



**HAL**  
open science

# IMAGERIE ACOUSTIQUE EN MILIEUX RÉVERBÉRANTS

Thomas Gallot

► **To cite this version:**

Thomas Gallot. IMAGERIE ACOUSTIQUE EN MILIEUX RÉVERBÉRANTS. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Grenoble, 2010. Français. NNT: . tel-00606012

**HAL Id: tel-00606012**

**<https://theses.hal.science/tel-00606012>**

Submitted on 5 Jul 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# IMAGERIE ACOUSTIQUE EN MILIEUX RÉVERBÉRANTS

---

THESE

Pour obtenir le Grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Specialité Physique Appliquée

Présentée et soutenue publiquement par

**Thomas Gallot**

le 26 novembre 2010

---

Dirigée par Stefan Catheline et Philippe Roux

## Jury

Mathias Fink	Pr. Univ. Diderot, Paris	Dir. du Jury
Mickaël Tanter	DR. INSERM, Paris	Rapporteur
Julien De Rosny	CR. CNRS, Paris	Rapporteur
Frederic Patat	Pr. Univ. Rabelais, Tours	Examineur
Michel Campillo	Pr. UJF, Grenoble	Examineur
Carlos Negreira	Pr. Univ. Republica, Uruguay	Examineur
Stefan Catheline	MdC. UJF, Grenoble	Examineur
Philippe Roux	DR. CNRS, Grenoble	Examineur

Thèse préparée au sein du Laboratoire LGIT-ISTerre  
dans l'Ecole Doctorale de Physique de Grenoble



## Résumé

Le travail de recherche mené lors de cette thèse propose d'améliorer la compréhension et l'utilisation de champs d'ondes complexes issus de la propagation en milieux réverbérants. Dans de tels milieux, la réverbération donne lieu à une répartition spatiale de l'intensité liée à la position de la source. Ce phénomène, appelé rétro-diffusion cohérente, est étudié dans des cavités simples afin de disposer de modèles analytiques permettant de prédire les résultats expérimentaux de surintensité à la source. Les symétries spatiales jouent aussi un rôle dans la répartition de l'intensité, rôle qui est étudié selon la même approche. La réverbération, aussi complexe soit-elle, contient des informations qui peuvent permettre d'imager le milieu de propagation. Ce principe est utilisé pour l'élastographie, l'imagerie de l'élasticité des tissus mous. La problématique et les méthodes d'élastographie sont alors présentées puis appliquées à la détermination de délais électromécaniques dans des muscles squelettiques. Les méthodes d'extraction de l'information contenue dans un champ complexe d'ondes élastiques sont ensuite développées. Basée sur le retournement temporel et la corrélation de bruit, une élastographie passive tirant profit du bruit physiologique est proposée. La faisabilité de cette méthode est démontrée à travers des mesures d'élasticité dans des gels et les premiers résultats *in-vivo* sont présentés. Finalement, une optimisation des méthodes d'imagerie passive est développée à partir de données sismiques. Le principe de ce filtre inverse passif consiste à mieux prendre en compte une répartition spatiale généralement inhomogène des sources de bruit.

### **Acoustical imaging in reverberating medias**

The aim of the research performed during this PhD. is to improve the understanding and the use of complex wave fields created by the propagation in reverberating medias. Reverberation in those medias yield to a particular spatial repartition of the intensity that depends on the source position. This phenomenon, the coherent backscattering, is studied in simple cavities in order to compare theoretical predictions and experimental results of the intensity enhancement. Spatial symmetries also play a role in the intensity repartition and the same approach is used to understand it. The reverberated wave field also contains information that can be used to image the medium of propagation. This basic principle is used to measure soft tissues elasticity. Problematic and methods of elastography are presented and then applied to measure electro-mechanical delays in skeletal muscles. Extraction methods of the information contained in elastic fields in soft solids is then developed. Based on time reversal and noise correlations, a passive elastography using physiological noise is proposed. The feasibility is demonstrated in mimicking phantoms and first *in-vivo* results are presented. Finally, an optimization of passive imaging methods is developed from a seismic data set. This passive inverse filter takes into account the generally inhomogeneous spatial repartition of noise sources.



## Remerciements

Après ce dur labeur de rédaction, je prends la plume une dernière fois pour rédiger ce petit condensé de reconnaissance où chacun pourra s’y trouver, avant de lire le reste du manuscrit cela va sans dire. J’aimerais tout d’abord remercier les membres du jury pour avoir accepté leur tâche, et tout particulièrement Mickaël Tanter et Julien De Rosny qui ont rapporté cette thèse. Certains membres ont joué des rôles particuliers puisqu’ils m’ont encadré durant ce doctorat. Ainsi, tout en haut du podium de ma reconnaissance se trouve Mister Catheline, Stefan de son prénom : bientôt regretté directeur de thèse, mais mentor et ami pour longtemps j’espère. Je dois aussi beaucoup à Philippe Roux qui nous a ouvert les portes du LGIT et son laboratoire d’acoustique avec tout le matériel qu’il contient. Ses conseils stratégico-scientifiques m’ont été d’une aide précieuse, notamment lors de cette fin de thèse. J’ai aussi une reconnaissance particulière envers Michel Campillo et tous les membres de l’équipe onde et structures pour leur accueil et leur soutien ainsi que pour le dynamisme scientifique qui règne au sein de l’équipe. C’est d’ailleurs le cas pour le feu-LGIT où j’ai sincèrement apprécié les divers échanges, la richesse des thématiques et la pluridisciplinarité dans laquelle l’acoustique a trouvé sa place. Je salue donc toutes les personnes avec qui j’ai eu l’occasion d’interagir scientifiquement, ou pas, tout particulièrement les personnes qui font un super travail à l’administration. Je remercie aussi ceux qui ont partagé bureaux et salles de manip pour tous les petits coups de pouces, les discussions jamais inutiles et les regards motivants. Durant ma thèse, j’ai eu l’occasion d’aller travailler dans d’autres laboratoires comme au STAPS de Nantes où Antoine Nordez et François Hug m’ont laissé jouer avec leur tout neuf Super échographe. D’autre part, je remercie très amicalement Carlos Negreira ainsi que toute l’équipe du LAU pour leur accueil lors de mon séjour à Montevideo. Les nombreux workshops, école d’été, conférences, séminaires et autres réunions de travaux ont été autant d’occasions d’apprendre et de partager. Ce remerciement s’adresse à tous ceux que j’ai croisés, il s’agit d’un grand nombre de personnes parmi lesquelles j’aimerais nommer Roger Ménard et Vincent Rosseto qui m’ont fourni quelques précieuses pistes de réflexions. J’aimerais aussi faire un petit retour aux origines en saluant mes anciens professeurs du LAUM/ENSIM au Mans, qui les premiers m’ont donné goût à

l'acoustique et surtout, l'envie de faire de la recherche.

La qualité de la forme de ce manuscrit doit beaucoup à mon équipe de correcteurs officiels engagée au pied levé lors des derniers jours de "charrette". Ainsi, je tire mon chapeau à Matthieu Perrault, Geoffrey de Bigault, Pierre-Antoine, Elodie, Cécile, Abitbol et Sigret. Je dois aussi rendre hommage à mon équipe de cobayes dont les muscles et autres tissus mous ont alimenté les résultats rapportés dans ce manuscrit. En dehors de Jeremy Moche qui a fait suffisamment de séries de pompes pour mériter que je le mentionne ici, j'invite les autres à feuilleter la thèse pour s'y voir nommé (un indice : c'est en bas de page).

Une thèse c'est aussi trois années de vie en dehors des murs du labo avec tous les moments mémorables qui s'en suivent, notamment avec la clique des étudiants. A ce jeu là, il existe un groupuscule tout particulièrement efficace et incontournable. Il paraîtrait qu'ils sont Ultra Cool, mais le GMUC ne se limite pas à ça et d'ailleurs pas à grand chose. Si elle n'est pas bien précise, cette définition a le mérite d'être fidèle. Pour la compléter, je laisse la parole à Nonos et Grisou : "J'étais là tranquille, peinard à mater un film de refocalisation d'ondes et là d'un coup, [...] je me suis cru au paradis! C'est beau ce que tu fais, quasi-poétique! — OK, mais ça vaut pas un bon kebab". Shlang!

Finalement, j'embrasse Tom, Jo, Bertrand et Victor pour n'avoir aucune idée de ce qui se trouve dans cette thèse, tout comme Pierrot même s'il sait de quoi il en retourne. A mes parents et mes petites soeurs, je profite de ce prétexte pour leur dire que je les aime fort.

*There is a crack in everything*

*That's how the light gets in.*

*Leonard Cohen*

à Lucía





## Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>I Rétrodiffusion Cohérente dans les Cavités Réverbérantes</b>	<b>7</b>
<b>Chapitre 1 : Surintensité par rétrodiffusion cohérente dans les cavités parallélépipédiques</b>	<b>9</b>
1.1 Présentation du phénomène de rétrodiffusion cohérente . . . . .	10
1.2 The coherent backscattering effect interpreted through modal decomposition in regular cavities . . . . .	12
1.3 The CBE interpreted through ray theory in regular cavities . . . . .	18
<b>Chapitre 2 : Effets de symétrie sur les propriétés spatiales de la rétrodiffusion cohérente</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	28
2.2 The CBE in a 1-D cavity . . . . .	29
2.3 The CBE in 2-D and 3-D cavities . . . . .	36
2.4 The CBE in anti-symmetric cavities . . . . .	43
2.5 Conclusion . . . . .	51
<b>II Élastographie : une modalité d'imagerie ultrasonore et son application à l'étude de la contraction musculaire</b>	<b>53</b>
<b>Chapitre 3 : Élastographie : état de l'art</b>	<b>55</b>
3.1 Quantifier la palpation . . . . .	56

3.2	Détecter l'onde de cisaillement grâce à l'onde de compression : L'interférométrie des tavelures ultrasonores. . . . .	63
3.3	Panorama des méthodes de mesure d'élasticité des tissus . . . . .	67
3.4	Vers l'élastographie passive? . . . . .	75
<b>Chapitre 4 : Application physiologique : mesure du délai élec- tromécanique</b>		<b>77</b>
4.1	Problématique du délai électromécanique . . . . .	78
4.2	La contraction musculaire . . . . .	79
4.3	Mesure du délai électromécanique . . . . .	81
4.4	Étude complémentaire : contraction du biceps. . . . .	86
<b>III Élastographie passive : utilisation du bruit phy- siologique pour une tomographie d'ondes de cisaille- ment dans les tissus mous</b>		<b>89</b>
<b>Chapitre 5 : Retournement temporel et corrélations de bruit dans les solides mous</b>		<b>91</b>
5.1	Retournement temporel et corrélation de bruit : schémas de principe. . . . .	92
5.2	Relation entre retournement temporel et corrélation de bruit à travers la formulation intégrale du propagateur . . . . .	99
5.3	Refocalisation d'onde de cisaillement dans les solides mous : du retournement temporel à la corrélation de bruit . . . . .	105
5.4	Calcul de la refocalisation <i>in-vivo</i> d'ondes de cisaillement par corrélation de bruit physiologique . . . . .	113
<b>Chapitre 6 : De la sismologie à l'élastographie passive : étude de faisabilité et premiers résultats <i>in-vivo</i></b>		<b>117</b>
6.1	Tomographie de vitesse de groupe . . . . .	118
6.2	Tomographie de longueur d'onde . . . . .	123
6.3	Tomographie de longueur d'onde sans imagerie ultra-rapide . . . . .	130
6.4	Élastographie passive <i>in-vivo</i> . . . . .	134
6.5	Perspectives pour l'élastographie passive . . . . .	138

<b>Chapitre 7 : De l'élastographie à la sismologie : le Filtre inverse passif</b>	<b>141</b>
7.1 Filtre inverse : une optimisation spatio-temporelle de la refo- calisation . . . . .	143
7.2 Comparaison du retournement temporel et du filtre inverse sur des données sismiques . . . . .	146
7.3 Vers la configuration passive : construction des données désyn- chronisées . . . . .	154
7.4 Filtre inverse passif : mise en place de la matrice de propaga- tion $\hat{\mathbf{H}}$ . . . . .	156
7.5 Résultats préliminaires du filtre inverse passif à l'élastographie	157
7.6 Conclusion . . . . .	161
 <b>IV Annexes</b>	 <b>167</b>
<b>Références</b>	<b>184</b>



## Introduction

Lorsqu'une onde mécanique traverse un matériau ou rencontre un obstacle, sa propagation s'en trouve modifiée et l'onde garde la mémoire de cette perturbation. Le travail d'imagerie consiste à analyser de tels signaux enregistrés après la perturbation afin d'en déduire sa position et sa nature. Il faut pour cela se placer dans des conditions où il est possible d'assigner à la perturbation du signal un changement du milieu. Dans cet exercice, les propriétés de réciprocité spatiale et d'invariance par retournement temporel sont des alliés précieux qui permettent de jeter des ponts entre le temps et l'espace puisque pour une onde, un temps de propagation est aussi une distance.

Classiquement, pour imager un milieu, une onde est envoyée avec une fonction source connue et le travail d'inversion consiste à déduire du signal reçu les propriétés du milieu. C'est ainsi que fonctionne, par exemple, l'imagerie échographique où l'enveloppe du signal rétrodiffusé renseigne sur la réflectivité du milieu. Tous les systèmes d'imagerie en général utilisent certaines informations contenues dans les champs d'onde : phase, amplitude, fréquence, vitesse, longueur d'onde, cohérence temporelle ou spatiale, etc... Les applications sont nombreuses dans le domaine médical mais aussi à toutes les échelles : des nano-technologies aux images du fond cosmologique en passant par l'imagerie de la Terre.

Plus particulièrement, les techniques d'imagerie développées dans ce manuscrit s'appuient sur quelques idées maîtresses. En premier lieu, le concept d'imagerie multi-ondes permet de profiter des avantages liés à la présence de deux types d'ondes dans le milieu de propagation pour un seul système d'imagerie. Dans le cas de l'élastographie, les ondes lentes sont imagées par les ondes rapides, la résolution des ultrasons et la sensibilité des ondes de cisaillement étant alors combinées dans l'image finale. Une deuxième idée consiste à utiliser le bruit ambiant présent dans un milieu afin de s'affranchir de la nécessité de sources contrôlées. Ce thème connaît un essor important

dans le domaine de la sismologie où les sources sont particulièrement délicates à mettre en oeuvre. Un des défis de cette thèse a été de développer ce type de méthode dans le corps humain. Une troisième piste consiste à tirer profit de la complexité d'un milieu afin de le caractériser. Nous verrons notamment que les propriétés de réciprocité et de symétries spatiales survivent à la complexité du champ d'onde.

Le fil conducteur de cette thèse est par conséquent l'imagerie ; imagerie au sens large de la compréhension et de l'interprétation des interactions entre une onde et un milieu complexe. Cette complexité sera souvent apportée par la réverbération mais elle est rarement dissociable de la diffusion multiple.

La première partie de ce travail présente une étude sur l'intensité du champ réverbéré dans des cavités. Le phénomène de rétrodiffusion cohérente est une conséquence de la réciprocité spatiale qui confère à l'intensité moyenne une distribution spatiale liée à la position de la source. La deuxième partie est constituée d'une introduction à l'élastographie, la mesure de l'élasticité des tissus mous, qui présente la problématique de l'imagerie des ondes de cisaillement. Une application des méthodes d'élastographie est aussi décrite. Puis dans une troisième partie une nouvelle modalité d'élastographie sera développée en s'inspirant de méthodes passives empruntées à la sismologie. Les chapitres constituant ces trois parties sont décrits plus en détail dans la liste ci-dessous.

- I. Chapitre 1 : Le phénomène de rétrodiffusion cohérente explique la distribution spatiale de l'intensité moyenne d'un champ acoustique réverbéré. L'intensité est plus importante à l'emplacement de la source que dans le reste de l'espace. La position adoptée dans cette étude consiste à se placer dans des cas simples où l'intensité acoustique peut être décrite de manière analytique. Ainsi, la surintensité à la source  $S$  dans des cavités simples (barre 1D, plaque rectangulaire 2D et parallélépipède rectangle 3D) peut être prédite en fonction de la dimensionalité du milieu  $d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) suivant la loi  $R = \left(\frac{3}{2}\right)^d$ . Cette formule est établie à travers une description modale de ces cavités, puis confirmée par un modèle basé sur la théorie des rayons. Ce dernier fournit des interprétations nouvelles en terme d'interférences à la source.
- I. Chapitre 2 : Toujours à propos de rétrodiffusion cohérente, l'étude

ne porte plus seulement sur la valeur d'intensité au point source mais elle est étendue à tout l'espace. Dans le cas des cavités simples envisagées dans le chapitre précédent, les symétries spatiales jouent un rôle important dans la distribution de l'intensité. D'autres cavités sont étudiées comme la membrane circulaire ainsi qu'une cavité chaotique présentant un axe de symétrie. Pour toutes ces cavités, une surintensité est présente sur les points de symétrie de la source, avec la même valeur qu'au point source. De plus, les surintensités n'apparaissent pas uniquement en ces points mais aussi en des lignes et plans traversant la source et son (ses) symétrique(s). Ces observations ont lieu lorsque les conditions aux limites sont les mêmes aux bords de la cavité. Si des conditions mixtes interviennent, les cavités peuvent présenter un comportement anti-symétrique. Dans des cavités parallélépipédiques de ce type, la surintensité au point anti-symétrique  $\overline{S^*}$  de la source est décrite suivant la loi  $\overline{R} = \left(\frac{1}{2}\right)^d$ .

- II. Chapitre 3 : Ce chapitre introductif à l'élastographie présente la problématique de la mesure de l'élasticité des tissus biologiques. Le besoin d'une mesure quantitative de cette élasticité conduit à étudier les ondes de cisaillement dans les solides. Ainsi, les bases théoriques de la propagation d'onde dans les solides sont présentées, notamment à travers les propriétés de la fonction de Green. Ensuite, l'interférométrie des tavelures ultrasonores (ou speckle) fournit un outil essentiel pour étudier les ondes à l'intérieur des solides. Avant d'introduire succinctement la perspective d'une nouvelle méthode proposée dans ce manuscrit, un historique des méthodes élastographiques est présenté.
- II. Chapitre 4 : Un exemple d'application des méthodes développées en élastographie a pour objet la caractérisation du phénomène de contraction musculaire. Les aspects de physiologie et de biomécanique sont étudiés à travers le délai électromécanique de muscles squelettiques. Si les phénomènes de contractions sont bien compris d'un point de vue qualitatif, il reste difficile de chiffrer les durées de chaque processus depuis l'arrivée d'un potentiel d'action commandant la contraction jusqu'à la production finale de force. L'imagerie ultrasonore ultra-rapide ainsi que l'interférométrie du speckle ultrasonore permet de disposer d'un pas



d'échantillonnage adéquat ( $\sim 0.25$  ms) comparé à l'ordre de grandeur des délais mis en jeu ( $\sim 10$  ms). Le principal résultat de cette étude consiste à différencier la composante active (excitation-contraction du muscle) de la composante passive (étirement du tendon) dans le délai électromécanique.

- III. Chapitre 5 : Ce chapitre s'attache à présenter le retournement temporel et la corrélation de bruit comme des méthodes qui se différencient plus dans la sémantique et les applications qu'on leur prête, que dans la physique qu'elles recouvrent. La posture adoptée consiste à considérer indifféremment le retournement temporel et la corrélation de bruit comme des techniques de refocalisation. Après une introduction au moyen de schémas épurés, une analyse théorique basée sur une écriture particulière de la formulation intégrale permettra de mettre en parallèle ces deux méthodes. C'est ensuite à travers des expériences de refocalisation d'ondes de cisaillement dans les solides mous que les deux méthodes seront confrontées. L'expérience de corrélation de bruit sur des champs d'ondes vectorielles (de cisaillement) dans le volume d'un gel sera une étape préliminaire à l'expérience *in-vivo* de corrélation de bruit physiologique à l'intérieur du corps humain.
- III. Chapitre 6 : L'observation de la refocalisation spatio temporelle n'est pas une finalité en soi, il s'agit d'une étape d'extraction d'information du milieu. Ce chapitre se focalise sur l'étape suivante qui consiste à utiliser cette information pour la construction d'images d'élasticité de cisaillement. Une expérience de corrélation de bruit dans des gels d'élasticité contrôlée permet de mettre en place deux méthodes tomographiques d'ondes de cisaillement basées sur la vitesse de groupe puis sur la mesure de la longueur d'onde locale. La première méthode est similaire à l'élastographie impulsionnelle, alors que l'autre rappelle la technique sismologique d'Auto-Corrélation Spatiale. Après l'exposé de la faisabilité d'une tomographie d'onde de cisaillement dans les gels basée sur la corrélation de bruit, les premiers résultats de l'élastographie passive *in-vivo* seront présentés. Une image de l'élasticité de la région du foie est ainsi produite et comparée avec une image fournie par la méthode du Super-Shear Imaging.

- III. Chapitre 7 : Dans ce chapitre final, une solution au problème de la distribution spatiale des sources pour les méthodes de corrélation de bruit est proposée. Ce problème qui n'échappe à aucune méthode passive se traduit par un biais sur les mesures du champ de refocalisation calculé par corrélation. Ce biais intervient lorsque les sources de bruit ne sont pas réparties de façon homogène dans l'espace et donne lieu à une directivité du flux d'énergie. Pour corriger cette distribution non homogène des sources de bruit, une méthode inspirée du filtre inverse est proposée. Le filtre inverse développé en acoustique ultrasonore est basé sur le calcul du signal optimal à émettre pour obtenir la refocalisation désirée. Ce signal d'émission est calculé à partir de l'inversion d'une matrice de propagation entre le réseau de sources et le réseau de récepteurs. Dans la configuration de la corrélation de bruit, il n'y a pas de réseau de source. Cependant, une matrice de propagation peut être construite à partir du bruit. La méthode est présentée à partir de données de sismiques actives pour lesquelles la distribution spatiale des sources est contrôlée. A partir de ces données, un bruit synthétique est créé avec une distribution spatiale inhomogène. Le filtre inverse passif permet alors d'obtenir une refocalisation des ondes sismiques peu affectée par la directivité du bruit sismique initial. Finalement, la méthode est appliquée à un champ d'ondes élastiques dans un solide mou pour montrer l'amélioration sur une image d'élasticité dans un gel homogène avec une inclusion.

*Imagerie Acoustique en Milieux Réverbérants*

Première partie

Rétrodiffusion Cohérente dans les  
Cavités Réverbérantes

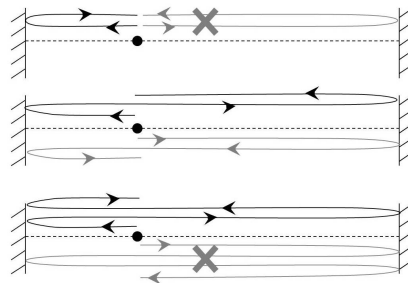
*Imagerie Acoustique en Milieux Réverbérants*

# Chapitre I

---

## Surintensité par rétrodiffusion cohérente dans les cavités parallélépipédiques

---



Le premier des deux chapitres sur la rétrodiffusion cohérente propose d'observer ce phénomène ondulatoire dans des cas singuliers. La rétrodiffusion cohérente est responsable d'une répartition spatiale non uniforme de l'intensité moyenne du champ acoustique pour laquelle la position de la source joue un rôle particulier. Les milieux généralement considérés sont de nature chaotique et gouvernés par des statistiques complexes. Au contraire, dans cette étude, des cavités réverbérantes régulières ont été choisies pour leur simplicité et leur caractère déterministe afin de revisiter le phénomène de rétrodiffusion cohérente.

Le phénomène de rétrodiffusion cohérente, ou localisation faible, a été initialement observé dans des milieux aléatoires ou des cavités chaotiques pour lesquels, en moyenne, l'intensité est la même partout, sauf au point source où, malgré le désordre, des interférences constructives provoquent une surintensité. Cet effet contre-intuitif existe aussi dans les cavités régulières, mais il a été peu étudié tant il est vrai que, dans l'exemple de cavités 1D, rectangulaires ou parallélépipédiques, le champ s'écrit analytiquement, les fonctions de Green sont connues, ce qui ne laisse guère de place au mystère. Et pourtant nous montrerons dans ce chapitre qu'une étude de la rétrodiffusion cohérente dans les cavités régulières jette une lumière nouvelle et fournit des interprétations inédites qu'il aurait été impossible d'obtenir dans des milieux complexes, désordonnés ou chaotiques. Deux approches théoriques indépendantes confirmées par une expérience et des simulations numériques sont consacrées à l'examen du phénomène de rétrodiffusion cohérente dans des cavités simples. Les deuxième et troisième sections (1.2 et 1.3) de ce chapitre sont en langue anglaise et correspondent à un article à paraître dans la revue *Wave motion* [25].

### **1.1 Présentation du phénomène de rétrodiffusion cohérente**

Historiquement, l'effet de rétrodiffusion cohérente (CBE) a été découvert en optique [143, 5, 4], puis plus tard en acoustique [8, 131]. Le paradoxe de ce phénomène vient de la présence d'interférences, malgré le désordre, dans des milieux aléatoires. Il s'explique intuitivement par des interférences constructives entre un rayon multidiffusé, ou réverbéré, et son chemin réciproque. Pour cette étude, le cas du CBE au sein d'une cavité réverbérante est considéré. Un rayon est associé à son réciproque s'ils parcourent le même chemin, en sens inverse. Ces deux rayons vont interférer constructivement en ce point et donner une intensité deux fois plus grande en moyenne par rapport au reste de la cavité (Fig. 1.1). La valeur limite généralement admise pour l'intensité rétrodiffusée est donc  $R = 2$ .

Des travaux pionniers de Lyon [84] en acoustique des salles prédisaient déjà une surintensité au point source. D'autres études plus récentes ont montré la présence de rétrodiffusion cohérente, par exemple des ondes sismiques

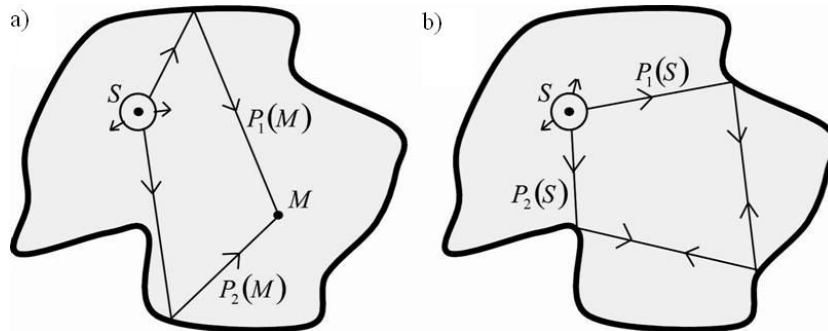


FIGURE 1.1 – Les schémas illustrent deux exemples de rayons acoustiques issus d’une source  $S$  dans une cavité. a) Les chemins réverbérés arrivant en un point quelconque  $M$ , par exemple  $P_1(M)$  et  $P_2(M)$ , n’ont pas de raison particulière d’être de même longueur et présentent en moyenne une différence de marche non nulle. b) En revanche, lorsque le point source devient aussi le point d’observation ( $M$  et  $S$  sont confondus), il existe des chemins réciproques,  $P_1(M)$  et  $P_2(M)$ , présentant une différence de marche nulle qui interfèrent constructivement. Dans l’hypothèse forte selon laquelle chaque chemin possède un chemin réciproque, l’intensité au point source est deux fois plus forte que dans le reste de la cavité.

dans la croûte terrestre [78], ou des ultrasons dans les os poreux [6]. L’effet de rétrodiffusion cohérente a aussi fait l’objet d’études théoriques [139] et expérimentales [140, 36] dans les cavités chaotiques<sup>1</sup>. Ces études font état d’une valeur limite de surintensité d’un facteur 3 à la source, indépendamment de la dimensionnalité (1D, 2D, 3D) de la cavité [140]. D’autres études mènent à des valeurs de 2.8 [74], notre propre analyse ayant donné 2.7 (*cf.* Annexe A). Pour ces milieux chaotiques, il est indispensable d’effectuer des moyennes d’ensemble, ou sur les fréquences, afin de stabiliser la surintensité. Le modèle théorique généralement invoqué est basé sur une hypothèse de distribution des modes propres issue de l’ensemble orthogonal Gaussien [15, 18]. Dans les cavités régulières (ou intégrables<sup>2</sup>), la statistique modale présente

1. Un système est dit chaotique pour son extrême sensibilité aux conditions initiales. Dans une cavité, cette propriété peut s’interpréter en terme de trajectoire de rayons acoustiques : deux rayons issus d’un même point avec un angle légèrement différent vont avoir des trajectoires très distinctes.

2. Dans l’espace des phases, les systèmes intégrables possèdent des orbites confinées sur une section de Poincaré, alors qu’elles s’étalent sur toute cette surface pour les systèmes non intégrables comme par exemple les systèmes ergodiques [13].



des caractéristiques différentes (*cf.* Annexe A). Dans les cavités parallélépipédiques considérées (c'est à dire une barre 1D, une plaque rectangle 2D et un parallélépipède 3D), les distributions modales sont décrites de manière déterministes, les réponses impulsionnelles sont connues et la surintensité peut être déterminée de manière analytique, sans aucune hypothèse sur la statistique modale. Ainsi, il est établi que la surintensité à la source est différente des valeurs habituelles de 2 ou 3 et dépend de la dimensionnalité de la cavité. Dans les cavités parallélépipédiques considérées, la surintensité à la source peut se résumer suivant la loi  $R = \left(\frac{3}{2}\right)^d$ , avec  $d = 1, 2, 3$  la dimensionnalité de la cavité. Ce résultat théorique, connu en acoustique des salles [84, 137] et en vibration de plaques [29, 31], fera l'objet de validations expérimentales et numériques.

Les surintensités différentes des valeurs habituelles de 2 ou 3 seront l'occasion de nouvelles interprétations balistiques. En effet, l'interprétation fournie ci-avant dans laquelle chaque rayon revenant à la source a un trajet réciproque n'est plus vraie pour les cavités régulières. Certains rayons n'ont pas de chemin réciproque, ce qui explique une surintensité inférieure à deux. Lorsque la surintensité est supérieure à 2 des interférences plus complexes interviennent. Elles sont composées de 4 ou 8 rayons de même temps de propagation qui ne sont pas nécessairement des chemins réciproques. Finalement, l'étude de la statistique de ces interférences permet de retrouver la loi de surintensité à la source.

## ***1.2 The coherent backscattering effect interpreted through modal decomposition in regular cavities***

Let's recall some basic results about CBE. The starting point is the general definition of the intensity enhancement factor  $R$  defined as the intensity ratio of the wave field  $\psi$  on the source at  $\vec{r}_0$  and a receiver at  $\vec{r}$ :

$$R = \frac{\langle \int \psi^2(\vec{r}_0, \vec{r}_0; t) dt \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \int \psi^2(\vec{r}, \vec{r}_0; t) dt \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} \quad (1.1)$$

The ensemble average  $\langle \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}$  is a spatial average on positions within the cavity. The normal mode decomposition of the wave field is:

$$\psi(\vec{r}, \vec{r}_0; t) = H(t) \sum_n \frac{1}{\omega_n} \phi_n(\vec{r}) \phi_n(\vec{r}_0) \sin \omega_n t \quad (1.2)$$

where  $H(t)$  stands for the Heaviside function and assures the causality,  $\omega_n$  is a modal frequency and  $\phi_n$  is the associated mode shape. For sake of clarity, we now focus on a single normal mode of the cavity and the subscript  $n$  is abandoned, the broadband approach will be treated in an appendix (*cf.* Annexe B). The time dependence can be eliminated from Eq. (1.1) since:

$$R = \frac{\langle \phi^4(\vec{r}_0) \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2} \sin^2(\omega t) dt \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \phi^2(\vec{r}) \phi^2(\vec{r}_0) \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2} \sin^2(\omega t) dt \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} = \frac{\langle \phi^4(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \phi^2(\vec{r}) \phi^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} \quad (1.3)$$

The independence of the variables  $\vec{r}$  and  $\vec{r}_0$  finally leads to a spatially-dependent expression of the intensity enhancement factor:

$$R = \frac{\langle \phi^4(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \phi^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}^2} \quad (1.4)$$

Eq. (1.4) states that the intensity enhancement factor on a source is the fourth order moment of the field divided by the square of the second order moment. It is widely conjectured in disordered systems [89] that the field obeys to a Gaussian statistic. The mathematical property of such Gaussian field implies that the intensity enhancement factor  $R$  is 3, whatever the dimensionality of the system.

In the present approach, the disordered system hypothesis is replaced by the use of the true response in regularly-shaped cavities, namely a 1-D, a rectangular 2-D and a parallelepipedic 3-D cavity. To start with, the spatial field trapped in a one-dimensional cavity with Dirichlet boundary conditions is simply  $\phi(\vec{r}_0) = \phi(x) = \sin kx$ . The average intensity on the point source is  $\langle \sin^4 kx \rangle = \frac{3}{8}$  and  $\langle \sin^2 kx \rangle^2 = \frac{1}{4}$  on other points from which we finally

get as the enhancement intensity factor:

$$R = \frac{\langle \sin^4 kx \rangle}{\langle \sin^2 kx \rangle^2} = \frac{3}{2} = 1.5. \quad (1.5)$$

This result shows that CBE does exist for a pure-tone source in a 1-D homogeneous cavity. The spatial representation of one mode in a two-dimensional rectangular cavity is classically written as  $\phi(\vec{r}) = \sin(k_x x) \sin(k_y y)$  with the same boundary conditions as above. The independence of variables  $x$  and  $y$  allows a straightforward computation of the average intensities as well:  $\langle \sin^4(k_x x) \sin^4(k_y y) \rangle = \langle \sin^4(k_x x) \rangle^2$ , on the point source and  $\langle \sin^2(k_x x) \sin^2(k_y y) \rangle^2 = \langle \sin^2(k_x x) \rangle^4$  on other points. The intensity enhancement factor has then the final value:

$$R = \left( \frac{\langle \sin^4 kx \rangle}{\langle \sin^2 kx \rangle^2} \right)^2 = \left( \frac{3}{2} \right)^2 = 2.25. \quad (1.6)$$

The same approach is used for a parallelepipedic 3-D cavity. The following spatial dependence for one mode is used :  $\phi(\vec{r}) = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$ .

Simple computations lead to:  $\langle \sin^4(k_x x) \sin^4(k_y y) \sin^4(k_z z) \rangle = \langle \sin^4(k_x x) \rangle^3$ , and  $\langle \sin^2(k_x x) \sin^2(k_y y) \sin^2(k_z z) \rangle^2 = \langle \sin^2(k_x x) \rangle^6$ . Finally:

$$R = \left( \frac{\langle \sin^4 kx \rangle}{\langle \sin^2 kx \rangle^2} \right)^3 = \left( \frac{3}{2} \right)^3 = 3.37 \quad (1.7)$$

If  $d$  is the dimension of the cavity, Eq. (1.5), (1.6) and (1.7) can thus be synthetised as:

$$R = \left( \frac{3}{2} \right)^d \quad (1.8)$$

The generalization to broadband signals leaves Eq. (1.8) unchanged and does not introduce new physical insights (see Annexe B). From an experimental point of view, however, the large frequency content of transient acoustic waves can advantageously be used. As reported in the literature in a solid cavity [36], the CBE is observed on a single realization, the space averaging being replaced by a frequency averaging. Nevertheless, the small number of excited modes often requires in practical situations to conduct the averaging both in space and frequency.

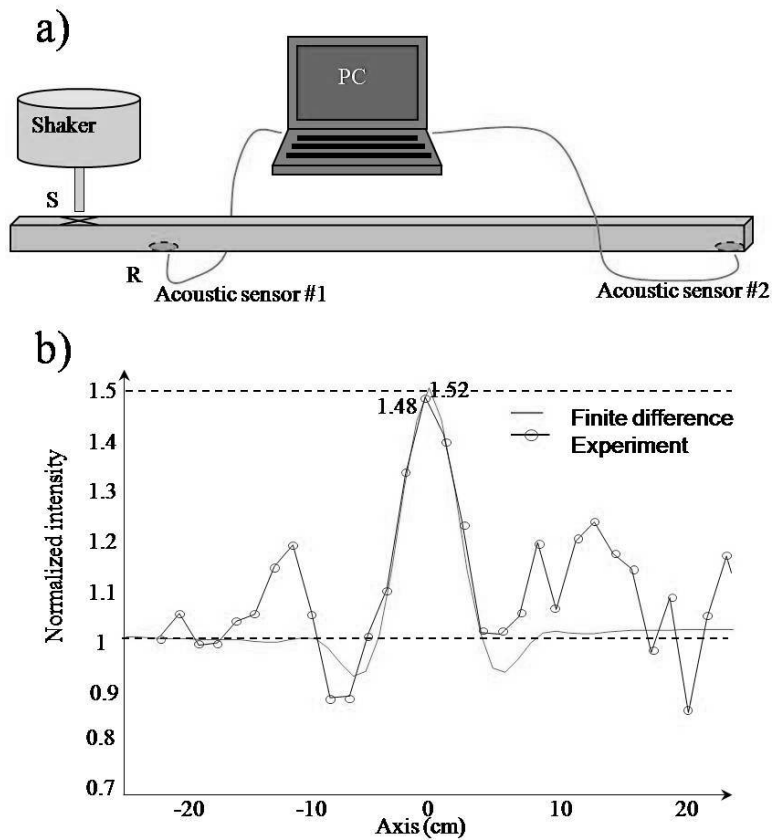


Figure 1.2: Experimental set-up of flexion waves in a bar. (b) Experiment (circles) and finite-difference simulation (line) of the averaged intensity pattern centred on the source. The intensity enhancement factors are  $R = 1.48$  and  $R = 1.53$  respectively. The theoretical value is 1.5.

Although widely discussed in room acoustics [32], direct experimental evidence of Eq. (1.8) is missing in the literature. The 1-D experiment was conducted in a 1-m long duralumin bar with a 1-cm<sup>2</sup> section (Fig. 1.2 a). The acoustic vibrations delivered from a source in  $S$  by a knock were measured using two point-like sensors at frequencies ranging from 0.1 to 5 kHz. Sensor #1 was moved to scan the field whereas sensor #2 was used as a reference. Finally, the averaged spatial intensity pattern shown in Fig. 1.2 b was obtained. Fluctuations arise from the insufficient number of realizations on the one hand and from the small number of excited modes (only 5) on the other hand. However, the CBE is clearly visible as an intensity enhancement on

the source located at the origin. Moreover, its shape is limited by diffraction theory and its width,  $\sim 7.5$  cm, is indeed a good estimation of the mean half wavelength. The enhancement factor, estimated from the intensity on the source divided by the mean background level gives 1.48, in fair agreement with Eq. (1.5).

In order to completely legitimate these experimental results, a finite difference simulation of the 1D flexion wave equation in a bar was used. The input parameters of a 1-m long and 1-cm width duralumin bar were all chosen equal to their estimation in the experiment:  $2732 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $3040 \text{ m.s}^{-1}$  and  $6420 \text{ m.s}^{-1}$  for the density, the shear wave speed and the compression wave speed respectively. A 4-kHz central frequency pulse was emitted from a point source. 90 measuring points were set every 0.5 cm on one half of the bar. Each point was used sequentially for emission giving 90 realizations of a reverberated field. In the absence of dissipation, 0.5-s duration signals could be recorded. The averaged spatial intensity pattern centered on the source was constructed like in the experiment from the  $90 \times 90$  reverberated field matrix (Fig. 1.2 b). Its general shape correctly fits the experimental data. Besides, the intensity enhancement factor of 1.53 is again very close to the theoretical 1.5 (Eq. 1.5).

For 2D cavities, a finite difference simulation of the 2-D flexion wave equation in a  $4 \times 5 \times 0.08\text{-cm}^3$  rectangular duralumin plate was used [109]. Rigid boundary conditions around the propagation domain were imposed which assures perfect reflections on boundaries. Two arches of sinusoid were emitted at a 1-MHz central frequency. 60 measuring points were set along a line every 0.3 mm. This line was carefully chosen out of the rectangle symmetry axes. Each point was then used sequentially for emission. Thus 60 realizations of 20-ms duration signals were recorded in memory. The first  $50 \mu\text{s}$  were removed in order to avoid the first reflections that are analog to the single scattering contribution to CBE in disordered media [8]. The averaged spatial intensity pattern centered on the source position is represented in Fig. 1.3. The simulation result confirms the theoretical prediction of CBE in 2D cavities: the intensity enhancement factor of 2.28 is found in the simulation, close to the theoretical 2.25 (Eq. 1.6).

Finally, a finite difference simulation of the 3-D elastic wave equation in

a  $1 \times 1.2 \times 1.5\text{-cm}^3$  duralumin parallelepiped was used to test the theoretical predictions. The distance between 60 measuring points, the central frequency of the emitted signal and the total time duration of the signals were 0.15 mm, 1 MHz and 20 ms, respectively. The source, a point body force, was oriented in the direction of the measured displacement field. The intensity enhancement factor of 3.55 is found from Fig. 1.3. This estimation is close to the theoretical 3.37 (Eq. 1.7). Consequently, these 1-D, 2-D and 3-D results fully justify the relevance of the modal approach of CBE described in the first part.

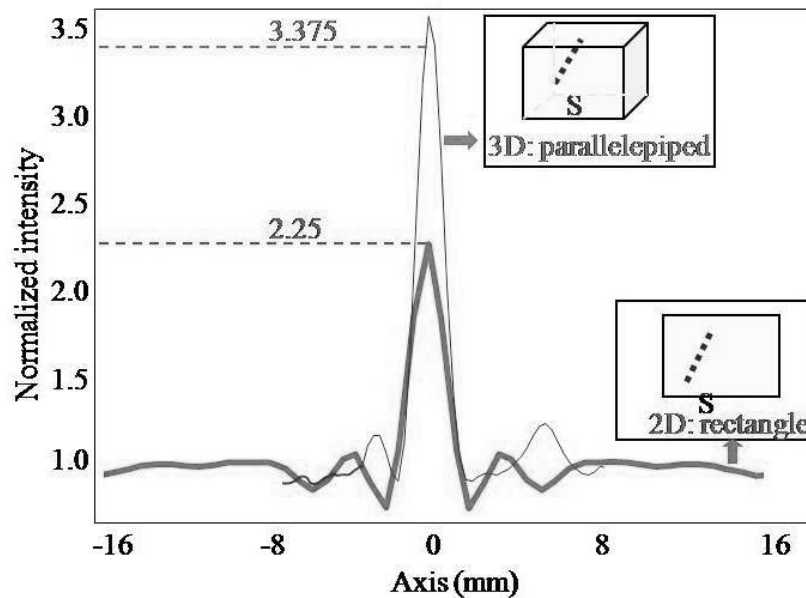


Figure 1.3: Simulation results of flexion waves in a rectangular cavity (2D) and elastic waves in a parallelepipedic solid cavity (3D). From the averaged intensity patterns for 60 source positions  $S$ , the enhancement factor estimations are  $R = 2.28$  and  $R = 3.55$ . The theoretical values are 2.25 and 3.37 respectively.

The modal description of the CBE in cavity is compatible with the widely accepted idea of constructive interferences between a multiply reverberated path and its reciprocal counterpart since a mode is precisely the result of contra-propagative waves. However, the same number of direct and reciprocal paths (pair of loops) would lead to an enhancement factor of 2, in contradiction with the predictions and the observations reported in this pa-

per. A quantitative analysis of the CBE (Eq. 1.8) rather suggests that the number of direct and reciprocal paths is dimension dependant. The modal description of monochromatic or broadband wave is now abandoned to be replaced by an infinite-frequency ray-based approach. We expect that CBE in rectangular cavities is confirmed and that its dimension dependence has simple ballistic interpretations.

### ***1.3 The CBE interpreted through ray theory in regular cavities***

Contrarily to basic intuition, there is no easy correspondence in regular cavities between one mode and one ray even if they both allow a perfect description of the wavefield respectively at low and high frequency. It is classically admitted, however, that one ray can be described as a sum of modes and vice-versa. In section 1.2, the CBE was interpreted through the ratio of the fourth-to-second order moments of sinusoidal mode shapes with a dimension-dependent power. In section 1.3, we show that ray theory provides a different interpretation of CBE by associating each ray path with its exact number of constructive interferences in 1-D, 2-D and 3-D rectangular cavities.

The one-dimensional case conveys the easiest ballistic illustration of CBE (Fig. 1.4). A cavity composed of two walls,  $W^a, W^b$ , and a point source located at  $S$  are represented. When a pulse is emitted from the source, it reflects on the closest wall,  $W^a$  and returns to the source. This shortest path  $P_1^a = (S, W^a, S)$ , does not have any reciprocal path,  $P_1^b = (S, W^b, S)$  does not have the same length. On the contrary, the second path  $P_2^a = (S, W^a, W^b, S)$  is associated to the reciprocal path  $P_2^b = (S, W^b, W^a, S)$  of equal length. Constructive interference responsible for intensity enhancement thus happens on the source. Similarly, the third path  $P_3^a = (S, W^a, W^b, W^a, S)$  does not present any reciprocal path whereas  $P_4^a = (S, W^a, W^b, W^a, W^b, S)$  does with  $P_4^b = (S, W^b, W^a, W^b, W^a, S)$ . A generalization leads to the following conclusion. Only paths with a pair number of reflections have one reciprocal path. In average, one can state that 2 direct paths are associated with one single reciprocal path which perfectly accounts for an enhancement factor of 1.5 (Eq. 1.5).

If it is a quite natural idea to admit the existence of paths without recip-

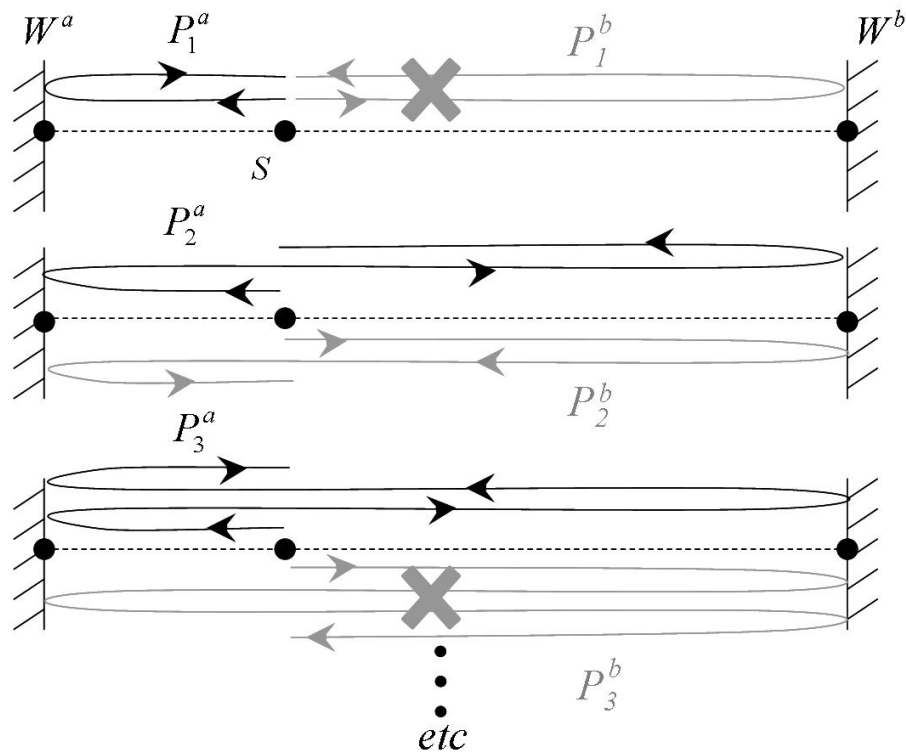


Figure 1.4: A simple ray interpretation of the enhancement factor in a 1-D cavity. A direct path can be associated to 0 or 1 reciprocal paths. Counting the reciprocal and single rays gives an intensity enhancement of 1.5 in 1-D.

rocal counterpart in order to explain intensity enhancement factor smaller than 2, it is more difficult to imagine, on the contrary, the existence of paths with many reciprocal counterparts in order to explain intensity enhancement factor larger than 2. This is the purpose of the method of image [49] illustrated in Fig. 1.5. A rectangle cavity and a point source are represented at the center, surrounded by 44 images. Circular wave fronts are supposed to represent cylindrical wave propagation through the cavity and its images. The green circle, which intersects the closest image of the source, is a trivial example of a single reflection on the top wall. Now the blue circle passes through two source images. Their associated ray paths within the real cavity are deduced from the classical laws of geometrical optics. It can easily be shown that these two source images are associated to the same three-reflection path but followed in opposite direction as a multiply-reverberated



path and its time-reversed counterpart. More interesting is the largest circle which coincides with 4 images. These 4 source images are associated with 2 distinct four-reflection paths of equal length. It is a consequence of angle symmetry property of rectangles: if a ray sent from the source with angle  $\alpha$  comes back to the source, then the ray sent with the opposite angle  $-\alpha$  also comes back to the source along a different ray path of equal length. Therefore, it describes a situation in which four waves interfere constructively on the source, contributing in an enhancement factor larger than 2.

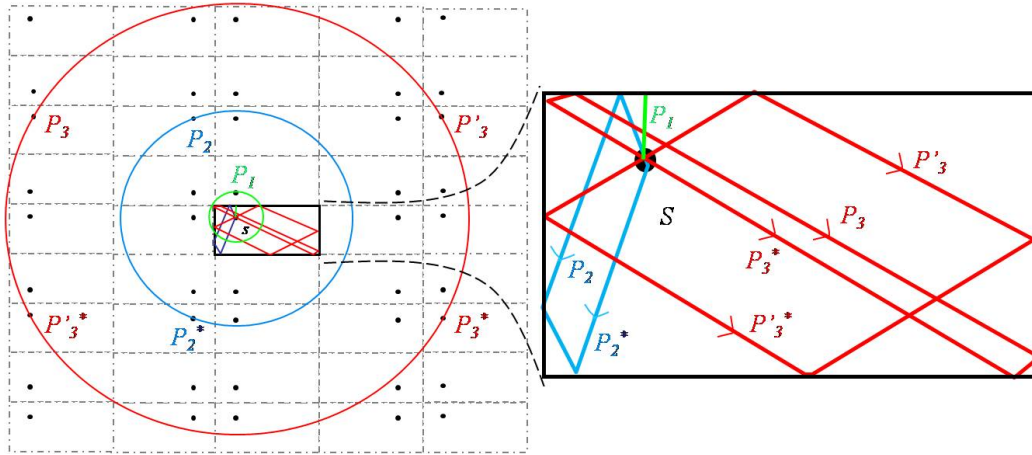


FIGURE 1.5: A simple ray interpretation of the enhancement factor in a 2-D rectangular cavity. A direct path can be associated to 0, 1 or 3 reciprocal paths. Four rays can interfere constructively on the source, contributing in an enhancement factor larger than 2.

Counting the number of paths and their potential reciprocal counterparts is a way to estimate the enhancement factor. The case of a 1-D cavity is straightforward since the impulse response is cyclical: if the total number of echoes is  $N$  anywhere in the cavity, only  $3N/4$  are present at the source due to the presence of paths of equal length. Among this number,  $N/2$  have no reciprocal path and only half of them,  $N/4$ , do have a reciprocal path. The averaged intensity associated to single paths is 1 whereas the averaged intensity of a pair of reciprocal paths is 4 (the amplitude is doubled). Thus the resulting intensity enhancement  $R = \frac{N/2+N}{N} = 3/2$ , is in agreement with the modal approach. The rectangle case is more complex. No more cyclical behaviour is observed. The following section provides a statistical analysis

on the 2-D and 3-D cases.

### 1.3.1 Statistique des rayons acoustiques

Afin de montrer en quoi une étude statistique est nécessaire pour les cavités de dimensionnalité supérieure à 1, résumons tout d'abord le cas de la cavité 1D. La cyclicité de l'arrivée des rayons permet d'y expliquer simplement la valeur de la surintensité à la source. En effet, sur quatre rayons, deux sont les réciproques l'un de l'autre et vont interférer ensemble, donnant une intensité de  $2^2$ , les deux autres rayons non réciproques fournissant une intensité de  $2 \times 1$ . En considérant qu'aucune interférence n'a lieu en dehors de la source, l'intensité est partout ailleurs de  $4 \times 1$ . Cette hypothèse a été vérifiée en étudiant la statistique des rayons en dehors du point source où le nombre d'interférences constructives est nul. Le facteur de surintensité pour ces 4 rayons est alors calculé suivant l'Eq. (1.9) :

$$R = \frac{2 \times 1 + 2^2}{4 \times 1} = \frac{3}{2} \quad (1.9)$$

Cette valeur est vraie pour chaque ensemble de 4 rayons, les fluctuations autour de cette valeur sont donc dûes au maximum à 3 rayons et donc très vite négligeables lorsque le nombre total de rayons augmente. Pour les cavités rectangulaires et parallélépipédiques, cette cyclicité n'est plus présente et une approche statistique est indispensable.

En 2D comme en 3D, la méthode des images permet de remplacer chaque réflexion sur une paroi comme la réponse à une source imaginaire  $S_i$  placée au symétrique de la source initiale par rapport à la paroi. Quelques images sont représentées Figure 1.5 dans le cas rectangulaire 2D. Le milieu de propagation est à vitesse unitaire constante et sans atténuation. En réalité il faudrait prendre en compte au minimum la décroissance due à l'expansion géométrique mais ceci ne change pas la statistique des résultats. En effet, les rayons qui interfèrent entre eux seront toujours de la même intensité, les rapports d'intensité sur une même plage temporelle seront donc inchangés. La réponse  $\varphi$  dans un tel milieu est décrite par une somme d'impulsions retardées par le temps de parcours égal à la distance  $SS_i$  (vitesse unitaire)

entre source réelle  $S$  et sources images  $S_i$  :

$$\varphi_N(t) = A \sum_{i=1}^N \delta(t - SS_i) \quad (1.10)$$

Le paramètre  $N$  définit le nombre de réflexions prises en compte dans la réponse impulsionnelle. La position des sources images est établie pour chaque cavité en Annexe C, tout comme le terme d'amplitude  $A$  qui n'est pas l'objet de cette étude. La valeur de la surintensité peut être déterminée, comme pour le cas 1D (Eq. 1.12), à partir de la statistique des interférences constructives. En faisant l'hypothèse de l'absence d'interférence constructive en dehors de la source, le facteur de surintensité au point source est :  $R = \varphi_N^2/N$  (dans le cas simpliste ou  $A = 1$ , ce qui revient à négliger atténuation et dispersion géométrique dans la cavité régulière). Cette définition permet de calculer la surintensité en fonction du nombre de réflexions pour les cavités 1D, 2D et 3D (Fig. 1.6). Dans les trois cavités, la surintensité converge vers la valeur théorique  $R = \left(\frac{3}{2}\right)^d$ .

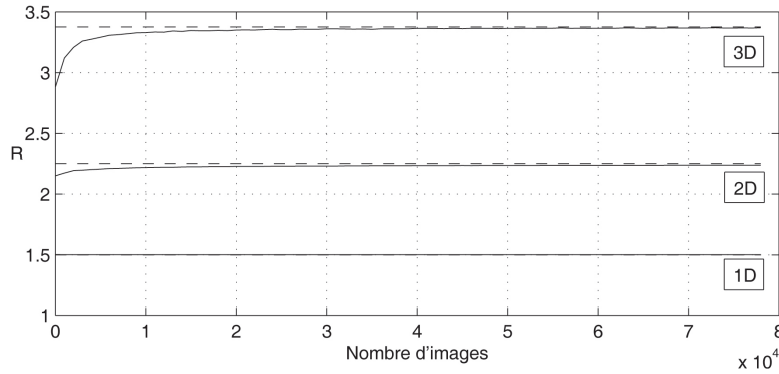


Figure 1.6: La réponse impulsionnelle (Eq. 1.6) permet de calculer la surintensité à la source en fonction du nombre d'images  $N$  (en abscisse) suivant l'expression  $R = \varphi_N^2/N$ . L'influence des sources dont la statistique est relative à une dimensionnalité inférieure (1D pour la courbe 2D, ainsi que 1D et 2D pour la courbe 3D), s'exprime par une convergence en valeurs inférieures vers la surintensité théorique.

En 1D, la cyclicité de la réponse impulsionnelle impose une convergence pour quatre rayons. Les fluctuations qui interviennent lorsque le nombre de

source images n'est pas un multiple de quatre sont trop faibles pour être visible. En revanche en 2D et 3D où il n'y a pas de cyclicité, les surintensités sont inférieures et convergent lentement vers la valeur théorique. Cette convergence s'explique par la présence de certaines sources images dont le comportement correspond à ce qui se passe dans une cavité de dimensionnalité inférieure. Par exemple, en 2D, les sources images sur les lignes horizontales et verticales issues de la source présentent une statistique de chemins réciproques responsables d'une surintensité 1D de 1.5. Cette proportion d'images au comportement 1D dans une cavité 2D entraîne une diminution de la surintensité à la source par rapport à la valeur attendue en 2D de 2.25. De plus, ces images se trouvent sur deux lignes, alors que l'ensemble des images se répartissent sur un disque (*cf.* Annexe C) . Par conséquent leur proportion diminue quand le nombre d'images considérées augmente et la surintensité converge finalement vers 2.25. Dans la même logique, les sources images en dehors des lignes horizontales et verticales en 2D permettent d'atteindre une surintensité différente du cas 1D car les images s'y trouvant présentent des interférences constructives quadruples qui expliquent une surintensité supérieure à 2. Il en est de même pour la cavité 3D où c'est alors la présence d'interférences constructives à huit rayons qui forment une surintensité de 3.37. Ces sources images ne se trouvent pas dans les plans horizontaux et verticaux passant par la source réelle, plans pour lesquels la statistique est semblable à une statistique 2D, voire 1D.

La statistique des interférences pour un total de  $N = 80\,000$  réflexions est résumée dans le Tableau 1.1. Un rayon simple n'interfère avec aucun autre, un doublet est constitué de deux rayons réciproques, le quadruplet représente quatre rayons avec le même temps de parcours notés en rouge dans la figure 1.5, enfin l'octuplet représente huit rayons sans différence de marche interférant constructivement.

Concernant la cavité 1D, la cyclicité est confirmée par la statistique des interférences qui montre que la moitié des rayons n'a pas de chemin réciproque, l'autre moitié si. L'apparition en 2D des quadruplets est statistiquement significative. Ils représentent le quart du total des rayons. En 3D, la nouveauté est une apparition d'octuplets représentant un huitième du total. La normalisation de ces statistiques par l'élément le moins représenté de cha-

	Total	simple	doublet	quadruplet	octuplet
1D	80.000	40.002	19.999		
2D	80.000	20.002	19.999	5.000	
3D	80.000	10.002	15.001	7.501	1.249

TABLE 1.1 – Les statistiques des interférences dans la cavité 1D, le rectangle et le parallélépipède sont présentées sous forme d’un tableau pour un total de 80 000 sources images. Le nombre de rayons simples, de chemins réciproques ainsi que des interférences de quatre et huit rayons vérifient la loi de surintensité  $R = \left(\frac{3}{2}\right)^d$ .

cune des cavités (Tableau 1.2) permet d’énoncer simplement les statistiques en 2D et 3D. Dans le rectangle, un quadruplet est associé à quatre doublets et quatre rayons simples. Dans le parallélépipède, un octet est associé à six quadruplets, douze doublets et huit rayons simples. Les erreurs numériques en dehors de la source sont au maximum de 0.1 ‰. Cette statistique permet de retrouver élégamment la loi théorique par un calcul identique à celui réalisé pour la cavité 1D (Eq. 1.9). Le calcul de la surintensité se fait en sommant séparément les intensités des doublets, quadruplets et octuplets et en normalisant par le nombre total de rayons comme décrit par l’Eq. (1.11) en 2D et l’Eq. (1.12) en 3D :

$$R = \frac{4 + 4 \times 2^2 + 4^2}{4 + 4 \times 2 + 4} = \frac{4 \times (1 + 4 + 4)}{4 \times (1 + 2 + 1)} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad (1.11)$$

$$R = \frac{8 + 12 \times 2^2 + 6 \times 4^2 + 8^2}{8 + 12 \times 2 + 6 \times 4 + 8} = \frac{8 \times (1 + 6 + 12 + 8)}{8 \times (1 + 3 + 3 + 1)} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad (1.12)$$

Les deux approches théoriques, modales et rayons, conduisent quantitativement à la même conclusion concernant la surintensité dans les cavités parallélépipédiques. De plus, le premier modèle montre que cette surintensité est indépendante des modes. Du fait des symétries dans les cavités régulières, le modèle des rayons permet d’établir une statistique des interférences constructives plus complexe que la statistique déduite de l’explication classique du phénomène de rétrodiffusion cohérente en milieu ouvert où chaque rayon ne présente qu’un seul chemin réciproque à la source (Fig. 1.1).

	simple	doublet	quadruplet	octuplet
1D	2	1		
2D	4	4	1	
3D	8	12	6	1

Table 1.2: Les statistiques normalisées résument les contributions séparées des interférences constructives à la source qui conduisent à un facteur de surintensité dépendant de la dimensionnalité  $d$  de la cavité suivant la loi  $R = \left(\frac{3}{2}\right)^d$  (Eq. 1.9 1.11 et 1.12).

Les propriétés de symétries dans les cavités régulières ont une influence notable sur la rétrodiffusion cohérente. Du point de vue des modes, les symétries sont responsables de la statistique modale particulière, alors que l'absence de symétrie entraîne la répulsion des modes dans les cavités chaotiques. Dans l'approche rayon, la statistique des rayons se voit aussi influencer si la source est positionnée sur un axe de symétrie de la cavité. Dans le chapitre suivant, nous proposons une étude de l'intensité dans l'ensemble de la cavité qui mettra en évidence l'influence des symétries et notamment l'apparition de surintensités en dehors de la source sur des points liés aux axes de symétrie de la cavité régulière.

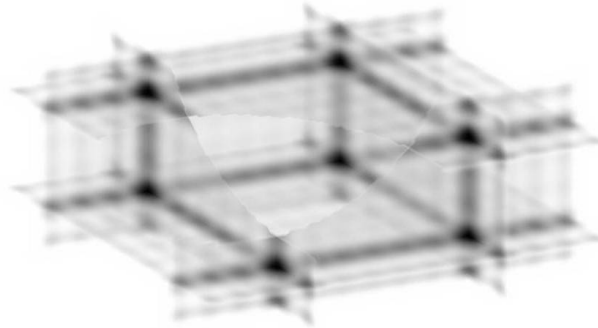
*Imagerie Acoustique en Milieux Réverbérants*

## Chapitre II

---

### Effets de symétrie sur les propriétés spatiales de la rétrodiffusion cohérente

---



S'il a été montré que la rétrodiffusion cohérente provoque une surintensité au point source, le reste de la cavité n'a presque pas été considéré dans le chapitre précédent. Ce deuxième et dernier chapitre sur ce sujet ne considère plus le seul point source mais se propose d'étudier l'ensemble de la cavité. Les symétries spatiales des cavités induisent alors des zones particulières en dehors de la source où l'intensité n'est plus uniforme et devient plus forte ou plus faible que dans le reste de la cavité.



Ce deuxième chapitre en anglais est une reproduction d'un article en cours de publication au *Journal of the Acoustical Society of America* [56] venant compléter l'étude sur la rétrodiffusion cohérente dans les cavités régulières. L'effet des symétries spatiales sur la rétrodiffusion cohérente est particulièrement étudié à travers un certain nombre d'expériences et de simulations. Nous montrons ainsi que la rétrodiffusion est responsable de surintensité en dehors du point source dans des cavités présentant des conditions aux limites identiques pour tous ses bords. Des surintensités sont observées a) sur un point de symétrie pour une cavité unidimensionnelle, b) sur trois points de symétrie dans une cavité rectangulaire, et c) sur sept points de symétrie dans un parallélépipède. De plus, des lignes et des plans de surintensité apparaissent dans les cavités 2-D et 3-D. Finalement, dans des cavités au comportement anti-symétrique provoqué par un mélange des conditions aux limites, la rétrodiffusion cohérente est responsable de sous-intensités qui dépendent de la dimensionalité  $d$  de la cavité suivant la loi  $R = \left(\frac{1}{2}\right)^d$ .

## **2.1 Introduction**

The effects of coherent interference that survive in a disordered medium have been appreciated as a non-intuitive phenomenon for a long time. As a consequence, coherent backscattering enhancement (CBE) has mainly been described in disordered [4] random [131] or chaotic media [36]. In such complex media, not only does coherent interference survive, but also the symmetry property of the source survives, as shown by the bicone observed for dipolar sources [37]. Similarly, when the spatial reciprocity of the acoustic field is broken by the presence of a rotational flow, the CBE is destroyed [35]. The CBE in simple regular cavities was also reported on in an early pioneering study of Lyon (1969) [84], to simplify assumptions for room acoustics. The analysis of the CBE in such symmetric cavities is justified since: (1) the CBE obeys a straightforward  $R = \left(\frac{3}{2}\right)^d$  law, with  $d$  as the dimensionality of the cavity, which has been fully confirmed experimentally; (2) a ray approach leads to enlightening interpretations that would have been difficult to provide in complex media; and (3) such an analysis highlights the role of symmetry for the CBE, which is precisely the goal of this second report.

Recently, CBE without a source was first observed using correlations of thermal phonons [76]. In that approach, noise correlation averaged over long time records was shown to converge toward the impulse response between the two receivers, each of which then had a role as a surrogate source in the medium.

As mentioned by Crandall in earlier studies [30, 31], the present report states that the CBE is observed on positions other than the source. For symmetry reasons, the CBE can be found on particular points outside the source, and also on particular lines and planes in two-dimensional (2-D) and 3-D cavities. This effect is investigated here in simple regular 1-D, 2-D and 3-D rectangular geometries, and also in circular and chaotic cavities, showing that all kinds of symmetry is transmitted to the CBE.

Finally, a coherent backscattering decrement has been described in the field of non-linear optics [132], and also in vibrations by Crandall [29]. This same effect is included here in the present report for cavities for which boundary conditions lead to anti-symmetric properties: in such reverberating systems, the points of silence can go down to -9 dB. Coherent backscattering is experimentally observed in a wave guide that is considered as a 1-D anti-symmetric cavity, with an enhancement observed on the source position and a decrement on its symmetric. Simulations and theoretical considerations confirm the decrement prediction of  $R = (\frac{1}{2})^d$ , with  $d = \{1, 2, 3\}$  as the dimensionality of the cavity.

## **2.2 The CBE in a 1-D cavity**

### *2.2.1 Experimental CBE in a 1-D bar*

A coherent backscattering experiment was conducted in a 1-D system. A duralumin bar was chosen with a 1 cm<sup>2</sup> section and a 90-cm length (Fig. 2.1a). This was suspended by elastic strings, and thus the boundary conditions are assumed to be free at both ends. Twenty-four accelerometers connected to the acquisition system were set as one every 3 cm along the bar. Accelerometer signals were acquired with a 50-kHz sampling frequency and normalized by the hammer source that was equipped with a force probe. The responses to 24 knocks with a 2-kHz central frequency and a bandwidth

ranging from 0.2 kHz to 4.0 kHz were recorded for the 24 different source positions. The pulse-like excitation delivered by the hammer gives a wave field  $\psi(S, M; t)$  between the source position  $S$  and each accelerometer position  $M$ .

The time integral of the square field is the energy  $I(S, M)$  :

$$I(S, M) = \int \psi^2(S, M; t) dt \quad (2.1)$$

As defined for the example in [36], a normalization procedure results in the enhancement factor  $R(M)$  investigated in this study:

$$R(M) = \frac{\langle I(S, M) \rangle_S}{\langle I(S, M) \rangle_{S, M \neq S}} \quad (2.2)$$

where the brackets in the numerator stand for a spatial average over the source positions  $S$ . In the denominator, the average is performed both on the source  $S$  and the receiver positions  $M \neq S$ .

The result of this computation is shown in Figure 2.1 b. An intensity enhancement is clearly apparent around  $x = 21$  cm. The experimental value  $R(S) = 1.4$  is in good agreement with another experiment with a bar (*cf.* chapter 1) and the theoretical CBE value of 1.5 that is expected in 1-D cavities. Here the important observation is that on the right-hand side of Figure 2.1 b, a second intensity enhancement is also visible, at around  $x = 69$  cm, which corresponds to the source position symmetric  $S^*$ . Its value is almost the same as the source enhancement. As for classical source enhancement, the symmetric enhancement appears only after a spatial averaging over  $S^*$ . The computation of the enhancement factor in the half of the bar containing  $S^*$  is performed by substituting  $S^*$  for  $S$  in the expression of  $R(M)$  :

$$R(M) = \frac{\langle I(S, M) \rangle_{S^*}}{\langle I(S, M) \rangle_{S^*, M \neq S^*}} \quad (2.3)$$

The difference between  $R(S^*)$  and  $R(S)$  accounts for the dissipation that is omitted in the theory, and also for the inevitable limitation of spatial sampling in the experiments. Note also that knocks are given using a hammer with a position precision of  $\pm 2$  mm. To perfectly control these latter pa-

rameters of the dissipation and source positions, a numerical experiment was conducted to confirm the experimental results. This was based on a finite difference simulation of the flexion wave equation in a bar. The input parameters, such as dimensions, sound speed in duralumin, and source central frequency, were chosen to be as close as possible to the experimental values. Ninety measuring points were set every centimeter. In this ideal experiment, averaging over source positions was not needed, as the self-averaging property provided by the large frequency bandwidth [103] was sufficient to obtain the enhancement factor defined as:

$$R(M) = \frac{\langle I(S, M) \rangle}{\langle I(S, M) \rangle_{M \neq S}} \quad (2.4)$$

As reported in the literature for long reverberating acoustic signals [36], the CBE appears from one realization with the source position set at  $x = 21$  cm. The result shown in Figure 1c has an intensity enhancement on the source position  $S$  and on the image source position  $S^*$ , with a common value  $R(S) = R(S^*) = 1.5$ . Consequently, the simulation fully confirms the experimental observation: the enhanced intensity is also present outside the source on the image source position  $S^*$  in symmetric cavities.

### 2.2.2 Theoretical CBE models

Two theoretical models are here proposed to strengthen our understanding of the CBE. The first is a ballistic approach that is based on the image method. In Figure 2.2 a, a 1-D cavity is represented by two walls  $W^a$  and  $W^b$ . A point source  $S$  emits a short pulse that is perfectly reflected by the walls. The reflected signals with respect to the cavity walls can be interpreted as images  $S_i$  of the actual source. Each image is associated to the images of the actual cavity in both directions. The construction of the total impulse response follows simple assumptions: a constant speed and delta function at emission. This is thus composed of the summation at any observation point  $M$  of the delayed pulses coming from the source images  $S_i$ : the CBE is then deduced from Eq. (2.4). The result in Figure 2.1 d shows an intensity enhancement of 1.5 at the source  $S$  and on its symmetric  $S^*$ . An interpretation in term of rays of equal paths is reported in the precedent chapter (*cf.*

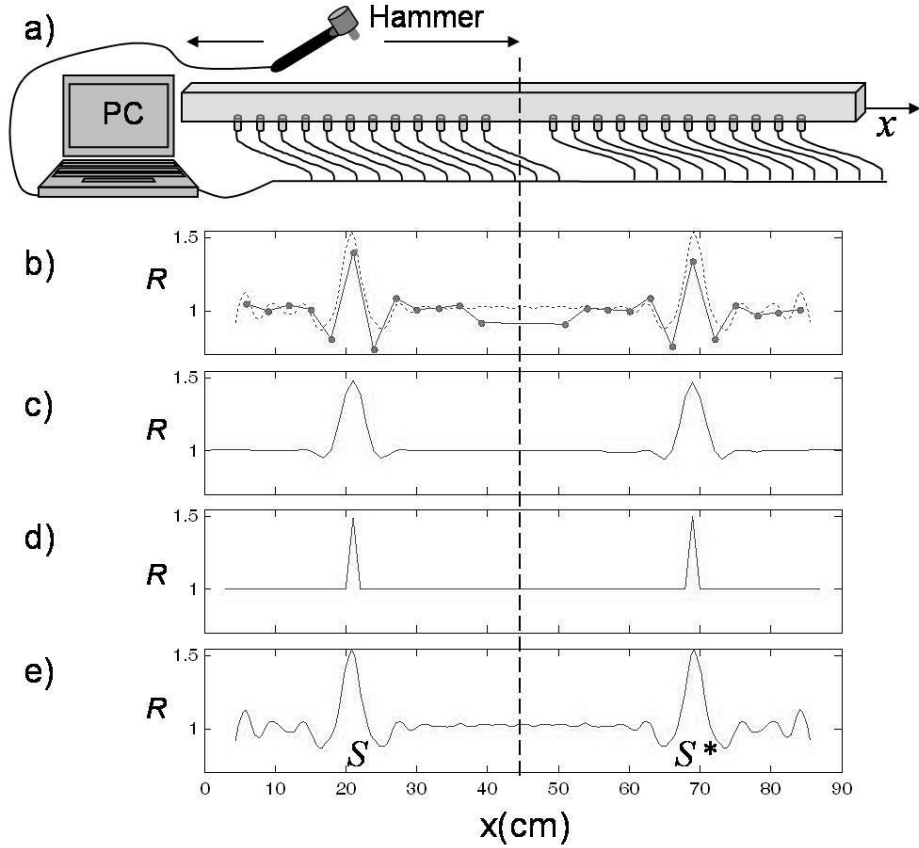


Figure 2.1: a) Experimental set-up, with 24 accelerometers set on the dur-alumin bar. The point source  $S$  is located at  $x = 21$  cm. b) The experimental data (filled circles) with enhancement factors of 1.40 and 1.34 on the source  $S$  and on its symmetric position  $S^*$ , respectively. Dashed line: curve from (e); see below. c) A finite difference simulation, and d) a theoretical approach based on the image method show the same results. The enhancement factors are in perfect agreement with theory:  $R(S) = R(S^*) = 1.5$ . e) The eigenmode approach (30 modes) gives:  $R(S) = R(S^*) = 1.54$ . For comparison, this curve is superimposed on the experimental results (dashed line) in (a). The presence of an enhancement on the symmetric of the source position has been experimentally and numerically observed, theoretical models confirm this result.

section 1.3) for the CBE at the source  $S$ . An equivalent interpretation is now given for the enhancement on its symmetric position  $S^*$  (Fig. 2.2b).

When a pulse is emitted from the source  $S$ , it propagates straight to  $S^*$ . This shortest path  $P_0 = (S, S^*)$  does not have any reciprocal path.

On the contrary, the second path, where the pulse is reflected once on wall  $W^a$ ,  $P_1^a = (S, W^a, S^*)$ , has the reciprocal path  $P_1^b = (S, W^b, S^*)$  of equal length. The constructive interference that is responsible for intensity enhancement thus occurs on the source symmetry position. Similarly, the third path  $P_2 = (S, W^a, W^b, S^*)$  does not have any reciprocal path, whereas  $P_3^a = (S, W^a, W^b, W^a, S^*)$  does, as  $P_3^b = (S, W^b, W^a, W^b, S^*)$ . A generalization leads to the following conclusion: only paths with an odd number of reflections have one reciprocal path. The opposite observation was made for the CBE at the source  $S$ : only paths with an even number of reflections had one reciprocal path. Nevertheless, for both points  $S$  and  $S^*$ , the following conclusion is reached: on average, two direct paths are associated with one single reciprocal path, which perfectly accounts for an enhancement factor of 1.5 at the source  $S$  and on its symmetry position  $S^*$ .

Furthermore, the method of images in a 1-D cavity gives a straightforward relationship between the impulse responses at the source  $x = x_0$  and on its symmetry position  $x = L - x_0$ . So except for a transient field, it can be shown that the two impulse responses are similar and are only delayed by  $\Delta t = L/c$ , for the travel time through the cavity of :

$$\psi(S, S^*; t) = \psi(S, S; t - \Delta t) + tr(S, S^*) \quad (2.5)$$

This expression comes from the geometrical relationship suggested in Figure 2.2 a, where the ray paths are :

$$\begin{cases} P(S^*, S_1^b) = x_0 + (L - x_0) = L \\ P(S^*, S_1^b) = (L - x_0) + L + x_0 = 2L \end{cases} \quad (2.6)$$

This expression can be generalized for any number of reflected rays:

$$P(S^*, S_i^{b,a}) = P(S^*, S_{i+1}^{b,a}) - L \quad (2.7)$$

The transient field concerns only the first three rays, and it can be written as :

$$tr(S, S^*) = \delta(t, SS^*) + \delta(t, SS_1^a) + \delta(t, SS_1^b) \quad (2.8)$$

This contributes modestly to the total intensity, and it can be ignored compared to  $G(S, S; t - \Delta t)$ . As a consequence, the same intensity enhancement is found on the source and its symmetric position.

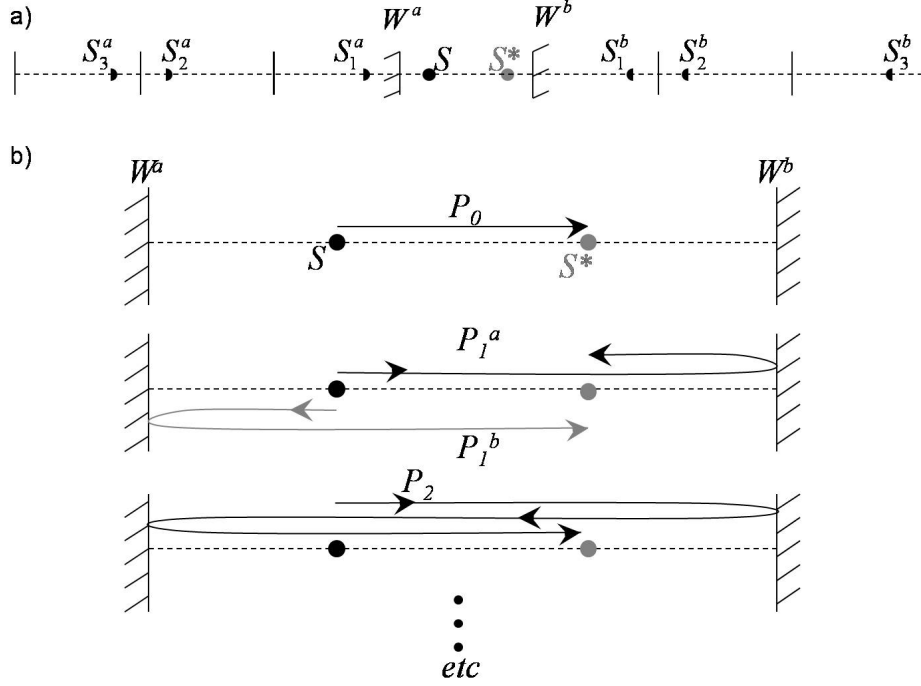


Figure 2.2: a) The method of images, and b) the ray-based interpretation of the enhanced intensity at  $S^*$  the symmetric of the point-source  $S$  in a 1-D cavity. Similarly to the source where the paths with an odd number of reflections have a reciprocal counterpart (*cf.* chapter 1), on  $S^*$  the paths with an even number of reflections have a reciprocal counterpart, which logically results in an enhancement factor of 1.5.

A second theoretical model based on eigenmode decomposition is now introduced. This has the advantage of accounting for the finite-frequency spectrum in our experiments, and it leads to the diffraction-limited spatial shape of the CBE. In this model, the impulse response  $\psi$  is developed as a series expansion. A vectorial formalism is used to anticipate a dimension rise, and  $S$  and  $M$  are then replaced by  $\vec{r}_0$  and  $\vec{r}$  :

$$\psi(\vec{r}, \vec{r}_0; t) = H(t) \sum_N \frac{1}{\omega_N} \phi_N(\vec{r}) \phi_N(\vec{r}_0) \cos(\omega_N t) \quad (2.9)$$

The square of the impulse response can be broken down into two symmetric and crossed terms :

$$\begin{aligned} \psi^2(\vec{r}, \vec{r}_0; t) = & H(t) \sum_n \frac{1}{\omega_N^2} \phi_N^2(\vec{r}) \phi_N^2(\vec{r}_0) \cos^2(\omega_N t) \times \\ & \sum_N \sum_{M \neq N} \frac{1}{\omega_N \omega_M} \phi_N(\vec{r}) \phi_N(\vec{r}_0) \cos(\omega_N t) \phi_M(\vec{r}) \phi_M(\vec{r}_0) \cos(\omega_M t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Since the intensity results from the time integration of the squared impulse response, the crossed term vanishes. Given that  $\forall N, \int_0^\infty \cos^2(\omega_N t) dt \simeq 1/2$ , the intensity only depends on the spatial shape of the modes:

$$I(\vec{r}, \vec{r}_0) = \sum_N \frac{1}{\omega_N^2} \phi_N^2(\vec{r}) \phi_N^2(\vec{r}_0) \quad (2.11)$$

For a 1-D cavity with length  $L$ ,  $\vec{r}$  is replaced by its norm  $x$ . In the case of flexion waves in a bar with free boundaries at both ends, the hyperbolic mode shapes near the edges [109] are neglected:

$$\phi_n(x) \simeq \cos(k_x x), \quad \text{with} \quad k_x = \pi n/L \quad (2.12)$$

The amplitude of each mode  $\frac{1}{\omega_n^2}$ , is included in a factor  $\alpha_n$  added in Eq. (2.11) to account for the experimental spectrum of the emitted signal<sup>1</sup>. The intensity is thus:

$$I(\vec{r}, \vec{r}_0) = \sum_n \alpha_n \cos(k_x x) \cos(k_x x_0) \quad (2.13)$$

The computation of Eq. (2.13) was conducted for 30 modes. Then, the enhancement factor was computed as described in Eq. (2.4). The enhancement shown in Figure 2.1 e is in agreement with the experimental data, the finite difference simulation, and the method of images. An intensity enhancement of 1.5 is observed on the source and on its image  $S^*$ . A straightforward interpretation follows from the symmetry of each eigenmode and a trigonometric

---

1.  $\alpha_n$  is computed to fit the experimental frequency envelope.



relation:

$$\phi_n(L - x) = \cos(n\pi - k_x x) = -\cos(k_x x) = -\phi_n(x) \quad (2.14)$$

Given that  $\phi_n^2(S) = \phi_n^2(S^*)$ , the intensity enhancement on the sources  $S$  and on its symmetric position  $S^*$  are equal, leading to  $R(S) = R(S^*)$ .

### **2.3 The CBE in 2-D and 3-D cavities**

#### *2.3.1 Rectangular (2-D) and parallelepipedic (3-D) cavities*

The image method and the eigenmode approach were used in a rectangular plate to show the impact of symmetry on the CBE. For the image method, a 2-D plane is constructed with the mirror images of the actual source with respect to the four cavity walls (*cf.* chapter 1 for an illustration). To reconstruct the impulse response from the source  $S$  to any point  $M$  of the cavity, a circular wave front mimicking the wave propagation in the image medium is constructed. This is centered on the observing point  $M$ , and its radius  $MS_i$  grows with time  $t_i$  according to the simple linear law of  $MS_i = ct_i$ , where the coefficient  $c$  is the speed of sound. One pulse is counted every time a source image  $S_i$  coincides with the circle. Multiplying this pulse by an amplitude  $A$  allows us to account for geometrical spreading in the first approximation of (*cf.* Annexe C):

$$\psi(S, M; t) = A \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t, MS_i) \quad (2.15)$$

Then the enhancement factor  $R(x, y)$  that was defined in Eq. (2.4) is computed using 50,000 images. This is represented by 1,500 points of a 53x29 cm<sup>2</sup> cavity (Fig. 2.3 a). The first observation is that the enhancement factor at the source,  $R(S) = 2.29$ , is close to the theoretical  $(\frac{3}{2})^2$ . The second observation is that the same intensity enhancement is observed on three points of  $S^*$  that represent the symmetric of the source with respect to the symmetry axis of the cavity. Finally, the third observation is the presence of intensity enhancement on the lines already reported by Crandall [30]. The four horizontal and vertical enhancement lines connect the source  $S$  to the images  $S^*$ . They are expressions of plane waves trapped within the one-dimension-only

of the cavity and thus result in an enhancement factor of 1.5, as in a 1-D cavity. Logically, their four intersections,  $S$  and  $S^*$ , have an enhancement factor of  $1.5^2 = 2.25$ .

With the eigenmode approach a rectangular plate with pinned boundaries supports the following eigenmodes [109] :

$$\phi_{mn}(x, y) \simeq \sin(k_x x) \sin(k_y y), \quad \text{with} \quad k_x = \pi n/L_x \quad k_y = \pi m/L_y \quad (2.16)$$

Computation from Eq. (2.11) of the enhancement factor in a 53x29cm<sup>2</sup> was carried out for the first 200 modes,  $n = m = 14$ . The map of the enhancement factor (Fig. 2.3 b) shows the same global features as the map obtained from the method of images. Four 1.5 enhancement lines crossing at four 2.25 enhancement points, one of which is the source point  $S$ . The noticeable difference is the out-of-focus appearance of the modal approach compared to the method of image. However, it logically follows the spectral properties of each model: the image method is a ray-based method with infinitely high frequency components, whereas the eigenmode approach behaves as a band-pass filter.

The case of a parallelepipedic cavity is now to be considered. The eigenmodes in a 3-D cavity with rigid boundaries are easily generalized from Eq. (2.16):

$$\phi_{mnp}(x, y, z) \simeq \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z), \quad \text{with} \quad k_z = \pi p/L_z \quad (2.17)$$

Computation of Eq. (2.17) was performed using the first 2,000 eigenmodes. A 3-D representation of the resulting enhancement factor is shown in Figure 2.4 a. At the source, an enhancement factor of 3.32 was seen to be in good agreement with the theoretical enhancement factor  $R = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3.37$ . Furthermore, the same value is encountered on seven other points. A similar result is obtain with the image method and 80,000 images (Fig. 2.4 b) with an enhancement of 3.37 on the source. For the sake of clarity, a spherical portion was cut off, and only six of these seven points are visible, as the black dots on the 3-D representation in Figure 2.4. Similar to the 2-D rectangle case, where

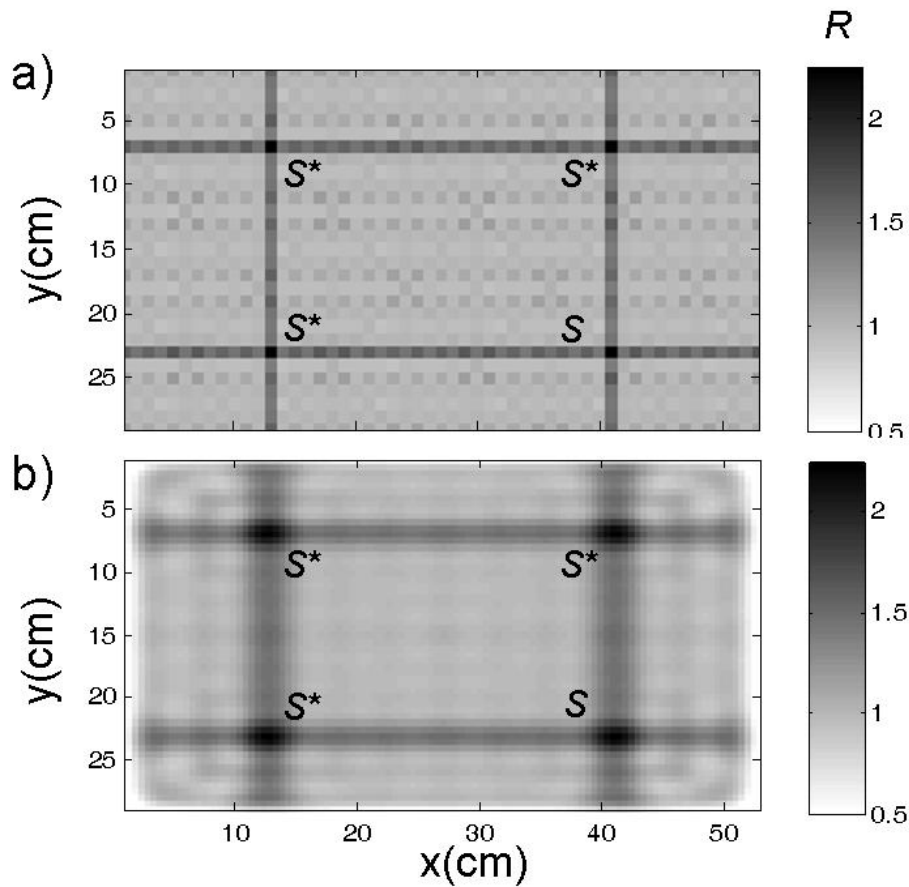


Figure 2.3: Enhancement factor in a 53x29 cm<sup>2</sup> rectangle cavity. The coordinates of the point source  $S$  are  $x_0 = 41$  cm,  $y_0 = 23$  cm. a) The image method used 50,000 images, and b) the eigenmode approach used 200 modes. The enhancement factors at the source and its images are  $R(S) \simeq R(S^*) = 2.29$  and  $R(S) = R(S^*) = 2.23$ , respectively. Besides the enhancement on the source position close to the theoretical 2.25, the same enhancement is observed on the 3 symmetric points of the source. Moreover, both methods show enhanced intensity lines as bright as the enhancement in 1-D cavities:  $R \simeq 1.5$ .

enhancement intensity lines were observed, enhancement intensity planes exist in a parallelepipedic cavity (Fig. 2.4), which has not been described yet in the literature. These are the expression of plane waves trapped within the one-dimension-only of the cavity, and thus they have a 1-D enhancement factor of 1.5. To summarize what is visible in Figure 2.4 : six planes with an

enhancement factor of 1.5 intersect 12 lines with an enhancement factor of 2.25 which in turn cross eight points with an enhancement factor of 3.375. In actual fact, the average enhancement factors estimated on planes, lines and points are 1.56, 2.33 and 3.32, respectively, which are close to the theoretical enhancements predicted at the source for a 1-D, 2-D and 3-D cavities.

### 2.3.2 Circular (2-D) cavity

Considering regular cavities, circular cavities have a special behaviour since the concentration of wave energy at the center complicates the observation of the CBE. However, as we show in this section, the CBE can be interpreted in the framework of the regular cavities introduced in previous sections. The eigenmodes of a cylindrical membrane with polar coordinates can be written as [92] :

$$\phi_{mn}(x, y) \simeq \cos(m\theta) J_m\left(\frac{\pi\beta_{nm}}{a}r\right) \quad (2.18)$$

where  $a$  is the cavity diameter,  $J_m$  are the Bessel functions of the first kind, and  $\beta_{nm}$  is defined as a function of integers  $n$  and  $m$  ( $\beta_{nm} \simeq n + m/2 - 1/4$ ). The enhancement factor represented in Figure 2.5 is computed from 900 eigenmodes in a frequency bandwidth ranging from 150 Hz to 6,000 Hz, and considering a wave velocity of 100 m/s. The source  $S(r_0, \theta_0)$  is set at a distance from the center where the average geometric intensity variation does not mask the CBE. Indeed, the intensity diverges as  $1/r^2$  at the centre. Consequently, the central part of the enhancement factor was cut-off and it appears as a black disk. This part was also omitted in the normalization computation of the enhancement factor in Eq. (2.4). The enhancement factor observed on the source is 2.21, close to the  $R = (\frac{3}{2})^2$  that is expected for rectangles. As a first approximation, the Bessel function can be approached as a sine function as  $J_m = \sin(\pi\beta_{nm}r/a)$ . This approximation is valid when the argument is not too small, which is generally the case, except for the disk center and for the first eigenmodes. As the eigenmodes are approximated by a product of a sine, it follows that the intensity-enhancement theory for rectangular cavities logically applies to circular cavities. However, the

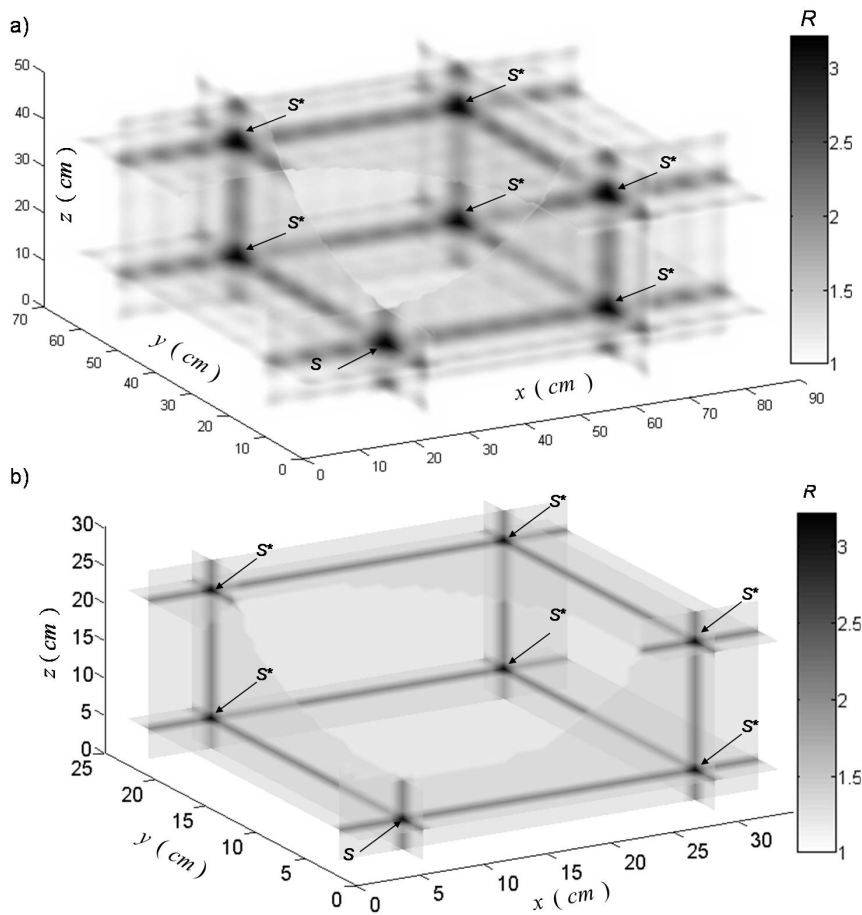


Figure 2.4: a) Enhancement factors in a  $90 \times 70 \times 50$  cm<sup>3</sup> parallelepipedic cavity. The coordinates of the source  $S$  are  $x_0 = 25$  cm,  $y_0 = 15$  cm,  $z_0 = 13$  cm. The first 2,000 modes were used in the computation of the enhancement factors. b) In a  $34 \times 25 \times 27$  cm<sup>3</sup> parallelepipedic cavity with  $S$  on  $x_0 = 6$  cm,  $y_0 = 3$  cm,  $z_0 = 4$  cm, 80,000 images were used to compute the enhancement factor. In this 3-D representation, a sphere has been cut-off for the sake of clarity. Enhancement factor on the seven symmetric points  $S^*$  and at the source  $S$  are equals to 3.32 and 3.37, for respectively modes and images approach (almost equal to the theoretical value 3.37). Enhancement factors on enhanced intensity planes and lines are equal in a tenth near to the theoretical enhancements predicted at the source for a 1-D, 2-D (1.5, 2.25). As well as enhancement point is observed on the source in any cavity, spatial symmetries creates enhancement on lines and planes.

symmetries are radically different. The arguments of the eigenmode functions involve  $\theta$  and  $r$  as variables. Thus, the enhanced intensity lines that issue from the variation of  $\theta$  give a circle, whereas the enhanced intensity lines that issue from the variation of  $r$  give a diameter. These lines have an enhancement factor of 1.49 and they intersect on two points: the source  $S$  and its symmetric  $S^*$ , where  $R = 2.21$ . These data obtained in a circular cavity are fully compatible with the observations made in rectangular cavities.

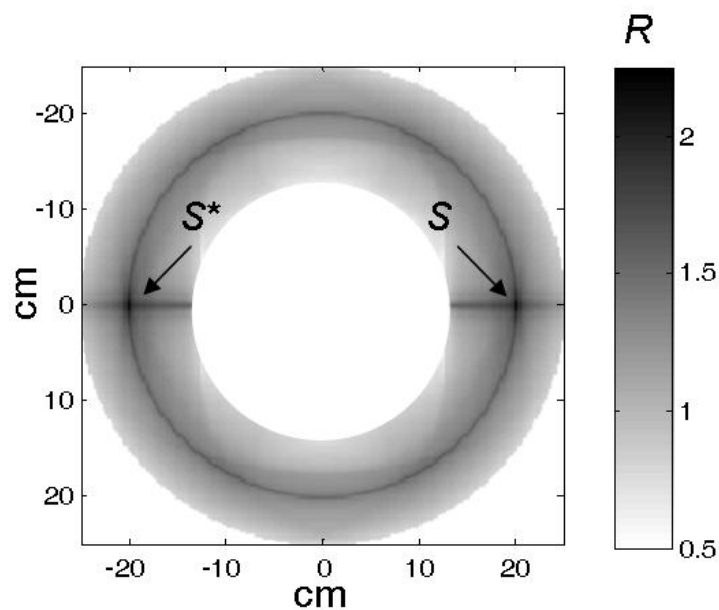


Figure 2.5: Enhancement factor in a 0.25-m radius circular membrane. The source is located on the horizontal line, at 0.2 m from the center. Nine-hundred eigenmodes were used to compute the enhancement factor. On the source  $S$  and its symmetric point  $S^*$ , the enhancement factor is  $R(S) = R(S^*) = 2.21$ . The enhanced intensity lines (black circle and diameter) have an enhancement factor of 1.49. The central disk has been omitted, since this specific geometry concentrates the average intensity, which diverges on the center. Eventhough, the symmetry implies an enhancement outside the source : on the symmetric point of the source, on a diameter and a circle.

### 2.3.3 Symmetric (2-D) chaotic plate

A chaotic plate with a symmetry axis is now investigated through experimental and numerical simulations. This is made of a 4-mm thick duralumin

plate, and its shape, as a 16-cm radius disk with one segment cut-off, is widely known for its chaotic properties [36] (Fig. 2.6). An accelerometer was placed arbitrarily on one side of the symmetry axis. To avoid losses and energy leak, two precautions were taken. First, the plate was suspended by a string. Secondly, only one accelerometer sampled at 100 kHz was glued onto the plate. At 6 mm, its size was small compared to the average flexion wavelength ( $\sim 10$ cm). Sixty hammer knocks with a 5-kHz central frequency and a bandwidth ranging from 0.5 kHz to 10.0 kHz were given on the other face, on the nodes of a pair of  $5 \times 6 \text{cm}^2$  grids located on either side of the symmetry axis. According to the reciprocity principle, the accelerometer can be considered as a point source and the successive hammer-knock positions as measuring points. With this experimental set-up, only one accelerometer was used, to limit the energy leak. Despite this, only 10 modes could be observed, and the quality factor was estimated to be  $Q = 100$ . The enhancement factor was then measured and mapped (Fig. 2.6 a). In addition, a numerical computation of the enhancement factor was performed using the Solidwork<sup>®</sup> professional finite-element software. The structural parameters were chosen as close as possible to the experimental values. The first 30 eigenmodes were used to reconstruct a map of the enhancement factor, with a resolution of 7,000 pixels (Fig. 2.6 b). The two images in Figure 2.6 show that the enhancement factor is symmetric and that it reaches two maxima, on the source  $S$  and on its symmetric position  $S^*$ . These values are perfectly symmetric for the simulation, as  $R(S) = R(S^*) = 2.27$ , and they differ slightly from the experimental system, of  $R(S) = 1.99$  and,  $R(S^*) = 1.63$  where they were underestimated. There are two reasons that might be at the origin of these differences. First, losses due to radiation of the flexion wave in the air cannot be avoided. This dissipation probably introduces a symmetry breaking between the area with a source and its image without a source. Secondly, the hammer knocks were given by an operator, and thus the impact precision was equivalent to a  $4\text{-mm}^2$  surface. Here it can be pointed out that the enhancement factor found with the simulation in a 2-D chaotic cavity is in agreement with the theoretical prediction developed for a rectangular cavity,  $R = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ . This surprising result was observed experimentally in the ultrasonic domain by De Rosny *et al.* [33, 35]. However, higher values are

found in the literature from 2-D simulations, as  $R = 2.5$  [73],  $R = 2.87$  [74],  $R = 3.0$  [139]. This problem-dependant nature of  $R$  clearly requires further investigation, but in this case, the limited number of eigenmodes (30) compared as the 200 used by Langley [74] for exemple, explain the low value of enhancement.

#### 2.4 *The CBE in anti-symmetric cavities*

So far, only cavities with unique boundary conditions, be they free or fixed, have been considered. In this last section, consideration is given to anti-symmetric cavities that result from mixed boundary conditions. As a simple illustration, a 1-D anti-symmetric cavity would be characterized by unit reflection coefficients  $r$  with opposite signs at its two ends. From the experimental point of view, a flexion wave in a bar is not a good candidate for such a study, since mixed boundary conditions imply control of both the force and the torque. The simplest anti-symmetric 1-D cavity would be a water column that is free on the surface and has a high impedance at the bottom. The time-domain response of a pulse propagating in such a cavity is illustrated in Figure 2.7 a. The Dirac impulse sent from the central point of the column travels in both directions; it is then reflected on the boundaries, and its echoes go back to interfere at the source position, and so on. To compute the enhancement factor, a time integration is performed, as in Eq. (2.1), which gives the energy at each point. Practically speaking, for experimental reasons, the 1-D anti-symmetric cavity was replaced by an equivalent 2-D wave guide (Fig. 2.7 b). Two 64-transducer linear arrays (with a  $\lambda/2 = 0.75$  mm pitch at 1 MHz) were immersed on both sides of a 50-mm deep, 1.5-m long shallow water channel. A 1-MHz pulse was sent from the transducer located 25 mm above the steel bottom. The pulse is thus trapped between a water-steel interface and a water-air interface. As the first approximation, these boundaries impose null particle velocity and null pressure for ultrasound. The reflection coefficients are thus  $r \simeq 1$  and  $r \simeq -1$ , respectively, which confers an anti-symmetric property to the cavity. The ultrasonic pulse is then measured by the second array, at the other end of the wave guide. Multi-channel, 20-MHz sampling rate electronic acquisition was



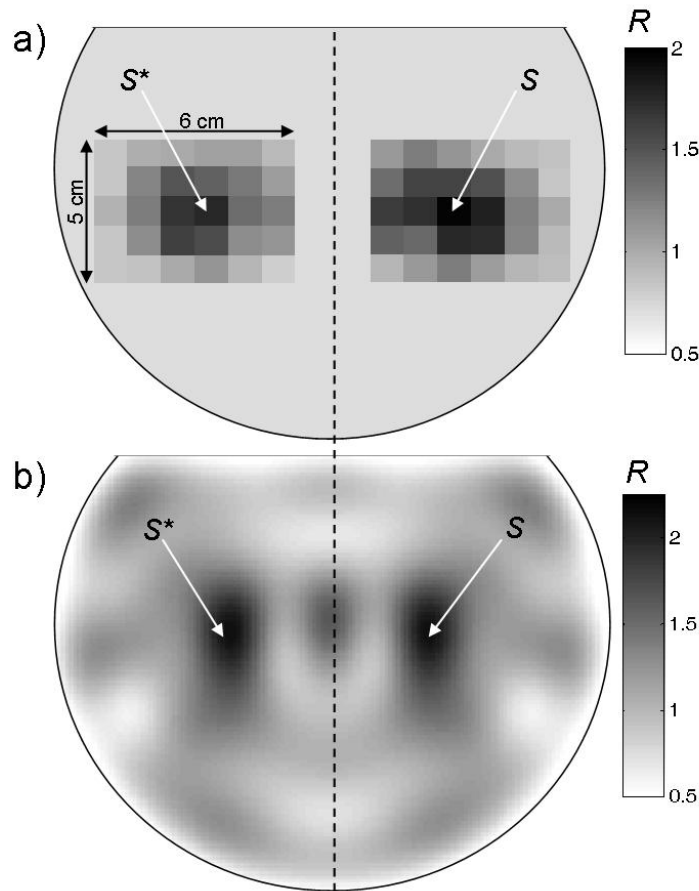


Figure 2.6: Enhancement factor in a symmetric chaotic cavity (16-cm radius, 4-mm thickness). The axis of symmetry is shown by the dashed line. (a) Experimental estimation of the enhancement factor on two 5x6 cm<sup>2</sup> grids located on both sides of the symmetry axis, as shown in the gray scale. The maximum is at the source,  $R(S) = 1.99$ . The second maximum is at the symmetric points  $S^*$ ,  $R(S^*) = 1.63$ . (b) Similar results for the finite-element software (Solidworks<sup>®</sup>) using 30 modes ranging from 1 kHz to 20 kHz. Enhancement factor at the source and its symmetric points is  $R(S) = R(S^*) = 2.27$ , close to the 2.25 value predicted for a rectangle. This experiment, confirmed by simulation, demonstrates that even in a chaotic cavity, the spatial symmetry induces an enhancement on the symmetric of the source.

used to record the ultrasonic signals measured on the 64-transducer receiver array. The total observation time ( $\sim 350 \mu\text{s}$ ) was limited to avoid horizontal reverberations between the two arrays. A detail of the experimental spatial-

temporal pressure field is shown in Figure 2.7 b. Eighteen reflections of a pulse emitted from the transducer array are visible. The free propagation in the horizontal dimension implies that the experiment can be interpreted as the propagation of an ultrasonic pulse in a 1-D anti-symmetric cavity. Indeed, the arrival-time pattern of the echoes in the wave guide can still be seen to be similar to a 1-D cavity with: (1) a time translation, due to the source-array–receive-array distance; (2) a time dilatation, due to the angular aperture; and (3) geometrical spreading, due to the 2-D dimensions of the wave guide. These differences are removed by the time integration in Eq. (2.1), when the total intensity measured on the receiver array for receiver depths  $M$  is relative to source depths  $S$  on the source array.

As in the first experimental system, an average on the source position is performed through Eqs. (2.2) and (2.3). The experimental enhancement factor is shown in Fig. 2.6 c. At the source  $S$  that is located at  $x = 17$  mm above the steel bottom, an enhancement factor of 1.5 confirms the 1-D character of the wave guide perfectly. At its anti-symmetric position,  $\overline{S^*}$ ,  $x = 47$  mm, a coherent backscattering decrement is clearly visible:  $R(\overline{S^*}) = 0.64$ .

To compare these theoretical and experimental wave-guide systems, the models described in section 2.2.2 are used. Indeed, the eigenmode approach perfectly accounts for anti-symmetric cavities. The  $n^{\text{th}}$  normal mode for the 1-D anti-symmetric cavity is:

$$\phi_n(x) \simeq \cos(\overline{k_x x}), \quad \text{with} \quad \overline{k_x} = \pi(2n - 1)/L \quad (2.19)$$

The intensity is deduced from Eq. (2.11) using 20 normal modes and introducing a factor that takes into account the experimental spectrum of the emitted signal. The resulting enhancement factor shown in Figure 2.7 d has the same shape as in the experimental system. From a quantitative point of view, the intensity enhancements at the source  $S$  are equal, at 1.5. The slight difference observed at the anti-symmetric position  $\overline{S^*}$ , with the theoretical and experimental enhancement factors of 0.5 and 0.64, respectively is attributed to the experimental spatial sampling, which was limited by the 0.75-mm distance between the transducers of the array. The image method can be modified slightly to allow for the anti-symmetric property of a 1-D

cavity. Unlike Eq. (1.10), which is valid for a cavity with similar boundary conditions, negative delta functions must now be present in the expression of the impulse response. These come from the reflection of pulses on walls with different boundary conditions. If the wall  $W^a$  in Figure 2.2 a is chosen with a negative reflection coefficient, the following impulse response is deduced:

$$\psi(S, M; t) = \delta(t, MS) + \sum_{i=1}^N (-1)^i [\delta(t, MS_{2i-1}^a) - \delta(t, MS_{2i-1}^b) + \delta(t, MS_{2i1}^a) + \delta(t, MS_{2i}^b)] \quad (2.20)$$

The results for the enhancement factors (Fig. 2.7 e) are obtained by applying this impulse response Eq. (2.20) to Eqs. (2.1) and (2.4). As in the experimental situation, an enhancement factor of 1.5 is found at the source location  $S$ . On the anti-symmetric point  $\bar{S}^*$ , a coherent backscattering decrement of  $R = 0.5$  is seen; this decrement also has a simple ballistic interpretation. From section 2.2.2, it was concluded that paths with an even number of reflections (last two terms in Eq. 2.20) give interference at the source, while an odd number of reflections (first two terms in Eq. 2.20) gives interference at the symmetric of the source. As a consequence, pairs of pulses at  $S$  have the same sign and give constructive interference, which is responsible for the enhancement factor of 1.5. Then pairs of pulses at  $\bar{S}^*$  have an opposite sign, which results in destructive interference, and finally to an enhancement factor  $R = 0.5$ , which being smaller than 1 leads to a decrement backscattering effect.

This last section is dedicated to the study of 2-D and 3-D anti-symmetric regular cavities through the eigenmode approach defined in section 2.2.2. The mode shapes in the 2-D rectangle and in the 3-D parallelepiped can be written as, respectively:

$$\phi_{mnp}(x, y, z) \simeq \sin(\bar{k}_x x) \sin(\bar{k}_y y), \quad \text{with} \quad \bar{k}_{x_i} = \pi \frac{(2N_i - 1)}{2L_i} \quad (2.21)$$

$$\phi_{mnp}(x, y, z) \simeq \sin(\bar{k}_x x) \sin(\bar{k}_y y) \sin(\bar{k}_z z), \quad \text{with} \quad \bar{k}_{x_i} = \pi \frac{(2N_i - 1)}{2L_i} \quad (2.22)$$

The enhancement factors in Figure 2.8 are deduced from Eqs. (2.21) and

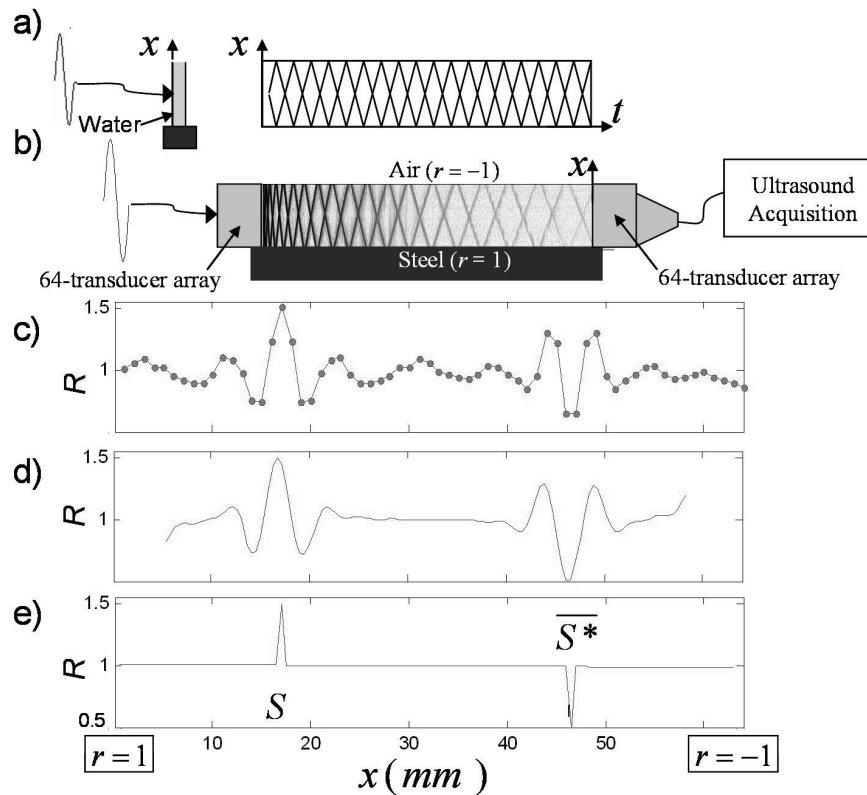


Figure 2.7: The enhancement factor in a 1-D anti-symmetric cavity. a) Ideal 1-D anti-symmetric cavity and its spatial-temporal response to pulse emission. b) The experimental set-up is a water channel with a depth of 64 mm, a steel bottom, an air top, and a pair of 64-transducer arrays at its two ends. c) The experimental data (filled circles) with the source  $S$  set at  $x = 17$  mm depth gives the enhancement factors of  $R(S) = 1.51$ ,  $R(\overline{S^*}) = 0.64$ . d) The same results were obtained with the eigenmode approach, using the first 20 eigenmodes. The enhancement factors are  $R(S) = 1.5$ ,  $R(\overline{S^*}) = 0.5$ . (e) The same values were found using the image method. For a cavity with anti-symmetric boundary conditions, the presence of a decrement on the symmetric of the source position has been experimentally observed, theoretical models confirm this result.

(2.22), together with Eq. (2.11). The first 200 and 2,000 modes were needed for the 2-D and 3-D cavities, respectively. At the anti-symmetric point  $\overline{S^*}$ , the values of 0.25 in 2-D and 0.13 in 3-D were found. At the same time, a whole collection of enhanced intensity planes, lines and points are visible.

The most striking result is that zones of noise and silence ranging from 0.13 to 3.375 exist when a pulse is sent in a reverberant parallelepipedic cavity. For such anti-symmetric rooms, the maximum acoustic contrast reaches 14 dB. These zones arising from pulsed emissions are source-position dependent.

To explain these data quantitatively, an analytical expression of the coherent backscattering decrement on the symmetric position of the source is now given as a function of the cavity dimension. The reasoning carried out is the same as in the previous chapter (*cf.* chapter 1), but for the broad band case. The starting point is the enhancement factor as defined in Eq. (2.2) for source  $S$  and image points, and the expression of intensity from Eq. (2.11):

$$\begin{aligned} R(\overline{S^*}) &= \frac{\langle I(S, \overline{S^*}) \rangle_{\overline{S^*}}}{\langle I(S, M) \rangle_{\overline{S^*}, M \neq \overline{S^*}}} \\ &= \frac{\langle \sum_N \frac{1}{\omega_N^2} \phi_N^2(\vec{r}_0^*) \phi_N^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \sum_N \frac{1}{\omega_N^2} \phi_N^2(\vec{r}) \phi_N^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

The brackets represent a spatial integration over the cavity that can be interchanged with the modal summation:

$$R(\overline{S^*}) = \frac{\sum_N \frac{1}{\omega_N^2} \langle \phi_N^2(\vec{r}_0^*) \phi_N^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}}{\sum_N \frac{1}{\omega_N^2} \langle \phi_N^2(\vec{r}) \phi_N^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} \quad (2.24)$$

At the denominator,  $\vec{r}$  and  $\vec{r}_0$  are two independent variables, after simplification by  $1/\omega_N^2$  the expression becomes:

$$R(\overline{S^*}) = \frac{\sum_N \langle \phi_N^2(\vec{r}_0^*) \phi_N^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}}{\sum_N \langle \phi_N^2(\vec{r}) \rangle_{\vec{r}}} \quad (2.25)$$

The expression of the normal mode of the 1-D cavity is given in Eq. (2.19), as applied to  $\overline{S^*}$ , which gives:

$$\phi_n(L-x) = \sin(\overline{k_x}(L-x)) = (-1)^{n+1} \cos(\overline{k_x}x) \quad (2.26)$$

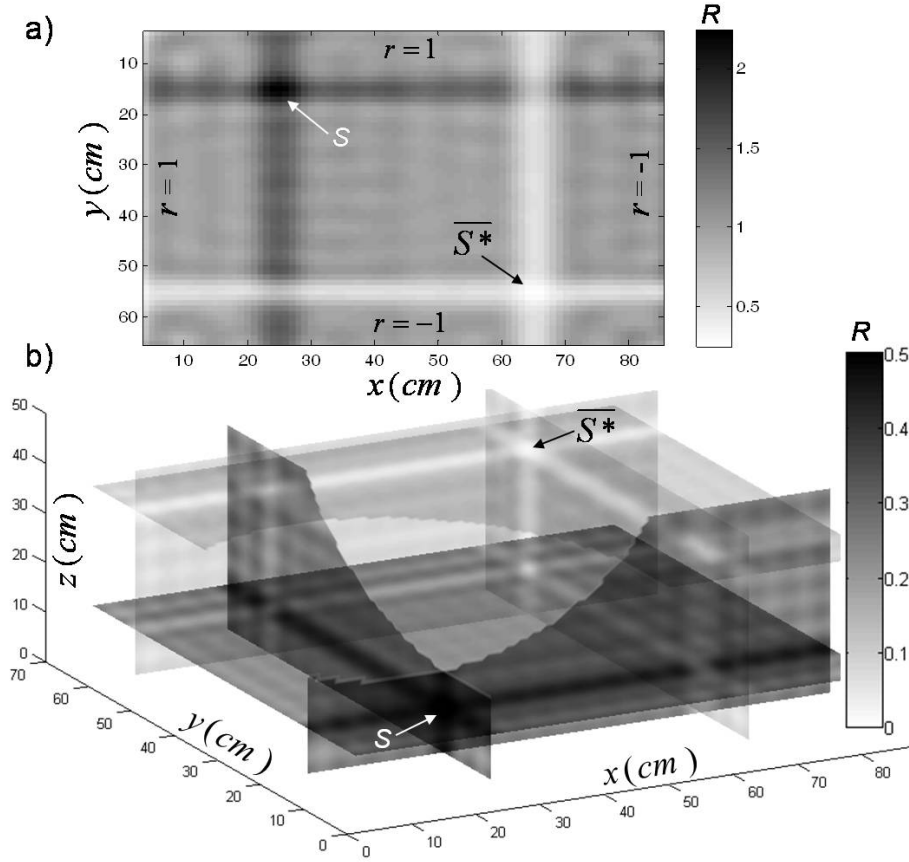


Figure 2.8: Enhancement factor computed with the eigenmode approach in 2-D and 3-D anti-symmetric cavities. a) Computation with the first 200 eigenmodes of an anti-symmetric rectangle. The enhancement factors are  $R(S) = 2.25$ ,  $R(\overline{S^*}) = 0.25$ . b) In a parallelepiped, 2,000 modes were needed. The reflection coefficients are  $r = 1$  below and at the front side, and  $r = -1$  above and at the back side. The enhancement factors are  $R(S) = 3.31$ ,  $R(\overline{S^*}) = 0.13$ . For sake of clarity, a sphere has been cut-off and the color scale has been optimized for low intensities. Estimations of the enhancement factors at the source  $S$  are close to the theoretical prediction as in the symmetric cavities (2.25 and 3.37 respectively in 2-D and 3-D). The decrements at the anti-symmetric position are equals to the analytical computation:  $(\frac{1}{2})^2 = 0.25$  in 2-D and  $(\frac{1}{2})^3 = 0.125$  in 3-D. Enhancement factors on lines and planes are detailed in table 2.1.

Including Eqs. (2.19) and (2.26) in the enhancement factor, it follows that:

$$R(\overline{S^*}) = \frac{\sum_n \langle \cos^2(\overline{k_x x}) \sin^2(\overline{k_x x}) \rangle_x}{\sum_n \langle \sin^2(\overline{k_x x}) \rangle_x^2} \quad (2.27)$$

A trigonometric computation gives the same ratio for modes:

$$\forall n \in \mathbb{N}^{+*}, \frac{\langle \cos^2(\overline{k_x x}) \sin^2(\overline{k_x x}) \rangle_x}{\langle \sin^2(\overline{k_x x}) \rangle_x^2} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2} \quad (2.28)$$

Finally, the enhancement factor on  $\overline{S^*}$  in a 1-D anti-symmetric cavity :  $R(\overline{S^*}) = 1/2$ . This value is in perfect agreement with the experimental observations reported in Figure 2.7. In 2-D, the use of normal modes in rectangles, as defined by Eq. (2.21) put into Eq. (2.25) and after similar computation as in 1-D, gives the following enhancement factor :

$$R(\overline{S^*}) = \frac{\sum_{m,n} \langle \cos^2(\overline{k_x x}) \sin^2(\overline{k_x x}) \cos^2(\overline{k_y y}) \sin^2(\overline{k_y y}) \rangle_{x,y}}{\sum_{m,n} \langle \sin^2(\overline{k_x x}) \sin^2(\overline{k_y y}) \rangle_{x,y}^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (2.29)$$

In 3-D, the same computation for a parallelepipedic cavity (Eq. 2.22) gives :

$$R(\overline{S^*}) = \frac{\sum_{m,n,p} \langle \cos^2(\overline{k_x x}) \sin^2(\overline{k_x x}) \cos^2(\overline{k_y y}) \sin^2(\overline{k_y y}) \cos^2(\overline{k_z z}) \sin^2(\overline{k_z z}) \rangle_{x,y,z}}{\sum_{m,n,p} \langle \sin^2(\overline{k_x x}) \sin^2(\overline{k_y y}) \sin^2(\overline{k_z z}) \rangle_{x,y,z}^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad (2.30)$$

As with the enhancement factor predicted at the source in a regular cavity, a dimensional dependence of the coherent decrement intensity is predicted at the anti-symmetric position of the source, according to  $R = \left(\frac{1}{2}\right)^d$ , with  $d=1, 2$  or  $3$  as the dimensions of the cavity. As for the case of symmetric 3-D cavities, where planes with 1-D enhancement factors intersect lines with 2-D enhancement factors, which in turn cross onto points with 3-D enhancement factors, anti-symmetric cavities have combinations of planes, lines and points that involve enhancement or decrement factors. As a result, the values allowed for the enhancement factor are more numerous and explain the complexity seen in Figure 2.8. These values are given in Table 2.1.

$R \neq 1$	2-D rectangle			3-D parallelepiped			
Points	$(1/2)^2$	$(1/2)(3/2)$	$(3/2)^2$	$(1/2)^3$	$(1/2)^2(3/2)$	$(1/2)(3/2)^2$	$(3/2)^3$
Lines	$(1/2)$	$(3/2)$		$(3/2)$	$(1/2)(3/2)$		$(3/2)^2$
Plans	$\emptyset$			$(1/2)$		$(3/2)$	

Table 2.1: Values of the enhancement factors  $R$  that differ from 1 on particular points, planes and lines of rectangular (2-D) and parallelepiped (3-D) anti-symmetric cavities.

## 2.5 Conclusion

In conclusion, the experiments and simulations reported here show that symmetry properties of a regular cavity can be responsible for the presence of the CBE at points different from the source. Furthermore, lines and planes of intensity enhancement are observed in 2-D and 3-D rectangular cavities. Finally, mixed boundary conditions at the cavity interfaces produce a coherent backscattering decrement that depends on the dimensions. Practical applications of these data are quite difficult to foresee at present. However, two suggestions are given here. First, since the CBE is a powerful tool for the measurement of some statistical properties, such as the transport mean free path or the diffusion constant  $D$ , it might be easier to apply the CBE in some particular configurations, such as symmetric complex media, to carry out these estimations on symmetric points, lines or planes, rather than on the source itself. Second, a quantitative estimation of the CBE on symmetric points might also provide a good opportunity to measure a symmetry degree. From a general point of view, as weak localization is a general wave effect, it might be of interest to extend these results into optics, photonic crystals and matter waves.



*Imagerie Acoustique en Milieux Réverbérants*

## Deuxième partie

Élastographie : une modalité  
d'imagerie ultrasonore et son  
application à l'étude de la  
contraction musculaire

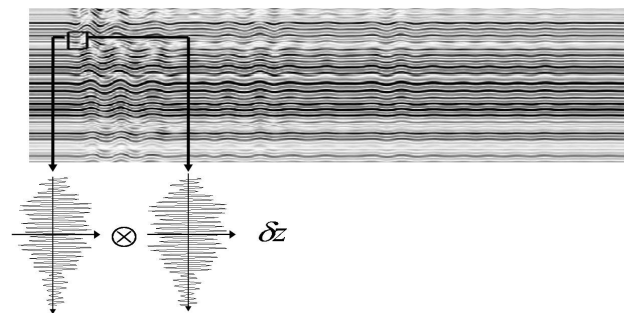
*Imagerie Acoustique en Milieux Réverbérants*

## Chapitre III

---

### Élastographie : état de l'art

---



Les réverbérations, responsables de l'effet de rétrodiffusion cohérente, peuvent aussi être utilisées pour l'imagerie, en particulier pour l'élastographie. Cette imagerie de l'élasticité des tissus mous est issue d'une problématique médicale. Elle consiste à quantifier des informations que seule la palpation exploitait jusqu'à présent et permet de diagnostiquer certaines pathologies (cancers, tumeurs, cirrhose, etc...).

L'élastographie est une méthode d'imagerie qui vise à quantifier l'élasticité des tissus du corps humain. Depuis bien longtemps la palpation remplit ce rôle de manière qualitative. Ainsi les médecins peuvent détecter au toucher kystes et nodules ou diagnostiquer une inflammation des ganglions. Pour des pathologies plus graves, une grosseur dans le sein ou le foie est le signe d'un éventuel cancer. Mais cette méthode, très qualitative, dépend bien souvent du praticien et la médecine moderne nécessite d'apporter une mesure quantitative de l'élasticité. Celle-ci est quantifiable à travers le module d'Young qui correspond au rapport entre contrainte et déformation. Dans le cas de la palpation, la contrainte est estimée par la force appliquée, et la déformation par la sensation au toucher. L'élastographie consiste donc à mesurer le module d'Young, à construire des cartes d'élasticité afin d'aider à la détection et le diagnostic de diverses pathologies. L'élastographie peut aussi avoir des applications dans le domaine de l'agro-alimentaire pour caractériser la tendreté de la viande, ou bien contrôler la maturation d'un fromage ou d'un produit laitier.

### **3.1 Quantifier la palpation**

La dureté est une sensation relative à notre toucher, elle met donc en jeu des structures centimétriques, de la taille du doigt ou de la main. Les ondes de cisaillement possèdent des longueurs d'onde d'une taille similaire et nous allons voir qu'elles permettent de quantifier l'élasticité des solides mous. Ces derniers sont caractérisés par une différence de plusieurs ordres de grandeur entre le module élastique de compression  $\lambda$  et celui de cisaillement  $\mu$  ( $\mu/\lambda \sim 10^{-6}$  voir Fig. 3.1). La théorie de l'élasticité stipule que le module d'Young  $E$ , qui caractérise l'élasticité, dépend des modules précédents suivant la relation (3.1) :

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = \mu \frac{3 + 2\mu/\lambda}{1 + \mu/\lambda} \simeq 3\mu \quad (3.1)$$

La relation de proportionnalité entre  $E$  et  $\mu$  implique que la mesure du coefficient de cisaillement renseigne directement sur le module d'Young et donc la dureté du matériau. De plus, les valeurs du module de cisaillement

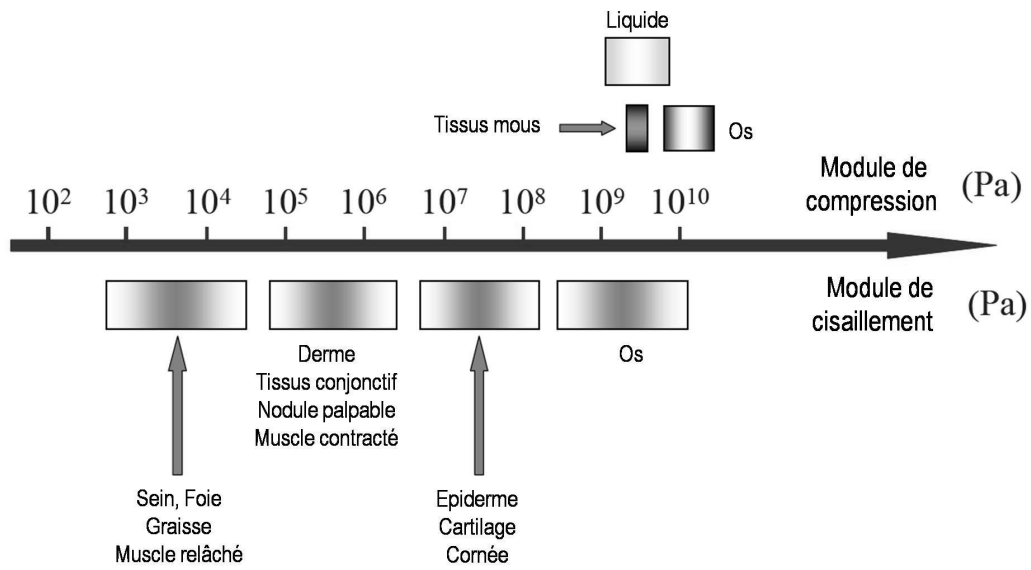


FIGURE 3.1 – Les ordres de grandeur des modules de compression et de cisaillement illustrent leur variabilité dans les tissus biologiques. **Source :** *Emelianov et al.* [47].

s'étendent sur plusieurs ordres de grandeurs (Fig. 3.1), la sensibilité de ce paramètre est donc excellente pour quantifier la dureté.

L'approche qui sera privilégié dans ce travail consiste à mesurer la vitesse  $c_s$  de l'onde de cisaillement qui dépend de  $\mu$  et de la masse volumique  $\rho$  suivant l'Eq. (3.2) :

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.2)$$

En substituant  $\mu$  dans l'Eq. (3.1), il suit une relation directe entre module d'Young et vitesse de l'onde de cisaillement :

$$E \simeq 3\rho c_s^2 \quad (3.3)$$

Pour des tissus biologiques constitués en grande majorité d'eau ( $\sim 95\%$ ), les variations de la masse volumique sont limitées à 5%. En la considérant constante, le module d'Young est lié exclusivement à la vitesse de l'onde de cisaillement. Dans la suite de cet exposé, l'équivalence entre module d'Young et vitesse de l'onde de cisaillement sera souvent utilisée implicitement.

D'autre part, il est intéressant de noter que le module de compression  $\lambda$  n'intervient plus dans le module d'Young, le coefficient de cisaillement rendant seul compte de la dureté. En revanche, la vitesse  $c_p$  de l'onde de compression est liée aux deux modules élastiques :

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (3.4)$$

Encore une fois, la différence d'ordre de grandeur entre  $\lambda$  et  $\mu$  rend insensible  $c_p$  aux variations de  $\mu$ . Ceci veut dire que l'échographie, basée sur les ondes de compression, n'est quasiment pas sensible à l'élasticité de palpation du milieu. Elle est en revanche extrêmement sensible aux variations de  $\lambda$  et  $\rho$  qui s'expriment à travers le concept d'impédance acoustique  $Z = \rho c_p$ . Les variations de cette impédance interviennent principalement à l'interface des structures, ce qui permet de distinguer entre eux les tissus ou les organes. Échographie et élastographie sont donc deux modes d'imagerie complémentaires puisque l'échographie renseigne sur l'impédance acoustique, donc sur l'élasticité de compression et l'élastographie caractérise l'élasticité de cisaillement. Les challenges de l'élastographie sont actuellement de quantifier précisément l'élasticité qui pour de nombreuses pathologies est déterminante dans le diagnostic. De plus, les images doivent être en temps réel et de manière non invasive afin de prétendre à une application clinique.

La propagation des ondes dans les solides dépend des paramètres mécaniques des matériaux qu'elles traversent. Ainsi, il est possible de faire le lien entre les caractéristiques des ondes et celles des matériaux. Dans le cas d'un matériau homogène avec des déformations linéaires, les solides répondent à la loi de Hooke qui relie le tenseur des contraintes à celui des déformations [71] :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.5)$$

Les modules d'élasticité  $\lambda$  et  $\mu$  appelés aussi coefficients de Lamé sont les paramètres mécaniques que l'on retrouve dans la vitesse des ondes (Eq. 3.2 et 3.4). Les indices  $i$  et  $j \in \{1, 2, 3\}$ , représentent les indices des directions spatiales du repère cartésien  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ . Les déformations dans le milieu

dépendent du gradient des déplacements suivant l'Eq. (3.6) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.6)$$

D'autre part, la loi fondamentale de la dynamique en l'absence de force volumique permet de mettre en relation contrainte et déplacements :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.7)$$

Dans cette équation,  $\rho$  est la masse volumique du milieu et la somme sur  $j$  parcourant les indices spatiaux est implicite. Par substitution des équations 3.5 et 3.6 au principe fondamental de la dynamique, une relation entre dérivée temporelle et dérivée spatiale du déplacement est obtenue :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.8)$$

Dans cette expression, l'hypothèse de variation lente des coefficients élastiques fait sortir ces derniers des dérivées spatiales. Cette équation différentielle est à la base des équations d'ondes. Elle met en relation dérivées temporelles et spatiales des déplacements à travers les paramètres mécaniques. L'équation 3.8 écrite pour toutes les composantes du champ à l'aide des opérateurs vectoriels fait apparaître l'équation d'onde élastique en milieu homogène :

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{u}) + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u} \quad (3.9)$$

Le laplacien vectoriel  $\Delta$  correspond aux doubles dérivées spatiales par rapport à la même variable, alors que les dérivées croisées se trouvent dans le gradient de la divergence. Les vitesses des ondes de cisaillement et de compression (Eq. 3.2 et 3.4) apparaissent clairement si le laplacien est décomposé en  $\Delta \vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{u}) - \frac{\mu}{\rho} \text{rot} (\text{rot} \vec{u})$ . Comme tout champ vectoriel, le champ de déplacement peut se décomposer en une partie à rotationnel nul  $\vec{u}_L$ , et une



autre à divergence nulle  $\vec{u}_T$  [20] :

$$\vec{u} = \vec{u}_L + \vec{u}_T \quad \text{avec,} \quad \begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{u}_L = 0 \\ \text{div}\vec{u}_T = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Les deux composantes  $\vec{u}_L$  et  $\vec{u}_T$  sont respectivement les composantes longitudinales et transverses du champ de déplacement. Puisqu'elles sont à rotationnel et divergence nulle, elles dérivent respectivement d'un potentiel scalaire  $\phi$  et d'un potentiel vecteur  $\vec{\psi}$  :

$$\begin{cases} \vec{u}_L = \overrightarrow{\text{grad}}\phi \\ \vec{u}_T = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\psi} \end{cases} \quad (3.11)$$

D'après le Théorème de Lamé [3], ces potentiels vérifient tous deux une équation d'onde dont les vitesses sont celles des ondes de compression et de cisaillement (Eq. 3.2 et 3.4) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_p^2 \Delta \phi \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \vec{\psi} \quad (3.13)$$

Ce passage par les potentiels permet de ramener l'équation d'onde dans les solides à deux équations d'ondes plus simples. Les potentiels scalaire et vecteur obéissent respectivement à une équation d'onde longitudinale et à une équation d'onde transverse découplées. En réalité ces potentiels n'ont pas de signification physique, ils n'apparaissent pas dans la solution finale où un terme de couplage relie les deux ondes. Introduisons maintenant la fonction de Green élastodynamique  $\vec{G}_i$  définie comme la solution de l'équation d'onde (Eq. 3.9) en milieu ouvert pour une force ponctuelle et impulsionnelle  $\vec{F}_i$  orientée selon une direction  $\vec{x}_i$  :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{G}_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}} \left( \text{div} \vec{G}_i \right) + \mu \Delta \vec{G}_i + \vec{F}_i \quad (3.14)$$

$$\vec{F}_i(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}) \delta(t) \cdot \vec{x}_i \quad (3.15)$$

La force  $\vec{F}_i$  est définie au centre du repère cartésien, au temps zéro, ce qui ne représente pas une limite au cas général. Pour résoudre le système, la force  $\vec{F}_i$  doit être réécrite en terme de potentiels scalaires et vecteurs pour être ajoutée aux équations 3.12 et 3.13. A partir des solutions  $\phi$  et  $\vec{\psi}$  des deux équations, les composantes  $u_L$  et  $u_T$  du déplacement sont écrites selon l'Eq. 3.11. Finalement la solution générale est construite en sommant les deux termes et la composante  $G_{ij}$  selon  $\vec{x}_j$  de la fonction de Green s'écrit ([3] p. 73) :

$$G_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\gamma_i\gamma_j}{r c_p^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_p}\right) + \frac{\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j}{r c_s^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_s}\right) + \frac{3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}}{r^3} t \prod_{\frac{r}{c_s}}^{\frac{r}{c_p}}(t) \right\}$$

avec :

$$\begin{cases} r = |\vec{r}| \\ \gamma_i = \frac{x_i}{r} = \cos(\vec{r}, \vec{x}_i) \\ \prod_{\frac{r}{c_s}}^{\frac{r}{c_p}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{r}{c_s} < t < \frac{r}{c_p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (3.16)$$

La fonction de Green met en évidence trois termes qui représentent, dans l'ordre, l'onde de compression, l'onde de cisaillement, et enfin l'onde couplée. Le terme d'amplitude de chaque onde est composé d'une fonction angulaire au numérateur et d'une fonction de  $r$  et des vitesses au dénominateur. Laissons tout d'abord de côté les variations angulaires par rapport à la direction de la force, qui seront traitées plus loin. L'onde de compression polarisée longitudinalement et l'onde de cisaillement polarisée transversalement se caractérisent toutes deux par la propagation d'un dirac avec une décroissance spatiale en  $1/r$ , chacune à la vitesse lui correspondant. L'onde de couplage est un mélange d'ondes polarisées longitudinalement et transversalement. Son amplitude est proportionnelle à  $t/r^3$ , avec  $\frac{r}{c_p} < t < \frac{r}{c_s}$ , ce qui veut dire que sa décroissance spatiale est en  $1/r^2$ . Cette décroissance est donc bien plus rapide que les deux autres ondes, ce qui lui vaut le qualificatif d'onde de champ proche. La forme temporelle de cette onde en un point fixe est une rampe partant de  $t = r/c_p$  jusqu'à  $t = r/c_s$  et une amplitude passant de  $1/c_p$  à  $1/c_s$  (avec un facteur  $1/4\pi\rho r^2$  constant).

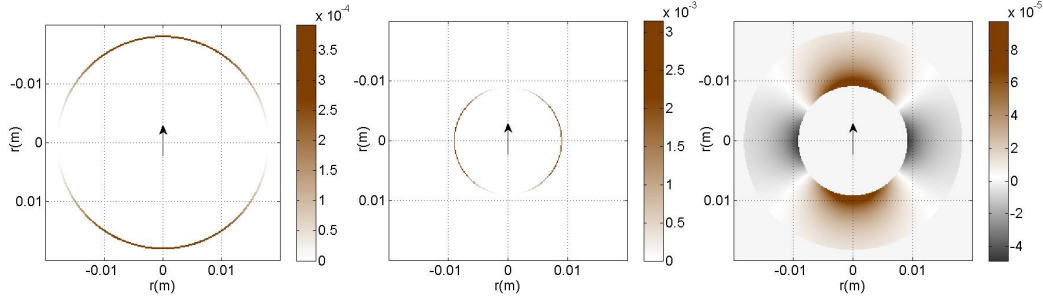


FIGURE 3.2 – La composante  $G_{ii}$  de la fonction de Green dans la direction de la force (indiquée par une flèche) est tracée en séparant l'onde de compression à gauche, l'onde de cisaillement au centre et le terme de couplage à droite. Pour permettre une visualisation de toutes les ondes sur un diagramme à la même échelle, la vitesse de l'onde de cisaillement  $c_s = 1.5$  m/s, est choisie 2 fois plus faible que la vitesse de compression  $c_p = 3$  m/s.

Pour avoir une idée de la réponse du solide à une force ponctuelle, il faut imaginer deux sphères concentrées en un point qui commencent à grandir avec des vitesses différentes lorsque la force est appliquée. La sphère représentant le front d'onde de cisaillement est comprise dans celle de l'onde de compression car cette dernière est bien plus rapide. L'onde de couplage s'étend entre ces deux sphères et l'amplitude de ces trois ondes varie par rapport à la direction de la force.

Mais revenons à la particularité de la propagation d'onde dans les solides par rapport au cas scalaire. En effet, une source simple pour un champ scalaire est omnidirectionnelle, alors que pour un champ vectoriel elle aura un diagramme de directivité donné par la fonction de Green. Les variations engendrées dépendent de  $\theta$ , l'angle entre la force et le vecteur repérant le point d'observation :  $\theta = \widehat{\vec{x}_i \vec{r}}$ . Pour anticiper des besoins futurs, la composante de la fonction de Green  $G_{ii}$  dans la même direction que la force est particulièrement considérée :

$$G_{ii}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\cos^2\theta}{r c_p^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_p}\right) + \frac{\sin^2\theta}{r c_s^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_s}\right) + \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} t \prod_{\frac{r}{c_s}}^{\frac{r}{c_p}}(t) \right\} \quad (3.17)$$

L'onde de compression est maximale sur l'axe de la force ( $\theta = 0; \pi$ ) et nulle

sur l'axe perpendiculaire (Fig. 3.2). Pour l'onde de cisaillement c'est l'inverse puisqu'elle est nulle sur l'axe de la force et maximale sur l'axe perpendiculaire ( $\theta = \pi/2; -\pi/2$ ). Cependant, au temps d'arrivée de l'onde de cisaillement, l'onde de champ proche est maximale sur l'axe de la force, ceci impose un déplacement non négligeable dans toutes les directions au temps du front d'onde de cisaillement.

Cette rapide introduction sur les fonctions de Green donne une base théorique de la propagation d'onde dans les solides qui sera utilisée par la suite, notamment pour le retournement temporel qui est étroitement lié aux fonctions de Green.

### **3.2 Détecter l'onde de cisaillement grâce à l'onde de compression : L'interférométrie des tavelures ultrasonores.**

L'interférométrie ultrasonore est utilisée par la plupart des méthodes élastographiques, c'est pourquoi cette méthode est présentée en marge de la revue qui suivra. Le principe de la méthode a tout d'abord été proposé par Dickinson en 1981 [43] afin d'observer les battements cardiaques. Ensuite, son évolution a suivi de loin en loin des améliorations par la sonoélasticité [69] puis l'élastographie statique [101] et impulsionnelle [26] qui lui a donné sa forme actuelle.

Nous avons vu précédemment que le module de compression est bien plus grand que celui de cisaillement ( $\mu/\lambda \sim 10^{-6}$ ). La conséquence sur le rapport des vitesses est immédiate :  $c_s/c_p \simeq \sqrt{\mu/\lambda} \sim 10^{-3}$ , l'onde de cisaillement est mille fois plus lente que l'onde de compression. Dans les tissus biologiques, la vitesse des ondes de compression est la même que dans l'eau  $c_p = 1500$  m/s et celle des ondes de cisaillement est typiquement  $c_s = 1.5$  m/s. Cette différence de plusieurs ordres de grandeurs entre les vitesses, caractéristique des milieux mous, permet de dissocier les ondes en considérant les ordres de grandeur des longueurs d'ondes de compression  $\lambda_p$  et de cisaillement  $\lambda_s$ . Pour ce faire introduisons l'expression de la fonction de Green monochromatique  $G_\omega$  ([3] p. 88) :

$$\mathbf{G}_{zz}(r, \theta, \omega) = \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\rho} \frac{e^{i\frac{\omega r}{c_p}}}{r c_p^2} \left\{ \gamma_i \gamma_j - (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \left[ \frac{c_p}{i\omega r} - \left( \frac{c_p}{i\omega r} \right)^2 \right] \right\} + \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\rho} \frac{e^{i\frac{\omega r}{c_s}}}{r c_s^2} \left\{ (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j) + (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \left[ \frac{c_s}{i\omega r} - \left( \frac{c_s}{i\omega r} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.18)$$

Dans cette version monochromatique de la fonction de Green, le terme de couplage (en  $3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}$ ) est séparé en deux parties, une partie liée à l'onde de compression et une à l'onde de cisaillement. Dans chaque partie, c'est le rapport  $\frac{\lambda_{p,s}}{r} = 2\pi \frac{c_{p,s}}{\omega r}$  entre longueur d'onde et distance qui détermine l'importance du terme de couplage par rapport à 1. Par exemple pour les ultrasons, les fréquences utilisées sont de quelques MHz, voire quelques dizaines de MHz. A ces fréquences, la longueur d'onde des ultrasons  $\lambda_p$  est de quelques dixièmes de millimètres et donc très petite devant la taille caractéristique du milieu de l'ordre de la dizaine de centimètres ( $\sim 10^{-1}$  m). Par conséquent, le ratio  $\lambda_p/r \simeq 10^{-3} \ll 1$  indique que le terme de couplage est très petit devant le terme de compression et peut être négligé. De plus, la longueur d'onde de cisaillement est de l'ordre du micromètre, ce qui implique que la moindre viscosité du milieu empêche la propagation sur une distance centimétrique. En réalité il est impossible d'introduire de l'énergie sous forme d'onde de cisaillement à ces fréquences. Pour cela, il faut diminuer de plusieurs ordres de grandeur la fréquence. En dessous de 1 kHz, la longueur d'onde de cisaillement est centimétrique, soit de l'ordre de grandeur de la taille du milieu. Dans ce cas  $\lambda_s/r \simeq 10^{-1}$ , il n'est plus possible d'ignorer l'onde de champ proche. En ce qui concerne l'onde de compression, en dessous de 15 kHz elle traverse le milieu en moins d'une longueur d'onde, c'est à dire instantanément à l'échelle des périodes d'échantillonnages considérées (1.5 m en une milliseconde).

Les ondes de cisaillement et de compression ont des vitesses tellement différentes qu'une même source génère difficilement l'une et l'autre en même temps. On peut donc aisément les dissocier et utiliser l'une pour imager l'autre. L'interférométrie consiste donc à mesurer les déplacements engendrés par les ondes basses fréquences ( $\sim 500$  Hz) à l'aide d'une imagerie ultrasonore

( $\sim 1$  MHz). Afin de ne pas créer d'interférences entre deux tirs ultrasonores, le temps entre deux images échographiques est limité par le temps d'un aller-retour de l'onde de compression dans le milieu, soit 0.2 ms sur 15 cm. Si une onde est émise dès que la précédente est arrivée, cela correspond à une fréquence de répétition de 5000 Hz, ce qui est largement suffisant pour des ondes dont les fréquences sont inférieures à 500 Hz. En pratique, l'électronique d'acquisition est (jusqu'ici) plus limitative que la physique, mais le transfert du traitement de données en "hard", c'est à dire de manière analogique, vers le "soft" par traitement numérique permet de s'approcher de la limite physique.

Pour obtenir une image ultrasonore du milieu, les hypothèses sont les mêmes qu'en échographie. On suppose tout d'abord que la diffusion est simple et que la vitesse des ondes est constante. Cela permet de localiser chaque écho par une simple loi de retard. Afin de rester dans l'hypothèse de diffusion simple, une formation de voie à la réception est aussi effectuée. L'application de la technique d'interférométrie nécessite une grande variété de diffuseurs répartis aléatoirement dans le milieu et qui crée dans le signal ultrasonore les tavelures ou speckle ultrasonore. Si le milieu reste immobile entre deux images, alors le même signal sera enregistré deux fois de suite car les diffuseurs immobiles restitueront les mêmes échos (Fig. 3.3, 40 premiers tirs). En revanche si des ondes agitent le milieu le solide va entrer en mouvement. Les solides mous pouvant être considérés comme incompressibles, l'effet principal d'un déplacement dans le solide va provoquer un déplacement des tavelures. Par corrélation de petites fenêtres (une dizaine de  $\lambda_p$ ), le déplacement des diffuseurs ponctuels sera détecté dans l'axe du faisceau ultrasonore (Fig. 3.3).

Les déplacements des diffuseurs dans la direction perpendiculaire au rayon peuvent les faire sortir du champ d'illumination des ultrasons. Pour limiter la dé-cohérence du champ due à ce mouvement de diffuseurs, la corrélation est réalisée à des intervalles de temps très petits et entre chaque tir consécutif. Ainsi, la grandeur mesurée est un déplacement pendant un intervalle de temps, soit une vitesse particulière. Bien que la grandeur observée soit une vitesse, il s'agit toujours d'un moyen de mesurer un déplacement, c'est ce terme qui sera le plus souvent utilisé dans ce manuscrit.

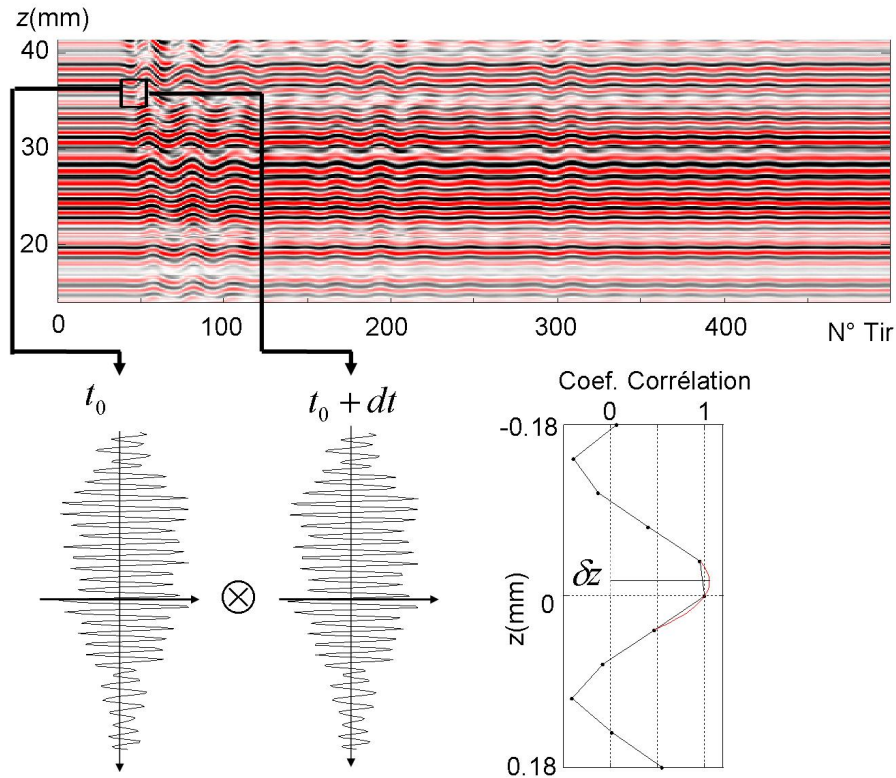


FIGURE 3.3 – Une impulsion ultrasonore se propage dans un solide mou et rencontre des inhomogénéités. Les interférences des échos forment un signal rétrodiffusé appelé tavelure (ou speckle en anglais). Sous l’hypothèse de diffusion simple, le temps d’arrivée du signal ultrasonore est directement lié à une profondeur (comprise ici entre 15 mm et 40 mm). 500 réponses ultrasonores sont ainsi enregistrées durant 0.5 s à une cadence de 1000 tirs par seconde. Après environ 4 ms (les 40 premiers tirs immobiles forment des lignes horizontales), un coup asséné à la surface du gel provoque un chahutement des lignes ultrasonores. L’algorithme d’interférométrie consiste à découper le signal en fenêtres de taille caractéristique ( $\sim 10 \lambda_p$  soit 2.3 mm). Puis la position du maximum de la corrélation de deux signaux successifs renseigne sur le déplacement  $\delta z$  de l’élément de volume associé à la fenêtre.

Cette méthode permet de détecter des déplacements très petits, jusqu'au micromètre, car elle repose sur des mesures de phases extrêmement précises entre deux signaux ultrasonores. C'est pour cette raison que l'on peut parler d'interférométrie comme en optique. De plus, la résolution spatiale imposée par les ultrasons est de l'ordre du  $\text{mm}^2$ , ce qui permet un excellent échantillonnage spatial des ondes de cisaillement ( $\lambda_s > 1 \text{ cm}$ ).

### 3.3 Panorama des méthodes de mesure d'élasticité des tissus

Pour présenter les principales méthodes d'élastographie, nous procéderons par ordre chronologique. L'historique commence donc par la sono-élasticité, première méthode dynamique d'élasticité qui date des années 80. Elle est basée sur l'observation d'un champ d'ondes monochromatiques. Quelque peu délaissée pour les méthodes statiques largement développées lors des années 90, la sono-élasticité inspirera cependant les travaux sur l'élastographie impulsionnelle qui ont débuté en 1994. En parallèle, l'observation par résonance magnétique donne aussi naissance à des images élastographiques. La décennie suivante voit l'apparition de la force de radiation acoustique fournissant plusieurs méthodes de mesure de l'élasticité. Tout d'abord, la vibroacoustographie qui utilise deux faisceaux confocaux pour produire une pression acoustique dont l'amplitude dépend de l'élasticité. Puis vint l'imagerie par force de radiation créant un déplacement dont l'amplitude et le temps de relaxation renseignent sur les propriétés mécaniques. Finalement, le Super-Shear Imaging utilise la force de radiation afin de créer un front d'onde plan de cisaillement dont la vitesse de propagation ainsi que la déformation permettent d'obtenir des cartes d'élasticités. Une rapide description de chaque méthode ainsi que de leurs avantages et inconvénients donne un aperçu des possibilités actuelles.

#### 3.3.1 Sono-élastographie

La possibilité de visualiser les déplacements à l'intérieur du corps humain par effet Doppler associée à l'utilisation d'un vibreur monochromatique a donné naissance aux premières mesures d'élasticité *in-vivo* par Krutscop en 1987 [69]. Les premières images de sono-élastographie exploitaient l'ampli-



tude des déplacements, plus importants pour un solide mou que pour un solide dur [79, 66, 105, 104]. Cette approche ne prenait pas en compte le caractère ondulatoire du champ de déplacement. En revanche d'autres équipes [145, 81] s'intéressait déjà à la mesure de la vitesse de l'onde de cisaillement monochromatique.

Le principal obstacle de cette technique est la dépendance à la forme et aux conditions aux limites pour une excitation monochromatique d'un solide. Une telle excitation stationnaire nécessite en effet la mise en place des modes de résonance du milieu qui affectent la mesure de vitesse. Il faudra attendre l'arrivée de l'élastographie impulsionnelle qui exploite toute la richesse de l'information mutli-fréquentielle pour que la de vitesse de cisaillement puisse être mesurée.

### *3.3.2 L'élastographie statique*

Au début des années 90, une grande partie des efforts de recherche en élastographie a été engagée dans la voie de l'élastographie statique [101]. C'est ainsi qu'une quinzaine d'années plus tard sont apparus les premiers échographes avec un mode élastographique. En 2007, Hitachi sort son e-mode et Siemens son eSi-Touch. Ces deux géants de l'imagerie médicale ont opté pour une méthode où l'échographe est suffisant pour déterminer l'élasticité moyennant une pression exercée avec la sonde. Une carte des déformations est dressée en comparant l'image échographique avant et après compression (Fig. 3.4 a). Pour l'obtenir, il est nécessaire de faire des hypothèses fortes sur le milieu et/ou d'appliquer des modèles numériques. La méthode statique permet donc seulement une mesure qualitative sur une échelle dur/mou, par exemple le "strain ratio" sur l'e-mode (Fig. 3.4 b).

L'intérêt pour cette méthode est aujourd'hui en baisse car les applications médicales nécessitent de fournir une information quantitative d'élasticité. Ainsi, la plupart des autres méthodes existantes sont toutes basées sur la dynamique des tissus biologiques. En effet, à travers l'équation d'onde, contrainte et cisaillement sont reliés l'une à l'autre. Ceci transforme le problème en une mesure de vitesse au lieu d'une mesure de contrainte et de déformation.

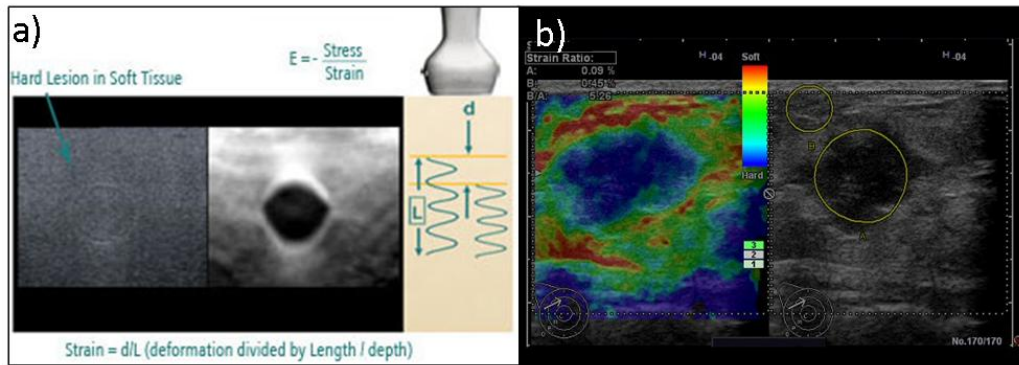


FIGURE 3.4 – a) Le principe de l'élastographie statique consiste à mesurer la déformation engendrée par l'écrasement de la sonde médicale (ou barrette ultrasonore). **Source : [www.médical.siemens.com](http://www.médical.siemens.com)**. b) Exemple d'image de déformation ("strain ratio") qualitativement liée à l'élasticité du milieu par l'e-mode d'Hitachi, (masse dur dans un sein, **Source : [www.hitachimed.com](http://www.hitachimed.com)**). La déformation dans un plan et non dans le volume ainsi que le manque d'information dur la contrainte rendent la technique non quantitative.

### 3.3.3 Élastographie impulsionnelle

Quelques années seulement après les débuts de l'élastographie statique, la méthode impulsionnelle fait ses premiers pas en 1994 avec la thèse de S. Catheline [23]. L'approche est fondamentalement différente par rapport aux méthodes statiques. La mesure de l'élasticité passe maintenant par l'estimation de la vitesse  $c_s$  des ondes de cisaillement, elle-même proportionnelle à l'élasticité (Eq. 3.1). Pour mesurer cette vitesse à l'intérieur des tissus, la propagation des ondes de cisaillement est étudiée par interférométrie des tavelures ultrasonores (*cf.* section 3.2). Un vibreur à la surface du solide génère une onde de cisaillement dont la vitesse peut être mesurée en se plaçant dans l'axe du vibreur (Fig. 3.5). La source, petite devant la longueur d'onde, est considérée ponctuelle [26] et l'évolution du front d'onde dans l'axe du vibreur renseigne sur la vitesse.

En négligeant l'onde de compression, l'expression de la fonction de Green élasto-dynamique (Eq. 3.17) dans l'axe de la force ( $\theta = 0$ ) se simplifie en :

$$G_{ii}(r, t) = \frac{t}{2\pi\rho r^3} \prod_{r/c_s}^{\infty}(t).$$

Prenons la dérivée temporelle de cette expression

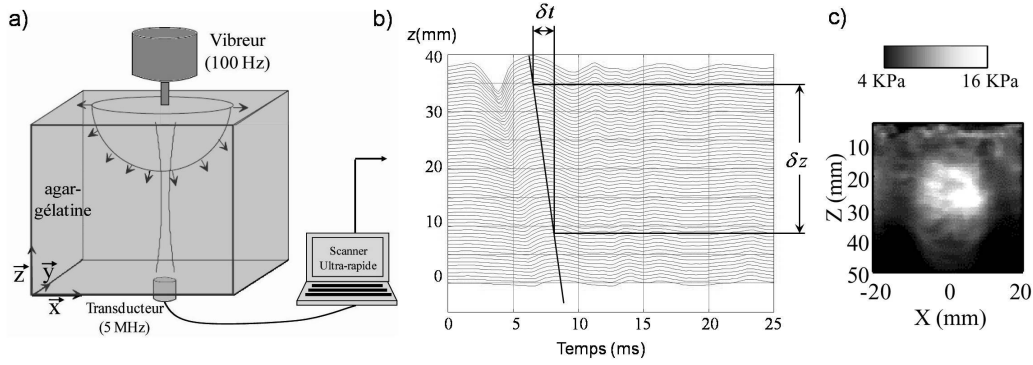


FIGURE 3.5 – a) Dans un solide mou (gel d’agar-gélatine), un vibreur crée une onde de cisaillement à 100 Hz. b) La composante selon  $z$  des déplacements en fonction de la profondeur et du temps sur l’axe du vibreur met en évidence l’onde de cisaillement dont la vitesse est évaluée à partir de la pente :  $c_s = \delta z / \delta t$ . c) Image du module de cisaillement d’une inclusion. L’élasticité est quantitativement mesurée par élastographie impulsionnelle, **Source : Sandrin *et al.* [119].**

pour obtenir la vitesse particulaire du déplacement :

$$V_{ii}(r, t) \simeq \frac{t}{2\pi\rho r^3} \delta\left(t - \frac{r}{c_s}\right) \quad (3.19)$$

Dans l’axe de la force, le dirac convolué à la fonction de source crée un front d’onde se déplaçant à la vitesse de l’onde de cisaillement. Le changement de variable  $t = r/c_s$  fait apparaître une décroissance spatiale en  $1/r^2$ . La vitesse peut être évaluée en mesurant la pente du front d’onde :  $c_s = \delta z / \delta t$  (Fig. 3.5). Cette méthode a donné lieu à la première application clinique [120] : le Fibroscan, apparu en 2004. Sur cet appareil, le transducteur ultrasonore est directement monté sur le vibreur pour déterminer une élasticité moyenne dans le foie. Il connaît un chaleureux accueil de la part des cliniciens qui y voient un intérêt certain pour la détection et la classification des fibroses.

A partir de cette méthode, un système d’imagerie a été développé en remplaçant la source ponctuelle par une onde plane. De même, l’unique transducteur est remplacé par une sonde ultrasonore comportant au moins 64 transducteurs. Ici encore, la sonde peut être montée directement sur le vibreur. Pour la source ponctuelle, la vitesse était estimée par une mesure de

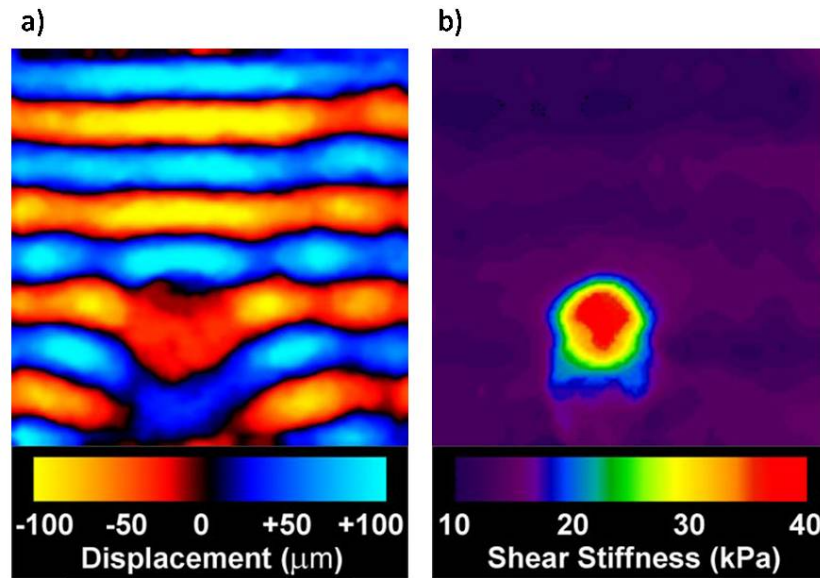


FIGURE 3.6 – a) Image de déplacement obtenu par résonance magnétique nucléaire (RMN) de la propagation d’une onde de cisaillement à 300 Hz dans un gel avec une inclusion dure. b) Après inversion du champ de déplacement, l’inclusion est parfaitement visible sur l’image de l’élasticité de cisaillement. **Source : Kruse *et al.* [70].**

temps de vol. En 2D, il faut inverser les données, c’est à dire déduire des déplacements la vitesse de l’onde de cisaillement. Les résultats de cette méthode sont très satisfaisants [119], et la faisabilité *in-vivo* a été démontrée [11]. Malgré ces essais concluants les applications cliniques n’ont pas vu le jour car le système est trop encombrant pour les praticiens.

#### 3.3.4 Élastographie par résonance magnétique

Le principe de l’imagerie par résonance magnétique [95] est le même que pour l’imagerie ultrasonore : déduire d’images successives un champ de déplacement afin de mesurer la vitesse des ondes de cisaillement. L’imagerie par résonance magnétique possède un atout capital : elle permet de mesurer un champ de déplacement dans les trois dimensions alors que les méthodes ultrasonores classiques permettent de mesurer une seule composante du déplacement dans l’axe du faisceau ultrasonore. En contre-partie, la fréquence d’acquisition reste très faible (de l’ordre du Hz), ce qui implique une acqui-

sition stroboscopique d'un champ de déplacement harmonique. L'acquisition est aussi relativement longue (une dizaine de minutes), mais il est possible à partir du champ 3D d'inverser complètement l'équation d'onde (Eq. 3.9) pour en déduire le module d'Young (Fig. 3.6).

Cette méthode permet aussi de déterminer l'anisotropie et la viscosité des tissus [123] et donne de très bon résultats dans tous les organes du corps humain. Elle pourrait être une modalité supplémentaire sur un imageur à résonance magnétique, comme le Doppler sur un échographe.

### *3.3.5 Vibro-acoustographie*

La vibro-acoustographie [51] consiste à générer des ondes de cisaillement en co-focalisant deux faisceaux d'ondes ultrasonores à des fréquences proches  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Ces ondes créent toutes deux une pression de radiation [46] qui, par non linéarité, génèrent un déplacement à une pulsation  $\omega = \omega_1 - \omega_2$  sur une zone très limitée spatialement par la longueur d'onde ultrasonore. La différence des fréquences est choisie autour de la centaine de Hz pour exciter des ondes acoustiques enregistrées par un hydrophone (le dispositif doit être immergé dans l'eau). L'amplitude de la réponse dépend en partie de la nature du matériau mis en mouvement. Il est donc possible de reconstruire une image qualitative de l'élasticité en relevant l'amplitude de la réponse en chaque point d'excitation.

L'inconvénient de cette méthode est qu'il n'existe pas de relation simple entre l'amplitude de la réponse enregistrée et le module d'Young. Cette imagerie ne permet donc pas de dresser une carte quantitative de l'élasticité. De plus, l'amplitude de la réponse peut être modifiée par des objets qui ne sont pas localisés à la source, mais qui se trouvent entre la source et l'hydrophone par exemple. Des artefacts de mesure peuvent alors apparaître sur les images ainsi reconstruites.

### *3.3.6 Imagerie d'onde de cisaillement par force de radiation*

L'utilisation de la force de radiation pour l'élastographie a été proposée par Sarvazyan en 1998 [121] pour générer un point de force au sein du milieu. La force de radiation acoustique est un phénomène associé à la pro-

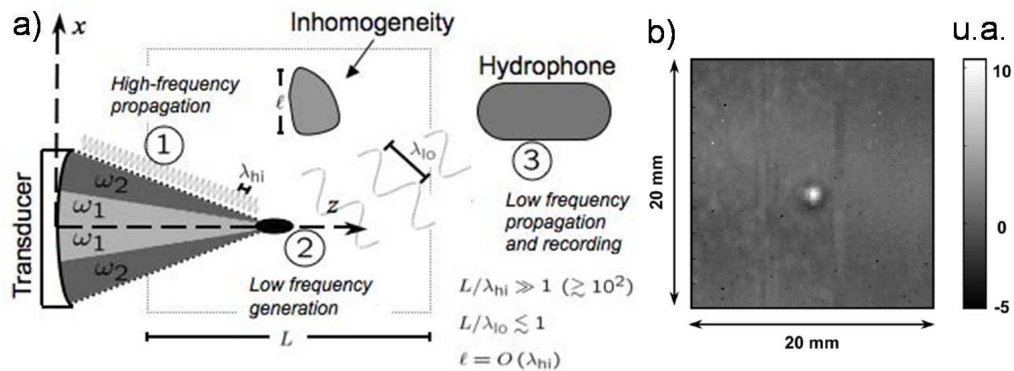


FIGURE 3.7 – a) Le déplacement généré ponctuellement par le battement de 2 ondes ultrasonores  $\omega_1$  et  $\omega_2$  provoque une onde acoustique à une pulsation  $\omega = \omega_1 - \omega_2$  enregistrée par un hydrophone. L'amplitude dépend entre autre de l'élasticité du milieu. En balayant la région d'intérêt, une image qualitative de l'élasticité peut être déduite. **Source : Malcolm *et al.* [87].** b) Image (en unité arbitraire, u.a.) d'une perle de verre dans du latex, **Source : Fatemi *et al.* [50].**

propagation des ondes acoustiques à travers un milieu dissipatif. Elle provient d'un transfert de quantité de mouvement de l'onde au milieu et crée une force volumique  $f$  qui dépend de l'absorption du milieu  $\alpha$ , de l'intensité fournie  $I$  et de la vitesse de l'onde qui lui donne naissance :  $f = \frac{2\alpha I}{c_p}$  (sous l'hypothèse d'onde plane [48]). Cette force est très faible car elle apparaît seulement au deuxième ordre dans l'équation d'onde. Il est donc nécessaire de focaliser les ultrasons sur un très faible volume pour augmenter l'intensité et générer un déplacement. La force appliquée pendant quelques centaines de microsecondes génère un déplacement du point focal. La même sonde utilisée pour créer la force de radiation peut être utilisée en mode échographique ultra-rapide afin de détecter les déplacements générés au foyer.

Plusieurs groupes de recherche ont développé l'imagerie par force de radiation acoustique, notamment Nightingale [97] qui a choisi une approche basée sur l'effet de la force au foyer. L'amplitude du déplacement et le temps de relaxation à l'endroit où est produit la force sont liés exclusivement à l'élasticité et la viscosité en ce point [96]. Un balayage de la région d'intérêt aboutit à une image quantitative de l'élasticité.

Une autre approche consiste à étudier la propagation de l'onde de ci-

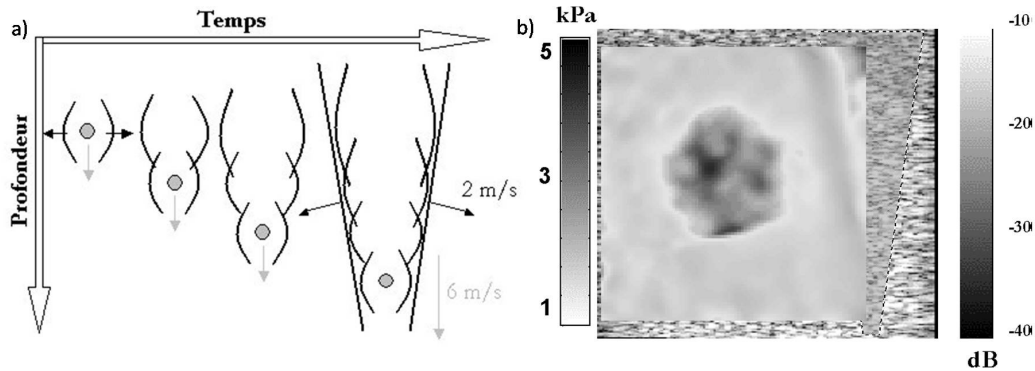


FIGURE 3.8 – a) Principe de l’excitation Supershear : la force de radiation créée au point focal se déplace plus rapidement (6 m/s) que l’onde de cisaillement (2 m/s). Le cône de Mach délimite un front d’onde qui explore le milieu. La déformation de ce front d’onde permet de construire une carte d’élasticité au voisinage d’une inclusion dans un gel d’agar-gélatine. **Source : Bercoff et al.** [12].

saillement générée par la force de radiation [12]. Cette méthode est donc une nouvelle version de l’élastographie impulsionnelle où la source est contrôlée par les ultrasons. Afin de se placer dans le cas de la propagation d’ondes planes, un cône supersonique d’ondes de cisaillement est généré en déplaçant le point focal plus vite que les ondes de cisaillement [10]. En pratique, la source s’éloigne de la sonde dans la direction du faisceau ultrasonore (Fig. 3.8). Dans le plan d’observation, la partie visible du cône est constituée de deux ondes planes se propageant à la vitesse de l’onde de cisaillement (2 m/s dans l’exemple emprunté à J. Bercoff Fig. 3.8). La pente de l’onde plane est directement liée au rapport entre la vitesse de la source et celle de l’onde de cisaillement. Cette méthode fournit une excitation robuste et d’énergie suffisamment importante pour obtenir une inversion très fiable et déduire l’élasticité du milieu en temps réel. Cette méthode, appelée “Supersonic Shear Imaging”, a donné naissance à l’échographe Aixplorer de la société Supersonic Imagine. Depuis 2009, c’est le premier échographe sur le marché à fournir des images quantitatives d’élasticité.

### 3.4 Vers l'élastographie passive ?

L'élastographie va bientôt devenir une modalité indispensable sur les échographes du futur. En plus d'une image échographique de qualité, d'un mode Doppler efficace, les machines devront aussi renseigner quantitativement sur l'élasticité des tissus, le tout en temps réel évidemment. Actuellement, la seule machine remplissant ces critères est l'Aixplorer, la force de cet outil vient du "tout-en-un" : les ultrasons ainsi que les basses fréquences sont contrôlés par la sonde et l'image est indépendante de l'opérateur. Sur la version actuelle, la vitesse de cisaillement mesurable est limitée à 10 m/s mais le bruit ambiant peut rendre difficile l'inversion. Ainsi, dans le sein ou dans le foie les résultats sont excellents mais dans le coeur par exemple où les déplacements naturels sont plus importants l'inversion peut s'avérer difficile.

Dans ce manuscrit, une approche radicalement différente est explorée. En effet, la méthode Supershear ainsi que les autres méthodes présentées ont pour point commun de créer, de manière contrôlée, des ondes de cisaillement pour en déduire leurs vitesses. Nous proposons de ne pas utiliser de source active mais le bruit physiologique naturellement présent dans le corps humain. Ainsi, l'information est fournie par le champ de déplacement naturel, alors qu'il représente du bruit indésirable pour les méthodes actives. Dans un article pionnier, Sabra *et al.* [114, 113] ont montré qu'il était possible d'extraire les propriétés viscoélastiques globales d'un muscle squelettique en mesurant ses vibrations en surface. En s'inspirant des méthodes de retournement temporel et de corrélation de bruit sismique, nous montrons qu'il est possible de construire des images tomographiques de la vitesse des ondes de cisaillement à partir du champ de déplacement naturel à l'intérieur du solide.

La contraction des muscles influence très fortement leurs propriétés viscoélastiques, c'est aussi une source importante de déplacements dans le corps humain. La compréhension de ce phénomène n'est pas indispensable à la mise en place de méthodes passives, mais les outils développés en élastographie fournissent des informations nouvelles qui intéressent des disciplines transverses (physiologie, biomécanique). Ainsi, avant de présenter l'élastographie passive dans la dernière partie de la thèse, le chapitre suivant propose une caractérisation de la contraction musculaire.



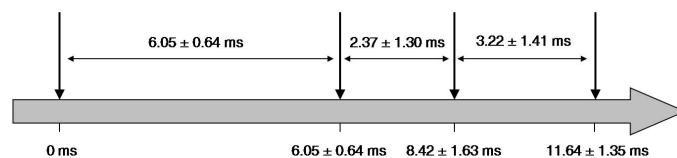
*Imagerie Acoustique en Milieux Réverbérants*

## Chapitre IV

---

### Application physiologique : mesure du délai électromécanique

---



Les méthodes développées pour l'élastographie peuvent avoir des applications diverses. L'imagerie ultra-rapide est utilisée afin de détecter les mouvements produits par la contraction musculaire. L'objet de cette étude est la caractérisation physiologique des délais électromécaniques des muscles.

Le délai électromécanique représente le retard entre l'activation électrique d'un muscle et la production de force associée. Ce retard est une caractéristique importante du muscle qui se voit modifié suite à un protocole d'entraînement ou de fatigue, ou encore par des pathologies neuro-musculaires. S'il est dû à un ensemble de mécanismes physiologiques et biomécaniques, il n'existe aucune méthodologie expérimentale *in-vivo* pour évaluer la contribution des mécanismes intervenant dans le délai électromécanique. Dans cette étude, nous cherchons à séparer les temps de réponse de plusieurs structures en utilisant une imagerie échographique ultra-rapide (4 kHz). Par une méthode adaptée de l'élastographie, le début de la contraction musculaire est détectée. La contraction engendrera un mouvement au niveau du tendon dont le départ sera aussi détecté. Après validation de la méthode de mesure des délais, neuf sujets ont subi deux séries de cinq contractions. Le signal électrique d'activation sert de référence pour mesurer tout d'abord le début de la contraction musculaire, puis le départ du tendon, et l'initiation de la production finale de force. Le délai électromécanique total entre activation et force résultante est décomposé en trois parties par l'activation du muscle et la mise en mouvement du tendon. L'originalité de cette étude consiste à déterminer les délais induits par les différents mécanismes dans l'initiation de la production de force.

#### **4.1 Problématique du délai électromécanique**

Le délai électromécanique est modifié à la suite de protocoles induisant une fatigue musculaire [146], de protocoles d'entraînements [62], ou chez des sujets atteints de pathologies neuro-musculaires [102]. Ces modifications sont la preuve de l'influence de plusieurs mécanismes dans le délai électromécanique. Les deux principaux sont 1) la propagation du potentiel d'action et le mécanisme d'excitation-contraction, c'est à dire la transformation d'un signal électrique en contraction musculaire 2) la transmission de la force à travers une chaîne d'éléments mécaniques placés en série du muscle et regroupés en une composante élastique série (CES). C'est sur ce dernier point que porte principalement cette étude. La CES est constituée d'une partie active, les fibres musculaires, et d'une partie passive, l'aponévrose et le ten-

don [58]. Actuellement, seules des observations indirectes indiquent que le délai électromécanique est dû à l'étirement de la CES [100, 146, 94], mais cette hypothèse reste à vérifier. Pour cela, il est nécessaire de caractériser le délai électromécanique entre les différentes structures de la CES. Les observations en temps réel du mouvement des structures musculotendineuses [85] étaient jusqu'ici limitées par la fréquence d'échantillonnage des échographes conventionnels ( $\sim 50$  Hz). Le délai électromécanique étant compris entre 6 et 80 ms, la résolution temporelle n'était pas suffisante. La nouvelle génération d'échographe ultra-rapide permet d'acquérir plusieurs milliers d'images par seconde et d'atteindre ainsi une résolution temporelle satisfaisante (e.g. 0.25 ms). Deffieux et al. [39, 38] ont déjà montré la faisabilité de l'utilisation de cette technique pour quantifier la contraction musculaires *in-vivo*. Nous reprenons ici la même méthode pour détecter le début de contraction des fascicules (Fig. 4.1) ainsi que celui du départ du tendon. De plus, les mesures réalisées sur un nombre représentatif de sujets (9 personnes) ont donné lieu à deux publications [98, 67]. Les expériences ont été réalisées au LGIT dans le cadre d'une collaboration avec Antoine Nordez et François Hug du laboratoire "Motricité, Interactions, Performance" de l'UFR STAPS de Nantes. Nous remercions "l'Association Française contre les Myopathies" pour ses financements (n°14084 et 14597).

## 4.2 La contraction musculaire

Le muscle est composé de fibres musculaires (Fig. 4.1) qui possèdent la propriété de se raccourcir sous l'effet du passage d'un potentiel d'action. Un mécanisme complexe permet de transformer le potentiel d'action neuronal en une contraction de chacune des fibres musculaires entraînant ainsi celle du muscle. Un moto-neurone (Fig. 4.1) transmet le potentiel d'action à un ensemble de fibres musculaires formant alors une unité motrice. Il y a tout d'abord une transmission synaptique pour transformer le potentiel neuronal en un potentiel d'action musculaire, avant que celui-ci ne se propage le long de la fibre musculaire en un mécanisme couplé d'excitation-contraction. C'est le délai induit par l'ensemble de ces mécanismes que l'on cherche à déterminer en mesurant le délai de l'amorce de la contraction.

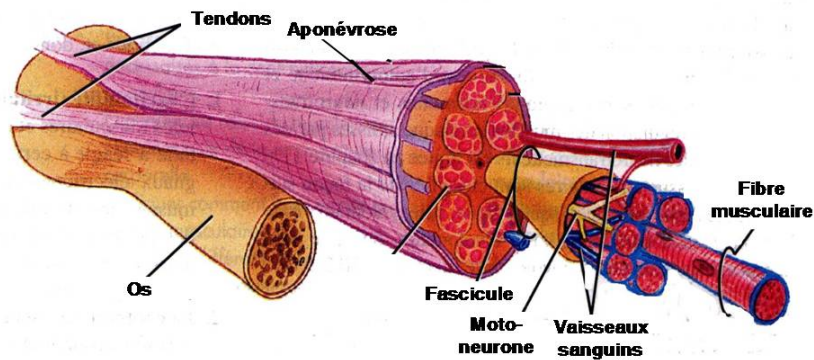


FIGURE 4.1 – Source : <http://bio.m2osw.com>. Le muscle squelettique est composé de fascicules dont la taille est de l'ordre du mm, regroupant des fibres musculaires de quelques  $\mu\text{m}$  de diamètre. L'aponévrose est une membrane enveloppant le muscle et transmettant la force au tendon lui-même solidaire à l'os.

Entre le début de la contraction (i.e. le début du mouvement des fascicules) et celui de la production de force mesurés de manière indépendante, il est nécessaire de transmettre la force le long des éléments placés en série du muscle. Le niveau de stimulation d'un muscle, ou recrutement, est contrôlé par les caractéristiques temporelles et spatiales des potentiels d'actions neuronaux. Plusieurs unités motrices du même muscle peuvent être sollicitées en même temps, on parle alors de sommation spatiale. La sommation temporelle signifie que l'intensité de la contraction d'une fibre est gouvernée par la fréquence d'arrivée des potentiels. Lorsque le délai entre deux potentiels est inférieur au temps de relâchement de la fibre, la contraction augmente. Dans cette expérience, la stimulation électrique permet de contrôler parfaitement le recrutement du muscle et de s'affranchir de l'influence de cette sommation temporelle [65]. Un seul pulse de  $200 \mu\text{s}$  est utilisé pour la stimulation, il n'y a donc pas de sommation temporelle. En revanche, la sommation spatiale est contrôlée par l'intensité électrique du signal, c'est pour cela qu'elle est constante pour chaque sujet (en moyenne  $125 \pm 11 \text{ mA}$ ).

### 4.3 Mesure du délai électromécanique

La mesure du délai électromécanique a été effectuée sur neufs sujets<sup>1</sup> en bonne santé et âgés en moyenne de 27 ans (taille :  $177.8 \pm 6.7$  cm ; poids :  $71.7 \pm 8.1$  kg). Le sujet est allongé sur le ventre, la jambe droite tendue avec le pied dans une chaussure fixée au niveau talon (Fig. 4.2). La pression engendrée par la contraction du mollet est mesurée par un capteur de force placé sous la plante du pied (Fig. 4.2). La contraction d'un muscle du mollet (Gastrocnemius Medialis, GM) est provoquée de manière sélective par une stimulation électrique au niveau du point moteur [85, 82, 94]. Le mouvement produit une rotation du pied autour de l'axe de la cheville. L'excitation électrique peut permettre de ne solliciter qu'un seul muscle [27] afin de mesurer réellement le délai d'un muscle et non le temps de recrutement d'un ensemble de muscles, comme c'est le cas pour un mouvement volontaire. L'intensité de la stimulation est augmentée jusqu'à atteindre un mouvement suffisamment important à un niveau de douleur supportable.

Lors de chaque stimulation, en plus du temps de réponse final relevé grâce au capteur de force, deux autres délais intermédiaires sont mesurés : le début de la contraction musculaire et celui du déplacement du tendon. Pour ce faire la machine ultrasonore Lecoecore enregistre 4000 images ultrasonores par secondes. Pour chaque sujet, les deux mesures de délais sont réalisées par imagerie cinq fois séparément chacune dans un ordre aléatoire et avec 3 minutes de repos entre chaque stimulation. De plus, à chaque stimulation la synchronisation est réalisée grâce au signal externe de trigger du scanner ultrasonore. Celui-ci déclenche la stimulation 50 ms après le début de l'acquisition. Ces 50 ms de repos servent de référence pour la détection du début du mouvement. En dehors de l'imagerie ultrasonore, tous les signaux (synchronisation, stimulation et électromyogramme) sont enregistrés sur un même ordinateur à une cadence de 5 kHz.

Le même algorithme qu'en élastographie (voir chapitre 3) est utilisé pour la détection des déplacements générés par la contraction musculaire. Cette

---

1. Je remercie chaleureusement les volontaires : Aurelien, Bastien, Benjamin, Christian, Mathieu, Mickaël, Nonoss et Romain. Leur contribution, même peu confiante, nous a été précieuse.

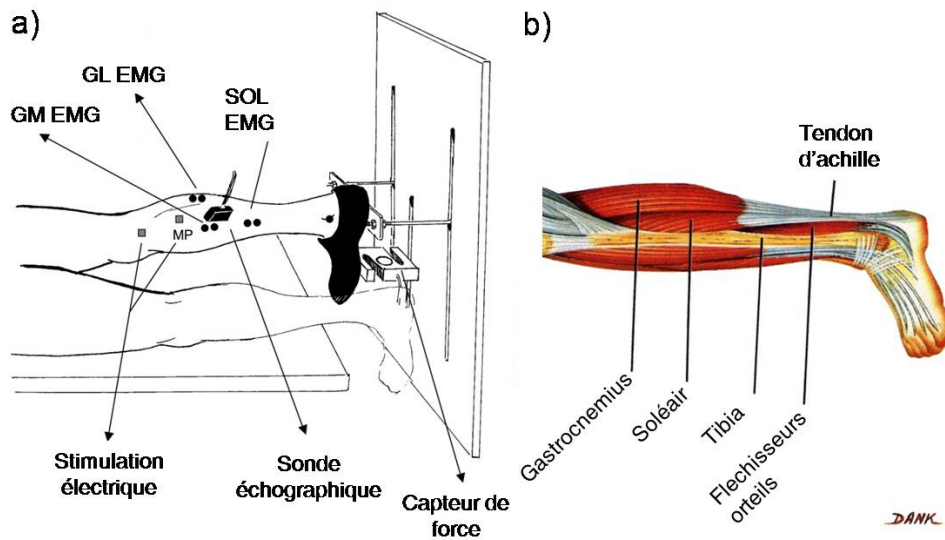


FIGURE 4.2 – a) Le dispositif expérimental permet d’immobiliser le pied droit dans une chaussure rigide fixée au niveau du talon. Une stimulation électrique au point moteur (MP) déclenche une extension du pied mesurée à l’aide du capteur de force. L’activité électromyographique (EMG) est mesurée pour les muscles gastrocnemius medialis (GM), gastrocnemius lateralis (GL) et soleus (SOL). La sonde échographique ultra-rapide détecte les déplacements induits par la contraction musculaire. b) La contraction du muscle GM lié à l’os du pied par le tendon d’achille entraîne une rotation de celui-ci. **Source :** <http://bio.m2osw.com>.

méthode mesure la composante  $z$  des déplacements (*i.e.* dans la direction du rayon ultrasonore). Dans le muscle, les fascicules et fibres musculaires forment un écho acoustique d’excellente qualité pour l’interférométrie des tavelures ultrasonores. Dans ce cas, les déplacements ne sont plus provoqués par une propagation d’onde basse fréquence mais par les effets de la contraction. Le muscle pouvant être considéré comme un solide incompressible, son étirement longitudinal se traduit par un élargissement radial [55] : le muscle se gonfle quand il se contracte. Cette composante du déplacement est parallèle au rayon ultrasonore (axe  $z$ ), c’est donc principalement cet effet de la contraction qui est mesuré. Une faible composante des déplacements dans le sens de la fibre intervient aussi puisque l’orientation ne sera jamais parfaite sur l’ensemble de la sonde. L’aponévrose entre le muscle GM et *Soleus* (SOL)

est clairement visible sur l'image échographique (Fig. 4.3 a). L'interférométrie ultrasonore mesure un déplacement par unité de temps, c'est à dire une vitesse particulière qui est moyennée dans une région du muscle GM pour détecter le début de la contraction (Fig. 4.3 c).

La même méthode est utilisée pour détecter le départ du mouvement du tendon. L'interférométrie des tavelures est utilisée pour mesurer cette fois un déplacement solide. La vitesse particulière est moyennée dans une région au niveau de la jonction myotendineuse (Fig. 4.3 b). Bien que le mouvement soit dans une direction presque perpendiculaire au rayon ultrasonore, il est toujours possible de mesurer une composante du déplacement [86]. Cette dernière (Fig. 4.3 d) est suffisante pour détecter l'amorce du mouvement du tendon.

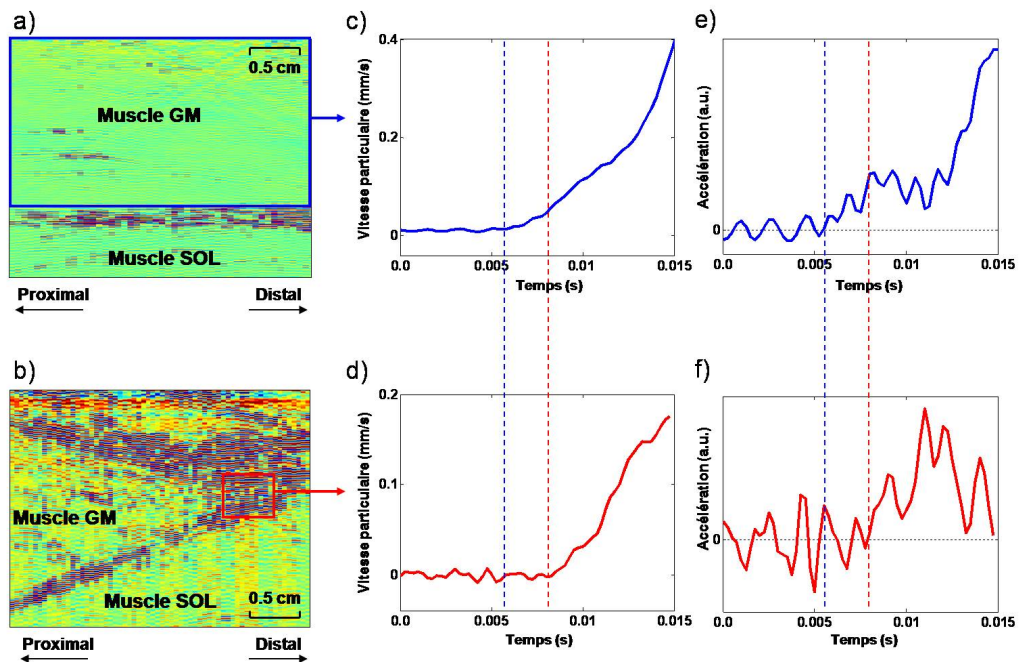


FIGURE 4.3 – Détermination de l'amorce de la contraction musculaire et du déplacement du tendon. Localisation des régions utilisées pour le calcul de la vitesse particulière moyenne, a) (cadre bleu) dans le muscle GM, b) (cadre rouge) au niveau de la jonction myotendineuse. c,d) Vitesses particulières, e,f) Accélération dans les deux régions. Les temps de départ détectés à partir de l'accélération sont repérés par les lignes bleues pour le début de la contraction musculaire et rouges pour le départ du tendon.



Pour déterminer les instants de départ, les accélérations sont calculées sur chacune des régions (Fig. 4.3 e&f). Au lieu de considérer le dépassement d'un seuil de vitesse particulière, le dernier point négatif de l'accélération est conservé. Cette méthode est moins arbitraire et donne des résultats plus précis que la détermination d'un seuil. Elle contribue notablement à la répétabilité des mesures réalisées. La même méthode est appliquée au signal de force donnant ainsi le délai final électromécanique. Le délai moyen obtenu ( $11.64 \pm 1.35$  ms) est compatible avec le large éventail relevé dans la littérature ( $7.90 \pm 18.77$  ms) [65, 94, 90, 62]. Les valeurs de délai sont résumées à travers un schéma temporel de la production de force (Fig. 4.4). Les délais ainsi que leurs incertitudes sont exprimés en valeur absolue et en pourcentage du délai final. Suite aux tests préalables de normalité<sup>2</sup>, la répétabilité des mesures est confirmée par de faibles écarts types. Des écarts significatifs<sup>3</sup> entre les différents délais mettent en évidence la dynamique de plusieurs éléments de la chaîne mécanique.

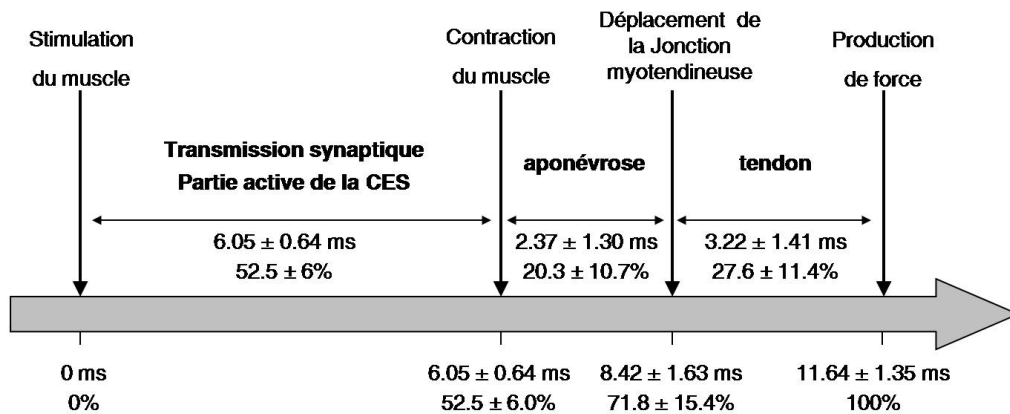


FIGURE 4.4 – Schéma des délais temporels entre la stimulation électrique et le début du mouvement du muscle, celui de la jonction myotendineuse, ainsi que de la production finale de force. Les processus actifs et passifs se partagent environ pour moitié le délai électromécanique.

2. Le test de Shapiro-wilk assure une distribution normale d'une variable aléatoire (Prism 4.01, Graphpad Software, San Diego, CA).

3. Un test de contraste orthogonal post-hoc assure un écart significatif (Statistix, Tallahassee, FL).

Tout d’abord, le délai entre la stimulation et la contraction du muscle représente la moitié du délai total ( $52.5 \pm 6\%$ ). Les mécanismes caractérisés ici sont la transmission synaptique, le couplage excitation/contraction et la transmission de la force le long des fibres. Le temps de propagation du potentiel d’action est écarté car l’amorce de déplacement est détectée dès la première activation d’une unité motrice. En effet, le début du déplacement est quasiment instantané sur l’ensemble du domaine de mesure. Les variations spatiales de l’amorce du mouvement selon l’axe  $x$  perpendiculaire aux rayons ultrasonores (Fig. 4.5) sont bien trop rapides (au minimum 20 m/s) pour être comparées à la vitesse de propagation du potentiel d’action le long de la fibre musculaire ( $\sim 4$  m/s [91]). Les variations spatiales que l’on observe proviennent de la superposition d’un déplacement global créé par la contraction de la première unité motrice, et d’un effet de latence de relaxation [117] provoquant une légère élévation du muscle avant la contraction (*cf.* Fig. 4.5).

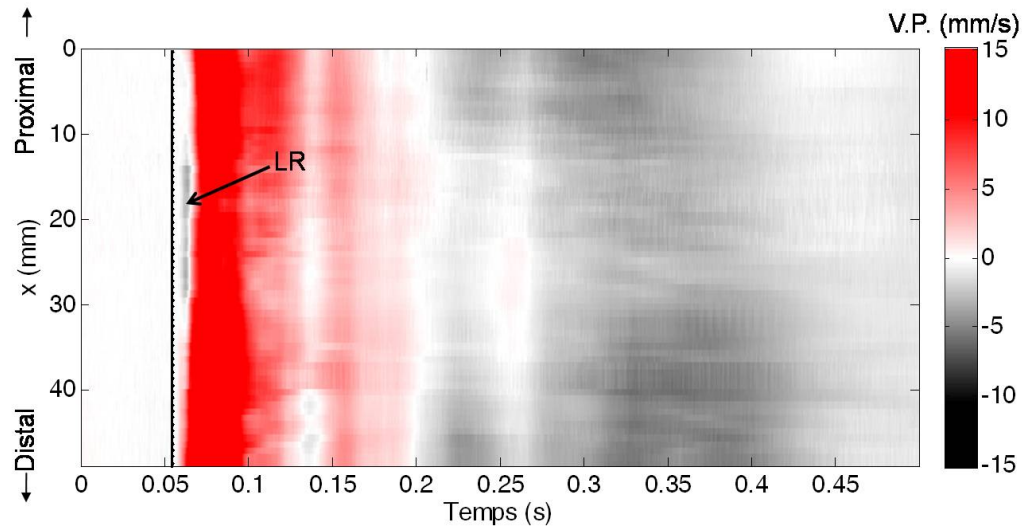


FIGURE 4.5 – Vitesse particulière (V.P.) le long de la fibre musculaire (axe  $x$ ) à 2 cm de profondeur. Le point moteur se trouve en  $x < 0$  mm (proximal). L’amorce du mouvement détectée par l’accélération est quasi-instantanée (ligne noire verticale à  $t \simeq 0.05$  s). On distingue cependant l’effet de latence de relaxation (LR, flèche noire) pour  $x \in [10, 30]$  mm où la vitesse particulière est d’abord négative à l’amorce du mouvement puis devient positive.

L'autre moitié du délai électromécanique ( $47.5 \pm 6.0$  %) concerne la partie passive de la CES, composée de l'aponévrose et du tendon. La force créée par l'ensemble des fibres musculaires doit maintenant être transmise mécaniquement. Encore une fois, le délai entre la stimulation et le mouvement du tendon ( $8.42 \pm 1.63$  ms) ne rend pas compte de la propagation du potentiel d'action entre le point moteur et la jonction myotendineuse qui dure bien plus longtemps ( $\sim 25$  ms). Ce délai correspond donc uniquement à l'étirement de l'aponévrose, les quelques millisecondes restantes ( $3.22 \pm 1.41$  ms) viennent de l'étirement du tendon.

#### **4.4 Étude complémentaire : contraction du biceps.**

Une étude identique a été menée dans un muscle du biceps (*Biceps brachii*). Des résultats similaires ont été obtenus avec un délai total de 10.02 ms dont  $56.9 \pm 14.0$  % du temps alloué à la partie active de la CES et au couplage excitation-contraction. Encore une fois, l'élongation de la chaîne représente une grande partie du délai électromécanique ( $43.1 \pm 13.9$  %). En revanche, dans le cas du biceps, il n'a pas été observé de délai significatif entre le début de la contraction du muscle et le début du déplacement du tendon. Ceci ne veut pas dire que la propagation de la force le long de l'aponévrose n'intervient pas dans la contraction, mais plutôt qu'elle n'est pas visible dans l'amorce de la contraction. Contrairement au muscle précédent, il n'y a pas de pré-tension dans le biceps ce qui entraîne un mouvement rigide de toute la CES et un déplacement de la jonction myotendineuse concomitant à la contraction des fibres musculaires. Cependant, il est fort probable que l'élongation de l'aponévrose intervienne aussi dans le délai global puisque lorsque le tendon commence à s'étirer, l'aponévrose subit la même tension. D'ailleurs le délai de l'ensemble de la partie active étant comparable dans le biceps ( $4.43 \pm 1.95$  ms) et le mollet ( $5.52 \pm 0.64$  ms), les mécanismes doivent être similaires.

Nous avons aussi cherché à caractériser les mêmes délais dans le cas d'une sollicitation volontaire du biceps. Les résultats sont peu concluants car la reproductibilité des délais n'est pas satisfaisante. Dans ce cas, l'arrivée du signal électro-myographique sert de référence pour le début du processus. Cela im-

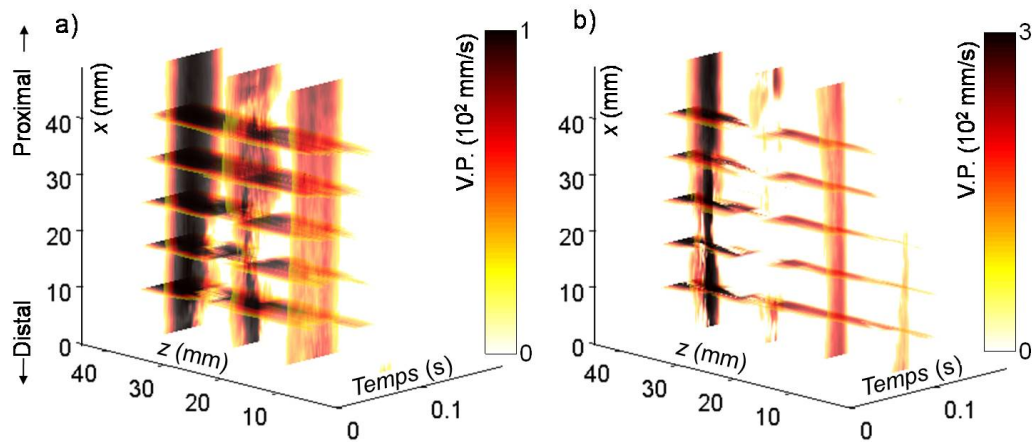


FIGURE 4.6 – Dans cette représentation tridimensionnelle, la vitesse particulaire dans le biceps est mesurée sur un plan de 48 mm le long de la fibre musculaire (axe  $x$ ) et 43 mm de profondeur (axe  $z$ ). Le troisième axe représente l'évolution temporelle et la vitesse particulaire est codée sur une échelle de couleurs. Des coupes selon l'axe  $x$  et  $z$  de la vitesse particulaire en fonction du temps sont représentées à 1 cm d'intervalle environ. a) Contraction par stimulation électrique, les vitesses particulières inférieures à 20 mm/s sont transparentes. b) Contraction volontaire avec une transparence des vitesses particulières inférieures à 60 mm/s. La stimulation engendre une contraction plus globale sous les électrodes alors qu'elle est plus localisée spatialement par recrutement volontaire.

plique une nouvelle détection qui diminue la précision des mesures. Mais le principal obstacle pour mesurer un délai volontaire vient de la non reproductibilité du recrutement. Pour visualiser le recrutement spatial, l'imagerie ultrasonore a été effectuée sur un plan de  $48 \times 43$  mm (Fig. 4.6). L'axe  $x$  est dans le sens des fibres musculaires et l'axe  $z$  correspond à la profondeur dans le muscle, soit l'éloignement de la sonde ultrasonore. Dans les deux cas, stimulation électrique et recrutement volontaire, la sonde impose une condition limite de vitesse particulaire nulle en  $z = 0$  mm. De plus, le gonflement du muscle impose un déplacement global de la sonde par rapport au muscle lui-même. Le déplacement entre 2 images montre donc un effet d'intégration qui explique que le maximum des déplacements est au plus profond du muscle. Par recrutement volontaire, la consigne était de fournir une contraction maximale, la vitesse particulaire est environ 3 fois plus impor-

tante que par stimulation électrique. Cette dernière montre une contraction relativement homogène à partir d'une certaine profondeur alors qu'elle est plus localement répartie sur le volontaire. On observe notamment une large zone non sollicitée autour de  $z = 30$  mm (Fig. 4.6 b). Ceci montre donc que le recrutement volontaire n'est pas homogène, qu'il est impossible de savoir quelles unités motrices vont être sollicitées et que le recrutement n'est jamais identique.

La détermination des délais intermédiaires a permis d'isoler la contribution de différents phénomènes dans le délai électromécanique. Bien que leur rôle soit entièrement passif, l'aponévrose et le tendon sont responsables de la moitié du délai. Les contributions des différents phénomènes de la partie active de la CES ne peuvent être séparées mais nous avons aussi montré que la propagation du potentiel d'action ou bien l'effet de latence exerçait un rôle mineur dans le délai. Finalement, cette méthode n'a pas permis de caractériser le délai électromécanique pour une contraction volontaire. Le monitoring spatial de la contraction montre en effet une forte complexité du recrutement volontaire qui est difficilement reproductible.

## Troisième partie

Élastographie passive : utilisation  
du bruit physiologique pour une  
tomographie d'ondes de  
cisaillement dans les tissus mous

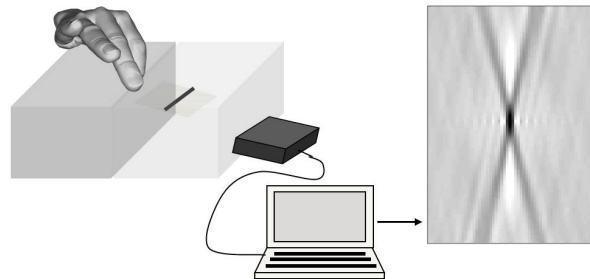
*Imagerie Acoustique en Milieux Réverbérants*

## Chapitre V

---

### Retournement temporel et corrélations de bruit dans les solides mous

---



En milieu ouvert, il faut un grand nombre de voies pour réaliser une refocalisation par retournement temporel. Dans les cavités, les réverbérations permettent d'obtenir le même résultat avec une seule voie. L'intérêt des réverbérations est identique pour une configuration passive de corrélation de bruit. Ainsi, ce chapitre propose une mise en parallèle du retournement temporel et de la corrélation de bruit, d'abord par une approche théorique, puis expérimentalement avec des ondes élastiques dans les solides mous.



Le point de départ des travaux présentés dans ce chapitre est l'expérience de retournement temporel dans les solides mous [24] ainsi que son application à travers l'élastographie par retournement temporel [9]. Les travaux de corrélation de bruit développés en partie dans les murs du LGIT avec des articles fondateurs de M. Campillo et A. Paul en sismologie [21] et de P. Roux en océanographie [112] ont inspiré la suite des travaux sur l'élastographie par retournement temporel dans les solides. Ainsi ce chapitre présente une expérience originale de recouvrement de fonctions de Green par corrélation de bruit pour des ondes vectorielles à l'intérieur des solides mous. Avant cela, les concepts de retournement temporel et de corrélation de bruit seront introduits puis mis en parallèle dans une étude théorique basée sur une version particulière de la formulation intégrale. Ensuite la méthode dite du "tapotage" sera introduite, une expérience de refocalisation par corrélation de bruit obtenue en tapotant à la surface d'un gel. Après cette validation *in-vitro* de la méthode de corrélation de bruit dans les solides mous, une expérience *in-vivo* de corrélation de bruit physiologique dans le foie est présentée.

### **5.1 Retournement temporel et corrélation de bruit : schémas de principe.**

Dans ce paragraphe introductif, les méthodes de retournement temporel et de corrélation de bruit sont présentées à travers des schémas de principe épurés. Par soucis de clarté, les sources sont impulsionnelles, les récepteurs idéaux et comme pour les transducteurs ultrasonores, sources et récepteurs sont interchangeables. Ces hypothèses permettent d'écrire simplement les expressions de retournement temporel et corrélation de bruit à partir des fonctions de Green en négligeant les fonctions de transfert propres aux sources et récepteurs réels. Ces dernières introduisent des différences qui ne sont pas fondamentales et ne seront pas discutées ici.

La physique du retournement temporel [52] repose sur la propriété d'invariance par retournement temporel de l'équation d'onde, c'est à dire au changement de variable de  $t$  par  $-t$ . Cette invariance se traduit par des solutions de l'équation d'onde fonction de  $(\vec{x} - ct)$  et de  $(\vec{x} + ct)$ . Le renversement du temps se traduit par une propagation des ondes dans le sens contraire.

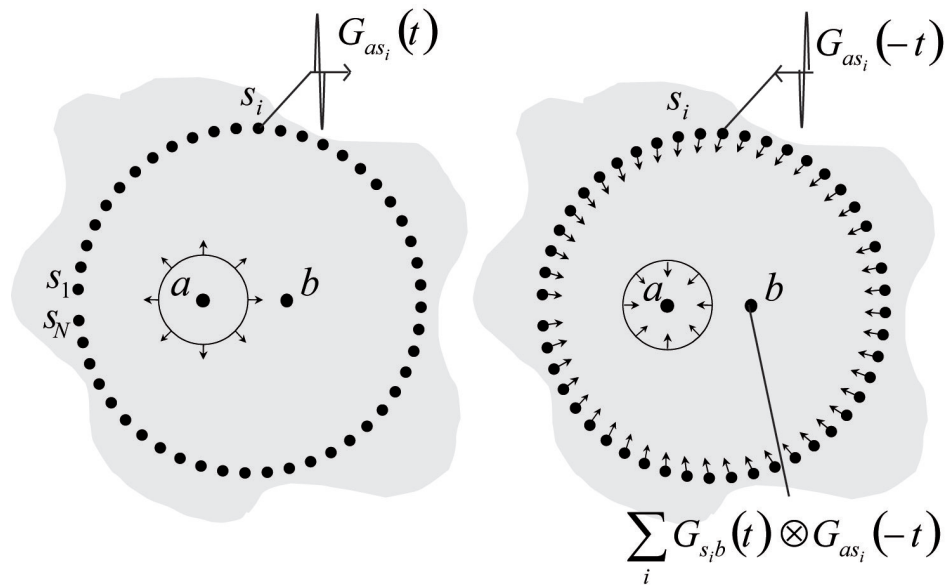


FIGURE 5.1 – Schéma de la cavité idéale à retournement temporel, constituée d'un ensemble d'émetteurs/récepteurs entourant une source impulsionnelle. Le signal enregistré, retourné temporellement puis ré-émis va refocaliser au point source.

L'idée proposée dans les années 90 par M. Fink *et. al* consiste à utiliser cette propriété pour focaliser des ondes en un point désiré [52, 144]. Dans une première étape, d'apprentissage, la réponse d'une impulsion au point  $a$  (Fig. 5.1) est enregistrée sur l'ensemble des récepteurs  $s_i$ ,  $i = \{1, \dots, N\}$  entourant une cavité idéale à retournement temporel. Puisque la source est impulsionnelle, les réponses sont les fonctions de Green,  $G(a, s_i; t)$  notées ici  $G_{as_i}$ , entre le point source  $a$  et les points d'observation  $s_i$ . Puis dans l'étape de retournement temporel, chaque réponse retournée temporellement  $G_{as_i}(-t)$  est ré-émise au même point  $s_i$  qui devient alors une source (Fig. 5.1). Les ondes vont alors parcourir le même chemin en sens inverse et refocaliser au point source  $a$ , pour ensuite diverger à partir de ce point. Le maximum du champ se trouve donc au point  $a$  et au temps de refocalisation  $t = 0$ . Dans le cas de la cavité idéale, le champ de retournement s'écrit [22] :

$$RT_{ab}(t) = G_{ab}(t) - G_{ab}(-t) \quad (5.1)$$

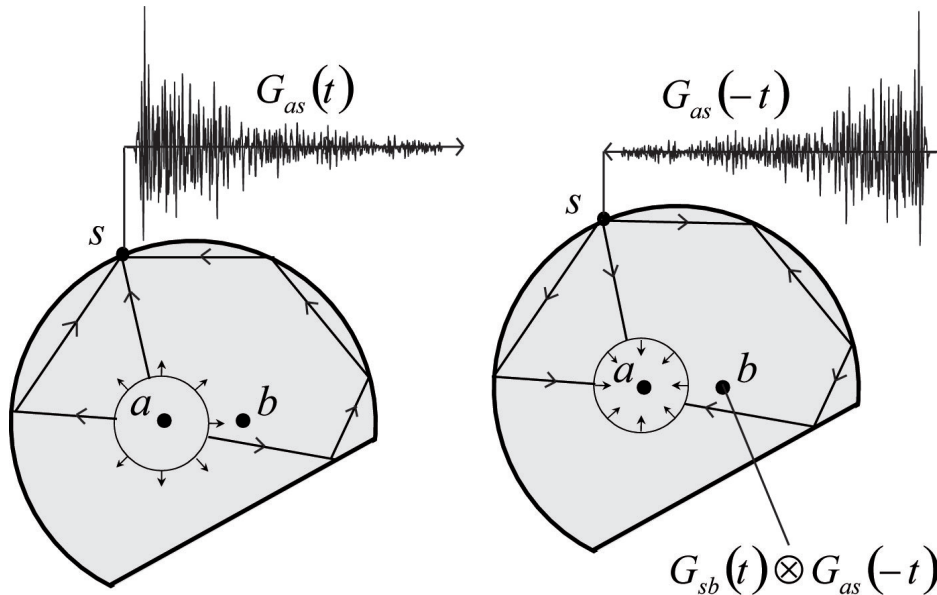


FIGURE 5.2 – Schéma de la cavité à retournement temporel monovoie où un seul émetteur/récepteur capte l’information contenue dans toute la réverbération. Une partie des ondes est retournée temporellement puis ré-émise, elle va alors revivre toutes les réflexions dans le sens contraire et refocaliser au point source.

Cette version classique et idéale du retournement temporel implique de contrôler le champ acoustique sur une surface fermée incluant la source (représentée ici par la sommation sur  $i$ ). En effet, d’après le théorème de Green [22], le champ dans un volume est contrôlé par le champ sur une surface fermée entourant ce volume. Dans la majorité des cas, l’ensemble des émetteurs/récepteurs n’entoure pas entièrement la source à cause de limitations techniques (nombre de transducteurs, encombrement,...). Seule une portion de la cavité idéale appelée miroir à retournement temporel est utilisée. Dans ce cas, le champ de refocalisation est en partie déformé.

Une manière élégante de contourner ce problème est de remplacer l’ensemble du miroir par des conditions aux limites réfléchissantes. Ainsi, les ondes ne sont pas enregistrées à leur arrivée sur la surface fermée mais réfléchies dans le milieu pour continuer leur propagation. Si la cavité est cha-

tique, alors le principe d'ergodicité assure que les rayons vont parcourir tous les points possibles de l'espace des phases et un seul émetteur/récepteur suffira à recueillir l'ensemble des composantes du champ réverbéré (Fig. 5.2). C'est ce que l'on appelle le retournement temporel monovoie et le milieu fermé est appelé cavité réfléchissante à retournement temporel [22, 44]. Dans ce cas, la réponse  $G_{as}$  en un point  $s$  (Fig. 5.2) contient l'information de toutes les réverbérations, ce signal durant bien plus longtemps que l'émission<sup>1</sup>. La ré-émission après retournement temporel de ce signal va faire revivre la scène de réverbération dans le sens contraire et petit à petit les ondes vont s'organiser pour revenir focaliser au point source  $a$ . Dans ce cas, la théorie des systèmes linéaires fournit une expression du champ à partir de la convolution du signal émis ( $G_{as}(-t)$ ) par la fonction de Green entre le point d'émission et le point de réception :

$$RT_{ab}(t) = G_{sb}(t) \otimes G_{as}(-t) \quad (5.2)$$

Une autre manière similaire de remplacer la surface de capteurs est basée sur la diffusion multiple [42]. Dans ce cas, le champ s'écrit de la même manière, suivant l'Eq. (5.2). A la place des parois réverbérantes, les ondes vont rencontrer un grand nombre de diffuseurs et la refocalisation au point source aura lieu de la même manière (Fig. 5.3). La surface fermée nécessaire au contrôle du champ n'est plus remplacée par la réverbération mais par la multidiffusion [106].

À partir de dispositifs similaires, la corrélation de bruit est maintenant introduite. Sous certaines conditions, la corrélation des signaux enregistrés aux points  $a$  et  $b$  converge vers la fonction de Green entre  $a$  et  $b$  [77, 61]. Le but de la corrélation est donc d'extraire des informations du milieu entre deux capteurs sans aucune source active, mais seulement grâce au bruit acoustique ambiant. La notion de bruit acoustique ambiant est utilisée pour définir un signal d'amplitude faible et sans cohérence spatio-temporelle apparente comparée aux sources classiquement utilisées pour sonder un milieu, comme par exemple les séismes sur les signaux sismiques. Les signaux de bruit sont is-

---

1. En réalité il suffit de retourner un signal d'une durée correspondant au temps de Heisenberg, lui même égal à la densité modale de la cavité [33].

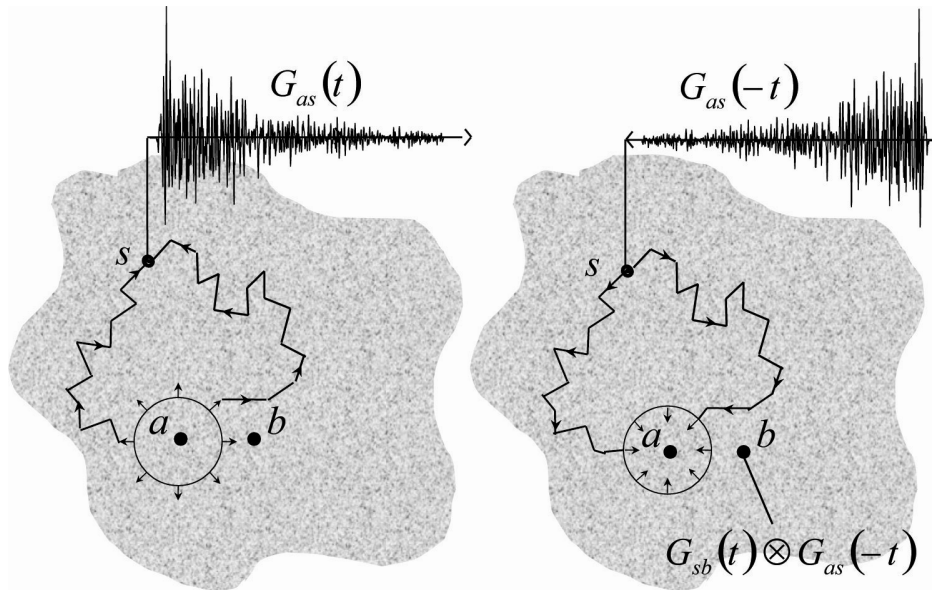


FIGURE 5.3 – Schéma de retournement temporel monovoie en milieu diffusant, un seul émetteur/récepteur enregistre les rayons ayant rencontré un grand nombre de diffuseurs. Une partie des ondes est retournée temporellement et ré-émise, elle va ensuite revivre toutes les réflexions dans le sens contraire et refocaliser au point source.

sus d'une propagation d'onde plus ou moins complexe et dont on ne peut identifier clairement la distribution de sources aléatoires. Les dispositifs précédents fournissent un signal de ce type par multidiffusion ou réverbération d'une unique source pour une position aléatoire, par exemple. Les réponses impulsionnelles en  $a$  et en  $b$  suite à une excitation en un point source quelconque  $s$  fournissent des signaux complexes utilisés pour la corrélation :

$$C_{ab}(t) = G_{sb}(t) \otimes G_{sa}(-t) \quad (5.3)$$

Il est important de noter que la position de la source importe peu dans ces dispositifs : elle peut rester inconnue. La propriété de réciproité spatiale implique que l'on peut inverser source et récepteur, soit  $G_{as} = G_{sa}$ . Dans ce cas, il y a une égalité mathématique entre retournement temporel et corrélation de bruit  $RT_{ab}(t) = C_{ab}(t)$ . L'opération de corrélation trouve ici son sens physique puisque dans les deux cas (Fig. 5.2 et 5.3 cavité ou multidiffusion), la

corrélation peut être vue comme le retournement temporel en  $b$  d'une source placée en  $a$  à travers un miroir à retournement temporel constitué de sources de bruit distribuées.

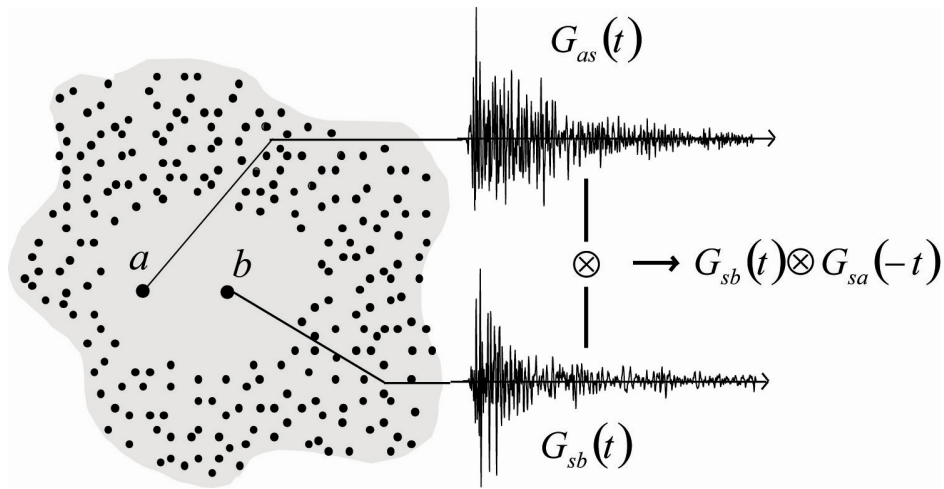


FIGURE 5.4 – Schéma de la corrélation de bruit où de multiples sources (points noirs) distribuées dans tout l'espace génèrent un bruit complexe. La corrélation du bruit entre les points  $a$  et  $b$  est équivalente au retournement temporel.

Dans un cas de figure typique de corrélation de bruit sismique, les sources sont distribuées dans tout l'espace (Fig. 5.4). Dans ce cas, la diversité spatiale des positions des sources assure l'équivalence avec la cavité réverbérante ou la multidiffusion et l'ensemble des sources fait alors office de cavité parfaite à retournement temporel (Fig. 5.4). D'autres expériences procèdent de plusieurs de ces processus pour des résultats similaires, par exemple dans des cavités diffusantes avec une seule source [83, 75], avec des sources dans tout le volume [138] ou dans des guides d'ondes [53].

Pour résumer, le retournement temporel consiste à contrôler spatialement et temporellement un miroir à retournement temporel, alors que la corrélation de bruit est une opération qui utilise comme miroir à retournement temporel des sources aléatoires donnant naissance au bruit acoustique ambiant. Soit un champ  $\psi$  issu d'une source impulsionnelle  $s$  observé aux points  $a$  et  $b$ . L'hypothèse de réciprocité spatiale est alors suffisante pour une équivalence

entre retournement temporel et corrélation de bruit :

$$RT_{ab}^s = \psi_{sb}(t) \otimes \psi_{sa}(-t) = C_{ab}^s \quad (5.4)$$

En réalité la fonction source n'est jamais impulsionnelle, surtout dans le cas du bruit, l'influence dans le cas réel sera discutée dans le paragraphe expérimental (*cf.* section 5.3). Il est indispensable d'introduire la source dans l'Eq. (5.4) car aucune hypothèse n'est faite sur sa position. Précédemment, les (ou la) positions des sources ne jouaient aucun rôle, ceci grâce la multidiffusion, la réverbération ou bien la statistique de la répartition spatiale des sources. Sous ces hypothèses supplémentaires, retournement temporel ou corrélation de bruit sont alors liés au propagateur  $K_{ab}$  entre  $a$  et  $b$  selon l'Eq. (5.5).

$$\frac{\partial RT_{ab}}{\partial t} = \frac{\partial C_{ab}}{\partial t} \propto K_{ab} \quad (5.5)$$

Cette relation approchée établie une proportionnalité entre le propagateur et les dérivés temporelles du retournement temporel idéal ainsi que de la corrélation de bruit idéale. Le propagateur est défini comme la solution à l'équation d'onde sans source. Il est lié aux fonctions de Green à travers la relation suivante ([7] p. 243) :

$$K_{ab}(t) = G_{ab}(t) - G_{ab}(-t) \quad (5.6)$$

La fonction de Green causale  $G_{ab}(t)$  est différente de zéro pour  $t \geq 0$  alors que la fonction anticausale  $G_{ab}(-t)$  l'est pour  $t \leq 0$ . Avant le temps de refocalisation, le propagateur est une onde convergente vers le point source, puis divergente pour les temps positifs. Il s'agit donc bien d'une situation de refocalisation obtenue soit par retournement temporel soit par corrélation de bruit. Les fonctions de Green causales et anticausales ne se superposent qu'en zéro où par définition, elles sont toutes deux égales à un dirac au point source. La différence des deux termes annule le propagateur en  $t = 0$  au point source et dans tout l'espace. Remarquons aussi qu'un champ de retournement temporel ne devrait pas créer de partie propagative après la refocalisation afin de créer à l'identique la scène renversée temporellement. Le champ "parfait" de retournement temporel ainsi défini est donc seulement

$G_{ab}(-t)$ , or ceci n'est possible qu'avec une source au point  $a$  puisque c'est la définition même de la fonction de Green. Ceci veut dire que la seule manière d'observer le retournement temporel "idéal" est de disposer d'une source au point de focalisation qui va annuler la partie propagative du champ. Cette source est appelée "puit acoustique" par De Rosny *et al.* [34] qui ont observé un tel retournement temporel idéal.

La démonstration de la relation entre retournement temporel idéal et propagateur a été établie dans une cavité par Cassereau et al. [22] et par B. A. van Tiggelen [133] pour un milieu diffusant. Concernant la corrélation de bruit en cavité, le lien a été établi à travers l'équation de cavité [45] et l'interprétation de celle-ci en terme de corrélation [41]. Dans les milieux diffusants, plusieurs auteurs ont montré la convergence de la corrélation vers le propagateur à travers les représentations spectrales [83], le théorème de fluctuation-dissipation [136, 133, 57] ou d'un théorème des représentations [134], et aussi par le théorème de la phase stationnaire [124]. Nous proposons ici une approche similaire permettant de déduire d'une même identité la relation entre propagateur, retournement temporel et corrélation de bruit.

## ***5.2 Relation entre retournement temporel et corrélation de bruit à travers la formulation intégrale du propagateur***

Dans cette partie nous revenons quelque peu aux fondamentaux en établissant tout d'abord l'équation de Helmholtz dans un fluide homogène avec atténuation puis la formulation intégrale qui en dérive. Celle-ci établit une relation entre un champ de pression dans un volume à partir de la pression à sa surface ainsi que d'éventuelles sources volumiques. Si le champ de pression est remplacé par une fonction de Green, alors la formulation intégrale fait apparaître le propagateur lui-même exprimant la refocalisation d'une onde dans le cas idéal. Cette formulation est alors très intéressante afin d'interpréter différentes configurations de retournement temporel ou de corrélation de bruit.

Dans un fluide, la conservation de la masse, le principe fondamental de la dynamique et l'équation d'état permettent de calculer l'équation de Helmholtz. Les équations suivantes portent sur les faibles fluctuations acoustiques de la



pression  $P$  et de la densité  $\rho$ . La vitesse particulaire est notée  $\vec{v}$  et la densité moyenne  $\rho_0$  est largement plus grande que la fluctuation  $\rho$ ;  $c$  représente la vitesse des ondes dans le fluide [72] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}) = 0 \quad (5.7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} P = 0 \quad (5.8)$$

$$P = \rho c^2 \quad (5.9)$$

En substituant l'équation d'état (Eq. 5.9) à la conservation de la masse (Eq. 5.7), il suit :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}) = 0 \quad (5.10)$$

Cette dernière expression dérivée par rapport au temps donne, après substitution du principe de la dynamique (Eq. 5.8), l'équation de propagation en milieu homogène :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \left( \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta P = 0 \quad (5.12)$$

Il ne reste plus qu'à écrire la pression sous forme de produit d'une composante temporelle monochromatique et d'une composante spatiale :  $P = e^{i\omega t} \mathbf{P}(\vec{x})$  pour obtenir l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{P}(\vec{x}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{P}(\vec{x}) = 0 \quad (5.13)$$

Landau ([72] p. 432) remarque qu'une faible atténuation du milieu peut être prise en compte avec un terme  $\gamma$  dans le nombre d'onde  $k = \omega/c$ , qui devient  $k' = (\omega + i\gamma)/c$  :

$$\Delta \mathbf{P}(\vec{x}) + \frac{(\omega + i\gamma)^2}{c^2} \mathbf{P}(\vec{x}) = 0 \quad (5.14)$$

Dans un tel milieu, la fonction de Green harmonique  $\mathbf{G}_{ax}$  qui est la solution en  $\vec{x}$  de l'équation d'onde avec un terme d'excitation impulsionnel en un point

$\vec{a}$  :

$$\Delta \mathbf{G}_{ax} + \frac{(\omega - i\gamma)^2}{c^2} \mathbf{G}_{ax} = \delta(\vec{x} - \vec{a}) \quad (5.15)$$

C'est à travers la fonction de Green que l'on explique formellement le lien entre le retournement temporel et la corrélation de bruit. Pour se faire, utilisons la formulation intégrale [19] dans un cas particulier. Cette dernière permet d'écrire le champ de pression à l'intérieur d'un volume à partir du champ de pression sur une surface fermée définissant le volume et des sources éventuelles contenues dans ce volume. Afin de mettre en place l'identité recherchée, définissons le flux  $F$  suivant :

$$F = \oint_s \left[ \mathbf{G}_{bx} \vec{\nabla} \mathbf{G}_{ax}^* - \vec{\nabla} \mathbf{G}_{bx} \mathbf{G}_{ax}^* \right] \vec{dS} \quad (5.16)$$

Par rapport à la version classique de la formulation intégrale, la pression en un point quelconque est remplacée par la fonction de Green conjuguée  $\mathbf{G}_{ax}^*$ . Physiquement,  $F$  est un bilan du flux d'énergie entrant et sortant d'une surface fermée  $S$  délimitant un volume  $V$  en dehors duquel il n'y a plus de source. Le théorème de Green-Ostrogradski permet de transformer l'intégrale sur la surface fermée en une intégrale sur le volume :

$$F = \oint_v \vec{\nabla} \cdot \left[ \mathbf{G}_{bx} \vec{\nabla} \mathbf{G}_{ax}^* - \vec{\nabla} \mathbf{G}_{bx} \mathbf{G}_{ax}^* \right] dv \quad (5.17)$$

L'opérateur de divergence sur le produit d'un scalaire par un vecteur s'écrit :  $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{g}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{g} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ .

Ainsi l'expression devient :

$$F = \oint_v \left[ \mathbf{G}_{bx} \Delta \mathbf{G}_{ax}^* - \Delta \mathbf{G}_{bx} \mathbf{G}_{ax}^* \right] dv \quad (5.18)$$

L'équation d'onde (Eq. 5.15) permet de réécrire les Laplaciens des fonctions de Green :

$$\Delta \mathbf{G}_{ax}^* = -\frac{(\omega^2 + 2i\gamma\omega - \gamma^2)}{c^2} \mathbf{G}_{ax}^* + \delta(\vec{x} - \vec{a}) \quad (5.19)$$

$$\Delta \mathbf{G}_{bx} = -\frac{(\omega^2 - 2i\gamma\omega - \gamma^2)}{c^2} \mathbf{G}_{bx} + \delta(\vec{x} - \vec{b}) \quad (5.20)$$

De la substitution et simplification de l'équation 5.18 par les deux expressions précédentes (Eq. 5.20 et 5.19), il résulte :

$$F = \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{G}_{ab}^* - \oint_v \left[ \frac{4i\omega\gamma}{c^2} \mathbf{G}_{bx} \mathbf{G}_{ax}^* \right] dv \quad (5.21)$$

En reprenant l'expression initiale du flux (Eq. 5.17) et en inversant les indices d'une des fonctions de Green par réciprocity, nous obtenons la formulation intégrale recherchée :

$$\mathbf{G}_{ab} - \mathbf{G}_{ab}^* = \oint_v [4i\omega\gamma \mathbf{G}_{bx} \mathbf{G}_{ax}^*] dv + \oint_s \left[ \mathbf{G}_{bx} \vec{\nabla} \mathbf{G}_{ax}^* - \vec{\nabla} \mathbf{G}_{bx} \mathbf{G}_{ax}^* \right] \vec{dS} \quad (5.22)$$

Cette expression met en relation le propagateur dans le domaine fréquentiel  $\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{G}_{ab} - \mathbf{G}_{ab}^*$  avec deux intégrales, une surfacique et l'autre volumique. Le propagateur représente le cas idéal de la refocalisation au point  $a$ , observée en  $b$ . Les intégrales, bien que relatives à des configurations différentes, peuvent toutes deux être interprétées indifféremment en terme de retournement temporel ou de corrélation de bruit. Afin de traiter séparément les deux situations, deux cas limites sont considérés en jouant sur l'atténuation du milieu. Si le milieu n'est pas atténuant ( $\gamma = 0$ ), alors l'identité devient :

$$\mathbf{G}_{ab} - \mathbf{G}_{ab}^* = \oint_s \left[ \mathbf{G}_{bx} \vec{\nabla} \mathbf{G}_{ax}^* - \vec{\nabla} \mathbf{G}_{bx} \mathbf{G}_{ax}^* \right] \vec{dS} \quad (5.23)$$

En prenant le point source  $a$  comme origine du repère sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ , la distance entre  $a$  et  $x$  est alors la coordonnée radiale  $r$  et la fonction de Green en milieu homogène sans atténuation s'écrit :

$$\mathbf{G}_{ax} = -\frac{1}{4\pi r} e^{i\frac{\omega}{c}r} \quad (5.24)$$

Le problème est à symétrie sphérique et ne dépend pas des angles, le gradient se limite à la dérivée par rapport à  $r$  :  $\vec{\nabla} \mathbf{G}_{ax}^* = -i\frac{\omega}{c} \mathbf{G}_{ax}^* \vec{e}_r$  et  $\vec{\nabla} \mathbf{G}_{bx} = i\frac{\omega}{c} \mathbf{G}_{bx} \vec{e}_r$ . Si l'on choisit la surface fermée  $S$  comme étant la sphère de rayon

$r$ , alors la normale à la surface  $\vec{dS}$  est co-linéaire à  $\vec{e}_r$ , dans ce cas :

$$\mathbf{G}_{ab} - \mathbf{G}_{ab}^* = -\frac{2i\omega}{c} \oint_s [\mathbf{G}_{bx} \mathbf{G}_{ax}^*] ds \quad (5.25)$$

L'intégrale du terme de droite, représente l'expression au point  $b$  du retournement temporel d'une impulsion en  $a$  par un miroir constitué de l'ensemble des points  $x \in S$ . Bien que cette configuration est exactement la cavité idéale à retournement temporel (Fig. 5.1), elle peut aussi s'interpréter comme la corrélation entre  $a$  et  $b$  d'un bruit dont les sources sont réparties sur la surface  $S$ . Dans cette configuration de miroir ou sources sur une surface, les hypothèses nécessaires à ce résultat sont 1) milieu homogène, 2) pas d'atténuation.

Dans le deuxième cas de figure, l'atténuation n'est plus nulle ( $\gamma \neq 0$ ) et l'amortissement apparaît dans l'expression des fonctions de Greens en champ lointain :

$$\mathbf{G}_{ax} \simeq \mathbf{G}_{bx} = -\frac{1}{4\pi r} e^{(i\frac{\omega}{c} - \frac{\gamma}{c})r} \quad (5.26)$$

La projection sur la normale se fait comme précédemment (de Eq. 5.23 à Eq. 5.25). De plus, l'intégrale sur une sphère de rayon  $r$  représente un simple produit par  $4\pi r^2$ , soit :

$$\oint_s [\mathbf{G}_{bx} \vec{\nabla} \mathbf{G}_{ax}^* - \vec{\nabla} \mathbf{G}_{bx} \mathbf{G}_{ax}^*] \vec{dS} \simeq -\frac{i\omega}{6\pi c} e^{-\frac{\gamma}{c}r} \quad (5.27)$$

L'intégrale dépend donc de la distance  $r$  et tend vers zéro lorsque  $r$  est grand. Il existe donc un rayon à partir duquel l'intégrale surfacique est négligeable. Reste alors l'intégrale sur le volume, d'où la nouvelle expression appelée aussi identité de Ward [83, 124] :

$$\mathbf{G}_{ab} - \mathbf{G}_{ab}^* = \frac{4i\omega\gamma}{c^2} \oint_v [\mathbf{G}_{bx} \mathbf{G}_{ax}^*] dv \quad (5.28)$$

Cette identité ressemble à la précédente mais cette fois l'intégrale ne porte plus sur une surface mais sur un volume. Elle s'interprète comme la corrélation aux points  $a$  et  $b$  d'un bruit issu de sources réparties dans tout le volume, comme présentée sur la Figure 5.4. Il s'agit aussi du retournement temporel

au point  $b$  d'une impulsion en  $a$  par un miroir constitué de l'ensemble des points  $x \in V$ . Il s'agit enfin de la corrélation entre les signaux enregistrés en  $a$  et  $b$ , avec des sources réparties dans tout le volume. Cette identité fournit donc une nouvelle relation de proportionnalité entre la corrélation de bruit et le propagateur. Les hypothèses sont dans ce cas 1) milieu homogène, 2) présence de sources réparties dans tout le volume, 3) atténuation non nulle.

Pour conclure ce paragraphe, insistons une dernière fois sur les rapports étroits qu'entretiennent retournement temporel et corrélation de bruit. Expérimentalement, ces deux opérations conduisent à une observation d'un champ de refocalisation spatio-temporelle. A travers la seule hypothèse de réciprocity spatiale, cette équivalence est établie par la définition même de ces deux opérations (Eq. 5.4). Avec l'hypothèse supplémentaire d'un milieu homogène sans atténuation, retournement temporel et corrélation conduisent au propagateur avec un miroir (ou des sources) disposé sur une surface (Eq. 5.23). Si l'on ajoute de l'atténuation, alors miroir et/ou sources sont répartis dans tout le volume (Eq. 5.28).

Pour plus de généralité, les calculs précédents peuvent être conduits dans un milieu inhomogène en introduisant un terme de diffusion (ou scattering). Une perturbation de la vitesse :  $c(\vec{x}) = c + \delta c(\vec{x})$  résulte en un terme de diffusion  $d(\vec{x}) = 2\omega^2 \delta c(\vec{x}) / c^3$  dans l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{P}(\vec{x}) + \frac{(\omega - i\gamma)^2}{c_0^2} \mathbf{P}(\vec{x}) - d(\vec{x}) \mathbf{P}(\vec{x}) = 0 \quad (5.29)$$

Quelle que soit la diffusion, l'intégrale surfacique de la formulation intégrale (Eq. 5.22) est inchangée [142, 125] et avec l'hypothèse supplémentaire de champ lointain, les mêmes interprétations peuvent être menées. Finalement, dans les solides, le théorème de représentation donnée par Aki [3] est l'équivalent de la formulation intégrale. Sanchez-Sesma *et al.* ont établi un "théorème des représentations de type corrélation" [116] qui est la version élastique de la formulation intégrale du propagateur présentée ici. Dans des solides homogènes ou inhomogènes, les mêmes relations entre le propagateur d'un côté et retournement temporel et corrélation de l'autre sont généralisables.

### 5.3 Refocalisation d'onde de cisaillement dans les solides mous : du retournement temporel à la corrélation de bruit

Afin d'illustrer les considérations théoriques de la section précédente, cette section est dédiée à l'observation expérimentale de la refocalisation dans le cas particulier des ondes élastiques dans les solides mous. Ainsi, deux expériences seront présentées. Tout d'abord une expérience de retournement temporel réalisée au LAU à Montévidéo, puis une expérience de corrélation de bruit menée lors de cette thèse au LGIT à Grenoble. Cette deuxième expérience dans un gel montre qu'une méthode passive basée sur l'observation d'un champ de bruit élastique ambiant permet d'extraire des informations locales en tout point du milieu. Cette expérience *in vitro* démontre la faisabilité de la méthode qui sera ensuite appliquée dans des tissus biologiques *in-vivo*.

La première phase d'une expérience de retournement temporel consiste toujours en une observation du champ d'onde, ici créé par une source ponctuelle au point  $S$  (repérée par  $\vec{s}$ ) à la surface d'un gel d'agar-gélatine (Fig. 5.5). Cette source consiste en un piston monté sur un pot vibrant auquel est appliqué un pulse  $e(t)$  de 140 Hz dans une direction  $k$ . La composante selon  $z$  du champ de déplacement  $\psi_{kz}$  à l'intérieur du solide est enregistré par interférométrie ultrasonore (*cf.* section 3.2). Dans cette expérience, un transducteur de 5 MHz émet et reçoit un signal ultrasonore avec un échantillonnage à 40 MHz. Les déplacements mesurés sur 4cm le long de l'axe  $z$  autour de l'origine sont affichés sous forme d'un sismogramme. Après la première arrivée de l'onde directe, la réverbération fait apparaître un long signal temporel contenant une grande diversité de chemins acoustiques. Cette diversité vient de la forme cylindrique extrudée par un plan qui confère à cette cavité solide à retournement temporel un comportement chaotique. Aussi compliquée qu'elle soit, la réponse au point d'observation  $\vec{r}_0$  est décrite à l'aide de la théorie des systèmes linéaires par un produit de convolution entre la réponse impulsionnelle  $h$  et le signal source  $e$  :

$$\psi_{kz}(\vec{s}, \vec{r}_0; t) = h_{kz}(\vec{s}, \vec{r}_0; t) \otimes e(t) \quad (5.30)$$

Dans la deuxième phase de l'expérience, il faudrait disposer d'une source

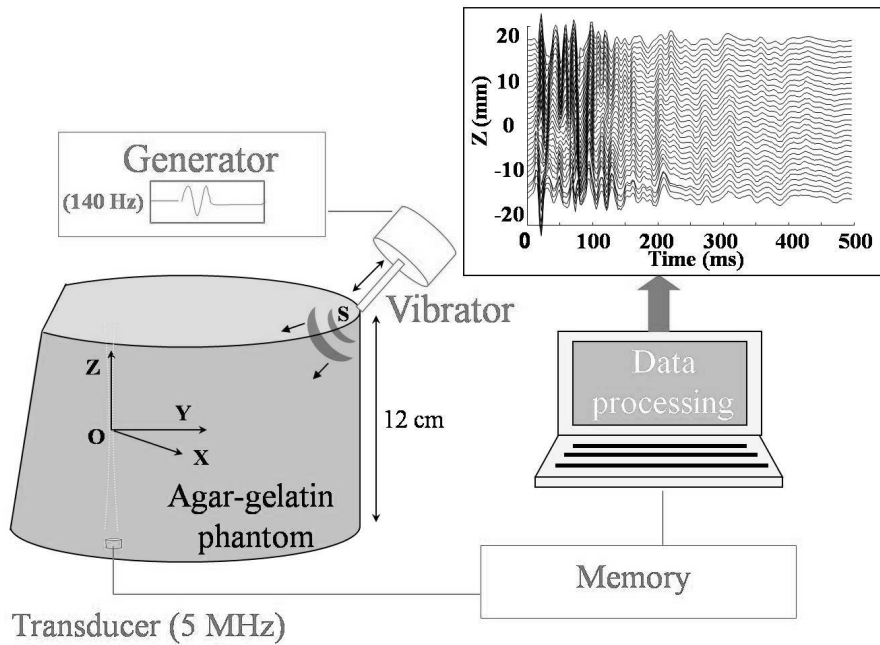


FIGURE 5.5 – Dans l’expérience de retournement temporel, un vibreur à la surface d’un gel d’agar-gélatine crée un champ d’ondes élastiques à l’intérieur du volume. Un transducteur permet de mesurer les déplacements depuis la surface. La composante selon  $z$  des déplacements est représentée sous forme d’un sismogramme et met en évidence la réverbération présente dans cette cavité. Le signal en  $z = 0$  mm est ensuite retourné temporellement puis ré-émis en  $S$ . Par réciprocité, les ondes vont revivre la scène en sens inverse et converger vers l’origine. **Source : Catheline *et al.* [24] :**

en  $\vec{r}_0$  à l’intérieur du volume émettant le signal retourné temporellement afin d’observer la refocalisation à la surface en  $\vec{s}$ . Ce problème est contourné en créant un point force à l’intérieur du solide grâce à la réciprocité spatiale qui permet d’inverser source  $\vec{s}$  et récepteur  $\vec{r}_0$ . Pour des ondes dans les solides, la réciprocité décrite par l’Eq. (5.31) est brisée seulement dans des cas particuliers présentant un champ de vorticité (pour les ondes mécaniques) ou un champ magnétique (pour les ondes électro-magnétiques).

$$\psi_{kz}(\vec{s}, \vec{r}_0; t) = \psi_{zk}(\vec{r}_0, \vec{s}; t) \quad (5.31)$$

Puisque source et récepteurs sont interchangeables, alors  $\vec{r}_0$  est considéré comme le point source, et le point  $\vec{s}$  devient le point de réception. Dans ces

conditions, la deuxième phase du retournement temporel consiste à émettre le signal retourné temporellement  $\psi_{zk}(\vec{r}_0, \vec{s}; -t)$  au point  $\vec{s}$ , ce qui ne pose techniquement aucun problème grâce au vibreur placé à la surface. Les ondes vont alors revivre la scène acoustique en sens contraire et refocaliser en  $\vec{r}_0$ . Le champ de retournement temporellement en un point  $\vec{r}$  peut s'écrire à partir des réponses impulsionnelles :

$$RT_z(\vec{r}_0, \vec{r}; t) = h_{kz}(\vec{s}, \vec{r}; t) \otimes [h_{zk}(\vec{r}_0, \vec{s}; -t) \otimes e(-t)] \quad (5.32)$$

La composante  $z$  du retournement temporel d'une force selon cette même direction ne fait plus apparaître ni la direction  $k$ , ni le point d'application  $\vec{s}$  de la source initiale. Celle-ci joue le rôle du point d'émission/réception dans la cavité à retournement temporel monovoie et n'influence pas la refocalisation finale. Cependant, si la réverbération n'est pas suffisante ou la cavité non chaotique, la direction et la position de la source initiale auront une influence sur la refocalisation.

Afin de simplifier l'expérience, il est possible de calculer le retournement temporel en se passant de la deuxième phase de ré-émission. En effet, le retournement temporel (Eq. 5.32) avec une source impulsionnelle  $e(t) = \delta(t)$ , devient une corrélation des réponses impulsionnelles. Une manière approchée de calculer le champ consiste alors à corréler la réponse en  $\vec{r}_0$  avec celle en  $\vec{r}$  suivant l'Eq. (5.33) :

$$C_z(\vec{r}_0, \vec{r}; t) = [h_{zk}(\vec{s}, \vec{r}; t) \otimes e(t)] \otimes [h_{kz}(\vec{r}_0, \vec{s}; -t) \otimes e(-t)] \quad (5.33)$$

Cette expression se différencie du retournement temporel réel (Eq. 5.32) par une convolution par la fonction source ( $C_z = e \otimes RT_z$ ). Si la source est considérée comme impulsionnelle, alors l'observation du retournement temporel peut se faire sans ré-émission ( $C_z = RT_z$ ). Ainsi, la corrélation  $C_z(z_0, z; t)$  le long de l'axe  $z$  avec une source placée à l'origine ( $z_0 = 0$ ) montre les caractéristiques d'une refocalisation avec un maximum du champ en  $z_0 = 0$  et au temps de refocalisation  $t = 0$  (Fig. 5.6 a). Ce résultat a nécessité au préalable un blanchiment fréquentiel donnant le même poids aux fréquences comprises entre 15 et 150 Hz. Dans le cas idéal précédemment décrit (*cf.*



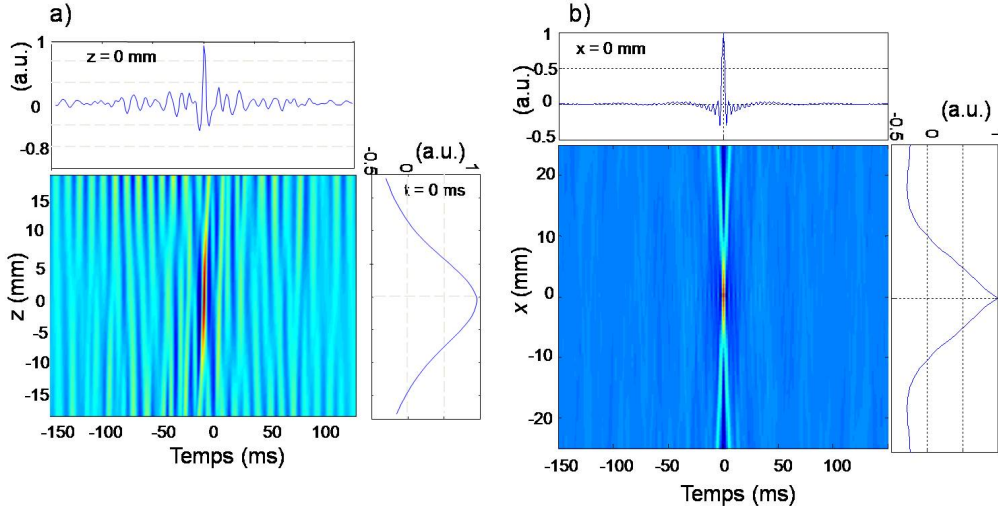


FIGURE 5.6 – La composante selon  $z$ , le long de l'axe  $z$ , du champ de retournement temporel calculé par corrélation d'une force alignée dans la direction  $z$  et placée, par réciprocité, à l'intérieur du solide (en  $z = 0$ ), met en évidence une refocalisation à l'origine et au temps de refocalisation ( $t = 0$ ). b) Le champ de corrélation de la composante  $z$ , le long de l'axe  $x$ , du champ d'ondes élastiques obtenu par tapotage présente les mêmes caractéristiques de retournement temporel avec une nette amélioration du rapport signal sur bruit. Pour ces deux images, la même moyenne spatiale sur le point focal a été réalisée. a) **Source : Benech *et al.* [9]**

section 5.2), le champ de refocalisation  $R_z$  calculé par retournement temporel ou par corrélation, est lié aux fonctions de Green entre  $\vec{r}_0$  et  $\vec{r}$  à travers l'Eq. (5.34) :

$$\frac{\partial}{\partial t} R_z(\vec{r}_0, \vec{r}; t) = G_{zz}(\vec{r}_0, \vec{r}; t) - G_{zz}(\vec{r}_0, \vec{r}; -t) \quad (5.34)$$

Cette expression est composée d'une onde convergente pour les temps négatifs (la fonction de Green retournée temporellement :  $G_{zz}(\vec{r}_0, \vec{r}; -t)$ ), puis divergente pour les temps positifs (la fonction de Green :  $G_{zz}(\vec{r}_0, \vec{r}; t)$ ). Elle montre aussi que le champ est impaire ( $R_z(\vec{r}_0, \vec{r}; t) = -R_z(\vec{r}_0, \vec{r}; -t)$ ), ce qui impose une symétrie temporelle. Or expérimentalement les ondes convergentes proviennent en grande partie des  $z$  négatifs, alors qu'elle devraient venir de toutes les directions pour que le champ puisse présenter un symétrie

temporelle. L'hypothèse de départ considérant le solide comme une cavité à retournement temporel monovoie n'est donc pas totalement vérifiée par manque de réverbération ou bien par une faible diversité spatiale de rayons acoustiques (cavité non chaotique). Le champ de refocalisation (Fig. 5.6 a) montre alors une directivité, position et direction de la source influençant en partie le champ d'onde.

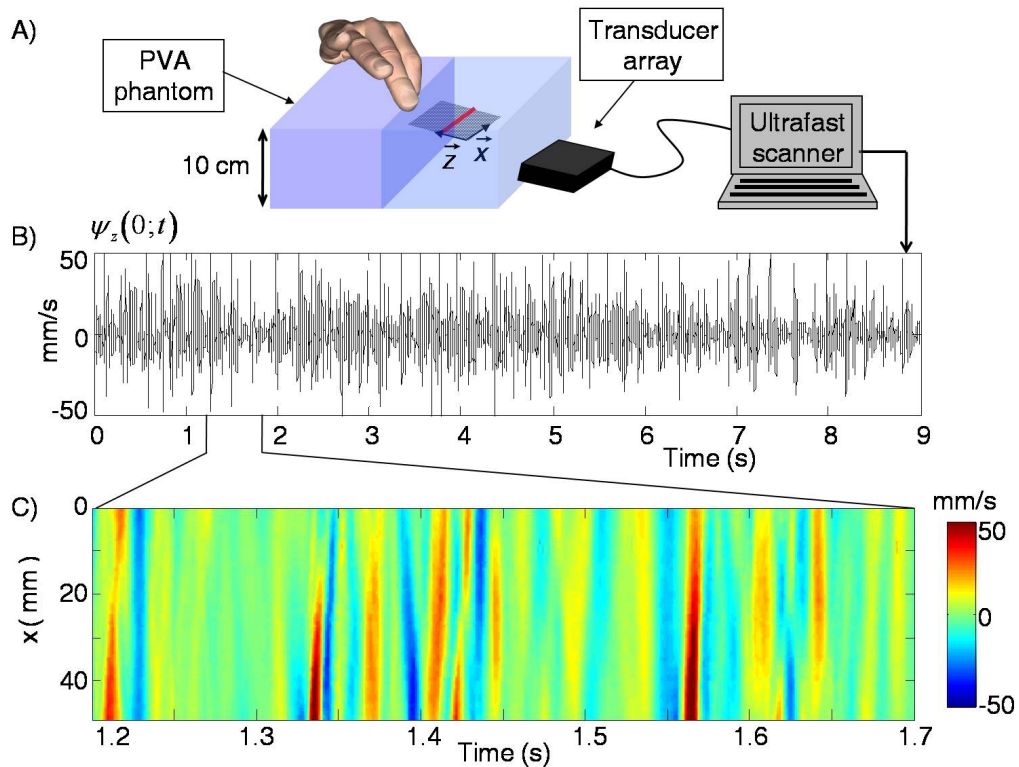


FIGURE 5.7 – a) Dans l'expérience de corrélation de bruit, un champ complexe d'ondes de cisaillement est créé par des impacts de doigts à la surface d'un gel de PVA. Les déplacements à l'intérieur du volume sont mesurés à l'aide d'une sonde ultrasonore. b) Composante selon  $z$  des déplacements en  $x = 0$  et  $z = 3$  cm, le premier point de la ligne rouge en (a). c) Le zoom temporel des déplacements le long de la ligne rouge sur une demi seconde met en évidence une propagation d'onde autour de 0.2 s par exemple.

Afin de diminuer cette directionnalité, il est possible d'utiliser plusieurs sources afin de minimiser l'impact de la source initiale et d'augmenter la diversité des chemins acoustiques. Cependant, l'expérience de retournement temporel nécessite une synchronisation entre la source (vibreux) et l'acqui-

sition du champ élastique (transducteur). En réalité le calcul du champ de refocalisation par la technique de corrélation permet de se passer de la synchronisation qui n'est plus indispensable.

Ainsi dans l'expérience qui suit, l'unique source ponctuelle est remplacée par un ensemble de sources aléatoirement réparties en espace et en temps. Cette deuxième expérience est donc très similaire dans un sens puisqu'il ne s'agit en pratique que d'un changement de la source. Il s'agit donc d'une configuration de corrélation de bruit.

En pratique, la méthode du "tapotage" est appliquée en générant de faibles et nombreux impacts de doigts sur toute la surface du solide (Fig. 5.7 a) durant le temps maximal d'acquisition (9 s à 1 kHz). Dans cette deuxième expérience, une barrette ultrasonore Vermon 64 voies à 6 MHz est connectée à une machine Lecoeur permettant d'échantillonner le signal ultrasonore à 40 MHz. La capacité mémoire de la machine permet d'effectuer 9000 images sur une profondeur de 5 cm avec une fréquence de répétition allant jusqu'à 5 kHz.

Dans un gel polymère à base de polyvinyl alcohol (PVA [54]), la composante selon  $z$  du champ de déplacement  $\psi_z$  en un point quelconque d'observation est d'allure aléatoire bien qu'il s'agisse de propagation d'onde (Fig. 5.7 b). En effet, il est possible de reconnaître des fronts d'ondes sur un zoom temporel de ce signal le long d'une ligne (Fig. 5.7 c). Le signal contient une grande quantité d'informations spatio-temporelles qu'il convient d'extraire par corrélation entre le champ en un point focal  $\vec{r}_0$  et un point d'observation  $\vec{r}$  :

$$C_z(\vec{r}_0, \vec{r}; t) = \psi_z(\vec{r}; t) \otimes \psi_z(\vec{r}_0; -t) \quad (5.35)$$

Le champ de refocalisation spatio-temporel, obtenu par corrélation de bruit après blanchiment entre 20 et 200 Hz (Fig. 5.6 b), possède de meilleures caractéristiques que celui obtenu par retournement temporel. Les ondes convergentes et divergentes émergent bien mieux du bruit et la symétrie temporelle est excellente. Les nombreuses sources créées à la surface du solide permettent d'obtenir un champ d'onde sans direction privilégiée. Dans le cas précédent, l'atténuation et/ou la régularité du solide ne permettaient pas d'obtenir la

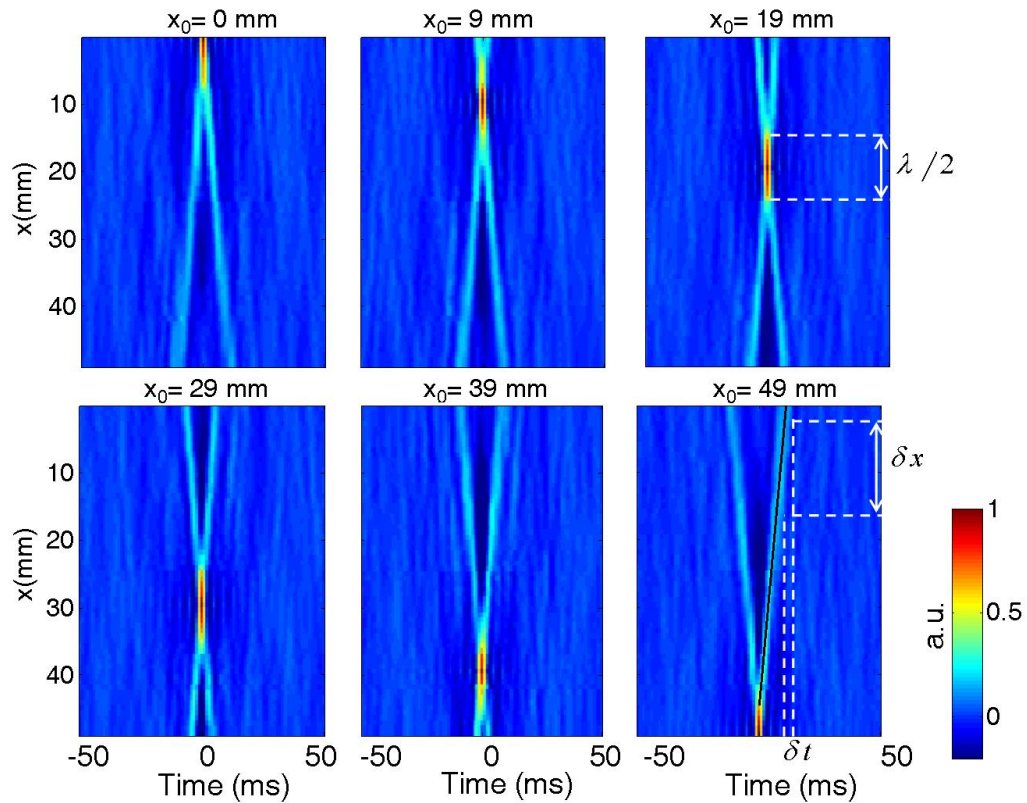


FIGURE 5.8 – Cartes spatio-temporelles de corrélation  $C(x_0, x; t)$  en six points focaux  $x_0$  dans un gel de PVA. Les ondes convergentes et divergentes sont responsables de la forme en croix, typique de la refocalisation d’une onde. Dans cette mesure, le résultat de la corrélation est très proche des fonctions de Greens (Eq. 5.34).

diversité spatiale des rayons acoustiques comme dans une cavité idéale à retournement temporel. Augmenter le nombre de sources permet d’augmenter la diversité spatiale qui n’est plus affectée par un manque de réverbération. Autrement dit, le retournement temporel n’est plus réalisé avec une seule voie mais pour une multitude de sources qui constituent, à la surface du solide, un miroir à retournement temporel.

Dans ce cas, le champ est très proche du cas idéal (Eq. 5.34) et la forme de croix typique d’une refocalisation d’onde est observée sans aucune moyenne spatiale en tout point d’observation (Fig. 5.8). La vitesse des ondes de cisaillement convergentes et divergentes peut être estimée en évaluant la distance

$\delta x$  parcourue en un temps  $\delta t$  (Fig. 5.8 en bas à droite), ou bien à travers la mesure de la largeur à mi-hauteur (Fig. 5.8 en haut à droite) qui, suivant le critère de Rayleigh, est proche de la demi longueur d'onde. Cette étape d'inversion des données sera développée dans le chapitre suivant.

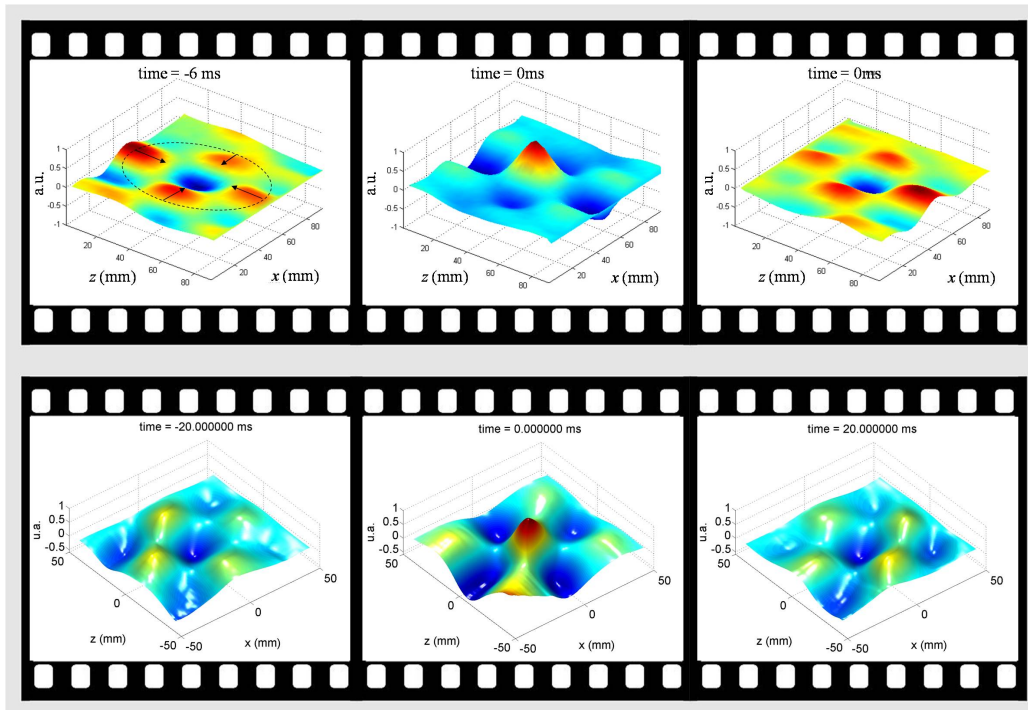


FIGURE 5.9 – Images tirées de films de refocalisations spatio-temporelles d’ondes élastiques sur un plan bidimensionnel. Seule la composante selon  $z$  du champ de déplacement est observée.. La refocalisation est calculée soit à partir de la réponse à une impulsion (en haut, suivant l’Eq. 5.33), soit à partir du champ obtenu par tapotage (en bas, suivant l’Eq. 5.35). Les deux séries montrent les ondes convergente (flèches), la refocalisation, puis les ondes divergentes. Toutes-deux mettent en évidence la forme dipolaire de la force dans un solide avec une amplitude plus importante selon l’axe  $x$  et  $z$ . De plus, les déplacements dans l’axe  $z$  correspondent au champ proche.

Les expériences précédentes de retournement temporel ou de corrélation de bruit réalisées le long d’une ligne ont aussi été effectuées sur un plan d’acquisition 2D permettant de visualiser la forme spatiale de la refocalisation (Fig. 5.9). Les deux résultats sont très similaires, dans les deux cas il n’y a pas de symétrie cylindrique mais plutôt une source dipolaire avec des dépla-

cements plus importants selon l'axe  $x$  et l'axe  $z$ . Les déplacements dans l'axe  $z$  présents avant et après refocalisation, pour une onde se propageant selon  $z$ , correspondent à une polarisation longitudinale de l'onde cisaillement. Or, seul un terme de champ proche présente cette caractéristique (cf. fonction de Green dans un solide : Eq. 3.16). Cette observation signifie que retournement temporel et corrélation de bruit permettent de reconstruire un champ proche au point focal, bien que les sources réelles en surface soient éloignées de plusieurs longueurs d'ondes.

L'expérience de refocalisation dans un solide par corrélation de bruit, c'est à dire avec un très faible contrôle sur les paramètres spatiaux et temporels de la source, a montré des résultats similaires au retournement temporel. Le passage du retournement temporel d'une source impulsionnelle, à l'utilisation d'un grand nombre de sources formant un miroir à retournement temporel permet de fournir une refocalisation de meilleure qualité en chaque point de mesure du champ à l'intérieur du solide. A partir de ce calcul de refocalisation, il est possible d'estimer localement la vitesse de l'onde de cisaillement, ce qui sera le sujet du chapitre suivant. Avant cela, l'expérience de refocalisation des ondes de cisaillement *in-vivo* dans le foie est présentée. Dans ce cas, le champ complexe d'ondes élastiques n'est plus créé artificiellement mais naturellement par le bruit physiologique ambiant du corps humain.

#### **5.4 Calcul de la refocalisation *in-vivo* d'ondes de cisaillement par corrélation de bruit physiologique**

L'expérience *in-vivo* fait suite à la faisabilité du calcul de refocalisation par corrélation de bruit dans le gel de PVA où les conditions sont relativement contrôlables. La zone du foie accessible simplement par échographie a été choisie pour cette étude. De plus, son élasticité est bien connue car des études cliniques ont permis de détecter et classifier les fibroses du foie en fonction de l'élasticité [118].

Le foie se trouvant en dessous du poumon droit juste derrière les côtes, il est possible de l'imager par échographie en plaçant la sonde sur le haut du ventre, sous la dernière côte (Fig. 5.4 a). En pratique, la sonde est positionnée en affichant l'image échographique et une fois la sonde positionnée,

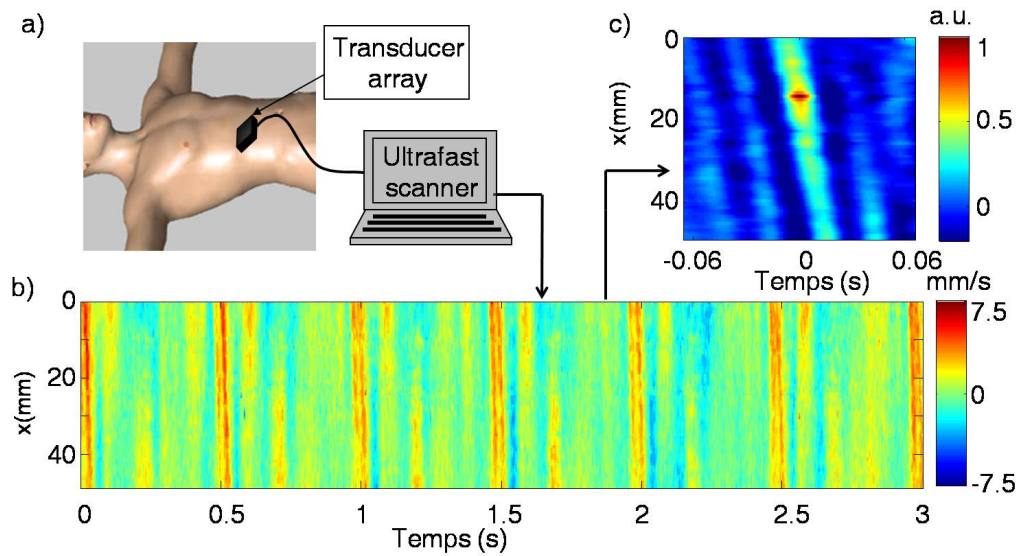


FIGURE 5.10 – a) Dans ce dispositif expérimental *in-vivo*, un scanner ultra-rapide est utilisé pour mesurer le champ de déplacement naturel dans la région du foie. b) Le champ élastique le long d’une ligne d’acquisition à 3 cm de profondeur et parallèle à la sonde met en évidence les pulses cardiaques toutes les demi-secondes (lignes verticales orangées), suivis d’un champ complexe. c) Sur la carte de corrélation  $C(x_0, x; t)$ , en  $x_0 = 14$  mm, seule une direction de propagation émerge du champ de refocalisation.

le sujet doit bouger le moins possible afin de limiter les déplacements parasites dans l’acquisition ultra-rapide. Le principal problème dans ce dispositif est le soulèvement de la cage thoracique lors du mouvement respiratoire. Les déplacements rapides des ondes de cisaillement détectés par l’algorithme d’interférométrie ne sont pas affectés par le mouvement global de la sonde. En revanche, les structures imagées s’éloignent et se rapprochent de la sonde lors du cycle respiratoire. Les déplacements mesurés à une distance fixe de la sonde sont donc relatifs à différentes structures, ce qui empêche de reconstruire correctement une image d’élasticité. Sans nul doute, des algorithmes de traitement du signal pourraient corriger ces déplacements basses fréquences. Ce problème est contourné en demandant au sujet de ne plus respirer durant le temps d’acquisition, comme lors d’une radiographie aux rayons X. Finalement, le volontaire est invité à effectuer une activité physique afin de maximiser son rythme et sa puissance cardiaque augmentant ainsi le bruit

physiologique<sup>2</sup>.

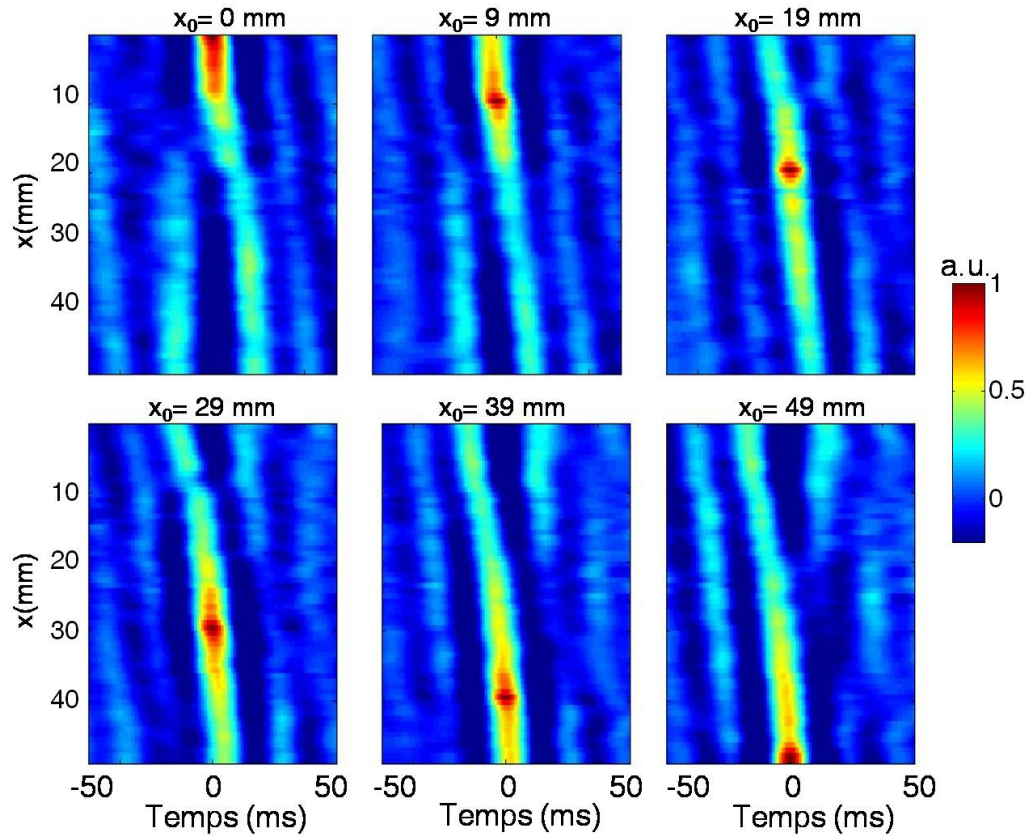


FIGURE 5.11 – Cartes spatio-temporelles de corrélation  $C(x_0, x; t)$  en six point focaux  $x_0$  dans le foie. Le champ d'onde est très directif pour cette mesure passive *in-vivo* où les sources de bruits sont localisées au niveau du coeur.

Le même matériel ultrasonore que pour l'expérience *in-vitro* est utilisé avec une fréquence de répétition de 750 Hz. Afin d'augmenter la sensibilité de la mesure du déplacement, la fréquence est ici plus basse que dans l'expérience *in-vitro*. La composante  $z$  des déplacements mesurée le long de l'axe  $x$  montre un front d'onde (en rouge) à chaque pulse cardiaque (Fig. 5.4 b). Un champ complexe d'ondes de cisaillement se met en place entre deux pulsations. Ce champ est issu de la réverbération dans le corps ainsi que des sources secondaires réparties le long du système artériel. Les fréquences maximales

2. Un grand merci à Adrien, Romain, Soumaya et Thomas P. pour s'être prêté au jeu.



des déplacements sont plus hautes lorsque le patient réalise une activité physique ( $\sim 70$  Hz) que lorsqu'il est au repos ( $\sim 50$  Hz). La sensibilité du système ( $\sim 0.7$  mm/s), comparée au maximum d'amplitude de la vitesse particulaire (7.5 mm/s), indique un faible rapport signal sur bruit. Malgré cela, le résultat de la corrélation après blanchiment entre 5 et 70 Hz (Fig. 5.11) présente des caractéristiques de refocalisation : un maximum du champ au point focal ainsi qu'une onde convergente puis divergente. En revanche, comme pour la première expérience de retournement temporel (Fig. 5.6 a), une seule branche de la croix de refocalisation est présente. Dans cette expérience, les sources de bruit qui font office de miroir à retournement temporel sont en grande partie situées au niveau du coeur. Comparé aux expériences *in-vitro*, la corrélation de bruit est plus proche de l'expérience de retournement temporel monovoie que du tapotage avec une grande répartition des sources.

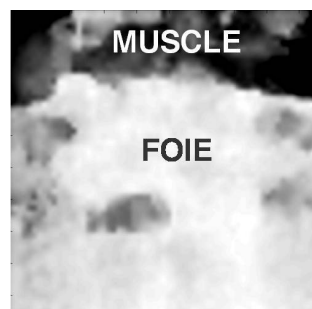
Dans le cas *in-vivo*, la corrélation de bruit ne reconstruit qu'une partie de la fonction de Green par rapport au cas idéal (Eq. 5.34). Dans la plupart des expériences, la directivité du champ d'onde impose une dissymétrie temporelle de la corrélation [135]. En sismologie par exemple, la position des sources dépend des conditions climatiques et la directivité du bruit est saisonnière [127]. Cependant, même avec du bruit directif, les méthodes de corrélation permettent de détecter les changements dans les milieux [17, 63] ou bien de dresser des cartes de vitesses sismiques à haute résolution [115, 122]. Dans le chapitre suivant, nous montrons qu'il en est de même pour la corrélation de bruit physiologique qui fournit une tomographie des ondes de cisaillement dans les tissus mous.

## Chapitre VI

---

De la sismologie à l'élastographie passive :  
étude de faisabilité et premiers résultats  
*in-vivo*

---



A l'utilisation de la réverbération s'ajoute l'importance des sources de bruit pour le calcul des refocalisations. Dans ce chapitre, plusieurs méthodes sont proposées afin d'exploiter au mieux l'information contenue dans le champ de refocalisation et construire des images d'élasticité.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment les expériences de corrélation de bruit permettent de calculer des refocalisations d'ondes de cisaillement dans les solides mous *in-vitro* et *in-vivo*. Nous allons maintenant présenter les méthodes permettant d'exploiter les informations contenues dans le champ de refocalisation. Une première méthode est basée sur la mesure directe de la vitesse de groupe et une seconde consiste à déterminer la longueur d'onde ainsi que la fréquence pour en déduire la vitesse des ondes de cisaillement.

Pour ces deux méthodes, le champ de déplacement est échantillonné à l'aide d'une machine ultrasonore ultra-rapide. Mais nous montrerons qu'il est aussi possible d'effectuer une tomographie de longueur d'onde de cisaillement à partir d'un champ de déplacement échantillonné à 50 Hz, qui est une fréquence typique de rafraîchissement d'image d'un échographe du commerce.

Ces méthodes fournissent une modalité de mesure quantitative de l'élasticité locale de cisaillement dont la faisabilité est présentée à travers l'expérience de tapotage dans un gel polymère. Puis, dans le corps humain, l'exploitation des bruits physiologiques conduit aux premiers résultats de l'élastographie passive *in-vivo*. Une tomographie des ondes de cisaillement de la région du foie sera présentée en comparaison avec une image de l'Aixplorer, un échographe dont le mode élastographique est cliniquement utilisé.

### **6.1 Tomographie de vitesse de groupe**

La méthode d'estimation de la vitesse d'onde de cisaillement décrite ici peut être considérée comme une adaptation de l'élastographie impulsionnelle 1D pour une source créée virtuellement au sein de la zone d'observation. En effet, la corrélation, sous certaines conditions sur le milieu (réciprocité spatiale) ainsi que le champ de bruit (non directif), revient à créer une source d'onde de cisaillement à l'intérieur du milieu. Le suivi spatio-temporel de cette onde permet d'en déduire sa vitesse.

Pour montrer la faisabilité de l'élastographie passive, le problème a été simplifié au cas unidimensionnel de détermination de la vitesse. La directivité d'une source ponctuelle de cisaillement est maximale dans l'axe perpendiculaire à la force (Fig. 3.2). C'est donc dans cet axe que l'évolution temporelle

du front d'onde est mesurée afin d'en déduire la vitesse de l'onde de cisaillement. L'avantage par rapport à l'élastographie impulsienne est de pouvoir effectuer cette mesure avec une source en chaque point d'observation. Il est alors possible de mesurer la vitesse des ondes localement et d'en tirer une cartographie bidimensionnelle.

Les principales étapes de la méthode sont présentées à partir des déplacements créés par tapotage dans un bi-couche de PVA. Une partie du gel n'a subi qu'un seul cycle cryogène, le reste a été soumis à une succession de cinq cycles. Le champ complexe d'ondes élastiques est enregistré durant 9 s et la corrélation de bruit est calculée après blanchiment entre 10 et 100 Hz. Le champ de refocalisation  $C(x_0, x; t)$  au point source virtuel  $x_0$ , observé en  $x$  (Fig. 5.8), est ensuite filtré spatialement afin de ne conserver qu'une seule direction de propagation vers les  $x$  positifs (Fig. 6.1). Le délai  $\delta_t(x)$  du maximum local du champ est détecté au moyen d'un algorithme itératif initialisé au point focal  $x_0$  et au temps de refocalisation  $t = 0$ . La vitesse des ondes de cisaillement  $c_s(x)$  est alors directement reliée au retard :

$$c_s(x) = \left[ \frac{d\delta_t(x)}{dx} \right]^{-1} \quad (6.1)$$

En pratique, la courbe du retard est lissée par une moyenne glissante sur trois points afin de minimiser le bruit lors du calcul de la dérivée spatiale. Celle-ci est estimée par différence centrée au premier ordre :  $\frac{d\delta_t(x)}{dx} \simeq \frac{\delta_t(x+1) - \delta_t(x-1)}{2dx}$ . La vitesse en un point dépend donc de ces deux plus proches voisins de part et d'autre.

En étudiant la vitesse de groupe sur une refocalisation calculée dans une bande de fréquences l'information est accumulée sur tout le spectre fréquentiel, ce qui optimise le rapport signal sur bruit pour la détection du maximum. À partir d'une focalisation en un point focal  $x_0$ , la vitesse est obtenue en tout point de la ligne de mesure. Le point  $x_0$  peut être placé en un point quelconque d'observation (soit 64 positions). Ce qui veut dire que la méthode de mesure fournit 64 évaluations de la vitesse qui sont ensuite moyennées. Cela n'est pas tout à fait vrai car en pratique, tous les points ne sont pas conservés lors du calcul de vitesse. En effet, lorsque l'on s'éloigne trop du point

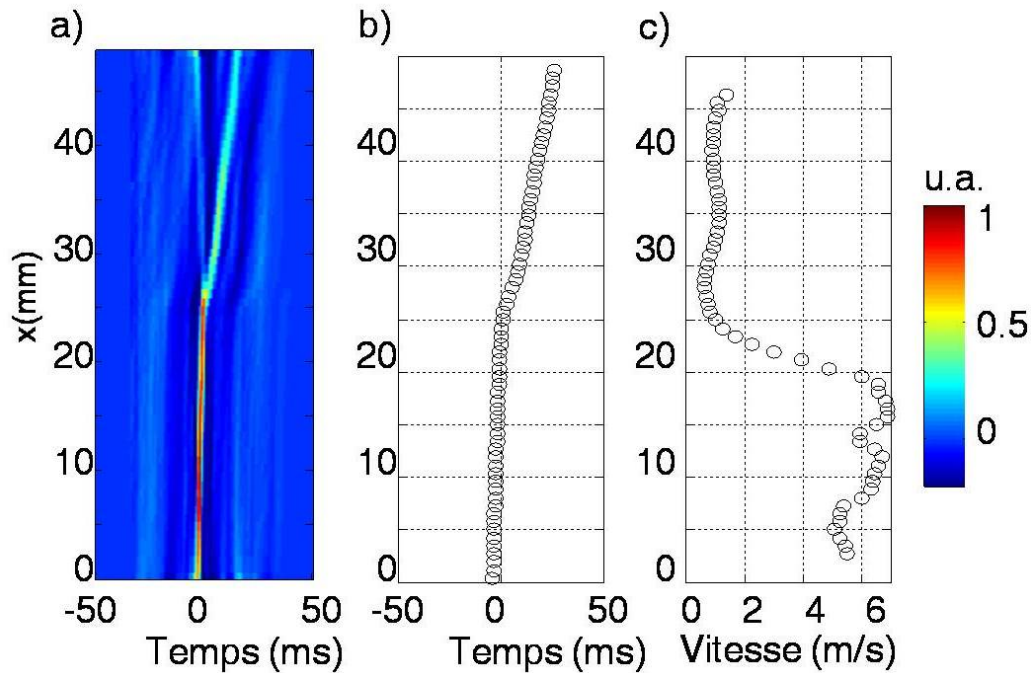


FIGURE 6.1 – a) La carte de corrélation  $C(x_0, x; t)$ , avec  $x_0 = 21$  mm a été calculée le long d’une ligne dans un bi-couche. Le filtrage spatial pour un sens de propagation met en évidence une pente bien plus forte pour  $x < 25$  mm correspondant au gel le plus dur. b) Le retard du maximum du champ de refocalisation est repéré en tout point de l’axe  $x$ , c) l’inverse de la dérivée spatiale du retard (Eq. 6.1) donne une estimation de la vitesse de groupe selon l’axe  $x$ .

focal le maximum du champ est proche du bruit et la détection du maximum peut être erronée. De plus, au voisinage du point focal, une augmentation de la vitesse se traduit par un saut de phase de  $\pm\pi$ . Typiquement, les points utilisés de part et d’autre de  $x_0$  sont éloignés d’au minimum 2 mm et d’au maximum 20 mm.

Cette méthode d’estimation de la vitesse de groupe le long d’une ligne d’acquisition peut être itérée sur plusieurs lignes consécutives afin de reconstruire une tomographie 2D des ondes de cisaillement. Cette approche relativement simpliste a des limites qui seront discutées plus loin mais constitue une première étape indispensable pour tester la pertinence d’une méthode passive de mesure d’élasticité. L’expérience du tapotage ainsi que l’estimation de la

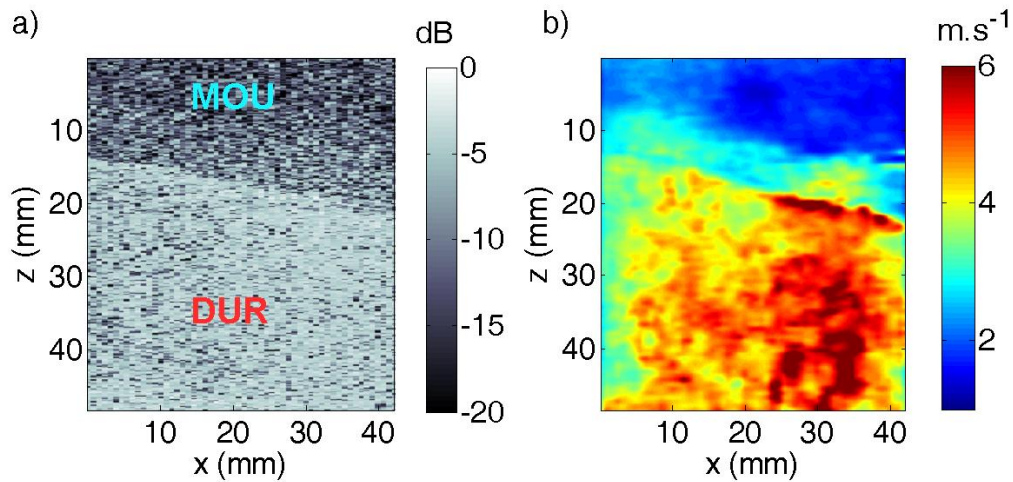


FIGURE 6.2 – a) Image échographique d'un gel bi-couche où les deux zones avec différentes concentrations de diffuseurs sont clairement visibles. b) Tomographie de vitesse de groupe estimée à partir de la vitesse locale de cisaillement le long de l'axe  $x$ . L'interface des deux couches est repérée au même endroit pour les deux images et les vitesses moyennes dans les deux milieux sont en accord avec les mesures indépendantes effectuées par élastographie impulsionnelle.

vitesse de phase selon l'axe  $x$  ont été réalisées dans un gel bi-couche pour 80 lignes d'acquisitions, formant un plan d'observation de  $49 \times 49 \text{ mm}^2$ . Les deux gels de PVA constituant ce bi-couche ont été préparés avec une concentration différente de diffuseurs. Cette concentration n'affecte pas l'élasticité du milieu [54]. En revanche l'interface entre les deux couches est visible sur l'image échographique (Fig. 6.2 a). L'élasticité a été contrôlée par un nombre différent de cycles cryogènes : un seul cycle pour le gel mou en foncé sur l'échographie ( $0 < z < 15 \sim 20 \text{ mm}$ ), et cinq pour le gel dur en clair. La vitesse de l'onde de cisaillement (Fig. 6.2 b) montre la même interface que l'image échographique. Les valeurs moyennes dans les deux milieux, 4.8 m/s et 1.7 m/s, sont en accord avec les valeurs mesurées par la méthode standard d'élastographie impulsionnelle, 4.3 m/s and 1.2 m/s respectivement.

Cependant, la vitesse est légèrement sur-évaluée sur l'ensemble de l'espace de mesure. Pour comprendre ce biais, il faut se souvenir que la convergence de la corrélation de bruit vers une refocalisation idéale (Eq. 5.34) nécessite un champ de bruit sans direction privilégiée, c'est à dire que les ondes viennent

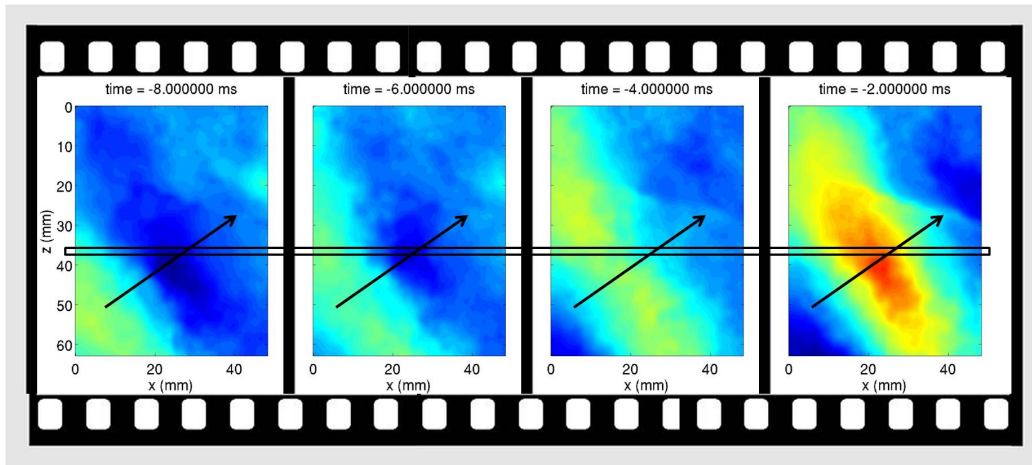


FIGURE 6.3 – Les images successives du champ de refocalisation dans le milieu bi-couche au point ( $x = 24$  mm,  $z = 37$  mm) quelques millisecondes avant le temps de refocalisation ( $t=0$ ) mettent en évidence la directivité de la refocalisation (flèche noire). La vitesse de phase mesurée le long de l'axe  $x$  (encadré noir) est inévitablement sur-évaluée.

de toutes les directions. Dans le milieu bi-couche il est difficile d'obtenir un tel champ car la différence d'impédance entre les deux gels impose un sens privilégié de propagation depuis le milieu dur vers le milieu mou. Le champ de refocalisation observé ressemble au cas analogue du miroir à retournement temporel [110] où les ondes proviennent en grande majorité d'une direction principale, comme le montre la Figure 6.3. L'axe  $x$  selon lequel est effectué la détection du maximum du champ n'est plus confondu avec la direction de propagation. Le maximum le long de cet axe évolue alors plus vite que le front d'onde et la vitesse mesurée est sur-évaluée. L'angle moyen entre le front d'onde et l'axe  $x$  est estimé à environ  $35^\circ$  correspondant à une sur-évaluation de 25% de la vitesse, ce qui est en accord avec les sur-évaluations mesurées variants de 10 à 40%.

Malgré le biais engendré par la directivité du champ d'ondes, la tomographie de vitesse de groupe démontre qu'il est possible de déduire une information quantitative d'un champ complexe d'ondes élastiques. Cette méthode nécessite un fort rapport signal sur bruit et un champ isotrope qui limite son application. Dans le paragraphe suivant, l'influence de ces paramètres sur l'estimation de la vitesse est minimisée en se plaçant au temps de refocalisa-

tion où les deux ondes se superposent.

## 6.2 Tomographie de longueur d'onde

La tomographie de longueur d'onde consiste à exploiter la largeur de focalisation qui renseigne sur la longueur des ondes de cisaillement à travers le critère de Rayleigh. Celui-ci stipule que la résolution d'un système d'imagerie pour une onde scalaire est limitée par la demi-longueur d'onde considérée<sup>1</sup>. Cette limite imposée par les lois de la diffraction est atteinte dans le cas d'une refocalisation par retournement temporel puisqu'il s'agit de la refocalisation optimale. La largeur de la refocalisation est donc liée à la longueur d'onde, elle-même liée à la vitesse des ondes via la fréquence. Ainsi Benech *et al.* [9] ont montré que cette approche permet d'estimer la vitesse moyenne de l'onde de cisaillement dans les solides mous. La même approche est utilisée pour l'imagerie par corrélation de bruit.

À partir du champ de déplacement  $\psi_z(\vec{r}, t)$  mesuré lors de l'expérience du tapotage dans le bi-couche de PVA, la refocalisation au temps zéro calculée par corrélation  $C_z(\vec{r}_0, \vec{r}; 0)$  est définie par une intégrale temporelle selon l'Eq. (6.2) :

$$C_z(\vec{r}_0, \vec{r}; 0) = \int_0^T \psi_z(\vec{r}_0, \tau) \cdot \psi_z(\vec{r}, \tau) d\tau \quad (6.2)$$

En  $\vec{r}_0$ , le processus de refocalisation maximise l'énergie en ce point, c'est le centre de la tache focale. D'après l'image échographique, il est possible de choisir des points de focalisation dans la partie désirée du gel. La tache focale est clairement plus petite lorsque le point focal est dans la partie molle (Fig. 6.4 a) que dans la partie dure (Fig. 6.4 b). La ligne d'iso-niveau permet de distinguer clairement les largeurs de taches à mi-hauteur ; de plus l'échelle de couleur a été choisie afin de représenter en rouge la partie du champ supérieur à 0.5. Contrairement aux méthodes SPAC en sismologie qui sont

---

1. Des largeurs de refocalisation par retournement temporel inférieures à la demi-longueur d'onde ont néanmoins été obtenues dans des conditions particulières, par exemple grâce à la présence d'ondes évanescentes [28], ou bien en annulant la partie causale de la fonction de Green en créant un puits acoustique [34], ou encore via une multidiffusion par des objets plus petite que la longueur d'onde [80]. D'autre part, John Pendry a montré que les propriétés de diffraction particulières des méta-matériaux permettent aussi de dépasser cette limite pour des ondes électromagnétiques [107].



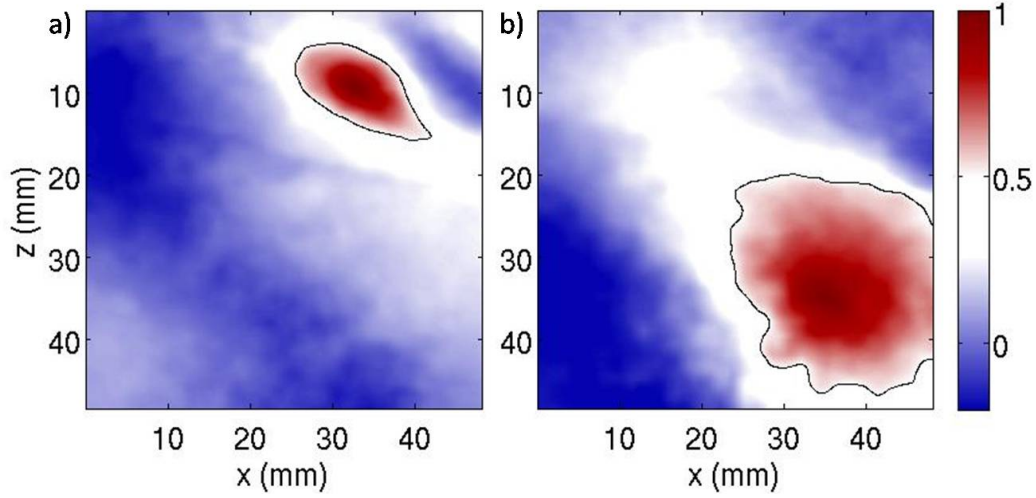


FIGURE 6.4 – Les cartes de corrélation au temps de refocalisation permettent clairement de différencier si le point focal se trouve a) dans le gel mou ( $x = 33$  mm,  $z = 9$  mm), b) dans le gel dur ( $x = 35$  mm,  $z = 35$  mm). Les largeurs à mi-hauteur moyennées dans toutes les directions sont respectivement 12.6 et 26.4 mm, qui correspondent à des vitesses de 1.9 et 3.9 m/s en ces points.

basées sur le même principe [1], ces figures de refocalisation n'ont subi aucun moyennage spatial. La représentation de ces deux refocalisations dans deux milieux d'élasticités différentes montre que la largeur de la focale est liée à l'élasticité du milieu. Pour les ondes scalaires, la largeur est environ égale à une demi-longueur d'onde (*cf.* Annexe D), mais la situation est légèrement différente pour les ondes vectorielles.

Dans le chapitre précédent (*cf.* Eq. 5.34), une expression analytique d'un champ idéal de refocalisation  $\mathbf{RT}_z(r, \theta, \omega)$  pour une onde monochromatique a été donnée grâce au propagateur écrit en termes de fonctions de Green :

$$\mathbf{RT}_z(r, \theta; \omega) \propto \frac{1}{\omega} [\mathbf{G}_{zz}(r, \theta, \omega) - \mathbf{G}_{zz}^*(r, \theta, \omega)] \quad (6.3)$$

En négligeant l'onde de compression, la fonction de Green monochromatique s'écrit (d'après Eq. 3.18) :

$$\mathbf{G}_{zz}(r, \theta; \omega) = \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\rho c_s^2 r} e^{i\frac{\omega r}{c_s}} \left\{ \sin^2\theta + (3\cos^2\theta - 1) \left[ \frac{c_s}{i\omega r} - \left( \frac{c_s}{i\omega r} \right)^2 \right] \right\} \quad (6.4)$$

En substituant la fonction de Green (Eq. 6.4) à l'expression du champ de refocalisation idéal (Eq. 25) l'expression devient :

$$\mathbf{RT}_z(r, \theta; \omega) = \frac{e^{i\omega t}}{4i\pi\rho c_s^3} \sin^2\theta \left(\frac{c_s}{\omega r}\right) \left(e^{i\frac{\omega r}{c_s}} - e^{-i\frac{\omega r}{c_s}}\right) + \frac{e^{i\omega t}}{4i\pi\rho c_s^3} (1 - 3\cos^2\theta) \left[ i \left(\frac{c_s}{\omega r}\right)^2 \left(e^{i\frac{\omega r}{c_s}} + e^{-i\frac{\omega r}{c_s}}\right) - \left(\frac{c_s}{\omega r}\right)^3 \left(e^{i\frac{\omega r}{c_s}} - e^{-i\frac{\omega r}{c_s}}\right) \right] \quad (6.5)$$

Cette expression (Eq. 6.5), est ensuite dérivée temporellement afin d'obtenir la vitesse particulaire. Pour une onde monochromatique il s'agit seulement d'une multiplication par  $i\omega$ . Ensuite, la relation est écrite au temps de refocalisation ( $t = 0$ ) et en introduisant  $\bar{r}$  la distance au point focal normalisée par la longueur d'onde  $\bar{r} = r/\lambda$  :

$$\dot{\mathbf{RT}}_z(\bar{r}, \theta, \omega) = \frac{i\omega}{2\pi\rho c_s^3} \left\{ \sin^2\theta \frac{\sin(2\pi\bar{r})}{2\pi\bar{r}} + (1 - 3\cos^2\theta) \left[ \frac{\cos(2\pi\bar{r})}{(2\pi\bar{r})^2} - \frac{\sin(2\pi\bar{r})}{(2\pi\bar{r})^3} \right] \right\} \quad (6.6)$$

Dans cette expression de la refocalisation spatiale, le premier terme correspond à la somme des ondes convergentes et divergentes de cisaillement qui forment un sinus cardinal, comme pour une onde scalaire avec un terme angulaire supplémentaire. Ce dernier correspond à la directivité d'un point de force pour l'onde de cisaillement : nulle dans la direction de la force et maximale dans la direction perpendiculaire. Le terme de champ proche, bien qu'ayant des termes en  $\bar{r}^2$  et  $\bar{r}^3$  au dénominateur, possède une limite bornée en zéro ( $\cos(x)/x^2 - \sin(x)/x^3 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1/3$ ). À l'inverse des ondes de cisaillement, le terme angulaire du champ proche est maximal dans l'axe de la force et nul dans l'axe perpendiculaire. Un calcul numérique de la carte de refocalisation montre que la somme des deux termes est presque à symétrie cylindrique, comme une onde scalaire. Cependant, la nature du point force dans le solide impose une refocalisation plus large dans l'axe de la force (Fig. 6.5 en  $\theta = 0$ ) qui brise la symétrie de révolution du cas scalaire.

Ce calcul de refocalisation issu d'une expression analytique, tout comme le champ de refocalisation moyenné spatialement (Fig. 5.9), présente une forme de cigare allongé. Les exemples présentés ici (Fig. 6.4) n'ont pas exactement

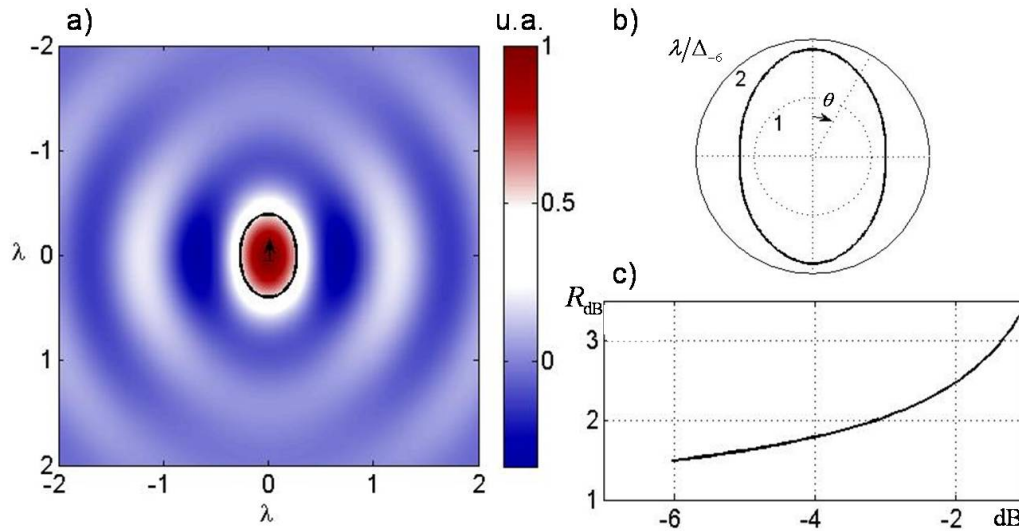


FIGURE 6.5 – a) La refocalisation monochromatique pour une cavité idéale à retournement temporel dans un solide (normalisée par le maximum) possède une forme de cigare allongé dans l’axe du point force indiqué par une flèche pour  $\theta = 0$ . Le trait plein dans l’image de refocalisation indique la ligne de niveau à -6 dB, b) Diagramme angulaire issu de la ligne d’iso-niveau à -6 dB. c) Le rapport entre la largeur moyenne de refocalisation et la longueur d’onde  $R_{dB}$  est calculé pour les largeurs de -6 à -1 dB.

cette forme dépendante de la direction de la force car la directivité du champ de bruit modifie la refocalisation. Les besoins d’un système d’imagerie important de ne pas effectuer de moyenne spatiale, la refocalisation analytique est difficilement comparable avec les refocalisations expérimentales réelles. La solution retenue consiste à moyenner la largeur de la focale suivant l’angle  $\theta$ , la largeur obtenue dans le cas analytique étant alors identifiée à la longueur d’onde connue.

Par exemple, la largeur moyenne à mi-hauteur (-6 dB)  $\Delta_{-6}$  mesure environ 0.67 longueur d’onde ( $\lambda/\Delta_{-6} = 1.5$ ). Il s’agit donc là d’un critère de Rayleigh dans les solides : la longueur d’onde est égale à 1.5 fois la largeur de la focale à mi-hauteur. Ce résultat est très proche d’une onde scalaire où l’on obtient un facteur 1.65 (d’usage on parle d’un facteur 2), le critère de Rayleigh s’applique donc aux solides.

Pour des données expérimentales, cette approche monochromatique n’est

pas suffisante. En effet, une seule fréquence ne permet pas d'obtenir une refocalisation satisfaisante et la largeur de refocalisation à mi-hauteur peut parfois être de la taille de l'espace de mesure. L'approche analytique permet néanmoins de tirer profits de toutes les situations.

Tout d'abord, le critère à mi-hauteur peut être généralisé à différents niveaux de mesure de la tache focale. Le rapport  $R_{dB} = \lambda/\Delta_{dB}$  entre la largeur moyenne de refocalisation à différentes hauteurs et la longueur d'onde est présenté Figure 6.4 c. La vitesse de l'onde de cisaillement s'exprime en fonction de la largeur moyenne de refocalisation  $\Delta_{dB}$  à la hauteur choisie en dB, du rapport correspondant  $R_{dB}$ , ainsi que de la fréquence  $f$  :

$$c_s = f R_{dB} \Delta_{dB} \quad (6.7)$$

Lorsque la largeur à -6 dB est trop grande, mais aussi afin de minimiser l'impact de bruit en dehors de la tache de focalisation, la courbe du rapport  $R_{dB}$  (Fig. 6.4 c) peut alors servir d'abaque pour adapter le niveau de la mesure de largeur.

De plus, afin de bénéficier de la richesse spectrale disponible dans le champ d'onde, la refocalisation est calculée pour une bande passante  $\Delta_\omega$  limitée par  $\omega_{min}$  et  $\omega_{max}$ . Si le système est linéaire, les contributions monochromatiques de la refocalisation sont sommées suivant l'Eq. (6.8) :

$$\mathbf{R}\dot{\mathbf{T}}_{\mathbf{z}}(r, \theta, \Delta_\omega) = \sum_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \mathbf{R}\dot{\mathbf{T}}_{\mathbf{z}}(r, \theta, \omega) \quad (6.8)$$

Ici, la variable spatiale  $r$  n'est plus normalisée puisque plusieurs longueurs d'onde entrent en jeu. Le calcul analytique est suffisamment complexe pour lui préférer un calcul numérique. Un exemple pour des fréquences allant de 50 à 100 HZ montre que cette sommation change peu l'allure en cigare de la refocalisation (Fig. 6.6), seuls les lobes secondaires étant diminués. La refocalisation sur une bande de fréquences peut alors être associée à une refocalisation monochromatique. Dans l'exemple de la Figure 6.6, la refocalisation correspond à une refocalisation monochromatique de fréquence comprise entre la valeur médiane et la fréquence maximale (110 Hz sur cet exemple).

Sur les données expérimentales, la taille de refocalisation est plus proche

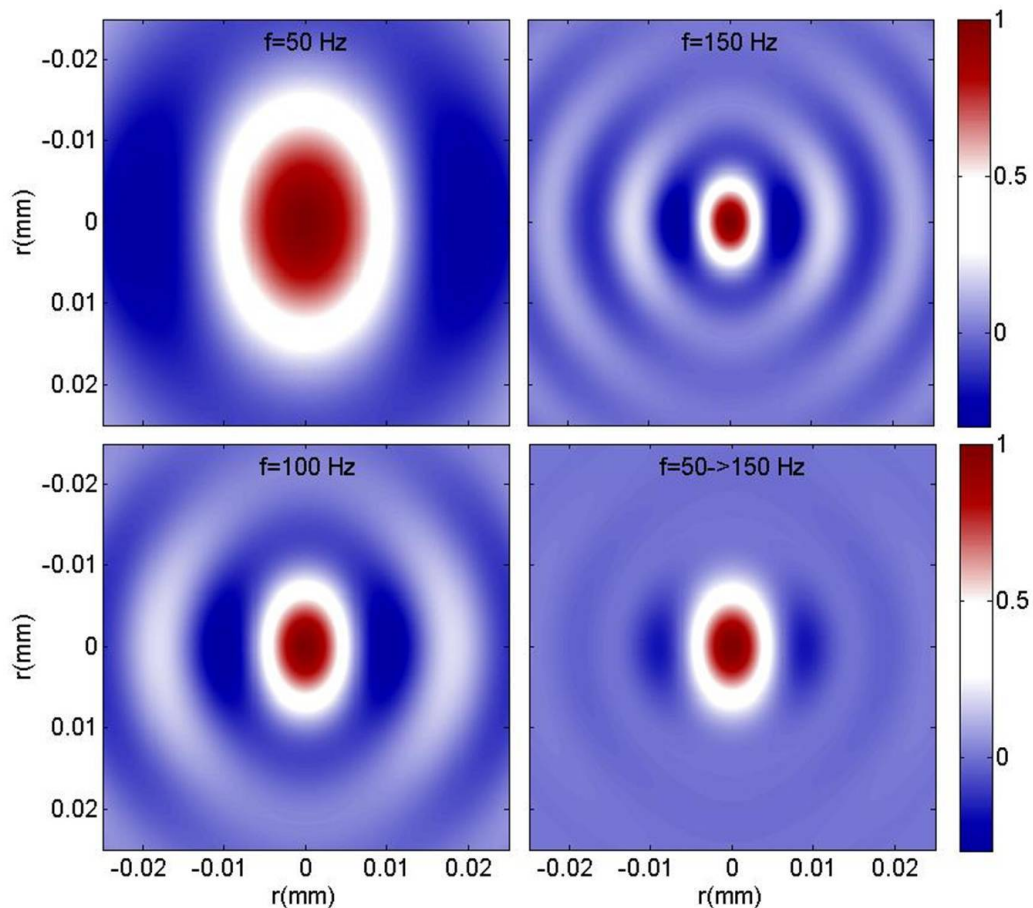


FIGURE 6.6 – Les refocalisations monochromatiques pour une cavité idéale à retournement temporel dans un solide sont calculées pour une vitesse  $c_s = 1.5 \text{ m/s}$  avec des fréquences de 50, 100, et 150 Hz. La dernière figure correspond à une refocalisation pour un signal large bande, de 50 à 150 Hz. Cette dernière refocalisation possède la même forme qu’une refocalisation monochromatique, les lobes secondaires en moins, pour une fréquence située entre la fréquence médiane et la fréquence maximale.

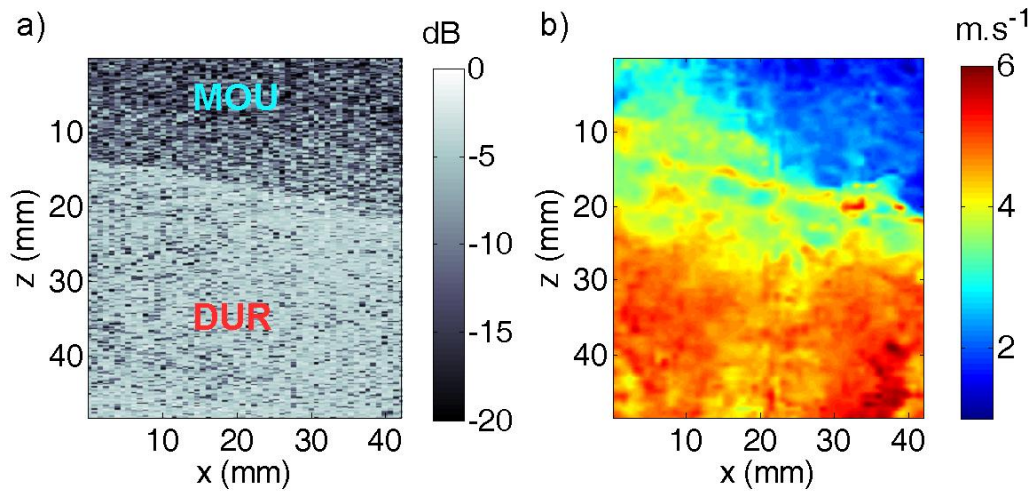


FIGURE 6.7 – a) Image échographique d'un gel bi-couche. b) Tomographie de longueur d'onde estimée à partir de la largeur de refocalisation. L'interface des deux couches est repérée au même endroit pour les deux images et les vitesses moyennes dans les deux milieux sont en accord avec les mesures indépendantes effectuées par élastographie impulsionnelle.

de celle de la fréquence maximale. Ceci peut s'expliquer par des bandes creuses dans le spectre de refocalisation effectif, c'est à dire des bandes de fréquences n'intervenant pas dans la refocalisation. L'hypothèse retenue sera néanmoins qu'une refocalisation pour une bande de fréquences est associée à la fréquence maximale.

L'Eq. (6.7) permet maintenant de donner la vitesse de l'onde de cisaillement à partir des largeurs à mi-hauteur  $\Delta_{-6}$  moyennées dans toutes les directions des refocalisations expérimentales (Fig. 6.4). Pour cet exemple, les largeurs moyennes sont respectivement 12.6 et 26.4 mm dans la partie molle et la partie dure. Ce qui correspond à des vitesses de 1.9 et 3.9 m/s avec une fréquence de 100 Hz. De la même manière, la vitesse est calculée en chaque point de refocalisation  $\vec{r}_0$  de l'espace de mesure. La carte de vitesse ainsi obtenue (Fig. 6.7 b) montre une interface superposable à celle de l'image ultrasonore. Les valeurs moyennes de vitesse dans les deux milieux (4.1 m/s et 1.7 m/s) sont proches des mesures par élastographie impulsionnelle (4.3 m/s et 1.2 m/s). Le calcul de la vitesse basé sur les largeurs des taches focales avec la fréquence maximale donne donc des résultats quantitatifs confirmés

par des mesures indépendantes.

Cette méthode présente un gain en temps de calcul ainsi qu'en robustesse par rapport à la tomographie de vitesse de groupe. Le temps de calcul est très limité puisque la corrélation est effectuée au seul temps de refocalisation au lieu de l'être sur une centaine de points pour la mesure de vitesse de groupe. La robustesse de la méthode a principalement trois origines physiques liées au rapport signal sur bruit, à la richesse fréquentielle et à la dimensionnalité de la mesure. Tout d'abord, l'effet du bruit lié à l'électronique ou au traitement du speckle est indésirable et conduit à une altération de la qualité des mesures que l'on cherche à minimiser. Pour cela, la mesure est effectuée à l'instant où la refocalisation émerge le mieux par rapport au niveau moyen du champ d'ondes aléatoires. De plus, la possibilité d'adapter le niveau auquel la largeur est mesurée ainsi que la moyenne dans toutes les directions permet aussi de minimiser l'influence du bruit. D'autre part, l'opération de corrélation est réalisée sur une large bande de fréquences et contient donc l'information de longueur d'onde pour chaque fréquence ; on parle d'auto-moyennage [103]. Toutes ces informations sont utilisées lors de la mesure de la largeur de la refocalisation et cette méthode, bien que liée à la longueur d'onde, n'a pas les défauts d'une mesure harmonique fortement affectée par les conditions limites ou les structures de la taille d'une longueur d'onde particulière. Finalement, la mesure au temps de refocalisation rend compte de la propagation d'onde dans le volume et non le long d'une ligne ou d'un plan comme la méthode précédente de mesure de vitesse de groupe. En effet, la cohérence spatiale du champ d'onde au temps de refocalisation est mesurée sur un plan mais n'est pas limitée à la propagation dans ce plan. Les ondes hors plan influencent aussi la cohérence du champ et sont prises en compte par cette méthode.

### ***6.3 Tomographie de longueur d'onde sans imagerie ultra-rapide***

Un intérêt majeur de la méthode précédente est sa compatibilité avec une faible cadence d'imagerie, comme par exemple le scanner à Rayon X fonctionnant jusqu'à 10 Hz [16], ainsi que l'imagerie par résonance magnétique ne dépassant pas les 2 Hz [14], pour ne citer que les plus courants. Les expériences précédentes ont nécessité de réaliser entre 750 et 1000 images par

seconde, ce qui est bien trop rapide pour la plupart des systèmes d'imagerie. Pour cette nouvelle expérience, la fréquence de renouvellement est volontairement diminuée afin de montrer la compatibilité de la tomographie de longueur d'onde avec une acquisition lente. Le critère de Shannon fournit une condition à respecter afin de reconstruire correctement le champ de déplacement entre deux images. La fréquence de répétition des images  $f_r$  doit être deux fois plus grande que la fréquence maximale  $f_{max}$  des déplacements :  $f_r > 2 f_{max}$ . Ainsi, dans les solides mous, les déplacements pouvant aller jusqu'à 500 Hz nécessitent une fréquence de répétition d'au moins 1000 Hz. En dessous de cette fréquence, les signaux enregistrés ne peuvent plus rendre compte de la propagation des ondes sur laquelle est basée l'élastographie dynamique. Les méthodes de résonance magnétique où les fréquences sont très faibles ont recours au principe de stroboscopie mais sont en général limitées à des déplacements harmoniques. Pour contourner ce problème, une nouvelle approche est basée sur la corrélation de bruit et profite pleinement de la richesse spectrale des ondes élastiques.

L'usage d'une fréquence de répétition très faible par rapport au contenu du signal peut s'exprimer comme un échantillonnage aléatoire du champ de déplacement. Une phase aléatoire  $\phi$  permet de décrire un tel déplacement :  $\psi_z(\vec{r}', \phi(t))$ . La corrélation au temps zéro  $C_z^\phi(\vec{r}_0', \vec{r}'; 0)$  d'un tel déplacement devient :

$$C_z^\phi(\vec{r}_0', \vec{r}'; 0) = \int_0^T \psi_z(\vec{r}_0', \phi(\tau)) \cdot \psi_z(\vec{r}', \phi(\tau)) d\tau \quad (6.9)$$

L'intégration sur le temps d'acquisition fait disparaître l'influence de la phase aléatoire qui est la même en tout point de l'espace car elle est causée par le non-respect du critère de Shannon. Le sous-échantillonnage n'a donc aucun effet sur la corrélation au temps zéro :  $C_z^\phi(\vec{r}_0', \vec{r}'; 0) = C_z(\vec{r}_0', \vec{r}'; 0)$ . L'information temporelle n'a plus d'importance suite à l'intégration, seule la dépendance spatiale entre  $\vec{r}_0'$  et  $\vec{r}'$  renseigne sur la refocalisation spatiale. Notons aussi que l'échantillonnage spatial n'a pas changé et que chaque image contient une scène instantanée du champ d'onde, ce qui permet de reconstruire la carte de refocalisation. La combinaison du sous-échantillonnage temporel et de l'intégration peut s'interpréter comme une méthode strobo-



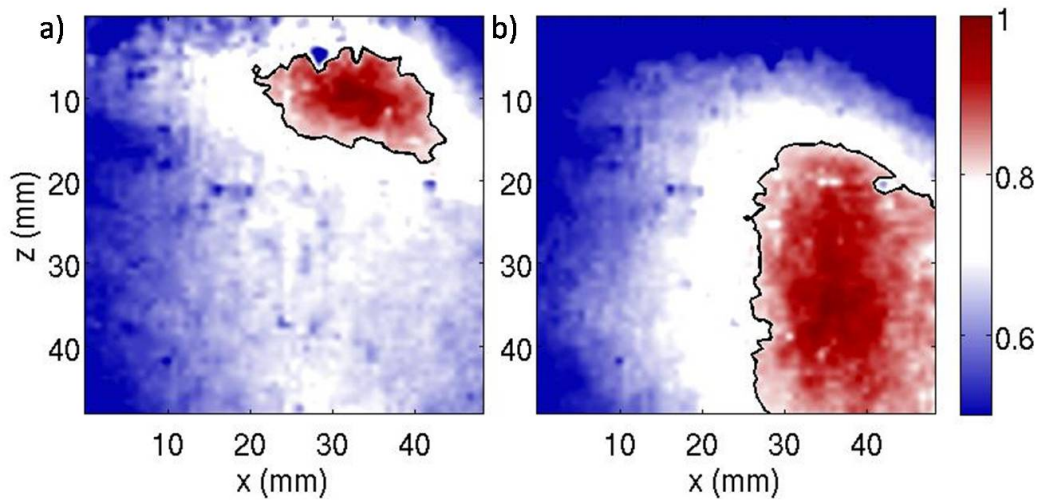


FIGURE 6.8 – Les cartes de corrélation au temps de refocalisation permettent clairement de différencier si le point focal se trouve a) dans le gel mou ( $x = 33$  mm,  $z = 9$  mm), b) dans le gel dur ( $x = 35$  mm,  $z = 35$  mm). Les largeurs à -2 dB moyennées dans toutes les directions sont respectivement 16.8 et 29.0 mm, soient des longueurs d’onde de 42.0 et 72.5 mm en ces points.

scopique où la phase de l’acquisition est aléatoire et la reconstruction du champ de refocalisation au temps zéro est indépendante de cette phase.

Dans l’expérience de tapotage avec un échantillonnage insuffisant (50 Hz) le sous-échantillonnage détruit toute cohérence temporelle. La méthode est testée à 50 Hz ce qui suffit à rendre les signaux incohérents temporellement. Ce principe restera valable quelque soit la fréquence, même pour des fréquences très faibles de 1 Hz. En revanche, les cartes de refocalisation calculées d’après l’Eq. (6.9) permettent de différencier la partie molle (Fig. 6.8 a) de la partie dure (Fig. 6.8 b). Les coordonnées des points de refocalisation sont les mêmes que dans l’expérience avec une fréquence de répétition de 1000 Hz (Fig. 6.2) et le rapport des largeurs moyennes de taches focales est similaire (2 à 1000 Hz et 1.7 à 50 Hz). En fait, les signaux subissent une normalisation par l’énergie mais le blanchiment fréquentiel n’est plus possible. Ainsi, les fréquences dominantes sont plus basses et la largeur de la tache focale doit être estimée à -2 dB afin de limiter la taille de mesure. La longueur d’onde moyenne  $\lambda = R_{-2} \times \Delta_{-2}$ , pour chaque point de l’espace de

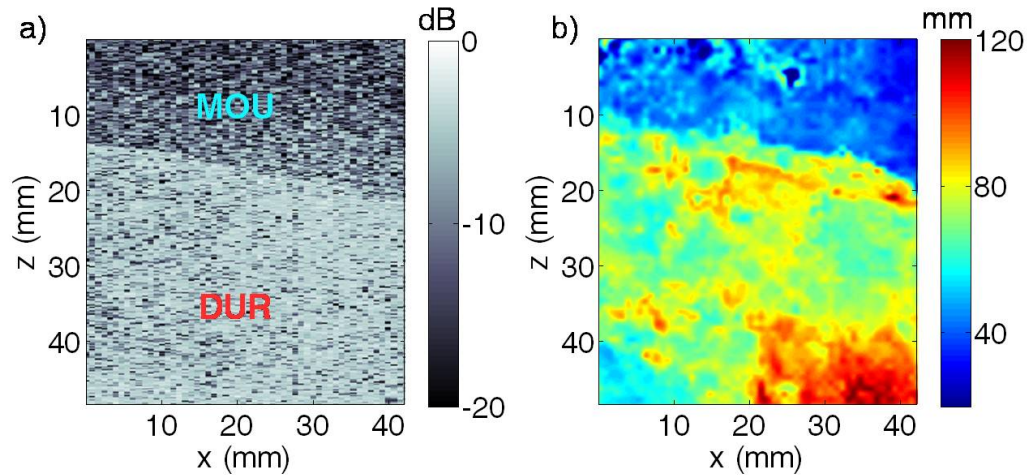


FIGURE 6.9 – a) Image échographique d'un gel bi-couche. b) Tomographie de longueur d'onde estimée à partir d'un champ de déplacement échantillonné à 50 Hz. L'interface des deux couches est repérée au même endroit pour les deux images, avec un contraste de longueur d'onde similaire à celui des cartes d'élasticités des deux autres méthodes (Fig. 6.7 et 6.2).

mesure, permet de construire une image tomographique de longueur d'onde (Fig. 6.9 b). Dans cette méthode, l'information temporelle permettant de déterminer la fréquence relative à la longueur d'onde est perdue. Au regard de l'Eq. (6.7), l'image obtenue est proportionnelle à la vitesse, mais ne permet pas de mesure quantitative. Cependant, l'interface est localisée au bon endroit et le contraste entre les deux gels est sensiblement le même.

Afin de retrouver une image d'élasticité quantitative, les données à 1000 Hz sont utilisées pour estimer la fréquence maximale du champ d'onde. Contrairement aux signaux blanchis où le spectre est une porte (Fig. 6.10) et la fréquence maximale est clairement établie, l'estimation est approximative pour un signal non filtré (Fig. 6.10). La fréquence maximale effective devient plus faible car les fréquences hautes n'interviennent plus dans la refocalisation. En estimant la fréquence maximale à 50 Hz, les vitesses moyennes dans les deux gels, 1.9 et 3.7 m/s, sont compatibles avec les valeurs fournies par l'élastographie impulsionnelle.

Dans un contexte plus réaliste, les déplacements pourraient être mesurés localement à une fréquence ultra-rapide. La fréquence maximale ainsi

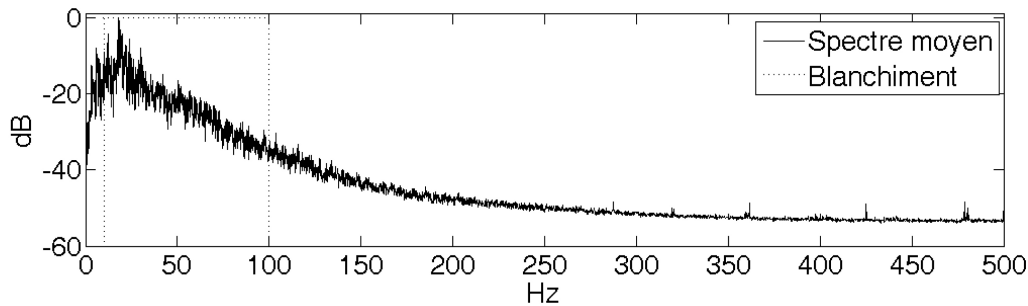


FIGURE 6.10 – Spectre moyen des déplacements dans le gel échantillonnés à 1000 Hz. Les pointillés indiquent la forme du spectre après blanchiment. La fréquence maximale effective pour des données non filtrées a été estimée à 50 Hz. Les expérimentateurs chevronnés reconnaîtront dans les pics hautes-fréquences la marque des sauts temporels de la machine ultrasonore Lecoeur.

mesurée servirait de référence pour l'ensemble de la région d'intérêt. Sur une machine échographique conventionnelle échantillonnant à 50 Hz environ, le mode Doppler permet de mesurer les flux sur une zone restreinte avec une fréquence de quelques centaines de Hz. Il est donc parfaitement possible d'imaginer un imageur 2D ou 3D fonctionnant à basse fréquence ( $< 50$  Hz) et délivrant une image quantitative d'élasticité profitant de toutes les informations provenant de la richesse spectrale des ondes impulsionnelles.

#### 6.4 Élastographie passive in-vivo

Dans le chapitre précédent (*cf.* section 5.4), les résultats de refocalisation d'onde par corrélation de bruit physiologique ont été présentés. Les refocalisations ainsi obtenues (Fig. 5.11) ont un rapport signal sur bruit qui devient vite faible en dehors du temps de refocalisation. Ainsi, pour estimer la vitesse de groupe, une moyenne spatiale est indispensable, ce qui suppose un milieu homogène. Les vitesses obtenues dans les foies de cinq sujets présentaient une moyenne de  $2.5 \pm 0.5$  m/s, ce qui correspondrait à une fibrose avancée de type F3 [147] propre à un diagnostic d'hépatopathies chroniques virales ou alcooliques compensées, le stade suivant étant la cirrhose. La bonne santé de tous les sujets une année après les mesures vient contredire ce résultat. La sur-estimation de la vitesse de groupe vient en réalité de la forte directivité du

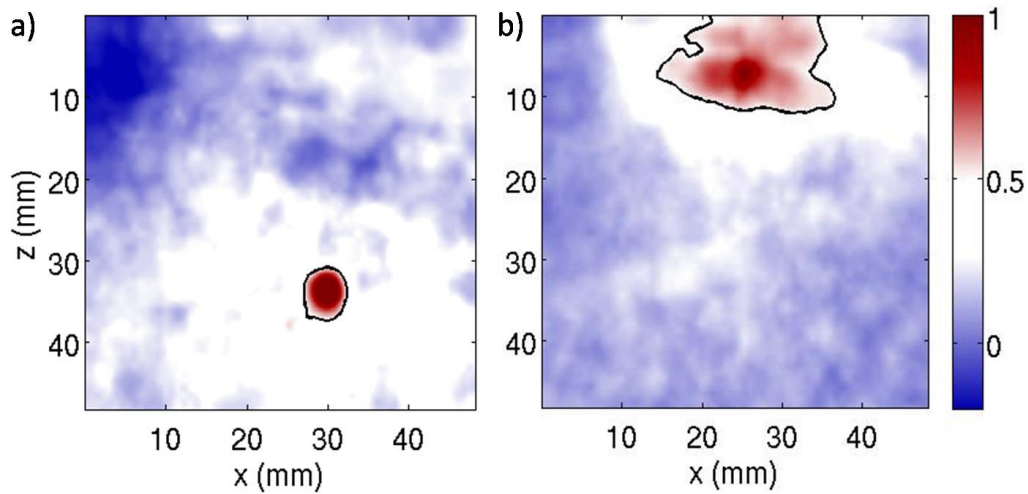


FIGURE 6.11 – Les cartes de corrélation de bruit physiologique issu de l’expérience *in-vivo* au temps de refocalisation  $t=0$  met en évidence des taches focales plus petites a) dans le foie ( $x = 29$  mm,  $z = 33$  mm), que b) dans le muscle de la ceinture abdominale ( $x = 27$  mm,  $z = 7$  mm). Les valeurs moyennes de la largeur à mi-hauteur (calculée à partir de ligne iso-niveau) sont respectivement de 6.2 et 17.4 mm, ceci correspondant à des vitesses de 0.6 et 1.8 m/s.

champ de bruit physiologique (*cf.* section 6.1). En revanche, la tomographie par longueur d’onde est suffisamment robuste pour les données passives *in-vivo*. Alors que la méthode d’estimation de vitesse nécessite un faible niveau de bruit ainsi qu’une faible directivité du bruit afin de suivre la propagation des ondes convergentes et divergentes, l’estimation de la largeur de tache focale est bien plus robuste. En effet, cette mesure est basée uniquement sur le champ au temps de refocalisation où l’énergie est maximisée. Ce paragraphe est donc dédié à l’exploitation du champ de refocalisation *in-vivo* à travers la mesure de longueur d’onde présentée au paragraphe 6.2.

Les refocalisations issues de la corrélation de bruit dans le foie (Fig. 6.11a) et dans le muscle (Fig. 6.11a) ont des largeurs clairement différentes avec des largeurs à mi-hauteur de 6.2 et 24.6 mm respectivement. Le blanchiment effectué entre 5 et 68 Hz donne la fréquence maximale, pour laquelle ces taches focales correspondent à des vitesses de 0.6 et 1.6 m/s (Eq. 6.7), le foie étant bien plus mou que le muscle abdominal. La longueur d’onde est évaluée

en chaque point de mesure afin de construire une tomographie par longueur d'onde (Fig. 6.12 b) des vitesses de l'onde de cisaillement.

L'image échographique (Fig. 6.12 a) permet de distinguer la zone relative au foie (en profondeur et plus foncée) de celle relative aux muscles de la ceinture abdominale. L'interface entre le muscle et le foie se trouve à une profondeur semblable dans les deux images. La vitesse moyenne des ondes de cisaillement dans le foie (0.68 m/s) est compatible avec les mesures d'élasticité dans des foies bien portants par d'autres méthodes.

Par résonance magnétique, Huwart et al. mesurent des valeurs de  $0.86 \pm 0.21$  m/s à 65 Hz [68], la méthode Super-Shear-Imaging à 60 Hz donne  $1.18 \pm 0.18$  m/s [93] et le Fibroscan à 50 Hz indique 1.06 m/s [118]. De plus, le système Aixplorer dont la validation clinique est maintenant acquise [129], a été utilisé afin de tester les mesures de la méthode passive ici proposée. Des images réalisées avec la sonde positionnée au même endroit (sous les côtes) ont donné des vitesses similaires de  $0.8 \pm 0.2$  m/s sur un sujet avec trois répétitions dans un foie sain. Une image donnée par cet imageur est présentée en Fig. 6.13 pour comparaison à l'image par la méthode passive (Fig. 6.12 b). Le traitement quantitatif de ces images a été réalisé grâce au module recherche de l'appareil dont dispose l'UFR STAPS de Nantes<sup>2</sup>.

Les mesures d'élasticité dans un muscle sont très variables et dépendent de la contraction [99] ainsi que de l'anisotropie [40]. Par exemple dans le biceps au repos, les mesures de vitesses à 50 Hz varient de 0.5 à 2 m/s pour une polarisation respectivement transversale et longitudinale [40]. De plus, Gennisson *et al.* ont montré que l'élasticité est 2.5 fois plus grande entre un biceps au repos et une contraction maximale. Dans notre cas, la polarisation est difficile à déterminer puisque la sonde suit l'alignement des côtes et non celle des fibres musculaires. Lors de l'acquisition, les muscles abdominaux étaient légèrement contractés car le sujet allongé maintenait sa tête relevée. La valeur moyenne de 1.6 m/s est en total accord avec les travaux précédemment cités. Les mesures réalisées dans des conditions similaires avec l'Aixplorer donnent une vitesse plus élevée de  $3.8 \pm 0.5$  m/s, ce qui indique probablement une plus forte contraction. Les variations au sein de la zone

---

2. L'acquisition de cet échographe a été obtenu grâce au projet 14597 de "l'Association Française contre les Myopathies."

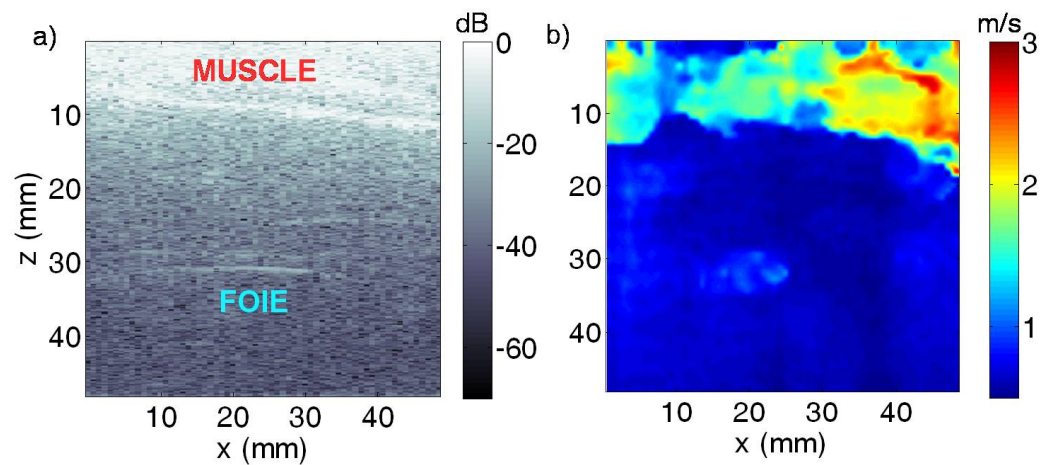


FIGURE 6.12 – a) Image échographique de la région du foie. L'interface entre le muscle de la ceinture abdominale et le foie est visible autour de  $z=10$  mm. b) La tomographie passive *in-vivo* de longueur d'onde montre une interface semblable. L'amplitude de l'image correspond à la vitesse des ondes de cisaillement déduites à partir de la longueur d'onde et de la fréquence maximale.

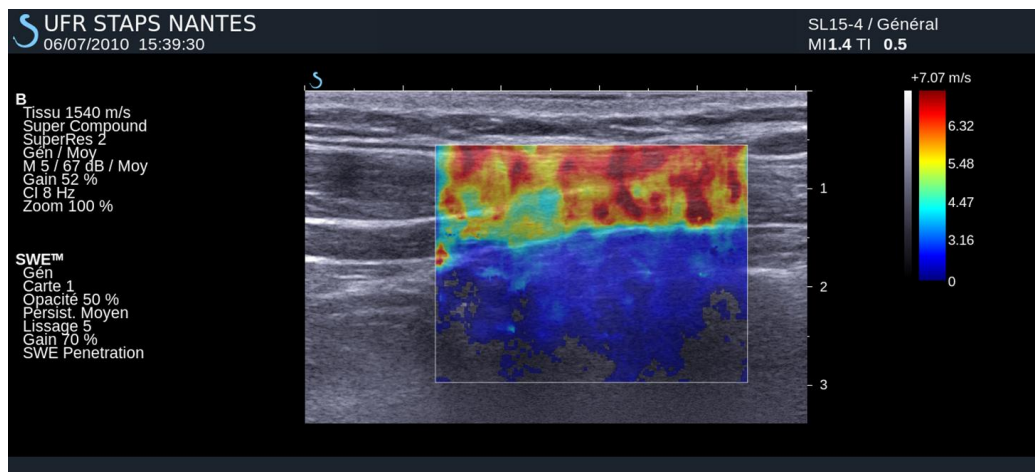


FIGURE 6.13 – Le système Aixplorer de Supersonic Imagine fournit une image échographique permettant de distinguer avec une grande précision l'interface entre muscle et foie. Avec une opacité de 50%, la vitesse de l'onde de cisaillement est représentée sur une zone de 2.5 cm de profondeur et de 3.5 cm de large. Les vitesses moyennes dans les deux milieux sont comparables à celles obtenues par tomographie passive (Fig. 6.12b).

musculaire sont importantes pour les mesures par élastographie passive (0.7 à 2.6 m/s) comme pour les mesures de l'Aixplorer (1.2 à 5.7 m/s). Les zones plus molles correspondent probablement aux espaces intermusculaires. Néanmoins, une certaine variabilité de l'élasticité du muscle est visible. Celle-ci est peut-être liée au phénomène complexe de contraction musculaire.

### **6.5 Perspectives pour l'élastographie passive**

Les résultats présentés dans ce chapitre montrent la possibilité d'exploiter les déplacements naturels du corps humain afin d'estimer l'élasticité des tissus. L'élastographie passive fournit des images quantitatives de l'élasticité en accord avec les méthodes actives existantes. Cependant, certaines questions soulevées au cours de l'étude restent en suspens et nécessiteront d'être approfondies.

Tout d'abord, une meilleure compréhension des paramètres influant quantitativement la mesure sera nécessaire. La difficulté de déterminer la fréquence associée à une longueur d'onde pour un champ élastique impulsionnel a notamment été soulignée. Cette problématique est aussi présente pour la tomographie super-lente où les fréquences ne sont pas du tout contrôlées. Un autre aspect non résolu de la tomographie passive concerne la résolution spatiale effective de ce mode d'imagerie. Elle est limitée par la résolution des ultrasons ( $\sim 0.8 \text{ mm}^2$ ) puisque l'on obtient une valeur pour chaque point du champ de déplacement et que les interfaces entre les milieux sont aussi nettes par ultrasons que par élastographie. Cependant, les longueurs des ondes de cisaillements influencent inévitablement cette résolution. Des études supplémentaires permettraient donc de quantifier cette résolution.

Une autre problématique concerne l'incidence de la directivité du champ d'onde sur les mesures de vitesse. Une sur-évaluation de la vitesse de groupe a été constatée (*cf.* section 6.1) ainsi qu'une déformation des taches focales (*cf.* section 6.2) sans pouvoir quantifier ces effets. Puisqu'ils ne sont pas quantifiables, deux autres solutions sont imaginables afin de minimiser l'impact de la directivité sur la refocalisation. Une première solution serait d'utiliser un champ non-directif avec une répartition des sources plus homogène comme par exemple le bruit de fluctuation thermique. Weaver et al. ont

montré qu'un tel champ de bruit ultrasonore permettait de reconstruire parfaitement la fonction de Green dans un bloc d'aluminium [136, 141]. Plus récemment, Mamane et al. ont étudié les fluctuations thermiques à la surface d'un gel à partir d'un dispositif optique [88]. Cependant, la sensibilité de l'interférométrie ultrasonore est environ 100 fois moins précise qu'une méthode optique. Il faudra donc améliorer cette sensibilité avant de pouvoir exploiter ce bruit. Une deuxième solution consiste à utiliser plus intelligemment le champ d'onde disponible afin de minimiser sa directivité. Ainsi, dans la partie suivante, nous proposons une méthode de refocalisation permettant d'améliorer l'isotropie du champ d'onde : le filtre inverse passif. Cette méthode est développée à partir de données sismiques et a pour but de contrôler parfaitement le champ d'onde.

En dépit du chemin qu'il reste à parcourir pour une modalité passive cliniquement acceptable d'élastographie, notons que la faisabilité du point de vue de la physique des ondes a été clairement démontrée dans ce manuscrit. Les expériences *in-vitro* ont jeté les fondations de la méthode avec une validation à travers l'élastographie impulsionnelle. Puis les premiers résultats *in-vivo* de l'élastographie passive confirmés par la méthode du SuperShear justifient l'intérêt de la méthode. Intérêt d'autant plus important compte tenu de la possibilité d'extrapoler la méthode de tomographie de longueur d'onde pour des systèmes à faible fréquence de renouvellement d'image. Les perspectives décrites précédemment assureraient à l'élastographie passive son caractère quantitatif.



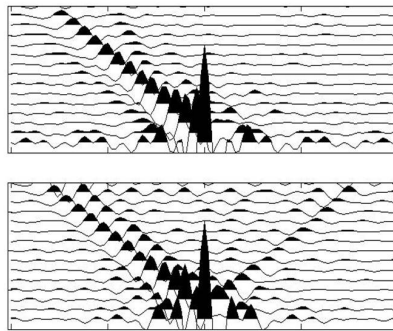
*Imagerie Acoustique en Milieux Réverbérants*

## Chapitre VII

---

### De l'élastographie à la sismologie : le Filtre inverse passif

---



Le dernier chapitre s'attaque au problème de la distribution spatiale des sources de bruit qui entraîne une directivité dans la refocalisation calculée par corrélation. Inspirée du filtre inverse développé en acoustique ultrasonore, la méthode proposée est basée sur la construction d'une matrice de propagation à partir du champ de bruit. Des données sismiques et élastographiques permettent de tester son efficacité.

Ce dernier chapitre concerne l'application d'une méthode d'optimisation de la refocalisation d'ondes, le filtre inverse, à la problématique de la directivité du champ d'onde propre aux techniques de corrélation de bruit. Dans le chapitre précédent où cette méthode a été développée pour des ondes de cisaillement dans les solides, nous avons été confrontés au problème principal de la directivité du bruit sismo-acoustique ou autrement dit de la disposition non isotrope des sources de bruit. La dissymétrie temporelle de la refocalisation est le premier indice de non-isotropie, qui est présente dans la plupart des cas expérimentaux [135]. Les exemples d'un tel champ ont été donnés précédemment pour des ondes de cisaillement (chapitres 5 et 6). Un champ similaire d'ondes de surface sera présenté à l'échelle des ondes sismiques dans ce chapitre.

Du point de vue de la cavité à retournement temporel, la non-isotropie des sources revient à constituer un champ de refocalisation avec une partie manquante à la cavité créant une fuite d'une partie des ondes qui ne seront pas ré-émises. La refocalisation n'est plus idéale et les estimations de vitesse et de longueur d'onde sont biaisées.

Avec des méthodes de type formation de voie, il est possible de localiser les sources [127], mais la prise en compte de cette directivité reste ardue [111]. Une solution proposée par les sismologues consiste à n'utiliser que la coda<sup>1</sup> du signal où l'influence de la direction de propagation issue des sources de bruit est atténuée par la diffusion multiple [2]. Stehly *et al.* proposent aussi de considérer un sous-ensemble de récepteurs comme sources secondaires pour re-crée une distribution de sources de bruit [126]. Nous proposons ici une autre méthode basée sur le filtre inverse tel qu'il est pratiqué en acoustique ultrasonore.

La méthode du filtre inverse introduite par Tanter *et al.* [128, 130] est présentée au début de ce chapitre. Elle est basée sur le calcul des signaux à émettre à partir du réseau source pour obtenir une refocalisation optimale. Ce signal d'émission est fourni par l'inversion d'une matrice de propagation entre un réseau source et un réseau récepteur. Si le retournement temporel permet seulement d'optimiser l'énergie en un point du réseau récepteur, le

---

1. Il s'agit là d'un emprunt au vocabulaire musical. La coda, queue en italien, désigne en sismologie la partie tardive et peu énergétique du signal.

filtre inverse contraint aussi une refocalisation du champ en annulant les lobes secondaires.

Cette étude est réalisée sur un jeu de données sismiques adaptées à la caractérisation de méthodes de corrélation car elles présentent une grande densité de récepteurs et de sources actives permettant d'étudier l'impact de la répartition des sources de bruit sur la corrélation. L'application du filtre inverse montrera son efficacité à compenser les fluctuations spatiales pour un réseau de sources et récepteurs plus complexes que les réseaux considérés généralement en acoustique.

Le filtre inverse est basé sur l'inversion d'une matrice de propagation entre sources et récepteurs. Or, dans la configuration passive de corrélation de bruit, le réseau de sources n'est pas défini. Comment faire alors pour profiter de cette technique dans une configuration passive ? Nous montrons qu'il est possible de constituer une matrice de propagation sans avoir à définir la position des sources. Cette méthode, nommée filtre inverse passif, est implémentée sur les données de sismique active dont on se sert pour générer un bruit synthétique avec une forte directivité. L'utilisation du bruit synthétique permet de contrôler la directivité du champ d'onde et de disposer d'une référence pour la comparaison des résultats.

### **7.1 Filtre inverse : une optimisation spatio-temporelle de la refocalisation**

Le filtre inverse ayant largement inspiré la méthode d'homogénéisation spatiale de la corrélation de bruit proposée dans ce chapitre, il est indispensable de commencer par un rappel de la méthode originale. Celle-ci peut être considérée comme une optimisation spatio-temporelle de la refocalisation, à travers le formalisme des matrices de propagation. La démarche du filtre inverse proposée par Tanter *et al.* [128, 130] consiste à calculer la matrice d'émission permettant une focalisation optimale sur une matrice de réception constituée d'une ligne de récepteurs ou un plan focal.

Pour introduire la méthode, considérons le dispositif simple, composé de réseaux linéaires de  $N_s$  sources et  $N_r$  récepteurs en vis-à-vis (fig. 7.1 a). Ces émetteurs et récepteurs sont des transducteurs ultrasonores et le milieu de

propagation est composé d'eau ainsi que d'un milieu abérateur créant de la diffusion multiple au passage des ondes acoustiques.

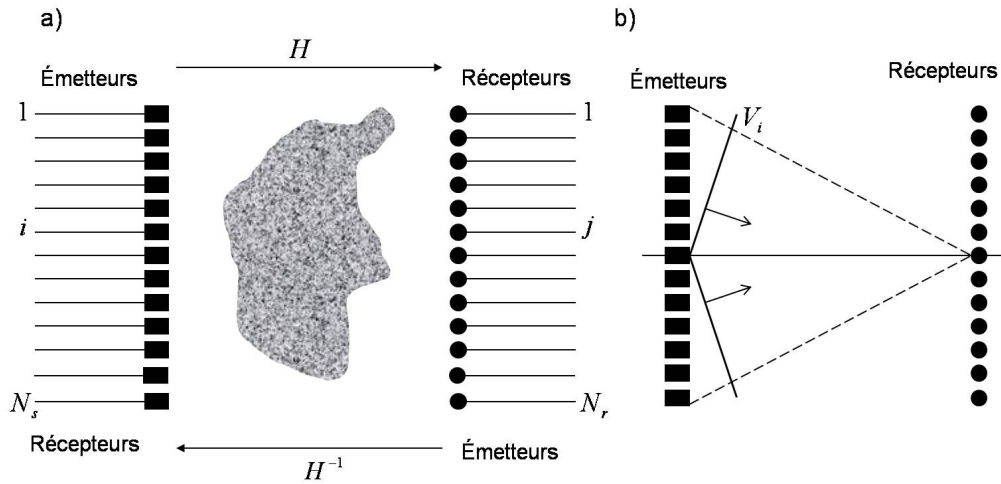


FIGURE 7.1 – a) Dispositif expérimental du filtre inverse pour les ondes ultrasonores. Une matrice de propagation  $H$  est constituée entre un plan d'émission  $E$  et un plan de réception  $R$ . b) Représentation d'un vecteur singulier composé de deux ondes planes, symétriques par rapport aux plans d'émission et de réception.

La première étape d'apprentissage consiste à observer la propagation entre sources et récepteurs. Chaque réponse impulsionnelle  $h_{ij}(t)$  entre une source  $i$  et un récepteur  $j$  est enregistrée et mémorisée pour créer la matrice de propagation  $h_{ij}$ . Le jeu de  $N_s \times N_r$  réponses impulsionnelles décrit intégralement la propagation entre sources et récepteurs. La matrice de propagation définit la réponse  $r_j(t)$  au récepteur  $j$  pour une émission  $e_i(t)$  sur l'ensemble des sources  $i = 1 \dots N_s$  selon le produit de convolution suivant :

$$r_j(t) = \sum_{i=1}^{N_s} h_{ij}(t) \otimes e_i(t) \quad (7.1)$$

Le passage dans le domaine de Fourier, où les grandeurs sont notées en majuscules, transforme l'opération de convolution en un produit et la sommation sur les sources devient invisible à travers le produit matriciel. Ainsi, la

formule précédente Eq. (7.1) s'écrit dans l'espace des fréquences<sup>2</sup> :

$$R(\omega) = H(\omega) \cdot E(\omega) \quad (7.2)$$

$R(\omega)$  représente la réponse monochromatique en chaque récepteur d'une excitation  $E(\omega)$ . La matrice  $H(\omega)$ , de dimension  $N_s \times N_r$ , caractérise alors la propagation entre sources et récepteurs pour chaque composante  $\omega$ . L'ensemble des matrices  $H(\omega)$ , sur une certaine bande de fréquences, contient donc toutes les informations nécessaires pour refocaliser les ondes en un récepteur  $j$  choisi. Calculons maintenant le vecteur d'émission  $E_{FI}(\omega)$  tel que le signal à la réception  $R_{FI}$  soit nul partout sauf au point  $j$  où il est égal à 1 :

$$R_{FI} = \{0 \dots 010 \dots 0\} \quad (7.3)$$

Le problème revient à inverser la relation matricielle Eq. (7.2). L'expression du jeu de données à émettre est décrite par l'Eq. (7.4) :

$$E_{FI} = H^{-1} \cdot R_{FI} \quad (7.4)$$

Toute la difficulté réside dans l'inversion de la matrice  $H$ . L'inversion est régularisée en passant par la décomposition en valeurs singulières (SVD) décrite en Annexe E. Le champ de refocalisation par filtre inverse  $\psi_{FI}$  produit par une émission  $E_{FI}$  est décrit par l'équation 7.2 et s'écrit :

$$\psi_{FI} = HH^{-1} \cdot R_{FI} \quad (7.5)$$

La matrice  $HH^{-1}$  est appelée opérateur de filtre inverse et dépend du nombre  $m$  de valeurs singulières indépendantes, aussi appelé rang de la matrice  $H$ . D'après M. Tanter, "*Ce rang indique le nombre minimum de paramètres indépendants nécessaires pour définir totalement le champ qui peut être créé par le réseau dans le plan image formé des points de contrôle.*[128]" Par conséquent, les autres valeurs singulières ne sont pas nécessaires pour l'inversion

---

2. Dans toutes les équations, les vecteurs sont notés en italique et les matrices en lettres droites.

et sont à écarter. Les vecteurs singuliers qui leur sont associés<sup>3</sup> répondent à deux conditions : 1) une invariance dans l'opération de retournement temporel entre le plan d'émission et le plan de réception en milieu homogène, 2) une condition de symétrie imposée par la disposition des deux réseaux linéaires et parallèles entre eux. La première condition implique que ces vecteurs soient des combinaisons d'ondes planes, et la symétrie ( $h_{ij} = h_{ji}$ ) impose deux portions d'ondes planes symétriques par rapport au centre du réseau (Fig. 7.1 b). Dans le cas d'une disposition quelconque des émetteurs et récepteurs, les interprétations physiques des vecteurs propres ne sont pas aussi évidentes. La conditions d'invariance par retournement temporel reste vraie mais les solutions ne peuvent pas être décrites en termes d'ondes planes puisque les réseaux ne sont plus linéaires. La symétrie n'est plus vérifiée mais il subsiste une réciprocité spatiale.

## **7.2 Comparaison du retournement temporel et du filtre inverse sur des données sismiques**

Dans ce paragraphe, la méthode du filtre inverse est appliquée à des ondes sismiques. Le but de cette application est de tester la capacité de la méthode à améliorer l'isotropie du champ de refocalisation. Les données utilisées ici sont issues d'une étude réalisée par *Petroleum Development Oman* (Shell R&D) dans le nord de l'Oman situé au sud de la péninsule d'Arabie, qui possède la particularité de bénéficier d'une grande densité de capteurs et d'émetteurs. De plus, sources et récepteurs sont complètement synchronisés et localisés, ce qui permet de contrôler parfaitement les données. Pour de plus amples informations à propos de ces données, se référer à [64]. La distribution particulièrement exhaustive de sources et de récepteurs fait qu'il est plus aisé de travailler avec ce type de données qu'avec des données d'élastographie où l'on ne dispose pas d'une grande quantité de sources contrôlables. Avec ces données géophysiques, il est possible de calculer les taches de refocalisation dans la disposition active. Bien qu'il n'y ait pas d'étape de ré-émission à proprement parlé, nous parlerons malgré tout de retournement temporel et

---

3. Les vecteurs singuliers  $V_i$  correspondent aux vecteurs propres de la matrice  ${}^t\mathbf{H}^*\mathbf{H}$  [108], appelée opérateur de retournement temps  ${}^t\mathbf{H}^*\mathbf{H}V_i = \lambda_i^2V_i$

de filtre inverse afin de différencier clairement cette configuration de celle de la corrélation de bruit purement passive.

Ces données ont déjà été utilisées pour étudier l'impact de l'isotropie du champ d'onde sur la convergence de la fonction de Green [60, 135]. En particulier, cette application fait suite à la thèse de Pierre Gouédard [59], qui a étudié l'impact de la distribution des sources sur les corrélations de la coda des ondes sismiques. Il a ensuite appliqué une méthode d'inversion pour obtenir une tomographie des ondes de surface.

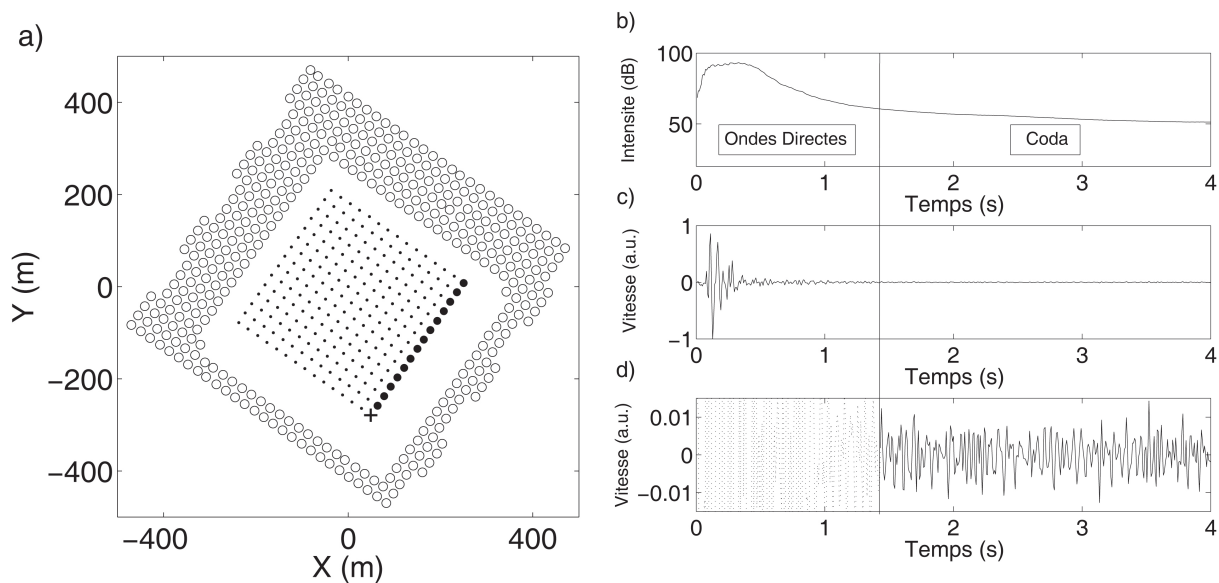


FIGURE 7.2 – a) Un réseau de 225 géophones (points) mesurant la composante verticale de la vitesse instantanée à la surface de la terre enregistre les réponses de 386 sources identiques (cercles), constituées par des camions vibrants. Les sources d'ordonnée  $Y > 0$  représentent 70% du total, créant ainsi une anisotropie du champ. b) Intensité de la réponse en fonction du temps (moyenne sur les sources et les récepteurs). La lente décroissance linéaire montre la présence de diffusion multiple. c) Exemple de réponse temporelle. d) Zoom sur la coda du signal qui, malgré son allure aléatoire, n'est pas du bruit mais des ondes contenant des informations sur le milieu traversé.

Le jeu de données est constitué d'enregistrements sur 1600 géophones disposés aux noeuds d'une grille d'un kilomètre carré dont la cellule de base mesure  $25 \times 25$  - m. Les sources sont des camions vibreurs dans une bande de fréquences allant de 8 à 120 Hz. Ils sont placés sur une grille similaire à celle



des récepteurs, décalée d'une demi cellule. Pour chaque position de la source, la réponse est enregistrée pendant 4 secondes par chaque récepteur. Le jeu de données n'est pas exactement constitué de  $1600 \times 1600$  signaux temporels car les acquisitions n'ont pas été réalisées lorsque la distance entre source et récepteurs était supérieure à 500 m. Pour les besoins de cette étude, 225 récepteurs sont sélectionnés au centre du kilomètre carré (Fig. 7.2 a). 386 sources sont sélectionnées, afin de créer une anisotropie dans la répartition spatiale des sources : environ 70 % des sources sont situées dans la moitié supérieure de la grille. La disposition des sources en "carré" est en partie imposée par le jeu de donnée, en partie choisie afin de conserver le plus de sources tout en créant une anisotropie spatiale. Cette option a été préférée à une modulation des amplitudes avec une disposition de sources équilibrées. En effet, l'objectif est de se placer dans des conditions expérimentales les plus réalistes possibles en imposant une répartition spatiale non isotrope des sources comme cela est souvent le cas en élastographie et en sismologie.

Les données sont filtrées dans la bande 7-25 Hz, qui contient la majorité de l'énergie du signal pour les ondes de surface. Un exemple de signal (Fig. 7.2 c) met en évidence les arrivées directes, ainsi qu'une lente décroissance caractéristique de la coda. De plus, la décroissance linéaire du logarithme de l'intensité (Fig. 7.2 b) est un indicateur de la présence de diffusion multiple [2].

La première manière de calculer la refocalisation est une opération de corrélation qui peut s'interpréter comme une expérience de retournement temporel, de la même manière qu'en élastographie (*cf.* chapitre 5, Fig. 5.1). Sélectionnons pour cela les réponses de toutes les sources en un récepteur (la croix sur la Fig. 7.2), qui sera maintenant considéré comme le point focal. Notons que, dans ce cas, l'ensemble du signal est utilisé, c'est-à-dire à la fois les ondes directes et les ondes diffusées de la coda sismique. Nous invoquons aussi le principe de réciprocité spatiale pour changer la nature de nos données. Elles peuvent en effet être considérées comme les réponses à une excitation d'une source ponctuelle placée au point focal. Maintenant, la réponse est retournée temporellement et ré-émise en chacun des points sources qui jouent le rôle de miroir à retournement temporel. Les signaux vont alors "remonter le temps" et se propager vers la source qui leur a donné naissance. Ainsi, une

refocalisation spatio-temporelle est observée au point focal. Cette expérience est appelée retournement temporel virtuel car la refocalisation est seulement calculée “dans l’ordinateur.” Il n’y a pas de ré-émission du signal.

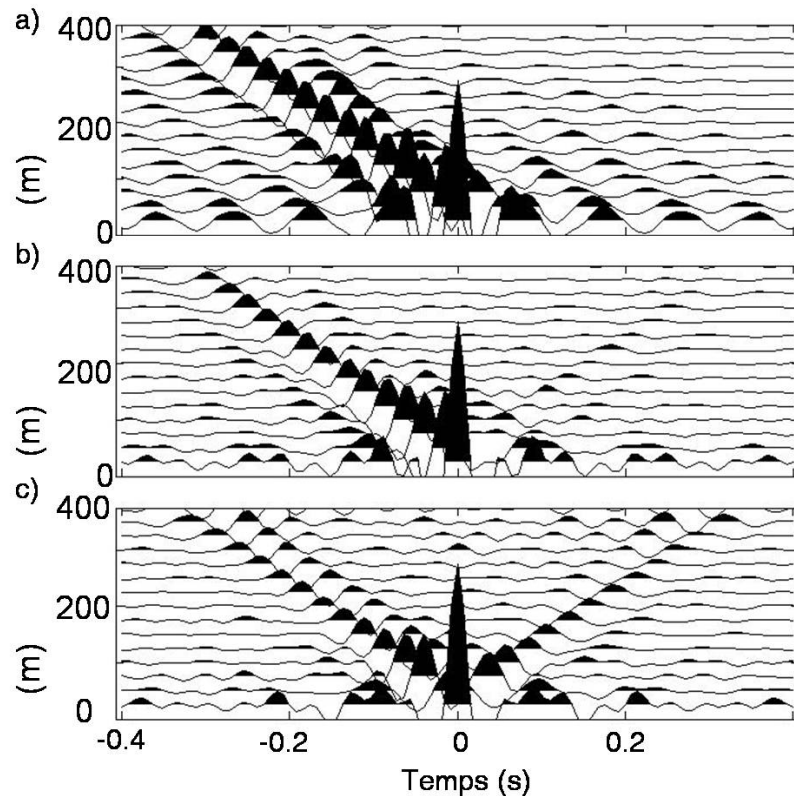


FIGURE 7.3 – Champs de refocalisations le long d’une ligne de réception (points sur la Fig.7.2 a) calculés suivant trois méthodes à partir des signaux bruts : a) retournement temporel, b) retournement temporel après blanchiment du signal, c) filtre inverse. Pour les deux premières méthodes la répartition spatiale des sources se traduit par une amplitude bien plus grande des ondes convergentes (temps négatifs) que des ondes divergentes (temps positifs). En revanche, le filtre inverse apporte une symétrisation temporelle du signal et les ondes ont à peu près la même amplitude de part et d’autre du temps zéro. Les trois refocalisations sont normalisées par le maximum du champ au point focal et au temps de refocalisation.

Le champ ainsi calculé (Fig. 7.3 a) rend compte de la dissymétrie des sources. Une seule branche de la croix de retournement temporel (pour les temps négatifs) est observée car l’énergie provient principalement du haut du

domaine. Pour les temps positifs, de très faibles ondes sont visibles venant des quelques sources situées en dessous du point focal. Ce type de refocalisation déjà observé en sismologie [106] correspond à une opération de retournement temporel par un miroir localisé spatialement.

Une opération classique pour améliorer la refocalisation consiste à blanchir le spectre. Par analogie à la lumière blanche, ce traitement consiste à donner le même poids à toutes les fréquences, ce qui a pour effet de diminuer l'atténuation et de donner plus d'importance à la coda. Le résultat de la focalisation (Fig. 7.3 b) met en évidence une légère diminution de la dissymétrie du champ. Un front d'onde dans les temps positifs apparaît, venant du domaine peu fourni en sources. Le blanchiment améliore donc notablement l'isotropie du champ.

Le choix des sources a donc permis de créer une refocalisation avec une grande directivité du champ d'onde. Cependant, les sources existent tout autour des récepteurs. Il est donc certainement possible de constituer un miroir parfait à retournement temporel en utilisant plus intelligemment les sources. C'est à cela que sert le filtre inverse. La refocalisation calculée par cette méthode est représentée sur la Figure 7.3 c. Dans ce cas, l'énergie est sensiblement la même pour les temps positifs et négatifs. On observe une symétrie temporelle presque parfaite, ce qui veut dire que le filtre inverse est capable d'améliorer très fortement l'isotropie du champ. Contrairement au retournement temporel où l'énergie au point focal est maximisée en favorisant les directions principales liées à la distribution de sources, le filtre inverse donne le même poids à toutes les directions de propagations. Il est capable d'aller chercher l'information là où l'énergie est très faible, et de lui donner la même importance que pour les directions les plus énergétiques. L'efficacité spatio-temporelle du filtre inverse est un résultat déjà établi en acoustique avec des réseaux linéaires de sources et récepteurs.

Cette capacité à homogénéiser la distribution spatiale du champ d'onde entraîne en général une diminution du rapport signal sur bruit, car des signaux qui parfois émergent à peine du bruit sont amplifiés. Dans cet exemple, l'effet est peu visible car les signaux venant de la zone à faible densité de sources sont d'excellente qualité. De plus, le choix des valeurs singulières pour l'inversion est fondamental puisqu'il peut entraîner une augmentation

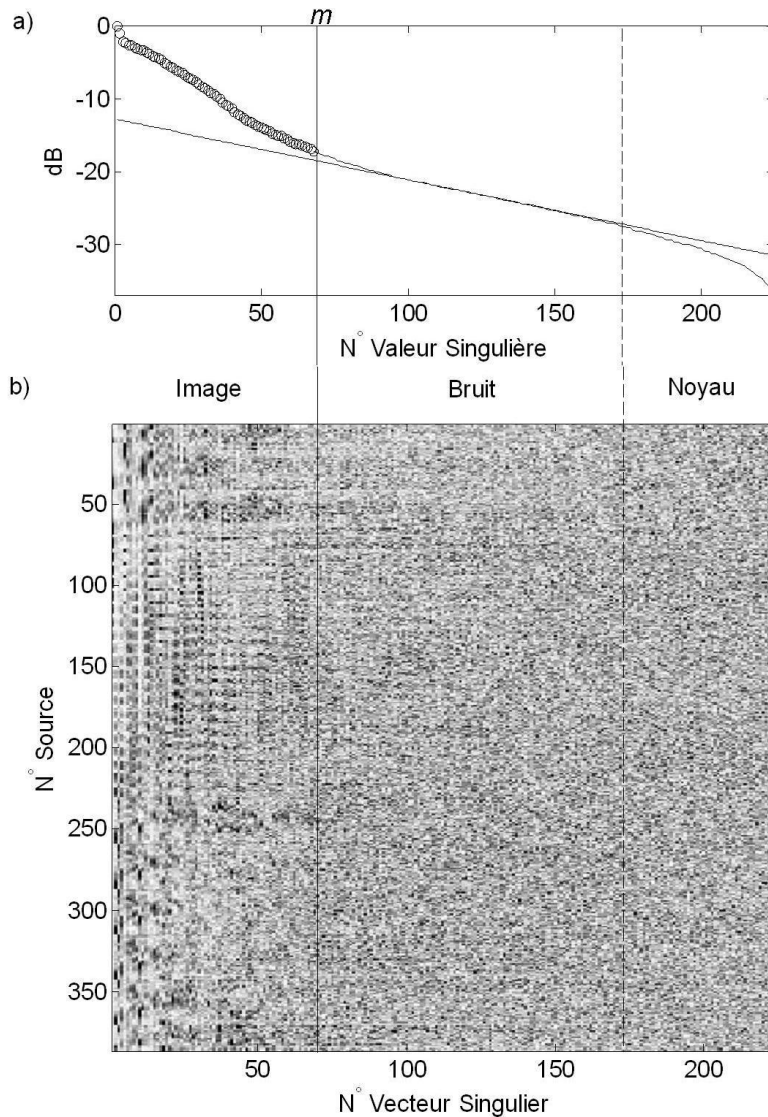


FIGURE 7.4 – a) La méthode du filtre inverse repose sur une décomposition en valeurs singulières représentées en ordre décroissant pour une fréquence de 8 Hz. Les  $m$  premières valeurs marquées en cercle sont conservées pour l'inversion. b) Amplitude de la matrice  $V$  formée des vecteurs singuliers  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, N_r$ . Dans la partie image, des motifs sont formés par les vecteurs singuliers.

drastique du bruit. Ce choix est gouverné par  $m$ , le nombre de valeurs singulières conservées après régularisation. Dans le cas idéal,  $m$  représente les valeurs singulières de l'image (*cf.* Annexe D). La décroissance rapide des valeurs singulières s'atténue lorsque l'on entre dans la zone de bruit (Fig. 7.4 a). Ici, la décroissance exponentielle se traduit par une droite sur la courbe en dB. Ensuite, la zone relative au noyau montre de nouveau une forte décroissance. Les valeurs qui émergent de la zone de bruit sont alors choisies pour l'inversion. Concrètement, les cinquante valeurs singulières médianes (de la 100<sup>ème</sup> à la 150<sup>ème</sup>) sont utilisées pour faire passer une droite. Les  $m$  va-

leurs singulières supérieures de quelques dB (ici 2 dB) sont conservées pour l'inversion (encerclées sur la Fig. 7.4 a).

Cette opération est effectuée pour chaque fréquence et une diminution du rang  $m$  est observée lorsque la fréquence augmente. Cela peut paraître contradictoire car  $m$  correspond au nombre de taches focales indépendantes et devrait augmenter lorsque la longueur d'onde décroît (et donc que la fréquence augmente). En pratique, le bruit augmente aussi avec la fréquence et c'est cela qui limite le nombre de valeurs singulières indépendantes. Les vecteurs singuliers relatifs à ces valeurs indépendantes se distinguent du reste de la matrice  $V$  par une cyclicité des motifs. Ils sont la signature des conditions d'invariance par retournement temporel et de réciprocité spatiale entre les lignes constituant les réseaux sources et récepteurs (Fig. 7.4 b).

La dernière étape de notre algorithme consiste à regarder l'amélioration de la refocalisation lorsque les mêmes méthodes sont utilisées sur la coda des données sismiques. Cette pratique bien connue, aussi bien en corrélation de bruit qu'en retournement temporel, consiste à enlever les arrivées directes du signal qui sont très énergétiques et très directives. Après ces premières arrivées, le régime de diffusion s'installe et après quelques diffusions (au sens scattering du terme), les ondes n'ont plus de direction privilégiée<sup>4</sup>. Ceci permet d'obtenir simplement un champ de retournement temporel moins directionnel car on devine maintenant des ondes pour les temps positifs (Fig. 7.5 a). En revanche la corrélation après blanchiment (Fig. 7.5 b) et le filtre inverse (Fig. 7.5 c) ne sont que très peu modifiés. Ce qui est gagné en homogénéité du champ est aussi perdu en qualité du signal. Ainsi, les méthodes qui optimisent déjà l'utilisation de l'information ne semblent pas sensibles aux premières arrivées.

L'utilisation du filtre inverse sur des données sismiques n'est qu'une application nouvelle de cette méthode à des données sismiques, qui, à notre connaissance, n'a jamais été réalisée sur des données sismiques réelles. Ce n'est d'ailleurs pas étonnant car ce type de données actives avec une synchronisation d'un grand nombre de sources est exceptionnel. Dans la majorité des données sismiques, les grands réseaux de récepteurs sont associés à peu de

---

4. La distance moyenne de conservation de la direction de propagation est appelée le libre parcourt moyen de transport, souvent noté  $l^*$ .

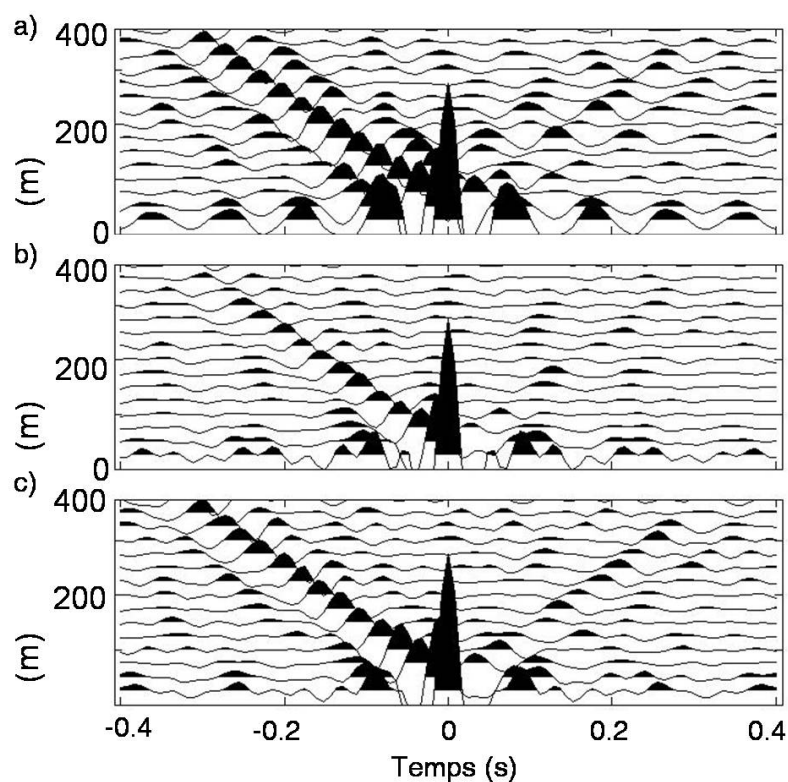


FIGURE 7.5 – Champs de refocalisations le long d’une ligne de réception (points sur la Fig.7.2 a) calculés suivant trois méthodes : a) retournement temporel, b) retournement temporel après blanchiment du signal, c) filtre inverse. Contrairement à la Fig. 7.3, seule la coda du signal a été utilisée pour calculer la refocalisation. Ceci permet d’utiliser un champ moins anisotrope en se plaçant dans la partie multidiffusée des réponses. Cependant, le résultat du filtre inverse reste le plus symétrique temporellement.

sources sismiques dont la fonction source est connue et il est donc impossible de construire la matrice de propagation et d’appliquer le filtre inverse. L’objet du paragraphe suivant est justement de proposer une nouvelle approche de filtre inverse dans ce type de configuration passive pour des sources réelles du même type que celles qui sont employées en corrélation de bruit.

### **7.3 Vers la configuration passive : construction des données désynchronisées**

Afin de caractériser la méthode, les données actives précédentes sont utilisées pour créer des données de bruit synthétique. La même distribution spatiale des sources est conservée afin de favoriser une direction de propagation.

Pour comprendre comment ont été synthétisées les données de bruit, imaginons que le réseau de récepteurs fonctionne en continu. Les événements enregistrés surviennent a priori aléatoirement et la position des sources n'est pas connue. Dans notre cas, chacun des événements sera l'explosion d'une des 386 sources qui adviendra aléatoirement dans le temps, puis une autre source, et encore une autre, etc... Chaque explosion aura lieu à un temps aléatoire et le signal résultant aura perdu la synchronisation entre les réseaux sources et récepteurs. Ainsi, une variable temporelle aléatoire est introduite, elle détermine l'instant d'émission de chacune des sources. En pratique, un signal temporel enregistre l'accumulation des réponses venues de toutes les sources. Cette opération est représentée pour un récepteur sur la Figure 7.6. La durée totale du signal enregistrée sur chaque capteur est de 1200 s. Le temps d'allumage est décrit par un tirage aléatoire de probabilité uniforme sur le temps total du nouveau signal : chaque réponse peut débuter n'importe quand. Pour atténuer la perte d'information due aux déclenchements simultanés, une règle de répulsion est appliquée. L'écart minimal entre deux temps d'allumage n'est pas nul, mais au minimum de 0.2 s sur les 4 s de chaque signal. Cette règle arbitraire vise à répartir le plus uniformément possible dans le temps l'intensité des signaux comme c'est le cas pour de vraies sources de bruit.

Avant d'effectuer la mise en place du filtre inverse passif, la refocalisation est calculée par corrélation de bruit classique. Pour des données de bruit enregistrées sur un très grand temps d'observation (ici, le temps total d'enregistrement est de 1200 s), il est d'usage d'effectuer la corrélation sur des fenêtres temporelles puis d'effectuer une moyenne sur le résultat de la corrélation<sup>5</sup>. Des fenêtres de 6 s sont utilisées, avec un recouvrement de 2 s. La

---

5. "stacker" dans le jargon de la corrélation de bruit sismique

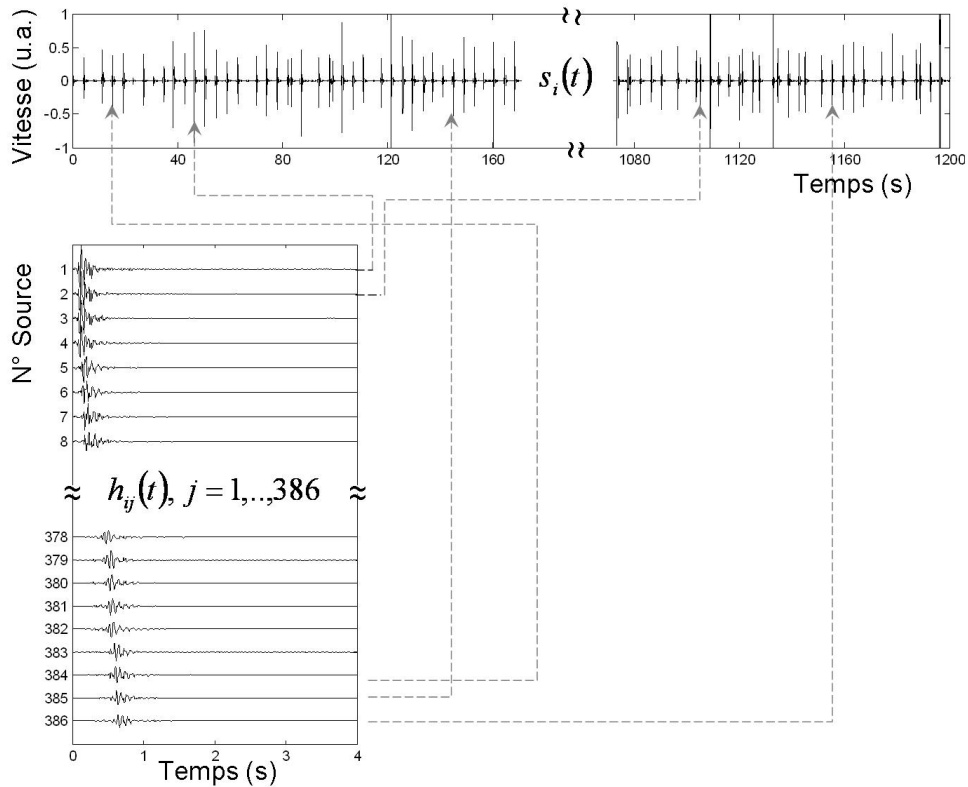


FIGURE 7.6 – Création du signal de “bruit sismique” à partir des données actives. Les réponses  $h_{ij}(t)$  entre le récepteur  $i$  et les sources  $j = 1, \dots, 386$  sont placées aléatoirement dans un unique signal temporel  $s_i(t)$  constituant le bruit synthétique pour ce récepteur. La même opération est réalisée pour tous les récepteurs avec le même ordre aléatoire. L’ensemble des 386 réponses est alors transformé en un seul signal de bruit sismique en chacun des récepteurs. L’information temporelle et spatiale des sources est perdue mais l’anisotropie du champ d’onde est conservée.

même opération est effectuée après blanchiment du signal. Les refocalisations obtenues par corrélation de bruit (Fig. 7.6 a et b) peuvent être comparées aux refocalisations dans la configuration active (Fig. 7.3 a et b), car le bruit a été synthétisé avec les mêmes données. Les résultats sont très proches, l’asymétrie temporelle de la refocalisation rend compte de l’anisotropie spatiale de la répartition des sources. De plus, le recouvrement des signaux a eu pour effet de multiplier les réponses de toutes les sources. Le déséquilibre de la distribution spatiale a été ainsi augmenté et il est impossible de distinguer



une onde dans les temps positifs pour la configuration passive qui émergeait quelque peu dans la configuration active.

#### **7.4 *Filtre inverse passif : mise en place de la matrice de propagation $\hat{\mathbf{H}}$***

A partir du signal de bruit synthétique, il est impossible d'appliquer le principe du filtre inverse sans une nouvelle matrice de propagation. Pour se faire, chaque fenêtre de 6 s de bruit est considérée comme la réponse à une source. En réalité il est impossible d'identifier chaque réponse à une source, et encore moins de la localiser, nous parlerons donc de "pseudo-source". Chaque pseudo-source est constituée de portions temporelles de réponses d'un ensemble de sources. Une matrice de propagation  $\hat{\mathbf{H}}$  entre ces pseudo-sources inconnues et les récepteurs est ainsi constituée (Fig. 7.7). Un recouvrement de 2 s entre les fenêtres permet de maximiser l'utilisation de la réponse de chaque source réelle. Le découpage qui est principalement une astuce pour diminuer le coût de calcul dans le cas de la corrélation de bruit revêt une signification physique primordiale puisque chaque fenêtre est liée à une pseudo-source. Les données de bruit temporelles sont alors transformées en données spatio-temporelles. Ainsi, l'idée principale du filtre inverse passif est de créer, à partir des données de bruit, une matrice de propagation  $\hat{\mathbf{H}}$ . Le poids relatif de chacune des pseudo-sources sera optimisé par l'inversion décrite précédemment (section 7.1). Comme précédemment, le rang de la matrice déterminant la régularisation pour l'inversion de la matrice a été déterminé avec un seuil en dB au dessus des valeurs de bruit.

Contrairement aux deux méthodes de corrélation (de bruit ou de phase), la reconstruction de la fonction de Green par filtre inverse passif (Fig. 7.8 c) fait état d'une très bonne symétrie temporelle du signal, la méthode a donc pleinement joué son rôle d'homogénéisation de l'énergie. La différence avec la refocalisation par filtre inverse (Fig. 7.3 c) avec les données actives est à peine visible, c'est-à-dire moins visible que pour les méthodes de corrélation où le recouvrement amplifie la directivité. Le fenêtrage temporel du filtre inverse passif revêt donc une réelle signification physique à travers la propagation entre des pseudo-sources et les récepteurs. Ce résultat pourra s'appliquer dans

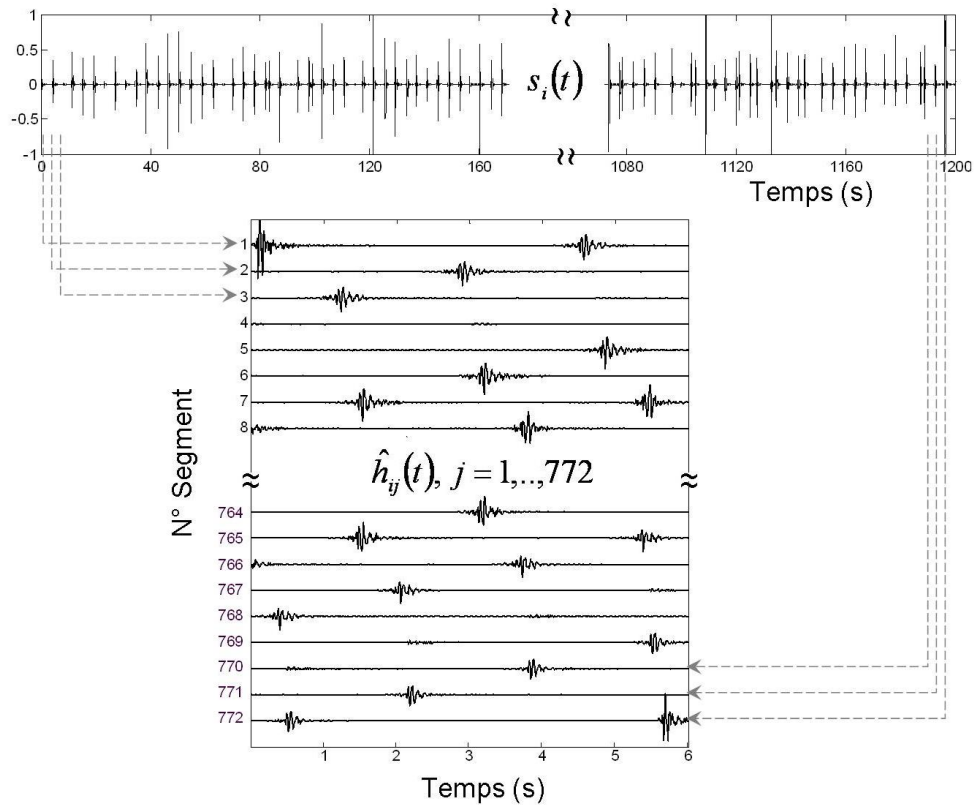


FIGURE 7.7 – Afin d’utiliser le filtre inverse à partir du signal de bruit synthétique, des réponses  $\hat{h}_{ij}(t)$  entre le récepteur  $i$  et des pseudo-sources  $j = 1, \dots, 772$  sont constitués par découpage temporel du signal de bruit  $s_i(t)$ . Les réponses  $\hat{h}_{ij}$  pour l’ensemble des récepteurs forment, dans le domaine de Fourier, une nouvelle matrice de propagation. La technique du filtre inverse décrite précédemment peut alors être appliquée.

des configurations où les sources ne sont pas connues, puisque le découpage a été effectué en aveugle, comme pour du bruit réel.

### 7.5 Résultats préliminaires du filtre inverse passif à l’élastographie

La méthode du filtre inverse passif est appliquée au jeu de données présenté au chapitre 4. Dans cette expérience où les ondes élastiques sont créées par tapotage à la surface d’un gel bi-couche, les sources sont réparties de manière supposée aléatoire en première approximation. Il s’agit donc d’une

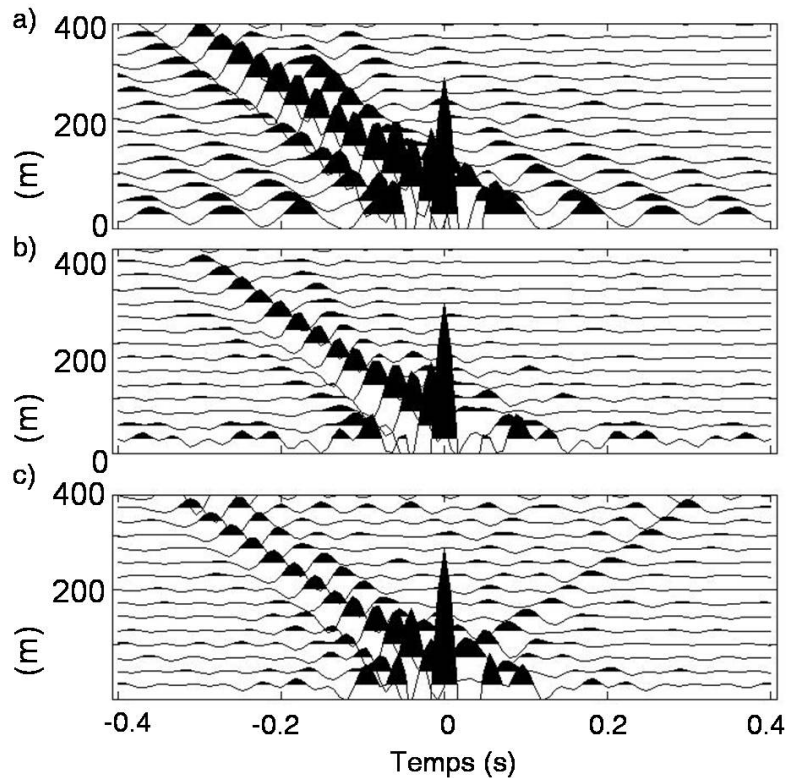


FIGURE 7.8 – Champs de refocalisations le long d’une ligne de réception (points sur la Fig.7.2 a) calculés à partir du bruit synthétique (configuration passive) suivant trois méthodes : a) corrélation de bruit, b) corrélation de bruit après blanchiment, c) filtre inverse passif. Encore une fois, l’application du filtre inverse donne de bons résultats pour l’isotropie du champ. En effet, si les ondes divergentes sont à peine visibles pour les corrélations de bruit, elles ont une amplitude similaire que les ondes convergentes dans le cas du filtre inverse passif.

configuration réellement passive où les sources de bruit ne sont pas contrôlées. Dans le chapitre 5, les taches de refocalisations calculées par corrélation ont montré que la directivité du bruit était présente dans le champ de refocalisation. Par exemple, la tache de refocalisation en  $x = 35$  mm,  $z = 30$  mm (Fig. 7.9 a) est légèrement “écrasée” suivant la diagonale. La méthode du filtre inverse passif a été appliquée sur les 9 s d’acquisition avec un découpage du signal en fenêtre de 0.4 s et un recouvrement de 0.15 s. La pseudo-matrice de propagation  $\hat{\mathbf{H}}$  a ainsi été constituée entre les  $64 \times 83 = 5312$  points d’ac-

quisition et 60 sources de bruit réparties à la surface du gel. La refocalisation calculée suivant la méthode du filtre inverse (Fig. 7.9 b) est moins aplatie suivant la diagonale, l'influence de la directivité est donc plus faible. Le résultat ne montre pas la forme en cigare allongé selon l'axe  $z$  d'une refocalisation idéale (Fig. 6.5). Cependant avec une seule refocalisation du champ et sans moyenne, l'amélioration par filtre inverse passif ne fait aucun doute.

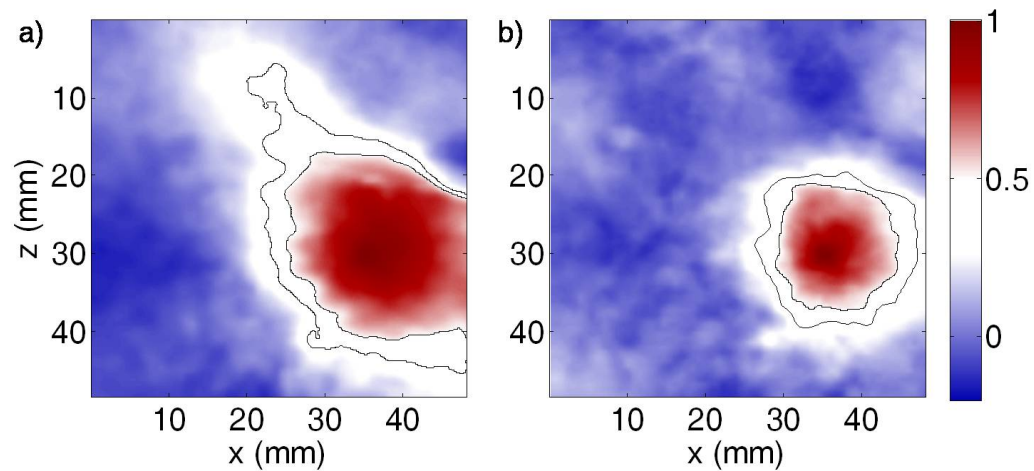


FIGURE 7.9 – Le calcul de la refocalisation au temps zéro en  $x = 35$  mm,  $z = 30$  mm par a) corrélation de bruit, ou bien par b) filtre inverse passif à partir de l'expérience de tapotage (*cf.* chapitre 4) met en évidence l'intérêt de la seconde méthode pour laquelle la tache focale est très peu déformée et se rapproche des images théoriques (Fig. 6.6). Les lignes de niveaux à  $-6$  dB et  $-9$  dB montrent qu'à cause de la directivité du champ d'onde la tache focale perd sa symétrie dans le cas de la corrélation. En revanche, le filtre inverse atténue cet effet et l'estimation de la longueur d'onde est alors moins biaisé.

Dans une expérience préliminaire, le filtre inverse est utilisé afin de montrer sa capacité d'optimisation pour l'élastographie passive sans entrer dans les détails quantitatifs. Les taches de refocalisations calculées par corrélation de bruit ou filtre inverse passif sont utilisées pour construire une tomographie de longueur d'onde suivant la méthode présentée au chapitre précédent (*cf.* section 6.2). Pour ce faire, une dernière expérience a été réalisée, identique en tout point à la précédente, exceptée pour le milieu utilisé. Au lieu du PVA, un gel d'agar-gélatine a été fabriqué (2 % gélatine, 1 % d'agar). La méthode de fabrication par moulage direct, sans étape de cryogénéisation, se prête mieux

à l'inclusion d'un gel cylindrique de diamètre 15 mm de même nature mais dans des proportions différentes (3 % gélatine, 2 % d'agar). Cette différence de proportion permet de constituer une inclusion d'élasticité plus importante. Pour les deux gels, environ 0.5 % d'agar est ajouté à basse température et fournit les diffuseurs nécessaires à la détection des déplacements à l'intérieur du volume. Lors de l'expérience, la méthode du tapotage crée du bruit élastique par des impacts de doigts aléatoirement appliqués à la surface du gel. L'acquisition avec une cadence d'imagerie ultrasonore de 750 Hz dure alors 12 s. Le signal obtenu est blanchi fréquentiellement entre 10 Hz et 150 Hz, et les taches de refocalisations sont calculées en chaque point de l'espace de mesure par corrélation de bruit (*cf.* section 5.3). Par ailleurs, le signal est découpé en fenêtre de 0.4 s avec un recouvrement de 0.15 s afin de constituer la matrice de propagation utilisée pour le calcul de la refocalisation par filtre inverse passif. Finalement, la largeur moyenne de refocalisation à -2 dB calculée par les deux méthodes est utilisée pour constituer une tomographie de longueur d'onde pour chaque méthode.

Les deux tomographies permettent de distinguer la forme cylindrique de l'inclusion où la longueur d'onde est environ 2 à 3 fois plus grande. Le diamètre approximatif de l'inclusion mise en évidence par contraste d'élasticité est environ le même que celui de l'inclusion réelle avec dans les deux cas un diamètre supérieur dans l'axe  $z$  ( $\sim 20$  mm) que dans l'axe  $x$  ( $\sim 16$  mm). La forme étirée vers le haut de l'inclusion circulaire pourrait s'expliquer par la forme en cigare de la tache de refocalisation idéale dans un solide (Fig. 6.5). Deux caractéristiques différencient les images d'élasticité. Tout d'abord, l'élasticité est plus homogène pour l'image par filtre inverse passif, notamment dans le quart en haut à droite de l'image où l'inclusion se confond avec le reste du gel pour la corrélation de bruit. De plus, les longueurs d'ondes sont globalement 2 fois plus grandes pour la corrélation de bruit que pour le filtre inverse passif. Cette différence est due aux fréquences mises en jeu dans la refocalisation, le filtre inverse passif imposant une refocalisation à plus haute fréquence que la corrélation, même avec un blanchiment de spectre. Globalement, le filtre inverse passif permet de mieux faire ressortir l'inclusion. L'augmentation de la longueur d'onde dans un milieu homogène liée à la directivité du bruit est fortement atténuée par l'optimisation spatiale

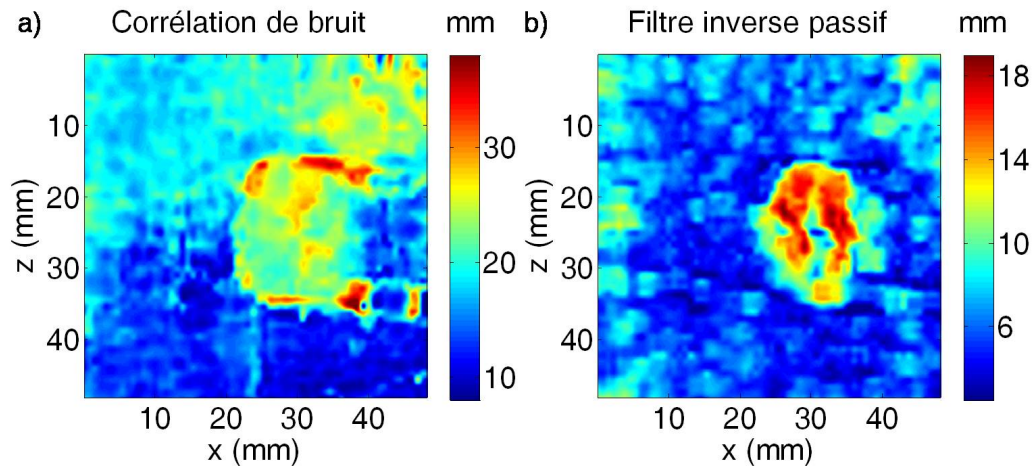


FIGURE 7.10 – Comparaison de tomographie passive de longueur d’onde à partir de taches de refocalisation calculées par a) corrélation de bruit, b) filtre inverse passif. L’acquisition du champ d’ondes élastiques a été réalisée suivant la méthode du tapotage dans un gel homogène avec une inclusion d’élasticité supérieure que dans le reste du gel ( $\text{Ø}15$  mm). Les deux méthodes permettent de repérer l’inclusion centrée en  $x = 31$  cm,  $z = 25$  cm. Une meilleure reconstitution est obtenue par filtre inverse car les biais dus à l’anisotropie du champ sont atténués.

produite par le filtre inverse.

## 7.6 Conclusion

La méthode du filtre inverse passif proposée dans ce chapitre a montré son potentiel pour l’amélioration des techniques de corrélation de bruit sismique. Par une meilleure prise en compte de la répartition spatiale des sources de bruit, la directivité du champ de refocalisation a été minimisée. Elle est parfaitement applicable aux configurations expérimentales de corrélation de bruit en sismologie ou en élastographie passive.

Comme pour la version originale du filtre inverse en ultrasons, le point délicat est le choix du nombre de valeurs singulières  $m$ . Le critère que nous avons proposé pourra probablement être amélioré bien qu’il ait permis d’inverser deux jeux de données très distincts. Cependant la limitation de la méthode vient surtout de la distribution des sources de bruit. Le filtre in-

verse passif ne pourra, en aucun cas, inventer des sources de bruit là où il n'y en a pas. Dans les exemples considérés, les sources sont réparties de manière non homogène, mais il en existe tout autour des récepteurs. C'est pour cette raison qu'il est possible d'améliorer la directivité de la refocalisation en profitant de toute l'information disponible.

Cette caractéristique ouvre la perspective d'une utilisation du filtre inverse passif sur du bruit d'agitation thermique, ce dernier créant des sources dans tout l'espace. Ce type de bruit avec une utilisation optimisée par filtre inverse donnera très probablement des résultats proches du cas idéal.

## Conclusion générale et perspectives

Les travaux présentés dans ce manuscrit répondent à une problématique de compréhension et d'interprétation de la propagation d'onde en milieu complexe. C'est à travers l'étude des ondes acoustiques ou élastiques que la question a été abordée, mais elle porte naturellement à l'inter-disciplinarité car les mêmes questions se rencontrent dans de nombreux contextes de physique ondulatoire. A titre d'exemples, rappelons que l'imagerie passive à partir du bruit a été initialement développée en héliosismologie ou bien que le phénomène de localisation a d'abord été introduit en physique du solide.

Au cours de cette thèse, la réverbération dans les cavités a été observée de diverses manières avec des objectifs variés et avec une intervention plus ou moins importante de la multidiffusion. Dans la première partie, la cohérence des ondes réverbérées a été étudiée dans des cavités régulières. Le choix de ce type de cavité a permis de confirmer expérimentalement des prédictions analytiques de rétrodiffusion cohérente. De plus, la complexité des statistiques liées aux interférences à la source montre qu'il existe des configurations dans lesquelles l'interprétation classique des chemins réciproques menant au doublement d'intensité à la source doit être considérée avec précaution. Dans les cavités présentant un ou plusieurs axes de symétrie, ce doublement n'est pas observé et la réverbération est aussi responsable de sur-intensité en dehors de la source, ou de sous-intensité lorsqu'une anti-symétrie est créée par un mélange de conditions aux limites. Le travail de compréhension réalisé a aussi soulevé un grand nombre de questions restées en suspens. Par exemple, les mécanismes qui expliquent les différences entre cavités chaotiques et intégrales restent mal compris. De même, l'interprétation statistique des rayons pour les cavités régulières peut faire appel à la topologie, interprétation qui reste à confirmer. Des expériences supplémentaires de réverbération dans des cavités particulières permettraient de vérifier quelques idées concernant ces interprétations (par exemple dans une plaque triangulaire, une coque sphérique, ou encore dans un tore).



La réverbération peut aussi être utilisée dans les tissus biologiques afin de déterminer leur élasticité. La thématique de l'élastographie a été une partie importante de cette thèse. L'application physiologique, pour laquelle la contribution de différents mécanismes intervenant dans le délai électromécanique des muscles a été déterminée, donne lieu à une recherche toujours active. L'élastographie reste à ce jour un outil unique pour visualiser les mouvements à l'intérieur des tissus biologiques. De plus, l'application de méthodes de corrélation de bruit aux ondes électriques responsables de la contraction pourrait compléter l'information donnée par l'élastographie afin de mieux appréhender les propriétés électro-mécaniques des fibres musculaires du corps humain.

D'autre part, le corps humain est parcouru naturellement par un champ complexe d'ondes élastiques créées par des sources de bruit physiologique. A travers l'observation de ce champ, une méthode d'élastographie passive basée sur la corrélation de bruit a été développée. Après une étape de validation dans des gels, la technique a livré ses premiers résultats de mesure passive d'élasticité dans le corps humain. La compatibilité de la méthode avec une cadence basse fréquence, comme en disposent la plupart des imageurs médicaux actuellement commercialisés (résonance magnétique, échographie 3D, scanner à rayon X) pourrait conduire à diverses applications.

Cependant, la source principale de bruit (les battements du cœur) induit une forte directivité dans le champ de réverbération ce qui biaise les mesures issues de la corrélation de bruit. La méthode proposée afin de minimiser l'impact d'une distribution spatiale non-isotrope des sources consiste à utiliser plus intelligemment les sources de bruit existantes à travers la construction d'une matrice de propagation. L'efficacité de ce *filtre inverse passif* a été démontrée pour des ondes sismiques et pour des ondes de cisaillement en élastographie. A partir de ce résultat expérimental préliminaire, il reste un long chemin à parcourir pour obtenir un système d'imagerie opérationnel, chemin jalonné de plusieurs étapes avec en premier lieu une validation *in-vivo* de la méthode. L'utilisation du bruit d'origine thermique pour les méthodes passives et plus particulièrement pour le filtre inverse est une perspective qui nécessitera probablement d'autres moyens d'acquisition du bruit comme par exemple des méthodes optiques.

Pour clore ce manuscrit, j'aimerais souligner l'importance du contexte "géoscientifique" dans l'élaboration de cette thèse. Elle s'est déroulée dans un laboratoire de sciences de la terre accueillant une équipe d'acousticiens et a indiscutablement profité de cette atmosphère interdisciplinaire. Elle a ainsi puisé son inspiration dans les thématiques très variées de la sismologie, de l'acoustique, de la médecine, de la géophysique, de la rhéologie et autre tribologie.

*Imagerie Acoustique en Milieux Réverbérants*

# Quatrième partie

## Annexes

## Annexe A : Statistique modale

Afin de comprendre pourquoi l'aspect fréquentiel de la rétrodiffusion cohérente diffère pour les cavités régulières ou chaotiques, les statistiques modales des cavités régulières et chaotiques sont brièvement présentées. Un exemple de calcul de surintensité moyenne sera ensuite présenté pour une cavité chaotique.

Tout d'abord, les distributions des fréquences modales sont décrites de manière déterministe dans les cavités régulières, par exemple à l'aide de fonctions polynomiales de la fréquence [92]. Une manière de caractériser la répartition des modes consiste à calculer la différence entre deux fréquences propres consécutives. Bien que les fréquences soient établies analytiquement, l'écart entre chaque fréquence reste complexe et une distribution exponentielle [84, 18, 15, 13] (Eq. 6) est utilisée pour rendre compte de la densité de probabilité (Fig. 11).

$$P(\delta f) = e^{-\delta f} \quad (6)$$

Les cavités régulières ont une densité maximale pour un écart de fréquence nul. Cela peut s'interpréter par une attraction ou encore une dégénérescence de modes. Cette propriété impose une similitude entre les modes, l'ensemble des modes propres ne forme plus une base orthogonale permettant de décrire un champ d'onde quelconque dans la cavité.

D'autre part, la statistique des écarts entre les fréquences propres est décrite par les matrices aléatoires [15] dont est déduite la distribution de Wigner caractérisant de tels systèmes :

$$P(\delta f) = \frac{\pi}{2} e^{-\pi/4 \cdot (\delta f)^2} \quad (7)$$

Cette distribution représentée Figure 11 ne possède pas une décroissance monotone comme la précédente. Le maximum de densité qui représente l'écart le plus probant entre les fréquences propres n'est pas nul. Les fréquences propres ont donc tendance à ne jamais être égales, c'est le phénomène de

répulsion des modes qui impose que la probabilité de trouver deux modes ayant la même fréquence est nulle. En ce sens, la cavité 1D est particulière car elle n'admet pas la distribution exponentielle mais un écart constant entre ces modes qui conduirait en terme de probabilité à un dirac en  $\delta f = \frac{c}{2l}$ . Le maximum de densité est donc, comme pour les cavités chaotiques, non nul, il n'y a aucune dégénérescence de modes.

Mathématiquement, la distribution de Wigner, aussi appelée distribution de Rayleigh [18], est définie comme la norme de deux variables gaussiennes indépendantes de moyennes nulles et de même variance. Cette définition rappelle l'indépendance entre chaque fréquence consécutive. Une telle statistique impose une grande variété de fréquences et de déformées modales caractéristique du comportement chaotique en cavité.

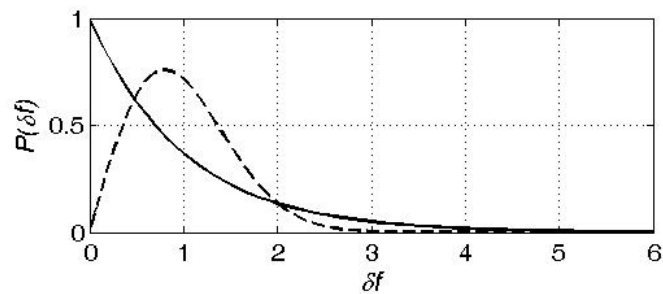


FIGURE 11 – La densité de probabilité des modes propres pour les cavités régulières suit une loi exponentielle (trait plein) et une distribution de Wigner (tirets) pour les cavités chaotiques. Ces courbes représentent la probabilité  $P$  que deux modes consécutifs aient un écart de fréquence  $\delta f$  (normalisé ici par le maximum de probabilité). Dans les cavités régulières, une grande majorité des modes ont un écart de fréquence nul entre eux, alors que la répulsion des cavités chaotiques impose un maximum de probabilité pour un écart non nul de fréquence.

La statistique des fréquences montre les différences sur la répartition des modes entre les deux types de cavités. Cependant, l'étude de la rétrodiffusion nécessite de considérer l'aspect spatial des modes en cavités. A partir des modes propres de déformation, une valeur moyenne de surintensité à la source peut être obtenue par le calcul du moment statistique (Eq. 8). Cette approche modale sera plus amplement présentée dans la section du corps de la thèse

(cf. section 1.2). Rappelons simplement l'expression de la surintensité pour un mode propre, moyenné en tous points source :

$$R_n(S) = \frac{\langle \phi_n^4 \rangle}{\langle \phi_n^2 \rangle} \quad (8)$$

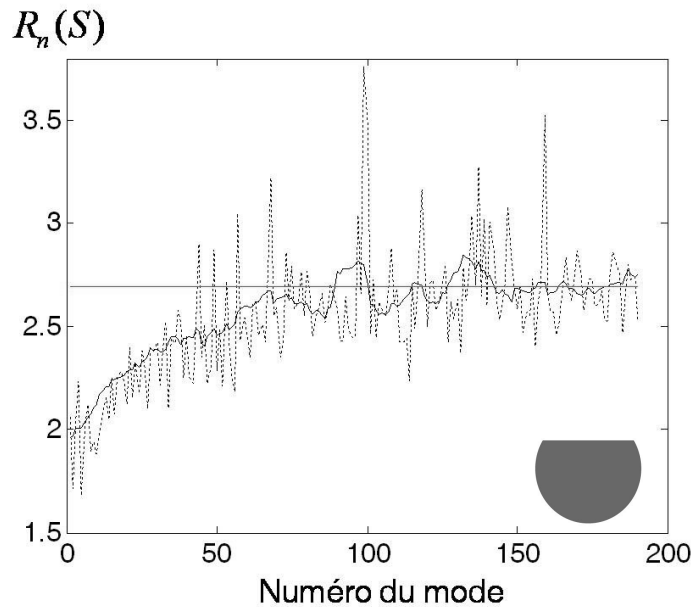


FIGURE 12 – Le moment statistique  $R_n(S)$  représente la surintensité sur la source  $S$  pour le  $n^{\text{ième}}$  mode. La cavité considérée ici est un disque coupé d'un segment (en bas à droite). Les valeurs pour chaque mode sont en pointillés, une moyenne glissante sur 10 modes est représentée en trait plein et la moyenne des 100 derniers modes (2.7) par la ligne horizontale. La surintensité oscille autour de la valeur moyenne, avec des variations entre 1.7 et 3.7. Contrairement aux cavité régulières, la surintensité dépend du mode considéré.

Les symboles  $\langle \rangle$  notent une moyenne spatiale dans toute la cavité. Dans les cavités parallélépipédiques, il est montré dans le corps de la thèse que ce calcul mène au même résultat quel que soit le mode considéré :  $R = \left(\frac{3}{2}\right)^d$ , avec  $d = 1, 2, 3$ . Ici, le calcul est réalisé pour un exemple de cavité chaotique constituée d'une plaque circulaire avec une coupe droite (Fig. 12). Avec des conditions limites d'encastrement sur tout le pourtour de la cavité, les 200 premières déformées modales ont été calculées par éléments finis (logiciel

Solidwork<sup>®</sup>)<sup>6</sup>. La surintensité calculée suivant l'Equation (8) est donné en Figure 12 et montre que la surintensité est dépendante du mode considéré. De manière globale, la surintensité tend vers la valeur limite  $R = 2.7$ . Cependant, même pour les modes élevés le moment varie de manière importante (de 1.7 à 3.7). Cette variation s'explique en partie par la nature des modes d'une grande variété dans leur forme spatiale et présentant des moments très différents. L'étude de la rétrodiffusion dans les cavités chaotiques est en général effectuée sur des signaux à large bande afin de considérer un ensemble de modes pour lesquels la surintensité se stabilise en moyenne.

Le modèle développé sur les cavités régulières dans la thèse (*cf.* section 1.2) est basé sur une approche modale qui mène, dans le cas large bande ou monochromatique, au même résultat. Pour ces cavités le moment est rigoureusement le même quel que soit le mode considéré. Cette différence entre les deux types de cavités montre pourquoi des hypothèses statistiques doivent être avancées pour fournir des résultats théoriques de surintensité dans les cavités chaotiques. Elle illustre aussi le fait que la simplicité des cavités régulières donne l'opportunité de mieux comprendre le phénomène de rétrodiffusion cohérente dans des cas simples.

---

6. Avec l'aide précieuse de Benjamin Vial.



## Annexe B : Coherent Backscattering enhancement of broad band signals in regular cavities

In this Appendix, we show that the backscattering-enhancement factor of a broad-band signal in a 1-D cavity, a 2-D rectangular cavity, and a 3-D parallelepipedic cavity obeys Eq. (1.8), which was derived for only one single eigen mode. The starting point is the general definition of the intensity-enhancement factor  $R$ , as with Eq. (1.1) :

$$R = \frac{\langle \int \psi^2(\vec{r}_0, \vec{r}_0; t) dt \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \int \psi^2(\vec{r}, \vec{r}_0; t) dt \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} \quad (9)$$

The normal mode decomposition of the wave field between two points of a cavity is :

$$\psi(\vec{r}, \vec{r}_0; t) = H(t) \sum_N \frac{1}{\omega_N} \phi_N(\vec{r}) \phi_N(\vec{r}_0) \cos(\omega_N t) \quad (10)$$

where  $H(t)$  stands for the Heaviside function,  $\omega_N$  is a modal frequency. Thus the general form of  $R$  becomes :

$$R = \frac{\langle \int_0^\infty \left[ \sum_N \frac{1}{\omega_N} \phi_N^2(\vec{r}_0) \cos(\omega_N t) \right]^2 dt \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \int_0^\infty \left[ \sum_N \frac{1}{\omega_N} \phi_N(\vec{r}) \phi_N(\vec{r}_0) \cos(\omega_N t) \right]^2 dt \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} \quad (11)$$

The summations can be decomposed into a symmetric and a crossed term :

$$\begin{aligned} \left[ \sum_N \frac{1}{\omega_N} \phi_N(\vec{r}) \phi_N(\vec{r}_0) \cos(\omega_N t) \right]^2 &= \sum_n \frac{1}{\omega_n^2} \phi_n^2(\vec{r}) \phi_n^2(\vec{r}_0) \cos^2(\omega_n t) \times \\ &\quad \sum_N \sum_{M \neq N} \frac{1}{\omega_N^2 \omega_M^2} \phi_N(\vec{r}) \phi_N(\vec{r}_0) \cos(\omega_N t) \phi_M(\vec{r}) \phi_M(\vec{r}_0) \cos(\omega_M t) \end{aligned} \quad (12)$$

When integrated over a sufficiently long time, the crossed term disappears. What remains is :

$$R \simeq \frac{\langle \int_0^\infty \sum_N \frac{1}{\omega_N^2} \phi_N^4(\vec{r}_0) \cos^2(\omega_N t) dt \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \int_0^\infty \sum_N \frac{1}{\omega_N^2} \phi_N^2(\vec{r}) \phi_N^2(\vec{r}_0) \cos^2(\omega_N t) dt \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} \quad (13)$$

By passing the integration inside the discrete summation over the modes, one obtains :

$$R \simeq \frac{\langle \sum_N \frac{1}{\omega_N^2} \phi_N^4(\vec{r}_0) \int_0^\infty \cos^2(\omega_N t) dt \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \sum_N \frac{1}{\omega_N^2} \phi_N^2(\vec{r}) \phi_N^2(\vec{r}_0) \int_0^\infty \cos^2(\omega_N t) dt \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} \quad (14)$$

The same quantity, the time integration, is present in the numerator and the denominator, and therefore time disappears in the expression of the enhancement factor  $R$  :

$$R = \frac{\langle \sum_N \phi_N^4(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \sum_N \phi_N^2(\vec{r}) \phi_N^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} \quad (15)$$

The spatial average and the discrete summation over mode numbers can be interchanged :

$$R = \frac{\sum_N \langle \phi_N^4(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}}{\sum_N \langle \phi_N^2(\vec{r}) \phi_N^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}} \quad (16)$$

Since  $\vec{r}$  and  $\vec{r}_0$  are averaged independently, it follows that :

$$R = \frac{\sum_N \langle \phi_N^4(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}}{\sum_N \langle \phi_N^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}^2} \quad (17)$$

Up to now, no hypothesis about the shape of the cavity has been used. The parallelepipedic-like shape of a cavity allows us to write the normal modes as sinusoid functions. The averages  $p^{th}$  order moment of these modes are all equals, as follows :

$$\forall \{n, m, p\} \in (\mathbb{N}^{*+})^3, \quad \langle \phi_n^{2p}(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0} = \langle \phi_m^{2p}(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0} \quad (18)$$

which implies that the summation is independent of the mode shape :

$$\sum_n \langle \phi_n^{2p}(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0} = n \langle \phi^{2p}(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0} \quad (19)$$

The final expression follows :

$$R \simeq \frac{\langle \phi^4(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}_0}}{\langle \phi^2(\vec{r}_0) \rangle_{\vec{r}, \vec{r}_0}^2} \quad (20)$$

In a parallelepipedic cavity, the enhancement factor of a sum of normal modes is equal to the enhancement factor of any single mode. Therefore, Eq. (1.5), (1.6) and (1.7) are valid for broad-band signals.

## Annexe C : Position des sources images dans les cavités parallélépipédiques

La théorie des rayons permet de remplacer chaque réflexion sur une paroi par une source image. Le calcul du champ nécessite donc de calculer les positions de toutes les sources pour un nombre choisi de réflexions  $N$ . L'exemple de la cavité 1D (Fig. 13 a) permet d'illustrer le positionnement de chaque source image.

Soit une cavité 1D de taille  $L$ , l'origine du repère est placée au niveau de la paroi  $W^a$ , la source  $S$  est repérée par la coordonnée  $s$ . Le point d'observation  $R$  de coordonnée  $r$  est situé entre les deux parois réelles  $W^a$  et  $W^b$ . Le nombre de réflexions est aussi appelé l'ordre de l'image. D'une manière générale, chaque source d'ordre  $n + 1$  est positionnée par symétrie d'une image d'ordre  $n$  par rapport à la paroi image la plus proche. Par exemple,  $S_1^a$  est l'image de la source  $S$  par rapport à  $W^a$ , puis  $S_2^a$  est l'image de  $S_1^a$  par la paroi qui les séparent (de coordonné  $-L$ ). Par ce jeu de symétrie, les images se trouvent de part et d'autre d'une paroi image (de coordonnée  $\pm 2nL$ ), ainsi  $S_1^b$  et  $S_2^b$  ont pour coordonnées respectivement  $2L - s$  et  $2L + s$ , de la même manière  $S_3^b$  et  $S_4^b$  ont pour coordonnées  $4L \pm s$ . Du côté de la paroi  $W^a$ , la règle est la même pour les sources  $S_3^a$  et  $S_4^a$  de coordonnées  $-2L \pm s$ . Finalement, les coordonnées des  $N$  premières sources image notées  $S_i$  de coordonnée  $s_i$  peut être repéré suivant l'Eq. (21) :

$$s_i = \pm 2nL \pm s \quad , n = 0, 1, \dots, N/4 \quad (21)$$

Pour chaque valeur de  $n$ , il y a quatre combinaisons possibles ( $++$ ,  $+-$ ,  $-+$ ,  $--$ ). Cela justifie que  $n$  varie seulement de 0 à  $N/4$  afin de considérer  $N$  images. Cette expression ne permet plus de différencier les sources du côté de la paroi  $W^a$  ou  $W^b$  et comprend aussi la source réelle ( $n = 0$ ).

A partir de l'expression des coordonnées de ces sources, le champ d'ondes s'écrit comme une somme de dirac retardés du temps de propagation entre

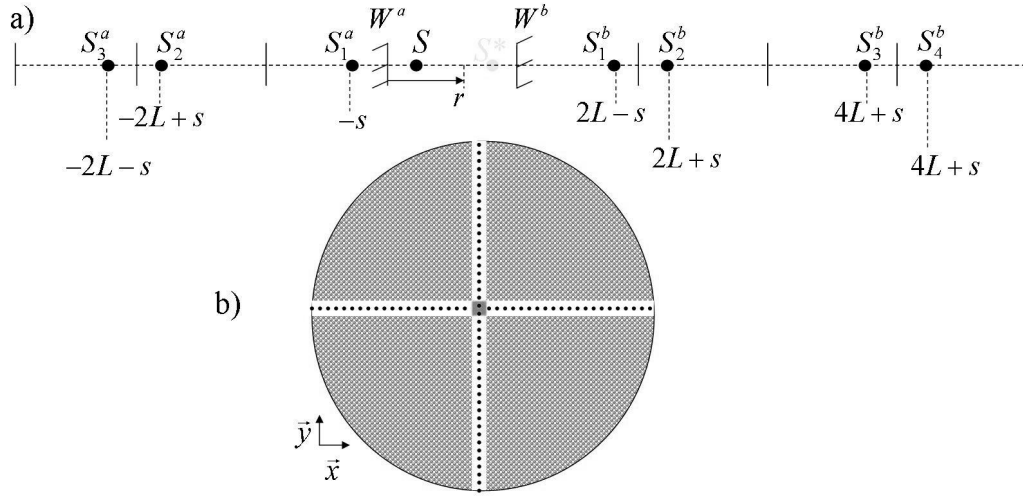


FIGURE 13 – a) Positionnement des premières sources images dans la cavité 1D. Le jeu de symétrie permet d'écrire leur coordonnées. b) Pour la cavité rectangule (en gris au centre du disque) une représentation schématique de la répartition des sources images permet de mettre en évidence les images alignées à l'horizontale ou la verticale de la source  $S$  (en noir). Ces images ont une statistique 1D alors que les sources dans les quarts de cercle (grisé) ont une statistique propre à la cavité 2D.

le point d'observation  $R$  et l'image  $S_i$ . Ce temps, qui s'exprime en fonction de la distance entre ces deux points est notée  $RS_i$ , et la vitesse des ondes est notée  $c$ . La réponse impulsionnelle en un point  $R$ , d'une source en  $S$  en considérant  $N$  réflexions s'écrit

$$H_N(r, t) = A \sum_{i=1}^N \delta \left( t - \frac{RS_i/c}{c} \right) \quad (22)$$

L'expression de cette réponse impulsionnelle est la même quelle que soit la cavité considérée, c'est la position des images et l'amplitude qui caractérisent réellement la cavité. Pour le cas 1D, la conservation de l'énergie est prise en compte implicitement par un terme d'amplitude  $A$  qui contient aussi l'expansion géométrique. Celle-ci se limite ici à une séparation de l'énergie en deux parties de part et d'autre de la source qui donne un facteur  $1/2$  pour chaque rayon.

A partir du cas 1D, il est possible de généraliser aux cavités rectangu-

lares et parallélépipédiques le positionnement des images puis l'expression des réponses impulsionnelles. Dans un rectangle de dimensions  $(L_x, L_y)$ , avec une source  $S(s_x, s_y)$  et point d'observation  $R(r_x, r_y)$ , les  $N$  premières sources images sont placées sur un disque. La coordonnée selon l'axe  $x$  des images  $S_i$  est décrite par la coordonnée des images d'une cavité 1D (Eq. 21), de même pour la coordonnée selon l'axe  $y$ . Ce qui veut dire que les images sont repérées par  $S_i(\pm 2nL_x \pm s_x, \pm 2mL_y \pm s_y)$ , avec  $n = 0, \dots, \mathbb{N}\left(\sqrt{NL_y/L_x}\right)$  et  $m = 0, \dots, \mathbb{N}\left(\sqrt{NL_x/L_y}\right)$ . La fonction  $\mathbb{N}(\cdot)$  correspond à un arrondi à l'entier inférieur, les expressions des indices permettent de limiter l'espace des sources sur un disque. La distance entre image et point d'observation dans la cavité rectangulaire s'écrit :

$$RS_i = \sqrt{(r_x \pm 2nL_x \pm s_x)^2 + (r_y \pm 2mL_y \pm s_y)^2} \quad (23)$$

Le terme d'amplitude  $A$  de la réponse impulsionnelle défini par l'Eq. (22) tient compte de l'expansion géométrique qui impose une amplitude pour chaque rayon en  $1/\sqrt{RS_i}$ . Si  $n = 0$ , ou bien  $m = 0$ , l'expression de  $RS_i$  devient la même que pour la cavité 1D. Dans ce cas, les images ont une statistique 1D et font partie de l'ensemble des images représentées en noir en Figure 13 b. Cet ensemble de sources impose une anomalie par rapport à la statistique 2D qui, en proportion, diminue avec  $N$ .

L'ajout d'une dimension supplémentaire pour le cas du parallélépipède suit la même logique. Les images  $S_i$  sont décrites par trois coordonnées d'une cavité 1D (Eq. 21), c'est à dire  $S_i(\pm 2nL_x \pm s_x, \pm 2mL_y \pm s_y, \pm 2pL_z \pm s_z)$ , avec  $n = 0, \dots, \mathbb{N}\left(\sqrt[3]{NL_yL_z/L_x^2}\right)$ ,  $m = 0, \dots, \mathbb{N}\left(\sqrt[3]{NL_xL_z/L_y^2}\right)$  et  $p = 0, \dots, \mathbb{N}\left(\sqrt[3]{NL_xL_y/L_z^2}\right)$  afin de limiter les images dans une boule. La distance entre image et point d'observation dans la cavité parallélépipédique s'écrit suivant l'Eq. (24) :

$$RS_i = \sqrt{(r_x \pm 2nL_x \pm s_x)^2 + (r_y \pm 2mL_y \pm s_y)^2 + (r_z \pm 2pL_z \pm s_z)^2} \quad (24)$$

Encore un fois, l'expansion géométrique en 3D impose une amplitude pour chaque rayon en  $1/RS_i$ , pris en compte dans le terme d'amplitude  $A$  de la réponse impulsionnelle (Eq. 22). De la même manière que pour le cas

2D, l'annulation d'un des indices ( $n$ ,  $m$  ou  $p$ ) conduit à un comportement 2D et l'annulation de deux des indices à un comportement 1D. Ce qui explique l'anomalie par rapport à la statistique 3D qui diminue avec le nombre d'images considérées.

## Annexe D : Critère de Rayleigh d'une onde scalaire

A partir de l'expression de la refocalisation d'une onde scalaire présentée dans le chapitre 4, le critère de Rayleigh établit une relation entre la largeur d'une refocalisation et la longueur d'onde du milieu. Le point de départ est le même que pour le cas solide traité dans le corps de la thèse :

$$\mathbf{R}(r, \omega) \propto \frac{1}{\omega} [\mathbf{G}(r, \omega) - \mathbf{G}^*(r, \omega)] \quad (25)$$

Pour la détermination du critère, une relation de proportionnalité est suffisante puisque l'amplitude de la refocalisation sera normalisée par le maximum d'amplitude. Dans le cas fluide, la fonction de Green en milieu homogène sans atténuation s'écrit seulement en fonction de  $r$ , la distance du point focal :

$$\mathbf{G}(r, \omega) = -\frac{e^{i\omega t}}{4\pi r} e^{i\frac{\omega}{c}r} \quad (26)$$

Par substitution de la fonction Green, l'Eq. (25) devient :

$$\mathbf{R}(r, \omega) \propto -\frac{e^{i\omega t}}{4\pi\omega r} \left[ e^{i\frac{\omega}{c}r} - e^{-i\frac{\omega}{c}r} \right] \quad (27)$$

L'expression de l'exponentiel complexe en somme de cosinus et sinus ( $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ) permet de simplifier le terme la somme dans l'Eq. (27) :

$$\mathbf{R}(r, \omega) \propto -\frac{ie^{i\omega t}}{2\pi\omega r} \sin \frac{\omega}{c}r \quad (28)$$

Afin de faire apparaître la longueur d'onde  $\lambda$ , un changement de variable est effectué  $\bar{r} = \frac{r}{\lambda} = \frac{\omega r}{2\pi c}$ . A travers ce changement de variable, la refocalisation normalisée au temps zéro s'écrit :

$$\mathbf{R}(\bar{r}) \propto \frac{\sin(2\pi\bar{r})}{2\pi\bar{r}} \quad (29)$$



La refocalisation pour une onde scalaire est donc un sinus-cardinal centré sur le point focal et à symétrie sphérique. La représentation de cette courbe montre que la largeur à mi-hauteur est égale  $0.6 \lambda$ . Le critère de Rayleigh, en toute rigueur, est donc : la longueur d'onde est égale à 1.67 fois la largeur à mi-hauteur.

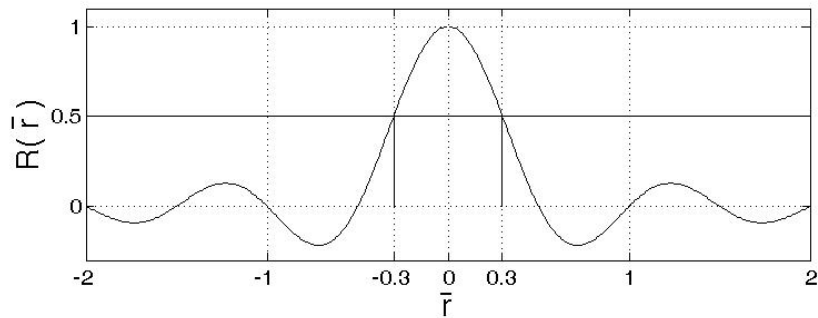


FIGURE 14 – La refocalisation idéale d'une onde scalaire est décrite par un sinus cardinal. Cete figure montre que la largeur à mi hauteur est égale à  $0.6 \lambda$ .

## Annexe E : Décomposition en valeur singulière

La méthode du filtre inverse a été décrite dans la thèse de M. Tanter [128]. Cette annexe reprend les grandes lignes de la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de propagation H, dont la mise en place est décrite dans le corps du texte. La décomposition SVD est définie pour toute matrice complexe et s'écrit de la façon suivante :

$$H = US\tilde{V} \quad \text{avec : } \begin{aligned} \dim(U) &= N_r * N_s \\ \dim(S) &= N_s * N_s \\ \dim(V) &= N_s * N_s \end{aligned} \quad (30)$$

$\tilde{V}$  correspond à la transposée du conjugué de V, et les matrices V et U sont appelées matrices d'entrée et de sortie dans la base des vecteurs singuliers. Les matrices U et V sont donc constituées des vecteurs singuliers dont le sens physique est décrit dans le corps du texte. D'après le théorème de la décomposition en valeurs singulières, S est unique et il s'agit d'une matrice diagonale contenant les valeurs singulières de H :

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{N_s} \end{bmatrix}$$

Par souci de clarté, cette définition est simplifiée au cas où  $N_s < N_r$ . Dans le cas contraire, seules les dimensions des matrices changent<sup>7</sup>. L'étude des valeurs singulières montre que leurs amplitudes forment trois parties distinctes : l'espace image, le noyau de la matrice puis le bruit entre les deux. Afin d'éliminer le bruit lors de l'inversion, les  $m$  plus grandes valeurs singulières correspondant à l'image de la matrice sont conservées. Dans ces conditions, la

---

7. Dans le cas général, les dimensions sont :  $\dim(U) = N_r * N_r$   $\dim(S) = N_r * N_s$   $\dim(V) = N_s * N_s$

matrice  $H^{-1}$  s'écrit :

$$H^{-1} = V\hat{S}^{-1}\tilde{U} = V \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ \vdots & & \frac{1}{\lambda_m} & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix} \tilde{U} \quad (31)$$

A partir de cette matrice, le champ à émettre  $E_{FI}$  est calculé suivant l'équation 7.4. Le champ de refocalisation par filtre inverse  $\psi_{FI}$  est issu de la propagation décrite par l'équation 7.2. Il s'écrit :

$$\psi_{FI} = HH^{-1}.R_{FI} \quad (32)$$

La matrice  $HH^{-1}$  est appelée opérateur de filtre inverse, son expression après régularisation est décrite par l'Eq. (33) :

$$HH^{-1} = US\tilde{V}\tilde{V}\hat{S}^{-1}\tilde{U} = US\hat{S}^{-1}\tilde{U} = U \begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} \tilde{U} \quad (33)$$

Avec  $I_{m \times m}$  la matrice identité de taille  $m$ . Le choix de  $m$  est déterminant pour la refocalisation par filtre inverse, puisqu'il détermine l'impact du bruit sur la refocalisation.

Interprétons maintenant la méthode du retournement temporel à travers le formalisme matriciel. L'opération de retournement temporel, c'est-à-dire le changement de la variable  $t$  en  $-t$ , correspond à une conjuaision de  $H$  dans le domaine fréquentiel. Il faut également faire subir à  $H$  une transposition afin que le produit matriciel effectue la sommation suivant la bonne direction.

Cette matrice de retournement temporel  $\tilde{H}$  s'écrit alors :

$$\tilde{H} = V\hat{S}\tilde{U} = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & \lambda_m & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & \lambda_{N_s} \end{bmatrix} \tilde{U} \quad (34)$$

Le champ de retournement temporel  $\psi_{RT}$  est calculé de la même manière que pour le filtre inverse (Eq. 32) :

$$\psi_{RT} = H\tilde{H}.R_{RT} \quad (35)$$

L'opérateur de retournement temporel est défini de la même façon :

$$H\tilde{H} = US\tilde{V}\hat{S}\tilde{U} = US^2\tilde{U} = U \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{N_s}^2 \end{bmatrix} \tilde{U} \quad (36)$$

Dans ce cas, on ne se limite plus à  $m$  valeurs singulières, puisqu'il n'y a pas d'inversion. La différence entre l'opérateur de filtre inverse (Eq. 33) et l'opérateur de retournement temporel (Eq. 36) réside dans le poids donné à chaque vecteur singulier. Dans le premier cas, les vecteurs singuliers ont le même poids ou sont écartés selon un critère déterminant le choix de  $m$ . Dans le deuxième cas, c'est le carré de la valeur singulière qui pondère l'importance du vecteur dans l'inversion, il n'y a pas besoin de critère.

Mathématiquement, la séparation entre valeurs singulières utiles et bruyées correspond respectivement à l'image et au noyau de la matrice  $H$ . Le nombre  $m$  définit alors le nombre de valeurs singulières indépendantes, aussi appelé rang de la matrice.

## Références

- [1] K. Aki. Space and time spectra of stationary stochastic waves with special reference to microtremors. *Bull. Earthquake Res. Ins.*, 35 :415–456, 1957.
- [2] K. Aki. Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *J. Geophys. Res.*, 74 :615–618., 1969.
- [3] K. Aki and PG Richard. *Quantitative Seismology : Theory and Methods*. Freeman, SanFrancisco, 1980.
- [4] E. Akkermans, PE Wolf, and R. Maynard. Coherent backscattering of light by disordered media : analysis of the peak line shape. *Physical review letters*, 56(14) :1471–1474, 1986.
- [5] M.P.V. Albada and A. Lagendijk. Observation of weak localization of light in a random medium. *Physical review letters*, 55(24) :2692–2695, 1985.
- [6] A. Aubry, A. Derode, and F. Padilla. Local measurements of the diffusion constant in multiple scattering media : Application to human trabecular bone imaging. *Appl. Phys. Lett.*, 92 :124101, 2008.
- [7] G. Barton. *Elements of Green's functions and propagation : potentials, diffusion, and waves*. Oxford University Press, USA, 1989.
- [8] G. Bayer and T. Niederdr  
"ank. Weak localization of acoustic waves in strongly scattering media. *Physical review letters*, 70(25) :3884–3887, 1993.
- [9] N. Bencech, S. Catheline, J. Brum, T. Gallot, and C Negreira. 1-d elasticity assessment in soft solids from shear wave correlation : The time-reversal approach. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 56 (11) :2400–2410, 2009.
- [10] J. Bercoff. *L'imagerie échographique ultrarapide et son application à l'étude de la viscoélasticité du corps humain*. PhD thesis, Université Paris 7, 2004.

- [11] J. Bercoff, S. Chaffai, M. Tanter, L. Sandrin, S. Catheline, M. Fink, JL Gennisson, and M. Meunier. In vivo breast tumor detection using transient elastography. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 29(10) :1387–1396, 2003.
- [12] J. Bercoff, M. Tanter, and M. Fink. Supersonic shear imaging : a new technique for soft tissue elasticity mapping. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 51(4) :396–409, 2004.
- [13] MV Berry. Quantizing a classically ergodic system : Sinai’s billiard and the KKR method. *Annals of Physics*, 131(1) :163–216, 1981.
- [14] J. Bittoun. Formation de l’image en imagerie par résonance magnétique, 35-170-a-1. 2010.
- [15] O. Bohigas, M.J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Physical review letters*, 52(1) :1–4, 1984.
- [16] B. Boyer, E. Le Marec, A. Ait-Ameur, L. Hauret, AM. Dion, and C. Aterii-Tehau. Tomodensitométrie : principes, formation de l’image. principes et techniques d’imagerie, 35-170-a-1. 2003.
- [17] F. Brenguier, N.M. Shapiro, M. Campillo, V. Ferrazzini, Z. Duputel, O. Coutant, and A. Nercessian. Towards forecasting volcanic eruptions using seismic noise. *Nature Geoscience*, 1(2) :126–130, 2008.
- [18] TA Brody, J. Flores, J.B. French, PA Mello, A. Pandey, and SSM Wong. Random-matrix physics : spectrum and strength fluctuations. *Reviews of Modern Physics*, 53(3) :385–479, 1981.
- [19] M. Bruneau. *Manuel d’acoustique fondamentale*. Hermes, 1998.
- [20] M. Bruneau and C. Potel. *Propagation des ondes acoustiques*, volume 1. Hermes, 2006.
- [21] M. Campillo and A. Paul. Long-range correlations in the diffuse seismic coda. *Science*, 299 :547–549, 2003.
- [22] D. Cassereau and M. Fink. Time-reversal of ultrasonic fields - part iii : Theory of the closed time-reversal cavity. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 39 (5) :579–592, 1992.

- [23] S. Catheline. *Interférométrie speckle ultrasonore : application à la mesure d'élasticité*. PhD thesis, Université Paris 7, 1998.
- [24] S. Catheline, N. Benech, J. Brum, and C. Negreira. Time reversal of elastic waves in soft solids. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :064301, 2008.
- [25] S. Catheline, T. Gallot, P. Roux, G. Ribay, and J. De Rosny. Coherent backscattering enhancement in cavities. the simple-shape cavity revisited. *Wave Motion*, in press, 2011.
- [26] S. Catheline, F. Wu, and M. Fink. A solution to diffraction biases in sonoelasticity : The acoustic impulse technique. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105 (5) :2941–2950, 1999.
- [27] H.Y. Chen, J.J. Liao, C.L. Wang, H.J. Lai, and M.H. Jan. A novel method for measuring electromechanical delay of the vastus medialis obliquus and vastus lateralis. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 35(1) :14–20, 2009.
- [28] S.G. Conti, P. Roux, and W.A. Kuperman. Near-field time-reversal amplification. *J. Acoust. Soc. Am.*, 121 :3602, 2007.
- [29] SH Crandall. Localized response reductions in wide-band random vibration of uniform structures. *Archive of Applied Mechanics*, 49(5) :347–359, 1980.
- [30] S.H. Crandall and L.E. Wittig. Chladni's patterns for random vibration of a plate . *Dynamic response of structures, New York*, pages 55–71, 1972.
- [31] S.H. Crandall and W.Q. Zhu. Wide band random vibration of an equilateral triangular plate. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1(1) :5–12, 1986.
- [32] J.L. Davy. Improvements to formulae for the ensemble relative variance of random noise in a reverberation room. *J. Sound Vib.*, 115 :145, 1987.
- [33] J. De Rosny. *Milieux réverbérants et réversibilité*. PhD thesis, Université Paris7, 2000.
- [34] J. De Rosny and M. Fink. Overcoming the diffraction limit in wave physics using a time-reversal mirror and a novel acoustic sink. *Physical review letters*, 89(12) :124301, 2002.

- [35] J. De Rosny, A. Tourin, A. Derode, P. Roux, and M. Fink. Weak localization and time reversal of ultrasound in a rotational flow. *Physical review letters*, 95(7) :74301, 2005.
- [36] J. De Rosny, A. Tourin, and M. Fink. Coherent backscattering of an elastic wave in a chaotic cavity. *Physical review letters*, 84(8) :1693–1695, 2000.
- [37] J. De Rosny, A. Tourin, and M. Fink. Observation of a coherent backscattering effect with a dipolar source for elastic waves : Highlight of the role played by the source. *Physical review E*, 64(6) :66604, 2001.
- [38] T. Deffieux, J.L. Gennisson, M. Tanter, and M. Fink. Assessment of the mechanical properties of the musculoskeletal system using 2-d and 3-d very high frame rate ultrasound. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 55(10) :2177–2190, 2008.
- [39] T. Deffieux, J.L. Gennisson, M. Tanter, M. Fink, and A. Nordez. Ultrafast imaging of in vivo muscle contraction using ultrasound. *Appl. Phys. Lett.*, 89 :184107, 2006.
- [40] Thomas Deffieux. *Palpation par force de radiation ultrasonore et échographie ultrarapide : Applications à la caractérisation tissulaire in vivo*. PhD thesis, Université Paris 7, 2009.
- [41] A. Derode, E. Larose, M. Tanter, J. de Rosny, A. Tourin, M. Campillo, and M. Fink. Recovering the green’s function from field-field correlations in an open scattering medium (1). *J. Acoust. Soc. Am.*, 113 :2973, 2003.
- [42] A. Derode, A. Tourin, J. de Rosny, M. Tanter, S. Yon, and M. Fink. Taking advantage of multiple scattering to communicate with time-reversal antennas. *Physical review letters*, 90(1) :14301, 2003.
- [43] RJ Dickinson and CR Hill. Measurement of soft tissue motion using correlation between A-scans. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 8(3) :263–271, 1982.
- [44] C. Draeger, J.C. Aime, and M. Fink. One-channel time-reversal in chaotic cavities : Experimental results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105 :618, 1999.



- [45] C. Draeger and M. Fink. One-channel time-reversal in chaotic cavities : Theoretical limits. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105 :611, 1999.
- [46] S. Dymling, T. Hertz, K. Lindstrom, and H.W. Persson. Acoustic method for measuring properties of a mobile medium, October 15 1991. US Patent 5,056,357.
- [47] S.Y. Emelianov, S.R. Aglyamov, J. Shah, S. Sethuraman, WG Scott, R. Schmitt, M. Motamedi, A. Karpiouk, and A. Oraevsky. Combined ultrasound, optoacoustic and elasticity imaging. 5320 :101–112, 2004.
- [48] B.J. Fahey, K.R. Nightingale, R.C. Nelson, M.L. Palmeri, and G.E. Trahey. Acoustic radiation force impulse imaging of the abdomen : demonstration of feasibility and utility. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 31(9) :1185–1198, 2005.
- [49] F. Fahy and T.D. Rossing. Foundations of engineering acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111 :1142, 2002.
- [50] M. Fatemi and J.F. Greenleaf. Ultrasound-stimulated vibro-acoustic spectrography. *Science*, 280(5360) :82, 1998.
- [51] M. Fatemi and J.F. Greenleaf. Vibro-acoustography : An imaging modality based on ultrasound-stimulated acoustic emission. *National Academy of Sciences of the USA*, 96(12) :6603, 1999.
- [52] M. Fink. Time reversed acoustics. *Phys. Today*, 34, 1997.
- [53] SE Fried, WA Kuperman, K.G. Sabra, and P. Roux. Extracting the local green’s function on a horizontal array from ambient ocean noise. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124 (4) :183–188, 2008.
- [54] J. Jean-Luc Fromageau, Cedric Gennisson, Roch L. Schmitt, Rosaire Maurice, Guy Mongrain, and Cloutier. Estimation of polyvinyl alcohol cryogel mechanical properties with four ultrasound elastography methods and comparison with gold standard testings. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 54 (3) :498–509, 2007.
- [55] Y. C. Fung. *Biomechanics : Mechanical properties of living tissues*. Springer, 1993.
- [56] T. Gallot, S. Catheline, and P. Roux. Coherent backscattering enhan-

- cement in cavities. highlights of the role of symmetry. *J. Acoust. Soc. Am.*, in press, 2011.
- [57] O.A. Godin. Emergence of the acoustic Green's function from thermal noise. 2007.
- [58] F. Goubel and G. Lensele-Corbeil. *Biomécanique : éléments de mécanique musculaire*. Elsevier Masson, 2003.
- [59] P. Gouédard. *Techniques de Corrélation : Aspects méthodologiques et application à la subsurface*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2008.
- [60] P. Gouédard, P. Roux, M. Campillo, and A. Verdel. Convergence of the two-point correlation function toward the green's function in the context of a seismic-prospecting data set. *Geophysics*, 73(6) :V47–V53, 2008.
- [61] P. Gouédard, L. Stehly, F. Brenguier, M. Campillo, Y. Colin de Verdière, E. Larose, L. Margerin, P. Roux, FJ Sanchez-Sesma, NM Shapiro, R. L., and Weaver. Cross-correlation of random fields : Mathematical approach and applications. *Geophysical Prospecting*, 56 (3) :375–393, 2008.
- [62] J.F. Grosset, J. Piscione, D. Lambertz, and C. Pérot. Paired changes in electromechanical delay and musculo-tendinous stiffness after endurance or plyometric training. *European journal of applied physiology*, 105(1) :131–139, 2009.
- [63] C. Hadziioannou, E. Larose, O. Coutant, P. Roux, and M. Campillo. Stability of Monitoring Weak Changes in Multiply Scattering Media with Ambient Noise Correlation : Laboratory Experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(6) :3688–3695, JUN 2009.
- [64] G.C. Herman and C. Perkins. Predictive removal of scattered noise. *Geophysics*, 71(2), 2006.
- [65] J.T. Hopkins, J.B. Feland, and I. Hunter. A comparison of voluntary and involuntary measures of electromechanical delay. *International Journal of Neuroscience*, 117(5) :597–604, 2007.

- [66] S.R. Huang, R.M. Lerner, and K.J. Parker. Time domain Doppler estimators of the amplitude of vibrating targets. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91 :965, 1992.
- [67] F Hug, T Gallot, S Catheline, and A Nordez. Electromechanical delay in Biceps brachii assessed by ultrafast ultrasonography. *Muscle and Nerve*, page in press, 2010.
- [68] L. Huwart, F. Peeters, R. Sinkus, L. Annet, N. Salameh, L.C. ter Beek, Y. Horsmans, and B.E. Van Beers. Liver fibrosis : non-invasive assessment with MR elastography. *NMR in Biomedicine*, 19(2) :173–179, 2006.
- [69] T.A. Krouskop, B.S. Dougherty, and F.S. Vinson. A pulsed doppler ultrasonic system for makins noninvasive measurements of the mechanical properties of soft tissue. *J. Rehabil. Res. Dev.*, 24 :pp. 1–8, 1987.
- [70] SA Kruse, JA Smith, AJ Lawrence, MA Dresner, A. Manduca, JF Greenleaf, and RL Ehman. Tissue characterization using magnetic resonance elastography : preliminary results. *Physics in Medicine and Biology*, 45 :1579, 2000.
- [71] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie de l'élasticité*. MIR, 1967.
- [72] LL Landau and EM Lifchitz. *Physique théorique : Mécanique des fluides (3ème édition)*. Mir, 1994.
- [73] RS Langley and AWM Brown. The ensemble statistics of the energy of a random system subjected to harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 275(3-5) :823–846, 2004.
- [74] RS Langley and V. Cotoni. The ensemble statistics of the vibrational energy density of a random system subjected to single point harmonic excitation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118 :3064, 2005.
- [75] E. Larose and S. Hall. Monitoring stress related velocity variation in concrete with a  $2.10^{-5}$  relative resolution using diffuse ultrasound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(4) :1853–1856, 2009.
- [76] E. Larose, O.I. Lobkis, and R.L. Weaver. Coherent backscattering of ultrasound without a source. *EPL (Europhysics Letters)*, 76 :422, 2006.

- [77] E. Larose, L. Margerin, A. Derode, B. van Tiggelen, M. Campillo, N. Shapiro, A. Paul, L. Stehly, and M. Tanter. Correlation of random wavefields : An interdisciplinary review. *Geophysics*, 71 :SI11–SI21, 2006.
- [78] E. Larose, L. Margerin, BA Van Tiggelen, and M. Campillo. Weak localization of seismic waves. *Physical review letters*, 93(4) :48501, 2004.
- [79] R.M. Lerner, K.J. Parker, J. Holen, R. Gramiak, and R.C. Waag. Sonoelasticity : Medical elasticity images derived from ultrasound signals in mechanically vibrated targets. *Acoust. Imaging*, 16 :317–327, 1988.
- [80] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, and M. Fink. Focusing beyond the diffraction limit with far-field time reversal. *Science*, 315(5815) :1120, 2007.
- [81] S.F. Levinson, M. Shinagawa, and T. Sato. Sonoelastic determination of human skeletal muscle elasticity. *Journal of biomechanics*, 28(10) :1145–1154, 1995.
- [82] L. Li, D. Landin, J. Grodesky, and J. Myers. The function of gastrocnemius as a knee flexor at selected knee and ankle angles. *Journal of Electromyography and Kinesiology*, 12(5) :385–390, 2002.
- [83] O. I. Lobkis and R. L. Weaver. On the emergence of the green’s function in the correlations of a diffuse field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110 :3011–3017, 2001.
- [84] RH Lyon. Statistical analysis of power injection and response in structures and rooms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 45 :545, 1969.
- [85] C.N. Maganaris and J.P. Paul. In vivo human tendon mechanical properties. *The Journal of physiology*, 521(1) :307, 1999.
- [86] C.N. Maganaris and J.P. Paul. Tensile properties of the in vivo human gastrocnemius tendon. *Journal of biomechanics*, 35(12) :1639–1646, 2002.
- [87] AE Malcolm, F. Reitich, J. Yang, JF Greenleaf, and M. Fatemi. A combined parabolic-integral equation approach to the acoustic simulation of vibro-acoustic imaging. *Ultrasonics*, 48(6-7) :553–558, 2008.

- [88] A. Mamane, C. Fretigny, F. Lequeux, and L. Talini. Surface fluctuations of an aging colloidal suspension :evidence for intermittent quakes. *EPL (Europhysics Letters)*, 88 :58002, 2009.
- [89] S.W. McDonald and A.N. Kaufman. Wave chaos in the stadium : statistical properties of short-wave solutions of the Helmholtz equation. *Physical review A*, 37(8) :3067–3086, 1988.
- [90] T. Moritani, MJ Berry, DW Bacharach, and E. Nakamura. Gas exchange parameters, muscle blood flow and electromechanical properties of the plantar flexors. *European journal of applied physiology and occupational physiology*, 56(1) :30–37, 1987.
- [91] T. Moritani, D. Stegeman, and R. Merletti. Basic physiology and biophysics of emg signal generation. *Electromyography Physiology Engineering and Noninvasive Applications*, pages 1–20, 2004.
- [92] P. M. Morse and K. Uno Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1986.
- [93] M. Muller, J.L. Gennisson, T. Deffieux, M. Tanter, and M. Fink. Quantitative viscoelasticity mapping of human liver using supersonic shear imaging : preliminary in vivo feasibility study. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 35(2) :219–229, 2009.
- [94] T. Muraoka, T. Muramatsu, T. Fukunaga, and H. Kanehisa. Influence of tendon slack on electromechanical delay in the human medial gastrocnemius in vivo. *Journal of Applied Physiology*, 96(2) :540, 2004.
- [95] R. Muthupillai, DJ Lomas, PJ Rossman, JF Greenleaf, A. Manduca, and RL Ehman. Magnetic resonance elastography by direct visualization of propagating acoustic strain waves. *Science*, 269(5232) :1854, 1995.
- [96] K. Nightingale, R. Bentley, and G. Trahey. Observations of tissue response to acoustic radiation force : Opportunities for imaging. *Ultrasonic imaging*, 24(3) :129–138, 2002.
- [97] K.R. Nightingale, M.L. Palmeri, R.W. Nightingale, and G.E. Trahey. On the feasibility of remote palpation using acoustic radiation force. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110 :625, 2001.

- [98] A. Nordez, T. Gallot, S. Catheline, A. Guevel, C. Cornu, and F. Hug. Electromechanical delay revisited using very high frame rate ultrasound. *Journal of Applied Physiology*, 106(6) :1970, 2009.
- [99] A. Nordez, JL Gennisson, P. Casari, S. Catheline, and C. Cornu. Characterization of muscle belly elastic properties during passive stretching using transient elastography. *Journal of biomechanics*, 41(10) :2305–2311, 2008.
- [100] R.W. Norman and P.V. Komi. Electromechanical delay in skeletal muscle under normal movement conditions. *Acta Physiologica Scandinavica*, 106(3) :241–248, 1979.
- [101] J. Ophir, I. Cespedes, H. Ponnekanti, Y. Yazdi, and X. Li. Elastography : a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues. *Ultrasonic imaging*, 13(2) :111–134, 1991.
- [102] C. Orizio, F. Esposito, I. Paganotti, L. Marino, B. Rossi, and A. Veicsteinas. Electrically-elicited surface mechanomyogram in myotonic dystrophy. *The Italian Journal of Neurological Sciences*, 18(4) :185–190, 1997.
- [103] G. Papanicolaou, L. Ryzhik, and K. Sølna. Statistical stability in time reversal. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 64(4) :1133–1155, 2004.
- [104] KJ Parker, SR Huang, RA Musulin, and RM Lerner. Tissue response to mechanical vibrations for sonoelasticity imaging. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 16 (3) :241–246, 1990.
- [105] KJ Parker and RM Lerner. Sonoelasticity of organs : shear waves ring a bell. *J. Acoust. Soc. Am.*, 11(8) :387, 1992.
- [106] A. Paul, M. Campillo, L. Margerin, E. Larose, and A. Derode. Empirical synthesis of time-asymmetrical Green functions from the correlation of coda waves. *J. Geophys. Res.*, 110, 2005.
- [107] JB Pendry, D. Schurig, and DR Smith. Controlling electromagnetic fields. *Science*, 312(5781) :1780, 2006.
- [108] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky, and M. Fink. Decomposition of the time reversal operator : detection and selective focusing on two scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99 (4) :2067–2076, 1996.

- [109] G. Ribay, S. Catheline, D. Clorennec, R.K. Ing, and M. Fink. A0 mode interaction with a plate free edge : Theory and experiments at very low frequency by thickness product. *J. Acoust. Soc. Am.*, 12 :711–714, 2007.
- [110] J.L. Robert and M. Fink. The time-reversal operator with virtual transducers : Application to far-field aberration correction. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124 :3659, 2008.
- [111] P. Roux. Passive seismic imaging with directive ambient noise : application to surface waves and the San Andreas Fault in Parkfield, CA. *Geophysical Journal International*, 179(1) :367–373, 2009.
- [112] P. Roux and W. A. Kuperman. Extracting coherent wave fronts from acoustic ambient noise in the ocean. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116 :1995–2003, 2004.
- [113] K. Sabra and A. Archer. Tomographic elastography of contracting skeletal muscles from their natural vibrations. *Appl. Phys. Lett.*, 95 :203701 1, 2009.
- [114] K.G. Sabra, S. Conti, P. Roux, and W Kuperman. Passive in vivo elastography from skeletal muscle noise. *Appl. Phys. Lett.*, 90 :194–1001, 2007.
- [115] K.G. Sabra, P. Gerstoft, P. Roux, WA Kuperman, and M.C. Fehler. Surface wave tomography from microseisms in southern california. *Geophys. Res. Lett.*, 32 :L14311, 2005.
- [116] F.J. Sánchez-Sesma, J.A. Pérez-Ruiz, F. Luzón, M. Campillo, and A. Rodríguez-Castellanos. Diffuse fields in dynamic elasticity. *Wave Motion*, 45(5) :641–654, 2008.
- [117] A. Sandow. Excitation-contraction coupling in skeletal muscle. *Pharmacological reviews*, 17(3) :265, 1965.
- [118] L. Sandrin, B. Fourquet, J.M. Hasquenoph, S. Yon, C. Fournier, F. Mal, C. Christidis, M. Ziol, B. Poulet, F. Kazemi, et al. Transient elastography : a new noninvasive method for assessment of hepatic fibrosis. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 29(12) :1705–1713, 2003.

- [119] L. Sandrin, M. Tanter, and M. Fink. Shear modulus imaging with 2-D transient elastography. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 40(4), 2002.
- [120] L. Sandrin, M. Tanter, J.L. Gennisson, S. Catheline, and M. Fink. Shear elasticity probe for soft tissues with 1-d transient elastography. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 49 (4) :436–446, 2002.
- [121] A.P. Sarvazyan, O.V. Rudenko, S.D. Swanson, J.B. Fowlkes, and S.Y. Emelianov. Shear wave elasticity imaging : a new ultrasonic technology of medical diagnostics. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 24(9) :1419–1435, 1998.
- [122] N.M. Shapiro, M. Campillo, L. Stehly, and M.H. Ritzwoller. High-resolution surface-wave tomography from ambient seismic noise. *Science*, 307 :1615–1618, 2005.
- [123] R. Sinkus, M. Tanter, S. Catheline, J. Lorenzen, C. Kuhl, E. Sondermann, and M. Fink. Imaging anisotropic and viscous properties of breast tissue by magnetic resonance-elastography. *Magnetic Resonance in Medicine*, 53(2) :372–387, 2005.
- [124] R. Snieder. Extracting the green’s function from the correlation of coda waves : A derivation based on stationary phase. *Phys. Rev. E*, 69 :046610, 2004.
- [125] R. Snieder. Extracting the Green’s function of attenuating heterogeneous acoustic media from uncorrelated waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121(5) :2637–2643, 2007.
- [126] L. Stehly, M. Campillo, B. Froment, and RL Weaver. Reconstructing green’s function by correlation of the coda of the correlation c3 of ambient seismic noise. *J. Geophys. Res.*, 113 :B11306, 2008.
- [127] L. Stehly, N. Shapiro, and M. Campillo. A study of the seismic noise from its long-range correlation properties. *J. Geophys. Res.*, 111 :1–12, 2006.
- [128] M. Tanter. *Application du retournement temporel à l’hyperthermie ultrasonore du cerveau*. PhD thesis, Université Paris 7, 1999.



- [129] M. Tanter, J. Bercoff, A. Athanasiou, T. Deffieux, J.L. Gennisson, G. Montaldo, M. Muller, A. Tardivon, and M. Fink. Quantitative assessment of breast lesion viscoelasticity : initial clinical results using supersonic shear imaging. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 34(9) :1373–1386, 2008.
- [130] M. Tanter, J.-L. Thomas, and M. Fink. Time reversal and the inverse filter. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(1) :223–234, 2000.
- [131] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B.A. van Tiggelen, and M. Fink. Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves. *Physical review Letters*, 79(19) :3637–3639, 1997.
- [132] CI Valencia and ER Méndez. Weak Localization Effects in Second-Harmonic Light Scattering. 2007.
- [133] BA Van Tiggelen. Green function retrieval and time reversal in a disordered world. *Physical review letters*, 91(24) :243904, 2003.
- [134] K. Wapenaar. Retrieving the elastodynamic Green’s function of an arbitrary inhomogeneous medium by cross correlation. *Physical review letters*, 93(25) :254301, 2004.
- [135] R. Weaver, B. Froment, and M. Campillo. On the correlation of non-isotropically distributed ballistic scalar diffuse waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 126(4), 2009.
- [136] R. L. Weaver and O. I. Lobkis. Ultrasonics without a source : Thermal fluctuation correlations at mhz frequencies. *Phys. Rev. Lett.*, 87 (13) :134301–134304, 2001.
- [137] RL Weaver. On the ensemble variance of reverberation room transmission functions, the effect of spectral rigidity. *Journal of Sound and Vibration*, 130(3) :487–491, 1989.
- [138] R.L. Weaver. Information from seismic noise. *Science*, 307(5715) :1568, 2005.
- [139] R.L. Weaver and J. Burkhardt. Weak Anderson localization and enhanced backscatter in reverberation rooms and quantum dots. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96 :3186, 1994.

- [140] R.L. Weaver and O.I. Lobkis. Enhanced backscattering and modal echo of reverberant elastic waves. *Physical review letters*, 84(21) :4942–4945, 2000.
- [141] R.L. Weaver and O.I. Lobkis. Elastic wave thermal fluctuations, ultrasonic waveforms by correlation of thermal phonons. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113 :2611, 2003.
- [142] R.L. Weaver and O.I. Lobkis. Diffuse fields in open systems and the emergence of the Green’s function (L). *J. Acoust. Soc. Am.*, 116 :2731, 2004.
- [143] P.E. Wolf and G. Maret. Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media. *Physical review letters*, 55(24) :2696–2699, 1985.
- [144] F. Wu, J.L. Thomas, and M. Fink. Time Reversal of Ultrasonic Fields-Part II : Experimental Results. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 39(5) :567, 1992.
- [145] Y. Yamakoshi, J. Sato, and T. Sato. Ultrasonic imaging of internal vibration of soft tissue under forced vibration. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 37 (2) :45–53, 1990.
- [146] S. Zhou, D.L. Lawson, W.E. Morrison, and I. Fairweather. Electromechanical delay in isometric muscle contractions evoked by voluntary, reflex and electrical stimulation. *European journal of applied physiology and occupational physiology*, 70(2) :138–145, 1995.
- [147] M. Ziol, A. Handra-Luca, A. Kettaneh, C. Christidis, F. Mal, F. Kazemi, V. de Lédighen, P. Marcellin, D. Dhumeaux, J.C. Trinchet, et al. Noninvasive assessment of liver fibrosis by measurement of stiffness in patients with chronic hepatitis C. *Hepatology*, 41(1) :48–54, 2005.