



HAL
open science

Beamforming et détection pour signaux non circulaires et/ou non gaussiens (algorithmes et performance)

Abdelkader Oukaci

► **To cite this version:**

Abdelkader Oukaci. Beamforming et détection pour signaux non circulaires et/ou non gaussiens (algorithmes et performance). Autre. Institut National des Télécommunications, 2010. Français. NNT : 2010TELE0029 . tel-00612333

HAL Id: tel-00612333

<https://theses.hal.science/tel-00612333>

Submitted on 28 Jul 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale SMPC

Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Docteur de Télécom & Management SudParis

Doctorat conjoint Télécom & Management SudParis et Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

Spécialité : **Mathématiques appliquées**

Présentée par

Abdelkader OUKACI

Titre

**Beamforming et détection pour signaux non circulaires et/ou non gaussiens
(Algorithmes et performances)**

Soutenue le : **30 Novembre 2010**

Devant le jury composé de :

Rapporteur	Pierre COMON	Professeur Université de Nice Antipolis
Rapporteur	Pascal LARZABAL	Professeur ENS Cachan
Examineur	Michel BRONIATOWSKI	Professeur Université Paris VI
Examineur	Philippe FORSTER	Professeur ENS Cachan
Examineur	Yide WANG	Professeur Polytech'Nantes
Co-directeur	Pascal CHEVALIER	Professeur CNAM / Expert THALES Communication
Directeur	Jean Pierre DELMAS	Professeur Telecom SudParis

Thèse n° 2010TELE0029



Avant-propos

Le présent rapport récapitule les travaux entrepris par l'auteur dans le cadre de sa préparation du doctorat conjoint de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, et Télécom SudParis, commencée en Décembre 2006 au sein du Département Communication, Image et Traitement de l'Information de Télécom Sudparis sous la direction de M. Jean Pierre DELMAS (Telecom SudParis) et M. Pascal CHEVALIER (CNAM, THALES Communications).

Abdelkader OUKACI,
Évry, 30 Aout 2010

À mes parents,

Remerciements

Je souhaiterais tout d'abord remercier les personnes qui ont bien voulu prendre part au jury de cette thèse, en commençant par Monsieur Philippe Forster, professeur à l'ENS Cachan, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Je suis également très reconnaissant envers Monsieur Pierre COMON, Professeur à l'université de Nice Antipolis et directeur de recherche CNRS, et Monsieur Pascal LARZABAL, Professeur à l'ENS Cachan, qui ont accepté de donner de leur temps pour rapporter cette thèse. Enfin, je remercie Monsieur Michel BRONIATOWSKI, professeur à l'université Paris VI, et Monsieur Yide WANG, professeur à Polytech'Nantes, d'avoir accepté d'être membre du jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur Pascal CHEVALIER, professeur au CNAM et Expert THALES communications, d'avoir codirigé cette thèse et pour son aide compétente qu'il m'a apportée et ses précieux conseils.

Je remercie particulièrement mon directeur de thèse, Monsieur Jean Pierre DELMAS, Professeur et Directeur adjoint de l'UMR CNRS Samovar de Telecom SudParis pour la qualité de son encadrement et de ses conseils ainsi que pour sa disponibilité et sa gentillesse. Monsieur Delmas m'a fait profiter d'un suivi enthousiaste et rigoureux qui m'a permis d'avancer sereinement dans les travaux de thèse.

Ma gratitude s'adresse aussi à ceux qui ont été tour à tour mes collègues de bureau et membres du département CITI dont la compagnie a contribué à rendre ces années de thèse très agréables, particulièrement à Noémie Bardel, Soumeya Sallem, Noufel Abbassi, Mohamed Ben Mabrouk, Khalil Jishy, ainsi qu'à Yaneck Gottesman, Marc Castella et Fathi Lahouari.

Je remercie profondément mes amis de toujours qui m'ont soutenu et qui m'ont apporté la joie de vivre ; Ramzi et Selma, Islem et Youcef, Djalil et Nassima et le petit Aymen, Irina, Zsuzsa, Salah.

Je remercie également ma famille en France qui m'ont aidé et soutenu ; mon cher cousin Kamel à qui je souhaite plein de bonheur, mes chers cousins H'mimi et Baya et leurs enfants, mes oncles Salah et Rachid ainsi que notre ami Hakim.

Finalement, je remercie mes chers parents, mes chers sœurs et frère ; Dihia (et ma nièce Mimi), Sonia et Yanis pour leurs amour et pout tout ce qu'ils m'ont apporté dans ma vie.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'exploitation des propriétés de non circularité et de non gaussianité des signaux en traitement d'antennes.

Dans une première partie de cette thèse, nous nous intéressons au contexte de la formation de voies (beamforming) pour la réception d'un signal utile inconnu, dont le vecteur directionnel est connu, corrompu par un bruit potentiellement non circulaire et/ou non gaussien. Dans des études récentes, un beamformer MVDR (Minimum Variance Distortionless Response) linéaire au sens large WL (Widely Linear) exploitant la non circularité au second ordre (SO) des interférences a été introduit et analysé. Cependant, ce beamformer demeure sous optimal pour la réception d'un signal utile non circulaire au SO, du moment où il n'exploite pas la non circularité de ce dernier. C'est ainsi, que notre contribution a porté principalement sur l'introduction, l'étude de performances et la mise en œuvre d'un beamformer MVDR WL. Ce dernier, basé sur une décomposition orthogonale originale du signal utile introduisant une contrainte supplémentaire, prend en considération la non circularité du signal utile et celle des interférences. L'étude des performances de ce beamformer a montré que ce dernier améliore toujours les performances en présence de signaux non circulaires. Dans le même contexte et pour la réception de signaux non gaussiens, nous avons introduit et étudié un beamformer MVDR non linéaire de Volterra. Ce beamformer dont les contraintes s'adaptent à la non circularité des brouilleurs, a été étudié à l'ordre trois sous sa forme équivalente GSC. Cette structure, dite complète, prend en compte conjointement des propriétés de non circularité et de non gaussianité des brouilleurs. L'analyse des performances en gains en SINR de ce récepteur est donnée pour la réception d'un signal réel corrompu par des brouilleurs non gaussiens et non circulaires d'ordre deux et quatre. Cette analyse a montré que la prise en considération de ces propriétés améliore toujours les performances.

Dans une deuxième partie nous nous intéressons au contexte de détection selon deux volets : Le premier volet consiste en la détection d'un signal utile réel connu de paramètres inconnus, noyé dans un bruit total potentiellement non circulaire au SO et de matrice de covariance inconnue. Ainsi, suivant une approche basée sur le test de rapport de vraisemblance généralisé GLRT (Generalized Likelihood Ratio Test), de nouveaux récepteurs pour la détection d'un signal réel connu avec différents ensembles de paramètres inconnus ont été récemment introduits. Néanmoins, les performances de ces récepteurs, n'ont été que partiellement étudiées. Notre contribution a porté sur l'étude des distributions exactes et asymptotiques des statistiques associées au LRT et au GLRT sous H_0 et H_1 . Cette étude a permis de donner les expressions théoriques exactes des probabilités de détection et de fausse alarme des récepteurs LRT, et celles asymptotiques pour certains récepteurs GLRT. Nous avons aussi complété cette analyse par des simulations Monte-Carlo en courbes ROC (Receiver Operating Characteristics) pour l'ensemble des détecteurs GLRT.

Le deuxième volet, consiste en la détection de non circularité au SO de signaux aléatoires mono et multidimensionnels complexes. Nous avons donné la distribution asymptotique du

GLR de non circularité sous H_0 et H_1 dérivé sous l'hypothèse de distribution gaussienne mais utilisée sous une distribution arbitraire non nécessairement gaussienne des données. Ces données considérées sont indépendantes, mais non nécessairement identiquement distribuées, ce qui permet de traiter des situations pratiques où les données non circulaires sont perturbées par un résidu de fréquence et un bruit additif gaussien circulaire. Cette analyse a été aussi complétée par des courbes ROC.

Mots clés :

Non circulaire, non gaussien, linéaire au sens large, beamforming, MVDR, filtrage de Volterra, détection, test du rapport de vraisemblance généralisé (GLRT).

Abstract

This thesis is devoted to the study of exploiting the properties of non-circularity and non-Gaussianity of signals in array processing.

In the first part of this thesis, we focus on beamforming technics in the context of the reception of an unknown signal, whose steering vector is known, corrupted by potentially non-circular and/or non-Gaussian noise. In recent studies, a widely linear minimum variance distortionless response beamformer (WL MVDR) exploiting the second order (SO) non-circularity of interference was introduced and analyzed. However, this beamformer remains suboptimal for the reception of a non-circular useful signal, since it does not exploit the non-circularity of this latter. Thus, our contribution has focused on the introduction, the performances analysis and the implementation of a WL MVDR Beamformer. This latter, based on an original orthogonal decomposition of the useful signal, take into account the SO non-circularity of both useful signal and interferences. The new performances analysis of this new beamformer has shown that it always improves the performance of the well known Capon beamformer and the WL MVDR beamformer introduced recently, this in the presence of non-circular signals. In the same context and for receiving non-Gaussian signals, we introduced and studied a nonlinear MVDR Beamformer based on complexe Volterra filters. This Beamformer, which adapt the constraints to the non circularity of jammers, has been studied in the third order by its equivalent GSC form. The performance analysis of this beamformer are shown in term of SINR Gains for the reception of non-Gaussian and SO (until to fourth order) non-circular. It is shown that taking into account of these properties always improves performance.

In the second part, we focus on two parts of detection :

The first part consists of the detection a known signal, with unknown parameters, corrupted by a total noise potentially SO noncircular with unknown covariance matrix. Thus, following Generalized Likelihood Ratio Test approach, new receivers for the detection a real known signal with different sets of unknown parameters have been recently introduced. Nevertheless, the performances analysis of these receptors have only been partially studied. Our contribution has focused on the study of exact and asymptotic distributions of statistics associated with the LRT and GLRT under H_0 and H_1 . This study has given theoretical expressions of probabilities of correct detection and false alarm. We also supplemented this analysis with Monte Carlo simulations and given receiver operating characteristics ROC curves.

In the second part, we consider the problem of testing impropriety (i.e., second-order noncircularity) of a complex valued random variable based on the generalized likelihood ratio test (GLRT) for Gaussian distributions. Asymptotic (w.r.t. the data length) distributions of the GLR are given under the hypothesis that data are proper or improper, and under the true, not necessarily Gaussian distribution of the data. The considered data are independent but not necessarily identically distributed : assumption which has never been considered until now. This enables us to deal with the practical important situations of noncircular data disturbed by residual frequency offsets and additive circular noise. The receiver operating characteristic

Abstract

(ROC) of this test is derived as byproduct, an issue previously overlooked. Finally illustrative examples are presented in order to strengthen the obtained theoretical results.

Key Words :

Non-circular, non-gaussian, widely linear, beamforming, MVDR, Volterra filtering, detection, generalized likelihood ratio test (GLRT).

Table des matières

Avant-propos	I
	I
Remerciements	III
Résumé	VI
Abstract	VIII
Table des matières	X
Table des figures	1
Liste des tableaux	3
Liste des abréviations	5
Liste des notations	8
Liste des publications	10
Introduction	12
I Généralités	17
1 Circularité et modulations	19
1.1 Introduction	19
1.2 Circularité d'un vecteur aléatoire	21
1.2.1 Coefficient de non circularité d'ordre deux	22
1.3 Statistiques d'ordre supérieurs	22
1.3.1 Moments	22
1.3.2 Cumulants	23
1.4 Typologie des principales modulations présentant un caractère non circulaire à l'ordre deux	23
1.4.1 Famille F1 : Modulations rectilignes	24
1.4.2 Famille F2 : Modulations linéaires QAM rectangulaires	24
1.4.3 Famille F3 : Modulations linéaires décalées	25
1.4.3.1 La dérotation avant ou après le filtrage adapté?	25

1.4.4	Famille F4 : Modulations à phase continue CPM	26
1.5	Étude de la non circularité d'ordre deux instantané de certaines modulations CPM	28
1.5.1	CPM à réponse totale	28
1.5.1.1	Indice de modulation $h = \frac{1}{2}$	28
1.5.1.2	Indice de modulation $h = 1$	30
1.5.1.3	Indice de modulation $h = \frac{1}{4}$	30
1.5.2	CPM à réponse partielle	31
1.5.2.1	Indice de modulation $h = \frac{1}{2}$	31
1.5.2.2	Indice de modulation $h = 1$	31
1.5.3	La modulation GMSK	33
1.5.4	Les CPM quaternaires	34
II Beamforming		37
2	Beamforming linéaire	39
2.1	Introduction	39
2.2	Modélisation en bande étroite	40
2.3	Modèle classique des signaux reçus	40
2.4	Les différents critères du beamforming linéaire	41
2.4.1	Maximisation du SINR	42
2.4.2	Minimisation de la puissance du bruit sous une contrainte directionnelle	42
2.4.3	Minimisation de la puissance de sortie sous contraintes linéaires	43
2.4.4	Annulateur de lobes latéraux généralisé (GSC)	43
2.4.5	Minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) sans signal de référence	45
2.4.6	Minimisation de l'erreur pondérée au sens des moindres carrés (WLSE) .	45
2.4.7	Estimation du signal utile au sens maximum de vraisemblance (ML) . .	46
2.4.8	Minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) avec signal de référence	46
2.5	Conclusion	48
3	Beamforming linéaire au sens large WL	49
3.1	Introduction	49
3.2	Filtrage linéaire au sens large	51
3.3	Modèle WL des signaux et statistiques d'ordre deux	51
3.4	Modèle du bruit total	51
3.5	Beamformer WL avec γ_s inconnu	52
3.5.1	Beamformer WL au sens du maximum du SINR approché	52
3.5.2	Beamformer WL MVDR ₁	53
3.5.3	Beamformer WL WLSE ₁	54
3.5.4	Beamformer WL ML ₁	54
3.6	Beamformer WL avec γ_s connu	54
3.6.1	Décomposition orthogonale de $s(t)^*$	55
3.6.2	Beamformer WL MVDR ₂	55
3.6.3	Beamformer WL WLSE ₂	56
3.6.4	Beamformer WL MMSE	57
3.6.5	Beamformer WL ML ₂	57
3.6.6	Beamformer WL au sens maximum du SINR	57

3.6.7	Beamformer WL annulateur de brouilleurs	58
3.7	Étude du beamformer MVDR ₂	58
3.7.1	Capacité de traitement	59
3.7.2	Structure TI WL GSC équivalente	59
3.7.3	Performances en SINR du beamformer MVDR ₂	60
3.7.3.1	Calcul du SINR en sortie	60
3.7.3.2	SINR et MSE	61
3.7.3.3	Analyse du SINR en sortie	61
3.7.3.4	Performances pour une seule interférence	63
3.7.3.5	Illustrations	65
3.7.4	Performances en taux d'erreur symbole SER du beamformer MVDR ₂	70
3.7.4.1	Cas où le signal utile et l'interférence sont BPSK	70
3.7.4.2	Cas où le signal utile est BPSK et l'interférence est QPSK	71
3.7.4.3	Cas où le signal utile est QPSK et l'interférence est BPSK	73
3.7.4.4	Illustrations	74
3.7.5	Mise en œuvre du beamformer MVDR ₂	78
3.7.5.1	Cas où \mathbf{s}_γ est connu	78
3.7.5.2	Cas où \mathbf{s} et γ sont inconnus	78
3.7.5.3	Cas où \mathbf{s} est connu et γ_s est inconnu	79
3.7.5.4	Simulations	80
3.8	Conclusion	85
4	Beamforming non linéaires GSC et MVDR de Volterra	87
4.1	Introduction	87
4.2	Intérêt des récepteurs non linéaires	89
4.3	Hypothèses et formulation du problème	89
4.3.1	Modèle et hypothèses	89
4.3.2	Formulation du problème	90
4.4	Récepteurs MVDR IT de Volterra	91
4.4.1	Présentation des filtres de Volterra	91
4.4.2	Récepteurs IT MVDR de Volterra d'ordre 3 à structure complète	92
4.4.2.1	Contraintes pour le terme linéaire-conjugué	94
4.4.2.2	Contraintes pour les termes cubiques	94
4.4.2.3	Écriture des contraintes	95
4.4.2.4	Expression du récepteur MVDR non linéaire	96
4.5	Interprétation GSC de Volterra à structure complète	98
4.5.1	Présentation de la structure complète	98
4.5.2	Inversibilité sans retirer les redondances	99
4.5.3	Cas particulier de structures partielles	100
4.5.4	Implémentation adaptative	100
4.5.5	Analyse des performances en SINR en sortie	104
4.6	Illustrations et simulations par ordinateur	104
4.7	Extension aux critères maximum de SINR et MMSE	115
4.7.1	Expression du filtre MMSE de Volterra	115
4.7.2	Implantation du filtre de Volterra MMSE	117
4.8	Conclusion	119

III	Détection	121
5	Étude des performances des détecteurs GLRT d'un signal utile noyé dans un bruit non circulaire	123
5.1	Introduction	123
5.2	Récepteurs GLRT pour la détection d'un signal connu perturbé par des interférences non circulaires	125
5.3	Position du problème	125
5.3.1	Modèle des signaux	125
5.3.2	Statistiques du second ordre des observations	126
5.3.3	Problématique et hypothèses	126
5.4	Récepteurs optimaux où tous les paramètres sont connus (clairvoyants)	127
5.5	Récepteurs optimaux avec des paramètres inconnus	128
5.5.1	Récepteurs GLRT avec \mathbf{s} connu	128
5.5.1.1	(π_s, Φ_s) inconnus et bruit total (\mathbf{R}, \mathbf{C}) connus	129
5.5.1.2	$(\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C})$ inconnus avec RBS	129
5.5.1.3	$(\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C})$ inconnus et sans RBS	130
5.5.2	Récepteurs GLRT avec \mathbf{s} inconnu	131
5.5.2.1	(π_s, Φ_s) inconnus et bruit total (\mathbf{R}, \mathbf{C}) connu	131
5.5.2.2	$(\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C})$ inconnus avec RBS	132
5.5.2.3	$(\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}$ et $\mathbf{C})$ inconnus et sans RBS	133
5.5.3	Récepteurs GLRT avec une structure connue de \mathbf{s}	133
5.5.3.1	(π_s, Φ_s) inconnus, (\mathbf{R}, \mathbf{C}) connus	133
5.5.3.2	$\pi_s, \Phi_s, (\mathbf{R}, \mathbf{C})$ inconnus et sans RBS	133
5.6	Analyse théorique des Performances des récepteurs clairvoyants	134
5.6.1	Calcul exact	135
5.6.2	Calcul approché	136
5.6.3	Les courbes ROC (Receiver Operating Characteristics)	137
5.7	Performances asymptotiques des récepteur avec des paramètres inconnus	138
5.8	Illustrations	141
5.8.1	Performances théoriques des récepteurs	141
5.8.2	Domaine de validité	142
5.8.3	Comparaison des détecteurs	147
5.8.3.1	Scénario avec $P = 1$ interférence	147
5.8.3.2	Scénario avec $P = 2$ interférences	148
5.9	Conclusion	150
6	Étude des performances du détecteur GLRT de non circularité des signaux complexes	157
6.1	Introduction	157
6.2	Le test du rapport de vraisemblance	159
6.3	Règle de décision du GLR	159
6.4	Distribution asymptotique du GLR pour des variables aléatoires complexes indépendantes identiquement distribuées (IID)	160
6.4.1	Cas d'une variable aléatoire complexe scalaire	161
6.4.2	Cas d'une variable aléatoire complexe multidimensionnelle	163
6.5	Extension aux variables aléatoires complexes NON-IID	164
6.6	Illustrations	165
6.7	Conclusion	170

Conclusions et perspectives		170
A		175
A.1 Performances en SINR en sortie du beamformer MVDR ₂		175
A.1.1 Croissance en fonction de $ \gamma_s $ pour $d_s = 0$		175
A.1.2 Croissance en fonction de $\cos(\Phi_1)$		175
A.1.3 Croissance pour $\cos(\Phi_1) \geq 0$		175
A.1.4 Etude de la Monotonie de $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ pour $\cos(\Phi_1) < 0$		176
A.2 Relation SINR et MSE		177
A.2.1 Preuve de la relation (3.36)		177
A.2.2 Preuve de la relation (3.37)		177
A.3 Calcul du SER pour le beamformer MVDR ₁		178
A.3.1 Cas où le signal utile et l'interférence sont BPSK		178
A.3.2 Cas où le signal utile est BPSK et l'interférence est QPSK		178
A.3.3 Cas où le signal utile est QPSK et l'interférence est BPSK		179
A.4 Schéma pour application en détection		180
A.5 Algorithme JADE étendu		181
A.5.1 Blanchiment		181
A.5.2 Critère de diagonalisation conjointe		182
A.5.3 Algorithme E-JADE		182
B		183
B.1 Théorème central limite de Lyapunov		183
B.2 Expression de λ_K		184
C		185
C.1 Preuve Résultat 1		185
C.2 Preuve Résultat 2		186
C.3 Preuve Résultat 3		187
C.4 Preuve Résultat 4		190
Bibliographie		193

Table des figures

1.1	Variations du module de non circularité instantané $ \gamma_{t,d} $, alphabet binaire, pour : MSK dérotée (a), 1-RC dérotée $h = \frac{1}{2}$ (b)	29
1.2	Variation du module de non circularité instantané $ \gamma_t $ pour : 1-REC, $h = 1$ (a), 1-RC $h = 1$ (b)	30
1.3	Variation du module de non circularité instantané $ \gamma_t $ pour : L-REC, $h = \frac{1}{2}$ (a), L-RC $h = \frac{1}{2}$ (b)	32
1.4	Variation du module de non circularité instantané $ \gamma_t $ pour : L-REC, $h = 1$ (a), L-RC $h = 1$ (b)	32
1.5	$g(t)$ (a) et $q(t)$ (b) pour différentes valeurs de BT pour la GMSK	33
1.6	Variation de du coefficient de non circularité instantané $\gamma_{t,d}$, alphabet binaire, pour : GMSK dérotée $BT = 0.3$ (a), GMSK dérotée $BT = 0.5$ (b)	34
1.7	Variation de du coefficient de non circularité instantané $\gamma_{t,d}$, alphabet quaternaire, pour : MSK-quaternaire dérotée (a), GMSK-quaternaire dérotée (b)	35
2.1	Schéma fonctionnel du beamformer LCMV linéaire à structure GSC	45
3.1	Structure équivalente GSC du beamformer MVDR ₂	59
3.2	(1) SINR _{MVDR₂} avec $\gamma_1 = 1$, (2) SINR _{MVDR₂} avec $ \gamma_1 = 0.9$, (3) SINR _{MVDR₁} avec $ \gamma_1 = 1$, (4) SINR _{MVDR₁} avec $ \gamma_1 = 0.9$, et (5) SINR _{Capon} en fonction de $ \gamma_s $ pour (a) $\cos(\Phi_1) > 0$ et (b) $\cos(\Phi_1) < 0$	67
3.3	(SINR _{Capon} , SINR _{MVDR₁} , SINR _{MVDR₂}) (a), (Gain MVDR ₁ , Gain MVDR ₂) (b) en fonction de la DOA de l'interférence θ_1 pour utile BPSK et QPSK et interférence BPSK.	68
3.4	SINR _{MVDR₁} , SINR _{MVDR₂} (a), Gain=SINR _{MVDR₂} /SINR _{MVDR₁} (b), en fonction du coefficient de non circularité de l'interférence $ \gamma_1 $ pour utile BPSK.	69
3.5	Récepteur sous optimal	70
3.6	Récepteur sous optimal	73
3.7	Plan complexe	73
3.8	SER théorique et estimé pour un signal utile BPSK et une interférence BPSK en fonction de π_s/η_2 pour $\pi_1/\eta_2 = 20\text{dB}$, $\phi_s = 0$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_s = 0$ et $\theta_1 = \pi/3$	76
3.9	SER théorique et estimé pour un signal utile BPSK et une interférence QPSK en fonction de π_s/η_2 pour $\pi_1/\eta_2 = 20\text{dB}$, $\phi_s = 0$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_s = 0$ et $\theta_1 = \pi/3$	76
3.10	SER théorique et estimé pour un signal utile QPSK et une interférence BPSK en fonction de π_s/η_2 pour $\pi_1/\eta_2 = 20\text{dB}$, $\phi_s = 0$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_s = 0$ et $\theta_1 = \pi/6$	77
3.11	Probabilité de détection simulée (100000 réalisations, PFA=0.001) en fonction de π_s/η_2 pour $\pi_1/\eta_2 = 20\text{dB}$, $\phi_s = 0$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_s = 0$ et $\theta_1 = 0$	77
3.12	SINR _{MVDR₂} estimé en fonction du nombre d'échantillons, $ \gamma_1 = 1$	82
3.13	SINR _{MVDR₂} estimé en fonction du nombre d'échantillons, $\gamma_1 = 0$	82

3.14	Comparaison des SINR estimé en fonction du nombre d'échantillons pour un signal utile BPSK et une interférence BPSK	83
3.15	Comparaison des SINR estimé en fonction du nombre d'échantillons pour un signal utile BPSK et une interférence QPSK	83
3.16	Comparaison des SINR estimé en fonction du nombre d'échantillons pour un signal utile QPSK et une interférence BPSK	84
3.17	Comparaison des SINR estimé en fonction du nombre d'échantillons pour un signal utile QPSK et une interférence QPSK	84
4.1	Schéma fonctionnel de la structure non linéaire GSC de Volterra	98
4.2	Variations de $\widehat{\text{SINR}}_{\text{NL-GSC,Capon,MVDR}_1}(K)$ en fonction de K , $N = 2$, $P = 1$ BPSK, $\theta_s = 55^\circ$, $\theta_1 = 90^\circ$, SNR = 10dB, INR = 0dB, $M = 1000$	103
4.3	Variations de $\widehat{\text{SINR}}_{\text{NL-GSC,Capon,MVDR}_1}(K)$ en fonction de K , $N = 2$, $P = 1$ QPSK, $\theta_s = 55^\circ$, $\theta_1 = 90^\circ$, SNR = 10dB, INR = 0dB, $M = 1000$	103
4.4	Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et MVDR ₁ en fonction du module de la corrélation spatiale $ \alpha_{1s} $ pour un brouilleur circulaire à module constant $h_x = k_x^2 = 1$ de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)	108
4.5	Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et MVDR ₁ en fonction du module de la corrélation spatiale $ \alpha_{1s} $ pour un brouilleur impulsif de Bernoulli circulaire $h_x = k_x^2 = 100$ de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)	109
4.6	Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et MVDR ₁ en fonction du module de la corrélation spatiale $ \alpha_{1s} $ pour un brouilleur impulsif de Bernoulli circulaire $h_x = k_x^2 = 10000$ de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)	110
4.7	Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et MVDR ₁ en fonction du module de la corrélation spatiale $ \alpha_{1s} $ pour un brouilleur QPSK de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)	111
4.8	Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et MVDR ₁ en fonction du module de la corrélation spatiale $ \alpha_{1s} $ pour un brouilleur BPSK de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)	112
4.9	Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et MVDR ₁ en fonction du module de la corrélation spatiale $ \alpha_{1s} $ pour un brouilleur impulsif de Bernoulli rectiligne $h_x = k_x^2 = 100$ de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)	113
4.10	Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et MVDR ₁ en fonction du module de la corrélation spatiale $ \alpha_{1s} $ pour un brouilleur impulsif de Bernoulli rectiligne $h = k^2 = 10000$ de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)	114
5.1	Courbe ROC pour les performances des récepteurs CONV ₁ et OPT ₁ , $K = 4$ et $K = 64$	144

5.2	Courbe ROC pour les performances exactes et approchées des différents récepteurs OPT_i ($i = 1, \dots, 7$), $K = 64$	144
5.3	Courbes ROC théoriques pour les performances du récepteur OPT_1 pour différentes valeurs de K , $N = 2$	145
5.4	Courbes ROC théoriques pour les performances du récepteur OPT_1 pour différentes valeurs de N , $K = 64$	145
5.5	Erreur relative sur P_D en fonction de K pour $\text{SNR} = -10\text{dB}$	146
5.6	Erreur relative sur P_D en fonction du SNR pour $K = 128$	146
5.7	Variations de P_D en fonction du SNR , $\Phi_1 = 15^\circ$, $P_{\text{FA}} = 0.001$, $P = 1$ BPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $\text{INR} = \text{SNR} + 15\text{dB}$, 100000 réalisations, $N = 1$ (a), $N = 2$ (b)	151
5.8	Variations de P_D en fonction du SNR , $\Phi_1 = 45^\circ$, $P_{\text{FA}} = 0.001$, $P = 1$ BPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $\text{INR} = \text{SNR} + 15\text{dB}$, 100000 réalisations, $N = 1$ (a), $N = 2$ (b)	152
5.9	Variations de P_D en fonction de la P_{FA} (ROC), $\Phi_1 = 15^\circ$, $\text{SNR} = 0\text{dB}$, $P = 1$ BPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $\text{INR} = 15\text{dB}$, 100000 réalisations, $N = 1$ (a), $N = 2$ (b)	153
5.10	Variations de P_D en fonction de la P_{FA} (ROC), $\Phi_1 = 45^\circ$, $\text{SNR} = 0\text{dB}$, $P = 1$ BPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $\text{INR} = 15\text{dB}$, 100000 réalisations, $N = 1$ (a), $N = 2$ (b)	154
5.11	Variations de P_D en fonction du SNR , $P_{\text{FA}} = 0.001$, $N = 2$, $P = 2$ BPSK+QPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $\theta_2 = 40^\circ$, $\Phi_2 = 25^\circ$, $\text{INR}_1 = \text{INR}_2 = \text{SNR} + 15\text{dB}$, 100000 réalisations, $\Phi_1 = 15^\circ$ (a), $\Phi_1 = 45^\circ$ (b)	155
5.12	Variations de P_D en fonction de la P_{FA} (ROC), $\text{SNR} = 0\text{dB}$, $N = 2$, $P = 2$ BPSK+QPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $\theta_2 = 40^\circ$, $\Phi_2 = 25^\circ$, $\text{INR}_1 = \text{INR}_2 = \text{SNR} + 15\text{dB}$, 100000 réalisations, $\Phi_1 = 15^\circ$ (a), $\Phi_1 = 45^\circ$ (b)	156
6.1	Fonction densité de probabilité approchée de $\hat{\gamma}_x$ sous H_0 et H_1	162
6.2	P_d pour différentes P_{fa} fixées du modèle (6.19) en fonction du SNR	168
6.3	Courbes ROC Théorique, asymptotique et empirique (10000 Monte carlo) associées au modèle (6.19) et au modèle gaussien	168
6.4	Courbes ROC théorique asymptotique et empirique (avec 10000 réalisations Monte-Carlo) associées avec le modèle gaussien pour quatre valeurs de $K\Delta f_1$	169
6.5	P_D pour différentes valeurs fixées de P_{FA} et pour deux valeurs $\Delta\Phi$ en fonction du SNR , $N = Q = 2$ et $K = 100$	169
A.1	Allure du $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ en fonction $ \gamma_s $	176
A.2	Schéma fonctionnel de l'application du beamformer MVDR_2 en détection	180

Liste des tableaux

1.1	Différentes impulsions de mise en forme pour les modulations CPM	27
5.1	Synthèse des différents récepteurs	147

Liste des abréviations

Pour des raisons de lisibilité, la signification d'une abréviation ou d'un acronyme n'est souvent rappelée qu'à sa première apparition dans le texte d'un chapitre. Par ailleurs, puisque nous utilisons toujours l'abréviation la plus usuelle, il est fréquent que ce soit le terme anglais qui soit employé, auquel cas nous présentons une traduction.

AM	Amplitude Modulation
ASINR	Approached Signal Interference Noise Ratio
ASK	Amplitude Shift Keying
BPSK	Binary Phase Shift Keying
CFAR	Constant False Alarm Rate
CP-FSK	Continuous Phase-Frequency Shift Keying
CPM	Continuous Phase Modulation
DOA	Direction Of Arrival
DS-BPSK	Direct Sequence-Binary Phase Shift Keying
DS-CDMA	Direct Sequence-Code Division Multiple Access
E-JADE	Extended-Joint Approximate Diagonalization of Eigen-matrices
FDMA	Frequency Division Multiple Access
GLR	Generalized Likelihood Ratio
GLRT	Generalized Likelihood Ratio Test
GMSK	Gaussian Minimum Shift Keying
GSC	Generalized Side-lobe Canceller
GSM	Global System for Mobile communications
IC	Interference Cancellation
IFF	Identification Friend or Foe
IID	Independent and Identically Distributed
INR	Interference to Noise Ratio
LCMP	Linearly Constrained Minimum Power
LCMV	Linearly Constrained Minimum Variance
LRT	Likelihood Ratio Test
MIMO	Multiple Input Multiple Output
ML	Maximum Likelihood
MMSE	Minimum Mean Square Error
MPDR	Minimum Power Distortionless Response
MSE	Mean Square Error
MSK	Minimum Shift Keying

Liste des abréviations

MVDR	Minimum Variance Distortionless Response
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
O-QAM	Offset-Quadrature Amplitude Modulation
O-QPSK	Offset-Quadrature Phase-Shift Keying
PD	Probability of Detection
PFA	Probability of False Alarm
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
RBS	Référence Bruit Seul
ROC	Receiver Operating Characteristic
SAIC	Single Antenna Interference Cancellation
SER	Symbol Error Rate
SINR	Signal to Interference Noise Ratio
SMI	Sample Matrix Inversion
SNR	Signal to Noise Ratio
SOI	Signal Of Interest
TDMA	Time Division Multiple Access
TI	Time Invariant
TNAR	Total Noise Alone Reference
TV	Time Variant
ULA	Uniform Linear Array
WCDMA	Wideband Code Division Multiple Access
WL	Widely Linear
WLSE	Weighted Least Squares Error

Liste des notations

Nous avons regroupé ci-dessous les principales notations employées dans les différents chapitres du document. Dans la mesure du possible, nous avons tenté de conserver les mêmes notations d'un chapitre à l'autre. Certaines notations, apparaissant uniquement de manière ponctuelle, ont été omises. Les matrices sont représentées par des majuscules grasses **A**, les vecteurs par des minuscules grasses **a** (par défaut, sont orientées "colonne") et les scalaires par des minuscules non grasses *a*.

Notations générales

$\Re(a)$	Partie réelle du nombre complexe a .
$\Im(a)$	Partie imaginaire du nombre complexe a .
$(a)^*$	Complexe conjugué d'un complexe.
$ a $	Valeur absolue d'un nombre réel a et module complexe d'un complexe a .
$\ \mathbf{A}\ $	Norme spectrale de \mathbf{A} .
\mathbf{A}^T	Matrice transposée de \mathbf{A} .
\mathbf{A}^*	Matrice transposée de \mathbf{A} .
\mathbf{A}^H	Matrice transposée-conjuguée (hermitien) de \mathbf{A} .
\mathbf{A}^{-1}	Inverse de \mathbf{A} .
$\mathbf{A}^\#$	Pseudo-inverse de \mathbf{A} au sens de Moore-Penrose.
$\text{Tr}(\mathbf{A})$	Trace de la matrice \mathbf{A} .
$\det(\mathbf{A})$	Déterminant de la matrice \mathbf{A} .
$\text{vec}(\mathbf{A})$	Opérateur de vectoriel (Vecteur obtenu en empilant les colonnes de la matrice \mathbf{A} les unes sous les autres).
$\text{Ker}(\mathbf{A})$	Noyau d'une matrice \mathbf{A} .
$\text{Range}(\mathbf{A})$	Rang d'une matrice \mathbf{A} .
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	Produit de Kronecker.
$\mathbf{a} \circledast \mathbf{b}$	Produit de Kronecker symétrique.
$E[.]$	Espérance mathématique.
$\text{Cum}(\cdot)$	Opérateur de cumulants.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Convergence en loi.
\sim_a	Approximation de distribution.
$o(\cdot)$	Signifie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$.
$p(a = b)$	Probabilité que a soit égal à b .
$\hat{\theta}$	Estimé de θ .
\triangleq	Par définition.
\propto	Proportionnel.
N	Nombre de capteurs.
K	Nombre d'échantillons.
P	Nombre d'interférences.

Propriétés algébriques

On utilisera principalement les propriétés suivantes des produit de Kronecker et de l'opérateur vectoriel (les dimensions des matrices sont supposées telles que ces expressions aient un sens) :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \\
 (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) \\
 \text{Tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) &= \text{Tr}(\mathbf{A})\text{Tr}(\mathbf{B}) \\
 \text{Tr}(\mathbf{AB}) &= \text{vec}(\mathbf{A}^T)^T \text{vec}(\mathbf{B}) \\
 \text{vec}(\mathbf{ABC}) &= (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B}) \\
 \text{Tr}(\mathbf{ABCD}) &= \text{vec}(\mathbf{A}^T)^T (\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{B})\text{vec}(\mathbf{C}) \\
 \text{vec}(\mathbf{ab}^T) &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}.
 \end{aligned}$$

Publications de l'auteur

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a donné lieu aux contributions suivantes :

Articles de revue

A. Oukaci, P. Chevalier and J.P. Delmas, "On the performance and practical interest of the widely linear MMSE beamformer for nonrectilinear signals", soumis à Signal Processing (ELSEVIER), en Novembre 2010.

A. Oukaci, J.P. Delmas and P. Chevalier, "Performance analysis of GLRT-based array receivers for the detection of a known real-valued signal corrupted by noncircular interferences", soumis à Signal Processing (ELSEVIER), en Mai 2010.

J.P. Delmas, A. Oukaci and P. Chevalier, "On the asymptotic distribution of GLR for impropriety of complex signals", soumis à IEEE Transaction on Signal Processing, en Juillet 2010.

P. Chevalier, A. Oukaci and J.P. Delmas, "GLRT-Based array receivers for the detection of a known signal with unknown parameters corrupted by noncircular interferences", soumis à Journal on Advances in Signal Processing JSAP (EURASIP), en Mars 2010.

P. Chevalier, A. Oukaci and J.P. Delmas, "Volterra MVDR Beamformers for the reception of an unknown signal corrupted by nongaussian and/or noncircular interference", en cours de rédaction pour soumission à IEEE Transaction on Signal Processing.

Articles de conférence

A. Oukaci, P. Chevalier and J.P. Delmas, "Third order widely non linear Volterra MVDR beamforming," soumis International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2011), Prague, Mai 2011.

J.P. Delmas, A. Oukaci, and P. Chevalier, "Performance analysis of the GLRT-based array receivers for the detection of a known signal corrupted by noncircular interference," International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2010), Dallas, March 2010.

Publications de l'auteur

J.P. Delmas, A. Oukaci, and P. Chevalier, "Asymptotic distribution of GLR for impropriety of complex signals," International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2010), Dallas, March 2010.

P. Chevalier, J.P. Delmas and A. Oukaci, "Performance analysis of the optimal widely linear MVDR beamformer," European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2009), Glasgow, August 2009.

P. Chevalier, J.P. Delmas and A. Oukaci, "Optimal widely linear MVDR beamforming for noncircular signals," International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2009), Taipei, Taiwan, April 2009.

Introduction générale

Le traitement d'antennes est la discipline du traitement du signal qui consiste à traiter les signaux spatio-temporels, échantillonnés en temps et en espace par un réseau de capteurs. Ces capteurs sont répartis dans l'espace et constituent une antenne [69, 50, 95, 97]. Ce traitement, réalisé en aval des antennes, a pour but d'optimiser la réception de signaux selon un certain critère et, en matière d'antennes, les critères sont variés. Parmi ceux-ci : la discrimination d'un signal utile parmi des signaux nuisibles (détection et formation de voies), la précision d'estimation des paramètres d'une source (goniométrie et guidage), la fidélité de reproduction d'un signal (communications et imagerie) ainsi que la classification des objets (reconnaissance des formes).

Cette diversité, le développement rapide de la technologie des antennes ainsi que les capacités du traitement du signal, permettent de concevoir des antennes et des méthodes de traitement performantes qui ouvrent de nouveaux horizons applicatifs. Ces innovations ont, ou auront dans un avenir proche, des impacts importants dans de nombreux domaines d'applications civils et militaires, tels que : les communications, la navigation, la détection (radar, sonar), la médecine (imagerie, monitoring), l'astronomie, l'observation spatiale, la sismographie, l'astrophysique,...

Durant ces trois dernières décennies, le traitement d'antennes a suscité un grand intérêt pour la communauté scientifique. A travers plusieurs travaux menés, la modélisation des signaux a évolué et plusieurs hypothèses ont été introduites afin de se rapprocher des situations réelles. Cette évolution de la modélisation a poussé la communauté scientifique à prendre en considération certaines propriétés. Parmi ces propriétés, on note celles de non gaussianité et de non circularité qui conduisent respectivement à des traitements non linéaires [83] et *widely linear* [75, 33].

L'objectif principal du traitement d'antenne est d'extraire de l'information utile contenue dans des observations bruitées en exploitant certaines caractéristiques statistiques et spatiales. Les propriétés de non gaussianité et de non circularité font partie et ont été exploitées. Ainsi, pour certains objectifs de recherche, ces caractères non circulaire et/ou non gaussien pourraient ne pas être gênants si les performances des récepteurs fondés sur l'hypothèse gaussienne et/ou circulaire étaient suffisantes. Malheureusement, ce n'est pas toujours le cas en pratique. En effet, avec la forte croissance du secteur des télécommunications, la tendance actuelle est de reculer les frontières du possible. C'est pour cela que dans cette thèse, nous nous intéressons à l'exploitation de ces propriétés de non circularité et de non gaussianité particulièrement en *beamforming* et en détection.

Le *beamforming* fait partie des techniques de traitement d'antennes, utilisé pour l'estimation des signaux et des directions d'arrivée (DOA) et dans la suppression d'interférences. Il a pour but de trouver un filtre spatial ou spatiotemporel dont la sortie correspond à une estimée du signal utile bruité venant d'une direction particulière. Le *beamforming* trouve applications dans

de nombreux domaines [95] tels que : le radar, le sonar, les communications sans fil, l'imagerie biomédicale,...

Les approches de beamforming conventionnelles ont pour but de trouver un filtre \mathbf{w} complexe linéaire et invariant dans le temps TI (Time Invariant), tel que sa sortie $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ optimise un critère au second ordre sous d'éventuelles contraintes, où $\mathbf{x}(t)$ désigne le vecteur des enveloppes complexes des signaux observés en sortie des capteurs. Cette sortie correspond ainsi à une estimée au second ordre du signal utile venant d'une direction particulière et potentiellement corrompu par des interférences et d'un bruit de fond.

Les filtres complexes spatiaux et linéaires ont été abondamment étudiés. Leurs performances et leurs robustesses sont connues [97, 95]. Parmi ces filtres ; le filtre adapté spatial ou le beamformer MVDR (Minimum Variance Distortionless Response) de Capon. Bien que ce filtre soit optimal pour des observations stationnaires [18], dont les enveloppes complexes sont nécessairement circulaires au second ordre [75, 33], ce beamformer devient sous-optimal pour des observations non stationnaires dont l'enveloppe complexe peut être non circulaire au second ordre. En effet, les statistiques d'ordre deux des signaux non stationnaires sont dépendantes du temps, même poly-périodiques pour signaux cyclo-stationnaires [43], de plus leurs enveloppes complexes peuvent devenir non circulaires. En conséquence, pour ce type de signaux, les filtres complexes optimaux deviennent variant dans le temps et sous certaines conditions de non circularité, linéaires au sens large WL (Widely Linear) [18] [76]. C'est à dire de la forme : $y(t) = \mathbf{w}_1^H(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_2^H(t)\mathbf{x}^*(t)$, où $\mathbf{w}_1(t)$ et $\mathbf{w}_2(t)$ sont des filtres complexes variant dans le temps.

Récemment, un beamformer WL MVDR IT a été introduit et analysé dans [21]. Ce beamformer tient uniquement compte de la non circularité des interférences. Néanmoins, malgré qu'il soit plus performant que le beamformer de Capon pour un bruit non circulaire, il demeure sous optimal pour la réception d'un signal utile non circulaire au second ordre. Cela est dû au fait qu'il n'exploite pas la non circularité de ce dernier. Afin de remédier à cette limitation, nous avons introduit et étudié les performances d'un autre beamformer WL MVDR colinéaire au beamformer WL MMSE [28]. Nous avons ainsi introduit une analyse de performances jamais faite auparavant. Ce beamformer, basé sur une décomposition orthogonale originale, prend en considération la non circularité du signal utile et des interférences.

Les beamformers MVDR linéaires et linéaires au sens large optimisent des critères statistiques à l'ordre deux. Ainsi, leurs optimalités ne sont garanties que pour des observations gaussiennes, car la non gaussianité s'observe que sur des moments d'ordres supérieurs à deux. Généralement en radiocommunications numériques, il est rare qu'un signal modulé soit gaussien. Nous n'avons donc aucune raison de supposer que les filtres optimaux soient linéaires ou linéaires au sens large.

À notre connaissance, l'exploitation de la non gaussianité des observations pour des applications de beamforming à travers une implémentation MVDR non linéaire n'a été que rarement étudiée. Comme par exemple dans [31] et [6] à travers l'utilisation d'une classe particulière de filtres non linéaires, en l'occurrence les filtres de Volterra [83]. Ces travaux ont proposé des beamformers non linéaires, à structure dite partielle, adapté pour la réception d'un signal utile noyé dans un bruit total non gaussien et circulaire. Cependant, pour des brouilleurs non gaussiens et non stationnaires dont les enveloppes complexes peuvent aussi être non circulaires, ces beamformers deviennent sous optimaux. Cette sous optimalité est due au fait qu'ils n'exploitent pas l'information de non circularité du bruit en plus de celle de non gaussianité. C'est dans ce contexte que nous avons introduit un beamformer MVDR non linéaire de Volterra, à structure GSC dite complète, exploitant conjointement la non circularité et la non gaussianité du bruit. Ce beamformer est optimal pour la réception d'un signal utile

inconnu, perturbé par des brouilleurs non gaussiens potentiellement non circulaires.

Par ailleurs, l'exploitation de la non circularité des signaux en détection d'un signal connu a reçu une grande attention ces derniers temps. En particulier, une approche de filtrage adapté en présence d'un bruit total non circulaire au second ordre a été présentée en 1969 dans [11] et [99] pour respectivement des applications radar et radio communications. Cette approche est donnée sous la condition restrictive d'un signal complètement connu. Par ailleurs, des approches alternatives sont développées sous la même condition restrictive d'un signal complètement connu. Il s'agit des travaux présentés dans [4] et [78] utilisant respectivement le critère de déflexion et le GLR. D'autres travaux sur la détection optimale dans un contexte non circulaire ont été menés dans [44, 12, 87, 88]. En revanche, le véritable problème d'intérêt pratique, consiste à détecter un signal connu de paramètres inconnus (par exemple : amplitude, phase, vecteur directionnel) noyé dans un bruit potentiellement non circulaire. Or, ce problème n'a été que très peu étudié. C'est dans ce contexte que nous avons abordé ce problème en étudiant théoriquement les performances de certains détecteurs introduits. Nous avons aussi complété l'étude existante par des simulations Monte-Carlo de l'ensemble des détecteurs présentés dans [22].

Que ce soit en beamforming ou en détection, il a été montré dans [77, 87, 37] que l'exploitation, par plusieurs algorithmes de second ordre, de l'information statistique additionnelle contenue dans la seconde matrice de covariance $\mathbf{C}_x = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)$ apporte des gains significatifs en performances par rapport à l'utilisation de la matrice $\mathbf{R}_x = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^H)$ uniquement. En outre, certains de ces algorithmes [1], qui sont adaptés aux signaux non circulaires au second ordre, échouent ou souffrent d'une convergence très lente quand ils sont utilisés pour des signaux circulaires. Par conséquent, la question que l'on peut se poser est par quel moyen peut-on classifier un signal comme circulaire ou non ? Ainsi, ce problème peut être considéré comme un test binaire à deux hypothèses $H_0 : \mathbf{C}_x = \mathbf{O}$ contre $H_1 : \mathbf{C}_x \neq \mathbf{O}$. En pratique les paramètres \mathbf{R}_x et \mathbf{C}_x sont souvent inconnus, alors seul le détecteur du test du rapport de vraisemblance généralisé GLRT (Generalized Likelihood Ratio Test) peut être utilisé.

Pour des échantillons d'observations gaussiens, indépendants et identiquement distribués, ce problème a été étudié [73, 88]. Le détecteur GLRT de non circularité a été introduit et ses performances ont été illustrées uniquement par des simulations Monte-Carlo. Dans [98], le GLRT est étudié en formulant ce test en terme de vecteurs aléatoires gaussiens réels. Une analyse théorique de la distribution asymptotique du GLR sous l'hypothèse H_0 y est donnée. C'est aussi dans ce contexte que nous avons complété cette analyse. Nous avons ainsi dérivé la distribution asymptotique du GLR de non circularité sous l'hypothèse de distribution gaussienne mais utilisée pour une distribution arbitraire non nécessairement gaussienne des données sous H_0 et H_1 . Les données considérées sont indépendantes mais non nécessairement identiquement distribuées, ce qui permet de traiter des situations pratiques où les données non circulaires sont perturbées par un résidu de porteuse et du bruit gaussien circulaire.

L'objectif à travers cette thèse est d'étudier ces problématiques en s'affranchissant des hypothèses de circularité des signaux, que ce soit le signal utile ou le bruit, et de gaussianité du bruit dans certains cas. Cette étude consiste d'une part à étendre l'exploitation de la non circularité du signal utile et d'autre à compléter de récents travaux par une analyse de performances théoriques.

Cette thèse est organisée en trois parties :

La première partie est la partie généralités. Elle est composée uniquement du chapitre 1. Dans le chapitre **[Chapitre 1]**, nous avons rappelé les définitions de diverses propriétés statistiques utilisées dans ce document. Notamment les définitions de la non circularité des variables et des vecteurs aléatoires et celles des moments et cumulants aux ordres supérieurs. Nous avons par la suite rappelé le coefficient de non circularité à l'ordre deux d'un signal introduit par Delmas dans [38]. Ce coefficient appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ caractérise le degré de non circularité. Il est égal à 0 pour des signaux circulaires et allant jusqu'à 1 pour des signaux rectilignes. Enfin, nous avons terminé ce chapitre par une typologie de signaux présentant un caractère non circulaire d'ordre deux et une étude de la non circularité au second ordre de quelques modulations CPM (Continuous Phase Modulation).

La deuxième partie est la partie beamforming, composée des chapitres 2, 3 et 4. Le chapitre **[Chapitre 2]** est considéré comme un état de l'art sur le beamforming linéaire, il consiste à rappeler les différentes approches de beamforming linéaire standard optimal pour des signaux stationnaires et circulaires. Il sera référencé dans le chapitre 3 et 4. Le chapitre **[Chapitre 3]** est consacré au beamforming linéaire au sens large. Nous avons d'abord présenté les différents concepts de beamforming linéaire au sens large optimaux pour la réception de signaux non circulaires au second ordre. Puis nous avons introduit et étudié un nouveau récepteur linéaire au sens large MVDR pour la réception d'un signal utile inconnu potentiellement non circulaire corrompu par des interférences également potentiellement non circulaires. Nous avons terminé ce chapitre par la présentation de quelques mises en œuvre. Le chapitre **[Chapitre 4]** est consacré au beamforming non linéaire. Nous avons introduit un filtre complexe MVDR de Volterra exploitant les deux propriétés de non circularité (à tout ordre) et la non gaussianité du bruit. Nous avons proposé par la suite une implémentation GSC équivalente. Nous avons terminé ce chapitre par une étude de performances en SINR.

La troisième partie est la partie détection, composée des chapitres 5 et 6. Le chapitre **[Chapitre 5]** est consacré à l'analyse de performances statistiques de récepteurs (LRT et GLRT) pour la détection d'un signal connu de paramètres inconnus (par exemple : amplitude, phase, vecteur directionnel) noyé dans un bruit potentiellement non circulaire de matrices de covariance inconnues. Ainsi, nous avons réalisé une étude théorique des distributions des statistiques associées au LRT et au GLRT. Cette étude a permis de donner les expressions théoriques exactes des probabilités de détection et de fausse alarme des récepteurs LRT, et celles asymptotiques pour certains récepteurs GLRT. De plus nous avons complété l'analyse de performances existante par des simulations Monte-Carlo en courbes de caractéristiques opérationnelles du récepteur (ROC, Receiver Operating Characteristics) pour l'ensemble des récepteurs. Le chapitre **[Chapitre 6]** est consacré à l'étude de la détection de non circularité au SO d'un signal aléatoire complexe. Nous avons donné la distribution asymptotique du GLR de non circularité dérivé sous l'hypothèse de distribution gaussienne mais utilisée pour une distribution arbitraire non nécessairement gaussienne des données. Ces données considérées sont indépendantes mais non nécessairement identiquement distribuées, ce qui permet de traiter des situations pratiques où les données non circulaires sont perturbées par un résidu de fréquence et du bruit additif gaussien circulaire.

Première partie

Généralités

Chapitre 1

Circularité et modulations

Sommaire

1.1 Introduction	19
1.2 Circularité d'un vecteur aléatoire	21
1.3 Statistiques d'ordre supérieurs	22
1.4 Typologie des principales modulations présentant un caractère non circulaire à l'ordre deux	23
1.5 Étude de la non circularité d'ordre deux instantané de certaines modulations CPM	28

1.1 Introduction

Les variables, vecteurs ou signaux aléatoires complexes sont largement utilisés dans plusieurs branches du traitement du signal. Dans le domaine temporel, le meilleur exemple de signal aléatoire complexe est le signal analytique qui apparaît dans la définition de l'amplitude et de la phase instantanée. Dans le domaine fréquentiel, il est évident que les composantes de Fourier d'un signal aléatoire sont souvent des variables aléatoires complexes.

L'étude statistique au second ordre des variables ou vecteurs aléatoires complexes n'a pas introduit de difficultés supplémentaires par-rapport au cas réel dans les premiers travaux. Dans ce contexte, la variance d'une variable aléatoire complexe centrée z est $E[zz^*]$ au lieu de $E[z^2]$ pour une variable aléatoire réelle. De même la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire complexe centré \mathbf{z} est $E[\mathbf{z}\mathbf{z}^H]$ au lieu de $E[\mathbf{z}\mathbf{z}^T]$ dans le cas réel. En outre, tous les concepts de convergence en moyenne quadratique, donc l'espace de Hilbert des variables aléatoires peut facilement être étendu au second ordre du cas réel au cas complexe. Cependant, quelques problèmes apparaissent en traitant les concepts de fonction de répartition, de densité de probabilité ou de fonction caractéristique.

En effet, la fonction de répartition $F(Z)$ d'une variable aléatoire réelle z correspond à la probabilité $p(z \leq Z)$, or le concept d'inégalité est dépourvu de sens dans le cas complexe. Dans ce cas, puisque l'application qui relie les corps de nombres complexes \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 est un isomorphisme, la procédure standard est d'utiliser la partie réelle et imaginaire $z = x + iy$ pour former un vecteur à deux dimensions $(x \ y)$. De même pour un vecteur aléatoire complexe $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$, il peut être remplacé par un couple de vecteurs aléatoires réelles $(\mathbf{x} \ \mathbf{y})$. Par

exemple, dans l'étude de la densité de probabilité d'un vecteur aléatoire complexe gaussien $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$, il est toujours possible de considérer que de tels vecteurs peuvent être décrits par une paire de deux vecteurs aléatoires réels gaussiens où on associe à ce couple une fonction densité de probabilité $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ qui doit induire la densité de probabilité de \mathbf{z} notée $f(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)$, car toute fonction de \mathbf{x} et \mathbf{y} peut de représenter comme une fonction de \mathbf{z} et de son conjugué \mathbf{z}^* . C'est ainsi, qu'au second ordre, pour obtenir toute l'information que véhicule le vecteur complexe \mathbf{z} on doit considérer simultanément \mathbf{z} et \mathbf{z}^* . Par conséquent la matrice de covariance $E[\mathbf{z}\mathbf{z}^H]$ ne suffit pas pour décrire cette information dans le cas où \mathbf{z} et \mathbf{z}^* sont corrélés. C'est pour cela qu'une autre quantité définie comme la seconde matrice de covariance $E[\mathbf{z}\mathbf{z}^T]$ doit être prise en considération. C'est pour cette raison que la notion de signal circulaire a été introduite [75, 33]. Ainsi, un vecteur aléatoire est dit circulaire au second ordre si $E[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] = \mathbf{O}$.

La circularité est une hypothèse qui, à l'origine, était introduite pour la définition de la fonction de densité de probabilité des vecteur complexes gaussiens. Néanmoins, ce concept est étendu, de différentes manières, aux vecteurs complexes non gaussiens. Les signaux non circulaires dont la deuxième matrice de covariance est non nulle ont été étudiés par exemple : dans [86] en radiocommunications, dans [70] en théorie de l'information et dans [87] en détection et estimation. Dans les systèmes de communications numériques, les signaux non circulaires au second ordre ont été étudiés avec un grand intérêt dans ces dernières années, par exemple dans [19, 32, 21, 96]. Parmi ces signaux, on trouve les signaux de modulation ASK, BPSK, OQPSK et certaines modulations CPM d'indice $\frac{1}{2}$, telles que les modulations MSK et GMSK.

La première partie de ce chapitre est consacrée au rappel des diverses définitions de la circularité des variables et des vecteurs aléatoires complexes et à la définition de quelques propriétés statistiques aux ordres supérieurs que nous utiliserons dans ce document. La deuxième partie est consacrée à une typologie des signaux non circulaires du second ordre et à l'étude de leurs circularités, en particulier à un rappel des modulations CPM.

1.2 Circularité d'un vecteur aléatoire

Définition 1.2.1. Un vecteur aléatoire complexe \mathbf{z} est dit circulaire (au sens fort) si les vecteurs \mathbf{z} et $\mathbf{z}e^{i\theta}$ ont les mêmes lois de probabilité quel que soit θ , autrement dit une condition nécessaire et suffisantes de circularité est que la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire complexe circulaire vérifie la relation

$$\Phi_{\mathbf{z}}(e^{i\theta}\mathbf{u}) = \Phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}), \forall \theta$$

Dans le cas particulier d'un vecteur aléatoire continu \mathbf{z} , la densité de probabilité de \mathbf{z} , si elle existe, est invariante par la multiplication par $e^{i\theta}$ c'est-à-dire que les deux vecteurs aléatoires \mathbf{z} et $\mathbf{z}e^{i\theta}$ ont la même distribution de probabilité quel que soit θ [75, 33].

Cette définition entraîne la proposition suivante [33] :

Proposition 1. Soit $\mathbf{z} = (z_1 z_2 \dots z_N)$ un vecteur aléatoire complexe, dont les moments existent à tous les ordres. Alors \mathbf{z} est dit circulaire si et seulement si tous ses moments de la forme

$$\mu_{pq} = \mathbb{E} \left[\prod_{\sum a_i = p} z_i^{a_i} \prod_{\sum b_j = q} z_j^{*b_j} \right]$$

sont nuls dès que $p \neq q$.

Diverses définitions de la circularité ont été analysées en profondeur dans [75, 33]. Dans ce document, nous utiliserons la définition restrictive suivante :

Définition 1.2.2. On dira qu'un vecteur aléatoire complexe $\mathbf{z} = (z_1 z_2 \dots z_N)$, dont les différents moments sont définis, est circulaire à l'ordre r s'il vérifie

$$\mu_{pq} = \mathbb{E} \left[\prod_{\sum a_i = p} z_i^{a_i} \prod_{\sum b_j = q} z_j^{*b_j} \right] = 0$$

pour tout couple (p, q) d'entiers positifs tel que $p + q = r$ et $p \leq q$.

Dans ce document, nous considérons comme non circulaires à l'ordre 2, les vecteurs aléatoires complexes \mathbf{z} tel que $\mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] \neq \mathbf{O}$. De même nous considérons comme non circulaires, les variables aléatoires complexes scalaires z tel que $\mathbb{E}[z^2] \neq 0$

A partir de cette définition on a les cas particuliers suivants :

- Une variable aléatoire complexe, scalaire, centrée et circulaire vérifie $\mathbb{E}[z] = 0$, $\mathbb{E}[z^2] = 0$, $\mathbb{E}[z^2 z^*] = 0, \dots$
- Un vecteur aléatoire \mathbf{z} est circulaire à l'ordre 2 si et seulement si sa deuxième matrice de covariance est nulle c'est-à-dire $\mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] = \mathbf{O}$.
- Pour des variables gaussiennes, En utilisant la nullité des cumulants d'ordres strictement supérieurs à deux, la circularité à l'ordre deux entraîne la circularité à tous les ordres.

- Soit une variable aléatoire complexe z prenant comme valeurs les racines N -ièmes de l'unité, c'est-à-dire dans $\left\{ e^{\frac{i2\pi k}{N}}, k = 0, \dots, N-1 \right\}$, de façon équiprobable de probabilité $\frac{1}{N}$. Cette variable est circulaire à l'ordre $N-1$. Ce type de variables aléatoires est largement utilisé dans les systèmes de communications et les signaux en découlant sont appelés N -PSK (Phase Shift Keying).

1.2.1 Coefficient de non circularité d'ordre deux

Afin de quantifier la non circularité à l'ordre 2 des signaux que nous allons traiter dans ce document, nous rappelons le coefficient de non circularité d'ordre deux d'une variable aléatoire complexe défini dans [38] par :

Définition 1.2.3. Soit une variable aléatoire complexe scalaire z . On définit le coefficient de non circularité par γ , $0 \leq \gamma \leq 1$, donné par le taux suivant

$$\gamma \triangleq \frac{\mathbb{E}[z^2]}{\mathbb{E}[|z|^2]} \triangleq |\gamma|e^{i\phi}$$

où $|\gamma|$ et ϕ représentent respectivement le module et la phase de non circularité.

Selon les valeurs prise par $|\gamma| \in [0, 1]$, nous distinguons trois types de signaux :

- Signaux circulaires à l'ordre deux $|\gamma| = 0$.
- Signaux non circulaires à l'ordre deux de coefficient non maximal $0 < |\gamma| < 1$.
- Signaux non circulaires à l'ordre deux de coefficient maximal (rectilignes) $|\gamma| = 1$.

1.3 Statistiques d'ordre supérieurs

Les statistiques d'ordre supérieur à 2 étudiées dans ce document correspondent aux moments et aux cumulants d'ordre r ($r > 2$).

1.3.1 Moments

Soit un vecteur aléatoire complexe de dimension N , \mathbf{x} de composante x_i , notons, lorsqu'ils existent, $\mu_{\mathbf{x}}^r$ les moments d'ordre r de \mathbf{x} tel que

$$\mu_{\mathbf{x}}^r(\{i_j\} \{\epsilon_j\}) = \mathbb{E} [x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_r}^{\epsilon_r}], \quad (1.1)$$

où les i_r sont des entiers arbitraires satisfaisant $1 \leq i_r \leq N$, tandis que les $\epsilon_j = \pm 1$ ($1 \leq j \leq r$), avec la convention $x^1 = x$ et $x^{-1} = x^*$.

Pour une variable aléatoire complexe scalaire x , ses moments d'ordre r s'écrivent

$$\mu_x^r(\{\epsilon_j\}) = \mathbb{E} [x^{\epsilon_1} x^{\epsilon_2} \dots x^{\epsilon_r}].$$

On considère p et q les nombres d'éléments respectivement conjugués et non-conjugués dans (1.1), tel que $p + q = r$. Le moment d'ordre r de x peut ainsi s'écrire :

$$\mu_x^r = \mathbb{E} [(x^p x^{*q})],$$

qui, pour une variable aléatoire circulaire à l'ordre r est égal à zéro pour $p \neq q$ avec $p + q \leq r$.

1.3.2 Cumulants

Les cumulants d'ordre r peuvent être calculés à partir des moments d'ordres inférieurs ou égaux à r . Par exemple :

Soient z_1, z_2, z_3 et z_4 des variables aléatoires complexes scalaires et centrées ¹, alors

$$\text{Cum}(z_i) = \text{E}[z_i] = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{Cum}(z_1, z_2) = \text{E}[z_1 z_2]$$

$$\text{Cum}(z_1, z_2, z_3) = \text{E}[z_1 z_2 z_3]$$

$$\text{Cum}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \text{E}[z_1 z_2 z_3 z_4] - \text{E}[z_1 z_2] \text{E}[z_3 z_4] - \text{E}[z_1 z_3] \text{E}[z_2 z_4] - \text{E}[z_1 z_4] \text{E}[z_2 z_3]$$

Nous utiliserons dans ce document les moments normalisés d'ordre 4 et 6 définis par :

Définition 1.3.1. On appelle *kurtosis* k_x le moment normalisé d'ordre 4 d'une variable aléatoire complexe x circulaire d'ordre 4, tel que

$$k_x = \frac{\text{E}[|x|^4]}{\text{E}[|x|^2]^2},$$

de même h_x est le moment normalisé d'ordre 6 d'une variable aléatoire complexe circulaire d'ordre 6, défini par

$$h_x = \frac{\text{E}[|x|^6]}{\text{E}[|x|^2]^3}$$

1.4 Typologie des principales modulations présentant un caractère non circulaire à l'ordre deux

D'un point de vue statistique, un signal aléatoire sera dit non circulaire au second ordre s'il existe des instants τ_1 tel que $\text{E}[x(\tau_1)^2] \neq 0$ et/ou τ_1, τ_2 tel que $\text{E}[x(\tau_1)x(\tau_2)] \neq 0$.

Dans le cas particulier de modulations numériques sur fréquence porteuse, l'amplitude complexe $x(t)$ sans résidu de porteuse, n'est, en général, pas stationnaire mais cyclostationnaire par rapport à la période symbole T . Par suite, de tels signaux $x(t)$ seront non circulaires au second ordre, s'il existe des instants τ_1 tel que $\text{E}[x(\tau_1 + kT)^2] \neq 0$ et/ou τ_1, τ_2 tel que $\text{E}[x(\tau_1 + kT)x(\tau_2 + kT)] \neq 0, \forall k, k \in \mathbb{Z}$.

D'un point de vue exploitation pratique de cette propriété de non circularité au second ordre, les moments du second ordre non nuls seront estimés par moyennes temporelles en mettant à profit l'ergodicité de $x(t)$. Ainsi par exemple :

$$\text{E}[x(\tau_1 + kT)^2] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x(\tau_1 + kT)^2,$$

qui permet d'obtenir $\text{E}[x(\tau_1 + kT)^2]$ par $\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x(\tau_1 + kT)^2$ avec $K \gg 1$.

Au contraire, dans le contexte d'écoute passive, les amplitudes complexes $x(t)$ des signaux

¹Les variables z_i peuvent être conjuguées ou non et peuvent être des éléments d'un vecteur aléatoire \mathbf{z} . Si les variables z_i ne sont pas centrées, on remplace dans ces formules z_i par $z_i - \text{E}[z_i]$.

observés après démodulation peuvent être entachés de résidus de porteuses et/ou entachés de phases inconnues. De plus la période symbole T peut être inconnue et/ ou lentement variable. Dans ces conditions, les instants τ_1, τ_2 sont inconnus et les conditions d'exploitation de la non circularité du second ordre seront beaucoup plus sévères. On a alors recours à un coefficient moyen de non circularité :

$$\gamma \triangleq \frac{\langle [z^2] \rangle}{\langle [|z|^2] \rangle} \neq 0,$$

où $\langle \rangle$ désigne une moyenne temporelle sur un horizon fini d'observation.

Les signaux dont l'amplitude complexe $x(t)$ présente de la non circularité exploitable peuvent être classés dans les familles suivantes :

1.4.1 Famille F1 : Modulations rectilignes

Analogiques :

Parmi ces modulations, on trouve la modulation d'amplitude AM (Amplitude Modulation) où l'amplitude du signal modulé est de la forme :

$$s(t) = A[1 + m(t)],$$

où A, h et $m(t)$ représentent respectivement l'amplitude de la porteuse, l'indice de modulation et le signal modulant.

Numériques :

Parmi elles, les modulations BPSK et ASK, de signal modulé en bande de base :

$$s(t) = \sum_n a_n v(t - nT), \quad (1.2)$$

où T est la durée symbole, $v(t)$ est le filtre de mise en forme réel et a_n sont les symboles réel tel que par exemple :

$$\begin{array}{ll} \text{BPSK} & a_n \in \{+1, -1\} \\ \text{2M - ASK} & a_n \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2M - 1)\} \end{array}$$

1.4.2 Famille F2 : Modulations linéaires QAM rectangulaires

Ces modulations sont linéaires et notées U - V QAM. Le signal modulé en bande base de ce type de modulation a la même forme que l'expression (1.2) sauf que dans ce cas les symboles sont complexes indépendants et identiquement distribués $a_n = a_n^R + ia_n^I$ avec :

$$\begin{array}{ll} a_n^R & \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm V\} \\ a_n^I & \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm U\} \text{ pour } U \text{ pair ou } \in \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm U\} \text{ pour } U \text{ impair,} \end{array}$$

où $V = 2v$ est toujours un nombre pair et U peut être soit pair $U = 2u$ ou impair $U = 2u + 1$. En particulier, la modulation 1- V QAM est une modulation rectiligne correspondant à la V -ASK, qui devient une modulation BPSK pour $V = 2$. La modulation 2-2QAM est une modulation circulaire au second ordre correspondant à la modulation QPSK. Dans le cas général il est

facile de montrer, après quelques calculs élémentaires, que le coefficient de non circularité γ_a des symboles d'une U - V QAM est tel que :

$$\begin{aligned}\gamma_a &= \frac{2(v^2 - u^2)}{2(v^2 + u^2) - 1} \text{ pour } U = 2u \text{ et } V = 2v \\ \gamma_a &= \frac{4v^2 - 4u(u + 1) - 1}{4v^2 + 4u(u + 1) - 1} \text{ pour } U = 2u + 1 \text{ et } V = 2v.\end{aligned}$$

À partir de ces expressions, le coefficient de non circularité peut prendre différentes valeurs de 0 à 1 selon le choix de U et V . Par exemple toutes les modulations du type $(2v)$ - $(2v)$ QAM sont circulaires au second ordre et toutes les modulations du type $(2u + 1)$ - $(2v)$ QAM sont non circulaires au second ordre.

1.4.3 Famille F3 : Modulations linéaires décalées

Parmi ces modulations on trouve les OQAM (Offset Quadrature Amplitude Modulation) et OPSK (Offset Phase Shift Keying), signal modulé en bande de base :

$$s(t) = \sum_n a_n^R v(t - nT) + ia_n^I v(t - nT - \frac{T}{2}),$$

où T est la période symbole, $v(t)$ est le filtre de mise en forme et les symboles réels a_n^R et a_n^I appartiennent, selon la modulation, à l'ensemble $\{\pm 1, \pm 3, \dots\}$ tel que :

$$\begin{aligned}\text{si : } a_n &= a_n^R + ia_n^I = e^{i\beta_n} \rightarrow \text{OPSK} \\ \text{si : } a_n &= a_n^R + ia_n^I = \alpha_n e^{i\beta_n} \rightarrow \text{OQAM}.\end{aligned}$$

On y trouve aussi la modulation $\frac{\pi}{2}$ -BPSK et la $\frac{\pi}{4}$ -QPSK dont le signal modulé est de la forme :

$$s(t) = \sum_n a_n e^{in\frac{\pi}{M}} v(t - nT),$$

où T est la période symbole, $v(t)$ est le filtre de mise en forme et tel que :

$$\begin{aligned}a_n &= \in \{\pm 1\} \text{ et } M = 2 \text{ pour } \frac{\pi}{2}\text{-BPSK} \\ a_n &= \in \{\pm 1, \pm i\} \text{ et } M = 4 \text{ pour } \frac{\pi}{4}\text{-QPSK}.\end{aligned}$$

Toutes ces modulations sont circulaires au second ordre mais peuvent présenter un caractère non circulaire en utilisant un pré-traitement de dérotation [16, 96] de $\frac{\pi}{2}$ à chaque symbole ce qui se traduit par la multiplication du signal modulé par $i^{\frac{-t}{T}}$.

1.4.3.1 La dérotation avant ou après le filtrage adapté ?

Nous allons démontrer dans cette partie que réaliser une opération de dérotation avant le filtrage adapté est équivalent à la réaliser après filtrage adapté. Ainsi, soit un signal $x(t)$ de modulation linéaire quelconque, son expression forme en bande de base s'écrit :

$$x(t) = \sum_n a_n v(t - nT),$$

après une dérotation de $i^{\frac{-t}{T}}$, le signal déroté $x_d(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} x_d(t) &= x(t)i^{\frac{-t}{T}} = \sum_n i^{\frac{-t}{T}} a_n v(t - nT) \\ &= \sum_n i^{\frac{-(t-nT)}{T}} i^{\frac{-nT}{T}} a_n v(t - nT) \\ &= \sum_n i^{-n} a_n v_d(t - nT), \end{aligned}$$

avec $v_d(t) = i^{\frac{-t}{T}} v(t)$. En utilisant le filtre adapté après dérotation, donc sur $x_d(t)$ on a :

$$\begin{aligned} y_d(t) &= x_d(t) * v_d^*(-t) \\ &= \int x_d(t-u) v_d^*(-u) du \\ &= \int x(t-u) (i^{\frac{-(t-u)}{T}}) v^*(-u) (i^{\frac{u}{T}})^* du \\ &= i^{\frac{-t}{T}} \int |i^{\frac{u}{T}}|^2 v^*(-u) x(t-u) du \\ &= i^{\frac{-t}{T}} \int v^*(-u) x(t-u) du = i^{\frac{-t}{T}} y(t) \end{aligned}$$

où $y(t) = \int v^*(-u) x(t-u) du = x(t) * v^*(-t)$. On voit bien que la dérotation suivie du filtrage adapté est équivalent au filtrage adapté suivi de la dérotation.

1.4.4 Famille F4 : Modulations à phase continue CPM

Les modulations CPM (Continuous Phase Modulation) sont des modulations non linéaires à phase continue, elle jouent un rôle important dans les systèmes de communications modernes satellites et mobiles grâce à leur propriété de module constant et leur bon compromis entre efficacité de puissance et complexité des modulateurs et démodulateurs.

Pour $nT \leq t \leq (n+1)T$, l'enveloppe complexe du signal $x(t)$ issu d'une modulation CPM s'écrit sous la forme ($n \geq 0$) :

$$x(t) = A e^{i2\pi h_k \sum_{k=0}^n a_k q(t-kT)} \triangleq A e^{i\Phi(t)} \quad (1.3)$$

où T , A et h_n représentent la durée symbole, l'amplitude constante et la séquence d'indices de modulation respectivement et où nous avons imposé $\Phi(0) = 0$. Dans ce document, on ne traite que les CPM mono-indice où $h_n = h \forall n$, tel que l'indice de modulation est fixe pour tous les symboles. Les a_k représentent les symboles M-aires réels équiprobables pris dans l'alphabet $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)$ où M est généralement une puissance de deux. $q(t)$ est la réponse en phase du signal vérifiant la normalisation suivante :

$$q(t) = \int_{-\infty}^t g(v) dv = \begin{cases} 1/2 & : t \geq LT \\ 0 & : t \leq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

où $g(t)$ est une fonction bornée à support sur l'intervalle $[0, LT]$ représentant l'impulsion de mise en forme de longueur LT , tel que

$$\int_0^{LT} g(t) dt = 1/2.$$

1.1.4 Typologie des principales modulations présentant un caractère non circulaire à l'ordre deux

La forme de l'impulsion de mise en forme $g(t)$ engendre plusieurs types de CPM dont quelques exemples sont donnés par le tableau suivant :

L-REC (REctangular)	$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} & : 0 \leq t \leq LT \\ 0 & : \text{ailleurs} \end{cases}$
L-RC (Raised Cosine)	$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} [1 - \cos \frac{2\pi t}{LT}] & : 0 \leq t \leq LT \\ 0 & : \text{ailleurs} \end{cases}$
GMSK	$g(t) = g_c(t - \frac{LT}{2}) \text{ avec } g_c(t) = \frac{1}{2T} \left[Q \left(2\pi B \frac{t - \frac{T}{2}}{\sqrt{\ln 2}} \right) - Q \left(2\pi B \frac{t + \frac{T}{2}}{\sqrt{\ln 2}} \right) \right]$ où $Q(u) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$

TABLE 1.1 – Différentes impulsions de mise en forme pour les modulations CPM

Remarque 1. Dans le cas où $g(t) = 0$ pour $t > T$ correspondant au cas $L = 1$, on parle de modulations CPM à réponse totale. Les CPM à réponse partielle sont définies par $g(t) \neq 0$ pour $t > T$ correspondant au cas $L > 1$.

La phase $\Phi(t)$ du signal CPM mono indice peut s'écrire pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= 2\pi h \int_{-\infty}^t \sum_{k=0}^n a_k g(t - kT) dt \\ &= 2\pi h \sum_{k=0}^n a_k q(t - kT) + \phi_0, \end{aligned}$$

où $\phi_0 = 0$. En utilisant l'expression de $q(t)$ donnée par l'équation (1.4), la phase $\Phi(t)$ peut alors s'écrire $nT \leq t \leq (n+1)T$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \pi h \sum_{k=0}^{n-L} a_k + 2\pi h \sum_{k=n-L+1}^n a_k q(t - kT) \\ &= \pi h \sum_{k=0}^{n-L} a_k + 2\pi h \sum_{k=0}^{L-1} a_{n-k} q(t - (n-k)T). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Remarque 2. La différence de phase entre les instants nT et $(n+1)T$ est :

$$\Phi((n+1)T) - \Phi(nT) = 2\pi h \sum_{k=0}^{L-1} a_{n-k} [q((k+1)T) - q(kT)],$$

qui devient pour $L = 1$, $\Phi((n+1)T) - \Phi(nT) = \pi h a_n$ ainsi à chaque symbole a_n , on a une augmentation de $\pi h a_n$ pour la phase.

1.5 Étude de la non circularité d'ordre deux instantané de certaines modulations CPM

Dans cette partie, l'étude de la non circularité à l'ordre deux se base sur le calcul des variations du module de non circularité instantané $|\gamma_t|$, sur une durée symbole, pour différents types de CPM à alphabet binaire ($a_i \in \{-1, +1\}$) et quaternaires ($a_i \in \{-1, +1, -3, +3\}$).

À partir des équations (1.3) et (1.5), l'enveloppe complexe d'un signal CPM mono indice quelconque s'écrit pour $nT \leq t \leq (n+1)T$:

$$x(t) = Ae^{i(\pi h \sum_{k=0}^{n-L} a_k + 2\pi h \sum_{k=0}^{L-1} a_{n-k} q(t-(n-k)T))}. \quad (1.6)$$

Le coefficient de non circularité d'ordre deux instantané s'écrit :

$$\gamma_t = \frac{E[x(t)^2]}{E[|x(t)|^2]} = E[e^{i(2\pi h \sum_{k=0}^{n-L} a_k + 4\pi h \sum_{k=0}^{L-1} a_{n-k} q(t-(n-k)T))}], \quad (1.7)$$

car $E[|x(t)|^2] = 1$.

Nous nous intéresserons d'abord aux différentes modulations CPM où les symboles réels appartiennent à un alphabet binaire ($a_i \in \{-1, +1\}$) et nous verrons par la suite des cas particulier où les symboles appartiennent à un alphabet quaternaire $a_i \in \{-1, +1, +3, -3\}$.

D'après l'indépendance des symboles $(a_k)_{k \geq 0}$, l'équation (1.7) s'écrit :

$$\gamma_t = \prod_{k=0}^{n-L} E[e^{i(2\pi h a_k)}] \prod_{k=0}^{L-1} E[e^{i(4\pi h a_{n-k} q(t-(n-k)T))}],$$

Ainsi, le coefficient de non circularité d'ordre deux instantané γ_t devient pour $t = \tau + nT$, $\tau \in [0, T]$:

$$\gamma_t = (\cos 2\pi h)^{n-L+1} \prod_{k=0}^{L-1} \cos [4\pi h q(\tau + kT)]. \quad (1.8)$$

1.5.1 CPM à réponse totale

Dans ce cas $L = 1$. Parmi ces CPM on trouve les 1-REC (voir tableau 1.1), cette modulation est largement utilisée en communications sous le nom CPFSK (Continuous Phase Frequency-Shift Keying). Par la suite, selon les valeurs que prend l'indice de modulation on distingue :

1.5.1.1 Indice de modulation $h = \frac{1}{2}$

Dans ce cas, la modulation CPFSK est appelée MSK (Minimum Shift Keying). Le coefficient de non circularité instantané s'écrit pour $t = \tau + nT$

$$\gamma_t = (\cos \pi)^n \cos(2\pi q(\tau)).$$

Ce coefficient est dépendant de l'instant t , en prenant la moyenne des échantillons aux instants pairs et impairs, la moyenne de ce coefficient de non circularité au second ordre est nulle. Afin de rendre ce coefficient non nul, on utilise une dérotation de $\frac{\pi}{2}$ pour chaque symbole. En effet la multiplication par $i^{\frac{-t}{T}}$ du signal en bande de base permet d'obtenir un coefficient de non

1.1.5 Étude de la non circularité d'ordre deux instantané de certaines modulations CPM

circularité moyen non nul, qui est maximal et égal à 1 pour la MSK. Le signal obtenu après dérotation, noté $x_d(t)$, s'écrit :

$$x_d(t) = i^{\frac{-t}{T}} x(t).$$

Aux instants $t = nT$, la dérotation se fait par multiplication des échantillons $x(nT)$ par i^{-n} . On définit par $\gamma_{t,d}$ le coefficient de non circularité instantané après dérotation qui, dans le cas général, est donné par :

$$\gamma_{t,d} = \frac{\mathbb{E}[x_d(t)^2]}{\mathbb{E}[|x_d(t)|^2]} = \mathbb{E}\left[e^{-\frac{i\pi t}{2T}} e^{i(2\pi \sum_{k=0}^{n-L} a_k + 4\pi \sum_{k=0}^{L-1} a_{n-k} q(t - (n-k)T))}\right].$$

Pour $t = \tau + nT$ avec $\tau \in [0, T]$, $L = 1$ et $h = \frac{1}{2}$, $|\gamma_{t,d}|$ s'écrit :

$$|\gamma_{t,d}| = \cos(2\pi q(\tau)),$$

à partir de cette expression, $\gamma_{t,d}$ est indépendant de l'instant nT et de module égal à 1 en échantillonnant au rythme symbole. Ce qui signifie que le coefficient de non circularité moyen est égal à 1 et donc le signal MSK devient rectiligne en échantillonnant au rythme symbole.

Les figures 1.1(a) et 1.1(b) montrent les variations du module de non circularité $|\gamma_{t,d}|$ pour les modulations dérotées MSK et 1-RC $h = \frac{1}{2}$ respectivement en fonction de l'instant d'échantillonnage τ . On voit bien qu'en échantillonnant au rythme symbole ($\tau = 0$ ou $\tau = T$), ces deux modulations dérotées sont devenues purement rectilignes $|\gamma_t| = 1$. Par contre, en échantillonnant aux demi rythmes symbole ($\tau = \frac{T}{2}$) le coefficient de non circularité moyen serait nul et la dérotation n'aurait rien apporté dans ce cas.

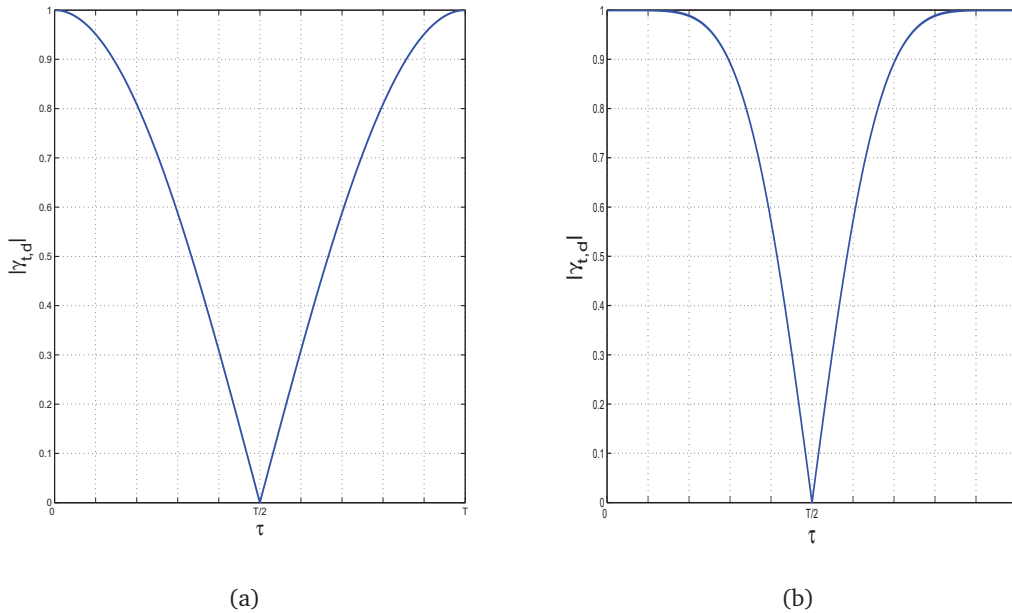


FIGURE 1.1 – Variations du module de non circularité instantané $|\gamma_{t,d}|$, alphabet binaire, pour : MSK dérotée (a), 1-RC dérotée $h = \frac{1}{2}$ (b)

1.5.1.2 Indice de modulation $h = 1$

Le module du coefficient de non circularité instantané $|\gamma_t|$ est donné par :

$$|\gamma_t| = |\cos(4\pi q(\tau))|.$$

On note de cette expression que le coefficient de non circularité moyen des CPM à réponse totale avec un indice de modulation $h = 1$, est non nul en échantillonnant au rythme symbole car $q(0) = 0$ et $q(T) = \frac{1}{2}$.

Les figures 1.2(a) et 1.2(b) montrent les variations du module du coefficient non circularité pour les modulations 1-REC($h = 1$) et 1-RC($h = 1$) respectivement en fonction de l'instant d'échantillonnage. Ces figures montrent bien qu'en échantillonnant au rythme symbole ainsi qu'au demi rythme symbole, ces coefficient sont non nuls et égaux à 1.

1.5.1.3 Indice de modulation $h = \frac{1}{4}$

A partir de la relation (1.8), $|\gamma_t| = 0$ quel que soit l'instant d'échantillonnage, ce qui signifie que toutes les modulations CPM à réponse totale avec $h = \frac{1}{4}$ ont un coefficient de non circularité moyen nul.

Pour d'autres indices de modulation, le coefficient de non circularité moyen varie selon la valeur de h . Dans certains cas comme $h = \frac{3}{2}$ ce coefficient moyen est nul car selon la relation (1.8), en moyennant sur les instants pairs et impairs le coefficient de non circularité est nul. Dans d'autres cas, comme $h = \frac{1}{8}$, le module du coefficient de non circularité instantané est toujours non nul et inférieur à 1 pour cette valeur d'indice de modulation et en échantillonnant au rythme symbole.

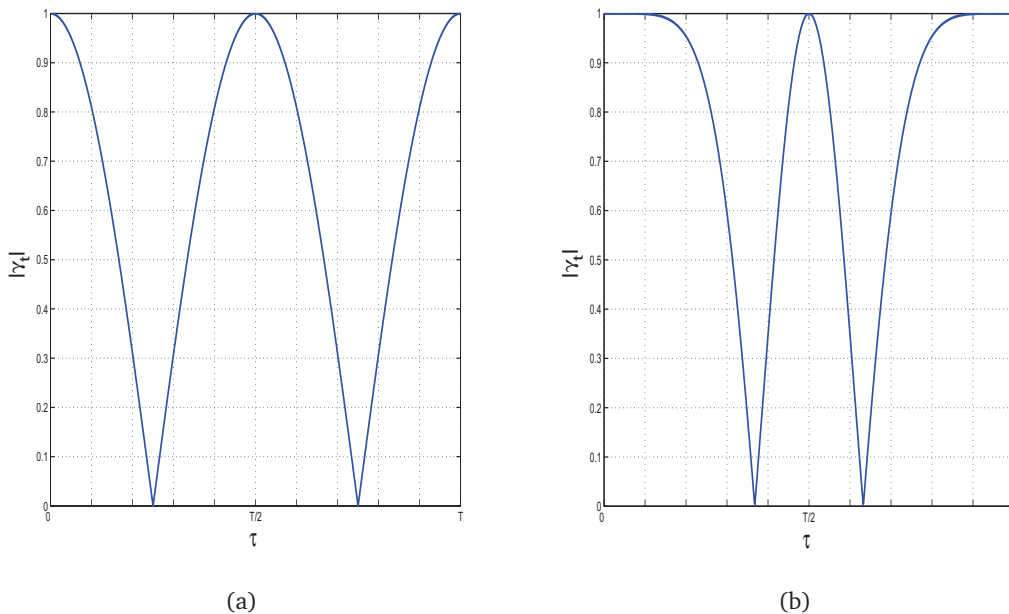


FIGURE 1.2 – Variation du module de non circularité instantané $|\gamma_t|$, alphabet binaire, pour : 1-REC, $h = 1$ (a), 1-RC $h = 1$ (b)

1.5.2 CPM à réponse partielle

Dans ce cas $L > 1$. La non circularité de ces modulation, pour un indice de modulation donné, varie selon L et sa parité, on a ainsi :

1.5.2.1 Indice de modulation $h = \frac{1}{2}$

Le coefficient de non circularité instantané s'écrit pour $t = \tau + nT$:

$$\gamma_t = (-1)^{n-L+1} \prod_{k=0}^{L-1} \cos(2\pi q(\tau + kT))$$

En prenant la moyenne sur les instants pairs et impaire, ces CPM d'indice $h = \frac{1}{2}$ ont un coefficient de non circularité moyen nul quel que soit L . Alors, comme dans le cas où $L = 1$, on utilise un pré-traitement de dérotation, $x_d(t) = e^{-\frac{t}{T}} x(t)$ afin de rendre ce coefficient non nul. Dans ce cas, le coefficient de non circularité instantané des signaux dérotés s'écrit :

$$\gamma_{t,d} = (-1)^{-L+1} \prod_{k=0}^{L-1} \cos(2\pi q(\tau + kT)),$$

on constate que $\gamma_{t,d}$ est indépendant de l'instant nT . Alors, en prenant la moyenne sur tout les échantillons pairs et impairs, le coefficient de non circularité moyen de ces signaux CPM à réponse partielle d'indice de modulation $h = \frac{1}{2}$ dérotés devient non nul aux instants d'échantillonnage rythme symbole et de module dépendant de L et la forme de $q(t)$.

Les variations de $|\gamma_{t,d}|$ en fonction de l'instant d'échantillonnage τ sont données, pour différentes valeurs de L , par les figures 1.3(a) et 1.3(b) respectivement les signaux L-REC et L-RC.

On note sur ces figures que le coefficient de non circularité moyen de ces signaux devient non nul mais pas égal à 1 et ceci selon la parité de L . Ainsi d'après la figure 1.3, en échantillonnant au rythme symbole ($\tau = 0$ où $\tau = T$), ce coefficient est nul pour des CPM dérotés avec $h = \frac{1}{2}$ et L pair. Pour L impair, ce coefficient devient non nul inférieur à 1 et qui diminue en augmentant la valeur de L . Par contre, en échantillonnant au demi rythme symbole, ce sont les coefficients des CPM avec L pair qui deviennent non nuls. On remarque aussi que le coefficient de non circularité des CPM à cosinus surélevé RC est plus élevé que celui des CPM rectangulaires REC.

1.5.2.2 Indice de modulation $h = 1$

Dans ce cas, le module du coefficient de non circularité instantané s'écrit pour $t = \tau + nT$:

$$|\gamma_t| = \left| \prod_{k=0}^{L-1} \cos(4\pi q(\tau + kT)) \right|,$$

on constate que $|\gamma_t|$ est indépendant de n donc en moyennant sur tout les échantillons, la module du coefficient de non circularité moyen de tels modulations dépend directement du coefficient instantané selon L (pas besoin de dérotation).

Les figures 1.4(a) et 1.4(b) représentent les variations du module coefficient de non circularité instantané $|\gamma_t|$ en fonction de l'instant d'échantillonnage τ , alphabet binaire, pour respectivement les modulations L-REC ($h = 1$) et L-RC ($h = 1$). Ainsi, on constate que

uniquement pour $L = 2$, le coefficient de non circularité moyen est égal à 1 ($|\gamma_t| = 1$) aux instants d'échantillonnage au rythme symbole, ce taux diminue rapidement en augmentant la valeur de L .

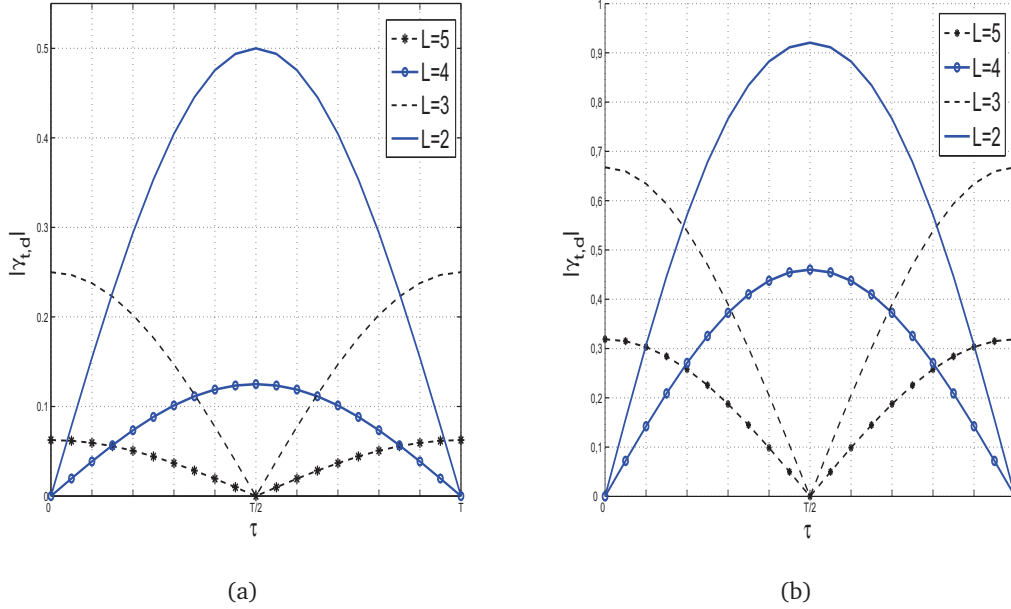


FIGURE 1.3 – Variation du module de non circularité instantané $|\gamma_t|$ pour : L-REC, $h = \frac{1}{2}$ (a), L-RC $h = \frac{1}{2}$ (b)

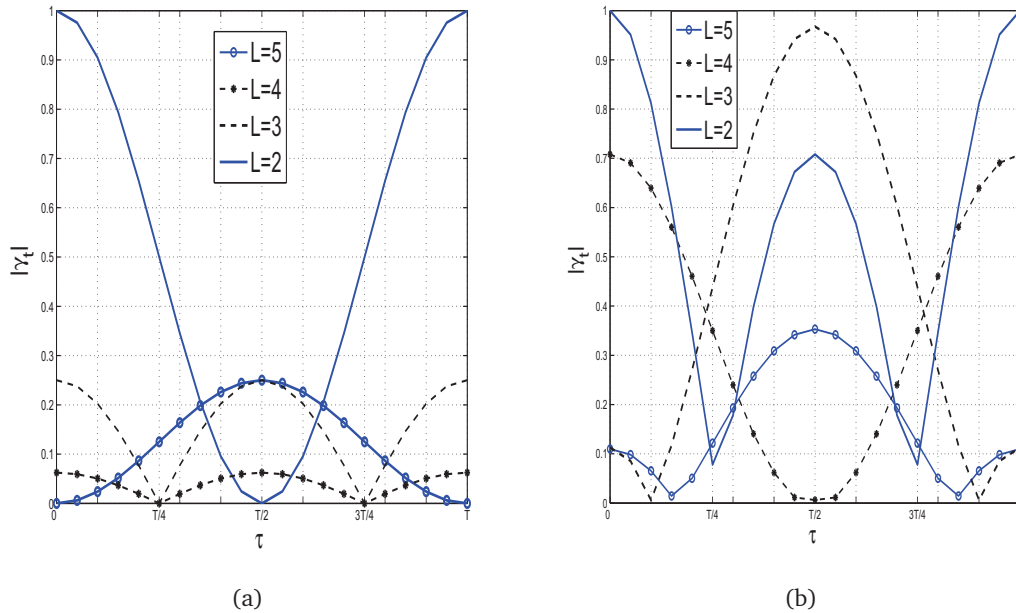


FIGURE 1.4 – Variation du module de non circularité instantané $|\gamma_t|$ pour : L-REC, $h = 1$ (a), L-RC $h = 1$ (b)

1.5.3 La modulation GMSK

La modulation GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying) utilisée dans le système de téléphonie mobile européen de deuxième génération GSM (Global System for Mobile communications) est un cas particulier des modulations CPM d'indice $h = \frac{1}{2}$ avec une impulsion de mise en forme $g(t)$ gaussienne. L'impulsion $g(t)$ est le résultat d'un filtrage d'une fonction porte $p(t)$ de longueur T par une fonction gaussienne $h(t)$ tel que :

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T} & \text{pour } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma T} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2 T^2}}$$

$$g_c(t) = h(t) \otimes p(t) = \frac{1}{2T} \left[Q\left(2\pi B \frac{t - \frac{T}{2}}{\sqrt{\ln 2}}\right) - Q\left(2\pi B \frac{t + \frac{T}{2}}{\sqrt{\ln 2}}\right) \right]$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t g_c(u) du \quad \text{avec } g_c(t) = g_c\left(t - \frac{LT}{2}\right)$$

où $Q(u) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$. L'impulsion $g_c(t)$ est symétrique par rapport à zéro et de support $[-\frac{LT}{2}, +\frac{LT}{2}]$, où LT représente le support de la partie significative de l'impulsion centrée $g_c(t)$. Cette impulsion vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} g_c(t) dt = \frac{1}{2}$. La variance σ^2 de la gaussienne est en général exprimée à travers un paramètre B lié à la décroissance à 3 dB de la densité spectrale de puissance de la modulation, tel que :

$$\sigma = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi BT},$$

En général pour le système GSM : $BT = 0.3$ qui correspond à $L = 3$ qui réalise un bon compromis entre la largeur du spectre de la GMSK et l'amplitude de ses lobes secondaires. La forme de $g(t)$ pour plusieurs valeurs de BT ainsi que la forme de la réponse en phase $q(t)$ sont respectivement représentées par la figures 1.5(a) et 1.5(b).

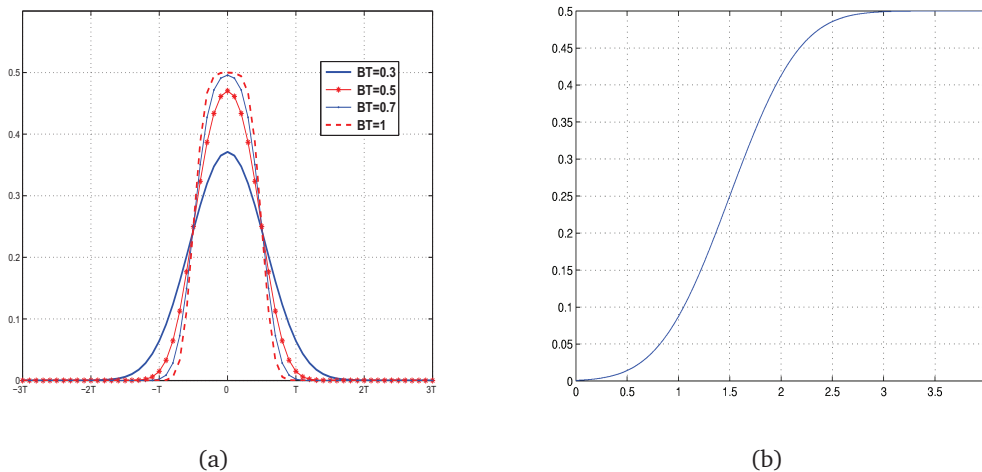


FIGURE 1.5 – $g(t)$ (a) et $q(t)$ (b) pour différentes valeurs de BT pour la GMSK

La GMSK est un cas particulier des modulations CPM à réponse partielle avec un indice de modulation $h = \frac{1}{2}$. Pour rendre le coefficient de non circularité moyen non nul aux instants d'échantillonnage et ainsi exploiter l'apport de la non circularité pour améliorer les performances, nous utilisons aussi un pré-traitement de dérotation.

Comme dans le cas général des CPM à réponse partielle $h = \frac{1}{2}$, le module du coefficient de non circularité instantané des signaux GMSK dérotée s'écrit :

$$|\gamma_{t,d}| = \left| \prod_{k=0}^{L-1} \cos(2\pi q(\tau + kT)) \right|.$$

En échantillonnant au rythme symbole $\tau = 0$ ou $\tau = T$, le module $|\gamma_{t,d}|$ est différent de zéro. Néanmoins, on constate que $|\gamma_{t,d}|$ est toujours inférieur à 1. En effet, comme illustré sur les figures 1.6(a) et 1.6(b), $|\gamma_{t,d}|$ n'est pas égal à 1 en échantillonnant au rythme symbole mais atteint des valeurs proches de 1 et tend vers 1 quand BT tend vers l'infini (dans ce cas la GMSK tend vers une MSK).

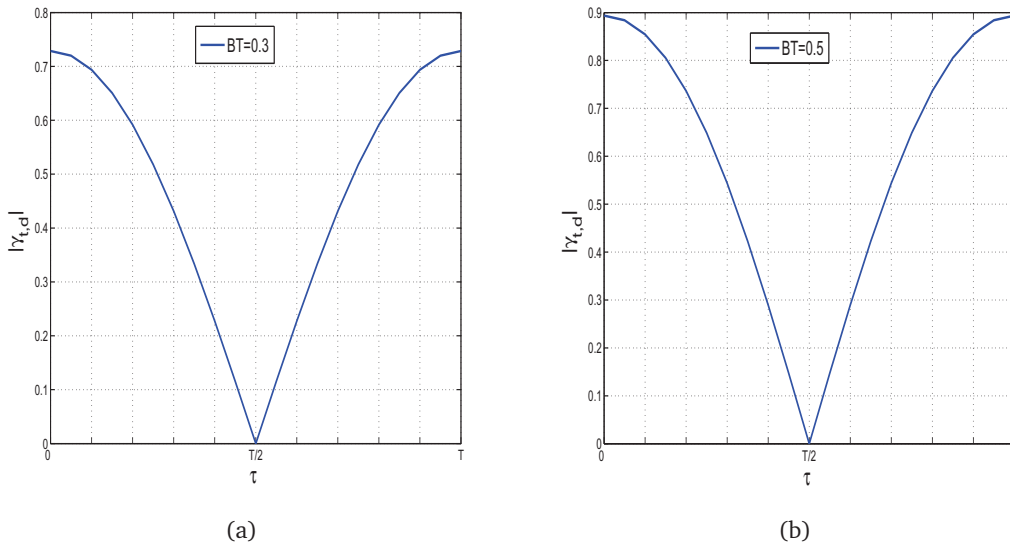


FIGURE 1.6 – Variation de du coefficient de non circularité instantané $\gamma_{t,d}$, alphabet binaire, pour : GMSK dérotée $BT = 0.3$ (a), GMSK dérotée $BT = 0.5$ (b)

1.5.4 Les CPM quaternaires

Dans ce cas, les symboles appartiennent à un alphabet quaternaire $a_i \in \{-1, +1, +3, -3\}$. Comme dans le cas binaire, nous allons étudier les variations du coefficient de non circularité instantané. Ainsi, de la même manière que dans le cas binaire et l'expression générale de $|\gamma_t|$ pour $t = \tau + nT$ s'écrit de la forme :

$$\gamma_t = \left[\frac{\cos 2\pi h + \cos(6\pi h)}{2} \right]^{n-L+1} \prod_{k=0}^{L-1} \left[\frac{\cos(4\pi h q(\tau + kT)) + \cos(12\pi h q(\tau + kT))}{2} \right]$$

1.1.5 Étude de la non circularité d'ordre deux instantané de certaines modulations CPM

Dans cette partie on se contentera d'étudier uniquement les cas d'indice de modulation $h = \frac{1}{2}$. On obtient alors

$$\gamma_t = \left[\frac{\cos \pi + \cos(3\pi)}{2} \right]^{n-L+1} \prod_{k=0}^{L-1} \left[\frac{\cos(2\pi q(\tau + kT)) + \cos(6\pi q(\tau + kT))}{2} \right]$$

Il est évident qu'en moyennant sur les échantillons pairs et impairs le coefficient de non circularité moyen de ce type de modulations est nul. Afin de le rendre non nul, on peut aussi utiliser une dérotation comme celle vue dans les cas précédents. Finalement, pour ces CPM dérotées, on obtient un coefficient de non circularité instantané $\gamma_{t,d}$ de la forme :

$$|\gamma_{t,d}| = \left| \prod_{k=0}^{L-1} \left[\frac{\cos(2\pi q(\tau + kT)) + \cos(6\pi q(\tau + kT))}{2} \right] \right|,$$

on voit bien que $|\gamma_{t,d}|$ varie indépendamment de l'instant nT . Ces variations sont illustrées par les figures 1.7(a) et 1.7(b) pour respectivement des modulations quaternaires MSK et GMSK. On constate sur ces figures que pour la MSK-quaternaire, le coefficient de non circularité moyen devient égal à 1 en échantillonnant au rythme symbole tandis que pour la GMSK-quaternaire, il devient non nul et inférieur à 1. En comparant la figure 1.7(b) et les figures 1.6(a) et 1.6(b), on constate que le coefficient de non circularité de la GMSK dérotée diminue en augmentant la taille de l'alphabet.

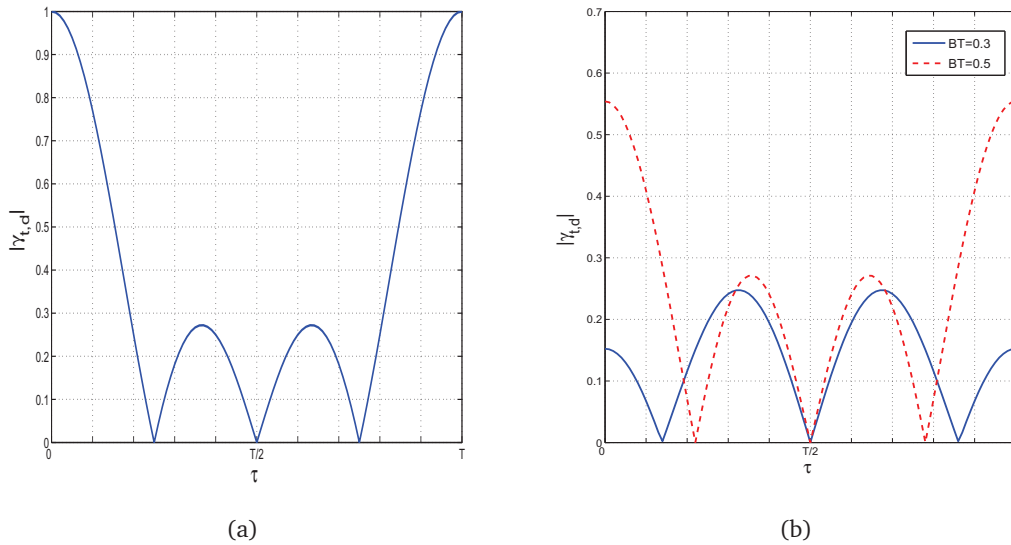


FIGURE 1.7 – Variation de du coefficient de non circularité instantané $\gamma_{t,d}$, alphabet quaternaire, pour : MSK-quaternaire dérotée (a), GMSK-quaternaire dérotée (b)

Deuxième partie

Beamforming

Chapitre 2

Beamforming linéaire

Sommaire

2.1 Introduction	39
2.2 Modélisation en bande étroite	40
2.3 Modèle classique des signaux reçus	40
2.4 Les différents critères du beamforming linéaire	41
2.5 Conclusion	48

2.1 Introduction

La formation de faisceaux ou beamforming est l'une des plus importantes techniques de traitement d'antennes, utilisée pour l'estimation des signaux et des directions d'arrivée (DOA) ainsi que dans la suppression d'interférences. Les applications du beamforming sont diverses et concernent divers secteurs comme le radar, le sonar, les communications sans fil, l'écoute passive et l'imagerie biomédicale (voir [97], [95] et leurs références).

L'objectif principal du beamforming est de trouver un filtre spatial dont la sortie correspond à une estimée du signal utile venant d'une direction particulière et potentiellement corrompu par des interférences et d'un bruit additif gaussien.

Ce chapitre peut être considéré comme un état de l'art sur le beamforming linéaire, il consiste à rappeler les différentes approches du beamforming linéaire standard optimal pour des signaux stationnaires et circulaires. Toutes les approches qu'on va présenter dans ce chapitre consistent à trouver un filtre complexe, linéaire et invariant dans le temps optimisant un critère du second ordre sous d'éventuelles contraintes. Cette introduction au beamforming linéaire nous permettra de mieux appréhender le concept de beamforming linéaire au sens large qu'on va étudier dans le chapitre suivant.

Ce chapitre est organisé comme suit :

Nous commencerons par une brève description de la modélisation en bande de base, ensuite nous présenterons en détails le modèle des signaux à la réception ainsi que leurs statistiques aux second ordre. Finalement nous présenterons les différentes approches du beamforming linéaire ainsi que leurs filtres associés.

2.2 Modélisation en bande étroite

Supposons que le milieu de propagation des ondes est homogène, c'est-à-dire que la vitesse de propagation c est constante. De plus, supposons que les sources sont très éloignées de l'antenne, de sorte que l'on peut considérer un modèle d'ondes planes. Ainsi les rayons reçus par les différents capteurs peuvent ainsi être supposés parallèles.

On considère un signal de cible complexe de fréquence porteuse f_0 et de bande passante B reçu par un réseau d'antennes composé de N capteurs. Notons $s(t)$ l'enveloppe complexe de ce signal à l'instant t . En sortie de l'antenne, le vecteur d'observation du signal cible, sans le bruit de fond, s'écrit après démodulation :

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s(t - \tau_1)e^{-i2\pi f_0 \tau_1} \\ s(t - \tau_2)e^{-i2\pi f_0 \tau_2} \\ \vdots \\ s(t - \tau_N)e^{-i2\pi f_0 \tau_N} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

où τ_n est le retard de propagation en sortie du capteur n par rapport à un capteur de référence. Lorsque le signal est à bande étroite, le temps de traversée du réseau de capteurs est négligeable devant le temps de cohérence du signal, correspondant à l'inverse de sa bande passante. Par conséquent, l'enveloppe complexe peut être supposée constante durant la traversée du réseau de sorte que l'expression (2.1) devient :

$$\mathbf{s}(t) = s(t) \begin{bmatrix} e^{-i2\pi f_0 \tau_1} \\ e^{-i2\pi f_0 \tau_2} \\ \vdots \\ e^{-i2\pi f_0 \tau_N} \end{bmatrix},$$

en notant

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} e^{-i2\pi f_0 \tau_1} \\ e^{-i2\pi f_0 \tau_2} \\ \vdots \\ e^{-i2\pi f_0 \tau_N} \end{bmatrix},$$

où \mathbf{s} le vecteur directionnel du signal de cible, qu'on appellera par la suite signal utile. Finalement on obtient :

$$\mathbf{s}(t) = s(t)\mathbf{s}.$$

Il est à noter que dans ce document nous utiliserons des vecteurs directionnels de première composante égale à 1 et lors des simulation nous avons utilisé des antennes linéaires uniformes ULA (Uniform Linear Array).

2.3 Modèle classique des signaux reçus

On considère une antenne arbitraire de N capteurs à bande étroite recevant la contribution de M sources venant de différentes directions et d'un bruit spatialement blanc, gaussien, centré et circulaire au second ordre. On note $\mathbf{x}(t)$ le vecteur des amplitudes complexes des signaux reçus à la sortie de ces capteurs. Chaque capteur reçoit la contribution d'un signal utile (SOI) mélangé à un bruit total composé d'interférences et d'un bruit de fond gaussien, centré et

circulaire.

Sous ces hypothèses, et on supposant qu'il n'y a pas de résidu de porteuse, le vecteur d'observations $\mathbf{x}(t)$ peut s'écrire de la manière suivante

$$\mathbf{x}(t) = s(t) \mathbf{s} + \mathbf{n}(t), \quad (2.2)$$

où $s(t)$ et \mathbf{s} correspondent respectivement à l'enveloppe complexe, supposée de moyenne nulle, et au vecteur directionnel du signal utile, de première composante égale à 1. $\mathbf{n}(t)$ est le vecteur du bruit total, composé par l'ensemble des signaux interférences et du bruit gaussien, de moyenne nulle, statistiquement non corrélé avec signal utile $s(t)$ et pouvant être non circulaire au second ordre.

Les statistiques d'ordre deux de l'observation $\mathbf{x}(t)$ sont complètement définies par respectivement la première et la deuxième matrice de covariance $\mathbf{R}_x(t, \tau)$ et $\mathbf{C}_x(t, \tau)$, tel que pour toutes valeurs (t, τ)

$$\mathbf{R}_x(t, \tau) \triangleq \langle E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t-\tau)^H] \rangle \text{ et } \mathbf{C}_x(t, \tau) \triangleq \langle E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t-\tau)^T] \rangle .$$

De même, les statistiques d'ordre deux du bruit $\mathbf{n}(t)$ sont définies par

$$\mathbf{R}_n(t, \tau) \triangleq \langle E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t-\tau)^H] \rangle \text{ et } \mathbf{C}_n(t, \tau) \triangleq \langle E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t-\tau)^T] \rangle ,$$

où $\langle \rangle$ désigne la moyenne sur un intervalle de temps.

Le vecteur $\mathbf{x}(t)$ (respectivement $\mathbf{n}(t)$) est dit non circulaire si $\mathbf{C}_x(t, \tau) \neq \mathbf{O}$ (respectivement $\mathbf{C}_n(t, \tau) \neq \mathbf{O}$) pour au moins un couple (t, τ) .

Dans tout ce qui suit, on définit les matrices de covariance spatiales suivantes pour $\tau = 0$:

$$\mathbf{R}_x \triangleq \langle E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H] \rangle = \pi_s \mathbf{s}\mathbf{s}^H + \mathbf{R}_n = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{C}_x \triangleq \langle E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T] \rangle = \pi_s \gamma_s \mathbf{s}\mathbf{s}^T + \mathbf{C}_n = \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_n, \quad (2.4)$$

où $\mathbf{R}_s = \pi_s \mathbf{s}\mathbf{s}^H$, $\mathbf{C}_s = \pi_s \gamma_s \mathbf{s}\mathbf{s}^T$ sont respectivement, la première et la deuxième matrice de covariance du signal utile, $\pi_s \triangleq \langle E[|s(t)|^2] \rangle$ désigne la puissance moyenne du signal utile mesurée sur le premier capteur.

Le coefficient $\gamma_s \triangleq \frac{\langle E[s(t)^2] \rangle}{\langle E[|s(t)|^2] \rangle} \triangleq |\gamma_s| e^{i2\phi_s}$ est le coefficient de non circularité moyen du signal utile, tel que ϕ_s est la phase de non circularité.

Les matrices $\mathbf{R}_n \triangleq \langle E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t)^H] \rangle$ et $\mathbf{C}_n \triangleq \langle E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t)^T] \rangle$ sont la première et deuxième matrices de covariance du bruit total. On suppose dans toute la suite que les matrices \mathbf{R}_x et \mathbf{R}_n sont de rang plein, ce qui est assuré par la présence du bruit de fond.

2.4 Les différents critères du beamforming linéaire

La principale problématique du filtrage d'antennes optimal consiste à mettre en œuvre un filtre complexe, spatial ou spatio-temporel, linéaire et invariant dans le temps (IT), noté dans tout le document \mathbf{w} , et dont la sortie $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ optimise un critère à l'ordre deux sous d'éventuelles contraintes.

Nous allons présenter dans ce qui suit les différents critères à optimiser par filtrage spatial

linéaire et nous allons voir que certains critères nécessitent la connaissance a priori de certaines informations sur le signal utile comme sa direction d'arrivée \mathbf{s} et sa puissance π_s et cela dépendra de l'application.

2.4.1 Maximisation du SINR

Dans cette partie, la problématique du filtrage d'antenne optimal consiste à mettre en œuvre un filtre \mathbf{w} qui maximise directement le SINR en sortie défini par :

$$\mathbf{w}_{\text{SINR}} = \text{Arg} \left\{ \text{Max}_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_s \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}} \right\}. \quad (2.5)$$

La solution revient alors à trouver le vecteur propre généralisé du couple de matrices $(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n)$ associé à sa plus grande valeur propre tel que $\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{R}_s \mathbf{w} = \lambda_{\text{max}} \mathbf{w}$. Le filtre \mathbf{w} maximisant ce critère est donné par :

$$\mathbf{w}_{\text{SINR}} \propto \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s} = \beta \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}, \quad (2.6)$$

où β est une constante arbitraire complexe. Le SINR à la sortie de ce filtre est maximal et tel que :

$$\text{SINR}_{\text{max}} = \pi_s \mathbf{s}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}.$$

Il est à noter que ce critère nécessite la connaissance parfaite des deux matrices \mathbf{R}_s et \mathbf{R}_n ainsi que du vecteur directionnel \mathbf{s} , ce qui est envisageable dans certaines applications comme le radar actif, aussi il nécessite la résolution d'un problème de vecteurs propres généralisés.

2.4.2 Minimisation de la puissance du bruit sous une contrainte directionnelle

Souvent appelé critère MVDR (Minimum Variance Distortionless Response) ou bien critère de Capon [14], toujours dans le cas où le vecteur directionnel \mathbf{s} est connu, ce critère consiste à trouver le filtre \mathbf{w} qui minimise la puissance du bruit à sa sortie sous une contrainte de gain unité dans la direction du signal utile. Le filtre recherché est solution de la forme hermitienne suivante

$$\text{Min}_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w},$$

sous la contrainte directionnelle

$$\mathbf{w}^H \mathbf{s} = 1. \quad (2.7)$$

La solution de cette équation est donnée par [50]

$$\mathbf{w}_{\text{MVDR}} = \frac{\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}}{\mathbf{s}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}}. \quad (2.8)$$

On constate que \mathbf{w}_{MVDR} est proportionnel au filtre (2.6), ce qui montre qu'il minimise aussi le SINR. Dans les cas où la référence du bruit seul n'existe pas, on cherche le filtre qui minimise la puissance totale de sortie $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}$ sous la même contrainte (2.7), on obtient alors un beamformer appelé beamformer de Capon ou MPDR (Minimum Power Distortionless Response) donné par

$$\mathbf{w}_{\text{Capon}} = \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}}{\mathbf{s}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}}. \quad (2.9)$$

Puisque le bruit total est décorrélé du signal utile, on peut écrire :

$$\mathbf{R}_x = \pi_s \mathbf{s} \mathbf{s}^H + \mathbf{R}_n$$

En utilisant le lemme d'inversion matricielle, on constate que les deux filtres \mathbf{w}_{MVDR} et $\mathbf{w}_{\text{Capon}}$ sont égaux. Ainsi sous ces conditions et sous la contrainte (2.7), minimiser la puissance totale de sortie est équivalent à minimiser celle du bruit seul en sortie.

2.4.3 Minimisation de la puissance de sortie sous contraintes linéaires

Appelé aussi critère LCMV (Linearly Constrained Minimum Variance) [97] [42], ce critère est considéré comme une extension du critère MVDR (2.8) à plusieurs contraintes.

Le principe de base du critère LCMV est de contraindre la réponse du filtre (du beamformer) de telle manière que ce dernier laisse passer, avec un gain et une phase spécifiée, les signaux venant de la direction du signal utile. Le beamformer est choisi de manière à minimiser la puissance de sortie sous les contraintes imposées, ceci tend à préserver le signal utile en minimisant la contribution en sortie du bruit et des interférences arrivant d'autres directions que celle de l'utile.

Le vecteur \mathbf{w} est solution du problème suivant :

$$\text{Min}_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}, \quad (2.10)$$

sous les contraintes :

$$\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{g}, \quad (2.11)$$

où \mathbf{C} est appelée matrice de contraintes de dimensions $N \times L$, où L est le nombre de contraintes supposées linéairement indépendantes et donc \mathbf{C} est de rang plein colonne, \mathbf{g} est le vecteur réponse de dimension $(L \times 1)$ contenant les gains et/ou les phases désirés.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange peut être utilisée pour résoudre ce problème [97], on obtient ainsi :

$$\mathbf{w}_{\text{LCMV}} = \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} \quad (2.12)$$

Dans le cas où il n'y a qu'une seule contrainte à imposer or $\mathbf{C} = \mathbf{s}$ et $\mathbf{g} = 1$, le beamformer LCMV de l'expression (2.12) est équivalent au beamformer MVDR donné par l'expression (2.9). Il est à noter que ce critère nécessite aussi la connaissance du vecteur directionnel du signal utile.

Dans le cas où on ne dispose pas d'une référence bruit seul de sorte que la matrice \mathbf{R}_n est inconnue, le beamformer LCMV optimal devient solution du problème de minimisation de la puissance totale de sortie suivant :

$$\text{Min}_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w},$$

la solution est donnée par :

$$\mathbf{w}_{\text{LCMP}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} \quad (2.13)$$

Ce beamformer est maintenant appelé LCMP (Linearly Constrained Minimum Power) et sous certaines conditions sur les contraintes que nous verrons au paragraphe suivant, il est équivalent au beamformer LCMV.

2.4.4 Annulateur de lobes latéraux généralisé (GSC)

L'annulateur de lobes latéraux généralisé GSC (Generalized Side-lobe Canceller) est une mise en œuvre efficace pour un filtrage d'antenne adaptatif avec contraintes linéaires. Le GSC conventionnel décrit dans [51] est constitué d'un vecteur de poids qui fournit

au réseau des informations sur des réponses spécifiées dans certaines directions et d'une matrice bloquante du signal utile conçue sur des connaissances a priori des directions d'arrivée.

Une implémentation utile du beamformer LCMV (ou LCMP) en terme GSC [97] est obtenue en divisant l'espace de dimension N en deux sous espaces orthogonaux complémentaires ¹ ; un sous espace engendré par les colonnes de la matrice de contraintes \mathbf{C} de dimension $N \times L$ et un autre orthogonal au précédent engendré par les colonnes d'une matrice \mathbf{B} de dimension $N \times (N - L)$ définissant une base quelconque de $Ker(\mathbf{C}^H)$. Cette décomposition se présente comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^N &= Range(\mathbf{C}) \oplus Ker(\mathbf{C}^H) \\ &= Range([\mathbf{C}, \mathbf{B}]), \end{aligned} \quad (2.14)$$

où les colonnes de \mathbf{B} sont linéairement indépendantes et chaque colonne de \mathbf{B} est orthogonale à chaque colonne de \mathbf{C} tel que $\mathbf{C}^H \mathbf{B} = \mathbf{O}$.

Notons que la matrice \mathbf{B} n'est pas unique, son choix permettant diverses implémentations des beamformers LCMV (ou LCMP).

En utilisant la décomposition (2.14), n'importe quel vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^N$ dont \mathbf{w}_{LCMV} , peut se décomposer de façon unique en deux composantes orthogonales \mathbf{w}_0 et $-\mathbf{B}\mathbf{w}_a$ appartenant respectivement au $Range(\mathbf{C})$ et $Ker(\mathbf{C}^H)$, telque

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 - \mathbf{B}\mathbf{w}_a$$

où \mathbf{w}_0 est une combinaison linéaire des colonnes de \mathbf{C} , soit $\mathbf{w}_0 = \alpha \mathbf{C}$, qui d'après les contraintes (2.11), satisfait ² $\mathbf{C}^H \mathbf{w}_0 = \mathbf{g}$. Par suite \mathbf{w}_0 qui est une projection orthogonale de \mathbf{w} et donné par

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g},$$

le vecteur \mathbf{w}_0 est unique et ne dépend pas de \mathbf{R}_x .

\mathbf{w}_a est un vecteur quelconque de \mathbb{C}^{N-L} pour un choix de \mathbf{B} fixé. Au sens LCMV dont la minimisation décrite par l'équations (2.10) sous les contraintes (2.11), \mathbf{w}_a est obtenu comme solution de :

$$\text{Arg} \{ \text{Min}_{\mathbf{w}_a} \langle E[|(\mathbf{w}_0 - \mathbf{B}\mathbf{w}_a)^H \mathbf{n}(t)|^2] \rangle \},$$

qui est un problème classique de Wiener dont la solution est

$$\mathbf{w}_a = (\mathbf{B}^H \mathbf{R}_n \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_0.$$

Il est à noter que dans le cas particulier où uniquement une seule contrainte directionnelle est imposée c'est-à-dire $\mathbf{C} = \mathbf{s}$ et $\mathbf{g} = 1$, le vecteur \mathbf{w}_0 devient de la forme $\mathbf{w}_0 = \|\mathbf{s}\|^{-2} \mathbf{s}$ et $\mathbf{B}^H \mathbf{s} = \mathbf{O}$. Par la suite, en utilisant l'expression de la matrice de covariance (2.3), on obtient la relation

¹Cette décomposition en sous espaces orthogonaux complémentaires implique l'unité du vecteur \mathbf{w}_0 . Celle ci permet en outre de montrer l'équivalence du beamformer LCMV en utilisant un filtrage de Wiener avec une transformée des observations $y(t)$ [48]. Mais il est aussi possible de choisir \mathbf{w}_0 comme un vecteur quelconque satisfaisant la contrainte $\mathbf{w}^H \mathbf{s} = 1$ associé à une matrice bloquante du signal utile quelconque \mathbf{B} satisfaisant $\mathbf{C}^H \mathbf{B} = \mathbf{O}$.

²Notons que $\mathbf{w}_0 = \mathbf{C}^\# \mathbf{g}$ qui permet d'interpréter \mathbf{w}_0 comme l'unique vecteur \mathbf{w} de norme euclidienne $\|\mathbf{w}\|$ minimale sous contrainte $\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{g}$.

suivante :

$$\mathbf{B}^H \mathbf{R}_x = \pi_s \mathbf{B}^H \mathbf{s} \mathbf{s}^H + \mathbf{B}^H \mathbf{R}_n = \mathbf{B}^H \mathbf{R}_n,$$

il en découle que,

$$\mathbf{w}_a = (\mathbf{B}^H \mathbf{R}_n \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_0 = (\mathbf{B}^H \mathbf{R}_x \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}_0 \text{ car } \mathbf{B}^H \mathbf{s} = \mathbf{0},$$

ainsi, on retrouve la propriété $\mathbf{w}_{\text{MVDR}} = \mathbf{w}_{\text{MPDR}}$.

Dans le cas où les contraintes linéaires sont générales, la comparaison entre \mathbf{w}_{LCMV} et \mathbf{w}_{LCMP} se fait selon le vecteur directionnel du signal utile et on distingue deux cas :

- Si $\mathbf{s} \in \text{Range}(\mathbf{C})$ alors $\mathbf{B}^H \mathbf{s} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}^H \mathbf{R}_x = \mathbf{B}^H \mathbf{R}_n$ ce qui implique que $\mathbf{w}_{\text{LCMV}} = \mathbf{w}_{\text{LCMP}}$
- Si $\mathbf{s} \notin \text{Range}(\mathbf{C})$ alors $\mathbf{B}^H \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}^H \mathbf{R}_x \neq \mathbf{B}^H \mathbf{R}_n$ donc en général $\mathbf{w}_{\text{LCMV}} \neq \mathbf{w}_{\text{LCMP}}$

Finalement, la structure du GSC est donnée par le schéma fonctionnel suivant

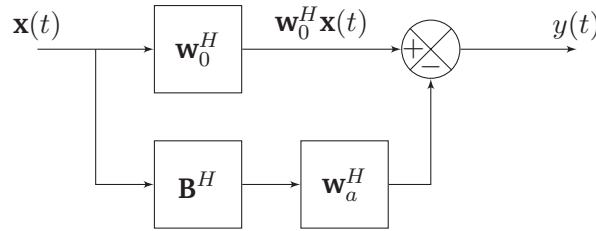


FIGURE 2.1 – Schéma fonctionnel du beamformer LCMV linéaire à structure GSC

2.4.5 Minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) sans signal de référence

Dans ce cas, on cherche un filtre \mathbf{w} solution de l'équation suivante :

$$\text{Arg} \{ \text{Min}_{\mathbf{w}} \langle E[|s(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)|^2] \rangle \}.$$

Cette solution est donnée par

$$\mathbf{w}_{\text{MMSE}_1} = \pi_s \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s},$$

et l'erreur quadratique minimale associée est

$$\text{MMSE} = \pi_s (1 - \pi_s \mathbf{s}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}).$$

Il est à noter que ce beamformer requiert la connaissance de la puissance π_s du signal utile.

2.4.6 Minimisation de l'erreur pondérée au sens des moindres carrés (WLSE)

En pratique, la connaissance de la puissance du signal utile est difficile à obtenir, ce qui rend limitée l'application du critère MMSE d'où l'utilisation du critère WLSE (Weighted Least Squares Error). Ce critère, consiste à trouver le filtre \mathbf{w}_{WLSE} dont la sortie correspond à une estimée de la séquence émise $s(t)$ qui minimise le critère des moindres carrés pondérés suivant :

$$\text{WLSE}[s(t)] = [\mathbf{x}(t) - \mathbf{s}s(t)]^H \mathbf{R}_n^{-1} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{s}s(t)]. \quad (2.15)$$

La solution conventionnelle à cette minimisation est donnée par :

$$\widehat{s}(t)_{\text{WLSE}} = \frac{\mathbf{s}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{x}(t)}{\mathbf{s}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}} \quad (2.16)$$

ainsi le beamformer WLSE correspondant s'écrit

$$\mathbf{w}_{\text{WLSE}} = \frac{\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}}{\mathbf{s}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}}, \quad (2.17)$$

qui correspond aussi au beamformer MVDR.

2.4.7 Estimation du signal utile au sens maximum de vraisemblance (ML)

Dans certains cas, le beamforming peut être vu comme un problème d'estimation du signal utile, on cherche alors un filtre \mathbf{w} dont la sortie $y(t)$ constitue une estimée du signal utile au sens ML. Pour dériver le critère ML nous supposons que $s(t)$ est déterministe et que le bruit total $\mathbf{n}(t)$ est gaussien potentiellement non circulaire et que $\mathbf{R}_n(t) \triangleq E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t)^H]$ et $\mathbf{C}_n(t) \triangleq E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t)^T]$ ne dépendent pas de t bien que $\mathbf{n}(t)$ soit généralement non stationnaire. Ces hypothèses sont omniprésentes dans la dérivation de ce critère, mais ne sont pas pour autant critiques dans le sens que l'estimée optimale issue de ces hypothèses a généralement de bonnes performances qui restent insensibles à ces hypothèses. Ainsi ce critère consiste à trouver le signal $s(t)$ qui maximise la vraisemblance définie par

$$L[s(t)] = p[\mathbf{x}(t); s(t)], \quad (2.18)$$

où $s(t)$ est un paramètre inconnu. La fonction densité de probabilité de $\mathbf{x}(t)$ est donnée par [76]

$$p[\mathbf{x}(t); s(t)] = \pi^{-N} \text{Det}(\mathbf{R}_n)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{s} s(t))^H \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{s} s(t))\right]. \quad (2.19)$$

En conséquence, maximiser (2.18) revient à minimiser (2.15). On a alors

$$\widehat{s}(t)_{\text{ML}} \triangleq \mathbf{w}_{\text{ML}}^H \mathbf{x}(t) = \mathbf{w}_{\text{MVDR}}^H \mathbf{x}(t),$$

qui aussi correspond à la sortie du beamformer MVDR.

2.4.8 Minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) avec signal de référence

Pour certaines applications en radiocommunication, le vecteur directionnel \mathbf{s} n'est pas connu, ce qui rend inutilisables les critères précédents qui nécessitent la connaissance de ce vecteur. Toutefois, dans certains cas, si on dispose de certaines informations sur le signal utile, la génération d'un signal de référence $d(t)$ proche du signal utile est possible. Il suffit alors de chercher le beamformer \mathbf{w} qui minimise la MSE entre sa sortie et ce signal de référence, ainsi on définit le critère suivant

$$\text{Arg} \left\{ \text{Min}_{\mathbf{w}} \langle E[|d(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)|^2] \rangle \right\}.$$

La solution à ce problème est donnée par le filtre de Wiener

$$\mathbf{w}_{\text{MMSE}_2} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{xd},$$

2.2.4 Les différents critères du beamforming linéaire

où le vecteur \mathbf{r}_{xd} désigne la corrélation moyenne entre l'observation $\mathbf{x}(t)$ et le signal de référence $d(t)$ et est défini par $\mathbf{r}_{xd} = \langle E[\mathbf{x}(t)d(t)^*] \rangle$, ainsi la MSE minimale associée s'écrit

$$\text{MMSE} = E[|d(t)|^2] - \mathbf{r}_{xd}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{xd}.$$

Maintenant, si la référence $d(t)$ est choisie corrélée avec le signal utile et non corrélée avec les signaux interférences et le bruit, alors $\mathbf{r}_{xd} = \langle E[s(t)d(t)^*] \rangle = \mathbf{s}$, le beamformer MMSE s'écrit

$$\mathbf{w}_{\text{MMSE}_2} = \langle E[s(t)d(t)^*] \rangle \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s},$$

qui aussi appartient à la famille des beamformers qui maximisent le SINR (2.6).

2.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques récepteurs linéaires optimisant des critères aux second ordre pour la réception d'un signal utile inconnu, c'est à dire de forme d'onde inconnue et de vecteur directionnel connu ou estimé a priori, corrompu par des interférences inconnues. Tous ces récepteurs sont optimaux pour des observations stationnaires circulaires au second ordre. Cependant, en présence de signaux non-stationnaires au second ordre, ces récepteurs deviennent sous-optimaux.

En effet, les statistiques au second ordre des observations non-stationnaires varient dans le temps et sont même poly-périodiques lorsque ces signaux sont cyclo-stationnaires [43]. Plus précisément, pour des observations non-stationnaires, omniprésentes en radiocommunications, ces filtres complexes deviennent eux mêmes variant dans le temps et sous certaines conditions de non circularité linéaires au sens large.

Ainsi, dans le chapitre suivant, nous allons présenter la technique du filtrage linéaires au sens large en présentant quelques différents récepteurs linéaires au sens large et en introduisant un nouveau.

Chapitre 3

Beamforming linéaire au sens large WL

Sommaire

3.1	Introduction	49
3.2	Filtrage linéaire au sens large	51
3.3	Modèle WL des signaux et statistiques d'ordre deux	51
3.4	Modèle du bruit total	51
3.5	Beamformer WL avec γ_s inconnu	52
3.6	Beamformer WL avec γ_s connu	54
3.7	Étude du beamformer MVDR ₂	58
3.8	Conclusion	85

3.1 Introduction

Les beamformers spatiaux présentés dans le chapitre 2 exploitent uniquement l'information contenue dans les premières matrices de covariance spatiale \mathbf{R}_x ou \mathbf{R}_n et ne font appel qu'à des traitements linéaires. Ces beamformers linéaires, optimaux pour des signaux circulaires au second ordre, deviennent sous optimaux pour des signaux non circulaires au second ordre omniprésents en radio-communications. En effet, à travers leur structure linéaire, ces beamformers n'exploitent pas l'information de non circularité au second ordre contenue dans les deuxièmes matrices de covariance \mathbf{C}_x ou \mathbf{C}_n . C'est pour cela qu'un traitement linéaire au sens large WL (Widely Linear) capable de traiter le signal et son conjugué est nécessaire.

Le filtrage linéaire au sens large a été introduit et utilisé pour la première fois en traitement du signal en 1969 dans [11]. Bien plus tard, dans les années 90, les premiers travaux pionniers sur l'optimalité au second ordre pour un contexte non circulaire sont apparus dans [18, 77].

Depuis, un grand intérêt a été porté sur ces filtres linéaires au sens large dans plusieurs domaines d'applications [28]. Les domaines concernés sont en particulier la F/TDMA dans [28, 29, 96, 47], le DS-CDMA dans [12, 84, 13], en détection multi-utilisateurs de signaux complexes dans [60], des modulations multi-porteuses dans [36] et dans les systèmes MIMO utilisant des modulations non circulaires dans [67, 68].

Cependant, dans la plupart de ces travaux les formes d'ondes des signaux non circulaires sont connues par le récepteur en supposant qu'une séquence d'apprentissage ou qu'un code d'étalement sont disponibles. Par conséquent, ces filtres linéaires au sens large ne seront pas adaptés pour des applications comme le contrôle de spectre ou l'écoute passive dans le contexte non circulaire.

C'est ainsi que dans [21], un récepteur linéaire au sens large MVDR invariant dans le temps IT, pour la réception d'un signal utile inconnu dont la forme d'onde est inconnue mais de vecteur directionnel connu et corrompu par des interférences potentiellement non circulaires, a été récemment introduit et étudié. Néanmoins, malgré le fait que ce récepteur soit optimal en présence d'interférences non circulaires, il demeure sous-optimal lorsque le signal utile est lui-même non circulaire. En effet, ce récepteur exploite uniquement l'information de non circularité véhiculée par les interférences et non celle du signal utile.

C'est pour cette raison que le but principal de ce chapitre est d'introduire un récepteur linéaire au sens large MVDR invariant dans le temps (IT) pour la réception d'un signal utile inconnu corrompu par des interférences potentiellement non circulaires et d'analyser ses performances. Le signal utile dont la forme d'onde est inconnue, est supposé être non circulaire au second ordre contrairement au beamformer introduit dans [21]. L'étude des propriétés et des performances de ce beamformer a montré que ce dernier améliore toujours les performances du beamformer de Capon et du récepteur introduit dans [21] en présence d'un signal utile non circulaire et aussi d'interférences non circulaires. En outre, ce beamformer, dérivé d'une décomposition orthogonale originale, permet de traiter à partir d'une antenne à N capteurs, jusqu'à $2N - 1$ interférences rectilignes en présence d'un signal utile rectiligne tandis que le récepteur introduit dans [21] n'en traite que $2(N - 1)$. Ceci permet à ce beamformer de faire du SAIC (Single Antenna Interference Cancellation) pour $N = 1$.

Dans ce chapitre, après avoir introduit le filtrage linéaire au sens large dans la section 3.2, le modèle WL des signaux et leurs statistiques d'ordre deux dans la section 3.3 et du modèle du bruit total dans la section 3.4, nous allons introduire les plus importants beamformers spatiaux WL invariant dans le temps optimisant différents critères du second ordre pour la réception d'un signal utile inconnu dont le vecteur directionnel est connu potentiellement non circulaire et corrompu par un bruit total potentiellement non circulaire. Ces beamformers seront divisés en deux catégories selon la connaissance ou non du coefficient de non circularité au second ordre du signal utile dans les sections 3.5 et 3.5 respectivement. Par la suite, le beamformer MVDR WL sera étudié à travers l'analyse de sa capacité de traitement dans la section 3.7.1, l'implémentation équivalente GSC dans la section 3.7.2 et l'analyse de ses performances en terme de SINR dans les sections 3.7.3. Nous finirons cette étude par analyser les performances en SER (Symbol Error Rate) dans la section 3.7.4 et par donner diverses mises en œuvre possibles dans la section 3.7.5.

3.2 Filtrage linéaire au sens large

Depuis des années, le filtrage d'antennes optimal au second ordre considérait l'hypothèse d'observations stationnaires, dont l'enveloppe complexe était nécessairement circulaire au second ordre [75, 33]. Il consistait essentiellement à mettre en œuvre un filtre linéaire invariant dans le temps (TI) optimisant un critère au second ordre. Toutefois, ces filtres linéaires deviennent sous optimaux pour des signaux non stationnaires, omniprésents en radio-communication dont les enveloppes complexes peuvent devenir non circulaires. En conséquence, pour des observations non stationnaires, les filtres complexes optimaux deviennent variants dans le temps (TV), et sous certaines conditions de non circularité, linéaires au sens large WL [43] [11], c'est à dire de la forme :

$$y(t) = \mathbf{w}_1^H(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_2^H(t)\mathbf{x}^*(t),$$

où $\mathbf{w}_1(t)$ et $\mathbf{w}_2(t)$ sont des filtres complexes TV.

Les filtres WL ont, à l'heure actuelle, un grand intérêt dans plusieurs situations pratiques, du fait que dans de nombreuses applications en radio-communication, des signaux de modulations telles que la modulation d'amplitude (AM), la modulation ASK, la BPSK, la MSK, la GMSK et les OQAM partagent la propriété de non circularité au second ordre étudiée dans le chapitre 1.

3.3 Modèle WL des signaux et statistiques d'ordre deux

Le modèle WL représente l'extension du modèle linéaire au modèle linéaire au sens large. Cette extension est définie en considérant le vecteur d'observations étendu $\tilde{\mathbf{x}}(t) \triangleq [\mathbf{x}(t)^T, \mathbf{x}(t)^H]^T$ ¹. En utilisant le modèle standard (2.2), on obtient :

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = s(t)\tilde{\mathbf{s}}_1 + s(t)^*\tilde{\mathbf{s}}_2 + \tilde{\mathbf{n}}(t) \triangleq \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{s}}(t) + \tilde{\mathbf{n}}(t), \quad (3.1)$$

où $\tilde{\mathbf{n}}(t) \triangleq [\mathbf{n}(t)^T, \mathbf{n}(t)^H]^T$, $\tilde{\mathbf{s}}_1 \triangleq [\mathbf{s}^T, \mathbf{0}^T]^T$, $\tilde{\mathbf{s}}_2 \triangleq [\mathbf{0}^T, \mathbf{s}^H]^T$, $\tilde{\mathbf{S}} \triangleq [\tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2]$, $\tilde{\mathbf{s}}(t) \triangleq [s(t), s(t)^*]^T$.

Les statistiques d'ordre deux de $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ sont exprimées par la matrice de covariance moyennée en temps $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} \triangleq \langle E[\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t)^H] \rangle$ donnée, sous les hypothèses du modèle (2.2), par :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{s}}}\tilde{\mathbf{S}}^H + \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}} \quad (3.2)$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{s}}} \triangleq \langle E[\tilde{\mathbf{s}}(t)\tilde{\mathbf{s}}(t)^H] \rangle$ et $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}} \triangleq \langle E[\tilde{\mathbf{n}}(t)\tilde{\mathbf{n}}(t)^H] \rangle$ tel que

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_n & \mathbf{C}_n \\ \mathbf{C}_n^* & \mathbf{R}_n^* \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

où \mathbf{R}_n et \mathbf{C}_n sont définies dans la section 2.3 du chapitre 2.

3.4 Modèle du bruit total

On suppose que le bruit total $\mathbf{n}(t)$ est composé de P interférences bande étroite potentiellement non circulaires au second ordre et statistiquement non corrélées et d'un bruit de fond circulaire.

¹Dans tout le document, nous utiliserons la notation $\tilde{\mathbf{a}}$ pour le vecteur étendu $\tilde{\mathbf{a}} \triangleq [\mathbf{a}^T, \mathbf{a}^H]^T$

Le vecteur de bruit total peut ainsi s'écrire sous la forme

$$\mathbf{n}(t) = \sum_{p=1}^P j_p(t) \mathbf{j}_p + \mathbf{n}'(t) \quad (3.4)$$

où $\mathbf{n}'(t)$ est le vecteur bruit, supposé de moyenne nulle, stationnaire, spatialement blanc et circulaire au second ordre, $j_p(t)$ et \mathbf{j}_p correspondent à la forme d'onde et au vecteur directionnel de l'interférence p respectivement. $(j_p(t))_{p=1, \dots, P}$ et $\mathbf{n}'(t)$ sont supposés non corrélés. Les matrices \mathbf{R}_n et \mathbf{C}_n définies dans la section 2.3 peuvent alors s'écrire

$$\mathbf{R}_n \triangleq \langle \mathbf{E}[\mathbf{n}(t) \mathbf{n}(t)^H] \rangle = \sum_{p=1}^P \pi_p \mathbf{j}_p \mathbf{j}_p^H + \eta_2 \mathbf{I}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{C}_n \triangleq \langle \mathbf{E}[\mathbf{n}(t) \mathbf{n}(t)^T] \rangle = \sum_{p=1}^P \pi_p \gamma_p \mathbf{j}_p \mathbf{j}_p^T, \quad (3.6)$$

où η_2 est la puissance moyenne du bruit blanc par capteur, $\pi_p \triangleq \langle \mathbf{E}[|j_p(t)|^2] \rangle$ désigne la puissance moyenne de l'interférence mesurée sur le premier capteur, $\gamma_p \triangleq \frac{\langle \mathbf{E}[j_p(t)^2] \rangle}{\langle \mathbf{E}[|j_p(t)|^2] \rangle} \triangleq |\gamma_p| e^{j2\phi_p}$ est le coefficient de non circularité moyen de l'interférence p vue par le récepteur, ϕ_p est la phase de non circularité moyenne englobant dans ce cas la phase du signal.

On considère alors le filtre spatial WL, $\tilde{\mathbf{w}} \triangleq [\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T]^T$ de taille $2N \times 1$, dont la sortie est définie par :

$$y(t) \triangleq \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{x}}(t) \triangleq s(t) \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_1 + s(t)^* \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_2 + \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{n}}(t). \quad (3.7)$$

Ainsi, la problématique du filtrage d'antenne est de trouver un filtre spatial WL invariant dans le temps qui génère la "meilleure" estimée au second ordre, selon un critère d'optimisation particulier, du signal utile $s(t)$ dont le contenu et la forme d'onde sont inconnus mais de vecteur directionnel \mathbf{s} connu.

Selon la connaissance a priori du coefficient de non circularité du signal utile γ_s , plusieurs récepteurs optimisant différents critères au second ordre sont possibles, nous allons les présenter en deux parties : beamformer WL optimal avec γ_s inconnu puis avec γ_s connu.

Dans ce qui suit, nous adopterons des notations différentes pour les récepteurs de chaque catégorie, tel que les récepteurs avec γ_s inconnu seront indicés du chiffre 1 tandis que les récepteurs avec γ_s connu seront indicés du chiffre 2.

3.5 Beamformer WL avec γ_s inconnu

On considère dans ce cas un signal utile inconnu, c'est à dire de forme d'onde inconnue et de vecteur directionnel connu, corrompu par des interférences potentiellement non circulaires. De plus, le coefficient de non circularité du signal utile est inconnu.

3.5.1 Beamformer WL au sens du maximum du SINR approché

La distinction entre le signal utile et le bruit total dans (3.7) dépend de la propriété de non circularité au second ordre du signal utile. Cette distinction ne peut être faite quand γ_s est

inconnu (c'est à dire la corrélation entre $s(t)$ et $s(t)^*$). En conséquence, l'approche la plus robuste est de considérer que $s(t)^*$ appartient au bruit total, ce qui permet de donner un critère qu'on appelle SINR approché² (ASINR), et il est donné par

$$\text{ASINR}[\tilde{\mathbf{w}}] = \frac{\pi_s |\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_1|^2}{\tilde{\mathbf{w}}^H [\pi_s \tilde{\mathbf{S}}_2 \tilde{\mathbf{S}}_2^H + \mathbf{R}_{\tilde{n}}] \tilde{\mathbf{w}}}. \quad (3.8)$$

Le beamformer WL maximisant ce critère est donné par :

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{ASINR}} \propto [\pi_s \tilde{\mathbf{S}}_2 \tilde{\mathbf{S}}_2^H + \mathbf{R}_{\tilde{n}}]^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_1,$$

Il est à noter que ce critère nécessite la connaissance de $\mathbf{R}_{\tilde{n}}$ et de π_s .

3.5.2 Beamformer WL MVDR₁

Comme la forme d'onde de $s(t)$ est inconnue et que le vecteur directionnel est connu, une manière efficace pour générer à la sortie $y(t)$, un signal utile désiré sans aucune distorsion quelle que soit la corrélation entre $s(t)$ et $s(t)^*$ (c'est à dire quel que soit γ_s), est d'imposer sur $\tilde{\mathbf{w}}$ les contraintes suivantes :

$$\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_1 = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_2 = 0. \quad (3.9)$$

Autrement dit, la meilleure estimation au second ordre du signal utile correspond à la sortie du beamformer $\tilde{\mathbf{w}}$ qui minimise la moyenne temporelle de la puissance du bruit total définie par $\tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\tilde{n}} \tilde{\mathbf{w}}$ sous une contrainte vectorielle de la forme :

$$\tilde{\mathbf{S}}^H \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{f}, \quad (3.10)$$

où $\mathbf{f} \triangleq [1, 0]^T$. Le filtre WL solution de ce problème est introduit et analysé dans [21]. On l'appellera dans ce document beamformer MVDR₁. Il est défini par

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1} = \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}} [\tilde{\mathbf{S}}^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}]^{-1} \mathbf{f}. \quad (3.11)$$

Grâce à l'interprétation GSC donnée au paragraphe 2.4.4 et puisque $(\tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2) \in \text{span}(\tilde{\mathbf{S}})$, ce filtre peut aussi s'écrire sous la forme

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1} = \mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}} [\tilde{\mathbf{S}}^H \mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}]^{-1} \mathbf{f}.$$

En conséquence, ce beamformer peut être implémenté soit à partir des observations $\mathbf{x}(t)$, soit à partir d'une référence bruit seul $\mathbf{n}(t)$ si celle ci est accessible.

Il est à noter que pour un bruit total circulaire ($\mathbf{C}_n = \mathbf{O}$), $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}$ devient équivalent au beamformer linéaire de Capon défini par (2.9).

Remarque 3. Si les deux contraintes (3.9) sont réduites à la première, la minimisation de $\tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{w}}$ sous cette unique contrainte devient catastrophique pour un signal utile rectiligne ($|\gamma_s| = 1$) puisque dans ce cas, le signal utile est quasiment supprimé par le beamformer. Néanmoins, la minimisation de $\tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\tilde{n}} \tilde{\mathbf{w}}$ sous l'unique même contrainte, donne un autre beamformer, qui ne traite pas le terme $s(t)^* \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_2$ donné par (3.7). Dans ce cas, cette minimisation peut générer quelques problèmes pour un signal utile circulaire au second ordre ($\gamma_s = 0$), puisque ce terme non corrélé avec $s(t)$ correspond ainsi à un terme d'interférence.

²Le terme "approché" est donné parce que cet SINR ne correspond pas toujours au vrai SINR.

A noter, du fait que ce beamformer n'exploite pas l'information contenue dans la propriété de non circularité au second ordre du signal utile, il n'est pas destiné à effectuer de la suppression d'interférences avec une seule antenne SAIC (Single Antenna Interference Cancellation) [28] en présence d'un signal utile rectiligne et d'interférences rectilignes.

3.5.3 Beamformer WL WLSE₁

Dans ce cas, la minimisation de la WLSE définie par (2.15) est généralisée sur le vecteur d'observations étendu $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Donc, le problème est de trouver un signal $s(t)$ qui minimise le critère suivant :

$$\text{WLSE}_1[s(t)] = [\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{s}}(t)]^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} [\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{s}}(t)]. \quad (3.12)$$

Le vecteur étendu $\tilde{\mathbf{s}}(t)$ qui minimise (3.12) sans aucune structure de contraintes est donné par :

$$\tilde{\mathbf{s}}(t)_{\min} = [\tilde{\mathbf{S}}^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}]^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}(t).$$

Du fait que cette solution satisfait la relation $\tilde{\mathbf{s}}(t)_{\min} = [s(t)_{\min}, s(t)_{\min}^*]^T$. Le signal $s(t) = s(t)_{\min}$ qui minimise (3.12) est donné par :

$$\hat{s}(t)_{\text{WLSE}_1} \triangleq \tilde{\mathbf{w}}_{\text{WLSE}_1}^H \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^H [\tilde{\mathbf{S}}^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}]^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}^H \tilde{\mathbf{x}}(t),$$

qui, correspond finalement à la sortie de beamformer MVDR₁.

3.5.4 Beamformer WL ML₁

Pour pouvoir calculer le beamformer WL ML₁, on reprend les hypothèses de dérivation du critère ML données au paragraphe 2.4.7. Ainsi, le problème est de trouver le signal $s(t)$ qui maximise la vraisemblance définie par

$$L_1[s(t)] = p(\mathbf{x}(t); s(t)), \quad (3.13)$$

où $s(t)$ est un paramètre inconnu, la fonction densité de probabilité de $\mathbf{x}(t)$ devient dans ce cas [7] [76] :

$$p(\mathbf{x}(t); s(t)) = \pi^{-N} \text{Det}(\mathbf{R}_{\tilde{n}})^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{s}}(t))^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} (\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{s}}(t))].$$

En conséquence, la maximisation de (3.13) est équivalente à la minimisation de (3.12), ainsi

$$\hat{s}(t)_{\text{ML}_1} \triangleq \tilde{\mathbf{w}}_{\text{ML}_1}^H \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}^H \tilde{\mathbf{x}}(t),$$

qui correspond donc à la sortie du beamformer MVDR₁.

3.6 Beamformer WL avec γ_s connu

Dans cette partie, le coefficient de non circularité au second ordre du signal utile est connu. En conséquence, les beamformers suivants exploitent simultanément la connaissance du coefficient de non circularité du signal utile et des interférences. Parmi ces filtres optimaux,

un nouveau beamformer appelé WL MVDR₂³ est présenté et nous allons étudier en détails ses propriétés et ses performances ainsi que diverses implémentations.

3.6.1 Décomposition orthogonale de $s(t)^*$

A la réception d'un signal utile $s(t)$ non circulaire au second ordre ($\gamma_s \neq 0$), $s(t)^*$ est corrélé avec $s(t)$. Il est alors possible de considérer que $s(t)^*$ contient à la fois une composante du signal utile $s(t)$ et une composante orthogonale qui peut être vue comme une interférence pour $s(t)$. Pour ces signaux, la décomposition (3.7) en signal utile et bruit total utilisée au paragraphe 3.5.1, n'est pas convenable.

Pour calculer la composante signal utile de $s(t)^*$, considérons l'espace de Hilbert des processus aléatoires ayant une puissance moyenne finie et muni d'un produit scalaire $(u(t), v(t)) \triangleq \langle E[u(t)v(t)^*] \rangle$.

Soit la projection orthogonale de $s(t)^*$ sur $s(t)$ avec le produit précédent. Il est facile de montrer [21] que $s(t)^*$ s'écrit de la manière suivante

$$s(t)^* = \gamma_s^* s(t) + [\pi_s(1 - |\gamma_s^2|)]^{1/2} s'(t), \quad (3.14)$$

où, déduit du théorème de projection orthogonale, $s'(t)$ vérifie :

$$\begin{aligned} \langle E[s(t)s'(t)^*] \rangle &= 0 \\ \langle E[|s'(t)|^2] \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Il est aussi facile de vérifier après quelques manipulations élémentaires que :

$$\langle E[s(t)s'(t)] \rangle = [\pi_s(1 - |\gamma_s^2|)]^{1/2}.$$

L'expression (3.14) montre que pour une puissance d'entrée moyennée en temps du signal utile π_s , la puissance moyenne de la composante signal utile de $s(t)^*$ est égale à $\pi_s |\gamma_s|^2$ et est croissante avec $|\gamma_s|$.

En particulier pour un signal utile rectiligne pour le récepteur ($\gamma_s = e^{2i\phi_s}$), $s(t)^* = e^{-2i\phi_s} s(t)$ et $s(t)^*$ correspond totalement au signal utile, tandis que pour un signal utile circulaire au second ordre ($\gamma_s = 0$), $s(t)^* = \pi_s^{1/2} s'(t)$ et $s(t)^*$ correspond totalement à une interférence pour le signal utile.

En utilisant (3.14) dans (3.1), on obtient

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = s(t) \underbrace{(\tilde{\mathbf{s}}_1 + \gamma_s^* \tilde{\mathbf{s}}_2)}_{\tilde{\mathbf{s}}_\gamma} + \underbrace{s'(t)[\pi_s(1 - |\gamma_s^2|)]^{1/2} \tilde{\mathbf{s}}_2 + \tilde{\mathbf{n}}(t)}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)} \triangleq s(t) \tilde{\mathbf{s}}_\gamma + \tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t), \quad (3.15)$$

où $\tilde{\mathbf{s}}_\gamma$ est le vecteur directionnel équivalent du signal utile dépendant de γ_s , et $\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)$ est le vecteur du bruit dit global. Ainsi, en remplaçant (3.15) dans (3.7) on obtient finalement :

$$y(t) = \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{x}}(t) = s(t) \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma + \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t). \quad (3.16)$$

3.6.2 Beamformer WL MVDR₂

Dans le paragraphe 3.5.2 nous avons présenté le beamformer MVDR₁, ce dernier a été introduit et analysé en détails dans [21]. Toutefois, malgré qu'il est plus performant que le beamformer

³Nouveau au sens MVDR proposé, mais il s'est avéré que ce beamformer est proportionnel au beamformer WL MMSE [28]

de Capon pour des interférences non circulaires, ce beamformer reste sous optimal en présence d'un signal utile non circulaire au second ordre, car il n'exploite pas sa propriété de non circularité d'ordre deux. Pour remédier à cette limitation, on introduit un nouveau ⁴ filtre optimal TI WL MVDR que l'on notera par la suite MVDR₂.

De la décomposition (3.16), le beamformer WL MVDR optimal qui exploite la connaissance de \mathbf{s} et de γ_s , correspond au filtre WL $\tilde{\mathbf{w}}$ qui minimise la puissance moyenne du bruit global $\tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma} \tilde{\mathbf{w}}$ tel que $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma} \triangleq \langle \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t) \tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)^H] \rangle$, sous la contrainte suivante

$$\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma = 1. \quad (3.17)$$

Ce beamformer nécessite la connaissance des paramètre (\mathbf{s}, γ_s) et correspond au filtre WL défini par

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2} \triangleq [\tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma]^{-1} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma, \quad (3.18)$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}$ est la première matrice de covariance de $\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)$. En utilisant (3.15) cette matrice peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma} = [\pi_s(1 - |\gamma_s|^2)] \tilde{\mathbf{s}}_2 \tilde{\mathbf{s}}_2^H + \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}$$

Aussi dans ce cas, en utilisant l'interprétation GSC donnée au paragraphe 2.4.4, le beamformer MVDR₂ peut s'écrire sous la forme

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2} \triangleq [\tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma]^{-1} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma.$$

Donc ce beamformer peut alors être implémenté avec la connaissance de (\mathbf{s}, γ_s) à partir de l'observation $\mathbf{x}(t)$ ou bien, dans le cas où π_s est connu, à partir de la référence bruit seul $\mathbf{n}(t)$ si celle ci est disponible.

En analysant (3.18), on constate que le beamformer MVDR₂ se réduit au beamformer de Capon (2.9) quand le signal utile ainsi que le bruit global sont circulaires au second ordre ($\gamma_s = 0$ et $\mathbf{C}_n = \mathbf{O}$). Aussi, pour un signal utile circulaire au second ordre ($|\gamma_s| = 0$) le beamformer MVDR₂ correspond au beamformer MVDR₁.

Dans le cas où les paramètres (\mathbf{s}, γ_s) sont connus, le beamformer MVDR₂ conserve l'intégralité de la composante signal utile contenue dans l'observation $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ quelle que soit la non circularité du signal utile, tandis qu'il minimise la composante interférence globale associée. Au contraire, le beamformer MVDR₁, qui requiert uniquement la connaissance de \mathbf{s} , annule complètement une partie de la composante signal utile en plus de celle de l'interférence globale, ceci quelque soit la puissance d'entrée π_s , ce qui est manifestement sous optimal.

3.6.3 Beamformer WL WLSE₂

Par la connaissance des paramètres (\mathbf{s}, γ_s) , la décomposition (3.15) mène directement au beamformer $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{WLSE}_2}$ dont la sortie $y(t)$ correspond au signal $s(t)$ qui minimise le critère suivant :

$$\text{WLSE}_2[s(t)] = [\tilde{\mathbf{x}}(t) - s(t) \tilde{\mathbf{s}}_\gamma]^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1} [\tilde{\mathbf{x}}(t) - s(t) \tilde{\mathbf{s}}_\gamma]. \quad (3.19)$$

La solution à cette minimisation standard est donnée par :

$$\widehat{s(t)}_{\text{WLSE}_2} \triangleq \tilde{\mathbf{w}}_{\text{WLSE}_2}^H \tilde{\mathbf{x}}(t) = [\tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma]^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad (3.20)$$

qui correspond finalement à la sortie du beamformer MVDR₂.

⁴Il s'est avéré que ce beamformer est colinéaire avec le beamformer WL MMSE, mais la nouveauté réside dans l'analyse des performance en contexte non circulaire

3.6.4 Beamformer WL MMSE

Le beamformer WL MMSE [77, 28] correspond au filtre WL $\tilde{\mathbf{w}}$ dont la sortie $y(t) \triangleq \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{x}}(t)$ minimise la MSE moyenne définie par :

$$\text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}] = \langle E[|s(t) - \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{x}}(t)|^2] \rangle. \quad (3.21)$$

Il est facile de montrer que le filtre WL $\tilde{\mathbf{w}}$ qui minimise (3.21) est simplement donné par

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{WL-MMSE}} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}},s}, \quad (3.22)$$

où $\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}},s} \triangleq \langle E[\tilde{\mathbf{x}}(t)s(t)^*] \rangle$. Il est à noter que quand $(\mathbf{x}(t), s(t))$ sont conjointement circulaires au second ordre, $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{WL-MMSE}}$ est réduit au beamformer linéaire MMSE [77], donné par l'expression (2.4.8). Dans des situations pratiques, $\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}},s}$ n'est pas connue a priori et doit être estimée à partir d'une séquence d'apprentissage utilisant une approche d'estimation en moindres carrés LS [28].

En utilisant (3.15) dans (3.22) on obtient finalement :

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{WL-MMSE}} = \frac{\pi_s^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma}{\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_\gamma}} = \frac{\pi_s}{1 + \pi_s \tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma = \frac{\pi_s \tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma}{1 + \pi_s \tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}, \quad (3.23)$$

qui est aussi proportionnel au $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$.

3.6.5 Beamformer WL ML₂

Le critère ML est dénué de sens dans le cas général d'un signal utile non circulaire au second ordre, puisque la modélisation déterministe du signal utile génère une composante déterministe dans les bruit global $\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)$, à l'exception pour un signal utile rectiligne ($|\gamma_s| = 1$) pour lequel $\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t) = \tilde{\mathbf{n}}(t)$ et $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}$.

Uniquement dans ce dernier cas précis, sous les hypothèses que $s(t)$ est déterministe, $\gamma_s = e^{2i\phi_s}$ est connu, $\mathbf{n}(t)$ est gaussien et non circulaire au second ordre et les matrices $\mathbf{R}_n(t) \triangleq E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t)^H]$ et $\mathbf{C}_n(t) \triangleq E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t)^T]$ ne dépendent pas de t , le problème consiste alors à trouver le signal $s(t)$ qui maximise la vraisemblance définie par l'expression (3.13).

Sous les hypothèses précédentes, le critère (3.13) s'écrit [7] [76] :

$$L_2[s(t)] = \pi^{-N} \text{Det}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}})^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} [(\tilde{\mathbf{x}}(t) - s(t)\tilde{\mathbf{s}}_\gamma)^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} (\tilde{\mathbf{x}}(t) - s(t)\tilde{\mathbf{s}}_\gamma)],\right]$$

cette maximisation est équivalente à la minimisation de (3.19) puisque $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}$ pour $|\gamma_s| = 1$. Elle génère un signal estimé $\widehat{s(t)}_{\text{ML}_2}$ donné par

$$\widehat{s(t)}_{\text{ML}_2} \triangleq \tilde{\mathbf{w}}_{\text{ML}_2}^H \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{x}}(t),$$

qui correspond à son tour à la sortie du beamformer MVDR₂.

3.6.6 Beamformer WL au sens maximum du SINR

La distinction entre le signal utile et la partie bruit global dans la décomposition (3.16) est maintenant évidente. En conséquence, pour γ_s connu, le SINR approché (3.8) devient le vrai

SINR et peut s'écrire

$$\text{SINR}[\tilde{\mathbf{w}}] \triangleq \frac{\pi_s |\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma|^2}{\tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma} \tilde{\mathbf{w}}}. \quad (3.24)$$

Les filtres WL $\tilde{\mathbf{w}}$ qui maximisent (3.24) sont appelés filtres adaptés spatiaux WL et sont clairement donnés par

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{SINR}} \propto \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma,$$

qui sont proportionnels à $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$.

3.6.7 Beamformer WL annulateur de brouilleurs

De manière équivalente que pour le cas du signal utile (3.14), $j_p(t)^*$ peut s'écrire

$$j_p(t)^* = \gamma_p^* j_p(t) + [\pi_p(1 - |\gamma_p|^2)]^{1/2} j'_p(t) \quad (3.25)$$

où $j'_p(t)$ représente la composante bruit orthogonale à $j_p(t)$, définie de la même façon que pour le signal utile. En utilisant (3.4) et (3.25), le vecteur bruit total défini dans (3.15) s'écrit

$$\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t) = s'(t) [\pi_s(1 - |\gamma_s|^2)]^{1/2} \tilde{\mathbf{s}}_2 + \sum_{p=1}^P \left(j_p(t) \tilde{\mathbf{j}}_{p,\gamma} + j'_p(t) [\pi_p(1 - |\gamma_p|^2)]^{1/2} \tilde{\mathbf{j}}_{p,2} \right) + \tilde{\mathbf{n}}'(t). \quad (3.26)$$

où $\tilde{\mathbf{j}}_{p,\gamma} \triangleq \tilde{\mathbf{j}}_{p_1} + \gamma_p^* \tilde{\mathbf{j}}_{p_2}$ avec $\tilde{\mathbf{j}}_{p_1} \triangleq (\mathbf{j}_p^T, \mathbf{0}^T)^T$, $\tilde{\mathbf{j}}_{p_2} \triangleq (\mathbf{0}^T, \mathbf{j}_p^H)^T$.

On déduit de cette décomposition que chaque interférence p non rectiligne ($|\gamma_p| \neq 1$), génère deux interférences non corrélées dans le bruit global $\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)$ et donc dans $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, tandis qu'une interférence rectiligne p ($|\gamma_p| = 1$) génère uniquement une seule interférence dans $\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)$.

De la même manière, un signal utile non rectiligne ($|\gamma_s| \neq 1$) génère une seule interférence dans $\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)$, tandis qu'un signal utile rectiligne ($|\gamma_s| = 1$) n'en génère aucune dans $\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)$.

Dans le cas où les vecteurs étendus des interférence $(\tilde{\mathbf{j}}_{p,\gamma}, \tilde{\mathbf{j}}_{p,2})_{p=1,\dots,P}$ sont connus, un beamformer WL spatial peut être contraint d'annuler toutes ces composantes interférentes afin d'estimer $s(t)$ sans distorsion. Ce qui mène à un beamformer LCMV qui minimise $\tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{w}}$ sous les contraintes suivantes ⁵ :

$$\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_1 = 1 \quad , \quad \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_2 = 0 \quad \text{et} \quad (\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{j}}_{p,2} = \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{j}}_{p,\gamma} = 0)_{p=1,\dots,P}. \quad (3.27)$$

Le beamformer WL LCMV minimisant la puissance de sortie, qu'on notera IC (Interference Cancellation), peut être calculé sans la connaissance des vecteurs $(\tilde{\mathbf{j}}_{p,\gamma}, \tilde{\mathbf{j}}_{p,2})_{p=1,\dots,P}$ [15], celui ci peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{WL-IC}} = \pi_s (\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} - \eta_2 \mathbf{I}_{2N})^\# \tilde{\mathbf{s}}_\gamma,$$

3.7 Étude du beamformer MVDR₂

Nous avons présenté dans les paragraphes précédents les différents critères de filtrage WL, nous avons constaté qu'avec la connaissance de γ_s , les beamformers associés aux critères sont colinéaires au beamformer MVDR₂. Ce dernier, basé sur la décomposition orthogonale (3.14), tient compte de la propriété de non circularité au second ordre du signal utile ainsi que

⁵A noter que si les vecteurs directeurs étendus définis dans (3.27) sont linéairement indépendants, le nombre de contraintes doit être inférieur ou égal à $2N$.

celle des interférences. Dans ce paragraphe, nous allons étudier en détails les propriétés de ce beamformer ainsi que ses performances en terme de SINR et de probabilité d'erreur et nous terminerons par examiner quelques implémentations. Il est à noter que cette étude n'a jamais été faite auparavant.

3.7.1 Capacité de traitement

En utilisant le modèle de bruit (3.4) ainsi que (3.25) et (3.26), et notons P_r et P_{nr} le nombre d'interférences rectilignes et non rectilignes présentes dans $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ respectivement, tel que $P_r + P_{nr} = P$, le beamformer MVDR₂, vérifiant l'unique contrainte (3.17) a donc $2N - 1$ degrés de liberté pour rejeter $P_r + 2P_{nr} + 1 - \delta(1 - |\gamma_s|)$ interférences dans $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, où $\delta(\cdot)$ est le symbole de Kronecker. On déduit alors que le nombre maximal d'interférences P_{max} pouvant être traitées par le beamformer MVDR₂ est

$$P_{max} = 2(N - 1) - P_{nr} + \delta(1 - |\gamma_s|)$$

avec $0 \leq P_{nr} \leq P_{max}$, ce qui donne $N - 1 \leq P_{max} \leq 2(N - 1) + \delta(1 - |\gamma_s|)$.

En particulier, P_{max} est égale à $N - 1$ en l'absence d'interférences rectilignes et ceci quelle que soit la non circularité du signal utile. Tandis que si toutes les interférences sont rectilignes, $P_{max} = 2(N - 1)$ pour un signal utile non rectiligne, et $P_{max} = 2N - 1$ pour un signal utile rectiligne. Dans ces deux derniers cas, le mélange de sources est sous déterminé ($P \geq N$) et donc le vecteur directionnel du signal utile doit être estimé par une approche d'estimation de DOA [17], ou par une technique d'identification aveugle [3].

Finalement, pour $N = 1$ et pour un signal utile non rectiligne, $P_{max} = 0$, tandis que pour un signal utile et une interférence rectiligne, $P_{max} = 1$. Dans ce dernier cas, le beamformer MVDR₂, qui correspond au récepteur analysé dans [28], permet ainsi d'effectuer l'annulation d'interférences avec une seule antenne (SAIC) contrairement au beamformer MVDR₁.

3.7.2 Structure TI WL GSC équivalente

La structure équivalente TI WL GSC du beamformer MVDR₂ est décrite dans la figure 3.1, où $\tilde{\mathbf{w}}_0 = \|\tilde{\mathbf{s}}_\gamma\|^{-2} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma$ est le filtre spatial linéaire invariant dans le temps tel que $\tilde{\mathbf{w}}_0^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma = 1$ et dont la sortie est $y_0(t) \triangleq \tilde{\mathbf{w}}_0^H \tilde{\mathbf{x}}(t)$. \mathbf{B} est une matrice de blocage $2N \times (2N - 1)$ de rang plein colonne vérifiant $\mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma = \mathbf{0}$ et dont la sortie correspond au vecteur $\tilde{\mathbf{z}}(t) \triangleq \mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{x}}(t)$. Le vecteur $\tilde{\mathbf{w}}_a$ est le filtre spatial TI WL qui génère la sortie $y_a(t) \triangleq \tilde{\mathbf{w}}_a^H \tilde{\mathbf{z}}(t)$ et qui minimise la puissance moyenne de la sortie $y(t) \triangleq y_0(t) - y_a(t)$.

On remarque que pour un bruit total circulaire ($\mathbf{C}_n = \mathbf{O}$), cette structure WL GSC correspond exactement au schéma fonctionnel linéaire décrit dans [51].

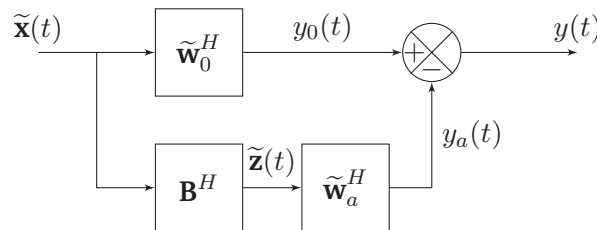


FIGURE 3.1 – Structure équivalente GSC du beamformer MVDR₂

3.7.3 Performances en SINR du beamformer MVDR₂

3.7.3.1 Calcul du SINR en sortie

A partir de l'expression de la sortie $y(t)$ définie dans (3.16), le SINR représentant le rapport entre la puissance moyenne de la composante signal utile et celle de la composante associée du bruit global à la sortie d'un filtre arbitraire TI WL $\tilde{\mathbf{w}}$ est défini par

$$\text{SINR}[\tilde{\mathbf{w}}] = \frac{\pi_s |\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma|^2}{\tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_\gamma} \tilde{\mathbf{w}}}. \quad (3.28)$$

En utilisant $\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$ défini par (3.18) et en remplaçant dans (3.28), le SINR à la sortie du beamformer MVDR₂ est donné par

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} = \pi_s \tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma. \quad (3.29)$$

de même, en utilisant $\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}$ défini par (3.11), le SINR à la sortie du beamformer MVDR₁ est donné par [21]

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_1} = \frac{\pi_s}{\mathbf{f}^T [\tilde{\mathbf{S}}^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}]^{-1} \mathbf{f}}. \quad (3.30)$$

où $\mathbf{f} \triangleq [1, 0]^T$.

A partir de (3.3), $\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}$ est structurée sous la forme suivante

$$\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^* & \mathbf{A}^* \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

où \mathbf{A} est une matrice hermitienne et \mathbf{D} et une matrice complexe symétrique toutes deux de dimension $N \times N$, définies par [21] :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\triangleq [\mathbf{R}_n - \mathbf{C}_n \mathbf{R}_n^{*-1} \mathbf{C}_n^*]^{-1}, \\ \mathbf{D} &\triangleq -\mathbf{A} \mathbf{C}_n \mathbf{R}_n^{*-1}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

En remplaçant (3.31) dans (3.29) et (3.30), on obtient, après quelques manipulations élémentaires ;

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} = \pi_s \left[\mathbf{s}^H \mathbf{A} \mathbf{s} \left(1 + |\gamma_s|^2 \right) + 2\Re(\gamma_s^* \mathbf{s}^H \mathbf{D} \mathbf{s}^*) - \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{D} \mathbf{s}^* + \gamma_s \mathbf{s}^H \mathbf{A} \mathbf{s}|^2}{\left[\pi_s (1 - |\gamma_s|^2) \right]^{-1} + \mathbf{s}^H \mathbf{A} \mathbf{s}} \right] \quad (3.33)$$

et

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_1} = \pi_s \left[\mathbf{s}^H \mathbf{A} \mathbf{s} - \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{D} \mathbf{s}^*|^2}{\mathbf{s}^H \mathbf{A} \mathbf{s}} \right], \quad (3.34)$$

tandis que le SINR à la sortie du beamformer Capon (2.8) est donné par [21]

$$\text{SINR}_{\text{Capon}} = \pi_s \mathbf{s}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}. \quad (3.35)$$

3.7.3.2 SINR et MSE

En utilisant la décomposition (3.16) ainsi que les expressions générales (3.24) et (3.21) du SINR et la MSE en sortie. Il est montré en annexe A.2.1 que la relation qui lie ces deux critères s'écrit de la forme

$$\text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}] = \pi_s \left(|1 - \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma|^2 + \frac{|\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma|^2}{\text{SINR}[\tilde{\mathbf{w}}]} \right). \quad (3.36)$$

On voit clairement dans cette relation que le filtre $\tilde{\mathbf{w}}$ qui minimise $\text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}]$ sous la contrainte $\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma = 1$ et aussi celui qui minimise $\text{SINR}[\tilde{\mathbf{w}}]$ sous la même contrainte, qui finalement correspond au beamformer MVDR₂. Ce qui donne un sens physique particulier à la décomposition (3.14) et au critère SINR.

Finalement, malgré que $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{WL-MMSE}}$ et $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$ soient colinéaires et donnent le même SINR en sortie, ils génèrent différentes MSE. En effet, on montre annexe A.2.2 que

$$\text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}_{\text{WL-MMSE}}] = \frac{\pi_s}{1 + \text{SINR}_{\text{MVDR}_2}}, \quad (3.37)$$

tandis que

$$\text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}] = \frac{1}{\tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_\gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma} = \frac{\pi_s}{\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}},$$

qui est supérieure à la $\text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}_{\text{WL-MMSE}}]$ et qui tend vers la $\text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}_{\text{WL-MMSE}}]$ pour des valeurs $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \gg 1$.

3.7.3.3 Analyse du SINR en sortie

Pour un type de sources donné, on peut facilement comparer les valeurs du SINR à la sortie de chacun des beamformers MVDR₂, MVDR₁ et de Capon sans aucun calcul particulier. Effectivement tous ces beamformers minimisent la puissance moyenne à leurs sorties $\tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{w}}$ mais sous différentes contraintes. Ces contraintes permettent d'écrire les inclusions suivantes

$$\{\tilde{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}_1^T, \mathbf{0}_N^T]^T; \mathbf{w}_1^H \mathbf{s} = 1\} \subset \{\tilde{\mathbf{w}}; \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_1 = 1 \text{ et } \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_2 = 0\} \subset \{\tilde{\mathbf{w}}; \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma = 1\}.$$

En conséquence, le principe d'inclusion implique que nous avons toujours :

$$\text{SINR}_{\text{Capon}} \leq \text{SINR}_{\text{MVDR}_1} \leq \text{SINR}_{\text{MVDR}_2}.$$

Contrairement aux $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ et $\text{SINR}_{\text{Capon}}$, le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ dépend de γ_s .

Nous allons donc examiner l'influence de γ_s sur le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ (3.33), et pour cela, définissons $a_s \triangleq \mathbf{s}^H \mathbf{A} \mathbf{s}$, $d_s \triangleq \mathbf{s}^H \mathbf{D} \mathbf{s}^* \triangleq |d_s| e^{i\phi_{ds}}$ et $\Phi_1 \triangleq \phi_{ds} - 2\phi_s$.

Alors (3.33) devient :

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} = \pi_s \left[a_s(1 + |\gamma_s|^2) + 2|d_s| |\gamma_s| \cos(\Phi_1) - \frac{a_s^2 |\gamma_s|^2 + |d_s|^2 + 2a_s |d_s| |\gamma_s| \cos(\Phi_1)}{[\pi_s(1 - |\gamma_s|^2)]^{-1} + a_s} \right]. \quad (3.38)$$

Pour étudier cette influence de γ_s sur le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$, distinguons les cas $d_s = 0$ et $d_s \neq 0$.

- Pour $d_s = 0$, soit pour \mathbf{s}^* appartenant au noyau de \mathbf{D} (le cas où le bruit total est circulaire au

second ordre $\mathbf{C}_n = \mathbf{O}$ qui implique que $\mathbf{D} = \mathbf{O}$ en est un cas particulier), nous avons

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} = \pi_s \left[a_s(1 + |\gamma_s|^2) - \frac{a_s^2 |\gamma_s|^2}{\left[\pi_s(1 - |\gamma_s|^2) \right]^{-1} + a_s} \right], \quad (3.39)$$

tandis que le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ (3.34) est exactement égal au SINR à la sortie du beamformer de Capon (3.35). Il est démontré en annexe A.1.1 que le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ (3.39) est une fonction strictement croissante de $|\gamma_s|$. Dans ce cas, la valeur minimale du $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ est obtenue pour $\gamma_s = 0$ et correspond au $\text{SINR}_{\text{Capon}}$ (3.35), tandis que la valeur maximale, obtenue pour $|\gamma_s| = 1$, correspond au double de la valeur du $\text{SINR}_{\text{Capon}}$. Ainsi, on peut écrire, pour $d_s = 0$

$$\text{SINR}_{\text{Capon}} = \text{SINR}_{\text{MVDR}_1} \leq \text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \leq 2\text{SINR}_{\text{Capon}}. \quad (3.40)$$

• Pour $d_s \neq 0$, soit pour \mathbf{s}^* n'appartenant pas au noyau de \mathbf{D} et donc nécessairement le bruit total est non circulaire au second ordre, l'étude de la variation du $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ en fonction de $|\gamma_s|$ devient plus complexe. Ainsi pour un signal utile circulaire au second ordre ($\gamma_s = 0$), le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ devient indépendant de Φ_1 , et est donné par

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} = \pi_s \left[a_s - \frac{|d_s|^2}{\pi_s^{-1} + a_s} \right] \quad (3.41)$$

qui a été donné pour la première fois dans [19], et qui est toujours supérieur à celui de (3.34), et qui tend vers (3.34) pour de grandes valeurs de π_s . On peut alors écrire, pour $d_s \neq 0$:

$$\text{SINR}_{\text{Capon}} < \text{SINR}_{\text{MVDR}_1} < \text{SINR}_{\text{MVDR}_2}[\gamma_s = 0].$$

Par contre pour un signal utile non circulaire ($\gamma_s \neq 0$), il est démontré dans l'annexe A.1.2 que le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ est une fonction croissante de $\cos(\Phi_1)$. Il est aussi démontré dans l'annexe A.1.3 que tant que $\cos(\Phi_1) \geq 0$, le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ est une fonction croissante de $|\gamma_s|$. Sa valeur minimale est donnée pour $\gamma_s = 0$ par (3.41) et sa valeur maximale est donnée pour un signal utile rectiligne ($|\gamma_s| = 1$) par

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} = 2\pi_s [a_s + |d_s| \cos(\Phi_1)],$$

qui correspond au SINR à la sortie du récepteur optimal TI WL dans [28]. On peut donc écrire, pour $d_s \neq 0$ et $\cos(\Phi_1) \geq 0$:

$$\text{SINR}_{\text{Capon}} < \text{SINR}_{\text{MVDR}_1} < \text{SINR}_{\text{MVDR}_2}[\gamma_s = 0] \leq \text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \leq \text{SINR}_{\text{MVDR}_2}[|\gamma_s| = 1]. \quad (3.42)$$

Mais pour $\cos(\Phi_1) < 0$, il est démontré en annexe A.1.4 que le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ n'est plus une fonction monotone croissante de $|\gamma_s|$ et plus précisément qu'il existe une valeur $|\gamma|$ de $|\gamma_s|$ ($0 \leq |\gamma| \leq 1$) tel que le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ est une fonction décroissante de $|\gamma_s|$ pour $0 \leq |\gamma_s| \leq |\gamma|$, puis une fonction croissante pour $|\gamma| \leq |\gamma_s| \leq 1$. C'est le cas par exemple pour les paramètres suivants : $\pi_s/\eta_2 = 10\text{dB}$, $\pi_1/\eta_2 = 20\text{dB}$, $\theta_s = \pi/3$, $\theta_1 = \pi/2$ et $\Phi_1 = \pi/15$.

3.7.3.4 Performances pour une seule interférence

En présence d'une seule source d'interférence $P = 1$ on a

$$\mathbf{R}_n = \pi_1 \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_1^H + \eta_2 \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_n = \pi_1 \gamma_1 \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_1^T,$$

ainsi les SINR (3.35) et (3.34) à la sortie des beamformers de Capon et MVDR₁ respectivement s'écrivent [20] :

$$\text{SINR}_{\text{Capon}} = \epsilon_s \left[1 - \frac{\epsilon_1}{1 + \epsilon_1} |\alpha_{1s}|^2 \right], \quad (3.43)$$

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_1} = \epsilon_s \left[\frac{\beta^2 - \epsilon_1^2 |\gamma_1|^2 |\alpha_{1s}|^4}{\omega \beta} \right], \quad (3.44)$$

où $\epsilon_s \triangleq \frac{\pi_s (\mathbf{s}^H \mathbf{s})}{\eta_2}$ et $\epsilon_1 \triangleq \frac{\pi_1 (\mathbf{j}_1^H \mathbf{j}_1)}{\eta_2}$ représentent chacun la somme, sur tous les capteurs, du rapport entre la puissance du signal utile, respectivement de l'interférence, et celle du bruit de fond par capteur, où α_{1s} , tel que $0 \leq |\alpha_{1s}| \leq 1$, représente le coefficient de la corrélation spatiale entre l'interférence et le signal utile, et défini par [63]

$$\alpha_{1s} \triangleq \frac{\mathbf{j}_1^H \mathbf{s}}{(\mathbf{j}_1^H \mathbf{j}_1)^{1/2} (\mathbf{s}^H \mathbf{s})^{1/2}} \triangleq |\alpha_{1s}| e^{i\phi_{1s}},$$

et tel que $\beta \triangleq [1 + \epsilon_1(2 - |\alpha_{1s}|^2) + \epsilon_1^2(1 - |\gamma_1|^2)(1 - |\alpha_{1s}|^2)]$ et $\omega \triangleq [(1 + \epsilon_1)^2 - \epsilon_1^2 |\gamma_1|^2]$.

Après quelques manipulations algébriques fastidieuses mais directes, l'expression du SINR à la sortie du beamformer MVDR₂ (3.33) devient

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} = \frac{\epsilon_s \left[\beta \omega (1 + |\gamma_s|^2) + \epsilon_s \left(\beta^2 - \epsilon_1^2 |\alpha_{1s}|^4 |\gamma_1|^2 \right) (1 - |\gamma_s|^2) - 2\omega \epsilon_1 |\alpha_{1s}|^2 |\gamma_s| |\gamma_1| \cos 2\Phi \right]}{\omega \left(\omega + \epsilon_s \beta (1 - |\gamma_s|^2) \right)}, \quad (3.45)$$

où $\Phi \triangleq (\phi_1 - \phi_s - \phi_{1s})$ est appelée phase différentielle entre le signal utile et l'interférence et qui est égale dans ce cas d'une seule interférence à $\Phi = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \pi)$

En utilisant (3.43) et (3.45), le gain en SINR en sortie défini par $G_c \triangleq \frac{\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}}{\text{SINR}_{\text{Capon}}}$, s'écrit de la forme

$$G_c = \frac{(1 + \epsilon_1) \left[\beta \omega (1 + |\gamma_s|^2) + \epsilon_s \left(\beta^2 - \epsilon_1^2 |\alpha_{1s}|^4 |\gamma_1|^2 \right) (1 - |\gamma_s|^2) - 2\omega \epsilon_1 |\alpha_{1s}|^2 |\gamma_s| |\gamma_1| \cos 2\Phi \right]}{\omega \left(1 + \epsilon_1 (1 - |\gamma_1|^2) \right) \left(\omega + \epsilon_s \beta (1 - |\gamma_s|^2) \right)}. \quad (3.46)$$

Nous allons maintenant examiner différents cas particuliers :

1. Cas d'un signal utile rectiligne $|\gamma_s| = 1$:

Pour un signal utile rectiligne et une forte interférence rectiligne ($|\gamma_1| = 1$ et $\epsilon_1 \gg 1$), le

$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ devient

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \approx 2\epsilon_s (1 - |\alpha_{1s}^2| \cos^2(\phi)), \quad (3.47)$$

tandis que les $\text{SINR}_{\text{Capon}}$ et $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ sont donnés par

$$\text{SINR}_{\text{Capon}} \approx \epsilon_s (1 - |\alpha_{1s}^2|), \quad |\alpha_{1s}| \neq 1 \quad (3.48)$$

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_1} \approx \epsilon_s \left(1 - \frac{|\alpha_{1s}^2|}{2 - |\alpha_{1s}^2|} \right), \quad |\alpha_{1s}| \neq 1, \quad (3.49)$$

ces expressions montrent que le beamformer MVDR_2 discrimine les sources par leurs directions d'arrivées ($N > 1$) et aussi par leurs phases ce qui permet de faire de la suppression d'interférences avec une seule antenne (SAIC), contrairement aux beamformers de Capon et MVDR_1 , qui discriminent les sources uniquement par leurs directions d'arrivées ($N > 1$).

Pour un signal utile rectiligne et une interférence rectiligne de puissance quelconque, le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ devient :

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} = 2\epsilon_s \frac{(1 + 2\epsilon_1 - \epsilon_1 |\alpha_{1s}|^2 (\cos^2(\phi) + 1))}{1 + 2\epsilon_1},$$

ce qui nous donne un gain $G = \text{SINR}_{\text{MVDR}_2} / \text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ de la forme :

$$G = \frac{2 [1 + 2\epsilon_1 - \epsilon_1 |\alpha_{1s}|^2 (\cos^2(\phi) + 1)] [1 + \epsilon_1 (2 - |\alpha_{1s}|^2)]}{(1 + \epsilon_1 (2 - |\alpha_{1s}|^2))^2 - \epsilon_1^2 |\alpha_{1s}|^4}.$$

Ainsi, dans le cas où le signal utile et l'interférence ont la même direction d'arrivée ($\alpha_{1s} = 1$), ce gain s'écrit :

$$G = \frac{2 (1 + \epsilon_1 (1 - \cos^2(\phi))) (1 + \epsilon_1)}{(1 + 2\epsilon_1)},$$

donc, $G \approx 1$ pour $\cos(2\phi) = 1$ et $\epsilon_1 \gg 1$ et $G \approx \epsilon_1 (1 - \cos(2\phi))$ pour $\cos(2\phi) \neq 1$ et $\epsilon_1 \gg 1$. En conséquence, pour un signal utile et une interférence rectilignes, les performances en SINR du beamformer MVDR_2 sont largement supérieures à celle du beamformer MVDR_1 , particulièrement pour une forte interférence et une phase différentielle maximale ($\Phi = \pi/2$) entre le signal utile et l'interférence où $G \approx 2\epsilon_1 \gg 1$. Pour différentes directions d'arrivées de l'utile et de l'interférence $\alpha_{1s} \neq 1$ et pour $\epsilon_1 \gg 1$ ce gain devient :

$$G \approx \frac{[2 - |\alpha_{1s}|^2 (\cos^2(\phi) + 1)] [2 - |\alpha_{1s}|^2]}{2(1 - |\alpha_{1s}|^2)}.$$

qui est une fonction croissante de $|\alpha_{1s}|$ dont la valeur minimale est $G \approx 2$ pour des signaux utile et interférence orthogonaux ($\alpha_{1s} = 0$).

Pour un signal utile rectiligne et une forte interférence non rectiligne ($|\gamma_1| \neq 1$ et $\epsilon_1 \gg 1$), $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1} \approx \text{SINR}_{\text{Capon}}$ donné par 3.48, tandis que

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \approx 2\epsilon_s (1 - |\alpha_{1s}|^2) \quad \text{pour } |\alpha_{1s}| \neq 1,$$

qui est le double du SINR à la sortie des beamformers de Capon et MVDR_1 , ceci est dû à l'exploitation de la non circularité du signal utile par le beamformer MVDR_2 et pour $|\alpha_{1s}| = 1$ et $\epsilon_1 \gg 1$ cet SINR devient :

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \approx 2\epsilon_s \frac{(1 - |\gamma_1| \cos(2\phi))}{\epsilon_1 (1 - |\gamma_1|^2)} \quad \text{pour } |\alpha_{1s}| = 1,$$

qui donne un gain $G = \text{SINR}_{\text{MVDR}_2} / \text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ de la forme :

$$G \approx 2 \frac{(1 - |\gamma_1| \cos(2\phi))}{(1 - |\gamma_1|^2)} \text{ pour } |\alpha_{1s}| = 1.$$

2. Cas d'un signal utile non rectiligne $|\gamma_s| \neq 1$:

Dans le cas d'un signal utile non rectiligne et une forte interférence rectiligne ($|\gamma_1| = 1$ et $\epsilon_1 \gg 1$), le $\text{SINR}_{\text{Capon}}$ et le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ sont toujours donnés par (3.48) et (3.49) respectivement, tandis que le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ devient, pour un α_{1s} arbitraire :

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \approx \epsilon_s \frac{(2 - |\alpha_{1s}|^2)(1 + |\gamma_s^2|) + 2\epsilon_s(1 - |\alpha_{1s}|^2)(1 - |\gamma_s^2|) - 2|\alpha_{1s}|^2|\gamma_s| \cos(2\phi)}{2 + \epsilon_s(2 - |\alpha_{1s}|^2)(1 - |\gamma_s|^2)}.$$

En particulier pour un fort signal utile circulaire ($|\gamma_s| = 0$, $\epsilon_s \gg 1$), $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \approx 1$ pour $|\alpha_{1s}| = 1$, tandis que $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \approx \text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ pour $|\alpha_{1s}| \neq 1$ donné par (3.49).

Dans le cas d'un signal utile non rectiligne et une forte interférence non rectiligne ($|\gamma_1| \neq 1$ et $\epsilon_1 \gg 1$), le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1} \approx \text{SINR}_{\text{Capon}}$ donné par (3.48), tandis que le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ est donné pour $|\alpha_{1s}| \neq 1$ par :

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \approx \left(1 + \frac{|\gamma_s^2|}{1 + \epsilon_s(1 - |\gamma_s|^2)(1 - |\alpha_{1s}|^2)} \right) \text{SINR}_{\text{Capon}},$$

dans ce cas, le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ est une fonction croissante de $|\gamma_s|$, variant du $\text{SINR}_{\text{Capon}}$ obtenu pour un signal utile circulaire ($\gamma_s = 0$) au double du $\text{SINR}_{\text{Capon}}$ obtenu pour un signal utile rectiligne ($|\gamma_s| = 1$).

3. Autres cas particuliers

Pour un signal utile rectiligne ($|\gamma_s| = 1$) et une interférence circulaire ($\gamma_1 = 0$), qu'elle soit colinéaire ($|\alpha_{1s}| = 1$) ou orthogonale ($\alpha_{1s} = 0$) au signal utile, le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ est égal au double du $\text{SINR}_{\text{Capon}}$ ou du $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ et ceci quelque soit la puissance de l'interférence, tel que :

$$\begin{aligned} \text{SINR}_{\text{MVDR}_2} &= \frac{2\epsilon_s}{1 + \epsilon_1}, \text{ pour } |\alpha_{1s}| = 1, \\ \text{SINR}_{\text{MVDR}_2} &= 2\epsilon_s, \text{ pour } \alpha_{1s} = 0. \end{aligned}$$

Pour un signal utile circulaire ($\gamma_s = 0$) et une forte interférence rectiligne colinéaire au signal utile ($|\gamma_s| = 1$ et $|\alpha_{1s}| = 1$) et pour ($\epsilon_s \gg 1$ et $\epsilon_1 \gg 1$), $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} \approx 1$.

Dans le cas où il n'y a pas d'interférence $\epsilon_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \text{SINR}_{\text{MVDR}_2} &= 2\epsilon_s = 2\text{SINR}_{\text{MVDR}_1} = 2\text{SINR}_{\text{Capon}}, \text{ pour } |\gamma_s| = 1 \\ \text{SINR}_{\text{MVDR}_2} &= \epsilon_s = \text{SINR}_{\text{MVDR}_1} = \text{SINR}_{\text{Capon}}, \text{ pour } \gamma_s = 0. \end{aligned}$$

3.7.3.5 Illustrations

Afin d'illustrer les résultats précédents sur le gain en performances SINR du beamformer MVDR₂ par rapport aux beamformers de Capon et MVDR₁, nous avons étudié par simulations les variations du $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ pour plusieurs scénarios de réception.

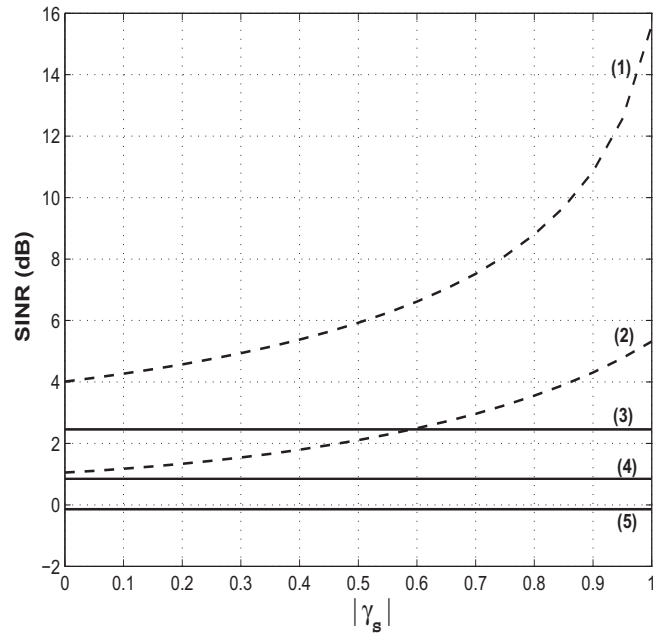
On suppose qu'une antenne à deux capteurs espacés d'une demi longueur d'onde reçoit la contribution de deux sources dont un signal utile de coefficient de non circularité γ_s et une interférence de coefficient de non circularité γ_1 et d'un bruit blanc, gaussien, complexe

et circulaire au second ordre de puissance η_2 . Les paramètres de simulations sont tels que $\frac{\pi_s}{\eta_2} = 10dB$ et $\frac{\pi_1}{\eta_2} = 20dB$.

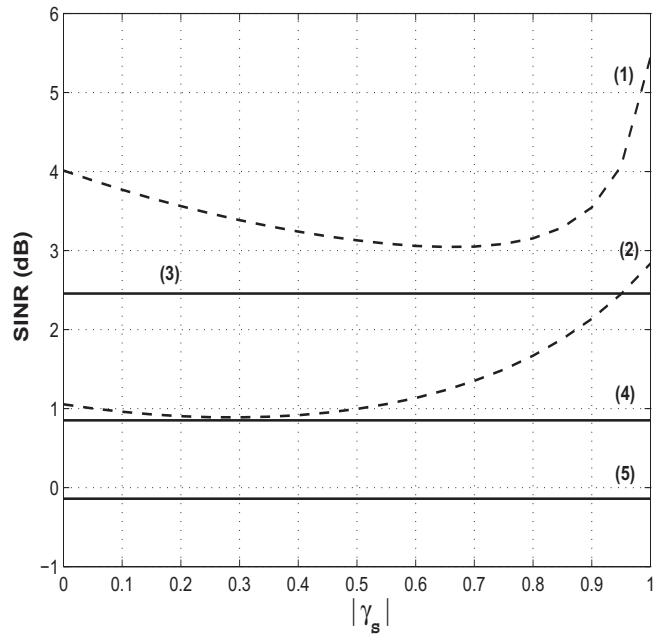
Les figures 3.2(a) et 3.2(b) montrent les variations du $SINR_{MVDR_2}$ en fonction de $|\gamma_s|$ pour respectivement $\cos(\Phi_1) > 0$ et $\cos(\Phi_1) < 0$ et ceci pour une interférence rectiligne et aussi pour une interférence non rectiligne avec $\theta_s = \pi/3$ et $\theta_1 = \pi/2$. On voit bien sur ces figures que quel que soit le scénario des sources, les performances du beamformer $MVDR_2$ sont toujours supérieures à celles des beamformers de Capon et $MVDR_1$. Il est à noter qu'il n'y a pas de variations en SINR quand $|\gamma_s|$ varie pour les beamformers de Capon et $MVDR_1$. Aussi, on note que le $SINR_{MVDR_2}$ est une fonction croissante de $|\gamma_s|$ pour $\cos(\Phi_1) > 0$ et l'existence d'une valeur $0 < |\gamma_{s,min}| < 1$, de $|\gamma_s|$, qui minimise le $SINR_{MVDR_2}$ pour $\cos(\Phi_1) < 0$.

Les figures 3.3(a) et 3.3(b) montrent respectivement les variations du SINR (Capon, $MVDR_1$ et $MVDR_2$) et des gains $SINR_{MVDR_2}/SINR_{Capon}$ et $SINR_{MVDR_1}/SINR_{Capon}$ en fonction de la direction d'arrivée de l'interférence pour $\theta_s = 0$. On constate la croissance du SINR et du gain du beamformer $MVDR_2$ avec la phase différentielle Φ , ceci est dû à l'exploitation optimale de la non circularité du signal utile par le beamformer $MVDR_1$. Aussi, il est à noter que les performances obtenues pour un signal utile BPSK sont meilleures que celles obtenues pour un signal utile QPSK, tout en étant meilleures que celles obtenues à la sortie du beamformer $MVDR_1$.

Les figures 3.4(a) et 3.4(b) montrent respectivement les variations du SINR ($MVDR_1$, $MVDR_2$) et du gain $SINR_{MVDR_2}/SINR_{MVDR_1}$ pour un signal utile rectiligne en fonction du coefficient de non circularité de l'interférence $|\gamma_1|$ pour différentes valeurs de la phase différentielle Φ et de $|\alpha_{1s}|$. On constate aussi les meilleures performances du beamformer $MVDR_2$ par rapport à celles du beamformer $MVDR_1$.

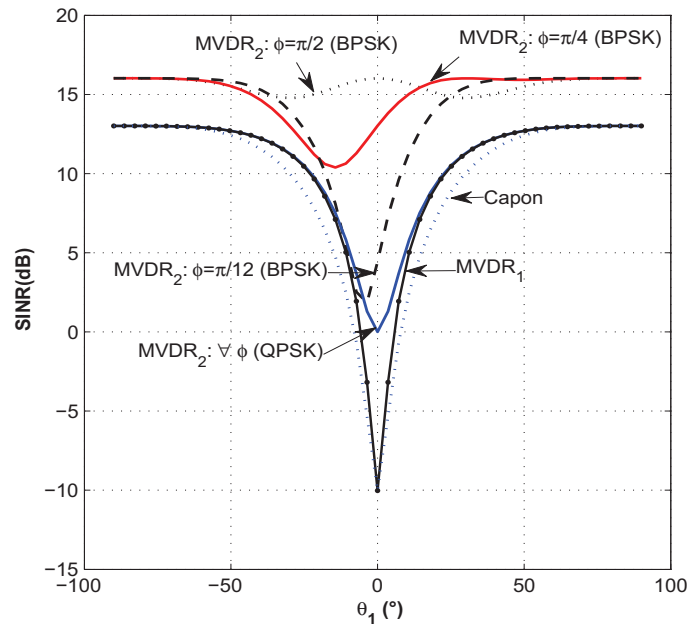


(a) $\Phi_1 = -3\pi/15$

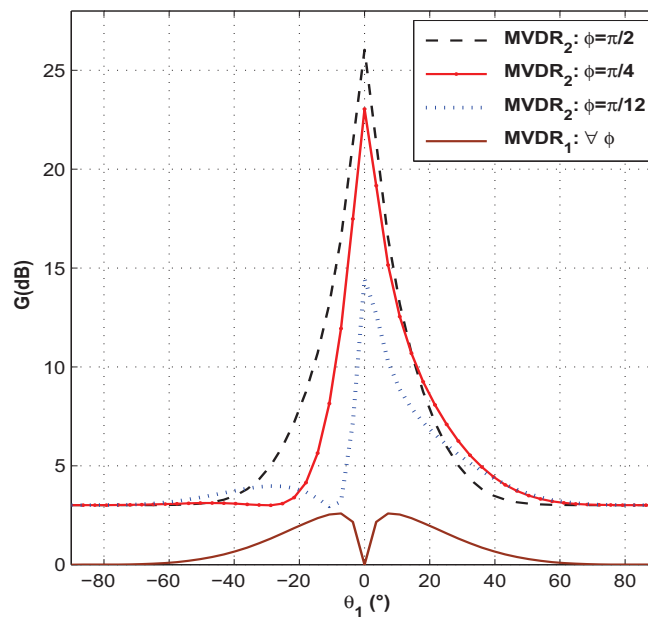


(b) $\Phi_1 = -13\pi/15$

FIGURE 3.2 – (1) $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ avec $\gamma_1 = 1$, (2) $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ avec $|\gamma_1| = 0.9$, (3) $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ avec $|\gamma_1| = 1$, (4) $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ avec $|\gamma_1| = 0.9$, et (5) $\text{SINR}_{\text{Capon}}$ en fonction de $|\gamma_s|$ pour (a) $\cos(\Phi_1) > 0$ et (b) $\cos(\Phi_1) < 0$.

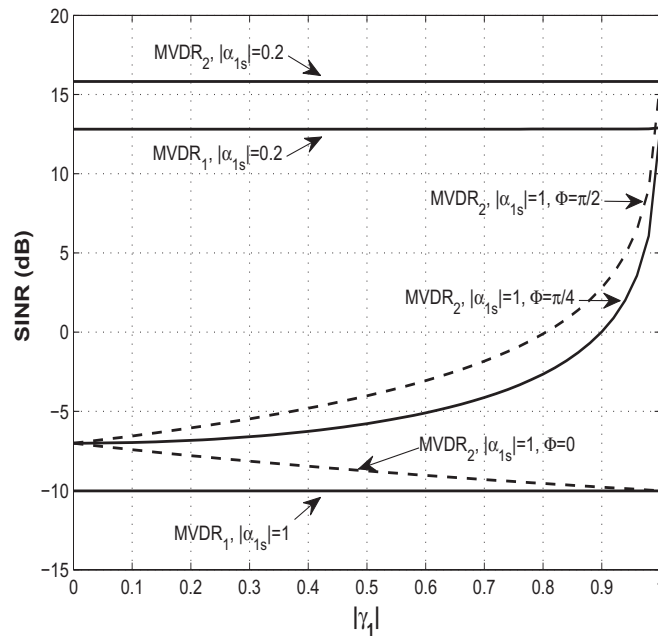


(a) SINR

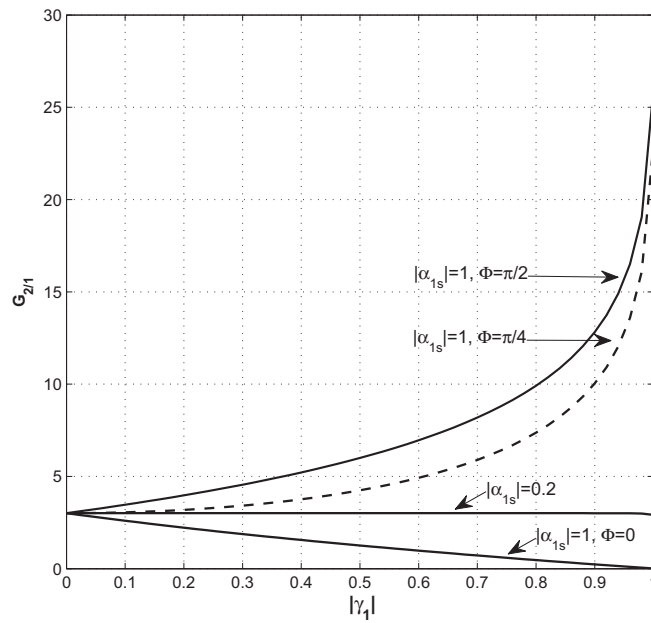


(b) Gain

FIGURE 3.3 – ($\text{SINR}_{\text{Capon}}$, $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$, $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$) (a), (Gain MVDR_1 , Gain MVDR_2) (b) en fonction de la DOA de l'interférence θ_1 pour utile BPSK et QPSK et interférence BPSK.



(a) SINR



(b) Gain

FIGURE 3.4 – SINR_{MVDR_1} , SINR_{MVDR_2} (a), $\text{Gain} = \text{SINR}_{MVDR_2} / \text{SINR}_{MVDR_1}$ (b), en fonction du coefficient de non circularité de l'interférence $|\gamma_1|$ pour utile BPSK.

3.7.4 Performances en taux d'erreur symbole SER du beamformer MVDR₂

Le SER (Symbol Error Rate) est un critère déterminant pour l'évaluation des performances du beamformer MVDR₂. On se propose dans cette partie de calculer ce taux d'erreur uniquement dans le cas de la réception de deux sources dont un signal utile et une interférence en présence d'un bruit supposé gaussien complexe, centré, blanc spatialement et circulaire.

En supposant qu'il n'y a pas de résidu de porteuse pour le signal utile ainsi que pour l'interférence, l'équation (2.2) du vecteur d'observations $\mathbf{x}(t)$ devient de la forme

$$\mathbf{x}(t) = s(t)\mathbf{s} + m(t)\mathbf{j} + \mathbf{b}(t),$$

où les enveloppes complexes $s(t)$ et $m(t)$ s'écrivent $s(t) \triangleq \sqrt{\pi_s}e^{i\phi_s}u(t)$ et $m(t) \triangleq \sqrt{\pi_1}e^{i\phi_1}v(t)$ tel que $u(t)$ et $v(t)$ représentent les symboles émis de l'utile et de l'interférence respectivement (dépendant du type de modulation).

En utilisant (3.14) et (3.25), le vecteur des observations étendu $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t) &= s(t) (\tilde{\mathbf{s}}_1 + \gamma_s^* \tilde{\mathbf{s}}_2) + s'(t) [\pi_s(1 - |\gamma_s^2|)]^{1/2} \tilde{\mathbf{s}}_2 + m(t) (\tilde{\mathbf{j}}_1 + \gamma_1^* \tilde{\mathbf{j}}_2) + m'(t) [\pi_1(1 - |\gamma_1^2|)]^{1/2} \tilde{\mathbf{j}}_2 + \tilde{\mathbf{b}}(t) \\ &= s(t) \tilde{\mathbf{s}}_\gamma + m(t) \tilde{\mathbf{j}}_\gamma + s'(t) [\pi_s(1 - |\gamma_s^2|)]^{1/2} \tilde{\mathbf{s}}_2 + m'(t) [\pi_1(1 - |\gamma_1^2|)]^{1/2} \tilde{\mathbf{j}}_2 + \tilde{\mathbf{b}}(t). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nous allons étudier les performances en SER du beamformer MVDR₂ pour différents types de modulation des signaux reçus, ainsi nous distinguons les cas suivants :

3.7.4.1 Cas où le signal utile et l'interférence sont BPSK

Dans ce cas ($|\gamma_s| = |\gamma_1| = 1$) et les symboles émis $u(t) \in \{+1, -1\}$ et $v(t) \in \{+1, -1\}$ sont équiprobables. Le vecteur d'observations étendu devient

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = s(t) \tilde{\mathbf{s}}_\gamma + m(t) \tilde{\mathbf{j}}_\gamma + \tilde{\mathbf{b}}(t). \quad (3.51)$$

En utilisant (3.17) ainsi qu'en posant $a \triangleq \sqrt{\pi_s}e^{i\phi_s}$ et $b \triangleq \sqrt{\pi_1}e^{i\phi_1} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{j}}_\gamma$, la sortie $y(t)$ du beamformer MVDR₂ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t) + m(t) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{j}}_\gamma + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{b}}(t) \\ &= u(t)a + v(t)b + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{b}}(t). \end{aligned}$$

Puisque le signal utile est BPSK donc de symboles réels, le récepteur optimal sous l'hypothèse que le bruit total est gaussien ⁶ est donné par la figure suivante

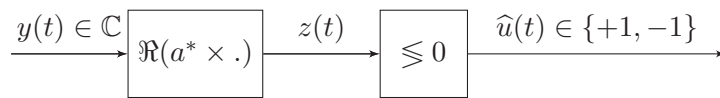


FIGURE 3.5 – Récepteur sous optimal

En entrée du comparateur à seuil on a

$$z(t) = \Re [a^* y(t)] = u(t)\pi_s + v(t)\Re(a^* b) + \Re(a^* \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{b}}(t)).$$

⁶Ce récepteur n'est donc pas optimal car le bruit total n'est pas gaussien en présence d'une interférence BPSK

La décision se fera selon le signe de $z(t)$, si $z(t) \geq 0$, on a $\hat{u}(t) = 1$ sinon $\hat{u}(t) = -1$.

Pour calculer le SER posons : $b' \triangleq \Re(a^*b)$ et $n' \triangleq \Re(a^* \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{b}}(t))$ donc $z(t)$ devient $z(t) = u(t)\pi_s + v(t)b' + n'$.

Par symétrie, le SER est donné selon la probabilité d'erreur par

$$\begin{aligned} \text{SER} &= p(\hat{u}(t) = 1/u(t) = -1) = p(v(t)b' + n' > \pi_s) \\ &= \frac{1}{2} [p(n' > \pi_s - b') + p(n' > \pi_s + b')]. \end{aligned}$$

Le SER peut ainsi s'exprimer sous la forme suivante

$$\text{SER} = \frac{1}{2} \left\{ Q \left[\sqrt{\text{SNR}} + \sqrt{\text{INR}} \right] + Q \left[\sqrt{\text{SNR}} - \sqrt{\text{INR}} \right] \right\}, \quad (3.52)$$

où $Q(u) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$, SNR et INR représentent le rapport signal sur bruit et le rapport interférence sur bruit respectivement à l'entrée $z(t)$.

Pour $|\gamma_s| = |\gamma_1| = 1$, le filtre $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$ est de la forme $[\mathbf{w}^T, e^{-i2\phi_s} \mathbf{w}^H]^T$,

$$b' = 2\sqrt{\pi_1}\sqrt{\pi_s} \Re \left[e^{i(\phi_1 - \phi_s)} \mathbf{w}^H \mathbf{j} \right] \quad \text{et} \quad n' = 2\sqrt{\pi_s} \Re \left[e^{-i\phi_s} \mathbf{w}^H \mathbf{b}(t) \right].$$

et pour

$$\mathbb{E} \left(\tilde{\mathbf{b}}(t) \tilde{\mathbf{b}}(t)^H \right) = \eta_2 \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left(\tilde{\mathbf{b}}(t) \tilde{\mathbf{b}}(t)^T \right) = \eta_2 \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \frac{\pi_s}{2\eta_2 \|\mathbf{w}\|^2}, \\ \text{INR} &= \frac{2\pi_1 \left[\Re \left(e^{i(\phi_1 - \phi_s)} \mathbf{w}^H \mathbf{j} \right) \right]^2}{\eta_2 \|\mathbf{w}\|^2}. \end{aligned}$$

Nous constatons que le SNR et le INR sont respectivement proportionnels à $\frac{\pi_s}{\eta_2}$ et $\frac{\pi_1}{\eta_2}$ avec un coefficient de proportionnalité qui dépend du scénario par l'intermédiaire de \mathbf{w} , \mathbf{j} , ϕ_s et ϕ_1 . Ils sont aussi égaux aux SNR et INR calculés dans [28] pour lequel le modèle des signaux utilisé est différent car la phase de non circularité ϕ_s du signal utile définie dans la section 2.3 est incluse dans le vecteur directeur \mathbf{s} .

3.7.4.2 Cas où le signal utile est BPSK et l'interférence est QPSK

Dans ce cas $|\gamma_s| = 1$, $\gamma_1 = 0$, les symboles reçus $u(t) \in \{+1, -1\}$ et $v(t) \in \{-1, +1, -i, +i\}$ sont équiprobables. Le vecteur des observations étendu (3.50) devient

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = s(t)\tilde{\mathbf{s}}_\gamma + m(t)\tilde{\mathbf{j}}_1 + m(t)^*\tilde{\mathbf{j}}_2 + \tilde{\mathbf{b}}(t).$$

Toujours en utilisant (3.17) et en posant $a \triangleq \sqrt{\pi_s} e^{i\phi_s}$, $b \triangleq \sqrt{\pi_1} e^{i\phi_1} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{j}}_1$ et $c \triangleq \sqrt{\pi_1} e^{-i\phi_1} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{j}}_2$, la sortie $y(t)$ du beamformer $\text{MVDR}_{\text{MVDR}_2}$ s'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma + m(t) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{j}}_1 + m(t)^* \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{j}}_2 + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{b}}(t) \\ &= u(t)a + v(t)b + v(t)^*c + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{b}}(t) \end{aligned}$$

Comme dans le cas 3.7.4.1, le signal utile est BPSK de symboles réels, le récepteur optimal sous l'hypothèse que le bruit total est gaussien ⁷ est donné par la figure 3.5.

En entrée du comparateur à seuil on a :

$$z(t) = \Re[a^*y(t)] = u(t)\pi_s + \Re(v(t)a^*b) + \Re(v(t)^*a^*c) + \Re(a^* \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{b}}(t)).$$

Comme dans le cas précédent, la décision se fera selon le signe de $z(t)$. Pour calculer le SER posons : $b' \triangleq a^*b$, $c' \triangleq a^*c$ et $n' \triangleq \Re(a^* \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H \tilde{\mathbf{b}}(t))$, on aura donc $z(t)$ de la forme

$$z(t) = u(t)\pi_s + \Re(v(t)b') + \Re(v(t)^*c') + n'.$$

Par symétrie, le SER est donné selon la probabilité d'erreur par

$$\begin{aligned} \text{SER} &= p(\hat{u}(t) = 1/u(t) = -1) = p(n' > \pi_s - \Re(v(t)b') - \Re(v(t)^*c')) \\ &= \frac{1}{4}p(n' > \pi_s - \Re(b') - \Re(c')) + \frac{1}{4}p(n' > \pi_s + \Re(b') + \Re(c')) \\ &\quad + \frac{1}{4}p(n' > \pi_s + \Re(ib') - \Re(ic')) + \frac{1}{4}p(n' > \pi_s - \Re(ib') + \Re(ic')). \end{aligned}$$

Le SER peut ainsi s'exprimer sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \text{SER} &= \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\text{SNR}} - \sqrt{\text{INR}_1}\right) + \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\text{SNR}} + \sqrt{\text{INR}_1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\text{SNR}} + \sqrt{\text{INR}_2}\right) + \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\text{SNR}} - \sqrt{\text{INR}_2}\right), \end{aligned} \quad (3.53)$$

où

$$\begin{aligned} \text{SNR} &\triangleq \frac{\pi_s}{\text{Var}(n')} = \frac{2\pi_s}{\eta_2 \left[\|\mathbf{w}_1\|^2 + \|\mathbf{w}_2\|^2 + 2\Re(e^{i2\phi_s} \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2) \right]} \\ \text{INR}_1 &\triangleq \frac{[\Re(b') + \Re(c')]^2}{\text{Var}(n')} = \frac{2\pi_1 \left[\Re(e^{i(\phi_1 - \phi_s)} \mathbf{w}_1^H \mathbf{j}) + \Re(e^{-i(\phi_1 + \phi_s)} \mathbf{w}_2^H \mathbf{j}^*) \right]^2}{\eta_2 \left[\|\mathbf{w}_1\|^2 + \|\mathbf{w}_2\|^2 + 2\Re(e^{i2\phi_s} \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2) \right]} \\ \text{INR}_2 &\triangleq \frac{[\Re(ib') - \Re(ic')]^2}{\text{Var}(n')} = \frac{2\pi_1 \left[\Re(i e^{i(\phi_1 - \phi_s)} \mathbf{w}_1^H \mathbf{j}) - \Re(i e^{-i(\phi_1 + \phi_s)} \mathbf{w}_2^H \mathbf{j}^*) \right]^2}{\eta_2 \left[\|\mathbf{w}_1\|^2 + \|\mathbf{w}_2\|^2 + 2\Re(e^{i2\phi_s} \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2) \right]}, \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$ est structuré de la forme $\tilde{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T]^T$, la puissance $\text{Var}(n')$ du bruit gaussien à la sortie $z(t)$ est donnée par :

$$\text{Var}(n') = \frac{\pi_s \eta_2}{2} \left[\|\mathbf{w}_1\|^2 + \|\mathbf{w}_2\|^2 + 2\Re(e^{i2\phi_s} \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2) \right]. \quad (3.54)$$

⁷Ce récepteur n'est donc pas optimal car le bruit total n'est pas gaussien en présence d'une interférence QPSK

Nous constatons que le SNR et (INR₁, INR₂) sont respectivement proportionnels à $\frac{\pi_s}{\eta_2}$ et $\frac{\pi_1}{\eta_2}$ avec un coefficient de proportionnalité qui dépend du scénario par à travers \mathbf{w} , \mathbf{j} , ϕ_s et ϕ_1 .

3.7.4.3 Cas où le signal utile est QPSK et l'interférence est BPSK

Dans ce cas $\gamma_s = 0$ et $|\gamma_1| = 1$, les symboles reçus $u(t) \in \{-1, +1, -i, +i\}$ et $v(t) \in \{-1, +1\}$ sont équiprobables. Le vecteur des observations étendu (3.50) devient

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = s(t)\tilde{\mathbf{s}}_1 + s(t)^*\tilde{\mathbf{s}}_2 + m(t)\tilde{\mathbf{j}}_\gamma + \tilde{\mathbf{b}}(t).$$

En utilisant (3.17) et en posant $a \triangleq \sqrt{\pi_s}e^{i\phi_s}$, $b \triangleq \sqrt{\pi_s}e^{-i\phi_s}\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H\tilde{\mathbf{s}}_2$, $c \triangleq \sqrt{\pi_1}e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H\tilde{\mathbf{j}}_\gamma$, la sortie $y(t)$ du beamformer MVDR_{MVDR₂} s'écrit alors sous la forme

$$y(t) = u(t)a + u^*(t)b + v(t)c + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H\tilde{\mathbf{b}}(t). \quad (3.55)$$

Le signal utile étant QPSK donc de symboles complexes conjugués, le récepteur optimal sous l'hypothèse que le bruit total est gaussien ⁸ est donné par le schéma suivant



FIGURE 3.6 – Récepteur sous optimal

En entrée du comparateur à seuil :

$$z(t) = a^*y(t) = \pi_s u(t) + u(t)^*a^*b + v(t)a^*c + a^*\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H\tilde{\mathbf{b}}(t).$$

La décision se fera selon l'appartenance de $z(t)$ à un des quatre cadrans du plan complexe ($x = \Re, y = \Im$) délimités par les bissectrices des axes imaginaire et réel. Pour calculer le SER posons : $b' \triangleq -a^*b + a^*c$, $c' \triangleq -a^*b - a^*c$ et $n' \triangleq a^*\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H\tilde{\mathbf{b}}(t)$, ainsi par symétrie le SER est donné selon la probabilité d'erreur par

$$\begin{aligned} \text{SER} &= p(\hat{u}(t) \neq -1/u(t) = -1) \\ &= \frac{1}{2}p[(-\pi_s + b' + n') \in \Delta] + \frac{1}{2}p[(-\pi_s + c' + n') \in \Delta], \end{aligned}$$

où Δ désigne la partie complémentaire d'un quart de plan complexe selon la figure 3.7.

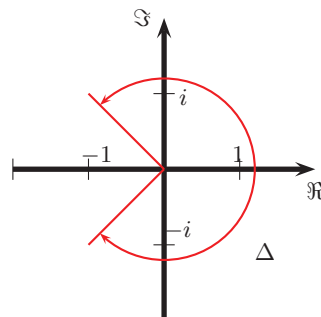


FIGURE 3.7 – Plan complexe

⁸Ce récepteur n'est donc pas optimal car le bruit total n'est pas gaussien en présence d'une interférence BPSK

Remarquons qu'ici, n' est une variable aléatoire complexe, gaussienne, centrée mais non circulaire tel que

$$\begin{aligned} E(|n'|^2) &= \pi_s \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H E(\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}}^H) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2} = \pi_s \eta_2 \left(\|\mathbf{w}_1\|^2 + \|\mathbf{w}_2\|^2 \right) \\ E(n'^2) &= \pi_s \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^H E(\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}}^T) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}^* = 2\pi_s \eta_2 e^{-i2\phi_s} \mathbf{w}_2^H \mathbf{w}_1^*, \end{aligned}$$

où dans ce cas, $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$ est structuré de la forme $\tilde{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T]^T$.

Par suite le calcul du SER ne peut être évalué à l'aide de la fonction d'erreur Q . Par contre il peut être évalué en utilisant l'expression générale de la densité de probabilité d'une variable aléatoire complexe, gaussienne, centrée et scalaire z , définie par[76]

$$p(z; \tilde{\mathbf{C}}) = \frac{1}{\pi \sqrt{\det \tilde{\mathbf{C}}}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \tilde{\mathbf{z}}}, \quad (3.56)$$

où $\tilde{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix}$ et la matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ s'écrit $\tilde{\mathbf{C}} = \pi_s \eta_2 \begin{pmatrix} \|\mathbf{w}_1\|^2 + \|\mathbf{w}_2\|^2 & 2e^{-i2\phi_s} \mathbf{w}_2^H \mathbf{w}_1^* \\ 2e^{i2\phi_s} \mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_1 & \|\mathbf{w}_1\|^2 + \|\mathbf{w}_2\|^2 \end{pmatrix}$

En utilisant la densité de probabilité (3.56), le SER peut ainsi être donné par

$$\text{SER} = \frac{1}{2} \left[Q'(\Delta_1, \tilde{\mathbf{C}}) + Q'(\Delta_2, \tilde{\mathbf{C}}) \right] \quad (3.57)$$

où $Q'(\Delta_i, \tilde{\mathbf{C}}) \triangleq \iint_{\Delta_i} p(z; \tilde{\mathbf{C}}) dx dy$, $i = 1, 2$ tel que Δ_1 et Δ_2 désignent les domaines du plan complexe : $\{z; z + \alpha_1 \in \Delta\}$ et $\{z; z + \alpha_2 \in \Delta\}$ respectivement, où

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\triangleq -\pi_s + b' \triangleq -\pi_s - \pi_s e^{-i2\phi_s} \mathbf{w}_2^H \mathbf{s}^* + \sqrt{\pi_s} \sqrt{\pi_1} \left[e^{i(\phi_1 - \phi_s)} \mathbf{w}_1^H \mathbf{j} + e^{-i(\phi_1 + \phi_s)} \mathbf{w}_2^H \mathbf{j}^* \right] \\ \alpha_2 &\triangleq -\pi_s + c' \triangleq -\pi_s - \pi_s e^{-i2\phi_s} \mathbf{w}_2^H \mathbf{s}^* - \sqrt{\pi_s} \sqrt{\pi_1} \left[e^{i(\phi_1 - \phi_s)} \mathbf{w}_1^H \mathbf{j} + e^{-i(\phi_1 + \phi_s)} \mathbf{w}_2^H \mathbf{j}^* \right]. \end{aligned}$$

3.7.4.4 Illustrations

Nous supposons qu'une antenne à $N = 2$ capteurs, reçoit un signal utile et une interférence de coefficients de non circularité γ_s et γ_1 respectivement, noyés dans un bruit blanc, gaussien, circulaire au second ordre tel que $\pi_1/\eta_2 = 20dB$.

Nous allons considérer les trois cas présentés dans les paragraphes précédents, en représentant le SER du beamformer MVDR_2 et du beamformer MVDR_1 A.3 en fonction du rapport π_s/η_2 pour différentes valeurs de la phase différentielle $\Phi \triangleq \phi_1 - \phi_s - \phi_{1s}$. Les figures suivantes montrent les variations du SER théorique ainsi du SER estimé par simulation (avec 1000 erreurs observées).

La figure 3.8 donne les variations du SER théorique et estimé en fonction de π_s/η_2 pour un signal utile BPSK et une interférence BPSK. On voit bien que le SER à la sortie du beamformer MVDR_1 est plus grand que celui à la sortie du beamformer MVDR_2 , ceci est accompagné d'un gain en SNR d'environ $5dB$. Ce qui confirme les meilleurs performances du beamformer MVDR_2 en SINR.

La figure 3.9 montre les variations du SER théorique et estimé en fonction de π_s/η_2 pour un signal utile BPSK et une interférence QPSK. Il est à noter que les performances en SER du

beamformer MVDR₂ sont meilleurs que celles du beamformer MVDR₁ illustrées par un gain en SNR par rapport au Capon de $3dB$ pour une taux d'erreur donné alors que le gain en SINR est aussi de $3dB$.

La figure 3.10 montre les variations du SER théorique et estimé en fonction de π_s/η_2 pour un signal utile QPSK et une interférence BPSK ⁹. On remarque que les performances en SER des deux beamformers MVDR₁ et MVDR₂ sont très proches mais restent meilleures que celles à la sortie du beamformer de Capon avec un gain en SNR d'environ $1.5dB$ par rapport au beamformer de Capon pour une taux d'erreur donné.

Les SER en sorties des beamformers MVDR₁ et MVDR₂ sont très proches car selon la figure 3.3, les SINR en sortie de ces deux beamformers sont aussi très proches. Les SER restent proches malgré le fait que, pour des DOA's identiques entre l'utile et l'interférence, on observe une différence en SINR d'environ $10dB$ à la sortie de ces deux beamformers, ceci s'explique par le fait que ces SINR restent faibles ($0db$ et $-10dB$ respectivement).

Par contre pour les applications en détection (présence ou absence d'une séquence connue de K symboles), les SINR en sortie du détecteur (sous l'hypothèse faussement gaussienne circulaire) appliqués sur les sorties $y(kT)$ des beamformers MVDR₁ et MVDR₂ seront respectivement multipliés par K ou simplement une fonction croissante de k . Donc pour le scénario précédent où les DOA sont identiques, la différence de $10dB$ en SINR entre les beamformers MVDR₁ et MVDR₂ est pratiquement préservée mais cette fois ci ces SINR sont élevés. Afin d'illustrer ces performances en détection, nous avons simulé par des réalisations Monte Carlo la probabilité de détection (PD) en fonction du SNR (π_s/η_2) en entrée du beamformer avec une probabilité de fausse alarme (PFA) fixé pour un signal utile QPSK et une interférence BPSK. Ainsi, on considère une trame de radio communication dans laquelle une séquence d'apprentissage QPSK de longueur $K = 100$ est transmise. La figure 3.11 est obtenue avec 100000 réalisations pour des DOA identiques $\theta_1 = \theta_s = 0$ et $\pi_1/\eta_2 = 20dB$. Cette figure montre que les performances en détection du beamformer MVDR₂ sont bien meilleures que celles du beamformer MVDR₁. Ceci est dû à l'utilisation par le beamformer MVDR₂ de l'information de non circularité contenue dans le signal utile, le schéma fonctionnel de détection est donné en annexe A.4.

⁹Dans cette partie, on a utilisé une approche numérique pour approximer la fonction Q' dans (3.57)

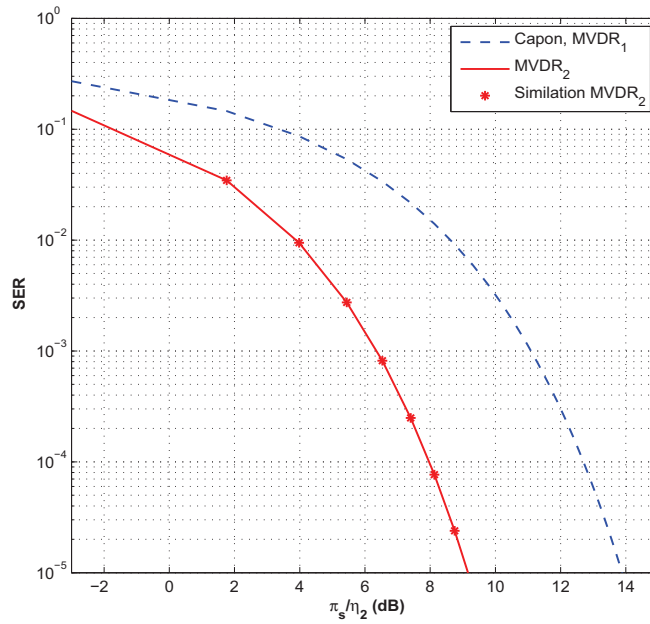


FIGURE 3.8 – SER théorique et estimé pour un signal utile BPSK et une interférence BPSK en fonction de π_s/η_2 pour $\pi_1/\eta_2 = 20\text{dB}$, $\phi_s = 0$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_s = 0$ et $\theta_1 = \pi/3$.

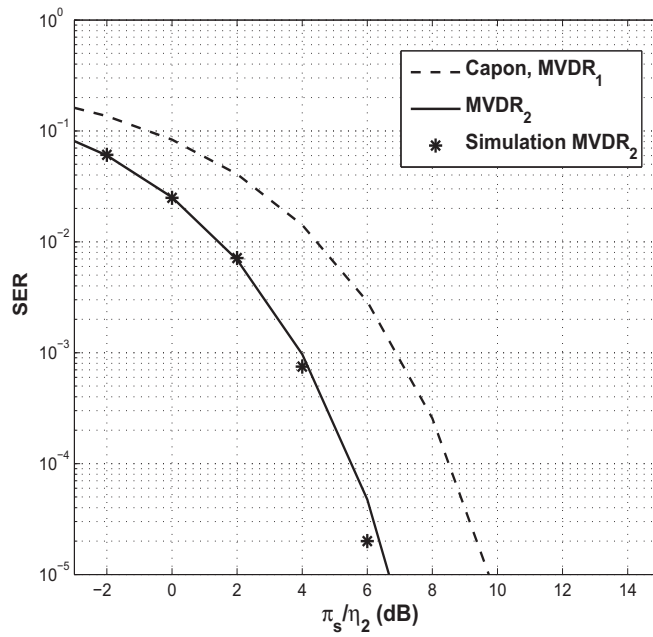


FIGURE 3.9 – SER théorique et estimé pour un signal utile BPSK et une interférence QPSK en fonction de π_s/η_2 pour $\pi_1/\eta_2 = 20\text{dB}$, $\phi_s = 0$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_s = 0$ et $\theta_1 = \pi/3$.

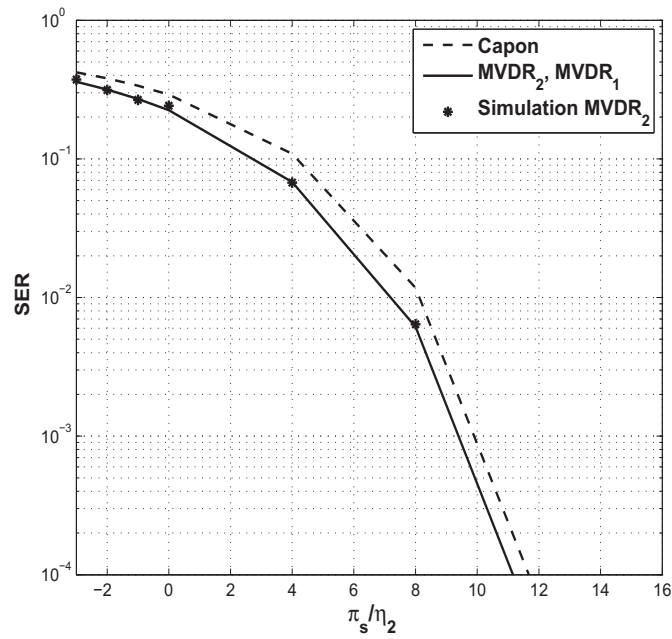


FIGURE 3.10 – SER théorique et estimé pour un signal utile QPSK et une interférence BPSK en fonction de π_s/η_2 pour $\pi_1/\eta_2 = 20\text{dB}$, $\phi_s = 0$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_s = 0$ et $\theta_1 = \pi/6$.

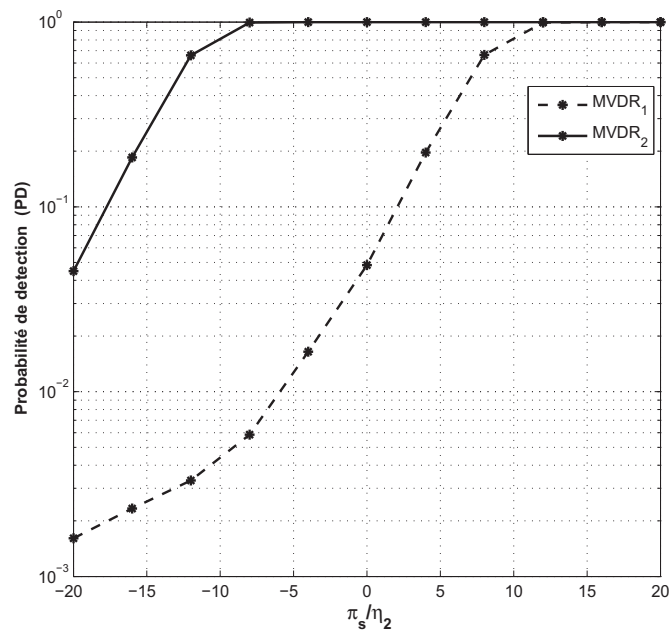


FIGURE 3.11 – Probabilité de détection simulée (100000 réalisations, PFA=0.001) en fonction de π_s/η_2 pour $\pi_1/\eta_2 = 20\text{dB}$, $\phi_s = 0$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_s = 0$ et $\theta_1 = 0$.

3.7.5 Mise en œuvre du beamformer MVDR₂

Dans des situations réelles, des informations sur le signal utile peuvent être inconnues comme sa direction d'arrivée et sa modulation, ce qui mène à des traitements adaptatifs pour l'implantation du beamformer MVDR₂. Dans cette partie, selon la connaissance du vecteur directionnel $\tilde{\mathbf{s}}_\gamma$, nous distinguons plusieurs implantations possibles pour le beamformer MVDR₂.

3.7.5.1 Cas où \mathbf{s}_γ est connu

Lorsque le vecteur \mathbf{s}_γ est connu, c'est à dire que la direction ainsi que le degré de non circularité du signal utile sont connus, il ne nous reste qu'à estimer la matrice $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ pour construire $\hat{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$. Ainsi, nous utilisons une extension WL de l'algorithme d'inversion de la matrice des échantillons SMI (Sample Matrix Inversion) [81]. Cette approche consiste à estimer empiriquement les matrices de corrélation \mathbf{R}_x et $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ à partir de respectivement, K échantillons des vecteurs d'observations $\mathbf{x}(kT_e)$ et $\tilde{\mathbf{x}}(kT_e)$ où T_e est la période d'échantillonnage. On obtient alors :

$$\hat{\mathbf{R}}_x \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(kT_e) \mathbf{x}(kT_e)^H \quad (3.58)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}} \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}(kT_e) \tilde{\mathbf{x}}(kT_e)^H. \quad (3.59)$$

En suite on estime $\mathbf{w}_{\text{Capon}}$, $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}$ et $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$ par respectivement $\hat{\mathbf{w}}_{\text{Capon}}$, $\hat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MVDR}_2}$ et $\hat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MVDR}_2}$ qui sont donnés par

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{Capon}} \triangleq [\mathbf{s}^H \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \mathbf{s}]^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \mathbf{s} \quad (3.60)$$

$$\hat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MVDR}_1} \triangleq \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}} [\tilde{\mathbf{S}}^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}]^{-1} \mathbf{f} \quad (3.61)$$

$$\hat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MVDR}_2} \triangleq [\tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma]^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma. \quad (3.62)$$

Les SINR aux sorties des beamformers $\hat{\mathbf{w}}_{\text{Capon}}$ et $\hat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MVDR}_{1,2}}$ sont respectivement donnés par

$$\text{SINR}[\hat{\mathbf{w}}_{\text{Capon}}](K) \triangleq \frac{\pi_s |\hat{\mathbf{w}}_{\text{Capon}}^H \mathbf{s}|^2}{\hat{\mathbf{w}}_{\text{Capon}}^H \mathbf{R}_n \hat{\mathbf{w}}_{\text{Capon}}} \quad (3.63)$$

$$\text{SINR}[\hat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MVDR}_n}]_{(n=1,2)}(K) \triangleq \frac{\pi_s |\hat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MVDR}_n}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma|^2}{\hat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MVDR}_n}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} \hat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MVDR}_n}}. \quad (3.64)$$

3.7.5.2 Cas où \mathbf{s} et γ sont inconnus

Séquence d'apprentissage

Supposons dans ce cas, que nous disposons d'une séquence d'apprentissage de longueur K , $\{s(kT_s)\}_{k=1, \dots, K}$ connue du récepteur. Alors, le vecteur directionnel $\tilde{\mathbf{s}}_\gamma$ peut être estimé comme solution de la minimisation des moindres carrés suivante :

$$\text{Arg} \left\{ \text{Min}_{\tilde{\mathbf{s}}_\gamma} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \|\tilde{\mathbf{x}}(kT_s) - s(kT_s) \tilde{\mathbf{s}}_\gamma\|^2 \right\},$$

dont la solution de cette équation est donnée par :

$$\widehat{\mathbf{s}}_\gamma = \widehat{r}_s^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x},s},$$

$$\text{où } \widehat{r}_s = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |s(kT_s)|^2 \text{ et } \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x},s} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}(kT_s) s(kT_s)^*.$$

L'estimée du filtre $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$ est alors $\widehat{\tilde{\mathbf{w}}}$ donnée par :

$$\widehat{\tilde{\mathbf{w}}} = [\widehat{\mathbf{s}}_\gamma^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{s}}_\gamma]^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x},s}, \quad (3.65)$$

qui est proportionnel à l'estimé usuel MMSE $\widehat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MMSE}} = \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x},s}$. Le SINR estimé en sortie $\widehat{\tilde{\mathbf{w}}}$ est alors donné par l'expression (3.64).

Technique d'identification aveugle E-JADE

Nous proposons d'utiliser une technique d'identification aveugle afin d'estimer directement le vecteur \mathbf{s}_γ à une ambiguïté de source près¹⁰.

Dans le but d'estimer le vecteur $\tilde{\mathbf{s}}_\gamma$ à partir de K vecteurs d'observations étendus $\tilde{\mathbf{x}}(kT_e)$, nous avons utilisé une extension WL de l'algorithme JADE introduit dans [15]. Dans ce chapitre, cette extension est appelée E-JADE (Extended Joint Approximate Diagonalization of Eigenmatrices) et un descriptif de cette extension est donné dans l'annexe A.5.

Une fois le vecteur \mathbf{s}_γ est estimé par E-JADE, on obtient un filtre estimé $\widehat{\tilde{\mathbf{w}}}_{\text{MVDR}_2}$ correspondant est de la même forme que celui donné par l'expression (3.65). Le SINR estimé est donné par la relation (3.64).

Remarque 4. *A noter que cette approche exige que les différentes sources équivalentes du modèle étendu soient indépendantes. Par suite cette approche n'est théoriquement valide que dans le cas d'un signal utile BPSK et d'interférences BPSK.*

Elle exige aussi que le nombre M de ces sources équivalentes indépendantes soit connu¹¹.

3.7.5.3 Cas où \mathbf{s} est connu et γ_s est inconnu

Dans ce cas, on dispose uniquement du vecteur direction d'arrivée du signal utile \mathbf{s} sans aucune connaissance a priori sur sa forme d'onde et donc de son coefficient de non circularité γ_s . Nous avons tenté deux autres approches (empirique et d'analyse spatiale) qui consistent à estimer d'abord γ_s , puis de calculer le vecteur $\tilde{\mathbf{s}}_\gamma$ correspondant.

Approche empirique

Cette approche est basée sur l'hypothèse que le SINR à la sortie du beamformer Capon ou MVDR₁ est grand devant 1. Ainsi γ_s peut être estimé à partir de la sortie $y(t)$ du beamformer de Capon ou du beamformer MVDR₁ calculés en exploitant la connaissance de \mathbf{s} . Ainsi l'estimée de γ_s sera donnée par

$$\widehat{\gamma}_s = \frac{\sum_{k=1}^K y(kT_e)^2}{\sum_{k=1}^K |y(kT_e)|^2}.$$

¹⁰Dans cette partie, une connaissance a priori doit être disponible pour lever l'ambiguïté entre les différents vecteurs \mathbf{s}_γ estimés par l'algorithme JADE.

¹¹Le nombre de sources équivalentes M dépend de la non circularité des sources réelles tel que $M = P_r + 2P_{nr} + 2 - \delta(1 - |\gamma_s|)$, où P_r et P_{nr} représentent respectivement le nombre d'interférences rectilignes et non rectilignes

Après simulations on s'aperçoit que le SINR à la sortie du beamformer MVDR₂ converge en fonction du nombre d'échantillons K au mieux vers celui à la sortie du beamformer MVDR₁ ce qui rend cette approche inutile.

Pour résoudre ce problème d'estimation de γ_s , nous avons tenté une autre approche dite d'analyse spatiale.

Approche d'analyse spatiale de Capon

Cette approche consiste à estimer γ_s à partir de la valeur $\hat{\gamma}_s$ qui maximise la fonction de localisation issue de la minimisation de la puissance de sortie sous la contrainte $\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{s}}_\gamma = 1$. Ainsi, sous la contrainte :

$$\text{Min}_{\tilde{\mathbf{w}}} \left\{ \tilde{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{w}} \right\}, \quad (3.66)$$

a comme solution $\tilde{\mathbf{w}} = [\tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma]^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma$, qui injecté dans (3.66) nous donne la fonction de localisation $\tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma^{-1}$. On aura donc

$$\hat{\gamma}_s = \text{Arg} \left\{ \text{Max}_\gamma \frac{1}{\tilde{\mathbf{s}}_\gamma^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma} \right\},$$

où $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}$ est définie par (3.59). Cette fonction de localisation peut s'écrire sous forme de l'inverse d'une forme quadratique $a |\gamma_s|^2 + b \gamma_s^* + b^* \gamma_s + c$, où a et c sont réels, b est complexe. Ainsi, le minimum est donné pour

$$\hat{\gamma}_s = \frac{-b}{a}.$$

Il est apparu que cet estimateur $\hat{\gamma}_s$ est asymptotiquement biaisé. Par exemple, en l'absence de brouilleurs et en statistiques exactes on a

$$\hat{\gamma}_s = \frac{\pi_s \|\mathbf{s}\|^2}{\eta_2 + \pi_s \|\mathbf{s}\|^2} \gamma_s.$$

De plus, après calculs numériques, on s'aperçoit que pour un seul brouilleur, le SINR (3.64) associé converge vers le SINR donné par le beamformer MVDR₁ quand K tend vers l'infini, ce qui rend aussi cette approche non exploitable.

Remarque 5. Une approche sous espace n'est pas exploitable y compris si nous connaissons la dimension $M = P_r + 2P_{nr} + 2 - \delta(1 - |\gamma_s|) < 2N$ du sous espace des signaux, car le sous espace engendré par le signal utile est généré par $\tilde{\mathbf{s}}_1$ et $\tilde{\mathbf{s}}_2$ qui ne dépendent pas de γ_s .

3.7.5.4 Simulations

Afin d'illustrer la mise en œuvre du beamformer MVDR₂, nous avons effectué des simulations pour analyser sa convergence en SINR. Ainsi, pour une antenne constituée de $N = 2$ capteurs, espacés d'une demi longueur d'onde, qui reçoit un signal utile corrompu par la contribution d'un signal interférence et d'un bruit blanc gaussien circulaire au second ordre, I réalisations indépendantes sont effectuées et permettant de calculer une moyenne des SINR correspondants. Ainsi, les figures suivantes sont toutes données pour $I = 500$ réalisations.

A noter que nous avons utilisé l'algorithme E-JADE avec différents paramètres d'entrée, ainsi introduisons la notation E-JADE(M) pour M sources équivalentes. Les résultats sont obtenus pour : $\pi_s/\eta_2 = 10dB$, $\pi_1/\eta_2 = 20db$, $\theta_s = 0$, $\theta_1 = \pi/4$ et $\phi_1 = \phi_s = \pi/4$.

La figure 3.12 donne les variations du SINR à la sortie des filtres estimés décrits dans le paragraphe 3.7.5 en fonction du nombre d'échantillons K pour un signal utile BPSK et une interférence BPSK. On note que les trois filtres convergent rapidement mais avec différentes vitesses tel que la méthode WL-SMI est moins rapide que les autres. Cette figure confirme la validité de la méthode E-JADE(2) pour un signal utile BPSK et une interférence BPSK.

Pour un signal utile BPSK et une interférence QPSK, nous constatons sur la figure 3.13, que les techniques WL-SMI et séquence d'apprentissage convergent rapidement avec quasiment la même vitesse que dans le cas où l'interférence est BPSK. La technique E-JADE(3) continue à estimer correctement le vecteur $\tilde{\mathbf{s}}_\gamma$ malgré que les deux sources équivalentes générées par l'interférence QPSK ne soient pas indépendantes. Par contre, si on utilise dans ce cas E-JADE(2), on aura divergence et le vecteur $\tilde{\mathbf{s}}_\gamma$ ne pourra être estimé.

Les figures 3.14 et 3.15 nous montrent, pour un signal utile BPSK et quelque soit la non circularité de l'interférence, que même lorsque le nombre d'échantillons est petit, le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ estimé reste supérieur aux SINR estimés à la sortie des beamformers estimés Capon et MVDR₁.

Aussi dans la figure 3.16, le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ estimé est toujours supérieur à celui des autres beamformers malgré que le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_1}$ estimé soit inférieur au SINR à la sortie du beamformer de Capon estimé. Pour un signal utile QPSK et une interférence QPSK, les trois beamformers sont égaux théoriquement, ainsi on voit bien dans la figure 3.17 que les SINR estimés correspondants sont très proches quelque soit le nombre d'échantillons K .

Remarque 6. *On remarque que les beamformers MVDR₁ et MVDR₂ convergent plus lentement que le beamformer de Capon. Ce comportement est suggéré par le résultat suivant [81] :*

$$E[\widehat{\text{SINR}}] = \frac{K + 2 - N}{K + 1} \text{SINR},$$

où N est la dimension des observations $\mathbf{x}(t)$. Ce résultat est fourni dans le cas du beamformer de Capon sous les hypothèse d'absence de brouilleurs et de signaux gaussiens. Par suite la vitesse de convergence du SINR est une fonction décroissante de cette dimension N et les beamformers MVDR₁ et MVDR₂, d'observations $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ de dimension $2N$ convergent plus lentement que le beamformer de Capon .

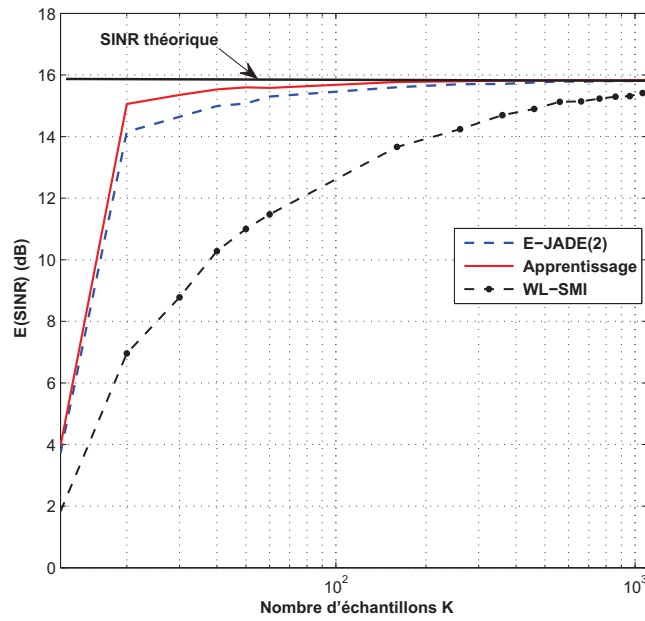


FIGURE 3.12 – $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ estimé en fonction du nombre d'échantillons, $|\gamma_1| = 1$

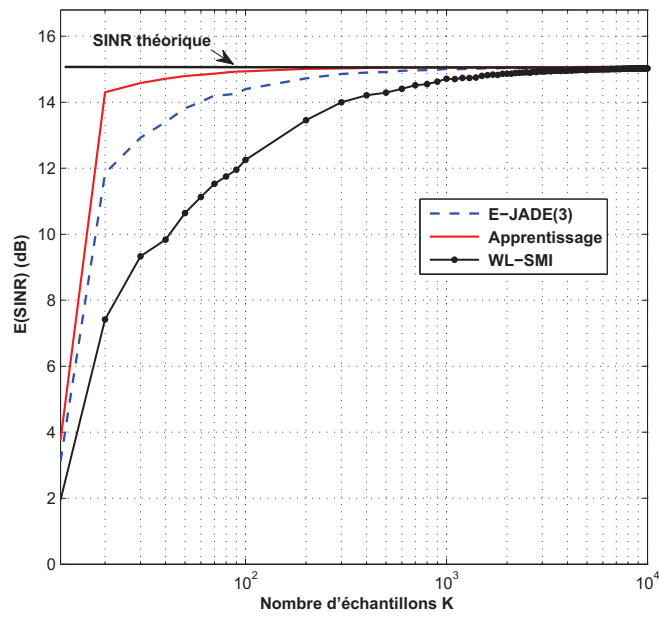


FIGURE 3.13 – $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ estimé en fonction du nombre d'échantillons, $\gamma_1 = 0$

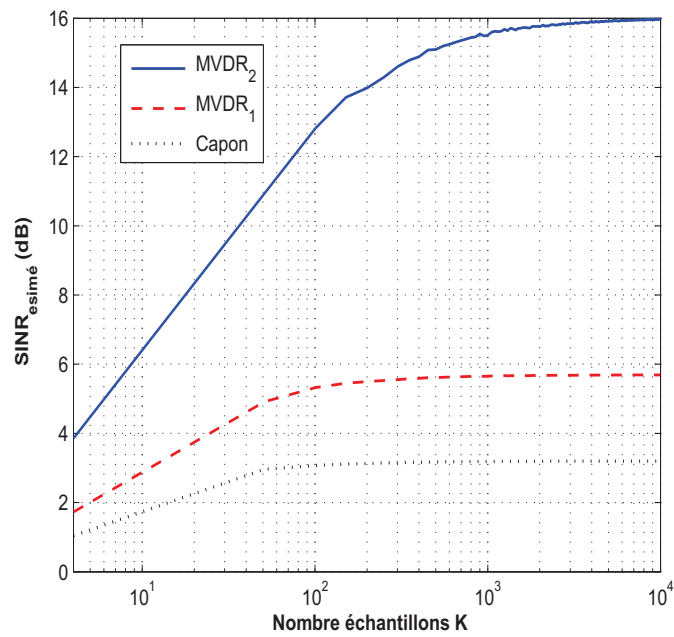


FIGURE 3.14 – Comparaison des SINR estimé en fonction du nombre d'échantillons pour un signal utile BPSK et une interférence BPSK

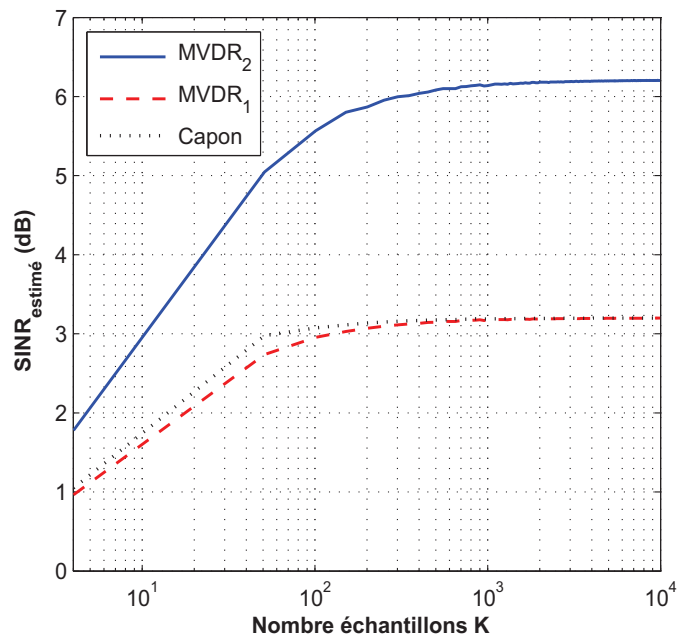


FIGURE 3.15 – Comparaison des SINR estimé en fonction du nombre d'échantillons pour un signal utile BPSK et une interférence QPSK

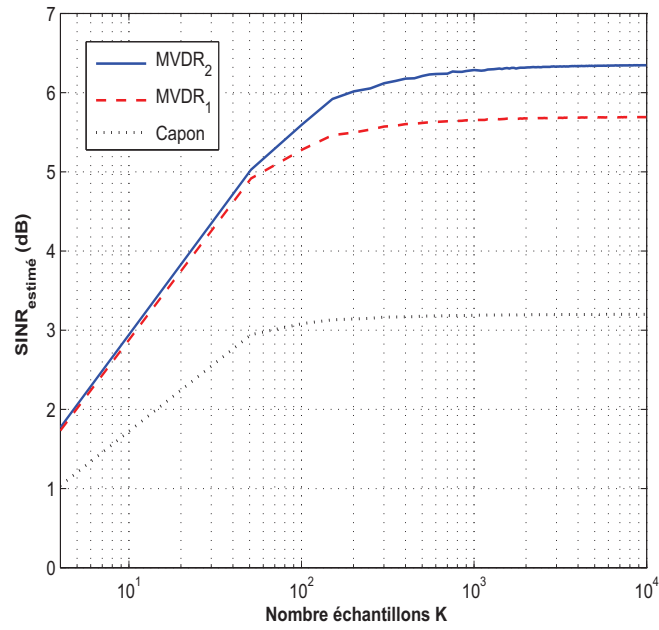


FIGURE 3.16 – Comparaison des SINR estimé en fonction du nombre d'échantillons pour un signal utile QPSK et une interférence BPSK

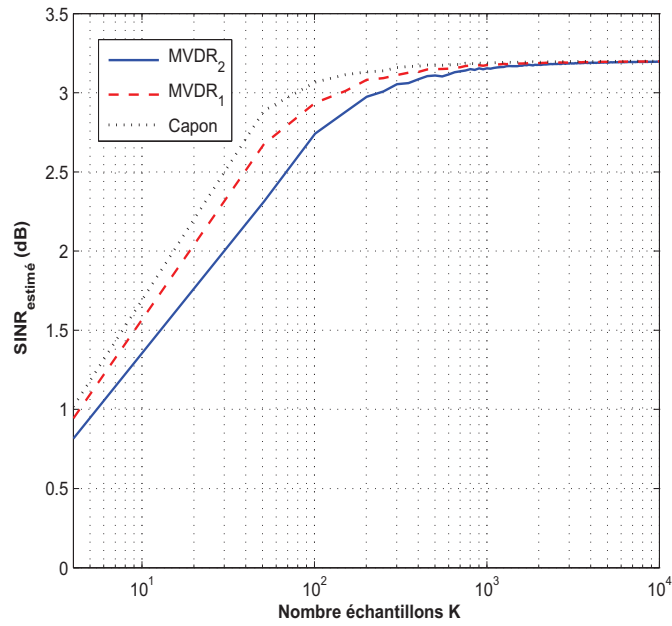


FIGURE 3.17 – Comparaison des SINR estimé en fonction du nombre d'échantillons pour un signal utile QPSK et une interférence QPSK

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques concepts possibles de beamforming linéaire au sens large associés aux plus importants critères d'optimisation au second ordre ont été présentés pour la réception d'un signal inconnu, dont la forme d'onde est inconnue, mais dont le vecteur directionnel est connu, corrompue par bruit total potentiellement non circulaire. Ces beamformers WL ont été répartis en deux groupes, en fonction de la connaissance a priori ou non du coefficient de non circularité au second ordre du signal utile.

Il a été démontré dans ce chapitre que tous ces beamformers WL introduits se ramènent essentiellement à deux beamformers MVDR WL, qui ne requièrent aucune information a priori sur les interférences et se trouvent être particulièrement bien adaptés pour le contrôle de spectre ou l'écoute passive dans des contextes non circulaires. Le premier beamformer a été récemment introduit et étudié dans [21], il s'avère être toujours meilleur que le beamformer de Capon en présence d'interférences non circulaires mais demeure sous-optimal pour un signal utile non circulaire. Le deuxième beamformer correspond au beamformer MVDR₂ qui est colinéaire avec le beamformer WL MMSE. Dans ce chapitre, nous avons introduit une analyse des performances dans un contexte non circulaire.

Ce récepteur MVDR WL invariant dans le temps a été introduit pour traiter la réception d'un signal inconnu potentiellement non circulaire, dont la forme d'onde est inconnue mais de vecteur directeur directionnel connu, et est corrompu par des interférences aussi potentiellement non circulaires. Ce récepteur, basé sur une décomposition orthogonale originale, exploite la non circularité du signal utile et des interférences à la différence du récepteur MVDR introduit dans [21] qui exploite uniquement celle des interférences.

À travers une étude de performances, il a été démontré que ce beamformer est meilleur que le beamformer de Capon et celui introduit dans [21] en présence de signaux non circulaires. En effet, l'analyse de performances en SINR en sortie pour un signal utile non circulaire et en présence d'une ou deux interférences non circulaires au second ordre montre une augmentation des performances en gain par-rapport au premier beamformer notamment lorsque le coefficient de non circularité au second ordre du signal utile, de la diversité de phase et le nombre d'interférences non circulaires augmentent. Cette amélioration de gain est confirmée par l'analyse en taux d'erreur symbole (SER). En outre, ce beamformer est capable de traiter, à partir d'une antenne à N capteurs, jusqu'à $2N - 1$ interférences rectilignes en présence d'un signal utile rectiligne tandis que le récepteur introduit dans [21] n'en traite que $2(N - 1)$. Ceci permet à ce beamformer de faire du SAIC (Single Antenna Interference Cancellation) pour $N = 1$.

Bien que ce beamformer ne requiert aucune information a priori sur les interférences, il nécessite la connaissance ou l'estimation préalable du coefficient de non circularité du signal d'intérêt. Nous avons présenté plusieurs mises en œuvres, dans lesquelles nous avons tenté d'estimer ce coefficient de non circularité à \mathbf{s} connu, ou le vecteur étendu $\tilde{\mathbf{s}}_\gamma$ sans information a priori. Il s'est avéré que cela n'est possible que dans le seul cas où les signaux (utile et interférences) sont BPSK à travers une technique d'identification aveugle.

Notons par ailleurs que le filtre de ce beamformer MVDR₂ étant proportionnel à celui du beamformer MMSE, ce beamformer n'est pas vraiment nouveau. Par contre, celui-ci présente un intérêt certain dans le cas particulier évoqué plus haut, car ce beamformer WL MMSE

nécessite la connaissance de la puissance du signal utile en plus de son coefficient de non circularité.

Néanmoins, ce beamformer devient sous-optimal pour des signaux de distributions non gaussiennes omniprésents en radiocommunications, vu qu'il n'exploite que les statistique d'ordre deux et ne fait pas appel à un traitement non linéaire et aux statistiques d'ordres supérieurs. Pour surmonter cette limitation, nous présenterons dans le chapitre 4 des récepteur non linéaires GSC et MVDR de Volterra permettant de traiter les signaux non gaussiens.

Chapitre 4

Beamforming non linéaires GSC et MVDR de Volterra

Sommaire

4.1	Introduction	87
4.2	Intérêt des récepteurs non linéaires	89
4.3	Hypothèses et formulation du problème	89
4.4	Récepteurs MVDR IT de Volterra	91
4.5	Interprétation GSC de Volterra à structure complète	98
4.6	Illustrations et simulations par ordinateur	104
4.7	Extension aux critères maximum de SINR et MMSE	115
4.8	Conclusion	119

4.1 Introduction

La plupart des problématiques rencontrées en traitement d'antennes consistent essentiellement à trouver un filtre complexe dont la sortie optimise un certain critère dans le but de mieux restituer un signal d'intérêt. Pour des signaux gaussiens stationnaires, les filtres linéaires sont largement utilisés comme vu au chapitre 2 et dans [97] et [95]. Par la suite, dans le chapitre 2, nous avons vu qu'en présence de signaux gaussiens non stationnaires, alors potentiellement non circulaires, ces filtres linéaires ne sont plus optimaux et deviennent linéaires au sens large (widely linéaires WL). Ces filtres WL sont alors optimaux grâce à l'exploitation d'une potentielle non circularité [23, 21, 24, 28]. Néanmoins, ces filtres deviennent sous-optimaux en présence de signaux de distributions non gaussiennes car ils n'exploitent pas la non gaussianité potentielle de ces signaux qui sont omniprésents en radiocommunications. À notre connaissance, l'exploitation de cette non gaussianité pour des applications de beamforming à travers une implémentation non linéaire du beamformer MVDR n'a été que rarement étudiée. Comme par exemple dans [31] et [6] à travers l'utilisation d'une classe particulière de filtres non linéaires, en l'occurrence les filtres de Volterra.

Les filtres de Volterra [83] ont été longuement étudiés en traitement du signal notamment sous leur forme réelle dans les applications de détection et estimation [79, 80], d'identification de systèmes [58], d'annulation d'écho [2, 52] et d'égalisation non linéaire du canal [5, 61, 71]. Cependant, les articles concernant l'utilisation des filtres de Volterra sous leur forme

complexe sont rares en traitement du signal et spécialement en traitement d'antennes. Souvent, ces rares articles portent sur des problèmes de détection et d'estimation. Parmi ces travaux, on peut citer [26], qui considère les filtres complexes linéaires quadratiques pour la détection, [25, 27], qui traitent les filtres de Volterra complexes d'ordres supérieurs à deux pour des problèmes de détection et d'estimation et aussi [34] qui propose un récepteur spatiotemporel MMSE widely non linear de Volterra pour les communications DS-CDMA.

Parmi les travaux cités précédemment, notamment ceux effectués dans [31] et [6], les filtres de Volterra sont utilisés en filtrage spatial sous une forme GSC originale dans [31] et MVDR dans [6]. Bien qu'en présence de signaux non gaussiens circulaires, ces filtres soient optimaux et présentent de meilleures performances par-rapport au filtre adapté spatial classique de Capon, ils restent sous optimaux en présence de signaux non gaussiens non circulaires, du fait qu'ils n'exploitent pas l'information de non circularité du bruit en plus de celle de non gaussianité.

Le but de ce chapitre est de compléter les travaux [31] et [6] par l'introduction d'un filtre complexe MVDR de Volterra exploitant les deux propriétés de non circularité (à tout ordre) et de non gaussianité du bruit. Ainsi, la section 4.2 précise l'intérêt de l'utilisation des filtres non linéaires ainsi que le but de notre contribution. Le modèle et les hypothèses de notre étude sont donnés dans la section 4.3. Dans la section 4.4, après introduction des filtres non linéaires de Volterra, de leur utilisation en filtrage spatial à travers l'écriture des différentes contraintes, différentes structures des filtres de Volterra sous forme MVDR sont introduites à l'ordre 3. Par la suite, dans la section 4.5, une implantation de ces filtres sous forme GSC non linéaire est développée. Finalement, dans la section 4.6, une partie illustration par simulation par ordinateur vient compléter notre étude en précisant les gains en SINR par-rapport au beamformer de Capon.

4.2 Intérêt des récepteurs non linéaires

En traitement d'antennes bande étroite, les filtres considérés comme optimaux sont généralement linéaires à l'instar du filtre adapté spatial ou beamformer de Capon vu dans le chapitre 2. Dans le chapitre 3, on a vu que ces filtres, sous certaines conditions de non circularité, deviennent linéaires au sens large WL (Widely Linear). Toutefois, l'optimalité de ces filtres n'est garantie que pour des signaux gaussiens circulaires pour les filtres linéaires et pour des signaux gaussiens non nécessairement circulaires pour les filtres linéaires au sens large.

En radiocommunications par exemple, les signaux modulés sont loin d'avoir une distribution gaussienne, ne serait-ce que de tels signaux auraient un facteur de crête trop important. Alors, il n'y a aucune raison de supposer que les filtres optimaux soient linéaires ou linéaires au sens large. Ainsi, afin d'améliorer la réjection d'interférences non gaussiennes, l'utilisation de filtres non linéaires s'impose. Parmi ces filtres, une classe particulière de filtres non linéaires nous intéresse, en l'occurrence les filtres de Volterra.

Dans ce même contexte de filtrage spatial pour l'estimation d'un signal utile dans un environnement non gaussien, l'application des filtres de Volterra a déjà été étudiée dans [6] sous une structure MVDR d'ordre 3 partielle et aussi dans [31] où une interprétation GSC originale a été calculée à l'aide d'approximations polynomiales (filtrage de Volterra) de l'espérance conditionnelle définissant le GSC non linéaire optimal. Cependant, dans les deux approches précédentes, les signaux d'interférences sont supposés circulaires¹ non gaussiens, ce qui rend ces approches sous optimales en présence de signaux non circulaires. C'est pourquoi dans ce chapitre, nous allons étudier les filtres non linéaires de Volterra prenant en compte une potentielle non circularité et non gaussianité des interférences et nous donnerons une extension de la structure MVDR du filtre non linéaire de Volterra étudiée dans [6] aux signaux d'interférences potentiellement non circulaires et non gaussiens et aussi une interprétation en structure GSC de Volterra. Par la suite, nous verrons les performances en gains SINR par rapport aux filtres linéaires avec le filtre adapté spatial (beamformer de Capon) pris comme référence.

4.3 Hypothèses et formulation du problème

4.3.1 Modèle et hypothèses

On s'intéresse au problème de l'estimation d'un signal utile émis par une source bande étroite de vecteur de direction d'arrivée connu \mathbf{s} . Les autres sources en présence sont considérées comme interférences ou brouilleurs.

Considérons alors une antenne composée de N capteurs à bande étroite recevant la contribution d'une source utile centrée et de P sources dites interférences et d'un bruit spatialement blanc, gaussien, centré et circulaire au second ordre. Toutes les sources sont statistiquement indépendantes et proviennent de différentes directions. Chaque capteur reçoit la contribution d'un signal utile (SOI) mélangé à un bruit total composé d'interférences et du bruit de fond. On note $\mathbf{x}(t)$, le vecteur des amplitudes complexes des signaux observés à la sortie de ces capteurs.

Sous ces hypothèses, le vecteur des observation $\mathbf{x}(t)$ peut s'écrire de la manière suivante

$$\mathbf{x}(t) = s(t)\mathbf{s} + \sum_{p=1}^P m_p(t)\mathbf{j}_p + \mathbf{n}(t) \triangleq s(t)\mathbf{s} + \mathbf{n}_T(t), \quad (4.1)$$

¹Signaux circulaire à l'ordre deux et aux ordres supérieurs à 2, voir le chapitre 1.

où les couples $(s(t), m_p(t))$ et $(\mathbf{s}, \mathbf{j}_p)$ correspondent respectivement aux enveloppes complexes et aux vecteurs directionnels définis de façon unique par exemple de première composante égale à 1, du signal utile et de l'interférence p . Toutes les sources sont indépendantes entre elles et indépendantes du bruit blanc.

Il est à noter que le modèle (4.1) prend en compte que le canal de propagation est supposé sans étalement d'écho (sans retard de diffusion) qui a lieu pour une propagation dans l'espace libre (monitoring du spectre, véhicules et satellites drones), pour les canaux à évanouissement plat (*flat fading channels*), mais il prend aussi en compte des canaux avec étalement d'écho où les multi-trajets décorrélés sont traités comme sources à part.

Dans ce modèle, les interférences ne sont plus uniquement potentiellement non circulaires mais aussi potentiellement non gaussiennes, aucune hypothèse n'est faite sur le degré de non circularité du signal utile dont la forme d'onde est supposée inconnue contrairement aux modèles (3.4) et (3.1).

4.3.2 Formulation du problème

L'objectif est alors de filtrer $\mathbf{x}(t)$ pour restituer $s(t)$ avec le meilleur rapport signal sur bruit total (interférences + bruit blanc gaussien). En outre nous nous limitons à chercher un filtre purement spatial (par opposition à spatio-temporel), c'est-à-dire tel que l'estimée $\hat{s}(t)$ du signal utile à un instant t donné ne dépend pas d'échantillons de signaux capteurs pris à d'autres instants.

Dans la pratique, s n'est pas exactement connu mais estimé, soit par une méthode de localisation, soit par une méthode d'identification aveugle. Il faudrait donc étudier l'effet d'une erreur de pointage sur les performances en filtrage. Cependant pour bien distinguer les deux problèmes (estimation du vecteur directionnel et estimation du signal connaissant le vecteur directionnel), nous supposons dans ce qui suit que le vecteur directionnel \mathbf{s} est parfaitement connu. Ainsi, le vecteur d'observations $\mathbf{x}(t)$ peut s'écrire comme la somme de ses projections orthogonales sur l'espace engendré par \mathbf{s} et son orthogonal notés $Span(\mathbf{s})$ et $Span^\perp(\mathbf{s})$ respectivement. Ainsi en utilisant les projecteurs orthogonaux associés à ces espaces, $\mathbf{x}(t)$ s'écrit de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [(\mathbf{s}^H \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s} \mathbf{s}^H] \mathbf{x}(t) + [\mathbf{I} - (\mathbf{s}^H \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s} \mathbf{s}^H] \mathbf{x}(t), \\ &\triangleq \mathbf{\Pi}_s \mathbf{x}(t) + \mathbf{\Pi}_s^\perp \mathbf{x}(t), \\ &\triangleq \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^\perp(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Considérons la sortie $y(t) = f[t, \mathbf{x}(t)]$ d'un filtre complexe variant dans le temps (VT) dont l'entrée est le vecteur $\mathbf{x}(t)$. Afin que ce filtre n'introduise pas de distorsion du signal utile, il lui est imposé d'être linéaire par rapport à $\mathbf{x}_s(t)$. Ainsi, on peut écrire :

$$y(t) = \mathbf{w}_1^H \mathbf{x}_s(t) - g_1(t, \mathbf{x}_s^\perp(t)), \quad (4.3)$$

où \mathbf{w}_1 est un filtre complexe invariant dans le temps IT de dimension $N \times 1$ avec $\mathbf{w}_1^H \mathbf{s} = 1$ et $g_1(t, \mathbf{x}_s^\perp(t))$ est la sortie d'un filtre complexe potentiellement VT dont l'entrée est $\mathbf{x}_s^\perp(t)$.

En utilisant (4.1), la sortie $y(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t) + [(\mathbf{s}^H \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s}^H] \mathbf{n}_T(t) - g_1(t, \mathbf{n}_s^\perp(t)) \\ &\triangleq s(t) + n_{T_1}(t) - g_1(t, \mathbf{n}_s^\perp(t)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $\mathbf{n}_s^\perp(t) \triangleq \mathbf{\Pi}_s^\perp \mathbf{n}_T(t)$ et $n_{T_1}(t) \triangleq [(\mathbf{s}^H \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s}^H] \mathbf{n}_T(t)$. Il est à noter que les expressions (4.3) et (4.4) représentent clairement la relation entrée/sortie d'un récepteur GSC non linéaire par analogie au travaux présentés dans [51] pour le cas linéaire.

Afin que la sortie du filtre préserve le signal utile, il faut trouver une fonction $g_1(t, \mathbf{n}_s^\perp(t))$ telle que $y(t)$ génère la meilleure estimée de $s(t)$ au sens de l'erreur quadratique moyenne MSE (Mean Square Error), c'est à dire trouver la fonction $g_1(t, \mathbf{n}_s^\perp(t))$ qui minimise la quantité suivante : $E[|n_{T_1}(t) - g_1(t, \mathbf{n}_s^\perp(t))|^2]$.

Ce problème de minimisation se ramène à trouver la meilleure estimation, au sens de la moindre MSE, de $n_{T_1}(t)$ à partir de $\mathbf{n}_s^\perp(t)$. Il est alors connu que la solution $g_{1,opt}(t, \mathbf{n}_s^\perp(t))$ à ce problème est l'espérance conditionnelle $g_1(t, \mathbf{n}_s^\perp(t)) = E[n_{T_1}(t) / \mathbf{n}_s^\perp(t)]$.

La forme de $E[n_{T_1}(t) / \mathbf{n}_s^\perp(t)]$ diffère selon la nature du bruit total $\mathbf{n}_T(t)$ ainsi :

- Pour un vecteur bruit $\mathbf{n}_T(t)$ stationnaire, gaussien et circulaire alors le couple $(n_{T_1}(t), \mathbf{n}_s^\perp(t))$ est conjointement stationnaire, gaussien et circulaire. Ce qui donne par la suite que l'espérance $E[n_{T_1}(t) / \mathbf{n}_s^\perp(t)]$ est une fonction linéaire IT de $\mathbf{n}_s^\perp(t)$ [77]. Cependant si $n_{T_1}(t)$ est non stationnaire, $E[n_{T_1}(t) / \mathbf{n}_s^\perp(t)]$ devient une fonction variante dans le temps (VT) de $\mathbf{n}_s^\perp(t)$.
- pour un vecteur bruit $\mathbf{n}_s^\perp(t)$ gaussien non circulaire, $E[n_{T_1}(t) / \mathbf{n}_s^\perp(t)]$ est une fonction de $\mathbf{n}_s^\perp(t)$ et de $\mathbf{n}_s^{\perp*}(t)$ et devient widely linear [77].
- pour un vecteur bruit $\mathbf{n}_T(t)$ non gaussien, $E[n_{T_1}(t) / \mathbf{n}_s^\perp(t)]$ devient une fonction non linéaire de $\mathbf{n}_s^\perp(t)$ si $\mathbf{n}_T(t)$ est circulaire, et une fonction non linéaire de $\mathbf{n}_s^\perp(t)$ et de $\mathbf{n}_s^{\perp*}(t)$ si $\mathbf{n}_T(t)$ est non circulaire ce qui justifie aussi l'intérêt de l'utilisation des récepteurs non linéaires complexes de Volterra.

4.4 Récepteurs MVDR IT de Volterra

4.4.1 Présentation des filtres de Volterra

Pour des observations non gaussiennes, les filtres complexes optimaux sont non linéaires du fait que ces filtres servent à calculer l'espérance conditionnelle $E[n_{T_1}(t) / \mathbf{n}_s^\perp(t)]$ qui est fonction non linéaire de $\mathbf{n}_s^\perp(t)$. Ce calcul nécessite la connaissance de la densité de probabilité du bruit total, or cette dernière n'est pas disponible en pratique. C'est pour cela qu'on propose une approximation polynomiale de degrés croissants de cette espérance conditionnelle. Ainsi, dans ce chapitre, en considérant un bruit total non gaussien, nous allons essayer de trouver la meilleure approximation polynomiale de $E[n_{T_1}(t) / \mathbf{n}_s^\perp(t)]$ à travers l'analyse d'une classe

particulière de récepteurs non linéaires en l'occurrence les récepteur complexes IT de Volterra.

La relation générale d'entrée sortie caractérisant un filtre complexe de Volterra d'ordre M est définie par :

$$y(t) = w_0 + \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^m \mathbf{w}_{m,q}^H [\mathbf{x}(t)^{\otimes q} \otimes \mathbf{x}(t)^{* \otimes (m-q)}], \quad (4.5)$$

où \otimes désigne le produit de Kronecker, $\mathbf{w}_{m,q}$ est un filtre complexe IT de dimension $(N^m \times 1)$ et où w_0 est un scalaire permettant d'assurer que $y(t)$ soit de moyenne nulle. Dans ce qui suit et pour des raisons de simplification de notation, on considère que les vecteurs $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{n}_T(t)$ sont centrés de moyennes nulles.

On peut alors écrire l'équation (4.5) sous la forme :

$$y(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^m \mathbf{w}_{m,q}^H [\mathbf{x}(t)^{\otimes q} \otimes \mathbf{x}(t)^{* \otimes (m-q)}]. \quad (4.6)$$

Remarque 7. *Sous les hypothèses de la section 4.3, l'équation (4.5) définit un filtre complexe IT linéaire au sens large pour $M = 1$ [77], alors que pour $M = 2$, il définit un filtre complexe linéaire quadratique [27].*

La meilleure approximation polynômiale d'ordre M au sens de la MSE minimale de $E[n_{T_1}(t)/\mathbf{n}_s^\perp(t)]$ correspond à la projection orthogonale de $n_{T_1}(t)$ sur le sous-espace des processus aléatoires de moyennes nulles et qui sont des fonctions polynômiales de $\mathbf{n}_s^\perp(t)$, pour le produit scalaire $\langle u(t), v(t) \rangle \triangleq E[u(t)v^*(t)]$ et défini par l'expression (4.6) avec $\mathbf{n}_T(t)$ à la place de $\mathbf{x}(t)$.

Cependant, le terme $\mathbf{w}_{m,q}^H [\mathbf{x}(t)^{\otimes q} \otimes \mathbf{x}(t)^{* \otimes (m-q)}]$ de l'équation (4.6) apporte de l'information seulement et seulement si $\mathbf{w}_{m,q}^H [\mathbf{n}_T(t)^{\otimes q} \otimes \mathbf{n}_T(t)^{* \otimes (m-q)}]$ est corrélé avec $\mathbf{n}_T(t)$, c'est à dire si

$$E[\mathbf{n}_T(t)^{\otimes q} \otimes \mathbf{n}_T(t)^{* \otimes (m-q)} \mathbf{n}_T^H] \neq 0. \quad (4.7)$$

Ce qui nécessite que les moments d'ordre $m + 1$ des composantes de $\mathbf{n}_T(t)$ soient non-nuls même pour un bruit total $\mathbf{n}_T(t)$ circulaire. Dans le cas d'un processus $\mathbf{n}_T(t)$ de distribution paire, tous les moments impairs, d'ordre $m + 1$ sont nuls, donc pour apporter de l'information dans tous les cas, m doit être impair. C'est pour cette raison, que dans la suite, nous considérons uniquement les filtres complexes de Volterra d'ordre M impair et contenant uniquement des termes polynômiaux d'ordres impairs.

4.4.2 Récepteurs IT MVDR de Volterra d'ordre 3 à structure complète

Dans ce qui suit, afin d'alléger les notations, pour spécifier l'instant t auquel on considère les variables aléatoires, on notera s_t , y_t , \mathbf{x}_t et \mathbf{n}_T à la place de $s(t)$, $y(t)$, $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{n}_T(t)$ respectivement. Alors pour $M = 3$, la sortie $y(t)$ de l'équation (4.6) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 y_t &= \underbrace{\mathbf{w}_{1,1}^H \mathbf{x}_t}_0 + \underbrace{\mathbf{w}_{1,0}^H \mathbf{x}_t^*}_1 + \underbrace{\mathbf{w}_{3,0}^H [\mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^*]}_2 + \underbrace{\mathbf{w}_{3,1}^H [\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^*]}_3, \\
 &+ \underbrace{\mathbf{w}_{3,2}^H [\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t^*]}_4 + \underbrace{\mathbf{w}_{3,3}^H [\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t]}_5, \\
 &= \mathbf{w}_{1,1}^H (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) + \mathbf{w}_{1,0}^H (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^* \\
 &+ \mathbf{w}_{3,0}^H [(s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^* \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^* \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^*], \\
 &+ \mathbf{w}_{3,1}^H [(s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^* \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^*], \\
 &+ \mathbf{w}_{3,2}^H [(s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^*], \\
 &+ \mathbf{w}_{3,3}^H [(s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)],
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

où les vecteurs $\mathbf{w}_{1,1}$ et $\mathbf{w}_{1,0}$ sont de dimension $N \times 1$, les vecteurs $\mathbf{w}_{3,0}$, $\mathbf{w}_{3,1}$, $\mathbf{w}_{3,2}$ et $\mathbf{w}_{3,3}$ sont de dimension $N^3 \times 1$.

En analysant la sortie $y(t)$ de l'équation (4.8), on note que :

- Pour un brouilleur non circulaire à l'ordre 2 (exemple : BPSK), tous les termes (0,1,2,3,4,5) apportent de l'information. En prenant tous ces termes, on parle alors de filtre de Volterra à structure complète et qui devient à structure partielle dans les autres cas.
- Pour un brouilleur circulaire à l'ordre deux et non circulaire à l'ordre 4, seuls les termes (0,2,3,4,5) sont susceptibles d'apporter de l'information, par exemple pour un signal QPSK uniquement les termes (0,2,4) apportent de l'information. C'est le cas étudié dans [34] dans le cadre d'un filtre MMSE de Volterra.
- Pour un brouilleur circulaire jusqu'à un ordre au moins égal à 4, seuls les termes (0,4) apportent de l'information, c'est le seul cas qui a été étudié dans [6] et [31].

Soit $\tilde{\mathbf{w}}_3$, $\tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$ et $\tilde{\mathbf{n}}_{T,3}$ des vecteurs de dimension $(2N + 4N^3) \times 1$ tel que :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{w}}_3 &\triangleq [\mathbf{w}_{1,1}^T, \mathbf{w}_{1,0}^T, \mathbf{w}_{3,0}^T, \mathbf{w}_{3,1}^T, \mathbf{w}_{3,2}^T, \mathbf{w}_{3,3}^T]^T, \\
 \tilde{\mathbf{x}}_{3,t} &\triangleq [\mathbf{x}_t^T, \mathbf{x}_t^H, (\mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^*)^T, (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^*)^T, (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t^*)^T, (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t)^T]^T, \\
 \tilde{\mathbf{n}}_{T,3} &\triangleq [\mathbf{n}_T^T, \mathbf{n}_T^H, (\mathbf{n}_T^* \otimes \mathbf{n}_T^* \otimes \mathbf{n}_T^*)^T, (\mathbf{n}_T \otimes \mathbf{n}_T^* \otimes \mathbf{n}_T^*)^T, (\mathbf{n}_T \otimes \mathbf{n}_T \otimes \mathbf{n}_T^*)^T, (\mathbf{n}_T \otimes \mathbf{n}_T \otimes \mathbf{n}_T)^T]^T.
 \end{aligned}$$

Avec ces notations, la sortie y_t peut alors s'écrire de la forme

$$y_t = \tilde{\mathbf{w}}_3^H \tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$$

qui représente une relation d'entrée/sortie d'un filtre $\tilde{\mathbf{w}}_3$ dont l'entrée est $\tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$ et la sortie est $y(t)$. Ainsi, le problème traité dans ce chapitre, qui est un problème de filtrage spatial, consiste à trouver un filtre MVDR de Volterra $\tilde{\mathbf{w}}_3$ qui génère la meilleure estimée, au sens de la MSE minimale, du signal désiré s_t et dont seul le vecteur directionnel \mathbf{s} est connu alors que la forme d'onde et son contenu sont inconnus pour le récepteur. Ce filtre MVDR de Volterra d'ordre 3 doit donc générer à sa sortie un signal utile sans distorsion, quelles que soient les corrélations entre s_t , s_t^* , s_t^2 , $|s_t|^2$ et s_t^{*2} , selon des contraintes qui lui sont imposées.

Les termes linéaires-conjugués puis cubiques de l'équation (4.8) vont successivement être pris en compte afin de préciser quelles sont les contraintes à poser pour chaque terme.

4.4.2.1 Contraintes pour le terme linéaire-conjugué

A partir des équations (4.8) et (4.9), les deux termes (0,1) composent le terme linéaire-conjugué qui intervient dans y_t et qui a pour expression :

$$\mathbf{w}_{1,1}^H (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) + \mathbf{w}_{1,0}^H (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^* .$$

Lors de l'optimisation du filtre adapté, les termes de bruit vont naturellement être minimisés. Donc, afin de préserver le signal utile sans information a priori sur la corrélation entre s_t et s_t^* , les contraintes directionnelles suivantes doivent être imposées :

$$\mathbf{w}_{1,1}^H \mathbf{s} = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_{1,0}^H \mathbf{s}^* = 0 .$$

4.4.2.2 Contraintes pour les termes cubiques

A partir des équations (4.8) et (4.9), il y a 4 termes cubiques qui interviennent dans y_t vu qu'on traite la structure complète du récepteur non linéaire, ces termes sont donnés par :

$$\begin{aligned} & \mathbf{w}_{3,0}^H [(s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^* \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^* \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^*] , \\ & \mathbf{w}_{3,1}^H [(s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^* \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^*] , \\ & \mathbf{w}_{3,2}^H [(s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)^*] , \\ & \mathbf{w}_{3,3}^H [(s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T) \otimes (s_t \mathbf{s} + \mathbf{n}_T)] . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dans ce cas de figure, on ne peut pas imposer directement des contraintes directionnelles vu que le bruit \mathbf{n}_T est une quantité aléatoire.

Une solution consiste à exprimer le bruit \mathbf{n}_T dans une base orthogonale déterministe à l'aide des projections orthogonales de ce vecteur bruit sur la droite engendrée par \mathbf{s} (car \mathbf{s} est connu) et sur l'hyperplan orthogonal à \mathbf{s} , ainsi on écrit \mathbf{n}_T de la forme :

$$\mathbf{n}_T = \lambda_t \mathbf{s} + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{t,i} \mathbf{u}_i, \quad (4.11)$$

où λ_t et $\alpha_{t,i}$ ($i = 1, \dots, N-1$) sont des variables aléatoires scalaires. Les vecteurs $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$ forment une base orthonormée arbitraire (donc non unique) orthogonale à \mathbf{s} , tel que $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{s} = \mathbb{C}^N$. En pratique, pour calculer les vecteurs $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$, on peut utiliser un procédé d'orthogonalisation (par exemple Gram-Schmidt) sur le vecteur \mathbf{s} et une suite quelconque de vecteurs unitaires formant une base orthogonale à \mathbf{s} .

Théorème 1. Dans le cas particulier où $N = 2$, l'hyperplan orthogonal à la droite engendrée par \mathbf{s} est de dimension 1. La base orthonormée est ainsi composée d'un seul vecteur \mathbf{u} de dimension 2×1 , de norme unité et tel que $\mathbf{u}^H \mathbf{s} = 0$. Alors tout vecteur \mathbf{v} non-colinéaire à \mathbf{s} convient pour définir le vecteur \mathbf{u} tel que :

$$\mathbf{u} \triangleq \alpha \overset{\perp}{\Pi}_{\mathbf{s}} \mathbf{v},$$

où $\mathbf{\Pi}_s^\perp = [\mathbf{I}_2 - (\mathbf{s}^H \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s} \mathbf{s}^H]$ et α est donné par

$$\mathbf{u}^H \mathbf{u} = \alpha^2 \mathbf{v}^H \mathbf{\Pi}_s^\perp \mathbf{v} = 1 \implies \alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}^H \mathbf{\Pi}_s^\perp \mathbf{v}}}$$

Ce qui donne

$$\mathbf{u} = \frac{[\mathbf{I}_2 - (\mathbf{s}^H \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s} \mathbf{s}^H] \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v}^H [\mathbf{I}_2 - (\mathbf{s}^H \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s} \mathbf{s}^H] \mathbf{v}}}$$

En utilisant (4.11) dans les expressions des termes cubiques (4.10), on constate que pour chacun des termes cubiques 2, 3, 4 ou 5, une somme de $(N-1)_{[3 \text{ u}_i]}^3 + 3(N-1)_{[2 \text{ u}_i]}^2 + 3(N-1)_{[1 \text{ seul u}_i]} + 1_{[\text{pas de u}_i]}$ vecteurs à annuler, pour toutes les combinaisons de $[i, j, k = \{1, \dots, N-1\}]$. Ces vecteurs à annuler sont donnés par le tableau suivant :

terme 2	terme 3	terme 4	terme 5
$\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}$
$\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i$
$\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}$
$\mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}$
$\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j^*$	$\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j$
$\mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^* \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j^* \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{s}^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{s}$
$\mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_j^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_j^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j$
$\mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^* \otimes \mathbf{u}_k^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j^* \otimes \mathbf{u}_k^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{u}_k^*$	$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{u}_k$

4.4.2.3 Écriture des contraintes

Les vecteurs ne contenant que les termes en $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i^*, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j^*, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k^*$ sont uniquement composés de vecteurs bruit et appartiennent par conséquent au sous espace bruit. Ces vecteurs seront minimisés lors de l'optimisation du filtrage adapté. Par suite, ils ne seront pas pris en compte pour la recherche des contraintes à poser.

Par conséquent, le nombre réel de contraintes à poser afin de préserver le signal utile devient

$$2 + 4[3(N-1)^2 + 3(N-1) + 1] = 2 + 4[N^3 - (N-1)^3].$$

Pour toutes les combinaisons de $[i, j, k = \{1, \dots, N-1\}]$, les contraintes à imposer sont alors données par le tableau suivant :

$\mathbf{w}_{1,1}^H \mathbf{s} = 1$		$\mathbf{w}_{1,0}^H \mathbf{s}^* = 0$	
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{s}) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_j^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_j^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j) = 0$

Posons \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 , \mathbf{A}_4 et \mathbf{A}_5 , les matrices de taille $N^3 \times (N^3 - (N-1)^3)$ dont les colonnes sont les vecteurs à annuler donnés par le tableau de la section 4.4.2.2 pour termes 2, 3, 4 et 5 respectivement. Alors pour toutes les combinaisons de $[i, j, k = \{1, \dots, N-1\}]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &\triangleq [\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^* \quad \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^* \quad \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^* \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_j^*] \\ \mathbf{A}_3 &\triangleq [\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_i^* \quad \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^* \quad \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j^* \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_j^*] \\ \mathbf{A}_4 &\triangleq [\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i^* \quad \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j^* \quad \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{s}^* \quad \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j^*] \\ \mathbf{A}_5 &\triangleq [\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \quad \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \quad \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \quad \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \quad \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \quad \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{s} \quad \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j]. \end{aligned}$$

On peut alors écrire les contraintes de la structure complète de forme matricielle suivante :

$$\mathbf{C}_c^H \tilde{\mathbf{w}}_3 = \mathbf{f} \quad (4.12)$$

où $\mathbf{f} = [1, \mathbf{0}_{1+4(N^3-(N-1)^3)}^T]^T$ et \mathbf{C}_c est une matrice, qu'on appellera matrice de contraintes à structure complète, de dimension $(2N + 4N^3) \times (4[N^3 - (N-1)^3] + 2)$ et donnée par

$$\mathbf{C}_c \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{0}_{N \times 1} & \mathbf{0}_{N \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N \times [N^3 - (N-1)^3]} \\ \mathbf{0}_{N \times 1} & \mathbf{s}^* & \mathbf{0}_{N \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N \times [N^3 - (N-1)^3]} \\ \mathbf{0}_{N^3 \times 1} & \mathbf{0}_{N^3 \times 1} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} \\ \mathbf{0}_{N^3 \times 1} & \mathbf{0}_{N^3 \times 1} & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{A}_3 & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} \\ \mathbf{0}_{N^3 \times 1} & \mathbf{0}_{N^3 \times 1} & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{A}_4 & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} \\ \mathbf{0}_{N^3 \times 1} & \mathbf{0}_{N^3 \times 1} & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{0}_{N^3 \times [N^3 - (N-1)^3]} & \mathbf{A}_5 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Dans le cas particulier d'une structure partielle, en l'occurrence celle vue dans [6], seuls les termes (0,4) ont été pris en considération, ce qui donne lieu à un récepteur non linéaire IT de Volterra à structure partielle. Par conséquent, le nombre réel de contraintes à imposer devient alors $1 + (N^3 - (N-1)^3)$. Ces contraintes sont données, pour toutes les combinaisons de $[i, j, k = \{1, \dots, N-1\}]$, par le tableau suivant

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{w}_{1,1}^H \mathbf{s} = 1 \\ \mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*) = 0 \\ \mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i^*) = 0 \\ \mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^*) = 0 \\ \mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*) = 0 \\ \mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j^*) = 0 \\ \mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{s}^*) = 0 \\ \mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j^*) = 0 \end{array} \right|$$

Ainsi, dans ce cas, la matrice \mathbf{C}_c devient une matrice de contraintes à structure partielle notée \mathbf{C}_p de la forme :

$$\mathbf{C}_p \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{0}_{N \times [N^3 - (N-1)^3]} \\ \mathbf{0}_{N^3 \times 1} & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}.$$

4.4.2.4 Expression du récepteur MVDR non linéaire

Au sens MVDR, la meilleure estimée au sens de la MSE minimale du signal utile s_t , correspond à la sortie du filtre non linéaire $\tilde{\mathbf{w}}_3$ qui minimise l'espérance de la puissance à la sortie y_t donnée par

$$\tilde{\mathbf{w}}_3^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \tilde{\mathbf{w}}_3,$$

sous les contraintes vectorielles

$$\mathbf{C}_c^H \tilde{\mathbf{w}}_3 = \mathbf{f}.$$

Où $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}_{3,t} \tilde{\mathbf{x}}_{3,t}^H]$ représente la matrice de corrélation de $\tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$. Cependant, la présence de produits de Kronecker dans la forme du vecteur $\tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$ introduit des composantes redondantes dans la matrice de corrélation $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3}$, ce qui la rend singulière et donc non-inversible. Ceci s'explique par le fait que lors du calcul du produit de Kronecker d'un vecteur avec lui même, un certain nombre de composantes du vecteur résultant sont redondantes et entraînent aussi des dégénérescences de rang de la matrice de corrélation de ce vecteur.

Remarque 8. Par exemple, à l'ordre 2, lors du calcul du produit de Kronecker d'un vecteur \mathbf{x} de taille N , de composantes x_i , par lui même, c'est à dire $\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$, chaque terme $x_i x_j (i \neq j \quad (i, j) = 1, \dots, N)$ du vecteur résultant, de taille N^2 , va apparaître 2 fois aux lignes $(i-1)N + j$, $(j-1)N + i$. De même à l'ordre 3, dans le vecteur $\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$, les termes $x_i x_j x_k (i \neq j \neq k \quad N \geq 3, (i, j, k) = 1, \dots, N)$ vont apparaître 6 fois.

Pour enlever cette redondance, nous définissons le produit de Kronecker symétrique introduit dans [49, 34] et noté \circ . Pour ce produit de Kronecker, il suffit d'imposer les conditions $i \geq j$ lors du calcul du produit de Kronecker classique. De même à l'ordre trois, il suffit d'imposer la condition $i \geq j \geq k$ lors du calcul du produit de Kronecker classique.

En utilisant ce nouveau produit, l'équation (4.8) devient :

$$\begin{aligned} y_t = & \underbrace{\mathbf{w}_{1,1}^H \mathbf{x}_t}_0 + \underbrace{\mathbf{w}_{1,0}^H \mathbf{x}_t^*}_1 + \underbrace{\mathbf{w}_{3,0}^H [\mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^*]}_2 + \underbrace{\mathbf{w}_{3,1}^H [\mathbf{x}_t \otimes (\mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^*)]}_3 \\ & + \underbrace{\mathbf{w}_{3,2}^H [(\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t) \otimes \mathbf{x}_t^*]}_4 + \underbrace{\mathbf{w}_{3,3}^H [\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t]}_5. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les vecteurs $\tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$ et $\tilde{\mathbf{n}}_{T,3}$ s'écrivent de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}'_{3,t} & \triangleq \left[\mathbf{x}_t^T, \mathbf{x}_t^H, (\mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^*)^T, (\mathbf{x}_t \otimes (\mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^*))^T, ((\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t) \otimes \mathbf{x}_t^*)^T, (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t)^T \right]^T \\ \tilde{\mathbf{n}}'_{T,3} & \triangleq \left[\mathbf{n}_T^T, \mathbf{n}_T^H, (\mathbf{n}_T^* \otimes \mathbf{n}_T^* \otimes \mathbf{n}_T^*)^T, (\mathbf{n}_T \otimes (\mathbf{n}_T^* \otimes \mathbf{n}_T^*))^T, ((\mathbf{n}_T \otimes \mathbf{n}_T) \otimes \mathbf{n}_T^*)^T, (\mathbf{n}_T \otimes \mathbf{n}_T \otimes \mathbf{n}_T)^T \right]^T. \end{aligned}$$

La matrice de contraintes \mathbf{C}_c doit aussi être ajustée selon l'emplacement des redondances. Par exemple pour $N = 2$, la matrice \mathbf{C}_c , qu'on notera \mathbf{C}'_c , est issue des contraintes suivantes

$\mathbf{w}_{1,1}^H \mathbf{s} = 1$		$\mathbf{w}_{1,0}^H \mathbf{s}^* = 0$	
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{s} \otimes (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*)) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H ((\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H ((\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*) \otimes \mathbf{u}_1^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_1^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H ((\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes \mathbf{u}_1^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H ((\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes \mathbf{u}_1) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_1^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_1^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{s}) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{u}_1^* \otimes (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*)) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{u}_1 \otimes (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*)) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{u}_1 \otimes (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s})) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{s}^* \otimes (\mathbf{u}_1^* \otimes \mathbf{u}_1^*)) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{s} \otimes (\mathbf{u}_1^* \otimes \mathbf{u}_1^*)) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{s} \otimes (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1)) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H ((\mathbf{u}_1^* \otimes \mathbf{u}_1^*) \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1^* \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H ((\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) \otimes \mathbf{s}^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H ((\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) \otimes \mathbf{s}) = 0$
$\mathbf{w}_{3,0}^H (\mathbf{u}_1^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_1^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,1}^H (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{u}_1^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,2}^H (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_1^*) = 0$	$\mathbf{w}_{3,3}^H (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_1) = 0$

Maintenant avec ces notations, on peut finalement écrire l'expression du récepteur optimal tel que toutes les redondances ont été supprimées. La matrice $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3}$ devient $\mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{x}}_3}$ est de rang plein colonne donc inversible.

Le filtre non linéaire solution de cette minimisation est alors donné par l'expression suivante [42]

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{NL-MVDR}_3} = \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{x}}_3}{}^{-1} \mathbf{C}'_c [\mathbf{C}'_c{}^H \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{x}}_3}{}^{-1} \mathbf{C}'_c]^{-1} \mathbf{f}. \quad (4.15)$$

A partir des résultats de la section 2.4.4 du chapitre 2, la minimisation de $\tilde{\mathbf{w}}_3^H \mathbf{R}'_{\tilde{x}_3} \tilde{\mathbf{w}}_3$ sous les contraintes vectorielles $\mathbf{C}'_c^H \tilde{\mathbf{w}}_3 = \mathbf{f}$ est équivalent à la minimisation de $\tilde{\mathbf{w}}_3^H \mathbf{R}'_{\tilde{n}_3} \tilde{\mathbf{w}}_3$ sous les mêmes contraintes vectorielles où $\mathbf{R}'_{\tilde{n}_3} \triangleq E[\tilde{\mathbf{n}}'_{3,T} \tilde{\mathbf{n}}'^H_{3,T}]$, ce qui donne :

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{NL-MVDR}_3} = \mathbf{R}'_{\tilde{n}_3}{}^{-1} \mathbf{C}'_c [\mathbf{C}'_c{}^H \mathbf{R}'_{\tilde{n}_3}{}^{-1} \mathbf{C}'_c]^{-1} \mathbf{f}. \quad (4.16)$$

Il est à noter que pour un bruit total circulaire, le récepteur $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{NL-MVDR}_3}$ se réduit au récepteur d'ordre partiel étudié dans [6], de plus si ce bruit est gaussien, ce récepteur se réduit au récepteur MVDR IT de Capon.

En sortie de ce récepteur, le SINR représentant le rapport des puissances moyennes du signal utile et bruit total en sortie est donné par

$$\text{SINR}_{\text{NL-MVDR}_3} = \frac{\pi_s}{\mathbf{f}^T [\mathbf{C}'_c{}^H \mathbf{R}'_{\tilde{n}_3}{}^{-1} \mathbf{C}'_c]^{-1} \mathbf{f}}. \quad (4.17)$$

qui, pour un bruit total gaussien circulaire correspond au SINR à la sortie du récepteur MVDR IT de Capon.

4.5 Interprétation GSC de Volterra à structure complète

4.5.1 Présentation de la structure complète

On a vu que l'équation (4.4) représente la relation d'entrée/sortie d'une structure GSC non linéaire. En effet, cette structure représente une généralisation non linéaire du filtre spatial linéaire proposé par Jim et Griffith dans [51] en utilisant les contraintes vues précédemment dans la matrice \mathbf{C}_c . En conséquence, son principe est le même que celui de la structure linéaire vue dans la section 2.4.4 du chapitre 2 et celui de la structure linéaire au sens large (Widely linéaire) vue dans la section 3.7.2 du chapitre 3. Ainsi, le but de cette partie est de donner une implantation GSC équivalente au récepteur MVDR non linéaire de Volterra qui est de complexité réduite et qui par la suite nous permettra d'étudier plus facilement les performances de ce récepteur. En effet, avec une structure GSC nous éviterons d'extraire les redondances lors du calcul numérique du SINR théorique. Cette implantation est donnée par le schéma de la figure 4.1.

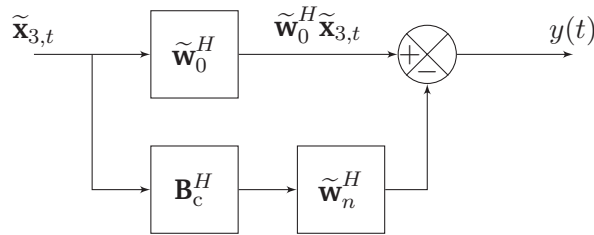


FIGURE 4.1 – Schéma fonctionnel de la structure non linéaire GSC de Volterra

Dans ce schéma, $\tilde{\mathbf{w}}_0$ satisfait la condition $\mathbf{C}'_c{}^H \tilde{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{f}$ et appartient à l'espace colonne de \mathbf{C}_c , ce qui donne

$$\tilde{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{C}_c (\mathbf{C}_c{}^H \mathbf{C}_c)^{-1} \mathbf{f} = \frac{1}{\mathbf{s}^H \mathbf{s}} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{0}_{(N+4N^3) \times 1} \end{pmatrix},$$

qui est unique et ne dépend pas de $\mathbf{R}'_{\tilde{x}_3}$.

La matrice \mathbf{B}_c , dite bloquante du signal utile, est une matrice dont les colonnes engendrent le

complément orthogonal aux colonnes de \mathbf{C}_c tel que $\mathbf{C}_c^H \mathbf{B}_c = \mathbf{0}$ donc de dimension

$$(2N + 4N^3) \times ([2N + 4N^3] - 4[N^3 - (N - 1)^3] - 2) = (2N + 4N^3) \times (2[N - 1] + 4[N - 1]^3)$$

Pour la structure complète, grâce à l'orthogonalité de $(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^H \mathbf{s}}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$, une matrice bloquante possible est donnée par :

$$\mathbf{B}_c \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O}_{N \times (N-1)} & \mathbf{O}_{N \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N \times (N-1)^3} \\ \mathbf{O}_{N \times (N-1)} & \mathbf{U}^* & \mathbf{O}_{N \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N \times (N-1)^3} \\ \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)} & \mathbf{U}_2 & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} \\ \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} & \mathbf{U}_3 & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} \\ \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} & \mathbf{U}_4 & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} \\ \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} & \mathbf{O}_{N^3 \times (N-1)^3} & \mathbf{U}_5 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_{N-1}]$ est une matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs de la base orthonormée \mathbf{u}_i ($i = 1, \dots, N - 1$) donnée par l'équation (4.11). \mathbf{U}_2 est une matrice dont les colonnes sont formées par les produits de Kronecker des vecteurs de la base orthonormée tel que : $\mathbf{U}_2 = [\mathbf{u}_i^* \otimes \mathbf{u}_j^* \otimes \mathbf{u}_k^*]$, ($i, j, k = 1, \dots, N - 1$) de dimension $N^3 \times (N - 1)^3$. De même $\mathbf{U}_3 = [\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j^* \otimes \mathbf{u}_k^*]$, $\mathbf{U}_4 = [\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{u}_k^*]$ et $\mathbf{U}_5 = [\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{u}_k]$.

Le vecteur $\tilde{\mathbf{w}}_n$ est solution de la minimisation suivante [51] :

$$\text{Min}_{\tilde{\mathbf{w}}_n} \text{E} |(\tilde{\mathbf{w}}_0 - \mathbf{B}_c \tilde{\mathbf{w}}_n)^H \tilde{\mathbf{x}}_{3,t}|^2. \quad (4.18)$$

Cette minimisation correspond à un problème de Wiener classique dont la solution est alors donnée par :

$$\tilde{\mathbf{w}}_n = (\mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \mathbf{B}_c)^{-1} \mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \tilde{\mathbf{w}}_0, \quad (4.19)$$

si la matrice $\mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \mathbf{B}_c$ est inversible. Cette inversibilité est l'objet du paragraphe suivant.

4.5.2 Inversibilité sans retirer les redondances

Les matrices $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_3}$ sont clairement singulières si les redondances ne sont pas retirées, par contre l'inversibilité de la matrice $\mathbf{B}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \mathbf{B}$, pour $\mathbf{B} = \mathbf{B}_c$ ou \mathbf{B}_p qui apparaît dans (4.19) n'est pas claire. En effet

$$\mathbf{B}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \mathbf{B} = \mathbf{B}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_3} \mathbf{B}, \quad (4.20)$$

car la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} - \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_3}$ est la matrice de covariance de la partie signal utile de $\tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$ et que son espace image est inclus dans l'espace image de $\mathbf{C} = \mathbf{C}_c$ ou \mathbf{C}_p qui satisfait par construction $\mathbf{B}^H \mathbf{C} = \mathbf{O}$. Ainsi, il n'y a aucun lien générique entre les sous espaces engendrés par les colonnes de \mathbf{B} et \mathbf{C} qui ne dépendent que de \mathbf{s} et celui engendré par les colonnes de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_3}$, qui lui ne dépend que du champ d'interférences (par exemple sous espace de \mathbb{C}^{2N+4N^3} dans la structure complète et sous espace de \mathbb{C}^{N+N^3} dans la structure partielle présentée dans [6]).

Par suite le rang de $\mathbf{B}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \mathbf{B}$ est génériquement donné par la borne supérieure $\min\{\text{rg}(\mathbf{B}), \text{rg}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3})\}$ associée à la relation générale

$$\text{rg}\{\mathbf{B}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \mathbf{B}\} \leq \min\{\text{rg}(\mathbf{B}), \text{rg}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3})\}$$

où le rang de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3}$ est égal au rang de la famille de variables aléatoires composantes de $\tilde{\mathbf{x}}_3$, avec

par exemple pour $N \geq 2$, dans la structure partielle proposée dans [7]

$$\text{rg}(\mathbf{B}_p) = (N - 1) + (N - 1)^3 \text{ et } \text{rg}(\mathbf{R}_{\tilde{x},3}) = N + N^2(N + 1)/2$$

et dans la structure complète

$$\text{rg}(\mathbf{B}_c) = 2(N - 1) + 4(N - 1)^3$$

et

$$\text{rg}(\mathbf{R}_{\tilde{x},3}) = 2N + 2[N^2(N + 1)/2] + 2[N + N(N - 1) + N(N - 1)(N - 2)/6] = N(8 + 6N + 4N^2)/3$$

Soit :

$$\text{rg}\{\mathbf{B}_p^H \mathbf{R}_{\tilde{x},3} \mathbf{B}_p\} = \min\{(N - 1) + (N - 1)^3, N + N^2(N + 1)/2\} = \begin{cases} \text{rg}(\mathbf{B}_p) & \text{pour } N \leq 6 \\ \text{rg}(\mathbf{R}_{\tilde{x},3}) & \text{pour } N > 6. \end{cases}$$

et

$$\text{rg}\{\mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{x},3} \mathbf{B}_c\} = \min\{2(N - 1) + 4(N - 1)^3, N(8 + 6N + 4N^2)/3\} = \begin{cases} \text{rg}(\mathbf{B}_c) & \text{pour } N \leq 4 \\ \text{rg}(\mathbf{R}_{\tilde{x},3}) & \text{pour } N > 4. \end{cases}$$

Soit $\mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{x},3} \mathbf{B}_c$ est inversible pour $N \leq 4$ et singulière pour $N > 4$. Donc en particulier, les matrices $\mathbf{B}_p^H \mathbf{R}_{\tilde{x},3} \mathbf{B}_p$ et $\mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{x},3} \mathbf{B}_c$ utilisées dans nos illustrations pour $N = 2$ seront inversibles.

4.5.3 Cas particulier de structures partielles

Nous avons vu dans la section 4.4.2 que selon les termes qu'on prend en compte, plusieurs structures partielles sont envisageables. Dans [6], un exemple de structure partielle, ne prenant pas en compte la non circularité d'ordre quatre du bruit total est donné.

Cette structure partielle semble s'avérer équivalente à la structure GSC proposée dans [31] dans le cadre d'un bruit total non gaussien circulaire jusqu'à un ordre au moins égal à 4, car les valeurs numériques du SINR obtenues se sont avérées égales dans divers scénarios sans que nous ayons pu encore démontrer leur équivalence d'un point de vue théorique.

À partir de la structure complète étudiée dans la section précédente, il est facile d'élaborer les structures GSC de Volterra des structures partielles, et ceci en ne prenant, de l'équation (4.8), que les termes utiles définissant la structure partielle que l'on veut étudier (par exemple les termes (0 et 4) pour la structure étudiée dans [6]). La construction du récepteur équivalent GSC se fait de la même manière que la structure complète.

4.5.4 Implémentation adaptative

Plusieurs implémentations adaptatives du beamformer de Capon ont été présentées dans [42] et [81]. l'algorithme SMI (Sample Matrix Inversion) [81] fait partie de ces implémentations, dont nous avons étudié l'extension au beamformer WL MVDR₂ dans le chapitre 3. Dans cette partie, nous allons encore faire une extension de cet algorithme au récepteur non linéaire MVDR de Volterra pris sous sa structure GSC.

Comme dans de nombreuses situations d'intérêts pratiques, les matrices de corrélation \mathbf{R}_x et $\mathbf{R}_{\tilde{x}_3}$ ne sont pas connues a priori. L'extension au GSC de Volterra de l'algorithme SMI consiste ainsi à calculer les poids du vecteur $\hat{\mathbf{w}}_n$, à travers l'estimation empirique de la matrice de

corrélation $\mathbf{R}_{\tilde{x}_3}$ à partir de K observations instantanées $\mathbf{x}(kT)$ et $\tilde{\mathbf{x}}_3(kT)$ où T est la période d'échantillonnage. Les estimées de \mathbf{R}_x et $\mathbf{R}_{\tilde{x}_3}$ sont respectivement données par :

$$\widehat{\mathbf{R}}_x \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(kT) \mathbf{x}(kT)^H \quad (4.21)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}_3} \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}_3(kT) \tilde{\mathbf{x}}_3(kT)^H. \quad (4.22)$$

A partir des expressions (4.21) et (4.22), en utilisant l'algorithme SMI, les estimées respectives, $\widehat{\mathbf{w}}_{\text{capon}}$ et $\widehat{\mathbf{w}}_n$ de $\mathbf{w}_{\text{capon}}$ donné par (2.9) et $\tilde{\mathbf{w}}_n$ donné par (4.19), s'écrivent :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{w}}_{\text{capon}} &= (\mathbf{s}^H \widehat{\mathbf{R}}_x \mathbf{s})^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_x^{-1} \mathbf{s} \\ \widehat{\mathbf{w}}_n &= (\mathbf{B}_c^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}_3} \mathbf{B}_c)^{-1} \mathbf{B}_c^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}_3} \tilde{\mathbf{w}}_0, \end{aligned}$$

tandis que l'estimée $\widehat{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}$ est donnée par l'équation (3.61).

Comme nous avons utilisé la structure GSC, nous allons étudier la vitesse de convergence en SINR de cette implémentation adaptative par simulations numériques. Ainsi, en utilisant (4.25) dans l'expression (4.26), le SINR estimé en sortie $y(t)$ du récepteur GSC de Volterra s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{SINR}_{\text{NL-GSC}}(K) &= \frac{\pi_s}{(\tilde{\mathbf{w}}_0 - \mathbf{B}_c \widehat{\mathbf{w}}_n)^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}_3} (\tilde{\mathbf{w}}_0 - \mathbf{B}_c \widehat{\mathbf{w}}_n) - \pi_s} \\ &= \frac{\pi_s}{\tilde{\mathbf{w}}_0^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}_3} \tilde{\mathbf{w}}_0 - \tilde{\mathbf{w}}_0^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}_3} \mathbf{B}_c \widehat{\mathbf{w}}_n - \widehat{\mathbf{w}}_n^H \mathbf{B}_c^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}_3} \tilde{\mathbf{w}}_0 + \widehat{\mathbf{w}}_n^H \mathbf{B}_c^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}_3} \mathbf{B}_c \widehat{\mathbf{w}}_n - \pi_s} \quad (4.23) \end{aligned}$$

tandis que le SINR estimé en sortie du beamformer de MVDR₁ estimé est donné par l'équation (3.64) et celui en sortie du beamformer de Capon estimé est donné par :

$$\text{SINR}_{\text{Capon}}(K) \triangleq \frac{\pi_s}{\widehat{\mathbf{w}}_{\text{Capon}}^H \mathbf{R}_x \widehat{\mathbf{w}}_{\text{Capon}} - \pi_s} \quad (4.24)$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{x}_3}$ et \mathbf{R}_x sont les matrices de corrélation exactes ².

Nous avons ainsi réalisé des simulations numériques afin de comparer la convergence en SINR des structures GSC équivalentes (complète et partielle) données par l'équation (4.23) par rapport à la convergence du SINR en sortie du beamformer de Capon donné par l'équation (4.24).

Pour un scénario donné du signal utile et du bruit total, M réalisations indépendantes des $\text{SINR}_{\text{Capon}}(K)$ et $\text{SINR}_{\text{NL-GSC}}(K)$ ont été effectuées afin d'obtenir des valeurs moyennes instantanées des SINR tel que :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{SINR}}_{\text{NL-GSC}}(K) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \text{SINR}_{\text{NL-GSC},m}(K) \\ \widehat{\text{SINR}}_{\text{Capon}}(K) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \text{SINR}_{\text{Capon},m}(K). \end{aligned}$$

²L'expression analytique de la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{x}_3}$ n'est pas simple à calculer, nous l'avons préalablement approchée avec le grand nombre d'échantillons 100000 selon l'équation (4.22) pour $K = 100000$

Pour $M = 1000$, la figure 4.2 montre les variations, en fonction du nombre d'échantillons K , du $\widehat{\text{SINR}}_{\text{NL-GSC}}(K)$ de la structure complète donnée par l'équation (4.8) et de la structure partielle étudiée dans [6] comparées au $\widehat{\text{SINR}}_{\text{Capon}}(K)$ pour le scénario de la réception d'un seul brouilleur BPSK selon le modèle de l'équation (4.1) pour $P = 1$. De même pour la figure 4.3 mais dans le cas où le brouilleur est QPSK.

On note sur ces figures que $\widehat{\text{SINR}}_{\text{NL-GSC}}(K)$ croît avec K et que le récepteur non linéaire GSC de Volterra implémenté à partir de l'algorithme SMI montre de très bonnes performances et converge vers le SINR optimal à partir d'un nombre relativement faible d'échantillons. Pour un très faible nombre d'échantillons, on remarque que le SINR en sortie du beamformer de Capon est légèrement plus élevé que celui en sortie GSC de Volterra car le beamformer de Capon converge plus rapidement du fait que la matrice de covariance à estimer est de petite dimension.

4.4.5 Interprétation GSC de Volterra à structure complète

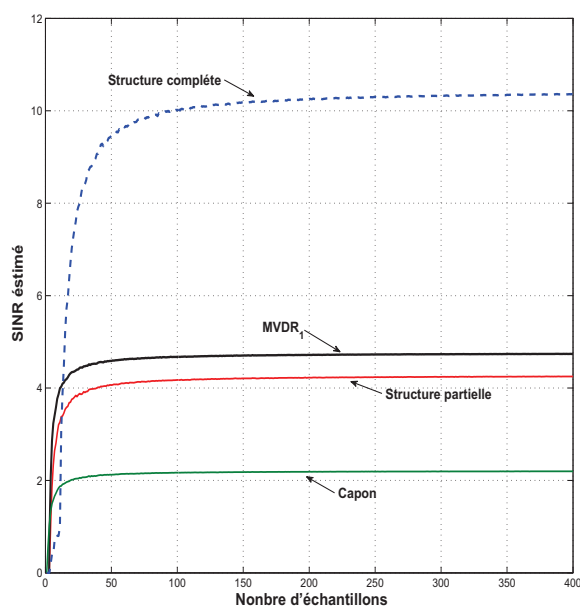


FIGURE 4.2 – Variations de $\widehat{\text{SINR}}_{\text{NL-GSC,Capon,MVDR}_1}(K)$ en fonction de K , $N = 2$, $P = 1$ BPSK, $\theta_s = 55^\circ$, $\theta_1 = 90^\circ$, SNR = 10dB, INR = 0dB, $M = 1000$.

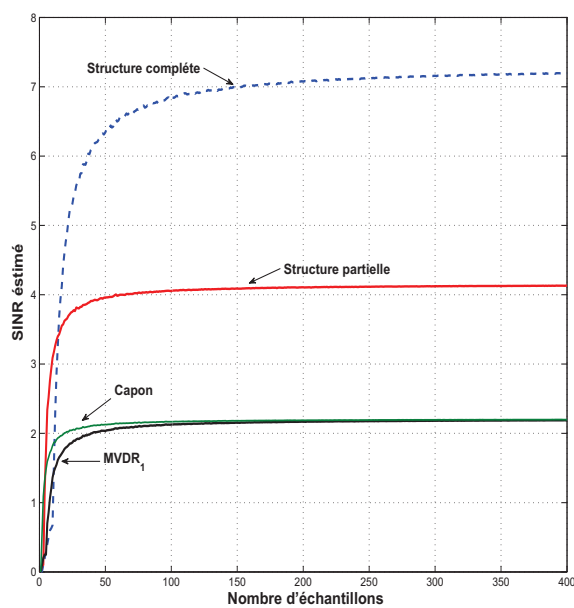


FIGURE 4.3 – Variations de $\widehat{\text{SINR}}_{\text{NL-GSC,Capon,MVDR}_1}(K)$ en fonction de K , $N = 2$, $P = 1$ QPSK, $\theta_s = 55^\circ$, $\theta_1 = 90^\circ$, SNR = 10dB, INR = 0dB, $M = 1000$.

4.5.5 Analyse des performances en SINR en sortie

L'implantation du récepteur MVDR non linéaire de Volterra en structure équivalente GSC de Volterra nous permet d'étudier plus facilement les performances SINR du fait que, l'implantation directe du récepteur MVDR donné par l'expression (4.15) nécessite la suppression des redondances afin de garantir l'inversibilité de la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{x}_3}$. Or dans la structure GSC, ce problème ne se pose pas car l'implantation ne nécessite que l'inversion de $(\mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{x}_3} \mathbf{B}_c)$ qui est de rang plein même en présence de redondances.

Remarque 9. Notons qu'à partir de la matrice de contraintes \mathbf{C}'_c obtenue après suppression de ces redondances, la détermination d'une matrice blocante \mathbf{B}'_c n'est pas triviale. En particulier les vecteurs issus des colonnes de \mathbf{B}'_c dans lesquels les produits de Kronecker \otimes sont remplacés par des produits de Kronecker symétriques \odot ne sont nécessairement plus orthogonaux, car ils sont en nombre plus élevé que la dimension du sous espace orthogonal aux colonnes de \mathbf{C}'_c .

En utilisant le modèle (4.1), la sortie du récepteur GSC de Volterra s'écrit

$$\begin{aligned} y(t) &= \tilde{\mathbf{w}}_3^H \tilde{\mathbf{x}}_{3,t} \\ &= (\tilde{\mathbf{w}}_0 - \mathbf{B}_c \tilde{\mathbf{w}}_n)^H \tilde{\mathbf{x}}_{3,t} \\ &= s(t) + y_n(t). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Par construction $y_n(t)$ est une combinaison linéaire de termes de bruit donc $s(t)$ et $y_n(t)$ sont non-corrélés. Le SINR représentant le rapport de la puissance moyenne du signal utile sur la puissance moyenne du bruit total en sortie est donné par l'expression suivante

$$\begin{aligned} \text{SINR} &= \frac{\text{E}[|s(t)|^2]}{\text{E}[|y_n(t)|^2]} \\ &= \frac{\pi_s}{\text{E}[|y(t)|^2] - \pi_s} \end{aligned} \quad (4.26)$$

où $\pi_s = \text{E}[|s(t)|^2]$ et $\text{E}[|y(t)|^2] = (\tilde{\mathbf{w}}_0 - \mathbf{B}_c \tilde{\mathbf{w}}_n)^H \mathbf{R}_{\tilde{x}_3} (\tilde{\mathbf{w}}_0 - \mathbf{B}_c \tilde{\mathbf{w}}_n)$ avec $\tilde{\mathbf{w}}_n$ donné par (4.19).

Du fait que $s(t)$ est indépendant du bruit total et à partir des contraintes imposées on a d'après (4.20) :

$$\mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{x}_3} = \mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_3}.$$

On obtient alors

$$\text{E}[|y(t)|^2] = \pi_s + \tilde{\mathbf{w}}_0^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_3} \tilde{\mathbf{w}}_0 - \tilde{\mathbf{w}}_0^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_3} \mathbf{B}_c (\mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_3} \mathbf{B}_c)^{-1} \mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_3} \tilde{\mathbf{w}}_0,$$

avec $\mathbf{R}_{\tilde{x}_3} \triangleq \text{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{3,t} \tilde{\mathbf{x}}_{3,t}^H]$ et $\mathbf{R}_{\tilde{n}_3} \triangleq \text{E}[\tilde{\mathbf{n}}_{T,3} \tilde{\mathbf{n}}_{T,3}^H]$. Finalement l'expression du SINR s'écrit :

$$\text{SINR} = \frac{\pi_s}{\tilde{\mathbf{w}}_0^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_3} \tilde{\mathbf{w}}_0 - \tilde{\mathbf{w}}_0^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_3} \mathbf{B}_c (\mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_3} \mathbf{B}_c)^{-1} \mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_3} \tilde{\mathbf{w}}_0}. \quad (4.27)$$

4.6 Illustrations et simulations par ordinateur

Reprenons le modèle de signaux donné par l'équation (4.1) pour $P = 1$ interférence et sous les même hypothèses. Le signal utile, supposé BPSK est corrompu par un seul brouilleur non gaussien et par un bruit de additif blanc, gaussien, centré et circulaire de matrice de covariance $\eta_2 \mathbf{I}_N$. Soit respectivement θ_s et θ_1 les angles d'arrivée du signal utile et du brouilleur. Le rapport

signal sur bruit d'entrée est défini par $\text{SNR} = \pi_s/\eta_2$ tandis que le rapport interférence sur bruit est défini par $\text{INR} = \pi_1/\eta_2$. Ainsi le vecteur d'observation s'écrit :

$$\mathbf{x}(t) = s(t)\mathbf{s} + m_1(t)\mathbf{j}_1 + \mathbf{n}(t) \quad (4.28)$$

$$\triangleq s(t)\mathbf{s} + \mathbf{n}_T(t) \quad (4.29)$$

Dans cette partie nous allons illustrer les performances en gain SINR du récepteur MVDR de Volterra en utilisant sa structure GSC de Volterra équivalente.

Nous allons procéder à un calcul numérique du SINR donné par (4.27) car le calcul des expressions analytiques de cet SINR s'avère long et fastidieux. Par exemple, dans le cas particulier où $N = 2$, ce calcul a été mené vu que $(\mathbf{B}_c^H \mathbf{R}_{\tilde{n}_3} \mathbf{B}_c)$ est une matrice (2×2) , mais l'expression du SINR obtenue s'est avérée non interprétable.

Ainsi, nous avons d'abord calculé la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{n}_3}$ exacte à l'aide d'une approximation avec un nombre important d'échantillons³ selon l'équation :

$$\mathbf{R}_{n,3} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{n}}_{T,3}(kT) \tilde{\mathbf{n}}_{T,3}(kT)^H \quad (4.30)$$

où T est la période d'échantillonnage. Par la suite, nous avons calculé le SINR selon l'équation (4.27) que nous avons comparé au SINR à la sortie du beamformer MVDR de Capon donné par l'équation (3.35) tel que :

$$\text{SINR}_{\text{Capon}} = \pi_s \mathbf{s}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}. \quad (4.31)$$

Sous les mêmes hypothèses de réception et selon le type du brouilleur non gaussien, qu'il soit circulaire ou non circulaire, plusieurs scénarios sont présentés. Le brouilleur non gaussien est soit modulé, BPSK ou QPSK, soit il s'agit d'un brouilleur impulsif de moments normalisés k_x et h_x d'ordre 4 et 6 respectivement définis dans le chapitre 1. Pour le bruit impulsif, il s'agit ici de générer des variables aléatoires non gaussiennes soit circulaires soit rectilignes de la forme :

$$x = \rho e^{i\Phi}$$

tel que :

1. Si Φ est une variable aléatoire réelle équi-répartie prenant deux valeurs $\{+\phi_0, -\phi_0\}$ indépendante de ρ qui est de distribution de Bernoulli prenant une valeur 1 et 0 avec des probabilités respectivement égales à $\frac{1}{p}$ et $1 - \frac{1}{p}$, la variable aléatoire x est un bruit impulsif de Bernoulli non circulaire rectiligne de moments normalisés $h_x = k_x^2 = p^2$.
2. Si Φ est une variable aléatoire réelle équi-répartie sur $[-\pi, \pi]$ et ρ suit une distribution de Bernoulli prenant une valeur 1 avec une probabilité $\frac{1}{p}$ et la valeur 0 avec une probabilité $1 - \frac{1}{p}$, la variable aléatoire x est un bruit impulsif de Bernoulli circulaire de moments normalisés $h_x = k_x^2 = p^2$.
3. Si Φ est une variable aléatoire réelle équi-répartie sur $[-\pi, \pi]$ et ρ est une constante fixe, la variable aléatoire x est un bruit circulaire non gaussien de module constant de moments normalisés $h_x = k_x = 1$.

Afin de voir l'apport de l'exploitation de la non gaussianité et de la potentielle non circularité du brouilleur, des simulations par ordinateur ont été effectuées pour la réception d'un signal utile BPSK avec un SNR égal à 20dB corrompu par un bruit total composé d'un bruit additif

³Cette matrice exacte est approximée avec ($K = 10000$) échantillons

blanc, gaussien, centré et circulaire et d'un seul brouilleur, différent selon son type, de rapports de puissance du brouilleur sur puissance du bruit gaussien INR égal à 0, 10, 20 et 30 dB selon la configuration.

Les figures présentées dans cette section représentent les variations des gains en SINR, par rapport au SINR du beamformer de Capon (4.31), des structures GSC de Volterra (partielle et complète) de SINR donné par (4.27) et du beamformer MVDR₁ de SINR donné par (3.30) en fonction du module de la corrélation spatiale $|\alpha_{1s}|$ entre le signal utile et le brouilleur défini par [63]

$$\alpha_{1s} \triangleq \frac{\mathbf{j}_1^H \mathbf{s}}{(\mathbf{j}_1^H \mathbf{j}_1)^{1/2} (\mathbf{s}^H \mathbf{s})^{1/2}} \triangleq |\alpha_{1s}| e^{i\phi_{1s}},$$

Ces figures sont obtenues pour $N = 2$, $\theta_1 = 90^\circ$, $K = 10000$. Les figures notées (a), (b), (c) ou (d) sont obtenues pour des brouilleurs d'INR respectivement égaux à 0, 10, 20 ou 30 dB.

Remarque 10. Notons tout d'abord que ces figures ayant été obtenues à l'aide d'approximations des matrices $\mathbf{R}_{\tilde{n}_3}$, certains gains apparaissent très proches mais sont en réalité identiques. Pour des brouilleurs circulaires, ces situations sont observées sur les figures 4.4, 4.5 et 4.6 où les gains des structures partielles et complètes sont identiques. Par contre, pour un brouilleur rectiligne de plus en plus impulsif, comme observé pour la figure 4.10, ces même gains sont très proches mais non identiques.

On remarque d'abord sur toutes les figures que le gain de tous les récepteurs sont nuls dans les cas où les vecteurs directionnels du signal utile et du brouilleur sont orthogonaux ($|\alpha_{1s}| = 0$) ou colinéaires ($|\alpha_{1s}| = 1$). Car dans le premier cas, la partie linéaire des filtres suffit pour rejeter entièrement le brouilleur et dans le deuxième cas, tout traitement spatial ne peut apporter de gain au SINR car le signal utile et le brouilleur sont issus de directions identiques ou opposées.

Brouilleurs non gaussiens circulaires

Pour différents INR, les figures 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7 représentent les variations des gains pour respectivement un brouilleur de module constant ($h_x = k_x^2 = 1$), un brouilleur impulsif de Bernoulli circulaire de moments normalisés ($h_x = k_x^2 = 100$), un brouilleur impulsif de Bernoulli circulaire de moments normalisés ($h_x = k_x^2 = 10000$) et un brouilleur QPSK.

Ces figures montrent que les récepteurs non linéaires de Volterra sont particulièrement adaptés pour la réjection du brouilleur impulsif de Bernoulli ($h_x = k_x^2 \gg 1$) et à degré moindre pour la réjection des brouilleurs à module constant.

Pour des brouilleurs circulaires, qui le sont donc jusqu'à l'ordre 4, il est clair que la structure complète n'apporte pas de gain supplémentaire par rapport à la structure partielle.

Par contre, pour un brouilleur QPSK qui est circulaire au second ordre mais non circulaire à l'ordre 4, les performances du récepteur à structure complète sont meilleures que celles du récepteur à structure partielle. En effet, dans la structure complète, les termes 2 et 4 de l'équation (4.8) apportent de l'information, tandis que la structure partielle ne contient que le terme 4. Par contre, le beamformer MVDR₁ n'apporte pas de gains vu que les brouilleurs sont circulaires d'ordre au moins égal à 2.

Les gains des récepteurs non linéaires croissent avec le INR (les figures a, b, c et d) et avec les moments normalisés (h_x, k_x). Ceci nous permet de dire que les gains par rapport au

beamformer de Capon augmentent avec le caractère de non gaussianité des brouilleurs.

Brouilleurs non gaussiens rectilignes

Pour différents INR, les figures 4.8, 4.9 et 4.10 représentent les variations du gain pour respectivement un brouilleur BPSK, un brouilleur impulsif rectiligne de moments normalisés ($h_x = k_x^2 = 100$) et un brouilleur impulsif rectiligne de moments normalisés ($h_x = k_x^2 = 10000$).

Le récepteur à structure complète présente de meilleures performances par rapport à la structure partielle et au MVDR₁ vu qu'elle exploite la non circularité et la non gaussianité des brouilleurs. En effet pour des brouilleurs rectilignes non gaussiens, tous les termes de l'équation (4.8) apportent de l'information, tandis que la structure partielle n'est composée que des termes 0 et 4 et que le MVDR₁ n'est composé que des termes 0 et 1.

On remarque que pour de faibles INR et pour ($h_x = k_x^2 = 100$), le beamformer MVDR₁ présente de meilleures performances que le récepteur à structure partielle. Dans ce cas, la partie non gaussienne du bruit total est de faible puissance et de moments normalisés d'ordres 4 et 6 pas trop élevés, ce qui diminue le gain de la structure partielle. Tandis qu'en même temps le MVDR₁ exploite uniquement la non circularité du brouilleur et son gain augmente. Pour des INR relativement élevés, le caractère non gaussien l'emporte et les performances des récepteurs linéaires augmentent. Par contre, pour des brouilleurs fortement non gaussiens ($h_x = k_x^2 = 10000$), les performances de la structure partielle deviennent équivalentes à celles de la structure complète. Dans ce cas le bruit total est fortement non gaussien et la prise en compte de la non circularité n'apporte pas de gains supplémentaires.

Dans la figure 4.8 où le brouilleur est BPSK, les performances du beamformer MVDR₁ sont meilleures que celles de la structure partielle. En effet, le terme 1 de l'équation (4.8) apporte plus d'informations que le terme 4 car le caractère non gaussien est ici relativement faible (kurtosis = -2) par rapport au caractère non circulaire du second ordre qui est ici maximum car rectiligne. En augmentant le INR, le caractère non gaussien prend de l'ampleur et les performances des deux récepteurs (MVDR₁ et la structure GSC partielle) se rapprochent.

En résumé, les récepteurs non linéaires sont mieux adaptés pour la réjection de brouilleurs non gaussiens circulaires tel que ($h_x = k_x^2 \gg 1$) et dans une moindre mesure pour celle de brouilleurs à module constant ($h_x = k_x = 1$) telle que les modulations BPSK et QPSK. Notons que pour la modulations QPSK les gains en SINR par rapport au beamformer MVDR₁ sont importants. Pour des brouilleurs non gaussiens rectilignes, la structure non linéaire complète est toujours la mieux adaptée. Néanmoins, il est plus intéressant d'utiliser la structure partielle, de complexité moindre, quand les brouilleurs sont de moments normalisés et de puissances très élevés.

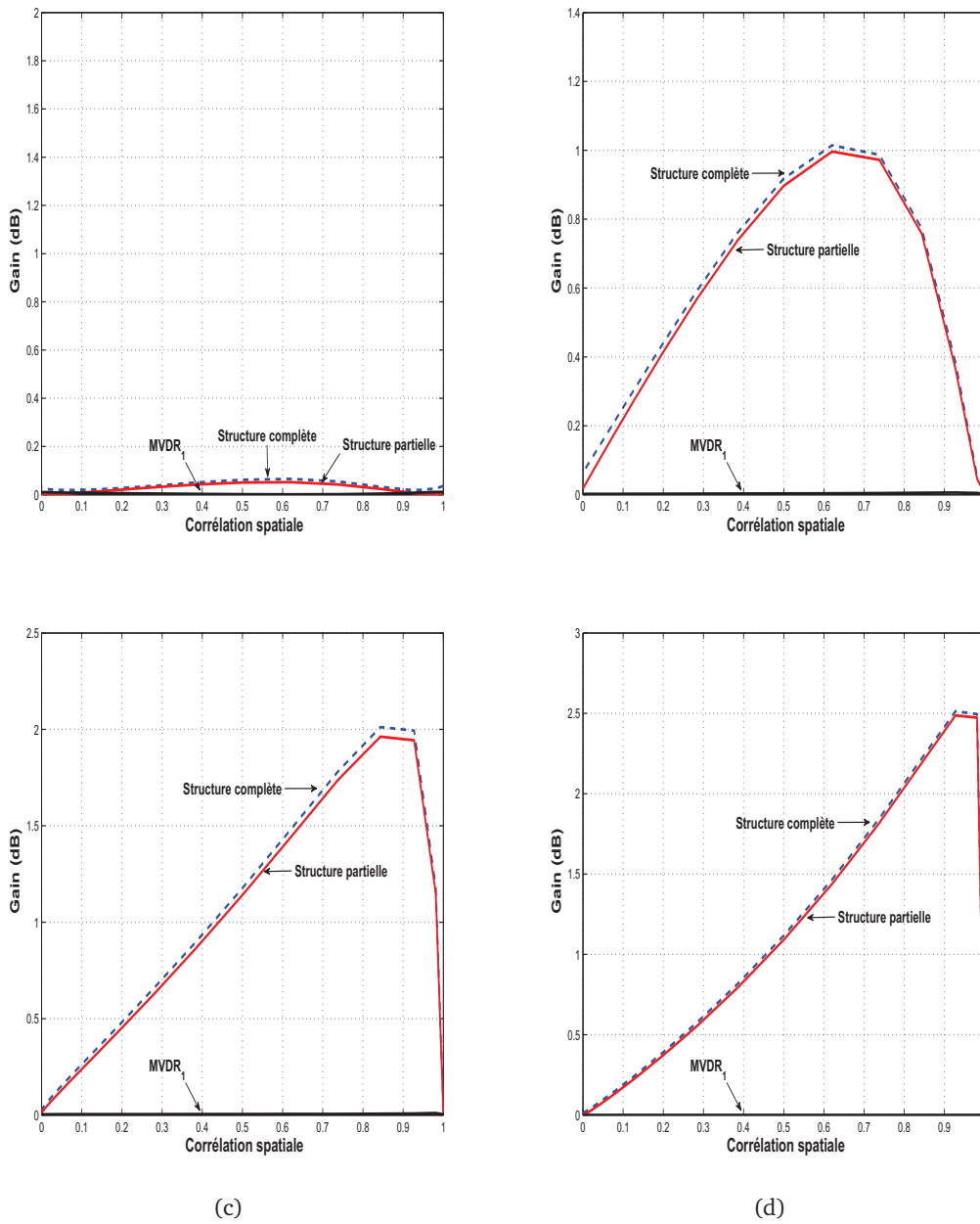


FIGURE 4.4 – Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et MVDR₁ en fonction du module de la corrélation spatiale $|\alpha_{1s}|$ pour un brouilleur circulaire à module constant $h_x = k_x^2 = 1$ de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)

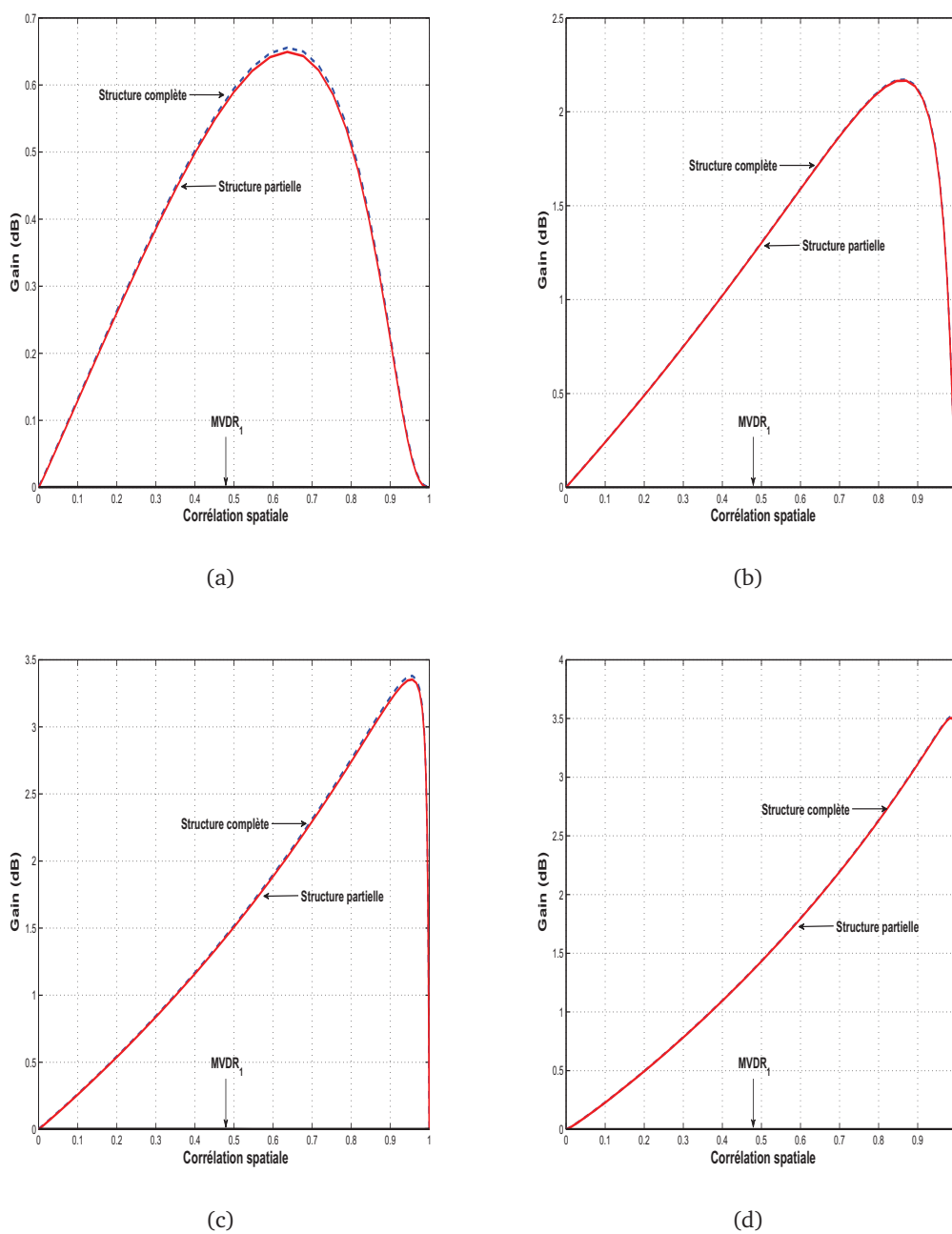


FIGURE 4.5 – Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et MVDR₁ en fonction du module de la corrélation spatiale $|\alpha_{1s}|$ pour un brouilleur impulsif de Bernoulli circulaire $h_x = k_x^2 = 100$ de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)

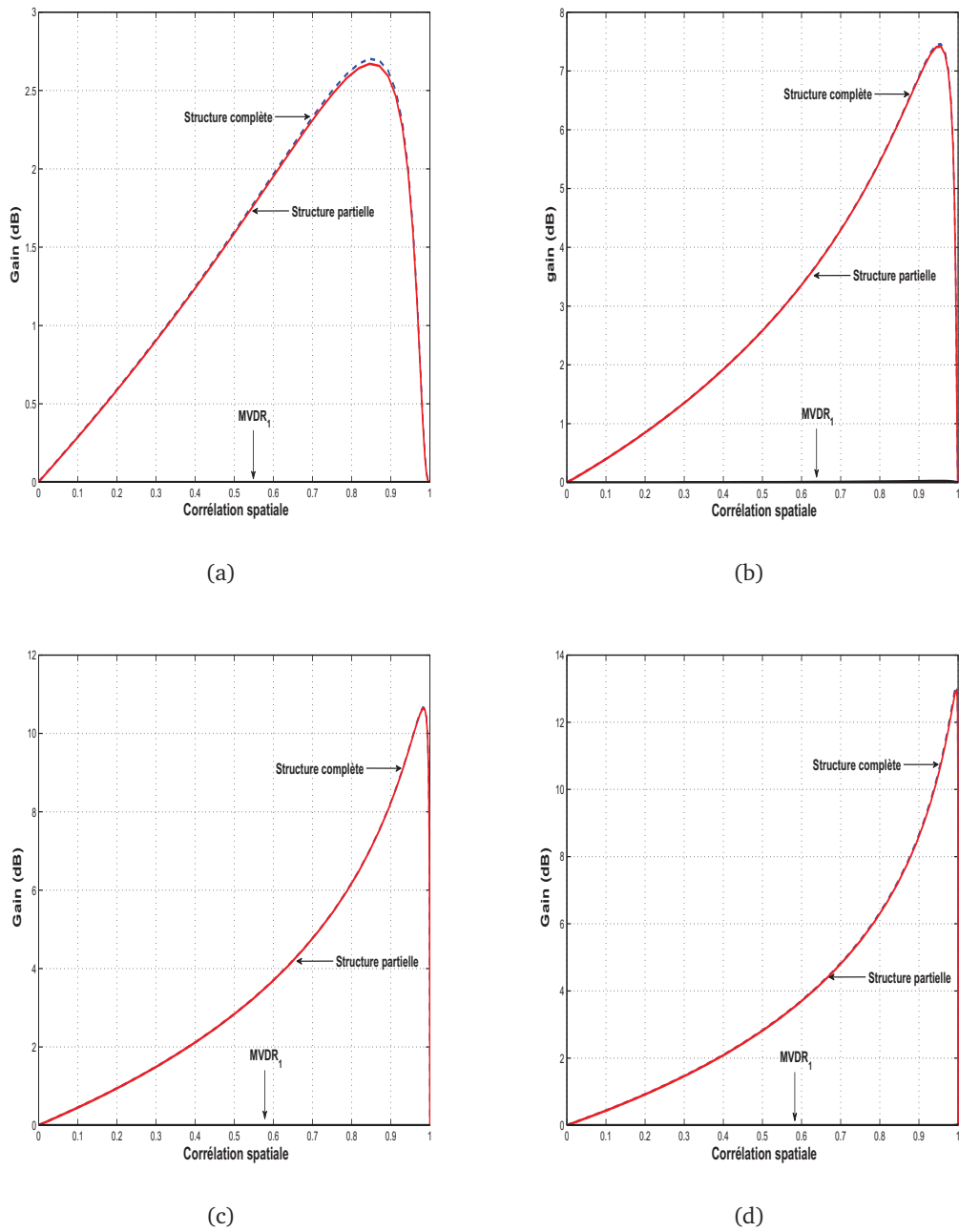


FIGURE 4.6 – Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et $MVDR_1$ en fonction du module de la corrélation spatiale $|\alpha_{1s}|$ pour un brouilleur impulsif de Bernoulli circulaire $h_x = k_x^2 = 10000$ de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)

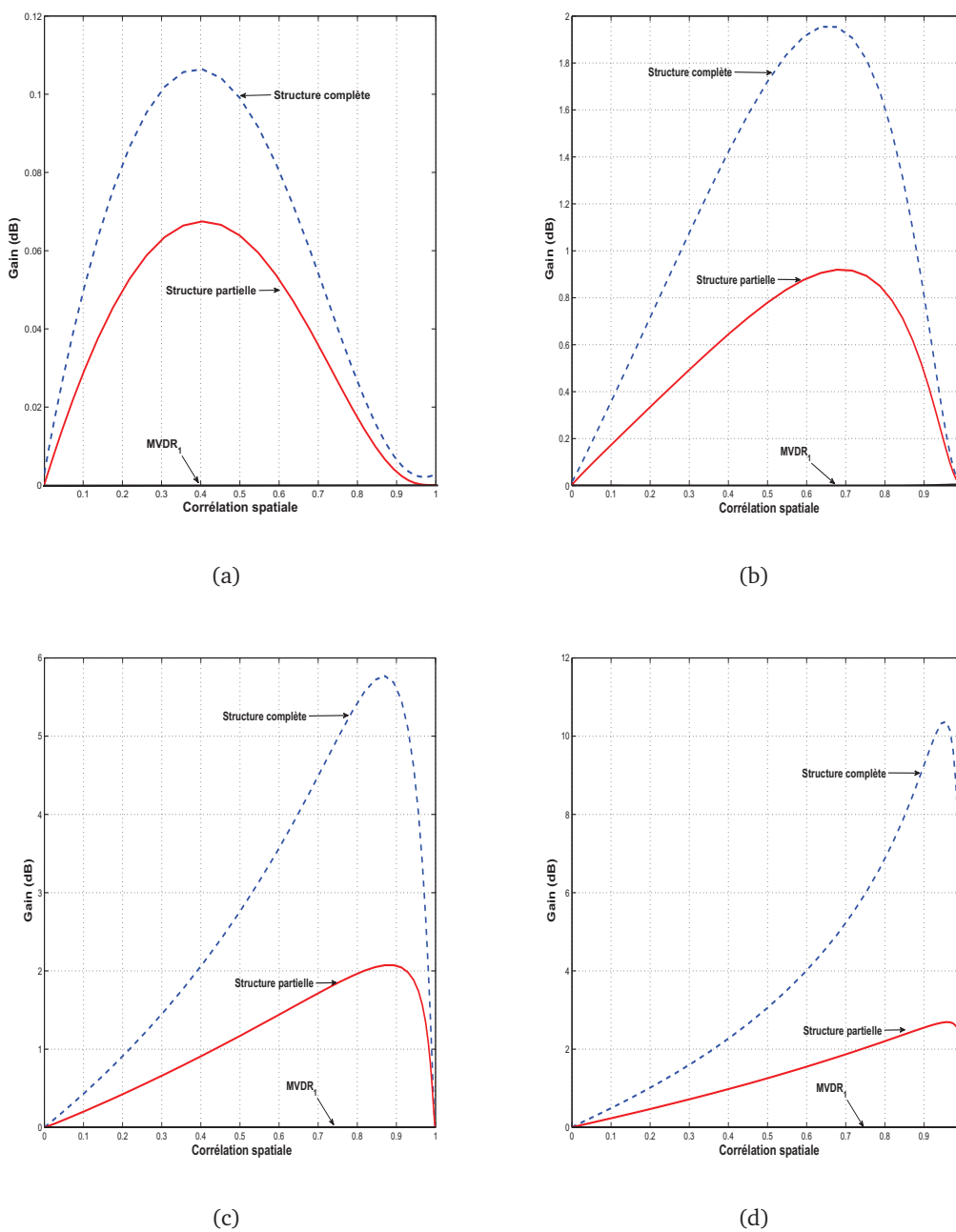


FIGURE 4.7 – Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et $MVDR_1$ en fonction du module de la corrélation spatiale $|\alpha_{1s}|$ pour un brouilleur QPSK de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)

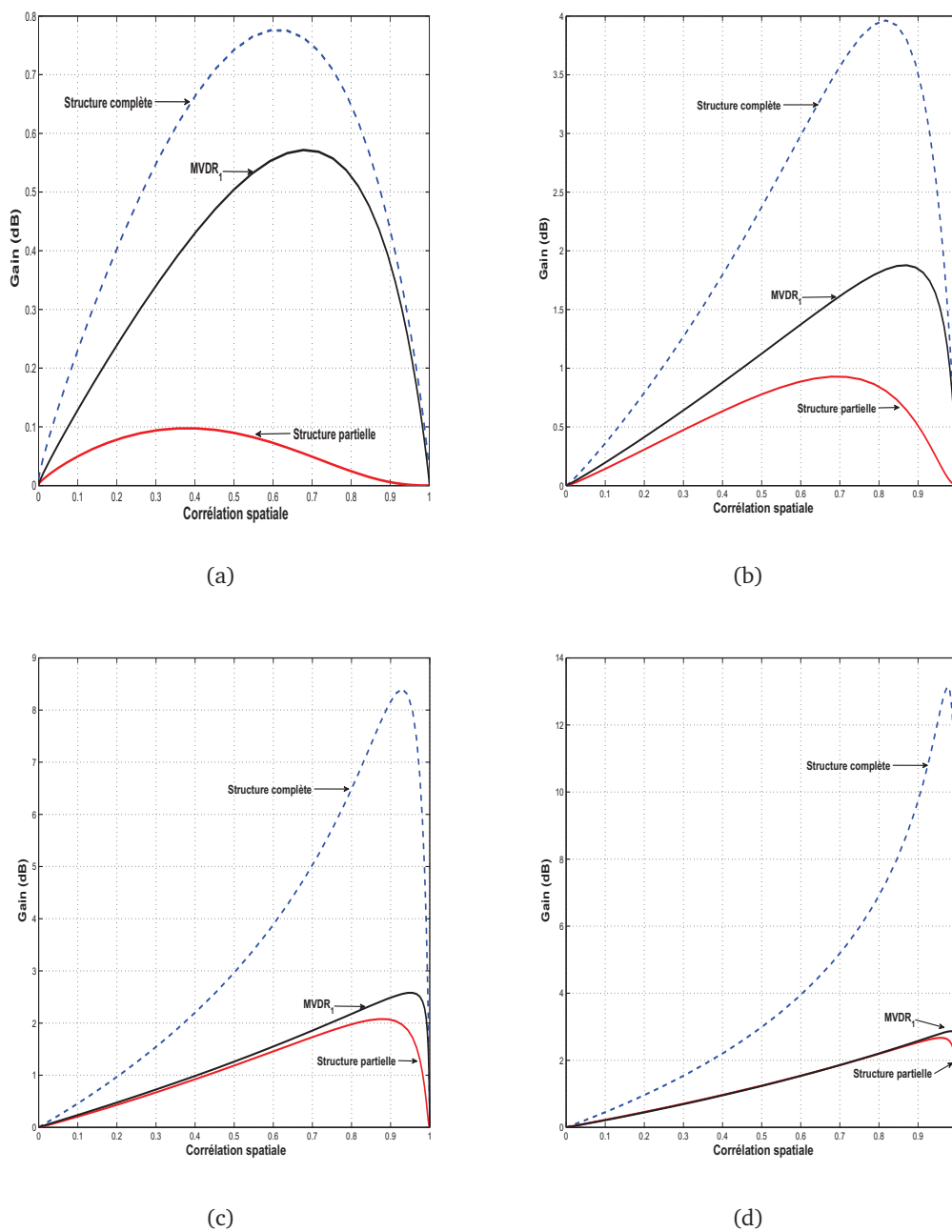


FIGURE 4.8 – Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et MVDR₁ en fonction du module de la corrélation spatiale $|\alpha_{1s}|$ pour un brouilleur BPSK de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)

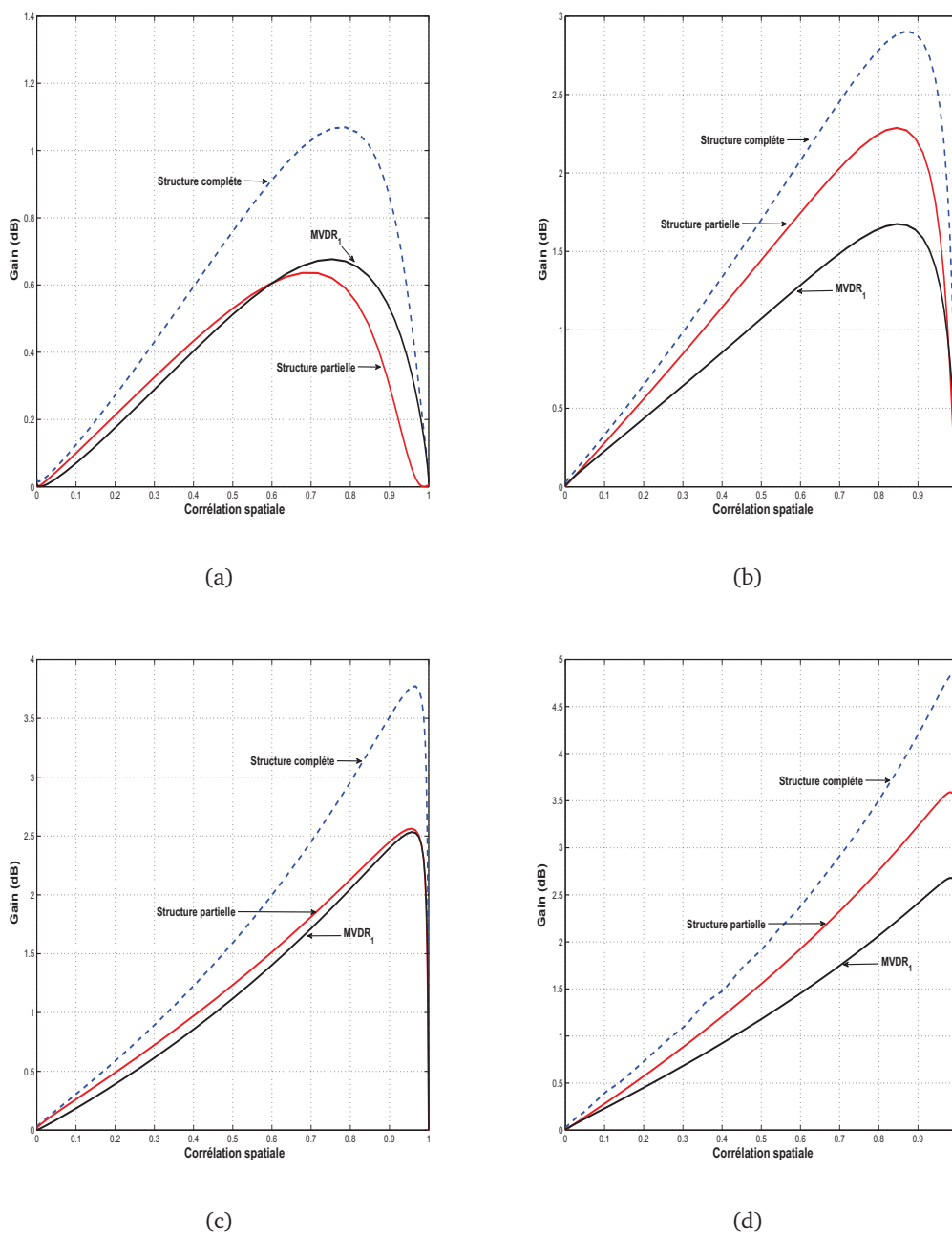


FIGURE 4.9 – Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et $MVDR_1$ en fonction du module de la corrélation spatiale $|\alpha_{1s}|$ pour un brouilleur impulsif de Bernoulli rectiligne $h_x = k_x^2 = 100$ de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)

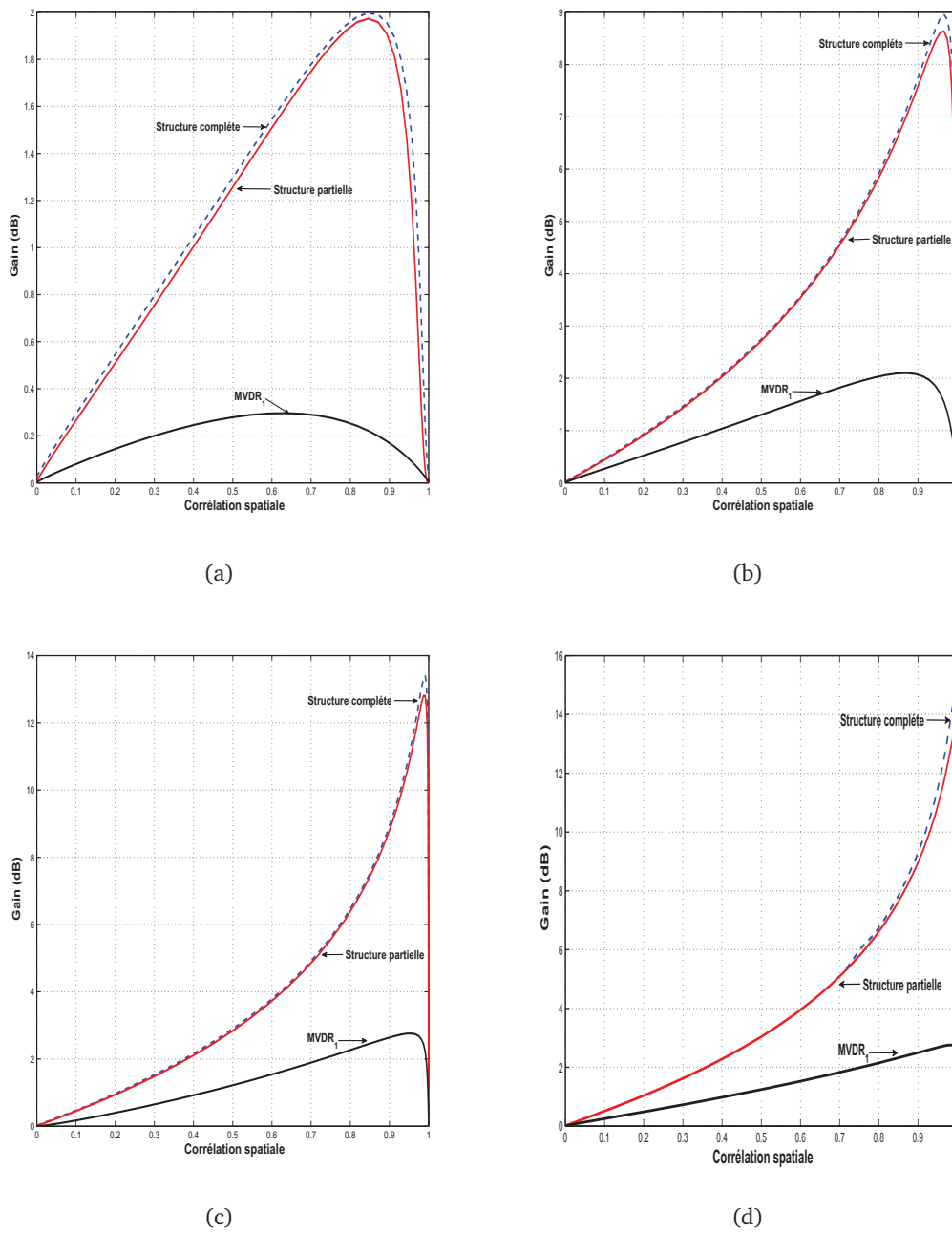


FIGURE 4.10 – Variations des gains en SINR, par-rapport au beamformer de Capon, de différents filtres de Volterra (avec structure GSC partielle et complète) et $MVDR_1$ en fonction du module de la corrélation spatiale $|\alpha_{1s}|$ pour un brouilleur impulsif de Bernoulli rectiligne $h = k^2 = 10000$ de INR : 0dB (a), 10db (b), 20dB (c) et 30dB (c)

4.7 Extension aux critères maximum de SINR et MMSE

Le beamformer de Volterra de structure complète et ceux de structures partielles que nous avons présentés peuvent être considérés comme différentes extensions widely polynomiales du beamformer widely linear MVDR₁ [21]. Par suite naturellement, les beamformers widely linear MVDR₂ et widely linear MMSE que nous avons vu au chapitre 3, peuvent être étendus eux aussi aux structures widely polynomiales complète et partielles. Ces filtres prendront ainsi en compte non seulement la non gaussianité et la non circularité de l'interférence, mais aussi la non gaussianité et la non circularité du SOI.

Nous n'allons considérer ici que le beamformer MMSE de Volterra, de structure complète ou partielle.

4.7.1 Expression du filtre MMSE de Volterra

L'estimée $\hat{s}(t)$ du SOI sera donnée ici par le filtre spatial $y(t) = \tilde{\mathbf{w}}_3^H \tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$ dont le filtre $\tilde{\mathbf{w}}_3$ est solution de la minimisation suivante :

$$\min_{\tilde{\mathbf{w}}_3} E |s(t) - \tilde{\mathbf{w}}_3^H \tilde{\mathbf{x}}_{3,t}|^2, \quad (4.32)$$

dont la solution est donnée par la résolution de l'équation normale

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MMSE}_{v,3}} = \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}}_3, s} \quad (4.33)$$

avec

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \stackrel{\text{def}}{=} E(\tilde{\mathbf{x}}_{3,t} \tilde{\mathbf{x}}_{3,t}^H) \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}}_3, s} \stackrel{\text{def}}{=} E(\tilde{\mathbf{x}}_{3,t} s^*(t))$$

où

$$\tilde{\mathbf{x}}_{3,t} \triangleq [\mathbf{x}_t^T, \mathbf{x}_t^H, (\mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^*)^T, (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t^* \otimes \mathbf{x}_t^*)^T, (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t^*)^T, (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t \otimes \mathbf{x}_t)]^T$$

et $E[\tilde{\mathbf{x}}_{3,t} s^*(t)] = E[\tilde{\mathbf{s}}_{3,t} s^*(t)]$ où $\tilde{\mathbf{s}}_{3,t}$ est défini comme la partie SOI de $\tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$:

$$\tilde{\mathbf{s}}_{3,t} = [s(t)\mathbf{s}^T, s^*(t)\mathbf{s}^H, s^{*3}(t)(\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*)^T, s^*(t)|s(t)|^2(\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*)^T, s(t)|s(t)|^2(\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*)^T, s^3(t)(\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s})^T]^T.$$

Par suite (4.33) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3} \tilde{\mathbf{w}}_3 = \tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k}, \quad (4.34)$$

où $\tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k}$ est un nouvel vecteur directionnel étendu qui dépend ici des statistiques du second et quatrième ordre du SOI défini par :

$$\tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k} = \begin{bmatrix} \pi_s \mathbf{s} \\ \pi_s \gamma_s^* \mathbf{s} \\ \pi_s^2 k_s' (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*) \\ \pi_s^2 k_s'' (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*) \\ \pi_s^2 k_s (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*) \\ \pi_s^2 k_s'' (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

avec $\gamma_s = \frac{E(s^2(t))}{E|s^2(t)|}$ et k_s, k'_s et k''_s étant les 3 kurtosis normalisés du SOI :

$$k_s \triangleq \frac{E[|s^4(t)|]}{[E|s^2(t)|]^2} \quad k'_s \triangleq \frac{E[s^4(t)]}{[E|s^2(t)|]^2} \quad \text{et} \quad k''_s \triangleq \frac{E[s^2(t)|s^2(t)]}{[E|s^2(t)|]^2}.$$

Le vecteur $\tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k}$ peut s'interpréter à partir de la décomposition orthogonale (unique) de $\tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{3,t} = s(t)\tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k} + \tilde{\mathbf{n}}_{3,\gamma,k}(t) \quad (4.36)$$

où $s(t)$ et $\tilde{\mathbf{n}}_{3,\gamma,k}(t)$ sont non corrélés car $E[(\tilde{\mathbf{x}}_{3,t} - s(t)\tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k})s^*(t)] = 0$.

Naturellement les redondances contenues dans $\tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$ entraînent la singularité de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_3}$ de (4.34). Ces redondances peuvent être retirées grâce à la remarque 8. On obtient donc alors avec $y(t) = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MMSE}_{v,3}}^H \tilde{\mathbf{x}}_{3,t}$ donné par (4.14), $\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MMSE}_{v,3}}$ est obtenu par

$$\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MMSE}_{v,3}} = \pi_s \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{x}}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} \quad (4.37)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \gamma_s^* \mathbf{s} \\ \pi_s k'_s (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*) \\ \pi_s k''_s (\mathbf{s} \otimes (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^*)) \\ \pi_s k_s ((\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes \mathbf{s}^*) \\ \pi_s k''_s (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

L'erreur quadratique moyenne (MSE) obtenue est alors donnée par

$$\text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MMSE}_{v,3}}] = \text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MMSE}_{v,3}}] = \pi_s (1 - \pi_s \tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k}^H \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{x}}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k}). \quad (4.39)$$

Bien entendu, différentes structures partielles adaptées aux statistiques du second et quatrième ordre du SOI et de l'interférence peuvent aussi être considérées en prenant seulement certains termes du filtrage spatial (4.8).

Les différentes MSE obtenues selon les termes retenus dans ce filtrage spatial peuvent être théoriquement comparées entre elles par la même approche que celles menées dans [77] et reprise dans [34].

Notons que la décomposition orthogonale (4.36) peut donner lieu à un beamformer MVDR₂ de Volterra : extension de notre beamformer MVDR₂ du chapitre 3. En effet la minimisation de la puissance de $\tilde{\mathbf{x}}'_{3,t}$ sous la contrainte $\tilde{\mathbf{w}}_3^H \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} = 1$ conduit au beamformer de filtre

$$\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MVDR}_{v,3}} = \left(\tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k}^H \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{x}}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} \right)^{-1} \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{x}}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} = \left(\tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k}^H \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{n}}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} \right)^{-1} \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{n}}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} \quad (4.40)$$

avec

$$\mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{n}}_3} \stackrel{\text{def}}{=} E(\tilde{\mathbf{n}}'_{3,\gamma,k}(t)\tilde{\mathbf{n}}_{3,\gamma,k}^H(t)) = \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{x}}_3} - \pi_s \tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k}^H \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} \quad (4.41)$$

d'après la décomposition (4.36). Et comme dans le cas des filtres MVDR₂ vus au chapitre 3, ce filtre est proportionnel au filtre widely nonlinear de Volterra MLSE.

$$\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MMSE}_{v,3}} = \left(\frac{\pi_s \tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k}^H \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{n}}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k}}{1 + \pi_s \tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k}^H \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{n}}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k}} \right) \tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MVDR}_{v,3}} = \left(\pi_s \tilde{\mathbf{s}}_{3,\gamma,k}^H \mathbf{R}'_{\tilde{\mathbf{x}}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} \right) \tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MVDR}_{v,3}}. \quad (4.42)$$

Cela entraîne que les filtres $\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MMSE}_{v,3}}$ et $\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MVDR}_{v,3}}$ minimisent tous deux le SINR de sortie issue de la décomposition orthogonale (4.36)

$$\text{SINR}(\tilde{\mathbf{w}}') = \frac{\pi_s |\tilde{\mathbf{w}}'^H \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k}|^2}{\tilde{\mathbf{w}}'^H \mathbf{R}'_{\tilde{x}_3} \tilde{\mathbf{w}}'}, \quad (4.43)$$

dont la valeur minimale est donnée par

$$\text{SINR}(\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MMSE}_{v,3}}) = \text{SINR}(\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MVDR}_{v,3}}) = \pi_s \tilde{\mathbf{s}}'^H \mathbf{R}'_{\tilde{x}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} = \frac{\pi_s \tilde{\mathbf{s}}'^H \mathbf{R}'_{\tilde{x}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k}}{1 - \pi_s (\tilde{\mathbf{s}}'^H \mathbf{R}'_{\tilde{x}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k})}, \quad (4.44)$$

déduit du lemme d'inversion matriciel issu de (4.41). De plus d'après la relation générale (3.36) qui lie la MSE et le SINR qui s'applique aussi ici

$$\text{MSE}(\tilde{\mathbf{w}}') = \pi_s \left(|1 - \tilde{\mathbf{w}}'^H \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k}|^2 + \frac{|\tilde{\mathbf{w}}'^H \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k}|^2}{\text{SINR}(\tilde{\mathbf{w}}')} \right),$$

On voit clairement dans cette relation que le filtre $\tilde{\mathbf{w}}'$ qui minimise $\text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}']$ sous la contrainte $\tilde{\mathbf{w}}'^H \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k} = 1$ et aussi celui qui minimise $\text{SINR}[\tilde{\mathbf{w}}']$ sous la même contrainte, qui finalement correspond au beamformer MVDR₂. Ce qui donne un sens physique particulier à la décomposition (4.36) et au critère SINR.

Finalement, notons que malgré que $\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MMSE}_{v,3}}$ et $\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MVDR}_{v,3}}$ soient colinéaires et donnent le même SINR en sortie, ils génèrent différentes MSE comme il a été vu au paragraphe 3.7.3.2.

4.7.2 Implantation du filtre de Volterra MMSE

Comme tout beamformer MMSE, l'implantation de ce filtre de Volterra MMSE en absence de séquence d'apprentissage exige la connaissance du vecteur directionnel \mathbf{s} du SOI et de sa puissance π_s . Mais son implantation exige aussi la connaissance de l'ensemble de ses statistiques d'ordre deux et quatre à travers son coefficient de non circularité γ_s et de ses trois kurtosis normalisés k_s , k'_s et k''_s . Ce beamformer exploite ainsi non seulement la non gaussianité et la non circularité de l'interférence, mais aussi la non gaussianité et la non circularité du SOI.

La matrice de covariance étendue $\mathbf{R}'_{\tilde{x}_3}$ peut être estimée par une méthode usuelle, par exemple par l'estimée empirique $\hat{\mathbf{R}}'_{\tilde{x}_3}$ obtenue à partir de K observations instantanées $\tilde{\mathbf{x}}'_3(kT)$ où T est la période d'échantillonnage.

$$\hat{\mathbf{R}}'_{\tilde{x}_3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}'_3(kT) \tilde{\mathbf{x}}'^H_3(kT),$$

et le filtre $\tilde{\mathbf{w}}'_{\text{MMSE}_{v,3}}$ est estimé par

$$\hat{\tilde{\mathbf{w}}}'_{\text{MMSE}_{v,3}} = \pi_s \hat{\mathbf{R}}'_{\tilde{x}_3}{}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_{3,\gamma,k}. \quad (4.45)$$

En présence d'une séquence d'apprentissage $(s(kT))_{k=1,\dots,K}$, la connaissance de \mathbf{s} et des statistiques de $s(t)$ ne sont plus nécessaires. La corrélation sans redondance $\mathbf{r}'_{\tilde{x}_3,s}$ peut être

estimée par l'estimée empirique

$$\hat{\mathbf{r}}'_{\tilde{x}_{3,s}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}'_3(kT) s^*(kT)$$

et l'estimée du filtre $\tilde{\mathbf{w}}'_3$ est donnée par

$$\hat{\mathbf{w}}'_{\text{MMSE}_{v,3}} = \hat{\mathbf{R}}'^{-1}_{\tilde{x}_3} \hat{\mathbf{r}}'_{\tilde{x}_{3,s}}. \quad (4.46)$$

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un récepteur non linéaire invariant dans le temps pour traiter la réception d'un signal inconnu, dont la forme d'onde est inconnue mais de vecteur directionnel connu, et corrompu par des interférences potentiellement non gaussiennes et non circulaires. Pour cela, nous avons utilisé une classe particulière de filtres non linéaires complexes, appelés filtres de Volterra complexes. Ce récepteur invariant dans le temps est construit selon une approche MVDR basée sur des filtres de Volterra complexes. Il ne requiert aucune information a priori sur les interférences et se trouve particulièrement adapté pour le contrôle de spectre ou l'écoute passive dans le contexte non circulaire et non gaussien.

Ce récepteur a été détaillé à l'ordre trois selon une structure dite complète où tous les termes polynomiaux jusqu'à l'ordre trois ont été pris en compte, ce qui le rend mieux adapté pour traiter la non circularité d'ordre 4 en plus de la non gaussianité des interférences. Par la suite, nous avons présenté une implémentation GSC équivalente de ce récepteur MVDR de Volterra selon sa structure complète et partielle. Finalement nous avons étudié par calculs numériques les performances en gain SINR, par-rapport aux beamformers de Capon et MVDR₁ à travers l'implémentation GSC. Cette étude nous a permis de montrer que le récepteur MVDR de Volterra à structure complète est toujours meilleur que les beamformers de Capon, MVDR₁ et MVDR de Volterra à structure partielle en présence d'interférences non gaussiennes potentiellement non circulaires particulièrement pour des brouilleurs QPSK. Par ailleurs, nous avons démontré que la prise en compte à la fois de la non circularité à l'ordre deux, de la non circularité à l'ordre quatre et de la non gaussianité permet une meilleure réjection de brouilleurs non circulaires impulsifs ($h_x = k_x^2 \gg 1$).

Naturellement la structure complète et les différentes structures partielles décrites dans ce chapitre à l'ordre 3 peuvent être étendues à des ordres impairs supérieurs à 3, par exemple à l'ordre $N = 5$ comme des illustrations ont été présentées dans [7] pour une structure partielle particulière dans le premier beamformer de Volterra.

En conséquence, les gains en SINR obtenus dans [7] en passant de l'ordre 3 à l'ordre 5 dans la structure particulière obtenue en ne retenant que les termes (0) et (4) de (4.8) devraient s'étendre quand on passe de l'ordre 3 à l'ordre 5 dans la structure complète car ce beamformer exploiterait aussi la non circularité éventuelle d'ordre 6 de l'interférence. Ainsi ce premier beamformer de Volterra d'ordre 5 pourrait exploiter encore mieux la non gaussianité et la non circularité conjointe de l'interférence.

De même le beamformer MMSE de Volterra d'ordre 5 pourrait de plus bénéficier de la non circularité éventuelle d'ordre 6 du SOI par rapport à celui d'ordre 3.

Troisième partie

Détection

Chapitre 5

Étude des performances des détecteurs GLRT d'un signal utile noyé dans un bruit non circulaire

Sommaire

5.1	Introduction	123
5.2	Récepteurs GLRT pour la détection d'un signal connu perturbé par des interférences non circulaires	125
5.3	Position du problème	125
5.4	Récepteurs optimaux où tous les paramètres sont connus (clairvoyants)	127
5.5	Récepteurs optimaux avec des paramètres inconnus	128
5.6	Analyse théorique des Performances des récepteurs clairvoyants	134
5.7	Performances asymptotiques des récepteur avec des paramètres inconnus	138
5.8	Illustrations	141
5.9	Conclusion	150

5.1 Introduction

Pour de nombreuses applications telles que la détection de cibles dans les systèmes radar et sonar, la synchronisation en radio communications, la localisation par satellite et l'identification ami-ennemi (systèmes IFF), le problème de détection d'un signal connu, de paramètres inconnus, en présence d'un bruit de fond et perturbé par des interférences, appelé par la suite bruit total de matrice de covariance est inconnue, a reçu beaucoup d'attention ces dernières décennies.

A l'heure actuelle, plusieurs détecteurs sont disponibles, parmi ceux ci ; un détecteur adaptatif spatio-temporel utilisant l'estimée, à partir des vecteurs de données secondaires (composante bruit seul), de la matrice de covariance est proposé par Brennan, Reed et Mallett dans [9] et [81]. Ce récepteur a pour but de détecter le signal utile de rang 1, i.e. ayant un vecteur directeur connu et une puissance inconnue, en présence d'un bruit total gaussien inconnu. Robey et Fuhmann ont modifié ce détecteur dans [82] en introduisant le test du taux de fausse alarme constant CFAR (Constant False Alarm Rate), ce détecteur est désormais appelé filtre adapté spatial approprié pour des applications radar. Dans [56], le problème précédent

est considéré par Kelly comme un test à hypothèses binaires : bruit total seul ou signal plus bruit total. Le détecteur de Kelly utilise l'approche maximum de vraisemblance (MV) pour estimer les paramètres inconnus (matrice de covariance du bruit total et l'amplitude complexe du signal utile) du test du rapport de vraisemblance LRT (Likelihood Ratio Test). Ce schéma de détection se réfère communément au test du rapport de vraisemblance généralisé GLRT (Generalized-LRT) [66]. Les performances et l'analyse du détecteur de Kelly ainsi que sa comparaison avec d'autres détecteurs ont été présentées dans [8, 45, 46, 57].

Pour des applications GPS et radar, une extension de l'approche GLRT de Kelly, supposant une indisponibilité d'une référence bruit seul, a été présentée dans [93] et [89]. Dans [10], Brennan et Reed proposent un détecteur MMSE pour des acquisitions temporelles dans le contexte des réseaux multi-utilisateurs DS-CDMA en radiocommunications. Douglas et Scholtz dans [40], ont reconsidéré ce problème à partir d'une approche GLRT sous les hypothèses que le bruit est gaussien et que la matrice de covariance du bruit total ainsi que le canal de propagation sont connus.

Tous ces détecteurs précédents supposent implicitement ou explicitement que le bruit total est circulaire au second ordre [75, 33]. Ils deviennent sous optimaux en présence d'interférences non circulaires au second ordre omniprésentes en radio-communications et en radar. Ainsi, pour cette raison, le problème de la détection optimale d'un signal corrompu par un bruit total non circulaire au second ordre a reçu une grande attention ces derniers temps. En particulier, une approche de filtrage adapté en présence d'un bruit total non circulaire au second ordre est présentée dans [11] et [99] pour des applications radar et radio communications respectivement sous la condition restrictive d'un signal complètement connu. Des approches alternatives sont développées, sous la même condition restrictive d'un signal complètement connu, et sont présentées dans [4] et [78] utilisant le critère de déflexion et le GLR respectivement. D'autres travaux sur la détection optimale dans un contexte non circulaire ont été menés dans [44, 12, 87, 88].

Plus récemment dans [22, 6], de nouveaux récepteurs pour la détection d'un signal connu, de paramètres inconnus, perturbé par des interférences inconnues et non circulaires au second ordre ont été introduits. Néanmoins, leurs performances n'ont été étudiées que par simulations Monte-Carlo en terme de probabilité de détection à fausse alarme constante fixée à 10^{-3} . De plus, aucune analyse théorique de performance n'a été menée sur ces récepteurs GLRT et seules des simulations Monte-Carlo ont été réalisées.

Le but de ce chapitre est de compléter l'analyse de performances menée dans [22, 6] par simulations Monte-Carlo en courbes de caractéristiques opérationnelles du récepteur ROC (Receiver Operating Characteristics) et par une étude théorique des performances asymptotiques.

Dans ce chapitre, après la position du problème dans la section 5.3, les différents récepteurs pour la détection d'un signal connu de paramètres inconnus (ex : amplitude, phase, vecteur directeur,..) seront présentés selon la connaissance des ces paramètres dans les sections 5.4 et 5.5. Par la suite, nous étudierons les performances théoriques des détecteurs clairvoyants dans la section 5.6 et de certains détecteurs GLRT dans la section 5.7. Nous termineront ce chapitre par quelques illustrations et par un complément de simulations Monte-Carlo dans la section 5.8.

5.2 Récepteurs GLRT pour la détection d'un signal connu perturbé par des interférences non circulaires

Dans [6], un problème d'intérêt pratique a été traité. Il consiste à détecter un signal connu, de paramètres inconnus (ex : phase, amplitude, vecteur directeur), noyé dans un bruit total potentiellement non circulaire au second ordre. Plusieurs détecteurs ont été introduits et leurs performances ont été uniquement analysées par simulations Monte Carlo dans un scénario très particulier. Ces différents détecteurs sont associés à différents jeux de paramètres inconnus et donnent des gains en performance importants par rapport aux détecteurs conventionnels. Dans cette partie, nous allons brièvement revoir tous ces détecteurs associés à la connaissance ou non des différents paramètres du signal utile $(\pi_s, \Phi_s, \mathbf{s})$ et du bruit total $(\mathbf{R}(nT), \mathbf{C}(nT))$ et nous allons en étudier les performances théoriques non traitées dans [6, 22] ainsi nous donnerons un complément d'étude des performances par simulations en courbes ROC.

5.3 Position du problème

5.3.1 Modèle des signaux

On considère un réseau de N capteurs à bande étroite. Chaque capteur reçoit un signal ¹ numérique, dit utile, de modulation linéaire ² satisfaisant la condition de Nyquist composé de K symboles réels a_k , noyé dans un bruit total composé d'interférences potentiellement non circulaires au second ordre et d'un bruit de fond gaussien circulaire.

L'enveloppe complexe de ce signal utile est donnée par :

$$s(t) = \sum_{n=1}^K a_n v(t - nT), \quad (5.1)$$

où $a_n = \pm 1 (1 \leq n \leq K)$ représente la suite des symboles réels émis connus. T est la durée symbole et $v(t)$ est le filtre de mise en forme en "racine carrée" de cosinus surélevé (demi-Nyquist) tel que : $r(nT) \triangleq v(t) \otimes v(-t)^* |_{t=nT} = 0$ pour $n \neq 0$ et $r(0) \neq 0$ en supposant une synchronisation parfaite, où \otimes désigne l'opération de convolution.

En sortie du filtre adapté $v(-t)^*$, il est suffisant de travailler au rythme symbole ³, le vecteur d'observations s'écrit :

$$\mathbf{x}(kT) = \mu_s r(0) e^{i\Phi_s} a_k \mathbf{s} + \mathbf{n}(kT), \quad (5.2)$$

où μ_s, Φ_s représentent respectivement les paramètres contrôlant l'amplitude et la phase du signal connu sur le premier capteur, \mathbf{s} est le vecteur directeur du signal connu de première composante égale à 1, $\mathbf{n}(kT)$ est le vecteur du bruit total en sortie du filtre adapté.

¹Ce signal peut soit correspondre à une séquence d'apprentissage dans un lien de radio communication, à un signal codé binaire sur un intervalle cohérent de traitement dans des applications radar, à un code séquence PN sur la période symbole pour les réseaux DS-CDMA et les systèmes GPS

²Cette hypothèse de linéarité de la modulation n'est pas restrictive du moment où les signaux rectilignes comme la DS-BPSK en particulier, sont largement utilisés dans plusieurs domaines d'applications

³Il est à noter que les échantillons \mathbf{x}_k sont des statistiques suffisantes pour le problème de détection uniquement dans le cas où le bruit total est blanc de distribution gaussienne

5.3.2 Statistiques du second ordre des observations

Les statistiques du second ordre des observations considérées par la suite correspondent aux première et seconde matrice de covariance des observations $\mathbf{x}(kT)$. Elles peuvent s'écrire :

$$\mathbf{R}_x(kT) \triangleq E[\mathbf{x}(kT)\mathbf{x}(kT)^H] = \pi_s(kT)\mathbf{ss}^H + \mathbf{R}(kT), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{C}_x(kT) \triangleq E[\mathbf{x}(kT)\mathbf{x}(kT)^T] = \pi_s(kT)e^{i2\Phi_s}\mathbf{ss}^T + \mathbf{C}(kT), \quad (5.4)$$

où $\pi_s(kT) = \mu_s^2 r(0)^2 E(a_k^2)$ est la puissance instantanée du signal utile reçu par le premier capteur. $\mathbf{R}(kT) \triangleq E[\mathbf{n}(kT)\mathbf{n}(kT)^H]$ et $\mathbf{C}(kT) \triangleq E[\mathbf{n}(kT)\mathbf{n}(kT)^T]$ sont les première et seconde matrices de covariance du bruit total à l'instant k . Pour un bruit total circulaire au second ordre $\mathbf{C}(kT) = \mathbf{O}$, $\forall k$.

En travaillant au rythme symbole et comme les observations sont cyclo-stationnaires sur le temps symbole, les statistiques d'ordre deux sont égales sur la durée symbole et ne dépendent plus de k tel que $\mathbf{R}(kT) = \mathbf{R}$ et $\mathbf{C}(kT) = \mathbf{C}$.

Quand les symboles émis du signal utile sont BPSK, la puissance instantanée $\pi_s(kT)$ est constante pour tout les instants et ne dépend pas de k donc $\pi_s(kT) \triangleq \mu_s^2 r(0)^2 = \pi_s$.

5.3.3 Problématique et hypothèses

Le problème considéré dans cette partie est un problème de détection de symboles a_k réels connus, basé sur l'approche GLRT à deux hypothèses \mathbf{H}_0 et \mathbf{H}_1 associées respectivement à la présence du bruit total seul $\mathbf{n}(kT)$ et à la présence du signal utile plus le bruit total dans les données $(\mathbf{x}_k)_{k=1,\dots,K}$.

En utilisant (5.2), le vecteur d'observations $\mathbf{x}(kT)$ sous les hypothèses \mathbf{H}_0 et \mathbf{H}_1 est donné par :

$$\mathbf{H}_1 : \mathbf{x}(kT) = \sqrt{\pi_s} e^{i\Phi_s} a_k \mathbf{s} + \mathbf{n}(kT), \quad (5.5)$$

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{x}(kT) = \mathbf{n}(kT), \quad (5.6)$$

Dans le cas où le bruit total est la somme d'interférences de type BPSK et d'un bruit de fond gaussien indépendant l'un de l'autre, la distribution de $\mathbf{x}(kT)$ est un mélange de lois gaussiennes. Ainsi, pour permettre de construire les différents détecteurs GLRT, il est fait dans [22, 6], les hypothèses théoriques simplificatrices⁴ suivantes :

- A.1 : Les échantillons $\tilde{\mathbf{n}}(kT)_{k=1,\dots,K}$, avec $\tilde{\mathbf{n}}(kT) \triangleq [\mathbf{n}(kT)^T, \mathbf{n}(kT)^H]^T$ sont non corrélés les uns des autres.
- A.2 : Les échantillons $\mathbf{n}(kT)_{k=1,\dots,K}$ sont gaussiens, centrés et potentiellement non circulaires.
- A.3 : Les matrices $\mathbf{R}_n(kT)$ et $\mathbf{C}_n(kT)$ ne dépendent pas de k .

Dans [22], le problème abordé consistait à détecter de manière optimale, au sens de l'approche GLRT, la présence d'un signal connu échantillonné a_k pour $1 \leq k \leq K$, à partir du vecteur d'observations $\mathbf{x}(kT)$ ($1 \leq k \leq K$) en supposant que le bruit total est potentiellement non circulaire au second ordre et que les paramètres π_s , Φ_s , \mathbf{s} , \mathbf{R} et \mathbf{C} peuvent être soit connus soit inconnus selon l'application visée. Il est à noter que les récepteurs GLRT dérivés sous l'hypothèse que sous \mathbf{H}_1 , les données secondaires ne sont pas disponibles. Ainsi, les récepteurs

⁴Ces hypothèses ne sont pas réellement pénalisantes, car les détecteurs issus de ces hypothèses atteignent toujours de bonnes performances en pratique, même dans le cas où elles ne sont pas vérifiées.

GLRT introduits dans [22] ne sont pas une extension simple aux vecteurs d'observations étendus des récepteurs GLRT de Kelly [56]. En conséquence, notre analyse de performance n'est pas une simple extension de l'analyse présentée dans [56].

5.4 Récepteurs optimaux où tous les paramètres sont connus (clairvoyants)

Lorsque tous les paramètres sont connus (i.e. $\pi_s, \Phi_s, \mathbf{s}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$) on parle de détecteurs de référence où détecteur clairvoyant. Selon la théorie statistique de la détection [55, chap 3] [94], le récepteur optimal pour la détection des échantillons connus a_k à partir de $\mathbf{x}(kT)$ est le test du rapport de vraisemblance LRT. Il consiste à comparer à un seuil le rapport de vraisemblance $L_R(\mathbf{x}, K)$, défini pour $1 \leq k \leq K$, par

$$L_R(\mathbf{x}, K) \triangleq \frac{p[\mathbf{x}(kT)|_{k=1,\dots,K}/\mathbf{H}_1]}{p[\mathbf{x}(kT)|_{k=1,\dots,K}/\mathbf{H}_0]} \quad (5.7)$$

où $p[\mathbf{x}(kT)|_{k=1,\dots,K}/\mathbf{H}_i]$ ($i = 0, 1$) désigne la densité de probabilité conditionnelle des échantillons $\mathbf{x}(kT)$ ($1 \leq k \leq K$) sous l'hypothèse \mathbf{H}_i .

En utilisant (5.5) et (5.6), l'équation (5.7) devient

$$L_R(\mathbf{x}, K) \triangleq \frac{p[\mathbf{n}(kT) = \mathbf{x}(kT) - \sqrt{\pi_s} e^{i\Phi_s} a_k \mathbf{s}, 1 \leq k \leq K]}{p[\mathbf{n}(kT) = \mathbf{x}(kT), 1 \leq k \leq K]} \quad (5.8)$$

Sous les hypothèses de distribution gaussienne non circulaire, la densité de probabilité de $\mathbf{n}(kT)$ devient une fonction de $\tilde{\mathbf{n}}(kT) \triangleq [\mathbf{n}(kT)^T, \mathbf{n}(kT)^H]^T$ donnée par [76]

$$p(\tilde{\mathbf{n}}(kT)) \triangleq \frac{1}{\pi^N \sqrt{\det \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}}} e^{-\frac{\tilde{\mathbf{n}}(kT)^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}(kT)}{2}} \quad (5.9)$$

Ainsi, sous les hypothèses précédentes, et en utilisant (5.9), l'expression (5.8) prend la forme

$$L_R(\mathbf{x}, K) = \frac{\prod_{k=1}^K p[\tilde{\mathbf{n}}(kT) = \tilde{\mathbf{x}}(kT) - \sqrt{\pi_s} e^{i\Phi_s} a_k \tilde{\mathbf{s}}_\phi; a_k, \pi_s, \tilde{\mathbf{s}}_\phi, R_{\tilde{\mathbf{n}}}]}{\prod_{k=1}^K p[\tilde{\mathbf{n}}(kT) = \tilde{\mathbf{x}}(kT); R_{\tilde{\mathbf{n}}}]}, \quad (5.10)$$

où $\tilde{\mathbf{x}}(kT) \triangleq [\mathbf{x}(kT)^T, \mathbf{x}(kT)^H]^T$, $\tilde{\mathbf{s}}_\phi \triangleq [e^{i\phi_s} \mathbf{s}^T, e^{-i\phi_s} \mathbf{s}^H]^T$ et $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}$ est définie par :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{R}^* \end{pmatrix}.$$

Il est à noter que $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}$ contient l'information de non circularité du bruit total à travers la matrice \mathbf{C} , qui est non nulle pour un bruit total non circulaire au second ordre.

En utilisant (5.9) dans (5.10) et en prenant le logarithme, il est possible de démontrer qu'une statistique suffisante pour le problème de détection précédent consiste à comparer à un seuil ζ la fonction $\text{OPT}_1(\mathbf{x}, K) = 2 \ln L_R(\mathbf{x}, K)$ définie par [6, 22]

$$\text{OPT}_1(\mathbf{x}, K) \triangleq \tilde{\mathbf{s}}_\phi^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a} \triangleq \tilde{\mathbf{w}}_o^H \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a} \stackrel{H1, H0}{\geq} \zeta, \quad (5.11)$$

où $\hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}_a} \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}(kT) a_k$, $\tilde{\mathbf{w}}_o \triangleq \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\phi$ est le filtre adapté spatial WL défini dans [28].

Dans le cas particulier d'un bruit total circulaire ($\mathbf{C} = \mathbf{O}$), ce récepteur devient le récepteur conventionnel donné dans [69] et défini par

$$\text{CONV}_1(\mathbf{x}, K) \triangleq 2\Re[e^{-i\phi_s} \mathbf{s}^H \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{x}_a}] \triangleq 2\Re[\mathbf{w}_c^H \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{x}_a}], \quad (5.12)$$

où $\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{x}_a} \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(kT) a_k$ et $\mathbf{w}_c \triangleq e^{i\phi_s} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}$ correspond au filtre adapté spatial, définit à une constante multiplicative près, qui maximise le SINR en sortie vu dans le chapitre 2.

5.5 Récepteurs optimaux avec des paramètres inconnus

Dans la plupart des situations d'intérêt pratiques, les paramètres π_s , Φ_s , \mathbf{R} et \mathbf{C} peuvent être inconnus. Aussi, pour certaines applications, le vecteur directeur \mathbf{s} est soit connu ; c'est le cas en particulier des applications radar et de localisation par satellite, soit inconnu pour des applications en radiocommunications. Comme dans le cas où tout les paramètres sont connus, les récepteurs, où certains paramètres sont inconnus, ont été présentés et leurs performances ont été étudiées uniquement par simulations Monte-Carlo dans [22, 6], pour les cas d'une ou deux interférences, en terme de probabilité de détection pour un taux de fausse alarme donné fixé à 10^{-3} .

Dans cette section, après une brève description de ces différents récepteurs et une introduction de deux nouveaux récepteurs, nous allons étudier les performances asymptotiques théoriques de ces récepteurs et nous compléterons l'étude par simulations en courbes COR pour différents scénarios de réception.

5.5.1 Récepteurs GLRT avec \mathbf{s} connu

Pour des applications de localisation par satellite où les positions des satellites sont connues, le vecteur de direction d'arrivée du signal utile \mathbf{s} est connu et peut être associé à la direction du satellite. C'est aussi le cas dans des applications radar où le vecteur directeur \mathbf{s} est associé à la direction d'un faisceau orienté mécaniquement ou électroniquement vers une direction donnée. En outre, dans certains cas, des vecteurs d'observation ne contenant pas d'échantillons du signal utile (appelés vecteurs d'observations secondaires) et partageant les mêmes statistiques au second ordre que le bruit total sont disponible en plus des vecteurs d'observations contenant à la fois le signal utile et le bruit total (appelés vecteurs d'observations primaires). Par exemple, les vecteurs d'observations secondaires peuvent correspondre à des échantillons de données associées à d'autres cases distances que celle de la cible à détecter. Dans ces derniers cas, on dit qu'une référence bruit seul (RBS) est disponible (en anglais TNAR pour Total Noise Alone Reference).

Dans cette partie, nous allons faire un rappel des différents récepteurs introduits dans [22], par une approche GLRT ⁵, pour la détection d'un signal avec \mathbf{s} connu et dont certains paramètres sont inconnus, noyé dans un bruit total non circulaire.

⁵Il est à noter que lorsqu'il y a des paramètres inconnus, le test du rapport de vraisemblance LRT n'est plus un test UMP (Uniformly Most Powerful) et donc n'est plus adapté à notre étude. Pour cela on se ramène à une approche GLRT.

5.5.1.1 (π_s, Φ_s) inconnus et bruit total (\mathbf{R}, \mathbf{C}) connus

Lorsque les paramètres π_s, Φ_s sont inconnus et \mathbf{s}, \mathbf{R} et \mathbf{C} sont connus, le GLR pour la détection des échantillons connus a_k noyés dans un bruit total non circulaire au SO caractérisé par \mathbf{R} et \mathbf{C} , est donné par (5.10) où π_s et Φ_s sont remplacés par leurs estimées au sens du maximum de vraisemblance ML. Pour des raisons d'identifiabilité on estime le vecteur $\tilde{\omega} \triangleq [\omega, \omega^*]^T \triangleq [\sqrt{\pi_s}e^{i\Phi_s}, \sqrt{\pi_s}e^{-i\Phi_s}]^T$, tel que son estimée est donnée par [22, 6]

$$\hat{\tilde{\omega}} = (\mathbf{S}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{R}_n^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}, \quad (5.13)$$

où $\hat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a} \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}(kT) a_k$ et $\mathbf{S} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{s}^* \end{pmatrix}$.

En insérant (5.13) dans (5.10), le GLRT devient

$$L_G(\mathbf{x}, K) = \frac{\prod_{k=1}^K p[\tilde{\mathbf{n}}(kT) = \tilde{\mathbf{x}}(kT) - a_k \hat{\tilde{\omega}} \mathbf{S} / a_k, \mathbf{s}, \mathbf{R}, \mathbf{C}]}{\prod_{k=1}^K p[\tilde{\mathbf{n}}(kT) = \tilde{\mathbf{x}}(kT) / \mathbf{R}, \mathbf{C}]}.$$

En prenant le logarithme, une statistique suffisante pour le problème de détection consiste à comparer à un seuil la fonction $\text{OPT}_2(\mathbf{x}, K) = 2 \ln L_G(\mathbf{x}, K)$ définie par [22, 6]

$$\text{OPT}_2(\mathbf{x}, K) \triangleq K \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{S}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{R}_n^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}. \quad (5.14)$$

Dans le cas particulier d'un bruit total circulaire au SO ($\mathbf{C} = \mathbf{O}$), on peut facilement vérifier que (5.14) se réduit à la statistique suffisante $\text{CONV}_2(\mathbf{x}, K)$, déjà donnée dans [82] et qui est définie par

$$\text{CONV}_2(\mathbf{x}, K) \triangleq K \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}|^2}{\mathbf{s}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}}. \quad (5.15)$$

5.5.1.2 $(\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C})$ inconnus avec RBS

Dans ce cas, \mathbf{s} est connu, les paramètres $\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}$ et \mathbf{C} sont inconnus mais une RBS est disponible. Notons $\mathbf{n}'(nT)$ ($0 \leq n \leq K' - 1$) les K' échantillons des données secondaires contenant uniquement du bruit total ($K' \geq 2N$). Alors

$$\mathbf{R}'(nT) = \text{E}[\mathbf{n}'(nT) \mathbf{n}'^H(nT)] = \mathbf{R}(nT) \quad (5.16)$$

$$\mathbf{C}'(nT) = \text{E}[\mathbf{n}'(nT) \mathbf{n}'^T(nT)] = \mathbf{C}(nT). \quad (5.17)$$

Sous les hypothèses de la section 5.3.3, les matrices de covariance \mathbf{R} et \mathbf{C} peuvent être estimées à partir des données primaires (présence du signal utile) et secondaires (absence du signal utile), ce qui donne lieu à deux différents récepteurs.

Estimation à partir des données secondaires uniquement

L'estimée au sens du maximum de vraisemblance de $\mathbf{R}_{\tilde{n}}$ et de \mathbf{R} sont données par

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}} = \frac{1}{K'} \sum_{n=0}^{K'-1} \tilde{\mathbf{n}}'(nT) \tilde{\mathbf{n}}^H(nT) \quad (5.18)$$

$$\widehat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K'} \sum_{n=0}^{K'-1} \mathbf{n}'(nT) \mathbf{n}^H(nT) \quad (5.19)$$

Ainsi d'après [22, 6], une statistique suffisante au problème de détection est donnée par

$$\text{OPT}_3(\mathbf{x}, K, K') \triangleq 2 \ln L_G(\mathbf{x}, K) \triangleq \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}}^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{S}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}}^{-1} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}. \quad (5.20)$$

Dans le cas particulier d'un bruit total circulaire au SO ($\mathbf{C} = \mathbf{O}$), cette statistique devient

$$\text{CONV}_3(\mathbf{x}, K, K') \triangleq \frac{|\mathbf{s}^H \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}|^2}{\mathbf{s}^H \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}}. \quad (5.21)$$

où K et K' représentent respectivement le nombre d'échantillons de l'observation et de la RBS. **Estimation à partir des données primaires et secondaires**

Dans ce cas on estime les matrices \mathbf{R} et \mathbf{C} à partir de K données primaires et de K' données secondaires. On a alors une statistique suffisante du problème de détection donnée par [22, 6]

$$\text{OPT}_4(\mathbf{x}, K, K') \triangleq \frac{\widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}0}^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{S}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}0}^{-1} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}0}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}}{1 - \frac{K}{K + K'} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}0}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}}. \quad (5.22)$$

Dans le cas particulier d'un bruit total circulaire au SO ($\mathbf{C} = \mathbf{O}$), cette statistique devient

$$\text{CONV}_4(\mathbf{x}, K, K') \triangleq \frac{|\mathbf{s}^H \widehat{\mathbf{R}}_0^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}|^2}{\mathbf{s}^H \widehat{\mathbf{R}}_0^{-1} \mathbf{s} [1 - \frac{K}{K + K'} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}^H \widehat{\mathbf{R}}_0^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}]}. \quad (5.23)$$

où

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}0} = \frac{1}{K + K'} \left[\sum_{n=0}^{K-1} \tilde{\mathbf{x}}(nT) \tilde{\mathbf{x}}^H(nT) + \sum_{n=0}^{K'-1} \tilde{\mathbf{n}}'(nT) \tilde{\mathbf{n}}^H(nT) \right] \quad (5.24)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_0 = \frac{1}{K + K'} \left[\sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{x}(nT) \mathbf{x}^H(nT) + \sum_{n=0}^{K'-1} \mathbf{n}'(nT) \mathbf{n}^H(nT) \right] \quad (5.25)$$

5.5.1.3 ($\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C}$) inconnus et sans RBS

Dans ce cas, le vecteur \mathbf{s} est connu et les paramètres $\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}$ et \mathbf{C} sont inconnus ainsi qu'on ne dispose pas de référence bruit total seul. Sous les mêmes hypothèses de distribution des échantillons $\mathbf{x}(kT)$ ($1 \leq k \leq K$) qu'en section 5.5.1.1, les matrices \mathbf{R} et \mathbf{C} sont estimées à partir des données primaires. Ainsi les estimées ML de la matrice du bruit total $\mathbf{R}_{\tilde{n}}$ sous les

hypothèses H_0 et H_1 sont respectivement données par [22, 6]

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}0} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}(kT) \tilde{\mathbf{x}}^H(kT) \triangleq \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}} \quad (5.26)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}1} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\tilde{\mathbf{x}}(kT) - a_k \mathbf{S} \tilde{\omega})(\tilde{\mathbf{x}}(kT) - a_k \mathbf{S} \tilde{\omega})^H. \quad (5.27)$$

Sous ces hypothèses et suivant l'approche GLRT, l'estimée ML de $\tilde{\omega}$ est donnée par [22, 6]

$$\widehat{\tilde{\omega}} = \frac{\mathbf{S}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}}{\sqrt{\pi_s} \left[(1 - \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}) \mathbf{S}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{S}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{S} \right]}. \quad (5.28)$$

De même, une statistique suffisante pour le problème de détection est donnée par [22, 6]

$$\text{OPT}_5(\mathbf{x}, K) = 2 \ln L_G(\mathbf{x}, K) \triangleq \frac{\widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{S}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}}{1 - \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}}. \quad (5.29)$$

Dans le cas particulier d'un bruit total circulaire au second ordre, (5.22) se réduit au détecteur conventionnel donné par

$$\text{CONV}_5(\mathbf{x}, K) \triangleq \frac{\left| \mathbf{s}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a} \right|^2}{\mathbf{s}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{s} \left[1 - \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x}a} \right]}. \quad (5.30)$$

5.5.2 Récepteurs GLRT avec \mathbf{s} inconnu

Dans le contexte de radio-communications le vecteur directeur \mathbf{s} est souvent inconnu conjointement avec les paramètres π_s , Φ_s , \mathbf{R} et \mathbf{C} . En outre, dans certains cas, les données d'observations secondaires sont disponibles en plus des données d'observations primaires. Ces données peuvent correspondre aux échantillons des données associées aux canaux adjacents et aux plages temporelles adjacentes.

Pour cela, nous allons présenter les différents récepteurs pour la détection d'un signal réel connu, avec \mathbf{s} inconnu et dont certains paramètres sont inconnus, noyé dans un bruit total non circulaire.

5.5.2.1 (π_s , Φ_s) inconnus et bruit total (\mathbf{R} , \mathbf{C}) connu

Dans certaines situations d'intérêt pratique, le vecteur directeur \mathbf{s} n'est pas non plus connu. Ainsi, lorsque les paramètres π_s , Φ_s et \mathbf{s} sont inconnus et \mathbf{R} et \mathbf{C} sont connus, le GLR pour la détection des échantillons connus a_k noyés dans un bruit total non circulaire au SO caractérisé par \mathbf{R} et \mathbf{C} , est donné par (5.10) où π_s , Φ_s et \mathbf{s} sont remplacés par leurs estimées au sens du maximum de vraisemblance ML. En posant $\mathbf{h} = \sqrt{\pi_s} e^{i\Phi_s} \mathbf{s}$ pour des raisons d'identifiabilité, on estime le vecteur $\tilde{\mathbf{h}} \triangleq [\mathbf{h}, \mathbf{h}^*]^T$, dans ce cas, le modèle (5.2) s'écrit

$$\mathbf{x}(kT) = a_k \mathbf{h} + \mathbf{n}(kT)$$

ainsi, l'estimée au sens ML de $\tilde{\mathbf{h}}$ est donnée [22, 6]

$$\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}, \quad (5.31)$$

où $\hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a} \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}(kT)a_k$

En insérant (5.31) dans (5.10), le GLR devient

$$L_G(\mathbf{x}, K) = \frac{\prod_{k=1}^K p[\tilde{\mathbf{n}}(kT) = \tilde{\mathbf{x}}(kT) - a_k \hat{\mathbf{h}}/a_k, \mathbf{R}, \mathbf{C}]}{\prod_{k=1}^K p[\tilde{\mathbf{n}}(kT) = \tilde{\mathbf{x}}(kT)/\mathbf{R}, \mathbf{C}]}.$$

En prenant le logarithme, une statistique suffisante pour le problème de détection consiste à comparer à un seuil la fonction $\text{OPT}_6(\mathbf{x}, K) = 2 \ln L_G(\mathbf{x}, K)$ définie par [22, 6]

$$\text{OPT}_6(\mathbf{x}, K) \triangleq K \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}, \quad (5.32)$$

où $\hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a} \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}(kT)a_k$. Dans le cas particulier d'un bruit total circulaire au SO ($\mathbf{C} = \mathbf{O}$), on peut facilement vérifier que (5.20) se réduit à la statistique suffisante $\text{CONV}_3(\mathbf{x}, K)$ définie par

$$\text{CONV}_6(\mathbf{x}, K) \triangleq K \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}^H \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}. \quad (5.33)$$

5.5.2.2 ($\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C}$) inconnus avec RBS

Dans ce cas, les paramètres \mathbf{s} , π_s , Φ_s , \mathbf{R} et \mathbf{C} sont inconnus mais une RBS est disponible. Notons $\mathbf{n}'(nT)$ ($0 \leq n \leq K' - 1$) les K' échantillons des données secondaires contenant uniquement du bruit total ($K' \geq 2N$). Sous les hypothèses de la section 5.3.3, les matrices \mathbf{R} et \mathbf{C} peuvent être estimées à partir des données primaires et secondaires, ce qui donne lieu à deux différents récepteurs.

Estimation à partir des données secondaires uniquement

Une statistique suffisante pour le problème de détection consiste à comparer à un seuil la fonction donnée par [22, 6]

$$\text{OPT}_7(\mathbf{x}, K, K') \triangleq 2 \ln L_G(\mathbf{x}, K) \triangleq \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}, \quad (5.34)$$

Pour un bruit total circulaire au SO ($\mathbf{C} = \mathbf{O}$)

$$\text{CONV}_7(\mathbf{x}, K, K') \triangleq \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}. \quad (5.35)$$

où $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{n}}}$ et $\hat{\mathbf{R}}$ sont respectivement données par les équations (5.18) et (5.19).

Estimation à partir des données primaires et secondaires

Comme dans la partie 5.5.1.2, où s est connu, on estime les matrices \mathbf{R} et \mathbf{C} à partir de K données primaires et de K' données secondaires. On a alors une statistique suffisante du problème de détection donnée par [22, 6]

$$\text{OPT}_8(\mathbf{x}, K, K') \triangleq 2 \ln L_G(\mathbf{x}, K) \triangleq \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{n}}0}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}, \quad (5.36)$$

Pour un bruit total circulaire au SO ($\mathbf{C} = \mathbf{O}$)

$$\text{CONV}_8(\mathbf{x}, K, K') \triangleq \hat{\mathbf{r}}_{xa}^H \hat{\mathbf{R}}_0^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{xa}. \quad (5.37)$$

où $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}0}$ et $\hat{\mathbf{R}}_0$ sont respectivement données par les équations (5.24) et (5.25).

5.5.2.3 ($\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}$ et \mathbf{C}) inconnus et sans RBS

Lorsque tout les paramètres sont inconnus y compris le vecteur \mathbf{s} et sous les hypothèses précédentes, une statistique suffisante pour le problème de détection est donnée par [22, 6]

$$\text{OPT}_9(\mathbf{x}, K) \triangleq 2 \ln L_G(\mathbf{x}, K) \triangleq \hat{\mathbf{r}}_{xa}^H \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{xa}, \quad (5.38)$$

qui correspond au détecteur introduit dans [30] pour la synchronisation dans le contexte non circulaire au SO. En particulier pour un bruit total circulaire ($\mathbf{C} = \mathbf{O}$), (5.38) se réduit à

$$\text{CONV}_9(\mathbf{x}, K) \triangleq \hat{\mathbf{r}}_{xa}^H \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{xa}.$$

5.5.3 Récepteurs GLRT avec une structure connue de \mathbf{s}

Dans certaines applications, l'angle de direction d'arrivée du signal utile θ_s est inconnu tandis qu'on dispose d'une antenne de réception de structure connue (réseau d'antennes uniforme ULA, circulaire, ...). Ainsi, selon la connaissance des paramètres $\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}$ et \mathbf{C} on distingue deux cas :

5.5.3.1 (π_s, Φ_s) inconnus, (\mathbf{R}, \mathbf{C}) connus

Dans ce cas, une statistique suffisante pour ce problème de détection consiste à comparer à un seuil le rapport de vraisemblance généralisé suivant :

$$\text{OPT}_{10}(\mathbf{x}, K) \triangleq \text{Arg}(max)_\theta \left[K \frac{\hat{\mathbf{r}}_{xa}^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}}^{-1} \mathbf{S}(\theta) (\mathbf{S}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}}^{-1} \mathbf{S}(\theta))^{-1} \mathbf{S}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{xa}}{\hat{\mathbf{r}}_{xa}^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{n}}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{xa}} \right]. \quad (5.39)$$

De même, dans le cas particulier d'un bruit total circulaire, le détecteur (5.39) se réduit au détecteur conventionnel

$$\text{CONV}_{10}(\mathbf{x}, K) \triangleq \text{Arg}(max)_\theta \left[K \frac{|\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{xa}|^2}{\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}(\theta)} \right]. \quad (5.40)$$

5.5.3.2 $\pi_s, \Phi_s, (\mathbf{R}, \mathbf{C})$ inconnus et sans RBS

Lorsqu'on dispose uniquement de la structure du vecteur directeur \mathbf{s} , et sous les mêmes hypothèses de distribution des échantillons $\mathbf{x}(kT)$ ($1 \leq k \leq K$) qu'en section 5.5.1.1, les estimées ML de la matrice du bruit total $\mathbf{R}_{\tilde{n}}$ sous les hypothèses H_0 et H_1 sont respectivement données par (5.26) et (5.27). Ainsi, une statistique suffisante pour ce problème de détection consiste à comparer à un seuil le rapport de vraisemblance généralisé suivant :

$$\text{OPT}_{11}(\mathbf{x}, K) \triangleq \text{Arg}(max)_\theta \left[K \frac{\hat{\mathbf{r}}_{xa}^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{S}(\theta) (\mathbf{S}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{S}(\theta))^{-1} \mathbf{S}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{xa}}{1 - \hat{\mathbf{r}}_{xa}^H \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{xa}} \right]. \quad (5.41)$$

Dans le cas particulier d'un bruit total circulaire au second ordre, (5.41) se réduit au détecteur conventionnel donné par

$$\text{CONV}_{11}(\mathbf{x}, K) \triangleq \text{Arg}(\max)_{\theta} \left[K \frac{|\mathbf{s}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{xa}|^2}{\mathbf{s}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \mathbf{s}(\theta) [1 - \hat{\mathbf{r}}_{xa}^H \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{xa}]} \right]. \quad (5.42)$$

5.6 Analyse théorique des Performances des récepteurs clairvoyants

L'analyse des performances de ces détecteurs consiste à étudier la probabilité de détection (notée P_D) et la probabilité de fausse alarme (notée P_{FA}) correspondant à la probabilité que $\text{OPT}_1(\mathbf{x}, K)$ (ou $\text{CONV}_1(\mathbf{x}, K)$) dépasse un certain seuil sous l'hypothèse H_1 et H_0 respectivement.

Les performances de ces récepteurs ont été étudiées par simulations Monté-Carlo dans [6, 22], pour les cas d'une ou deux interférences, en terme de probabilité de détection pour un taux de fausse alarme donné fixé à 10^{-3} .

La probabilité de fausse alarme et la probabilité de détection ont été analytiquement calculées dans [55, 94] pour le récepteur CONV_1 sous l'hypothèse que le bruit total soit gaussien circulaire au second ordre. Cependant, dans des situations d'intérêts pratiques, le bruit total n'est ni gaussien ni circulaire au second ordre, donc les résultats de [94] ne sont plus valides. C'est pour cela que dans cette partie, nous allons calculer analytiquement les probabilités de fausse alarme et de détection des deux récepteurs OPT_1 et CONV_1 sous l'hypothèse que le bruit total n'est ni gaussien ni circulaire au second ordre.

Afin de pouvoir quantifier et comparer les performances de ces récepteurs clairvoyants, on suppose que bruit total \mathbf{n}_k composé d'une seule interférence BPSK avec des symboles équiprobables indépendants $b_k \in \{-1, +1\}$ et d'un bruit blanc gaussien circulaire \mathbf{n}'_k non corrélé avec l'interférence. Sous ces hypothèses, \mathbf{n}_k peut s'écrire

$$\mathbf{n}_k = \pi_1 e^{i\Phi_1} b_k \mathbf{j}_1 + \mathbf{n}'_k,$$

où π_1 et Φ_1 correspondent respectivement à la puissance moyenne mesurée sur le premier capteur et à la phase du signal interférence. Le vecteur \mathbf{j} est le vecteur directeur de l'interférence de première composante égale à 1. $(\mathbf{n}'_k)_{k=1, \dots, K}$ est le vecteur bruit supposé blanc, gaussien, centré et circulaire à composantes indépendantes et de matrice de covariance $\eta_2 \mathbf{I}$.

Dans ce cas, le test décrit par les équations (5.5) et (5.6) s'écrit sous la forme

$$\mathbf{H}_1 : \mathbf{x}(kT) = \sqrt{\pi_s} e^{i\Phi_s} a_k \mathbf{s} + \sqrt{\pi_1} e^{i\Phi_1} b_k \mathbf{j} + \mathbf{n}'(kT), \quad (5.43)$$

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{x}(kT) = \sqrt{\pi_1} e^{i\Phi_1} b_k \mathbf{j} + \mathbf{n}'(kT), \quad (5.44)$$

Nous allons présenter cette étude de performances théoriques selon deux approches. La première approche, correspond au calcul analytique exacte des probabilités de fausse alarme et de détection quelque soit le nombre d'échantillons K . Cette approche conduit à un calcul numérique de complexité exponentielle en K qui ne pourra donc être effectué en pratique que pour de faibles valeurs de ($K \leq 10$). La deuxième approche, dite asymptotique, correspond à un calcul approché de ces probabilités sous la condition que $K \gg 1$. Enfin nous examinerons le domaine de validité de cette approximation.

5.6.1 Calcul exact

Pour le récepteur clairvoyant OPT_1 , les probabilités de détection (P_D) et de fausse alarme (P_{FA}) associées à un seuil ζ sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} P_D &= P[\text{OPT}_1(\mathbf{x}, K) > \zeta / H_1] \\ P_{FA} &= P[\text{OPT}_1(\mathbf{x}, K) > \zeta / H_0]. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression (5.11) du récepteur OPT_1 , les probabilités de détection et de fausse alarme s'écrivent

$$\begin{aligned} P_D &= P \left[\sqrt{\pi_s} \tilde{\mathbf{w}}_o^H \tilde{\mathbf{s}}_\phi \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_k^2 \right) + \sqrt{\pi_1} \tilde{\mathbf{w}}_o^H \tilde{\mathbf{j}}_\phi \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_k b_k + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{w}}_o^H \tilde{\mathbf{n}}'(kT) a_k > \zeta \right], \\ P_{FA} &= P \left[\sqrt{\pi_1} \tilde{\mathbf{w}}_o^H \tilde{\mathbf{j}}_\phi \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_k b_k + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{w}}_o^H \tilde{\mathbf{n}}'(kT) a_k > \zeta \right]. \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{j}}_\phi \triangleq [e^{i\phi_1} \mathbf{j}^T, e^{-i\phi_1} \mathbf{j}^H]^T$ et $\tilde{\mathbf{n}}'(kT) \triangleq [\mathbf{n}'^T(kT), \mathbf{n}'^H(kT)]^T$.

Posons $\beta \triangleq \sqrt{\pi_s} \tilde{\mathbf{w}}_o^H \tilde{\mathbf{s}}_\phi \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_k^2 = \sqrt{\pi_s} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_k^2 \tilde{\mathbf{s}}_\phi^H \mathbf{R}_n^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\phi > 0$ et $\alpha \triangleq \frac{\sqrt{\pi_1}}{K} \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{w}}_o^H \tilde{\mathbf{j}}_\phi$ des constantes réelles. $n'_K \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{w}}_o^H \tilde{\mathbf{n}}'(kT) a_k$ qui est une variable aléatoire gaussienne, réelle, centrée de variance $\sigma^2 = \frac{\eta_2}{K^2} \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right) \|\tilde{\mathbf{w}}_o\|^2$.

Ainsi, les probabilités P_d et P_{FA} deviennent :

$$P_D = P \left[\beta + \alpha \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^K a_k b_k + n'_K > \zeta \right], \quad (5.45)$$

$$P_{FA} = P \left[\alpha \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^K a_k b_k + n'_K > \zeta \right]. \quad (5.46)$$

Pour une série de symboles d'interférence connue (b_1, \dots, b_K) , les probabilités P_D (5.45) et P_{FA} (5.46) sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} P_D &= Q \left(\frac{\zeta - \beta - \alpha \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^K a_k b_k}{\sigma} \right) \\ P_{FA} &= Q \left(\frac{\zeta - \alpha \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^K a_k b_k}{\sigma} \right). \end{aligned}$$

où $Q(u) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$

En conditionnant sur les différents équiprobables symboles (b_1, \dots, b_K) , on obtient la formule

de probabilité totale :

$$P_D = \frac{1}{2^K} \sum_{i=1}^{2^K} Q \left(\frac{\zeta - \beta - \alpha (\sum_{k=1}^K a_k^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^K a_k b_k^i}{\sigma} \right), \quad (5.47)$$

$$P_{FA} = \frac{1}{2^K} \sum_{i=1}^{2^K} Q \left(\frac{\zeta - \alpha (\sum_{k=1}^K a_k^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{K-1} a_k b_k^i}{\sigma} \right). \quad (5.48)$$

où $((b_1^i, \dots, b_K^i)_{i=1, \dots, 2^K})$ désigne l'ensemble des 2^K mots binaires de longueur K .

Les expressions (5.47) et (5.48) de P_D et P_{FA} sont aussi valides pour le récepteur conventionnel $CONV_1$ donné par (5.12), mais dans ce cas :

$$\alpha \triangleq \frac{2\sqrt{\pi_1}}{K} \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Re(e^{i\phi_1} \mathbf{w}_c^H \mathbf{j}_1), \quad (5.49)$$

$$\beta \triangleq 2\sqrt{\pi_s} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_k^2 \right) \Re(e^{i\phi_s} \mathbf{w}_c^H \mathbf{s}) = 2\sqrt{\pi_s} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_k^2 \right) \mathbf{s}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s} > 0, \quad (5.50)$$

$$n'_K \triangleq \frac{2}{K} \Re \left(\sum_{k=1}^K a_k \mathbf{w}_c^H \mathbf{n}'_k \right), \quad (5.51)$$

où $n'_K \triangleq \frac{2}{K} \Re \left(\sum_{k=1}^K a_k \mathbf{w}_c^H \mathbf{n}'_k \right)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\sigma^2 = \frac{2\eta_2}{K^2} \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right) \|\mathbf{w}_c\|^2$.

Remarque 11. Pour de grandes valeurs de K , le calcul des probabilités de détection et de fausse alarme à partir des expressions (5.47) et (5.48) devient numériquement lourd et coûteux et nécessitant une grande précision de calcul. Donc, cette approche n'est exploitable en pratique que pour de petites valeurs de $K \leq 20$.

5.6.2 Calcul approché

Comme le calcul précédent est complexe, nous proposons dans cette partie un calcul approché des probabilités de détection et de fausse alarme quand on dispose d'un grand nombre d'échantillons d'observation ($K \gg 1$).

Remarque 12. Pour un nombre d'échantillons d'observation K grand, on note que le lemme de Chernoff-Stein [35, TH. 11.8.1], qui donne les probabilités d'erreur (P_{FA} , P_M (Missing Probability)) associée au LRT ne peut être appliqué. En effet, le LRT est dérivé sous une distribution gaussienne mais utilisé sous la vraie distribution, qui est un mélange de distributions gaussiennes.

D'abord, soit la variable aléatoire $c_k = \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{K-1} a_k b_k$ qui apparaît dans les expressions (5.47) et (5.48), où a_k et b_k sont respectivement des variables déterministes et aléatoire. Cette variable aléatoire est en fait une somme de variables aléatoires indépendantes mais pas toujours identiquement distribuées. Par exemple, dans un premier cas où les symboles a_k sont BPSK, la variable aléatoire $c_k = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{k=0}^{K-1} a_k b_k$ devient une somme de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Par contre, dans un deuxième cas où les symboles a_k sont des réels arbitraires la variable aléatoire $a_k b_k$ n'est plus identiquement

distribuée.

Dans notre approche, nous voulons établir la convergence en loi de c_k . Ainsi dans le premier cas où les symboles a_k sont IID (Indépendants Identiquement Distribués), le théorème centrale limite s'applique. Par contre, dans le deuxième cas, cette variable n'est plus IID, le théorème central limit ne s'applique pas mais le théorème central limite de Lyapunov [62, TH. 2.7.3], donné dans l'annexe B.1, s'applique. Ce théorème stipule que si la variable a_k satisfait la condition de Lyapunov suivante ⁶ :

$$\left(\sum_{k=0}^{K-1} |a_k|^3 \right)^2 = o \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k^2 \right]^3 \text{ pour } K \rightarrow \infty,$$

alors la variable $c_k = \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{K-1} a_k b_k$ converge en distribution vers une loi normale de moyenne nulle et de variance unité.

En conséquence, dans tous les cas et pour $K \gg 1$, la variable aléatoire $\left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{K-1} a_k b_k$ peut être approximée par distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance unité.

Ainsi, la variable aléatoire $\alpha \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^K a_k b_k + n'_K$, qui apparait dans les expressions (5.45) et (5.46), est approximativement une variable gaussienne de moyenne nulle et de variance ⁷ $\alpha^2 + \sigma^2$. En conséquence, à partir des expressions (5.45) et (5.46), les probabilité de détection et de fausse alarme deviennent :

$$P_D \approx Q \left(\frac{\zeta - \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}} \right), \quad (5.52)$$

$$P_{FA} \approx Q \left(\frac{\zeta}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}} \right). \quad (5.53)$$

De même ces expressions sont aussi valides pour le récepteur clairvoyant CONV₁, mais avec les valeurs de α , β et n'_K respectivement données par (5.49), (5.50) et (5.51).

5.6.3 Les courbes ROC (Receiver Operating Characteristics)

Les courbes ROC sont un moyen très efficace pour l'évaluation des performances en détection, elles représentent la probabilité de détection en fonction de celle de fausse alarme.

La fonction Q est une fonction monotone décroissante, elle admet donc un inverse noté Q^{-1} . A partir des expressions (5.52) et (5.53), on alors peut facilement déduire une expression reliant la P_D à la P_{FA} pour les détecteur CONV₁ et OPT₁ en éliminant le seuil $\zeta = \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2} Q^{-1}(P_{FA})$. On obtient ainsi la courbe ROC correspondante avec :

$$P_D \approx Q \left(Q^{-1}(P_{FA}) - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}} \right). \quad (5.54)$$

Notons que le rapport $\frac{\beta^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$ représente le rapport du carré de la partie signal utile sur le carré de la partie bruit en sortie des récepteurs OPT₁ (CONV₁). Particulièrement si les symboles a_k sont BPSK, $\frac{\beta^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$, donné pour le récepteur OPT₁, correspond au SINR en sortie du filtre,

⁶Cette condition est clairement satisfaite avec la légère hypothèse que la limite $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_k^2$ existe, finie et non nulle et la limite $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |a_k|^3$ existe.

⁷Car α est déterministe et n'_K est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance σ^2 indépendante de b_k

optimal pour un bruit total non circulaire, WL MLSE étudié dans [28]. Cet SINR est égal à K fois le SINR en sortie du filtre adapté spatial linéaire au sens large $\tilde{\mathbf{w}}_o$.

De même, pour le récepteur CONV_1 et pour des symboles a_k BPSK, $\frac{\beta^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$ correspond au SINR en sortie du filtre, optimal pour un bruit total circulaire, WL MLSE étudié dans [28]. Cet SINR est aussi égale à K fois le SINR en sortie du filtre adapté spatial \mathbf{w}_c .

5.7 Performances asymptotiques des récepteur avec des paramètres inconnus

La distribution exacte du GLR $L_G(\mathbf{x}, K)$, sous les hypothèses H_0 et H_1 pour la vraie distribution des données est très difficile à calculer. Par exemple, le calcul de la distribution de la statistique (5.14) après conditionnement sur les symboles (b_1, \dots, b_K) de l'interférence, revient à calculer la distribution de la forme hermitienne $\mathbf{r}^H \Omega \mathbf{r}$, avec \mathbf{r} une variable aléatoire gaussienne centrée et de matrice de covariance arbitraire, pour laquelle aucune expression simple n'est disponible.

Cependant, sous les hypothèses de dérivation du GLR (données gaussiennes non circulaires) et par une approche asymptotique $K \gg 1$, quelques théorèmes généraux de statistiques (par exemple ; le théorème de Wilk [100, P. 132]) peuvent être appliqués sans la connaissance de la forme exacte de la distribution du GLR $L_G(\mathbf{x}, K)$. En utilisant ce théorème et les propriétés statistiques du GLR $L_G(\mathbf{x}, K)$, nous allons établir théoriquement les performances de certains de ces détecteurs.

Les fonctions densité de probabilité de $(\mathbf{x}_k)_{k=1, \dots, K}$ sous les conditions H_0 et H_1 sont les mêmes pour tous les détecteurs, mis à part que les paramètres inconnus, que l'on classera dans un vecteur noté $\boldsymbol{\theta}$, sont différents d'un détecteur à un autre. On décompose ce vecteur de paramètres inconnus $\boldsymbol{\theta}$ en deux vecteurs : $\boldsymbol{\theta}_a$, de dimension r , qui collecte les paramètres inconnus du signal utile $(\pi_s, \Phi_s, \theta_s, \mathbf{s})$ et $\boldsymbol{\theta}_b$ qui collecte les paramètres inconnus du bruit dits de nuisance (\mathbf{R}, \mathbf{C}) . On note alors $\boldsymbol{\theta} \triangleq [\boldsymbol{\theta}_a^T, \boldsymbol{\theta}_b^T]^T$.

Nous allons présenter les performance théoriques asymptotiques uniquement pour quelques récepteurs GLRT OPT_i , $i = 2, 5, 6, 9$. Car les autres récepteurs GLRT convergent vers ces récepteurs pour K grand.

Pour des raisons d'identifiabilité, nous devons utiliser des re-paramétrisations pour avoir $\boldsymbol{\theta}_a$ et $\boldsymbol{\theta}_b$, celles ci sont données pour chaque cas par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_a &= [\sqrt{\pi_s} \cos \Phi_s, \sqrt{\pi_s} \sin \Phi_s]^T \text{ avec } r = 2 \text{ pour } \text{OPT}_2 \text{ et } \text{OPT}_5 \\ \boldsymbol{\theta}_a &= [\Re(\sqrt{\pi_s} e^{i\Phi_s} \mathbf{s})^T, \Im(\sqrt{\pi_s} e^{i\Phi_s} \mathbf{s})^T]^T \text{ avec } r = 2N \text{ pour } \text{OPT}_6 \text{ et } \text{OPT}_9 \\ \boldsymbol{\theta}_a &= [\sqrt{\pi_s} \cos \Phi_s, \sqrt{\pi_s} \sin \Phi_s, \theta_s]^T \text{ avec } r = 3 \text{ pour } \text{OPT}_{10} \text{ et } \text{OPT}_{11} \end{aligned}$$

Il n'y a pas de paramètres de nuisance pour les détecteurs OPT_2 , OPT_6 et OPT_{10} , tandis que pour OPT_5 , OPT_9 et OPT_{11} on a :

$$\boldsymbol{\theta}_b = [\Re((\mathbf{R}_{i,j})), \Im((\mathbf{R}_{i,j})), \Re((\mathbf{C}_{i,j})), \Im((\mathbf{C}_{i,j}))]^T \text{ pour } 1 \leq i \leq j \leq N$$

tel que $\boldsymbol{\theta}_b$ est de dimension $N(2N + 1)$ englobant toutes les parties réelles et imaginaires des éléments des matrices \mathbf{R} et \mathbf{C} .

Pour les récepteurs OPT_2 , OPT_5 , OPT_6 et OPT_9 , le problème de détection décrit par les

équations à deux hypothèses donné par les expressions (5.5) et (5.6) peut être reformulé par le test à deux hypothèses sur la fonction densité de probabilité $p[\mathbf{x}(kT)_{k=1,\dots,K}; \boldsymbol{\theta}_a, \boldsymbol{\theta}_b]$, où on veut tester si $\boldsymbol{\theta}_a = \mathbf{0}$ opposé à $\boldsymbol{\theta}_a \neq \mathbf{0}$. Ce test s'écrit alors [54, 55] :

$$\mathbf{H}_0 : p[\mathbf{x}(kT)_{k=1,\dots,K}; \boldsymbol{\theta}_a = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}_b], \quad (5.55)$$

$$\mathbf{H}_1 : p[\mathbf{x}(kT)_{k=1,\dots,K}; \boldsymbol{\theta}_a \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}_b]. \quad (5.56)$$

D'où, avec ces notations, le GLR $L_G(\mathbf{x}, K)$ prend la forme suivante :

$$L_G(\mathbf{x}, K) = \frac{p[\mathbf{x}(kT)_{k=1,\dots,K}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{a1}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{b1}]}{p[\mathbf{x}(kT)_{k=1,\dots,K}; \boldsymbol{\theta}_{a0}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{b0}]} \quad (5.57)$$

où $\boldsymbol{\theta}_{a0} = \mathbf{0}$ et $(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{a1}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{b1})$ et $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{b0}$ désignent les estimées au sens du maximum de vraisemblance de $(\boldsymbol{\theta}_a, \boldsymbol{\theta}_b)$ et $\boldsymbol{\theta}_b$ sous H_1 et H_0 respectivement.

Remarque 13. Pour les récepteurs OPT_{10} et OPT_{11} , le problème de détection donné par les expressions (5.5) et (5.6) ne peut être interprété comme le test donné par (5.55) et (5.56), car dans ces cas, la troisième composante θ_s peut prendre la valeur 0 sous H_1 .

Sous H_0 , pour les récepteurs OPT_2 , OPT_5 , OPT_6 et OPT_9 , le théorème de Wilk [100, P.132] avec des paramètres de nuisance peut ainsi être appliqué sans avoir à connaître la forme exacte du $L_G(\mathbf{x}, K)$. Ainsi, On a la convergence en distribution suivante :

$$2 \ln L_G(\mathbf{x}, K) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_r^2 \quad \text{sous } H_0 \text{ pour les cas } (\text{OPT}_i)_{i=2,5,6,9} \quad (5.58)$$

où $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ désigne la convergence en loi lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini. χ_r^2 désigne la distribution de la loi de Khi-Deux à r degrés de liberté associés au récepteurs $(\text{OPT}_i)_{i=2,5,6,9}$.

Sous H_1 , le calcul de la distribution asymptotique du GLR L_G est plus compliqué. En utilisant les résultats théoriques de Stroud [91], Stuart et Ord [92, Ch.23.7] ont démontré que pour $\boldsymbol{\theta}_a$ ayant des valeurs proches de zéro ⁸, $2 \ln L_G(\mathbf{x}, K)$ est approximativement distribué ⁹ de la façon suivante :

$$2 \ln L_G(\mathbf{x}, K) \sim_a \chi_r^2(\lambda_K) \quad \text{sous } H_1 \text{ pour les cas } (\text{OPT}_i)_{i=2,5,6,9} \quad (5.59)$$

où $\chi_r^2(\lambda_K)$ désigne la distribution de la loi de Khi-Deux non centrale à r degrés de liberté désignant le nombre de paramètres réels inconnus de la paramétrisation, λ_K est le paramètre de centralité associé à chaque OPT_i et représentant une mesure de discrimination entre les deux hypothèses.

La dépendance en K de λ_K est soulignée pour spécifier que la relation (5.59) est une approximation et non une convergence en distribution. Nous allons voir dans (5.62) que λ_K

⁸ $\boldsymbol{\theta}_a$ est incluse dans une séquence indexée par K qui converge vers zéro avec une vitesse de l'ordre de $K^{1/2}$ ou plus [91], c.a.d. $\|\boldsymbol{\theta}_a\| = O_p(1/K^{1/2})$. A noter que cette condition est donné simplifiée par Kay [55, CH. A6] tel que : $\|\boldsymbol{\theta}_a\| = c/\sqrt{K}$ pour c une constante. Cette condition se réduit grossièrement à l'hypothèse que le SINR est faible (c.a.d., $K\pi_s/(\pi_1 + \eta_2) \ll 1$) [55, Sec. 6.5]

⁹Plus précisément, $\lim_{K \rightarrow \infty} \{P(2 \ln[L_G(\mathbf{x}, K)] < t) - P(V_K < t)\} = 0 \forall t$, où V_K est de distribution de Khi-Deux non centrale avec r degrés de liberté et de paramètre de non centralité λ_K dépendant de la taille des données K .

est en réalité proportionnel à K .

Le paramètre λ_K mesure la discrimination entre les deux hypothèses H_1 et H_0 , il est donné par [54] et [55, Ch. 6]

$$\lambda_K = \boldsymbol{\theta}_{a1}^T \left[\mathbf{I}_{a,a}(\mathbf{o}, \boldsymbol{\theta}_b) - \mathbf{I}_{a,b}(\mathbf{o}, \boldsymbol{\theta}_b) \mathbf{I}_{b,b}^{-1}(\mathbf{o}, \boldsymbol{\theta}_b) \mathbf{I}_{b,a}(\mathbf{o}, \boldsymbol{\theta}_b) \right] \boldsymbol{\theta}_{a1}, \quad (5.60)$$

où $\boldsymbol{\theta}_{a1}$ est la vraie valeur de $\boldsymbol{\theta}_a$ sous H_1 , $\boldsymbol{\theta}_b$ est une vraie valeur (pas estimé) et qui est la même sous H_0 et H_1 . Les termes entre crochets sont donnés par les partitions de la matrice d'information de Fisher FIM (Fisher Information Matrix) de $(\mathbf{x}_k)_{k=1,\dots,K}$ pour $\boldsymbol{\theta} \triangleq [\boldsymbol{\theta}_a^T, \boldsymbol{\theta}_b^T]^T$ tel que

$$\mathbf{I}_K(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{a,a}(\boldsymbol{\theta}_a, \boldsymbol{\theta}_b) & \mathbf{I}_{a,b}(\boldsymbol{\theta}_a, \boldsymbol{\theta}_b) \\ \mathbf{I}_{b,a}(\boldsymbol{\theta}_a, \boldsymbol{\theta}_b) & \mathbf{I}_{b,b}(\boldsymbol{\theta}_a, \boldsymbol{\theta}_b) \end{pmatrix}, \quad (5.61)$$

Les détails de calcul des expressions de λ_K pour chacun des différents détecteurs sont donnés dans l'annexe B.2 où il est démontré que pour les détecteurs OPT2, OPT5, OPT6 et OPT9, que λ_K prend la valeur commune tel que

$$\lambda_K = K \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_k^2 \right) \pi_s \tilde{\mathbf{s}}_\phi^H \mathbf{R}_n^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_\phi, \quad (5.62)$$

Cela montre que sous les conditions de validité de notre analyse ; c'est à dire, SINR faible $K\pi_s/(\pi_1 + \eta_2) \ll 1$ et pour K très grand, que :

- Les distributions sous les hypothèses H_0 et H_1 de $2 \ln L_G(\mathbf{x}, K)$ sont identiques pour la paire de récepteurs (OPT₂ et OPT₅), pareil pour la paire (OPT₆ et OPT₉). En d'autres termes, cela montre que la connaissance des paramètres de nuisance (\mathbf{R} , \mathbf{C}) n'améliore pas les performances pour un grand nombre d'échantillons de données. Ceci peut être interprété par le fait que l'estimation du maximum de vraisemblance ML des paramètres de nuisance (\mathbf{R} , \mathbf{C}) est précise indépendamment du SINR au contraire de l'estimation ML des paramètres $(\pi_s, \Phi_s, \mathbf{s})$. Naturellement cette propriété n'est pas juste pour un petit nombre d'échantillons de données comme l'a été démontré dans [22] et comme nous allons le voir par la suite ;
- en comparant les cas (OPT₂, OPT₅) avec (OPT₆, OPT₉), les distributions de $2 \ln L_G(\mathbf{x}, K)$ sous H_0 , et sous H_1 , diffèrent uniquement par le degré de liberté r de la distribution Khi-Deux, qui va de 2 à $2N$. En observant la répartition de ces distributions, on voit bien que chevauchement est plus important pour les cas (OPT₆, OPT₉) que celui des cas (OPT₂, OPT₅). En conséquence, les performances s'améliorent quand le vecteur directeur est connu ;
- la proportionnalité de λ_K par rapport à K (pour une énergie moyenne par symbole fixe) implique que la distribution $2 \ln L_G(\mathbf{x}, K)$ sous H_1 bouge vers la droite et en conséquence les performances sont améliorées en augmentant K .

Remarque 14. Du moment que la distribution asymptotique de $2 \ln[L_G(\mathbf{x}, K)]$ sous H_0 ne dépend d'aucun paramètre inconnu, le seuil requis pour maintenir constante la probabilité de fausse alarme peut a priori être trouvé. Ces détecteurs sont des détecteurs à fausse alarme constante CFAR (Constant False Alarm Rate). Néanmoins, cette propriété de fausse alarme constante n'intervient que pour un grand nombre d'échantillons de données ($K \gg 1$).

De manière similaire que pour les récepteurs LRT, on déduit de (5.58) et (5.58) qu'une représentation en courbes ROC est aussi possible selon l'expression suivante :

$$P_D \approx Q_{\chi_{r,\lambda_K}^2} \left(Q_{\chi_{r,0}^2}^{-1}(P_{FA}) \right), \quad (5.63)$$

où $Q_{\chi_{r,0}^2}(\cdot)$ et $Q_{\chi_{r,\lambda_K}^2}(\cdot)$ sont les complémentaires des fonctions de distribution cumulatives de la loi de Khi-Deux non centrale à r degrés de liberté et respectivement de paramètres de non-centralité 0 et λ_K associées au récepteurs (OPT_{*i*})_{*i*=2,5,6,9}. Évidemment $Q_{\chi_{r,0}^2}^{-1}(\cdot)$ représente la fonction inverse de la fonction monotone $Q_{\chi_{r,0}^2}(\cdot)$

Finalement, il est à noter que cette analyse de performances peut être appliquée aux récepteurs GLR conventionnels associés uniquement dans le cas où le GLR est dérivé et utilisé pour des interférences circulaires. Cette analyse n'est plus valide lorsque le GLR est utilisé pour des interférences non circulaires, car dans ce cas, ces récepteurs ne sont plus considérés comme appartenant à la famille des récepteurs dérivés du GLRT (GLRT-based).

5.8 Illustrations

Afin d'illustrer l'analyse de performances précédente, on considère le scénario où une antenne à N capteurs espacés d'une demi longueur d'onde reçoit K échantillons d'un signal utile modulé BPSK de direction d'arrivée θ_s , de phase Φ_s et de puissance d'entrée π_s . Ce signal utile est noyé dans un bruit total composé d'un blanc gaussien circulaire de variance η_2 et d'une interférence BPSK de direction d'arrivée θ_1 , de phase Φ_1 et de puissance d'entrée π_1 . Les phases et les directions d'arrivée sont supposées constantes à travers la trame de K échantillons.

5.8.1 Performances théoriques des récepteurs

Nous allons illustrer les performances des différents récepteurs en utilisant les expressions établies théoriquement que nous compareront aux performances associées obtenues par simulations Monte Carlo.

Pour le scénario où $\theta_1 = \pi/9$, $\theta_s = 0$, $\Phi_1 = \pi/4$, $\Phi_s = 0$, $\pi_s/\eta_2 = -15dB$ et $\pi_1/\eta_2 = 5dB$:

La figure 5.1, obtenue pour $N = 2$, représente les performances en courbes COR des récepteurs clairvoyants (optimal et conventionnel). Ces courbes sont obtenues soit théoriquement selon l'expression (5.54), soit par simulations Monte-Carlo (empiriques environs 100000 Monte-Carlo) pour $K = 4$ et $K = 64$ (K est la taille de la trame). On voit bien sur cette figure que le récepteur optimal est largement plus performant que le conventionnel du à l'exploitation de l'information de non circularité du bruit.

On note aussi que les approximations (5.53) et (5.52) respectives des probabilités données par les expression (5.48) et (5.47) sont relativement très précises et donc valides même pour de faibles valeurs de K (à deux chiffres significatifs près). Ceci est du au fait que les filtres adaptés spatiaux $\tilde{\mathbf{w}}_o$ et \mathbf{w}_c atténuent la puissance de l'interférence BPSK par rapport à celle du bruit de fond gaussien.

La figure 5.2, montre les courbes COR théoriques asymptotiques (5.63) et empiriques (Monte-Carlo) des récepteurs GLRT analysés comparées à la courbe théorique exacte du récepteur clairvoyant OPT₁. On observe que les courbes théoriques asymptotiques

coïncident avec les courbes empiriques pour relativement peu de données $K = 128$ et un faible SINR en sortie ($= K \frac{\pi_s}{\pi_1 + \eta_2} = 0.40$). Ce qui montre que notre approximation théorique est relativement assez précise en étant sous les condition de $K \gg 1$ et de faible SINR.

La figure 5.3 montre , pour $N = 2$, les performances du détecteur OPT_1 augmentent avec la taille des donnée (le nombre d'échantillons du signal utile K) ce qui est logique vu que le SINR en sortie de ce détecteur est proportionnel à K .

Dans la figure 5.4, pour $K = 64$, il est clair qu'en augmentant le nombre de capteurs de l'antenne les performances du détecteur OPT_1 s'améliorent ceci est dû à la discrimination spatiale entre le signal utile et l'interférence.

5.8.2 Domaine de validité

Dans cette partie, nous allons essayer de cerner le domaine de de validité des approximations (5.58) et (5.58) respectives sous les hypothèses H_0 et H_1 pour les récepteurs GLRT. Ce domaine s'avère plus compliqué à déterminer par rapport à celui du LRT, car non seulement il dépend de K et du $SINR = \frac{\pi_s}{\pi_1 + \eta_2}$, mais aussi du domaine d'intérêt de P_D et P_{fa} qui varie selon l'application. Pour les distributions du LRT (récepteurs clairvoyants) nous avons donné les distributions exactes ainsi que des approximations théoriques très précises, donc nous allons uniquement étudier le domaine de validité des approximations des distributions du GLRT.

Afin de spécifier le domaine de validité des approximations (5.58) et (5.59), nous avons réalisé des simulations Monte Carlo qu'on a comparé aux approximations théoriques. Ces simulations sont faites avec le scénario de paramètres ou : $N = 2$, $\theta_s = \Phi_s = 0$, $\theta_1 = \pi/9$, $\Phi_1 = \pi/4$, $SNR = \pi_s/\eta_2$ et $INR = \pi_1/\eta_2 = SNR + 20dB$:

La figure 5.5, montre l'erreur relative E_{P_D} sur la probabilité de détection P_D en fonction du nombre d'échantillons K pour le récepteur OPT_2 et pour une P_{FA} fixée à 10^{-3} et un $SNR = -20dB$. L'erreur relative E_{P_D} est tel que :

$$E_{P_D} \triangleq \frac{P_{DTh} - P_{DMC}}{P_{DTh}}$$

où P_{DTh} est la probabilité de détection déduite des approximations (5.58) et 5.59 et P_{DMC} est celle déduite de 10000 Monte-Carlo. Cette figure montre que l'erreur relative sur P_D est en général très petite et qui tend vers zéro pour de grandes valeurs de $K > 80$. Ceci nous montre que les approximations théorique (5.58) et 5.59 sont relativement bonnes même pour K relativement petit.

Par ailleurs, pour $K = 128$ fixé, la figure 5.6 montre l'erreur relative sur la probabilité de détection P_D pour une P_{FA} fixée à 10^{-3} en fonction du SNR pour le récepteur OPT_2 . Cette figure montre aussi que l'erreur relative sur P_D tend vers zéro quand le SNR est faible. On peut considérer dans ce cas que cette approximation est bonne pour une erreur relative inférieure à 0.15 qui correspond à un SNR d'environ $-30dB$.

Finalement, ces deux figures nous permettent de dire que les approximation (5.58) et 5.59 sont relativement bonnes pour les scénarios étudiés, notamment pour de faibles valeurs de

K et pour un rapport de puissance entre l'interférence BPSK et le bruit blanc gaussien suffisant.

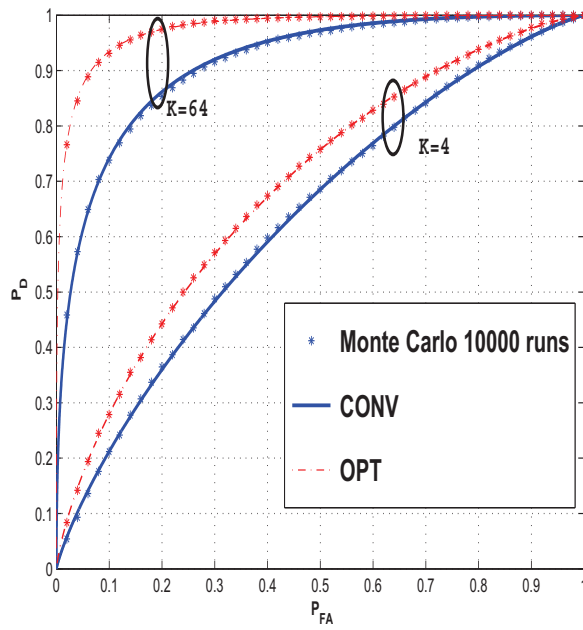


FIGURE 5.1 – Courbe ROC pour les performances des récepteurs $CONV_1$ et OPT_1 , $K = 4$ et $K = 64$

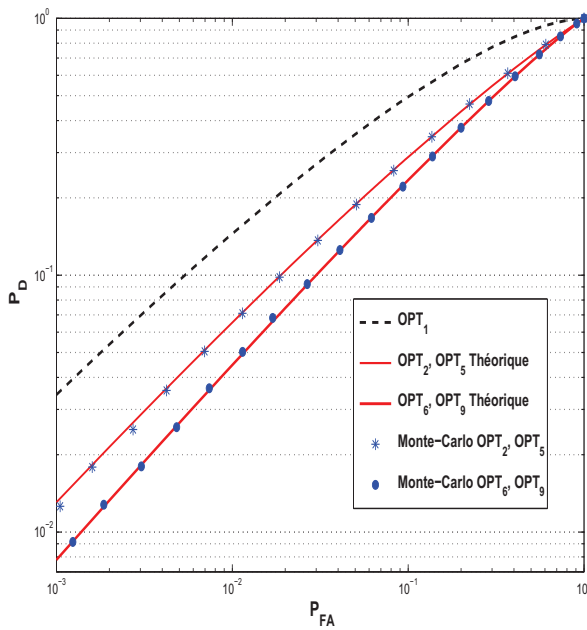


FIGURE 5.2 – Courbe ROC pour les performances exactes et approchées des différents récepteurs OPT_i ($i = 1, ..7$), $K = 64$

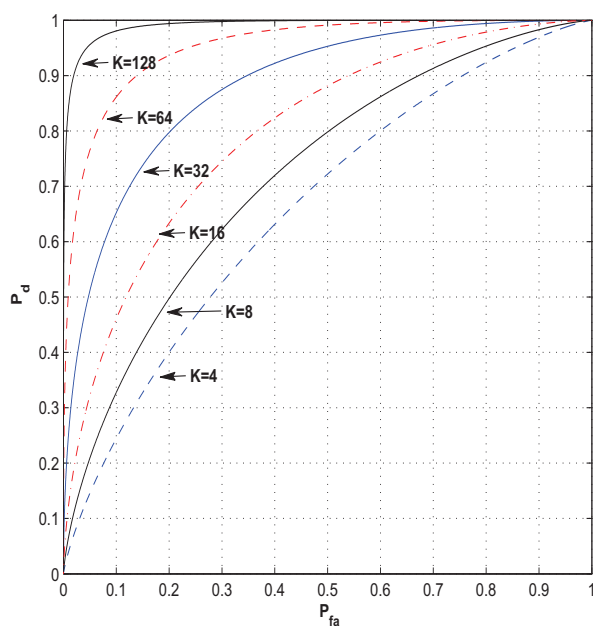


FIGURE 5.3 – Courbes ROC théoriques pour les performances du récepteur OPT_1 pour différentes valeurs de K , $N = 2$

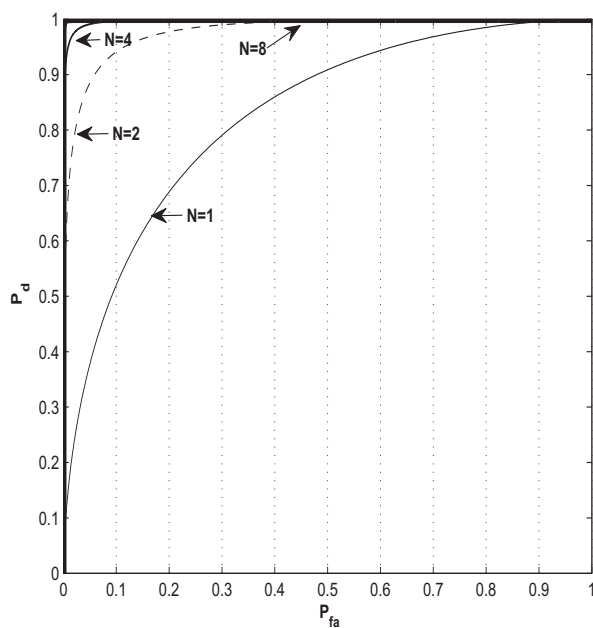


FIGURE 5.4 – Courbes ROC théoriques pour les performances du récepteur OPT_1 pour différentes valeurs de N , $K = 64$

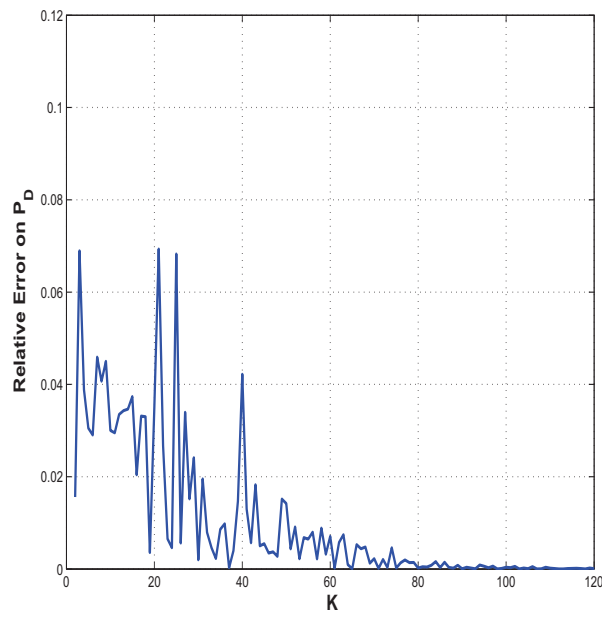


FIGURE 5.5 – Erreur relative sur P_D en fonction de K pour $SNR = -10dB$.

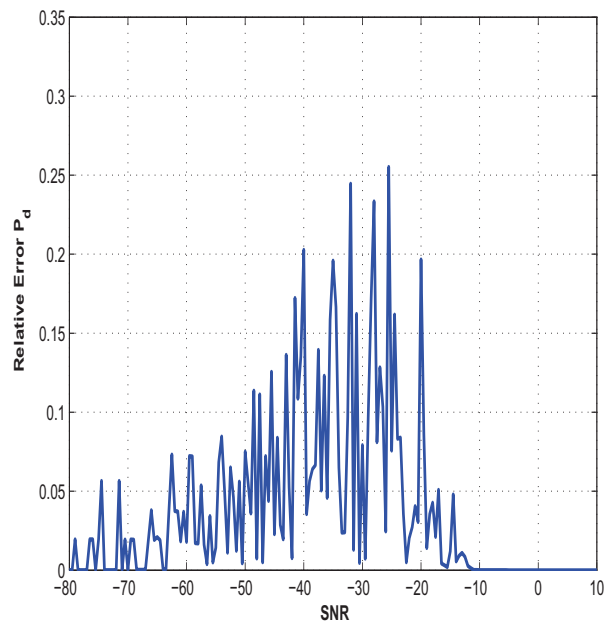


FIGURE 5.6 – Erreur relative sur P_D en fonction du SNR pour $K = 128$

5.8.3 Comparaison des détecteurs

Pour faciliter l'analyse des simulations par ordinateur présentées dans cette section, tous les récepteurs introduits dans les sections précédentes sont résumés dans le tableau 5.1 avec leur notations, leurs hypothèses et les paramètres inconnus associés.

Paramètres connus	Paramètres inconnus	hypothèses	Notation
$\mathbf{s}, \pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	Non	Non	$\text{OPT}_1(\text{CONV}_1)(\mathbf{x}, K)$
$\mathbf{s}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	π_s, Φ_s	Non	$\text{OPT}_2(\text{CONV}_2)(\mathbf{x}, K)$
\mathbf{s}	$\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	RBS. Secondaires	$\text{OPT}_3(\text{CONV}_3)(\mathbf{x}, K)$
\mathbf{s}	$\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	RBS. Primaires + secondaires	$\text{OPT}_4(\text{CONV}_4)(\mathbf{x}, K)$
\mathbf{s}	$\pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	Pas de RBS	$\text{OPT}_5(\text{CONV}_5)(\mathbf{x}, K)$
\mathbf{R}, \mathbf{C}	$\mathbf{s}, \pi_s, \Phi_s$	Non	$\text{OPT}_6(\text{CONV}_6)(\mathbf{x}, K)$
Non	$\mathbf{s}, \pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	RBS. Secondaires	$\text{OPT}_7(\text{CONV}_7)(\mathbf{x}, K)$
Non	$\mathbf{s}, \pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	RBS. Primaires + secondaires	$\text{OPT}_8(\text{CONV}_8)(\mathbf{x}, K)$
Non	$\mathbf{s}, \pi_s, \Phi_s, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	Pas de RBS	$\text{OPT}_9(\text{CONV}_9)(\mathbf{x}, K)$

TABLE 5.1 – Synthèse des différents récepteurs

Par la suite, on considère une antenne linéaire composée de N capteurs omnidirectionnels espacés d'une demi longueur d'onde recevant un paquet de données de radio-communication composé de trames de K symboles connus transmis. Le signal utile, supposé BPSK, est corrompu soit par une soit par deux interférences, supposée de type BPSK ou QPSK de même durée symbole et filtre de mise en forme que le signal utile et d'un bruit de fond blanc, gaussien, centré et circulaire de matrice de covariance $\eta \mathbf{I}_N$. La phase Φ_s et l'angle d'arrivée θ_s , par-rapport à l'azimut, du signal utile sont supposés constants pour l'ensemble des trames. La même hypothèse est à considérer pour l'interférence p ($1 \leq p \leq 2$) dont la phase et l'angle d'arrivée sont notés Φ_p et θ_p respectivement. Le rapport signal sur bruit d'entrée est défini par $\text{SNR} = \pi_s / \eta_2$ tandis-que le rapport interférence p sur bruit est défini par $\text{INR}_p = \pi_p / \eta_2$.

Les performances des récepteurs précédents sont calculées en terme de probabilité de détection P_D du signal utile connu en fonction de du SNR d'entrée ou en fonction de la probabilité de fausse alarme P_{FA} . Les probabilité P_D et P_{FA} sont les probabilité que le détecteur prenne des valeurs dépassant un certain seuil sous H_1 et H_0 respectivement. Pour un détecteur donné, le seuil est directement relié à la P_{FA} et est estimé par simulations Monte-Carlo. La probabilité P_D est calculée à travers la simulation de 100000 trames. Quand une RBS est nécessaire, on suppose que sa longueur est égale à $K' = K$. Dans les figures qui suivent, afin de simplifier les notations, les détecteur optimaux OPT_i et conventionnels CONV_i ($i = 1, \dots, 9$) sont respectivement désignés à l'aide d'acronymes plus courts, à savoir O_i (traits en pointillés) et C_i (traits pleins).

5.8.3.1 Scénario avec $P = 1$ interférence

Dans ce cas, le bruit total est composé d'une seule interférence BPSK plus le bruit de fond. Pour $K = 160$ symboles, le signal utile BPSK a comme phase $\Phi_s = 0^\circ$ et comme angle d'arrivée $\theta_s = 0^\circ$ tandis que l'interférence arrive d'un angle $\theta_1 = 20^\circ$ avec un INR tel que $\text{INR} = \text{SNR} + 15\text{dB}$.

Sous ces hypothèses, les figures 5.7 et 5.8 montrent les variations de P_D aux sorties des 9 détecteurs optimaux et des 9 détecteurs conventionnels en fonction du SNR d'entrée pour une

P_{FA} fixée à 0.001.

Dans les figures 5.7(a) et 5.7(b), la phase de l'interférence est égale à $\Phi_1 = 15^\circ$ tandis qu'elle est égale à $\Phi_1 = 45^\circ$ pour les figures 5.8(a) et 5.8(b). Aussi, pour les figures 5.7(a) et 5.8(a), $N = 1$, tandis que pour les figures 5.7(b) et 5.8(b), $N = 2$.

Les figures 5.9 et 5.10, sous les mêmes hypothèses et paramètres que les figures 5.7 et 5.8 respectivement, montrent les variations de P_D aux sorties des 9 détecteurs optimaux et des 9 détecteurs conventionnels mais en fonction de la P_{FA} , c'est-à-dire., les représentation en courbes ROC, pour un SNR fixé à 0dB.

Les figures 5.7(a), 5.8(a), 5.9(a) et 5.10(a), obtenues pour $N = 1$ capteur, montrent une faible détection du signal utile par tout les détecteurs conventionnels à cause de leur incapacité de rejeter une forte interférence. Par contre, les détecteurs optimaux, qui exploitent l'information de non circularité au second ordre du signal utile et de l'interférence, sont capables de réaliser du SAIC grâce à l'exploitation de la diversité de phase (phase différentielle) et de la non circularité de toutes les sources (utile et interférence).

En comparant les figures 5.7(a) et 5.8(a) ou les figures 5.9(a) et 5.10(a), on note que les performances des détecteurs optimaux s'améliorent en augmentant la diversité de phase entre les sources. Dans tout les cas, le détecteur O_1 , où tous les paramètres sont connus, donne les meilleures performances contrairement au détecteur O_9 , où tous les paramètres sont inconnus, présente les performances les plus faibles. Néanmoins, pour un jeu donné de paramètres inconnus du signal utile, la connaissance a priori des statistiques du bruit (O_2 et O_6) améliore les performances par-rapport au cas en absence de connaissances de ces statistiques. De la même manière, la connaissance d'une RBS (O_2 , O_4 , O_7 et O_8) permet grossièrement d'améliorer les performances par-rapport au cas d'absence d'une RBS (O_5 et O_9).

Les figures 5.7(b), 5.8(b), 5.9(b) et 5.10(b), obtenues pour $N = 2$ capteurs, montrent que tous les détecteurs conventionnels ont une nette amélioration des performances par-rapport au cas $N = 1$, ceci grâce à leur capacité de rejeter une interférences à l'aide d'une discrimination spatiale des sources. Néanmoins, les meilleures performances sont celles des détecteurs optimaux grâce à leur exploitation conjointe de la diversité spatiale et de la diversité de phase entre les sources. On note aussi que les performances des détecteurs optimaux s'améliorent en augmentant la diversité de phase entre les sources et les détecteurs informé (O_1 , C_1) ont les meilleures performances, comparés aux détecteurs non informés (O_9 , C_9) qui eux ont les plus mauvaises performances. Pareil que les figures précédentes, on note que les performances sont meilleures dans le cas où les statistiques du bruit sont connues ou RBS est disponible par-rapport à respectivement à la non connaissance du bruit et à l'absence d'une RBS. Au finale, il est à noter qu'avec la connaissance du bruit total, la connaissance a priori du vecteur directionnel \mathbf{s} améliore les performances.

5.8.3.2 Scénario avec $P = 2$ interférences

On considère dans ce cas que le bruit total est composé de $P = 2$ interférences et d'un bruit de fond. La première interférence est modulée BPSK avec une direction d'arrivée de $\theta_1 = 20^\circ$. La deuxième interférence est modulée QPSK avec une phase et une direction d'arrivée égales à $\Phi_2 = 25^\circ$ et $\theta_2 = 45^\circ$ respectivement. Le INR de chacune des deux interférences est égale à $\text{INR} = \text{SNR} + 15\text{dB}$.

Sous les même hypothèses, les figures 5.11(a), 5.11(b), montrent pour $N = 2$ et une $P_{FA} = 0.001$, les variations de P_D des 9 détecteurs optimaux et des 9 détecteurs conventionnels en fonction de du SNR du signal utile, pour $\Phi_1 = 15^\circ$ et $\Phi_1 = 45^\circ$ respectivement.

Les figures 5.12(a), 5.12(b), montrent sous les mêmes conditions que les figures 5.11(a), 5.11(b), les mêmes variations en fonction de la P_{FA} de P_D pour les mêmes détecteurs, mais pour un SNR= 0dB.

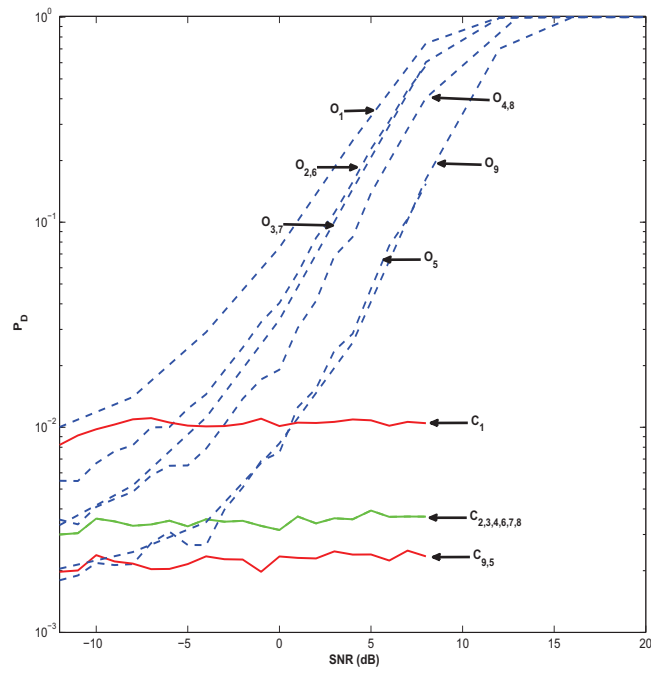
À travers une analyse globale des ces figures, on note que les performances de détection du signal utile sont très faibles pour les détecteurs conventionnels. En effet, cela est dû à la difficulté de rejeter deux fortes interférences à cause de la saturation du réseau d'antennes ($P = N = 2$). Par contre, grâce à la discrimination spatiale et de phase des sources, les détecteurs optimaux ont de bonnes performances en détection en rejetant les deux interférences du moment où une des deux est rectiligne. Plus précisément, il à été montré dans [28] et [21] qu'une source BPSK génère seulement une sources dans le vecteur d'observation étendu, alors q'une source QPSK en génère deux, ainsi la préservation de ce signal utile BPSK et la réjection de deux interférences (une BPSK et une QPSK) nécessite un traitement à $1 + 1 + 2 = 4$ degrés de liberté et qui correspond exactement au nombre de degrés de liberté $2N = 4$ effectivement disponible pour notre traitement.

En comparant les figures 5.11(a) et 5.11(b) ou les figures 5.12(a) et 5.12(b), on note que les performances des détecteurs optimaux s'améliorent avec l'augmentation de la diversité de phase entre le signal utile et l'interférence BPSK. Aussi, le détecteur OPT₁ donne les meilleures performances tandis que le le détecteur OPT₉ atteint les performances les plus faibles. Aussi, en général l'augmentation des connaissances à priori permet d'améliorer les performances.

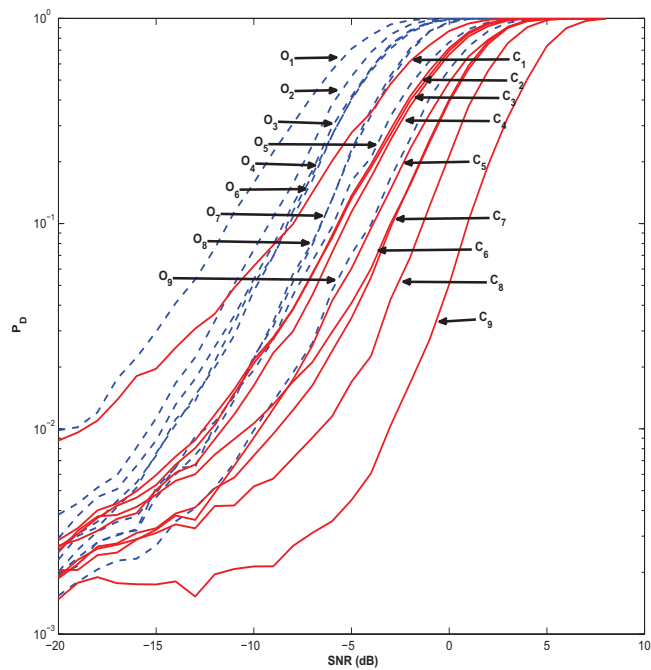
5.9 Conclusion

Dans ce chapitre, une analyse des performances des récepteurs LRT et GLRT pour la détection d'un signal connu rectiligne réel, de paramètres inconnus et perturbé par des interférences inconnues potentiellement non circulaires au second ordre, a été menée. En étudiant les distributions des statistiques associée au LRT et au GLRT, les expressions de la probabilité de détection P_D et de la probabilité de fausse alarme P_{FA} ont été données. En particulier, les formes exactes des expressions de P_D et P_{FA} ont été élaborées pour les détecteurs LRT et aussi les distributions asymptotiques (en fonction du nombre d'échantillons) de P_D et P_{FA} ont été données pour les récepteurs GLRT. Les performances ont été complétées par des simulations en courbes ROC.

Il a été démontré que la prise en compte de la non circularité potentielle des interférences améliore les performances des récepteurs et ceci grâce à l'exploitation de la diversité de phase en plus de la discrimination spatiale. En particulier, on note la capacité des récepteurs clairvoyants à rejeter une interférence rectiligne à partir d'une antenne mono-capteur et ainsi faire du SAIC en exploitant la diversité de phase entre les sources.

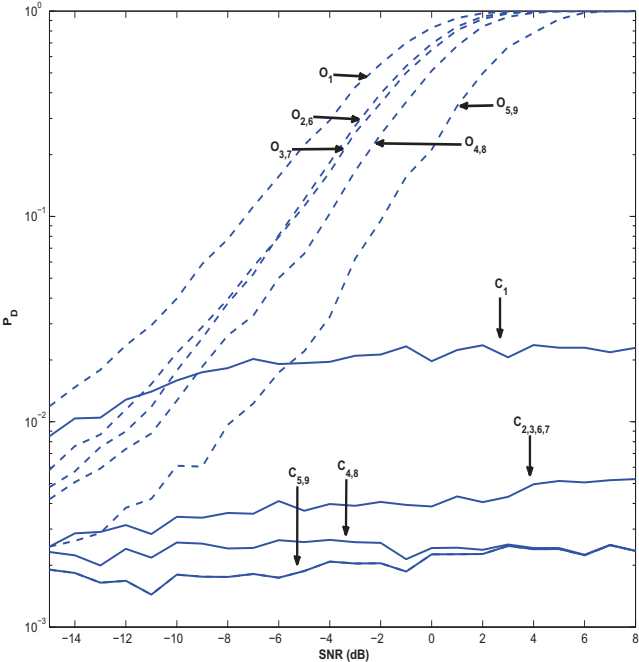


(a)

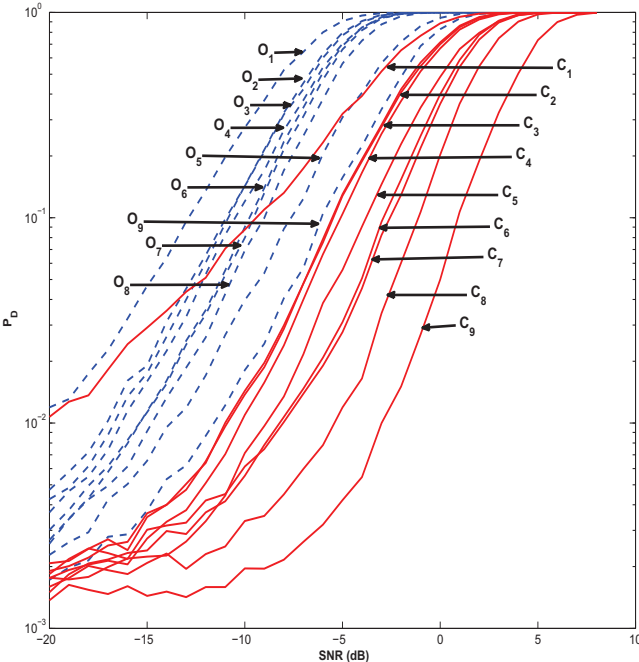


(b)

FIGURE 5.7 – Variations de P_D en fonction du SNR, $\Phi_1 = 15^\circ$, $P_{FA} = 0.001$, $P = 1$ BPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $INR = SNR + 15\text{dB}$, 100000 réalisations, $N = 1$ (a), $N = 2$ (b)

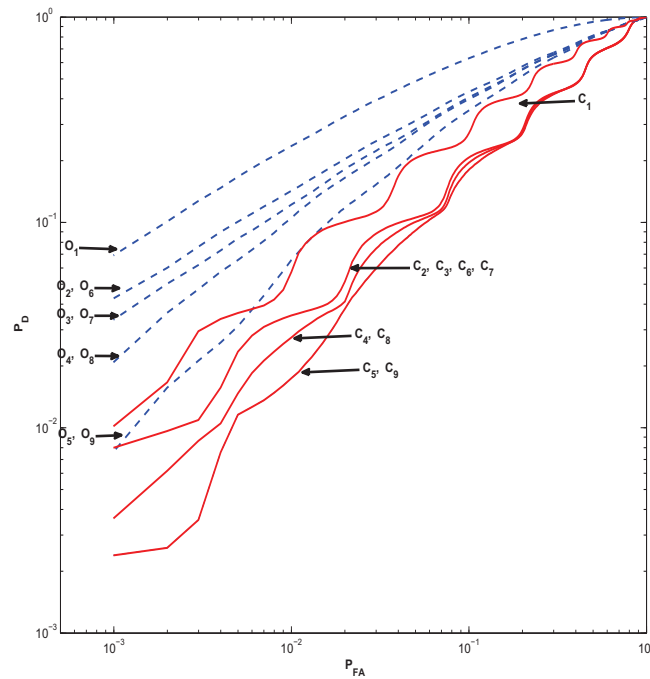


(a)

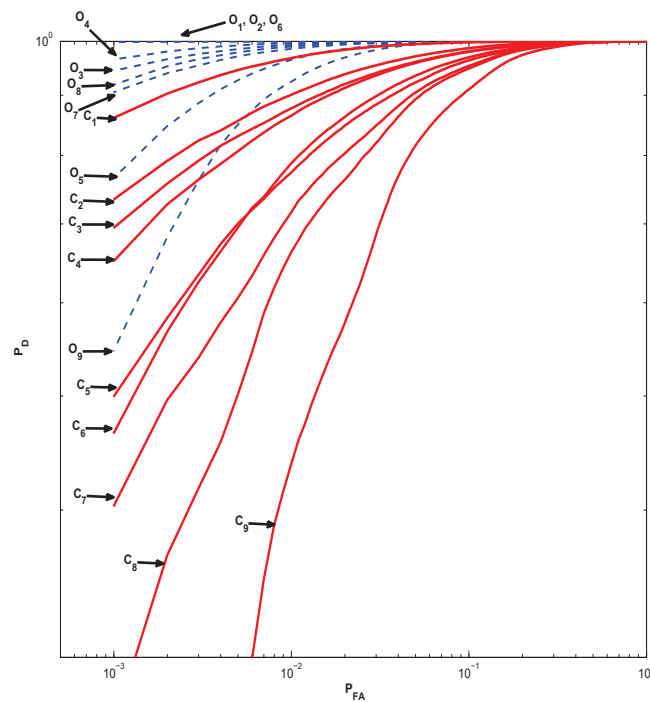


(b)

FIGURE 5.8 – Variations de P_D en fonction du SNR, $\Phi_1 = 45^\circ$, $P_{FA} = 0.001$, $P = 1$ BPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $INR = SNR + 15\text{dB}$, 100000 réalisations, $N = 1$ (a), $N = 2$ (b)



(a)



(b)

FIGURE 5.9 – Variations de P_D en fonction de la P_{FA} (ROC), $\Phi_1 = 15^\circ$, $\text{SNR} = 0\text{dB}$, $P = 1$ BPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $\text{INR} = 15\text{dB}$, 100000 réalisations, $N = 1$ (a), $N = 2$ (b)

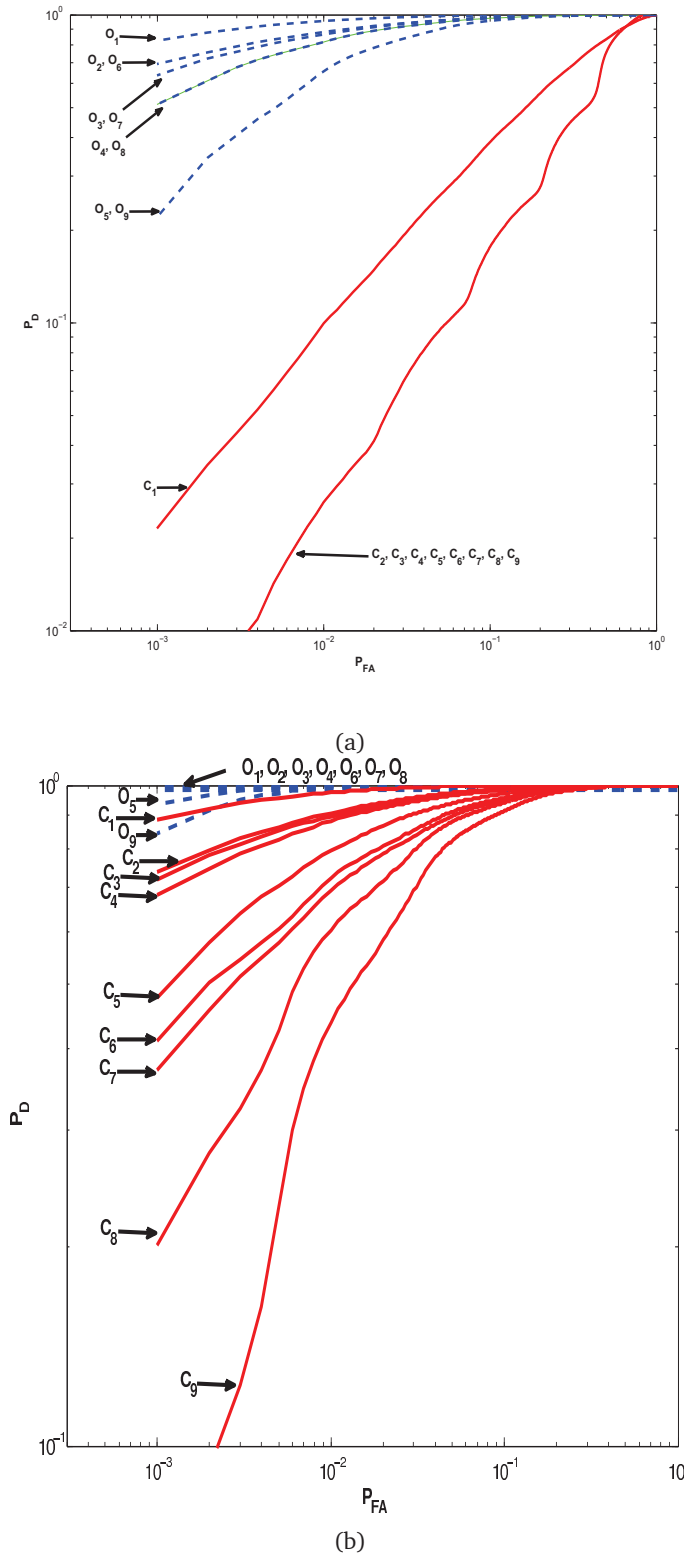
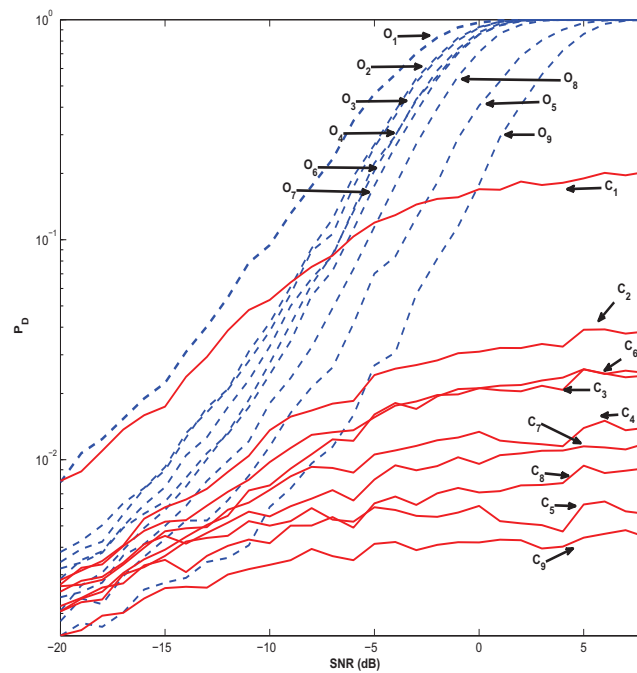
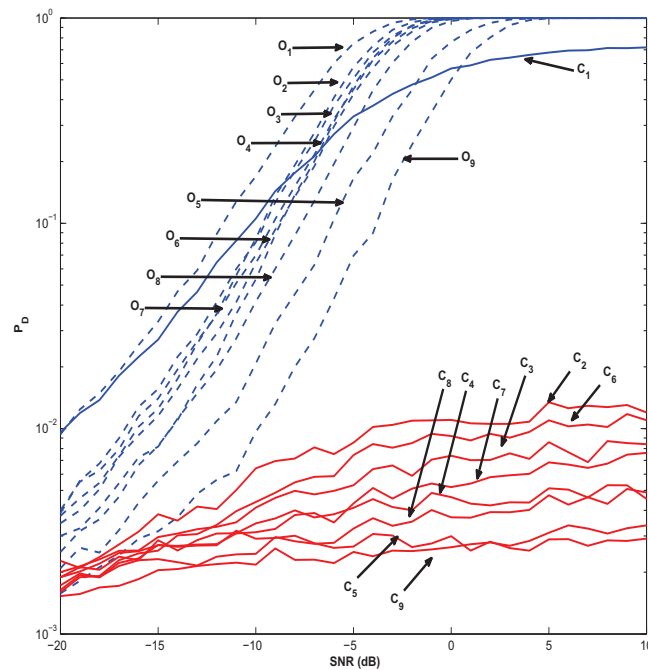


FIGURE 5.10 – Variations de P_D en fonction de la P_{FA} (ROC), $\Phi_1 = 45^\circ$, $SNR = 0dB$, $P = 1$ BPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $INR = 15dB$, 100000 réalisations, $N = 1$ (a), $N = 2$ (b)

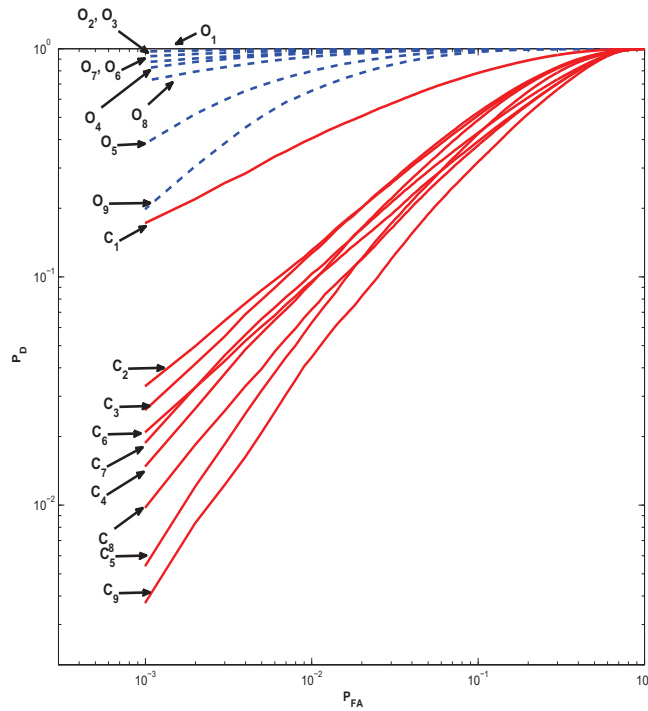


(a)

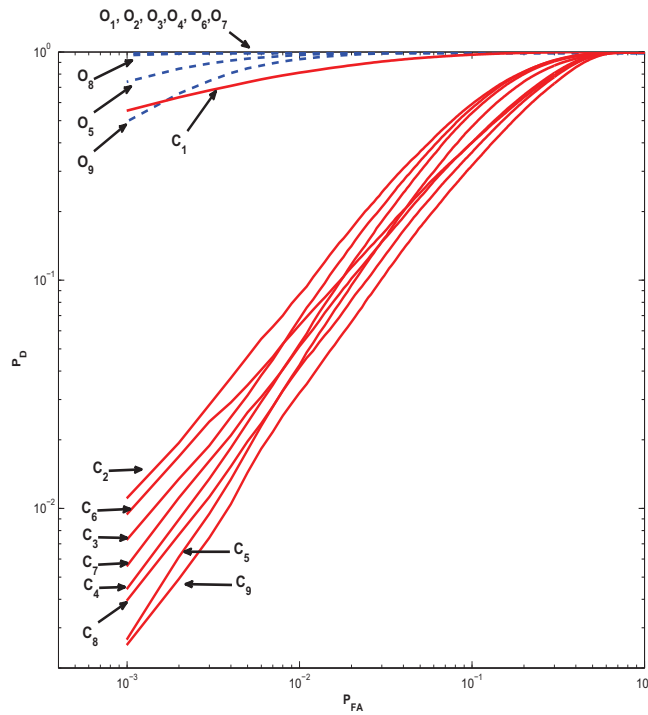


(b)

FIGURE 5.11 – Variations de P_D en fonction du SNR, $P_{FA} = 0.001$, $N = 2$, $P = 2$ BPSK+QPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $\theta_2 = 40^\circ$, $\Phi_2 = 25^\circ$, $INR_1 = INR_2 = SNR + 15dB$, 100000 réalisations, $\Phi_1 = 15^\circ$ (a), $\Phi_1 = 45^\circ$ (b)



(a)



(b)

FIGURE 5.12 – Variations de P_D en fonction de la P_{FA} (ROC), $SNR = 0\text{dB}$, $N = 2$, $P = 2$ BPSK+QPSK, $K = K' = 16$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_1 = 20^\circ$, $\theta_2 = 40^\circ$, $\Phi_2 = 25^\circ$, $INR_1 = INR_2 = SNR + 15\text{dB}$, 100000 réalisations, $\Phi_1 = 15^\circ$ (a), $\Phi_1 = 45^\circ$ (b)

Chapitre 6

Étude des performances du détecteur GLRT de non circularité des signaux complexes

Sommaire

6.1 Introduction	157
6.2 Le test du rapport de vraisemblance	159
6.3 Règle de décision du GLR	159
6.4 Distribution asymptotique du GLR pour des variables aléatoires complexes indépendantes identiquement distribuées (IID)	160
6.5 Extension aux variables aléatoires complexes NON-IID	164
6.6 Illustrations	165
6.7 Conclusion	170

6.1 Introduction

Plusieurs papiers [77, 87, 37] montrent que l'exploitation, par plusieurs algorithmes de second ordre, de l'information statistique additionnelle contenue dans la seconde matrice de covariance $\mathbf{C}_x = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)$ apporte des gains significatifs en performances par rapport à l'utilisation de la matrice $\mathbf{R}_x = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^H)$ uniquement. En outre, certains de ces algorithmes [1], qui sont adaptés aux signaux non circulaires au second ordre, échouent ou souffrent d'une convergence très lente quand ils sont utilisés pour des signaux circulaires.

Par conséquent, il est important d'adapter les traitements à la circularité des observations. Ainsi, la question que l'on peut se poser est par quel moyen peut on classifier un signal comme circulaire ou non ? Ainsi, ce problème peut être considéré comme un test binaire à deux hypothèses $\mathbf{H}_0 : \mathbf{C}_x = \mathbf{O}$ contre $\mathbf{H}_1 : \mathbf{C}_x \neq \mathbf{O}$. En pratique les paramètres \mathbf{R}_x et \mathbf{C}_x sont souvent inconnus, alors seul le détecteur du test du rapport de vraisemblance généralisé GLRT (Generalized Likelihood Ratio Test) peut être utilisé.

Basé sur des échantillons d'observations gaussiens, indépendants et identiquement distribués $(\mathbf{x}_k)_{k=1,\dots,K}$, le détecteur de non circularité GLRT a été introduit indépendamment par Ollila et Koivunen [73] et Schreier, Scharf et Hanssen [85], ses performances ont été illustrées

uniquement par des simulations Monte Carlo. Récemment, Walden et Rubin-Delanchy [98] ont étudié ce GLRT en formulant ce test en terme de vecteurs aléatoires gaussiens réels. Ils ont présenté une analyse théorique de la distribution asymptotique du GLRT sous l'hypothèse nulle (H_0) en supposant que la distribution des signaux est gaussienne et aussi donné plusieurs illustrations par simulations numériques en Monte Carlo pour l'hypothèse alternative H_1 . Très récemment, des extensions de ce GLRT aux données non gaussiennes ont été données dans [74, 64].

Le but de ce chapitre est de compléter l'analyse asymptotique théorique donnée dans [98] sous les hypothèses circulaire ou non circulaire du critère GLRT dérivé sous l'hypothèse de distribution gaussienne mais utilisée sous une distribution arbitraire non nécessairement gaussienne.

Dans ce chapitre, après une introduction du test GLR de non circularité dans la section 6.3, la distribution asymptotique du GLR sous les hypothèses que les données sont IID et sous la vraie, non nécessaire, distribution gaussienne des données est donnée dans le cas scalaire et ensuite étendu au cas multidimensionnel dans la section 6.4. Puis des expressions interprétables des probabilités de détection en fonction de celles de fausse alarme ce qui permettent de donner quelques illustrations de courbes ROC. Par la suite, une extension de cette étude pour les cas de données indépendantes non identiquement distribuées est menée dans la section 6.5. Finalement nous termineront ce chapitre par quelques illustrations dans la section 6.6.

6.2 Le test du rapport de vraisemblance

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ un vecteur aléatoire complexe gaussien, centré, de première et deuxième matrices de covariance connues et notées respectivement $\mathbf{R}_x = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^H)$ et $\mathbf{C}_x = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)$. On considère le test à deux hypothèses suivant :

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{C}_x = \mathbf{O}, \mathbf{R}_x \quad (6.1)$$

$$\mathbf{H}_1 : \mathbf{C}_x \neq \mathbf{O}, \mathbf{R}_x. \quad (6.2)$$

En d'autres termes, nous voulons tester l'hypothèse nulle H_0 , qui stipule que \mathbf{x} est une variable aléatoire complexe gaussienne circulaire de matrice de covariance connue \mathbf{R}_x contre l'hypothèse alternative H_1 qui stipule que \mathbf{x} est une variable aléatoire complexe gaussienne non circulaire de première et deuxième matrices de covariance connues \mathbf{R}_x et \mathbf{C}_x .

Ainsi, puisque les matrices de covariance sont connues, le rapport de vraisemblance LR (Likelihood Ratio) donne une règle de décision optimale. Ce rapport est donné par :

$$l(\mathbf{x}, K) \triangleq \frac{p[(\mathbf{x}); \mathbf{R}_x, \mathbf{C}_x, H_1]}{p[(\mathbf{x}); \mathbf{R}_x, \mathbf{O}, H_0]}. \quad (6.3)$$

où

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &\triangleq \frac{1}{\pi^N} \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{R}_x}} e^{-\mathbf{x}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{x}} \quad \text{sous } H_0 \\ &\triangleq \frac{1}{\pi^N} \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}}} e^{-\frac{\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}}{2}} \quad \text{sous } H_1, \end{aligned}$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} = E(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^H)$ avec $\tilde{\mathbf{x}} \triangleq [\mathbf{x}^T, \mathbf{x}^H]^T$.

6.3 Règle de décision du GLR

Supposons maintenant que $(\mathbf{x}_k)_{k=1, \dots, K} \in \mathbb{C}^N$ sont les réalisations de K variables aléatoires complexes gaussiennes, centrées, indépendantes et identiquement distribuées, de matrices de covariances inconnues $\mathbf{R}_x = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^H)$ et $\mathbf{C}_x = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)$. On considère le même test de non circularité à deux hypothèses donnée par les expressions (6.1) et (6.2).

Soit $\mathbf{X}_K = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_K)$. La densité de probabilité de \mathbf{X}_K sous l'hypothèse H_0 est donnée par :

$$p(\mathbf{X}_K; \mathbf{R}_x) = \frac{1}{\pi^{NK}} \frac{1}{[\det(\mathbf{R}_x)]^K} e^{-K \text{Tr}(\mathbf{R}_x^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x)},$$

où $\hat{\mathbf{R}}_x \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H$ est l'estimée du maximum de vraisemblance MLE (Maximum Likelihood Estimate) de \mathbf{R}_x et $\text{Tr}(\cdot)$ désigne l'opérateur de trace d'une matrice.

La densité de probabilité de \mathbf{X}_K sous H_1 devient :

$$p(\mathbf{X}_K; \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}) = \frac{1}{\pi^{NK}} \frac{1}{[\det(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})]^{\frac{K}{2}}} e^{-\frac{K}{2} \text{Tr}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}})},$$

où $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}} \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^H$ est aussi l'estimée ML de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{C}_x \\ \mathbf{C}_x^* & \mathbf{R}_x^* \end{pmatrix}$.

En pratique les matrices \mathbf{R}_x et \mathbf{C}_x sont inconnues, alors le test LR ne peut pas être employé. C'est pour cela que nous allons utiliser le test du rapport de vraisemblance généralisé GLRT (Generalized LRT) où les matrices \mathbf{R}_x et \mathbf{C}_x sont remplacées par leurs estimées au sens du maximum de vraisemblance (ML) dans le rapport de vraisemblance [73]. Ainsi, la règle de décision du GLR est facilement déduite et elle est donnée par [73, 85] :

$$L(\mathbf{x}, K) \triangleq \frac{p[(\mathbf{x}_k)_{k=1,\dots,K}; \hat{\mathbf{R}}_x, \hat{\mathbf{C}}_x, H_1]}{p[(\mathbf{x}_k)_{k=1,\dots,K}; \hat{\mathbf{R}}_x, \mathbf{O}, H_0]} = \frac{\det(\hat{\mathbf{R}}_x)^K}{\det(\hat{\mathbf{R}}_x)^{K/2}}. \quad (6.4)$$

Ainsi, le GLRT décide H_1 si

$$L(\mathbf{x}, K) > \lambda \quad (6.5)$$

et H_0 autrement où λ représente le seuil de décision.

Il est à noter que pour $N > 1$ il n'existe pas de test de non circularité linéaire ¹ et invariant, uniformément plus puissant UMP (Uniformly Most Powerfull) [98]. Tandis que pour le cas scalaire $N = 1$, le GLRT est le test linéaire invariant UMP donné dans [98].

Il devient spécialement simple et est donné par

$$L(\mathbf{x}, K) = (1 - \hat{\gamma}_x^2)^{-K/2} \quad (6.6)$$

avec $\hat{\gamma}_x = \frac{|\sum_{k=1}^K x_k^2|}{\sum_{k=1}^K |x_k|^2}$ représente l'estimée ML du coefficient de non circularité [39, 72]

$$\gamma_x \triangleq \frac{|\mathbb{E}(x_k^2)|}{\mathbb{E}|x_k|^2}.$$

Avec la monotonie croissance de l'expression (6.6), on déduit facilement que le GLRT décide H_1 si

$$\hat{\gamma}_x > \lambda' \quad (6.7)$$

où λ' représente le nouveau seuil de décision, ce qui est très intuitif.

6.4 Distribution asymptotique du GLR pour des variables aléatoires complexes indépendantes identiquement distribuées (IID)

Afin de pouvoir calculer la distribution asymptotique du GLRT utilisé, on considère dans tout ce qui suit que les échantillons des données d'observation $(\mathbf{x}_k)_{k=1,\dots,K}$ sont de moyennes nulles, non nécessairement gaussiens, indépendants et identiquement distribués.

Pour des observations non gaussiennes, la règle de décision (6.5) n'est plus un GLRT mais reste cependant simple d'implémentation et fournit généralement de bonnes performances en pratique [22]. Nous allons, dans cette partie, étudier les performances asymptotiques de ce GLRT dans le cas scalaire et nous proposerons par la suite une extension au cas multidimensionnel.

¹Dans \mathbb{C} , qui inclue les rotations et les changements d'échelle, mais pas les opérations widely linéaires : $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{C}^2$: αz et non $\alpha z + \alpha' z^*$

6.4.1 Cas d'une variable aléatoire complexe scalaire

Dans le cas scalaire, le résultat suivant est prouvé dans l'annexe C.1 :

Résultat 1. *Sous les hypothèses restrictives H_0 et H_1 , pour $K \rightarrow \infty$ on a la convergence en distribution suivante :*

$$\frac{K}{1 + \frac{\kappa_x}{2}} \tilde{\gamma}_x^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_2^2 \quad \text{sous } H_0 \quad (6.8)$$

$$\sqrt{K}(\tilde{\gamma}_x - \gamma_x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\gamma^2) \quad \text{si } \gamma_x < 1 \quad \text{sous } H_1, \quad (6.9)$$

où χ_2^2 et $\mathcal{N}(0, \sigma_\gamma^2)$ désignent respectivement une distribution de la loi de Khi-Deux à 2 degrés de liberté et une gaussienne de moyenne nulle et de variance σ_γ^2 , avec

$$\sigma_\gamma^2 = (1 - \gamma_x^2)^2 + \gamma_x^2 \kappa_x + \frac{\kappa_x}{2} + \frac{\gamma_x^2 \Re(\kappa'_x)}{2} - 2\gamma_x^2 \Re(\kappa''_x) \quad \text{si } \sigma_\gamma^2 \neq 0. \quad (6.10)$$

où sous les hypothèses H_0 et H_1 , κ_x , κ'_x et κ''_x sont les cumulants normalisés invariants à n'importe quelle rotation de x_k et sont respectivement donnés par $\frac{\text{Cum}(x_k, x_k, x_k^*, x_k^*)}{(\mathbb{E}(|x_k|^2))^2}$, $\frac{\text{Cum}(x_k, x_k, x_k, x_k)}{(\mathbb{E}(x_k^2))^2}$ et $\frac{\text{Cum}(x_k, x_k, x_k, x_k^*)}{(\mathbb{E}(|x_k|^2))(\mathbb{E}(x_k^2))}$.

Pour certaines classes de distributions complexes pour lesquelles les cumulants normalisés κ_x , κ'_x et κ''_x sont redondants, l'expression (6.10) de σ_γ^2 se simplifie. Par exemple, le résultat suivant est démontré en annexe C.2.

Résultat 2. *Pour la classe de distributions complexes elliptiquement symétriques généralisées GCES (Generalized Complex Elliptically Symmetric)² introduite par [73], σ_γ^2 donnée par l'expression (6.10) se réduit à l'expression suivante :*

$$\sigma_\gamma^2 = (1 - \gamma_x^2)^2 \left(1 + \frac{\kappa_x}{2 + \gamma_x^2} \right). \quad (6.11)$$

Le résultat théorique 1 signifie en pratique que pour $K \gg 1$, l'estimée $\tilde{\gamma}_x$ est approximativement de distribution de Rayleigh de paramètre $(1 + \frac{\kappa_x}{2})/K$ et gaussienne $\mathcal{N}(\gamma_x, \sigma_\gamma^2/K)$ sous H_0 et H_1 respectivement. Il est à noter que le domaine de validité de cette approximation dépend de γ_x et de σ_γ^2 à travers la relation grossière $\gamma_x - \frac{2\sigma_\gamma}{\sqrt{K}} > 0$. Concernant l'utilisation pratique de ce résultat, ie la probabilité de détection $P_D \neq 1$ et la probabilité de fausse alarme $P_{FA} \neq 0$, les distributions de $\tilde{\gamma}_x$ sous H_0 et H_1 doivent se chevaucher, ceci est grossièrement atteint pour $\gamma_x - \frac{2\sigma_\gamma}{\sqrt{K}} < \frac{4\sqrt{1 + \kappa_x/2}}{\sqrt{K}}$ comme le montre la figure 6.1

Remarque 15. *Dans le cas particulier d'une variable aléatoire complexe rectiligne ($\gamma_x = 1$), $x_k = r_x e^{\Phi}$ avec r_k est une variable aléatoire réelle et Φ est fixe, le coefficient de non circularité est parfaitement estimé, i.e. $\tilde{\gamma}_x = 1$. Ainsi, le problème de détection devient singulier, de telle manière que pour un seuil donné proche de 1, la probabilité de détection et la probabilité de fausse alarme sont égales à 1 et 0 respectivement.*

²Cette classe inclue la distribution gaussienne

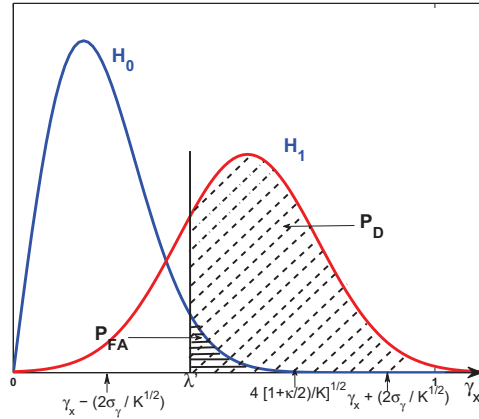


FIGURE 6.1 – Fonction densité de probabilité approchée de $\hat{\gamma}_x$ sous H_0 et H_1

Remarque 16. Dans le cas où $\sigma_\gamma^2 = 0$ avec $\gamma_x < 1$ (cette situation est donnée dans [39]), la séquence $K(\tilde{\gamma}_x - \gamma_x)$ converge en distribution [90, Th.B, p.124] vers une forme hermitienne $\mathbf{r}^H \Omega \mathbf{r}$, où \mathbf{r} est une variable aléatoire complexe gaussienne centrée de dimension égale à 2 dont la distribution est donnée par la partie droite (une seule matrice de covariance) de l'expression (C.1) donnée en annexe C.1 et où notre analyse au premier ordre n'est pas adaptée pour spécifier la matrice Ω .

Remarque 17. Il est à noter que pour γ_x proche de zéro et $K \gg 1$, $2 \ln L(x, K) = -K \ln(1 - \tilde{\gamma}_x^2) \approx K \tilde{\gamma}_x^2$.
De plus, pour des échantillons x_k gaussiens, $\kappa_x = 0$, l'expression (6.8) donne :

$$2 \ln L(x, K) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_2^2, \quad \text{sous } H_0. \quad (6.12)$$

Cette convergence en distribution est conforme au détecteur à taux de fausse alarme constant CFAR (Constant False Alarm Rate) où le degrés de liberté de la distribution Khi-Deux est égal au nombre de paramètres réels de $c_x = E(x_k^2)$ donné dans le théorème de Wilk [100, p. 132]. Mais pour des distributions non gaussiennes, le détecteur (6.7) n'est plus asymptotiquement CFAR. D'un point de vue pratique, en divisant le test statistique $\hat{\gamma}_x$ par $\sqrt{1 + \frac{\hat{\kappa}_x}{2}}$, où $\hat{\kappa}_x$ est une estimée consistante de κ_x , on obtient un GLRT ajusté qui devient asymptotiquement CFAR. Dans ce cas, une fois que le seuil est fixé pour une P_{FA} donnée, la probabilité de détection P_D obtenue dépendra des paramètres γ_x et σ_γ^2 donné par (6.10).

Remarque 18. Pour des observations x_k gaussiennes, $\kappa_x = \kappa'_x = \kappa''_x = 0$ alors la variance σ_γ^2 de la distribution asymptotique de $\tilde{\gamma}_x$ sous l'hypothèse H_1 est égale à $1 - 2\gamma_x^2 + \gamma_x^4$, qui est une fonction décroissante de γ_x . En conséquence, pour une P_{FA} donnée (un seuil λ' fixe), la probabilité de détection P_D est une fonctions croissante de γ_x qui ne dépend pas de la puissance de x_k .

Pour des observations arbitraires non nécessairement gaussiennes, le résultat 1 nous permet

d'écrire les expressions de la P_{FA} et de P_D en fonction du seuil λ' , tel que

$$\begin{aligned} P_{FA} &= P(\tilde{\gamma}_x > \lambda'/H_0) = Q_{\chi^2_2} \left(\frac{K\lambda'}{(1 + \kappa_x/2)} \right) \\ P_D &= P(\tilde{\gamma}_x > \lambda'/H_1) = Q_{\mathcal{N}} \left(\frac{\sqrt{K}(\lambda' - \gamma_x)}{\sigma_\gamma} \right). \end{aligned}$$

où $Q_{\chi^2_2}$ et $Q_{\mathcal{N}}$ sont respectivement les complémentaires des fonctions de distribution cumulative de la loi de Khi-Deux à deux degrés de liberté et de la loi gaussienne centrée de variance unité et où σ_γ est donné par (6.10). A partir de là, on peut facilement déduire une expression exploitable reliant la P_d à la P_{fa} et de tracer des courbes ROC. Ainsi on obtient

$$P_D = Q_{\mathcal{N}} \left(\frac{\sqrt{(1 + \frac{K}{2})Q_{\chi^2_2}^{-1}(P_{FA})} - \sqrt{K}\gamma_x}{\sigma_\gamma} \right) \quad (6.13)$$

On voit clairement à partir de cette expression que pour une P_{FA} fixée, la probabilité de détection P_D est fonction croissante de longueur des donnée K et aussi une fonction croissante en fonction du coefficient de non circularité γ_x pour des données de distribution gaussienne.

6.4.2 Cas d'une variable aléatoire complexe multidimensionnelle

Dans le cas multidimensionnel ($N > 1$), le résultat 1 ne s'étend pas facilement. L'annexe C.3 montre le résultat suivant :

Résultat 3. *Sous l'hypothèses H_1 et pour une distribution arbitraire, pour $K \rightarrow \infty$, la convergence en distribution de la statistique de décision $l(\mathbf{x}, K) \triangleq [L(\mathbf{x}, K)]^{-2/K}$ est donnée par*

$$\sqrt{K}(l(\mathbf{x}, K) - l_1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_1^2), \quad \text{sous } H_1, \quad (6.14)$$

où l_1 et σ_1^2 sont données en annexe C.3.

Pour une distribution gaussienne ³, le théorème de Wilk [100, p. 132] s'applique et donne

$$2 \ln L(\mathbf{x}, K) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{N(N+1)} \quad \text{sous } H_0 \quad (6.15)$$

où le degrés de liberté de la distribution Khi-Deux est égal au nombre $N(N+1)$ des paramètres réels indépendants de \mathbf{C}_x . De plus, sous H_1 , dans le cas où \mathbf{C}_x est proche de \mathbf{O} (à voir une définition plus formelle dans [92, Ch.23]) l'analyse de [54, Sec.II] est valide et donne, pour $K \gg 1$, l'approximation de la distribution suivante

$$2 \ln L(\mathbf{x}, K) \sim_a \chi'^2_{N(N+1)}(\mu) \quad \text{sous } H_1$$

où $\chi'^2_{N(N+1)}(\mu)$ représente la distribution de Khi-Deux non centrale à $N(N+1)$ degrés de liberté et de paramètre de non centralité μ . Ce paramètre représente une mesure de discrimination entre les deux hypothèses H_0 et H_1 , dont l'expression est donnée par [54, exp.4].

³La distribution gaussienne est l'unique distribution pour laquelle la statistique de décision $L(\mathbf{x}, K)$ donnée par (6.4) est un GLR

6.5 Extension aux variables aléatoires complexes NON-IID

Dans des situations d'intérêt pratiques, les données ne sont pas toujours identiquement distribuées. En particulier, dans les systèmes de communication mobiles (OFDM, WCDMA,..), les signaux IID non circulaires deviennent, sous certaines conditions sur le SNR et sur la taille des trames K , NON-IID et circulaires en présence de résidus de fréquence dûs au décalages Doppler introduits par le canal et aux réglages des oscillateurs. Ainsi, dans cette section, on considère le GLRT précédemment dérivé sous l'hypothèse d'une distribution gaussienne, complexe, centrée et IID mais utilisé pour des données indépendantes, centrées et non nécessairement gaussienne identiquement distribuées $^4(x_k)_{k=1,\dots,K}$.

Afin de prendre en compte la dépendance en k de la distribution de x_k , les notations suivantes seront utilisées :

$$r_{x,k} \triangleq \mathbb{E}|x_k^2|, \quad c_{x,k} \triangleq \mathbb{E}(x_k^2), \quad \bar{r}_{x,K} \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_{x,k}, \quad \bar{c}_{x,K} \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c_{x,k},$$

$$\text{Cum}_{x,k} \triangleq \text{Cum}(x_k, x_k, x_k^*, x_k^*), \quad \text{Cum}'_{x,k} \triangleq \text{Cum}(x_k, x_k, x_k, x_k), \quad \text{Cum}''_{x,k} \triangleq \text{Cum}(x_k, x_k, x_k, x_k^*).$$

Pour $(x_k)_{k=1,\dots,K}$ de distribution arbitraire, de moments du 4 ème ordre finis tel que la condition de Lyapunov [62, Th. 2.7.2] suivante est satisfaite 5

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^K \mathbb{E}||x_k^2| - r_{x,k}|^3}{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^K \mathbb{E}((|x_k^2| - r_{x,k})^2)}\right)^3} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^K \mathbb{E}|x_k^2 - c_{x,k}|^3}{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^K \mathbb{E}((x_k^2 - c_{x,k})^2)}\right)^3} = 0, \quad (6.16)$$

où $r_{x,k}$, $c_{x,k}$, $\text{Cum}_{x,k}$, $\text{Cum}'_{x,k}$ et $\text{Cum}''_{x,k}$ sont bornés et on suppose que sous H_0 , les moments de $(x_k)_{k=1,\dots,K}$ sont circulaires jusqu'au 4 ème ordre, le résultat suivant est démontré en annexe C.4 :

Résultat 4. *Sous les hypothèses H_0 et H_1 et pour $K \rightarrow \infty$, on a les convergences en distribution suivantes quand $K \rightarrow \infty$:*

$$\sqrt{\frac{K}{\alpha_K + \frac{\kappa_{x,K}}{2}}} \hat{\gamma}_x \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{R}(1) \quad (6.17)$$

$$\sigma_{\gamma,K}^{-1}(\hat{\gamma}_x - \gamma_{x,K}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1), \quad (6.18)$$

où $\alpha_K \triangleq \frac{1}{\bar{r}_{x,K}^2} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_{x,k}^2$ et $\kappa_{x,K} \triangleq \frac{1}{\bar{r}_{x,K}^2} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \text{Cum}_{x,k}$ et l'expression de $\sigma_{\gamma,K}$ est donnée dans l'annexe C.4. $\gamma_{x,K}$ représente le coefficient de non circularité moyenné en temps donné par

$$\gamma_{x,K} = \frac{|\bar{c}_{x,K}|}{\bar{r}_{x,K}} = \frac{|\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}(x_k^2)|}{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}|x_k|^2}$$

⁴On étudiera uniquement le cas ou les données sont complexes scalaire, car le cas multidimensionnel implique des notations encombrantes.

⁵Qui est clairement satisfaite pour les données décrites par (6.19).

Remarque 19. Dans le cas particulier de données identiquement distribuées, $r_{x,k} = \bar{r}_{x,K} = r_x$, $\frac{\text{Cum}_{x,k}}{r_x^2} = \kappa_x$ et ainsi $\alpha_K = 1$ et $\kappa_{x,K} = \kappa_x$ alors le résultat 4 est réduit au résultat 1 sous H_0 . Sous H_1 , l'expression de $\sigma_{\gamma,K}^2$ se déduit de l'expression donnée dans l'annexe C.4, où $\sigma_{\gamma,K} = \frac{\sigma_\gamma}{\sqrt{K}}$, ainsi le résultat 4 est réduit au résultat 1 sous H_1 .

6.6 Illustrations

Cette section a deux objectifs. Le premier consiste à examiner le domaine de validité de nos résultats asymptotiques et le deuxième consiste à étudier les performances du détecteur GLR pour un exemple spécifique.

Considérons le système MIMO où Q symboles BPSK indépendants et équiprobables $a_{q,k} \in \{+1, -1\}$ sont transmis à travers un canal à bruit blanc, additif, gaussien et circulaire (cet exemple est une extension de celui donné dans [88]). Les symboles $a_{q,k}$ subissent des rotations de phase $\Phi_{q,k}$ indépendamment pour chaque symbole et perturbé par un résidu de fréquence Δf_q . Le vecteur d'observation est donné par

$$\mathbf{x}_k = \sum_{q=1}^Q \sigma_q a_{q,k} e^{i\Phi_{q,k}} e^{i2\pi k \Delta f_q} \mathbf{s}_q + \mathbf{n}_k, \quad (6.19)$$

où σ_q et \mathbf{s}_q représentent les Q amplitudes inconnues et vecteurs directionnels de première composante égale à l'unité respectivement. \mathbf{n}_k sont les composantes indépendantes du bruit gaussien circulaire centré de variance σ_n^2 .

On considère par la suite, trois cas :

Dans le premier cas, il n'y a pas de résidu de fréquence $\Delta f_q = 0$ quel que soit q et que les échantillons de la phase $(\Phi_{q,k})_{k=1,\dots,K, q=1,\dots,Q}$ sont indépendants ainsi que uniformément distribués sur $[0, 2\pi]$ et gaussien de moyenne Φ_{q0} et de variance σ_{Φ_q} sous respectivement H_0 et H_1 . Dans ce contexte, on s'est intéressé par la classification du canal comme cohérent ou partiellement cohérent, qui est en soi un problème de test à deux hypothèses. On peut ainsi déduire que sous H_0 [respectivement sous H_1], on a

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \sum_{q=1}^Q \sigma_q^2 \mathbf{s}_q \mathbf{s}_q^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_Q, \\ \mathbf{C}_x &= \mathbf{O} \text{ [respectivement } \mathbf{C}_x = \sum_{q=1}^Q \sigma_q^2 e^{2i\Phi_{q0}} e^{-2\sigma_{\Phi_q}^2} \mathbf{s}_q \mathbf{s}_q^T \text{]}. \end{aligned}$$

Pour $Q = 1$ et $N = 1$, le calcul des cumulants et du coefficient de non circularité donne sous H_0 :

$$\kappa_x = \frac{-1}{(1 + \rho_x^{-1})^2}$$

et sous H_1

$$\kappa_x = -\frac{1 + e^{-4\sigma_{\Phi_1}^2}}{(1 + \rho_x^{-1})^2}, \quad \kappa'_x = e^{-4\sigma_{\Phi_1}^2} - 3, \quad \kappa''_x = \frac{-2}{1 + \rho_x^{-1}} \text{ et } \gamma_x = \frac{e^{-2\sigma_{\Phi_1}^2}}{1 + \rho_x^{-1}}$$

où $\rho_x \triangleq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_n^2}$ représente le SNR.

La figure 6.2 montre les performances en détection P_d pour différentes P_{fa} fixées avec $Q = N = 1$ en fonction du SNR, pour deux valeurs de σ_{Φ_1} , déduite de la distribution asymptotique de $\hat{\gamma}_x$ donnée par le résultat 1. On voit bien que la probabilité P_d pour une P_{fa} fixée est très sensible à la cohérence du canal. Quand σ_{Φ_1} croît pour un SNR fixe, le coefficient de non circularité γ_x décroît et les performances en détection diminuent.

Dans le deuxième cas, où $Q = N = 1$ et $\Delta f_q = 0$ quel que soit q , le modèle BPSK (6.19) est comparé au modèle purement gaussien obtenu quand $\Phi_{q,k}$ ne dépend pas de k et les symboles $a_{q,k}$ sont complexes circulaires, indépendants de moyenne nulle où des variables aléatoires réelles gaussiennes sous H_0 et H_1 respectivement.

La figure 6.3 montre le coin nord-ouest de la courbe ROC du détecteur GLRT pour $Q = 1$, $K = 100$ et $\rho_x = 0.63(-2dB)$ pour le modèle (6.19) à canal cohérent ($\sigma_{\Phi_1} = 0$) et pour le modèle gaussien avec la même valeur de $\gamma_x = 0.387$. Il est à noter de cette figure que la courbe ROC est très sensible à la distribution de x_k , les performances sont meilleures pour le modèle BPSK comparé au gaussien. Il est à noter que la courbe ROC empirique (Monte Carlo) converge vers celle obtenue en théorie (asymptotique) pour relativement un petit nombre d'échantillons ($K = 100$).

Dans la figure 6.4 sont représentées les courbes ROC pour le détecteur GLRT obtenues pour les mêmes paramètres que la figure 6.3, $K = 100$, mais uniquement pour le modèle BPSK perturbé par quatre valeurs du résidu de fréquence Δf_1 pour lequel :

$$r_{x,k} = \bar{r}_{x,K} = \sigma_1^2 + \sigma_n^2, \quad c_{x,k} = \sigma_1^2 e^{2i\phi_1} e^{4\pi i k \Delta f_1}, \quad \text{Cum}_{x,k} = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \bar{c}_{x,K} &= \sigma_1^2 e^{2i\phi_1} e^{2\pi i(K-1)\Delta f_1} \left(\frac{\sin 2\pi K \Delta f_1}{\sin 2\pi \Delta f_1} \right) \\ \gamma_{x,K} &= \frac{1}{1 + \rho_x^{-1}} \frac{1}{K} \left| \frac{\sin 2\pi K \Delta f_1}{\sin 2\pi \Delta f_1} \right|. \end{aligned}$$

Il est à noter que les performances du détecteur diminuent en augmentant $K\Delta f$ où les meilleures performances sont obtenues quand le résidu de fréquence tend vers zéro. Par exemple pour une $P_{FA} = 0.05$, la probabilité de détection associée est égale à 0.970 dans le cas où $\Delta f = 0$ tandis qu'elle est de l'ordre de 0.960 pour $K\Delta f = 0.002$. Les performances en détection s'écroulent quand $K\Delta f = 0.5$. Ceci correspond à un coefficient de non circularité moyen nul $\gamma_{x,K} = 0$. Aussi, on note que la courbe ROC empirique converge vers celle obtenue en théorie (asymptotique) pour relativement un petit nombre d'échantillons ($K = 100$).

Finalement, dans le troisième cas, on considère le modèle gaussien ⁶ sans résidu de fréquence. Ce modèle est tel que $Q = 2$ sources, $\sigma_1 = \sigma_2$ et $N = 2$ capteurs omnidirectionnels et espacé d'une demi longueur d'onde. Les angles de directions d'arrivée des deux sources sont $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 5$.

⁶ $\Phi_q \triangleq \Phi_{q,k}$ ne dépend pas de k et $a_{q,k}$ sont des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et respectivement complexes circulaires où des réelles gaussiennes sous H_0 et H_1

La figure 6.5 montre les performances en détection P_D pour différentes valeurs fixées de la P_{FA} en fonction du SNR, pour deux valeurs de $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, déduite de la distribution asymptotique de $l(\mathbf{x}, K)$ sous H_1 donnée par le résultat 3 et celle de $2 \ln L(\mathbf{x}, K)$ sous H_0 donnée par l'équation (6.15). On note que le GLRT est très sensible aux variations de $\Delta\Phi$. En particulier pour des sources de même énergie et venant de directions très proches $\mathbf{s}_1 \approx \mathbf{s}_2$, la deuxième matrice de covariance tend vers une matrice nulle $\mathbf{C} \approx \mathbf{O}$ pour $\Delta\Phi = \pi/2$ radians ce qui implique que les performances en détection de non circularité sont très mauvaises.

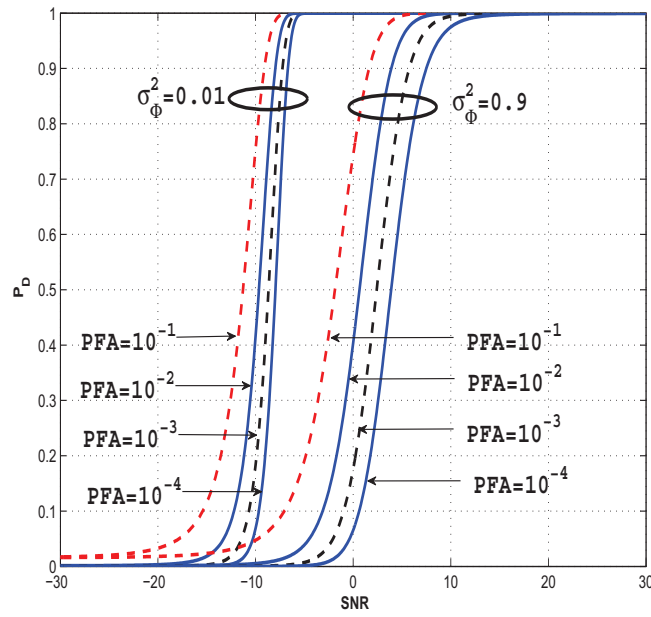


FIGURE 6.2 – P_d pour différentes P_{fa} fixées du modèle (6.19) en fonction du SNR

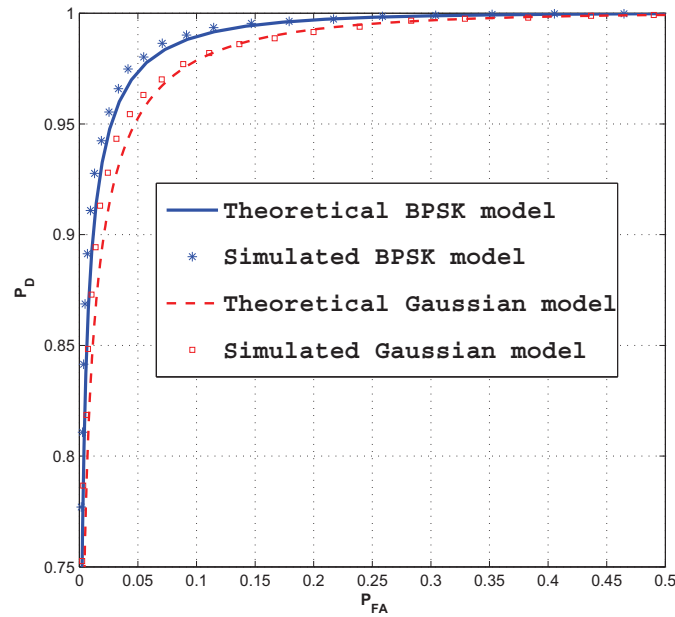


FIGURE 6.3 – Courbes ROC Théorique, asymptotique et empirique (10000 Monte carlo) associées au modèle (6.19) et au modèle gaussien

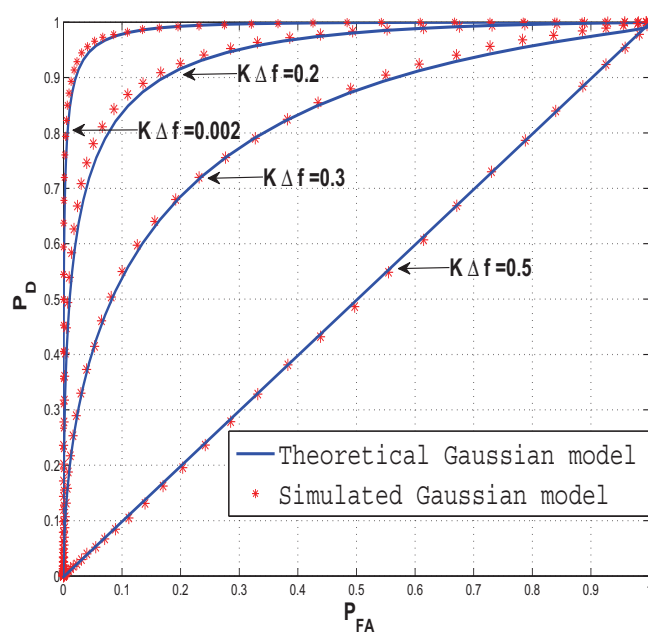


FIGURE 6.4 – Courbes ROC théorique asymptotique et empirique (avec 10000 réalisations Monte-Carlo) associées avec le modèle gaussien pour quatre valeurs de $K\Delta f_1$

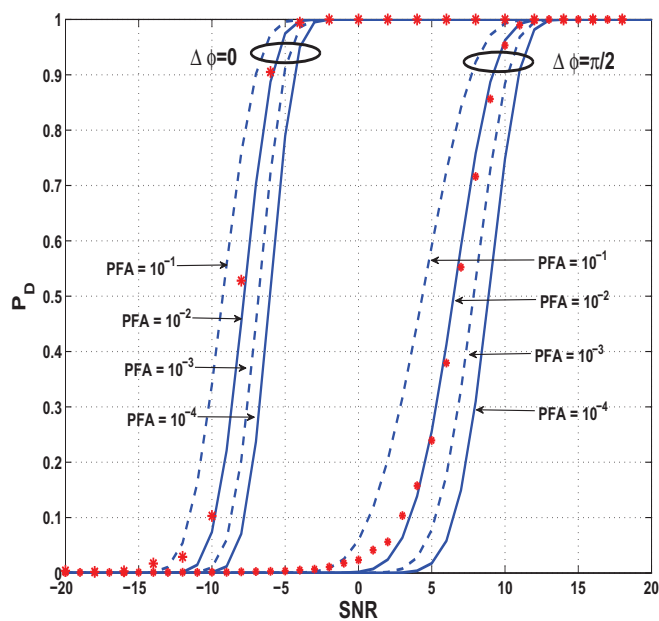


FIGURE 6.5 – P_D pour différentes valeurs fixées de P_{FA} et pour deux valeurs $\Delta\Phi$ en fonction du SNR, $N = Q = 2$ et $K = 100$.

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi quelques nouveaux éclaircissements sur la distribution asymptotique du test GLR de non circularité des signaux complexes, dérivé sous l'hypothèse des distributions gaussiennes équi-distribuées mais utilisé pour sur des signaux gaussiens non nécessairement identiquement distribués. En particulier, dans le cas scalaire, la distribution asymptotique du coefficient de non circularité est donnée sous H_0 et H_1 pour des données, de distributions arbitraires, indépendantes non nécessairement identiquement distribuées. Cela nous permet de traiter des situations pratiques où les signaux des sources sont perturbés par des résidus de fréquence et d'un bruit additif gaussien circulaire. Dans le cas multidimensionnel, la distribution asymptotique du GLR est donnée sous H_0 pour des données IID de distributions arbitraires. Ces résultats nous permettent de calculer la probabilité de détection en fonction de la probabilité de fausse alarme, ainsi établir les courbes ROC du test, approche précédemment non évoquée.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Cette thèse est consacrée à l'exploitation des propriétés de non circularité et de non gaussianité des signaux en traitement d'antennes, particulièrement pour deux types d'applications : le beamforming et la détection.

Dans le cadre de cette étude, la première question qu'on s'est posée est : comment peut-on classer les signaux de radiocommunications selon leur propriété de circularité ? Autrement dit, quelles modulations sont non circulaires au second ordre ? Pour y répondre, nous avons mené une étude non exhaustive sur la propriété de non circularité au second ordre de certaines modulations CPM utilisées en radiocommunications. Nous avons ainsi calculé le coefficient de non circularité instantané et moyen de certaines CPM. Ce qui nous a permis de les classer en modulations circulaires et non circulaires au second ordre. Puis, nous avons vu qu'avec un prétraitement de dérotation et un choix judicieux de l'instant d'échantillonnage, certaines modulations deviennent non circulaires au second ordre. Cette propriété de non circularité acquise va être exploitée par la suite afin d'améliorer les performances.

Par la suite, nous nous sommes intéressés à l'apport que peut amener l'exploitation de la non circularité et de la non gaussianité sur des applications comme le beamforming et la détection.

En beamforming, nous avons vu que les filtres complexes linéaires sont optimaux pour des signaux gaussiens et circulaires. Cependant pour des signaux complexes non circulaires au second ordre, ces filtres deviennent sous optimaux, car ils n'exploitent pas l'information de non circularité véhiculée par ces signaux. C'est dans ce contexte que notre contribution a porté sur l'introduction d'un beamformer MVDR linéaire au sens large colinéaire au beamformer WL MMSE [28] et la présentation d'une nouvelle étude de performances. Ce beamformer est optimal pour la réception d'un signal utile potentiellement non circulaire, de vecteur directionnel connu, noyé dans un bruit total potentiellement non circulaire.

Ce beamformer, basé sur une décomposition orthogonale originale, exploite la non circularité du signal utile et des interférences à la différence du récepteur MVDR introduit dans [21] qui lui exploite uniquement celle des interférences et du beamformer MVDR de Capon qui n'en tient pas compte de la non circularité. À travers la nouvelle étude de performances statistiques que nous avons introduite et réalisée, il a été démontré que ce nouveau beamformer est meilleur que le beamformer de Capon et celui introduit dans [21] en présence de signaux non circulaires, que ce soit le signal utile ou les interférences. En outre, ce beamformer est capable d'éliminer, à partir d'une antenne à N capteurs, jusqu'à $2N - 1$ interférences rectilignes en présence d'un signal utile rectiligne, tandis que le récepteur introduit dans [21] n'en traite que $2(N - 1)$. Ainsi, ce nouveau beamformer est capable de préserver un signal utile rectiligne et de rejeter une interférence rectiligne avec une antenne à 1 capteur ($N = 1$), ce qui le rend capable de faire du SAIC (Single Antenna Interference Cancellation).

En passant du filtrage linéaire au filtrage linéaire au sens large avec les beamformers MVDR_{1,2}, nous avons pu exploiter la non circularité au second ordre. Par ailleurs, en passant à une structure non linéaire, la propriété de non gaussianité est aussi exploitée [31], à travers l'utilisation des statistiques d'ordres supérieurs. C'est dans ce contexte, que notre contribution a porté sur l'introduction d'un beamformer non linéaire, basé sur des filtres de Volterra complexes, exploitant conjointement les deux propriétés de non circularité et de non gaussianité du bruit. Ce beamformer est adapté pour traiter la réception d'un signal inconnu, dont la forme d'onde est inconnue mais de vecteur directionnel connu, et corrompu par des interférences potentiellement non gaussiennes et non circulaires.

Ce beamformer a été étudié à l'ordre trois sous sa forme équivalente GSC pour une structure dite complète tenant compte simultanément des propriétés de non circularité jusqu'à l'ordre quatre et de non gaussianité des interférences. Cette implantation GSC est de complexité moindre et nous a permis d'effectuer les calculs numériques du SINR théorique. Ce beamformer ne requiert aucune information a priori sur les interférences et se trouve particulièrement adapté au contrôle de spectre ou à l'écoute passive dans le contexte non circulaire et/ou non gaussien. En outre, les résultats obtenus permettent d'affirmer que cette structure complète améliore toujours les performances des récepteurs de Volterra étudiés dans [21, 6, 31] et du fameux beamformer MVDR de Capon pour des brouilleurs non circulaires et/ou non gaussiens.

En détection, nous avons étudié les performances (courbes COR) de différents récepteurs pour détecter un signal connu réel dont certains paramètres sont inconnus et perturbé par des interférences inconnues potentiellement non circulaires au second ordre. Nous avons ainsi montré que la prise en considération de la propriété de non circularité potentielle des interférences permet d'améliorer considérablement les performances des récepteurs mono et multi capteurs.

De plus, une analyse de performances statistiques des récepteurs LRT et GLRT pour la détection d'un signal connu réel, de paramètres inconnus et perturbé par des interférences inconnues potentiellement non circulaires au second ordre, a été menée. En étudiant les distributions des statistiques associée au LRT et au GLRT, des expressions de la probabilité de détection P_D et de la probabilité de fausse alarme P_{FA} ont été données. En particulier, les formes exactes des expressions de P_D et P_{FA} ont été élaborées pour les détecteurs LRT et aussi les distributions asymptotiques (vis-à-vis à la longueur des données) de P_D et P_{FA} ont été données pour certains récepteurs GLRT.

Il a été démontré que la prise en compte de la non circularité potentielle des interférences améliore les performances des récepteurs et ceci grâce à l'exploitation de la diversité de phase en plus de la discrimination spatiale. En particulier, la capacité des récepteurs clairvoyants à détecter un signal rectiligne en présence d'une interférence rectiligne à partir d'une antenne mono-capteur.

Dans un autre contexte, nous avons abordé le problème du test de non circularité de signaux aléatoires mono et multidimensionnels complexes. Nous avons donné la distribution asymptotique du GLR de non circularité dérivé sous l'hypothèse de distribution gaussienne mais utilisée sous une distribution arbitraire non nécessairement gaussienne des données. Ces données considérées sont indépendantes, mais non nécessairement identiquement distribuées, ce qui permet de traiter des situations pratiques où les données non circulaires sont perturbées par un résidu de fréquence et un bruit additif gaussien circulaire.

Perspectives

Dans cette thèse, nous avons abordé des problématiques liées à l'exploitation de la non circularité et de la non gaussianité en traitement d'antennes. À l'issue de ces travaux nous identifierons quelques perspectives de recherche futures qui apparaissent dans chaque thème abordé.

Pour les modulations :

- Il serait intéressant d'étendre l'étude de la propriété de non circularité faite pour les modulations CPM à d'autres types de modulations. Particulièrement aux modulations linéaires décalées (famille 3) telles que les modulations OQAM, OPSK, $\frac{\pi}{2}$ BPSK et OQPSK, en calculant le coefficient de non circularité instantané et moyen.

En beamforming linéaire au sens large :

- Pour des travaux futurs, une extension à une structure variante dans le temps linéaire au sens large du nouveau beamformer permettrait de traiter les signaux non stationnaires et non circulaires ayant des résidus de porteuse non nuls. De plus, le développement d'une structure spatio-temporelle permettrait de traiter des canaux à trajets multiples.
- Par ailleurs, il serait intéressant de quantifier la sensibilité de ces filtres aux erreurs de pointage lorsque la direction d'arrivée est mal estimée.

En beamforming non linéaire :

- Concernant la structure non linéaire de Volterra, l'étude des performances ont été données par calcul numérique du SINR théorique. Il serait nécessaire de poursuivre cette étude par l'élaboration d'expressions théoriques du SINR exploitables afin de mieux analyser les performances. Il est à noter que de telles expressions devront nécessiter des approximations pour devenir interprétables (par exemple : $\text{INR} \gg 1, \dots$).
- Comme dans le cas linéaire au sens large, il serait intéressant de faire une extension à une structure variante dans le temps non linéaire afin de traiter les signaux dont le résidu de fréquence est non nul ainsi que quantifier la sensibilité des filtres aux erreurs de pointage.
- Le beamformer de Volterra que nous avons étudié ne tient pas compte de la non circularité et de la non gaussianité du signal utile. Un beamformer de Volterra optimal selon le critère MMSE a été esquissé dans le paragraphe 4.7 mais ses performances n'ont pas été étudiées. En particulier son interprétation en terme de beamformer MVDR₂ n'a pas été abordée et donc l'expression du SINR obtenu n'a pas été donnée. Par suite, diverses comparaisons en terme de SINR seraient intéressantes à mener en fonction des modulations du signal utile et des interférences et en fonction des diverses structures partielles ou complètes mises en œuvre. .
- La structure polynômiale complexe de Volterra bien qu'exploitant la non gaussianité et la non circularité des signaux d'interférence est sans doute largement sous optimale par rapport à l'estimation optimale au sens du critère MMSE. Des structures non linéaires mieux adaptées à des signaux utiles et interférents sous forme de modulations linéaires devraient être recherchées.
- Un beamformer de Volterra a été proposé [31] dans le cadre de brouilleurs circulaires. Ce beamformer est basé sur une structure GSC générée directement à partir d'une projection orthogonale de l'observation $\mathbf{x}(t)$ sur l'espace signal engendré par \mathbf{s} et sur son complément orthogonal. Cette approche conduit à une estimée de $s(t)$ comme issue d'un filtrage WL

polynomial de cette projection sur ce complément orthogonal. Nous avons constaté que dans le cas particulier $N = 2$ et pour des polynômes de la forme $P(z) = a_i z_i + b_{j,k,l} z_j z_k^* z_l$, les performances en SINR de ce beamformer de Volterra était numériquement égales à celles de notre beamformer de structure partielle. Cette égalité doit sans doute être générale pour toute antenne et pour tout polynôme en y associant les termes correspondant retenus dans notre filtrage (4.8). Il serait donc intéressant de démontrer cette égalité afin de relier notre beamformer à celui proposé dans [31].

À terme, dans tous les cas, l'enjeu est de trouver un moyen pour faire du SAIC adapté à des constellations de signaux autres que rectilignes, par exemple QPSK.

En détection de signal :

- Les perspectives en détection d'un signal connu noyé dans bruit potentiellement non circulaire au SO, consisteraient à étendre le calcul des détecteurs GLRT que nous avons présenté, et aussi que leurs performances à des signaux utiles connus non circulaires d'ordre 2, non nécessairement rectilignes.
- Il faudra aussi envisager la détection de signaux utiles dont les résidus de porteuse sont non nuls et inconnu.
- Des détecteurs de type GLRT pourraient s'envisager sous l'hypothèse d'une famille de distribution paramétrée non circulaire plus générale que la loi gaussienne (par exemple, la famille des distributions complexes elliptiques [73]).

En détection de non circularité :

- Dans le contexte de détection de non circularité au second ordre, il serait intéressant d'étudier les performances statistiques de détecteurs ajustés pour être plus robuste à la non gaussianité, en particulier ceux présentés récemment [74, 64].
- L'étude de la détection du caractère rectiligne semble aussi être pertinent d'un point de vue applicatif. Dans ce cadre, le problème de détection sous la forme :

$$\begin{aligned} H_1 & : x_t = s_t + n_t \\ H_0 & : x_t = r_t + n_t \end{aligned}$$

où s_t est rectiligne au second ordre non gaussien, r_t est non rectiligne au second ordre non gaussien et n_t est gaussien circulaire, serait intéressant d'être examiné sous la forme d'un détecteur GLRT dans le cadre d'une famille paramétrique de distributions complexes non circulaires non gaussiennes.

- D'autre part dans le cadre de signaux complexes multidimensionnels, cette notion de signaux rectilignes introduite dans [39] mériterait d'être approfondie. De même, ces définitions au second ordre mériteraient d'être étendues aux ordres supérieurs.

Annexe A

A.1 Performances en SINR en sortie du beamformer MVDR₂

A.1.1 Croissance en fonction de $|\gamma_s|$ pour $d_s = 0$

En utilisant la dérivée de $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ par rapport à $|\gamma_s|$, on obtient

$$\frac{\partial \text{SINR}_{\text{MVDR}_2}}{\partial |\gamma_s|} = 2\pi_s a_s \frac{1 + a_s}{\left[1 + \pi_s a_s (1 - |\gamma_s|^2)\right]^2} > 0,$$

qui est positive quelque soit les paramètres π_s et a_s , donc $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ est une fonction strictement croissante de $|\gamma_s|$ pour $d_s = 0$.

A.1.2 Croissance en fonction de $\cos(\Phi_1)$

A l'aide de la dérivée du $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ par rapport à $\cos(\Phi_1)$ donnée par

$$\frac{\partial \text{SINR}_{\text{MVDR}_2}}{\partial \cos(\Phi_1)} = 2 |\gamma_s| |d_s| \left[1 - \frac{a_s}{\left(\pi_s (1 - |\gamma_s|^2)\right)^{-1} + a_s} \right] > 0,$$

A.1.3 Croissance pour $\cos(\Phi_1) \geq 0$

On écrit (3.38) sous la forme suivante

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}_2} = \pi_s \left[a_s + \frac{a_s |\gamma_s|^2}{1 + \pi_s a_s (1 - |\gamma_s|^2)} + \frac{|d_s|^2 \pi_s (|\gamma_s|^2 - 1)}{1 + \pi_s a_s (1 - |\gamma_s|^2)} + \frac{2 |d_s| \cos(\Phi_1) |\gamma_s|}{1 + \pi_s a_s (1 - |\gamma_s|^2)} \right],$$

qui, pour $\cos(\Phi_1) \geq 0$, est une somme de fonctions strictement croissantes de $|\gamma_s|$ et donc (3.38) est aussi une fonction strictement croissante $|\gamma_s|$ pour $\cos(\Phi_1) \geq 0$.

A.1.4 Etude de la Monotonie de $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ pour $\cos(\Phi_1) < 0$

La dérivée de (3.38) en fonction de $|\gamma_s|$ est donnée par

$$\frac{\partial \text{SINR}_{\text{MVDR}_2}}{\partial |\gamma_s|} = 2\pi_s \frac{[\pi_s a_s |d_s| \cos(\Phi_1)] |\gamma_s|^2 + [\pi_s |d_s|^2 + \pi_s a_s^2 + a_s] |\gamma_s| + |d_s| \cos(\Phi_1)(1 + \pi_s a_s)}{[1 + \pi_s a_s (1 - |\gamma_s|^2)]^2},$$

la monotonie de $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ dépend du signe du numérateur de sa dérivée, qui est une fonction du second degré de $|\gamma_s|$ et qui peut s'écrire sous la forme : $Ax^2 + Bx + C$, avec $x = |\gamma_s|$, $A \triangleq \pi_s a_s |d_s| \cos(\Phi_1) < 0$, $B \triangleq \pi_s |d_s|^2 + \pi_s a_s^2 + a_s > 0$ et $C \triangleq |d_s| \cos(\Phi_1)(1 + \pi_s a_s) < 0$. Ainsi selon la valeur de son discriminant Δ , la variation du SINR en fonction de $|\gamma_s|$ peut être analysée selon les cas suivants :

1. Si $\Delta \leq 0$, le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ est une fonction strictement décroissante de $|\gamma_s|$, ce cas ne semble pas exister, car nous n'avons pas pu exhiber un tel, sans avoir pu démontrer jusqu'ici la non existence.
2. Si $\Delta > 0$, il existe deux racines $|\gamma_{s1}|$ et $|\gamma_{s2}|$ tel que $\left(0 < |\gamma_{s1}| = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} < 1\right)$ car $\sqrt{\Delta} = \sqrt{B^2 - 4AC} < B - 2A$ et que $\left(|\gamma_{s2}| = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} > 1\right)$ car $|\gamma_{s1}| |\gamma_{s2}| = \frac{C}{A} > 1$ ($C = A + |d_s| \cos(\Phi_1)$). Ainsi, le $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ n'est pas une fonction monotone de $|\gamma_s|$ et devient une fonction décroissante pour $0 \leq |\gamma_s| \leq |\gamma_{s1}|$, puis une fonction croissante pour $|\gamma_{s1}| \leq |\gamma_s| \leq 1$, correspondant à la courbe dans la figure A.1.

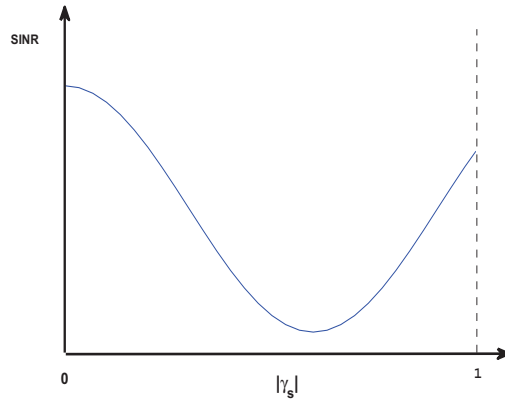


FIGURE A.1 – Allure du $\text{SINR}_{\text{MVDR}_2}$ en fonction $|\gamma_s|$

A.2 Relation SINR et MSE

A.2.1 Preuve de la relation (3.36)

De la décomposition (3.16), la MSE s'écrit $\text{MSE}[\tilde{\mathbf{w}}] = \langle \mathbb{E}[|s(t) - s(t)\tilde{\mathbf{w}}^H\tilde{\mathbf{s}}_\gamma + \tilde{\mathbf{w}}^H\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)|^2] \rangle$.

Après développement et en utilisant (3.28), $\tilde{\mathbf{w}}^H\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}\tilde{\mathbf{w}} = \frac{\pi_s|\tilde{\mathbf{w}}^H\tilde{\mathbf{s}}_\gamma|^2}{\text{SINR}[\tilde{\mathbf{w}}]}$, et sous l'hypothèse que le signal utile est non corrélé avec les interférences et du bruit de fond ($\langle \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{n}}_\gamma(t)s(t)^*] = 0 \rangle$), on obtient directement (3.36).

A.2.2 Preuve de la relation (3.37)

En utilisant (3.23) et (3.29) : $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{WL-MMSE}} = \frac{\pi_s}{1 + \text{SINR}_{\text{MVDR}_2}}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_\gamma}^{-1}\tilde{\mathbf{s}}_\gamma$, ainsi en utilisant cette expression dans (3.36) on obtient (3.37)

A.3 Calcul du SER pour le beamformer MVDR₁

Le calcul du SER pour le beamformer MVDR₁ (3.5.2) est évalué de la même manière que dans cas du MVDR₂ avec des contraintes de minimisation différentes. Comme dans le cas du beamformer MVDR₂, le calcul du taux d'erreur est évalué uniquement dans le cas de la réception de deux sources (un signal utile et une seule interférence) en présence d'un bruit supposé gaussien complexe, centré, blanc spatialement et circulaire. Sous les hypothèses utilisés dans la section 3.7.4, ainsi qu'en reprenant les mêmes notations, les performances SER du beamformer MVDR₁ sont calculées comme suit :

A.3.1 Cas où le signal utile et l'interférence sont BPSK

Dans ce cas ($|\gamma_s| = |\gamma_1| = 1$) et les symboles émis $u(t) \in \{+1, -1\}$ et $v(t) \in \{+1, -1\}$ sont équiprobables. En utilisant les contraintes (3.9), la sortie $y(t)$ du beamformer MVDR₁ devient de la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t) + m(t)\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}^H \tilde{\mathbf{j}}_\gamma + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}^H \tilde{\mathbf{b}}(t) \\ &= u(t)a + v(t)b + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}^H \tilde{\mathbf{b}}(t). \end{aligned}$$

Des calculs similaires que ceux du paragraphe (3.7.4.1) nous donnent le SER de la forme

$$\text{SER} = \frac{1}{2} \left\{ Q \left[\sqrt{\text{SNR}} + \sqrt{\text{INR}} \right] + Q \left[\sqrt{\text{SNR}} - \sqrt{\text{INR}} \right] \right\},$$

où $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$ est de la forme $\tilde{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T]^T$ et donc

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \frac{2\pi_s}{\eta_2 \left[|\tilde{\mathbf{w}}^H|^2 + 2\Re(e^{2i\phi_s} \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2) \right]} \\ \text{INR} &= \frac{2\pi_1 \left(\Re \left[e^{-i\phi_s} \left(e^{i\phi_1} \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{j}}_1 + e^{-i\phi_1} \tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{j}}_2 \right) \right] \right)^2}{\eta_2 \left[|\tilde{\mathbf{w}}|^2 + 2\Re(e^{2i\phi_s} \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2) \right]}. \end{aligned}$$

A.3.2 Cas où le signal utile est BPSK et l'interférence est QPSK

Pour un signal utile BPSK et une interférence QPSK, le beamformer MVDR₁ est identique au beamformer de Capon standard (2.9), par suite le calcul du SER est aussi identique. La sortie du filtre $\mathbf{w}_{\text{Capon}}$ s'écrit

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) = s(t)\mathbf{w}^H \mathbf{s} + m(t)\mathbf{w}^H \mathbf{j} + \mathbf{w}^H \mathbf{b}(t).$$

En utilisant la contrainte (2.7) et en posant $a \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\pi_s} e^{i\phi_s}$, $b \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\pi_1} e^{i\phi_1} \mathbf{w}^H \mathbf{j}$, la sortie $y(t)$ du filtre devient

$$y(t) = u(t)a + v(t)b + \mathbf{w}^H \mathbf{b}(t). \quad (\text{A.1})$$

Comme dans le cas du beamformer MVDR₁ le récepteur sous optimal est donné par la figure 3.5.

A l'entrée du comparateur à seuil

$$z(t) = \Re[a^* y(t)] = \pi_s u(t) + \Re[v(t)a^* b] + \Re[a^* \mathbf{w}^H \mathbf{n}(t)] \quad (\text{A.2})$$

Afin de simplifier les notations on pose $b' = a^*b$ et $n' = \Re [a^* \mathbf{w}^H \mathbf{b}(t)]$, alors

$$z(t) = \pi_s u(t) + \Re [v(t)b'] + n'.$$

Par symétrie le SER est donnée par

$$\begin{aligned} \text{SER} &= p(\hat{u}(t) = 1/u(t) = -1) = p(n' > \pi_s - \Re(v(t)b')) \\ &= \frac{1}{4}p(n' > \pi_s - \Re(b')) + \frac{1}{4}p(n' > \pi_s + \Re(b')) \\ &\quad + \frac{1}{4}p(n' > \pi_s - \Re(ib')) + \frac{1}{4}p(n' > \pi_s + \Re(ib')). \end{aligned}$$

Ainsi, Le SER peut ainsi s'exprimer sous la forme suivante

$$\text{SER} = \frac{1}{4} \left[Q\left(\sqrt{\text{SNR}} - \sqrt{\text{INR}_1}\right) + Q\left(\sqrt{\text{SNR}} + \sqrt{\text{INR}_1}\right) + Q\left(\sqrt{\text{SNR}} - \sqrt{\text{INR}_2}\right) + Q\left(\sqrt{\text{SNR}} + \sqrt{\text{INR}_2}\right) \right], \quad (\text{A.3})$$

La variance du bruit gaussien à l'entrée du comparateur à seuil est donnée par

$$\text{Var}(n') = \frac{\pi_s \eta_2}{2} \left[\|\mathbf{w}\|^2 \right].$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \text{SNR} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi_s}{\text{Var}(n')} = \frac{2\pi_s}{\eta_2 \left[\|\mathbf{w}\|^2 \right]} \\ \text{INR}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{[\Re(b')]^2}{\text{Var}(n')} = \frac{2\pi_1 \left[\Re\left(e^{i(\phi_1 - \phi_s)} \mathbf{w}^H \mathbf{j}\right) \right]^2}{\eta_2 \left[\|\mathbf{w}\|^2 \right]} \\ \text{INR}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{[\Re(ib')]^2}{\text{Var}(n')} = \frac{2\pi_1 \left[\Re\left(i e^{i(\phi_1 - \phi_s)} \mathbf{w}^H \mathbf{j}\right) \right]^2}{\eta_2 \left[\|\mathbf{w}\|^2 \right]}. \end{aligned}$$

A.3.3 Cas où le signal utile est QPSK et l'interférence est BPSK

Puisque l'expression de la sortie $y(t)$ du beamformer MVDR₁ est identique à celle obtenu à la sortie beamformer MVDR₂, le calcul du SER est aussi identique à celui mené dans le paragraphe 3.7.4.3 en remplaçant $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_2}$ par $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}$, sachant que dans ce cas que la sortie du beamformer MVDR₁

$$y(t) = u(t)a + v(t)c + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}_1}^H \tilde{\mathbf{b}}(t).$$

A.4 Schéma pour application en détection

A l'aide des notations de l'équation (3.55), on obtient le schéma fonctionnel suivant :

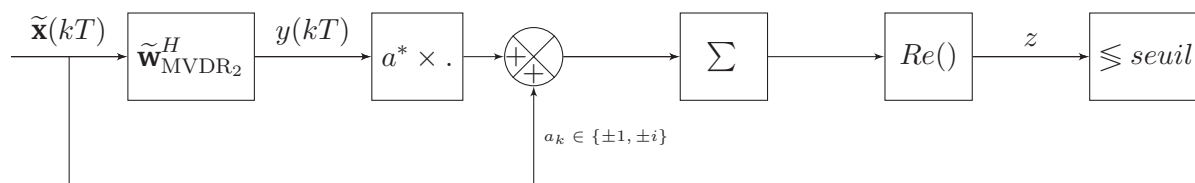


FIGURE A.2 – Schéma fonctionnel de l'application du beamformer $MVDR_2$ en détection

A.5 Algorithme JADE étendu

Afin d'estimer les directions d'arrivées des signaux bande étroite sans aucune information a priori sur la forme d'onde, nous avons utilisé une méthode d'identification aveugle utilisant les statistique d'ordre supérieur.

Pour l'implémentation du beamformer $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR2}}$, on a estimé la direction d'arrivée du signal utile par identification aveugle en adaptant l'algorithme JADE [15] à notre modèle d'observations étendu.

On considère le modèle de signaux suivant, pour la réception de M sources noyées dans un bruit blanc gaussien reçues par une antennes à M capteurs ,

$$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=1}^M s_p(t) \mathbf{a}_p + \mathbf{n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (\text{A.4})$$

où $\mathbf{x}(t)$ est le vecteur des observations ($N \times 1$), \mathbf{A} est la matrice de mélange ($N \times M$), supposée de rang plein, dont les colonnes sont les vecteur directionnels \mathbf{a}_p associés au sources $s_p(t)$ regroupées dans un vecteur $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ est le vecteur bruit supposé blanc, gaussien, circulaire au second ordre et de moyenne nulle et de variance μ .

A.5.1 Blanchiment

L'ensemble des techniques d'identification aveugle comporte une étape préliminaire de blanchiment qui simplifie le problème en le normalisant. Cette étape de blanchiment exploite les statistique d'ordre deux en blanchissant la partie signal de l'observation. Dans notre cas le blanchiment est appliqué au vecteur d'observation étendu $\tilde{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{x}(t)^T, \mathbf{x}(t)^H]^T$ où on blanchit la partie signal du vecteur étendu $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ en multipliant ce dernier par l'inverse d'une racine carrée quelconque de la matrice de covariance formée par la partie signal qu'on notera $\mathbf{W} = \mathbf{R}_{\text{signal}}^{-1/2}$. La matrice de covariance de l'observation étendue s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{R}_{\text{signal}} + \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}} \quad (\text{A.5})$$

Après multiplication de $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ par $\mathbf{R}_{\text{signal}}^{-1/2}$ on obtient un vecteur $\underline{\tilde{\mathbf{x}}}(t)$ dont la matrice de covariance s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\underline{\tilde{\mathbf{x}}}} = \mathbf{I} + \mu \mathbf{R}_{\text{signal}}^{-1/2} \quad (\text{A.6})$$

On a ainsi simplifié le problème d'identification en le mettant sous une forme standard normalisée, ce qui permet de récrire (A.4) de la manière suivante :

$$\underline{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=1}^M \underline{s}_p(t) \underline{\mathbf{a}}_p + \underline{\mathbf{n}}(t) \quad (\text{A.7})$$

où tous les vecteurs sont de dimension $M \times 1$, et tous les signaux sources sont de puissance unité et les vecteurs directionnels recherchés $\underline{\mathbf{a}}_1, \dots, \underline{\mathbf{a}}_p$ constituent une base orthonormée de l'espace de dimension M . La quadri-covariance est définie par le tenseur de taille $(M \times M \times M \times M)$ et s'écrit :

$$\underline{Q}_{\underline{\tilde{\mathbf{x}}}} = \sum_{p=1}^M k_p (\underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{a}}_p^*) (\underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{a}}_p^*) = \sum_{p=1}^M k_p (\underline{\mathbf{a}}_p^* \underline{\mathbf{a}}_p) (\underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{a}}_p^*) \quad (\text{A.8})$$

A.5.2 Critère de diagonalisation conjointe

Les cumulants d'ordre quatre sont utilisés à travers la quadri-covariance de taille $(M \times M)$, c.a.d, on définit l'opérateur linéaire qui, à toute matrice hermitienne H , associe la matrice hermitienne $\underline{Q}_{\tilde{\mathbf{x}}}(H)$ définie pour les vecteurs normalisés après blanchiment par :

$$\underline{Q}_{\tilde{\mathbf{x}}}(H) = \sum_{p=1}^M k_p(\underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{a}}_p^*)(\underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{a}}_p^*) H = \sum_{p=1}^M k_p(\underline{\mathbf{a}}_p^* H \underline{\mathbf{a}}_p)(\underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{a}}_p^*) \quad (\text{A.9})$$

où k_p désigne le Kurtosis défini dans 1. On remarque que $\underline{Q}_{\tilde{\mathbf{x}}}(H)$ est une somme pondérée de dyades $(\underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{a}}_p^*)$, ce qui signifie qu'elle admet des directions d'arrivées comme vecteurs propres. Donc pour obtenir ces vecteurs directeurs, on diagonalise conjointement une famille de matrices de l'image de la quadri-covariance, et comme, en général on ne dispose que de la quadri-covariance estimée $\hat{\underline{Q}}_{\tilde{\mathbf{x}}}(H)$, les matrices de l'image de $\underline{Q}_{\tilde{\mathbf{x}}}(H)$ ne se diagonalisent pas toutes dans la même base, donc il faut trouver la base où toutes ces matrices soient simultanément les plus diagonales possible. Cela revient à trouver la matrice unitaire qui, pour l'ensemble des matrices hermitiennes (H_1, \dots, H_k) , maximise le critère suivant :

$$C(\mathbf{V}, H_1, \dots, H_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=1}^K |\text{Diag}(\mathbf{V}^H H_r \mathbf{V})|^2 \quad (\text{A.10})$$

A.5.3 Algorithme E-JADE

C'est un algorithme d'identification aveugle, qui consiste en la diagonalisation conjointe approchée des matrices propres (Joint Approximate Diagonalization of Eigen-matrices), défini par les étapes suivantes :

Etape.1 Former la matrice de covariance estimée $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ à partir des observations étendues $\tilde{\mathbf{x}}(t)$,

Etape.2 Calculer la matrice de blanchiment $\hat{\mathbf{W}}$,

Etape.3 Former les cumulants d'ordre quatre du processus blanchi $\hat{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{W}}\mathbf{x}(t)$, et calculer les N plus significatives valeurs propres et vecteurs propres associés $(\hat{\lambda}_r, \hat{M}_r | 1 \leq r \leq n)$,

Etape.4 Diagonalisation conjointe de l'ensemble $\hat{N}_e = \{\hat{\lambda}_r, \hat{M}_r | 1 \leq r \leq n\}$ par une matrice unitaire $\hat{\mathbf{U}}$ (par une extension de la technique de JACOBI à plusieurs matrices).

Etape.5 Estimation de la matrice de mélange $\hat{\mathbf{A}}$ par $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{W}}^{\#} \hat{\mathbf{U}}$.

Annexe B

B.1 Théorème central limite de Lyapunov

Théorème 2. Soient y_1, y_2, \dots, y_n des variables aléatoires IID, de moyenne nulle $E[y_i] = 0$, de variance $\sigma^2 > 0$ et $E[y_i^3] < \infty$. Si une suite déterministe $x_{n,i}$ à deux indices ($i \leq n$) satisfait :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_{n,i}|^3\right)^2 = o\left[\sum_{i=1}^n x_{n,i}^2\right]^3 \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

Alors [62, Th. 2.7.3]

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_{n,i} y_i}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n x_{n,i}^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

B.2 Expression de λ_K

La matrice d'information de Fisher correspondant à la distribution complexe, gaussienne, non singulière et non circulaire de $(\mathbf{x}_k)_{k=1,\dots,K}$ est déduite de la formule de Slepian Bangs étendue au cas gaussien non circulaire [38, result 1] donnée par :

$$(\mathbf{I}_K(\theta))_{m,n} = \sum_{k=1}^K a_k^2 \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial \theta_m} \right)^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial \theta_n} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\tilde{n}}}{\partial \theta_m} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{\tilde{n}}}{\partial \theta_n} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \right] \quad (\text{B.1})$$

où $\tilde{\mathbf{m}} \triangleq \sqrt{\pi_s} \tilde{\mathbf{S}}_{\Phi}$.

Il est à noter que $\tilde{\mathbf{m}}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{n}}$ dépendent uniquement de θ_r et θ_s respectivement.

En conséquence ces paramètres sont découplés dans la matrice d'information de Fisher c.a.d., $\mathbf{I}_{a,b}(\theta_a, \theta_b) = \mathbf{O}$ et donc l'expression (5.60) de λ_K se réduit à $\theta_{a1}^T \mathbf{I}_{a,a}(\mathbf{0}, \theta_b) \theta_a$, ce qui donne à partir de (B.1)

$$\lambda_K = \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right) \theta_{a1}^T \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial \theta_{a1}} \right)^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial \theta_{a1}} \right) \theta_{a1}$$

où $\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial \theta_{a1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} & i\mathbf{s} \\ \mathbf{s}^* & -i\mathbf{s}^* \end{pmatrix}$ dans le cas de OPT₂ et OPT₅.

Et $\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial \theta_{a1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & i\mathbf{I} \\ \mathbf{I}^* & -i\mathbf{I}^* \end{pmatrix}$ dans le cas de OPT₆ et OPT₉.

Et $\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial \theta_{a1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} & i\mathbf{s} & \sqrt{\pi_s} e^{i\Phi_s} \mathbf{s}' \\ \mathbf{s}^* & -i\mathbf{s}^* & \sqrt{\pi_s} e^{-i\Phi_s} \mathbf{s}'^* \end{pmatrix}$ dans le cas de OPT₁₀ et OPT₁₁, avec $\mathbf{s}' \triangleq \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta_s}$.

On a $\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial \theta_{a1}} \theta_{a1} = \tilde{\mathbf{m}} = \sqrt{\pi_s} \tilde{\mathbf{S}}_{\Phi}$ pour les détecteurs OPT₂, OPT₅, OPT₆ et OPT₉ [respectivement $\sqrt{\pi_s} (\tilde{\mathbf{S}}_{\Phi} + \theta_s \tilde{\mathbf{S}}'_{\Phi})$ pour les détecteurs OPT₁₀ et OPT₁₁], ce qui prouve la relation (5.62).

Annexe C

C.1 Preuve Résultat 1

Sous l'hypothèse H_1 , (6.9) provient directement de [39, result.3]. Sous H_0 , le résultat [39, result.3] n'est plus valide, mais l'analyse de [39] s'applique. Le théorème central limite ¹ standard appliqué aux variables aléatoires complexes, bi-dimensionnelles, indépendantes et identiquement distribuées $\begin{pmatrix} \hat{r}_x \\ \hat{c}_x \end{pmatrix}$ avec $\hat{r}_x = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |x_k|^2$ et $\hat{c}_x = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k^2$, donne pour $\gamma_x = 0$

$$\sqrt{K} \begin{pmatrix} \hat{r}_x - r_x \\ \hat{c}_x - c_x \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_C \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_x^4 + \text{Cum}_x & \text{Cum}_x''^* \\ \text{Cum}_x'' & 2\sigma_x^4 + \text{Cum}_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_x^4 + \text{Cum}_x & \text{Cum}_x'' \\ \text{Cum}_x'' & \text{Cum}_x' \end{pmatrix} \right), \quad (\text{C.1})$$

où $\sigma_x^2 \triangleq \text{E} |x_k|^2$, $\text{Cum}_x \triangleq \text{Cum}(x_k, x_k, x_k^*, x_k^*)$, $\text{Cum}_x' \triangleq \text{Cum}(x_k, x_k, x_k, x_k)$ et $\text{Cum}_x'' \triangleq \text{Cum}(x_k, x_k, x_k, x_k^*)$.

Considérons maintenant la construction par étapes (mapping), suivante :

$$(\hat{r}_x, \hat{c}_x) \mapsto \hat{m}_x = \frac{\hat{c}_x}{\hat{r}_x} \mapsto \hat{\gamma}_x = |\tilde{m}_x|, \quad (\text{C.2})$$

la différentielle de la première étape est $dm = \frac{1}{r} dc$ sous H_0 , le théorème de continuité standard sur les fonctions régulières des statistiques gaussiennes asymptotiques [90, Th. A, p.122] peut s'appliquer. En conséquences, on obtient une convergences en distribution vers une distribution gaussienne complexe, centrée de variance $\frac{1}{\sigma_x^4}(2\sigma_x^4 + \text{Cum}_x)$ et de pseudo-variance $\frac{1}{\sigma_x^4} \text{Cum}_x'$ tel que

$$\sqrt{K} (\hat{m}_x - 0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_C \left(0, 2 + \frac{\text{Cum}_x}{\sigma_x^4}, \frac{\text{Cum}_x'}{\sigma_x^4} \right). \quad (\text{C.3})$$

Cette distribution gaussienne complexe devient circulaire pour x_k circulaire jusqu'au 4 ème ordre. Ainsi, avec $\hat{\gamma}_x^2 = |\hat{m}_x|^2$, la convergence en distribution (6.8) est prouvée.

¹ $\mathcal{N}_C(\mathbf{m}, \mathbf{R}, \mathbf{C})$ représente la distribution gaussienne complexe de moyenne \mathbf{m} et matrices de covariances \mathbf{R} et \mathbf{C}

C.2 Preuve Résultat 2

Soient les définitions suivantes :

Définition C.2.1. Une fonction $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est appelé \mathbb{R} -linéaire si pour tous scalaires $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : L(az_1 + bz_2) = aL(z_1) + bL(z_2)$. De même si cette équation est valide pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ alors on dit que L est \mathbb{C} -linéaire [73, 53].

Définition C.2.2. La distribution bidimensionnelle réelle sphérique symétrique (SS) (x, y) est définie tel que : $z \triangleq x + iy$ est circulaire (z et $ze^{i\theta}$ de même distribution $\forall \theta \in \mathbb{R}$).

Définition C.2.3. La distribution bidimensionnelle réelle elliptiquement symétrique (RES) est définie par la distribution de (w_1, w_2) qui est une transformation affine de la variable bidimensionnelle sphérique symétrique (x, y) tel que :

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Définition C.2.4. La distribution complexe elliptiquement symétrique généralisées GCES (Generalized Complex Elliptically Symmetric) d'une variable aléatoire complexe scalaire $x_k \in \mathbb{C}$ est définie par la distribution d'une variable réelle $(\Re(x_k), \Im(x_k))$ elliptiquement symétrique RES (Real Elliptically Symmetric). Dans le cas centré, cette distribution est définie comme une transformation linéaire dans \mathbb{R}^2 d'une distribution sphérique symétrique [59].

A partir de ces définitions, comme une transformation linéaire dans \mathbb{R}^2 est équivalente à une transformation \mathbb{R} -linéaire dans \mathbb{C} [53], alors il est facile de montrer qu'une variable aléatoire complexe x_k est dite de distribution GCES, s'il existe des scalaires complexes (a, b) tel que $x_k = au_k + bu_k^*$ où u_k est une variable aléatoire complexe circulaire.

En conséquence, les cumulants des x_k satisfont les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Cum}(x_k, x_k, x_k^*, x_k^*) &= ((|a|^2 + |b|^2)^2 + 2|a|^2|b|^2) \text{Cum}(u_k, u_k, u_k^*, u_k^*) \\ \text{Cum}(x_k, x_k, x_k, x_k) &= 6a^2b^2 \text{Cum}(u_k, u_k, u_k^*, u_k^*) \\ \text{Cum}(x_k, x_k, x_k, x_k^*) &= 3ab(|a|^2 + |b|^2) \text{Cum}(u_k, u_k, u_k^*, u_k^*). \end{aligned}$$

En utilisant

$$E|x_k|^2 = (|a|^2 + |b|^2)E|u_k|^2 \quad \text{and} \quad E(x_k^2) = 2abE|u_k|^2,$$

les cumulants normalisés κ'_x et κ''_x deviennent :

$$\kappa'_x = \kappa''_x = \left(\frac{3}{2 + \gamma_x^2} \right) \kappa_x.$$

En remplaçant ces expressions dans (6.10), on obtient directement l'expression (6.11) du résultat 2.

C.3 Preuve Résultat 3

Avec $l(\mathbf{x}, K) = \det[\mathbf{I} - (\widehat{\mathbf{R}}_x^{-1} \widehat{\mathbf{C}}_x)^* \widehat{\mathbf{R}}_x^{-1} \widehat{\mathbf{C}}_x]$, où $\widehat{\mathbf{R}}_x \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H$ et $\widehat{\mathbf{C}}_x \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T$, la preuve du résultat 3 suit les mêmes étapes que celle du résultat 1.

Le calcul de la distribution asymptotique de $l(\mathbf{x}, K)$ sous l'hypothèse H_1 est basé sur le mapping suivant :

$$(\widehat{\mathbf{R}}_x, \widehat{\mathbf{C}}_x) \mapsto \widehat{\mathbf{M}}_x = \widehat{\mathbf{R}}_x^{-1} \widehat{\mathbf{C}}_x \mapsto \widehat{\Sigma}_x = \widehat{\mathbf{M}}_x^* \widehat{\mathbf{M}}_x \mapsto l(\mathbf{x}, K) = \det[\mathbf{I} - \widehat{\Sigma}_x]. \quad (\text{C.4})$$

En utilisant la distribution gaussienne asymptotique de $(\widehat{\mathbf{R}}_x, \widehat{\mathbf{C}}_x)$ [37, 39] issue du théorème central limite standard, les différentielles sur les différentes étapes de (C.4) et les propriétés classiques de l'opérateur vectorisation $\text{vec}(\cdot)$ [65, Ch.2.4], le théorème standard de continuité sur les fonctions régulières des statistiques gaussiennes asymptotiques [90, p.122] est appliqué. Ainsi, les étapes de cette démonstration sont comme suit :

Étape 1 : la différentielle de \mathbf{M}_x et sa vectorialisation s'écrivent :

$$\begin{aligned} d\mathbf{M}_x &= -\mathbf{R}_x^{-1} d\mathbf{R}_x \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C}_x + \mathbf{R}_x^{-1} d\mathbf{C}_x \\ \text{vec}(d\mathbf{M}_x) &= -[(\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C}_x)^T \otimes \mathbf{R}_x^{-1}] \text{vec}(d\mathbf{R}_x) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}_x^{-1}) \text{vec}(d\mathbf{C}_x) \\ &= \mathbf{D}_{M,R} \text{vec}(d\mathbf{R}_x) + \mathbf{D}_{M,C} \text{vec}(d\mathbf{C}_x), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

où \otimes désigne le produit de Kronecker.

La distribution asymptotique de $\text{vec}(\widehat{\mathbf{R}}_x, \widehat{\mathbf{C}}_x)$ est donnée dans [39] tel que :

$$\sqrt{K} [\text{vec}(\widehat{\mathbf{R}}_x, \widehat{\mathbf{C}}_x) - \text{vec}(\mathbf{R}_x, \mathbf{C}_x)] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_C(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \mathbf{R}_R & \mathbf{R}_{R,C} \\ \mathbf{R}_{C,R} & \mathbf{R}_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{C}_R & \mathbf{C}_{R,C} \\ \mathbf{C}_{C,R} & \mathbf{C}_C \end{pmatrix})$$

où $\mathbf{R}_R, \mathbf{R}_C, \mathbf{R}_{R,C}, \mathbf{R}_{C,R}, \mathbf{C}_R, \mathbf{C}_C, \mathbf{C}_{R,C}, \mathbf{C}_{C,R}$ sont les différentes matrices de covariance déduites à partir de l'identité :

$$E(x_1 x_2 x_3 x_4) = E(x_1 x_2) E(x_3 x_4) + E(x_1 x_3) E(x_2, x_4) + E(x_1 x_4) E(x_2 x_3) + \text{Cum}(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

où x_t est une variable aléatoire centrée complexe de distribution arbitraire. Ces matrices sont calculées dans [39] et sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_R &= \mathbf{R}_x^* \otimes \mathbf{R}_x + \mathbf{P}(\mathbf{C}_x \otimes \mathbf{C}_x^*) + \mathbf{Q}_x \\ \mathbf{R}_C &= \mathbf{R}_x \otimes \mathbf{R}_x + \mathbf{P}(\mathbf{R}_x \otimes \mathbf{R}_x) + \mathbf{Q}'_x \\ \mathbf{C}_R &= \mathbf{R}_R \mathbf{P} \\ \mathbf{C}_C &= \mathbf{C}_x \otimes \mathbf{C}_x + \mathbf{P}(\mathbf{C}_x \otimes \mathbf{C}_x) + \mathbf{Q}''_x \\ \mathbf{R}_{R,C} &= \mathbf{R}_{C,R}^H = \mathbf{C}_x^* \otimes \mathbf{R}_x + \mathbf{P}(\mathbf{R}_x \otimes \mathbf{C}_x^*) + \mathbf{Q}'''_x \\ \mathbf{C}_{R,C} &= \mathbf{C}_{C,R}^T = \mathbf{R}_x^* \otimes \mathbf{C}_x + \mathbf{P}(\mathbf{C}_x \otimes \mathbf{R}_x^*) + \mathbf{Q}''''_x. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

où $(\mathbf{Q}_x)_{i+(j-1)K, k+(l-1)K} = \text{Cum}(\mathbf{x}_{t,i}, \mathbf{x}_{t,j}^*, \mathbf{x}_{t,k}^*, \mathbf{x}_{t,l})$, $(\mathbf{Q}'_x)_{i+(j-1)K, k+(l-1)K} = \text{Cum}(\mathbf{x}_{t,i}, \mathbf{x}_{t,j}, \mathbf{x}_{t,k}^*, \mathbf{x}_{t,l}^*)$,
 $(\mathbf{Q}''_x)_{i+(j-1)K, k+(l-1)K} = \text{Cum}(\mathbf{x}_{t,i}, \mathbf{x}_{t,j}, \mathbf{x}_{t,k}, \mathbf{x}_{t,l})$, $(\mathbf{Q}'''_x)_{i+(j-1)K, k+(l-1)K} = \text{Cum}(\mathbf{x}_{t,i}, \mathbf{x}_{t,j}^*, \mathbf{x}_{t,k}, \mathbf{x}_{t,l})$,
 $(\mathbf{Q}''''_x)_{i+(j-1)K, k+(l-1)K} = \text{Cum}(\mathbf{x}_{t,i}, \mathbf{x}_{t,j}, \mathbf{x}_{t,k}^*, \mathbf{x}_{t,l}^*)$ et \mathbf{P} désigne la matrice de permutation qui,

pour toute matrice carrée \mathbf{A} , transforme $\text{vec}(\mathbf{A}^T)$ en $\text{vec}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{x}_t = (x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,N})^T$.

En utilisant le théorème de continuité standard sur les fonctions régulières des statistiques gaussiennes asymptotiques [90, p.122] et à partir de (C.5), on a :

$$\sqrt{K}[\text{vec}(\widehat{\mathbf{M}}_x) - \text{vec}(\mathbf{M}_x)] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_C(\mathbf{0}, \mathbf{R}_M, \mathbf{C}_M)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M &= (\mathbf{D}_{M,R} \ \mathbf{D}_{M,C}) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_R & \mathbf{R}_{R,C} \\ \mathbf{R}_{C,R} & \mathbf{R}_C \end{pmatrix} (\mathbf{D}_{M,R} \ \mathbf{D}_{M,C})^H \\ \mathbf{C}_M &= (\mathbf{D}_{M,R} \ \mathbf{D}_{M,C}) \begin{pmatrix} \mathbf{C}_R & \mathbf{C}_{R,C} \\ \mathbf{C}_{C,R} & \mathbf{C}_C \end{pmatrix} (\mathbf{D}_{M,R} \ \mathbf{D}_{M,C})^T. \end{aligned}$$

Étape 2 : la différentielle de Σ_x et sa vectorialisation s'écrivent :

$$\begin{aligned} d\Sigma_x &= \mathbf{M}_x^* d\mathbf{M}_x + d\mathbf{M}_x^* \mathbf{M}_x \\ \text{vec}(d\Sigma_x) &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_x^*) \text{vec}(d\mathbf{M}_x) + (\mathbf{M}_x^T \otimes \mathbf{I}) \text{vec}(d\mathbf{M}_x^*) = \mathbf{D}_{\Sigma,M} \text{vec}(d\mathbf{M}_x) + \mathbf{D}_{\Sigma,M^*} \text{vec}(d\mathbf{M}_x^*) \end{aligned}$$

Ce qui donne en utilisant le théorème de continuité standard sur les fonctions régulières des statistiques gaussiennes asymptotiques [90, p.122]

$$\sqrt{K}[\text{vec}(\widehat{\Sigma}_x) - \text{vec}(\Sigma_x)] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_C(\mathbf{0}, \mathbf{R}_\Sigma, \mathbf{C}_\Sigma)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\Sigma &= (\mathbf{D}_{\Sigma,M} \ \mathbf{D}_{\Sigma,M^*}) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_M & \mathbf{C}_M \\ \mathbf{C}_M^* & \mathbf{R}_M^* \end{pmatrix} (\mathbf{D}_{\Sigma,M} \ \mathbf{D}_{\Sigma,M^*})^H \\ \mathbf{C}_\Sigma &= (\mathbf{D}_{\Sigma,M} \ \mathbf{D}_{\Sigma,M^*}) \begin{pmatrix} \mathbf{C}_M & \mathbf{R}_M \\ \mathbf{R}_M^* & \mathbf{C}_M^* \end{pmatrix} (\mathbf{D}_{\Sigma,M} \ \mathbf{D}_{\Sigma,M^*})^T. \end{aligned}$$

Étape 3 : Suivant le même raisonnement, la différentielle de $l_x = \det(\mathbf{I} - \Sigma_x)$ s'écrit [65, Th.1, p.149] :

$$\begin{aligned} dl_x &= -\det[\mathbf{I} - \Sigma_x] \text{Tr}[(\mathbf{I} - \Sigma_x)^{-1} d\Sigma_x] \\ &= -\det[\mathbf{I} - \Sigma_x] \text{vec}^T[(\mathbf{I} - \Sigma_x^T)^{-1}] \text{vec}(d\Sigma_x) = \mathbf{D}_{l,\Sigma} d\Sigma_x \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant le théorème de continuité standard sur les fonctions régulières des statistiques gaussiennes asymptotiques [90, p.122]

$$\sqrt{K}(l(\mathbf{x}, K) - l_1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_R(0, \sigma_1^2)$$

$$\text{où } l_1 = \det[\mathbf{I} - (\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C}_x)^* \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C}_x] < 1 \text{ et } \sigma_1^2 = \mathbf{D}_{l,\Sigma} \mathbf{R}_\Sigma \mathbf{D}_{l,\Sigma}^H = \mathbf{D}_{l,\Sigma} \mathbf{C}_\Sigma \mathbf{D}_{l,\Sigma}^T.$$

Il est à noter que ces étapes ne s'appliquent pas toutes sous l'hypothèse H_0 , tel que, pour \mathbf{x}_k circulaire jusqu'au 4^{ème} ordre, uniquement la première étape peut s'appliquer, Car dans ce cas, $\mathbf{C}_x = \mathbf{0}$ ce qui donne, d'après l'expression (C.5) :

$$\text{vec}(d\mathbf{M}_x) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}_x^{-1}) \text{vec}(d\mathbf{C}_x)$$

soit

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_M &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}_x^{-1}) \mathbf{R}_c (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}_x^{-1}) \\ \mathbf{C}_M &= \mathbf{O}\end{aligned}$$

avec $\mathbf{C}_c = \mathbf{O}$ d'après (C.6) car l'hypothèse de circularité à l'ordre 4 implique $\mathbf{Q}_x'' = \mathbf{O}$. Ainsi on a

$$\sqrt{K} (\text{vec}(\widehat{\mathbf{M}}_x) - \mathbf{0}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_C(\mathbf{0}, \mathbf{R}_M, \mathbf{O}) \quad (\text{C.7})$$

Par conséquence, comme dans le cas scalaire, $\widehat{\mathbf{M}}_x$ reste asymptotiquement de distribution gaussienne circulaire sous H_0 avec \mathbf{x}_k circulaire jusqu'au 4 ème ordre. La différentielle du mapping $\widehat{\mathbf{M}}_x \mapsto \widehat{\Sigma}_x$ au point $\mathbf{M}_x = \mathbf{O}$ est égale à zéro, ce qui était aussi vrai dans le cas scalaire. Mais dans ce dernier cas, nous avons accès à la différentielle d'ordre deux, ce qui n'est pas le cas en multidimensionnel où notre analyse au premier ordre ne permet pas d'obtenir cette différentielle.

C.4 Preuve Résultat 4

Afin de trouver la distribution asymptotique du GLR dans le cas non IID et d'étendre les résultats de la section 6.4, on remplace le théorème central limite classique par le théorème de Lyapunov [62, Th. 2.7.1] en supposant que la condition de Lyapunov (6.16) est satisfaite pour la séquence de variables aléatoires centrées $|x_k^2| - r_{x,k}$ et $x_k^2 - c_{x,k}$. En effet, le théorème de Lyapunov² est valide pour des variables aléatoires réelles scalaires u_k , l'extension de cette validité à la variable aléatoire complexe multidimensionnelle $(|x_k^2| - r_{x,k}, x_k^2 - c_{x,k})$ n'est pas directe et plus compliquée, ainsi on doit approfondir d'avantage l'étude ;

Pour commencer, l'extension du théorème de Lyapunov aux variable réelles centrée et multidimensionnelles \mathbf{u}_k est directe par l'application du théorème de Cramer-Wold [62, Th. 5.1.8], pour lequel la séquence $\mathbf{R}_{u,K}^{-1/2} \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_k$ converge en distribution à une gaussienne centrée $\mathcal{N}_R(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ où $\mathbf{R}_{u,K}^{1/2}$ est une racine carrée arbitraire de $\mathbf{R}_{u,K} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}(\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T)$. Puis, du fait de l'isomorphisme entre \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 , le théorème de Lyapunov s'applique à la variable aléatoire complexe centrée multidimensionnelle $(|x_k^2| - r_{x,k}, x_k^2 - c_{x,k})$. Ici, en utilisant [41, Th. 1], il existe une séquence de 2×2 matrices \mathbf{A}_K tel que

$$\mathbf{A}_K^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{r}_x - \bar{r}_{x,K} \\ \widehat{c}_x - \bar{c}_{x,K} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_C(\mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{\Delta}),$$

avec $\mathbf{\Delta}$ diagonale tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_K \mathbf{A}_K^H &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}|\widehat{r}_x - \bar{r}_{x,K}|^2 & \mathbb{E}(\widehat{r}_x - \bar{r}_{x,K})(\widehat{c}_x - \bar{c}_{x,K})^* \\ \mathbb{E}(\widehat{c}_x - \bar{c}_{x,K})(\widehat{r}_x - \bar{r}_{x,K})^* & \mathbb{E}|\widehat{c}_x - \bar{c}_{x,K}|^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_K \mathbf{\Delta} \mathbf{A}_K^T &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}(\widehat{r}_x - \bar{r}_{x,K})^2 & \mathbb{E}(\widehat{r}_x - \bar{r}_{x,K})(\widehat{c}_x - \bar{c}_{x,K}) \\ \mathbb{E}(\widehat{c}_x - \bar{c}_{x,K})(\widehat{r}_x - \bar{r}_{x,K}) & \mathbb{E}(\widehat{c}_x - \bar{c}_{x,K})^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où les termes de ces deux matrices sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{r}_x - \bar{r}_{x,K})^2 &= \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K (\text{Cum}_{x,k} + |c_k|^2 + r_k^2), \\ \mathbb{E}|\widehat{c}_x - \bar{c}_{x,K}|^2 &= \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K (\text{Cum}_{x,k} + 2r_k^2), \quad \mathbb{E}(\widehat{c}_x - \bar{c}_{x,K})^2 = \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K (\text{Cum}'_{x,k} + 2c_k^2), \\ \mathbb{E}(\widehat{c}_x - \bar{c}_{x,K})(\widehat{r}_x - \bar{r}_{x,K}) &= \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K (\text{Cum}''_{x,k} + 2c_k r_k). \end{aligned}$$

Sous H_0 , les moment de $(x_k)_{k=1,\dots,K}$ sont circulaires jusqu'à l'ordre 4, donc on aura $c_k = 0$, $\text{Cum}'_{x,k} = 0$ et $\text{Cum}''_{x,k} = 0$. La méthode delta [62, Ch. 2] issue du théorème de continuité standard appliqué au mapping C.2 avec la différentielle associée $dm = -\frac{c}{r^2} dr + \frac{1}{r} dc$, qui sous

²donné pour la facilité de compréhension du lecteur de ce document :Si u_k est une séquence aléatoire réelle centrée satisfaisant $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^K \mathbb{E}|u_k|^3}{(\sum_{k=1}^K \mathbb{E}(u_k^2))^3} = 0$, la séquence $\frac{\sum_{k=1}^K u_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^K \mathbb{E}(u_k^2)}}$ converge en distribution à une gaussienne centrée de variance unité $\mathcal{N}_R(0, 1)$.

H_0 donne $dm = \frac{1}{r} dc$, et après quelques manipulations algébriques directes donne :

$$\sqrt{\frac{K}{(\bar{r}_{x,K})^2 \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (r_{x,k}^2 + \frac{1}{2} \text{Cum}_{x,k})}} \left(\hat{m}_x - \frac{\bar{c}_{x,K}}{\bar{r}_{x,K}} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_C(0, 1, 0).$$

Avec $\gamma_{x,K} \triangleq \frac{|\bar{c}_{x,K}|}{\bar{r}_{x,K}}$, qui représente le coefficient de non circularité moyen, Ainsi (6.17) est facilement obtenue.

De la même manière, sous H_1 , la relation (6.18) est prouvée à partir des mêmes étapes données en annexe de [39] et en utilisant la méthode delta avec les deux différentielles associées suivantes :

$$dm = -\frac{c}{r^2} dr + \frac{1}{r} dc \quad \text{and} \quad d\gamma = \frac{1}{2\gamma} (m^* dm + m dm^*),$$

et les covariances suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \hat{m}_x - \frac{\bar{c}_{x,K}}{\bar{r}_{x,K}} \right|^2 &= \begin{pmatrix} -\frac{\bar{c}_{x,K}}{\bar{r}_{x,K}^2} & \frac{1}{\bar{r}_{x,K}} \end{pmatrix} \mathbf{A}_K \mathbf{A}_K^H \begin{pmatrix} -\frac{\bar{c}_{x,K}^*}{\bar{r}_{x,K}^2} \\ \frac{1}{\bar{r}_{x,K}} \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{K}\right) \stackrel{\text{def}}{=} r_{m,K} + o\left(\frac{1}{K}\right), \\ \mathbb{E} \left(\hat{m}_x - \frac{\bar{c}_{x,K}}{\bar{r}_{x,K}} \right)^2 &= \begin{pmatrix} -\frac{\bar{c}_{x,K}}{\bar{r}_{x,K}^2} & \frac{1}{\bar{r}_{x,K}} \end{pmatrix} \mathbf{A}_K \mathbf{\Delta} \mathbf{A}_K^T \begin{pmatrix} -\frac{\bar{c}_{x,K}}{\bar{r}_{x,K}^2} \\ \frac{1}{\bar{r}_{x,K}} \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{K}\right) \stackrel{\text{def}}{=} c_{m,K} + o\left(\frac{1}{K}\right). \end{aligned}$$

Ainsi (6.18) est prouvée avec $\Sigma_{\gamma,K}$ donné par

$$\Sigma_{\gamma,K}^2 = \frac{1}{4\gamma_{x,K}^2} \begin{pmatrix} \frac{\bar{c}_{x,K}^*}{\bar{r}_{x,K}} & \frac{\bar{c}_{x,K}}{\bar{r}_{x,K}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{m,K} & c_{m,K} \\ c_{m,K}^* & r_{m,K}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{c}_{x,K}}{\bar{r}_{x,K}} \\ \frac{\bar{c}_{x,K}^*}{\bar{r}_{x,K}} \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

- [1] H. Abeida and J. P. Delmas, "MUSIC-like estimation of direction of arrival for non circular sources," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 54, no. 7, pp. 2678–2690, July 2006.
- [2] O. Agazzi, D. G. Messerschmitt, and D. A. Hodges, "Non linear echo cancellation of data signals," *IEEE Trans. on Communications*, vol. COM-30, no. 11, pp. 2421–2433, November 1982.
- [3] L. Albera, A. Ferreol, P. Comon, and P. Chevalier, "Blind Identification of Overcomplete Mixtures of sources (BIOME)," *Linear Algebra and its Applic*, vol. 391, pp. 3–30, November 2004.
- [4] P. O. Amblard and P. Duvaut, "Filtrage adapté dans le cas gaussien complexe non circulaire," in *Proc GRETSI*, Juan-Les-Pins, September 1995.
- [5] E. Biglieri, A. Gersho, R. Gitlin, and T. Lim, "Adaptive cancellation of non linear intersymbol interference for voiceband data transmission," *IEEE J. Selected Areas in Communications*, vol. JSAC-2, no. 2, pp. 765–777, February 1984.
- [6] A. Blin, "Traitement d'antennes pour signaux non circulaires et/ou non-gaussiens," Ph.D. dissertation, Nice-Spohia Antipolis university, November 2008.
- [7] A. V. D. Bos, "The multivariate complex normal distribution - A generalization," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 41, no. 2, pp. 537–539, March 1995.
- [8] S. Bose and A. O. Steinhardt, "Optimum array detector for a weak signal in unknown noise," *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst*, vol. 32, no. 3, pp. 911–922, July 1996.
- [9] L. E. Brennan and I. S. Reed, "Theory of adaptive radar," *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst*, vol. 9, no. 2, pp. 237–252, March 1973.
- [10] ———, "An adaptive array signal processing algorithm for communications," *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst*, vol. 18, no. 1, pp. 124–130, January 1982.
- [11] W. M. Brown and R. B. Crane, "Conjugate linear filtering," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 15, no. 4, pp. 462–465, July 1969.
- [12] S. Buzzi and M. Lops, "Performance analysis for the improved linear multi-user detectors in BPSK-modulated DS-CDMA systems," *IEEE Trans. Communications*, vol. 51, no. 1, pp. 37–42, January 2003.
- [13] S. Buzzi, M. Lops, and A. Tulino, "A new family of MMSE multi-user receivers for interference suppression in DS-CDMA systems employing BPSK modulation," *IEEE Trans. Communications*, vol. 49, no. 1, pp. 154–167, January 2001.

- [14] J. Capon, R. J. Greenfield, and R. J. Kolker, "Multidimensional maximum likelihood processing of a large aperture seismic array," *Proc IEEE*, vol. 60, no. 2, pp. 191–211, February 1967.
- [15] J. F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non-gaussian signals," *IEE Proceedings-F*, vol. 140, no. 6, pp. 362–370, December 1993.
- [16] P. Charge, Y. Wang, and J. Saillard, "Exploitation de la non circularité dans les systèmes de télécommunications : Application à la localisation de sources," *Antenne non standard, journée SEE*, pp. 131–135, March 2001.
- [17] —, "An extended Cyclic MUSIC Algorithm," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, no. 7, pp. 1695–1701, July 2003.
- [18] P. Chevalier, "Optimal array processing for non stationary signals," in *Proc. ICASSP*, Atlanta (USA), May 1996, pp. 2868–2871.
- [19] —, "Optimal time invariant and widely linear spatial filtering for radiocommunications," in *Proc. EUSIPCO*, Tristre (Italy), September 1996, pp. 559–562.
- [20] —, "Optimal separation of independent narrow-band sources-concept and performance," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 73, no. 1-2, pp. 27–47, February 1999.
- [21] P. Chevalier and A. Blin, "Widely linear MVDR beamformers for the reception of an unknown signal corrupted by non circular interference," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 55, no. 11, pp. 5323–5336, November 2007.
- [22] P. Chevalier, A. Blin, F. Pipon, and F. Delaveau, "GLRT-based array receivers to detect a known signal corrupted by noncircular interferences," in *Proc EUSIPCO*, Poznan (Poland), September 2007.
- [23] P. Chevalier, J. P. Delmas, and A. Oukaci, "Optimal widely linear MVDR beamforming for noncircular signals," in *Proc. ICASSP*, Taipei, Taiwan, March 2009, pp. 3573–3576.
- [24] —, "Performances analysis of a new widely linear MVDR beamformer," in *Proc. EUSIPCO*, Glasgow, Scotland, August 2009, pp. 587–591.
- [25] P. Chevalier, P. Duvaut, and B. Picinbono, "Complex transversal Volterra filters optimal for detection and estimation," in *Proc. ICASSP*, Toronto, Canada, March 1990, pp. 3537–3540.
- [26] —, "Le filtrage de Volterra transverse réel et complexe en traitement du signal," *Traitement du signal, Numéro spécial non linéaire et non gaussien*, 1990.
- [27] P. Chevalier and B. Picinbono, "Complex Linear-Quadratic Systems for detection and array processing," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, no. 10, pp. 2631–2634, October 1996.
- [28] P. Chevalier and F. Pipon, "New insights into optimal widely linear array receivers for the demodulation of BPSK, MSK and GMSK signals corrupted by non circular interference - application to saic," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 54, no. 3, pp. 870–883, March 2006.

-
- [29] —, “Optimal array receivers for synchronization of a BPSK signal corrupted by non circular interference,” in *Proc. ICASSP*, Toulouse (France), May 2006.
- [30] P. Chevalier, F. Pison, and F. Delaveau, “Second order optimal array receiver for synchronization of BPSK, MSK and GMSK signals corrupted by non circular interferences,” *Eurasip. On Advances in Signal Processing*, 2007.
- [31] P. Chevalier, A. Souloumian, and C. Demeure, “Improvement in non-gaussian jammers rejection with a non-linear spatial filter,” in *Proc. ICASSP*, Minneapolis (USA), April 1993, pp. 670–673.
- [32] P. Ciblat, P. Loubaton, E. Serpedin, and G. Giannakis, “Performance analysis of blind carrier frequency offset estimators for non-circular transmissions through frequency selective channels,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no. 1, pp. 130–140, January 2001.
- [33] P. Comon, “Circularité et signaux aléatoires à temps discret,” *Traitement du Signal*, vol. 11, no. 5, pp. 417–420, December 1994.
- [34] P. Comon, R. Liu, and D. Slock, “Path-Wise Wide-Sense Polynomial Receiver for Downlink UMTS Communications,” in *39th Annual Allerton Conference on Communication Control, and Computing*, Monticello, USA, October 2001.
- [35] T. Cover and J. Thomas, *Elements of information theory*. USA : Wiley Interscience, 2006.
- [36] D. Darsena, G. Gelli, L. Paura, and F. Verde, “Widely linear equalization and blind channel identification for interference-contaminated multi-carrier systems,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 3, pp. 1163–1177, 2005.
- [37] J. P. Delmas, “Asymptotically minimum variance second order estimation for non circular signals with application to DOA estimation,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, no. 5, pp. 1235–1241, May 2004.
- [38] J. P. Delmas and H. Abeida, “Stochastic Cramer-Rao bound for noncircular signals with application to DOA estimation,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, no. 11, pp. 3192–3199, November 2004.
- [39] —, “Asymptotic distribution of circularity coefficients estimate of complex random variables,” *Signal Processing (Elsevier)*, vol. 89, pp. 2670–2675, December 2009.
- [40] D. M. Douglas and R. A. Scholtz, “Acquisition of spread spectrum signal by adaptive array,” *IEEE Trans. Acou. Speech. Signal Proc*, vol. 37, no. 8, pp. 1253–1270, August 1989.
- [41] J. Eriksson and V. Koivunen, “Complex random vectors and ICA models : Identifiability, uniqueness, and separability,” *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 52, no. 3, pp. 1017–1029, March 2006.
- [42] O. L. Frost, “An algorithm for linearly constrained adaptive array processing,” *Proc IEEE*, vol. 60, no. 8, pp. 926–935, August 1972.
- [43] W. A. Gardner, “Cyclic Wiener filtering : Theory and method,” *IEEE Trans. Communications*, vol. 41, no. 1, pp. 151–163, 1993.
-

- [44] G. Gelli, L. Paura, and R. P. Ragozini, "Blind widely linear multiuser detection," *IEEE Communications Letters*, vol. 4, no. 6, pp. 187–189, June 2000.
- [45] K. Gerlach, "A comparison of two adaptive detection schemes," *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Sys.*, vol. 30, no. 1, pp. 30–40, January 1994.
- [46] —, "The effect of signal contamination on two adaptive detectors," *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Sys.*, vol. 31, no. 1, pp. 297–309, January 1995.
- [47] W. H. Gerstacker, R. Schober, and A. Lampe, "Receiver with widely linear processing for frequency selective channels," *IEEE Trans. Communications*, vol. 51, no. 9, pp. 1512–1523, September 2003.
- [48] J. S. Goldstein, I. S. Reed, and L. L. Scharf, "A multistage representation of the wiener filter based on orthogonal projections," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 2943–2959, 1998.
- [49] O. Grellier and P. Comon, "Closed-form equalization," in *IEEE Workshop on Sig. Proc. Adv. in Wireless Com. (SPAWC)*, Annapolis, USA, May 1999.
- [50] J. W. R. Griffiths, "Adaptive array processing. A tutorial," vol. 130, February 1983.
- [51] L. J. Griffiths and C. W. Jim, "An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming," *IEEE Trans. Antennas Propagation*, vol. 30, no. 1, pp. 27–34, January 1982.
- [52] R. Hu and H. M. Ahmed, "Echo cancellation in high speech data transmission systems using adaptive layered bilinear filters," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 42, no. 2-4, pp. 655–663, November 1994.
- [53] E. O. J. Eriksson and V. Koivunen, "Essential statistics and tools for complex random variables," *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 58, no. 10, pp. 5400–5408, October 2010.
- [54] S. M. Kay, "Asymptotically optimal detection in incompletely characterized non-gaussian noise," *IEEE Trans. Acou. Speech. Signal Proc.*, vol. 37, no. 5, pp. 626–633, May 1989.
- [55] —, *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume 2 : Detection Theory*. New York : Prentice-Hall, Inc, 1998.
- [56] E. J. Kelly, "An adaptive detection algorithm," *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst.*, vol. 22, no. 1, pp. 115–127, March 1986.
- [57] —, "Performance of an adaptive detection algorithm ; Rejection of unwanted signals," *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Sys.*, vol. 25, no. 2, pp. 122–133, March 1989.
- [58] T. Koh and E. J. Powers, "Second order Volterra filtering and its application to non linear system identification," *IEEE Trans. Acou. Speech. Signal Proc.*, vol. ASSP-33, no. 6, pp. 1445–1455, December 1985.
- [59] S. K. K.T. Fang and K. Ng, *Symmetric multivariate and related distributions*. London : Chapman an Hall, 1990.

-
- [60] A. Lampe, R. Schober, W. Gerstacker, and J. Huber, "A novel iterative multi-user detector for complex modulation schemes," *Selected Areas in Communications*, vol. 20, no. 2, pp. 339–350, February 2002.
- [61] G. Lazzarin, S. Pupolin, and A. Sarti, "Nonlinearity compensation in digital radio systems," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 42, no. 2-4, pp. 988–998, February 1994.
- [62] E. L. Lehmann, *Elements of large sample theory*. Springer texts in Statistics, 1998.
- [63] H. C. Lin, "Spatial correlations in adaptive arrays," *IEEE Trans. Antennas Propagation*, vol. 30, no. 3, pp. 212–223, March 1982.
- [64] T. A. M. Novey and A. Roy, "Circularity and Gaussianity detection using the complex generalized gaussian distribution," *IEEE Trans. Signal Processing Letters*, vol. 16, no. 11, pp. 993–996, December 2009.
- [65] J. R. Magnus and H. Neudecker, *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics, revised edition*. Wiley Series in probability and statistics, 1999.
- [66] K. V. Mardia, J. T. Kent, and J. M. Bibby, *Multivariate analysis*. New-York : Academic, 1979.
- [67] D. Matera, L. Paura, and F. Sterle, "Widely linear MMSE equalizer for MIMO linear time-dispersive channels," *Electronics Letters*, vol. 39, no. 20, pp. 1481–1482, October 2003.
- [68] —, "Widely linear Decision Feedback Equalizer for time-dispersive linear MIMO channels," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 7, pp. 2525–2536, July 2005.
- [69] R. A. Monzingo and T. W. Miller, *Introduction to adaptive arrays*. John Wiley and Sons, 1980.
- [70] F. D. Neeser and J. L. Massey, "Proper complex random process with application to information theory," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, no. 4, pp. 1293–1302, July 1993.
- [71] R. D. Nowak and B. D. V. Veen, "Volterra filter equalization : A fixed point approach," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 377–388, February 1997.
- [72] E. Ollila, "On the circularity of a complex random variable," *IEEE Trans. Signal Processing Letters*, vol. 15, November 2008.
- [73] E. Ollila and V. Koivunen, "Generalized complex elliptical distributions," in *Proc 3rd Sensor Array Multichannel Signal Processing Workshop*, Sitges (Spain), July 2004.
- [74] —, "Adjusting the generalized likelihood ratio test of circularity robust to non-normality," in *IEEE Int. Workshop on Signal Processing Advanced in Wireless Communications SPAWC 2009*, Perugia (Italy), June 2009.
- [75] B. Picinbono, "On circularity," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 12, pp. 3473–3482, December 1994.
- [76] —, "Second order complex random vectors and normal distributions," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, no. 10, pp. 2637–2640, October 1996.
-

- [77] B. Picinbono and P. Chevalier, "Widely linear estimation with complex data," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 8, pp. 2030–2033, August 1995.
- [78] —, "Extensions of the minimum variance method," *Signal Processing ELSEVIER*, vol. 49, pp. 1–9, 1996.
- [79] B. Picinbono and P. Duvaut, "Optimal linear quadratic systems for detection and estimation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 34, no. 1, pp. 304–311, March 1988.
- [80] —, "Geometrical properties of optimal Volterra filters for signal detection," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36, no. 5, pp. 1061–1068, September 1990.
- [81] A. Reed, J. D. Mallet, and L. E. Brennan, "Rapid convergence rate in adaptive arrays," *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst.*, vol. AES-10, no. 6, pp. 853–863, November 1974.
- [82] F. C. Robey, D. R. Fuhmann, E. J. Kelly, and R. Nitzberg, "A CFAR adaptive matched filter detector," *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst.*, vol. 28, no. 1, pp. 208–216, January 1992.
- [83] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener theory of non linear systems*. New York : Wiley, 1980.
- [84] R. Schober, W. Gerstacker, and A. Lampe, "Data-aided and blind stochastic gradient algorithms for widely linear MMSE MAI suppression for DA-CDMA," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, no. 3, pp. 746–756, March 2004.
- [85] P. J. Schreier, L. Scharf, and A. Hanssen, "MUSIC-like estimation of direction of arrival for non circular sources," *IEEE Trans. Signal Processing Letters*, vol. 13, no. 7, pp. 433–436, July 2006.
- [86] P. J. Schreier and L. L. Scharf, "Second order analysis of improper complex random vectors and processes," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, no. 3, pp. 714–725, March 2003.
- [87] P. J. Schreier, L. L. Scharf, and A. Hassen, "Detection and estimation of improper complex random signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 51, no. 1, pp. 306–312, January 2005.
- [88] —, "A generalized likelihood ratio test for impropriety of complex signals," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 15, no. 7, pp. 433–436, 2006.
- [89] G. Segó-Granados, J. A. Fernández-Rubio, and C. Fernández-Prades, "ML estimator and hybrid beamformer for multipath and interference mitigation in GNSS receivers," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 3, pp. 1194–1208, March 2005.
- [90] R. J. Serfling, *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, 1980.
- [91] T. W. F. Stroud, "Fixed alternatives and Wald's formulation of the non central asymptotic behavior of the likelihood ratio statistics," *Annals of Mathematics statistics*, vol. 43, no. 2, pp. 447–454, 1972.
- [92] A. Stuart and J. K. Ord, *Advanced theory of statistics, fifth edition, Vol.2*. Edward Arnold, 1991.
- [93] A. L. Swindlehurst and P. Stoica, "Maximum likelihood methods in radar array processing," *Proc IEEE*, vol. 86, no. 2, pp. 421–441, February 1998.

- [94] H. L. V. Trees, *Detection, estimation and modulation theory - Part I*. John Wiley and Sons, 1968.
- [95] —, *Optimal array processing*. New York : Wiley, 2002.
- [96] H. Trigui and D. T. M. Slock, "Performance bounds for cochannel interference cancellation within the current GSM standard," *Signal Processing (Elsevier)*, vol. 80, no. 7, pp. 1335–1346, July 2000.
- [97] B. D. V. Veen and K. M. Buckley, "Beamforming : A Versatile Approach to Spatial Filtering," *IEEE ASSP Magazine*, pp. 4–24, April 1988.
- [98] A. T. Walden and P. Rubin-Delanchy, "On testing for impropriety of complex valued gaussian vectors," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 57, no. 3, pp. 825–834, March 2009.
- [99] Y. C. Youn and H. Leib, "Maximizing SNR in improper complex noise and applications to CDMA," *IEEE Communications Letters*, vol. 1, no. 1, pp. 5–8, January 1997.
- [100] G. A. Young and R. L. Smith, *Essentials of Statistical inference*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 2005.

