



**HAL**  
open science

# Transferts de chaleur dans un écoulement de polymère fondu en régime non stationnaire - Application aux procédés d'extrusion et d'injection

Yanneck Wielhorski

► **To cite this version:**

Yanneck Wielhorski. Transferts de chaleur dans un écoulement de polymère fondu en régime non stationnaire - Application aux procédés d'extrusion et d'injection. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Nantes, 2009. Français. NNT : . tel-00606855v2

**HAL Id: tel-00606855**

**<https://theses.hal.science/tel-00606855v2>**

Submitted on 18 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DOCTORALE

SCIENCES POUR L'INGENIEUR, GEOSCIENCES, ARCHITECTURE

DE NANTES

Année 2009

Thèse de **DOCTORAT**

Discipline : Sciences de l'ingénieur

Spécialité : Thermiques - Energétiques

Présentée et soutenue publiquement par

**WIELHORSKI Yanneck**

le 10 décembre 2009

à Polytech'Nantes, Nantes

**Transferts de chaleur dans un écoulement de polymère fondu en régime  
non stationnaire – Application aux procédés d'extrusion et d'injection**

<i>Président du jury :</i>	E. Arquis	Professeur, ENSCPB, Bordeaux
<i>Rapporteurs :</i>	M. Vincent	Directeur de Recherche CNRS, CEMEF, Sofia Antipolis
	P. Chantrenne	Professeur, CETHIL, Lyon
<i>Examineurs :</i>	Y. Jarny	Professeur, Polytech'Nantes
	D. Delaunay	Directeur de Recherche CNRS, LTN, Nantes
	P. Mousseau	Maître de Conférences HDR, OPERP-GEPEA, Nantes

Directeurs de thèse : Y. Jarny et D. Delaunay

Co-encadrant : P. Mousseau

Laboratoire : Laboratoire de Thermocinétique de Nantes

Adresse : Rue C. Pauc – BP 90604 – 44306 Nantes cedex 3

N° ED 498 - 87

# Résumé

*Durant la mise en forme des polymères, un phénomène de dégagement de chaleur résultant de la dissipation visqueuse au sein de l'écoulement, plus ou moins important selon les débits considérés, joue un rôle important sur le champ thermique du polymère et du dispositif expérimental. La difficulté de modéliser ce type d'écoulement avec le dispositif expérimental est due, entre autres, aux propriétés thermomécaniques complexes du matériau et aux conditions limites du domaine spatial d'intégration. En effet, ils varient spatialement et temporellement ; leur élaboration est souvent délicate. Ils traduisent les conditions d'expérience telles que la pression et la température d'entrée du polymère, par exemple dans une buse d'injection. Les travaux ont porté sur l'écoulement dans une filière à géométrie cylindrique instrumentée en température et en pression adaptable sur une presse à injecter. Deux campagnes de mesures ont été menées, sur une extrudeuse et sur une presse à injecter. Les conditions expérimentales sont dans les deux cas stationnaires (par nature dans l'injection, et créées par la variation du débit dans les cas de l'extrusion). La buse réalisée dans le cadre de ce projet a donné entière satisfaction, et les mesures ont permis de valider les modèles directs de simulation de l'écoulement dans la buse. On a pu quantifier précisément les effets de la dissipation visqueuse, ainsi que ceux de la variation de température d'entrée dans la buse. Les résultats expérimentaux confirment que les mesures dans les parois métalliques sont bien sensibles aux variations de température d'entrée. Un algorithme d'inversion de ces mesures a été développé et appliqué avec succès aux mesures réalisées sur l'extrudeuse.*

**Mots-clés : Injection, Filière Extrusion, Problème Inverse, Polymère, Dissipation Visqueuse, Rhéologie, Transfert thermique, Taux de Cisaillement, PEBD, PHV252**

## Abstract

*During the forming of polymers, a phenomenon of release of heat resulting from the viscous dissipation within the flow, more or less consequent according to the considered flow rates, plays a significant role on the thermal field of the polymer and the experimental device. Besides the complex thermomechanical parameters of the materials, the difficulty to simulate this kind of flow with its device remains due to the limit conditions of the domain of integration. Indeed, they vary spatially and temporarily. In addition, the measurement of temperature in a polymer melt flow are often complicated because of intrusive or imprecisely method. Also, numerical method of inverse problem will be considered in order to obtain temperature in the polymer from indirect measurements in the steel of the cylinder. The regimes considered are imposed by a variation of the pressure and the entrance temperature of the channel which remains constantly filled with material (without free boundary).*

**Key-words: Injection, Extrusion Die, Inverse problem, Polymer, Viscous Dissipation, Rheology, Thermal transfer, Shear Rate, PEBD, PHV252**

## ***Remerciements***

Je tiens à remercier tout d'abord Yvon JARNY, Professeur à Polytech'Nantes, et Didier DELAUNAY, Directeur de recherche CNRS au Laboratoire de Thermocinétique de Nantes, de m'avoir accueilli dans leur laboratoire ainsi que de m'avoir apporté une partie de leur savoir sur la mise en forme des polymères tout au long de ces trois années.

Je remercie également Pierre MOUSSEAU, Maître de Conférences à l'IUT de Nantes, dont le travail commun fut également très enrichissant et dont le soutien moral et l'encadrement scientifique furent également conséquents.

Je remercie Nicolas LEFEVRE, assistant ingénieur au Laboratoire de Thermocinétique de Nantes, avec lequel j'ai travaillé sur la conception du dispositif expérimental et dont les compétences de modélisation et d'instrumentation m'ont fortement aidé dans sa construction.

Mes remerciements vont également à Messieurs Michel VINCENT, Directeur de Recherche CNRS au CEMEF à Nice Sophia Antipolis, et Patrice CHANTRENNE, Professeur au CETHIL de Lyon, qui ont eu la gentillesse de regarder de près mon travail ainsi que Monsieur Eric ARQUIS qui a accepté de présider mon jury de thèse et dont les commentaires furent avisés.

Je remercie ma mère, mon père, mon frère et ma sœur et je le leur dédie ce travail car leur soutien fut pour moi un grand honneur et un profond bonheur.

Je tiens également à remercier mes amis proches pour leur soutien et leur bonne humeur ainsi que ma compagne pour sa patience et son écoute.

Une pensée pour tous les doctorants que j'ai rencontrés durant ma thèse avec qui les échanges scientifiques et humains ont été très enrichissants et à tous les membres du LTN.

Enfin, ce travail est aussi dédié à ma fille adorée (qui prend 9 ans exactement le jour où j'écris cette phrase) qui m'a suivi tout le long de mes études. C'est notamment pour elle que j'ai voulu entreprendre cette recherche...



<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>11</b>
<b>CHAPITRE I – ETAT DE L’ART.....</b>	<b>17</b>
<b>I.1 RAPPEL SUR LES POLYMERES THERMOPLASTIQUES.....</b>	<b>18</b>
I.1.1 LES AMORPHES.....	18
I.1.2 LES SEMI CRISTALLINS .....	18
I.1.3 PROPRIETES.....	20
I.1.3.1 Volume spécifique.....	20
I.1.3.2 Conductivité thermique.....	20
I.1.3.3 Module d’élasticité.....	20
I.1.3.4 Rhéologie .....	21
<b>I.2 SUR L’INJECTION ET L’EXTRUSION .....</b>	<b>24</b>
I.2.1 L’INJECTION.....	24
I.2.1.1 Les différentes étapes d’un cycle .....	25
I.2.1.2 Visualisation d’un cycle d’injection via un diagramme PvT.....	26
I.2.2 L’EXTRUSION .....	27
I.2.2.1 Généralités.....	27
I.2.2.2 Domaines d’application.....	28
<b>I.3 NOMBRES ADIMENSIONNELS CARACTERISANT UN ECOULEMENT.....</b>	<b>29</b>
I.3.1 NOMBRE DE REYNOLDS – RE .....	29
I.3.2 NOMBRE DE STOKES – ST.....	29
I.3.3 NOMBRE DE PECKET – PE.....	30
I.3.4 NOMBRE DE CAMERON – CA.....	30
I.3.5 NOMBRE DE BRINKMAN – BR.....	31
<b>I.4 MESURE DE TEMPERATURE AU SEIN D’UN POLYMERE FONDU .....</b>	<b>31</b>
I.4.1 INTRODUCTION.....	31
I.4.2 MESURES DE TEMPERATURE INTRUSIVES .....	33
I.4.3 MESURES DE TEMPERATURE NON INTRUSIVES.....	34
I.4.4 COMPROMIS ET OUVERTURE.....	35
I.4.5 CONCLUSION.....	36
<b>CHAPITRE II – MODELISATION ET SIMULATION.....</b>	<b>39</b>
<b>II.1 INTRODUCTION.....</b>	<b>40</b>
<b>II.2 SCHEMA DU SYSTEME ETUDIE .....</b>	<b>40</b>
<b>II.3 PARAMETRES THERMOPHYSIQUES DES MATERIAUX.....</b>	<b>41</b>
II.3.1 PROPRIETES DES POLYMERES .....	41
II.3.1.1 Variations des paramètres $C_p$ et $\lambda$ du PP HV252.....	42
II.3.1.2 Volume spécifique et masse volumique du PP HV252 .....	43
II.3.1.3 Viscosité dynamique du PP HV252 et du PE 2042E.....	44
II.3.1.3.1 Viscosité du PP HV252 .....	44
II.3.1.3.2 Viscosité du PE 2042E .....	47
II.3.2 PROPRIETES DES ACIERS.....	48
<b>II.4 CALCUL DE CERTAINS NOMBRES ADIMENSIONNELS.....</b>	<b>49</b>
<b>II.5 EQUATIONS DU PROBLEME DIRECT.....</b>	<b>51</b>
<b>II.6 APPROXIMATION RHEOLOGIQUE EN DEVELOPPEMENT POLYNOMIAL.....</b>	<b>53</b>

## Sommaire

II.6.1 RAPPEL DE LA FORMULE DE TAYLOR D'UNE FONCTION A DEUX VARIABLES .....	54
II.6.2 APPLICATION AU PP HV252 .....	55
II.6.3 APPLICATION AU PE 2042E .....	56
II.6.4 COMPARAISON ENTRE LA VISCOSITE DU PE ET SON APPROXIMATION .....	56
<b>II.7 EXEMPLES DE RESULTATS NUMERIQUES DE SIMULATION .....</b>	<b>58</b>
II.7.1 CAS N°1 : INJECTION PERIODIQUE AVEC LE PE 2042E .....	58
II.7.2 CAS N°2 : INJECTION PERIODIQUE AVEC LE PP HV252 .....	65
II.7.3 CAS N°3 : COMPARAISON ENTRE DEUX DIFFERENTS CYCLES D'INJECTIONS PERIODIQUES POUR LE PP HV252 .....	67
<b>II.8 CONCLUSION.....</b>	<b>68</b>
<b>CHAPITRE III – CONCEPTION D'UNE BUSE INSTRUMENTEE .....</b>	<b>71</b>
<b>III.1 EXPERIENCE SUR LE DISPOSITIF PRECEDENT .....</b>	<b>72</b>
<b>III.2 DESCRIPTION DU NOUVEL OUTILLAGE .....</b>	<b>73</b>
III.2.1 DESCRIPTION D'ENSEMBLE DE LA BUSE .....	73
III.2.2 DETAILS DES ELEMENTS PRINCIPAUX .....	74
III.2.2.1 Les deux demi-cylindres .....	74
III.2.2.2 Le fourreau.....	75
III.2.2.3 Les différents nez de buse.....	76
<b>III.3 INSTRUMENTATION .....</b>	<b>77</b>
III.3.1 ZONES DE CHAUFFE ET REGULATION .....	77
III.3.2 EMLACEMENTS ET INSTRUMENTATION DES THERMOCOUPLES .....	80
III.3.2.1 Leurs emplacements .....	80
III.3.2.2 Leur instrumentation.....	80
III.3.3 CAPTEUR DE PRESSION .....	82
<b>III.4 DIMENSIONNEMENT DE LA NOUVELLE BUSE INSTRUMENTEE.....</b>	<b>83</b>
III.4.1 CHOIX DES DIMENSIONS EXTERNES .....	83
III.4.1.1 Longueur du canal .....	83
III.4.1.2 Rayon du cylindre et du fourreau.....	83
III.4.2 DETERMINATION DU RAYON CANAL .....	83
III.4.2.1 Etude mécanique .....	84
III.4.2.2 Etude thermique .....	85
III.4.3 RESUME DES DIMENSIONS DE LA BUSE.....	89
<b>CHAPITRE IV – MESURES EXPERIMENTALES .....</b>	<b>93</b>
<b>IV.1 INTRODUCTION ET NOTATIONS .....</b>	<b>94</b>
<b>IV.2 EVALUATION DES PERTES DE CHARGES DANS LE CANAL .....</b>	<b>96</b>
IV.2.1 MESURES DANS LA BUSE « TRONQUEE » .....	96
IV.2.1.1 Pour le PP HV252 .....	96
IV.2.1.2 Pour le PE 2042 E.....	97
IV.2.2 REMARQUES ET CONCLUSION .....	98
<b>IV.3 MESURES EN TRANSITOIRE RAPIDE .....</b>	<b>98</b>
IV.3.1 DETERMINATION DE LA VITESSE D'INJECTION .....	98
IV.3.2 EXEMPLES DE MESURES.....	99
IV.3.2.1 Injection en mode purge .....	99

## Sommaire

IV.3.2.2 Injection en régime périodique.....	102
<b>IV.4 MESURES EN TRANSITOIRE LENT.....</b>	<b>106</b>
IV.4.1 OBJECTIF DES MESURES.....	106
IV.4.2 RESULTATS DE L'ESSAI DE REFERENCE.....	107
IV.4.2.1 Description de l'essai.....	107
IV.4.2.2 Résultats expérimentaux.....	109
<b>IV.5 CONCLUSION .....</b>	<b>113</b>
<b>CHAPITRE V – FORMULATION ET RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME INVERSE.....</b>	<b>117</b>
<b>V.1 INTRODUCTION.....</b>	<b>118</b>
<b>V.2 COMPARAISON MODELE EXPERIENCE SUR LE PE 2042E .....</b>	<b>118</b>
V.2.1 INTRODUCTION .....	118
V.2.2 RESTRICTION DU DOMAINE DE CALCUL.....	119
V.2.3 CONDITIONS AUX LIMITES .....	120
V.2.3.2 Estimation de la pression à l'entrée du canal .....	121
V.2.3.3 Condition aux limites en température.....	123
IV.2.3.3.1 Conditions aux limites dans la paroi du canal.....	123
IV.2.3.3.1.1 Pour le régime stationnaire du palier 1 .....	123
IV.2.3.3.1.2 Pour le régime transitoire.....	124
IV.2.3.3.2 Température d'entrée du polymère en régime transitoire.....	125
V.2.4 RESULTATS DU CALCUL DU REGIME STATIONNAIRE – PALIER 1 .....	126
V.2.5 RESULTATS DU CALCUL DU REGIME STATIONNAIRE – PALIER 2 .....	128
V.2.6 RESULTATS DU CALCUL DU REGIME TRANSITOIRE .....	130
V.2.7 ETUDE DE SENSIBILITE.....	132
V.2.8 BILAN THERMIQUE.....	133
<b>V.3 ESTIMATION DE LA TEMPERATURE D'ENTREE DU POLYMERE .....</b>	<b>134</b>
V.3.1 PRINCIPE DE L'ESTIMATION PARAMETRIQUE.....	134
V.3.2 L'ALGORITHME DE GAUSS NEWTON.....	135
V.3.3 ETUDE DE LA METHODE D'INVERSION EN SIMULATION .....	136
V.3.3.1 Paramétrage de $T_0(t)$ .....	136
V.3.3.2 Calcul et conditionnement de la matrice de sensibilité .....	137
V.3.3.3 Résultat de l'inversion non bruitée.....	139
V.3.4 APPLICATION AUX MESURES EXPERIMENTALES .....	140
V.3.4.1 Résultat de l'estimation de $\bar{T}_0(t)$ avec $p=5$ paramètres .....	141
V.3.4.2 Résultat de l'estimation avec 8 et 12 paramètres .....	143
<b>V.4 CONCLUSION.....</b>	<b>145</b>
<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>147</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>151</b>
<b>ANNEXE I : CALCUL ANALYTIQUE DU DEVELOPPEMENT LIMITE DES VISCOSITES.....</b>	<b>155</b>
<b>ANNEXE II : CALCUL ANALYTIQUE DU CHAMP DE CONTRAINTE DANS UN CYLINDRE CREUX SOUS SOLLECITATIONS INTERNES ET EXTERNES .....</b>	<b>165</b>
<b>ANNEXE III : MESURES EXPERIMENTALES .....</b>	<b>171</b>



*Sommaire*

***ANNEXE IV : CALCUL DES EQUATIONS DU GRADIENT CONJUGUE ..... 185***  
***ANNEXE V : DEMONSTRATION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR..... 211***





## ***Introduction***

À la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, le travail de la fonte et de l'acier croît notablement au sein de l'Europe et ces matériaux continuent de nos jours à être largement employés. Cependant, un nouveau type de matériau va entrer sur la scène industrielle mondiale progressivement à partir de la seconde moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle, il s'agit des polymères. La première matière plastique est née aux Etats-Unis vers les années 1860, c'était de l'acétate de cellulose. Elle fut découverte par les frères Hyatt. Ces derniers ont ensuite, en 1869, moulé du nitrate de cellulose ou celluloid, obtenu à partir du camphre et de la cellulose, afin de remplacer l'ivoire dans la fabrication des boules de billard. De même, le caoutchouc qui est un élastomère connu depuis le XVIII<sup>ème</sup> siècle, prend son envol à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle grâce à l'invention des pneumatiques (appuyée plus tard par l'explosion de la production automobile) et le succès des bicyclettes. Les polymères sont donc largement utilisés dans le monde et leur champ d'application reste vaste. En effet, on les trouve dans l'aéronautique, l'industrie automobile, le domaine médical, l'informatique, la téléphonie mobile, les vêtements, l'immobilier, ... mais aussi dans l'agroalimentaire.

Qu'est-ce qu'un polymère ? C'est une macromolécule composée d'un très grand nombre de molécules carbonées (un enchaînement de monomères) qui peut se structurer de façon linéaire (polymères linéaires), présenter des ramifications aléatoires (polymères branchés) ou systématiques et régulières (dendrimères). On peut les trouver sous forme naturelle (ex : polysaccharides, caoutchouc) ou obtenus par modification chimique d'un polymère naturel (ex : méthylcellulose) ou encore entièrement synthétisés par voie chimique (ex : polystyrène, polyisoprène) par une réaction de polymérisation. Cette synthétisation commence réellement au début du XX<sup>ème</sup> siècle grâce au progrès de la chimie de synthèse. Dès lors, les thermoplastiques tels que le polystyrène ou le polychlorure de vinyle voient le jour et se répandent progressivement dans les pays industrialisés grâce à des procédés industriels de mise en forme. Notons que l'apparition de la plasturgie en Europe a eu lieu en France à Oyonnax, non loin de Lyon, où l'on a vu la première presse à injecter vers 1930. Aujourd'hui Oyonnax abrite le Pôle Européen de Plasturgie (créé en 1990) et l'ancienne Ecole Supérieure de Plasturgie (créée en 1932) devenue aujourd'hui le Site de Plasturgie de l'INSA de Lyon, qui, avec le lycée Arbez Carme, forment une plate-forme dédiée à la plasturgie.

Même si, de nos jours, les polymères connaissent une utilisation grandissante, leurs procédés de mise en forme ne sont pas encore totalement maîtrisés. En effet, les polymères

## *Introduction*

fondu, en mouvement très lent, s'écoulent comme des liquides mais, en mouvement rapide, ils se comportent comme des caoutchoucs où les phénomènes viscoélastiques sont prépondérants. De plus, les propriétés thermomécaniques de ces matériaux étant complexes à caractériser et pouvant varier considérablement à l'instar de la rhéologie, leur mise en forme devient un problème physique complexe avec des enjeux économiques très importants. L'optimisation des procédés de moulage, d'extrusion ou de procédés tels que le rotomoulage ou le soudage des composite à matrice thermoplastique est indispensable pour les industriels. En outre, durant ces procédés, il est constamment nécessaire de forcer un fluide polymère à s'adapter à des formes prescrites. D'où de nombreux défauts dans le produit final, comme cette « peau de requin » qui est un désastre pour le fabricant de produits extrudés. De plus, il est clair que vu les coûts élevés d'une presse à injecter ou d'un moule, les industriels veulent constamment, d'une part réduire les coûts de production en améliorant le rendement, et d'autre part perfectionner la qualité des produits grâce à l'optimisation des techniques de mise en forme.

En plasturgie et notamment dans les procédés de mise en forme de polymères tels que l'extrusion et l'injection, une bonne connaissance de la thermique du polymère est un point clé pour améliorer la qualité des pièces, c'est-à-dire avec le moins de défauts possible, et la reproductibilité du procédé avec la même précision et le même état de surface des pièces.

En effet, le polymère peut être fortement sollicité ; chauffé et malaxé, il va passer de l'état fondu à l'état solide en une forme désirée, par différentes techniques de refroidissement suivant le procédé de mise en forme utilisé. Ce changement d'état et les variations de ses caractéristiques physiques, à l'instar de la viscosité, sont dus aux variations de température qu'il subit durant le processus. Dès lors, la recherche du champ thermique dans le polymère est très utile, voire indispensable au contrôle des procédés de mise en forme. Cependant, lorsque le polymère sous forme fondue est mis en mouvement, par exemple dans une buse d'injection, la thermique de base n'est plus suffisante pour expliquer tous les phénomènes. En effet, en plus de la conduction et de la diffusion dans le polymère fondu, la dissipation visqueuse va engendrer des sources thermiques volumiques très significatives qui doivent être prises en compte dans le bilan des transferts de chaleur. Le couplage thermomécanique au sein du polymère fondu s'impose donc afin de bien comprendre les phénomènes physiques car les échauffements créés par l'énergie de dissipation visqueuse sont fonction du débit et donc des vitesses de cisaillement.

Les matériaux utilisés dans cette étude sont des thermoplastiques dont la viscosité varie fortement avec le taux de cisaillement qu'ils subissent lorsqu'ils sont à l'état liquide et sollicités mécaniquement. Il est à noter aussi que les profils de températures au sein du fluide ne sont pas

## *Introduction*

homogènes. En effet, plus les polymères sont cisailés, plus ils s'échauffent à cause de leur caractère visqueux et des sollicitations mécaniques qu'ils subissent lors de leur mise en forme. Il en résulte que les échauffements sont plus importants lorsqu'ils sont proches de la frontière entre le polymère et le métal qu'au centre de la conduite où circule le fluide. Ceci se traduit par un profil de température où l'amplitude de cette dernière augmente à mesure que l'on se rapproche de la paroi métallique et diminue un peu avant cette dernière afin de conserver la continuité de la température à l'interface polymère métal. En effet, le métal conduisant mieux la chaleur que les polymères, la chaleur s'accumule plus dans le fluide que dans le métal et par conséquent, l'acier du cylindre a tendance à refroidir le polymère à proximité de la paroi. De plus, l'énergie engendrée par la dissipation visqueuse s'accumule dans le polymère à mesure que l'on avance dans le canal entraînant aussi une augmentation de température le long de celui-ci mais une part de cette énergie est transmise à l'acier du canal.

Par conséquent, nous voyons bien qu'il est important de considérer les couplages thermomécaniques au sein des polymères thermoplastiques fortement visqueux afin de déterminer le champ thermique du polymère en sortie du canal d'alimentation (donc d'arrivée dans le moule) qui conditionne tout le procédé de refroidissement du matériau en aval.

L'objectif de mon travail est donc de développer un outil d'analyse numérique servant à reconstituer l'évolution temporelle du profil spatial de la température du polymère en entrée du canal d'alimentation. Ceci permettra de connaître a posteriori le champ thermique du polymère le long de la filière et donc en sortie du canal.

Pour estimer l'évolution temporelle et spatiale de la température d'entrée du polymère dans la buse, nous avons conçu une buse instrumentée de thermocouples situés dans l'acier du canal et d'un capteur de pression en amont de l'écoulement. Il est connu que les mesures de températures au sein des polymères en écoulement sont compliquées car il faut en même temps être précis et non intrusif afin de ne pas perturber l'écoulement, ce qui perturberait aussi le champ thermique que l'on mesure car, on l'a vu, il existe un couplage thermomécanique fort dans ce genre de phénomène. C'est pourquoi, afin d'éviter les mesures intrusives, nous avons disposé deux rangées de quatre thermocouples, dont l'une est très proche de l'interface polymère métal, dans l'acier du canal. Evidemment, en vue d'estimer le profil de température en entrée, les thermocouples doivent être sensibles à la dissipation visqueuse provenant du polymère en écoulement. Cependant, il est clair que les mesures de températures dans l'acier ne sont pas celles dans le polymère. Il faut donc passer par une méthode numérique d'estimation afin de reconstituer le profil de température qui nous intéresse. Elle consiste à minimiser l'écart entre les

## *Introduction*

températures dans l'acier mesurées expérimentalement et celles calculées numériquement. Dès lors, quand l'écart est inférieur à une certaine valeur qui dépend de la précision des mesures expérimentales, on considère que la température d'entrée du polymère estimée est celle qui se rapproche le plus de la réalité.

Ce manuscrit est organisé en cinq chapitres. Le premier est consacré à l'état de l'art où l'on détaillera notamment différentes méthodes de mesure de température dans polymère (méthodes intrusives ou non intrusives).

Le deuxième chapitre est dédié à la mise en place d'un modèle numérique schématisant le cylindre de la buse instrumentée contenant le canal. Nous expliciterons aussi les paramètres physiques des matériaux utilisés dans le modèle. Quelques exemples d'injection seront ensuite traités en fin de chapitre afin de mettre en évidence certains phénomènes physiques.

Ceci permettra de définir la conception de l'outillage et le dimensionnement de la filière instrumentée dans le troisième chapitre. Il consistera notamment à expliquer les choix des dimensions.

Dans le quatrième chapitre, nous détaillerons quelques mesures effectuées sur une presse à injecter et sur une extrudeuse. Nous visualiserons notamment les échauffements dans l'acier du cylindre contenant le canal, parfois dans le polymère ainsi que les niveaux de pression atteints lors des essais.

Le cinquième chapitre est dévolu d'une part, à exprimer les conditions aux limites des mesures expérimentales qui serviront dans la modélisation numérique et d'autre part, à l'estimation de la condition d'entrée thermique du polymère dans le canal.







## **Chapitre I – Etat de l’art**

### **Résumé**

*Dans ce chapitre, nous ferons quelques rappels sur le polymère thermoplastique, car c’est ce type de matériau qui sera utilisé dans notre étude. Nous dirons quelques mots sur les procédés de mise en forme de moulage par injection et d’extrusion. Ensuite, nous verrons quelles sont les techniques de mesure de température dans un écoulement de polymère fondu dans ces procédés de mise en forme. Enfin, nous détaillerons quelques nombres adimensionnels utiles pour la caractérisation et la simplification des équations suivant le cas considéré.*

## I.1 Rappel sur les polymères thermoplastiques

Les propriétés thermodynamiques, thermomécaniques et rhéologiques des thermoplastiques varient fortement avec la température. On en distingue deux grandes familles : les amorphes et les semi cristallins. La différence entre ces deux types de matériau est que le premier possède une transition du second ordre appelée transition vitreuse, à la température  $T_g$  (glass transition), et que le second a une température de transition visqueuse plus une température de fusion  $T_f$ .

### I.1.1 Les amorphes

Comme dans un liquide, la configuration des chaînes de macromolécule dans un solide amorphe est compacte et désordonnée. Un solide amorphe s'apparente à un liquide à très faible mobilité moléculaire.

Il n'existe pas pour un amorphe de transition du premier ordre entre l'état solide et l'état liquide. On observe toutefois une variation importante de certaines propriétés à la solidification. La transition du second ordre alors observée se produit à une température de transition vitreuse. Elle correspond à une brusque variation de la mobilité moléculaire. Au dessous de la température  $T_g$ , un matériau amorphe se comporte comme un solide.

### I.1.2 Les semi cristallins

Dans un cristal, on observe un ordre à grande distance. Les chaînes s'arrangent de façon ordonnée et compacte : la maille cristalline est le motif élémentaire qui se répète dans les trois directions de l'espace. Mais les polymères ne cristallisent jamais totalement. En effet, les deux extrémités de chaînes, les défauts, les boucles, la participation d'une macromolécule à deux lamelles sont autant de cause de cristallinité imparfaite. On parle alors de semi cristallins. On utilise la notion de taux de cristallinité  $x_c$ , fraction massique ou molaire d'unités structurales cristallisées par rapport à la totalité des unités présentes. Cette fraction peut se calculer par méthode volumétrique ou par méthode calorimétrique. L'autre phase présente est une phase amorphe. Les thermoplastiques semi cristallins sont utilisés à une température située entre la température de transition vitreuse de la phase amorphe et la température de fusion de la phase cristalline.

## Chapitre I – Etat de l’art

La morphologie de cristallisation des polymères est très différente de celle des métaux. On peut observer plusieurs niveaux de cristallisation. D’abord au niveau mésoscopique, on observe les sphérolites. Ce sont des entités cristallines qui ont généralement pour origine une impureté. La croissance des sphérolites se fait radialement, ce qui explique leur forme sphéroïdale.

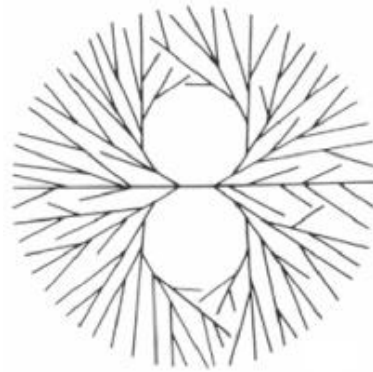


Figure I-1 : Représentation schématique d’un sphérolite

Les sphérolites sont constitués de lamelles entièrement cristallines disposées en éventail et entrecoupées de phase amorphe. En effet, étant donné la structure macromoléculaire des polymères, leur mobilité est très réduite et leur cristallisation toujours partielle. Les lamelles sont constituées de chaînes repliées d’une épaisseur de l’ordre de  $10\text{ nm}$ .

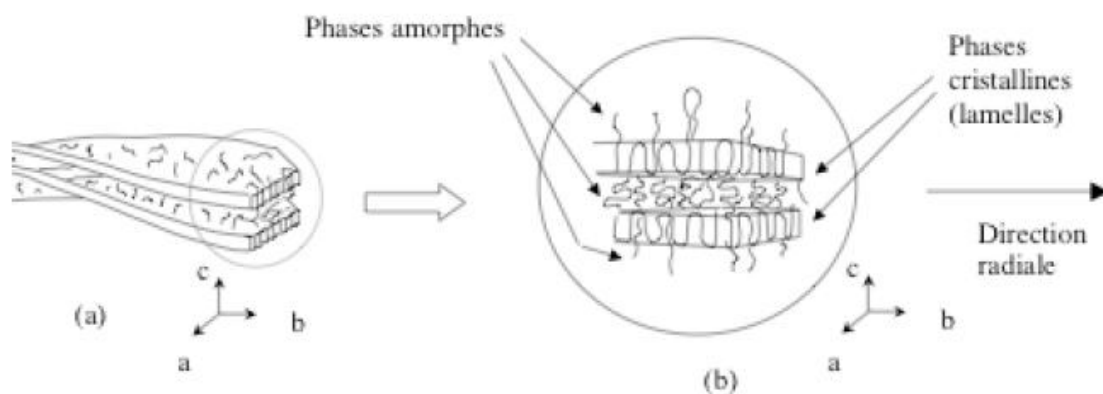


Figure I-2 : Représentation de la structure cristalline de polymère  
lamelle et b) détail d’une lamelle montrant le repliement des chaînes

La germination peut être soit hétérogène, soit homogène. Dans le cas de la germination homogène, les germes cristallins se forment spontanément dans le milieu. Lors de la germination hétérogène, le cristal va croître à la surface d’un corps. Dans les matériaux composites, la germination hétérogène va ainsi avoir lieu préférentiellement sur l’interface avec les fibres. Il existe deux cas extrêmes de germination : la cristallisation instantanée où tous les germes

## *Chapitre I – Etat de l’art*

commencent à croître dès l’instant initial ; et la germination sporadique où l’on considère la vitesse de germination très lente et où les germes apparaissent tout au long de la cristallisation.

À partir du germe initial, il va y avoir croissance du cristal. Il existe plusieurs croissances successives : la croissance secondaire, où un nouveau repliement de chaîne macromoléculaire vient s’insérer sur la lamelle et augmente ainsi sa longueur, la croissance tertiaire où un repliement de chaîne vient s’insérer à une extrémité de lamelle sans augmenter sa longueur mais simplement en complétant sa largeur.

### **I.1.3 Propriétés**

#### ***I.1.3.1 Volume spécifique***

Le volume spécifique des polymères est plus élevé que celui des métaux parce qu’ils sont constitués d’atomes légers et adoptent des structures d’empilement non compactes. Les polymères amorphes ont un coefficient de dilatation thermique qui augmente lors de la transition vitreuse. Pour les semi cristallins, elle dépend de la transition vitreuse mais aussi de la cristallinité. La fusion de la phase cristalline provoque une dilatation isotherme qui vient s’ajouter à celle de la phase amorphe. Leur compressibilité est de l’ordre de  $10^{-4}\text{bar}^{-1}$ .

La chaleur spécifique des amorphes augmentent lors de la transition vitreuse. Pour un semi cristallin, la calorimétrie montre une enthalpie de fusion.

#### ***I.1.3.2 Conductivité thermique***

La conductivité thermique des polymères est faible, de l’ordre de  $0,1\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . Le transport de la chaleur est assuré uniquement par les phonons dans une structure relativement désorganisée, l’énergie de cohésion n’étant pas suffisamment forte. Pour un amorphe, le maximum de conductivité se situe à la température de transition vitreuse. Pour un semi cristallin, on observe une conductivité plus forte de la phase cristalline.

#### ***I.1.3.3 Module d’élasticité***

La rigidité d’un polymère a été définie d’après les observations de Thomas Young (1773-1829). Celui-ci avait remarqué que, pour une petite déformation, le rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte (allongement relatif) est

## Chapitre I – Etat de l’art

constant, tant que la limite d’élasticité du matériau n’est pas atteinte. Cette constante, nommée module d’Young ou module d’élasticité longitudinal, se calcule via la loi de Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{où } \sigma \text{ est la contrainte, } E \text{ le module d’Young et } \varepsilon \text{ la déformation.}$$

Le module d’Young est la valeur théorique de la contrainte mécanique ( $Pa$ ) qui entraînerait un allongement de 100% de la longueur initiale d’un matériau. On dit d’un matériau dont le module d’Young est très élevé ( $>10^5 Pa$ ) qu’il est rigide.

Le module d’Young des polymères est faible : environ un centième de celui du métal. Il est de plus sensible à la température.

### ***1.1.3.4 Rhéologie***

La viscosité d’un fluide traduit l’évolution de la contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement, ce qui se résume comme suit :

$$\mu(\dot{\gamma}) = \frac{\tau(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}}$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique en  $Pa.s$ ,  $\tau$  est la contrainte de cisaillement en  $Pa$  et  $\dot{\gamma}$  le taux de cisaillement en  $s^{-1}$ . La viscosité est habituellement notée  $\eta$  par les rhéologues alors que la notation usuelle des mécaniciens des fluides est  $\mu$ . Nous utiliserons par la suite la notation des rhéologues pour définir la viscosité.

Pour un fluide newtonien, la viscosité est une fonction constante, indépendante du taux de cisaillement. Mais la viscosité des polymères fondus est généralement non newtonienne. L’étude de la variation de la viscosité en fonction du cisaillement, de la température et de la pression s’appelle la rhéologie.

Les polymères fondus sont constitués de l’entrelacs de plusieurs chaînes polymères de longueurs et de masses variables. Plus ces dernières caractéristiques sont grandes et plus la structure du fluide polymère est complexe. L’interprétation de ce phénomène est explicitée par [Gra 67] et [Bue 68] qui s’appuient sur le concept d’enchevêtrement des macromolécules. En pratique, pour qu’un enchevêtrement se forme ou se déforme, il faut que le mouvement de la molécule dure au moins un certain temps  $\lambda$ . Or les mouvements des macromolécules sont la résultante des contraintes de cisaillement imposées au polymère. Donc le temps de contact entre

## Chapitre I – Etat de l’art

deux macromolécules est une fonction du taux de cisaillement. Dès lors que le taux de cisaillement devient supérieur à  $\frac{1}{\lambda}$ , la densité d’enchevêtrement diminue et la viscosité également. Lorsqu’il est inférieur, la densité d’enchevêtrement reste constante et la viscosité aussi.

On parle dès lors de plateau newtonien pour cette zone de viscosité « constante », nettement visible sur les courbes de viscosité en fonction du taux de cisaillement. Ces courbes d’écoulement sont généralement représentées sur une échelle logarithmique et la pente de la décroissance de viscosité définit l’indice de pseudoplasticité du polymère. La viscosité d’un thermoplastique décroît fortement à mesure que l’on va vers des taux de cisaillement élevés. La Figure I-3 montre l’évolution de la viscosité en fonction du taux de cisaillement. On y observe un plateau newtonien pour les faibles vitesses de cisaillement et un comportement pseudoplastique assimilable à une loi puissance pour les taux de cisaillement élevés. La viscosité est aussi thermo et piezodépendante (non montré sur la figure I-3).

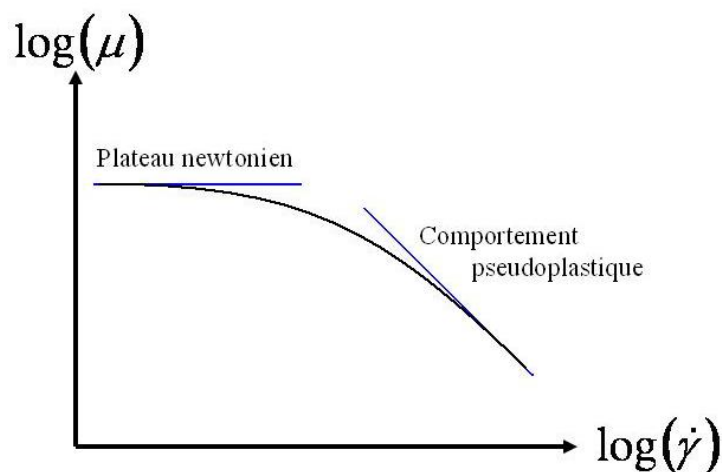


Figure I-3 : Courbe de viscosité en fonction du taux de cisaillement pour un thermoplastique

Au cours de notre étude, nous nous intéressons particulièrement à cet aspect pseudo-plastique. Néanmoins ce modèle ne permet pas d’expliquer tous les phénomènes observés comme le gonflement en sortie de filière. On parle alors de comportement viscoélastique. Ce comportement est usuellement formalisé selon l’analogie entre le comportement des milieux viscoélastiques et celui de systèmes composés de ressorts et d’amortisseurs [Man 66], [Fer 70], [Bir 87]. D’autres formalismes sont également disponibles [Han 76], [Bir 77], [Wal 78].

De nombreux modèles rhéologiques reviennent principalement dans la littérature consacrée aux écoulements des polymères, et donc aux aspects plutôt pseudo-plastiques.

## Chapitre I – Etat de l’art

Beaucoup de ces lois découplent les dépendances de la viscosité avec le cisaillement et la température, se focalisant sur un seul aspect. Le lien peut toutefois être rétabli par l’utilisation du principe d’équivalence temps température. Voici quelques unes de ces lois les plus classiques :

- **Variation de la viscosité avec le cisaillement**

- Loi Ostwald – de Waele [Ost 23], [DeWae 23] :

Cette loi est également appelée loi puissance et s’écrit traditionnellement sous la forme :

$$\mu = K \cdot |\dot{\gamma}|^{m-1}$$

où  $K$  est la consistance du matériau (en  $\text{Pa}\cdot\text{s}^m$ ) et  $m$  est l’indice de pseudoplasticité ( $m = 1$  pour un fluide newtonien ;  $m = 0$  pour un corps rigide plastique). Cette loi a le défaut de ne pas présenter de plateau newtonien à faible taux de cisaillement. Elle est donc souvent complétée par une valeur de viscosité seuil, pour les faibles taux de cisaillement. En revanche, cette loi est confortable pour les forts taux de cisaillement.

- Loi de Cross [Cro 65] :

La loi de Cross a l’avantage de présenter le plateau newtonien à faible taux de cisaillement.

où  $\lambda$  est le temps caractéristique  $\mu - \mu_\infty = \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\lambda \cdot \dot{\gamma})^m}$  de l’enchevêtrement,  $\mu_0$  la viscosité du palier newtonien à faible taux de cisaillement et  $\mu_\infty$  un deuxième plateau newtonien à taux de cisaillement élevé. Ce dernier n’ayant jamais été observé pour un polymère fondu [Ag & al. 96], on prendra  $\mu_\infty = 0$ . Ce qui donne :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + (\lambda \cdot \dot{\gamma})^m}$$

- Loi de Carreau-Yasuda [Car 72], [Yas 81] :

La loi de Yasuda est une loi de Carreau généralisée. Elle s’exprime de la façon suivante :

$$\mu = \mu_0 \cdot \left(1 + (\lambda \dot{\gamma})^a\right)^{\frac{m-1}{a}}$$



## Chapitre I – Etat de l’art

où  $\lambda$  a le même sens que pour la loi de Cross. Le paramètre  $a$  sert à ajuster la transition plus ou moins rapide entre le plateau newtonien et la partie loi puissance. La loi de Carreau correspond à la valeur  $a=1$ .

- **Variation de la viscosité avec la température**

➤ Loi WLF de Williams, Landel et Ferry [WLF 55] :

$$\mu = \mu_0(T_{ref}) \cdot \exp\left(\frac{-C \cdot (T - T_{ref})}{D + T - T_{ref}}\right) \cdot \dot{\gamma}^{m-1}$$

C et D sont deux paramètres caractéristiques du matériau étudié.

En pratique cette loi est applicable entre la température de transition vitreuse  $T_g$  et  $T_g+100$ . Au-dessus, la loi d’Arrhénius est préférable.

➤ Loi d’Arrhénius :  $\mu = \mu_0 e^{\frac{A}{T}}$

On la trouve aussi sous la forme :  $\mu = \mu_0(T_{ref}) e^{A_{ref} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}}\right)}$

$A_{ref}$  représente le rapport de l’énergie d’activation et de R la constante des gaz parfaits. Les températures sont exprimées en K. [Ag et al. 96].

## I.2 Sur l’injection et l’extrusion

Dans ce paragraphe, les méthodes de mise en forme des polymères telles que le moulage par injection ou l’extrusion seront résumées.

### I.2.1 L’injection

Le procédé de moulage par injection permet de fabriquer des pièces finies ou « quasi finies » de forme pouvant être assez complexe, en une seule opération. Une presse d’injection est représentée sur la Figure I-4 où sont identifiés la trémie dans laquelle la matière première est

introduite, la vis de plastification qui permet de fondre la matière, tout en la chauffant et en la malaxant, et le moule avec son système de fermeture et d’ouverture.

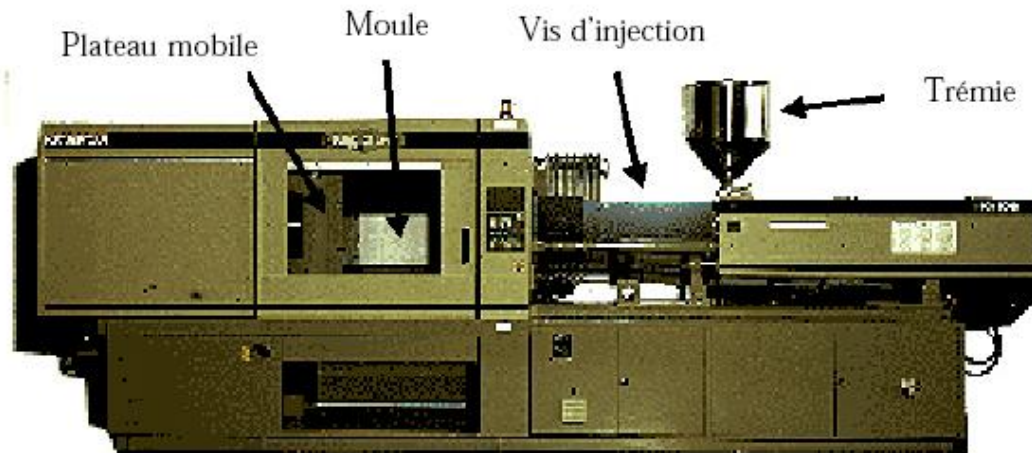


Figure I-4 : Photo d'une presse à injecter

### 1.2.1.1 Les différentes étapes d'un cycle

Un cycle d'injection, dont un schéma est donné Figure I-5, est composé, pour simplifier, de trois phases :

- **Le remplissage** : Le polymère fondu est injecté dans le moule par l'intermédiaire d'une vis sans fin utilisée comme un piston, permettant de mettre en mouvement le fluide. Il s'écoule dans une buse d'injection, de taille variable (en générale de l'ordre du décimètre), qui l'injecte dans le moule. Le temps de remplissage est en général très court, pouvant aller jusqu'à la seconde. Le débit de matière injectée et son cisaillement en paroi sont donc très élevés.

- **Le compactage** : Appelé également « maintien », le but de cette étape est de compenser le retrait du matériau pendant son refroidissement. En fin de remplissage, la pression passe d'un profil non uniforme à un profil uniforme imposé par l'opérateur de la presse. La pression diminue ensuite quand le seuil est solidifié. Pendant le compactage, la compensation de retrait implique l'injection d'une petite quantité de matière dans le moule (de l'ordre de 10 %). Cette étape est souvent négligée dans la modélisation du procédé.

- **Le refroidissement** : A partir du moment où le maintien n'est plus possible, c'est-à-dire lorsque le seuil de la cavité est gelé, la vis recule et un dosage de matière s'effectue pour le cycle suivant. La pièce continue de refroidir dans le moule jusqu'à atteindre la rigidité suffisante à son éjection. Nous notons que cette étape est appelée refroidissement malgré le fait que celui-ci commence au compactage. Lors de cette étape, comme il n'est plus possible de compenser le

retrait, la résistance thermique existant entre le moule et la matière va augmenter fortement. La mesure de cette résistance a fait l’objet de plusieurs études, en particulier dans le cas des matériaux amorphes. Dans le cas des matériaux semi cristallins, son évaluation est plus délicate car il faut prendre en compte des phénomènes dus à la cristallisation.

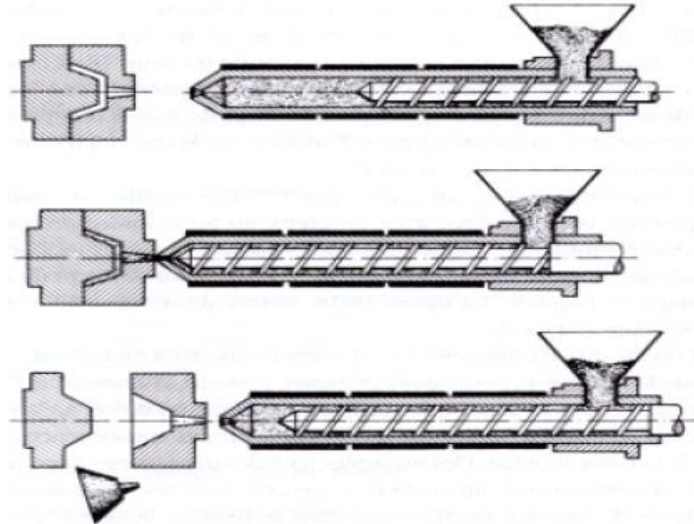


Figure I-5 : Schéma d’un cycle d’injection

### 1.2.1.2 Visualisation d’un cycle d’injection via un diagramme PvT

D’un point de vue « matériau », il est intéressant de visualiser le cycle d’injection à l’aide d’un diagramme Pression - Volume – Température. La Figure I-6a représente l’évolution PvT classique d’un polymère semi cristallin. La pression correspondante mesurée pour un cycle est en Figure I-6b.

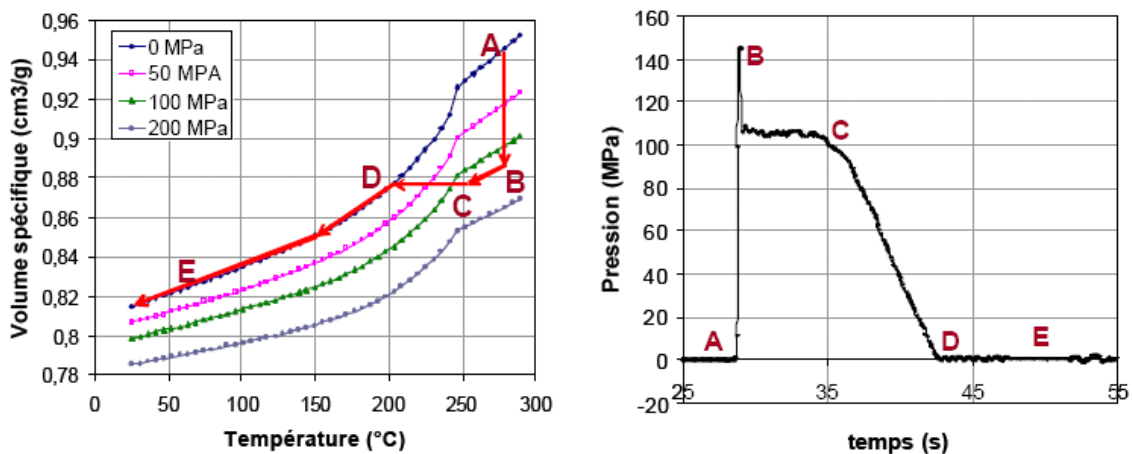


Figure I-6 : a) Cycle d’injection sur un diagramme Pression Volume Température (PvT) et  
b) Evolution de la pression du polymère lors d’un cycle

## *Chapitre I – Etat de l’art*

En reprenant le processus expliqué dans le paragraphe précédent, on identifie la phase (AB) comme le remplissage du moule. La forte élévation de pression induit une diminution du volume massique du polymère injecté. Les taux de cisaillement élevés dans la paroi de la buse d’injection engendrent des échauffements visqueux conséquents dans le polymère. Le couplage thermomécanique des phénomènes mis en jeu dans cette phase est fondamental dans l’analyse du procédé d’injection car les débits de matière et la thermique du polymère en sortie de buse conditionnent tout le procédé de maintien et de refroidissement aval dans le moule. Durant la phase (BC), le matériau est maintenu à pression constante, le refroidissement a commencé et le retrait est compensé par l’ajout de matière dans la cavité. La masse volumique continue d’augmenter. La phase (CD) correspond au gel du seuil. Le refroidissement se poursuit alors jusqu’à la température ambiante (point E sur la Figure I-6). C’est durant cette phase que la pièce subit le maximum de retrait. La description du procédé d’injection nous a permis d’introduire les principaux problèmes liés à la solidification des polymères injectés : le retrait et l’augmentation d’une résistance thermique de contact entre le moule et le polymère. A cela il faut ajouter que, dans le cas des thermoplastiques semi cristallins, la cristallisation est le siège d’une exothermie susceptible d’influencer fortement la thermique du procédé et de modifier les retraits et les conditions d’interface entre le moule et le polymère. Par conséquent, le couplage entre la température et la cinétique de cristallisation est un autre point clé de la mise en forme des polymères.

### **I.2.2 L’extrusion**

#### ***1.2.2.1 Généralités***

Ce procédé de mise en forme est très couramment utilisé dans le cadre de l’industrie à l’instar du moulage par injection. En effet, il permet de faire des pièces dites infinies où l’on peut faire des pièces de grandes dimensions que l’on peut couper afin d’obtenir la taille qui nous convient. Il existe des extrudeuses monovis ou bivirus. En général, le matériau plastique à mettre en forme est introduit dans la vis de plastification par une trémie. Ensuite, le polymère est chauffé et malaxé dans la vis de plastification et se retrouve sous forme liquide. Le polymère fondu passe alors dans la filière avant de se refroidir à l’air libre qui est à température ambiante et/ou avec des petits jets d’eau par exemple. Un schéma d’extrudeuse est représenté Figure I-7 :

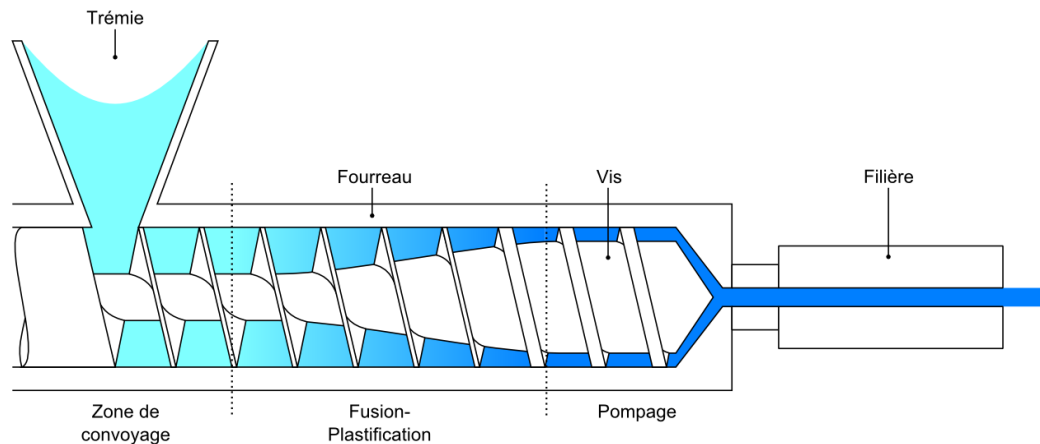


Figure I-7 : Schéma simplifié d'une extrudeuse monovis

La filière conditionne la forme de la matière extrudée. En plus de la géométrie, son rôle est d'assurer la plus grande homogénéité possible en température du produit. En effet, les hétérogénéités sont sources de défaut qui seront aggravés lors d'un traitement post-filière tels l'étirage, la conformation ou le refroidissement.

En fonction de l'application sélectionnée, il existe différentes géométries de filières ([Ag & al. 96] pour plus de détails). On en mentionne quelques unes :

- les filières de tubes : de géométrie axisymétrique, elles permettent la production de tubes de quelques millimètres de diamètre à plusieurs dizaines de centimètres.
- les filières de plaque : différentes géométries aux noms évocateurs (en T, en « queue de carpe », en « porte-manteau »...) qui permettent de fabriquer des produits plats de 0,2 à 25 mm.
- les filières de profilés : elles servent à produire des pièces de formes complexes et n'ont donc pas de géométrie fixée.

### ***1.2.2.2 Domaines d'application***

La mise en forme par extrusion atteint un large éventail de domaines tel que le bâtiment, l'agroalimentaire, la santé, l'aéronautique... L'extrudeuse est associée à une filière qui donne au polymère la forme d'un profilé de grande longueur de section choisie. Bien qu'on s'intéresse particulièrement aux polymères, l'extrusion s'applique aux matériaux mais également aux pâtes alimentaires et à l'argile. Elle permet une mise en forme précise même pour des géométries complexes (parfois creuses). On l'utilise donc pour produire des tubes, des feuilles, des plaques, des profilés, des isolations de câbles électriques ou téléphoniques. A la sortie de la filière, le

produit peut également subir d’autres traitements, par exemple le soufflage, technique qui permet de produire des films d’emballage plastiques.

### I.3 Nombres adimensionnels caractérisant un écoulement

Nous allons ici expliciter quelques nombres sans dimension qui caractérisent un écoulement de fluide. Ces nombres permettent de comprendre les comportements mécanique et thermique d’un écoulement et donc d’effectuer d’éventuelles simplifications physiques dans les équations traduisant les phénomènes étudiés.

#### I.3.1 Nombre de Reynolds – Re

Le **nombre de Reynolds** caractérise un fluide en écoulement et représente le rapport entre les forces d’inertie et les forces visqueuses. On le définit de la manière suivante :

$$\text{Re}_L = \frac{\rho \bar{V}^2}{\frac{\eta \bar{V}}{L^2}} = \frac{\rho \bar{V} L}{\eta}$$

- $\bar{V}$  - vitesse du fluide [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ]
- $L$  - longueur caractéristique [m]
- $\rho$  - masse volumique du fluide [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ]
- $\eta$  - viscosité dynamique du fluide [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$  ou Pa.s]

Aux très faibles valeurs du nombre de Reynolds (de l’ordre de 10-2), comme c’est souvent le cas dans les écoulements de polymère, les forces de viscosité sont prépondérantes. On parle alors d’écoulement de Stokes. L’écoulement est laminaire (des éléments de fluide voisins demeurent voisins).

#### I.3.2 Nombre de Stokes – St

Le **nombre de Stokes** s’exprime comme étant le rapport entre les forces visqueuse et celles dues à la gravité. Elle permet donc de voir si on peut négliger la gravité dans l’équation de la mécanique des fluides. On le définit de la manière suivante :

$$St = \frac{\eta \bar{V}}{\rho g L^2}$$

- $\bar{V}$  - vitesse moyenne du fluide [m.s<sup>-1</sup>]
- $L$  - longueur caractéristique [m]
- $\rho$  - masse volumique du fluide [kg.m<sup>-3</sup>]
- $g$  - accélération de pesanteur terrestre [m.s<sup>-2</sup>]
- $\eta$  - viscosité dynamique du fluide [Pa.s]

### I.3.3 Nombre de Péclet – Pe

Le **nombre de Péclet** s’exprime comme étant le rapport entre le transfert de chaleur par convection et celui par conduction dans la direction de l’axe de l’écoulement [Ag & al. 96]. Il permet de quantifier la prépondérance de ces deux phénomènes l’un par rapport à l’autre. On le définit de la manière suivante :

$$Pe_L = \frac{\rho C_p \bar{V} \frac{\Delta T}{L}}{\frac{\lambda \Delta T}{L^2}} = \frac{\rho C_p \bar{V} L}{\lambda}$$

- $\bar{V}$  - vitesse moyenne du fluide [m.s<sup>-1</sup>]
- $L$  - longueur de la direction de la convection [m]
- $\rho$  - masse volumique du fluide [kg.m<sup>-3</sup>]
- $\lambda$  - conductivité thermique du fluide [W.m.K<sup>-1</sup>]
- $C_p$  - capacité calorifique du fluide [J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>]

### I.3.4 Nombre de Cameron – Ca

Le **nombre de Cameron** compare les transferts de chaleur par conduction dans la direction normale à l’écoulement et convectifs dans l’axe de l’écoulement. Il permet ainsi de savoir si la température dans le polymère est régie par la régulation thermique de la paroi du canal ou par la convection dans le canal. On le définit de la manière suivante :

$$Ca = \frac{\lambda L}{\rho C_p \bar{V} D^2}$$

## Chapitre I – Etat de l’art

- $\bar{V}$  - vitesse moyenne du fluide [ $\text{m.s}^{-1}$ ]
- $L$  - longueur de la direction de la convection [m]
- $D$  - longueur relative à la direction selon laquelle on étudie la conduction [m]
- $\rho$  - masse volumique du fluide [ $\text{kg.m}^{-3}$ ]
- $\lambda$  - conductivité thermique du fluide [ $\text{W.m.K}^{-1}$ ]
- $Cp$  - capacité calorifique du fluide [ $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ]

Selon les valeurs du nombre de Cameron, on peut définir trois types de régimes thermiques :

-  $Ca \leq 10^{-2} \Rightarrow$  La température moyenne de l’écoulement  $\bar{T}$  évolue linéairement dans l’écoulement. Le régime est alors dit adiabatique.

-  $10^{-2} \leq Ca \leq 1 \Rightarrow$  Le régime thermique dit de « transition »

-  $Ca \geq 1 \Rightarrow$  la température moyenne de l’écoulement  $\bar{T}$  est constante. Le profil de température au sein du fluide est parabolique avec un maximum de température atteint au centre de l’écoulement. Le régime est alors dit d’équilibre.

### I.3.5 Nombre de Brinkman – Br

Le **nombre de Brinkman** donne le rapport entre l’énergie des forces visqueuses dissipée et l’énergie transférée par conduction thermique. Ce nombre est utilisé dans des problèmes de lubrification ou en mise en forme de polymère à l’aide d’une extrudeuse. Plus le nombre est élevé, plus l’énergie dissipée par les forces visqueuses est importante par rapport à l’évacuation de cette énergie, ce qui indique une hausse de température. On le définit comme suit :

$$Br = \frac{\eta \bar{V}}{\lambda \Delta T}$$

- $\bar{V}$  - vitesse moyenne du fluide [ $\text{m.s}^{-1}$ ]
- $\eta$  - viscosité dynamique du fluide [Pa.s]
- $\lambda$  - conductivité thermique du fluide [ $\text{W.m.K}^{-1}$ ]

## I.4 Mesure de température au sein d’un polymère fondu

### I.4.1 Introduction

En pratique, la détermination de la distribution spatiale et temporelle de la température d’un polymère fondu sous sollicitations mécaniques n’est pas triviale. En effet, tout d’abord le



## *Chapitre I – Etat de l’art*

champ thermique d’un polymère fondu en mouvement présente un caractère non homogène du fait de la dissipation visqueuse et de sa faible conductivité. De plus, les variations de température au sein du polymère font varier ses propriétés thermo physiques à l’instar de la conductivité thermique ou du volume spécifique. Il est donc important de bien connaître les propriétés des matériaux à mettre en forme afin de comprendre leur comportement et d’être le plus précis possible lors de modélisation numérique. Cependant, la caractérisation des propriétés des polymères reste délicate. C. Pujos [Puj 06] a, par exemple, cherché à estimer la rhéologie des polymères via des méthodes inverses. En résumé, les polymères déjà complexes à caractériser au niveau de leurs propriétés, ne le sont pas moins au niveau du champ thermique et du champ de vitesse lorsqu’ils sont sollicités mécaniquement.

Ils existent deux principaux types de méthodes consistant à mesurer la température d’un polymère fondu en mouvement dans un injecteur: les méthodes intrusives et non intrusives. Les premières consistent en général à faire circuler la matière fondue à travers des appareillages de thermocouples perturbant ainsi l’écoulement tandis que les secondes permettent une mesure externe sans perturbation d’écoulement mais demeurent moins précises quant à la distribution spatiale de la température.

Les mesures expérimentales de température dans le polymère, tout comme les champs de vitesse, n’étant pas simples à déterminer, la simulation numérique semble s’imposer d’elle-même afin de simplifier le travail. Cependant, les propriétés thermomécaniques des polymères comme la viscosité rendent la modélisation numérique plus difficile qu’un fluide avec une viscosité de type Newtonienne.

Pour les procédés industriels, tels que l’injection ou l’extrusion, il est intéressant de connaître la température du polymère en sortie de filière afin de mieux maîtriser la température de refroidissement et sa cinétique notamment et donc faire des pièces de qualité avec les taux de cristallinité voulu. La bonne connaissance couplée du procédé et des matériaux mis en forme permet de bien comprendre les phénomènes physiques. C’est pourquoi, par exemple, la connaissance des évolutions temporelle et spatiale de la température du polymère juste avant sa solidification est un point clé essentiel à l’optimisation du procédé industriel de mise en forme. Dans les études précédentes, les buts étaient d’estimer le profile de température dans le polymère ([Kar 04a], [Kar 04b], [Kar 05], [Kar 08a] et [Kar 08b]) et son champ de viscosité ([Puj 06] et [Puj 08]), à partir de mesures de températures dans l’acier du cylindre. Ces études ont été faites en régime d’écoulement stationnaire avec un canal conçu comme dans notre cas précisément pour

ces mesures. La différence principale entre l’ancien appareillage et le notre est leur forme. Dans notre étude, notre canal d’alimentation est à section cylindrique alors qu’il était à section rectangulaire précédemment. Cette nouvelle géométrie a été choisie grâce à sa meilleure tenue mécanique. De plus, notre étude s’est focalisée sur un écoulement non stationnaire imposé par l’évolution de la pression et de la température d’entrée. Les conditions aux limites varient selon l’espace et le temps. Cependant, comme pour les études [Kar 04b] et [Puj 06] nous avons pris un polymère assez bien caractérisé : le polyéthylène grade extrusion Dowlex 2042E. En vu de l’objectif final qui est de connaître précisément les conditions aux limites expérimentales dans l’appareil expérimental aussi bien au niveau de l’acier que du polymère.

### **I.4.2 Mesures de température intrusives**

Les méthodes intrusives sont utilisées pour déterminer la température de l’écoulement fluide. Dans de nombreux cas, une sonde rétractable est utilisée dans lequel un thermocouple est inséré progressivement dans l’écoulement ([Ess & Ser 91] et [Kim 71]).

Dans d’autres cas, un pont, traversant l’écoulement, est construit dans le canal sur lequel est placé un assemblage de plusieurs sondes. Pour cet arrangement, les thermocouples sont enfoncés dans un support polymère à haute température et les fils de thermocouple minces sont alignés dans la direction de flux sur une courte distance ([McC & Spa 62] et [McC & Spa 92]), ou une matrice de jonctions de thermocouple est formé. Ces jonctions sont formées en croisant les fils qui ont été soudés ensemble et dans le sens du flux ([Bir 03a] et [Bir 03b]). Ces ponts fournissent des mesures de température d’écoulement précises, mais le dispositif est extrêmement délicat et ne peut être utilisé pour mesurer la température dans une extrudeuse. Cependant, un système mécanique avec un thermocouple rétractable a été développé pour mesurer la température dans un canal [Ess & Ser 94].

Brown et al. [Bro 04] ont décrit le développement d’un capteur pour la mesure d’un champ de température dans un polymère fondu dans le cadre de l’extrusion. Un réseau de fils de thermocouple opposés a été construit et maintenu dans un cadre de soutien. Les fils ont été joints ensemble aux points de croisement pour former des jonctions de thermocouple contrôlées. La maille a été utilisée pour contrôler les champs de température pendant l’extrusion à l’entrée de la filière. La simplicité de ces capteurs les rend appropriés aux études de recherche et

développement, tandis que des conceptions plus robustes pourraient d'une manière faisable être utilisées dans un environnement de production.

Cependant, on devrait considérer que ceux-ci sont des capteurs intrusifs qui auront un certain effet inhérent sur le flux mesuré. Aussi, la méthode [Am & Uts 89], visant à mesurer la distribution tridimensionnelle de température dans le fourreau de la vis d'une presse à injecter en utilisant un thermocouple, perturbe le flux et les profils de température.

### **I.4.3 Mesures de température non intrusives**

Parallèlement, les méthodes de mesure non intrusives, bien que n'affectant pas l'écoulement, peuvent seulement dans la plupart des cas obtenir une valeur moyenne de température sur un certain volume du fluide, fournissant des informations partielles sur le champ de température.

Le pyromètre infra rouge [Che 92], [Rie et Lai 94], [She et Mal 92] est un exemple de mesure de température non intrusive. Cependant, à cause du bruit, qu'engendre la radiation infra rouge générée par tous les objets environnant de la mesure, incluant la sonde, son canon et le mur réflecteur, il est difficile d'extraire une température correcte. De plus, les mesures infrarouges ne permettent que des mesures de surface de la paroi visée.

Une autre méthode non intrusive de mesure de profils de température durant le processus est d'utiliser un colorant fluorescent thermosensible que l'on incorpore dans la résine polymère ([Mig & Bur 98], [Bur 00], [Bur 01] et [Bur 04]). En contrôlant les caractéristiques spectrales appropriées de cette teinture, nous pouvons mesurer la température. Une technique qui est appelée "optique fluorescente confocale" permet alors de mesurer la température en fonction de la distance dans la résine. On note que cette technique est semi intrusive car elle nécessite l'introduction d'un composant (ici un colorant) dans le polymère.

Nous pouvons trouver aussi des techniques d'ultrason [Che 99]. La base du dispositif est une tige vêtue d'amortisseurs avec des discontinuités locales. La géométrie de la tige munie d'amortisseurs permet l'installation de la sonde dans la filière ou le moule sans aucune perturbation principale du dispositif d'ultrason. De nombreuses mesures discontinues de température le long de la tige sont utilisées pour reconstruire le profil de température global. Cependant, de nombreuses difficultés telles que la taille de la géométrie, les propriétés

individuelles des composants, la sensibilité, l’installation électronique et la conception des zones discontinues sont autant de problèmes à résoudre.

### I.4.4 Compromis et ouverture

Comme nous l’avons vu précédemment, la détermination du champ de température d’un polymère fondu reste complexe tant par sa précision que par la méthode utilisée. En effet, de nombreuses méthodes intrusives et non intrusives ont été élaborées dans le but d’optimiser les mesures de température au sein d’écoulement complexe mais chaque technique possède ses avantages et ses inconvénients. Finalement, Chakravorty [Cha 97] a utilisé simultanément une méthode intrusive et non intrusive en élaborant un système muni d’une sonde à infra rouge avec un capteur à fibre optique et d’un thermocouple traversant l’écoulement. Cette méthode semi intrusive a l’avantage de mesurer une distribution de température dans la profondeur de l’écoulement. Elle est plutôt recommandée pour des procédés continus tels que l’extrusion où le temps de réponse n’a pas besoin d’être très rapide. D’un autre côté, la sonde infrarouge est très sensible avec des temps de réponse très court (de l’ordre de 10ms) permettant ainsi de mesurer des changements de température rapides durant le procédé.

Cependant, une détermination spatiale du champ de température dans le polymère fondu reste délicate avec les méthodes non intrusives existantes car elles sont souvent bruitées par l’environnement, nécessite de mélanger un produit chimique dans la matière ou ne parviennent pas à faire des mesures à cœur. De même, la précision des méthodes intrusives reste discutable car il faut bien faire la distinction entre la mesure, la perturbation et la réalité. L’objectif est alors de parvenir à déterminer le champ de température dans le polymère fondu, par des méthodes non intrusives, sans perturber l’écoulement et donc la thermique du procédé. Dès lors, des études ont été réalisées ([Kar 05], [Puj 06], [Zda 06]) afin de concevoir un dispositif expérimental permettant des mesures précises de température dans la paroi métallique de la filière où s’écoule le polymère pour estimer par méthodes inverses le champ de température réelle dans le polymère. Une instrumentation fine doit être indispensable pour être le moins intrusif possible dans l’acier. Un compromis entre les deux principaux types de mesure peut alors émerger en effectuant des mesures de température indirectes, c’est-à-dire ne mesurant pas directement l’évolution de la température du polymère mais celle de l’acier.

Afin de pouvoir utiliser cette technique, il faut s’assurer que les thermocouples soient sensibles aux paramètres à estimer comme par exemple à la température d’entrée du polymère

## *Chapitre I – Etat de l’art*

dans le canal d’alimentation. Ces études ont montré que des taux de cisaillement élevés entraînent une augmentation de la friction entre les couches adjacentes du fluide qui à son tour, engendre une augmentation d’énergie mécanique convertie en chaleur. On peut préciser que l’effet de la dissipation visqueuse est d’autant plus important que le débit massique pour un rayon de filière donné est grand. Cependant, plus le canal est long, plus l’énergie, due à la dissipation visqueuse, a le temps de s’accumuler dans le fluide contrairement aux canaux très courts où le profil de température du polymère en sortie restera proche de celui de l’entrée.

Dans le cas où, la filière est assez longue pour que la dissipation visqueuse influe de façon conséquente sur la thermique du polymère et de l’acier. En effet, le polymère fondu échange de la chaleur en raison de la dissipation visqueuse avec la paroi du canal. On constate alors que la bonne estimation du champ thermique dans le polymère passe par une bonne connaissance des conditions aux limites du modèle numérique.

La simulation du problème est faite, dans de nombreux cas, par température imposée constante, sur les frontières de la paroi, parfois égale à la température d’entrée du polymère ([She & Mal 92], [Ag & al. 96], [Lin 98] et [Zda 06]). En réalité, la température d’admission du polymère dans le canal et celles des frontières dans l’acier ne sont pas constantes car le liquide s’échauffe à mesure qu’il progresse dans la filière, faisant ainsi augmenter les températures dans le fluide et l’acier du cylindre. Ainsi, l’imposition d’une température constante aux conditions de frontière, ne permet pas de comprendre l’équilibre thermique complexe entre le polymère et l’acier. Une des difficultés les plus significatives est alors d’imposer les conditions réelles en température et en pression (couplage thermomécanique) sur les frontières. De plus, certaines études se limitent à des méthodes de résolution directes et inverses en régime stationnaire ([Kim 71], [Rie & Lai 94], [Kar 04b], [Kar 05] et [Puj 06]).

### **I.4.5 Conclusion**

Plusieurs études, déjà réalisées, ont montré comment mesurer des profils de température dans un polymère fondu et ont mis en exergue la difficulté d’obtenir des mesures précises. Une nouvelle voie s’ouvre alors sur tous les appareils ou techniques de mesure de température pouvant s’appliquer aux écoulements de polymère fondu. On constate deux différents types de mesure : les méthodes intrusives et non intrusives. Les premières, plus localisées, perturbent l’écoulement et par conséquent sa thermique et les secondes, malgré une cartographie plus large du champ thermique, ne mesurent, le plus souvent, que des températures surfaciques et restent

## *Chapitre I – Etat de l’art*

parfois trop imprécises. C’est pourquoi, l’idée de déplacer les mesures de température dans le polymère à son milieu environnant (paroi métallique), pour au final estimer la thermique du polymère via des méthodes inverses, semble un bon compromis au caractère intrusif de la mesure. Nous avons alors orienté notre étude sur la réalisation d’une filière instrumentée type buse d’injection et sur l’estimation par une méthode inverse de l’évolution spatio-temporelle du champ de température pour un polymère et un type de géométrie de filière donné.

Les températures mesurées dans la paroi du canal lors des essais réalisés interviendront d’une part, comme conditions aux limites du modèle et d’autre part, comme valeurs cibles servant à la minimisation d’une fonctionnelle au sens des moindres carrées. Dans notre étude, on considérera des régimes instationnaires où les conditions aux limites varient spatialement et temporellement. Alors, afin d’éviter d’imposer des températures constantes et arbitraires sur les frontières du modèle, on se servira des mesures du dispositif expérimental réalisé. Ces mesures indirectes de température dans l’acier ne perturbent pas l’écoulement et serviront à l’estimation de la température d’entrée du polymère dans la buse et par la même occasion préciser les conditions de l’expérience.



## **Chapitre II – Modélisation et simulation**

### **Résumé**

*L'objectif de ce chapitre est d'effectuer une première évaluation numérique de l'ordre de grandeur, ainsi que des variations spatiale et temporelle, des variables caractéristiques des phénomènes mis en jeu dans l'écoulement de polymère fondu : profil de vitesse, taux de cisaillement, viscosité, échauffements dans le polymère et la paroi métallique du canal... Pour cela, nous considérons une description schématique du canal et nous spécifions les conditions expérimentales (température, pression) envisagées ainsi que les propriétés thermomécaniques des matériaux mis en forme. Cette première étude va nous guider par la suite afin de dimensionner le dispositif expérimental.*

*Les calculs ont été réalisés avec le logiciel COMSOL<sup>®</sup> permettant de prendre en compte le couplage entre les différentes physiques qui rentrent dans les procédés de mis en forme, notamment à travers le modèle de viscosité d'un matériau à comportement pseudoplastique thermodépendant.*



## II.1 Introduction

La connaissance précise de la température, à laquelle le polymère sort du canal d'alimentation avant d'arriver dans le moule, est importante car elle permettra d'optimiser, par la cinétique de refroidissement et le positionnement des canaux dans les parois du moule, la forme, la qualité et le temps de production d'une pièce. Cependant, comme nous l'avons vu dans le chapitre I, les mesures de températures dans le polymère sont non triviales et par conséquent, les modèles numériques traduisant les écoulements de fluides complexes s'imposent d'eux-mêmes afin de mieux approcher la thermomécanique de ce type d'écoulement. Dès lors, il est important de bien choisir les conditions aux limites traduisant les conditions expérimentales et de prendre en compte les phénomènes thermiques et mécaniques couplés au sein du polymère et de l'acier l'entourant.

Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps expliciter le schéma numérique représentant le canal d'alimentation simplifié avant de détailler les paramètres thermophysiques des matériaux utilisés pour la simulation (polymères et acier). Ensuite, nous allons discuter des ordres de grandeurs de différents nombres adimensionnels, détaillés au chapitre précédent, permettant de caractériser la thermique et la mécanique de l'écoulement. On s'intéressera ici uniquement à la simulation de l'écoulement sans changement de phase. Puis, nous allons mettre en exergue les équations régissant la thermomécanique de l'écoulement avant de montrer quelques exemples de résultats obtenus dans des conditions d'injection périodique. Cette première étude nous guidera, par la suite, pour le dimensionnement du dispositif expérimental.

## II.2 Schéma du système étudié

L'idée de départ est de considérer un cylindre en acier de longueur  $L_{cyl}$  et de rayon  $R_{cyl}$  avec en son centre un canal d'alimentation, de rayon  $R_{can}$ , où le polymère s'écoule. Il sera partagé en deux domaines (Figure II-1) : celui du canal  $\Omega_0$ , correspondant à la zone d'écoulement du polymère fondu et celui de l'acier  $\Omega_1$ , où seule la conduction thermique est considérée. Le schéma (Figure II-1) du domaine spatial d'intégration distingue sept frontières :  $\Gamma_{i,i \in \{1,2,3\}}$ , celles qui concernent le polymère,  $\Gamma_{i,i \in \{5,6,7\}}$ , celles concernant la paroi métallique et  $\Gamma_4$  comme frontière interne commune aux deux domaines. La géométrie  $3D$  est simplifiée en considérant une géométrie  $2D$  axisymétrique.

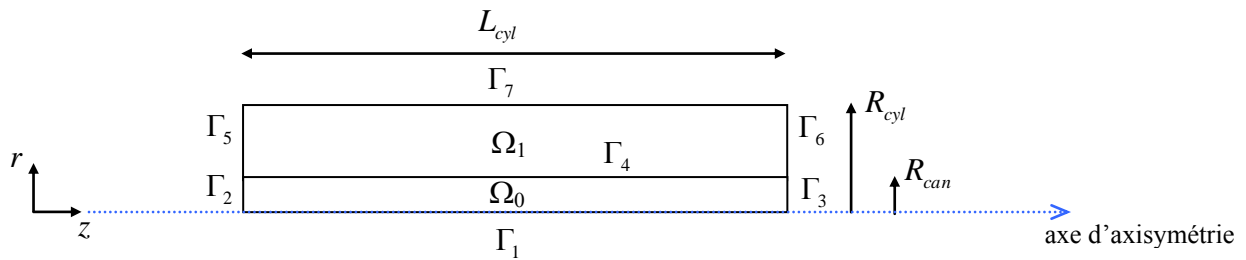


Figure II-1 : Schématisation du domaine spatial d'intégration

Dans la suite, les températures calculées dans la partie métallique seront comparées à des valeurs expérimentales relevées par huit micro-thermocouples et notées  $T_{1,\dots,4}^{cl}$  et  $T_{1,\dots,4}^{inv}$ . Ils seront disposés de façon équidistante suivant  $z$ , selon deux rangées de quatre thermocouples chacune à  $R_{cl}$  et  $R_{inv}$  du centre du canal avec  $R_{inv} < R_{cl}$  (Figure II-2). Les coordonnées des emplacements des thermocouples seront précisées dans la partie correspondant au dimensionnement.

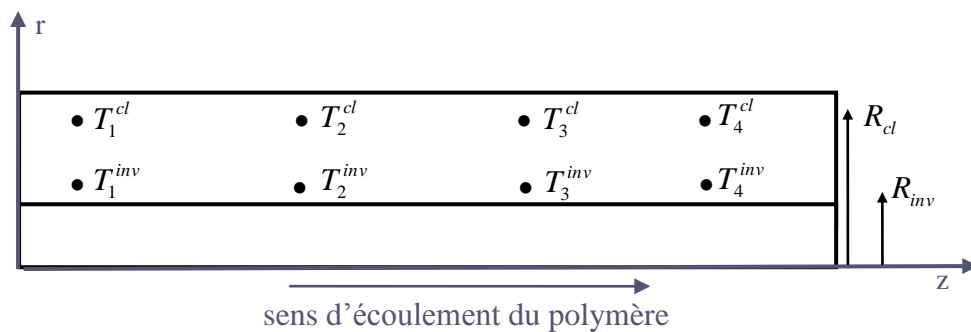


Figure II-2 : Représentation de la répartition des thermocouples dans l'acier du cylindre

## II.3 Paramètres thermophysiques des matériaux

Dans ce paragraphe, les valeurs des paramètres physiques des matériaux mis en forme (polymère) et des matériaux utilisés pour le cylindre et son fourreau (l'acier) sont présentées respectivement Tableaux II.1 et II.2.

### II.3.1 Propriétés des polymères

Dans notre étude, deux types de polymères, dont leurs propriétés sont résumées dans le Tableau II-1, ont été mis en forme : un polypropylène Eltex HV252 (homopolymère) utilisé dans le procédé d'injection et un polyéthylène Dowlex 2042 E, plus visqueux, utilisé dans le procédé d'extrusion.

Paramètres thermophysiques	$C_p$	$\lambda$	$\rho$
Unités	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	$W.m^{-1}.K^{-1}$	$kg.m^{-3}$
PP HV252	$2124 + 3,10T$	$0,189 - 6,25.10^{-5}T$	$10^3 / V_a(T, P)$
PE 2042 <sup>E</sup>	2650	0,3	745

Tableau II-1 : Caractéristiques des matériaux polymères mis en forme

On note que les lois des paramètres thermophysiques pour le polypropylène sont thermodépendantes alors qu'elles sont constantes pour le polyéthylène, ce qui se justifie par les faibles variations du  $C_p$  et du  $\lambda$  de ce matériau sur la plage de température considérée (de 200 à 260°C). On évaluera également, dans les paragraphes suivants, les variations du polypropylène sur un intervalle de température allant de 190 à 260°C. On précise que la température s'exprime en °C dans les expressions des paramètres (Tableau II-1).

### II.3.1.1 Variations des paramètres $C_p$ et $\lambda$ du PP HV252

Les variations de la capacité calorifique et de la conductivité thermique du PP HV252 en fonction de sa température sont tracées (Figure II-3) sur un intervalle allant de 190 à 260°C. La plage de température a été majorée arbitrairement à 260°C, compte tenu des vitesses d'écoulement et des échauffements attendus.

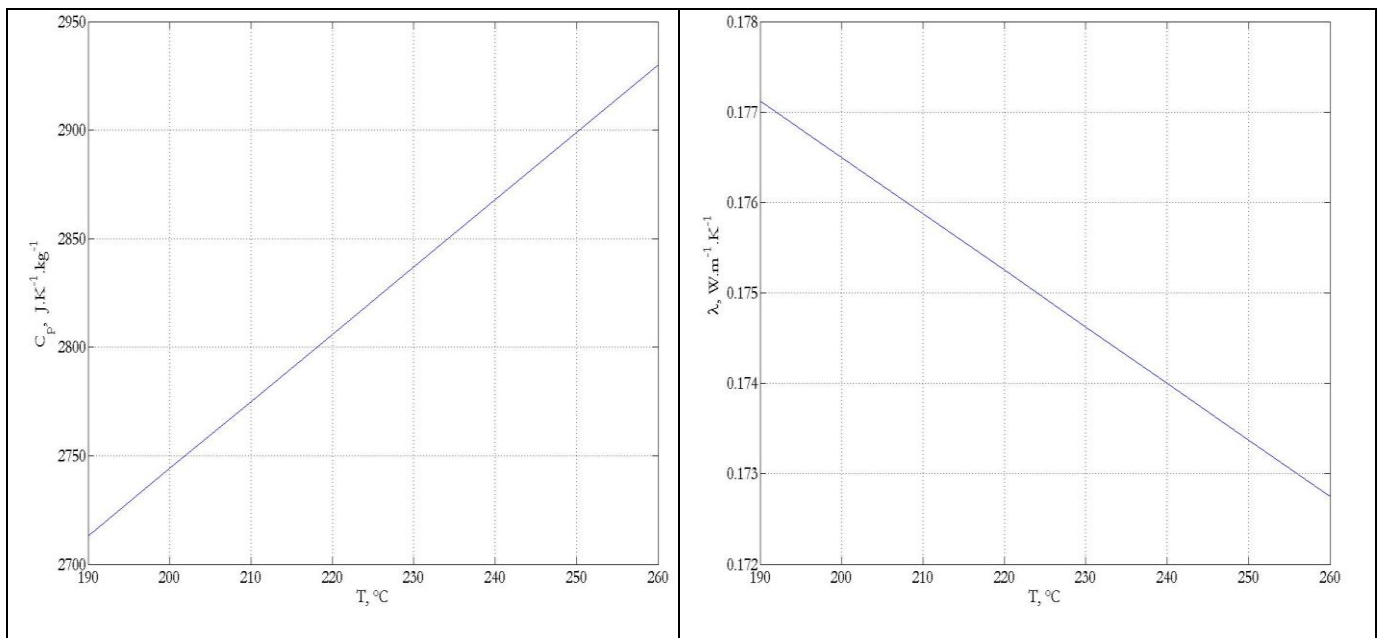


Figure II-3 : a) Tracés de la capacité calorifique et b) de la conductivité thermique du PP

On constate que la capacité calorifique  $C_p$  varie donc de  $2713J.kg^{-1}.K^{-1}$  (à 190°C) à  $2930J.kg^{-1}.K^{-1}$  (à 260°C), soit une variation de  $217J.kg^{-1}.K^{-1}$  (environ 7,4%). La

## Chapitre II – Méthode et simulation

conductivité thermique  $\lambda$  varie de  $0,1771W.m^{-1}.K^{-1}$  (à  $190^{\circ}C$ ) à  $0,1728W.m^{-1}.K^{-1}$  (à  $260^{\circ}C$ ), soit une variation de  $0,0043W.m^{-1}.K^{-1}$  (environ 2,4%). On voit bien que dans la plage de température considérée, les variations du  $C_p$  et du  $\lambda$  restent faibles (<10%).

### II.3.1.2 Volume spécifique et masse volumique du PP HV252

Fulchiron [Ful 02] a caractérisé le volume spécifique du PP HV252 en fonction de la température et de la pression à l'aide d'un dilatomètre à piston SWO PVT100, en refroidissement isobare à  $5^{\circ}C.min^{-1}$ , de  $260$  à  $30^{\circ}C$ , pour une gamme de pressions relatives allant de  $0$  à  $160MPa$ . La Figure II-4 représente l'évolution du volume spécifique sur une gamme de température allant de  $190$  à  $260^{\circ}C$  et cela pour six niveaux de pression différents (de  $0$  à  $50MPa$  par pas de  $10$ ). L'expression du volume spécifique suit l'équation empirique de Tait :

$$V_a(T, P) = V_0(T) \left[ 1 - C \ln \left( 1 - \frac{P}{B(T)} \right) \right] \quad (II.3.1)$$

$$\text{avec } V_0(T) = 1,2003 \times \exp(9,1041.10^{-4}T) \quad (II.3.2)$$

$$B(T) = 81,29 \times \exp(-4,81.10^{-3}T) \quad (II.3.3)$$

$$C = 0,0894$$

Dans cette expression,  $T$  s'exprime en  $^{\circ}C$ ,  $P$  en  $MPa$  et  $V$  en  $cm^3.g^{-1}$ .

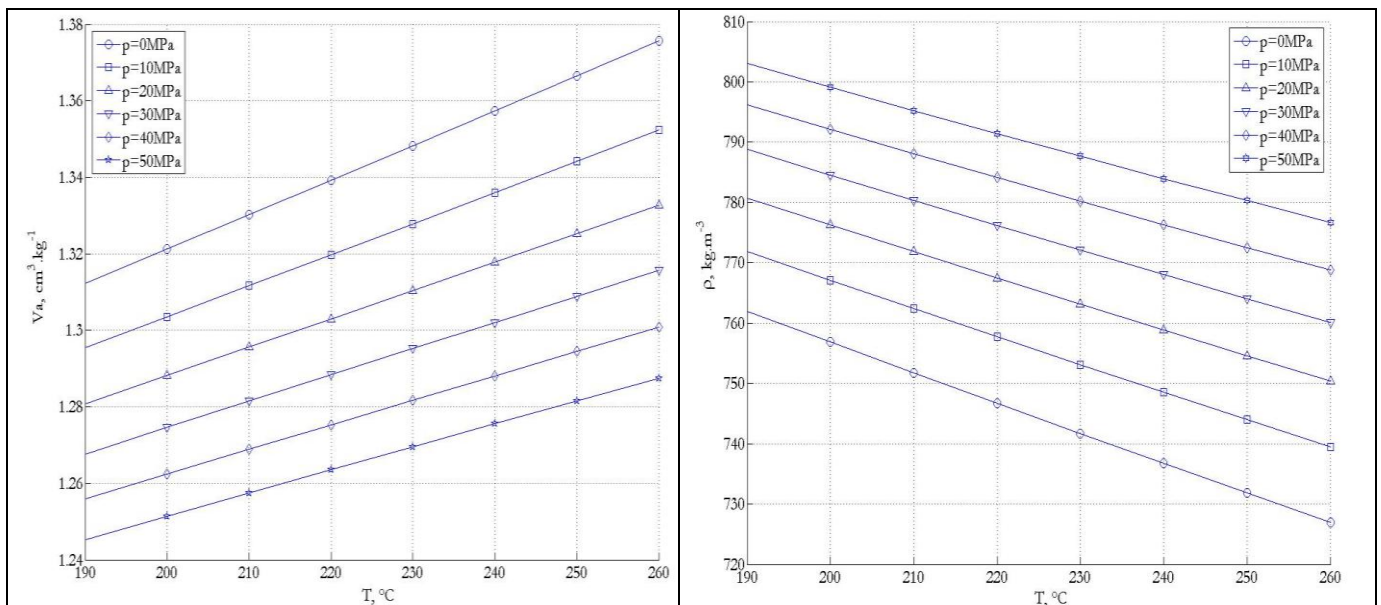


Figure II-4 : a) Evolution du volume spécifique et b) de la masse volumique en fonction de la température pour différentes pressions

## *Chapitre II – Méthode et simulation*

Tout d'abord, on peut remarquer que la masse volumique du polypropylène diminue au fur et à mesure que la température augmente (à pression constante) et qu'elle augmente avec la pression (pour une température donnée). En pratique, il est cependant difficile d'estimer précisément la plage de variation de la masse volumique dans le canal car la température évolue aussi bien radialement que longitudinalement (dissipation visqueuse au sein du polymère et faible conductivité thermique) et la pression diminue longitudinalement. Par conséquent, on voit bien que l'on aura un champ de valeur pour la masse volumique du polymère dans tout le canal. Cependant, on sait que la pression sera maximale au début du canal mais que la température moyenne sur la section dans cette région est plus faible qu'en fin de canal (si les fuites thermiques restent faibles).

Prenons un exemple, soit un polymère à  $220^{\circ}\text{C}$  en température moyenne au début du canal pour une pression maximale de  $50\text{MPa}$ , alors la masse volumique est proche de  $790\text{kg.m}^{-3}$ . En fin de canal, si la température moyenne atteint environ  $260^{\circ}\text{C}$  pour une pression proche de la pression atmosphérique, alors la masse volumique est proche de  $730\text{kg.m}^{-3}$ . La variation de la masse volumique est donc de l'ordre de  $60\text{kg.m}^{-3}$ , soit environ 7,6% d'écart entre le début et la fin du canal.

### ***II.3.1.3 Viscosité dynamique du PP HV252 et du PE 2042E***

Les polymères utilisés dans cette étude ont une viscosité dépendante de la pression et de la température. Cependant, la piezodépendance n'est connue que pour la loi rhéologique du PP HV252. Les courbes de viscosité caractérisant les polymères étudiés sont explicitées ci-dessous et on discutera, par ailleurs, de l'influence du taux de cisaillement, de la température et de la pression sur les variations de la viscosité.

#### **II.3.1.3.1 Viscosité du PP HV252**

La viscosité dynamique du polypropylène dépend du taux de cisaillement, de la température et de la pression. La rhéologie du PP HV252 est décrite par une loi de type Cross piezodépendante et avec une thermodépendance en loi d'Arrhénius [Ful 01] :

$$\eta_{PP}(\dot{\gamma}, T, p) = \frac{\eta_{PP0}}{1 + \left( \frac{\eta_{PP0} \dot{\gamma}}{\tau} \right)^{1-n}} \quad (\text{II.3.4})$$

$$\text{avec } \eta_{PP0} = K \exp\left(\frac{T_b}{T}\right) \exp(\beta p) \quad (\text{II.3.5})$$

La valeur du coefficient de piezodépendance  $\beta = 3e^{-8} Pa^{-1}$  est issue de l'article de Kadjik [Kad 94] et celles des quatre paramètres  $K = 0,278 Pa.s$ ,  $\tau = 20000 Pa$ ,  $T_b = 4320 K$  et  $n = 0,31$  ont été identifiés à partir de mesures de viscosité issues du travail de Luyé [Luy 99].

Afin d'avoir une idée sur l'ordre de grandeur de cette viscosité et de bien visualiser sa variation en fonction du taux de cisaillement, de la température et de la pression, nous avons tracé  $\eta_{PP}(\dot{\gamma}, T, p = 10 MPa)$  et  $\eta_{PP}(\dot{\gamma}, T, p = 30 MPa)$  sur la Figure II-5 pour un intervalle de taux de cisaillement allant de  $[10^{-1}, 10^4 s^{-1}]$  et une plage de température allant de  $[200^\circ C, 260^\circ C]$  (par pas de  $10^\circ C$ ).

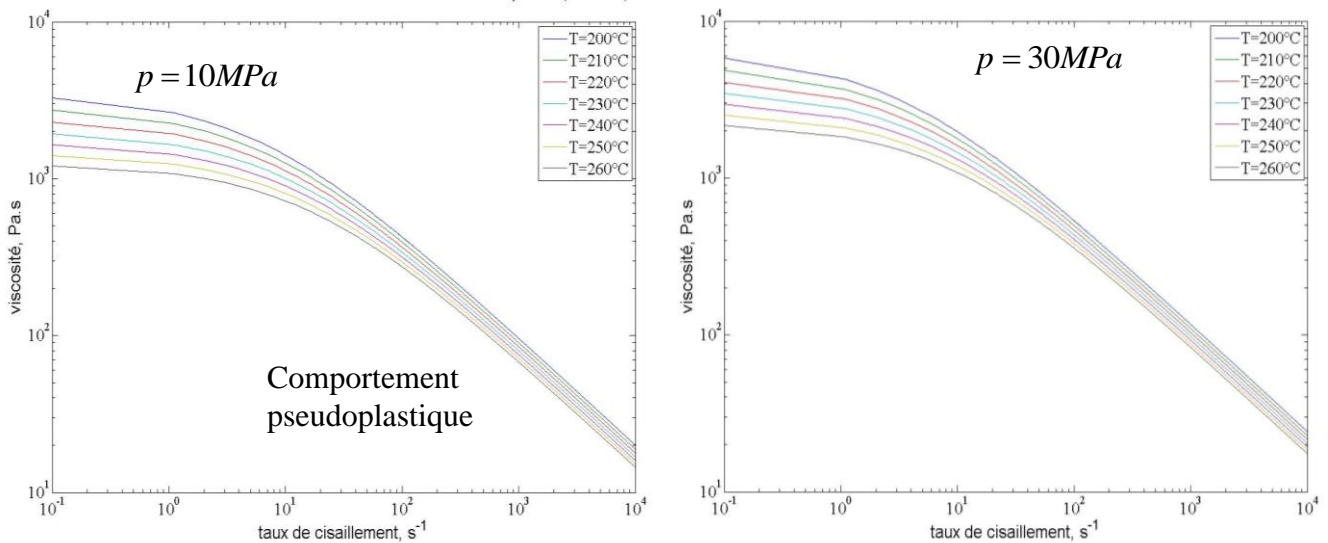


Figure II-5 : Evolution de la viscosité dynamique de PP HV252 en fonction du taux de cisaillement et de la température a) pour  $p=10MPa$  et b) pour  $p=30MPa$

Cette loi rhéologique permet de rendre compte de la dépendance de la viscosité à la température et à la pression. Elle traduit également le plateau Newtonien à faible taux de cisaillement ( $\dot{\gamma} \leq 1 s^{-1}$ ) et une forte décroissance de la viscosité à fort taux de cisaillement assimilable à une rhéologie en loi puissance.

## Chapitre II – Méthode et simulation

D'après les Figure II-5, on observe qu'à taux de cisaillement constant, d'une part pour une pression donnée, la viscosité diminue avec la température et que d'autre part, pour une température donnée, la viscosité augmente avec la pression.

Concernant l'influence de la température sur cette loi rhéologique, on peut ajouter qu'elle fait varier la viscosité du polypropylène étudié différemment suivant que l'on se situe à faibles ou forts taux de cisaillement. En effet, on constate sur le graphique que la température a une influence plus conséquente sur la viscosité à faibles taux de cisaillement qu'à forts taux de cisaillement. Par exemple, à  $p = 10\text{MPa}$  (Figure II-5b), on compare les courbes de viscosités pour une augmentation de température de  $60^\circ\text{C}$  (entre  $T = 200^\circ\text{C}$  et  $260^\circ\text{C}$ ) :

- à  $\dot{\gamma} = 10^{-1}\text{s}^{-1}$ , on a  $\eta_{pp} = 3274\text{Pa.s}$  à  $T = 200^\circ\text{C}$  et  $\eta_{pp} = 1206\text{Pa.s}$  à  $T = 260^\circ\text{C}$ , soit une diminution de 63,2% (2068Pa.s).
- à  $\dot{\gamma} = 10^4\text{s}^{-1}$ , on a  $\eta_{pp} = 20,09\text{Pa.s}$  à  $T = 200^\circ\text{C}$  et  $\eta_{pp} = 14,55\text{Pa.s}$  à  $T = 260^\circ\text{C}$ , soit une diminution de 27,6% (5,54Pa.s).

On peut effectuer une observation analogue sur la pression afin cette fois-ci de voir son influence sur la viscosité à faibles et forts taux de cisaillement. On constate alors que, pour une température et un taux de cisaillement donnés, la viscosité augmente lorsque l'on fait croître la pression. On perçoit aussi bien qu'à l'instar de la température, la pression diminue son influence sur la viscosité vers les taux de cisaillement élevés. Par exemple, lorsqu'on se place à  $T = 230^\circ\text{C}$  (Figure II-5), on constate que :

- à  $\dot{\gamma} = 10^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $\eta_{pp} = 3453\text{Pa.s}$  à  $p = 30\text{MPa}$  alors que  $\eta_{pp} = 1934\text{Pa.s}$  à  $p = 10\text{MPa}$ , soit une variation de 44% (1519Pa.s).
- à  $\dot{\gamma} = 10^4\text{s}^{-1}$ ,  $\eta_{pp} = 20,44\text{Pa.s}$  à  $p = 30\text{MPa}$  alors que  $\eta_{pp} = 16,92\text{Pa.s}$  à  $p = 10\text{MPa}$ , soit une variation de 17,22% (3,52Pa.s).

Maintenant regardons l'influence de la pression sur la thermodépendance de la viscosité pour de faibles et de fortes vitesses de cisaillement.

- à  $\dot{\gamma} = 10^{-1}\text{s}^{-1}$ ,
  - pour  $p = 30\text{MPa}$ ,  $\eta_{pp} = 5795\text{Pa.s}$  à  $T = 200^\circ\text{C}$  et  $\eta_{pp} = 2166\text{Pa.s}$  à  $T = 260^\circ\text{C}$ , soit une diminution de 62,6% (3629Pa.s) sur  $60^\circ\text{C}$ .

## Chapitre II – Méthode et simulation

- pour  $p = 10\text{MPa}$ ,  $\eta_{pp} = 3274\text{Pa.s}$  à  $T = 200^\circ\text{C}$  et  $\eta_{pp} = 1206\text{Pa.s}$  à  $T = 260^\circ\text{C}$ , soit une diminution de 63,2% (2068Pa.s) sur  $60^\circ\text{C}$ .
- à  $\dot{\gamma} = 10^4\text{s}^{-1}$ ,
  - pour  $p = 30\text{MPa}$ ,  $\eta_{pp} = 24,83\text{Pa.s}$  à  $T = 200^\circ\text{C}$  et  $\eta_{pp} = 17,55\text{Pa.s}$  à  $T = 260^\circ\text{C}$ , soit une diminution de 29,3% (7,28Pa.s) sur  $60^\circ\text{C}$ .
  - pour  $p = 10\text{MPa}$ ,  $\eta_{pp} = 20,09\text{Pa.s}$  pour  $T = 200^\circ\text{C}$  et  $\eta_{pp} = 14,55\text{Pa.s}$  à  $T = 260^\circ\text{C}$ , soit une diminution de 27,6% (5,54Pa.s) sur  $60^\circ\text{C}$ .

Par conséquent, on peut noter que pour un taux de cisaillement donné, la viscosité diminue avec la température, mais que le pourcentage de sa variation reste presque identique à  $p = 10\text{MPa}$  ou  $30\text{MPa}$ . En d'autres termes, le pourcentage de variation de la viscosité avec la température est indépendant de la pression à laquelle le polymère se trouve.

### II.3.1.3.2 Viscosité du PE 2042E

La rhéologie du PE 2042E est décrite par une loi développée dans la thèse de C. Pujos [Puj 06] avec une thermodépendance suivant une loi d'Arrhénius. Les paramètres valent  $a = 784,82\text{Pa.s}$ ,  $b = 1404,15\text{K}^{-1}$ ,  $c = 0,0106\text{s}$  et  $n = 0,298$ . La viscosité dynamique du polyéthylène étudié dépend donc du taux de cisaillement et de la température et est définie par l'équation (II.3.6).

$$\eta_{PE}(T, \dot{\gamma}) = \frac{\eta_{PE0}}{\left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{\frac{1}{n}}} \quad (\text{II.3.6})$$

$$\text{avec } \eta_{PE0}(T) = a \exp\left(\frac{b}{T}\right) \quad (\text{II.3.7})$$



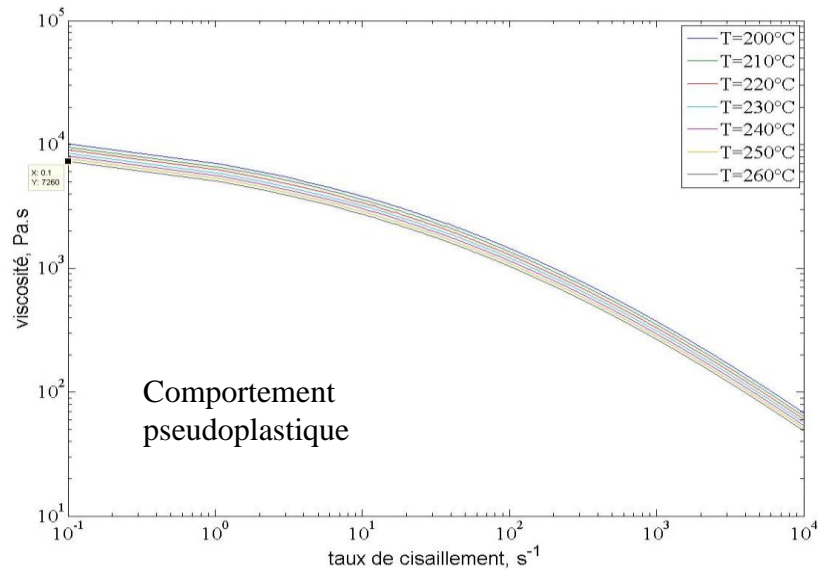


Figure II-6 : Evolution de la viscosité dynamique de PE 2042E en fonction du taux de cisaillement et de la température

On constate que, pour des faibles taux de cisaillement ( $\dot{\gamma} = 10^{-1} s^{-1}$ ), la viscosité du polyéthylène vaut  $10140 Pa.s$  à  $T = 200^{\circ}C$  et  $7260 Pa.s$  à  $T = 260^{\circ}C$  (soit une diminution de  $2880 Pa.s$  ou environ 28%). En comparaison, celle du polypropylène, dans les mêmes conditions (sur  $60^{\circ}C$  et à  $\dot{\gamma} = 10^{-1} s^{-1}$ ), diminue d'environ 63% à  $p = 10 MPa$  et à  $p = 30 MPa$  (diminution respective de  $2068 Pa.s$  et  $3629 Pa.s$ ).

On constate globalement que la viscosité dynamique du polyéthylène est plus élevée que celle du polypropylène (dans la gamme de pression considérée) et qu'elle diminue lorsque la température augmente à l'instar du polypropylène.

### II.3.2 Propriétés des aciers

Le cylindre a été usiné dans un acier Böhler A903, autrement appelé X2CrNiMoN22-5-3 en norme EN/DIN et Z2CND22-5Az en norme AFNOR, et le fourreau qui l'entoure est en acier Böhler W300, aussi appelé X38CrMoV5-1 en norme EN/DIN et Z38CDV5 en norme AFNOR. Dans notre étude numérique, nous ne nous servons que de l'acier du cylindre, les caractéristiques de l'acier du fourreau sont données pour information.

L'acier A903 du cylindre a une structure austénitique et contient de la ferrite. Il possède une grande résistance à la corrosion, particulièrement contre les solutions contenant du chlorure. Pour information, sa composition chimique est la suivante (nom et % dans le matériau) : C 0,025 ; Si 0,6 ; Mn 1,3 ; Cr 22,8 ; Mo 3,2 ; Ni 5,8 ; N 0,17

## Chapitre II – Méthode et simulation

Quant à l'acier du fourreau W300, il a la composition chimique suivante (nom et % dans le matériau) : C 0,38 ; Si 1,1 ; Mn 0,4 ; Cr 5,00 ; Mo 1,3 ; V 0,4

Leurs caractéristiques thermophysiques sont données par le fournisseur à  $20^{\circ}\text{C}$  et sont résumés, Tableau II-2 :

Paramètres thermophysiques	$C_p$	$\lambda$	$\rho$
	Unités		
Böhler A903	$\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\text{kg.m}^{-3}$
Böhler W300	500	15	7800
	460	25	7800

Tableau II-2 : Caractéristiques des aciers composants la buse

Pour les deux aciers, on précise que leur module d'Young est voisin : de l'ordre de  $186\text{GPa}$  à  $200^{\circ}\text{C}$  pour le A903 et de  $200\text{GPa}$  à  $200^{\circ}\text{C}$  pour l'acier W300. L'acier du cylindre a été choisi selon deux critères principaux :

- un matériau peu conducteur afin que pour un flux de chaleur donné, le gradient thermique soit plus facile à mesurer.
- Le second critère est que, en vu du frettage, son coefficient de dilatation thermique soit assez proche de celui du fourreau. En effet, lors du frettage à chaud du cylindre dans le fourreau, i-e à  $200^{\circ}\text{C}$ , il faut prendre en compte la dilatation thermique du matériau afin que les deux pièces en acier s'ajustent au mieux.

On précise que, pour le frettage, le diamètre extérieur du cylindre doit être légèrement supérieur à celui du diamètre intérieur du fourreau dans lequel il sera emmanché afin que ce dernier exerce une force de pression de contact appelé pression de frettage. L'acier du cylindre choisir a une expansion de  $13,5\mu\text{m.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et celui du fourreau de  $12\mu\text{m.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  à  $T = 200^{\circ}\text{C}$  – il était difficile de faire plus proche au niveau des coefficients de dilatation thermique en prenant en compte la contrainte de faible conductivité du cylindre.

## II.4 Calcul de certains nombres adimensionnels

La détermination de certains nombres adimensionnels peut aider à la simplification des équations régissant les écoulements de fluides complexes. Or, ces nombres sont exprimés notamment avec les paramètres physiques des matériaux et comme ces derniers fluctuent spatialement et temporellement, lorsque le polymère s'écoule, et dépendent évidemment des polymères considérés, nous ne prendrons que des valeurs moyennes des propriétés physiques.

## Chapitre II – Méthode et simulation

Dans tous nos calculs de nombres adimensionnels, on considèrera un écoulement de polymère fondu ayant une vitesse moyenne  $\bar{V}$  de  $0,1m.s^{-1}$  dans une conduite de longueur de buse  $L = 20cm$  et de rayon  $R_{can} = 2mm$  avec un polymère ayant une masse volumique  $\rho$  d'environ  $800kg.m^{-3}$ , une capacité calorifique  $Cp$  de  $2000J.kg^{-1}.K^{-1}$ , une conductivité thermique  $\lambda$  de  $0,3W.m^{-1}.K^{-1}$  et une viscosité  $\eta$  moyenne de  $1000Pa.s$ .

- Calcul du nombre de Reynolds :

$$Re_L = \frac{\rho \bar{V} L}{\eta} \quad \text{Soit} \quad \boxed{Re = 1,6.10^{-2}}$$

En effet, à cause de leur grande viscosité et de leur faible vitesse, les écoulements de polymères considérés sont le plus souvent en régime laminaire.

- Calcul du nombre de Stokes :

$$St = \frac{\eta \bar{V}}{\rho g D^2} \quad \text{Soit} \quad \boxed{St = 781}$$

Les forces engendrées par la gravitation sont négligeables par rapport à celles dues à la dissipation visqueuse.

- Calcul du nombre de Péclet :

- suivant la longueur de l'écoulement ( $z$ ) :

$$Pe_L = \frac{\rho Cp \bar{V} L}{\lambda} \quad \text{Soit} \quad \boxed{Pe_L \approx 10^5}$$

Par conséquent, on voit bien que le transfert de chaleur par convection est largement prépondérant sur celui par conduction dans la direction de l'écoulement.

- Calcul du nombre de Cameron :

$$Ca = \frac{aL}{\bar{V} D^2} \quad \text{Soit} \quad \boxed{Ca \approx 9,4.10^{-2}}$$

Par conséquent, la thermique de l'écoulement est en régime dit de transition, entre un régime dit « adiabatique » ( $Ca < 10^{-2}$ ) et le régime établi ( $Ca > 1$ ) [Ag et al. 2002].

## II.5 Equations du problème direct

Le système d'équations du modèle associé à la géométrie permettant de déterminer le champ des températures  $T$  dans le domaine  $\Omega_0 \cup \Omega_1$  et le champ de vitesse  $U$  dans le canal  $\Omega_1$ , est caractérisé par un fort couplage thermomécanique dû à la rhéologie thermodépendante du polymère et à la source thermique  $\Phi_{\Omega_0}$  due à la dissipation visqueuse dans l'équation de bilan de l'énergie. On suppose que le modèle est  $2D$  axisymétrique. Les transferts de chaleur et la mécanique des fluides régissant les phénomènes d'écoulement de fluide complexe dans  $\Omega_0 \cup \Omega_1$ , sur un intervalle de temps  $I = [0, t_f]$ , sont modélisés par les équations (II.5.1) à (II.5.4). Les équations II.5.5 à II.5.11 traduisent les conditions aux limites imposées sur les frontières  $\Gamma_{i \in \{1, \dots, 7\}}$ .

La résolution de l'équation de Navier Stokes, avec des viscosités non constantes et fortement variables à différents paramètres à l'instar de la température et de la vitesse de cisaillement, reste non triviale. En effet, à la complexité inhérente aux équations aux dérivées partielles s'ajoute celle de la non linéarité introduite par le terme d'advection de l'accélération. La plupart du temps, on essaie de résoudre une version simplifiée de l'équation en éliminant l'un de ces termes. Par exemple, à faible nombre de Reynolds, on peut négliger le terme advectif (écoulement de Stokes), à fort nombre de Péclet, on peut négliger le terme conductif dans la direction principale de l'écoulement. Aucune de ces hypothèses simplificatrices n'a été faite avec le logiciel utilisé.

➤ Dans les domaines Figure II-1, les équations du modèle sont :

- dans  $\Omega_0$  : couplage thermomécanique dans le polymère

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla(\rho_f \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.5.1})$$

$$\rho_f C_{pf} \frac{DT}{Dt} = \nabla(\lambda_f \vec{\nabla} T) + \Phi_{\Omega_0} + \alpha T \frac{\partial P}{\partial t} + p \nabla \vec{V} \quad (\text{II.5.2})$$

$$\rho_f \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \rho_f \vec{g} + \nabla \cdot \left[ \eta \left( \overline{\nabla \vec{V}} + {}^t \overline{\nabla \vec{V}} \right) \right] \quad (\text{II.5.3})$$

avec  $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ , le coefficient de dilatation isobare

,  $\Phi_{\Omega_0} = \eta \dot{\gamma}^2$ , le terme source de dissipation visqueuse

et  $\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(\ )$ , la dérivée particulaire

## Chapitre II – Méthode et simulation

- dans  $\Omega_1$  : conduction dans l'acier du cylindre

$$\rho_{ac} C_{pac} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_{ac} \vec{\nabla} T) \quad (\text{II.5.4})$$

➤ Sur les frontières, les conditions aux limites sont  $\forall t \in I$  :

$$\forall z \in \Gamma_1 : \text{conditions de symétrie} \quad (\text{II.5.5})$$

$$\forall r \in \Gamma_2 \text{ (entrée)} : T(r,t) = \bar{T}_0(t) \text{ et } P(r,t) = \bar{P}_0(t) \quad (\text{II.5.6})$$

$$\forall r \in \Gamma_3 \text{ (sortie)} : \frac{\partial T(r,t)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ et } P(r,t) = P_s \quad (\text{II.5.7})$$

$$\forall z \in \Gamma_4 : V|_{\Gamma_4} = 0 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{interface polymère – métal} \quad (\text{II.5.8})$$

$$\forall r \in \Gamma_5 : T(r,t) = T_5(r,t) \quad (\text{II.5.9})$$

$$\forall r \in \Gamma_6 : T(r,t) = T_6(r,t) \quad (\text{II.5.10})$$

$$\forall z \in \Gamma_7 : T(z,t) = T_7(z,t) \quad (\text{II.5.11})$$

La condition II.5.6 suppose la température uniforme dans la section d'entrée du canal. Cependant, on sait bien, notamment avec les travaux de M. Karkri [Kar 04b], que la température du polymère en entrée est non uniforme sur la section du canal. Cependant, cette hypothèse a été retenue pour des considérations pratiques afin de privilégier l'intérêt porté aux variations temporelles plutôt qu'aux variations spatiales. Cette approche sera notamment utile dans la partie de l'étude consacrée aux problèmes inverses de reconstruction de la condition d'entrée (chapitre V). Dans l'équation II.5.7, la condition de gradient nul dans la direction axiale est acceptable car on a vu que le nombre de Péclet est très grand.

➤ Les conditions initiales sont :

$$T_{\Omega_0, \Omega_1}(t = 0s) = T_{init} \quad (\text{II.5.12})$$

$$P_{\Omega_0}(t = 0s) = P_{init} \quad (\text{II.5.13})$$

Les deux conditions initiales (équations II.5.12 et II.5.13) sont considérées comme constantes car elles traduisent une température homogène dans l'acier et dans le polymère et un état mécanique initial considérant le fluide comme étant au repos (avant de mettre en mouvement). Cependant, on ne peut pas toujours imposer une pression et une température constante comme condition initiale car, par exemple, si l'état initial est un état stationnaire mécanique à débit massique non nul, alors la condition initiale en pression est un gradient variant selon l'axe de l'écoulement et celle en température se traduit par un champ correspondant au régime stationnaire considéré.

Quelques précisions peuvent être apportées quant à la résolution numérique :

Le système d'équations est résolu avec le logiciel d'éléments finis COMSOL<sup>®</sup>. La résolution en transitoire se fait pour un pas de temps de 0,1s. Le maillage contient 2500 éléments quadrangles : 50 mailles dans la direction radiale (dont 20 dans  $\Omega_0$  et 30 dans  $\Omega_1$ ) et 50 mailles dans la direction axiale. Le maillage est raffiné autour de la frontière  $\Gamma_4$  (interface entre le polymère et la paroi du cylindre). Cependant, selon la direction axiale, la taille des mailles reste constante et vaut 4mm. Un zoom sur le maillage, donnant une idée du raffinement est de la taille des mailles, est représenté Figure II-7.

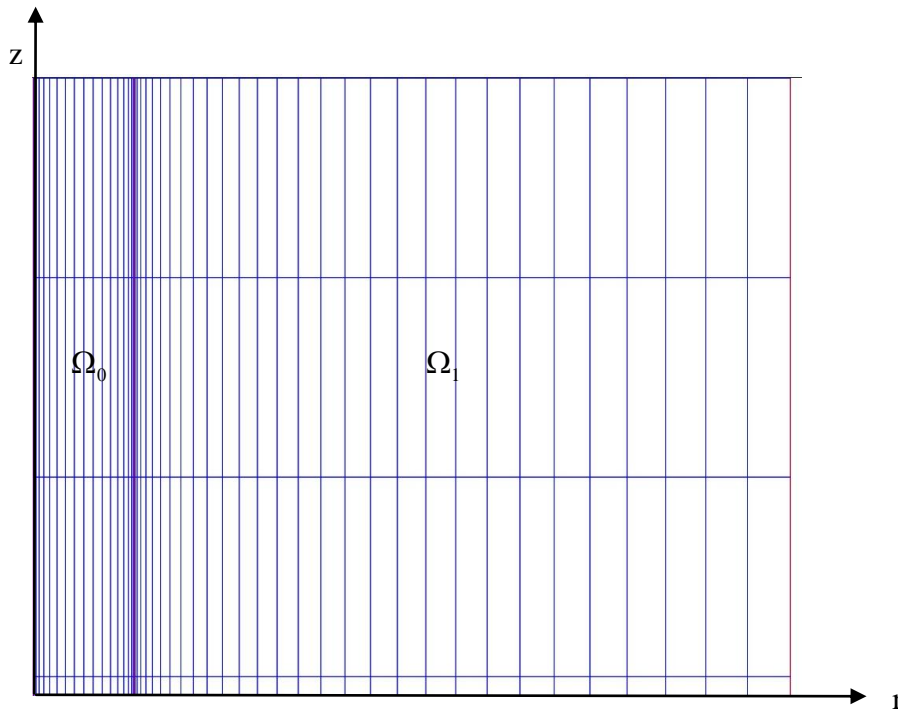


Figure II-7 : Zoom sur le maillage quadrangle utilisé dans la résolution numérique

A chaque pas de temps, le système algébrique résultant des équations discrétisées est résolu par le solveur UMFPACK. Il résout des systèmes de la forme générale  $Ax = b$  en utilisant une méthode non symétrique et la factorisation directe LU de la matrice incomplète  $A$ .

## II.6 Approximation rhéologique en développement polynomial

La viscosité étant fortement non linéaire et étant de plus thermodépendante, l'utilisation du solveur, pour la résolution du modèle couplé thermomécanique, conduit à des problèmes de convergence en mode transitoire. En effet, la forte variation spatio-temporelle de la viscosité et la

## Chapitre II – Méthode et simulation

brutale évolution temporelle de la pression notamment n'assure pas une bonne convergence du code de calcul. Pour surmonter ces difficultés, nous avons retenu une technique d'approximation en développement polynomiale de la fonction de viscosité sur un point de fonctionnement judicieux  $(T_p, \dot{\gamma}_p)$ . En d'autres termes, les viscosités étant dépendantes des variables  $T$  et  $\dot{\gamma}$ , il faut choisir un point autour duquel on effectuera le développement limité. Ce point est choisi autour d'une température moyenne de l'écoulement et d'une vitesse de cisaillement où la dissipation visqueuse est importante afin de ne pas trop s'éloigner de la valeur réelle de la viscosité proche de la paroi du cylindre, à l'origine des principaux échauffements.

Grâce à cette technique, appliquée seulement dans l'équation de la mécanique des fluides, nous avons pu satisfaire les conditions de convergence du solveur, au détriment toutefois de la précision des résultats obtenus.

Dans cette partie, seront décrits les résultats obtenus pour les développements limités des viscosités du PP HV252 et du PE 2042E à l'ordre 2 pour les variables  $T$  et  $\dot{\gamma}$ .

### II.6.1 Rappel de la formule de Taylor d'une fonction à deux variables

Dans ce paragraphe, nous allons expliciter l'équation de l'approximation d'une fonction à deux variables par la formule de Taylor dans le but de l'appliquer à la viscosité. On précise que le point de l'approximation polynomiale  $(T_p, \dot{\gamma}_p) \in I_T \times I_{\dot{\gamma}}$ , où  $I_T$  et  $I_{\dot{\gamma}}$  représentent respectivement les plages en température et en vitesse de cisaillement considérées pendant une expérience. On précise que l'on s'arrêtera à l'ordre 2.

Soit une fonction  $f$  de classe  $C^2$  au voisinage du point  $(T_p, \dot{\gamma}_p) \in I_T \times I_{\dot{\gamma}} \subset \mathfrak{R}^2$  à valeur dans  $\mathfrak{R}$ , alors pour tout  $(T, \dot{\gamma}) \in \mathfrak{R}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} f(T, \dot{\gamma}) \approx & f(T_p, \dot{\gamma}_p) + \frac{\partial f}{\partial T}(T_p, \dot{\gamma}_p)(T - T_p) + \frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}}(T_p, \dot{\gamma}_p)(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_p) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}(T_p, \dot{\gamma}_p)(T - T_p)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{\gamma}^2}(T_p, \dot{\gamma}_p)(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_p)^2 \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \dot{\gamma}}(T_p, \dot{\gamma}_p)(T - T_p)(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_p) \end{aligned} \quad (\text{II.6.1})$$

Une fois l'expression théorique de l'approximation polynomiale du deuxième ordre d'une fonction à deux variables donnée, il nous reste à déterminer les cinq dérivées de cette expression au point considéré pour les deux polymères.

## II.6.2 Application au PP HV252

On rappelle que l'expression de la viscosité du polypropylène étudié est de la forme :

$$\eta(\dot{\gamma}, T, p) = \frac{\eta_0}{1 + \left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau}\right)^{1-n}} \quad \text{avec} \quad \eta_0(T, p) = K \exp\left(\frac{T_b}{T}\right) \exp(\beta p)$$

Où  $K = 0,278 Pa.s$  ,  $\tau = 20000 Pa$  ,  $T_b = 4320 K$  ,  $n = 0,31$  et  $\beta = 3e^{-8} Pa^{-1}$

Pour des raisons de simplification d'écriture, on posera dans tout le calcul  $A = \frac{\eta_0 \cdot \dot{\gamma}}{\tau}$ .

Par conséquent, la viscosité s'exprime comme suit :  $\eta(\dot{\gamma}, T, p) = \frac{\eta_0}{1 + A^{1-n}}$  (II.6.2)

On laissera le lecteur se reporter à l'annexe I pour le détail des calculs des dérivées. On ne présentera ici que les résultats finaux (équations II.6.3 à II.6.7) :

- dérivées premières par rapport à la température et au taux de cisaillement :

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial T} = -T_b \frac{\eta_0 (1 + nA^{1-n})}{T^2 (1 + A^{1-n})^2}} \quad \text{(II.6.3)} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} = (n-1) \frac{\eta_0 A^{1-n}}{\dot{\gamma} (1 + A^{1-n})^2}} \quad \text{(II.6.4)}$$

- dérivées secondes par rapport à la température et au taux de cisaillement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} = T_b \eta_0 \frac{[(-n^2 + n - 1)T_b + (2 + 2n)T] A^{1-n} + (n^2 T_b + 2nT) A^{2-2n} + (T_b + 2T)}{T^4 (1 + A^{1-n})^3}} \quad \text{(II.6.5)}$$

$$\text{et} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2} = (n-1) \eta_0 A^{1-n} \frac{(n-2)A^{1-n} - n}{\dot{\gamma}^2 (1 + A^{1-n})^3}} \quad \text{(II.6.6)}$$

- dérivée croisée des deux variables :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}} = (n-1) \frac{\eta_0 T_b A^{1-n}}{\dot{\gamma} T^2} \left( \frac{n(1 - A^{1-n}) - 2}{(1 + A^{1-n})^3} \right)} \quad \text{(II.6.7)}$$



### II.6.3 Application au PE 2042E

On rappelle que l'expression de la viscosité du polyéthylène étudié est de la forme :

$$\eta(T, \dot{\gamma}) = \frac{\eta_0}{(1 + (c\dot{\gamma})^n)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{avec} \quad \eta_0(T) = a \exp\left(\frac{b}{T}\right)$$

Où  $a = 784,82$ ,  $b = 1404,15$ ,  $c = 0,0106$  et  $n = 0,298$

De même que précédemment, le lecteur pourra se reporter à l'annexe I pour le détail des calculs des dérivées. On obtient les équations II.6.8 à II.6.12 :

- dérivées premières par rapport à la température et au taux de cisaillement :

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial T} = -\frac{b\eta_0}{T^2(1 + (c\dot{\gamma})^n)^{\frac{1}{n}}}} \quad (\text{II.6.8}) \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} = -\eta_0 c^n \dot{\gamma}^{n-1} (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{n+1}{n}}} \quad (\text{II.6.9})$$

- dérivées secondes par rapport à la température et au taux de cisaillement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} = \frac{b\eta_0}{(1 + (c\dot{\gamma})^n)^{\frac{1}{n}}} \left[ \frac{2}{T^3} + \frac{b}{T^4} \right]} \quad (\text{II.6.10})$$

$$\text{et} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2} = \eta_0 c^n \dot{\gamma}^{n-2} (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{n+1}{n}} \left[ c^n (n+1) \dot{\gamma}^n (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-1} - n+1 \right]} \quad (\text{II.6.11})$$

- dérivée croisée des deux variables :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}} = bc^n \frac{\eta_0}{T^2} \dot{\gamma}^{n-1} (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{n+1}{n}}} \quad (\text{II.6.12})$$

### II.6.4 Comparaison entre la viscosité du PE et son approximation

Comme le taux de cisaillement varie fortement selon le rayon du canal et en fonction du temps, tout comme la température, car les débits de matière évoluent, il est difficile de trouver un point de fonctionnement satisfaisant  $(T_p, \dot{\gamma}_p)$ . On précise que dans l'algorithme, l'approximation polynomiale n'est utile que dans la phase fortement non stationnaire (changement de débit), donc lors de fortes variations de pression.

## Chapitre II – Méthode et simulation

A titre d'exemple, les Figure II-8a et b représentent respectivement la viscosité du PE 2042E selon la loi détaillé précédemment (cf. § II.3.1.3.2) et son approximation polynomiale.

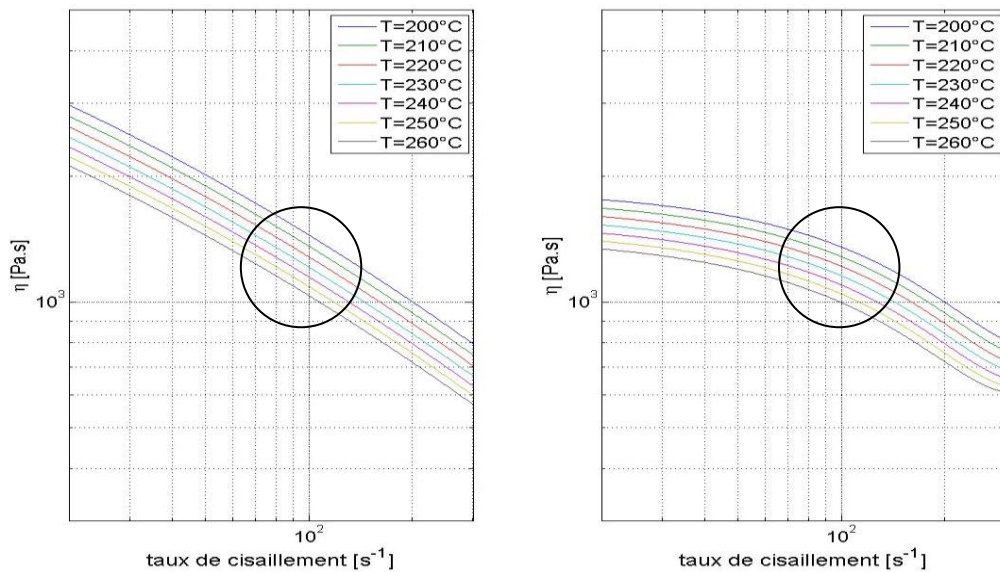


Figure II-8 : Tracé de la viscosité du PE 2043E a) non approximée et b) en développement limité à l'ordre 2 au point ( $T_p = 230^{\circ}\text{C}$ ,  $\dot{\gamma}_p = 200\text{s}^{-1}$ )

Sur ces figures, l'approximation polynomiale est effectuée autour du point de fonctionnement ( $T_p = 230^{\circ}\text{C}$ ,  $\dot{\gamma}_p = 200\text{s}^{-1}$ ). Il a été choisi pour le calcul du régime transitoire présenté à la section V.2.6. Par ailleurs, on constate qu'à partir des vitesses de cisaillement inférieures à environ  $50\text{s}^{-1}$ , la viscosité approximée du PE 2042E diffère plus de celle non approximée que pour des taux de cisaillement compris entre  $50\text{s}^{-1}$  et  $200\text{s}^{-1}$  (Figure II-8a et b). En effet, par exemple, à  $\dot{\gamma} = 20\text{s}^{-1}$  et  $T = 200^{\circ}\text{C}$ , la viscosité non approximée atteint  $1200\text{Pa.s}$  (Figure II-8a) alors que celle approximée atteint environ  $1090\text{Pa.s}$  (Figure II-8b), soit un écart relatif d'environ 9%. Par contre, jusqu'à  $\dot{\gamma} = 300\text{s}^{-1}$  et  $T = 200^{\circ}\text{C}$ , la valeur de la viscosité approximée et non approximée reste la même à environ  $800\text{Pa.s}$ . Par conséquent, nous avons choisi ce point de fonctionnement car cette différence d'amplitude de la viscosité à faible taux de cisaillement influe moins sur la thermique de l'écoulement que si ces variations ont lieu à fort taux de cisaillement car les échauffements importants se situent principalement à vitesse de cisaillement élevée (entre  $200\text{s}^{-1}$  et  $300\text{s}^{-1}$  dans nos essais simulés). C'est pourquoi, ce point de fonctionnement a été pris à  $\dot{\gamma}_p = 200\text{s}^{-1}$  et à une température moyenne d'écoulement de  $T_p = 230^{\circ}\text{C}$ .

## II.7 Exemples de résultats numériques de simulation

Dans ce paragraphe, on compare les résultats des simulations obtenus avec des conditions périodiques d'écoulement pour les deux polymères. L'idée est de se rapprocher d'une part des conditions du procédé d'injection pour lesquelles les variations de pression sont très fortes et d'autre part de mettre en évidence l'existence de profils thermiques en régime périodique établi.

Dans cette étude, on prendra, Figure II-9, une longueur de cylindre  $L_{cyl}$  de  $200mm$ , un canal de rayon  $R_{can}$  égal à  $2mm$  et un rayon de cylindre  $R_{cyl}$  de  $15mm$ .

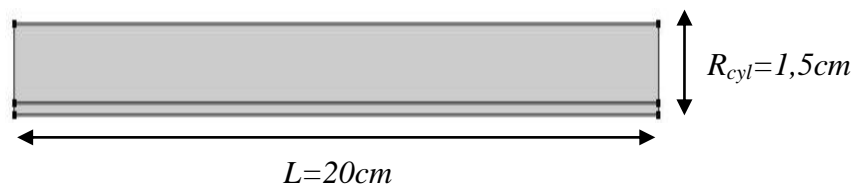


Figure II-9 : Géométrie et dimensions du modèle numérique

### II.7.1 Cas n°1 : Injection périodique avec le PE 2042E

On considèrera ici un essai d'injection périodique de polyéthylène 2042E comprenant cinq cycles de période  $10s$ . Ces cycles mécaniques sont imposés via une évolution périodique de la pression du polymère en entrée du canal. Elle est représentée Figure II-10 et est uniforme dans la section d'entrée du canal. Les cycles d'injection considérés sont composés de trois étapes :  $3s$  de montée en pression pour atteindre un maximum de  $50MPa$ ,  $4s$  de maintien à cette pression et  $3s$  où elle redescend jusqu'à son état initial. On peut noter que le raccordement entre chaque étape a été réalisé de sorte qu'il n'y ait pas de discontinuité de la dérivée.

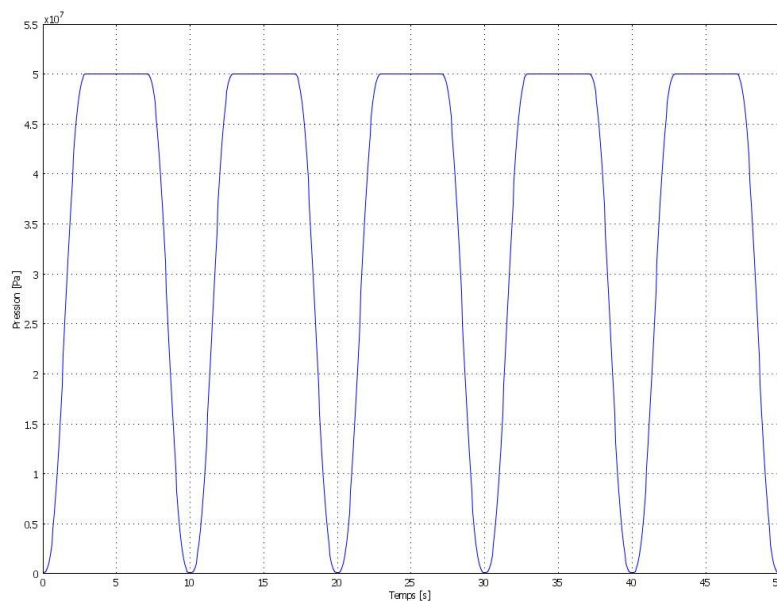


Figure II-10 : Evolution de la pression d'entrée du polymère  $\bar{P}_0(t)$  dans le canal

## Chapitre II – Méthode et simulation

La température est imposée égale à  $200^{\circ}\text{C}$  sur les frontières  $\Gamma_{i,i \in \{5,6,7\}}$  de l'acier du cylindre. De même, la température d'entrée du polymère est fixée et égale à  $200^{\circ}\text{C}$ .

Sur le plan énergétique, on s'intéresse d'abord à l'évolution du terme source de dissipation visqueuse (Figure II-11)  $Q_0 = \eta_{PE} \cdot \dot{\gamma}^2$ . Pour cela, il est nécessaire de connaître la distribution spatio-temporelle du taux de cisaillement et son ordre de grandeur et donc celle du champ de vitesse.

Du point de vue mécanique, on représente, Figure II-12, l'évolution de la vitesse de cisaillement suivant  $r$  à  $z = 18\text{cm}$ , on remarque qu'elle augmente suivant le rayon du canal avant d'atteindre un maximum, vers  $1,9\text{mm}$ , d'environ  $4300\text{s}^{-1}$  et diminue de  $r = 1,9\text{mm}$  à  $2\text{mm}$  pour atteindre une valeur d'environ  $3500\text{s}^{-1}$  en paroi. En effet, on constate Figure II-13 que la courbe, représentant le profil de vitesse suivant  $r$ , change légèrement de pente vers  $r = 1,9\text{mm}$  et admet un maximum d'amplitude au centre du canal égal à environ  $2,3\text{m.s}^{-1}$ .

Au maximum de pression, le polymère est donc fortement cisailé et ceci provoque ainsi des échauffements importants dans le fluide et dans l'acier du cylindre. Sur la Figure II-14, nous visualisons la viscosité du polymère en fonction du rayon du cylindre et on constate bien sa forte décroissance à mesure que les taux de cisaillement augmentent. On précise que sur les figures II-11 à II-14, les courbes sont tracées toutes les  $5\text{s}$  de  $0$  à  $50\text{s}$ . Or, les temps  $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50\text{s}$  correspondent au temps où la pression est nulle, car ils traduisent les temps de début ou de fin de cycle, ainsi les taux de cisaillement, la vitesse et la dissipation visqueuse sont également nuls à ces temps-là. Par contre, à ces mêmes instants, le polymère n'étant pas cisailé, la viscosité est égale à la valeur du plateau newtonien sur tout le rayon du canal (Figure II-14).

Finalement, on montre bien que l'évolution du terme source possède la même forme que celle du taux de cisaillement. Par ailleurs, on peut souligner que la puissance volumique dissipée atteint un maximum de l'ordre de  $10^9\text{W.m}^{-3}$ .

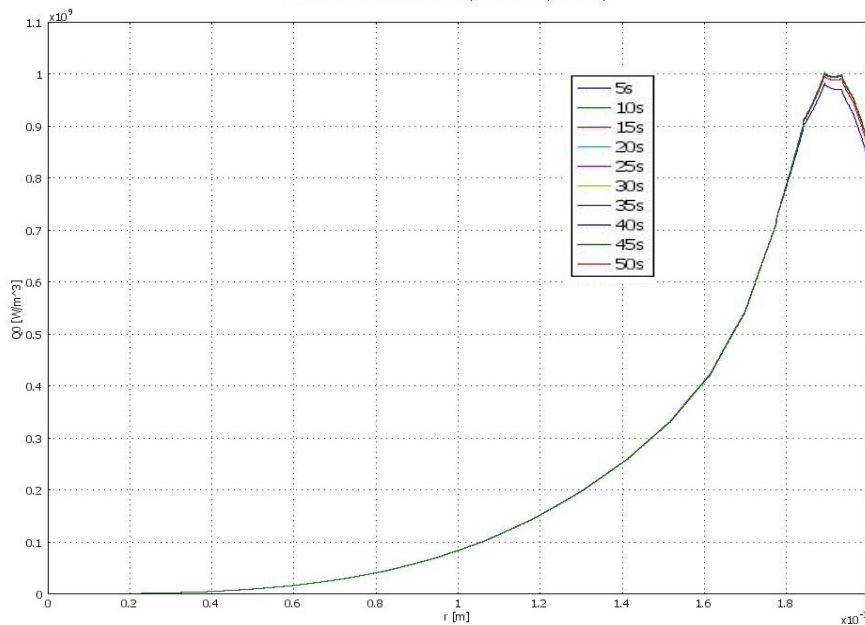


Figure II-11 : Évolution du terme source de dissipation visqueuse à  $z = 18cm$  en fonction du rayon du canal pour différents pas de temps (de 0 à 50s par pas de 5s )

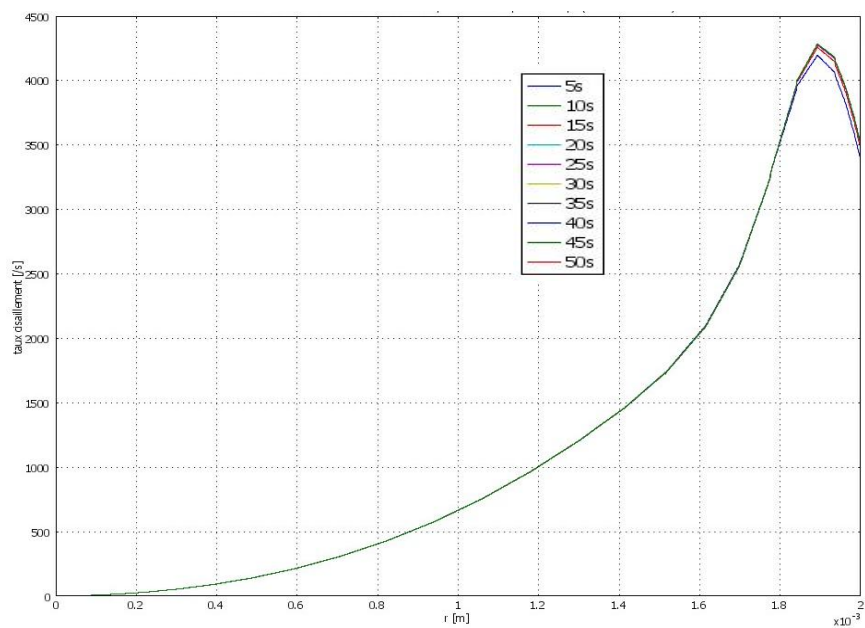


Figure II-12 : Évolution de la vitesse de cisaillement à  $z = 18cm$  en fonction du rayon du canal pour différents pas de temps (de 0 à 50s par pas de 5s )

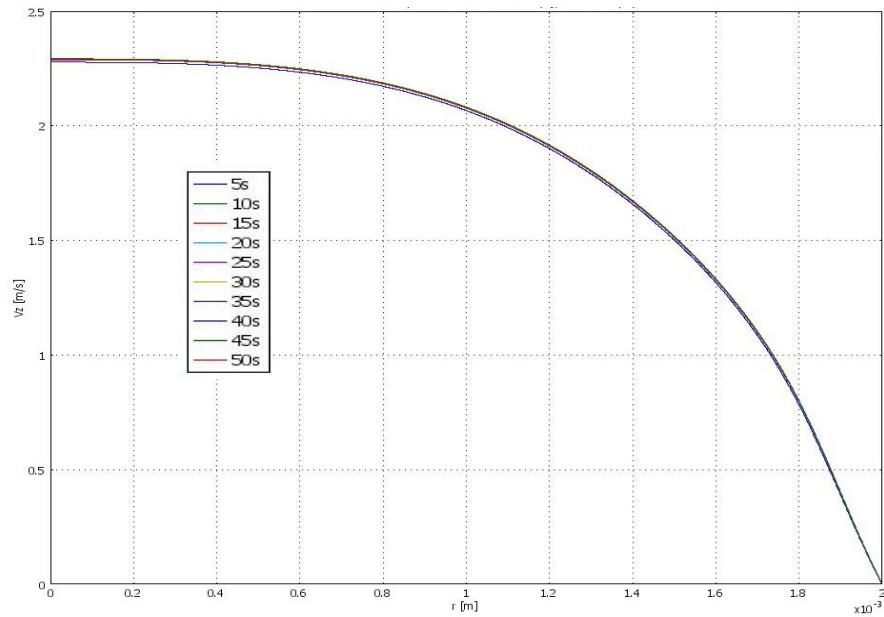


Figure II-13 : Profil de vitesse à  $z = 18\text{cm}$  en fonction du rayon du canal pour différents pas de temps (de 0 à 50s par pas de 5s )

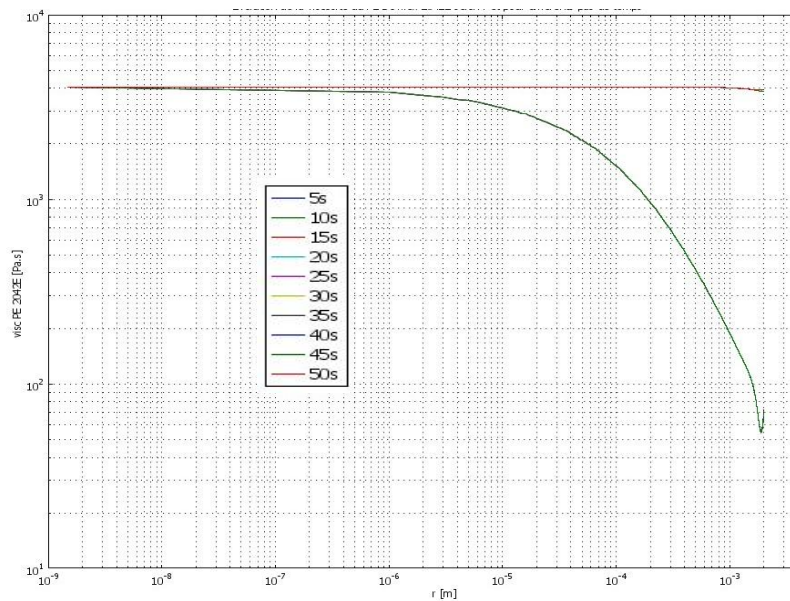


Figure II-14 : Évolution de la viscosité du PE 2042E à  $z = 18\text{cm}$  en fonction du rayon du canal pour différents pas de temps (de 0 à 50s par pas de 5s )

On voit bien que le maximum de dissipation visqueuse à  $z = 18\text{cm}$  se situe proche de l'interface polymère métal, i-e à  $r = 1,9\text{mm}$ , et par conséquent, les maxima en température, à cette même ordonnée, le sont également. La Figure II-15, qui permet de visualiser les profils de température dans le polymère à  $z = 18\text{cm}$ , montre bien que l'échauffement maximal se situe également à  $r = 1,9\text{mm}$ . Il est d'ailleurs d'environ  $90^\circ\text{C}$  par rapport au centre du canal et à l'état initial, ce qui est très conséquent pour un polymère. Evidemment, il s'agit d'un calcul et en

## Chapitre II – Méthode et simulation

pratique, il faudrait vérifier la validité des variations des paramètres thermophysiques dans cette plage de température pour valider ces résultats. On précise que ces échauffements importants ont lieu lorsque la pression est à  $50\text{MPa}$  donc à débit matière maximum dans notre cycle de pression. On remarque en outre qu'à cette vitesse, le fluide ne s'échauffe presque pas au centre du canal car l'écoulement est trop rapide pour permettre à la chaleur de se propager par conduction dans le polymère. On compare les profils de température précédents avec ceux calculés à  $z = 10\text{cm}$  (Figure II-16). On constate alors que le pic de température à débit maximum se situe maintenant à  $r = 1,8\text{mm}$ .

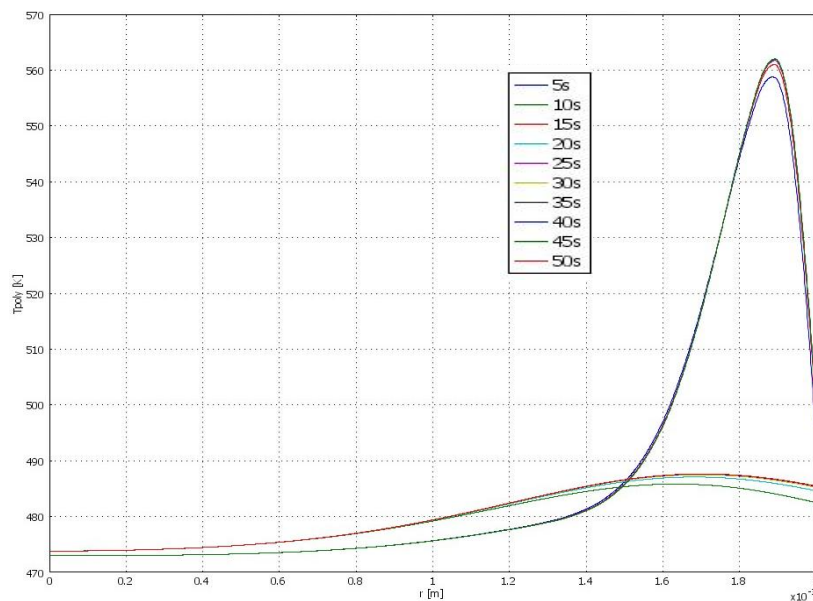


Figure II-15 : Profils de températures dans le polymère suivant  $r$  à  $z = 18\text{cm}$  pour différents pas de temps (de 0 à 50s par pas de 5s )

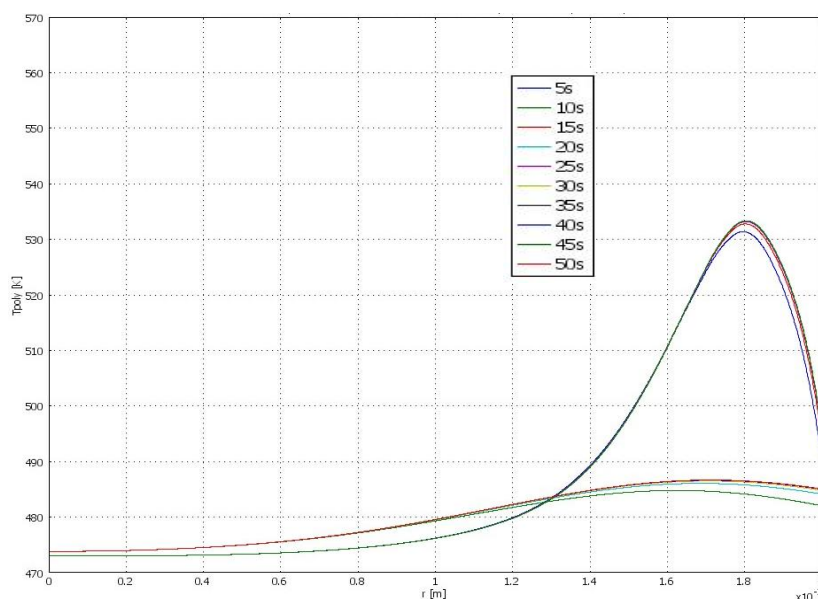


Figure II-16 : Profils de températures dans le polymère suivant  $r$  à  $z = 10\text{cm}$  pour différents pas de temps (de 0 à 50s par pas de 5s )

## Chapitre II – Méthode et simulation

Figure II-17, on décrit les évolutions temporelles de température en 4 points situés à  $r = 1,8\text{mm}$  et à  $z = 5\text{cm}, 10\text{cm}, 15\text{cm}, 18\text{cm}$ , dans le but d'avoir une idée sur l'évolution des échauffements dans le polymère suivant  $z$ . On constate alors que plus on avance dans le canal plus le polymère s'échauffe et que l'on a des échauffements de plus de  $70^\circ\text{C}$  au point ( $r = 1,8\text{mm}, z = 18\text{cm}$ ) entre l'état initial et l'état où  $p = 50\text{MPa}$ . En effet, comme l'écoulement est assez rapide (vitesse de fluide de l'ordre de  $2,3\text{m.s}^{-1}$ ), l'énergie produite par dissipation visqueuse s'accumule dans le fluide au fur et à mesure qu'il avance dans le canal.

Comme cette énergie est importante, les échauffements sont également visualisables dans l'acier du cylindre (Figure II-18). On observe que dans l'acier les échauffements avoisinent les  $25^\circ\text{C}$  au point ( $r = 2,5\text{mm}, z = 18\text{cm}$ ) entre l'état initial et la cinquième période. On remarque aussi que l'évolution de la température est la même pour tout les cycles dans le polymère (Figure II-17) mais pas dans l'acier (Figure II-18). En effet, dans le polymère, l'évolution de la température dans un cycle se stabilise dès le premier alors que dans l'acier, cette stabilisation a lieu à partir du troisième cycle. Enfin, on constate, qu'à la fin de chaque cycle ( $t = 0, 10, 20, 30, 40\text{s}$ ), les températures dans le polymère et dans l'acier continuent légèrement à diminuer durant quelques secondes (à peine  $3\text{s}$ ) avant d'augmenter de nouveau avec le cycle suivant.

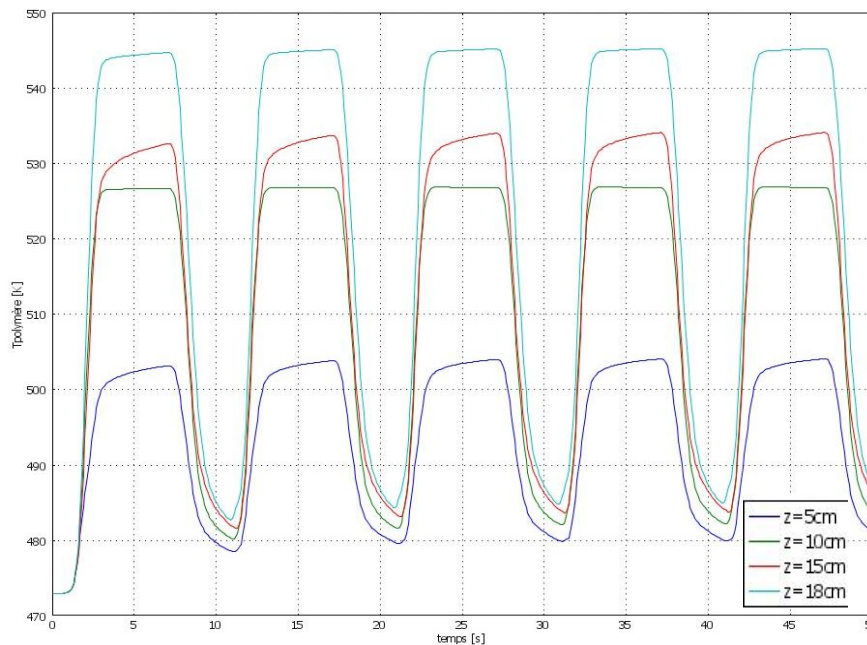


Figure II-17 : Évolution de températures dans le polymère en fonction du temps à  $r = 1,8\text{mm}$  et  $z = 5,10,15,18\text{cm}$



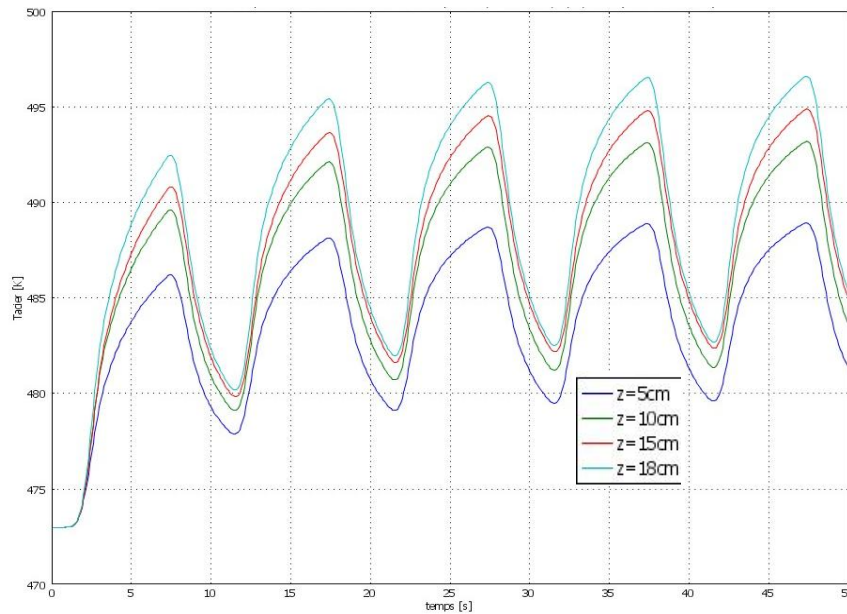


Figure II-18 : Évolution de températures dans l'acier en fonction du temps à  $r = 2,5\text{mm}$  et  $z = 5,10,15,18\text{cm}$

Afin de fixer les idées sur la distribution du champ thermique dans la buse, voici Figure II-19, le champ de température dans le polymère et dans l'acier à  $t_f = 50\text{s}$ . On remarque bien que les échauffements les plus importants se situent autour de l'interface polymère métal et proche de la sortie du canal. On précise juste que les conditions aux limites imposées sur les frontières dans l'acier, température constante égale à  $200^\circ\text{C}$ , refroidissent l'acier en bout de cylindre et par conséquent, les échauffements maximums sont situés juste avant les frontières. A  $t = t_f$ , la température maximale est dans le polymère et vaut presque  $215^\circ\text{C}$  et  $213^\circ\text{C}$  dans l'acier soit des échauffements respectifs d'environ  $15^\circ\text{C}$  et  $13^\circ\text{C}$ . Ceci est dû à l'inertie thermique de la buse et en l'absence de nouveaux cycles, ces températures redescendront vers la température de régulation de la buse imposée par les conditions aux limites, soit  $200^\circ\text{C}$ .

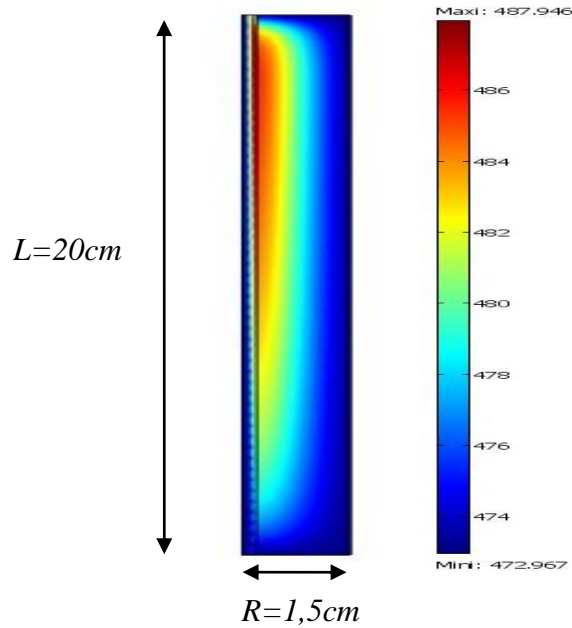


Figure II-19 : Visualisation du champ thermique dans le canal et l'acier du cylindre à  $t = t_f$

### II.7.2 Cas n°2 : Injection périodique avec le PP HV252

De même que précédemment, on développera ici les résultats d'un essai d'injection périodique comprenant 5 cycles de 10s chacun, mais cette fois-ci avec du polypropylène HV252. Les cycles d'injection considérés sont les mêmes que dans le cas n°1, c'est-à-dire 3s de montée en pression, 4s de maintien à la pression maximum et 3s de descente vers la pression initiale, à l'exception faite que la pression maximum est de  $20MPa$  alors qu'elle était de  $50MPa$  dans le cas précédent. Ce choix a été motivé pour prendre en compte la différence de viscosité des polymères et obtenir des débits comparables. Ceci va influencer fortement sur les échauffements dans le polymère et donc dans l'acier cylindre.

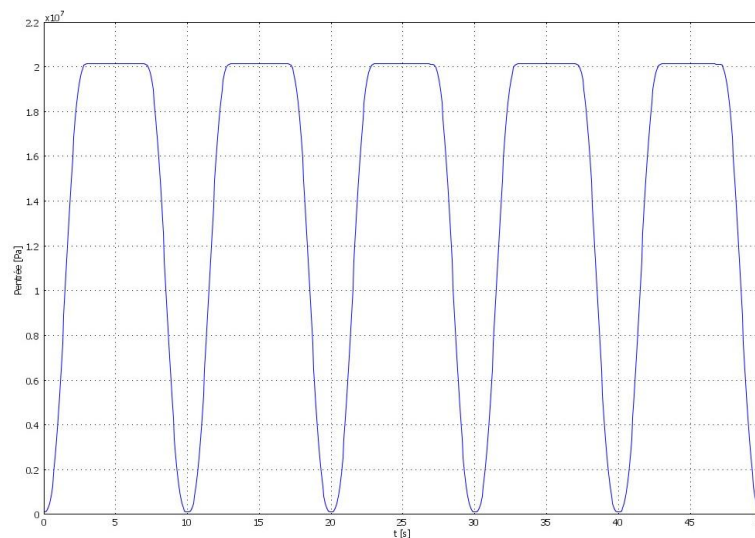


Figure II-20 : Evolution de la pression d'entrée du polymère  $\bar{P}_0(t)$  dans le canal

## Chapitre II – Méthode et simulation

En comparant la Figure II-12 avec la Figure II-21, on constate que le maximum de taux de cisaillement, au même point ( $r = 1,9mm, z = 18cm$ ), passe de  $4300s^{-1}$  à environ  $1400s^{-1}$ . De même, en comparant, les profils de vitesse Figure II-13 et Figure II-22, on constate que l'on a respectivement un maximum de  $2,3m.s^{-1}$  et de  $0,7m.s^{-1}$ .

Les échauffements observés (Figure II-23 et Figure II-24) sont nettement plus faibles dans ce cas. En effet, le polypropylène est moins visqueux que le polyéthylène et la pression imposée est également moins élevée. Au lieu des  $70^{\circ}C$  précédent au point ( $r = 1,8mm, z = 18cm$ ), on a maintenant seulement  $30^{\circ}C$  d'échauffement dans le polymère et celui dans l'acier au point ( $r = 2,5mm, z = 18cm$ ) passe de  $25^{\circ}C$  à  $7^{\circ}C$ .

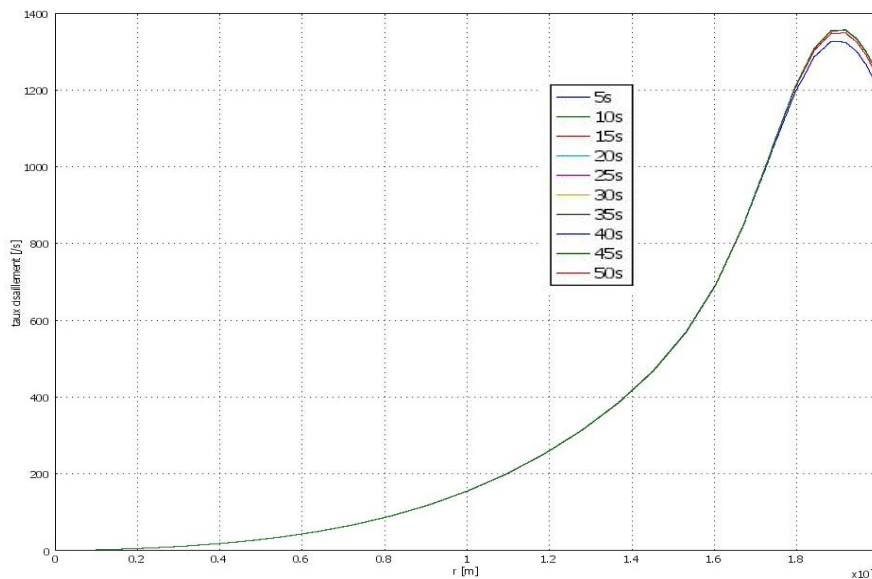


Figure II-21 : Évolution de la vitesse de cisaillement à  $z = 18cm$  en fonction du rayon du canal pour différents pas de temps (de 0 à 50s par pas de 5s )

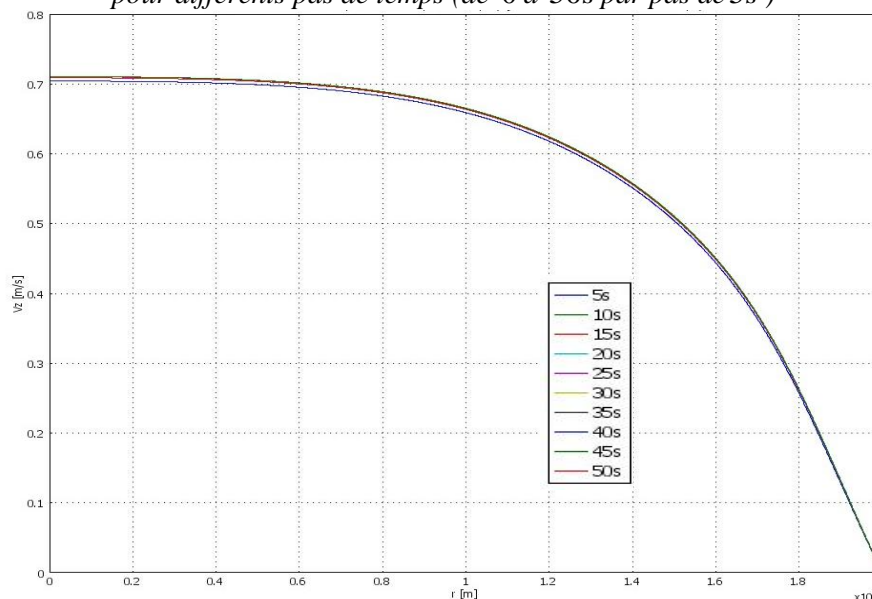


Figure II-22 : Profil de vitesse à  $z = 18cm$  en fonction du rayon du canal pour différents pas de temps (de 0 à 50s par pas de 5s )

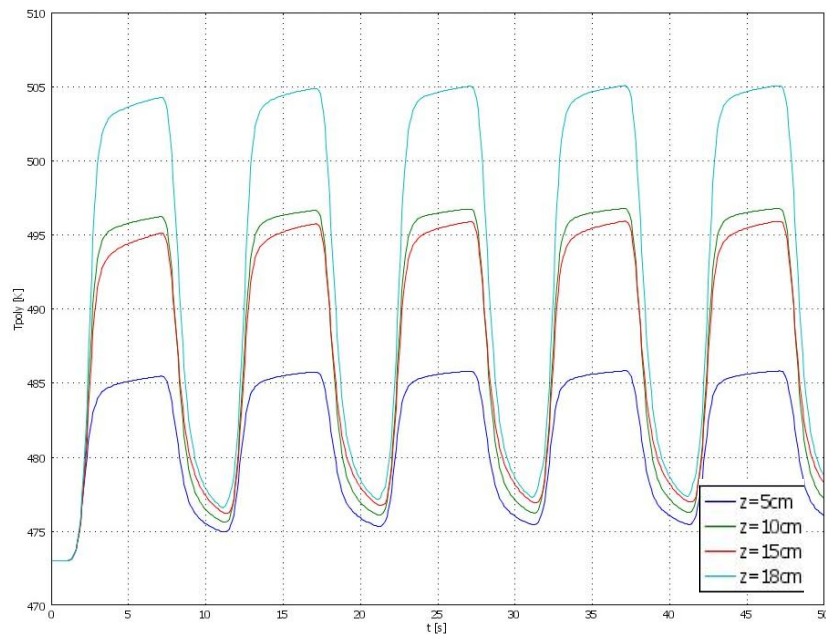


Figure II-23 : Évolution de températures dans le polymère en fonction du temps à  $r = 1,8\text{mm}$  et  $z = 5,10,15,18\text{cm}$

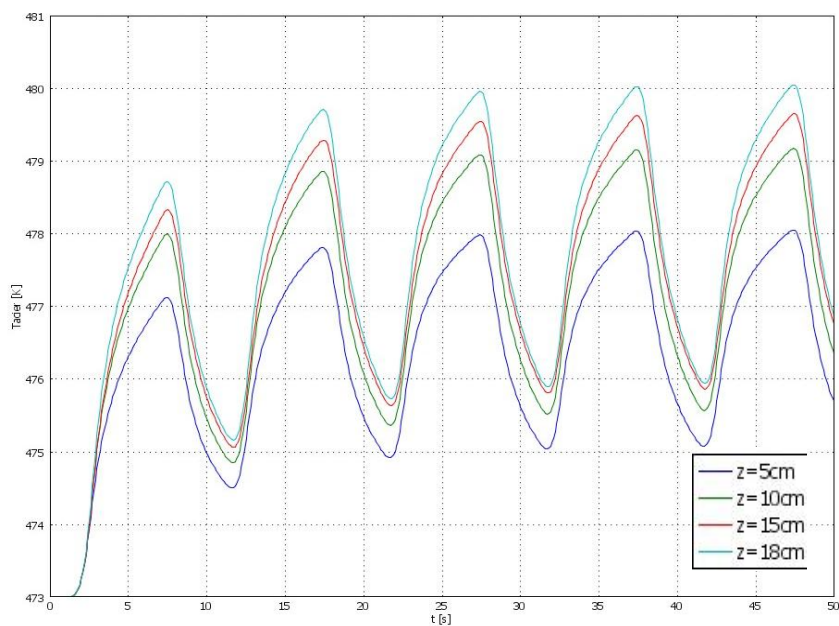


Figure II-24 : Évolution de températures dans l'acier en fonction du temps à  $r = 2,5\text{mm}$  et  $z = 5,10,15,18\text{cm}$

### II.7.3 Cas n°3 : Comparaison entre deux différents cycles d'injections périodiques pour le PP HV252

Dans ce paragraphe, nous allons illustrer l'influence du cycle de pression sur les échauffements et les refroidissements (amplitude et vitesse) observés dans la paroi métallique du cylindre.

## Chapitre II – Méthode et simulation

On a considéré deux cycles d'injection de 15s avec des temps de montée, de stabilisation et de descente en pression différents (Figure II-25, Tableau II-3). Le maximum de pression atteint dans les deux cas vaut  $30MPa$ .

Phase	montée (M)	stabilisation (S)	descente (D)
Cycle A (Figure II-25a)	3s	4s	8s
Cycle B (Figure II-25b)	5s	5s	5s

Tableau II-3 : Temps des cycles de pression d'entrée du polymère dans le canal

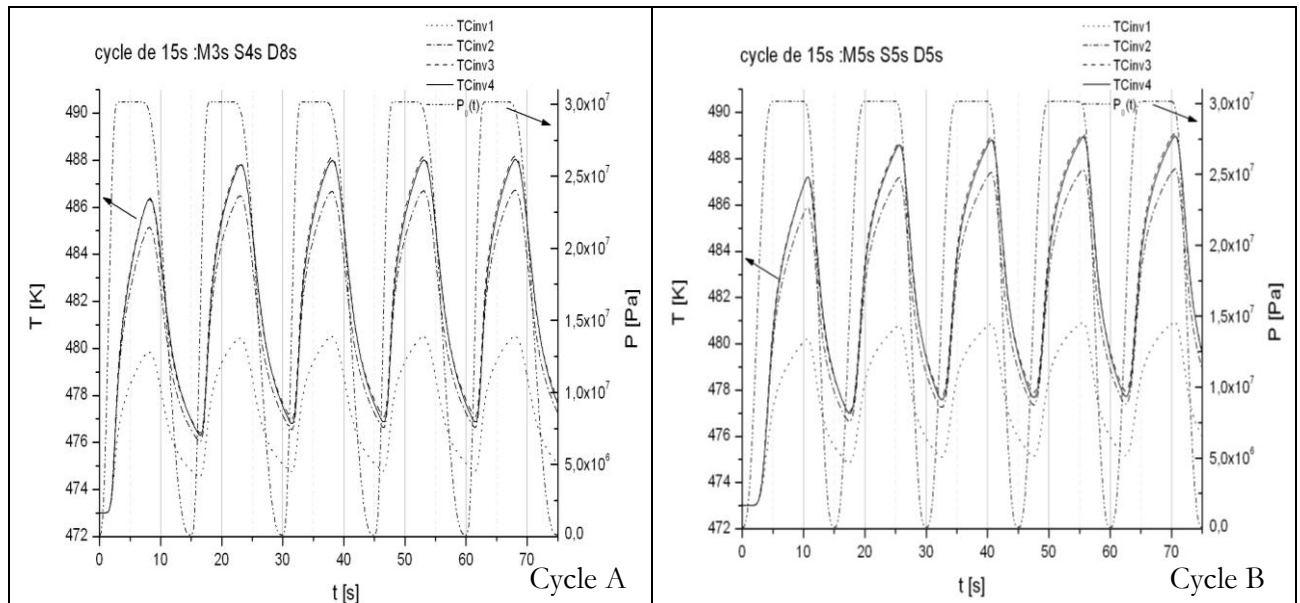


Figure II-25 : Évolution de la température dans l'acier en fonction du temps à  $r = 2,5mm$  et  $z = 5,10,15,18cm$  - Visualisation de deux différents cycles -

On observe que les cycles de pression pilotent les oscillations de température dans la paroi. Dans le cycle B, les maxima des températures sont plus élevés que dans le cycle A, on atteint respectivement  $480,5K$  et  $478,5K$  pour le thermocouple  $T_4^{inv}$ . En effet, cette observation est cohérente avec le fait que, dans le cycle B, le débit matière moyen est supérieur et en conséquence l'énergie moyenne dissipée. Une analyse du champ de vitesse permettrait de quantifier la différence d'énergie dissipée en moyenne sur une période. Par ailleurs, si l'écoulement est trop rapide, la chaleur n'a pas le temps de se dissiper dans l'acier du cylindre, on parle alors d'écoulement en régime adiabatique (nombre de Cameron  $Ca < 10^{-2}$ ).

## II.8 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations du problème physique ont été présentées ainsi que les paramètres physiques des matériaux. Nous avons ensuite testé numériquement ce modèle dans

## *Chapitre II – Méthode et simulation*

différentes configurations afin de comprendre les mécanismes physiques mis en jeu, en considérant une configuration expérimentale simplifiée. Cette première approche sera utile, dans le chapitre suivant, au dimensionnement du dispositif expérimental (buse instrumentée) qui sera testé sur une extrudeuse et une presse à injecter.

Les résultats numériques obtenus nous confortent dans la possibilité d'observer des échauffements significatifs dans la paroi métallique du canal en vu de l'estimation du champ thermique dans le polymère en sortie de canal. Même à seulement  $30MPa$  de pression dans le polymère en amont, les échauffements dans l'acier sont assez conséquents, de l'ordre de  $15K$  pour le polypropylène. De plus, on a vu combien les échauffements du PE 2042E ou du PP HV252 sont importants avec ce type de géométrie et comment ils fluctuent selon le cycle de pression considéré.



## **Chapitre III – Conception d'une buse instrumentée**

### **Résumé**

*Cette partie a pour but de développer les choix qui nous ont amenés à la réalisation de l'appareil de mesure. Tout d'abord, nous décrivons succinctement l'ancien dispositif expérimental consistant à mesurer des échauffements dans l'acier dus à la dissipation visqueuse du polymère et qui nous a servi à penser différemment le notre. Ensuite, nous montrerons les limitations de cet outillage pour expliciter les choix des dimensions de la nouvelle buse instrumentée. L'instrumentation du nouveau dispositif expérimental est aussi décrite.*



### III.1 Expérience sur le dispositif précédent

L'appareil expérimental utilisé par M. Karkri [KAR04] et C. Pujos [PUJ06] dans leur thèse est une filière en acier de section parallélépipédique et instrumentée en thermocouples et en capteurs de pression. Ses dimensions sont les suivantes (Figure III-1) :  $L = 242\text{mm}$  de long,  $l = 100\text{mm}$  de large et  $H = 60\text{mm}$  de profondeur. Elle comprend notamment un canal rectangulaire de section constante de longueur  $200\text{mm}$ , une chaufferette munie d'un fil chauffant placée sur le dessus de la filière, un isolant disposé latéralement de conductivité thermique égal à  $0,3\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et un adaptateur convergent situé en début de filière. Ce choix de filière plate a été fortement influencé par la facilité d'y disposer l'instrumentation. En effet, l'avantage de cette géométrie est que les capteurs de pression peuvent être positionnés précisément à l'interface polymère écoulement et n'importe où le long du canal (Figure III-2).

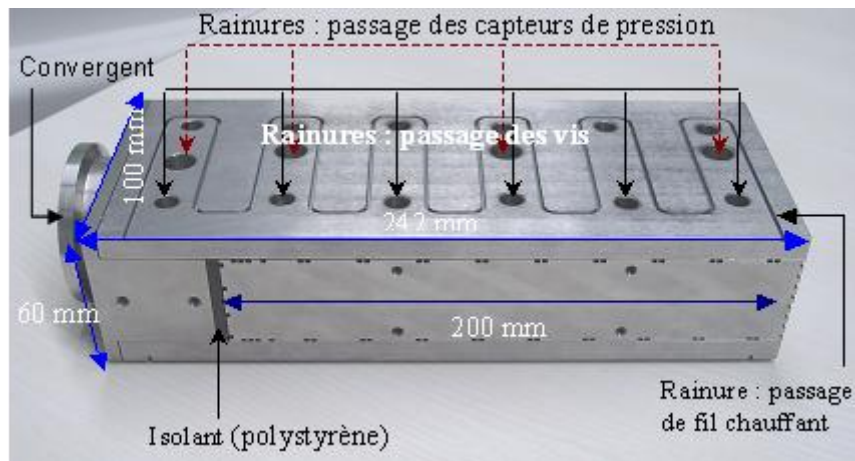


Figure III-1 : Photo de la filière instrumentée à section rectangulaire

La conception de cet outillage, en assemblage de plaques, a montré ses limites en tenue mécanique. En effet, lors des essais sur cette filière, une augmentation importante des débits, donc des pressions, entraînait des fuites de matière aux plans de joint. L'outillage ne supportait pas des pertes de charge dans le canal supérieures à environ  $13\text{MPa}$ . Cette limitation a empêché d'explorer les phénomènes à hautes pressions, donc à vitesses de cisaillement élevées (i-e à dissipation visqueuse élevée). Pour cette raison, nous avons envisagé de réaliser un autre outillage adapté à la mesure sur presse à injecter.

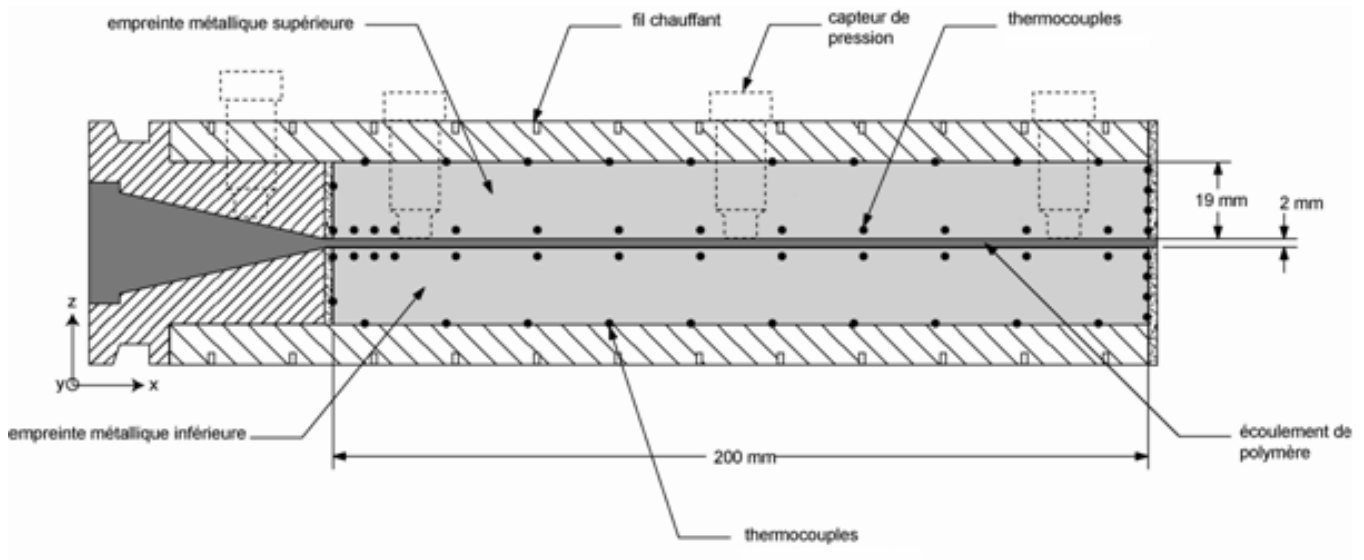


Figure III-2 : Coupe longitudinale de la filière

## III.2 Description du nouvel outillage

Dans cette partie, nous allons expliciter les différents éléments qui composent la nouvelle buse. Avec la nouvelle géométrie, nous le verrons, la tenue mécanique est bien meilleure et de hauts niveaux de pression peuvent alors être atteints.

### III.2.1 Description d'ensemble de la buse

La Figure III-3 montre le dispositif expérimental schématisé. Le polymère fondu sort de la vis de plastification (injection ou extrusion) et entre dans le dispositif par le convergent a). En fin de convergent, la section d'écoulement devient plane, b), pour permettre la mesure de pression, c). Après un second convergent, d), l'écoulement devient cylindrique et reste de diamètre constant ( $4\text{mm}$ ) sur toute la longueur du canal ( $198\text{mm}$ ), g). La régulation thermique du dispositif est assurée par deux chaufferettes dans les sections droites en entrée et en sortie, e) et f), et par deux fils chauffants enroulés autour du canal, h), l'ensemble du dispositif est refermé par deux demi-coquilles en aluminium, i). Quatre thermocouples instrumentés dans la paroi métallique permettent de mesurer des températures proches de l'écoulement, k). Quatre autres permettent de mesurer des températures plus au loin, j). Enfin, dans certains cas, un coude dévie l'axe de l'écoulement, ce qui permet d'installer un thermocouple rigide ( $T_{mat\_sortie}$  dans chapitre IV) de faible diamètre dans l'axe de la partie droite du canal servant à obtenir une information sur la température au sein de l'écoulement en sortie de canal, l).

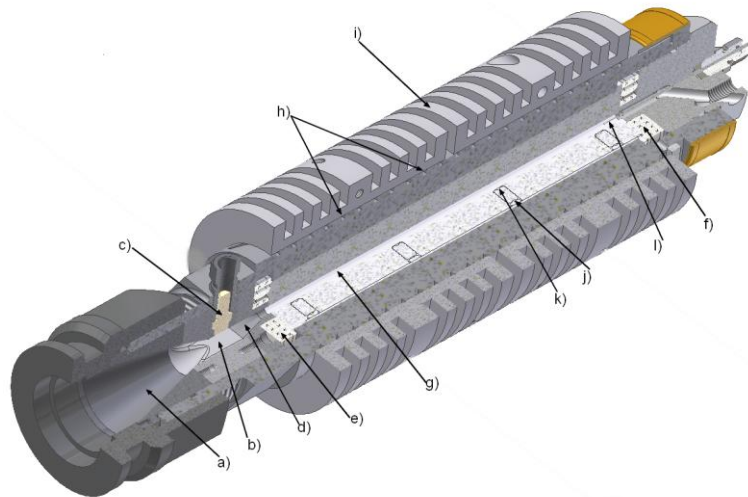


Figure III-3 : Coupe  $\frac{3}{4}$  de la buse à géométrie cylindrique

Le canal a été dimensionné analytiquement et numériquement (longueur et diamètre) dans le but d'y obtenir des variations de pression et des échauffements significatifs et mesurables. Le choix des dimensions est justifié plus loin. La Figure III-4 représente une vue d'ensemble éclatée de la buse afin de mieux visualiser les différentes pièces qui la composent.

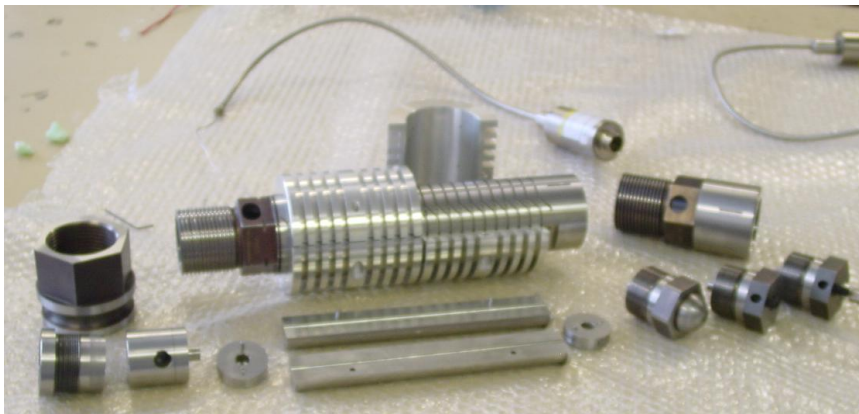


Figure III-4 : Vue d'ensemble des éléments de la buse instrumentée

## III.2.2 Détails des éléments principaux

### III.2.2.1 Les deux demi-cylindres

Notamment pour une bonne tenue en pression, nous avons opté pour une buse à géométrie cylindrique. Le canal est donc de section circulaire (Figure III-5). Pour permettre l'instrumentation des thermocouples de mesures le canal sera composé de deux demi-cylindres (Figure III-6). Ces derniers sont ensuite frettés dans un cylindre monobloc (que l'on appellera le fourreau), dont le diamètre intérieur correspond au diamètre extérieur du canal (Figure III-7), afin de maintenir la bonne tenue mécanique du système. Nous avons préféré fretter le cylindre dans le

### *Chapitre III – Conception d’une buse instrumentée*

fourreau plutôt que d’utiliser des vis de serrage pour rassembler les deux demi-cylindres car le perçage de trous supplémentaires aurait complexifié l’évaluation du champ thermique dans l’acier du cylindre.

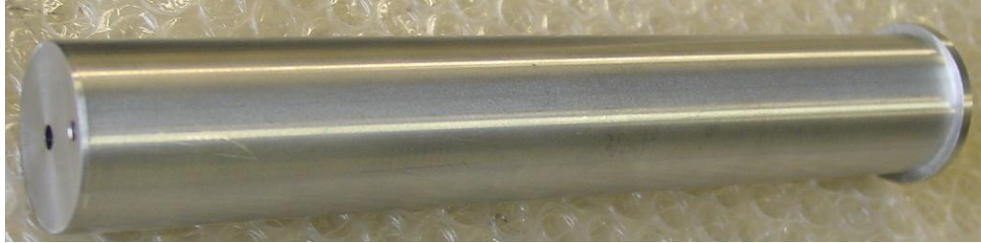


Figure III-5 : *Les deux demi-cylindres juxtaposés*

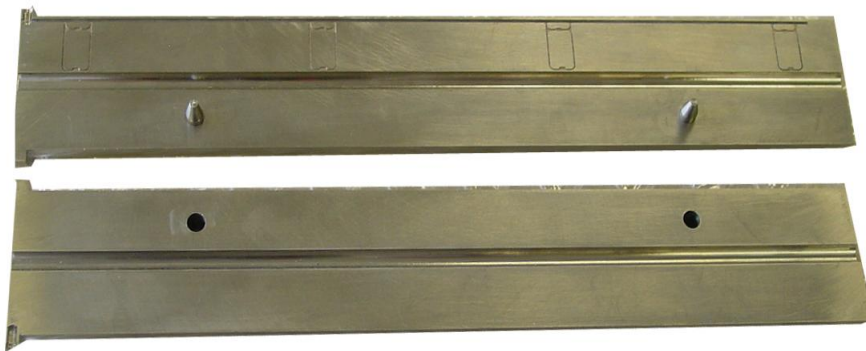


Figure III-6 : *Les deux demi-cylindres séparés*

#### ***III.2.2.2 Le fourreau***

Le fourreau est un cylindre également creux, non scindé en deux, et de rayon interne équivalent au rayon extérieur des deux demi cylindres afin qu’il puisse contenir ces derniers et les maintenir mécaniquement. Il est possible d’assembler deux pièces en usinant le rayon intérieur de la première (contenant) à une dimension légèrement inférieure au rayon extérieur de la seconde (contenu). Il s’agit donc de l’emmanchement cylindrique forcé. L’assemblage peut être réalisé à la presse ou bien en chauffant la partie externe et/ou en refroidissant la partie interne avant la mise en place. On génère ainsi entre les deux pièces une pression de contact appelée pression de frettage.

Le fourreau est rainuré pour permettre d’y disposer un fil chauffant pour le réguler. Il est représenté Figure III-7.

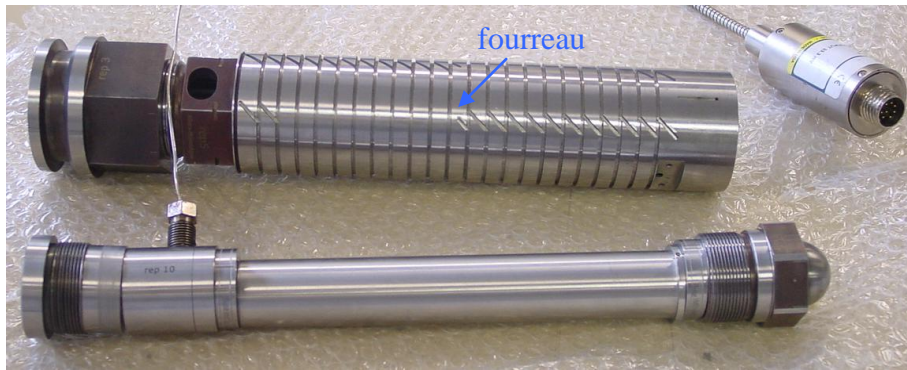


Figure III-7 : Photo du fourreau avec l'adaptateur

La Figure III-8 présente une coupe transversale de la buse. Pour résumer, les deux demi cylindres, a) et b), sont assemblés et frettés dans le fourreau c) qui lui-même est entouré des deux demi coquilles d) et e).

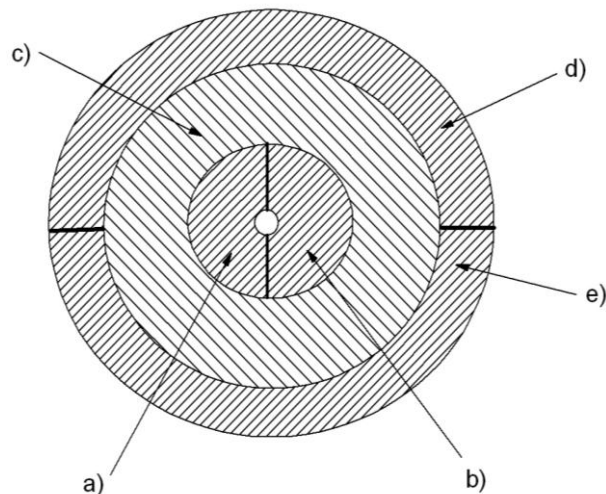


Figure III-8 : Coupe transversale du dispositif

### III.2.2.3 Les différents nez de buse

Afin de diversifier les types de mesure et d'application de la buse instrumentée, nous avons conçu deux différents nez de buse. Le premier (Figure III-9a) correspond au nez de buse servant pour l'injection. Le second (Figure III-9b) est muni d'un thermocouple de diamètre  $200\mu\text{m}$  qui est positionné au centre de l'écoulement lorsqu'il est au repos. Ce thermocouple est un indicateur de la température matière. De plus, ce nez possède une ouverture latérale pour faire sortir le polymère avec une vis de contre pression qui permet d'augmenter les pertes de charges dans le cylindre donc la pression en amont.



Figure III-9 : a) Nez de buse non instrumenté servant pour l'injection et  
b) instrumenté avec un thermocouple

### III.3 Instrumentation

La buse a été conçue afin d'obtenir des échauffements conséquents dans l'acier du canal et d'avoir une bonne tenue mécanique pour pouvoir aller à des niveaux de pression élevés. En perspective de reconstituer un profil de température par méthodes inverses, il nous faut des mesures de température dans l'acier du cylindre. De plus, afin de pouvoir simuler ce procédé qui met en œuvre un couplage thermomécanique, nous avons également besoin d'une mesure de pression permettant d'obtenir des informations sur la cinétique de l'écoulement. Dans ce paragraphe, nous allons expliquer le choix des emplacements des sites instrumentés.

#### III.3.1 Zones de chauffe et régulation

Les travaux précédents ont montré que des erreurs de modèle peuvent être issues d'éventuelles pertes thermiques. En effet, il y avait des puits de chaleur où les flux sortant de la buse étaient assez conséquents. Plus précisément, les pertes de chaleur étaient plus importantes aux deux extrémités de la filière faute de régulation thermique à ces endroits. Seul un isolant disposé latéralement permettait d'éviter les déperditions de chaleur sur les côtés de la filière ainsi qu'une plaque munie d'un fils chauffant, disposée sur le dessus. Par conséquent, afin d'éviter le plus possible les pertes de chaleur dans la buse et donc d'homogénéiser son champ thermique, des chaufferettes ont été placées aux extrémités, ainsi qu'un fils chauffant enroulé autour du fourreau du cylindre contenant l'instrumentation des thermocouples. La buse est donc régulée en

### Chapitre III – Conception d'une buse instrumentée

température grâce à des fils thermocoax de diamètre  $2\text{mm}$  disposés soit autour du fourreau (Figure III-10) soit dans les deux petites chaufferettes (Figure III-11).

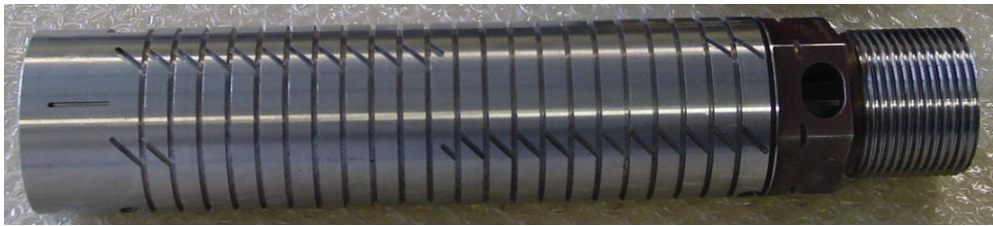


Figure III-10 : Fourreau où l'on frette les deux demi-cylindres



Figure III-11 : Chaufferettes latérales circulaires

La régulation de notre buse instrumentée se fait via quatre zones de chauffe au total. Elles sont disposées comme représentées Figure III-12 : deux chaufferettes latérales (Reg\_buse 1 et 2) et deux autres zones grâce au fils chauffant (Reg\_buse 3 et 4) fonctionnant en courant continu ( $80\text{V} - 15\text{A}$ ). Ces zones de chauffe sont alimentées par quatre alimentations distinctes (Figure III-13) et les thermocouples de régulation associés sont de type K chemisé de diamètre  $1\text{mm}$ . L'alimentation des zones de régulations 3 et 4 peut délivrer au maximum une puissance de  $700\text{W}$  et celle des régulations 1 et 2 une puissance maximale de  $500\text{W}$ . Il est à noter que la régulation par PID ne fonctionne qu'en mode chauffe (augmentation de la puissance fournie aux fils chauffants). Il n'y a donc pas de régulation en refroidissement et par conséquent la buse ne peut être refroidie qu'en stoppant l'alimentation des zones de chauffe et ainsi faire entrer en jeu l'inertie du matériau. On précise que l'on basera la qualité de notre régulation thermique sur le fait que l'écart de température entre les huit thermocouples de mesure situés dans l'acier du cylindre contenant le canal soit minimal.

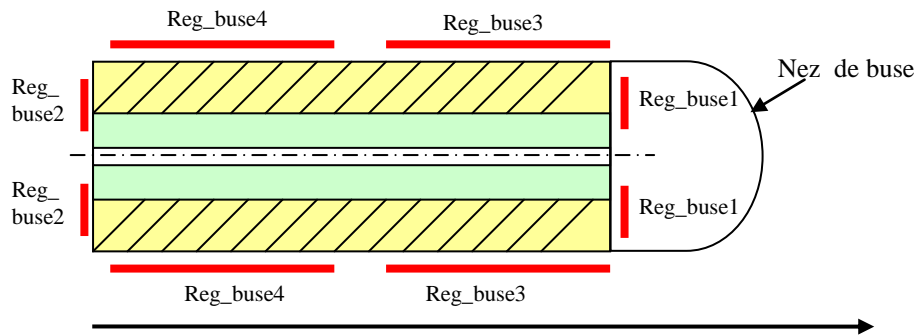


Figure III-12 : Schéma simplifié de la buse avec ses zones de chauffe



Figure III-13 : Alimentations des quatre zones de chauffe

Afin de limiter les pertes de chaleur en aval de l'écoulement, i-e au niveau des différents nez de buse, nous avons disposé un collier chauffant sur ces derniers comme on peut le voir sur la Figure III-14.

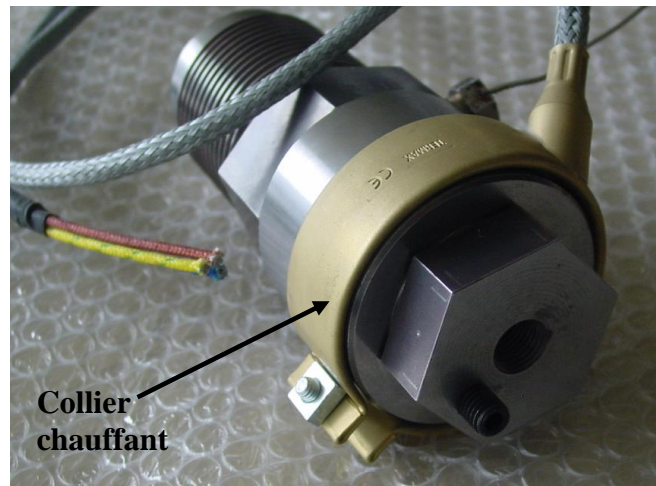


Figure III-14 : Collier chauffant



### III.3.2 Emplacements et instrumentation des thermocouples

#### III.3.2.1 Leurs emplacements

Les thermocouples utilisés pour les mesures de température dans l'acier sont de types K chromel-alumel et ont un diamètre de  $80\mu\text{m}$ . Ils sont placés dans l'acier du cylindre (Figure III-15) elles sont donc non intrusives. En effet, l'instrumentation de thermocouples dans l'épaisseur du cylindre permet de ne pas perturber l'écoulement donc de ne pas modifier les transferts de chaleur. Ces mesures indirectes restent précieuses pour l'estimation de paramètres ou de conditions aux limites du modèle car elles peuvent être sensibles à ce qui se passe dans le canal. Les thermocouples sont au nombre de huit et sont disposés en deux rangées de quatre thermocouples chacun. On décidera de placer la première rangée de thermocouples à  $500\mu\text{m}$  du bord du canal et la seconde à  $12\text{mm}$  du centre du canal. On voit donc bien que la taille du rayon du canal, que l'on justifiera par la suite, conditionnera l'emplacement de la première rangée de thermocouples tandis que la seconde est fixée au préalable. On rappelle que l'on note  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  les thermocouples qui se situent les plus proches du canal et  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$  ceux qui en sont le plus éloigné.

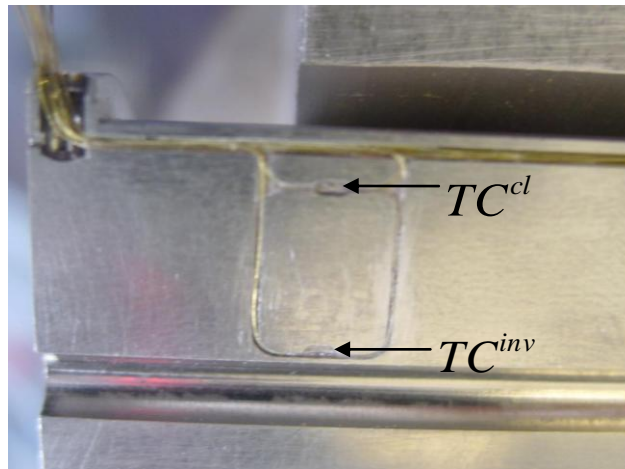


Figure III-15 : Emplacement des thermocouples par rapport au canal

#### III.3.2.2 Leur instrumentation

La mise en place des thermocouples de mesure dans l'acier du cylindre est non triviale car les petites dimensions des fils et des rainures rendent le positionnement délicat. En outre, on peut noter que les emplacements des thermocouples et des rainures sont créés par électroérosion pour une meilleure précision. Comme nous pouvons le voir sur la Figure III-16, les deux fils (chromel-alumel) de chaque thermocouple sont soudés sur le substrat (acier) dans les sites de mesure et chaque fil est fixé de part et d'autre dans des rainures à l'aide d'une colle réfractaire. Les sites où

### Chapitre III – Conception d'une buse instrumentée

sont soudés et collés les fils des thermocouples ont pour dimension  $1\text{mm}$  de long,  $0,8\text{mm}$  de large et  $0,2\text{mm}$  de profondeur. Les rainures dans lesquelles passent les thermocouples font  $0,3\text{mm}$  de large pour  $0,2\text{mm}$  de profondeur. Enfin, les seize fils de tous les thermocouples instrumentés dans l'acier se rejoignent dans une rainure plus importante (de  $0,8\text{mm}$  de large sur  $0,5\text{mm}$  de profondeur), située proche de la surface extérieure du cylindre avant de sortir en aval de l'écoulement juste avant le nez de la buse (Figure III-17).

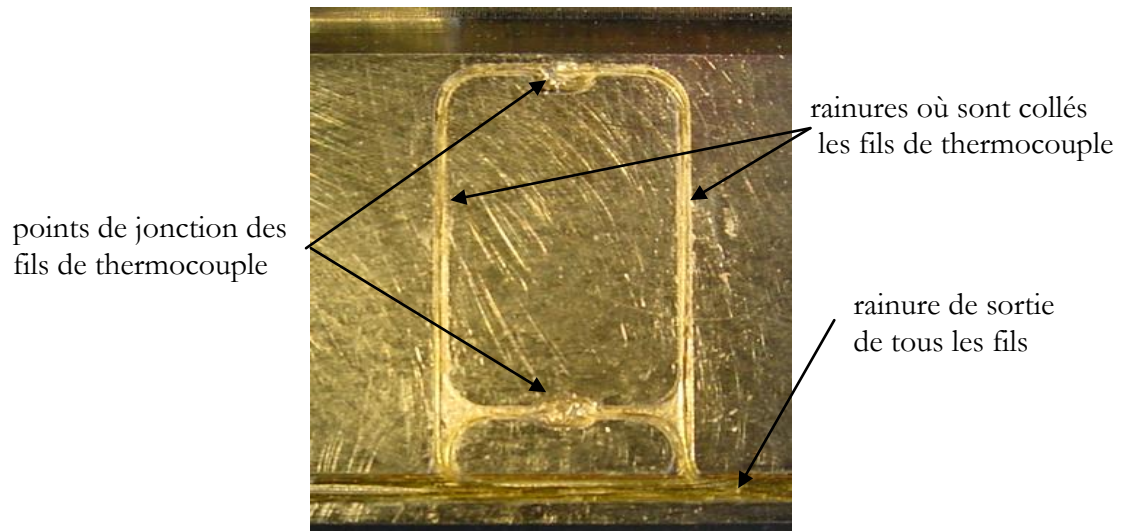


Figure III-16 : Zoom sur les rainures servant au passage des fils des thermocouples

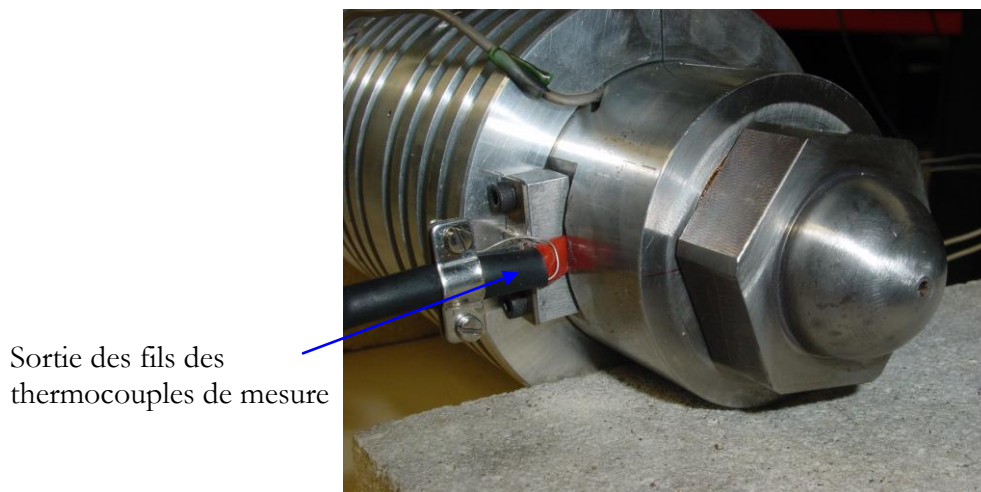


Figure III-17 : Visualisation de la sortie des fils de thermocouple

### III.3.3 Capteur de pression

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, le principal problème avec la buse à géométrie cylindrique est qu'il n'est pas possible de placer un capteur de pression dans le canal cylindrique. Pour résoudre cette difficulté, nous avons dû faire un convergent passant d'une section cylindrique à une section rectangulaire suivi d'un autre convergent jusqu'au diamètre du canal. C'est dans cette section que le capteur de pression sera installé. La Figure III-18 montre l'emplacement interne du capteur et la Figure III-19 permet de visualiser son emplacement externe. Le capteur de pression utilisé dans nos essais est un capteur DYNISCO dont la pression maximale tolérée est de  $51\text{MPa}$ .

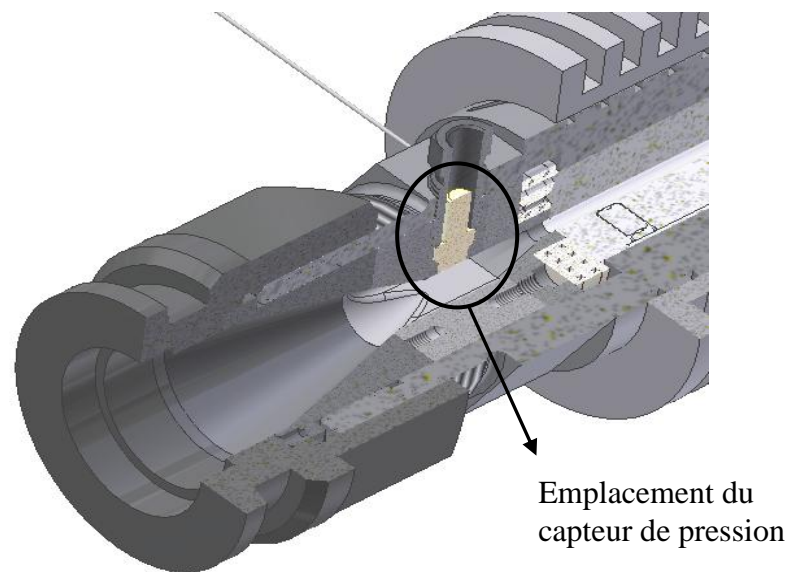


Figure III-18 : Coupe  $\frac{3}{4}$  de la buse et visualisation de l'emplacement du capteur de pression

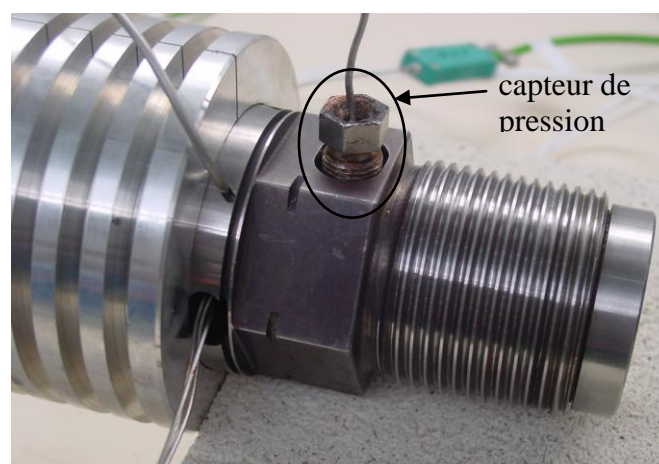


Figure III-19 : Capteur de pression instrumenté sur la buse

## III.4 Dimensionnement de la nouvelle buse instrumentée

Dans ce paragraphe, nous expliquons les dimensions choisies pour le canal.

### III.4.1 Choix des dimensions externes

#### **III.4.1.1 Longueur du canal**

La longueur maximale de la buse a été contrainte par l'encombrement de cette dernière une fois montée sur la presse à injecter. En effet, la buse doit être utilisée pour injecter dans un moule et donc doit venir parfaitement s'accoster sur ce dernier. Or, compte tenu des dimensions des nez de buse, des convergents des capteurs de pression et de l'adaptateur pour la vis de plastification, les deux demi-cylindres ne peuvent pas dépasser  $200\text{mm}$ . On précise qu'afin de peaufiner la conception et le montage des pièces internes, les demi-cylindres font exactement  $198\text{mm}$  de long. Or, nous aurions pu prendre une buse moins longue mais d'après les simulations effectuées au chapitre précédent, nous voyons bien que les échauffements dans le polymère et donc dans l'acier sont plus importants à mesure que l'on avance dans le canal. C'est pourquoi, afin d'avoir des échauffements conséquents, nous avons pris la longueur de buse maximale admissible par son encombrement sur la presse à injecter.

#### **III.4.1.2 Rayon du cylindre et du fourreau**

Deux autres dimensions sont fixées au préalable afin de ne faire l'étude que sur le rayon interne du cylindre. Les deux demi-cylindres ont un rayon extérieur  $R_{cyl}$  égal à  $1,5\text{cm}$ . Cette dimension a été fixée car elle reste dans les dimensions « classiques » des buses d'injection et car cela suffit pour visualiser des échauffements dans l'acier. Par contre, son rayon intérieur  $R_{can}$ , qui est le rayon du canal, influence les débits et par conséquent les échauffements dans le polymère.

### III.4.2 Détermination du rayon canal

Le choix du rayon du canal est important pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il conditionne, pour une pression donnée, le débit massique et par conséquent les échauffements dans le polymère.

### Chapitre III – Conception d'une buse instrumentée

Les deux demi-cylindres subissent une pression interne lorsque le fluide est en mouvement. Ce paragraphe permet donc, dans un premier temps, via une étude mécanique, de s'assurer que la pression qu'exerce le polymère sur la paroi du cylindre ne va pas le déformer plastiquement et par conséquent de laisser passer de la matière au niveau de la jonction des deux demi-cylindres. Dans un second temps, une étude thermique aura lieu concernant les échauffements dans le polymère et ceux visualisables dans l'acier du cylindre afin de fixer le rayon du canal.

#### III.4.2.1 Etude mécanique

Cette partie consistera à l'étude analytique mécanique d'un cylindre épais soumis à des pressions interne et externe en vue de dimensionner le rayon du canal.

On considère un cylindre circulaire, soumis à l'action de pressions interne et externe, suffisamment épais pour que l'hypothèse des enveloppes minces ne puisse pas être retenue. On rappelle que l'hypothèse fondamentale de la théorie des enveloppes minces est la suivante : les contraintes sont uniformes dans l'épaisseur, ce qui signifie que l'on néglige tout effet de flexion dans la paroi (l'enveloppe est assimilée à une membrane). D'autre part, les directions principales en un point sont définies dans le plan tangent par le parallèle et le méridien et la contrainte radiale est négligée devant les autres contraintes. On assimilera la pression interne du cylindre  $P_i$  à la pression qu'exerce le polymère mis en mouvement sur les parois interne du cylindre et la pression externe  $P_e$  comme étant la pression de contact après l'assemblage du cylindre et du fourreau (figure III-10).

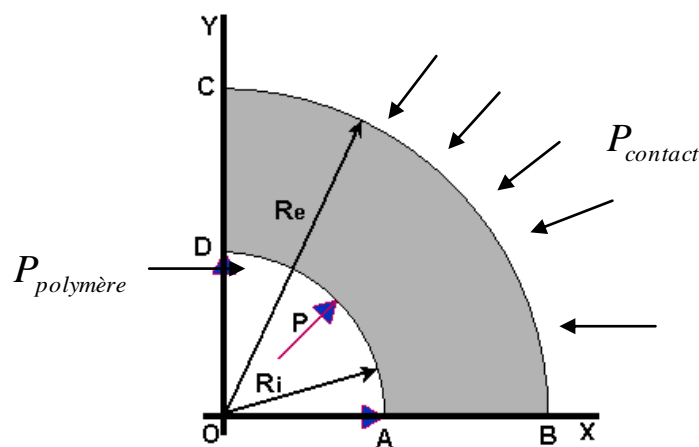


Figure III-20 : Coupe 1/4 d'un cylindre épais

### Chapitre III – Conception d'une buse instrumentée

Après le détail analytique (donné en Annexe II) de la théorie d'un cylindre épais soumis à des pressions internes et externes, on va déterminer les ordres de grandeur des contraintes que le cylindre subit ainsi que ses déformations. Pour cela, on fixe le rayon externe du cylindre  $R_e$  à  $15mm$  et on fera varier le rayon interne du cylindre  $R_i$  de  $1$  à  $3mm$  afin de voir l'influence de l'épaisseur de la paroi sur les contraintes dans l'acier. On fera les calculs de contrainte pour  $P_i = 80MPa$ . On rappelle notamment, pour le calcul du critère de Tresca, que l'acier du cylindre possède un  $Rpe = 450N.mm^{-2} = 450MPa$ . Par conséquent, pour que ce critère soit respecté, il faut que  $\tau_{max} \leq 225MPa$ .

$R_i$	$(\sigma_\theta)_{r=R_i}$	$(\sigma_\theta)_{r=R_e}$	$\tau_{max}$	Critère de Tresca
$1mm$	$81MPa$	$0,71MPa$	$80MPa$	Respecté
$2mm$	$83MPa$	$2,9MPa$	$81MPa$	Respecté
$3mm$	$87MPa$	$6,7MPa$	$83MPa$	Respecté
$4mm$	$92MPa$	$12MPa$	$86MPa$	Respecté
$12mm$	$360MPa$	$280MPa$	$220MPa$	Respecté
$13mm$	$560MPa$	$480MPa$	$320MPa$	non respecté

Tableau III-1 : *Tableau des contraintes internes et externes au cylindre en fonction de son rayon interne*

On constate que l'on peut choisir le rayon du canal sur une assez large gamme de valeurs. Nous nous limiterons néanmoins, notamment pour des questions de débit matière, à des valeurs de l'ordre de quelques millimètres.

#### III.4.2.2 Etude thermique

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence du rayon interne du cylindre sur les échauffements dans le polymère et dans l'acier pour deux différents niveaux de pression. En effet, on prendra comme rayon du canal  $R_{can} = 1, 2$  et  $3mm$  et comme pression d'entrée  $P_0 = 20,45MPa$ . Cela nous donne différents débits qui sont résumés dans le Tableau III-2. L'étude qui va suivre se fera pour un canal de longueur  $170mm$  avec des points de mesure  $TC_{1,...,4}^{inv}$  situé à  $500\mu m$  de l'interface polymère métal et distant deux à deux de  $40mm$ . On placera

### Chapitre III – Conception d'une buse instrumentée

le premier thermocouple  $TC_1^{inv}$  à  $z_{TC_1} = 0mm$ , ce qui implique que le deuxième se situe à  $z_{TC_2} = 40mm$ , le troisième à  $z_{TC_3} = 120mm$  et le dernier à  $z_{TC_4} = 160mm$ .

Les calculs ont été effectués avec le polyéthylène 2042E. On a imposé à chaque fois une température d'entrée constante suivant le rayon du canal d'une valeur de  $200^\circ C$  et c'est cette même température que l'on a imposée sur les parois externes du cylindre. A l'instant initial, la buse est supposée homogène en température.

$R_{canal}$	$Q_m$ en $g.s^{-1}$ à	$Q_m$ en $g.s^{-1}$ à
	20MPa	45MPa
1mm	0,012	0,052
2mm	0,34	2,25
3mm	2,68	12,84

Tableau III-2 : Débit massique en fonction du débit et du rayon du canal

On constate que pour un rayon de canal de  $1mm$ , les débits de matière calculés aux deux niveaux de pression considérés sont très faibles. Ceci se fait ressentir sur les échauffements dans l'acier et dans le polymère (Figure III-21 et Figure III-22). En effet, à  $20MPa$ , l'échauffement maximum dans l'acier selon  $z$  à  $r = 1,5mm$  du centre du canal ne dépasse pas  $0,05^\circ C$  et atteint seulement  $0,4^\circ C$  à  $45MPa$ . De même, les échauffements dans le polymère sont faibles et atteignent des valeurs maximales de  $0,25^\circ C$  à  $20MPa$  et  $2,5^\circ C$  à  $40MPa$  en fin de canal. On sent bien que pour obtenir des échauffements plus conséquents dans l'acier, il va falloir augmenter le rayon du cylindre.

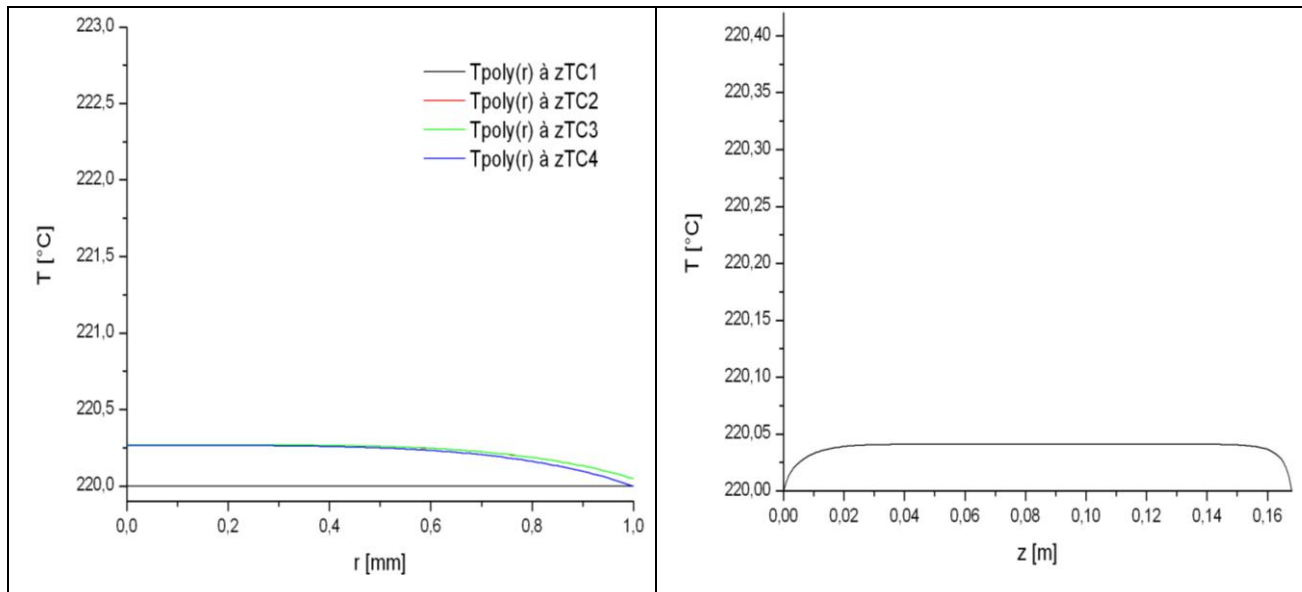


Figure III-21 : a) Profils de température au sein du polymère et  
b) dans l'acier pour  $R_{can}=1mm$  avec  $P_0=20MPa$

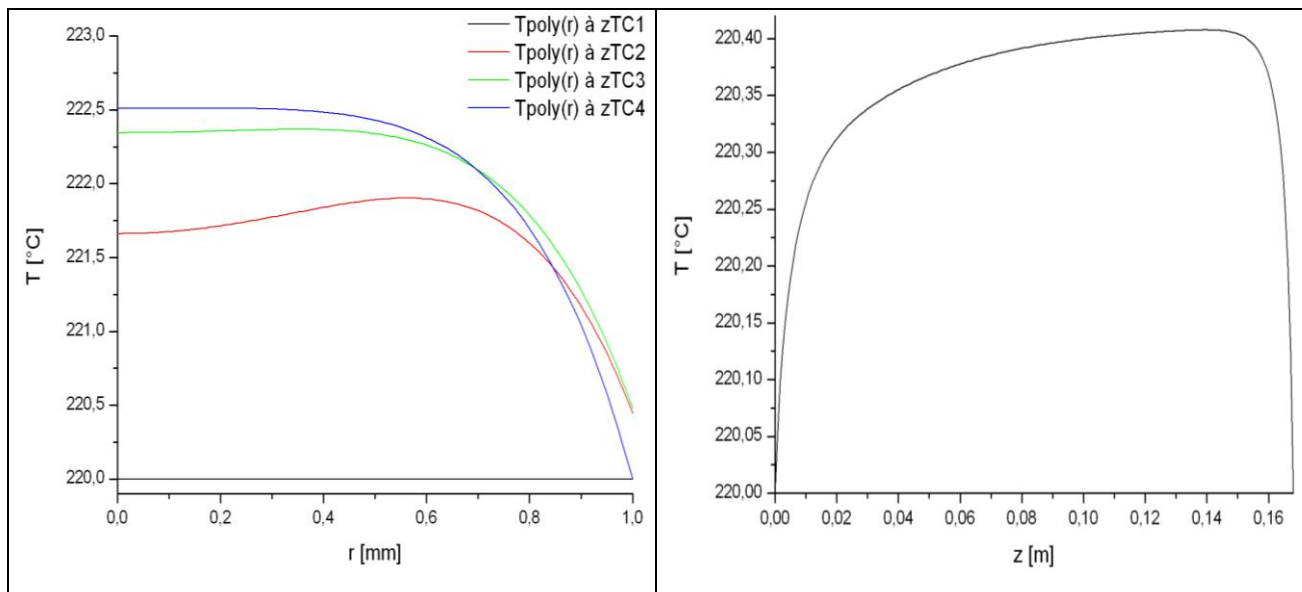


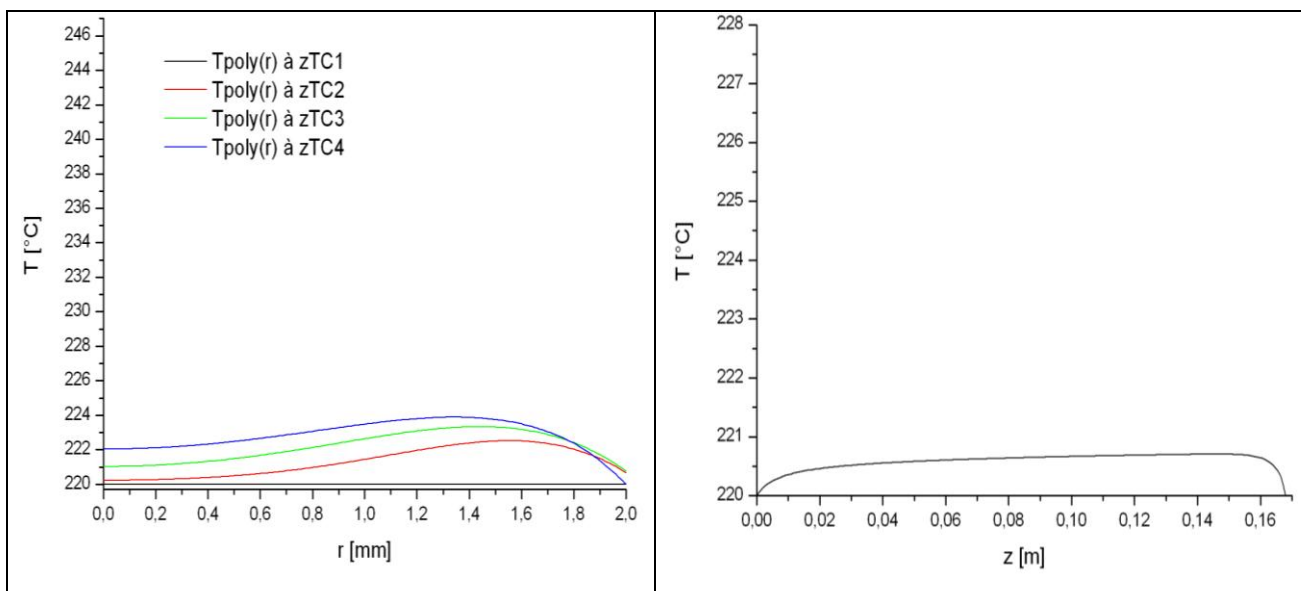
Figure III-22 : a) Profils de température au sein du polymère et  
b) dans l'acier pour  $R_{can}=1mm$  avec  $P_0=45MPa$

On observe, pour un rayon de canal de  $2mm$ , que les échauffements dans le polymère et dans l'acier sont plus importants que précédemment pour les deux niveaux de pression considérés (cf. Figure III-23 et Figure III-24) grâce au fait que les débits massiques  $y$  sont plus élevés. Cependant, même si le débit massique à  $P_0 = 20MPa$  pour  $R_{canal} = 2mm$  est environ 6,5 fois plus important que celui à  $P_0 = 45MPa$  pour  $R_{canal} = 1mm$ , il reste faible (environ  $0,35g.s^{-1}$ ) et donc les échauffements aussi. Par contre, à  $45MPa$ , on obtient environ  $26^{\circ}C$  d'échauffement dans le polymère et plus de  $7^{\circ}C$  dans l'acier du cylindre. Ceci est bien suffisant pour étudier la



### Chapitre III – Conception d'une buse instrumentée

sensibilité des thermocouples à la variation de la température d'entrée du polymère en vu de l'estimation de cette dernière. De plus, ces échauffements non négligeables permettent d'être bien au-delà du bruit de mesure et par conséquent les erreurs liées aux mesures sont négligeables. La Figure III-25, qui montre les échauffements pour  $R_{canal} = 3mm$ , permet de se rendre compte que même à  $P_0 = 20MPa$ , ont atteint  $13^{\circ}C$  dans le polymère et  $3^{\circ}C$  dans l'acier. Il faut cependant faire attention, car on le rappelle, le but est d'estimer la température d'entrée du polymère via les mesures indirectes situées dans l'acier et par conséquent, elles doivent y être sensibles. Or, si les débits sont trop élevés, les thermocouples de mesure ne seront pas sensibles aux petites variations de la température d'entrée. Ceci se traduit par une faible valeur du nombre de Cameron  $Ca$ , qui dit que si  $Ca < 10^{-2}$  alors on se trouve dans un régime thermique dit adiabatique et par conséquent, les échauffements s'accumulent dans le polymère sans se diffuser dans l'acier du cylindre. C'est pourquoi, il faut donc trouver un compromis entre la visualisation d'échauffements et la sensibilité des thermocouples. Ceci peut paraître contradictoire avec les résultats car comme le nombre de Cameron est inversement proportionnel à la vitesse moyenne de l'écoulement, lorsque l'on augmente la pression, on augmente la vitesse moyenne et donc on devrait avoir moins d'échauffement qu'à plus faible vitesse. Cependant, les vitesses engendrées dans ces cas donnent un nombre de Cameron compris entre  $10^{-2}$  et 1. Ceci nous amène donc dans le régime thermique dit de transition et non dans le régime adiabatique, donc les échauffements sont bien perceptibles dans l'acier même à fort débit.



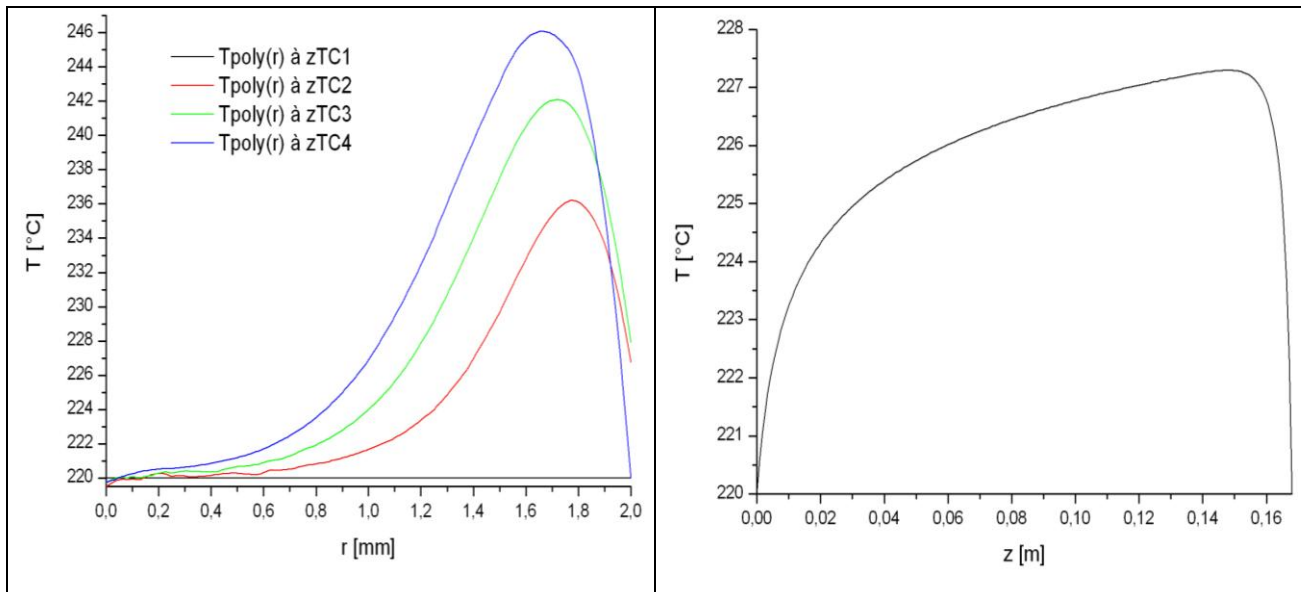


Figure III-24 : a) Profils de température au sein du polymère et b) dans l'acier pour  $R_{\text{can}}=2\text{mm}$  avec  $P_0=45\text{MPa}$

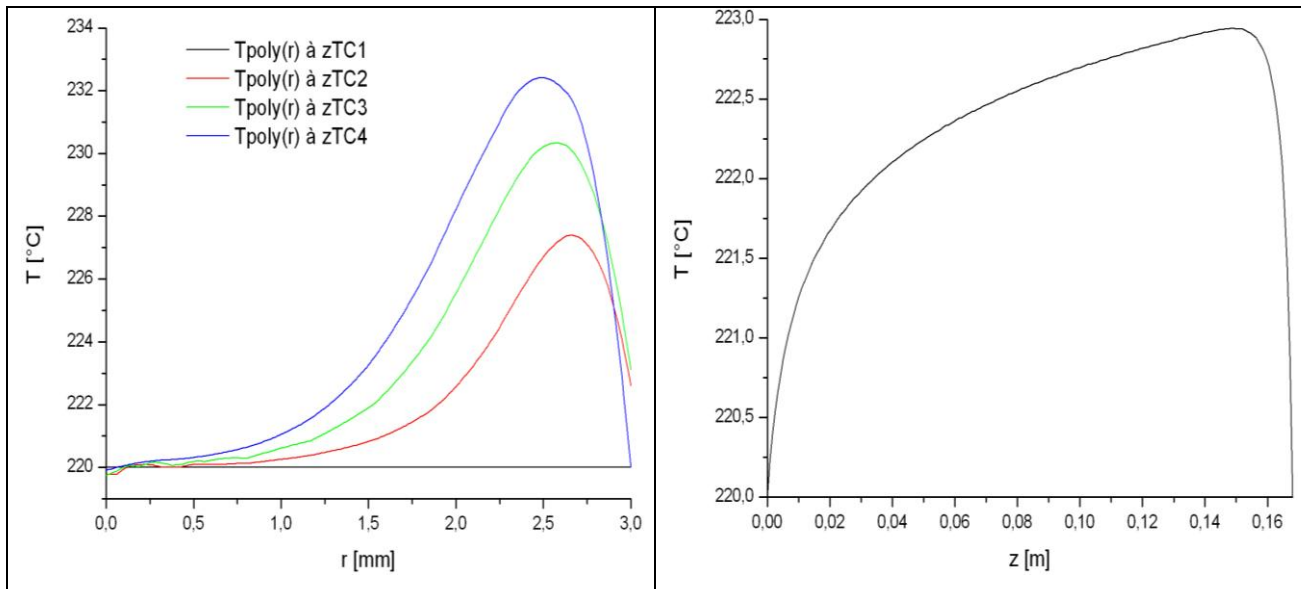


Figure III-25 : a) Profils de température au sein du polymère et b) dans l'acier pour  $R_{\text{can}}=3\text{mm}$  avec  $P_0=20\text{MPa}$

### III.4.3 Résumé des dimensions de la buse

Tout d'abord, on rappelle que l'on a fixé au préalable quelques dimensions afin qu'il ne nous reste plus que le rayon du canal à dimensionner. Le rayon externe du cylindre contenant le canal vaut  $R_{\text{cyl}} = 15\text{mm}$ , celui du fourreau vaut  $R_{\text{four}} = 30\text{mm}$ , la longueur de ces deux pièces est équivalente et est de  $L = 198\text{mm}$ . Les thermocouples de mesure situés dans l'acier sont équidistants deux à deux d'une longueur de  $56\text{mm}$ . Leurs dispositions seront représentées sur la Figure III-26 :

### Chapitre III – Conception d'une buse instrumentée

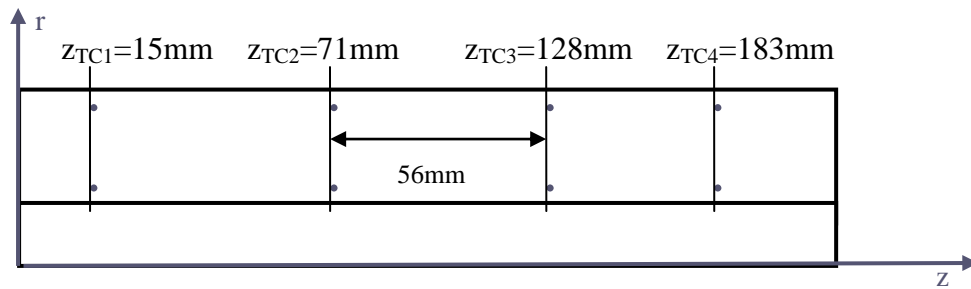


Figure III-26 : Emplacement des thermocouples de mesure dans l'acier du cylindre

Le rayon du canal sera lui pris égal à  $2\text{mm}$  afin d'économiser de la matière car on l'a vu, les échauffements sont bien perceptibles et donc nul besoin de surdimensionner le rayon du canal. Le résumé des dimensions de la buse est explicité Figure III-27.

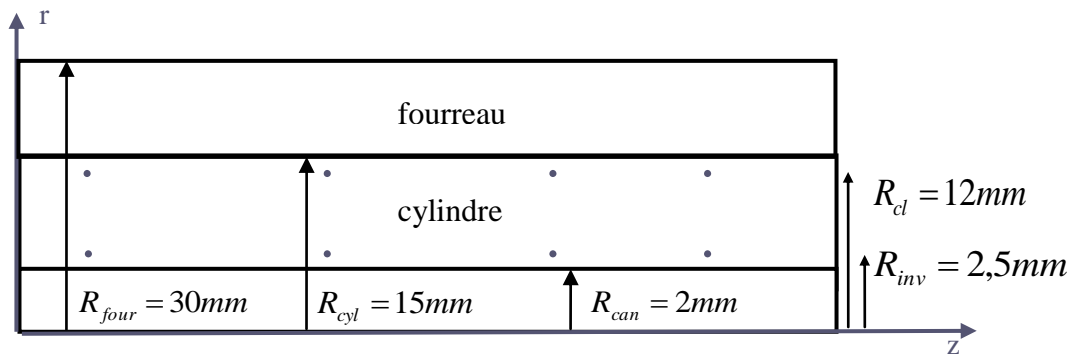


Figure III-27 : Détails des dimensions radiales de la buse

La buse entièrement assemblée est représentée Figure III-28 :

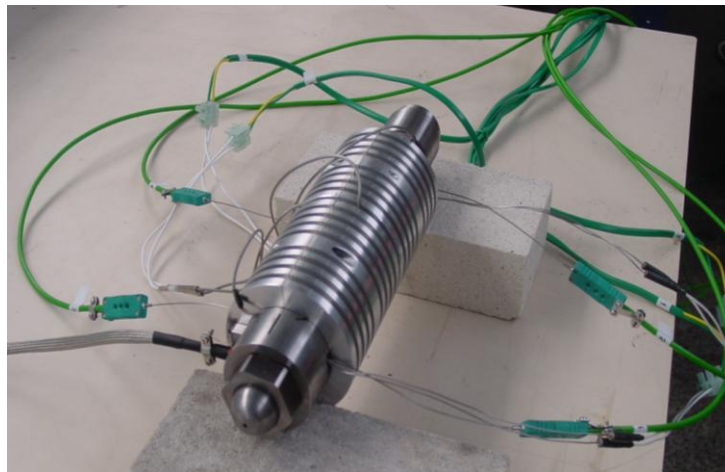


Figure III-28 : Vue de la buse avec l'instrumentation finie





## **Chapitre IV – Mesures expérimentales**

### **Résumé**

*Ce chapitre expose quelques mesures expérimentales de température, de pression dans le polymère et dans la paroi métallique de la buse d'injection instrumentée ainsi que des mesures de débits massiques. Les essais présentés dans ce chapitre ont été effectués avec du polypropylène Eltex HV252 et du polyéthylène Dowlex 2042E et ont été réalisés sur une presse à injecter et sur une extrudeuse. Nous détaillons, en fin de chapitre, l'essai de référence qui sera utilisé dans la suite pour tester la méthode d'estimation (chapitre 5).*

## IV.1 Introduction et notations

Les campagnes de mesures ont été effectuées sur deux procédés de transformation : en injection et en extrusion ; avec deux matériaux thermoplastiques différents : le polypropylène HV252 Solvay et le polyéthylène Dowlex 2042 E. L'injection permet d'obtenir des conditions d'écoulement en régime transitoire rapide, éventuellement périodiques et à pressions élevées. Par ailleurs, l'extrusion offre des conditions d'écoulement en régime transitoire lent, notamment par des changements de régimes stationnaires.

De nombreux essais ont été réalisés, à la fois sur la presse à injecter et sur l'extrudeuse, notamment en faisant varier les débits d'injection et les températures de régulation. Dans ce chapitre, nous ne présentons que les essais les plus représentatifs qui permettent de mettre en évidence les phénomènes thermiques mis en jeu.

Pour mieux se repérer dans les notations utilisées ultérieurement et comprendre les courbes qui vont être présentées dans ce chapitre, nous allons préciser les dénominations des grandeurs mesurées lors des expériences.

La Figure IV-1 représente une coupe longitudinale de la buse contenant le canal et les huit thermocouples disposés dans l'acier du cylindre et le Tableau IV-1, la synthèse des notations utilisées.

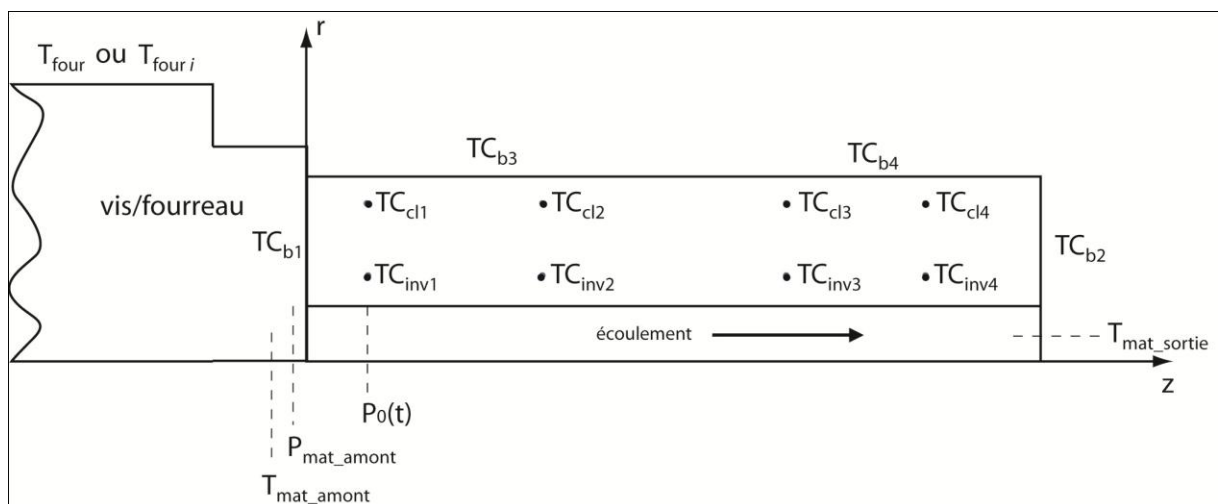


Figure IV-1 : Notations des différentes mesures sur la buse instrumentée et la machine

## Chapitre IV – Mesures expérimentales

$TC_{1,\dots,4}^{inv}$	Températures mesurées dans l'acier et utilisées dans comme informations additionnelles dans la méthode inverse (Chapitre 5), $[^{\circ}C]$
$TC_{1,\dots,4}^{cl}$	Températures mesurées dans l'acier et utilisées comme conditions aux limites pour la simulation numérique, $[^{\circ}C]$
$Tb_i, i \in [1,4]$	Températures de régulation des 4 zones de chauffe de la buse, $[^{\circ}C]$
$T_{buse}$	Température moyenne de la buse, $[^{\circ}C]$
$T_{four_i}, i \in \{1,2,3\}$	Températures de régulation du fourreau de la vis d'extrusion, $[^{\circ}C]$
$T_{four}$	Température de régulation du fourreau de la vis d'injection, $[^{\circ}C]$
$T_{mat\_sortie}$	Température indicative mesurée au sein de l'écoulement en sortie de buse (avec le nez de buse correspondant), $[^{\circ}C]$
$T_{mat\_amont}$	Température indicative mesurée à la surface de l'écoulement en sortie de vis d'extrusion (thermocouple type J de contrôle de l'extrusion), $[^{\circ}C]$
$P_{mat\_amont}$	Pression mesurée par le capteur de pression dans la buse, légèrement an amont du canal (Chapitre III), $[MPa]$
$\bar{P}_0(t)$	Pression imposée pour le calcul à l'entrée du canal et extrapolée de $P_{mat\_amont}$ (voir paragraphe suivant), $[MPa]$
$y(t)$	Course de la vis de la presse à injecter, $[mm/s]$
$V_p$	Vitesse d'injection de la presse à injecter, $[mm/s]$

Tableau IV-1 : Notations utilisées pour les grandeurs mesurées

L'acquisition des données est effectuée à l'aide d'une DAS 1000 pour les mesures réalisées sur l'extrudeuse et une DAS 1400 pour celles réalisées sur la presse. La DAS 1400 comprend 2 slots de 6 voies chacune en universelles et 1 slot de 12 voies en multiplexé. Dans l'objectif d'avoir des mesures de températures propres, c'est-à-dire les moins bruitées possibles, on a utilisé les voies universelles. La période d'acquisition est de 50ms. La DAS 1000 dispose de 16 voies universelles analogiques.



## IV.2 Evaluation des pertes de charges dans le canal

### IV.2.1 Utilité

Il est clair que la qualité de la simulation numérique dépend de la validité des conditions aux limites imposées. En effet, par exemple, la pression d'entrée du polymère dans le canal est une donnée très importante pour la simulation car elle conditionne le débit et le profil de vitesse du fluide. Or, le domaine de simulation est compris entre les thermocouples  $TC_1^{inv}$  et  $TC_4^{inv}$  (Figure IV-1) alors que la mesure de pression est réalisée au niveau de  $P_{mat\_amont}$ . La pression, ou la variation de pression,  $\bar{P}_0(t)$  à imposer pour la simulation doit être déduite de  $P_{mat\_amont}$  et des pertes de charges en aval du canal. Nous avons conçu et réalisé une buse réduite dite « buse tronquée ». Elle est dite tronquée car elle n'est composée que du convergent d'entrée, du nez de buse que l'on désire mettre et d'une chaufferette circulaire située entre ces deux derniers. Le cylindre instrumenté et le fourreau (Figure III-10) ne composant pas la buse réduite, on peut soustraire la mesure obtenue par cette buse à  $P_{mat\_amont}$  afin d'obtenir les pertes de charges dans le canal. Dans cette partie, nous allons détailler les mesures de pertes de charges dans la buse « tronquée » pour les deux polymères et pour différents nez de buse. Ces mesures de perte de charge ont été effectuées à  $T_{buse} = 220^\circ C$ .

Dans la suite nous donnons les résultats des mesures de pertes de charges effectuées dans la buse tronquée.

### IV.2.1 Mesures dans la buse « tronquée »

#### IV.2.1.1 Pour le PP HV252

Les mesures ont été réalisées ici avec un polypropylène PP HV252. La Figure IV-2 nous montre l'évolution des pertes de charges dans la buse tronquée en fonction du débit massique, pour les nez de buse muni d'un thermocouple et qui convient pour l'injection. Les débits massiques sont mesurés par pesée en sortie de l'extrudeuse et sont imposées par la vitesse de rotation d'extrusion.

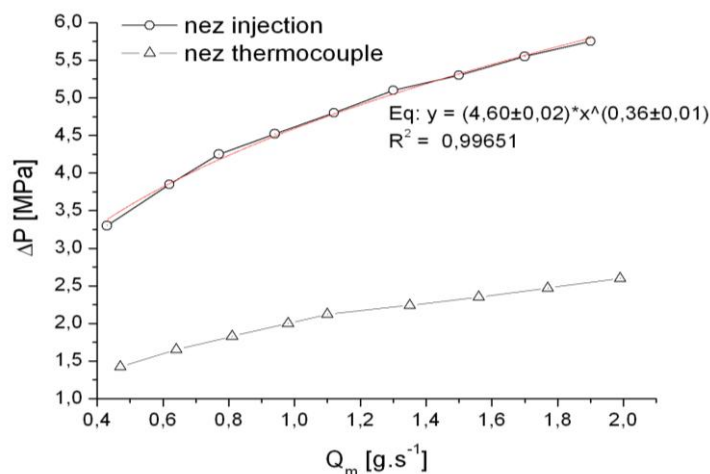


Figure IV-2 : Pertes de charge du PP HV252 en fonction du débit massique dans la buse tronquée – nez de presse à injecter et nez muni du thermocouple –

On peut souligner que le nez de buse « injection » génère plus de pertes de charges que le nez de buse « thermocouple » pour un même débit donné.

#### IV.2.1.2 Pour le PE 2042 E

La Figure IV-3, ci-dessous, nous montre l'évolution des pertes de charges du polyéthylène PE Dowlex 2042E, dans la buse tronquée munie du nez de buse possédant le thermocouple, en fonction du débit massique d'injection. Ce polymère étant nettement plus visqueux que le polypropylène, les mesures de pertes de charge ont été réalisées lorsque la vis de contre-pression est desserrée à fond afin d'éviter quelles soient trop importantes.

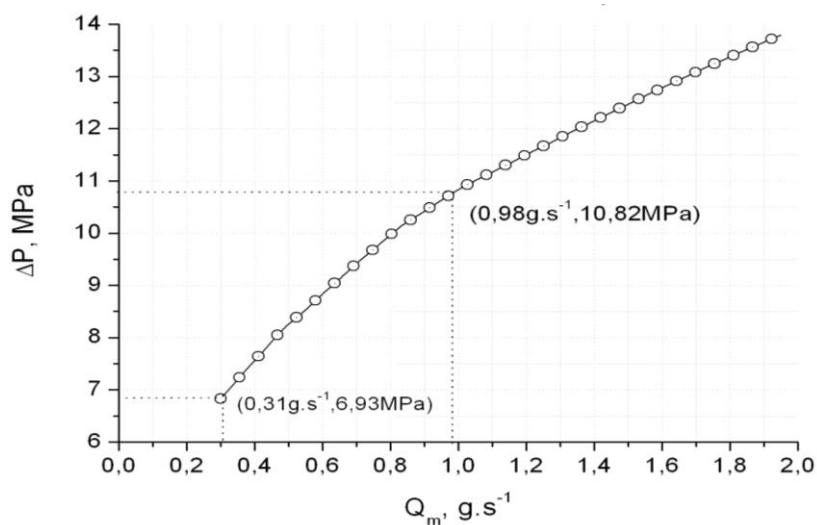


Figure IV-3 : Evolution des pertes de charge du PE 2042E – nez muni du thermocouple (vis de contre-pression desserrée à fond) –

## IV.2.2 Remarques et conclusion

Tout d'abord, on peut d'ores et déjà constater que le polymère mis en forme joue un rôle considérable sur l'amplitude de la perte de charge dans la buse. En effet, d'après les figures IV-2 et IV-3, qui respectivement évaluent les pertes de charges dans la buse tronquée, munie du nez contenant le thermocouple avec la vis de contre pression desserrée à fond, pour le polypropylène PPH 7062 et pour le polyéthylène PE Dowlex 2042E, on remarque bien que les valeurs des pertes de charge sont, pour un même débit massique, beaucoup plus importantes pour le polyéthylène que pour le polypropylène. En outre, on peut constater que pour un polymère et un débit donné, les pertes de charges de la buse tronquée avec le nez qui convient pour l'injection sont plus importantes que celles avec le nez contenant le thermocouple, même lorsque la vis de contre-pression est serrée à fond.

## IV.3 Mesures en transitoire rapide

Cette campagne de mesures a été réalisée sur une presse à injecter Sandretto. Les mesures réalisées permettent de mettre en évidence d'une part les niveaux d'échauffements obtenus au sein de l'écoulement et dans la paroi de la buse d'injection, dans des conditions de mise en forme réalistes et d'autres part le régime périodique thermomécanique lors de l'injection dans une cavité moulante

### IV.3.1 Détermination de la vitesse d'injection

La presse à injecter utilisée pour nos expériences permet d'effectuer plusieurs types de réglages tels que la température du fourreau, la vitesse d'injection (vitesse de déplacement de la vis), le dosage de la matière (suivant la pièce à réaliser), la pression et le temps de compactage (sert à compenser les retraits de la matière en se refroidissant), le temps de refroidissement...

La vitesse de déplacement de la vis est imposée par rapport à un pourcentage de la vitesse maximale. Dans les essais que nous présentons ici, les vitesses de déplacement de la vis sont de 10% et 30%. Afin d'avoir l'analogie entre le pourcentage de vitesse donné par la presse et la vitesse réelle de la vis, son déplacement  $y(t)$  est représenté sur la Figure IV-4.

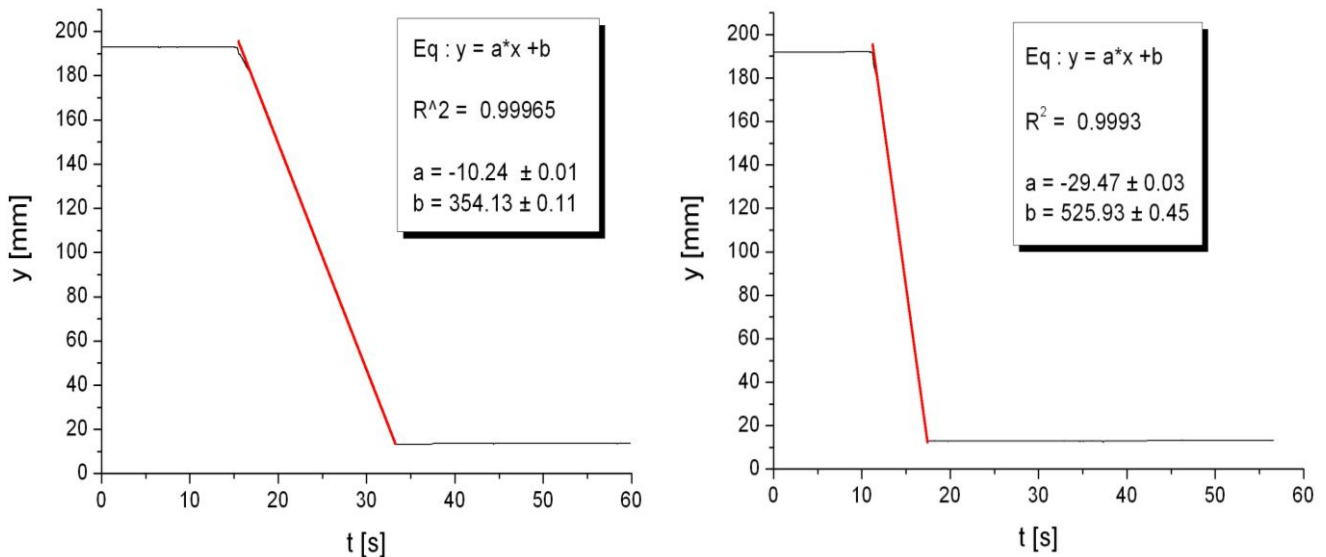


Figure IV-4 : Evolution temporelle du déplacement du piston a) à 10% et b) à 30%

On peut remarquer, Figure IV-4, qu'au début, la position du piston est fixe et est d'environ 190mm puis à partir du moment où l'on déclenche l'injection, elle varie linéairement jusqu'à une valeur minimale de 10mm. Le piston a alors une course de 180mm et la vitesse d'injection est déterminée par la vitesse du piston. La Figure IV-5a montre par exemple un essai où la consigne était une injection 10% et la Figure IV-5b, une injection à 30%. Afin de voir à quoi cela correspond en termes de vitesse, nous avons évalué la pente de la fonction  $y(t)$  à l'aide d'une courbe d'interpolation linéaire sur la partie de la course du piston correspondant à la phase d'injection (courbe en rouge Figure IV-1a et b). On constate que, pour la consigne à 10%, la course du piston s'effectue en environ 18s correspondant donc à une vitesse de  $V_p = 10\text{mm.s}^{-1}$ . Sur la Figure IV-4b, qui montre un essai où la course du piston est à 30%, on constate que le déplacement de la vis se fait sur environ 6s, ce qui nous donne une vitesse proche de  $V_p = 30\text{mm.s}^{-1}$ .

## IV.3.2 Exemples de mesures

### IV.3.2.1 Injection en mode purge

Dans ces essais, la buse est montée avec le nez « thermocouple » et nous allons comparer les deux essais aux vitesses de piston  $V_p$  de 10 et  $30\text{mm.s}^{-1}$ . On précise qu'un autre essai, où l'on a disposé le nez servant à l'injection sur la buse, avec une vitesse de piston de  $10\text{mm.s}^{-1}$  est présenté en Annexe III.

## Chapitre IV – Mesures expérimentales

Le Tableau IV-2 récapitule les conditions d'injection des deux essais et les Figures IV-5 et IV-6 montrent les températures et pressions mesurées. Les débits moyens sont estimés à partir de la pesée de la matière purgée ( $\approx 110\text{g}$ ) sur le temps de déplacement du piston.

Matériau	Essai 1	Essai 2
	PP HV252	PP HV252
Vitesse d'injection $V_p$ (mm/s)	10	30
Durée de la purge	18	6
$T_{\text{buse}}$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	190	190
$T_{\text{four}}$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	190	190
Débit moyen (g/s)	6	18

Tableau IV-2 : Conditions d'injection des deux essais

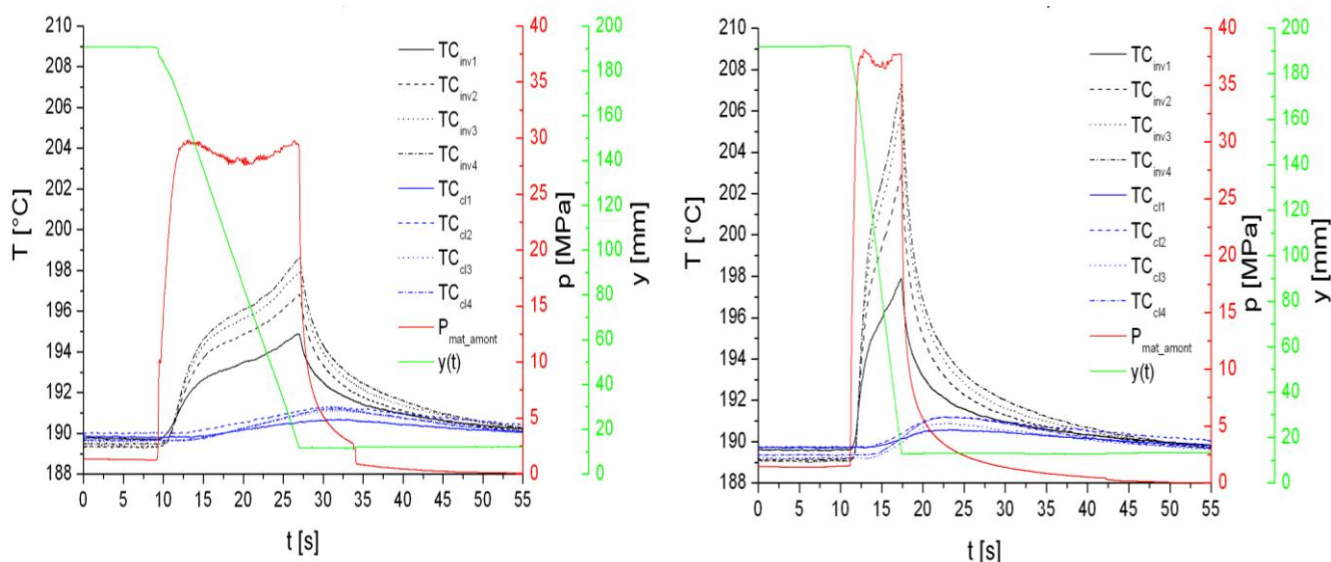


Figure IV-5 : Températures et pression mesurées a) essai 1  $V_p = 10\text{mm.s}^{-1}$  ; b) essai 2  $V_p = 30\text{mm.s}^{-1}$

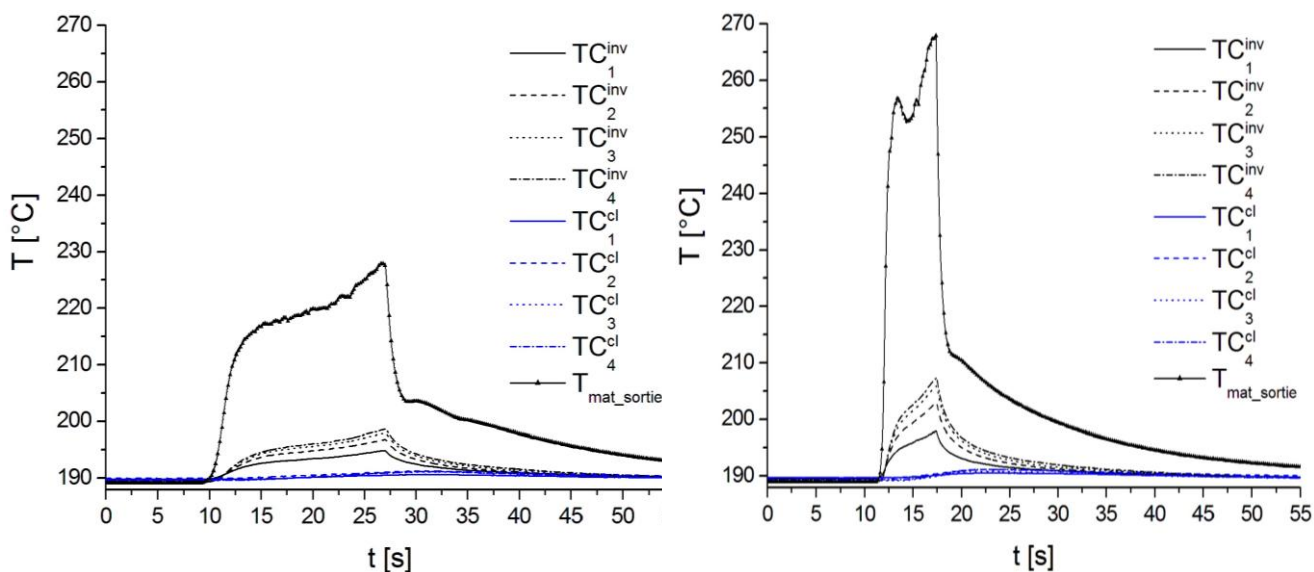


Figure IV-6 : Températures mesurées a) essai 1  $V_p = 10\text{mm.s}^{-1}$  ; b) essai 2  $V_p = 30\text{mm.s}^{-1}$

## Chapitre IV – Mesures expérimentales

### Analyse des courbes :

- pour l'essai à  $10\text{mm.s}^{-1}$  (Figure IV-5a et Figure IV-6a), l'écart de température entre les différents thermocouples de mesure dans l'acier à  $t=0\text{s}$  est au maximum de  $0,65^\circ\text{C}$  (entre  $TC_2^{inv} = 189,33^\circ\text{C}$  et  $TC_2^{cl} = 189,98^\circ\text{C}$ ). La température la plus élevée est celle de  $TC_4^{inv}$  qui vaut  $198,6^\circ\text{C}$ , soit un échauffement par rapport à sa valeur initiale d'environ  $9^\circ\text{C}$ . La température maximale qu'a mesurée le thermocouple du nez est de  $T_{mat\_sortie} = 227,9^\circ\text{C}$  soit un échauffement par rapport à sa valeur initiale de  $38,7^\circ\text{C}$ . La pression maximale atteinte est de  $29,8\text{MPa}$  et la masse sortie de la buse est d'environ  $110,2\text{g}$ . La course de la vis s'étale sur une durée de  $18\text{s}$ . Le débit massique est alors d'environ  $6\text{g.s}^{-1}$ .
  
- pour l'essai à  $30\text{mm.s}^{-1}$  (Figure IV-5b et Figure IV-6b), on a un écart maximum de  $0,68^\circ\text{C}$  (entre  $TC_3^{inv} = 189,05^\circ\text{C}$  et  $TC_2^{cl} = 189,73^\circ\text{C}$ ). La température la plus élevée est celle de  $TC_4^{inv}$  qui vaut  $207,2^\circ\text{C}$ , soit un échauffement par rapport à sa valeur initiale d'environ  $18^\circ\text{C}$ . La température maximale qu'a mesurée le thermocouple du nez est de  $T_{mat\_sortie} = 268^\circ\text{C}$  soit un échauffement par rapport à sa valeur initiale d'environ  $80^\circ\text{C}$ . La pression maximale atteinte est de  $38,1\text{MPa}$  et la masse sortie de la buse est d'environ  $110,5\text{g}$ . La course de la vis s'étale sur une durée de  $6\text{s}$ . Le débit massique est alors d'environ  $18,5\text{g.s}^{-1}$ .

### Principaux résultats :

En première analyse, et en phase avec les objectifs visés lors de la conception de l'outillage, les résultats suivants peuvent être formulés :

- La buse permet d'atteindre des niveaux de pression élevés ( $40\text{MPa}$  dans l'essai 2).
- Les thermocouples les plus proches du canal ( $TC^{inv}$ ) montrent une augmentation de température significative (de  $8$  à  $18^\circ\text{C}$ ).
- Les signaux thermiques sont totalement corrélés à la forme du signal de pression.
- La mesure de température au sein de l'écoulement ( $T_{mat\_sortie}$ ) donne des résultats spectaculaires : jusqu'à  $80^\circ\text{C}$  d'échauffement pour le deuxième essai. La position exacte de la mesure sur le rayon de l'écoulement est impossible à déterminer, il faut donc analyser ce résultat avec prudence. Lors de la mise en mouvement du fluide, nous ne savons pas

vraiment où se situe ce thermocouple, bien que rigide. Une preuve qu'il se déplace dans la section du canal est que quand le déplacement de la vis s'arrête, on observe dans les deux cas une chute brutale de la température puis une baisse progressive sur quelques dizaines de secondes. Il semblerait que, lors du mouvement, le thermocouple se rapproche de la paroi, où la dissipation visqueuse est plus élevée qu'au centre du canal et que donc, lors de l'arrêt de l'écoulement, il est normal que la température chute brutalement car il n'y a plus d'échauffement. Ensuite, la diminution progressive après cette chute brutale de température est due au fait que le thermocouple se remet en position initiale, au centre de l'écoulement. Une autre hypothèse est également envisageable : c'est l'auto-échauffement autour du thermocouple.

### IV.3.2.2 Injection en régime périodique

Dans cet essai, nous avons voulu tester le dispositif expérimental dans des conditions d'injection classiques, c'est-à-dire lorsque la matière est injectée dans une cavité moulante.

Le moule utilisé est un moule SWIM (Shrinkage and Warpage in Injection Molding). La pièce, dont la forme est représentée Figure IV-7, pèse environ 15 g .

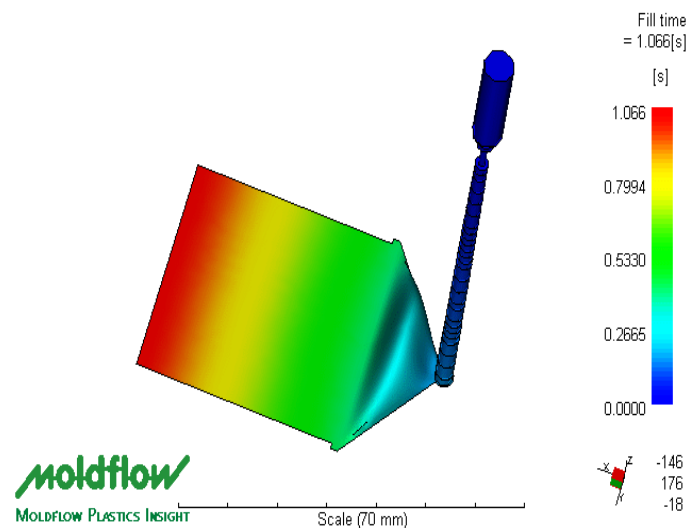


Figure IV-7 : Forme de la pièce réalisée lors de l'injection dans le moule SWIM

La Figure IV-8a montre l'ensemble des cycles réalisés. Celui de la première pièce commence à environ  $t = 25s$  et celui de la dernière se termine à peu près à  $t = 425s$ . Par conséquent, comme on a effectué 8 cycles (donc 8 pièces) sur 400s, un cycle dure environ 50s. On précise que la vitesse de déplacement de la vis est imposée en mode purge, alors que dans le cas d'une injection dans un moule, on impose un temps de remplissage.

### Analyse du cycle d'injection :

La visualisation d'un cycle complet est représentée Figure IV-8b, on y observe 4 différents paliers de pression :

- Le palier 1 correspond à la phase d'injection : la pression maximale est de  $40,37\text{MPa}$  et est atteinte sur environ  $0,25\text{s}$ . Cela correspond à la période où le polymère se met en mouvement. Ensuite, le remplissage du moule se fait à débit constant (vitesse de la vis de plastification constante) et le niveau de pression est maintenu pendant  $1,75\text{s}$  autour de  $40 \pm 0,3\text{MPa}$ . La durée totale de la phase d'injection est par conséquent d'environ  $2\text{s}$ . Le remplissage du moule se termine à la fin du palier 1.
- Le palier 2 coïncide avec la phase de compactage où la pression est maintenue, afin de compenser les retraits, à  $12,4\text{MPa}$  pendant une durée de  $9\text{s}$ .
- Le palier 3 traduit une pression résiduelle après l'arrêt du compactage. Celle-ci diminue lentement avant le recul de la vis.
- Le palier 4 représente la phase de dosage de la pièce suivante. La vis se met alors de nouveau en mouvement et dès lors, un peu de matière vient au niveau du convergent de la buse, ce qui fait remonter légèrement la pression.

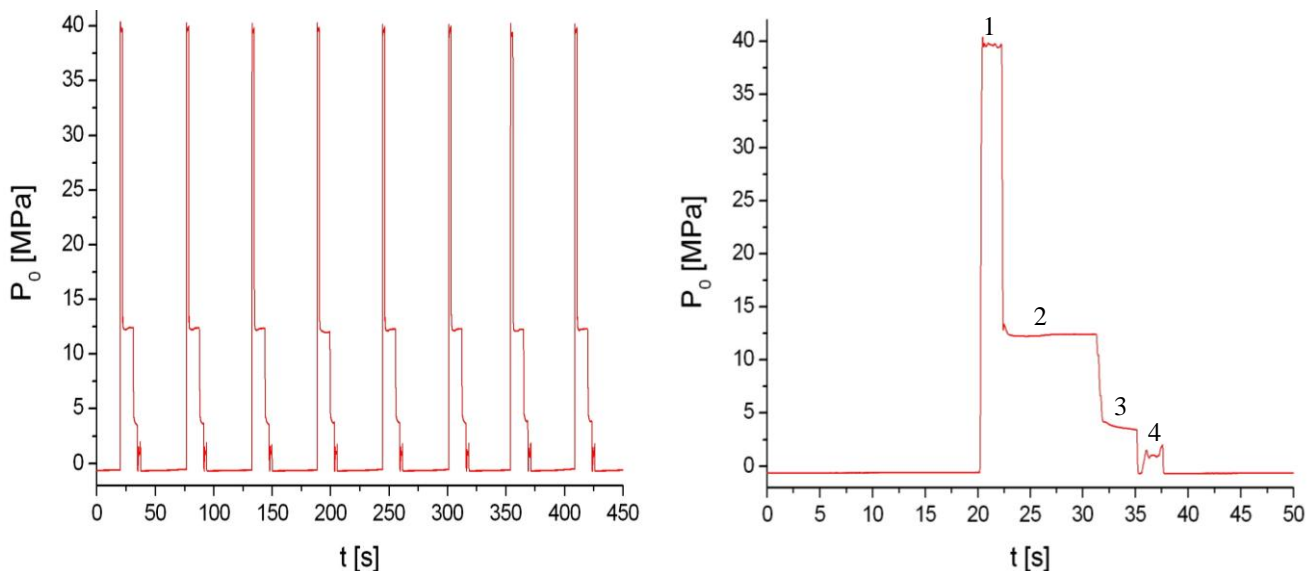


Figure IV-8 : Evolution de la pression a) sur 8 cycles et b) sur 1 cycle

On précise que la pièce injectée pèse environ  $15\text{g}$ . La durée de l'injection est d'environ  $2\text{s}$ , on obtient alors un débit massique moyen d'à peu près  $7,5\text{g}\cdot\text{s}^{-1}$ .



## Chapitre IV – Mesures expérimentales

Donc, en considérant, une masse volumique moyenne de  $780\text{kg.m}^{-3}$ , on obtient un débit volumique moyen de  $9,6\text{cm}^3.\text{s}^{-1}$ . Or, la section du canal fait  $0,1257\text{cm}^2$ , d'où une vitesse moyenne du fluide de  $76\text{cm.s}^{-1}$ .

En prenant des valeurs moyennes cohérentes pour les paramètres thermophysiques du matériau :  $\lambda = 0,17\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $C_p = 2850\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\rho = 780\text{kg.m}^{-3}$ . Le calcul du nombre de Cameron donne :

$$Ca = \frac{\lambda L}{\rho C_p \bar{V} D^2} = \frac{0,17 \times 0,2}{780 \times 2850 \times 0,76 \times (4.10^{-3})^2} = 1,3.10^{-3} < 10^{-2}$$

Le calcul nous dit que le régime thermique est alors « adiabatique ». Or, la température dans l'acier n'est pas constante mais les échauffements dans la paroi du cylindre restent assez faibles, de l'ordre de  $2^\circ\text{C}$  au maximum.

### Analyse de l'état thermique initial :

La Figure IV-9a et la Figure IV-9b, représentent les évolutions des températures mesurées dans l'outillage. Tout d'abord, on peut discuter de la thermique de l'acier à l'instant initial  $t = 0\text{s}$  en comparant les valeurs des différents thermocouples :

- On a  $TC_1^{inv} = 215,97^\circ\text{C}$  et  $TC_1^{cl} = 216,03^\circ\text{C}$ , soit une différence de  $0,06^\circ\text{C}$
- On a  $TC_2^{inv} = 215,12^\circ\text{C}$  et  $TC_2^{cl} = 216,07^\circ\text{C}$ , soit une différence de  $0,95^\circ\text{C}$
- On a  $TC_3^{inv} = 215,18^\circ\text{C}$  et  $TC_3^{cl} = 215,80^\circ\text{C}$ , soit une différence de  $0,62^\circ\text{C}$
- On a  $TC_4^{inv} = 215,46^\circ\text{C}$  et  $TC_4^{cl} = 215,63^\circ\text{C}$ , soit une différence de  $0,17^\circ\text{C}$

On peut constater alors que les thermocouples les mieux régulés sont ceux des extrémités ( $TC_1^{inv}, TC_4^{inv}, TC_1^{cl}$  et  $TC_4^{cl}$ ). On précise que ceux sont ceux qui sont les plus proches des chauffeferettes circulaires latérales. Par contre, ceux qui se situent au milieu de la longueur de l'acier ( $TC_2^{inv}, TC_3^{inv}, TC_2^{cl}$  et  $TC_3^{cl}$ ) sont les plus mal régulés. Par conséquent, les flux radiaux les plus importants se situent au niveau du milieu du cylindre et non à ses extrémités. On peut donc soulever que la régulation des chauffeferettes est meilleure que celle du fourreau.

On note également que la variation la plus importante au niveau des  $TC^{inv}$  se situe entre  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$  (avec  $TC_1^{inv} > TC_2^{inv}$ ) et qu'elle vaut  $0,85^\circ\text{C}$ . Celle des  $TC^{cl}$  est entre  $TC_2^{cl}$  et  $TC_4^{cl}$  (avec  $TC_2^{cl} > TC_4^{cl}$ ) et elle vaut  $0,44^\circ\text{C}$ . Enfin, la différence maximale mesurée à  $t = 0\text{s}$ ,

## Chapitre IV – Mesures expérimentales

dans l'acier du cylindre est de  $0,95^{\circ}\text{C}$  (entre  $TC_2^{inv}$  et  $TC_2^{cl}$ ). On peut conclure que la buse est assez bien régulée en température avec un écart maximum inférieur à  $1^{\circ}\text{C}$ .

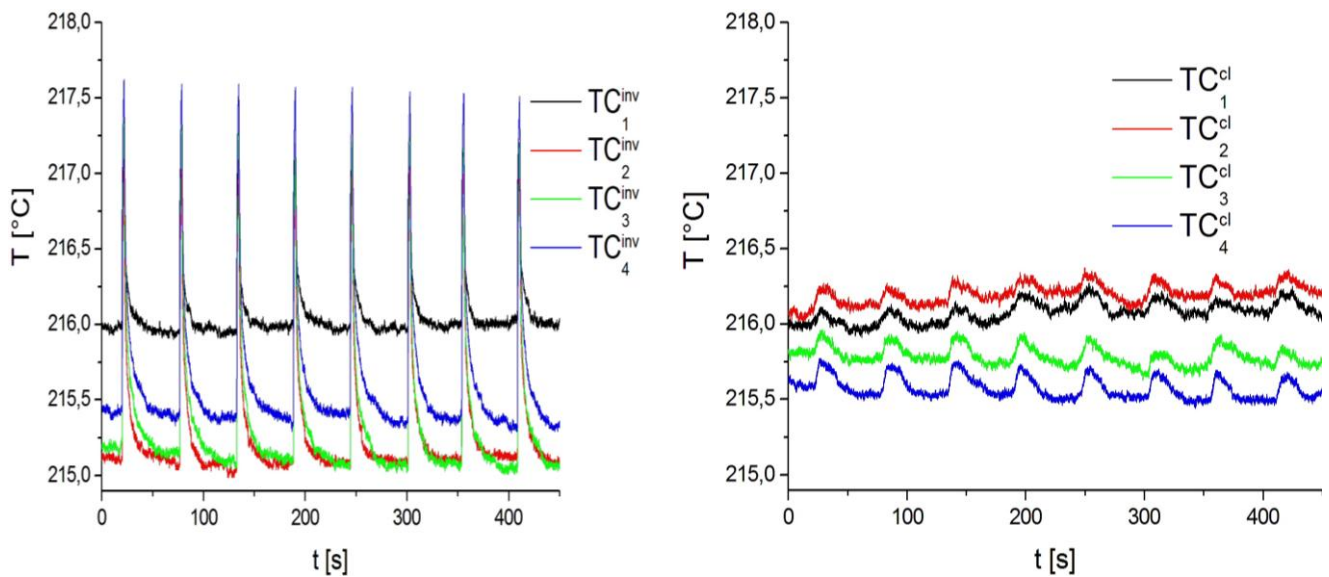


Figure IV-9 : Mesures de température dans l'acier sur les 8 cycles a)  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  et b)  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$

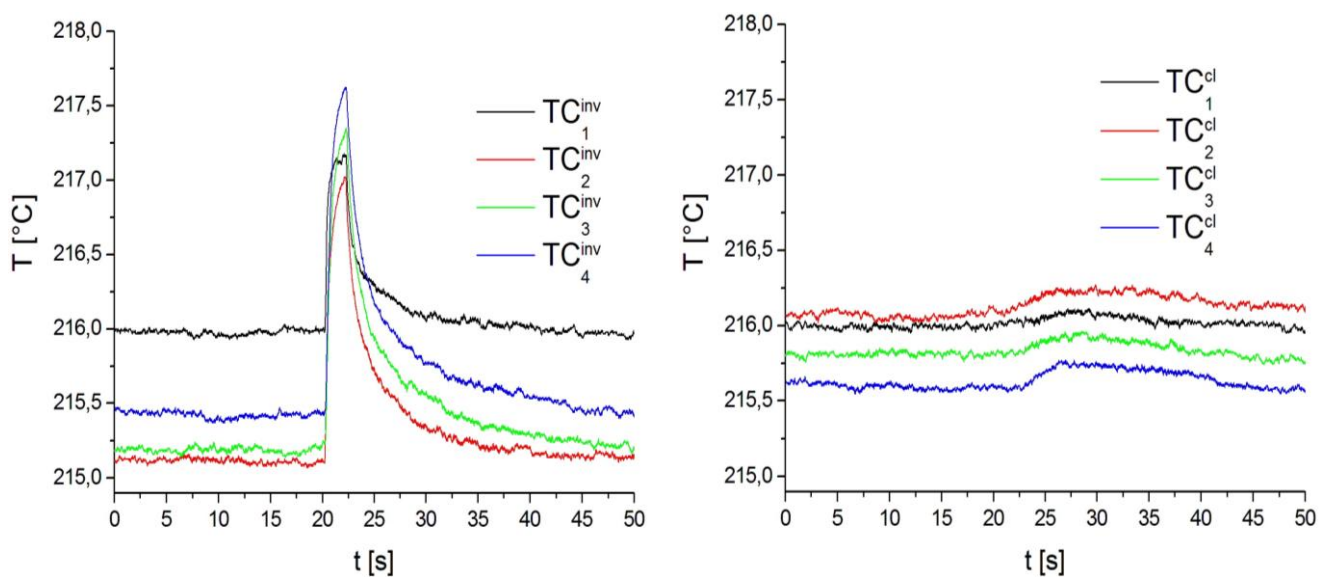


Figure IV-10 : Mesures de température dans l'acier sur un seul cycle a)  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  et b)  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$

### Analyse des mesures de températures :

On observe Figure IV-9 et Figure IV-10, les évolutions des températures des thermocouples dans la paroi du cylindre respectivement sur tous les cycles et sur un seul cycle. La visualisation des évolutions de température pour les  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  se fait sur les figures IV-9a et IV-10a et les  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$  sur les figures IV-9b et IV-10b.

## Chapitre IV – Mesures expérimentales

On constate que le régime thermique périodique est établi très rapidement, dès le premier cycle, et que la valeur maximale atteinte est de  $217,6^{\circ}\text{C}$  pour le thermocouple  $TC_4^{inv}$ , soit un échauffement de  $2,14^{\circ}\text{C}$  par rapport à sa valeur initiale (Figure IV-11). Cet échauffement reste faible. On remarque aussi que les thermocouples des conditions aux limites ne s'échauffent quasiment pas : seulement  $0,12^{\circ}\text{C}$  au maximum (valeur pour  $TC_4^{cl}$ ). Les échauffements sont donc assez faibles dans l'acier du cylindre et les valeurs de  $TC_3^{inv}$  et  $TC_4^{inv}$  sont presque confondues (Figure IV-11) à cause des pertes thermiques en aval du canal. Ces échauffements, plus faibles que lors des deux essais en mode purge présentés précédemment, peuvent s'expliquer par le fait que les pertes de charge se concentrent plus au niveau du moule et dans les canaux d'alimentation que dans le canal de la buse. En effet, la pression amont atteint ici  $40\text{MPa}$  comme dans l'essai en mode purge à 30% alors que les échauffements dans la paroi du cylindre sont nettement plus faibles que précédemment ( $2,14\text{K}$  contre  $18\text{K}$ ).

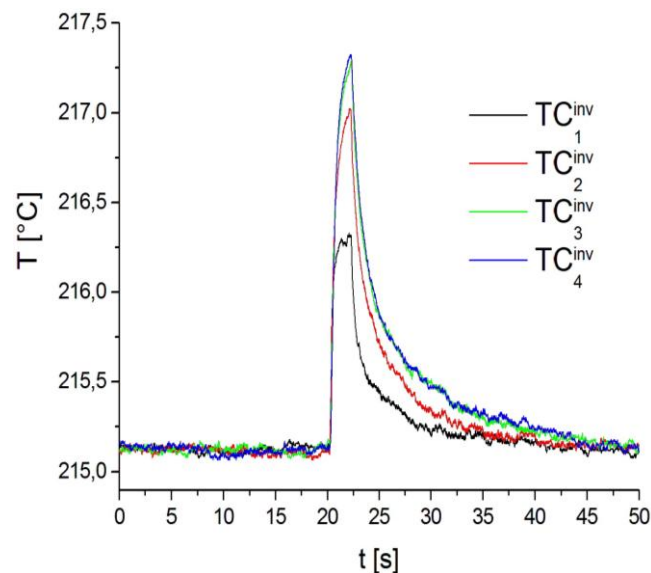


Figure IV-11 : Visualisation des températures  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  des recalées sur leur valeur initiale

### IV.4 Mesures en transitoire lent

#### IV.4.1 Objectif des mesures

Dans ce paragraphe, nous allons montrer les résultats obtenus lors d'une campagne d'essais sur une extrudeuse. L'objectif est d'obtenir un essai de référence qui caractérise une évolution transitoire lente, à pression moins élevée qu'en injection. Cet essai sera utilisé dans le chapitre V pour l'inversion des mesures. Le régime transitoire est obtenu en passant d'un état stationnaire à un autre.

## Chapitre IV – Mesures expérimentales

L'extrudeuse de l'IUT de Nantes (Figure IV-12) possède deux trémies, une vis de plastification (de diamètre  $30\text{mm}$  et de longueur  $780\text{mm}$ ) placée dans un fourreau que l'on peut réguler en température, un tableau de commande, un capteur de température (type J) de surface et un capteur de pression en sortie de vis (au niveau de l'adaptateur de la machine). Le tableau de commande permet notamment de régler la température du fourreau de la vis grâce à trois zones de chauffes et de définir la vitesse de rotation de la vis qui ne peut pas dépasser  $100\text{tr.min}^{-1}$ . Ainsi, on peut passer d'un état stationnaire à un autre en faisant simplement varier la consigne de vitesse de rotation de la vis.



Figure IV-12 : Photo d'une extrudeuse de l'IUT de Nantes

### IV.4.2 Résultats de l'essai de référence

Les résultats de cet essai seront utilisés comme données dans le code de calcul visant à estimer la température d'entrée du polymère. L'inversion des mesures sera explicitée dans le chapitre suivant. On précise que deux autres essais, extraits des campagnes de mesures, sont présentés en Annexe III.

#### ***IV.4.2.1 Description de l'essai***

Cet essai a été réalisé avec le nez de buse qui est muni d'un thermocouple mesurant la température de la matière en sortie de canal et le polymère utilisé est le PE Dowlex 2042E.

## Chapitre IV – Mesures expérimentales

En ce qui concerne la régulation thermique, les zones de chauffe de l'outillage sont consignées de la façon suivante :  $Tb_1 = 227,5^\circ\text{C}$ ,  $Tb_2 = 226,5^\circ\text{C}$ ,  $Tb_3 = 221,8^\circ\text{C}$  et  $Tb_4 = 221,2^\circ\text{C}$  (résumé sur la Figure IV-13). Ces valeurs de consigne ont été déterminées de façon empirique de manière à obtenir une température la plus uniforme possible dans le cylindre de mesure. Les écarts de valeurs traduisent le fait que les fuites thermiques (compensées par la régulation) ne sont pas identiques dans les différentes zones.

Celles concernant la régulation de la vis sont imposées à différentes températures :  $T_{four1} = 226^\circ\text{C}$ ,  $T_{four2} = 230^\circ\text{C}$  et  $T_{four3} = 235^\circ\text{C}$ . En effet, l'expérience des essais précédents nous a alerté sur le fait que la température que mesure le thermocouple en sortie d'extrudeuse (donc en entrée de buse) indique approximativement  $10^\circ\text{C}$  de moins que la température de consigne. C'est pourquoi, nous désirions malaxer le polymère en le chauffant progressivement afin qu'en sortie de vis, il soit autour de  $220^\circ\text{C}$ . Le collier chauffant (Figure III-14) est lui toujours consigné à la température de  $227^\circ\text{C}$ .

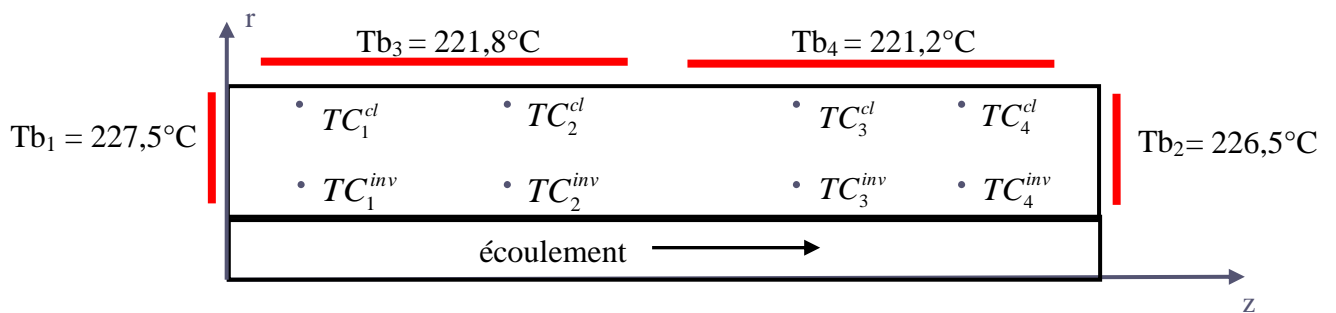


Figure IV-13 : Visualisation des températures des zones de régulation de l'essai

Du point de vue mécanique, on a commencé cet essai à une vitesse de rotation de la vis de  $V_{rot\_vis} = 20\text{tr. min}^{-1}$ , nous donnant ainsi un débit de  $0,30 \pm 0,01\text{g.s}^{-1}$  puis on a attendu que la pression amont et la température des thermocouples dans l'acier se stabilisent. Ensuite, on a effectué une montée en pression en augmentant la vitesse de rotation de la vis de l'extrudeuse jusqu'à  $60\text{tr. min}^{-1}$ , atteignant alors un débit massique de  $0,98 \pm 0,01\text{g.s}^{-1}$  puis on a attendu de nouveau la stabilisation thermique de l'essai. Enfin, on a diminué la vitesse de rotation de la vis jusqu'à  $20\text{tr. min}^{-1}$ .

### IV.4.2.2 Résultats expérimentaux

Dans cette partie, nous montrons les différentes mesures, réalisées avec le polyéthylène, dont la thermique et la mécanique du protocole expérimental ont été explicitées ci-dessus. Nous pouvons y visualiser la pression amont  $P_{mat\_amont}$  (Figure IV-14), les huit mesures de température dans l'acier du cylindre  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  et  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$  (respectivement Figure IV-15a et b) et la température amont  $T_{mat\_amont}$  en sortie de l'extrudeuse et  $T_{mat\_sortie}$  (Figure IV-16). Ensuite, nous discuterons et effectuerons quelques remarques afin de mieux comprendre les mesures obtenues.

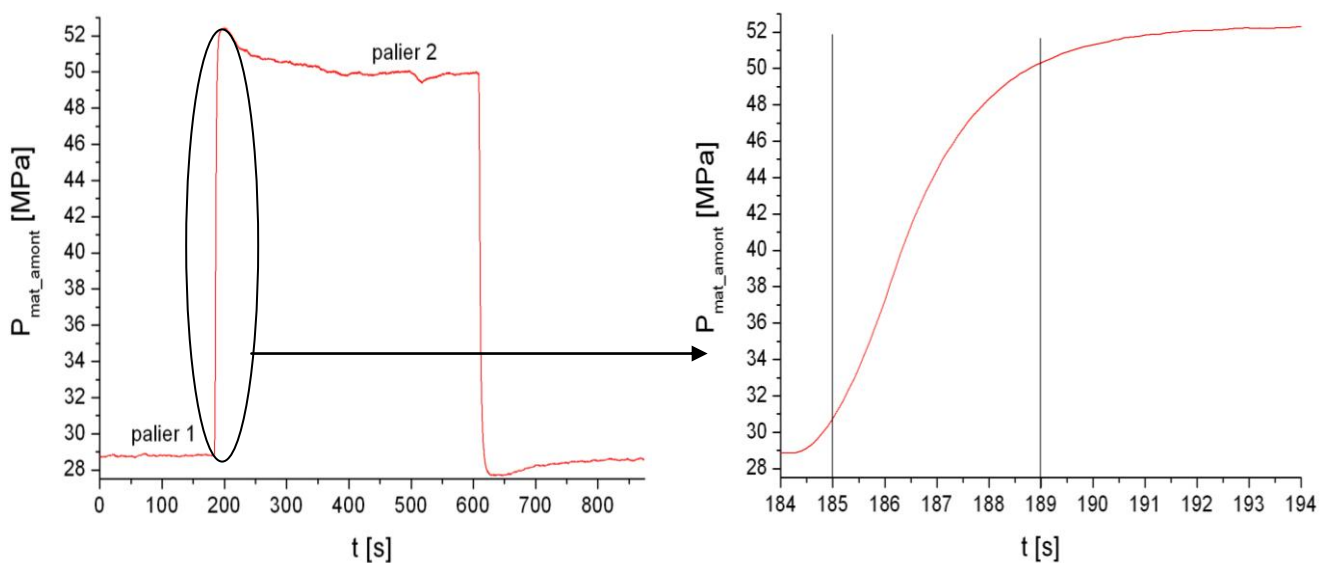


Figure IV-14 : Evolution temporelle de la pression du polymère en amont du canal  
a) sur tout le cycle et b) pour la montée

#### Analyse de la mesure de pression (Figure IV-14) :

- L'essai démarre avec une vitesse de rotation vis de  $20tr.min^{-1}$  (débit massique de  $0,3 \pm 0,01g.s^{-1}$ ), où la pression amont s'est stabilisée à environ  $28,8MPa$ ,
- à  $t = 185s$ , on augmente la vitesse de rotation jusqu'à  $60tr.min^{-1}$  (débit massique de  $0,98 \pm 0,01g.s^{-1}$ ), où la pression atteint un maximum d'environ  $52,5MPa$  (Figure IV-14a). Cette montée en pression est assez rapide car elle passe d'environ  $28$  à  $50MPa$  en environ  $4s$ , de  $t = 185s$  à  $t = 189s$ , puis elle passe de  $50,3MPa$  à environ  $52,5MPa$  aux alentours de  $t = 200s$  (Figure IV-14b). Par conséquent, la pression augmente d'environ  $22MPa$  sur un intervalle de  $4s$ . Ensuite, elle continue de croître, moins fortement, de presque  $2MPa$

## Chapitre IV – Mesures expérimentales

sur une durée de 5s (Figure IV-14b). Puis, elle redescend progressivement pour se stabiliser à environ 50MPa.

- Enfin, à environ  $t = 610s$ , on diminue la vitesse de rotation de la vis jusqu'à  $20tr.min^{-1}$  afin d'avoir le même niveau de pression qu'au début de l'expérience. Précédemment, lors du changement de régime dynamique, où l'on augmente la vitesse de rotation de la vis de  $20tr.min^{-1}$  à  $60tr.min^{-1}$ , on observait que la pression atteignait environ 52,5MPa avant de se stabiliser à 50MPa. On constate que ce phénomène se renouvelle, mais s'inverse, au moment où la pression chute. En effet, on remarque que lorsque l'on impose de nouveau le régime dynamique du début de l'expérience ( $20tr.min^{-1}$ ), on observe que la pression chute (car on diminue le débit massique) en dessous du seuil correspondant à la pression initiale de l'essai avant de remonter légèrement et de se stabiliser à environ 28,5MPa. Ce phénomène peut être dû aux effets viscoélastiques du matériau mis en forme.

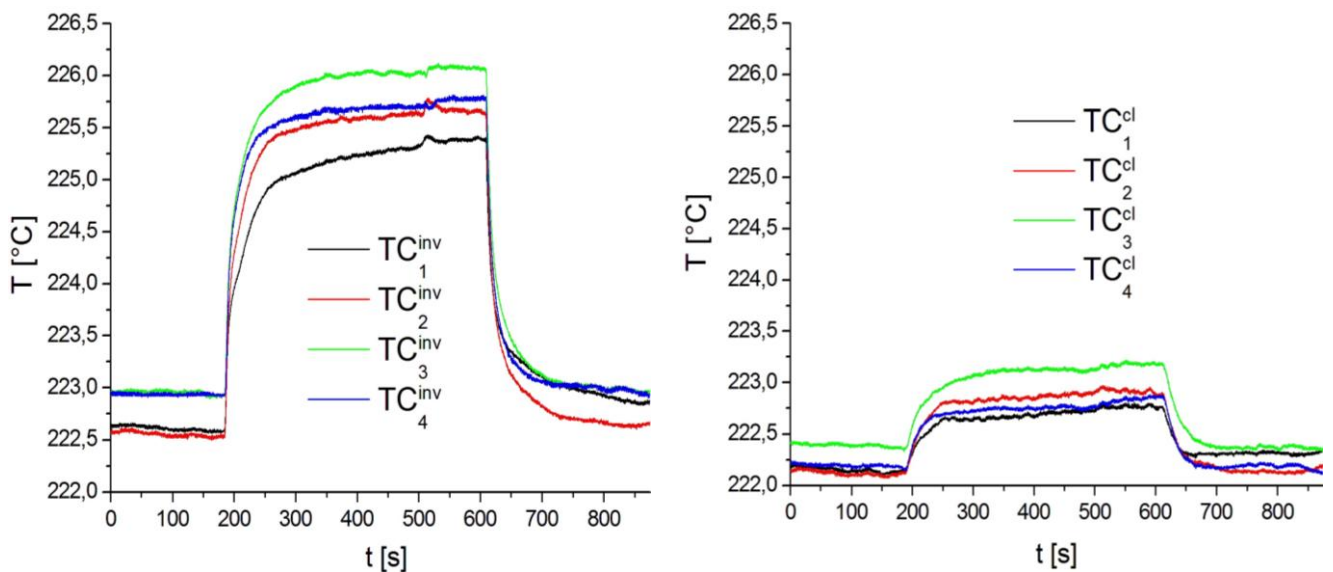


Figure IV-15 : Evolution temporelle de la température des thermocouples a)  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  et b)  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$

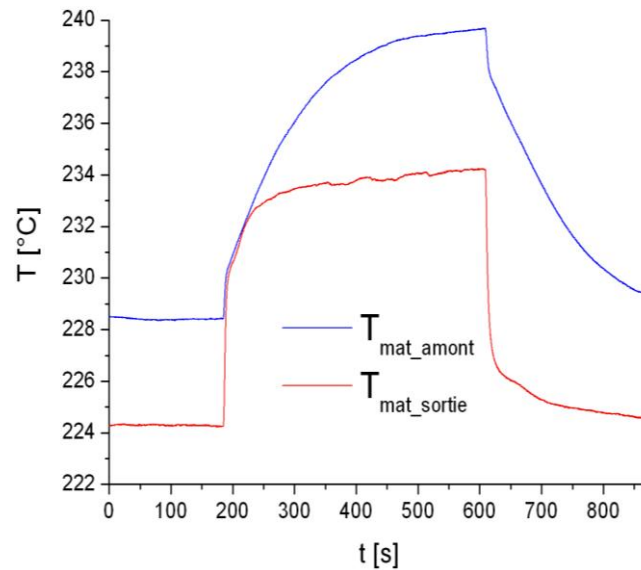


Figure IV-16 : Evolution de la température du polymère en amont et en sortie du canal

### Analyse de l'état thermique initial dans l'acier (Figure IV-15) :

Au point de vue thermique, la régulation initiale du cylindre instrumenté est assez difficile dans cet essai car l'état initial correspond à un régime d'écoulement établi et donc l'homogénéisation thermique dans l'acier n'est pas évidente. En effet, à  $t = 0s$ , la différence entre les thermocouples de mesure  $TC_{1,...,4}^{inv}$  est au maximum de  $0,4^{\circ}C$  (entre  $TC_2^{inv} = 222,56^{\circ}C$  et  $TC_3^{inv} = 222,96^{\circ}C$ ) et la différence entre les thermocouples des conditions limites  $TC_{1,...,4}^{cl}$  est d'environ de  $0,27^{\circ}C$  au maximum (entre  $TC_2^{cl} = 222,15^{\circ}C$  et  $TC_3^{cl} = 222,42^{\circ}C$ ). Finalement, la différence de température globale dans l'acier du cylindre, i-e entre les  $TC_{1,...,4}^{inv}$  et  $TC_{1,...,4}^{cl}$ , est d'environ  $0,8^{\circ}C$  (entre  $TC_3^{inv}$  et  $TC_2^{cl}$ ).

### Analyse des mesures de températures (Figures IV-15 et IV-16) :

La valeur maximale de la température du polymère en amont est d'environ  $239,7^{\circ}C$  soit un échauffement par rapport à sa valeur initiale d'environ  $11,2^{\circ}C$  et celle en sortie de buse est d'environ  $234,26^{\circ}C$  soit un échauffement d'environ  $10^{\circ}C$  (Figure IV-16). Il n'est cependant pas logique que la température du polymère en sortie de buse soit inférieure à celle en entrée de buse car la matière est censée s'échauffer le long de la buse. Cependant, comme la mesure de température amont, en sortie de vis, est à l'interface polymère métal, elle n'est qu'un indicateur sur la thermique du matériau. Au mieux, elle permettra d'évaluer l'amplitude de la température



## Chapitre IV – Mesures expérimentales

dans la zone de dissipation visqueuse alors que le thermocouple du nez de la buse mesure une température plus proche du centre du canal, où la dissipation visqueuse est quasi-nulle. Ceci peut aussi s'expliquer par le fait que le polymère, qui rentre à environ  $228^{\circ}\text{C}$  (Figure IV-16), est beaucoup plus chaud que la buse qui n'est régulée qu'à environ  $222^{\circ}\text{C}$  (Figure IV-15). Par ailleurs, on peut remarquer, lors de la montée en pression, que  $T_{mat\_amont}$  augmente brutalement d'environ  $1,5^{\circ}\text{C}$  (de  $228,5^{\circ}\text{C}$  à  $230^{\circ}\text{C}$ ) sur  $4\text{s}$  (entre  $185$  et  $189\text{s}$ , durée qui correspond à la montée brutale de la pression, Figure IV-14b). De même, lorsque l'on diminue la vitesse de rotation de la vis à partir de  $t = 610\text{s}$ , on observe le même phénomène que lors de la montée mais cette fois-ci, c'est une chute de température d'environ  $1,5^{\circ}\text{C}$  (de  $239,6^{\circ}\text{C}$  à  $238,1^{\circ}\text{C}$ ) sur le même temps (environ  $4\text{s}$  de  $t = 610$  à  $614\text{s}$ ). Ensuite, la température continue évidemment à descendre mais ce qui est intéressant, c'est que lors d'un changement de régime dynamique, on a des évolutions brutales de la pression et de la température et qu'elles sont de la même forme et corrélées à la seconde près. Un raisonnement analogue peut être conduit en observant la température  $T_{mat\_sortie}$ .

Dans l'acier, les thermocouples commencent à mesurer un échauffement à  $t = 185\text{s}$ , donc dès que la pression augmente. Les températures maximales atteintes par les thermocouples de mesure (Figure IV-15a), servant pour l'inversion, et les échauffements respectifs (Figure IV-17) sont consignés dans le tableau IV-3.

Thermocouple	Températures max	Echauffement max
$TC_1^{inv}$	$225,43^{\circ}\text{C}$	$2,78^{\circ}\text{C}$
$TC_2^{inv}$	$225,78^{\circ}\text{C}$	$3,2^{\circ}\text{C}$
$TC_3^{inv}$	$226,12^{\circ}\text{C}$	$3,15^{\circ}\text{C}$
$TC_4^{inv}$	$225,81^{\circ}\text{C}$	$2,86^{\circ}\text{C}$

Tableau IV-3 : Températures maximales mesurées au niveau des  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$

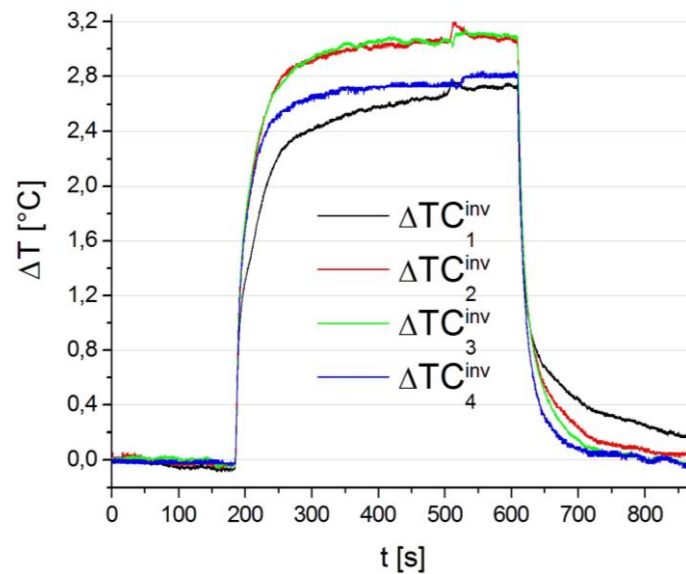


Figure IV-17 : Evolution des écarts relatifs de température des  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$

On remarque que les échauffements sont plus grands à cœur ( $TC_{2,3}^{inv}$ ) qu'aux extrémités ( $TC_{1,4}^{inv}$ ) (Figure IV-17). L'essai présenté ici servira pour la suite de l'étude comme données pour les conditions aux limites du modèle direct. On montrera la sensibilité des thermocouples à la température du polymère dans le canal, l'objectif du chapitre suivant étant de reconstituer le profil temporel de la température d'entrée du polymère dans le canal. On présentera de plus la sensibilité de la pression d'entrée du polymère et de la dissipation visqueuse sur les températures dans l'acier.

## IV.5 Conclusion

Tout d'abord, il faut retenir que la buse instrumentée réalisée a bien tenue mécaniquement contrairement à l'ancienne filière qui présentait des fuites de matière lorsque l'on atteignait environ  $15MPa$ . Nos essais ont montré des niveaux de pressions élevés de l'ordre de  $50MPa$  (limite du capteur de pression). La filière peut de plus dépasser ce niveau de pression. Sa bonne tenue mécanique nous a permis d'obtenir des débits matière importants et donc des échauffements dans l'acier et dans le polymère non moins importants. En effet, on a pu atteindre des échauffements dans l'acier d'environ  $20^\circ C$  et dans le polymère de presque  $80^\circ C$ . Ces valeurs sont très conséquentes et prouvent bien que le dispositif expérimental peut être bien sollicité afin d'obtenir des ordres de grandeurs des températures et des pressions dans des conditions d'injection qui peuvent être assez fortes. Certaines de ces mesures expérimentales vont

## *Chapitre IV – Mesures expérimentales*

servir de référence pour la simulation et l'estimation de la condition d'entrée du polymère dans la buse.

### Pour résumer :

- écoulement à hauts débits, donc hautes pressions et vitesses de cisaillement élevées atteints
- faisabilité de la mesure de température sur la presse en mode purge et en condition périodique d'injection dans un moule
- mise en évidence d'échauffements importants, par dissipation visqueuse, dans le polymère et, par conduction, dans la paroi du cylindre
- réalisation d'un essai transitoire lent de référence pour l'estimation par méthodes inverse de la température du polymère en entrée de canal





## ***Chapitre V – Formulation et résolution numérique du problème inverse***

### ***Résumé***

*Dans ce chapitre on développe la résolution du problème d'estimation du profil temporel de température moyenne du polymère en entrée de buse, en régime non stationnaire, à partir des températures relevées dans la proche paroi du canal. On s'intéresse d'abord à la validation du modèle numérique en comparant les résultats calculés en termes de débit massique et d'échauffement, avec ceux obtenus expérimentalement sur l'extrudeuse, et décrits dans le chapitre précédent. Cette comparaison est effectuée en régime stationnaire (pour chaque palier de pression) et en régime transitoire. Une étude de sensibilité des mesures de température dans la paroi du canal, d'une part à la source thermique résultant de la dissipation visqueuse au sein du polymère et d'autre part à la température d'entrée du polymère, confirme la faisabilité de l'inversion, réalisée ensuite selon l'algorithme de Gauss Newton.*

## V.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'objectif est de reconstituer le profil temporel de la température d'entrée du polymère dans le canal à partir de mesures de température indirectes, effectuées dans la paroi proche du canal. Ce problème inverse est résolu avec un modèle couplant les équations de la chaleur et de Navier Stokes. Ce couplage a déjà été effectué par C. Pujos [Puj 06] mais en régime stationnaire. Notre étude porte sur la résolution, en régime non stationnaire, du système d'équations (II.5.1 à II.5.11 paragraphe II.V), où le couplage thermomécanique, entre les champs de vitesse et de température, s'effectue principalement via la viscosité du polymère, dépendante de la température, du taux de cisaillement et considérée de surcroît comme piezodépendante pour le PP HV252. Ce couplage a lieu aussi bien dans le terme correspondant aux forces visqueuses dans l'équation de la quantité de mouvement que dans le terme source de l'équation de la chaleur où la viscosité intervient.

## V.2 Comparaison modèle expérience sur le PE 2042E

### V.2.1 Introduction

Dans une première partie on compare les résultats du modèle numérique avec les résultats expérimentaux. L'essai réalisé en extrusion avec le polyéthylène 2042E et le nez de buse contenant le thermocouple et présenté dans le chapitre précédent a été choisi pour la comparaison. Les variations de pression du régime non stationnaire de cet essai sont en effet plus « douces » que celles du procédé d'injection, et il a été plus facile d'obtenir des résultats numériques fiables dans ces conditions. Toutefois la méthodologie développée pour reconstruire l'évolution temporelle de la température d'entrée n'est pas spécifique à cet essai, et pourra s'appliquer aux mesures réalisées dans les conditions d'injection.

Pour effectuer cette comparaison, le choix des conditions aux limites en température aux frontières ( $\Gamma_5$ ,  $\Gamma_6$ ,  $\Gamma_7$ ) du domaine de calcul et de la condition en pression pour le polymère en entrée du canal ( $\Gamma_2$ ), est primordial, puisqu'il faut reproduire au mieux les conditions expérimentales. L'idée est de restreindre le domaine de calcul, en déplaçant ses frontières au niveau d'une partie des thermocouples situés dans la paroi du canal, et d'effectuer la comparaison entre le modèle et l'expérience, aux points de mesure non utilisés pour les conditions aux limites. D'autre part, la comparaison portera sur les débits massiques calculés et mesurés.

### V.2.2 Restriction du domaine de calcul

Nous avons choisi d'imposer la température des faces externes de la paroi du canal, proche des chauffelettes utilisées pour la régulation thermique, comme indiqué sur les figures V-1 et V-2. Pour cela le domaine de calcul cylindrique est restreint :

- d'une part, en prenant le rayon du cylindre égal à  $r = 12mm$ , rayon correspondant à l'emplacement des quatre micro-thermocouples  $TC_2^{cl}$  à  $TC_5^{cl}$  ( $\Gamma_7$ ),
- et d'autre part, en prenant la longueur du cylindre comprise entre  $z = 15mm$  ( $\Gamma_5$  et  $\Gamma_2$ ) et  $z = 183mm$  ( $\Gamma_6$  et  $\Gamma_3$ ), correspondant respectivement aux positions des micro-thermocouples ( $TC_1^{cl}, TC_2^{cl}$ ) et ( $TC_5^{cl}, TC_6^{cl}$ ).

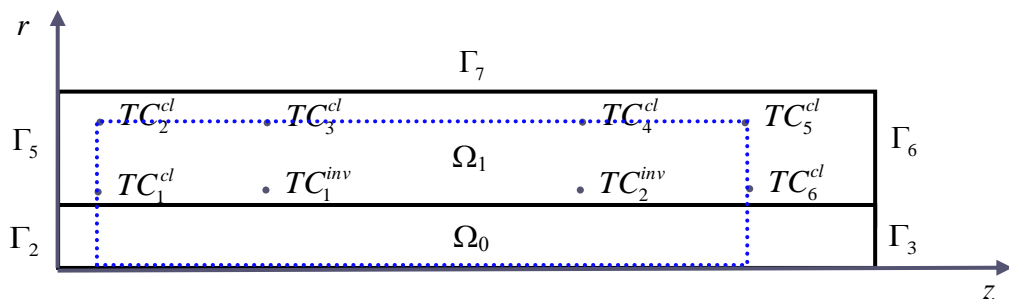


Figure V-1 : Visualisation de la zone de simulation restreinte (rectangle en pointillé bleu) et de la nouvelle dénomination des thermocouples

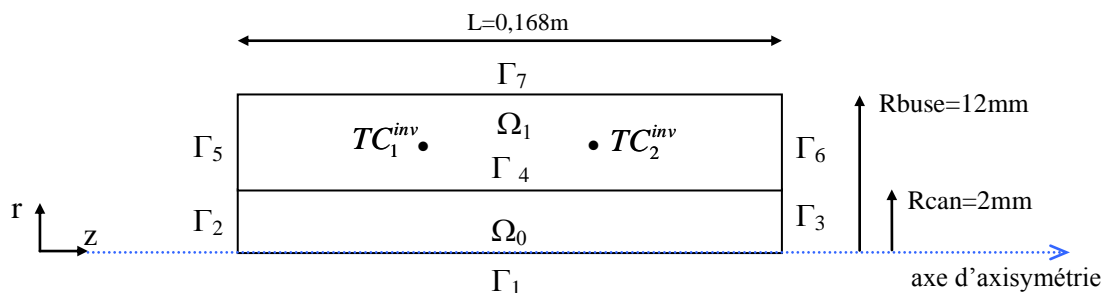


Figure V-2 : Description schématique du domaine spatial d'intégration restreint

La zone de simulation ainsi réduite est symbolisée par le rectangle en pointillé bleu (Figure V-1) et ses nouvelles dimensions sont explicitées Figure V-2. On notera que la notation ( $\Gamma_1$  à  $\Gamma_7$ ) des nouvelles frontières a été conservée, bien que leur emplacement ait été modifié.



### V.2.3 Conditions aux limites

En restreignant le domaine de calcul, on constate que seulement deux points de mesures de température,  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$ , sont internes à ce nouveau domaine de calcul. Les mesures en ces points seront utilisées pour la comparaison modèle expérience et pour la résolution du problème inverse. Les six autres thermocouples situés désormais (Figure V-1) à la frontière du domaine de calcul, seront notés  $TC_{1,...,6}^{cl}$ . Les mesures réalisées en ces points seront interpolées linéairement pour reconstruire les variations spatio-temporelles des conditions aux limites sur les frontières ( $\Gamma_5$ ,  $\Gamma_6$ ,  $\Gamma_7$ ). Ces interpolations sont effectuées entre 2 points pour les frontières  $\Gamma_5$  (entre  $TC_1^{cl}$  et  $TC_2^{cl}$ ) et  $\Gamma_6$  (entre  $TC_5^{cl}$  et  $TC_6^{cl}$ ); et entre 4 points pour la frontière  $\Gamma_7$  (entre  $TC_2^{cl}, TC_3^{cl}, TC_4^{cl}, TC_5^{cl}$ ) (Figure V-1).

Précisons que les thermocouples sont distants radialement de  $9,5mm$  et longitudinalement de  $56mm$ . Les erreurs dues à l'interpolation linéaire sont probablement plus importantes pour la frontière  $\Gamma_7$  que pour les deux frontières des extrémités  $\Gamma_5$  et  $\Gamma_6$ . On notera aussi que la première rangée de thermocouples ( $r = 2,5mm$ ) étant située à  $0,5mm$  de la paroi interne du cylindre, les frontières  $\Gamma_5$  et  $\Gamma_6$  nécessitent une extrapolation des températures entre  $r = 2mm$  et  $r = 2,5mm$ .

Il reste à déterminer les conditions expérimentales à la fois mécanique (pression d'entrée du polymère  $\bar{P}_0(t)$ ) et thermique (température d'entrée du polymère  $\bar{T}_0(t)$ ) sur la frontière  $\Gamma_2$ , qui constitue l'entrée du canal (domaine  $\Omega_0$ ). Cette détermination n'est pas immédiate. En effet, l'évolution temporelle de la pression (notée  $P_{mat\_amont}$ ) n'est pas mesurée sur la frontière  $\Gamma_2$  et une correction est nécessaire pour l'appliquer sur  $\Gamma_2$ , en évaluant la perte de charge correspondant à cette zone d'écoulement amont située entre le capteur de pression et la frontière  $\Gamma_2$  du domaine de calcul. Cette correction s'appuiera sur les estimations de perte de charges effectuées expérimentalement avec la buse « tronquée ». Toutefois en régime non stationnaire cette correction, détaillée plus loin, reste tributaire du modèle rhéologique utilisé pour calculer l'écoulement.

De même, aucune mesure de température d'entrée du polymère n'est disponible sur  $\Gamma_2$ . Dans une première approche nous disposons toutefois de la mesure délivrée par le thermocouple dans le nez de buse, et donc situé près de la sortie du canal, en aval de l'écoulement. Cette mesure

nous servira pour approcher la forme de l'évolution temporelle  $\bar{T}_0(t)$  en supposant que les formes en entrée et en sortie de canal restent analogues. Cette hypothèse ne sera pas nécessaire dans la deuxième partie, lors de la résolution du problème inverse.

### V.2.3.2 Estimation de la pression à l'entrée du canal

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les mesures  $P_{mat\_amont}$  de la pression avec la buse tronquée vont permettre d'estimer au mieux la pression d'entrée  $\bar{P}_0(t)$  de la zone de calcul. Les pertes de charges du polymère dans le cylindre étant corrélées au débit, les corrections doivent être effectuées à chaque instant lors d'un régime transitoire où le débit varie à chaque pas de temps. La Figure V-3 montre l'évolution de la perte de charge du polyéthylène 2042E dans la buse tronquée en fonction du débit massique (de 0,3 à  $2\text{g}\cdot\text{s}^{-1}$ ) à  $T = 220^\circ\text{C}$ .

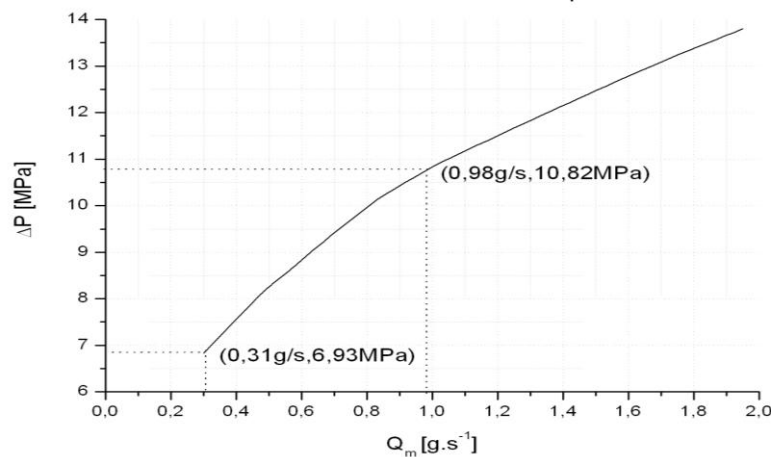


Figure V-3 : Perte de charge en fonction du débit massique dans la buse tronquée

Dans l'essai non stationnaire considéré, le signal de pression mesuré  $P_{mat\_amont}(t)$  représenté figure V-4a, comporte deux paliers.

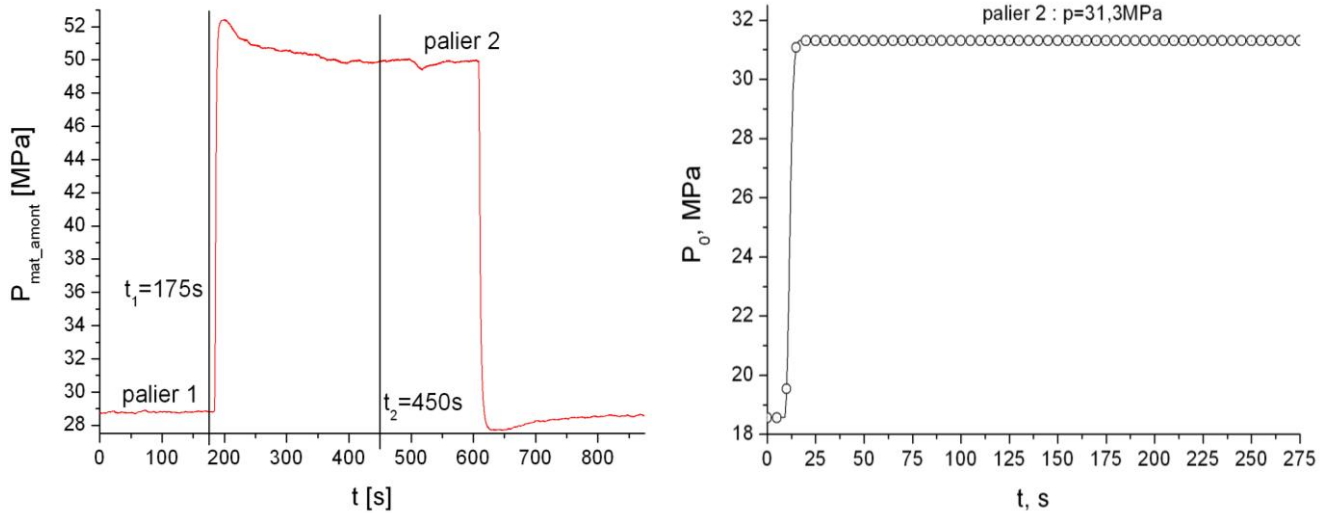


Figure V-4 : Evolution temporelle a) de la mesure de pression amont du polymère et b) de la pression imposée en entrée de  $\bar{P}_0(t)$  corrigée des pertes de charges

Pour déterminer la pression d'entrée en régime stationnaire, on soustrait d'abord à la mesure  $P_{mat\_amont}$ , la perte de charge correspondante au débit de chacun des paliers, via la Figure V-3. Ensuite, la longueur du domaine de simulation, délimité par les thermocouples  $TC_2^{cl}$  et  $TC_5^{cl}$ , étant restreinte à  $168mm$ , on soustrait alors la perte de charge supplémentaire due à ces  $30mm$  de différence de longueur de canal. Pour cela, nous supposons (dans une première approche) que les pertes de charge évoluent linéairement dans le canal. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Palier 1	Palier 2	Palier 2 corrigé
Débit massique du polymère	$0,3g.s^{-1}$	$1g.s^{-1}$	$0,98g.s^{-1}$
$P_{mat\_amont}$ mesurée en amont	$28,80MPa$	$49,90MPa$	
Perte de charge en amont du canal	$6,93MPa$	$10,82MPa$	
Perte de charge dans tous le canal ( $198mm$ )	$21,87MPa$	$39,08MPa$	$36,88MPa$
Pertes de charge dans le domaine de calcul ( $168mm$ )	$18,56MPa$	$33,16MPa$	$31,3MPa$

Tableau V-1 : Evaluation des pressions imposées en entrée de la zone simulée pour les 2 paliers

Finalement, la pression du polymère  $\bar{P}_0(t)$  imposée sur la frontière  $\Gamma_2$  est représentée Figure V-4b et la mesure de pression amont à partir de laquelle on en a déduit  $\bar{P}_0(t)$  est tracée Figure V-4a. On souligne que l'essai comparé ne sera pas pris dans la totalité de son cycle ( $> 850s$ ) mais pendant seulement  $275s$  entre  $t_1 = 175s$  et  $t_2 = 450s$  (Figure V-4). Nous nous

sommes intéressés principalement au début de la période du régime transitoire correspondant à la montée en pression et au changement du champ de vitesse. Numériquement le couplage considéré dans les équations du modèle a engendré des difficultés de convergence du solveur. Pour ajuster le débit calculé à celui mesuré ( $=0,98g.s^{-1}$ ), une légère correction de perte de charge a du être effectuée par tâtonnement. La pression imposée pour le palier 2 est finalement de  $31,3MPa$ .

### V.2.3.3 Condition aux limites en température

#### IV.2.3.3.1 Conditions aux limites dans la paroi du canal

##### IV.2.3.3.1.1 Pour le régime stationnaire du palier 1

La Figure V-5 représente les évolutions spatiales de température sur les frontières  $\Gamma_5$  et  $\Gamma_6$  et la Figure V-6, celle sur la frontière  $\Gamma_7$ . Elles ont été construites à partir de 6 mesures de température  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$  dans l'acier du cylindre interpolées linéairement entre elles. On constate que les frontières  $\Gamma_5$  et  $\Gamma_6$  sont légèrement plus chaudes près du canal, on a respectivement  $0,5^\circ C$  et  $0,8^\circ C$  d'écart de température le long de ces frontières. Sur la frontière  $\Gamma_7$ , la température est quasi-uniforme, le maximum de température est atteint à  $z=112mm$  (à  $TC_4^{cl}$ ), mais l'écart maximal reste très faible.

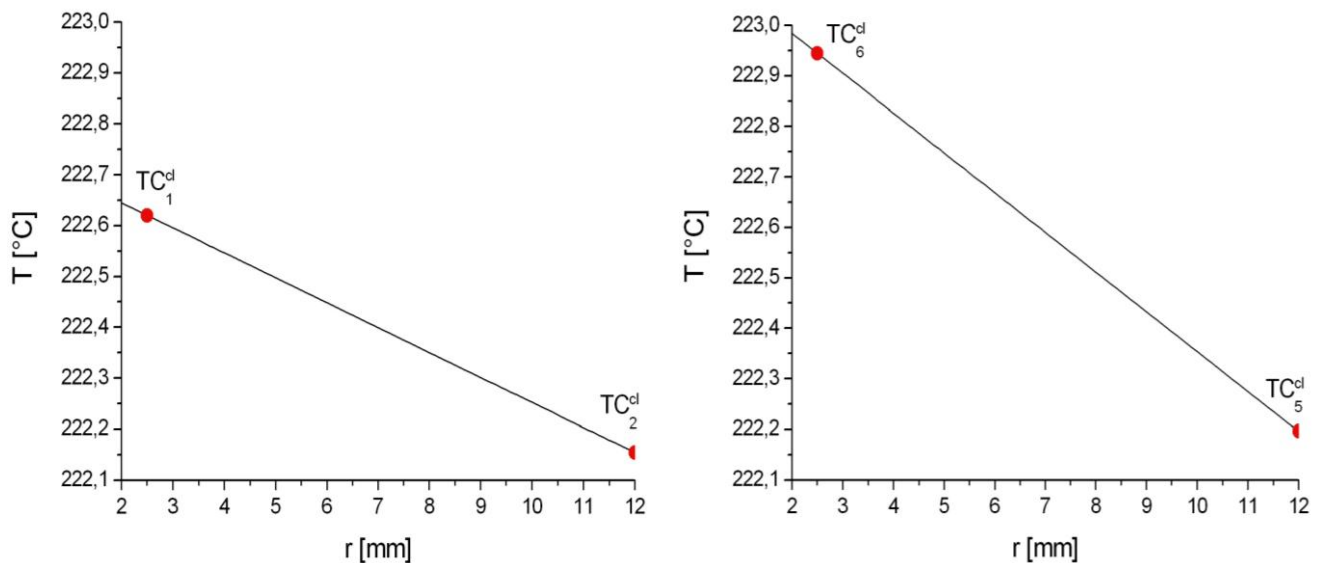


Figure V-5 : Evolution spatiale de la température imposée sur a) la frontière  $\Gamma_5$  et b) sur la frontière  $\Gamma_6$  pour le palier 1

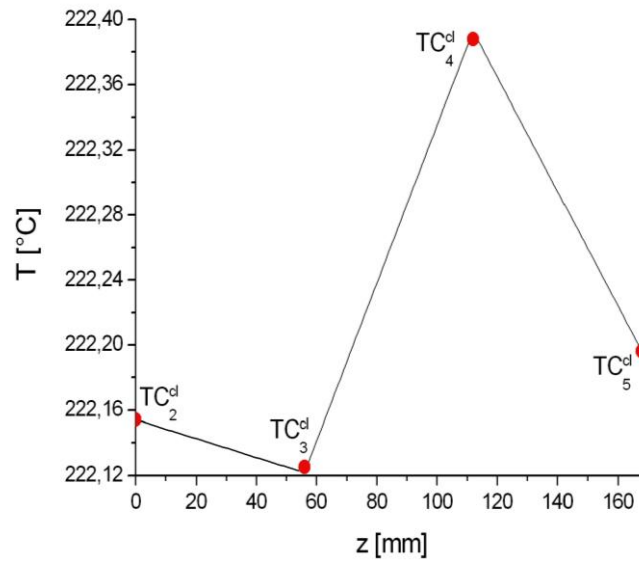


Figure V-6 : Evolution spatiale de la température imposée sur la frontière  $\Gamma_7$  pour le palier 1

Les conditions aux limites en température et en pression imposées sur la frontière  $\Gamma_2$  valent :  $\bar{T}_0|_{\Gamma_2} = 222^\circ\text{C}$  (section IV.4.2.2 : état thermique initial) et  $\bar{P}_0|_{\Gamma_2} = 18,56\text{MPa}$  (Tableau V-1).

#### IV.2.3.3.1.2 Pour le régime transitoire

La Figure V-7 représente les évolutions spatio-temporelles de température sur les frontières  $\Gamma_5$  et  $\Gamma_6$  et la Figure V-8, celle de la frontière  $\Gamma_7$ , sur l'intervalle de temps considéré.

On constate :

- D'une part que les températures sont plus élevées à proximité du canal que vers l'extérieur du domaine (frontière  $\Gamma_7$ ).
- D'autre part que ces frontières s'échauffent au cours du temps : entre 3 et 4°C d'échauffement pour  $\Gamma_5$  et  $\Gamma_6$ . Pour  $\Gamma_7$ , cette augmentation ne dépasse pas 1,2°C.

Ces observations peuvent s'expliquer par le fait que la régulation thermique de la paroi externe du canal n'a été conçue que pour compenser les fuites thermiques, en modulant entre 0 et 100% la puissance maximale disponibles avec les chaufferettes électriques, sans introduire de dispositif de refroidissement. Or les résultats de cet essai, discutés plus loin, montrent que d'une part la température matière à l'entrée du canal varie au-delà de la température de consigne du système de régulation, et d'autre part que le terme source dû à la dissipation visqueuse est très significatif. La régulation est ainsi impuissante à maintenir la température à sa valeur de consigne.

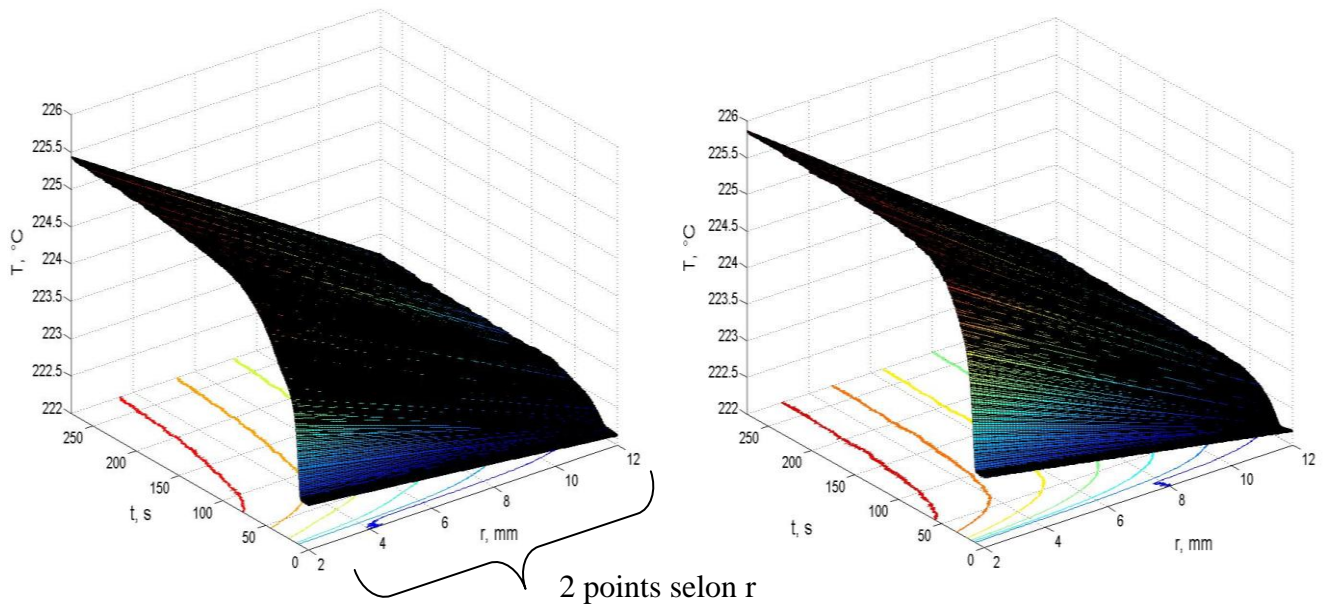


Figure V-7 : Evolution spatio-temporelle de la température imposée sur la frontière  $\Gamma_5$  et  
b) sur la frontière  $\Gamma_6$

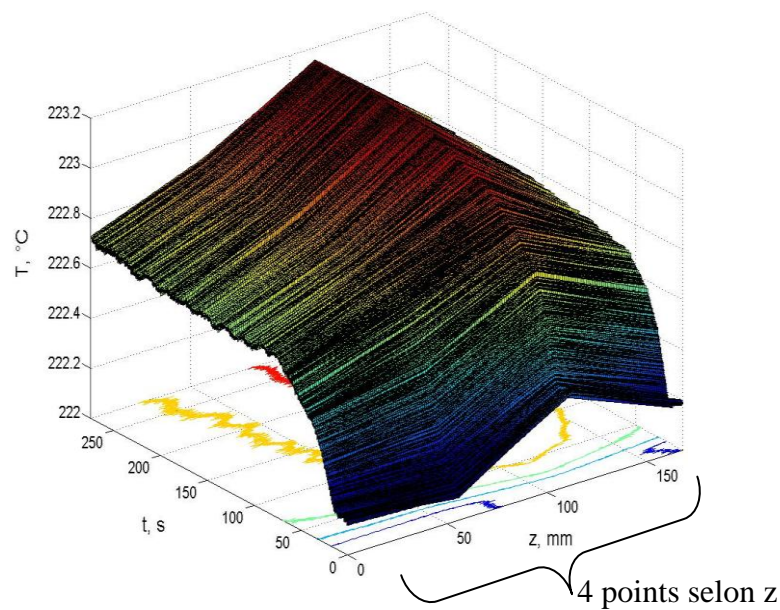


Figure V-8 : Evolution spatio-temporelle de la température sur la frontière  $\Gamma_7$

#### IV.2.3.3.2 Température d'entrée du polymère en régime transitoire

Bien que les études précédentes ([Kar04] et [Puj06]) aient montré comment accéder à la distribution spatiale du profil thermique à l'entrée du canal, pour des raisons évidentes de simplification du modèle, il a été choisi dans une première approche de ne considérer que les variations temporelles de la température moyenne du polymère dans la section d'entrée de la zone de calcul pour définir la condition limite  $\bar{T}_0(t)$  imposée sur la frontière  $\Gamma_2$ . Cependant nous

disposons pour cet essai d'une information, notée  $T_{mat\_sortie}(t)$ , sur la température du polymère en sortie de canal (Figure V-9a). Afin d'anticiper le résultat d'une étude du problème inverse consistant à reconstruire la température d'entrée, nous avons pris cette forme comme référence et par essais successifs nous avons déterminé une évolution temporelle  $\bar{T}_0(t)$ , en jouant sur l'amplitude, afin d'obtenir des échauffements et un débit identiques aux mesures, aux incertitudes près. La température  $\bar{T}_0(t)$  ainsi déterminée est représentée sur la Figure V-9b.

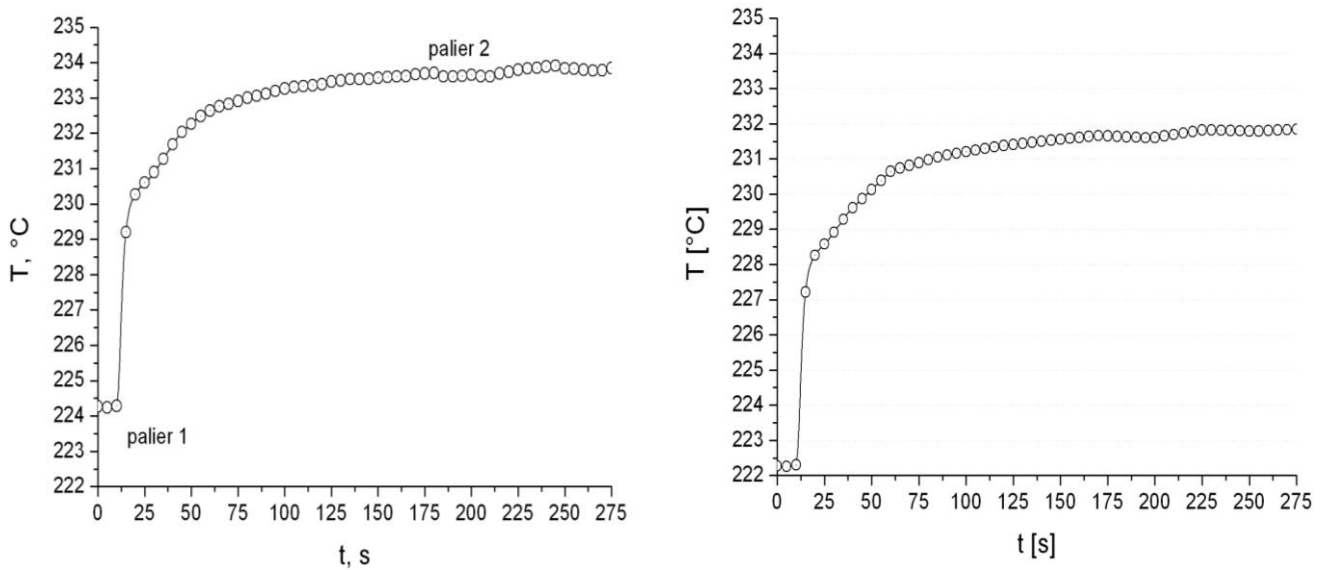


Figure V-9 : a) Mesure de la température  $T_{mat\_sortie}$  du polymère en sortie de buse  
 b) température  $\bar{T}_0(t)$  imposée sur  $\Gamma_2$

### V.2.4 Résultats du calcul du régime stationnaire – palier 1

Le but est de déterminer le champ thermique et le champ de vitesse dans le canal, correspondant au palier 1, afin de reconstituer au mieux les conditions initiales du calcul du régime transitoire vers le palier 2.

Pour cela, les résultats du calcul de ce régime stationnaire ont été comparés aux résultats expérimentaux :

- D'une part les températures aux points de mesure  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$ , non utilisées comme conditions aux limites, sont comparés aux profils de température (Figure V-10) calculés dans la paroi métallique selon  $z$  à  $r = 2,5mm$  (1<sup>ère</sup> rangée de thermocouple) et à  $r = 12mm$  (2<sup>ème</sup> rangée de thermocouple correspondant à la frontière  $\Gamma_7$ ). La Figure V-10 montre que les écarts en ces points sont inférieurs à l'incertitude de mesure ( $0,1K$ ).

- D'autre part la simulation numérique conduit à un débit massique  $Q_1^{cal} = 0,30g.s^{-1}$  alors que le débit mesuré vaut  $Q_1^{mes} = 0,31 \pm 0,01g.s^{-1}$ , l'écart est inférieur à 4% .

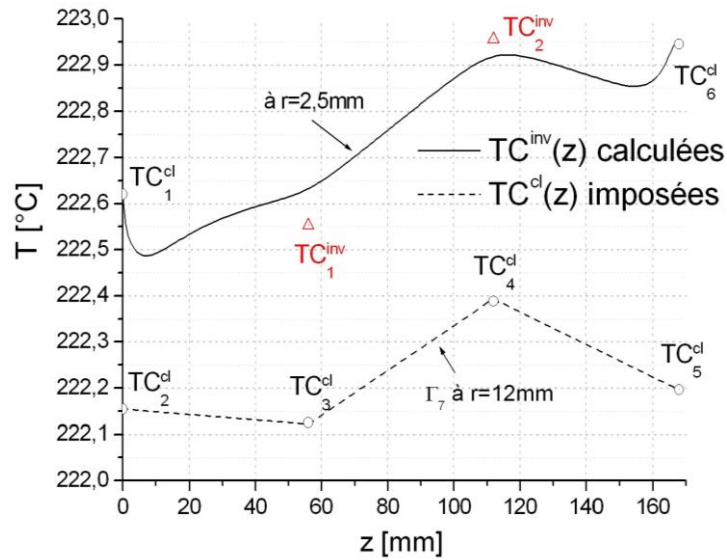


Figure V-10 : Profils axiaux de température à  $r = 2,5mm$  (calculé) et  $r = 12mm$  (imposé) pour le palier 1

Cette comparaison entre le modèle numérique et l'expérience (débits massiques et échauffements dans la proche paroi du canal), constitue une première validation du modèle et de son adéquation à prédire le couplage des phénomènes thermiques et mécaniques mis en jeu.

A l'issue de ce calcul stationnaire, on dispose ainsi du profil radial de vitesse présenté (Figure V-11a) et celui de la vitesse de cisaillement (Figure V-11b) qui détermine la source volumique au sein de l'écoulement. Les solutions de cet état stationnaire (température et champ de vitesse) sont alors choisies comme initialisation du calcul du régime transitoire.

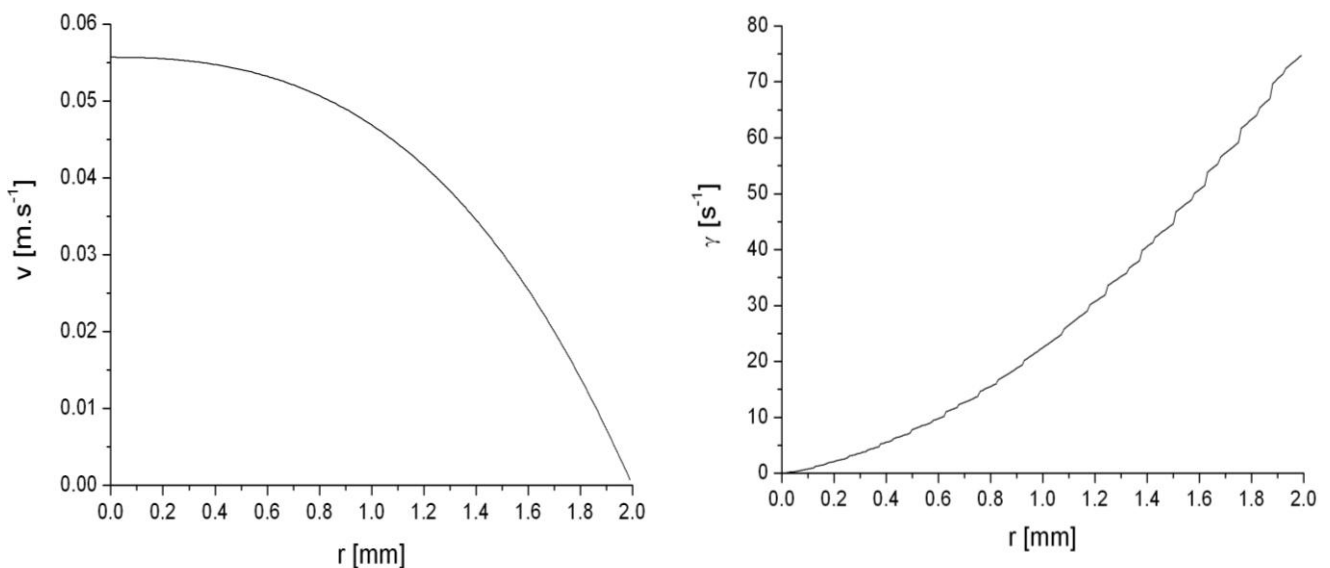


Figure V-11 : Profils radiaux a) de vitesse et b) de taux de cisaillement pour le palier 1



Le calcul conduit également à une évaluation des échauffements dans le polymère lors de son avancement dans le canal, on montre les profils de température calculés dans le canal pour le palier stationnaire 1, dans les sections droites des points de mesure (Figure V-12). On remarque l'effet de la dissipation visqueuse par la déformation du profil thermique. On observe un maximum d'échauffement en sortie de la zone de simulation de  $3,5^{\circ}\text{C}$ . Rappelons que ces calculs ont été effectués avec un profil d'entrée supposé uniforme égal à  $222^{\circ}\text{C}$ .

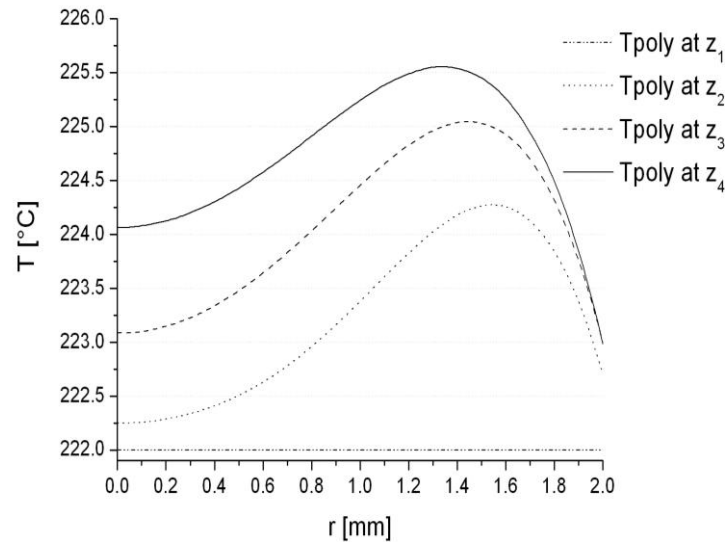


Figure V-12 : Profils de température du polymère calculés dans les sections droites du canal, aux abscisses des points de mesure  $z_1=0$  ;  $z_2=5,6$  ;  $z_3=11,2$  et  $z_4=16,8\text{cm}$

## V.2.5 Résultats du calcul du régime stationnaire – palier 2

Une fois les conditions initiales déterminées par l'état stationnaire du palier 1, la résolution du problème instationnaire, c'est-à-dire le passage de l'état stationnaire du palier 1 à l'état stationnaire du palier 2, est réalisée. La température d'entrée a été estimée par tâtonnement à partir de la mesure de température  $T_{mat\_sortie}(t)$  à  $\bar{T}_0|_{\Gamma_2} = 232^{\circ}\text{C}$  et la pression d'entrée à  $\bar{P}_0|_{\Gamma_2} = 31,3\text{MPa}$ . La détermination de la température d'entrée est développée au paragraphe V.3.

Comme pour le palier 1, les résultats du calcul du nouveau régime stationnaire ont été comparés aux résultats expérimentaux :

- les profils de température (Figure V-13) calculés dans l'acier selon  $z$  à  $r = 2,5\text{mm}$  montrent un très bon accord avec les valeurs mesurées
- D'autre part la simulation numérique conduit à un débit massique calculé  $Q_2^{cal} = 0,97\text{g.s}^{-1}$ , valeur très proche de celle mesurée ( $Q_2^{mes} = 0,98 \pm 0,01\text{g.s}^{-1}$ )

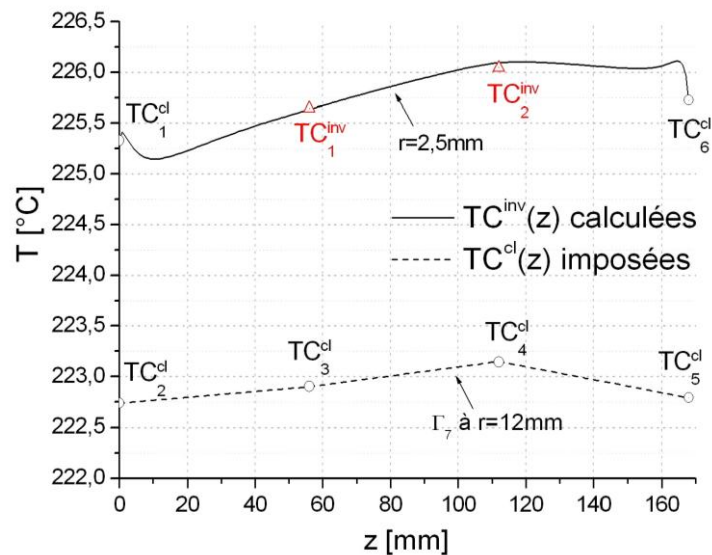


Figure V-13 : Profil axial calculé de la température à  $r = 2,5\text{mm}$  et  $r = 12\text{mm}$  pour le palier 2

Les profils de vitesse et de taux de cisaillement sont représentés Figure V-14a et Figure V-14b. On remarque que la vitesse du polymère atteint  $18\text{cm.s}^{-1}$  au centre du canal alors qu'elle n'était que d'environ  $5,5\text{cm.s}^{-1}$  pour le palier 1.

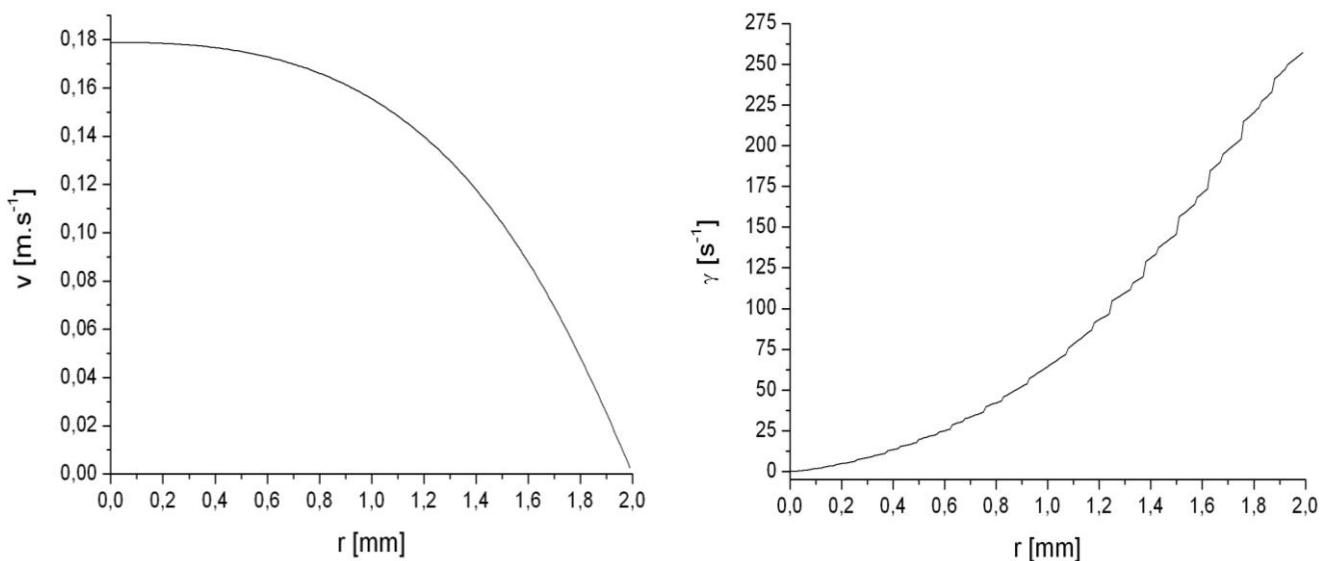


Figure V-14 : Profils radiaux a) de vitesse et b) de taux de cisaillement pour le palier 2

Finalement, on peut également sortir, tout comme le premier palier, les profils de température dans les sections droites des points de mesure pour le second palier (Figure V-15). Le calcul numérique nous donne, pour une entrée supposée uniforme, des échauffements d'un maximum  $7^{\circ}\text{C}$  dans le polymère entre le début et la fin de la zone de simulation alors ils n'étaient que d'environ  $3,5^{\circ}\text{C}$  dans le palier 1.

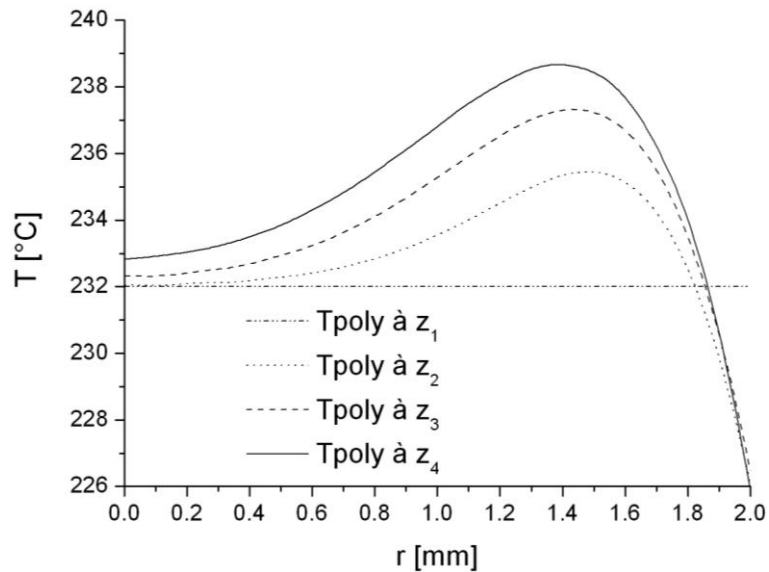


Figure V-15 : Profils de température du polymère calculés dans les sections droites du canal, aux abscisses des points de mesure  $z_1=0$  ;  $z_2=5,6$  ;  $z_3=11,2$  et  $z_4=16,8$ cm

## V.2.6 Résultats du calcul du régime transitoire

Comparons maintenant les valeurs de ces thermocouples sur toute la plage de temps de la simulation en imposant l'évolution de température  $\bar{T}_0(t)$  estimée par « tâtonnement » et décrite au sous paragraphe IV.2.3.3.2. Notons  $T_i(t)$  l'évolution temporelle des températures calculées aux points  $TC_i^{inv}$ , où  $i = \{1,2\}$  et, pour des raisons de convention d'écriture dans les méthodes inverses, on notera désormais  $\tilde{T}_i(t)$  les valeurs des températures mesurées aux points  $TC_i^{inv}$ .

La Figure V-16, où sont tracés les évolutions temporelles des températures mesurées  $\tilde{T}_1(t)$  (correspondant au point  $TC_1^{inv}$ ) et  $\tilde{T}_2(t)$  (correspondant au point  $TC_2^{inv}$ ) (symboles, Figure V-16a) et calculées (pointillé et trait plein, Figure V-16a), permet de conclure que la simulation est assez proche de la réalité et que la température d'entrée du polymère  $\bar{T}_0(t)$  estimée par tâtonnement n'est pas dénuée de sens. On précise que l'on y observe des échauffements de l'ordre de  $4K$  sur les températures mesurées et calculées. On définit aussi le vecteur écart  $e$  tel que  $e_i(t) = T_i(t) - \tilde{T}_i(t)$ . Les écarts entre les températures mesurées et calculées aux niveaux des deux points de mesure sont représentés Figure V-16b. On constate que l'écart maximal entre les températures mesurées et calculées se situe au niveau de la phase transitoire (plus difficile à

modéliser !) et est d'environ  $0,3^{\circ}\text{C}$  à l'emplacement de  $TC_1^{inv}$ . Afin d'être plus précis, cet écart sera tenté d'être réduit grâce à un algorithme d'inversion sur les mesures.

Ces résultats sont satisfaisants puisqu'ils valident d'une part le modèle utilisé, c'est-à-dire son aptitude à prédire le comportement du système « visco-advecto-diffusif », et d'autre part, ils confortent les choix effectués lors de la conception du dispositif expérimental.

Ces résultats permettent donc d'envisager la résolution du problème inverse visant à estimer la température d'entrée  $\bar{T}_0(t)$  à partir des mesures  $\tilde{T}_1(t)$  et  $\tilde{T}_2(t)$ . Toutefois, une analyse préalable de sensibilité est nécessaire. Dans le paragraphe qui suit nous allons étudier et comparer numériquement l'influence respective de la dissipation visqueuse  $\Phi_{\Omega_0}$  et du profil d'entrée  $\bar{T}_0(t)$  sur les températures mesurées.

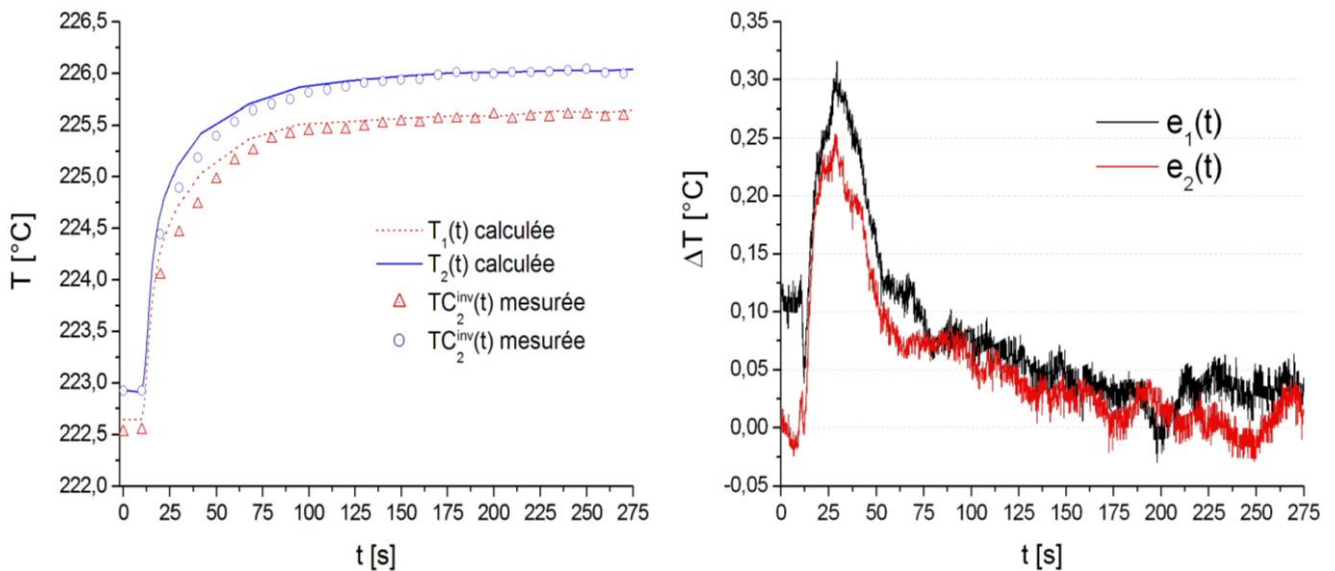


Figure V-16 : a) Comparaison entre les résultats du calcul  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  et les mesures  $\tilde{T}_1(t)$  et  $\tilde{T}_2(t)$  et b) les écarts relatifs  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  sur  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$

On calcule la moyenne des carrés des écarts pour chaque capteur (avec on le rappelle  $j$  comme indice de temps) afin d'obtenir l'écart quadratique moyen des résidus :

$$\text{- pour } TC_1^{inv}, \text{ on a } \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (e_1^j)^2} = 0,10K \text{ et pour } TC_2^{inv}, \text{ on a } \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (e_2^j)^2} = 0,08K$$

Ces résultats montrent une bonne adéquation du modèle avec les mesures. Toutefois, nous verrons au paragraphe V.3.4 que l'écart quadratique moyen du résidu peut être divisé par un facteur 4 et atteindre ainsi l'écart type du bruit de mesure estimé à  $0,025K$ .

### V.2.7 Etude de sensibilité

L'étude de sensibilité a consisté à observer numériquement l'influence du terme source  $\Phi_{\Omega_0}(t)$  et de la température moyenne d'entrée  $\bar{T}_0(t)$  sur les échauffements calculés aux points de mesure des thermocouples  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$ .

La Figure V-17 est obtenue en supprimant le terme source ( $\Phi_{\Omega_0} = 0$ ) dans l'équation de la chaleur. La simulation donne des valeurs de débit  $Q_1^{cal} = 0,29g.s^{-1}$  et  $Q_2^{cal} = 0,93g.s^{-1}$ , proches des valeurs obtenues avec  $\Phi_{\Omega_0} \neq 0$ , alors que les températures ne correspondent plus avec celles mesurées. Cela signifie que les échauffements dus à la dissipation visqueuse dans les conditions de l'expérience, ne modifient pas significativement la viscosité du polymère et donc le débit est peu sensible, mais influencent notablement les températures aux points de mesure.

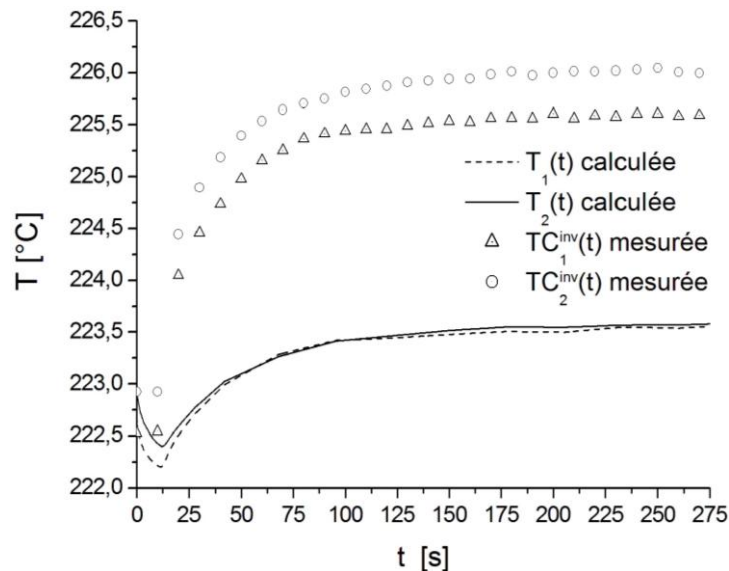


Figure V-17 : Comparaison des échauffements mesurés et des réponses calculées avec  $\Phi_{\Omega_0} = 0$

Pour observer l'influence de la température d'entrée, on impose  $\bar{T}_0(t) + \delta\bar{T}_0(t)$  avec  $\delta\bar{T}_0(t) = 2K$ . On constate alors, Figure V-18, que les évolutions temporelles calculées des températures des thermocouples  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$  s'écartent des mesures pour atteindre sur le second palier un biais significatif de  $0,5K$ . Dans les conditions de l'expérience présentée ici, on notera donc que les températures aux points de mesure sont aussi sensibles à la température d'entrée.

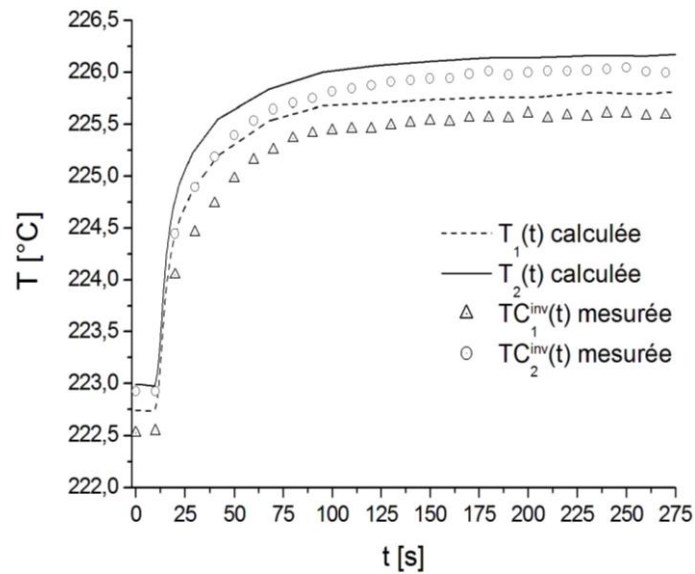


Figure V-18 : Comparaison des mesures et des températures calculées avec l'entrée  $\bar{T}_0(t) + \delta\bar{T}_0(t)$

## V.2.8 Bilan thermique

En vu de discriminer les influences respectives de  $\Phi_{\Omega_0}(t)$  et  $\bar{T}_0(t)$ , on analyse numériquement les flux de chaleur échangés par le polymère avec la paroi du canal et ceux créés par la dissipation visqueuse. Les Figure V-19a et Figure V-19b montrent respectivement la puissance linéique échangée à l'interface polymère paroi avec et sans terme source pour le palier 1 et le palier 2.

Pour le palier 1 (Figure V-19a), la puissance volumique dégagée par le terme source de dissipation visqueuse, intégrée sur le domaine de calcul vaut  $7,45W$ . On constate que la puissance linéique échangée à la paroi augmente à mesure que le polymère progresse dans le canal car il se réchauffe. L'intégrale de cette puissance linéique sur la longueur du domaine de calcul vaut  $5W$ . Par conséquent, le polymère entre l'entrée et la sortie du canal stocke la différence égale à  $7,45 - 5 = 2,45W$ , soit 33% de la source volumique. Par ailleurs, on vérifie, Figure V-19a, que sans terme source et avec la même condition d'entrée, la puissance échangée avec la paroi devient très faible et vaut  $-0,17W$ , car la température d'entrée  $\bar{T}_0(t)$  est voisine de celle de la paroi.

Pour le palier 2 (Figure V-19b), la puissance volumique dégagée par le terme source de dissipation visqueuse, intégrée sur le domaine de calcul vaut  $43,42W$ . On constate comme dans le cas précédent, que la puissance linéique échangée à la paroi augmente à mesure que le polymère

avance dans le canal. L'intégrale de cette puissance linéique sur la longueur du domaine de calcul vaut  $28W$ . Par conséquent, le polymère entre l'entrée et la sortie du canal stocke la différence égale à  $43,4 - 28 = 15,4W$ , soit 35% de la source volumique. Contrairement au cas précédent du palier 1, la puissance échangée avec la paroi, en supprimant le terme source, devient positive et vaut  $4,6W$ . En effet la température moyenne d'entrée  $\bar{T}_0(t)$  a augmenté de l'ordre de  $10K$ , entre le palier 1 et le palier 2, (Figure V-9b).

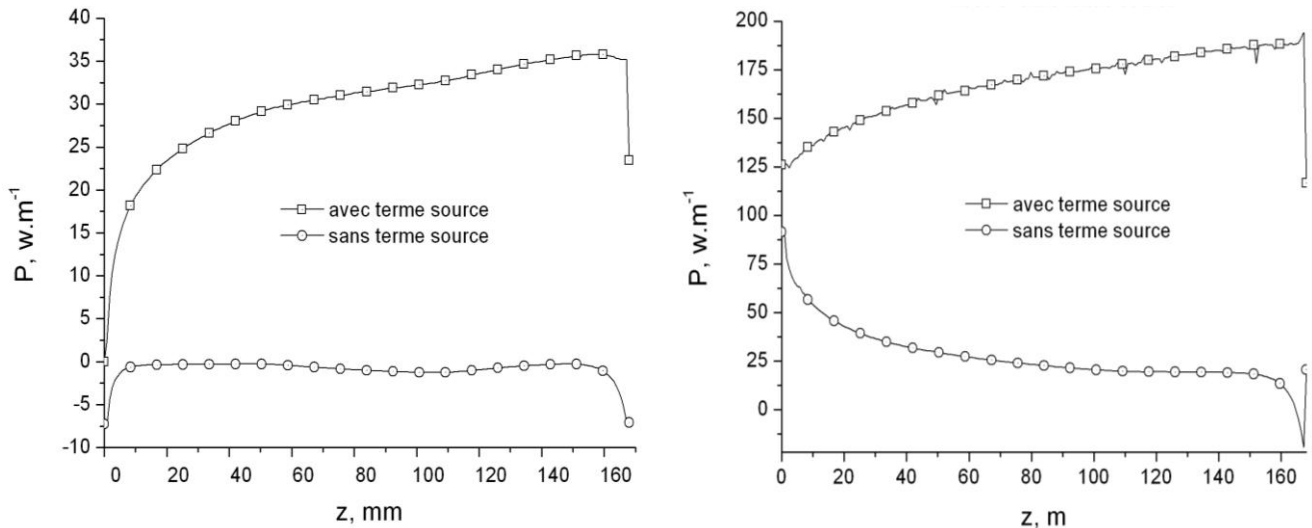


Figure V-19 : Puissance linéique échangée à travers la paroi (avec et sans terme source) pour le a) palier 1 et b) le palier 2

Cette analyse de sensibilité montre d'une part que, dans les conditions expérimentales considérées, les températures mesurées dans la paroi métallique du canal sont sensibles à la fois à la source de dissipation visqueuse et à la température d'entrée du polymère, et d'autre part que le modèle numérique permet de quantifier les échanges thermiques qui résultent de ces deux facteurs.

## V.3 Estimation de la température d'entrée du polymère

### V.3.1 Principe de l'estimation paramétrique

Notons  $T_i^j$  la discrétisation spatio-temporelle du champ de température calculé et  $\tilde{T}_i^j$  celui mesuré aux points  $TC_i^{inv}$ , où  $i = 1, \dots, n$  correspond à l'indice d'espace et  $j = 1, \dots, m$  l'indice de discrétisation du temps. On discrétise aussi le vecteur écart  $e$  tel que  $e_i^j = T_i^j - \tilde{T}_i^j$ .

## Chapitre V – Formulation et résolution numérique du problème inverse

Supposons que le calcul de ce champ dépend d'un vecteur paramètre  $q = (q_1, q_2, \dots, q_p)$  inconnu, introduit dans les équations du modèle. Le plus souvent, la comparaison entre champ mesuré et calculé aux points de mesure, et qui permet de déterminer  $q$ , se fait au sens des moindres carrés. On introduit alors la fonction coût  $S$  :

$$S(q) = \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^m (T_i^j(q) - \tilde{T}_i^j)^2 \quad (\text{V.1})$$

Le calcul de  $q$  s'effectue alors en minimisant  $S(q)$  ou encore en résolvant l'équation :

$$\bar{\nabla} S(q) = 0 \quad (\text{V.2})$$

$$\sum_i^n \sum_j^m (T_i^j(q) - \tilde{T}_i^j) \frac{\partial T_i^j(q)}{\partial q_k} = 0, k = 1, \dots, p \quad (\text{V.3})$$

En pratique, les températures  $T_i^j$  sont concaténées dans un unique vecteur  $(T_l, l = 1, \dots, N)$  avec  $N = n * m$  et on introduit les coefficients de sensibilité définis par :

$$X_{l,k} = \frac{\partial T_l}{\partial q_k} \quad (\text{V.4})$$

Et l'équation (V.4) s'écrit sous forme matricielle :  $[X]^T (T(q) - \tilde{T}) = 0$  (V.5)

### V.3.2 L'algorithme de Gauss Newton

Dans cette méthode, on applique l'approximation linéaire au champ de température calculé :

$$T(q^{(n+1)}) = T(q^{(n)}) + [X](q^{(n+1)} - q^{(n)}) \quad (\text{V.6})$$

On remplacera alors dans l'équation (V.5) et on obtient :

$$[X]^T (T(q^{(n+1)}) - Tm) = [X]^T (T(q^{(n)}) + [X](q^{(n+1)} - q^{(n)}) - \tilde{T}) = 0 \quad (\text{V.7})$$

$$[X]^T (T(q^{(n)}) - \tilde{T}) + [X]^T [X](q^{(n+1)} - q^{(n)}) = 0$$

$$\text{Soit } q^{(n+1)} = q^{(n)} - ([X]^T [X])^{-1} [X]^T (T(q^{(n)}) - \tilde{T}) \quad (\text{V.8})$$

Cette méthode repose d'une part sur le calcul de la matrice de sensibilité  $[X]$  et d'autre part sur l'inversion de la matrice  $[X]^T [X]$ .



## Chapitre V – Formulation et résolution numérique du problème inverse

Les coefficients de sensibilité ont été déterminés par une approximation décentrée de la dérivée. Il suffit de calculer le champ de température en effectuant des variations sur chaque composante du vecteur paramètre, ce qui conduit à la résolution de  $(p+1)$  problèmes directs sur l'intervalle de temps considéré :

Avec  $q = (q_1, q_2, \dots, q_p)$ , on trouve  $T(q)$

Avec  $q^+ = (q_1 + \delta q_1, q_2, \dots, q_p)$ , on obtient par différence  $[T(q^+) - T(q)] / \delta q$  la première colonne de la matrice  $X_{l,1} \approx \frac{\partial T_l}{\partial q_1}, l = 1..N$ .

Et ainsi de suite jusqu'à obtenir  $X_{l,p} \approx \frac{\partial T_l}{\partial q_p}, l = 1..N$ .

Finalement, on assemble la matrice  $[X]$ , à l'issue des  $p+1$  simulation du problème direct. Le nombre de paramètres choisis joue un rôle important d'une part dans le coût des calculs et d'autre part dans le conditionnement de cette matrice et donc dans la solution du problème inverse ainsi construite. Dans le paragraphe suivant, l'influence de  $p$  est d'abord examinée en simulation et l'algorithme d'inversion est ensuite appliqué aux mesures.

### V.3.3 Etude de la méthode d'inversion en simulation

On commence par se donner un profil de référence  $\bar{T}_0(t)$  analogue à celui estimé par tâtonnement (figure V.9b). Ensuite, on paramétrise  $\bar{T}_0(t)$  par des fonctions d'interpolation  $\sigma_i(t)$  et on choisit leur nombre  $p$ . On obtient alors en imposant  $\bar{T}_0(t)$  discrétisée en entrée de la zone de simulation, les réponses  $\tilde{T}_1(t)$  et  $\tilde{T}_2(t)$  aux points de mesure  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$ , qui serviront de référence pour calculer la fonction coût à minimiser. Pour finir, on estimera  $\bar{T}_0(t)$  via l'algorithme de Gauss Newton pour un cas, sans bruit dans les réponses aux points des thermocouples, avec seulement  $p = 5$  paramètres.

#### V.3.3.1 Paramétrage de $T_0(t)$

L'évolution temporelle de la température moyenne sur la section d'entrée du polymère est paramétrée par une somme de plusieurs fonctions. Le nombre  $p$  de ces fonctions est important

## Chapitre V – Formulation et résolution numérique du problème inverse

car le conditionnement de la matrice de sensibilité en dépend. L'expression de la discrétisation de la température d'entrée est la suivante :

$$\bar{T}_0(t) = \sum_{i=1}^p \bar{T}_0^i \sigma_i(t) \quad (\text{V.9})$$

Les  $p$  fonctions  $\sigma_i(t)$  sont des fonctions d'interpolation linéaire continue par morceau assimilable à des fonctions « chapeaux » et les paramètres inconnus à déterminer sont alors les  $\bar{T}_0^i, i=1, \dots, p$ . La répartition temporelle et l'amplitude des paramètres à estimer s'inspirent a priori de la forme de  $\bar{T}_0(t)$  déterminée de façon empirique (Figure V-9b) afin de ne pas trop s'éloigner de la solution envisagée. Ceci dit, nous pouvons tout aussi imposer la même amplitude pour les  $\bar{T}_0^i, i=1, \dots, p$  car l'algorithme inverse reconstituera le profil temporel cherché et attribuera aux paramètres des valeurs non égales entre elles.

### V.3.3.2 Calcul et conditionnement de la matrice de sensibilité

#### V.3.3.2.1 Calcul de la matrice des coefficients de sensibilité

Une étude de sensibilité a été réalisée en paramétrant  $\bar{T}_0(t)$  avec  $p = 5$  paramètres. Nous avons choisi cette valeur minimum de  $p$ , car pour décrire la variation  $\bar{T}_0(t)$  de la figure V-9, il faut au moins un point de départ (palier 1), un point d'arrivée (palier 2) et au moins trois points dans la phase transitoire de montée. Les fonctions  $\sigma_i(t)$  sont définies relativement au découpage suivant de l'intervalle de temps  $\{t_{tab}^1 = 0, t_{tab}^2, t_{tab}^3, t_{tab}^4, t_{tab}^5 = 275s\}$ . Cette discrétisation temporelle et les amplitudes des valeurs  $\bar{T}_0^i, i=1, \dots, p$  sont exprimées dans le Tableau V-2.

P	1	2	3	4	5
$t_{tab}^i, i=1, \dots, p$ (en s)	0	10	20	50	275
$\bar{T}_0^i, i=1, \dots, p$ (en °C)	222,27	222,3	228,26	230,13	231,84

Tableau V-2 : Tableau représentant la discrétisation temporelle et les amplitudes de  $\bar{T}_0(t)$

La Figure V-20 montre la sensibilité des thermocouples de mesure (Figure V-20a pour  $TC_1^{inv}$  et Figure V-20b pour  $TC_2^{inv}$ ) aux  $p$  paramètres à estimer.

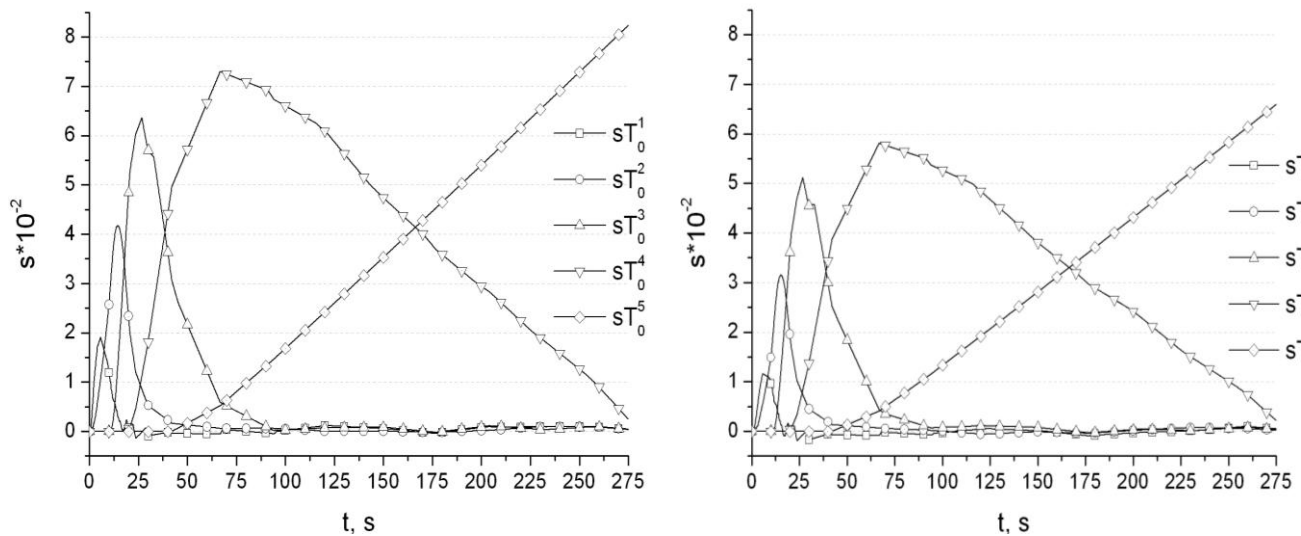


Figure V-20 : Etude de sensibilité des mesures  $\tilde{T}_1(t)$  et  $\tilde{T}_2(t)$  aux variations des paramètres  $\bar{T}_0^i, i = 1, \dots, p$

Tout d’abord, on remarque que pour un même paramètre, les sensibilités ont des formes analogues, mais  $\tilde{T}_1(t)$  est plus sensible que  $\tilde{T}_2(t)$ . Ceci est dû à la proximité du point de mesure par rapport à la condition d’entrée. De plus, on constate que le maximum de sensibilité augmente avec les instants  $t_{tab}^i, i = 1, \dots, p$ . Par exemple, la sensibilité de  $\tilde{T}_1(t)$  au paramètre  $T_0^5$  atteint la valeur  $8 \cdot 10^{-2}$  à  $t = 275s$ , alors que celle à  $T_0^4$  reste inférieure à  $7,5 \cdot 10^{-2}$  à  $t = 75s$ .

Le calcul de ces sensibilités permet de calculer la matrice  $[X]$  et donc son nombre de conditionnement  $cond([X])$ . La Figure V-21 illustre l’influence du nombre de paramètres sur ce nombre de conditionnement. On constate qu’en augmentant  $p$ , le conditionnement de la matrice se dégrade. Le problème inverse est alors de plus en plus mal conditionné et la solution devient de plus en plus sensible aux erreurs de mesure (et de modèle dans le cas expérimental). Les calculs de  $cond([X])$  ont été effectués pour  $p = 5, 8, 12$  et  $20$  paramètres. Les valeurs intermédiaires sont interpolées.

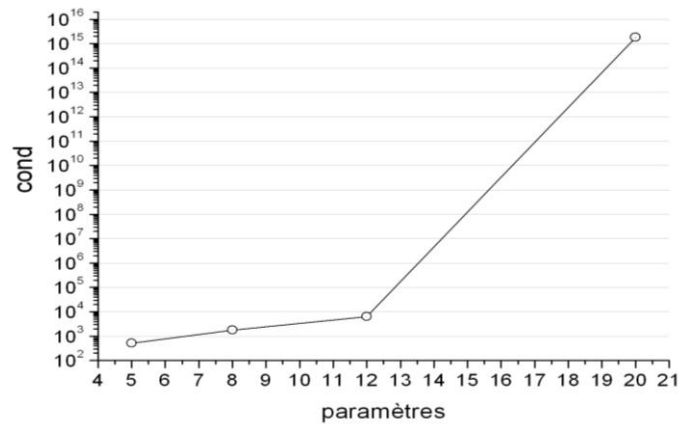


Figure V-21 : Conditionnement de la matrice de sensibilité en fonction du nombre de paramètres

On choisira par la suite un nombre de paramètres à estimer inférieur ou égal à  $p = 12$ . On montrera aussi brièvement les résultats de l'inversion pour 8 et 12 paramètres afin de voir leur influence sur l'estimation de la température d'entrée.

### V.3.3.3 Résultat de l'inversion non bruitée

On précise que ce cas est purement numérique, c'est-à-dire que l'on tente ici de valider la méthode d'inversion utilisée en reconstituant le profil  $\bar{T}_0(t)$  que l'on a imposé lors du problème cible. La Figure V-22a montre le résultat, sur les points de mesure  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$  dans l'acier du cylindre, des températures évaluées à partir de la température estimée  $\bar{T}_0(t)$  du polymère (Figure V-22b). On constate Figure V-23a que l'algorithme a bien corrigé les valeurs du paramétrage initial de  $\bar{T}_0(t)$  afin de revenir à la température imposée dans le problème cible. D'après la Figure V-23b, on voit bien le critère converge assez rapidement passant de  $J_s = 2000$  à une valeur inférieure à 1 dès la seconde itération.

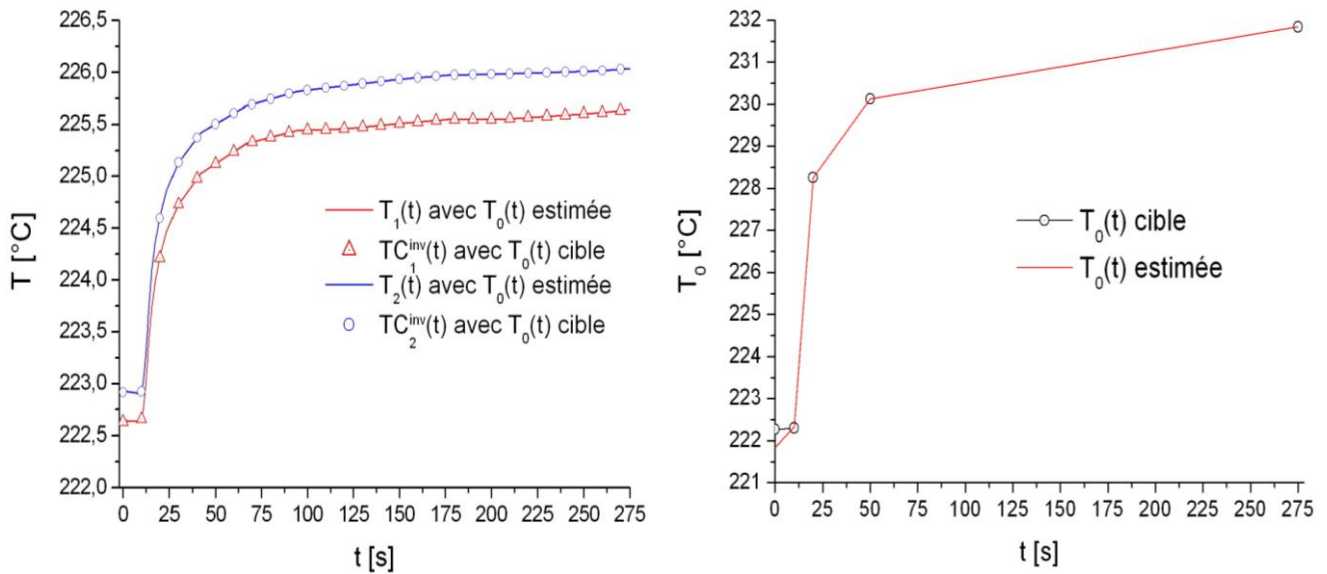


Figure V-22 : a) Visualisation des températures aux points de mesure et b)  $\bar{T}_0(t)$  cible et estimée

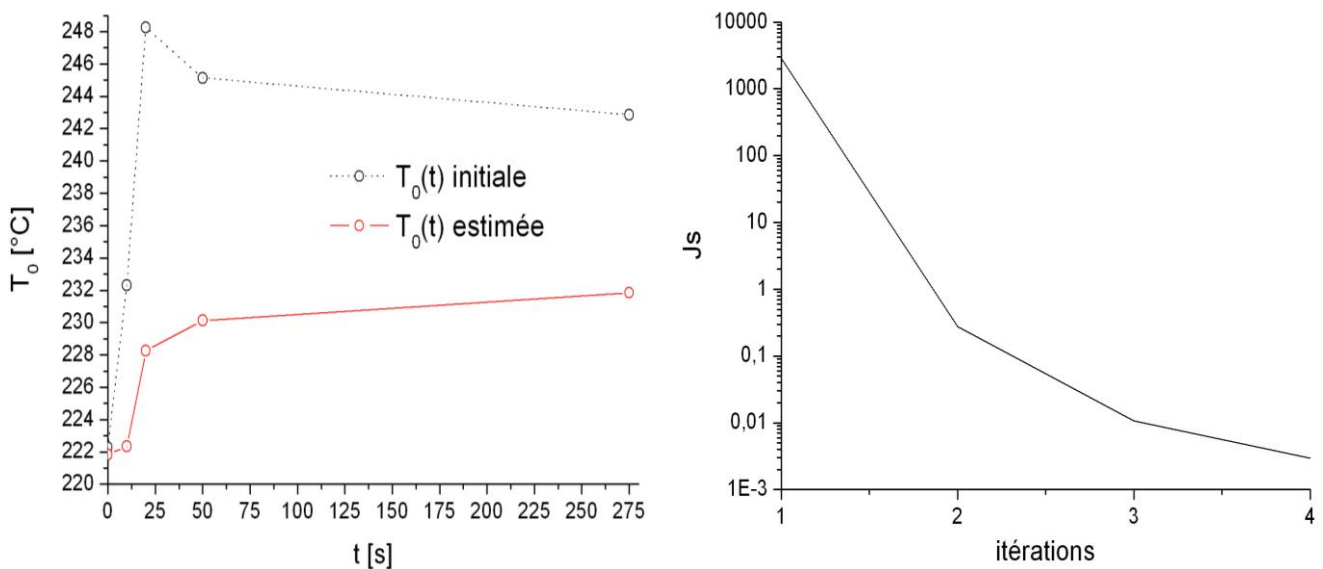


Figure V-23 : a)  $\bar{T}_0(t)$  initiale et estimée et b) évolution du critère de convergence

Cet essai valide la méthode de Gauss-Newton car on le voit, la température d'entrée estimée coïncide avec celle imposée dans le problème cible Figure V-22b. De plus, on constate que le critère converge au bout seulement de quatre itérations malgré la différence entre  $\bar{T}_0$  initiale et  $\bar{T}_0$  cible.

### V.3.4 Application aux mesures expérimentales

Dans cette partie finale, nous allons montrer les résultats de l'estimation de la température d'entrée du polymère dans le domaine de calcul grâce à la méthode de Gauss-Newton. Cette température a été discrétisée en un certain nombre de paramètres et nous verrons les résultats de

l'inversion lorsque ce nombre augmente. On rappelle que seuls les thermocouples  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$  serviront pour la minimisation de l'écart quadratique entre les mesures expérimentales et les valeurs numériques. En outre, nous visualiserons les sensibilités des paramètres à estimer sur ces points de mesure.

### V.3.4.1 Résultat de l'estimation de $\bar{T}_0(t)$ avec $p=5$ paramètres

La Figure V-24a montre le résultat de l'estimation de l'évolution temporelle de température de la condition d'entrée  $\bar{T}_0(t)$  du polymère dans le domaine de simulation  $\Omega_0$  et la Figure V-25a permet de visualiser la comparaison entre le calcul avec la condition d'entrée estimée et les mesures aux points  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$ . La Figure V-24b montre les évolutions temporelles de température en fonction du nombre d'itérations. On voit bien que la convergence vers  $\bar{T}_0(t)$  finale à lieu assez rapidement alors que l'on part d'une température constante de  $220^\circ\text{C}$ . En effet, la Figure V-26 montre que le critère de convergence se stabilise à partir de la 3<sup>ème</sup> itération.

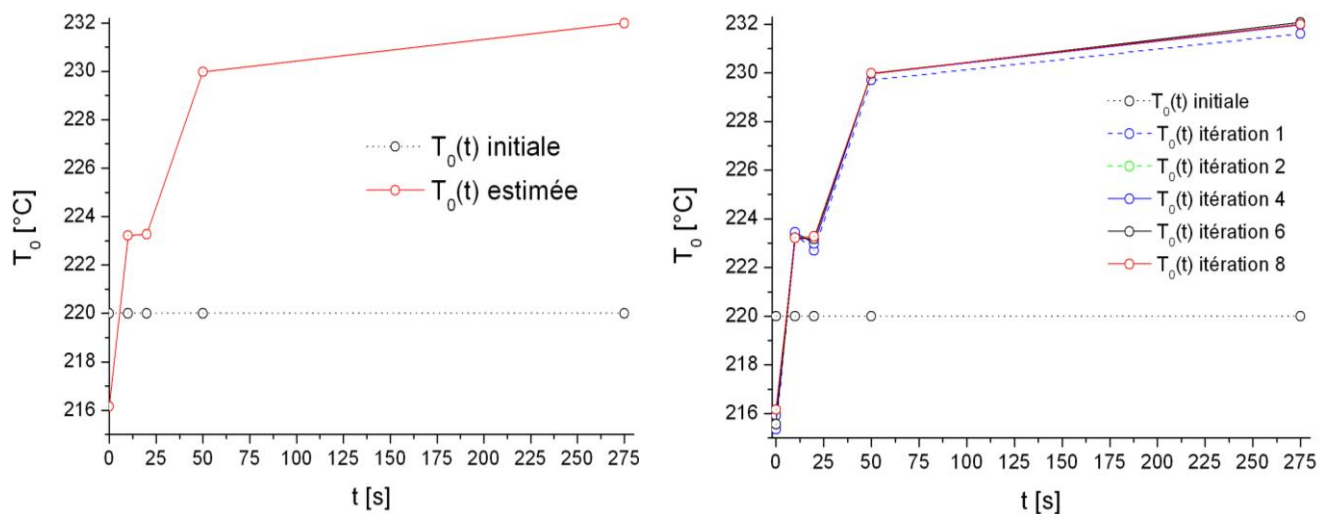


Figure V-24 :  $\bar{T}_0(t)$  a) initiale et estimée et b) pour plusieurs itérations (5 paramètres)

La Figure V-25b montre l'écart au point de mesure entre les réponses calculées  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  avec  $\bar{T}_0(t)$  estimée et les mesures expérimentales  $\tilde{T}_1(t)$  et  $\tilde{T}_2(t)$ . La moyenne des écarts est de l'ordre de  $2.10^{-3} K$  pour  $TC_1^{inv}$  et de  $7.10^{-3} K$  pour  $TC_2^{inv}$ , ce qui signifie que le résultat de l'inversion est en accord avec les mesures expérimentales au niveau des thermocouples. On

constate que les paramètres estimés permettent de bien recaler le modèle numérique avec les mesures.

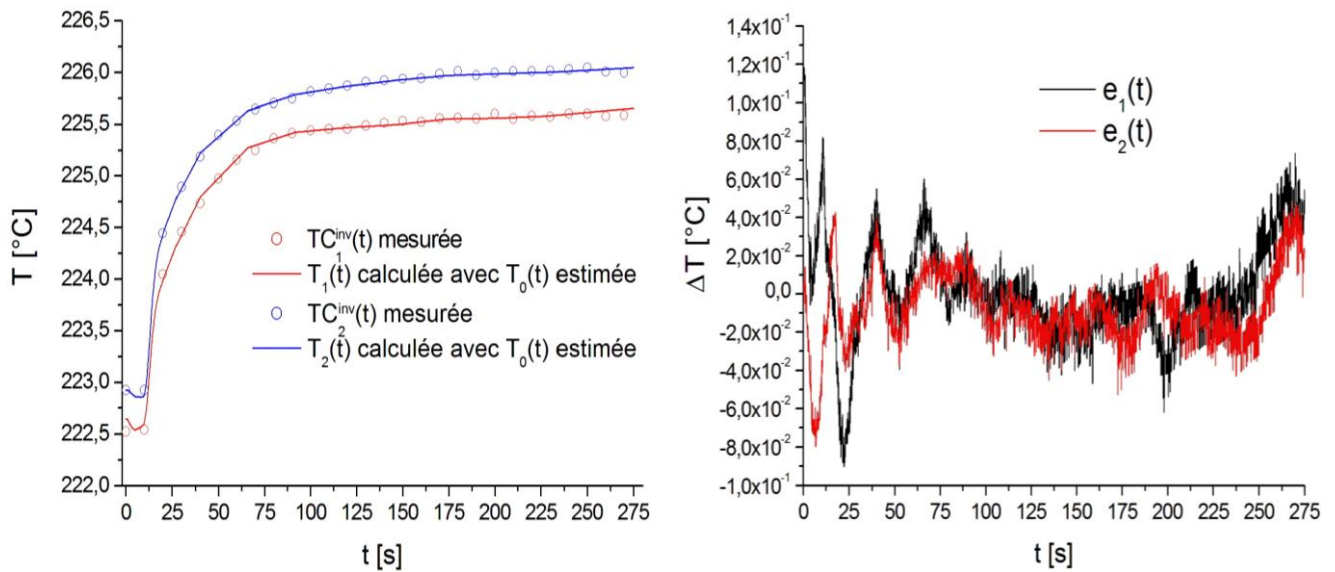


Figure V-25 : a) Comparaison entre les mesures et les résultats de l'inversion et b) visualisation des écarts relatifs au niveau des points  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$

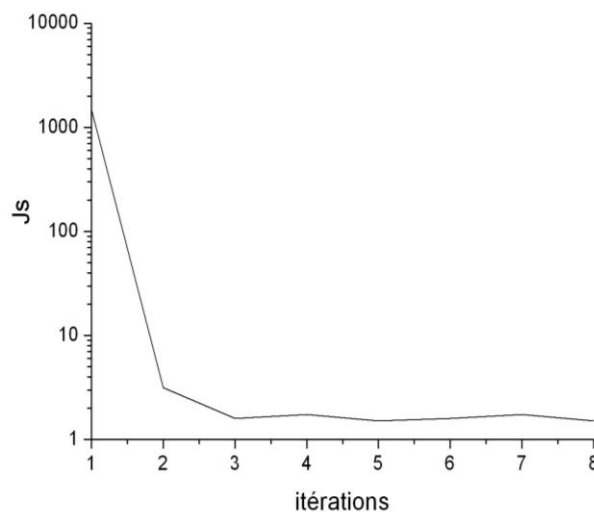


Figure V-26 : Evolution du critère de convergence en fonction du nombre d'itérations

Les écarts quadratiques moyens des résidus obtenus au niveau des deux points de mesures sont, comme on pouvait s'y attendre, meilleurs avec la méthode d'inversion de Gauss Newton qu'avec la méthode d'inversion par « tâtonnement » explorée au paragraphe V.2.6. On se rapproche des ordres de grandeurs du bruit de mesure dont dépend la précision des thermocouples. Soit d'après le calcul, pour :

- $TC_1^{inv}$ , on a  $\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (e_1^j)^2} = 0,026K$ , au lieu de  $0,10K$  (paragraphe V.2.6)

- $TC_2^{inv}$ , on a  $\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (e_2^j)^2} = 0,020K$ , au lieu de  $0,08K$

### V.3.4.2 Résultat de l'estimation avec 8 et 12 paramètres

Nous montrons ici les résultats de l'estimation de la température d'entrée pour 8 (Figure V-27) et 12 paramètres (Figure V-28).

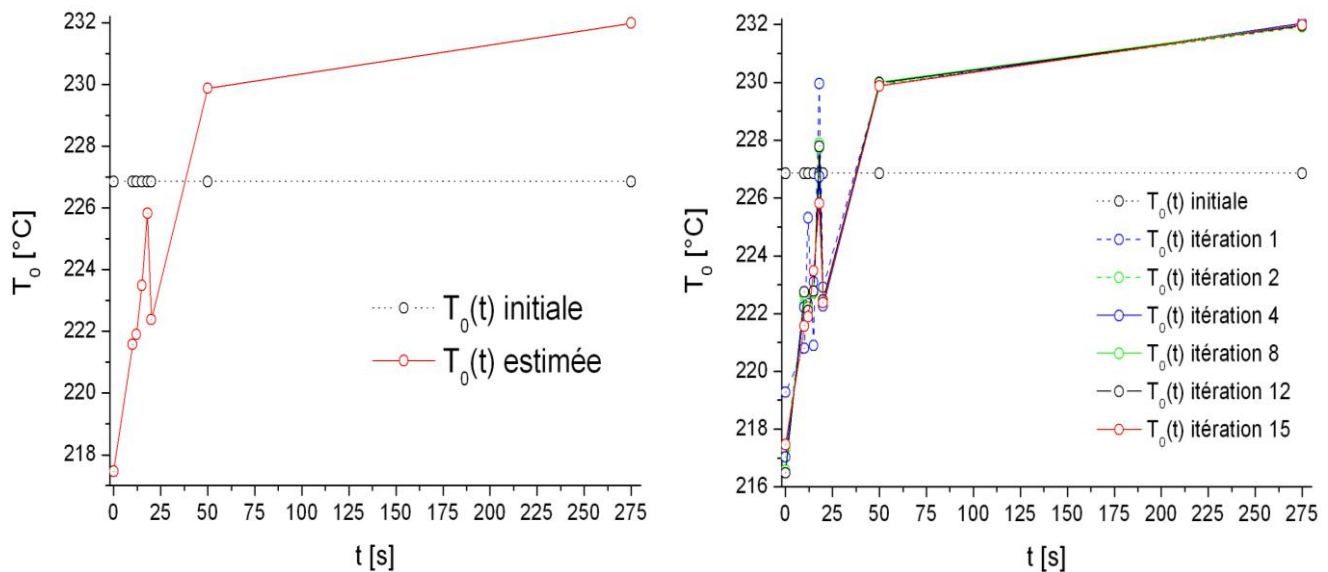


Figure V-27 :  $\bar{T}_0(t)$  a) initiale et estimée et b) pour plusieurs itérations (8 paramètres)

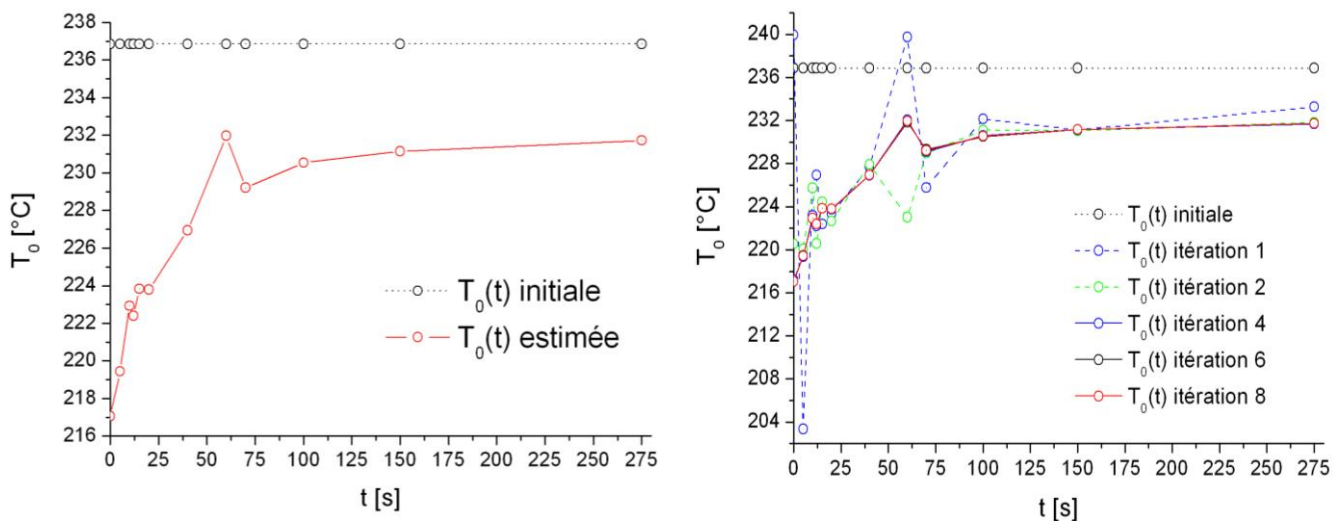


Figure V-28 :  $\bar{T}_0(t)$  a) initiale et estimée et b) pour plusieurs itérations (12 paramètres)

On constate que les amplitudes des paramètres estimés sont coïncidentes pour 5, 8 et 12 paramètres. Cependant, les courbes estimées présentent toutes une légère fluctuation au niveau de la montée mais de forme différente. Tout se passe comme si l'algorithme voulait



## Chapitre V – Formulation et résolution numérique du problème inverse

compenser une augmentation trop brutale et conséquente de la température d'entrée. On remarque de plus que plus le nombre de paramètres est élevé, plus cette variation brutale est décalée dans le temps : elle a lieu à  $t=10s$  pour 5 paramètres, à  $t=18s$  pour 8 paramètres et  $t=60s$  pour 12 paramètres. On constate aussi, que pour les cas à  $p=5$  et  $p=8$  paramètres, cette fluctuation a lieu dans la zone où il y a le plus de paramètres, i-e dans phase transitoire de la montée en température (2 paramètres pour le cas à  $p=5$ , 5 paramètres pour le cas à  $p=8$ ) alors que pour le cas à  $p=12$ , la température commence à fluctuer dans la zone où le nombre de paramètres est le plus concentré, i-e autour de  $t=10s$ , mais varie vraiment de façon conséquente plus tard vers  $t=60s$ . Nous pouvons alors nous demander si cette fluctuation est d'origine physique ou plutôt purement algorithmique. A l'heure actuelle, notre pensée se dirige plutôt vers la seconde réponse car a priori le code de calcul veut compenser les écarts de température, aux points de mesure dans la paroi du cylindre, en compensant, durant la phase transitoire de montée, une trop grande évaluation de la température d'entrée en un paramètre à estimer. C'est pourquoi, elle redescend brutalement au paramètre suivant avant de remonter de nouveau au prochain paramètre.

La Figure V-29 représente les écarts de température, aux points de mesure  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$ , entre l'expérience et le résultat du calcul avec  $\bar{T}_0(t)$  estimée pour  $p=8$  (Figure V-29a) et  $p=12$  (Figure V-29b).

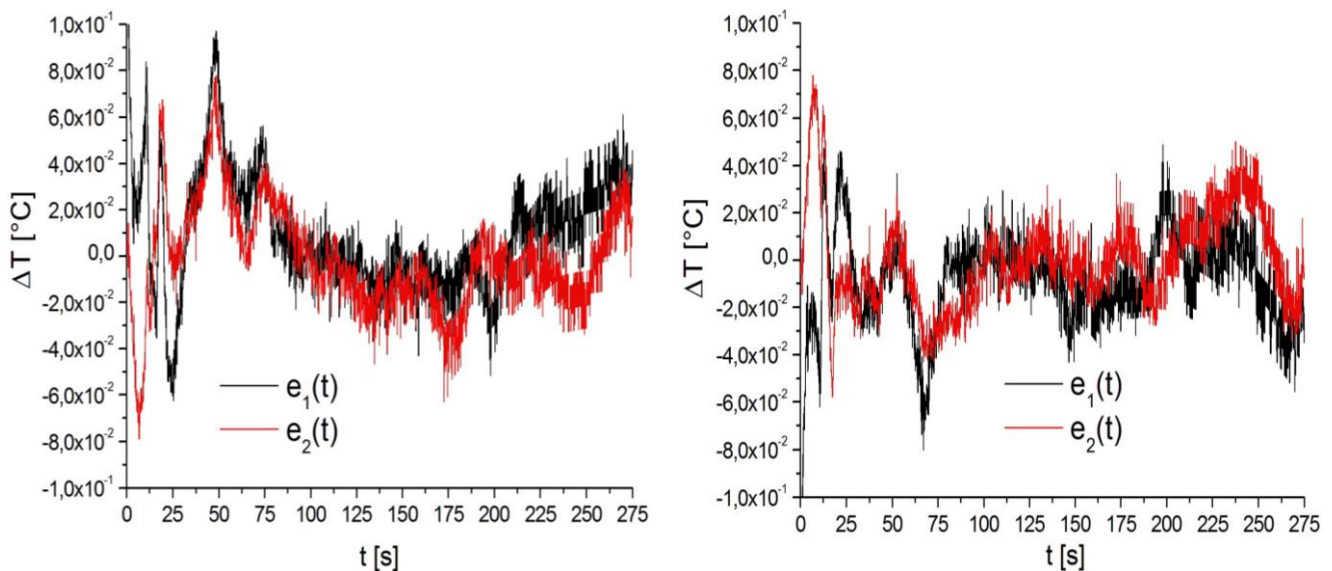


Figure V-29 : Ecart aux points de mesure  $TC_1^{inv}$  et  $TC_2^{inv}$  entre les températures mesurées et estimées pour a)  $p=8$  et b)  $p=12$

## Chapitre V – Formulation et résolution numérique du problème inverse

- Pour un nombre de paramètre de  $p = 8$ , le calcul nous donne :

- pour  $TC_1^{inv}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (e_1^j)^2} = 0,028K$  et pour  $TC_2^{inv}$ , on a  $\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (e_2^j)^2} = 0,023K$

- Pour un nombre de paramètre de  $p = 12$ , le calcul nous donne :

- pour  $TC_1^{inv}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (e_1^j)^2} = 0,022K$  et pour  $TC_2^{inv}$ , on a  $\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (e_2^j)^2} = 0,020K$

On constate alors que l'écart quadratique moyen est de l'ordre de  $2,5 \cdot 10^{-2} K$  et qu'il est équivalent entre les deux points de mesure avec un minimum toujours au niveau de  $TC_2^{inv}$  et qu'il reste du même ordre de grandeur que l'on soit à  $p = 5$ ,  $p = 8$  ou  $p = 12$ .

### V.4 Conclusion

La méthode de Gauss Newton est celle qui nous a permis de reconstituer l'évolution temporelle de la température d'entrée dans le domaine spatial d'intégration. Les résultats sont assez cohérents avec l'estimation « à la main » de cette condition d'entrée. Cependant, on a constaté que le nombre de paramètre à estimer joue fortement sur la forme du profil de température. De plus, des problèmes de convergences sur le modèle direct nous ont empêchés de faire de l'inversion sur un cas d'injection. En perspective de ce travail, il serait intéressant de pouvoir estimer cette condition d'entrée dans un cas spécifique d'injection. De même, ce travail, qui a consisté à estimer une évolution temporelle de la condition limite, pourrait être étoffé en estimant aussi sa répartition spatiale.



## ***Conclusions et perspectives***

Cette étude, à caractère expérimentale et numérique, sur les transferts de chaleur dans un écoulement de polymère fondu constitue le prolongement de travaux antérieurs déjà réalisés au laboratoire mais en régime stationnaire. L'originalité de ce travail réside principalement dans le développement d'un nouveau dispositif expérimental autorisant l'étude en régime non stationnaire proche des conditions de mises en œuvre sur une presse à injecter.

Nous avons testé, dans une première étape, un modèle numérique représentant un écoulement de polymère fondu sollicité mécaniquement dans des conditions expérimentales assez proches de la réalité afin de comprendre les mécanismes physiques mis en jeu, en considérant une représentation schématique simplifiée de la buse. Cette première approche a été utile car elle a servi au dimensionnement du dispositif expérimental (buse instrumentée) qui a ensuite été réalisé et testé sur une extrudeuse et une presse à injecter. En effet, cette étude nous a permis d'avoir une idée sur les ordres de grandeur de la pression et de la température d'entrée du polymère dans le canal. Les résultats numériques obtenus nous ont confortés dans la possibilité d'observer des échauffements significatifs dans la paroi métallique du canal en vu de l'estimation du champ thermique dans le polymère en entrée et par conséquent en sortie de canal. En effet, par exemple, à  $30\text{MPa}$  de pression dans le polymère en amont en entrée de la buse instrumentée, les échauffements prévus dans l'acier sont assez conséquents, de l'ordre de  $15\text{K}$  pour le polypropylène. De plus, on a vu combien les échauffements du PE 2042E ou du PP HV252 sont importants avec ce type de géométrie et comment ils fluctuent en régime périodique. On a vu également l'influence de la forme du signal de pression considéré sur un cycle et des paramètres caractéristiques tels que la vitesse de montée, le temps de maintien et l'amplitude maximale.

Ensuite, les campagnes d'essais réalisées, d'une part sur l'extrudeuse SCAMEX et la presse à injecter SANDRETTO, ont prouvé la bonne tenue mécanique de la nouvelle buse instrumentée. Contrairement à l'ancienne filière pour laquelle la pression maximale était limitée à  $15\text{MPa}$  pour éviter les fuites de matière, nos essais ont montré la fiabilité du dispositif à des niveaux de pressions de l'ordre de  $50\text{MPa}$  (limite du capteur de pression) et nous pensons que ce niveau de pression pourrait être dépassé et couvrir ainsi les amplitudes de pression dans le cas du moulage par injection. Les débits de matière ainsi obtenus ont conduit à des échauffements assez conséquents dans l'acier et dans le polymère. En effet, on a pu observer des échauffements dans l'acier d'environ  $20^\circ\text{C}$  et dans le polymère de presque  $80^\circ\text{C}$ . Ces valeurs confirment bien

## *Conclusions et perspectives*

que le dispositif expérimental peut être bien sollicité à de hautes pressions. Ces essais ont aussi montré que les échauffements sont inférieurs, dans le cas d'une injection périodique dans le moule, à ceux obtenus dans un cas dit de purge (sans moule). Par ailleurs, on a vu que pour des débits élevés et lorsque le régime thermique se rapproche d'un régime dit adiabatique, la chaleur échangée par conduction avec la paroi du cylindre est faible et par conséquent les échauffements résultants aussi. Finalement, nous avons retenu parmi tous ces lots de mesures un cas non stationnaire réalisé sur l'extrudeuse SCAMEX comme cas de référence pour la simulation et l'estimation de la condition d'entrée du polymère dans la buse. En effet, les échauffements observés dans cas non stationnaire nous ont parus d'une part significatifs et d'autre part se sont révélés suffisamment sensibles pour développer la méthode d'inversion.

La méthode de Gauss Newton est celle qui nous a permis de reconstituer l'évolution temporelle de la température d'entrée dans le domaine spatial d'intégration. Avec l'estimation « à la main » de cette condition d'entrée, les écarts de températures au niveau des thermocouples de mesure dans la paroi du cylindre entre le calcul et l'expérience sont de l'ordre de  $10^1 K$  alors que, lorsqu'on l'estime avec  $p=5, 8$  ou  $12$  paramètres, on passe à des écarts de l'ordre de  $10^2 K$ . Par ailleurs, on a constaté que le nombre de paramètres à estimer joue fortement sur la forme du profil de température. En effet, le conditionnement de la matrice de sensibilité explose entre  $p=12$  et  $p=20$  paramètres. Dans cette approche inverse, nous avons privilégié la reconstruction temporelle de la température moyenne d'entrée du polymère contrairement aux travaux précédents réalisés en régime stationnaire et pour lesquels il s'agissait de reconstruire le profil spatial de température.

Les principales difficultés rencontrées lors de cette étude ont porté sur la mise en œuvre de solveurs numériques. En effet, nous avons dû surmonter des problèmes de convergence lorsque le modèle direct prenait en compte la viscosité thermo et piezodépendante des thermoplastiques en régime non stationnaire. Dès lors, une approximation polynomiale autour d'un point de fonctionnement des viscosités nous a permis pour le modèle transitoire, dans les conditions d'extrusion, de faciliter la convergence du solveur numérique. Toutefois, cette technique n'a pas abouti sur les mesures dans les conditions d'injection. Cependant, le but initial de l'étude, qui était la faisabilité d'une estimation de la température du polymère en entrée de buse et donc a fortiori également en sortie, a été en partie réalisé. De là, lorsqu'on la connaît, ainsi que la condition de pression en entrée, on peut en déduire le champ de vitesse, de viscosité, de taux de cisaillement, de pression, de flux échangé à travers la paroi...dans la buse. Cette modélisation permet donc d'obtenir de nombreuses informations utiles sur la thermique et l'écoulement du

## *Conclusions et perspectives*

polymère dans le procédé d'injection, et notamment en entrée de la cavité moulante, pour prévoir au mieux la thermique de refroidissement de la pièce.

En perspective, il serait nécessaire, pour étendre la méthode d'estimation aux mesures réalisées dans le cas d'injection, d'améliorer la résolution du problème direct en régime fortement non stationnaire.

Il serait également intéressant, pour estimer cette condition d'entrée dans un cas spécifique d'injection, de prendre en compte l'aspect périodique dans la simulation. Les mesures de température effectuées en mode injection dans un moule ont montré que ce régime périodique établi est très vite atteint dans la paroi métallique de la buse, c'est-à-dire dès la deuxième ou troisième période. Ceci permet de d'envisager de ramener le problème d'inversion sur une seule période.

Par ailleurs, ce travail pourrait être enrichi en considérant le problème d'estimation de la distribution spatiale du profil d'entrée au lieu de se limiter à l'évolution temporelle de la valeur moyenne.

Enfin, dans cette étude, nous avons utilisé les données thermorhéologiques des polymères étudiés, sans discuter de l'influence des erreurs engendrées par les incertitudes sur ces données. Il serait intéressant d'étudier cet aspect et d'envisager l'utiliser ce nouveau dispositif afin d'estimer les paramètres rhéologiques des polymères dans les gammes de pression et température correspondant aux conditions d'injection.



## ***Bibliographie***

- [Ag et al. 96] J.-F. Agassant, P. Avenas, J.-Ph. Sergent, B. Vergnes and M. Vincent, La mise en forme des matières plastiques (3<sup>e</sup> édition), *Lavoisier Tec & Doc, Paris (1996)*
- [Am & Uts 89] O. Amano, S. Utsugi, Temperature measurements of polymer melts in the heating barrel during injection molding. Three-dimensional temperature distribution in the reservoir, *Polymer Engineering and Science, vol. 29, 171-177 (1989)*
- [Bir 77] R.B. Bird, R.C. Armstrong et O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Fluid Mechanics, Wiley, New York, vol. 1 (1977)*
- [Bir 87] R.B. Bird et al., *Dynamics of Polymeric Liquides : Fluid Mechanics & Kinetic Theory, John Wiley and Sons, New York (1987)*
- [Bir 03a] E.C. Brown, A.-L. Kelly, P.-D. Coates, *SPE ANTEC Tech.Papers, vol. 49, 77 (2003)*
- [Bir 03b] E.C. Brown, A.-L. Kelly, P.-D. Coates, *SPE ANTEC Tech.Papers, vol. 49, 82 (2003)*
- [Bue 68] F. Bueche, *J. Chem. Phys., vol. 48, 4781 (1968)*
- [Bur 00] A. J. Bur, S. C. Roth, Fluorescence based temperature measurements and applications to real-time polymer processing, *Proc. Soc. Plastics Eng. Annual Technical Mtg. (2000)*
- [Bur 01] A. J. Bur, M. G. Vangel, S. C. Roth, Fluorescence based temperature measurements and applications to real-time polymer processing, *Polymer Engineering and Science, vol. 41, 1380-1389 (2001)*
- [Bur 04] A. J. Bur, Steven C. Roth, Mark A. Spalding, Daniel W. Baugh, Kurt A. Koppi, Walter C. Buzanowski, Temperature gradients in the channels of a single-screw extruder, *Polymer Engineering and Science, vol. 44, 2148-2157 (2004)*
- [Bro 04] E.C. Brown, A.-L. Kelly, P.-D. Coates, Melt temperature field measurement in single screw using thermocouple meshes, *Review of Scientific Instruments, vol. 75, 4742-4748 (2004)*
- [Car 72] P.J. Carreau, *Trans. Soc. Rheol., vol. 16, 99 (1972)*
- [Che 92] C.C Chen, *SPE ANTEC, 931 (1992)*
- [Che 99] T.-F. Chen, Ky T Nguyen, S.-S. Wen, C.-K. Jen, Temperature measurement of polymer extrusion by ultrasonic techniques, *Measurement Science Technology, vol. 10, 139- 145 (1999)*
- [Cha 97] S. Chakravorty, C. R. G. Allen, C. S. Brown, In-line temperature measurement during polymer melt flow, *Polymer Testing, vol. 16, 455-460 (1997)*
- [Cro 65] M.M. Cross, *J. Colloid. Science, vol. 20, 417 (1965)*
- [Del 00a] Delaunay D., Le Bot P., Fulchiron R., Luyé J.F., Régnier G., Nature of contact between polymer and mold in injection molding. Part I : Influence of a non-perfect thermal contact, *Polymer Engineering and Science, vol. 40, n°7; 1682-1691 (2000)*



## Bibliographie

- [Del 00b] Delaunay D., Le Bot P., Fulchiron R., Luyé J.F., Régnier G., Nature of contact between polymer and mold in injection molding. Part II : Influence of mold deflection on pressure history and shrinkage, *Polymer Engineering and Science*, vol. 40, n°7; 1692-1700 (2000)
- [Ess & Ser 91] M. Esseghir, V. Sernas, *SPE ANTEC*, 54 (1991)
- [Ess & Ser 94] M. Esseghir, V. Sernas, *Advanced Polymer Technology*, vol. 13, 133 (1994)
- [Fer 70] J.D. Ferry, *Viscoplastic Properties of Polymers*, 2<sup>nd</sup> edition, Wiley, New York (1970)
- [Ful 01] Fulchiron R., Kosher E., Poutot G., Delaunay D., Régnier G., Analysis of the pressure effect on the crystallization kinetics of polypropylene: Dilatometric measurements and thermal gradient modelling, *Journal of Macromolecular Science Physics*, vol.40, n°3-4, 297-314 (2001)
- [Ful 02] Fulchiron R., Comportement des matériaux polymères sous pression, *cours de l'école thématique « injection des polymères », Agay* (2002)
- [Grae 67] W.W. Graessley, *J. Chem. Phys.*, vol. 47, 1942 (1967)
- [Han 76] C.D. Han, *Rheology in Polymer Processing*, Academic Press, New York (1976)
- [Jar 99] Jarny Y., Maillet D., Problèmes inverses et estimation de grandeurs en thermique, *Ecole d'hiver METTI* (1999)
- [Kad 94] Kadjik SE., Vandenbrule BHAA, On the pressure dependency of the viscosity of molten polymers, *Polymer engineering and science*, vol. 34 (20), 1535-1546 (1994)
- [Kar 04a] M. Karkri, Y. Jarny, P. Mousseau, Inverse heat transfer analysis in a polymer melt flow within an extrusion die, *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium, Rio de Janeiro, Brazil* (2004)
- [Kar 04b] M. Karkri, Transferts de chaleur dans un écoulement stationnaire de polymère fondu dans une filière d'extrusion : métrologie thermique et technique inverse, *Thèse de doctorat, Université de Nantes, Laboratoire de Thermocinétique* (2004)
- [Kar 05] M. Karkri, Y. Jarny, P.Mousseau, Inverse heat transfer analysis in a polymer melted flow within an extrusion die, *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 13, 355-375 (2005)
- [Kar 08a] M. Karkri, Y. Jarny, P.Mousseau, Thermal state of incompressible pseudo-plastic fluid and Nusselt number at the interface fluid-die wall, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 47, 1284-1293 (2008)
- [Kar 08b] M. Karkri, Y. Jarny, P.Mousseau, Effects of extrusion parameters on the temperature profile and its evolution in polymer processing, *Inverse Problems in Science and Engineering* (2008)
- [Kim 71] H. T. Kim, E. A Collins, Temperature profiles for polymer melts in tube flow. Part II. Conduction and shear heating corrections, *Polymer Engineering and Science*, vol. 11, 83-92 (1971)
- [Jur 04] Jurkowski T., Delaunay D., Jarny Y., Deterre R., Mesure de la conductivité thermique des polymères dans les conditions d'injection. Réalisation d'un conductivimètre en ligne, *Congrès Français de Thermique, Presqu'île de Gien*, vol. 2, 703-706 (2004)

## Bibliographie

- [Leb 98] Le Bot P., Comportement thermique des semi-cristallins injectés – Application à la prédiction des retraits, *Thèse de Doctorat, Université de Nantes (1998)*
- [Lin 98] P. Lin, Y. Jaluria, Conjugate transport in polymer melt flow through extrusion dies, *Polymer Engineering and science, vol. 37, 1582-1595 (1997)*
- [Luy 99] Luyé J-F., Etude thermophysique du refroidissement du polypropylène injecté, *thèse de doctorat, ENSAM Paris (1999)*
- [Man 66] J. Mandel, *Cours de Mécanique des Milieux Continus, Annexe XXI, Gauthiers-Villars, Paris (1966)*
- [McC & Spa 62] T.W. McCullough, M.A.Spalding, *J.Reinforced Plastics and Composites, vol. 16, 1622 (1997)*
- [McC & Hil 92] T.W. McCullough, B. Hilton, *SPE ANTEC Tech. Papers, vol. 38, 927 (1992)*
- [Mig & Bur 98] K. B. Migler and A. J. Bur, Fluorescence based measurement of temperature profiles during polymer processing, *Polymer Engineering and Science, vol. 38, 213-221 (1998)*
- [Ost 23] K. Ostwald, *Kolloid-Z, 36, 99 (1923)*
- [Puj 06] C. Pujos, Estimation de la rhéologie d'un polymère dans une filière d'extrusion – Simulation d'écoulement avec transferts thermiques et inversion de mesures, *Ph.D. thesis, Bordeaux, France (2006)*
- [Puj 08] C. Pujos, N. Régnier, G. Defaye, Determination of the inlet temperature profile of an extrusion die in unsteady flow, *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification, vol. 47, 456-462 (2008)*
- [She & Mal 92] X. Shen, R. Malloy, *SPE ANTEC, 918 (1992)*
- [Rie & Lai 94] J. X. Rietveld, G. Y. Lai, *SPE ANTEC, 834 (1994)*
- [Wae 23] A. de Waelle, *Oil and color Chem. Assoc., J., vol. 6, 33 (1923)*
- [Wal 78] K. Walters, Developments in Non-Newtonian Fluid Mechanics, a Personal View, *Communication à l'IUTAM Symposium on Non-Newtonian Fluid Mechanics, Louvain La Neuve, Belgique (1978)*
- [WLF 55] M.L. Williams, R.F. Landel et J.D. Ferry, *J. Am. chem. Soc., vol. 77, 3701 (1955)*
- [Yas 81] K.Y. Yasuda, R.C. Armstrong et R.E. Cohen, *Rheol. Acta, vol. 20, 163 (1981)*
- [Zda 06] P. S. B. Zdanski, M. Vaz Jr, Polymer melt flow in plane channels: Hydrodynamics and thermal boundary layers, *Journal of Materials Processing Technology, vol. 179, 207-211 (2006)*



## Annexe I : Calcul analytique du développement limité des viscosités

### A.I.1 Calcul des dérivées de l'approximation polynomiale de la viscosité du PP HV252

On rappelle que l'expression de la viscosité du polypropylène étudié est de la forme :

$$\eta(\dot{\gamma}, T, p) = \frac{\eta_0}{1 + \left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau}\right)^{1-n}} \quad \text{avec} \quad \eta_0(T, p) = K \exp\left(\frac{T_b}{T}\right) \exp(\beta p)$$

Où  $K = 0,278 Pa.s$ ,  $\tau = 20000 Pa$ ,  $T_b = 4320 K$ ,  $n = 0,31$  et  $\beta = 3e^{-8} Pa^{-1}$

Pour des raisons de simplification d'écriture, on posera dans tout le calcul  $A = \frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau}$ .

Par conséquent, la viscosité s'exprime comme suit :  $\eta(\dot{\gamma}, T, p) = \frac{\eta_0}{1 + A^{1-n}}$

#### A.I.1.1 Calculs préliminaires

Comme la viscosité du polypropylène est fonction de la température et du taux de cisaillement, les calculs des dérivées du numérateur et du dénominateur seront effectués au préalable afin d'alléger les calculs des dérivées de la viscosité par rapport à ces deux variables.

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( B \exp\left(\frac{T_b}{T}\right) \exp(\beta p) \right) \\ &= B \exp(\beta p) \frac{\partial}{\partial T} \left( \exp\left(\frac{T_b}{T}\right) \right) \\ &= \left( -\frac{T_b}{T^2} \right) B \exp(\beta p) \exp\left(\frac{T_b}{T}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Soit} \quad \boxed{\frac{\partial \eta_0}{\partial T} = -\frac{T_b \eta_0}{T^2}} \quad (\text{A.I.1})$$

$$2. \quad \boxed{\frac{\partial \eta_0}{\partial \dot{\gamma}} = 0} \quad (\text{A.I.2})$$

$$3. \quad \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \left( \frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau} \right)^{1-n} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\dot{\gamma}}{\tau}\right)^{1-n} (1-n) \frac{\partial \eta_0}{\partial T} \eta_0^{-n} \\
 &= \left(\frac{\dot{\gamma}}{\tau}\right)^{1-n} (1-n) \left(-\frac{T_b \eta_0}{T^2}\right) \eta_0^{-n} \\
 &= (1-n) \left(-\frac{T_b}{T^2}\right) \left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau}\right)^{1-n}
 \end{aligned}$$

Soit 
$$\boxed{\frac{\partial(1+A^{1-n})}{\partial T} = (n-1) \frac{T_b A^{1-n}}{T^2}}$$
 (A.I.3)

$$\begin{aligned}
 4. \quad \frac{\partial(1+A^{1-n})}{\partial \dot{\gamma}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \left( \left( \frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau} \right)^{1-n} \right) \\
 &= \left( \frac{\eta_0}{\tau} \right)^{1-n} \frac{\partial(\dot{\gamma}^{1-n})}{\partial \dot{\gamma}} \\
 &= \left( \frac{\eta_0}{\tau} \right)^{1-n} (1-n) \dot{\gamma}^{-n}
 \end{aligned}$$

Soit 
$$\boxed{\frac{\partial(1+A^{1-n})}{\partial \dot{\gamma}} = (1-n) \frac{A^{1-n}}{\dot{\gamma}}}$$
 (A.I.4)

### A.I.1.2 Calcul des dérivées premières, secondes et croisées de la viscosité du PP HV252

On détaillera ici les expressions des dérivées premières  $\frac{\partial \eta}{\partial T}$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}}$ , des dérivées secondes

$\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2}$  et  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2}$ , puis de la dérivée croisée  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}}$ .

- Dérivée première par rapport à la variable  $T$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial T}$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \eta}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\eta_0}{1+A^{1-n}} \right) \\
 \frac{\partial \eta}{\partial T} &= \frac{(1+A^{1-n}) \frac{\partial \eta_0}{\partial T} - \eta_0 \frac{\partial(1+A^{1-n})}{\partial T}}{(1+A^{1-n})^2}
 \end{aligned} \tag{A.I.5}$$

## Annexe I – Calcul analytique du développement limité des viscosités

Donc en remplaçant les dérivées de l'expression (A.I.5) par les expressions (A.I.1) et (A.I.3), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(1 + A^{1-n}\right) \left(-\frac{T_b \eta_0}{T^2}\right) - \eta_0 (n-1) \frac{T_b A^{1-n}}{T^2} \\ &= \frac{\left(1 + A^{1-n}\right) \left(-\frac{T_b \eta_0}{T^2}\right) - \eta_0 (n-1) \frac{T_b A^{1-n}}{T^2}}{\left(1 + A^{1-n}\right)^2} \\ &= -\left(\frac{T_b \eta_0}{T^2}\right) \frac{1 + A^{1-n} + (n-1)A^{1-n}}{\left(1 + A^{1-n}\right)^2} \end{aligned}$$

Soit 
$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial T} = -T_b \frac{\eta_0 (1 + nA^{1-n})}{T^2 (1 + A^{1-n})^2}}$$
 (A.I.6)

- Dérivée première par rapport à la variable  $\dot{\gamma}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \left( \frac{\eta_0}{1 + A^{1-n}} \right) \\ &= \eta_0 \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \left( \frac{1}{1 + A^{1-n}} \right) \\ &= -\eta_0 \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial \dot{\gamma}} \times \frac{1}{(1 + A^{1-n})^2} \end{aligned}$$

Or, d'après (A.I.4), on a  $\frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial \dot{\gamma}} = (1-n) \frac{A^{1-n}}{\dot{\gamma}}$

Soit 
$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} = (n-1) \frac{\eta_0 A^{1-n}}{\dot{\gamma} (1 + A^{1-n})^2}}$$
 (A.I.7)

- Dérivée seconde par rapport à la variable  $T$ ,  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( -T_b \frac{\eta_0 (1 + nA^{1-n})}{T^2 (1 + A^{1-n})^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} &= -T_b \frac{T^2 (1 + A^{1-n})^2 \frac{\partial (\eta_0 (1 + nA^{1-n}))}{\partial T} - \eta_0 (1 + nA^{1-n}) \frac{\partial (T^2 (1 + A^{1-n})^2)}{\partial T}}{T^4 (1 + A^{1-n})^4} \end{aligned} \quad (A.I.8)$$

On explicite les deux dérivées  $\frac{\partial (\eta_0 (1 + nA^{1-n}))}{\partial T}$  et  $\frac{\partial (T^2 (1 + A^{1-n})^2)}{\partial T}$  :

1. 
$$\frac{\partial (\eta_0 (1 + nA^{1-n}))}{\partial T} = (1 + nA^{1-n}) \frac{\partial \eta_0}{\partial T} + \eta_0 \frac{\partial (1 + nA^{1-n})}{\partial T}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 + nA^{1-n}) \left( -\frac{T_b \eta_0}{T^2} \right) + \eta_0 n(n-1) \frac{T_b A^{1-n}}{T^2} \\
 &= \frac{T_b \eta_0}{T^2} [n(n-1)A^{1-n} - (1 + nA^{1-n})] \\
 &= \frac{T_b \eta_0}{T^2} [n^2 A^{1-n} - nA^{1-n} - 1 - nA^{1-n}]
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\eta_0(1 + nA^{1-n}))}{\partial T} = \frac{T_b \eta_0}{T^2} [(n^2 - 2n)A^{1-n} - 1] \quad (\text{A.I.9})$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \frac{\partial(T^2(1 + A^{1-n})^2)}{\partial T} &= (1 + A^{1-n})^2 \frac{\partial(T^2)}{\partial T} + T^2 \frac{\partial((1 + A^{1-n})^2)}{\partial T} \\
 &= 2T(1 + A^{1-n})^2 + T^2 2(n-1) \frac{T_b A^{1-n}}{T^2} (1 + A^{1-n})
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(T^2(1 + A^{1-n})^2)}{\partial T} = 2(1 + A^{1-n}) [T(1 + A^{1-n}) + (n-1)T_b A^{1-n}] \quad (\text{A.I.10})$$

Par conséquent, en injectant (A.I.9) et (A.I.10) dans (A.I.8), on obtient après simplifications :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} = T_b \eta_0 \frac{(T_b + 2T) - [(n^2 - 4n + 1)T_b - (2 + 2n)T] A^{1-n} + (n^2 T_b + 2nT) A^{2-2n}}{T^4 (1 + A^{1-n})^3}} \quad (\text{A.I.11})$$

- Dérivée seconde par rapport à la variable  $\dot{\gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2}$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \left( (n-1) \frac{\eta_0 A^{1-n}}{\dot{\gamma} (1 + A^{1-n})^2} \right) \\
 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2} &= (n-1) \frac{\dot{\gamma} (1 + A^{1-n})^2 \frac{\partial(\eta_0 A^{1-n})}{\partial \dot{\gamma}} - \eta_0 A^{1-n} \frac{\partial(\dot{\gamma} (1 + A^{1-n})^2)}{\partial \dot{\gamma}}}{\dot{\gamma}^2 (1 + A^{1-n})^4} \quad (\text{A.I.12})
 \end{aligned}$$

On explicite les deux dérivées  $\frac{\partial(\eta_0 A^{1-n})}{\partial \dot{\gamma}}$  et  $\frac{\partial(\dot{\gamma} (1 + A^{1-n})^2)}{\partial \dot{\gamma}}$  :

$$1. \quad \frac{\partial(\eta_0 A^{1-n})}{\partial \dot{\gamma}} = \eta_0 \frac{\partial(A^{1-n})}{\partial \dot{\gamma}} + A^{1-n} \frac{\partial \eta_0}{\partial \dot{\gamma}}$$

$$\frac{\partial(\eta_0 A^{1-n})}{\partial \dot{\gamma}} = \eta_0 (1-n) \frac{A^{1-n}}{\dot{\gamma}} \quad (\text{A.I.13})$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{\partial(\dot{\gamma}(1+A^{1-n})^2)}{\partial \dot{\gamma}} &= \dot{\gamma} \frac{\partial((1+A^{1-n})^2)}{\partial \dot{\gamma}} + (1+A^{1-n})^2 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{\gamma}} \\ &= \dot{\gamma} \frac{\partial((1+A^{1-n})^2)}{\partial \dot{\gamma}} + (1+A^{1-n})^2 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{\gamma}} \\ &= \dot{\gamma} 2(1-n) \frac{A^{1-n}}{\dot{\gamma}} (1+A^{1-n}) + (1+A^{1-n})^2 \\ \frac{\partial(\dot{\gamma}(1+A^{1-n})^2)}{\partial \dot{\gamma}} &= (1+A^{1-n}) [(3-2n)A^{1-n} + 1] \end{aligned} \quad (\text{A.I.14})$$

Par conséquent, en injectant (A.I.13) et (A.I.14) dans (A.I.12), on obtient après simplifications :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2} = (n-1) \eta_0 A^{1-n} \frac{(n-2)A^{1-n} - n}{\dot{\gamma}^2 (1+A^{1-n})^3}} \quad (\text{A.I.15})$$

- Dérivée seconde croisée par rapport aux variables  $T$  et  $\dot{\gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( (n-1) \frac{\eta_0 A^{1-n}}{\dot{\gamma} (1+A^{1-n})^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}} &= \frac{(n-1)}{\dot{\gamma}} \times \frac{(1+A^{1-n})^2 \frac{\partial(\eta_0 A^{1-n})}{\partial T} - \eta_0 A^{1-n} \frac{\partial((1+A^{1-n})^2)}{\partial T}}{(1+A^{1-n})^4} \end{aligned} \quad (\text{A.I.16})$$

On explicite les deux dérivées  $\frac{\partial(\eta_0 A^{1-n})}{\partial T}$  et  $\frac{\partial((1+A^{1-n})^2)}{\partial T}$  :

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{\partial(\eta_0 A^{1-n})}{\partial T} &= \eta_0 \frac{\partial(A^{1-n})}{\partial T} + A^{1-n} \frac{\partial \eta_0}{\partial T} \\ &= \eta_0 (n-1) \frac{T_b A^{1-n}}{T^2} + A^{1-n} \left( -\frac{T_b \eta_0}{T^2} \right) \\ \frac{\partial(\eta_0 A^{1-n})}{\partial T} &= (n-2) \frac{\eta_0 T_b}{T^2} A^{1-n} \end{aligned} \quad (\text{A.I.17})$$



$$\begin{aligned}
 2. \quad \frac{\partial \left( (1 + A^{1-n})^2 \right)}{\partial T} &= 2 \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} (1 + A^{1-n}) \\
 \frac{\partial \left( (1 + A^{1-n})^2 \right)}{\partial T} &= 2(n-1) \frac{T_b A^{1-n}}{T^2} (1 + A^{1-n})
 \end{aligned} \tag{A.I.18}$$

Par conséquent, en injectant (A.I.17) et (A.I.18) dans (A.I.16), on obtient après simplifications :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}} = (n-1) \frac{\eta_0 T_b A^{1-n}}{\dot{\gamma} T^2} \left( \frac{n(1 - A^{1-n}) - 2}{(1 + A^{1-n})^3} \right)} \tag{A.I.20}$$

### A.I.1.3 Récapitulatif

- dérivées premières par rapport à la température et au taux de cisaillement :

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial T} = -T_b \frac{\eta_0 (1 + nA^{1-n})}{T^2 (1 + A^{1-n})^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} = (n-1) \frac{\eta_0 A^{1-n}}{\dot{\gamma} (1 + A^{1-n})^2}}$$

- dérivées secondes par rapport à la température et au taux de cisaillement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} = T_b \eta_0 \frac{\left[ (-n^2 + n - 1)T_b + (2 + 2n)T \right] A^{1-n} + (n^2 T_b + 2nT) A^{2-2n} + (T_b + 2T)}{T^4 (1 + A^{1-n})^3}}$$

$$\text{et} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2} = (n-1) \eta_0 A^{1-n} \frac{(n-2)A^{1-n} - n}{\dot{\gamma}^2 (1 + A^{1-n})^3}}$$

- dérivée croisée par rapport aux deux variables :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}} = (n-1) \frac{\eta_0 T_b A^{1-n}}{\dot{\gamma} T^2} \left( \frac{n(1 - A^{1-n}) - 2}{(1 + A^{1-n})^3} \right)}$$

## A.I.2 Calcul des dérivées de l'approximation polynomiale de la viscosité du PE 2042E

On rappelle que l'expression de la viscosité du polyéthylène étudié est de la forme :

$$\eta(T, \dot{\gamma}) = \frac{\eta_0}{(1 + (c\dot{\gamma})^n)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{avec} \quad \eta_0(T) = a \exp\left(\frac{b}{T}\right)$$

### A.I.2.1 Calculs préliminaires

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( a \exp\left(\frac{b}{T}\right) \right) \\
 &= -\frac{ab}{T^2} \exp\left(\frac{b}{T}\right) \\
 \frac{\partial \eta_0}{\partial T} &= -\frac{b}{T^2} \eta_0
 \end{aligned} \tag{A.I.21}$$

$$2. \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial \dot{\gamma}} = 0, \text{ car } \eta_0 \text{ indépendant du taux de cisaillement} \tag{A.I.22}$$

$$3. \quad \frac{\partial \left( \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{1}{n}} \right)}{\partial T} = 0 \tag{A.I.23}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \frac{\partial \left( \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{1}{n}} \right)}{\partial \dot{\gamma}} &= -\frac{1}{n} \frac{\partial \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)}{\partial \dot{\gamma}} \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{n+1}{n}} \\
 &= -\frac{1}{n} n c^n \dot{\gamma}^{n-1} \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{n+1}{n}} \\
 \frac{\partial \left( \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{1}{n}} \right)}{\partial \dot{\gamma}} &= -c^n \dot{\gamma}^{n-1} \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{n+1}{n}}
 \end{aligned} \tag{A.I.24}$$

### A.I.2.2 Calcul des dérivées premières, secondes et croisées de la viscosité du PE 2042E

- Dérivée première par rapport à la variable  $T$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial T}$  :

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} = \frac{1}{\left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{1}{n}}} \times \frac{\partial \eta_0}{\partial T} \tag{A.I.25}$$

Donc en injectant (A.I.21) dans (A.I.25), on obtient:

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial T} = -\frac{b \eta_0}{T^2 \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{1}{n}}}} \tag{A.I.26}$$

- Dérivée première par rapport à la variable  $\dot{\gamma}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}}$  :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} = \eta_0 \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \left( (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{1}{n}} \right)$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} = -\eta_0 c^n \dot{\gamma}^{n-1} (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{n+1}{n}}} \quad (\text{A.I.27})$$

- Dérivée seconde par rapport à la variable  $T$ ,  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( -\frac{b\eta_0}{T^2 (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{\frac{1}{n}}} \right) \\ &= -\frac{b}{(1 + (c\dot{\gamma})^n)^{\frac{1}{n}}} \left[ \eta_0 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{T^2} \right) + \frac{1}{T^2} \frac{\partial \eta_0}{\partial T} \right] \\ &= -\frac{b}{(1 + (c\dot{\gamma})^n)^{\frac{1}{n}}} \left[ \eta_0 \left( -\frac{2}{T^3} \right) + \frac{1}{T^2} \left( -\frac{b}{T^2} \eta_0 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} = \frac{b\eta_0}{(1 + (c\dot{\gamma})^n)^{\frac{1}{n}}} \left[ \frac{2}{T^3} + \frac{b}{T^4} \right]} \quad (\text{A.I.28})$$

- Dérivée seconde par rapport à la variable  $\dot{\gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \left( -\eta_0 c^n \dot{\gamma}^{n-1} (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{n+1}{n}} \right) \\ &= -\eta_0 c^n \left[ \frac{\partial (\dot{\gamma}^{n-1})}{\partial \dot{\gamma}} (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{n+1}{n}} + \dot{\gamma}^{n-1} \frac{\partial \left( (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{n+1}{n}} \right)}{\partial \dot{\gamma}} \right] \\ &= -\eta_0 c^n \left[ (n-1) \dot{\gamma}^{n-2} (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{n+1}{n}} + \dot{\gamma}^{n-1} \left( -\frac{n+1}{n} \right) (nc^n \dot{\gamma}^{n-1}) (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{2n+1}{n}} \right] \\ &= \eta_0 c^n \left[ (1-n) \dot{\gamma}^{n-2} (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{n+1}{n}} + c^n (n+1) \dot{\gamma}^{2n-2} (1 + (c\dot{\gamma})^n)^{-\frac{2n+1}{n}} \right] \end{aligned}$$

## Annexe I – Calcul analytique du développement limité des viscosités

Après simplifications, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2} = \eta_0 c^n \dot{\gamma}^{n-2} \left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{-\frac{n+1}{n}} \left[ c^n (n+1) \dot{\gamma}^n \left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{-1} - n + 1 \right]} \quad (\text{A.I.29})$$

- Dérivée seconde croisée par rapport aux variables  $T$  et  $\dot{\gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( -\eta_0 c^n \dot{\gamma}^{n-1} \left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{-\frac{n+1}{n}} \right) \\ &= -c^n \dot{\gamma}^{n-1} \left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{-\frac{n+1}{n}} \left( -\frac{b}{T^2} \eta_0 \right) \end{aligned}$$

Soit  $\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}} = bc^n \frac{\eta_0}{T^2} \dot{\gamma}^{n-1} \left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{-\frac{n+1}{n}}}$  (A.I.30)

### A.I.2.3 Récapitulatif

- dérivées premières par rapport à la température et au taux de cisaillement :

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial T} = -\frac{b\eta_0}{T^2 \left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{\frac{1}{n}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} = -\eta_0 c^n \dot{\gamma}^{n-1} \left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{-\frac{n+1}{n}}}$$

- dérivées secondes par rapport à la température et au taux de cisaillement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} = \frac{b\eta_0}{\left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{\frac{1}{n}} \left[ \frac{2}{T^3} + \frac{b}{T^4} \right]}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial \dot{\gamma}^2} = \eta_0 c^n \dot{\gamma}^{n-2} \left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{-\frac{n+1}{n}} \left[ c^n (n+1) \dot{\gamma}^n \left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{-1} - n + 1 \right]}$$

- dérivée croisée des deux variables :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \dot{\gamma}} = bc^n \frac{\eta_0}{T^2} \dot{\gamma}^{n-1} \left(1 + (c\dot{\gamma})^n\right)^{-\frac{n+1}{n}}}$$



## Annexe II : Calcul analytique du champ de contrainte dans un cylindre creux sous sollicitations internes et externes

Récapitulatif du problème : Dans le cas d'un écoulement de polymère fondu dans un canal, le fluide exerce des efforts de pression sur la paroi métallique l'entourant, différents selon le débit à laquelle le fluide s'écoule. Un calcul préalable des efforts de pression que subit le cylindre permet de dimensionner ce dernier et d'éviter que la matière ne détériore l'outillage. Concernant notre cas, les calculs seront effectués dans un cylindre à géométrie cylindrique.

Le système d'équations (éq. A.II.1 à A.II.3) d'équilibre en coordonnées cylindriques est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + (\sigma_r - \sigma_\theta) \right) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -f_r \\ \frac{d\tau_{r\theta}}{dr} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} \right) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = -f_\theta \\ \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \tau_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -f_z \end{cases} \quad (\text{A.II.1,A.II.2,A.II.3})$$

En faisant l'hypothèse que le tube reste cylindrique et que l'on a une symétrie de révolution axiale. On en déduit alors que :

- les directions du repère cylindrique sont principales
- tous les paramètres sont indépendants de  $\theta$
- le déplacement est tel que  $u = u(r)$ ,  $v = 0$  (déplacement suivant  $\theta$  nul),  $w = w(z)$
- les contraintes tangentielles  $\tau_{rz} = 0$ ,  $\tau_{r\theta} = -\tau_{\theta z} = 0$

Par conséquent, en l'absence de forces de volume, on obtient les deux équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \\ \frac{d\sigma_z}{dz} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.II.4,A.II.5})$$

$$\text{Or d'après la loi de Hooke inverse : } [\sigma] = \lambda \text{tr}([\varepsilon])[I] + 2\mu[\varepsilon] \quad (\text{A.II.6})$$

*Annexe II – Calcul analytique du champ de contrainte dans un cylindre creux sous sollicitations internes et externes*

$$\text{Avec } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & & \\ & \varepsilon_\theta & \\ & & \varepsilon_z \end{bmatrix} \text{ et } [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & & \\ & \sigma_\theta & \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Donc, en injectant l'équation A.II.6 dans les équations A.II.4 et A.II.5, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda \left( \frac{d\varepsilon_r}{dr} + \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{d\varepsilon_z}{dr} \right) + 2\mu \frac{d\varepsilon_r}{dr} + \frac{1}{r} 2\mu (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = 0 \\ \lambda \left( \frac{d\varepsilon_r}{dz} + \frac{d\varepsilon_\theta}{dz} + \frac{d\varepsilon_z}{dz} \right) + 2\mu \frac{d\varepsilon_z}{dz} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.II.7,A.II.8})$$

$$\text{On pose } \varepsilon_r = \frac{du}{dr} \text{ (A.II.9), } \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \text{ (A.II.10), } \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \text{ (A.II.11).}$$

Donc en les injectant dans les équations (A.II.7) et (A.II.8), on obtient :

$$\begin{cases} \lambda \left( \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left( \frac{u}{r} \right) + \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dz} \right) \right) + 2\mu \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} 2\mu \left( \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) = 0 \\ \lambda \left( \frac{d}{dz} \left( \frac{du}{dr} \right) + \frac{d}{dz} \left( \frac{u}{r} \right) + \frac{d^2w}{dz^2} \right) + 2\mu \frac{d^2w}{dz^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \left( \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) + 2\mu \frac{d^2u}{dr^2} + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2w}{dz^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda + 2\mu) \left[ \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right] = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2w}{dz^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \\ \frac{d^2w}{dz^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.II.12,A.II.13})$$

L'intégration de ces deux équations aboutit à :

$$\boxed{u = ar + \frac{b}{r}}$$

(A.II.14)

et

$$\boxed{w = cz + d}$$

(A.II.15)

*Annexe II – Calcul analytique du champ de contrainte dans un cylindre creux sous sollicitations internes et externes*

- Calcul de  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  et  $\varepsilon_z$  :

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2} \quad (\text{A.II.16}), \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2} \quad (\text{A.II.17}), \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = c \quad (\text{A.II.18})$$

Soit la matrice diagonale du tenseur des déformations :  $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} a - \frac{b}{r^2} & & \\ & a + \frac{b}{r^2} & \\ & & c \end{bmatrix}$

- Calcul de  $\sigma_r, \sigma_\theta$  et  $\sigma_z$  :

Donc, en injectant (A.II.16), (A.II.17) et (A.II.18) dans la loi de Hooke inverse (A.II.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_z \\ &= (\lambda + 2\mu)\left(a - \frac{b}{r^2}\right) + \lambda\left(a + \frac{b}{r^2}\right) + \lambda c \\ &= (\lambda + 2\mu)a + \lambda a + \lambda c - 2\mu\frac{b}{r^2} \end{aligned}$$

Soit  $\boxed{\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}}$  avec  $A = 2a(\lambda + \mu) + \lambda c$  et  $B = 2\mu b$  (A.II.19)

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \lambda\varepsilon_r + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_z \\ &= \lambda\left(a - \frac{b}{r^2}\right) + (\lambda + 2\mu)\left(a + \frac{b}{r^2}\right) + \lambda c \\ &= 2a(\lambda + \mu) + \lambda c + 2\mu\frac{b}{r^2} \end{aligned}$$

Soit  $\boxed{\sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2}}$  (A.II.20)

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \lambda\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\theta + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z \\ &= \lambda\left(a - \frac{b}{r^2}\right) + \lambda\left(a + \frac{b}{r^2}\right) + (\lambda + 2\mu)c \\ &= 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c \end{aligned}$$

Soit  $\boxed{\sigma_z = C}$  avec  $C = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c$  (A.II.21)



*Annexe II – Calcul analytique du champ de contrainte dans un cylindre creux sous sollicitations internes et externes*

On exprime alors le tenseur des contraintes comme suit :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} A - \frac{B}{r^2} & & \\ & A + \frac{B}{r^2} & \\ & & C \end{bmatrix}$

Il faut enfin trois conditions aux limites pour déterminer les constantes ci-dessus. Pour cela, on exprime :

- les conditions de chargement du tube ; on trouve deux conditions à l'aide des pressions intérieure et extérieure :  $(\sigma_r)_{r=R_i} = -P_i$  et  $(\sigma_r)_{r=R_e} = -P_e$
- les conditions de liaison aux extrémités qui donnent une 3<sup>ème</sup> équation ; les différents cas possibles sont :
  - o extrémités libres  $\sigma_z = 0 \Rightarrow C = 0$
  - o extrémités fixes  $c = d = 0$  (pas de déplacement possible suivant z)
  - o cylindre fermé aux extrémités  $\Rightarrow \pi(r_e^2 - r_i^2)\sigma_z = \pi r_i^2 P_i - \pi r_e^2 P_e$
  - o cylindre sur appui élastiques, il faut alors exprimer l'équilibre du cylindre en prenant en compte la raideur de l'appui

On peut remarquer par ailleurs que les constantes A et B sont déterminées uniquement par les conditions de pression, la somme  $\sigma_r + \sigma_\theta$  reste constante, ce qui montre que les sections droites restent planes.

➤ Détermination des constantes A et B :

On a  $(\sigma_r)_{r=R_i} = -P_i \Leftrightarrow \sigma_r = A - \frac{B}{R_i^2} = -P_i$  (A.II.22)

et  $(\sigma_r)_{r=R_e} = -P_e \Leftrightarrow \sigma_r = A - \frac{B}{R_e^2} = -P_e$  (A.II.23)

La résolution du système d'équations (A.II.22 et A.II.23) donne :

$A = -P_e + \frac{(P_i - P_e)R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$  (A.II.24) et  $B = (P_i - P_e) \left( \frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \right)$  (A.II.25)

## Annexe II – Calcul analytique du champ de contrainte dans un cylindre creux sous sollicitations internes et externes

On considère dans notre dimensionnement que la pression externe appliquée sur le tube est la pression atmosphérique et qu'elle est négligeable ( $P_e \approx 0$ ) devant la pression interne que le polymère exerce sur la paroi interne du cylindre.

Par conséquent, en injectant les équations A.II.24 et A.II.25 dans A.II.19 et A.II.20, on obtient :

$$\boxed{\sigma_r = \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 - \frac{R_e^2}{r^2} \right) P_i} \quad (\text{A.II.26}) \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma_\theta = \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 + \frac{R_e^2}{r^2} \right) P_i} \quad (\text{A.II.27})$$

Donc à l'interface polymère métal, en  $r = R_i$ , on a :

$$(\sigma_\theta)_{r=R_i} = \frac{R_i^2 + R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} P_i > P_i \quad \text{et} \quad (\sigma_r)_{r=R_i} = -P_i < 0$$

Et sur la paroi externe du cylindre, en  $r = R_e$ , on a :

$$(\sigma_\theta)_{r=R_e} = \frac{2R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} P_i > 0 \quad \text{et} \quad (\sigma_r)_{r=R_e} = -P_e = 0$$

Dans ce cas,  $\sigma_r$  est toujours une compression et  $\sigma_\theta$  est toujours une traction. La contrainte tangentielle maximale est obtenue pour  $r = R_i$ , son expression littérale vaut

$$\tau_{\max} = \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} P_i \quad \text{et le critère de Tresca s'écrit } \tau_{\max} \leq \frac{1}{2} R_{pe}.$$



## Annexe III : Mesures expérimentales

### A.III.1 Essai sur la presse à injecter

Dans cet essai, c'est le nez de buse servant pour l'injection qui a été choisi. Cette précision étant importante car, on l'a vu, les pertes de charges ne sont pas les mêmes suivant le nez de buse utilisé. Le polypropylène Eltex HV252 est le polymère retenu pour cette expérience.

#### Analyse de l'état thermique initial :

En ce qui concerne la régulation thermique de la buse, nous avons consigné les zones de régulation de la façon suivante :  $Tb_1 = 213^\circ\text{C}$  ,  $Tb_2 = 211,4^\circ\text{C}$  ,  $Tb_3 = 210,5^\circ\text{C}$  et  $Tb_4 = 209,8^\circ\text{C}$  (résumé Figure A.III.1). On peut noter que les températures de régulation sont globalement supérieures à celle désirée, c'est-à-dire à  $T = 210^\circ\text{C}$  . Le fourreau servant à fondre le polymère en le chauffant et le malaxant est réglé cette même température. La vitesse du piston a été choisie égal à  $V_p = 1\text{cm.s}^{-1}$  .

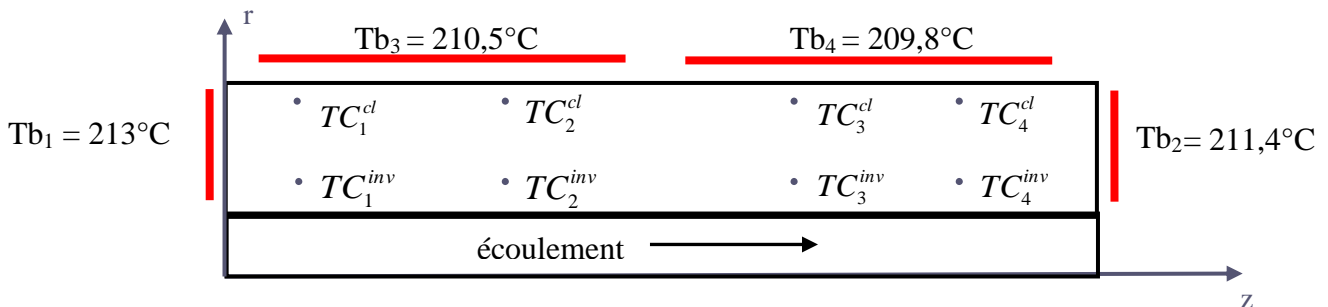


Figure A.III.1 : Régulation de la buse pour cet essai

### Annexe III – Mesures expérimentales

Le détail des résultats obtenus lors de cet essai est représenté sur la Figure A.III.2.

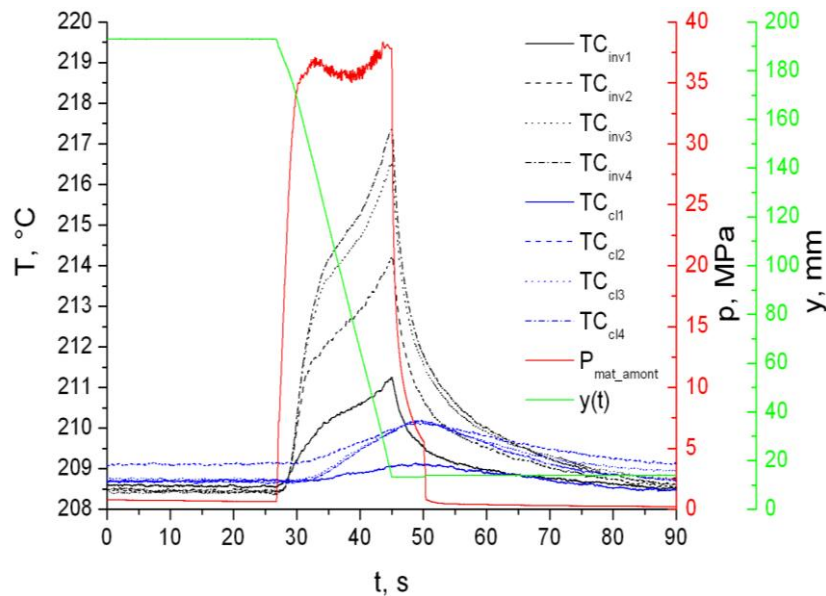


Figure A.III.2 : Mesures expérimentales de températures des 8 thermocouples dans l'acier, de la pression amont et de la course du piston pour  $T_{buse} = T_{fourreau} = 210^{\circ}\text{C}$ ,  $V_p = 1\text{cm.s}^{-1}$

#### Analyse de la mesure de pression :

Tout d'abord, on constate que la courbe de pression croît très rapidement, en 5,3s (de  $t = 26,8\text{s}$  à  $t = 32,1\text{s}$ ), à partir du moment où le déplacement de la vis a lieu. Elle passe alors de  $0,62\text{MPa}$  à  $37,12\text{MPa}$  où elle atteint son premier maximum de pression. De là, on observe une légère baisse de la pression d'environ  $1,6\text{MPa}$  au maximum avant de remonter jusqu'à une valeur de  $38,13\text{MPa}$ . Ce qui est à retenir est la fluctuation de pression lors de la phase d'injection et que le second pic de pression est supérieur au premier.

#### Analyse des mesures de températures :

Au niveau thermique, c'est  $TC_4^{inv}$  qui observe le maximum de température dont la valeur est approximativement de  $217,3^{\circ}\text{C}$  alors qu'initialement on avait  $208,5^{\circ}\text{C}$ , soit un échauffement de presque  $9^{\circ}\text{C}$ . Les thermocouples les plus éloignés radialement du canal possèdent tous le même maximum de température qui vaut environ  $210,2^{\circ}\text{C}$ , à l'exception de  $TC_1^{cl}$  qui ne s'échauffe quasiment pas.

Les niveaux de pression et les échauffements dans l'acier du cylindre sont assez conséquents comparés à l'ancienne filière instrumentée. Ces informations sont très utiles et donc

## Annexe III – Mesures expérimentales

avec des ordres de grandeur suffisamment élevés pour permettre par la suite l'estimation de paramètre ou de conditions aux limites. Cependant, une information sur la température du polymère fondu dans le canal serait un plus afin d'avoir une idée sur les niveaux des échauffements du matériau.

### A.III.2 Description de deux essais sur l'extrudeuse

Pour les deux essais présentés dans ce paragraphe, nous allons brièvement décrire le protocole expérimental afin de mieux comprendre comment nous sommes arrivés aux résultats présentés ci-après. On précise que le premier essai représenté ici a été réalisé avec du polypropylène Eltex HV 252 et le second avec du polyéthylène Dowlex 2042E. On indique également que pour ces deux essais, c'est le nez de buse servant pour l'injection qui a été choisi afin, qu'aux pertes de charges déjà variables suivant le type de polymère à mettre en forme, ne viennent pas se rajouter les différentes pertes de charges dues au changement de nez.

#### A.III.2.1 Description des essais

##### Régulation thermique :

Tout d'abord, parlons régulation thermique car elle influe fortement sur les échanges de chaleur entre le polymère et la buse. Le fourreau et la buse pouvant être régulés thermiquement, voici leur température de consigne : la température de consigne du fourreau de la vis a été est identique pour les trois zones de régulation, i-e  $T_{four1} = T_{four2} = T_{four3} = 220^{\circ}\text{C}$  et celles de la buse varient suivant ses différentes zones de régulation,  $Tb_1 = 228,5^{\circ}\text{C}$ ,  $Tb_2 = 226,5^{\circ}\text{C}$ ,  $Tb_3 = 221,6^{\circ}\text{C}$  et  $Tb_4 = 221,0^{\circ}\text{C}$  (résumé Figure A.III.3). Afin de limiter les pertes thermiques au niveau du nez de la buse, on y a disposé un collier chauffant dont la température imposée est de  $227^{\circ}\text{C}$ . On peut noter que cette température est légèrement supérieur à  $Tb_2$  afin de ne pas créer un flux sortant par le devant de la buse en diminuant l'influence de la chaufferette 2. La régulation thermique présentée ci-dessous restera identique pendant ces deux essais.

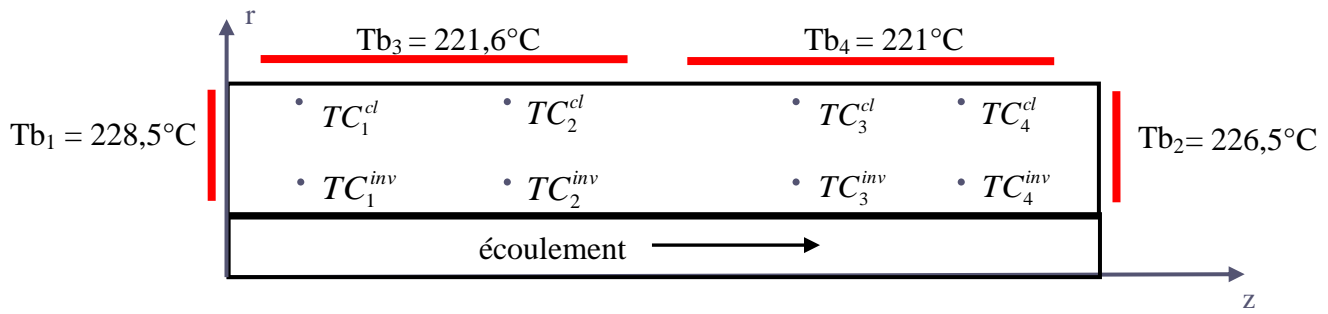


Figure A.III.3°: Régulation de la buse pour les deux essais avec le nez de buse d'injection

### Consignes mécaniques :

Ensuite, au niveau mécanique, nous allons expliciter les caractéristiques dynamiques des essais telles que les niveaux de débits matières considérés. On précise qu'à l'inverse des consignes de régulation thermiques, les consignes mécaniques des deux essais sont différentes car, comme les viscosités des matériaux ne sont pas similaires, il en résulte que les niveaux de pressions ne sont pas identiques pour une même vitesse de rotation de la vis. En outre, grâce à la facilité qu'offre l'extrudeuse de passer d'un débit matière à un autre, on parlera en termes de palier de niveau de pression.

Le premier essai présenté ici a été effectué avec du polypropylène Eltex HV 252 et vu la faible viscosité de ce polymère par rapport au polyéthylène, on a pu faire fonctionner la machine à son maximum de vitesse de rotation, i-e  $V_{rot\_vis} = 100tr.min^{-1}$ , nous donnant ainsi un débit de  $1,80 \pm 0,01g.s^{-1}$ . Cet essai s'est déroulé en deux étapes. Tout d'abord, on est passé de 0 à  $40tr.min^{-1}$  (palier 1) en attendant que la pression amont et la température des thermocouples dans l'acier se stabilisent. On a alors atteint un débit matière de  $0,83 \pm 0,01g.s^{-1}$ , lors du premier palier de pression. De là, nous avons augmenté la pression amont en faisant passer la vitesse de rotation de la vis de  $40tr.min^{-1}$  à  $100tr.min^{-1}$  (palier 2). Nous avons enfin arrêté les mesures lorsque la stabilisation thermique a eu lieu en coupant brutalement le moteur de la vis.

Ce second essai a été réalisé avec un polymère plus visqueux que le précédent, c'est le polyéthylène Dowlex 2042E. Pour cette raison, nous n'avons pas poussé la machine à son maximum de vitesse de rotation comme précédemment car, par rapport au polypropylène, ce polyéthylène est beaucoup plus visqueux et donc la pression amont observée à l'aide du capteur est beaucoup plus élevée à vitesse de rotation égale. Dés lors, comme notre capteur de pression, qui se limite à mesurer au maximum une pression de  $51,6MPa$  et qu'à partir de  $50tr.min^{-1}$ , la

### Annexe III – Mesures expérimentales

pression est supérieure à la valeur maximale que peut tolérer le capteur de pression, nous n'avons pas pu faire de mesure où l'on dépassait cette vitesse de rotation avec le nez de la presse.

Ceci dit, on a commencé l'enregistrement de cet essai à  $20tr.min^{-1}$ , ce qui nous donnait un débit matière assez faible de l'ordre de  $0,32 \pm 0,01g.s^{-1}$  (palier 1), puis on a attendu que la pression amont et la température des thermocouples dans l'acier se stabilisent avant d'augmenter la vitesse de rotation de la vis de l'extrudeuse jusqu'à  $40tr.min^{-1}$  puis on a attendu de nouveau la stabilisation thermique de l'essai avant de revenir à une vitesse de  $20tr.min^{-1}$ . Le débit maximal atteint lors de cet essai est de  $0,62 \pm 0,01g.s^{-1}$  (palier 2). On peut constater parallèlement que, comme ce polyéthylène est plus visqueux que le polypropylène, à vitesse de rotation de vis égale, l'on a des débits moins importants. En effet, à  $40tr.min^{-1}$ , on a un débit de  $0,83 \pm 0,01g.s^{-1}$  pour le polypropylène et un débit de  $0,62 \pm 0,01g.s^{-1}$  pour le polyéthylène.

## A.III.2.2 Résultats des mesures

### A.III.2.2.1 Pour le polypropylène

Dans cette partie, nous montrons les différentes mesures, réalisées avec le polypropylène, dont la thermique et la mécanique du protocole expérimental ont été explicitées ci-dessus. Nous pouvons y visualiser la pression amont  $P_{mat\_amont}$  (Figure A.III.4), les huit mesures de température dans l'acier du cylindre  $TC_{1,...,4}^{inv}$  et  $TC_{1,...,4}^{cl}$  (respectivement Figure A.III.5a et b) et la température amont  $T_{mat\_amont}$  en sortie de l'extrudeuse (Figure A.III.6). Ensuite, nous discuterons et effectuerons quelques remarques afin de mieux comprendre les mesures obtenues.

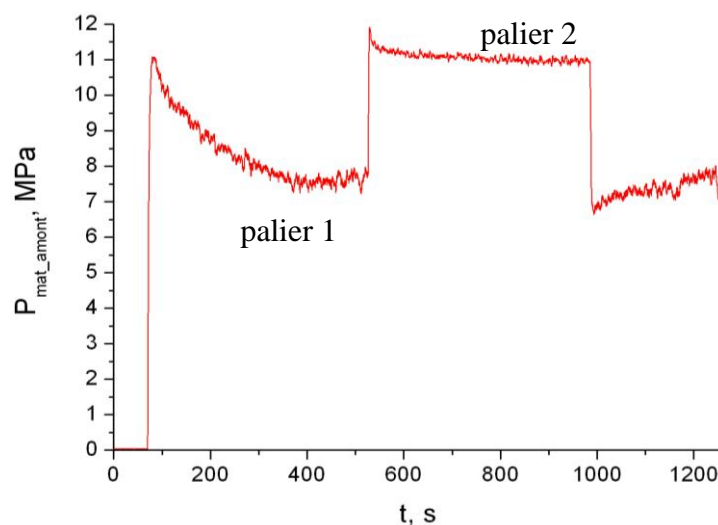


Figure A.III.4 : Evolution temporelle de  $P_{mat\_amont}$



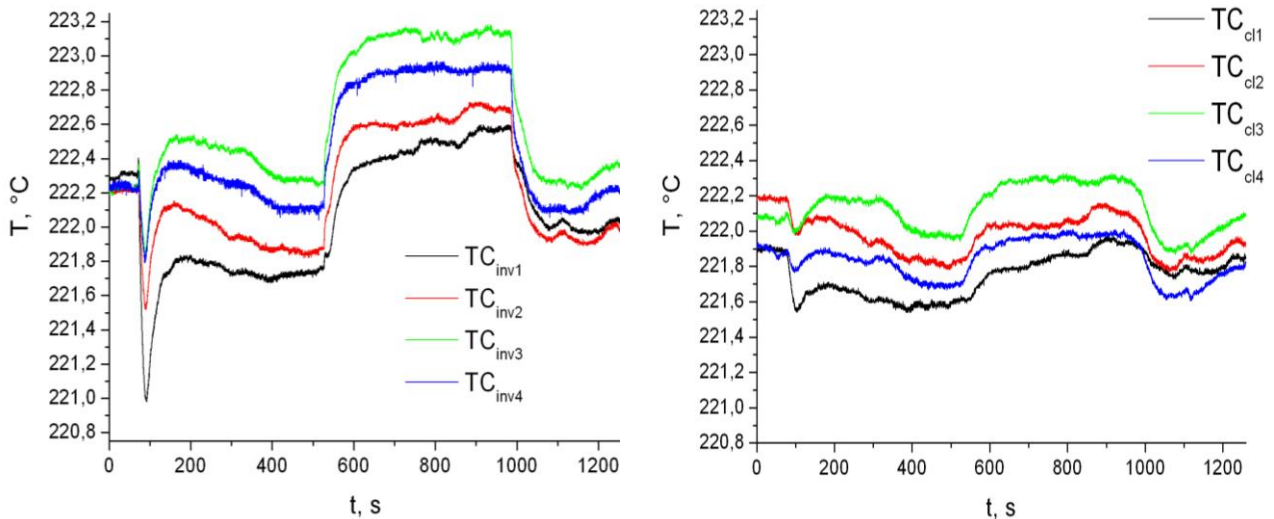


Figure A.III.5 : Evolution temporelle de la température des thermocouples a)  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  et b)  $TC_{inv1,\dots,4}$

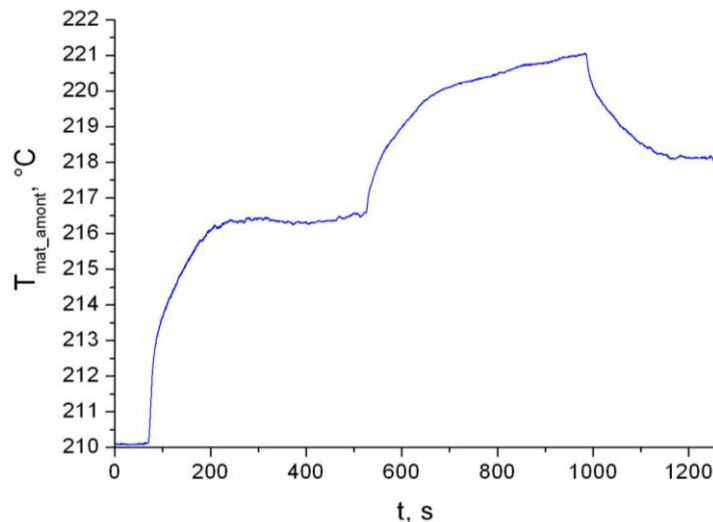


Figure A.III.6 : Evolution de la température du polymère en amont du canal  $T_{mat\_ament}$

Analyse de la mesure de pression :

La particularité de cet essai est le fait que l'on augmente la vitesse de rotation de la vis en deux temps (Figure A.III.4). Tout d'abord, on passe d'un état initial dans lequel le fluide n'est pas en mouvement à un état d'équilibre dynamique où la vitesse de rotation de la vis du piston est à  $V_{rot\_vis} = 40tr.min^{-1}$ , engendrant un débit de matière de  $0,83g.s^{-1}$ . On observe alors que la pression croît assez rapidement jusqu'à atteindre un pic, aux alentours de 80s, de valeur légèrement supérieure à 11MPa avant de décroître progressivement jusqu'à une pression moyenne d'environ 7,7MPa. La stabilisation dynamique engendre une importante chute de la pression (environ 30%) relativement à la valeur du pic. Ce phénomène est également visible, en

### *Annexe III – Mesures expérimentales*

beaucoup moins prononcé, lors du second changement de régime dynamique. En effet, lors du passage de 40 à 100  $tr.min^{-1}$ , correspondant à un débit de matière de  $1,80g.s^{-1}$ , on observe le second pic de pression à environ 11,9  $MPa$ , avant d'obtenir la stabilisation de la pression à 11  $MPa$  en moyenne, soit une diminution relative d'environ 7,6%. Cet intrigant phénomène de « relaxation » de la pression est en réalité dû à une légère accumulation de matière dans la buse lors de l'augmentation du débit, engendrant une augmentation rapide de la pression, avant de se stabiliser une fois que le débit l'est aussi. En effet, à  $t = 0s$ , le fluide est au repos et lorsque l'on augmente brusquement la vitesse de rotation de la vis, donc le débit massique, la matière étant assez visqueuse se comprime avant de se détendre lorsque la vitesse de rotation de la vis consignée est atteinte. Dès lors, il faut quelques centaines de secondes avant que l'écoulement ne s'établisse complètement et enfin d'atteindre des pertes de charges constantes dans la buse. On constate par ailleurs que la diminution de pression lors d'un changement d'état dynamique est d'autant plus faible que le polymère est en mouvement.

#### Analyse de l'état thermique initial :

Au point de vue thermique, la régulation initiale du cylindre instrumenté est assez bonne. En effet, la différence, à  $t = 0s$ , entre les thermocouples de mesure  $TC_{1,...,4}^{inv}$  est au maximum de  $0,09^{\circ}C$  (entre  $TC_1^{inv} = 222,29^{\circ}C$  et  $TC_2^{inv} = TC_3^{inv} = 222,20^{\circ}C$ ) et celle entre les thermocouples servant pour les conditions aux limites  $TC_{cl}$  est d'au maximum  $0,3^{\circ}C$  (entre  $TC_1^{cl} = 221,88^{\circ}C$  et  $TC_2^{cl} = 221,18^{\circ}C$ ). Enfin, la différence de température globale, i-e entre les  $TC_{1,...,4}^{inv}$  et les  $TC_{1,...,4}^{cl}$ , est d'environ  $0,4^{\circ}C$  (entre  $TC_1^{inv}$  et  $TC_1^{cl}$ ). On constate que l'on a plus de difficulté à réguler les thermocouples qui sont le plus éloignés du canal et donc le plus proche des zones de régulation ( $TC_{1,...,4}^{cl}$ ) que ceux qui sont proches de l'interface polymère métal ( $TC_{1,...,4}^{inv}$ ). Pour résumer, la température de l'acier du cylindre se situe autour de  $222^{\circ}C$  à environ  $\pm 0,2^{\circ}C$ .

#### Analyse des mesures de températures :

L'état de la configuration thermique initiale du cylindre étant explicité, discutons des courbes de température.

Tout d'abord, on observe (surtout sur la Figure A.III.5a et un peu moins sur la Figure A.III.5b) que la mise en mouvement du polymère à un débit de  $0,83g.s^{-1}$  entraîne une

### Annexe III – Mesures expérimentales

diminution des températures dans l'acier s'étalant sur quelques secondes puis une légère augmentation, avant que celles-ci ne se stabilise. Cette chute brutale de température dans l'acier résulte du fait que la matière rentre dans le canal à une température inférieure à celle de régulation de l'acier et refroidit donc légèrement ce dernier. On note en effet que la température amont initiale du polymère est de  $210^{\circ}\text{C}$  (A.III.6) et pour le coup est nettement plus faible que les températures initiales dans le cylindre qui se situent aux alentours de  $222^{\circ}\text{C}$ . On constate que c'est le thermocouple de mesure  $TC_1^{inv}$  qui perçoit la plus importante diminution et que plus on avance dans la buse moins elle est importante, à l'exception du dernier thermocouple  $TC_4^{inv}$  qui subit l'influence des déperditions thermiques au niveau du nez de la buse et qui donc, même avec la dissipation visqueuse et la convection le long de l'axe du canal, est équivalent à  $TC_3^{inv}$ . En effet, on relève (Figure A.III.7) qu'elle est de  $1,3^{\circ}\text{C}$  pour  $TC_1^{inv}$ ,  $0,7^{\circ}\text{C}$  pour  $TC_2^{inv}$ ,  $0,35^{\circ}\text{C}$  pour  $TC_3^{inv}$  et  $0,45^{\circ}\text{C}$  pour  $TC_4^{inv}$ . Ensuite, on observe une légère augmentation des températures dans l'acier qui, malgré l'auto-échauffement, sont en dessous de leur température initiale, sauf pour  $TC_3^{inv}$  et  $TC_4^{inv}$  (respectivement  $222,54^{\circ}\text{C}$  et  $222,39^{\circ}\text{C}$ ) soit un échauffement très faible d'environ  $0,35^{\circ}\text{C}$  pour  $TC_3^{inv}$  et  $0,15^{\circ}\text{C}$  pour  $TC_4^{inv}$ . En effet, comme le polymère rentre plus froid que le cylindre instrumenté, son auto-échauffement est alors comme « camouflé » et le débit est trop faible pour que l'énergie de la dissipation visqueuse entraîne des échauffements perceptibles par les thermocouples  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  de l'acier.

Ensuite, lorsqu'on passe de  $40$  à  $100\text{tr.min}^{-1}$ , la température amont du polymère croît progressivement et atteint une température d'environ  $221^{\circ}\text{C}$ , soit une augmentation d'un peu plus de  $11^{\circ}\text{C}$  entre l'état initial. Cette augmentation de la température du polymère en entrée de la buse fait qu'il arrive à une température équivalente à celle de la buse et donc ne refroidit pas l'acier du cylindre. De plus, à  $100\text{tr.min}^{-1}$ , le débit atteint est de  $1,80\text{g.s}^{-1}$  et étant donc largement supérieur à celui mesuré à  $40\text{tr.min}^{-1}$ , on s'attend à enfin voir des échauffements au niveau des thermocouples de mesure. En effet, la Figure A.III.5 montre bien qu'à ce débit massique, l'acier du cylindre observe des échauffements, certes faibles mais observables quand même. Effectivement, les maxima de température observés sont  $TC_1^{inv} = 222,60^{\circ}\text{C}$ ,  $TC_2^{inv} = 222,73^{\circ}\text{C}$ ,  $TC_3^{inv} = 222,18^{\circ}\text{C}$  et  $TC_4^{inv} = 222,97^{\circ}\text{C}$  (Figure A.III.5a), soit des échauffements relatifs à leur température initiale respectivement d'environ  $0,3^{\circ}\text{C}$ ,  $0,5^{\circ}\text{C}$ ,  $1^{\circ}\text{C}$  et  $0,75^{\circ}\text{C}$  (Figure A.III.7). On remarque alors logiquement que, grâce à la dissipation visqueuse et

### Annexe III – Mesures expérimentales

à la convection au sein du polymère, plus on avance dans le cylindre, plus l'échauffement est important, ceci à l'exception du dernier thermocouple  $TC_4^{inv}$  qui est plus froid que  $TC_3^{inv}$ , et ceci malgré l'emplacement du collier chauffant, mais quand même plus chaud que  $TC_2^{inv}$ . On peut dire aussi que les échauffements mesurés dans l'acier sont quand même assez faible même lorsque l'on a poussé à fond la machine (ne dépassant pas  $1^\circ\text{C}$ ) alors que le débit est assez élevé (environ  $1,80\text{g}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Ceci peut se traduire par le fait que l'on soit en régime dit adiabatique ( $Ca < 10^{-2}$ ) et donc la chaleur n'a pas le temps de se propager dans l'acier et s'accumule dans le polymère.

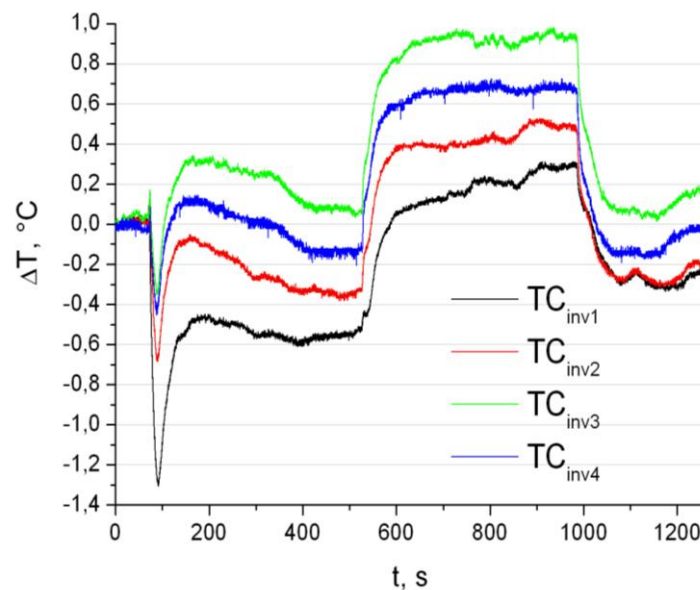


Figure A.III.7 : Evolution des écarts relatifs de température des  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$

#### Conclusion :

Le but de cet essai est de montrer l'influence de l'amplitude de la dissipation visqueuse et de la température d'entrée du polymère dans le canal sur les échanges thermiques avec l'acier. On retiendra que plus la température du polymère entrant dans la buse est froide par rapport à cette dernière, plus la chute des températures de mesure dans l'acier sera logiquement importante et moins l'échauffement interne du polymère sera perceptible au niveau de la paroi. Evidemment, si l'on est à débit suffisamment élevé, la dissipation visqueuse peut engendrer des échauffements supérieurs à la température de l'acier. De plus, le premier thermocouple  $TC_1^{inv}$  est le plus sensible à la température du polymère entrant car c'est lui qui observe la plus importante chute de température au début de l'expérience. Une autre remarque qui selon moi a le mérite d'être stipulé est la difficulté de  $TC_1^{inv}$  à se mettre en équilibre thermique par rapport aux autres thermocouples

### Annexe III – Mesures expérimentales

de mesure  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$ . Ceci est peut-être dû au fait que quand on fait fonctionner la vis en continue et, comme on a fait, isoler l'entrée de la buse (au niveau de l'adaptateur juste avant le cylindre instrumenté), alors le polymère s'échauffe continuellement car il n'y a que très peu de pertes thermiques en entrée du canal et que donc le premier thermocouple  $TC_1^{inv}$  est plus sensible à une température de matière qui rentre toujours plus chaude (Figure A.III.6).

#### A.III.2.2.2 Pour le polyéthylène

Dans cette partie, nous montrons les différentes mesures, réalisées avec le polypropylène, dont la thermique et la mécanique du protocole expérimental ont été également explicitées ci-dessus. On visualisera l'évolution de la pression amont  $P_{mat\_amont}$  sur tout le cycle (Figure A.III.8a), sa phase de montée (Figure A.III.8b), les huit mesures de température dans l'acier du cylindre  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  et  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$  (respectivement Figure A.III.9a et b) et la température amont  $T_{mat\_amont}$  en sortie de l'extrudeuse (Figure A.III.10). Ensuite, nous effectuerons quelques remarques dans le but de discuter des mesures obtenues.

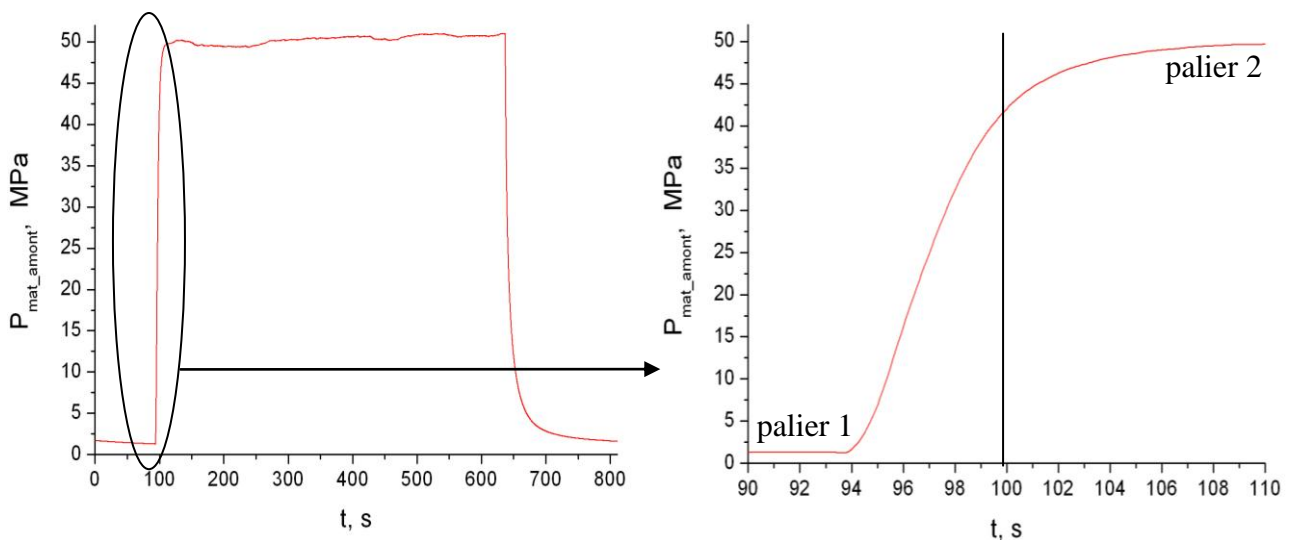


Figure A.III.8 : Evolution temporelle de  $P_{mat\_amont}$  a) sur tout le cycle, b) pendant la montée

### Annexe III – Mesures expérimentales

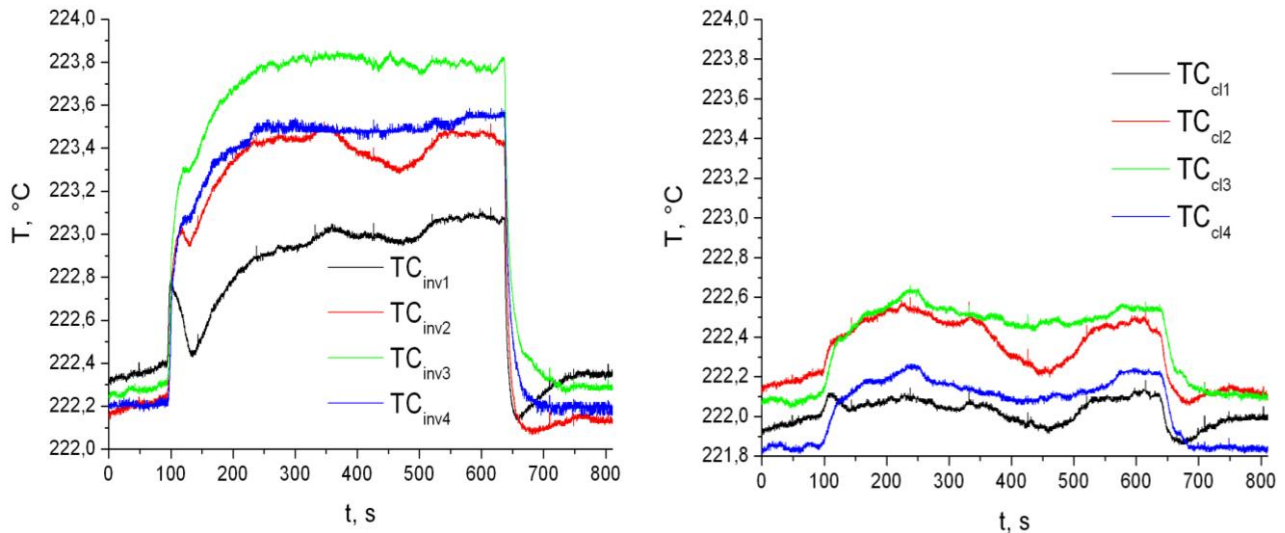


Figure A.III.9 : Evolution temporelle de la température des thermocouples a)  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$ , b)  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$

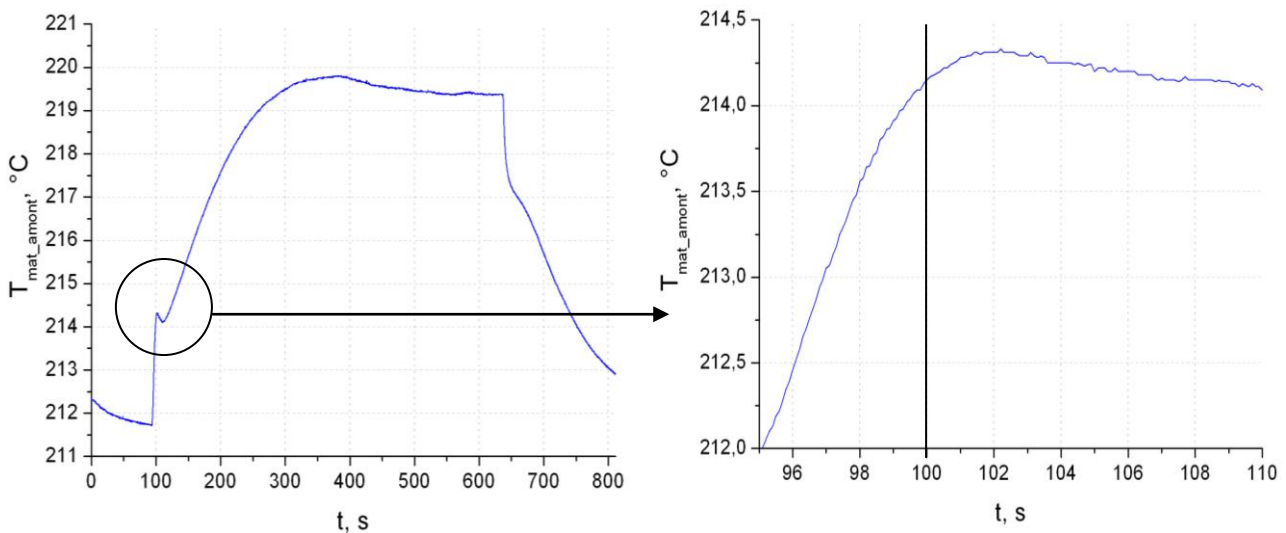


Figure A.III.10 : Evolution de la température du polymère en amont du canal  $T_{mat\_amont}$   
a) sur tout le cycle, b) zoom sur la petite variation

#### Analyse de la mesure de pression :

Contrairement à l'essai explicité précédemment, où l'on passait d'un état initial à débit nul à un état intermédiaire de débit  $0,83g.s^{-1}$  pour enfin parvenir à un état final de débit  $1,80g.s^{-1}$ , celui-ci se passera entre deux états où l'état initial correspond à une vitesse de rotation de la vis de  $20tr.min^{-1}$ , soit un débit massique de  $0,32g.s^{-1}$ . Ce polymère étant beaucoup plus visqueux que le polypropylène utilisé précédemment, les niveaux de pression vont donc être plus élevés. Cependant, comme on peut le voir sur la Figure A.III.8a, la pression amont mesurée à  $20tr.min^{-1}$  reste faible et est d'environ  $1,7MPa$ . Ensuite (Figure A.II.8b), à partir d'environ  $t = 94s$ , on place la consigne de la vitesse de rotation de la vis à  $40tr.min^{-1}$ , correspondant à un débit massique de  $0,62g.s^{-1}$ . On observe alors que la pression augmente beaucoup plus qu'avec

### *Annexe III – Mesures expérimentales*

le polypropylène et atteint environ  $50\text{MPa}$ . Cette montée en pression se fait sur environ  $16\text{s}$  (de  $t = 94\text{s}$  à  $t = 110\text{s}$  et on a la stabilisation de la pression jusqu'à environ  $t = 637\text{s}$ , instant où l'on coupe le moteur de la vis. Pour résumé, on impose donc dans cet essai comme un échelon de pression où on maintient son maximum ( $V_{rot\_vis} = 40\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ ) pendant à peu près  $530\text{s}$ .

#### Analyse de l'état thermique initial :

Au point de vue thermique, la régulation initiale du cylindre instrumenté est légèrement moins bonne que dans l'essai précédent. En effet, on voit Figure A.III.9a que la différence entre les thermocouples de mesure  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  à  $t = 0\text{s}$  est au maximum de  $0,14^\circ\text{C}$  (entre  $TC_1^{inv} = 222,30^\circ\text{C}$  et  $TC_2^{inv} = 222,16^\circ\text{C}$ ), alors qu'elle était, on le rappelle, de  $0,09$ . Cependant, la différence entre les thermocouples des conditions limites  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$  à  $t = 0\text{s}$  est la même que précédemment et est d'environ de  $0,3^\circ\text{C}$  (entre  $TC_2^{cl} = 221,81^\circ\text{C}$  et  $TC_4^{cl} = 221,13^\circ\text{C}$ ). Enfin, la différence de température globale, i-e entre les  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$  et  $TC_{1,\dots,4}^{cl}$ , est d'environ  $0,5^\circ\text{C}$  (entre  $TC_1^{inv}$  et  $TC_4^{cl}$ ), alors qu'elle était d'environ  $0,4^\circ\text{C}$  dans l'essai précédent.

#### Analyse des mesures de températures :

La configuration thermique initiale du cylindre étant précisée, discutons des courbes de température. Tout d'abord, on peut remarquer que, pendant les 100 premières secondes, où la vitesse de rotation de la vis est de  $20\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ , le régime thermique ne s'établit pas complètement, sauf pour  $TC_4^{inv}$  (Figure A.III.9a). En effet, à l'exception de ce thermocouple, les températures des trois premiers, i-e  $TC_1^{inv}$ ,  $TC_2^{inv}$  et  $TC_3^{inv}$ , augmentent continuellement mais très légèrement du fait que l'on soit à faible débit ( $0,32\text{g}\cdot\text{s}^{-1}$ ) et comme il y a des déperditions thermiques au niveau du nez de la buse, la chaleur accumulée dans le polymère se compensent exactement avec les déperditions et la température de  $TC_4^{inv}$  n'évolue pas.

A partir du moment où l'on passe de  $20\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$  à  $40\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ , la pression croit subitement et se stabilise au bout d'environ  $15\text{s}$  (Figure A.III.8b). Cette montée en pression est intéressante car on observe un phénomène thermique dans le polymère lié à ce changement brutal de niveau de pression et à son évolution. En effet, on constate Figure A.III.8b que, vers  $t = 100\text{s}$  la pression change légèrement de pente lors de sa montée et continue de croître, moins rapidement, pendant quelques secondes avant de se stabiliser complètement. On remarque par

### Annexe III – Mesures expérimentales

ailleurs que pendant la montée en pression, il y a une faible chute de la température amont du polymère (Figure A.III.10b) d'environ  $0,2^{\circ}\text{C}$  (on passe de  $214,3^{\circ}\text{C}$  à  $214,1^{\circ}\text{C}$ ). On s'aperçoit également que cette chute de température a lieu à peu près au même instant que le ralentissement de la croissance de la pression (Figure A.III.8b). Cette faible diminution de température est aussi perceptible sur les thermocouples de mesure les plus proches du canal et surtout pour  $TC_1^{inv}$ , qui affiche une baisse de  $0,3^{\circ}\text{C}$  (de  $222,75^{\circ}\text{C}$  à  $222,45^{\circ}\text{C}$ ) et aussi légèrement pour  $TC_2^{inv}$  qui lui ne chute que d'à peine  $0,1^{\circ}\text{C}$  (Figure A.III.9a). Les autres thermocouples, étant moins sensible à la thermique du polymère en entrée de canal, compensent cette chute avec la dissipation visqueuse. On constate donc bien que la pression amont (donc le débit) a une influence sur la température d'entrée du polymère dans la buse et que cette dernière influe sur la thermique de l'acier. Il est à noter aussi que cette chute de température qui, dans le polymère et dans l'acier, débute autour de  $t = 100\text{s}$ , se termine vers  $t = 110\text{s}$  dans le polymère et  $t = 130\text{s}$  dans l'acier. L'inertie thermique est donc plus grande dans l'acier. De même, alors que la pression se stabilise vers  $t = 110\text{s}$  et reste ensuite très proche de  $50\text{MPa}$ , la température amont du polymère continue de croître jusqu'à environ  $t = 400\text{s}$  et celle de l'acier jusqu'à environ  $t = 250\text{s}$ . Ensuite, la progression s'arrête et l'on peut même observer une faible chute des températures aussi bien dans le polymère que dans l'acier.

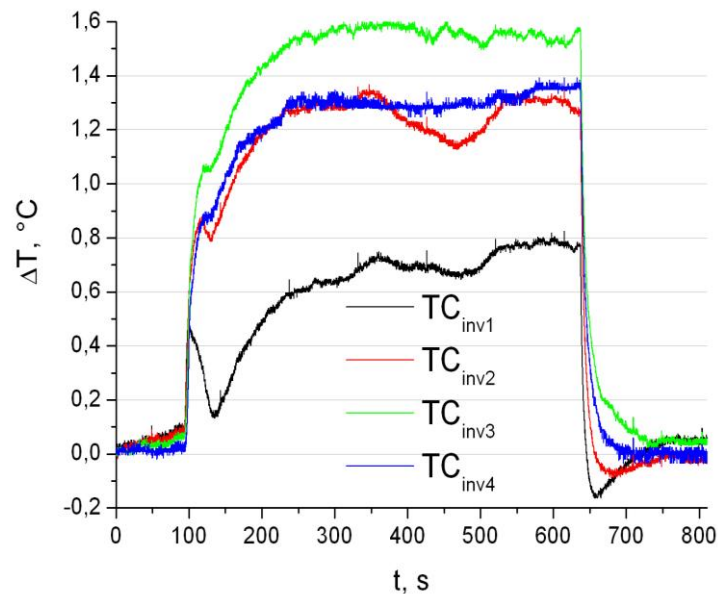


Figure A.III.11 : Evolution des écarts relatifs de température des  $TC_{1,\dots,4}^{inv}$

Enfin, on peut noter que la mesure de température du polymère  $T_{mat\_amont}$  est d'environ  $219,8^{\circ}\text{C}$  au maximum (A.III.10a), soit une augmentation de la température d'environ  $7,5^{\circ}\text{C}$



### *Annexe III – Mesures expérimentales*

dans le polymère. Les températures mesurées par  $TC_1^{inv}$ ,  $TC_2^{inv}$ ,  $TC_3^{inv}$  et  $TC_4^{inv}$  sont respectivement de  $223,12^{\circ}C$ ,  $223,52^{\circ}C$ ,  $223,85^{\circ}C$  et  $223,59^{\circ}C$  au maximum (A.III.9a), soit une augmentation de  $0,82^{\circ}C$  pour  $TC_1^{inv}$ , de  $1,37^{\circ}C$  pour  $TC_2^{inv}$ , de  $1,6^{\circ}C$  pour  $TC_3^{inv}$  et de  $1,4^{\circ}C$  pour  $TC_4^{inv}$  (Figure A.III.11). A partir de ces valeurs, on remarque que l'augmentation de la température dans le polymère est plus faible que précédemment, où l'on a utilisé du polypropylène. Ceci est notamment dû au fait que nous avons des débits beaucoup plus faibles dans cet essai et que donc la matière fondue a le temps d'échanger sa chaleur avec l'acier. Les échauffements dans l'acier sont donc plus importants et on constate que plus le polymère avance dans le canal, plus l'échauffement est important, excepté encore pour le dernier thermocouple  $TC_4^{inv}$  car les déperditions thermiques du nez de la buse, malgré l'effet du collier chauffant, ont bien lieu.

## Annexe IV : Calcul des équations du gradient conjugué

### A.IV.1 Problème de sensibilité

#### A.IV.1.1 Introduction

Dans cette partie, vont être exprimées les équations de sensibilité, relatives à l'équation de la chaleur, qui serviront par la suite à la résolution du problème inverse. Pour cela, on définit  $\bar{T}_0(t)$  comme étant un vecteur de  $N$  paramètres et on notera  $\bar{T}_{0,k}$  la  $k$ ème composante associé au temps  $t_k$  où  $k \in [1, N]$ . Par conséquent, le vecteur  $\bar{T}_0$  est de la forme  $(\bar{T}_{0,1}, \bar{T}_{0,2}, \dots, \bar{T}_{0,k}, \dots, \bar{T}_{0,N})$ .

On notera par la suite  $\bar{T}_0^k$ , le vecteur température d'entrée où l'on a appliqué une variation  $\delta\bar{T}_0^k$  sur la  $k$ ème composante de la fonction  $\bar{T}_0$  (qui elle est sans variation). Soit le vecteur  $\bar{T}_0^k$  où la variation a été imposé s'exprime de la façon suivante  $(\bar{T}_{0,1}, \dots, \bar{T}_{0,k} + \delta\bar{T}_0^k, \dots, \bar{T}_{0,N})$ . Ensuite, on définira donc le champ de température, solution du problème direct,  $T^k(r, z, t, \bar{T}_0^k + \delta\bar{T}_0^k)$  dans toute la buse comme étant le champ relatif à une variation  $\delta\bar{T}_0^k$  du paramètre  $\bar{T}_0^k$ .

On peut alors déterminer la variation du champ de température  $T$  dans toute la buse par rapport au paramètre  $\bar{T}_0$ . Soit  $\delta\bar{T}_0$  une variation de  $\bar{T}_0$ , alors la variation de température résultante  $\delta T$  est la G-différentielle de  $T(\bar{T}_0)$ . Autrement dit,  $T$  admet une dérivée directionnelle (ou différentielle au sens de Gateaux) en  $\bar{T}_0$  dans la direction  $\delta\bar{T}_0$ , si :

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_0} \delta\bar{T}_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T(r, z, t, \bar{T}_0 + \varepsilon \delta\bar{T}_0) - T(r, z, t, \bar{T}_0)}{\varepsilon} \quad (\text{A.IV.1})$$

On pose afin d'alléger les notations  $T^+ = T(r, z, t, \bar{T}_0 + \varepsilon \delta\bar{T}_0)$  et  $T = T(r, z, t, \bar{T}_0)$ . On peut donc réécrire le champ de sensibilité sous la forme :

$$\delta T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T^+ - T}{\varepsilon} \quad (\text{A.IV.2})$$

On rappelle notamment que si  $f$  est une fonction dérivable et dépendante de la température, on peut écrire :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(T^+) - f(T)}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial \bar{T}_0} \delta \bar{T}_0 = \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_0} \delta \bar{T}_0 = \frac{\partial f}{\partial T} \delta T \quad (\text{A.IV.3})$$

### A.IV.1.2 Equations du problème direct

Les équations (A.IV.4) à (A.IV.12) traduisent le problème direct de thermique pure, c'est-à-dire sans couplage thermomécanique, utilisé dans notre étude visant à estimer la condition d'entrée en température du polymère  $\bar{T}_0$ .

$$A_f(T) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \nabla (\lambda_f(T) \vec{\nabla} T) + \Phi_{\Omega_0}(T) \quad \text{dans } \Omega_0 \times I \quad (\text{A.IV.4})$$

$$A_{ac}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (\lambda_{ac}(T) \vec{\nabla} T) \quad \text{dans } \Omega_1 \times I \quad (\text{A.IV.5})$$

$$\text{avec } A_f(T) = \rho_f(T) \times Cp_f(T) \text{ et } A_{ac}(T) = \rho_{ac}(T) \times Cp_{ac}(T)$$

$$\vec{n}_1 \cdot (A_f(T) \vec{\nabla} T + \lambda_f(T) \vec{\nabla} T) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times I \quad (\text{A.IV.6})$$

$$T = \bar{T}_0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times I \quad (\text{A.IV.7})$$

$$\vec{n}_3 \cdot (\lambda_f(T) \vec{\nabla} T) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times I \quad (\text{A.IV.8})$$

$$T = T_{\Gamma_5} \quad \text{sur } \Gamma_5 \times I \quad (\text{A.IV.9})$$

$$T = T_{\Gamma_6} \quad \text{sur } \Gamma_6 \times I \quad (\text{A.IV.10})$$

$$T = T_{\Gamma_7} \quad \text{sur } \Gamma_7 \times I \quad (\text{A.IV.11})$$

$$T = T_i \quad \text{dans } \Omega_0 \times \Omega_1 \text{ à } t = 0 \quad (\text{A.IV.12})$$

### A.IV.1.3 Equations de sensibilité

Les équations de sensibilité sont déterminées en appliquant une petite variation  $\varepsilon \delta \bar{T}_0$  sur la température d'entrée  $\bar{T}_0$  seulement dans l'équation de la chaleur dans un premier temps. En effet, on considère tout d'abord que  $\dot{\gamma}$  ne dépend pas de  $T$ .

Afin de parvenir à écrire les équations de sensibilité du système considéré, on écrit tout d'abord les équations du problème direct d'une part pour  $T^+$  et d'autre part pour  $T$  puis, on effectue la soustraction des deux systèmes d'équations obtenues. Le champ de température solution  $T^+$ , correspondant à la variation  $\bar{T}_0 + \varepsilon \delta \bar{T}_0$ , vérifie le système suivant :

$$A_f(T^+) \left( \frac{\partial T^+}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T^+ \right) = \nabla (\lambda_f(T^+) \vec{\nabla} T^+) + \Phi_{\Omega_0}(T^+) \quad \text{dans } \Omega_0 \times I \quad (\text{A.IV.13})$$

Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

$$A_{ac}(T^+) \frac{\partial T^+}{\partial t} = \nabla(\lambda_{ac}(T^+) \vec{\nabla} T^+) \quad \text{dans } \Omega_1 \times I \quad (\text{A.IV.14})$$

$$\text{avec } A_f(T^+) = \rho_f(T^+) \times Cp_f(T^+) \text{ et } A_{ac}(T^+) = \rho_{ac}(T^+) \times Cp_{ac}(T^+)$$

$$\vec{n}_1 \cdot (A_f(T^+) \vec{\nabla} T^+ + \lambda_f(T^+) \vec{\nabla} T^+) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times I \quad (\text{A.IV.15})$$

$$T^+ = \bar{T}_0 + \varepsilon \delta \bar{T}_0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times I \quad (\text{A.IV.16})$$

$$\vec{n}_3 \cdot (\lambda_f(T^+) \vec{\nabla} T^+) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times I \quad (\text{A.IV.17})$$

$$T^+ = T_{\Gamma_5} + \varepsilon \delta T_{\Gamma_5} \quad \text{sur } \Gamma_5 \times I \quad (\text{A.IV.18})$$

$$T^+ = T_{\Gamma_6} + \varepsilon \delta T_{\Gamma_6} \quad \text{sur } \Gamma_6 \times I \quad (\text{A.IV.19})$$

$$T^+ = T_{\Gamma_7} + \varepsilon \delta T_{\Gamma_7} \quad \text{sur } \Gamma_7 \times I \quad (\text{A.IV.20})$$

$$T^+ = T_i + \varepsilon \delta T_i \quad \text{dans } \Omega_0 \times \Omega_1 \text{ à } t = 0 \quad (\text{A.IV.21})$$

Ensuite, afin de déterminer le système d'équations que vérifie  $\delta T$  défini par (A.IV.2), on soustrait les équations du problème direct (A.IV.4)-(A.IV.12) à (A.IV.13)-(A.IV.21). Il vient alors :

$$\begin{aligned} & A_f(T^+) \left( \frac{\partial T^+}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T^+ \right) - A_f(T) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) \\ &= \nabla(\lambda_f(T^+) \vec{\nabla} T^+) - \nabla(\lambda_f(T) \vec{\nabla} T) + \Phi_{\Omega_0}(T^+) - \Phi_{\Omega_0}(T) \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega_0 \times I \quad (\text{A.IV.22})$$

$$\begin{aligned} & A_{ac}(T^+) \frac{\partial T^+}{\partial t} - A_{ac}(T) \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \nabla(\lambda_{ac}(T^+) \vec{\nabla} T^+) - \nabla(\lambda_{ac}(T) \vec{\nabla} T) \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega_1 \times I \quad (\text{A.IV.23})$$

$$(\lambda_f(T^+) \vec{\nabla} T^+ - \lambda_f(T) \vec{\nabla} T) \vec{n}_1 + (A_f(T^+) T^+ - A_f(T) T) \vec{V} \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times I \quad (\text{A.IV.24})$$

$$T^+ - T = \bar{T}_0 + \varepsilon \delta \bar{T}_0 - \bar{T}_0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times I \quad (\text{A.IV.25})$$

$$(\lambda_f(T^+) \vec{\nabla} T^+ - \lambda_f(T) \vec{\nabla} T) \vec{n}_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times I \quad (\text{A.IV.26})$$

$$T^+ - T = T_{\Gamma_5} + \varepsilon \delta T_{\Gamma_5} - T_{\Gamma_5} \quad \text{sur } \Gamma_5 \times I \quad (\text{A.IV.27})$$

$$T^+ - T = T_{\Gamma_6} + \varepsilon \delta T_{\Gamma_6} - T_{\Gamma_6} \quad \text{sur } \Gamma_6 \times I \quad (\text{A.IV.28})$$

$$T^+ - T = T_{\Gamma_7} + \varepsilon \delta T_{\Gamma_7} - T_{\Gamma_7} \quad \text{sur } \Gamma_7 \times I \quad (\text{A.IV.29})$$

$$T^+ - T = T_i + \varepsilon \delta T_i - T_i \quad \text{dans } \Omega_0 \times \Omega_1 \text{ à } t = 0 \quad (\text{A.IV.30})$$

Puis, afin de passer à la différentielle au sens de Gateaux, on divise tout par  $\varepsilon$  et on passe à la limite en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. Avant de donner le système aux sensibilités résultant, on va tout d'abord détailler le passage à la limite de quelques termes :

*Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué*

$$I_1 = A(T^+) \frac{\partial T^+}{\partial t} - A(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.IV.31})$$

$$I_2 = A(T^+) \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T^+ - A(T) \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \quad (\text{A.IV.32})$$

$$I_3 = \nabla(\lambda(T^+) \vec{\nabla} T^+) - \nabla(\lambda(T) \vec{\nabla} T) \quad (\text{A.IV.33})$$

$$I_4 = \Phi_{\Omega_0}(T^+) - \Phi_{\Omega_0}(T) \quad (\text{A.IV.34})$$

- Pour le calcul de  $I_1$ , on ajoute et on retranche  $A(T^+) \frac{\partial T}{\partial t}$  à cette expression et on obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= A(T^+) \frac{\partial T^+}{\partial t} - A(T) \frac{\partial T}{\partial t} + A(T^+) \frac{\partial T}{\partial t} - A(T^+) \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= A(T^+) \left( \frac{\partial T^+}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \frac{\partial T}{\partial t} (A(T^+) - A(T)) \end{aligned} \quad (\text{A.IV.35})$$

d'où, en divisant par  $\varepsilon$  et en passant à la limite, on obtient compte tenu de l'expression de la fonction sensibilité (A.IV.2) et de la formule (A.IV.3) :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 &= A(T) \left( \frac{\partial \delta T}{\partial t} \right) + \frac{\partial T}{\partial t} \left( \frac{\partial A(T)}{\partial T} \delta T \right) = A(T) \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \frac{\partial A(T)}{\partial t} \delta T \\ &= \frac{\partial (A(T) \delta T)}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.IV.36})$$

- Pour le calcul de  $I_2$ , on procède de même que précédemment en ajoutant et en retranchant  $A(T^+) \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T$  à cette expression. On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_2 &= A(T^+) \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T^+ - A(T) \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T + A(T^+) \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T - A(T^+) \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \\ &= A(T^+) (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T^+ - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T) + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T (A(T^+) - A(T)) \end{aligned} \quad (\text{A.IV.37})$$

soit, en passant à la limite de la différentiel de Gateaux :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 &= A(T) (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \delta T) + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \left( \frac{\partial A(T)}{\partial T} \delta T \right) \\ &= \vec{V} \cdot \left( A(T) \vec{\nabla} \delta T + \frac{\partial A(T)}{\partial T} \vec{\nabla} T \delta T \right) \\ &= \vec{V} \cdot (A(T) \vec{\nabla} \delta T + \vec{\nabla} A(T) \delta T) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 &= \vec{V} \cdot \vec{\nabla} (A(T) \delta T) \end{aligned} \quad (\text{A.IV.38})$$

- Pour calculer  $I_3$ , on procède de même manière en ajoutant et en retranchant cette fois-ci  $\nabla(\lambda(T^+) \vec{\nabla} T)$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_3 &= \nabla(\lambda(T^+) \vec{\nabla} T^+) - \nabla(\lambda(T) \vec{\nabla} T) + \nabla(\lambda(T^+) \vec{\nabla} T) - \nabla(\lambda(T^+) \vec{\nabla} T) \\ &= \nabla(\lambda(T^+) (\vec{\nabla} T^+ - \vec{\nabla} T)) + \nabla((\lambda(T^+) - \lambda(T)) \vec{\nabla} T) \end{aligned} \quad (\text{A.IV.39})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_3 &= \nabla(\lambda(T) \vec{\nabla} \delta T) + \nabla\left(\left(\frac{\partial \lambda(T)}{\partial T} \delta T\right) \vec{\nabla} T\right) \\ &= \nabla(\lambda(T) \vec{\nabla} \delta T) + \nabla\left(\left(\frac{\partial \lambda(T)}{\partial T} \vec{\nabla} T\right) \delta T\right) \\ &= \nabla(\lambda(T) \vec{\nabla} \delta T) + \nabla(\vec{\nabla} \lambda(T) \delta T) \\ &= \nabla(\vec{\nabla}(\lambda(T) \delta T)) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_3 &= \Delta(\lambda(T) \delta T) \end{aligned} \quad (\text{A.IV.40})$$

- Pour  $I_4$ , on obtient directement, l'expression suivante :

$$\text{soit } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_4 = \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}(T)}{\partial T} \delta T \quad (\text{A.IV.41})$$

Par conséquent, en différenciant au sens de Gateaux les termes du système d'équations (A.IV.22) à (A.IV.30) en utilisant les résultats (A.IV.36), (A.IV.38), (A.IV.40) et (A.IV.41), on peut alors écrire le système de sensibilité suivant :

$$\frac{\partial(A_f(T) \delta T)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(A_f(T) \delta T) = \Delta(\lambda_f(T) \delta T) + \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}(T)}{\partial T} \delta T \quad \text{dans } \Omega_0 \times I \quad (\text{A.IV.42})$$

$$\frac{\partial(A_{ac}(T) \delta T)}{\partial t} = \Delta(\lambda_{ac}(T) \delta T) \quad \text{dans } \Omega_1 \times I \quad (\text{A.IV.43})$$

$$\vec{\nabla}(\lambda_f(T) \delta T) \vec{n}_1 + \left( A_f(T) + \frac{\partial A_f(T)}{\partial T} T \right) \delta T \vec{V} \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times I \quad (\text{A.IV.44})$$

$$\delta T = \delta \bar{T}_0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times I \quad (\text{A.IV.45})$$

$$\vec{\nabla}(\lambda_f(T) \delta T) \vec{n}_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times I \quad (\text{A.IV.46})$$

$$\delta T = \delta T_{\Gamma_5} \quad \text{sur } \Gamma_5 \times I \quad (\text{A.IV.47})$$

$$\delta T = \delta T_{\Gamma_6} \quad \text{sur } \Gamma_6 \times I \quad (\text{A.IV.48})$$

$$\delta T = \delta T_{\Gamma_7} \quad \text{sur } \Gamma_7 \times I \quad (\text{A.IV.49})$$

$$\delta T = \delta T_i \quad \text{dans } \Omega_0 \times \Omega_1 \text{ à } t = 0 \quad (\text{A.IV.50})$$

### A.IV.1.4 Expression de la profondeur de descente $\gamma$

La détermination de la profondeur de descente  $\gamma$  est indispensable dans l'algorithme du gradient conjugué car il sert à minimiser la fonction  $g(\gamma) = J(\bar{T}_0 - \gamma d)$ . On rappelle que cette fonctionnelle est explicitée au sens des moindres carrés et que  $d$  symbolise la direction de descente. Dans notre cas, on prendra  $d = \delta\bar{T}_0$ . Il vient alors que  $g(\gamma) = J(\bar{T}_0 - \gamma\delta\bar{T}_0)$ . En première approximation, nous allons détailler le cas où le problème direct est linéaire. En d'autres termes, cela signifie que  $T$  dépend linéairement de  $\bar{T}_0$ .

On sait que la fonctionnelle suivant le critère des moindres carrés s'écrit comme suit :

$$J(\bar{T}_0 - \gamma\delta\bar{T}_0) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(r_m, z_m, t; \bar{T}_0 - \gamma\delta\bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t) \right)^2 dt \quad (\text{A.IV.51})$$

Comme  $T$  dépend linéairement de  $\bar{T}_0$ , on peut donc écrire le développement limité de  $T$  en  $\bar{T}_0$  au premier ordre :

$$T(r_m, z_m, t; \bar{T}_0 - \gamma\delta\bar{T}_0) = T(r_m, z_m, t; \bar{T}_0) - \gamma\delta\bar{T}_0 \frac{\partial T(r_m, z_m, t; \bar{T}_0)}{\partial \bar{T}_0} \quad (\text{A.IV.52})$$

Or, on rappelle que d'après (A.IV.1), on a :

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_0} \delta\bar{T}_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T(r, z, t; \bar{T}_0 + \varepsilon\delta\bar{T}_0) - T(r, z, t; \bar{T}_0)}{\varepsilon}$$

Donc en injectant (A.IV.1) dans (A.IV.52), il vient de suite que :

$$T(r_m, z_m, t; \bar{T}_0 - \gamma\delta\bar{T}_0) = T(r_m, z_m, t; \bar{T}_0) - \gamma\delta T(r_m, z_m, t; \bar{T}_0) \quad (\text{A.IV.53})$$

On remplace alors  $T(r_m, z_m, t; \bar{T}_0 - \gamma\delta\bar{T}_0)$  par l'expression (A.IV.53) dans l'équation (A.IV.51) et on obtient :

$$J(\bar{T}_0 - \gamma\delta\bar{T}_0) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t) - \gamma\delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) \right)^2 dt \quad (\text{A.IV.54})$$

On développe le carré, on a alors :

$$\begin{aligned} J(\bar{T}_0 - \gamma\delta\bar{T}_0) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t) \right)^2 dt \\ &\quad - \gamma \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t) \right) \delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) dt \end{aligned} \quad (\text{A.IV.55})$$

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

$$+ \frac{\gamma^2}{2} \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} (\delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0))^2 dt$$

On remarque que l'on a affaire à une forme quadratique en  $\gamma$ . Donc en cherchant à minimiser la fonction  $g(\gamma) = J(\bar{T}_0 - \gamma \delta \bar{T}_0)$  définie ci-dessus, on obtient :

$$\frac{dg(\gamma)}{d\gamma} = \frac{dJ(\bar{T}_0 - \gamma \delta \bar{T}_0)}{d\gamma} = 0 \quad (\text{A.IV.56})$$

$$\Leftrightarrow - \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} (T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t)) \delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) dt + \gamma \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} (\delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0))^2 dt = 0 \quad (\text{A.IV.57})$$

$$\Leftrightarrow \gamma \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} (\delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0))^2 dt = \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} (T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t)) \delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) dt$$

Par conséquent, la profondeur de descente  $\gamma$ , en considérant  $T$  comme dépendant linéairement de  $\bar{T}_0$ , s'exprime analytiquement de la façon suivante :

$$\gamma = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} (T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t)) \delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0) dt}{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} (\delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0))^2 dt} \quad (\text{A.IV.58})$$

Nous pouvons remarquer que la profondeur de descente  $\gamma$  est un scalaire et qu'elle est liée à  $\delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0)$  qui est la solution du problème de sensibilité au niveau des thermocouples pour une perturbation (ou direction de descente)  $d = \delta \bar{T}_0$ .

En outre, quand les paramètres thermophysiques, tels que la capacité calorifique ou la conductivité thermique, dépendent de la température, alors le problème direct est non linéaire (ce qui est notre cas) et la fonctionnelle  $J(\bar{T}_0)$  est du coup non quadratique. Cependant, l'approximation consistant à considérer le problème comme linéaire afin de déterminer la profondeur de descente reste une bonne hypothèse dans les cas non linéaires pour les problèmes inverses de conduction de la chaleur.



## A.IV.2 Problème de l'état adjoint

L'objectif principal de ce paragraphe est de déterminer l'expression du gradient de  $J(\bar{T}_0)$ , ceci constituera l'étape phare de notre algorithme de résolution. La réussite de notre travail dépend très largement de ce calcul.

Ce calcul mathématique permet de déterminer le paramètre recherché, ici  $\bar{T}_0$ , en minimisant une fonctionnelle qui sera soumise à une contrainte liée à notre problème physique. Cela s'appelle l'optimisation d'une fonctionnelle sous contrainte.

### A.IV.2.1 Définition du Lagrangien

Pour faire, nous allons tout d'abord construire un Lagrangien  $L$  associé au problème d'optimisation. On définit donc  $L(T, \bar{T}_0, \psi)$  ce Lagrangien comme étant la somme de la fonctionnelle  $J(T, \bar{T}_0)$  et de la contrainte liée à l'équation de la chaleur représentative de notre modèle.

$$L(T, \bar{T}_0, \psi) = J(T, \bar{T}_0) + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left( A(T) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) - \nabla \cdot (\lambda(T) \vec{\nabla} T) - \Phi_{\Omega} \right) \psi d\Omega dt \quad (\text{A.IV.59})$$

où  $\psi(r, z, t)$  est une fonction définie sur  $\Omega \times I$  avec  $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1$  et est appelée un multiplicateur de Lagrange ou variable adjointe.

Lorsque  $T$  est solution de l'équation (A.IV.4), alors  $T = T(\bar{T}_0)$  et il vient de suite que :

$$L(T(\bar{T}_0), \bar{T}_0, \psi) = J(T(\bar{T}_0), \bar{T}_0) \quad (\text{A.IV.60})$$

$$\text{d'où} \quad \delta L(T, \bar{T}_0, \psi) = \delta J(\bar{T}_0) \quad (\text{A.IV.61})$$

L'idée est alors de fixer la variable adjointe  $\psi$  pour que  $\delta L(T, \bar{T}_0, \psi)$  puisse se mettre sous la forme suivante afin de déterminer le gradient du critère :

$$\delta L(T, \bar{T}_0, \psi) = \langle J'(\bar{T}_0), \delta \bar{T}_0 \rangle \quad (\text{A.IV.62})$$

De là, nous pouvons exprimer la forme différentielle de  $L$ , telle que :

$$\delta L(T, \bar{T}_0, \psi) = \frac{\partial L}{\partial T} \delta T + \frac{\partial L}{\partial \bar{T}_0} \delta \bar{T}_0 \quad (\text{A.IV.63})$$

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

$$\text{car comme } \psi \text{ est fixée, } \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi = 0 \quad (\text{A.IV.64})$$

De plus, le choix du multiplicateur de Lagrange  $\psi$  est tel que l'équation suivante (appelée équation adjointe) soit satisfaite :

$$\forall \delta T, \frac{\partial L}{\partial T} \delta T = 0 \quad (\text{A.IV.65})$$

### A.IV.2.2 Différentielle du Lagrangien

Maintenant, afin de déterminer le système d'équation relatif à l'état adjoint, on réécrit la différentielle du Lagrangien sous la forme d'une somme de limite où l'on applique une variation de température  $\varepsilon \delta T$  et une variation  $\varepsilon \delta \bar{T}_0$  de la fonction recherchée  $\bar{T}_0$ .

$$\begin{aligned} \delta L(T, \bar{T}_0, \psi) &= \frac{\partial L}{\partial T} \delta T + \frac{\partial L}{\partial \bar{T}_0} \delta \bar{T}_0 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{L(T + \varepsilon \delta T, \bar{T}_0, \psi) - L(T, \bar{T}_0, \psi)}{\varepsilon} + \frac{L(T, \bar{T}_0 + \varepsilon \delta \bar{T}_0, \psi) - L(T, \bar{T}_0, \psi)}{\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.IV.66})$$

En appliquant cette définition de la différentielle du Lagrangien à l'équation (A.IV.59), on obtient :

$$\delta L(T, \bar{T}_0, \psi) = \delta J(T, \bar{T}_0) + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(A(T)\delta T)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(A(T)\delta T) - \Delta(\lambda(T)\delta T) - \frac{\partial \Phi_{\Omega}(T)}{\partial T} \delta T \right) \psi d\Omega dt \quad (\text{A.IV.67})$$

- explicitons  $\delta J(\bar{T}_0)$  :

On rappelle que la fonctionnelle  $J(\bar{T}_0)$  s'écrit au sens des moindres carrés de la façon suivante avec  $N_c$  le nombre de thermocouples :

$$\begin{aligned} J(\bar{T}_0) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(r_m, z_m, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t) \right)^2 dt \\ J(\bar{T}_0) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(r, z, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t) \right)^2 \delta(r - r_m) \delta(z - z_m) d\Omega dt \end{aligned} \quad (\text{A.IV.68})$$

$$\text{d'où } \delta J(\bar{T}_0) = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(r, z, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t) \right) \delta(r - r_m) \delta(z - z_m) \delta T d\Omega dt \quad (\text{A.IV.69})$$

Par conséquent, en injectant (A.IV.69) dans (A.IV.67), l'expression analytique de la différentielle du Lagrangien devient :

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

$$\begin{aligned} \delta L(T, \bar{T}_0, \psi) = & \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(r, z, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t) \right) \delta(r - r_m) \delta(z - z_m) \delta T d\Omega dt \\ & + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(A(T)\delta T)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(A(T)\delta T) - \Delta(\lambda(T)\delta T) - \frac{\partial\Phi_{\Omega}(T)}{\partial T} \delta T \right) \psi d\Omega dt \end{aligned} \quad (\text{A.IV.70})$$

### A.IV.2.3 Equations de l'état adjoint

Dans le but de déterminer les équations du problème adjoint, on va détailler les intégrations des termes de la différentielle du Lagrangien. Pour cela, on notera tout d'abord, afin d'alléger les notations,  $E(r, z, t; \bar{T}_0)$  l'écart entre température calculée et température mesurée au niveau des capteurs tel que :

$$E(r, z, t; \bar{T}_0) = \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(r, z, t; \bar{T}_0) - \tilde{T}_m(t) \right) \delta(r - r_m) \delta(z - z_m) \quad (\text{A.IV.71})$$

Ensuite, on le rappelle, il faut mettre cette différentielle sous la forme (A.IV.65) afin de faire ressortir les équations adjointes :

$$\forall \delta T, \frac{\partial L}{\partial T} \delta T = 0$$

On réécrit alors (A.IV.70) en y injectant l'expression (A.IV.71) et on obtient ainsi :

$$\delta L(T, \bar{T}_0, \psi) = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left( E(r, z, t; \bar{T}_0) \delta T + \left( \frac{\partial(A(T)\delta T)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(A(T)\delta T) \right) \psi - \Delta(\lambda(T)\delta T) \psi - \frac{\partial\Phi_{\Omega}(T)}{\partial T} \psi \delta T \right) d\Omega dt \quad (\text{A.IV.72})$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer l'intégration des deux termes du milieu étant donné que les termes des extrémités se présentent déjà sous une forme intéressante. On détaillera alors l'intégration de ces deux termes :

$$I_1 = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(A(T)\delta T)}{\partial t} \psi + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(A(T)\delta T) \psi \right) d\Omega dt \quad (\text{A.IV.73})$$

$$\text{et } I_2 = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \Delta(\lambda(T)\delta T) \psi d\Omega dt \quad (\text{A.IV.74})$$

- Calcul de  $I_1$  :

$$I_1 = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \frac{\partial(A(T)\delta T)}{\partial t} \psi dt d\Omega + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(A(T)\delta T) \psi dt d\Omega = I_1' + I_1'' \quad (\text{A.IV.75})$$

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

On intègre par partie  $I_1'$  et  $I_1''$  et on obtient :

$$\begin{aligned}
 I_1' &= \int_{\Omega} \int_0^{t_f} \psi \frac{\partial(A(T)\delta T)}{\partial t} dt d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} [\psi A(T)\delta T]_{t=0}^{t_f} d\Omega - \int_{\Omega} \int_0^{t_f} \frac{\partial \psi}{\partial t} A(T)\delta T dt d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} ([A(T)\psi\delta T]^{t_f} - [A(T)\psi\delta T]^{t=0}) d\Omega - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} A(T) \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta T dt d\Omega
 \end{aligned} \tag{A.IV.76}$$

$$\begin{aligned}
 I_1'' &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (A(T)\delta T) d\Omega dt \\
 &= \sum_{i=1}^6 \left( \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_i} A(T) \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{n}_i \delta T d\Gamma dt \right) - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} A(T) (\psi \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi) \delta T d\Omega dt
 \end{aligned} \tag{A.IV.77}$$

Par conséquent, en substituant les expressions (A.IV.76) et (A.IV.77) dans (A.IV.75), l'expression du terme  $I_1$  devient :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 I_1 &= \sum_{i=1}^6 \left( \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_i} A(T) \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{n}_i \delta T d\Gamma dt \right) + \int_{\Omega} ([A(T)\psi\delta T]^{t=t_f} - [A(T)\psi\delta T]^{t=t_0}) d\Omega \\
 &\quad - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} A(T) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) \delta T d\Omega dt
 \end{aligned}
 } \tag{A.IV.78}$$

- Calcul de  $I_2$  :

En intégrant  $I_2$  deux fois par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \Delta(\lambda(T)\delta T) \psi d\Omega dt \\
 &= \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} \vec{\nabla}(\lambda(T)\delta T) \cdot \vec{n}_i \psi d\Gamma dt - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \vec{\nabla}(\lambda(T)\delta T) \vec{\nabla} \psi d\Omega \\
 &= \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} \vec{\nabla}(\lambda(T)\delta T) \cdot \vec{n}_i \psi d\Gamma dt - \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} \lambda(T) \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}_i \delta T d\Gamma dt + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \lambda(T) \Delta \psi \delta T d\Omega dt
 \end{aligned} \tag{A.IV.79}$$

soit

$$\boxed{
 I_2 = \sum_{i=1}^6 \left( \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_i} (\vec{\nabla}(\lambda(T)\delta T) \cdot \vec{n}_i \psi - \lambda(T) \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}_i \delta T) d\Gamma dt \right) + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \lambda(T) \Delta \psi \delta T d\Omega dt
 } \tag{A.IV.80}$$

Enfin, en remplaçant les expressions de  $I_1$  (A.IV.78) et  $I_2$  (A.IV.80) dans l'équation (A.IV.72), on obtient :

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

$$\begin{aligned}
 \delta L(T, \bar{T}_0, \psi) = & \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left( E(r, z, t; \bar{T}_0) - A(T) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) - \lambda(T) \Delta \psi - \frac{\partial \Phi_{\Omega}(T)}{\partial T} \psi \right) \delta T d\Omega dt \\
 & + \sum_{i=1}^6 \left( \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_i} \left( A(T) \psi \vec{V} \cdot \vec{n}_i \delta T + \lambda(T) \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}_i \delta T - \vec{\nabla}(\lambda(T) \delta T) \cdot \vec{n}_i \psi \right) d\Gamma_i dt \right) \\
 & + \int_{\Omega} \left( [A(T) \psi \delta T]^{t=t_f} - [A(T) \psi \delta T]^{t=t_0} \right) d\Omega
 \end{aligned} \tag{A.IV.81}$$

On rappelle que  $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1$  et que dans les deux sous domaines, les paramètres thermophysiques des matériaux et les équations de la chaleur qui régissent les transferts thermiques sont différents :

- dans  $\Omega_0$ , on a  $A(T) = A_f(T)$ ,  $\lambda(T) = \lambda_f(T)$ ,  $\Phi_{\Omega}(T) = \Phi_{\Omega_0}(T)$  et  $\vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}$
- dans  $\Omega_1$ , on a  $A(T) = A_{ac}(T)$ ,  $\lambda(T) = \lambda_{ac}(T)$ ,  $\Phi_{\Omega}(T) = \Phi_{\Omega_1}(T) = 0$  (car pas de dissipation visqueuse dans le métal) et  $\vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (car pas d'écoulement)

Par conséquent, le premier terme de l'expression de la différentielle du Lagrangien (A.IV.81) peut se détailler sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left( E(r, z, t; \bar{T}_0) - A(T) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) - \lambda(T) \Delta \psi - \frac{\partial \Phi_{\Omega}(T)}{\partial T} \psi \right) \delta T d\Omega dt \\
 & = \int_0^{t_f} \int_{\Omega_1} \left( E(r, z, t; \bar{T}_0) - A_{ac}(T) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \lambda_{ac}(T) \Delta \psi \right) \delta T d\Omega dt \\
 & - \int_0^{t_f} \int_{\Omega_0} \left( A_f(T) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) + \lambda_f(T) \Delta \psi + \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}(T)}{\partial T} \psi \right) \delta T d\Omega dt
 \end{aligned} \tag{A.IV.82}$$

On va maintenant détailler le deuxième terme de l'expression (A.IV.81). Par ailleurs, on sait que si  $T$  vérifie les contraintes (A.IV.4) à (A.IV.12) alors,  $\delta T$  vérifie les équations de sensibilité (A.IV.42) à (A.IV.50).

$$\text{Soit } \sum_{i=1}^6 \left( \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_i} \left( A(T) \psi \vec{V} \cdot \vec{n}_i \delta T + \lambda(T) \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}_i \delta T - \vec{\nabla}(\lambda(T) \delta T) \cdot \vec{n}_i \psi \right) d\Gamma_i dt \right)$$

*Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué*

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_1} \left( \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_1} + \left( 2A_f(T) + \frac{\partial A_f(T)}{\partial T} T \right) \psi \vec{V} \cdot \vec{n}_1 \right) \delta T d\Gamma_1 dt \\
&+ \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_2} \left( A_f(T) \psi \vec{V} \cdot \vec{n}_2 \delta \bar{T}_0 + \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_2} \delta \bar{T}_0 - \frac{\partial (\lambda_f(T) \delta \bar{T}_0)}{\partial \vec{n}_2} \psi \right) d\Gamma_2 dt \\
&+ \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_3} \left( A_f(T) \psi \vec{V} \cdot \vec{n}_3 + \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_3} \right) \delta T d\Gamma_3 dt \\
&+ \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_5} \left( \lambda_{ac}(T) \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_5} \delta T_{\Gamma_5} - \frac{\partial (\lambda_f(T) \delta T_{\Gamma_5})}{\partial \vec{n}_5} \psi \right) d\Gamma_5 dt \\
&+ \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_6} \left( \lambda_{ac}(T) \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_6} \delta T_{\Gamma_6} - \frac{\partial (\lambda_f(T) \delta T_{\Gamma_6})}{\partial \vec{n}_6} \psi \right) d\Gamma_6 dt \\
&+ \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_7} \left( \lambda_{ac}(T) \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_7} \delta T_{\Gamma_7} - \frac{\partial (\lambda_f(T) \delta T_{\Gamma_7})}{\partial \vec{n}_7} \psi \right) d\Gamma_7 dt
\end{aligned} \tag{A.IV.83}$$

avec  $\vec{V} \cdot \vec{n}_1 = V \vec{z} \cdot (-\vec{r}) = 0$ ,  $\vec{V} \cdot \vec{n}_2 = V \vec{z} \cdot (-\vec{z}) = -V$  et  $\vec{V} \cdot \vec{n}_3 = V \vec{z} \cdot \vec{z} = V$  et comme il n'y a pas d'écoulement dans  $\Omega_1$ ,  $\vec{V} \cdot \vec{n}_5 = \vec{V} \cdot \vec{n}_6 = \vec{V} \cdot \vec{n}_7 = 0$ .

Par conséquent, en injectant (A.IV.82) et (A.IV.83) dans l'équation (A.IV.81), la différentielle du Lagrangien s'exprime de la façon suivante :

Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

$$\begin{aligned}
\delta L(T, \bar{T}_0, \psi) = & \int_0^{t_f} \int_{\Omega_1} \left( E(r, z, t; \bar{T}_0) - A_{ac}(T) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \lambda_{ac}(T) \Delta \psi \right) \delta T d\Omega dt \\
& - \int_0^{t_f} \int_{\Omega_0} \left( A_f(T) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) + \lambda_f(T) \Delta \psi + \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}(T)}{\partial T} \psi \right) \delta T d\Omega dt \\
& + \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_1} \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_1} \delta T d\Gamma_1 dt \\
& + \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_2} \left( -A_f(T) \psi \mathcal{N} \delta \bar{T}_0 + \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_2} \delta \bar{T}_0 - \frac{\partial (\lambda_f(T) \delta \bar{T}_0)}{\partial \bar{n}_2} \psi \right) d\Gamma_2 dt \\
& + \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_3} \left( A_f(T) \psi \mathcal{V} + \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_3} \right) \delta T d\Gamma_3 dt \\
& + \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_5} \left( \lambda_{ac}(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_5} \delta T_{\Gamma_5} - \frac{\partial (\lambda_f(T) \delta T_{\Gamma_5})}{\partial \bar{n}_5} \psi \right) d\Gamma_5 dt \\
& + \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_6} \left( \lambda_{ac}(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_6} \delta T_{\Gamma_6} - \frac{\partial (\lambda_f(T) \delta T_{\Gamma_6})}{\partial \bar{n}_6} \psi \right) d\Gamma_6 dt \\
& + \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_7} \left( \lambda_{ac}(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_7} \delta T_{\Gamma_7} - \frac{\partial (\lambda_f(T) \delta T_{\Gamma_7})}{\partial \bar{n}_7} \psi \right) d\Gamma_7 dt \\
& + \int_{\Omega} [A(T) \psi \delta T]^{t=t_f} d\Omega - \int_{\Omega} [A(T) \psi \delta T]^{t=t_0} d\Omega
\end{aligned} \tag{A.IV.84}$$

Finalement, les équations du problème adjoint sont déterminées par le système d'équations suivant :

$$A_f(T) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) = -\lambda_f(T) \Delta \psi - \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}(T)}{\partial T} \psi \quad \text{dans } \Omega_0 \times I \tag{A.IV.85}$$

$$A_{ac}(T) \frac{\partial \psi}{\partial t} = E(r, z, t; \bar{T}_0) - \lambda_{ac}(T) \Delta \psi \quad \text{dans } \Omega_1 \times I \tag{A.IV.86}$$

$$\lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times I \tag{A.IV.87}$$

$$\psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times I \tag{A.IV.88}$$

$$A_f(T) \psi \mathcal{V} + \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_3} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times I \tag{A.IV.89}$$

$$\psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_5 \times I \tag{A.IV.90}$$

$$\psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_6 \times I \tag{A.IV.91}$$

$$\psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_7 \times I \tag{A.IV.92}$$

$$\psi = 0 \quad \text{dans } \Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \text{ à } t = t_f \tag{A.IV.93}$$

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

On peut remarquer que les équations du problème adjoint sont linéaires et couplées aux équations du problème direct (A.IV.4) à (A.IV.12), tout comme les équations du problème de sensibilité.

### A.IV.2.4 Expression du gradient

On a vu dans le paragraphe 2.4.2.1 que lorsque  $\psi$  est fixé, la variation du Lagrangien se réduit à  $\delta L(T, \bar{T}_0, \psi) = \frac{\partial L}{\partial T} \delta T + \frac{\partial L}{\partial \bar{T}_0} \delta \bar{T}_0$ . Par conséquent, lorsque  $\psi$  est solution des équations

(A.IV.85) à (A.IV.93) telles que  $\forall \delta T, \frac{\partial L}{\partial T} \delta T = 0$ , il vient que  $\delta L(T, \bar{T}_0, \psi) = \frac{\partial L}{\partial \bar{T}_0} \delta \bar{T}_0$ , et lorsque

$T$  est solution du problème direct, la différentielle du critère s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \delta L(T, \bar{T}_0, \psi) &= \delta J(T, \bar{T}_0) = \langle \bar{\nabla} J(T, \bar{T}_0), \delta \bar{T}_0 \rangle \\ &= \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_2} \left( -A_f(T) \psi V \delta \bar{T}_0 + \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_2} \delta \bar{T}_0 - \frac{\partial (\lambda_f(T) \delta \bar{T}_0)}{\partial \bar{n}_2} \psi \right) d\Gamma_2 dt \end{aligned} \quad (\text{A.IV.94})$$

Or, d'après (A.IV.88), on a  $\psi = 0$  sur  $\Gamma_2 \times I$  et comme  $\bar{T}_0$  ne dépend que du temps, on a :

$$\langle \bar{\nabla} J(\bar{T}_0), \delta \bar{T}_0 \rangle = \int_0^{t_f} \left[ \int_{\Gamma_2} \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_2} d\Gamma_2 \right] \delta \bar{T}_0 dt \quad (\text{A.IV.95})$$

De plus, on considère  $\bar{T}_0(t)$  comme étant la somme de  $Np$  fonctions telles que

$$\bar{T}_0(t) = \sum_{i=1}^{Np} \bar{T}_{0i} \sigma_i(t) \quad \text{alors} \quad \delta \bar{T}_0(t) = \sum_{i=1}^{Np} \delta \bar{T}_{0i} \sigma_i(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Soit} \quad \delta J(T, \bar{T}_0) &= \sum_{i=1}^{Np} \int_0^{t_f} \left[ \int_{\Gamma_2} \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_2} d\Gamma_2 \right] \delta \bar{T}_{0i} \sigma_i(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^{Np} \int_0^{t_f} \left[ \int_{\Gamma_2} \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_2} d\Gamma_2 \right] \sigma_i(t) dt \delta \bar{T}_{0i} \\ &= \sum_{i=1}^{Np} \frac{\partial J}{\partial \bar{T}_{0i}} \delta \bar{T}_{0i} \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{\partial J}{\partial \bar{T}_{0i}} = \int_0^{t_f} \left[ \int_{\Gamma_2} \lambda_f(T) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}_2} d\Gamma_2 \right] \sigma_i(t) dt \quad (\text{A.IV.96})$$



### A.IV.2.5 Algorithme de résolution

Jusque là, nous avons formulé le problème inverse comme un problème d'optimisation d'une fonctionnelle sous contrainte. Nous allons maintenant, dans ce paragraphe, expliciter l'algorithme de résolution du gradient conjugué. Cette résolution du problème consiste à trouver et reconstituer la fonction  $\bar{T}_0$  qui minimise la fonctionnelle  $J(\bar{T}_0)$  (A.IV.68). Le gradient du critère  $\bar{\nabla}J(\bar{T}_0)$  et la profondeur de descente  $\gamma$  sont déterminés respectivement en résolvant le problème adjoint et le problème de sensibilité. Ceci permettra alors de déterminer itérativement le paramètre recherché en reliant sa valeur entre deux étapes successives via la direction et la profondeur de descente  $\bar{T}_0^{n+1} = \bar{T}_0^n + \gamma^n d^n$ . Ceci dit, la mise œuvre de l'algorithme peut alors se faire. Voici ses principales étapes :

- 1 : Choisir une valeur initiale du paramètre recherché  $\bar{T}_0(t)$
- $\bar{T}_0^n$ , mettre  $n = 0$

- 2 : Résoudre le problème direct, Eqs. (A.IV.4) à (A.IV.12)
- Déterminer  $T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0^n)$
- Calculer le critère  $J(\bar{T}_0^n)$ , Eq. (A.IV.68)

$$J(\bar{T}_0^n) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(r, z, t; \bar{T}_0^n) - \tilde{T}_m(t) \right)^2 \delta(r - r_m) \delta(z - z_m) d\Omega dt$$

- Calculer la fonction erreur  $E(r, z, t; \bar{T}_0^n)$ , Eq. (A.IV.71)

$$E(r, z, t; \bar{T}_0^n) = \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(r, z, t; \bar{T}_0^n) - \tilde{T}_m(t) \right) \delta(r - r_m) \delta(z - z_m)$$

- 3 : Résoudre le problème adjoint, Eqs. (A.IV.85) à (A.IV.93)
- Calculer le gradient du critère  $\bar{\nabla}J(\bar{T}_0^n)$ , Eq. (A.IV.95)
- Définir  $\beta$  :

- si  $n = 0$ ,  $\beta^n = 0$

- sinon,  $\beta^n = \frac{\|\bar{\nabla}J(\bar{T}_0^n)\|^2}{\|\bar{\nabla}J(\bar{T}_0^{n-1})\|^2}$

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

- Calculer la direction de descente  $d^n = \bar{\nabla} J(\bar{T}_0^n) + \beta^n d^{n-1}$
- Mettre  $\delta \bar{T}_0^n = d^n$
- 4 : Résoudre le problème de sensibilité, Eqs. (A.IV.42) à (A.IV.50)
- Déterminer la fonction de sensibilité  $\delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0^n)$ ,  $m = 1, \dots, N_c = 4$
- Calculer la profondeur de descente  $\gamma$

$$\gamma^n = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0^n) - \tilde{T}_m(t) \right) \delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0^n) dt}{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} \left( \delta T(x_m, y_m, t; \bar{T}_0^n) \right)^2 dt}$$

- 5 : Si  $J(\bar{T}_0^n) < J_s$ , l'algorithme se termine

Sinon itérer :  $\bar{T}_0^{n+1} = \bar{T}_0^n + \gamma^n d^n$

Retourner à l'étape 2.

Les grandes étapes de cet algorithme se résument donc à la résolution successive de trois problèmes : direct, adjoint et sensibilité.

Le choix de  $J_s$  à la dernière étape est d'une grande importance quant à la convergence de l'algorithme de résolution du problème inverse. Nous avons opté pour le principe de régulation itérative.

### A.IV.2.6 Principe de régularisation itérative

Dans ce paragraphe, nous allons décrire à quoi sert et comment exprimer le principe de régulation itérative.

Le problème étudié précédemment est de nature instable. Ceci signifie que la solution est sensible notamment aux erreurs numériques de l'algorithme et aux données d'entrée du problème. A titre d'exemple, les erreurs des paramètres thermomécaniques du modèle, la condition initiale de température souvent mal connue, les mesures de température plus ou moins faussées par leur caractère intrusif, l'approximation des fonctions continues par des fonctions discrètes et les erreurs de troncature ou arrondissements arithmétiques peuvent être tous source

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

d'erreur lors de l'estimation du paramètre recherché. C'est pour cela que l'inversion au sens strict du terme est impossible et que par conséquent, on cherche à estimer la température d'entrée du polymère dans la buse en minimisant une fonctionnelle sous contrainte. La régulation consiste à atténuer l'amplification des erreurs de données sur la solution.

Le principe est donc qu'à chaque itération, on puisse contrôler la stabilité de la solution. En effet, il faut avoir en tête que, passé un certain seuil critique, plus le nombre d'itérations augmente, plus les instabilités s'amplifient.

La fin du processus itératif vise la solution qui réduit au minimum le critère  $J(\bar{T}_0^n)$ . Cependant, les erreurs numériques ou de modélisation d'origines diverses rendent difficile la convergence de la solution car cette dernière obtenue par minimisation présentera un caractère oscillatoire à partir d'un nombre critique d'itération. En effet, on ne peut pas s'attendre à avoir une solution d'une précision supérieure à la précision des données.

On notera  $\delta_c$  l'erreur de calcul numérique,  $\delta_m$  l'erreur lié au modèle et  $\delta_T$  l'erreur de mesure de température.

Le principe de régularisation itérative consistera donc à arrêter le processus itératif à l'itération  $n^*$  tel que  $J(\bar{T}_0^{n^*})$  soit inférieur ou égal à un critère seuil  $J_s$  défini tel que :

$$J_s = \delta^2 \text{ où } \delta \text{ est fonction de } (\delta_T, \delta_m, \delta_c) \quad (\text{A.IV.97})$$

On rappelle que  $n^*$  est appelé le paramètre de régularisation itératif.

En outre, on peut notamment mettre le doigt sur le fait qu'il est difficile d'évaluer les erreurs numériques  $\delta_c$  et celles liées au modèle  $\delta_m$ . Cependant, si la modélisation est correcte et la mesure de température de bonne qualité, on a  $\delta_m + \delta_c \ll \delta_T$  et on peut alors définir  $\delta_T$  par la formule suivante :

$$\delta_T^2 = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} \sigma_m^2(t) dt \quad (\text{A.IV.98})$$

où  $\sigma_m$  est défini comme étant le bruit de mesure au niveau du capteur  $m$  tel que la relation entre la température mesurée  $\tilde{T}_m$  et la température exacte soit :

$$\tilde{T}_m(t) = T_{réelle}(x_m, y_m, t) + \sigma_m(t) \quad (\text{A.IV.99})$$

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

Par conséquent, en injectant (A.IV.99) dans l'équation (A.IV.68), on obtient :

$$J(\bar{T}_0) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} \left( T(r, z, t; \bar{T}_0) - T_{réelle}(x_m, y_m, t) - \sigma_m(t) \right)^2 dt \quad (\text{A.IV.100})$$

Or, comme la meilleure solution  $\bar{T}_0^{n*}$  est celle où la température calculée est égale à la température réelle, on a alors :

$$J(\bar{T}_0) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{N_c} \sigma_m^2(t) dt \quad (\text{A.IV.101})$$

### A.IV.3 Détail du calcul de $\partial\Phi_{\Omega_0} / \partial T$

Dans cette partie, nous expliciterons la dérivée du terme source de dissipation  $\Phi_{\Omega_0}$  visqueuse par rapport à la variable température  $T$  :

$$\frac{\partial\Phi_{\Omega_0}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} (\eta \dot{\gamma}^2) \quad (\text{A.IV.102})$$

Cette dérivée dépend du type du polymère car le terme source  $\Phi_{\Omega_0}$  dépend de la rhéologie du polymère utilisé dans notre étude. On considèrera deux cas, tout d'abord on fera l'approximation que la variation de  $\dot{\gamma}$  due à  $\delta T$  est négligeable, ensuite, on explicitera le cas général où l'on considère  $\dot{\gamma}$  dépendant de  $T$ .

#### A.IV.3.1 Pour le PP HV 252

On rappelle que, dans notre cas, l'expression de la viscosité dynamique du polypropylène HV 252 est de la forme :

$$\eta_{PP}(\dot{\gamma}, T, p) = \frac{\eta_{PP0}}{1 + \left( \frac{\eta_{PP0} \dot{\gamma}}{\tau} \right)^{1-n}} \quad \text{avec} \quad \eta_{PP0} = K \exp\left(\frac{T_b}{T}\right) \exp(\beta p)$$

On posera  $A = \frac{\eta_{PP0} \dot{\gamma}}{\tau}$  pour des raisons de simplification d'écriture pour toute la suite des calculs avec le polypropylène.

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

### A.IV.3.1.1 $\dot{\gamma}$ indépendant de $T$

Lorsque  $\dot{\gamma}$  ne dépend pas de  $T$ , il vient alors que :

$$\boxed{\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = \dot{\gamma}^2 \left. \frac{\partial \eta_{PP}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst}} \quad (\text{A.IV.103})$$

Il nous faut maintenant déterminer la dérivée de la viscosité par rapport à la variable  $T$  en supposant que  $\dot{\gamma}$  ne varie pas en fonction de  $T$ . On obtient alors l'expression suivante :

$$\boxed{\left. \frac{\partial \eta_{PP}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = \frac{\left(1 + A^{1-n}\right) \left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} - \eta_{PP0} \left. \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst}}{\left(1 + A^{1-n}\right)^2}} \quad (\text{A.IV.104})$$

Il nous reste à exprimer de cette expression les deux termes dérivés suivantes :

$$\left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst}$$

$$1^\circ) \left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = \frac{\partial}{\partial T} \left( K \exp\left(\frac{T_b}{T}\right) \exp(\beta p) \right) \quad (\text{A.IV.105})$$

$$= K \exp(\beta p) \left( -\frac{T_b}{T^2} \right) \exp\left(\frac{T_b}{T}\right)$$

$$\text{Soit} \quad \boxed{\left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = \left( -\frac{T_b}{T^2} \right) \eta_{PP0}} \quad (\text{A.IV.106})$$

$$2^\circ) \left. \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = (1-n) \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} A^{-n} \quad (\text{A.IV.107})$$

$$\text{Or} \quad \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\eta_{PP0} \dot{\gamma}}{\tau} \right) \Big|_{\dot{\gamma}=cst} = \frac{\dot{\gamma}}{\tau} \left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = \frac{\dot{\gamma}}{\tau} \left( -\frac{T_b}{T^2} \right) \eta_{PP0}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad \left. \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} &= (1-n) \frac{\dot{\gamma}}{\tau} \left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} A^{-n} \\ &= (1-n) \frac{\dot{\gamma}}{\tau} \left( -\frac{T_b}{T^2} \right) \eta_{PP0} A^{-n} \\ &= (1-n) \left( -\frac{T_b}{T^2} \right) A^{1-n} \end{aligned}$$

$$\text{Soit} \quad \boxed{\left. \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = (n-1) T_b \frac{A^{1-n}}{T^2}} \quad (\text{A.IV.108})$$

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

Par conséquent, en injectant les expressions (A.IV.106) et (A.IV.108) dans l'équation (A.IV.104), il vient :

$$\left. \frac{\partial \eta_{PP}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = \frac{\left(1 + A^{1-n}\right) \left(-\frac{T_b}{T^2}\right) \eta_{PP0} - \eta_{PP0} (n-1) T_b \frac{A^{1-n}}{T^2}}{\left(1 + A^{1-n}\right)^2} \quad (\text{A.IV.109})$$

$$\text{D'où } \boxed{\left. \frac{\partial \eta_{PP}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = \eta_{PP0} \left(-\frac{T_b}{T^2}\right) \frac{1 + nA^{1-n}}{\left(1 + A^{1-n}\right)^2}} \quad (\text{A.IV.110})$$

Enfin, en introduisant (A.IV.110) dans (A.IV.103), l'expression de la dérivée du terme source par rapport à  $T$ , en supposant que  $\dot{\gamma}$  ne dépende pas de  $T$ , s'exprime de la façon suivante :

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = -T_b \dot{\gamma}^2 \frac{\eta_{PP0} (1 + nA^{1-n})}{T^2 (1 + A^{1-n})^2}$$

Et comme  $A = \frac{\eta_{PP0} \dot{\gamma}}{\tau}$ , on simplifie l'expression précédente et on obtient :

$$\boxed{\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = -T_b \tau \frac{A(1 + nA^{1-n})}{T^2 (1 + A^{1-n})^2} \dot{\gamma}} \quad (\text{A.IV.111})$$

### A.IV.3.1.1 $\dot{\gamma}$ dépendant de $T$

Lorsque  $\dot{\gamma}$  dépend de  $T$ , il vient alors que :

$$\boxed{\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = \dot{\gamma}^2 \left. \frac{\partial \eta_{PP}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} + \eta_{PP} \left. \frac{\partial \dot{\gamma}^2}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)}} \quad (\text{A.IV.112})$$

Il nous faut maintenant déterminer la dérivée de la viscosité et de  $\dot{\gamma}^2$  par rapport à  $T$ , en supposant que  $\dot{\gamma}$  varie en fonction de  $T$ .

De même que l'équation (A.IV.104), la dérivée de la viscosité par rapport à  $T$  s'exprime sous la forme générale suivante :

$$\left. \frac{\partial \eta_{PP}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = \frac{\left(1 + A^{1-n}\right) \left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} - \eta_{PP0} \left. \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)}}{\left(1 + A^{1-n}\right)^2} \quad (\text{A.IV.113})$$

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

Il nous reste à exprimer de cette expression les deux termes dérivés suivantes :

$$\left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)}$$

$$1^\circ) \left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst} = \left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} \quad \text{car } \eta_{PP0} \text{ ne dépend pas de } \dot{\gamma} \quad (\text{A.IV.114})$$

$$\text{Soit } \boxed{\left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = \left( -\frac{T_b}{T^2} \right) \eta_{PP0}} \quad (\text{A.IV.115})$$

$$2^\circ) \left. \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = (1-n) \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} A^{-n} \quad (\text{A.IV.116})$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} &= \left. \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\eta_{PP0} \dot{\gamma}}{\tau} \right) \right|_{\dot{\gamma}(T)} \\ &= \frac{1}{\tau} \left[ \dot{\gamma} \left. \frac{\partial \eta_{PP0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} + \eta_{PP0} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \right] \\ &= \frac{1}{\tau} \left[ \dot{\gamma} \left( -\frac{T_b}{T^2} \right) \eta_{PP0} + \eta_{PP0} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \right] \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = \frac{\eta_{PP0}}{\tau} \left[ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} - \frac{T_b}{T^2} \dot{\gamma} \right]$$

$$\text{Soit } \boxed{\left. \frac{\partial (1 + A^{1-n})}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = (1-n) \frac{\eta_{PP0}}{\tau} \left[ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} - \frac{T_b}{T^2} \dot{\gamma} \right] A^{-n}} \quad (\text{A.IV.117})$$

Par conséquent, en injectant les expressions (A.IV.115) et (A.IV.117) dans (A.IV.113), on obtient :

$$\boxed{\left. \frac{\partial \eta_{PP}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = -\eta_{PP0} \frac{\left(1 + A^{1-n}\right) \frac{T_b}{T^2} + (1-n) \frac{\eta_{PP0}}{\tau} \left[ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} - \frac{T_b}{T^2} \dot{\gamma} \right] A^{-n}}{\left(1 + A^{1-n}\right)^2}} \quad (\text{A.IV.118})$$

Enfin, en introduisant (A.IV.118) dans (A.IV.112), l'expression de la dérivée du terme source par rapport à  $T$ , en supposant  $\dot{\gamma}$  dépendant de  $T$ , s'exprime de la façon suivante :

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = -\dot{\gamma}^2 \eta_{PP0} \frac{\left(1 + A^{1-n}\right) \frac{T_b}{T^2} + (1-n) \frac{\eta_{PP0}}{\tau} \left[ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} - \frac{T_b}{T^2} \dot{\gamma} \right] A^{-n}}{\left(1 + A^{1-n}\right)^2} + 2\eta_{PP} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}$$

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

$$= -\dot{\gamma}^2 \eta_{PP0} \frac{(1+A^{1-n}) \frac{T_b}{T^2} + (1-n) \frac{\eta_{PP0}}{\tau} \left[ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} - \frac{T_b}{T^2} \dot{\gamma} \right] A^{-n}}{(1+A^{1-n})^2} + \frac{2\eta_{PP0}}{1+A^{1-n}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}$$

Donc en posant  $A = \frac{\eta_{PP0} \dot{\gamma}}{\tau}$ , on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} &= (n-1)\tau \frac{A^{2-n}}{(1+A^{1-n})^2} \left[ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} - \frac{T_b}{T^2} \dot{\gamma} \right] - \frac{\tau T_b A}{T^2 (1+A^{1-n})} \dot{\gamma} + \frac{2\eta_{PP0}}{(1+A^{1-n})} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma} \\ &= - \left( (n-1)\tau \frac{A^{2-n}}{(1+A^{1-n})^2} \frac{T_b}{T^2} + \frac{\tau T_b A}{T^2 (1+A^{1-n})} \right) \dot{\gamma} + \left( \frac{\tau(n-1)A^{2-n}}{(1+A^{1-n})^2} + \frac{2\eta_{PP0}}{(1+A^{1-n})} \right) \dot{\gamma} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \\ &= - \left( \frac{(n-1)\tau A^{2-n} T_b + \tau T_b A (1+A^{1-n})}{T^2 (1+A^{1-n})^2} \right) \dot{\gamma} + \left( \frac{\tau(n-1)A^{2-n}}{(1+A^{1-n})^2} + \frac{2\eta_{PP0}}{(1+A^{1-n})} \right) \dot{\gamma} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \boxed{\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = \left( -T_b \tau \frac{A(1+nA^{1-n})}{T^2 (1+A^{1-n})^2} \right) \dot{\gamma} + \left( \frac{\tau(n-1)A^{2-n}}{(1+A^{1-n})^2} + \frac{2\eta_{PP0}}{(1+A^{1-n})} \right) \dot{\gamma} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T}} \quad (\text{A.IV.119})$$

- Vérification :

Si  $\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} = 0$ , alors l'expression (A.IV.119) devient :

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = \left( -T_b \tau \frac{A(1+nA^{1-n})}{T^2 (1+A^{1-n})^2} \right) \dot{\gamma} = \left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst}$$

On vérifie donc bien que si  $\dot{\gamma}$  ne dépend pas de  $T$ , alors  $\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} = 0$  et donc que l'on

retrouve bien l'équation (A.IV.111)  $\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=cst}$ .

### A.IV.3.2 Pour le PE 2042E

On rappelle que, dans notre cas, l'expression de la viscosité dynamique du polyéthylène 2042E est de la forme :

$$\eta_{PE}(T, \dot{\gamma}) = \frac{\eta_{PE0}}{(1+(c\dot{\gamma})^n)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{avec} \quad \eta_{PE0}(T) = a \exp\left(\frac{b}{T}\right)$$

On posera  $B = (1+(c\dot{\gamma})^n)^{\frac{1}{n}}$  pour des raisons de simplification d'écriture pour toute la suite des calculs avec le polyéthylène.



### A.IV.3.2.1 $\dot{\gamma}$ indépendant de $T$

Lorsque  $\dot{\gamma}$  ne dépend pas de  $T$ , on a :

$$\boxed{\frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \Big|_{\dot{\gamma}=cst} = \dot{\gamma}^2 \frac{\partial \eta_{PE}}{\partial T} \Big|_{\dot{\gamma}=cst}} \quad (\text{A.IV.120})$$

Il nous faut maintenant déterminer la dérivée de la viscosité par rapport à la variable  $T$  en supposant que  $\dot{\gamma}$  ne varie pas en fonction de  $T$ . On obtient alors l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{PE}}{\partial T} \Big|_{\dot{\gamma}=cst} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\eta_{PE0}}{B} \right) \Big|_{\dot{\gamma}=cst} \\ &= \frac{1}{B} \frac{\partial \eta_{PE0}}{\partial T} \Big|_{\dot{\gamma}=cst} \quad \text{car } B \text{ est fonction de } \dot{\gamma} \text{ qui est indépendant de } T \\ &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial T} \left( a \exp\left(\frac{b}{T}\right) \right) \Big|_{\dot{\gamma}=cst} \\ &\boxed{\frac{\partial \eta_{PE}}{\partial T} \Big|_{\dot{\gamma}=cst} = -\frac{b \eta_{PE0}}{BT^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.IV.121})$$

Enfin, en introduisant (A.IV.121) dans l'expression (A.IV.120), on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \Big|_{\dot{\gamma}=cst} = -\frac{b \eta_{PE0}}{BT^2} \dot{\gamma}^2} \quad (\text{A.IV.122})$$

### A.IV.3.2.2 $\dot{\gamma}$ dépendant de $T$

Lorsque  $\dot{\gamma}$  est fonction de  $T$ , on a :

$$\boxed{\frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \Big|_{\dot{\gamma}(T)} = \dot{\gamma}^2 \frac{\partial \eta_{PE}}{\partial T} \Big|_{\dot{\gamma}(T)} + \eta_{PE} \frac{\partial \dot{\gamma}^2}{\partial T}} \quad (\text{A.IV.123})$$

Il nous faut maintenant déterminer la dérivée de la viscosité et de  $\dot{\gamma}^2$  par rapport à  $T$ , en supposant que  $\dot{\gamma}$  varie en fonction de  $T$ .

## Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

La dérivée de la viscosité par rapport à  $T$  s'exprime sous la forme générale suivante :

$$\left. \frac{\partial \eta_{PE}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = \frac{B \left. \frac{\partial \eta_{PE0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} - \eta_{PE0} \left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)}}{B^2} \quad (\text{A.IV.124})$$

Il nous reste à exprimer de cette expression les deux termes dérivés suivantes :

$$\left. \frac{\partial \eta_{PE0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)}$$

$$1^\circ) \left. \frac{\partial \eta_{PE0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = \left. \frac{\partial \eta_{PE0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=\text{cst}} \quad \text{car } \eta_{PE0} \text{ ne dépend pas de } \dot{\gamma} \quad (\text{A.IV.125})$$

$$\text{Soit} \quad \boxed{\left. \frac{\partial \eta_{PE0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = \left( -\frac{b}{T^2} \right) \eta_{PE0}} \quad (\text{A.IV.126})$$

$$\begin{aligned} 2^\circ) \left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} &= \left. \frac{\partial}{\partial T} \left( \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{1}{n}} \right) \right|_{\dot{\gamma}(T)} \quad (\text{A.IV.127}) \\ &= \frac{1}{n} \frac{\partial \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)}{\partial T} \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{1-n}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \left( nc^n \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}^{n-1} \right) \left( 1 + (c\dot{\gamma})^n \right)^{\frac{1-n}{n}} \end{aligned}$$

$$\text{Soit} \quad \boxed{\left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = c^n B^{1-n} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}^{n-1}} \quad (\text{A.IV.128})$$

Par conséquent, en injectant les expressions (A.IV.126) et (A.IV.128) dans (A.IV.124), on obtient :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \eta_{PE}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} &= \frac{B \left( -\frac{b}{T^2} \right) \eta_{PE0} - \eta_{PE0} c^n B^{1-n} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}^{n-1}}{B^2} \\ \text{Soit} \quad \boxed{\left. \frac{\partial \eta_{PE}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} &= -\eta_{PE0} \frac{\frac{b}{T^2} - c^n B^{-n} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}^{n-1}}{B}} \quad (\text{A.IV.129}) \end{aligned}$$

Enfin, en introduisant (A.IV.129) dans (A.IV.123), l'expression de la dérivée du terme source par rapport à  $T$ , en supposant  $\dot{\gamma}$  dépendant de  $T$ , s'exprime de la façon suivante :

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = -\dot{\gamma}^2 \eta_{PE0} \frac{\frac{b}{T^2} - c^n B^{-n} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}^{n-1}}{B} + 2\eta_{PE} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}$$

Annexe IV – Calcul des équations du gradient conjugué

$$= -\dot{\gamma}^2 \eta_{PE0} \frac{\frac{b}{T^2} - c^n B^{-n} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}^{n-1}}{B} + 2 \frac{\eta_{PE0}}{B} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}$$

Après simplifications et réarrangement, nous obtenons :

$$\boxed{\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}(T)} = -\frac{b \eta_{PE0}}{B T^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{\eta_{PE0}}{B} \left( 2 + \left( \frac{c \dot{\gamma}}{B} \right)^n \right) \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} \dot{\gamma}} \quad (\text{A.IV.130})$$

- Vérification :

Si  $\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} = 0$ , alors l'expression (A.IV.130) devient :

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=\text{var}} = -\frac{b \eta_{PE0}}{B T^2} \dot{\gamma}^2 = \left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=\text{cst}}$$

On vérifie donc bien que si  $\dot{\gamma}$  ne dépend pas de  $T$ , alors  $\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial T} = 0$  et donc que l'on

retrouve bien l'équation (A.IV.122)  $\left. \frac{\partial \Phi_{\Omega_0}}{\partial T} \right|_{\dot{\gamma}=\text{cst}}$ .

## Annexe V : Démonstration de l'équation de la chaleur

Voici l'expression de l'équation de la chaleur en passant par l'énergie interne  $U$  :

$$\rho \frac{DU}{DT} = (\underline{\sigma} : \{\nabla \vec{v}\}) - \nabla \vec{q} \quad \text{avec } U \text{ énergie interne} \quad (\text{A.V.1})$$

L'enthalpie est liée à l'énergie interne par la relation suivante :

$$H = U + pV \quad \text{avec } V \text{ volume spécifique} \quad (\text{A.V.2})$$

$$\text{Donc } dH = dU + Vdp + pdV \quad (\text{A.V.3})$$

$$\text{Et } dU = dH - Vdp - pdV \quad (\text{A.V.4})$$

$$\text{L'enthalpie est liée aussi à l'entropie par } dH = TdS + Vdp \quad (\text{A.V.5})$$

$$\text{D'où, } dS = \frac{1}{T}(dH - Vdp) \quad (\text{A.V.6})$$

$$\text{Or, } dH = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT \quad (\text{A.V.7})$$

Donc en injectant (A.V.7) dans (A.V.6), on obtient :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT - Vdp \right] \\ dS &= \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] dp + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT \end{aligned} \quad (\text{A.V.8})$$

$$\text{Or comme } dS = \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT, \quad (\text{A.V.9})$$

$$\text{Il vient que } \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] \quad (\text{A.V.10}) \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.V.11})$$

Soit en dérivant (A.V.10) par  $\frac{\partial}{\partial T}$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial p} = -\frac{1}{T^2} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] + \frac{1}{T} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial T \partial p} - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right] \quad (\text{A.V.12})$$

Et en dérivant (A.V.11) par  $\frac{\partial}{\partial p}$ , on obtient :

Annexe V – Démonstration de l'équation de la chaleur

$$\left( \frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial T} \quad (\text{A.V.13})$$

$$\text{Or } \frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial p} \quad (\text{A.V.14})$$

$$\text{D'où, } \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = V - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.V.15})$$

$$dH = \left( V - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right) dp + \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT \quad (\text{A.V.16})$$

$$\text{On pose } C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.V.17}) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.V.18})$$

$$\text{D'où } dH = (1 - \beta T) V dp + C_p dT \quad (\text{A.V.19})$$

Donc en injectant (A.V.19) dans (A.V.4), on a :

$$dU = (1 - \beta T) V dp + C_p dT - V dp - p dV \quad (\text{A.V.20})$$

$$\frac{dU}{dt} = -\beta T V \frac{dp}{dt} + C_p \frac{dT}{dt} - p \frac{dV}{dt} \quad (\text{A.V.21})$$

$$\frac{DU}{Dt} = C_p \frac{DT}{Dt} - \beta T V \frac{Dp}{Dt} - p \frac{DV}{Dt} \quad (\text{A.V.22})$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{DV}{Dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} V \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{\rho} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \right) \vec{\nabla} \rho \right] \\ &= -\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \\ \text{Soit } \frac{DV}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (\text{A.V.23})$$

Donc en injectant, (A.V.23) dans (A.V.22) et en multipliant tout par  $\rho$ , on obtient :

$$\text{Soit } \boxed{\rho \frac{DU}{Dt} = \rho C_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp}{Dt} - \rho \nabla \cdot \vec{v}} \quad (\text{A.V.24})$$