



HAL
open science

Inférence statistique pour un modèle de dégradation en présence de variables explicatives

Ali Salami

► **To cite this version:**

Ali Salami. Inférence statistique pour un modèle de dégradation en présence de variables explicatives. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2011. Français. NNT: . tel-00608581

HAL Id: tel-00608581

<https://theses.hal.science/tel-00608581>

Submitted on 13 Jul 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE BORDEAUX



THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

**ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES
ET DE LEURS APPLICATIONS**

par

Ali SALAMI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

**Inférence statistique pour un modèle de dégradation
en présence de variables explicatives**

Soutenue le 07 Janvier 2011

Après avis de :

M.	D. Chauveau	Professeur à l'Université d'Orléans	Rapporteur
M.	A. Grall	Professeur à l'Université de Technologie de Troyes	Rapporteur

Devant le jury composé de :

Mme	S. Mercier	Professeur à l'UPPA	Présidente
M.	D. Chauveau	Professeur à l'Université d'Orléans	Rapporteur
M.	A. Grall	Professeur à l'Université de Technologie de Troyes	Rapporteur
M.	L. Bordes	Professeur à l'UPPA	Directeur
M.	C. Paroissin	Maître de conférences à l'UPPA	Codirecteur
M.	F.G. Badia	Professeur à l'Université de Saragosse, Espagne	Examineur

**Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications - Pau - UMR CNRS 5142
Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA)**

*A mes parents,
A ma famille, à mes amis et à tous ceux qui me sont chers*

Remerciements

Simplement quelques mots pour remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail. Vos mille gestes et encouragements furent pour moi des plus appréciés.

Je remercie beaucoup Sophie Mercier de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

J'adresse mes plus sincères remerciements à mes rapporteurs, Didier Chauveau et Antoine Grall, pour avoir accepté de lire cette thèse et m'avoir fait bénéficier de leurs pertinentes remarques et suggestions. Je remercie aussi Francisco German Badia d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je voudrais également remercier mes directeurs de thèse à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

La personne à laquelle cette thèse doit le plus, et envers qui je suis profondément reconnaissant, est évidemment Laurent Bordes. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie. Je le remercie de m'avoir fait bénéficier de l'étendue de ses connaissances et de m'avoir guidé tout au long de ce travail. Un merci du fond du cœur pour la lecture de ce manuscrit et pour tout le temps qu'il m'a accordé.

Que ce travail soit l'occasion de vous exprimer Christian Paroissin le témoignage de ma plus profonde gratitude et de mon respect. Un chaleureux merci pour votre soutien et vos précieux conseils.

Un grand merci à Carolina Hirmer-Meier et Sophie Mercier pour les discussions fructueuses.

Ce travail de recherche a été effectué au Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA).

Ces trois années passées ont été très agréables grâce à tout le personnel et particulièrement Marc Artzrouni, Simplicie Dossou-Gbété, Bénédicte Puig, Lina Goncalves et Chantal Blanchard.

Un clin d'œil particulier aux secrétaires Marie-Claire Hummel, Marie-Laure Rius et Sylvie Berton qui, par leur gentillesse, ont contribué au déroulement de ma thèse dans de très bonnes conditions.

Je n'oublie pas de remercier mes collègues doctorants et docteurs du Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de l'UPPA, avec lesquels j'ai partagé mes angoisses et mes rêves, pour leur soutien moral.

Que ma thèse a pu voir le jour, n'a certes pas été chose facile pour les gens qui m'entourent et il est tant pour moi de leur adresser un ÉNORME MERCI!!!!

Mes pensées les plus chères vont d'abord à celui qui m'a accompagné toutes ces années autant dans les moments de bonheur que dans les moments difficiles, à mon oncle Yassine. Tu as su me transmettre plein de choses qui me manquaient, elles étaient déterminantes dans mon parcours et le seront toujours. Un immense merci ira à mes parents sans lesquels ce travail n'aurait jamais vu le jour. Merci à toi mon père pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui, merci à toi ma mère d'avoir toujours été là à me soutenir et à me donner jour après jour autant d'attention et d'amour. Un merci spécial à mes adorables sœurs « prochain docteur » Souad, « A7la-7akim » Zahraa, « GENIUS » Hawraa et « princesse » Loulou pour mes vacances inoubliables et nos folles soirées de rires. Je ne saurais pas oublier mes oncles et mes tantes pour tout le soutien dont ils ont fait preuve.

Il m'est bien sûr impossible de terminer ces remerciements sans avoir une pensée toute particulière à mes amis les plus proches et les plus sympathiques au monde. Un grand merci à Loyal, Oana, Hoda, Anna, Ali S, Ali M, Ali B, Zahi, Hassan, Hussein et Mouhamad pour leur bonne humeur et pour les longues et belles soirées libanaises passées ensemble à cuisiner, jouer des jeux et parler de tout. . .

Table des matières

Introduction générale	7
1 Introduction aux modèles de dégradation	11
1.1 Introduction	11
1.2 Mouvement brownien	13
1.2.1 Définition et propriétés	13
1.2.2 Utilisations en fiabilité	14
1.2.3 Simulation	15
1.2.4 Premier temps d'atteinte	16
1.2.5 Estimation des paramètres	17
1.3 Processus gamma	19
1.3.1 Définition et propriétés	19
1.3.2 Utilisations en fiabilité	20
1.3.3 Simulation d'un processus gamma homogène	21
1.3.4 Estimation des paramètres d'un processus gamma homogène	23
1.3.5 Premier temps d'atteinte	27
1.4 Conclusion	30
1.5 Objectifs et structure de la thèse	31
2 Processus gamma perturbé par un mouvement brownien	33
2.1 Introduction et modèle	33
2.1.1 Motivations	34
2.1.2 Propriétés du modèle	34
2.1.3 Simulation	38
2.2 Cas d'observations périodiques	38
2.2.1 Méthode du maximum de vraisemblance	39
2.2.2 Méthode des moments	41
2.3 Cas des instants irréguliers	51
2.3.1 Estimation des paramètres	51
2.3.2 Propriétés asymptotiques	52
2.3.3 Intervalle de confiance et sélection de modèle	62

2.3.4	Cas particuliers de schémas d'observation	63
2.4	Illustrations numériques	65
2.4.1	Cas des instants réguliers	65
2.4.2	Cas d'instants d'observation irréguliers	69
2.5	Application à des données réelles	70
2.5.1	Données NIST	70
2.5.2	Données-tests sur des câbles chauffants	71
3	Processus gamma perturbé avec covariables	73
3.1	Introduction	73
3.1.1	Les modèles de vie accélérée	74
3.1.2	Intégration du stress dans les modèles de dégradation	75
3.2	Modèle avec covariables	76
3.3	Simulation	76
3.4	Estimation des paramètres	77
3.5	Propriétés asymptotiques	78
3.5.1	Convergence des estimateurs	79
3.5.2	Normalité asymptotique	91
3.6	Illustration numérique	97
3.7	Application à des données réelles	99
4	Application et perspectives	101
4.1	Application à des données réelles de grande taille	101
4.1.1	Contexte	101
4.1.2	Application	102
4.1.3	Propositions de modèles PGP accéléré	105
4.2	Conclusion générale et perspectives	109
4.2.1	Conclusion	109
4.2.2	Perspectives à court terme	111
4.2.3	Perspectives à long terme	111
A	Classes de fonctions Glivenko-Cantelli	113
	Bibliographie	115

Introduction générale

On observe le fonctionnement d'un système soumis à une dégradation continue. Généralement ce système est considéré en panne dès que le niveau de dégradation dépasse un certain seuil critique fixé a priori. Ce problème de barrière se rencontre en fiabilité lorsqu'une panne correspond au dépassement d'un seuil de sécurité pour certaines mesures physiques de type pression, température, concentration, etc. Les modèles qui décrivent la dégradation des systèmes ont beaucoup d'intérêts car ils permettent d'appréhender la dynamique de dégradation. De plus, ils jouent un rôle central s'il s'agit d'améliorer la fiabilité et la politique de maintenance des systèmes. Pour modéliser la dégradation d'un système, la classe des processus de Lévy a souvent été retenue, du fait des accroissements indépendants et stationnaires de ces processus [5]. Cette classe englobe en particulier des processus largement étudiés dans la littérature [65] dont le mouvement brownien avec tendance et le processus gamma. Chacun de ces processus a des particularités qui le rendent plus ou moins approprié en pratique.

Si on souhaite modéliser un phénomène de dégradation par un processus à trajectoires continues, le seul choix possible, dans la classe des processus de Lévy, est le mouvement brownien avec tendance linéaire. Il pose néanmoins l'inconvénient de ne pas avoir des trajectoires monotones. Un tel comportement peut être expliqué par des phénomènes tels que des réparations mineures appliquées au système au cours du temps [8] ou des erreurs de mesure de la dégradation. Comme les accroissements d'un mouvement brownien ne sont pas nécessairement positifs, cela peut toutefois être incompatible avec le phénomène modélisé ou mesuré. Par conséquent ce modèle peut être inadapté à la modélisation de phénomènes de dégradation monotones tels que la propagation d'une fissure, ou encore l'usure d'une pièce. Cela signifie que pour certains types de dégradations observées, seule la possibilité d'accroissements positifs est appropriée.

Si on souhaite privilégier la monotonie, on peut utiliser le processus gamma (un processus de sauts qui a un nombre infini de sauts sur un intervalle de temps fini). Selon van Noortwijk [73], ce processus a été appliqué par Moran dans une série d'articles et un livre publié dans les années cinquante [48; 49; 50; 51]. Néanmoins la première utilisation du processus gamma comme modèle de dégradation semble être due à Abdel-Hameed [1] en 1975. Durant les trois dernières décennies, ce processus a été utilisé avec succès dans de nombreuses applications avec des données réelles [19; 38; 43]. De plus, les méthodes d'estimation des paramètres de ce processus, ont été étudiées en particulier la méthode du maximum

de vraisemblance et la méthode des moments [19]. Le choix d'un processus gamma implique que l'état du système à travers le temps ne s'améliore pas et donc que ce système ne peut pas revenir dans son état initial. Le processus gamma est fréquemment utilisé dans la littérature puisque ce processus traduit la non réversibilité d'une dégradation ce qui peut convenir du point de vue physique (détérioration monotone). De plus, un tel processus permet souvent de mener des calculs explicites. Grâce à ses propriétés, ce processus convient très bien pour la modélisation de la variabilité temporelle de détérioration et pour la détermination des décisions de maintenance et d'inspection optimales [18; 21; 22; 42]. Finalement le modèle gamma est souvent retenu, car il s'adapte bien au contexte de dégradation monotone, mais aussi parce qu'il présente des avantages de traitement mathématiques.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique du processus gamma et du mouvement brownien. On définit chacun de deux processus, on cite leurs propriétés ainsi que leur utilisation en fiabilité. On présente ensuite des estimateurs de leurs paramètres et on étudie la loi du premier temps d'atteinte pour chacun d'entre eux. Ce chapitre contient quelques résultats originaux portant sur le temps d'atteinte d'un seuil déterministe où aléatoire par un processus gamma non homogène. On a en particulier généralisé le résultat de Park et Padgett [62] sur le premier temps d'atteinte d'un processus gamma non homogène. Depuis l'article d'Abdel-Hameed [1], quelques auteurs ont étudié le problème de la loi de premier temps d'atteinte d'un niveau aléatoire. On a ensuite caractérisé la loi du premier temps d'atteinte dans le cas où le seuil critique est une variable aléatoire exponentielle indépendante du processus gamma. Le résultat obtenu est le même que celui obtenu par Frenk et Nicolai [33] mais par une technique différente. Les calculs n'étant pas explicites pour un seuil aléatoire quelconque, on propose d'approcher cette loi par une loi de type-phase [56]. Par exemple, la loi d'une variable aléatoire positive peut être approchée par un mélange de lois d'Erlang ayant le même paramètre de forme. Dans ce cas, les calculs de la loi du temps d'atteinte peuvent être facilement déduits.

Dans le chapitre 2, on propose un nouveau modèle de dégradation basé sur les deux processus présentés au chapitre 1 : le processus gamma et le mouvement brownien. Cette approche consiste à considérer que la dégradation résulte de la somme d'un processus gamma et d'un mouvement brownien indépendants. On propose ensuite deux méthodes pour estimer les paramètres de notre modèle : la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments. Seul le comportement asymptotique des estimateurs issus de la méthode des moments est étudié. Ces propriétés asymptotiques sont étudiées lorsque l'estimateur est défini pour des observations effectuées à des instants réguliers ou irréguliers. Pour des observations ayant lieu à des instants réguliers, deux régimes asymptotiques ont été étudiés : le cas où N (le nombre d'observations par trajectoire) est fixé et n (le nombre de trajectoires) tend

vers l'infini ainsi que le cas où n et N tendent simultanément vers l'infini (dans ce cas on suppose que N est fonction de n). Nous avons aussi étudié le cas de n trajectoires observées à des instants irréguliers. Afin d'obtenir la normalité asymptotique de nos estimateurs, on a généralisé la δ -méthode afin qu'elle soit applicable dans cette situation. Enfin, on a illustré nos résultats théoriques par des simulations et des applications à des données réelles.

On appelle covariables l'ensemble des conditions et facteurs extérieurs variables, généralement imprévus, susceptibles d'affecter le bon fonctionnement d'un système. La prise en compte des covariables dans les modèles prévisionnels de fiabilité est intégrée de diverses manières en fonction de la nature des covariables (climatiques, mécaniques, électriques, . . .) et de sa durée de manifestation (ponctuel, constant, progressifs, . . .). Étudier et déterminer l'influence des covariables sur un temps de défaillance ou sur le niveau de dégradation d'un système est donc un problème fréquent. Les travaux concernant les modèles prenant en compte les covariables sont très nombreux dans la littérature [3; 20; 37; 45; 46; 54; 69]. Dans cette thèse on s'intéresse uniquement aux modèles de type vie accélérée. Dans le chapitre 3 on suppose que les covariables agissent seulement sur le processus gamma du modèle étudié au chapitre 2. Les covariables sont intégrés à la manière de Bagdonavičius et Nikulin [7], c'est-à-dire qu'elles affectent l'échelle de temps. On propose une méthode des moindres carrés en deux étapes pour estimer les paramètres du modèle puis on étudie les propriétés asymptotiques des estimateurs. Enfin, on illustre nos résultats théoriques à travers des simulations et des applications à des données réelles issues de la littérature.

Le chapitre 4 présente une application de notre méthode à des données réelles de grande taille. On dispose d'un jeu de données d'une compagnie de transport sur une de ses lignes. On propose donc d'utiliser le modèle de dégradation décrit au chapitre 2 (modèle sans covariable) pour les indicateurs NL (nivellement longitudinal) et NT (nivellement transversal) séparément. Ces indicateurs sont deux types de défauts de la voie mesurés par cette société afin d'assurer le confort des passagers et la sécurité sur certaines voies. Une étude comparable a été menée par Mercier et al. [47] en modélisant la dégradation conjointe des indicateurs NL et NT à l'aide de processus gamma bivariés. Les paramètres de ce modèle sont ajustés en utilisant la méthode des moments. On a comparé les résultats obtenus avec les estimateurs donnés dans Mercier et al. [47]. Enfin, on a construit des intervalles de confiance à 95% pour chaque paramètre du modèle qui ont été utilisés afin de tester des sous modèles (gamma ou brownien avec tendance). Ce chapitre s'achève par une conclusion générale suivie de perspectives.

Les travaux présentés dans cette thèse ont fait l'objet de deux prépublications [15; 16] et trois communications à des congrès internationaux [13; 14; 63].

Chapitre 1

Introduction aux modèles de dégradation

1.1 Introduction

De nombreux matériels ou systèmes se dégradent dans le temps avant de tomber en panne. Pour modéliser ces dégradations et pour mieux comprendre les causes de panne de ces systèmes ou de ces matériels, nous avons besoin de développer des modèles permettant de prendre en compte les données de dégradation et de les lier à d'éventuelles pannes.

Les modèles de dégradation unidimensionnels ont fait l'objet de nombreuses publications sur les dernières décennies. Ces modèles sont à l'origine des processus qui déterminent les échecs dans ces systèmes. De plus, ils jouent un rôle central dans les efforts visant à améliorer la fiabilité et les maintenances des systèmes. Pour plus de discussions sur les modèles de dégradation et leur utilisation, voir [57; 69]. Dans cette thèse, les modèles de dégradation proposés et étudiés nous conduisent à atteindre les quatre objectifs suivants :

- obtenir des expressions explicites pour la loi des temps d'atteinte ;
- étudier le comportement asymptotique des estimateurs en l'absence de covariables ;
- intégrer des covariables dans notre modèle et étudier le comportement asymptotique des estimateurs en présence de ces variables explicatives ;
- appliquer ces modèles à des situations concrètes.

Il existe plusieurs approches possibles pour modéliser la dégradation d'un système. Deux grandes familles de modèles peuvent être distinguées :

1. les modèles à dégradation continue ;
2. les modèles à espace d'états fini (encore appelés modèles multi-états).

Dans le premier cas, on modélise l'évolution en temps d'une grandeur (positive). En général l'évolution est monotone dans le temps. On s'intéresse alors à des processus stochastiques à trajectoires monotone, ou du moins monotone en moyenne. Les trois modèles les plus fréquemment étudiés sont les suivants : le processus gamma, le processus de Poisson composé et le mouvement brownien. On notera qu'ils appartiennent à la classe des processus de Lévy (un processus de Lévy est un processus stochastique, dont les accroissements sont station-

naires et indépendants). Dans le second cas, on suppose que l'ensemble possible des états du système est fini, chaque état représentant un niveau de dégradation du système (il peut alors exister une relation d'ordre partiel ou total entre les états).

En fiabilité il est souvent approprié de modéliser les dégradations par des processus caractérisés par des accroissements positifs (traduisant le fait que l'état du système à travers le temps ne s'améliore pas et donc qu'il ne peut pas revenir à son état initial sans intervention extérieure) et indépendants (l'état futur du système ne dépend que de l'état présent et non des états passés) [73]. Singpurwalla [69] modélise les dégradations par des processus stochastiques $(X_t)_{t \geq 0}$, où X_t pour tout $t \geq 0$ correspond à un indicateur d'usure ou d'âge au temps t . La panne intervient lorsque X_t franchit un seuil $c > 0$. Si T_X^c est la variable aléatoire modélisant la durée de vie du composant, on a :

$$T_X^c = \inf\{t \geq 0; X_t \geq c\}.$$

Le processus stochastique le plus simple est une fonction du temps pour laquelle le taux moyen de dégradation par unité de temps est aléatoire. Un exemple de ce type de processus stochastique est la somme cumulée de détérioration au temps t qui est définie par $X_t = At$ pour tout $t \geq 0$, avec A une variable aléatoire représentant le taux de dégradation. Des modèles de fiabilité basés sur ce genre de taux aléatoires ont été développés entre autres par Ellingwood et Mori [30] et Mori et Ellingwood [52; 53].

Les modèles à taux de dégradation aléatoire sont des outils intéressants mais ils sont mieux adaptés pour modéliser une évolution moyenne de la dégradation. D'après Pandey et van Noortwijk [61], ces modèles ne sont pas assez sophistiqués pour définir proprement la variabilité temporelle associée à l'évolution d'une dégradation. En effet, le coefficient directeur de $t \mapsto X_t$ reste constant au cours du temps et une seule inspection suffira pour déterminer la durée de vie restante de système sans aucune incertitude.

On leur préférera donc des modèles stochastiques plus évolués pour lesquels ce sont les accroissements et non le taux de dégradation qui sont aléatoires. Ils permettent une meilleure modélisation de la variabilité de l'évolution de la dégradation dans le temps. Selon Barlow et Proschan [9], la dégradation est généralement supposée être un processus markovien. Plusieurs types de processus de Markov sont candidats à la modélisation d'une dégradations : d'une part il y a les processus à espace d'états fini, c'est-à-dire les chaînes de Markov, d'autre part il y a les processus à temps continu et à accroissements indépendants. Parmi les processus de Markov à temps continu, on propose de s'attarder sur le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ et le processus gamma $(Y_t)_{t \geq 0}$. Chacun de ces processus à temps continu a des particularités qui rendent son choix plus approprié dans certains cas. Le mouvement brownien est un processus stochastique $(B_t)_{t \geq 0}$ dont les accroissements disjoints sont indépendants et tels que pour tout $s > 0$ $B_{t+s} - B_t$ suit une loi normale de moyenne nulle et de variance s . Le processus gamma est un processus de chocs à accroissements indépendants et positifs ou nuls suivant

une loi gamma de paramètre d'échelle constant.

Le processus gamma a un nombre infini de sauts dans un intervalle de temps fini. Ce processus est un processus à temps continu et à accroissements indépendants et stationnaires (la loi des accroissements ne dépend pas de l'âge du processus). De plus, ses trajectoires sont continues à droite et admettent des limites à gauche (càd-làg). Comme le mouvement brownien, il entre donc dans la famille des processus de Lévy. Cette remarque est importante car les caractéristiques des processus de Lévy (indépendance et stationnarité des accroissements) permettent certaines facilités de calcul, notamment pour l'estimation des paramètres.

Concernant l'inférence statistique des modèles de dégradation, deux types d'observation peuvent être distingués. D'abord, il y a les observations correspondant à des instants de défaillance. L'obtention de ce type de données peut s'avérer coûteux (test destructif) et long à réaliser pour des systèmes fiable (un moyen de contourner cette difficulté est de réaliser des essais accélérés). C'est pourquoi il est souvent intéressant de baser l'estimation statistique sur des mesures du niveau de dégradation avant défaillance. En fait, lorsque cela est possible, on se basera plutôt sur les mesures des accroissements de niveaux de dégradation (qui sont indépendants). Certains auteurs, voir par exemple [44], ont proposé une méthode d'estimation des paramètres d'un modèle de dégradation en utilisant conjointement des instants de défaillance et des mesures de dégradations.

1.2 Mouvement brownien

Dans les années 1920, Norbert Wiener a été le premier à donner une définition mathématique du mouvement brownien. Il a étudié en particulier la continuité de ses trajectoires qui sont nulle part différentiables (à aucun moment la vitesse d'une particule ne peut être définie car ses changements de direction sont trop rapides). Ce mouvement permet de décrire avec succès le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), ainsi que le phénomène de diffusion. Il est aussi très utilisé dans des modèles de mathématiques financières (valeur d'échange d'une action sur un marché boursier) [39; 67].

1.2.1 Définition et propriétés

On considère un espace de probabilités $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Voici une définition du mouvement brownien mais signalons qu'il en existe des versions équivalentes dans la littérature.

Définition 1.1 *Un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien s'il satisfait les propriétés suivantes :*

1. $B_0(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$;
2. $t \mapsto (B_t(\omega))$ est une fonction continue pour presque tout $\omega \in \Omega$;

3. Les accroissements de $(B_t)_{t \geq 0}$ sont indépendants et pour tout $t \geq 0$ et $h > 0$ $B_{t+h} - B_t$ suit la loi normale de moyenne 0 et de variance h .

Voici quelques raisons fondamentales qui rendent ce processus intéressant du point de vue de la modélisation :

- sa définition permet d'effectuer et de simplifier certains calculs ;
- le mouvement brownien est un processus markovien. Il hérite donc des propriétés de cette classe de processus ;
- il peut être utilisé comme brique élémentaire pour construire des processus plus élaborés, c'est-à-dire des fonctionnelles du mouvement brownien.

Le mouvement brownien possède également les propriétés suivantes :

Proposition 1.1 *Étant donné $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien, les processus suivants sont également des mouvements browniens :*

- $(-B_t)_{t \geq 0}$ (symétrie).
- $(B_{t+a} - B_a)_{t \geq 0}$, $a \geq 0$ (invariance par translation).
- $(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct})_{t \geq 0}$, $c > 0$ (auto-similarité).
- $(tB_{1/t})_{t \geq 0}$ (invariance par inversion du temps).

1.2.2 Utilisations en fiabilité

De nombreux auteurs [8; 25; 26; 60; 74; 75; 76] ont introduit des modèles en supposant que la dégradation est décrite par un processus gaussien $(W_t)_{t \geq 0}$ vérifiant $W_t = \sigma B_t + \mu t$ où μ est la tendance, $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et σ^2 (avec $\sigma > 0$) est la variance du processus. Ce processus qui n'est pas monotone peut prendre en compte des réparations mineures du système ayant lieu au cours du temps [8]. Pour un tel modèle, à l'évidence, les accroissements ne sont pas nécessairement positifs, ce qui peut dans certains cas être incompatible avec le phénomène modélisé ou mesuré. Par conséquent ce modèle peut être inadapté à la modélisation de phénomènes de dégradation monotones tels que la propagation d'une fissure, ou encore l'usure d'une pièce. En revanche si de tels phénomènes sont mesurés et que les mesures sont entachées d'erreurs, alors ce modèle peut faire sens car la tendance μt représente la dégradation intrinsèque au temps t , alors que σB_t s'interprète comme l'erreur de mesure au temps t .

Cependant, Oh [59] considère qu'une fissure de fatigue peut se résorber et modélise son évolution avec un tel processus. De même, Doksum et Hóyland [25] considèrent un modèle de défaillance par fatigue pour lequel la dégradation cumulée est modélisée par un processus gaussien continu. Selon van Noordwijk [73], ces auteurs sont les premiers à proposer une transformation du temps dans une forme générale. Le temps réel t est transformé en un temps virtuel $v = \Lambda(t)$ où Λ est une fonction croissante. Cette transformation du temps

est utilisée afin de prendre en compte des effets de stress. De plus, les auteurs calculent [25], la loi du premier temps d'atteinte d'un certain seuil de sécurité pour ce processus gaussien. Le premier temps d'atteinte est une variable aléatoire qui est l'image par Λ^{-1} d'une variable aléatoire de loi inverse gaussienne. Whitmore [74] a étendu l'approche par processus de Wiener en incluant la possibilité de prendre en compte des inspections imparfaites. Les erreurs de mesure sont supposées indépendantes et identiquement distribuées, de loi normale et indépendantes du processus de dégradation. Une autre extension intéressante est l'analyse bidimensionnelle de processus gaussien réalisée par Whitmore et al. [75]. Dans cette approche le processus de dégradation est combiné à un marqueur (il s'agit d'un élément quantitatif sanguin ; il est considéré comme covariable dans les applications médicales).

Crowder et Lawless [21] utilisent le mouvement brownien avec tendance $(W_t)_{t \geq 0}$ en raisonnant sur l'espérance pour illustrer leur politique d'unique inspection pour l'entretien des plaquettes de frein d'une automobile. Cette espérance est linéairement croissante avec le temps : $\mathbb{E}(W_t) = \mu t$. Ensuite μ est estimé à chaque inspection par $\tilde{\mu}$ via la méthode des moments, ce qui permet alors d'estimer l'instant de remplacement R par l'intermédiaire d'un seuil critique de défaillance c . L'instant de remplacement $R = c(\tilde{\mu})^{-1}$ correspond à la taille de la fissure pour laquelle on considère le composant comme défaillant. Pour pallier l'aspect non monotone du processus, qui peut conduire à trouver un temps de remplacement négatif, les auteurs remplacent $\tilde{\mu}$ par $\max(0, \tilde{\mu})$.

1.2.3 Simulation

Pour simuler une trajectoire brownienne, on a utilisé l'approximation par une marche aléatoire (somme cumulée de variables aléatoires indépendantes) renormalisée [11].

Théorème 1.1 (Donsker) *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de variance σ^2 . On pose :*

$$\forall t \in [0, 1], \quad S_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i + \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sigma\sqrt{n}} X_{\lfloor nt \rfloor + 1}$$

où $\lfloor nt \rfloor$ est la partie entière de nt . Alors, $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} B$ où $B = (B_t)$ est un mouvement brownien et \xrightarrow{w} désigne la convergence faible dans $C[0, 1]$.

En utilisant la propriété d'auto-similarité (cf. proposition 1.1), on peut alors simuler une trajectoire de mouvement brownien sur un intervalle de temps fini. Sur la figure 1.1, on a représenté la simulation de trajectoires sur $[0, 10]$ sur la base de $n = 10000$ simulations de variables aléatoires i.i.d de loi normale centrée réduite.

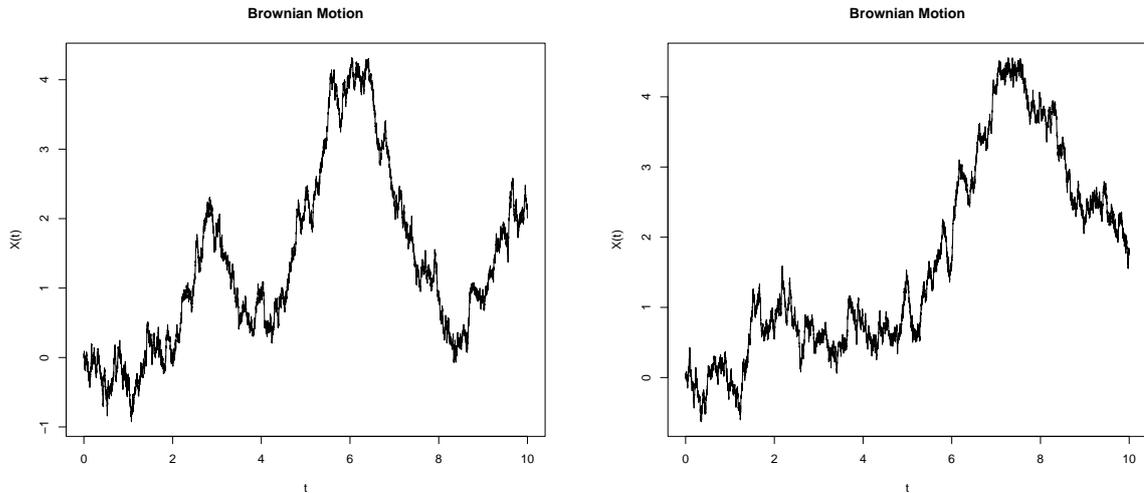


FIG. 1.1 – Deux trajectoires d’un mouvement brownien

1.2.4 Premier temps d’atteinte

La loi inverse gaussienne (voir figure 1.2) a été obtenue par Schrödinger [66] en 1915, comme solution au problème de barrière d’un processus de Wiener. Ce même problème de barrière se rencontre en fiabilité lorsqu’une panne correspond au dépassement d’un seuil de sécurité pour certaines mesures physiques de type pression, température, concentration, etc.

On observe le fonctionnement d’un système qui est considéré en panne dès que la trajectoire du processus $B = (B_t)_{t \geq 0}$ dépasse le seuil $c \in \mathbb{R}$. On s’intéresse alors au premier temps d’atteinte T_B^c du niveau c . Ce premier temps d’atteinte est alors défini par

$$T_B^c = \inf\{t \geq 0; B_t \geq c\}.$$

Théorème 1.2 *La fonction de répartition de T_B^c est définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}(T_B^c \leq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{c/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

Preuve. La démonstration repose sur le principe de décomposition de la probabilité du premier temps d’atteinte suivant que B_t est inférieure ou supérieure à c :

$$\mathbb{P}(T_B^c < t) = \mathbb{P}(T_B^c < t; B_t > c) + \mathbb{P}(T_B^c < t; B_t < c).$$

Comme l’événement $\{B_t > c\}$ est inclus dans $\{T_B^c < t\}$, le premier terme de la somme est égal à la probabilité $\mathbb{P}(B_t \geq c)$. Pour le second, on utilise le principe de symétrie ou de

réflexion du mouvement brownien, voir par exemple [40], on obtient :

$$\mathbb{P}(T_B^c < t; B_t < c) = \mathbb{P}(T_B^c < t; B_t > c).$$

On en déduit que $\mathbb{P}(T_B^c < t) = 2\mathbb{P}(B_t > c)$. Donc le calcul de la loi du temps d'atteinte de c se réduit alors au calcul lié à la loi marginale de mouvement brownien B . ■

Corollaire 1.1 La densité f_B^c de la variable aléatoire T_B^c est donnée par

$$f_B^c(t) = c (2\pi t^3)^{-1/2} \exp(-c^2/2t) 1_{\{t>0\}}.$$

Examinons maintenant le cas d'un mouvement brownien avec tendance $(W_t)_{t \geq 0}$ vérifiant $W_t = \mu t + \sigma B_t$ pour tout $t \geq 0$.

En partant de la définition du mouvement brownien, on sait que :

1. $W_0 = 0$,
2. les accroissements de W sont indépendants,
3. le processus W_{t-s} suit une loi normale $N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$.

Le temps T_W^c nécessaire pour atteindre le niveau c fixé est une variable aléatoire dont la densité s'écrit de la manière suivante [32] :

$$f_W^c(t) = \left(\frac{\lambda}{2\pi t^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\lambda(t-m)^2}{2m^2 t}\right) 1_{\{t>0\}}$$

où $m > 0$ et $\lambda > 0$ représentent les paramètres de position et de dispersion définis par : $m = c\mu^{-1}$ et $\lambda = c^2\sigma^{-2}$. Cette loi est appelée loi inverse gaussienne IG de paramètres m et λ .

1.2.5 Estimation des paramètres

On suppose que la dégradation d'un système est modélisée par un mouvement brownien avec tendance. On observe le temps d'atteinte d'un niveau fixe c pour n mouvements browniens avec tendance indépendants. Autrement dit, on observe X_1, \dots, X_n n variables aléatoires de loi $IG(m, \lambda)$. Pour estimer les paramètres m et λ de la loi inverse gaussienne, on peut utiliser la méthode de maximum de vraisemblance. La fonction de vraisemblance des n observations (x_1, \dots, x_n) est définie de la manière suivante :

$$L(x_1, \dots, x_n | \lambda, m) = \lambda^{n/2} \prod_{i=1}^n (2\pi x_i^3)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\lambda(x_i - m)^2}{2m^2 x_i}\right).$$

La log-vraisemblance est alors égale à :

$$\log L(x_1, \dots, x_n | \lambda, m) = \frac{n}{2} \log \lambda - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2\pi x_i^3) - \frac{\lambda}{2m^2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m)^2}{x_i}.$$

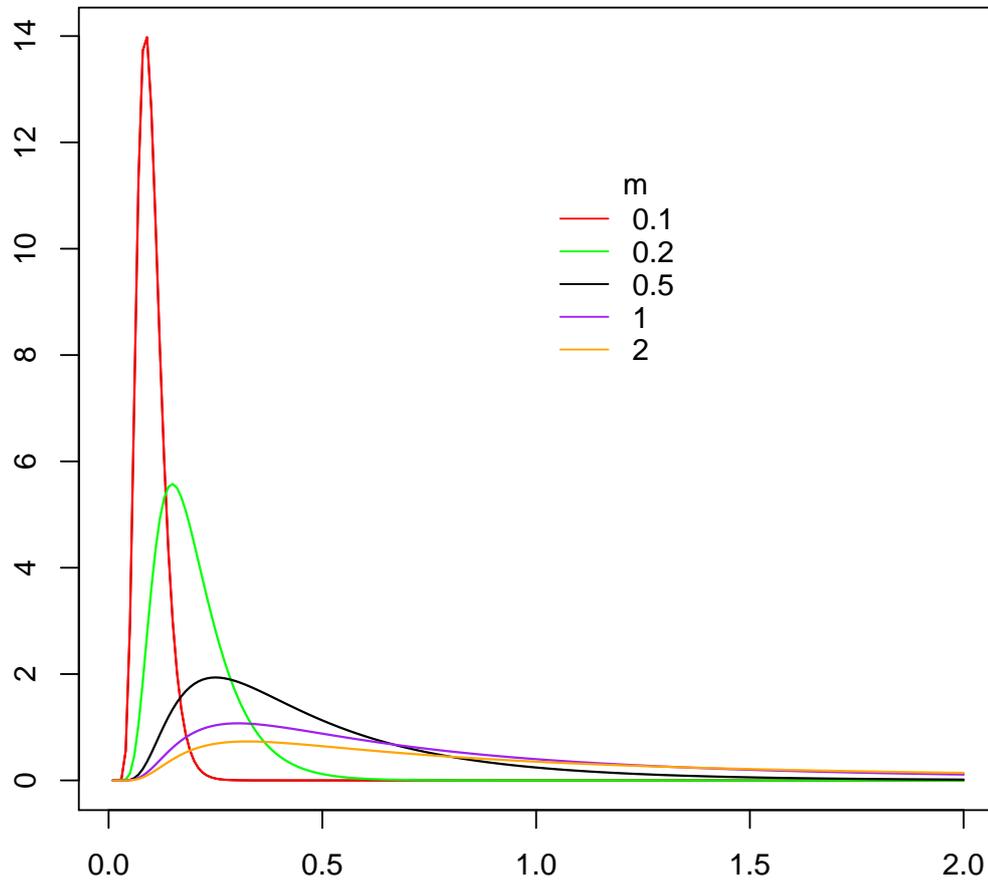


FIG. 1.2 – Densités de la loi inverse-gaussienne pour $\lambda = 1$

L'estimation de m est obtenue en résolvant l'équation normale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial m} L(x_1, \dots, x_n | \lambda, m) = - \left[-\frac{\lambda}{m^3} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m)^2}{x_i} - \frac{\lambda}{m^2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m)}{x_i} \right] = 0.$$

Cela implique

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n x_i + m \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 2n = -n + m \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i},$$

d'où il vient

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

En fixant $\hat{m} = \bar{x}$, on estime λ en résolvant l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} L(x_1, \dots, x_n | \lambda) &= \frac{n}{2\lambda} - \frac{1}{2\bar{x}^2} \sum_{i=1}^n \left(x_i + \frac{\bar{x}^2}{x_i} - 2\bar{x} \right) \\ &= \frac{n}{2\lambda} - \frac{1}{2\bar{x}^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \frac{n}{\bar{x}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{\bar{x}} \right).$$

1.3 Processus gamma

Abdel-Hameed [1] a été le premier à proposer le processus gamma pour modéliser la dégradation d'un système. Le processus gamma est un processus à accroissements positifs, indépendants et stationnaires. Il diffère du processus de Wiener par ses trajectoires càd-làg et par ses accroissements positifs.

1.3.1 Définition et propriétés

La définition suivante permet de caractériser le processus gamma.

Définition 1.2 *Le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus gamma si et seulement si :*

1. *Pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les accroissements $Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}$ sont indépendants ;*
2. *Pour tout $\delta > 0$, $t > 0$, $\Delta Y_t = Y_{t+\delta} - Y_t$ admet la loi $Ga(\xi, \eta_{t+\delta} - \eta_t)$ où η est une fonction donnée, monotone et croissante et $\xi \in \mathbb{R}_+^*$.*

Ainsi, avec la convention que $Y_0 = 0$ et $\eta_0 = 0$, Y_t suit la loi $Ga(\xi, \eta_t)$ de moyenne $\mu_t = \eta_t/\xi$, variance $\nu_t = \eta_t/\xi^2$ et de densité $f(y; \xi, \eta_t)$, définie par :

$$f(y; \xi, \eta_t) = \xi^{\eta_t} y^{\eta_t-1} e^{-\xi y} / \Gamma(\eta_t) 1_{\{y \geq 0\}}.$$

On considère souvent le cas d'un processus gamma de paramètres $\xi > 0$ et $\eta_t = \alpha t^\beta$ tel que α et β sont des entiers strictement positifs avec β connu. Si $\beta = 1$, le processus gamma devient stationnaire c'est-à-dire que les accroissements de ce processus sont stationnaires. Pour plus de détails sur un processus gamma non stationnaire voir [1; 7; 19].

Le choix d'un processus gamma implique que l'état du système à travers le temps ne s'améliore pas, et donc que ce système ne peut pas revenir dans son état initial. Le processus gamma est fréquemment utilisé dans la littérature puisque ce processus traduit la non réversibilité d'une dégradation ce qui peut convenir du point de vue physique (détérioration

monotone). De plus, un tel processus permet souvent des calculs explicites. Grâce à ses propriétés, ce processus convient très bien pour la modélisation de la variabilité temporelle de détérioration et pour la détermination des décisions de maintenance et d'inspection optimales [18; 21; 22; 42].

1.3.2 Utilisations en fiabilité

Le processus gamma étant un processus à espace d'état continu et à accroissements positifs, il permet de modéliser les mécanismes de vieillissement qui sont par nature lents, continus et progressifs (en particulier, les défauts considérés ne se résorbent pas et ne stabilisent pas non plus). D'autres caractéristiques de ce processus sont a priori intéressantes pour modéliser les mécanismes de dégradation : l'indépendance des accroissements, le fait de pouvoir formuler une hypothèse de stationnarité (ou de non stationnarité) des accroissements sur laquelle les experts peuvent apporter de l'information, et enfin, le fait de pouvoir formuler une hypothèse sur la tendance moyenne de l'évolution des dégradations.

Cependant, choisir pour modèle de dégradation le processus gamma peut aussi présenter quelques inconvénients. Au début, les données collectées sont typiquement des données de mesure de l'état de dégradation d'un composant (profondeur ou longueur d'une fissure, ...) et les instants associés (date des inspections). Les données des accroissements nécessaires à la modélisation par un processus gamma doivent donc être calculées, ce qui nécessite de disposer d'au moins deux mesures du même défaut à des dates différentes. Dans la réalité, les inspections sont effectuées de façon plus au moins régulière et les défauts ne sont pas toujours correctement identifiés. On dispose alors souvent de données orphelines (situation où l'on ne mesure qu'un niveau de dégradation par défaut) ; ces données ne sont pas directement exploitables par le modèle gamma car elles ne donnent pas d'information sur les accroissements des défauts. En revanche, pour les mécanismes de type corrosion-érosion, on sait que le mécanisme de dégradation commence dès la mise en service du composant. On peut donc considérer que la dégradation s'amorce à $t = 0$ et prend la valeur $X_0 = 0$. Grâce à cette hypothèse, on peut reconstituer des données d'accroissements directement exploitables avec le processus gamma. Enfin, les dégradations de type fissuration s'initient brutalement à une date t_0 ($X_{t_0} = 0$) après une période d'incubation de durée aléatoire inconnue, de sollicitations ou de stress mécaniques avec de fortes contraintes. Si l'amplitude du premier accroissement est facilement retrouvée ($X_t - X_{t_0} = X_t$), la période $(t - t_0)$ pendant laquelle s'est produite cette dégradation n'est pas toujours connue et peut rendre cette donnée inexploitable directement.

L'utilisation d'un processus gamma en tant que modèle de dégradation est justifiée dans [73]. Ses propriétés permettent son adaptation à de nombreux contextes : il est adapté à la modélisation de la phase de propagation de toute dégradation monotone et croissante dans le temps comme la corrosion, la propagation de fissures ou l'érosion. Il est essentiel-

lement utilisé dans un seul contexte, qui est celui de la modélisation de la propagation de mécanismes de dégradation continus associée à une politique de maintenance.

Le processus gamma est utilisé pour la modélisation des phases de dégradation de systèmes réparables, en relation avec leur maintenance. Le processus gamma s'impose naturellement pour la modélisation de phénomènes homogènes en temps et dont les accroissements sont indépendants et positifs. On le trouve donc appliqué à la recherche :

- de la valeur de taux de défaillance afin de définir une politique de maintenance pour des systèmes en observation continu [35; 36],
- de politiques de maintenance conditionnelle pour des systèmes soumis à des inspections périodiques [42] ou aperiodiques [18],
- de politiques de maintenance préventive [21],
- de la planification de maintenances séquentielles [22].

Dans tous ces exemples, il est utilisé comme modèle d'évolution du niveau de dégradation d'un composant ou d'un système. On note que dans la majorité des travaux cités, le problème n'est pas de trouver un modèle de dégradation ni de définir une méthode d'estimation de paramètres. Le but est, admettant que la dégradation suit un processus gamma de paramètres connus ou faciles à estimer, de s'intéresser à la prise de décisions pour la maintenance.

Finalement, le processus gamma est souvent retenu, d'une part parce qu'il s'adapte à de multiples contextes, mais aussi parce qu'il est un modèle éprouvé. Il présente aussi un autre avantage : dans la recherche d'intégration des variables environnementales, le processus gamma peut être utilisé sous sa forme généralisée (processus gamma non homogène) et ainsi permettre de prendre en compte des covariables dépendantes du temps. Cela complique l'expression du modèle et par la même occasion sa manipulation, mais plusieurs travaux ont déjà abordé ces généralisations. Ainsi, Bagdonavičius et Nikulin [6; 7] étudient la dégradation lorsqu'elle est modélisée par un processus gamma dans lequel l'échelle de temps dépend des covariables. La présence d'effets aléatoires a été considérée dans [43] en supposant que le paramètre d'échelle ξ est aléatoire et peut dépendre de covariables. Enfin, Park et Padgett [62] cherchent à déterminer un modèle de défaillance en s'intéressant à la loi du temps d'atteinte d'un niveau critique de dégradation.

1.3.3 Simulation d'un processus gamma homogène

Dufresne et al. [28] ainsi que Singpurwalla et Wilson [70] ont montré que l'approximation d'un processus gamma comme limite d'un processus de Poisson composé n'est pas la meilleure méthode pour simuler la trajectoire d'un processus gamma. En effet, il y a une infinité de sauts dans chaque intervalle fini de temps. Une meilleure approche pour simuler un processus gamma stationnaire de paramètres ξ et α , est de simuler des accroissements indépendants pour une discrétisation fine de l'intervalle $[0, T]$.

Simulation par marche aléatoire

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy tel que pour tout $t \geq 0$, X_t admet F_t comme fonction de répartition. On note par F_t^{-1} la pseudo-inverse de F_t définie par $F_t(x) = \int_{-\infty}^x f_t(y)dy$ et $F_t^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_t(x) > u\}$. Alors le processus $(X_t^\delta)_{t \geq 0}$ est défini par :

$$X_t^\delta = S_{\lceil t/\delta \rceil}$$

sachant que

$$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k \quad \text{et} \quad Y_k = F_\delta^{-1}(U_k)$$

où $(U_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. X^δ est alors appelé processus discrétisé de X avec une discrétisation en temps $\delta > 0$. On note que pour un processus gamma, F_t est la fonction gamma incomplète. Ensuite l'algorithme proposé afin de simuler le processus gamma de paramètres ξ et η_t (définis précédemment) est le suivant :

1. Simuler les sauts Y_1, \dots, Y_n ;
2. Calculer les sauts cumulés $S_0 = 0$, $S_j = \sum_{i=1}^j Y_i$;
3. $\forall t \in [0, T]$, le processus $X_t^\delta = S_{\lceil t/\delta \rceil}$ avec $T, \delta > 0$.

En utilisant cette méthode, on obtient pour $t \in [0, 10]$, $\xi = \delta^{-1} = 10$ et $\eta_t = 2t$ les deux trajectoires d'un processus gamma représentées sur la figure 1.3.

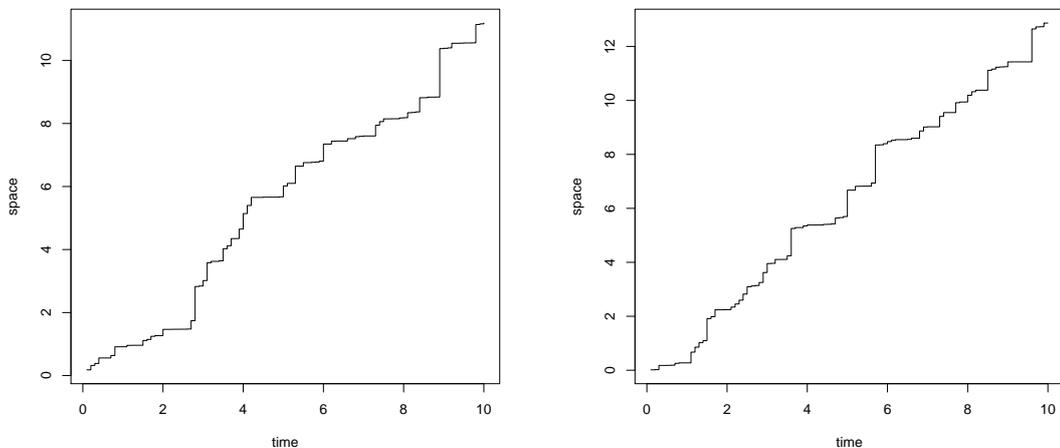


FIG. 1.3 – Deux trajectoires d'un processus gamma

Simulation par Poisson composé

On commence par rappeler la définition d'un processus de Poisson composé.

Définition 1.3 *Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson composé s'il est défini de la manière suivante :*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

où le nombre de sauts $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ et les sauts $(Y_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d, de fonction de répartition F , indépendante du processus $(N_t)_{t \geq 0}$.

Approximation : le processus gamma peut être considéré comme la limite d'un processus de Poisson composé de la manière suivante. On suppose que la taille de sauts suit une loi gamma de paramètre de forme $\nu > 0$ et d'échelle $u > 0$ et on suppose que l'intensité de sauts $\lambda = c\Gamma(\nu)/u^\nu$. Selon Dufresne et al. [28], la transformée de Laplace de X_t est définie comme suit :

$$\mathbb{E}(e^{-sX_t}) = \exp \left\{ ct \frac{\Gamma(\nu)}{u^\nu} \int_0^{+\infty} (e^{-s\delta} - 1) \times \frac{u^\nu}{\Gamma(\nu)} \delta^{\nu-1} \exp \{-u\delta\} d\delta \right\}.$$

Cette transformée de Laplace tend vers la transformée de Laplace d'un processus gamma de paramètre de forme c et d'échelle u lorsque ν tend vers zéro :

$$\mathbb{E}(e^{-sX_t}) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \exp \left\{ ct \int_0^{+\infty} (e^{-s\delta} - 1) \frac{e^{-u\delta}}{\delta} d\delta \right\} = \left[\frac{u}{u+s} \right]^{ct}.$$

Algorithme de simulation : pour simuler une trajectoire d'un processus de Poisson composé, on peut utiliser l'algorithme suivant :

1. $t_0 = 0, N = 0, X_{t_0} = 0.$
2. Générer U de loi uniforme sur $[0,1]$;
3. $t_{N+1} = t_N + \lceil -(1/\lambda) \ln(U) \rceil$. Si $t_{N+1} > T$, finir.
4. Générer Y de loi F .
5. Poser $X_{t_{N+1}} = X_{t_N} + Y$ et $N = N + 1$;
6. Retour à 2.

1.3.4 Estimation des paramètres d'un processus gamma homogène

Un jeu de données peut consister en une série de temps d'inspection t_i ($i \in \{0, \dots, n\}$) associée à une série d'observations de dégradations y_i ($i \in \{0, \dots, n\}$) associées à une unique

trajectoire. On considère un processus gamma de paramètres ξ et η_t où $\eta_t = \alpha t^\beta$. Nous supposons que β est connu, mais que α et ξ sont inconnus. Les deux méthodes d'estimation des paramètres les plus utilisées sont la méthode de maximum de vraisemblance et celle des moments. Ces méthodes sont examinées dans cette section. Les deux méthodes d'estimation de ξ et α ont d'abord été présentées par Çinlar et al. [19].

1.3.4.1 Méthode du maximum de vraisemblance

Les estimateurs du maximum de vraisemblance de ξ et α peuvent être obtenus en maximisant le logarithme de la fonction de vraisemblance des accroissements. La fonction de vraisemblance des accroissements $x_i = y_i - y_{i-1}$, pour $i \in \{0, \dots, n\}$, où les y_i sont des réalisations de Y_{t_i} , est donnée par :

$$L(x_1, \dots, x_n | \alpha, \xi) = \prod_{i=1}^n f_{Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\xi^{\alpha(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)}}{\Gamma[\alpha(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)]} x_i^{\alpha(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta) - 1} \exp(-\xi x_i).$$

Il s'ensuit que l'estimateur de maximum de vraisemblance de ξ est $\hat{\xi} = \hat{\alpha} t_n^\beta y_n^{-1}$, où $\hat{\alpha}$ doit être calculé numériquement. En prenant $\hat{\xi} = \hat{\alpha} t_n^\beta y_n^{-1}$, l'estimation de α peut être obtenue en résolvant l'équation normale suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \log L(x_1, \dots, x_n | \alpha) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \alpha [t_i^\beta - t_{i-1}^\beta] \log \left(\frac{\alpha t_n^\beta}{y_n} \right) - \log \Gamma[\alpha [t_i^\beta - t_{i-1}^\beta]] + (\alpha [t_i^\beta - t_{i-1}^\beta] - 1) \log x_i - \frac{\alpha t_n^\beta}{y_n} x_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ [t_i^\beta - t_{i-1}^\beta] \left[\log \left(\frac{\alpha t_n^\beta}{y_n} \right) + 1 - \psi(\alpha [t_i^\beta - t_{i-1}^\beta]) + \log x_i \right] - \frac{t_n^\beta}{y_n} x_i \right\} \\ &= t_n^\beta \log \left(\frac{\alpha t_n^\beta}{y_n} \right) + \sum_{i=1}^n [t_i^\beta - t_{i-1}^\beta] \{ \log x_i - \psi(\alpha [t_i^\beta - t_{i-1}^\beta]) \} = 0. \end{aligned}$$

En résumé, les estimations $\hat{\xi}$ et $\hat{\alpha}$ de ξ et α sont obtenues en résolvant l'équation :

$$\sum_{i=1}^n [t_i^\beta - t_{i-1}^\beta] \{ \psi(\hat{\alpha} [t_i^\beta - t_{i-1}^\beta]) - \log x_i \} = t_n^\beta \log(\hat{\alpha} t_n^\beta y_n^{-1}),$$

d'une part, et en posant $\hat{\xi} = \hat{\alpha} t_n^\beta y_n^{-1}$ d'autre part.

1.3.4.2 Méthode des moments

Rappelons que les valeurs de l'espérance et de la variance de la dégradation au temps t sont données par :

$$\mathbb{E}(Y_t) = \frac{\alpha t^\beta}{\xi} \quad \text{et} \quad \text{Var}(Y_t) = \frac{\alpha t^\beta}{\xi^2}. \quad (1.1)$$

Lorsque la puissance β est connue, le processus gamma non-stationnaire peut facilement être transformé en un processus gamma stationnaire en effectuant une transformation monotone du temps t : $\varphi(t) = t^\beta$. En substituant la transformation $t(\varphi) = \varphi^{1/\beta}$ dans l'équation (1.1) on obtient :

$$\mathbb{E}(Y_{t(\varphi)}) = \frac{\alpha\varphi}{\xi} \text{ et } \text{Var}(Y_{t(\varphi)}) = \frac{\alpha\varphi}{\xi^2}.$$

Cela se traduit par un processus gamma stationnaire à l'égard du temps transformé φ . Introduisons les temps transformés notés $\varphi_i = t_i^\beta$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. On définit les accroissements ω_i des temps transformés par $\omega_i = t_i^\beta - t_{i-1}^\beta$ et on note :

$$\begin{aligned} X_i &= Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}, \\ U_i &= X_i - \frac{\alpha\omega_i}{\xi}, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

L'accroissement X_i suit une loi gamma de paramètres $\alpha\omega_i$ et ξ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. De plus les accroissements X_1, \dots, X_n sont indépendants. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, les premier et second moments de U_i sont donnés par :

$$\mathbb{E}(U_i) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(U_i^2) = \frac{\alpha\omega_i}{\xi^2}. \quad (1.3)$$

On donne ci-dessous les taux moyens de dégradation par unité de temps transformé :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i}, \quad \bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \bar{X} - \frac{\alpha}{\xi}. \quad (1.4)$$

D'après les équations (1.3) et (1.4), on a :

$$\mathbb{E}(\bar{U}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(\bar{U}^2) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(U_i^2)}{\left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right)^2} = \frac{\alpha \sum_{i=1}^n \omega_i}{\xi^2 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right)^2} = \frac{\alpha}{\xi^2} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right)^{-1}. \quad (1.5)$$

Il vient $\mathbb{E}(\bar{X}) = \alpha/\xi$ et, d'après l'équation (1.2), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}\omega_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \left[U_i + \frac{\alpha\omega_i}{\xi} - \left(\bar{U} + \frac{\alpha}{\xi}\right)\omega_i \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [U_i - \bar{U}\omega_i]^2 = \sum_{i=1}^n (U_i^2 - 2U_i\bar{U}\omega_i + \omega_i^2\bar{U}^2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Comme $\mathbb{E}(U_i) = 0$, l'espérance du deuxième terme de la dernière somme peut être écrite comme suit :

$$\mathbb{E}(U_i \bar{U}) = \frac{\mathbb{E}\left(U_i \sum_{j=1}^n U_j\right)}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \frac{\mathbb{E}\left(U_i^2 + U_i \sum_{i \neq j} U_i\right)}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \frac{\mathbb{E}(U_i^2)}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \frac{\alpha \omega_i}{\xi^2 \sum_{i=1}^n \omega_i}. \quad (1.7)$$

En prenant l'espérance de l'équation (1.6) et en utilisant les équations (1.5–1.7), on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X} \omega_i)^2\right) = \frac{\alpha}{\xi^2} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i - \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right)} \right).$$

Alors, l'estimation $\hat{\alpha}$ et $\hat{\xi}$ est donné par :

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\xi}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \frac{y_n}{t_n^\beta} = \bar{x},$$

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\xi}^2} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i - \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i^2}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} \omega_i)^2$$

où, de manière équivalente, par :

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\xi}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \frac{y_n}{t_n^\beta} = \bar{x},$$

$$\frac{y_n}{\hat{\xi}} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i^2}{\left[\sum_{i=1}^n \omega_i\right]^2} \right) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} \omega_i)^2.$$

Finalement, on peut exprimer $\hat{\xi}$ et $\hat{\alpha}$ en fonction des x_i , \bar{x} et ω_i de la manière suivante :

$$\hat{\xi} = y_n \left(1 - \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \right)^{-2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \right) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} \omega_i)^2,$$

$$\hat{\alpha} = \bar{x} \hat{\xi}.$$

Il est clair que la méthode des moments conduit à une formulation plus simple, car explicite, pour l'estimation des paramètres.

1.3.5 Premier temps d'atteinte

Dans cette section on étudie la loi de premier temps d'atteinte T_Y^c d'un niveau $c > 0$:

$$T_Y^c = \inf \{t \geq 0 ; Y_t \geq c\} .$$

Comme $(Y_t)_{t \geq 0}$ est à trajectoires croissantes, alors on a :

$$\forall t \geq 0 , \quad \mathbb{P}[T_Y^c > t] = \mathbb{P}[Y_t < c] .$$

Donc, il suffit d'étudier la loi de Y_t pour tout $t \geq 0$. On considère d'abord le cas du premier temps d'atteinte d'un niveau déterministe c et puis d'un niveau aléatoire C .

1.3.5.1 Cas d'un seuil déterministe

Le premier temps d'atteinte a été déjà étudié par Park et Padgett [62] dans le cas linéaire ($\eta_t = \alpha t$) i.e. homogène. Ils ont exprimé la densité de premier temps d'atteinte à l'aide de la fonction hypergéométrique et de la fonction gamma incomplète (supérieure). On note par $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ la fonction digamma, ${}_pF_q$ la fonction hypergéométrique généralisée d'ordre (p, q) définie de la manière suivante (voir section 9.14 dans [34]) :

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k z^k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k k!} ,$$

où $(x)_n = \Gamma(x+n)/\Gamma(x)$ est le symbole de Pochhammer et par $\Gamma(a, x)$ la fonction gamma incomplète (supérieure) telle que

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt .$$

Le théorème suivant [63] généralise le résultat obtenu par Park et Padgett [62].

Théorème 1.3 *La fonction de répartition de T_Y^c est donnée par :*

$$\forall t \geq 0 , \quad F_{T_Y^c}(t) = \frac{\Gamma(\eta_t, C_\xi)}{\Gamma(\eta_t)} ,$$

où $C_\xi = c\xi$. Supposons η dérivable sur \mathbb{R}^+ , la densité de T_Y^c est égale à :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0 , \quad f_{T_Y^c}(t) &= \eta'_t (\Psi(\eta_t) - \log(C_\xi)) \left(1 - \frac{\Gamma(\eta_t, C_\xi)}{\Gamma(\eta_t)} \right) \\ &\quad + \frac{\eta'_t}{\eta_t^2 \Gamma(\eta_t)} (C_\xi)^{\eta_t} {}_2F_2(\eta_t, \eta_t; \eta_t + 1, \eta_t + 1; -C_\xi) . \end{aligned}$$

La preuve de cette proposition est à peu près la même que dans le cas linéaire [62], bien que des calculs plus directs aient été menés ici.

Preuve. Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(T_Y^c > t) = \mathbb{P}(Y_t < c) = \frac{\gamma(\eta_t, C_\xi)}{\Gamma(\eta_t)}.$$

où $\gamma(a, x) = \Gamma(a) - \Gamma(a, x)$. D'où la fonction de répartition de T_Y^c . Soit $t \geq 0$. A partir de l'expression de la fonction de répartition, on obtient la fonction de densité comme suit :

$$f_{T_Y^c}(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta_t)} \frac{d}{dt} \Gamma(\eta_t, C_\xi) - \frac{\eta_t'}{\Gamma(\eta_t)} \Psi(\eta_t) \Gamma(\eta_t, C_\xi),$$

puisque $\Gamma'(a) = \Psi(a)\Gamma(a)$. De l'équation (6.5.12) dans [2] (page 262), Il en résulte que :

$$\Gamma(\eta_t, C_\xi) = \Gamma(\eta_t) - \gamma(\eta_t, C_\xi) = \Gamma(\eta_t) - \frac{(C_\xi)^{\eta_t}}{\eta_t} {}_1F_1(\eta_t; \eta_t + 1; -C_\xi),$$

avec

$${}_1F_1(\eta_t; \eta_t + 1; -C_\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta_t)_k}{(\eta_t + 1)_k} \frac{(C_\xi)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta_t}{\eta_t + k} \frac{(C_\xi)^k}{k!}.$$

De plus

$$\frac{d}{dt} \frac{\eta_t}{\eta_t + k} = \frac{\eta_t'}{\eta_t} \left(\frac{(\eta_t)_k}{(\eta_t + 1)_k} - \frac{(\eta_t)_k^2}{(\eta_t + 1)_k^2} \right).$$

Puis, en utilisant les deux dernières expressions, on a :

$$\frac{d}{dt} {}_1F_1(\eta_t; \eta_t + 1; -C_\xi) = \frac{\eta_t'}{\eta_t} ({}_1F_1(\eta_t; \eta_t + 1; -C_\xi) - {}_2F_2(\eta_t, \eta_t; \eta_t + 1, \eta_t + 1; -C_\xi)).$$

Ainsi, en utilisant l'expression ci-dessus de la fonction gamma incomplète et la dernière équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma(\eta_t, C_\xi) &= \eta_t' \Gamma(\eta_t) (\Psi(\eta_t) - \log(C_\xi)) + \eta_t' \log(C_\xi) \Gamma(\eta_t, C_\xi) \\ &\quad + \frac{\eta_t' (C_\xi)^{\eta_t}}{\eta_t^2} {}_2F_2(\eta_t, \eta_t; \eta_t + 1, \eta_t + 1; -C_\xi). \end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant cette équation dans l'expression de la fonction de densité ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} f_{T_Y^c}(t) &= \eta_t' (\Psi(\eta_t) - \log(C_\xi)) \left(1 - \frac{\Gamma(\eta_t, C_\xi)}{\Gamma(\eta_t)} \right) \\ &\quad + \frac{\eta_t'}{\eta_t^2 \Gamma(\eta_t)} (C_\xi)^{\eta_t} {}_2F_2(\eta_t, \eta_t; \eta_t + 1, \eta_t + 1; -C_\xi). \end{aligned}$$

■

D'après Park et Padgett [62], la loi de Birnbaum-Saunders (voir figure 1.4) peut être utilisée pour approcher la fonction de densité mentionnée ci-dessus.

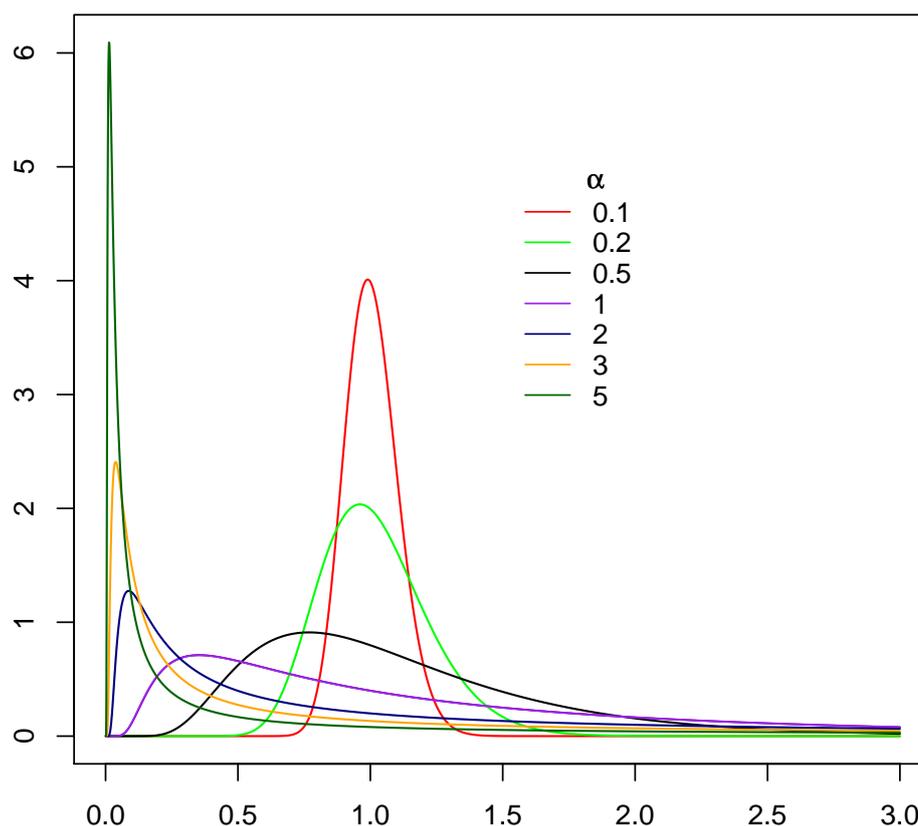


FIG. 1.4 – Densités de la loi Birnbaum-Saunders

1.3.5.2 Cas d'un seuil aléatoire

Depuis l'article de Abdel-Hameed [1], quelques auteurs ont étudié le problème de la loi de premier temps d'atteinte d'un niveau aléatoire. A partir de l'expression de la fonction de répartition dans le théorème 1.3, on peut calculer facilement la fonction de répartition de T_Y^C où C est une variable aléatoire exponentielle de paramètre ρ indépendante de Y .

Théorème 1.4 La fonction de répartition de T_Y^C est égale à :

$$\forall t \geq 0, \quad F_{T_Y^C}(t) = 1 - \left(\frac{1}{1 + \rho\xi} \right)^{\eta t}.$$

Si η est dérivable, la densité de T_Y^C est donnée par :

$$\forall t \geq 0, \quad f_{T_Y^C}(t) = \eta'_t(1 + \rho\xi)^{-\eta_t} \log(1 + \rho\xi).$$

Preuve. Pour tout $t \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_Y^C \leq t] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[T_Y^C \leq t | C = x] \rho e^{-\rho x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[T_Y^x \leq t | C = x] \rho e^{-\rho x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[T_Y^x \leq t] \rho e^{-\rho x} dx \\ &= \frac{\rho}{\Gamma(\eta_t)} \int_0^{+\infty} \Gamma(\eta_t, x/\xi) e^{-\rho x} dx \end{aligned}$$

en utilisant l'expression de la fonction de répartition obtenue dans le théorème 1.3. En appliquant la formule (6.5.36) dans [2] (page 262), l'expression ci-dessus se réduit à :

$$\forall t \geq 0, \quad F_{T_Y^C}(t) = 1 - \left(\frac{1}{1 + \rho\xi} \right)^{\eta_t}.$$

Alors, l'expression de la fonction de densité s'en déduit facilement. ■

Ce résultat est le même que celui obtenu par Frenk et Nicolai [33] mais par une technique différente. Les calculs ne sont pas si facilement faisables pour toute loi de C . Quoiqu'il en soit, on peut approcher cette loi par une loi de type-phase [56] : par exemple, une variable aléatoire positive peut être approchée par un mélange de lois d'Erlang avec le même paramètre de forme. Dans ce cas, les calculs peuvent être facilement déduits et l'on peut prouver le résultat suivant en utilisant la formule (6.455.1) dans [34] (page 663) :

Théorème 1.5 *Supposant que C_n est un mélange de lois d'Erlang comme suit :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_{C_n}(x) = \sum_{i=1}^n p_i \rho^{k_i} \frac{x^{k_i-1}}{(k_i-1)!} e^{-\rho x},$$

avec $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $p_1 + \dots + p_n = 1$, $\rho > 0$ et $k_1, \dots, k_n > 0$. Alors, la fonction de répartition de $T_Y^{C_n}$ est donnée par :

$$\forall t \geq 0, \quad F_{T_Y^{C_n}}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{k_i!} (\eta_t)_{k_i} \left(\frac{\rho\xi}{1 + \rho\xi} \right)^{k_i} (1 + \rho\xi)^{-\eta_t} {}_2F_1 \left(1, \eta_t + k_i; k_i; \frac{\rho\xi}{1 + \rho\xi} \right).$$

1.4 Conclusion

Les propriétés d'indépendance et de stationnarité de ses accroissements conduisent à retenir la classe des processus de Lévy [5] pour la modélisation de la dégradation d'un sys-

tème. Cette classe englobe en particulier des processus largement étudiés dans la littérature [65]. Comme on a choisi de s'intéresser à une modélisation par processus stochastiques, le tableau 1.1 présente une comparaison des processus gamma et mouvement brownien avec tendance. Ce tableau identifie leurs avantages, inconvénients ainsi que leurs principales utilisations.

Processus	Avantage	Inconvénients	Principales utilisations
Processus de Wiener	Simplicité	Valeurs négatives non réalistes	Fatigue
Processus gamma	Traduit bien la physique des accroissements	Modélise des accroissements, pas les niveaux de dégradation	Propagation par mécanismes continus

TAB. 1.1 – Synthèse des processus stochastiques étudiés [12]

Lorsque l'on souhaite modéliser une dégradation continue, il faut avoir recours à un processus de Wiener. La modélisation de la dégradation par un processus de Wiener présente le problème majeur de l'existence de trajectoires de dégradation non monotones. Cette propriété peut être tolérée dans certaines conditions et des travaux ont été développés à partir de ce type de modélisation [4; 74]. Si on souhaite privilégier la monotonie, il faut utiliser un modèle de dégradation construit sur un processus de sauts, au risque de perdre la propriété de continuité. Il est en effet impossible d'utiliser les processus de Lévy pour avoir un modèle de dégradation à trajectoires à la fois continues et croissantes. Le mouvement brownien est le seul processus de Lévy à trajectoires continues. La solution consiste à se placer dans le cas limite d'un processus de sauts présentant un nombre infini de sauts sur un intervalle de temps fini. Pour ce faire, la loi de probabilité des accroissements doit être à support positif et infiniment divisible [31] : la famille des lois gamma vérifie ces conditions et on construit ainsi les processus gamma.

1.5 Objectifs et structure de la thèse

Le premier objectif de cette thèse est la construction d'un modèle de dégradation qui prend en compte non seulement la dégradation du système mais également l'environnement stressant dans lequel il évolue. Le second objectif porte sur l'étude de comportement asymptotique des estimateurs avec ou sans covariables. Le dernier objectif sera d'appliquer ces modèles à des données réelles.

Dans le chapitre 2, on propose un modèle de dégradation basé sur des processus classiques bien connus et déjà utilisés comme modèle de dégradation (le processus gamma et

le mouvement brownien). On a estimé les paramètres du modèle et on a étudié les propriétés asymptotiques des estimateurs. Enfin, on a illustré nos résultats théoriques à travers des simulations et des applications à des données réelles.

Comme la dégradation de système est également influencée par l'environnement, il est intéressant d'envisager un modèle intégrant des covariables. Un tel modèle sera étudié dans le chapitre 3. On suppose que les covariables agissent seulement sur le processus gamma pris en compte dans notre modèle. Les covariables seront intégrés à la manière proposée par Bagdonavičius et Nikulin [7]. Dans ce chapitre, on a proposé une méthode des moindres carrés en deux étapes pour estimer les paramètres et on a étudié les propriétés asymptotiques des estimateurs. Enfin, on a illustré nos résultats théoriques à travers des simulations et des applications à des données réelles issues de la littérature.

Le chapitre 4 présente une application de notre méthode à des données réelles de grande taille. On dispose d'un jeu de données d'une compagnie de transport sur une de ses lignes. Pour ce jeu de données on a estimé les paramètres de notre modèle. Ensuite, on a comparé nos résultats à d'autres résultats existants.

Chapitre 2

Processus gamma perturbé par un mouvement brownien

2.1 Introduction et modèle

La dégradation d'une structure traduit une évolution lente et irréversible de ses variables d'état, conduisant à la diminution des marges de sûreté nécessaires pour assurer son bon fonctionnement. La modélisation de la dégradation des structures est essentielle pour la maîtrise des risques industriels, pour la gestion de leur durée de vie, pour l'optimisation des opérations d'inspections, de la maintenance et de réparation, ainsi que pour la choix des engagements sur la garantie et la qualité des équipements.

Dans la littérature, les modèles stochastiques ont été utilisés parce qu'ils permettent une meilleure modélisation de la variabilité de l'évolution de la dégradation dans le temps. Ces modèles ont fait l'objet de nombreux articles sur les dernières décennies surtout les modèles de dégradation continue. Les trois modèles les plus fréquemment étudiés sont les suivants : le processus gamma, le processus de Poisson composé et le mouvement brownien. Dans cette thèse, une nouvelle approche est proposée pour décrire la dégradation d'un système. Cette approche consiste à considérer la dégradation $(D_t)_{t \geq 0}$ comme la somme d'un processus gamma $(Y_t)_{t \geq 0}$ et d'un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$, indépendant de $(Y_t)_{t \geq 0}$, multiplié par une constante $\tau \in \mathbb{R}$.

Dans ce chapitre on commence par décrire la mise en place du principe de maximum de vraisemblance puis on estime les paramètres du modèle en utilisant la méthode des moments. Dans la littérature, les deux méthodes les plus connues pour estimer les paramètres d'un processus gamma (maximum de vraisemblance et méthode des moments) ont été discutées dans [73]. Ces deux méthodes ont été initialement présentées par Çinlar et al. [19]. La méthode de maximum de vraisemblance ainsi qu'une approche bayésienne ont été utilisées par Ebrahimi et Ramalingam [29] et Basu et Lingham [10] pour estimer les paramètres d'un processus de Wiener dans un modèle de stress-résistance (stress–strength). On étudie ensuite

le comportement asymptotique des estimateurs issus de la méthode des moments. Cette étude des estimateurs (estimation et propriétés asymptotiques) est réalisée pour des dégradations observées à des instants réguliers ou irréguliers.

Nous proposons donc un modèle de dégradation $D = (D_t)_{t \geq 0}$ qui combine les deux approches classiques, processus gamma et mouvement brownien, de la manière suivante :

$$\forall t \geq 0, D_t = Y_t + \tau B_t,$$

où $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus gamma stationnaire de paramètres $\xi \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta_t = \alpha t$ avec $\alpha > 0$ et où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien. Ce modèle est défini pour $\tau \in \mathbb{R}$ et les deux processus sont indépendants. Sans perte de généralité, on pourra supposer que $\tau \geq 0$ car τB_t et $-\tau B_t$ ont la même loi pour tout $t \geq 0$. Ce modèle de dégradation est caractérisé par :

- les trajectoires de D sont discontinues ;
- les accroissements du processus D sont indépendants et stationnaires (processus de Lévy).

2.1.1 Motivations

Les motivations qui se cachent derrière le choix d'un tel modèle sont, tout d'abord, qu'il combine les deux approches classiques mentionnées dans le chapitre 1. En effet, il est clair que pour $\tau = 0$ notre modèle est un processus gamma. D'autre part, si $\alpha/\xi \rightarrow b > 0$ et $\alpha/\xi^2 \rightarrow 0$, alors notre modèle converge faiblement vers un mouvement brownien avec tendance b . Donc il s'avère être utile pour effectuer un choix entre le mouvement brownien avec tendance positive et le processus gamma. De plus, notons qu'il est fréquent que des erreurs surviennent lors des mesures de dégradation. Par conséquent, le rôle du mouvement dans ce modèle peut être interprété comme mesure de ces erreurs. Enfin, notre modèle peut tenir compte des réparations mineures appliquées au système au cours du temps.

2.1.2 Propriétés du modèle

Avant de montrer les propriétés du modèle, on commence par rappeler le théorème de Lévy-Khintchine et la définition de la loi normale tronquée.

Définition 2.1 Une variable aléatoire X est infiniment divisible si pour tout entier $n \geq 2$, il existe n variables aléatoires i.i.d. notées X_1, \dots, X_n telles que la somme $\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} X$. Ici $\stackrel{d}{=}$ signifie l'égalité en distribution.

Les variables aléatoires infiniment divisibles sont aussi caractérisées de la manière suivante :

Théorème 2.1 (Lévy-Khintchine) La loi d'une variable aléatoire X est infiniment divisible si pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ et pour toute mesure ν sur \mathbb{R}^* avec $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$, on a

$\tilde{\rho}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \rho(dx) = e^{\psi(t)}$ est la transformée de Fourier de la variable aléatoire X tel que :

$$\psi(t) = iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itu} - 1 - it h(u)) \nu(du)$$

où h est une fonction bornée continue telle que $h(u) = u + O(u^2)$ au voisinage de 0.

Notons respectivement par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \text{ et } F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

la densité et la fonction de répartition de la loi normale.

Définition 2.2 L'expression de la densité $\tilde{f}(t)$ de la loi normale tronquée est donnée par :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T_1, \\ \frac{f(t)}{F(T_2) - F(T_1)} & \text{si } T_1 \leq t \leq T_2, \\ 0 & \text{si } t > T_2, \end{cases}$$

avec $-\infty \leq T_1 < T_2 \leq +\infty$.

Proposition 2.1 Le modèle de dégradation (D_t) possède les propriétés suivantes :

1. Soit $\Delta D_t = D_{t+\delta} - D_t = \Delta Y_t + \tau \Delta B_t$. La densité de ΔD_t est définie par :

$$f_{\Delta D_t}(x) = \frac{\xi^{\Delta \eta_t} (\tau^2 \delta)^{\Delta \eta_t / 2} e^{\delta \tau^2 \xi^2 / 4}}{\tau \sqrt{2\pi \delta}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{x^2}{\delta \tau^2} - \frac{x\xi}{2}\right) D_{-\Delta \eta_t} \left(\left(\xi - \frac{x}{\delta \tau^2} \right) \tau \sqrt{\delta} \right)$$

où

$$D_p(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\Gamma(-p)} \int_0^{+\infty} \exp\left(-zx - \frac{x^2}{2}\right) x^{-p-1} dx,$$

si $\text{Re}(p) < 0$, D_p est appelée fonction cylindrique parabolique (formule 9.241.1 dans [34]).

2. En utilisant la densité de la loi normale tronquée, la densité des accroissements est égale à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\Delta D_t}(x) = \frac{\xi^{\Delta \eta_t}}{\Gamma(\Delta \eta_t)} \exp\left(\frac{\delta \tau^2 \xi^2}{2} - x\xi\right) \mathbb{P}[Q > 0] h(\Delta \eta_t - 1),$$

où Q est une variable aléatoire de la loi normale de moyenne $(x - \delta \tau^2 \xi)$ et de variance $\delta \tau^2$ avec

$$\mathbb{P}[Q > 0] = \int_0^{+\infty} (2\pi \delta \tau^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} [q - (x - \delta \tau^2 \xi)]^2 / \delta \tau^2\right) dq \quad (2.1)$$

et

$$\int_0^{+\infty} q^{\Delta \eta_t - 1} f(q|Q > 0) dq = \mathbb{E}[Q^{\Delta \eta_t - 1} | Q > 0] = h(\Delta \eta_t - 1). \quad (2.2)$$

3. La fonction caractéristique de D_t est égale :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_{D_t}(u) = \mathbb{E}[e^{iuD_t}] = \exp\left(-\eta_t \log(1 - iu\xi) - \frac{1}{2}u^2\tau^2\right).$$

Preuve.

1. Comme $\Delta Y_t \sim Ga(\xi, \Delta\eta_t)$ et $\tau\Delta B_t \sim N(0, \tau^2\delta)$ sont indépendantes, la densité de ΔD_t , pour tout $x \in \mathbb{R}$, est égale à :

$$\begin{aligned} & f_{\Delta D_t}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_{\Delta Y_t}(u) f_{\tau\Delta B_t}(x-u) du \\ &= \frac{\xi^{\Delta\eta_t}}{\Gamma(\Delta\eta_t)\tau\sqrt{2\pi\delta}} \int_0^{+\infty} u^{\Delta\eta_t-1} \exp(-u\xi) \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2\delta\tau^2}\right) du \quad (2.3) \\ &= \frac{\xi^{\Delta\eta_t}}{\Gamma(\Delta\eta_t)\tau\sqrt{2\pi\delta}} \int_0^{+\infty} u^{\Delta\eta_t-1} \exp(-u\xi) \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta\tau^2}\right) \exp\left(\frac{xu}{\delta\tau^2}\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2\delta\tau^2}\right) du \\ &= \frac{\xi^{\Delta\eta_t} \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta\tau^2}\right)}{\Gamma(\Delta\eta_t)\tau\sqrt{2\pi\delta}} \int_0^{+\infty} u^{\Delta\eta_t-1} \exp\left(-\left(\xi - \frac{x}{\delta\tau^2}\right)u\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2\delta\tau^2}\right) du. \end{aligned}$$

D'après la formule (3.462.1) dans [34], on a :

$$f_{\Delta D_t}(x) = \frac{\xi^{\Delta\eta_t} (\tau^2\delta)^{\Delta\eta_t/2} e^{\delta\tau^2\xi^2/4}}{\tau\sqrt{2\pi\delta}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{x^2}{\delta\tau^2} - \frac{x\xi}{2}\right) D_{-\Delta\eta_t}\left(\left(\xi - \frac{x}{\delta\tau^2}\right)\tau\sqrt{\delta}\right).$$

2. La densité des accroissements $f_{\Delta D_t}(x)$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} & f_{\Delta D_t}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_{\Delta Y_t}(u) f_{\tau\Delta B_t}(x-u) du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\xi^{\Delta\eta_t}}{\Gamma(\Delta\eta_t)\sqrt{2\pi\delta\tau^2}} u^{\Delta\eta_t-1} \exp(-u\xi) \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2\delta\tau^2}\right) du \end{aligned}$$

On pose :

$$f(x, u) = \frac{\xi^{\Delta\eta_t}}{\Gamma(\Delta\eta_t)\sqrt{2\pi\delta\tau^2}} u^{\Delta\eta_t-1} \exp(-u\xi) \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2\delta\tau^2}\right).$$

Ensuite on regroupe les termes de $f(x, u)$ afin de séparer les termes qui dépendent de x et les termes qui dépendent de u .

On pose

$$k = \frac{\xi^{\Delta\eta_t}}{\Gamma(\Delta\eta_t)\sqrt{2\pi\delta\tau^2}},$$

alors $f(x, u)$, d'après l'équation (2.3), s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 f(x, u) &= ke^{-x^2/2\delta\tau^2} e^{-u^2/2\delta\tau^2+u(x/\delta\tau^2-\xi)} u^{\Delta\eta_t-1} \\
 &= ke^{-x^2/2\delta\tau^2} e^{-1/2[u^2-2u\delta\tau^2(x/\delta\tau^2-\xi)]/\delta\tau^2} u^{\Delta\eta_t-1} \\
 &= ke^{-x^2/2\delta\tau^2} e^{-1/2[u^2-2u(x-\delta\tau^2\xi)+(x-\delta\tau^2\xi)^2-(x-\delta\tau^2\xi)^2]/\delta\tau^2} u^{\Delta\eta_t-1} \\
 &= ke^{-x^2/2\delta\tau^2+\frac{1}{2}(x-\delta\tau^2\xi)^2/\delta\tau^2} e^{-\frac{1}{2}[u-(x-\delta\tau^2\xi)]^2/\delta\tau^2} u^{\Delta\eta_t-1}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$f_{\Delta D_t}(x) = \frac{\xi^{\Delta\eta_t}}{\Gamma(\Delta\eta_t)} \exp\left(\frac{\delta\tau^2\xi^2}{2} - x\xi\right) \int_0^{+\infty} (2\pi\delta\tau^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}[u-(x-\delta\tau^2\xi)]^2/\delta\tau^2} u^{\Delta\eta_t-1} du.$$

Soit Q une variable aléatoire de la loi normale de moyenne $(x - \delta\tau^2\xi)$ et de variance $\delta\tau^2$. On sait que la fonction suivante

$$f(q|Q > 0) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}[q - (x - \delta\tau^2\xi)]^2/\delta\tau^2\right)}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}[q - (x - \delta\tau^2\xi)]^2/\delta\tau^2\right) dq}$$

est la densité de la loi normale tronquée avec $T_1 = 0$ et $T_2 = +\infty$. Alors, en utilisant les équations (2.1) et (2.2), $f_{\Delta D_t}(x)$ s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 f_{\Delta D_t}(x) &= \frac{\xi^{\Delta\eta_t}}{\Gamma(\Delta\eta_t)} \exp\left(\frac{\delta\tau^2\xi^2}{2} - x\xi\right) \mathbb{P}[Q > 0] \int_0^{+\infty} q^{\Delta\eta_t-1} f(q|Q > 0) dq \\
 &= \frac{\xi^{\Delta\eta_t}}{\Gamma(\Delta\eta_t)} \exp\left(\frac{\delta\tau^2\xi^2}{2} - x\xi\right) \mathbb{P}[Q > 0] h(\Delta\eta_t - 1).
 \end{aligned}$$

3. Par indépendance de $(Y_t)_{t \geq 0}$ et de $(B_t)_{t \geq 0}$, la fonction caractéristique de D_t peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \forall u \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[e^{iuD_t}] &= \mathbb{E}[e^{iuY_t}] \times \mathbb{E}[e^{iu\tau B_t}] \\
 &= \left(1 - \frac{iu}{\xi}\right)^{-\eta_t} \exp\left\{-\frac{u^2\tau^2}{2}\right\} \\
 &= \exp\left(-\eta_t \log\left(1 - \frac{iu}{\xi}\right) - \frac{1}{2}u^2\tau^2\right).
 \end{aligned}$$

■

2.1.3 Simulation

En superposant les deux méthodes de simulation (une pour chacun des deux processus), on peut ainsi obtenir une méthode de simulation pour le modèle de dégradation proposé dans la section 2.1. La figure 2.1 représente une trajectoire de modèle de dégradation pour $\tau = 0,4$; $\xi = 100$ et $\eta_t = 2t$.

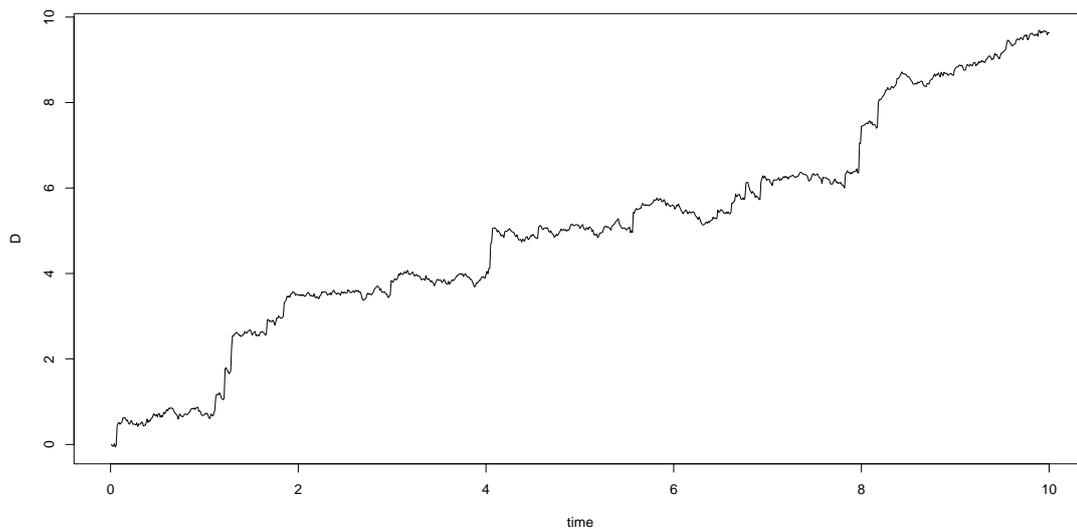


FIG. 2.1 – Une trajectoire du modèle de dégradation

2.2 Cas d'observations périodiques

Pour n trajectoires indépendantes observées à des instants $t_j = jT/N$ où $1 \leq j \leq N$, on va estimer les paramètres du modèle de dégradation défini dans la section 2.1 en utilisant la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance. Ensuite on va étudier les propriétés asymptotiques des estimateurs issus de la méthode des moments dans deux cas : le premier est le cas où n tend vers l'infini, le deuxième est le cas où n et N tendent tous les deux vers l'infini.

Soit $D^{(1)}, \dots, D^{(n)}$ n processus de dégradation indépendants et identiquement distribués tels que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall t \geq 0$,

$$D_t^{(i)} = Y_t^{(i)} + \tau B_t^{(i)},$$

où $Y^{(i)}$ est un processus gamma de paramètres d'échelle ξ et de forme α et où $B^{(i)}$ est un mouvement brownien indépendant de $Y^{(i)}$.

2.2.1 Méthode du maximum de vraisemblance

La densité de ΔD_t , peut être écrite, voir proposition 2.1, de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\theta, \delta}(x) = \frac{\xi^{\frac{\alpha T}{N}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha T}{N}\right)} \exp\left\{\frac{\tau^2 \xi^2 T}{2N} - x\xi\right\} \int_0^{+\infty} (2\pi\tau^2 T/N)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[u - (x - \tau^2 \xi T/N)\right]^2 / \frac{\tau^2 T}{N}\right) u^{\frac{\alpha T}{N}-1} du.$$

où $\theta = (\xi, \alpha, \tau^2)$ et $\delta = T/N$. Notons $\underline{x} = (x_j^{(i)}; 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq N)$. La fonction de vraisemblance des accroissements, $L(\underline{x}|\xi, \alpha, \tau^2)$, est donnée par :

$$L(\underline{x}|\xi, \alpha, \tau^2) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^N \left(\frac{\xi^{\frac{\alpha T}{N}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha T}{N}\right)} \exp\left\{\frac{\tau^2 \xi^2 T/N}{2} - x_j^{(i)} \xi\right\} \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\pi\tau^2 T}{N}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[u - (x_j^{(i)} - \tau^2 \xi T/N)\right]^2 / \frac{\tau^2 T}{N}\right) u^{\frac{\alpha T}{N}-1} du \right).$$

Le logarithme de la fonction de vraisemblance est égal à :

$$\log L(\underline{x}|\xi, \alpha, \tau^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(\frac{\alpha T}{N} \log \xi - \log \Gamma\left(\frac{\alpha T}{N}\right) + \frac{\xi^2 \tau^2 T}{2N} - x_j^{(i)} \xi \right. \\ \left. + \log \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\pi\tau^2 T}{N}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{N}{2\tau^2 T} \left[u - x_j^{(i)} + \tau^2 \xi T/N\right]^2\right) u^{\frac{\alpha T}{N}-1} du \right).$$

Sa dérivée partielle par rapport à ξ est donnée par :

$$\frac{\partial \log L(\underline{x}|\xi, \alpha, \tau^2)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(\frac{\alpha T}{N\xi} + \xi \tau^2 T/N - x_j^{(i)} \right. \\ \left. + \frac{\int_0^{+\infty} (2\pi\tau^2 T/N)^{-\frac{1}{2}} \left[-(u - x_j^{(i)} + \xi \tau^2 T/N)\right] \exp\left(-\frac{1}{2}\left[u - x_j^{(i)} + \xi \tau^2 T/N\right]^2 / \frac{\tau^2 T}{N}\right) u^{\frac{\alpha T}{N}-1} du}{\int_0^{+\infty} (2\pi\tau^2 T/N)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[u - x_j^{(i)} + \xi \tau^2 T/N\right]^2 / \frac{\tau^2 T}{N}\right) u^{\frac{\alpha T}{N}-1} du} \right).$$

Donc,

$$\frac{\partial \log L(\underline{x}|\xi, \alpha, \tau^2)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\alpha T}{N\xi} - \frac{h_{x_j^{(i)}}\left(\frac{\alpha T}{N}\right)}{h_{x_j^{(i)}}\left(\frac{\alpha T}{N} - 1\right)} \right\}$$

où

$$h_{x_j^{(i)}}(r) = \int_0^{+\infty} (2\pi\tau^2 T/N)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[u - (x_j^{(i)} - \xi \tau^2 T/N)\right]^2 / \frac{\tau^2 T}{N}\right) u^r du.$$

Ensuite, la dérivée partielle, par rapport à α , est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\underline{x}|\xi, \alpha, \tau^2)}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(\frac{T}{N} \log \xi - \frac{T}{N} \psi \left(\frac{\alpha T}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int_0^{+\infty} (2\pi\tau^2 T/N)^{-\frac{1}{2}} \frac{T}{N} \log u \exp \left(-\frac{1}{2} [u - x_j^{(i)} + \xi\tau^2 T/N]^2 / \frac{\tau^2 T}{N} \right) u^{\frac{\alpha T}{N} - 1} du}{\int_0^{+\infty} (2\pi\tau^2 T/N)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} [u - x_j^{(i)} + \xi\tau^2 T/N]^2 / \frac{\tau^2 T}{N} \right) u^{\frac{\alpha T}{N} - 1} du} \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\partial \log L(\underline{x}|\xi, \alpha, \tau^2)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(\frac{T}{N} \log \xi - \frac{T}{N} \psi \left(\frac{\alpha T}{N} \right) + \frac{T \mathbb{E}_{x_j^{(i)}} \left[Q^{\frac{\alpha T}{N} - 1} \log Q | Q > 0 \right]}{N h_{x_j^{(i)}} \left(\frac{\alpha T}{N} - 1 \right)} \right)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x_j^{(i)}} \left[Q^{\frac{\alpha T}{N} - 1} \log Q | Q > 0 \right] \\ = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\pi\tau^2 T}{N} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} [u - x_j^{(i)} + \xi\tau^2 T/N]^2 / \frac{\tau^2 T}{N} \right) u^{\frac{\alpha T}{N} - 1} \log u \, du. \end{aligned}$$

Finalement, d'après le théorème de Fubini, on montre que la dérivée partielle du logarithme de la fonction de vraisemblance par rapport à τ^2 s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \log L(\underline{x}|\xi, \alpha, \tau^2)}{\partial \tau^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(\frac{\xi^2 T}{2N} + \int_0^{+\infty} \frac{\partial \Psi(u)}{\partial \tau^2} du / \int_0^{+\infty} \Psi(u) du \right)$$

où

$$\Psi(u) = (2\pi\tau^2 T/N)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} [u - x_j^{(i)} + \xi\tau^2 T/N]^2 / \frac{\tau^2 T}{N} \right) u^{\frac{\alpha T}{N} - 1}.$$

On pose $\omega = u - x_j^{(i)} + \xi\tau^2 T/N$. Alors,

$$\frac{\partial \Psi(u)}{\partial \tau^2} = -\frac{\Psi(u)}{2\tau^2} + \frac{\Psi(u)}{\tau^2} \left[\frac{\omega^2}{2\tau^2} - \xi\omega \right] = -\frac{\Psi(u)}{\tau^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{2\tau^2 T/N} + \xi\omega \right].$$

En remplaçant ω par son expression, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(u)}{\partial \tau^2} &= -\frac{\Psi(u)}{\tau^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{u^2}{2\tau^2 T/N} - \frac{(x_j^{(i)})^2}{2\tau^2 T/N} + \frac{\xi^2 \tau^2 T/N}{2} + \frac{u x_j^{(i)}}{\tau^2 T/N} \right] \\ &= -\Psi(u) \left[\frac{1}{2\tau^2 T/N} - \frac{u^2}{2\tau^4 T/N} - \frac{(x_j^{(i)})^2}{2\tau^4 T/N} + \frac{\xi^2}{2} + \frac{u x_j^{(i)}}{\tau^4 T/N} \right]. \end{aligned}$$

Donc, la dérivée partielle du logarithme de la fonction de vraisemblance par rapport à τ^2 est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\underline{x}|\xi, \alpha, \tau^2)}{\partial \tau^2} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2\tau^2 T/N} \left[1 - \frac{(x_j^{(i)})^2}{\tau^2} \right] + \frac{h_{x_j^{(i)}}(\frac{\alpha T}{N} + 1) - 2x_j^{(i)} h_{x_j^{(i)}}(\frac{\alpha T}{N})}{2\tau^4 h_{x_j^{(i)}}(\frac{\alpha T}{N} - 1) T/N} \right). \end{aligned}$$

2.2.2 Méthode des moments

En utilisant les trois premiers moments, on va déterminer les estimateurs des paramètres par la méthode des moments. On suppose qu'on observe les processus $D^{(i)}$ à des instants equirépartis $t_j = jT/N$. Pour tout $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq k \leq 6$ (on aura besoin plus tard des six premiers moments), on note $m_j^{(k)}$ le moment d'ordre k des accroissements $D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)}$, i.e.

$$m_j^{(k)} = \mathbb{E} \left[\left(D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^k \right].$$

Comme les processus de dégradation sont à accroissements stationnaires et comme $t_j = jT/N$, ces accroissements ne dépendent ni de i ni de j . Donc, on écrit $m^{(k)}$ à la place de $m_j^{(k)}$ dans la suite. Les trois premiers moments sont égaux à :

$$\begin{aligned} m^{(1)} &= \mathbb{E} \left[D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)} \right] = \frac{\alpha T}{N\xi}, \\ m^{(2)} &= \mathbb{E} \left[\left(D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left(Y_{t_j}^{(i)} - Y_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^2 \right] + \tau^2 \mathbb{E} \left[\left(B_{t_j}^{(i)} - B_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\alpha T}{N\xi^2} + \frac{\alpha^2 T^2}{N^2 \xi^2} + \frac{\tau^2 T}{N}, \\ m^{(3)} &= \mathbb{E} \left[\left(D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^3 \right] = \mathbb{E} \left[\left(Y_{t_j}^{(i)} - Y_{t_{j-1}}^{(i)} + \tau \left(B_{t_j}^{(i)} - B_{t_{j-1}}^{(i)} \right) \right)^3 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(Y_{t_j}^{(i)} - Y_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^3 \right] + 3\tau^2 \mathbb{E} \left[Y_{t_j}^{(i)} - Y_{t_{j-1}}^{(i)} \right] \mathbb{E} \left[\left(B_{t_j}^{(i)} - B_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^2 \right] \\ &= \frac{2\alpha T}{N\xi^3} + 3 \frac{\alpha^2 T^2}{N^2 \xi^3} + \frac{\alpha^3 T^3}{N^3 \xi^3} + 3 \frac{\alpha \tau^2 T^2}{N^2 \xi}. \end{aligned}$$

D'après ces trois premiers moments, on a :

$$\begin{aligned} m^{(1)} &= \frac{\alpha T}{N\xi}, \\ m^{(2)} &= \frac{m^{(1)}}{\xi} + (m^{(1)})^2 + \frac{\tau^2 T}{N}, \\ m^{(3)} &= m^{(1)} \left[\frac{2}{\xi^2} - 2(m^{(1)})^2 + 3m^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

On en déduit facilement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\xi &= \sqrt{\frac{2m^{(1)}}{m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)}}}, \\ \alpha &= \frac{N\xi m^{(1)}}{T}, \\ \tau^2 &= \frac{N[m^{(2)} - m^{(1)}/\xi - (m^{(1)})^2]}{T}.\end{aligned}$$

Soit \hat{m} l'estimateur empirique des trois premiers moments :

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} \hat{m}^{(1)} \\ \hat{m}^{(2)} \\ \hat{m}^{(3)} \end{pmatrix} \text{ où } \forall k \in \{1, 2, 3\}, \hat{m}^{(k)} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^k.$$

Alors, on note par $\hat{\theta} = (\hat{\xi}, \hat{\alpha}, \hat{\tau}^2)$ l'estimateur de $\theta = (\xi, \alpha, \tau^2)$ tels que :

$$\begin{aligned}\hat{\xi} &= \sqrt{\frac{2\hat{m}^{(1)}}{\hat{m}^{(3)} + 2(\hat{m}^{(1)})^3 - 3\hat{m}^{(1)}\hat{m}^{(2)}}}, \\ \hat{\alpha} &= \frac{N\hat{m}^{(1)}}{T} \sqrt{\frac{2\hat{m}^{(1)}}{\hat{m}^{(3)} + 2(\hat{m}^{(1)})^3 - 3\hat{m}^{(1)}\hat{m}^{(2)}}}, \\ \hat{\tau}^2 &= \frac{N}{T} \left[\hat{m}^{(2)} - \frac{\sqrt{\hat{m}^{(1)}(\hat{m}^{(3)} + 2(\hat{m}^{(1)})^3 - 3\hat{m}^{(1)}\hat{m}^{(2)})}}{\sqrt{2}} - (\hat{m}^{(1)})^2 \right].\end{aligned}$$

Avant d'étudier les propriétés asymptotiques de $\hat{\theta}$, vérifions l'identifiabilité de θ .

Identifiabilité

On note par $\Theta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ l'espace des paramètres avec . Soit f l'application différentiable de Θ dans $f(\Theta)$ définie comme suit :

$$\forall \theta \in \Theta, f(\theta) = \left(m^{(1)}(\theta), m^{(2)}(\theta), m^{(3)}(\theta) \right)'.$$

On montre que cette application est injective. Pour cela on suppose qu'il existe deux processus de dégradation $D^{(1)}$ de paramètres $(\xi_1, \alpha_1, \tau_1^2)$ et $D^{(2)}$ de paramètres $(\xi_2, \alpha_2, \tau_2^2)$ ayant des moments d'ordre 1, 2 et 3 égaux. On a donc par égalité des moments d'ordre 1 que

$$\frac{\alpha_1 T}{N\xi_1} = \frac{\alpha_2 T}{N\xi_2},$$

ce qui implique

$$\frac{\alpha_1}{\xi_1} = \frac{\alpha_2}{\xi_2}. \quad (2.4)$$

Ensuite, pour les moments d'ordre 2, on a l'égalité suivante :

$$\frac{\alpha_1}{\xi_1^2} + \frac{\alpha_1^2 T}{N \xi_1^2} + \tau_1^2 = \frac{\alpha_2}{\xi_2^2} + \frac{\alpha_2^2 T}{N \xi_2^2} + \tau_2^2,$$

alors, en utilisant (2.4), on obtient :

$$\frac{\alpha_1}{\xi_1} \left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} \right) = \tau_2^2 - \tau_1^2. \quad (2.5)$$

De plus, l'égalité des moments d'ordre 3 donne :

$$\frac{2\alpha_1}{\xi_1^3} + \frac{3\alpha_1^2 T}{N \xi_1^3} + \frac{\alpha_1^3 T^2}{N^2 \xi_1^3} + \frac{3\alpha_1 T \tau_1^2}{N \xi_1} = \frac{2\alpha_2}{\xi_2^3} + \frac{3\alpha_2^2 T}{N \xi_2^3} + \frac{\alpha_2^3 T^2}{N^2 \xi_2^3} + \frac{3\alpha_2 T \tau_2^2}{N \xi_2}.$$

En appliquant (2.4), on a :

$$\frac{2\alpha_1}{\xi_1} \left(\frac{1}{\xi_1^2} - \frac{1}{\xi_2^2} \right) + \frac{3\alpha_1^2 T}{N \xi_1^2} \left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} \right) + \frac{3\alpha_1 T}{N \xi_1} (\tau_1^2 - \tau_2^2) = 0.$$

Finalement, par l'égalité (2.5), on obtient :

$$\frac{2\alpha_1}{\xi_1} \left(\frac{1}{\xi_1^2} - \frac{1}{\xi_2^2} \right) = 0.$$

Ce qui implique que $\xi_1 = \xi_2$ car α_1 est strictement positif. En utilisant les égalités (2.4) et (2.5), on déduit immédiatement que $\tau_1^2 = \tau_2^2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$. D'où, l'injectivité de l'application f qui est de plus bijective, car par hypothèse f est à valeurs dans $f(\Theta)$.

2.2.2.1 Propriétés asymptotiques : n tend vers l'infini

On commence par étudier les propriétés asymptotiques dans le cas où n tend vers l'infini. On vérifie d'abord la convergence de $\hat{\theta}$.

Convergence

Soit $\theta \in \Theta$. On pose $m = f(\theta) \in f(\Theta)$. Alors,

$$f^{-1}(m) = \begin{pmatrix} \xi \\ \alpha \\ \tau^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2m^{(1)}}{m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)}}} \\ \frac{N}{T} \sqrt{\frac{2(m^{(1)})^3}{m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)}}} \\ \frac{N}{T} \left[m^{(2)} - \frac{\sqrt{m^{(1)}(m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)})}}{\sqrt{2}} - (m^{(1)})^2 \right] \end{pmatrix}.$$

La fonction f^{-1} est continue sur $f(\Theta)$, donc en m . Ensuite, \hat{m} converge presque sûrement vers m quand n tend vers l'infini. En effet, comme les accroissements $D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)}$ sont indépendants et identiquement distribués, on a d'après la loi forte des grands nombres [72] la convergence presque sûre suivante :

$$\hat{m}^{(k)} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} m^{(k)} = \mathbb{E} \left[\left(D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^k \right].$$

Finalement, d'après le théorème 2.3 dans [72], on a :

$$\hat{\theta} = f^{-1}(\hat{m}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} f^{-1}(m) = \theta.$$

Normalité asymptotique

On montre ensuite la normalité asymptotique de l'estimateur. En appliquant la δ -méthode [72], on montre le théorème suivant.

Théorème 2.2 *Pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout N fixé, on a :*

$$\sqrt{nN} (\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, G\Sigma G'),$$

où $\Sigma = (\sigma_{kl})_{1 \leq k \leq l \leq 3}$ est la matrice de variance-covariance des accroissements $\left(D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)} \right)^k$, pour $1 \leq k \leq 3$, telle que :

$$\forall 1 \leq k \leq l \leq 3, \sigma_{kl} = m^{(k+l)} - m^{(k)}m^{(l)}$$

et où G est la matrice des dérivées partielles de $\theta = f^{-1}(m)$ par rapport aux $m^{(i)}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Preuve. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, N\}$, les accroissements $D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)}$ sont indépendants et identiquement distribués car :

1. les accroissements du processus gamma et du mouvement brownien sont indépendants car les deux processus $(Y_t^{(i)})_{t \geq 0}$ et $(B_t^{(i)})_{t \geq 0}$ sont indépendants.
2. comme le processus gamma et le mouvement brownien ont les accroissements stationnaire et $t_j = jT/N$, alors les accroissements $D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)}$ ont la même loi.

Donc, par application du théorème limite central, on obtient :

$$\sqrt{nN} (\hat{m} - m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma),$$

où les termes de la matrice Σ sont définis comme suit :

$$\sigma_{11} = \frac{\alpha T}{N\xi^2} + \frac{\tau^2 T}{N}, \quad \sigma_{12} = \frac{2\alpha T}{N\xi^3} + \frac{2\alpha^2 T^2}{N^2 \xi^3} + \frac{2\alpha T^2 \tau^2}{N^2 \xi}.$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} &= 3 \frac{\tau^4 T^2}{N^2} + 6 \frac{\alpha T^2 \tau^2}{N^2 \xi^2} + 3 \frac{\alpha^2 T^3 \tau^2}{N^3 \xi^2} + 9 \frac{\alpha^2 T^2}{N^2 \xi^4} + 3 \frac{\alpha^3 T^3}{N^3 \xi^4} + 6 \frac{\alpha T}{N \xi^4}, \\
\sigma_{22} &= 2 \frac{\tau^4 T^2}{N^2} + 4 \frac{\alpha T^2 \tau^2}{N^2 \xi^2} + 4 \frac{\alpha^2 T^3 \tau^2}{N^3 \xi^2} + 10 \frac{\alpha^2 T^2}{N^2 \xi^4} + 4 \frac{\alpha^3 T^3}{N^3 \xi^4} + 6 \frac{\alpha T}{N \xi^4}, \\
\sigma_{23} &= 6 \frac{\alpha^4 T^4}{N^4 \xi^5} + 18 \frac{\alpha T^2 \tau^2}{N^2 \xi^3} + 24 \frac{\alpha^2 T^3 \tau^2}{N^3 \xi^3} + 6 \frac{\alpha^3 T^4 \tau^2}{N^4 \xi^3} + 48 \frac{\alpha^2 T^2}{N^2 \xi^5} + 12 \frac{\alpha T^3 \tau^4}{N^3 \xi} + 24 \frac{\alpha T}{N \xi^5} \\
&\quad + 30 \frac{\alpha^3 T^3}{N^3 \xi^5}, \\
\sigma_{33} &= 213 \frac{\alpha^3 T^3}{N^3 \xi^6} + 270 \frac{\alpha^2 T^2}{N^2 \xi^6} + 120 \frac{\alpha T}{N \xi^6} + 72 \frac{\alpha^4 T^4}{N^4 \xi^6} + 90 \frac{\alpha T^2 \tau^2}{N^2 \xi^4} + 45 \frac{\alpha^2 \tau^4 T^4}{N^4 \xi^2} + 165 \frac{\alpha^2 \tau^2 T^3}{N^3 \xi^4} \\
&\quad + 15 \frac{\tau^6 T^3}{N^3} + 15 \frac{\alpha^4 T^5 \tau^2}{N^5 \xi^4} + 90 \frac{\alpha^3 \tau^2 T^4}{N^4 \xi^4} + 45 \frac{\alpha T^3 \tau^4}{N^3 \xi^2} + 9 \frac{\alpha^5 T^5}{N^5 \xi^6}.
\end{aligned}$$

Ensuite, comme f est une application différentiable et bijective et comme f^{-1} est continue en m , on obtient, par application de la δ -méthode (voir théorème 3.1 dans [72]), que :

$$\sqrt{nN} (\hat{\xi} - \xi, \hat{\alpha} - \alpha, \hat{\tau}^2 - \tau^2)' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, G\Sigma G'),$$

où la matrice des dérivées partielles G est donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial m^{(1)}} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial m^{(1)}} & \frac{\partial f_3^{-1}}{\partial m^{(1)}} \\ \frac{\partial m^{(1)}}{\partial f_1^{-1}} & \frac{\partial m^{(1)}}{\partial f_2^{-1}} & \frac{\partial m^{(1)}}{\partial f_3^{-1}} \\ \frac{\partial m^{(2)}}{\partial f_1^{-1}} & \frac{\partial m^{(2)}}{\partial f_2^{-1}} & \frac{\partial m^{(2)}}{\partial f_3^{-1}} \\ \frac{\partial m^{(3)}}{\partial f_1^{-1}} & \frac{\partial m^{(3)}}{\partial f_2^{-1}} & \frac{\partial m^{(3)}}{\partial f_3^{-1}} \end{pmatrix} (m).$$

où f_i^{-1} est la composante i de f^{-1} . Les dérivées partielles de f_1^{-1} par rapport aux $m^{(i)}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial m^{(1)}} (m) &= \frac{m^{(3)} - 4(m^{(1)})^3}{\sqrt{2m^{(1)}} \left(m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)} \right)^{3/2}}, \\
\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial m^{(2)}} (m) &= \frac{3\sqrt{2}(m^{(1)})^{3/2}}{2 \left(m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)} \right)^{3/2}}, \\
\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial m^{(3)}} (m) &= -\frac{\sqrt{2m^{(1)}}}{2 \left(m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)} \right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

La dérivée partielle de f_2^{-1} par rapport aux $m^{(1)}$ est donnée par :

$$\frac{\partial f_2^{-1}}{\partial m^{(1)}} (m) = \frac{3Nm^{(1)}m^{(3)} - 6N(m^{(1)})^2 m^{(2)}}{T\sqrt{2m^{(1)}} \left(m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)} \right)^{3/2}},$$

De plus, les dérivées partielles de f_2^{-1} par rapport aux $m^{(2)}$ et $m^{(3)}$ sont données par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2^{-1}}{\partial m^{(2)}}(m) &= \frac{3\sqrt{2}N(m^{(1)})^{5/2}}{2T\left(m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)}\right)^{3/2}}, \\ \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial m^{(3)}}(m) &= -\frac{N\sqrt{2}(m^{(1)})^{3/2}}{2T\left(m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)}\right)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Enfin, les dérivées partielles de f_3^{-1} par rapport aux $m^{(i)}$ sont données par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3^{-1}}{\partial m^{(1)}}(m) &= -\frac{N}{T} \left[\frac{\left(m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)}\right) + m^{(1)}\left(6(m^{(1)})^2 - 3m^{(2)}\right)}{2^{3/2}\sqrt{m^{(1)}\left(m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)}\right)}} + 2m^{(1)} \right], \\ \frac{\partial f_3^{-1}}{\partial m^{(2)}}(m) &= \frac{N}{T} + \frac{3N(m^{(1)})^{3/2}}{2^{3/2}T\sqrt{m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)}}}, \\ \frac{\partial f_3^{-1}}{\partial m^{(3)}}(m) &= -\frac{N\sqrt{m^{(1)}}}{2^{3/2}T\sqrt{m^{(3)} + 2(m^{(1)})^3 - 3m^{(1)}m^{(2)}}.\end{aligned}$$

■

2.2.2.2 Propriétés asymptotiques : n et N tendent vers l'infini

Un autre régime asymptotique est étudié : le cas où n et N tendent vers l'infini tous les deux (dans ce cas, il peut y avoir dépendance entre N et n). Avant d'étudier les propriétés asymptotiques, on montre le résultat suivant :

Théorème 2.3 Soit $(\phi_n)_{n \geq 1}$ une suite d'applications à valeurs dans \mathbb{R}^m telle que pour tout $n \geq 1$, ϕ_n est définie sur $D_{\phi_n} \subset \mathbb{R}^k$. Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, T_n est à valeurs dans D_{ϕ_n} . Sous les conditions suivantes :

1. $\theta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$ telle que $(\theta_n)_{n \geq 1}$ est une suite de vecteurs telle que pour tout $n \geq 1$, $\theta_n \in D_{\phi_n}$;
2. $r_n(T_n - \theta_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} T$ avec $(r_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$;
3. $\forall n \geq 1$, ϕ_n est différentiable en $\theta_n \in \overset{\circ}{D}_{\phi_n}$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\nabla \phi_{n, \theta_n} - \nabla \phi_\theta) = 0$ telle que $\nabla \phi_{n, \theta_n}$ est la différentielle de ϕ_n en θ_n et $\nabla \phi_\theta$ est la limite de la différentielle de ϕ_n en θ_n pour toute suite $(\theta_n)_{n \geq 1}$ vérifiant $\theta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$;

on a :

$$r_n [\phi_n(T_n) - \phi_n(\theta_n)] - \nabla \phi_{n, \theta_n} [r_n(T_n - \theta_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} 0.$$

De plus,

$$r_n [\phi_n(T_n) - \phi_n(\theta_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \nabla \phi_\theta(T).$$

Preuve. La suite $(r_n (T_n - \theta_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers T quand n tend vers l'infini. Alors, cette suite est uniformément tendue (théorème 2.4 dans [72]) et $(T_n - \theta_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0. Par différentiabilité de la fonction ϕ_n , la fonction résidu $R_{n,\theta}$ est égale à :

$$\begin{aligned} R_{n,\theta}(h_n) &= \phi_n(\theta + h_n) - \phi_n(\theta) - \nabla \phi_{n,\theta} h_n \\ &= \nabla \phi_{n,\theta_{h_n}} h_n - \nabla \phi_{n,\theta} h_n \quad \text{avec } \theta_{h_n} \text{ dans le segment d'extrémités } \theta - h_n \text{ et } \theta + h_n \\ &= \epsilon_n(h_n) h_n = o(h_n) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

parce que $\epsilon_n(h_n) h_n = [\nabla \phi_{n,\theta_{h_n}} - \nabla \phi_{n,\theta}] h_n$ avec

$$\begin{aligned} \epsilon_n(h_n) &= \nabla \phi_{n,\theta_{h_n}} - \nabla \phi_{n,\theta} \\ &= \nabla \phi_{n,\theta_{h_n}} - \nabla \phi_\theta + \nabla \phi_\theta - \nabla \phi_{n,\theta} \end{aligned}$$

qui converge vers 0 par application de la quatrième condition.

D'après le lemme 2.12 dans [72], on peut remplacer $(h_n)_{n \geq 1}$ par la suite de variables aléatoires $(T_n - \theta_n)_{n \geq 1}$. Alors,

$$r_n R_{n,\theta_n}(T_n - \theta_n) = r_n (\phi_n(T_n) - \phi_n(\theta_n)) - \nabla \phi_{n,\theta_n}(r_n(T_n - \theta_n)).$$

Or, pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$, on a :

$$\begin{aligned} \|R_{n,\theta_n}(r_n(T_n - \theta_n))\| &= \|r_n(T_n - \theta_n)\| \|\epsilon_n(T_n - \theta_n)\| \\ &= O_p(1) \|\epsilon_n(T_n - \theta_n)\| \quad \text{car } (r_n(T_n - \theta_n))_{n \geq 1} \text{ est une suite tendue} \\ &= O_p(1) o_p(1), \quad \text{car } (T_n - \theta_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} 0 \text{ et } \epsilon_n(T_n - \theta_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} 0. \end{aligned}$$

Donc il vient :

$$r_n (\phi_n(T_n) - \phi_n(\theta_n)) - \nabla \phi_{n,\theta_n}(r_n(T_n - \theta_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} 0.$$

De plus, la condition 4 est équivalente à :

$$\nabla \phi_{n,\theta_n} \xrightarrow[\theta_n \rightarrow \theta]{} \nabla \phi_\theta.$$

Alors, en appliquant la condition 4 et le théorème 2.3 dans [72], on a la convergence en loi suivante :

$$\nabla \phi_{n,\theta_n}(r_n(T_n - \theta_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \nabla \phi_\theta(T).$$

Finalement, d'après le lemme de Slutsky [72], on déduit que :

$$r_n [\phi_n(T_n) - \phi_n(\theta_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \nabla \phi_\theta(T).$$



Normalité asymptotique

On commence par montrer la normalité asymptotique de \hat{m} .

Théorème 2.4 Pour tout $\delta > 0$, si N_n tend vers l'infini et N_n/n^δ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, alors :

$$N_n \sqrt{n} (\hat{m} - m) \xrightarrow[N_n, n \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma_1),$$

où Σ_1 est égale à :

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha T}{\xi^2} + \tau^2 T & \frac{2\alpha T}{\xi^3} & \frac{6\alpha T}{\xi^4} \\ \frac{2\alpha T}{\xi^3} & \frac{6\alpha T}{\xi^4} & \frac{24\alpha T}{\xi^5} \\ \frac{6\alpha T}{\xi^4} & \frac{24\alpha T}{\xi^5} & \frac{120\alpha T}{\xi^6} \end{pmatrix}.$$

La condition $N_n/n^\delta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ n'est pas satisfaite pour n'importe quelle suite $(N_n)_{n \geq 1}$. La divergence de N_n doit être assez lente par rapport à n . Par exemple pour $N_n = \lfloor \log n \rfloor$, cette condition est satisfaite et le théorème 2.4 est applicable.

Preuve. Pour montrer cette normalité asymptotique, on applique le théorème limite central de Lindeberg-Feller [72]. Vérifions la première condition de Lindeberg-Feller. On a pour $a_{n, N_n} = N_n \sqrt{n}$:

$$\begin{aligned} a_{n, N_n} (\hat{m} - m) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_n} \frac{a_{n, N_n}}{n N_n} \begin{pmatrix} (D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)}) - E[D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)}] \\ (D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)})^2 - E[(D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)})^2] \\ (D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)})^3 - E[(D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)})^3] \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l=1}^{n N_n} b_{n, N_n} P_l(N_n) \end{aligned}$$

où $l = (i-1)N + j$ et $b_{n, N_n} = a_{n, N_n}/n N_n$. Alors

$$\sum_{l=1}^{n N_n} b_{n, N_n}^2 \text{Cov}(P_l(N_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Sigma_1$$

où

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha T}{\xi^2} + \tau^2 T & \frac{2\alpha T}{\xi^3} & \frac{6\alpha T}{\xi^4} \\ \frac{2\alpha T}{\xi^3} & \frac{6\alpha T}{\xi^4} & \frac{24\alpha T}{\xi^5} \\ \frac{6\alpha T}{\xi^4} & \frac{24\alpha T}{\xi^5} & \frac{120\alpha T}{\xi^6} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice Σ_1 s'obtient à partir de la matrice Σ qui vérifie $\Sigma = \Sigma_1/N_n + O(1/N_n^2)$ (voir preuve du théorème 2.2). Ensuite, la deuxième condition de Lindeberg-Feller est aussi véri-

fiée car pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} b_{n,N_n}^2 \sum_{l=1}^{nN_n} \mathbb{E} \left[\left\| P_l(N_n) \right\|^2 1_{\{b_{n,N_n} \|P_l(N_n)\| > \epsilon\}} \right] \\ = \frac{a_{n,N_n}^2}{n^2 N_n^2} \sum_{l=1}^{nN_n} \mathbb{E} \left[\left\| P_l(N_n) \right\|^2 1_{\{\|P_l(N_n)\| > \frac{\epsilon}{b_{n,N_n}}\}} \right] \\ = N_n \mathbb{E} \left[\left\| P_l(N_n) \right\|^2 1_{\{\|P_l(N_n)\| > \epsilon \sqrt{n}\}} \right] \\ < \frac{N_n}{\epsilon^\delta} \frac{1}{n^{\delta/2}} \mathbb{E} \left[\left\| P_l(N_n) \right\|^{2+\delta} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

par hypothèse. Donc, en appliquant le théorème de Lindeberg-Feller, puisque les deux conditions sont vérifiées, on obtient la convergence en loi suivante :

$$N_n \sqrt{n} (\hat{m} - m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma_1).$$

■

Soit $(\phi_n)_{n \geq 1}$ une suite d'applications différentiables de $\Theta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ dans D_{ϕ_n} définie comme suit :

$$\forall n \geq 1, \forall s \in \Theta, \phi_n(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2s_1}{s_3 + 2\frac{(s_1)^3}{N_n^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N_n}}} \\ \frac{s_1}{T} \sqrt{\frac{2s_1}{s_3 + 2\frac{(s_1)^3}{N_n^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N_n}}} \\ \frac{s_2}{T} - \frac{\sqrt{2s_1 \left(s_3 + 2\frac{(s_1)^3}{N_n^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N_n} \right)}}{2T} - \frac{(s_1)^2}{N_n T} \end{pmatrix}$$

telle que $\phi_n(N_n \hat{m}) = \hat{\theta}$. On montre ensuite la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\theta}$. En appliquant le théorème 2.3, on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.5 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ et pour tout $\delta > 0$, si N_n tend vers l'infini et N_n/n^δ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\sqrt{n} (\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[N_n, n \rightarrow \infty]{d} N\left(0, \nabla \phi_\theta \Sigma_1 (\nabla \phi_\theta)'\right),$$

où

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha T}{\xi^2} + \tau^2 T & \frac{2\alpha T}{\xi^3} & \frac{6\alpha T}{\xi^4} \\ \frac{2\alpha T}{\xi^3} & \frac{6\alpha T}{\xi^4} & \frac{24\alpha T}{\xi^5} \\ \frac{6\alpha T}{\xi^4} & \frac{24\alpha T}{\xi^5} & \frac{120\alpha T}{\xi^6} \end{pmatrix} \text{ et où } \nabla \phi_\theta = \begin{pmatrix} \frac{\xi^2}{2\alpha T} & \frac{3\xi}{2T} & -\frac{\xi}{2T} \\ 0 & 0 & 1/T \\ -\frac{\xi^4}{4\alpha T} & -\frac{\xi\sqrt{\alpha\xi}}{2\sqrt{2T}} & -\frac{\xi}{4T} \end{pmatrix}.$$

Preuve. Pour montrer cette normalité asymptotique, on doit vérifier les conditions du théorème 2.3. La première condition est vérifiée parce que $\theta_n = N_n m_n$ où $m_n = \mathbb{E}(\hat{m})$ converge vers $\left(\frac{\alpha T}{\xi}, \frac{\alpha T}{\xi^2} + \tau^2 T, \frac{2\alpha T}{\xi^3}\right)'$ lorsque n tend vers l'infini.

Ensuite, la deuxième condition est vérifiée parce que :

$$\sqrt{n} (N_n \hat{m} - N_n m) \xrightarrow[N_n, n \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma_1)$$

d'après le théorème 2.4. De plus, la troisième condition est vérifiée puisque les dérivées partielles de $\phi_{n,1}$ sont égales à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{n,1}}{\partial s_1}(s) &= \frac{s_3 - 4s_1^3/N^2}{\sqrt{2s_1} \left(s_3 + \frac{2s_1^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}\right)^{3/2}}, \\ \frac{\partial \phi_{n,1}}{\partial s_2}(s) &= \frac{3\sqrt{2}s_1^{3/2}}{2N \left(s_3 + \frac{2s_1^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}\right)^{3/2}}, \\ \frac{\partial \phi_{n,1}}{\partial s_3}(s) &= -\frac{\sqrt{2s_1}}{2 \left(s_3 + \frac{2s_1^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}\right)^{3/2}}, \end{aligned}$$

où on note $\phi_{n,j}$ la j -ème composante de ϕ_n .

Ensuite, les dérivées partielles de $\phi_{n,2}$ sont égales à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{n,2}}{\partial s_1}(s) &= \frac{1}{T} \sqrt{\frac{2s_1}{s_3 + 2\frac{(s_1)^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}}} + \frac{s_1 s_3 - 4s_1^4/N^2}{T \sqrt{2s_1} \left(s_3 + \frac{2s_1^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}\right)^{3/2}}, \\ \frac{\partial \phi_{n,2}}{\partial s_2}(s) &= \frac{3s_1^{5/2}}{NT \sqrt{2} \left(s_3 + \frac{2s_1^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}\right)^{3/2}}, \\ \frac{\partial \phi_{n,2}}{\partial s_3}(s) &= -\frac{s_1^{3/2}}{T \sqrt{2} \left(s_3 + \frac{2s_1^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Enfin, les dérivées partielles de $\phi_{n,3}$ sont égales à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{n,3}}{\partial s_1}(s) &= -\frac{1}{2T} \left[\frac{\left(s_3 + \frac{2s_1^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}\right) + s_1 \left(\frac{6s_1^2}{N^2} - \frac{3s_2}{N}\right)}{\sqrt{2s_1} \left(s_3 + \frac{2s_1^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}\right)} \right] - \frac{2s_1}{NT}, \\ \frac{\partial \phi_{n,3}}{\partial s_2}(s) &= \frac{1}{T} + \frac{3s_1^{3/2}}{2^{3/2} T N \sqrt{s_3 + \frac{2s_1^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}}}, \\ \frac{\partial \phi_{n,3}}{\partial s_3}(s) &= -\frac{\sqrt{s_1}}{2^{3/2} T \sqrt{s_3 + \frac{2s_1^3}{N^2} - 3\frac{s_1 s_2}{N}}}. \end{aligned}$$

Finalement, la quatrième condition est vérifiée car $\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla \phi_{n, \theta_n} = \nabla \phi_\theta$, où $\nabla \phi_\theta$ est la matrice dont les termes sont les limites des dérivées partielles de ϕ_{n, θ_n} par rapport aux s_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\nabla \phi_\theta = \begin{pmatrix} \frac{\xi^2}{2\alpha T} & \frac{3\xi}{2T} & -\frac{\xi}{2T} \\ 0 & 0 & 1/T \\ -\frac{\xi^4}{4\alpha T} & -\frac{\xi\sqrt{2T\alpha\xi}}{4T} & -\frac{\xi}{4T} \end{pmatrix}.$$

Donc, par application du théorème 2.3, on déduit que :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N\left(0, \nabla \phi_\theta \Sigma_1 (\nabla \phi_\theta)'\right).$$

■

2.3 Cas des instants irréguliers

Soit $(D^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ n copies indépendantes et identiquement distribuées du processus de dégradation D décrit dans la section 2.1. Le i -ème processus de dégradation est observé N_i fois tel que $N_i \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in \{0, \dots, N_i\}$, on note par $t_{i,j}$ ces instants d'observation (avec la convention que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $t_{i,0} = 0$). Dans la suite, on estime les paramètres du modèle de dégradation en utilisant la méthode des moments. Puis, on étudie le comportement asymptotique des estimateurs. L'obtention du comportement asymptotique des estimateurs requiert certaines contraintes sur l'ensemble $\{t_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq N_i\}$. Cette section se termine par l'examen de divers types de schéma d'observation au regard de ces contraintes.

2.3.1 Estimation des paramètres

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, pour tout $1 \leq j \leq N_i$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $m_{ij}^{(k)}$ le k -ème moment et par $\bar{m}_{ij}^{(k)}$ le k -ème moment centré des accroissements $\Delta D_{ij} = D_{t_{i,j}}^{(i)} - D_{t_{i,j-1}}^{(i)}$:

$$m_{ij}^{(k)} = \mathbb{E}\left[(\Delta D_{ij})^k\right] \quad \text{et} \quad \bar{m}_{ij}^{(k)} = \mathbb{E}\left[(\Delta D_{ij} - \mathbb{E}[\Delta D_{ij}])^k\right].$$

Puisque le processus gamma et le mouvement brownien sont indépendants, les trois premiers moments sont égaux à :

$$\begin{aligned} m_{ij}^{(1)} &= \frac{\alpha}{\xi} \Delta t_{i,j}, \\ m_{ij}^{(2)} &= \frac{\alpha}{\xi^2} \Delta t_{i,j} + \left(\frac{\alpha}{\xi} \Delta t_{i,j}\right)^2 + \tau^2 \Delta t_{i,j}, \\ m_{ij}^{(3)} &= \frac{2\alpha}{\xi^3} \Delta t_{i,j} + 3\frac{\alpha^2}{\xi^3} (\Delta t_{i,j})^2 + \left(\frac{\alpha}{\xi} \Delta t_{i,j}\right)^3 + 3\frac{\alpha\tau^2}{\xi} (\Delta t_{i,j})^2. \end{aligned}$$

Soit f l'application différentiable de Θ dans $f(\Theta)$ définie comme suit :

$$\forall \theta \in \Theta, f(\theta) = \begin{pmatrix} m^{(1)} \\ \bar{m}^{(2)} \\ \bar{m}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{ij}^{(1)} / \Delta t_{i,j} \\ \bar{m}_{ij}^{(2)} / \Delta t_{i,j} \\ \bar{m}_{ij}^{(3)} / \Delta t_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha / \xi \\ \alpha / \xi^2 + \tau^2 \\ 2\alpha / \xi^3 \end{pmatrix}.$$

La fonction f est bijective. Ensuite, les paramètres peuvent être exprimés en termes de $m^{(1)}$, $\bar{m}^{(2)}$ et $\bar{m}^{(3)}$ comme suit :

$$f^{-1}(m) = \begin{pmatrix} \xi \\ \alpha \\ \tau^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2m^{(1)}}{\bar{m}^{(3)}}} \\ m^{(1)} \sqrt{\frac{2m^{(1)}}{\bar{m}^{(3)}}} \\ \bar{m}^{(2)} - \frac{\sqrt{2m^{(1)}\bar{m}^{(3)}}}{2} \end{pmatrix}, \text{ où } m = (m^{(1)}, \bar{m}^{(2)}, \bar{m}^{(3)})'.$$

Soit \widehat{m}_n l'estimateur empirique des trois premiers moments centrés :

$$\widehat{m}_n = \begin{pmatrix} \widehat{m}_n^{(1)} \\ \widehat{m}_n^{(2)} \\ \widehat{m}_n^{(3)} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \begin{pmatrix} \Delta D_{ij} / \Delta t_{i,j} \\ (\Delta D_{ij} - \Delta t_{i,j} \widehat{m}_n^{(1)})^2 / \Delta t_{i,j} \\ (\Delta D_{ij} - \Delta t_{i,j} \widehat{m}_n^{(1)})^3 / \Delta t_{i,j} \end{pmatrix}.$$

L'estimateur $\widehat{\theta}_n = f^{-1}(\widehat{m}_n)$ de $\theta = (\xi, \alpha, \tau^2)$ est donc défini par :

$$\widehat{\xi}_n = \sqrt{\frac{2\widehat{m}_n^{(1)}}{\widehat{m}_n^{(3)}}}, \widehat{\alpha}_n = \widehat{m}_n^{(1)} \sqrt{\frac{2\widehat{m}_n^{(1)}}{\widehat{m}_n^{(3)}}} \text{ et } \widehat{\tau}_n^2 = \widehat{m}_n^{(2)} - \frac{\sqrt{2\widehat{m}_n^{(1)}\widehat{m}_n^{(3)}}}{2}.$$

2.3.2 Propriétés asymptotiques

On rappelle d'abord le théorème suivant (pour plus de détails, voir le théorème 6.7 dans [64]).

Théorème 2.6 Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres positifs. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Si

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}[X_n] / a_n^2 < \infty,$$

alors

$$a_n^{-1} (S_n - \mathbb{E}[S_n]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Ensuite, on établit le lemme suivant.

Lemme 2.1 Pour toute suite d'entiers naturels $(N_n)_{n \geq 1}$, on a : $\sum_{n \geq 1} N_n \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} < \infty$.

Preuve. On désigne par $A_n = N_1 + \dots + N_n$ avec $A_0 = 0$. On note que $N_n = A_n - A_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{(N_1 + \dots + N_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k - A_{k-1}}{A_k^2} = \frac{N_1}{N_1^2} + \sum_{k=2}^n \frac{A_k - A_{k-1}}{A_k^2} \leq \frac{1}{N_1} + \sum_{k=2}^n \frac{A_k - A_{k-1}}{A_k A_{k-1}} \\ &\leq \frac{1}{N_1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{A_{k-1}} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{A_k} \leq \frac{1}{N_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{A_k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{A_k} \leq \frac{1}{N_1} + \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_n} \leq \frac{2}{N_1} \leq 2. \end{aligned}$$

■

Dans la suite on va montrer la convergence de $\widehat{\theta}_n$.

Théorème 2.7 *Sous les hypothèses suivantes :*

$$(H_1) \quad \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} (\Delta t_{n,j})^{-1} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} < \infty,$$

$$(H_2) \quad \exists d_u, \forall i \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \{1, \dots, N_i\}, \Delta t_{i,j} \leq d_u,$$

l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ quand n tend vers l'infini.

Preuve. Il faut prouver que \widehat{m}_n tend presque sûrement vers m quand n tend vers l'infini. En effet, comme f^{-1} est continue sur $f(\Theta)$, on obtient, par le théorème 2.3 dans [72], que $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta$. Donc on commence par prouver la convergence presque sûre de \widehat{m}_n .

Convergence presque sûre de $\widehat{m}_n^{(1)}$ vers $m^{(1)}$. En appliquant le théorème 2.6, on obtient que :

$$\begin{aligned} & \widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \left(\frac{\Delta D_{ij}}{\Delta t_{i,j}} - m^{(1)} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{n \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \left[\sum_{j=1}^{N_i} \left(\frac{\Delta D_{ij}}{\Delta t_{i,j}} - m^{(1)} \right) \right]}_{X_i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \end{aligned}$$

En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $N_i \geq 1$, ce qui implique que $\sum_{i=1}^n N_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$. De plus, par l'hypothèse (H_1) et comme les accroissements sont indépendants, l'expression suivante est finie :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} (\Delta t_{n,j})^{-2} \text{Var}[\Delta D_{nj}] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} = \left[\frac{\alpha}{\xi^2} + \tau^2 \right] \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} (\Delta t_{n,j})^{-1} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} < +\infty. \end{aligned}$$

Donc $\widehat{m}_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} m^{(1)}$.

Convergence presque sûre de $\widehat{m}_n^{(2)}$ vers $\overline{m}^{(2)}$. On désigne par :

$$\tilde{m}_n^{(2)} = \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-1} (\Delta D_{ij} - \mathbb{E}[\Delta D_{ij}])^2.$$

La décomposition suivante est vérifiée :

$$\widehat{m}_n^{(2)} - \overline{m}^{(2)} = \widehat{m}_n^{(2)} - \tilde{m}_n^{(2)} + \tilde{m}_n^{(2)} - \overline{m}^{(2)}.$$

Donc on va prouver que $\widehat{m}_n^{(2)} - \tilde{m}_n^{(2)}$ et $\tilde{m}_n^{(2)} - \overline{m}^{(2)}$ tendent presque sûrement vers 0 quand n tend vers l'infini.

1. Convergence presque sûre de $\widehat{m}_n^{(2)} - \tilde{m}_n^{(2)}$ vers 0.

$$\begin{aligned} & \widehat{m}_n^{(2)} - \tilde{m}_n^{(2)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} [m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)}] \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} [(2\Delta D_{ij} - 2\mathbb{E}(\Delta D_{ij})) + (\mathbb{E}(\Delta D_{ij}) - \Delta t_{i,j} \widehat{m}_n^{(1)})] \\ &= [m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)}]^2 \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j} - 2[\widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)}] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij})). \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_2) et le résultat précédent, on déduit facilement que le premier terme de la dernière expression tend vers 0 quand n tend vers l'infini. De plus, le second terme tend également vers 0 quand n tend vers l'infini car

$$\left[\widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0 \text{ et } \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

En effet, en utilisant le lemme 2.1, l'hypothèse (H_2) et l'indépendance des accroissements, on obtient :

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} \text{Var}[\Delta D_{nj}] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} = \left[\frac{\alpha}{\xi^2} + \tau^2 \right] \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} \Delta t_{n,j} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} < \infty.$$

Ainsi, on peut en déduire que $\widehat{m}_n^{(2)} - \tilde{m}_n^{(2)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$.

2. Convergence presque sûre de $\tilde{m}_n^{(2)}$ vers $\overline{m}^{(2)}$. En appliquant à nouveau le théorème 2.6, nous obtenons :

$$\tilde{m}_n^{(2)} - \overline{m}^{(2)} = \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} ((\Delta t_{i,j})^{-1} (\Delta D_{ij} - \mathbb{E}[\Delta D_{ij}])^2 - \overline{m}^{(2)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

En effet, comme les accroissements sont indépendants, on constate qu'il existe deux constantes $\kappa_1(\theta)$ et $\kappa_2(\theta)$ qui ne dépendent que de θ (on peut les calculer explicite-

ment) telles que :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} (\Delta t_{n,j})^{-2} \text{Var} [(\Delta D_{nj} - \mathbb{E}[\Delta D_{nj}])^2] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} \\ &= \kappa_1(\theta) \sum_{n \geq 1} N_n \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} + \kappa_2(\theta) \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} (\Delta t_{n,j})^{-1} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} \end{aligned}$$

où le terme de droite est fini d'après le lemme 2.1 et l'hypothèse (H_1) . Donc on en déduit que $\tilde{m}_n^{(2)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \bar{m}^{(2)}$.

Convergence presque sûre de $\widehat{m}_n^{(3)}$ vers $\bar{m}^{(3)}$. De la même façon que ci-dessus, on pose :

$$\tilde{m}_n^{(3)} = \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-1} (\Delta D_{ij} - \mathbb{E}[\Delta D_{ij}])^3.$$

Ensuite, on a la décomposition suivante :

$$\widehat{m}_n^{(3)} - \bar{m}^{(3)} = \widehat{m}_n^{(3)} - \tilde{m}_n^{(3)} + \tilde{m}_n^{(3)} - \bar{m}^{(3)}.$$

On va vérifier que $\widehat{m}_n^{(3)} - \tilde{m}_n^{(3)}$ tend presque sûrement vers 0 quand n tend vers l'infini.

1. Convergence presque sûre de $\widehat{m}_n^{(3)} - \tilde{m}_n^{(3)}$ vers 0.

$$\begin{aligned} & \widehat{m}_n^{(3)} - \tilde{m}_n^{(3)} \\ &= \left[m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)} \right] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \left[[\Delta D_{ij} - \Delta t_{i,j} \widehat{m}_n^{(1)}]^2 \right. \\ & \quad \left. + [\Delta D_{ij} - \Delta t_{i,j} \widehat{m}_n^{(1)}] [\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij})] + [\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij})]^2 \right] \\ &= \left[m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)} \right] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \left[3\Delta D_{ij}^2 + (\Delta t_{i,j} \widehat{m}_n^{(1)})^2 \right. \\ & \quad \left. - 3\Delta t_{i,j} \Delta D_{ij} \widehat{m}_n^{(1)} - 3\Delta D_{ij} \mathbb{E}(\Delta D_{ij}) + \Delta t_{i,j} \widehat{m}_n^{(1)} \mathbb{E}(\Delta D_{ij}) + \mathbb{E}(\Delta D_{ij})^2 \right]. \end{aligned}$$

Ensuite, on va montrer qu'on peut remplacer $\widehat{m}_n^{(1)}$ par $m^{(1)}$ dans l'expression ci-dessus. En utilisant l'hypothèse (H_2) , $\mathbb{E}(\Delta D_{ij}) = \Delta t_{i,j} m^{(1)}$ et le fait que $\widehat{m}_n^{(1)}$ tend presque sûrement vers $m^{(1)}$ quand n tend vers l'infini, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} & \left[m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)} \right] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j}^2 \left((\widehat{m}_n^{(1)})^2 - (m^{(1)})^2 \right) \\ &= - \underbrace{\left[\widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)} \right]^2 \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j}^2 \left[\widehat{m}_n^{(1)} + m^{(1)} \right]}_{\leq d_u^2 (\widehat{m}_n^{(1)} + m^{(1)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 2m^{(1)} d_u^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)}] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j} \Delta D_{ij} (\widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)}) \\
& = - [\widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)}]^2 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j}^2 \frac{\Delta D_{ij}}{\Delta t_{i,j}}}_{\leq d_u^2 \widehat{m}_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} d_u^2 m^{(1)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)}] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j}^2 m^{(1)} [\widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)}] \\
& = -m^{(1)} [\widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)}]^2 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j}^2}_{\leq d_u^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}
& \widehat{m}_n^{(3)} - \widetilde{m}_n^{(3)} \\
& = 3 [m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)}] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} [\Delta D_{ij}^2 - \mathbb{E}(\Delta D_{ij})^2 - 2\Delta D_{ij} \mathbb{E}(\Delta D_{ij})] + o_{p.s.}(1) \\
& = 3 [m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)}] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij}))^2 + o_{p.s.}(1)
\end{aligned}$$

qui tend presque sûrement vers 0 quand n tend vers l'infini parce que

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij}))^2 \leq d_u \widetilde{m}_n^{(2)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} d_u \overline{m}^{(2)}$$

et $\widehat{m}_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} m^{(1)}$. Alors, on en déduit que

$$\widehat{m}_n^{(3)} - \widetilde{m}_n^{(3)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

2. **Convergence presque sûre de $\widetilde{m}_n^{(3)}$ vers $\overline{m}^{(3)}$.** Après calculs, on obtient qu'il existe trois constantes $\kappa_3(\theta)$, $\kappa_4(\theta)$ et $\kappa_5(\theta)$ qui ne dépendent que de θ telles que :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} (\Delta t_{n,j})^{-2} \text{Var} [(\Delta D_{nj} - \mathbb{E}[\Delta D_{nj}])^3] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} \\
& = \kappa_3(\theta) \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} (\Delta t_{n,j})^{-1} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} + \kappa_4(\theta) \sum_{n \geq 1} N_n \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} + \kappa_5(\theta) \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} \Delta t_{n,j} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2}.
\end{aligned}$$

Toutes ces séries, en utilisant le lemme 2.1, (H_1) et (H_2) , convergent. Donc on en déduit que $\widetilde{m}_n^{(3)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \overline{m}^{(3)}$ par application du théorème 2.6. ■

Avant de montrer la normalité asymptotique de \widehat{m}_n , on va établir le lemme suivant.

Lemme 2.2 *Sous les hypothèses (H_2) et*

$$(H_3) \quad \forall v \in \{0, 1, 3\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j}^{v-2} = c_v < \infty,$$

on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \hat{m}_n^{(1)} - m^{(1)} \\ \tilde{m}_n^{(2)} - \bar{m}^{(2)} \\ \tilde{m}_n^{(3)} - \bar{m}^{(3)} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma^{(\infty)}),$$

où $\Sigma^{(\infty)}$ est égale à :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{\xi^2} + \tau^2 \right) c_1 & \frac{2\alpha}{\xi^3} c_1 & \frac{6\alpha}{\xi^4} c_1 + 3\tau^4 + \frac{6\alpha\tau^2}{\xi^2} + \frac{3\alpha^2}{\xi^4} \\ \frac{2\alpha}{\xi^3} c_1 & \frac{6\alpha}{\xi^4} c_1 + 2\tau^4 + \frac{4\alpha\tau^2}{\xi^2} + \frac{2\alpha^2}{\xi^4} & \frac{24\alpha}{\xi^5} c_1 + \frac{18\alpha^2}{\xi^5} + \frac{18\alpha\tau^2}{\xi^3} \\ \frac{6\alpha}{\xi^4} c_1 + 3\tau^4 + \frac{6\alpha\tau^2}{\xi^2} + \frac{3\alpha^2}{\xi^4} & \frac{24\alpha}{\xi^5} c_1 + \frac{18\alpha^2}{\xi^5} + \frac{18\alpha\tau^2}{\xi^3} & \frac{120\alpha}{\xi^6} c_1 + \frac{126\alpha^2}{\xi^6} + \frac{90\alpha\tau^2}{\xi^4} + \left(\frac{15\alpha^3}{\xi^6} + \frac{45\alpha^2\tau^2}{\xi^4} + 15\tau^6 + \frac{45\alpha\tau^4}{\xi^2} \right) c_3 \end{pmatrix}.$$

Preuve. Pour démontrer ce lemme, on applique le théorème limite central de Lindeberg-Feller [72] car les accroissements sont indépendants. Soit $\Delta \bar{D}_{ij}^k = [\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij})]^k$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \hat{m}_n^{(1)} - m^{(1)} \\ \tilde{m}_n^{(2)} - \bar{m}^{(2)} \\ \tilde{m}_n^{(3)} - \bar{m}^{(3)} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-1} \begin{pmatrix} \Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij}) \\ \Delta \bar{D}_{ij}^2 - \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^2) \\ \Delta \bar{D}_{ij}^3 - \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^3) \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-1} X_{ij}. \end{aligned}$$

Soit $X_{ij} = (X_{ij1}, X_{ij2}, X_{ij3})'$. On commence par vérifier la première condition du théorème de Lindeberg-Feller. Pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \mathbb{E} \left[\frac{\|X_{ij}\|_2^2}{\Delta t_{i,j}^2} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{\|X_{ij}\|_2}{\Delta t_{i,j}} > \epsilon \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} \right\}} \right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-2} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^3 X_{ijk}^2 \right) \mathbf{1}_{\left\{ \frac{\|X_{ij}\|_2}{\Delta t_{i,j}} > \epsilon^2 \sum_{i=1}^n N_i \right\}} \right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{k=1}^3 (\Delta t_{i,j})^{-2} \mathbb{E} \left[X_{ijk}^2 \mathbf{1}_{\left\{ \frac{\|X_{ij}\|_2}{\Delta t_{i,j}} > \epsilon^2 \left(\sum_{i=1}^n N_i \right) \right\}} \right]. \quad (2.6) \end{aligned}$$

De plus, comme

$$\left\{ \sum_{k=1}^3 X_{ijk}^2 > (\Delta t_{i,j})^2 \epsilon^2 \left(\sum_{i=1}^n N_i \right) \right\} \subset \bigcup_{k=1}^3 \left\{ X_{ijk}^2 > \frac{\Delta t_{i,j}^2 \epsilon^2 \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)}{3} \right\},$$

on a

$$\mathbb{1}_{\left\{ \frac{\|X_{ij}\|_2}{\Delta t_{i,j}} > \epsilon \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} \right\}} \leq \mathbb{1}_{\left\{ \bigcup_{k'=1}^3 \left\{ \left| \frac{X_{ijk'}}{\Delta t_{i,j}} \right| > \epsilon \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} / \sqrt{3} \right\} \right\}} \leq \sum_{k'=1}^3 \mathbb{1}_{\left\{ \left| \frac{X_{ijk'}}{\Delta t_{i,j}} \right| > \epsilon \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} / \sqrt{3} \right\}}.$$

Or, le membre de droite dans l'équation (2.6) est majoré par :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-2} \sum_{k=1}^3 \sum_{k'=1}^3 \mathbb{E} \left[X_{ijk}^2 \mathbb{1}_{\left\{ \left| \frac{X_{ijk'}}{\Delta t_{i,j}} \right| > \epsilon \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} / \sqrt{3} \right\}} \right] \\ & \leq \sqrt{3} \epsilon^{-1} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-3} \sum_{k=1}^3 \sum_{k'=1}^3 \mathbb{E} [X_{ijk}^2 | X_{ijk'}|] \\ & \leq \frac{\epsilon^{-1} \sqrt{3}}{2} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-3/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-3} \sum_{k=1}^3 \sum_{k'=1}^3 (\mathbb{E} [X_{ijk}^4] + \mathbb{E} [X_{ijk'}^2]), \end{aligned} \quad (2.7)$$

où la dernière étape est obtenue en appliquant l'inégalité de Young. De plus, on peut vérifier que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a pour $\Delta Y_{ij} = Y_{t_{i,j}}^{(i)} - Y_{t_{i,j-1}}^{(i)}$ et $\Delta B_{ij} = \tau (B_{t_{i,j}}^{(i)} - B_{t_{i,j-1}}^{(i)})$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(\Delta D_{ij})^q] &= \mathbb{E} [(\Delta Y_{ij} + \Delta B_{ij})^q] = \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} \mathbb{E} (\Delta Y_{ij}^s) \mathbb{E} (\Delta B_{ij}^{q-s}) \\ &= \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} \frac{\prod_{l=1}^s (\alpha \Delta t_{i,j} + s - l)}{\xi^s} (\tau^2 \Delta t_{i,j})^{\frac{q-s}{2}} \mathbb{E} (\tilde{B}^{q-s}) \\ &= \Delta t_{i,j} \alpha \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} \frac{\prod_{l=1}^{s-1} (\alpha \Delta t_{i,j} + s - l)}{\xi^s} (\tau^2 \Delta t_{i,j})^{\frac{q-s}{2}} \mathbb{E} (\tilde{B}^{q-s}) \\ &= \Delta t_{i,j} \text{Pol}_{q-1} (\Delta t_{i,j}), \end{aligned}$$

où $\tilde{B} \sim N(0, 1)$ et $\text{Pol}_{q-1} (\Delta t_{i,j})$ désigne un polynôme de degré $q - 1$ en $\Delta t_{i,j}$ dont les coefficients ne dépendent que de θ . Alors l'inégalité (2.7) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon^{-1} \sqrt{3}}{2} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-3/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-2} (\text{Pol}_{11} (\Delta t_{i,j}) + \text{Pol}_5 (\Delta t_{i,j})) \\ & \leq \frac{\epsilon^{-1} \sqrt{3}}{2} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-3/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-2} \text{Pol}_{11} (\Delta t_{i,j}) \end{aligned}$$

qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini car

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-2} \text{Pol}_{11} (\Delta t_{i,j})$$

est borné en utilisant les hypothèses (H_2) et (H_3) . Ensuite la matrice de variance covariance $\Sigma^{(ij)}$ de X_{ij} est donnée par

$$\Sigma^{(ij)} = \begin{pmatrix} \text{Var}(\Delta D_{ij}) & \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^3) & \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^4) \\ \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^3) & \text{Var}[(\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij}))^2] & \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^5) - \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^2) \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^3) \\ \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^4) & \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^5) - \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^2) \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^3) & \text{Var}[(\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij}))^3] \end{pmatrix}.$$

De plus, la deuxième condition du théorème de Lindeberg-Feller est aussi satisfaite car :

$$\text{Cov} \left(\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-1} X_{ij} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Sigma^{(\infty)},$$

où les termes de $\Sigma^{(\infty)}$, sous l'hypothèse (H_3) , proviennent de la relation suivante :

$$\Sigma^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-2} \Sigma^{(ij)},$$

où, pour $1 \leq u \leq v \leq 3$, $\sigma_{uv}^{(ij)}$ est le coefficient (u, v) de la matrice de variance-covariance $\Sigma^{(ij)}$:

$$\sigma_{11}^{(ij)} = \left(\frac{\alpha}{\xi^2} + \tau^2 \right) \Delta t_{i,j},$$

$$\sigma_{12}^{(ij)} = \frac{2\alpha}{\xi^3} \Delta t_{i,j},$$

$$\sigma_{13}^{(ij)} = \frac{6\alpha}{\xi^4} \Delta t_{i,j} + \left(3\tau^4 + \frac{6\alpha\tau^2}{\xi^2} + \frac{3\alpha^2}{\xi^4} \right) \Delta t_{i,j}^2,$$

$$\sigma_{22}^{(ij)} = \frac{6\alpha}{\xi^4} \Delta t_{i,j} + \left(2\tau^4 + \frac{4\alpha\tau^2}{\xi^2} + \frac{2\alpha^2}{\xi^4} \right) \Delta t_{i,j}^2,$$

$$\sigma_{23}^{(ij)} = \frac{24\alpha}{\xi^5} \Delta t_{i,j} + \left(\frac{18\alpha^2}{\xi^5} + \frac{18\alpha\tau^2}{\xi^3} \right) \Delta t_{i,j}^2,$$

$$\sigma_{33}^{(ij)} = \frac{120\alpha}{\xi^6} \Delta t_{i,j} + \left(\frac{126\alpha^2}{\xi^6} + \frac{90\alpha\tau^2}{\xi^4} \right) \Delta t_{i,j}^2 + \left(\frac{15\alpha^3}{\xi^6} + \frac{45\alpha^2\tau^2}{\xi^4} + 15\tau^6 + \frac{45\alpha\tau^4}{\xi^2} \right) \Delta t_{i,j}^3.$$

Enfin, on conclut donc par le théorème de Lindeberg-Feller que

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-1} X_{ij} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma^{(\infty)}).$$

■

Dans la suite on va montrer la normalité asymptotique de $\widehat{\theta}_n$. Commençons par prouver la normalité asymptotique de \widehat{m}_n .

Théorème 2.8 *Sous les hypothèses ($H_1 - H_3$), on a :*

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} (\widehat{m}_n - m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, H),$$

où $H = A \Sigma^{(\infty)} A'$ avec A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 \left(\frac{\alpha}{\xi^2} + \tau^2 \right) c_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Preuve. Notons d'abord que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} (\widehat{m}_n - m) &= \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)} \\ \widehat{m}_n^{(2)} - \widetilde{m}_n^{(2)} + \widetilde{m}_n^{(2)} - \overline{m}^{(2)} \\ \widehat{m}_n^{(3)} - \widetilde{m}_n^{(3)} + \widetilde{m}_n^{(3)} - \overline{m}^{(3)} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{m}_n^{(2)} - \widetilde{m}_n^{(2)} \\ \widehat{m}_n^{(3)} - \widetilde{m}_n^{(3)} \end{pmatrix} + \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)} \\ \widetilde{m}_n^{(2)} - \overline{m}^{(2)} \\ \widetilde{m}_n^{(3)} - \overline{m}^{(3)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ensuite on a :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} (\widehat{m}_n^{(2)} - \widetilde{m}_n^{(2)}) &= 2 \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} [m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)}] \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij})) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} [m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)}]^2 \quad (2.8) \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En effet, on vérifie que le premier terme de la dernière expression tend en probabilité vers 0 quand n tend vers l'infini car $\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} [m^{(1)} - \widehat{m}_n^{(1)}]$ est asymptotiquement gaussien par le lemme 2.2 et

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij}))$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. De plus, le second terme du côté droit de (2.8) tend vers 0 quand n tend vers l'infini car $\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j}$ converge, $\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} [\widehat{m}_n^{(1)} - m^{(1)}]$ suit

asymptotiquement une loi normale et $\left[\hat{m}_n^{(1)} - m^{(1)}\right]$ tend presque sûrement vers 0 quand n tend vers l'infini. Enfin, on en déduit que

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{1/2} \left(\hat{m}_n^{(2)} - \tilde{m}_n^{(2)}\right)$$

tend en probabilité vers 0 quand n tend vers l'infini.

De la même façon on a

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{1/2} \left(\hat{m}_n^{(3)} - \tilde{m}_n^{(3)}\right) \\ &= 3 \left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{1/2} \left[m^{(1)} - \hat{m}_n^{(1)}\right] \left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} [(\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij}))^2] + o_p(1). \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} [(\Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij}))^2 - \text{Var}(\Delta D_{ij})] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

En effet, comme les accroissements sont indépendants, il existe deux constantes $\kappa_1(\theta)$ and $\kappa_2(\theta)$ qui ne dépendent que de θ telles que

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} \text{Var}[(\Delta D_{nj} - \mathbb{E}[\Delta D_{nj}])^2] \left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{-2} \\ &= \kappa_1(\theta) \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} \Delta t_{n,j} \left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{-2} + \kappa_2(\theta) \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{N_n} (\Delta t_{n,j})^2 \left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{-2} \end{aligned}$$

qui convergent en utilisant l'hypothèse (H_2) et le lemme 2.1. De plus on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \text{Var}(\Delta D_{ij}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \left(\frac{\alpha}{\xi^2} + \tau^2\right) c_3.$$

Alors on peut écrire que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \hat{m}_n^{(1)} - m^{(1)} \\ \hat{m}_n^{(2)} - \tilde{m}_n^{(2)} \\ \hat{m}_n^{(3)} - \tilde{m}_n^{(3)} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3\left(\frac{\alpha}{\xi^2} + \tau^2\right) c_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta D_{ij} - \mathbb{E}(\Delta D_{ij}) \\ \Delta \bar{D}_{ij}^2 - \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^2) \\ \Delta \bar{D}_{ij}^3 - \mathbb{E}(\Delta \bar{D}_{ij}^3) \end{pmatrix} + o_p(1) \end{aligned}$$

$$= A \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-1} X_{ij} + o_p(1).$$

Par le lemme 2.2 on a

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta t_{i,j})^{-1} X_{ij} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma^{(\infty)}).$$

Donc on en déduit que

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} (\widehat{m}_n - m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, A \Sigma^{(\infty)} A').$$

■

Comme f est une fonction bijective et différentiable et comme f^{-1} est continue sur $f(\Theta)$, on obtient la normalité asymptotique de $\widehat{\theta}_n$ en appliquant la δ -méthode (voir théorème 3.1 dans [72]).

Théorème 2.9 *Sous les hypothèses $(H_1 - H_3)$, on a :*

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{1/2} (\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, M),$$

où $M = G H G'$ avec G définie par :

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial m^{(1)}} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial m^{(1)}} & \frac{\partial f_3^{-1}}{\partial m^{(1)}} \\ \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial \overline{m}^{(2)}} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial \overline{m}^{(2)}} & \frac{\partial f_3^{-1}}{\partial \overline{m}^{(2)}} \\ \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial \overline{m}^{(3)}} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial \overline{m}^{(3)}} & \frac{\partial f_3^{-1}}{\partial \overline{m}^{(3)}} \end{pmatrix} (m)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m^{(1)}\overline{m}^{(3)}}} & \sqrt{\frac{2m^{(1)}}{\overline{m}^{(3)}}} + \sqrt{\frac{m^{(1)}}{2\overline{m}^{(3)}}} & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\overline{m}^{(3)}}{2m^{(1)}}} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\overline{m}^{(3)}} \sqrt{\frac{m^{(1)}}{2\overline{m}^{(3)}}} & -\frac{m^{(1)}}{\overline{m}^{(3)}} \sqrt{\frac{m^{(1)}}{2\overline{m}^{(3)}}} & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^{(1)}}{2\overline{m}^{(3)}}} \end{pmatrix}.$$

2.3.3 Intervalle de confiance et sélection de modèle

Comme conséquence du théorème 2.9, on peut construire un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1 - \vartheta$ pour chaque paramètre :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\xi \in \left[\widehat{\xi}_n \pm z_{1-\frac{\vartheta}{2}} \frac{\sigma(\widehat{\xi}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n N_i}} \right] \right) &= 1 - \vartheta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\alpha \in \left[\widehat{\alpha}_n \pm z_{1-\frac{\vartheta}{2}} \frac{\sigma(\widehat{\alpha}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n N_i}} \right] \right) &= 1 - \vartheta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\tau^2 \in \left[\widehat{\tau}_n^2 \pm z_{1-\frac{\vartheta}{2}} \frac{\sigma(\widehat{\tau}_n^2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n N_i}} \right] \right) &= 1 - \vartheta \end{aligned}$$

où $z_{1-\frac{\vartheta}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \vartheta/2$ de la loi normale centrée réduite et où $\sigma(\widehat{\xi}_n)$, $\sigma(\widehat{\alpha}_n)$ et $\sigma(\widehat{\tau}_n^2)$ sont les estimateurs des écart-types asymptotiques des estimateurs $\widehat{\xi}_n$, $\widehat{\alpha}_n$ et $\widehat{\tau}_n^2$. Pour obtenir les estimateurs de ces écart-types, on doit calculer les termes de la matrice de variance-covariance M apparue dans le théorème 2.9. Pour $v \in \{0, 1, 3\}$, c_v peut être estimée par

$$\left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{i,j}^{v-2}.$$

Donc, on peut tester si $\tau^2 = 0$ ou non, autrement dit tester si le modèle est un processus gamma (non perturbé) ou pas. De plus, en appliquant la δ -méthode et en utilisant le théorème précédent, on a

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_n \\ \widehat{\xi}_n^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \xi^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N \left(0, G_1 M_1 G_1' \right),$$

où M_1 est la matrice bloc 2×2 supérieure gauche de M et où $G_1 = \left(-\frac{2\alpha}{\xi^3}, \frac{1}{\xi^2} \right)'$. D'où, on peut obtenir l'intervalle de confiance de niveau $1 - \vartheta$ pour α/ξ^2 . Comme mentionné dans l'introduction, il est utile pour tester le mouvement brownien avec tendance positive contre le processus gamma perturbé.

2.3.4 Cas particuliers de schémas d'observation

Avant d'examiner quelques cas particuliers correspondant à différents types d'observation, on va introduire quelques hypothèses facilement interprétables :

- (A₁) même nombre d'observations pour tous les processus : $\forall i \in \mathbb{N}^*, N_i = N$.
- (A₂) instants d'observation identiques pour tous les processus : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \{1, \dots, N_i\}$, $t_{i,j} = t_j$.
- (A₃) instants réguliers (pas nécessairement les même instants pour tous les processus) : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \exists T_i$ tel que $\forall j \in \{1, \dots, N_i\}, \Delta t_{i,j} = T_i/N_i$.

(A₄) même intervalle de temps pour tous les processus : $\exists T$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $t_{iN_i} \leq T$.

(A₅) le temps écoulé entre deux observations successives est uniformément minoré :
 $\exists d_l > 0, \forall i \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \{1, \dots, N_i\}, \Delta t_{i,j} \geq d_l$.

On note que (A₂) \Rightarrow (A₁). Les relations entre les hypothèses (H₁ – H₃) et les hypothèses (A₁ – A₅) sont plus intéressantes. En particulier, on peut facilement vérifier que (A₄) \Rightarrow (H₂) et (A₁) & (A₅) \Rightarrow (H₁). De plus, les hypothèses peuvent se simplifier sous certaines conditions. Par exemple, si (A₃) et (A₄) sont satisfaites, alors (H₁) et (H₃) sont équivalentes respectivement à :

$$(H'_1) \sum_{n \geq 1} N_n^2 \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-2} < \infty,$$

$$(H'_3) \forall v \in \{0, 1\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n N_i^{3-v} \right) < \infty.$$

Ensuite, si (A₁) est satisfaite alors (H'₁) et (H'₃) le sont également. On va maintenant examiner cinq différents cas particuliers qui peuvent être décrits en fonction des hypothèses (A₁ – A₅) :

- Cas 1 - même nombre d'observations à des instants réguliers sur l'intervalle $[0, T]$: (A₁) – (A₄) ;
- Cas 2 - même nombre d'observations à des instants irréguliers sur l'intervalle $[0, T]$: (A₁), (A₂) and (A₄) ;
- Cas 3 - $N_i = i$ et des instants réguliers sur l'intervalle $[0, T]$: (A₃) et (A₄) ;
- Cas 4 - $N_i = i$ et des instants réguliers sur l'intervalle $[0, iT]$: (A₃) et (A₅) ;
- Cas 5 - $N_i = 2^{i-1}$ et des instants réguliers sur l'intervalle $[0, T]$: (A₃) et (A₄).

On peut facilement vérifier que les estimateurs dans les cas 1, 2 et 4 sont convergents et asymptotiquement normaux. Cependant, l'estimateur dans le cas 3 est convergent, mais la normalité asymptotique ne peut pas être établie à partir de nos résultats. Dans le dernier cas la convergence et la normalité asymptotique ne découlent pas de nos résultats, d'ailleurs il n'est pas certain qu'elles aient lieu.

2.4 Illustrations numériques

Dans ce paragraphe, on va illustrer nos résultats théoriques, dans le cas d'instants d'observations réguliers et irréguliers, à partir de données simulées.

2.4.1 Cas des instants réguliers

Simulation : pour $T = 1, \xi = 2, \alpha = 10$ et $\tau = 1$, on a calculé, voir tableau 2.1, le biais moyen et l'erreur quadratique moyenne (MSE) empiriques pour 1000 estimations des paramètres pour différentes valeurs de (n, N) .

TAB. 2.1 – Biais et MSE empiriques

Paramètres	ξ		α		τ^2		1000 rep.
$N = 1, n$	Biais	MSE	Biais	MSE	Biais	MSE	Obs.
10	1,53	13,48	7,64	343,11	0,18	1,06	430
100	0,77	7,42	3,89	182,92	0,16	0,51	858
$N = 10, n$	Biais	MSE	Biais	MSE	Biais	MSE	Obs.
1	2,71	61,88	13,56	646,22	0,48	1,32	769
10	0,47	1,31	2,18	30,18	0,14	0,17	990
100	0,04	0,06	0,22	1,43	0,01	0,02	1000
$N = 50, n$	Biais	MSE	Biais	MSE	Biais	MSE	Obs.
2	0,74	2,08	3,32	47,09	0,21	0,16	995
10	0,21	0,31	0,89	6,81	0,06	0,05	998
100	0,02	0,02	0,12	0,71	0,01	0,01	1000

On remarque que le biais moyen et l'erreur quadratique moyenne (MSE) tendent vers 0 lorsque n devient suffisamment grand. On obtient encore les mêmes résultats si on fixe n et on fait tendre N vers l'infini. On note que la dernière colonne à droite représente le

nombre d'estimations abouties pour 1000 simulations. En effet, pour estimer ξ , α et τ^2 , voir section 2.2.2, il faut que le dénominateur des expressions de $\hat{\xi}$ et $\hat{\alpha}$ soit strictement positif. De plus, le numérateur de la racine qui se trouve dans l'expression de $\hat{\tau}^2$ doit être positif. Par conséquent, les simulations retirées parmi 1000 correspondent aux cas où ces conditions ne sont pas satisfaites.

Pour $T = 1$, $\xi = 2$, $\alpha = 10$ et $\tau = 1$, on a calculé dans le cas où N dépend de n , voir tableau 2.2, le biais moyen et l'erreur quadratique moyenne (MSE) empiriques pour 1000 répétitions.

TAB. 2.2 – Biais et MSE empiriques

Paramètres	ξ		α		τ^2		1000 rep.
$n = 100, N_n$	Biais	MSE	Biais	MSE	Biais	MSE	Obs.
$\lfloor \log n \rfloor$	0,11	0,16	0,53	3,91	0,04	0,07	998
\sqrt{n}	0,03	0,05	0,15	1,28	0,01	0,02	1000
n	0,01	0,02	0,08	0,61	0,01	0,01	1000
$nN_n = 100$	Biais	MSE	Biais	MSE	Biais	MSE	Obs.
$n = 2, N_2 = 50$	0,81	2,59	3,53	50,97	0,21	0,15	1000
$n = 50, N_{50} = 2$	0,69	11,04	3,41	263,02	0,17	0,37	929
$n = 10, N_{10} = 10$	0,47	1,44	2,21	32,09	0,15	0,17	992

Ici, on remarque que pour n et N_n assez grand le biais et l'erreur quadratique moyenne (MSE) tendent vers zéro. Les résultats sont moins bons surtout si n ou N_n ont des petites valeurs.

Convergence : pour $T = 1$, $N = 1$, $\xi = 2$, $\alpha = 10$, $\tau = 1$ et $n = 1000$, on remarque clairement, voir figure 2.2, la convergence de $\hat{\xi}$ vers 2, $\hat{\alpha}$ vers 10 et $\hat{\tau}^2$ vers 1.

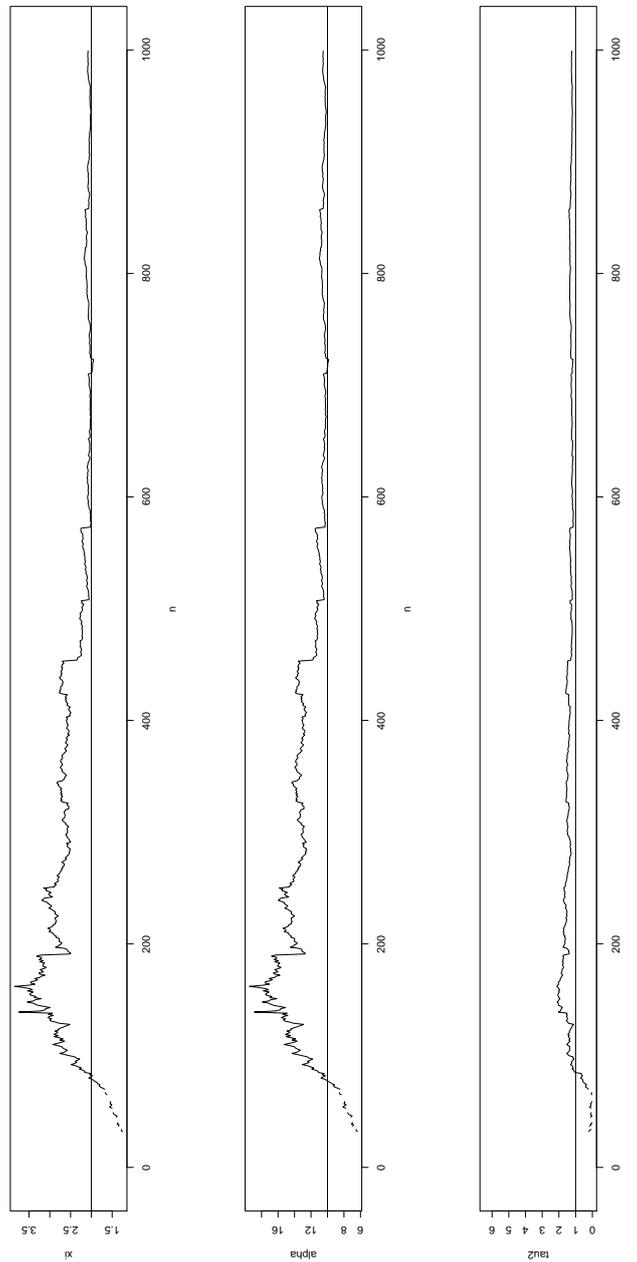


FIG. 2.2 – $n \mapsto \hat{\theta}_n$ pour $n \in \{50, \dots, 1000\}$ et $T = 1$

On note que les trous observés sur les figures 2.2 et correspondent aux observations retirées.

De même, mais pour $T = 10$, $N = 1$, $\xi = 2$, $\alpha = 10$, $\tau = 1$ et $n = 1000$, on remarque, voir figure 2.3, la convergence de $\hat{\xi}$, $\hat{\alpha}$ et $\hat{\tau}^2$ vers 2, 10 et 1 respectivement.

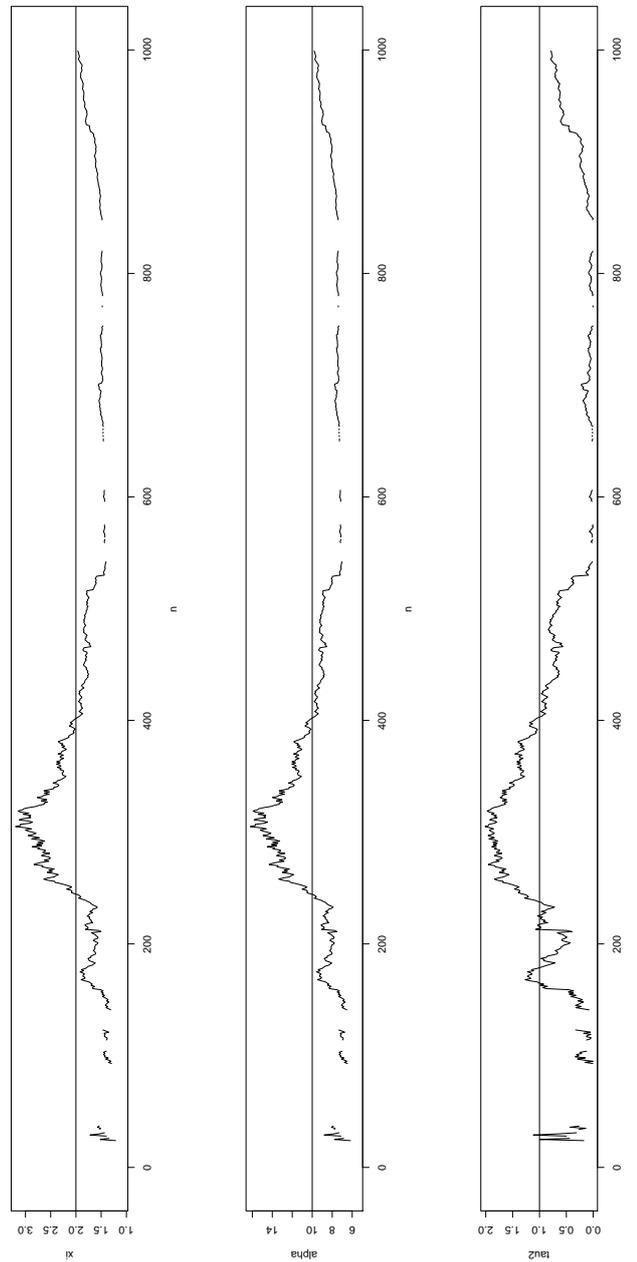


FIG. 2.3 – $n \mapsto \hat{\theta}_n$ pour $n \in \{50, \dots, 1000\}$ et $T = 10$

Les trous observés sur la figure 2.3 correspondent aussi aux observations retirées.

2.4.2 Cas d'instant d'observation irréguliers

On fixe les paramètres comme suit : $\xi = 1$, $\alpha = 0,02$ et $\tau^2 = 0,02$. On observe chaque individu à $N = 3$ instants entre 0 et $T = 1000$ tels que $\Delta t_{i,1} = 200$, $\Delta t_{i,2} = 300$ et $\Delta t_{i,3} = 500$. On calcule le biais empirique, l'erreur quadratique empirique (MSE) et l'écart-type empirique pour 1000 simulations. Sur la base des résultats donnés dans les tableaux 2.3, 2.4 et 2.5, on note que la moyenne de dégradation est bien estimée quelle que soit la taille de l'échantillon car dès que n devient assez grand le biais, l'erreur quadratique et l'écart-type empiriques deviennent très petits.

TAB. 2.3 – Biais empirique

n	50	100	200
ξ	2,22e-1	1,44e-1	6,25e-2
α	5,55e-3	3,61e-3	1,57e-3
τ^2	6,21e-3	1,16e-3	5,01e-4
Observations	937	983	998

TAB. 2.4 – Erreur quadratique empirique

n	50	100	200
ξ	8,29e-1	3,35e-1	7,07e-2
α	5,25e-4	2,12e-4	4,56e-5
τ^2	9,67e-5	5,88e-5	3,01e-5
Observations	937	983	998

TAB. 2.5 – Écart-type empirique

n	50	100	200
ξ	6,32e-1	5,61e-1	5,21e-1
α	7,78e-1	7,48e-1	7,41e-1
τ^2	0,11e1	5,01e-1	2,12e-1
Observations	937	983	998

2.5 Application à des données réelles

Dans ce qui suit, on présente les résultats obtenus en appliquant notre méthode d'estimation à des données issues de la littérature. Ici, la pertinence des résultats obtenus est toute relative vue la taille très faible des échantillons. Un jeu de données plus conséquent sera étudié au chapitre 4.

2.5.1 Données NIST

Un exemple de données de dégradation est disponible en ligne, sur le site web du National Institute of Standards and Technology [58]. Dans cet exemple, quinze composants ont été testés à trois températures différentes : 65 °C, 85 °C et 105 °C. Les pourcentages de dégradation ont été mesurés à 200, 500 et 1000 heures. La figure 2.4 représente, selon la température, les niveaux (cercles) et les trajectoires (lignes) de dégradation de ces quinze composants.

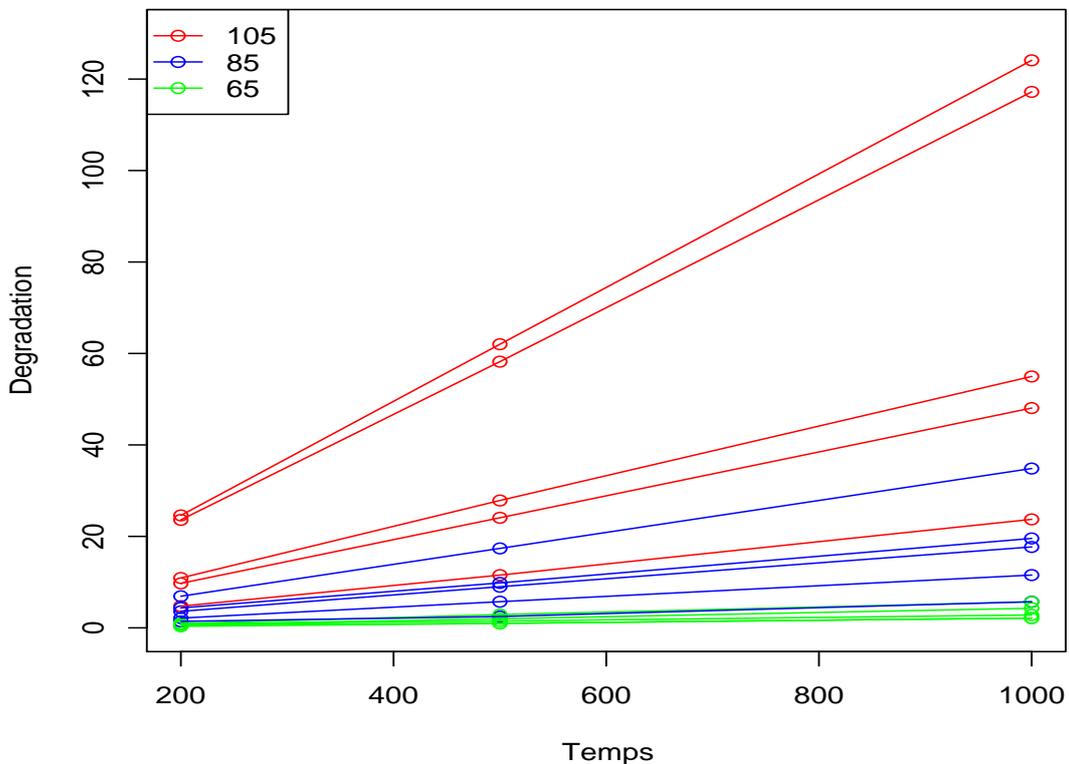


FIG. 2.4 – Trajectoires et niveaux de dégradation

En utilisant la méthode des moments, on a estimé les paramètres du modèle. On a également construit, voir tableau 2.6, les intervalles de confiance à 95% pour chaque para-

mètre du modèle. Les valeurs entre parenthèses représentent l'écart-type estimé de chaque estimateur. On peut noter que ξ diminue lorsque la température augmente. De plus τ^2 et

TAB. 2.6 – Estimation des paramètres et intervalles de confiance à 95%

Paramètres	ξ	α	τ^2	α/ξ^2
Estimation (65°C)	5,51 (1,31)	0,01 (0,002)	0,0001 (19,96)	0,0006
Intervalles de confiance	[4,84; 6,18]	[0,01; 0,02]	[0; 10,11]	[0,0004; 0,0007]
Estimation (85°C)	0,71 (0,37)	0,012 (0,49)	0,0068 (0,111)	0,025
Intervalles de confiance	[0,51; 0,89]	[0; 0,26]	[0; 0,06]	[0; 0,54]
Estimation (105°C)	0,29 (1,87)	0,02 (0,14)	0,27 (1,51)	0,25
Intervalles de confiance	[0; 1,24]	[0; 0,09]	[0; 1,04]	[0; 1,06]

α/ξ^2 augmentent avec la température. Le paramètre α est presque stable. Enfin, à partir des intervalles de confiance obtenus pour 65°C, le modèle retenu est un processus gamma car on ne rejette pas l'hypothèse $\tau^2 = 0$ et $\alpha/\xi^2 \neq 0$.

2.5.2 Données-tests sur des câbles chauffants

Whitmore and Schenkelberg [76] ont présenté des données-tests sur des câbles chauffants. La dégradation du câble est mesurée par le logarithme de sa résistance. La température a été utilisée comme covariable afin d'accélérer la dégradation. Cinq câbles chauffants ont été cuits dans un four pour chaque température d'essai. Trois températures d'essai ont été utilisées : 200°C, 240°C et 260°C, soit un total de 15 mesures. Le câble tombe en panne lorsque le logarithme de la résistance atteint $\ln(2) = 0,693$. La figure 2.5 représente, selon la température, les trajectoires de dégradation de ces quinze composants.

On a estimé les trois paramètres du modèle de dégradation et on a construit, voir tableau 2.7, les intervalles de confiance à 95% pour chaque paramètre du modèle. Les valeurs entre parenthèses représentent l'écart-type estimé de chaque estimateur. Vu l'allure des don-

TAB. 2.7 – Estimation des paramètres et intervalles de confiance à 95%

Paramètres	ξ	α	τ^2	α/ξ^2
Estimation (200°C)	2,18 (5,07)	0,47 (1,41)	0,03 (9,97)	0,09
Intervalles de confiance	[0,77; 3,58]	[0,08; 0,86]	[0; 2,81]	[0; 0,21]
Estimation (240°C)	2,38 (6,74)	2,17 (3,10)	0,14 (11,57)	0,38
Intervalles de confiance	[0,51; 4,25]	[1,31; 3,03]	[0; 3,35]	[0; 0,88]
Estimation (260°C)	2,75 (9,01)	5,13 (3,78)	0,04 (17,31)	0,67
Intervalles de confiance	[0; 5,74]	[3,87; 6,38]	[0; 5,78]	[0; 2,01]

nées, il n'est pas surprenant d'accepter $H_0 : \tau^2 = 0$ (voir tableau 2.7). Ensuite, on constate

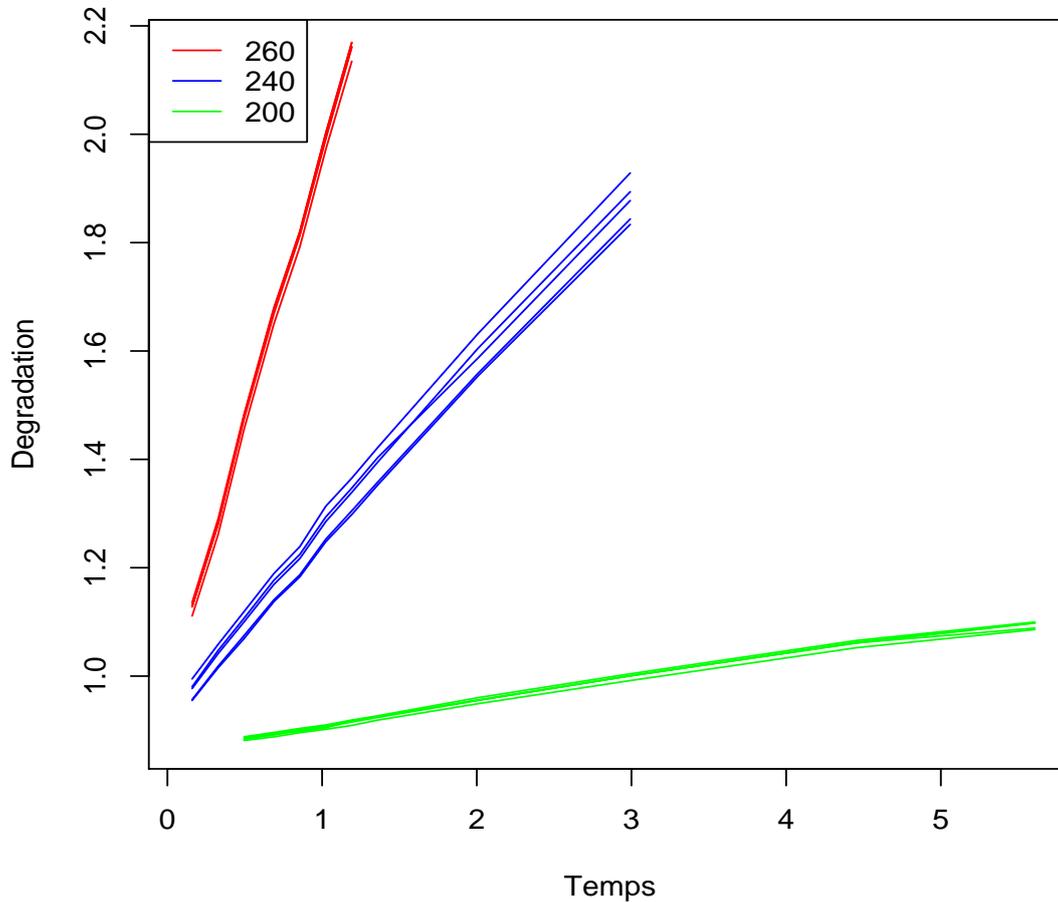


FIG. 2.5 – Trajectoires de dégradation

que ξ , α et α/ξ^2 augmentent avec la température. Cependant ce n'est pas le cas pour τ^2 . Bien qu'on ait le même nombre des individus que pour le jeu de données précédent, ici on observe des écarts-types avec des valeurs très grandes. Il est donc difficile de choisir entre l'une des deux sous-modèles, et plus généralement, ce résultat peut être interprété comme un mauvais ajustement du modèle.

Chapitre 3

Processus gamma perturbé avec covariables

3.1 Introduction

On appelle stress l'ensemble des conditions et facteurs extérieurs variables, généralement imprévus, susceptibles d'affecter le bon fonctionnement d'un système. Sous l'hypothèse de l'existence de stress, on considère que les défaillances d'un système peuvent être influencées par deux types de causes : les causes internes qui tiennent à la nature propre du composant (matériaux, fabrication, conception, . . .) et les causes externes qui tiennent à l'environnement extérieur dans lequel le composant est plongé.

Des modèles prenant en compte l'effet du stress ont été développés dans le domaine biomédical. Dans les applications médicales, les stress, encore appelés covariables, sont parfois présentés comme étant des marqueurs (*markers* en anglais), et l'étude de maladies chroniques comme l'infection par le VIH (virus de l'immunodéficience humaine) ont été à l'origine de développements méthodologiques incluant l'effet de marqueurs (voir par exemple [68]). La prise en compte du stress dans les modèles prévisionnels de fiabilité est modélisée de diverses manières en fonction de la nature du stress (climatiques, mécaniques, électriques, radiatifs, . . .) et de sa durée de manifestation (ponctuel, constant, progressifs, . . .). Le problème consiste toujours à modéliser l'influence des stress sur la défaillance ou le niveau de dégradation des systèmes puis à estimer cet effet à partir de données de retour d'expérience.

Les travaux concernant les modèles intégrant les effets du stress sont très nombreux dans la littérature. Notons par exemple :

- les modèles résistance-contrainte (stress-strength) [24; 37; 54].
- les modèles de chocs [54].
- les modèles à risques concurrents [69].
- les modèles à risques multiplicatifs [45]. Le modèle à risques proportionnels est un cas particulier parmi les modèles à risques multiplicatifs ; il est parfois appelé

modèle de Cox [20]. Un panorama des applications faites du modèle de Cox a été réalisé par Ansell et Phillips [3].

- les modèles de vie accélérée [46; 55].

Dans cette thèse on s'intéresse uniquement aux modèles de type vie accélérée dont la caractéristique principale est que le stress influence l'échelle de temps.

3.1.1 Les modèles de vie accélérée

Supposons que des matériels sont très fiables offrant peu de possibilité d'observer des défaillances pendant la durée T donnée d'une expérience. Alors on effectue l'expérience sous des stress qui sont plus sévères que le stress usuel. On parle d'expériences accélérées. L'application de stress sévères raccourcit la durée de vie des matériels et des défaillances peuvent alors être observées sur un horizon de temps "raisonnable" $\tilde{T} < T$. Les stress peuvent être de différentes natures (température, tension, pression, etc.). Dans le cas général le stress x peut varier au cours du temps et peut être multidimensionnel $t \mapsto x_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(p)})'$. On note alors $r[x_t]$ le facteur d'échelle (ou d'accélération) à l'instant t .

Dans la littérature [46; 55] on trouve une grande variété de modèles d'accélération, définis pour chaque type de composants et matériaux. Nous présentons quelques modèles d'accélération parmi ceux les plus utilisés pour un stress constant à valeurs dans \mathbb{R} .

1. Le modèle log-linéaire : ce modèle est principalement utilisé pour représenter la fatigue des composants :

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 x},$$

où β_0 et β_1 sont les paramètres du modèle. Ce modèle est aussi appelé *power rule model*.

2. Le modèle d'Arrhenius : ce modèle est utilisé lorsque le système est sensible à la température et subit donc un stress thermique. Le facteur d'échelle d'un tel système est donnée par la loi :

$$r(x) = \lambda_1 e^{-\beta_1/x},$$

où $\lambda_1 > 0$ et β_1 sont les paramètres du modèle.

3. Le modèle d'Eyring : ce modèle est utilisé lorsque le système est sensible à la température (en particulier : composants électriques, conducteurs aluminium et composants mécaniques). Le facteur d'échelle est

$$r(x) = \frac{\lambda_1}{x} e^{-\beta_2/x}.$$

En comparant le modèle d'Eyring au modèle d'Arrhenius, on peut constater que la seule différence entre les deux relations est le terme $1/x$.

Le modèle de vie accélérée est dit paramétrique si la distribution de probabilité de la durée de vie du matériel sous stress nominal est paramétrique et si le facteur d'accélération, qui relie un des paramètres de cette distribution et les contraintes d'accélération (choix de certaines classes de fonctions pour la vitesse de dégradation r) est aussi paramétrique. Les modèles paramétriques utilisés dans les épreuves accélérées ont été largement étudiés dans plusieurs domaines, en particulier en électronique, voir par exemple [55; 71]. Le modèle de vie accélérée est considéré comme non-paramétrique si la fonction de survie est inconnue ou si aucune forme paramétrique du facteur d'accélération n'est supposée. Les modèles semi-paramétriques sont fréquemment utilisés pour des données biomédicales et plus rarement dans le domaine de l'ingénierie [71].

3.1.2 Intégration du stress dans les modèles de dégradation

Différents processus de dégradation permettant la prise en compte de covariables ont été proposés. En complément des modèles de vie accélérée qui permettent d'intégrer l'influence de stress sur la durée de vie, existent des modèles de dégradation accélérée [46]. Doksum et Høyland [25], qui modélisent la dégradation d'un système par un processus de Wiener, furent les premiers à proposer la transformation du temps dans sa forme générale. Le temps réel t est transformé en un temps accéléré $v = \Lambda(t)$ où Λ est une fonction croissante. Cette transformation du temps est utilisée de façon à modéliser l'effet du stress sur l'écoulement du temps. Whitmore et Schenkelberg [76] considèrent une transformation exponentielle du temps $v = 1 - \exp(-\lambda t^c)$ ainsi qu'une transformation puissance du temps $v = t^q$ pour modéliser la dégradation de câbles chauffants.

Bagdonavičius et Nikulin [7] supposent que le niveau de dégradation d'un système sujet au vieillissement peut être modélisé par un processus stochastique $D = (D(t))_{t \geq 0}$. Ils considèrent que D appartient à la famille des processus gamma ce qui assure l'indépendance des accroissements et la croissance des trajectoires. L'accroissement de D entre t et $t + \Delta t$ pour $\Delta t > 0$ reste donc dans la même famille de distributions. Ils modélisent l'influence des covariables dépendant du temps sur le processus de dégradation de la façon suivante. Soit $D_x(t)$ le niveau de dégradation atteint par le système au temps t soumis aux covariables dépendantes du temps x_t (où $x_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(p)})' \in \mathbb{R}^p$). Ils proposent un modèle d'accumulation additif de dégradation et définissent :

$$D_x(t) = \gamma \left(\int_0^t e^{\beta' x_s} ds \right),$$

où γ est un processus gamma non homogène. En supposant les covariables constantes au cours du temps on obtient alors :

$$D_x(t) = \gamma \left(e^{\beta' x_t} t \right).$$

Lawless et Crowder [43] proposent un modèle alternatif en intégrant les covariables non pas au niveau du paramètre de forme mais au niveau du paramètre d'échelle. Ils ne considèrent aucun modèle de régression spécifique pour le paramètre d'échelle mais ne prennent en compte que des covariables indépendantes du temps.

3.2 Modèle avec covariables

Pour tenir compte de l'hétérogénéité de la population et de l'environnement, on considère la présence de covariables dans notre modèle de dégradation. On suppose que ces covariables agissent seulement sur le processus gamma pris en compte dans notre modèle. Les covariables sont intégrées de manière identique à celle proposée par Bagdonavičius et Nikulin [7]. Donc si $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(p)})'$ est un vecteur de p covariables réelles, conditionnellement à x notre modèle est défini comme suit :

$$\forall t \geq 0, D_x(t) = Y\left(te^{\beta'x}\right) + \tau B(t),$$

où Y est un processus gamma homogène de paramètres d'échelle ξ et de forme α , B est un mouvement brownien indépendant de Y , $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$ est un vecteur de paramètres réels inconnus et $\tau \in \mathbb{R}$. On suppose que le vecteur de covariables x est une observation d'un vecteur aléatoire X , indépendant de Y et B , ayant f_X comme fonction de densité par rapport à une mesure σ -finie μ_p de \mathbb{R}^p et ayant F_X pour fonction de répartition.

3.3 Simulation

Dans cette section, on présente quelques simulations du modèle de dégradation proposé. On considère que les processus sont soumis à une seule covariable qualitative. On suppose que cette covariable peut prendre l'une des trois valeurs possibles correspondant à trois régimes de stress différents (bas, moyen et élevé). Par exemple, cette covariable peut être un indicateur de température comme dans [58]. Dans ce cas le vecteur de covariables $x \in \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ et le vecteur $\beta = (\beta_1, 0, \beta_3)'$ avec $\exp(\beta'x) = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \beta_i 1_{\{T=T_i\}}\right)$. Sur la figure 3.1, des trajectoires simulées sont tracées (lignes pointillées), ainsi que les trois moyennes des dégradations (lignes continues) pour $\xi = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = (-0, 5; 0; 0, 4)$ et $\tau^2 = 1$.

On remarque que les processus doivent être observés sur un intervalle de temps suffisamment grand pour faire apparaître les trois régimes de dégradation distincts.

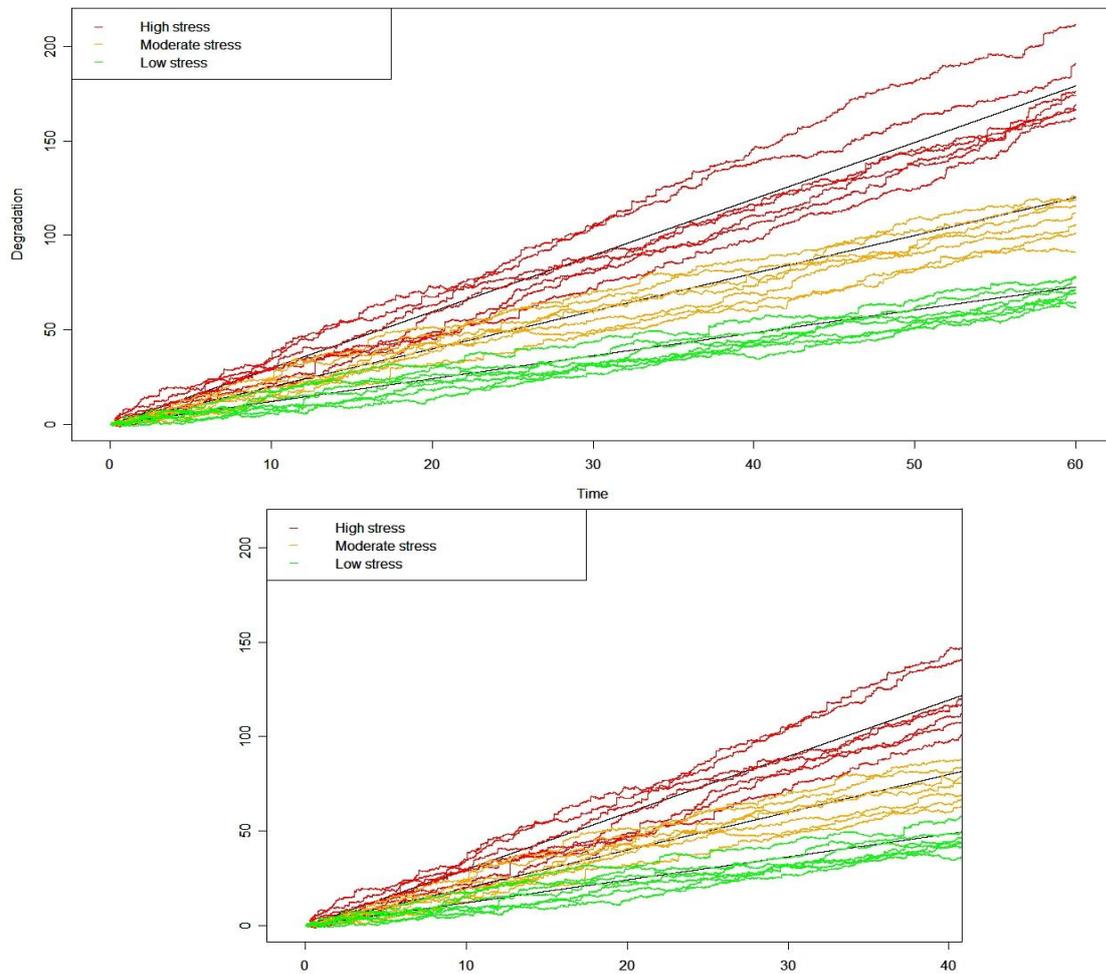


FIG. 3.1 – Exemple de simulation

3.4 Estimation des paramètres

On note par $D_{x_1}^{(1)}, \dots, D_{x_n}^{(n)}$ n processus de dégradation indépendants tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $t \geq 0$,

$$D_{x_i}^{(i)}(t) = Y^{(i)} \left(t e^{\beta' x_i} \right) + \tau B^{(i)}(t),$$

où les $D_x^{(i)}$ ont la même loi que D_x défini dans la section 3.2 et x_1, \dots, x_n sont n réalisations i.i.d de X . On suppose qu'on observe le processus $D_{x_i}^{(i)}$ à des instants réguliers $t_j = jT/N$, pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$. Pour tout $1 \leq j \leq N$ et $k > 0$, on désigne par $m_\theta^{(k)}(x_i)$ le moment d'ordre k des accroissements

$$\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) = D_{x_i}^{(i)}(t_j) - D_{x_i}^{(i)}(t_{j-1}),$$

où $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = ((\gamma, \beta), (\alpha, \tau^2))$ avec $\gamma = \alpha/\xi$. On note que θ appartient à $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 = (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^p) \times (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+)$ l'espace des paramètres du modèle. Dans la suite on notera par $\theta_0 = (\theta_0^{(1)}, \theta_0^{(2)}) = ((\gamma_0, \beta_0), (\alpha_0, \tau_0^2))$ les vraies valeurs des paramètres du modèle. Par la suite on note $\mathbb{E}_\theta[\varphi(D_x(t))]$ l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_\theta[\varphi(D_X(t)) | X = x]$ pour toute fonction réelle φ mesurable.

Le moment d'ordre 1 est égal à

$$\begin{aligned} m_\theta^{(1)}(x_i) &= \mathbb{E}_\theta[\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j)] = \mathbb{E}_\theta[\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j) | X_i = x_i] \\ &= \frac{\gamma T}{N} e^{\beta' x_i} = m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x_i). \end{aligned}$$

Le moment d'ordre 2 est égal à

$$\begin{aligned} m_\theta^{(2)}(x_i) &= \mathbb{E}_\theta\left[\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j)\right)^2\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j)\right)^2 | X_i = x_i, \theta^{(1)}\right] \\ &= m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x_i) \frac{\gamma}{\alpha} + \left(m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x_i)\right)^2 + \tau^2 T/N = m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}). \end{aligned}$$

Pour estimer les paramètres γ et β , on va minimiser d'abord la fonction de régression suivante :

$$d_1^{(n)}(\theta^{(1)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - \frac{\gamma T}{N} e^{\beta' x_i}\right)^2.$$

On note $\hat{\theta}_n^{(1)} = \arg \min_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} d_1^{(n)}(\theta^{(1)})$. Une fois le paramètre $\theta^{(1)}$ estimé, on estime $\theta^{(2)} = (\alpha, \tau^2)$ en minimisant cette deuxième fonction de régression :

$$\begin{aligned} d_2^{(n)}(\theta^{(2)}, \hat{\theta}_n^{(1)}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(\left[\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j)\right]^2 - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x_i, \hat{\theta}_n^{(1)})\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \left(\left[\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j)\right]^2 - m_{\hat{\theta}_n^{(1)}}^{(1)}(x_i) \frac{\hat{\gamma}}{\alpha} - \left(m_{\hat{\theta}_n^{(1)}}^{(1)}(x_i)\right)^2 - \tau^2 T/N\right)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\theta^{(2)}$ est estimé par $\hat{\theta}_n^{(2)} = \arg \min_{\theta^{(2)} \in \Theta_2} d_2^{(n)}(\theta^{(2)}, \hat{\theta}_n^{(1)})$. L'estimateur final de θ est donc $\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_n^{(1)}, \hat{\theta}_n^{(2)})$.

3.5 Propriétés asymptotiques

On désigne par $d^{(n)}(\theta)$ et $d(\theta)$ les deux matrices suivantes :

$$d^{(n)}(\theta) = \frac{1}{nN} \begin{pmatrix} d_1^{(n)}(\theta^{(1)}) \\ d_2^{(n)}(\theta^{(2)}, \theta^{(1)}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d(\theta) = \begin{pmatrix} d_1(\theta^{(1)}) \\ d_2(\theta^{(2)}, \theta^{(1)}) \end{pmatrix},$$

telles que $\frac{1}{nN}d_1^{(n)}(\theta^{(1)})$ converge en probabilité, quand n tend vers l'infini, vers $d_1(\theta^{(1)})$ qui est égale à

$$\int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[D_x \left(\frac{T}{N} \right) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right]^2 f_X(x) d\mu_p(x).$$

De même, $\frac{1}{nN}d_2^{(n)}(\theta^{(2)}, \theta^{(1)})$ converge en probabilité, quand n tend vers l'infini, vers $d_2(\theta^{(2)}, \theta^{(1)})$ qui est égale à

$$\int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[D_x^2 \left(\frac{T}{N} \right) - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x, \theta^{(1)}) \right]^2 f_X(x) d\mu_p(x).$$

3.5.1 Convergence des estimateurs

On va d'abord prouver la convergence de $\hat{\theta}_n$. Pour faire cela on a besoin de montrer le lemme suivant. Dans ce qui suit $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Lemme 3.1 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. Θ est compact ;
2. Pour $i \in \{1, 2\}$, l'application $\theta \mapsto d_i(\theta)$ est continue telle que :
 - $d_i(\theta) \geq 0$,
 - $d_1(\theta^{(1)})$ admet un minimum unique en $\theta_0^{(1)} \in \overset{\circ}{\Theta}_1$,
 - $d_2(\theta)$ admet un minimum unique en $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$.
3. $\sup_{\theta \in \Theta} \|d^{(n)}(\theta) - d(\theta)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} 0$.

Alors, quand n tends vers l'infini, $(\hat{\theta}_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers θ_0 .

Preuve. Afin d'assurer la convergence en probabilité de $\hat{\theta}_n$ vers θ_0 , on doit prouver que $\hat{\theta}_n^{(1)}$ (respectivement $\hat{\theta}_n^{(2)}$) converge en probabilité vers $\theta_0^{(1)}$ (respectivement $\theta_0^{(2)}$). Vérifions d'abord que

$$\hat{\theta}_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} \theta_0^{(1)}.$$

Sans perte de généralité, on suppose que $d_1(\theta_0^{(1)}) = 0$. Θ_1 est un compact et $B(\theta_0^{(1)}, \epsilon) \subset \Theta_1$ est une boule ouverte de centre $\theta_0^{(1)}$ et de rayon $\epsilon > 0$. Par l'hypothèse 2 il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall \theta^{(1)} \in B^c(\theta_0^{(1)}, \epsilon), \quad d_1(\theta^{(1)}) \geq \eta.$$

Alors, si $\hat{\theta}_n^{(1)} \in B^c(\theta_0^{(1)}, \epsilon)$, on a

$$\begin{aligned} d_1^{(n)}(\hat{\theta}_n^{(1)}) &= d_1(\hat{\theta}_n^{(1)}) - (d_1(\hat{\theta}_n^{(1)}) - d_1^{(n)}(\hat{\theta}_n^{(1)})) \\ &\geq \eta - \sup_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} |d_1^{(n)}(\theta^{(1)}) - d_1(\theta^{(1)})|. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Puisque $\hat{\theta}_n^{(1)} = \arg \min_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} d_1^{(n)}(\theta^{(1)})$ et $d_1(\theta_0^{(1)}) = 0$, on a

$$\begin{aligned} d_1^{(n)}(\hat{\theta}_n^{(1)}) &\leq d_1^{(n)}(\theta_0^{(1)}) - d_1(\theta_0^{(1)}) \\ &\leq \left| d_1^{(n)}(\theta_0^{(1)}) - d_1(\theta_0^{(1)}) \right| \\ &\leq \sup_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} \left| d_1^{(n)}(\theta^{(1)}) - d_1(\theta^{(1)}) \right|. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les inégalités (3.1) et (3.2) impliquent que

$$\left\{ \|\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)}\| > \epsilon \right\} \subseteq \left\{ \eta < 2 \sup_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} \left| d_1^{(n)}(\theta^{(1)}) - d_1(\theta^{(1)}) \right| \right\}.$$

D'où il vient

$$\mathbb{P}_{\theta^{(1)}} \left[\|\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)}\| > \epsilon \right] \leq \mathbb{P}_{\theta^{(1)}} \left[\sup_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} \left| d_1^{(n)}(\theta^{(1)}) - d_1(\theta^{(1)}) \right| > \eta/2 \right].$$

Ensuite, par l'hypothèse 3, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\theta^{(1)}} \left[\|\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)}\| > \epsilon \right] = 0,$$

ce qui signifie que

$$\hat{\theta}_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} \theta_0^{(1)}.$$

Vérifions maintenant que $\hat{\theta}_n^{(2)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} \theta_0^{(2)}$. De la même façon que ci-dessus, Θ_2 est un compact et $B(\theta_0^{(2)}, \epsilon) \subset \Theta_2$ est une boule ouverte de centre $\theta_0^{(2)}$ et de rayon $\epsilon > 0$. En utilisant les hypothèses 1 et 2, il existe $\tilde{\eta}, \tilde{\epsilon} > 0$ tels que

$$\forall \theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in B^c(\theta_0, \tilde{\epsilon}), \quad d_2(\theta) \geq \tilde{\eta}.$$

Sans perte de généralité, on suppose que $d_2(\theta_0^{(1)}, \theta_0^{(2)}) = 0$. Alors, pour tout $\hat{\theta}_n \in B^c(\theta_0, \tilde{\epsilon})$, on a

$$\begin{aligned} d_2^{(n)}(\hat{\theta}_n^{(1)}, \hat{\theta}_n^{(2)}) &= d_2(\hat{\theta}_n^{(1)}, \hat{\theta}_n^{(2)}) - \left(d_2(\hat{\theta}_n^{(1)}, \hat{\theta}_n^{(2)}) - d_2^{(n)}(\hat{\theta}_n^{(1)}, \hat{\theta}_n^{(2)}) \right) \\ &\geq \tilde{\eta} - \sup_{\theta \in \Theta} \left| d_2^{(n)}(\theta) - d_2(\theta) \right|. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Comme $\hat{\theta}_n^{(2)} = \arg \min_{\theta^{(2)} \in \Theta_2} d_2^{(n)}(\hat{\theta}_n^{(1)}, \theta^{(2)})$, on obtient que

$$\begin{aligned} d_2^{(n)}(\hat{\theta}_n^{(1)}, \hat{\theta}_n^{(2)}) &\leq d_2^{(n)}(\hat{\theta}_n^{(1)}, \theta_0^{(2)}) - d_2(\hat{\theta}_n^{(1)}, \theta_0^{(2)}) + d_2(\hat{\theta}_n^{(1)}, \theta_0^{(2)}) \\ &\leq \sup_{\theta \in \Theta} \left| d_2^{(n)}(\theta) - d_2(\theta) \right| + d_2(\hat{\theta}_n^{(1)}, \theta_0^{(2)}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les inégalités (3.3) et (3.4) impliquent que

$$\left\{ \|\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta_0^{(2)}\| > \epsilon \right\} \subseteq \left\{ \tilde{\eta} < 2 \sup_{\theta \in \Theta} \left| d_2^{(n)}(\theta) - d_2(\theta) \right| + d_2\left(\hat{\theta}_n^{(1)}, \theta_0^{(2)}\right) \right\}.$$

D'où,

$$\mathbb{P}_\theta \left[\|\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta_0^{(2)}\| > \epsilon \right] \leq \mathbb{P}_\theta \left[\tilde{\eta}/2 < \sup_{\theta \in \Theta} \left| d_2^{(n)}(\theta) - d_2(\theta) \right| + d_2\left(\hat{\theta}_n^{(1)}, \theta_0^{(2)}\right) \right].$$

Par l'hypothèse 3 on a

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| d_2^{(n)}(\theta) - d_2(\theta) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} 0.$$

Comme $\hat{\theta}_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} \theta_0^{(1)}$ et d_2 est continue en θ_0 , on obtient $d_2\left(\hat{\theta}_n^{(1)}, \theta_0^{(2)}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} 0$. Donc finalement on a :

$$\hat{\theta}_n^{(2)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} \theta_0^{(2)}.$$

■

Ensuite, on montre que les hypothèses 2 et 3 du lemme 3.1 sont satisfaites. Le résultat suivant sera donc vérifié.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses suivantes :*

- (A₁) Θ est compact tel que $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$ et $\beta_0 \neq 0$;
- (A₂) X est un vecteur aléatoire borné ;
- (A₃) Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^p$ tel que $\mu_p(\overline{\mathcal{A}}) = 0$. Il existe $x_1, \dots, x_{p+1} \in \mathcal{A}$ tel que
 - a) $\forall i \in \{1, \dots, p+1\}, f_X(x_i) > 0$
 - b) Pour tout $i \in \{1, \dots, p+1\}$ on note $\tilde{x}'_i = \begin{pmatrix} 1 & x'_i \end{pmatrix}$. Alors $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{p+1}$ sont linéairement indépendants.

on a $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} \theta_0$.

Preuve. Pour montrer que $\hat{\theta}_n$ converge en probabilité vers θ_0 on doit simplement vérifier les hypothèses 2 et 3 du lemme 3.1 car Θ est un compact par l'hypothèse (A₁). On commence donc par montrer que pour $i \in \{1, 2\}$, l'application d_i est continue.

$\theta^{(1)} \mapsto d_1(\theta^{(1)})$ est continue. On a :

$$\begin{aligned} d_1(\theta^{(1)}) &= \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E}_{\theta_0} \left(D_x \left(\frac{T}{N} \right) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right)^2 dF_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E}_{\theta_0} \left(\left(D_x \left(\frac{T}{N} \right) - m_{\theta_0^{(1)}}^{(1)}(x) \right) + \left(m_{\theta_0^{(1)}}^{(1)}(x) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right) \right)^2 dF_X(x) \\ &= d_1(\theta_0^{(1)}) + \int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(1)}}^{(1)}(x) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right)^2 dF_X(x). \end{aligned}$$

Comme $d_1(\theta_0^{(1)})$ est une constante, il reste à vérifier la continuité de

$$\theta^{(1)} \longmapsto \int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(1)}}^{(1)}(x) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right)^2 dF_X(x).$$

On désigne par

$$f_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) = \left(\frac{\gamma_0 T}{N} e^{\beta_0' x} - \frac{\gamma T}{N} e^{\beta' x} \right)^2 f_X(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $f_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x)$ est une fonction continue et elle est majorée comme suit :

$$\left| f_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right| \leq \left(\frac{\gamma_0 T}{N} e^{\|\beta_0\| \cdot \|x\|} + \frac{\gamma T}{N} e^{\|\beta\| \cdot \|x\|} \right)^2 f_X(x).$$

Comme $\theta^{(1)} \in \Theta_1$ est un compact, il existe deux constantes $k_1, k_2 > 0$ tel que

$$\left| f_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right| \leq k_1 e^{k_2 \|x\|} f_X(x).$$

En utilisant l'hypothèse (A_2) on en déduit que

$$\left| f_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right| \leq C_1 f_X(x) \in L_1(\mu_p)$$

où C_1 est une constante. Soit $(\theta_n^{(1)})_{n \geq 0}$ une suite de paramètres qui converge vers $\theta^{(1)}$. En utilisant la continuité de la fonction $f_{\theta^{(1)}}^{(1)}$, on a :

$$f_n^{(1)}(x) = f_{\theta_n^{(1)}}^{(1)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x).$$

Or, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\left| f_{\theta_n^{(1)}}^{(1)}(x) \right| \leq C_1 f_X(x)$. Alors en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient que :

$$\int_{\mathbb{R}^p} f_{\theta_n^{(1)}}^{(1)}(x) dF_X(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} f_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) dF_X(x).$$

Donc $\int_{\mathbb{R}^p} f_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) dF_X(x)$ est une fonction continue. Enfin on déduit que $\theta^{(1)} \longmapsto d^{(1)}(\theta^{(1)})$ est une application continue.

$\theta = (\theta_0^{(1)}, \theta^{(2)}) \longmapsto d_2(\theta)$ est continu. De la même façon que ci-dessus on a

$$\begin{aligned} & d_2(\theta_0^{(1)}, \theta^{(2)}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E}_{\theta_0} \left(\left(D_x^2 \left(\frac{T}{N} \right) - m_{\theta_0^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) \right) + \left(m_{\theta_0^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) \right) \right)^2 dF_X(x) \\ &= d_2(\theta_0) + \int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) \right)^2 dF_X(x). \end{aligned}$$

Comme $d_2(\theta_0)$ est une constante, il reste à vérifier la continuité de

$$\theta \longmapsto \int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) \right)^2 dF_X(x).$$

On note par

$$f_{\theta}^{(2)}(x) = \left(\frac{\gamma_0^2 T}{N\alpha_0} e^{\beta_0' x} + \tau_0^2 \frac{T}{N} - \frac{\gamma_0^2 T}{N\alpha} e^{\beta_0' x} - \tau^2 \frac{T}{N} \right)^2 f_X(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\theta \longmapsto f_{\theta}^{(2)}(x)$ est une fonction continue et peut être majorée comme suit :

$$\left| f_{\theta}^{(2)}(x) \right| \leq \left(\frac{\gamma_0^2 T}{N\alpha_0} e^{\|\beta_0\| \cdot \|x\|} + \tau_0^2 \frac{T}{N} + \frac{\gamma_0^2 T}{N\alpha} e^{\|\beta_0\| \cdot \|x\|} + \tau^2 \frac{T}{N} \right)^2.$$

Comme $\theta \in \Theta$ est un compact, il existe deux constantes k_3 et k_4 tel que

$$\left| f_{\theta}^{(2)}(x) \right| \leq (k_3 e^{k_2 \|x\|} + k_4) f_X(x).$$

En utilisant l'hypothèse (A_2) on obtient que $\left| f_{\theta}^{(2)}(x) \right| \leq C_2 f_X(x) \in L_1(\mu_p)$ où C_2 est une constante. Soit $(\theta_n)_{n \geq 0}$ une suite de paramètres qui converge vers θ . En utilisant la continuité de la fonction $f_{\theta}^{(2)}$, on obtient que :

$$f_n^{(2)}(x) = f_{\theta_n}^{(2)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_{\theta}^{(2)}(x).$$

Or, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\left| f_{\theta}^{(2)}(x) \right| \leq C_2 f_X(x)$. Alors, en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient que :

$$\int_{\mathbb{R}^p} f_{\theta_n}^{(2)}(x) dF_X(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} f_{\theta}^{(2)}(x) dF_X(x).$$

Enfin on déduit que $\theta \longmapsto d_2(\theta)$ est continue.

Dans la suite on va prouver que $d_1(\theta^{(1)})$ admet un minimum unique en $\theta_0^{(1)}$.

$d_1(\theta^{(1)})$ admet un minimum en $\theta_0^{(1)} \in \overset{\circ}{\Theta}_1$. On sait que

$$d_1(\theta^{(1)}) = d_1(\theta_0^{(1)}) + \int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(1)}}^{(1)}(x) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right)^2 dF_X(x).$$

Donc, on peut déduire que pour tout $\theta^{(1)} \in \Theta_1$, $d_1(\theta_0^{(1)}) \leq d_1(\theta^{(1)})$ car

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(1)}}^{(1)}(x) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right)^2 dF_X(x) \geq 0.$$

Unicité de $\theta_0^{(1)}$. On peut voir directement que $d_1(\theta_0^{(1)}) = d_1(\theta^{(1)})$ si

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(1)}}^{(1)}(x) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right)^2 dF_X(x) = 0.$$

Donc, pour vérifier l'unicité de $\theta_0^{(1)}$, on procède comme suit :

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(1)}}^{(1)}(x) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right)^2 dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\gamma_0 e^{\beta'_0 x} - \gamma e^{\beta' x} \right)^2 f_X(x) d\mu_p(x) = 0.$$

D'après l'hypothèse (A_3) , il existe au moins $x_1, \dots, x_{p+1} \in \mathcal{A}$ tels que $f_X(x_i) > 0$ et $\mu_p(\bar{\mathcal{A}}) = 0$, cela implique que pour tout $i \in \{1, \dots, p+1\}$

$$\gamma_0 e^{\beta'_0 x_i} = \gamma e^{\beta' x_i}. \quad (3.5)$$

Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, p+1\}$

$$\ln \gamma_0 + \beta'_0 x_i = \ln \gamma + \beta' x_i.$$

Or, la dernière égalité peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & x'_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x'_{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln \gamma \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \gamma_0 + \beta'_0 x_1 \\ \vdots \\ \ln \gamma_0 + \beta'_0 x_{p+1} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \ln \gamma \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x'_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x'_{p+1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & x'_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x'_{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln \gamma_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{p+1}$ sont linéairement indépendants. On en déduit que $\gamma_0 = \gamma$ et $\beta_0 = \beta$.

$d_2(\theta)$ admet un minimum en $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$. On sait que

$$d_2(\theta_0^{(1)}, \theta^{(2)}) = d_2(\theta_0) + \int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) \right)^2 dF_X(x),$$

donc, on en déduit que pour tout $\theta^{(2)} \in \Theta_2$, $d_2(\theta_0) \leq d_2(\theta_0^{(1)}, \theta^{(2)})$ car

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) \right)^2 dF_X(x) \geq 0.$$

Unicité de $\theta_0^{(2)}$. Pour prouver l'unicité on considère :

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(m_{\theta_0^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x, \theta_0^{(1)}) \right)^2 dF_X(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\frac{\gamma_0^2 T}{N \alpha_0} e^{\beta'_0 x} + \left(\frac{\gamma_0 T}{N} e^{\beta'_0 x} \right)^2 + \tau_0^2 \frac{T}{N} - \frac{\gamma_0^2 T}{N \alpha} e^{\beta'_0 x} - \left(\frac{\gamma_0 T}{N} e^{\beta'_0 x} \right)^2 - \tau^2 \frac{T}{N} \right)^2 dF_X(x) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\frac{\gamma_0^2 T}{N \alpha_0} e^{\beta'_0 x} + \tau_0^2 \frac{T}{N} - \frac{\gamma_0^2 T}{N \alpha} e^{\beta'_0 x} - \tau^2 \frac{T}{N} \right)^2 dF_X(x) = 0.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (A_3) , il existe au moins $x_1, \dots, x_{p+1} \in \mathcal{A}$ tel que $f_X(x_i) > 0$ et $\mu_p(\overline{\mathcal{A}}) = 0$, ce qui implique que pour tout $i \in \{1, \dots, p+1\}$

$$\left(\frac{\gamma_0^2}{\alpha_0} - \frac{\gamma_0^2}{\alpha} \right) e^{\beta'_0 x_i} = \tau^2 - \tau_0^2. \quad (3.6)$$

Dans ce cas, si $\alpha \neq \alpha_0$ alors $e^{\beta'_0 x_i} = e^{\beta'_0 x_j}$ pour tout i et j . Il suit que $e^{\beta'_0(x_i - x_j)} = 1$ pour tout $i \neq j$. Ce qui implique que $\beta_0 \perp \text{Vect}\{x_i - x_j; 1 \leq i < j \leq p+1\}$. D'où $\beta_0 = 0$ ce qui est absurde puisque $\beta_0 \neq 0$ (hypothèse (A_1)). On en déduit finalement que $\frac{\gamma_0^2}{\alpha_0} - \frac{\gamma_0^2}{\alpha} = 0$ impliquant que $\alpha = \alpha_0$ et $\tau^2 = \tau_0^2$. Enfin, on conclut que $d_2(\theta)$ admet un minimum unique en $\theta_0 \in \mathring{\Theta}$. Dans la suite on prouve l'hypothèse 3 du lemme 3.1.

Convergence presque sûre de $\sup_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} |d_1^{(n)}(\theta^{(1)}) - d_1(\theta^{(1)})|$ vers zéro. Tenant compte du fait que les covariables X_i sont bornées par rapport à i , on doit vérifier si

$$\begin{aligned}
 &\sup_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} \left| d_1^{(n)}(\theta^{(1)}) - d_1(\theta^{(1)}) \right| \\
 &= \sup_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(X_i) \right)^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. - \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_{\theta_0} \left(\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(X_i) \right)^2 \right] \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.
 \end{aligned}$$

Soit

$$\mathbb{G}_1 = \left\{ w \in \mathbb{R}^{p+N} \mapsto g_{\theta^{(1)}}^{(1)}(w); \theta^{(1)} \in \Theta_1 \subset \mathbb{R}^{p+1} \right\}$$

une collection de fonctions mesurables indexées par un compact Θ_1 telle que $g_{\theta^{(1)}}^{(1)}$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 g_{\theta^{(1)}}^{(1)}(W_i) &= g_{\theta^{(1)}}^{(1)}(X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)}, D_{X_i}^{(i)}(t_1), \dots, D_{X_i}^{(i)}(t_N)) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(X_i) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(D_{X_i}^{(i)}(t_j) - D_{X_i}^{(i)}(t_{j-1}) - \frac{\gamma T}{N} e^{\beta' X_i} \right)^2
 \end{aligned}$$

où $W_i = (X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)}, D_{X_i}^{(i)}(t_1), \dots, D_{X_i}^{(i)}(t_N)) = (W_i^{(1)}, \dots, W_i^{(p+N)})$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, sont des vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués dans \mathbb{R}^{p+N} .

Donc notre objectif revient à vérifier si

$$\sup_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_{\theta^{(1)}}^{(1)}(W_i) - \mathbb{E} \left[g_{\theta^{(1)}}^{(1)}(W_i) \right] \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

où

$$\mathbb{E} \left[g_{\theta^{(1)}}^{(1)}(W_i) \right] = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_{\theta_0} \left(\Delta D_x^{(i)}(t_j) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x) \right)^2 f_X(x) d\mu_p(x).$$

On note que cette convergence a lieu lorsque \mathbb{G}_1 est Glivenko-Cantelli (voir l'annexe A). Toutefois, on a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \left| g_{\theta^{(1)}}^{(1)}(W_i) \right| &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j) - \frac{\gamma T}{N} e^{\beta' X_i} \right)^2 \\ &= \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \left(\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j) \right) \frac{\gamma T}{N} e^{\beta' X_i} + \left(\frac{\gamma T}{N} e^{\beta' X_i} \right)^2 \right| \\ &\leq C_1(W_i) + C_2(W_i) \gamma e^{\beta' X_i} + C_3 \left(\gamma e^{\beta' X_i} \right)^2 \end{aligned}$$

où $C_1(W_i)$, $C_2(W_i)$ ne dépendent que des N dernières composantes de W_i et $C_3 = T/N$. De plus, on a que pour tout $w \in \mathbb{R}^{p+N}$, $\theta^{(1)} \mapsto g_{\theta^{(1)}}^{(1)}(w)$ est une fonction continue. Donc pour montrer que \mathbb{G}_1 est Glivenko-Cantelli, il suffit de prouver, en utilisant l'exemple 19.8 dans [72], que \mathbb{G}_1 a une fonction enveloppe G_1 intégrable i.e. vérifiant :

$$\begin{aligned} - \sup_{\theta^{(1)} \in \Theta_1} |g_{\theta^{(1)}}(w)| &\leq G_1(w) \text{ pour tout } w \in \mathbb{R}^{p+N}, \\ - \mathbb{E} [G_1(W_1)] &< \infty. \end{aligned}$$

Dans ce cas, pour $\gamma \leq \Upsilon$, on a :

$$\forall w \in \mathbb{R}^{p+N}, G_1(w) = C_1(w) + C_2(w) \Upsilon e^{\|\beta\| \times \|x\|} + C_3 \Upsilon^2 e^{2\|\beta\| \times \|x\|}$$

où x est le sous-vecteur constitué des p premières composantes de w . Comme, par (A_1) , $\theta^{(1)} = (\gamma, \beta) \in \Theta_1$ compact et comme, par (A_2) , $\|X_i\| \leq \kappa$ presque sûrement, il vient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} [G_1(W_1)] \\ &\leq \left(\frac{\gamma^2 T}{N \alpha} e^{\kappa \|\beta\|} + \left(\frac{\gamma T}{N} e^{\kappa \|\beta\|} \right)^2 + \tau^2 \frac{T}{N} \right) + \Upsilon \left(\frac{\gamma T}{N} e^{\kappa \|\beta\|} \right) e^{\kappa \|\beta\|} + C_3 \Upsilon^2 e^{2\kappa \|\beta\|} < \infty. \end{aligned}$$

Donc on déduit que \mathbb{G}_1 est Glivenko-Cantelli.

Convergence presque sûre de $\sup_{\theta \in \Theta} |d_2^{(n)}(\theta) - d_2(\theta)|$ vers zéro. Tout d'abord, pour tout $\theta = (\theta_0^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \Theta$, on a :

$$\sup_{\theta \in \Theta} |d_2^{(n)}(\theta) - d_2(\theta)|$$

$$= \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left((\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j))^2 - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(X_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_{\theta_0} \left((\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j))^2 - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(X_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \right] \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Soit $\mathbb{G}_2 = \left\{ w \in \mathbb{R}^{p+N} \mapsto g_{\theta}^{(2)}(w); \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^{p+3} \right\}$ une collection de fonctions mesurables indexées par un compact Θ telle que $g_{\theta}^{(2)}$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} g_{\theta}^{(2)}(W_i) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left((\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j))^2 - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(X_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left((\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j))^2 - \frac{\gamma^2 T}{N\alpha} e^{\beta' X_i} - \left(\frac{\gamma T}{N} e^{\beta' X_i} \right)^2 - \tau^2 \frac{T}{N} \right)^2 \end{aligned}$$

Alors, notre objectif revient à vérifier si

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_{\theta}^{(2)}(W_i) - \mathbb{E} \left[g_{\theta}^{(2)}(W_i) \right] \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

où

$$\mathbb{E} \left[g_{\theta}^{(2)}(W_i) \right] = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_{\theta_0} \left((\Delta D_x^{(i)}(t_j))^2 - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x, \theta^{(1)}) \right)^2 f_X(x) d\mu_p(x).$$

Ensuite, on obtient que

$$\begin{aligned} |g_{\theta}^{(2)}(W_i)| &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left((\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j))^2 - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(X_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \\ &= \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j))^4 - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta D_{X_i}^{(i)}(t_j))^2 m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(X_i, \theta^{(1)}) + \left(m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(X_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \right| \\ &\leq \tilde{C}_1(W_i) + \tilde{C}_2(W_i) m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(X_i, \theta^{(1)}) + \tilde{C}_3 \left(m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(X_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \\ &= \tilde{C}_1(W_i) + \tilde{C}_2(W_i) \left(\frac{\gamma^2 T}{N\alpha} e^{\beta' X_i} + \left(\frac{\gamma T}{N} e^{\beta' X_i} \right)^2 + \tau^2 \frac{T}{N} \right) + \tilde{C}_3 \left(\frac{\gamma^2 T}{N\alpha} e^{\beta' X_i} + \left(\frac{\gamma T}{N} e^{\beta' X_i} \right)^2 + \tau^2 \frac{T}{N} \right)^2 \end{aligned}$$

où $\tilde{C}_1(W_i)$, $\tilde{C}_2(W_i)$ et \tilde{C}_3 sont trois constantes relativement à X_i et θ . De plus on a que pour tout $w \in \mathbb{R}^{p+N}$, $\theta \mapsto g_{\theta}^{(2)}(w)$ est une fonction continue. Alors pour montrer que \mathbb{G}_2 est Glivenko-Cantelli il suffit de prouver, en utilisant l'exemple 19.8 dans [72], que \mathbb{G}_2 a une fonction d'enveloppe G_2 intégrable. Dans ce cas, comme $\theta \in \Theta$ compact, il existe trois constantes, k_5 , k_6 et k_7 , tel que pour tout $w \in \mathbb{R}^{p+N}$,

$$\begin{aligned} G_2(w) &= \tilde{C}_1(w) + \tilde{C}_2(w) \left(k_5 e^{\|\beta\| \times \|x\|} + \left(k_6 e^{\|\beta\| \times \|x\|} \right)^2 + k_7 \right) \\ &\quad + \tilde{C}_3 \left(k_5 e^{\|\beta\| \times \|x\|} + \left(k_6 e^{\|\beta\| \times \|x\|} \right)^2 + k_7 \right)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[G_2(W_1)] \\
& \leq \frac{3\tau^4 T^2}{N^2} + \left(\frac{6\gamma^2 \tau^2 T^2}{N^2 \alpha} + \frac{6\gamma^4 T}{N \alpha^3} \right) e^{\kappa \|\beta\|} + \left(\frac{6\gamma^2 \tau^2 T^3}{N^3} + \frac{11\gamma^4 T^2}{N^2 \alpha^2} \right) e^{2\kappa \|\beta\|} + \frac{6\gamma^4 T^3}{N^3 \alpha} e^{3\kappa \|\beta\|} \\
& + \frac{\gamma^4 T^4}{N^4} e^{4\kappa \|\beta\|} + \left(\frac{\gamma^2 T}{N \alpha} e^{\kappa \|\beta\|} + \left(\frac{\gamma T}{N} e^{\kappa \|\beta\|} \right)^2 + \tau^2 \frac{T}{N} \right) \left(k_5 e^{\kappa \|\beta\|} + (k_6 e^{\kappa \|\beta\|})^2 + k_7 \right) \\
& + \tilde{C}_3 \left(k_5 e^{\kappa \|\beta\|} + (k_6 e^{\kappa \|\beta\|})^2 + k_7 \right)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Donc, \mathbb{G}_2 est Glivenko-Cantelli. Enfin, on obtient que

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} \theta_0.$$

■

Tout d'abord, rappelons que le paramètre β_0 doit être différent de zéro à cause de l'équation (3.6). En effet si $\beta_0 = 0$, les paramètres γ et β peuvent être identifiés par l'équation (3.5), en revanche l'équation (3.6) devient

$$\frac{\gamma_0^2}{\alpha_0} - \frac{\gamma_0^2}{\alpha} = \tau^2 - \tau_0^2, \quad (3.7)$$

dont la solution en (α, τ^2) n'est pas unique. En effet, pour tout $c \neq 1$, $\tau^2 = \tau_0^2 + c\gamma_0^2/\alpha_0$ et $\alpha = \alpha_0/(1-c)$ vérifient l'équation (3.7). Par conséquent, si $\beta_0 = 0$ on perd l'identifiabilité de α et de τ^2 .

Discutons maintenant l'hypothèse (A_3) du théorème 3.1 dans des cas de covariables discrètes et continues.

– Cas de covariables discrètes :

1. Soit X une variable aléatoire discrète de la loi Dirac en 1 (i.e. $X = 1$ avec probabilité 1). Notre objectif est de déterminer l'identifiabilité de $\beta \in \mathbb{R}$ et de $\gamma > 0$ donnés dans l'équation (3.5). La fonction de densité f_X est définie comme suit :

$$f_X(x) = 1_{\{x=1\}} \quad \mu_c \text{ - presque-sûrement,}$$

où μ_c est la mesure de comptage sur \mathbb{N} . Alors $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ vérifie que $\mu_c(\overline{\mathcal{A}}) = 0$. S'il existe x_1 et $x_2 \in \mathcal{A}$ tels que

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

et $f(x_1) > 0$, $f(x_2) > 0$, alors, on en déduit que $x_1 = x_2 = 1$ et $\dim V = 1$.

Donc, la troisième condition du théorème de 3.1 n'est pas vérifiée car \tilde{x}'_1 et \tilde{x}'_2 ne sont pas linéairement indépendants et on ne peut donc pas prouver l'unicité de β et de γ .

2. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X \sim \frac{1}{2}\mathcal{D}_1 + \frac{1}{2}\mathcal{D}_2$, où \mathcal{D}_x désigne la loi de Dirac en x . Ici la fonction de densité f_X est donnée comme suit :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}. \end{cases}$$

Ailleurs $f_X(x)$ peut être ce qu'on veut. Comme dans le premier exemple, la loi de X est dominée par la mesure de comptage μ_c et $\mathcal{A} = \mathbb{N}$. Dans un tel cas, l'existence de $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ tels que

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

engendrer \mathbb{R}^2 est possible pour $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ ce qui implique que la troisième condition du théorème 3.1 est vérifiée car \tilde{x}'_1 et \tilde{x}'_2 sont bien linéairement indépendants.

3. Soit X une variable aléatoire discrète de loi définie par :

$$\frac{1}{3}\mathcal{D}_{(1,0,0)} + \frac{1}{3}\mathcal{D}_{(0,1,0)} + \frac{1}{3}\mathcal{D}_{(0,0,1)}.$$

On suppose que $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)' \in \mathbb{R}^3$. Dans un tel cas, β et γ ne sont pas identifiables :

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ne peut engendrer \mathbb{R}^4 . On peut facilement observer la non-identifiabilité. En effet, il existe $\tilde{\beta} = \beta + c\mathbf{1}$ où $\mathbf{1} = (1, 1, 1)'$ et $\tilde{\gamma} = e^{-c}\gamma$ tel que

$$m_{\gamma, \beta}^{(1)}(x) = m_{\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}}^{(1)}(x) = \frac{\gamma T}{N} e^{\beta' x}.$$

Comme on a trois vecteurs qui pourraient être linéairement indépendants, on peut donc espérer estimer au plus trois paramètres et donc on doit au moins

fixer une des coordonnées de β . Par exemple, si $\beta_2 = 0$, alors V est égale à

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ce qui implique que la troisième condition du théorème 3.1 est satisfaite et on obtient l'identifiabilité de β et γ avec une des composantes de β fixée.

– Cas de covariables continues :

1. Soit X un vecteur aléatoire ayant f_X comme fonction de densité telle que

$$f_X(x_1, x_2) = 1_{\{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2\}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue μ_2 sur \mathbb{R}^2 . Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ et $\mu_2(\overline{\mathcal{A}}) = 0$. Il existe x_1, x_2 et $x_3 \in \mathcal{A}$ tels que $f(x_i) = 1$ et

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

engendre \mathbb{R}^3 avec $x_1 = (0, 0)'$, $x_2 = (0, 1)'$ et $x_3 = (1, 0)'$. D'où l'hypothèse (A_3) est satisfaite et on peut prouver l'identifiabilité de β et de γ .

2. Soit X un vecteur aléatoire tel que $X = (X_1, X_1)'$ où X_1 suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Comme dans l'exemple précédent, $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ et $\mu_2(\overline{\mathcal{A}}) = 0$ où μ_2 dans ce cas est la mesure de Lebesgue sur la première bissectrice $\Delta = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$. La fonction de densité f_X est donnée comme suit :

$$f_X(x_1, x_2) = 1_{\Delta}(x_1, x_2).$$

Ici la troisième condition du théorème 3.1 n'est pas satisfaite. En effet, pour x_1, x_2 et x_3 éléments de \mathbb{R} :

$$V = \{U_1, U_2, U_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

est de dimension 2 au plus car par exemple $V_2 = U_2 - U_1$ et $V_3 = U_3 - U_1$ sont linéairement dépendants. Donc l'hypothèse (A_3) n'est pas vérifiée.

3.5.2 Normalité asymptotique

On démontre dans ce qui suit un résultat de normalité asymptotique pour l'estimateur $\hat{\theta}_n$. Remarquons d'abord que la matrice des dérivées partielles de $d_1^{(n)}$ par rapport à $\theta_0^{(1)}$ et de $d_2^{(n)}$ par rapport à $\theta_0^{(2)}$ peut être considérée comme une somme de vecteurs aléatoires indépendants :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1^{(n)}}{\partial \theta^{(1)}}(\theta_0^{(1)}) \\ \frac{\partial d_2^{(n)}}{\partial \theta^{(2)}}(\theta_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} -2TN^{-2} e^{\beta'_0 x_i} (\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x_i)) \\ -2TN^{-2} \gamma_0 x_i e^{\beta'_0 x_i} (\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta^{(1)}}^{(1)}(x_i)) \\ 2TN^{-2} \gamma_0^2 \alpha_0^{-2} e^{\beta'_0 x_i} \left((\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j))^2 - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right) \\ -2TN^{-2} \left((\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j))^2 - m_{\theta^{(2)}}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N V_{x_i, j}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$, on désigne par :

$$I_n^{(1)}(\theta) = \frac{\partial^2 d_1^{(n)}}{\partial \theta^{(1)} (\partial \theta^{(1)})'}(\theta^{(1)}), \quad I_n^{(2)}(\theta) = \frac{\partial^2 d_2^{(n)}}{\partial \theta^{(2)} (\partial \theta^{(2)})'}(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$$

et

$$I_n^{(3)}(\theta) = \frac{\partial^2 d_2^{(n)}}{\partial \theta^{(1)} (\partial \theta^{(2)})'}(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}),$$

trois matrices. On note pour $1 \leq k \leq 3$, $I_\infty^{(k)}(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(k)}(\theta)$ (sous réserve de leur existence)

et par

$$I_\infty(\theta_0) = \begin{pmatrix} I_\infty^{(1)}(\theta_0) & 0 \\ I_\infty^{(3)}(\theta_0) & I_\infty^{(2)}(\theta_0) \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.2 Si $(A_1 - A_3)$ et les hypothèses suivantes sont satisfaites

(A₄) Pour tout $\theta \in \Theta$, $I_\infty(\theta)$ est inversible.

(A₅) Pour $\rho_1 \in \{0, 1, 2, 4\}$ et $\rho_2 \in \{1, \dots, 7\}$, il existe $\epsilon > 0$ et des fonctions déterministes E_{ρ_1, ρ_2} tels que :

$$\sup_{\beta \in B(\beta_0, \epsilon)} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{\otimes \rho_1} e^{\rho_2 \beta' x_i} - E_{\rho_1, \rho_2}(\beta) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

où

$$x_i^{\otimes \rho_1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_1 = 0, \\ x_i & \text{si } \rho_1 = 1, \\ x_i x_i' & \text{si } \rho_1 = 2, \\ x_i x_i' x_i^{\otimes 2} & \text{si } \rho_1 = 4. \end{cases}$$

Alors on a :

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \mathcal{M}),$$

où la matrice de variance-covariance \mathcal{M} est égale à :

$$\mathcal{M} = \left(I_\infty^{-1}(\theta_0) \right)' \Sigma^{(\infty)} I_\infty^{-1}(\theta_0)$$

telle que $\Sigma^{(\infty)}$ est la limite de $\Sigma^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \text{Cov}(V_{X_{i,j}})$ lorsque n tend vers l'infini et la matrice $I_\infty(\theta_0)$ est donnée par :

$$\left(\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} \frac{2T^2}{N^2} E_{0,2}(\beta_0) & \frac{2T^2 \gamma_0}{N^2} E_{1,2}(\beta_0) \\ \frac{2T^2 \gamma_0}{N^2} E_{1,2}(\beta_0) & \frac{2T^2 \gamma_0^2}{N^2} E_{2,2}(\beta_0) \end{array} \right)_{((p+1) \times (p+1))} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(2 \times 2)} \\ \left(\begin{array}{cc} -\frac{4\gamma_0^3 T^2}{N^2 \alpha_0^3} E_{0,2}(\beta_0) - \frac{4\gamma_0^3 T^3}{N^3 \alpha_0^2} E_{0,3}(\beta_0) & -\frac{2T^2 \gamma_0^4}{N^2 \alpha_0^3} E_{1,2}(\beta_0) - \frac{4T^3 \gamma_0^4}{N^3 \alpha_0^2} E_{1,3}(\beta_0) \\ \frac{4T^2 \gamma_0}{N^2 \alpha_0} E_{0,1}(\beta_0) + \frac{4T^3 \gamma_0}{N^3} E_{0,2}(\beta_0) & \frac{2T^2 \gamma_0^2}{N^2 \alpha_0} E_{1,1}(\beta_0) + \frac{4T^3 \gamma_0^2}{N^3} E_{1,2}(\beta_0) \end{array} \right)_{(2 \times (p+1))} & \begin{pmatrix} \frac{2\gamma_0^4 T^2}{N^2 \alpha_0^4} E_{0,2} & -\frac{2T^2 \gamma_0^2}{N^2 \alpha_0^2} E_{0,1}(\beta_0) \\ -\frac{2T^2 \gamma_0^2}{N^2 \alpha_0^2} E_{0,1}(\beta_0) & 0 \end{pmatrix}_{(2 \times 2)} \end{array} \right)$$

Preuve. En appliquant la formule de Taylor au premier ordre à $\partial d_1^{(n)} / \partial \theta^{(1)}$ en $\hat{\theta}_n^{(1)}$ on obtient :

$$\frac{\partial d_1^{(n)}}{\partial \theta^{(1)}} \left(\hat{\theta}_n^{(1)} \right) = 0_{\mathbb{R}^{p+1}} = \frac{\partial d_1^{(n)}}{\partial \theta^{(1)}} \left(\theta_0^{(1)} \right) + \frac{\partial^2 d_1^{(n)}}{\partial \theta^{(1)} (\partial \theta^{(1)})'} \left(\bar{\theta}_n^{(1)} \right) \left(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)} \right),$$

où $\bar{\theta}_n^{(1)}$ appartient au segment d'extrémités $\hat{\theta}_n^{(1)}$ et $\theta_0^{(1)}$. De même, en appliquant la formule de Taylor à $\partial d_2^{(n)} / \partial \theta^{(2)}$ en $\hat{\theta}_n$, le vecteur des dérivées partielles de $d_2^{(n)}$ par rapport à $\theta^{(2)}$ en $\hat{\theta}_n$ est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_2^{(n)}}{\partial \theta^{(2)}} \left(\hat{\theta}_n \right) &= 0_{\mathbb{R}^2} \\ &= \frac{\partial d_2^{(n)}}{\partial \theta^{(2)}} \left(\theta_0 \right) + \frac{\partial^2 d_2^{(n)}}{\partial \theta^{(2)} (\partial \theta^{(2)})'} \left(\tilde{\theta}_n \right) \left(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta_0^{(2)} \right) + \frac{\partial^2 d_2^{(n)}}{\partial \theta^{(1)} (\partial \theta^{(2)})'} \left(\tilde{\theta}_n \right) \left(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)} \right), \end{aligned}$$

où $\tilde{\theta}_n$ appartient au segment d'extrémités $\hat{\theta}_n$ et θ_0 . Donc, on obtient que

$$\sqrt{n} \left(\begin{array}{cc} I_n^{(1)} \left(\bar{\theta}_n^{(1)} \right) & 0 \\ I_n^{(3)} \left(\tilde{\theta}_n \right) & I_n^{(2)} \left(\tilde{\theta}_n \right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)} \\ \hat{\theta}_n^{(2)} - \theta_0^{(2)} \end{array} \right) = -\sqrt{n} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial d_1^{(n)}}{\partial \theta^{(1)}} \left(\theta_0^{(1)} \right) \\ \frac{\partial d_2^{(n)}}{\partial \theta^{(2)}} \left(\theta_0 \right) \end{array} \right).$$

Ensuite, en utilisant le théorème de Lindeberg-Feller, nous allons montrer le résultat suivant :

$$\sqrt{n} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial d_1^{(n)}}{\partial \theta^{(1)}} \left(\theta_0^{(1)} \right) \\ \frac{\partial d_2^{(n)}}{\partial \theta^{(2)}} \left(\theta_0 \right) \end{array} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma^{(\infty)}),$$

où $\Sigma^{(\infty)}$ est la matrice de variance-covariance de $V_{X,1}$.

Pour prouver cette normalité asymptotique, on doit vérifier les deux conditions du théorème de Lindeberg-Feller [72]. On commence par vérifier la première condition de ce théorème :

$$\forall \epsilon > 0, \frac{n}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left((V_{x_i,j}^{(1)})^2 + \|V_{x_i,j}^{(2)}\|_2^2 + (V_{x_i,j}^{(3)})^2 + (V_{x_i,j}^{(4)})^2 \right) \mathbb{1}_{\left\{ \sqrt{(V_{x_i,j}^{(1)})^2 + \|V_{x_i,j}^{(2)}\|_2^2 + (V_{x_i,j}^{(3)})^2 + (V_{x_i,j}^{(4)})^2} > \epsilon \sqrt{n} \right\}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} & \left(V_{x_i,j}^{(1)} \right)^2 + \|V_{x_i,j}^{(2)}\|_2^2 + \left(V_{x_i,j}^{(3)} \right)^2 + \left(V_{x_i,j}^{(4)} \right)^2 \\ &= \frac{4T^2}{N^4} \left(1 + \gamma_0^2 \|x_i\|_2^2 \right) e^{2\beta'_0 x_i} \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right)^2 \\ & \quad + \frac{4T^2}{N^4} \left(1 + \frac{\gamma_0^4}{\alpha_0^4} e^{2\beta'_0 x_i} \right) \left(\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right)^2, \end{aligned}$$

alors il s'ensuit que pour tout $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{n}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left((V_{x_i,j}^{(1)})^2 + \|V_{x_i,j}^{(2)}\|_2^2 + (V_{x_i,j}^{(3)})^2 + (V_{x_i,j}^{(4)})^2 \right) \mathbb{1}_{\left\{ \sqrt{(V_{x_i,j}^{(1)})^2 + \|V_{x_i,j}^{(2)}\|_2^2 + (V_{x_i,j}^{(3)})^2 + (V_{x_i,j}^{(4)})^2} > \epsilon \sqrt{n} \right\}} \right] \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left[c_1 \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right)^2 + c_2 \left(\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \right] \right. \\ & \quad \times \mathbb{1}_{\left\{ \left| \Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right| > \epsilon \sqrt{\frac{n}{2c_1}} \right\}} \left. \right] \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left[c_1 \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right)^2 + c_2 \left(\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \right] \right. \\ & \quad \times \mathbb{1}_{\left\{ \left| \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right| > \epsilon \sqrt{\frac{n}{2c_2}} \right\}} \left. \right] \\ & = B_1^{(n)} + B_2^{(n)} \end{aligned}$$

où, en utilisant l'hypothèse (A_2) , il existe deux constantes $C_{0,2}(\beta_0)$ et $C_{2,2}(\beta_0)$ tel que $e^{2\beta'_0 x_i} \leq C_{0,2}(\beta_0)$ et $x_i^{\otimes 2} e^{2\beta'_0 x_i} \leq C_{2,2}(\beta_0)$, alors c_1 et c_2 sont égales à :

$$c_1 = \frac{4T^2}{N^4} \left(C_{0,2}(\beta_0) + \gamma_0^2 C_{2,2}(\beta_0) \right) \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{4T^2}{N^4} \left(1 + \frac{\gamma_0^4}{\alpha_0^4} C_{0,2}(\beta_0) \right).$$

En utilisant le fait que la condition de Lyapunov implique la condition de Lindeberg-Feller, on montre dans la suite que $B_1^{(n)} + B_2^{(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Rappelons tout d'abord qu'on a montré, dans la preuve du lemme 2.2 au chapitre 2, que $\mathbb{E} \left[\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^q \right] = \text{Pol}_q(\Delta t_j)$. Ici le processus $D_{x_i}^{(i)}$ est observé à des instants réguliers.

Alors,

$$\mathbb{E}_\theta \left[(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j))^q \right] = \text{Pol}_q \left(\frac{T}{N} e^{\beta' x_i} \right).$$

Il suit que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j))^q \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \text{Pol}_q \left(\frac{T}{N} e^{\beta' x_i} \right) \quad (3.8)$$

converge, en utilisant l'hypothèse (A_5) , vers une constante indépendante de i . Ensuite, pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned} B_1^{(n)} &\leq \frac{c_1 \sqrt{2c_1}}{\epsilon n \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left| \Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right|^3 \right] \\ &\quad + \frac{c_2 \sqrt{2c_1}}{\epsilon n \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left(\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \left| \Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right| \right] \\ &\leq \frac{c_1 \sqrt{2c_1}}{\epsilon n \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right)^2 \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) + m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right) \right] \\ &\quad + \frac{c_2 \sqrt{2c_1}}{\epsilon n \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left(\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) + m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right) \right] \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En effet, en utilisant (A_5) et l'égalité 3.8, il suit que :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right)^2 \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) + m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right) \right]$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left(\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) + m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right) \right]$$

convergent vers une constante indépendante de i . Donc, on obtient que $B_1^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. De même, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} B_2^{(n)} &\leq \frac{c_1 \sqrt{2c_2}}{\epsilon n \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left| \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right| \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{c_2 \sqrt{2c_2}}{\epsilon n \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left| \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right|^3 \right] \\ &\leq \frac{c_1 \sqrt{2c_2}}{\epsilon n \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left(\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 + m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right) \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{c_2 \sqrt{2c_2}}{\epsilon n \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left(\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 + m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right] \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En effet, en utilisant (A_5) et l'égalité 3.8, il suit que :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left(\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 + m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right) \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) - m_{\theta_1}^{(1)}(x_i) \right)^2 \right]$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \mathbb{E}_\theta \left[\left(\left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 - m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right)^2 \left(\Delta D_{x_i}^{(i)}(t_j) \right)^2 + m_{\theta_2}^{(2)}(x_i, \theta^{(1)}) \right]$$

convergent vers une constante indépendante de i . Donc, on déduit que $B_2^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Ensuite, on vérifie la deuxième condition du théorème de Lindeberg-Feller. En utilisant l'hypothèse (A_5) , on constate que

$$\Sigma^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \text{Cov}(V_{x_i, j}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Sigma^{(\infty)}$$

tel que $\sigma_{uv}^{(\infty)}$, pour $1 \leq u \leq v \leq 4$, sont les termes de la matrice de variance-covariance $\Sigma^{(\infty)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(\infty)} &= \frac{4T^3 \gamma_0^2}{N^4 \alpha_0} E_{0,3}(\beta_0) + \frac{4T^3 \tau_0^2}{N^4} E_{0,2}(\beta_0), \\ \sigma_{12}^{(\infty)} &= \frac{4T^3 \gamma_0^3}{N^4 \alpha_0} E_{1,3}(\beta_0) + \frac{4T^3 \gamma_0 \tau_0^2}{N^4} E_{1,2}(\beta_0), \\ \sigma_{13}^{(\infty)} &= \left(\frac{8T^3 \gamma_0^7}{N^4 \alpha_0^6} + \frac{8T^4 \gamma_0^5 \tau_0^2}{N^5 \alpha_0^4} \right) E_{0,3}(\beta_0) + \frac{8T^4 \gamma_0^7}{N^5 \alpha_0^5} E_{0,4}(\beta_0) \\ \sigma_{14}^{(\infty)} &= \left(\frac{8T^3 \gamma_0^3}{N^4 \alpha_0^2} + \frac{8T^4 \gamma_0 \tau_0^2}{N^5} \right) E_{0,2}(\beta_0) + \frac{8T^4 \gamma_0^3}{N^5 \alpha_0} E_{0,3}(\beta_0), \\ \sigma_{22}^{(\infty)} &= \frac{4T^3 \gamma_0^4}{N^4 \alpha_0} E_{2,3}(\beta_0) + \frac{4T^3 \gamma_0^2 \tau_0^2}{N^4} E_{2,2}(\beta_0), \\ \sigma_{23}^{(\infty)} &= \left(-\frac{8T^3 \gamma_0^6}{N^4 \alpha_0^4} - \frac{8T^4 \gamma_0^4 \tau_0^2}{N^5 \alpha_0^2} \right) E_{1,3}(\beta_0) - \frac{8T^4 \gamma_0^6}{N^5 \alpha_0^3} E_{1,4}(\beta_0), \\ \sigma_{24}^{(\infty)} &= \left(\frac{8T^3 \gamma_0^4}{N^4 \alpha_0^2} + \frac{8T^4 \gamma_0^2 \tau_0^2}{N^5} \right) E_{1,2}(\beta_0) + \frac{8T^4 \gamma_0^4}{N^5 \alpha_0} E_{1,3}(\beta_0), \\ \sigma_{33}^{(\infty)} &= \frac{8T^4 \gamma_0^4 \tau_0^4}{N^5 \alpha_0^4} E_{0,2}(\beta_0) + \left(\frac{16T^4 \gamma_0^6 \tau_0^2}{N^5 \alpha_0^5} + \frac{24T^3 \gamma_0^8}{N^4 \alpha_0^7} \right) E_{0,3}(\beta_0) + \left(\frac{16T^5 \gamma_0^6 \tau_0^2}{N^6 \alpha_0^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{40T^4 \gamma_0^8}{N^5 \alpha_0^6} \right) E_{0,4}(\beta_0) + \frac{16T^5 \gamma_0^8}{N^6 \alpha_0^5} E_{0,5}(\beta_0), \\ \sigma_{34}^{(\infty)} &= -\frac{8T^4 \gamma_0^2 \tau_0^4}{N^5 \alpha_0^2} E_{0,1}(\beta_0) + \left(-\frac{16T^4 \gamma_0^4 \tau_0^2}{N^5 \alpha_0^3} - \frac{24T^3 \gamma_0^6}{N^4 \alpha_0^5} \right) E_{0,2}(\beta_0) + \left(-\frac{16T^5 \gamma_0^4 \tau_0^2}{N^6 \alpha_0^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{40T^4 \gamma_0^6}{N^5 \alpha_0^4} \right) E_{0,3}(\beta_0) - \frac{16T^5 \gamma_0^6}{N^6 \alpha_0^3} E_{0,4}(\beta_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{44}^{(\infty)} &= \frac{8\tau_0^4 T^4}{N^5} + \left(\frac{24T^3 \gamma_0^4}{N^4 \alpha_0^3} + \frac{16T^4 \gamma_0^2 \tau_0^2}{N^5 \alpha_0} \right) E_{0,1}(\beta_0) + \left(\frac{16T^5 \gamma_0^2 \tau_0^2}{N^6} + \frac{40T^4 \gamma_0^4}{N^5 \alpha_0^2} \right) E_{0,2}(\beta_0) \\ &+ \frac{16T^5 \gamma_0^4}{N^6 \alpha_0} E_{0,3}(\beta_0). \end{aligned}$$

Enfin, rappelons que :

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)} \\ \hat{\theta}_n^{(2)} - \theta_0^{(2)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_n^{(1)}(\bar{\theta}_n^{(1)}) & 0 \\ I_n^{(3)}(\tilde{\theta}_n) & I_n^{(2)}(\tilde{\theta}_n) \end{pmatrix}^{-1} \sqrt{n} \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1^{(n)}(\theta_0^{(1)})}{\partial \theta^{(1)}} \\ \frac{\partial d_2^{(n)}(\theta_0)}{\partial \theta^{(2)}} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Par le théorème 3.1 on a $\bar{\theta}_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} \theta_0^{(1)}$ et $\tilde{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Pr} \theta_0$. Alors, en utilisant l'hypothèse (A_5), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} I_n^{(1)}(\bar{\theta}_n^{(1)}) & 0 \\ I_n^{(3)}(\tilde{\theta}_n) & I_n^{(2)}(\tilde{\theta}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_\infty^{(1)}(\theta_0) & 0 \\ I_\infty^{(3)}(\theta_0) & I_\infty^{(2)}(\theta_0) \end{pmatrix} = I_\infty(\theta_0).$$

Alors, en utilisant l'égalité 3.9, le lemme de Slutsky [72] et l'hypothèse (A_4), on obtient que

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)} \\ \hat{\theta}_n^{(2)} - \theta_0^{(2)} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \mathcal{M}),$$

où $\mathcal{M} = (I_\infty^{-1}(\theta_0))' \Sigma^{(\infty)} I_\infty^{-1}(\theta_0)$ telle que les termes de la matrice $\Sigma^{(\infty)}$ sont donnés ci-dessus et la matrice $I_\infty(\theta_0)$ est égale à :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2T^2}{N^2} E_{0,2}(\beta_0) & \frac{2T^2 \gamma_0}{N^2} E_{1,2}(\beta_0) \\ \frac{2T^2 \gamma_0}{N^2} E_{1,2}(\beta_0) & \frac{2T^2 \gamma_0^2}{N^2} E_{2,2}(\beta_0) \end{pmatrix}_{((p+1) \times (p+1))} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(2 \times 2)} \\ \begin{pmatrix} -\frac{4\gamma_0^3 T^2}{N^2 \alpha_0^3} E_{0,2}(\beta_0) - \frac{4\gamma_0^3 T^3}{N^3 \alpha_0^2} E_{0,3}(\beta_0) & -\frac{2T^2 \gamma_0^4}{N^2 \alpha_0^3} E_{1,2}(\beta_0) - \frac{4T^3 \gamma_0^4}{N^3 \alpha_0^2} E_{1,3}(\beta_0) \\ \frac{4T^2 \gamma_0}{N^2 \alpha_0} E_{0,1}(\beta_0) + \frac{4T^3 \gamma_0}{N^3} E_{0,2}(\beta_0) & \frac{2T^2 \gamma_0^2}{N^2 \alpha_0} E_{1,1}(\beta_0) + \frac{4T^3 \gamma_0^2}{N^3} E_{1,2}(\beta_0) \end{pmatrix}_{(2 \times (p+1))} & \begin{pmatrix} \frac{2\gamma_0^4 T^2}{N^2 \alpha_0^4} E_{0,2} & -\frac{2T^2 \gamma_0^2}{N^2 \alpha_0^2} E_{0,1}(\beta_0) \\ -\frac{2T^2 \gamma_0^2}{N^2 \alpha_0^2} E_{0,1}(\beta_0) & 0 \end{pmatrix}_{(2 \times 2)} \end{pmatrix}.$$

■

Remarque 3.1 La matrice \mathcal{M} peut être estimée par la matrice

$$\widehat{\mathcal{M}} = \left(\widehat{I}_\infty^{-1} \right)' \widehat{\Sigma}^{(\infty)} \widehat{I}_\infty^{-1},$$

où les termes de \widehat{I}_∞ et $\widehat{\Sigma}^{(\infty)}$ sont calculés en estimant E_{ρ_1, ρ_2} par $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{\otimes \rho_1} e^{\rho_2 \hat{\beta}_n' x_i}$ et $\theta_0' = (\gamma_0, \beta_0', \alpha_0, \tau_0^2)$ par $\hat{\theta}_n' = (\hat{\gamma}_n, \hat{\beta}_n', \hat{\alpha}_n, \hat{\tau}_n^2)$. Une autre solution pour $\Sigma^{(\infty)}$ consiste à l'estimer par la matrice de variance-covariance empirique des vecteurs $V_{x_i, j}$ (où θ est remplacé par $\hat{\theta}_n$).

Remarque 3.2 On a appliqué le théorème de Lindeberg-Feller conditionnellement aux co-

variables X_i . En fait ce théorème reste valable dans le cas non conditionnel aux X_i . En effet, si on suppose que X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, l'hypothèse (A_5) est vérifiée car, par la loi forte des grands nombres, on obtient que :

$$\sup_{\beta \in B(\beta_0, \epsilon)} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{\otimes \rho_1} e^{\rho_2 \beta' x_i} - E_{\rho_1, \rho_2}(\beta) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Alors, en utilisant les autres hypothèses citées dans le théorème 3.2, les deux conditions du théorème de Lindeberg-Feller sont satisfaites. Donc, on obtient que

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)} \\ \hat{\theta}_n^{(2)} - \theta_0^{(2)} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \mathcal{M}).$$

3.6 Illustration numérique

Biais et MSE

Ici, on illustre nos résultats théoriques à travers des simulations. Le modèle en question est le même que celui qu'on a utilisé dans la section 3.2 pour simuler quelques trajectoires (voir figure 3.1). On rappelle que les paramètres ont été donnés comme suit : $\xi = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = (-0, 5; 0; 0, 4)$ et $\tau^2 = 1$. On peut remarquer que l'une des coordonnées de β doit être fixée à une valeur donnée pour s'assurer l'identifiabilité (voir le troisième exemple sur les covariables discrètes). Un choix classique ici est de fixer $\beta_2 = 0$ car il correspond à un niveau moyen de stress. Le nombre d'observations pour chaque individu a été fixé à $N = 10$ instants entre 10 et $T = 100$. On a calculé le biais empirique et l'erreur quadratique moyenne empirique (MSE) pour 1000 répétitions. Le tableau 3.1 et le tableau 3.2 contiennent respectivement le biais empirique et l'erreur quadratique moyenne empirique pour différentes tailles n d'échantillons.

TAB. 3.1 – Biais empirique

n	20	50	100	200
γ	4,02e-4	-6,34e-4	8,55e-4	4,51e-4
β_1	-1,13e-3	-2,47e-4	1,12e-3	-6,78e-4
β_3	-3,56e-4	-5,61e-4	-7,44e-4	-2,69e-4
α	4,81e-1	3,08e-1	1,63e-1	8,66e-2
τ^2	-5,92e-2	3,31e-2	1,88e-3	-2,47e-3
ξ	2,41e-1	1,54e-1	8,11e-2	4,32e-2
CNC	4,2%	1,3%	1,1%	0,8%

Au cours des simulations on a signalé quelques cas où la convergence de la méthode d'estimation a échoué (voir CNC : Cas Non Convergent). Ensuite, on a calculé le biais

TAB. 3.2 – MSE empirique

n	20	50	100	200
γ	4,91e-3	2,17e-3	9,48e-4	5,91e-4
β_1	3,58e-3	1,55e-3	7,02e-4	4,38e-4
β_3	2,09e-3	8,55e-4	3,95e-4	2,44e-4
α	7,62e-1	6,42e-1	3,24e-1	1,76e-1
τ^2	4,35e-1	2,99e-1	1,71e-1	1,08e-1
ξ	1,94e-1	1,61e-1	8,06e-2	4,41e-2
CNC	10,2%	3,2%	2,2%	1,2%

empirique et l'erreur quadratique moyenne empirique en supprimant ces cas. Sur la base de résultats donnés dans les tableaux 1 et 2, on constate que le pourcentage de CNC diminue lorsque n devient grand. On note que l'estimation de γ est correcte pour toutes les valeurs de n . Cela signifie que la dégradation moyenne est bien estimée quelle que soit la taille de l'échantillon. C'est aussi le cas pour les paramètres β (covariables) et τ (contribution du mouvement brownien). Enfin, sur la base de nos études de simulation, l'estimation de biais et MSE deviennent meilleure quand N devient suffisamment grand.

Intervalles de confiance asymptotiques

Le tableau 3.3 résume un exemple de résultats obtenu avec 1000 simulations pour $n = 100$, $N = 10$, $T = 10$, $\xi = 1$, $\alpha = 2$, $\tau^2 = 1$, $\beta_1 = -0,5$, $\beta_2 = 0$ et $\beta_3 = 0,4$. On a estimé les paramètres et on a construit les intervalles de confiance à 95% pour chaque paramètre du modèle. On observe que les vraies valeurs se trouvent bien dans les intervalles de confiance

TAB. 3.3 – Estimation des paramètres et intervalles de confiance à 95%

Paramètres	γ	β_1	β_3	α	τ^2
Estimation	2,006	-0,494	0,395	2,034	0,991
Int. de conf.	[0; 4,36]	[-1,16; 0,17]	[0,03; 0,75]	[1,81; 2,26]	[0,91; 1,06]

asymptotiques.

Test de normalité

On a testé la normalité asymptotique des paramètres du notre modèle avec 1000 simulations et pour différentes valeurs de n . Les autres paramètres ont été fixés comme suit : $N = 10$, $T = 10$, $\xi = 1$, $\alpha = 2$, $\tau^2 = 1$, $\beta_1 = -0,5$, $\beta_2 = 0$ et $\beta_3 = 0,4$. Pour faire cela, on a recours au test de Shapiro-Wilk. Le tableau 3.4 résume la p -valeur obtenue pour chaque paramètre. On remarque que pour n petit la normalité asymptotique de α et ξ devient discutable. De plus la p -valeur de tous les paramètres du modèle augmente quand n augmente.

TAB. 3.4 – Test de Shapiro-Wilk

Paramètres	γ	β_1	β_3	α	τ^2	ξ
$n = 50, p\text{-valeur}$	0,23	0,33	0,13	0,02	0,45	0,01
$n = 100, p\text{-valeur}$	0,53	0,36	0,31	0,22	0,47	0,33
$n = 200, p\text{-valeur}$	0,95	0,65	0,35	0,38	0,85	0,53

3.7 Application à des données réelles

On reprend le même jeu de données cité dans la section 2.5.1 du chapitre 2. Dans cet exemple, quinze composants ont été testés à trois températures différentes : 65 °C, 85 °C et 105 °C (la température joue le rôle de covariable). Les pourcentages de dégradation ont été mesurés à 200, 500 et 1000 heures. Cependant notre méthode ne peut être appliquée que pour des individus observés à des instants réguliers. Alors, on néglige tous les observations qui correspondent à 200 heures. Ensuite, en utilisant la méthode des moments, on estime les paramètres du modèle sans intégrer les variables explicatives. Enfin, les paramètres du modèle avec covariable seront estimés en utilisant la méthodologie que nous avons proposé. Le tableau 3.5 résume les résultats obtenus.

TAB. 3.5 – Estimation ponctuelle pour les données NIST

Paramètres	sans covariable	avec covariable
α	1,715e-3	2,112e-3
ξ	5,422e-2	1,182e-1
τ^2	1,556e-1	2,978e-2
γ	3,163e-2	1,787e-2
β_1		-1,657
β_3		1,416

Comme on peut s'y attendre, on a obtenu $\hat{\beta}_1 < 0 < \hat{\beta}_3$. Cela est raisonnable, vu l'interprétation des niveaux des covariables. L'estimation de τ est moindre lorsque l'on intègre les covariables. En effet, la variabilité des observations est prise en compte dans les covariables, ce qui implique un rôle moins important du mouvement brownien. En reprenant ce même jeu de données, on a calculé les intervalles de confiance des paramètres du modèle. Vu le nombre d'individus ($n = 15$), les intervalles de confiance obtenus ne sont pas pertinents.

Chapitre 4

Application et perspectives

4.1 Application à des données réelles de grande taille

4.1.1 Contexte

L'entretien des voies est une tâche très coûteuse à réaliser pour l'entreprise qui les gère. Par conséquent, il est essentiel de mener des actions d'entretien de façon optimale, tout en prenant en compte plusieurs paramètres : niveaux garantis de sécurité et de confort, disponibilité de certains moyens logistiques, ...

L'état géométrique de la voie a une grande incidence sur le confort ressenti par les passagers, mais aussi, dans certains cas, vis-à-vis de la sécurité. Le gestionnaire de la voie doit veiller à assurer en toutes circonstances la sécurité et la régularité des circulations ainsi que, pour les lignes parcourues par des trains de voyageurs, le confort. Pour ce faire, il doit s'assurer que l'état d'usure des différents constituants de la voie reste dans une fourchette acceptable en regard des sollicitations auxquelles ils sont soumis. Les figures 4.1 et 4.2 montrent les deux types de défauts mesurés : le nivellement longitudinal (NL) et le nivellement transversal (NT) de la voie.

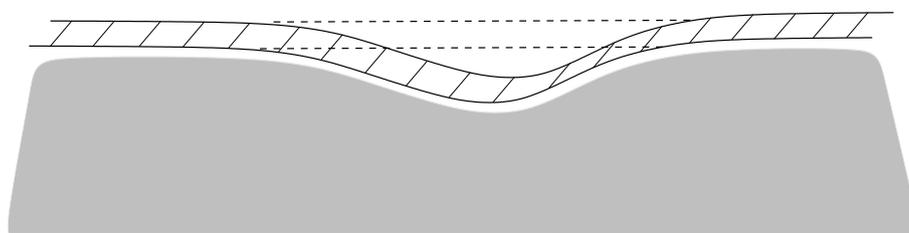


FIG. 4.1 – nivellement longitudinal

Une compagnie de transport effectue des inspections de l'ensemble des voies, programmées chaque année à grande échelle. L'intervalle entre deux inspections sur certaines voies est actuellement d'environ deux semaines. Ces inspections sont effectuées par un train

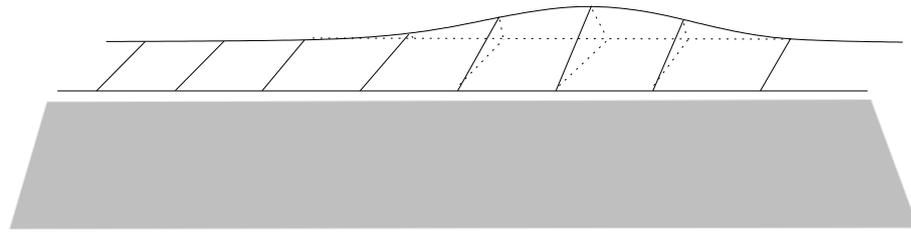


FIG. 4.2 – nivellement transversal

modifié. Les séries chronologiques obtenues sont transformées en indicateurs qui résument l'état de la voie sur chaque kilomètre. Ces nouveaux indicateurs sont considérés comme une synthèse des données recueillies par ce train modifié. Habituellement, l'indicateur NL est utilisé pour les problèmes d'entretien : les seuils qui définissent les niveaux de qualité géométrique de la voie sont fixés pour cet indicateur afin d'obtenir une classification de l'état de la voie et de fixer des dates pour les opérations de maintenance. Par exemple, une intervention devrait avoir lieu avant que l'indicateur NL dépasse 0,9 ou que l'indicateur NT dépasse 0,75.

4.1.2 Application

On dispose d'un jeu de données d'une compagnie de transport sur une de ses lignes. Il contient 711 individus (ici les points kilométriques, *pkm* en abrégé). Un point kilométrique est une grandeur utilisée pour localiser un point le long d'une voie de transport (ferrée, routière, navigable) qui est calculée en mesurant en mètres la portion de voie comprise entre le point localisé et un point zéro propre à chaque voie (servant d'origine du repère). Pour assurer l'homogénéité des données, on a utilisé un sous-échantillon de 362 individus correspondant aux *pkm* compris entre 17 000 et 380 000 c'est-à-dire entre 17 km et 380 km. Ces *pkm* ont été observés à plusieurs instants. Le nombre d'observations par *pkm* varie entre 100 et 142, avec une moyenne d'environ 123 observations. Pour des raisons de confidentialité, on ne peut pas tracer les données réelles. Cependant, la figure 4.3 montre une simulation de dégradation qui ressemble aux données réelles.

4.1.2.1 Étude sur les accroissements des indicateurs

Les données contiennent un certain nombre d'accroissements négatifs. Il y en a environ 28%. On propose donc d'utiliser le modèle de dégradation décrit au chapitre 2 (modèle sans covariable) pour les indicateurs NL et NT séparément. Les paramètres de ce modèle seront ajustés en utilisant la méthode des moments. Cependant la méthode décrite dans la section 2.3.1 du chapitre 2 nécessite que le troisième moment centré soit strictement positif. Si ce n'est pas le cas, la méthode ne peut être appliquée directement. Une solution pour pallier ce problème consiste à supprimer certaines données. Une façon d'y parvenir est d'enlever les

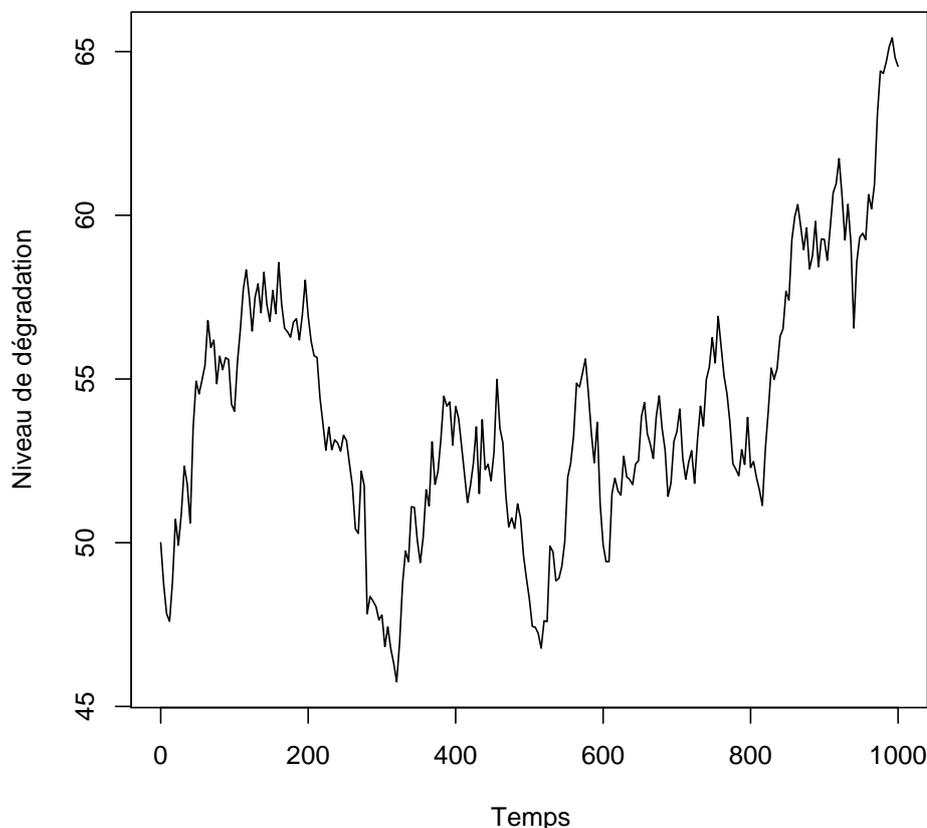


FIG. 4.3 – Exemple de simulation

plus grands accroissements négatifs jusqu'à ce que le troisième moment centré soit positif, afin de conserver un maximum d'observations. Ces accroissements négatifs de grande taille peuvent être vus non pas comme des erreurs de mesure, mais plutôt comme des opérations de maintenance d'envergure appliquées aux voies et qui ne sont pas modélisées dans les processus de dégradation étudiés dans cette thèse. En effet, pour tout $\delta > 0$, les accroissements de $\Delta D_t = D_{t+\delta} - D_t$ sont donnés comme suit :

$$\Delta D_t = \underbrace{Y_{t+\delta} - Y_t}_{>0} + \tau \underbrace{(B_{t+\delta} - B_t)}_{<0 \text{ ou } >0}.$$

D'où notre modèle ne peut pas avoir des accroissements négatifs de grande taille puisque

$$-3\tau\sqrt{\delta} < \tau (B_{t+\delta} - B_t) < 3\tau\sqrt{\delta},$$

avec une probabilité supérieure à 0.9973. Le tableau 4.1 présente la répartition des accroissements (négatifs ou positifs) de chaque indicateur. Pour appliquer la méthode des moments à notre modèle, on a retiré toutes les observations correspondants à des accroissements de NL (respectivement à des accroissements NT) inférieure à $-0,32$ (respectivement $-0,27$). On retire ainsi seulement 3,9% des observations (respectivement 2,6%) pour l'indicateur NL (respectivement pour l'indicateur NT).

TAB. 4.1 – Étude sur les accroissements des indicateurs

Indicateurs	NL	NT
Proportion des accroissements négatifs	27,9 %	28,2%
Proportion des accroissements positifs	72,1 %	71,8%
Proportion des accroissements négatifs retirés	3,9 %	2,6%
Proportion des accroissements utilisés	96,1 %	97,4%

4.1.2.2 Estimation des paramètres

Le tableau 4.2 résume les estimations obtenus avec le processus gamma perturbé (PGP). On rappelle également les valeurs des estimations obtenues par Mercier *et al.* [47] pour le processus TRGL (processus gamma bivarié construit par la réduction trivariée) en utilisant l'algorithme EM. D'après le tableau 4.2, on remarque, pour les deux indicateurs NL et NT,

TAB. 4.2 – Estimation des paramètres pour NL et NT

NL	ξ	α	τ^2	α/ξ	α/ξ^2
Processus gamma perturbé (PGP)	19,21	1,3e-02	2,1e-04	6,76e-04	3,52e-05
TRGL	19,19	3,5e-02	–	1,82e-03	9,51e-05
NT	ξ	α	τ^2	α/ξ	α/ξ^2
Processus gamma perturbé (PGP)	27,71	9,3e-03	1,1e-04	3,35e-04	1,21e-05
TRGL	29,72	3,8e-02	–	1,27e-03	4,31e-05

qu'on a presque les mêmes estimations de paramètres d'échelle ξ , alors que ce n'est pas le cas pour le paramètre de forme α . Pour l'indicateur NL, le rapport des paramètres de forme entre le PGP et le TRGL est égal à 0,37. Pour l'indicateur NT, le rapport est égal 0,24. Il est clair que pour les deux indicateurs l'espérance α/ξ du processus gamma perturbé est inférieure à celle du TRGL. Pour l'indicateur NL, le rapport des espérances est égal à 0,37 et pour l'indicateur NT à 0,26. La variance du processus gamma perturbé est égale à $2,45 \times 10^{-4}$ pour l'indicateur NL et à $1,22 \times 10^{-4}$ pour l'indicateur NT. Donc la variance du processus gamma perturbé est plus grande que celle issue de TRGL. Pour l'indicateur NL, le rapport

des variances entre les modèles PGP et TRGL est égal à 2,57 alors qu'elle est égal à 2,83 pour l'indicateur NT.

4.1.2.3 Intervalles de confiance

On a également construit, voir tableau 4.3, les intervalles de confiance à 95% pour chaque paramètre du processus gamma perturbé. Ils sont utiles pour tester soit H_0 : processus gamma *versus* H_1 : processus gamma perturbé, soit H'_0 : mouvement brownien avec tendance *versus* H'_1 : processus gamma perturbé.

TAB. 4.3 – Intervalles de confiance à 95%

NL	ξ	α	τ^2	α/ξ^2
Int.	[16,001 ; 22,418]	[0,011 ; 0,015]	[2,06e-04 ; 2,19e-04]	[2,84e-05 ; 4,15e-05]
NT	ξ	α	τ^2	α/ξ^2
Int.	[21,532 ; 33,878]	[0,007 ; 0,011]	[1,03e-04 ; 1,09e-04]	[9,08e-06 ; 1,51 e-05]

D'après le tableau 4.3, on en déduit que τ^2 et α/ξ^2 sont différents de 0 avec une p-valeur proche de 0 pour τ^2 et α/ξ^2 . On rejette donc les hypothèses nulles H_0 et H'_0 pour les deux tests mentionnés précédemment. On propose donc d'utiliser un processus gamma perturbé comme modèle de dégradation pour chacun des indicateurs.

4.1.2.4 Comparaisons entre temps d'atteinte

On a tracé la fonction de survie, voir figures 4.4 et 4.5, pour le premier temps d'atteinte du seuil critique (0,9 pour l'indicateur NL et 0,7 pour l'indicateur NT) par le processus gamma en utilisant les estimations obtenues par Mercier *et al.* [47]. On a aussi tracé la fonction de survie empirique (obtenu à partir de simulations) pour le premier temps d'atteinte du seuil critique par le processus gamma perturbé en utilisant les estimations présentées dans le tableau 4.2.

Il semble que les temps d'atteintes des niveaux critiques par le processus gamma sont stochastiquement plus petits que ceux par le processus gamma perturbé. Cela est tout à fait raisonnable puisque notre modèle tient compte des réparations mineures appliquées à la voie au cours du temps.

4.1.3 Propositions de modèles PGP accéléré

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier les possibilités de modélisation d'un indicateur relativement à l'autre. On considère le modèle de dégradation suivant :

$$\forall t \geq 0, D_i(t) = \left(D_i^{(1)}(t), D_i^{(2)}(t) \right),$$

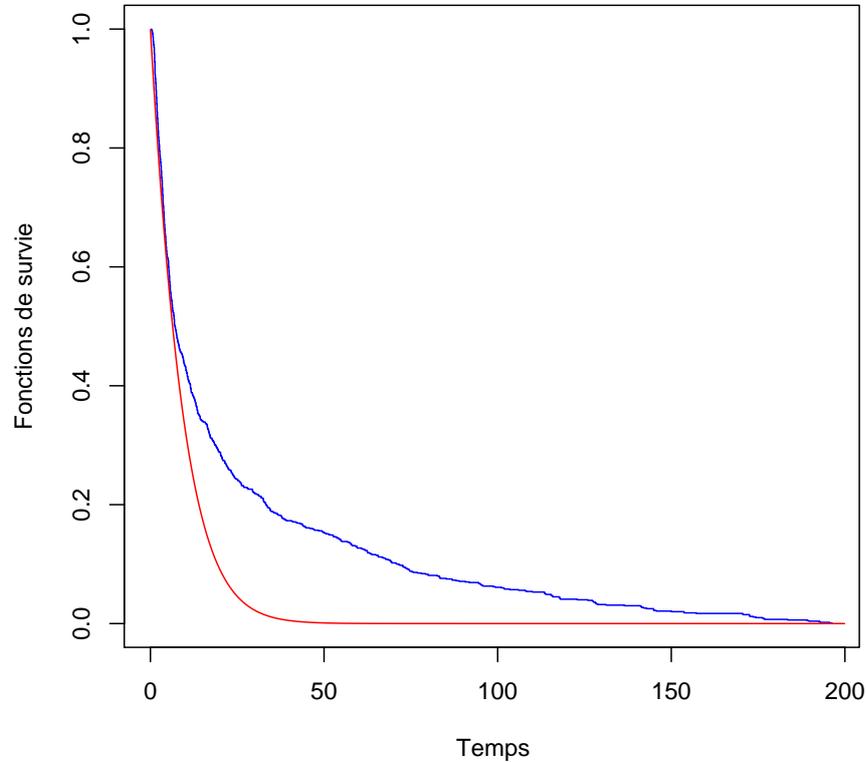


FIG. 4.4 – Comparaison entre fonctions de survie des temps d'atteinte pour l'indice NL

où $D_i^{(1)}$ modélise la dégradation NL et $D_i^{(2)}$ modélise celle de NT pour tout individu $i \in \{1, \dots, n\}$. Ici on ne modélise pas la dégradation conjointe des indicateurs NL et NT, mais on étudie l'indicateur NL en prenant NT ou une transformation de NT comme variable explicative. Voici quelques approches envisageables.

4.1.3.1 Modèle à temps accéléré par covariables

On note par $r_i(t)$ le facteur d'échelle à l'instant t :

$$t \mapsto r_i(t) = \int_0^t \phi(D_i^{(2)}(s)) ds,$$

où ϕ est une fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ : ϕ peut être, par exemple, la partie positive ou la valeur absolue de $D_i^{(2)}(s)$. Dans un tel cas la dégradation NL est définie par D_i de la manière suivante :

$$\forall t \geq 0, D_i(t) = Y_i(r_i(t)) + \tau B_i(t)$$

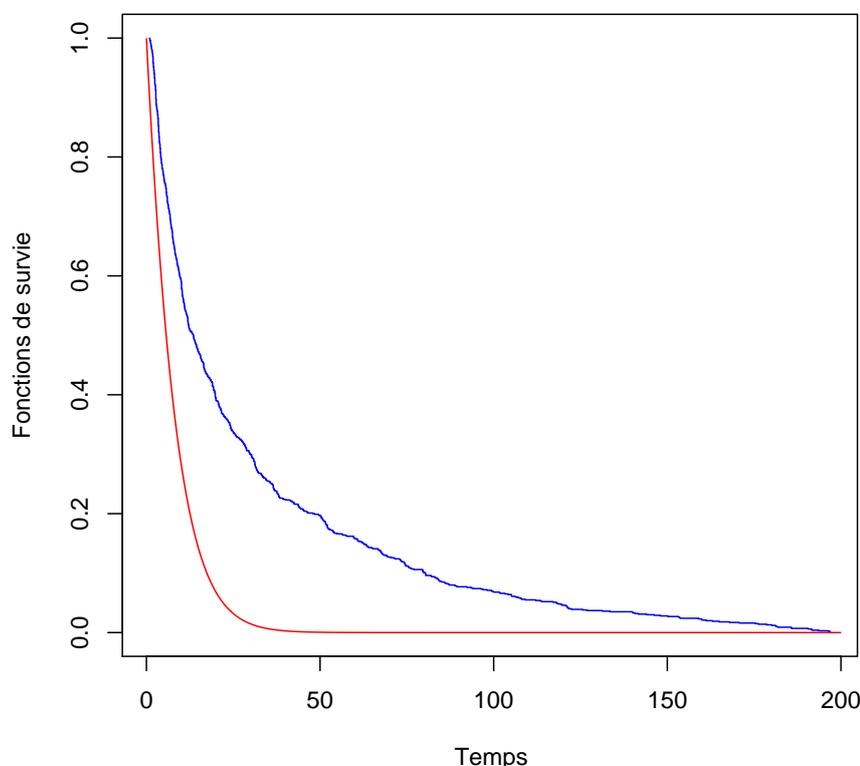


FIG. 4.5 – Comparaison entre fonctions de survie des temps d'atteinte pour l'indice NT

où Y_i est un processus gamma homogène de paramètres (α, ξ) , B_i est un mouvement brownien indépendant de Y_i et τ est un paramètre réel.

On a traité ce cas par le modèle décrit au chapitre 2 puisque r_i est bien connue. On a supposé que ϕ est l'application identité sur $D_i^{(2)}$. Dans un tel cas on fait l'approximation suivante. Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq N_i$,

$$r_i(t_{i,j}) - r_i(t_{i,j-1}) \approx (t_{i,j-1} - t_{i,j}) \frac{D_i^{(2)}(t_{i,j}) + D_i^{(2)}(t_{i,j-1})}{2}.$$

On a utilisé le même jeu de données présenté dans la section 4.1.2. Pour appliquer la méthode des moments à notre modèle, on a retiré toutes les observations correspondants à des accroissements de NL (respectivement à des accroissements de NT) inférieur à -0,29 (respectivement -0,22). On retire ainsi 4,6% des observations (respectivement 3,9%) pour l'indicateur NL (respectivement pour l'indicateur NT). On a également construit l'intervalle de confiance de chaque paramètre du modèle. Les tableaux 4.4 et 4.5 résument les résultats obtenus. On note par PGPA le PGP accéléré étudié dans cette section.

D'après le tableau 4.4, on remarque que, pour l'indicateur NL (respectivement pour

TAB. 4.4 – Estimation des paramètres pour NL et NT

NL	ξ	α	τ^2	α/ξ	α/ξ^2
Processus gamma perturbé (PGP)	19,21	1,3e-02	2,1e-04	6,76e-04	3,52e-05
PGPA	26,28	3,2e-02	3,2e-04	1,21e-03	4,63e-05
TRGL	19,19	3,5e-02	–	1,82e-03	9,51e-05
NT	ξ	α	τ^2	α/ξ	α/ξ^2
Processus gamma perturbé (PGP)	27,71	9,3e-03	1,1e-04	3,35e-04	1,21e-05
PGPA	34,73	2,4e-02	1,5e-04	6,82e-04	1,96e-05
TRGL	29,72	3,8e-02	–	1,27e-03	4,31e-05

l'indicateur NT), le paramètre d'échelle ξ de PGPA est plus grand que celui de PGP et de celui de TRGL. Le paramètre de forme α de PGPA est plus grand que celui de PGP. On remarque également que le paramètre τ^2 de PGPA est plus grand que celui de PGP ce qui implique un rôle plus important pour le mouvement brownien dans le modèle PGPA. Il est clair que pour l'indicateur NL (respectivement pour l'indicateur NT) la moyenne α/ξ de PGP est plus petite que celle de PGPA qui à son tour est plus petite que la moyenne de TRGL. Pour l'indicateur NL (respectivement pour l'indicateur NT), la variance de PGP est égale à $2,45 \times 10^{-4}$ (respectivement $1,22 \times 10^{-4}$) et la variance de PGPA est égale à $3,66 \times 10^{-4}$ (respectivement $1,69 \times 10^{-4}$). D'où la variance de PGP est inférieure à la variance de PGPA qui à son tour est plus grande que la variance de TRGL.

TAB. 4.5 – Intervalles de confiance à 95%

NL	ξ	α	τ^2	α/ξ^2
Int.	[20,499 ; 32,078]	[0,025 ; 0,038]	[3,15e-04 ; 3,38e-04]	[3,52e-05 ; 5,74e-05]
NT	ξ	α	τ^2	α/ξ^2
Int.	[27,281 ; 42,196]	[0,018 ; 0,028]	[1,47e-04 ; 1,57e-04]	[1,49e-05 ; 2,43e-05]

D'après le tableau 4.5 on en déduit que τ^2 et α/ξ^2 sont différents de 0 avec une p-valeur proche de 0 pour τ^2 et α/ξ^2 . On rejette donc les hypothèses nulles H_0 et H'_0 pour les deux tests mentionnés à la section 4.1.2.3.

4.1.3.2 Modèle avec effet de la variabilité de covariables

On note par $D_x(t)$ le niveau de dégradation atteint par le système au temps t soumis aux covariables dépendantes du temps $x(t)$. Ici $D_i^{(1)}$ est donné comme suit :

$$\forall t \geq 0, D_i^{(1)}(t) = D_{x_i}(t),$$

où x_i est une transformation réelle ou vectorielle de $D_i^{(2)}$ (x_i peut par exemple être la moyenne ou la variance des $D_i^{(2)}(t_{i,j})$ où $1 \leq j \leq N_i$) et D_x est le processus gamma perturbé du chapitre 3. Ce cas peut être étudié via la méthode proposée au chapitre 3.

4.1.3.3 Modèle avec covariables dépendantes du temps

Le modèle $D_{x_i}^{(1)}(t)$ est défini par :

$$\forall t \geq 0, D_{x_i}^{(1)}(t) = Y_{x_i}^{(i)}(t) + \tau B^{(i)}(t),$$

où $x_i = D_i^{(2)}$, $Y_{x_i}^{(i)}$ est un processus gamma de paramètres $(\xi, \alpha \int_0^t e^{\beta' x_i(s)} ds)$, $B^{(i)}$ est un mouvement brownien indépendant de $Y_{x_i}^{(i)}$ et τ est un paramètre réel. Toutefois, les covariables sont généralement observées aux mêmes instants que la mesure de dégradation et sont donc rarement observées en temps continu. De ce fait l'évaluation de $\int_{t_{i,j-1}}^{t_{i,j}} e^{\beta' x_i(s)} ds$ n'est pas accessible. En revanche si on suppose que les covariables entre deux observations successives sont constantes, alors on a pour $\Delta Y_{ij} = Y_i(t_{i,j}) - Y_i(t_{i,j-1})$ et $\Delta B_{ij} = B_i(t_{i,j}) - B_i(t_{i,j-1})$:

$$\Delta D_{ij} = D_i(t_{i,j}) - D_i(t_{i,j-1}) \sim \Delta Y_{ij} + \tau \Delta B_{ij},$$

où les $t_{i,j}$ correspondent aux instants d'observations, ΔY_{ij} est l'accroissement d'un processus gamma Y_i et suit une loi gamma de paramètre d'échelle ξ et de paramètre de forme $\alpha \exp(\beta X_{ij})(t_{i,j} - t_{i,j-1})$ où $X_{ij} = D_i^{(2)}[t_{i,j-1}, t_{i,j}]$ est une valeur associée à $D_i^{(2)}$ sur l'intervalle de temps $[t_{i,j-1}, t_{i,j}]$ et ΔB_{ij} est l'accroissement d'un mouvement brownien B_i indépendant de Y_i . Il est probable que ce problème puisse être traité par une approche similaire à celle développée au chapitre 3, mais les résultats asymptotiques ne seront pas applicables directement.

4.2 Conclusion générale et perspectives

4.2.1 Conclusion

On a modélisé le fonctionnement d'un système soumis à une dégradation continue. Ce système est considéré en panne dès que le niveau de dégradation dépasse un certain seuil critique fixé a priori. Pour modéliser la dégradation d'un système, la classe des processus de Lévy est souvent retenue, du fait des accroissements indépendants et stationnaires de ces processus. Cette classe englobe en particulier des processus largement étudiés dans la littérature dont le mouvement brownien avec tendance et le processus gamma.

Si on souhaite modéliser un phénomène de dégradation par un processus à trajectoires continues, le seul choix possible, dans la classe des processus de Lévy, est le mouvement

brownien avec tendance linéaire. Il possède néanmoins l'inconvénient d'avoir des trajectoires non monotones. Un tel comportement peut être expliqué par des phénomènes tels que des réparations mineures appliquées au système au cours du temps ou des erreurs de mesure de la dégradation. Cela signifie que pour certains types de dégradations observées, seule la possibilité d'accroissements positifs est appropriée.

Si on souhaite privilégier la monotonie, on peut utiliser le processus gamma (un processus de sauts qui a un nombre infini de sauts sur un intervalle de temps fini). Le choix d'une modélisation de dégradation par le processus gamma a été fait pour ses nombreuses caractéristiques adaptées aux mécanismes de dégradation. C'est le processus le plus souvent utilisé dans la littérature pour modéliser des mécanismes de vieillissement continu et progressifs.

Le premier chapitre de ce mémoire a été consacré à une étude bibliographique du processus gamma et du mouvement brownien. Ce chapitre contient quelques résultats originaux portant sur le temps d'atteinte d'un seuil déterministe ou aléatoire par un processus gamma non homogène. Lorsqu'on considère un seuil aléatoire celui-ci est supposé indépendant du processus gamma. On a généralisé le résultat de Park et Padgett [62] sur le premier temps d'atteinte d'un processus gamma non homogène. On a par exemple caractérisé la loi du premier temps d'atteinte dans le cas où le seuil critique est une variable aléatoire exponentielle indépendante du processus gamma.

Dans le chapitre 2, on a présenté un nouveau modèle de dégradation. Cette approche consiste à considérer que la dégradation résulte de la somme d'un processus gamma et d'un mouvement brownien indépendants. On a proposé ensuite deux méthodes pour estimer les paramètres du notre modèle : la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments. Seul le comportement asymptotique des estimateurs issus de la méthode des moments a été étudié. Ces propriétés asymptotiques ont été établies lorsque l'estimateur est défini pour des observations effectuées à des instants réguliers ou irréguliers. Enfin, on a illustré nos résultats théoriques pour des simulations et des applications à des données réelles.

Comme la dégradation de système est également influencée par l'environnement, il est intéressant d'envisager un modèle intégrant des covariables. Un tel modèle a été étudié dans le chapitre 3. On a supposé que les covariables agissent seulement sur le processus gamma du modèle étudié au chapitre 2. Les covariables ont été intégrées de manière à affecter l'échelle du temps. On a proposé une méthode des moindres carrés en deux étapes pour estimer les paramètres du modèle puis on a étudié les propriétés asymptotiques des estimateurs. Enfin, on a illustré nos résultats théoriques à travers des simulations et des applications à des données réelles issues de la littérature.

Finalement on a présenté une application à des données réelles de grande taille (On dispose d'un jeu de données d'une compagnie de transport sur une de ses lignes). On a donc proposé d'utiliser le modèle de dégradation décrit au chapitre 2 (modèle sans covariable) pour ce jeu de données. Les paramètres de ce modèle ont été ajustés en utilisant la méthode des moments. On a supprimé les plus grands accroissements négatifs qui peuvent être vus

non pas comme des erreurs de mesure, mais plutôt comme des opérations de maintenance d'envergure appliquées aux voies et qui ne sont pas modélisées dans les processus de dégradation étudiés dans cette thèse. Puis on a comparé les résultats obtenus avec d'autres résultats existants. Enfin, on a construit des intervalles de confiance à 95% pour chaque paramètre du modèle. Ils ont été utiles pour sélectionner un modèle parmi le processus gamma, le mouvement brownien avec tendance et le processus gamma perturbé. Les résultats privilégient le processus gamma perturbé par rapport à chacun des deux sous-modèles traditionnellement utilisés.

4.2.2 Perspectives à court terme

Généralisation du modèle avec covariable. Une généralisation du modèle avec covariable, proposée dans le chapitre 3, peut être envisagée. En fait, la méthodologie proposée dans le chapitre 3 ne peut être appliquée que pour des individus observés à des instants réguliers ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. Notre modèle devra donc être traité dans le cas où les observations ont lieu à des instants irréguliers, les propriétés asymptotiques (convergence et normalité asymptotique) des estimateurs seront étudiées et notre méthode sera appliquée aux données dont on dispose actuellement.

Intégration de covariables dépendantes du temps. Nous avons vu au paragraphe 4.1.3 concernant l'application aux données réelles que l'intégration de covariables dépendantes du temps pourrait permettre d'inclure plus d'information dans le modèle. Du point de vue méthodologique, l'approche développée dans le chapitre 3 devrait pouvoir s'étendre à cette situation à condition d'observer les covariables en continu, ou alors, d'approcher leurs valeurs entre deux instants successifs d'observation.

Mise en œuvre du principe du maximum de vraisemblance. Nous avons vu au paragraphe 2.2.1 que le principe du maximum de vraisemblance peut être appliqué au processus gamma perturbé. Toutefois sa mise en œuvre reste plus délicate car le calcul de la vraisemblance requiert l'utilisation de méthodes numériques. Nous envisageons de comparer cette méthode avec la méthode des moments qui a été développée dans cette thèse. Si elle s'avère numériquement probante nous étudierons aussi les propriétés asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance.

4.2.3 Perspectives à long terme

Inclure des effets de maintenance dans le modèle. La méthode des moments décrite au paragraphe 2.3.1 nécessite que le troisième moment centré soit strictement positif. Si ce n'est pas le cas, la méthode ne peut être appliquée directement. Une solution pour pallier ce problème consiste à supprimer certaines données. En effet en éliminant des données

les plus grands accroissements négatifs on peut obtenir un troisième moment centré positif tout en essayant de conserver un maximum d'observations. Ces accroissements négatifs de grande taille peuvent être vus non pas comme des erreurs de mesure, mais plutôt comme des opérations de maintenance d'envergure appliquées au système, qui ne sont pas inclus dans les modèles de dégradation étudiés dans cette thèse. On rappelle que dans notre modèle le mouvement brownien ne permet de tenir compte que de réparations mineures appliquées au système au cours du temps. Par conséquent l'insertion dans notre modèle d'un effet d'une politique de maintenance pourra être envisagée à la manière des modèles à âges virtuels [17; 27; 41; 23]. Considérons l'exemple simple suivant. Soit $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ les temps de maintenance du système. On considère qu'au temps t , l'âge virtuel du système est égal à $v(t, \rho) = t - \rho T_{N(t)}$ et le niveau de dégradation du système est définie par :

$$D_t = Y_{v(t, \rho)}^{(N_t)} + \tau B_t,$$

où $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots$ sont des processus gamma homogènes i.i.d. indépendant du mouvement brownien et τ est un paramètre réel. On suppose que (N_t) est un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$. C'est-à-dire que si E_1, E_2, \dots sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ alors

$$N_t = \sum_{k \geq 1} 1_{\{E_1 + \dots + E_k \leq t\}}.$$

Modèle bivarié. Une alternative au modèle proposé par Mercier *et al.* [47] pourra être envisagée. En effet, en ce qui concerne les données réelles, Mercier *et al.* [47] ont proposé de modéliser la dégradation conjointe des indicateurs NL (nivellement longitudinal) et NT (nivellement transversal) de la voie à l'aide de processus gamma bivariés. Nous proposons de modéliser conjointement les deux indicateurs de la voie par un processus gamma perturbé de la manière suivante. On supposera tout d'abord qu'une opération de maintenance réalisée par la compagnie de transport sur la voie affecte simultanément les nivellements NL et NT. Notre approche consistera à modéliser la dégradation NL par le processus gamma perturbé $Y^{(1)} + \tau_1 B$ et celle de NT par le processus gamma perturbé $Y^{(2)} + \tau_2 B$ où $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ et B sont trois processus indépendants, tels que $Y^{(1)}$ (resp. $Y^{(2)}$) est un processus gamma stationnaire de paramètres (α_1, ξ_1) (resp. (α_2, ξ_2)), B est un mouvement brownien et τ_1 et τ_2 sont deux nombres réels. Dans un tel modèle la partie brownienne est commune aux deux dégradations puisque nous supposons que les opérations de maintenance agissent simultanément sur les deux nivellements de la voie. Ce modèle n'est qu'un exemple parmi de nombreuses possibilités de modélisation qui pourraient s'appliquer à ce type de données. Il est probable que les méthodologies unidimensionnelles que nous avons développées et les résultats asymptotiques obtenus dans cette thèse devraient pouvoir s'étendre à ce type de modèles et conduire ainsi à de nouvelles applications.

Annexe A

Classes de fonctions Glivenko-Cantelli

Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués selon la loi P . On note $L_1(P)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} telles que $\int |f| dP < \infty$. On note F la fonction de répartition de Z_1 et pour toute fonction $f \in L_1(P)$, $P(f) = \mathbb{E}(f(Z_1))$. On définit les variables aléatoires $P_n(f) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f(Z_i)$ et on s'intéresse aux classes de fonctions $\mathbb{F} \subset L_1(P)$ vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathbb{F}} |P_n(f) - P(f)| = 0 \quad \text{presque-sûrement.} \quad (\text{A.1})$$

Une telle classe de fonction est dite P -Glivenko-Cantelli.

Définition A.1 Pour deux fonctions l, u de $L_1(P)$ telles que $l \leq u$, on appelle "crochet $l - u$ " noté $[l, u]$, l'ensemble $\{f : l \leq f \leq u\}$. Le crochet est dit de taille ϵ si et seulement si $P(|u - l|) \leq \epsilon$.

On note $N_{[\cdot]}(\mathbb{F}, \epsilon, L_1(P))$ le nombre minimal de crochets de taille inférieure ou égale à ϵ dans $L_1(P)$ nécessaires pour recouvrir totalement la famille \mathbb{F} . On rappelle le théorème suivant [72] :

Théorème A.1 (Glivenko – Cantelli). Si \mathbb{F} est une classe de fonctions mesurables telle que pour tout $\epsilon > 0$, $N_{[\cdot]}(\mathbb{F}, \epsilon, L_1(P)) < \infty$, alors \mathbb{F} est P -Glivenko-Cantelli.

Donc le théorème A.1 ci-dessus nous indique que l'équation (A.1) est satisfaite dès que $N_{[\cdot]}(\mathbb{F}, \epsilon, L_1(P)) < \infty$ pour tout $\epsilon > 0$.

Bibliographie

- [1] M. ABDEL-HAMEED : A gamma wear process. *IEEE Transactions on Reliability*, 24(2):152–153, 1975.
- [2] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series - 55, 1972.
- [3] J. I. ANSELL et M. J. PHILLIPS : Practical aspects of modelling of repairable systems data using proportional hazards models. *Reliability Engineering and System Safety*, 58:165–171, 1997.
- [4] G. R. ANTELMAN et R. I. SAVAGE : Surveillance problems : Wiener processes. *Naval Research Logistics Quarterly*, 12(1):35–55, 1965.
- [5] S. ASMUSSEN : *Applied Probability and Queues*. Springer, 2003.
- [6] V. BAGDONAVIČIUS et M. S. NIKULIN : Modèle statistique de dégradation avec des covariables dépendants du temps. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 330(2):131–134, 2000.
- [7] V. BAGDONAVIČIUS et M. S. NIKULIN : Estimation in degradation models with explanatory variables. *Lifetime Data Analysis*, 7(1):85–103, 2001.
- [8] C. BARKER : *Maintenance Policies to Guarantee Optimal Performance of Stochastically Deteriorating Multi-Component Systems*. Thèse de doctorat, School of Engineering and Mathematical Sciences City University, 2006.
- [9] R. E. BARLOW et F. PROSCHAN : *Mathematical theory of reliability*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [10] S. BASU et R. T. LINGHAM : Bayesian estimation of system reliability in Brownian stress–strength models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 55(1):7–19, 2003.
- [11] P. BILLINGSLEY : *Convergence of probability measures*. Wiley-Interscience, 1999.

- [12] C. BLAIN : *Modélisation des dégradations de composants passifs par processus stochastiques et prise en compte des incertitudes*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Troyes, 2008.
- [13] L. BORDES, C. PAROISSIN et A. SALAMI : A new approach for the modeling of railway track geometry deterioration. In *QUALITA 2011, 9ème Congrès International Pluridisciplinaire en Qualité et Sûreté de Fonctionnement*, Angers-France, 2011.
- [14] L. BORDES, C. PAROISSIN et A. SALAMI : Parametric inference in a perturbed gamma degradation process with covariates. *Proceedings of ESREL 2010-European Safety and Reliability Conference*, Rhodes-Greece, 2010.
- [15] L. BORDES, C. PAROISSIN et A. SALAMI : Combining gamma and brownian processes for degradation modeling in presence of explanatory variables. *Soumis pour publication*, 2010.
- [16] L. BORDES, C. PAROISSIN et A. SALAMI : Parametric inference in a perturbed gamma degradation process. *Soumis pour publication*, 2010.
- [17] M. BROWN et F. PROSCHAN : Imperfect repair. *Journal of Applied Probability*, 20: 851–859, 1983.
- [18] B. CASTANIER, A. GRALL et C. BÉRENGUER : A condition-based maintenance policy with non-periodic inspections for a two-unit series system. *Reliability Engineering and System Safety*, 87:109–120, 2005.
- [19] E. ÇINLAR, Z. P. BAŽANT et E. OSMAN : Stochastic process for extrapolating concrete creep. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 103(EM6):1069–1088, 1977.
- [20] D. R. COX : Regression models and life tables. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 34(2):187–202, 1972.
- [21] M. J. CROWDER et J. F. LAWLESS : On a scheme for a predictive maintenance. *European Journal of Operational Research*, 176(3):1713–1722, 2007.
- [22] L. DIEULLE, C. BÉRENGUER, A. GRALL et M. ROUSSIGNOL : Sequential condition-based maintenance scheduling for a deteriorating system. *European Journal of Operational Research*, 150(2):451–461, 2003.
- [23] Y. DIJOUX : *Modèles d'âge virtuel et de risques concurrents pour la maintenance imparfaite*. Thèse de doctorat, Institut polytechnique de Grenoble, 2008.
- [24] R. DISNEY, C. LIPSON et N. SHETH : The determination of the probability of failure by stress/strength inference theory. In *14th Ann. Symp. Reliability and Maintainability*, p. 417–422, 1968.

- [25] K. A. DOKSUM et A. HOYLAND : Models for variable-stress accelerated life testing experiments based on Wiener processes and the inverse Gaussian distribution. *Technometrics*, 34(1):74–82, 1992.
- [26] K. A. DOKSUM et S. L. NORMAND : Gaussian models for degradation processes-Part I : methods for the analysis of biomarker data. *Lifetime Data Analysis*, 1:131–144, 1995.
- [27] L. DOYEN et O. GAUDOIN : Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age. *Reliability Engineering and System Safety*, 84(1):45–56, 2004.
- [28] F. DUFRESNE, H. U. GERBER et E. S. W. SHIU : Risk theory with the gamma process. *Astin Bulletin*, 21(2):177–192, 1991.
- [29] N. EBRAHIMI et T. RAMALLINGAM : Estimation of system reliability in Brownian stress–strength models based on sample paths. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 45(1):9–19, 1993.
- [30] B. R. ELLINGWOOD et Y. MORI : Probabilistic methods for condition assessment and life prediction of concrete structures in nuclear power plants. *Nuclear Engineering and Design*, 142(2-3):155–66, 1993.
- [31] W. FELLER : *An Introduction to probability Theory and Its Applications*, vol. 2. Wiley, 1971.
- [32] J. L. FOLKS et R. S. CHHIKARA : The inverse Gaussian distribution and its statistical application-A review. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 40(3):263–275, 1978.
- [33] J. B. FRENK et R. P. NICOLAI : Approximating the randomized hitting time distribution of a non-stationary gamma process. Rap. tech., ERIM Report Series Reference No. ERS-2007-031-LIS, 2007.
- [34] I. S. GRADSHTEYN et I. M. RYZHIK : *Table of integrals, series and products*. Academic Press, 1965.
- [35] A. GRALL, L. DIEULLE, C. BÉRENGUER et M. ROUSSIGNOL : Asymptotic failure rate of a continuously monitored system. *Reliability Engineering and System Safety*, 91(2):126–130, 2006.
- [36] L. HAITAO, E. ELSAYED et L. CHAN : Maintenance of continuously monitored degrading systems. *European Journal of Operational Research*, 175(2):821–835, 2006.

- [37] A. JOHNSON : *Stress-strength models for reliability*, vol. 7. Elsevier, Krishnaiah, P.R. and Rao, C.R. Editor, 1998.
- [38] M. J. KALLEN et J. M. van NOORTWIJK : Optimal maintenance decisions under imperfect inspection. *Reliability Engineering and System Safety*, 90(2-3):177–185, 2005.
- [39] S. KARLIN et H. M. TAYLOR : *A second course in stochastic processes*. Academic Press, 1981.
- [40] N. E. KAROUI, E. GOBET et E. PARDOUX : *Introduction au calcul stochastique*. École polytechnique, 1999.
- [41] M. KIJIMA : Some results for repairable systems with general repair. *Journal of Applied Probability*, 26:89–102, 1989.
- [42] M. KONG et K. PARK : Optimal replacement of an item subject to cumulative damage under periodic inspections. *Microelectronics Reliability*, 37(3):467–472, 1997.
- [43] J. LAWLESS et M. CROWDER : Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure. *Lifetime Data Analysis*, 10(3):213–227, 2004.
- [44] A. LEHMANN : Joint modeling of degradation and failure time data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(5):1693–1706, 2009.
- [45] D. V. LINDLEY et N. D. SINGPURWALLA : Multivariate distributions for the life length of components of a system sharing a common environment. *Journal of Applied Probability*, 23:418–431, 1986.
- [46] W. Q. MEEKER et L. A. ESCOBAR : *Statistical Methods for Reliability Data*. Wiley-New-York, 1998.
- [47] S. MERCIER, C. MEIER-HIRMER et M. ROUSSIGNOL : Modeling track geometry by a bivariate gamma wear process, with application to maintenance. *Risk and Decision Analysis in Civil Engineering. M.J. Kallen and S.P. Kuniewski (Eds.)*, 2009.
- [48] P. A. P. MORAN : A probability theory of dams and storage systems. *Australian Journal of Applied Science*, 5(2):116–124, 1954.
- [49] P. A. P. MORAN : A probability theory of dams and storage systems : modifications of the release rules. *Australian Journal of Applied Science*, 6(2):117–130, 1955.
- [50] P. A. P. MORAN : A probability theory of a dam with a continuous release. *Quarterly Journal of Mathematics*, 7(2):130–137, 1956.

- [51] P. A. P. MORAN : *The theory of storage*. London : Methuen, 1959.
- [52] Y. MORI et B. R. ELLINGWOOD : Time-dependent system reliability analysis by adaptive importance sampling. *Structure SAF*, 12(1):59–73, 1993.
- [53] Y. MORI et B. R. ELLINGWOOD : Reliability of concrete structures, I : role of inspection/repair. *Journal of Structural Engineering*, 120(3):824–45, 1994.
- [54] J. A. NACHLAS : *Reliability Engineering : Probabilistic Models and Maintenance Methods*. CRC Press, 2005.
- [55] W. NELSON : *Accelerated Testing : Statistical Models, Test Plans and Data Analysis*. Wiley, 1990.
- [56] M. F. NEUTS : *Matrix-geometric solutions in stochastic models : an algorithmic approach*. Dover Publisher, New-York, 1994.
- [57] M. S. NIKULIN, N. LIMNIOS, N. BALAKRISHNAN, W. KAHLE et C. HUBER-CAROL : *Advances in Degradation Modeling : Applications to Reliability, Survival Analysis, and Finance*. Birkhauser Boston, 2010.
- [58] NIST/SEMATECH : *e-Handbook of Statistical Methods*. <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/apr/section4/apr423.htm>, 2010.
- [59] K. P. OH : A diffusion model for fatigue crack growth. *Proceedings of the Royal Society London A*, 367:47–58, 1979.
- [60] W. J. PADGETT et M. A. TOMLINSON : Inference from accelerated degradation and failure data based on Gaussian process models. *Lifetime Data Analysis*, 10(2):191–206, 2004.
- [61] M. D. PANDEY et J. M. van NOORTWIJK : Gamma process model for time-dependent structural reliability analysis. In : E. Watanabe, D. M. Frangopol & T. Utsonomiya, editors. *Bridge Maintenance, Safety, Management and Cost. Proceedings of the Second International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management*, IABMAS, Taylor & Francis Group, Kyoto, Japan, 18–22 October 2004.
- [62] C. PARK et W. PADGETT : Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma processes. *Lifetime Data Analysis*, 11(4):511–527, 2005.
- [63] C. PAROISSIN et A. SALAMI : Hitting times of a deterministic or random threshold by a non-stationary gamma process. *Proceedings of the fourth International Conference on Mathematical Methods in Reliability*, Moscow 2009.

- [64] V. V. PETROV : *Limit theorems of Probability Theory - Sums of Independent Random Variables*. Oxford University Press Inc., New York, 1995.
- [65] S. M. ROSS : *Stochastic Processes*. Wiley, 1996.
- [66] E. SCHRÖDINGER : The theory of drop and rise tests on Brownian motion particles. *Physikalische zeitschrift*, 16:289–295, 1915.
- [67] Z. SCHUSS : *Theory and applications of stochastic differential equations*. Wiley Series in Probability and Statistics, 1980.
- [68] M. SHI, J. M. TAYLOR et A. MUNOZ : Models for residual time to Aids. *Lifetime Data Analysis*, 2:31–49, 1996.
- [69] N. D. SINGPURWALLA : Survival in dynamic environments. *Statistical Science*, 10(1): 86–103, 1995.
- [70] N. D. SINGPURWALLA et S. P. WILSON : Failure models indexed by two scales. *Advances in Applied Probability*, 30(4):1058–1072, 1998.
- [71] O. TEBBI : *Estimation des lois de fiabilité mécanique par les essais accélérés*. Thèse de doctorat, Université d'Angers, 2005.
- [72] A. W. van der VAART : *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press., 1998.
- [73] J. M. van NOORTWIJK : A survey of the application of gamma processes in maintenance. *Reliability Engineering and System Safety*, 94(1):2–21, 2009.
- [74] G. A. WHITMORE : Estimating degradation by a Wiener diffusion process subject to measurement error. *Lifetime Data Analysis*, 1:307–319, 1995.
- [75] G. A. WHITMORE, M. J. CROWDER et J. F. LAWLESS : Failure inference from a marker process based on a bivariate Wiener model. *Lifetime Data Analysis*, 4(3):229–251, 1998.
- [76] G. A. WHITMORE et F. SCHENKELBERG : Modelling accelerated degradation data using Wiener diffusion with a time scale transformation. *Lifetime Data Analysis*, 3(1): 27–45, 1997.