HAL
open science

Rejet adaptatif de perturbations en contrôle actif de vibrations

Marouane Alma

To cite this version:

Marouane Alma. Rejet adaptatif de perturbations en contrôle actif de vibrations. Automatique / Robotique. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENT018 . tel-00607174

HAL Id: tel-00607174

https://theses.hal.science/tel-00607174

Submitted on 8 Jul 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **AUTOMATIQUE-PRODUCTIQUE**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

« Marouane ALMA »

Thèse dirigée par **« Ioan Doré LANDAU »** et
codirigée par **« John Jairo MARTINEZ »**

préparée au sein du **Laboratoire GIPSA-Lab**
dans **l'École Doctorale EEATS**

Rejet adaptatif de perturbations en contrôle actif de vibrations

Thèse soutenue publiquement le **20 Mai 2011**,
devant le jury composé de :

M. Alireza KARIMI
Maitre d'enseignement et de recherche, EPFL Lausanne Suisse, Rapporteur
M. Rogelio LOZANO
DR CNRS, HEUDIASYC Compiègne, Rapporteur
M. Mathieu NOE
Ingénieur R&D et chef de service, Paulstra Vibrachoc, Evry, Examinateur
M. Luc DUGARD
DR CNRS, GIPSA-Lab Grenoble, Président
M. Ioan-Doré LANDAU
DR CNRS Emérite, GIPSA-Lab Grenoble, Directeur de thèse
M. John-Jairo MARTINEZ
Maitre de conférences, GIPSA-Lab, Codirecteur de thèse

à ma famille

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont été effectués au Laboratoire GIPSA-Lab de Grenoble, au sein de l'équipe *Systèmes Linéaires et Robustesse* (SLR).

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à Monsieur Ioan-Doré Landau, directeur de thèse, pour son accueil et pour la confiance qu'il a toujours témoigné à mon égard. Son expérience, ses conseils et ses encouragements m'ont été d'un très grand apport.

Je tiens à remercier aussi Monsieur John-Jairo Martinez, co-directeur de thèse, pour le travail qu'il a accompli en ma compagnie et pour ses encouragements et son aide tout le long de ma présence au sein du laboratoire.

Je remercie également Monsieur Luc Dugard, directeur de recherche CNRS, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de soutenance et a accepté de consacrer un peu de son temps à la lecture de ce mémoire, ainsi je le remercie aussi pour les corrections qu'il a apporté à mon manuscrit.

Je tiens aussi à adresser mes profonds remerciements à Monsieur Alireza Karimi, maitre de l'enseignement et de la recherche à l'EPFL de lausanne en suisse, et Monsieur Rogelio Lozano, Directeur de recherche CNRS, qui ont accepté d'évaluer ce travail.

je remercie également Monsieur Mathieu Noé, Ingénieur spécialisé chez Paulstra Vibrachoc, qui a accepté d'examiner ce travail et avec lequel j'ai pu travailler durant toute la période de thèse dans le cadre d'une collaboration industrielle entre le laboratoire GIPSA-Lab et Paulstra Vibrachoc.

J'adresse un grand merci à Monsieur Gabriel Buche pour tous les échanges qu'on a eu durant la thèse et qui ont même dépassé le cadre scientifique et je lui ai très reconnaissant pour l'aide qu'il m'a apporté dans les moments difficiles.

Je ne saurais oublié les membres de l'équipe technique du laboratoire GIPSA-Lab ainsi que le personnel enseignant de l'école ENSE3 pour les collaborations qu'on a pu avoir ensemble.

Je remercie profondément Irfan Ahmad, Cedric Berbra, Amine Mechraoui ainsi que tous les doctorants du laboratoire pour leur sincère amitié.

Un grand et même très grand merci à mes parents, mes deux frères ainsi qu'à ma très chère soeur que j'aime tant pour tout ce qu'ils ont pu faire pour moi.

Enfin je termine par remercier ma chérie Hella pour sa présence permanente et pour tout le bonheur qu'elle m'a apporté.

Table des matières

1 Introduction **17**
1.1 Motivation 18
1.1.1 Le contrôle actif de vibrations 18
1.2 Description des Problèmes traités 20
1.2.1 Commande par contre réaction pour le rejet de perturbations multi-sinusoïdales 20
1.2.2 Commande par action anticipatrice pour le rejet de perturbations bandes larges 21
1.2.3 Commande hybride (feedback + feedforward) pour le rejet de perturbations bandes larges 21
1.3 Vue d'ensemble sur le rejet adaptatif de perturbation 22
1.3.1 Rejet de perturbation bande large en feedforward 22
1.3.2 Vue d'ensemble sur le rejet de perturbations bandes étroites . . . 24
1.4 Contributions 31
1.4.1 Rejet de perturbation bande large en feedforward : 32
1.4.2 Rejet de perturbation bande étroite en feedback : 32

I Rejet de perturbations mesurables "bande large" en "*Feed-forward*" **33**

2 Plate-forme de contrôle actif de vibrations **35**
2.1 Introduction 35
2.2 Système de contrôle actif de vibration considéré 35
2.3 Identification paramétrique 41

3 Contrôle optimal robuste de type H_∞ **45**
3.1 Introduction 45
3.2 Formulation du problème sous forme H_∞ standard 45
3.2.1 Problème à traiter 47
3.2.2 Mise sous forme H_∞ standard 48
3.3 Synthèse d'un compensateur H_∞ robuste 49

3.3.1 Formulation alternative 52
3.4 Réduction de l'ordre du régulateur par identification en boucle fermée . . 52
3.4.1 Algorithme pour l'identification en boucle fermée de régulateur en "feedforward" d'ordre réduit 54
3.4.2 Régulateur en "feedforward" d'ordre réduit pour le contrôle actif de vibration 56
3.5 Conclusion 57

4 Rejet adaptatif de perturbation large bande mesurable en *"feedforward"* 59
4.1 Introduction 59
4.2 Développement des algorithmes adaptatifs 60
4.3 Analyse des algorithmes adaptatifs obtenus 67
4.3.1 Cas déterministe - Poursuite parfaite 67
4.3.2 Cas stochastique - Poursuite parfaite 69
4.3.3 Cas de poursuite non parfaite 70
4.3.4 Assouplissement de la condition de réelle positivité 71
4.4 Conclusion 72

5 Compensation hybride "feedback & feedforward adaptatif" 75
5.1 Introduction 75
5.2 Développement des algorithmes adaptatifs 76
5.2.1 Analyse des Algorithmes 83
5.3 Conclusion 84

6 Résultats expérimentaux 85
6.1 Introduction 85
6.2 Résultats des compensateurs H_∞ obtenus en temps réel sur la structure CARV 85
6.3 Résultats des compensateurs adaptatifs obtenus en temps réel sur la structure CARV 88
6.3.1 Rejet de perturbation bande large en utilisant un gain d'adaptation matriciel 88
6.3.2 Rejet de perturbation bande large en utilisant un gain d'adaptation scalaire 94
6.4 Résultats de la compensation hybride de perturbations sur la structure CARV 98
6.4.1 Synthèse du régulateur RS en feedback 98
6.4.2 Rejet de perturbation large bande 100
6.5 Conclusion 103

II Rejet de perturbations "bande étroite" "multi-sinusoïdales" 105

7 Rejet adaptatif de perturbations bande étroite 107
7.1 Introduction 107
7.2 Régulateur numérique RS avec calibrage des fonctions de sensibilité et robustesse 109
7.2.1 Structure du régulateur RS 109
7.2.2 Fonctions de sensibilité et marges de robustesse 110
7.3 Principe du modèle interne et la Q-Paramétrisation 112
7.4 Commande adaptative indirecte pour le rejet de perturbations multi-sinusoïdales 115
7.5 Commande adaptative directe pour le rejet de perturbations multi-sinusoïdales 118
7.6 Préservation des parties fixes du régulateur central 122
7.7 Conclusion 123

8 Résultats expérimentaux 125
8.1 Introduction 125
8.2 Présentation de la suspension active à actionneur inertiel (SAAI) 125
8.2.1 Démarches à suivre 127
8.2.2 Identification paramètrique 128
8.3 Résultats obtenus en temps réel sur la suspension active 129
8.3.1 Cas de deux perturbations sinusoïdales simultanées 130
8.3.2 Cas de trois perturbations sinusoïdales simultanées 134
8.3.3 Comparaison entre la méthode directe et indirecte 136
8.4 Conclusion 138

9 Conclusions générales et perspectives 139

Bibliographie 141

A Compléments du chapitre 4 147
A.1 Comparaison avec d'autres algorithmes 147

B Compléments du chapitre 8
Résultats en simulation
Application à un Benchmark international 151
B.1 Résultats de simulation 151

C Design and Tuning of Reduced Order H-infinity Feedforward Compensators for Active Vibration Control 163

D An adaptive feedforward compensation algorithm for active vibration control 173

E Adaptive Suppression of Multiple Time-Varying Unknown Vibrations Using an Inertial Actuator 181

Table des figures

1.1 Exemples de contrôle passif des vibrations 19

1.2 Schéma bloc pour le problème de contrôle actif par contre réaction 20

1.3 Schéma bloc pour le problème de contrôle actif par action anticipatrice . 21

1.4 Schéma bloc pour le problème de contrôle actif hybride (feedback & feedforward) 22

1.5 Approche "Traitement du signal" pour le rejet de perturbations inconnues 26

1.6 Stratégie de commande pour le procédé de fermentation 28

1.7 Schèma de commande adaptative indirecte pour le rejet de perturbations inconnues 30

1.8 Schéma de commande adaptative directe pour le rejet de perturbations inconnues 31

2.1 Photo du procédé de contrôle actif de vibration. 36

2.2 Schéma du procédé de contrôle actif de vibration. 36

2.3 Vue d'ensemble de la plate-forme CARV. 37

2.4 Système AVC en Feedforward : en boucle ouverte (a) et avec un compensateur en feedforward (b) 38

2.5 Caractéristiques fréquentielles des modèles des voies primaire et secondaire 42

2.6 Caractéristiques fréquentielles des modèles des voies secondaire et inverse 42

2.7 Caractéristiques fréquentielles du modèle de la perturbation 43

3.1 Schéma de commande en feedforward du procédé CARV 46

3.2 Schéma de commande en feedforward d'un système de contrôle actif de vibration 46

3.3 Structure du modèle de synthèse pour le système de compensation en feedforward 48

3.4 Procédé généralisé standard avec un compensateur en "feedforward" . . . 48

3.5 Fonction de sensibilité perturbation-entrée S_{ys} avec le compensateur feedforward H_∞ 50

3.6 Fonction de sensibilité bruit-entrée S_{yb} avec le compensateur feedforward H_∞ 51

3.7 Fonction de sensibilité perturbation-sortie $S_{\chi s}$ avec le compensateur feedforward H_∞ 51

3.8 Identification en boucle fermée du compensateur d'ordre réduit en utilisant des données réelles (input matching) 53

3.9 Identification en boucle fermée du compensateur d'ordre réduit en utilisant des données simulées (input matching) 54

3.10 Fonctions de sensibilité perturbation-entrée des compensateurs feedforward (nominal et d'ordre réduit) 56

3.11 Fonctions de sensibilité bruit-entrée des compensateurs feedforward (nominal et d'ordre réduit) 57

3.12 Fonctions de sensibilité perturbation-sortie des compensateurs feedforward (nominal et d'ordre réduit) 57

3.13 Caractéristiques fréquentielles des compensateurs feedforward (nominal et d'ordre réduit) 58

4.1 Schéma de commande en feedforward adaptatif du procédé CARV 61

4.2 Schéma de commande adaptative en feedforward d'un système de contrôle actif de vibration 61

5.1 Schéma de commande hybride (feedback + feedforward adaptatif) du procédé CARV. 76

5.2 Schéma de commande hybride (feedback + feedforward adaptatif) d'un système de contrôle actif de vibration. 77

6.1 Résultats en temps réel obtenus avec une perturbation en SBPA (haut : Boucle ouverte, bas : Compensateur H_∞ nominal). 86

6.2 Résultats en temps réel obtenus avec une perturbation en SBPA en utilisant les compensateurs d'ordres réduits (haut : N_r, bas : N_s). 87

6.3 Densités spectrales de puissances de l'accélération résiduelle en boucle ouverte et avec les compensateurs H_∞. 87

6.4 Densités spectrales de l'image de la perturbation en boucle ouverte $d(t)$ et avec compensation en feedforward $\hat{u}(t)$ (expérimental). 89

6.5 Résultats en temps réel obtenus avec l'algorithme II en utilisant un gain d'adaptation matriciel. 90

6.6 Résultats en temps réel obtenus avec l'algorithme III en utilisant un gain d'adaptation matriciel. 91

6.7 Évolution des paramètres du compensateur en feedforward pour l'algorithme III avec un gain d'adaptation matriciel (expérimental). 91

6.8 Densités spectrales de puissance de l'accélération résiduelle en boucle ouverte et avec compensation adaptative (expérimental). 92

6.9 Résultats en temps réel du rejet d'une perturbation sinusoïdale additionnelle. Figure supérieure : adaptation arrêtée avant l'application de la perturbation sinusoïdale. Figure inférieure : adaptation toujours active. . . . 93

6.10 Évolution des paramètres du compensateur après le rajout d'une perturbation sinusoïdale à $1500sec$ (expérimental). 93

6.11 Densités spectrales de puissance de l'accélération résiduelle après le rajout d'une perturbation sinusoïdale (Perturbation = SBPA + sinusoïde). . . . 94

6.12 Résultats en temps réel obtenus avec l'algorithme FULMS. 95

6.13 Résultats en temps réel obtenus avec l'algorithme III utilisant un gain d'adaptation scalaire. 96

6.14 Evolution des paramètres du compensateur feedforward (expérimental) - Algorithme FULMS. 96

6.15 Evolution des paramètres du compensateur feedforward (expérimental) - Algorithme III avec gain d'adaptation scalaire. 97

6.16 Densités spectrales de l'accélération résiduelle en boucle ouverte et avec compensation adaptative utilisant un gain d'adaptation scalaire et avec compensateur H_∞. 97

6.17 Densités spectrales de puissance de l'accélération résiduelle après le rajout d'une perturbation sinusoïdale en utilisant un gain d'adaptation scalaire et avec le compensateur H_∞ (Perturbation = SBPA + sinusoïde)(expérimental). 98

6.18 Structure de la synthèse de la compensation en contre réaction. 99

6.19 Procédé généralisé standard avec le compensateur en contre réaction. . . 100

6.20 Résultats temps réel obtenus avec le contrôle hybride (Algorithme III) . 101

6.21 Densités spectrale de puissance de l'accélération résiduelle (Perturbation = SBPA) 102

6.22 Densités spectrale de puissance avec et sans compensateur en contre réaction (Perturbation = SBPA) 103

6.23 Densités spectrale de puissance quand une perturbation sinusoïdale additionnelle est appliquée (Perturbation = SBPA + sinusoïde) 104

7.1 Schéma de la boucle fermée en utilisant un régulateur RS 110

7.2 Schéma de la boucle fermée en utilisant la Q-paramétrisation 114

7.3 Schéma de la commande adaptative indirecte pour le rejet de perturbations inconnues 116

7.4 Schéma de commande adaptative directe pour le rejet de perturbations inconnues 121

7.5 Schéma de la Q-paramétrisation pour la préservation des parties fixes . . 122

8.1 Suspension Active à Actionneur Inertiel (photo) 126

8.2 Schéma de commande en contre réaction (SAAI) 127

8.3 Caractéristiques fréquentielles des voie primaire et secondaire (SAAI) . . 129

8.4 Résultats en temps réel avec algorithme adaptatif direct pour deux perturbations sinusoïdales appliquées simultanément avec des fréquences qui varient en echelon 131

8.5 Evolution des paramètres du polynôme Q durant l'adaptation (deux perturbations sinusoïdales) 131

8.6 Densités spectrales de puissance en boucle ouverte et fermée avec la commande adaptative directe (deux perturbations sinusoïdales) 132

8.7 Résultats en temps réel obtenus avec deux perturbations en chirp, en boucle ouverte et fermée 133

8.8 Evolution des paramètres du polynôme Q en présence de deux perturbations en chirp 133

8.9 Résultats en temps réel avec algorithme adaptatif direct pour trois perturbations sinusoïdales appliquées simultanément avec des fréquences qui varient en echelon 134

8.10 Evolution des paramètres du polynôme Q durant l'adaptation (trois perturbations sinusoïdales) 135

8.11 Densités spectrales de puissance en boucle ouverte et fermée avec la commande adaptative directe (trois perturbations sinusoïdales) 135

8.12 Résultats en temps réel obtenus avec trois perturbations en chirp, en boucle ouverte et fermée 136

8.13 Résultats en temps réel avec algorithme adaptatif direct pour le rejet d'une perturbation sinusoïdale avec une fréquence variant en echelon 137

8.14 Résultats en temps réel avec algorithme adaptatif indirect pour le rejet d'une perturbation sinusoïdale avec une fréquence variant en echelon . . 137

Liste des tableaux

6.1 Comparaison des différents compensateurs H_∞ en feedforward en utilisant la même perturbation. 88

6.2 Influence du nombre des paramètres à adapter sur l'atténuation globale obtenue en utilisant l'algorithme III. 92

8.1 Performances de la méthode adaptative directe en temps réel 132

8.2 Performances de la méthode adaptative directe en temps réel 136

A.1 Comparaison des algorithmes de compensation adaptative en feedforward 148

A.2 Équivalence des notations 149

Liste des publications

Revues scientifiques avec comité de lecture

- **2011**
  3 **Adaptive feedforward compensation algorithms for active vibration control with mechanical coupling** (Landau I. D., Alma M., Airimitoaie T. B.), *In Automatica*, 2011.
  2 **Design and Tuning of Reduced Order H-infinity Feedforward Compensators for Active Vibration Control** (Alma M., Landau I. D., Martinez Molina J. J., Buche G.), *In IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011.
  1 **Direct adaptive suppression of multiple unknown vibrations using an inertial actuator** (Landau I. D., Alma M., Martinez Molina J. J., Buche G.), *In IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011.

Conférences internationales avec comité de lecture

- **2011**
  5 **A Youla-Kucera parametrized adaptive feedforward compensator for active vibration control** (Landau I. D., Airimitoaie T. B., Alma M.), *In 18th IFAC World Congress, Milan, Italie*, 2011.
- **2010**
  4 **Direct adaptive suppression of multiple unknown vibrations using an inertial actuator** (Landau I. D., Alma M.), *In the 49th Conference on Decision and Control, Atlanta, États-Unis*, 2010.
  3 **An adaptive feedforward compensation algorithm for active vibration control** (Landau I. D., Alma M., Martinez Molina J. J., Buche G.), *In the 49th Conference on Decision and Control, Atlanta, États-Unis*, 2010.
  2 **Suppression adaptative de vibrations en utilisant un actionneur inertiel** (Alma M., Landau I. D., Martinez Molina J. J., Buche G.), *In the 6th Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Nancy, France*, 2010.

- **2009**
  1 **Adaptive regulation - Rejection of unknown multiple narrow band disturbances** (Landau I. D., Constantinescu A., Alma M.), *In 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'09, Thessaloniki, Grèce*, 2009.
- **2008**
  - **On observer-based estimation enhancement by parametric amplification in a weak force measurement device** (Besançon G., Voda A., Alma M.), *In the 47th Conference on Decision and Control, Cancun, Mexique*, 2008.
  - **Observateur et amplification paramétrique pour mesure de force faible** (Besançon G., Voda A., Alma M.), *In the 5th Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bucharest, Roumanie*, 2008.

Chapitre 1

Introduction

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du rejet adaptatif de perturbations sur des structures de contrôle actif de vibrations. L'objectif est de développer des stratégies de commande adaptatives, pour le rejet actif de perturbations, et de les mettre en oeuvre sur des procédés réels se trouvant au sein du département Automatique du laboratoire GIPSA-Lab de Grenoble. Les structures utilisées ont été réalisées en collaboration avec le centre de recherche Vibrachoc, et se sont inspirées des problèmes de rejet de perturbations vibratoires dans le domaine industriel.

Le noyau de cet étude étant le rejet adaptatif de perturbations sur des structures flexibles, il est recommandé de diviser les travaux réalisés en deux grandes parties :

- *Rejet de perturbations bandes étroites :* Ce problème est souvent rencontré en pratique, et plusieurs études ont été réalisées dessus. Dans ce manuscrit, sont proposés deux algorithmes de régulation adaptative en boucle fermée, permettant de rejeter des perturbations multi-sinusoïdales (n-sinusoïdes) en se basant sur le principe du modèle interne.
- *Rejet de perturbations bandes larges :* Le problème traité est spécifique aux applications de control actif de bruit, et de vibrations. Il traite des systèmes possédant en plus de la sortie à contrôler, une mesure fortement corrélée avec le signal de la perturbation à éliminer. Dans ce cadre, nous proposons quelques algorithmes adaptatifs avec les différentes études (stabilité et convergence) ainsi que quelques solutions linéaires (non-adaptatives).

1.1 Motivation

1.1.1 Le contrôle actif de vibrations

Le brevet de Lueg en 1936 [Lueg, 1936] est généralement cité comme le fondateur du concept de contrôle actif, même si les premières applications ne datent que d'une trentaine d'années. Les premières applications industrielles ont toutefois été surtout acoustiques, en particulier pour contrôler le bruit de ventilateurs dans des conduits de ventilation et de conditionnement d'air, aboutissant aujourd'hui à de véritables produits industriels.

Un autre domaine pour lequel le contrôle actif a eu un succès majeur est le rejet de bruit résiduel dans la cavité interne de casques antibruit.

Un autre enjeu fort a été identifié dans les années 1980 dans le domaine de la maîtrise nécessaire des émanations acoustiques des sous-marins porteurs de la force stratégique de dissuasion, amenant à des investissements significatifs de recherche et développement dans le domaine du contrôle actif des vibrations. C'est l'origine principale des développements de "plots actifs" dans le domaine des applications aéronautiques pour la suspension active des réacteurs du "business jet".

Avant de continuer, il est intéressant de définir la différence entre le contrôle actif et le contrôle passif des vibrations.

Le contrôle passif des vibrations est la stratégie qui consiste à introduire des dispositions constructives et des matériaux particuliers permettant de minimiser la transmission des vibrations à l'environnement (voir figure 1.1).

Il y a deux types de contrôle passif :
- *Le découplage :* ou isolation vibratoire, qui consiste à désorganiser la propagation des vibrations en alternant des milieux d'impédance mécanique très contrastée (d'où l'emploi fréquent d'élastomères qui constituent des interfaces molles relativement aux structures mécaniques traditionnelles).
- *L'amortissement :* qui consiste à dissiper en chaleur, du fait d'un fort hystérésis du matériau, les ondes vibratoires qui le sollicitent. On utilise fréquemment des revêtements de matériaux dits viscoélastiques (là aussi, il s'agit le plus souvent d'élastomères) pour accroître sensiblement les capacités de dissipation intrinsèquement faibles des matériaux usuels.

Le concept de contrôle actif des vibrations est tout autre : l'idée est cette fois-ci de bloquer la vibration en exerçant une action antagoniste créée artificiellement avec des propriétés en miroir, à tout instant, relativement à la vibration indésirable, pour rendre nulle leur somme vectorielle.

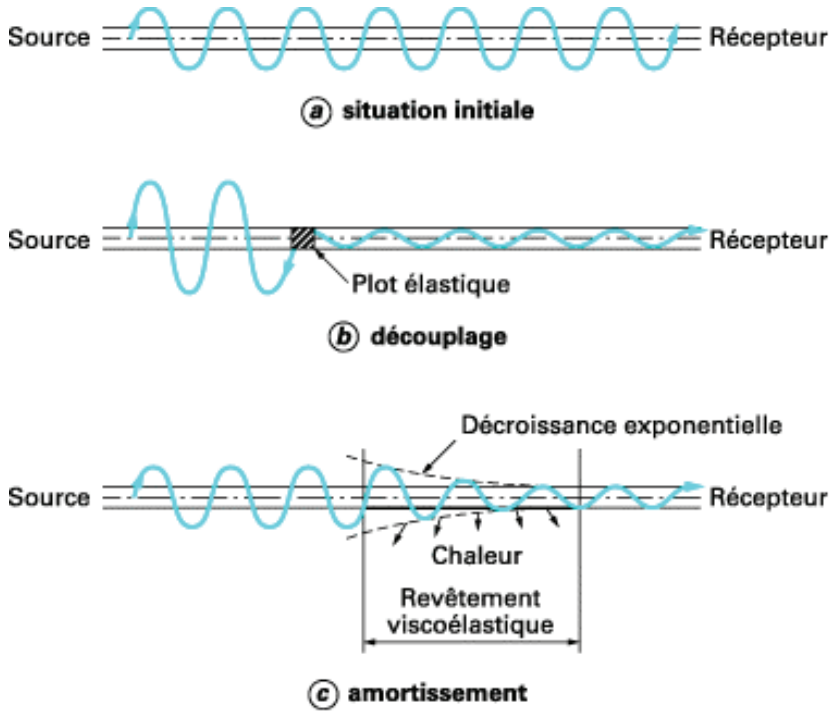


FIG. 1.1 – Exemples de contrôle passif des vibrations

Dans l'expérience traitée par Lueg, il introduit une perturbation sonore, produite par une source primaire, dans un tuyau. Un microphone (capteur) placé à l'intérieur permet de récupérer le signal et de le transmettre au régulateur qui contrôle un haut parleur (actionneur). L'objectif est de créer un signal opposé pour contrer l'effet de la perturbation à l'aval de la position de l'actionneur.

Depuis cette expérience, les chercheurs dans différents domaines (Traitement du signal et Automatique notamment), se sont intéressés à cette problématique et surtout pour le cas de perturbations ayant des caractéristiques variables dans le temps. Le système à utiliser doit donc être adaptatif afin de faire face aux variations. Les solutions proposées dans ([Goodwin & Sin, 1984; Widrow & Stearns, 1985; Cowan & Grant, 1985; Bellanger, 1987; Alexander, 1986; Honig & Messerschmitt, 1986; Haykin, 1991; J.R. Treichler & Larimore, 1987]) ajustent les coefficients du régulateur en temps réel afin de minimiser un signal d'erreur à définir (la sortie à contrôler dans la majorité des cas). Pour ce faire, des filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) ou filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR) ont été réalisés, que ce soit en commande par contre-réaction (*feedback*) ou en compensation de perturbations mesurables (*feedforward*).

1.2 Description des Problèmes traités

Cette section décrit brièvement les problèmes à traiter dans cette thèse pour le rejet de perturbations vibratoires.

Ce travail se décompose naturellement en deux parties, selon la stratégie de commande et le type de perturbations (vibrations) à éliminer.

- *Problème de commande en boucle fermée pour le rejet de perturbations bandes étroites :* Le schéma de commande à adopter est présenté dans la figure 1.2. L'objectif est alors de synthétiser une commande adaptative afin de rejeter les perturbations, multi-sinusoïdales, en sortie du procédé.
- *Problème de commande par anticipation pour le rejet de perturbations mesurables bandes larges :* Le schéma de commande est présenté dans la figure 1.3. L'objectif est de proposer des algorithmes adaptatifs pour l'atténuation des perturbations en présence de couplage mécanique.

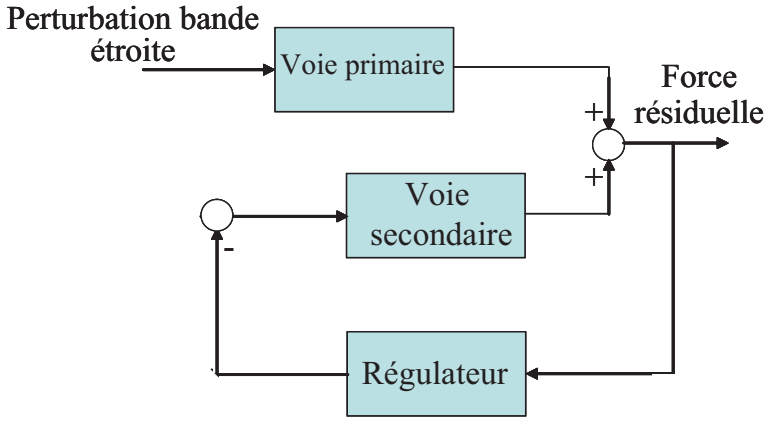


FIG. 1.2 – Schéma bloc pour le problème de contrôle actif par contre réaction

1.2.1 Commande par contre réaction pour le rejet de perturbations multi-sinusoïdales

L'utilisation d'une structure de commande en contre réaction "feedback" est généralement motivée par l'absence d'une mesure d'un signal fortement corrélé avec la perturbation originale. Et c'est pour cette même raison qu'on n'utilise pas de compensation par action anticipatrice "feedforward".

L'entrée du régulateur pour cette stratégie de commande, est la mesure du capteur, affectée par la voie primaire et la voie secondaire, qu'on commande.

La perturbation étant variable dans le temps, l'objectif est de minimiser son effet sur la sortie, d'une manière adaptative. Ceci revient à adapter les paramètres du régulateur

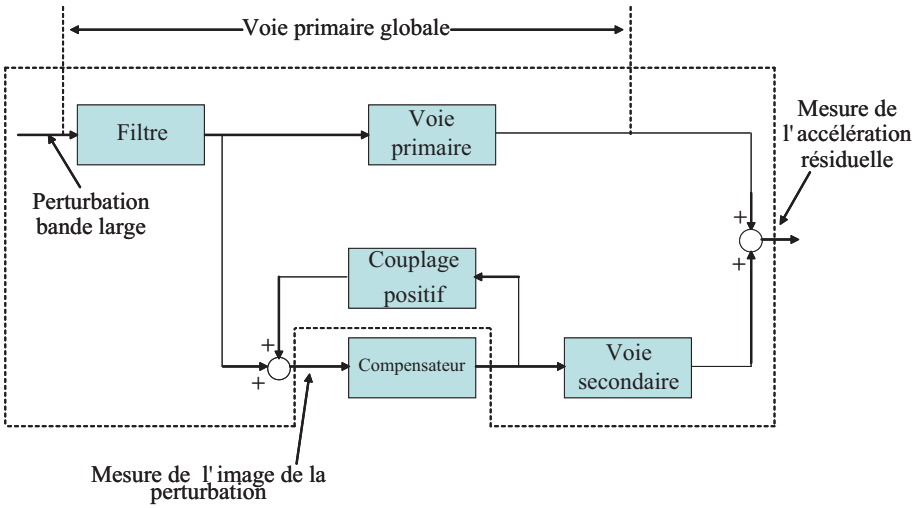


FIG. 1.3 – Schéma bloc pour le problème de contrôle actif par action anticipatrice

après chaque instant d'échantillonnage.

1.2.2 Commande par action anticipatrice pour le rejet de perturbations bandes larges

Cette structure de commande est la plus utilisée, quand on a accès à une mesure fortement corrélée avec le signal de la perturbation. Le besoin d'utiliser un algorithme adaptatif est motivé par la possibilité d'évolution du procédé de la voie primaire, ou bien du changement des caractéristiques de la perturbation (bande fréquentielle, amplitude ...etc).

L'objectif pour ce type de structure de commande est d'adapter les paramètres du compensateur, afin de minimiser la valeur de la sortie à contrôler, tout en tenant compte de la stabilité de la boucle fermée entre le compensateur et le couplage positif qui apparaît quand on excite le procédé (voir figure 1.3).

1.2.3 Commande hybride (feedback + feedforward) pour le rejet de perturbations bandes larges

La structure considérée est présentée dans la figure 1.4. Elle permet l'utilisation de deux régulateurs distincts

- Régulateur par contre réaction fixe : afin de rejeter une partie de la perturbation sur la sortie de la voie secondaire.
- Régulateur par action anticipatrice adaptatif : afin d'optimiser la minimisation du signal de sortie en tenant compte de la présence du régulateur en "feedback".

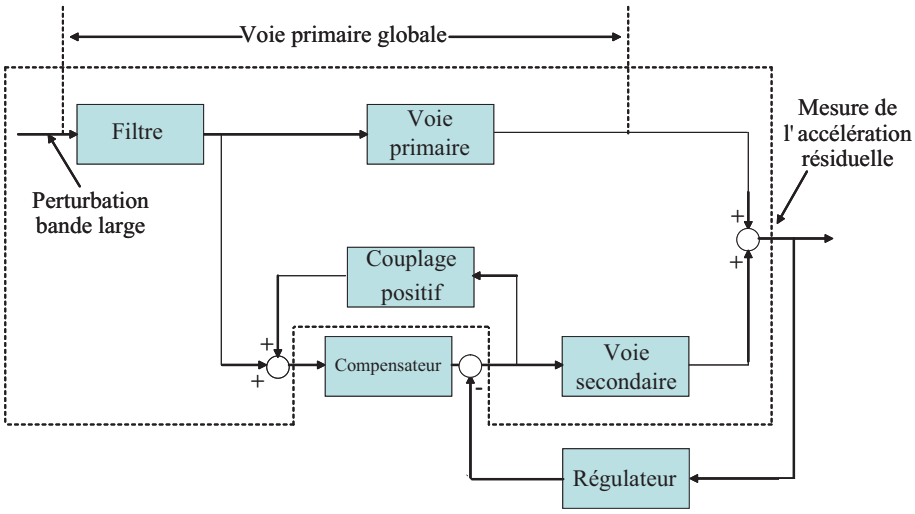


FIG. 1.4 – Schéma bloc pour le problème de contrôle actif hybride (feedback & feedforward)

1.3 Vue d'ensemble sur le rejet adaptatif de perturbation

Suivant les problèmes à traiter mentionnés auparavant dans le cadre de contrôle actif de vibrations/bruit, ce travail se décompose naturellement en deux grandes parties : Rejet de perturbations bandes étroites essentiellement en contre réaction "feedback" et rejet de perturbations bandes larges avec action anticipatrice "en feedforward".
Cette section est dédiée à une brève étude bibliographique des différents et importants algorithmes et structures utilisés dans la littérature pour chacune des deux parties indépendamment l'une de l'autre.

1.3.1 Rejet de perturbation bande large en feedforward

La majorité des systèmes de contrôle actif de vibration en "feedforward" pour le rejet de perturbations bandes larges, sont basés sur les algorithmes adaptatifs FxLMS (Filtered-X Least Mean Square) proposés indépendamment dans [Burgess, 1981] et [Widrow et al., 1981], ou FuLMS (Filtered-U LMS) proposés par Eriksson dans [Eriksson et al., 1987]. Ces algorithmes ont eu plusieurs applications telles que la suppression de bruit sonore à l'intérieur des avions [Billoud, 2003; Borchers, 1994].
Les deux algorithmes ont été conçus pour le contrôle actif de bruit en "feedforward" pur sans prendre en considération un éventuel couplage mécanique. Dans l'algorithme FxLMS, le filtre considéré est un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR), alors que pour l'algorithme FuLMS, le filtre est à réponse impulsionnelle infinie (IIR). Les coef-

ficients du filtre sont adaptés à chaque instant d'échantillonnage par un algorithme des moindres carrés (LMS), en utilisant la mesure de l'image de la perturbation [Widrow & Hoff, 1960]. Le régresseur est construit en filtrant le signal de l'image de la perturbation (et aussi le signal de commande pour l'algorithme FuLMS) par un modèle de la voie secondaire. D'où l'appellation "Filtered-X" et "Filtered-U" LMS. Ceci est motivé par le fait que la voie secondaire change la surface de la fonction coût et le gradient estimé doit être ajusté convenablement.

L'algorithme FuLMS pourrait se voir comme une extension pour un filtre IIR de l'algorithme FxLMS. Il a été proposé dans [Eriksson et al., 1987] pour une application où il existe un couplage entre le signal de commande et le signal de reference (l'image de la perturbation), mais aucune analyse de convergence n'a été fournie. Il peut être utilisable aussi dans les systèmes de contrôle actif de vibrations, là ou les modes de vibrations sont très faiblement amortis pour éviter l'utilisation d'un filtre FIR d'une très grande complexité pour l'algorithme FxLMS.

Convergence et robustesse des algorithmes FxLMS et FuLMS. Les algorithmes FxLMS et FuLMS ont été longtemps étudiés dans la littérature et quelques avantages et inconvénients ont été révélés. Il a été démontré dans [Hassibi et al., 1995] que l'algorithme LMS est un H_∞ optimal. Les études n'ont pas généralisé cette propriété pour les algorithmes FxLMS et FuLMS mais il est raisonnable de supposer que les caractéristiques en performance et robustesse soient gardées pour ces deux algorithmes basés sur le LMS.

Les conditions de convergence de l'algorithme FxLMS ont été mises à l'évidence dans [Ren & Kumar, 1989]. L'analyse a été faite sur la base de l'approche de l'équation différentielle ordinaire (ODE) développée par Ljung [Ljung, 1977]. Le résultat est que, sous la condition que le modèle de la voie secondaire soit proche du système réel dans le sens où une certaine condition de stricte réelle positivité (Condition SPR) soit vérifiée, les paramètres du filtre convergeraient asymptotiquement vers leur valeur optimale. Par conséquent, cette condition de SPR est une borne de la robustesse en stabilité par rapport aux incertitudes sur le modèle de la voie secondaire.

L'analyse de l'algorithme FuLMS est plus compliquée car le signal de commande ne dépend pas linéairement des paramètres du filtre. En utilisant la même approche ODE, une nouvelle condition de SPR résulte afin que les paramètres convergent asymptotiquement vers la valeur optimale. En se basant sur ces résultats, les conditions de SPR pour le cas mono-variable et multi-variables ont été données dans [Wang & Ren, 1999; Mosquera & Perez-Gonzalez, 2000] respectivement. Ces deux références supposent que toute correlation entre l'image de la perturbation et le signal de commande est supprimée, par ce qu'on appelle la simplification parfaite (perfect cancellation).
En pratique, toute simplification n'est jamais parfaite. C'est ce qui pourrait engendrer une déstabilisation du système de compensation après un certain temps. En plus de ces

inconvénients, aucune étude n'a traité la stabilité de ces deux algorithmes dans le cas stochastique avec un gain d'adaptation qui tend vers zéro.
Cette thèse propose des algorithmes de contrôle actif de vibrations/bruit qui prennent en considération ce couplage (positif) entre la mesure de l'image de la perturbation et le signal de commande ainsi que l'étude de stabilité et de convergence dans les cas déterministe et stochastique, avec une illustration expérimentale sur une structure de contrôle actif de vibrations. Une étude comparative expérimentale entre les algorithmes proposés et l'algorithme FuLMS est aussi donnée.

La première partie de ce mémoire est dédiée à une étude sur le rejet de perturbations bande large en feedforward, en utilisant des algorithmes adaptatifs et non-adaptatifs. Ces algorithmes sont illustrés par des résultats expérimentaux sur une structure de contrôle actif de vibrations.

1.3.2 Vue d'ensemble sur le rejet de perturbations bandes étroites

Un des problèmes majeurs et basiques en automatique est l'atténuation ou le rejet de perturbations inconnues sans pouvoir les mesurer. Dans le cadre de notre travail, toute perturbation est considérée comme étant le résultat du filtrage d'un bruit blanc ou d'une impulsion de Dirac par le modèle de la perturbation. Même si en général, on pourrait faire l'hypothèse que la structure du modèle de la perturbation peut être connue, ses paramètres, eux sont inconnus et peuvent varier dans le temps. Ces caractéristiques de la perturbation "inconnue et variable dans le temps" nous imposent l'utilisation d'une approche de commande en retour de sortie adaptative.

La commande adaptative classique se concentrait essentiellement et particulièrement sur la construction de lois de commande adaptative quand les paramètres du modèle du procédé sont inconnus et variants dans le temps [Aström & Witenmark, 1995; Ioannou & Sun, 1996; Landau et al., 1997; S. Fekri & Pasqual, 2006]. Ce qui revient à adapter en temps réel les paramètres du régulateur, afin de pouvoir faire face aux changements de modèle. Cependant dans l'approche présentée dans ce travail, le modèle dynamique du procédé est connu (peut être obtenu par identification paramètrique ou par une modélisation mathématique) et supposé invariant dans le temps. L'objectif est alors, le rejet des perturbations caractérisées par des modèles inconnus et variants dans le temps. Cette approche et vision de la commande est souvent présentée comme une "régulation adaptative". Dans ce qui suit, on essayera de caractériser la commande adaptative et la régulation adaptative.

Dans la commande adaptative classique, l'objectif est la poursuite et l'atténuation de perturbation en présence de paramètres du procédé qui sont inconnus et variant dans

le temps. Donc la commande adaptative se concentre sur l'adaptation du régulateur par rapport aux variations des paramètres du modèle du procédé. Le modèle de la perturbation est quand à lui, supposé connu et invariant. Seulement le niveau d'atténuation dans une bande de fréquence est imposé (avec une exception pour les perturbations DC quand le régulateur pourrait inclure un intégrateur).
Quelques remarques très importantes sont à mentionner :

- Aucun effort de calcul n'est fourni pour l'estimation en temps réel du modèle de la perturbation.
- La perturbation produit en général un effet indésirable sur la boucle d'adaptation (dérive des paramètres, instabilité,...etc) et une classe d'algorithme d'adaptation robuste a été développée afin de réduire l'impact négatif de la perturbation sur la boucle d'adaptation.

Pour la régulation adaptative, l'objectif est de supprimer (rejeter) asymptotiquement l'effet des perturbations inconnues et variant dans le temps. Donc la régulation adaptative se concentre sur l'adaptation des paramètres du régulateur par rapport aux variations des paramètres du modèle de la perturbation. Le modèle du procédé est pour cette approche supposé connu. Il est aussi supposé que les petites variations du modèle du procédé peuvent être compensées par la synthèse d'une commande robuste.
De même que pour la commande adaptative, quelques remarques importantes méritent d'être citées :

- Aucun effort de calcul n'est fourni pour l'estimation en temps réel du modèle du procédé.
- Aucune mesure indirecte de la perturbation (ou d'une image de la perturbation) n'est utilisée.

Pour être plus spécifique, en régulation adaptative les perturbations considérées peuvent être définies comme des perturbations "à bande finie". Ceci inclut une ou plusieurs perturbations bande étroite ou perturbations sinusoïdales. Par ailleurs, et pour des raisons de robustesse, les perturbations doivent être situées dans des zones fréquentielles où le procédé possède suffisamment de gain.

Des solutions pour ce problème, provenant du fait qu'une "image" de la perturbation peut être obtenue en utilisant un capteur additionnel, ont été proposées par la communauté du traitement du signal et un nombre d'applications sont présentées ([Elliott & Nelson, 1994; Elliott & Sutton, 1996; Beranek & Ver, 1992; Fuller et al., 1995]). Cependant, ces solutions (inspirées par la technique de Widrow pour le rejet adaptatif de bruit ([Widrow & Stearns, 1985])) ignorent les possibilités offertes par la commande des systèmes en contre-réaction (feedback) et nécessitent l'utilisation d'un capteur additionnel. Le principe de cette solution de traitement du signal pour le rejet adaptatif de perturbations inconnues, est le fait que le capteur additionnel pourrait donner une mesure, fortement corrélée avec la perturbation. Cette information est appliquée en entrée de commande du procédé via un filtre adaptatif (en général un filtre à réponse impulsion-

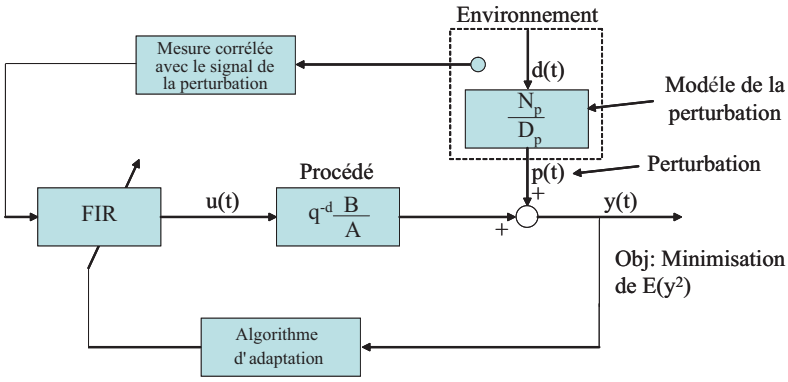


FIG. 1.5 – Approche "Traitement du signal" pour le rejet de perturbations inconnues

nelle finie - FIR) qui adapte ses paramètres afin de minimiser l'effet de la perturbation sur la sortie. Les inconvénients de cette approche sont :

- L'utilisation d'un capteur additionnel.
- Le choix difficile de l'emplacement de ce capteur (c'est probablement, l'inconvénient principal de cette approche).
- L'adaptation d'un nombre important de paramètres.

Pour avoir un rejet de perturbations (au minimum asymptotiquement) sans avoir besoin de les mesurer, une solution en *feedback* doit être considérée. Comme mentionné auparavant, dans notre contexte, on suppose que la perturbation est le résultat de filtrage d'un bruit blanc ou d'une impulsion de Dirac par un "modèle de la perturbation" [1]. Ce problème de modèle du procédé connu et perturbations inconnues à été traité dans un nombre de publications ([Bodson & Douglas, 1997; Amara et al., 1999*a*; Amara et al., 1999*b*; Valentinotti, 2001; Marino et al., 2003; Ding, 2003; Gouraud et al., 1997; Hillerstrom & Sternby, 1994; Landau et al., 2005]) entre autres. Parmi toutes les approches considérées afin de résoudre ce problème, certaines méritent d'être mentionnées :

1. Utilisation du principe du modèle interne ([Francis & Wonham, 1976; Johnson, 1976; Bengtsson, 1977; Tsypkin, 1997; Valentinotti, 2001; Amara et al., 1999*a*; Amara et al., 1999*b*; Gouraud et al., 1997; Hillerstrom & Sternby, 1994; Landau et al., 2005]).
2. Utilisation d'un observateur de la perturbation ([Marino et al., 2003; Ding, 2003; Serrani, 2006]).
3. Utilisation de la structure en boucle "phase-locked" considérée dans les systèmes de communication ([Bodson & Douglas, 1997; Bodson, 2005]).

Dans ce qui suit, nous passerons brièvement en revue ces résultats.

[1] Tout le long de ce travail, l'ordre du modèle de la perturbation est supposé connu mais les paramètres du dit modèle sont inconnus variants dans le temps (l'ordre pourrait être estimé à partir des données si nécessaire).

Utilisation du principe du modèle interne : Des solutions en contre-réaction pour le rejet (atténuation) de perturbations inconnues, basées sur le principe du modèle interne, ont été aussi présentées dans [Amara et al., 1999*a*; Amara et al., 1999*b*; Valentinotti, 2001] (le modèle du procédé est considéré connu). Les approches présentées dans ces articles sont similaires à nos travaux.

Approche 1 : Dans [Amara et al., 1999*b*], une synthèse basée sur un ensemble de régulateurs stabilisants utilisant la paramètrisation Youla-kucera est implémentée pour résoudre le problème d'attenuation du bruit sur un conduit acoustique. L'approche de synthèse est présentée dans [Amara et al., 1999*a*]. Le procédé considéré est constitué d'un conduit, d'une paire de hauts parleurs, d'une paire de microphones et leurs amplificateurs, et d'un filtre anti-repliements. Le premier haut-parleur sert à générer le signal de bruit, le deuxième sert à générer un signal de commande afin d'éliminer l'effet du bruit sur un endroit précis du conduit (haut-parleurs de perturbations et de commande). Les deux microphones sont utilisés pour la mesure et l'évaluation des performances. Le modèle du procédé est obtenu par identification paramètrique.
L'expérience consiste en l'excitation du haut-parleur de perturbation avec un signal sinusoïdal et le lancement du contrôleur adaptatif afin d'éliminer le bruit sur le microphone de performances. Le filtre de Youla-Kucera à ajuster en ligne, est un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) du premier ordre. Les résultats expérimentaux montrent les performances du système adaptatif, avec de bonnes performances seulement sur une région fréquentielle précise de la perturbation. Dans quelques zones de fréquences, le système adaptatif arrive à réaliser entre 20 et 50dB de reduction sur le signal de densité spectrale de puissance PSD, avec une bonne atténuation globale du signal. Dans d'autres zones de fréquences, les résultats ne sont pas aussi bons. Il a été conclu que les non-linéarités non modélisées sont responsables de la détérioration des résultats du système adaptatif réel par rapport aux simulations.

Approche 2 : Un algorithme similaire à celui utilisé dans ce travail, basé sur la commande en contre-réaction pour le rejet de perturbation, est présenté dans [Valentinotti, 2001]. L'application considérée pour illustrer les performances de l'algorithme utilisé, est un procédé de fermentation nourri d'une manière discontinue. C'est un exemple de perturbation instable sur un temps fini.

L'objectif de cette application est de maximiser la productivité de biomasse dans le réacteur. Par conséquent, la concentration de substrat dans le réacteur nécessite d'être maintenue à une valeur critique pour le maintien de la concentration d'ethanol. Cependant, la concentration de substrat est inconnue a priori est pourrait changer d'un essai à un autre.

Ainsi, le problème de maximisation de production de biomasse est converti en un problème de régulation de la concentration d'éthanol. Le procédé est considéré comme un intégrateur qui produit constamment de l'éthanol. La consommation de substrat par

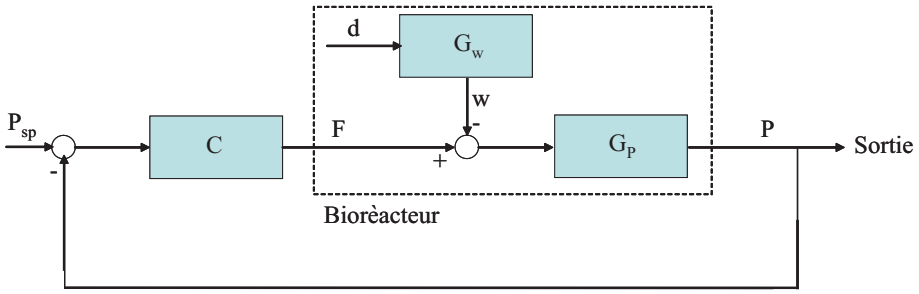


FIG. 1.6 – Stratégie de commande pour le procédé de fermentation

cellule est modélisée comme une perturbation exponentielle que le régulateur doit rejeter. La méthodologie a été mise en oeuvre avec succès sur un banc d'essai expérimental de laboratoire. L'objectif de commande est donc de maintenir la concentration du produit fermenté constante.

La stratégie de commande est présentée dans la figure 1.6. Le régulateur "C" génére la vitesse d'injection du substrat "F" qui est capable de maintenir l'evolution exponentielle des cellules et la production désirée d'ethanol. Le régulateur est alors capable de rejeter la perturbation de consommation exponentielle de substrat "w", si la vitesse d'injection de substrat est suffisante.Une méthode adaptative de rejet de perturbation est utilisée afin de contrôler la fermentation proche de son point de fonctionnement optimal.

Le modèle linéaire dérivé a été utilisé avec succès pour l'implémentation de la méthodologie de rejet de perturbation adaptative. La concentration d'ethanol dans le bio-réacteur est l'unique mesure requise. Le seul paramètre estimé en ligne est la vitesse exponentielle de croissance des cellules. Les changements de la structure de la perturbation sont automatiquement compensés.

Utilisation d'observateurs adaptatifs : La synthèse d'un compensateur basé sur un observateur adaptatif pour le rejet additif de perturbations sinusoïdales avec un déphasage, amplitude et fréquence inconnus est présentée dans [Marino et al., 2003]. Dans cette approche, le système est considéré asymptotiquement stable, linéaire et observable, et ses paramètres sont supposés connus. A l'inverse des autres approches mentionnées et à celle utilisée dans ce mémoire, les perturbations dans [Marino et al., 2003] sont supposées agir en entrée du procédé.
Pour un système d'ordre n, l'ordre du compensateur qui assure une convergence asymptotique pour le rejet de perturbation sinusoïdale est $2n + 6$. Les paramètres estimés de la perturbation sinusoïdale sont : son amplitude, fréquence et sa phase. Il est démontré que l'erreur du système en boucle fermée basée sur l'observateur adaptatif est globalement asymptotiquement stable. La technique de compensation basée sur un observateur adaptatif présentée dans [Marino et al., 2003] est illustrée sur un

exemple pris de [Bodson & Douglas, 1997]. Afin de tester la robustesse de la stratégie de commande, des perturbations plus générales ont été considérées, comparées à la perturbation considérée dans [Bodson & Douglas, 1997]. Par conséquent, le biais et le bruit additionnel non modélisés ont été pris en compte, aucun des deux n'a été traité dans [Bodson & Douglas, 1997]. Les performances en simulation sont intéressantes. Même si cette technique ne fait pas directement référence au "principe du modèle interne", on pourrait bien remarquer que via l'observateur, le modèle de la perturbation est incorporé dans le régulateur.
Une extension des précédentes approches avec une référence directe au "principe du modèle interne" pour le cas de procédé non-linéaires est discutée dans [Ding, 2003].

Utilisation de la structure "phase-locked" : Une approche directe pour la rejet de perturbations sinusoïdales de fréquences inconnues, basée sur l'intégration d'une boucle "phase-locked" pour la commande en contre réaction adaptative avec un modèle de procédé connu, est présentée dans [Bodson & Douglas, 1997]. L'estimation de la fréquence de la perturbation et son élimination se font simultanément utilisant un seul signal d'erreur. L'élimination des composantes hautes fréquences dans le système est faite en utilisant un compensateur passe-bas, et aucun autre filtrage n'est nécessaire. La connaissance de la réponse fréquentielle du procédé dans la région fréquentielle considérée est requise. Le système présenté dans [Bodson & Douglas, 1997] est capable de compenser les perturbation sinusoïdales. Les résultats expérimentaux sont mentionnés dans [Bodson, 2005].

Étant donné que les paramètres du modèle de la perturbation sont inconnus, toutes ces approches nécessitent une implémentation adaptative qui peut être *directe* ou *indirecte*.

Pour l'utilisateur et en tenant compte du type d'exploitation pour les installations existantes des systèmes adaptatifs de compensation de vibrations, deux modes de fonctionnement sont à considérer :

- ***Mode de fonctionnement adaptatif :*** L'adaptation se fait continuellement avec un gain d'adaptation maintenu à une valeur non nulle, et le régulateur est mis à jour après chaque instant d'échantillonnage.
- ***Mode de fonctionnement en auto-ajustement :*** La procédure d'adaptation ne commence que sur demande ou que les performances désirées ne sont plus satisfaites. Un gain d'adaptation décroissant (vers zéro) est utilisé. Le régulateur est alors mis à jour à chaque pas d'échantillonnage une fois l'adaptation enclenchée, ou gelé à une valeur et mis à jour une fois l'estimation des nouveaux paramètres terminée.

En utilisant le principe du modèle interne, le régulateur doit contenir le modèle de la perturbation ([Francis & Wonham, 1976; Johnson, 1976; Bengtsson, 1977; Tsypkin,

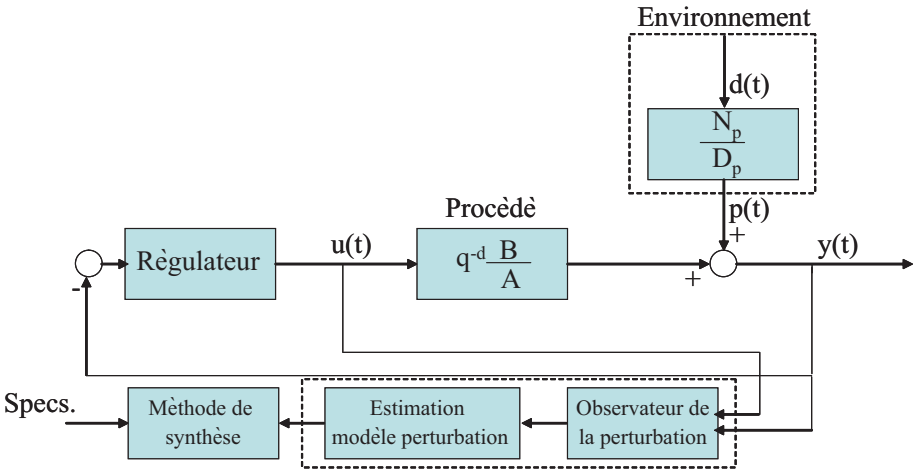


FIG. 1.7 – Schèma de commande adaptative indirecte pour le rejet de perturbations inconnues

1997]). Donc le rejet de perturbations inconnues se résume en un problème d'adaptation du modèle interne du régulateur et sa re-synthèse en temps réel.

Un moyen pour résoudre ce problème est d'essayer d'estimer en temps réel, le modèle de la perturbation et de re-calculer le régulateur, qui doit inclure le modèle estimé de la perturbation (comme une partie fixe du régulateur). La perturbation est inconnue et son modèle nécessite d'être estimé, alors que le modèle du procédé est supposé connu (obtenu par identification). L'estimation du modèle de la perturbation peut être faite en utilisant un algorithme d'estimation paramètrique standard (voir par exemple [Landau et al., 1986; Ljung, 1999]), une fois qu'un bon observateur de la perturbation est construit. Ce qui nous emmène à un système de commande adaptative indirecte. Le principe de cette configuration est illustré par la figure 1.7. La plus grande partie de la consommation en temps de calcul de ce système est due au re-calcul du régulateur à chaque instant d'échantillonnage. La raison est que pour beaucoup d'applications, le modèle du procédé peut être d'une très grande dimension et que bien qu'il soit constant, ce re-calcul du régulateur est obligatoire, vu qu'un nouveau modèle interne est à considérer. Cette approche à été traitée dans [Bodson & Douglas, 1997; Gouraud et al., 1997; Hillerstrom & Sternby, 1994; Landau et al., 2005].

Cependant, en considérant la paramètrisation Youla-Kucera du régulateur (connue aussi sous le nom de la Q-paramètrisation), il est possible d'insérer et ajuster le modèle interne dans le régulateur en ajustant les paramètres du polynôme Q (voir figure 1.8). Il en résulte qu'en présence de perturbations inconnues, il est possible de construire un schéma de commande adaptative directe où les paramètres du polynôme Q sont directement adaptés afin d'avoir le modèle interne désiré sans re-calcul du régulateur (Les polynômes R_0 et S_0 de la figure 1.8 demeurent inchangés). Le nombre des paramètres à adapter directement, est égal au nombre de paramètres du dénominateur du modèle de

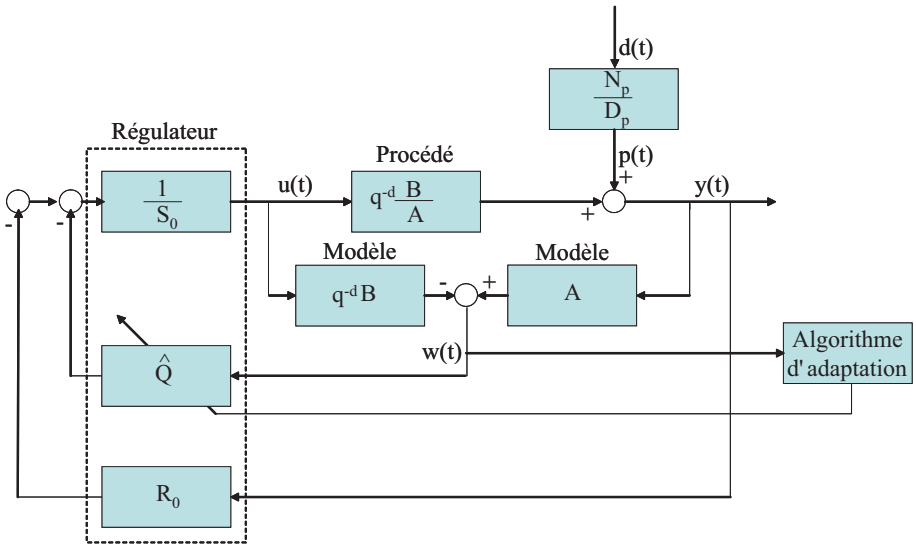


FIG. 1.8 – Schéma de commande adaptative directe pour le rejet de perturbations inconnues

la perturbation. En d'autres termes, la taille de l'algorithme d'adaptation dépendra de la complexité du modèle de la perturbation.

La deuxième partie de ce mémoire est consacrée aux méthodologies de régulation adaptative directe et indirecte pour le rejet de perturbations bande étroite multiple inconnues et variant dans le temps. Ces méthodologies sont illustrées par des résultats en temps réel sur une suspension active à actionneur inertiel. L'approche de commande adaptative directe présentée, utilise la paramètrisation Youla-Kucera pour le calcul du régulateur [Landau et al., 2005; Valentinotti, 2001; Amara et al., 1999*a*]. Pour des raisons d'évaluation des performances et de la complexité, des résultats d'une approche de commande adaptative indirecte basée sur le principe du modèle interne sont aussi présentés.

1.4 Contributions

L'objectif de ce travail de thèse était de proposer, étudier, et tester, en temps réel sur des dispositifs expérimentaux, des algorithmes adaptatifs pour le rejet de perturbations sur des structures flexibles. Les stratégies de commande sont par : contre réaction "feedback", pour des perturbations bandes étroites, et par : action anticipatrice "feedforward", pour des perturbations bandes larges sur une structure possédant une mesure d'une image de la perturbation.

Les principales contributions de cette thèse ont été divisées en deux parties :

1.4.1 Rejet de perturbation bande large en feedforward :

1. Proposition, étude de stabilité et de convergence, d'algorithmes adaptatifs pour le contrôle actif de vibrations bandes larges en prenant en compte le couplage positif, et application sur une suspension active.
2. Synthèse de régulateur par action anticipatrice H_∞ optimal réduit pour le rejet de perturbations bandes larges.
3. Proposition, étude de stabilité et de convergence, d'algorithmes adaptatifs en "feedforward", en superposition avec un régulateur fixe en "feedback".

1.4.2 Rejet de perturbation bande étroite en feedback :

1. Adaptation et application d'un algorithme adaptatif direct pour le rejet de n-sinusoïdes.
2. Proposition d'un schéma de commande adaptative directe permettant de préserver les parties fixes du régulateur central utilisé.
3. Amélioration de l'algorithme adaptatif indirect proposé dans [Constantinescu, 2001] et [Landau et al., 2005], en rajoutant un observateur de la perturbation.

Première partie

Rejet de perturbations mesurables "bande large" en "*Feedforward*"

Chapitre 2

Plate-forme de contrôle actif de vibrations

2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié exclusivement au système de Contrôle Actif Robuste de Vibrations (CARV) considéré. Les schémas de commande le mettant sous forme d'un système de contrôle actif de vibration commandé en "feedforward" en présence de couplage mécanique sont donnés et expliqués en détails.

La section 2.2 présente la structure mécanique (CARV) utilisée ainsi que les notations et les équations de base. À partir de la description et des notations, les schémas de commande sont présentés.

La section 2.3 présente les démarches de l'identification paramétrique des différentes voies (fonctions de transfert discrètes) qui constituent le système à commander. Certains de ces modèles obtenus seront indispensables aux différents algorithmes de commande (adaptatif ou en hors ligne) qui seront présentés dans les chapitres 3 et 4 ainsi que le chapitre 5. Les autres fonctions de transfert nous seront d'une grande utilité pour l'analyse des performances ainsi que pour les essais de simulation.

2.2 Système de contrôle actif de vibration considéré

Les figures 2.1 et 2.2 représentent un système de contrôle actif de vibrations (AVC) utilisant une mesure fortement corrélée avec le signal de la perturbation et un actionneur inertiel, afin de minimiser la sortie du procédé (accélération résiduelle). Cette structure est représentative de plusieurs situations rencontrées en pratique que ce soit pour le

contrôle actif de bruit à l'instar des casques antibruit, de la réduction du bruit dans les gaines de ventilation ou dans les aéronefs, ainsi que pour d'autres applications de contrôle actif de vibrations telles que la production des semi-conducteurs "wafers" ou dans la réduction de vibrations des hélicoptères.

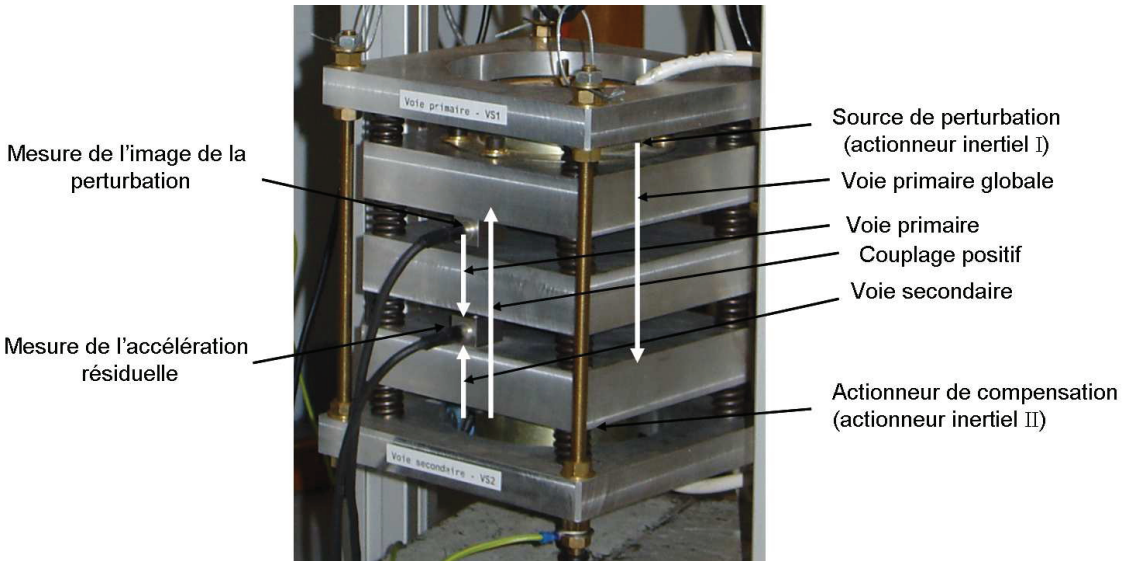


FIG. 2.1 – Photo du procédé de contrôle actif de vibration.

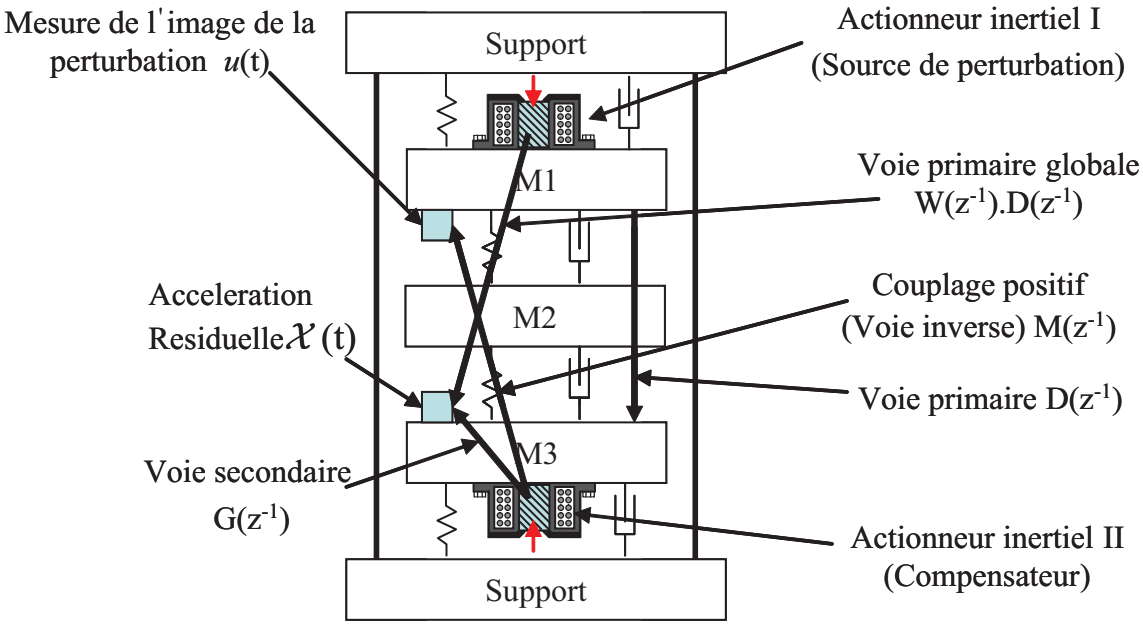


FIG. 2.2 – Schéma du procédé de contrôle actif de vibration.

Le système consiste en trois plaques métalliques mobiles, dénotées (M1, M2, M3) dans la figure 2.2, reliées par des ressorts. La première et la troisième sont aussi reliées par

des ressorts à une partie rigide du système formée par deux autres plaques métalliques (supports) connectées entre elles d'une manière rigide. Les plaques métalliques mobiles (M1 et M3) sont équipées avec des actionneurs inertiels. Celui d'en haut, placé sur M1, sert de générateur de perturbations (actionneur inertiel I de la figure 2.1), et celui d'en bas, placé sur M3, sert à la compensation de ces perturbations (actionneur inertiel II de la figure 2.1). Le système est équipé avec une mesure de l'accélération résiduelle sur la plaque M3, comme sortie du procédé, et d'une mesure de l'image de la perturbation produite par un accéléromètre placé sur la plaque M1.

Une vue d'ensemble de la plate-forme CARV incluant l'outil informatique est donnée dans la figure 2.3.

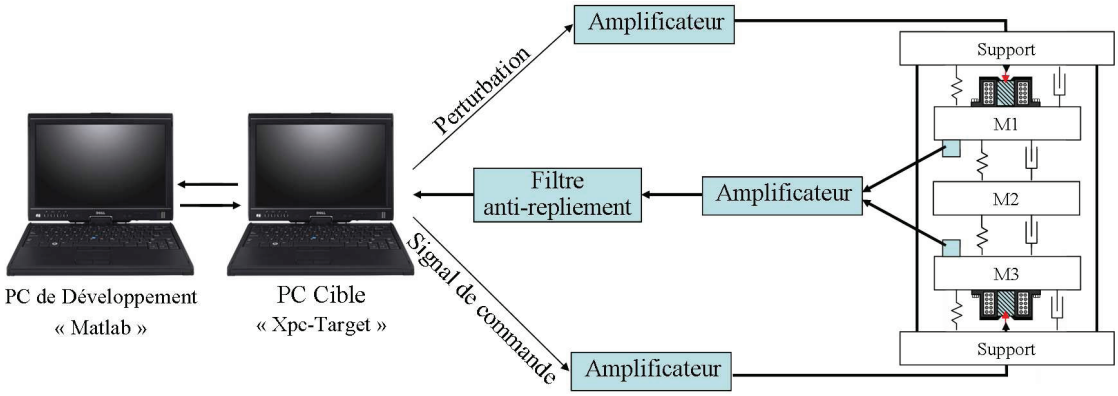
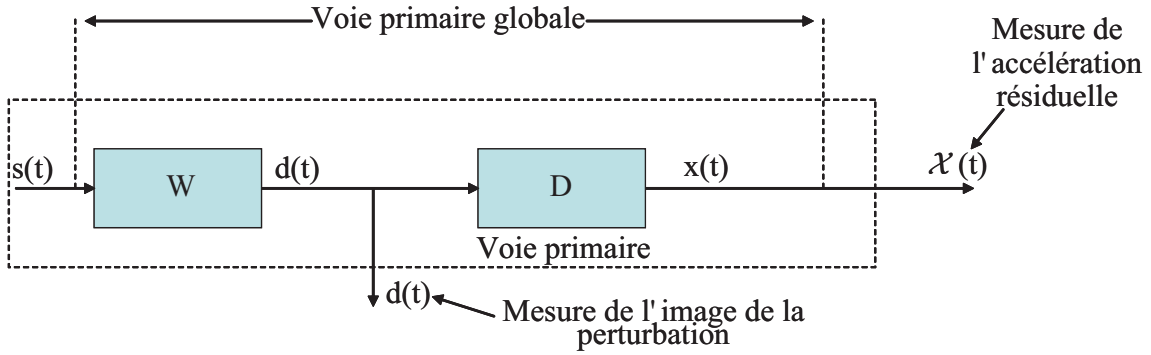


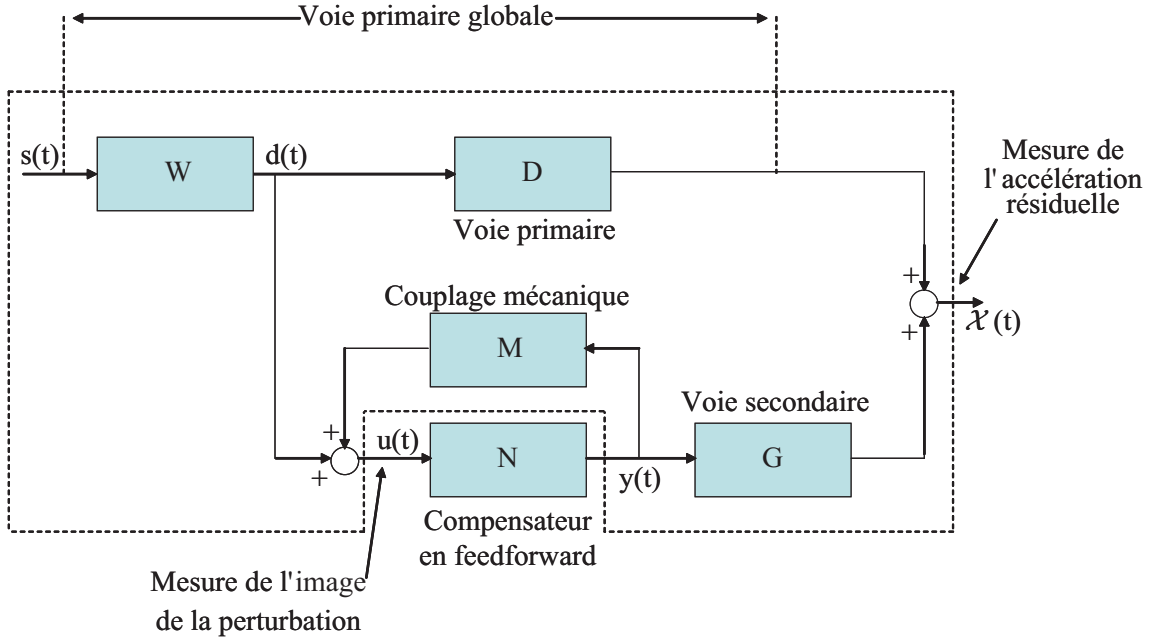
FIG. 2.3 – Vue d'ensemble de la plate-forme CARV.

Les deux actionneurs sont commandés par des tensions d'excitation, délivrées par un ordinateur muni d'un système d'exploitation "temps réel" appelé PC cible, et amplifié par un amplificateur de puissance. Ce PC cible est lui même commandé par un ordinateur, dit de développement, sur lequel les lois de commande sont synthétisées.
Les mesures données par les accéléromètres sont amplifiées et aussi filtrées par un filtre anti-repliement du quatrième ordre ayant une fréquence de coupure $f_c = \frac{f_e}{2.56}$, où f_e représente la fréquence d'échantillonnage.

Les schémas blocs correspondants sous l'effet d'un signal de perturbation $s(t)$ en entrée de l'actionneur I de la figure 2.2, en boucle ouverte et avec le système de compensation sont donnés sur les figures 2.4(a) et 2.4(b), respectivement.
Dans la figure 2.4, $u(t)$ représente la sortie effective mesurée par l'accéléromètre primaire (placé sur M1), et qui servira d'entrée au filtre feedforward $N(z^{-1})$ à implémenter. La sortie de ce filtre est alors le signal de commande et elle est notée par $y(t)$. Elle est appliquée à l'actionneur II par le biais d'un amplificateur de puissance. La fonction de transfert $G(z^{-1})$ appelée chemin secondaire (voir figure 2.2) caractérise les dynamiques,



(a)



(b)

FIG. 2.4 – Système AVC en Feedforward : en boucle ouverte (a) et avec un compensateur en feedforward (b)

de la sortie du filtre $N(z^{-1})$ jusqu'à la mesure de l'accélération résiduelle (amplificateur + actionneur inertiel + dynamiques du système mécanique).
La fonction de transfert $D(z^{-1})$ entre le signal $d(t)$ qui caractérise l'image de la perturbation en l'absence du filtre de compensation $N(z^{-1})$, et la mesure de l'accélération résiduelle $\chi(t)$, caractérise la voie primaire.

Le chemin entre le signal de perturbation $s(t)$, et l'accélération résiduelle $\chi(t)$ est appelé *voie primaire globale*.

Quand le système de compensation est actif, l'actionneur I agit sur l'accélération

résiduelle, mais aussi sur la mesure de l'image de la perturbation. Le signal mesuré $u(t)$ est alors la somme de la mesure corrélée avec la perturbation $d(t)$, obtenue en l'absence de compensation en feedforward, et l'effet de l'actionneur I utilisé pour la compensation, sur cette mesure.
Ce couplage entre la sortie du filtre $N(z^{-1})$ et la mesure de l'image de la perturbation $u(t)$ via l'actionneur de compensation est appelé voie inverse et il est noté par $M(z^{-1})$. Comme indiqué sur la figure 2.4, ce couplage est positif. Ce retour positif non désiré pourrait poser plusieurs problèmes en pratique (source d'instabilités) et rendra la synthèse et l'analyse des compensateurs plus difficile.

Les actionneurs étant commandés en position et les mesures étant des accélérations (forces), les fonctions de transfert $G(z^{-1})$, $M(z^{-1})$ et $W(z^{-1})$ possèdent un double dérivateur.

A ce niveau, quelques remarques importantes sont à mentionner quand le filtre feedforward est absent (boucle ouverte) :

- Des modèles représentatifs des dynamiques des voies secondaire et inverse peuvent être obtenus par identification paramétrique en appliquant des signaux d'excitation appropriés à l'entrée de l'actionneur I.
- Une estimation de la fonction de transfert de la voie primaire peut être obtenue en utilisant la mesure $d(t)$ comme entrée et $\chi(t)$ comme sortie.

L'objectif est de développer des stratégies de contrôle en "feedforward" pour l'estimation des paramètres du filtre $N(z^{-1})$ en ligne et en hors ligne, de telle sorte que l'erreur résiduelle mesurée soit minimisée dans le sens d'un certain critère. Ceci est à réaliser pour des signaux de perturbations $s(t)$, bandes larges ayant des caractéristiques fréquentielles inconnues et variables, et un modèle de la voie primaire inconnu.

La voie primaire est caractérisée par la fonction de transfert asymptotiquement stable suivante :

$$D(q^{-1}) = \frac{B_D(q^{-1})}{A_D(q^{-1})} \tag{2.2.1}$$

où

$$B_D(q^{-1}) = b_1^D q^{-1} + ... + b_{n_{B_D}}^D q^{-n_{B_D}} \tag{2.2.2}$$

$$A_D(q^{-1}) = 1 + a_1^D q^{-1} + ... + a_{n_{A_D}}^D q^{-n_{A_D}} \tag{2.2.3}$$

L'entité non mesurable de la sortie de la voie primaire, quand la compensation est active, est notée $x(t)$.

La voie secondaire est caractérisée par la fonction de transfert asymptotiquement stable suivante :

$$G(q^{-1}) = \frac{B_G(q^{-1})}{A_G(q^{-1})} \tag{2.2.4}$$

où :

$$B_G(q^{-1}) = b_1^G q^{-1} + ... + b_{n_{B_G}}^G q^{-n_{B_G}} = q^{-1} B_G^*(q^{-1}) \tag{2.2.5}$$

$$A_G(q^{-1}) = 1 + a_1^G q^{-1} + ... + a_{n_{A_G}}^G q^{-n_{A_G}} \tag{2.2.6}$$

L'entité non mesurable de la sortie de la voie secondaire est notée par $z(t)$.

Le couplage positif (voie inverse) est caractérisé par la fonction de transfert asymptotiquement stable suivante :

$$M(q^{-1}) = \frac{B_M(q^{-1})}{A_M(q^{-1})} \tag{2.2.7}$$

où :

$$B_M(q^{-1}) = b_1^M q^{-1} + ... + b_{n_{B_M}}^M q^{-n_{B_M}} = q^{-1} B_M^*(q^{-1}) \tag{2.2.8}$$

$$A_M(q^{-1}) = 1 + a_1^M q^{-1} + ... + a_{n_{A_M}}^M q^{-n_{A_M}} \tag{2.2.9}$$

Les modèles identifiés des voies secondaire et inverse ainsi que la voie primaire vont être notés par $\hat{G}$, $\hat{M}$ et $\hat{D}$, respectivement.
Le filtre en feedforward optimal (inconnu) est défini par :

$$N(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} \tag{2.2.10}$$

où :

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + ... + r_{n_R} q^{-n_R} \tag{2.2.11}$$

$$S(q^{-1}) = 1 + S_1 q^{-1} + ... + S_{n_S} q^{-n_S} = 1 + q^{-1} S^*(q^{-1}) \tag{2.2.12}$$

L'entrée du filtre en feedforward est notée par $u(t)$ et elle correspond à la mesure donnée par le capteur primaire (auxiliaire). En l'absence de la boucle de compensation (boucle ouverte), $u(t) = d(t)$.
Ce signal primaire mesuré satisfait l'équation suivante :

$$u(t+1) = d(t+1) + \frac{B_M^*(q^{-1})}{A_M(q^{-1})} y(t) \tag{2.2.13}$$

où $y(t)$ est la commande appliquée à l'entrée de la voie secondaire.
L'équation 2.2.13 caractérise le couplage mécanique.

L'accélération résiduelle mesurée, à minimiser, est définie par :

$$\chi(t+1) = x(t+1) + z(t+1) \tag{2.2.14}$$

2.3 Identification paramétrique

Les modèles des différentes voies du procédé sont obtenus par identification paramétrique avec la même méthodologie utilisée pour un système de suspension active présentée dans [Landau, Constantinescu, Loubat, Rey & Franco, 2001].

La voie secondaire $G(z^{-1})$ a été identifiée en l'absence de la compensation en feedforward. Le signal d'excitation était une SBPA (séquence binaire pseudo aléatoire) générée avec un registre de $N = 10$ et un diviseur de fréquences $p = 4$. Le choix de ce diviseur de fréquences a été motivé par la volonté de privilégier l'identification en basses fréquences ($f \leq \frac{f_e}{4}$), où sont concentrés les différents modes de vibrations du système.
Les ordres estimés du modèle sont $n_{B_G} = 15$, $n_{A_G} = 13$.
Les meilleurs résultats, après validation, étaient obtenus avec la méthode des moindres carrés récursifs étendus.
La caractéristique fréquentielle de la voie secondaire obtenue est présentée dans la figure 2.5 (ligne continue). Il existe plusieurs modes de vibrations très faiblement amortis. Le premier mode est à $46.56Hz$ avec un amortissement de 0.013, le second à $83.9Hz$ avec un amortissement de 0.011 et le troisième est à $116Hz$ avec un amortissement de 0.014. Ce système possède aussi une paire de zéros complexes très peu amortis à $108Hz$ avec un amortissement de 0.021, et deux autres zéros sur le cercle unité correspondant au double dérivateur.

La voie primaire $D(q^{-1})$ a été identifiée en l'absence de compensation en feedforward en utilisant $d(t)$ comme signal d'entrée et la mesure $\chi(t)$. La perturbation $s(t)$ était une SBPA ($N = 10$ et un diviseur de fréquences de $p = 2$). Les ordres du modèle obtenu sont $n_{B_D} = 26$, $n_{A_D} = 26$. La caractéristique fréquentielle est présentée dans la figure 2.5 (ligne discontinue). Ce modèle pourrait être utilisé pour la synthèse de compensateur en feedforward en hors ligne, pour les simulations, et aussi pour l'évaluation détaillée des performances des algorithmes adaptatifs.
A noter que la voie primaire possède une importante résonance à $108Hz$, exactement à la fréquence où la voie secondaire possède une paire de zéros très faiblement amortis (pas de gain). Donc et pour des raisons de robustesse, il faut éviter de chercher à obtenir une bonne atténuation autour de cette fréquence critique.

La voie inverse $M(q^{-1})$ a été identifiée en l'absence du filtre de compensation en feedforward avec la même SBPA que pour $G(q^{-1})$ ($N = 10$ et un diviseur de fréquences, $p = 4$) appliquée sur $y(t)$ et la mesure considérée est celle donnée par le capteur primaire $u(t)$. Les ordres du modèle identifié sont $n_{B_M} = 15$, $n_{A_M} = 13$.
La caractéristique fréquentielle de la voie inverse obtenue $\hat{M}(q^{-1})$ est présentée dans la figure 2.6 (pointillés). De même que pour $G(q^{-1})$, il existe plusieurs modes de vibrations très faiblement amortis à $46.20Hz$ avec un amortissement de 0.045, à $83.9Hz$ avec un amortissement de 0.01 et à $115Hz$ avec un amortissement de 0.014 et quelques autres

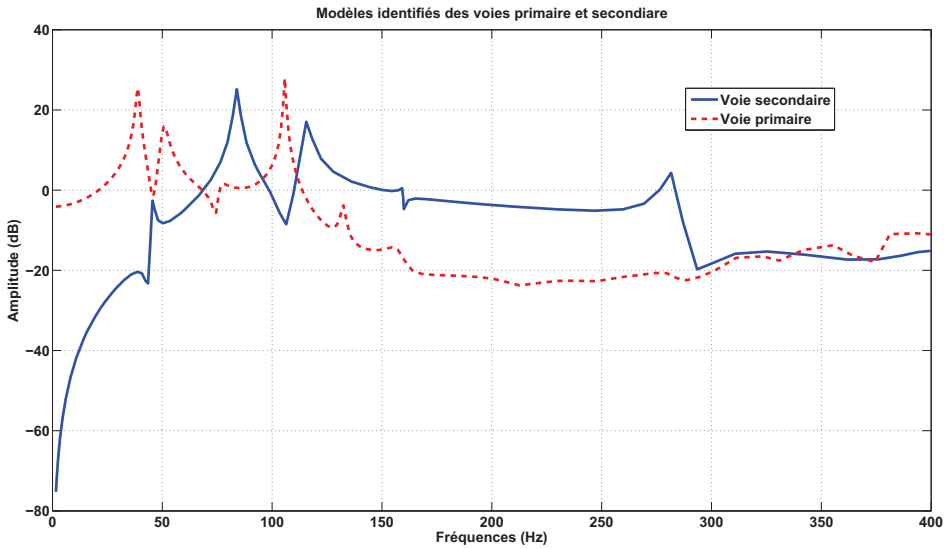


FIG. 2.5 – Caractéristiques fréquentielles des modèles des voies primaire et secondaire

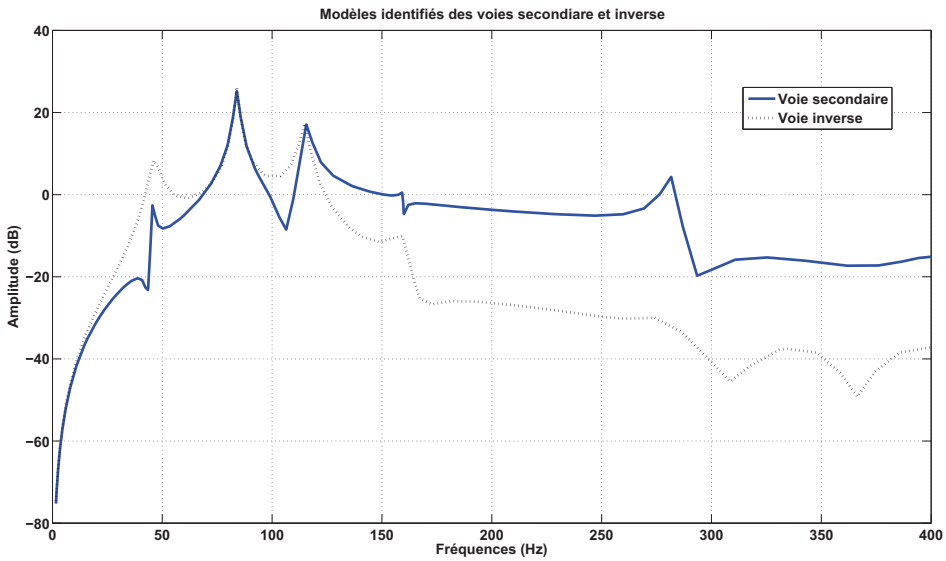


FIG. 2.6 – Caractéristiques fréquentielles des modèles des voies secondaire et inverse

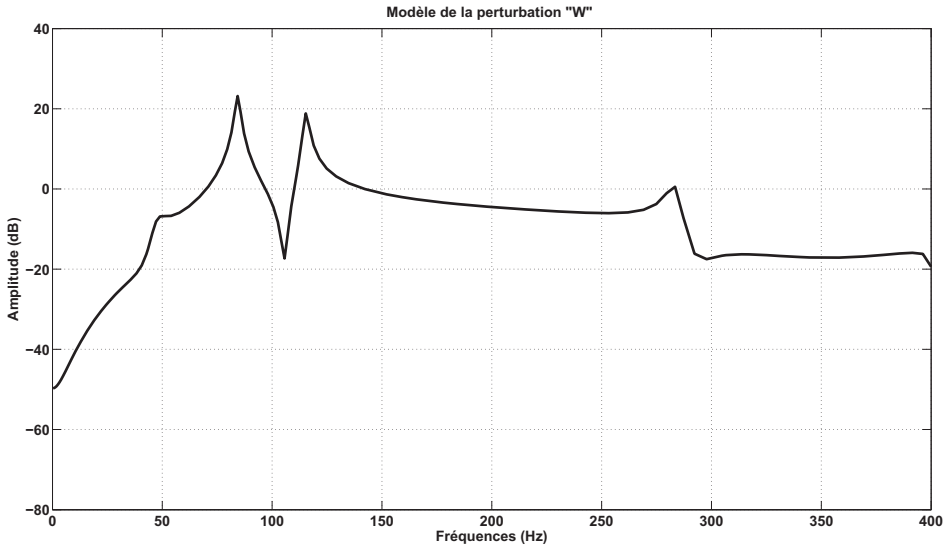


FIG. 2.7 – Caractéristiques fréquentielles du modèle de la perturbation

modes en hautes fréquences. Cette voie possède aussi un double dérivateur.

Le modèle de la perturbation $d(t)$ caractérisé par la fonction de transfert $W(q^{-1})$ entre le signal de la perturbation $s(t)$ et la mesure primaire $d(t)$ en boucle ouverte (sans compensation) a été estimé à partir des caractéristiques fréquentielles du signal $d(t)$. La caractéristique fréquentielle de ce filtre est donnée dans la figure 2.7. De même que pour le modèle de la voie primaire $D(q^{-1})$, le modèle de $W(q^{-1})$ pourrait être utilisé pour la synthèse de régulateur en hors ligne, réaliser des tests en simulation, et pour l'évaluation des performances.

Chapitre 3

Contrôle optimal robuste de type H_∞

3.1 Introduction

Ce chapitre présente une solution linéaire robuste au problème de contrôle actif de vibration, en utilisant une méthodologie de synthèse de régulateur de type H_∞ standard. La configuration utilisée est celle présentée sur la figure 3.2 en présence du couplage positif. Le système va être mis sous forme généralisée standard et des pondérations, sur les importants signaux, sont placées et choisies d'une manière appropriée. Quelques solutions similaires ont été présentées dans [Rotunno & de Callafon, n.d.; Clark & Bernstein, 1998; Paré & How, 1999] en utilisant une approche de type H_2 standard. Le choix de l'approche H_∞ a été motivé par l'objectif de minimiser l'effet d'une perturbation bande large, filtrée par le filtre mécanique W possédant des modes de vibrations très faiblement amortis. La perturbation réelle à minimiser est alors un signal coloré ayant comme allure, la caractéristique fréquentielle du filtre W donnée dans le chapitre 2, d'où l'utilisation de cette approche.

Ce chapitre est structuré comme suit : La section 3.2 est dédiée à la formulation du problème à traiter, et à la mise du système sous forme H_∞ standard. Le choix des pondérations fréquentielles utilisées et la synthèse du compensateur, sont présentés dans la section 3.3. L'ordre du régulateur obtenu étant important, une technique de réduction d'ordre du compensateur H_∞ par identification en boucle fermée est présentée dans la section 3.4. La section 3.5 est dédiée à quelques conclusions.

3.2 Formulation du problème sous forme H_∞ standard

Les figures 3.1 et 3.2 représentent le système de contrôle actif de vibration, en considérant la présence du couplage positif mécanique (voir le chapitre 2 pour plus de détails

sur le système de contrôle actif considéré). L'objectif est de calculer un filtre en "feedforward" $N(q^{-1})$, tel que l'accélération résiduelle mesurée de la plaque M3, soit minimisée.

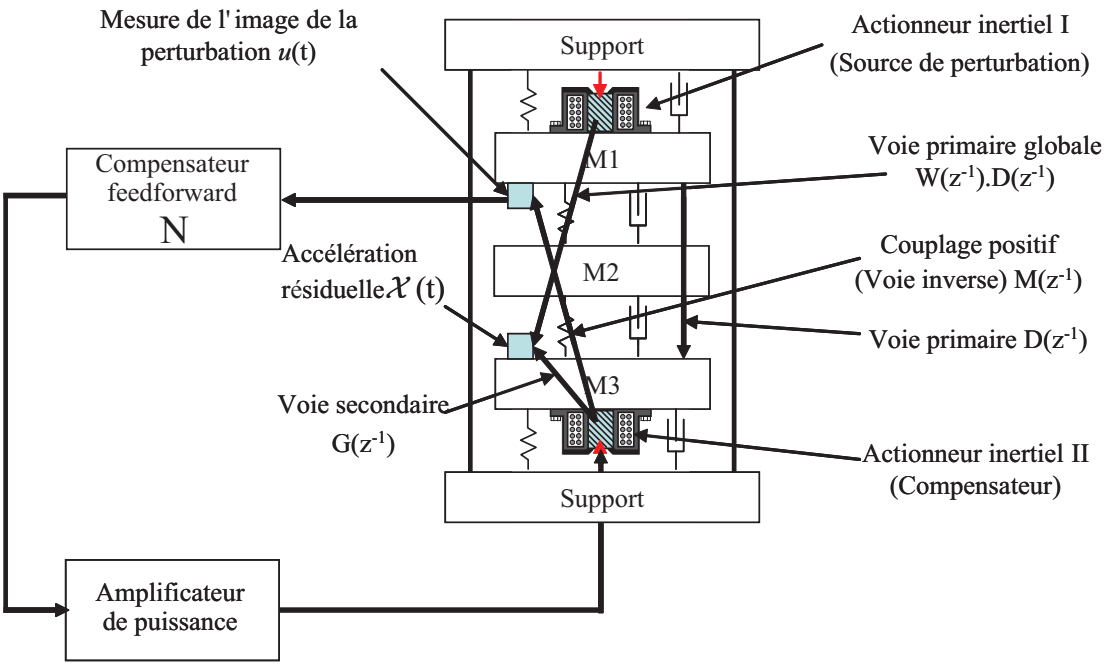


FIG. 3.1 – Schéma de commande en feedforward du procédé CARV

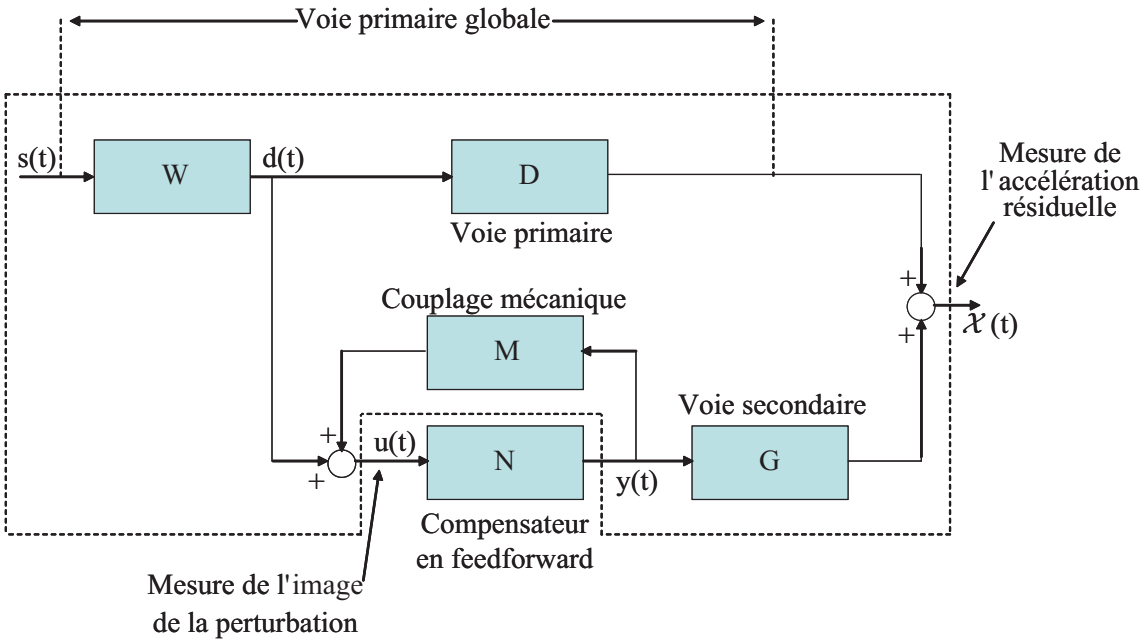


FIG. 3.2 – Schéma de commande en feedforward d'un système de contrôle actif de vibration

Le filtre "feedforward" optimal est défini par :

$$N(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} \tag{3.2.1}$$

où :

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + ... + r_{n_R} q^{-n_R} \tag{3.2.2}$$

$$S(q^{-1}) = 1 + S_1 q^{-1} + ... + S_{n_S} q^{-n_S} = 1 + q^{-1} S^*(q^{-1}) \tag{3.2.3}$$

3.2.1 Problème à traiter

Le problème de contrôle est donc la synthèse d'un filtre $N(q^{-1})$ optimal, de telle sorte que l'effet de la perturbation $s(t)$ sur la sortie $\chi(t)$ soit minimisé. De plus, le filtre en "feedforward" $N(q^{-1})$ doit garantir la stabilité du couplage positif formé par $N(q^{-1})$ et $M(q^{-1})$.

Les paramètres physiques du système étant en général indisponibles, le système est considéré comme une "boite noire" et les modèles correspondant aux différentes fonctions de transferts (M,G,D et W), utilisées pour la synthèse du régulateur sont ceux obtenus par identification paramétrique (voir la section 2.3).
Les modèles obtenus possèdent plusieurs modes de vibration (résonances) et zéros (anti-résonances) très peu amortis. Ces informations seront d'une grande utilité lors des choix des pondérations fréquentielles.

Afin de synthétiser un régulateur fixe en feedforward, un contrôle optimal de type H_∞, prenant en compte la contre réaction positive entre le compensateur N et le couplage mécanique M, a été considéré. Cette loi de commande fera un compromis entre l'énergie de commande, le rejet de la perturbation bande large, et le couplage mécanique. Ceci est réalisé en rajoutant les fonctions de pondération appropriées W_y et W_χ, et aussi un bon modèle W_b du bruit de mesure b (mesuré sur $u(t)$), dans le schéma bloc de la figure 3.2, afin d'obtenir le nouveau schéma de commande présenté dans la figure 3.3.

Les fonctions de pondération[1] sont utilisées pour spécifier les objectifs de commande pour la synthèse du compensateur "feedforward". Le rôle de chaque fonction de pondération est donné comme suit :

- W_y est utilisée afin d'assurer le calibrage de l'entrée du procédé (commande) $y(t)$ sur une valeur désirée, afin d'avoir un niveau de commande suffisamment bas (par rapport aux saturations) pour une amplitude donnée de la perturbation.
- W_χ est utilisée pour définir les zones fréquentielles, où le compensateur doit minimiser l'effet de la perturbation sur la sortie $\chi(t)$.

[1]Les fonctions de pondération représentent l'inverse des fonctions de sensibilités souhaitées.

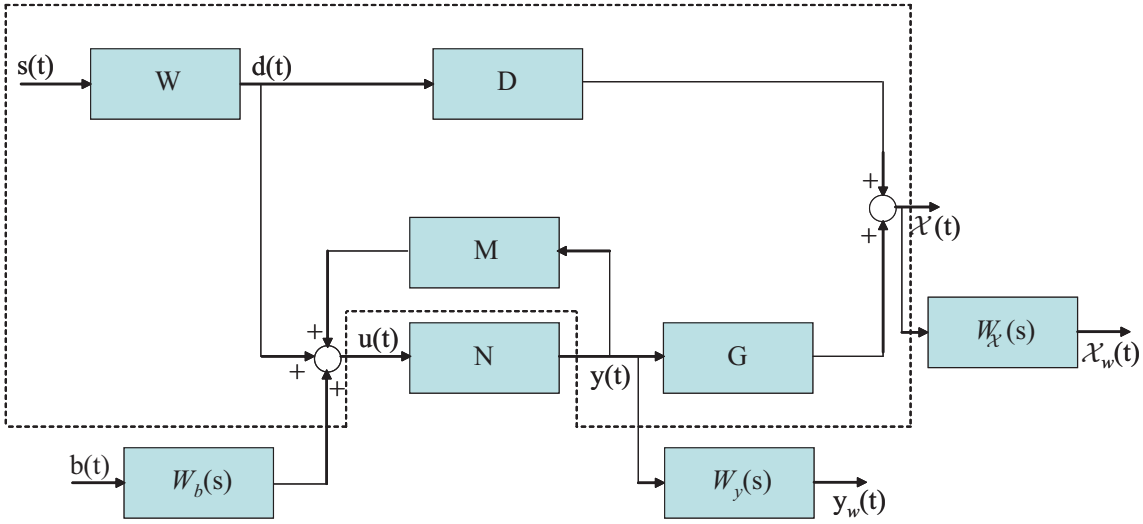


FIG. 3.3 – Structure du modèle de synthèse pour le système de compensation en feed-forward

– W_b est utilisée pour prendre en compte la présence de bruit de mesure $b(t)$ sur la sortie $u(t)$. Elle est déterminée sur la base d'essais en boucle ouverte.

3.2.2 Mise sous forme H_∞ standard

Un fois que les modèles des différentes fonctions de transfert sont disponibles et les fonctions de pondération W_y, W_χ et W_b déterminées, le schéma du procédé généralisé standard présenté dans la figure 3.4 peut être construit à partir de la figure 3.3. Les entrées de la figure 3.4 sont le signal de perturbation $s(t)$ et le bruit de mesure $b(t)$.

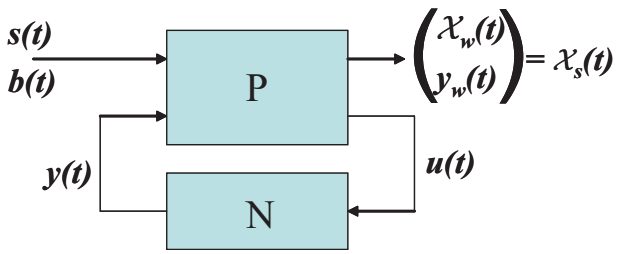


FIG. 3.4 – Procédé généralisé standard avec un compensateur en "feedforward"

Le vecteur de performance $\chi_s(t)$ est construit à partir de la combinaison du signal de l'erreur de sortie, filtré $\chi_w(t) = W_\chi \cdot \chi(t)$ et le signal de commande filtré $y_w(t) = W_y \cdot y(t)$. L'effet de la perturbation sur ce vecteur de performance doit être minimisé.
Se référant à la figure 3.3, le signal de perturbation $s(t)$ est filtré par $W(z^{-1})$ afin de générer le signal d'accélération $d(t)$. Le signal $u(t)$ est la mesure d'accélération qui agit

comme entrée sur le compensateur en "feedforward", et $y(t)$ est l'entrée de commande de l'actionneur utilisée pour la compensation.

En utilisant des calculs algébriques basiques, il est facile de voir que le procédé généralisé standard P est donné par :

$$\begin{bmatrix} \chi_w \\ y_w \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_\chi \cdot W \cdot D & 0 & W_\chi \cdot G \\ 0 & 0 & W_y \\ W & W_b & M \end{bmatrix}}_{P} \cdot \begin{bmatrix} s \\ b \\ y \end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

Une fois le procédé généralisé standard formulé, un compensateur en "feedforward" optimal peut alors être calculé en utilisant une synthèse de commande de type H_∞ standard [Zhou & Doyle, 1998].

3.3 Synthèse d'un compensateur H_∞ robuste

L'objectif de la synthèse du contrôle H_∞ en "feedforward", est de pouvoir contrôler les vibrations de la troisième masse $M3$ du système CARV présenté sur la figure 3.1, c.à.d minimiser la sortie $\chi(t)$ qui représente l'accélération de la troisième masse du système. Suivant la figure 3.3, on définit les fonctions de sensibilité à calibrer suivantes :

– Fonction de sensibilité perturbation-sortie $\frac{\chi(t)}{s(t)}$:

$$S_{\chi s} = W \cdot \left(D + G \cdot \left(\frac{N}{1 - NM} \right) \right) \tag{3.3.1}$$

– Fonction de sensibilité perturbation-entrée $\frac{y(t)}{s(t)}$:

$$S_{ys} = W \cdot \left(\frac{N}{1 - NM} \right) \tag{3.3.2}$$

– Fonction de sensibilité bruit-entrée $\frac{y(t)}{b(t)}$:

$$S_{yb} = W_b \cdot \left(\frac{N}{1 - NM} \right) \tag{3.3.3}$$

Le problème de commande H_∞ est de trouver un compensateur en "feedforward" stabilisant, N, qui minimise η tel que :

$$\left\| \begin{pmatrix} W_\chi \cdot S_{\chi s} \\ W_y \cdot S_{ys} \\ W_y \cdot S_{yb} \end{pmatrix} \right\|_\infty < \eta \tag{3.3.4}$$

Le compensateur N obtenu, aura la même complexité (ordre) que le procédé généralisé P.

La fonction de pondération W_y a été choisie constante (grande valeur $\simeq 15 - 20$). Ce choix est expliqué par la présence d'un bruit de mesure en basses fréquences (sur le premier capteur) ainsi qu'un faible niveau des saturations de l'actionneur.
Il est aussi possible de choisir W_y égale à l'inverse stable de $D(z^{-1})$ multiplié par un gain, afin d'assurer que le compensateur injecte de la puissance pour atténuer les pics de résonance de D et ne réagit pas où D ne possède pas de gain.

W_χ est choisie égale à une approximation du quatrième ordre du modèle de la voie secondaire $G(z^{-1})$, car il n'est intéressant de minimiser le signal d'erreur $\chi(t)$ que là où G possède suffisamment de gain.

W_b est choisie comme un filtre passe bas du quatrième ordre suivant les résultat obtenus sur des essais en boucle ouverte (analyse spectrale du bruit de mesure sur $u(t)$).

Après synthèse, le compensateur obtenu possède les ordres suivants : $n_S = 70$; $n_R = 70$.
Les fonctions de sensibilité obtenues sont présentées dans les figures 3.5, 3.6 et 3.7.

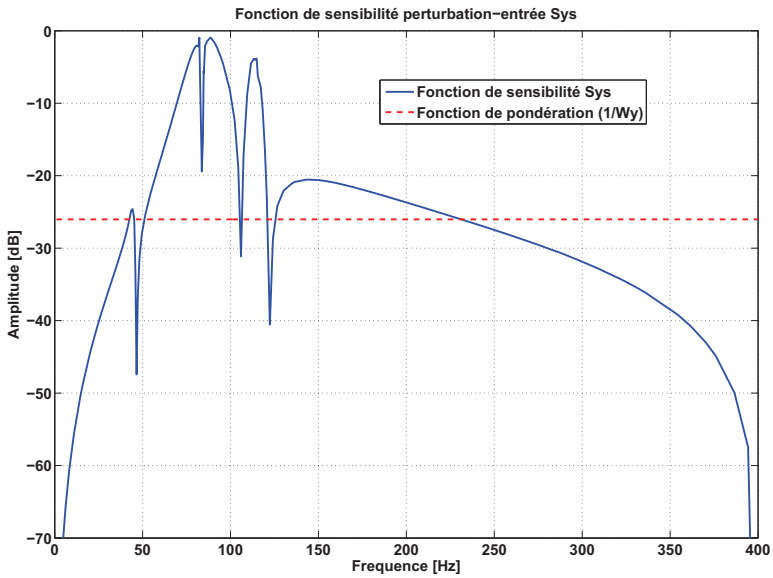


FIG. 3.5 – Fonction de sensibilité perturbation-entrée S_{ys} avec le compensateur feedforward H_∞

A partir des figures 3.5 et 3.6, il en résulte que $|S_{ys}|$ et $|S_{yb}|$ sont au dessus de $|\frac{1}{W_y}|$ qui est très faible (pour des raisons de performances), mais il est très important de voir que les deux sont inférieures à $0dB$. Donc le compensateur en feedforward atténue l'effet de la perturbation $s(t)$ et du bruit de mesure $b(t)$ sur l'entrée de commande de la voie

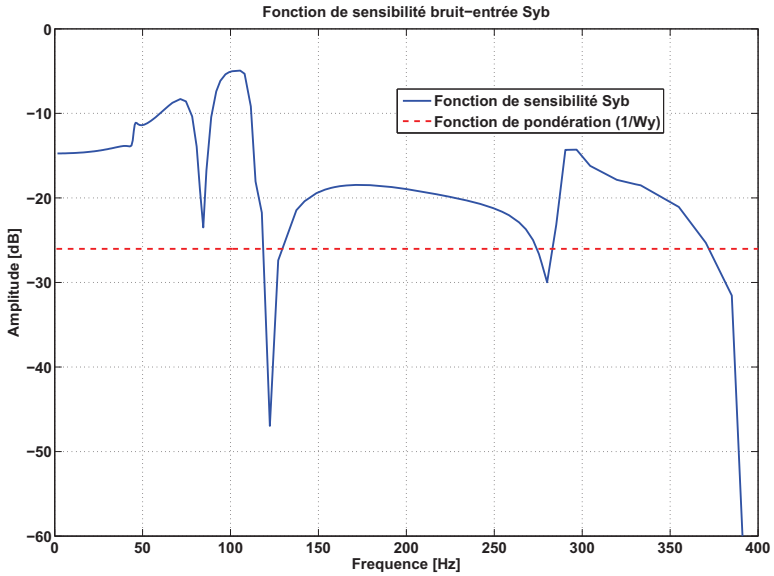


FIG. 3.6 – Fonction de sensibilité bruit-entrée S_{yb} avec le compensateur feedforward H_∞

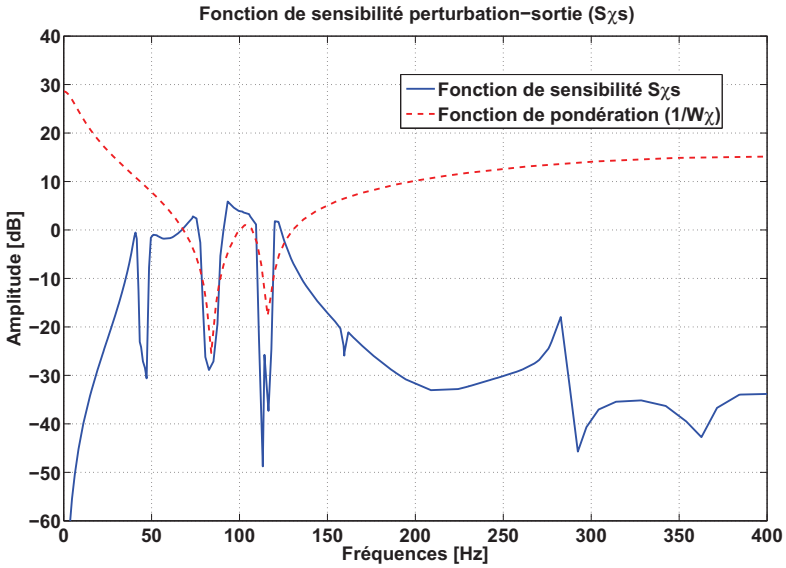


FIG. 3.7 – Fonction de sensibilité perturbation-sortie $S_{\chi s}$ avec le compensateur feedforward H_∞

secondaire $y(t)$. Le signal de commande délivré devrait être d'une amplitude inférieure aux saturations de l'actionneur.

A partir de la figure 3.7, on remarque que la fonction de sensibilité $S_{\chi s}$ obtenue est presque partout en dessous du gabarit $\frac{1}{W_\chi}$ choisi. Il faut remarquer que ce compensateur H_∞ assurerait une forte atténuation de la perturbation pour les deux fréquences de réso-

nances majeures de la voie secondaire à $84Hz$ et $116Hz$. Ceci nous permet de conclure que le compensateur N donnerait de très bons résultats pour le rejet de la perturbation $s(t)$ sur la sortie $\chi(t)$ dans les zones fréquentielles où la voie secondaire possède suffisamment de gain.

3.3.1 Formulation alternative

Au lieu de minimiser l'effet de $s(t)$ sur $\chi(t)$, il est possible de considérer la minimisation de l'effet de $d(t)$ sur la sortie $\chi(t)$. Selon cette nouvelle formulation, les fonctions de sensibilité à calibrer deviennent :

– Fonction de sensibilité perturbation-sortie $\frac{\chi(t)}{d(t)}$:

$$S_{\chi d} = D + G \cdot \left(\frac{N}{1 - NM} \right) \tag{3.3.5}$$

– Fonction de sensibilité perturbation-entrée $\frac{y(t)}{d(t)}$:

$$S_{yd} = \frac{N}{1 - NM} \tag{3.3.6}$$

Dans ce cas, le filtre W sera inclus dans les fonctions de pondération comme étant le modèle de la perturbation $d(t)$. Le nouveau problème H_∞ à résoudre, est de trouver un compensateur "feedforward" N qui minimise η tel que :

$$\left\| \begin{pmatrix} W \cdot W_\chi \cdot S_{\chi d} \\ W \cdot W_y \cdot S_{yd} \\ W_y \cdot S_{yb} \end{pmatrix} \right\|_\infty < \eta \tag{3.3.7}$$

Mathématiquement, le nouveau problème de minimisation est exactement le même que celui traité en premier, et le compensateur "feedforward" obtenu est identique à celui obtenu avec la première formulation.

3.4 Réduction de l'ordre du régulateur par identification en boucle fermée

Comme mentionné précédemment, l'ordre du régulateur obtenu est : $n_S = 70$; $n_R = 70$. Une réduction de l'ordre du régulateur est recommandée afin de réduire sa complexité et de le rendre implementable sur des plates-formes expérimentales réelles limitées en puissance de calcul et aussi d'éviter tout problème numérique potentiel.

De la même manière que dans [Landau, Karimi & Constantinescu, 2001] et [Landau & Zito, 2005], la réduction d'ordre de régulateur peut être transformée en un problème d'identification en boucle fermée. Dans cette même optique, la boucle formée par N et M est considérée.

L'objectif est la minimisation du signal d'erreur entre la boucle fermée nominale utilisant le compensateur H_∞ synthétisé dans la section 3.3 et la boucle fermée utilisant le régulateur d'ordre réduit.
Afin de faire ceci, il est possible d'utiliser des données réelles et/ou simulées. L'algorithme de réduction d'ordre de régulateur "CLIM" (Closed Loop Input Matching) présenté dans [Landau, Karimi & Constantinescu, 2001] a été modifié afin de prendre en compte le retour positif (couplage mécanique).

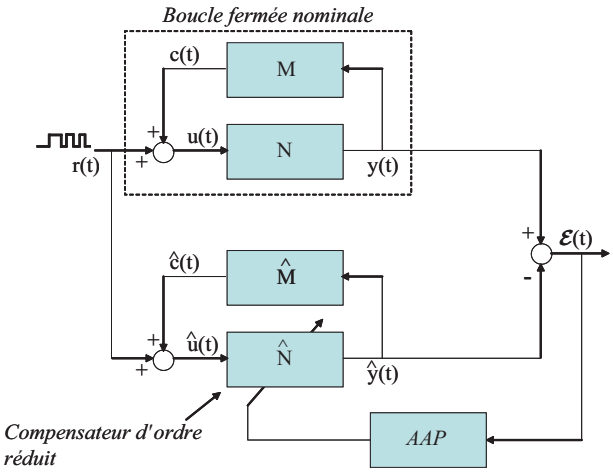


FIG. 3.8 – Identification en boucle fermée du compensateur d'ordre réduit en utilisant des données réelles (input matching)

Soit le diagramme de la figure 3.9. Si on considère comme objectif le "input matching", la norme à minimiser est alors :

$$||S_{yr} - \hat{S}_{yr}||_2 = \left\| \frac{N}{1 - N\hat{M}} - \frac{\hat{N}}{1 - \hat{N}\hat{M}} \right\|_2 \tag{3.4.1}$$

où S_{yr} est la fonction de sensibilité entre $r(t)$ et $y(t)$.
Donc le compensateur optimal d'ordre réduit est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{N}^* &= \arg\min_{\hat{N}} \|S_{yr} - \hat{S}_{yr}\|_2 \\ &= \arg\min_{\hat{N}} \|S_{ur}(N - \hat{N})\hat{S}_{ur}\|_2 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

avec :

$$S_{ur} = \frac{1}{1 - N\hat{M}} \tag{3.4.3}$$

L'équation 3.4.2 montre bien que la norme pondérée de $N - \hat{N}$ est minimisée.

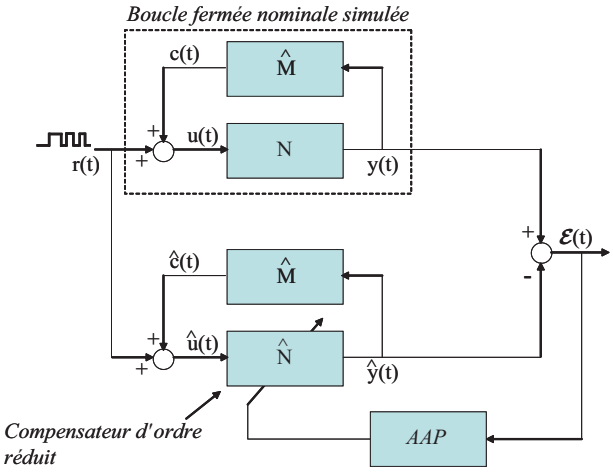


FIG. 3.9 – Identification en boucle fermée du compensateur d'ordre réduit en utilisant des données simulées (input matching)

3.4.1 Algorithme pour l'identification en boucle fermée de régulateur en "feedforward" d'ordre réduit

Considérons le diagramme de la figure 3.9. L'algorithme d'adaptation paramétrique utilisé pour l'identification des paramètres du régulateur d'ordre réduit est présenté dans [Landau, Karimi & Constantinescu, 2001], et il est très similaire à l'algorithme d'"Erreur de Sortie en Boucle Fermée" utilisé pour l'identification paramétrique de procédés en boucle fermée [Landau et al., 1997].
On considère la partie haute de la figure 3.9 (boucle fermée nominale simulée) où la voie inverse simulée fonctionne en boucle fermée avec le régulateur H_∞ nominal obtenu dans la section 3.3. $y(t)$ est la sortie de N ainsi que l'entrée de la voie inverse identifiée $\hat{M}$. $u(t)$ est l'entrée de N et $r(t)$ est le signal d'excitation externe. Ainsi, la sortie du compensateur d'ordre réduit est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1) &= -\hat{S}^*(q^{-1})\hat{y}(t) + \hat{R}(q^{-1})\hat{u}(t+1) \\ &= \hat{\theta}^T\psi(t) \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

avec

$$\hat{u}(t+1) = r(t+1) + \hat{c}(t+1) \tag{3.4.5}$$

$$\hat{c}(t+1) = -A^*_{\hat{M}}\hat{c}(t) + B^*_{\hat{M}}\hat{y}(t-d) \tag{3.4.6}$$

$$\begin{aligned} \psi^T(t) &= [-\hat{y}(t), \cdots, -\hat{y}(t-n_{\hat{S}}+1), \\ &\quad \hat{u}(t+1), \cdots, \hat{u}(t-n_{\hat{R}}+1)] \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

$$\hat{\theta}^T = [\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_{n\hat{S}}, \hat{r}_0, \cdots, \hat{r}_{n\hat{R}}] \tag{3.4.8}$$

Afin d'implémenter l'algorithme, on a besoin respectivement, de la sortie prédite a priori (basée sur $\hat{\theta}(t)$) et a posteriori (basée sur $\hat{\theta}(t+1)$), du compensateur d'ordre réduit estimé

(d'ordre $n_{\hat{R}}$ et $n_{\hat{S}}$), données par :
a priori :

$$\begin{aligned}\hat{y}^0(t+1) &= \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t)) \\ &= -\hat{S}^*(t,q^{-1})\hat{y}(t) + \hat{R}(t,q^{-1})\hat{c}(t+1) \\ &= \theta^T(t)\phi(t) \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

a posteriori :

$$\hat{y}(t+1) = \theta^T(t+1)\phi(t) \tag{3.4.10}$$

où

$$\hat{u}(t+1) = r(t+1) + \hat{c}(t+1) \tag{3.4.11}$$

$$\begin{aligned}\phi^T(t) &= [-\hat{y}(t), \cdots, -\hat{y}(t-n_{\hat{S}}+1), \\ &\quad \hat{u}(t+1), \cdots, \hat{u}(t-n_{\hat{R}}+1)] \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

$$\hat{\theta}^T = [\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_{n\hat{S}}, \hat{r}_0, \cdots, \hat{r}_{n\hat{R}}] \tag{3.4.13}$$

Il est possible maintenant de définir les erreurs d'entrée en boucle fermée a priori et a posteriori basées sur les sorties prédites a priori et a posteriori comme suit :
a priori :

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) \tag{3.4.14}$$

a posteriori :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \tag{3.4.15}$$

et l'algorithme d'adaptation paramétrique à appliquer est donné par :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\Phi(t)\varepsilon(t+1) \tag{3.4.16}$$

$$F^{-1}(t+1) = \lambda_1(t)F^{-1}(t) + \lambda_2(t)\Phi(t)\Phi^T(t) \tag{3.4.17}$$

$$0 < \lambda_1(t) \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq \lambda_2(t) < 2 \quad ; \quad F(0) > 0,$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^0(t+1)}{1 + \Phi^T(t)F(t)\Phi(t)} \tag{3.4.18}$$

Des algorithmes spécifiques sont obtenus par des choix appropriés du vecteur d'observation $\Phi(t)$ comme suit :

- CLIM : $\Phi(t) = \phi(t)$
- F-CLIM : $\Phi(t) = \frac{\hat{A}_M(q^{-1})}{\hat{P}(q^{-1})}\phi(t)$

où :

$$\hat{P}(q^{-1}) = \hat{A}_M(q^{-1})S(q^{-1}) - \hat{B}_M(q^{-1})R(q^{-1}) \tag{3.4.19}$$

Les détails de ces algorithmes sont donnés dans [Landau, Karimi & Constantinescu, 2001]. Dans ce travail, seul l'algorithme "CLIM" a été utilisé.

3.4.2 Régulateur en "feedforward" d'ordre réduit pour le contrôle actif de vibration

Afin de réduire l'ordre du régulateur, on utilise des données obtenues en simulation (figure 3.9) et/ou en temps réel (figure 3.8).
En temps réel, la perturbation $s(t)$ est supposée nulle et une séquence binaire pseudo aléatoire est appliquée en entrée du régulateur tel que :

$$u(t) = r(t) + c(t) \tag{3.4.20}$$

Les signaux $r(t)$ et $y(t)$ sont utilisés dans l'algorithme "CLIM". La séquence binaire pseudo aléatoire est générée par un registre de $N = 10$ et un diviseur de fréquences $p = 2$.

De bons résultats ont été obtenus avec un compensateur "feedforward" d'ordre $n_{\hat{R}} = 19$, $n_{\hat{S}} = 20$, $d_{\hat{N}} = 0$, que ce soit en utilisant les données obtenues en temps réel ou en simulation.
Pour pouvoir comparer le compensateur H_∞ nominal avec les compensateurs d'ordre réduit, les figures 3.10, 3.11 et 3.12 présentent les fonctions de sensibilité obtenues avec chacun des compensateurs.

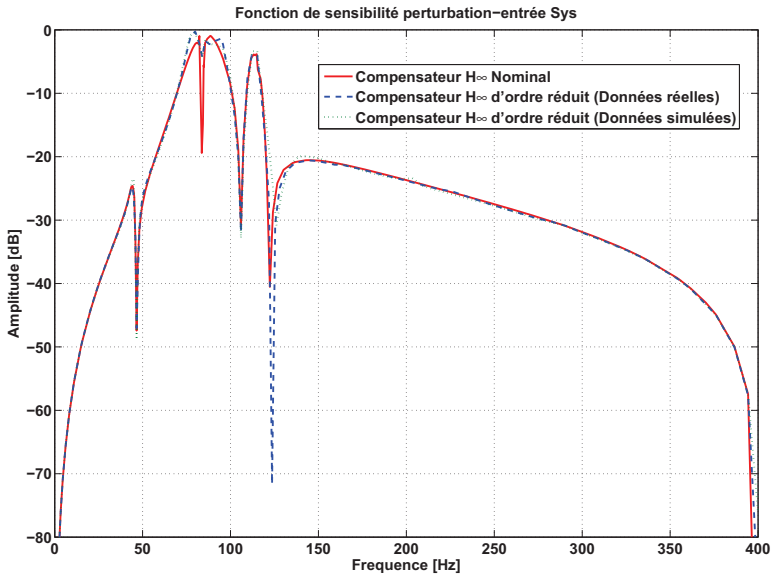


FIG. 3.10 – Fonctions de sensibilité perturbation-entrée des compensateurs feedforward (nominal et d'ordre réduit)

Les figures 3.10, 3.11 et 3.12 montrent que les fonctions de sensibilité avec le compensateur nominal et ceux d'ordre réduit sont très proches.
La figure 3.13 donne les caractéristiques fréquentielles de ces trois compensateurs.

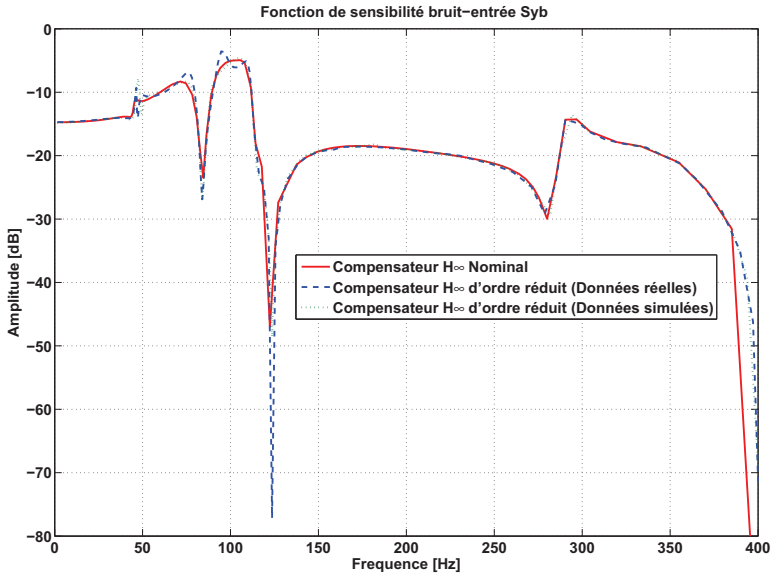


FIG. 3.11 – Fonctions de sensibilité bruit-entrée des compensateurs feedforward (nominal et d'ordre réduit)

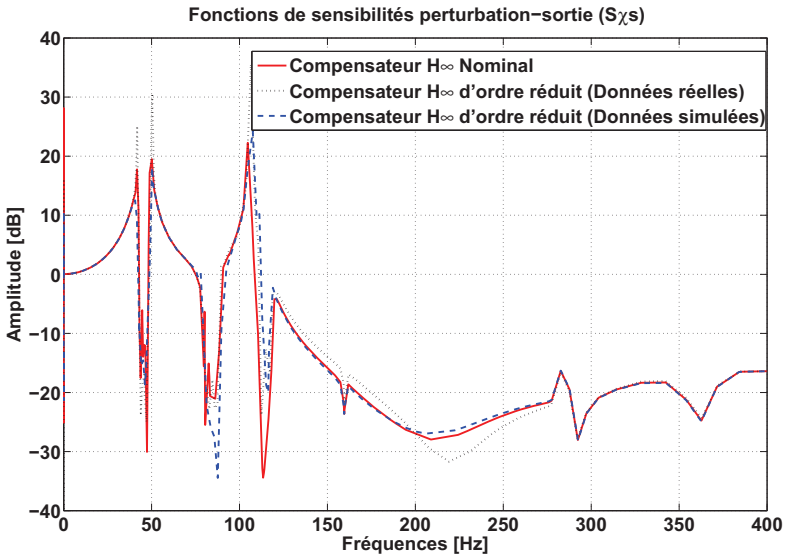


FIG. 3.12 – Fonctions de sensibilité perturbation-sortie des compensateurs feedforward (nominal et d'ordre réduit)

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la synthèse d'un compensateur en "feedforward" pour un système de contrôle actif de vibration a été présentée. Cette méthodologie prend en compte le couplage mécanique (contre réaction positive) entre le compensateur et la mesure de

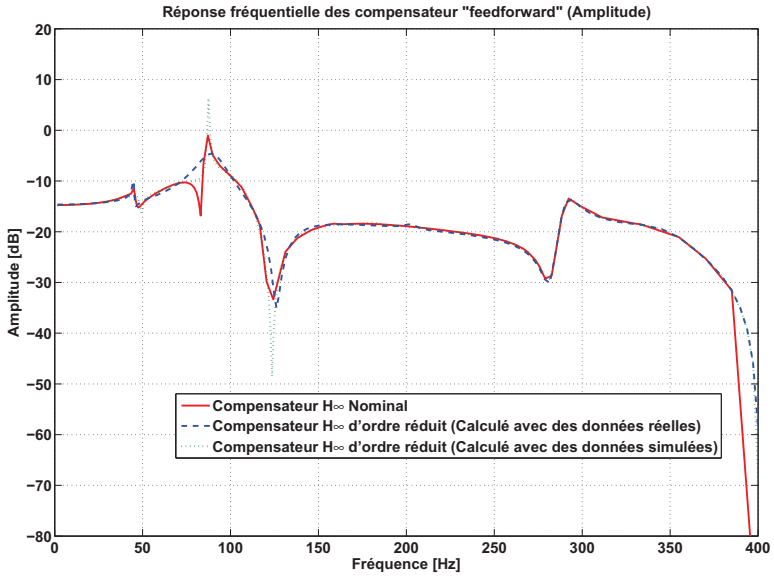


FIG. 3.13 – Caractéristiques fréquentielles des compensateurs feedforward (nominal et d'ordre réduit)

l'image de la perturbation externe. Cette synthèse utilisée est de type H_∞ standard.

Le choix des pondérations utilisées prend en compte les caractéristiques fréquentielles des différentes fonctions de transfert qui constituent le système de contrôle actif de vibration.

La dimension du régulateur obtenu étant grande, une procédure de réduction d'ordre de ce dernier par identification en boucle fermée a été proposée et appliquée.

Chapitre 4

Rejet adaptatif de perturbation large bande mesurable en *"feedforward"*

4.1 Introduction

La compensation adaptative de vibration bande large en "feedforward" est très utilisée dans les systèmes de contrôle actif de vibration ou de bruit, lorsqu'une mesure d'un signal fortement corrélé avec la perturbation est disponible ([Elliott & Nelson, 1994; Elliott & Sutton, 1996; Kuo & Morgan, 1999; Zeng & de Callafon, 2006].

L'utilisation de ce type de compensateurs ignorait jusqu'aux années 1990, la présence d'un couplage significatif en contre réaction positive entre le système de compensation et la mesure de l'image de la perturbation. Ce couplage peut avoir comme effet la déstabilisation du système de compensation. Le système considéré n'est alors pas un simple problème de compensation en "feedforward" pure. Plusieurs solutions ont été proposées pour faire face à ce problème ([Jacobson et al., 2001; Zeng & de Callafon, 2006; Kuo & Morgan, 1996; Kuo & Morgan, 1999; Hu & Linn, 2000]).

Une des solutions proposées afin de résoudre ce problème était de compenser le retour positif par un couplage négatif équivalent ([Kuo & Morgan, 1999; Fraanje et al., 1999]). Cependant, comme la compensation n'est jamais parfaite, le risque d'instabilité du système de compensation reste présent ([Wang & Ren, 1999; Bai & H.H.Lin, 1997]).

Une autre approche proposée dans la littérature est l'analyse, dans ce nouveau contexte de présence d'un couplage positif, des algorithmes existants de compensation en "feedforward" développés sans prendre en considération le "feedback" positif généré. Dans [Wang & Ren, 1999], une étude sur la convergence asymptotique dans le cadre stochastique de l'algorithme "Filtered-ULMS" a été proposée. D'autres résultats dans le même sens ont été présentés dans [Fraanje et al., 1999]. Les auteurs ont utilisé les

méthode ODE de Ljung ([Ljung & Söderström, 1983]) pour le cas d'un gain d'adaptation scalaire décroissant. Malheureusement, ces études ne traitent pas de la stabilité du système par rapport aux conditions initiales, ou lors de l'utilisation d'un gain d'adaptation qui ne s'annule pas (afin de garder des possibilités d'adaptation). D'autre part, les auteurs supposent que le couplage positif ne déstabilise pas le système.

Une étude de la stabilité pour le développement d'algorithmes appropriés dans ce contexte à été proposée dans [Jacobson et al., 2001]. Les résultats sont obtenus dans un contexte particulier sous quelques hypothèses sur le système. La fonction de transfert de la voie secondaire (voir section 2.3) est supposée strictement réelle positive, et la voie primaire est supposée décrite par un modèle à réponse impulsionnelle finie (FIR). Seul le cas d'un gain d'adaptation constant à été traité et l'analyse de convergence dans un contexte stochastique et le cas d'un gain d'adaptation décroissant, n'ont pas été traités.

Ce chapitre propose de nouveaux algorithmes adaptatifs pour la compensation en "feedforward" de perturbations bandes larges, ainsi que les études de stabilité et de convergence dans le contexte stochastique, et il est organisé comme suit : La section 4.2 est dédiée au développement mathématique des algorithmes de compensation en feedforward. L'analyse des algorithmes dans les contextes stochastique et déterministe est proposée dans la section 4.3. La section 4.4 présente les conclusions de ce chapitre.

4.2 Développement des algorithmes adaptatifs

La figure 4.1 présente le schéma de commande adaptative en feedforward de la structure CARV. Le schéma bloc correspondant est donné dans la figure 4.2. Ce schéma est représentatif de plusieurs applications dans les domaines de contrôle actif de vibrations ou de bruit.

Comme mentionné dans la section 2.1, le filtre feedforward optimal à estimer est défini par :

$$N(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} \tag{4.2.1}$$

Le filtre estimé est noté par $\hat{N}(q^{-1})$ ou $\hat{N}(\hat{\theta}, q^{-1})$ quand ce filtre est linéaire avec des coefficients constants, ou bien $\hat{N}(t, q^{-1})$ durant l'estimation ou l'adaptation de ses paramètres.

Étant donné qu'on est dans un contexte de commande adaptative, l'entrée du filtre feedforward est notée par $\hat{u}(t)$. La sortie a posteriori du filtre feedforward et qui correspond au signal de commande appliqué à l'entrée de la voie secondaire est notée par $\hat{y}(t+1) = \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t+1))$.

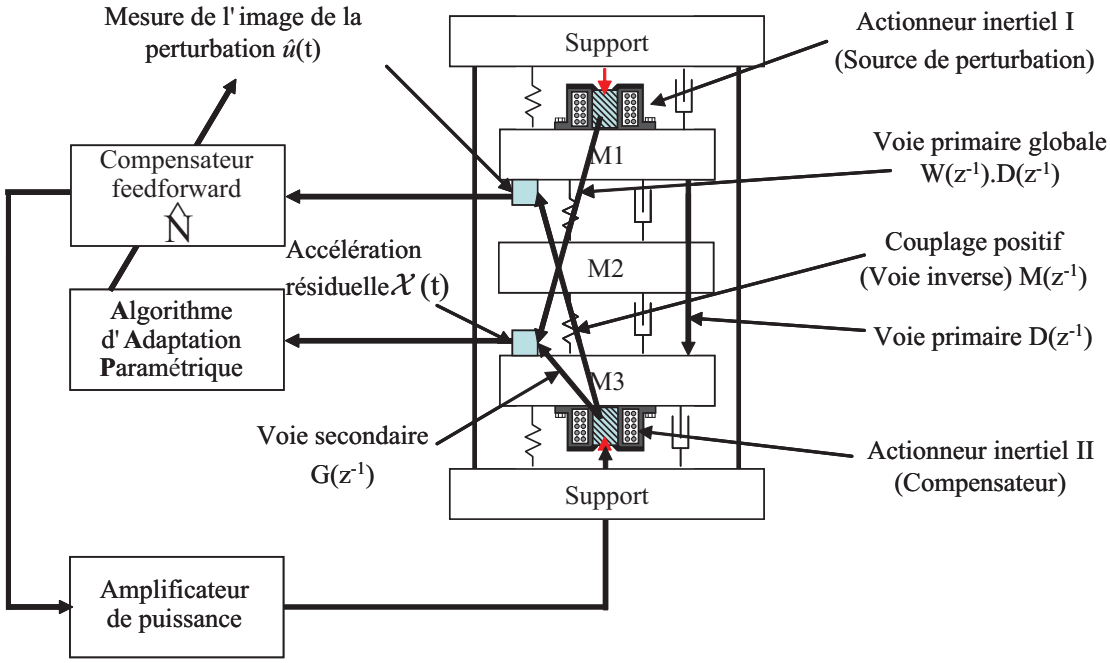


FIG. 4.1 – Schéma de commande en feedforward adaptatif du procédé CARV

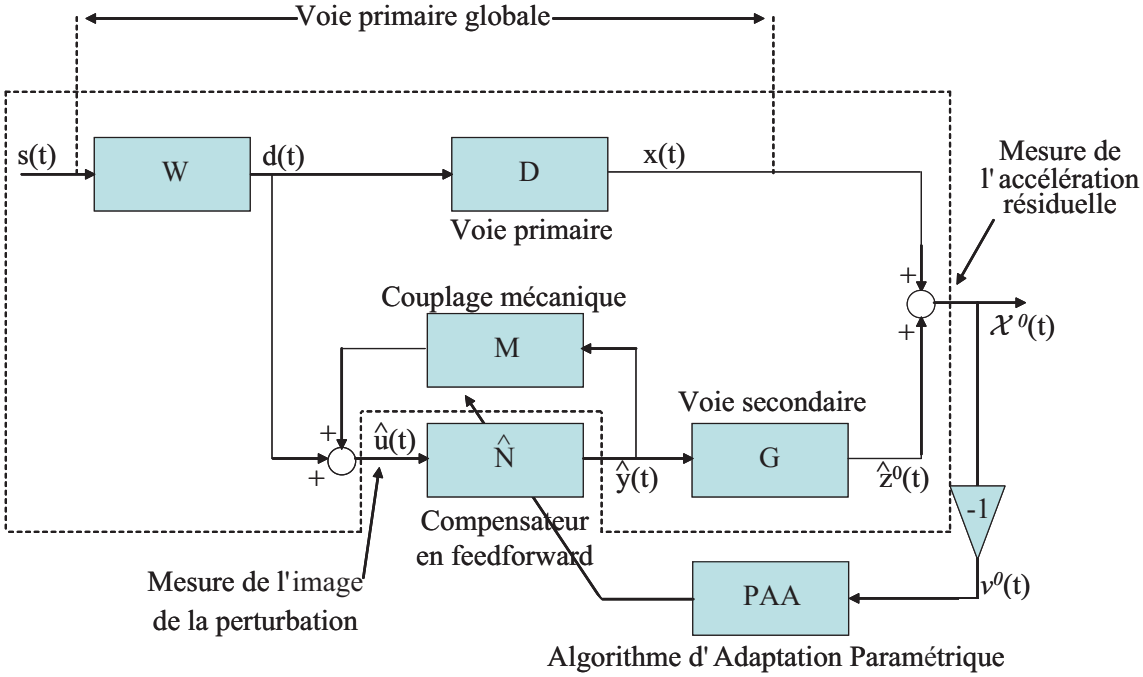


FIG. 4.2 – Schéma de commande adaptative en feedforward d'un système de contrôle actif de vibration

La sortie a priori du filtre feedforward estimé est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{y}^0(t+1) &= \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t)) \\ &= -\hat{S}^*(t,q^{-1})\hat{y}(t) + \hat{R}(t,q^{-1})\hat{u}(t+1)\end{aligned}$$

$$= \hat{\theta}^T(t)\phi(t) = [\hat{\theta}_S^T(t), \hat{\theta}_R^T(t)] \begin{bmatrix} \phi_{\hat{y}}(t) \\ \phi_{\hat{u}}(t) \end{bmatrix} \tag{4.2.2}$$

où

$$\hat{\theta}^T(t) = [\hat{s}_1(t)...\hat{s}_{n_S}(t), \hat{r}_0(t)...\hat{r}_{n_R}(t)] = [\hat{\theta}_S^T(t), \hat{\theta}_R^T(t)] \tag{4.2.3}$$

$$\begin{aligned} \phi^T(t) &= [-\hat{y}(t)... - \hat{y}(t-n_S+1), \hat{u}(t+1), \hat{u}(t)...\hat{u}(t-n_R+1)] \\ &= [\phi_{\hat{y}}^T(t), \phi_{\hat{u}}^T(t)] \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

et $\hat{y}(t)$, $\hat{y}(t-1)$ ... sont les sorties a posteriori du filtre feedforward générées par :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t+1)) = \hat{\theta}^T(t+1)\phi(t) \tag{4.2.5}$$

alors que $\hat{u}(t+1)$, $\hat{u}(t)$... sont les mesures données par le capteur primaire. Les sorties a priori non mesurables de la voie secondaire sont notées par $\hat{z}^0(t+1)$.

$$\hat{z}^0(t+1) = \hat{z}(t+1|\hat{\theta}(t)) = \frac{B_G^*(q^{-1})}{A_G(q^{-1})}\hat{y}(t) \tag{4.2.6}$$

Les valeurs des sorties à posteriori non mesurables de la voie secondaire sont notées par :

$$\hat{z}(t+1) = \hat{z}(t+1|\hat{\theta}(t+1)) \tag{4.2.7}$$

Le signal primaire mesuré, appelé aussi référence, satisfait l'équation suivante :

$$\hat{u}(t+1) = d(t+1) + \frac{B_M^*(q^{-1})}{A_M(q^{-1})}\hat{y}(t) \tag{4.2.8}$$

L'erreur résiduelle mesurée satisfait l'équation suivante :

$$\chi^0(t+1) = \chi(t+1|\hat{\theta}(t)) = \hat{z}^0(t+1) + x(t+1) \tag{4.2.9}$$

On définit l'erreur d'adaptation a priori comme suit :

$$\nu^0(t+1) = -\chi^0(t+1) = -x(t+1) - \hat{z}^0(t+1) \tag{4.2.10}$$

où $x(t)$ représente la sortie non mesurée de la voie primaire et qui correspond aussi à la sortie du procédé en boucle ouverte donnée par :

$$x(t) = D(z^{-1}) \cdot d(t) \tag{4.2.11}$$

L'erreur d'adaptation a posteriori (calculée), est alors donnée par :

$$\nu(t+1) = \nu(t+1|\hat{\theta}(t+1)) = -x(t+1) - \hat{z}(t+1) \tag{4.2.12}$$

en utilisant un filtre estimé $\hat{N}$ avec des paramètres constants : $\hat{y}^0(t) = \hat{y}(t)$, $\hat{z}^0(t) = \hat{z}(t)$ et $\chi^0(t) = \chi(t)$.

L'algorithme de compensation feedforward adaptative sera développé sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.2.1. *Le signal $d(t)$ est borné*
c.à.d.

$$|d(t)| \leq \alpha \quad \forall t \quad (0 \leq \alpha < \infty) \tag{4.2.13}$$

(ce qui est equivalent de dire que $s(t)$ est borné et $W(q^{-1})$ de la figure 4.2 est asymptotiquement stable).

Hypothèse 4.2.2. ***Condition de poursuite parfaite.*** *Il existe un filtre $N(q^{-1})$ de dimension finie de telle sorte que :*

$$\frac{N}{(1-NM)}G = -D \tag{4.2.14}$$

et le polynôme caractéristique de la boucle interne :

$$P(z^{-1}) = A_M(z^{-1})S(z^{-1}) - B_M(z^{-1})R(z^{-1}) \tag{4.2.15}$$

est un polynôme d'Hurwitz.

Hypothèse 4.2.3. *L'effet du bruit de mesure sur l'erreur résiduelle est négligé (contexte déterministe).*

Hypothèse 4.2.4. *Le modèle de la voie primaire $D(z^{-1})$ est inconnu et invariant.*

Une fois les algorithmes développés sous ces hypothèses, les hypothèses 4.2.2 et 4.2.3 seront retirées et les algorithmes seront analysés dans ce contexte modifié.
La première étape pour le développement des algorithmes est d'établir une relation entre les erreurs d'estimation des paramètres du filtre feedforward et l'accélération résiduelle mesurée Ceci est résumé dans le lemme suivant :

Lemme 4.2.5. *Sous les hypothèses 4.2.1-4.2.4, pour le système décrit par les équations (4.2.5) à (4.2.12), utilisant un compensateur en feedforward $\hat{N}$, l'équation (4.2.12) devient :*

$$\nu(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})G(q^{-1})}{P(q^{-1})}[\theta - \hat{\theta}]^T\phi(t) \tag{4.2.16}$$

où

$$\theta^T = [s_1, ...s_{n_S}, r_0, r_1, ...r_{n_R}] = [\theta_S^T, \theta_R^T] \tag{4.2.17}$$

est le vecteur des paramètres du filtre optimal N assurant la poursuite parfaite "perfect matching", et

$$\hat{\theta}^T = [\hat{s}_1...\hat{s}_{n_S}, \hat{r}_0...\hat{r}_{n_R}] = [\hat{\theta}_S^T, \hat{\theta}_R^T] \tag{4.2.18}$$

est le vecteur des paramètres constants estimés de $\hat{N}$. $\phi(t)$ et $\hat{u}(t+1)$ sont décrits dans 4.2.4 et 4.2.8, respectivement.

Démonstration. Sous l'hypothèse 4.2.2 (condition de poursuite parfaite), la sortie de la voie primaire peut être exprimée comme :

$$x(t) = -z(t) = -G(q^{-1})y(t) \tag{4.2.19}$$

où $y(t)$ est une variable muette donnée par :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= -S^*(q^{-1})y(t) + R(q^{-1})u(t+1) \\ &= \theta^T\varphi(t) = [\theta_S^T, \theta_R^T] \begin{bmatrix} \varphi_y(t) \\ \varphi_u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

où :

$$\theta^T = [s_1, ...s_{n_S}, r_0, r_1, ...r_{n_R}] = [\theta_S^T, \theta_R^T] \tag{4.2.21}$$

$$\begin{aligned} \varphi^T(t) &= [-y(t)... - y(t-n_S+1), u(t+1)...u(t-n_R+1)] \\ &= [\varphi_y^T(t), \varphi_u^T(t)] \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

et $u(t)$ est donnée par :

$$u(t+1) = d(t+1) + \frac{B_M^*(q^{-1})}{A_M(q^{-1})}y(t) \tag{4.2.23}$$

Pour une valeur constante fixée du vecteur des paramètres $\hat{\theta}$, caractérisant le filtre estimé $\hat{N}(q^{-1})$, de même dimension que le filtre optimal $N(q^{-1})$, la sortie de la voie secondaire peut être exprimée par : (dans ce cas $\hat{z}(t) = \hat{z}^0(t)$ et $\hat{y}(t) = \hat{y}^0(t)$) :

$$\hat{z}(t) = G(q^{-1})\hat{y}(t) \tag{4.2.24}$$

où :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}^T\phi(t) \tag{4.2.25}$$

La clé de ce raisonnement est que la variable muette $y(t+1)$ peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \theta^T\phi(t) + \theta^T[\varphi(t) - \phi(t)] \\ &= \theta^T\phi(t) + \theta_S^T[\varphi_y - \phi_{\hat{y}}] + \theta_R^T[\varphi_u - \phi_{\hat{u}}] \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

en remplaçant $\phi(t)$ et $\varphi(t)$ par leurs expressions données par les équations 4.2.4 et 4.2.22 respectivement. Ainsi, on définit l'erreur fictive (pour un vecteur constant $\hat{\theta}$)

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \tag{4.2.27}$$

et l'erreur d'adaptation de l'équation (4.2.12) devient :

$$\begin{aligned} \nu(t+1) &= -x(t+1) - \hat{z}(t+1) \\ &= z(t+1) - \hat{z}(t+1) = G(q^{-1})\varepsilon(t+1) \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Il en résulte de (4.2.26) en prenant en compte les expressions de $u(t)$ et $\hat{u}(t)$ données par (4.2.23) et (4.2.8) que :

$$y(t+1) = \theta^T \phi(t) - (S^*(q^{-1}) - \frac{R(q^{-1})B_M^*(q^{-1})}{A_M(q^{-1})})\varepsilon(t) \tag{4.2.29}$$

En utilisant les équations (4.2.25) et (4.2.27), on obtient (après avoir passé tous les éléments en ε à gauche de l'équation) :

$$\varepsilon(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})}{P(q^{-1})}[\theta - \hat{\theta}]^T \phi(t) \tag{4.2.30}$$

En prenant en compte l'équation (4.2.28) on obtient l'équation (4.2.16). □

L'objectif pour nous est d'écrire l'erreur d'adaptation sous la forme standard afin d'utiliser un algorithme d'adaptation paramétrique pour l'estimation du vecteur des paramètres $\hat{\theta}(t+1)$.

En filtrant le vecteur $\phi(t)$ par le filtre asymptotiquement stable $L(q^{-1}) = \frac{B_L}{A_L}$, l'équation (4.2.16) pour $\hat{\theta} =$ constant devient :

$$\nu(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})G(q^{-1})}{P(q^{-1})L(q^{-1})}[\theta - \hat{\theta}]^T \phi_f(t) \tag{4.2.31}$$

avec :

$$\phi_f(t) = L(q^{-1})\phi(t) \tag{4.2.32}$$

L'équation (4.2.31) sera utilisée pour le développement d'algorithmes d'adaptation en négligeant pour l'instant la non-commutativité des opérateurs quand $\hat{\theta}$ est variant dans le temps.

En remplaçant les paramètres estimés fixes par les paramètres estimés à l'instant courant, l'équation (4.2.31) devient l'équation de l'erreur d'adaptation a posteriori $\nu(t+1)$ (qui est calculée) suivante :

$$\nu(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})G(q^{-1})}{P(q^{-1})L(q^{-1})}[\theta - \hat{\theta}(t+1)]^T \phi_f(t) \tag{4.2.33}$$

L'équation (4.2.33) possède la forme standard d'une erreur d'adaptation a posteriori ([Landau et al., 1997]), ce qui suggère l'utilisation de l'algorithme d'adaptation paramétrique suivant :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\Phi(t)\nu(t+1) \; ; \tag{4.2.34}$$

$$\nu(t+1) = \frac{\nu^0(t+1)}{1 + \Phi^T(t)F(t)\Phi(t)} \; ; \tag{4.2.35}$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)}\left[F(t) - \frac{F(t)\Phi(t)\Phi^T(t)F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \Phi^T(t)F(t)\Phi(t)}\right] \tag{4.2.36}$$

$$1 \geq \lambda_1(t) > 0; 0 \leq \lambda_2(t) < 2; F(0) > 0 \tag{4.2.37}$$

$$\Phi(t) = \phi_f(t) \tag{4.2.38}$$

où $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ nous permettent de choisir différents profils de variation pour la matrice du gain d'adaptation $F(t)$ (voir chapitre 6 et [Landau et al., 1997]). En prenant $\lambda_2(t) \equiv 0$ et $\lambda_1(t) = 1$ on obtient une matrice de gain d'adaptation constante (et en choisissant $F = \gamma I$, $\gamma > 0$ on obtient un gain d'adaptation scalaire).

Trois choix pour le filtre L sont à considérer, produisant trois algorithmes différents :
Algorithme I :

$$L = G \tag{4.2.39}$$

Algorithme II :

$$L = \hat{G} \tag{4.2.40}$$

Algorithme III :

$$L = \frac{\hat{A}_M}{\hat{P}}\hat{G} \tag{4.2.41}$$

où :

$$\hat{P} = \hat{A}_M\hat{S} - \hat{B}_M\hat{R} \tag{4.2.42}$$

est une estimation du polynôme caractéristique de la boucle interne calculée sur la base des estimations disponibles des paramètres du filtre $\hat{N}$.
Pour l'algorithme III plusieurs options pour la mise à jour de $\hat{P}$ peuvent être considérées :

- Lancer l'algorithme II pour un certain temps afin d'avoir des estimations de $\hat{R}$ et $\hat{S}$
- Lancer une simulation (utilisant les modèles identifiés dans 2.3)
- Mettre à jour $\hat{P}$ à chaque instant d'échantillonnage ou de temps à autre en utilisant l'algorithme III (après une courte initialisation avec l'algorithme II)

La procédure suivante est utilisée et appliquée à chaque instant d'échantillonnage :

1. Mesure de l'image de la perturbation $\hat{u}(t+1)$, l'erreur résiduelle $\chi^0(t+1)$ et calcul de $\nu^0(t+1)$
2. Calcul de $\phi(t)$ et $\phi_f(t)$ en utilisant (4.2.4) et (4.2.32)
3. Estimation du vecteur des paramètres $\hat{\theta}(t+1)$ en utilisant l'algorithme d'adaptation paramétrique (4.2.34) jusqu'à (4.2.38).
4. Calcul (en utilisant (4.2.5)) et application de la commande.

4.3 Analyse des algorithmes adaptatifs obtenus

Dans cette section, les algorithmes vont être analysés dans les cas déterministe et stochastique.

4.3.1 Cas déterministe - Poursuite parfaite

Pour les algorithmes I, II et III L'équation de l'erreur d'adaptation a posteriori est de la forme :

$$\nu(t+1) = H(q^{-1})[\theta - \hat{\theta}(t+1)]^T \Phi(t) \tag{4.3.1}$$

où :

$$H(q^{-1}) = \frac{A_M(q^{-1})G(q^{-1})}{P(q^{-1})L(q^{-1})}, \Phi = \phi_f \tag{4.3.2}$$

En négligeant la non commutativité des opérateurs variant dans le temps, on a le résultat suivant :

Lemme 4.3.1. *: En supposant que l'équation 4.3.1 représente l'évolution de l'erreur d'adaptation a posteriori et que l'algorithme d'adaptation paramétrique (4.2.34) à (4.2.38) est utilisé, alors pour toute condition initiale $\hat{\theta}(0), \nu^0(0), F(0)$, les équations suivantes sont vérifiées :*

$$\lim_{t\to\infty} \nu(t+1) = 0 \tag{4.3.3}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{[\nu^0(t+1)^2]}{1+\Phi(t)^T F(t)\Phi(t)} = 0 \tag{4.3.4}$$

$$||\Phi(t)|| \text{ est bornée} \tag{4.3.5}$$

$$\lim_{t\to\infty} \nu^0(t+1) = 0 \tag{4.3.6}$$

à condition que la fonction de transfert définie par :

$$H'(z^{-1}) = H(z^{-1}) - \frac{\lambda_2}{2}, \max_t [\lambda_2(t)] \leq \lambda_2 < 2 \tag{4.3.7}$$

soit une fonction de transfert strictement réelle positive.

Démonstration. Utilisant le théorème 3.3.2 de [Landau et al., 1997], sous la condition (4.3.7), alors les équations (4.3.3) et (4.3.4) sont vérifiées.

Cependant, afin de démontrer que $\nu^0(t+1)$ tend vers zéro, il est impératif de démontrer en premier lieu que les composantes du vecteur d'observation sont bornées.
Le résultat 4.3.4 nécessite l'utilisation du lemme de *la croissance bornée* de Goodwin ([Landau, Karimi & Constantinescu, 2001] et lemme 11.2.1 dans [Landau et al., 1997]).

A condition que :

$$|\Phi^T(t)F(t)\Phi(t)|^{\frac{1}{2}} \leq C_1 + C_2 . \max_{0\leq k\leq t+1} |\nu^0(k)| \tag{4.3.8}$$

$$0 < C_1 < \infty \quad 0 < C_2 < \infty \qquad F(t) > 0$$

$||\Phi(t)||$ est bornée.
Ainsi, il est démontré que (4.3.8) est vérifiée pour l'algorithme I (pour les algorithmes II et III la démonstration est similaire). A partir de (4.2.12) on obtient :

$$-\hat{z}(t) = \nu(t) - z(t) \tag{4.3.9}$$

et vu que $z(t)$ est bornée (sortie d'une système asymptotiquement stable avec une entrée bornée), on a :

$$\begin{aligned} |-\hat{y}_f(t)| = |-G\hat{y}(t)| = |-\hat{z}(t)| &\leq C_3 + C_4 \cdot \max_{0\leq k\leq t+1} |\nu(k)| \\ &\leq C_3' + C_4' \cdot \max_{0\leq k\leq t+1} |\nu^0(k)| \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

$$0 < C_3, C_4, C_3', C_4' < \infty \tag{4.3.11}$$

vu que $|\chi(t)| \leq |\chi^0(t)|$ pour tout t. On filtre les deux cotés de l'équation (4.2.8) par $G(q^{-1})$ on obtient dans le cas adaptatif :

$$\hat{u}_f(t) = \frac{B_G}{A_G} d(t) + \frac{B_M}{A_M} \hat{y}_f(t) \tag{4.3.12}$$

Puisque A_G et A_M sont des polynômes d'Hurwitz et que $d(t)$ est borné, il en résulte que :

$$|\hat{u}_f(t)| \leq C_5 + C_6 \cdot \max_{0\leq k\leq t+1} |\nu^0(k)|; \quad 0 < C_5, C_6 < \infty \tag{4.3.13}$$

Donc (4.3.8) est vérifiée, ce qui implique que $\Phi(t)$ est borné et on peut conclure que (4.3.6) est aussi vérifiée. □

Il est intéressant de remarquer que pour l'algorithme III en prenant en compte l'équation (4.2.41), la condition de stabilité est que :

$$\frac{A_M}{\hat{A}_M} \cdot \frac{\hat{P}}{P} \cdot \frac{G}{\hat{G}} - \frac{\lambda_2}{2} \tag{4.3.14}$$

doit être une fonction de transfert strictement réelle positive. Cependant, cette condition pourrait être réécrite pour $\lambda_2 = 1$ comme ([Ljung & Söderström, 1983; Ljung, 1977]) :

$$\left| \left(\frac{A_M}{\hat{A}_M} \cdot \frac{\hat{P}}{P} \cdot \frac{G}{\hat{G}} \right)^{-1} - 1 \right| < 1 \tag{4.3.15}$$

pour tout ω.
Ceci signifie que c'est toujours vérifié à condition que les estimations de A_M, P, et G soient proches des valeurs réelles (c.à.d. $H(e^{j\omega})$ dans ce cas est proche d'une fonction de transfert unitaire).

4.3.2 Cas stochastique - Poursuite parfaite

Il existe deux sources de bruit de mesure, l'une agissant sur le capteur primaire qui donne la mesure fortement corrélée avec la perturbation et la deuxième agit sur la mesure de l'erreur résiduelle (force, accélération). Pour le capteur primaire, l'effet du bruit de mesure est négligeable car le rapport signal/bruit est très important. La situation est différente pour l'erreur résiduelle où le bruit ne peut pas être négligé.
L'objectif de cette section est l'étude de la convergence des algorithmes proposés dans le cas stochastique.

En présence de bruit de mesure $w(t)$, l'équation de l'erreur d'adaptation a posteriori donnée dans l'équation (4.3.1) devient :

$$\nu(t+1) = H(q^{-1})[\theta - \hat{\theta}(t+1)]^T \Phi(t) + w(t+1) \tag{4.3.16}$$

La méthode O.D.E. [Ljung & Söderström, 1983; Ljung, 1977] peut être utilisée afin d'analyser le comportement asymptotique de l'algorithme en présence de bruit. En prenant en compte la forme de l'équation (4.3.16), on pourrait utiliser directement le théorème 4.2.1 de [Landau et al., 1997] ou le théorème B1 de [Landau & Karimi, 1997].

Les hypothèses suivante sont considérées :

Hypothèse 4.3.2. $\lambda_1(t) = 1$ *et* $\lambda_2(t) = \lambda_2 > 0$

Hypothèse 4.3.3. $\hat{\theta}(t)$ *généré par l'algorithme appartient au domaine* D_S *:*

$$D_S \triangleq \{\hat{\theta} : \hat{P}(z^{-1}) = 0 \Rightarrow |z| < 1\}$$

pour lesquels un processus stationnaire :

$$\begin{aligned} \Phi(t,\hat{\theta}) &\triangleq \Phi(t)|_{\hat{\theta}(t)=\hat{\theta}=const} \\ \nu(t,\hat{\theta}) &= \nu(t)|_{\hat{\theta}(t)=\hat{\theta}=const} \end{aligned}$$

peut être défini.

Hypothèse 4.3.4. $w(t)$ *est un processus stochastique de moyenne nulle et de variance finie, et indépendant de la séquence* $d(t)$*.*

De (4.3.16) pour $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}$, on obtient :

$$\nu(t+1,\hat{\theta}) = H(q^{-1})[\theta - \hat{\theta}]^T \Phi(t,\hat{\theta}) + w(t+1,\hat{\theta}) \tag{4.3.17}$$

et puisque $\Phi(t,\hat{\theta})$ dépend de $d(t)$ on peut conclure que $\Phi(t,\hat{\theta})$ et $w(t+1,\hat{\theta})$ sont indépendants. Donc en utilisant le théorème 4.2.1 de [Landau et al., 1997] il en résulte que si :

$$H'(z^{-1}) = \frac{A_M(z^{-1})G(z(^{-1})}{P(z^{-1})L(z(^{-1})} - \frac{\lambda_2}{2} \tag{4.3.18}$$

est une fonction de transfert strictement réelle positive, on a : $Prob\{\lim_{t\to\infty}\hat{\theta}(t) \in D_C\} = 1$
où : $D_C = \{\hat{\theta} : \Phi^T(t,\hat{\theta})(\theta - \hat{\theta}) = 0\}$.
si de plus $\Phi^T(t,\hat{\theta})(\theta - \hat{\theta}) = 0$ possède une solution unique (richness condition), la condition que $H'(z^{-1})$ soit strictement réelle positive implique que : $Prob\{\lim_{t\to\infty}\hat{\theta}(t) = \theta\} = 1$.

4.3.3 Cas de poursuite non parfaite

Si $\hat{N}(t,q^{-1})$ n'est pas de la bonne dimension, il n'existe aucune chance de satisfaire la condition de poursuite parfaite.
Dans ce cas, deux questions sont intéressantes à traiter :

1. La bornitude du signal d'erreur
2. La distribution du biais dans le domaine fréquentiel

Bornitude du signal d'erreur

Afin d'analyser la bornitude du signal d'erreur, le résultat de [Landau & Karimi, 1997; Landau, Karimi & Constantinescu, 2001], peut être utilisé. Les hypothèses suivantes sont utilisées :

1. Il existe un filtre d'ordre réduit $\hat{N}$ caractérisé par les polynômes inconnus $\hat{S}$ (d'ordre n_S) et $\hat{R}$ (d'ordre n_R), pour lequel la boucle fermée formée par $\hat{N}$ et M est asymptotiquement stable. c.à.d. $A_M\hat{S} - B_M\hat{R}$ est un polynôme d'Hurwitz.
2. La sortie du filtre optimal satisfaisant la condition de poursuite parfaite peut être exprimée comme :

$$\hat{y}(t+1) = -[\hat{S}^*(q^{-1})\hat{y}(t) - \hat{R}(q^{-1})\hat{u}(t+1) + \eta(t+1)] \tag{4.3.19}$$

où $\eta(t+1)$ est la norme du signal borné

En utilisant les résultats de [Landau & Karimi, 1997] (théorème 4.1 pp 1505-1506) et en supposant que $d(t)$ est de norme bornée, on peut montrer que tous les signaux sont de norme bornée sous la condition de passivité (4.3.7), où P est calculé maintenant avec le filtre estimé d'ordre réduit.

Distribution fréquentielle du biais

En utilisant la relation de Parseval, la distribution asymptotique du biais des paramètres estimés dans le domaine fréquentiel peut être obtenue de l'expression de $\nu(t)$, en prenant en compte le fait que l'algorithme minimise un critère de la forme

$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \chi^2(t)$.
La distribution du biais (pour l'algorithme III) est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^* &= \arg\min_{\hat{\theta}} \int_{-\pi}^{\pi} [|D(j\omega) - \frac{\hat{N}(j\omega)G(j\omega)}{1-\hat{N}(j\omega)M(j\omega)}|^2 \phi_d(\omega) \\ &+ \phi_w(\omega)]d\omega \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

où ϕ_d et ϕ_w sont les densités spectrales du signal de perturbation $d(t)$ et du bruit de mesure. En prenant en compte l'équation (4.2.14), on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^* &= \arg\min_{\hat{\theta}} \int_{-\pi}^{\pi} [|S_{NM}|^2 |N-\hat{N}|^2 |S_{\hat{N}M}|^2 |G|^2 \phi_d(\omega) \\ &+ \phi_w(\omega)]d\omega \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

où S_{NM} et $S_{\hat{N}M}$ sont les fonction de sensibilité en sortie des boucles fermées pour N et respectivement $\hat{N}$: $S_{NM} = \frac{1}{1-NM}; S_{\hat{N}M} = \frac{1}{1-\hat{N}M}$.

A partir de (4.3.20) et (4.3.21) on conclut qu'une bonne approximation de N sera obtenue dans la région fréquentielle où ϕ_d est significatif et où G possède assez de gain (généralement G doit avoir assez de gain dans la région fréquentielle où ϕ_d est important afin de pouvoir rejeter l'effet de $d(t)$). Cependant la qualité du filtre estimé $\hat{N}$ sera aussi affectée par les fonctions de sensibilité en sortie de la boucle interne $(N-M)$.

4.3.4 Assouplissement de la condition de réelle positivité

Cette section ne concerne que les algorithmes I et II.
Il est possible d'assouplir les conditions de réelle positivité (S.P.R), en considérant que :

1. La perturbation (entrée du système) est un signal borné
2. Les algorithmes d'adaptation fonctionnent avec un faible gain d'adaptation

Sous ces deux hypothèses, le comportement de l'algorithme peut être très bien décrit par la théorie des moyennes développée dans [Anderson et al., 1986] et [Ljung & Söderström, 1983] (voir aussi [Landau et al., 1997]).

Quand on utilise l'approche des moyennes, l'adaptation lente est vérifiée pour de faibles gains d'adaptation (constant et scalaire dans [Anderson et al., 1986] c.à.d. $\lambda_2(t) \equiv 0, \lambda_1(t) = 1$; matriciel et décroissant asymptotiquement dans le temps dans [Ljung & Söderström, 1983; Landau et al., 1997] c.à.d $\lim_{t\to\infty} \lambda_1(t) = 1, \lambda_2(t) = \lambda_2 > 0$ ou scalaire et décroissant dans le temps.).
Dans le contexte des moyennages, la condition de base pour la stabilité est que :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \Phi(t) \quad H \quad '(q^{-1})\Phi^T(t) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{j\omega})[H'(e^{j\omega})$$

$$+ \quad H'(e^{-j\omega})]\Phi^T(e^{-j\omega})d\omega > 0 \tag{4.3.22}$$

soit une matrice définie positive ($\Phi(e^{j\omega})$ est la transformée de Fourier de $\Phi(t)$).
On peut considérer (4.3.22) comme une pondération de l'énergie du vecteur des observations Φ. Il est clair que la condition suffisante de S.P.R sur $H'(z^{-1})$ (voir l'équation 4.3.7) permet de satisfaire cette condition. Par ailleurs dans le contexte du moyennage, il est seulement nécessaire que (4.3.22) soit vraie, ce qui permet d'avoir H' non réelle positive dans une bande fréquentielle limitée. L'expression (4.3.22) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \quad & \Phi(e^{j\omega})[H' + H'^*]\Phi^T(e^{-j\omega})d\omega = \\ \textstyle\sum_{i=1}^{r} \quad & \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+\Delta_i} \Phi(e^{j\omega})[H' + H'^*]\Phi^T(e^{-j\omega})d\omega - \\ \textstyle\sum_{j=1}^{p} \quad & \int_{\beta_j}^{\beta_j+\Delta_j} \Phi(e^{j\omega})[\bar{H}' + \bar{H}'^*]\Phi^T(e^{-j\omega})d\omega > 0 \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

où H' est strictement réelle positive dans les intervalles fréquentiels $[\alpha_i, \alpha_i + \Delta_i]$ et $\bar{H}' = -H'$ est réelle positive dans les intervalles fréquentiels $[\beta_j, \beta_j + \Delta_j]$ (H'^* désigne le complexe conjugué de H'). La conclusion est que H' ne doit pas nécessairement être SPR. Il est suffisant que la partie positive de l'énergie pondérée soit plus grande que la partie négative. Ceci explique pourquoi les algorithmes I et II fonctionnent bien en pratique dans plusieurs cas. Il est cependant important de remarquer que si la perturbation est une seule sinusoïde (qui n'est pas une perturbation bande large) située dans une région fréquentielle où H' n'est pas SPR, l'algorithme peut diverger (voir [Anderson et al., 1986; Ljung & Söderström, 1983]).

Sans aucun doute, la meilleure approche pour l'assouplissement et pour contourner la condition de réelle positivité, est d'utiliser l'algorithme III (donné dans l'équation (4.2.41)) au lieu de l'algorithme II. Ceci est motivé par les équations (4.3.14) et (4.3.15). Comme il va être présenté expérimentalement dans le chapitre 6, cet algorithme donne les meilleurs résultats.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté de nouveaux algorithmes pour la compensation adaptative en feedforward dans les systèmes de contrôle actif de vibrations, tout en prenant en compte l'existence d'un couplage positif d'origine mécanique.

Une analyse théorique a fait apparaître une condition suffisante de stabilité impliquant une condition de réelle positivité de certaines fonctions de transfert. Cette condition peut être contournée en prenant en compte la nature de la perturbation (large

bande) ou par un filtrage approprié du vecteur des régresseurs.

Une comparaison entre les algorithmes proposés et quelques algorithmes traitant de la même problématique est donnée dans l'annexe A.

Des résultats expérimentaux, sur le système de contrôle actif de vibration présenté dans le chapitre 2, démontrant l'efficacité de ces algorithmes seront présentés dans le chapitre 6.

Chapitre 5

Compensation hybride "feedback & feedforward adaptatif"

5.1 Introduction

Le contrôle actif de vibrations/bruit est basé sur le principe d'interférence destructive entre les ondes (acoustiques ou vibratoires). Plusieurs solutions ont été proposées dont celles du chapitre 4.

La combinaison de la compensation adaptative feedforward avec régulation en feedback, a été considérée comme une solution afin d'améliorer encore plus les performances de la compensation adaptative par anticipation uniquement. Plusieurs solutions sont disponibles ([Callafon, 2010; Ray et al., 2006; Esmailzadeh et al., 2002]).

Une des solutions proposée dans [Callafon, 2010], est d'utiliser le régulateur en contre réaction (feedback) pour réduire les effets des perturbations périodiques et la compensation adaptative en feedforward pour les perturbations large bande. La principale faiblesse de ce travail est l'absence d'une analyse de stabilité.

Dans [Ray et al., 2006], il est mentionné que l'utilisation d'un régulateur en feedback avec une bonne marge de gain améliore la stabilité et la performance de la compensation adaptative en feedforward, mais aucune analyse détaillée n'est donnée.

Les objectifs de ce chapitre sont :
- Analyser l'interaction entre la boucle de régulation et la compensation adaptative en feedforward.
- Développer et analyser des algorithmes récursifs pour l'estimation et l'adaptation en ligne des paramètres du filtre adaptatif afin de rejeter l'effet de perturbations large bande en présence d'une boucle de régulation.
- Prendre en compte le couplage positif interne survenant dans plusieurs systèmes

de contrôle actif de vibrations/bruit.

.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 5.2, des algorithmes de compensation adaptative en feedforward sont développés est analysés en présence d'une boucle de régulation. Les conclusions sont données dans la section 5.3.

5.2 Développement des algorithmes adaptatifs

La figure 5.1 présente le schéma de commande hybride "feedback & feedforward adaptatif" de la structure CARV. Le schéma bloc correspondant est donné dans la figure 5.2.

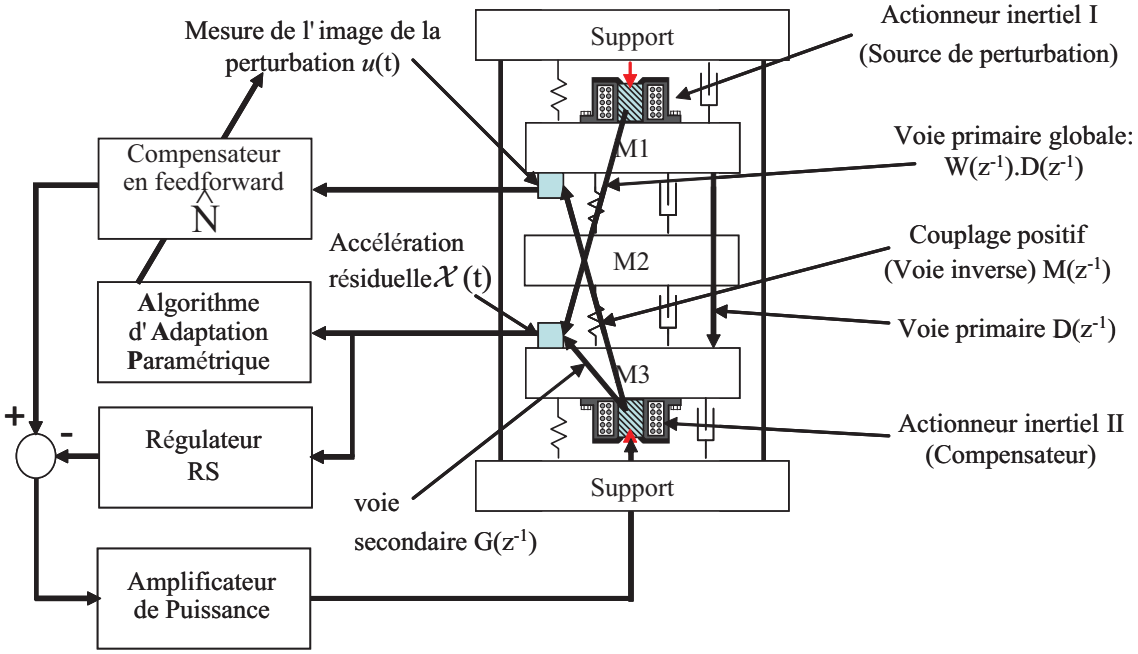


FIG. 5.1 – Schéma de commande hybride (feedback + feedforward adaptatif) du procédé CARV.

Comme mentionné auparavant, le filtre feedforward optimal à estimer est défini par :

$$N(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} \tag{5.2.1}$$

Le filtre estimé est noté par $\hat{N}(q^{-1})$ ou $\hat{N}(\hat{\theta}, q^{-1})$ quand ce filtre est linéaire avec des coefficients constants, ou bien $\hat{N}(t, q^{-1})$ durant l'estimation ou l'adaptation de ses paramètres.

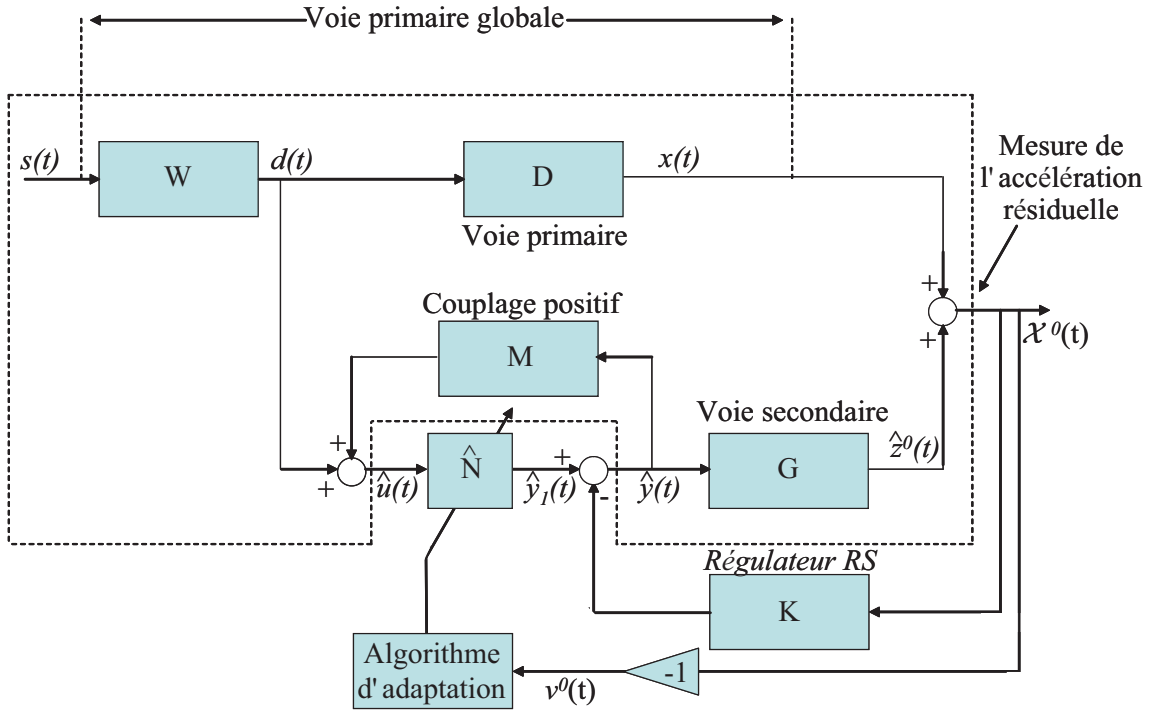


FIG. 5.2 – Schéma de commande hybride (feedback + feedforward adaptatif) d'un système de contrôle actif de vibration.

Le régulateur en contre réaction K de type RS est défini par :

$$K(q^{-1}) = \frac{B_K(q^{-1})}{A_K(q^{-1})} \tag{5.2.2}$$

Étant donné qu'on est dans un contexte de contrôle adaptatif, l'entrée du filtre feedforward est notée par $\hat{u}(t)$. La sortie a posteriori du filtre feedforward est notée par $\hat{y}_1(t+1) = \hat{y}_1(t+1|\hat{\theta}(t+1))$.
La sortie a priori du filtre feedforward estimé est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{y}_1^0(t+1) &= \hat{y}_1(t+1|\hat{\theta}(t)) \\ &= -\hat{S}^*(t,q^{-1})\hat{y}_1(t) + \hat{R}(t,q^{-1})\hat{u}(t+1) \\ &= \hat{\theta}^T(t)\phi(t) = [\hat{\theta}_S^T(t), \hat{\theta}_R^T(t)] \begin{bmatrix} \phi_{\hat{y}_1}(t) \\ \phi_{\hat{u}}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

avec

$$\hat{\theta}^T(t) = [\hat{s}_1(t)...\hat{s}_{n_S}(t), \hat{r}_0(t)...\hat{r}_{n_R}(t)] = [\hat{\theta}_S^T(t), \hat{\theta}_R^T(t)] \tag{5.2.4}$$

$$\begin{aligned} \phi^T(t) &= [-\hat{y}_1(t)... - \hat{y}_1(t-n_S+1, \hat{u}(t+1), \hat{u}(t)...\hat{u}(t-n_R+1)] \\ &= [\phi_{\hat{y}_1}^T(t), \phi_{\hat{u}}^T(t)] \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

et $\hat{y}_1(t)$, $\hat{y}_1(t-1)$ ... sont les sorties a posteriori du filtre feedforward générées par :

$$\hat{y}_1(t+1) = \hat{y}_1(t+1|\hat{\theta}(t+1)) = \hat{\theta}^T(t+1)\phi(t) \tag{5.2.6}$$

alors que $\hat{u}(t+1)$, $\hat{u}(t)$... sont les mesures données par le capteur primaire[1].
Le signal de commande appliqué à l'entrée de la voie secondaire est donné par :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{y}_1(t+1) - \frac{B_K}{A_K}\chi(t+1) \tag{5.2.7}$$

La sortie a priori non mesurable de la voie secondaire est notée par $\hat{z}^0(t+1)$.

$$\hat{z}^0(t+1) = \hat{z}(t+1|\hat{\theta}(t)) = \frac{B_G^*(q^{-1})}{A_G(q^{-1})}\hat{y}(t) \tag{5.2.8}$$

La valeur de la sortie a posteriori non mesurable de la voie secondaire est notée par :

$$\hat{z}(t+1) = \hat{z}(t+1|\hat{\theta}(t+1)) \tag{5.2.9}$$

Le signal primaire mesuré, appelé aussi signal de référence, satisfait l'équation suivante :

$$\hat{u}(t+1) = d(t+1) + \frac{B_M^*(q^{-1})}{A_M(q^{-1})}\hat{y}(t) \tag{5.2.10}$$

L'erreur résiduelle mesurée satisfait l'équation suivante :

$$\chi^0(t+1) = \chi(t+1|\hat{\theta}(t)) = \hat{z}^0(t+1) + x(t+1) \tag{5.2.11}$$

On définit l'erreur d'adaptation a priori, comme suit :

$$\nu^0(t+1) = -\chi^0(t+1) = -x(t+1) - \hat{z}^0(t+1) \tag{5.2.12}$$

L'erreur d'adaptation a posteriori (calculée), est donnée par :

$$\nu(t+1) = \nu(t+1|\hat{\theta}(t+1)) = -x(t+1) - \hat{z}(t+1) \tag{5.2.13}$$

En utilisant un filtre estimé $\hat{N}$ avec des paramètres constants, on aura : $\hat{y}^0(t) = \hat{y}(t)$, $\hat{z}^0(t) = \hat{z}(t)$ et $\chi^0(t) = \chi(t)$.

L'algorithme de compensation feedforward adaptative sera développé sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 5.2.1. *Le signal $d(t)$ est borné*
c.à.d.

$$|d(t)| \leq \alpha \quad \forall t \quad (0 \leq \alpha < \infty) \tag{5.2.14}$$

(ce qui est equivalent à dire que $s(t)$ est borné et $W(q^{-1})$ de la figure 5.2 est asymptotiquement stable).

[1] $\hat{u}(t+1)$ est disponible avant le début de l'adaptation des paramètres à $t+1$

Hypothèse 5.2.2. ***Condition de poursuite parfaite.*** *Il existe un filtre $N(q^{-1})$ de dimension finie de telle sorte que :*

$$\frac{N}{(1-NM)}G = -D \tag{5.2.15}$$

et les polynômes caractéristiques :
du bouclage positif :

$$P(z^{-1}) = A_M(z^{-1})S(z^{-1}) - B_M(z^{-1})R(z^{-1}) \tag{5.2.16}$$

de la boucle fermée (G-K) :

$$P_{cl}(z^{-1}) = A_G(z^{-1})A_K(z^{-1}) + B_G(z^{-1})B_K(z^{-1}) \tag{5.2.17}$$

et du couplage des boucles feedforward-feedback :

$$P_{fb-ff} = A_M S[A_G A_K + B_G B_K] - B_M R A_K A_G \tag{5.2.18}$$

sont des polynômes d'Hurwitz.

Hypothèse 5.2.3. *L'effet du bruit de mesure sur l'erreur résiduelle est négligé (contexte déterministe).*

Hypothèse 5.2.4. *Le modèle de la voie primaire $D(z^{-1})$ est inconnu et invariant.*

Une fois les algorithmes développés sous ces hypothèses, les hypothèses 5.2.2 et 5.2.3 seront retirées et les algorithmes seront analysés dans ce contexte modifié.
La première étape pour le développement des algorithmes est d'établir une relation entre les erreurs d'estimation des paramètres du filtre feedforward et l'erreur d'adaptation. Ceci est résumé dans le lemme suivant :

Lemme 5.2.5. *Sous les hypothèses 5.2.1-5.2.4, pour le système décrit par les équations (5.2.1)-(5.2.13) en utilisant un compensateur en feedforward $\hat{N}$ avec des paramètres constants, l'erreur d'adaptation de l'équation (5.2.13) s'écrit comme suit :*

$$\nu(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})A_G(z^{-1})A_K(z^{-1})G(q^{-1})}{P_{fb-ff}(q^{-1})}[\theta - \hat{\theta}]^T\phi(t) \tag{5.2.19}$$

où

$$\theta^T = [s_1, ...s_{n_S}, r_0, r_1, ...r_{n_R}] = [\theta_S^T, \theta_R^T] \tag{5.2.20}$$

est le vecteur des paramètres du filtre optimal N assurant la poursuite parfaite, et

$$\hat{\theta}^T = [\hat{s}_1...\hat{s}_{n_S}, \hat{r}_0...\hat{r}_{n_R}] = [\hat{\theta}_S^T, \hat{\theta}_R^T] \tag{5.2.21}$$

est le vecteur des paramètres constants estimés de $\hat{N}$, *et*

$$\phi^T(t) \;=\; [-\hat{y}_1(t)... - \hat{y}_1(t-n_S+1, \hat{u}(t+1), \hat{u}(t)...\hat{u}(t-n_R+1)]$$

$$= \quad [\phi^T_{\hat{y}_1}(t), \phi^T_{\hat{u}}(t)] \tag{5.2.22}$$

et $\hat{u}(t+1)$ est donné par

$$\hat{u}(t+1) = d(t+1) + \frac{B^*_M(q^{-1})}{A_M(q^{-1})}\hat{y}(t) \tag{5.2.23}$$

Démonstration. Sous l'hypothèse 5.2.2 (condition de poursuite parfaite), la sortie de la voie primaire peut être exprimée comme :

$$x(t) = -z(t) = -G(q^{-1})y(t) \tag{5.2.24}$$

où $y(t)$ est une variable muette donnée par :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= -S^*(q^{-1})y(t) + R(q^{-1})u(t+1) \\ &= \theta^T\varphi(t) = [\theta^T_S, \theta^T_R][\begin{array}{c}\varphi_y(t)\\ \varphi_u(t)\end{array}] \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

et :

$$\theta^T = [s_1, ...s_{n_S}, r_0, r_1, ...r_{n_R}] = [\theta^T_S, \theta^T_R] \tag{5.2.26}$$

$$\begin{aligned} \varphi^T(t) &= [-y(t)... - y(t-n_S+1), u(t+1)...u(t-n_R+1)] \\ &= [\varphi^T_y(t), \varphi^T_u(t)] \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

et $u(t)$ est donnée par :

$$u(t+1) = d(t+1) + \frac{B^*_M(q^{-1})}{A_M(q^{-1})}y(t) \tag{5.2.28}$$

Pour une valeur constante fixée du vecteur des paramètres $\hat{\theta}$, caractérisant le filtre estimé $\hat{N}(q^{-1})$, de même dimension que le filtre optimal $N(q^{-1})$, la sortie de la voie secondaire peut être exprimée par : (dans ce cas $\hat{z}(t) = \hat{z}^0(t)$ et $\hat{y}(t) = \hat{y}^0(t)$) :

$$\hat{z}(t) = G(q^{-1})\hat{y}(t) \tag{5.2.29}$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \hat{y}_1(t) - \frac{B_K}{A_K}\chi(t) \\ &= \hat{y}_1(t) + \frac{B_K}{A_K}\nu(t) \end{aligned} \tag{5.2.30}$$

car par définition et en utilisant l'équation 4.2.10, on a :

$$\nu(t+1) = -\chi(t+1) \tag{5.2.31}$$

avec :

$$\hat{y}_1(t+1) = \hat{\theta}^T \phi(t) \tag{5.2.32}$$

La clé de ce raisonnement est que la variable $y(t+1)$ caractérisant le signal de commande à l'entrée de la voie secondaire, peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \theta^T \phi(t) + \theta^T[\varphi(t) - \phi(t)] \\ &= \theta^T \phi(t) + \theta_S^T[\varphi_y - \phi_{\hat{y}_1}] + \theta_R^T[\varphi_u - \phi_{\hat{u}}] \\ &= \theta^T \phi(t) - S^*[y(t) - \hat{y}_1(t)] + R[u(t+1) - \hat{u}(t+1)] \end{aligned} \tag{5.2.33}$$

On définit l'erreur fictive (pour un vecteur constant $\hat{\theta}$)

$$\begin{aligned} \varepsilon(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}(t+1) \\ &= y(t+1) - \hat{y}_1(t+1) - KG\varepsilon(t+1) \\ &= \frac{1}{1+KG}[y(t+1) - \hat{y}_1(t+1)] \end{aligned} \tag{5.2.34}$$

et l'erreur d'adaptation devient :

$$\begin{aligned} \nu(t+1) &= -x(t) - \hat{z}(t) \\ &= z(t) - \hat{z}(t) = G(q^{-1})\varepsilon(t+1) \end{aligned} \tag{5.2.35}$$

En prenant en compte, les équations (5.2.32) et (5.2.35), $y(t+1)$ devient :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \theta^T \phi(t) - S^*[y(t) - \hat{y}(t) + \frac{B_K}{A_K}\nu(t)] + R[u(t+1) - \hat{u}(t+1)] \\ &= \theta^T \phi(t) - S^*[y(t) - \hat{y}(t) + \frac{B_K B_G}{A_K A_G}\varepsilon(t)] + R[u(t+1) - \hat{u}(t+1)] \\ &= \theta^T \phi(t) - S^*[(1+KG)\varepsilon(t)] + R[u(t+1) - \hat{u}(t+1)] \end{aligned} \tag{5.2.36}$$

Il en résulte de (5.2.36) et en prenant en compte les expressions de $u(t)$ et $\hat{u}(t)$ données par (5.2.28) et (5.2.10) que :

$$y(t+1) = \theta^T \phi(t) - [S^*(q^{-1})(1+KG)]\varepsilon(t) + [R(q^{-1})M]\varepsilon(t+1) \tag{5.2.37}$$

En utilisant les équations (5.2.32) et (5.2.34), on obtient (après avoir passé tous les éléments en ε à gauche de l'équation) :

$$\begin{aligned} (1+KG)\varepsilon(t+1) + [S^*(q^{-1})(1+KG)]\varepsilon(t) - [R(q^{-1})M]\varepsilon(t+1) &= [\theta - \hat{\theta}]^T \phi(t) \\ (S(1+KG) - RM)\varepsilon(t+1) = [\theta - \hat{\theta}]^T \phi(t) \end{aligned} \tag{5.2.38}$$

Ce qui donne l'équation de $\varepsilon(t+1)$ suivante :

$$\varepsilon(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})A_G(z^{-1})A_K(z^{-1})}{P_{fb-ff}(q^{-1})}[\theta - \hat{\theta}]^T \phi(t) \tag{5.2.39}$$

avec $P_{fb-ff}(q^{-1})$ défini dans 5.2.18. Ainsi et en prenant en compte l'équation (5.2.35), on obtient l'équation (5.2.19). □

Corollaire 1 : *Pour $B_K = 0$ (absence du régulateur en feedback), l'erreur d'adaptation est alors donnée par :*

$$\nu(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})G(q^{-1})}{P(q^{-1})}[\theta - \hat{\theta}]^T\phi(t) \tag{5.2.40}$$

Remarque : On retrouve alors l'équation de l'erreur dans le cas de la compensation en feedforward donnée dans le chapitre 4.

Corollaire 2 : *En l'absence du couplage interne ($B_M = 0$), l'équation (5.2.19) devient :*

– *avec régulateur en feedback ($B_K \neq 0$) :*

$$\nu(t+1) = \frac{A_G(q^{-1})A_K(q^{-1})G(q^{-1})}{S(q^{-1})P_{cl}(q^{-1})}[\theta - \hat{\theta}]^T\phi(t) \tag{5.2.41}$$

– *sans régulateur en feedback ($B_K = 0$) :*

$$\nu(t+1) = \frac{G(q^{-1})}{S(q^{-1})}[\theta - \hat{\theta}]^T\phi(t) \tag{5.2.42}$$

En filtrant le vecteur $\phi(t)$ par un filtre asymptotiquement stable $L(q^{-1}) = \frac{B_L}{A_L}$, l'équation (5.2.19) pour $\hat{\theta}$ =constante devient :

$$\nu(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})A_G(q^{-1})A_K(q^{-1})G(q^{-1})}{P_{fb-ff}(q^{-1})L(q^{-1})}[\theta - \hat{\theta}]^T\phi_f(t) \tag{5.2.43}$$

avec :

$$\phi_f(t) = L(q^{-1})\phi(t) \tag{5.2.44}$$

L'équation (5.2.43) sera utilisée pour le développement d'algorithmes d'adaptation en négligeant pour le moment la non-commutativité des opérateurs quand $\hat{\theta}$ est variant

En remplaçant les paramètres estimés fixes par les paramètres estimés à l'instant courant, l'équation (5.2.43) devient l'équation de l'erreur d'adaptation a posteriori $\nu(t+1)$ (qui est calculée) :

$$\nu(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})A_G(q^{-1})A_K(q^{-1})}{P_{fb-ff}(q^{-1})L(q^{-1})}G(q^{-1})[\theta - \hat{\theta}(t+1)]^T\phi_f(t) \tag{5.2.45}$$

Cette équation (5.2.45) est de forme standard pour une erreur d'adaptation a posteriori ([Landau et al., 1997]), ce qui mène à l'utilisation de l'algorithme d'adaptation paramétrique suivant :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\Phi(t)\nu(t+1) \; ; \tag{5.2.46}$$

$$\nu(t+1) = \frac{\nu^0(t+1)}{1 + \Phi^T(t)F(t)\Phi(t)} \; ; \tag{5.2.47}$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)}\left[F(t) - \frac{F(t)\Phi(t)\Phi^T(t)F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \Phi^T(t)F(t)\Phi(t)}\right] \tag{5.2.48}$$

$$1 \geq \lambda_1(t) > 0; 0 \leq \lambda_2(t) < 2; F(0) > 0 \tag{5.2.49}$$

$$\Phi(t) = \phi_f(t) \tag{5.2.50}$$

où $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ permettent de choisir différents profiles de variation pour la matrice du gain d'adaptation. En prenant $\lambda_2(t) \equiv 0$ et $\lambda_1(t) = 1$ on obtient une matrice de gain d'adaptation constante (et en choisissant $F = \gamma I$, $\gamma > 0$ on obtient un gain d'adaptation scalaire).

Trois choix du filtres L sont à considérer, produisant trois algorithmes différents :
Algorithme I :

$$L = G \tag{5.2.51}$$

Algorithme II :

$$L = \hat{G} \tag{5.2.52}$$

Algorithme III :

$$L = \frac{\hat{A}_M \hat{A}_G A_K}{\hat{P}_{fb-ff}} \hat{G} \tag{5.2.53}$$

où :

$$\hat{P}_{fb-ff} = \hat{A}_M \hat{S}[\hat{A}_G A_K + \hat{B}_G B_K] - \hat{B}_M \hat{R} A_K \hat{A}_G \tag{5.2.54}$$

est une estimation du polynôme caractéristique de la boucle résultante du couplage feedforward-feedback calculée sur la base des estimations disponibles des paramètres du filtre $\hat{N}$.
Pour l'Algorithme III, plusieurs options pour la mise à jour de $\hat{P}_{fb-ff}$ peuvent être considérées :

- Lancer l'Algorithme II pour un certain temps afin d'avoir des estimations de $\hat{R}$ et $\hat{S}$
- Lancer une simulation (utilisant les modèles identifiés)
- Mettre à jour $\hat{P}_{fb-ff}$ après chaque instant d'échantillonnage ou de temps à autre en utilisant l'Algorithme III (après une courte initialisation en utilisant l'Algorithme II)

5.2.1 Analyse des Algorithmes

Pour les algorithmes I, II and III, l'équation de l'erreur d'adaptation a posteriori est donnée par :

$$\nu(t+1) = H(q^{-1})[\theta - \hat{\theta}(t+1)]^T \Phi(t) \tag{5.2.55}$$

où :

$$H(q^{-1}) = \frac{A_M A_G A_K}{P_{fb-ff} L(q^{-1})} G, \Phi = \phi_f \tag{5.2.56}$$

L'analyse des algorithmes est semblable à celle donnée dans le chapitre (4) pour le cas de l'absence du régulateur en feedback, en prenant la nouvelle équation de l'erreur d'adaptation (5.2.56). Cette analyse démontre la convergence de l'erreur d'adaptation et sa bornitude dans le cas déterministe ou stochastique.

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on propose et discute des algorithmes de compensation adaptative en feedforward pour une approche hybride (feedback + feedforward adaptatif) utilisant un régulateur en contre réaction fixe tout en prenant en compte l'existence d'un couplage positif souvent présent dans les systèmes de contrôle actif de vibration/bruit.

Une analyse théorique a fait apparaître une importante interaction entre le régulateur en feedback et la condition de stabilité de la compensation adaptative. Cette interaction est encore plus importante en présence du couplage interne. La première conséquence de ces résultats est que le filtre utilisé pour assurer la stabilité du système de compensation adaptative dépend des éléments de la boucle de régulation.

Des résultats expérimentaux, sur le système de contrôle actif de vibration CARV présenté dans le chapitre 2, démontrant l'efficacité de cette approche seront présentés dans le chapitre 6.

Chapitre 6

Résultats expérimentaux

6.1 Introduction

Les lois de commandes synthétisées dans les chapitres 3, 4 et 5 (adaptatives et non adaptatives) seront illustrées dans ce chapitre par des essais en temps réel sur le système de contrôle actif de vibration "CARV" présenté dans le chapitre 2. La perturbation bande large traitée est une SBPA (séquence binaire pseudo aléatoire). Afin de montrer la propriété adaptative des algorithmes donnés dans le chapitre 4, une perturbation sinusoïdale sera rajoutée en superposition avec la SBPA. Des résultats de l'algorithme FuLMS sur la structure CARV sont aussi présentés pour des fins de comparaison. L'objectif de ces commande est de minimiser l'effet des perturbations sur la sortie du système.

Les résultats des compensateurs H_∞ (nominal et réduits) calculés dans le chapitre 3 sont présentés dans la section 6.2. Ces résultats permettront de valider la méthodologie de réduction de l'ordre du compensateur nominal afin d'avoir une référence pour les algorithmes adaptatifs de même dimension. La section 6.3 est dédiée aux résultats des algorithmes adaptatifs présentés dans le chapitre 4, ainsi qu'à la comparaison de ces algorithmes avec l'algorithme FULMS très utilisé dans le domaine du contrôle actif de vibrations/bruit. Quelques remarques et conclusions sur les résultats obtenus sont présentées dans la section 6.5.

6.2 Résultats des compensateurs H_∞ obtenus en temps réel sur la structure CARV

La performance du système CARV pour le rejet de perturbation bande large sera illustrée en utilisant le schéma de commande en feedforward avec les différents com-

pensateurs (nominal et d'ordre réduit) synthétisés dans le chapitre 3. Une SBPA est appliquée à l'actionneur inertiel comme une perturbation, ce qui implique que la structure mécanique est perturbée par un bruit blanc filtré par la fonction de transfert de l'actionneur I de la figure 2.2.

Les résultats dans le domaine temporel obtenus avec et sans compensateurs en feedforward sont présentés dans les figures 6.1 et 6.2, où N_n représente le compensateur en feedforward nominal, et N_r et N_s sont les compensateurs d'ordre réduit calculés respectivement avec des données réelles ou simulées.
On remarque bien qu'on obtient pratiquement le même niveau de l'accélération résiduelle en utilisant le compensateur nominal ou d'ordre réduit.

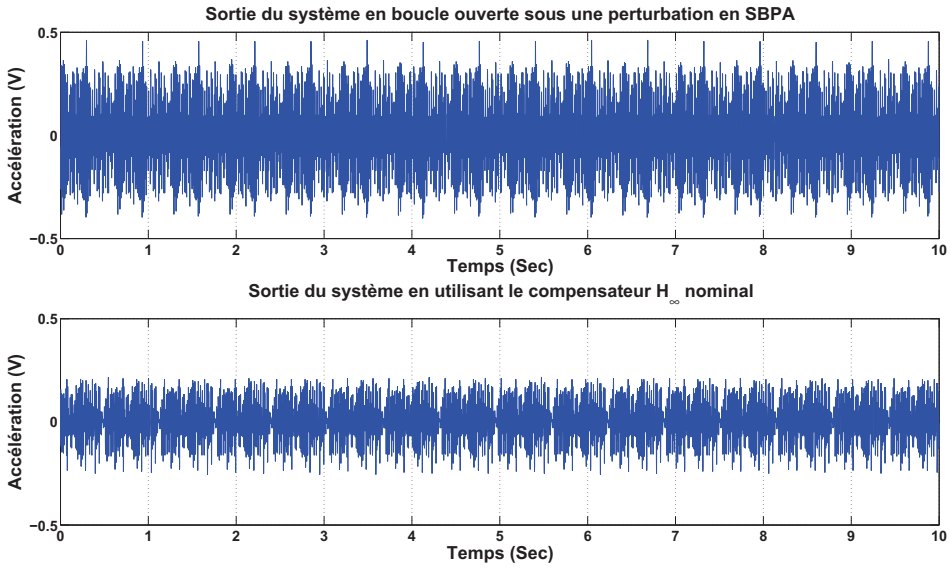


FIG. 6.1 – Résultats en temps réel obtenus avec une perturbation en SBPA (haut : Boucle ouverte, bas : Compensateur H_∞ nominal).

La variance de l'accélération résiduelle en boucle ouverte est : $var(\chi(t)) = 0.0328$. Avec la compensation en feedforward, la variance de la sortie est autour de $var(\chi(t)) = 0.0079$ dans les trois cas (compensateur nominal et les deux compensateurs d'ordre réduit). Ceci correspond à une atténuation globale de $12.37dB$.

La figure 6.21 montre les densités spectrales de puissance de l'accélération résiduelle obtenues en boucle ouverte et avec la compensation en feedforward. Il est facile de remarquer une importante atténuation dans les zones fréquentielles où la voie secondaire G possède suffisamment de gain.

Ces résultats sont résumés dans le tableau 6.1.
La première ligne donne la complexité de chaque compensateur utilisé alors que la deuxième ligne donne les marges de stabilité généralisés de Vinnicombe $b(N_i, M)$ calculé

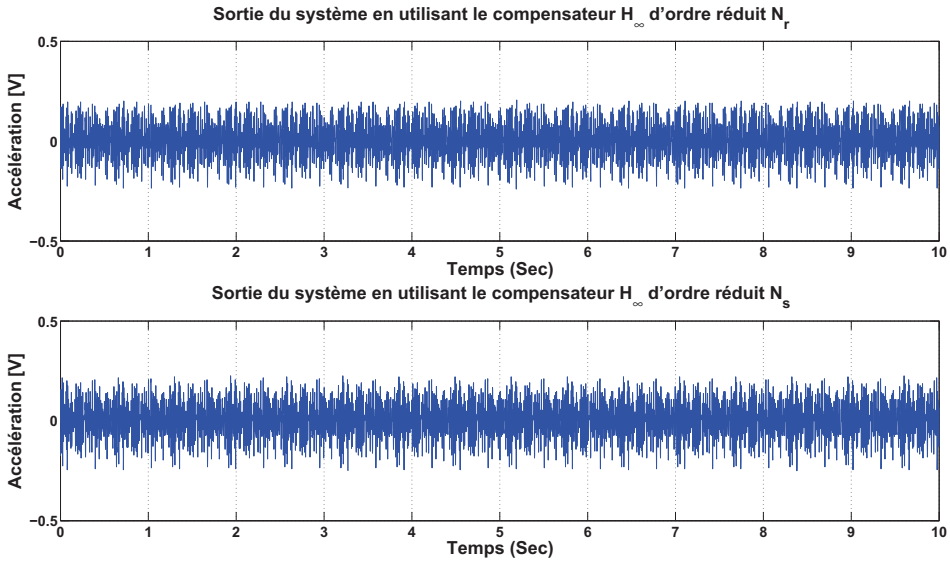


FIG. 6.2 – Résultats en temps réel obtenus avec une perturbation en SBPA en utilisant les compensateurs d'ordres réduits (haut : N_r, bas : N_s).

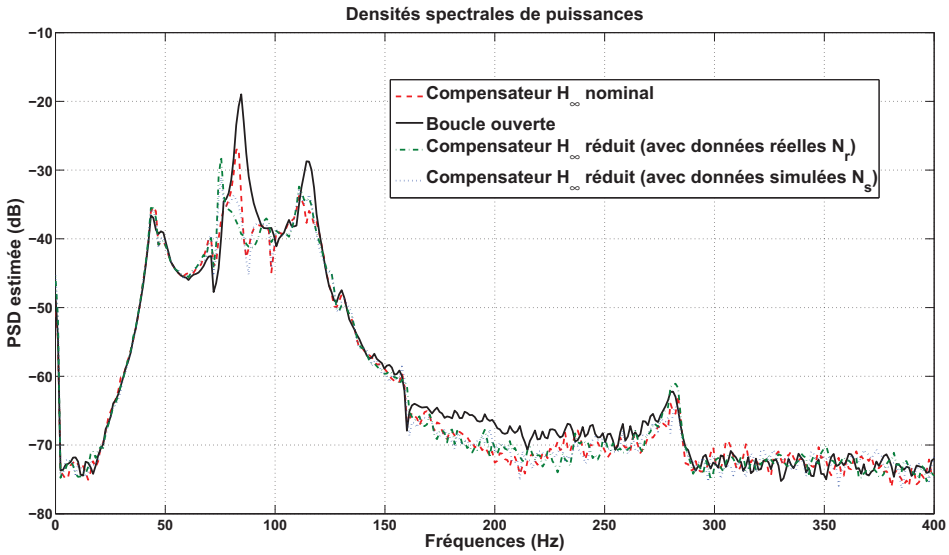


FIG. 6.3 – Densités spectrales de puissances de l'accélération résiduelle en boucle ouverte et avec les compensateurs H_∞.

avec le modèle de la voie inverse ([Vinnicombe, 1993; Vinnicombe, 1996]). Il est important de remarquer que les régulateurs d'ordres réduits donnent une meilleure marge de stabilité généralisée que le régulateur nominal (Meilleure robustesse par rapport aux incertitude sur le modèle de M). Ceci montre que l'ordre obtenu était surévalué et que les pôles et les zéros du régulateur nominal simplifiés lors de la réduction (principalement

Compensateur	N_n	N_r	N_s
Complexité du Compensateur	$n_{B_N} = 70$ $n_{A_N} = 70$	$n_{B_N} = 19$ $n_{A_N} = 20$	$n_{B_N} = 19$ $n_{A_N} = 20$
Marge de stabilité de Vinnicombe	0.063	0.143	0.148
Variance de l'accélération résiduelle	0.0079	0.0077	0.0080

TAB. 6.1 – Comparaison des différents compensateurs H_∞ en feedforward en utilisant la même perturbation.

en hautes fréquences) n'avaient pour influence que de réduire la marge de stabilité de la boucle fermée $(N - M)$. La troisième ligne présente les variances de l'accélération résiduelle.
Étant donné que les résultats des compensateurs d'ordre réduit sont très proches de ceux avec le compensateur nominal, dans toute la suite de ce chapitre, l'expression de compensateur H_∞ en feedforward est consacrée au compensateur N_r qui sera pris comme référence.

6.3 Résultats des compensateurs adaptatifs obtenus en temps réel sur la structure CARV

Cette section est dédiée aux résultats des algorithmes adaptatifs présentés dans le chapitre 4. Les résultats des algorithmes en utilisant des gains d'adaptation scalaires et matriciels sont donnés séparément. Une comparaison avec les résultats du compensateur H_∞ et de l'algorithme FULMS est aussi présentée.

6.3.1 Rejet de perturbation bande large en utilisant un gain d'adaptation matriciel

La performance du système pour le rejet de perturbation bande large sera illustrée en utilisant le schéma de commande adaptatif en feedforward donné dans la figure 4.2, et un gain d'adaptation matriciel. La structure du filtre adaptatif utilisée pour la plupart des expériences était de $n_R = 9$, $n_S = 10$ (total de 20 paramètres) et cette complexité ne permet pas de satisfaire la condition de poursuite parfaite (pas assez de paramètres). L'influence du nombre de paramètres à adapter sur la performance du système a été aussi traitée (jusqu'à 40 paramètres).

De même que pour le cas du compensateur H_∞, une excitation en SBPA a été considérée comme perturbation sur la voie primaire globale. Les densités spectrales de puissance

du signal de perturbation $d(t)$ en boucle ouverte et de $\hat{u}(t)$ quand la compensation est active sont présentées dans la figure 6.4. L'effet du couplage mécanique est clair et assez significatif pour ne pas être négligé

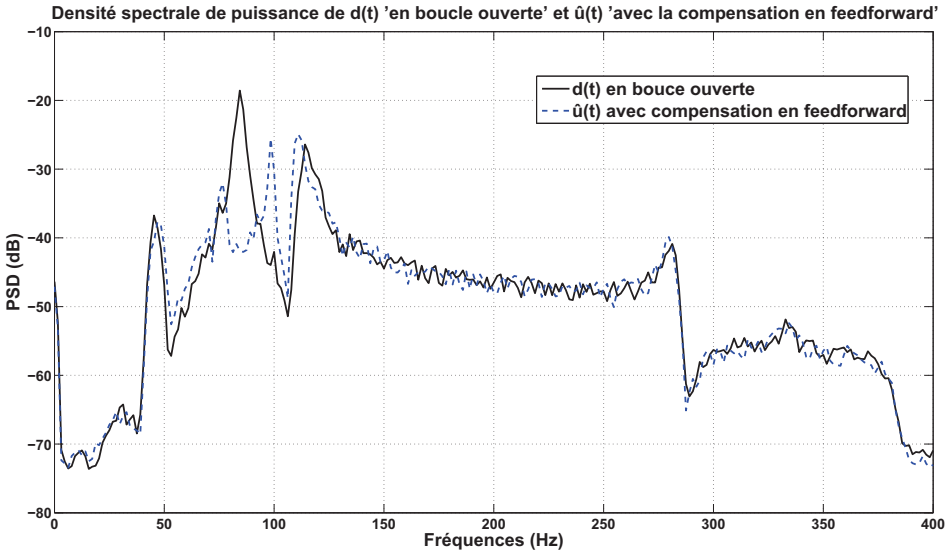


FIG. 6.4 – Densités spectrales de l'image de la perturbation en boucle ouverte $d(t)$ et avec compensation en feedforward $\hat{u}(t)$ (expérimental).

Pour le mode opératoire *adaptatif*, les algorithmes II et III présentés dans le chapitre 4 ont été utilisés avec un gain d'adaptation décroissant ($\lambda_1(t) = 1$, $\lambda_2(t) = 1$) combiné avec un gain d'adaptation à *trace constante*. Pratiquement les mêmes résultats sont obtenus si à la place du gain d'adaptation décroissant, on utilise un gain d'adaptation décroissant avec un facteur d'oubli avec $\lambda_1(t)$ (le facteur d'oubli tend vers 1). L'équation de mise à jour du facteur d'oubli est donnée par :

$$\lambda_1(t) = \lambda_0.\lambda_1(t-1) + (1-\lambda_0) \tag{6.3.1}$$

avec $\lambda_1(0) = \lambda_0 = 0.95$ à 0.99.

Une fois que la trace du gain d'adaptation $F(t)$ est en dessous d'une certaine valeur, on la maintient constante en modifiant d'une manière appropriée $\lambda_1(t)$ pour un rapport constant $\alpha = \lambda_1(t)/\lambda_2(t)$. La formule correspondante est :

$$trF(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} tr[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\alpha + \phi(t)^T F(t)\phi(t)}] = trF(t) \tag{6.3.2}$$

L'avantage de la *trace constante* est que l'adaptation va dans la direction optimale (moindres carrés) sans que le pas ne tende vers zéro. Pour plus détails, voir [Landau & Zito, 2005; Landau et al., 1997].

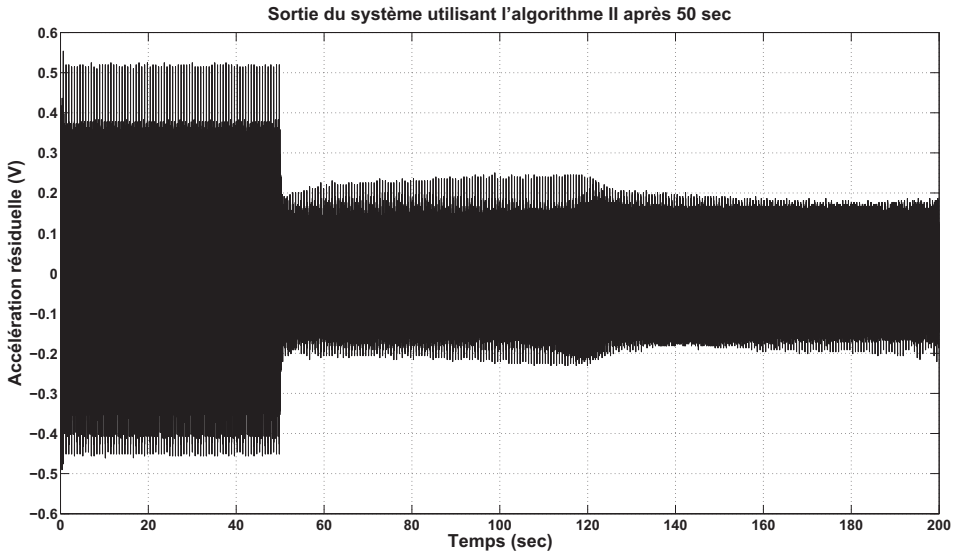


FIG. 6.5 – Résultats en temps réel obtenus avec l'algorithme II en utilisant un gain d'adaptation matriciel.

Les expériences en temps réel ont été réalisées comme suit :

– Application permanente de la perturbation
– Activation de la compensation adaptative en feedforward à $t = 50sec$.

Les résultats temporels obtenus en boucle ouverte et avec la compensation adaptative en utilisant les algorithmes II et III sur le système de contrôle actif de vibration CARV présenté dans le chapitre 2 sont donnés dans les figures 6.5 et 6.6, respectivement. Le polynôme $\hat{P}$ utilisé pour le filtrage dans l'algorithme III a été calculé sur la base des paramètres estimés obtenus avec l'algorithme II à $t = 3600sec$ (on obtient presque les mêmes résultats si l'horizon de calcul est de l'ordre de 200sec). La trace initiale pour le gain d'adaptation matriciel pour 20 paramètres à adapter était égale à 10 et la valeur de la trace constante a été fixée à 0.2. Comme on peut le constater, la durée du transitoire pour l'algorithme II est approximativement $75sec$ alors qu'elle est approximativement égale à $12sec$ pour l'algorithme III.

La variance de la force résiduelle sans la compensation est : $var(\chi(t) = x(t)) = 0.0354$. Avec la compensation adaptative en feedforward utilisant l'algorithme II, la variance est : $var(\chi(t)) = 0.0058$ (évaluée après $175sec$, après que le transitoire soit terminé). Ceci correspond à une atténuation globale de $15.68dB$ dB. En utilisant l'algorithme III, la variance de l'accélération résiduelle est : $var(\chi(t)) = 0.0054$. Ceci corresponds à une atténuation globale de 16.23 dB, ce qui représente une amélioration par rapport à l'algorithme II. La convergence des paramètres est beaucoup plus lente (sans impact majeur sur la performance). Elle est illustrée sur la figure 6.7. La durée de l'expérience était de 12 heures en utilisant l'algorithme III.

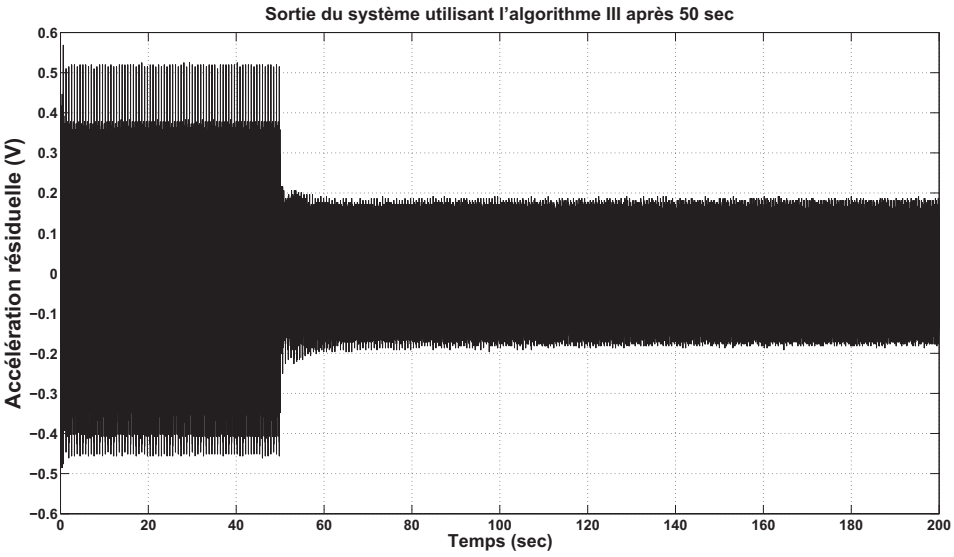


FIG. 6.6 – Résultats en temps réel obtenus avec l'algorithme III en utilisant un gain d'adaptation matriciel.

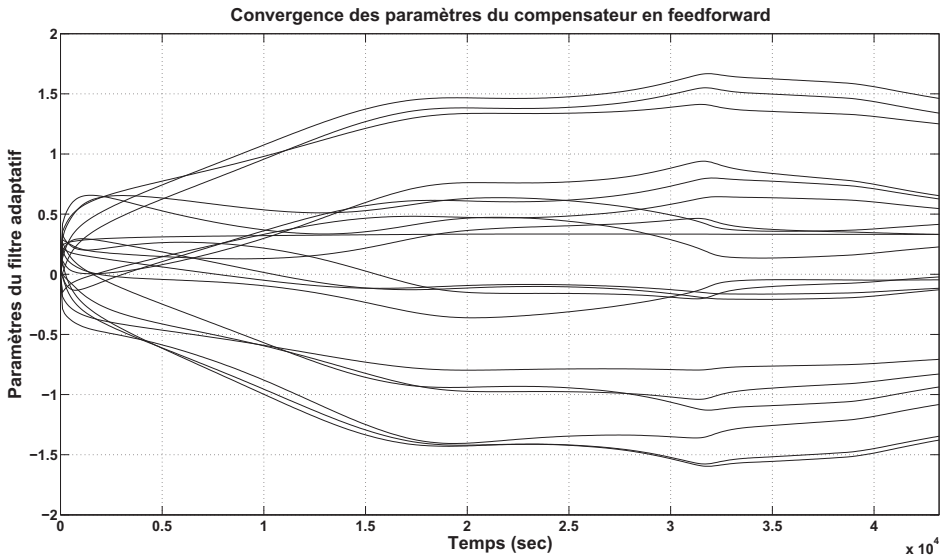


FIG. 6.7 – Évolution des paramètres du compensateur en feedforward pour l'algorithme III avec un gain d'adaptation matriciel (expérimental).

La figure 6.21 montre les densités spectrales de puissance de l'accélération résiduelle mesurée sur le système réel en boucle ouverte (sans compensation) et en utilisant la compensation en feedforward (après le transitoire d'adaptation c.à.d 175sec). L'atténuation globale correspondante est aussi donnée. On remarque une grande atténuation dans la région fréquentielle où la voie secondaire possède assez de gain (voir la section 4.3.3 pour

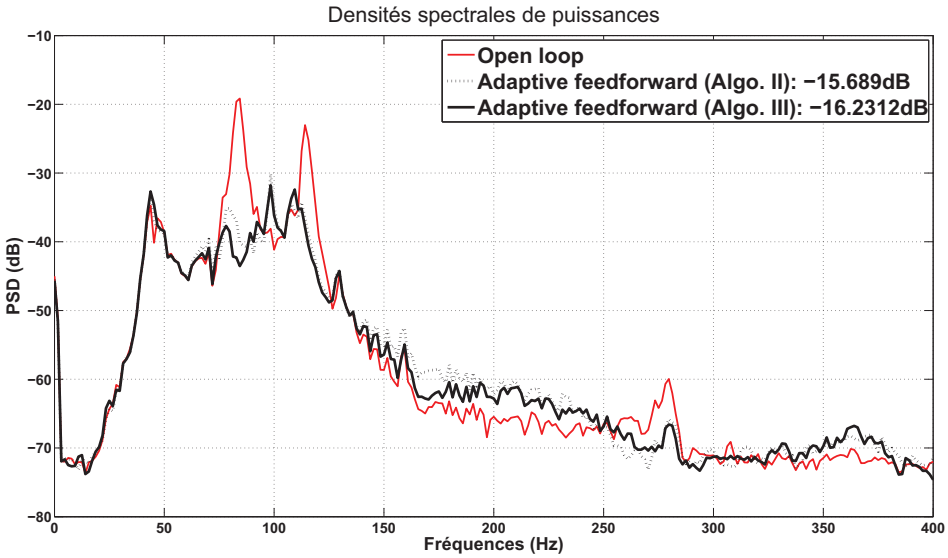


FIG. 6.8 – Densités spectrales de puissance de l'accélération résiduelle en boucle ouverte et avec compensation adaptative (expérimental).

Nombre de paramètres à adapter	20	32	40
Atténuation globale obtenue (dB)	16.23	16.49	16.89

TAB. 6.2 – Influence du nombre des paramètres à adapter sur l'atténuation globale obtenue en utilisant l'algorithme III.

les explications). Les niveaux d'atténuation ainsi que la convergence de l'algorithme III sont meilleurs que ceux de l'algorithme II.

L'influence du nombre des paramètres à adapter sur la performance du système est résumée dans le tableau 6.2 pour le cas de l'algorithme III. L'atténuation globale est légèrement améliorée lorsque le nombre de paramètres du compensateur est augmentée (les densités spectrales sont presque les mêmes).

Afin de pouvoir tester les capacités d'adaptation des algorithmes, une perturbation sinusoïdale a été rajouté à $1500sec$ (algorithmes III avec une trace constante égale à 1). La figure 6.9 montre les résultats temporels dans le cas ou l'adaptation est arrêtée avant l'application de la perturbation sinusoïdale (figure supérieure) et aussi quand l'adaptation est active (figure inférieure). La durée du transitoire est approximativement de $25sec$. La figure 6.10 présente l'évolution des paramètres quand la perturbation sinusoïdale est appliquée. Les densités spectrales quand l'adaptation est arrêtée avant l'application de la perturbation sinusoïdale et quand l'adaptation est active sont données dans la figure 6.11.

On peut remarquer une atténuation de la perturbation sinusoïdale supérieure à $35dB$ sans affecter les autres fréquences. Les mêmes résultats sont obtenus dans le cas de l'algorithme II.

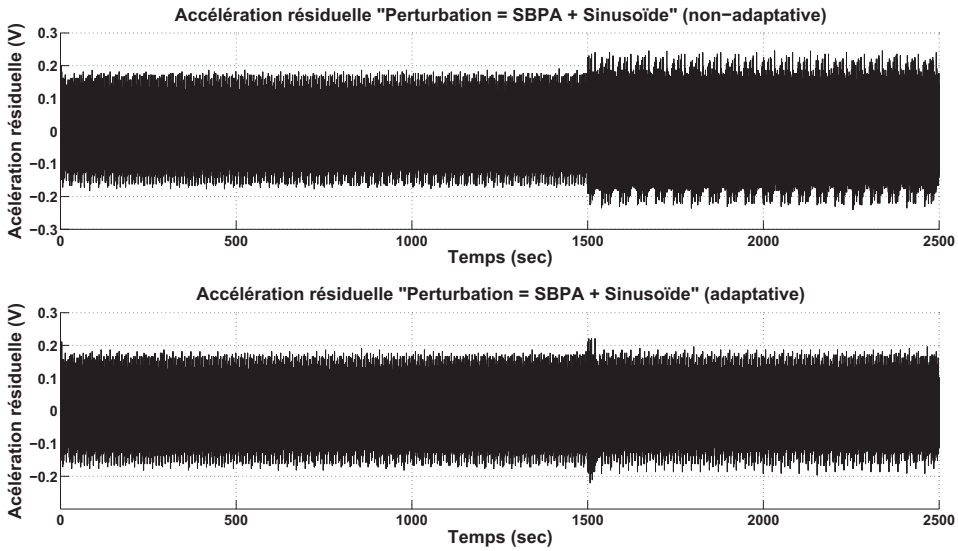


FIG. 6.9 – Résultats en temps réel du rejet d'une perturbation sinusoïdale additionnelle. Figure supérieure : adaptation arrêtée avant l'application de la perturbation sinusoïdale. Figure inférieure : adaptation toujours active.

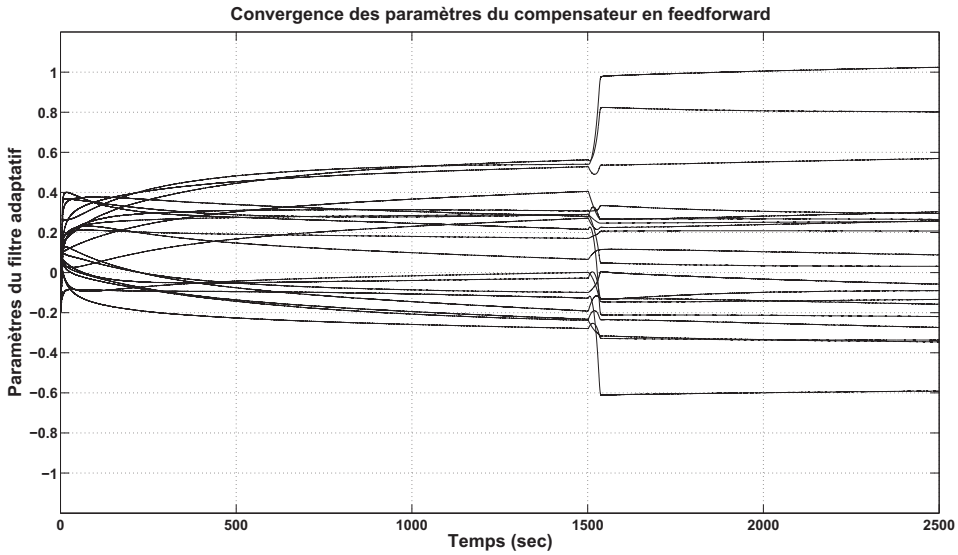


FIG. 6.10 – Évolution des paramètres du compensateur après le rajout d'une perturbation sinusoïdale à $1500sec$ (expérimental).

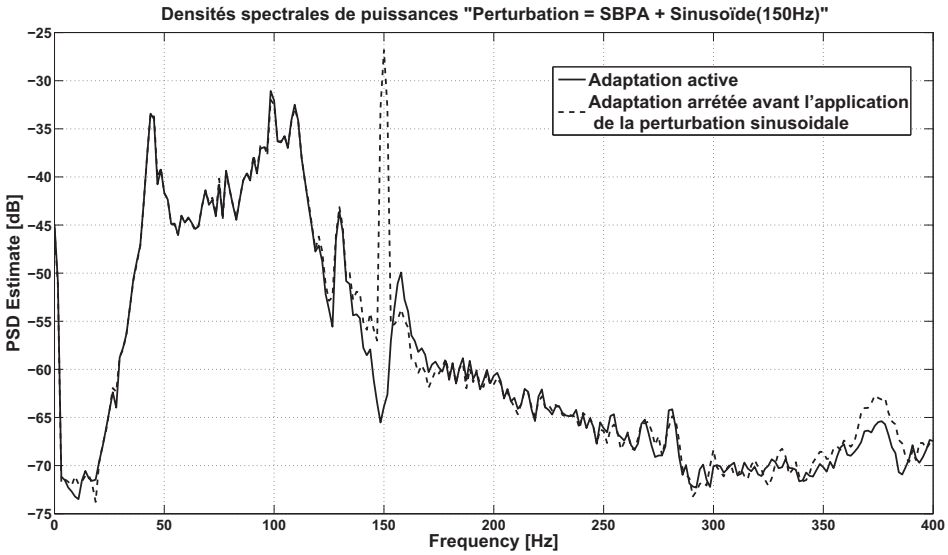


FIG. 6.11 – Densités spectrales de puissance de l'accélération résiduelle après le rajout d'une perturbation sinusoïdale (Perturbation = SBPA + sinusoïde).

6.3.2 Rejet de perturbation bande large en utilisant un gain d'adaptation scalaire

Les expériences ont été réalisées avec le même protocole que pour le gain d'adaptation matriciel. Trois algorithmes ont été testés :

- L'algorithme III (proposé dans le chapitre 4 avec gain d'adaptation scalaire
- L'algorithme présenté dans ([Jacobson et al., 2001])
- L'algorithme FULMS présenté dans ([Wang & Ren, 1999])

L'algorithme de Jacobson-Johnson était instable même avec une très faible valeur du gain d'adaptation. L'explication est claire. L'absence de filtrage du vecteur des observations au moins par $\hat{G}$, et comme G n'est pas SPR (strictement réelle positive), en particulier dans les régions fréquentielles ou une grande partie de l'énergie de la perturbation est concentrée, l'instabilité n'est pas surprenante.
Afin d'avoir une bonne comparaison, la même valeur du gain d'adaptation a été utilisée pour l'algorithme III et l'algorithme FULMS. Puisque l'algorithme FULMS est très sensible au choix de la valeur du gain d'adaptation et devient facilement instable ou avec de mauvais transitoires, une valeur appropriée du gain d'adaptation égale à 0.001 a été choisie car pour une plus grande valeur l'algorithme FULMS est instable. Cette valeur correspondrait à une trace du gain d'adaptation matriciel égale à 0.02 pour un filtre de 20 paramètres.

La figure 6.12 montre le transitoire d'adaptation pour l'algorithme FULMS. La valeur maximale est inacceptable en pratique car on ne pourrait jamais tolérer un dépassement

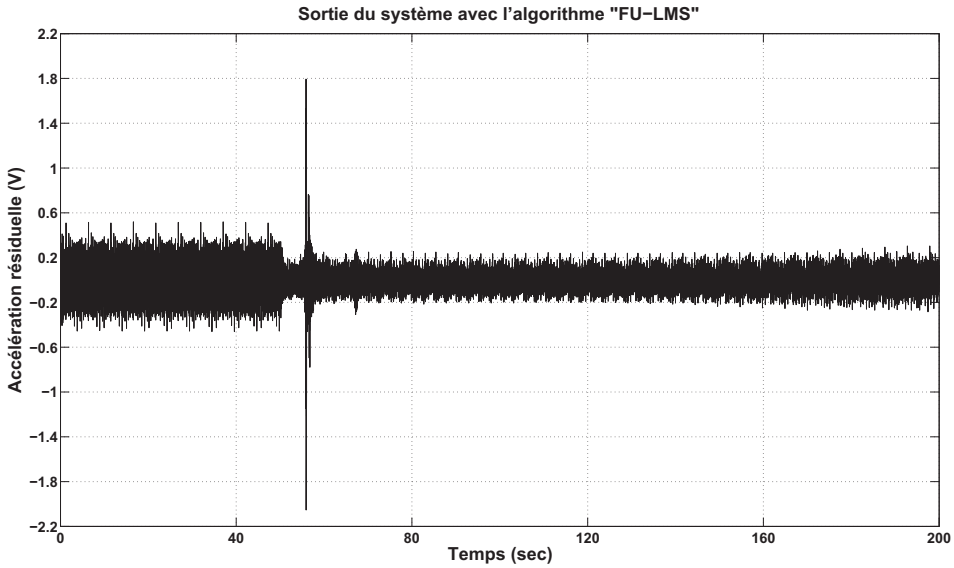


FIG. 6.12 – Résultats en temps réel obtenus avec l'algorithme FULMS.

de 300% pour l'accélération résiduelle à minimiser. Il est à noter que ce dépassement n'intervient pas juste après l'application de la perturbation à $50sec$ mais quelques secondes après, ce qui nous oblige à dire que c'est dû au non respect de la condition de SPR. La figure 6.13 présente le transitoire d'adaptation de la version scalaire de l'algorithme III. Presque le même comportement est obtenu pour la version scalaire de l'algorithme II. Les figures 6.14 et 6.15 montrent l'evolution des paramètres pour l'algorithme FULMS et la version scalaire de l'algorithme III. On peut remarquer des sauts dans l'évolution des paramètres de l'algorithme FULMS et même des instabilités apparaissent s'il est maintenu actif assez longtemps. Pour l'algorithme III, l'évolution des paramètres est régulière et aucune instabilité n'est survenue même pour des essais assez de longs (12 heures). En comparant les figures 6.15 et 6.7, on peut s'apercevoir que la convergence du point de vue paramétrique n'est pas la même. L'explication est que, soit l'algorithme n'a pas encore convergé (valeur du gain d'adaptation 10 fois plus faible) ou bien, il existe plusieurs minimums locaux dans le cas où la condition de poursuite parfaite n'est pas satisfaite.

Les performances dans le domaine fréquentiel sont résumées dans la figure 6.16 où les densités spectrales de puissance et les atténuations globales obtenues avec les algorithmes utilisant un gain d'adaptation scalaire sont données. Dans la figure 6.16, les performances du compensateur H_∞ synthétisé dans le chapitre 3 sont aussi données. Le compensateur H_∞ donne de meilleurs résultats que l'algorithme FULMS mais de moins bons résultats en comparaison avec les algorithmes II et III dans les versions scalaires ou matricielles, bien que la complexité du filtre soit divisée par 2.

Les capacités d'adaptation ont été testées en rajoutant une perturbation sinusoïdale de la même manière que pour le gain d'adaptation matriciel. L'algorithme FULMS a été

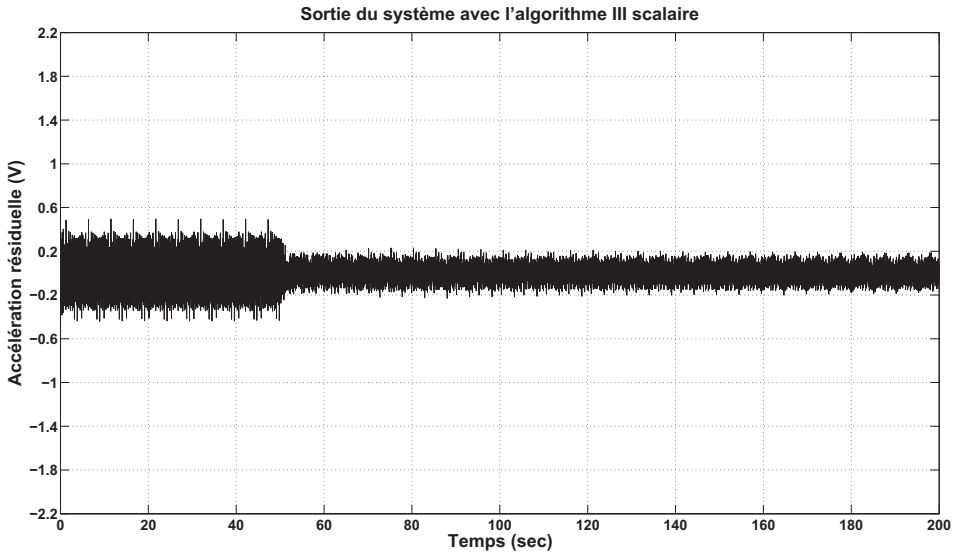


FIG. 6.13 – Résultats en temps réel obtenus avec l'algorithme III utilisant un gain d'adaptation scalaire.

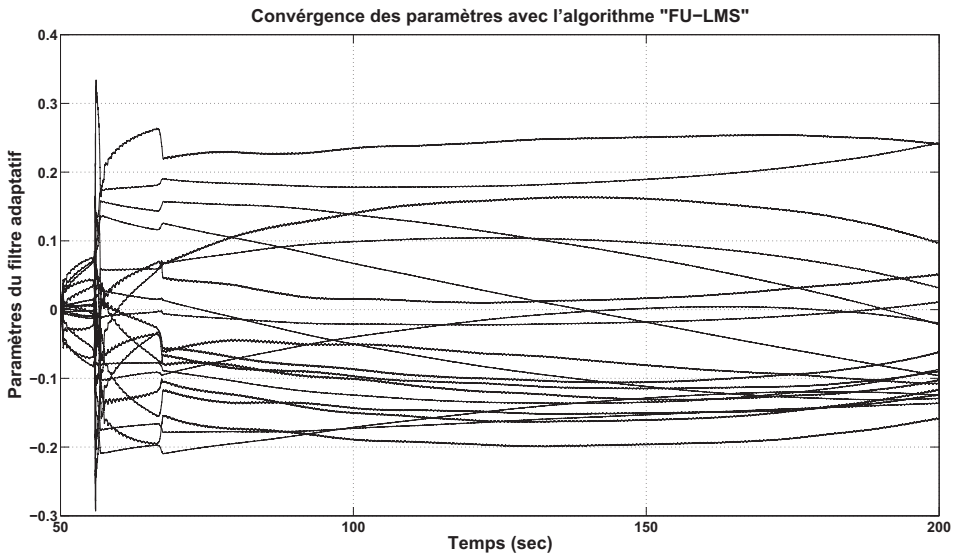


FIG. 6.14 – Evolution des paramètres du compensateur feedforward (expérimental) - Algorithme FULMS.

déstabilisé par le rajout de la perturbation sinusoïdale. La figure 6.17 présente les densités spectrales de puissance de l'accélération résiduelle quand l'adaptation est arrêtée avant l'application de la perturbation, et quand l'adaptation est active, ainsi qu'avec le compensateur H_∞ qui n'est pas synthétisé pour une perturbation supplémentaire. La performance de l'algorithme d'adaptation III avec un gain scalaire est moins bonne que

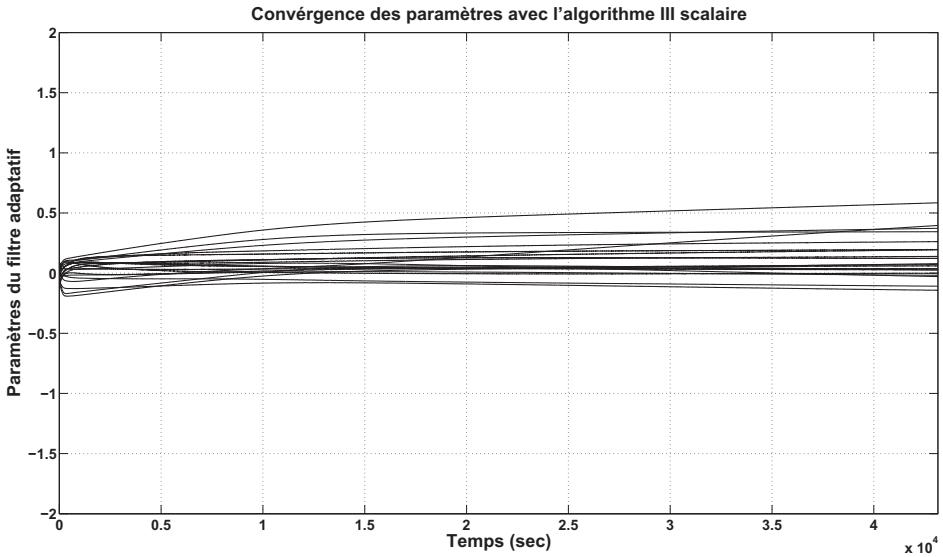


FIG. 6.15 – Evolution des paramètres du compensateur feedforward (expérimental) - Algorithme III avec gain d'adaptation scalaire.

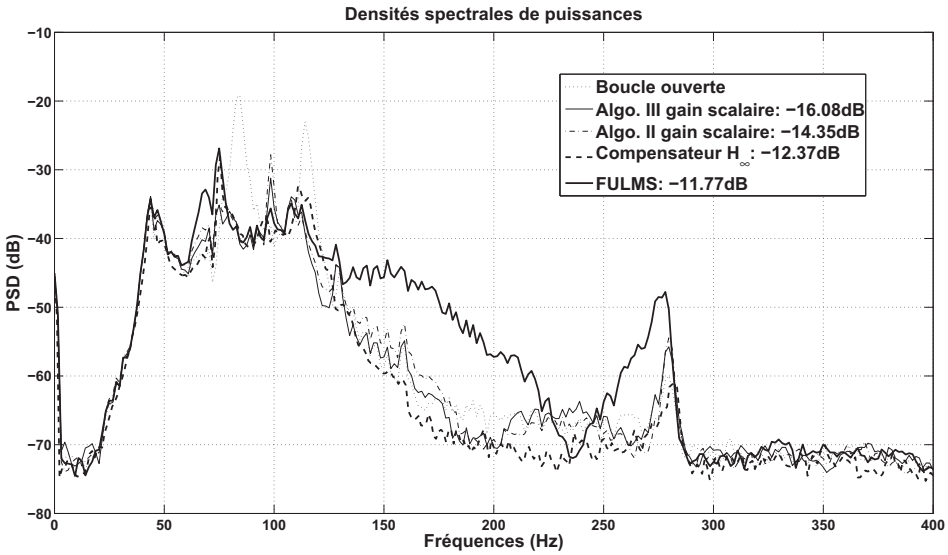


FIG. 6.16 – Densités spectrales de l'accélération résiduelle en boucle ouverte et avec compensation adaptative utilisant un gain d'adaptation scalaire et avec compensateur H_∞.

celle avec un gain matriciel (voir la figure 6.11). La perturbation sinusoïdale est atténuée de $20dB$ dans le cas scalaire alors que l'atténuation était supérieure à $35dB$ dans le cas du gain matriciel. De plus, les performance se sont dégradées dans la région fréquentielle $170-270Hz$ qu'on ne voit pas avec le gain d'adaptation matriciel. Le compensateur H_∞

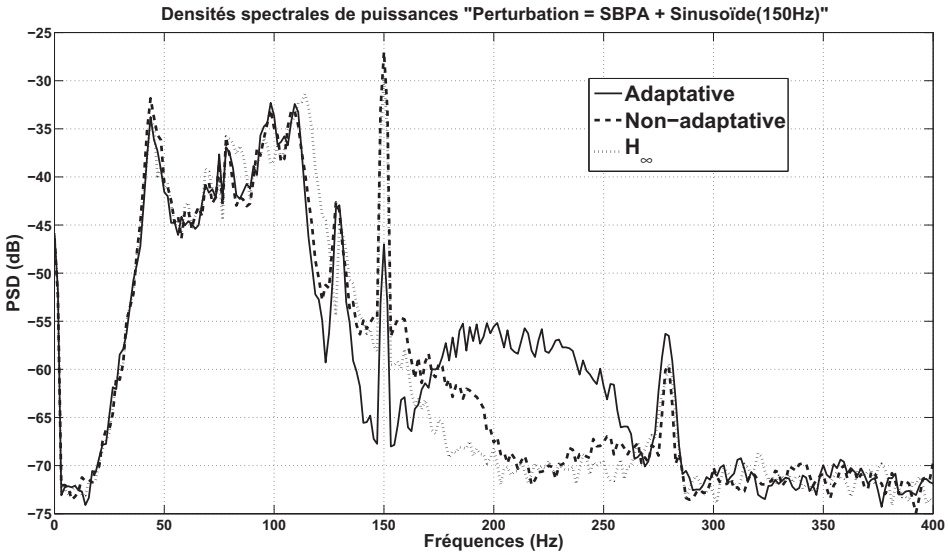


FIG. 6.17 – Densités spectrales de puissance de l'accélération résiduelle après le rajout d'une perturbation sinusoïdale en utilisant un gain d'adaptation scalaire et avec le compensateur H_∞ (Perturbation = SBPA + sinusoïde)(expérimental).

donne une petite atténuation de la perturbation sinusoïdale (2.6dB) car il n'a pas de capacités d'adaptation.

6.4 Résultats de la compensation hybride de perturbations sur la structure CARV

Cette section présente les résultats expérimentaux obtenus sur la structure CARV en utilisant les algorithmes adaptatifs de la compensation hybride présentée dans le chapitre (5). Ces résultats seront comparés avec ceux de la compensation adaptative en feedforward donnée auparavant, ainsi qu'avec des résultats d'une approche H_∞ non adaptative pour le cas hybride.

6.4.1 Synthèse du régulateur RS en feedback

L'objectif du régulateur en contre réaction K de la figure 4.2 est la réduction de l'effet de la perturbation bande large sur la sortie $\chi(t)$ dans les zones fréquentielles où le procédé (voie secondaire) possède assez de gain, et sans utilisation de la mesure de l'image de la perturbation $u(t)$. Afin de réaliser cet objectif, le problème a été formulé comme un problème H_∞ standard en utilisant des fonctions de pondération appropriées

comme présenté dans la figure 6.18.

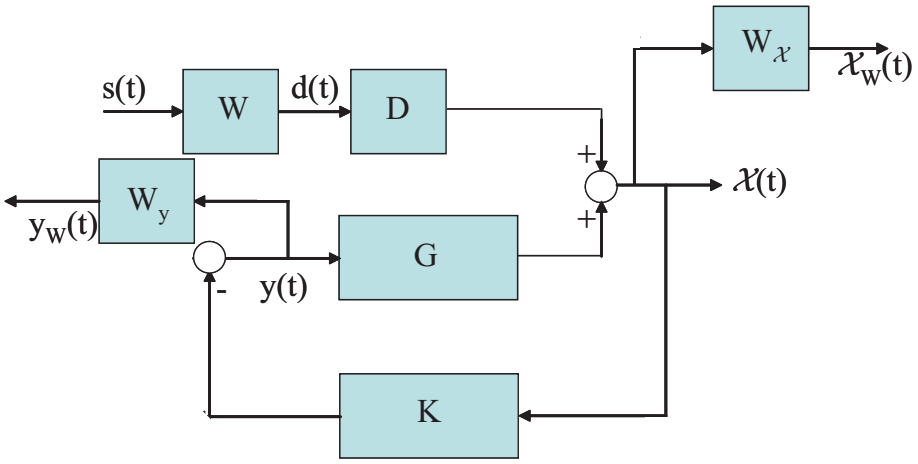


FIG. 6.18 – Structure de la synthèse de la compensation en contre réaction.

Se basant sur cette figure, le procédé généralisé standard P est donné par :

$$\begin{bmatrix} \chi_w \\ y_w \\ \chi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_\chi \cdot W \cdot D & W_\chi \cdot G \\ 0 & W_y \\ W \cdot D & G \end{bmatrix}}_{P} \cdot \begin{bmatrix} s \\ y \end{bmatrix} \tag{6.4.1}$$

La description du procédé standard est présentée dans la figure 6.19, construite sur la base de la figure 6.18.

A partir de la figure 6.18, on définit les fonctions de sensibilités à calibrer suivantes :
– Fonction de sensibilité perturbation-sortie $\frac{\chi(t)}{s(t)}$:

$$S_{\chi s} = (W \cdot D) \cdot \left(\frac{1}{1 - NM} \right) \tag{6.4.2}$$

– Fonction de sensibilité perturbation-entrée $\frac{y(t)}{s(t)}$:

$$S_{ys} = -K \cdot (W \cdot D) \cdot \left(\frac{1}{1 - NM} \right) = -K S_{\chi s} \tag{6.4.3}$$

Le problème de commande est de trouver un compensateur en feedback stabilisant K, assurant $\eta < 1$, de telle sorte que :

$$\left\| \begin{pmatrix} W_\chi \cdot S_{\chi s} \\ W_y \cdot S_{ys} \end{pmatrix} \right\|_\infty < \eta \tag{6.4.4}$$

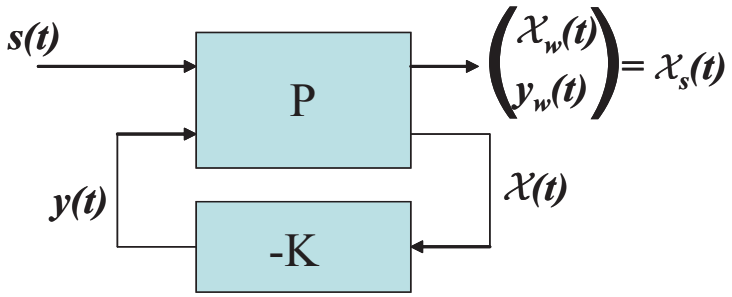


FIG. 6.19 – Procédé généralisé standard avec le compensateur en contre réaction.

La fonction de pondération W_y a été choisie constante. Ce choix est motivé par le niveau des saturation (autour $\pm 0.5V$).
W_χ a été choisie égale à une approximation de G, vu qu'il est intéressant de minimiser le signal de sortie $\chi(t)$ uniquement dans les régions fréquentielles où G possède assez de gain.

Ce problème de calibrage a été résolu dans notre cas par l'utilisation de la technique de placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilités présentée dans [Landau et al., 1996], suivant les étapes suivantes [1] :

- tous les pôles de la boucle ouverte (pôles de G) ont été placés en boucle fermée. Néanmoins, l'amortissement des pôles les moins amortis à $83.9Hz$ et $116Hz$ a été choisi égale à 0.1 au lieu de 0.011 et 0.014 respectivement. Ceci correspond à une atténuation de $15dB$ et $10dB$ respectivement à ces fréquences.
- La boucle a été ouverte en basses et hautes fréquences pour des raisons de robustesse en choisissant les parties fixes $H_R = (1 + z^{-1})(1 - z^{-1})$.
- 11 pôles auxiliaires réels à 0.3, ont été rajoutés sur un maximum de 18 permis tel que :
  $n_{P_{cl}} \leq n_{A_G} + n_{B_G} + n_{H_R} + n_{H_S} + d - 1 = 33.$

Ce problème aurait pu être résolu en utilisant une technique de minimisation standard de type H_∞ ou H_2.

6.4.2 Rejet de perturbation large bande

Les performances du système considéré pour le rejet de perturbations large bande vont être illustrées en utilisant l'approche hybride. La structure du filtre adaptatif en feedforward utilisée dans les essais temps réel était : $n_R = 9$, $n_S = 10$ (20 paramètres) et cette complexité ne permet pas de vérifier la condition de poursuite parfaire (pas assez de paramètre).

[1] Cette méthode résout le problème de minimisation de telle sorte que $|S_{\chi s}(e^{-j\omega})| < |W_\chi(e^{-j\omega})|^{-1}$ et $|S_{ys}(e^{-j\omega})| < |W_y(e^{-j\omega})|^{-1}$ pour $0 \leq \omega \leq \pi$

Comme pour le cas de la compensation adaptative en feedforward uniquement, le signal d'excitation considéré est une SBPA appliquée à l'entrée de la voie primaire globale.

Les Algorithmes II et III ont été utilisés avec un gain d'adaptation décroissant ($\lambda_1(t) = 1$, $\lambda_2(t) = 1$) combiné avec une *trace constante*.

Les expériences ont été réalisées en appliquant premièrement la perturbation en boucle ouverte durant $50s$ et après la boucle est fermée avec le système hybride. Ces résultats seront comparés avec ceux du régulateur en feedback uniquement et avec ceux de la compensation en feedforward adaptative uniquement, présentés auparavant.

Les résultats temporels obtenus en boucle ouverte et avec le contrôle hybride (utilisant l'algorithme III) sur la structure CARV sont présentés dans la figure 6.20. Le filtre de l'algorithme III a été calculé sur la base des paramètres estimées obtenus avec l'algorithme II à $t = 3600s$ (des résultats similaire sont obtenus avec un horizon d'initialisation de $200s$). La trace initiale de la matrice de gain d'adaptation était de 10 et la trace constante définie a été fixée à 0.2.

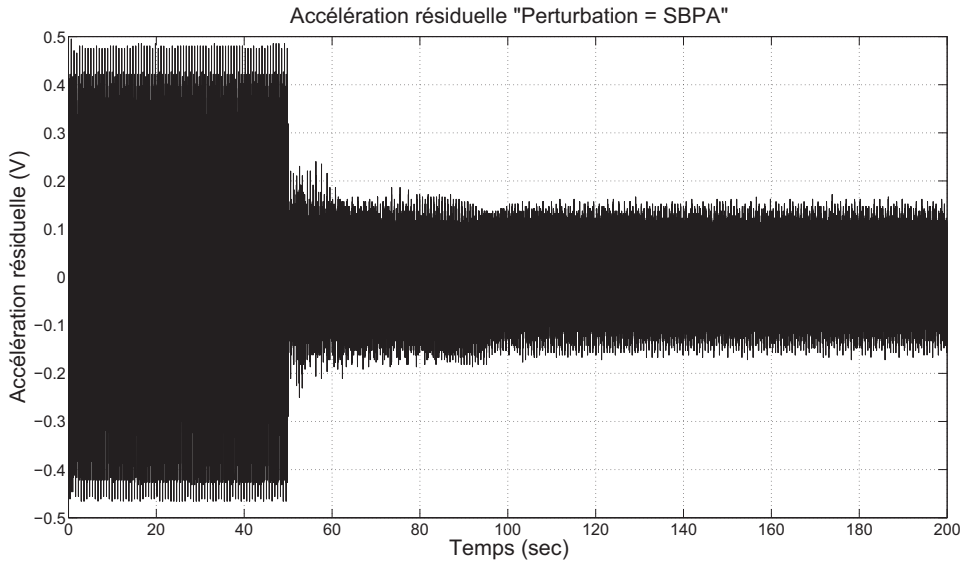


FIG. 6.20 – Résultats temps réel obtenus avec le contrôle hybride (Algorithme III)

La variance de la boucle ouverte après application d'une SBPA comme perturbation, est égale à : $var(\chi(t) = x(t)) = 0.0354$. Avec le régulateur K uniquement, la variance est : $var(\chi(t)) = 0.0067$. Ce qui correspond à une atténuation globale de $14.40dB$. En utilisant un compensateur en feedforward optimal de type H_∞ calculé pour cette configuration hybride présenté dans [Alma et al., 2011], la variance obtenue est : $var(\chi(t)) = 0.0042$ et ça correspond à une une atténuation globale de $18.42dB$. En utilisant les algorithmes II et III du contrôle hybride présenté dans le chapitre 5, les variances obtenues sont

respectivement : $var(\chi(t)) = 0.0040$ et $var(\chi(t)) = 0.0033$ (évaluée après $175s$, après la fin du transitoire d'adaptation). Ceci correspond à des atténuations globales de $18.89dB$ et $20.53dB$ respectivement. Comme présenté dans la section 6.3, la variance obtenue lors de l'utilisation de la compensation adaptative en feedforward uniquement (algorithme III) est égale à : $var(\chi(t)) = 0.0054$ et correspond à une atténuation globale de $16.23dB$.

On voit clairement que le contrôle hybride (feedback + feedforward adaptatif) donne une amélioration importante et significative des performances par rapport aux autres méthodes considérées, offrant en plus des possibilités d'adaptation par rapport aux variation des caractéristiques de la perturbation ou des changements des modèles de la voie primaire.

La figure 6.21 présente les densités spectrales de puissance de l'accélération résiduelle mesurée pour les cas traités. Les atténuations globales sont aussi données.

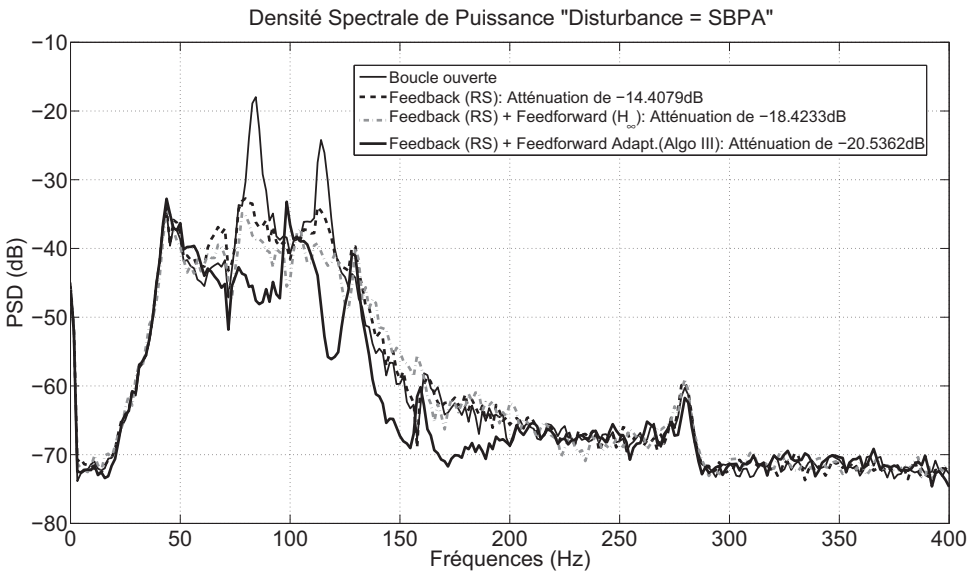


FIG. 6.21 – Densités spectrale de puissance de l'accélération résiduelle (Perturbation = SBPA)

La figure 6.22 montre une comparaison des densités spectrales de puissance de la compensation adaptative en feedforward uniquement (algorithme III avec 20 paramètres) et la compensation feedforward adaptative dans le cas hybride (algorithme III avec 20 paramètres).

On observe facilement que l'utilisation de la boucle de régulation améliore l'atténuation globale de plus de $4dB$ en adaptant le même nombre de paramètres. A noter que l'algorithme II donne de moins bons résultats que l'algorithme III avec une atténuation globale de $18.9dB$.

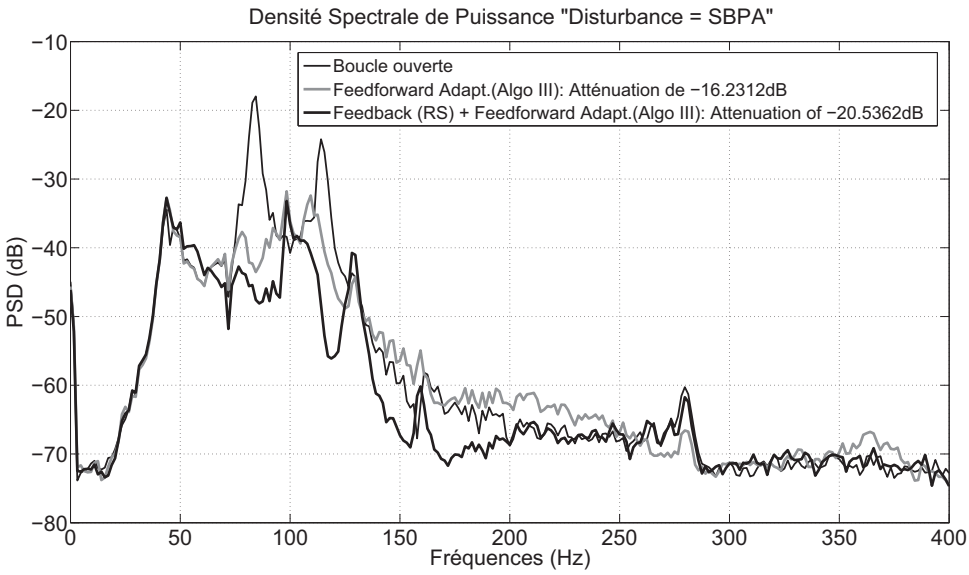


FIG. 6.22 – Densités spectrale de puissance avec et sans compensateur en contre réaction (Perturbation = SBPA)

Pour pouvoir tester les capacités d'adaptation des algorithmes, une perturbation sinusoïdales a été rajoutée à $1500s$. La figure 6.23 présente les densités spectrales de puissance en boucle ouverte, utilisant l'algorithme III et aussi en utilisant le compensateur H_∞ hybride qui n'est pas calculé pour cette perturbation additionnelle. On remarque que l'algorithme adaptatif hybride donne une forte atténuation de la perturbation sinusoïdale (supérieure à $30dB$) sans affecter les autres régions fréquentielles (comparée avec la figure 6.21), alors que le compensateur H_∞ n'a pas été capable de l'atténuer.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats expérimentaux obtenus sur la structure flexible (CARV), pour le rejet des perturbations bande large en feedforward. Les résultats des deux méthodologies présentées dans les chapitres 3 et 4 ont été illustrés.

La première section était dédiée aux résultats des compensateurs H_∞ nominal et d'ordres réduits. Ces résultats ont permis de valider la méthodologie utilisée, vu la cohérence entre les fonctions de sensibilités obtenues dans le chapitre 3 et les résultats expérimentaux dans le domaine fréquentiel. D'autre part, la technique de réduction d'ordre présentée a permis d'avoir un compensateur d'ordre réduit donnant pratiquement les mêmes résultats que le compensateur nominal, et servant de référence pour les algorithmes de compensation adaptative.

La deuxième section quant à elle, était réservée à la compensation adaptative de

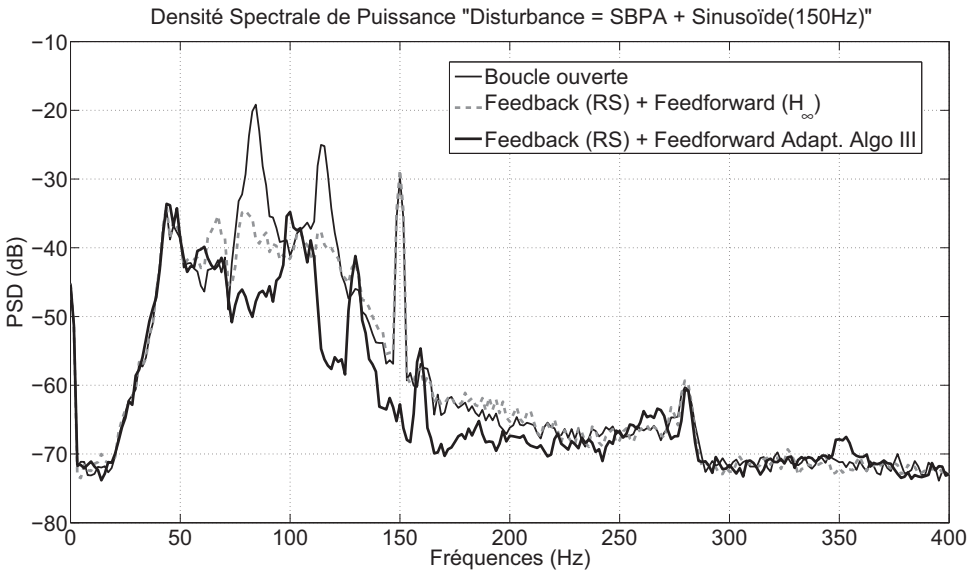


FIG. 6.23 – Densités spectrale de puissance quand une perturbation sinusoïdale additionnelle est appliquée (Perturbation = SBPA + sinusoïde)

perturbation en utilisant les algorithmes développés dans le chapitre 4. Les résultats expérimentaux ont permis de valider l'analyse de stabilité et de convergence, et aussi de comparer ces algorithmes avec quelques algorithmes connus dans la littérature. Les résultats attendus ont été obtenus conformément à l'étude théorique.

Une comparaison expérimentale entre les algorithmes adaptatifs avec un gain scalaire et le compensateur H_∞ a été aussi présentée. Cette comparaison a montré que les algorithmes adaptatifs donnent de bien meilleurs résultats en plus des capacités d'adaptation.

La troisième section était dédiée à la compensation hybride (feedback + feedforward adaptatif) présentée dans le chapitre 5. Les résultats expérimentaux ont permis de tester l'efficacité de cette approche et ont pu mettre en évidence l'amélioration (du point de vue performances) apportée aux algorithmes adaptatifs en feedforward (sans feedback).

Deuxième partie

Rejet de perturbations "bande étroite" "multi-sinusoïdales"

Chapitre 7

Rejet adaptatif de perturbations bande étroite

7.1 Introduction

Le rejet de perturbations externes (connues et inconnues) a toujours suscité l'intérêt des chercheurs en automatique. Une des méthodes efficaces pour éliminer leurs effets sur la sortie d'un procédé est d'introduire un modèle de leurs dynamiques dans le système en boucle fermée. Cette approche est couramment connue sous *le principe du modèle interne*

L'utilisation de ce principe est encore plus simplifiée quand la structure et la valeur des paramètres du modèle de la perturbation sont connues. C'est le cas de certaines applications citées dans [Francis & Wonham, 1976; Johnson, 1976; Bengtsson, 1977; Tsypkin, 1997].

Cependant, une connaissance totale de la perturbation est quasiment impossible. La perturbation peut donc en général être considérée comme inconnue et variable dans le temps. Dans ce cas, une des solution proposée auparavant est d'essayer d'estimer en ligne, un modèle de la perturbation (à partir des données d'entrée/sortie) afin de pouvoir utiliser le principe du modèle interne et ainsi annuler l'effet de la perturbation. Dans tout ce qui suit, le modèle du procédé est supposé connu (obtenu par exemple par identification).

Dans le cas général de perturbations inconnues variant dans le temps, les paramètres du régulateur doivent être adaptés afin de vérifier certaines spécifications de performance et de robustesse désirées. Pour ce faire, une méthodologie de commande adaptative en boucle fermée (par contre réaction) est présentée et va être utilisée dans ce travail. Le choix de la contre réaction par rapport aux méthodes adaptatives de perturbation

mesurable "feedforward" (qui nécessite l'utilisation d'un capteur additionnel d'un signal fortement corrélé avec le signal de perturbation) est motivé par le difficile choix de l'emplacement du capteur sur certaines applications.

La méthode présentée dans ce travail consiste en l'utilisation du principe du modèle interne d'une manière adaptative, afin de garantir un niveau de performances désiré.

La commande adaptative est un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en ligne et en temps réel des régulateurs des boucles de commande afin de réaliser ou maintenir un certain niveau de performance quand les paramètres du modèle du procédé à commander ou du modèle de la perturbation à rejeter sont soit inconnus, soit variants dans le temps [Landau et al., 1997]. D'autres définitions sont données dans [Aström & Witenmark, 1995; Goodwin & Sin, 1984; Narenda & Annaswamy, 1989; Sastry & bodson, 1989; Wellstead & Zarrop, 1991].

Pour toute synthèse d'une commande adaptative, quelques considérations sont communes à toutes les méthodes, on citera :

- Le choix d'une mesure de performance.
- Une évaluation en ligne du comportement du système en temps réel par rapport au comportement désiré.
- La procédure d'ajustement utilisée afin de guider le système dans le bon sens vers le comportement final désiré.

Les méthodes de commande adaptative en contre réaction peuvent être divisées en deux grandes catégories : *Méthodes indirectes* et *Méthodes directes*.
Les méthodes de commande adaptatives indirectes séparent l'identification des paramètres, de la synthèse pure de la loi de commande à appliquer. Par contre, les méthodes de commandes adaptatives directes fusionnent l'identification et la synthèse de la commande en une seule approche. Ces méthodes directes permettent de calculer directement le régulateur sans identification explicite des paramètres du modèle de la perturbation. L'avantage le plus intuitif à constater de l'approche adaptative directe par rapport à celle indirecte, est le temps de calcul nécessaire (complexité de l'algorithme) car le nombre d'opérations à effectuer est beaucoup plus faible.

Comme mentionné auparavant, dans cette partie de ce travail on se concentrera sur les méthodes adaptatives en contre réaction pour le rejet de perturbations. On supposera alors la disponibilité d'un modèle du procédé (obtenu par identification).

Dans ce chapitre, une méthodologie de commande adaptative directe basée sur le principe du modèle interne, pour le rejet de perturbation bande étroite (multi-sinusoïdales) inconnues et variables dans le temps, est présentée.

Ce travail fait suite à la thèse de Constantinescu [Constantinescu, 2001] qui avait traité le cas d'une seule perturbation sinusoïdale. L'objectif est d'adapter et d'améliorer la méthodologie présentée pour le cas des perturbations multi-sinusoïdales.

Ce chapitre est structuré comme suit : dans la section 7.2 quelques rappels sur les régulateurs de type RS ainsi que la definition de quelques fonctions de sensibilités importantes sont donnés. La section 7.3 est dédiée à une brève présentation du principe du modèle interne et de la paramètrisation Youla-Kucera (Q-paramètrisation), tous deux utilisés pour le rejet de perturbations bande étroite. Une méthodologie de commande adaptative indirecte pour le rejet de perturbation sinusoïdale et multi-sinusoïdale est présentée dans la section 7.4. Dans la section 7.5, une approche de commande adaptative directe pour la compensation de perturbation bande étroite est donnée. Une méthode de préservation des parties fixes du régulateurs central lors de l'adaptation paramétrique est présentée dans la section 7.6. Des conclusions et quelques perspectives sont présentées dans la section 8.4.

7.2 Régulateur numérique RS avec calibrage des fonctions de sensibilité et robustesse

La méthode du placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité est une approche polynômiale qui permet un placement de pôles avec verification de contraintes fréquentielles sur les fonctions de sensibilité. Voir [Landau et al., 1996] pour plus de details.

7.2.1 Structure du régulateur RS

La conception d'un régulateur numérique robuste est ,dans le cadre de ce travail, basée sur la connaissance du modèle discret linéaire et invariant dans le temps du procédé à contrôler. La structure de ce modèle est donnée par :

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \tag{7.2.1}$$

où :

$$\begin{aligned} d &= \text{le retard pur en nombre de périodes d'échantillonnage} \\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A} \\ B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B} \end{aligned}$$

$A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ sont des polynômes en z^{-1} et n_A, n_B représentent leurs ordres respectifs.

Le système est contrôlé par un régulateur de type RS. Le schéma de commande en boucle fermée est présenté dans la figure 7.1. La sortie $y(t)$ et la loi de commande $u(t)$

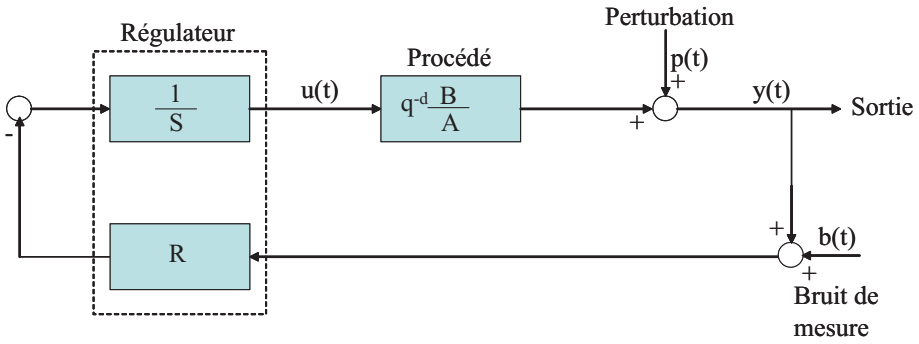


FIG. 7.1 – Schéma de la boucle fermée en utilisant un régulateur RS

peuvent alors être exprimées par :

$$y(t) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \cdot u(t) + p(t) \tag{7.2.2}$$

$$S(q^{-1}) \cdot u(t) = -R(q^{-1}) \cdot y(t) \tag{7.2.3}$$

où q^{-1} est l'opérateur retard (c.à.d $x(t) = q^{-1}x(t+1)$).
R et S sont des polynômes en z^{-1} tels que :

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= r_0 + r_1 z^{-1} + \cdots + r_{n_R} z^{-n_R} \\ S(z^{-1}) &= 1 + s_1 z^{-1} + \cdots + s_{n_S} z^{-n_S} \end{aligned}$$

Pour des raisons de robustesse, $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ contiennent généralement des parties fixes pré-spécifiées. Ainsi, R et S sont factorisés sous la forme :

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= R'(z^{-1}) \cdot H_R(z^{-1}) \\ S(z^{-1}) &= S'(z^{-1}) \cdot H_S(z^{-1}) \end{aligned}$$

La fonction de transfert de la boucle fermée est donnée par : $H_{BF}(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{P(z^{-1})}$, où :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1}) \tag{7.2.4}$$

$P(z^{-1})$ définit les pôles en boucle fermée et le comportement en régulation.

La procédure de synthèse du régulateur RS consiste à choisir les pôles de la boucle fermée et les parties fixes $H_R(z^{-1})$ et $H_S(z^{-1})$, puis à calculer $R'(z^{-1})$ et $S'(z^{-1})$, en résolvant l'équation de Bezout (7.2.4).

7.2.2 Fonctions de sensibilité et marges de robustesse

Un système réel en boucle fermée fonctionne en présence de perturbations et il est très important d'évaluer l'effet de ces dernières sur les signaux d'entrée et de sortie du

système considéré. L'effet de ces perturbations peut être obtenu en analysant les fonctions dites de sensibilité. De plus, ces fonctions de sensibilité jouent un rôle important dans l'analyse de robustesse de la boucle fermée par rapport aux erreurs de modèle.

Le calibrage de ces fonctions et le rajout de parties fixes dans le régulateur permettent d'assurer les performances nominales désirées de la boucle fermée (stabilité et robustesse).

L'outil informatique utilisé pour la réalisation du calibrage des fonctions de sensibilité est le progiciel (iRDCD).

Fonctions de sensibilité

Les fonctions de sensibilité pouvant être extraites du schéma de la figure 7.1 sont :

- *fonction de sensibilité perturbation-sortie* : représente la fonction de transfert entre le signal de perturbation $p(t)$ et la sortie mesurée $y(t)$:

$$S_{yp}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{P(z^{-1})} \tag{7.2.5}$$

  Elle caractérise alors l'effet de la perturbation en sortie sur la sortie, et permet de spécifier certaines parties de $S(z^{-1})$ afin d'avoir une bonne atténuation des perturbations.
- *fonction de sensibilité perturbation-entrée* : représente la fonction de transfert entre le signal de perturbation $p(t)$ et le signal de commande $u(t)$, elle caractérise alors l'effet de la perturbation sur la commande :

$$S_{up}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})} \tag{7.2.6}$$

  Cette fonction permet d'examiner l'influence de la perturbation sur l'entrée du procédé et ainsi de pouvoir spécifier des parties de $R(z^{-1})$, pour éviter que le régulateur ne réagisse aux perturbations en sortie dans certaines zones de fréquences.
- *fonction de sensibilité bruit de mesure-sortie* : représente la fonction de transfert entre le bruit de mesure $b(t)$ et le signal de sortie $y(t)$:

$$S_{yb}(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})} \tag{7.2.7}$$

  S_{yb} est aussi connue comme la fonction de sensibilité complémentaire car : $S_{yp} + S_{yb} = 1$.

Pour plus de détails sur les régulateurs numériques robustes de type RS et sur les fonctions de sensibilité, voir [Landau, 2002].

Marges de robustesse

Les marges de robustesse, considérées dans ce travail, sont les marges de module et de retard.

Marge de module : ΔM est une mesure de la distance minimale entre le point critique de Nyquist $(-1, 0)$, et l'hodographe de la fonction de transfert de la boucle ouverte :

$$\Delta M = \|S_{yp}\|_{\infty}^{-1} \tag{7.2.8}$$

La marge de module est alors associée à la borne supérieure de la fonction de sensibilité perturbation-sortie S_{yp}.

Marge de retard : $\Delta\tau$ est le retard additionnel maximal toléré par le système en boucle ouverte, et qui ne conduit pas à l'instabilité du système en boucle fermée :

$$\Delta\tau = \min_i \frac{\Delta\phi_i}{\omega_{cr}^i} \tag{7.2.9}$$

où ϕ_i est la marge de phase correspondante à la fréquence de croisement $\omega_{cr}^i(rad/sec)$.

7.3 Principe du modèle interne et la Q-Paramétrisation

Soit $p(t)$, une perturbation déterministe pouvant s'écrire sous la forme :

$$p(t) = \frac{N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) \tag{7.3.1}$$

où $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac. $N_p(z^{-1})$ et $D_p(z^{-1})$ sont des polynômes en z^{-1} premiers entre eux ayant les degrés n_{N_p} et n_{D_p} respectivement. Il faut rappeler que toute perturbation déterministe agissant sur le système peut s'écrire sous cette forme (voir [Johnson, 1976; Landau, 1993]). Le filtre $\frac{N_p(z^{-1})}{D_p(z^{-1})}$ est appelé filtre générateur.

L'effet de la perturbation $p(t)$ est par définition régi par la fonction de sensibilité perturbation-sortie S_{yp}, ce qui donne :

$$y(t) = \frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot p(t) \tag{7.3.2}$$

Dans cette partie de ce travail, nous nous intéressons au rejet de perturbations multi-sinusoïdales (bandes étroites). Les racines de $D_p(z^{-1})$ se trouvent alors sur le cercle unité (perturbations non-amorties). Dans ce cas l'énergie de la perturbation est concentrée dans le dénominateur de son modèle $D_p(z^{-1})$, et le numérateur $N_p(z^{-1})$ est alors négligeable.

La sortie $y(t)$ sous l'effet de la perturbation $p(t)$ devient alors :

$$y(t) = \frac{A(q^{-1})H_S(q^{-1})S'(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \frac{N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})}\delta(t)$$

Cette sortie converge asymptotiquement vers zéro si et seulement si le dénominateur du régulateur RS utilisé, contient une partie fixe $H_S(z^{-1})$ tel-que :

$$H_S(z^{-1}) = D_p(z^{-1})$$

Cette méthode de rejet de perturbations non amorties est communément connue sous *le principe du modèle interne.*

Une fois que le modèle interne (de la perturbation) placé ($H_S(z^{-1}) = D_p(z^{-1})$), le régulateur est calculé en utilisant l'équation de Bezout suivante :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S'(z^{-1})D_p(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R'(z^{-1})H_R(z^{-1}) \tag{7.3.3}$$

où P, D_p, A, B, H_R et d sont donnés[1].

En utilisant la paramétrisation Youla-Kucera (connue aussi sous le nom de la Q-paramétrisation), présentée sur la figure 7.2, de tous les régulateurs stabilisants (voir [Francis & Wonham, 1976; Ioannou & Sun, 1996]), le régulateur polynomial RS prend la forme :

$$R(z^{-1}) = R_0(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1}) \tag{7.3.4}$$

$$S(z^{-1}) = S_0(z^{-1}) - z^{-d}B(z^{-1})Q(z^{-1}) \tag{7.3.5}$$

Le régulateur central (R_0,S_0) peut être obtenu par placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité (ou par tout autre méthode de synthèse de régulateur robuste). Soit le modèle du procédé (A,B,d), et les pôles désirés de la boucle fermée spécifiés dans le polynôme P, il suffit alors de résoudre l'équation de Bezout suivante :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S_0(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R_0(z^{-1}) \tag{7.3.6}$$

Les équations (7.3.4) et (7.3.5) caractérisent l'ensemble de tout les régulateurs stabilisants de la boucle fermée défini par les pôles désirés de $P(z^{-1})$ (Il est facile de verifier par de simples calculs que les pôles de la boucle fermée restent inchangés quel que soit Q). Dans le cadre de ce travail, $Q(z^{-1})$ est considéré de forme polynomiale :

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_{n_Q} z^{-n_Q} \ . \tag{7.3.7}$$

Pour calculer $Q(z^{-1})$ afin que le polynôme $S(z^{-1})$ donné par (7.3.5) contienne le modèle interne de la perturbation *"principe du modèle interne"*, on doit résoudre l'équation de Bezout, dérivée de l'équation (7.3.5), en remplaçant $S(z^{-1})$ par $M(z^{-1})D_p(z^{-1})$, suivante :

$$M(z^{-1})D_p(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})Q(z^{-1}) = S_0(z^{-1}) \tag{7.3.8}$$

où

[1] Il est supposé que D_p et B ne possèdent par de facteurs communs.

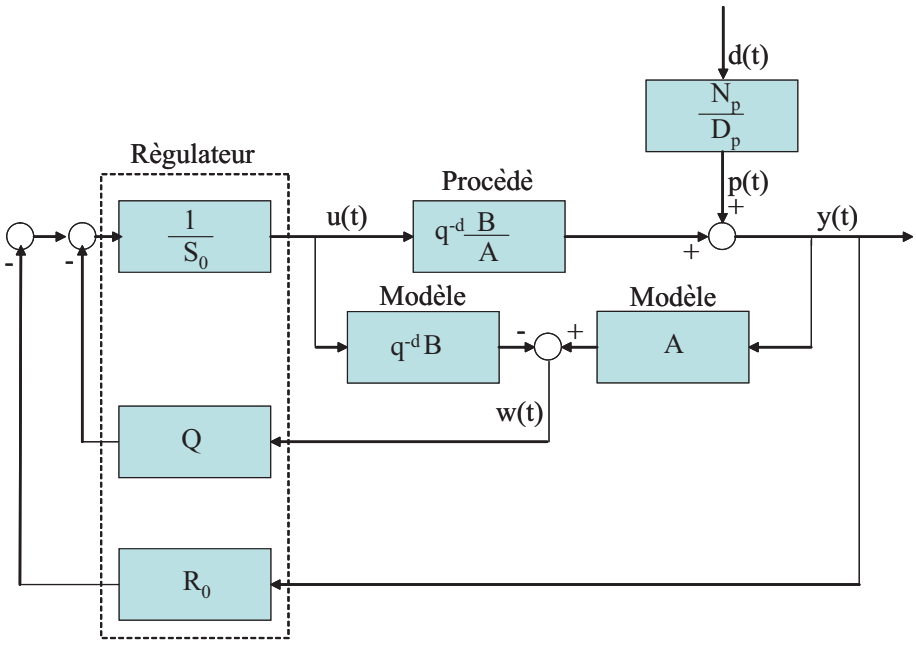


FIG. 7.2 – Schéma de la boucle fermée en utilisant la Q-paramétrisation

– $D_p(z^{-1})$, d, $B(z^{-1})$ et $S_0(z^{-1})$ sont connues.
– $M(z^{-1})$ et $Q(z^{-1})$ sont inconnues.

L'équation (7.3.8) possède une solution unique d'ordre minimal pour $M(z^{-1})$ et $Q(z^{-1})$ tel-que :

$$\begin{aligned} n_{S_0} &\leq n_{D_p} + n_B + d - 1 \\ n_M &= n_B + d - 1 \\ n_Q &= n_{D_p} - 1 \end{aligned}$$

Dans toute la suite de cette partie de ce travail, la paramétrisation Youla-Kucera est utilisée pour placer le modèle interne de la perturbation d'une manière adaptative.

Remarques sur la robustesse : L'introduction du modèle interne pour le rejet parfait (total) de la perturbation (asymptotiquement), a comme effet d'augmenter la valeur maximale du module de la fonction de sensibilité perturbation-sortie S_{yp}. Ceci pourrait mener à une valeur inacceptable du module ainsi que de la marge d'erreur si la synthèse du régulateur n'est pas réalisée correctement (voir [Landau & Zito, 2005]). Par conséquent, la synthèse d'une commande robuste doit être considérée en supposant que le modèle de la perturbation est connu, afin d'être sûr que les valeurs obtenues des marges de module et de retard définies dans la section 7.2.2 sont acceptables pour toutes les situations "en adaptatif" (sur toute la plage fréquentielle considérée).

D'autre part, dans les fréquences où le rejet de perturbations est parfait, $S_{yp}(e^{-j\omega}) = 0$

et :

$$|S_{up}(e^{-j\omega})| = \left|\frac{A(e^{-j\omega})}{B(e^{-j\omega})}\right| \tag{7.3.9}$$

L'équation 7.3.9 correspond à l'inverse du gain du système à contrôler. Son explication est que ce rejet de perturbations sur la sortie du procédé doit être réalisé uniquement dans les zones fréquentielles ou le gain du système est suffisamment important. Un gain faible impliquerait une amplification importante de $|S_{up}|$ aux fréquences correspondantes. Donc la robustesse vis à vis des incertitudes additives du modèle du procédé se réduit et l'effort que doit fournir l'actionneur devient important. De plus, l'équation (7.3.9) nous indique qu'au cas où $B(z^{-1})$ possède des zéros proches du cercle unité aux fréquences concernées par le rejet de perturbations, de sérieux problèmes peuvent se produire. Il est alors nécessaire d'éviter de fortes atténuations à ces fréquences.

comme d'un coté, on n'a pas intérêt à réagir sur des perturbations de très hautes fréquences, et de l'autre une bonne robustesse est nécessaire, le rajout d'une partie fixe dans le régulateur central R_0S_0 pour l'ouverture de boucle à $0.5f_e$ (où f_e représente la fréquence d'échantillonnage) est nécessaire ($H_{R1}(q^{-1}) = 1 + q^{-1}$).
remarque : Une ouverture de boucle en très basses fréquences peut être aussi envisageable en utilisant une deuxième partie fixe sur R_0 tel que : $H_{R2}(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$.

7.4 Commande adaptative indirecte pour le rejet de perturbations multi-sinusoïdales

La méthodologie présentée dans cette section concerne une commande adaptative indirecte pour l'atténuation de perturbations bandes étroites. Cette approche se fait en deux étapes :

1. Identification du modèle de la perturbation
2. Calcul du régulateur numérique pour le rejet de la perturbation en utilisant son modèle identifié en 1

Pour l'identification du modèle de la perturbation, on a besoin d'un observateur de la perturbation. En se basant sur l'hypothèse que le modèle du procédé est connu (obtenu pas identification) une estimation $\bar{y}(t)$ de la perturbation $p(t)$ pourrait être obtenue (voir [Bodson & Douglas, 1997; Gouraud et al., 1997]) telle que :

$$\bar{y}(t) = y(t) - q^{-d}\frac{B}{A}u(t) \tag{7.4.1}$$

D'autres part, d'après la figure 7.2, on obtient :

$$w(t) \quad = \quad \frac{A(q^{-1})N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) \tag{7.4.2}$$

$$= A(q^{-1}) \cdot y(t) - q^{-d} \cdot B(q^{-1}) \cdot u(t) \quad (7.4.3)$$
$$= A(q^{-1}) \cdot p(t) \quad (7.4.4)$$

Comme on le voit explicitement de l'équation (7.4.4), le signal $w(t)$ peut être considéré comme une estimation de la perturbation $p(t)$ filtrée par une fonction polynômiale $A(q^{-1})$. Le schéma de la commande adaptative indirecte présenté dans la figure 7.3, s'inspirant du schéma de la Q-paramètrisation pour l'estimation de la perturbation $p(t)$ est utilisé.
D'autres solutions peuvent être utilisées et restent envisageable pour avoir la meilleure estimation possible de $p(t)$. Pour des raisons numériques, il est conseillé d'utiliser $w(t)$ (sans filtrage par $A^{-1}(q^{-1})$), car le procédé peut contenir des pôles très faiblement amortis ou sur le cercle unité.

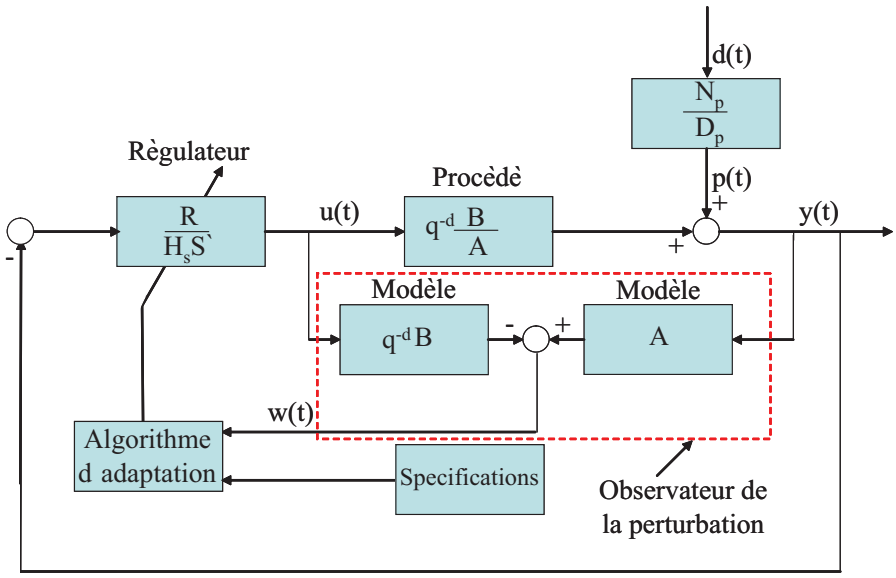


FIG. 7.3 – Schéma de la commande adaptative indirecte pour le rejet de perturbations inconnues

Les perturbations traitées sont considérées comme des signaux stationnaires avec des spectres rationnels.
Comme on l'a présenté auparavant, la perturbation est considérée comme un bruit blanc filtré par le modèle de la perturbation donné par $\frac{N_p(z^{-1})}{D_p(z^{-1})}$ tel que :
$D_p(q^{-1}) \cdot p(t) = N_p(q^{-1}) \cdot e(t)$ ou bien $p(t) = \frac{N_p(z^{-1})}{D_p(z^{-1})} \cdot e(t)$
où $e(t)$ représente un bruit blanc gaussien et :

$$N_p(z^{-1}) = 1 + n_{p1} z^{-1} + \cdots + n_{n_{N_p}} z^{-n_{N_p}} = 1 + z^{-1} N_p^*(z^{-1})$$
$$D_p(z^{-1}) = 1 + d_{p1} z^{-1} + \cdots + d_{n_{D_p}} z^{-n_{D_p}} = 1 + z^{-1} D_p^*(z^{-1})$$

Donc le modèle de la perturbation peut être considéré comme un modèle ARMA.
A partir de ces hypothèses, le signal de perturbation peut alors s'écrire comme suit :

$$p(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_{D_p}} d_{pi} p(t-i+1) + \sum_{i=1}^{n_{N_p}} n_{pi} p(t-i+1) + e(t+1) \tag{7.4.5}$$

Le problème est alors un problème d'estimation adaptative en ligne des paramètres du modèle de la perturbation en présence de bruit ([Landau et al., 1986]). L'équation (7.4.5) est un cas particulier de l'identification d'un modèle ARMAX. Il est alors possible d'utiliser la méthode des *moindres carrés récursifs étendus* donnée dans [Landau, 1993], et qui est dédiée essentiellement à l'identification de ce type de modèle. Un algorithme d'adaptation paramètrique est donc utilisé. Afin de pouvoir utiliser cette méthodologie il est supposé que le modèle du procédé est connu. Il est aussi supposé que les degrés n_{N_p} et n_{D_p} de $N_p(z^{-1})$ et $D_p(z^{-1})$ respectivement, sont fixés.

Le régulateur contenant le modèle de la perturbation (principe du modèle interne) est alors calculé en résolvant l'équation de Bezout donnée par :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S'(z^{-1})H_s(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R'(z^{-1})H_R(z^{-1}) \tag{7.4.6}$$

avec $H_s(z^{-1}) = \hat{D}_p(z^{-1})$ (l'estimation actuelle du modèle de la perturbation).

Dans le cas de perturbations sinusoïdales ou multi-sinusoïdales, si seulement un niveau défini d'atténuation est requis, une modification de l'amortissement dans le modèle de la perturbation estimée est possible avant la résolution de l'équation (7.4.6).

Il est nécessaire de signaler que la Q-paramètrisation peut être utilisée une fois que le modèle de la perturbation identifié en résolvant l'équation (7.3.8).

Il existe deux modes opératoires possibles pour la commande adaptative indirecte :
Mode opératoire adaptatif : il consiste à adapter les paramètres du régulateur après chaque période d'échantillonnage en se basant sur le modèle de la perturbation courant.
Mode opératoire en auto-ajustement : il consiste à utiliser un gain d'adaptation décroissant, et à adapter les paramètres du régulateur après chaque période d'échantillonnage, ou bien une fois que l'estimation converge (la trace du gain d'adaptation est utilisée comme un critère de convergence).

L'inconvénient majeur de cette approche est la complexité des calculs à réaliser à chaque période d'échantillonnage car on est obligé de résoudre une équation de Bezout avec une dimension qui dépend de l'ordre du procédé, souvent assez important, et de la dimension du modèle de la perturbation estimé.

7.5 Commande adaptative directe pour le rejet de perturbations multi-sinusoïdales

Après avoir vu l'inconvénient majeur de la commande adaptative indirecte, l'objectif de cette section est de concevoir un algorithme d'estimation capable d'estimer directement les paramètres du régulateur avec modèle interne en présence de perturbations inconnues (mais de structure connue) sans modifier les pôles de la boucle fermée (assurer la stabilité de la boucle fermée). Il est clair que la Q-paramètrisation est une option potentielle vu que les modifications des paramètres du polynôme Q n'affectent pas les pôles de la boucle fermée. Les deux problèmes, de stabilité de la boucle fermée et du rejet de perturbation, peuvent être traités séparément en utilisant un régulateur central robuste stabilisant de type RS avec calibrage des fonctions de sensibilité (voir section 7.2) et la Q-paramètrisation définie dans la section 7.3.

En utilisant la Q-paramètrisation présentée dans la figure 7.2, l'équation du régulateur devient :

$$S_0(q^{-1}) \cdot u(t) = -R_0(q^{-1}) \cdot y(t) - Q(q^{-1}) \cdot w(t) \tag{7.5.1}$$

où $w(t) = A(q^{-1}) \cdot y(t) - q^{-d} \cdot B(q^{-1}) \cdot u(t)$.
En tenant compte des équations (7.3.4) et (7.3.5), l'équation (7.2.4) qui définit les pôles de la boucle fermée devient :

$$\begin{aligned} P(z^{-1}) &= A(z^{-1})[S_0(z^{-1}) - z^{-d}B(z^{-1})Q(z^{-1})] + z^{-d}B(z^{-1})[R_0(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1})] \\ &= A(z^{-1})S_0(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R_0(z^{-1}) \end{aligned}$$

Les pôles de la boucle fermée ne changent alors pas en fonction des paramètres du polynôme Q.

Afin de pouvoir concevoir un algorithme d'estimation, il est nécessaire de définir une équation d'erreur, qui reflétera la différence entre le polynôme optimal Q et sa valeur courante. A noter aussi que le principe du modèle interne est une façon de trouver un Q tel que le signal de sortie $y(t)$ tende asymptotiquement vers zéro. Le résultat suivant est alors donné :

Lemme 7.5.1. *On définit la solution de l'équation (7.3.8) comme étant le polynôme optimal $Q(q^{-1})$ et notons par $\hat{Q}(q^{-1})$, l'estimation du polynôme $Q(q^{-1})$, alors :*

$$y(t+1) = [Q(q^{-1}) - \hat{Q}(q^{-1})] \cdot \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) + x(t+1) \tag{7.5.2}$$

où

$$w(t) = \frac{A(q^{-1})N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t)$$

$$= \quad A(q^{-1}) \cdot y(t) - q^{-d}B(q^{-1}) \cdot u(t) \tag{7.5.3}$$

et

$$x(t) = \frac{S'(q^{-1})D_p(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) = \frac{S'(q^{-1})A(q^{-1})N_p(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \delta(t) \tag{7.5.4}$$

est un signal qui tend asymptotiquement vers zéro.

Démonstration. En utilisant la Q-paramètrisation, la sortie du système en présence de perturbation de l'équation 7.3.1 peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \frac{A(q^{-1})[S_0(q^{-1}) - q^{-d}B(q^{-1})Q(q^{-1})]}{P(q^{-1})} \cdot \frac{N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) \\ &= \frac{S_0(q^{-1}) - q^{-d}B(q^{-1})Q(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \end{aligned} \tag{7.5.5}$$

En remplaçant $S_0(q^{-1})$ de cette dernière équation (7.5.5) par celui de l'équation (7.3.8), l'équation (7.5.2) est alors obtenue.

Le signal $x(t)$ donné dans l'équation (7.5.4), tend asymptotiquement vers zéro, car il représente la sortie d'un filtre asymptotiquement stable (P est un polynôme de Hurwitz), avec une impulsion de Dirac en entrée. □

Supposons qu'à l'instant t, une estimation du polynôme $Q(q^{-1})$, notée $\hat{Q}(t, q^{-1})$ est disponible.
On définit le signal d'erreur *a priori* $\varepsilon^0(t+1)$ comme la valeur de $y(t+1)$ obtenue avec $\hat{Q}(t, q^{-1})$. En utilisant (7.5.2), on obtient :

$$\varepsilon^0(t+1) = [Q(q^{-1}) - \hat{Q}(t, q^{-1})] \cdot \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) + x(t+1) \tag{7.5.6}$$

Le signal d'erreur a posteriori $\varepsilon(t+1)$, obtenu en utilisant $\hat{Q}(t+1, q^{-1})$, est alors donné par :

$$\varepsilon(t+1) = [Q(q^{-1}) - \hat{Q}(t+1, q^{-1})] \cdot \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) + x(t+1) \tag{7.5.7}$$

sachant que le filtre $\hat{Q}(t, q^{-1})$ est défini comme suit :

$$\hat{Q}(t, q^{-1}) = \hat{q}_0(t) + \hat{q}_1(t)q^{-1} + \cdots + \hat{q}_{nQ}(t)q^{-nQ} \tag{7.5.8}$$

et le vecteur des paramètres estimés associé : $\hat{\theta}(t) = [\hat{q}_0(t)\hat{q}_1(t)\cdots\hat{q}_{nQ}(t)]^T$.
On définit le vecteur de paramètres constants correspondant à la valeur optimale du polynôme Q par : $\theta(t) = [q_0(t)q_1(t)\cdots q_{nQ}(t)]^T$.
On construit le signal $w_2(t)$ tel que :

$$w_2(t) = \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \tag{7.5.9}$$

et on définit le vecteur des observations suivant :

$$\phi^T(t) = [w_2(t)w_2(t-1)\cdots w_2(t-n_Q)] \tag{7.5.10}$$

alors l'équation (7.5.7) devient :

$$\varepsilon(t+1) = [\theta^T - \hat{\theta}^T(t+1)]\cdot\phi(t) + x(t+1) \tag{7.5.11}$$

Il est facile de remarque que $\varepsilon(t)$ correspond à une erreur d'adaptation (voir [Landau et al., 1997]) et donc l'algorithme d'adaptation présenté dans [Landau et al., 1997]) pourrait être utilisé.

A partir de l'équation (7.5.6), l'erreur d'adaptation a priori suivante est obtenue :

$$\varepsilon^0(t+1) = w_1(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t) \tag{7.5.12}$$

avec :

$$w_1(t+1) = \frac{S_0(q^{-1})}{P(q^{-1})}\cdot w(t+1) \tag{7.5.13}$$

$$w(t+1) = A(q^{-1})\cdot y(t+1) - q^{-d}B^*(q^{-1})\cdot u(t) \tag{7.5.14}$$

où : $B(q^{-1})u(t+1) = B^*(q^{-1})u(t)$.

L'erreur d'adaptation a posteriori est obtenue à partir de (7.5.7) :

$$\varepsilon(t+1) = w_1(t+1) - \hat{\theta}^T(t+1)\phi(t) \tag{7.5.15}$$

Pour l'estimation des paramètres du polynôme $\hat{Q}(t,q^{-1})$, l'algorithme d'adaptation paramètrique suivant est utilisé :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)\varepsilon(t+1)\ ; \tag{7.5.16}$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^0(t+1)}{1+\phi^T(t)F(t)\phi(t)}\ ; \tag{7.5.17}$$

$$\varepsilon^0(t+1) = w_1(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t)\ ; \tag{7.5.18}$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)}\left[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi^T(t)F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \phi^T(t)F(t)\phi(t)}\right]\ . \tag{7.5.19}$$

$$1 \geq \lambda_1(t) > 0; 0 \leq \lambda_2(t) < 2 \tag{7.5.20}$$

où $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ permettent d'avoir différents profils d'evolution du gain d'adaptation $F(t)$.

Afin de pouvoir implanter cette méthodologie pour le rejet de perturbation (voir figure 7.4), il est supposé que le modèle du procédé est connu (identifié) et qu'il existe un régulateur central $[R_0(z^{-1}), S_0(z^{-1})]$ qui vérifie les spécifications désirées en absence

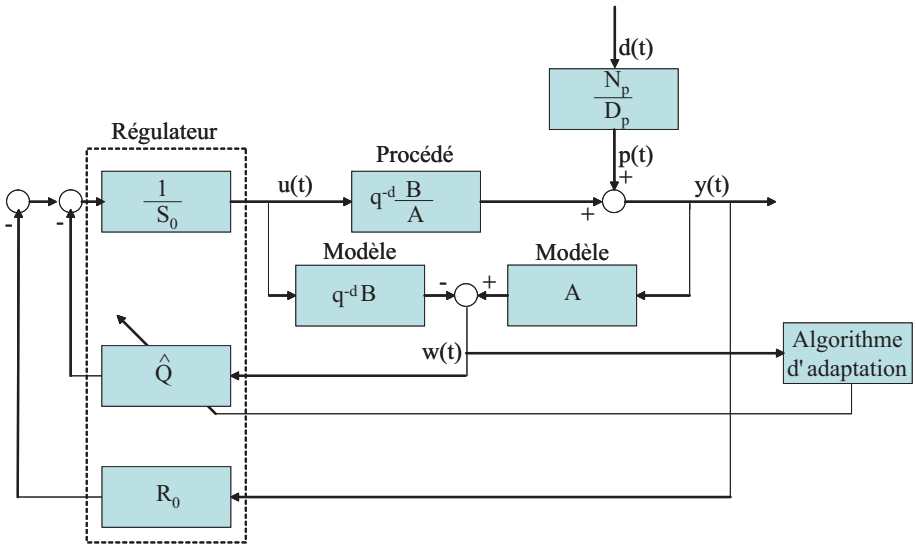


FIG. 7.4 – Schéma de commande adaptative directe pour le rejet de perturbations inconnues

de perturbation. Il est aussi supposé que l'ordre n_Q du polynôme $Q(z^{-1})$ est fixé, $n_Q = n_{D_p} - 1$, c.à.d la structure de la perturbation est connue.

La procédure suivante est appliquée à chaque pas d'échantillonnage pour le *mode opératoire adaptatif* :

1. Acquisition de la sortie mesurée $y(t+1)$ et de la commande appliqué $u(t)$ afin de calculer $w(t+1)$ en utilisant (7.4.2).

2. Calcul de $w_1(t+1)$ et $w_2(t)$ en utilisant 7.5.13 et 7.5.9 avec le polynôme P donné par (7.4.6).

3. Estimation du polynôme $\hat{Q}(z^{-1})$ utilisant l'algorithme d'adaptation paramètrique (7.5.16) - (7.5.19)

4. Calcul et application de la commande (voir figure 7.4) :

$$S_0(q^{-1}) \cdot u(t+1) = -R_0(q^{-1}) \cdot y(t+1) - \hat{Q}(t+1, q^{-1}) \cdot w(t+1) \ . \qquad (7.5.21)$$

En *mode opératoire adaptatif*, un gain d'adaptation décroissant avec un facteur d'oubli variable $\lambda(t)$ (le facteur d'oubli tend asymptotiquement vers zéro), combiné avec un gain d'adaptation à trace constante, est généralement utilisé. dés que la trace du gain d'adaptation atteint une certaine valeur, on permute vers la trace constante (voir [Landau et al., 1997] pour plus de détails). L'avantage de la trace constante est que l'adaptation se fait dans la direction optimale (moindres carrés),sans que son pas s'annule.

7.6 Préservation des parties fixes du régulateur central

Dans cette section, il est présenté comment préserver les parties fixes du régulateur central $[R_0(z^{-1}), S_0(z^{-1})]$ en utilisant la Q-paramètrisation (méthode adaptative directe). Comme présenté dans la section 7.2, le régulateur central peut contenir des parties fixes (H_r et H_{s1}) pour des raisons de robustesse (ouverture de boucle en hautes et basses fréquences, calibrage des fonctions de sensibilité $\cdots$ etc), tel que :

$$R_0(z^{-1}) = R'_0(z^{-1}) \cdot H_R(z^{-1}) \tag{7.6.1}$$

$$S_0(z^{-1}) = S'_0(z^{-1}) \cdot H_{S1}(z^{-1}) \tag{7.6.2}$$

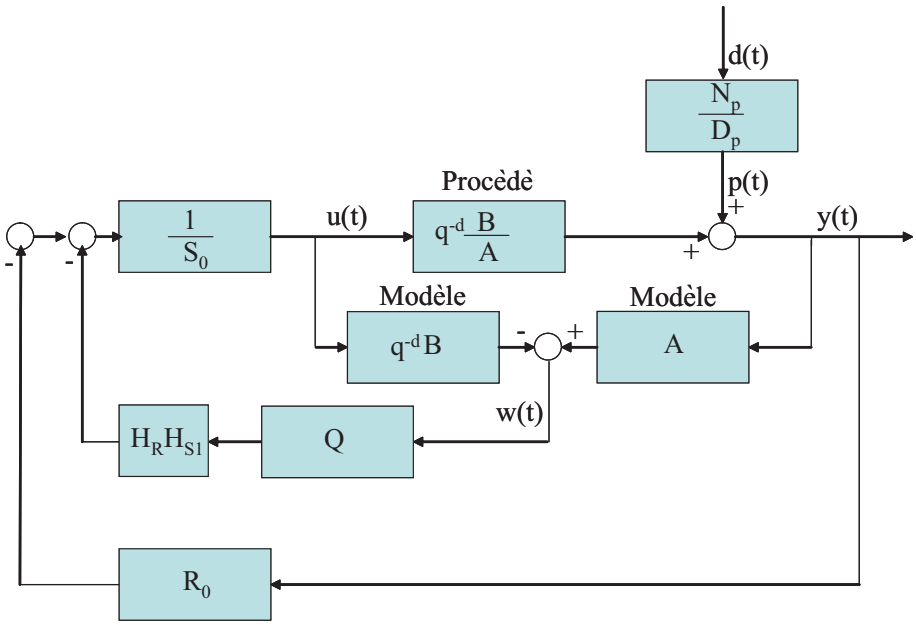


FIG. 7.5 – Schéma de la Q-paramétrisation pour la préservation des parties fixes

Pour préserver ces parties, le schéma de la Q-paramètrisation donné par la figure 7.2 est modifié par celui de la figure 7.5 afin d'avoir :

$$R(z^{-1}) = R_0(z^{-1}) + A(z^{-1})H_R(z^{-1})H_{S1}(z^{-1})Q(z^{-1}) \tag{7.6.3}$$

$$S(z^{-1}) = S_0(z^{-1}) - z^{-d}B(z^{-1})H_R(z^{-1})H_{S1}(z^{-1})Q(z^{-1}) \tag{7.6.4}$$

Il est possible de verifier que les pôles désirés de la boucle fermée spécifiés par P dans 7.4.6 restent inchangés. D'autre part, il est facile de voir que le régulateur résultant $[R_0(z^{-1}), S_0(z^{-1})]$ contient les parties fixes désirées (H_r et H_{s1}) en remplaçant R_0 et S_0 par ceux des équations (7.6.1) et (7.6.2) :

$$R(z^{-1}) = H_R(z^{-1}) \cdot [R'_0(z^{-1}) + A(z^{-1})H_{S1}(z^{-1})Q(z^{-1})] \tag{7.6.5}$$

$$S(z^{-1}) \quad = \quad H_{S1}(z^{-1}) \cdot [S_0'(z^{-1}) - z^{-d}B(z^{-1})H_R(z^{-1})Q(z^{-1})] \tag{7.6.6}$$

Pour calculer $Q(z^{-1})$ afin que le régulateur contienne le modèle interne de la perturbation, il faut résoudre l'équation suivante :

$$S'(z^{-1})D_p(z^{-1})H_{S1}(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})H_R(z^{-1})H_{S1}(z^{-1})Q(z^{-1}) = S_0(z^{-1}) \tag{7.6.7}$$

En utilisant cette Q-paramètrisation modifiée, la sortie du système en présence de perturbation, peut s'exprimer comme suit :

$$y(t) = \frac{S_0(q^{-1}) - z^{-d}B(q^{-1})H_R(q^{-1})H_{S1}(q^{-1})Q(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \tag{7.6.8}$$

où $w(t)$ est donné par (7.4.2) (voir figure 7.5).

Pour la commande adaptative directe, et en utilisant (7.6.8), l'équation (7.5.7) devient :

$$\varepsilon(t+1) = [Q(q^{-1}) - \hat{Q}(t+1, q^{-1})] \cdot \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})H_R(q^{-1})H_{S1}(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) + x(t+1) \tag{7.6.9}$$

où

$$\begin{aligned} x(t) \quad &= \quad \frac{S'(q^{-1})D_p(q^{-1})H_{S1}(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \\ &= \quad \frac{S'(q^{-1})H_{S1}(q^{-1})A(q^{-1})N_p(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \delta(t) \end{aligned} \tag{7.6.10}$$

est un signal qui tend asymptotiquement vers zéro.

D'après (7.6.9), il en résulte que le même algorithme d'adaptation paramétrique défini par les équations 7.5.16-7.5.19, en remplaçant l'équation (7.5.9) par :

$$w_2(t) = \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})H_R(q^{-1})H_{S1}(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \tag{7.6.11}$$

peut être utilisé.

7.7 Conclusion

Dans ce chapitre, deux méthodologies de commande adaptative par contre-réaction (Approche directe et approche indirecte) pour le rejet de perturbations bande étroite ont été présentées. Pour les deux méthodes, le principe du modèle interne et de la Q-paramétrisation ont été utilisés.

comme la présence d'un régulateur central (nominal) est indispensable, une méthode de synthèse de régulateur numérique robuste avec calibrage des fonctions de sensibilité a été développée.

Enfin, une méthode de préservation des parties fixes du régulateur central, lors de l'utilisation de la Q-paramétrisation a été proposée.

Chapitre 8

Résultats expérimentaux

8.1 Introduction

Les méthodologies de commande pour le rejet de perturbation bande étroite présentées dans le chapitre précédent (7), seront illustrées dans ce chapitre en temps réel sur une Suspension Active à Actionneur Inertiel. Les perturbations traitées sont considérées sinusoïdales et multi-sinusoïdales. Pour la commande adaptative indirecte, seul le cas sinusoïdal est considéré, à titre comparatif, à cause de ses inconvénients. Pour la méthodologie de commande adaptative directe, trois niveaux de perturbation sont considérés (une, deux et trois sinusoïdes). Pour ce faire, l'ordre du polynôme Q est alors pris égal à $n_Q = 1, 3, 5$ respectivement. L'objectif de la commande est de rejeter l'effet des perturbations sur la sortie du système, en adoptant les paramètres du polynôme Q en fonction des fréquences de la perturbation.

Le système de suspension active à actionneur est présenté dans la section 8.2. La section 8.3 est dédiée à la présentation de quelques résultats expérimentaux. Quelques remarques et conclusions sur les résultats obtenus sont présentées dans la section 8.4.

8.2 Présentation de la suspension active à actionneur inertiel (SAAI)

La suspension active à actionneur inertiel, est une plate-forme expérimentale constituée d'une suspension passive (cône métallique), d'un actionneur inertiel électromagnétique (utilisant le même principe qu'un haut parleur), et d'un pot vibrant pour générer des perturbations vibratoires. Un accéléromètre (capteur de force) est collé sur le châssis qui porte l'ensemble de la suspension (cône + actionneur inertiel).

Le principe général de la plate forme est d'exciter verticalement la structure, en utilisant le pot vibrant commandé par un signal d'entrée $u_p(t)$. Ce signal est généré par l'ordinateur de commande puis amplifié pour donner la perturbation $p(t)$.

On appelle chemin primaire, le chemin entre l'excitation vibratoire $u_p(t)$ et l'accéléromètre $y(t)$ via la suspension passive et il est noté par $G_p(z^{-1}) = z^{-d_1}\frac{B_p(z^{-1})}{A_p(z^{-1})}$. La voie secondaire est le chemin entre l'actionneur inertiel (entrée de commande) $u(t)$ et la mesure de l'accélération $y(t)$ et elle est notée par $G(z^{-1}) = z^{-d}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$.
La sortie du procédé considéré est la force résiduelle mesurée par l'accéléromètre, qui est la somme des effets des deux voies.

La commande $u(t)$ est la sortie du régulateur. L'entrée de commande excite l'actionneur inertiel qui génère une réponse vibratoire et qui a pour but d'annuler la réponse totale $y(t)$ par interférence destructive avec la réponse du système générée par la perturbation $p(t)$.
Les figures 8.1 et 8.2, montrent une photo prise au sein du laboratoire Gipsa-lab ainsi que le schéma de commande de SAAI.

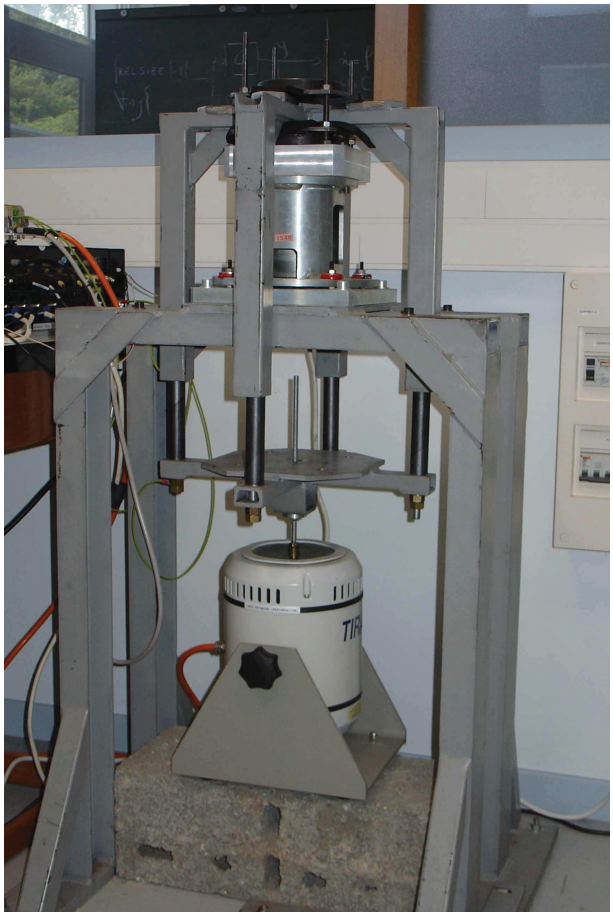


Fig. 8.1 – Suspension Active à Actionneur Inertiel (photo)

L'objectif de la commande pour cette plateforme, est donc de minimiser le gain de la fonction de transfert entre le signal d'excitation u_p et la mesure de l'accélération y.

La figure 8.2 montre le principe de fonctionnement de la commande par contre réaction. Le régulateur synthétisé essaye d'annuler la perturbation sans utiliser une entrée de référence (une mesure en amont de la perturbation). Le signal d'erreur résiduelle, mesuré par le capteur est utilisé pour commander la source secondaire, via un régulateur numérique de type RS (voir section 7.2).

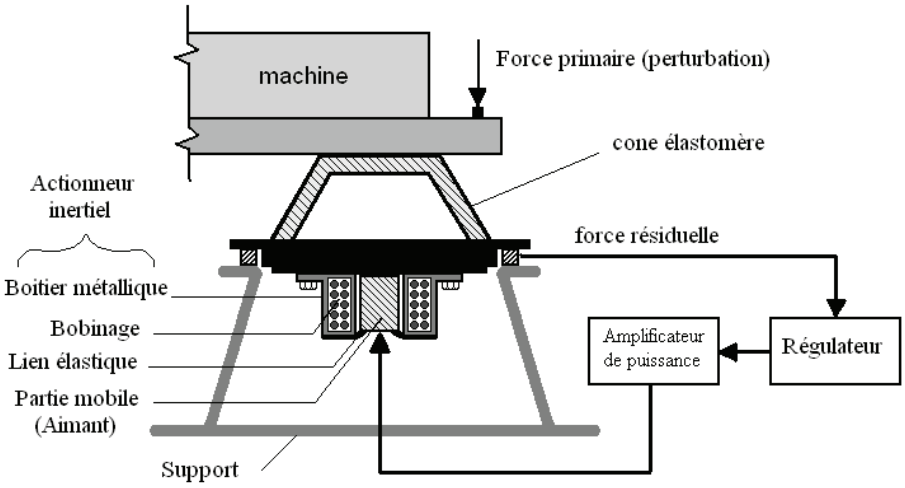


FIG. 8.2 – Schéma de commande en contre réaction (SAAI)

8.2.1 Démarches à suivre

Afin de réaliser les objectifs de commande désirés, une méthodologie bien élaborée doit être mise en place. Cette organisation permet de décomposer le travail en plusieurs parties étroitement liées :

Identification :
- Identification en boucle ouverte du chemin secondaire.
- Synthèse d'un régulateur RS large bande sur la base du modèle identifié et sa mise en oeuvre par la méthode de placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité.
- Identification en boucle fermée de la voie secondaire et re-calcul du régulateur RS.
- Identification du chemin primaire de la plateforme pour établir la bande de fréquence où l'effet des perturbations doit être compensé.

Rejet de perturbations bandes étroites inconnues :(Algorithmes adaptatifs)

Dans cette étape, les schémas de régulation adaptative, présentés dans le chapitre 7,

sont mis en oeuvre en temps réel sur la plateforme SAAI dans le cas de perturbations multi-sinusoïdales.

8.2.2 Identification paramètrique

Du point de vue pratique, l'identification est la première étape avant le calcul d'un régulateur. C'est une approche expérimentale qui se décompose en quatre étapes :

- *Acquisition des données entrée/sortie :* Durant les identifications, le système est généralement excité avec un signal riche en fréquences qui peut être dans le cas discret une SBPA (séquence binaire pseudo aléatoire).
- *Choix de la complexité du modèle :* Cette étape permet d'avoir une idée sur les ordres optimaux du système, ainsi que celle du retard.
- *Estimation des paramètres du modèle :* Dans cette troisième étape de l'identification, des algorithmes d'adaptation paramètrique sont utilisés sur les mesures acquises dans les premières étapes, afin de fournir les paramètres du modèle.
- *Validation du modèle identifié :* La validation permet de vérifier si le modèle obtenu décrit bien le procédé réel.

D'après l'équation d'un modèle discret donné par 7.2.1, l'objectif de l'identification est alors d'estimer les paramètres des polynômes A et B, ainsi que la valeur du retard d.

Étant donné que l'entrée de commande de la voie secondaire est la position de l'actionneur, et la sortie une force, le modèle de cette voie contiendra obligatoirement un double dérivateur, d'où les étapes suivantes lors de son identification :

- Filtrage du signal d'entrée $u(t)$ par $(1 - q^{-1})^2$ (double dérivation de l'entrée).
- Identification entre l'entrée filtrée et la sortie $y(t)$.
- Introduction d'un double dérivateur numérique $(1 - z^{-1})^2$ dans le modèle identifié afin d'obtenir le modèle final.

Les procédures citées auparavant pour l'identification en boucle ouverte et fermée, ont été utilisées pour le cas de la plateforme SAAI. Les caractéristiques fréquentielles de la voie primaire (identifiée en boucle ouverte) et de la voie secondaire (identifiée en boucle fermée) sont présentées sur la figure 8.3.

La complexité obtenue pour le modèle de la voie secondaire est donnée par : $n_B = 12$, $n_A = 10$, $d = 0$. L'identification a été réalisée en utilisant une SBPA (Séquence Binaire Pseudo Aléatoire) comme excitation, avec un registre de $N = 10$ cellules, et un diviseur de fréquences $p = 4$. Le meilleur modèle, en termes de validation, est obtenu en utilisant la méthode d'*Erreur de Sortie Étendue en Boucle Fermée*. Il en résulte que ce modèle possède plusieurs modes très faiblement amortis. Le premier mode de resonance est à $51.58Hz$ avec un amortissement de 0.023 et un deuxième à $100.27Hz$ avec un amortissement de 0.057. Le modèle contient aussi deux zéros sur le cercle unité correspondant au double dérivateur.

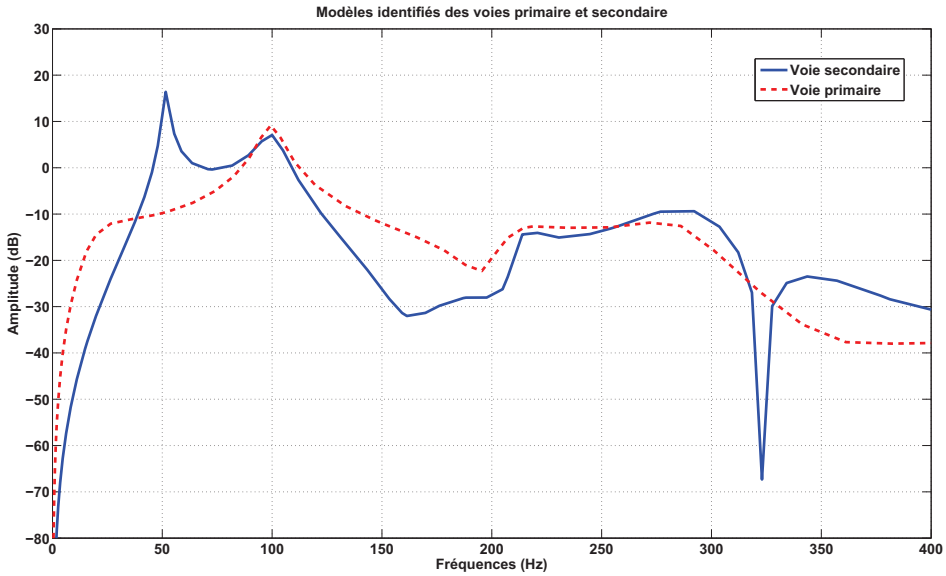


FIG. 8.3 – Caractéristiques fréquentielles des voie primaire et secondaire (SAAI)

La caractéristique fréquentielle de la voie secondaire montre que l'actionneur ne possède pas assez de gain en basse fréquence "$f < 45Hz$" (présence du double dérivateur) et en haute fréquence "$f > 105Hz$", ce qui signifie qu'il est fortement recommandé pour des raisons de robustesse, de ne pas essayer d'éliminer des perturbations dans ces zones fréquentielles (voir section 7.3 pour plus de détails).

La voie primaire a été identifiée avec un ordre : $n_{B_p} = 10$, $n_{A_p} = 8$, $d_1 = 0$. Le signal d'excitation utilisé est aussi une SBPA, avec un registre de $N = 10$ cellules, et un diviseur de fréquences $p = 4$. Le meilleur modèle a été obtenu en utilisant la méthode des *Moindres Carrés Étendus*. Ce modèle possède un mode de résonance très faiblement amorti à $99.27Hz$ et un amortissement de 0.023. Ce modèle contient aussi deux zéros sur le cercle unité correspondant au double dérivateur.

8.3 Résultats obtenus en temps réel sur la suspension active

La procédure de rejet de perturbations multi-sinusoïdales utilisant les méthodologies présentées dans les sections 7.4 et 7.5, sera illustrée par la suite en temps réel pour le cas de la suspension active à actionneur inertiel présentée précédemment. Dans notre cas la perturbation considérée est composée de deux ou trois sinusoïdes de fréquences pouvant varier en échelon ou en rampe. On considérera alors $n_{D_p} = 4$ ou 6 et donc $n_Q = 3$ et 5 respectivement en utilisant l'algorithme direct. Enfin, des résultats de rejet d'une seule

sinusoïde en utilisant l'algorithme direct et indirect, dans un but de comparaison, seront présentés.

Le régulateur nominal (sans modèle interne de la perturbation) a été obtenu en utilisant la méthode de placement de pôles, présentée dans la section 7.2, et le modèle de la voie secondaire obtenu par identification. Pour ce faire, deux paires de pôles aux fréquences des deux premiers modes de vibration (51.58Hz et 100.27Hz) avec un amortissement $\xi = 0.1$ ont été fixées (amortissement des deux premiers modes) et les autres pôles du modèles ont été gardés en boucle fermée. De plus et pour des raisons de robustesse, des ouvertures de boucle en hautes et basses fréquences ($f = \frac{fe}{2}$ et $f = 0$) ont été introduites dans la partie fixe, $H_R = (1 + q^{-1})(1 - q^{-1})$, du régulateur et 12 autres pôles auxiliaires réels à 0.3 ont été rajoutés [1].

8.3.1 Cas de deux perturbations sinusoïdales simultanées

Les performances du système pour le rejet de deux perturbations sinusoïdales seront illustrées avec le schèma de régulation adaptatif direct. Les fréquences des perturbations considérées sont variables dans le temps. Ces fréquences ont été choisies dans la zone fréquentielle où le procédé (voie secondaire) possède suffisamment de gain, c-à-d entre 45Hz et 105Hz (voir figure 8.3).

Les résultats obtenus en temps réel en utilisant la commande adaptative directe, en mode opératoire adaptatif, sont présentés dans la figure 8.4. La perturbation est appliquée à 1s (la boucle est déjà fermée), avec une variation des fréquences des perturbations en échelon toutes les 3s. La convergence de la sortie (rejet) requiert moins de 0.7s dans le pire des cas.

La figure 8.5 montre l'évolution des paramètres du polynôme Q.

La figure 8.6 présente les densités spectrale de puissance de la force résiduelle, obtenues en boucle ouverte en boucle fermée, en utilisant l'algorithme adaptatif direct (après la convergence de l'algorithme). Ces résultats sont donnés pour une application simultanée de deux perturbations sinusoïdales (65 et 95Hz). Une forte atténuation de plus de 45dB est alors constatée pour les deux perturbations. Les valeurs des atténuations sont données dans le tableau 8.1.

Il est à noter aussi, la présence de quelques harmoniques en boucle ouverte, correspondant au comportement non-linéaire de la voie primaire. Une partie de ces harmoniques est rejetée en boucle fermée. la présence d'un bruit de mesure à 50Hz, dû probablement au réseau électrique est à mentionner. Ce bruit n'est pas amplifié en boucle fermée.

[1] Pour passer du rejet d'une à deux ou trois sinusoïdes, des dipoles ont été rajoutés ou supprimés, afin d'assurer une bonne repartition de l'amplification des fréquences, en dehors de la zone considérée

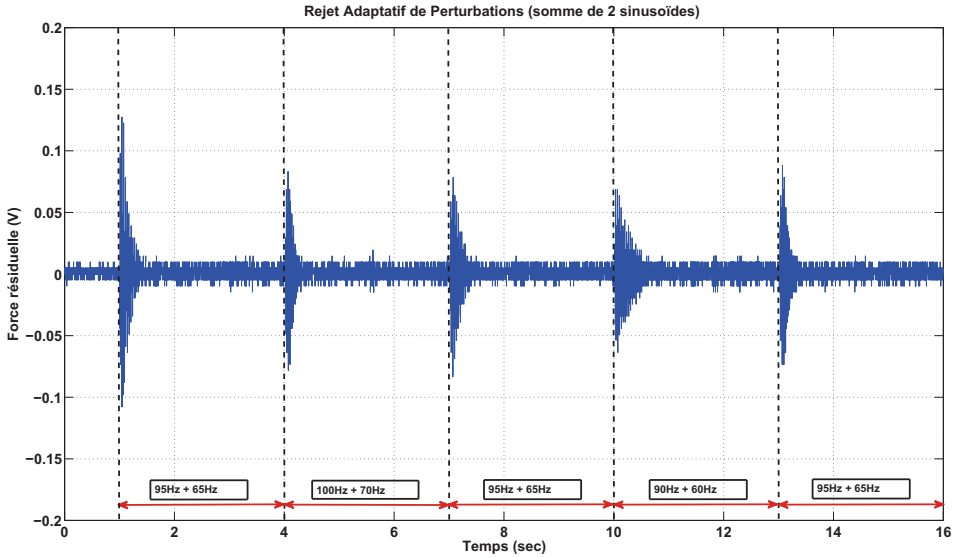


FIG. 8.4 – Résultats en temps réel avec algorithme adaptatif direct pour deux perturbations sinusoïdales appliquées simultanément avec des fréquences qui varient en echelon

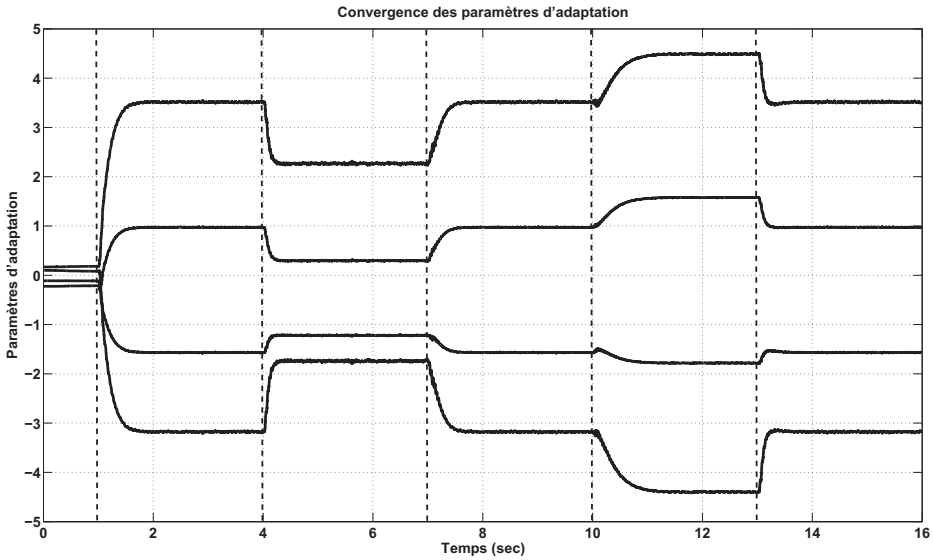


FIG. 8.5 – Evolution des paramètres du polynôme Q durant l'adaptation (deux perturbations sinusoïdales)

La variance de la force résiduelle en boucle ouverte est $var(yol) = 1.087510^{-1}$. En boucle fermée (après la convergence de l'algorithme), la variance est $var(ycl) = 5.642810^{-5}$. Ceci correspond à une atténuation globale de 66dB entre boucle ouverte et boucle fermée.

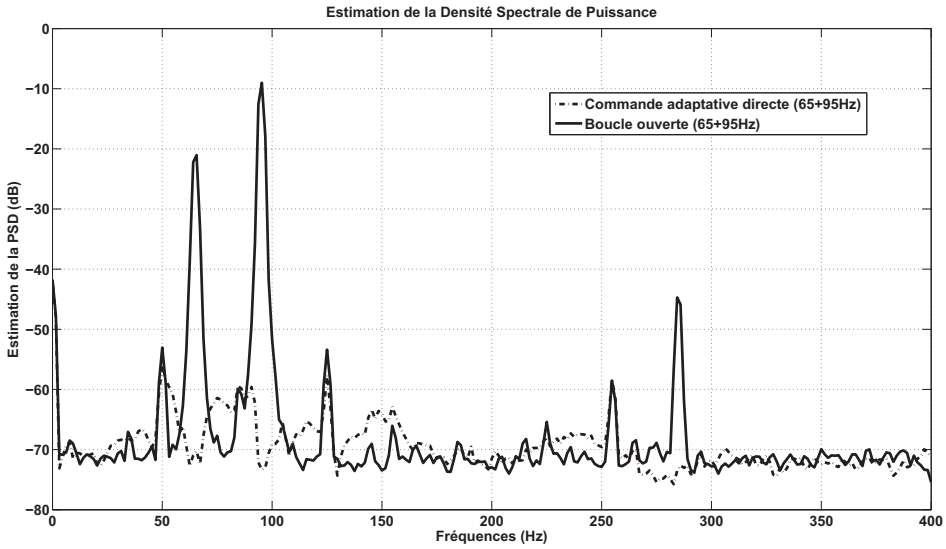


FIG. 8.6 – Densités spectrales de puissance en boucle ouverte et fermée avec la commande adaptative directe (deux perturbations sinusoïdales)

Méthode	Adaptatif direct	
Fréquence [Hz]	65	95
Atténuation (dB)	50dB	64dB

TAB. 8.1 – Performances de la méthode adaptative directe en temps réel

Considérons maintenant que les fréquences des deux perturbations sinusoïdales varient continuellement d'une manière linéaire. Les perturbations utilisées à présent sont des Chirps entre $[60-90]$Hz et $[70-100]$Hz. Le test a été effectué comme suit :

- $t = 0s$: fermeture de la boucle en utilisant le régulateur central. L'algorithme adaptatif fonctionne en permanence.
- $t = 1s$: Deux perturbations sinusoïdales constantes $[60-90]$Hz sont appliquées.
- Entre $t = 6s$ et $t = 11s$, deux chirps entre $[60-90]$Hz et $[70-100]$Hz sont appliquées.
- Entre $t = 11s$ et $t = 16s$, deux perturbations à fréquences constantes de $[70-100]$Hz sont utilisées.
- Entre $t = 16s$ et $t = 21s$, un chirp inverse entre $[70-100]$Hz et $[60-90]$Hz est considéré.
- Entre $t = 21s$ et $t = 26s$, deux perturbations à fréquences constantes de $[60-90]$Hz sont utilisées.

Les résultats temporels obtenus en boucle ouverte et boucle fermée sont présentés dans la figure 8.7. L'evolution des paramètres du polynôme Q est donnée dans la figure 8.8.

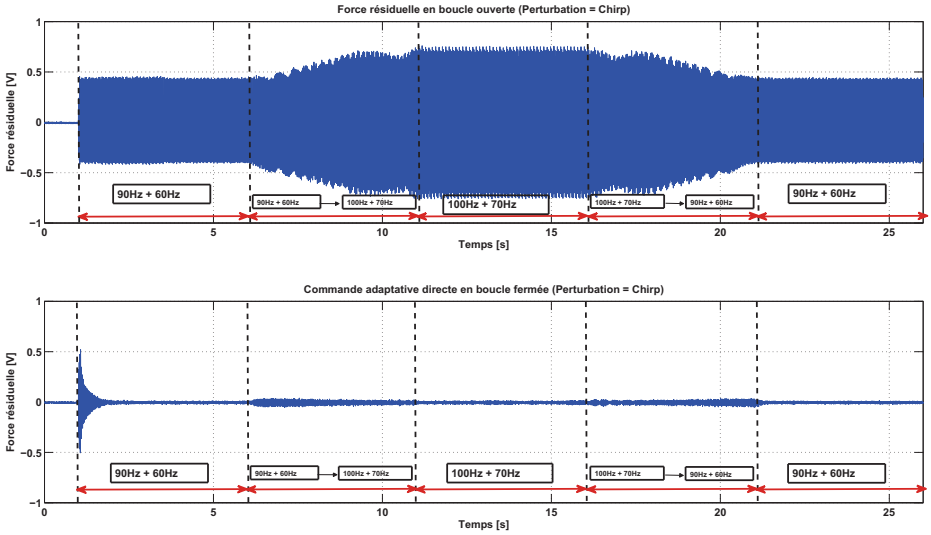


FIG. 8.7 – Résultats en temps réel obtenus avec deux perturbations en chirp, en boucle ouverte et fermée

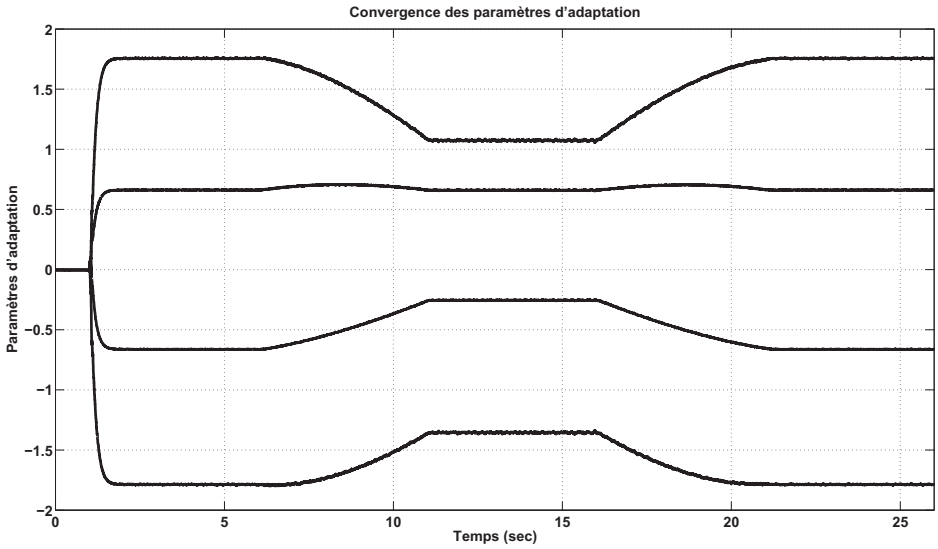


FIG. 8.8 – Evolution des paramètres du polynôme Q en présence de deux perturbations en chirp

Les résultats obtenus sont très bons et permettent de conclure que les variations progressives à raison de 2 Hz/s et les variations en échelon peuvent être suivies avec la commande adaptative directe.

8.3.2 Cas de trois perturbations sinusoïdales simultanées

Dans cette section, le rejet de trois perturbations sinusoïdales est considéré. Comme cité précédemment, on prendra $n_{D_p} = 6$ et donc $n_Q = n_{D_p} - 1 = 5$.

Les résultats temporels obtenus en temps réel avec l'algorithme adaptatif direct, ainsi que l'évolution des paramètres du polynôme Q, sont présentés dans les figures 8.9 et 8.10. Le même protocole que pour le cas de deux sinusoïdes a été considéré. Les perturbations sont appliquées à $1s$ et l'échelon sur les fréquences est appliqué toutes les $3s$. La convergence de la sortie nécessite $0.8s$ dans le pire des cas.

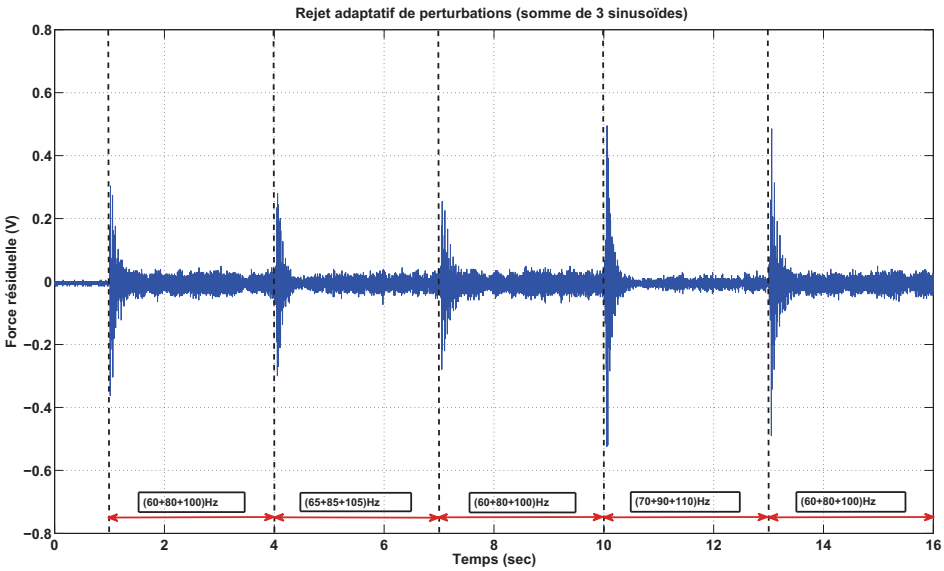


FIG. 8.9 – Résultats en temps réel avec algorithme adaptatif direct pour trois perturbations sinusoïdales appliquées simultanément avec des fréquences qui varient en echelon

La figure 8.11 montre les densités spectrales de la force résiduelle obtenues en boucle ouverte, en boucle fermée avec un régulateur linéaire contenant le modèle interne de la perturbation, et en boucle fermée en utilisant l'algorithme d'adaptation direct (après la convergence de l'algorithme). Les résultats sont donnés pour une application simultanée de trois perturbation sinusoïdales (60, 80 et 100Hz).

Une grande atténuation des perturbations est à remarquer (supérieure à 45dB). Les valeurs des atténuations sont données dans le tableau 8.2. La limite des performances est donnée par le régulateur linéaire. Les résultats des deux régulateurs (linéaire et adaptatif) sont très proches.

De même que pour le cas de deux perturbations sinusoïdales, quelques harmoniques apparaissent en boucle ouverte. Leurs effets sont réduits en boucle fermée. Le bruit de

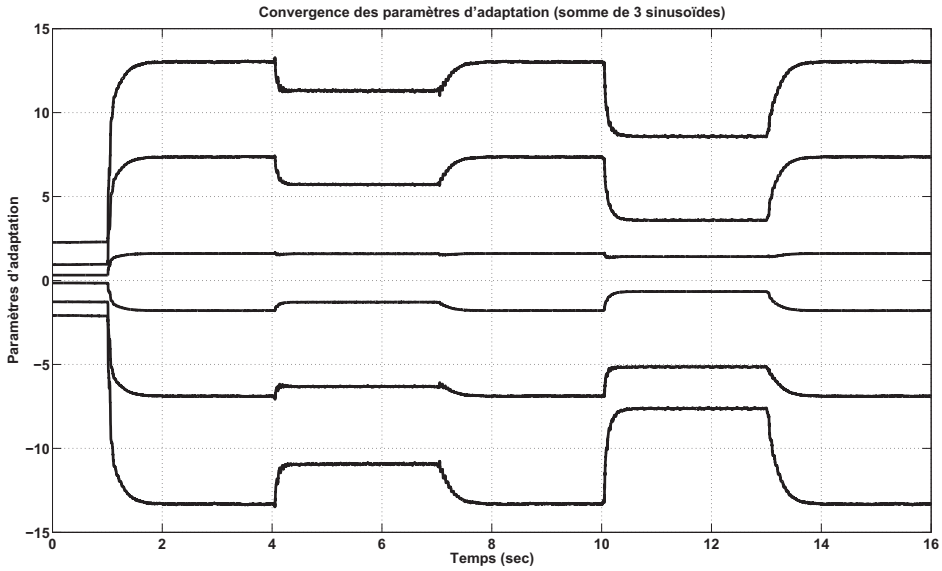


FIG. 8.10 – Evolution des paramètres du polynôme Q durant l'adaptation (trois perturbations sinusoïdales)

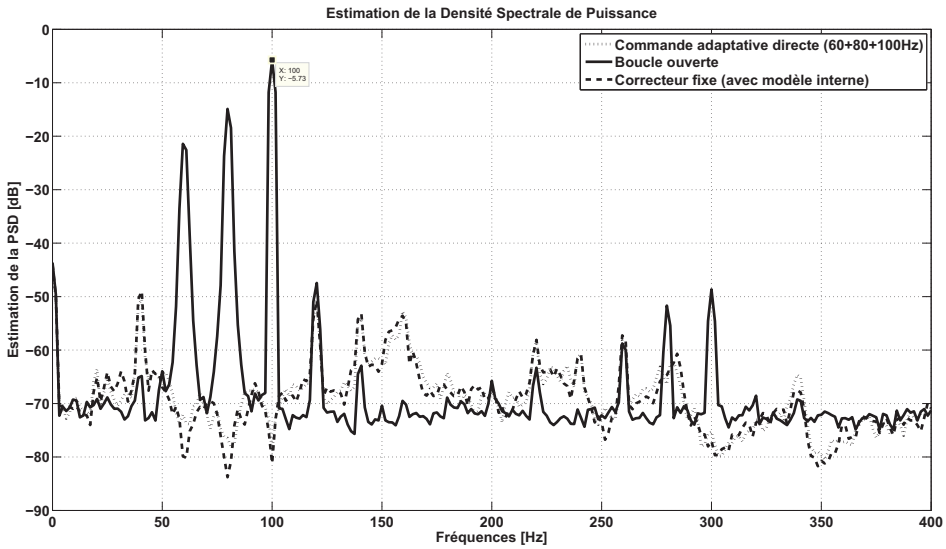


FIG. 8.11 – Densités spectrales de puissance en boucle ouverte et fermée avec la commande adaptative directe (trois perturbations sinusoïdales)

mesure à 50Hz n'est pas amplifié en boucle fermée.

La variance de la force résiduelle en boucle ouverte est : $var(yol) = 1.0792.10^{-1}$. En boucle fermée (après la convergence de l'algorithme adaptatif), la variance est : $var(ycl) = 6.0370.10^{-4}$. Ce qui correspond à une atténuation globale de 45dB.

Méthode	Adaptatif direct		
Fréquence [Hz]	60	80	100
Atténuation (dB)	55dB	70dB	75dB

TAB. 8.2 – Performances de la méthode adaptative directe en temps réel

Suivant le même protocole que pour le cas du rejet de deux perturbation sinusoïdales, trois perturbations sinusoïdales de fréquences variant linéairement de [60, 80, 100Hz] jusqu'à [70, 90, 110Hz] ont été appliquées. Les résultats en boucle ouverte et en boucle fermée sont présentés dans la figure 8.12.

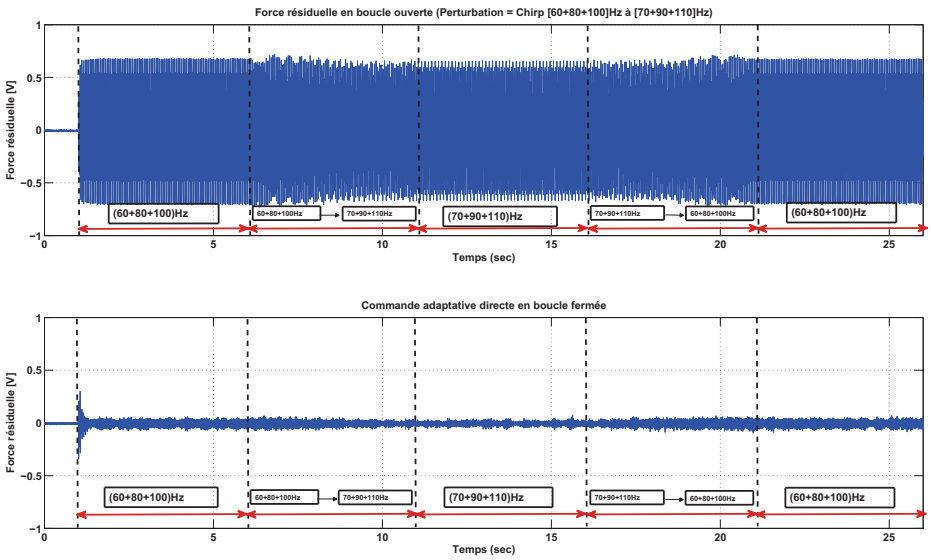


FIG. 8.12 – Résultats en temps réel obtenus avec trois perturbations en chirp, en boucle ouverte et fermée

Pour ce cas aussi, les résultats sont très bons.

8.3.3 Comparaison entre la méthode directe et indirecte

Dans cette question, les résultats du rejet d'une perturbation sinusoïdale variant en echelon, en utilisant les méthodes adaptatives directe et indirecte sont présentés.

La figure 8.13 présente les résultats temporels du rejet d'une perturbation sinusoïdale ayant une fréquence qui varie en echelon toutes les $3s$. Les résultats obtenus dans le même contexte mais en utilisant la méthode adaptative indirecte sont donnés dans la figure 8.14. Contrairement aux résultats donnés dans ([Constantinescu, 2001; Landau

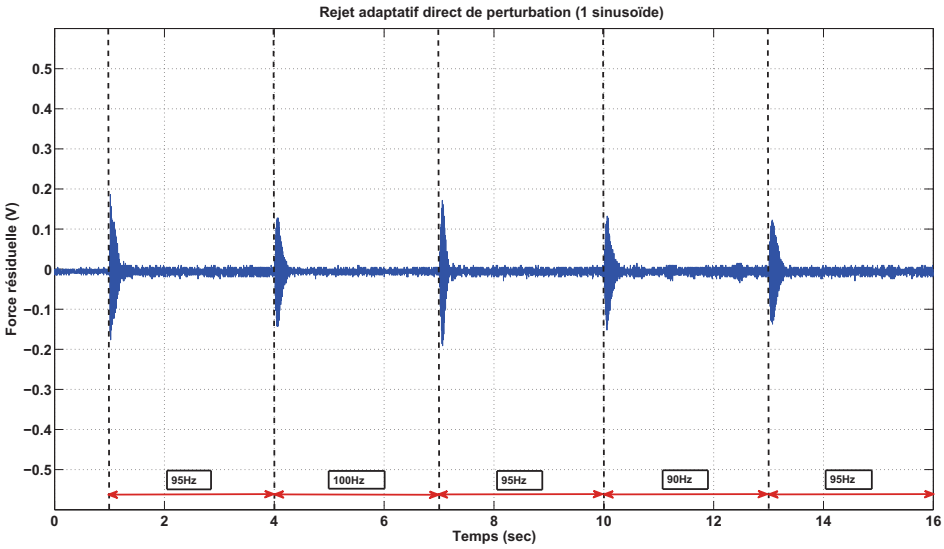


FIG. 8.13 – Résultats en temps réel avec algorithme adaptatif direct pour le rejet d'une perturbation sinusoïdale avec une fréquence variant en echelon

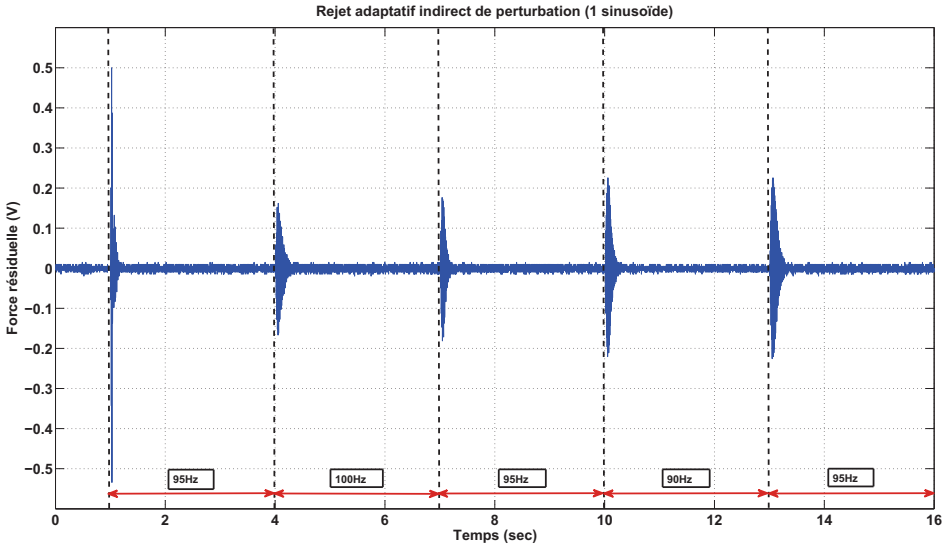


FIG. 8.14 – Résultats en temps réel avec algorithme adaptatif indirect pour le rejet d'une perturbation sinusoïdale avec une fréquence variant en echelon

et al., 2005]), les performances obtenues avec l'algorithme adaptatif direct et indirect sont similaires. L'explication est que dans ([Constantinescu, 2001; Landau et al., 2005]), l'observateur (estimateur) de la perturbation n'a pas été inclus, et les auteurs utilisaient directement la sortie mesurée. Ceci a pour conséquence une estimation erronée du modèle de la perturbation quand la sortie atteint un niveau faible d'amplitude, alors qu'ici,

l'observateur mentionné dans la section 7.4 a été utilisé.

La complexité de la commande adaptative indirecte est plus importante que celle de la commande directe. L'utilisation de cette méthode pourrait être motivée par la possibilité de spécifier un niveau d'atténuation de la perturbation au lieu de la supprimer.

8.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats expérimentaux obtenus sur la structure flexible (SAAI), pour le rejet des perturbations multi-sinusoïdales. Les deux méthodes, directe et indirecte, ont été illustrées.

Le régulateur central utilisé est un correcteur RS calculé sur la base du modèle de le voie secondaire obtenu par identification paramètrique. Nous avons aussi présenté des résultat du même régulateur linéaire contenant le modèle interne de perturbations multi-sinusoïdales (trois sinusoïdes), afin de les comparer avec ceux obtenus en adaptatif.

La méthode adaptative directe reste plus intéressante que la méthode adaptative indirecte du point de vue de la complexité, même si on obtient quasiment les mêmes résultats en performances.

Les résultats obtenus en temps réel sont très proches de ceux obtenus en simulation en utilisant les modèles de la voie primaire et secondaire identifiés, même s'ils restent moins bons. Ceci est dû à la présence de bruit de mesure à la fréquence du réseau (50Hz), de l'apparition d'harmoniques, ainsi que de quelques phénomènes non-linéaires.

Chapitre 9

Conclusions générales et perspectives

Dans ce travail, nous avons abordé le sujet du contrôle actif robuste et adaptatif de vibrations sur des structures mécaniques. Les structures utilisées sont des systèmes de contrôle actif de vibrations se trouvant au sein du laboratoire GIPSA-Lab de Grenoble. Les principaux problèmes abordés sont l'atténuation de vibrations bande étroite et bande large.

La première partie de ce travail est dédiée à l'atténuation de perturbations bande large sur des structures de contrôle actif de vibrations ou de bruit ayant une mesure fortement corrélée avec le signal de la perturbation. Des lois de commande adaptatives et non-adaptatives par action anticipatrice "feedforward" ont été proposées et analysées.

La première loi de commande proposée est de type H_∞ non-adaptative en "feedforward". Les résultats de cette commande servent de références aux algorithmes de commande adaptative. Le principal inconvénient de cette commande est l'absence de capacités d'adaptation aux changements des caractéristiques fréquentielles de la perturbation.

En deuxième lieu, des algorithmes adaptatifs en feedforward ont été proposés et analysés pour le rejet de ce type de perturbation. Ces algorithmes permettent une adaptation des paramètres du régulateur en "feedforward" pour faire face aux variations des caractéristiques de la perturbation.
Enfin, des commandes hybrides (feedback & feedforward adaptatif) ont été proposées et analysées.

Une étude expérimentale sur une structure de contrôle actif de vibration a permis de valider ces approches et de les comparer pour des perturbations bande large. L'aspect adaptatif a été testé en rajoutant des perturbations bande étroite à la perturbation initiale.

Dans les perspectives de ce travail, d'autres algorithmes viennent d'être proposés dans

le même contexte en utilisant la paramètrisation Youla-Kucera, et valider expérimentalement sur la même structure (voir [Landau et al., 2011]). On pourrait aussi envisager l'application de nos algorithmes sur des structures de contrôle actif de bruit et de les élargir pour le cas multi-variables.

La deuxième partie du travail effectué concerne le rejet de perturbations sinusoïdales et multi-sinusoïdales en utilisant des lois de commande adaptatives en contre réaction "feedback".
Deux algorithmes adaptatifs, l'un direct et l'autre indirect, ont été proposés et détaillés. La propriété la plus importante de ces deux algorithme est de pouvoir garder inchangés les pôles de la boucle fermée, placés par un régulateur central.
D'autre part, une méthode de préservation des parties fixes du régulateur central a été proposée. Cette propriété permet une meilleure synthèse du régulateur central afin d'avoir une bonne robustesse.

Les résultats théoriques de cette partie ont été validés expérimentalement sur une suspension active à actionneur inertiel pour le rejet de perturbations bande étroite (une ou plusieurs sinusoïdes). Les essais ont été réalisés pour des modèles de perturbations ayant des paramètres variant en échelon (variation brusque) ou linéairement (variation douce).

Les algorithmes proposés, que ce soit en "feedback" ou en "feedforward", peuvent être testés sur d'autres applications telles que l'amélioration des bâtiments anti-sismiques, le confort acoustique en avion, la minimisation des vibrations sur un habitacle de véhicule ou sur des outils de haute précision...etc.

Bibliographie

Alexander, S. [1986], *Adaptive signal processing*, Springer-Verlag, New York.

Alma, M., Martinez, J. & Landau, I. [2011], 'Design and tuning of h-infinity feedforward compensator for active vibration control system, in presence of feedback controller', Internal report, Gipsa- Lab. INP-Grenoble.

Amara, F. B., Kabamba, P. & Ulsoy, A. [1999*a*], 'Adaptive sinusoidal disturbance rejection in linear discrete-time systems - Part I : Theory', *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control* **121**, 648–654.

Amara, F. B., Kabamba, P. & Ulsoy, A. [1999*b*], 'Adaptive sinusoidal disturbance rejection in linear discrete-time systems - Part II : Experiments', *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control* **121**, 655–659.

Anderson, B., Bitmead, R., Johnson, C., Kokotovic, P., Kosut, R., Mareels, I., Praly, L. & Riedle, B. [1986], *Stability of adaptive systems*, The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts , London, England.

Aström, K. & Witenmark, B. [1995], *Adaptive Control*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

Bai, M. & H.H.Lin [1997], 'Comparison of active noise control structures in the presence of acoustical feedback by using the hinf synthesis technique', *J. of Sound and Vibration* **206**, 453–471.

Bellanger, M. [1987], *Adaptive digital filters and signal analysis*, Marcel Dekker, New York.

Bengtsson, G. [1977], 'Output regulation and internal models - a frequency domain approach', *Automatica* **13**, 333–345.

Beranek, L. & Ver, I. [1992], *Noise and Vibration Control Engineering : Principles and Applications*, Wiley, New York.

Billoud, G. [2003], 'Active control at lord corporation - a reality', Technical report, LL6508, Lord corporation.

Bodson, M. [2005], 'Rejection of periodic distrubances of unknown and time-varying frequency', *Int. J. of Adapt. Contr. and Sign. Proc.* **19**, 67–88.

Bodson, M. & Douglas, S. [1997], 'Adaptive algorithms for the rejection of sinusosidal disturbances with unknown frequency', *Automatica* **33**, 2213–2221.

Borchers, I. [1994], 'Advanced study for active noise control in aircraft (asanca)', *In NASA. Langley Research Center, Fourth Aircraft Interior Noise Workshop* pp. 129–141.

Burgess, J. C. [1981], 'Active adaptive sound control in a duct : A computer simulation', *The Journal of the Acoustical Society of America* **70**(3), 715–726.

Callafon, R. D. [2010], 'Active noise control method and apparatus including feedforward and feedback controller', (7688984 B2).

Clark, R. & Bernstein, D. [1998], 'Hybrid control : Separation in design', *Journal of Sound and Vibration* **214**(4), 784–791.

Constantinescu, A. [2001], Commande robuste et adaptative d'une suspension active, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.

Cowan, C. & Grant, P. [1985], *Adaptive filters*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Ding, Z. [2003], 'Global stabilization and disturbance suppression of a class of nonlinear systems with uncertain internal model', *Automatica* **39**, 471–479.

Elliott, S. & Nelson, P. [1994], 'Active noise control', *Noise / News International* pp. 75–98.

Elliott, S. & Sutton, T. [1996], 'Performance of feedforward and feedback systems for active control', *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing* **4**(3), 214–223.

Eriksson, L., Allie, M. & Greiner, R. [1987], 'The selection and of application of an iir adaptive filter for use in active sound attenuation', *IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing* **ASSP-35**(4), 433–437.

Esmailzadeh, E., Alasty, A. & Ohadi, A. [2002], 'Hybrid active noise control of a one-dimensional acoustic duct', *Journal of vibration and acoustics* **124**(1), 10–18.

Fraanje, R., Verhaegen, M. & Doelman, N. [1999], 'Convergence analysis of the filtered-u lms algorithm for active noise control in case perfect cancellation is not possible', *Signal Processing* **73**, 255–266.

Francis, B. . & Wonham, W. [1976], 'The internal model principle of control theory', *Automatica* **12**, 457–465.

Fuller, C., Elliott, S. & Nelson, P. [1995], *Active Control of Vibration*, Academic Press, New York.

Goodwin, G. & Sin, K. [1984], *Adaptive filtering prediction and control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Gouraud, T., Gugliemi, M. & Auger, F. [1997], 'Design of robust and frequency adaptive controllers for harmonic disturbance rejection in a single-phase power network', *Proceedings of the European Control Conference, Bruxelles* .

Hassibi, B., Sayed, A. H. & Kailath, T. [1995], 'h_∞ optimality of the lms algorithm', *IEEE Transactions on signal processing* .

Haykin, S. [1991], *Adaptive filter theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Hillerstrom, G. & Sternby, J. [1994], 'Rejection of periodic disturbances with unknown period - a frequency domain approach', *Proceedings of American Control Conference, Baltimore* pp. 1626–1631.

Honig, M. & Messerschmitt, D. [1986], *Adaptive filters : structures, algorithms, and applications*, Kluwer, Boston.

Hu, J. & Linn, J. [2000], 'Feedforward active noise controller design in ducts without independent noise source measurements', *IEEE transactions on control system technology* **8**(3), 443–455.

Ioannou, P. & Sun, J. [1996], *Robust adaptive control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Jacobson, C., Johnson, C., Cormick, D. M. & Sethares, W. [2001], 'Stability of active noise control algorithms', *IEEE Signal Processing letters* **8**(3), 74–76.

Johnson, C. [1976], 'Theory of disturbance-accomodating controllers', In *Control and Dynamical Systems* (C. T. Leondes, Ed.). Vol. 12, pp. 387-489.

J.R. Treichler, C. J. & Larimore, M. [1987], *theory and design of adaptive filters and signal analysis*, Wiley, New York.

Kuo, M. & Morgan, D. [1996], *Active noise control systems-Algorithms and DSP implementation*, Wiley, New York,.

Kuo, M. & Morgan, D. [1999], 'Active noise control : A tutorial review', *Proceedings of the IEEE* **87**, 943–973.

Landau, I. [1993], *Identification et commande des systèmes*, 2e edn, Hermès.

Landau, I. [2002], *Commande des systèmes - Conception, Identification et Mise en oeuvre*, Hermes Science. (WEB Address : http ://landau-bookic.lag.ensieg.inpg.fr).

Landau, I., Airimitoaie, T. & Alma, M. [2011], 'A youla-kucera parametrized adaptive feedforward compensator for active vibration control', *Proceddings of the 18th IFAC World Congress, Milan* .

Landau, I., Constantinescu, A., Loubat, P., Rey, D. & Franco, A. [2001], 'A methodology for the design of feedback active vibration control systems', *Proceedings of the European Control Conference* . Porto, Portugal.

Landau, I., Constantinescu, A. & Rey, D. [2005], 'Adaptive narrow band disturbance rejection applied to an active suspension - an internal model principle approach', *Automatica* **41**(4), 563–574.

Landau, I. & Karimi, A. [1997], 'Recursive algorithms for identification in closed loop. a unified approach and evaluation', *Automatica* **33**.

Landau, I., Karimi, A. & Constantinescu, A. [2001], 'Direct controller order reduction by identification in closed loop', *Automatica* (37), 1689–1702.

Landau, I., Langer, J., Rey, D. & Barnier, J. [1996], 'Robust control of a 360 flexible arm using the combined pole placement/sensitivity function shaping method', *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4(4)**, 369–383.

Landau, I., Lozano, R. & M'Saad, M. [1997], *Adaptive control*, Springer, London.

Landau, I., M'Sirdi, N. & M'Saad, M. [1986], 'Techniques de modélisation récursive pour l'analyse spectrale paramétrique adaptative', *Revue de Traitement du Signal* **3**, 183–204.

Landau, I. & Zito, G. [2005], *Digital Control Systems - Design, Identification and Implementation*, Springer, London.

Ljung, L. [1977], 'On positive real transfer functions and the convergence of some recursive schemes', *IEEE Trans. on Automatic Control* **AC-22**, 539Ű551.

Ljung, L. [1999], *System Identification - Theory for the User*, second edn, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Ljung, L. & Söderström, T. [1983], *Theory and practice of recursive identification*, The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts , London, England.

Lueg, P. [1936], 'Process of silencing sound oscillations', (2043416).

Marino, R., Santosuosso, G. & Tomei, P. [2003], 'Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency', *Automatica* **39**, 1755–1761.

Mosquera, C. & Perez-Gonzalez, F. [2000], 'Convergence analysis of the multiplechannel filtered-u recursive lms algorithm for active noise control', *Signal Processing* .

Narenda, K. & Annaswamy, A. [1989], *Stable adaptive systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Paré, T. & How, J. [1999], 'Hybrid h_2 control design for vibration isolation', *Journal of Sound and Vibration* **226**(1), 25–39.

Ray, L., Solbeck, J., Streeter, A. & Collier, R. [2006], 'Hybrid feedforward-feedback active noise reduction for hearing protection and communication', *The Journal of the Acoustical Society of America* **120**(4), 2026–2036.

Ren, W. & Kumar, P. R. [1989], 'Adaptive active noise control : Structures, algorithms and convergence analysis', *Proc. Inter-Noise* .

Rotunno, M. & de Callafon, R. [n.d.], 'Design of model-based feedforward compensators for vibration compensation in a flexible structure', Internal report, Dept. of Mechanical and Aerospace Engineering. University of Callufornia, San Diego.

S. Fekri, M. & Pasqual, A. [2006], 'Issues, progress and new results in robust adaptive control', *International J. of ACASP* pp. 519–579.

Sastry, S. & bodson, M. [1989], *Adaptive control : Stability, convergence and robustness.*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Serrani, A. [2006], 'Rejection of harmonic disturbances at the controller input via hybrid adaptive external models', *Automatica* **42**, 1977–1985.

Tsypkin, Y. [1997], 'Stochastic discrete systems with internal models', *Journal of Automation and Information Sciences* **29**(4&5), 156–161.

Valentinotti, S. [2001], Adaptive Rejection of Unstable Disturbances : Application to a Fed-Batch Fermentation, Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Vinnicombe, G. [1993], 'Frequency domain uncertaintly and the graph topology', *IEEE Transactions on Automatic Control* **38**.

Vinnicombe, G. [1996], 'The robustness of feedback systems with bounded complexity', *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(6), 1571–1583.

Wang, A. & Ren, W. [1999], 'Convergence analysis of the filtered-u algorithm for active noise control', *Signal Processing* **73**, 255–266.

Wellstead, P. & Zarrop, M. [1991], *Self-tuning systems*, Wiley, Chichester, UK.

Widrow, B. & Hoff, M. [1960], 'Adaptive switching circuits', *Proc. IRE WESCON Convention Record, Part 4, Session 16* pp. 96–104.

Widrow, B., Shur, D. & Shaffer, S. [1981], 'On adaptive inverse control', *15th ASILOMAR Conference on circuits, systems and computers* .

Widrow, B. & Stearns, S. [1985], *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Zeng, J. & de Callafon, R. [2006], 'Recursive filter estimation for feedforward noise cancellation with acoustic coupling', *Journal of sound and vibration* **291**, 1061–1079.

Zhou, K. & Doyle, J. [1998], *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Annexe A

Compléments du chapitre 4

A.1 Comparaison avec d'autres algorithmes

Les algorithmes développés dans le chapitre 4 en utilisant des gains d'adaptation scalaire et matriciel pour des compensateurs en feedforward à réponse impulsionnelle finie (IIR), sont comparés avec l'algorithme de Jacobson-Johnson ([Jacobson et al., 2001]) et l'algorithme FULMS ([Wang & Ren, 1999]). Ces deux références considèrent le même type de compensateurs et prennent en compte le couplage positif.

Le tableau A.1 résume la structure des algorithmes, les conditions de stabilité et de convergence, ainsi que les hypothèses considérées sur la structure du système. Les notations utilisées dans le chapitre 4 ont été utilisées pour les autres algorithmes. Le tableau A.2 donne l'équivalence des notations entre celles utilisées dans le chapitre 4 et celles utilisées dans [Jacobson et al., 2001] et [Wang & Ren, 1999]. Une comparaison des modes d'opération a aussi été fournie pour le mode opératoire adaptatif (gain d'adaptation ne tend pas vers zéro) et le mode opératoire en auto-ajustement (gain d'adaptation tend vers zéro).

TAB. A.1 – Comparaison des algorithmes de compensation adaptative en feedforward

	Contribution (matriciel)	Contribution (scalaire)	Jacobson (scalaire)	FULMS (gain)
$\hat{\theta}(t+1) =$	$\hat{\theta}(t) + F(t)\Phi(t)\frac{\nu^0(t+1)}{1+\Phi^T(t)F(t)\Phi(t)}$	$\hat{\theta}(t) + \gamma(t)\Phi(t)\frac{\nu^0(t+1)}{1+\gamma(t)\Phi^T(t)\Phi(t)}$	$\hat{\theta}(t) + \mu\gamma\Phi(t)\frac{\nu^0(t+1)}{1+\gamma\Phi^T(t)\Phi(t)}$	$\hat{\theta}(t) + \gamma(t)\Phi(t-1)\nu^0(t)$
Gain Adapt.	$F(t+1)^{-1} = \lambda_1(t)F(t)+$ $+\lambda_2(t)\Phi(t)\Phi^T(t)$ $0 \leq \lambda_1(t) < 1, 0 \leq \lambda_2(t) < 2$ $F(0) > 0$	$\gamma(t) > 0$	$\gamma > 0, \quad 0 < \mu \leq 1$	$\gamma(t) > 0$
Adaptive	Gain Decr. + trace const.	$\gamma(t) = \gamma = const$	$\gamma > 0$	$\gamma(t) = \gamma = const$
Auto ajustement	$\lambda_2 = const.$ $\lim_{t\to\infty} \lambda_1(t) = 1$	$\sum_{t=1}^{\infty} \gamma(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$	Non considéré	$\sum_{t=1}^{\infty} \gamma(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$
$\phi^T(t) =$	$[-\hat{y}(t), \ldots, \hat{u}(t+1), \ldots]$	$[-\hat{y}(t), \ldots, \hat{u}(t+1), \ldots]$	$[-\hat{y}(t), \ldots, \hat{u}(t+1), \ldots]$	$[-\hat{y}(t), \ldots, \hat{u}(t+1), \ldots]$
$\Phi(t) =$	$L\phi(t)$ $L_2 = \hat{G}; \quad L_3 = \frac{\hat{A}_M}{\hat{P}}\hat{G}$ $\hat{P} = \hat{A}_M\hat{S} - \hat{B}_M\hat{R}$	$L\phi(t)$ $L_2 = \hat{G}; \quad L_3 = \frac{\hat{A}_M}{\hat{P}}\hat{G}$ $\hat{P} = \hat{A}_M\hat{S} - \hat{B}_M\hat{R}$	$\phi(t)$	$L\phi(t)$ $L = \hat{G}$
$G = \frac{B_G}{A_G}$	$B_G = b_{1_G}z^{-1} + b_{2_G}z^{-2} + \ldots$ $A_G = 1 + a_{1_G}z^{-1} + a_{2_G}z^{-2} + \ldots$	$B_G = b_{1_G}z^{-1} + b_{2_G}z^{-2} + \ldots$ $A_G = 1 + a_{1_G}z^{-1} + \ldots$	$B_G = 1, \quad A_G = 1$ or $G = SPR$	$B_G = b_{1_G}z^{-1} + b_{2_G}z^{-2} + \ldots$ $A_G = 1 + a_{1_G}z^{-1} + \ldots$
$M = \frac{B_M}{A_M}$	$B_M = b_{1_M}z^{-1} + b_{2_M}z^{-2} + \ldots$ $A_M = 1 + a_{1_M}z^{-1} + a_{2_M}z^{-2} + \ldots$	$B_M = b_{1_M}z^{-1} + b_{2_M}z^{-2} + \ldots$ $A_M = 1 + a_{1_M}z^{-1} + \ldots$	$B_M = b_{1_M}z^{-1} + b_{2_M}z^{-2} + \ldots$ $A_M = 1$	$B_M = b_{1_M}z^{-1} + b_{2_M}z^{-2} + \ldots$ $A_M = 1$
$D = \frac{B_D}{A_D}$	$B_D = b_{1_D}z^{-1} + b_{2_D}z^{-2} + \ldots$ $A_D = 1 + a_{1_D}z^{-1} + a_{2_D}z^{-2} + \ldots$	$B_D = b_{1_D}z^{-1} + b_{2_D}z^{-2} + \ldots$ $A_D = 1 + a_{1_D}z^{-1} + \ldots$	$B_D = b_{1_D}z^{-1} + b_{2_D}z^{-2} + \ldots$ $A_D = 1$	$B_D = b_{1_D}z^{-1} + b_{2_D}z^{-2} + \ldots$ $A_D = 1 + a_{1_D}z^{-1} + \ldots$
Condition Stabilité	$\frac{A_M G}{PL} - \frac{\lambda}{2} = SPR$ $\lambda = \max \lambda_2(t)$	$\frac{A_M G}{PL} = SPR$	$G = SPR$	Non fournie
Condition conv.	$\frac{A_M G}{PL} - \frac{\lambda}{2} = SPR$ $\lambda = \lambda_2$	$\frac{A_M G}{PL} = SPR$	Does not apply	$\frac{G}{PG} = SPR$

Contribution	Dans [Jacobson et al., 2001]	Dans [Wang & Ren, 1999]
t	k	k
D	P	G
G	C	P
B_M	F	F
A_M	1	1
N	W	C
R	$b_0 + b_1 q^{-1} + \dots$	A
S	$1 - a_1 q^{-1} - \dots$	B
d	s	x
$\hat{y}$	$\hat{y}$	u
$\hat{u}$	u	$x + Fu$
γ	$\frac{1}{\delta}$	γ
ϕ	ϕ	ϕ
$\Phi = L\phi$	ϕ	$\hat{P}\phi$
F	$\frac{1}{\delta} I$	γI

Tab. A.2 – Équivalence des notations

Annexe B

Compléments du chapitre 8 Résultats en simulation Application à un Benchmark international

http ://www.gipsa-lab.inpg.fr/ john.martinez/benchmark/

B.1 Résultats de simulation

La performance du système pour le rejet de perturbations multi-sinusoïdales inconnues et variant dans le temps sera illustrée dans cette annexe utilisant l'approche adaptative directe présentée dans le chapitre 7. Les résultats présentés ont été obtenus sur le simulateur donné sur le site internet du benchmark international sur la régulation adaptative.

Le fichier joint (en anglais) est un rapport interne au laboratoire GIPSA-Lab de Grenoble, France.

Direct adaptive rejection of unknown/time-varying multiple narrow band disturbances. Application to a Benchmark problem

Marouane Alma * **Ioan Doré Landau** * **John Jairo Martinez** * **Gabriel Buche** *

* *Control system department of Gipsa-lab, St martin d'héres, 38402 FRANCE (e-mail: [marouane.alma, ioan-dore.landau, john-jairo.martinez-molina, Gabriel.Buche]@gipsa-lab.grenoble-inp.fr).*

Abstract: The paper adresses the problem of attenuation (rejection)of unknown disturbances without measuring them by using a feedback approach. A direct feedback adaptive regulation scheme for the suppression of multiple unknown and/or time-varying vibrations will be used and evaluated with the benchmark specifications. It uses the internal model principle and the Youla- Kucera parametrization of the controller. The internal model included in the controller is defined by the Youla-Kucera parameters. This allows a direct adaptation of the internal model parameters in the presence of unknown and time varying narrow band disturbances.
The simulation results of all the cases considered in the benchmark as well as preliminary real time results are presented.

1. INTRODUCTION

One of the basic problems in control is the attenuation (rejection) of unknown disturbances without measuring them. The common framework is the assumption that the disturbance is the result of a white noise or a Dirac impulse passed through the "model of the disturbance". While in general one can assume a certain structure for such "model of disturbance", its parameters are unknown and may be time varying. This will require to use an adaptive feedback approach.

In the present context the plant dynamic model is known (can be obtained by system identification) and almost invariant and the objective is the rejection of disturbances characterized by unknown and time varying disturbance models. In adaptive regulation the disturbances considered can be defined as "finite band disturbances". This includes single or multiple narrow band disturbances or sinusoidal disturbances. Furthermore for robustness reasons the disturbances should be located in the frequency domain within the regions where the plant has enough gain.

To achieve the rejection of the disturbance (at least asymptotically) without measuring it, a *feedback solution* has to be considered.

Using the internal model principle, the controller should incorporate the model of the disturbance (Francis and Wonham [1976], Bengtsson [1977], Tsypkin [1997]). Therefore the rejection of unknown disturbances raises the problem of adapting the internal model of the controller and its re-design in real-time.

One way for solving this problem is to try to estimate in real time the model of the disturbance and re-compute the controller, which will incorporate the estimated model of the disturbance (as a pre-specified element of the controller). While the disturbance is unknown and its model needs to be estimated, one assumes that the model of the plant is known (obtained for example by identification). The estimation of the disturbance model can be done by using standard parameter estimation algorithms (see for example Landau et al. [1986], Ljung [1999]) once a good observer for the disturbance has been built. This will lead to an indirect adaptive control scheme. The time consuming part of this approach is the redesign of the controller at each sampling time. The reason is that in many applications the plant model can be of very high dimension and despite that this model is constant, one has to re-compute the controller because a new internal model should be considered.

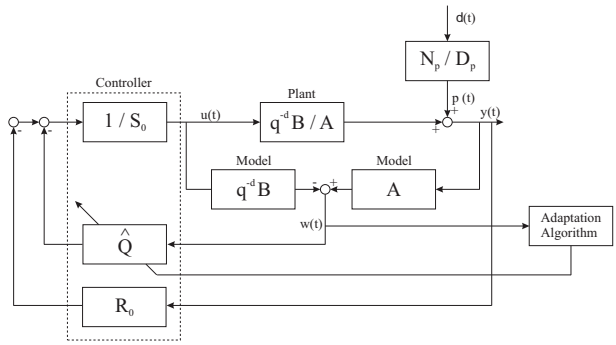


Fig. 1. Direct adaptive control scheme for rejection of unknown disturbances

However, by considering the Youla-Kucera parametrization of the controller (known also as the Q-parametrization), it is possible to insert and adjust directly the internal model in the controller by adjusting the parameters of the Q polynomial (see figure 1). In this way, one gets the desired internal model without recomputing the controller (polynomials R_0 and S_0 in figure 1 remain unchanged).

The number of the controller parameters to be directly adapted is roughly equal to the number of parameters of the denominator of the disturbance model. In other words, the size of the

adaptation algorithm will depend upon the complexity of the disturbance model.

The paper focuses on the direct feedback adaptive regulation methodology for the case of multiple unknown and time varying narrow band disturbances, applied to a benchmark problem.

The paper is organized as follows. Section 2 is dedicated to a brief review of the plant, disturbance and controller representation as well as of the Internal Model Principle. The direct adaptive control scheme for disturbance rejection is presented in section 3. The simulation results for the benchmark problem Landau et al. [2009] are presented in 4. Section 5 present some experimental results obtained in real time on the active suspension. Some preliminary conclusions will be presented in section 6. The final version of the paper will include the experimental results obtained on the benchmark site.

2. PLANT REPRESENTATION AND CONTROLLER STRUCTURE

The structure of a linear time invariant discrete time model of the plant (used for controller design) is:

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-d-1}B^*(z^{-1})}{A(z^{-1})} , \tag{1}$$

with:

$$d = \text{the plant pure time delay in number of sampling periods}$$

$$A = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A} ;$$
$$B = b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B} = q^{-1} B^* ;$$
$$B^* = b_1 + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B+1} ,$$

where $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $B^*(z^{-1})$ are polynomials in the complex variable z^{-1} and n_A, n_B and $n_B - 1$ represent their orders [1] . The model of the plant may be obtained by system identification. Details on system identification of the models considered in this paper can be found in Landau and Zito [2005], Constantinescu [2001], Landau et al. [2001], A.Karimi [2002].

Since in this paper we are focused on regulation, the controller to be designed is a RS-type polynomial controller (Landau et al. [1997], Landau and Zito [2005]).

The output of the plant $y(t)$ and the input $u(t)$ may be written as:

$$y(t) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \cdot u(t) + p_1(t) ; \tag{2}$$

$$S(q^{-1}) \cdot u(t) = -R(q^{-1}) \cdot y(t) , \tag{3}$$

where q^{-1} is the delay (shift) operator ($x(t) = q^{-1}x(t+1)$) and $p_1(t)$ is the resulting additive disturbance on the output of the system. $R(z^{-1})$ and $S(z^{-1})$ are polynomials in z^{-1} having the orders n_R and n_S, respectively, with the following expressions:

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + \ldots + r_{n_R} z^{-n_R} = R'(z^{-1}) \cdot H_R(z^{-1}) ; \tag{4}$$

$$S(z^{-1}) = 1 + s_1 z^{-1} + \ldots + s_{n_S} z^{-n_S} = S'(z^{-1}) \cdot H_S(z^{-1}) , \tag{5}$$

[1] The complex variable z^{-1} will be used for characterizing the system's behavior in the frequency domain and the delay operator q^{-1} will be used for describing the system's behavior in the time domain.

where H_R and H_S are pre-specified parts of the controller (used for example to incorporate the internal model of a disturbance or to open the loop at certain frequencies).

We define the following sensitivity functions:

- Output sensitivity function (the transfer function between the disturbance $p_1(t)$ and the output of the system $y(t)$):

$$S_{yp}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{P(z^{-1})} ; \tag{6}$$

- Input sensitivity function (the transfer function between the disturbance $p_1(t)$ and the input of the system $u(t)$):

$$S_{up}(z^{-1}) = -\frac{A(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})} , \tag{7}$$

where

$$\begin{aligned} P(z^{-1}) &= A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1}) \\ &= A(z^{-1})S'(z^{-1}) \cdot H_S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R'(z^{-1}) \cdot H_R(z^{-1}) \end{aligned} \tag{8}$$

defines the poles of the closed loop (roots of $P(z^{-1})$). In pole placement design, $P(z^{-1})$ is the polynomial specifying the desired closed loop poles and the controller polynomials $R(z^{-1})$ and $S(z^{-1})$ are minimal degree solutions of (8) where the degrees of P, R and S are given by: $n_P \leq n_A + n_B + d - 1$, $n_S = n_B + d - 1$ and $n_R = n_A - 1$. Using the equations (2) and (3), one can write the output of the system as:

$$y(t) = \frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot p_1(t) = S_{yp}(q^{-1}) \cdot p_1(t) . \tag{9}$$

For more details on RS-type controllers and sensitivity functions see Landau and Zito [2005].

Suppose that $p(t)$ is a deterministic disturbance, so it can be written as

$$p(t) = \frac{N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) , \tag{10}$$

where $\delta(t)$ is a Dirac impulse and $N_p(z^{-1})$, $D_p(z^{-1})$ are coprime polynomials in z^{-1}, of degrees n_{N_p} and n_{D_p}, respectively. In the case of stationary disturbances the roots of $D_p(z^{-1})$ are on the unit circle. The energy of the disturbance is essentially represented by D_p. The contribution of the terms of N_p is weak compared to the effect of D_p, so one can neglect the effect of N_p.

Internal Model Principle: *The effect of the disturbance given in (10) upon the output:*

$$y(t) = \frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \frac{N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) , \tag{11}$$

where $D_p(z^{-1})$ is a polynomial with roots on the unit circle and $P(z^{-1})$ is an asymptotically stable polynomial, converges asymptotically towards zero if and only if the polynomial $S(z^{-1})$ in the RS controller has the form:

$$S(z^{-1}) = D_p(z^{-1})S'(z^{-1}) . \tag{12}$$

In other terms, the pre-specified part of $S(z^{-1})$ should be chosen as $H_S(z^{-1}) = D_p(z^{-1})$ and the controller is computed using (8), where P, D_p, A, B, H_R and d are given [2] .

Using the Youla-Kucera parametrization (Q-parametrization) of all stable controllers (Anderson [1998], Tsypkin [1997]), the controller polynomials $R(z^{-1})$ and $S(z^{-1})$ get the form:

[2] Of course it is assumed that D_p and B do not have common factors.

$$R(z^{-1}) = R_0(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1}) \; ; \tag{13}$$

$$S(z^{-1}) = S_0(z^{-1}) - z^{-d}B(z^{-1})Q(z^{-1}) \; . \tag{14}$$

The (central) controller (R_0, S_0) can be computed by poles placement (but any other design technique can be used). Given the plant model (A, B, d) and the desired closed-loop poles specified by the roots of P one has to solve:

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S_0(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R_0(z^{-1}) \; . \tag{15}$$

Equations (13) and (14) characterize the set of all stabilizable controllers assigning the closed loop poles as defined by $P(z^{-1})$ (it can be verified by simple calculations that the poles of the closed loop remain unchanged). For the purpose of this paper $Q(z^{-1})$ is considered to be a polynomial of the form:

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_{n_Q} z^{-n_Q} \; . \tag{16}$$

To compute $Q(z^{-1})$ in order that the polynomial $S(z^{-1})$ given (14) by incorporates the internal model of the disturbance one has to solve the diophantine equation:

$$S'(z^{-1})D_p(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})Q(z^{-1}) = S_0(z^{-1}) \; , \tag{17}$$

where $D_p(z^{-1})$, d, $B(z^{-1})$ and $S_0(z^{-1})$ are known and $S'(z^{-1})$ and $Q(z^{-1})$ are unknown. Equation (17) has a unique solution for $S'(z^{-1})$ et $Q(z^{-1})$ with: $n_{S_0} \leq n_{D_p} + n_B + d - 1$, $n_{S'} = n_B + d - 1$, $n_Q = n_{D_p} - 1$. One sees that the order n_Q of the polynomial Q depends upon the structure of the disturbance model.

3. DIRECT ADAPTIVE CONTROL FOR MULTIPLE NARROW BAND DISTURBANCES ATTENUATION

The objective is to find an estimation algorithm which will directly estimate the parameters of the internal model in the controller in the presence of an unknown disturbance (but of known structure) without modifying the closed loop poles. Clearly, the Q-parametrization is a potential option since modifications of the Q polynomial will not affect the closed loop poles. In order to build an estimation algorithm it is necessary to define an *error equation* which will reflect the difference between the optimal Q polynomial and its current value.

In Tsypkin [1997], such an error equation is provided and it can be used for developing a direct adaptive control scheme. This idea has been used in Valentinotti [2001], Amara et al. [1999a,b], Landau et al. [2005].

Using the Q-parametrization, the output of the system in the presence of a disturbance can be expressed as:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A(q^{-1})[S_0(q^{-1}) - q^{-d}B(q^{-1})Q(q^{-1})]}{P(q^{-1})} \cdot \frac{N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) \\ &= \frac{S_0(q^{-1}) - q^{-d}B(q^{-1})Q(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \; , \end{aligned} \tag{18}$$

where w(t) is given by (see also figure 1):

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{A(q^{-1})N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) \\ &= A(q^{-1}) \cdot y(t) - q^{-d} \cdot B(q^{-1}) \cdot u(t) \; . \end{aligned} \tag{19}$$

In the time domain, the internal model principle can be interpreted as finding Q such that asymptotically $y(t)$ becomes zero. Assume that one has an estimation of $Q(q^{-1})$ at instant t, denoted $\hat{Q}(t, q^{-1})$. Define $\varepsilon^0(t+1)$ as the value of $y(t+1)$ obtained with $\hat{Q}(t, q^{-1})$. Using (18) one gets:

$$\varepsilon^0(t+1) = \frac{S_0(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t+1) - \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \hat{Q}(t, q^{-1}) \cdot w(t) \; . \tag{20}$$

One can define now the *a posteriori* error (using $\hat{Q}(t+1, q^{-1})$) as:

$$\varepsilon(t+1) = \frac{S_0(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t+1) - \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \hat{Q}(t+1, q^{-1}) \cdot w(t) \; . \tag{21}$$

Replacing $S_0(q^{-1})$ from the last equation by (17) one obtains

$$\varepsilon(t+1) = [Q(q^{-1}) - \hat{Q}(t+1, q^{-1})] \cdot \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) + v(t+1) \; , \tag{22}$$

where

$$v(t) = \frac{S'(q^{-1})D_p(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) = \frac{S'(q^{-1})A(q^{-1})N_p(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \delta(t)$$

is a signal which tends asymptotically towards zero.

Define the estimated polynomial $\hat{Q}(t, q^{-1})$ as: $\hat{Q}(t, q^{-1}) = \hat{q}_0(t) + \hat{q}_1(t)q^{-1} + \ldots + \hat{q}_{n_Q}(t)q^{-n_Q}$
and the associated estimated parameter vector :
$\hat{\theta}(t) = [\hat{q}_0(t)\, \hat{q}_1(t) \ldots \hat{q}_{n_Q}(t)]^T$.
Define the fixed parameter vector corresponding to the optimal value of the polynomial Q as: $\theta = [q_0\, q_1 \ldots q_{n_Q}]^T$.
Denote:

$$w_2(t) = \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \tag{23}$$

and define the following observation vector:

$$\phi^T(t) = [w_2(t) \quad w_2(t-1) \ldots w_2(t-n_Q)] \; . \tag{24}$$

Equation (22) becomes

$$\varepsilon(t+1) = [\theta^T - \hat{\theta}^T(t+1)] \cdot \phi(t) + v(t+1) \; . \tag{25}$$

One can remark that $\varepsilon(t)$ corresponds to an adaptation error (Landau et al. [1997]).

From equation (20) one obtains the *a priori* adaptation error:

$$\varepsilon^0(t+1) = w_1(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t) \; ,$$

with

$$w_1(t+1) = \frac{S_0(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t+1) \; ; \tag{26}$$

$$w_2(t) = \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \; ; \tag{27}$$

$$w(t+1) = A(q^{-1}) \cdot y(t+1) - q^{-d}B^*(q^{-1}) \cdot u(t) \; , \tag{28}$$

where $B(q^{-1})u(t+1) = B^*(q^{-1})u(t)$.

The *a posteriori* adaptation error is obtained from (21):

$$\varepsilon(t+1) = w_1(t+1) - \hat{\theta}^T(t+1)\phi(t) \; .$$

For the estimation of the parameters of $\hat{Q}(t, q^{-1})$ the following parameter adaptation algorithm is used (Landau et al. [1997]):

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)\varepsilon(t+1)\ ; \tag{29}$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^0(t+1)}{1+\phi^T(t)F(t)\phi(t)}\ ; \tag{30}$$

$$\varepsilon^0(t+1) = w_1(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t)\ ; \tag{31}$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)}\left[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi^T(t)F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{C)} + \phi^T(t)F(t)\phi(t)}\right]\ . \tag{32}$$

$$1 \geq \lambda_1(t) > 0; 0 \leq \lambda_2(t) < 2 \tag{33}$$

where $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ allow to obtain various profiles for the evolution of the adaption gain $F(t)$ (for details see Landau et al. [1997], Landau and Zito [2005]).

In order to implement this methodology for disturbance rejection (see figure 1), it is supposed that the plant model $\frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ is known (identified) and that it exists a controller $[R_0(z^{-1}), S_0(z^{-1})]$ which verifies the desired specifications in the absence of the disturbance. One also supposes that the degree n_Q of the polynomial $Q(z^{-1})$ is fixed, $n_Q = n_{D_p} - 1$, i.e. the structure of the disturbance is known.

In the *adaptive* operation one uses in general an adaptation gain updating with variable forgetting factor $\lambda(t)$ (the forgetting factor tends towards 1), combined with a *constant trace* adaption gain. The equation for updating the variable forgetting factor is :

$$\lambda_1(t) = \lambda_0.\lambda_1(t-1) + (1-\lambda_0) \tag{34}$$

with $\lambda_1(0) = \lambda_0 = 0.95$ to 0.99

Once the trace of the adaptation gain is below a given value, one switches to the constant trace gain updating. The trace of the adaptation gain $F(t)$ is maintained constant by modifying appropriately $\lambda_1(t)$ for a fixed ratio $\alpha(t) = \lambda_1(t)/\lambda_2(t)$. The corresponding formula is:

$$trF(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} tr[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\alpha(t) + \phi(t)^T F(t)\phi(t)}] = trF(t) \tag{35}$$

where $\alpha(t) = \lambda_1(t)/\lambda_2(t)$ is kept constant.

For details see Landau and Zito [2005], Landau et al. [1997]

4. SIMULATION RESULTS

The structure of the system used in this paper is presented in Landau et al. [2009, 2010]. The performance of the system in simulation for rejecting multiple unknown time varying narrow band disturbances will be illustrated using the direct adaptive regulation scheme. The control performance specifications can be found in Landau et al. [2009, 2010].
The results presented in this section were obtained with the simulator given in the benchmark website (Landau et al. [2009])

4.1 Level 1: Rejection of a single time varying sinusoidal disturbance within 45 and 105 Hz

The magnitude of the disturbance is in all the cases : $Amp = 0.1$V.

Time domain results for the step applications of the disturbance (from 45Hz to 105Hz "every 5Hz") are summarized in table 1.

	Minimum value (disturbance freq.)	Maximum value (disturbance freq.)
Transient duration	128ms (45Hz)	277ms (70Hz)
Transient norm^2	$3.56 \cdot 10^{-1}$ (45Hz)	$8.35 \cdot 10^{0}$ (105Hz)
Transient maximum	$1.21 \cdot 10^{-1}$V (45Hz)	$7.72 \cdot 10^{-1}$V (105Hz)
Global attenuation	42.47dB (45Hz)	75.49dB (100Hz)

Table 1. Time domain results (1 sinusoid)

Transient duration has been evaluated by specific protocol defined for the benchmark evaluation (line 2).
The transient duration is less than $0.3sec$ in the worst case.
The transient has been also evaluated in term of the square of its norm by computing the sum of the squares of the residual acceleration over $3sec$ (line 3).

$$Norm^2 = \sum_{k=1}^{n} y^2(k) \tag{36}$$

For this case ($Fs = 800Hz$):

$$n = 3 \times 800 = 2400pts \tag{37}$$

The maximum of the residual acceleration during transient is given in line 4.
Line 5 gives the global attenuation of the disturbance with respect to the open loop, over $3sec$ after convergence of the adaptation (in this case between 12 and 15sec). The formula used is:

$$Global - attenuation = 20\log\frac{var(y_{ol})}{var(y_{cl})} \tag{38}$$

where y_{ol} and y_{cl} are the output in open loop respectively in closed loop.

All the specifications in the time domain are achieved.
Performances in the frequency domain are presented in table 2.

Line 2 gives the attenuation at the frequency of the disturbance with respect to the open loop (Open loop - closed loop). It is clear that the attenuation is greater than the 45dB required in the benchmark specifications.
Line 3 gives the maximum value of the PSD in closed loop with respect to the open loop. The corresponding frequency is given on line 4. Except for 65 and 70 Hz the benchmark specifications (max 6dB) are not achieved
Figure 2 illustrates the numerical results with the PSD estimate for the case of $60Hz$.

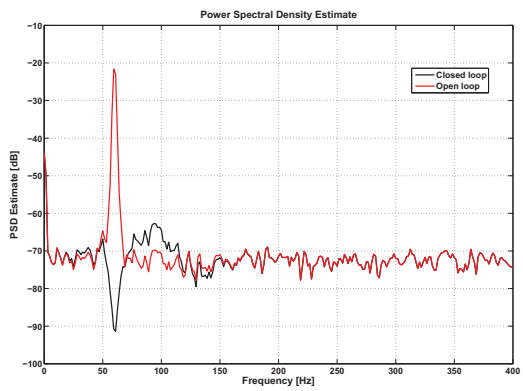


Fig. 2. Spectral densities in open and closed loop (60Hz)

Table 3 gives the time domain performances for step changes in frequencies around three central frequencies ($55Hz$, $75Hz$, $95Hz$).

Disturbance frequency	45Hz	50Hz	55Hz	60Hz	65Hz	70Hz	75Hz	80Hz	85Hz	90Hz	95Hz	100Hz	105Hz
PSD Attenuation	66dB	58dB	65dB	69dB	73dB	77dB	76dB	77dB	75dB	78dB	81dB	89dB	89dB
Maximum Amplification (CL-OL)	7dB	7.5dB	7dB	7dB	5dB	6dB	8dB	10dB	10dB	12dB	13dB	11dB	12dB
Frequency of the Max	76Hz	84Hz	94Hz	95Hz	95Hz	95Hz	59Hz	57Hz	60Hz	60Hz	60Hz	76Hz	76Hz

Table 2. Frequency domain results

The sequences are :
55Hz → 65Hz → 55Hz → 45Hz → 55Hz
75Hz → 85Hz → 75Hz → 65Hz → 75Hz
95Hz → 105Hz → 95Hz → 85Hz → 95Hz

55Hz → 65Hz → 55Hz → 45Hz → 55Hz

	Minimum value (disturbance freq)	Maximum value (disturbance freq)
Transient duration	153ms ($55Hz \rightarrow 65Hz$)	1.06s ($55Hz \rightarrow 45Hz$)
Transient norm^2	$3.99 \cdot 10^{-1}$ ($65Hz \rightarrow 55Hz$)	$6.81 \cdot 10^{0}$ ($45Hz \rightarrow 55Hz$)
Transient maximum	$1.09 \cdot 10^{-1}$V ($55Hz \rightarrow 45Hz$)	$1.73 \cdot 10^{-1}$V ($55Hz \rightarrow 65Hz$)

75Hz → 85Hz → 75Hz → 65Hz →75Hz

	Minimum value (disturbance freq)	Maximum value (disturbance freq)
Transient duration	95ms (65Hz →75Hz)	295ms (00 → 75Hz)
Transient norm^2	$3.55 \cdot 10^{-1}$ (75Hz → 65Hz)	$4.48 \cdot 10^{0}$ (00 → 75Hz)
Transient maximum	$1.69 \cdot 10^{-1}$V (75Hz → 65Hz)	$5.70 \cdot 10^{-1}$V (00 → 75Hz)

95Hz → 105Hz → 95Hz → 85Hz → 95Hz

	Minimum value (disturbance freq)	Maximum value (disturbance freq)
Transient duration	127ms (85Hz → 95Hz)	282ms (00 → 95Hz)
Transient norm^2	$1.14 \cdot 10^{0}$ (95Hz → 85Hz)	$9.81 \cdot 10^{0}$ (85Hz → 95Hz)
Transient maximum	$2.40 \cdot 10^{-1}$V (85Hz → 95Hz)	$7.60 \cdot 10^{-1}$V (00 → 95Hz)

Table 3. Step freq. changes results (1 sinusoid)

Every disturbance is applied during $3sec$.
The signification of the various lines is similar with table 1.
The benchmark specifications are achieved.
Figure 3 illustrates the results obtained.

Tables 4 gives the results for a chirp type evolution of the disturbances between 2 frequencies.

The sequence used for the chirp tests is : Application of the first disturbance during $5sec$ (1st frequency) at $t = 5sec$. Application of a chirp between the first and the final frequency during $5sec$. Application of the final disturbance during $5sec$ (2nd frequency), then return with a chirp to the first disturbance.

The transient has been evaluated in term of its norm by computing the sum of the squares of the residual force during the chirp over $5sec$ (line 2). The maximum of the residual acceleration during the chirp is given in line 3.
Figure 4 illustrates the behavior of the residual force in closed loop operation in the presence of chirp type disturbance. One note the ability to follow the changes in frequency at a rate higher than 10Hz/s.

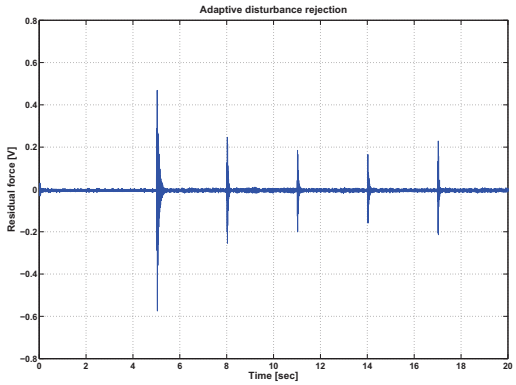


Fig. 3. Adaptive rejection of a sinusoidal disturbance (75Hz→85Hz→75Hz→65Hz→75Hz)

Disturbance frequency	60→90Hz	50→100Hz	45→105Hz
Transient norm^2	$1.95 \cdot 10^{-1}$	$4.83 \cdot 10^{-1}$	$9.17 \cdot 10^{-1}$
Maximum value	$2.47 \cdot 10^{-2}$	$4.34 \cdot 10^{-2}$	$5.91 \cdot 10^{-2}$
Disturbance frequency	90→60Hz	100→50Hz	105→45Hz
Transient norm^2	$1.84 \cdot 10^{-1}$	$4.20 \cdot 10^{-1}$	$6.99 \cdot 10^{-1}$
Maximum value	$2.26 \cdot 10^{-2}$	$3.32 \cdot 10^{-2}$	$4.49 \cdot 10^{-2}$

Table 4. Chirp results

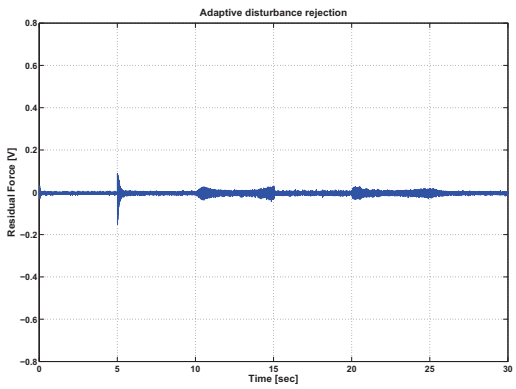


Fig. 4. Simulation results with a chirp disturbance (50Hz → 100Hz)

4.2 Level 2: Rejection of two time varying sinusoidal disturbance within 45 and 105 Hz

The magnitude of the disturbance is in all the cases equal to 0.1 for each sinusoid : $Amp = (0.1 + 0.1)$V.

Time domain results for the step applications of the disturbance (in the range: [45-75]Hz to [75-105]Hz every 5Hz) are summarized in table 5.

	Minimum value (disturbance freq.)	Maximum value (disturbance freq.)
Transient duration	147ms (65-95Hz)	1.35s (50-80Hz)
Transient norm^2	$4.61 \cdot 10^0$ (50-80Hz)	$1.95 \cdot 10^1$ (75-105Hz)
Transient maximum	$7.31 \cdot 10^{-1}$V (45-75Hz)	$1.16 \cdot 10^0$V (70-100Hz)
Global attenuation	56.96dB (45-75Hz)	77.32dB (65-95Hz)

Table 5. Time domain results (2 sinusoid)

The signification of the various lines is similar with table 1. The maximum transient duration is less than 0.78sec for all the cases except for the second sequence ([50-80]Hz) but in all the cases the benchmark specifications are achieved.
In the line 5, the values of the global attenuation are very large, which assures us that the rejection is good.

Performance in the frequency domain are summarized in table 6, according to the benchmark specifications.

The signification of the different lines is similar with table 2. The attenuation of the disturbances is greater than 45dB required in the benchmark specifications for each sinusoid.
The maximum amplification is however above the specifications (max 6dB) except for [50-80] Hz and [55-85] Hz.

Figures 5 illustrates the numerical results with the PSD estimate for the case of $[60-90]Hz$.

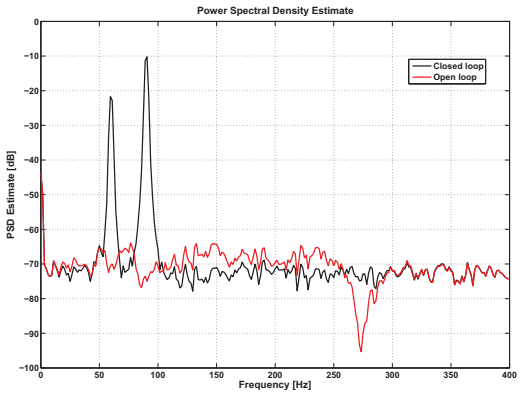


Fig. 5. Spectral densities in open and closed loop ([60-90]Hz)

Table 7 gives the time domain performances for step changes in frequencies around two central couple of frequencies ([50 – 80]Hz, [65 – 95]Hz).
The sequences are :
[50-80]Hz → [55-85]Hz → [50-80]Hz → [45-75]Hz → [50-80]Hz
[65-95]Hz → [70-100]Hz → [65-95]Hz → [60-90]Hz → [65-95]Hz
Every disturbance is applied during 3sec.

[50-80]Hz → [55-85]Hz → [50-80]Hz → [45-75]Hz → [50-80]Hz		
	Minimum value (disturbance freq)	Maximum value (disturbance freq)
Transient duration	1.32s ([50-80]→[55-85]Hz)	>3s ([55-85]→[50-80]Hz)
Transient norm^2	$2.36 \cdot 10^0$ ([55-85]→[50-80]Hz)	$4.96 \cdot 10^0$ ([50-80]→[45-75]Hz)
Transient maximum	$1.73 \cdot 10^{-1}$V ([50-80]→[45-75]Hz)	$8.39 \cdot 10^{-1}$V (00→[50-80]Hz)
[65-95]Hz → [70-100]Hz → [65-95]Hz → [60-90]Hz → [65-95]Hz		
	Minimum value (disturbance freq)	Maximum value (disturbance freq)
Transient duration	161ms ([65-95]→[70-100]Hz)	278ms ([65-95]→[60-90]Hz)
Transient norm^2	$1.00 \cdot 10^0$ ([70-100]→[65-95]Hz)	$2.08 \cdot 10^1$ (00→[65-95]Hz)
Transient maximum	$2.44 \cdot 10^{-1}$V ([65-95]→[60-90]Hz)	$1.27 \cdot 10^0$V (00→[65-95]Hz)

Table 7. Step freq. changes results (2 sinusoids)

The transient durations meet the benchmark specifications (2s) except for the case of [45-75] and [50-80]Hz ($\simeq$ 3s). The results are illustrated by figures 6

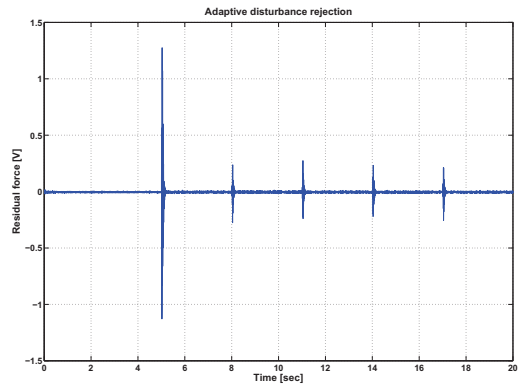


Fig. 6. Adaptive rejection of two sinusoidal disturbance ([65-95]Hz → [70-100]Hz → [65-95]Hz → [60-90]Hz → [65-95]Hz)

Table 8 gives the results for a chirp type evolution of the disturbances between two sequences of frequencies. Variations in frequency with a rate of 6Hz/s can be followed.
The protocol and the signification of the different lines are the

Disturbance frequency	[50-80]→ [70-100]Hz	[70-100]→ [50-80]Hz	[45-75]→ [75-105]Hz	[75-105]→ [45-75]Hz
Transient norm^2	$8.17 \cdot 10^{-1}$	$4.46 \cdot 10^{-1}$	$1.45 \cdot 10^0$	$1.42 \cdot 10^0$
Maximum value	$7.16 \cdot 10^{-2}$	$4.49 \cdot 10^{-2}$	$6.55 \cdot 10^{-2}$	$8.08 \cdot 10^{-2}$

Table 8. Time domain results - Chirp change in the frequencies (2 sinusoids)

same as for the first level.
Figure 7 illustrates the numerical results of table 8.

4.3 Level 3: Rejection of three time varying sinusoidal disturbance within 45 and 105 Hz

The magnitude of the disturbance is in all the cases equal to 0.1 for each sinusoid : $Amp = (0.1 + 0.1 + 0.1)$V.

Time domain results for the step applications of the disturbance (in the range: [45-65-85]Hz to [65-85-105]Hz every 5Hz) are

Disturbance frequency	45-75Hz	50-80Hz	55-85Hz	60-90Hz	65-95Hz	70-100Hz	75-105Hz
PSD Attenuation	$57-68dB$	$55-73dB$	$48-68dB$	$49-65dB$	$46-71dB$	$46-70dB$	$48-72dB$
Maximum Amplification (CL-OL)	$7dB$	$6dB$	$6dB$	$7dB$	$8dB$	$13dB$	$18dB$
Frequency of the Max	$95Hz$	$114Hz$	$123Hz$	$148Hz$	$76Hz$	$59Hz$	$56Hz$

Table 6. Frequency domain results (rejection of 2 sinusoids)

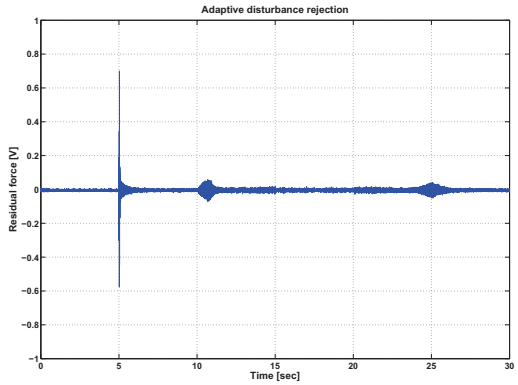


Fig. 7. Simulation results with a chirp disturbance ([50-80]→ [70-100]Hz)

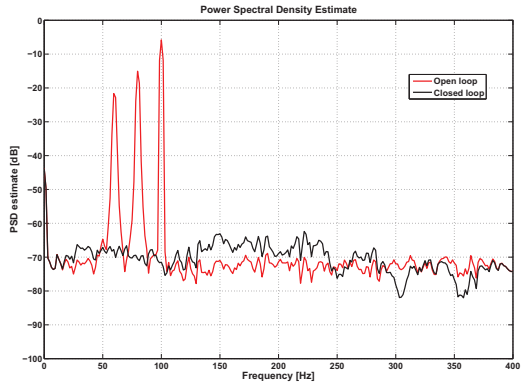


Fig. 8. Spectral densities in open and closed loop ([60-80-100]Hz)

presented in table 9.
The signification of the various lines is similar with table 1.

	Minimum value (disturbance freq.)	Maximum value (disturbance freq.)
Transient duration	151ms (65-85-105Hz)	9.65s (45-65-85Hz)
Transient norm^2	$3.13 \cdot 10^1$ (50-70-90Hz)	$4.84 \cdot 10^1$ (65-85-105Hz)
Transient maximum	$1.54 \cdot 10^0$V (45-65-85Hz)	$2.24 \cdot 10^0$V (65-85-105Hz)
Global attenuation	64.40dB (45-65-85Hz)	77.01dB (60-80-100Hz)

Table 9. Time domain results (3 sinusoid)

As it can be shown in table 9, the transient duration is greater than $2sec$ required in the benchmark specification for two cases ([45-65-85]Hz and [50-70-90]).
In the line 5, the values of the global attenuation are very high, which assures us that the rejection is good.

Performance in the frequency domain are presented in table 10. The signification of the different lines is similar with table 2.
The attenuation of the disturbances is greater than 40dB required in the benchmark specifications for each sinusoid. The benchmark specifications are achieved except for the residual amplification (max 9dB) for the case of simultaneous application of 45-65-85 Hz disturbance.

Figure 8 presents the numerical results with the PSD estimate for the case of $[60-80-100]Hz$.

Table 11 gives the time domain performances for step changes in frequencies around two central group of frequencies ($[50-70-90]$Hz, $[65-85-105]$Hz).
The sequences are :
[50-70-90]Hz → [55-75-95]Hz → [50-70-90]Hz → [45-65-85]Hz → [50-70-90]Hz
[65-85-100]Hz → [70-90-105]Hz → [65-85-100]Hz → [60-80-95]Hz → [65-85-100]Hz
Every disturbance is applied during $3sec$.

[50-70-90]→[55-75-95]→[50-70-90]→[45-65-85]→[50-70-90]Hz

	Minimum value (disturbance freq)	Maximum value (disturbance freq)
Transient duration	1.69s [50-70-90]→[55-75-95]Hz	>3s 00→[50-70-90]Hz
Transient norm^2	$4.29 \cdot 10^0$ [45-65-85]→[50-70-90]Hz	$3.13 \cdot 10^1$ 00→[50-70-90]Hz
Transient maximum	$2.32 \cdot 10^{-1}$V [50-70-90]→[45-65-85]Hz	$1.76 \cdot 10^0$V 00→[50-70-90]Hz

[65-85-100]→[70-90-105]→[65-85-100]→[60-80-95]→[65-85-100]Hz

	Minimum value (disturbance freq)	Maximum value (disturbance freq)
Transient duration	238ms [65-85-100]→[70-90-105]Hz	747ms [65-85-105]→[60-80-100]Hz
Transient norm^2	$2.00 \cdot 10^0$ [70-90-105]→[65-85-100]Hz	$5.31 \cdot 10^1$ 00→[65-85-100]Hz
Transient maximum	$3.16 \cdot 10^{-1}$V [65-85-100]→[60-80-95]Hz	$2.19 \cdot 10^0$V 00→[65-85-100]Hz

Table 11. Step frequency changes results (3 sinusoids)

The transient duration is above 3 seconds for the [45-65-85] and [50-70-90]Hz cases.
Figure 9 illustrates the results obtained for simultaneously step changes of three frequencies.

Table 12 gives the results for a chirp type evolution of the disturbances between two group of frequencies.
Variations in frequency with a rate of 4Hz/s can be followed.
The protocol and the signification of the different lines are the same as for the first level.

The evolution of the residual force for the case of simultaneous application of three chirps is illustrated in Figure12.

Disturbance frequency	45-65-85Hz	50-70-90Hz	55-75-95Hz	60-80-100Hz	65-85-105Hz
PSD Attenuation	$55-62-68dB$	$49-67-77dB$	$52-58-72dB$	$49-55-66dB$	$44-54-68dB$
Maximum Amplification (CL-OL)	$12.5dB$	$9dB$	$9dB$	$8dB$	$7dB$
Frequency of the Max	$111Hz$	$137Hz$	$146Hz$	$146Hz$	$37.5Hz$

Table 10. Frequency domain results (rejection of 3 sinusoids)

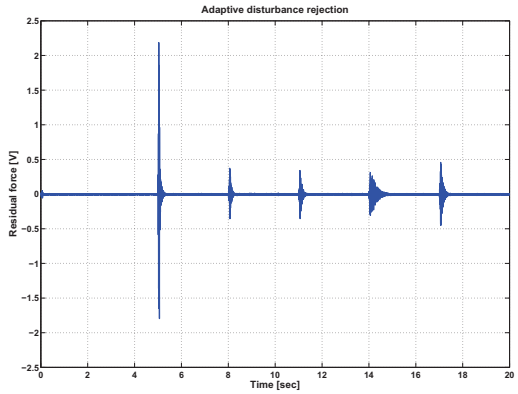


Fig. 9. Adaptive rejection of three sinusoidal disturbance ([65-85-100]Hz → [70-90-105]Hz → [65-85-100]Hz → [60-80-95]Hz → [65-85-100]Hz)

Disturbance frequency	[45-65-85]→ [65-85-105]Hz	[65-85-105]→ [45-65-85]Hz	[60-80-95]→ [70-90-105]Hz	[70-90-105]→ [60-80-95]Hz
Transient norm^2	$1.88 \cdot 10^1$	$1.55 \cdot 10^1$	$1.05 \cdot 10^0$	$9.67 \cdot 10^{-1}$
Maximum value	$1.83 \cdot 10^{-1}$	$1.96 \cdot 10^{-1}$	$5.31 \cdot 10^{-2}$	$4.99 \cdot 10^{-2}$

Table 12. Time domain results - Chirp change in the frequencies (3sinusoids)

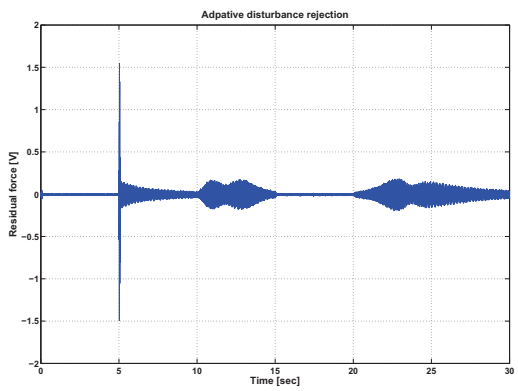


Fig. 10. Simulation results with a chirp disturbance ([45-65-85]→ [65-85-105]Hz)

5. SOME EXPERIMENTAL RESULTS

The performance of the system in real time for rejecting a single unknown time varying narrow band disturbance (*level1*) will be illustrated in this section.
The magnitude of the disturbance is in all the cases : $Amp =$ 0.1V.
As in simulation, time domain results for the step applications of the disturbance (from 45Hz to 105Hz "every 5Hz") are summarized in table 13.
The signification of the various lines is similar with table 1.

	Minimum value (disturbance freq.)	Maximum value (disturbance freq.)
Transient duration	40ms (105Hz)	353ms (55Hz)
Transient norm^2	$2.67 \cdot 10^{-1}$ (80Hz)	$2.51 \cdot 10^0$ (105Hz)
Transient maximum	$1.02 \cdot 10^{-1}$V (60Hz)	$3.52 \cdot 10^{-1}$V (90Hz)
Global attenuation	31.50dB (45Hz)	71.34dB (100Hz)

Table 13. Time domain results obtained in real time (1 sinusoid)

It is clear that the convergence of the output requires less than $0.35sec$ in the worst case.
All the specifications in the time domain are achieved.
Table 14 gives the time domain performances for step changes in frequencies around three central frequencies ($55Hz$, $75Hz$, $95Hz$).
Every disturbance is applied during $3sec$.

55Hz → 65Hz → 55Hz → 45Hz → 55Hz		
	Minimum value (disturbance freq)	Maximum value (disturbance freq)
Transient duration	232ms ($55Hz \rightarrow 65Hz$)	2.96s ($55Hz \rightarrow 45Hz$)
Transient norm^2	$6.44 \cdot 10^{-1}$ ($65Hz \rightarrow 55Hz$)	$1.27 \cdot 10^0$ ($55Hz \rightarrow 45Hz$)
Transient maximum	$9.34 \cdot 10^{-2}$V ($55Hz \rightarrow 45Hz$)	$1.41 \cdot 10^{-1}$V ($55Hz \rightarrow 65Hz$)
75Hz → 85Hz → 75Hz → 65Hz →75Hz		
	Minimum value (disturbance freq)	Maximum value (disturbance freq)
Transient duration	122ms (65Hz →75Hz)	193ms (75 → 65Hz)
Transient norm^2	$4.18 \cdot 10^{-1}$ (85Hz → 75Hz)	$6.30 \cdot 10^{-1}$ (00 → 75Hz)
Transient maximum	$1.27 \cdot 10^{-1}$V (75Hz → 65Hz)	$1.91 \cdot 10^{-1}$V (00 → 75Hz)
95Hz → 105Hz → 95Hz → 85Hz → 95Hz		
	Minimum value (disturbance freq)	Maximum value (disturbance freq)
Transient duration	98ms (95Hz → 85Hz)	>3s (95 → 105Hz)
Transient norm^2	$8.28 \cdot 10^{-1}$ (85Hz → 95Hz)	$23.24 \cdot 10^0$ (95Hz → 105Hz)
Transient maximum	$1.86 \cdot 10^{-1}$V (85Hz → 95Hz)	$4.65 \cdot 10^{-1}$V (105 → 95Hz)

Table 14. Step freq. changes results in real time (1 sinusoid)

The signification of the various lines is similar with table 1.

The benchmark specifications are achieved except for the case of 105Hz.
Figure 11 illustrates the real time obtained results.

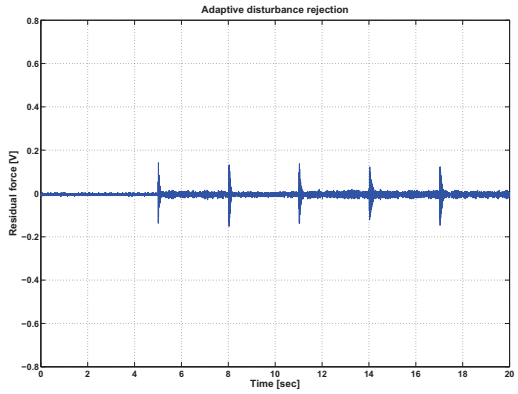


Fig. 11. Adaptive rejection of a sinusoidal disturbance (75Hz→85Hz→75Hz→65Hz→75Hz)

Tables 15 gives the results for a chirp type evolution of the disturbances between 2 frequencies.

Disturbance frequency	60→90Hz	50→100Hz	90→60Hz	100→50Hz
Transient norm^2	$3.86 \cdot 10^{-1}$	$8.73 \cdot 10^{-1}$	$3.68 \cdot 10^{-1}$	$1.02 \cdot 10^{0}$
Maximum value	$3.43 \cdot 10^{-2}$	$5.39 \cdot 10^{-2}$	$2.94 \cdot 10^{-2}$	$8.33 \cdot 10^{-2}$

Table 15. Chirp results in real time

The protocol and the signification of the different lines are the same as for the simulation first level.
Figure 12 illustrates the behavior of the residual force in closed loop operation in the presence of chirp type disturbance. Like in simulation, one can note the ability to follow the changes in frequency at a rate of 10Hz/s.

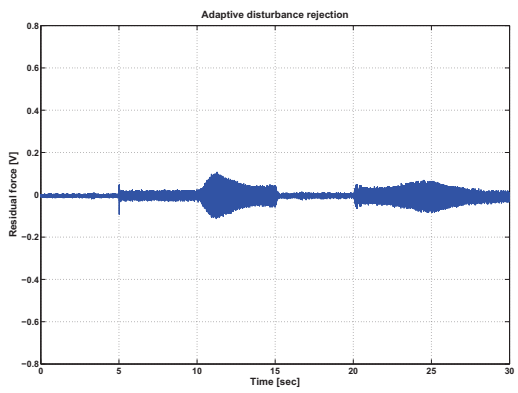


Fig. 12. Real time results with a chirp disturbance (50Hz → 100Hz)

6. CONCLUSIONS

Most of the mandatory benchmark specifications have been achieved and the global performances are very good. Further improvement of some design choices should allow to approach the mandatory values. Some difficulties occur at the border of the domain of (45to55 Hz and 95 to 105 Hz).

Preliminary experimental results show relatively close results to those obtained in simulation.

REFERENCES

A.Karimi. Design and optimization of restricted complexity controllers - benchmark. http://iawww.epfl.ch/News/EJC_Benchmark/, 2002.

F. Ben Amara, P.T. Kabamba, and A.G. Ulsoy. Adaptive sinusoidal disturbance rejection in linear discrete-time systems - Part I: Theory. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 121:648–654, 1999a.

F. Ben Amara, P.T. Kabamba, and A.G. Ulsoy. Adaptive sinusoidal disturbance rejection in linear discrete-time systems - Part II: Experiments. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 121:655–659, 1999b.

B.D.O. Anderson. From Youla-Kucera to identification, adaptive and nonlinear control. *Automatica*, 34:1485–1506, 1998.

G. Bengtsson. Output regulation and internal models - a frequency domain approach. *Automatica*, 13:333–345, 1977.

A. Constantinescu. *Commande robuste et adaptative d'une suspension active*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, décembre 2001.

B.A . Francis and W.M. Wonham. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 12:457–465, 1976.

I.D. Landau and G. Zito. *Digital Control Systems - Design, Identification and Implementation*. Springer, London, 2005.

I.D. Landau, N. M'Sirdi, and M. M'Saad. Techniques de modélisation récursive pour l'analyse spectrale paramétrique adaptative. *Revue de Traitement du Signal*, 3:183–204, 1986.

I.D. Landau, R. Lozano, and M. M'Saad. *Adaptive control*. Springer, London, 1997.

I.D. Landau, A. Karimi, and A. Constantinescu. Direct controller order reduction by identification in closed loop. *Automatica*, (37):1689–1702, 2001.

I.D. Landau, A. Constantinescu, and D. Rey. Adaptive narrow band disturbance rejection applied to an active suspension - an internal model principle approach. *Automatica*, 41(4): 563–574, 2005.

I.D. Landau, J.J Martinez, M. Alma, G. Buche, and A. Karimi. Benchmark on adaptive regulation: Rejection of unknown/time-varying multiple narrow band disturbances. http://www.lag.ensieg.inpg.fr/jairo/benchmark, 2009.

I.D. Landau, M. Alma, J.J. Martinez, A. Karimi, and G. Buche. An active vibration control system as a benchmark for adaptive regulation (rejection of unknown/time varying multiple narrow band disturbances). *Submitted to IFAC world congress, Milan, Italy*, 2010.

L. Ljung. *System Identification - Theory for the User*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, second edition, 1999.

Y.Z. Tsypkin. Stochastic discrete systems with internal models. *Journal of Automation and Information Sciences*, 29(4&5): 156–161, 1997.

S. Valentinotti. *Adaptive Rejection of Unstable Disturbances: Application to a Fed-Batch Fermentation*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, April 2001.

Annexe C

Design and Tuning of Reduced Order H-infinity Feedforward Compensators for Active Vibration Control

par M. Alma, J.J Martinez, I.D. Landau et G. Buche
publié dans IEEE Transactions on Control Systems Technology (2011)

Design and Tuning of Reduced Order H-infinity Feedforward Compensators for Active Vibration Control

Marouane Alma, John J. Martinez, Ioan D. Landau, Gabriel Buche

***Abstract*— The paper presents a procedure for design and tuning of reduced orders H_∞ feedforward compensators for active vibration control systems subject to wide band disturbances. The procedure takes in account the inherent "positive" feedback coupling between the compensator system and the measurement of the image of the disturbance. It also takes advantage of the availability of reliable models obtained by system identification. A controller order reduction technique is proposed for reducing the complexity of the nominal H_∞ controller without degrading the performance.**
Experimental results obtained on an active vibration control (AVC) system for a flexible mechanical structure will illustrate the procedure.

***Index Terms*— feedforward compensator, H_∞ control, external disturbance rejection, inertial actuators**

I. Introduction

Reduction of the effect of external disturbances is crucial in many mechanical systems (in particular those which features flexibilities). Passive dynamic vibration absorbers [6], [3], [9] can be used but their performance is limited. Therefore Active Vibration Control (AVC) can be used for enhancing rejection of the disturbances. Several situations can be distinguished in practice in terms of the nature of the disturbances :

- narrow band disturbances.
- wide band disturbances.

and in terms of the structure of the AVC :

- feedback structure with measurement of the residual acceleration (or force) [1], [2], [12].
- feedforward compensation structure using an additional transducer for measuring an image of the disturbance (i.e. a measurement correlated with the disturbance)[17].
- combined feedback-feedforward structures [4], [16].

A survey of these situations for ANC systems is presented in [11].

The present paper is dedicated to the design and tuning of feedforward compensators for AVC systems subject to wide band disturbances and equipped with an additional transducer providing a signal highly correlated with the disturbance[1]. While for narrow band disturbances adaptive feedback solutions seems to be very efficient [1], [2], [12], for the case of wide band disturbances, the feedforward compensation is mandatory since attenuation in feedback is limited by the Bode integral ("water bed" effect).

It is important to emphasize that in most of AVC systems, there is an internal "positive" feedback coupling between the compensator system and the measurement of the image of the disturbance [7], [8], [10], [19]. This is clearly illustrated in Figs.1 and 2 representing an AVC system using a measurement correlated with the disturbance (an image of the disturbance) and an inertial actuator for reducing the residual acceleration (see section II). The presence of this inherent "positive" feedback around the compensator filter transforms the original "feedforward compensation problem" in a "feedback" design.

Since a model based design approach will be used, identification of the various transfer function involved is crucial. It is important to remark that in the absence of the feedforward filter it is possible to identify the models of the various paths required for design.

In [17], a H_2 approach for the design of the feedforward compensator has been considered. Close related approaches are considered in [4], [16]. Here, the H_∞ approach is considered since it seems more appropriate for this problem. The H_∞ norm of a LTI system is equal to the maximum energy amplification for all signals of finite energy. For this reason H_∞ control design allows us to express the control problem as a mathematical optimization problem around a particular band of frequencies. In our context, the disturbance is considered as a wide band signal amplified at the output of the system around particular band of frequencies. A careful selection of the weighting functions will be done in order to ensure good performances as well as good robustness.

The resulting H_∞ controller has a large dimension and a controller reduction technique [13] based on the identification in closed loop of a reduced controller will be used (after appropriate modifications required by the "positive" feedback structure). Finally an on site tuning procedure of the reduced controller is proposed using real data.

The paper is organized as follows. In section II, the active vibration control system using an inertial actuator and control problem statement are presented. Section III is dedicated to the parametric identification of the various paths. The design of the proposed feedforward compensator using H_∞ control techniques is presented in section IV. Controller order reduction by identification in closed loop is done in Section V. Section VI presents the results obtained in real-time on the active vibration control system. Some conclusions are given in section VII.

M. Alma, J.J. Martinez, I.D. Landau and G. Buche are with control system department of Gipsa-lab, St martin d'héres, 38402 FRANCE email: ([marouane.alma, john-jairo.martinez-molina, ioan-dore.landau, Gabriel.Buche]@gipsa-lab.grenoble-inp.fr)

[1]It is important to remark, that the problems encountered are similar to those encountered in Active Noise Control (ANC)systems.

II. An active vibration control system using an inertial actuator

A general view of the whole system equipment is shown in Figs. 1 and 2. This structure is a relevant representation of some configurations encountered in practice for the active vibration control. It consists of three mobile metallic plates M1, M2 and M3 ($1.8Kg$ each) connected by springs. These plates are also connected by springs to the rigid part of the system formed by two other metallic plates connected themselves rigidly. The upper and lower mobile plates (M1 and M3) are equipped with inertial actuators (inertial actuators uses a similar principle as loudspeakers). The first on the top serves as disturbance generator (inertial actuator I in Fig. 1), and the second one at the bottom serves for disturbance compensation (inertial actuator II in Fig. 1). It will create vibrational forces which can counteract the effect of the vibrational disturbances .The system is equipped with a measure of the residual acceleration (on plate M3) and a measure of the image of the disturbance made by an accelerometer posed on plate M1. The unknown disturbance is the position of the mobile part of the upper inertial actuator. The control input is the position of the mobile part of the lower inertial actuator.

A. Basic equations and notations

The objective is to compute a feedforward filter $N(q^{-1})$ such that the measured residual acceleration be minimized. The description of the various blocks will be made with respect to figure 3.

The optimal feedforward filter is defined by :

$$N(q^{-1}) = \frac{B_N(q^{-1})}{A_N(q^{-1})} \tag{1}$$

where:

$$\begin{aligned} B_N(q^{-1}) &= b_{n0} + b_{n1}q^{-1} + \cdots + b_{nnB_N}q^{-n_{B_N}} && (2)\\ A_N(q^{-1}) &= 1 + a_{n1}q^{-1} + \cdots + a_{nnA_N}q^{-n_{A_N}} \\ &= 1 + q^{-1}A_N^*(q^{-1}) && (3) \end{aligned}$$

The transfer operator[2] between the measure of the image of the disturbance $d(t)$ (in the absence of the compensator system) and the residual acceleration $v(t)$ called the primary path is given by:

$$D(q^{-1}) = q^{-d_D}\frac{B_D(q^{-1})}{A_D(q^{-1})} \tag{4}$$

The path between the output of the feedforward compensator filter $u(t)$ and the residual acceleration $v(t)$ called the secondary path is described by:

$$G(q^{-1}) = q^{-d_G}\frac{B_G(q^{-1})}{A_G(q^{-1})} \tag{5}$$

The positive feedback coupling is charcaterized by the asymptotically stable transfer operator:

$$M(q^{-1}) = q^{-d_M}\frac{B_M(q^{-1})}{A_M(q^{-1})} \tag{6}$$

This positive coupling occurs when the compensator system is active. The actuator acts upon the residual acceleration, but also upon the measurement of the image of the disturbance. It is a positive feedback because the measured quantity is the sum of the disturbance signal $d(t)$ and of the effect of the actuator. Similar structures occur also in feedforward active noise control ([10], [19]).

The disturbance $s(t)$ is assumed to be an unmeasurable wide band signal. In a stationnary gaussian context, all the signals $s(t)$, $d(t)$ and $v(t)$ can be viewed as being generated by a white noise $e(t)$ passed through a filter. The signal $d(t)$ can be viewed as a signal generated by the white noise $e(t)$

[2]The complex variable z^{-1} will be used for characterizing the system's behavior in the frequency domain and the delay operator q^{-1} will be used for describing the system's behavior in the time domain.

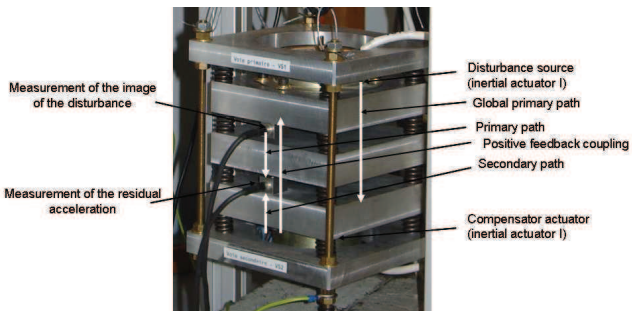


Fig. 1. An AVC system using a feedforward compensation (Photo).

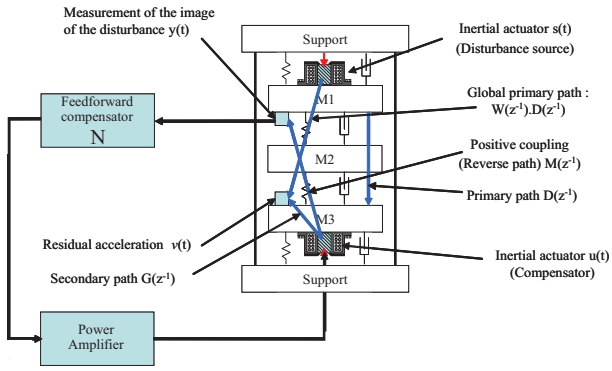


Fig. 2. An AVC system using a feedforward compensation (Diagram).

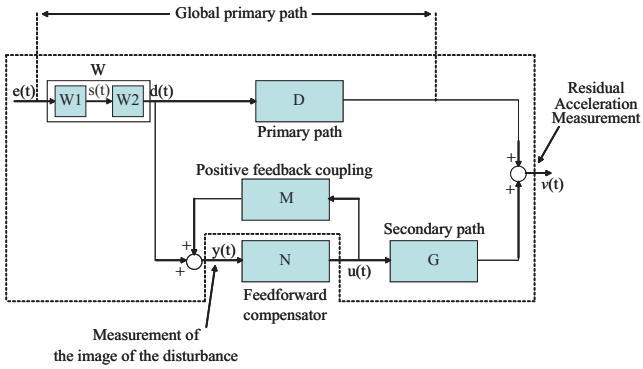


Fig. 3. An AVC system scheme.

filtered by W. This signal is further filtered by D to get the residual acceleration in the absence of the compensator system.
The spectral densities of $d(t)$ and $v(t)$ are assumed to be available and a parametric model for the disturbance $d(t)$ will be identified ($W(q^{-1})$).

The input of $G(q^{-1}), M(q^{-1})$ being a position and the output a force, these transfer functions have a double differentiator behavior.

B. Control problem statement

The control problem is to design a filter $N(q^{-1})$ such that the impact of disturbance $s(t)$ on the output $v(t)$ be attenuated. In addition, the feedforward filter $N(q^{-1})$ has also to guarantee the stability of the internal positive feedback formed by $N(z^{-1})$ and $M(z^{-1})$.

The physical parameters of the system are in general not available. Then, the system has to be considered as a "black box" and the corresponding models (M,G,D) used for control design should be identified, as well as the disturbance model relating the signal $d(t)$. As it will be shown later the different paths in the absence of the disturbances will contain a number of low damped vibration modes as well as low damped complex zeros (anti-resonance). They will be taken into account during the control synthesis.

III. System identification

To be able to design a good feedforward control it is necessary to have the mathematical models of the transfer functions D, G and M. In this paper the models of the different paths of the system will be obtained by parametric system identification techniques as in [15], [13], [5]. In such techniques, time domain data from dedicated experiments are used to determine the parametric models. The system is considered as a "black box".
The mathematical model $W(z^{-1})$ of the measured disturbance $d(t)$ will be obtained by spectral analysis of the open loop data . It is possible to reconstruct the parametric model of $W(z^{-1})$ from the spectrum of $d(t)$ assuming that $e(t)$ is a white noise signal.

The structure of a linear time invariant discrete time model of the different paths of the plant is as in (4), (5) and (6), given by:

$$X(q^{-1}) = q^{-d_X}\frac{B_X(q^{-1})}{A_X(q^{-1})} \tag{7}$$

where d_X stands for the pure time delay of system X in number of sampling periods, and

$$\begin{aligned} A_X(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_{A_X}} z^{-n_{A_X}} \ ; \\ B_X(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_{B_X}} z^{-n_{B_X}} = q^{-1} B_X^*(z^{-1}) \ , \end{aligned}$$

are polynomials in the complex variable z^{-1} and n_{A_X}, n_{B_X} represent their orders. In this application, a sampling frequency of $800Hz$ has been used.

The secondary path $G(z^{-1})$ between control signal $u(t)$ and the output $v(t)$ has been identified in open loop operation. The excitation signal was a PRBS (Pseudo Random Binary Sequence) generated with a shift register with $N = 10$ and a frequency divider of $p = 4$. The estimated order of the model is $n_{B_G} = 15$, $n_{A_G} = 13$, $d_G = 0$. The best results in terms of model validation were obtained with *Recursive Extended Least Square* method (see [15], [14]).
The frequency characteristic of the secondary path $G(z^{-1})$ is shown in Fig. 4 (solid).There exist several very low damped vibration modes. The first vibration mode is at $46.56Hz$ with a damping of 0.013, the second at $83.9Hz$ with a damping of 0.011 and the third one at $116Hz$ has a damping of 0.014. There are two zeros on the unit circle corresponding to a double differentiator behavior and also a pair of low damped complex zeros at $108Hz$ with a damping of 0.021.

The reverse path $M(z^{-1})$ has been identified by the same PRBS excitation ($N = 10$ and a frequency divider of $p = 4$) applied into $u(t)$ and measuring output signal of the primary transducer $y(t)$. The order of the obtained model is $n_{B_M} = 15$, $n_{A_M} = 13$, $d_M = 0$. The best results in term of model validation were also obtained with *Recursive Extended Least Square* method. The frequency characteristic of the reverse path $M(z^{-1})$ is presented in Fig. 4 (dashed). Similarly, there exist several very low damped vibration modes at $46.20Hz$ with a damping of 0.045, at $83.9Hz$ with a damping of 0.01 and at $115Hz$ with a damping of 0.014 plus some modes in high frequencies. There are two zeros on the unit circle corresponding to the double differentiator behavior.

The primary path $D(z^{-1})$ has been identified from the spectrum of the input/output data $d(t)$ and $v(t)$ obtained in open loop. The obtained frequency characteristic of the parametric model is presented in Fig. 5 (dashed) together with the frequency characteristic of the non-parametric model (solid) of $D(z^{-1})$ obtained by spectral density analysis.
Figures 4 and 5 show that the secondary path has a pair of low damped zeros close to the unit circle at $108Hz$, while the primary path has an important resonance peak at this frequency. Therefore, the control will not be able to minimize significantly the disturbance effect at this frequency.

The model of the disturbance $d(t)$, $W(z^{-1})$, has been estimated from the spectrum of the disturbance $d(t)$ (measured in the absence of the compensator system), assuming that it was generated by a white noise passed through a filter. Due to the symmetry of our structure, the filter order

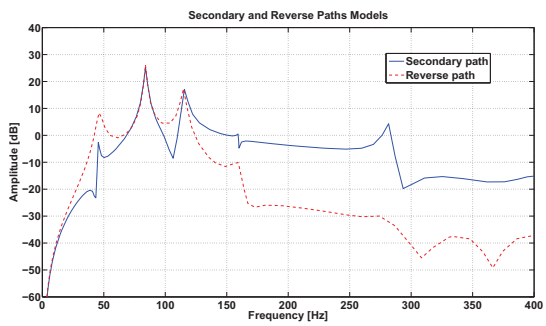


Fig. 4. Frequency characteristics of the secondary $G(z^{-1})$ and reverse $M(z^{-1})$ paths

imposed in estimation is the same as for the secondary path $n_{B_W} = 15$, $n_{A_W} = 13$, $d_W = 0$. The frequency characteristic of the identified parametric model is presented in Fig. 6 (dashed) together with the frequency characteristic of the non-parametric model of $W(z^{-1})$ (solid) obtained by spectral analysis. Since the system has a double differentiator, the spectral analysis gives a significant error at very low frequencies.

IV. Controller synthesis

To formulate the design of a fixed-gain feedforward controller, an optimal control design that takes into account the positive feedback between the compensator N and the mechanical coupling M, was considered. The optimal control design approach makes a trade-off between control energy, broadband disturbance rejection and mechanical coupling. This is achieved by adding appropriate weighting functions W_u and W_v, and a good model W_n of the sensor noise n (measured on $y(t)$), in the block diagram shown in Fig. 3 producing the new block diagram presented in Fig. 7.

The weighting functions are used to specify the control objectives for the design of the feedforward compensator. The role of these weighting functions can be explained as follows :

- W_u is used to shape the process input (control) $u(t)$ to the desired value (to have a low enough input level to avoid saturations for a given magnitude of the disturbance.
- W_v is used to describe the frequency areas where the controller has to minimize the disturbance effect on the output $v(t)$.
- W_n is used to take into account the presence of measurement noise $n(t)$ at the output $y(t)$. It has been determined from open loop experiments.

Once the models D, W, G, M are available and the weighting functions W_u, W_v and W_n are computed, the standard plant description presented in Fig. 8 can be constructed from Fig. 7. The input in Fig. 8 reflects the external disturbances $e(t)$ and the measurement noise $n(t)$.

The performance vector v_e is built up from the combination of the filtered output error signal $v_w = W_v.v$ and the filtered

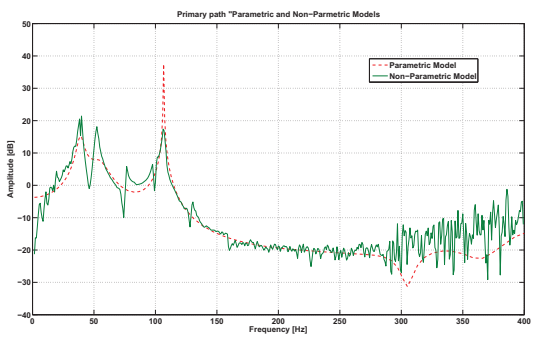


Fig. 5. Frequency characteristics of the primary path $D(z^{-1})$ "parametric and non parametric model"

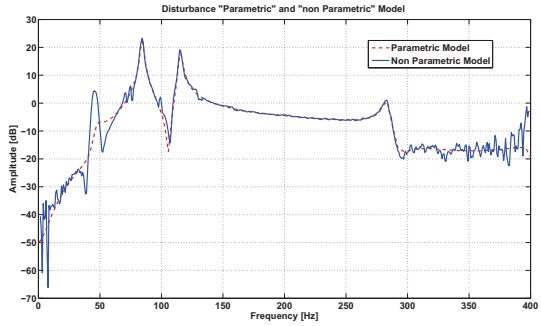


Fig. 6. Frequency characteristics of $W(z^{-1})$ "Disturbance Model"

signal $u_w = W_u.u$. The disturbance effect on this performance vector v_e needs to be minimized. Referring to Fig. 7, the disturbance signal $e(t)$ passes through $W(z^{-1})$ so as to generate the acceleration input $d(t)$. The signal $y(t)$ is the measured acceleration that will act as an input to the feedforward compensator and $u(t)$ is the input to the actuator used for compensation.

Using basic algebraic manipulations it can be shown that the generalized plant P is given by :

$$\begin{bmatrix} v_w \\ u_w \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_v \cdot W \cdot D & 0 & W_v \cdot G \\ 0 & 0 & W_u \\ W & W_n & M \end{bmatrix}}_{P} \cdot \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} \quad (8)$$

Once the generalized plant has been formulated, a feedforward compensator can be computed via a standard H_∞ control design [20].

A. Mixed-sensitivity H-infinity control problem

The objective of the feedforward control design is to be able to control the vibrations of the third mass ($M3$) of the AVC system shown in Figs. 1 and 2. The signal $v(t)$ to be minimized in the H_∞ feedforward design procedure is therefore the acceleration of the third mass of the system. According to Fig. 7, let define the following sensitivity functions to be shaped:

- disturbance-output sensitivity function :

$$S_{ve} = W \cdot \left(D + G \cdot \left(\frac{N}{1 - NM} \right) \right) \quad (9)$$

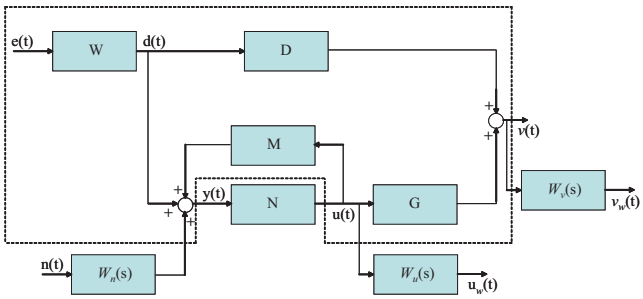


Fig. 7. Design model structure for the feedforward compensation system.

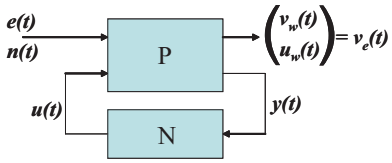


Fig. 8. Generalized plant with feedforward compensator.

- disturbance-input sensitivity function :

$$S_{ue} = W \cdot \left(\frac{N}{1 - NM} \right) \tag{10}$$

- noise-input sensitivity function :

$$S_{un} = W_n \cdot \left(\frac{N}{1 - NM} \right) \tag{11}$$

The H_∞ control problem is to find a stabilizing feedforward compensator N which minimizes γ [20] such that :

$$\left\| \begin{pmatrix} W_v \cdot S_{ve} \\ W_u \cdot S_{ue} \\ W_u \cdot S_{un} \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \tag{12}$$

The obtained compensator N will have the same number of state variables as P.

The weighting function W_u was chosen to be constant (high value $\simeq 15 - 20$). This choice is motivated by the presence of a low frequency measurement noise (from the primary transducer) and a low level of the actuator saturations (around $\pm 0.5V$).
One can also take W_u equal to the stable inverse of D multiplied by a gain, to ensure that the controller should input energy so as to cancel the resonance peaks of D and should not input energy where D has no gain.

W_v was chosen to be equal to the fourth order approximation of G, since it is interesting to minimize the error signal $v(t)$ where G has enough gain.

W_n was characterized as a fourth order low pass filter according to some open loop experiments (spectral analysis of measurement noise on $y(t)$).

The resulting controller has following orders: $n_{B_N} = 70$; $n_{A_N} = 70$.

The obtained sensitivity functions are close to the desired ones. See Figs. 9, 10 and 11.

From Figs. 9 and 10, it results that $|S_{ue}|$ and $|S_{un}|$ are above $|\frac{1}{W_u}|$ which is very small (for performance reasons), but it is very important to see that both of them are less than $0dB$. Therefore the feedforward compensator attenuates disturbances and noise on the secondary path input.

From Fig. 11, one concludes that N gives very good results for the disturbance rejection over the output $v(t)$ around frequency regions where the secondary path has enough gain.

B. Alternative formulation

Instead of minimizing the effect of $s(t)$ (more exactly of $e(t)$ since $s(t)$ is the result of $e(t)$ passed through an unknown filter) on $v(t)$, it is possible to consider the minimization of the effect of signal $d(t)$ upon the output $v(t)$.

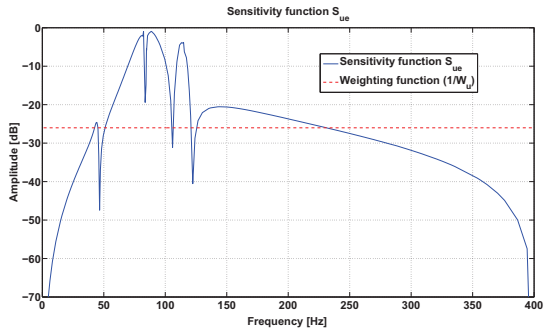


Fig. 9. Disturbance-input sensitivity function S_{ue} with H_∞ feedforward compensator.

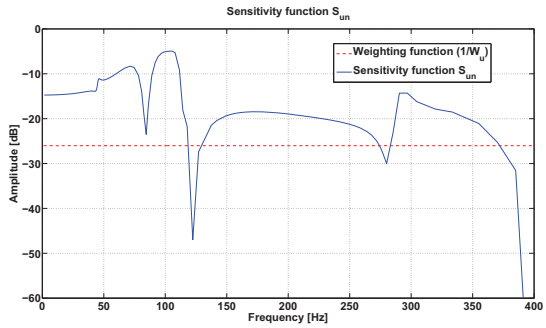


Fig. 10. Noise-input sensitivity function S_{un} with H_∞ feedforward compensator.

According to this problem, the sensitivity functions to be shaped become:

- disturbance-output sensitivity function :

$$S_{vd} = D + G \cdot \left(\frac{N}{1 - NM} \right) \tag{13}$$

- disturbance-input sensitivity function :

$$S_{ud} = \frac{N}{1 - NM} \tag{14}$$

In this case W will be included in the weighting functions. The new H_∞ problem to solve, is finding a feedforward compensator N which minimizes γ such that :

$$\left\| \begin{pmatrix} W \cdot W_v \cdot S_{vd} \\ W \cdot W_u \cdot S_{ud} \\ W_u \cdot S_{un} \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \tag{15}$$

Mathematically the minimization problem is the same and the feedforward compensator obtained is exactly the same as for the first problem.

V. Feedforward Controller Order Reduction by Identification in Closed Loop

As it was shown in [13] and [15], controller order reduction can be cast in a closed loop identification problem. The closed loop formed by N and M will be considered.
The objective is the minimization of the error signal between the nominal closed loop using the H_∞ controller synthesized in Section IV and the loop using the reduced order controller.

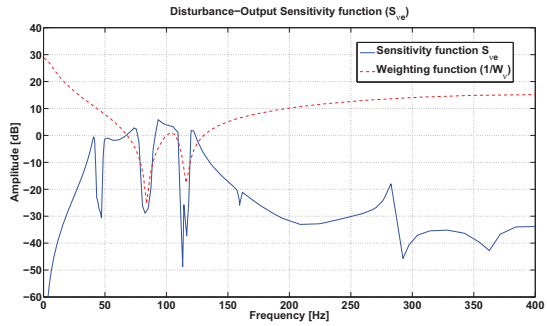


Fig. 11. Disturbance-output sensitivity function S_{ve} with H_∞ feedforward compensator.

To do this one can use simulated and/or real data. The algorithm has been modified in order to take into account that in this context, there is a positive feedback loop.

Let consider the diagram of Fig. 12. For the "input matching" objective, one has to minimize the following norm:

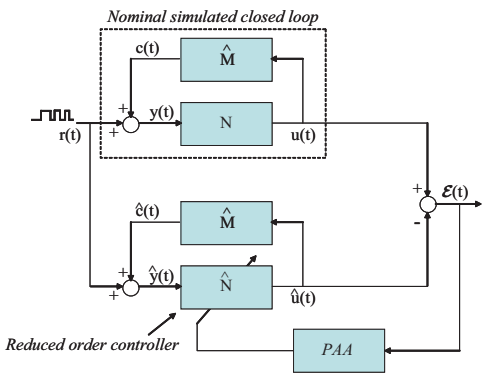


Fig. 12. Closed loop identification of reduced order controller using simulated data (input matching)

$$||S_{ur} - \hat{S}_{ur}|| = \left\| \frac{N}{1 - N\hat{M}} - \frac{\hat{N}}{1 - \hat{N}\hat{M}} \right\| \tag{16}$$

where $\hat{S}_{ur}$ is the sensitivity function between r and u. Therefore the optimal reduced order controller will be given by :

$$\begin{aligned} \hat{N}^* &= \arg\min_{\hat{N}} \|S_{ur} - \hat{S}_{ur}\| \\ &= \arg\min_{\hat{N}} \|S_{yr}(N - \hat{N})\hat{S}_{yr}\| \end{aligned} \tag{17}$$

with :

$$S_{yr} = \frac{1}{1 - N\hat{M}} \tag{18}$$

Equation (17) shows that a weighted norm of $N - \hat{N}$ will be minimized.

A. An algorithm for direct closed loop identification of reduced order feedforward controller

Let us consider the block diagram of Fig. 12.

The parametric adaptation algorithm which will be used to identify the parameters of a reduced order controller is presented in [13] as "closed loop input matching" algorithm and it is very similar to the "closed loop output error" algorithm used for plant model identification in closed loop [14].

Consider the upper part of Fig. 12. The simulated reverse path is operated in closed loop with the nominal H_∞ controller obtained in section IV. $u(t)$ is the output of N as well as the reverse path input, $y(t)$ is the input to N and $r(t)$ is the external excitation signal.

The output of the reduced controller (feedforward compensator) is given by :

$$\begin{aligned} \hat{u}(t+1) &= -A^*_{\hat{N}}(q^{-1})\hat{u}(t) + B_{\hat{N}}(q^{-1})\hat{y}(t+1) \\ &= \hat{\theta}^T \psi(t) \end{aligned} \tag{19}$$

where

$$\hat{y}(t+1) = r(t+1) + \hat{c}(t+1) \tag{20}$$

$$\hat{c}(t+1) = -A^*_{\hat{M}}\hat{c}(t) + B^*_{\hat{M}}\hat{u}(t-d) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \psi^T(t) &= [-\hat{u}(t), \cdots, -\hat{u}(t - n_{A_{\hat{N}}} + 1), \\ &\quad \hat{y}(t+1), \cdots, \hat{y}(t - n_{B_{\hat{N}}} + 1)] \end{aligned} \tag{22}$$

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_{n1}, \cdots, \hat{a}_{nnA_{\hat{N}}}, \hat{b}_{n0}, \cdots, \hat{b}_{nnB_{\hat{N}}}] \tag{23}$$

To estimate the reduced order filters, in this paper, only the "CLIM" algorithm presented in [13] is used.

B. Reduced order feedforward controller for the active vibration control

The complexity of the H_∞ feedforward filter obtained in section IV is $n_{B_N} = 70$; $n_{A_N} = 70$.

To reduce the controller order, data obtained in simulation (Fig. 12) and/or in real time are used. The real data are obtained by replacing the simulated loop $(\hat{M}, N)$ of Fig. 12 by the real system (M, N).

In order to estimate a reduced order controller using real data, it is assumed that the system is not subject to disturbance $(s(t) = 0)$, and a PRBS excitation signal is applied at the input of the feedforward compensator. $r(t)$ and $u(t)$ are used in the "CLIM" algorithm.

The excitation signal was a PRBS generated with a shift register with $N = 10$ and a frequency divider of $p = 2$.

To reduce the controller order in simulation, the reverse path model $\hat{M}$ obtained in closed loop identification by using the H_∞ feedforward filter obtained in section IV, and the same PRBS is used.

Good results were obtained with reduced feedfroward filters of order $n_{B_{\hat{N}}} = 19$, $n_{A_{\hat{N}}} = 20$, $d_{\hat{N}} = 0$ either using real or simulated input/output data.

In order to compare the nominal H_∞ feedforward compensator with the reduced controllers, Figs. 13,14 and 15 present the new sensitivity functions obtained with the reduced order controllers and the nominal one.

Figures 13,14 and 15 show that sensitivity functions obtained with the nominal controller and the reduced order controllers are very close.

Figure 16, shows the frequency characteristics of the obtained feedforward compensators using H_∞ control techniques and the reduced ones.

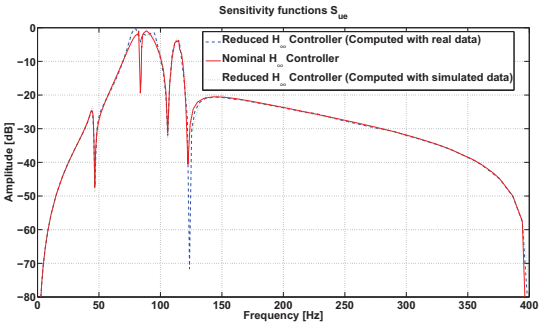


Fig. 13. Disturbance-input sensitivity functions with nominal and reduced order controllers.

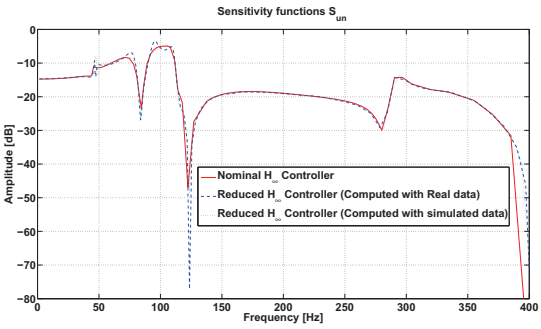


Fig. 14. Noise-input sensitivity functions with nominal and reduced order controllers.

VI. Experimental results

The performance of the system for rejecting broadband disturbances will be illustrated using the feedforward compensator scheme with the various designed controllers. A PRBS excitation is applied to the inertial actuator as a disturbance (i.e. the mechanical structure is disturbed by an almost white noise filtered by the transfer function of the inertial actuator). Time domain results obtained with and without feedforward compensator scheme are shown in Figs. 17 and 18.Almost the same level of the residual acceleration is obtained using the nominal or the reduced controllers. The variance of the residual acceleration in open loop is: $var(v(t)) = 0.0328$. With feedforward compensation, the variance is around : $var(v(t)) = 0.0079$ in the three cases (nominal and reduced controllers). This corresponds to a global attenuation of 12.37 dB.

Figure 19 shows the spectral densities of the residual acceleration obtained in open loop and with feedforward compensation. One can remark a strong attenuation in the frequency regions where the secondary path G has a high gain.

These results are summarized in Table I, where N_n is the nominal feedforward compensator, N_r and N_s are the reduced feedforward compensators computed respectively with real and simulated data.

The first row gives the Vinnicombe generalized stability margins $b(N_i, M)$ computed with the nominal model of the reverse path ([18]). It is important to remark that the reduced controllers lead to a much better "generalized stability margin" than the nominal one (better robustness with respect to uncertainty on M). Row 2 shows the variance of the residual acceleration.

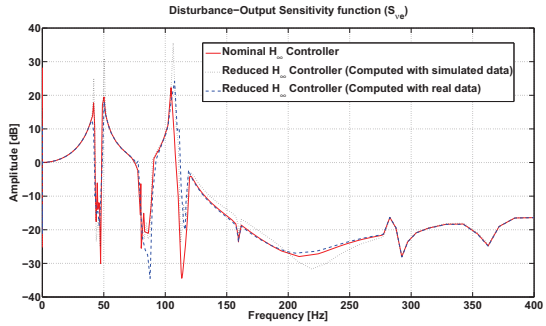


Fig. 15. Disturbance-output sensitivity functions with nominal and reduced order controllers.

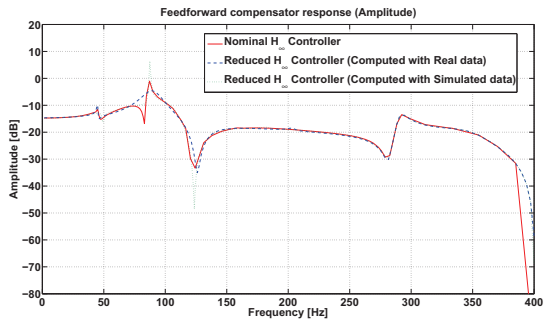


Fig. 16. Frequency characteristics of the nominal feedforward compensator and of reduced order compensators

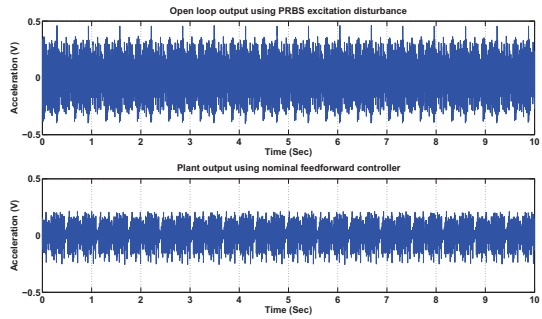


Fig. 17. Real time results obtained with PRBS disturbance (up: Open loop, down: Nominal H_∞ compensator)

Controller	N_n $n_{B_N} = 70$ $n_{A_N} = 70$	N_r $n_{B_N} = 19$ $n_{A_N} = 20$	N_s $n_{B_N} = 19$ $n_{A_N} = 20$
$b(N_i, M)$	0.063	0.143	0.148
Residual acceleration variance	0.0079	0.0077	0.0080

TABLE I

Comparison of the different feedforward compensators

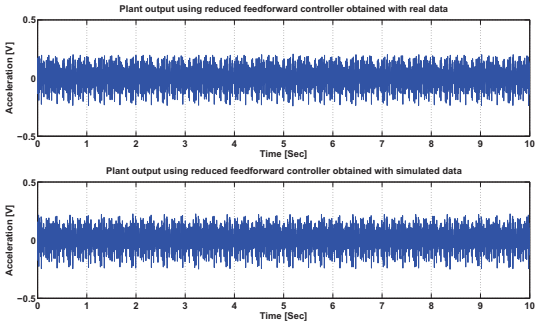


Fig. 18. Real time results obtained with PRBS disturbance using reduced order compensators (up: controller obtained with real data, down: controller obtained with simulated data).

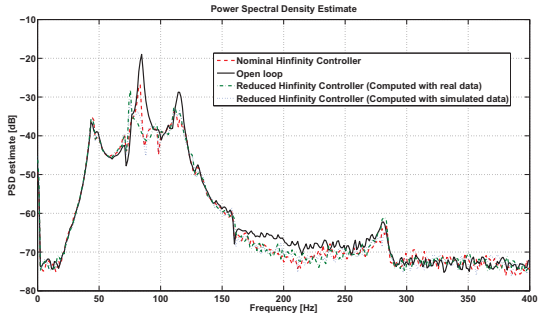


Fig. 19. Spectral densities of the residual acceleration in open loop and with feedforward compensators.

VII. Conclusions

This paper has presented the design of a model based feedforward compensator for AVC systems. This design takes into account the mechanical coupling (positive feedback) between the feedforward compensation and the measurement of the image of the external disturbance. The feedforward compensator design is formulated as an H_∞ optimal control design.

Since the nominal designed compensator has a large dimension, a procedure for compensator order reduction and on site tuning has been proposed and applied successfully.

The proposed approach is illustrated by an experimental study on an AVC system attached to a flexible structure.

References

[1] F. Ben Amara, P.T. Kabamba, and A.G. Ulsoy. Adaptive sinusoidal disturbance rejection in linear discrete-time systems - Part I: Theory. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 121:648–654, 1999.

[2] F. Ben Amara, P.T. Kabamba, and A.G. Ulsoy. Adaptive sinusoidal disturbance rejection in linear discrete-time systems - Part II: Experiments. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 121:655–659, 1999.

[3] I. Buckle and R. Mayes. Seismic isolation : history application and performance - a world view. *Earthquake Spectra*, 6:161–201, 1990.

[4] R.L. Clark and D.S. Bernstein. Hybrid control: Separation in design. *Journal of Sound and Vibration*, 214(4):784–791, 1998.

[5] A. Constantinescu and I.D. Landau. Direct controller order reduction by identification in closed loop applied to a benchmark problem. *European Journal of Control*, 9(1), 2003.

[6] M. Constantinous and I. Tadjbakhsh. Probalistic optimal base isolation of structures. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 109:676–689, 1983.

[7] S.J. Elliott and P.A. Nelson. Active noise control. *Noise / News International*, pages 75–98, June 1994.

[8] S.J. Elliott and T.J. Sutton. Performance of feedforward and feedback systems for active control. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 4(3):214–223, May 1996.

[9] C. Fuller, S. Elliot, and P. Nelson. *Active control of vibration*. Academic Press, London, UK, 1996.

[10] C.A Jacobson, C.R Johnson, D.C Mc Cormick, and W.A Sethares. Stability of active noise control algorithms. *IEEE Signal Processing letters*, 8(3):74–76, 2001.

[11] S.M Kuo and D.R. Morgan. *Active Noise Control Systems-Algorithms and DSP Implementation*. Wiley, New york, USA, 1996.

[12] I.D. Landau, A. Constantinescu, and D. Rey. Adaptive narrow band disturbance rejection applied to an active suspension - an internal model principle approach. *Automatica*, 41(4):563–574, 2005.

[13] I.D. Landau, A. Karimi, and A. Constantinescu. Direct controller order reduction by identification in closed loop. *Automatica*, (37):1689–1702, 2001.

[14] I.D. Landau, R. Lozano, and M. M'Saad. *Adaptive control*. Springer, London, 1997.

[15] I.D. Landau and G. Zito. *Digital Control Systems - Design, Identification and Implementation*. Springer, London, 2005.

[16] T.E. Paré and J.P. How. Hybrid h_2 control design for vibration isolation. *Journal of Sound and Vibration*, 226(1):25–39, 1999.

[17] M. Rotunno and R.A. de Callafon. Design of model-based feedforward compensators for vibration compensation in a flexible structure. Internal report, Dept. of Mechanical and Aerospace Engineering. University of Callufornia, San Diego.

[18] G. Vinnicombe. Frequency domain uncertaintly and the graph topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38, 1993.

[19] J Zeng and R.A de Callafon. Recursive filter estimation for feedforward noise cancellation with acoustic coupling. *Journal of sound and vibration*, 291:1061–1079, 2006.

[20] K. Zhou and J. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1998.

Annexe D

An adaptive feedforward compensation algorithm for active vibration control

par I.D. Landau et M. Alma
publié dans Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, États-Unis (2010)

An adaptive feedforward compensation algorithm for active vibration control

Ioan Doré Landau, Marouane Alma

***Abstract*— Adaptive feedforward broadband vibration (or noise) compensation is currently used when an image of the disturbance is available. However in most of the systems there is a "positive" feedback coupling between the compensator system and the measurement of the image of the disturbances. The paper proposes a new algorithm taking in account this coupling effect and the corresponding analysis. The algorithm has been applied to an active vibration control (AVC) system and real time results are presented.**

***Index Terms*— active vibration control, adaptive feedforward compensation, adaptive control, identification in closed loop, parameter estimation**

I. Introduction

Adaptive feedforward broadband vibration (or noise) compensation is currently used in ANC (Active Noise Control) and AVC (Active Vibration Control) when an image of the disturbance is available ([3], [4], [6], [15]). However in many systems there is a "positive" feedback coupling between the compensator system and the measurement of the image of the disturbance (vibration or noise)([6], [15], [5]). The positive feedback may destabilize the system. The system is no more a pure feedforward compensator. Different solutions have been proposed to overcome this problem (see for example [7]). In this paper we will address the problem of identifying the feedforward compensator filter in the presence of the positive feedback coupling.

It is important to note that the estimation of the feedforward compensator filter in this context can be interpreted as an identification in closed loop operation ([10]) or as estimation in closed loop of a (reduced order) controller as in ([11]). Therefore to a certain extent, the results of ([10], [9]) and ([11]) can be extrapolated to this problem.

The objective is to develop a recursive algorithm for online estimation and adaptation of the parameters of the feedforward filter compensator for broadband disturbances with unknown and variable spectral characteristics and in the presence of possible variations of the disturbance path (primary path) model.

While the paper is developed in the context of AVC (active vibration control systems), the results are certainly applicable to ANC systems.

The paper is organized as follows. In Section II the AVC system is presented. The system representation and feedforward filter structure are given in section III. The algorithm for adaptive feedforward compensation will be developed in section IV and analysed in section V. Section VI will present real-time results obtained on the active vibration control system.

I.D. Landau, M. Alma, are with control system department of Gipsa-lab, St martin d'héres, 38402 FRANCE ([ioan-dore.landau, marouane.alma]@gipsa-lab.grenoble-inp.fr)

II. An active vibration control system using an inertial actuator

Figure 1 represents an AVC system using a measurement of the image of the disturbance and an inertial actuator for reducing the residual acceleration [1]. It consists of five metal plates connected by springs. The first and last plates are equipped with an inertial actuator: The first will excite the structure (disturbances) and the second will create vibrational forces which can counteract the effect of these vibrational disturbances

The system input (disturbance) is the position of the mobile part of the inertial actuator (see figure 1) located on top of the structure. The image of the disturbance and the residual acceleration are measured by accelerometers .

The problem of "positive" feedback coupling is clearly illustrated in Figure 1.

The path between the disturbance and the residual acceleration is called the *global primary path*, the path between the measure of the image of the disturbance and the residual acceleration (in open loop) is called the *primary path* and the path between the inertial actuator and the residual acceleration is called the *secondary path*. $d(t)$ is the image of the disturbance measured effectively when the compensator system is not used. When the compensator system is active, the actuator acts upon the residual acceleration, but also upon the measurement of the image of the disturbance. The measured quantity will be the sum of the disturbance $d(t)$ and of the effect of the actuator. Similar structures occur also in feedforward active noise control ([6], [15]). The input to the inertial actuators being a position, the global primary path, the secondary path and the positive feedback path have a double differentiator behavior.

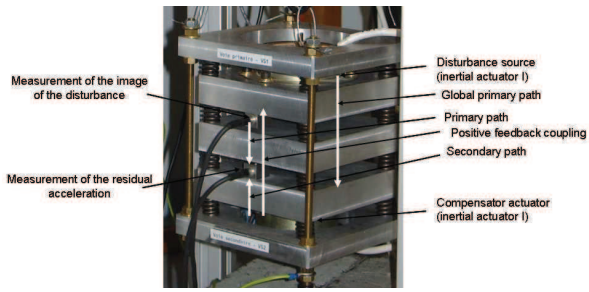


Fig. 1. An AVC system using a feedforward compensation

The corresponding block diagrams in open loop operation and with the compensator system are shown in Figures 2(a) and 2(b). $\widehat{u}(t)$ denotes the effective output provided by the measurement device and which will serve as input to the adaptive feedforward filter $\hat{N}$. The output of this filter denoted by $-\widehat{y}(t)$ is applied to the actuator through an amplifier. The transfer function G (the secondary path) characterizes the dynamics from the output of the filter $\hat{N}$ to the residual acceleration measurement (amplifier + actuator + dynamics of the mechanical system). The transfer function D between $d(t)$ and the measurement of the residual acceleration characterizes the primary path.

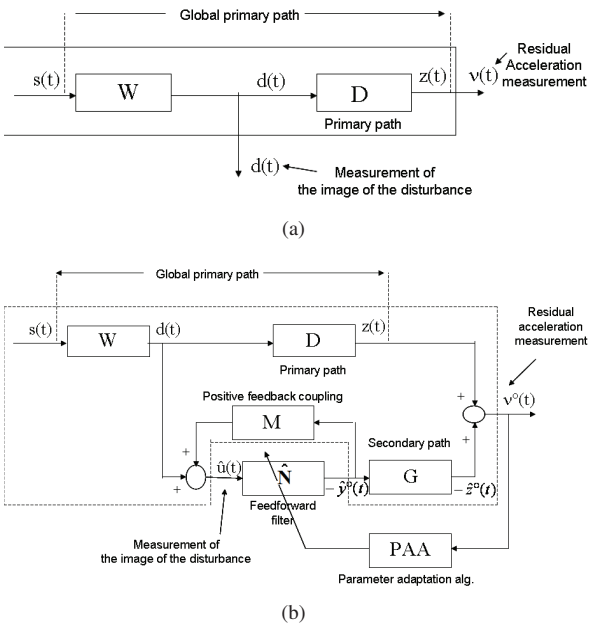


Fig. 2. Feedforward AVC: in open loop (a) and with adaptive feedforward compensator (b)

The coupling between the output of the filter and the measurement $\hat{u}(t)$ through the compensator actuator is denoted by M. As indicated in figure 2(b) this coupling is a "positive" feedback. This unwanted coupling raises problems in practice and makes the analysis of adaptive (estimation) algorithms more difficult.

At this stage it is important to make the following remarks, when the feedforward filter is absent (open loop operation):

1) Very reliable models for the secondary path and the "positive" feedback path can be identified by applying appropriate excitation on the actuator.
2) An estimation of the primary path transfer function can be obtained from the spectral densities of $d(t)$ and $\nu(t)$ (the actuator being at rest).

III. Basic equations and notations

The objective is to estimate (and to adapt) the parameters of the feedforward filter $N(q^{-1})$ such that the measured residual acceleration (or force) be minimized in the sense of a certain criterion.

The optimal feedforward filter (unknown) is defined by :

$$N(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} \tag{1}$$

where:

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + \ldots + r_{n_R} q^{-n_R} \tag{2}$$

$$S(q^{-1}) = 1 + S_1 q^{-1} + \ldots + S_{n_S} q^{-n_S} = 1 + q^{-1} S^*(q^{-1}) \tag{3}$$

The estimated filter is denoted by $\hat{N}(q^{-1})$ or $\hat{N}(\hat{\theta}, q^{-1})$ when it is a linear filter with constant coefficients or $\hat{N}(t, q^{-1})$ during estimation (adaptation) of its parameters[1].

The input of the feedforward filter is denoted by $\hat{u}(t)$ and its corresponds to the measurement provided by the primary transducer (force or acceleration transducer in AVC or a microphone in ANC). In the absence of the compensation loop (open loop operation) $\hat{u}(t) = d(t)$. The output of the feedforward filter (which is the control signal applied to the secondary path) is denoted by $-\hat{y}(t)$. Therefore the input-output relationships for the estimated feedforward filter are given by "a priori" output:

$$\begin{aligned} -\hat{y}^0(t+1) &= \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t)) \\ &= -[-\hat{S}^*(t,q^{-1})\hat{y}(t) + \hat{R}(t,q^{-1})\hat{u}(t+1)] \\ &= -\hat{\theta}^T(t)\phi(t) = -[\hat{\theta}_S^T(t), \hat{\theta}_R^T(t)][\begin{array}{c}\phi_{\hat{y}}(t)\\ \phi_{\hat{u}}(t)\end{array}] \end{aligned} \tag{4}$$

where

$$\hat{\theta}^T(t) = [\hat{s}_1(t) \ldots \hat{s}_{n_S}(t), \hat{r}_0(t) \ldots \hat{r}_{n_R}(t)] = [\hat{\theta}_S^T(t), \hat{\theta}_R^T(t)] \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \phi^T(t) &= [-\hat{y}(t) \ldots -\hat{y}(t-n_S+1, \hat{u}(t+1), \hat{u}(t) \ldots \hat{u}(t-n_R+1)] \\ &= [\phi_{\hat{y}}^T(t), \phi_{\hat{u}}^T(t)] \end{aligned} \tag{6}$$

and $-\hat{y}(t)$, $-\hat{y}(t-1)$ ... are the "a posteriori" outputs of the feedforward filter generated by :

$$-\hat{y}(t+1) = \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t+1)) = -\hat{\theta}^T(t+1)\phi(t) \tag{7}$$

while $\hat{u}(t+1)$, $\hat{u}(t)$... are the measurements provided by the primary transducer.

The primary path is characterized by the asymptotically stable transfer operator:

$$D(q^{-1}) = \frac{B_D(q^{-1})}{A_D(q^{-1})} \tag{8}$$

where

$$B_D(q^{-1}) = b_1^D q^{-1} + \ldots + b_{n_{B_D}}^D q^{-n_{B_D}} \tag{9}$$

$$A_D(q^{-1}) = 1 + a_1^D q^{-1} + \ldots + a_{n_{A_D}}^D q^{-n_{A_D}} \tag{10}$$

The unmeasurable value of the output of the primary path (when the compensation is active) is denoted $z(t)$.

The secondary path is characterized by the asymptotically stable transfer operator:

$$G(q^{-1}) = \frac{B_G(q^{-1})}{A_G(q^{-1})} \tag{11}$$

where:

$$B_G(q^{-1}) = b_1^G q^{-1} + \ldots + b_{n_{B_G}}^G q^{-n_{B_G}} \tag{12}$$

[1]The complex variable z^{-1} will be used for characterizing the system's behavior in the frequency domain and the delay operator q^{-1} will be used for describing the system's behavior in the time domain.

$$A_G(q^{-1}) = 1 + a_1^G q^{-1} + ... + a_{n_{A_G}}^G q^{-n_{A_G}} \quad (13)$$

The "a posteriori" unmeasurable value of the output of the secondary path is denoted by $-\hat{z}(t)$ while its input is $-\hat{y}(t)$. The "a priori" output of the secondary path will be denoted $-\hat{z}^0(t)$.

The positive feedback coupling is characterized by the asymptotically stable transfer operator:

$$M(q^{-1}) = \frac{B_M(q^{-1})}{A_M(q^{-1})} \quad (14)$$

where:

$$B_M(q^{-1}) = b_1^M q^{-1} + ... + b_{n_{B_M}}^M q^{-n_{B_M}} = q^{-1} B_M^*(q^{-1}) \quad (15)$$

$$A_M(q^{-1}) = 1 + a_1^M q^{-1} + ... + a_{n_{A_M}}^M q^{-n_{A_M}} \quad (16)$$

Therefore the measured primary signal (called also reference) satisfies the following equation (in adaptive operation):

$$\hat{u}(t) = d(t) + \frac{B_M(q^{-1})}{A_M(q^{-1})}(-\hat{y}^0(t)) \quad (17)$$

The measured residual acceleration (or force) satisfies the following equation :

$$\nu^0(t) = z(t) - \hat{z}^0(t) \quad (18)$$

($\nu^0(t)$ will be termed "a priori" adaptation error)

The algorithm for adaptive feedforward compensation will be developed under the following hypotheses:

1) The signal $d(t)$ is bounded (which is equivalently to say that $s(t)$ is bounded and $W(q^{-1})$ in figure 2 is asymptotically stable).
2) Perfect matching condition. There exists a filter $N(z^{-1})$ of finite dimension such that [2]:
$$\frac{N}{(1-NM)} G = -D \quad (19)$$
and the characteristic polynomial of the feedback loop:
$$P(z^{-1}) = A_M(z^{-1}) S(z^{-1}) - B_M(z^{-1}) R(z^{-1}) \quad (20)$$
is a Hurwitz polynomial
3) The effect of the measurement noise upon the measurement of the residual acceleration is neglected (deterministic context).

Once the algorithm will be developed under these hypotheses, hypotheses 2 and 3 will be removed and the algorithm will be analyzed in this modified context.

IV. Algorithm development

Under the assumption 2 (perfect matching condition) the output of the primary path can be expressed as:

$$z(t) = G(q^{-1}) y(t) \quad (21)$$

where $y(t)$ is a dummy variable given by:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= -S^*(q^{-1}) y(t) + R(q^{-1}) u(t+1) \\ &= \theta^T \varphi(t) = [\theta_S^T, \theta_R^T][\begin{array}{c} \varphi_y(t) \\ \varphi_u(t) \end{array}] \end{aligned} \quad (22)$$

[2]In many cases, the arguments q^{-1} and z^{-1} will be dropped out

where

$$\theta^T = [s_1, ...s_{n_S}, r_0, r_1, ...r_{n_R}] \quad (23)$$

$$\varphi^T(t) = [-y(t) ... - y(t - n_S + 1), u(t+1) ... u(t - n_R + 1)] \quad (24)$$

and $u(t)$ is given by

$$u(t) = d(t) + \frac{B_M(q^{-1})}{A_M(q^{-1})} y(t) \quad (25)$$

For a fixed value of the parameter vector $\hat{\theta}$ characterizing the estimated filter $\hat{N}(q^{-1})$ of same dimension as the optimal filter $N(q^{-1})$, the output of the secondary path can be expressed by (in this case $\hat{z}(t) = \hat{z}^0(t)$ and $\hat{y}(t) = \hat{y}^0(t)$):

$$-\hat{z}(t) = G(q^{-1})[-\hat{y}(t)] \quad (26)$$

where

$$-\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}^T \phi(t) \quad (27)$$

The key observation is that the dummy variable y(t+1) can be expressed as :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \theta^T \phi(t) + \theta^T [\varphi(t) - \phi(t)] \\ &= \theta^T \phi(t) + \theta_S^T [\varphi_y - \phi_{\hat{y}}] + \theta_R^T [\varphi_u - \phi_{\hat{u}}] \end{aligned} \quad (28)$$

Define the dummy error (for a fixed vector $\hat{\theta}$)

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad (29)$$

and the residual error

$$\nu(t+1) = z(t) - \hat{z}(t) = G(q^{-1}) \varepsilon(t+1) \quad (30)$$

It results from (28) that:

$$y(t+1) = \theta^T \phi(t) - S^*(q^{-1}) \varepsilon(t) + R(q^{-1})[u(t+1) - \hat{u}(t+1)] \quad (31)$$

But taking in account the expressions of $u(t)$ and $\hat{u}(t)$ given by (25) and (17) respectively one gets:

$$y(t+1) = \theta^T \phi(t) - (S^*(q^{-1}) - \frac{R(q^{-1}) B_M^*(q^{-1})}{A_M(q^{-1})}) \varepsilon(t) \quad (32)$$

and therefore:

$$\varepsilon(t+1) = [\theta - \hat{\theta}]^T \phi(t) - (S^*(q^{-1}) - \frac{R(q^{-1}) B_M^*(q^{-1})}{A_M(q^{-1})}) \varepsilon(t) \quad (33)$$

which gives:

$$\frac{A_M S - R B_M}{A_M} \varepsilon(t+1) = [\theta - \hat{\theta}]^T \phi(t) \quad (34)$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})}{P(q^{-1})} [\theta - \hat{\theta}]^T \phi(t) \quad (35)$$

and

$$\nu(t+1) = \frac{A_M(q^{-1}) G(q(^{-1})}{P(q^{-1})} [\theta - \hat{\theta}]^T \phi(t) \quad (36)$$

However equation (36) for $\hat{\theta}$ =constant, can be rewritten as :

$$\nu(t+1) = \frac{A_M(q^{-1})}{P(q^{-1})} [\theta - \hat{\theta}]^T \phi_f(t) \quad (37)$$

with :

$$\phi_f(t) = G(q^{-1}) \phi(t) \quad (38)$$

Equation (37) will be used to develop the adaptation algorithm neglecting for the moment the non-commutativity of the operators when $\hat{\theta}$ is time varying (however an exact algorithm can be derived in such cases - see [12]).

The a-posteriori residual error $\nu(t+1)$ (which is computed) will be given by:

$$\begin{aligned}\nu(t+1) &= \frac{A_M(q^{-1})}{P(q^{-1})}[\theta-\hat{\theta}(t+1)]^T\phi_f(t) \\ &= [\theta-\hat{\theta}(t+1)]^T\phi_f(t)- \\ &\quad (S^*(q^{-1})-\frac{R(q^{-1})B_M^*(q^{-1})}{A_M(q^{-1})})\nu(t) \qquad (39)\end{aligned}$$

Equation (39) has the standard form for an a-posteriori adaptation error [12], which immediately suggest to use the following parameter adaptation algorithm (algorithm I)

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t)+F(t)\Phi(t)\nu(t+1)\ ; \qquad (40)$$

$$\nu(t+1) = \frac{\nu^0(t+1)}{1+\Phi^T(t)F(t)\Phi(t)}\ ; \qquad (41)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)}\left[F(t)-\frac{F(t)\Phi(t)\Phi^T(t)F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)}+\Phi^T(t)F(t)\Phi(t)}\right] \qquad (42)$$

$$1 \geq \lambda_1(t)>0; 0\leq\lambda_2(t)<2; F(0)>0 \qquad (43)$$

$$\Phi(t) = \phi_f(t) \qquad (44)$$

where $\lambda_1(t)$ and $\lambda_2(t)$ allow to obtain various profiles for the adaptation gain $F(t)$ (see [12] and section VI).

Defining the measured quantity of the residual error at instant $t+1$, as the a-priori adaptation error, one has:

$$\begin{aligned}\nu^0(t+1) &= [\theta-\hat{\theta}(t)]^T\phi_f(t)- \\ &\quad (S^*(q^{-1})-\frac{R(q^{-1})B_M^*(q^{-1})}{A_M(q^{-1})})\nu(t) \qquad (45)\end{aligned}$$

Relationship between $\nu^0(t+1)$ and $\nu(t+1)$ given by (41) clearly results from equations (45) and (39).

A more general form of the parameter adaptation algorithm given by (40) through (44) is obtained if we replace $\Phi(t)$ given by (44) with:

$$\Phi(t)=\phi_{ff}(t)=L\hat{G}\phi(t) \qquad (46)$$

where $\hat{G}$ is an estimation of the true transfer function G of the secondary path and L is an asymptotically stable filter (Algorithm II).

The trivial choice for L is $L=1$ which gives:

$$(IIa):\Phi(t)=\hat{G}\phi(t) \qquad (47)$$

If an estimation of $\hat{N}$ is available (for example after running (IIa) for a number of samples in real time or in simulation), one can use : $L=\frac{\hat{A}_M}{\hat{P}}$;

$$(IIb):\Phi(t)=\frac{\hat{A}_M}{\hat{P}}\hat{G}\phi(t) \qquad (48)$$

where :

$$\hat{P}=\hat{A}_M\hat{S}-\hat{B}_M\hat{R} \qquad (49)$$

V. Analysis of the algorithms

A. The deterministic case - perfect matching

For the analysis of the algorithms, neglecting the non-commutativity of time varying operators, one can straightforwardly use theorem 3.3.2 from [12] (pages 97-103).

Both for algorithm I and algorithm II, the equation for the a-posteriori adaptation error has the form :

$$\nu(t+1)=H(q^{-1})[\theta-\hat{\theta}(t+1)]^T\Phi(t) \qquad (50)$$

where for algorithm I, one has:

$$H(q^{-1})=\frac{A_M(q^{-1})}{P(q^{-1})},\Phi=\phi_f \qquad (51)$$

and for the algorithm II, one has:

$$H(q^{-1})=\frac{A_M(q^{-1})}{P(q^{-1})}\frac{1}{L(q^{-1})}\frac{G(q^{-1})}{\hat{G}(q^{-1})},\Phi=\phi_{ff} \qquad (52)$$

Using theorem 3.3.2 from [12], under the condition that:

$$H'(z^{-1})=H(z^{-1})-\frac{\lambda_2}{2},\max_t[\lambda_2(t)]\leq\lambda_2<2 \qquad (53)$$

is a strictly positive real transfer function, one has:

$$\lim_{t\to\infty}\nu(t+1) = 0; \qquad (54)$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[\nu^0(t+1)^2]}{1+\Phi(t)^TF(t)\Phi(t)} = 0; \qquad (55)$$

However in order to show that $\nu^0(t+1)$ goes to zero one has to show first that the components of the regressor vector are bounded.

The result (55) suggests to use the Goodwin's "bounded growth" lemma ([11] and lemma 11.2.1 in [12] pg 375). Provided that in addition (for algorithm I) one has:

$$|\phi_f^T(t)F(t)\phi_f(t)|^{\frac{1}{2}}\leq C_1+C_2.\max|\nu^0(k)| \qquad (56)$$

$$0<C_1<\infty \quad 0<C_2<\infty \quad 0\leq k\leq t+1, \quad F(t)>0$$

$||\phi_f(t)||$ will be bounded. So it will be shown that (56) holds for algorithm I. From (30) one has:

$$-\hat{z}(t)=\nu(t)-z(t) \qquad (57)$$

Since $z(t)$ is bounded (output of an asymptotically stable system with bounded input), one has:

$$\begin{aligned}|-\hat{y}_f(t)|=|-G\hat{y}(t)|=|-\hat{z}(t)| &\leq C_3+C_4.\max|\nu(k)| \\ &\leq C_3'+C_4'.\max|\nu^0(k)| \qquad (58)\end{aligned}$$

$$0\leq k\leq t+1$$

since $|\nu(t)|\leq|\nu^0(t)|$ for all t. From (17) by multiplying both sides by $G(q^{-1})$ one gets in the adaptive case :

$$\hat{u}_f(t)=G(q^{-1})d(t)+\frac{B_M(q^{-1})}{A_M(q^{-1})}(-\hat{y}_f^0(t)) \qquad (59)$$

Since A_G and A_M are Hurwitz ploynomials and that $d(t)$ is bounded, it results that:

$$|\hat{u}_f(t)|\leq C_5+C_6.\max|\nu^0(k)| \qquad (60)$$

$$0\leq k\leq t+1$$

Therefore (56) holds, which implies that $\phi_f(t)$ is bounded and one can conclude that:

$$\lim_{t\to\infty} v^0(t+1) = 0 \tag{61}$$

for any initial conditions $\hat{\theta}(0), v(0)$. The proof is similar for algorithm (II).

It is interesting to remark that for Algorithm (*IIb*) from equation (48), the stability condition is that:

$$\frac{A_M}{\hat{A}_M} \cdot \frac{\hat{P}}{P} \cdot \frac{G}{\hat{G}} - \frac{\lambda_2}{2} \tag{62}$$

is a strictly positive real transfer function. However this condition can be re-written for $\lambda_2 = 1$ as [14]:

$$|\frac{A_M}{\hat{A}_M} \cdot \frac{\hat{P}}{P} \cdot \frac{G}{\hat{G}} - 1| < 1 \tag{63}$$

for all ω.

This roughly means that it allways holds provided that the estimates of A_M,P and G are close to the true values (i.e. $H(e^{j\omega})$ in this case is close to a unit transfer function).

B. The stochastic case - perfect matching

The effect of the measurement noise on the residual acceleration measurement cannot be neglected.

In the presence of the measurement noise, the equation of the a-posteriori residual error becomes:

$$v(t+1) = \frac{A_M}{P}[\theta - \hat{\theta}(t+1)]^T \phi_f(t) + w(t+1) \tag{64}$$

The O.D.E method [14] can be used to analyse the asymptotic behavior of the algorithm in the presence of noise. Following the methodology given in [12] it can be shown that under same "positive real" conditions as in the deterministic case the parameter estimations will be unbiased (provided that the measurement noise is independent of $d(t)$).

C. The case of non-perfect matching

If $\hat{N}(t, q^{-1})$ does not have the appropriate dimension there is no chance to satisfy the perfect matching condition.
The results from [10], [11], can be used to analyse the boundedness of the residual error,.

Provided that

1) There exists a reduced order filter $\hat{N}$ characterized by the unknown polynomials $\hat{S}$ (of order n_S) and $\hat{R}$ (of order n_R), for which the closed loop formed by $\hat{N}$ and M is asymptotically stable. i.e. $A_M\hat{S} - B_M\hat{R}$ is a Hurwitz polynomial.
2) The output of the optimal filter satisfying the matching condition can be expressed as:

$$-\hat{y}(t+1) = -[\hat{S}^*(q^{-1})\hat{y}(t) - \hat{R}(q^{-1})\hat{u}(t+1) + \eta(t+1)] \tag{65}$$

where $\eta(t+1)$ is a norm bounded signal

it can be shown that all the signals are norm bounded under the passivity condition (53), where P is computed now with the reduced order estimated filter.

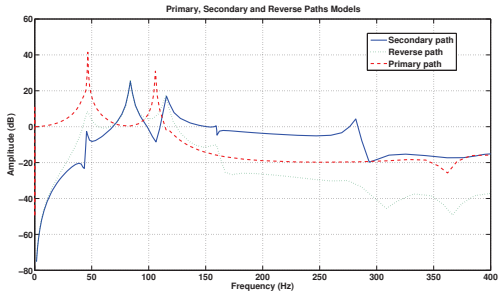


Fig. 3. Frequency characteristics of the primary, secondary and reverse paths

VI. Experimental results

The active vibration control system has been described in section II

A. System identification

The structure of the linear discrete time models for the different paths have been given in section III. These models can be identified using the same methodology as in [13], [11], [8], [2].

The secondary path between control signal $-\hat{y}(t)$ and the output $v(t)$ has been identified in open loop. The excitation signal was a PRBS (pseudo-random binary sequence) generated with a shift register with $N = 10$ and a frequency divider of $p = 4$. The estimated order of the model is $n_{B_G} = 15$, $n_{A_G} = 13$. The frequency characteristic of the secondary path is shown in figure 3 (solid). There exist several very low damped vibration modes in the secondary path.

The reverse path $M(q^{-1})$ has been identified in open loop by the same PRBS excitation ($N = 10$ and a frequency divider of $p = 4$) at $-\hat{y}(t)$ and measuring the output signal of the primary transducer $\hat{u}(t)$. The order of the obtained model is $n_{B_M} = 15$, $n_{A_M} = 13$. The frequency characteristic of the reverse path is presented in figure 3 (dotted). As for the secondary paths, there exist several very low damped vibration modes.

The primary path frequency characteristics have been computed taking in account that:

$$D(z^{-1}) = [W^{-1}(z^{-1})]^{-1}.[W.D(z^{-1})] \tag{66}$$

The frequency characteristic is presented in figure 3(dashed) and may serve for detailed performance evaluation.

B. Broadband disturbance rejection

The adaptive filter structure is $n_{B_F} = 19$; $n_{A_F} = 20$ (total of 40 parameters) and this complexity does not allow to verify the "perfect mathching condition" (not enough parameters). For the *adaptive* operation the Algorithms *IIa* and *IIb* have been used with adaptation gain updating using variable forgetting factor $\lambda(t)$ (the forgetting factor tends towards 1), combined with a *constant trace* adaptation gain. For details see [13], [12]

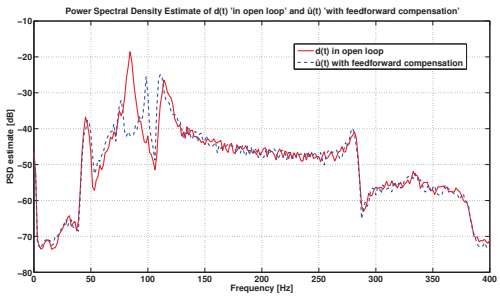


Fig. 4. Spectral densities of the image of the disturbance in open loop $d(t)$ and in feedforward compensation scheme $\hat{u}(t)$

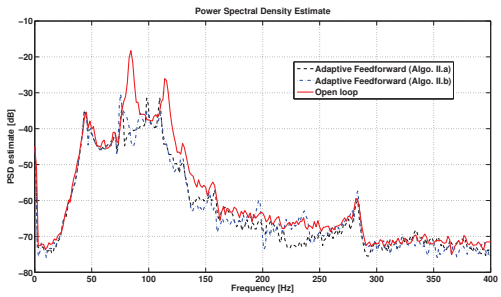


Fig. 6. Spectral densities of the residual acceleration in open loop and with adaptive feedforward compensation (experimental)

A PRBS excitation on the global primary path will be considered as disturbance. The corresponding spectral densities of $d(t)$ in open loop and of $\hat{u}(t)$ when feedforward compensation is active are shown in figure 4. Time domain results obtained in open loop and with adaptive feedforward compensation algorithms(IIa) and (IIb) on the AVC system shown in figure 1 are presented in Figure 5. The variance of the residual acceleration in open loop is: $var(v(t) = z(t)) = 0.0325$. With adaptive feedforward compensation algorithm IIa (after the adaptation algorithm has converged), the variance is : $var(v(t)) = 0.0057$. This corresponds to a global attenuation of 15.12 dB. Using algorithm IIb the variance of the residual acceleration is: $var(v(t)) = 0.0047$. This corresponds to a global attenuation of 16.82 dB, which is an improvement with respect to algorithm IIa.

Figure 6 shows the spectral densities of the residual acceleration obtained in open loop and in adaptive feedforward regime (after the adaptation algorithm has converged).

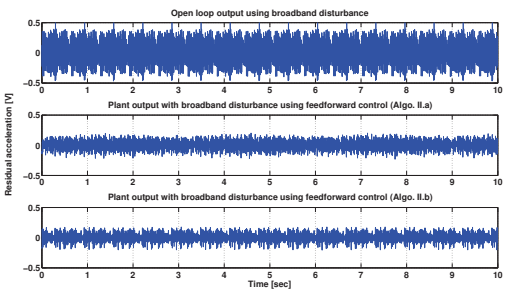


Fig. 5. Real time results obtained with PRBS disturbance (experimental)

One can remark a strong attenuation in the frequency regions where the secondary path G has a high gain.

The estimated parameters of the feedforward filter converge toward there final value in about 10s.

VII. Conclusions

The paper has presented an algorithm for adaptive feedforward compensation for AVC systems taking in account the existence of an inherent internal positive feedback coupling. The experimental results obtained are very good.
The proposed algorithm can certainly be used also in ANC systems. Comparisons with existing algorithms for ANC systems should be considered

References

[1] M. Alma, I.D. Landau, J.J. Martinez, and G. Buche. Identification et rejet adaptatif de perturbations mesurables 'feedforward'. Internal report, GIPSA-LAB Grenoble France, 2009.

[2] A. Constantinescu and I.D. Landau. Direct controller order reduction by identification in closed loop applied to a benchmark problem. *European Journal of Control*, 9(1), 2003.

[3] S.J. Elliott and P.A. Nelson. Active noise control. *Noise / News International*, pages 75–98, June 1994.

[4] S.J. Elliott and T.J. Sutton. Performance of feedforward and feedback systems for active control. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 4(3):214–223, May 1996.

[5] J Hu and J.F Linn. Feedforward active noise controller design in ducts without independent noise source measurements. *IEEE transactions on control system technology*, 8(3):443–455, 2000.

[6] C.A Jacobson, C.R Johnson, D.C Mc Cormick, and W.A Sethares. Stability of active noise control algorithms. *IEEE Signal Processing letters*, 8(3):74–76, 2001.

[7] M.S. Kuo and D.R. Morgan. *Active noise control systems-Algorithms and DSP implementation*. Wiley, New York,, 1996.

[8] I.D. Landau, A. Constantinescu, P. Loubat, D. Rey, and A. Franco. A methodology for the design of feedback active vibration control systems. *Proceedings of the European Control Conference 2001*, 2001. Porto, Portugal.

[9] I.D. Landau and A. Karimi. An output error recursive algorithm for unbiased identification in closed loop. *Automatica*, 33, 1997.

[10] I.D. Landau and A. Karimi. Recursive algorithms for identification in closed loop. a unified approach and evaluation. *Automatica*, 33, 1997.

[11] I.D. Landau, A. Karimi, and A. Constantinescu. Direct controller order reduction by identification in closed loop. *Automatica*, (37):1689–1702, 2001.

[12] I.D. Landau, R. Lozano, and M. M'Saad. *Adaptive control*. Springer, London, 1997.

[13] I.D. Landau and G. Zito. *Digital Control Systems - Design, Identification and Implementation*. Springer, London, 2005.

[14] L Ljung and T Sderstrm. *Theory and practice of recursive identification*. The M.I.T Press, Cambridge Massachusetts , London, England, 1983.

[15] J Zeng and R.A de Callafon. Recursive filter estimation for feedforward noise cancellation with acoustic coupling. *Journal of sound and vibration*, 291:1061–1079, 2006.

Annexe E

Adaptive Suppression of Multiple Time-Varying Unknown Vibrations Using an Inertial Actuator

par I.D. Landau, M. Alma, J.J Martinez et G. Buche
publié dans IEEE Transactions on Control Systems Technology (2011)

Adaptive suppression of multiple time varying unknown vibrations using an inertial actuator

Ioan Doré Landau, Marouane Alma, John Jairo Martinez, Gabriel Buche

***Abstract*—An active vibration control system using an inertial actuator for suppression of multiple unknown and/or time-varying vibrations will be presented. The objective is to minimize the residual force by applying an appropriate control effort through the inertial actuator. The system does not use any additional transducer for getting in real time information upon the disturbances.**

A direct feedback adaptive regulation scheme for the suppression of multiple unknown and/or time-varying vibrations will be used and evaluated in real time. It uses the internal model principle and the Youla- Kucera parametrization. In the appendix a comparison with an alternative indirect adaptive regulation scheme is presented.

***Index Terms*—direct adaptive regulation, internal model principle, Youla-Kucera parametrization, adaptive disturbance rejection, multiple narrow band disturbances, inertial actuators**

I. Introduction

ONE of the basic problems in active vibration control is the attenuation of multiple vibrations of unknown and time varying frequencies using only the measurement of the residual force (or acceleration).

From a hardware point of view one of the solutions is to use an active suspension system. See for example ([20]). However the technology have evolved towards the use of inertial (electro-dynamic) actuators ([26]). Using this technology, the system can be composed on co-located and non co-located passive dampers, inertial actuators and force/acceleration measurements leading to a better efficiency. In this paper we will consider an active vibration control system using an inertial actuator in a co-located configuration.

Vibrations correspond to disturbances with energy concentrated in a narrow band around unknown and/or time-varying frequencies. From a ”signal and system ” perspective one can view these disturbances as a white noise or a Dirac impulse passed through a ”model of the disturbance”. To be more specific, the disturbances considered can be defined as ”finite band disturbances”. This includes single or multiple narrow band disturbances or sinusoidal disturbances. While in general one can assume a certain structure for such ”model of disturbance”, its parameters are unknown and may be time varying. From a control point of view the objective is the attenuation (rejection) of unknown disturbances without measuring them. Since the model of the disturbances is unknown and time varying, this will require to use an adaptive approach. We have to solve an adaptive regulation problem since the objective is the attenuation of unknown disturbances without measuring them. While the disturbances are narrow band disturbances of unknown and time varying frequency (within a certain frequency region), the dynamic characteristics of the active vibration system itself for a given physical realization are practically constant. The corresponding ”control model” to be used for control design (and tuning) can be identified from input/output data. Furthermore for robustness reasons the disturbances should be located in the frequency domain within the regions where the plant (the ”active part”) has enough gain (see explanation in section IV).

Solutions for this problem, provided that an ”image” of the disturbance can be obtained by using an additional transducer, have been proposed by the signal processing community and a number of applications are reported ([12], [13], [6], [15]). However, these solutions (inspired by Widrow’s technique for adaptive noise cancellation ([30])) ignore the possibilities offered by feedback control systems and require an additional transducer. The principle of this *signal processing solution* for adaptive rejection of unknown disturbances is that a transducer can provide a measurement, highly correlated with the unknown disturbance. This information is applied to the control input of the plant through an adaptive filter (in general a Finite Impulse Response - FIR) whose parameters are adapted such that the effect of the disturbance upon the output is minimized. The disadvantages of this approach are:

- It requires the use of an additional transducer.
- Difficult choice for the location of this transducer (it is probably the main disadvantage).
- It requires the adaptation of many parameters.

To achieve the rejection of the disturbance (at least asymptotically) without measuring it, an *adaptive feedback solution* can be considered. This approach does not require the use of an additional measurement (([2], [3], [20], [9]). As mentioned earlier, the common framework is the assumption that the disturbance is the result of a white noise or a Dirac impulse passed through the ”model of the disturbance” [1]. In the present paper we are in the context of an adaptive regulation problem with a known plant model and an unknown disturbance model. This type of problem has been considered in ([8], [2], [3], [29], [27], [11], [16], [17], [20]) among other references.

The following approaches considered for solving this problem may be mentioned:

1) Use of the internal model principle ([14], [18], [5], [28], [29], [2], [3], [16], [17], [20]).

I.D. Landau, M. Alma, J.J. Martinez and G. Buche are with control system department of Gipsa-lab, St martin d’héres, 38402 FRANCE e-mail: ([ioan-dore.landau, marouane.alma, john-jairo.martinez-molina, Gabriel.Buche]@gipsa-lab.grenoble-inp.fr).

[1]Throughout the paper it is assumed that the order of the disturbance model is known but the parameters of the model are unknown (the order can be estimated from data if necessary).

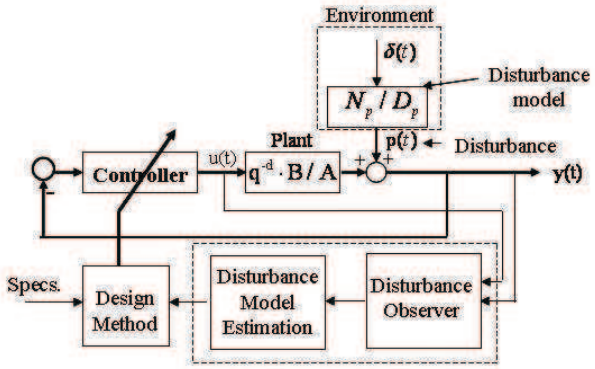


Fig. 1. Indirect adaptive regulation scheme for rejection of unknown disturbances

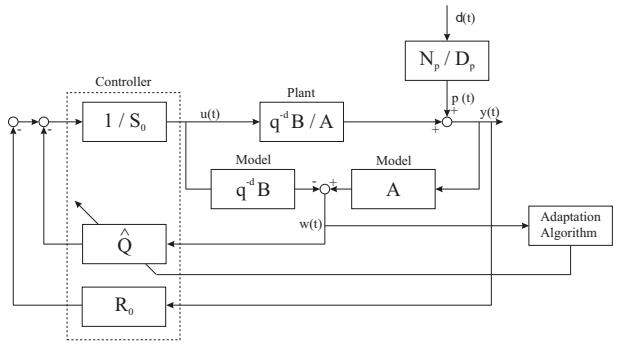


Fig. 2. Direct adaptive regulation scheme for rejection of unknown disturbances

2) Use of an observer for the disturbance ([27], [11]).
3) Use of the "phase-locked" loop structure considered in communication systems ([8], [7]).

Of course, since the parameters of the disturbance model are unknown, all these approaches lead to an adaptive implementation which can be of *direct* or *indirect* type.

From the user point of view and taking into account the type of operation of existing adaptive disturbance compensation systems one has to consider two modes of operation of the adaptive schemes:

- *Adaptive* operation (the adaptation is performed continuously and the controller is updated at each sampling).
- *Self-tuning* operation (the adaptation procedure starts either on demand or when the performance is unsatisfactory).

In order to reject the disturbances in a feedback configuration one has to use the internal model principle. The controller should incorporate the model of the disturbance ([14], [18], [5], [28]). Therefore the rejection of unknown disturbances raises the problem of adapting the internal model of the controller and its re-design in real-time.

One way for solving this problem is to try to estimate in real time the model of the disturbance and re-compute the controller. The estimated model of the disturbance will be included in the controller (as a pre-specified element of the controller). While the disturbance is unknown and its model needs to be estimated, one assumes that the model of the plant is known (obtained for example by identification). The estimation of the disturbance model can be done by using standard parameter estimation algorithms (see for example [23], [25]) provided that a relevant "disturbance observer" can be built. This will lead to an indirect adaptive regulation scheme. The principle of such a scheme is illustrated in figure 1. The time consuming part of this approach is the redesign of the controller at each sampling time. The reason is that in many applications the plant model can be of very high dimension and despite that this model is constant, one has to re-compute the controller because a new internal model should be considered. This approach has been investigated in [8], [16], [17], [20] (see also Appendix A).

However, by considering the Youla-Kucera parametrization of the controller (known also as the Q-parametrization), it is possible to insert and adjust the internal model in the controller by adjusting the parameters of the Q polynomial (see figure 2). In the presence of unknown disturbances it is possible to build a direct adaptive control scheme where the parameters of the Q polynomial are directly adapted in order to have the desired internal model without recomputing the controller (polynomials R_0 and S_0 in figure 2 remain unchanged). The number of the controller parameters to be directly adapted is roughly equal to the number of parameters of the denominator of the disturbance model. In other words, the size of the adaptation algorithm will depend upon the complexity of the disturbance model.

As it will be shown experimentally, the adaption transients are very short. One of the reasons is that the system operates with a "persistent excitation" (the disturbance). Another reason is the efficiency of the adaption algorithm. This allows to consider narrow band disturbances with time varying frequency. However the time varying character of the disturbances is limited by the duration of the adaptation transient.

The novelties of this paper are:

- Presentation of a direct adaptive regulation scheme implemented in an active vibration control systems using inertial actuators.
- Its application to rejection of multiple unknown vibrations (to the authors' knowledge all the references available deals only with one eventually two vibrations).
- Improvement of the indirect adaptive regulation scheme proposed in [20] and experimental comparison with the direct adaptive regulation scheme.

The paper is organized as follows. Section II, presents the active vibration control system using an inertial actuator on which the algorithms will be tested. Section III is dedicated to a brief review of the plant, disturbance and controller representation, Internal Model Principle and Q-parametrization. Some robustness issues are addressed in section IV. The direct adaptive control schemes for disturbance rejection is presented in section V. Section VI presents the results obtained in real time on the active vibration control system. Some concluding remarks are given in section VII. An indirect adaptive regulation scheme, experimental results and comparisons with the direct adaptive regulation scheme are presented in Appendix A. The preservation of fixed parts in the controller under Q-

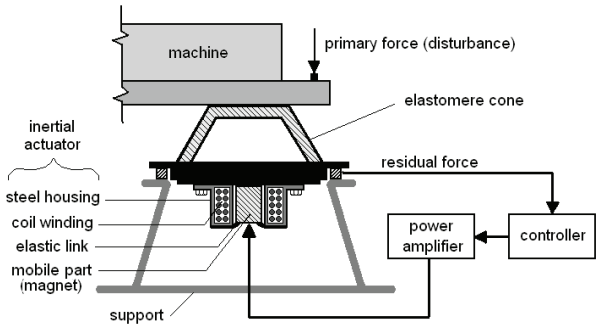


Fig. 3. Active vibration control using an inertial actuator (scheme)

parametrization is discussed in Appendix B.

II. An active vibration control system using an inertial actuator

The structure of the system used in this paper is presented in figure 3. A general view of the whole system including the testing equipment is shown figure 4. It consists on a passive damper, an inertial actuator, a load, a transducer for the residual force, a controller, a power amplifier and a shaker. The mechanical construction of the load is such that the vibration produced by the shaker, fixed to the ground, are transmitted to the upper side, on top of the passive damper. The inertial actuator will create vibrational forces which can counteract the effect of vibrational disturbances (inertial actuators uses a similar principle as loudspeakers). It is fixed to the chassis where the vibrations should be attenuated. The controller, through the power amplifier, will generate current in the mobile coil which will produce a movement in order to reduce the residual force. The equivalent control scheme is shown in figure 5. The system input, $u(t)$ is the position of the mobile part (magnet) (see figures 3, 5), the output $y(t)$ is the residual force measured by a force sensor. The transfer function ($q^{-d_1}\frac{C}{D}$), between the disturbance force, u_p, and the residual force $y(t)$ is called *primary path*. In our case (for testing purposes), the primary force is generated by a shaker driven by a signal delivered by the computer. The plant transfer function ($q^{-d}\frac{B}{A}$) between the input of the inertial actuator, $u(t)$, and the residual force is called *secondary path*. The input of the system being a position and the output a force, the secondary path transfer function has a double differentiator behavior.

The control objective is to reject the effect of unknown narrow band disturbances on the output of the system (residual force), i.e. to attenuate the vibrations transmitted from the machine to the chassis. The physical parameters of the system are in general not available. The system has to be considered as a "black box" and the corresponding models for control design should be identified. The sampling frequency is $800Hz$.

As will be shown later, the system itself in the absence of the disturbances will feature a number of low damped vibration modes as well as low damped complex zeros (anti-resonance)

Fig. 4. Active vibration control system (photo)

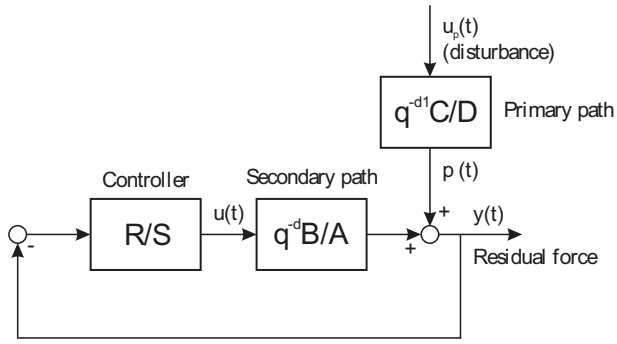


Fig. 5. Block diagram of active vibration suppression systems

III. Plant representation and controller structure

The structure of the linear time invariant discrete time model of the plant -the secondary path- used for controller design is:

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-d-1}B^*(z^{-1})}{A(z^{-1})} \ , \qquad (1)$$

with:

$d =$ the plant pure time delay in number of sampling periods

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A} \ ; \\ B &= b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B} = q^{-1} B^* \ ; \\ B^* &= b_1 + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B+1} \ , \end{aligned}$$

where $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $B^*(z^{-1})$ are polynomials in the complex variable z^{-1} and n_A, n_B and $n_B - 1$ represent their orders[2]. The model of the plant may be obtained by system identification. Details on system identification of the models considered in this paper can be found in [24], [9], [21], [19], [1], [10].

Since in this paper we are focused on regulation, the controller to be designed is a RS-type polynomial controller ([22], [24]) - see also figure 5.

[2]The complex variable z^{-1} will be used for characterizing the system's behavior in the frequency domain and the delay operator q^{-1} will be used for describing the system's behavior in the time domain.

The output of the plant $y(t)$ and the input $u(t)$ may be written as:

$$y(t) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \cdot u(t) + p(t) \; ; \quad (2)$$

$$S(q^{-1}) \cdot u(t) = -R(q^{-1}) \cdot y(t) \; , \quad (3)$$

where q^{-1} is the delay (shift) operator ($x(t) = q^{-1}x(t+1)$) and $p(t)$ is the resulting additive disturbance on the output of the system. $R(z^{-1})$ and $S(z^{-1})$ are polynomials in z^{-1} having the orders n_R and n_S, respectively, with the following expressions:

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + \ldots + r_{n_R} z^{-n_R} = R'(z^{-1}) \cdot H_R(z^{-1}) \; ; \quad (4)$$

$$S(z^{-1}) = 1 + s_1 z^{-1} + \ldots + s_{n_S} z^{-n_S} = S'(z^{-1}) \cdot H_S(z^{-1}) \; , \quad (5)$$

where H_R and H_S are pre-specified parts of the controller (used for example to incorporate the internal model of a disturbance or to open the loop at certain frequencies).

We define the following sensitivity functions:

- Output sensitivity function (the transfer function between the disturbance $p(t)$ and the output of the system $y(t)$):

$$S_{yp}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{P(z^{-1})} \; ; \quad (6)$$

- Input sensitivity function (the transfer function between the disturbance $p(t)$ and the input of the system $u(t)$):

$$S_{up}(z^{-1}) = -\frac{A(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})} \; , \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} P(z^{-1}) &= A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1}) \\ &= A(z^{-1})S'(z^{-1}) \cdot H_S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R'(z^{-1}) \cdot H_R(z^{-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

defines the poles of the closed loop (roots of $P(z^{-1})$).
In pole placement design, the polynomial $P(z^{-1})$ specifies the desired closed loop poles and the controller polynomials $R(z^{-1})$ and $S(z^{-1})$ are minimal degree solutions of (8) where the degrees of P, R and S are given by: $n_P \leq n_A + n_B + d - 1$, $n_S = n_B + d - 1$ and $n_R = n_A - 1$.
Using equations (2) and (3), one can write the output of the system as:

$$y(t) = \frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot p(t) = S_{yp}(q^{-1}) \cdot p(t) \; . \quad (9)$$

For more details on RS-type controllers and sensitivity functions see [24].

Suppose that $p(t)$ is a deterministic disturbance, so it can be written as

$$p(t) = \frac{N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) \; , \quad (10)$$

where $\delta(t)$ is a Dirac impulse and $N_p(z^{-1})$, $D_p(z^{-1})$ are coprime polynomials in z^{-1}, of degrees n_{N_p} and n_{D_p}, respectively. In the case of stationary disturbances, the roots of $D_p(z^{-1})$ are on the unit circle. The energy of the disturbance is essentially represented by D_p. The contribution of the terms of N_p is weak compared to the effect of D_p, so one can neglect the effect of N_p.

Internal Model Principle: The effect of the disturbance given in (10) upon the output:

$$y(t) = \frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \frac{N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) \; , \quad (11)$$

where $D_p(z^{-1})$ is a polynomial with roots on the unit circle and $P(z^{-1})$ is an asymptotically stable polynomial, converges asymptotically towards zero if and only if the polynomial $S(z^{-1})$ in the RS controller has the form:

$$S(z^{-1}) = D_p(z^{-1})S'(z^{-1}) \; . \quad (12)$$

In other terms, the pre-specified part of $S(z^{-1})$ should be chosen as $H_S(z^{-1}) = D_p(z^{-1})$ and the controller is computed using (8), where P, D_p, A, B, H_R and d are given[3].

Using the Youla-Kucera parametrization (Q-parametrization) of all stable controllers ([4], [28]), the controller polynomials $R(z^{-1})$ and $S(z^{-1})$ get the form:

$$R(z^{-1}) = R_0(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1}) \; ; \quad (13)$$

$$S(z^{-1}) = S_0(z^{-1}) - z^{-d}B(z^{-1})Q(z^{-1}) \; . \quad (14)$$

The (central) controller (R_0, S_0) can be computed by poles placement (but any other design technique can be used). Given the plant model (A, B, d) and the desired closed-loop poles specified by the roots of $P(z^{-1})$ one has to solve:

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S_0(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R_0(z^{-1}) \; . \quad (15)$$

Equations (13) and (14) characterize the set of all stabilizable controllers assigning the closed loop poles as defined by $P(z^{-1})$ (it can be verified by simple calculations that the poles of the closed loop remain unchanged). For the purpose of this paper $Q(z^{-1})$ is considered to be a polynomial of the form:

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_{n_Q} z^{-n_Q} \; . \quad (16)$$

To compute $Q(z^{-1})$ in order that the polynomial $S(z^{-1})$ given by (14) incorporates the internal model of the disturbance (12) one has to solve the diophantine equation:

$$S'(z^{-1})D_p(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})Q(z^{-1}) = S_0(z^{-1}) \; , \quad (17)$$

where $D_p(z^{-1})$, d, $B(z^{-1})$ and $S_0(z^{-1})$ are known and $S'(z^{-1})$ and $Q(z^{-1})$ are unknown. Equation (17) has a unique solution for $S'(z^{-1})$ et $Q(z^{-1})$ with: $n_{S_0} \leq n_{D_p} + n_B + d - 1$, $n_{S'} = n_B + d - 1$, $n_Q = n_{D_p} - 1$. One sees that the order n_Q of the polynomial Q depends upon the structure of the disturbance model.

IV. Robustness considerations

As it is well known, the introduction of the internal model for the perfect rejection of the disturbance (asymptotically) may have as effect to raise the maximum value of the modulus of the output sensitivity function S_{yp}. This may lead to unacceptable values for the modulus margin $(|S_{yp}(e^{-j\omega}|)^{-1}_{max})$ and the delay margins if the design of the central controller is not appropriately done (see [24]). As a consequence, a robust control design should be considered assuming that the model of the disturbance and its domain of variations

[3]Of course it is assumed that D_p and B do not have common factors.

in the frequency domain are known. The objective is that for all situations (which means for all possible values of the frequency of the disturbance and the corresponding Q-polynomial) an acceptable modulus margin (i.e. an acceptable value of the maximum of the output sensitivity function) and delay margin are obtained. The optimal design of the central controller in this context is in the opinion of the authors an open problem. It is important to mention that the "tuned" linear controller will give the maximum achievable performance for the adaptive configuration.

Furthermore, at the frequencies where perfect rejection of the disturbance is achieved one has $S_{yp}(e^{-j\omega}) = 0$ and

$$\left|S_{up}(e^{-j\omega})\right| = \left|\frac{A(e^{-j\omega})}{B(e^{-j\omega})}\right| \ . \tag{18}$$

Equation (18) corresponds to the inverse of the gain of the system to be controlled. The implication of equation (18) is that cancellation (or in general an important attenuation) of disturbances on the output should be done only in frequency regions where the system gain is large enough. If the gain of the controlled system is too low, $|S_{up}|$ will be large at these frequencies. Therefore, the robustness vs additive plant model uncertainties will be reduced and the stress on the actuator will become important [24]. Equation (18) also implies that serious problems will occur if $B(z^{-1})$ has complex zeros close to the unit circle (stable or unstable zeros) at frequencies where an important attenuation of disturbances is required. It is mandatory to avoid attenuation of disturbances at these frequencies.

Since on one hand we would not like to react to very high frequency disturbances where the system gain is low and on the other hand we would like to have a good robustness at high frequencies, it is often wise to open the loop at $0.5f_s$ (f_s is the sampling frequency) by introducing a fixed part in the controller $H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-1}$ (for details see [24] and section III).

V. Direct adaptive control for disturbance attenuation

The objective is to find an estimation algorithm which will directly estimate the parameters of the internal model in the controller in the presence of an unknown disturbance (but of known structure) without modifying the closed loop poles. Clearly, the Q-parametrization is a potential option since modifications of the Q polynomial will not affect the closed loop poles. In order to build an estimation algorithm it is necessary to define an *error equation* which will reflect the difference between the optimal Q polynomial and its current value.

In [28], such an error equation is provided and it can be used for developing a direct adaptive control scheme. This idea has been used in [29], [2], [3], [20].

Using the Q-parametrization, the output of the system in the presence of a disturbance can be expressed as:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A(q^{-1})[S_0(q^{-1}) - q^{-d}B(q^{-1})Q(q^{-1})]}{P(q^{-1})} \cdot \frac{N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) \\ &= \frac{S_0(q^{-1}) - q^{-d}B(q^{-1})Q(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \ , \end{aligned} \tag{19}$$

where w(t) is given by (see also figure 2):

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{A(q^{-1})N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) \\ &= A(q^{-1}) \cdot y(t) - q^{-d} \cdot B(q^{-1}) \cdot u(t) \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Note that $w(t)$ is a filtered image of the disturbance.

In the time domain, the internal model principle can be interpreted as finding Q such that asymptotically $y(t)$ becomes zero. Assume that one has an estimation of $Q(q^{-1})$ at instant t, denoted $\hat{Q}(t,q^{-1})$. Define $\varepsilon^0(t+1)$ as the value of $y(t+1)$ obtained with $\hat{Q}(t,q^{-1})$.

Using (19) one gets:

$$\varepsilon^0(t+1) = \frac{S_0(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t+1) - \hat{Q}(t,q^{-1})\frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \ . \tag{21}$$

Define now the *a posteriori* error (using $\hat{Q}(t+1,q^{-1})$) as:

$$\varepsilon(t+1) = \frac{S_0(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t+1) - \hat{Q}(t+1,q^{-1})\frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \ . \tag{22}$$

Replacing $S_0(q^{-1})$ from the last equation by (17) one obtains:

$$\varepsilon(t+1) = [Q(q^{-1}) - \hat{Q}(t+1,q^{-1})] \cdot \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) + v(t+1) \ , \tag{23}$$

where

$$v(t) = \frac{S'(q^{-1})D_p(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) = \frac{S'(q^{-1})A(q^{-1})N_p(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \delta(t)$$

is a signal which tends asymptotically towards zero.

Define the estimated polynomial $\hat{Q}(t,q^{-1})$ as: $\hat{Q}(t,q^{-1}) = \hat{q}_0(t) + \hat{q}_1(t)q^{-1} + \ldots + \hat{q}_{n_Q}(t)q^{-n_Q}$ and the associated estimated parameter vector : $\hat{\theta}(t) = [\hat{q}_0(t)\,\hat{q}_1(t)\ldots\hat{q}_{n_Q}(t)]^T$. Define the fixed parameter vector corresponding to the optimal value of the polynomial Q as: $\theta = [q_0\,q_1\ldots q_{n_Q}]^T$.

Denote:

$$w_2(t) = \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \tag{24}$$

and define the following observation vector:

$$\phi^T(t) = [w_2(t) \quad w_2(t-1)\ldots w_2(t-n_Q)] \ . \tag{25}$$

Equation (23) becomes

$$\varepsilon(t+1) = [\theta^T - \hat{\theta}^T(t+1)] \cdot \phi(t) + v(t+1) \ . \tag{26}$$

One can remark that $\varepsilon(t+1)$ corresponds to an adaptation error ([22]).

From equation (21) one obtains the *a priori* adaptation error:

$$\varepsilon^0(t+1) = w_1(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t) \ ,$$

with

$$w_1(t+1) = \frac{S_0(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t+1) \ ; \tag{27}$$

$$w_2(t) = \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \ ; \tag{28}$$

$$w(t+1) = A(q^{-1}) \cdot y(t+1) - q^{-d}B^*(q^{-1}) \cdot u(t) \ , \tag{29}$$

where $B(q^{-1})u(t+1) = B^*(q^{-1})u(t)$.

The *a posteriori* adaptation error is obtained from (22):

$$\varepsilon(t+1) = w_1(t+1) - \hat{\theta}^T(t+1)\phi(t) \ .$$

For the estimation of the parameters of $\hat{Q}(t,q^{-1})$ the following parameter adaptation algorithm is used ([22]):

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t)+F(t)\phi(t)\varepsilon(t+1) \; ; \quad (30)$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^0(t+1)}{1+\phi^T(t)F(t)\phi(t)} \; ; \quad (31)$$

$$\varepsilon^0(t+1) = w_1(t+1)-\hat{\theta}^T(t)\phi(t) \; ; \quad (32)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)}\left[F(t)-\frac{F(t)\phi(t)\phi^T(t)F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)}+\phi^T(t)F(t)\phi(t)}\right] \quad (33)$$

$$1 \geq \lambda_1(t) > 0; 0 \leq \lambda_2(t) < 2 \quad (34)$$

where $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ allow to obtain various profiles for the evolution of the adaption gain $F(t)$ (for details see [22], [24].

In order to implement this methodology for disturbance rejection (see figure 2), it is supposed that the plant model $\frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ is known (identified) and that it exists a controller $[R_0(z^{-1}), S_0(z^{-1})]$ which verifies the desired specifications in the absence of the disturbance. One also supposes that the degree n_Q of the polynomial $Q(z^{-1})$ is fixed, $n_Q = n_{D_p} - 1$, i.e. the structure of the disturbance is known.

The following procedure is applied at each sampling time for *adaptive* operation:

1) Get the measured output $y(t+1)$ and the applied control $u(t)$ to compute $w(t+1)$ using (29).
2) Compute $w_1(t+1)$ and $w_2(t)$ using (27) and (28) with P given by (15).
3) Estimate the Q-polynomial using the parametric adaptation algorithm (30) - (33).
4) Compute and apply the control (see figure 2):

$$S_0(q^{-1})\cdot u(t+1) = -R_0(q^{-1})\cdot y(t+1) - \hat{Q}(t+1,q^{-1})\cdot w(t+1) \; . \quad (35)$$

In the *adaptive* operation one uses in general an adaptation gain updating with variable forgetting factor $\lambda_1(t)$ (the forgetting factor tends towards 1), combined with a *constant trace* adaption gain. The equation for updating the variable forgetting factor is :

$$\lambda_1(t) = \lambda_0\lambda_1(t-1) + (1-\lambda_0) \quad (36)$$

with $\lambda_1(0) = \lambda_0 = 0.95$ to 0.99.

Once the trace of the adaptation gain is below a given value, one switches to the constant trace gain updating. The trace of the adaptation gain $F(t)$ is maintained constant by modifying appropriately $\lambda_1(t)$ for a fixed ratio $\alpha(t) = \lambda_1(t)/\lambda_2(t)$. The corresponding formula is:

$$trF(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)}tr[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\alpha(t)+\phi(t)^T F(t)\phi(t)}] = trF(t) \quad (37)$$

where $\alpha(t) = \lambda_1(t)/\lambda_2(t)$ is kept constant.

The advantage of the *constant trace* gain updating is that the adaptation move in an optimal direction (least squares) but the size of the step does not goes to zero. For details see [24], [22]

For the *self tuning* operation of the adaptive scheme, the estimation of the Q- polynomial starts once the level of the output is over a defined threshold. A parameter adaptation algorithm (30)-(33) with *decreasing adaption gain* ($\lambda_1(t) = 1 and \lambda_2(t) = 1$) or with *variable forgetting factor and decreasing gain* is used.

It is important to remark that the regressor vector ϕ contains filtered values of $w(t)$ which means that in the presence of disturbances one gets a "persistent excitation" and this will lead to parameter convergence. For stability and parameter convergence analysis of this scheme see [20].

VI. Adaptive rejection of multiple narrow band disturbances on an active vibration control system using an inertial actuator

A. Plant identification and central controller design

The primary path (between the shaker excitation and the residual force) has been identified in open loop operation. The excitation signal was a PRBS (pseudo random binary sequence) generated with a shift register with $N = 10$ and a frequency divider of $p = 4$ [24]. The estimated order of the model is: $n_C = 10$, $n_D = 8$, $d_1 = 0$. The best results in term of model validation were obtained with *Recursive Extended Least Square* method. The frequency characteristic of the primary path is shown in figure 6 (dashed). There exist one very low damped vibration mode at $99.27Hz$ with a damping of 0.023 and two zeros on the unit circle corresponding to a double differentiator.

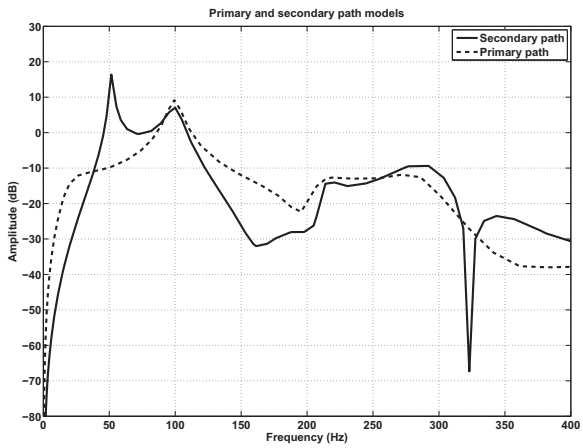


Fig. 6. Frequency characteristics of the primary and secondary paths (active vibration control with inertial actuator)

The secondary path has been identified both in open and in closed loop operation with the central controller. The two models obtained are very close. Same excitation signal as for the primary path has been used. The estimated order of the model is $n_B = 13$, $n_A = 11$, $d = 0$. In open loop the best results in terms of model validation were obtained with *Recursive Extended Least Square* method, and in closed loop operation the best results were obtained with *Extended Closed Loop Output Error* method (see [24], [22]). The frequency characteristic of the secondary path (identified in closed loop operation) is shown in figure 6 (continue). There exist several very low damped vibration modes in the secondary path. The first vibration mode is at $51.2Hz$ with a damping of 0.023 and the second at $99.8Hz$ with a damping of 0.083. There are two

zeros on the unit circle corresponding to a double differentiator behaviour.

The central controller (without internal model) has been designed using pole placement with sensitivity shaping [24]. The closed loop poles are the complex poles of the open loop model but with a higher damping plus auxiliary high frequency aperiodic poles introduced for robustness reasons. In addition a prespecified part $H_R = 1 + q^{-1}$ has been introduced in order to open the loop at $0.5 f_s$. The fixed parts included in the central controller should be preserved under the Q-parametrization (details can be found in Appendix B). The complexity of the central controller is $n_R = 18$, $n_S = 20$, and it satisfies the imposed constraints on the sensitivity functions.

The frequency domain in which vibrations will be attenuated is between 45 and $105Hz$.

B. The case of two simultaneous narrow band disturbances

The performance of the system for rejecting multiple unknown time varying narrow band disturbances will be illustrated using the direct adaptive regulation scheme. Two simultaneous time varying frequency sinusoids will be considered as disturbances. In this case one should take $n_{D_p} = 4$ and $n_Q = n_{D_p} - 1 = 3$.
Time domain results obtained with the direct adaptation scheme in "adaptive" operation regime are shown in Figure 7. The disturbances are applied at $1s$ (the loop has already been closed) and step changes of their frequencies occur every $3s$. The convergence of the output requires less than $0.7s$ in the worst case.

Figure 8 shows the corresponding evolution of the parameters of the polynomial Q.

Figure 9 shows the spectral densities of the residual force obtained in open loop and in closed loop using the direct adaptation scheme (after the adaptation algorithm has converged). The results are given for the simultaneous applications of two sinusoidal disturbances ($65Hz$ and $95Hz$). One can remark a strong attenuation of the disturbances

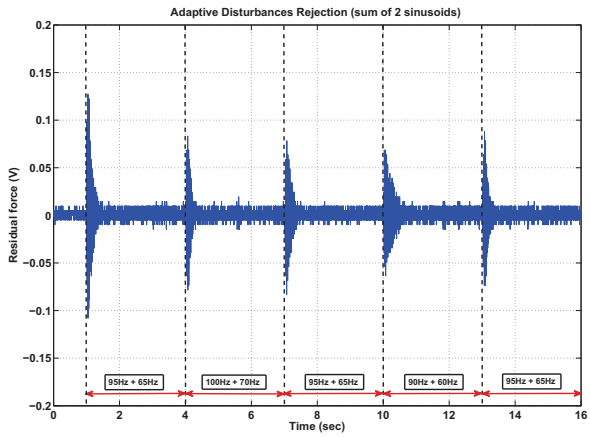


Fig. 7. Time domain results with direct adaptation scheme for simultaneous frequency step changes of two sinusoidal disturbances

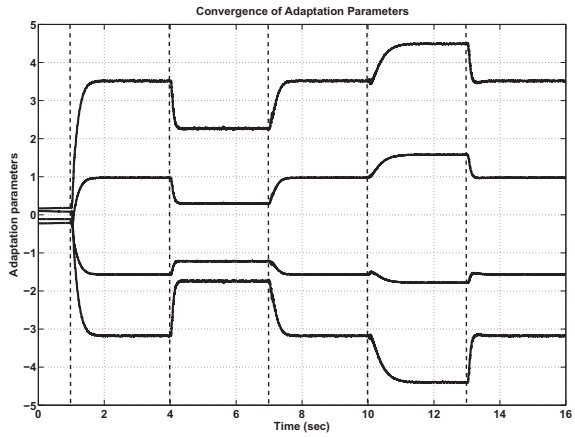


Fig. 8. Evolution of the parameters of the polynomial Q during adaptation (two sinusoidal disturbances)

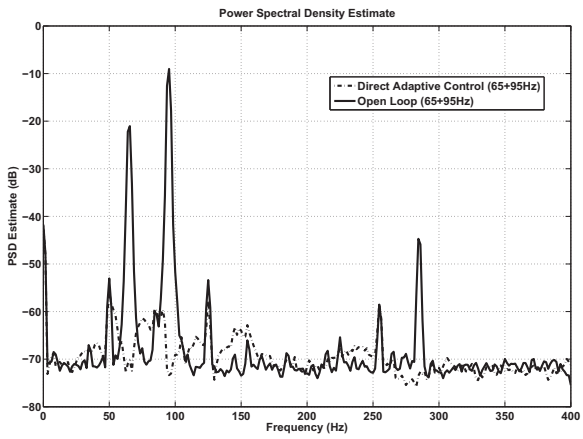


Fig. 9. Spectral densities of the residual force in open and in closed loop, with the direct adaptation scheme - the case of 2 sinusoidal disturbances

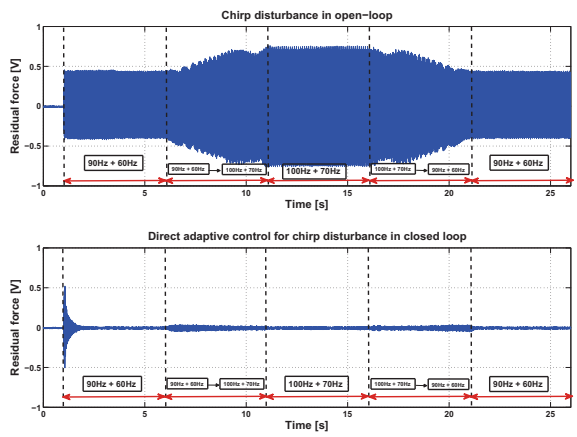


Fig. 10. Real-time results obtained with two chirp disturbances in open and closed loop

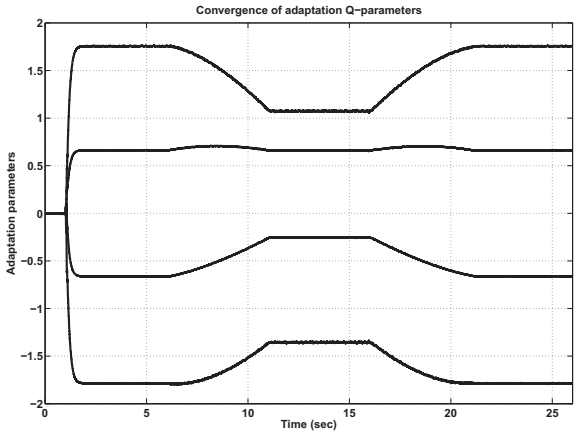


Fig. 11. Evolution of the parameters of the polynomial Q in presence of two chirp disturbances

(larger than $45dB$).
We note the presence of some harmonics in open loop, as a consequence of a slightly non-linear behavior of the primary path. These harmonics are reduced in adaptive closed loop operation. There is also a permanent measurement noise at $50Hz$ (the power network), which is however not amplified in closed loop.
The variance of the residual force in open loop is: $var(yol) = 1.087510^{-1}$. In closed loop (after the adaptation algorithm has converged), the variance is: $var(ycl) = 5.6428.10^{-5}$. This corresponds to a global attenuation of $66dB$.

Consider now that the frequencies of the two sinusoidal disturbances vary continuously and let us use a chirp disturbance signal (linear swept-frequency signal) between [60-90Hz] and [70-100Hz]. The test have been done as follow: Start up in closed loop at $t = 0$ with the central controller (S_0, R_0). The adaptation algorithm works permanently. At $1s$, two sinusoidal disturbances of [60-90Hz] (constant frequencies) are applied on the shaker. From 6 to 11s two chirps between [60-90Hz] and [70-100Hz] are applied. From 11s to 16s two constant frequencies [70-100Hz] are applied. After that, an inverse operation (from [70-100Hz] to [60-90Hz]) is considered. At 21s, constant distubances of [60-90Hz] are applied and the tests are stopped after 26s. The time-domain results obtained in open and in closed loop are presented in Figure 10. The evolution of the parameters is shown in Figure 11.
The performances obtained are very good. One can conclude that step changes in frequency every second and continuous changes in frequency at the rate 2Hz/s can be followed.

C. The case of three simultaneous narrow band disturbances

We will illustrate the rejection of three simultaneous sinusodal disturbances using the direct adaptive control scheme. In this case one should take $n_{D_p} = 6$ and $n_Q = n_{D_p} - 1 = 5$. Time domain results and corresponding evolution of the parameters of the polynomial Q obtained with direct adaptation scheme in "adaptive" operation regime are presented in figures 12 and 13. The same protocol of the disturbances application as in the previous case has been considered (disturbances are applied at $1s$ and step changes of their frequencies occur every $3s$). The convergence of the output requires $0.8s$ in the worst case. Figure 14 shows the spectral densities of the residual force obtained in open loop, in closed loop with a tuned linear controller and in closed loop using the direct adaptation scheme (after the adaptation algorithm has converged). The results are given for the simultaneous applications of three sinusoidal disturbances ($60Hz$, $80Hz$ and $100Hz$). One can remark a strong attenuation of the disturbances (larger than $45dB$). The limit of performance is given by the tuned linear controller. One can see that the results provided by the adaptive scheme are very close.

As for the case of two sinusoidal disturbances, some harmonics appear in open loop operation. Their effects are reduced in adaptive closed loop operation or when a tuned linear controller is used. In closed loop, an acceptable amplification of some frequencies outside the attenuation band is observed both for the tuned linear controller and for the adaptive scheme. An improved design of the central controller may assure a different distribution of this amplification over the frequency domain (lower maximum value). The measurement noise at $50Hz$ is not amplified in closed loop.
The variance of the residual force in open loop is: $var(yol) = 1.0792.10^{-1}$. In closed loop (after the adaptation algorithm has converged), the variance is: $var(ycl) = 6.0370.10^{-4}$. This corresponds to a global attenuation of $45dB$.

Following the same protocol as in the case of rejection of two sinusoidal disturbances, three simultaneous chirp disturbances varying linearly from [$60Hz$, $80Hz$, 100] to [$70Hz$, $90Hz$, $110Hz$] were applied and the results in open and in closed loop are presented in figure 15. Once again the performances obtained are very good. Step changes in frequency every second and continuous changes in frequency at the rate 2Hz/s can be followed.

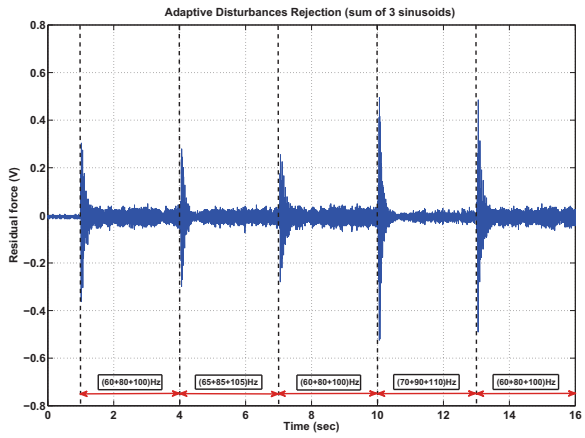


Fig. 12. Time domain results with direct adaptation scheme for simultaneous frequency step changes of three sinusoidal disturbances

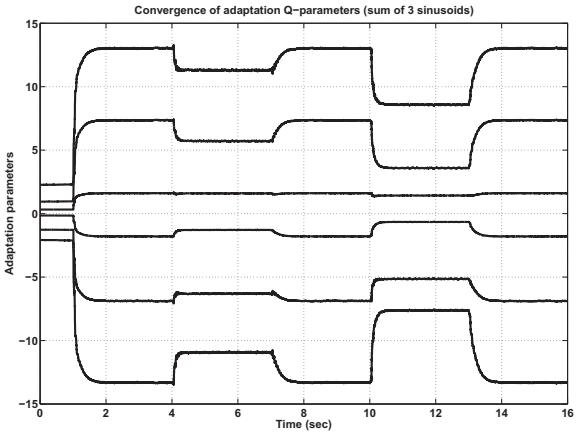


Fig. 13. Evolution of the parameters of the polynomial Q during adaptation (three sinusoidal disturbances)

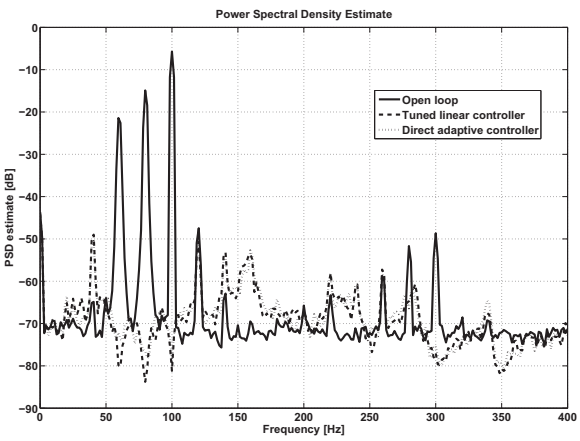


Fig. 14. Spectral densities of the residual force in open an in closed loop, with the direct adaption scheme and with the tuned linear controller - the case of 3 sinusoidal disturbances

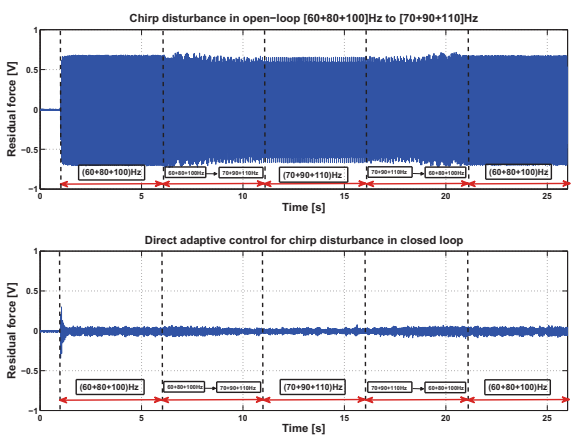


Fig. 15. Real-time results obtained with three chirp disturbances in open and closed loop

VII. Conclusions

The results obtained in real time on an active vibration control system (using an inertial actuator) illustrate the potential of the direct adaptive regulation scheme proposed for active vibration control. The key idea is the direct adaptation of the internal model of the controller made possible by an appropriate Yula - Kucera parametrization of the controller. The comparison done with an indirect adaptive regulations scheme (see Appendix A) indicates that the direct adaptive regulation approach offer excellent performance and it is much simpler to implement than the indirect one.

Further research has to be directed toward:

- Establishing theoretical bounds for the adaptation transients.
- Optimal design of the central controller taking in account the domain of variation of the narrow band disturbances in the frequency domain.

Appendix A
Indirect adaptive control for narrow band disturbance attenuation

The methodology proposed in this section concerns the indirect adaptive regulation for the attenuation of narrow band disturbances and consists in two steps: 1) Identification of the disturbance model. 2) Computation of a digital controller using the identified disturbance model.

For the identification of the disturbance model one has to set first a reliable observer of the disturbance.

Provided that the model of the secondary path is known (which is the case in our context), an estimation $\hat{p}(t)$ of the disturbance $p(t)$ is given by [[8], [16]]:

$$\hat{p}(t) \quad = \quad y(t) - \frac{q^{-d}B}{A}u(t). \tag{38}$$

However from (20) one has:

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{A(q^{-1})N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot \delta(t) = A(q^{-1})p(t) \\ &= A(q^{-1}) \cdot y(t) - q^{-d} \cdot B(q^{-1}) \cdot u(t) \ . \end{aligned} \tag{39}$$

The signal $w(t)$ (see also figure 2) can be viewed as an estimation of the disturbance filtered though the polynomial $A(q^{-1})$. Both solutions for getting an estimation of the disturbances can be used. For numerical reasons the use of $w(t)$ is preferred (since the polynomial $A(q^{-1})$ may have roots close to the unit circle).

The disturbance is considered as a stationary signal having a rational spectrum. As such it may be considered as the output of a filter with the transfer function $N_p(z^{-1})/D_p(z^{-1})$ and a white noise as input:

$$D_p(q^{-1}) \cdot p(t) = N_p(q^{-1}) \cdot e(t) \text{ or } p(t) = \frac{N_p(q^{-1})}{D_p(q^{-1})} \cdot e(t), \tag{40}$$

where $e(t)$ represents a gaussian white noise, and

$$\begin{aligned} N_p(z^{-1}) &= 1 + n_{p_1}z^{-1} + \ldots + n_{p_{n_{N_p}}}z^{-n_{N_p}} = 1 + z^{-1}N_p^*(z^{-1}) \ ; \\ D_p(z^{-1}) &= 1 + d_{p_1}z^{-1} + \ldots + d_{p_{n_{D_p}}}z^{-n_{D_p}} = 1 + z^{-1}D_p^*(z^{-1}) \ ; \end{aligned}$$

Therefore the disturbance model can be represented by an ARMA model. As we deal with narrow band disturbances, the filtering effect of the primary path in cascade with the output sensitivity function (when operating in closed loop) around the central frequency of the disturbance can be approximated by a gain and a phase lag which will be captured by the $\frac{N_p(z^{-1})}{D_p(z^{-1})}$ model.

From equation (40) one obtains:

$$p(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_{D_p}} d_{p_i} p(t-i+1) + \sum_{i=1}^{n_{N_p}} n_{p_i} e(t-i+1) + e(t+1). \tag{41}$$

The problem is, in fact, an on-line adaptive estimation of parameters in presence of noise [22], [23]. Equation (41) is a particular case of identification of an ARMAX model. One can use for example the *Recursive Extended Least Squares* method [22], which is dedicated to the identification of this type of model. The parameter adaptation algorithm given in (30)-(33) is used. In order to apply this methodology, the plant model is supposed to be known (can be obtained by identification). It is also assumed that the degrees n_{N_p} and n_{D_p} of $N_p(z^{-1})$ respectively $D_p(z^{-1})$ are fixed. The controller containing the disturbance model is computed by solving the diophantine equation (8) and using (5):

$$A(z^{-1})H_S(z^{-1})S'(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1}) = P(z^{-1}) \tag{42}$$

with $H_S(z^{-1}) = \hat{D}_p(z^{-1})$ (the current estimated model of the disturbance).

In *adaptive* operation, the parameters of the controller have to be re-computed at each sampling instant based on the current estimation of the disturbance model (the disturbance estimation algorithm will use a non vanishing adaptation gain as for the direct adaptive regulation scheme). For the *self tuning* operation the algorithm for disturbance model estimation uses a parameter adaptation algorithm with decreasing adaptation gain. One can either update the controller parameters at each sample, or one can keep constant the parameters of the controller during disturbance estimation and up-date the parameters of the controller once the estimation has converged (a measure of the convergence is the trace of the adaptation gain).

The major drawback of this approach is the complexity of the computations which have to be done at each sampling. One has to solve a Bezout equation of a dimension which depends on the order of the model of the secondary path and the order of the disturbance model (note that often the order of the model of the secondary path is high). A slight reduction of the complexity is obtained if one uses a Youla Kucera parametrization of the controller. In this case one has to solve equation (17) instead of equation (42).

In figure 16 the results obtained with the direct adaptive regulation scheme for the case of a single sinusoidal disturbance subject to step changes in frequency are shown (adaptive operation). The results obtained in the same context with the indirect adaptive regulation scheme are shown in figure 17. Contrary to the results given in [20] for the adaptive operation, here the performances obtained with the indirect and direct scheme are quite similar. The explanation is that in [20], an observer for the disturbances was not included (one uses directly the output measurement) while here an observer for the disturbance, of the form discussed in this section, has been included.

The complexity of the indirect adaptive regulation scheme

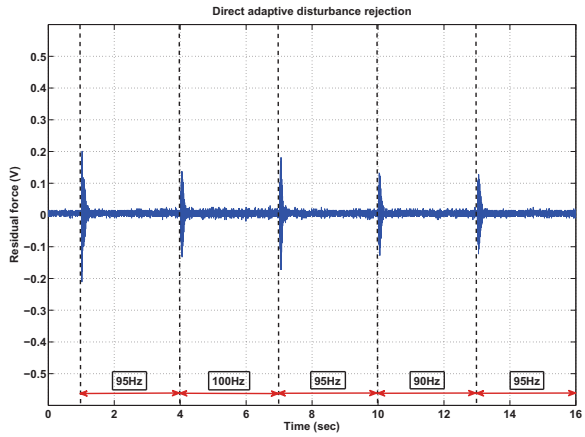


Fig. 16. Time domain results with direct adaptation scheme for rejection of a sinusoidal disturbance (adaptive operation)

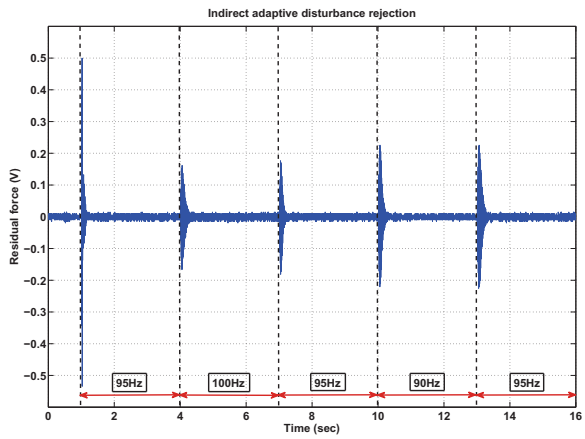


Fig. 17. Time domain results with indirect adaptation scheme for rejection of a sinusoidal disturbance (adaptive operation)

is much higher. The use of an indirect adaptive regulation scheme may be motivated by the possibility of assigning a specified level of attenuation of the disturbance (instead of full suppression). This may be useful in the case of multiple narrow band disturbances.

Appendix B
Preserving fixed parts in the controller under Q-parametrization

In this appendix it will be shown how fixed parts of the central controller (S_0, R_0) can be preserved when introducing the Q-parametrization. The central controller may contain some fixed parts (Hr and Hs_1) for robustness reasons (opening

the loop in low and high frequencies or shaping sensitivity functions) such as:

$$R_0(z^{-1}) = Hr(z^{-1}).R_0'(z^{-1}) \; ; \quad (43)$$
$$S_0(z^{-1}) = Hs_1(z^{-1}).S_0'(z^{-1}) \; . \quad (44)$$

To preserve these parts, the Q-parametrization of the controller is modified as follows:

$$R(z^{-1}) = R_0(z^{-1}) + A(z^{-1})Hr(z^{-1})Hs_1(z^{-1})Q(z^{-1}) \quad (45)$$
$$S(z^{-1}) = S_0(z^{-1}) - z^{-d}B(z^{-1})Hr(z^{-1})Hs_1(z^{-1})Q(z^{-1}) \quad (46)$$

One can verify that the desired closed loop poles specified by the roots of P in (15) remain unchanged. To compute $Q(z^{-1})$ in order that the controller contains the internal model of the disturbance, one has to solve:

$$S'(z^{-1})D_p(z^{-1})Hs_1(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})Hr(z^{-1})Hs_1(z^{-1})Q(z^{-1}) = S_0(z^{-1}) \; , \quad (47)$$

Using the modified Q-parametrization, the output of the system in the presence of a disturbance can be expressed as:

$$y(t) = \frac{S_0(q^{-1}) - q^{-d}B(q^{-1})Hr(z^{-1})Hs_1(z^{-1})Q(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \; , \quad (48)$$

where w(t) is given by (20) (see also figure 2)
Using (48), equation (22) becomes:

$$\varepsilon(t+1) = \frac{S_0(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t+1) - \hat{Q}(t+1, q^{-1}) \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})Hr(z^{-1})Hs_1(z^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \quad (49)$$

Replacing $S_0(q^{-1})$ from the last equation by (47) one obtains:

$$\varepsilon(t+1) = [Q(q^{-1}) - \hat{Q}(t+1, q^{-1})] \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})Hr(z^{-1})Hs_1(z^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) + v_1(t+1) \quad (50)$$

where

$$v_1(t) = \frac{S'(q^{-1})D_p(q^{-1})Hs_1(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) = \frac{S'(q^{-1})Hs_1(q^{-1})A(q^{-1})N_p(q^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot \delta(t) \quad (51)$$

is a signal which tends asymptotically towards zero.
From (50), it results that one can use the same adaptation algorithm of section V, by replacing only equation (28) with:

$$w_2(t) = \frac{q^{-d}B^*(q^{-1})Hr(z^{-1})Hs_1(z^{-1})}{P(q^{-1})} \cdot w(t) \quad (52)$$

References

[1] A.Karimi. Design and optimization of restricted complexity controllers - benchmark. http://iawww.epfl.ch/News/EJC_Benchmark/, 2002.

[2] F. Ben Amara, P.T. Kabamba, and A.G. Ulsoy. Adaptive sinusoidal disturbance rejection in linear discrete-time systems - Part I: Theory. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 121:648–654, 1999.

[3] F. Ben Amara, P.T. Kabamba, and A.G. Ulsoy. Adaptive sinusoidal disturbance rejection in linear discrete-time systems - Part II: Experiments. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 121:655–659, 1999.

[4] B.D.O. Anderson. From Youla-Kucera to identification, adaptive and nonlinear control. *Automatica*, 34:1485–1506, 1998.

[5] G. Bengtsson. Output regulation and internal models - a frequency domain approach. *Automatica*, 13:333–345, 1977.

[6] L.L. Beranek and I.L. Ver. *Noise and Vibration Control Engineering: Principles and Applications*. Wiley, New York, 1992.

[7] M. Bodson. Rejection of periodic distrubances of unknown and time-varying frequency. *Int. J. of Adapt. Contr. and Sign. Proc.*, 19:67–88, 2005.

[8] M. Bodson and S.C. Douglas. Adaptive algorithms for the rejection of sinusosidal disturbances with unknown frequency. *Automatica*, 33:2213–2221, 1997.

[9] A. Constantinescu. *Commande robuste et adaptative d'une suspension active*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, décembre 2001.

[10] A. Constantinescu and I.D. Landau. Direct controller order reduction by identification in closed loop applied to a benchmark problem. *European Journal of Control*, 9(1), 2003.

[11] Z. Ding. Global stabilization and disturbance suppression of a class of nonlinear systems with uncertain internal model. *Automatica*, 39:471–479, 2003.

[12] S.J. Elliott and P.A. Nelson. Active noise control. *Noise / News International*, pages 75–98, June 1994.

[13] S.J. Elliott and T.J. Sutton. Performance of feedforward and feedback systems for active control. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 4(3):214–223, May 1996.

[14] B.A . Francis and W.M. Wonham. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 12:457–465, 1976.

[15] C.R. Fuller, S.J. Elliott, and P.A. Nelson. *Active Control of Vibration*. Academic Press, New York, 1995.

[16] T. Gouraud, M. Gugliemi, and F. Auger. Design of robust and frequency adaptive controllers for harmonic disturbance rejection in a single-phase power network. *Proceedings of the European Control Conference, Bruxelles*, 1997.

[17] G. Hillerstrom and J. Sternby. Rejection of periodic disturbances with unknown period - a frequency domain approach. *Proceedings of American Control Conference, Baltimore*, pages 1626–1631, 1994.

[18] C.D. Johnson. Theory of disturbance-accomodating controllers. In *Control and Dynamical Systems* (C. T. Leondes, Ed.), 1976. Vol. 12, pp. 387-489.

[19] I.D. Landau, A. Constantinescu, P. Loubat, D. Rey, and A. Franco. A methodology for the design of feedback active vibration control systems. *Proceedings of the European Control Conference 2001*, 2001. Porto, Portugal.

[20] I.D. Landau, A. Constantinescu, and D. Rey. Adaptive narrow band disturbance rejection applied to an active suspension - an internal model principle approach. *Automatica*, 41(4):563–574, 2005.

[21] I.D. Landau, A. Karimi, and A. Constantinescu. Direct controller order reduction by identification in closed loop. *Automatica*, (37):1689–1702, 2001.

[22] I.D. Landau, R. Lozano, and M. M'Saad. *Adaptive control*. Springer, London, 1997.

[23] I.D. Landau, N. M'Sirdi, and M. M'Saad. Techniques de modélisation récursive pour l'analyse spectrale paramétrique adaptative. *Revue de Traitement du Signal*, 3:183–204, 1986.

[24] I.D. Landau and G. Zito. *Digital Control Systems - Design, Identification and Implementation*. Springer, London, 2005.

[25] L. Ljung. *System Identification - Theory for the User*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, second edition, 1999.

[26] T. Marcos. the straight attraction. *Motion control*, 13:29–33, 2000.

[27] R. Marino, G.L. Santosuosso, and P. Tomei. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency. *Automatica*, 39:1755–1761, 2003.

[28] Y.Z. Tsypkin. Stochastic discrete systems with internal models. *Journal of Automation and Information Sciences*, 29(4&5):156–161, 1997.

[29] S. Valentinotti. *Adaptive Rejection of Unstable Disturbances: Application to a Fed-Batch Fermentation*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, April 2001.

[30] B. Widrow and S.D. Stearns. *Adaptive Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.