frac{1}{2}p_2$ |
| | 3 | 0 | 0 | 1.5 | 3 | si $p_1 > p_2$: $g_1 = 0$, $g_2 = p_2$ |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 2 | |

FIG. 4.3 – Matrice d’espérances de gains, deux joueurs, une source, plus court chemin.

- Pour le joueur 2, la stratégie 3 domine la stratégie 4.
- Pour le joueur 1, la stratégie 2 domine la stratégie 3 maintenant que la stratégie 4 a disparu.
- Pour le joueur 2, la stratégie 2 domine maintenant la stratégie 3.
- Pour le joueur 1, la stratégie 1 domine maintenant la stratégie 2.
- Pour le joueur 2, la stratégie 1 reste aussi sa meilleure.

Remarque: (Matrices de gains)

En ce qui concerne la lecture des matrices de gains, le chiffre en haut à droite indique le gain pour J_1 et celui en bas à gauche le gain pour J_2 . A droite des tableaux, nous donnons les règles de remplissage des cases.

Application des joueurs myopes sur l’espace de stratégie complet

En envisageant toutes les transitions possibles en joueurs myopes sur le diagramme de stratégies présenté en figure 4.4, nous remarquons qu’il existe en réalité deux équilibres de Nash purs sur ce jeu (qui sont : les deux joueurs demandent 1 et les deux joueurs demandent 2). Nous interprétons le résultat sur ce jeu à une source ainsi :

Si aucun des joueurs ne demande 1 à la première partie, alors ils finiront par se fixer sur le prix 2 (après deux parties maximum). Dans le cas contraire, ils finiront tous deux par demander 1 un beau jour et ils en resteront là. Un des deux équilibres est meilleur que

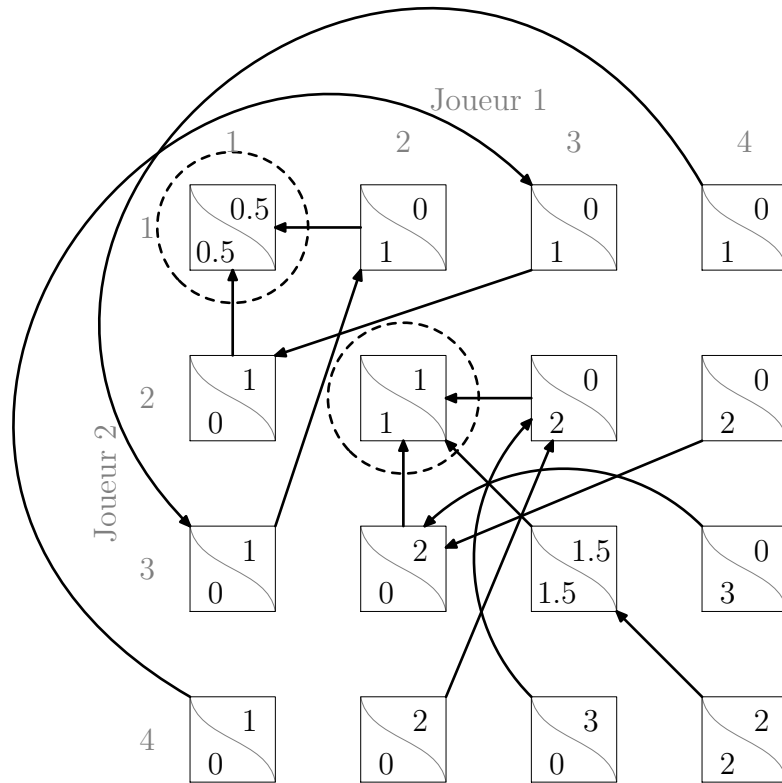


FIG. 4.4 – Diagramme de transitions de prix, deux joueurs, une source, Plus court chemin

l'autre en termes de gains mais la méthode des joueurs myopes ne **garantit pas** de trouver celui-ci car l'ensemble de stratégies du jeu n'est pas toujours exploré entièrement.

4.2.2 Premier jeu : une source, choix déterministe

Le mode déterministe (ou ordre alphabétique) sur ce jeu de tarification à une source et deux joueurs revient à dire que le joueur 1 est un peu avantage. Les gains des joueurs en fonction de leurs stratégies sont donnés en figure 4.5.

Elimination des stratégies dominées

D'après ce tableau, nous pouvons remarquer, dans l'ordre que :

- Pour le joueur J_2 , toutes les stratégies dominent la stratégie 4.
- Pour J_1 , toutes les stratégies dominent la stratégie 4.
- Maintenant pour J_2 , les stratégies 1 et 2 dominent la stratégie 3.

| | | Joueur 1 | | | | Règles de remplissage: |
|----------|---|----------|--------|--------|--------|---------------------------------------|
| | | Prix | 1 | 2 | 3 | |
| Joueur 2 | 1 | 1 0 | 0 1 | 0 1 | 0 1 | si $p_1 < p_2$: $g_1 = p_1, g_2 = 0$ |
| | 2 | 1 0 | 2 0 | 0 2 | 0 2 | si $p_1 = p_2$: $g_1 = p_1, g_2 = 0$ |
| | 3 | 1 0 | 2 0 | 3 0 | 0 3 | si $p_1 > p_2$: $g_1 = 0, g_2 = p_2$ |
| | 4 | 1 0 | 2 0 | 3 0 | 4 0 | |

FIG. 4.5 – Espérances de gains, une source, Déterministe

- Et donc pour J_1 , les stratégies 1 et 2 dominent la stratégie 3.
- Finalement, 1 devient la stratégie dominante pour les deux joueurs.

Vient à rester uniquement le prix 1 pour chacun des deux joueurs qui, sans être équitable, est un équilibre de Nash.

Application des joueurs myopes

La figure 4.6 donne le cheminement des stratégies des joueurs dans le temps pour tous les états de départ possibles. Cette fois, l'équilibre de Nash pur qui consiste à ce que les deux joueurs demandent tous les deux le prix 1 sera atteint avec 100% de certitude.

Dans ce jeu de tarification à deux joueurs et une source, la méthode des joueurs myopes implique une convergence vers le seul équilibre de Nash pur du jeu, quelle que soit la valeur de $p_{\text{prix_max}}$.

4.2.3 Deuxième jeu : deux sources, “Plus court chemin”

Nous nous intéressons maintenant à un cas différent du précédent, il y a deux sources de trafic comme représenté en figure 4.7.

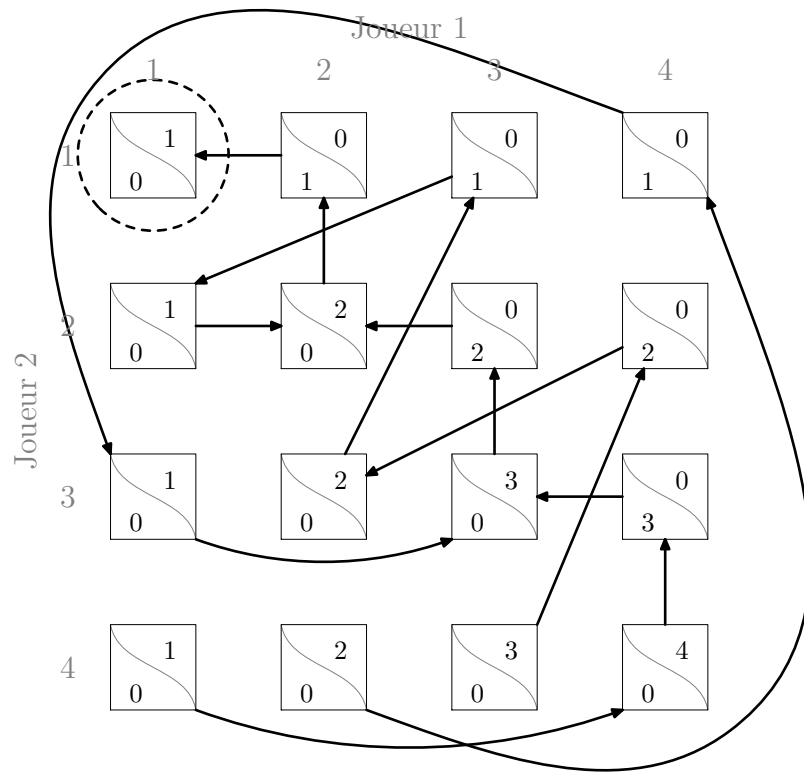


FIG. 4.6 – Evolution des stratégies des joueurs, une source, Déterministe

Elimination des stratégies dominées

D'après la matrice de gains donnée en figure 4.8, nous pouvons remarquer, dans l'ordre que :

- Pour les deux joueurs, le prix 6 est dominé par 3.
- Pour les deux joueurs, le prix 1 est dominé par 2.
- Pour les deux joueurs, le prix 2 n'est désormais plus jamais une meilleure réponse.

Les deux joueurs hésitent donc entre trois prix qui peuvent tous dans certains cas constituer une meilleure réponse. Le diagramme de stratégies en figure 4.9 est restreint aux prix 3, 4 et 5 pour alléger le dessin.

Application des joueurs myopes

En procédant à l'élimination des stratégies dominées, nous remarquons que les joueurs conservent trois stratégies de prix (3, 4 et 5) dans leurs options de jeu. La représentation en

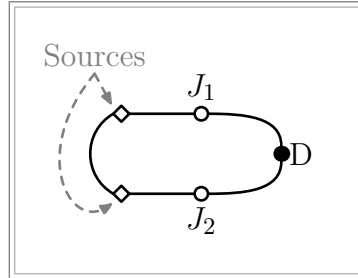


FIG. 4.7 – Jeu de tarification à deux joueurs, deux sources

| | | Joueur 1 | | | | | | |
|----------|---|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | Prix | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Joueur 2 | 1 | | 1 1 | 2 1 | 0 2 | 0 2 | 0 2 | 0 2 |
| | 2 | | 1 2 | 2 2 | 3 2 | 0 4 | 0 4 | 0 4 |
| | 3 | | 2 0 | 2 3 | 3 3 | 4 3 | 0 6 | 0 6 |
| | 4 | | 2 0 | 4 0 | 3 4 | 4 4 | 5 4 | 0 8 |
| | 5 | | 2 0 | 4 0 | 6 0 | 4 5 | 5 5 | 6 5 |
| | 6 | | 2 0 | 4 0 | 6 0 | 8 0 | 5 6 | 6 6 |

Règles de remplissage:

si $p_1 < p_2 - 1$: $g_1 = 2p_1$, $g_2 = 0$
 si $p_1 = p_2 - 1$: $g_1 = p_1$, $g_2 = p_2$
 si $p_1 = p_2$: $g_1 = p_1$, $g_2 = p_2$
 si $p_1 = p_2 + 1$: $g_1 = p_1$, $g_2 = p_2$
 si $p_1 > p_2 + 1$: $g_1 = 0$, $g_2 = 2p_2$

FIG. 4.8 – Espérances de gains, jeu à deux sources, Plus court chemin

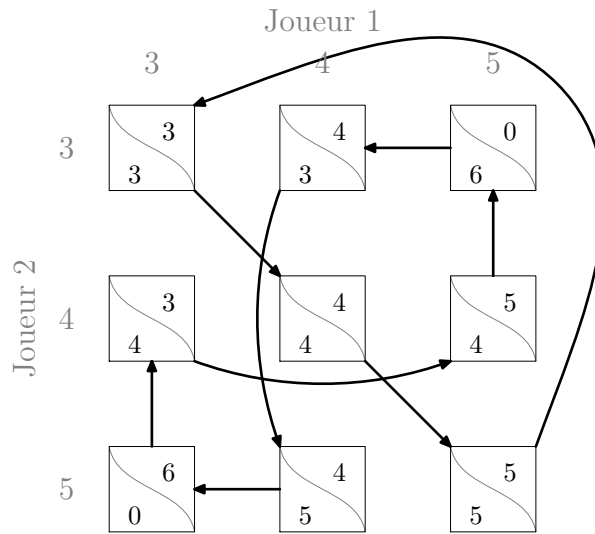


FIG. 4.9 – Evolution des stratégies des joueurs, deux sources, Plus court chemin

figure 4.9 donne les transitions dans les choix stratégiques pour les joueurs restreints à ces trois prix restants.

On peut facilement identifier deux cycles possibles de changements successifs de stratégies des deux joueurs sur ce jeu. Ces cycles finiront par apparaître quel que soit l'état de départ. L'un est $(3, 3) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (5, 5) \rightarrow$ nouveau cycle⁷ ou bien $(5, 3) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (4, 5) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (5, 4) \rightarrow$ nouveau cycle. Dans tous les cas, le jeu ne se stabilise jamais.

4.2.4 Deuxième jeu : deux sources, Equiprobable

Toujours dans le cas à deux sources de trafic, en cas de chemins de même prix, les sources envoient maintenant leur message à l'un ou l'autre des deux joueurs à égale probabilité. C'est-à-dire comme si ce choix était décidé à pile ou face avec une pièce "parfaite", c'est-à-dire non truquée.

Elimination des stratégies dominées

D'après la matrice de gains, nous pouvons remarquer, dans l'ordre que :

- Pour les deux joueurs, la stratégie 1 est dominée,

⁷Les nombres entre parenthèses indiquent les prix demandés par les joueurs 1 et 2 respectivement.

| | | | | | | |
|----------|---|----------|----------|----------|----------|---|
| | | Joueur 1 | | | | |
| | | Prix | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Joueur 2 | 1 | 1 1 | 1 1.5 | 0 2 | 0 2 | |
| | 2 | 1.5 1 | 2 2 | 1.5 3 | 0 4 | |
| | 3 | 2 0 | 3 1.5 | 3 3 | 2 4.5 | |
| | 4 | 2 0 | 4 0 | 4.5 2 | 4 4 | |

Règles de remplissage:

si $p_1 < p_2 - 1$: $g_1 = 2p_1$, $g_2 = 0$
 si $p_1 = p_2 - 1$: $g_1 = \frac{3}{2} p_1$, $g_2 = \frac{1}{2} p_2$
 si $p_1 = p_2$: $g_1 = p_1$, $g_2 = p_2$
 si $p_1 = p_2 + 1$: $g_1 = \frac{1}{2} p_1$, $g_2 = \frac{3}{2} p_2$
 si $p_1 > p_2 + 1$: $g_1 = 0$, $g_2 = 2p_2$

FIG. 4.10 – Espérances de gains, deux joueurs, deux sources, équiprobable

- Pour les deux joueurs, la stratégie 4 est dominée,
- Pour les deux joueurs, la stratégie 2 domine la stratégie 3.

Une élimination systématique des stratégies dominées conduit à l'équilibre de Nash pur dans lequel les deux joueurs demandent le prix 2.

Application des joueurs myopes

En envisageant l'intégralité de l'espace de stratégies ici (voir figure 4.11), nous pouvons remarquer qu'il existe en fait plusieurs équilibres de Nash purs sur ce jeu, ils sont mis en relief dans le diagramme de stratégies en figure 4.11. Les trois équilibres de Nash purs sont :

- Les deux joueurs demandent 1 **ou**
- Les deux joueurs demandent 2 **ou**
- Les deux joueurs demandent 3.

Remarque: Sur le diagramme de transitions en figure 4.11 les flèches blanches plus épaisses ne sont pas forcément des transitions directes entre les deux états reliés, elles signifient qu'après quelques parties, les joueurs y parviennent. Il arrive sur ce jeu qu'un joueur hésite entre deux stratégies qui peuvent lui rapporter exactement le même gain. Par exemple si le joueur 1 demande 4 et que le joueur 2 demande 3 (leurs espérances de gains sont alors

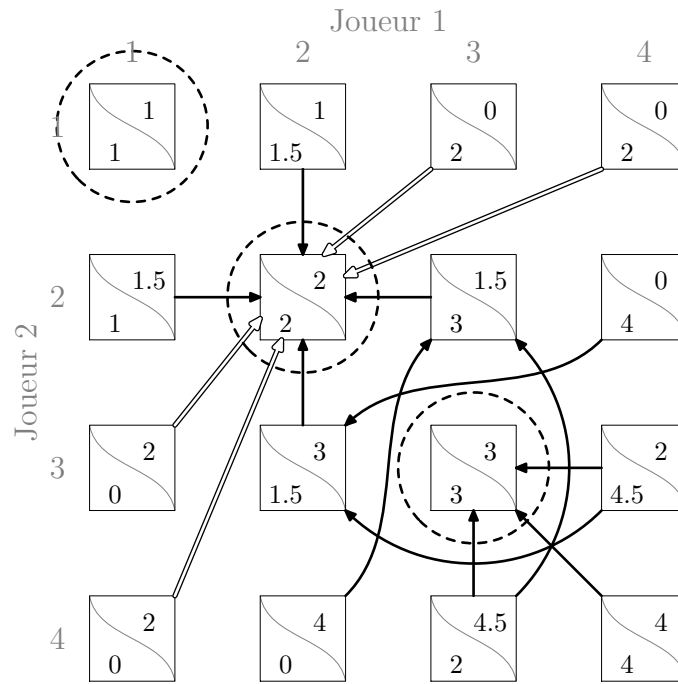


FIG. 4.11 – Evolution des stratégies dans le temps, deux joueurs, deux sources, Equiprobable

respectivement de 2 et de 4.5), alors le joueur 1 peut changer sa stratégie et demander soit 3 soit 2, d'où les deux flèches partant de la case correspondante dans le diagramme.

Sur ce jeu, l'application des joueurs myopes fera apparaître un des trois équilibres de Nash purs existants, les probabilités d'apparition de chacun sont simplement déductibles d'après le diagramme de transitions en figure 4.11. En résumé :

- Si lors de la première partie les deux joueurs demandent soit 3 soit 4, alors $p(t) \rightarrow (3, 3)$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
- Si lors de la première partie un joueur demande 1 ou 2 et que l'autre ne demande pas 1, alors $p(t) \rightarrow (2, 2)$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
- S'ils demandent tous deux le prix 1 alors ils ne changent jamais de stratégie.

4.2.5 Deuxième jeu : deux sources, déterministe

Elimination des stratégies dominées

D'après la matrice de gains, nous pouvons remarquer, dans l'ordre que :

| | | Joueur 1 | | | | | |
|----------|---|----------|---|---|---|---|---|
| | | Prix | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Joueur 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 3 | 0 |
| | 3 | 2 | 0 | 4 | 0 | 3 | 4 |
| | 4 | 2 | 0 | 4 | 0 | 6 | 4 |
| | 5 | 2 | 0 | 4 | 0 | 6 | 8 |

Règles de remplissage:

si $p_1 < p_2$: $g_1 = 2p_1$, $g_2 = 0$

si $p_1 = p_2$: $g_1 = p_1$, $g_2 = p_2$

si $p_1 = p_2 + 1$: $g_1 = p_1$, $g_2 = p_2$

si $p_1 > p_2 + 1$: $g_1 = 0$, $g_2 = 2p_2$

FIG. 4.12 – Espérances de gains, deux joueurs, deux sources, Déterministe

- Pour les deux joueurs, la stratégie 5 est dominée par 3.
- Pour les deux joueurs, la stratégie 1 est dominée par 2.
- Pour les deux joueurs, la stratégie 4 est dominée par 2.

Application des joueurs myopes

En appliquant la méthode des joueurs myopes sur ce jeu et d'après les transitions de stratégies représentées en figure 4.13, nous remarquons l'existence de trois cycles sur l'intégralité de l'espace de stratégie.

- $(2, 3) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3) \rightarrow$ nouveau cycle.
- $(3, 3) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow$ nouveau cycle.
- $(3, 3) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (3, 4) \rightarrow$ nouveau cycle.

En utilisant la dynamique des joueurs myopes sur l'espace de stratégies entier, nous ne pouvons rien conclure d'autre que l'existence des trois cycles que l'on vient d'énumérer. En revanche, si les joueurs éliminent leurs stratégies dominées, un seul cycle subsiste, il est entouré en pointillé sur la figure 4.13 : les joueurs resteraient sur ce cycle à l'infini.

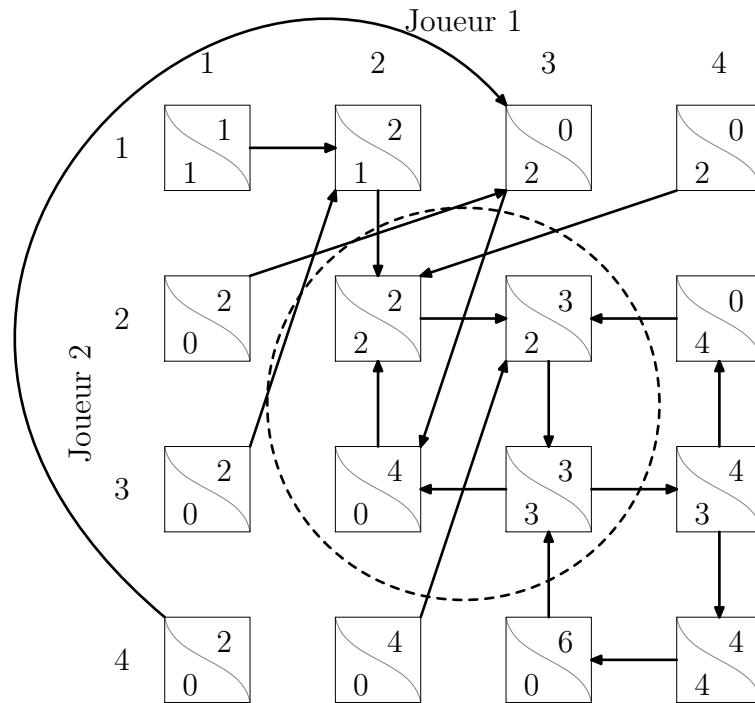


FIG. 4.13 – Evolution des stratégies dans le temps, deux joueurs, deux sources, déterministe. Les états entourés d’un cercle en pointillés sont ceux qui “restent” après élimination des stratégies dominées.

4.2.6 Conclusion sur la méthode des joueurs myopes

Dans les quelques cas que nous avons passés en revue, l’algorithme des joueurs myopes n’est pas vraiment efficace au delà d’une source, il ne permet pas d’atteindre les équilibres de Nash à coup sûr et au contraire, il mènent souvent à des cycles infinis. Nous allons maintenant étudier l’algorithme des joueurs fictifs sur le jeu à deux sources.

4.3 Les joueurs fictifs

Nous allons étudier le jeu à deux sources selon le mode “Déterministe” pour départager deux chemins de mêmes coûts en partance d’une source unique selon la dynamique des joueurs fictifs. Les probabilités de choisir tel ou tel prix sont importantes ici. Les joueurs éliminent certaines stratégies avec le temps mais comment vont-ils jouer celles qui restent et dans quelles proportions s’il y en a plusieurs ?

En appliquant la méthode des joueurs fictifs dans ce jeu, les stratégies dominées disparaissent effectivement des actions choisies par les joueurs avec le temps. Nous traitons les jeux ici en prenant cette considération en compte et nous nous intéressons au comportement des joueurs après élimination des stratégies dominées. Les prix restants dans les stratégies des joueurs sont 2 et 3.

Nous pouvons donc réduire les stratégies mixtes de J_1 et J_2 chacune en un vecteur de probabilités à deux composantes que nous pouvons écrire pour $i = 1$ ou 2 :

$$q_i = (q_{i,2}, 1 - q_{i,2}),$$

Les questions que nous nous posons sont les suivantes : quelles sont les états respectifs des vecteurs de stratégies des deux joueurs qui correspondent à un équilibre de Nash pour le jeu ? Vont-ils y parvenir ?

4.3.1 Equilibre de Nash dans le jeu à deux joueurs et deux sources

Soit $U_1(q_1, q_2)$ l'espérance de gain du joueur 1 et $U_2(q_1, q_2)$ celle du joueur 2. $U_{i,1}(q_1, q_2)$ est l'espérance de gain pour J_i lorsque celui-ci choisi de demander le prix 2 et $U_{i,2}(q_1, q_2)$ l'espérance de gain lorsqu'il demande 3. Nous pouvons écrire $\forall i \in \{1, 2\}$,

$$U_i(q_1, q_2) = q_{i,2} \times U_{i,1}(q_1, q_2) + (1 - q_{i,2}) \times U_{i,2}(q_1, q_2) \quad (4.2)$$

et dresser le tableau suivant :

| Pour le joueur 1 | Pour le joueur 2 |
|------------------------------------|------------------------------------|
| $U_{1,1}(q_1, q_2) = 4 - 2q_{2,2}$ | $U_{2,1}(q_1, q_2) = 2$ |
| $U_{1,2}(q_1, q_2) = 3$ | $U_{2,2}(q_1, q_2) = 3 - 3q_{1,2}$ |

A l'équilibre de Nash, toutes les stratégies *jouées* à l'équilibre ont la même espérance de gain.

La figure 4.14 indique les meilleures réponses des deux joueurs en fonction du de la probabilité de demander 2 de l'autre. En résolvant le système d'équations, nous pouvons déduire que l'équilibre de Nash est obtenu si $q_{1,2} = \frac{1}{3}$ et $q_{2,2} = \frac{1}{2}$ (le point noté EN sur la figure).

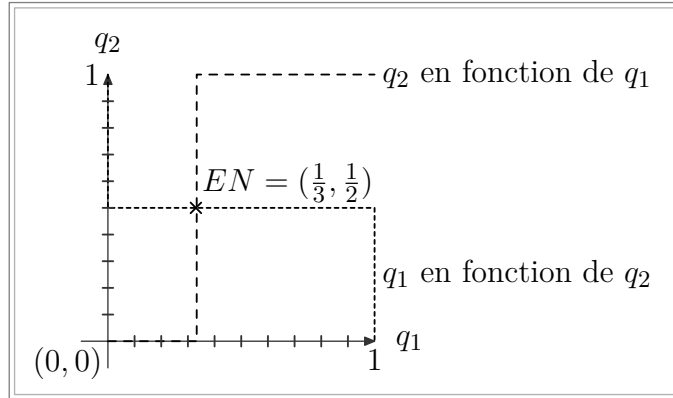


FIG. 4.14 – Meilleures réponses des joueurs selon la stratégie de leur adversaire

4.3.2 Etude de l'évolution du jeu

Ici les deux joueurs jouent en utilisant la dynamique des joueurs fictifs, ils gardent donc en mémoire toute l'histoire du jeu, ce qui équivaut à connaître la stratégie mixte effective de leur adversaire depuis le début de la partie⁸. Dans ce cas précis à deux joueurs, nous pouvons représenter l'évolution du jeu dans le temps sur le plan (en deux dimensions). Soit $Q(t) = (q_{1,2}(t), q_{2,2}(t))$ l'état du jeu à la partie t , où $q_{i,2}(t)$, pour $i = 1$ ou 2 , est égal au nombre de fois que le joueur i a choisi le prix 2 divisé par le nombre total de parties écoulées.

Définition 4.3.1 Pour tout joueur i , $\#_2^i(t)$ indique le nombre de fois qu'il a demandé le prix 2. La suite de points à valeurs dans $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$\{Q(t)\} = \{(q_{1,2}(t), q_{2,2}(t))\} = \left\{ \left(\frac{\#_2^1(t)}{t}, \frac{\#_2^2(t)}{t} \right) \right\} \quad (4.3)$$

représente l'évolution des stratégies des joueurs dans le temps.

Sur le plan $[0, 1] \times [0, 1]$, tout point correspond à un état possible pour une partie du jeu à deux joueurs (voir figure 4.15). Par exemple l'origine correspond au cas où les deux joueurs demandent toujours le prix 3, ce qui serait une stratégie pure. Le point $(1, \frac{1}{2})$ correspond au cas où le joueur J_1 demande toujours 2 et J_2 demande 2 ou 3 à égale probabilité, etc.

La figure 4.15 montre l'évolution du jeu dans l'espace de stratégie ramenée au plan $[0, 1] \times [0, 1]$. Les points notés 1, 2, 3, etc. indiquent les états successifs du jeu si celui-ci est

⁸Nous pouvons remarquer que l'ordre de la distribution n'a aucune importance pour les joueurs fictifs, d'autres algorithmes pourraient prendre ces informations en compte.

initialement $Q = (1, 1)$.

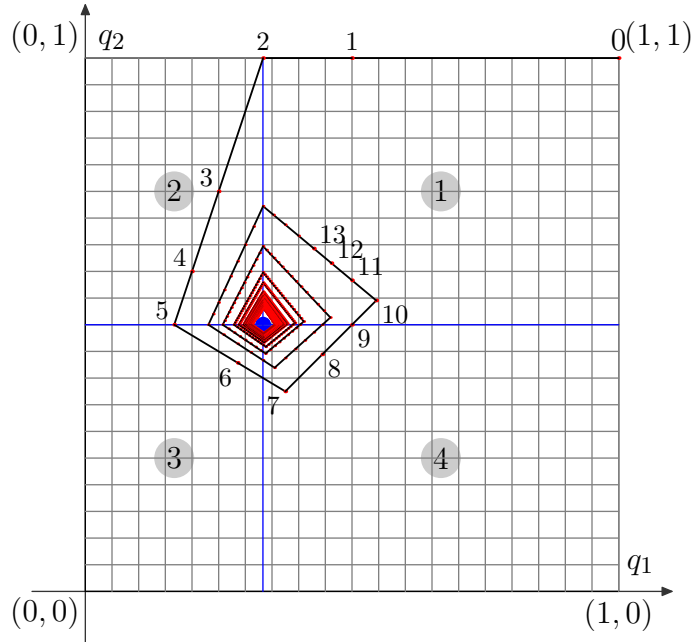


FIG. 4.15 – Evolution du jeu sur 1000 parties

L'espace de stratégie est séparé en quatre régions notées 1, 2, 3, 4 sur la figure 4.15). L'appartenance de tout point $X = (x, y)$ à telle ou telle région est définie par :

- région 1 : $x \leq \frac{1}{3}$ et $y \geq \frac{1}{2}$
- région 2 : $x > \frac{1}{3}$ et $y \geq \frac{1}{2}$
- région 3 : $x > \frac{1}{3}$ et $y < \frac{1}{2}$
- région 4 : $x \leq \frac{1}{3}$ et $y < \frac{1}{2}$

Visuellement, nous remarquons que le processus converge vers l'équilibre de Nash calculé précédemment. Nous allons démontrer que c'est effectivement le cas.

4.3.3 La dynamique des joueurs fictifs est déterministe

La preuve très détaillée, donnée ici en deux temps, repose sur des considérations géométriques car l'évolution du jeu à l'infini reste dans le plan.

Nous voulons montrer que quel que soit l'état de départ, si les joueurs jouent selon la

méthode des joueurs fictifs alors ils convergeront vers l'équilibre de Nash. Dans un premier temps nous allons montrer que pour tout point du plan qui serait un état du jeu, il est possible de tracer une droite sur laquelle se trouvera le point qui correspond à la partie suivante. Puis nous montrerons que cette suite de points se rapproche irrémédiablement de l'équilibre de Nash mixte au fil du temps.

Proposition 4.3.2 *Pour n'importe quelle partie donnée d'un jeu de tarification dont nous connaissons l'histoire entre deux joueurs qui jouent selon la méthode des joueurs fictifs, nous pouvons déduire leur stratégie pour la partie suivante.*

Preuve:

Pour la région 1 ($x \leq \frac{1}{3}$ et $y > \frac{1}{2}$)

Soit $X(t)$ le point du plan correspondant à l'état du jeu à la partie t , $X = (\frac{\#_2^1}{t}, \frac{\#_2^2}{t})$.

Nous savons que les joueurs vont alors tous deux choisir le prix 3. Les coordonnées du point du plan qui correspond à la partie qui suit sont $X(t+1) = (\frac{\#_2^1}{t+1}, \frac{\#_2^2}{t+1})$.

Nous allons maintenant montrer que les points $(0, 0)$, $X(t)$ et $X(t+1)$ sont alignés. Soient deux droites Δ_1 et Δ_2 de vecteurs directeurs respectif $\vec{v}_1 = [\frac{\#_2^1}{t}, \frac{\#_2^1}{t}]$ et $\vec{v}_2 = [\frac{\#_2^1}{t+1}, \frac{\#_2^2}{t+1}]$.

Les deux droites sont de même pente : $\frac{\#_2^1}{\#_2^2}$. Les trois points sont donc alignés.

Pour la région 2 ($x > \frac{1}{3}$ et $y > \frac{1}{2}$)

Soit $X(t) = (\frac{\#_2^1}{t}, \frac{\#_2^2}{t})$ le point du plan correspondant à l'état du jeu à la partie t .

D'après les choix stratégiques des joueurs à cette partie, les coordonnées de la suivante seront $(\frac{\#_2^1}{t+1}, \frac{\#_2^2+1}{t+1})$.

Pour montrer que les points $(0, 1)$, $X(t)$ et $X(t+1)$ sont alignés, nous définissons une première droite Δ_1 par les deux points $(0, 1)$ et $X(t)$ de vecteur directeur $\vec{v}_1 = [-\frac{\#_2^1}{t}, 1 - \frac{\#_2^2}{t}]$. La seconde droite Δ_2 est définie par les points $(0, 1)$ et $X(t+1)$ de vecteur directeur $\vec{v}_2 = [-\frac{\#_2^1}{t+1}, 1 - \frac{\#_2^2+1}{t+1}]$.

\vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont de mêmes pentes : $-\frac{\#_2^1}{t-\#_2^2}$. Cette fois encore les trois points sont alignés.

Pour la région 3 ($x > \frac{1}{3}$ et $y \leq \frac{1}{2}$)

Soit $X(t) = (\frac{\#_2^1}{t}, \frac{\#_2^2}{t})$ le point du plan qui correspond à l'état du jeu à la partie t .

Les joueurs jouent tous les deux le prix 2 dans ce cas, soit $X(t+1) = (\frac{\#_2^1+1}{t+1}, \frac{\#_2^2+1}{t+1})$.

Pour montrer que les trois points $X(t)$, $X(t+1)$ et $(1, 1)$ sont alignés, nous définissons encore deux droites : Δ_1 par les points $X(t)$ et $(1, 1)$ et Δ_2 par les points $X(t+1)$ et $(1, 1)$. Les vecteurs directeurs de ces deux droites sont ici encore de même pente : $\frac{t-\#_2^1}{t-\#_2}$. Les trois points sont bien alignés.

Pour la région 4 ($x \leq \frac{1}{3}$ et $y \leq \frac{1}{2}$)

Soit X le point du plan qui correspond à l'état du jeu à la partie t , $X(t) = (\frac{\#_2^1}{t}, \frac{\#_2^2}{t})$.

La suite de points se dirige vers $(1, 0)$, d'après les choix stratégiques des joueurs à cette partie, les coordonnées de la suivante seront $(\frac{\#_2^1+1}{t+1}, \frac{\#_2^2}{t+1})$.

Pour montrer que les points $(1, 0)$, $X(t)$ et $X(t+1)$ sont alignés, nous définissons une première droite Δ_1 par les deux points $X(t)$ et $(1, 0)$, de vecteur directeur $\vec{v}_1 = [1 - \frac{\#_2^1}{t}, -\frac{\#_2^2}{t}]$. La droite Δ_2 définie par les points $X(t+1)$ et $(1, 0)$ est de vecteur directeur $\vec{v}_2 = [1 - \frac{\#_2^1+1}{t+1}, -\frac{\#_2^2}{t+1}]$.

Les deux droites sont ici encore de même pente : $-\frac{t-\#_2^1}{\#_2^2}$. Cette fois encore, les points sont alignés.

Nous venons de montrer que pour tout point du plan correspondant à une partie, il était possible de déterminer l'emplacement du point correspondant à la partie suivante, ce qui valide la proposition (4.3.2). \square

Il reste maintenant à montrer que la distance entre $X(t)$ et l'équilibre de Nash est globalement décroissante et tend vers 0.

4.3.4 Convergence vers l'équilibre de Nash

D'après la figure 4.15, la distance entre le "point jeu" et l'équilibre de Nash décroît par cycles⁹. Tout au long des parties successives, les joueurs jouent les mêmes prix pendant un certain nombre de parties, puis, lorsque l'un des deux s'aperçoit que son adversaire s'est trop éloigné de sa position d'équilibre, alors il change de prix, jusqu'à ce que l'adversaire fasse la même observation et change à son tour.

La figure 4.16 montre l'évolution de la distance entre $X(t)$ et l'équilibre de Nash sur le jeu considéré ici ou nous pouvons remarquer un certain motif cyclique.

⁹Dit autrement : nous nous en éloignons puis nous nous en rapprochons tout en nous en rapprochant globalement tout de même.

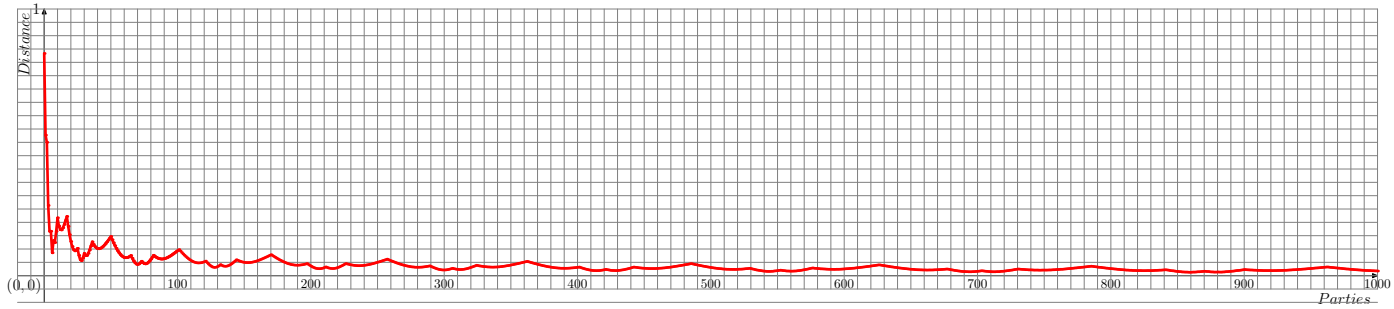


FIG. 4.16 – Evolution du jeu sur 1000 parties, distance à l'équilibre de Nash

Un changement de région sur le plan correspond à une modification de prix pour l'un des deux joueurs. Nous allons supposer que les joueurs effectuent ces changements de stratégie exactement sur les “frontières” c'est-à-dire sur les droites d'équation $x = 1/3$ et d'équation $y = 1/2$.

L'idée de la preuve est de considérer une partie particulière (X_0) qui se trouve à la frontière entre deux régions, par exemple 4 et 1 (voir figure 4.15) et nous supposons que les deux joueurs jouent suffisamment de parties pour que la suite de points fasse un tour complet autour de l'équilibre de Nash et revienne dans la région 1 depuis la région 4.

Les coordonnées de chaque “passage” successifs aux frontières sont :

- X_0 est le point de départ de cette preuve, de coordonnées $(a, \frac{1}{2})$
- X_1 est sur la frontière entre les régions 1 et 2 et sur la droite Δ_1 ,
- X_2 à la frontière entre les régions 2 et 3 et sur la droite Δ_2 ,
- X_3 à la frontière entre 3 et 4 et sur la droite Δ_3 ,
- X_4 est, comme X_0 , sur l'intersection des régions 4 et 1 et sur la droite Δ_4 , il est aussi plus proche de l'équilibre de Nash que X_0 .

X_0 est d'abscisse 1 sur le dessin, ceci pour que X_4 soit aussi éloigné que possible de l'équilibre et que l'illustration soit parlante.

A partir d'un premier point $X_0 = (a, \frac{1}{2})$ avec $a \in]\frac{1}{3}, 1]$, nous voulons obtenir un point $X_4 = (b, \frac{1}{2})$ et montrer que $b \leq a$.

Proposition 4.3.3 *Dans notre jeu de tarification à deux joueurs, si les points X_0 et X_4 sont deux points de passages successifs dans la même région du plan et que E est l'équilibre de Nash, alors :*

$$\|EX_0\| \leq \|EX_4\|$$

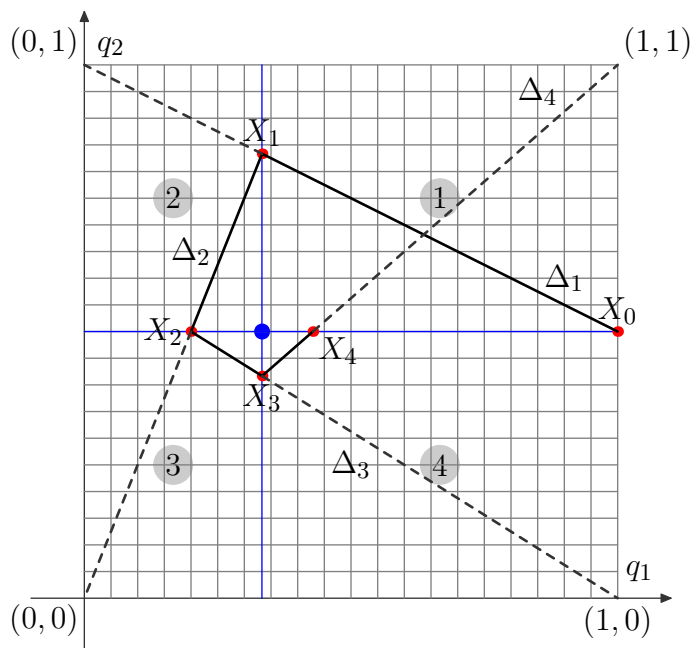


FIG. 4.17 – Cycle complet lors d'une partie

Preuve:

De X_0 à X_1

La droite Δ_1 est définie par les points X_0 et $(0, 1)$. Un de ces vecteurs directeurs est $v_1 = [-2a, 1]$ et l'ordonnée vaut 1 en 0. Alors Δ_1 est d'équation $y = -\frac{1}{2a}x + 1$, et $X_1 = (\frac{1}{3}, \frac{6a-1}{6a})$.

De X_1 à X_2

Nous cherchons maintenant l'équation de la droite Δ_2 , définie par les points X_1 et $(0, 0)$. Un de ces vecteurs directeurs est $v_2 = [-\frac{1}{3}, \frac{1-6a}{6a}]$. Alors Δ_2 est d'équation $y = 3 - \frac{1}{2a}x$, et $X_2 = (\frac{a}{6a-1}, \frac{1}{2})$.

De X_2 à X_3

La droite Δ_3 est définie par les points X_2 et $(1, 0)$. Un de ces vecteurs directeurs est $v_3 = [1 - \frac{a}{6a-1}, -\frac{1}{2}]$. et l'ordonnée vaut 0 en 1. Alors Δ_3 est d'équation $y = -\frac{6a-1}{10a-2}x + \frac{6a-1}{10a-2}$ et $X_3 = (\frac{1}{3}, \frac{6a-1}{15a-3})$.

De X_3 à X_4

Enfin, la droite Δ_4 est définie par les points X_3 et $(1, 1)$. Un de ces vecteurs directeurs est $v_4 = [\frac{2}{3}, 1 - \frac{6a-1}{15a-3}]$. et l'ordonnée vaut 1 en 1. Alors Δ_4 est d'équation $y = -\frac{9a-2}{10a-2}x + \frac{a}{10a-2}$ et $X_4 = (\frac{4a-1}{9a-2}, \frac{1}{2})$.

Nous avons exprimé X_4 en fonction de X_1 , il reste maintenant à montrer formellement que ce point X_4 est plus proche de l'équilibre de Nash que ne l'est le point X_1 .

Nous définissons pour cela la fonction $f(x) = \frac{4x-1}{9x-2} - x$ et $f'(x)$ la dérivée de f . Alors $f'(x) = \frac{1}{(9x-2)^2} - 1$. La fonction f est décroissante sur $] -\infty, \frac{1}{9}[$ et sur $]\frac{1}{3}, +\infty[$. Comme $f(\frac{1}{3}) = 0$, alors f est négative ou nulle sur $[\frac{1}{3}, 1]$. Ce qui complète la preuve : au cours d'un cycle complet dans les régions délimitées ici, le “point jeu” se rapproche de l'équilibre. \square

Les propositions (4.3.2) et (4.3.3) nous permettent d'établir le théorème suivant :

Théorème 4.3.4 *Pour un jeu de tarification à deux joueurs comme nous l'avons défini ici, la dynamique des joueurs fictifs est capable d'apprendre les équilibres de Nash.*

4.3.5 Conclusion sur la méthode des joueurs fictifs

Nous avons étudié la méthode des joueurs fictifs dans le cas où l'on utilise le mode “Déterministe” pour les envois de messages et où l'on obtient un équilibre de Nash mixte. Voir en annexe 4, les matrices de gains correspondant à chacune des trois méthodes proposées précédemment dans des jeux à deux joueurs et deux, trois et quatre sources. Les résultats obtenus sont rapportés dans les tableaux 4.18, 4.19 et 4.20.

| Si chemins de mêmes coûts | Nature des équilibres | Prix restants |
|---------------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| “Déterministe” | EN mixte | 2 et 3 pour les deux joueurs |
| “Equiprobable” | deux EN purs dont 1 strict | 2 ou 3 pour les deux joueurs |
| “Plus court” | état stable non EN | 4 pour les deux joueurs |

FIG. 4.18 – Récapitulatif du jeu à deux joueurs, deux sources

Remarque: Ce qui est noté “état stable” dans les tableaux est un état qui n'apparaît pas comme équilibre de Nash pur dans la matrice de gains. Pourtant, les joueurs se stabilisent sur cet état avec le temps car il maximise leur espérance de gains.

| Si chemins de mêmes coûts | Nature des équilibres | Prix restants |
|---------------------------|-------------------------|--|
| “Déterministe” | EN mixte | 3 et 4 pour les deux joueurs |
| “Equiprobable” | 3 EN purs dont 1 strict | 2, 3 ou 4 pour les deux joueurs |
| “Plus court” | 1 EN pur | 4 pour les deux joueurs |

FIG. 4.19 – Récapitulatif du jeu à deux joueurs, trois sources

| Si chemins de mêmes coûts | Nature des équilibres | Prix restants |
|---------------------------|-------------------------|--|
| “Déterministe” | EN mixte | 4 et 5 pour les deux joueurs |
| “Equiprobable” | 3 EN purs dont 1 strict | 3, 4 ou 5 pour les deux joueurs |
| “Plus court” | état stable non EN | 7 pour les deux joueurs |

FIG. 4.20 – Récapitulatif du jeu à deux joueurs, quatre sources

4.3.6 Généralisation de la méthode des joueurs fictifs pour le jeu à m sources

Pour un jeu de tarification comme décrit ici : à deux joueurs et m sources, l’algorithme des joueurs fictifs est une méthode qui permet de stabiliser un tel système. Nous pouvons vérifier facilement que si les sources sont de poids différents (si elles n’émettent pas toutes le même nombre de messages), la méthode des joueurs fictifs converge vers un état stable quelle que soit la façon d’aiguiller les messages de mêmes coûts.

Nous allons maintenant généraliser les résultats présentés ici à une structure en anneau à deux joueurs et m sources comme celle décrite au début de ce chapitre (voir figure 4.1) selon le mode “déterministe” et caractériser les équilibres de Nash mixtes que l’on peut déterminer avec la méthode des joueurs fictifs.

Théorème 4.3.5 *Dans un jeu de tarification à deux joueurs et m sources en mode “déterministe” comme défini plus tôt, la dynamique des joueurs fictifs permet aux joueurs d’atteindre un équilibre de Nash mixte. A cet équilibre, les joueurs joueront tous les deux les prix m et $m + 1$.*

La preuve de cette proposition n’est pas très compliquée mais particulièrement répétitive car il faut vérifier de nombreuses inégalités. Nous donnons l’idée générale ici.

Preuve: Quel que soit le nombre de sources m , les deux joueurs ont initialement des stratégies dominées, celles-ci disparaissent avec l’utilisation des joueurs fictifs. Ainsi sur la figure

4.21 par exemple, nous pouvons vérifier que pour J_1 , demander le prix 2 lui rapportera toujours plus que de demander 1, nous pouvons faire la même observation pour J_2 . Après cela, les prix 2 sont des stratégies dominés pour les deux joueurs et ainsi de suite.

Si m est pair, les stratégies de prix restantes sont m et $m + 1$ pour les deux joueurs¹⁰ et alors la succession des stratégies des joueurs se fera comme indiqué en figure 4.21.

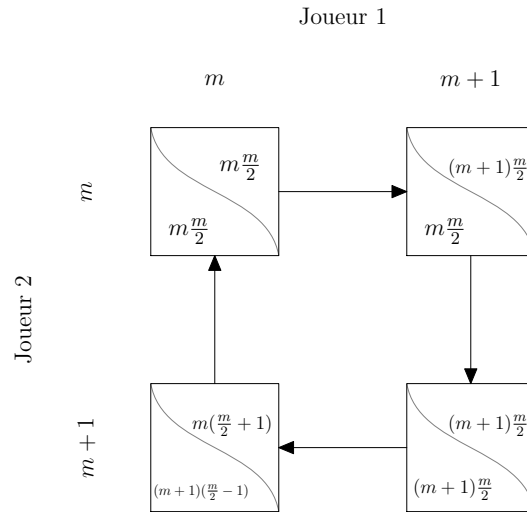


FIG. 4.21 – Diagramme de transition restreint aux stratégies qui font partie de l'équilibre dans un jeu de tarification à deux joueurs et un nombre pair de sources m

Propriétés des états possibles restants à l'équilibre :

1. Le gain maximal de J_1 lorsque J_2 joue le prix m vaut $(m+1) \frac{m}{2}$ qui correspond au prix $m+1$ pour J_1 .
2. Le gain maximal de J_2 lorsque J_1 joue le prix $m+1$ vaut $(m+1) \frac{m}{2}$ qui correspond au prix $m+1$ pour J_2 .
3. Le gain maximal de J_1 lorsque J_2 joue le prix $m+1$ vaut $m(\frac{m}{2} + 1)$ qui correspond au prix m pour J_1 .
4. Le gain maximal de J_2 lorsque J_1 joue le prix m vaut $m \frac{m}{2}$ qui correspond au prix m pour J_2 .

Pour chaque combinaison de stratégies des deux joueurs, le gain de chacun est de la forme

¹⁰Vérifiable simplement par élimination des stratégies dominées

gain = prix demandé \times fréquentation.

Nous allons montrer le premier point de la liste qui précède. Supposons que le J_2 demande m , il faut montrer que le gain de J_1 est maximisé s'il demande $m + 1$.

Si J_1 demande le prix $c < m + 1$, il gagne $g_1 = d_1(c, m) = c(\frac{m}{2} + x)$

Si J_1 demande le prix $c > m + 1$, il gagne $g_1 = d_1(c, m) = c(\frac{m}{2} - x)$

avec x un entier $\in [0, \frac{m}{2}]$ tel que

$$x = \begin{cases} x = \frac{m-c}{2} & \text{si } c \text{ est pair} \\ x = \frac{m+1-c}{2} & \text{si } c \text{ est impair.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Si c est pair alors :

– $\forall c < m$:

$$c(\frac{m}{2} + x) < (m + 1)\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow \text{D'après l'équation (4.4), } (m - 2x)(\frac{m}{2} + x) < (m + 1)\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow -2x < \frac{m}{2}$$

Ce qui est bien toujours vérifié.

– $\forall c > m$:

$$c(\frac{m}{2} - x) < (m + 1)\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow \text{D'après l'équation (4.4), } (m - 2x)(\frac{m}{2} - x) < (m + 1)\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow 2x(x - m) < \frac{m}{2}$$

Ce qui est bien toujours vérifié ($x - m < 0$).

si c est impair alors

– $\forall c < m$:

$$c(\frac{m}{2} + x) < (m + 1)\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow \text{D'après l'équation (4.4), } (m + 1 - 2x)(\frac{m}{2} + x) < (m + 1)\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow x - 2x^2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < x$$

Ce qui est bien toujours vérifié.

– $\forall c > m$:

$$c(\frac{m}{2} - x) < (m + 1)\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow \text{D'après l'équation (4.4), } (m + 1 - 2x)(\frac{m}{2} - x) < (m + 1)\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 < 2m$$

Ce qui est bien toujours vérifié.

Les trois autres propriétés énoncées plus haut se montrent simplement de façon similaire, nous ne les détaillerons pas davantage ici.

Si m est impair :

les stratégies de prix restantes sont m et $m + 1$ pour les deux joueurs¹¹ et alors la succession des stratégies des joueurs se fera comme indiqué en figure 4.22.

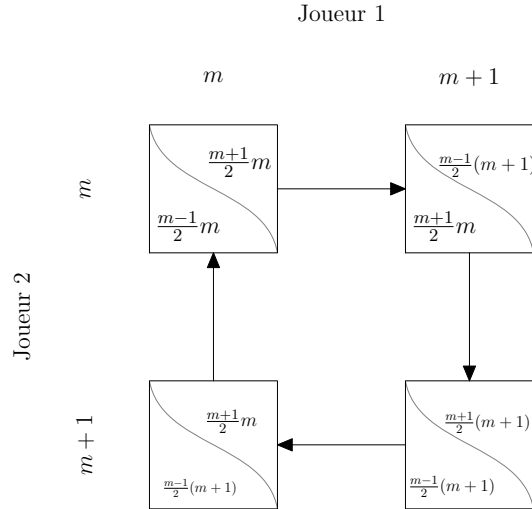


FIG. 4.22 – Diagramme de transition restreint aux stratégies qui font partie de l'équilibre dans un jeu de tarification à deux joueurs et un nombre impair de sources, m

Suivant le même raisonnement que pour le cas où m est pair, nous arrivons à la conclusion que les deux prix conservés à l'équilibre sont bien m et $m + 1$. D'après le théorème (4.3.4), la dynamique des joueurs fictifs détermine bien l'équilibre de Nash du jeu, ce qui complète la preuve. \square

Pour conclure ce chapitre nous allons montrer qu'il n'est pas possible de généraliser cette méthode de preuve au cas d'un jeu de tarification à trois joueurs.

4.4 Limitation des joueurs fictifs

Dans un jeu de tarification à trois joueurs toujours en utilisant le mode "Déterministe". Il est là encore possible de déterminer les éventuels équilibres de Nash simplement par calcul. Remarquons que le jeu modifié ne peut plus avoir une structure en anneau (voir figure 4.23).

¹¹Vérifiable simplement par élimination des stratégies dominées.

Il y a trois équilibres de Nash mixtes, tous offrent la même espérance de gains aux trois joueurs respectivement. Pourtant, une étude des huit situations de départ possibles et les simulations réalisées sur ce jeu montrent que les joueurs convergent toujours vers le même de ces trois états. La preuve géométrique utilisée sur le jeu à deux joueurs n'est pas transposable au jeu à trois joueurs.

La raison à cela est que dans le cas à deux joueurs, une région est forcément adjacente à deux autres : graphiquement elles forment quatre rectangles qui ont un coin en commun (l'équilibre) et qui à eux tous forment le plan $[0, 1] \times [0, 1]$, l'action d'un joueur est déterminée par une inégalité à une seule inconnue. C'est ce qui nous permet d'écrire le théorème (4.3.2). Dans le cas à trois joueurs, l'action d'un joueur est souvent déterminée par une inégalité à deux inconnues. Les régions de l'espace $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ prennent différentes formes et l'on ne peut plus déterminer l'emplacement du prochain point d'une suite de points représentant l'évolution du jeu.

4.4.1 Evolution du jeu

Comme représenté en figure 4.23, les trois joueurs : J_1 , J_2 et J_3 se partagent trois sources de trafic. Nous supposons qu'ils peuvent choisir un prix entre 1 et 3 (par l'élimination des stratégies dominées sur une fourchette de prix plus large, nous remarquons que les prix supérieurs à trois disparaissent).

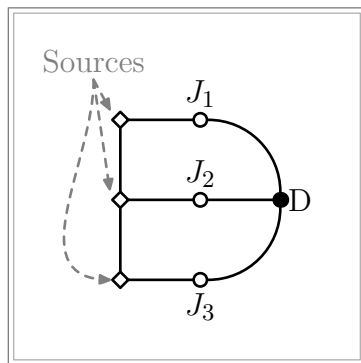


FIG. 4.23 – Jeu de tarification à trois joueurs et trois sources

Après élimination des stratégies dominées, les joueurs conservent chacun deux prix et ce ne sont pas les mêmes pour tout le monde. J_1 demande soit 2 soit 3 et les deux autres joueurs, soit 1 soit 2. Les gains des joueurs sont rapportés dans le tableau en figure 4.24.

| J_3 demande 1 | | | | J_3 demande 2 | | | | J_3 demande 3 | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|----------------------|-----|-----|-----|----------------------|-----|-----|-----|
| $J_2 \backslash J_1$ | 1 | 2 | 3 | $J_2 \backslash J_1$ | 1 | 2 | 3 | $J_2 \backslash J_1$ | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| | 1 1 | 1 1 | 2 1 | | 2 0 | 2 0 | 3 0 | | 2 0 | 2 0 | 3 0 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| | 0 1 | 2 1 | 2 1 | | 0 2 | 2 2 | 2 2 | | 0 0 | 4 0 | 4 0 |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 |
| | 0 1 | 0 2 | 0 2 | | 0 2 | 0 2 | 3 2 | | 0 0 | 0 3 | 3 3 |

FIG. 4.24 – Tableaux de gains pour un jeu à trois joueurs, trois sources et les prix 1, 2, 3

Remarque: Ici (comme en Fig. 4.25) les cases se lisent de la façon suivante : chiffre en haut à droite : gain de J_1 , en bas à gauche : gain de J_2 et en bas à droite : gain de J_3 .

4.4.2 Application des joueurs fictifs

Le comportement des joueurs change ici encore par cycles. Les trois vont jouer un certain prix tant que l'un d'eux n'a pas observé que la stratégie des deux autres lui est devenu défavorable, alors il changera pour demander l'autre prix, puis un autre joueur s'apercevra par la suite qu'il est en mauvaise posture, il changera de prix à son tour et ainsi de suite à l'infini. La figure 4.25 donne le diagramme d'évolution des stratégies des joueurs où nous pouvons remarquer un cycle.

Nous procédons comme pour les jeux à deux joueurs en déterminant à la main s'il existe un équilibre de Nash. Nous écrivons simplement q_1 la probabilité que le joueur J_1 demande 2, q_2 la probabilité que J_2 demande 1 et q_3 la probabilité que J_3 demande 1. L'espérance de gain de J_i est notée U_i (pour $i \in \{1, 2, 3\}$) au lieu de $U_i(Q_1, Q_2, Q_3)$ afin d'alléger les lignes qui vont suivre.

- Pour le joueur 1 : $U_{1,2} = 2$ et $U_{1,3} = 3(1 - q_2)$.
- Pour le joueur 2 : $U_{2,1} = q_1 q_3 + 2(1 - q_1)q_3 + 2q_1(1 - q_3) + 3(1 - q_1)(1 - q_3)$ et $U_{2,2} = 2$.
- Pour le joueur 3 : $U_{3,1} = 1$ et $U_{3,2} = 2(1 - q_2)$.

En résolvant ce système d'équation, nous déterminons les situations qui contentent chacun des joueurs et trouvons les trois équilibres de Nash suivants :

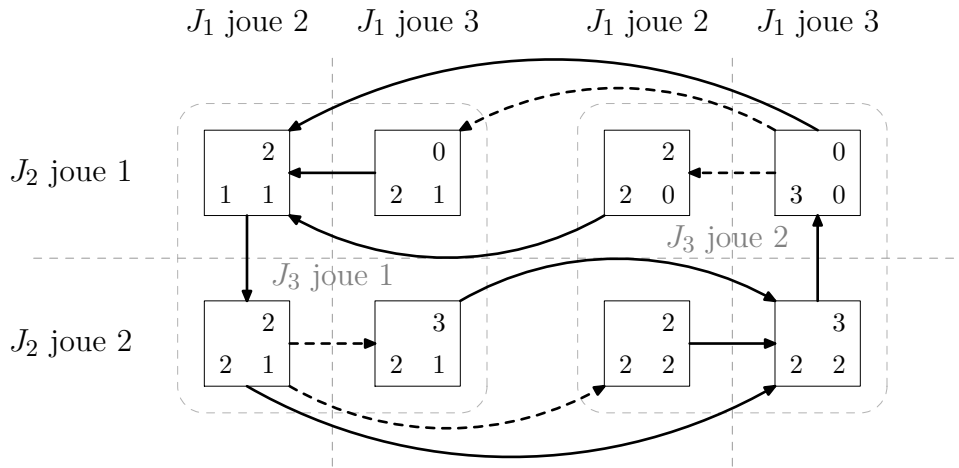


FIG. 4.25 – Evolution des stratégies selon les meilleures réponses des joueurs - les transitions fléchées en pointillés, qui n'apparaîtraient pas avec la dynamique des joueurs myopes, indiquent les états du jeu qui ont plusieurs états successeurs possibles

- $\mathcal{Q}_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1)$,
- $\mathcal{Q}_2^* = (1, \frac{1}{2}, 0)$,
- $\mathcal{Q}_3^* = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Les espérances de gains pour chacun des joueurs sont rigoureusement les mêmes dans chacun de ces trois états d'équilibre : $U_1 = 2$, $U_2 = \frac{3}{2}$ et $U_3 = 1$.

A priori, ces observations laissent à penser que le jeu se stabilisera dans l'un de ces trois états qui correspondent tous au même "rendement" pour les trois joueurs mais pourtant, comme nous l'avons dit en introduisant ce problème, le même de ces trois équilibres de Nash est toujours atteint et il s'agit de \mathcal{Q}_2^* .

4.4.3 Résultats de simulations

La figure 4.26 donne l'évolution des stratégies des trois joueurs (c'est-à-dire $q_{1,2}$, $q_{2,1}$ et $q_{3,1}$) pour un cas initial sur les huit possibles qui tend vers l'état \mathcal{Q}_2^* . La figure 4.27 donne la distance entre l'équilibre de Nash \mathcal{Q}_2^* et $Q(t)$ le jeu en fonction des parties écoulées.

Nous pouvons observer, sur la figure 4.27, que la même mécanique est à l'œuvre que dans le cas à deux joueurs, c'est-à-dire un rapprochement par cycle et des changements de stratégies successifs de la part des trois joueurs, mais la preuve géométrique de convergence n'est pas adaptable.

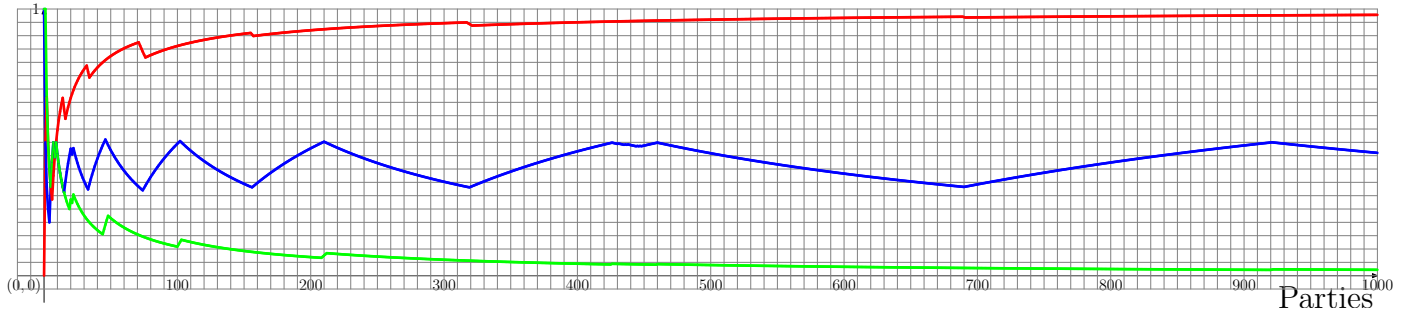


FIG. 4.26 – Evolution des stratégies des joueurs en fonction du temps

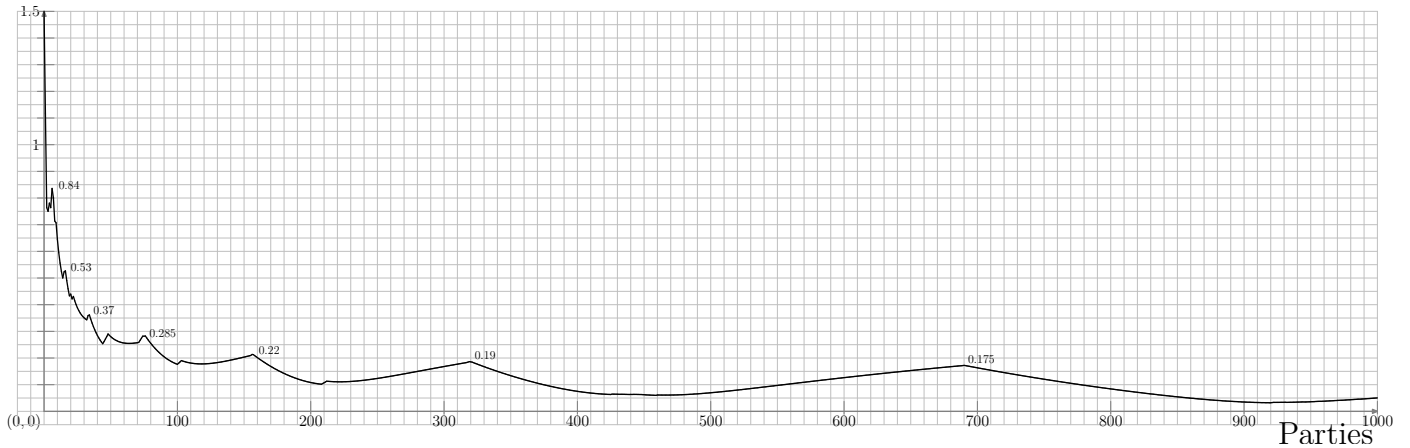


FIG. 4.27 – Distance à l'équilibre de Nash en fonction du temps

4.5 Conclusion

Nous avons montré que la dynamique des joueurs fictifs permettait d'apprendre les équilibres de Nash mixtes dans notre cas particulier de jeux de tarification à deux joueurs, pour un nombre de sources quelconque. Robinson, dans [60], avait prouvé un résultat similaire restreint au cas d'un jeu à somme nulle à deux joueurs. Nachbar a montré plus récemment que la dynamique convergerait dans le cas d'un jeu séquentiel solvable par élimination des stratégies strictement dominées [48]. Nous avons donc étendu ces résultats à notre jeu. La méthode des joueurs fictifs ne garanti pas d'apprendre les meilleurs équilibres de Nash dans un jeu à trois joueurs ou plus car l'exploration de l'espace de stratégie peut être extrêmement limitée et le jeu peut alors converger vers un attracteur local.

Chapitre 5

Etat de l'art

Hey, I'm a man of logic, I'm a man of planning. I consider every detail, I factor in every possibility. Then I flip a coin.

(Ryan O'Reily)

De nombreuses études sur le routage portent sur des situations d'équilibres. Ceux-ci sont principalement de trois types : social (au mieux pour la communauté), de Nash [49], ou de Wardrop [76]. Les recherches portent sur les conditions d'existence de tels équilibres, sur les stratégies envisageables pour les atteindre et, lorsque c'est possible, sur la complexité de la méthode. Pour représenter un problème, nous définissons un système dans un état donné, des joueurs et un objectif à atteindre (global et/ ou pour chacun des joueurs). Ensuite, nous cherchons des méthodes d'apprentissage pour parvenir à un état stable, un équilibre, en un nombre minimum de pas algorithmiques.

Les problèmes d'ordonnancement (*scheduling*) sont proches des problèmes de routage. C'est en tout cas dans l'optique de l'existence d'un fort lien entre les deux que ces travaux de thèse furent entamés ; en étudiant en particulier le problème classique de la répartition d'un nombre fini de tâches informatiques sur un nombre fini de serveurs dans le but d'optimiser leur exécution. Le lecteur peut consulter [42] pour une présentation complète sur l'ordonnancement.

Il existe deux classes de jeux bien établies et importantes dans la littérature : les jeux de congestion (Rosenthal 1973, voir [61]) et les jeux de potentiel (Monderer & Shapley 1996

[47]). De nombreux articles à la frontière entre l'ordonnancement et le routage [2, 9, 1, 14, 46] basés sur des jeux de potentiel ont guidé et influencé nos travaux de recherches. D'autres travaux, dans la continuité de ceux de Beckmann et al. [8] sur le trafic routier (comme Nash et Wardrop), utilisent la notion de la fonction de potentiel unique et simplement définie dont les minima correspondent à des situations équilibrées au sens de Wardrop [76]. De tels jeux de routage, voir par exemple [19] ou [18] ne s'appuient pas sur les jeux de potentiel de Shapley et Monderer. Le lecteur peut également se reporter à [64], pour plus d'explications sur la fonction de potentiel et son utilisation pour évaluer des algorithmes et à [73] pour une collection de résultats récents sur les problèmes de routage et d'ordonnancement étudiés en tant que jeux.

Dans ce chapitre nous allons décrire les deux classes de jeux importantes mentionnées plus haut, examiner quelques résultats connus d'ordonnancement puis dériver progressivement vers un modèle de routage. Enfin nous allons introduire la fonction de potentiel de Beckmann et al. et son utilisation. Le lecteur peut se reporter à [33] pour une discussion sur les équivalences d'équilibres et les similitudes entre différentes classes de jeux.

5.1 Jeux de congestion et jeux de potentiel

Rosenthal décrit une classe de jeux pour lesquels il y a toujours un équilibre de Nash en stratégies pures [61]. Il ne les appelle pas lui-même "jeux de congestion", cette appellation fut proposée pour la première fois par Shapley et Monderer en 1996 lorsqu'ils ont eux-mêmes défini les jeux de potentiels [47].

5.1.1 Les jeux de congestion

Définition 5.1.1 *Un jeu de congestion $(N, M, (A_i)_{i \in N}, (\ell_j)_{j \in M})$ est défini comme suit :*

- $N = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des joueurs,
- $M = \{1, \dots, m\}$ l'ensemble des ressources,
- $\forall i \in N, A_i$ est l'ensemble de stratégies du joueur i de cardinalité m_i .
- Pour toute ressource $j \in M, \ell_j$ est un vecteur dans \mathbb{R}^n dont le x^{eme} élément indique le prix de la ressource quand x joueurs l'utilisent¹.

Pour tout joueur $i, un élément $a_i \in A_i$ correspond à l'utilisation d'un sous-ensemble non vide de ressources, c'est ce que l'on appelle une stratégie pure ou une action.$

¹On pourrait également définir $\ell_k(x_k)$ comme une fonction discrète ou une suite finie.

Soit l'ensemble de stratégies du jeu $A = \bigcup_{i \in N} A_i$ comprenant toutes les combinaisons possibles d'actions de tous les joueurs. Pour tout *profil de jeu* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et pour toute ressource j , nous notons $n_j(a)$ le nombre de joueurs qui utilisent la ressource j . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le coût du joueur i (coût d'utilisation de la ou des ressources sélectionnées) est donné par :

$$c_i(a) = \sum_{j \in a_i} \ell_j(n_j(a)). \quad (5.1)$$

Remarque: Tous les joueurs sont égaux dans le sens où ils ont tous la même importance ou le même *poids*. Peu importe qui utilise telle ressource, seul compte le nombre d'utilisateurs. C'est une caractéristique importante des jeux de congestion. Nous disons que les joueurs sont unitaires.

Théorème 5.1.2 ([61]) *Tout jeu de congestion avec un nombre de joueurs et un nombre de ressources finis a au moins un équilibre de Nash pur.*

Preuve: La preuve suppose que les joueurs ne jouent pas simultanément, un seul à la fois est autorisé à changer de stratégie. Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un profil du jeu comme défini plus haut.

Soit $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ que Rosenthal appelle la *fonction objectif* définie par :

$$\Phi(a) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j(a)} \ell_j(k). \quad (5.2)$$

Supposons que c'est au tour du joueur i de jouer, celui-ci passe de la stratégie a_i à a'_i . Soit Δ_{c_i} la différence de coût qu'il observe entre ces deux situations. Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ et $a' = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Nous pouvons écrire :

$$\Delta_{c_i} = c_i(a') - c_i(a) = \sum_{j \in a'_i - a_i} \ell_j(n_j(a) + 1) - \sum_{j \in a_i - a'_i} \ell_j(n_j(a')).$$

Considérons maintenant la valeur de la fonction objectif dans les deux cas, soit Δ_Φ la différence entre ces deux valeurs. Même principe que précédemment, un seul joueur change de stratégie elle vaut :

$$\Delta_{\Phi} = \Phi(a') - \Phi(a) = \sum_{j \in a'_i - a_i} \sum_{k=1}^{n_j(a)+1} \ell_j(k) + \sum_{j \in a_i - a'_i} \sum_{k=1}^{n_j(a')} \ell_j(k) - \sum_{j \in a_i - a'_i} \sum_{k=1}^{n_j(a')-1} \ell_j(k) - \sum_{j \in a'_i - a_i} \sum_{k=1}^{n_j(a)} \ell_j(k).$$

$$\Delta_{\Phi} = \sum_{j \in a'_i - a_i} \ell_j(n_j(a) + 1) - \sum_{j \in a_i - a'_i} \ell_j(n_j(a')).$$

Nous remarquons que $\Delta_{c_i} = \Delta_{\Phi}$. Comme l'ensemble de définition de la fonction Φ est constitué d'un ensemble fini de valeurs, elle a un minimum.

A tout instant, la valeur de la fonction Φ est calculable, s'il existe un joueur qui, en jouant une autre action, peut entraîner une diminution de cette valeur, alors il est autorisé à effectuer cette modification. Nous répétons ce processus jusqu'à ce qu'aucun joueur ne puisse plus diminuer son coût unilatéralement, dès que ce n'est plus possible, nous avons atteint un équilibre de Nash. \square

Remarque: Nous allons utiliser par la suite un artefact de notation classique en théorie des jeux qui consiste à écrire $a = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, Z, a_{i+1}, \dots, a_n)$ plus simplement en (a_{-i}, Z) . Pour tout objet a de type vecteur, a_{-i} indique donc l'ensemble de ses composantes hormis la $i^{\text{ième}}$, nous spécifions ensuite la valeur à cet emplacement.

5.1.2 Les jeux de potentiel

Shapley et Monderer en 1996 définissent les jeux de potentiel comme des jeux dans lesquels l'incitation de tous les joueurs à changer de stratégie peut être exprimée par une fonction globale. Une telle fonction est souvent appelée fonction de potentiel. Les deux auteurs ont défini deux sous-classes de jeux de potentiels : les jeux de potentiels ordinaux et cardinaux.

Dans les jeux de potentiel cardinaux, la différence de coût (ou symétriquement, de gain) pour un joueur donné entre deux états donnés du jeu ou seule sa stratégie est différente doit avoir la même valeur que la différence entre les deux valeurs de la fonction de potentiel de ces deux états. Ceci correspond à l'égalité $\Delta_{c_i} = \Delta_{\Phi}$ que nous avons précédemment dans les jeux de congestion. Nous parlons de fonction de potentiel *exacte* si elle correspond à la fonction objectif de Rosenthal. Un jeu de congestion est donc un jeu de potentiel. Dans les jeux de potentiel ordinaux, seul les signes des différences doivent être les mêmes. Le

qualificatif “cardinal” tend à disparaître du vocabulaire, nous parlons plutôt de *exact* ou *weighted potential games*, en Anglais, désormais. Nous allons donner les trois définitions ici.

Définition 5.1.3 *D’après la définition proposée dans [47], un jeu de potentiel ordinal est un jeu de congestion pour lequel est définie une fonction, dite de potentiel $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ici, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall a_i, a'_i \in A_i$, nous notons $a = (a_{-i}, a_i)$ et $a' = (a_{-i}, a'_i)$ deux profils différents du jeu entre lesquels seuls le joueur i modifie sa stratégie, la fonction Φ a la propriété suivante :*

$$\text{signe}(\Phi(a) - \Phi(a')) = \text{signe}(c_i(a) - c_i(a')) \quad (5.3)$$

Il s’agit d’un jeu de potentiel cardinal (ou à fonction de potentiel exacte) si la fonction Φ a la propriété suivante :

$$\Phi(a) - \Phi(a') = c_i(a) - c_i(a') \quad (5.4)$$

Enfin, nous parlons de weighted potential games si l’égalité est pondérée par le poids du joueur en question, soit :

$$\Phi(a) - \Phi(a') = w_i(c_i(a) - c_i(a')) \quad (5.5)$$

Pour un *survey* sur les résultats récents concernant les jeux de potentiels exacts dans lesquels les joueurs jouent de façon simultanée, voir [75].

5.2 Dynamique d’un jeu d’ordonnement

Nous allons maintenant définir formellement un modèle d’ordonnement dans lequel un joueur différent est responsable du sort de chaque tâche et il cherche à minimiser son temps d’exécution. Ensuite nous précisons les notions d’équilibre de Nash et d’équilibre social.

5.2.1 Modèle

Soit un jeu d’ordonnement constitué d’un ensemble de m machines, noté M et un ensemble de n tâches à exécuter noté N . $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, w_i est la taille² de la tâche i . Le jeu

²Ce qui correspond par exemple à son temps d’exécution, une demande de mémoire ou de bande passante etc.

est joué de façon non coopérative, chacun ne cherche que son propre intérêt, nous parlons de joueurs égoïstes.

A chaque machine $j \in \{1, \dots, m\}$ correspond une fonction de latence notée $l_j : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. En fonction de la charge λ_j de la machine j , elle permet d'exprimer le temps de latence $l_j(\lambda_j)$. La charge d'une machine est la somme des tailles de toutes les tâches qui sont exécutées sur cette machine, soit

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}, \quad \lambda_j = \sum_{i=1}^n w_i \times \mathbf{1}_{a_i=j}$$

ou $\mathbf{1}_{a_i=j}$ vaut 1 si $a_i = j$, 0 sinon. Toutes les tâches qui choisissent la machine m observent le même temps de latence $l_j(\lambda_j)$.

Tout joueur i est caractérisé par un vecteur de stratégies noté q_i de dimension m_i , la $k^{\text{ième}}$ composante du vecteur q_i , soit $q_{i,k}$, indique la probabilité pour le joueur i de choisir la $k^{\text{ième}}$ machine. Une collection des choix de tous les joueurs, sous la forme d'un vecteur $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est appelée une affectation.

5.2.2 Equilibres dans les jeux d'ordonnement

Nous allons illustrer ce qu'est un équilibre de Nash dans un jeu d'ordonnement simple. Le diagramme en figure 5.1 représente cinq tâches, elles-mêmes réparties horizontalement sur deux serveurs. La taille d'une tâche, sur la figure, est indiquée par sa largeur, ainsi les tâches 1, 2, 3 et 4 sont respectivement de tailles 1, 2, 3 et 4, la tâche 5 est de taille 1. La fonction de latence des deux serveurs est la fonction identité.

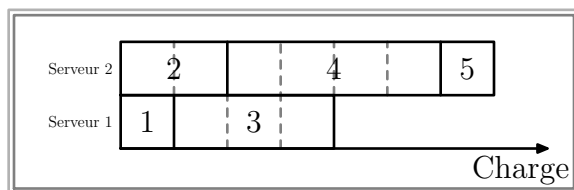


FIG. 5.1 – Un exemple d'ordonnement entre cinq tâches sur deux serveurs

Sur le cas représenté dans la figure 5.1, nous pouvons lire les temps de latence des deux serveurs :

- Sur le serveur 1, une latence de 4 soit $c_1(a) = c_3(a) = l_1(4) = 4$ et

- Sur le serveur 2, une latence de 7 soit $c_2(a) = c_4(a) = c_5(a) = l_2(7) = 7$.

La configuration représentée en figure 5.1 ne correspond pas à un état d'équilibre car au moins une des tâches peut changer de stratégie et diminuer son coût de latence, il s'agit de la tâche 5.

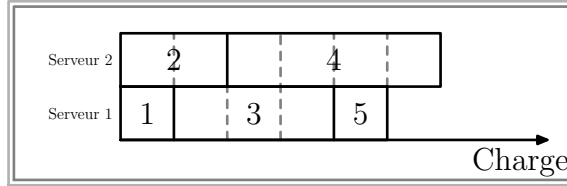


FIG. 5.2 – Une affectation qui correspond à un équilibre de Nash

Si celle-ci choisit l'autre serveur pour son exécution, la situation résultante est décrite en figure 5.2, cette fois il n'est possible pour aucune des tâches de diminuer son temps de latence. C'est donc un équilibre de Nash.

Définition 5.2.1 Une affectation $a^* = \{a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*\}$ des n tâches sur les m serveurs est un équilibre de Nash si \forall joueur $i \in \{1, \dots, n\}$, la relation suivante est vraie $\forall a'_i \in A_i$:

$$l_{a_i^*}(\lambda_{a_i^*}) \leq l_{a'_i}(\lambda_{a'_i} + w_i), \quad (5.6)$$

autrement dit, aucune tâche ne peut diminuer son coût en changeant de stratégie unilatéralement.

Définition 5.2.2 Un jeu d'ordonnancement dans lequel une tâche, ou plus généralement un processus, peut être répartie sur plusieurs serveurs est dit **non atomique** (la définition d'un équilibre de Nash dans un tel jeu est alors légèrement différente). Sinon il est **atomique**.

5.3 De l'ordonnancement au routage

Il n'existe pas de différenciation officielle entre routage et ordonnancement mais il est bien souvent possible de hiérarchiser la complexité entre deux problèmes rencontrés. Nous admettons que la différence fondamentale réside dans le concept de commodité (voir section 5.4.1).

Proposition 5.3.1

- Un jeu de routage est un jeu dans lequel est défini une certaine notion de flux qui transite dans un réseau et dans lequel les joueurs n'ont pas nécessairement même source et même destination.
- Un jeu d'ordonnancement est un jeu similaire à celui de la répartition d'un ensemble fini de tâches sur un ensemble fini de machines. Ce qui est transposable en un jeu de routage dans lequel tous les joueurs (communications/ tâches ou autre) ont même source et même destination³.

La figure 5.3 représente un réseau comprenant deux sommets : une source S et une destination T ainsi que m liens entre eux (allant de S vers T). Nous remarquons que nous pourrions interchanger les représentations des figures 5.1, 5.2 et 5.3 (ainsi une tâche “est au point S ” lorsqu'elle n'a pas encore choisi de machine et au point T après exécution, les liens seraient les serveurs).

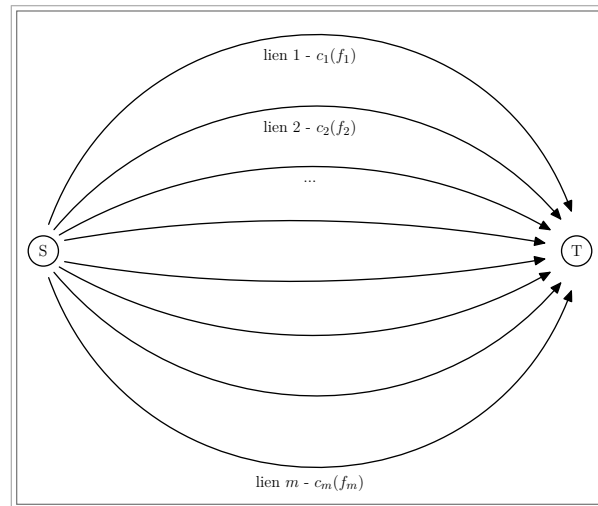


FIG. 5.3 – Un réseau à m liens parallèles

Le cas du problème de routage sur m liens parallèles a été très étudié. Even Dar et al. dans [22] étudient le temps de convergence d'un algorithme de meilleure réponse vers un équilibre de Nash pur dans un problème d'ordonnancement à information complète joué par des joueurs égoïstes. Ils étudient plusieurs modèles (machines identiques, machines reliées

³On parle alors de jeu de routage à une seule *commodité* ou symétrique, voir section 5.4.

ou contraintes selon les joueurs) et évaluent plusieurs politiques d'ordonnement (à savoir *RANDOM*, *Max weight job*, *Min weight job*, *FIFO*, *Max load machines*). Ils remarquent que les résultats sont très différents selon les poids des joueurs en particulier. Ils discernent les cas suivants : poids arbitraires, poids entiers, K poids distincts, et poids identiques.

Nous savons également que :

Théorème 5.3.2 ([28]) *Dans un jeu de routage à m liens parallèles il existe toujours un équilibre de Nash en stratégies pures.*

La preuve ressemble beaucoup à celle du théorème 4.1.2, adaptée à un jeu de routage, voir [28].

De nombreux algorithmes d'apprentissage d'équilibre de Nash développés pour des problèmes d'ordonnement supposent que les joueurs jouent chacun leur tour en tentant de diminuer leur coût. Ce type de dynamique de jeu est souvent appelée *Elementary StepWise System* ou ESWS. Voir par exemple [31, 43, 51].

En ce qui concerne les modèles séquentiels, nous pouvons citer [23], où différentes tâches peuvent migrer d'une machine surchargée à une machine moins chargée. Even-dar et al. proposent un algorithme qui termine en $O(\log \log n + \log m)$ parties.

Dans [9], les auteurs présentent un algorithme d'apprentissage distribué pour le cas où les joueurs sont tous de poids identiques et les machines sont identiques qui termine en $O(\log \log n + m^4)$ parties.

Enfin, dans [2] les auteurs caractérisent un flot à l'équilibre de Nash mixte⁴ dans le cas d'un problème de répartition de charges avec n tâches entre un nombre fini m de liens parallèles dans le cas où les fonctions de coûts (ou de latence) sont de la forme $l_k(\lambda_k) = \alpha_k \lambda_k$. Cet équilibre est tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall j \in \{1, \dots, m\}$

$$q_{i,j} = \left(\frac{1}{\alpha_j} / \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{\alpha_\ell} \right) w_i \quad (5.7)$$

5.4 Inefficacité des équilibres

Même dans un jeu qui paraît simple, un comportement égoïste de la part des joueurs peut conduire à des situations objectivement (ou socialement) très inefficaces. Un exemple

⁴Notons que c'est similaire à du routage non atomique en stratégie pure.

emblématique de ceci est le fameux dilemme du prisonnier [58], dans lequel les comportements stratégiques de deux captifs séparés les entraînent vers la pire des issues possibles.

De nombreux travaux récents ont cherché à quantifier l'inefficacité des comportements égoïstes et des équilibres qu'ils engendrent. Koutsoupas et Papadimitriou ont introduit ce problème en définissant le prix de l'anarchie [38]. Ils présupposent simplement un environnement stratégique (un jeu), une fonction de gain pour chaque joueur, un concept d'équilibre et une fonction objectif à valeurs réelles, non négative, définie sur l'ensemble des issues possibles du jeu. Le prix de l'anarchie [38, 52] est défini comme le rapport entre la valeur de la fonction objectif dans un état d'équilibre et celle de la situation optimale.

Si le prix de l'anarchie d'un jeu vaut 1, alors les équilibres de ce jeu sont pleinement efficaces. Plus généralement, borner le prix de l'anarchie d'une classe de jeux offre une garantie sur les "pires" équilibres.

Le prix de l'anarchie est directement inspiré d'autres notions répandues d'approximation en informatique théorique [38]. Un exemple est celui de la qualité d'approximation d'une heuristique pour un problème d'optimisation (typiquement NP difficile), défini comme le *max* des rapports entre la valeur de la fonction objectif de la solution donnée par l'heuristique en question et celle d'une solution optimale. Alors que le rapport d'approximation mesure la pire perte possible d'efficacité des solutions en fonction d'une puissance de calcul insuffisante, le prix de l'anarchie mesure la pire perte envisageable qui serait dûe à l'impossibilité d'organiser les actions individuelles des *agents*, ou joueurs, égoïstes. Les recherches récentes sur le prix de l'anarchie sont motivées par des problèmes d'optimisation qui apparaissent naturellement avec la mise en place et la maintenance de grands réseaux comme Internet et leur utilisation par un grand nombre d'utilisateurs égoïstes.

Lorsqu'un jeu admet une fonction de potentiel, ceci a généralement des conséquences sur l'existence, l'unicité et l'efficacité des équilibres. Par exemple, supposons qu'un jeu admette une fonction de potentiel et soit (i) il y a un nombre infini d'issues possibles pour le jeu, ou bien (ii) l'ensemble des issues est compact et la fonction de potentiel est continue. Dans les deux cas, la fonction de potentiel admet un optimum global, ce qui implique que le jeu a au moins un équilibre. Cette approche des existences des équilibres est beaucoup plus élémentaire que les méthodes de preuves par point fixe [49]. De plus, si la fonction de potentiel admet un unique optimum local, alors le jeu admet un équilibre unique. Finalement, si la fonction de potentiel est proche de la véritable fonction objectif alors les états d'équilibres correspondant aux optima globaux de la fonction de potentiel ont des valeurs proches pour

les deux fonctions et sont approximativement efficaces [34].

5.4.1 Modèle de routage de Wardrop

Dans l'histoire de la théorie des jeux, de nombreuses solutions algorithmiques d'apprentissage d'équilibres ont été proposées, centralisées ou décentralisées, à information complète ou incomplète, avec un nombre de joueurs limité, etc. Le lecteur peut se reporter à [39] pour une introduction sur les modèles d'apprentissage par automates.

Le modèle de routage réseau que nous utilisons est celui de Wardrop [76] qui est réputé solide [65]. Il est conçu pour représenter des problèmes de routage avec une infinité d'utilisateurs, chacun étant responsable d'une partie infinitésimale du trafic. Chaque utilisateur est assigné à une commodité, dans chacune de ces commodités, une certaine quantité de trafic doit être routée, depuis une source donnée jusqu'à une destination donnée, selon un ensemble de plus courts chemins qui induisent un sous-graphe du réseau général.

Une configuration du flot de trafic dans laquelle pour toutes les commodités, les temps de latence, ou de communication, sont minimaux sur tous les chemins utilisés constitue un équilibre de Wardrop. Il est bien connu que de telles situations d'équilibres peuvent être déterminées par des algorithmes centralisés en temps polynomial, voir par exemple un article de Fischer et al. [66].

Plusieurs articles portent sur des systèmes dynamiques où les agents tentent d'apprendre les équilibres. Dans [24], qui a suivi [25] et [26], Fisher et al. considèrent le modèle de Wardrop original dans lequel un joueur représente une partie infinitésimale du trafic. A chaque partie, les agents examinent une des routes disponibles et comparent le temps de latence. Si ce temps est inférieur à ce qu'ils ont connu jusqu'alors, ils migrent vers la nouvelle route avec une probabilité proportionnelle à l'amélioration offerte, sinon, ils ne font rien. Ils donnent des bornes supérieures sur le temps de convergence dans le cas symétrique et non-symétrique (commodité unique et multi-commodités, respectivement).

Nous allons nous intéresser dans les chapitres 6 et 7, à une méthode d'apprentissage distribué de ces situations d'équilibres. Notre méthode est à information très incomplète, les joueurs en savent le moins possible sur le jeu et sur les autres joueurs.

Nous pouvons mentionner à ce sujet l'algorithme STARA⁵ [32] qui est un jeu de routage assez différent de celui que nous présentons dans cette thèse. Kumar et Gupta étudient un problème de convergence vers un équilibre de Nash, de manière répartie et dans lequel les

⁵System and Traffic Dependent Adaptive Routing Algorithm.

joueurs n'ont pas d'autres informations sur le jeu que celles les concernant. Plusieurs joueurs constituent un réseau entre eux, ils cherchent à communiquer les uns avec les autres par paires. Ils transmettent également les messages des autres joueurs. L'objectif d'un joueur n'est pas formellement de trouver leur meilleur chemin mais d'optimiser le choix de tous les "prochains sauts" pour atteindre une destination donnée.

Nous allons maintenant introduire le modèle de routage de Wardrop ainsi que le prix de l'anarchie et la notion de fonction de potentiel au sens de Beckman et al. [8]

Modèle

Un réseau multicommodités, ou plus généralement un réseau, est représenté par un graphe fini $G = (V, E)$ avec V l'ensemble des nœuds ou sommets et E l'ensemble des arcs ainsi qu'un ensemble $\{(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)\}$ de couples de nœuds (source-destination). Ces paires définissent ce que l'on appelle des commodités, $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ la commodité j est définie par l'ensemble \mathcal{P}_i , supposé non-vidé, des plus courts chemins entre s_i et t_i .

Un flot dans un réseau G est un vecteur non négatif indexé sur l'ensemble des chemins $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$. Pour un flot f et un chemin $P \in \mathcal{P}_i$, nous interprétons f_P comme la quantité de trafic de la commodité i qui circule sur le chemin P allant de s_i à t_i . Nous notons ω un vecteur non négatif de flot de trafic, lui aussi indexé par les commodités de G . Nous disons qu'un flot est réalisable (*feasible*) pour ω si l'intégralité du trafic *circule correctement* : pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = \omega_i$.

Il est possible de modéliser les conséquences négatives de la congestion réseau de manière simple. Pour un flot f dans un réseau G et un arc $e \in E$, nous notons $f_e = \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} f_P$ le trafic total passant par l'arc e . A chaque arc est associé une fonction de coût non négative, continue et non décroissante c_e qui donne le coût induit par le trafic sur e en fonction de f_e . Un triplet (G, ω, c) caractérise un jeu de routage égoïste⁶ ou une instance d'un tel jeu.

Nous précisons maintenant la notion d'équilibre dans le routage égoïste. Le coût d'un chemin est la somme des coûts des arcs qui constituent ce chemin. Ainsi pour tout chemin P , nous notons $C_P(f) = \sum_{e \in P} c_e(f_e)$ son prix. En posant que tout élément de trafic est routé de façon à minimiser le coût qu'il occasionne, nous obtenons la définition suivante, celle d'un équilibre de Wardrop [76].

⁶ *Selfish routing game* en Anglais.

Définition 5.4.1 Soit f un flot réalisable pour l'instance (G, ω, c) . Le flot f est un équilibre de Wardrop si pour toute commodité $i \in 1, 2, \dots, k$ et toute paire de chemins P et $P' \in \mathcal{P}_i$ avec $f_P > 0$, $C_P(f) \leq C_{P'}(f)$.

Ce qui signifie que (i) le coût de tous les chemins utilisés sont les mêmes et (ii) le coût que paierait un utilisateur pour émettre un volume de trafic quelconque sur un chemin inutilisé serait au moins aussi cher que sur un chemin utilisé.

Théorème 5.4.2 ([8]) Soit (G, ω, c) une instance.

- (a) (G, ω, c) admet au moins un équilibre de Wardrop.
- (b) Si f et \tilde{f} sont des équilibres de Wardrop pour (G, ω, c) , alors $c_e(f_e) = c_e(\tilde{f}_e)$ pour tout arc e .

5.4.2 Le prix de l'anarchie

Nous définissons la fonction \mathcal{F} comme le coût de revient d'un flot, c'est-à-dire la somme de tous les prix payés sur tous les chemins utilisés, soit :

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} C_P(f) f_P = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e. \quad (5.8)$$

Définition 5.4.3 ([38, 52]) Le prix de l'anarchie d'une instance (G, ω, c) est noté ρ avec

$$\rho(G, r, c) = \frac{\mathcal{F}(f)}{\mathcal{F}(f^*)},$$

où f est un équilibre de Wardrop et f^* est un flot optimal. Le prix de l'anarchie $\rho(\mathbb{I})$ d'un ensemble non vide \mathbb{I} d'instances est $\max_{(G, \omega, c) \in \mathbb{I}} \rho(G, \omega, c)$

La définition (5.4.1) et le théorème (5.4.2) (b) impliquent que tous les équilibres de Wardrop engendrent le même coût total. Par conséquent, le prix de l'anarchie d'une instance est bien défini à moins qu'il n'existe un flot de coût nul. Dans ce cas, tous les équilibres de Wardrop ont également un coût de zero, alors le coût de l'anarchie du réseau est de 1.

Le prix de l'anarchie, introduit dans [38] pour comparer le coût de l'équilibre de Nash et le coût social optimal, a été intensivement étudié sur le modèle de routage de Wardrop qui nous intéresse, voir par exemple [15, 16, 27, 62, 65].

A tout arc e du graphe correspond la fonction de coût c_e . Nous notons c_e^* la fonction de coût marginal⁷ correspondante avec $c_e^*(x) = \frac{d}{dx}(x \cdot c_e(x))$.

Roughgarden a montré le résultat suivant :

Théorème 5.4.4 ([64]) *Soit (G, ω, c) une instance telle que pour tout arc e , la fonction $x \cdot c_e(x)$ est convexe et dérivable. Soit c_e^* la fonction de coût marginal de l'arc e , alors f^* est un flot optimal pour (G, r, c) si et seulement si c'est un équilibre de Wardrop pour (G, r, c^*) .*

La fonction de potentiel

La fonction de potentiel de Beckmann et al. [8] correspond en quelques sortes à l'inversion de ce théorème : aux minima globaux de quelle fonction les équilibres de Wardrop correspondent-ils ? Pour retomber sur la condition d'optimalité de la définition (5.4.1), nous cherchons une fonction $h_e(x)$ pour chaque arc e , qui équivaudrait à $x \times c_e(x)$ et telle que $h_e'(x) = c_e(x)$. Définir $h_e(x) = \int_0^x c_e(y) dy$ pour chaque arc e conduit à la fonction de potentiel recherchée.

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x) dx \quad (5.9)$$

Proposition 5.4.5 ([8]) *Soit (G, ω, c) une instance. Un flot réalisable pour (G, ω, c) est un équilibre de Wardrop si et seulement si c'est un minimum global pour la fonction de potentiel donnée en (5.9).*

Nous donnons pour finir le principe de la preuve du théorème (5.4.2) qui est sans doute devenu plus intuitif maintenant.

Preuve: Comme les fonctions de coûts sont continues et que l'ensemble des flots réalisables est compact, la partie (a) suit immédiatement de la proposition et du théorème de Weierstrass⁸. Comme les fonctions de coûts sont non décroissantes, la fonction de potentiel en (5.9) est convexe. De plus, l'ensemble des flots réalisables est convexe, ce qui implique la partie (b) du théorème. \square

⁷Le coût marginal, en économie, fait référence à l'augmentation du coût de production engendré par la production d'une unité supplémentaire (d'une ressource à produire).

⁸Ou théorème de Stone-Weierstrass, disant que toute fonction continue définie sur un compact peut être approchée à la précision désirée par une fonction polynomiale.

Plus récemment, la fonction de potentiel de Beckmann et al.(5.9) a été utilisée pour borner par le haut le prix de l'anarchie dans le cas du routage égoïste. L'intuition derrière ceci est simple : si un équilibre de Wardrop optimise la fonction de potentiel qui est une bonne approximation de la fonction objectif (5.8), alors il devrait également être approximativement optimal. Plus formellement :

Théorème 5.4.6 *Soit (G, ω, c) une instance, soit $x \times ce(x) \leq \gamma \times \int_0^x c_e(y)dy$ pour tout $e \in E$ et $x \geq 0$. Alors le prix de l'anarchie $\rho(G, \omega, c)$ est au plus γ .*

5.5 Conclusion

Comme nous l'avons brièvement rapporté dans ce chapitre, par le biais des jeux de congestion et de potentiel et les problèmes d'ordonnancement ; de nombreux problèmes dans le monde réel peuvent être visualisés sous forme de *réseaux* - ou graphes - constitués de nœuds et d'arcs qui représentent différentes étapes ou objectifs du processus à modéliser. Le terme commodité est fréquemment employé [66, 63, 76] pour se référer à un sous graphe orienté particulier du graphe général auquel est restreint un certain trafic. Un chemin dans un tel graphe représente un enchaînement d'actions auquel correspond un coût ou un temps de production par exemple.

Nous avons vu les similitudes entre routage et ordonnancement et avons introduit les notations de bases de notre modèle de routage et les notions fondamentales dont nous allons nous servir dans les deux prochains chapitres, en particulier l'utilisation de la fonction de potentiel.

Chapitre 6

Jeux de routage

I'm telling you there's an enemy that would like to attack America, Americans, again. There just is. That's the reality of the world. And I wish him all the very best.

(George W. Bush, Washington, D.C., 12 janvier 2009)

Nous considérons dans ce chapitre un problème qui pourrait se poser dans différents types de réseaux, routiers, téléphoniques, informatiques ou autres, dans lesquels l'optimisation des communications est un élément crucial. Au début des années 50, Wardrop a introduit, à travers une étude sur le transport routier [76], un modèle pour représenter l'organisation du trafic, sa fluctuation etc. Son objectif était de comprendre comment améliorer le réseau en général, en termes de temps de transport pour les véhicules, de temps d'attente aux points critiques ou de la congestion générale des routes.

En réalité, notre modèle est légèrement différent du modèle original de Wardrop [76], et similaire à [66], dans le sens où nous considérons le flot de trafic du réseau comme étant engendré par un nombre fini d'utilisateurs, ou joueurs. Chaque joueur connaît une liste de chemins selon laquelle adapter sa stratégie. Son objectif est de maximiser son utilité. Dans certains cas, une situation dans laquelle tous les joueurs maximisent leur utilité est à la fois un équilibre de Nash et un équilibre de Wardrop du système.

Nous voulons savoir quand, comment et si des équilibres peuvent être appris par les

joueurs dans un jeu de routage. La dynamique d'apprentissage considérée ici est complètement distribuée et un joueur qui l'utilise n'a besoin que de très peu d'informations. Nous avons affaire à une dynamique stochastique discrète avec n joueurs jouant un jeu répété. Lors d'une partie, chacun choisit son chemin et met à jour sa stratégie en fonction de son utilité et de l'action qu'il a choisie. Notre objectif est de spécifier un algorithme distribué capable d'apprendre les équilibres tout en nécessitant une quantité d'information minimale.

Dans [56], Thathachar et al. présentent une dynamique pour apprendre les équilibres de Nash dans un jeu multijoueurs. Cette dynamique est telle que, sous certaines conditions fortes, tous les points stationnaires sont des équilibres de Nash. Bien que la dynamique qu'ils proposent n'assure pas la convergence dans le cas général, nous montrons qu'elle converge dans ce que nous appelons ici les *réseaux de Wardrop linéaires*. Nous appelons un réseau de Wardrop linéaire un jeu dans lequel toutes les fonctions de coûts sont linéaires.

Nous allons commencer par présenter deux cas classiques que sont l'effet Pigou, du nom de l'économiste Anglais qui l'a découvert et spécifié presque en ces termes en 1920 [55] et le paradoxe de Braess (mathématicien Allemand) [11, 17] avant de compléter la description de notre modèle de routage puis de présenter notre méthode.

6.1 Préliminaires : deux cas classiques de routage

Supposons deux villes S et T , un ensemble de véhicules et un ensemble de routes allant de S à T . Nous nous intéressons à la répartition de l'ensemble des véhicules et au temps de voyage de la *population*.

6.1.1 L'effet Pigou

Le graphe en figure 6.1 représente les deux villes S et T ainsi que deux routes à sens unique allant de S vers T , les deux arcs noirs d'épaisseurs différentes. Nous supposons que l'une des deux routes est large et peut accomoder un grand nombre de véhicules, mais elle est longue et sinueuse. L'autre route est plus étroite donc plus sensible à la congestion mais plus courte.

Supposons que le temps de trajet sur la route sinueuse est de une heure quel que soit le nombre de véhicules qui l'empruntent. Sur la route du bas, plus courte et plus étroite, le temps de trajet est égal, en heures, à la fraction du trafic (x) qui choisit de passer par là. Une fonction de coût, $f(x)$ sur cet exemple exprime le temps de trajet sur une route en

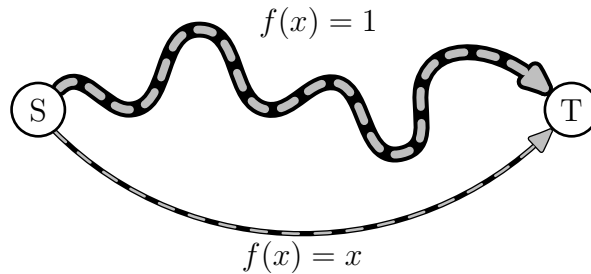


FIG. 6.1 – Pigou : un réseau simple à deux nœuds et deux liens

fonction de la fraction du trafic total qui passe dessus.

En supposant que chaque conducteur cherche à minimiser son temps de trajet entre S et T , nous pouvons nous attendre à ce que tout le monde passe en bas et par conséquent le temps de trajet moyen sera d'une heure. En d'autres termes, chaque usager comprend : "La route du bas n'est jamais pire que celle du haut, elle peut même être plus rapide si jamais ne serait-ce qu'une seule personne a l'idée de passer par la route sinueuse, je passe donc en bas."

S'il y avait une autorité centrale qui décidait du chemin que doit emprunter chaque véhicule. Elle pourrait obtenir une diminution du temps de trajet moyen en répartissant le trafic différemment. La configuration correspondant au meilleur temps de trajet moyen consiste à répartir la moitié du trafic sur chaque route. Le temps moyen passerait alors à trois quarts d'heure au lieu d'une heure dans la situation précédente.

Cet exemple nous montre simplement qu'un comportement égoïste ne produit pas nécessairement les meilleurs résultats d'un point de vue social. Ceci implique que la notion de coût social peut être définie, dans ce contexte nous admettons que le coût social est le coût moyen des joueurs, soit le temps de trajet moyen ici. Nous remarquons que sur cet exemple, le prix de l'anarchie (voir chapitre 5 pour la définition) est de $\frac{4}{3}$.

6.1.2 Le paradoxe de Braess

Nous considérons toujours un réseau routier entre deux villes et un ensemble de véhicules ou d'usagers égoïstes voulant se rendre de S à T le plus rapidement possible. Les deux routes sont composées de deux arcs chacune avec un passage obligé par une "ville étape".

L'exemple suivant illustre un résultat qui peut surprendre à première vue. Si nous considérons le graphe (1) de la figure 6.2 dans un premier temps. Il y a deux routes qui vont de

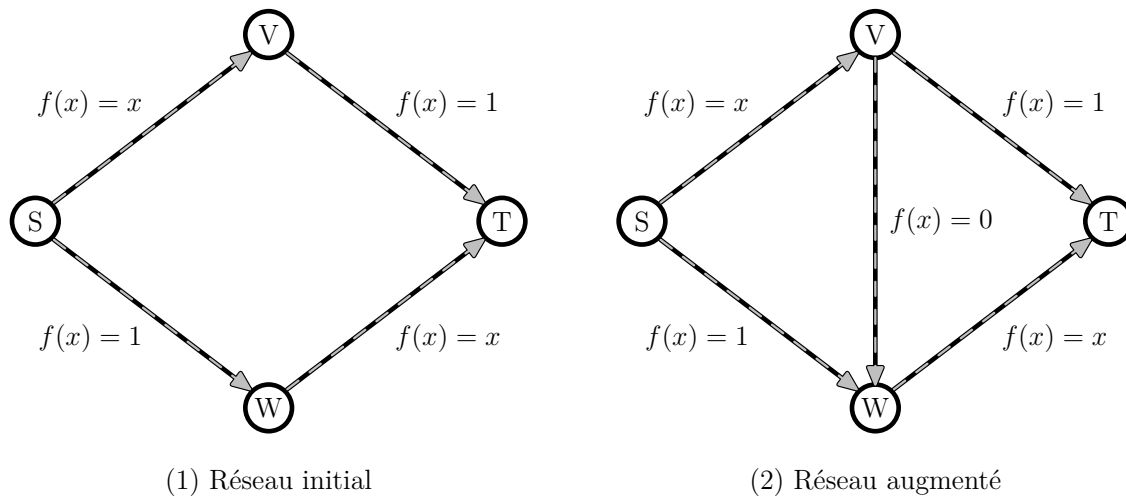


FIG. 6.2 – Le paradoxe de Braess, l'ajout d'un chemin peu coûteux, donc a priori bénéfique, peut au contraire être néfaste à l'ensemble des joueurs.

S à T , le temps de trajet sur l'une ou l'autre est de $1 + x$, avec x la partie du trafic passant sur la route en question. Les routes sont par conséquent identiques en ce qui concerne les conditions de trafic, celui-ci tendra alors à se répartir équitablement entre elles.

Dans de telles conditions, le temps moyen pour parcourir la distance entre S et T serait de 1 heure et 30 minutes.

Si nous nous plaçons maintenant dans le cas (2) de la figure 6.2, où le réseau routier s'est vu augmenté d'une route très large et très courte entre les deux villes étapes V et W . La fonction de coût associée à cette route est toujours nulle. Est-ce que les voyageurs auraient un comportement différent maintenant ?

Avec des utilisateurs égoïstes, il y a fort à parier que la situation initiale va changer. Tout comme dans l'exemple de Pigou, le temps de trajet sur le chemin $S \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow T$ ne peut pas être supérieur au temps de trajet sur les deux chemins initiaux, par conséquent, l'ensemble des conducteurs prendra ce nouveau chemin $S \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow T$, il en résulte un accroissement du temps de trajet moyen, celui-ci passe de 1 heure et 30 minutes à 2 heures.

Nous pouvons résumer le paradoxe de Braess ainsi : l'amélioration a priori bénéfique d'un réseau peut au contraire pénaliser lourdement les utilisateurs dans le cas du routage égoïste.

Remarque: Les fonctions de coûts employées dans ces exemples ne sont pas très réalistes

(puisqu'elles dépendent du trafic total) mais elles permettent de montrer ce que nous voulions montrer. En pratique, le résultat qu'il faut garder à l'esprit est qu'en deça d'un certain volume de trafic, des situations paradoxales peuvent apparaître. Le lecteur peut se référer à [36] pour un ensemble de tests sur ces deux modèles emblématiques de réseaux.

6.2 Définition du problème de routage étudié

Notre objectif est de spécifier une méthode d'apprentissage à information minimale. Nous entendons par là que les joueurs n'ont à disposition que des informations les concernant : leur stratégie et leur résultat. Ils n'ont pas connaissance des autres joueurs ni de leurs actions, etc.

Nous allons maintenant étendre le modèle de Wardrop [76] que nous avons décrit dans le chapitre 5 et considérer un jeu à un grand nombre de joueurs, soit n ce nombre. Chaque joueur représente une petite fraction du flot total et veut déterminer sa meilleure stratégie égoïstement.

Modèle

Nous représentons notre jeu de routage à l'aide d'un graphe $G = (V, E)$ avec V l'ensemble des nœuds ou sommets et E l'ensemble des arcs.

L'ensemble des joueurs est noté $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Tout joueur $i \in \{1, \dots, n\}$ est caractérisé par

- son poids w_i , un entier quelconque qui représente la taille du message à transmettre,
- un couple de sommets $(s_i, t_i) \in V \times V$ respectivement sa source et sa destination,
- un ensemble \mathcal{P}_i des plus courts chemins allant de s_i à t_i de cardinalité m_i
- un vecteur de stratégies q_i indexé sur les chemins de \mathcal{P}_i . Pour tout $j \in \{1, \dots, m_i\}$, $q_{i,j}$ est la probabilité pour i de choisir le chemin j dans \mathcal{P}_i .

Par définition d'un vecteur de stratégies, $\sum_{j=1}^{m_i} q_{i,j} = 1$. L'espace de stratégies du joueur i , qui à chaque partie choisit un chemin unique parmi m_i , est noté $\mathcal{S}_i = [0, 1]^{m_i}$. L'espace de stratégies du jeu est défini par l'ensemble des vecteurs stochastiques des joueurs, il est noté $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^n \mathcal{S}_i = [0, 1]^{m_1+m_2+\dots+m_n}$.

Nous notons $p_i(t)$ le chemin que choisit le joueur i à la partie t .

Comme dans le chapitre 5, pour tout arc $e \in E$, $c_e(f_e)$ donne le coût de l'arête e en

fonction de sa charge f_e qui est déterminée par tous les choix de chemins de tous les joueurs, soit $\forall e \in E$, la charge de e vaut :

$$f_e = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{e \in p_i(t)} \times w_i,$$

où $\mathbf{1}_{e \in p_i(t)}$ vaut 1 si $e \in p_i(t)$ et 0 sinon.

Le coût d'un chemin donné est la somme des coûts des arcs qui le constituent. Ainsi pour tout chemin p , le coût associé C_p est défini par

$$C_p = \sum_{e \in p} c_e(f_e).$$

6.2.1 Utilité associée à un chemin

Afin d'alléger les calculs qui vont suivre, nous faisons l'hypothèse que le prix d'un chemin est toujours compris entre 0 et 1. Ainsi, à tout chemin p de coût C_p , nous associons l'utilité inversement proportionnelle¹ notée U_p définie simplement comme :

$$U_p = 1 - C_p. \tag{6.1}$$

Remarque: Sans l'hypothèse selon laquelle les prix sont toujours positifs ou nuls et inférieurs ou égaux à 1, nous poserions une relation de la forme $U_p = 1 - \frac{C_p}{X}$ avec X une valeur de normalisation dans tous les cas supérieure au prix du plus cher chemin possible. Nous pouvons considérer la valeur X de deux manières : soit une connaissance commune à tous les joueurs soit une valeur propre à chaque joueur².

Le jeu est joué de façon répétée (mais nous n'en faisons pas ici une étude en tant que jeu répété au sens strict du terme puisque notre objectif est d'atteindre un état final stable). Les joueurs font une partie, puis une autre etc. en adaptant leurs stratégies au cours du temps. Ce qui nous intéresse est l'état final des stratégies des joueurs, si ceux-ci se stabilisent.

A toute partie t , nous notons $Q(t) = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\}$ l'ensemble des vecteurs de stratégies de tous les joueurs qui définit l'état du jeu.

¹Une utilité proche de 0 indique donc un chemin très coûteux et à l'inverse, une utilité proche de 1 correspond à un chemin de prix plus faible (donc meilleur au sens des joueurs).

²D'après les simulations effectuées, il vaut mieux privilégier la seconde solution qui accélère la stabilisation du système.

Lors d'une partie, tout joueur $i \in \{1, \dots, n\}$ choisit un chemin $p_i(t)$. Nous notons $d_i : \prod_{j=1}^n \mathcal{S}_j \rightarrow [0, 1]$ avec $1 \leq i \leq n$ la fonction d'utilité qui, en fonction de l'ensemble des choix de tous les joueurs, associe son utilité au joueur i . Elle est définie par

$$d_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = r_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (6.2)$$

où (a_1, a_2, \dots, a_n) est l'ensemble des actions jouées par les joueurs, chaque action est un vecteur unitaire qui désigne un chemin spécifique.

Cette fonction d'utilité est définie sur les actions précises des joueurs, c'est-à-dire sur des stratégies pures. L'état du jeu à un temps t , $Q(t)$ est le vecteur des lois de probabilité - des stratégies mixtes - de tous les joueurs. C'est donc logiquement que nous étendons la fonction d_i aux stratégies mixtes, ce qui indique alors une espérance d'utilité pour chacun des joueurs et non quelque chose de directement réalisable.

Soit $g_i : \prod_{j=1}^n \mathcal{S}_j \rightarrow [0, 1]$, $1 \leq i \leq n$ la fonction d'espérance d'utilité, définie par :

$$\begin{aligned} g_i(q_1, \dots, q_n) &= E[r_i | \text{le joueur } j \text{ a pour stratégie } q_j] \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n} d_i(j_1, j_2, \dots, j_n) \times \prod_{s=1}^n q_{s, j_s} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Les fonctions d_i et g_i n'ont pas tout à fait les mêmes ensembles de définition. Nous appelons l'ensemble de définition de $d_i(Q)$ les *coins* de \mathcal{S} et nous le notons \mathcal{S}^* .

Maintenant que nous avons défini cette espérance d'utilité pour les joueurs, nous pouvons caractériser un équilibre de Nash du système.

Définition 6.2.1 (équilibre de Nash) *Le n -uplet de stratégies mixtes $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ est un équilibre de Nash, si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall q'_i \in \mathcal{S}_i$,*

$$g_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q'_i, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) \leq g_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i^*, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) \quad \forall q_i \in \mathcal{S}_i \quad (6.4)$$

La fonction g_i exprime l'espérance d'utilité, ou utilité moyenne, en fonction du vecteur de stratégies du joueur i . Nous pouvons également définir une fonction d'espérance d'utilité pour un chemin particulier.

Soit $h_{i,p}(Q)$ cette fonction qui indique l'utilité attendue pour i lorsqu'il choisit le chemin p alors que tous les autres joueurs jouent leur stratégie mixte (c'est-à-dire $q_j \forall j \neq i$), alors

$$h_{i,p}(q_1, \dots, q_{i-1}, p, q_{i+1}, \dots, q_n) = E[r_i | (Q_{-i}, p)] \quad (6.5)$$

Remarquons que $g_i(Q)$ définie en (6.3) est la somme pondérée des espérances partielles (sur chaque chemin pris en particulier). Nous pouvons vérifier la relation suivante pour tout joueur i :

$$g_i(Q) = \sum_{p \in \mathcal{P}_i} q_{i,p} h_{i,p}(Q). \quad (6.6)$$

Enfin, il est utile de pouvoir manipuler les probabilités qu'ont les joueurs de passer par tel ou tel arc du réseau. On note $Eprob(e)_i$ la probabilité qu'a le joueur i d'emprunter l'arc e , soit

$$Eprob(e)_i = \sum_{p \in \mathcal{P}_i} q_{i,p} \times \mathbf{1}_{e \in p_i(t)} \quad (6.7)$$

avec la notation $\mathbf{1}_{e \in p_i(t)}$ (déjà utilisée plus tôt) et qui vaut 1 ou 0, suivant l'appartenance de l'arc e au chemin.

Dans tout ce qui suit nous allons considérer que la fonction de coût sur chaque arc est linéaire, leur forme générale est la suivante³ pour tout $e \in E$: $c_e(f_e) = \alpha_e f_e + \beta_e$.

6.2.2 Déroulement d'une partie

L'algorithme d'apprentissage est constitué des étapes suivantes :

- A chaque partie t , chaque joueur joue une action conformément à sa stratégie courante. Le joueur i choisit l'action $a_i(t)$ qui détermine son chemin $p_i(t)$.
- Chaque joueur obtient son utilité pour la partie en cours. Elle est notée $r_i(t)$ pour le joueur i , c'est l'utilité du chemin qu'il emprunte, soit :

$$r_i(t) = U_{p_i(t)} \quad (6.8)$$

- Chaque joueur met à jour sa stratégie selon la formule suivante⁴ :

$$q_i(t+1) = q_i(t) + b \times r_i(t) \times (e_{p_i(t)} - q_i(t)) \quad (6.9)$$

³Le paramètre β_e peut être vu comme le prix minimum sur l'arc e (lorsqu'il n'y a pas de trafic dessus) et $\alpha_e \in \mathbb{R}^+$ est une mesure de la congestion marginale. En d'autres termes, l'ajout de trafic sur un arc à α_e élevé se fera plus sentir (sur les prix de tous les chemins auxquels appartient l'arc en question) que sur un arc à faible α_e .

⁴Cette méthode de mise à jour, aussi appelée L_{R-I} ou "Linear Reward Inaction algorithm" fut à l'origine introduite par Bush & Mosteller, deux psychologues états-uniens, en 1958 comme une alternative à une première solution algorithmique d'apprentissage des mêmes auteurs appelée L_{R-P} pour *Linear reward penalty algorithm*, voir [13]

où $b \in [0, 1]$ est un paramètre d'ajustement, $e_{p_i(t)}$ est un vecteur unitaire de dimension m_i dont la $p_i(t)$ ^{ième} composante vaut 1 et toutes les autres, 0.

Un joueur choisi donc un chemin à chaque partie pour transmettre son message. La mise à jour de sa stratégie a pour effet une augmentation de la probabilité future d'emprunter ce chemin. Plus l'utilité du chemin est importante (plus son coût est bas), plus cette augmentation est importante. Toutes les autres probabilités diminuent d'une certaine proportion également fonction de l'utilité du chemin sélectionné.

Remarquons que l'algorithme de mise à jour (6.9) peut se réécrire composante par composante de la façon suivante :

$$q_{i,j}(t+1) = \begin{cases} q_{i,j}(t) + b r_i(t) \times (1 - q_{i,j}(t)) & \text{si } a_i(t) = j \\ q_{i,j}(t) \times (1 - b r_i(t)) & \text{si } a_i(t) \neq j \end{cases} \quad (6.10)$$

6.3 Description de l'approche utilisée

Nous allons présenter quelques résultats et techniques inhérents à l'approche que nous allons utiliser pour étudier notre jeu de routage, inspirés notamment de ceux de Sastry et al [56]. L'évolution du jeu dans le temps est ramenée au déplacement d'un point dans l'espace de stratégies. Ce processus est discret et nous le rapprochons d'un processus continu pour montrer sa convergence.

Dans [56], les auteurs ont montré que la convergence d'un tel système dépendait de l'existence d'une fonction de potentiel (voir chapitre 5) qui approximerait la trajectoire du point jeu $Q(t)$ au cours du temps. Ils proposent un critère de dérivabilité que doit respecter la fonction de potentiel pour approximer le jeu correctement. Nous allons suivre un raisonnement similaire au leur en le complétant par la construction d'une telle fonction de potentiel pour le jeu. La linéarité des fonctions de coûts est une hypothèse cruciale, en effet nous montrerons également que si les fonctions de coûts sont quadratiques, la convergence n'est plus assurée.

6.3.1 Caractérisation du problème

Nous avons affaire à un jeu stochastique à information incomplète que nous répétons dans le temps. Nous commençons par reformuler l'équation de mise à jour (6.9) en la définition d'un algorithme d'apprentissage distribué. Pour effectuer sa mise à jour en fin de partie,

un joueur n'a besoin de connaître que trois paramètres : sa stratégie, le dernier chemin emprunté et son utilité.

Si T_i est cet algorithme d'apprentissage pour le joueur i , alors :

$$q_i(t+1) = q_i(t) + T_i[q_i(t), p_i(t), r_i(t)], \quad (6.11)$$

et T_i est tel que $q_i(t) \rightarrow q_i^*$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et où (q_1^*, \dots, q_n^*) est un équilibre de Nash.

L'évolution du jeu dans le temps suit le déplacement de $Q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ dans l'espace de stratégies \mathcal{S} . Le processus décrivant l'apprentissage général dépend de tous les joueurs. Ainsi nous pouvons formuler le problème général en fonction des stratégies, des chemins et des utilités de tous les joueurs. Nous cherchons donc à construire un algorithme réparti T indépendant de b qui accomplit la mise à jour spécifiée par l'équation (6.9), c'est-à-dire tel que :

$$Q(t+1) = Q(t) + bT[Q(t), P(t), R(t)]. \quad (6.12)$$

avec $R(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$ l'ensemble des utilités de tous les joueurs.

6.3.2 Approximation de la trajectoire

Nous considérons l'interpolation par parties de $Q(t)$, notée $Q^b[t]$ définie par

$$Q^b[k] = Q(t); \quad k \in [tb, (t+1)b] \quad (6.13)$$

avec b le paramètre d'ajustement.

L'interpolation par parties $Q^b[.]$ est une fonction de \mathbb{R} dans l'espace de stratégies \mathcal{S} qui est continue à droite avec une limite à gauche. Ce qui nous intéresse ici est la limite de la séquence $\{Q^b[.] : b > 0\}$ lorsque b tend vers 0.

Soit la fonction $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ définie par :

$$\phi(Q) = E[T[Q(t), P(t), R(t)] | Q(t) = Q].$$

où la notation $E[x|condition]$ est l'espérance conditionnelle de la variable x sachant la condition en question.

Nous utilisons le théorème suivant qui donne le comportement limite de $Q^b(t)$ quand

$b \rightarrow 0$.

Théorème 6.3.1 ([40]) *Soit la séquence $\{Q^b[\cdot]\}$. Soit $X_0 = Q^b[0] = Q(0)$. Alors la séquence converge faiblement, lorsque $b \rightarrow 0$ vers $X(\cdot)$ qui est l'unique solution de l'équation différentielle :*

$$\frac{dX}{dt} = \phi(X), X(0) = X_0 \quad (6.14)$$

Ce théorème est un cas particulier d'un résultat plus général dû à Kushner, voir [40], théorème 3.2 pour la preuve.

Remarque: La convergence faible est le plus faible type de convergence existante. Il est possible de montrer, avec une probabilité de plus en plus proche de 1, à mesure que le paramètre d'ajustement b décroît, que $Q(t)$ suit la trajectoire $X(t)$ de l'équation différentielle (6.3.1), avec une certaine erreur bornée par en dessous $\epsilon > 0$. Voir [39], chapitre 2, théorème 1. Le résultat qui nous intéresse particulièrement est qu'il est possible de converger vers un équilibre, lorsque le système est initialement dans son voisinage et que plus le paramètre d'ajustement diminue, plus ce voisinage grandit.

D'après le théorème (6.3.1), la limite Q de $Q^b[\cdot]$ satisfait l'équation différentielle (6.14). Nous rappelons que Q est défini par n vecteurs de probabilités et que les solutions de l'équation différentielle sont dans l'espace de stratégies \mathcal{S} . Par définition, Q dépend de $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ composantes, soit autant que la fonction ϕ , solution de l'équation (6.14).

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall p \in \{1, \dots, m_i\}$, nous notons $\phi_{i,p} = \frac{dq_{i,p}}{dt}$ le composant correspondant. A partir des équations (6.9) et (6.10), nous pouvons exprimer non seulement l'espérance de $q_i(t+1)$ en fonction de $q_i(t)$ mais aussi, et c'est ce qui nous intéresse tout particulièrement, la variation de chacune de ces probabilités d'une partie à l'autre. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dq_{i,p}}{dt} &= \phi_{i,p} = q_{i,p}(1 - q_{i,p}) \times h_{i,p} - \sum_{p' \neq p} q_{i,p'} q_{i,p} h_{i,p'} \\ &= q_{i,p} \left[\sum_{p' \neq p} q_{i,p'} h_{i,p} - \sum_{p' \neq p} q_{i,p'} h_{i,p'} \right] \\ &= q_{i,p} \sum_{p' \in \mathcal{P}_i} [h_{i,p} - q_{i,p'} h_{i,p'}] \end{aligned}$$

Soit finalement, l'équation de réplication⁵ suivante :

⁵En théorie des jeux évolutionnaire, une équation de réplication sert à spécifier une dynamique de jeu déterministe, monotone, non linéaire et non innovante. Voir [35, 77].

$$\frac{dq_{i,p}}{dt} = \phi_{i,p} = q_{i,p} \sum_{p' \in \{1, \dots, m_i\}} [q_{i,p'}(h_{i,p} - h_{i,p'})] \quad (6.15)$$

6.4 Méthode générale de preuve de convergence

Le théorème suivant est un théorème célèbre ou *Folk theorem* des jeux évolutionnaires [35]. Il caractérise les solutions de l'équation différentielle (6.14) et par conséquent, il caractérise le comportement à long terme de notre algorithme d'apprentissage.

Théorème 6.4.1 (Folk theorem)

- Tous les points de l'espace de stratégies \mathcal{S} sont des points stationnaires,
- Tous les équilibres de Nash sont des points stationnaires,
- Tous les équilibres de Nash stricts sont des points stationnaires,
- Tous les points stationnaires stables sont des équilibres de Nash.

D'après ce théorème, nous pouvons conclure que (mis à part le cas trivial où tous les prix sont constants et indépendants du trafic), la dynamique de réplication, donc l'algorithme d'apprentissage, ne convergera jamais vers un point de \mathcal{S} qui n'est pas un équilibre de Nash.

Nous allons maintenant présenter les bases de la théorie de la stabilité de Lyapunov dont nous allons nous servir pour montrer que l'algorithme converge bien.

6.4.1 La théorie de la stabilité de Lyapunov

Nous allons résumer brièvement ici les outils de la théorie de la stabilité de Lyapunov. Ces outils sont utilisés dans ce chapitre et le suivant pour analyser les propriétés de stabilité de l'évolution du jeu dans le temps et dans l'espace de stratégies. Aucune preuve n'est donnée, pour plus de détails on peut consulter [74] ou [37], l'ouvrage de Lyapunov "*Stability of Motion*" n'est plus réédité.

Définition de base

Soit un système dynamique qui satisfait :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (6.16)$$

Nous supposons que $f(x, t)$ satisfait les conditions standards pour l'existence et l'unicité des solutions, c'est-à-dire par exemple que $f(x, t)$ est Lipschitz continue sur x et continue par morceaux sur t . Un point x^* est un point d'équilibre du système (6.16) si $f(x, t) \equiv 0$. Intuitivement, un équilibre est *localement stable* si quelle que soit la condition initiale donnée proche de cet équilibre, nous restons près de cet équilibre. De la même façon, un point x^* est un équilibre *localement asymptotiquement stable* si x^* est localement stable **et** si, de plus, toute solution proche de x^* tend vers x^* quand $t \rightarrow \infty$.

En *déplaçant* l'origine du système, on peut supposer que le point d'équilibre qui nous intéresse correspond à $x^* = 0$. S'il existe plusieurs points d'équilibre, il faut tous les étudier pour conclure.

6.4.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Le point d'équilibre $x^* = 0$ de (6.16) est stable (au sens de Lyapunov) au temps $t = t_0$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ tel que

$$\|x(t_0)\| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.17)$$

Cette stabilité au sens de Lyapunov n'est pas très stricte en comparaison avec la stabilité au sens classique du terme, c'est à dire asymptotique. Le concept de *stabilité uniforme* sert à caractériser un point qui ne perd pas ses propriétés de stabilité. Il est important de remarquer que si le paramètre noté δ est indépendant de t_0 , cette définition (6.16) est alors celle de la stabilité **uniforme** au sens de Lyapunov.

Stabilité asymptotique

Un point d'équilibre $x^* = 0$ de (6.16) est *asymptotiquement stable* à $t = 0$ si

1. $x^* = 0$ est stable et
2. $x^* = 0$ est localement attractif, c'est-à-dire qu'il existe δ tel que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (6.18)$$

Comme pour la définition précédente, la stabilité asymptotique est définie en t_0 . La stabilité asymptotique *uniforme* requiert :

1. $x^* = 0$ est uniformément stable et

2. $x^* = 0$ est uniformément localement attractif, c'est à dire qu'il existe δ indépendant de t_0 pour lequel l'équation (6.18) tient.

La figure 6.3 illustre graphiquement la différence entre les deux notions de stabilité. Enfin, un équilibre est instable s'il n'est pas stable. Il faut interpréter cette apparente tautologie comme : il faut pouvoir nier la stabilité au sens de Lyapunov pour obtenir une définition d'instabilité. Les deux définitions précédentes sont des définitions locales, elles décrivent le comportement d'un système près d'un point d'équilibre. On dit qu'un point d'équilibre x^* est globalement stable s'il est stable pour n'importe quelle condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

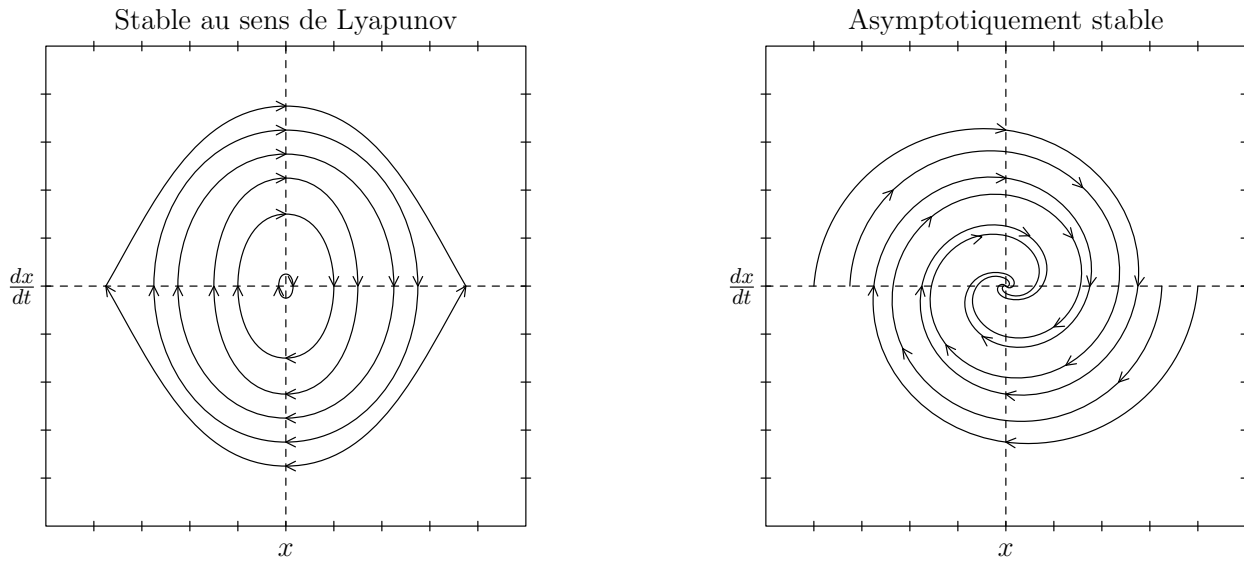


FIG. 6.3 – Aperçus de fonctions stables : au sens de Lyapunov et asymptotiquement

6.4.3 La méthode directe de Lyapunov

La méthode proposée, aussi appelée seconde méthode de Lyapunov permet de déterminer la stabilité d'un système sans avoir à intégrer effectivement l'équation différentielle (6.16). La méthode est une généralisation de l'idée que s'il existe une certaine *mesure d'énergie* dans un système, alors il est possible d'estimer la variation d'énergie du système pour confirmer ou infirmer la stabilité. Nous allons tout d'abord préciser cette mesure d'énergie. On note $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \epsilon\}$ une boule de rayon x autour de l'origine.

Définition 6.4.2 (Fonction localement définie positive (fldp)) Une fonction continue $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est localement définie positive si pour un certain $\epsilon > 0$ et pour une certaine fonction strictement croissante $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad V(x, t) \geq \alpha(\|x\|), \quad \forall x \in B_\epsilon, \forall t \geq 0. \quad (6.19)$$

Une fonction localement définie positive est localement comme une fonction d'énergie. Les fonctions qui sont globalement comme une fonction d'énergie sont appelées des fonctions définie positive.

Définition 6.4.3 (Fonction définie positive (fdp)) Une fonction continue $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive si elle respecte les conditions de (6.19) et si de plus $\alpha(p) \rightarrow \infty$ quand $p \rightarrow \infty$.

Définition 6.4.4 (Fonction à croissance bornée (decreascent function)) Une fonction continue $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est à croissance bornée si $\exists \epsilon > 0$ et \exists une fonction $\beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$V(t, x) \leq \beta(\|x\|) \quad \forall x \in B_\epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Avec ces définitions, le théorème de Lyapunov permet de déterminer la stabilité d'un système en étudiant une fonction d'énergie appropriée. L'idée est que si $V(x, t)$ est localement positive et si $\frac{dV}{dt}(x, t) \leq 0$ alors on peut affirmer que le point d'équilibre est stable. Le théorème est résumé par le tableau de la figure 6.4 ci-après.

| | Conditions sur $V(x, t)$ | Conditions sur $\frac{dV}{dt}(x, t)$ | Conclusion |
|---|--------------------------|--------------------------------------|--|
| 1 | fldp | ≤ 0 localement | Stable |
| 2 | fldp, croissance bornée | ≤ 0 localement | Uniformément stable |
| 3 | fldp, croissance bornée | fldp | Uniformément asymptotiquement stable |
| 4 | fdp, croissance bornée | fdp | Globalement uniformément asymptotiquement stable |

FIG. 6.4 – Tableau résumant le théorème basique de Lyapunov

Lyapunov a également proposé une seconde méthode, appelée (méthode indirecte) que nous n'allons pas détailler ici (voir [57], pages 180 – 185). Nous revenons maintenant à notre algorithme.

6.5 Propriétés de convergence pour notre jeu de routage

Dans [56], Sastry et al. proposent une condition de convergence pour un algorithme d'apprentissage proche de celui proposé ici. En nous inspirant de leurs travaux, nous allons montrer que notre dynamique d'apprentissage permet au jeu de converger. La différence tient dans la notion de poids associée à chaque joueur. Nous avons publié les résultats qui vont suivre dans [6] et dans [7] pour les résultats sur le temps de convergence.

Théorème 6.5.1 *S'il existe une fonction positive ou nulle $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall p \in \mathcal{P}_i$, il existe une constante $x_i > 0$ telle que :*

$$\frac{\partial F}{\partial q_{i,p}}(Q) = x_i \times h_{i,p}(Q) \quad (6.20)$$

alors l'algorithme d'apprentissage, pour tout état initial dans $\mathcal{S} - \mathcal{S}^$, convergera toujours vers un équilibre de Nash.*

Preuve: Nous nous intéressons à la variation de F le long de la trajectoire du “point jeu” au cours du temps dans l'espace de stratégie \mathcal{S} .

$$\begin{aligned} \frac{dF(Q(t))}{dt} &= \sum_{i,p} \frac{\partial F}{\partial q_{i,p}} \frac{dq_{i,p}}{dt} \\ &= \sum_{i,p} \frac{\partial F}{\partial q_{i,p}}(Q) q_{i,p} \sum_{p'} q_{i,p'} [h_{i,p}(Q) - h_{i,p'}(Q)] \\ &= \sum_{i,p} x_i h_{i,p}(Q) q_{i,p} \sum_{p'} q_{i,p'} [h_{i,p}(Q) - h_{i,p'}(Q)] \\ &= \sum_i x_i \sum_p \sum_{p'} q_{i,p} q_{i,p'} [h_{i,p}(Q)^2 - h_{i,p}(Q) h_{i,p'}(Q)] \\ &= \sum_i x_i \sum_p \sum_{p' > p} q_{i,p} q_{i,p'} [h_{i,p}(Q) - h_{i,p'}(Q)]^2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ce qui signifie que F est non décroissante. Nous savons en outre, d'après la nature de l'algorithme d'apprentissage, que toutes les solutions de l'équation différentielle sont confinées à l'espace \mathcal{S} pour des conditions initiales dans ce même espace.

Nous utilisons ici la théorie de la stabilité de Lyapunov que nous avons rapidement présentée (voir également [57] pour plus de précisions). Si nous notons Q^* un point correspondant à un équilibre de Nash dans l'espace de stratégies \mathcal{S} , nous pouvons définir $L(Q) = F(Q) - F(Q^*)$ une *fonction de Lyapunov* du jeu. $\forall Y \in \mathcal{S}$, $L(Y)$ donne la différence entre deux valeurs de la fonction de potentiel. Comme l'une de ces valeurs est minimale et que F est non décroissante, asymptotiquement, toutes les trajectoires sont dans l'espace $\mathcal{S}' = \{Q^* \in \mathcal{S} : \frac{dF(Q^*)}{dt} = 0\}$.

D'après (6.15) et (6.21), nous savons que $\frac{dF(Q^*)}{dt} = 0$ implique que $q_{i,p}q_{i,p'}[h_{i,p}(Q) - h_{i,p'}(Q)] = 0$ pour tous i, p, p' . C'est la définition d'un équilibre de Nash, un tel état Q^* est par conséquent un point stationnaire.

D'après le *folk theorem* cité plus tôt, tous les points stationnaires qui ne sont pas des équilibres de Nash sont instables, le théorème suit. \square

6.5.1 Une fonction de potentiel

Nous proposons maintenant une fonction de potentiel qui respecte le théorème (6.5.1).

Proposition 6.5.2 *Si les fonctions de coûts sur les arc sont linéaires, la fonction F suivante est une fonction de potentiel pour le jeu qui respecte la condition de l'équation (6.20)*

$$F(Q) = \sum_{e \in E} \left[\beta_e \left(\sum_{j=1}^N w_j \times Eprob(e)_j \right) + \frac{\alpha_e}{2} \left(\sum_{j=1}^N w_j \times Eprob(e)_j \right)^2 + \alpha_e \left(\sum_{j=1}^N w_j^2 \times Eprob(e)_j \times \left(1 - \frac{Eprob(e)_j}{2} \right) \right) \right] \quad (6.22)$$

Preuve: Commençons par réécrire la fonction F plus simplement pour alléger les lignes de calcul qui vont suivre. Nous posons $\mathcal{A}_e(Q) = \left[\beta_e \left(\sum_{j=1}^N w_j \times Eprob(e)_j \right) + \frac{\alpha_e}{2} \left(\sum_{j=1}^N w_j \times Eprob(e)_j \right)^2 + \alpha_e \left(\sum_{j=1}^N w_j^2 \times Eprob(e)_j \times \left(1 - \frac{Eprob(e)_j}{2} \right) \right) \right]$, soit $F(Q) = \sum_{e \in E} \mathcal{A}_e(Q)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_{i,p}}(Q) &= \frac{\partial \sum_{e \in E} \mathcal{A}_e(Q)}{\partial q_{i,p}} = \sum_{e \in E} \frac{\partial \mathcal{A}_e(Q)}{\partial q_{i,p}}, \text{ que nous réécrivons :} \\ \frac{\partial F}{\partial q_{i,p}}(Q) &= \sum_{e \in E} \frac{\partial \mathcal{A}_e(Q)}{\partial Eprob(e)_i} \times \frac{\partial Eprob(e)_i}{\partial q_{i,p}}. \end{aligned}$$

D'après (6.7), nous avons $\frac{\partial Eprob(e)_i}{\partial q_{i,p}} = \mathbf{1}_{e \in p}$, nous pouvons réécrire

$$\frac{\partial F}{\partial q_{i,p}}(Q) = \sum_{e \in E} \frac{\partial \mathcal{A}_e(Q)}{\partial Eprob(e)_i} \times \mathbf{1}_{e \in p} = \sum_{e \in p} \frac{\partial \mathcal{A}_e(Q)}{\partial Eprob(e)_i} \quad (6.23)$$

La prochaine étape consiste à exprimer la dérivation de chaque terme de la somme, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}_e(Q)}{\partial Eprob(e)_i} &= \beta_e \times w_i + \alpha_e \times w_i \left(\sum_{j=1}^N w_j \times Eprob(e)_j \right) + \alpha_e \left(w_i^2 \left(1 - Eprob(e)_i \right) \right) \\ &= \beta_e \times w_i + \alpha_e \times w_i \left(\sum_{j \neq i} w_j \times Eprob(e)_j \right) + \alpha_e w_i^2, \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ce qui correspond au prix attendu (ou prix moyen) sur l'arc e en particulier pour le joueur i lorsqu'il prévoit de passer par là. Nous pouvons donc finalement réécrire l'intégralité de $\frac{\partial F}{\partial q_{i,p}}$ en :

$$\frac{\partial F}{\partial q_{i,p}} = \sum_{e \in p} \frac{\partial \mathcal{A}_e(Q)}{\partial Eprob(e)_i} = \sum_{e \in p} \beta_e \times w_i + \alpha_e \times w_i \left(\sum_{j \neq i} w_j \times Eprob(e)_j \right) + \alpha_e w_i^2, \text{ soit}$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_{i,p}}(Q) = w_i \times h_{i,p}(Q) \quad (6.25)$$

Ce qui est conforme à l'équation (6.5.1). La constante x_i du théorème est simplement ici, le poids w_i du joueur i . Ceci complète la preuve et confirme que la fonction de potentiel F proposée plus tôt convient à l'étude du jeu. \square

Remarquons que l'hypothèse selon laquelle les fonctions de coûts sont linéaires est cruciale. Nous pouvons, en effet, montrer que le théorème précédent ne s'applique pas si les fonctions de coût sont quadratiques.

Proposition 6.5.3 *Supposons que les fonction de coût sur les arcs soient quadratiques, donc de la forme*

$$c_e(f_e) = \alpha_e f_e^2 + \beta_e f_e + \gamma_e,$$

avec $\alpha_e > 0$, $\beta_e, \gamma_e \geq 0$.

Il ne peut pas exister de fonction F de classe \mathcal{C}^2 qui satisfasse le théorème (6.5.1) pour tous i, s, Q et w_i .

Preuve: Si cela était le cas, d'après le théorème de Schwartz (voir par exemple [4], chapitre 1, page 4), nous devrions avoir :

$$\frac{\partial}{\partial q_{i',s'}} \left(\frac{\partial F}{\partial q_{i,s}} \right) = \frac{\partial}{\partial q_{i,s}} \left(\frac{\partial F}{\partial q_{i',s'}} \right),$$

ce qui implique qu'il existe W_i et W'_i tels que

$$W_i \frac{\partial h_{i,s}}{\partial q_{i',s'}} = W'_i \frac{\partial h_{i',s'}}{\partial q_{i,s}},$$

pour tout i, i', s, s' et deux constantes W_i et W'_i . Ce qui n'est pas possible dans le cas général puisque les poids des joueurs sont indépendants. \square

Il est donc impossible de trouver une fonction de potentiel générale pour un jeu de routage comme nous avons défini ici avec des fonctions de coût quadratiques sur les arêtes.

D'après le théorème (6.5.1), la proposition (6.5.2) et la proposition (6.5.3), nous pouvons établir le théorème suivant :

Théorème 6.5.4 *Pour le modèle de routage que nous proposons, avec des fonctions de coût linéaires, pour tout état initial du système dans $\mathcal{S} - \mathcal{S}^*$, l'algorithme d'apprentissage distribué proposé permet au système de converger vers un équilibre de Nash mixte.*

6.5.2 Temps de convergence vers un ϵ -équilibre de Nash

D'après la dynamique (6.15), il est clair que si $q_{i,s}$ vaut 0 ou 1, cette valeur ne peut changer. Si le joueur i commence avec une stratégie $q_i(0)$ au temps 0, nous savons qu'au temps t , le support de sa stratégie $q(t)$ sera dans le support de $q_i(0)$. Ce que nous pouvons écrire

$$q_{i,s}(0) = 0 \Rightarrow q_{i,s}(t) = 0, \forall t \geq 0$$

ou de façon équivalente :

$$\forall t \geq 0; q_{i,s}(t) > 0 \Rightarrow q_{i,s}(0) > 0.$$

Ce qui nous permet d'écrire les définitions suivantes :

Définition 6.5.5 *Soit une stratégie $q \in \mathcal{S}$, nous écrivons $\mathcal{S}(q) \subset \mathcal{S}$ l'ensemble des stratégies dont le support est inclus dans le support de q , c'est-à-dire tel que :*

$$q'_{i,s} > 0 \Rightarrow q_{i,s} > 0.$$

Définition 6.5.6 *Le n -uplet de stratégies (q_1^*, \dots, q_n^*) est un ϵ -équilibre de Nash si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall q \in \mathcal{S}(q_i^*)$ nous avons :*

$$g_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) < g_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i^*, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) + \epsilon.$$

En d'autres termes, un n -uplet de stratégies mixte (q_1^*, \dots, q_n^*) n'est pas un ϵ -équilibre de Nash s'il existe un i dans $\{1, \dots, n\}$ et un $q \in \mathcal{S}_i$ tel que :

$$g_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) < g_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i^*, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) - \epsilon.$$

Clairement, s'il existe un tel joueur i avec une stratégie $q \in \mathcal{S}_i$, alors il existe au moins deux stratégies pures ℓ et ℓ' dans \mathcal{S}_i telles que

$$g_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, e_\ell, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) < g_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, e_{\ell'}, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) - \epsilon$$

Ce qui s'écrit également :

$$h_{i,\ell} < h_{i,\ell'} - \epsilon$$

Par conséquent, $[h_{i,\ell}(Q) - h_{i,\ell'}(Q)]^2 \geq \epsilon^2$.

D'après l'équation (6.21), nous savons que :

$$\frac{dF(Q(t))}{dt} = \sum_i w_i \sum_\ell \sum_{\ell' > \ell} q_{i,\ell} q_{i,\ell'} [h_{i,\ell}(Q) - h_{i,\ell'}(Q)]^2.$$

Ce qui signifie qu'en ce qui concerne un point $Q(t)$ qui n'est pas un ϵ -équilibre de Nash, il existe au moins un joueur i et deux de ses stratégies ℓ, ℓ' tels que :

$$\frac{dF(Q(t))}{dt} \leq w_i q_{i,\ell} q_{i,\ell'} \epsilon^2,$$

Théorème 6.5.7 ([7]) *Soit $Q(0)$ un état initial dans $\mathcal{S} - \mathcal{S}^*$. Nous supposons que*

$$\delta_i(Q) = \min_{\ell, \ell': q_{i,\ell} q_{i,\ell'} \neq 0} q_{i,\ell} q_{i,\ell'}$$

a une borne inférieure $\delta^ > 0$, à tout temps $t \in [0, T']$ et pour tout joueur i .*

Alors un ϵ -équilibre de Nash est atteint par la dynamique (6.15) à un temps inférieur à :

$$T \leq \frac{F(Q(0))}{(\min_i w_i) \epsilon^2 \delta^*},$$

dès que $T' \geq T$.

Preuve: Nous avons

$$\frac{dF(Q(t))}{dt} \leq (\min_i w_i) \epsilon^2 \delta^*,$$

si $Q(t)$ n'est pas un ϵ -équilibre de Nash. Ceci implique que

$$F(Q(t)) \leq F(Q(0)) + (\min_i w_i) \epsilon^2 \delta^* t,$$

Si $Q(t)$ n'est pas un ϵ -équilibre de Nash du temps 0 au temps t . Puisque F est non négative, un ϵ -équilibre de Nash doit être atteint à un temps \mathcal{T} tel que :

$$\mathcal{T} \leq \frac{F(Q(0))}{(\min_i w_i) \epsilon^2 \delta^*}.$$

□

6.6 Conclusion

En nous basant sur le modèle de Wardrop, nous avons transposé un problème de routage réseau à un jeu à information très incomplète et spécifié une méthode d'apprentissage basée sur des vecteurs de chemins. Cette méthode permet au système, si tous les joueurs l'adoptent, de converger vers un état stable qui est un équilibre de Nash. Pour y parvenir, nous avons montré que le comportement de l'algorithme d'apprentissage est asymptotiquement équivalent à une équation différentielle qui se trouve être une équation de réplication. En utilisant la théorie de la stabilité de Lyapunov, nous avons montré que, si convergence il y a, ce sera vers un équilibre de Nash.

La complexité de la méthode proposée dépend du nombre de stratégies, une stratégie pour un joueur correspond à un choix de chemin entre deux sommets du graphe. Elle est donc exponentielle en ce nombre. Dans certains cas, cette complexité peut devenir insurmontable (très grand nombre de joueurs et très grands réseaux). Dans le chapitre suivant, nous allons décrire une autre approche du problème de routage qui remédie à ce problème.

Chapitre 7

Raffinement du jeu de routage

Il subsiste encore sur "notre terre" des individus dont la préoccupation majeure et les intérêts les plus affirmés sont de manger bien, de boire froid, de se divertir et de se reproduire.

(Boris Vian)

Dans ce chapitre, nous présentons une alternative à la modélisation développée dans le chapitre précédent. Cette nouvelle modélisation que nous appelons MICRO permet de réduire la taille de l'espace de stratégies sur des grands réseaux et par conséquent les temps de calculs nécessaires. Dans le chapitre 6, la stratégie d'un joueur consistait en un unique vecteur de probabilités indexé sur une liste de chemins praticables. Ici la stratégie d'un joueur est composée de plusieurs vecteurs de probabilités, eux-mêmes indexés sur les arcs sortants de différents nœuds du réseau par lesquels le joueur en question est susceptible de passer. Afin de comparer aisément les deux modèles dans ce chapitre, nous appellerons dorénavant la modélisation du chapitre 6, MACRO.

Comme nous allons le montrer, la théorie indique que la nature des équilibres est différente selon les deux modèles : les équilibres du jeu MICRO sont contenus dans l'ensemble des équilibres du jeu MACRO. L'idée derrière la seconde modélisation du problème est la possibilité d'améliorer les performances de l'algorithme, en termes de place mémoire et de temps de convergence, soit en terme de complexité. D'après les tests effectués, c'est bien le

cas. Dans le cas où le nombre de stratégies dans le modèle MACRO est trop élevé, la méthode du chapitre 6 est trop coûteuse. La méthode MICRO peut alors être utilisée comme une heuristique pour déterminer les équilibres de la première.

Nous allons, dans un premier temps, présenter les différences théoriques dans la conception des stratégies des joueurs et entre les équilibres des deux modèles, puis nous préciserons les mécanismes de cette vision MICRO. Enfin nous verrons que le résultat de convergence est conservé tout en suivant une réflexion semblable à celle du chapitre précédent.

Préliminaires, d'un modèle à l'autre

Nous allons commencer par illustrer la différence dans la façon de représenter les stratégies selon les deux modèles. La figure 7.1 représente un réseau composé de dix nœuds et quinze arcs. Nous pouvons y distinguer deux commodités, caractérisées par les couples de sommets (source-destination), suivants : (S_1, T_1) ou (v_0, v_6) et (S_2, T_2) ou (v_3, v_9) . Rappelons qu'une commodité est un ensemble de plus courts chemins constituant un sous graphe orienté. Ici, il existe quatre chemins dans chacune des deux commodités.

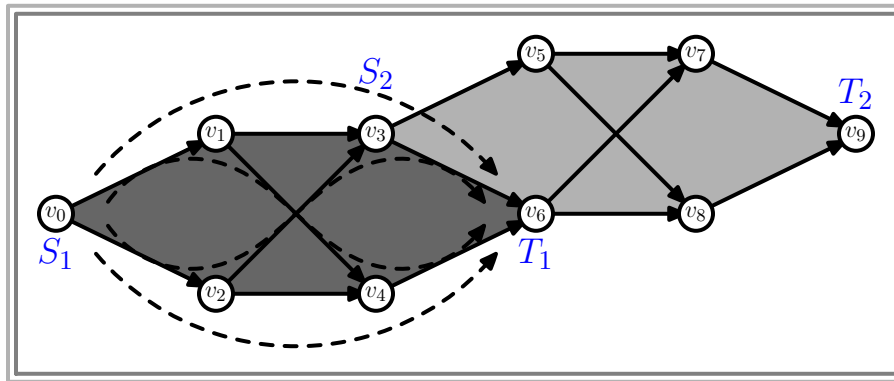


FIG. 7.1 – Un réseau simple à deux commodités

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, dans la modélisation MACRO la stratégie d'un joueur dans l'une ou l'autre des commodités (puisque'elles sont structurellement identiques) consiste en un unique vecteur de stratégies qui a quatre composantes.

Dans notre modélisation MICRO maintenant, nous ne parlons plus de stratégies mais

de *multistratégies*. La multistratégie d'un joueur comporte alors autant de vecteurs de probabilités qu'il y a de sommets dans sa commodité **moins un**¹. Considérons par exemple un joueur i dans la commodité définie par le couple de sommets (v_3, v_9) . Sa multistratégie est composée de cinq vecteurs de probabilités. $Q_i = \{q_{v_3}^i, q_{v_5}^i, q_{v_6}^i, q_{v_7}^i, q_{v_8}^i\}$ Ces vecteurs de probabilités sont respectivement de dimension 2, 2, 2, 1 et 1. Par exemple $q_{v_3}^i$ est la sous-stratégie du joueur i sur le nœud v_3 qui dispose (dans cette commodité) de deux arcs sortants : (v_3, v_5) et (v_3, v_6) .

7.1 Définition du jeu MICRO

Le réseau est représenté par un graphe global $G = (V, E)$. Pour tout nœud v de V , nous notons $\delta_G^+(v)$ le degré - ou la dimension - du nœud v (son nombre d'arcs sortants) dans le graphe G et $\Gamma_G^+(v) \subset V$ l'ensemble de nœuds qui peuvent être atteints depuis le nœud v directement par un arc sortant. Tout comme dans le jeu MACRO, tout arc est caractérisé par une fonction de coût linéaire, soit $\forall e$:

$$c_e(f_e) = \alpha_e f_e + \beta_e,$$

avec f_e la charge de l'arc e définie comme précédemment.

L'ensemble des n joueurs est noté N . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le joueur i est défini par un certain poids réel w_i , une multistratégie notée Q_i ainsi qu'un couple de sommets source-destination : (s_i, t_i) et . Nous notons $G_i = (V_i, E_i)$ le sous-graphe de G induit par l'ensemble \mathcal{P}_i des plus courts chemins allant de s_i à t_i . G_i est un DAG (Directed Acyclic graph). Deux joueurs qui ont même source et même destination jouent dans le même DAG, nous dirons plus volontiers qu'ils jouent dans la même commodité, ils disposent donc du même ensemble de chemins et d'une multistratégie initialement identique.

La multistratégie du joueur i contient autant de vecteurs de probabilités qu'il y a de sommets dans G_i moins 1, sa destination t_i .

Pour tout joueur i , nous notons m_i la dimension de Q_i avec $m_i = ||V_i|| - 1$. L'ensemble de nœuds (V) est ordonnable et énumérable. Pour tout joueur i , les sommets de G_i le sont donc également, nous pouvons écrire $Q_i = \{q_{v_1}^i, q_{v_2}^i, \dots, q_{v_{m_i}}^i\}$. Nous appelons chacun de ces vecteurs de probabilités une *sous-stratégie*.

¹En effet, il n'y a pas de choix d'arc sortant à faire sur le sommet destination.

Remarquons bien qu'un nœud donné n'a pas nécessairement le même degré sortant, suivant que nous le considérons dans le réseau global ou bien dans une commodité (comme le nœud v_3 de la figure 7.1 par exemple). Soit $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\delta_{G_i}^+(v) \leq \delta_G^+(v).$$

Pour tout joueur i et pour tout sommet $v \in V_i$ avec $v \neq t_i$, le vecteur de stratégies q_v^i est de degré $\delta_{G_i}^+(v)$. De plus, et pour assurer la cohérence de l'ensemble, nous posons que $\forall v \notin V_k, \Gamma_{G_k}^+(v) = \{\emptyset\}$ et également que $\delta_{G_k}^+(v) = 0$.

L'espace de stratégies du joueur i , noté \mathcal{S}_i , est un compact de \mathbb{R} , nous pouvons l'exprimer sous la forme $\mathcal{S}_i = [0, 1]^{\delta_{G_i}^+(v_1^i)} \times \dots \times [0, 1]^{\delta_{G_i}^+(v_{m_i}^i)}$. L'espace de stratégie du jeu est noté \mathcal{S} avec $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n$.

7.1.1 Profil de jeu et chemin choisi

A chaque partie, tous les joueurs choisissent un chemin et cette opération est effectuée ainsi : chaque joueur choisit un arc sortant sur chacun des nœuds de sa commodité sauf la destination. Nous disons alors qu'un joueur détermine son *profil* de jeu.

Lemme 7.1.1 *D'après la représentation du jeu et des stratégies des joueurs, un profil de jeu induit un chemin unique.*

Le joueur i choisit le chemin $p_i(t)$ lors de la partie t , qui dépend de l'ensemble de ses choix sur tous les sommets de sa commodité. $\forall v \in V_i$, nous notons a_v^i l'action du joueur i sur son sommet v qui correspond à son choix d'arc sortant. C'est un vecteur unitaire et nous notons $A_i(t) = (a_{v_1}^i, a_{v_2}^i, \dots, a_{v_{m_i}}^i)$ son profil de jeu.

Nous notons $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t))$ l'état du jeu à la partie t , c'est l'ensemble des vecteurs de stratégies de tous les joueurs. Nous notons $A(t) = (A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t))$ l'ensemble des profils de jeu de tous les joueurs lors de la partie t . En utilisant le lemme (7.1.1), pour tout ensemble de profils A , nous pouvons écrire $P(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$, l'ensemble des chemins induits par les profils de jeux de tous les joueurs.

Probabilités d'emprunter un chemin, un sommet ou un arc

Pour tout nœud $v \in V$, tout arc $e \in E$ et tout chemin $P \in \cup_{i=1}^n \mathcal{P}_i$, il peut être utile de savoir si le nœud ou l'arc en question appartient au chemin ou non. Nous utilisons la

notation courante “ $\mathbf{1}_{condition}$ ”, soit ici :

$$\mathbf{1}_{v \in P} = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \mathbf{1}_{e \in P} = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La probabilité pour un joueur donné d'emprunter un chemin donné s'exprime ici en tant que produit de plusieurs probabilités. De même, nous pouvons exprimer la probabilité pour n'importe quel joueur de passer par tel ou tel sommet ou arc du graphe. Nous donnons les expressions de ces probabilités ici :

Définition 7.1.2 *D'après le lemme (7.1.1) et la représentation stratégique du modèle MICRO, nous notons :*

- $Pprob(P)_i$, la probabilité qu'a le joueur i d'emprunter le chemin donné P , avec

$$Pprob(P)_i = \begin{cases} \prod_{(v,w) \in P} q_{v,w}^i & \text{si } P \in \mathcal{P}_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (7.1)$$

- $Vprob(v)_i$, la probabilité pour le joueur i que son chemin passe par le nœud v , soit :

$$Vprob(v)_i = \begin{cases} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} Pprob(P)_i \times \mathbf{1}_{v \in P} & \text{si } v \in V_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (7.2)$$

- $Eprob((v,w))_i$, la probabilité pour le joueur i de passer par l'arc donné (v,w) , soit

$$Eprob((v,w))_i = \begin{cases} Vprob(v)_i \times q_{v,w}^i & \text{si } (v,w) \in E_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (7.3)$$

L'utilité associée à un chemin est également conçue comme au chapitre précédent, c'est-à-dire comprise entre 0 et 1 et inversement proportionnelle au prix du chemin en question. Nous avons donc toujours la relation suivante (6.1) pour tout chemin P , $U_P = 1 - C_P$ (rappel : C_P est le coût du chemin P). L'utilité d'un joueur est l'utilité du chemin qu'il a choisi, il y a donc conservation de l'équation (6.2) telle quelle, soit : $r_i(t) = 1 - C_{p_i(t)}$.

Parallèlement à l'utilité d'un joueur, nous définissons une notion de *coût relatif* : le rapport entre le prix d'un certain arc et le prix d'un chemin donné.

Définition 7.1.3 *D'après la définition du jeu MICRO et le lemme (7.1.1), nous notons η_v^i*

le ratio du coût de l'arête par le coût du chemin. Ce ratio est :

$$\eta_v^i(t) = \begin{cases} \frac{c_{(v,w)}}{C_{p_i(t)}} & \forall \text{arc } (v,w) \in p_i(t) \\ 0 & \text{si } v \notin p_i(t) \end{cases} \quad (7.4)$$

Remarquons qu'à chaque partie, pour tout joueur i jouant le chemin p_i , $\sum_{v \in p_i} \eta_v^i = 1$.

Théorème 7.1.4 *Un équilibre dans le modèle MACRO est aussi un équilibre dans le modèle MICRO. La contraposée n'est pas vraie.*

Preuve: La figure 7.2 illustre l'existence et la différence des équilibres possibles. Les prix sur les arcs sont indiqués par les chiffres. Nous supposons qu'un joueur envoie un message entre v_0 et v_6 , les arcs noirs indiquent chacun de ses choix sur tous les sommets, les arcs en pointillés ne font pas partie du chemin retenu.

Équilibre MACRO \Rightarrow équilibre MICRO

Soit Q^* un équilibre de Nash dans le jeu MACRO, alors tous les joueurs sont sur leur chemin de coût minimal. Un profil de jeu MICRO induit un chemin unique, il existe donc au moins un jeu MICRO équivalent au jeu MACRO initial, dans lequel les joueurs prennent les mêmes chemins. Dans le jeu MICRO, changer son profil de jeu pour un joueur consiste à ne modifier qu'un seul choix d'arc sortant. Ceci n'a, soit aucune incidence sur le chemin choisi, soit cela le modifie. Par hypothèse, aucun chemin n'est moins cher puisque Q^* est un équilibre de Nash du système. Un équilibre de Nash dans le jeu MACRO est donc bien un équilibre de Nash dans le jeu MICRO également.

Contraposée fausse

En figure 7.2, sur le réseau de gauche, le prix du chemin sélectionné est de 5. Dans la vision MICRO, le joueur serait (individuellement) dans une situation d'équilibre de Nash car il ne lui est pas possible de choisir un chemin moins cher en ne modifiant qu'un seul choix d'arc sortant. Ce chemin n'est pas optimal dans la vision MACRO, le joueur n'est donc pas dans une situation d'équilibre, tout simplement car il existe un chemin moins cher comme indiqué dans la partie droite de la figure 7.2.

Sur le réseau de droite, le prix du chemin est de 3, le chemin choisi par le joueur est le moins cher qu'il puisse emprunter, cette situation est un équilibre dans les deux visions, MICRO et MACRO que nous distinguons dans ce chapitre. \square

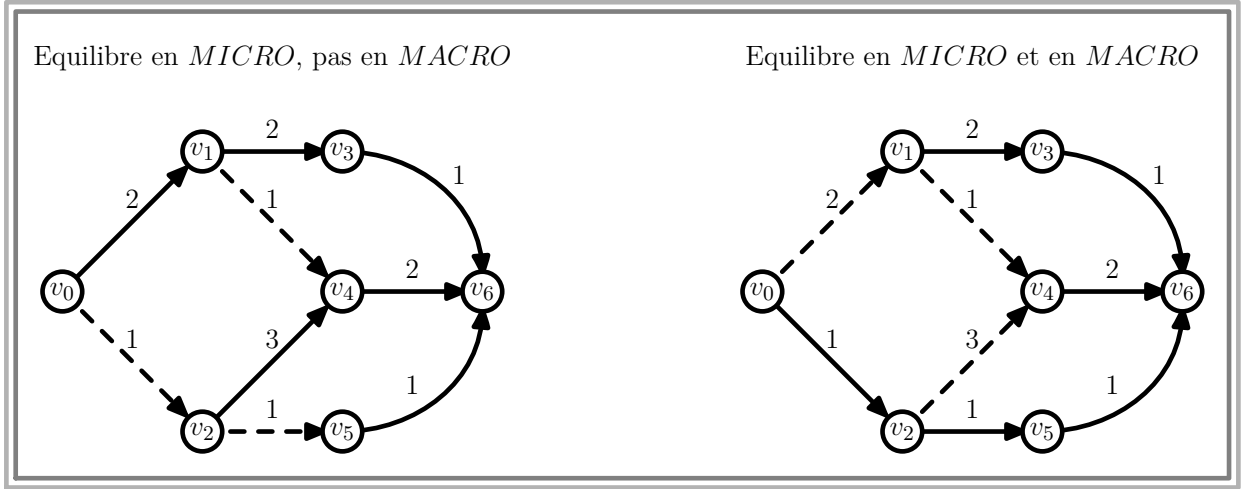


FIG. 7.2 – Deux équilibres différents, MICRO et MACRO

7.1.2 Déroulement d'une partie

Les trois étapes successives qui constituent toute partie du jeu sont :

1. Chaque joueur établit son profil de jeu $A_i(t)$ conformément à sa multistratégie, ce qui détermine son chemin unique $p_i(t)$ pour la partie en cours.
2. Chaque joueur connaît son utilité $r_i(t) = U_{p_i(t)}$.
3. Chaque joueur met à jour sa multistratégie selon les nœuds du chemin qu'il a choisi, soit pour tout $v \in p_i(t)$, suivant la règle :

$$q_v^i(t+1) = q_v^i(t) + b \times r_i(t) \times (e_{a_v^i(t)} - q_v^i(t)). \quad (7.5)$$

où $0 < b < 1$ est un paramètre d'ajustement de même nature que dans le chapitre précédent. $e_{a_v^i(t)}$ est un vecteur unitaire de dimension $\delta_{G_i}^+(v)$ dont la a_v^i ^{iemme} composante vaut 1.

Lors de la phase de mise à jour des multistratégies des joueurs, les sous-stratégies des joueurs évoluent toutes indépendamment. D'après l'équation (7.5), nous pouvons exprimer la variation de chaque sous-stratégie composante par composante, ce qui nous permet d'écrire la proposition suivante :

Proposition 7.1.5 *Pour tout joueur i , pour tout nœud $v \in V_i$ et pour tout arc (v, w)*

existant dans sa commodité,

$$\frac{dq_{v,w}^i}{dt} = \begin{cases} b h_{(v,w)}^i \times (1 - q_{v,w}^i) & \text{si } (v, w) \in p_i(t) \\ b h_{(v,x)}^i \times (-q_{v,w}^i) & \text{si } (v, x) \in p_i(t), x \neq w \\ 0 & \text{si } v \neq p_i(t) \end{cases} \quad (7.6)$$

Nous pouvons faire quelques observations quant à la variation des probabilités d'emprunter tel ou tel chemin de tout joueur entre deux parties successives. Supposons que le joueur i utilise le chemin P à la partie t et que P' et R sont deux chemins dans \mathcal{P}_i différents de P . La mise à jour qu'il fait de sa multistratégie en fin de partie a les effets suivants :

- $Pprob(P)_i$ augmente.
- $Pprob(R)_i$ décroît strictement si R et P n'ont pas d'arc en commun. Ceci est dû au fait que même si ces deux chemins ne partagent pas d'arc, ils ont au moins le premier nœud en commun.
- $Pprob(P')_i$ peut croître ou décroître si P et P' ont au moins un arc en commun.

7.2 Description de l'approche utilisée

Nous voulons construire un algorithme d'apprentissage distribué. Soit T_i cet algorithme pour le joueur i alors il est tel que :

$$Q_i(t+1) = Q_i(t) + T_i[Q_i(t), p_i(t), r_i(t)].$$

où T_i est tel que $Q_i(t) \rightarrow Q_i^*$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et où $(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ est un équilibre de Nash.

Le processus d'apprentissage dépend de tous les joueurs, nous pouvons donc le reformuler en fonction des stratégies, des profils de jeu et des utilités de tous les joueurs. Si nous notons T ce processus indépendant de b , alors T est tel que :

$$Q(t+1) = Q(t) + T[Q(t), P(t), R(t)].$$

avec $R(t) = ((r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)))$ l'ensemble des utilités de tous les joueurs.

Nous raisonnons ici encore en fonction de ce que les joueurs peuvent espérer quant à l'issue d'une partie donnée. Soit $d^i : \prod_{j=1}^n \mathcal{P}_j \rightarrow [0, 1]$ la fonction d'utilité qui, à chaque partie associe son utilité au joueur i en fonction des chemins choisis par l'ensemble des

joueurs. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$; elle est définie par :

$$d^i(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n) = r_i; \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

Nous étendons cette fonction des actions aux stratégies mixtes afin d'exprimer des espérances d'utilités. Soit g^i cette fonction.

Définition 7.2.1 (Fonction d'espérance d'utilité) *L'espérance d'utilité $g^i(Q(t)) : \prod_{j=1}^n \mathcal{S}_j \rightarrow [0, 1]$, est définie pour tout joueur $i \in \{1, \dots, n\}$, par :*

$$g^i(Q_1, Q_2, \dots, Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1}, \dots, Q_n) = E[r_i \mid \text{le joueur } j \text{ joue la stratégie } Q_j].$$

Ainsi, pour un état donné $Q(t)$ du jeu :

$$g^i(Q) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} d^i(j_1, j_2, \dots, j_n) \times \prod_{s=1}^n Pprob(j_s)_s \quad (7.7)$$

Tout comme dans le chapitre 6, l'utilité d'un joueur est inversement proportionnelle au prix du chemin qu'il choisit. Le prix d'un chemin est la somme des prix sur chacun des arcs qui le composent. Nous allons décomposer les chemins en arcs dans le raisonnement.

Définition 7.2.2 (Espérance de coût spécifique à un arc) *Nous notons $expr(e, i, Q^{-i})$ le coût moyen attendu pour le joueur i sur l'arc e , s'il y passe, et nous avons :*

$$expr(e, i, Q^{-i}) = \alpha_e \left(\sum_{j \neq i} w_j Eprob(e)_j + w_i \right) + \beta_e. \quad (7.8)$$

Nous notons $h_P^i(Q) : \prod_{j=1}^n \mathcal{S}_j \rightarrow [0, 1]$ l'espérance d'utilité pour tout joueur $i \in \{1, \dots, n\}$ lorsque celui-ci décide d'utiliser le chemin donné $P \in \mathcal{P}_i$. Elle est définie par

$$h_P^i(Q_1, \dots, Q_{i-1}, P, Q_{i+1}, \dots, Q_n) = E[r_i \mid Q^{-i}; i \text{ joue } P]$$

$$\Rightarrow h_P^i(Q) = 1 - \sum_{e \in P} E[c_e(f) \mid i \text{ passe par } e]$$

En utilisant la définition (7.2.2), nous pouvons réécrire h_P^i ainsi :

$$h_P^i(Q) = 1 - \sum_{e \in P} expr(e, i, Q^{-i}). \quad (7.9)$$

Espérance d'utilité spécifique à un sommet et à un arc

Nous venons de définir l'espérance d'utilité d'un joueur s'il utilise un chemin donné. Nous allons spécialiser cette espérance d'abord à un sommet particulier puis à un arc. Pour un joueur i , nous notons $h_v^i(Q)$ l'utilité attendue si le chemin que sélectionne le joueur passe par le nœud v . $h_v^i(Q) = E[r_i | i \text{ passe en } v]$ est définie ainsi :

$$h_v^i(Q) = \begin{cases} \frac{1}{Vprob(v)_i} \times (\sum_{P \in \mathcal{P}_i} h_P^i(Q) Pprob(P)_i \times \mathbf{1}_{v \in P}) & \text{si } Vprob(v)_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.10)$$

Enfin nous pouvons spécialiser l'espérance d'utilité d'un joueur (ou son utilité moyenne) lorsqu'il passe sur un arc particulier. Nous notons $h_{(v,w)}^i$ cette fonction pour le joueur i lorsqu'il passe par l'arc (v, w) .

$h_{(v,w)}^i(Q) = E[r_i | (v, w) \in p_i]$ est définie ainsi :

$$h_{(v,w)}^i(Q) = \begin{cases} \frac{1}{Eprob((v,w))_i} \times (\sum_{P \in \mathcal{P}_i} h_P^i(Q) Pprob(P)_i \times \mathbf{1}_{(v,w) \in P}) & \text{si } Eprob((v,w))_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.11)$$

Conformément à la définition (7.1.3) et en utilisant l'équation (7.11), nous pouvons donner l'expression de l'espérance mathématique du coût relatif en tout sommet v de la commodité d'un joueur $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $Vprob(v)_i > 0$, elle vaut :

$$E[\eta_v^i | v \in p_i] = \frac{\sum_{w \in \Gamma_{G_i}^+(v)} q_{v,w}^i \text{expr}((v, w), i, Q^{-i})}{1 - h_v^i} \quad (7.12)$$

De plus, pour n'importe quel arc du graphe que le joueur en question est susceptible d'utiliser, il est possible de spécialiser le coût relatif à cet arc ; ce que nous notons $\eta_{v/w}^i$ pour l'arc (v, w) .

Lemme 7.2.3 *Pour tout joueur i , $\forall (v, w)$ tel que $Eprob((v, w))_i > 0$, l'espérance de coût relatif de cet arc (soit la proportion **en moyenne** du coût de l'arc sur le coût d'un chemin dont il fait partie) est :*

$$E[\eta_{v/w}^i | Q^{-i}, (v, w) \in p_i] = \frac{\text{expr}((v, w), i, Q^{-i})}{1 - h_{(v,w)}^i}. \quad (7.13)$$

7.2.1 Dynamique du jeu

Nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution des multistratégies des joueurs et par conséquent à l'évolution de leurs sous-stratégies, c'est-à-dire à tous les vecteurs de probabilités des multistratégies de tous les joueurs. En sommant la variation moyenne sur tous les arcs sortants du nœud v , nous obtenons l'espérance de variation de chaque composant en particulier lorsque le chemin passe par un nœud v donné, soit :

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{dq_{v,w}^i}{dt}\right] &= Vprob(v)_i \times \left(bh_{(v,w)}^i (1 - q_{v,w}^i) \times q_{v,w}^i - \sum_{x \neq w} bh_{(v,x)}^i q_{v,w}^i q_{v,x}^i \right) \\
&= bq_{v,w}^i Vprob(v)_i \times \left(h_{(v,w)}^i (1 - q_{v,w}^i) - \sum_{x \neq w} h_{(v,x)}^i q_{v,x}^i \right) \\
&= bq_{v,w}^i Vprob(v)_i \times \left(h_{(v,w)}^i (1 - q_{v,w}^i) - \sum_{x \in \Gamma(v)} h_{(v,x)}^i q_{v,x}^i + h_{(v,w)}^i q_{v,w}^i \right) \\
E\left[\frac{dq_{v,w}^i}{dt}\right] &= bq_{v,w}^i Vprob(v)_i \times \sum_{x \in \Gamma(v)} q_{v,x}^i \left(h_{(v,w)}^i - h_{(v,x)}^i \right) \tag{7.14}
\end{aligned}$$

7.3 Convergence du jeu MICRO

Comme dans le chapitre 6, nous allons utiliser un raisonnement basé sur la fonction de potentiel et l'utilisation de la théorie de la stabilité de Lyapunov (voir chapitre 6, section 4 ou [57]).

Théorème 7.3.1 *S'il existe une fonction positive ou nulle $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui est telle que pour tout joueur i et que pour tout arc valide² (v, w) tel que $Eprob((v, w))_i > 0$, il existe une certaine valeur définie positive $k_{i,v,w}$ telle que :*

$$\frac{\partial F}{\partial q_{v,w}^i}(Q) = k_{i,v,w} \times h_{(v,w)}^i \tag{7.15}$$

alors l'algorithme d'apprentissage, pour tout état initial quelconque dans $\mathcal{S} - \mathcal{S}^*$ convergera toujours vers un équilibre de Nash.

Preuve: Nous nous intéressons à la variation de F le long de la trajectoire du "point jeu"

²C'est-à-dire dans la commodité du joueur i .

$Q(t)$ au cours du temps dans l'espace de stratégie \mathcal{S} .

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \sum_{i,v,w} \frac{\partial F}{\partial q_{v,w}^i} \frac{dq_{v,w}^i}{dt} \\
&= \sum_i \sum_v \sum_w \frac{\partial F}{\partial q_{v,w}^i}(\mathcal{Q}) \times bq_{v,w}^i Vprob(v)_i \times \sum_{x \in \Gamma(v)} q_{v,x}^i \left(h_{(v,w)}^i - h_{(v,x)}^i \right) \\
&= b \sum_i \sum_v Vprob(v)_i \sum_w k_{i,v,w} q_{v,w}^i \sum_x q_{v,x}^i \left(h_{(v,w)}^i{}^2 - h_{(v,x)}^i h_{(v,w)}^i \right) \\
&= b \sum_i \sum_v Vprob(v)_i \sum_w k_{i,v,w} \sum_{x>w} q_{v,w}^i q_{v,x}^i \left(h_{(v,w)}^i - h_{(v,x)}^i \right)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Ce qui signifie que F est non-décroissante. D'après la nature de l'algorithme toutes les solutions de l'équation différentielle sont contenues dans \mathcal{S} qui est un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^{\|\mathcal{S}_1\|+\dots+\|\mathcal{S}_n\|}$.

Si nous notons Q^* un point correspondant à un équilibre de Nash dans l'espace de stratégies \mathcal{S} , nous pouvons définir $L(Q) = F(Q) - F(Q^*)$ comme fonction de Lyapunov du jeu. $\forall Y \in \mathcal{S}$, $L(Y)$ donne la différence entre deux valeurs de la fonction de potentiel. Comme l'une de ces valeurs est minimale et que F est non décroissante, asymptotiquement, toutes les trajectoires sont dans l'espace $\mathcal{S}' = \{Q^* \in \mathcal{S} : \frac{dF(Q^*)}{dt} = 0\}$.

D'après (7.16) et (7.14), il découle que

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt}(Q^*) = 0 &\Rightarrow q_{v,w}^i q_{v,x}^i (h_{(v,w)}^i(Q^*) - h_{(v,x)}^i(Q^*)) = 0, \forall i, v, w \\
&\Rightarrow \frac{dq_{v,w}^i}{dt}(Q^*) = 0, \forall v, w \\
&\Rightarrow Q^* \text{ est un point stationnaire de l'équation différentielle.}
\end{aligned}$$

D'après le *folk theorem* des jeux répétés énoncé dans le chapitre 6, un point stationnaire qui n'est pas un équilibre de Nash est instable, Q^* est donc bien un équilibre de Nash. Ce qui conclut la preuve. \square

7.3.1 Une fonction de potentiel

Nous proposons maintenant une fonction de potentiel qui respecte le théorème (7.3.1).

Proposition 7.3.2 *Si les fonctions de coûts sur les arcs sont linéaires, la fonction F suivante est une fonction de potentiel pour le jeu qui respecte la condition de l'équation (7.15)*

$$F = \sum_{e \in E} \frac{\alpha_e}{2} \left(\sum_{j=1}^n Eprob(e)_j w_j \right)^2 + \alpha_e \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 Eprob(e)_j \times \left(1 - \frac{Eprob(e)_j}{2} \right) \right) + \beta_e \left(\sum_{i=1}^n w_i Eprob(e)_i \right) \quad (7.17)$$

Preuve: Nous commençons par réécrire cette fonction plus simplement afin d'alléger les lignes de calculs qui vont suivre, nous posons $F = \sum_{e \in E} (\mathcal{A}_e + \mathcal{B}_e)$ avec

$$\mathcal{A}_e = \frac{\alpha_e}{2} \left(\sum_{j=1}^n Eprob(e)_j w_j \right)^2 + \alpha_e \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 Eprob(e)_j \times \left(1 - \frac{Eprob(e)_j}{2} \right) \right) \text{ et}$$

$$\mathcal{B}_e = \beta_e \left(\sum_{i=1}^n w_i Eprob(e)_i \right)$$

La dérivée partielle de F en fonction d'une composante particulière d'un vecteur de stratégie donné d'un joueur i , soit $q_{v,w}^i$, peut se réécrire

$$\frac{\partial F}{\partial q_{v,w}^i} = \frac{\partial F}{\partial Eprob((v,w))_i} \times \frac{dEprob((v,w))_i}{dq_{v,w}^i}.$$

Par construction (voir équation (7.3)), nous savons que

$$\frac{Eprob((v,w))_i}{dq_{v,w}^i} = Vprob(v)_i.$$

Nous pouvons maintenant développer ce qu'il reste, soit :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dq_{v,w}^i} &= \sum_{e \in E} \frac{\partial F}{\partial Eprob(e)_i} \times Vprob(v)_i \\ &= Vprob(v)_i \times (\alpha_e w_i \sum_{j=1}^n Eprob(e)_j w_j + \alpha_e w_i^2 - \alpha_e w_i^2 Eprob(e)_i + \beta_e w_i) \\ &= Vprob(v)_i w_i \times (\alpha_e [\sum_{j \neq i} Eprob(e)_j w_j + w_i] + \beta_e) \\ &= Vprob(v)_i w_i \times \text{expr}((v,w), i, Q^{-i}) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'expression suivante pour la valeur de $k_{i,v,w}$:

$$k_{i,v,w} = \frac{Vprob(v)_i w_i \times \text{expr}((v,w), i, Q)}{h_{(v,w)}^i}.$$

Cette valeur est effectivement toujours positive puisque tous ses composants le sont. De plus, le dénominateur ne peut pas être nul car si $h_{(v,w)}^i = 0$ alors $Vprob(v)_i = 0$. Ce qui conclue la preuve. \square

La fonction de potentiel F proposée convient à l'étude du jeu et celui-ci converge effectivement. De la même manière que dans le chapitre 6, il est possible de montrer que la convergence du jeu n'est pas assurée si les fonctions de coûts sont quadratiques, nous laissons ceci aux soins du lecteur.

7.4 Conclusion

La vision MICRO du jeu de routage permet de diminuer la taille de l'espace de stratégie de chaque joueur et par conséquent la taille de l'espace de stratégies du jeu. Nous avons montré que le jeu MICRO converge vers des équilibres de Nash.

Dans le jeu MACRO, l'objectif d'un joueur était de choisir le meilleur chemin parmi une liste de chemins, si cette liste était de très grande taille, la précision de la décision s'en trouvait affectée, c'est-à-dire de deux choses l'une :

- Dans le jeu MACRO, l'action de choisir un chemin se fait en une seule fois, d'après un seul tirage au sort. Si ce chemin se révèle mauvais une fois que le joueur l'a choisi pour de bon, c'est trop tard, il ne peut plus revenir en arrière.
- Dans le jeu MICRO, le choix du chemin définitif étant plus "distribué", les joueurs profitent d'une certaine marge d'erreur. Nous pouvons observer ce phénomène en simulations : s'il ne reste qu'un seul joueur instable et qu'il a de fortes chances de passer sur un chemin qui n'est pas le moins cher, il a tendance à corriger le tir et à changer de stratégie.

Comme nous l'avons signalé, la théorie nous dit que les équilibres du jeu MACRO sont contenus dans les équilibres du jeu MICRO. Cependant les résultats trouvés en simulations sont parfois des équilibres de Nash au sens MACRO du terme (c'est-à-dire des vrais équilibres de Nash du système). En pratique, nous observons un phénomène commun aux deux modèles qui est l'affinage *progressif* des résultats en fonction de la diminution de la valeur du paramètre d'ajustement b . La modélisation MICRO est une bonne heuristique pour approximer la modélisation MACRO à partir d'un certain degré de précision. Dans le prochain chapitre, nous présentons des résultats de simulations faites sur le jeu MICRO.

Chapitre 8

Simulations

Well, if crime fighters fight crime and fire fighters fight fire, what do freedom fighters fight ? They never mention that part to us, do they ?

(George Carlin)

Afin d'évaluer l'efficacité du modèle MICRO présenté dans le chapitre 7, j'ai développé, pendant ma dernière année de thèse, un simulateur de routage réseau assez général et modulable. Il est modulable dans le sens où le réseau que l'on veut étudier est un paramètre d'entrée, la définition des commodités également, tout comme les joueurs.

Ce simulateur s'est révélé un outil précieux à la fois pour vérifier la théorie, pour confirmer l'efficacité de l'algorithme et pour essayer d'optimiser la partie mise en œuvre. Ici, nous allons énumérer et commenter brièvement des résultats observés sur quelques réseaux de test.

Le simulateur est codé en C++ et la partie affichage est en OpenGL. Il permet de créer un réseau quelconque et de disposer autant de joueurs que l'on veut dedans. Pour des raisons pratiques, les résultats sont présentés ici en répartissant les joueurs dans quelques commodités à chaque fois, de une à trois. A chaque partie, il est possible de connaître la fréquentation de chaque arête du réseau ainsi que la fréquentation moyenne sur toute la durée de la simulation. L'état des multistratégies de tous les joueurs, les chemins qu'ils choisissent, etc. Il est également possible de calculer la valeur exacte de la fonction de potentiel [8] du réseau (voir chapitre 5). Il n'est pas fait appel à toutes les fonctionnalités

du simulateur dans ce chapitre.

Les objectifs du simulateur étaient :

- de tester l’algorithme sur différentes topologies de réseaux aisément,
- de vérifier la pertinence de ce modèle par rapport au modèle *MACRO*,
- d’estimer la qualité l’heuristique en fonction du paramètre d’optimisation.

8.1 Principes du simulateur et des tests

Le passage de la théorie au simulateur implique la mise en place de conditions d’arrêt car nous voulons évaluer les performances de l’algorithme d’apprentissage qualitativement. Le but à atteindre est la stabilisation de l’ensemble des joueurs afin de pouvoir évaluer l’état final obtenu et de savoir si c’est un équilibre de Nash ou non.

Si un joueur a un vecteur de probabilités comprenant une probabilité supérieure à **0.999** de choisir un arc sortant, ce vecteur de stratégies est transformé en un vecteur unitaire. Ce vecteur est donc figé pour tout le reste du jeu.

Si lors d’une partie, un joueur joue en stratégie pure, c’est-à-dire que le chemin qu’il emprunte est de probabilité 1, alors il est considéré comme stable, ou *stabilisé*.

Si un joueur emprunte plusieurs chemins de même prix pendant un certain nombre de parties paramétrable, nous le considérons comme stabilisé également, il joue un équilibre mixte. Dans les simulations présentées ici, ce nombre de parties avant stabilisation est de 30 000 parties lorsque b est égal ou supérieur à 0.01, il est de 150 000 parties pour un b inférieur.

Il existe également un paramètre de fin de jeu, c’est un nombre de parties maximal fixé à dix millions. Un tel nombre de parties peut être atteint pour des valeurs de b très faibles comme 0.001.

Initialement, nous donnons aux joueurs, lors de la première partie, une chance équiprobable de passer sur chaque arc sortant de chaque sommet de sa commodité (ou de son DAG). Dans tous les exemples qui vont suivre, les fonctions de coûts sont linéaires de la forme $c(x) = x + 1$ s’il n’est pas précisé autre chose (avec la x la charge). Enfin nous considérons dans tout ce chapitre que tous les joueurs sont de même poids, normalisé à 1.

Lorsque tous les joueurs sont stables, l’outil de simulation examine systématiquement si la solution trouvée correspond à un équilibre de Nash en vision *MACRO*, c’est à dire un équilibre de Nash global.

Nous allons présenter deux types de topologies différentes dans ces tests et nous avons pris le parti d'échantillonner les résultats sur dix séries de parties à chaque fois.

8.1.1 Déroulement de l'algorithme et réseaux de tests

Toute partie du jeu est composée des étapes suivantes :

1. Choix de la stratégie par tirage au sort sur tous les vecteurs stochastiques, détermination du chemin de tous les joueurs.
2. Calcul des coûts de tous les chemins.
3. Chaque joueur met à jour les vecteurs de probabilités concernés de sa multistratégie (ceux qui correspondent aux sommets qu'il a emprunté).
4. Si tous les joueurs ne sont pas **stables** et que le nombre maximum autorisé de parties n'est pas atteint, retour à l'étape 1 et nouvelle partie.

8.2 Résultats de simulations

Nous allons relater les résultats obtenus sur différents réseaux. Tous sont représentés dans les figures 8.1 et 8.2.

Les résultats en sortie de simulations que nous pouvons analyser systématiquement sont :

- Le nombre de joueurs finissant en multistratégie pure.
- Le nombre de parties : c'est le nombre total de parties qu'il a fallu pour que tous les joueurs soient stabilisés.
- Le prix moyen par commodité lors de la dernière partie. C'est un indicateur de la qualité *sociale* de la configuration finale (lorsque tous les joueurs sont stables).
- La somme des prix payés par l'ensemble des joueurs lors de la dernière partie, qui est également un bon indicateur de la qualité sociale de l'équilibre trouvé
- Le nombre de joueurs qui peuvent mieux faire, c'est à dire : qui ne sont pas sur un chemin de coût minimal lors de la dernière partie. C'est l'indicateur de la qualité de la solution trouvée qui nous intéresse le plus. Si aucun joueur ne peut diminuer son coût alors on a affaire à un équilibre de Nash. Ces chiffres sont calculés en vision MACRO, soit globalement. Une valeur de -1 indique un équilibre de Nash mixte dans le sens où tous les joueurs n'empruntent pas un chemin unique, certains joueurs *conservernt* plusieurs chemins de mêmes coûts.

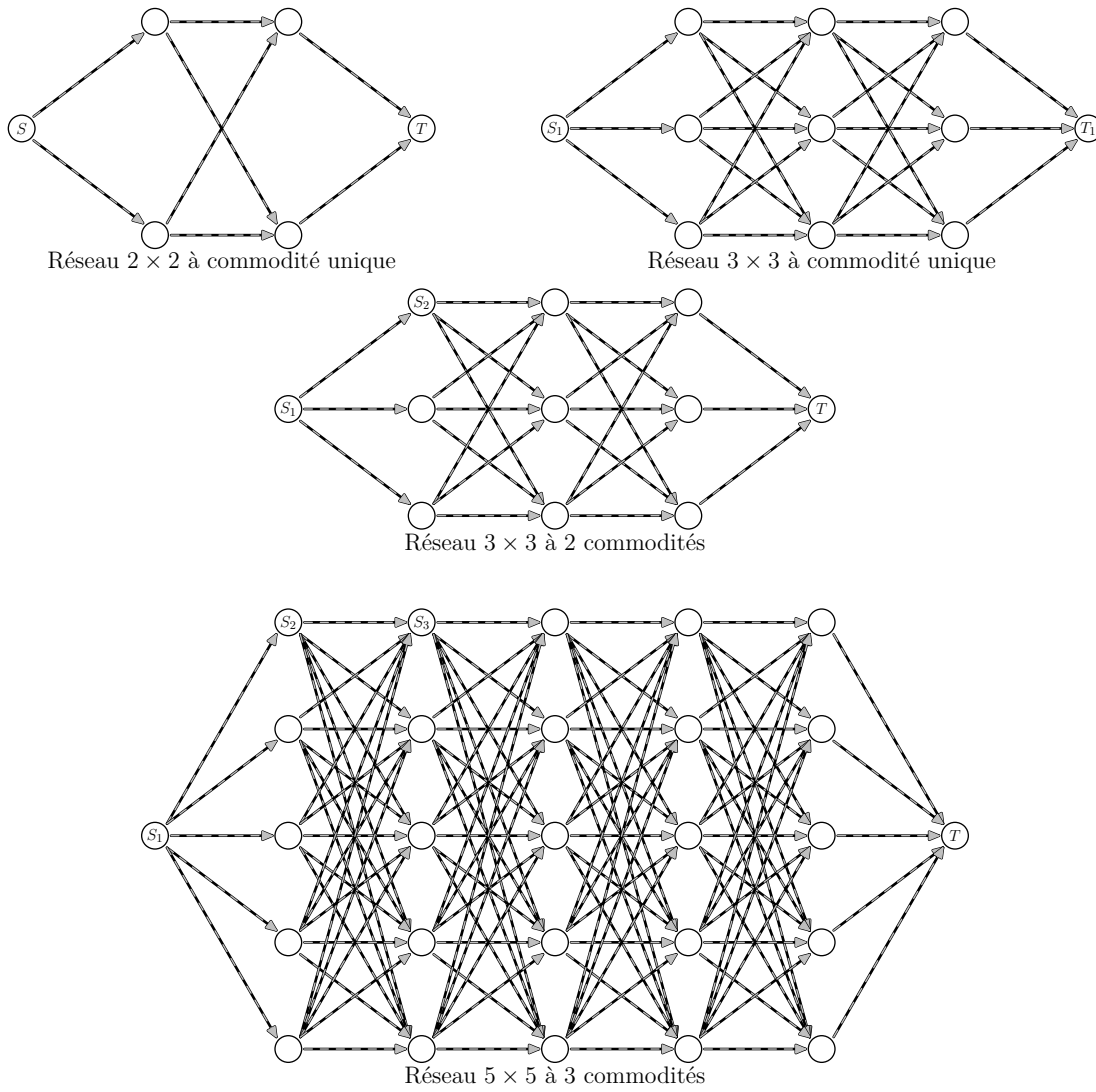


FIG. 8.1 – Première topologie

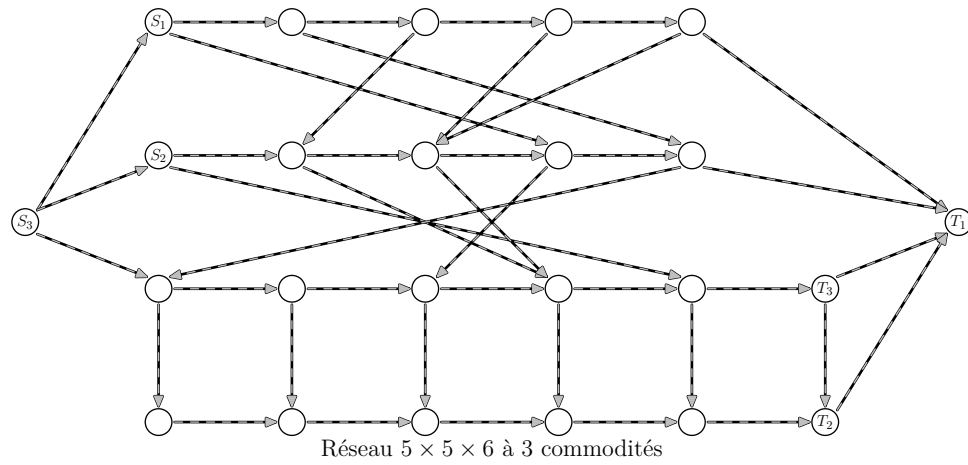
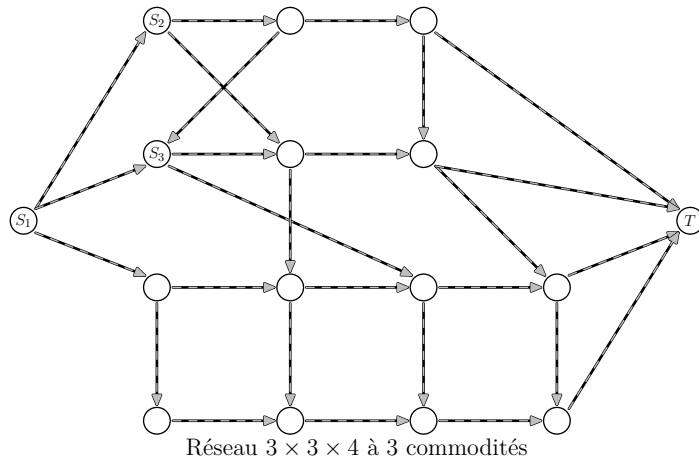


FIG. 8.2 – Seconde topologie

8.2.1 Résultats sur le réseau 2×2 à commodité unique

Commençons par le premier réseau, soit celui intitulé 2×2 à commodité unique. Cette commodité est définie par le couple de sommets (S, T) . Nous considérons 128 joueurs, tous peuvent donc choisir parmi quatre chemins. Les résultats sont donnés en intégralité pour ce premier exemple seulement, en fonction du paramètre d'ajustement b . Pour les détails des autres séries de tests, le lecteur peut se reporter à l'annexe IV.

Lorsque $b = 0.1$

- Nombre moyen de joueurs finissant en multistratégie pure : 128.
- Nombre de parties par simulation (pour atteindre un état stable) en moyenne : 2456.1. Détails : [2956, 2072, 2746, 3334, 1954, 2042, 2390, 2327, 2308, 2432].
- Prix moyens : 163.13. Détails : [163.406250, 163.046875, 163.265625, 163.125000, 163.046875, 163.125000, 163.125000, 163.031250, 163.093750, 163.031250]. Prix le plus haut : 166.6, le plus bas : 159.300003.
- Somme des prix payés en moyenne lors de la dernière partie : 20880.6. Détails : [20916, 20870, 20898, 20880, 20870, 20880, 20880, 20868, 20876, 20868].
- Nombre de joueurs qui auraient pu faire mieux (qui ne sont pas sur leur chemin le moins cher) en moyenne : 62.6. Détails : [68, 97, 99, 66, 97, 66, 66, 0, 67, 0].

Lorsque $b = 0.09$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 3938.1. Détails : [3630, 2991, 4753, 3623, 4731, 2897, 4586, 4796, 4443, 2931].
- Prix moyens : 163.059. Détails : [163.031250, 163.031250, 163.031250, 163.078125, 163.046875, 163.031250, 163.187500, 163.000000, 163.125000, 163.031250]. Prix le plus haut : 165.699997, prix le plus bas : 160.699997.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 46.0. Détails : [33, 33, 33, 34, 97, 33, 66, 0, 98, 33].

Lorsque $b = 0.08$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.

- Nombre moyen de parties : 3832.8. Détails : [2834, 3707, 3410, 3305, 4247, 3959, 4252, 4523, 4491, 3600].
- Prix moyens : 163.07. Détails : [163.125000, 163.031250, 163.031250, 163.125000, 163.093750, 163.031250, 163.093750, 163.078125, 163.125000, 163.031250]. Prix le plus haut : 166.100, prix le plus bas : 160.000.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 56.2. Détails : [66, 33, 33, 98, 67, 33, 67, 34, 98, 33].

Lorsque $b = 0.07$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 5137.6. Détails : [4484, 3472, 4290, 4495, 7812, 5710, 4384, 5105, 4935, 6689].
- Prix moyens : 163.078. Détails : [163.046875, 163.046875, 163.125000, 163.031250, 163.125000, 163.125000, 163.078125, 163.093750, 163.031250, 163.078125]. Prix le plus haut : 166.399, prix le plus bas : 160.000.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 62.4. Détails : [97, 97, 66, 33, 98, 66, 34, 66, 33, 34].

Lorsque $b = 0.06$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 6899.299. Détails : [5735, 8071, 5841, 9335, 7578, 7124, 7070, 6171, 6446, 5622].
- Prix moyens : 163.073. Détails : [163.171875, 163.031250, 163.234375, 163.078125, 163.031250, 163.031250, 163.046875, 163.031250, 163.031250, 163.046875]. Prix le plus haut : 165.899994, prix le plus bas : 160.600006.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 64. Détails : [35, 0, 98, 34, 33, 33, 97, 33, 0, 97].

Lorsque $b = 0.05$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 10371. Détails : [10792, 11208, 11255, 8030, 7912, 8551, 8637, 10633, 16071, 10621].

- Prix moyens : 163.079. Détails : [163.093750, 163.093750, 163.031250, 163.093750, 163.031250, 163.031250, 163.171875, 163.031250, 163.125000, 163.093750]. Prix le plus haut : 165.600, prix le plus bas : 160.000000.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 59.59. Détails : [66, 67, 33, 67, 33, 33, 99, 33, 98, 67].

Lorsque $b = 0.04$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 14807.5. Détails : [14423, 15112, 17487, 12622, 10720, 15566, 14878, 16436, 18330, 12501].
- Prix moyens : 163.061. Détails : [163.125000, 163.093750, 163.046875, 163.031250, 163.000000, 163.031250, 163.125000, 163.078125, 163.031250, 163.046875]. Prix le plus haut : 165.600, prix le plus bas : 160.199997.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 62.1. Détails : [98, 66, 97, 33, 0, 33, 66, 98, 33, 97].

Lorsque $b = 0.03$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 29487.2. Détails : [28688, 58275, 22803, 25722, 33304, 22642, 21562, 28147, 22884, 30845].
- Prix moyens : 163.026. Détails : [163.031250, 163.031250, 163.000000, 163.031250, 163.031250, 163.031250, 163.046875, 163.031250, 163.000000, 163.031250]. Prix le plus haut : 164.500, prix le plus bas : 161.500.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 26.2. Détails : [33, 33, 0, 0, 33, 33, 97, 33, 0, 0].

Lorsque $b = 0.02$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 52925.101. Détails : [70958, 46371, 53448, 49255, 48505, 41638, 60825, 57644, 48914, 51693].
- Prix moyens : 163.03. Détails : [163.031250, 163.031250, 163.000000, 163.031250, 163.000000, 163.125000, 163.031250, 163.000000, 163.031250, 163.031250]. Prix le plus

haut : 164.600006, prix le plus bas : 161.300003.

- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 29.6. Détails : [33, 33, 0, 33, 0, 98, 33, 0, 33, 33].

Lorsque $b = 0.01$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 127.8.
- Nombre moyen de parties : 195053.203. Détails : [209973, 155693, 133645, 208367, 304345, 187132, 177281, 229897, 190765, 153434].
- Prix moyens : 163.020. Détails : [163.000000, 163.000000, 163.031250, 163.046875, 163.031250, 163.031250, 163.031250, 163.000000, 163.031250, 163.000000]. Prix le plus haut : 164.300003, prix le plus bas : 161.699997.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 19.4. Détails : [0, 0, -1, 97, 33, 33, 33, 0, -1, 0].

Courbes et commentaires

Sur tous les diagrammes de résultats de ce chapitre sont rapportées plusieurs informations :

- La courbe noire pleine indique le nombre de parties en milliers (ce nombre est en millions dans la figure 8.8).
- La courbe en pointillés indique le prix moyen. Les droites verticales en pointillés donnent les prix les plus haut et les prix les plus bas.
- Au dessus de la zone des courbes se trouve un cadre qui donne le nombres d'équilibres de Nash MACRO trouvés dans chaque série de dix simulations.

Les résultats sont présentés selon ce modèle dans toute la suite, lorsqu'il y a plusieurs commodités, celles-ci sont indiquées dans la partie gauche du diagramme.

Les informations principales sur cette première série de tests sont rapportées en figure 8.3 en fonction de la valeur du paramètre d'ajustement b .

Nous pouvons tout d'abord observer que le nombre de parties augmente exponentiellement à mesure que b diminue, tandis que le prix moyen lui, varie extrêmement peu sur cette topologie.

L'écart entre le prix le plus élevé et le prix le plus faible que payent les joueurs diminue en fonction du paramètre b .

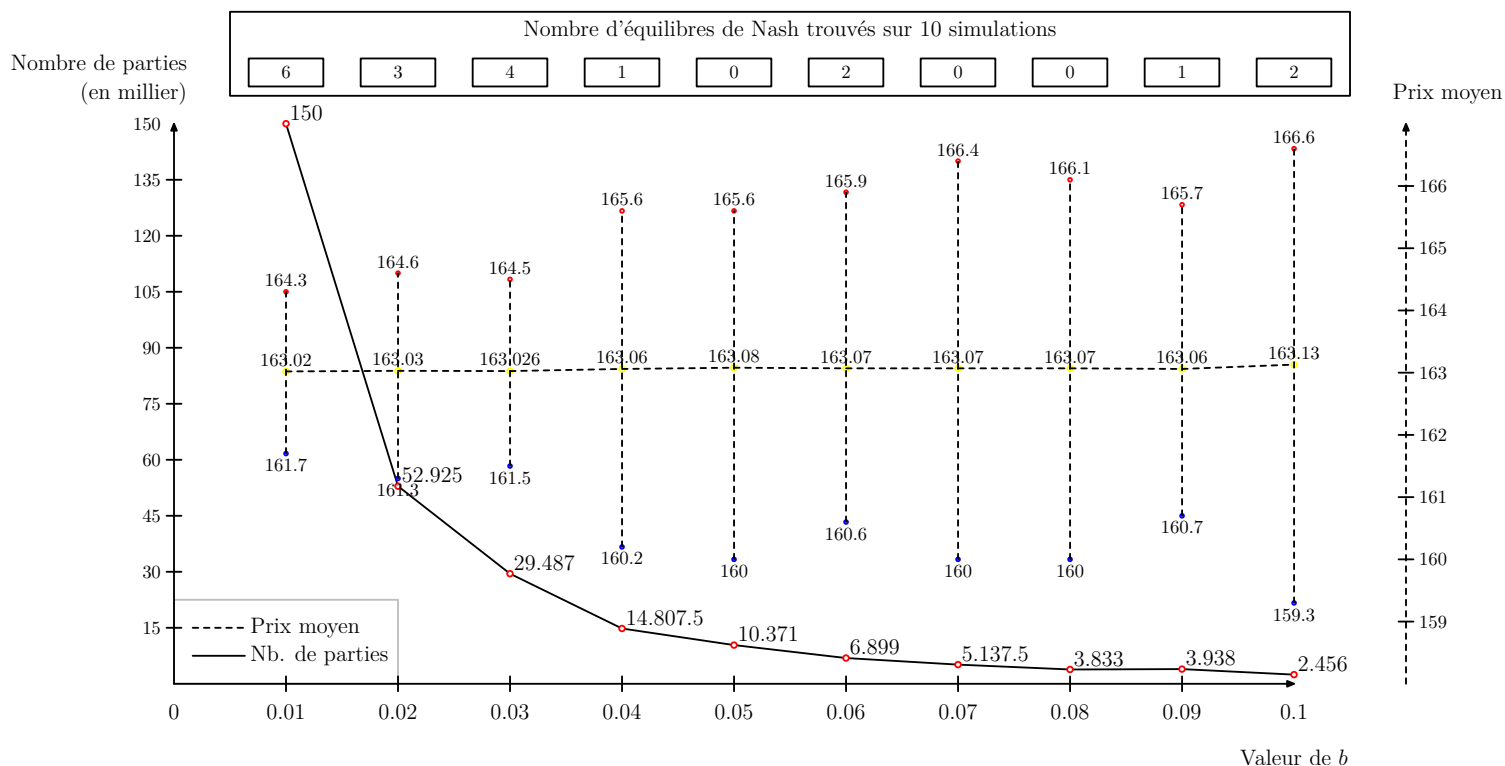


FIG. 8.3 – Prix moyen et nombre de parties nécessaires selon la valeur de b sur un réseau 2×2 à 128 joueurs dans une commodité unique.

Plus b diminue plus la probabilité de trouver des équilibres de Nash augmente pour atteindre 60% de chance lorsque $b = 0.01$. Sur cette topologie nous en avons trouvé deux sur dix lorsque $b = 0.1$, il s'agit là d'un aléa de simulations.

8.2.2 Résultats sur le réseau 3×3 à commodité unique

Sur le réseau 3×3 à une seule commodité définie par le couple de sommets (S, T) , nous nous donnons 128 joueurs. Les résultats sont donnés en figure 8.4.

Dans ce réseau 3×3 , nous observons encore une faible diminution du prix moyen en fonction du paramètre b (voir figure 8.4). L'écart entre prix minimal et maximal, lui, diminue assez nettement, comme sur l'expérience précédente. Ces différentes simulations peuvent prendre entre quelques secondes et un peu moins de vingt minutes pour la plus petite valeur de b . Nous remarquons que des équilibres de Nash peuvent apparaître à partir de $b = 0.04$ environ. Lorsque $b \leq 0.01$ la probabilité d'en trouver est de 40%

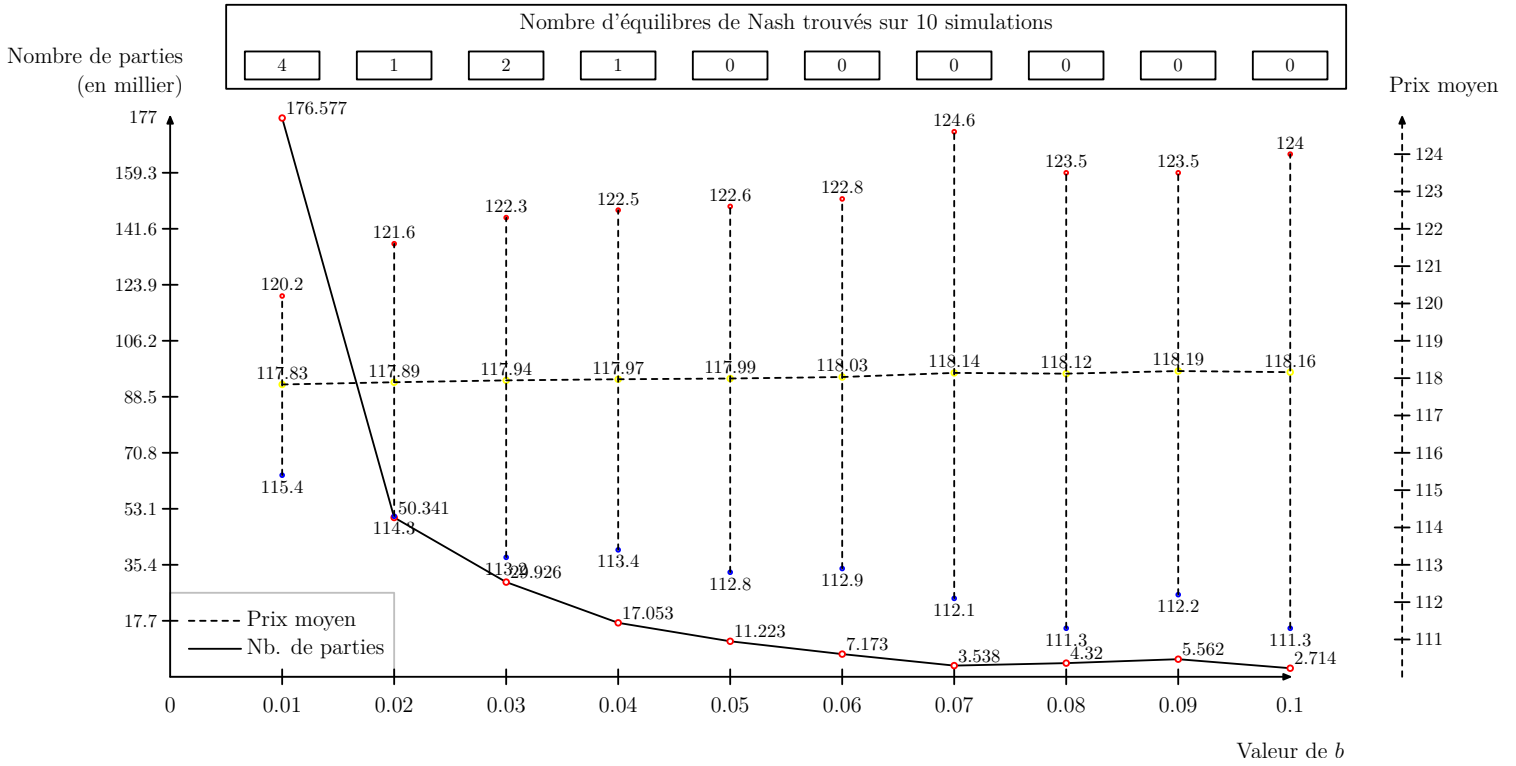


FIG. 8.4 – Prix moyen et nombre de parties selon la valeur de b sur un réseau 3x3 à une seule commodité et 128 joueurs

Sur ce type de topologie à commodité unique, les résultats sont très semblables, la diminution du prix moyen général en fonction de la diminution du paramètre b est faible bien que l'uniformisation des prix s'observe nettement, quelle que soit la taille du réseau lui même et quel que soit le nombre de joueurs. Les améliorations observées ici seraient très semblables sur un graphe de dimension 4x4 ou 5x5 etc.. Nous n'allons donc pas nous appesantir dessus mais simplement envisager le cas à plusieurs commodités avant de passer à un autre type de topologie.

8.3 Réseaux à plusieurs commodités

Dans les diagrammes de résultats sur ces cas à plusieurs commodités, il y a autant de courbes que de commodités, voir les indications (Com 1, Com 2 , etc.) à gauche des courbes.

8.3.1 Résultats sur le réseau 3×3 à deux commodités

Sur le réseau 3×3 à deux commodités : (S_1, T) et (S_2, T) , nous nous donnons 128 joueurs, 64 dans chaque commodité. La figure 8.5 rapporte les résultats.

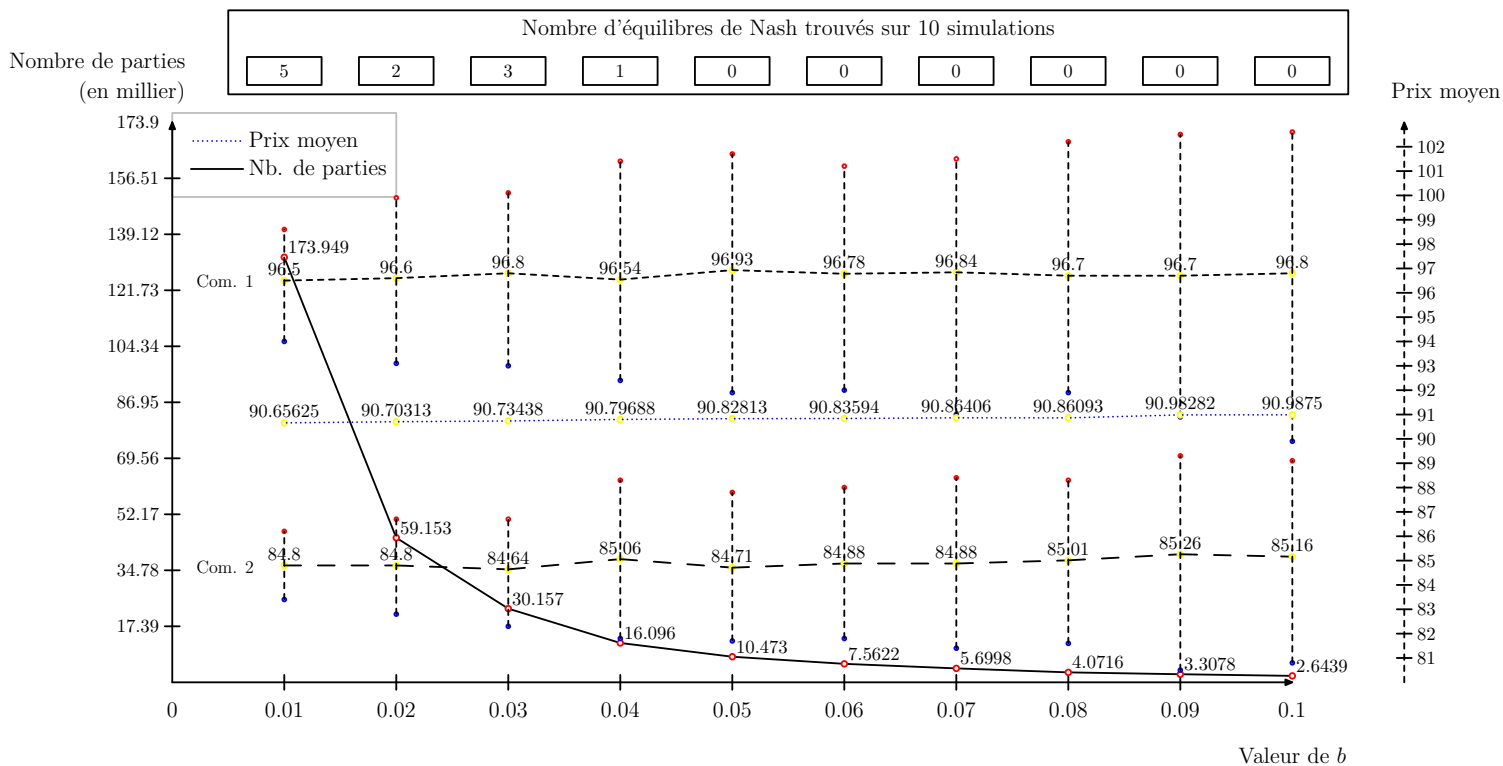


FIG. 8.5 – Prix moyen et nombre de parties selon la valeur de b - Réseau 3×3 , deux commodités, 128 joueurs

Comme sur les exemples précédents, nous pouvons observer une très faible diminution globale du prix moyen qui va de pair avec celle du paramètre b . Il y a toujours uniformisation des prix de tous les joueurs. Lorsque $b \leq 0.01$ la chance d'obtenir un équilibre de Nash est satisfaisante puisqu'elle atteint 50%.

8.3.2 Résultats sur le réseau 5×5 à trois commodités

Pour finir sur ce style de topologie. Nous donnons les résultats pour le cas du réseau 5×5 qui comprend cette fois 3 commodités de 100 joueurs chacune (S_1, T) , (S_2, T) et (S_3, T) . Les résultats sont donnés en figure 8.6.

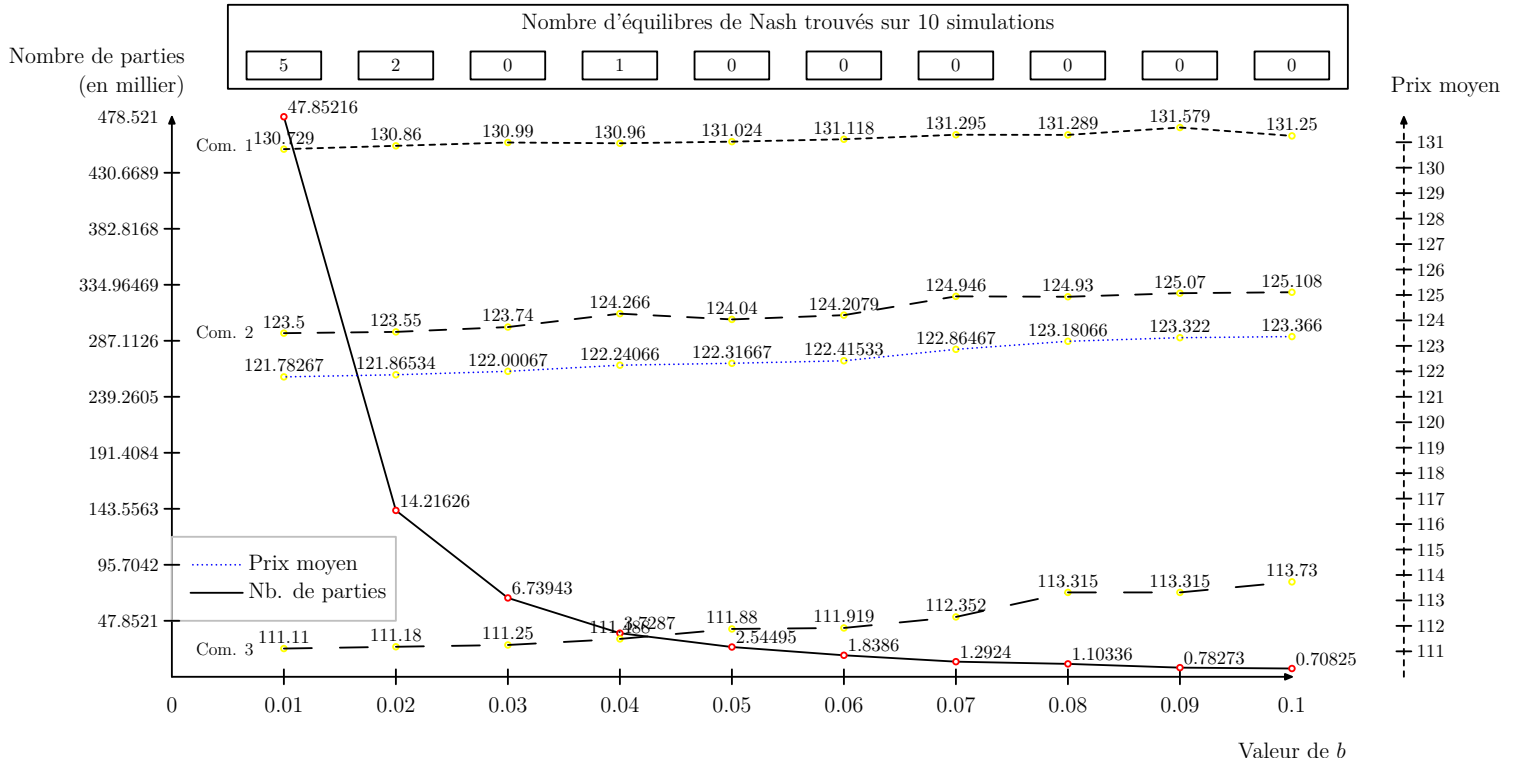


FIG. 8.6 – Prix moyen et nombre de parties selon la valeur de b - Réseau 5×5 à trois commodités, 300 joueurs

Sur cet exemple, nous pouvons observer une diminution du prix moyen un peu plus prononcée que sur les exemples précédents. Des équilibres de Nash commencent à apparaître dès que $b \leq 0.4$. Les prix les plus élevés et les prix les plus faibles ne sont pas reportés en figure 8.8 pour des raisons de lisibilité mais s'ils l'étaient, ils témoigneraient d'une uniformisation des prix payés par les joueurs dans chacune des trois commodités à mesure que le b diminue.

8.3.3 Résultats sur le réseau $3 \times 3 \times 4$ à trois commodités

Nous considérons maintenant le réseau intitulé réseau $3 \times 3 \times 4$ à trois commodités, soit une topologie complètement différente de ceux d'avant. Nous nous donnons trois commodités (S_1, T) , (S_2, T) et (S_3, T) comprenant 64 joueurs chacune. Les fonctions de coûts sur les arêtes horizontales de la ligne du haut sont de la forme $c_e(f_e) = 4f_e + 1$, les fonctions de coûts de la ligne horizontale sont de la forme $c_e(f_e) = 3f_e + 1$ et enfin celles de la ligne

horizontale du dessous sont de la forme $c_e(f_e) = 2f_e + 1$, toutes les autres sont de la forme $c_e(f_e) = f_e + 1$. La figure 8.7 rapporte les résultats obtenus comme précédemment.

Nous pouvons y observer, cette fois plus nettement que dans les exemples précédents, la diminution du prix moyen global en fonction du paramètre b . Des équilibres de Nash commencent à apparaître dès que $b \leq 0.03$, ce qui demande entre 30 000 et 50 000 parties environ, soit une quinzaine de minutes sur un ordinateur de bureau classique.

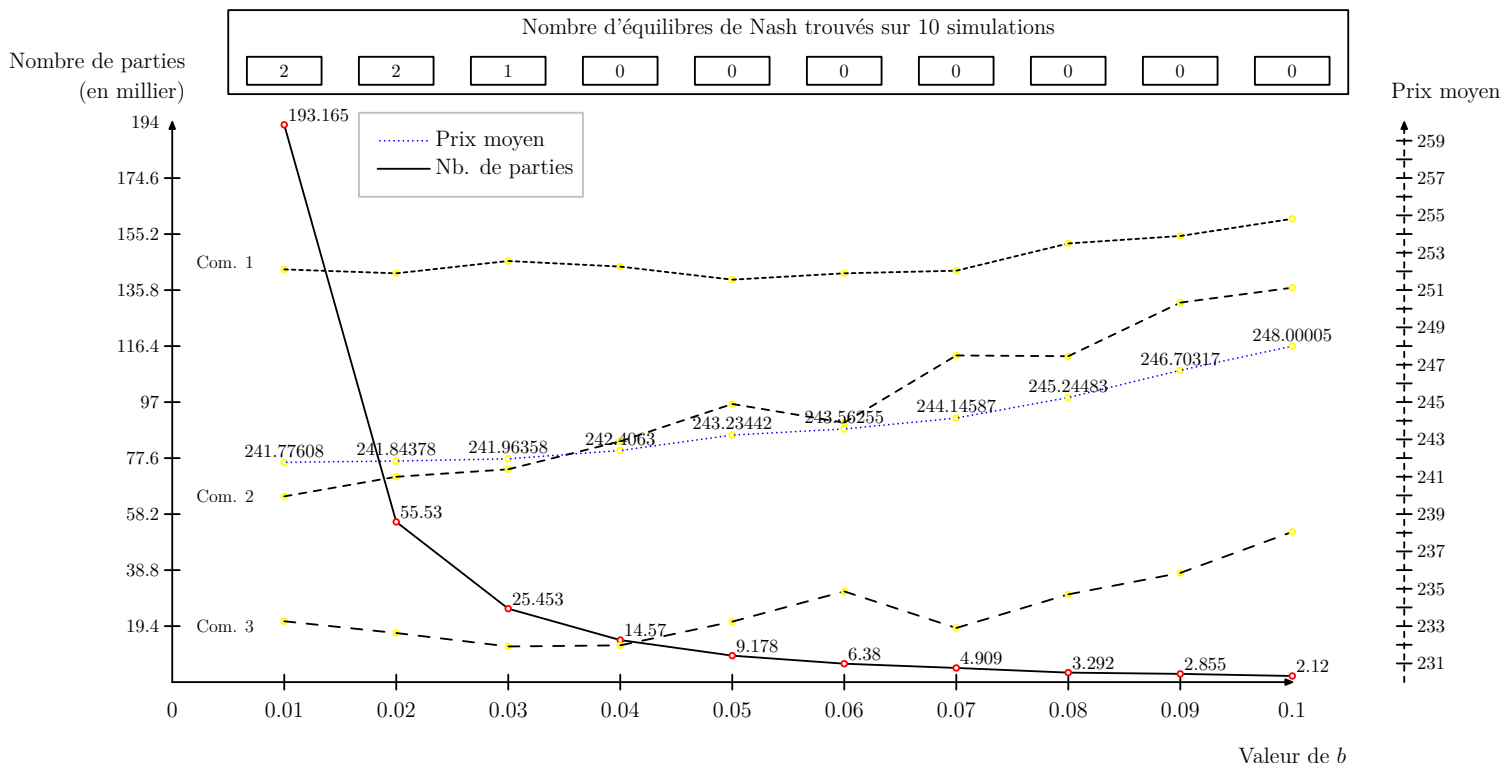


FIG. 8.7 – Prix moyens en fonction du b - réseau $3 * 3 * 4$ à trois commodités, 192 joueurs

8.3.4 Résultats sur le réseau $5 * 5 * 6$ à trois commodités

Sur un réseau $5 * 5 * 6$ maintenant, nous nous donnons 3 commodités (S_1, T_1) , (S_2, T_2) et (S_3, T_3) de 64 joueurs chacune. Les résultats sont donnés en figure 8.8.

Attention, sur le diagramme, la valeur du b va de 0.002 à 0.08. La diminution du prix moyen s'observe nettement, le prix de chaque commodité diminue également, les prix maximaux et minimaux s'uniformisent, comme d'habitude. La probabilité de trouver un équilibre de Nash lorsque $b = 0.002$ est de 60%.

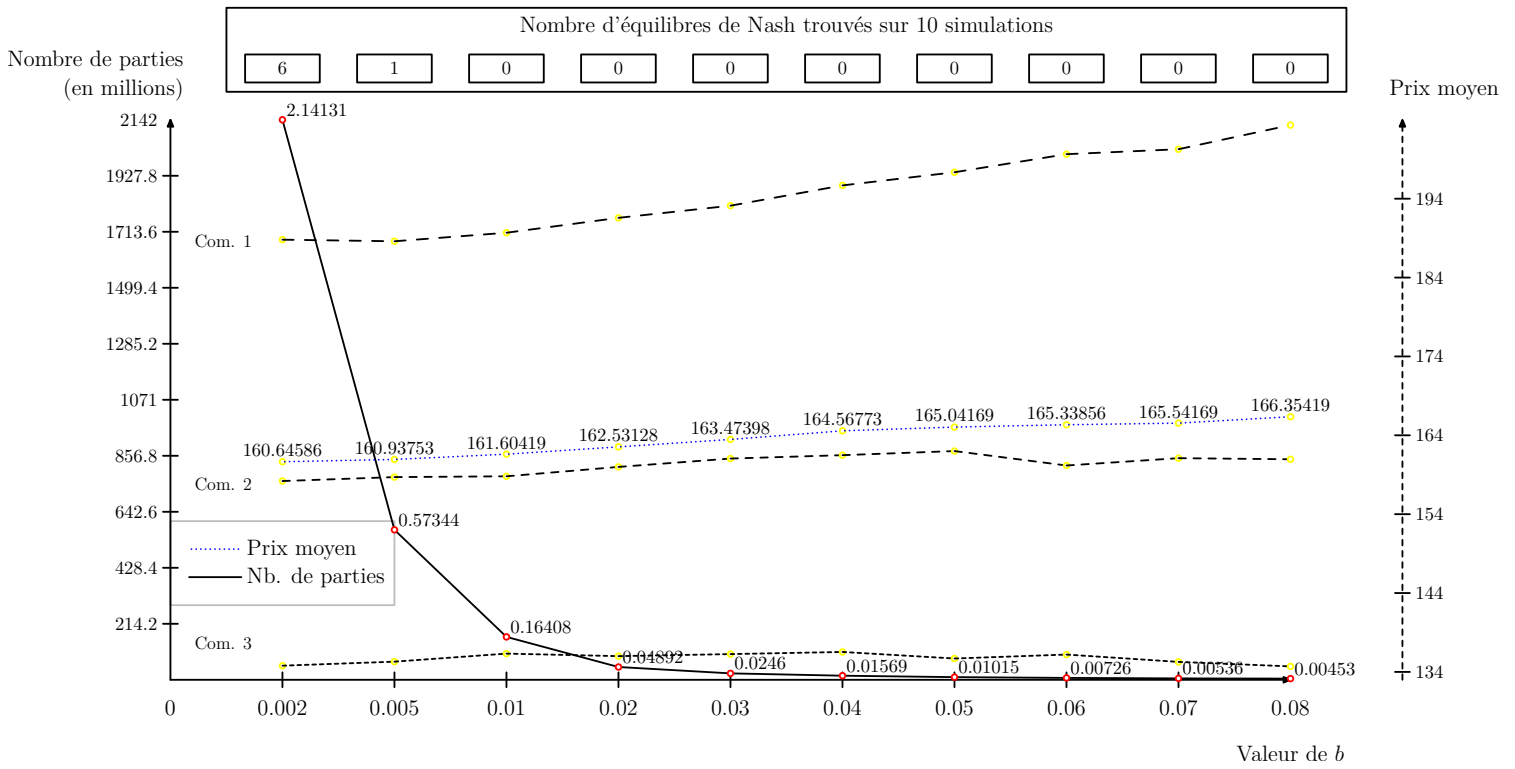


FIG. 8.8 – Prix moyens en fonction du b - réseau $5 * 5 * 6$ à trois commodités, 192 joueurs

8.4 Conclusion

De façon générale, la méthode que nous proposons semble efficace puisqu'elle permet effectivement aux joueurs qui l'utilisent d'apprendre les équilibres de Nash du système. Dans ce type de jeu de routage, il faut se rappeler que les équilibres de Wardrop (équilibres sociaux) sont également des équilibres de Nash.

Nous pouvons faire les observations suivantes dans toutes les expériences relatées dans ce chapitre :

- Diminution du prix moyen dans chaque commodité en fonction de la valeur du b .
- Augmentation du nombre de parties lorsque le b diminue.
- Probabilité de trouver des équilibres de Nash satisfaisante, voire très satisfaisante, en un temps raisonnable.

En dehors des résultats rapportés dans ce chapitre, nous avons réalisé des simulations sur plusieurs topologies, les modèles les plus étendus comportant une centaine de nœuds et jusqu'à 5 000 joueurs. Les résultats sont bons jusqu'à présent dans le sens ou l'objectif fixé

est atteint : la méthode d'apprentissage que nous proposons peut apprendre les équilibres de Nash de façon complètement distribuée. C'est à notre connaissance la méthode qui requiert le moins d'informations pour un joueur qui l'utilise et qui converge effectivement.

Chapitre 9

Conclusion

Dans ce document, nous avons d’abord présenté ce qu’est le routage Inter-domaine et les différents mécanismes du protocole de routage historique qu’est BGP. Il permet aux différents partenaires concurrents, les AS (*Autonomous Systems*), de router correctement les informations dans le réseau. Nous avons ensuite introduit quelques notions de bases de la théorie des jeux et présenté le concept clé de ce document, l’équilibre de Nash, qui permet de caractériser un état stable dans un environnement concurrentiel entre partenaires égoïstes. Nous avons présenté des jeux de tarification sur lesquels la méthode des “joueurs fictifs” permet l’apprentissage d’équilibres de Nash dans le cas à deux joueurs. Ceci constitue une extension de résultats antérieurs (Robinson, 1951 [60] et Nachbar, 1990 [48]) qui ont montré, respectivement, que cette dynamique permettait de converger vers un équilibre de Nash dans (i) le cas d’un jeu à somme nulle et (ii) dans le cas d’un jeu séquentiel solvable par élimination des stratégies dominées.

Nous avons essayé de donner une vue d’ensemble des différents travaux effectués dans le but d’améliorer le routage réseau à l’aide de techniques inspirées de la théorie des jeux. Nous avons mis en relief les points communs entre les problèmes de routage et d’ordonnement et proposé une différenciation simple entre les deux. Nous avons également introduit le modèle de routage de Wardrop [76] qui suppose un réseau utilisé par une infinité d’utilisateurs, tous représentant une partie infinitésimale du trafic. Un équilibre de Wardrop est un équilibre de Nash dans un tel jeu de routage. Nous avons présenté notre modèle de routage (MACRO), inspiré de celui de Wardrop et nous avons proposé un algorithme distribué permettant d’apprendre les équilibres de Nash du système. Notre méthode d’apprentissage est basée sur une liste de chemins. En faisant appel à la théorie de la stabilité de Lyapunov

et en utilisant une fonction de potentiel, nous avons montré la convergence asymptotique du jeu. Il s'agit de convergence faible. Ensuite nous avons proposé une modélisation stratégique alternative de notre jeu de routage (MICRO) qui n'est plus basée sur une liste de chemins mais sur une multistratégie. Bien que cette modélisation contienne davantage d'équilibres de Nash, c'est une bonne heuristique d'approximation de la première. Elle permet de réduire drastiquement la complexité de la méthode, en termes de place mémoire et de temps de calcul.

Enfin, nous avons donné quelques résultats de simulations sur deux types de topologies réseau. Ils confirment que notre seconde méthode est une bonne heuristique pour approximer la première. Elle permet effectivement de trouver des équilibres de Nash. La qualité de l'heuristique dépend surtout d'un seul paramètre que nous avons appelé le paramètre d'ajustement qui décide de l'importance de la mise à jour des vecteurs de probabilité.

Ces travaux mènent à de nombreuses autres pistes de recherche. En particulier, il serait intéressant d'étudier les propositions suivantes :

- Essayer d'améliorer l'apprentissage en terme de nombre de parties nécessaires avant stabilisation du système. Nous avons fait quelques tentatives en ce sens qui portaient sur l'adaptation de la valeur du paramètre d'ajustement ou bien la réinitialisation de certaines sous stratégies à des moments clés de l'apprentissage d'un joueur. La topologie du réseau influence trop l'efficacité de ces mécanismes pour pouvoir les généraliser.
- Dans notre modèle, l'utilité d'un joueur n'est basée que sur le prix du chemin qu'il emprunte, il serait bon d'ajouter les autres paramètres de la table du processus de décision de BGP, en fonction de leur ordre d'importance.
- L'outil de simulation sur lequel ont été réalisées les expériences rapportées dans le chapitre 8 est disponible à l'adresse <http://www.loria.fr/~boussaoc/>. Réalisé en C++/OpenGL, il est très portable. Il serait intéressant de continuer le développement de cet outil en ajoutant de nouvelles fonctionnalités.
- Les jeux de tarification du chapitre 4 et les jeux de routage du chapitre 6 et 7 constituent deux éléments complémentaires de la bonne organisation des flux réseaux. Le premier angle étant celui des transmetteurs qui fixent un prix de communication, le second étant celui des emetteurs d'informations qui veulent faire parvenir leurs messages à bon port à moindre coût. Imbriquer ces deux aspects et parvenir à un équilibre de Nash dans un tel système constitue la prochaine étape de nos recherches.

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Evolution de la population ayant accès à Internet sur dix ans (source <i>International Telecommunication Union</i>). | 7 |
| 2.2 | Vision simplifiée d'Internet. Les "O" indiquent des ordinateurs personnels et les "R" des routeurs. | 10 |
| 2.3 | Vision plus réaliste d'Internet | 11 |
| 2.4 | Vision encore plus réaliste | 13 |
| 2.5 | Exemple de topologie avec un ISP connecté à deux autres | 16 |
| 2.6 | Principales étapes du processus de décision de BGP | 17 |
| 2.7 | Différentes règles permettant à un routeur BGP de choisir une route | 18 |
| 3.1 | Représentation d'un jeu sous forme d'arbre | 23 |
| 3.2 | Jeu du Pierre-Feuille-Ciseau | 24 |
| 3.3 | Un jeu d'élection | 25 |
| 4.1 | Jeu de tarification circulaire à deux joueurs et m sources | 36 |
| 4.2 | Jeu de tarification à une source unique et deux joueurs | 39 |
| 4.3 | Matrice d'espérances de gains, deux joueurs, une source, plus court chemin. | 40 |
| 4.4 | Diagramme de transitions de prix, deux joueurs, une source, Plus court chemin | 41 |
| 4.5 | Espérances de gains, une source, Déterministe | 42 |
| 4.6 | Evolution des stratégies des joueurs, une source, Déterministe | 43 |
| 4.7 | Jeu de tarification à deux joueurs, deux sources | 44 |
| 4.8 | Espérances de gains, jeu à deux sources, Plus court chemin | 44 |
| 4.9 | Evolution des stratégies des joueurs, deux sources, Plus court chemin | 45 |
| 4.10 | Espérances de gains, deux joueurs, deux sources, équiprobable | 46 |

| | |
|---|----|
| 4.11 Evolution des stratégies dans le temps, deux joueurs, deux sources, Equiprobable | 47 |
| 4.12 Espérances de gains, deux joueurs, deux sources, Déterministe | 48 |
| 4.13 Evolution des stratégies dans le temps, deux joueurs, deux sources, déterministe. Les états entourés d'un cercle en pointillés sont ceux qui "restent" après élimination des stratégies dominées. | 49 |
| 4.14 Meilleures réponses des joueurs selon la stratégie de leur adversaire | 51 |
| 4.15 Evolution du jeu sur 1000 parties | 52 |
| 4.16 Evolution du jeu sur 1000 parties, distance à l'équilibre de Nash | 55 |
| 4.17 Cycle complet lors d'une partie | 56 |
| 4.18 Récapitulatif du jeu à deux joueurs, deux sources | 57 |
| 4.19 Récapitulatif du jeu à deux joueurs, trois sources | 58 |
| 4.20 Récapitulatif du jeu à deux joueurs, quatre sources | 58 |
| 4.21 Diagramme de transition restreint aux stratégies qui font partie de l'équilibre dans un jeu de tarification à deux joueurs et un nombre pair de sources m . | 59 |
| 4.22 Diagramme de transition restreint aux stratégies qui font partie de l'équilibre dans un jeu de tarification à deux joueurs et un nombre impair de sources, m | 61 |
| 4.23 Jeu de tarification à trois joueurs et trois sources | 62 |
| 4.24 Tableaux de gains pour un jeu à trois joueurs, trois sources et les prix 1, 2, 3 | 63 |
| 4.25 Evolution des stratégies selon les meilleures réponses des joueurs - les transitions fléchées en pointillés, qui n'apparaîtraient pas avec la dynamique des joueurs myopes, indiquent les états du jeu qui ont plusieurs états successeurs possibles | 64 |
| 4.26 Evolution des stratégies des joueurs en fonction du temps | 65 |
| 4.27 Distance à l'équilibre de Nash en fonction du temps | 65 |
| 5.1 Un exemple d'ordonnancement entre cinq tâches sur deux serveurs | 72 |
| 5.2 Une affectation qui correspond à un équilibre de Nash | 73 |
| 5.3 Un réseau à m liens parallèles | 74 |
| 6.1 Pigou : un réseau simple à deux nœuds et deux liens | 85 |
| 6.2 Le paradoxe de Braess, l'ajout d'un chemin peu coûteux, donc a priori bénéfique, peut au contraire être néfaste à l'ensemble des joueurs. | 86 |
| 6.3 Aperçus de fonctions stables : au sens de Lyapunov et asymptotiquement . | 96 |

| | | |
|------|---|-----|
| 6.4 | Tableau résumant le théorème basique de Lyapunov | 97 |
| 7.1 | Un réseau simple à deux commodités | 106 |
| 7.2 | Deux équilibres différents, MICRO et MACRO | 111 |
| 8.1 | Première topologie | 122 |
| 8.2 | Seconde topologie | 123 |
| 8.3 | Prix moyen et nombre de parties nécessaires selon la valeur de b sur un réseau 2x2 à 128 joueurs dans une commodité unique. | 128 |
| 8.4 | Prix moyen et nombre de parties selon la valeur de b sur un réseau 3x3 à une seule commodité et 128 joueurs | 129 |
| 8.5 | Prix moyen et nombre de parties selon la valeur de b - Réseau 3x3, deux commodités, 128 joueurs | 130 |
| 8.6 | Prix moyen et nombre de parties selon la valeur de b - Réseau 5x5 à trois commodités, 300 joueurs | 131 |
| 8.7 | Prix moyens en fonction du b - réseau $3 * 3 * 4$ à trois commodités, 192 joueurs | 132 |
| 8.8 | Prix moyens en fonction du b - réseau $5 * 5 * 6$ à trois commodités, 192 joueurs | 133 |
| 10.1 | Matrice des gains pour le jeu des artilleurs | 144 |
| 10.2 | Utilités "limites" et détermination graphique de la zone de marchandage qui correspond à un gain supérieur à 1 pour les deux joueurs | 146 |
| 10.3 | Jeux de tarification à deux joueurs : trois sources et quatre sources | 148 |
| 10.4 | Matrice de gains, deux joueurs, trois sources, Plus court chemin | 148 |
| 10.5 | Matrice de gains, deux joueurs, trois sources, Peu importe | 149 |
| 10.6 | Matrice de gains, deux joueurs, trois sources, Déterministe | 149 |
| 10.7 | Matrice de gains, deux joueurs, quatre sources, Plus court chemin | 150 |
| 10.8 | Matrice de gains, deux joueurs, quatre sources, Peu importe | 151 |
| 10.9 | Matrice de gains, deux joueurs, quatre sources, Déterministe | 151 |

Chapitre 10

Annexe

10.1 Annexe I : Différentes classes de jeux

Jeu à somme constante

Dans un jeu à somme constante, les joueurs se partagent un certain gain, comme un gâteau ou une somme d'argent. Les jeux à somme nulle sont un cas particulier des jeux à somme constante dans lesquels les choix des joueurs n'ont aucune répercussion sur l'enjeu, ni sur l'environnement. Dans les jeux à somme nulle, il est particulièrement vrai que "*le bonheur des uns fait le malheur des autres*" : puisque la somme des gains de tous les participants est toujours zéro, on peut penser au Poker à titre d'illustration. Bien des problèmes ne peuvent pas être représentés de façon réaliste par des jeux à sommes constantes comme en témoigne l'exemple bien connu du dilemme des prisonniers ou le jeu du Pierre-Feuille-Ciseaux, etc.

Jeu continu et jeu discret

Une grande partie de la théorie des jeux concerne les jeux finis (nombre de joueurs, actions, événements, utilités, etc.) et discrets. Néanmoins, beaucoup de concepts peuvent être étendus et généralisés à des jeux continus dans le sens où les joueurs peuvent choisir leur stratégie dans un espace continu. Les stratégies mixtes et/ou les jeux continus constituent aussi ce que l'on peut appeler une "dédiscretisation" d'un jeu originel qui serait trop restrictif pour dire quoi que ce soit sur des stratégies à long terme.

Jeu Cooperatif ou non-cooperatif

Un jeu est qualifié de coopératif si les joueurs ont la possibilité de former une alliance avec d'autres et que les règles du jeu impliquent qu'ils tiennent leurs engagements. Dans les jeux non-coopératifs, ce n'est pas le cas. Bien souvent, l'erreur est faite d'associer un jeu dans lequel les joueurs peuvent communiquer les uns avec les autres à un jeu coopératif mais les critères ne s'arrêtent pas là.

Les jeux dits "hybrides" contiennent des éléments des deux types de jeux. Pour prendre un exemple concret, dans un match de catch en double, il y a deux équipes de deux "joueurs", mais un seul de chaque équipe est sur le ring à la fois. Ils participent au jeu en tant qu'équipe mais ne jouent pas de façon coopérative puisqu'ils n'interagissent pas (autrement que pour se taper dans la main quand l'un des deux a fini son numéro).

Jeu simultané ou séquentiel

Dans un jeu dit séquentiel (ou dynamique), les joueurs ne jouent pas au(x) même(s) moment(s) où s'ils le font, ils ne le savent pas. Ils ont seulement certaines informations sur les actions qui précèdent les leurs, ils peuvent par exemple qu'un joueur donné n'a pas fait tel choix décisif mais ne sait pas précisément lequel il a fait à la place.

Dans un jeu simultané, les joueurs prennent leurs décisions stratégiques en même temps, obtiennent les informations en même temps et perçoivent les résultats du jeu en même temps.

Jeu symétriques ou non-symétriques

Un jeu symétrique est un jeu dans lequel les gains associés à une stratégie particulière dépendent seulement des autres stratégies jouées et non de *qui* les jouent. Si les identités des joueurs ou leurs rôles sont interchangeables sans que cela modifie le jeu en lui-même, on dit que le jeu est symétrique et c'est le cas de nombreux jeux parmi les exemples célèbres comme le dilemme du prisonnier, la guerre des sexes, etc.

Contrairement au jeu de vote proposé plus tôt, la plupart des jeux asymétriques étudiés ne proposent pas les mêmes ensembles de stratégies pour tous les joueurs ("jeu de l'ultimatum" par exemple).

Jeux à un joueur, deux joueurs, n joueurs

Il arrive que l'on puisse rapprocher une décision individuelle d'un "jeu à un joueur". Bien que ne faisant pas partie du cadre purement théorique de la théorie des jeux (mais plus de la théorie de la décision), il est tout de même possible de modéliser ces problèmes sous forme de jeux.

Un artifice parfois employé dans ce genre de cas consiste à ajouter un ou des joueur(s) virtuel(s). Par exemple pour modéliser une décision individuelle on dira que le joueur affronte "la nature", ce qui permet de lister ses options plus facilement. Dans d'autres cas, on imagine un second joueur, similaire au premier sauf qu'il joue complètement au hasard lorsqu'il faut simuler un de ses choix.

Pour une introduction beaucoup plus complète à la théorie des jeux, le lecteur peut se rapporter à [10] par exemple.

10.2 Annexe II : éthique, moralité et théorie des jeux

Plusieurs auteurs ont essayé d'expliquer l'apparition ou l'existence de comportements humains ou de *normes* morales ou politiques grâce à théorie des jeux. Ils considèrent souvent des jeux particuliers célèbres comme le dilemme du prisonnier ou le pierre-feuille-ciseau et la théorie du marchandage pour justifier l'existence de certaines mœurs. Il existe au moins trois approches dans la littérature, qui sont le fonctionnalisme, le *contractarianisme*¹ et ce que nous pourrions appeler en français (de façon simpliste) la "morale raisonnée" proposée par D. Gauthier en 1986 dans *Morals by agreement*. Nous passons les deux premières approches en revue ici (voir le *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [72] pour des explications plus complètes).

Prenons un exemple célèbre, celui que donne en 1977 Edna Ullmann-Margalit's dans *The Emergence of Norms*², dans lequel elle prétend que des normes morales permettent à des agents de coopérer et de coordonner leurs actions dans des situations où la poursuite égoïste de leur propre intérêt les en empêche. La situation est la suivante : pendant une bataille, deux artilleurs situés à un endroit stratégique doivent choisir entre défendre leur position contre l'ennemi qui approche et fuir. Si les deux décident de rester, ils ont une chance

¹Ce terme provient du fameux "contrat social" de J.J. Rousseau.

²On peut trouver une réflexion similaire dans "Le banquet" de Platon, la discussion porte sur le comportement d'hoplites au lieu de soldats modernes armés de mitraillettes.

non négligeable d'y rester mais il est certain qu'ils parviennent à stopper la progression de l'ennemi. Si tous deux fuient, l'ennemi prendra leur position sans mal puis les fera prisonniers. Si l'un des deux reste et l'autre fuit, le premier mourra et l'autre aura le temps de se mettre hors de danger.

En supposant que les deux veulent survivre à cette situation, de préférence sans prendre de balle, alors ils vont naturellement envisager la fuite. La raison à cela est qu'ils sont dans une situation comparable au "dilemme du prisonnier".

| | | | |
|-------------|--------|-------------|--------|
| | | Artilleur 1 | |
| | | Rester | Fuir |
| Artilleur 2 | Rester | 2 2 | 3 0 |
| | Fuir | 0 3 | 1 1 |

FIG. 10.1 – Matrice des gains pour le jeu des artilleurs

La figure 10.1 est la matrice de gain (cf. chapitre 3) du jeu. Ces gains sont des valeurs pour le moins arbitraires associées à des situations données, par exemple dans le cas où l'un meurt et l'autre survit, les gains sont respectivement 0 et 3. La valeur 1 est associée au fait de se faire emprisonner et 2 à celui de remplir sa mission.

Quelle que soit la décision du second soldat, le premier soldat s'en sort toujours mieux en fuyant (et c'est symétrique), dans un cas il est sain et sauf, dans l'autre il est fait prisonnier. S'il décide de rester, il a de grandes chances de se faire tuer. En fuyant, il s'assure donc un meilleur résultat (1 au lieu de 0). En conclusion, les deux soldats ont intérêt à fuir, quoi que fasse l'autre.

Approche fonctionnaliste

Le fonctionnalisme tente de déterminer la "fonction de moralité", de décrire le problème qui existerait en l'absence de toute moralité chez les joueurs, et enfin de rationaliser cette moralité.

L'argument, très Kantien, est le suivant : dans une telle situation, les deux devraient

rester : même s'ils ont envie de fuir, ils *sentent*, ils *savent* qu'ils doivent tenir leurs positions, que ceci est la chose *morale* à faire, même si l'utilité de chaque action individuelle n'est pas optimale.

La suite du raisonnement est le suivant : s'il s'avère que les deux comprennent parfaitement la situation, ils savent que leur compagnon est fortement tenté de fuir et ils peuvent se "raisonner" et faire en sorte d'éviter cette éventualité, par exemple en se ficelant l'un et l'autre à la mitrailleuse... D'autre part, si l'enchaînement des artilleurs à leur machine les oblige à faire face à l'assaillant, leur rationalité les oblige à éviter les résultats non-optimaux. La "moralité" lie les soldats à leurs armes. Dans ce sens, la fonction de moralité sert ici à parer aux imperfections d'un comportement guidé par la seule rationalité (Mackie 1977 [44]).

Cette vision *fonctionnelle* de la moralité soulève clairement plusieurs problèmes. D'abord dans l'objectif qu'elle se donne, le fait qu'une institution ait sa fonction bien particulière n'est pas forcément lié à son apparition ni à sa pérennité. Par exemple on peut entendre dire que la fonction du système éducatif est d'éduquer les enfants, que la fonction d'un gouvernement est de servir les intérêts de la classe dirigeante ou que la religion est l'opium du peuple. Mais il n'est pas possible d'affirmer (ni de démontrer) que ces fonctions ont un lien de cause à effet avec l'existence et la perdurance de tel système scolaire, de tel gouvernement ni de telle religion respectivement.

Deuxièmement, cette approche fonctionnelle suggère qu'il existe un certain besoin de moralité, ou de bonne conscience chez chaque individu et que ce besoin est en contradiction avec leur rationalité. La moralité étant censée corriger les comportements amenant à des situations non optimales qui seraient le résultat d'un ensemble d'actions interdépendantes mais **rationnelles**, on est en droit de se poser la question : "pourquoi être moral?". Le problème de cette approche est qu'elle n'inclut pas le sens moral dans l'évaluation que tout un chacun peut faire de la rationalité de telle ou telle décision.

Approche "contractariste"

La moralité est ici perçue comme le résultat d'interactions entre des agents qui sont tous dans une "situation idéale". C'est à dire qu'ils ont en connaissance commune la matrice de gains et qu'aucun des agents n'est plus important qu'un autre, ni n'a plus de droit qu'un autre, etc. C'est l'idée d'égalité du *contrat social* de Rousseau.

Les auteurs sur cette approche (John Harsanyi, Richard Braithwaite, John Rawls, Brian

Barry, David Gauthier et d'autres) visaient les objectifs suivants : (i) que des agents rationnels, dans une situation de marchandage idéale (connaissance parfaite pour chacun) sachent toujours se mettre d'accord sur la répartition du bénéfice procuré par leur coopération, (ii) donner la nature de cette distribution, (iii) que cette distribution soit "juste" et que les agents respectent les termes du marché (les règles du jeu).

Toujours sur l'exemple des artilleurs, les deux sont en mesure de réaliser qu'ils peuvent individuellement s'en sortir de la plus mauvaise façon qui soit (utilité de 0), donc leur coopération n'est intéressante que si le résultat obtenu est meilleur que ça (au moins 1).

A première vue, la seule façon d'obtenir un résultat satisfaisant est que les deux restent. Mais les apparences sont trompeuses, il existe une stratégie mixte qui, théoriquement, donne un résultat tout aussi satisfaisant. Par exemple, les soldats pourraient décider de fuir avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et de rester avec la probabilité $\frac{2}{3}$. L'utilité attendue par chacun dans la situation où les deux adoptent ce comportement précis est de $\frac{15}{9}$.

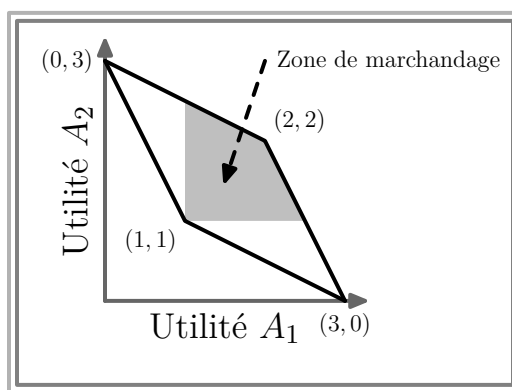


FIG. 10.2 – Utilités "limites" et détermination graphique de la zone de marchandage qui correspond à un gain supérieur à 1 pour les deux joueurs

Tout résultat qui fait que les deux artilleurs obtiennent une utilité supérieure à 1 semble rationnellement acceptable. Comme nous pouvons le voir en figure 10.2, il y a des stratégies mixtes qui assurent aux joueurs une espérance d'utilité supérieure à 1.

Les problèmes qui apparaissent avec cette approche contractarianiste sont les suivants :

- Comment choisir entre deux stratégies aussi efficaces l'une que l'autre ?
- Si une stratégie mixte a vraiment du sens dans le cas d'un jeu répété, elle a de grandes chances d'être moins satisfaisante dans le cas d'un jeu à occurrence unique (si les deux soldats jouent avec la stratégie mixte proposée plus haut $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et que l'un fuit alors

que l'autre reste. L'un des deux sera pour le moins mécontent puisqu'il se fera tuer.

Enfin, il existe encore la *moral by agreement* de Gauthier qui est d'abord contractaraliste mais plus complexe, elle fait intervenir des considérations philosophiques sur la nature humaine. Les agents ont une vision transformée de leur utilité, ils veulent maximiser une certaine "morale rationalisée". Elle est le résultat de plusieurs critiques, ajouts et révisions à l'approche contractaraliste habituelle qu'ont apporté Gauthier [30] ou McClennen [45].

10.3 Annexe III : Jeux de tarification

En complément des résultats présentés dans le chapitre sur les jeux de tarification, nous donnons ici les matrices de gains correspondant aux jeux à deux joueurs avec trois et quatre sources. Les colonnes et lignes grisées indiquent les stratégies dominées. Plusieurs niveaux de gris sont utilisés pour indiquer l'ordre des stratégies dominées. Nous utilisons la notion de non dominance proposée dans le chapitre 4 pour éliminer les stratégies qui ne sont jamais des "meilleures réponses" dans les tableaux. Les matrices de gains sont "complètes" comme dans le chapitre sur la tarification, c'est-à-dire jusqu'au premier prix qui est dominé par un prix inférieur.

10.4 Annexe IV : Détails de simulations

Nous rappelons que pour les réseaux à plusieurs commodités, elles comportent toutes le même nombre de joueurs.

10.4.1 Réseau 3×3 à commodité unique et 128 joueurs

Résultats lorsque $b = 0.1$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 2714.1. Détails : [3689, 2967, 3365, 2373, 2582, 2384, 2085, 2852, 2408, 2436].
- Prix moyens : 118.16. Détails : [118.437500, 118.046875, 118.375000, 118.078125, 118.281250, 118.062500, 118.078125, 118.062500, 117.984375, 118.187500]. Prix le plus haut : 124, prix le plus bas : 111.3.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 105.5. Détails : [102, 116, 121, 115, 92, 127, 118, 91, 94, 80].

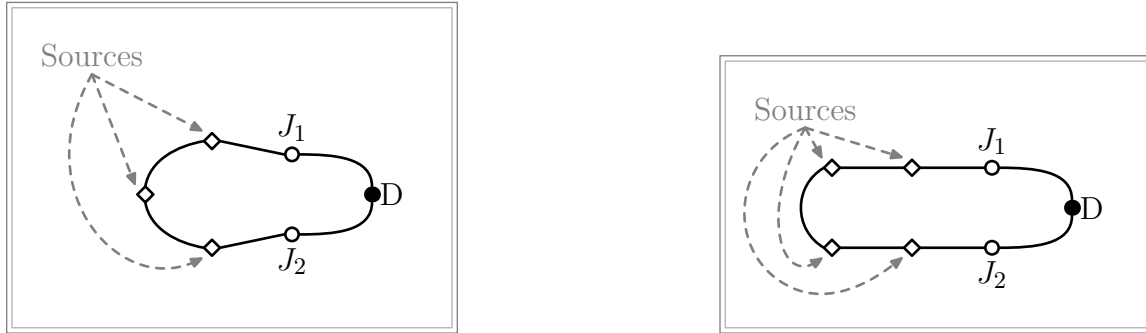


FIG. 10.3 – Jeux de tarification à deux joueurs : trois sources et quatre sources

| Prix | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|--------|
| 1 | 1.5 / 1.5 | 2 / 2 | 3 / 2 | 0 / 3 | 0 / 3 | 0 / 3 |
| 2 | 2 / 2 | 3 / 3 | 3 / 4 | 4 / 4 | 0 / 6 | 0 / 6 |
| 3 | 2 / 3 | 4 / 3 | 4.5 / 4.5 | 4 / 6 | 5 / 6 | 0 / 9 |
| 4 | 3 / 0 | 4 / 4 | 6 / 4 | 6 / 6 | 5 / 8 | 6 / 8 |
| 5 | 3 / 0 | 6 / 0 | 6 / 5 | 8 / 5 | 7.5 / 7.5 | 6 / 10 |
| 6 | 3 / 0 | 6 / 0 | 9 / 0 | 8 / 6 | 10 / 6 | 9 / 9 |

Règles de remplissage:

- si $p_1 < p_2 - 2$: $g_1 = 3p_1$, $g_2 = 0$
- si $p_1 = p_2 - 2$: $g_1 = 2p_1$, $g_2 = p_2$
- si $p_1 = p_2 - 1$: $g_1 = 2p_1$, $g_2 = p_2$
- si $p_1 = p_2$: $g_1 = \frac{3}{2}p_1$, $g_2 = \frac{3}{2}p_2$
- si $p_1 = p_2 + 1$: $g_1 = p_1$, $g_2 = 2p_2$
- si $p_1 = p_2 + 2$: $g_1 = p_1$, $g_2 = 2p_2$
- si $p_1 > p_2 + 2$: $g_1 = 0$, $g_2 = 3p_2$

FIG. 10.4 – Matrice de gains, deux joueurs, trois sources, Plus court chemin

| Prix | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|------------|--------|------------|---------|------------|---------|
| 1 | 1.5 1.5 | 2 2 | 1.5 2.5 | 0 3 | 0 3 | 0 3 |
| 2 | 2 2 | 3 3 | 3 4 | 2 5 | 0 6 | 0 6 |
| 3 | 2.5 1.5 | 4 3 | 4.5 4.5 | 4 6 | 2.5 7.5 | 0 9 |
| 4 | 3 0 | 5 2 | 6 4 | 6 6 | 5 8 | 3 10 |
| 5 | 3 0 | 6 0 | 7.5 2.5 | 8 5 | 7.5 7.5 | 6 10 |
| 6 | 3 0 | 6 0 | 9 0 | 10 3 | 10 6 | 9 9 |

Règles de remplissage:

si $p_1 < p_2 - 2$: $g_1 = 3p_1$, $g_2 = 0$

si $p_1 = p_2 - 2$: $g_1 = \frac{5}{2}p_1$, $g_2 = \frac{1}{2}p_2$

si $p_1 = p_2 - 1$: $g_1 = 2p_1$, $g_2 = p_2$

si $p_1 = p_2$: $g_1 = \frac{3}{2}p_1$, $g_2 = \frac{3}{2}p_2$

si $p_1 = p_2 + 1$: $g_1 = p_1$, $g_2 = 2p_2$

si $p_1 = p_2 + 2$: $g_1 = \frac{1}{2}p_1$, $g_2 = \frac{5}{2}p_2$

si $p_1 > p_2 + 2$: $g_1 = 0$, $g_2 = 3p_2$

FIG. 10.5 – Matrice de gains, deux joueurs, trois sources, Peu importe

| Prix | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 1 | 2 1 | 2 2 | 3 2 | 0 3 | 0 3 | 0 3 |
| 2 | 2 2 | 4 2 | 3 4 | 4 4 | 0 6 | 0 6 |
| 3 | 3 0 | 4 3 | 6 3 | 4 6 | 5 6 | 0 9 |
| 4 | 3 0 | 6 0 | 6 4 | 8 4 | 5 8 | 6 8 |
| 5 | 3 0 | 6 0 | 9 0 | 8 5 | 10 5 | 6 10 |
| 6 | 3 0 | 6 0 | 9 0 | 12 0 | 10 6 | 12 6 |

Règles de remplissage:

si $p_1 < p_2 - 1$: $g_1 = 3p_1$, $g_2 = 0$

si $p_1 = p_2 - 1$: $g_1 = 2p_1$, $g_2 = p_2$

si $p_1 = p_2$: $g_1 = 2p_1$, $g_2 = p_2$

si $p_1 = p_2 + 1$: $g_1 = p_1$, $g_2 = 2p_2$

si $p_1 = p_2 + 2$: $g_1 = p_1$, $g_2 = 2p_2$

si $p_1 > p_2 + 2$: $g_1 = 0$, $g_2 = 3p_2$

FIG. 10.6 – Matrice de gains, deux joueurs, trois sources, Déterministe

| Prix | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|--------|--------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 2 | 4 2 | 3 3 | 4 3 | 0 4 | 0 4 | 0 4 | 0 4 | 0 4 |
| 2 | 2 4 | 4 4 | 6 4 | 4 6 | 5 6 | 0 8 | 0 8 | 0 8 | 0 8 |
| 3 | 3 3 | 4 6 | 6 6 | 8 6 | 5 9 | 6 9 | 0 12 | 0 12 | 0 12 |
| 4 | 3 4 | 6 4 | 6 8 | 8 8 | 10 8 | 6 12 | 7 12 | 0 16 | 0 16 |
| 5 | 4 0 | 6 5 | 9 5 | 8 10 | 10 10 | 12 10 | 7 15 | 8 15 | 0 20 |
| 6 | 4 0 | 8 0 | 9 6 | 12 6 | 10 12 | 12 12 | 14 12 | 8 18 | 9 18 |
| 7 | 4 0 | 8 0 | 12 0 | 12 7 | 15 7 | 12 14 | 14 14 | 16 14 | 9 21 |
| 8 | 4 0 | 8 0 | 12 0 | 16 0 | 15 8 | 18 8 | 14 16 | 16 16 | 18 16 |
| 9 | 4 0 | 8 0 | 12 0 | 16 0 | 20 0 | 18 9 | 21 9 | 16 18 | 18 18 |

Règles de remplissage:

-
- si $p_1 < p_2 - 3$: $g_1 = 4p_1, g_2 = 0$
 - si $p_1 = p_2 - 3$: $g_1 = 3p_1, g_2 = p_2$
 - si $p_1 = p_2 - 2$: $g_1 = 3p_1, g_2 = p_2$
 - si $p_1 = p_2 - 1$: $g_1 = 2p_1, g_2 = 2p_2$
 - si $p_1 = p_2$: $g_1 = 2p_1, g_2 = 2p_2$
 - si $p_1 = p_2 + 1$: $g_1 = 2p_1, g_2 = 2p_2$
 - si $p_1 = p_2 + 2$: $g_1 = p_1, g_2 = 3p_2$
 - si $p_1 = p_2 + 3$: $g_1 = p_1, g_2 = 3p_2$
 - si $p_1 > p_2 + 3$: $g_1 = 0, g_2 = 4p_2$

FIG. 10.7 – Matrice de gains, deux joueurs, quatre sources, Plus court chemin

| Prix | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| 1 | 2 2 | 3 2.5 | 3 3 | 2 3.5 | 0 4 | 0 4 | 0 4 |
| 2 | 2.5 3 | 4 4 | 4.5 5 | 4 6 | 2.5 7 | 0 8 | 0 8 |
| 3 | 3 3 | 5 4.5 | 6 6 | 6 7.5 | 5 9 | 3 10.5 | 0 12 |
| 4 | 3.5 2 | 6 4 | 7.5 6 | 8 8 | 7.5 10 | 6 12 | 3.5 14 |
| 5 | 4 0 | 7 2.5 | 9 5 | 10 7.5 | 10 10 | 9 12.5 | 7 15 |
| 6 | 4 0 | 8 0 | 10.5 3 | 12 6 | 12.5 9 | 12 12 | 10.5 15 |
| 7 | 4 0 | 8 0 | 12 0 | 14 3.5 | 15 7 | 15 10.5 | 14 14 |

Règles de remplissage:

-
- si $p_1 < p_2 - 3$: $g_1 = 4p_1, g_2 = 0$
 - si $p_1 = p_2 - 3$: $g_1 = \frac{7}{2}p_1, g_2 = \frac{1}{2}p_2$
 - si $p_1 = p_2 - 2$: $g_1 = 3p_1, g_2 = p_2$
 - si $p_1 = p_2 - 1$: $g_1 = \frac{5}{2}p_1, g_2 = \frac{3}{2}p_2$
 - si $p_1 = p_2$: $g_1 = 2p_1, g_2 = 2p_2$
 - si $p_1 = p_2 + 1$: $g_1 = \frac{3}{2}p_1, g_2 = \frac{5}{2}p_2$
 - si $p_1 = p_2 + 2$: $g_1 = p_1, g_2 = 3p_2$
 - si $p_1 = p_2 + 3$: $g_1 = \frac{1}{2}p_1, g_2 = \frac{7}{2}p_2$
 - si $p_1 > p_2 + 3$: $g_1 = 0, g_2 = 4p_2$

FIG. 10.8 – Matrice de gains, deux joueurs, quatre sources, Peu importe

| Prix | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------|--------|--------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 2 | 4 2 | 3 3 | 4 3 | 0 4 | 0 4 | 0 4 |
| 2 | 3 2 | 4 4 | 6 4 | 4 6 | 5 6 | 0 8 | 0 8 |
| 3 | 3 3 | 6 3 | 6 6 | 8 6 | 5 9 | 6 9 | 0 12 |
| 4 | 4 0 | 6 4 | 9 4 | 8 8 | 10 8 | 6 12 | 7 12 |
| 5 | 4 0 | 8 0 | 9 5 | 12 5 | 10 10 | 12 10 | 7 15 |
| 6 | 4 0 | 8 0 | 12 0 | 12 6 | 15 6 | 12 12 | 14 12 |
| 7 | 4 0 | 8 0 | 12 0 | 16 0 | 15 7 | 18 7 | 14 14 |

Règles de remplissage:

-
- si $p_1 < p_2 - 2$: $g_1 = 4p_1, g_2 = 0$
 - si $p_1 = p_2 - 2$: $g_1 = 3p_1, g_2 = p_2$
 - si $p_1 = p_2 - 1$: $g_1 = 3p_1, g_2 = p_2$
 - si $p_1 = p_2$: $g_1 = 2p_1, g_2 = 2p_2$
 - si $p_1 = p_2 + 1$: $g_1 = 2p_1, g_2 = 2p_2$
 - si $p_1 = p_2 + 2$: $g_1 = p_1, g_2 = 3p_2$
 - si $p_1 = p_2 + 3$: $g_1 = p_1, g_2 = 3p_2$
 - si $p_1 > p_2 + 3$: $g_1 = 0, g_2 = 4p_2$

FIG. 10.9 – Matrice de gains, deux joueurs, quatre sources, Déterministe

Résultats lorsque $b = 0.09$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 3538.3. Détails : [3355, 2946, 3468, 2983, 3470, 3513, 3698, 4929, 3756, 3265].
- Prix moyens : 118.19. Détails : [118.953125, 118.250000, 117.953125, 117.937500, 118.125000, 118.156250, 118.484375, 117.984375, 118.046875, 118.093750]. Prix le plus haut : 123.5, prix le plus bas : 112.19.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 95.8. Détails : [106, 90, 48, 91, 89, 114, 107, 86, 115, 112].

Résultats lorsque $b = 0.08$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 4320.7. Détails : [3851, 4964, 3859, 3859, 4470, 4881, 4173, 3527, 4863, 4760].
- Prix moyens : 118.12. Détails : [118.140625, 118.187500, 118.156250, 118.000000, 118.109375, 118.031250, 118.109375, 118.062500, 118.234375, 118.187500]. Prix le plus haut : 123.5, prix le plus bas : 111.3.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 113.2. Détails : [122, 115, 109, 95, 98, 115, 124, 114, 122, 118].

Résultats lorsque $b = 0.07$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 5562.6. Détails : [4617, 5163, 7132, 5840, 5028, 4448, 6538, 4638, 6580, 5642].
- Prix moyens : 118.14. Détails : [117.968750, 118.078125, 118.062500, 118.078125, 118.218750, 118.296875, 118.156250, 118.109375, 118.390625, 118.093750]. Prix le plus haut : 124.6, prix le plus bas : 112.1.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 100.9. Détails : [90, 87, 110, 91, 113, 92, 111, 113, 98, 104].

Résultats lorsque $b = 0.06$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.

- Nombre moyen de parties : 7173.7. Détails : [6238, 6773, 6563, 6758, 6529, 6258, 7311, 7354, 8064, 9889].
- Prix moyens : 118.03. Détails : [118.250000, 117.953125, 118.078125, 117.921875, 117.968750, 118.046875, 118.046875, 118.015625, 118.218750, 117.875000]. Prix le plus haut : 122.8, prix le plus bas : 112.9.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 91.8. Détails : [100, 84, 110, 116, 115, 65, 64, 90, 100, 74].

Résultats lorsque $b = 0.05$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 11223. Détails : [11877, 11913, 9018, 12982, 10950, 10940, 12455, 8627, 12157, 11316].
- Prix moyens : 117.99. Détails : [117.968750, 117.937500, 118.156250, 118.046875, 117.953125, 117.890625, 118.000000, 117.953125, 117.984375, 118.062500]. Prix le plus haut : 122.6, prix le plus bas : 112.8.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 94.2. Détails : [90, 89, 101, 101, 70, 46, 113, 117, 105, 110].

Résultats lorsque $b = 0.04$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 17053.3. Détails : [15692, 16900, 14455, 14785, 20745, 22153, 20324, 13269, 17607, 14603].
- Prix moyens : 117.97. Détails : [117.953125, 117.875000, 117.843750, 118.015625, 118.171875, 118.015625, 117.937500, 117.937500, 118.062500, 117.906250]. Prix le plus haut : 122.5, prix le plus bas : 113.4.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 77.1. Détails : [119, 46, 40, 93, 81, 120, 61, 45, 94, 72].

Résultats lorsque $b = 0.03$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 127.9.
- Nombre moyen de parties : 29926.7. Détails : [35917, 36174, 27574, 22833, 31195, 27453, 35858, 31297, 26348, 24618].

- Prix moyens : 117.94. Détails : [117.859375, 117.875000, 117.953125, 117.937500, 117.984375, 118.015625, 117.875000, 118.031250, 117.984375, 117.937500]. Prix le plus haut : 122.3, prix le plus bas : 113.2.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 77.6. Détails : [-1, 37, 91, 54, 100, 103, 70, 85, 123, 114].

Résultats lorsque $b = 0.02$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 127.9.
- Nombre moyen de parties : 50341.2. Détails : [52153, 37328, 64147, 44008, 53310, 55806, 53247, 42071, 44162, 57180].
- Prix moyens : 117.89. Détails : [117.875000, 117.875000, 117.859375, 117.921875, 117.906250, 117.875000, 117.906250, 117.906250, 117.921875, 117.937500]. Prix le plus haut : 121.6, prix le plus bas : 114.3.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 56. Détails : [84, 31, 45, 61, -1, 46, 100, 60, 98, 36].

Résultats lorsque $b = 0.01$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 127.8.
- Nombre moyen de parties : 176577. Détails : [154698, 201190, 169730, 181550, 153988, 116110, 146134, 233801, 165351, 243223].
- Prix moyens : 117.83. Détails : [117.859375, 117.812500, 117.828125, 117.828125, 117.859375, 117.812500, 117.828125, 117.843750, 117.859375, 117.859375]. Prix le plus haut : 120.2, prix le plus bas : 115.4.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 21.7. Détails : [79, 0, 10, -1, 26, 0, 22, 23, 60, -1].

10.4.2 Réseau 3×3 à deux commodités et 128 joueurs

Résultats lorsque $b = 0.1$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 2643.9. Détails : [2779, 2492, 3965, 2658, 1834, 2101, 3134, 2440, 2645, 2391].

- Prix moyens commodité 1 : 96.8. Détails : [98.765625, 96.718750, 96.328125, 96.828125, 96.375000, 95.984375, 96.250000, 96.187500, 97.093750, 97.562500]. Prix le plus haut : 102.6, prix le plus bas : 89.9.
- Prix moyens commodité 2 : 85.16. Détails : [83.484375, 85.437500, 85.734375, 84.921875, 85.312500, 86.234375, 85.468750, 85.593750, 84.812500, 84.656250]. Prix le plus haut : 89.1, prix le plus bas : 80.8.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 96.9. Détails : [121, 97, 107, 62, 85, 91, 109, 92, 87, 118].

Résultats lorsque $b = 0.09$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 3307.8. Détails : [3167, 2656, 2996, 2564, 3523, 4131, 4281, 2794, 3025, 3941].
- Prix moyens commodité 1 : 96.7. Détails : [96.781250, 96.968750, 96.046875, 97.484375, 96.796875, 96.812500, 96.703125, 95.890625, 96.625000, 96.953125]. Prix le plus haut : 102.5, prix le plus bas : 90.9.
- Prix moyens commodité 2 : 85.26. Détails : [85.093750, 85.531250, 86.328125, 84.578125, 84.859375, 85.093750, 85.328125, 86.015625, 85.062500, 84.703125]. Prix le plus haut : 89.3, prix le plus bas : 80.5.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 98.3. Détails : [95, 100, 116, 120, 68, 93, 104, 66, 110, 111].

Résultats lorsque $b = 0.08$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 4071.6. Détails : [3323, 5108, 3540, 3088, 4513, 4442, 3826, 3991, 4196, 4689].
- Prix moyens commodité 1 : 96.7. Détails : [97.046875, 96.187500, 97.250000, 97.328125, 96.640625, 96.875000, 96.609375, 96.718750, 96.046875, 96.406250]. Prix le plus haut : 102.2, prix le plus bas : 91.9.
- Prix moyens commodité 2 : 85. Détails : [84.890625, 85.781250, 84.468750, 84.453125, 85.078125, 84.843750, 85.078125, 84.656250, 85.765625, 85.093750]. Prix le plus haut : 88.3, prix le plus bas : 81.6.

- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 79.5. Détails : [89, 81, 99, 107, 71, 101, 88, 37, 85, 37].

Résultats lorsque $b = 0.07$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 5699.8. Détails : [6115, 8337, 3937, 4501, 5022, 5217, 7385, 4923, 5760, 5801].
- Prix moyens commodité 1 : 96.84. Détails : [96.765625, 96.781250, 96.218750, 96.265625, 97.296875, 97.468750, 97.328125, 97.000000, 96.734375, 96.609375]. Prix le plus haut : 101.5, prix le plus bas : 91.
- Prix moyens commodité 2 : 84.88. Détails : [84.890625, 85.093750, 85.593750, 85.359375, 84.578125, 84.250000, 84.609375, 84.656250, 84.921875, 84.859375]. Prix le plus haut : 88.4, prix le plus bas : 81.4.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 88.6. Détails : [119, 78, 102, 86, 103, 75, 78, 68, 81, 96].

Résultats lorsque $b = 0.06$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 7562.2. Détails : [8837, 8661, 6332, 7996, 6692, 7960, 6751, 8089, 6964, 7340].
- Prix moyens commodité 1 : 96.78. Détails : [96.875000, 96.593750, 96.812500, 97.343750, 96.828125, 97.281250, 96.546875, 95.937500, 96.781250, 96.859375]. Prix le plus haut : 101.2, prix le plus bas : 92.
- Prix moyens commodité 2 : 84.88. Détails : [84.968750, 85.000000, 84.812500, 84.406250, 84.890625, 84.437500, 85.015625, 85.843750, 84.875000, 84.609375]. Prix le plus haut : 88, prix le plus bas : 81.8.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 85.8. Détails : [101, 70, 93, 116, 77, 78, 72, 80, 92, 79].

Résultats lorsque $b = 0.05$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.

- Nombre moyen de parties : 10473. Détails : [11375, 14692, 8619, 9494, 12648, 9536, 9673, 11561, 8268, 8864].
- Prix moyens commodité 1 : 96.9. Détails : [97.234375, 97.703125, 97.500000, 96.484375, 97.015625, 96.125000, 97.109375, 96.671875, 96.765625, 96.765625]. Prix le plus haut : 101.7, prix le plus bas : 91.9.
- Prix moyens commodité 2 : 84.71. Détails : [84.421875, 84.140625, 84.281250, 84.984375, 84.484375, 85.468750, 84.546875, 85.046875, 84.953125, 84.859375]. Prix le plus haut : 87.8, prix le plus bas : 81.7.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 79.6. Détails : [90, 87, 83, 67, 29, 96, 77, 76, 99, 92].

Résultats lorsque $b = 0.04$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 16096. Détails : [14899, 17082, 15848, 16321, 12579, 17769, 18490, 15358, 19050, 13564].
- Prix moyens commodité 1 : 96.5. Détails : [96.828125, 96.375000, 96.984375, 96.531250, 96.484375, 96.765625, 96.437500, 96.734375, 96.218750, 96.062500]. Prix le plus haut : 101.4, prix le plus bas : 92.4.
- Prix moyens commodité 2 : 85. Détails : [84.796875, 85.187500, 84.515625, 85.187500, 85.109375, 84.953125, 85.218750, 84.671875, 85.406250, 85.562500]. Prix le plus haut : 88.3, prix le plus bas : 81.8.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 77.4. Détails : [62, 67, 62, 98, 85, 85, 82, 62, 80, 91].

Résultats lorsque $b = 0.03$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 128.
- Nombre moyen de parties : 30157. Détails : [27000, 29717, 24234, 42665, 30940, 28714, 41615, 25766, 26794, 24129].
- Prix moyens commodité 1 : 96.8. Détails : [96.781250, 96.437500, 97.156250, 97.531250, 97.343750, 96.468750, 96.484375, 96.375000, 96.531250, 97.203125]. Prix le plus haut : 101.1, prix le plus bas : 93.
- Prix moyens commodité 2 : 84.64. Détails : [84.562500, 84.968750, 84.406250, 84.125000, 84.281250, 85.000000, 84.890625, 85.000000, 84.968750, 84.234375]. Prix le plus haut :

86.7, prix le plus bas : 82.3.

- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 59.3. Détails : [32, 23, 85, 85, 68, 89, 38, 37, 79, 57].

Résultats lorsque $b = 0.02$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 127.9.
- Nombre moyen de parties : 59153.1. Détails : [39935, 52343, 51910, 35926, 45055, 86205, 56282, 76981, 62002, 84892].
- Prix moyens commodité 1 : 96.6. Détails : [96.765625, 96.437500, 96.546875, 96.734375, 96.140625, 96.781250, 96.375000, 96.796875, 96.640625, 96.906250]. Prix le plus haut : 99.9, prix le plus bas : 93.1.
- Prix moyens commodité 2 : 84.8. Détails : [84.578125, 84.968750, 84.890625, 84.734375, 85.296875, 84.531250, 84.968750, 84.671875, 84.796875, 84.562500]. Prix le plus haut : 86.7, prix le plus bas : 82.8.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 42.9. Détails : [22, 41, -1, 96, 62, 30, 5, 46, 85, 43].

Résultats lorsque $b = 0.01$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 127.6.
- Nombre moyen de parties : 173949. Détails : [163683, 127393, 176348, 242889, 154182, 183703, 211508, 165807, 169330, 144647].
- Prix moyens commodité 1 : 96.52. Détails : [96.281250, 96.437500, 96.468750, 96.390625, 96.359375, 96.390625, 96.343750, 96.796875, 96.843750, 96.906250]. Prix le plus haut : 98.6, prix le plus bas : 94.
- Prix moyens commodité 2 : 84.8. Détails : [85.000000, 84.843750, 84.843750, 84.921875, 84.953125, 84.921875, 84.968750, 84.609375, 84.468750, 84.500000]. Prix le plus haut : 86.2, prix le plus bas : 83.4.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 6.7. Détails : [-1, 0, 33, 10, -1, 5, -1, 13, 10, -1].

10.4.3 Réseau 5×5 à trois commodités et 300 joueurs

Résultats lorsque $b = 0.1$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 300.0.
- Nombre moyen de parties : 7082.5. Détails : [5816, 7495, 7538, 7419, 6116, 6561, 9075, 6324, 6367, 8114].
- Prix moyens commodité 1 : 131.25. Détails : [131.169998, 130.720001, 130.869995, 131.570007, 131.080002, 131.720001, 131.139999, 131.880005, 130.759995, 131.600006].
Prix le plus haut : 147.00, prix le plus bas : 117.5.
- Prix moyens commodité 2 : 125.1. Détails : [124.650002, 126.279999, 123.769997, 125.389999, 125.370003, 125.470001, 125.199997, 124.779999, 125.480003, 124.699997].
Prix le plus haut : 135.3, prix le plus bas : 115.
- Prix moyens commodité 3 : 113.74. Détails : [113.459999, 113.760002, 113.500000, 114.080002, 113.430000, 114.410004, 113.760002, 113.879997, 113.760002, 113.339996].
Prix le plus haut : 123.6, prix le plus bas : 103.3.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 293. Détails : [291, 294, 295, 295, 296, 293, 297, 294, 282, 293].

Résultats lorsque $b = 0.09$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 300.0.
- Nombre moyen de parties : 7827.3. Détails : [7372, 8107, 8266, 7934, 7333, 7628, 7281, 7359, 8568, 8425].
- Prix moyens commodité 1 : 131.579. Détails : [131.490005, 131.619995, 131.520004, 132.169998, 131.660004, 132.289993, 130.960007, 131.360001, 131.869995, 130.860001].
Prix le plus haut : 149.6, prix le plus bas : 118.9.
- Prix moyens commodité 2 : 125. Détails : [126.449997, 124.500000, 125.040001, 125.160004, 125.529999, 124.059998, 125.230003, 124.809998, 124.440002, 125.489998]. Prix le plus haut : 136.8, prix le plus bas : 113.1.
- Prix moyens commodité 3 : 113.3. Détails : [113.019997, 112.500000, 113.660004, 114.330002, 113.150002, 113.510002, 114.290001, 113.370003, 112.650002, 112.669998].
Prix le plus haut : 122.7, prix le plus bas : 103.9.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 293.1. Détails : [297, 284, 292, 296, 296, 289, 296, 293, 298, 290].

Résultats lorsque $b = 0.08$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 300.0.
- Nombre moyen de parties : 11033.6. Détails : [11141, 13366, 10500, 11805, 12297, 11849, 8726, 11076, 9460, 10116].
- Prix moyens commodité 1 : 131.289. Détails : [130.940002, 130.639999, 131.250000, 132.339996, 131.399994, 130.919998, 130.889999, 131.660004, 130.910004, 131.940002].
Prix le plus haut : 147.4, prix le plus bas : 119.
- Prix moyens commodité 2 : 124.93. Détails : [124.870003, 125.010002, 125.580002, 123.980003, 124.419998, 125.190002, 124.809998, 125.129997, 125.599998, 124.790001].
Prix le plus haut : 135.5, prix le plus bas : 114.5.
- Prix moyens commodité 3 : 113.31. Détails : [113.629997, 112.690002, 113.089996, 113.919998, 113.400002, 113.790001, 113.320000, 113.070000, 113.750000, 112.489998].
Prix le plus haut : 122.0, prix le plus bas : 105.4.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 291.5. Détails : [293, 298, 281, 290, 275, 298, 292, 296, 293, 299].

Résultats lorsque $b = 0.07$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 300.0.
- Nombre moyen de parties : 12924. Détails : [13097, 12662, 11749, 11915, 12860, 13895, 11233, 12544, 14481, 14804].
- Prix moyens commodité 1 : 131.3. Détails : [131.369995, 130.889999, 131.199997, 131.589996, 131.490005, 131.639999, 131.610001, 131.199997, 130.740005, 131.229996].
Prix le plus haut : 146.2, prix le plus bas : 119.1.
- Prix moyens commodité 2 : 124.946. Détails : [124.980003, 124.550003, 126.019997, 124.639999, 124.940002, 124.680000, 124.389999, 124.379997, 125.449997, 125.430000].
Prix le plus haut : 134.6, prix le plus bas : 115.5.
- Prix moyens commodité 3 : 112.35. Détails : [112.570000, 113.000000, 112.000000, 111.870003, 112.389999, 111.919998, 112.940002, 112.419998, 112.290001, 112.120003].
Prix le plus haut : 119.9, prix le plus bas : 104.4.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 289. Détails : [292, 298, 285, 283, 296, 288, 278, 297, 285, 288].

Résultats lorsque $b = 0.06$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 300.0.
- Nombre moyen de parties : 18386. Détails : [21690, 18579, 18407, 15107, 16763, 20660, 18790, 17895, 17687, 18282].
- Prix moyens commodité 1 : 131.118. Détails : [130.710007, 130.240005, 130.949997, 131.710007, 131.110001, 131.389999, 131.839996, 131.110001, 130.750000, 131.369995].
Prix le plus haut : 142.4, prix le plus bas : 122.4.
- Prix moyens commodité 2 : 124.2. Détails : [124.470001, 124.269997, 123.750000, 123.989998, 124.809998, 123.860001, 124.050003, 124.610001, 124.160004, 124.110001].
Prix le plus haut : 131.9, prix le plus bas : 116.8.
- Prix moyens commodité 3 : 111.9. Détails : [111.800003, 113.050003, 112.779999, 111.540001, 111.279999, 112.529999, 111.309998, 111.220001, 111.629997, 112.059998].
Prix le plus haut : 119.3, prix le plus bas : 104.7.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 277.8. Détails : [284, 244, 290, 296, 267, 285, 281, 283, 275, 273].

Résultats lorsque $b = 0.05$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 300.0.
- Nombre moyen de parties : 25449.5. Détails : [26330, 24347, 23104, 22379, 27022, 28059, 27971, 20564, 28049, 26670].
- Prix moyens commodité 1 : 131.0. Détails : [131.130005, 131.250000, 131.149994, 130.649994, 131.070007, 131.380005, 130.750000, 130.910004, 130.860001, 131.089996].
Prix le plus haut : 142.4, prix le plus bas : 122.6.
- Prix moyens commodité 2 : 124.0. Détails : [124.519997, 123.660004, 123.989998, 124.080002, 124.279999, 123.919998, 123.750000, 124.220001, 123.980003, 124.029999].
Prix le plus haut : 130.7, prix le plus bas : 116.6.
- Prix moyens commodité 3 : 111.88. Détails : [111.809998, 112.430000, 111.940002, 112.570000, 111.669998, 112.239998, 111.720001, 111.230003, 111.680000, 111.540001].
Prix le plus haut : 118.09, prix le plus bas : 106.09.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 275.89. Détails : [274, 275, 271, 285, 271, 288, 263, 268, 293, 271].

Résultats lorsque $b = 0.04$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 300.0.
- Nombre moyen de parties : 37287. Détails : [28147, 32418, 36548, 43364, 40522, 32295, 39790, 40109, 39828, 39849].
- Prix moyens commodité 1 : 130.96. Détails : [131.190002, 131.449997, 130.639999, 131.179993, 131.050003, 131.270004, 130.509995, 130.600006, 130.639999, 131.130005].
Prix le plus haut : 140.39, prix le plus bas : 123.2.
- Prix moyens commodité 2 : 124.26. Détails : [123.860001, 123.910004, 124.480003, 124.279999, 124.580002, 123.839996, 124.760002, 124.389999, 124.599998, 123.970001].
Prix le plus haut : 132.3, prix le plus bas : 117.5.
- Prix moyens commodité 3 : 111.48. Détails : [111.510002, 111.440002, 111.839996, 111.160004, 111.129997, 111.529999, 111.050003, 111.510002, 111.459999, 112.260002].
Prix le plus haut : 117.2, prix le plus bas : 105.8.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 243. Détails : [-1, 273, 248, 267, 274, 297, 251, 276, 252, 293].

Résultats lorsque $b = 0.03$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 299.899994.
- Nombre moyen de parties : 67394. Détails : [75477, 78929, 63057, 61687, 63225, 57135, 60571, 65887, 86518, 61457].
- Prix moyens commodité 1 : 130.99. Détails : [130.490005, 130.910004, 130.869995, 131.619995, 131.169998, 131.000000, 130.580002, 131.179993, 131.029999, 131.119995].
Prix le plus haut : 138.39, prix le plus bas : 125.4.
- Prix moyens commodité 2 : 123.74. Détails : [124.180000, 123.620003, 123.910004, 123.400002, 123.559998, 123.589996, 123.940002, 123.680000, 123.889999, 123.709999].
Prix le plus haut : 129.9, prix le plus bas : 118.2.
- Prix moyens commodité 3 : 111.25. Détails : [111.330002, 111.470001, 111.379997, 111.320000, 110.989998, 111.169998, 111.500000, 111.320000, 111.120003, 110.970001].
Prix le plus haut : 116.3, prix le plus bas : 107.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 236.89. Détails : [252, 231, 273, 244, 211, 258, 216, 226, 253, 205].

Résultats lorsque $b = 0.02$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 300.
- Nombre moyen de parties : 142162.6. Détails : [129592, 195295, 143182, 165059, 127349, 109942, 126356, 151744, 145948, 127159].
- Prix moyens commodité 1 : 130.869. Détails : [130.520004, 130.600006, 131.059998, 130.770004, 130.899994, 131.309998, 130.830002, 130.830002, 130.889999, 130.899994].
Prix le plus haut : 135.6, prix le plus bas : 125.59.
- Prix moyens commodité 2 : 123.55. Détails : [123.870003, 123.769997, 123.410004, 123.529999, 123.480003, 123.110001, 123.500000, 123.570000, 123.660004, 123.650002].
Prix le plus haut : 128.0, prix le plus bas : 118.6.
- Prix moyens commodité 3 : 111.18. Détails : [111.089996, 111.349998, 111.269997, 111.220001, 111.180000, 111.199997, 111.230003, 111.080002, 111.050003, 111.129997].
Prix le plus haut : 114.39, prix le plus bas : 107.3.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 172.4. Détails : [0, 241, 214, 225, 141, 222, 216, 0, 246, 219].

Résultats lorsque $b = 0.01$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 300.
- Nombre moyen de parties : 478521.5. Détails : [432866, 434625, 403936, 412850, 524746, 416917, 480650, 468917, 496000, 713712].
- Prix moyens commodité 1 : 130.73. Détails : [130.759995, 130.979996, 130.750000, 130.809998, 130.649994, 130.820007, 130.729996, 130.649994, 130.710007, 130.440002].
Prix le plus haut : 134.5, prix le plus bas : 126.2.
- Prix moyens commodité 2 : 123.504. Détails : [123.419998, 123.260002, 123.430000, 123.540001, 123.540001, 123.379997, 123.750000, 123.550003, 123.519997, 123.650002].
Prix le plus haut : 126.5, prix le plus bas : 122.3.
- Prix moyens commodité 3 : 111.114. Détails : [111.080002, 111.120003, 111.120003, 111.010002, 111.070000, 111.199997, 111.000000, 111.139999, 111.089996, 111.309998].
Prix le plus haut : 114, prix le plus bas : 108.6.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 49.4. Détails : [0, 127, 0, 92, 0, -1, 117, -1, 58, 102].

10.4.4 Réseau $3 \times 3 \times 4$ à trois commodités et 192 joueurs

Résultats lorsque $b = 0.1$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 2120.7. Détails : [2258, 1820, 1876, 2236, 1760, 1688, 1907, 1988, 2871, 2803].
- Prix moyens commodité 1 : 254.82. Détails : [251.343750, 256.500000, 251.000000, 252.531250, 259.078125, 256.921875, 254.781250, 259.328125, 253.562500, 253.171875].
Prix le plus haut : 288.3, prix le plus bas : 237.2.
- Prix moyens commodité 2 : 251.13. Détails : [258.140625, 252.671875, 254.609375, 247.109375, 251.765625, 250.328125, 250.671875, 243.750000, 246.859375, 255.390625].
Prix le plus haut : 289.5, prix le plus bas : 236.8.
- Prix moyens commodité 3 : 238.05. Détails : [236.578125, 236.000000, 242.875000, 236.296875, 234.406250, 241.812500, 239.578125, 237.671875, 235.656250, 239.625000].
Prix le plus haut : 275.1, prix le plus bas : 225.9.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 131.2. Détails : [133, 134, 140, 120, 110, 148, 136, 144, 124, 123].

Résultats lorsque $b = 0.09$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 2855.8. Détails : [2699, 3340, 3185, 2381, 2244, 2904, 2200, 2320, 4404, 2881].
- Prix moyens commodité 1 : 253.9. Détails : [253.859375, 248.765625, 262.343750, 253.406250, 248.687500, 250.843750, 252.515625, 255.218750, 259.296875, 254.343750].
Prix le plus haut : 283.8, prix le plus bas : 240.3.
- Prix moyens commodité 2 : 250.33. Détails : [231.218750, 238.437500, 243.843750, 234.140625, 237.093750, 231.546875, 231.687500, 234.890625, 237.281250, 238.437500].
Prix le plus haut : 293.3, prix le plus bas : 238.6.
- Prix moyens commodité 3 : 235.85. Détails : [236.578125, 236.000000, 242.875000, 236.296875, 234.406250, 241.812500, 239.578125, 237.671875, 235.656250, 239.625000].
Prix le plus haut : 260.9, prix le plus bas : 227.4.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 109. Détails : [133, 106, 122, 113, 124, 62, 91, 136, 109, 94].

Résultats lorsque $b = 0.08$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 3292.1. Détails : [3385, 3427, 3040, 3499, 3446, 2670, 4181, 2547, 3562, 3164].
- Prix moyens commodité 1 : 253.5. Détails : [254.843750, 252.359375, 253.421875, 251.156250, 252.296875, 253.515625, 253.750000, 255.234375, 253.343750, 255.390625].
Prix le plus haut : 280.1, prix le plus bas : 242.9.
- Prix moyens commodité 2 : 247.46. Détails : [248.734375, 251.375000, 243.718750, 249.343750, 246.796875, 244.062500, 247.828125, 252.687500, 245.109375, 245.000000].
Prix le plus haut : 283.1, prix le plus bas : 238.2.
- Prix moyens commodité 3 : 234.73. Détails : [231.562500, 231.109375, 240.265625, 234.750000, 233.796875, 236.453125, 234.375000, 235.328125, 236.500000, 233.234375].
Prix le plus haut : 258.9, prix le plus bas : 228.7.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 97.7. Détails : [109, 130, 73, 110, 43, 122, 70, 130, 82, 108].

Résultats lorsque $b = 0.07$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 4909. Détails : [6774, 5383, 4296, 4480, 4978, 5160, 5834, 3244, 4399, 4543].
- Prix moyens commodité 1 : 252. Détails : [251.625000, 252.218750, 252.218750, 252.921875, 252.328125, 249.765625, 251.687500, 254.078125, 250.203125, 253.359375]. Prix le plus haut : 278.4, prix le plus bas : 241.8.
- Prix moyens commodité 2 : 247.5. Détails : [247.640625, 246.296875, 253.937500, 245.328125, 247.250000, 248.343750, 243.281250, 248.234375, 250.531250, 244.171875].
Prix le plus haut : 272.3, prix le plus bas : 240.7.
- Prix moyens commodité 3 : 232.9. Détails : [233.218750, 233.234375, 227.718750, 231.218750, 229.906250, 236.453125, 239.078125, 229.718750, 233.312500, 235.187500].
Prix le plus haut : 252.4, prix le plus bas : 226.8.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 92.8. Détails : [80, 46, 132, 97, 70, 90, 118, 126, 91, 78].

Résultats lorsque $b = 0.06$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 6380.6. Détails : [4872, 4683, 7204, 4943, 6585, 8046, 7816, 7785, 5395, 6477].
- Prix moyens commodité 1 : 251.9. Détails : [251.312500, 251.875000, 251.515625, 253.140625, 251.281250, 253.484375, 254.062500, 250.281250, 253.125000, 249.187500].
Prix le plus haut : 273.9, prix le plus bas : 241.7.
- Prix moyens commodité 2 : 243.9. Détails : [245.250000, 243.875000, 241.703125, 239.359375, 250.312500, 243.937500, 242.484375, 245.125000, 243.921875, 243.046875].
Prix le plus haut : 264.8, prix le plus bas : 236.8.
- Prix moyens commodité 3 : 234.86. Détails : [232.875000, 233.593750, 236.468750, 235.375000, 231.546875, 235.328125, 235.281250, 235.171875, 236.328125, 236.625000].
Prix le plus haut : 251.5, prix le plus bas : 230.5.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 82.3. Détails : [66, 66, 75, 98, 79, 53, 127, 99, 106, 54].

Résultats lorsque $b = 0.05$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 9178.8. Détails : [9090, 10759, 9060, 11642, 10186, 6706, 9803, 9106, 6483, 8953].
- Prix moyens commodité 1 : 251.56. Détails : [250.515625, 252.359375, 249.468750, 252.625000, 251.656250, 254.812500, 252.687500, 250.734375, 248.687500, 252.046875].
Prix le plus haut : 263.4, prix le plus bas : 242.8.
- Prix moyens commodité 2 : 244.9. Détails : [247.296875, 243.484375, 246.609375, 243.968750, 244.250000, 244.312500, 242.484375, 245.656250, 245.984375, 244.953125].
Prix le plus haut : 271.7, prix le plus bas : 238.1.
- Prix moyens commodité 3 : 233.2. Détails : [231.671875, 234.140625, 233.000000, 232.828125, 233.937500, 233.062500, 233.343750, 232.656250, 234.625000, 233.203125].
Prix le plus haut : 248.6, prix le plus bas : 227.9.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 96.9. Détails : [114, 64, 175, 101, 21, 115, 19, 99, 160, 101].

Résultats lorsque $b = 0.04$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 14570.7. Détails : [21097, 24219, 32742, 25633, 23231, 18336, 31159, 25029, 28690, 24394].
- Prix moyens commodité 1 : 252.26. Détails : [252.062500, 250.484375, 252.140625, 251.875000, 251.562500, 254.781250, 251.171875, 251.109375, 253.359375, 254.140625].
Prix le plus haut : 261.6, prix le plus bas : 244.8.
- Prix moyens commodité 2 : 242.9. Détails : [243.015625, 245.437500, 243.062500, 245.953125, 243.906250, 239.906250, 241.234375, 245.218750, 240.968750, 241.062500].
Prix le plus haut : 260.4, prix le plus bas : 236.1.
- Prix moyens commodité 3 : 231.9. Détails : [232.343750, 231.406250, 233.437500, 230.781250, 231.000000, 232.078125, 234.546875, 230.781250, 232.234375, 231.171875].
Prix le plus haut : 244.4, prix le plus bas : 228.5.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 86.5. Détails : [45, 135, 116, 110, 140, 42, 57, 39, 105, 76].

Résultats lorsque $b = 0.03$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 25453. Détails : [11460, 12515, 13161, 12843, 19323, 18762, 16711, 11122, 14914, 14896].
- Prix moyens commodité 1 : 252.56. Détails : [255.015625, 251.234375, 251.593750, 253.984375, 252.765625, 252.718750, 252.484375, 253.640625, 252.265625, 249.890625].
Prix le plus haut : 260.7, prix le plus bas : 245.2.
- Prix moyens commodité 2 : 241.4. Détails : [239.468750, 243.718750, 241.156250, 241.984375, 240.546875, 240.984375, 238.515625, 240.578125, 241.421875, 245.812500].
Prix le plus haut : 253.6, prix le plus bas : 227.2.
- Prix moyens commodité 3 : 231.9. Détails : [231.609375, 231.625000, 233.421875, 229.937500, 232.093750, 232.062500, 234.500000, 231.390625, 231.750000, 230.781250].
Prix le plus haut : 235.3, prix le plus bas : 228.5.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 82. Détails : [93, 18, 14, 49, 64, 73, 108, 67, 150, 184].

Résultats lorsque $b = 0.02$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 55530.4. Détails : [74392, 58022, 67231, 46605, 42182, 54080, 60307, 48938, 51002, 52545].
- Prix moyens commodité 1 : 251.9. Détails : [252.953125, 251.859375, 254.109375, 250.859375, 251.984375, 250.531250, 250.625000, 253.125000, 252.781250, 250.250000].
Prix le plus haut : 257.3, prix le plus bas : 244.7.
- Prix moyens commodité 2 : 241. Détails : [240.375000, 240.250000, 237.218750, 244.328125, 242.062500, 241.406250, 239.312500, 241.593750, 241.296875, 242.265625]. Prix le plus haut : 248.1, prix le plus bas : 236.6.
- Prix moyens commodité 3 : 232.6. Détails : [231.953125, 233.156250, 234.421875, 230.265625, 231.640625, 234.296875, 235.515625, 230.625000, 231.468750, 233.000000].
Prix le plus haut : 236, prix le plus bas : 227.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 81. Détails : [25, 14, 121, 93, 188, 115, 66, 42, 96, 50].

Résultats lorsque $b = 0.01$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 193165.6. Détails : [187514, 173448, 241378, 211848, 156431, 153549, 213479, 203964, 183012, 207033].
- Prix moyens commodité 1 : 252.11. Détails : [252.531250, 253.015625, 253.046875, 251.953125, 251.000000, 251.000000, 252.562500, 252.125000, 251.468750, 252.421875].
Prix le plus haut : 255.8, prix le plus bas : 246.8.
- Prix moyens commodité 2 : 239.95. Détails : [239.562500, 239.562500, 239.453125, 239.406250, 239.515625, 242.921875, 240.015625, 240.046875, 239.343750, 239.687500].
Prix le plus haut : 243.2, prix le plus bas : 237.3.
- Prix moyens commodité 3 : 233.26. Détails : [233.140625, 232.750000, 232.828125, 234.125000, 234.921875, 231.312500, 232.718750, 233.078125, 234.671875, 233.125000].
Prix le plus haut : 234.4, prix le plus bas : 229.3.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 26.2. Détails : [0, -1, 23, 89, 59, 2, 9, 6, 75, 0].

10.4.5 Réseau $5 \times 5 \times 6$ à trois commodités et 192 joueurs

Résultats lorsque $b = 0.1$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 3127.5. Détails : [2728, 3094, 2990, 2838, 3087, 2365, 3572, 5435, 2467, 2699].
- Prix moyens commodité 1 : 134.6. Détails : [138.875000, 131.062500, 138.859375, 130.406250, 133.750000, 134.515625, 134.531250, 137.187500, 136.546875, 130.218750].
Prix le plus haut : 182.1, prix le plus bas : 80.5.
- Prix moyens commodité 2 : 161.57. Détails : [160.281250, 160.031250, 156.093750, 163.500000, 164.687500, 162.781250, 160.937500, 161.828125, 163.531250, 162.046875].
Prix le plus haut : 181.4, prix le plus bas : 131.5.
- Prix moyens commodité 3 : 206.28. Détails : [207.656250, 205.078125, 206.750000, 203.921875, 207.625000, 205.359375, 213.203125, 204.421875, 204.343750, 204.500000].
Prix le plus haut : 220.2, prix le plus bas : 196.9.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 164. Détails : [187, 154, 152, 151, 143, 183, 152, 183, 166, 169].

Résultats lorsque $b = 0.09$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 3600.2. Détails : [3031, 2241, 3997, 3181, 4700, 4164, 2342, 2891, 5561, 3894].
- Prix moyens commodité 1 : 132.93. Détails : [134.859375, 133.921875, 131.750000, 134.703125, 131.781250, 132.218750, 136.859375, 136.531250, 126.312500, 130.453125].
Prix le plus haut : 177.5, prix le plus bas : 79.8.
- Prix moyens commodité 2 : 162.5. Détails : [164.843750, 161.859375, 162.046875, 162.859375, 162.093750, 161.921875, 160.796875, 163.093750, 162.734375, 162.843750].
Prix le plus haut : 182, prix le plus bas : 131.4.
- Prix moyens commodité 3 : 205.88. Détails : [206.046875, 203.468750, 204.562500, 204.296875, 207.031250, 208.937500, 202.625000, 205.718750, 207.031250, 209.125000].
Prix le plus haut : 220.6, prix le plus bas : 193.6.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 175.5. Détails : [175, 188, 182, 182, 140, 187, 184, 155, 179, 183].

Résultats lorsque $b = 0.08$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 4532.6. Détails : [3515, 3108, 5535, 3317, 5045, 5541, 3838, 9672, 2875, 2880].
- Prix moyens commodité 1 : 134.76. Détails : [132.500000, 134.609375, 136.078125, 135.234375, 137.546875, 134.468750, 135.218750, 134.750000, 134.078125, 133.125000].
Prix le plus haut : 161.8, prix le plus bas : 74.7.
- Prix moyens commodité 2 : 160.96. Détails : [160.296875, 159.890625, 159.921875, 161.390625, 160.531250, 159.250000, 161.546875, 161.578125, 159.296875, 165.937500].
Prix le plus haut : 178.6, prix le plus bas : 135.9.
- Prix moyens commodité 3 : 203.33. Détails : [202.859375, 201.921875, 204.406250, 202.140625, 202.750000, 205.203125, 200.953125, 209.593750, 202.203125, 201.343750].
Prix le plus haut : 217.3, prix le plus bas : 192.3.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 180.4. Détails : [182, 184, 155, 172, 187, 186, 175, 187, 186, 190].

Résultats lorsque $b = 0.07$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 5350.4. Détails : [4950, 6775, 5022, 3454, 5480, 4359, 5611, 4739, 3730, 9384].
- Prix moyens commodité 1 : 135.27. Détails : [135.078125, 135.125000, 136.000000, 136.796875, 136.593750, 138.734375, 132.500000, 132.687500, 136.421875, 132.781250].
Prix le plus haut : 158, prix le plus bas : 73.4.
- Prix moyens commodité 2 : 161.1. Détails : [160.000000, 161.218750, 159.171875, 161.953125, 158.562500, 159.171875, 163.250000, 164.296875, 159.984375, 163.312500].
Prix le plus haut : 177.3, prix le plus bas : 137.3.
- Prix moyens commodité 3 : 200.27. Détails : [202.203125, 199.359375, 201.546875, 203.453125, 198.781250, 200.718750, 198.531250, 194.984375, 203.453125, 199.687500].
Prix le plus haut : 203.5, prix le plus bas : 189.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 176.7. Détails : [188, 171, 148, 188, 187, 189, 180, 160, 189, 167].

Résultats lorsque $b = 0.06$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 7255.6. Détails : [8277, 8386, 5049, 10066, 7609, 6758, 6330, 8357, 6085, 5639].
- Prix moyens commodité 1 : 136.2. Détails : [139.906250, 134.093750, 137.046875, 132.937500, 133.781250, 132.687500, 133.328125, 137.953125, 145.187500, 135.078125].
Prix le plus haut : 143.9, prix le plus bas : 84.2.
- Prix moyens commodité 2 : 160.1. Détails : [156.812500, 160.390625, 157.531250, 164.937500, 160.578125, 160.843750, 160.375000, 160.140625, 158.828125, 161.265625].
Prix le plus haut : 173.7, prix le plus bas : 133.2.
- Prix moyens commodité 3 : 199.64. Détails : [200.312500, 198.640625, 199.093750, 199.656250, 198.671875, 203.046875, 201.156250, 199.187500, 194.515625, 202.187500].
Prix le plus haut : 208.2, prix le plus bas : 186.2.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 186.2. Détails : [187, 184, 184, 184, 188, 183, 186, 189, 189, 188].

Résultats lorsque $b = 0.05$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 10142.4. Détails : [6574, 9156, 7302, 10221, 14517, 11996, 14176, 6984, 6714, 13784].
- Prix moyens commodité 1 : 136.2. Détails : [139.906250, 134.093750, 137.046875, 132.937500, 133.781250, 132.687500, 133.328125, 137.953125, 145.187500, 135.078125].
Prix le plus haut : 143.9, prix le plus bas : 84.2.
- Prix moyens commodité 2 : 160.1. Détails : [156.812500, 160.390625, 157.531250, 164.937500, 160.578125, 160.843750, 160.375000, 160.140625, 158.828125, 161.265625].
Prix le plus haut : 173.7, prix le plus bas : 133.2.
- Prix moyens commodité 3 : 199.64. Détails : [200.312500, 198.640625, 199.093750, 199.656250, 198.671875, 203.046875, 201.156250, 199.187500, 194.515625, 202.187500].
Prix le plus haut : 208.2, prix le plus bas : 186.2.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 186.2. Détails : [187, 184, 184, 184, 188, 183, 186, 189, 189, 188].

Résultats lorsque $b = 0.04$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 15689.1. Détails : [22645, 14095, 17615, 10521, 16921, 12513, 13987, 14455, 20419, 13720].
- Prix moyens commodité 1 : 136.53. Détails : [137.000000, 140.796875, 135.375000, 137.687500, 138.937500, 137.843750, 135.531250, 135.375000, 134.265625, 132.562500].
Prix le plus haut : 142.9, prix le plus bas : 74.3.
- Prix moyens commodité 2 : 161.48. Détails : [161.375000, 162.093750, 163.578125, 159.500000, 160.968750, 160.531250, 159.000000, 160.359375, 162.421875, 165.000000].
Prix le plus haut : 169.3, prix le plus bas : 138.
- Prix moyens commodité 3 : 195.68. Détails : [194.562500, 191.921875, 192.953125, 195.140625, 196.328125, 194.890625, 195.828125, 199.031250, 199.421875, 196.796875].
Prix le plus haut : 198.5, prix le plus bas : 181.3.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 186.8. Détails : [186, 186, 185, 185, 188, 188, 186, 188, 188, 188].

Résultats lorsque $b = 0.03$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 24 591.5. Détails : [27379, 26215, 36417, 22930, 20394, 30197, 21175, 20590, 17675, 22943].
- Prix moyens commodité 1 : 136.26. Détails : [135.203125, 138.421875, 137.093750, 131.656250, 139.953125, 136.812500, 135.828125, 133.906250, 138.546875, 135.218750].
Prix le plus haut : 144.4, prix le plus bas : 77.9.
- Prix moyens commodité 2 : 161.05. Détails : [162.171875, 160.937500, 159.234375, 162.109375, 160.406250, 160.921875, 161.875000, 160.625000, 162.078125, 160.156250].
Prix le plus haut : 167, prix le plus bas : 144.8.
- Prix moyens commodité 3 : 193.11. Détails : [190.718750, 191.812500, 192.187500, 194.640625, 193.625000, 194.375000, 193.234375, 197.109375, 191.171875, 192.281250].
Prix le plus haut : 196.4, prix le plus bas : 179.8.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 182.3. Détails : [184, 184, 157, 185, 186, 186, 186, 186, 186, 183].

Résultats lorsque $b = 0.02$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 48 919.8. Détails : [43946, 42004, 73689, 57927, 42381, 43865, 49516, 43647, 52549, 39674].
- Prix moyens commodité 1 : 136. Détails : [139.218750, 133.765625, 139.718750, 132.640625, 137.687500, 140.625000, 135.828125, 132.578125, 134.500000, 133.796875]. Prix le plus haut : 145.5, prix le plus bas : 86.1.
- Prix moyens commodité 2 : 160. Détails : [159.109375, 159.375000, 161.296875, 160.640625, 160.328125, 159.234375, 158.203125, 161.546875, 159.656250, 160.515625]. Prix le plus haut : 163.3, prix le plus bas : 145.
- Prix moyens commodité 3 : 191.57. Détails : [192.062500, 192.171875, 190.781250, 192.375000, 190.515625, 190.406250, 193.156250, 192.703125, 190.593750, 190.968750]. Prix le plus haut : 193.8, prix le plus bas : 180.5.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 182.2. Détails : [183, 181, 185, 181, 182, 183, 182, 183, 181, 181].

Résultats lorsque $b = 0.01$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 164 071.6. Détails : [197036, 154607, 204576, 183487, 179578, 149987, 165274, 119422, 130657, 156092].
- Prix moyens commodité 1 : 136.32. Détails : [137.671875, 135.578125, 134.375000, 135.625000, 139.671875, 136.296875, 136.359375, 136.359375, 134.390625, 136.921875]. Prix le plus haut : 145.1, prix le plus bas : 93.2.
- Prix moyens commodité 2 : 158.8. Détails : [158.984375, 160.062500, 158.718750, 157.546875, 158.531250, 158.312500, 158.421875, 157.593750, 160.703125, 159.156250]. Prix le plus haut : 161.7, prix le plus bas : 151.1.
- Prix moyens commodité 3 : 189.69. Détails : [191.609375, 189.015625, 190.328125, 189.421875, 189.484375, 189.671875, 189.078125, 190.218750, 189.812500, 188.250000]. Prix le plus haut : 191.7, prix le plus bas : 185.8.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 134.2. Détails : [182, 120, 158, 68, 97, 159, 79, 178, 180, 121].

Résultats lorsque $b = 0.005$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 192.
- Nombre moyen de parties : 573 437. Détails : [637624, 436623, 636164, 580805, 575971, 1098780, 559085, 455378, 590070, 594633].
- Prix moyens commodité 1 : 135.3. Détails : [134.609375, 134.609375, 133.875000, 133.875000, 137.109375, 138.953125, 135.625000, 134.609375, 133.312500, 136.921875].
Prix le plus haut : 141.5, prix le plus bas : 104.6.
- Prix moyens commodité 2 : 158.77. Détails : [158.375000, 158.375000, 158.265625, 158.593750, 160.437500, 160.078125, 158.500000, 158.343750, 158.406250, 158.375000].
Prix le plus haut : 160.2, prix le plus bas : 154.
- Prix moyens commodité 3 : 188.64. Détails : [188.625000, 188.625000, 188.921875, 188.531250, 188.625000, 188.718750, 188.406250, 188.625000, 189.093750, 188.625000].
Prix le plus haut : 189.9, prix le plus bas : 186.2.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 91.6. Détails : [57, 57, 116, 116, 112, 61, 58, 57, 0, 76].

Résultats lorsque $b = 0.002$

- Nombre moyen de joueurs en multistratégie pure : 191.799994.
- Nombre moyen de parties : 2 141 314. Détails : [1862001, 2388508, 2137394, 1657206, 2085075, 2021469, 2179126, 2242015, 2800932, 2039421].
- Prix moyens commodité 1 : 134.792. Détails : [134.609375, 134.609375, 134.609375, 133.500000, 133.390625, 135.609375, 136.921875, 135.625000, 135.625000, 133.421875].
Prix le plus haut : 139.7, prix le plus bas : 109.3.
- Prix moyens commodité 2 : 158.271. Détails : [157.781250, 158.343750, 158.484375, 157.781250, 159.078125, 158.375000, 157.812500, 158.343750, 158.343750, 158.375000].
Prix le plus haut : 159.8, prix le plus bas : 155.2.
- Prix moyens commodité 3 : 188.8. Détails : [189.125000, 188.625000, 188.421875, 189.031250, 189.921875, 188.718750, 189.125000, 188.625000, 188.625000, 188.625000].
Prix le plus haut : 190.4, prix le plus bas : 186.9.
- Nombre moyen de joueurs qui peuvent faire mieux : 28.8. Détails : [0, 77, 40, 0, 118, -1, 55, -1, 0, 0].

Bibliographie

- [1] E. Altman, Y. Hayel, and H. Kameda. Evolutionary Dynamics and Potential Games in Non-Cooperative Routing. In *Wireless Networks : Communication, Cooperation and Competition (WNC3 2007)*, 2007.
- [2] Eitan Altman, Tamer Başar, Tania Jiménez, and Nahum Shimkin. Routing into two parallel links : game-theoretic distributed algorithms. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 61(9) :1367–1381, 2001.
- [3] R. Amir and J.Y. Jin. Cournot and bertrand equilibria compared : Substitutability, complementarity and concavity. *International Journal of Industrial Organization*, 19 :303–317, 2001.
- [4] Elie Azoulay and Jean Avignat. *Mathématiques DEUG A, cours et exercices résolus*. Mcgraw-Hill, 1990.
- [5] Hari Balakrishnan and Nick Feamster. Lecture on interdomain internet routing. 2001-2005.
- [6] Dominique Barth, Olivier Bournez, Octave Boussaton, and Johanne Cohen. Distributed learning of wardrop equilibria. In Springer-Verlag, editor, *7th International Conference on Unconventional Computation*, volume 5204 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 19–32, 2008.
- [7] Dominique Barth, Olivier Bournez, Octave Boussaton, and Johanne Cohen. A dynamic approach to load balancing. *Gamecomm 2009*, 2009.
- [8] M. Beckmann, C. B. McGuire, and C. B. Winsten. *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, 1956.
- [9] Petra Berenbrink, Tom Friedetzky, Leslie Ann Goldberg, Paul Goldberg, Zengjian Hu, and Russell Martin. Distributed Selfish Load Balancing. In *SODA '06 : Proceedings of*

- the seventeenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithm*, pages 354–363, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [10] Ken Binmore. *Jeux et théorie des jeux*. DeBoeck, Paris-Bruxelles, 1999.
- [11] D. Braess. Über ein paradoxon aus der verkehrsplanung. *Unternehmensforschung*, 12 :258–268, 1968.
- [12] G.W. Brown. Iterative solutions of games by fictitious play. *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951.
- [13] R.R. Bush and F. Mosteller. *Stochastic models for learning*. John Wiley and Sons, New York, 1955.
- [14] Steve Chien and Alistair Sinclair. Convergence to approximate nash equilibria in congestion games. In *SODA*, pages 169–178, 2007.
- [15] Richard Cole, Yevgeniy Dodis, and Tim Roughgarden. How much can taxes help selfish routing? In *Proceedings of the 4th ACM Conference on Electronic Commerce (EC-03)*, pages 98–107, New York, June 9–12 2003. ACM Press.
- [16] R. Cominetti, J.R. Correa, and N.E. Stier-Moses. Network Games with Atomic Players. *Automata, Languages and Programming : Proceedings of the 33rd International Colloquium, Venice, Italy*, 4051 :525–536, 2006.
- [17] A. Nagurney D. Braess and T. Wakolbinger. On a paradox of traffic planning. *Transportation Science*, 39 :446–450, 2005.
- [18] S. C. Dafermos and A. Nagurney. Stability and sensitivity analysis for the general network equilibrium-travel choice model. *Proceedings of the 9th International symposium on transportation and traffic theory*, pages 217–234, 1984.
- [19] S. C. Dafermos and F. T. Sparrow. The traffic assignment problem for a general network. *Mathematical sciences*, 73b(2), 1969.
- [20] K.G. Dastidar. Comparing cournot and bertrand in homogenous product market. *Journal of Economic Theory*, pages 205–212, 1997.
- [21] A. Downs. *An economic theory of democracy*. Harper, 1957.
- [22] E. Even-Dar, A. Kesselman, and Y. Mansour. Convergence Time to Nash Equilibria. *30th International Conference on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, pages 502–513, 2003.

- [23] Eyal Even-Dar and Yishay Mansour. Fast Convergence of Selfish Rerouting. In *SODA '05 : Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 772–781, Philadelphia, PA, USA, 2005. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [24] S. Fischer, H. Räcke, and B. Vöcking. Fast Convergence to Wardrop Equilibria by Adaptive Sampling Methods. *Proceedings of the thirty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 653–662, 2006.
- [25] S. Fischer and B. Vöcking. On the Evolution of Selfish Routing. *Algorithms-ESA 2004 : 12th Annual European Symposium, Bergen, Norway, September 14-17, 2004, Proceedings*, 2004.
- [26] S. Fischer and B. Vöcking. Adaptive Routing with Stale Information. *Proceedings of the twenty-fourth annual ACM SIGACT-SIGOPS symposium on Principles of distributed computing*, pages 276–283, 2005.
- [27] L. Fleischer. Linear Tolls Suffice : New Bounds and Algorithms For Tolls in Single Source Networks. *Theoretical Computer Science*, 348(2-3) :217–225, 2005.
- [28] D. Fotakis, S. Koutogiannis, E. Koutsoupias, M. Mavronicolas, and P. Spirakis. The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game. *Automata, Languages and Programming : 29th International Colloquium - ICALP*, 2002.
- [29] Drew. Fudenberg and Jean Tirole. *Game Theory*. MIT Press, 1991.
- [30] David Gauthier. *Morals by agreement*. Oxford university press, 1986.
- [31] Paul W. Goldberg. Bounds for the Convergence Rate of Randomized Local Search in a Multiplayer Load-Balancing Game. In *PODC '04 : Proceedings of the twenty-third annual ACM symposium on Principles of distributed computing*, pages 131–140, New York, NY, USA, 2004. ACM.
- [32] Piyush Gupta and P. R. Kumar. A system and traffic dependent adaptive routing algorithm for ad hoc networks. *Proceedings of the 36th Conference on decision and control*, 1997.
- [33] A. Haurie and P. Marcotte. On the relationship between nash - cournot and wardrop equilibria. *Networks*, 15 :295–308, 1985.
- [34] Elad Hazan and Robert Krauthgamer. How hard is it to approximate the best nash equilibrium? *Proceedings of the Nineteenth Annual ACM -SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2009.

- [35] J. Hofbauer and K. Sigmund. Evolutionary Game Dynamics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4 :479–519, 2003.
- [36] H. Orzen J. Morgan and M. Sefton. Network architecture and traffic flows : Experiments on the pigou-knight-downs and braess paradoxes. *Games and economic behavior*, 2007.
- [37] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. Macmillan, 1992.
- [38] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou. Worst-case Equilibria. In *STACS99*, pages 404–413, Trier, Germany, 4–6March 1999.
- [39] M.A.L. Thathachar K.S. Narendra. Learning Automata : An Introduction. *Englewood Cliffs : Prentice Hall*, 1989.
- [40] H. J. Kushner. *Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory*. Cambridge, MA : MIT Press, 1984.
- [41] L. Lambertini. Prisoners’ dilemma in duopoly (super)games. *Journal of Economic Theory*, 77 :181–191, 1997.
- [42] Joseph Y-T. Leung, editor. *Handbook of scheduling*. CRC Press, 2004.
- [43] L. Libman and A. Orda. Atomic Resource Sharing in Noncooperative Networks. *Telecommunication Systems*, 17(4) :385–409, 2001.
- [44] J. L. Mackie. *Ethics : Inventing Right and Wrong*. Penguin, 1977.
- [45] Edward F. McClennen. *Rationality and Dynamic Choice : Foundational Explorations*. Cambridge University Press, 1990.
- [46] Igal Milchtaich. Congestion games with player-specific payoff functions. *Games and Economic Behavior*, 13, 1996.
- [47] D. Monderer and L. S. Shapley. Potential games. *Games and Economics Behavior*, 14 :124–143, 1996.
- [48] J. Nachbar. Evolutionary selection dynamics in games : Convergence and limit properties. *International Journal of Game Theory*, 19 :59–89, 1990.
- [49] John F. Nash. Equilibrium Points in n -person Games. *Proc. of the National Academy of Sciences*, 36 :48–49, 1950.
- [50] John Von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of games and Economic Behavior*. Princeton university press, 1944.
- [51] A. Orda, R. Rom, and N. Shimkin. Competitive Routing in Multi-user Communication Networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, 1(5) :510–521, 1993.

- [52] C. H. Papadimitriou. Algorithms, games and the internet. In *Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of computing*, pages 749–753. ACM Press, 2001.
- [53] V. Pareto. *Manual of political economy*. Augustus M. Kelley Publishers (June 1971), 1906.
- [54] Joseph Persky. Retrospectives : The ethology of homo economicus. *The journal of economic perspectives*, 9 :221–231, 1995.
- [55] Arthur Cecil Pigou. The classical stationary state. *Economic journal*, pages 343–351, 1943.
- [56] M.A.L. Thathachar P.S. Sastry, V.V. Phansalkar. Decentralized Learning of Nash Equilibria in Multi-Person Stochastic Games With Incomplete Information. *IEEE transactions on system, man, and cybernetics*, 24(5), 1994.
- [57] Z. Li R. Murray and S. Shankar Sastry. *A mathematical introduction to ROBOTIC MANIPULATION*. CRC Press, 1994.
- [58] A. Rapoport and A.M. Chammah. *Prisoner's dilemma*. University of Michigan press, 1965.
- [59] Jennifer Rexford and Matthew Caesar. BGP routing policies in ISP networks. *IEEE, communication networks/ systems*, 19 :5–11, 2005.
- [60] Julia Robinson. An iterative method of solving a game. *Annals of mathematics*, 54 :296–301, 1951.
- [61] Robert W. Rosenthal. A class of games possessing pure-strategy nash equilibria. *International journal of Game Theory 2*, pages 65–67, 1973.
- [62] T. Roughgarden. How unfair is optimal routing? *Proceedings of the thirteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 203–204, 2002.
- [63] T. Roughgarden. The price of anarchy is independent of the network topology. *JCSS'03*, 2002.
- [64] Tim Roughgarden. *Selfish routing and the price of anarchy*. The MIT press, 2005.
- [65] Tim Roughgarden and Eva Tardos. How bad is selfish routing? *Journal of the ACM*, 49(2) :236–259, 2002.
- [66] L. Olbrich S. Fischer and B. Vöcking. Approximating wardrop equilibria with finitely many agents. *DISC07*, 2007.

- [67] Karl Sims. Evolving 3D morphology and behavior by competition. *Artificial life 4 - proceedings*, pages 28–39, 1994.
- [68] Karl Sims. Evolving virtual creatures. *SigGraph '94*, pages 15–22, 1994.
- [69] J. Maynard Smith. *Animal Signals*. Oxford University Press, 2003.
- [70] John Maynard Smith. *Evolution and the theory of games*. Cambridge University Press, 1982.
- [71] Cisco Systems. *Internetworking case studies*, chapter *Using the border gateway protocol for Interdomain routing*. Cisco Systems, 1992-2009.
- [72] Stanford University. <http://plato.stanford.edu>.
- [73] E. Tardos V. V. Vazirani, T. Roughgarden and N. Nisan, editors. *Algorithmic game theory*. Cambridge university press, 2007.
- [74] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. Prentice-Hall - second edition, 1993.
- [75] B. Vöcking. Congestion games : optimization in competition. *Algorithms and Complexity, second ACiD workshop*, 2006.
- [76] J. Wardrop. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part II*, 1(36) :352–362, 1952.
- [77] Jörgen W. Weibull. *Evolutionary Game Theory*. The MIT Press, 1995.
- [78] Jonathan Zittrain. *The future of the Internet - and how to stop it*. Yale University Press, 2008.