



**HAL**  
open science

# Contribution à la conception et la modélisation de transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma

Clément Nadal

► **To cite this version:**

Clément Nadal. Contribution à la conception et la modélisation de transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2011. Français. NNT: . tel-00621056v2

**HAL Id: tel-00621056**

**<https://theses.hal.science/tel-00621056v2>**

Submitted on 23 Apr 2012 (v2), last revised 10 Nov 2011 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

**Discipline ou spécialité :** Génie électrique

---

**Présentée et soutenue par** *Clément Nadal*

**le 5 juillet 2011**

**Titre :** *Contribution à la modélisation et la conception de transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma*

---

**Ecole doctorale :** *Génie Electrique, Electronique et Télécommunications (GEET)*

**Unité de recherche :** *Laboratoire LAPLACE - UMR CNRS 5213*

**Directeurs de Thèse**

*Dr. Yvan LEFEVRE*

*Dr. François PIGACHE*

**Rapporteurs**

*Pr. François COSTA*

*Pr. Elie LEFEUVRE*

---

**Membres du jury**

<i>Pr. François COSTA</i>	<i>Professeur des Universités</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>Pr. Elie LEFEUVRE</i>	<i>Professeur des Universités</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>Pr. Bertrand NOGAREDE</i>	<i>Professeur des Universités</i>	<i>Examineur</i>
<i>Dr. Frédéric GIRAUD</i>	<i>Maître de Conférences</i>	<i>Examineur</i>
<i>Dr. Yvan LEFEVRE</i>	<i>Chargé de Recherches</i>	<i>Directeur de thèse</i>
<i>Dr. François PIGACHE</i>	<i>Maître de Conférences</i>	<i>Co-encadrant de thèse</i>



*A mes parents adorés,  
à mes frères, Benjamin et Adrien, dont je suis si fier,  
à ma petite mamie, Juliette, trop vite partie.*





# Résumé

L'émergence des transformateurs piézoélectriques coïncident avec le développement dans les années 1950 des céramiques ferroélectriques appartenant à la famille cristalline des pérovskites qui n'ont cessé de s'améliorer depuis. Outre la capacité dont bénéficient ces structures, les transformateurs piézoélectriques offrent des performances remarquables en termes de gain en tension et rendement utiles pour des applications nécessitant une adaptation de tension ou une isolation galvanique, parfaitement dédiés aux applications de faibles puissances à haut rendement.

Toutefois, les transformateurs piézoélectriques peuvent être déviés de leurs applications premières. En effet, la dernière décennie a été marquée par l'apparition de générateur de plasma par effet piézoélectrique utilisant principalement des architectures de type transformateur. Pourtant, si quelques applications usuelles illustrent parfaitement cette interaction, la compréhension des phénomènes physiques qui en sont à l'origine reste à approfondir. L'objectif de cette thèse est d'en expliquer les fondements par une approche méthodique.

Ce travail s'articule autour de plusieurs étapes comprenant la mise en œuvre d'une méthode systématique de la modélisation analytique d'un transformateur piézoélectrique, de l'étude de la carte de champ produit par un transformateur ainsi qu'une étude expérimentale vue des bornes en guise de premières investigations.

La modélisation analytique est basée sur l'exploitation du Principe de Moindre Action (PMA). A partir de la théorie linéaire de la piézoélectricité, un modèle général applicable à toutes les géométries de transformateur, exploitant des modes de couplage piézoélectrique multiples, est proposé. Son caractère multimodal est par ailleurs mis en exergue. Cette modélisation est appliquée à une structure classique de transformateur piézoélectrique de type Rosen et les résultats obtenus sont validés d'une part par une identification numérique, issue d'un logiciel de calcul par éléments finis, et d'autre part par une caractérisation expérimentale.

La modélisation analytique précédente ne tient pas compte dans sa mise en œuvre de l'influence de l'environnement dans lequel évolue le transformateur piézoélectrique. Afin de caractériser le potentiel électrique produit, un modèle numérique 2D du champ électrique environnant est proposé selon la méthode des différences finies. Ce modèle est basé sur une extension du modèle analytique précédemment développé incluant les pertes mécaniques afin de quantifier le potentiel électrique de surface. Même si l'influence du plasma est négligée en première approximation, la modélisation permet de mettre en lumière les zones de fort champ correspondant aux zones de décharges lumineuses observées expérimentalement.

Finalement, afin de valider le concept de générateur de plasma piézoélectrique,

une caractérisation vue des bornes du transformateur piézoélectrique de type Rosen a été entreprise. Une étude systématique du déclenchement de la décharge plasma en fonction du niveau de tension et de la pression environnante a été menée. Cette part expérimentale de l'étude constitue une approche pionnière pour qualifier le comportement électromécanique du transformateur et a ainsi permis de mettre en évidence des comportements non linéaires issus de ce mode de fonctionnement atypique qu'est la génération de décharges de surface par effet piézoélectrique.

---

## Mots-clefs

- Transformateur piézoélectrique
- Transformateur de type Rosen
- Modèle non-linéaire
- Modélisation analytique et numérique
- Approche lagrangienne
- Plasma froid
- Générateur de décharges

# Abstract

The emergence of piezoelectric transformers coincides with the development in the 1950s of ferroelectric ceramics belonging to the perovskites crystalline family. In addition to providing small size and weight, piezoelectric transformers offer outstanding performances in terms of galvanic insulation, voltage ratio and efficiency. Furthermore, compared with conventional electromagnetic transformers, piezoelectric transformers are free from electromagnetic interference. They are consequently more suitable for low power and high efficiency applications for small embedded systems.

However, piezoelectric transformers can be deviated from their initial applications. Indeed, the emergence of plasma generator by piezoelectric effect, using mainly piezoelectric transformers, made its mark on the last decade. Nevertheless, if a few typical applications perfectly exemplify this interaction, the understanding of instigated physical phenomena remains to go into detail. The aim of this thesis is to explain the fundamentals by a methodical approach.

This work is based on several steps including the implementation of piezoelectric transformer analytical modeling, the study of the electrical field generated by a piezoelectric transformer and a first experimental investigation from piezoelectric transformer terminals.

The analytical modeling is based on the use of the least action principle. From linear piezoelectric theory, a general model applicable to all transformer geometries, using multiple piezoelectric coupling modes, is put forward. Its multimodal characteristic is in addition underlined. This modeling is applied to a classical Rosen type transformer and the obtained results are confirmed on one hand by a numerical identification, and on the other hand by an experimental characterization.

The previous analytical modeling does not take into account in its application the influence of the environment in which the piezoelectric transformer evolves. In order to qualify the produced electrical potential, a 2D numerical model of surrounding electrical field is put forward according to finite difference method. This model is based on the extension of previously developed analytical model including mechanical losses in order to quantify the surfacic electrical potential. Even if plasma influence is ignored in first approximation, the modeling allows high electrical field areas matching glow discharges areas experimentally observed to be highlighted.

Finally, in order to validate the concept of piezoelectric plasma generator, a characterization from Rosen type piezoelectric transformer terminals has been undertaken. A systematic study of plasma discharge ignition in function of the input

voltage level and the surrounding pressure has been carried out. This experimental part of the study constitutes a pioneering approach in order to qualify transformer electromechanical behavior. It has consequently allowed to nonlinear behaviors from untypical operation mode which the surfacic discharge generation by piezoelectric effect is to be given rise.

---

## Keywords

- Piezoelectric transformer
- Rosen-type transformer
- Nonlinear modeling
- Analytical and numerical modeling
- Lagrangian approach
- Cold plasma
- Discharge generator

# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire PLASMA et Conversion d'Énergie (LAPLACE) à l'École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique, d'Hydraulique et des Télécommunications (ENSEEIHT) de l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT) au sein du Groupe de Recherche en Électrodynamique, Matériaux, Machines et Mécanismes Electroactifs (GREM3).

Je tenais en premier lieu à remercier François Pigache, Maître de Conférences à l'ENSEEIHT, pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant cette thèse. Nos échanges réguliers et féconds qui ont parsemé ces presque quatre années de travail et, il faut bien l'avouer, de moments de franche rigolade, ont donné à cette thèse une dimension, une saveur, toute particulière. François, vois en ces quelques mots toute l'admiration que je te porte et la fierté que d'avoir été le premier docteur de ta carrière emplit jusqu'ici et pour le restant, j'en ai la certitude, de succès et d'épanouissement. Tu es l'acteur principal d'une formidable aventure scientifique dont cette thèse n'est que le prologue. Au delà du cadre professionnel dans lequel j'ai eu la chance de te côtoyer, je voudrais à présent rendre hommage à l'ami que j'ai eu plaisir à apprécier autour le plus souvent d'une bonne bière ou plus simplement d'un café. Merci pour ces nombreuses discussions qui ont largement contribué à mon enrichissement culturel et à une certaine maturité. Je ne sais que dire, les mots me manquent pour te montrer à quel point tu as compté durant ces quatre dernières années. Merci pour tout François, vraiment !

Je tiens également à remercier Yvan Lefèvre, Chargé de Recherche au CNRS, mon directeur de thèse qui a chapoté le travail accompli ici. Merci pour m'avoir supporté, pour le soutien indéfectible et les nombreux éclaircissements prodigués sur la modélisation numérique. Merci Yvan, de tout cœur !

Je souhaiterais également témoigner ma gratitude aux autres membres du jury :

- Pr. François Costa, Professeur des Universités rattaché au laboratoire des Systèmes et Applications des Technologies de l'Information et de l'Énergie (SATIE), pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury et d'accepter en outre cette lourde tâche de rapporteur. Les échanges opérés durant cette soutenance se sont avérés, pour ma part, fructueux et enrichissants et je tenais à le remercier pour cela.
- Pr. Élie Lefevre, Professeur des Universités rattaché à l'Institut d'Électro-

nique Fondamentale (IEF), pour avoir consacré un peu de son temps si précieux à rapporter ce travail de thèse. J'ai beaucoup apprécié l'intérêt porté à ce manuscrit et les remarques très constructives dont il a fait part.

- Pr. Bertrand Nogarède, Professeur des Universités à l'INPT et rattaché au LAPLACE dans le groupe de recherche EM3, d'avoir pris part à ce jury en tant qu'examineur. Je voulais également lui témoigner ma reconnaissance pour m'avoir transmis le virus de l'électrodynamique, au travers notamment des nombreux cours prodigués à l'ENSEEIH, et d'envisager l'électrotechnique sous sa forme la plus générale et la plus rigoureuse.
- Dr. Frédéric Giraud, Maître de Conférences rattaché au Laboratoire d'Électrotechnique et d'Électronique de Puissance (L2EP) de Lille, pour avoir accepté le rôle d'examineur de ce travail. Les discussions échangées lors de la soutenance de thèse sur la formulation lagrangienne se sont avérées très profitables et ont sans aucun doute contribué à une meilleure compréhension de ma part des concepts mis en lumière.

Je tenais en outre à remercier tous les membres du groupe de recherche EM3 : Jean-François Rouchon, Frédéric Messine, Dominique Harribey, Éric Duhayon, Jean-François Llibre, Robert Larroche, toute cette fine équipe étant bien évidemment dirigée de façon magistrale par l'immarcescible Carole Hénaux qui, grâce à son intervention et son dévouement à la fin de ma troisième année, m'a permis de finir sereinement la rédaction du manuscrit. Merci pour leur soutien et la bonne humeur qu'ils instaurent au quotidien.

Comment ne pas remercier les personnels administratifs qui par leur disponibilité ont su faciliter toutes les tâches bureaucratiques. Un grand merci donc à Valérie Schwarz, Cécile Daguillanes, Catherine Moll-Mazella et Carine Bastié. Un grand merci également à Jean Hector, parti à la retraite depuis peu, Jacques Bénéaïoun et David Bonnaïous les informaticiens du laboratoire LAPLACE site ENSEEIH qui nous permettent au quotidien de travailler en toute quiétude.

Aux compagnons de route ayant soutenu ou en passe de soutenir : Céline Cénac-Morthé, Delphine Mercey(!), Anthony « Fwèwe » Lowinsky (et ses si délectables ti-punchs!), Julien Saint-Araille, François Bonnet, Vincent « Cock'o » Phlippeau, Mathieu Couderc, Mathieu Le Bolloch, Laurianne Ménard, Marwan Zeidan, Sylvain Girinon, Cédric Baumann, Frédéric « Noch » Gailly, Damien « Dam's » Bidart (mon coloc préféré!), André « Dédé » De Andrade (mon autre coloc préféré!), Bernardo Cougo Franca, Meriem Abdelattif, Hoan Tran Duc, Majid Souley, Aziz Ziani, Julie Egalon, Amine Jaafar, Benoît Morin, Aurélien Lesage, Zhifeng Dou, Simon Tournier (mon aveyronnais préféré), qui ont largement contribué à l'embellissement de mon quotidien.

Aux copains moniteurs que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant cette thèse : Claire Joachim, Florian Hémond, Audrey Pascal, Jordan Ninin et Laurène Mazeau. Aux mémorables soirées passées en votre compagnie et à celles à venir !

A mes anciens et actuels collègues de bureau, avec qui j'ai vécu des moments de partage qui vous change un homme. Ainsi, un grand merci à Christophe « Titou » Viguière, Nicolas Martinez, Mounir Amokrane et bien évidemment mon p'tit Raph, avec qui, en dépit des nombreux déménagements, j'ai toujours eu la chance et le plaisir de partager le même bureau du commencement jusqu'au dénouement de ce doctorat. Je voulais à ce propos te remercier personnellement pour ces quatre années passées avec toi, pour ton érudition et ta culture (j'ai réellement beaucoup appris à tes côtés), ta joie de vivre, tes jérémiades très souvent décriées (quel sale gosse!), ton sens physique, tes compétences numériques, tes premières impressions tranchées qui s'avèrent finalement vérifiées, et aussi pour nos différents instants « pétage de plombs » généralement initiés par une écoute inopinée de la fameuse et si détestée liste « relou ». Je ne te remercierais jamais assez pour tous ces bons moments passés au bureau.

A mes amis de Bretagne qui occupent une place à part, François, que je connais depuis toujours, Thomas (ah mon lion!), Servane (que dire si ce n'est que tu es la plus fabuleuse), Laurent (Bobo!), Colin (encore désolé pour ton pull Boule et Bill), Rémy, ma p'tite Marie, que j'ai toujours aimée, et tous les autres...

J'ai une pensée émue pour mes potes enseignantiers : Benoît Chapon (mon p'tit Benni...), Mathilde Segonds (ma Matou, mon trinôme), Aurélien Perrier (mon autre trinôme), Thibaut Lahore, Josselin Bescont, Fabien Quésada (à quand la prochaine côte de bœuf mon p'tit Keb?) et sa Jul', Cyrille Sentenac et sa moitié Aurélie Barbe.

Je voudrais également remercier Aude Lacombe, Sidonie Gaychet, Maëli Vialot, Célia Serradel pour les divers moments de joie et de bonheur que j'ai pu passer avec vous. Je souhaitais également remercier les potes de l'ETB, en vrac : Sylvain (encore merci d'être venu à la soutenance, cela me touche...), Matteo, Peyo, Doudou, Titi, Guigui, Lukas, Dam's et j'en oublie, pour tous les fantastiques moments handballistiques ou non qui ont jalonné cette thèse.

Enfin, je tenais à remercier ma famille : mes parents tout d'abord pour m'avoir inculqué cette éducation et ses valeurs qui font de moi ce que je suis aujourd'hui. Je souhaitais ensuite avoir une pensée pour mes frères, Benjamin et Adrien : la fierté que je vous témoigne par ces mots n'a d'égal que l'admiration que je vous porte. Je ne saurais oublier de rendre hommage aux autres membres de ma famille et notamment à ma fantastique et superbe belle-sœur, Elizabeth. Je vous dédie ce mémoire.





*On ne connaît pas complètement une science  
tant qu'on n'en sait pas l'histoire.*  
Auguste Comte (1798-1857)



# Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Remerciements	v
Introduction générale	1
<b>1 Généralités et état de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	6
1.2 La piézoélectricité	6
1.2.1 Le phénomène piézoélectrique [Bri07]	6
1.2.2 Théorie de l'élasticité linéaire [LL90]	10
1.2.2.1 Hypothèses [Bri07]	10
1.2.2.2 Tenseur des déformations	12
1.2.2.3 Tenseur des contraintes	13
1.2.3 Théorie linéaire de la piézoélectricité	16
1.2.3.1 Hypothèses	16
1.2.3.2 Équations fondamentales de la piézoélectricité	17
1.2.3.3 Relations matricielles caractéristiques	20
1.2.4 Modes de couplage piézoélectrique élémentaires	21
1.3 Les transformateurs piézoélectriques	25
1.3.1 Principe et architectures	25
1.3.1.1 Transformateur de type Rosen	27
1.3.1.2 Transformateur à mode transversal	28
1.3.1.3 Transformateur à mode radial	29
1.3.1.4 Transformateur à mode en épaisseur	30
1.3.1.5 Autres structures	31
1.3.2 Comportement électrique [Sar05][Ive02]	33
1.3.2.1 Approche par schéma électrique équivalent	33
1.3.2.2 Grandeurs caractéristiques	34
1.3.2.3 Régimes de fonctionnement	36
1.3.3 Principales applications	40
1.3.3.1 Alimentation des lampes fluorescentes	41
1.3.3.2 Intégration dans les convertisseurs statiques	44
1.3.3.3 Alimentation des moteurs piézoélectriques	47

1.3.3.4	Applications spatiales . . . . .	48
1.3.4	Transformateur piézoélectrique et plasma . . . . .	52
1.4	Conclusion . . . . .	57
<b>2</b>	<b>Modélisation analytique générale des transformateurs piézoélectriques</b>	<b>59</b>
2.1	Introduction . . . . .	60
2.2	Le Principe de Moindre Action [Lan86] . . . . .	60
2.2.1	Un peu d'histoire [Bas10] [Mar06] . . . . .	60
2.2.2	Notion de coordonnées généralisées . . . . .	63
2.2.3	Principe des Travaux Virtuels . . . . .	65
2.2.4	Principe de d'Alembert . . . . .	66
2.2.5	Principe de Hamilton . . . . .	66
2.2.6	Équations de Lagrange . . . . .	68
2.3	Approche variationnelle de la piézoélectricité . . . . .	71
2.3.1	Classification en termes de variables généralisées [Nog05] . . . . .	71
2.3.2	Lagrangien d'un milieu piézoélectrique . . . . .	72
2.3.3	Équations d'équilibre d'un milieu piézoélectrique [GA98] . . . . .	74
2.4	Modélisation des transformateurs piézoélectriques . . . . .	80
2.4.1	Modèle analytique par approche variationnelle . . . . .	82
2.4.2	Vibrations libres d'un transformateur piézoélectrique . . . . .	91
2.4.3	Orthogonalité des modes propres - Critère de normalisation . . . . .	93
2.5	Conclusion . . . . .	98
<b>3</b>	<b>Application au transformateur piézoélectrique de type Rosen</b>	<b>99</b>
3.1	Introduction . . . . .	100
3.2	Modélisation analytique . . . . .	100
3.2.1	Hypothèses du problème . . . . .	100
3.2.2	Analyse vibratoire . . . . .	103
3.2.3	Problème aux valeurs propres . . . . .	105
3.2.4	Application du principe de moindre action . . . . .	109
3.2.5	Application au cas série ( $R_{ch} = 0$ ) . . . . .	114
3.2.6	Application au cas parallèle ( $R_{ch} \rightarrow +\infty$ ) . . . . .	118
3.2.7	Commentaires . . . . .	121
3.3	Validation numérique et expérimentale . . . . .	122
3.3.1	Modèle numérique d'un transformateur piézoélectrique . . . . .	122
3.3.2	Caractérisation expérimentale . . . . .	126
3.3.2.1	Méthode d'identification conventionnelle [Bri07] . . . . .	127
3.3.2.2	Application aux transformateurs piézoélectriques . . . . .	132
3.4	Simulation des modèles : comparaisons et discussions . . . . .	134
3.5	Représentation du potentiel électrique environnant . . . . .	152
3.5.1	Étude aux vibrations forcées . . . . .	152
3.5.2	Cartographie du potentiel électrique . . . . .	158
3.6	Conclusion . . . . .	163

<b>4</b>	<b>Investigations expérimentales et analyses</b>	<b>165</b>
4.1	Introduction . . . . .	166
4.2	Moyens et procédure de caractérisation . . . . .	166
4.3	Caractérisation à pression atmosphérique . . . . .	170
4.3.1	Mesures expérimentales . . . . .	170
4.3.2	Interprétation du comportement non-linéaire . . . . .	173
4.3.2.1	Non-linéarités diélectriques . . . . .	175
4.3.2.2	Non-linéarités piézoélectriques . . . . .	175
4.3.2.3	Non-linéarités élastiques . . . . .	175
4.3.3	Modélisation du comportement non-linéaire . . . . .	176
4.3.3.1	Modélisation approchée du comportement non-linéaire [Yan07b] . . . . .	177
4.3.3.2	Identification expérimentale du coefficient $\bar{\gamma}$ . . . . .	182
4.3.3.3	Simulation du modèle non-linéaire . . . . .	186
4.4	Caractérisation en condition de décharges . . . . .	189
4.4.1	Mesures expérimentales . . . . .	189
4.4.1.1	Validation expérimentale préalable . . . . .	190
4.4.1.2	Caractérisation sous pression contrôlée . . . . .	191
4.4.1.3	Observations . . . . .	192
4.4.2	Exploitation des mesures en condition de décharge . . . . .	198
4.4.2.1	Caractérisation en régime de décharge . . . . .	198
4.4.2.2	Exploitation du modèle linéaire . . . . .	201
4.5	Conclusion . . . . .	206
	<b>Conclusion générale</b>	<b>209</b>
<b>A</b>	<b>Développement des calculs issus de la modélisation analytique</b>	<b>213</b>
A.1	Cas série . . . . .	213
A.1.1	Problème aux valeurs propres . . . . .	213
A.1.2	Critère de normalisation . . . . .	214
A.1.3	Raideur modale $K_0^{(i)}$ . . . . .	216
A.1.4	Facteurs de conversion électromécanique . . . . .	217
A.2	Cas parallèle . . . . .	218
A.2.1	Problème aux valeurs propres . . . . .	218
A.2.2	Critère de normalisation . . . . .	219
A.2.3	Raideur modale $K_\infty^{(i)}$ . . . . .	220
A.2.4	Facteurs de conversion électromécanique . . . . .	222
<b>B</b>	<b>Tracés pour l'identification expérimentale</b>	<b>223</b>
<b>C</b>	<b>Principe de la Méthode des Différences Finies</b>	<b>233</b>
C.1	Équations à l'intérieur des milieux . . . . .	233
C.2	Équations aux interfaces . . . . .	235
C.3	Équations aux limites du domaine . . . . .	238
	<b>Bibliographie</b>	<b>248</b>



# Table des figures

1.1	Illustration 2D de l'effet piézoélectrique direct : apparition dans une maille élémentaire d'une polarisation ionique sous l'influence d'une compression mécanique . . . . .	7
1.2	Sondeur de Langevin-Florisson . . . . .	8
1.3	Maille élémentaire de type pérovskite de formule générale $ABO_3$ . A gauche : structure cubique non polarisée (phase paraélectrique au-dessus de la température de Curie) ; à droite : structure tétragonale polarisée (phase ferroélectrique en-dessous de la température de Curie)	8
1.4	Principe de fabrication des céramiques PZT par voie solide . . . . .	9
1.5	Configurations du système ( $\mathcal{S}$ ) dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) . . . . .	12
1.6	Interactions entre les grandeurs physiques [Bri07] . . . . .	17
1.7	Modes de couplage piézoélectrique élémentaires . . . . .	24
1.8	Principe de fonctionnement d'un transformateur piézoélectrique . .	26
1.9	Transformateur piézoélectrique de type Rosen . . . . .	28
1.10	Transformateur piézoélectrique à mode transversal . . . . .	29
1.11	Transformateur à mode radial - Structure monocouche . . . . .	29
1.12	Transformateur à mode radial - Structure multicouche . . . . .	30
1.13	Transformateur piézoélectrique à mode en épaisseur . . . . .	31
1.14	Structure à mode de cisaillement . . . . .	32
1.15	Structure discoïdale à électrode en forme de croissant . . . . .	33
1.16	Schéma de Mason d'une céramique piézoélectrique de forme parallélépipédique sollicitant un mode de couplage transversal [Ike96] . .	33
1.17	Schéma électrique équivalent d'un transformateur piézoélectrique . .	34
1.18	Évolution du gain en tension, de la puissance de sortie et du rendement en fonction de la fréquence . . . . .	37
1.19	Évolution du gain en tension, de la puissance de sortie et du rendement en fonction de la charge . . . . .	38
1.20	Comportement électrique d'une lampe fluorescente à cathode froide [Day02] . . . . .	42
1.21	Schéma de principe d'une alimentation de lampe fluorescente à cathode froide via un transformateur piézoélectrique [Day02] . . . . .	43
1.22	Évolution du gain en tension du transformateur piézoélectrique de l'allumage jusqu'au régime de fonctionnement nominal de la lampe fluorescente à cathode froide [Day02] . . . . .	44
1.23	Convertisseur AC/DC intégrant un transformateur piézoélectrique dédié aux chargeurs de batteries de téléphones portables [Bov00] . .	45



1.24	Transformateur piézoélectrique multicouches dédié à l'intégration d'un convertisseur AC/DC . . . . .	45
1.25	Comparaison de l'adaptateur secteur Toshiba et de son évolution incluant le transformateur piézoélectrique [Man03] . . . . .	46
1.26	Éléments constitutifs et intégration d'un moteur à ultrasons alimenté via un transformateur piézoélectrique discoïdal [Man02] . . . . .	48
1.27	Schéma synoptique de la charge utile d'un satellite de communication : tube à ondes progressives et son alimentation [Car03b] . . . . .	49
1.28	Transformateur piézoélectrique de type Transoner-T3 <sup>®</sup> [Car03d] . . . . .	49
1.29	Transformateur piézoélectrique de type « TAP-SONER » intégré dans l'alimentation des tubes à ondes progressives pour les satellites de communication [Car03b] . . . . .	50
1.30	Schéma synoptique d'un propulseur à plasma pulsé [Car03b] . . . . .	51
1.31	Schéma du circuit d'initiation de la décharge pour un propulseur à plasma pulsé [Car03b] . . . . .	51
1.32	Schéma synoptique d'un propulseur à plasma pulsé incluant le transformateur piézoélectrique [Car03b] . . . . .	52
1.33	Décharge plasma générée par un transformateur piézoélectrique de type Rosen [Ter01] . . . . .	52
1.34	Décharges luminescentes produites dans l'environnement d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen en fonction de la nature du gaz et du mode vibratoire sollicité [Ito02] . . . . .	53
1.35	Générateur DBD utilisant un transformateur piézoélectrique de type Rosen [Ito06] . . . . .	54
1.36	Motifs de DBD dans l'hélium générée à la surface du secondaire d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen ( $d = 0.3$ mm, $V_p = 20$ V) [Ito08] . . . . .	55
1.37	Motifs de DBD dans l'argon générée à la surface du secondaire d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen ( $d = 0.5$ mm, $V_p = 25$ V) [Ito08] . . . . .	55
1.38	Principe d'un générateur d'ozone utilisant un transformateur piézoélectrique de type Rosen [Ito06] . . . . .	56
1.39	Nouvelle structure de transformateur Rosen [Tes09] . . . . .	57
1.40	Schéma et intégration du générateur de faisceau plasma à pression atmosphérique et basse température à l'aide d'un transformateur piézoélectrique cylindrique de type Rosen [Kim09] . . . . .	57
2.1	Double pendule dans un plan [Pre06] . . . . .	64
2.2	Trajectoires réelle et virtuelle . . . . .	68
2.3	Variation d'une trajectoire pour la coordonnée généralisée $q_i$ . . . . .	69
2.4	Configurations d'un solide piézoélectrique dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) . . . . .	75
2.5	Configurations d'un transformateur piézoélectrique de géométrie quelconque dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) . . . . .	83
3.1	Transformateur piézoélectrique de type Rosen multicouche . . . . .	101

3.2	Schéma électrique équivalent d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen chargé au secondaire par une résistance $R_{ch}$ . . . . .	112
3.3	Schéma électrique équivalent d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen – Cas série ( $R_{ch} = 0$ ) . . . . .	116
3.4	Schéma électrique équivalent d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen – Cas parallèle ( $R_{ch} \rightarrow +\infty$ ) . . . . .	119
3.5	Transformateur piézoélectrique de type Rosen sous ANSYS® . . . . .	123
3.6	Déformées mécaniques 3D obtenues sous ANSYS® pour les quatre premiers modes longitudinaux d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen . . . . .	125
3.7	Schéma électrique équivalent d'une céramique piézoélectrique fonctionnant au voisinage de la résonance . . . . .	127
3.8	Tracés de l'admittance équivalente autour d'une résonance . . . . .	131
3.9	Dimensions du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac . . . . .	134
3.10	Module de l'admittance du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac vue du primaire pour le cas série et le cas parallèle – Mise en évidence du premier mode transversal . . . . .	136
3.11	Résolution graphique de l'équation en fréquence pour le cas série ( $E_0 = 0$ ) et le cas parallèle ( $E_\infty = 0$ ) du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac . . . . .	137
3.12	Répartition spatiale selon l'axe ( $Ox_1$ ) de la déformée mécanique normalisée à son maximum pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Comparaison entre les modèles analytique (traits pleins) et numérique (traits pointillés) . . . . .	140
3.13	Répartition spatiale selon l'axe ( $Ox_1$ ) du potentiel électrique normalisé à son maximum pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Comparaison entre les modèles analytique (traits pleins) et numérique (traits pointillés) . . . . .	141
3.14	Évolution de la fréquence de résonance en fonction du rapport $L_2/L_0$ pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Comparaison entre les modèles analytique (traits pleins) et numérique (traits pointillés) . . . . .	143
3.15	Module et phase de l'admittance vue du primaire pour le transformateur piézoélectrique CMT-Noliac dans le cas série – Comparaison entre le modèle analytique, la simulation numérique, l'identification expérimentale et le tracé réel . . . . .	146
3.16	Module et phase de l'admittance vue du primaire pour le transformateur piézoélectrique CMT-Noliac dans le cas parallèle – Comparaison entre le modèle analytique, la simulation numérique, l'identification expérimentale et le tracé réel . . . . .	147
3.17	Répartition spatiale selon l'axe ( $Ox_1$ ) du potentiel électrique de surface issu de la modélisation avec pertes pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Cas parallèle . . . . .	156

3.18	Évolution du potentiel de surface en fonction de la tension d'entrée pour le mode $\lambda$ d'un transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Cas parallèle . . . . .	157
3.19	Évolution de l'amplitude maximale du potentiel électrique issue de la modélisation avec pertes en fonction du rapport $L_2/L_0$ pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Cas parallèle . . . . .	158
3.20	Domaine d'étude de la modélisation numérique du potentiel électrique généré par un transformateur piézoélectrique de type Rosen .	159
3.21	Schéma à 5 points à pas de discrétisation quelconque . . . . .	161
3.22	Cartographie 2D du potentiel électrique (en V) produit par un transformateur piézoélectrique CMT-Noliac pour les quatre premiers modes longitudinaux simulée à l'aide de la méthode des différences finies – Comparaison aux motifs lumineux des décharges plasma obtenues expérimentalement . . . . .	162
4.1	Banc d'essais – Chambre à vide pour la caractérisation du transformateur piézoélectrique en condition de génération de décharge . . .	167
4.2	Caractéristiques tension-courant des décharges plasma [Sub07] . . .	168
4.3	Disposition du transformateur pour sa caractérisation et condition d'électrodage au secondaire . . . . .	169
4.4	Admittance d'entrée pour différents niveaux de tension en fréquence croissante et décroissante . . . . .	172
4.5	Comparaison de l'admittance d'entrée à $V_p = 2$ V en fréquence croissante et décroissante . . . . .	173
4.6	Comparaison pour le mode $\lambda/2$ des déformées mécaniques modales issues des hypothèses « anisotrope » et « isotrope » . . . . .	178
4.7	Relevés expérimentaux du courant relativement à la pulsation de résonance « petits signaux » . . . . .	184
4.8	Identification de $\bar{\gamma}$ à $\Delta\omega = 0$ par la méthode des moindres carrés . .	185
4.9	Simulation des grandeurs électriques selon $V_p$ et $\Delta\omega$ . . . . .	187
4.10	Illustration de l'évolution de la décharge en fonction de la pression .	190
4.11	Diagrammes de Bode de l'admittance vue des bornes à pression fixe – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) . . . . .	193
4.12	Diagrammes de Bode de l'admittance vue des bornes à pression fixe – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) . . . . .	194
4.13	Diagrammes de Bode de l'admittance vue des bornes à pression fixe – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) . . . . .	195
4.14	Diagrammes de Bode de l'admittance vue des bornes à pression fixe – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) . . . . .	196
4.15	Diagrammes de Bode de l'admittance vue des bornes à pression fixe – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) et sweep down ( $SD$ ) . . . .	197
4.16	Fréquences d'apparition $f_{app}$ et d'extinction $f_{ext}$ des décharges en fonction de l'amplitude de la tension d'entrée $V_p$ – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) et sweep down ( $SD$ ) . . . . .	200

4.17	Estimation de l'amplitude de la tension de sortie $V_s$ selon le modèle linéaire pour différentes pressions – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) et sweep down ( $SD$ ) . . . . .	204
4.18	Estimation de l'amplitude de la tension de sortie $V_s$ selon le modèle linéaire pour différentes pressions – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) et sweep down ( $SD$ ) . . . . .	205
B.1	Caractérisation expérimentale pour le mode $\lambda/2$ - Cas série. . . . .	224
B.2	Caractérisation expérimentale pour le mode $\lambda$ - Cas série. . . . .	225
B.3	Caractérisation expérimentale pour le mode $3\lambda/2$ - Cas série. . . . .	226
B.4	Caractérisation expérimentale pour le mode $2\lambda$ - Cas série. . . . .	227
B.5	Caractérisation expérimentale pour le mode $\lambda/2$ - Cas parallèle. . . . .	228
B.6	Caractérisation expérimentale pour le mode $\lambda$ - Cas parallèle. . . . .	229
B.7	Caractérisation expérimentale pour le mode $3\lambda/2$ - Cas parallèle. . . . .	230
B.8	Caractérisation expérimentale pour le mode $2\lambda$ - Cas parallèle. . . . .	231
C.1	Domaine d'étude de la modélisation numérique du potentiel électrique généré par un transformateur piézoélectrique de type Rosen . . . . .	234
C.2	Grille à pas de discrétisation quelconque pour l'application de la méthode des différences finies à l'intérieur d'un milieu de permittivité diélectrique constante . . . . .	235
C.3	Grille à pas de discrétisation quelconque pour l'application de la méthode des différences finies à l'interface entre le primaire du transformateur piézoélectrique et l'air environnant - Interface ] $eh$ [ . . . . .	236
C.4	Grille à pas de discrétisation quelconque pour l'application de la méthode des différences finies à l'interface entre le primaire du transformateur piézoélectrique et l'air environnant - Interface ] $ef$ [ . . . . .	237
C.5	Grille à pas de discrétisation uniforme pour l'application de la méthode des différences finies à l'interface entre le primaire du transformateur piézoélectrique et l'air environnant - Nœud $e$ . . . . .	239



# Liste des tableaux

1.1	Composantes des tenseurs des déformations et des contraintes [Nog05]	15
1.2	Relations constitutives de la piézoélectricité [Ike96]	19
1.3	Matrices des constantes mécaniques, diélectriques et piézoélectriques	20
1.4	Définitions selon la direction de polarisation des matrices $[c^E]$ , $[e]$ et $[\varepsilon^S]$ caractérisant les propriétés électromécaniques des céramiques PZT [Yan05]	22
1.5	Équations de la piézoélectricité et coefficient de couplage électromécanique associés à chaque mode de couplage piézoélectrique élémentaire [Ike96]	25
2.1	Classification des paramètres mécaniques en termes de variables généralisées pour une translation et une rotation à un degré de liberté [Nog05]	70
2.2	Classification des paramètres électromécaniques en termes de variables généralisées selon les conventions « électrostatique » et « magnétostatique » [Nog05]	72
3.1	Définitions des matrices caractérisant les propriétés électromécaniques du primaire et du secondaire d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen	102
3.2	Paramètres du modèle analytique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen (cas série $\Leftrightarrow R_{ch} = 0$ )	117
3.3	Paramètres du modèle analytique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen (cas parallèle $\Leftrightarrow R_{ch} \rightarrow +\infty$ )	120
3.4	Caractéristiques géométriques et propriétés matérielles du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac [Nol@]	135
3.5	Paramètres du schéma électrique équivalent du transformateur CMT-Noliac pour les cas série et parallèle – Comparaison entre les modèles analytique, numérique et l'identification expérimentale – Mode $\lambda/2$	148
3.6	Paramètres du schéma électrique équivalent du transformateur CMT-Noliac pour les cas série et parallèle – Comparaison entre les modèles analytique, numérique et l'identification expérimentale – Mode $\lambda$	149
3.7	Paramètres du schéma électrique équivalent du transformateur CMT-Noliac pour les cas série et parallèle – Comparaison entre les modèles analytique, numérique et l'identification expérimentale – Mode $3\lambda/2$	150

---

3.8	Paramètres du schéma électrique équivalent du transformateur CMT-Noliac pour les cas série et parallèle – Comparaison entre les modèles analytique, numérique et l'identification expérimentale – <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">Mode <math>2\lambda</math></span>	151
3.9	Conditions expérimentales d'obtention des décharges plasma pour les trois premiers modes longitudinaux d'un transformateur piézo-électrique Rosen CMT-Noliac. . . . .	161
4.1	Paramètres du modèle non-linéaire identifiés expérimentalement . .	186
4.2	Valeurs numériques issues des modèles développés dans les sections § 4.3.3.1 et § 3.2.6 – Comparaison à l'expérimentation . . . . .	188
4.3	Amplitude minimale de la tension d'entrée pour générer une décharge plasma en fonction de la pression environnante – Valeurs obtenues pour un balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) . . . . .	199

# Introduction générale

Depuis la découverte de la propriété piézoélectrique et de sa définition théorique par les frères Curie (fin du XIX<sup>e</sup> siècle), son étude et sa mise en œuvre ont obéi à une succession de périodes fertiles, parfois intercalées d'indifférence. La maturation d'une solution technologique n'est que rarement linéaire, et la piézoélectricité n'a pas échappé à la règle. Sa mise en œuvre a souffert dans ses premiers temps de la faible capacité à la conversion électromécanique dont disposaient les matériaux naturels. C'est avec la découverte et la maîtrise de la synthèse de matériaux performants durant les deux dernières décennies du XX<sup>e</sup> siècle, qu'un regain d'intérêt décisif refit entrer la piézoélectricité dans les préoccupations de recherches.

Le déploiement de cette solution technologique est aujourd'hui colossal, couvrant avantageusement de nombreux besoins en électronique, allant du mesurage à la motorisation. La capacité d'intégration, la dépendance commune aux phénomènes mécaniques et électriques, la réversibilité de la conversion, la stabilité et la « linéarité » de ses relations fondamentales constituent le socle d'intérêt primordial pour ces matériaux. S'il apparaît illusoire de chercher à établir une énumération exhaustive de leur mise en œuvre, il est toutefois possible d'en rappeler quelques applications phares : les oscillateurs à quartz, une déclinaison remarquable de capteurs (accéléromètre, jauge de contrainte,...), les briquets électroniques ou encore les moteurs de toutes sortes (linéaires ou rotatifs). En dépit de cette grande diversité, la piézoélectricité et ses applications n'en sont pas pour autant arrivées à leur épuisement. Les préoccupations contemporaines d'intégration et de récupération d'énergie, essentiellement liées aux besoins des applications « nomades » constituent des raisons coïncidentes avec les aptitudes de ces matériaux. Face à certains de ces besoins, les transformateurs piézoélectriques témoignent de performances et de propriétés remarquables, et pour certaines, encore peu exploitées. En outre, le progrès dans la synthèse des matériaux aux propriétés piézoélectriques est toujours persistant, comme en témoigne la récente maîtrise dans la fabrication des céramiques massives monocristallines (ex : PMN-PT). Ces progrès et ces besoins contemporains sont autant de raisons de maintenir un éveil dynamique quant à l'exploitation de ces matériaux.

L'objet de cette thèse se concentre sur les transformateurs piézoélectriques, leur modélisation et leur caractérisation dans le cadre d'une utilisation tout à fait innovante. Le principe des transformateurs est connu depuis les années 1920 et n'est plus à démontrer. Celui-ci repose sur l'association de deux éléments piézo-



électriques ou plus, faisant distinctement appel à la conversion directe et inverse de leur propriété électromécanique. Les combinaisons géométriques, les modes de couplages et les déformations produites ont conduit à définir une multitude d'architectures de transformateurs, aux avantages et applications variées.

Dans ce mémoire, la propriété principale mise à profit est l'élévation en tension de certains transformateurs, notamment de type Rosen, dans le but d'induire au secondaire de celui-ci une décharge plasma lumineuse. En effet, depuis les années 1970-80, la propension des matériaux ferroélectriques à émettre des électrons, ou encore à induire une décharge plasma dans son environnement proche a été établie. Si la variation de polarisation spontanée au sein du milieu ferroélectrique est la cause nécessaire à l'apparition de cette décharge, celle-ci peut être occasionnée par une sollicitation mécanique, faisant alors intervenir les propriétés piézoélectriques de ces derniers. L'utilisation d'un transformateur piézoélectrique prend alors tout son sens, devenant pour l'occasion un générateur de décharge plasma. Ses propriétés diélectriques, ferroélectriques et piézoélectriques en font un dispositif remarquable pour générer des décharges de surface, associées à ses performances d'élévation en tension. Ce nouveau cadre d'étude apparaît à l'intersection de l'ingénierie des matériaux électroactifs et de la physique des plasmas. De récentes études, datant essentiellement de la dernière décennie, ont su souligner l'avantageux profit que pouvait constituer cette nouvelle alternative technologique pour la génération de plasma faible puissance. Toutefois, si l'intérêt est indéniable, le processus des phénomènes mis en jeu reste méconnu et une approche plus méthodique devient nécessaire afin de faire émerger de nouvelles applications.

Il s'agit pour cette étude de jeter les premières bases théoriques et expérimentales préliminaires, indispensables à la compréhension des phénomènes, avec pour objectif final, de fournir les moyens nécessaires à la définition et la conception de dispositifs d'avenir totalement tournés vers ce nouvel objectif qu'est la génération de plasma. Ce mémoire s'attache donc à décrire le transformateur piézoélectrique comme une source. Pour l'heure, la qualification de la décharge plasma n'apparaît pas nécessaire, toutefois son impact sur le comportement électromécanique et électrique sera abordé.

Le premier chapitre de ce mémoire sera consacré, en premier lieu, à rappeler les principes de base de la piézoélectricité. Une fois les notions posées, une présentation générale des architectures de transformateurs piézoélectriques et de leur utilisation sera illustrée au travers de différentes applications. La dernière partie de ce chapitre traitera de l'usage de la piézoélectricité pour la génération des décharges plasma, centre d'intérêt de ces travaux. Si la mise en œuvre des transformateurs piézoélectriques sous leur forme classique de quadripôle connecté à un dipôle passif, peut se contenter habituellement d'une modélisation approchée, le mode de fonctionnement en configuration générateur de décharge plasma apparaît plus délicat. Il devient nécessaire de reconsidérer la modélisation sur la base de fondements plus solides et d'une parfaite maîtrise des simplifications considérées, afin de fournir les moyens suffisants à l'interprétation des phénomènes observables.

Dans ce but, le second chapitre constituera la partie principale de l'étude théorique et consistera en l'élaboration d'une méthode systématique pour la modélisation des transformateurs. Cette approche s'appuie sur une formulation lagrangienne de la double conversion électromécanique, et sera suffisamment générique pour servir à la description analytique des transformateurs quelle qu'en soit la géométrie ou la finalité applicative. A l'issue de cette démarche, les caractéristiques fondamentales seront exprimées analytiquement (fréquences propres, potentiel de surface,...) essentiellement sous forme matricielle. La méthode sera ensuite employée et mise à l'épreuve au cours du troisième chapitre pour décrire analytiquement les performances d'un transformateur de type Rosen. Ce transformateur, dont les paramètres géométriques, mécaniques et piézoélectriques sont parfaitement connus, servira de moyen de vérification expérimentale tout au long de l'étude. A l'issue de la détermination analytique du potentiel électrique de surface de ce transformateur Rosen, une première ébauche de couplage faible entre le milieu piézoélectrique et son environnement proche sera entreprise. Elle consistera dans le développement d'un modèle numérique 2D du potentiel électrique environnant (cause principale présumée à l'origine de la décharge plasma) à l'aide d'une formulation par différences finies. Si cette première modélisation ne prend pas en considération l'influence des charges d'espace sur le champ électrique ou sur le milieu piézoélectrique, elle permettra néanmoins de souligner la corrélation entre la répartition du potentiel électrique et l'observation du motif de la décharge lumineuse.

Finalement, dans le but de constituer une base critique pour l'interprétation des phénomènes mis en jeu lors de la génération de décharges plasma, une large campagne expérimentale préliminaire sera déployée au travers du dernier chapitre. A l'aide du transformateur « témoin » de type Rosen, la caractérisation se fera selon deux configurations expérimentales distinctes : à pression atmosphérique et à pression réduite contrôlée, offrant ainsi la maîtrise de générer la décharge. Sur la base de mesures électriques en admittance, ces deux protocoles expérimentaux vont permettre d'attester de l'existence de différents phénomènes non-linéaires, initialement ignorés durant l'étude analytique. Ces observations expérimentales conduiront finalement à étendre le modèle analytique initial et à utiliser celui-ci pour entamer une qualification préliminaire du dispositif en conditions de génération de décharges plasma.

A l'issue de ces quatre chapitres et de l'exploitation de la démarche méthodique qui y est développée, les conclusions et les perspectives sur lesquelles conduisent ces travaux seront présentées, afin d'ouvrir la voie vers des études plus approfondies.



# Chapitre 1

## Généralités et état de l'art

### Table des matières

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>La piézoélectricité</b>	<b>6</b>
1.2.1	Le phénomène piézoélectrique [Bri07]	6
1.2.2	Théorie de l'élasticité linéaire [LL90]	10
1.2.2.1	Hypothèses [Bri07]	10
1.2.2.2	Tenseur des déformations	12
1.2.2.3	Tenseur des contraintes	13
1.2.3	Théorie linéaire de la piézoélectricité	16
1.2.3.1	Hypothèses	16
1.2.3.2	Équations fondamentales de la piézoélectricité	17
1.2.3.3	Relations matricielles caractéristiques	20
1.2.4	Modes de couplage piézoélectrique élémentaires	21
<b>1.3</b>	<b>Les transformateurs piézoélectriques</b>	<b>25</b>
1.3.1	Principe et architectures	25
1.3.1.1	Transformateur de type Rosen	27
1.3.1.2	Transformateur à mode transversal	28
1.3.1.3	Transformateur à mode radial	29
1.3.1.4	Transformateur à mode en épaisseur	30
1.3.1.5	Autres structures	31
1.3.2	Comportement électrique [Sar05][Ive02]	33
1.3.2.1	Approche par schéma électrique équivalent	33
1.3.2.2	Grandeurs caractéristiques	34
1.3.2.3	Régimes de fonctionnement	36
1.3.3	Principales applications	40
1.3.3.1	Alimentation des lampes fluorescentes	41
1.3.3.2	Intégration dans les convertisseurs statiques	44
1.3.3.3	Alimentation des moteurs piézoélectriques	47
1.3.3.4	Applications spatiales	48
1.3.4	Transformateur piézoélectrique et plasma	52
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>

---

## 1.1 Introduction

Ce chapitre s'articule autour de deux parties principales. La première section a pour objectif de présenter de manière synthétique le phénomène piézoélectrique et la théorie qui en décrit les interactions. Après un bref historique, quelques rappels sur la théorie linéaire de l'élasticité seront proposés afin d'expliciter les hypothèses sur lesquelles reposent la théorie linéaire de la piézoélectricité. Sur la base de ces considérations, les lois constitutives traduisant le caractère électroactif d'un tel milieu seront exposées et illustrées au travers des différents modes de couplage élémentaires.

Dans la deuxième section, le transformateur piézoélectrique fait l'objet de toutes les attentions. Après en avoir brièvement rappelé le principe de fonctionnement, les principales architectures répertoriées dans la littérature et leurs caractéristiques sont présentées. Par la suite, quelques applications usuelles dans lesquelles ces transformateurs s'illustrent sont précisées pour finalement aboutir au cadre plus particulier que constitue la génération de plasma.

## 1.2 La piézoélectricité

### 1.2.1 Le phénomène piézoélectrique [Bri07]

La piézoélectricité est une caractéristique dont disposent certains matériaux qui ont la propension à se polariser électriquement sous l'effet d'une contrainte mécanique (effet direct) et, réciproquement, sont capables de se déformer mécaniquement sous l'action d'un champ électrique (effet inverse). L'effet piézoélectrique direct fut mis en évidence expérimentalement en 1880 par les frères Jacques et Pierre Curie (1856-1941/1859-1906) qui prédirent et vérifièrent, grâce aux solides connaissances acquises sur la pyroélectricité et la structure cristalline, l'existence de la piézoélectricité sur le quartz, le sucre, le topaze, la tourmaline et le sel de rochelle. Leurs travaux ont résidé en une étude méthodique des symétries dans ces cristaux et d'en déduire empiriquement les lois que doivent vérifier les matériaux pour présenter la propriété de piézoélectricité. L'effet piézoélectrique inverse fut quant à lui prédit théoriquement en 1881 par Gabriel Lippmann (1845-1921, prix Nobel de physique en 1908 et inventeur de la photographie couleur) à partir de considérations thermodynamiques et confirmé expérimentalement la même année par les frères Curie. Nonobstant, la formalisation explicite des propriétés piézoélectriques de certains matériaux n'a été rendu possible qu'à partir de 1910 avec le développement de la première théorie de l'élasticité des cristaux basée sur le formalisme tensoriel et rédigée par Woldemar Voigt (1850-1919) dans son célèbre ouvrage intitulé *Lehrbuch der Kristallphysik* [Voi10].

La conclusion des différents travaux menés par les chercheurs précédemment évoqués précise que le phénomène piézoélectrique apparaît dans des matériaux non conducteurs dont la maille cristalline ne présente pas de centre de symétrie. Parmi les 32 classes de solides cristallins répertoriées, 21 classes sont dépourvues de centre de symétrie et parmi ces dernières, 20 bénéficient de la propriété de pié-

zoélectricité (seule la classe cubique 432 ne jouit pas de l'effet piézoélectrique). Concrètement, l'application d'une contrainte mécanique sur les faces d'un matériau piézoélectrique induit un déplacement des barycentres des charges positives et négatives dans chaque maille élémentaire du corps (cf. figure 1.1). Le champ électrique résultant, sommé à chacun des autres champs élémentaires, engendre un champ électrique macroscopique occasionnant une accumulation de charges sur les électrodes de l'échantillon. Le sens du champ électrique et le signe des charges est directement fonction du sens de l'effort appliqué (traction ou compression).

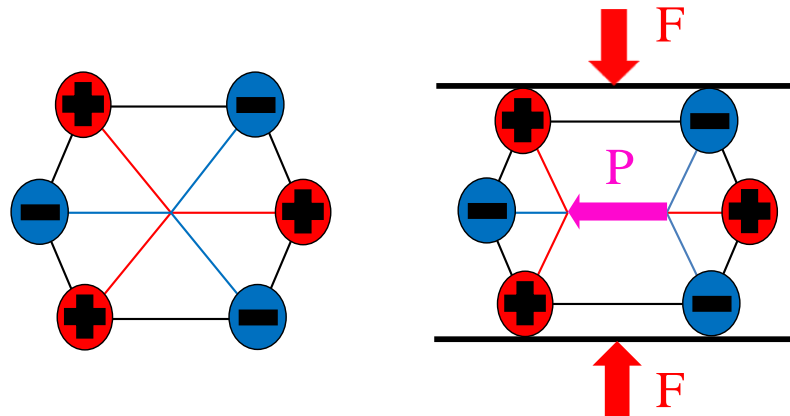


FIGURE 1.1 – Illustration 2D de l'effet piézoélectrique direct : apparition dans une maille élémentaire d'une polarisation ionique sous l'influence d'une compression mécanique

La première application remarquable de la piézoélectricité est le sonar élaboré au cours de la Première Guerre mondiale par Paul Langevin (1872-1946) et Constantin Chilowski, ingénieur français d'origine russe, et dont le but initial était de pouvoir détecter les sous-marins à l'aide de la réflexion des ondes ultrasonores sur ces derniers. Ce transducteur était composé d'une couche de cristaux de quartz disposés en mosaïque de 4 mm d'épaisseur et prise entre deux contremasses d'acier de 3 cm d'épaisseur conférant à sa structure une fréquence de résonance proche de 40 kHz. En guise d'illustration, le sondeur de Langevin-Florisson développé en 1921 est représenté figure 1.2, basé sur la même architecture que le transducteur précédemment cité, dont l'épaisseur des contremasses d'acier a été calculé pour que le résonateur fonctionne à 1.3 MHz [Bok06]. Inspirés par la création de Langevin, les chercheurs de l'entre-deux-guerres conçurent des dispositifs véritablement innovants. Un exemple manifeste est la création du premier oscillateur à quartz par Walter G. Cady (1874-1974) alors professeur à la *Wesleyan University* dans le Connecticut. Dans le même temps, les laboratoires *Bell Telephone* aux Etats-Unis développent, sous l'impulsion remarquable de Warren P. Mason (1900-1986) [Thu94], des filtres en fréquence utilisés en téléphonie conçus à base de cristaux piézoélectriques. Cependant, les nombreuses innovations de l'époque étaient malheureusement limitées par les performances des cristaux naturels dont elles étaient constituées. Après la Seconde Guerre mondiale, un second souffle fut communiqué



© ESPCI, Centre de Ressources Historiques

FIGURE 1.2 – Sondeur de Langevin-Florisson

à ces diverses applications avec le développement dans les années 1950 des céramiques ferroélectriques de type pérovskite. Cette famille cristalline, tirant son nom du titanate de calcium, minéral naturel de formule  $\text{CaTiO}_3$ , représente l'ensemble des oxydes de formule générale  $\text{ABO}_3$ . D'un point de vue cristallographique, le cation A (Ba, Ca, Pb) cristallise dans un système cubique où le centre de chacune des faces est occupé par un atome d'oxygène et le cation B (Ti, Zr, Nb) est logé au sein du site octaédrique formé par ces derniers (cf. figure 1.3). La mise en évidence du caractère ferroélectrique et piézoélectrique de ce type de matériau fut réalisée par le biais d'une étude portant sur les propriétés diélectriques du titanate de baryum ( $\text{BaTiO}_3$ ).

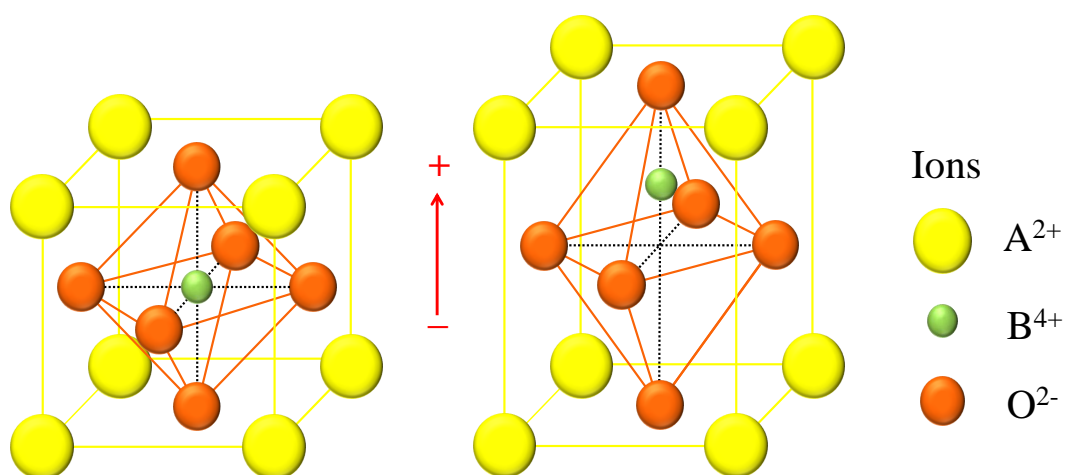


FIGURE 1.3 – Maille élémentaire de type pérovskite de formule générale  $\text{ABO}_3$ . A gauche : structure cubique non polarisée (phase paraélectrique au-dessus de la température de Curie) ; à droite : structure tétragonale polarisée (phase ferroélectrique en-dessous de la température de Curie)

L'obtention de tels matériaux repose sur un procédé dont le schéma de principe est présenté sur la figure 1.4. La première étape réside dans la réalisation à température ambiante d'un mélange de composés, généralement des oxydes, se présentant sous forme de poudre. Ce mélange ainsi obtenu est ensuite pressé afin de former des échantillons de formes variées (barreau, cylindre, anneau, coque,...). Afin de réaliser les réactions chimiques nécessaires à l'obtention de telles céramiques, les échantillons sont chauffés à une température comprise entre 1100°C et 1400°C. Ceci constitue l'étape de frittage. Les céramiques simplement frittées se présentent par conséquent sous la forme d'un agrégat de microcristaux ferroélectriques jouissant pour chacun d'eux d'une polarisation spontanée intrinsèque qui confèrent à la structure une polarisation nulle à l'échelle macroscopique. Afin de créer l'anisotropie nécessaire à l'existence de la piézoélectricité, l'application d'un champ électrique continu (en pratique, le champ de polarisation doit être d'environ 4 kV/mm pour un échantillon placé dans une enceinte maintenue à une température de 100°C), au travers d'électrodes apposées préalablement par sérigraphie, permet d'aligner les moments élémentaires dans la direction du champ. Les céramiques bénéficient alors de la propriété de piézoélectricité. Les matériaux obtenus en particulier à partir de sels de plomb, de zirconium et de titane, de formule générale  $\text{Pb}(\text{Zr} - \text{Ti})\text{O}_3$ , constituent la famille très performante des *céramiques PZT*.

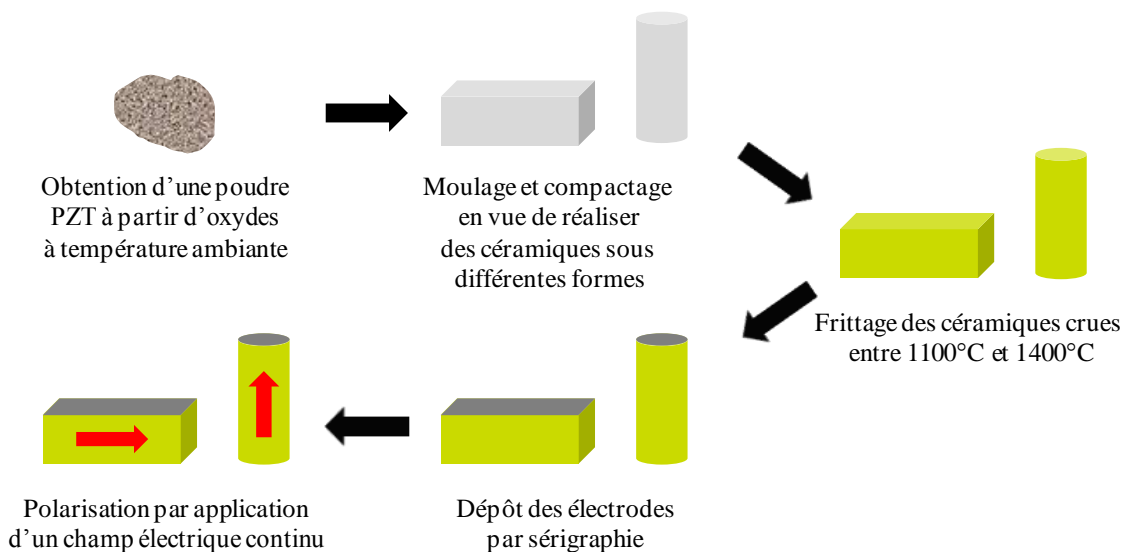


FIGURE 1.4 – Principe de fabrication des céramiques PZT par voie solide

Les différents avantages de ce type de composés sont d'une part de forts coefficients piézoélectriques qui, en comparaison avec le quartz, ont des ordres de grandeur une centaine de fois supérieurs en termes de quantité de charges créée ramenée à l'effort appliqué. D'autre part, il existe une multitude de forme d'échantillons : disques, anneaux, cylindres ou bien encore parallélépipèdes n'en sont que les exemples les plus élémentaires. En outre, ils présentent un facteur de qualité mécanique élevé ( $Q_m > 500$ ) augurant de pertes, dues aux frottements internes,



faibles lors de la mise en vibration des composés. Cependant, un nombre non négligeable d'inconvénients est à mentionner. Tout d'abord, le caractère non linéaire des céramiques PZT sous champ électrique intense doit être souligné. En effet, à l'instar des matériaux ferromagnétiques, un cycle d'hystérésis entre polarisation et champ électrique est observable et cette non-linéarité est généralement responsable d'un accroissement des pertes au sein de la structure occasionnant un échauffement interne qui, s'il s'avère trop important, peut mener à la dépoliarisation de la céramique. En d'autres termes, le matériau voit sa température aller au-delà de la température de Curie, température marquant la transition entre les phases ferroélectrique et paraélectrique. Le vieillissement, c'est-à-dire la variation au cours du temps des paramètres diélectriques et piézoélectriques due à un réarrangement lent et progressif des domaines ferroélectriques élémentaires, est également problématique. La fragilité mécanique est aussi une source de désagréments pour ces céramiques : si elles peuvent supporter d'importantes contraintes en compression, la gamme de force en traction s'avère généralement bien inférieure.

D'un point de vue applicatif, grâce à une propension manifeste à la conversion d'énergie et ce, malgré les inconvénients évoqués précédemment, les céramiques PZT demeurent les matériaux de référence dans le domaine des actionneurs piézoélectriques qu'ils soient de forte puissance comme le sonar ou de puissance moindre comme les transducteurs à usage médical (échographie), les allume-gaz et bien évidemment les transformateurs piézoélectriques.

## 1.2.2 Théorie de l'élasticité linéaire [LL90]

La compréhension du comportement dynamique d'un milieu piézoélectrique passe par l'étude des déformations que la structure est susceptible de subir. La présente section s'attachera par conséquent à présenter brièvement les principes résultants de la théorie des milieux continus déformables dans le cadre de l'élasticité linéaire.

### 1.2.2.1 Hypothèses [Bri07]

Tout corps solide soumis à des efforts extérieurs démontre une relative aptitude à se déformer. Si les forces extérieures appliquées n'excèdent pas une certaine limite, la suppression de ces dernières entraîne la disparition de la déformation permettant au solide sollicité de recouvrer sa forme initiale (ceci constitue la différence entre les domaines élastique et plastique). Le champ d'étude de la théorie de l'élasticité se résume alors à la détermination des déformations subies par le solide assujetti mécaniquement en fonction des forces extérieures appliquées et des caractéristiques physiques intrinsèques du matériau. La théorie susnommée s'appuie sur les hypothèses suivantes :

1. Le matériau dont est constitué le solide est supposé homogène et continûment distribué sur le volume du corps considéré. Plus précisément, supposer

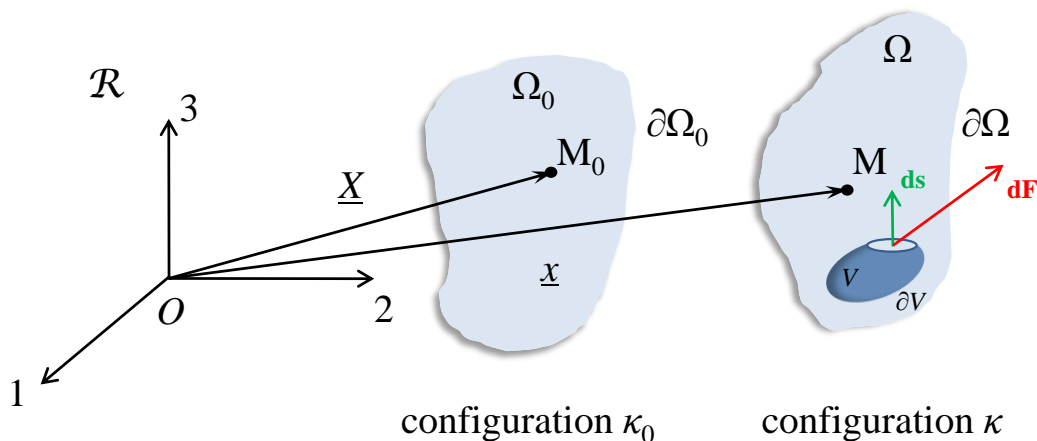
une distribution continue de la matière c'est s'affranchir du caractère moléculaire de cette dernière c'est-à-dire que les plus petits domaines, à partir desquels le solide puisse être représenté, possèdent des dimensions largement supérieures aux dimensions atomiques et présentent en outre les mêmes propriétés physiques que la structure globale. Le caractère homogène supposé du matériau réside quant à lui dans la constance des propriétés physiques dans une direction donnée et pour tous les points de cette direction. L'anisotropie du matériau pourra de plus être pris en considération.

2. L'hypothèse des *petites déformations* est avancée. Cela veut dire que, même si la déformation globale est importante, toute déformation locale au sein du matériau est faible devant les dimensions géométriques du solide considéré. A titre d'exemple, il suffit d'examiner la flexion d'une plaque mince et suffisamment longue qui peut développer des déplacements considérables aux extrémités avec des allongements et des contractions internes minimales [LL90]. En d'autres termes, l'hypothèse signifie que deux points initialement distants d'une longueur  $dl_0$  seront, après déformation, espacés d'une distance  $dl$  telle que l'allongement relatif  $(dl - dl_0)/dl_0$  soit faible devant l'unité.
3. Les efforts extérieurs appliqués sont largement inférieurs à la limite à partir de laquelle une déformation résiduelle demeure après que les forces extérieures ont été supprimées. Les contraintes internes qui en découlent n'entrent pas par conséquent dans le domaine de plastification et les déformations engendrées sont de type élastique. Selon cette hypothèse, le matériau se comporte linéairement de sorte que les déformations relatives sont directement proportionnelles aux contraintes (loi de Hooke).

Afin de formuler mathématiquement les principaux résultats de la théorie de l'élasticité, un système mécanique ( $\mathcal{S}$ ) constitué d'un milieu continu et homogène (Hyp.1) est considéré. L'état du système dans un référentiel ( $\mathcal{R}$ ) à l'instant  $t$  est appelé *configuration*, notée par convention  $\kappa$ . La configuration du système ( $\mathcal{S}$ ) est décrite par l'ensemble des positions des particules qui le composent. Le repérage de cette configuration se fait par le biais du vecteur position  $\mathbf{OM}$ , noté aussi  $\underline{x}$ , qui spécifie la position de chaque particule du système ( $\mathcal{S}$ ) à l'instant  $t$  à partir de l'origine  $O$  du repère orthonormé  $R$  dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ).  $\underline{x}$  est défini par ses coordonnées  $(x, y, z)$  ou  $x_i (i = 1, 2, 3)$  dans  $R$ . Le système ( $\mathcal{S}$ ) occupe dans cette configuration un volume ( $\Omega$ ) de frontière ( $\partial\Omega$ ).

En outre, il est judicieux d'introduire une *configuration de référence* qui est la configuration, notée  $\kappa_0$ , du système ( $\mathcal{S}$ ) à l'instant initial  $t = 0$ . ( $\mathcal{S}$ ) occupe dans  $\kappa_0$  un volume ( $\Omega_0$ ) de frontière ( $\partial\Omega_0$ ) et chaque particule du système dans  $\kappa_0$  est repérée par le vecteur position  $\mathbf{OM}_0$ , noté aussi  $\underline{X}$ , de coordonnées  $(X, Y, Z)$  ou  $X_i (i = 1, 2, 3)$  dans le repère  $R$  du référentiel ( $\mathcal{R}$ ). Ainsi, la paramétrisation du problème se résume comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{OM}_0 &= \underline{X} & \text{de coordonnées } (X, Y, Z) \text{ ou } X_i \text{ dans } \kappa_0 \\ \mathbf{OM} &= \underline{x} & \text{de coordonnées } (x, y, z) \text{ ou } x_i \text{ dans } \kappa \end{cases} \quad (1.1)$$

FIGURE 1.5 – Configurations du système ( $\mathcal{S}$ ) dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ )

### 1.2.2.2 Tenseur des déformations

Sous l'action de forces extérieures, le système ( $\mathcal{S}$ ) se déforme faisant passer chaque point du corps de la configuration  $\kappa_0$  à la configuration  $\kappa$ . Chaque point peut être décrit par son vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  défini comme la différence entre les vecteurs positions des configurations  $\kappa$  et  $\kappa_0$ . Il vient alors :

$$\mathbf{u}(M) = \mathbf{M}_0M = \mathbf{OM} - \mathbf{OM}_0 = \underline{x} - \underline{X} \quad (1.2)$$

Un point intéressant à évoquer est la variation de la distance élémentaire pour un point entre les configurations  $\kappa_0$  et  $\kappa$ . Comme le système de coordonnées est orthonormé, le carré de cette distance est donné par le théorème de Pythagore. Par conséquent, la différence entre les carrés de la longueur élémentaire dans la configuration  $\kappa$  (après déformation) et la configuration  $\kappa_0$  (avant déformation) a pour expression :

$$dl^2 - dl_0^2 = dx_i^2 - dX_i^2 \quad (1.3)$$

où une sommation sur l'indice muet  $i = 1, 2, 3$  dans l'écriture indiciaire a été introduite (convention dite d'Einstein). Afin de faire apparaître le vecteur déplacement, qui par sa simple connaissance suffit à caractériser la transformation subie par le système, le choix d'exprimer toutes grandeurs physiques à l'aide des seules coordonnées  $x_i$  est adopté, c'est-à-dire qu'une *description eulérienne* du problème [Sal05] est considérée. Mathématiquement, cela signifie qu'à chaque instant la configuration  $\kappa$  est la configuration de référence pour décrire l'évolution du système entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . Ceci étant convenu, à l'aide de l'expression de la différentielle  $dX_i = X_{i,j}dx_j$  de la variable  $X_i$ , où la notation  $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$  a été employée, l'équation (1.3) devient :

$$dl^2 - dl_0^2 = (\delta_{ij} - X_{k,i}X_{k,j})dx_idx_j \quad (1.4)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. A noter que, à l'instar de l'indice  $i$ , une sommation implicite de l'indice muet  $j$  est effectuée conformément à la convention

d'Einstein. Ainsi, à l'aide de l'égalité  $X_{i,j} = \delta_{ij} - u_{i,j}$  obtenue par simple dérivation de l'expression (1.2), l'équation précédente s'écrit comme suit :

$$dl^2 - dl_0^2 = [\delta_{ij} - (\delta_{ki} - u_{k,i})(\delta_{kj} - u_{k,j})]dx_i dx_j \quad (1.5)$$

Il vient alors :

$$dl^2 = dl_0^2 + 2S_{ij}dx_i dx_j \quad (1.6)$$

avec

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (1.7)$$

$S_{ij}$  est appelé *tenseur des déformations*. De par sa définition, ce tenseur est symétrique ( $S_{ij} = S_{ji}$ ) réduisant son entière connaissance à 6 variables distinctes. Sa représentation est de ce fait symbolisée par une matrice  $3 \times 3$  symétrique telle que :

$$\{S\} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

La trace de ce tenseur d'ordre 2, constituant un invariant indépendant du système de coordonnées, représente, au premier ordre près, la variation relative du volume élémentaire entourant le point considéré [LL90]. En outre, d'après l'hypothèse des petites déformations (Hyp.2), les termes du second ordre dans l'expression de  $dl^2$  peuvent être négligés et le tenseur des déformations se simplifie en définitive par :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.9)$$

### 1.2.2.3 Tenseur des contraintes

Déformé par des efforts extérieurs supposés d'origine purement mécanique, le système ( $\mathcal{S}$ ) voit apparaître en son sein des tensions internes tendant à le ramener vers sa configuration initiale  $\kappa_0$ . Ces contraintes s'apparentent aux forces d'interaction entre les molécules qui constituent le corps et elles n'agissent de par cette origine physique qu'à des distances de l'ordre des distances intermoléculaires autour de la particule qui leur donne naissance. Cependant, comme le souligne l'hypothèse 1, la théorie de l'élasticité est une théorie élaborée à une échelle largement supérieure à l'échelle atomique. Par conséquent, les forces d'interaction intermoléculaires à l'origine des contraintes internes se caractérisent par un rayon d'action de courte portée. En d'autres termes, si un volume ( $V$ ) quelconque à l'intérieur du système ( $\mathcal{S}$ ) pris dans sa configuration  $\kappa$  est considéré, les forces mécaniques développées dans le volume sont inéluctablement transmises au reste du milieu par l'intermédiaire de la surface fermée ( $\partial V$ ) qui définit ( $V$ ). Mathématiquement, si  $\mathbf{f}$  désigne la densité volumique des forces s'exerçant sur le volume ( $V$ ), la résultante des forces  $\int \mathbf{f} dV$  doit pouvoir s'exprimer par le truchement d'une intégrale surfacique prise sur la frontière du domaine considéré. Le théorème de Green-Ostrogradsky est évidemment l'outil mathématique qui permet cette transformation de sorte que chacune des trois composantes  $f_i$  de la densité volumique de force est égale à la

divergence d'un tenseur d'ordre 2, nommé *tenseur des contraintes* et noté  $T_{ij}$ . Il vient de ce fait :

$$\int_{(V)} f_i dV = \int_{(V)} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_{(\partial V)} T_{ij} ds_j \quad (1.10)$$

où  $ds_j$  symbolise les composantes de l'élément de surface  $\mathbf{ds}$ , aire sur laquelle le milieu extérieur au volume  $(V)$  applique la force élémentaire  $dF_i = T_{ij} ds_j$  (cf. figure 1.5). En outre, à l'instar du tenseur des déformations,  $\{T\}$  présente une propriété de symétrie. Sa représentation est alors identique à (1.8) de sorte que :

$$\{T\} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

La propriété de symétrie résulte de la possibilité d'exprimer le moment des forces de contraintes internes agissant sur le volume  $(V)$  sous forme d'une intégrale surfacique. En effet, sachant que le moment d'une force se calcule à l'aide d'un produit vectoriel, les composantes  $M_{ij}$  du moment résultant s'écrivent comme l'intégrale volumique des composantes  $f_i x_j - f_j x_i$  d'un tenseur antisymétrique de rang 2 et par la suite, en employant la même transformation mathématique appliquée à la résultante des forces, elles se résument à une intégrale surfacique selon la relation suivante :

$$M_{ij} = \int_{(V)} (f_i x_j - f_j x_i) dV = \int_{(\partial V)} (T_{ik} x_j - T_{kj} x_i) ds_k \quad (1.12)$$

L'écriture des tenseurs des déformations et des contraintes sous forme d'une matrice symétrique, permettant leur détermination à partir de six quantités indépendantes, suggère une représentation plus condensée sous forme d'un vecteur colonne à six composantes (notation dite de Voigt) dont leur signification respective est indiquée dans le tableau [1.1]. Parmi ces six composantes, les trois premières se rapportent aux tensions normales (traction et compression) selon les trois axes du repère et les trois dernières symbolisent les effets de cisaillement autour de ces mêmes axes. Ainsi, dans tout le manuscrit, les tenseurs  $\{S\}$  et  $\{T\}$  seront notés :

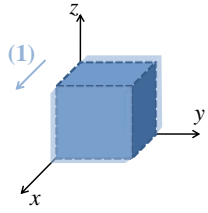
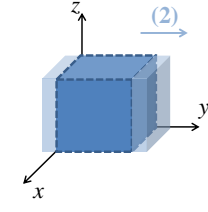
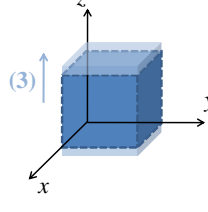
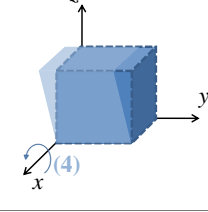
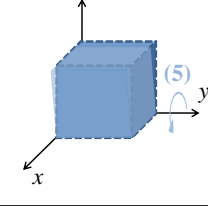
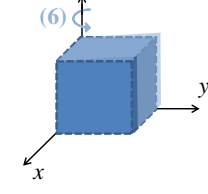
$$\{S\} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{T\} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

En outre, la déformation élastique d'un solide se traduit par l'accumulation d'une certaine énergie potentielle appelée *énergie élastique*. Il est possible de montrer que le travail élémentaire par unité de volume correspondant à un accroissement du tenseur de déformation  $\{dS\}$  s'écrit [LL90] :

$$dW = \{T\}^T \{dS\} = T_\lambda dS_\lambda \quad (1.14)$$

où l'exposant  $T$  représente l'application transposée.

TABLE 1.1 – Composantes des tenseurs des déformations et des contraintes [Nog05]

Composantes tensorielles ( $S_{ij}, T_{ij}$ ) ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ )	Notation de Voigt ( $S_\lambda, T_\lambda$ ) $\lambda \in \{1, \dots, 6\}$	Dénomination usuelle de la transformation	Déformation de la géométrie de référence
$(S_{11}, T_{11})$	$(S_1, T_1)$	Tension normale d'axe ( $Ox$ )	
$(S_{22}, T_{22})$	$(S_2, T_2)$	Tension normale d'axe ( $Oy$ )	
$(S_{33}, T_{33})$	$(S_3, T_3)$	Tension normale d'axe ( $Oz$ )	
$(2S_{23}, T_{23})$	$(S_4, T_4)$	Cisaillement autour de l'axe ( $Ox$ )	
$(2S_{13}, T_{13})$	$(S_5, T_5)$	Cisaillement autour de l'axe ( $Oy$ )	
$(2S_{12}, T_{12})$	$(S_6, T_6)$	Cisaillement autour de l'axe ( $Oz$ )	

## 1.2.3 Théorie linéaire de la piézoélectricité

### 1.2.3.1 Hypothèses

Les propriétés thermiques, électriques et mécaniques des cristaux et autres céramiques piézoélectriques sont régies par un ensemble de grandeurs physiques telles que la température  $\theta$ , l'entropie  $\sigma$ , le tenseur des contraintes  $\{T\}$ , le tenseur des déformations  $\{S\}$ , le champ électrique  $\{E\}$  et l'induction électrique  $\{D\}$ . Les principales relations existant entre ces différentes quantités permettent de mettre en exergue trois types de phénomène physique : la piézoélectricité, la pyroélectricité et la thermoélasticité. La figure 1.6 résume succinctement les interactions entre les quantités susnommées. Les sommets du triangle intérieur symbolisent les variables extensives et ceux du triangle extérieur représentent les variables intensives [Bri07]. Une illustration plus détaillée de ce diagramme est présentée dans [Ike96]. Cependant, en pratique, les couplages thermomécaniques et thermoélectriques sont faibles dans les matériaux communément employés. En toute rigueur, il faudrait tenir compte de l'effet de la température sur les propriétés piézoélectriques de ces derniers. D'un point de vue thermodynamique, cela nécessiterait d'apporter une précision quant au caractère adiabatique ou isotherme de la transformation subie par le matériau. Cette distinction est rarement prise en considération. Par conséquent, dans la suite de l'étude, le choix de considérer les coefficients intervenant dans les équations constitutives de la piézoélectricité comme des constantes isothermes est retenu.

La théorie développée ci-après est basée sur la norme IEEE qui offre une bonne représentation des propriétés des matériaux piézoélectriques [IEEE]. Selon cette dernière, l'effet piézoélectrique est conforme à un couplage électroélastique linéaire qui présuppose une application de faibles champs électriques et de faibles contraintes mécaniques sur les structures considérées. Dans ces conditions, les tenseurs des contraintes et des déformations répondent aux hypothèses de la théorie de l'élasticité linéaire (cf. § 1.2.2). D'un point de vue électrique, comme les vitesses acoustiques mises en jeu lors du phénomène piézoélectrique sont très largement inférieures aux vitesses des ondes électromagnétiques, les effets magnétiques peuvent être négligés et les équations de Maxwell se réduisent alors aux équations de l'électrostatique. Par conséquent, le champ électrique  $\{E\}$  et l'induction électrique  $\{D\}$  vérifient respectivement les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Le champ électrique dérive de ce fait d'un potentiel électrique  $\phi$  tel que :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi \tag{1.16}$$

En outre, l'étude de la dynamique d'un matériau piézoélectrique, et *a posteriori* des transformateurs, implique en toute rigueur une prise en compte de l'influence de l'environnement extérieur dans lequel évoluent les différentes architectures. Toutefois, les permittivités diélectriques des céramiques étant en moyenne mille fois

supérieures à la permittivité du vide, il est tout à fait légitime de supposer un confinement des lignes de champ électrique au sein du matériau piézoélectrique. Cette dernière hypothèse sera par la suite mise en défaut puisque les investigations expérimentales du chapitre 4 mettront en évidence l'existence d'un champ électrique environnant. D'un point de vue mécanique, il est également opportun d'omettre l'influence de l'environnement extérieur, l'impédance acoustique de l'air étant parfaitement négligeable [GA98].

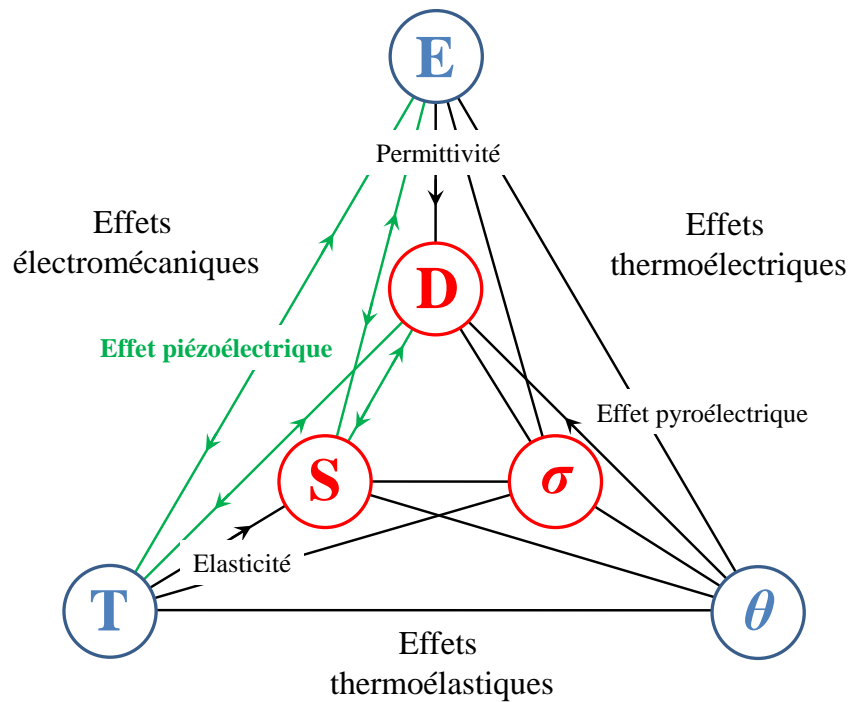


FIGURE 1.6 – Interactions entre les grandeurs physiques [Bri07]

Fort de ces hypothèses, les équations décrivant le comportement électromécanique des matériaux piézoélectriques vont pouvoir être introduites.

### 1.2.3.2 Équations fondamentales de la piézoélectricité

Afin de décrire localement le comportement d'un composé piézoélectrique, plusieurs couples de variables indépendantes sont envisageables. En effet, si les tenseurs des contraintes  $\{T\}$  et des déformations  $\{S\}$  peuvent indifféremment être choisis pour remplir le rôle de variable indépendante mécanique, opter pour le champ électrique  $\{E\}$  ou l'induction électrique  $\{D\}$  en tant que variable indépendante électrique est tout aussi arbitraire. Par conséquent, le paramétrage repose *a priori* sur quatre couples de variables indépendantes :  $(S, D)$ ,  $(T, E)$ ,  $(T, D)$  ou  $(S, E)$ . Afin d'établir les équations constitutives de la piézoélectricité, convenons par exemple de travailler avec le couple de variables extensives  $(S, D)$ . Selon [Ike96], la fonction énergétique appropriée est alors l'énergie libre volumique  $F$ , forme quadratique linéaire du tenseur des déformations et du vecteur déplacement électrique,



qui s'exprime comme suit :

$$F(S, D) = \frac{1}{2}\{S\}^T [c^D] \{S\} - \{S\}^T [h]^T \{D\} + \frac{1}{2}\{D\}^T [\beta^S] \{D\} \quad (1.17)$$

où  $[c^D]$ ,  $[h]$  et  $[\beta^S]$  désignent respectivement la matrice des rigidités à déplacement électrique constant, la matrice des constantes de couplage piézoélectrique et la matrice des impermittivités à déformation fixée. A noter que toutes les constantes intervenant dans la définition de ces matrices sont des quantités isothermes. En outre, l'expression de cette énergie libre volumique présente, en plus des contributions d'origine purement élastique et électrique, un terme mêlant le tenseur des déformations et le vecteur déplacement électrique synonyme de couplage électroélastique et représentatif de la part d'énergie convertie. En utilisant la notation de Voigt introduite au paragraphe § 1.2.2.3, cette énergie libre volumique peut se réécrire :

$$F(S, D) = \frac{1}{2}c_{\lambda\mu}^D S_\lambda S_\mu - h_{i\lambda} S_\lambda D_i + \frac{1}{2}\beta_{ij}^S D_i D_j \quad \text{pour} \quad \begin{cases} (\lambda, \mu) \in \{1, \dots, 6\}^2 \\ (i, j) \in \{1, \dots, 3\}^2 \end{cases} \quad (1.18)$$

La différentielle exacte de  $F$  à température constante s'écrit :

$$dF = \{T\}^T \{dS\} + \{E\}^T \{dD\} = T_\lambda dS_\lambda + E_i dD_i \quad (1.19)$$

Par conséquent, les équations de la piézoélectricité s'obtiennent par simple dérivation en termes de variables  $(S, D)$  de l'énergie libre volumique donnée par la relation (1.18) de sorte que :

$$\begin{cases} T_\lambda = \left( \frac{\partial F}{\partial S_\lambda} \right)_{\theta, D} = c_{\lambda\mu}^D S_\mu - h_{i\lambda} D_i \\ E_i = \left( \frac{\partial F}{\partial D_i} \right)_{\theta, S} = -h_{i\lambda} S_\lambda + \beta_{ij}^S D_j \end{cases} \quad (1.20)$$

Ces dernières peuvent se réécrire sous la forme tensorielle suivante :

$$\begin{cases} \{T\} = [c^D] \{S\} - [h]^T \{D\} \\ \{E\} = -[h]^T \{S\} + [\beta^S] \{D\} \end{cases} \quad (1.21)$$

Les relations constitutives de la piézoélectricité sont fonction du couple de variables indépendantes, choix relatif à la modélisation de l'application souhaitée (capteur ou actionneur). Le tableau [1.2] donnent les équations pour chaque couple de variables issues de la différentielle du potentiel thermodynamique associé. Le tableau [1.3] indique les notations adoptées.

TABLE 1.2 – Relations constitutives de la piézoélectricité [Ike96]

Couple de variables indépendantes intensives ( $S, D$ )		
Potentiel thermodynamique	Différentielle exacte	Équations piézoélectriques associées
$F = \frac{1}{2}\{S\}^T[c^D]\{S\} - \{S\}^T[h]^T\{D\} + \frac{1}{2}\{D\}^T[\beta^S]\{D\}$	$dF = \{T\}^T\{dS\} + \{E\}^T\{dD\}$	$\{T\} = [c^D]\{S\} - [h]^T\{D\}$ $\{E\} = -[h]\{S\} + [\beta^S]\{D\}$
Couple de variables indépendantes extensives ( $T, E$ )		
Potentiel thermodynamique	Différentielle exacte	Équations piézoélectriques associées
$G = -\frac{1}{2}\{T\}^T[s^E]\{T\} - \{T\}^T[d]^T\{E\} - \frac{1}{2}\{E\}^T[\varepsilon^T]\{E\}$	$dG = -\{S\}^T\{dT\} + \{D\}^T\{dE\}$	$\{S\} = [s^E]\{T\} + [d]^T\{E\}$ $\{D\} = [d]\{T\} + [\varepsilon^T]\{E\}$
Couple de variables indépendantes mixtes ( $T, D$ )		
Potentiel thermodynamique	Différentielle exacte	Équations piézoélectriques associées
$G_1 = -\frac{1}{2}\{T\}^T[s^D]\{T\} - \{T\}^T[g]^T\{D\} + \frac{1}{2}\{D\}^T[\beta^T]\{D\}$	$dG_1 = -\{S\}^T\{dT\} + \{E\}^T\{dD\}$	$\{S\} = [s^D]\{T\} + [g]^T\{D\}$ $\{E\} = -[g]\{T\} + [\beta^T]\{D\}$
Couple de variables indépendantes mixtes ( $S, E$ )		
Potentiel thermodynamique	Différentielle exacte	Équations piézoélectriques associées
$G_2 = \frac{1}{2}\{S\}^T[c^E]\{S\} - \{S\}^T[e]^T\{E\} - \frac{1}{2}\{E\}^T[\varepsilon^S]\{E\}$	$dG_2 = \{T\}^T\{dS\} - \{D\}^T\{dE\}$	$\{T\} = [c^E]\{S\} - [e]^T\{E\}$ $\{D\} = [e]\{S\} + [\varepsilon^S]\{E\}$

TABLE 1.3 – Matrices des constantes mécaniques, diélectriques et piézoélectriques

Matrice	Notation	Définition	Unité
Mécanique	$[s^E]$	souplesse à $\{E\}$ constant	$\text{m}^2/\text{N}$
	$[s^D]$	souplesse à $\{D\}$ constant	$\text{m}^2/\text{N}$
	$[c^E]$	rigidité à $\{E\}$ constant	$\text{N}/\text{m}^2$
	$[c^D]$	rigidité à $\{D\}$ constant	$\text{N}/\text{m}^2$
Piézoélectrique	$[d]$	matrice reliant $\{T\}$ à $\{D\}$ à $\{E\}$ constant	$\text{C}/\text{N}$ ou $\text{m}/\text{V}$
	$[e]$	matrice reliant $\{S\}$ à $\{D\}$ à $\{E\}$ constant	$\text{C}/\text{m}^2$ ou $\text{N}/\text{Vm}$
	$[g]$	matrice reliant $\{T\}$ à $\{E\}$ à $\{D\}$ constant	$\text{m}^2/\text{C}$ ou $\text{Vm}/\text{N}$
	$[h]$	matrice reliant $\{S\}$ à $\{E\}$ à $\{D\}$ constant	$\text{N}/\text{C}$ ou $\text{V}/\text{m}$
Diélectrique	$[\varepsilon^S]$	permittivité à $\{S\}$ constant	$\text{F}/\text{m}$
	$[\varepsilon^T]$	permittivité à $\{T\}$ constant	$\text{F}/\text{m}$
	$[\beta^S]$	impermittivité à $\{S\}$ constant	$\text{m}/\text{F}$
	$[\beta^T]$	impermittivité à $\{T\}$ constant	$\text{m}/\text{F}$

### 1.2.3.3 Relations matricielles caractéristiques

Toutes les matrices du tableau [1.3] sont liées par des relations obtenues en inversant le jeu d'équations constitutives données dans le tableau [1.2]. En voici les principales [Yan05] :

- Matrices des constantes mécaniques (dimension  $6 \times 6$ ) :

$$[c^E] = [s^E]^{-1} \quad (1.22)$$

$$[c^D] = [s^D]^{-1} \quad (1.23)$$

$$[s^D] = [s^E] - [d]^T [\beta^T] [d] \quad (1.24)$$

$$[c^D] = [c^E] + [e]^T [\beta^S] [e] \quad (1.25)$$

- Matrices des constantes piézoélectriques (dimension  $3 \times 6$ ) :

$$[d] = [\varepsilon^T] [g] = [e] [s^E] \quad (1.26)$$

$$[e] = [\varepsilon^S] [h] = [d] [c^E] \quad (1.27)$$

$$[g] = [\beta^T] [d] = [h] [s^D] \quad (1.28)$$

$$[h] = [\beta^S] [e] = [g] [c^D] \quad (1.29)$$

- Matrices des constantes diélectriques (dimension  $3 \times 3$ ) :

$$[\beta^S] = [\varepsilon^S]^{-1} \quad (1.30)$$

$$[\beta^T] = [\varepsilon^T]^{-1} \quad (1.31)$$

$$[\varepsilon^S] = [\varepsilon^T] - [d][c^E][d]^T \quad (1.32)$$

$$[\beta^S] = [\beta^T] + [g][c^D][g]^T \quad (1.33)$$

Les matrices précédemment évoquées décrivent les propriétés électromécaniques des matériaux piézoélectriques mis en jeu. La forme des matrices se rapporte à un système orthonormé ( $O, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ) dans lequel la polarisation de la céramique peut indifféremment être définie selon chacun des trois axes. Il en résulte une modification sur la disposition des éléments des matrices. Toutefois, par convention, la polarisation est généralement définie selon l'axe ( $Ox_3$ ). Cette distinction sur la direction de polarisation sera par la suite nécessaire pour l'étude des transformateurs piézoélectriques, notamment pour le transformateur de type Rosen puisque ce dernier présente au primaire et au secondaire une polarisation de direction différente.

En outre, la symétrie et la classe à laquelle appartiennent les matériaux piézoélectriques influent sur la forme des matrices. Par exemple, les céramiques PZT font partie de la classe des cristaux « 6mm » du système hexagonal qui, d'un point de vue cristallographique, confère à la structure un axe de symétrie d'ordre 6 et six plans de symétrie parallèles à l'axe principal [Ike96]. L'ensemble de ces symétries simplifie la représentation matricielle des propriétés électromécaniques de sorte que les matrices des constantes mécaniques, piézoélectriques et diélectriques peuvent s'exprimer respectivement à l'aide de 5, 3 et 2 coefficients indépendants. Fort de ce constat, les matrices  $[c^E]$ ,  $[e]$  et  $[\varepsilon^S]$  d'une céramique PZT sont indiquées dans le tableau [1.4] pour les cas où la polarisation de la céramique est respectivement définie selon les axes ( $Ox_1$ ), ( $Ox_2$ ) et ( $Ox_3$ ).

Pour conclure sur le phénomène piézoélectrique, il est intéressant de décrire les modes de couplage piézoélectrique élémentaires rencontrés dans la littérature et qui sont mis à contribution pour l'élaboration des architectures de transformateurs piézoélectriques.

#### 1.2.4 Modes de couplage piézoélectrique élémentaires

L'anisotropie nécessaire à l'existence de la piézoélectricité favorise, sous l'action d'un champ électrique extérieur, l'apparition de déformations dans une direction précise. Ce fonctionnement caractéristique de la céramique piézoélectrique est usuellement appelé *mode*. Ces modes particuliers sont caractérisés par un coefficient de couplage généralement noté  $k$  et défini à partir des éléments des matrices des constantes mécaniques, piézoélectriques et diélectriques du matériau. Il est l'expression de l'aptitude de l'échantillon à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et réciproquement. Comme l'indique le tableau [1.4], la matrice piézoélectrique  $[e]$  des céramiques PZT est entièrement définie à partir de trois constantes non nulles  $e_{31}$ ,  $e_{33}$  et  $e_{15}$ . Par conséquent, les déformations engendrées dans une

TABLE 1.4 – Définitions selon la direction de polarisation des matrices  $[c^E]$ ,  $[e]$  et  $[\varepsilon^S]$  caractérisant les propriétés électromécaniques des céramiques PZT [Yan05]

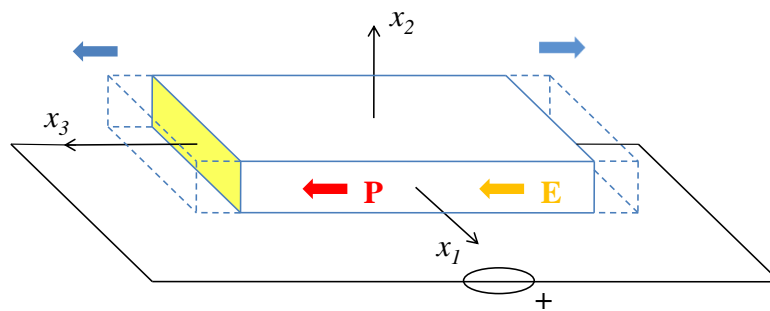
$(Ox_1)$	$\begin{bmatrix} c_{33}^E & c_{13}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{11}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{12}^E & c_{11}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \varepsilon_{33}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix}$
$(Ox_2)$	$\begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{13}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{33}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{13}^E & c_{11}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix}$
$(Ox_3)$	$\begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix}$

céramique s'effectuent selon trois modes de couplage élémentaires : le mode *transversal*, le mode *longitudinal* et le mode de *cisaillement*. Ces derniers sont identifiés par le truchement d'un couple d'indices  $\{i\lambda\}$  où  $i$  et  $\lambda$  correspondent respectivement à la direction du champ électrique appliqué et l'axe selon lequel se déforme le matériau. Une illustration des modes précédemment évoqués est présentée sur la figure (1.7) dans le cas d'une céramique parallélépipédique. Une représentation du mode radial a de plus été précisée. Une brève description de chacun de ces modes peut également être donnée :

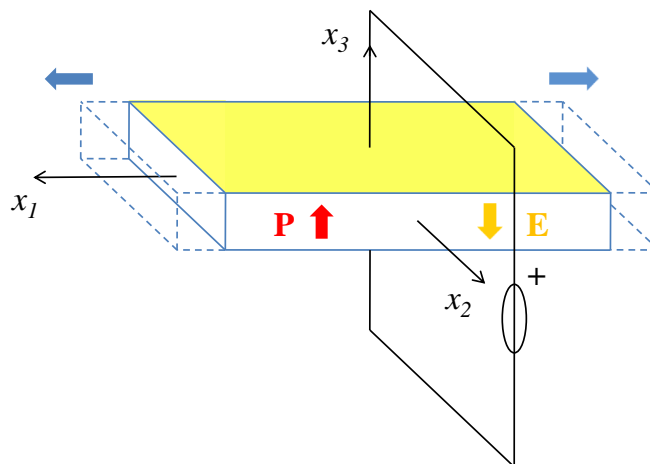
- Le mode longitudinal (ou mode  $\{33\}$ ) se caractérise par la création d'une déformation mécanique dans la même direction que le champ électrique appliqué (cf. figure 1.7(a)). Le coefficient piézoélectrique  $e_{33}$  étant positif, la déformée créée et le champ extérieur imprimé à la céramique sont par conséquent de signe identique.
- Le mode transversal (ou mode  $\{31\}$ ) observe une variation de la longueur de l'échantillon dans une direction perpendiculaire à la direction de polarisation (cf. figure 1.7(b)). Contrairement au mode précédent, la déformée engendrée et le champ électrique communiqué au matériau sont de signes différents en raison d'un coefficient piézoélectrique  $e_{31}$  négatif. En outre, le coefficient de couplage transversal  $k_{31}$  est généralement inférieur à celui du mode longitudinal.
- Le mode de cisaillement (ou mode  $\{15\}$ ) développe une torsion de la structure par application d'un champ électrique perpendiculaire à la direction de polarisation. Sur la figure 1.7(c), le champ extérieur est appliqué à la céramique selon l'axe ( $Ox_1$ ) ce qui, par effet piézoélectrique inverse, engendre une rotation des dipôles élémentaires autour de l'axe ( $Ox_2$ ).
- Le mode radial (ou mode planaire) est sollicité pour une céramique discoïdale polarisée selon son épaisseur (cf. figure 1.7(d)). Ce mode nécessite une contrainte géométrique pour faciliter son existence de sorte que le diamètre de la structure doit être largement supérieur à son épaisseur. Concrètement, l'application d'un champ électrique le long de l'axe de ce disque fin engendre par effet piézoélectrique inverse une déformation radiale s'apparentant à un mode transversal pondéré par le coefficient de Poisson  $\sigma^E = -s_{12}^E/s_{11}^E$ , quantité retrouvée dans l'expression du facteur de couplage  $k_p$  associé à ce mode.

L'étude de tels modes repose sur une modélisation unidimensionnelle des phénomènes et donne lieu à une simplification des équations de la piézoélectricité qui, au lieu de revêtir leur aspect tensoriel originel, s'expriment sous forme scalaire. Le tableau [1.5] répertorie les équations de la piézoélectricité, exprimées en termes de variables intensives ( $T, E$ ), régissant le comportement des modes précédemment évoqués. Le coefficient de couplage électromécanique caractéristique de ces modes a également été précisé.

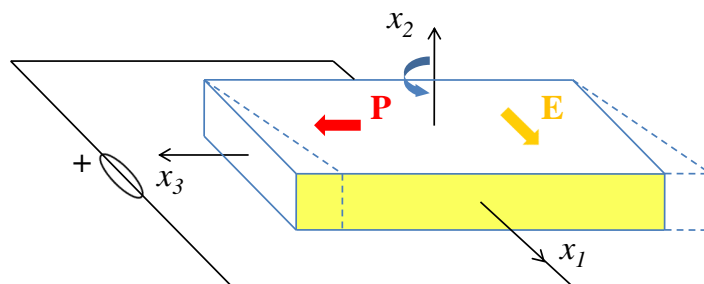
En jouant sur la géométrie de la céramique (parallélépipède, cylindre, tube,...) et sur le type de polarisation (uniforme, axiale, en épaisseur, radiale...) il est possible d'exciter des modes autres que les modes élémentaires cités ci-devant. Dans [Bri07], l'auteur donne des exemples d'autres modes possibles et les caractéristiques associées à chacun d'eux. En effet, pour un échantillon parallélépipédique, il paraît évident que les couplages longitudinaux et transversaux opèrent conjointement dans la structure. Il est cependant possible de privilégier un mode en particulier en jouant sur la forme de l'échantillon. Par exemple, pour une céramique de longueur  $L$ , de largeur  $l$  et d'épaisseur  $e$  polarisée selon sa longueur, un mode longitudinal



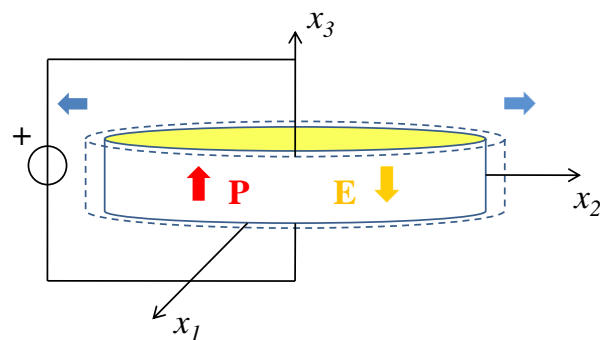
(a) Mode longitudinal



(b) Mode transversal



(c) Mode de cisaillement



(d) Mode radial

FIGURE 1.7 – Modes de couplage piézoélectrique élémentaires

TABLE 1.5 – Équations de la piézoélectricité et coefficient de couplage électromécanique associés à chaque mode de couplage piézoélectrique élémentaire [Ike96]

Mode	Équations de la piézoélectricité	Coefficient de couplage $k_{i\lambda}$
Transversal	$S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3$ $D_3 = d_{31} T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3$	$k_{31} = \frac{d_{31}}{\sqrt{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}}$
Longitudinal	$S_3 = s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3$ $D_3 = d_{33} T_3 + \varepsilon_{33}^T E_3$	$k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{s_{33}^E \varepsilon_{33}^T}}$
Cisaillement	$S_5 = s_{55}^E T_5 + d_{15} E_1$ $D_1 = d_{15} T_5 + \varepsilon_{11}^T E_1$	$k_{15} = \frac{d_{15}}{\sqrt{s_{55}^E \varepsilon_{11}^T}}$
Radial	$S_1 = s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + d_{31} E_3$ $S_2 = s_{12}^E T_1 + s_{11}^E T_2 + d_{31} E_3$ $D_3 = d_{31} (T_1 + T_2) + \varepsilon_{33}^T E_3$	$k_p = k_{31} \sqrt{\frac{2}{1 - \sigma^E}}$

peut être favorisé si les facteurs de forme  $L/l$  et  $L/e$  sont largement supérieurs à l'unité.

Par la suite, il sera possible de constater que c'est par l'association de cellules de conversion élémentaires, comme celles décrites auparavant, que se déclinent les différentes architectures de transformateurs piézoélectriques, le transformateur de type Rosen, combinaison des couplages transversal et longitudinal, demeurant assurément la structure la plus simple et la plus représentative.

## 1.3 Les transformateurs piézoélectriques

### 1.3.1 Principe et architectures

L'émergence des transformateurs piézoélectriques coïncide avec le développement dans les années 1950 des céramiques ferroélectriques appartenant à la famille cristalline des pérovskites (cf. § 1.2.1). La première architecture est communément attribuée à C.A. Rosen qui conçut et breveta en 1954 une structure élévatrice de tension façonnée dans un barreau de titanate de baryum  $\text{BaTiO}_3$  [Ros58]. Par pur souci historique, il est à préciser que la paternité de cette innovation technologique revient en réalité à Alexander McLean Nicolson qui, au cours de recherches menées à la fin des années 1920, créa la première structure de transformateur à base de cristaux piézoélectriques [Nic31]. Le fonctionnement de cette architecture était bien évidemment limité en raison des performances insuffisantes des cristaux dont elle était constituée. Par la suite, en dépit du caractère novateur que revêtait cette technologie, le transformateur piézoélectrique a été délaissé et n'a suscité que peu de développement lors des années qui ont suivi sa découverte. Nonobstant, depuis



un peu plus de vingt ans, avec l'amélioration significative des procédés d'élaboration des céramiques ferroélectriques, ce dernier a connu un regain d'intérêt dans le domaine du génie électrique, notamment dans un contexte de miniaturisation des circuits électroniques. En effet, outre la compacité dont bénéficie cette technologie, le transformateur piézoélectrique offre des performances remarquables en termes de gain en tension, puissance de sortie et rendement utiles pour des applications nécessitant une adaptation de tension. À noter qu'à densité de puissance égale, les transformateurs piézoélectriques présentent des rendements supérieurs à ceux atteints par leurs homologues magnétiques. Une grande majorité d'architectures est également employée en tant que transformateur d'isolement de part leur isolation galvanique inhérente. Par ailleurs, les transformateurs piézoélectriques sont peu sensibles aux rayonnements électromagnétiques. Cependant, au regard de leurs nombreux avantages, il faut mentionner la forte dépendance des performances de ces structures avec la charge placée au secondaire exigeant généralement l'implantation d'une électronique complexe nécessaire à la régulation de son comportement électrique.

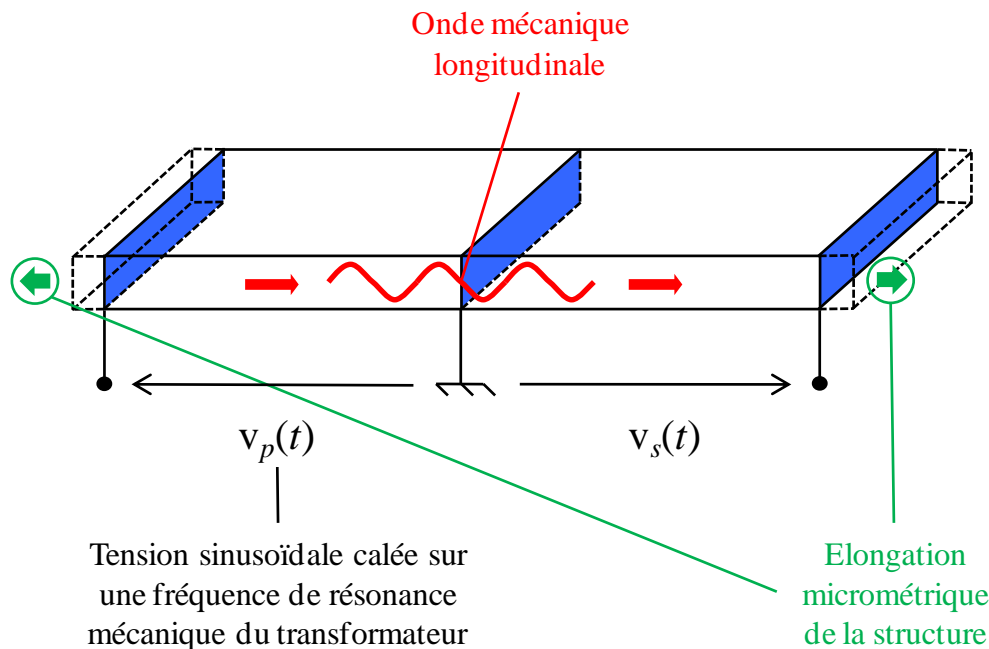


FIGURE 1.8 – Principe de fonctionnement d'un transformateur piézoélectrique

D'un point de vue fonctionnel, à l'instar des transformateurs magnétiques conventionnels, le transformateur piézoélectrique convertit une tension alternative au primaire en une tension alternative proportionnelle au secondaire. Toutefois, au lieu d'exploiter un couplage électromagnétique, cette architecture met en œuvre une double conversion électromécanique puis mécanoélectrique de l'énergie. Concrètement, la tension électrique sinusoïdale appliquée au primaire induit par effet piézoélectrique inverse une déformation mécanique qui en se propageant au sein de la structure engendre par effet piézoélectrique direct une tension électrique au

secondaire. L'efficacité d'un tel fonctionnement est accrue lorsque la fréquence de la tension d'entrée est calée à proximité d'une résonance mécanique du transformateur. Cette dernière dépend des dimensions, des propriétés du matériau dont est constitué le transformateur et des conditions de charge imposées à ce dernier. Typiquement, les fréquences pour des architectures de dimensions millimétriques s'échelonnent sur un intervalle allant de plusieurs dizaines de kHz à quelques MHz. La figure 1.8 permet d'illustrer le schéma de principe d'un transformateur : la mise sous tension de l'association de deux cellules élémentaires sollicitant respectivement un couplage piézoélectrique longitudinal engendre la vibration du transformateur ainsi constitué caractérisée par une élévation selon la dimension principale du dispositif.

L'exemple précédent est basé sur la seule exploitation du couplage piézoélectrique longitudinal, mais rien n'empêche de mettre à profit d'autres couplages piézoélectriques élémentaires tels que ceux proposés sur la figure 1.7. En d'autres termes, en jouant sur la direction de polarisation au primaire et au secondaire et sur la géométrie du transformateur, il est possible d'exciter préférentiellement un mode mécanique et d'en exploiter ses performances. À partir de ces considérations, différentes structures de transformateurs piézoélectriques ont été élaborées et proposées dans la littérature. Une description des architectures les plus répandues, telles que le transformateur piézoélectrique de type Rosen ou bien encore les structures à mode radial, est proposée par la suite.

### 1.3.1.1 Transformateur de type Rosen

Le transformateur piézoélectrique de type Rosen est la structure la plus couramment utilisée et celle qui a suscité le plus d'études dans la littérature [Yan07c]. Du point de vue de l'architecture, il est constitué d'un seul et même barreau piézoélectrique dont le primaire est polarisé selon l'épaisseur et le secondaire suivant la longueur (cf. figure 1.9). De ce fait, son principe de fonctionnement réside dans l'exploitation simultanée des modes élémentaires transversal (mode  $\{31\}$ ) et longitudinal (mode  $\{33\}$ ) selon la longueur. La résonance mécanique est atteinte lorsque la fréquence d'alimentation est telle que la longueur de l'architecture correspond à un nombre entier de la demie longueur d'onde ( $L = n\lambda/2, n \in \mathbb{N}^*$ ). Cette structure se caractérise par un fort gain en tension, gain d'autant plus important que le rapport  $L/e$  est élevé. En outre, il est possible de feuilleter le primaire de la structure offrant par là même une flexibilité sur le facteur de transformation, l'impédance d'entrée et la puissance de sortie. En effet, la proportionnalité immédiate existante entre le nombre de couches au primaire et le facteur de transformation permet d'atteindre de fortes tensions à l'aide d'une électronique d'alimentation peu complexe en raison d'une faible impédance d'entrée (la capacité diélectrique du primaire est directement proportionnelle au carré du nombre de couches qui composent ce dernier). Le caractère multicouche du primaire permet de surcroît d'accroître notablement la puissance de sortie.

Nonobstant, il est à noter l'existence de quelques inconvénients inhérents à cette architecture. Premièrement, ne bénéficiant pas généralement de quatre pôles électriques distincts, le transformateur piézoélectrique de type Rosen ne présente pas d'isolation galvanique naturelle et ne peut être employé en tant que transformateur d'isolement. Toutefois, cette conclusion n'est pas vérifiée pour toutes les structures. En effet, afin de réaliser cette isolation, il est tout à fait possible de placer une électrode à l'interface entre le primaire et le secondaire disjointe de l'électrode de masse primaire. L'isolation galvanique sera d'autant meilleure que la distance les séparant sera grande. Deuxièmement, comme le primaire et le secondaire exploitent un couplage piézoélectrique différent, la contrainte se fait maximale à l'interface de ces deux éléments. Par conséquent, cette fatigue prématurée peut engendrer des fissures et éventuellement une rupture de la structure suite à une sollicitation excessive au cours de son utilisation.

Cependant, compte tenu d'une aptitude remarquable à l'élévation en tension, le transformateur piézoélectrique de type Rosen a trouvé son champ d'applications et s'avère être l'élément idéal pour des technologies de faible puissance nécessitant de fortes tensions. Ce transformateur est typiquement utilisé pour des applications de puissance comprise entre 5 et 8 W et présente des densités de puissance d'environ 5 à 10 W/cm<sup>3</sup> [Car03c].

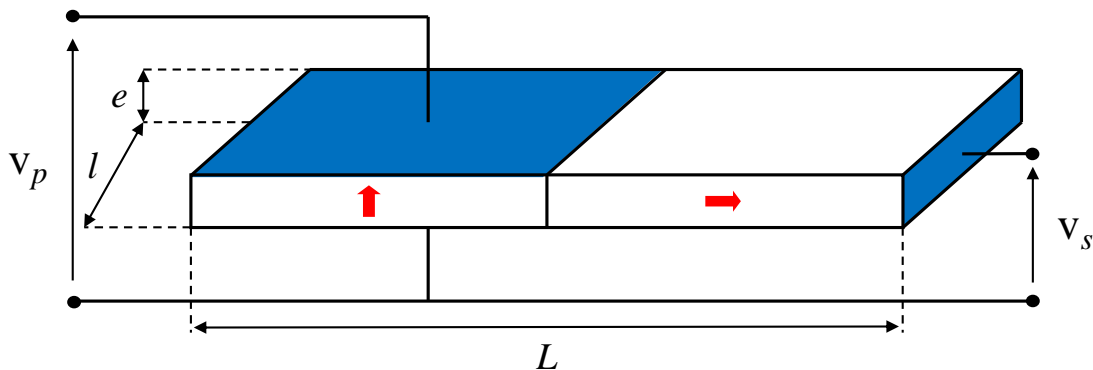


FIGURE 1.9 – Transformateur piézoélectrique de type Rosen

### 1.3.1.2 Transformateur à mode transversal

Cette structure d'une simplicité de conception remarquable est composée d'un primaire et d'un secondaire polarisés en épaisseur mettant à profit le même mode de couplage piézoélectrique transversal qui correspond à une vibration de l'architecture selon sa dimension principale. Ces transformateurs offrent de faibles gains en tension compte tenu des symétries proposées tant sur la géométrie que sur les modes sollicités. La fréquence de résonance de ce type d'architecture est inversement proportionnelle à la longueur  $L$  et dépend du mode considéré. D'un point de vue applicatif, en raison d'une isolation galvanique naturelle due à la présence de quatre pôles électriques distincts, ce type de transformateur est généralement employé comme transformateur d'isolement.

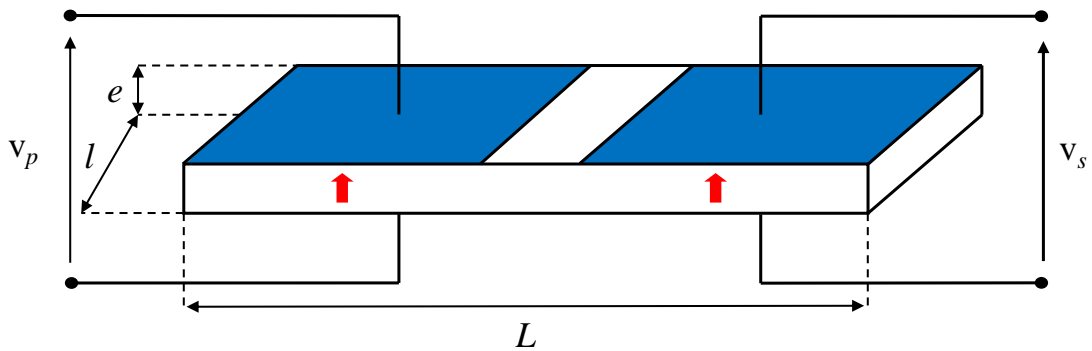


FIGURE 1.10 – Transformateur piézoélectrique à mode transversal

### 1.3.1.3 Transformateur à mode radial

Les transformateurs sollicitant un mode radial sont façonnés dans des céramiques de forme cylindrique de hauteur plus faible que le rayon et polarisées selon leur épaisseur. Une première architecture illustrée par la figure 1.11 est constituée d'un seul disque sur lequel ont été apposées des électrodes concentriques. De nature comparable aux transformateurs à mode transversal, ils tirent parti du même mode électromécanique planaire au primaire et au secondaire équivalent à une vibration de l'architecture selon son rayon. De ce fait, de part une sollicitation mécanique bidimensionnelle, la double conversion de l'énergie, caractérisée par le coefficient de couplage électromécanique  $k_p > k_{31}$ , est sensiblement améliorée. En outre, en jouant sur le périmètre des électrodes du primaire et du secondaire, il est possible d'augmenter le gain en tension de l'architecture.

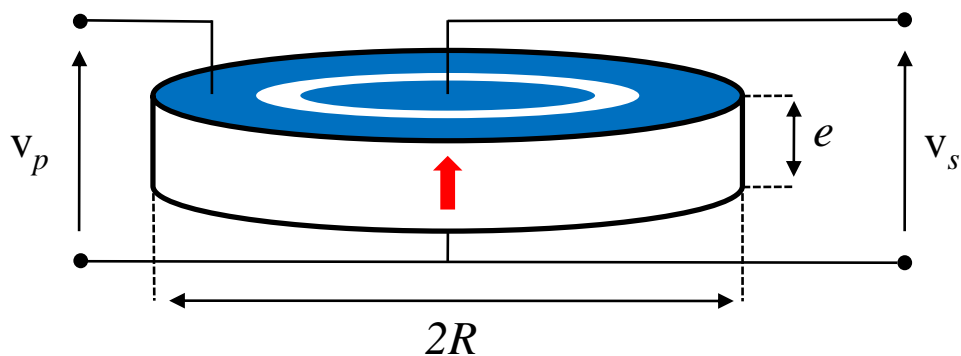


FIGURE 1.11 – Transformateur à mode radial - Structure monocouche

Le Transoner<sup>®</sup>, architecture de transformateur sollicitant également un mode radial, est à mentionner dans cette section de part sa capacité à élever ou abaisser la tension pour des applications nécessitant une forte densité de puissance. Conçue par la firme américaine Face<sup>®</sup> Electronics, LC (Face<sup>®</sup> Electronics, LC, Nortfolk, VA, États-Unis) en 1996, entérinée par un premier brevet en 1998 [Bis98] et améliorée par la suite (un second brevet datant de 2003 en atteste [Car03a]), cette structure de transformateur repose sur un principe de fonctionnement simple basé sur un empilement de céramiques discoïdales. Le primaire et le secondaire, séparés par

un isolant rigide (la rigidité de l'isolant assure un meilleur couplage entre primaire et secondaire permettant de limiter les pertes), peuvent être constitués de une ou plusieurs couches polarisées alternativement suivant l'épaisseur (cf. figure 1.12). Ces transformateurs ont une gamme de fréquences de résonance s'échelonnant entre 50 et 250 kHz pour des densités de puissances excédant très souvent  $40 \text{ W/cm}^3$ .

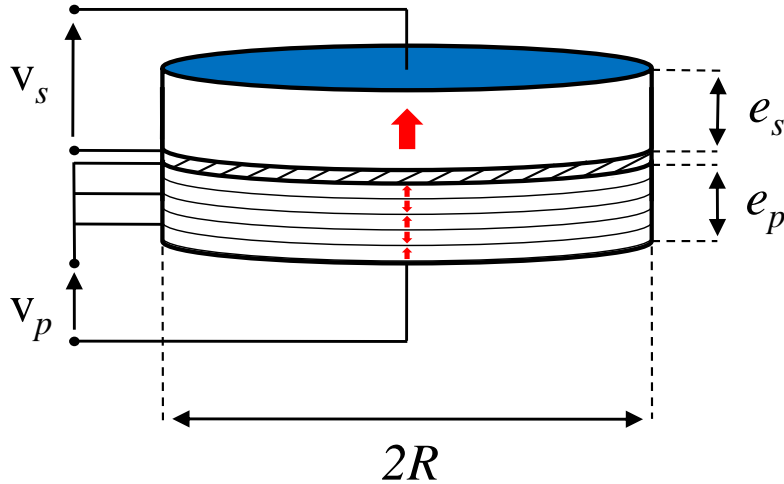


FIGURE 1.12 – Transformateur à mode radial - Structure multicouche

#### 1.3.1.4 Transformateur à mode en épaisseur

Les transformateurs à mode en épaisseur sont basés sur le même principe que le Transoner<sup>®</sup> et ne diffèrent de ce dernier que par l'emploi d'une géométrie parallélépipédique (cf. figure 1.13) et bien évidemment du mode sollicité. En effet, le primaire et le secondaire, qui ont la possibilité d'être feuilletés ou non, sont polarisés alternativement selon leur épaisseur et excités de sorte que la structure vibre selon cette même dimension. Le gain en tension de ces architectures est directement proportionnel à l'épaisseur des couches du secondaire sur l'épaisseur des couches du primaire. De ce fait, en jouant directement sur le nombre de couches au primaire et au secondaire, sur leurs épaisseurs respectives et le couplage série ou parallèle des électrodes, le gain en tension peut être modifié à loisir. La gamme de fréquence pour ces transformateurs s'échelonnent entre 1 et 10 MHz.

Cependant, il faut veiller à ne pas introduire trop de couches dans l'architecture car un facteur de forme  $e/L$  ou  $e/l$  proche de l'unité causerait un rapprochement inéluctable entre les fréquences du mode en épaisseur et les fréquences des modes transversal et longitudinal. D'autant plus que l'augmentation de la hauteur du transformateur nuit à son emploi dans un contexte de miniaturisation des circuits électroniques et accroît significativement les pertes diélectriques. De plus, pour une épaisseur de transformateur constante, l'ajout de couches accroît le risque de délaminage et réduit l'épaisseur de chaque couche pouvant conduire au claquage diélectrique. En outre, par opposition à la géométrie cylindrique des transformateurs de type Transoner<sup>®</sup>, les points situés à la périphérie d'une couche ne sont pas

à égale distance du centre de cette céramique. Par conséquent, cette inégalité est à l'origine de modes parasites affectant directement les caractéristiques électriques, aussi bien en termes de rendement que de puissance de sortie. Afin d'illustrer ce propos, l'article [Lao04] propose un tracé comparatif de l'admittance de deux transformateurs de dimension comparable, l'un de type Transoner<sup>®</sup> et l'autre pouvant solliciter un mode en épaisseur, qui permet de visualiser les modes parasites cités ci-avant et de rendre compte de leur impact néfaste sur le coefficient de couplage électromécanique du transformateur.

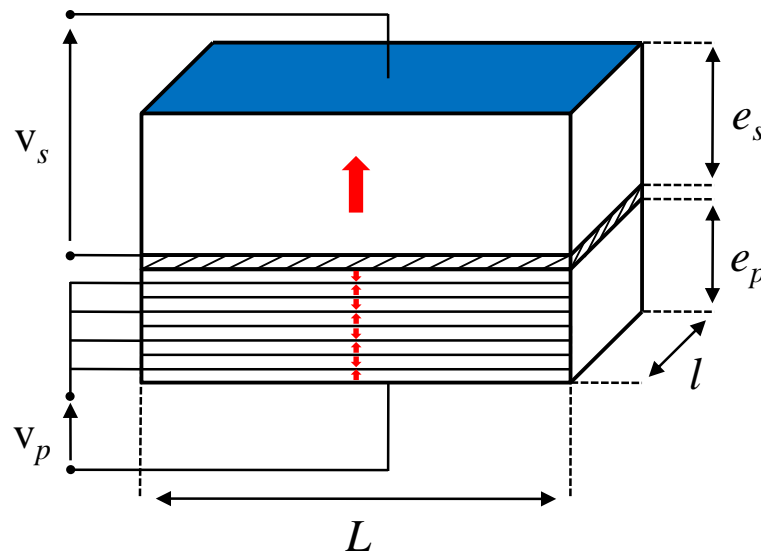


FIGURE 1.13 – Transformateur piézoélectrique à mode en épaisseur

### 1.3.1.5 Autres structures

La littérature fait état de bien d'autres architectures de transformateurs piézoélectriques mettant à profit des modes de vibration quelque peu atypiques [Yan07c]. Un premier exemple qui peut être évoqué est la structure exploitant un mode de cisaillement. Sur la figure 1.14 est représentée une structure rectangulaire sur laquelle a été apposée une fine électrode centrale servant à l'alimentation du transformateur, séparée des deux électrodes du secondaire par des rainures isolantes. La polarisation est dirigée selon la largeur et l'application d'un champ électrique perpendiculaire à cette dernière occasionne, comme l'exige le couplage en cisaillement, une déformation de la structure parallèle à la direction de polarisation. Dans plusieurs publications ([Du04a]-[Du07] et [Tse04]), les auteurs mènent une étude plutôt exhaustive sur l'architecture décrite précédemment. En particulier, une caractérisation expérimentale d'un transformateur de dimension  $120 \times 20 \times 4 \text{ mm}^3$  est proposée dans l'article [Du04a]. L'électrode du primaire a une largeur de 2 mm tandis que les électrodes n°1 et n°2 du secondaire ont respectivement une largeur de 6 mm et 12 mm. Avec une augmentation en température inférieure à  $20^\circ\text{C}$  et un rendement de 90 %, ce transformateur peut fournir une puissance de sortie de 169.8 W au maximum, avec une puissance de 129.5 W sur l'électrode n°1 et

40.3 W sur l'électrode n°2. En outre, à la première fréquence de résonance estimée à 278 kHz, il a été relevé sur chaque électrode de sortie un gain en tension de 0.76 et 0.51 respectivement. Compte tenu de ses performances, ce transformateur est dédié à des applications de basses tensions et fortes puissances. Dans les articles [Tse04], [Du04b] et [Du06], la modélisation analytique et la caractérisation expérimentale complète d'une structure présentant des dimensions moindres ( $30 \times 5 \times 1 \text{ mm}^3$ ) sont entreprises. L'article [Du07] propose enfin une étude de la répartition de la vibration le long d'une telle architecture.

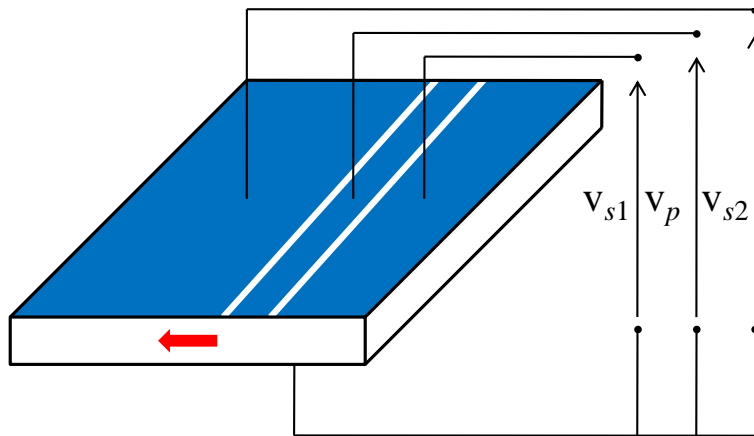


FIGURE 1.14 – Structure à mode de cisaillement

Une autre architecture originale, illustrée par la figure 1.15, consiste en l'aposition sur une céramique discoïdale d'électrodes au primaire et au secondaire en forme respectivement de croissant de lune et d'ellipse. Le primaire bénéficie d'une polarisation dirigée selon l'épaisseur tandis que le secondaire voit sa polarisation orientée selon le rayon d'un cercle dont le centre est situé sur le bord de la céramique piézoélectrique. Tandis que les architectures rectangulaires classiques mettent à contribution les facteurs de couplage électromécanique transversal  $k_{31}$  au primaire et longitudinal  $k_{33}$  au secondaire, ce type de structure de part sa géométrie sollicite respectivement les facteurs de couplage planaire  $k_p$  et de cisaillement  $k_{15}$  au primaire et au secondaire. De ce fait, l'intérêt de ces transformateurs est de présenter un gain en tension important à l'instar des structures rectangulaires telles que le transformateur piézoélectrique de type Rosen. Cependant, le feuilletage des transformateurs rectangulaires nécessaire à l'obtention de fort gain en tension augmentent notablement le coût de fabrication de ces structures et nuit par ailleurs à leur rendement. Par conséquent, ce type de transformateur discoïdale est une alternative séduisante à l'élévation en tension. Dans [Koc99] et [Koc03], les auteurs étudient un transformateur de diamètre 25.4 mm et d'une épaisseur de 1 mm dont la première fréquence de résonance est évaluée à 92.8 kHz. Ils ont pu constater un rendement supérieur à 90 % pour une évolution de la charge résistive placée au secondaire entre 50 et 200 k $\Omega$ . Lors d'un essai pour une résistance de charge de 103 k $\Omega$ , ils ont établi une linéarité manifeste entre les tensions d'alimentation et de sortie. Cette dernière croît de 200 à 1800 V pour une évolution de la tension d'entrée de 4 à 60 V.

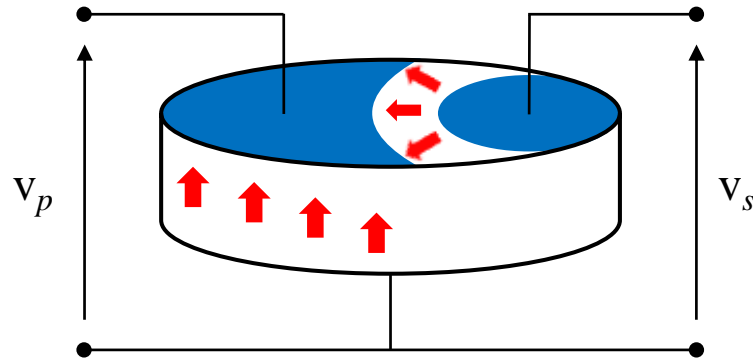


FIGURE 1.15 – Structure discoïdale à électrode en forme de croissant

### 1.3.2 Comportement électrique [Sar05][Ive02]

#### 1.3.2.1 Approche par schéma électrique équivalent

Traditionnellement, l'analyse du comportement électromécanique d'un transformateur piézoélectrique s'effectue au travers d'un schéma électrique équivalent. L'obtention de tels schémas repose généralement sur l'exploitation des modèles unidimensionnels très largement éprouvés des transducteurs piézoélectriques dont les équations résultantes sont interprétées en termes de schéma électrique équivalent. Ces schémas se présentent sous la forme d'un hexapôle comprenant un accès électrique et deux accès mécaniques (schéma de Mason [Ike96]). Une illustration de ce type de représentation est donnée sur la figure 1.16 pour une céramique parallélépipédique de longueur  $L$ , de largeur  $l$  et d'épaisseur  $e$ , polarisée selon cette dernière dimension, et sollicitant un mode de couplage piézoélectrique transversal.

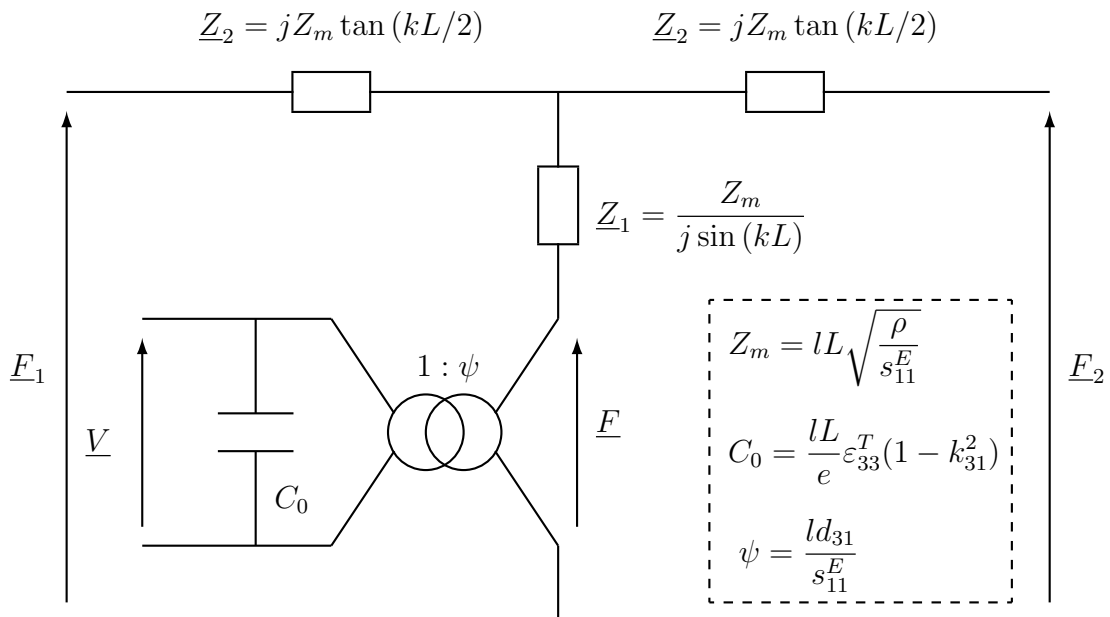


FIGURE 1.16 – Schéma de Mason d'une céramique piézoélectrique de forme parallélépipédique sollicitant un mode de couplage transversal [Ike96]



Ainsi, si le transformateur piézoélectrique est vu comme la réunion de deux transducteurs distincts, le schéma électrique résultant se présente comme l'association de deux schémas de Mason caractérisant respectivement la conversion d'énergie s'opérant au sein du primaire et du secondaire [Sar05]. Dès lors, le comportement électrodynamique du transformateur est classiquement représenté par le schéma électrique de la figure 1.17. Les dipôles RC en entrée et en sortie du schéma rendent compte des propriétés purement diélectriques de la structure ;  $C_p$  et  $C_s$  désignent respectivement les capacités dites « bloquées » du primaire et du secondaire auxquelles ont été adjointes les résistances  $R_p$  et  $R_s$  afin de tenir compte des pertes diélectriques. Le dipôle RLC série traduit les propriétés élastodynamiques du transformateur piézoélectrique dont les composants  $R_m$ ,  $L_m$  et  $C_m$  sont l'image respective des pertes mécaniques, de la masse et de l'élasticité de la structure. Le transformateur idéal de rapport de transformation  $\psi$  symbolise quant à lui la double conversion électromécanique et mécanoélectrique de l'énergie et caractérise le gain en tension du transformateur piézoélectrique.

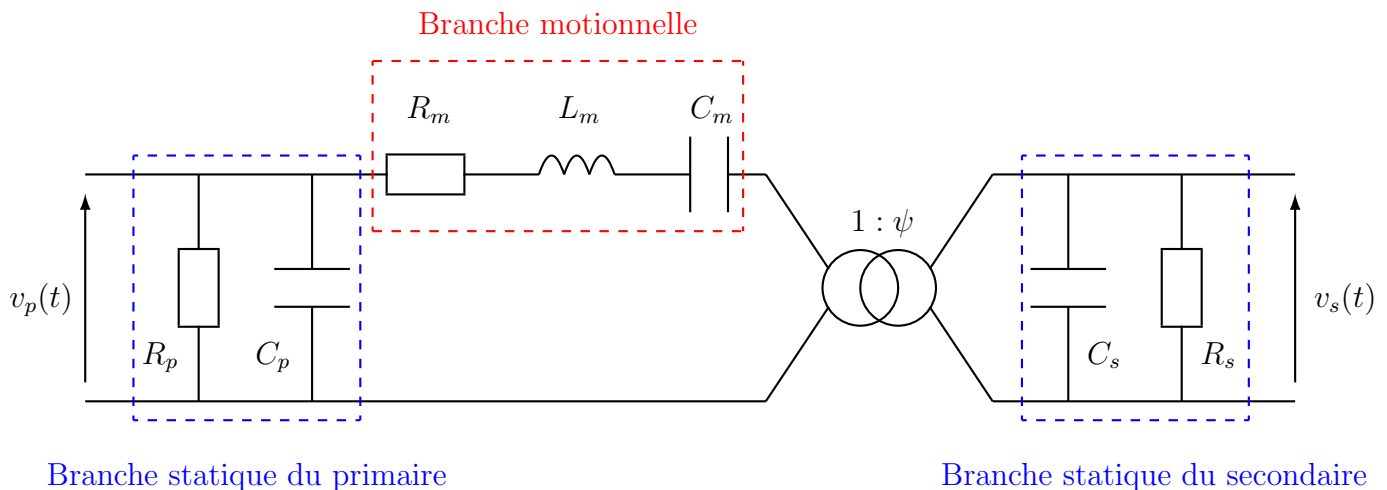


FIGURE 1.17 – Schéma électrique équivalent d'un transformateur piézoélectrique

### 1.3.2.2 Grandeurs caractéristiques

Par le biais de l'approche décrite précédemment, une simulation complète des caractéristiques électriques du transformateur piézoélectrique telles que le gain en tension  $\underline{G}$ , la puissance de sortie  $P_s$  ou encore le rendement  $\eta$  peut être réalisée avec une précision généralement satisfaisante pour une approche qualitative aux environs d'une fréquence de résonance de la structure. Pour ce faire, à l'instar de ce qui est proposé dans [Sar05] et [Ive02], des paramètres exprimés à partir des éléments du schéma électrique équivalent sont introduits permettant de simplifier la mise en œuvre de l'étude et d'analyser l'impact sur les différentes grandeurs électriques de la fréquence d'alimentation et du niveau de charge en sortie de l'architecture. Voici la définition et l'expression des quantités introduites :

- $\omega_s$  est la pulsation de résonance série correspondant à un fonctionnement du transformateur à secondaire court-circuité. Elle s'apparente également à la pulsation de résonance de la branche motionnelle de sorte que :

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}} \quad (1.34)$$

- $\omega_p$  est la pulsation de résonance parallèle pour un fonctionnement du transformateur à secondaire ouvert. Elle est également la pulsation de résonance de l'association en série de la branche motionnelle et de la capacité du secondaire ramenée au primaire du transformateur. Par conséquent, elle revêt l'expression suivante :

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_m \frac{C_m C_s \psi^2}{C_m + C_s \psi^2}}} \quad (1.35)$$

- $Q_m$  symbolise le facteur de qualité mécanique et permet de rendre compte des pertes mécaniques qui s'opèrent au sein de la structure lors de sa mise en vibration. Son expression s'écrit classiquement :

$$Q_m = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{L_m}{C_m}} = \frac{L_m \omega_s}{R_m} = \frac{1}{R_m C_m \omega_s} \quad (1.36)$$

- $Q$  est la facteur de surtension électrique et permet de part son expression de prendre en considération la résistance de charge  $R_{ch}$  placée au secondaire du transformateur. Par définition, il s'écrit :

$$Q = \frac{1}{R_{eq} C_s \omega_s} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_{ch}} \quad (1.37)$$

- $\delta$  est défini comme le rapport de la capacité du secondaire ramenée au primaire sur la capacité motionnelle. Il est possible de montrer que cette quantité est dépendante du facteur de couplage électromécanique effectif du transformateur et, en ce sens, elle peut être interprétée comme la fraction d'énergie mécanique convertible en énergie électrique au secondaire. Son expression s'écrit comme suit :

$$\delta = \frac{\psi^2 C_s}{C_m} \quad (1.38)$$

Il est à noter qu'au cours d'un fonctionnement du transformateur piézoélectrique chargé par une résistance de valeur quelconque, la fréquence de résonance de l'architecture est nécessairement comprise entre les fréquences de résonance série et parallèle ( $f_s \leq f_r \leq f_p$ ). Les pulsations série et parallèle sont de surcroît liées par la relation :

$$\omega_p = \omega_s \sqrt{1 + \frac{1}{\delta}} \quad (1.39)$$

Compte tenu de ces nouvelles variables, les grandeurs électriques sont désormais accessibles par simple application des lois de Kirchoff au schéma électrique équivalent de la figure 1.17. Le module du gain en tension, la puissance de sortie et le

rendement ont par conséquent pour expression :

$$|\underline{G}| = \frac{|v_s|}{|v_p|} = \frac{\psi}{\sqrt{\left[1 - \delta \left(\frac{\omega^2}{\omega_s^2} - 1 - \frac{Q}{Q_m}\right)\right]^2 + \left[\frac{\delta}{Q_m} \frac{\omega}{\omega_s} + \delta Q \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega}\right)\right]^2}} \quad (1.40)$$

$$P_s = \frac{V_p^2}{R_m} \frac{\delta Q / Q_m}{\left[1 - \delta \left(\frac{\omega^2}{\omega_s^2} - 1 - \frac{Q}{Q_m}\right)\right]^2 + \left[\frac{\delta}{Q_m} \frac{\omega}{\omega_s} + \delta Q \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega}\right)\right]^2} \quad (1.41)$$

$$\eta = \frac{P_s}{P_p} = \frac{1}{1 + \delta \frac{Q}{Q_m} \left(1 + \frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_s^2}\right)} \quad (1.42)$$

A noter que dans l'établissement de l'expression du rendement, seules les pertes mécaniques, au travers du facteur de qualité  $Q_m$ , et la charge  $R_{ch}$  sont prises en considération. Les pertes diélectriques ont été négligées en imposant une valeur infinie aux résistances  $R_p$  et  $R_s$ . Ceci peut se justifier par un emploi du transformateur piézoélectrique généralement autour de sa fréquence de résonance, plage d'utilisation où les pertes diélectriques sont généralement négligeables devant les pertes mécaniques [Ber68].

### 1.3.2.3 Régimes de fonctionnement

Afin de tirer parti des meilleures performances du transformateur piézoélectrique, il est souhaitable de l'alimenter à une fréquence voisine d'une de ses fréquences de résonance mécanique. En effet, à charge fixée, pour une géométrie et un matériau donnés, le transformateur piézoélectrique se comporte comme un filtre passe-bande. En témoignent les tracés fréquentiels du module du gain en tension, de la puissance de sortie et du rendement (cf. figure 1.18) dont les expressions ont pu être établies dans la section précédente. Outre cette dépendance fréquentielle, les performances du transformateur sont très largement influencées par le niveau de charge auquel il est soumis. La première grandeur affectée est la pulsation de résonance  $\omega_r$  qui varie considérablement avec la résistance de charge  $R_{ch}$ . Cette sujétion est formalisée par l'équation suivante d'inconnue  $x$  symbolisant le carré de la pulsation réduite :

$$x^3 + \left(\frac{1}{2Q_m^2} + \frac{Q^2}{2} - 1 - \frac{1}{\delta}\right)x^2 - \frac{Q^2}{2} = 0 \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega_r^2}{\omega_s^2} \quad (1.43)$$

Cette équation est obtenue en annulant la dérivée du dénominateur de l'expression (1.40), condition à respecter pour obtenir le gain en tension maximum. Il est intéressant de considérer les cas extrêmes pour lesquels le fonctionnement du transformateur s'effectue à secondaire fermé et ouvert. En effet, pour ces deux

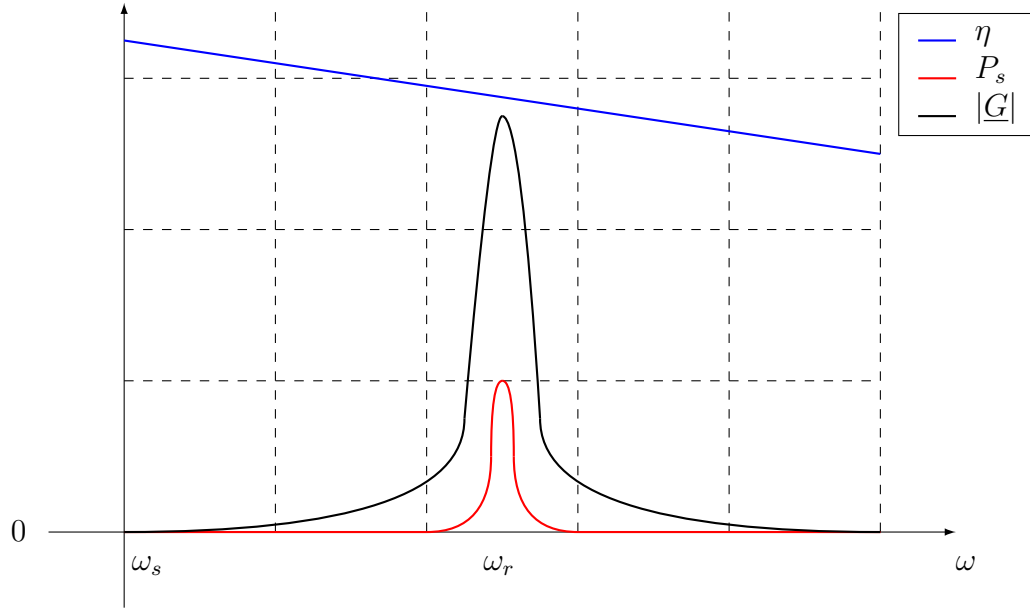


FIGURE 1.18 – Évolution du gain en tension, de la puissance de sortie et du rendement en fonction de la fréquence

configurations, il vient :

$$\begin{cases} R_{ch} = 0 \Leftrightarrow Q \rightarrow \infty \Rightarrow x = 1 \\ R_{ch} \rightarrow \infty \Leftrightarrow Q = 0 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2Q_m^2} \end{cases} \quad (1.44)$$

Par cette simple analyse de l'équation (1.43) et dans l'hypothèse où le facteur de qualité mécanique est grand devant l'unité, il est à constater que la pulsation de résonance tend effectivement vers les pulsations série  $\omega_s$  et parallèle  $\omega_p$  pour les cas de fonctionnement à secondaire fermé et ouvert respectivement. En conservant l'hypothèse d'un important facteur de qualité mécanique, il est possible d'extraire une expression analytique de la solution de l'équation (1.43) exprimant directement la pulsation de résonance en fonction des grandeurs  $Q$  et  $\delta$  :

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_s^2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\delta} - Q^2 \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{\delta} - Q^2 \right)^2 + Q^2} \quad (1.45)$$

Une dépendance inversement proportionnelle de  $\omega_r$  avec la résistance de charge  $R_{ch}$  (proportionnelle à  $1/Q$ ) est à noter. D'après [Sar05], l'évolution de la fréquence de résonance s'effectue sur deux décades du facteur de qualité électrique, phénomène qui peut s'avérer néfaste lors de l'utilisation du transformateur sur charge variable. Afin de limiter cette variation, il est possible de dimensionner le transformateur pour maximiser le rapport  $\delta$ . Cependant, toute augmentation de cette quantité se fait au détriment du coefficient de couplage électromécanique effectif et, par conséquent, des performances électriques du transformateur.

Pour la suite de l'étude, il est supposé que le transformateur est asservi à sa fréquence de résonance, quel que soit le niveau de charge, pour une amplitude de la tension d'alimentation  $V_p$  fixée. Dans ces conditions, une évolution du module du

gain en tension, de la puissance de sortie et du rendement en fonction de l'inverse du facteur de qualité électrique est proposée sur la figure 1.19. Il est à noter que les maximums de ces courbes sont disjoints laissant une liberté de dimensionnement dans l'architecture et un compromis à adopter entre ces différentes quantités. Une description des trois cas de fonctionnement envisageables est proposée ci-après :

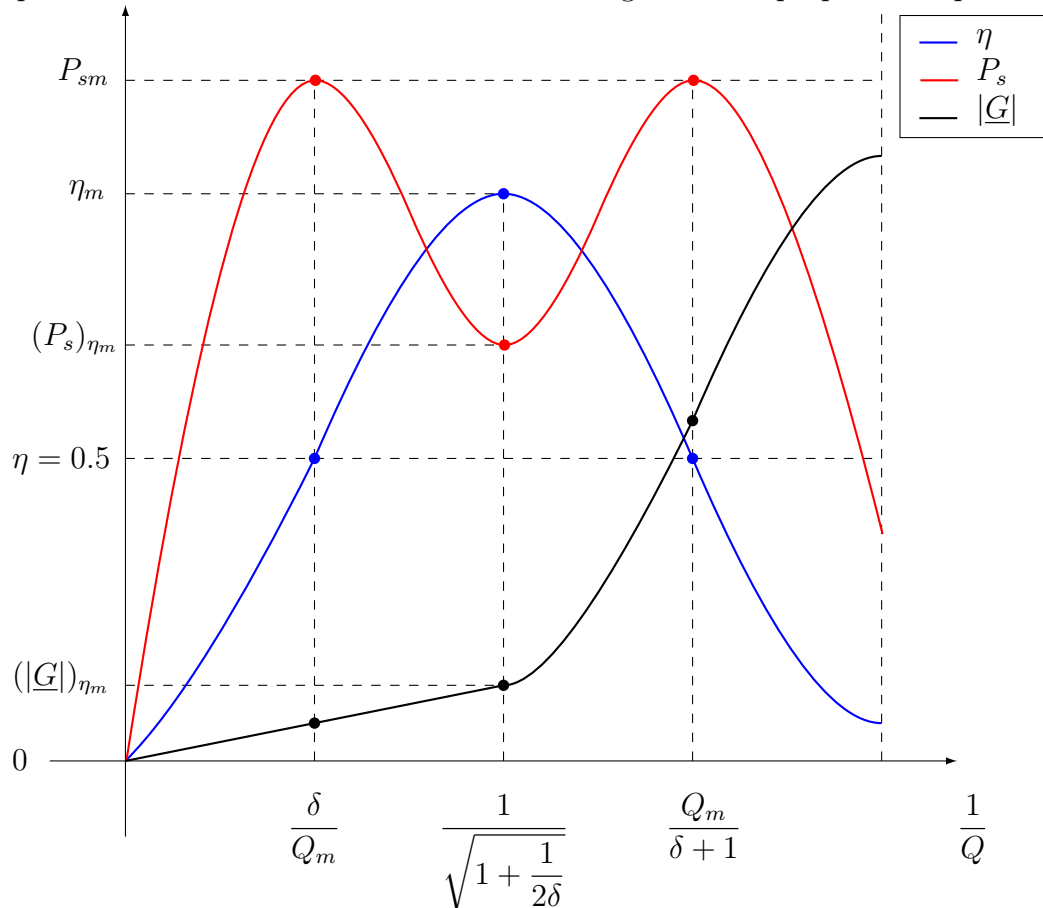


FIGURE 1.19 – Évolution du gain en tension, de la puissance de sortie et du rendement en fonction de la charge

- **Fonctionnement à gain maximal** : le gain en tension est maximal pour un fonctionnement du transformateur piézoélectrique à secondaire ouvert. La pulsation de résonance s'apparentant alors à la pulsation parallèle  $\omega_p$ , son introduction dans la relation 1.40 donne accès à l'expression du gain maximal de sorte que :

$$|\underline{G}|_{max} = \frac{Q_m}{\delta \sqrt{1 + \frac{1}{\delta}}} \quad (1.46)$$

Outre cette valeur caractéristique, il est à noter une décroissance très rapide du module du gain en tension avec la diminution de la charge.

- **Fonctionnement à puissance maximale** : La puissance est maximale pour deux valeurs particulières de la charge qui correspondent pour chacune d'elles à un rendement égal à 50 % (la démonstration de cette singularité est

donnée dans [Ive02]). En insérant cette dernière valeur de rendement dans l'expression (1.42), l'équation donnant les valeurs de charge pour lesquelles la puissance est maximale est atteinte comme suit :

$$Q^2 - \frac{Q_m}{\delta} Q + \frac{\omega_r^2}{\omega_s^2} = 0 \quad (1.47)$$

Cette équation a deux solutions

$$Q_{1,2} = \frac{Q_m}{2\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{Q_m}{2\delta}\right)^2 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_s}\right)^2} \quad (1.48)$$

Dans l'hypothèse où  $\left(\frac{Q_m}{2\delta}\right)^2 \gg \left(\frac{\omega_r}{\omega_s}\right)^2$ , ces solutions se simplifient par les relations suivantes :

$$Q_1 = \frac{\delta}{Q_m} \frac{\omega_r^2}{\omega_s^2} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{Q_m}{\delta} \quad (1.49)$$

En outre,  $Q_1$  présentant une valeur faible en raison d'un fort facteur de qualité mécanique, il est judicieux d'assimiler le carré de la pulsation réduite à la valeur  $1 + 1/\delta$  correspondant à un fonctionnement du transformateur en circuit ouvert. Par conséquent, les valeurs du facteur de qualité électrique correspondant au maximum de la puissance de sortie s'écrivent finalement :

$$\frac{1}{Q_1} = \frac{Q_m}{\delta + 1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{Q_2} = \frac{\delta}{Q_m} \quad (1.50)$$

A noter que ces valeurs correspondent à deux valeurs bien distinctes de gain en tension offrant, une fois encore, un choix en termes de dimensionnement pour ces deux situations.

- **Fonctionnement à rendement maximal** : en regardant l'expression du rendement, il est aisé de donner la condition qui le maximise. En effet, d'après (1.42), ce dernier est maximal si le facteur de qualité électrique vérifie la relation suivante :

$$\frac{1}{Q} = \frac{\omega_r}{\omega_s} \quad (1.51)$$

D'après [Ive02],  $Q$  et  $\delta$  vérifient alors l'égalité suivante :

$$\frac{1}{Q} = \sqrt{1 + \frac{1}{2\delta}} \quad (1.52)$$

Le rendement maximal  $\eta_m$  obtenu pour cette condition coïncide avec un minimum local de la puissance de sortie compris entre les maxima globaux de cette dernière (cf. figure 1.19). L'expression de ce maximum peut en outre être précisée en injectant l'équation précédente dans l'expression du rendement (1.42) :

$$\eta_m = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{Q_m} \sqrt{1 + \frac{1}{2\delta}}} \quad (1.53)$$

Les équations qui ont pu être développées dans cette section mettent en lumière les relations importantes qui lient les paramètres clé d'un transformateur piézoélectrique. Le principal intérêt d'une telle approche est de pouvoir optimiser une structure répondant à un cahier des charges précis, aussi bien en termes de gain en tension, puissance de sortie ou rendement. Dans [Ive02], les auteurs illustrent la démarche présentée précédemment sur l'exemple d'un dimensionnement de transformateur utilisé pour l'alimentation d'une lampe fluorescente d'une puissance de 18 W, le transformateur étant lui-même supposé être alimenté par une source de tension de  $150 V_{rms}$ .

### 1.3.3 Principales applications

N.B. : l'état de l'art ci-après des principales applications employant un transformateur piézoélectrique ne se veut pas exhaustif et le lecteur pourra se référer aux articles [Car03c] [Hem02] [Hor07] [Yan07c] pour obtenir des informations complémentaires.

Compte tenu de la compacité dont bénéficient ces structures, et en dépit des densités de puissance relativement élevées que peuvent présenter ces architectures, les transformateurs piézoélectriques sont habituellement dédiées à des applications de faibles puissances n'excédant pas la trentaine de watts. Malgré une conception datant du milieu des années 1950, cette technologie n'a acquis son succès commercial qu'au début des années 1990. A partir de cette période, au cours de laquelle de nouvelles problématiques de miniaturisation électronique émergeaient sans cesse, de nombreuses entreprises japonaises se sont évertuées à employer le transformateur piézoélectrique pour des applications de faible puissance nécessitant une signature électromagnétique minimale. De ces investigations, différentes applications ont vu le jour et notamment celle consistant à tirer parti du transformateur comme structure élévatrice de tension exploitée dans l'alimentation des lampes CCFL (*Cold Cathod Fluorescent Lamp*) utilisées pour le rétroéclairage des écrans LCD (*Light Crystal Display*). De manière générale, il est possible de scinder les applications des transformateurs piézoélectriques en deux parties selon que ces dernières mettent à profit les caractéristiques du transformateur à la résonance ou hors résonance. Il est possible de répertorier les différents avantages et inconvénients pour ces deux conditions de fonctionnement :

- **Emploi à la résonance** : De part l'étude menée précédemment sur les caractéristiques électriques que pouvait présenter un transformateur évoluant au voisinage d'une de ses résonances mécaniques, plusieurs avantages ont pu être dégagés, en particulier la possibilité de promouvoir un fort gain en tension et d'opérer une conversion de l'énergie électrique avec un excellent rendement. Cependant, ce fonctionnement à la résonance n'est effectif que sur une étroite plage de fréquence, en raison des forts facteurs de qualité mécanique des matériaux dont sont constitués les transformateurs. En outre, le niveau de charge auquel est soumis ce dernier influence grandement les performances électriques et une dérive de la fréquence de résonance est souvent à déplorer,

s'ajoutant potentiellement aux dérives fréquentielles liées aux variations de température. Pour pallier ce problème, le transformateur piézoélectrique lors de son utilisation est généralement asservi en fréquence ou en phase.

- **Emploi hors résonance** : Le transformateur piézoélectrique utilisé hors résonance est caractérisé par un comportement linéaire et hautement précis sur une large plage de fréquence éloignée des fréquences de résonance mécanique de l'architecture. De ce fait, les applications peuvent tirer parti de la linéarité supposée entre les grandeurs d'entrée et de sortie et ce, en dépit d'un rendement souvent médiocre sur la plage de fréquence considérée. Il bénéficie de surcroît d'un gain en tension fréquemment peu variable et de généralement faibles valeurs. Il est alors judicieux de songer à allier le caractère abaisseur de tension, la précision et la linéarité du transformateur utilisé hors résonance pour des applications ayant trait à l'instrumentation ou la métrologie comme la mesure en alternatif de hautes tensions et de forts courants, ou encore l'adaptation d'impédance. Dans [Car99], les auteurs proposent de mettre à contribution un transformateur piézoélectrique utilisé hors résonance pour la mesure de hautes tensions. Ce dernier est constitué de deux colonnes composées d'un empilement de disques, le primaire étant connecté à la haute tension à mesurer. Si l'idée peut paraître séduisante, les conditions expérimentales détériorent les caractéristiques du matériau piézoélectrique et peuvent même occasionner une dépolarisation voire une rupture du dispositif, en raison des forts champs électriques appliqués et de contraintes mécaniques importantes subies par le transformateur. Tout ceci nuit à la précision de la mesure, d'autant plus que cette dernière est sujette aux variations de température que peut subir l'architecture. Toutefois, même si cet appareil de mesure semble assez imprécis, il rend compte de l'effort entrepris pour élargir le champ d'application des transformateurs piézoélectriques.

Par la suite, seront décrites les applications ne mettant à profit que les performances du transformateur piézoélectrique au voisinage de sa résonance. Dans ce contexte, l'alimentation des lampes fluorescentes à cathode froide dédiées au rétroéclairage des écrans LCD est assurément l'application, tirant parti de ce type de transformateur, la plus répandue et, de ce fait, constituera une partie de l'exposé qui va suivre. Dans une problématique de miniaturisation, l'utilisation du transformateur piézoélectrique a également suscité un intérêt tout particulier dans l'intégration des convertisseurs statiques. Les applications qui en découlent feront l'objet d'un bref tour d'horizon. Son usage dans l'alimentation des moteurs à ultrasons sera par ailleurs évoqué. Enfin, cette section sera clôturée par la description succincte de deux applications ayant trait au domaine spatial.

### 1.3.3.1 Alimentation des lampes fluorescentes

Les lampes fluorescentes à cathode froide sont communément employées comme source de lumière pour le rétroéclairage des écrans LCD utilisés pour les ordinateurs portables ou tout autre appareil électronique portatif les nécessitant. Ces



lampes requièrent une forte tension alternative, l'oscillation favorisant au mieux la conversion électro-optique de l'énergie, aussi bien pour l'allumage que durant leur fonctionnement en régime établi. A priori, la fonction d'élévation en tension que doit présenter l'alimentation peut indifféremment être réalisée par un transformateur magnétique conventionnel ou un transformateur piézoélectrique. Le choix entre ces deux technologies est tributaire de plusieurs facteurs incluant le coût, la taille, le rendement et la compatibilité électromagnétique. A puissance donnée, les transformateurs magnétiques démontrent généralement des caractéristiques moins intéressantes en comparaison des transformateurs piézoélectriques : ils sont plus volumineux, présentent une masse plus importante, un faible rendement et une émissivité électromagnétique indéniable. Ils sont toutefois moins onéreux et peuvent fonctionner sur une plus large plage de variation de charge et de fréquence que leurs homologues piézoélectriques. Ces derniers jouissent quant à eux de nombreux avantages en termes de gain en tension, rendement, densité de puissance ou encore compatibilité électromagnétique et constituent, de part ces différents atouts, une alternative séduisante aux technologies magnétiques dans l'alimentation des lampes fluorescentes à cathode froide.

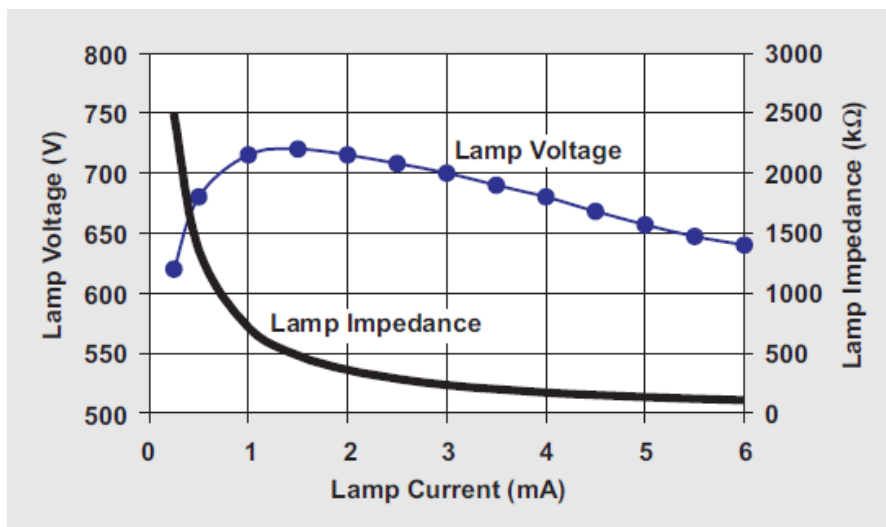


FIGURE 1.20 – Comportement électrique d'une lampe fluorescente à cathode froide [Day02]

Afin de comprendre l'apport d'une telle technologie dans l'alimentation des CCFL, une description du comportement électrique de la lampe s'avère nécessaire. Avant son allumage, la lampe présente une haute impédance et est vue par le transformateur comme une charge résistive de valeur infinie (circuit ouvert). L'allumage nécessite une tension dite « d'amorçage » dépendante du diamètre et de la longueur de la lampe, généralement d'une valeur double de la tension de fonctionnement en régime établi et de surcroît croissante avec la diminution de la température. Suite à l'allumage, une diminution de la tension aux bornes de la lampe et une augmentation du courant d'arc la traversant sont observées conduisant par là même à une diminution de l'impédance de la lampe (cf. figure 1.20).

Le schéma de principe de l'alimentation d'une lampe fluorescente à cathode froide via un transformateur piézoélectrique est représenté sur la figure 1.21. A partir de ce schéma et du comportement électrique intrinsèque de la lampe décrit précédemment, l'interaction du transformateur piézoélectrique avec cette dernière peut désormais être expliquée. La figure 1.22 illustre cette interaction au travers de l'évolution fréquentielle du gain en tension du transformateur. Lors de la mise en marche de la lampe, une faible tension est appliquée à celle-ci correspondant à la fréquence maximale de la bande passante couverte par le VCO (*Voltage Controlled Oscillator*) (point A). Par la suite, lorsque la fréquence de fonctionnement décroît progressivement, la tension en sortie du transformateur augmente selon l'évolution de la courbe de gain correspondant à un fonctionnement à secondaire ouvert jusqu'à atteindre la tension d'amorçage de la lampe (point B). L'impédance de la lampe commence à diminuer et la courbe de gain se trouve décaler vers les basses fréquences avec une amplitude maximale moindre. La fréquence continue de décroître pour atteindre le point de fonctionnement correspondant au régime établi situé entre les points C et D. La variation du point de fonctionnement entre ces deux points, due à une variation de la fréquence de fonctionnement, permet alors de contrôler l'intensité lumineuse de la lampe.

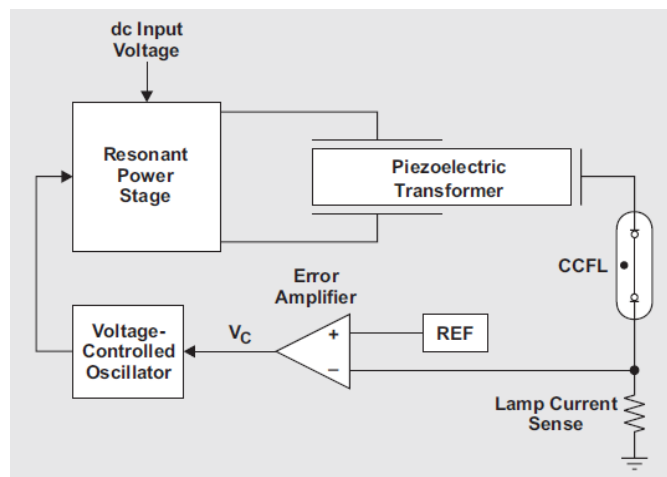


FIGURE 1.21 – Schéma de principe d'une alimentation de lampe fluorescente à cathode froide via un transformateur piézoélectrique [Day02]

A noter que dans les spécifications du transformateur, ce dernier doit pouvoir proposer un gain en tension susceptible d'allumer la lampe pour une tension d'entrée minimale. En effet, si l'on souhaite que l'alimentation garde le contrôle du courant traversant la lampe, il faut s'assurer que le point de fonctionnement reste dans la partie droite de la courbe de gain et éviter absolument un franchissement de la résonance entraînant une extinction inéluctable de la lampe.

D'un point de vue topologique, les premières architectures employées pour cette application ont été les transformateurs piézoélectriques multicouches de type Rosen en raison de leur capacité remarquable d'élévation en tension. Pour des performances tout aussi intéressantes, une structure radiale de type Transoner<sup>®</sup> est mise

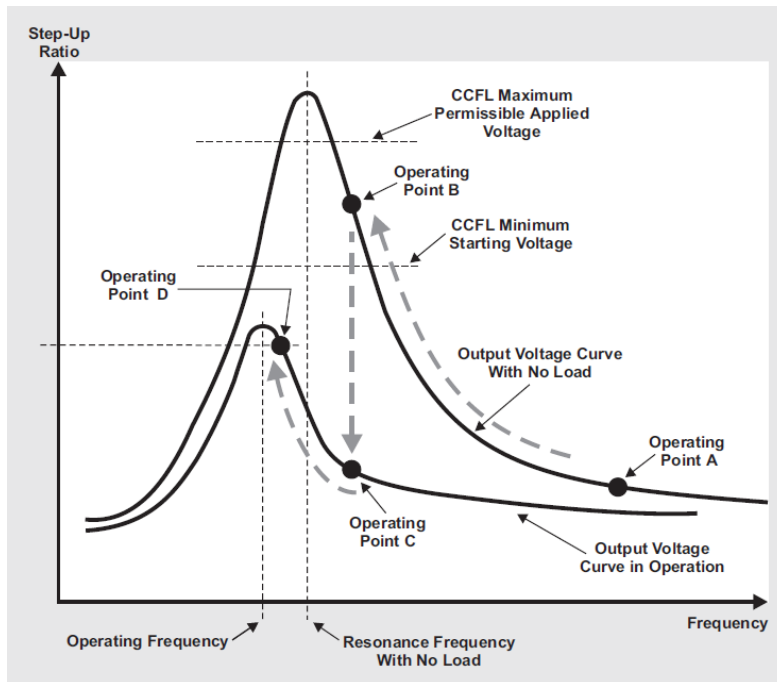


FIGURE 1.22 – Évolution du gain en tension du transformateur piézoélectrique de l'allumage jusqu'au régime de fonctionnement nominal de la lampe fluorescente à cathode froide [Day02]

à profit dans [Bak05] pour l'alimentation d'une lampe fluorescente d'une puissance de 32 W. De manière générale, en termes de performances, la puissance fournie par le transformateur est de l'ordre de 10 à 30 W sous une tension alternative de 120 V en régime établi jusqu'à 300 V pour l'allumage de la lampe pour une fréquence aux alentours de 100 kHz et un rendement supérieur à 80 % [Sar05].

### 1.3.3.2 Intégration dans les convertisseurs statiques

L'emploi des transformateurs piézoélectriques dans les convertisseurs statiques constitue également une application incontournable. En effet, la démocratisation des équipements électroniques portatifs a suscité un besoin considérable en termes de miniaturisation de leur alimentation. Comme il a pu être souligné auparavant, le transformateur piézoélectrique se comporte comme un filtre sélectif de bande passante très étroite n'autorisant le transfert de puissance qu'au voisinage d'une de ces résonances mécaniques. De ce fait, le rendement et le gain en tension varient grandement avec la charge qui est appliquée au secondaire. *A contrario*, sur une large plage de charge et de fréquence de fonctionnement, ces grandeurs jouissent, pour les structures magnétiques conventionnelles, d'une relative constance. Par conséquent, la nature intrinsèque du transformateur piézoélectrique ne lui permet pas d'être intégré dans les architectures classiques de convertisseurs. Une adaptation des structures dans lesquelles il est introduit et un choix adéquat de la commande s'avèrent par conséquent nécessaires. A ce propos, l'article [Sar05] rend compte de manière exhaustive des conditions à respecter pour inclure un transformateur piézo-

électrique dans l'architecture d'un convertisseur. Ces règles ne seront pas exposées par la suite. Toutefois, il est intéressant d'évoquer quelques exemples de convertisseurs utilisant ce type de transformateur, et les applications auxquelles ils sont associés, afin de témoigner du niveau de performances atteint par ces architectures.

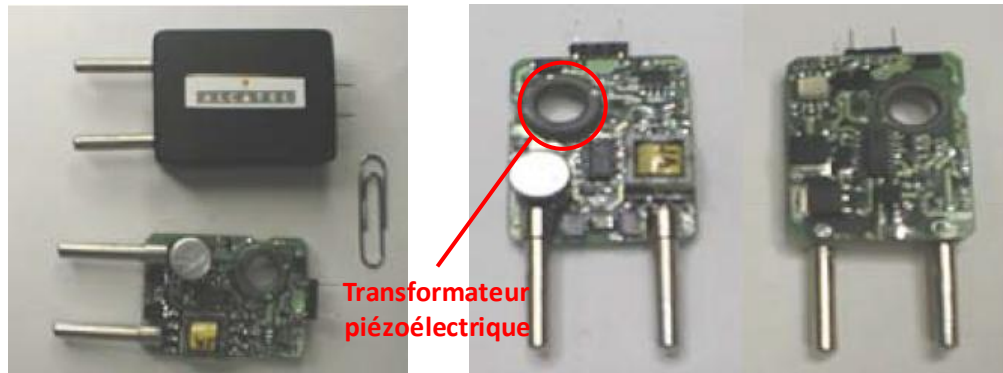


FIGURE 1.23 – Convertisseur AC/DC intégrant un transformateur piézoélectrique dédié aux chargeurs de batteries de téléphones portables [Bov00]

Tout d'abord, il est possible de citer l'article [Bov00] dans lequel une miniaturisation d'un convertisseur AC/DC dédié aux chargeurs de batteries de téléphones portables est présentée. Le convertisseur d'une puissance de 10 W réalise le redressement d'une tension alternative de 115 V en une tension continue de 12 V. Le transformateur piézoélectrique utilisé est constitué d'un empilement de deux anneaux séparés par une couche isolante. Chaque anneau est polarisé selon son épaisseur et le facteur de forme observé suggère la sollicitation par le transformateur d'un mode en épaisseur. La fréquence de fonctionnement du transformateur se situe autour de 400 kHz afin d'éviter les modes parasites. A cette fréquence, une puissance de 15 W en sortie du transformateur a été observée pour un rendement supérieur à 98 %. La densité de puissance pour cette architecture s'élève à 40 W/cm<sup>3</sup>. La figure 1.23 montre l'intégration du transformateur dans le convertisseur expérimental réalisé par la société Alcatel.

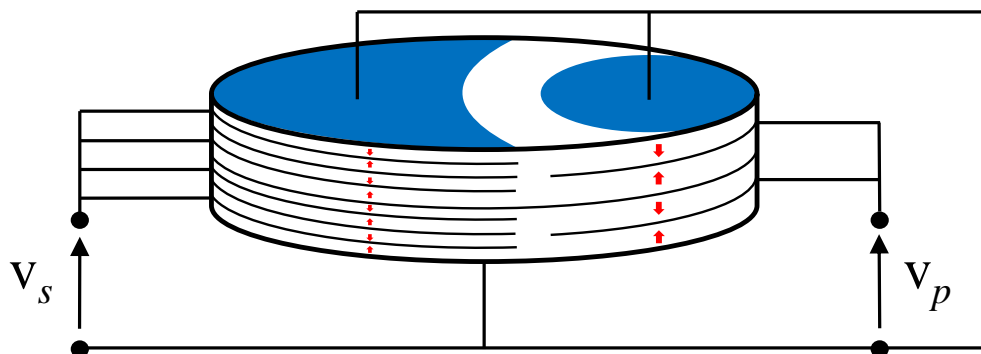
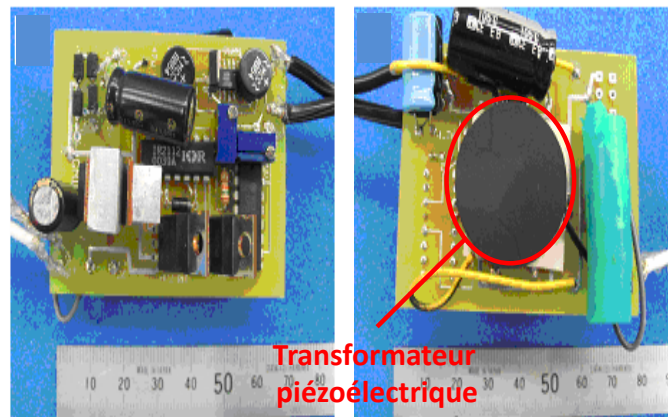


FIGURE 1.24 – Transformateur piézoélectrique multicouches dédié à l'intégration d'un convertisseur AC/DC

Une autre application, proposée dans [Man03], est l'emploi d'un transformateur piézoélectrique pour réduire la taille d'un adaptateur secteur AC/DC pour ordinateur portable d'une puissance de 30 W utilisant initialement la technologie magnétique. Si l'application semble somme toute classique, c'est l'emploi d'une géométrie particulière de transformateur qui rend cette dernière si remarquable. En effet, le transformateur employé est semblable à celui donné par la figure 1.15 à ceci prêt que les électrodes constituant le primaire et le secondaire sont inversées. Ils sont par ailleurs feuilletés, chaque couche étant polarisée alternativement selon l'épaisseur (cf. figure 1.24). L'intérêt d'une telle structure est de mettre à contri-



(a) Adaptateur secteur Toshiba utilisant la technologie magnétique



(b) Adaptateur secteur intégrant un transformateur piézo-électrique

FIGURE 1.25 – Comparaison de l'adaptateur secteur Toshiba et de son évolution incluant le transformateur piézoélectrique [Man03]

buton le facteur de couplage électromécanique de cisaillement  $k_{15}$ , généralement de valeur double en comparaison du facteur de couplage transversal  $k_{31}$ . Le transformateur a été dimensionné afin que l'adaptateur secteur fournisse un courant de 1.3 A au démarrage de l'ordinateur portable et un courant de 0.8 A en régime établi, sous une même tension continue de 15 V pour les deux régimes de fonctionnement. Le transformateur ainsi obtenu présente un diamètre de 27 mm pour une épaisseur

de 4.7 mm et sa fréquence de résonance, correspondant au premier mode radial, s'élève à 83 kHz. Une comparaison entre l'adaptateur secteur Toshiba employant une structure magnétique conventionnelle et celui utilisant un transformateur piézoélectrique est proposée sur la figure 1.25. A noter que le volume occupé par le premier est de  $105 \times 54 \times 28 = 158760 \text{ mm}^3$  tandis que le second présente un volume de  $64 \times 49 \times 15 = 47040 \text{ mm}^3$ . Le volume occupé par l'adaptateur a par conséquent été réduit d'un facteur supérieur à trois.

Il est à noter que l'utilisation de transformateur piézoélectrique est sujet à différents inconvénients. En effet, en raison du caractère capacitif intrinsèque de ces structures, les convertisseurs statiques qui les emploient sont contraints de gérer des énergies réactives qui constitueront une source de dégradation du facteur de dimensionnement des interrupteurs, éventuellement par l'ajout d'inductances (existence de régimes oscillants) et pourront également altérer le transfert de puissance (diminution du temps de conduction) [Sar05].

### 1.3.3.3 Alimentation des moteurs piézoélectriques

Pour donner naissance à une onde progressive permettant la mise en mouvement de son rotor, un moteur à ultrasons, constitué de céramiques piézoélectriques, nécessite de fortes tensions alternatives d'un ordre de grandeur avoisinant la centaine de volts. Afin d'obtenir ces niveaux de tension à partir d'une source continue, le schéma synoptique de l'alimentation d'un tel moteur se compose traditionnellement de trois éléments : une batterie, un onduleur et un transformateur élévateur de tension. Habituellement, la fonction élévatrice est réalisée par un transformateur magnétique conventionnel et ce, en dépit de ses nombreux défauts tels que sa taille, sa masse, son faible rendement ou encore sa forte émissivité électromagnétique. L'emploi du transformateur piézoélectrique pour assurer l'élévation en tension avait jusqu'alors été écarté en raison de ses performances remarquables seulement accessibles au voisinage de la résonance. Nonobstant, si le dimensionnement du transformateur piézoélectrique est opéré afin de caler une de ses fréquences de résonance avec celle du moteur à ultrasons, une miniaturisation du dispositif et une amélioration significative du rendement de l'ensemble peuvent être constatées. Cette association rend de surcroît tout circuit assurant la régulation de la fréquence de résonance superflu. L'exemple d'un tel dispositif est proposé dans [Man02] où un transformateur piézoélectrique discoïdal, de géométrie identique à la structure présentée sur la figure 1.11, est utilisé pour alimenter un moteur à ultrasons de fréquence de résonance égale à 86.5 kHz. Le transformateur, d'un diamètre de 28 mm et d'une épaisseur de 1 mm comparables aux dimensions du moteur, d'un matériau identique à celui du stator dispose d'une électrode centrale de diamètre 14.5 mm et d'une électrode en couronne de rayon intérieur égal à 20 mm. Les dimensions et le matériau utilisé confère au transformateur une fréquence de 87 kHz pour le mode radial. A cette fréquence, le gain en tension s'élève à une valeur de 17 tandis qu'il chute de plus de la moitié (6-7) pour la fréquence de résonance du moteur à ultrasons. Bien que le dispositif ne tire pas parti de la plus haute valeur disponible de gain en tension, cela s'avère suffisant pour alimenter le moteur. En outre, cela

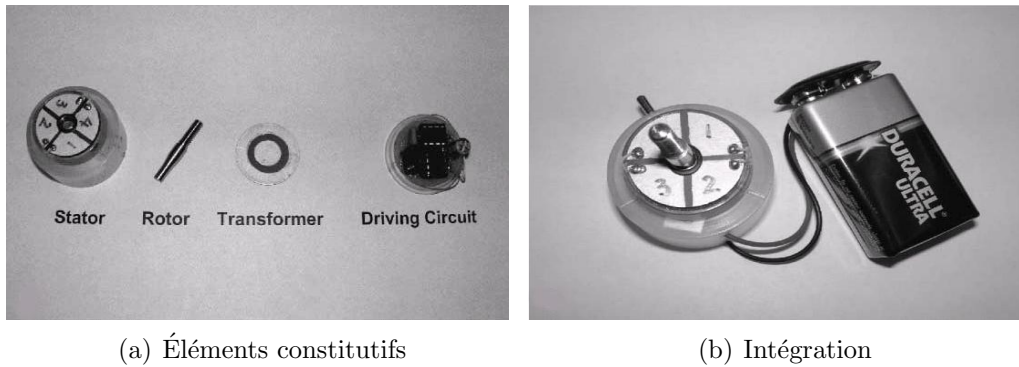


FIGURE 1.26 – Éléments constitutifs et intégration d'un moteur à ultrasons alimenté via un transformateur piézoélectrique discoïdal [Man02]

permet de limiter l'élévation en température du transformateur en raison d'une sollicitation fréquentielle en deçà de sa résonance. Les différents éléments constitutifs de cette application et l'intégration du moteur sont respectivement illustrés par les figures 1.26(a) et 1.26(b). En guise de complément, il est possible de consulter l'article [Kim02] décrivant également l'emploi d'un transformateur piézoélectrique discoïdal pour l'alimentation d'un moteur à ultrasons.

### 1.3.3.4 Applications spatiales

D'autres applications employant la technologie piézoélectrique ont été envisagées notamment dans le domaine spatial. Dans [Car03b], l'auteur dresse un état de l'art relativement exhaustif de l'utilisation des transformateurs piézoélectriques dans un tel contexte. Dans le cadre d'une problématique de miniaturisation et d'optimisation des performances, l'auteur dégage deux axes de recherche. D'une part, réduire la masse et le volume de la charge utile<sup>1</sup> des satellites de communication, en particulier l'alimentation des tubes à ondes progressives (TOP) employés pour l'amplification des ondes électromagnétiques radiofréquences (RF). D'autre part, le transformateur piézoélectrique est mis à contribution afin de simplifier le circuit d'amorçage d'un propulseur à plasma pulsé. Ces deux applications sont détaillées ci-après.

La charge utile d'un satellite de communication est constituée, entre autres choses, d'un TOP et de son électronique d'alimentation. Le principe de ce tube est de permettre une amplification de signaux RF réalisée par un transfert d'énergie cinétique entre un faisceau d'électrons et une onde électromagnétique RF de faible puissance. L'alimentation de ce tube doit être en mesure de fournir de hautes tensions (d'un ordre de grandeur de quelques kilovolts) à la cathode, au collecteur<sup>2</sup>

1. La *charge utile* d'un satellite désigne la partie de l'ensemble qui permet de remplir la mission pour laquelle le satellite a été conçu. A différencier du *module de service* qui est la partie du satellite qui fournit l'énergie et permet de positionner ce dernier.

2. Le collecteur permet de recueillir les électrons qui n'ont pas transféré leur énergie à l'onde RF lors de leur passage dans le tube.



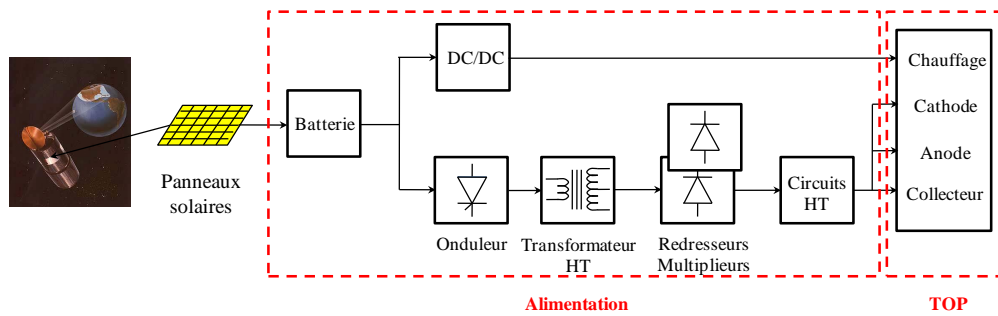


FIGURE 1.27 – Schéma synoptique de la charge utile d'un satellite de communication : tube à ondes progressives et son alimentation [Car03b]

du dispositif et à l'anode. La puissance en entrée étant fournie par un bus continu, de type batteries chargées via des panneaux solaires, un transformateur magnétique à haute tension s'avère nécessaire pour atteindre les spécifications requises. Un schéma synoptique typique d'une telle architecture est proposé sur la figure 1.27. En pratique, les satellites de diffusion télévisuelle comportent généralement 20 à 100 TOP, chacun produisant une puissance RF de 100 W. L'ensemble des TOP mobilise 80 % de la puissance disponible sur le satellite et représente 30 % de la masse de charge utile. En outre, les transformateurs magnétiques utilisés dans l'alimentation des TOP occupent 10 à 20 % du volume de cette dernière, sans compter les éléments de protection à placer autour de ceux-ci en raison de leur forte émissivité électromagnétique en RF. De ce fait, il paraît évident que l'intégration de la technologie piézoélectrique au sein de l'alimentation des TOP, permettant une réduction de la masse, du volume et du bruit électromagnétique de la charge utile, occasionnerait des gains substantiels sur le coût du satellite. Le dimensionnement du transformateur piézoélectrique repose sur les spécifications suivantes :

- La puissance à apporter à la cathode, qui permet l'accélération des électrons dans le tube à vide, implique des tensions comprises entre 4 et 7 kV pour de faibles courants la traversant (1 à 5 mA).
- Le collecteur requiert des niveaux de puissance s'échelonnant de 7.5 W à 1.8 kV jusqu'à 40 W à 400 V.
- L'anode ne nécessite en général qu'une puissance de 1 W environ sous une tension de 200 V.

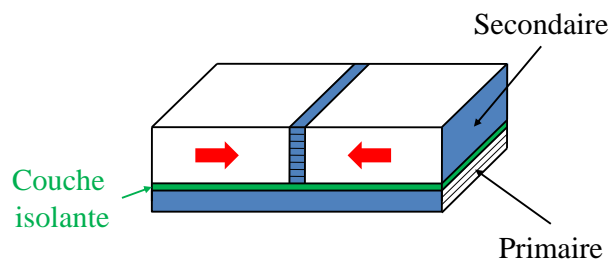


FIGURE 1.28 – Transformateur piézoélectrique de type Transoner-T3<sup>®</sup> [Car03d]



Face à ces spécifications, la société Face<sup>®</sup> Electronics propose une architecture piézoélectrique modulaire appelée « TAP-SONER » basée sur l'exploitation du transformateur Transoner-T3<sup>®</sup> dont la géométrie est donnée sur la figure 1.28. Ce transformateur sollicite un mode longitudinal, présente un primaire feuilleté, augurant d'un fort gain en tension et d'une faible impédance d'entrée, et une couche d'isolant sépare primaire et secondaire. Les performances de cette architecture ont été optimisées pour des caractéristiques de sortie de 1.5 kV/5 W. De ce fait, le caractère modulaire mis en jeu dans l'application décrite ici permet d'accroître la puissance et de multiplier le nombre de tensions de sortie dont l'amplitude varie en fonction de la quantité de modules considérés. Par conséquent, en dépit de tensions variant notablement entre la cathode, le collecteur et l'anode, la structure proposée s'intègre idéalement en raison de sa modularité. La figure 1.29 illustre le concept de « TAP-SONER » employé dans l'alimentation d'un TOP.

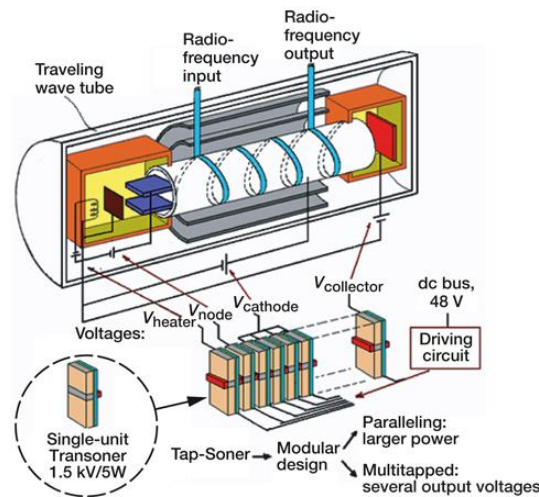


FIGURE 1.29 – Transformateur piézoélectrique de type « TAP-SONER » intégré dans l'alimentation des tubes à ondes progressives pour les satellites de communication [Car03b]

Une autre application, proposée dans [Car03b], a pour objectif de simplifier le circuit d'amorçage d'un propulseur à plasma pulsé. Ce type de propulseur est basé sur l'ablation, l'ionisation et l'accélération d'un ergol solide, généralement du téflon. Ces propulseurs de faible puissance (de 6 à 30 W) sont utilisés essentiellement pour les changements d'orbite et pour des positionnements précis de satellites approchant de leur orbite. Le schéma synoptique classique de ce type de propulseur est proposé figure 1.30. Le principe de fonctionnement est simple : l'alimentation haute tension du propulseur, dont la puissance nécessaire à sa mise en marche est fournie par une batterie chargée par des panneaux solaires, est reliée à une capacité dont l'énergie emmagasinée varie de 1 à 1000 J selon la taille du propulseur. Cette dernière applique une différence de potentiel entre une anode et une cathode, séparées d'une distance centimétrique, l'anode ayant un potentiel électrique supérieur d'environ 500 à 3000 V par rapport à la cathode. Afin d'amorcer la décharge, un arc électrique est généré par le biais d'une bougie placée à proximité de l'ergol afin d'initier l'ablation du téflon.

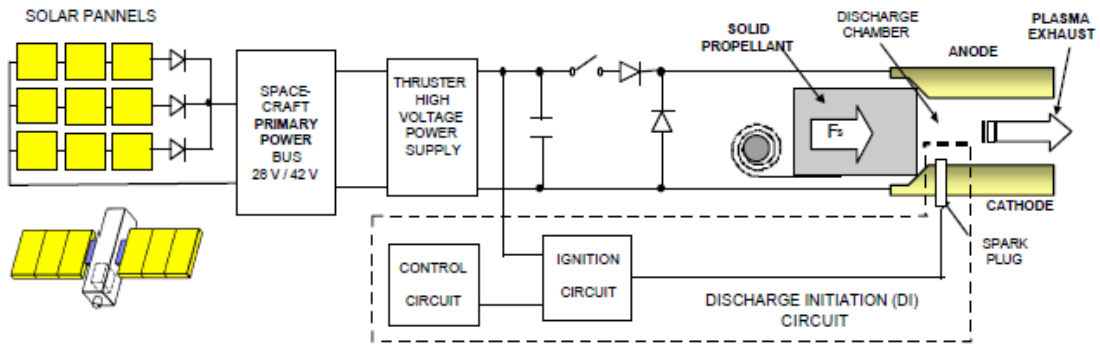


FIGURE 1.30 – Schéma synoptique d'un propulseur à plasma pulsé [Car03b]

L'idée proposée dans [Car03b] est de remplacer le circuit d'initiation de la décharge (ID), composé du circuit de contrôle, du circuit d'amorçage et de la bougie, par un transformateur piézoélectrique. Le circuit ID pour les propulseurs à plasma pulsé, illustré par la figure 1.31, est conventionnellement constitué des éléments suivants :

- un condensateur de stockage d'une capacité de valeur micrométrique,
- un interrupteur haute tension/fort courant de type IGBT,
- un transformateur d'isolement pour protéger la bougie d'éventuelles impulsions de haute tension.

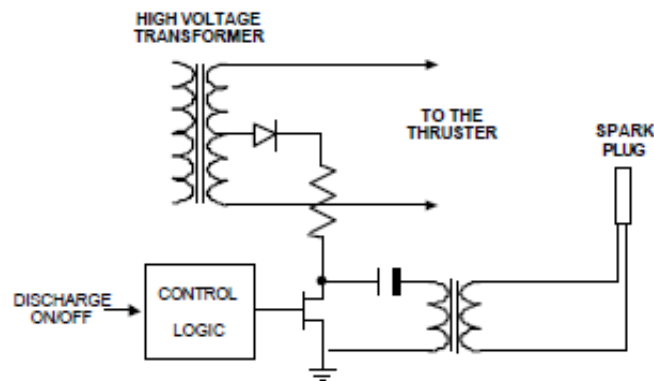


FIGURE 1.31 – Schéma du circuit d'initiation de la décharge pour un propulseur à plasma pulsé [Car03b]

La société Face<sup>®</sup> Electronics a proposé un prototype permettant de remplacer tous les éléments précédemment cités par un transformateur piézoélectrique associé à son alimentation. Les concepteurs de ce dispositif original ont pu démontrer en laboratoire d'une part, la capacité à générer l'arc électrique nécessaire à l'amorçage du propulseur à plasma pulsé pour des spécifications de tension et de puissance classiquement requises et d'autre part, la possibilité de contrôler le temps et le nombre de décharges permettant d'accroître le rendement de cette phase d'amorçage. Le prototype développé est très compact et a permis de réduire la masse, la taille et le bruit électromagnétique de la solution conventionnelle. L'intégration

de la technologie piézoélectrique au sein du système d'amorçage du propulseur à plasma pulsé est donnée sur la figure 1.32.

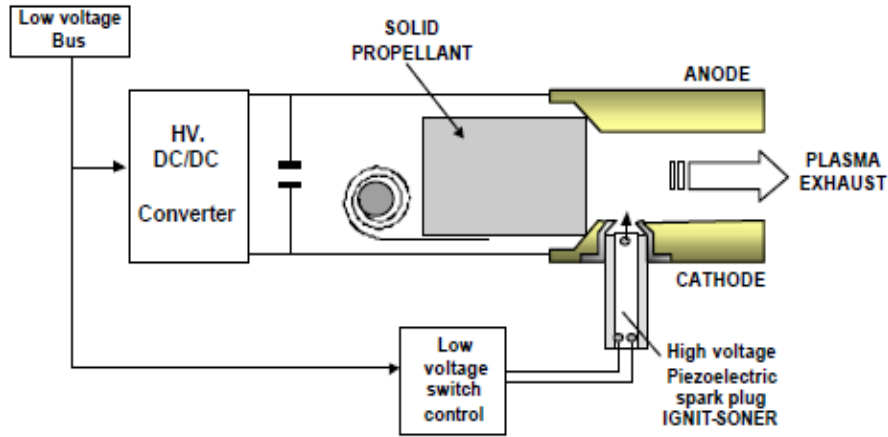


FIGURE 1.32 – Schéma synoptique d'un propulseur à plasma pulsé incluant le transformateur piézoélectrique [Car03b]

### 1.3.4 Transformateur piézoélectrique et plasma

Dans la section § 1.3.3, un état de l'art non exhaustif des applications employant usuellement des transformateurs piézoélectriques a pu être proposé. Pour la plupart de ces applications, leur emploi se justifiait, entre autres avantages, par leur remarquable propension à élever la tension. Au delà de leur usage en tant que composant électronique, les transformateurs piézoélectriques peuvent être judicieusement employés à la génération d'un microplasma ou plasma de surface à pression atmosphérique ou inférieure. Le fort potentiel électrique de surface nécessaire à la génération de plasma est issu de la double conversion électromécanique et mécanoélectrique qui s'opère au sein du transformateur alimenté à basse tension autour d'une des fréquences de résonance mécanique.

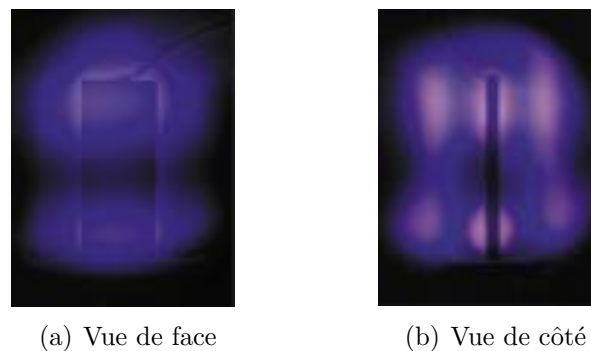


FIGURE 1.33 – Décharge plasma générée par un transformateur piézoélectrique de type Rosen [Ter01]

Les premières investigations expérimentales datent du début des années 2000 avec la génération de décharges lumineuses à basse pression à l'aide d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen. Dans [Ter01], une décharge plasma est générée dans l'air sous une pression de 0.45 Torr (1 Torr = 133.322 Pa) par un transformateur Rosen de dimensions  $60 \times 13 \times 2 \text{ mm}^3$  alimenté au primaire par une tension d'une amplitude de 3 V à une fréquence de 52.61 kHz correspondant à une vibration de la structure en pleine longueur d'onde. Cette vibration est communément appelée vibration en « mode  $\lambda$  ». La figure 1.33 expose les vues de face et de côté de la décharge plasma générée dans l'environnement de ce transformateur.

Dans [Ito02], les mêmes auteurs ont étendu leurs études à la génération de décharges plasma à différents gaz ( $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ , Ne et des mélanges Ne-Ar et He-Xe) et pour plusieurs modes vibratoires ( $\lambda/2$ ,  $\lambda$  et  $3/2\lambda$ ). La gamme de pression opérationnelle s'étend de 0.08 à 5 Torr. Ils ont pu constater que le profil et la couleur de la décharge lumineuse dépend naturellement du gaz dans lequel elle se produit et du mode de vibration sollicité (cf. figure 1.34).

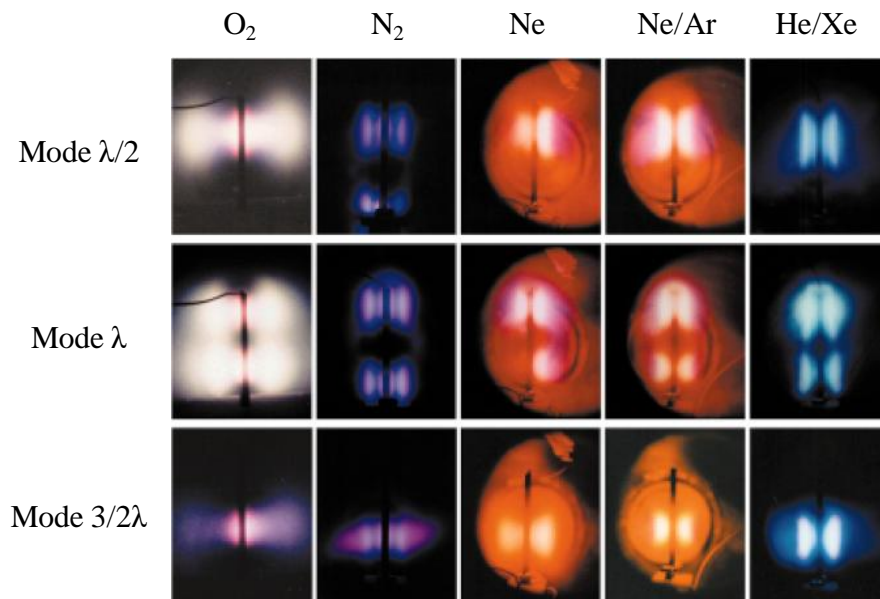


FIGURE 1.34 – Décharges lumineuses produites dans l'environnement d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen en fonction de la nature du gaz et du mode vibratoire sollicité [Ito02]

Cette équipe japonaise, très prolifique sur cette thématique, a intensifié ses investigations au cours de la décennie passée. La gamme de pression opérationnelle a été étendue sur une large plage, de  $10^{-2}$  à  $10^3$  Torr (jusqu'à 30% supérieur à la pression atmosphérique suivant le régime de décharges). Trois régimes de décharges ont pu être mis en évidence par effet piézoélectrique : les décharges couronne, les décharges diffuses et les décharges à barrière diélectrique. Les conditions expérimentales dans lesquelles chaque décharge est obtenue peuvent être détaillées :

- Lorsque le transformateur évolue à basse pression, une décharge lumineuse apparaît dans l'environnement proche de l'architecture comme illustrée par la figure 1.33.
- La décharge couronne<sup>3</sup> est obtenue, pour une pression opérationnelle proche de la pression atmosphérique, lorsqu'une ou plusieurs électrodes en forme de pointe sont placées, soit à l'extrémité du transformateur piézoélectrique, soit directement en vis-à-vis du secondaire.
- Pour la pression atmosphérique et au delà, une décharge électrique peut être observée dans un étroit espace compris entre le secondaire du transformateur et un diélectrique recouvert d'une électrode métallique. De part les conditions d'obtention, ce type de décharge est appelé Décharge à Barrière Diélectrique (DBD).

Ce dernier type de décharges a suscité un intérêt tout particulier. La figure 1.35 expose le schéma de principe d'un générateur de DBD mettant à contribution un transformateur piézoélectrique. Le diélectrique utilisé se compose d'une lamelle de

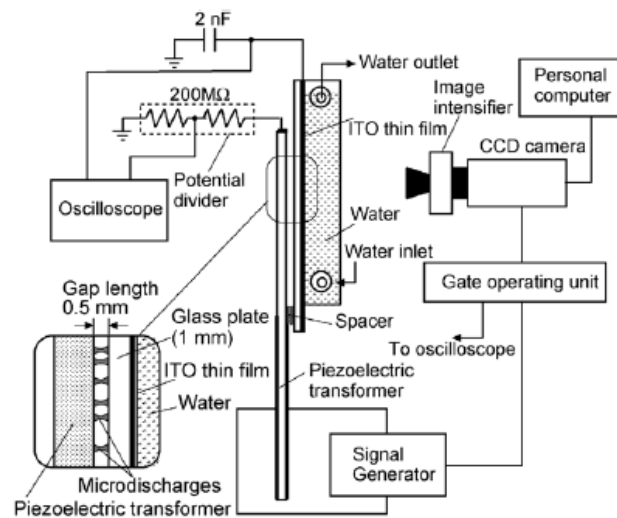


FIGURE 1.35 – Générateur DBD utilisant un transformateur piézoélectrique de type Rosen [Ito06]

verre d'une épaisseur de 1 mm recouverte par une fine couche d'oxyde d'indium-étain (ITO pour l'appellation anglaise de *Indium Tin Oxide*), conducteur déposé au dos de la couche diélectrique. Ce dernier est utilisé pour sa transparence afin d'observer les décharges produites. Le transformateur et le diélectrique sont espacés d'une distance ajustable, notée  $d$  par la suite, inférieure au millimètre. Un système de refroidissement à eau a été de surcroît ajouté sur le système pour limiter l'élévation en température, potentiellement destructive pour le système.

3. La *décharge couronne* est une décharge électrique se développant dans un volume gazeux compris entre deux électrodes fortement asymétriques, de type pointe/plan par exemple.

A l'aide de ce dispositif, des microdécharges, dont le motif évolue avec la pression, le type de gaz et l'amplitude  $V_p$  de la tension d'entrée, ont pu être obtenues à l'aide du transformateur Rosen de caractéristiques géométriques précédemment données. En guise d'illustration, les figures 1.36 et 1.37 exposent des clichés de DBD générées pour différentes pressions dans de l'hélium et de l'argon respectivement. Sur certaines photographies, la présence d'un réseau de points lumineux obéissant à une organisation très précise est à noter. Ces décharges sont classiquement qualifiées de filamenteuses ou, de manière équivalente, dénommées décharges streamer.

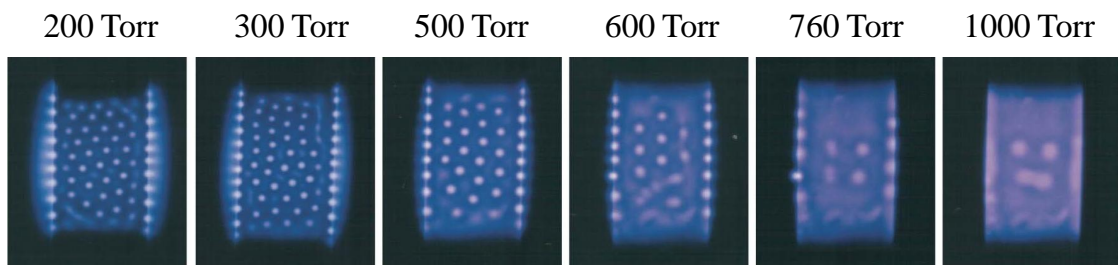


FIGURE 1.36 – Motifs de DBD dans l'hélium générée à la surface du secondaire d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen ( $d = 0.3$  mm,  $V_p = 20$  V) [Ito08]

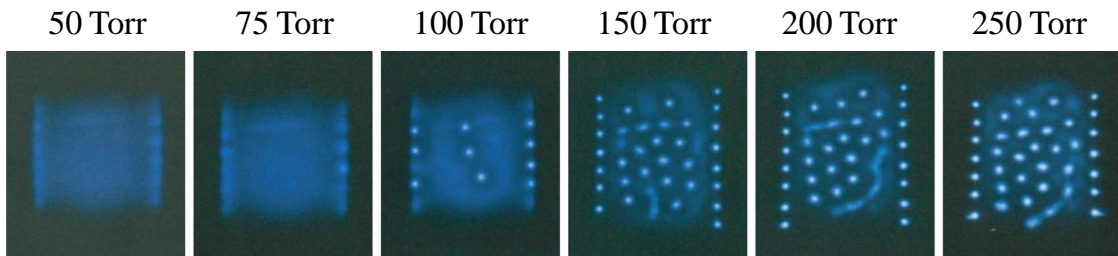


FIGURE 1.37 – Motifs de DBD dans l'argon générée à la surface du secondaire d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen ( $d = 0.5$  mm,  $V_p = 25$  V) [Ito08]

Parmi les applications mettant à profit la génération de DBD à l'aide d'un transformateur piézoélectrique, un générateur d'ozone<sup>4</sup> a pu être élaboré. Le schéma de principe est indiqué sur la figure 1.38. Le générateur est constitué de deux compartiments, l'un utilisé comme zone d'injection (en général le gaz injecté est composé d'un mélange d'oxygène pur et d'air) et l'autre employé en tant que zone de décharge. Cette dernière contient une canalisation rectangulaire délimitée par une paire de lamelles en verre sur le dos desquelles une fine couche d'aluminium a été apposée. Un système de refroidissement à eau est de plus disposé sur chaque couche diélectrique. A l'intérieur de ce conduit est inséré le transformateur de sorte que, de part et d'autre du secondaire, une distance de 0.5 mm soit maintenue entre le

4. L'ozone est classiquement utilisé pour le traitement de l'eau pour ses qualités de désinfection notamment.



dispositif piézoélectrique et le diélectrique. La production d'ozone se fait alors par injection de gaz et sa ionisation par DBD.

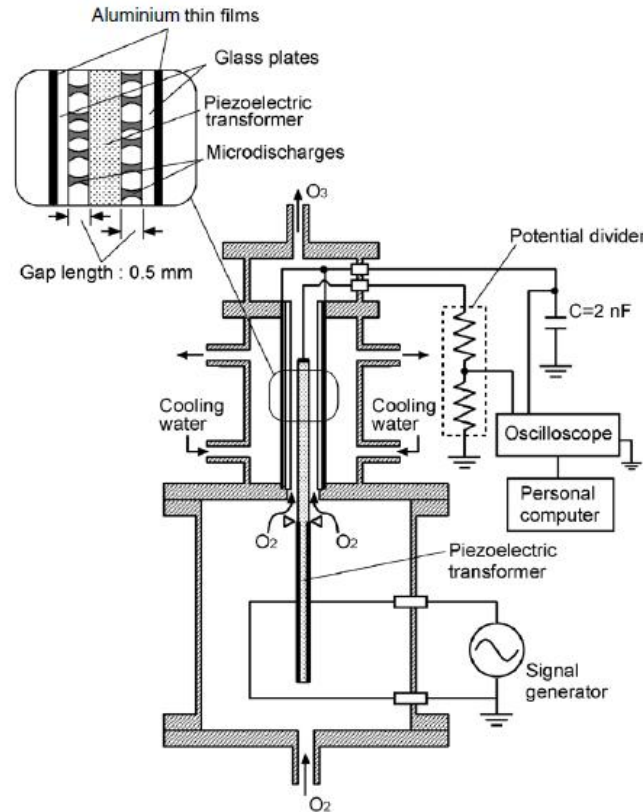


FIGURE 1.38 – Principe d'un générateur d'ozone utilisant un transformateur piézoélectrique de type Rosen [Ito06]

Un autre concept de générateur plasma par effet piézoélectrique a été proposé par [Tes09]. La motivation initiale était de repenser les dispositifs de génération de plasma à pression atmosphérique utilisés en raison de leur pouvoir stérilisateur dans le domaine médical, pour le traitement local des plaies par exemple. En effet, ces derniers sont généralement basés sur des sources RF ou microondes à l'origine d'irradiations irréversibles de l'environnement proche. En outre, ces solutions sont onéreuses et souffrent d'un faible potentiel de miniaturisation. Pour pallier ces différents problèmes, la propriété remarquable à l'élévation en tension des transformateurs piézoélectriques est mise à contribution. L'idée originale qui a été proposée par Teschke *et al.* est basée sur une reconsidération de la forme du transformateur piézoélectrique de type Rosen sous une forme cylindrique. Cette structure, dépourvue d'électrode au secondaire afin d'éviter le passage à l'arc, permet de faire circuler en son centre un flux de gaz (argon). La nouvelle structure est illustrée sur la figure 1.39. Cette architecture permet de générer un faisceau plasma à basse température et à pression atmosphérique [Kim09]. Le schéma et l'intégration du dispositif sont présentés sur la figure 1.40. Ce générateur plasma est constitué du transformateur, d'un court tube en quartz et d'une fine électrode en cuivre. Une tension sinusoïdale calée sur une résonance de l'architecture (es-

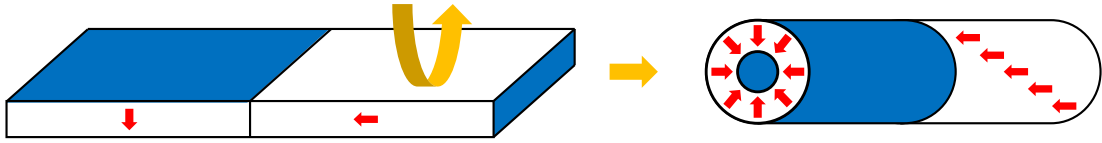
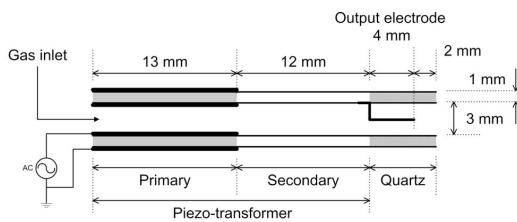
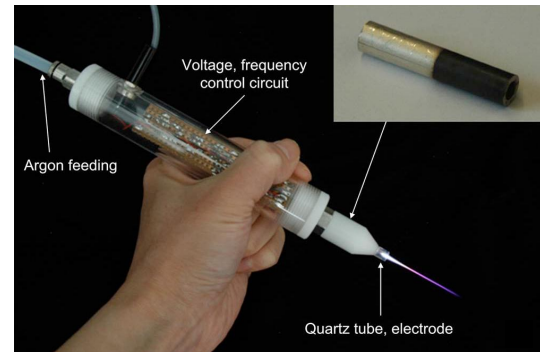


FIGURE 1.39 – Nouvelle structure de transformateur Rosen [Tes09]

timée à 134.7 kHz) et de valeur crête à crête inférieure à  $150 V_{rms}$  est appliquée en entrée. La présence de la fine électrode de cuivre à l'extrémité du secondaire améliore localement le champ électrique (effet de pointe), si bien que le plasma s'amorce à l'extrémité du tube cylindrique. Cet innovant dispositif est assurément une remarquable illustration de l'usage du transformateur piézoélectrique pour des applications de traitement de surface ou ayant trait au biomédical.



(a) Schéma du générateur



(b) Intégration du générateur

FIGURE 1.40 – Schéma et intégration du générateur de faisceau plasma à pression atmosphérique et basse température à l'aide d'un transformateur piézoélectrique cylindrique de type Rosen [Kim09]

## 1.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, une description du phénomène piézoélectrique et de la théorie associée a été proposée. Suite à ce rappel, le transformateur piézoélectrique a fait l'objet d'un intérêt particulier dans la seconde partie. Son principe de fonctionnement, ses caractéristiques ont été explicités, ainsi que les architectures sous la forme desquelles il est le plus couramment rencontré. Par la suite, un bref état de l'art répertoriant quelques applications usuelles a été constitué. En accord avec l'objet principal de ce mémoire, ce chapitre s'est clôturé par une présentation succincte des rares applications emblématiques des transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma.

A l'issue de cette partie introductive, la modélisation analytique du comportement électrodynamique des transformateurs piézoélectriques est abordée, constituant la première étape nécessaire à la compréhension des mécanismes du processus.





# Chapitre 2

## Modélisation analytique générale des transformateurs piézoélectriques

### Table des matières

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>60</b>
<b>2.2</b>	<b>Le Principe de Moindre Action [Lan86]</b>	<b>60</b>
2.2.1	Un peu d'histoire [Bas10] [Mar06]	60
2.2.2	Notion de coordonnées généralisées	63
2.2.3	Principe des Travaux Virtuels	65
2.2.4	Principe de d'Alembert	66
2.2.5	Principe de Hamilton	66
2.2.6	Équations de Lagrange	68
<b>2.3</b>	<b>Approche variationnelle de la piézoélectricité</b>	<b>71</b>
2.3.1	Classification en termes de variables généralisées [Nog05]	71
2.3.2	Lagrangien d'un milieu piézoélectrique	72
2.3.3	Équations d'équilibre d'un milieu piézoélectrique [GA98]	74
<b>2.4</b>	<b>Modélisation des transformateurs piézoélectriques</b>	<b>80</b>
2.4.1	Modèle analytique par approche variationnelle	82
2.4.2	Vibrations libres d'un transformateur piézoélectrique	91
2.4.3	Orthogonalité des modes propres - Critère de normalisation	93
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>98</b>

---

## 2.1 Introduction

Le chapitre précédent a permis de mettre en évidence le récent intérêt porté à la propriété piézoélectrique et plus spécifiquement aux transformateurs pour leur utilisation comme générateur plasma. Toutefois, si les applications commencent à émerger des laboratoires et en soulignent la pertinence, il existe peu de travaux théoriques permettant d'explicitier les mécanismes qui s'opèrent au cours de ce processus.

Afin d'aborder de manière méthodique cette nouvelle mise en application des transformateurs, il apparaît judicieux de développer une modélisation analytique, tout en maîtrisant l'ensemble des hypothèses qui ont permis son établissement. En outre, cette modélisation analytique doit avoir pour objectif principal de fournir les moyens nécessaires à l'interprétation des interactions remarquables et de fournir le cas échéant un appui à l'identification des mécanismes impliqués. Pour ce faire, une approche générale unifiant au sein d'une même formulation des énergies de nature différente est requise. Face à cet objectif, le principe de moindre action s'avère être l'outil adéquat.

Le principe de moindre action ayant été utilisé dans le cadre de la modélisation des actionneurs piézoélectriques [Hag95], celui-ci sera employé pour définir les équations d'équilibre régissant la dynamique des transformateurs. Son emploi au cas des transformateurs se distingue de celle des moteurs par l'existence et l'interaction nécessaire de deux ou plusieurs milieux piézoélectriques au comportement inverse, nécessitant le respect des conditions unissant ces éléments actifs.

La méthode mise en œuvre permettra d'aborder le dimensionnement des transformateurs, quelle que soit leur géométrie ou le mode vibratoire considéré. Celle-ci aboutira à l'expression matricielle des équations caractérisant le comportement électromécanique du transformateur.

Ce chapitre débute par une introduction au principe de moindre action tel qu'il a été énoncé initialement. Sur la base de la théorie linéaire de la piézoélectricité, le principe de Hamilton est ensuite adapté et exploité pour retrouver les équations régissant la dynamique d'un tel milieu électroactif. Finalement, la méthode est déployée pour décrire sous une forme générale le comportement électrodynamique des transformateurs piézoélectriques.

## 2.2 Le Principe de Moindre Action [Lan86]

### 2.2.1 Un peu d'histoire [Bas10] [Mar06]

Le Principe de Moindre Action (PMA), ou principe de Hamilton, est le fer de lance d'une classe de principes physiques connus sous le terme de *principes variationnels*. La notion de principe variationnel est omniprésente en physique et abondamment utilisée dans des domaines aussi divers que complexes tels que l'optique, la mécanique statistique, la mécanique analytique (dite de Lagrange ou de Hamilton), la théorie des champs, la mécanique quantique ou bien encore la théorie de la relativité générale. Si leur caractère quasi universel ne fait aucun doute dans le

monde des physiciens, les principes variationnels sont peu connus du monde scientifique non-spécialiste, méconnaissance principalement due à une mise en œuvre mathématique plutôt lourde. L'apparition de tels principes physiques sur la scène scientifique eut lieu au XVII<sup>e</sup> siècle par l'intermédiaire de Pierre de Fermat (1601-1665) et son fameux principe énoncé et démontré en 1662 dans un essai intitulé *Synthèse pour les réfractions*. Ce dernier, essayant d'établir les lois régissant l'optique géométrique, arrive à la conclusion suivante : la lumière suit toujours le trajet de plus courte durée. Malheureusement, pour des raisons métaphysiques et épistémologiques, la communauté scientifique d'alors, baignée d'idées et de préceptes cartésiens, n'adhère pas et Fermat ne trouvant aucun soutien de la part de ses confrères abandonne le champ de la physique. Les guerres intestines se dissipent alors et les principes d'économie sont oubliés.

Pourtant, nichée dans ce cocon, l'idée la plus étonnante, la plus déroutante et universelle de la physique moderne va survivre et renaître, un peu moins d'un siècle plus tard, sous la plume de Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) en 1744. Cette idée, celle d'un principe unificateur permettant de décrire les lois de la nature, est basée sur un concept limpide énoncé par Maupertuis lui-même : « *La nature suit toujours les voies les plus simples* ». Et les voies les plus aisées sont celles qui minimisent les dépenses de la nature. Le PMA est né. Cependant, les nouveaux concepts apportés par Maupertuis, basés sur une explication des phénomènes naturels par les causes finales, c'est-à-dire par le but en vue duquel ces phénomènes ont été créés, vont susciter de vives querelles dépassant largement le cadre de la physique. En effet, par ses idées, il relance le débat sur la causalité qui oppose à l'époque l'opinion cartésienne, qui avance l'idée d'une explication par les causes de l'effet considéré, et la vision « finaliste » soutenue par Maupertuis et par l'un des plus fervents et éminents penseurs de l'époque : Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). En plus de ce questionnement autour de la moindre action, qui soulève encore aujourd'hui des réflexions profondes, Maupertuis souffre d'un autre débat concernant l'origine même du PMA. La polémique instiguée par Samuel Koenig en 1751, alors membre de l'académie des sciences de Berlin dont Maupertuis en était lui-même le président, remet en cause la paternité des idées maupertuisiennes pour les attribuer à Leibniz. Il cite du reste une correspondance que Leibniz aurait tenue en 1707 avec un certain Hermann pour appuyer son propos. Il faudra l'intervention de Leonhard Euler (1707-1783) la même année pour laver l'affront essuyé par Maupertuis. Malgré toutes ces controverses, l'œuvre de Maupertuis a été au cours de ce siècle des Lumières une source d'inspiration intarrissable pour Euler et Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) qui lors d'échanges réguliers et féconds permirent la mathématisation des concepts maupertuisiens.

Ces deux sommités de la pensée scientifique de l'époque sont les pères de l'une des pierres angulaires de la physique théorique contemporaine. Les conséquences de leurs travaux se retrouvent aux origines de la relativité générale d'Einstein, des théories modernes des interactions fondamentales, comme la chromodynamique quantique qui décrit l'interaction forte, ou bien encore des théories de jauge (l'électrodynamique classique de Maxwell étant l'exemple le plus simple de ces théories).

L'outil mathématique qu'ils ont développé est le *calcul variationnel*. Euler en avait posé les jalons et Lagrange apporta une contribution décisive. En 1744, dans son traité intitulé *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudens*, Euler érigea le calcul des variations, dans la droite lignée des travaux des frères Jacques et Jean Bernouilli (1654-1705/1667-1748), le dernier cité eut d'ailleurs la gloire de former Euler lui-même. Il justifia *a posteriori* « le principe de la moindre quantité d'action » de son ami Maupertuis.

Lagrange, d'origine turinoise, s'est quant à lui très précocement entiché des sciences et plus particulièrement des mathématiques, intérêt notamment suscité par la lecture d'un manuscrit rédigé par Edmond Halley (1656-1742) traitant de l'application de l'algèbre en optique. Ses diverses investigations menées sur cette thématique l'ont amené à entretenir une relation épistolaire avec Euler afin de lui faire part de ses découvertes. Même si la première lettre fut restée sans réponse, Lagrange s'obstina et entreprit de lui écrire une seconde fois, le 12 août 1755, pour porter à sa connaissance la découverte d'une démonstration analytique plus rapide des résultats fondamentaux mis en évidence, de manière purement géométrique, par Euler dans son ouvrage *Methodus inveniendi* précédemment cité. La réponse de ce dernier, datée du 6 septembre 1755, fut très enthousiaste, reconnaissant d'emblée la grandeur et l'immense portée des idées avancées par Lagrange. La réaction favorable d'Euler à ses travaux l'encouragea et, en 1756, il appliqua ses techniques au principe de moindre action conférant à ce dernier une forme qui en fait le fondement de la mécanique et de la physique théorique moderne. Une des contributions majeures de Lagrange est sans nul doute sa *Mécanique analytique*, ouvrage dans lequel il expose l'ensemble des méthodes mathématiques appliquées à la statique et la dynamique qu'il avait développées antérieurement. Ce livre, achevé en 1782, ne fut publié qu'en 1788 à Paris. La mécanique de Lagrange est à considérer dans l'histoire de la physique, de la mécanique et des mathématiques comme l'égale de l'immarcescible mécanique céleste de Newton. Cette œuvre constituera le fondement de recherches ultérieures, notamment les travaux de Hamilton (1805-1865), qui la qualifia par ailleurs de « poème scientifique par le Shakespeare des mathématiques ».

William Rowan Hamilton est né le 4 août 1805 à Dublin. Féru dès son plus jeune âge de mathématiques (et également de langues étrangères, mortes et vivantes), Hamilton se consacra dès 1822 à l'optique géométrique. Cet intérêt manifesta le conduisit à présenter un mémoire devant l'Académie royale d'Irlande le 13 décembre 1824. Ce manuscrit, intitulé *On Caustics* (les caustiques), fut cependant rejeté six mois plus tard tant le contenu en était abstrait et le raisonnement abscons. Hamilton ne se découragea pas pour autant et prit attentivement en considération les conseils du comité de lecture. Le 23 avril 1827, il proposa finalement devant l'Académie une version améliorée et simplifiée de son précédent traité renommé *Theory of systems of rays* (Théorie de systèmes de rayons). Le 10 juin de cette même année, il fut engagé comme astronome royal à l'observatoire de Dunsink et fut également nommé professeur au Trinity College. Il n'avait alors que 22 ans. Durant l'élaboration de ce manuscrit et pour les trois essais supplémentaires qu'il y



Si ce nombre est supérieur à  $n$ , les variables indépendantes supplémentaires sont redondantes et n'apportent rien à la description du comportement du système. Par conséquent,  $n$  représente le nombre nécessaire et suffisant de variables indépendantes pour décrire complètement et de manière unique l'évolution du système.  $n$  s'apparente alors naturellement aux degrés de liberté du système et les  $n$  variables  $(q_1, \dots, q_n)$  associées sont appelées *coordonnées généralisées*.

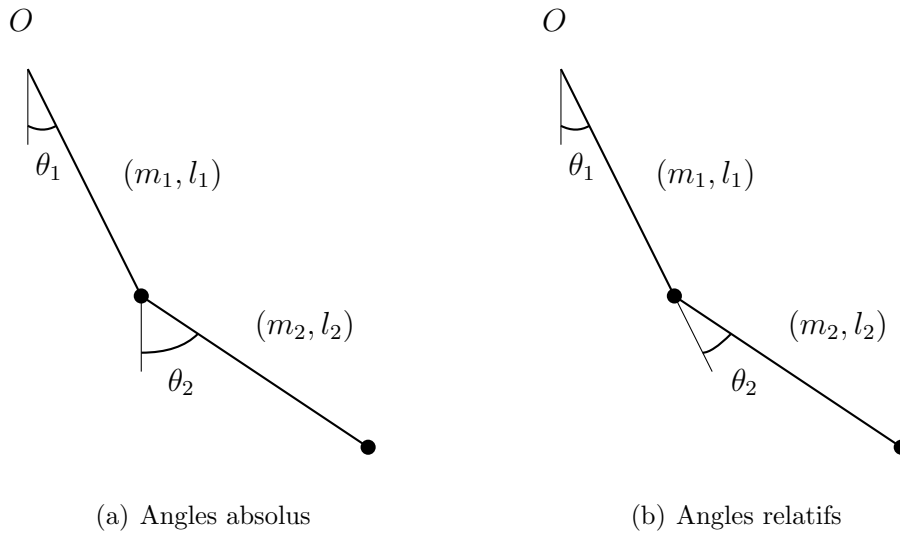


FIGURE 2.1 – Double pendule dans un plan [Pre06]

Le concept de coordonnées généralisées est une notion fondamentale pour l'application du PMA. Il a été montré qu'elles s'identifiaient aux degrés de liberté d'un système de manière à décrire son évolution tout en respectant les contraintes cinématiques qui régissent son comportement. Cette représentation n'est cependant pas unique ; l'exemple présenté sur la figure 2.1 en est une illustration simple mais pertinente : le mouvement du double pendule peut en effet être décrit soit à l'aide des angles absolus (cas 2.1(a)), soit par le biais des angles relatifs (cas 2.1(b)). Il est à noter qu'en dépit d'une introduction initiale dans un contexte purement mécanique les coordonnées généralisées peuvent représenter des quantités autres qu'un déplacement ou un angle. En effet, pour des systèmes électromécaniques, elles peuvent symboliser par exemple la charge électrique accumulée sur les armatures d'un condensateur ou bien encore le flux magnétique circulant dans une bobine.

L'intérêt principal de l'utilisation des coordonnées généralisées repose dans l'intégration des contraintes cinématiques par un choix adapté du paramétrage. L'approche variationnelle ne fait alors usage que d'un nombre minimum d'inconnues tandis que l'approche vectorielle nécessite l'introduction de forces de réaction nécessaire au traitement des contraintes cinématiques, faisant par conséquent croître le nombre de variables indéterminées. En guise d'exemple, il suffit de revenir au cas du double pendule : la considération des deux liaisons pivot dans l'étude du pendule nécessite en effet de prendre en compte des couples de réaction pour chacune des liaisons.

### 2.2.3 Principe des Travaux Virtuels

Le Principe des Travaux Virtuels (PTV), qui est l'un des premiers principes variationnels rencontré en science, trouve son origine dans le *principe des vitesses virtuelles* énoncé en 1725 par Jean Bernoulli (1667-1748). Ce dernier permet de caractériser l'équilibre d'un système et s'avère être fondamental pour le développement du PMA. Il est à rappeler que si une description de l'équilibre d'un solide s'effectuait dans le cadre de la mécanique newtonienne, il serait en toute rigueur nécessaire de faire intervenir les forces agissant entre chacune des particules qui constituent le solide. Ceci nécessite, comme cela a pu être évoqué précédemment, l'introduction de forces de réaction qu'il n'est pas nécessaire de prendre en considération dans une approche variationnelle. Et c'est sur ce point que réside la force du PTV.

Pour s'en convaincre, le PTV est explicité dans un langage plus formel : soit un système composé de  $N$  particules chacune associée à un vecteur position  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Ainsi le PTV stipule que le système donné est en équilibre si et seulement si la somme des travaux virtuels des résultantes des forces  $\mathbf{F}_i$  s'appliquant sur chaque particule est nulle. Ceci peut se traduire par la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.3)$$

où  $\delta \mathbf{r}_i$  symbolise les déplacements virtuels des particules compatibles avec les contraintes cinématiques imposées. Les résultantes  $\mathbf{F}_i$  peuvent être scindées en une somme de deux contributions correspondant aux efforts extérieurs et intérieurs notés respectivement  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  et  $\mathbf{F}_i^{(i)}$ . L'équation précédente devient alors :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(i)} \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.4)$$

Or, pour un tel système, les forces intérieures, dans l'hypothèse où les frictions internes sont négligées, ne sont que les forces de cohésion qui respectent les conditions cinématiques imposées. Par conséquent, du fait que les déplacements virtuels considérés sont en harmonie avec ces dernières, le second terme de l'équation (2.4) s'annule et il vient :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.5)$$

Ainsi, fort de cette relation, le PTV peut se résumer au postulat suivant : *un système donné est en équilibre si et seulement si la somme des travaux virtuels des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle pour toute variation infinitésimale de la configuration du système en harmonie avec les conditions cinématiques imposées*. En outre, sa formulation dans un contexte analytique où les coordonnées cartésiennes  $(x_i, y_i, z_i)$  sont exprimées en termes de coordonnées généralisées  $(q_1, \dots, q_n)$  peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^n f_i \delta q_i = 0 \quad (2.6)$$

où  $f_i$  symbolise la force généralisée associée à la coordonnée généralisée  $q_i$ .



### 2.2.4 Principe de d'Alembert

Jusqu'à présent, le postulat que constitue le principe des travaux virtuels a été énoncé dans un cadre purement statique. Son extension au domaine dynamique a été rendue possible par le mathématicien et philosophe français d'Alembert (1717-1785) grâce à l'introduction du concept de *force d'inertie*. En effet, son idée fut de réécrire le Principe Fondamentale de la Dynamique (PFD) sous la forme suivante :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{F} + \mathbf{I} = 0 \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{I} = -m\mathbf{a}$  est la force d'inertie. L'ensemble que forment alors les forces extérieures appliquées  $\mathbf{F}$  augmentées des forces d'inertie  $\mathbf{I}$  porte le nom de *forces effectives*. Il est à noter qu'en dépit d'une manipulation mathématique triviale opérée sur le PFD, les conséquences qui en découlent n'en demeurent pas moins remarquables. En effet, l'introduction des forces d'inertie donne lieu à une équivalence entre problème dynamique et problème statique. D'un point de vue physique, elle renseigne sur le caractère relatif du mouvement. D'un point de vue mathématique, les équations différentielles propres à la résolution d'un problème de dynamique peuvent être déduites à partir de considérations statiques. En suivant le même raisonnement qui a amené au postulat du PTV, c'est-à-dire en sommant les efforts qui s'appliquent sur chacune des  $N$  particules qui constituent le système considéré et en tenant compte de la nullité de la somme des travaux virtuels des forces de réaction  $\mathbf{F}_i^{(i)}$ , il vient :

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{I}_i) \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(e)} - m\ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.8)$$

Au vue de l'équation (2.8), le principe de d'Alembert permet bien la généralisation du PTV au domaine dynamique. Néanmoins, malgré le caractère général que semble proposer ce principe, la nature vectorielle des quantités mises en jeu nuit à son application. En effet, s'il s'avère être un outil puissant pour des problèmes élémentaires de dynamique qui peuvent être traités en coordonnées cartésiennes, il est rendu inadéquate pour des géométries plus complexes nécessitant, par exemple, l'emploi des coordonnées curvilignes. En outre, bien que la majorité des travaux des forces appliquées au système puissent se ramener à une énergie potentielle, les travaux des forces d'inertie ne peuvent pas se réduire à une fonction scalaire, compromettant par là même une formulation en termes de coordonnées généralisées.

Dans la section suivante, le *principe de Hamilton* permettra de s'affranchir de la nature spécifique des forces d'inertie.

### 2.2.5 Principe de Hamilton

Pour pallier la difficulté que représente le caractère particulier des forces d'inertie apparaissant dans le principe de d'Alembert, une transformation mathématique de ce dernier est nécessaire. Bien qu'implicitement utilisée par Euler et Lagrange, c'est en la personne de Hamilton que vint explicitement la solution. En effet, par

l'intermédiaire d'une intégration temporelle de la quantité (2.8), Hamilton exprima les travaux virtuels des forces d'inertie sous la forme d'une fonction scalaire. Son raisonnement fut le suivant : partant du principe de d'Alembert, il intégra l'expression (2.8) sur l'intervalle de temps  $[t_i, t_f]$  de sorte que :

$$\int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{F}_i - \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) \right] \delta \mathbf{r}_i dt = 0 \quad (2.9)$$

où par souci d'écriture  $\mathbf{F}_i$  et  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$  s'apparentent respectivement aux forces extérieures appliquées au système et à la vitesse de chacune des particules qui le composent. De plus, pour plus de généralité, il a été supposé que la masse de chaque particule puisse éventuellement avoir une variation temporelle. Ainsi, dans l'hypothèse où les forces extérieures appliquées sont conservatives, c'est-à-dire qu'elles dérivent d'un potentiel scalaire tel que la relation  $\mathcal{U} = - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i$  soit vérifiée, et en invoquant le propriété de commutativité des opérateurs d'intégration et de variation, l'équation (2.9) devient :

$$-\delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{U} dt - \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) \delta \mathbf{r}_i dt = 0 \quad (2.10)$$

En intégrant par parties le second terme de l'équation (2.10) et en exploitant une fois encore la nature commutative de la variation et de la dérivation, il vient :

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \mathcal{U} \right] dt - \left[ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \delta \mathbf{r}_i \right]_{t_i}^{t_f} = 0 \quad (2.11)$$

Par conséquent, en introduisant l'énergie cinétique du système donnée par la relation  $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$  et la fonction  $\mathcal{L}$ , définie comme la différence entre l'énergie cinétique  $\mathcal{T}$  et l'énergie potentielle  $\mathcal{U}$  du système, l'équation (2.11) devient :

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt - \left[ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \delta \mathbf{r}_i \right]_{t_i}^{t_f} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad (2.12)$$

$\mathcal{L}$  est appelé *lagrangien* ou *fonction de Lagrange* du système. Ses différentes propriétés seront décrites par la suite. De ce fait, dans la dernière relation, en imposant des conditions aux instants initial et final telles qu'aucune variation du rayon vecteur  $\mathbf{r}_i(t)$  de chaque particule ne soit permise aux extrémités de la trajectoire (cf. figure 2.2), c'est-à-dire telles que les relations  $\delta \mathbf{r}_i(t_i) = \delta \mathbf{r}_i(t_f) = 0$  soient vérifiées (on parle de variation entre limites définies), le deuxième terme de l'expression (2.12) s'annule. Il vient alors :

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt = 0 \Leftrightarrow \delta \mathcal{S} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt \quad (2.13)$$

La quantité scalaire  $\mathcal{S}$  est appelée *intégrale d'action* ou plus simplement *action* et constitue l'essence même du principe de Hamilton. Ce dernier peut être interprété comme suit : *un système donné se meut entre deux positions bien déterminées de sorte que son intégrale d'action  $\mathcal{S}$  soit extrémale sur l'intervalle de temps considéré.* Le problème de dynamique se résume alors à l'investigation d'une quantité scalaire, en l'occurrence le lagrangien, qui ne fait intervenir que les énergies cinétique et potentielle du système considéré. En outre, bien que les principes de d'Alembert et Hamilton soient mathématiquement équivalents (à une intégration temporelle près), la puissance du principe de Hamilton réside dans une description globale de l'évolution du système en incluant dans sa formulation les contraintes cinématiques imposées.

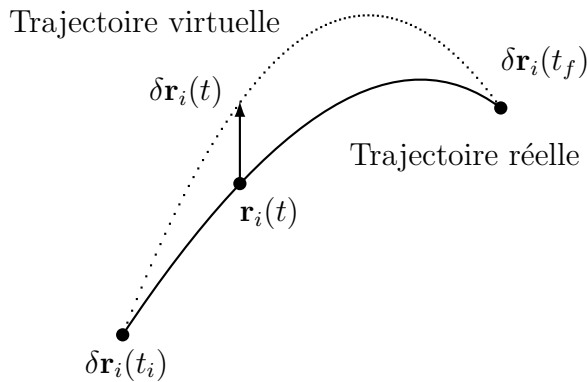


FIGURE 2.2 – Trajectoires réelle et virtuelle

Pour clore sur le principe de Hamilton, il est possible d'introduire dans sa formulation un terme  $\delta W_{nc}$  symbolisant la variation des travaux virtuels des forces non-conservatives agissant sur le système. La généralisation du principe prend alors la forme suivante :

$$\int_{t_i}^{t_f} (\delta \mathcal{L} + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (2.14)$$

Dans la prochaine partie, seront déduites les équations différentielles régissant le mouvement du système considéré et issues de la condition de stationnarité de l'intégrale d'action voulue par le principe de Hamilton, à savoir *les équations de Lagrange*.

## 2.2.6 Équations de Lagrange

Dans la dérivation du principe de Hamilton, aucune précision n'a été apportée quant à l'emploi d'un système de coordonnées particulier. Par conséquent, pour un système composé de  $N$  particules dont la configuration peut être décrite à l'aide de  $n$  degrés de liberté, l'évolution de ce dernier peut être exprimée par le truchement des coordonnées généralisées  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , des vitesses généralisées  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ , qui se déduisent des coordonnées généralisées par simple dérivation temporelle, et éventuellement du temps  $t$  si le système ne revêt pas un caractère

conservatif. Ainsi, le PMA se résume à la détermination de la condition de stationnarité de l'intégrale d'action  $\mathcal{S}$  qui s'exprime à l'aide des variables précédentes sous la forme (le système étudié est supposé conservatif) :

$$\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}[q(t), \dot{q}(t)] dt \quad (2.15)$$

Afin d'exprimer la condition de stationnarité voulue par le principe de Hamilton, deux trajectoires  $q_i(t)$  et  $\underline{q}_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$  sont examinées (cf. figure 2.3),  $\delta q_i(t)$  représentant une petite variation de trajectoire dans l'intervalle de temps considéré vérifiant à ses extrémités  $\delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = 0$ . A noter que  $\delta q_i$  possède une dérivée temporelle  $\delta \dot{q}_i$ , variables indépendantes l'une de l'autre. En effet, si à un instant donné l'incrément  $\delta q_i$  est fixé, la variation de la trajectoire n'est pas pour autant définie ; il faut de plus indiquer la valeur de la tangente à cet instant, fixant par conséquent  $\delta \dot{q}_i$ , et ceci peut être fait indépendamment du choix préalable de  $\delta q_i$ .

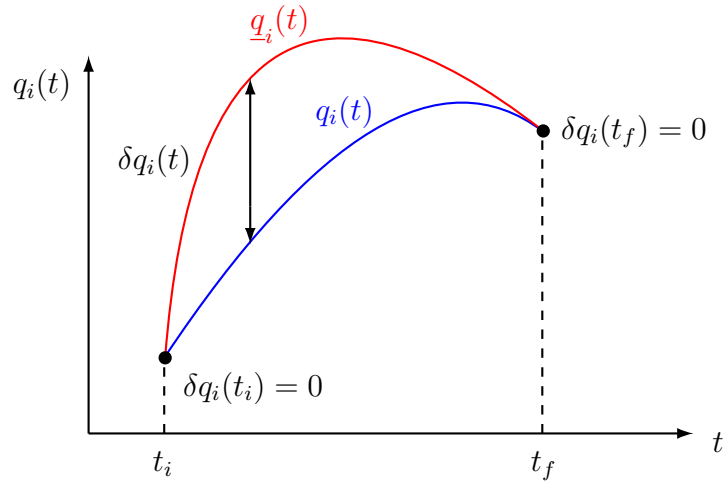


FIGURE 2.3 – Variation d'une trajectoire pour la coordonnée généralisée  $q_i$

Ceci étant spécifié, la variation de l'action  $\delta \mathcal{S}$ , qui n'est autre que la différence entre les actions  $\underline{\mathcal{S}}$  et  $\mathcal{S}$  des trajectoires  $\underline{q}_i(t)$  et  $q_i(t)$  respectivement, a pour expression :

$$\delta \mathcal{S} = \underline{\mathcal{S}} - \mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \mathcal{L}[\underline{q}_i(t), \underline{\dot{q}}_i(t)] - \mathcal{L}[q_i(t), \dot{q}_i(t)] \right\} dt = \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathcal{L} dt \quad (2.16)$$

Or la différentielle du Lagrangien  $\delta \mathcal{L}$  s'écrit comme la différentielle totale d'une fonction à  $2n$  variables telle que :

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] \quad (2.17)$$

En reportant cette dernière expression dans l'équation (2.16) et en intégrant par

parties le terme proportionnel à  $\delta\dot{q}_i$ , il vient :

$$\delta\mathcal{S} = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt \quad (2.18)$$

La variation de coordonnées se faisant à extrémités fixées ( $\delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = 0$ ), le premier terme de l'expression (2.18) est nul. De plus, la stationnarité de l'intégrale d'action devant être assurée quelle que soit la variation de chacune des variables indépendantes  $\delta q_i$ , l'intégrande entre parenthèses doit lui-même être nul pour chacune des coordonnées généralisées  $q_i$ . Il vient alors :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

Ces équations sont appelées *équations de Lagrange* et leur nombre est égal au nombre  $n$  de variables indépendantes. Les termes  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$  et  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$  désignent respectivement les *impulsions généralisées*  $p_i$  associées aux vitesses  $\dot{q}_i$  et les *forces généralisées*  $f_i$  s'appliquant au système. La principale qualité que présentent ces équations est leur invariance à tout changement de coordonnées permettant de ce fait, par un choix judicieux de ces dernières, de résoudre le plus aisément possible les équations du mouvement. En outre, il est à rappeler que l'intérêt principal du PMA est de pouvoir décrire toute la dynamique d'un système par la seule connaissance du lagrangien  $\mathcal{L}$ , grandeur scalaire invariante par changement de repère. De plus, le principe de Hamilton diffère radicalement avec l'approche « vectorielle » du principe de d'Alembert. L'utilisation de ce dernier principe préconise en effet la connaissance à chaque instant de l'accélération de chaque particule du système considéré et des travaux virtuels des forces d'inerties qui s'appliquent, alors que le PMA traite le problème dans sa globalité. A titre d'exemple, le tableau [2.1] donne une classification des paramètres mécaniques globaux exprimés en termes de variables généralisées requis pour la description de la dynamique d'une translation et d'une rotation à un degré de liberté.

TABLE 2.1 – Classification des paramètres mécaniques en termes de variables généralisées pour une translation et une rotation à un degré de liberté [Nog05]

Variables généralisées	Paramètres mécaniques	
	Translation d'axe ( $Ox$ )	Rotation d'axe ( $Ox$ )
Coordonnée ( $q_i$ )	abscisse ( $x$ )	angle ( $\alpha$ )
Vitesse ( $\dot{q}_i$ )	vitesse linéaire ( $\dot{x}$ )	vitesse angulaire ( $\dot{\alpha}$ )
Impulsion ( $p_i$ )	quantité de mouvement ( $p_x$ )	moment cinétique ( $\sigma_O$ )
Force ( $f_i$ )	force ( $f_x$ )	moment dynamique ( $\delta_O$ )

Tout ce qui vient d'être évoqué constitue le canevas de toute approche impliquant un principe variationnel et, bien que le développement ait pu se faire dans

un contexte purement mécanique, il sera possible dans la suite, par un simple ajustement de la définition du lagrangien, d'appliquer le principe de Hamilton à des domaines autres que la mécanique analytique. Ce dernier se révélera notamment être un outil puissant pour l'étude du comportement électromécanique des transformateurs piézoélectriques.

## 2.3 Approche variationnelle de la piézoélectricité

De manière générale, l'utilisation du principe de Hamilton pour un problème mêlant conjointement les aspects magnétiques, électriques et mécaniques constitue une approche véritablement attractive, en particulier dans notre cas pour la compréhension de la dynamique d'un milieu piézoélectrique. En effet, la mise en œuvre d'un principe variationnel permet une étude globale du système considéré et la caractérisation des différentes conversions d'énergie qui s'y opèrent ne sera plus que le fruit d'un traitement mathématique. Comme il a pu être mis en lumière au § 2.2.5, le principe de moindre action qui renferme la dynamique du système repose sur une fonctionnelle énergétique comprenant les énergies cinétique et potentielle de la structure considérée. Par sa nature, le lagrangien  $\mathcal{L}$  est assurément la quantité appropriée. Par définition, ce dernier est une fonction des coordonnées généralisées  $q_i$ , des vitesses généralisées  $\dot{q}_i$  et éventuellement du temps  $t$  si le système ne s'avère pas être conservatif. Or, s'il semble simple de paramétrer un système mécanique en termes de variables généralisées (cf. tableau [2.1]), une ambiguïté sur la formulation à adopter pour l'étude d'un système électromécanique est à déplorer. Cette incertitude une fois levée, il sera alors aisé d'appliquer le principe de moindre action à un milieu piézoélectrique par une définition adéquate du lagrangien et d'en déduire les équations d'équilibre qui en régissent sa dynamique. Ceci constitue le sujet même de cette section.

### 2.3.1 Classification en termes de variables généralisées [Nog05]

Selon [Nog05], il est possible de classer les grandeurs macroscopiques décrivant un système électromécanique selon une convention de type « électrostatique » ou de type « magnétostatique ». La première d'entre elles est la plus simple à mettre en exergue puisque la densité de courant  $\mathbf{j}$  est, de par sa définition, liée à la notion de vitesse ( $\mathbf{j} = \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  où  $\rho_\alpha$  et  $\mathbf{v}_\alpha$  symbolisent respectivement la densité volumique de charge et la vitesse des porteurs de charge d'espèce  $\alpha$ ). Ainsi, le courant d'intensité  $i$  peut être assimilé à une vitesse généralisée. En outre, celui-ci s'exprimant comme la dérivée temporelle de la charge électrique  $q_c$ , cette dernière assure le rôle de coordonnée généralisée. De plus, l'équation de Maxwell-Faraday ( $\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ ) reliant le champ électrique à la dérivée temporelle du champ magnétique peut être rapprochée des équations de Lagrange ( $\dot{p}_i = f_i$ ) de sorte que la relation existant entre ces dernières amène à conclure que le flux magnétique  $\varphi$  et la force électromotrice  $e$  (ou plus généralement la tension  $v$ ) peuvent être respectivement considérés comme une impulsion et une force généralisées. D'un point de vue énergétique, cette convention revient à considérer l'énergie électrostatique (de variation  $vdq_c$ )

comme une *énergie potentielle généralisée* (terme générique de forme  $f_i dq_i$ ), alors que l'énergie magnétostatique (de variation  $id\varphi$ ) se rapporte à une *énergie cinétique généralisée* (terme générique de forme  $\dot{q}_i dp_i$ ).

La formulation « électrostatique » précédemment évoquée repose sur le choix d'associer la charge électrique  $q_c$  à une coordonnée généralisée. Or, rien n'interdit *a priori* d'opter pour le flux magnétique  $\varphi$  pour remplir ce rôle. Dans ce cas, l'énergie magnétostatique devra être considérée comme une énergie potentielle généralisée tandis que l'énergie électrostatique sera envisagée comme une énergie cinétique généralisée. Cette formulation constitue la convention dite « magnétostatique ». Pour résumer ce propos, le tableau [2.2] répertorie la classification des paramètres électromécaniques exprimés en termes de variables généralisées dans le cas des deux conventions décrites auparavant.

TABLE 2.2 – Classification des paramètres électromécaniques en termes de variables généralisées selon les conventions « électrostatique » et « magnétostatique » [Nog05]

Variables généralisées	Convention électrostatique	Convention magnétostatique
coordonnée ( $q_i$ ) vitesse ( $\dot{q}_i$ ) impulsion ( $p_i$ ) force ( $f_i$ )	charge électrique ( $q_c$ ) intensité du courant ( $i$ ) flux magnétique ( $\varphi$ ) tension ( $v$ )	flux magnétique ( $\varphi$ ) tension ( $v$ ) charge électrique ( $q_c$ ) intensité du courant ( $i$ )
<b>Correspondance énergétique</b>	$(vdq_c) \longleftarrow (f_i dq_i) \longrightarrow (id\varphi)$ (énergie potentielle généralisée) $(id\varphi) \longleftarrow (\dot{q}_i dp_i) \longrightarrow (vdq_c)$ (énergie cinétique généralisée)	

### 2.3.2 Lagrangien d'un milieu piézoélectrique

Sur la base des conclusions précédentes, l'application du principe de Hamilton à un milieu piézoélectrique peut être entreprise. Ainsi, de manière tout à fait générale, à l'aide des notations introduites lors de l'étude sommaire de la théorie de l'élasticité linéaire (cf. § 1.2.2.1), un matériau piézoélectrique occupant au repos, c'est-à-dire dans sa configuration  $\kappa_0$ , un volume ( $\Omega_0$ ) délimité par une surface fermée ( $\Sigma_0$ ) est considéré et repéré dans un référentiel ( $\mathcal{R}$ ) défini par un repère orthonormé  $R$  d'origine  $O$ . Dans sa configuration  $\kappa$ , autrement dit à l'instant  $t$ , le solide occupe un volume ( $\Omega$ ) délimité par une surface fermée ( $\Sigma$ ). On désigne par  $\rho$  la masse volumique du matériau piézoélectrique qui est supposée constante (sa variation avec la déformation du solide est en effet très secondaire comparativement au phénomène étudié).

La mise en œuvre du principe de moindre action suppose une définition préalable du lagrangien. Il résulte des réflexions menées au § 2.2.5 que l'écriture de la

fonction de Lagrange dans un cadre purement mécanique s'exprime comme la différence entre une énergie cinétique  $\mathcal{T}$  et une énergie potentielle  $\mathcal{U}$ . Cependant, pour un système piézoélectrique contenant des degrés de liberté électromécaniques, une reformulation de ces quantités est nécessaire. Par définition, l'énergie cinétique  $\mathcal{T}$  est en termes de variables généralisées une fonction de l'impulsion  $p_i$ . Sa différentielle est alors donnée par la relation suivante :

$$d\mathcal{T} = \dot{q}_i dp_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

Or, le lagrangien étant une fonction des seules coordonnées  $q_i$  et vitesses  $\dot{q}_i$ , l'écriture de ce dernier se fera plutôt par le truchement de la coénergie cinétique  $\mathcal{T}^*$  déduite de l'énergie cinétique  $\mathcal{T}$  par une transformation de Legendre, comme suit :

$$\mathcal{T}^* = \dot{q}_i p_i - \mathcal{T} \quad (2.21)$$

Il est à noter que la différentielle  $d\mathcal{T}^* = p_i d\dot{q}_i$ , qui résulte de la différenciation de l'équation précédente, atteste bien du fait que la coénergie cinétique est une fonction des vitesses généralisées  $\dot{q}_i$ . Néanmoins, nonobstant une dépendance différente en termes de variables généralisées, l'énergie et la coénergie cinétiques présentent des formes identiques (tout du moins dans le cadre de la mécanique newtonienne). La distinction entre  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}^*$  aurait par conséquent pu être omise. Toutefois, pour les systèmes électromécaniques, il est nécessaire de distinguer les énergies des co-énergies qu'elles soient d'origine électrique ou magnétique, dans le cas par exemple d'une prise en considération de phénomènes non linéaires (cycle d'hystérésis...). Dès lors, le lagrangien sera exprimé par le biais de la coénergie cinétique  $\mathcal{T}^*$  au lieu de la classique énergie cinétique  $\mathcal{T}$ . Ceci étant convenu, pour un milieu piézoélectrique assujetti aux hypothèses des milieux continus déformables, l'expression de la coénergie cinétique s'exprime à l'aide du vecteur déplacement  $\{u\}$  par la relation suivante [GR98] :

$$\mathcal{T}^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega \quad (2.22)$$

Concernant l'énergie potentielle  $\mathcal{U}$ , sa formulation dans le cadre de la piézoélectricité est plus délicate. D'après l'investigation menée sur le principe de Hamilton dans la partie §2.2.5, il a été montré que l'énergie potentielle est fonction des seules coordonnées généralisées  $q_i$ . Or, si d'un point de vue mécanique le choix des coordonnées généralisées est simple (par la suite, une formulation en termes de déplacement sera préférentiellement adoptée), le choix des coordonnées généralisées électriques est tributaire de l'application à modéliser [GA98] [Nog05] [Pre06] :

- Dans le cas d'une application de type actionneur, les équipotentielles sont imposées sur les électrodes excitatrices de la céramique piézoélectrique. Les variations du système sont directement issues de la tension d'alimentation. Compte tenu de la causalité physique, il paraît indéniable de préférer le couple de variables indépendantes mixtes  $(S, E)$  pour modéliser la dynamique d'une céramique piézoélectrique employée comme un actionneur. En outre, la tension d'alimentation étant le degré de liberté de la fonction réalisée, elle



s'apparente naturellement à une vitesse généralisée et c'est par conséquent la convention « magnétostatique » qui prévaut pour ce type d'application. Ainsi, cette formulation de type déplacement/flux revient à adopter comme énergie potentielle  $\mathcal{U}$  une enthalpie libre électrique  $\mathcal{G}_2$  dont la densité volumique est donnée par la relation suivante (cf. tableau [1.2]) :

$$G_2(S, E) = \frac{1}{2}\{S\}^T[c^E]\{S\} - \{S\}^T[e]^T\{E\} - \frac{1}{2}\{E\}^T[\varepsilon^S]\{E\} \quad (2.23)$$

Le lagrangien d'un milieu piézoélectrique pour une application de type actionneur s'écrit finalement comme la différence entre la coénergie cinétique  $\mathcal{T}^*$  et l'enthalpie libre électrique  $\mathcal{G}_2$  telle que :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} - \{S\}^T [c^E] \{S\} + 2\{S\}^T [e]^T \{E\} + \{E\}^T [\varepsilon^S] \{E\} \right] d\Omega \quad (2.24)$$

- Dans le cas d'une application de type capteur, la céramique piézoélectrique est utilisée en circuit ouvert aux bornes de laquelle la tension induite par effet direct est mesurée. La quantité de charges sur les électrodes est par conséquent imposée justifiant le choix du couple de variables indépendantes extensives ( $S, D$ ) pour la modélisation du comportement électromécanique de la céramique employée en tant que capteur. Par ailleurs, la quantité de charge étant le degré de liberté de la fonction réalisée, s'apparantant de ce fait à une coordonnée généralisée, la convention « électrostatique » se justifie pour ce type d'application. Ainsi, cette formulation de type déplacement/charge revient à adopter comme énergie potentielle  $\mathcal{U}$  une énergie libre électrique  $\mathcal{F}$  dont la densité volumique est donnée par la relation suivante (cf. tableau [1.2]) :

$$F(S, D) = \frac{1}{2}\{S\}^T[c^D]\{S\} - \{S\}^T[h]^T\{D\} + \frac{1}{2}\{D\}^T[\beta^S]\{D\} \quad (2.25)$$

Le lagrangien d'un milieu piézoélectrique pour une application de type capteur s'écrit quant à lui comme la différence entre la coénergie cinétique  $\mathcal{T}^*$  et l'énergie libre électrique  $\mathcal{F}$  telle que :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} - \{S\}^T [c^D] \{S\} + 2\{S\}^T [h]^T \{D\} - \{D\}^T [\beta^S] \{D\} \right] d\Omega \quad (2.26)$$

Il est à noter que la mise en œuvre du principe de moindre action ne souffre pas de la convention adoptée. Les deux formulations sont strictement équivalentes dans l'application du principe de Hamilton et leur choix est seulement tributaire de la fonction à modéliser. Fort de ce constat, l'établissement des équations gouvernant la dynamique d'un milieu piézoélectrique va pouvoir être entrepris.

### 2.3.3 Équations d'équilibre d'un milieu piézoélectrique [GA98]

Un solide piézoélectrique est un corps généralement assimilable, d'un point de vue mécanique, à un milieu continu déformable et, d'un point de vue électrique,

semblable à un diélectrique (cf. hypothèses énoncées au § 1.2.3). Les équations qui régissent la dynamique d'un tel milieu découlent tout naturellement du principe de Hamilton. Pour s'en convaincre, il est convenu d'appliquer le principe de moindre action à un milieu piézoélectrique subissant un mouvement amenant le solide de sa configuration au repos  $\kappa_0$  à sa configuration déformée  $\kappa$  dans laquelle ce dernier occupe un volume ( $\Omega$ ) délimité par une surface fermée ( $\Sigma$ ). Comme l'illustre la figure 2.4, l'enveloppe du corps piézoélectrique peut être subdivisée en surfaces complémentaires telles que les relations suivantes soient vérifiées [Yan05] :

$$\begin{cases} \Sigma_u \cup \Sigma_T = \Sigma_\phi \cup \Sigma_D = \Sigma \\ \Sigma_u \cap \Sigma_T = \Sigma_\phi \cap \Sigma_D = \emptyset \end{cases} \quad (2.27)$$

avec ( $\Sigma_u$ ) et ( $\Sigma_T$ ) désignant respectivement les surfaces relatives aux conditions aux limites mécaniques sur lesquelles sont imposés les déplacements et les contraintes. De même, pour les conditions aux limites électriques, ( $\Sigma_\phi$ ) et ( $\Sigma_D$ ) correspondent respectivement aux surfaces où le potentiel électrique et l'induction électrique sont donnés. Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de définir un domaine rassemblant les zones où aucune condition mécanique n'est imposée car il peut facilement être assimilé à une surface soumise à une contrainte d'amplitude nulle.

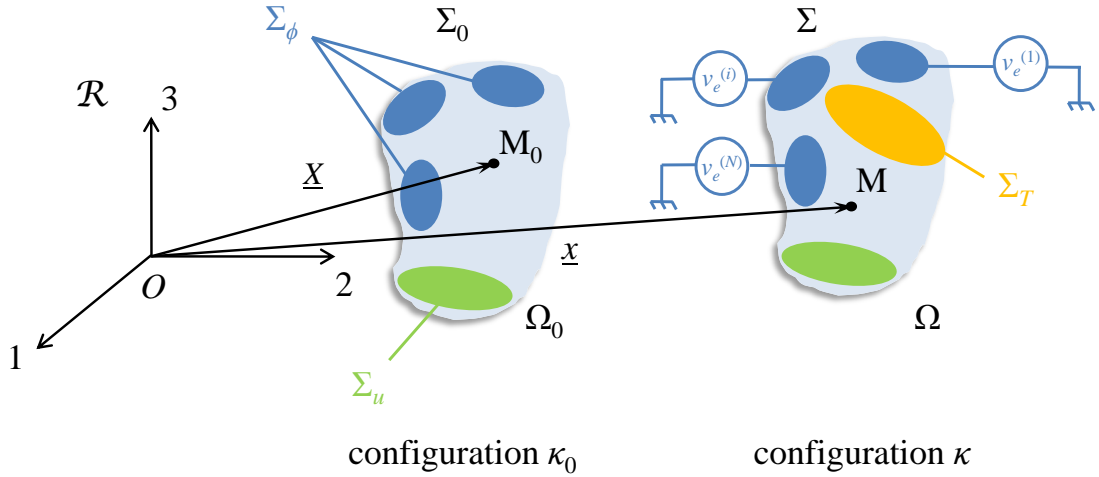


FIGURE 2.4 – Configurations d'un solide piézoélectrique dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ )

La géométrie de la structure ayant été précisée, les conditions aux limites du problème peuvent être explicitées. Mécaniquement, le corps piézoélectrique est soumis conjointement à des forces de densité volumique  $\mathbf{f}$  s'exerçant dans ( $\Omega$ ) et à des contraintes de densité surfacique  $\bar{\mathbf{t}}$ , de composantes  $\bar{t}_i$  distribuées sur la partie ( $\Sigma_T$ ) de la surface ( $\Sigma$ ). Les déplacements  $\bar{\mathbf{u}}$  sont de surcroît supposés être imposés sur ( $\Sigma_u$ ). Électriquement, le milieu piézoélectrique est alimenté par  $N$  générateurs qui débitent respectivement une quantité de charges  $q_e^{(k)}$  sur chaque surface électrodée ( $\Sigma_\phi^{(k)}$ )<sup>1</sup> ce qui revient à fixer le potentiel électrique  $\phi$  à la valeur  $v_e^{(k)}$ . En outre,

1. La relation suivante est par conséquent implicitement vérifiée :  $\Sigma_\phi = \bigcup_{k=1}^N \Sigma_\phi^{(k)}$

compte tenu de la forte permittivité du matériau, l'influence sur le milieu piézo-électrique du champ électrique extérieur n'est pas prise en considération. A noter que toutes les quantités introduites sont des grandeurs données et dépendantes de la seule variable temporelle  $t$ .

D'après la section § 2.2.5, le PMA suggère que la variation de l'intégrale d'action  $\mathcal{S}$  est nulle pour un système se mouvant sur un intervalle de temps considéré. Si les travaux virtuels des forces non-conservatives appliquées à la structure sont pris en considération, la variation de l'action est donnée par la relation (2.14) et en vertu de la propriété de commutativité de la variation et de l'intégrale, il vient :

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} (\delta\mathcal{L} + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (2.28)$$

D'après cette dernière relation, la variation de l'action est directement issue de la variation du lagrangien du système, or, pour une structure piézoélectrique, deux formulations sont *a priori* envisageables. Pour fixer les choses, la première formulation basée sur la convention magnétostatique utilisant le couple de variables indépendantes  $(S, E)$  est exploitée. Compte tenu de ce choix, la variation  $\delta\mathcal{L}$  du lagrangien se déduit des variations de la coénergie cinétique  $\mathcal{T}^*$  et de l'enthalpie libre électrique  $\mathcal{G}_2$  (cf. tableau [1.2]). Ainsi, à l'aide de la convention sur la sommation des indices répétés, il vient :

$$\delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{T}^* - \delta\mathcal{G}_2 = \int_{\Omega} \left( \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - T_{ij} \delta S_{ij} + D_i \delta E_i \right) d\Omega \quad (2.29)$$

Au principe de moindre action, il faut ajouter l'hypothèse d'une évolution entre limites définies du système considéré. Au vu de la convention adoptée, elle s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_i(t_i) &= \delta u_i(t_f) = 0 \\ \delta \varphi_e^{(k)}(t_i) &= \delta \varphi_e^{(k)}(t_f) = 0 \quad (k = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.30)$$

où  $\varphi_e^{(k)}$  est le flux magnétique associée à la tension  $v_e^{(k)}$ . Bien que ce dernier n'ait pas de véritable réalité physique dans le problème étudié, sa présence ne modifie en rien les équations obtenues à partir du principe de moindre action. Il ne constitue en effet qu'un intermédiaire de calcul et par la suite une simple intégration par parties permettra de s'en affranchir et de faire apparaître les quantités physiquement existantes. Il faut en outre préciser les conditions aux limites imposées sur le déplacement mécanique et le potentiel électrique :

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \quad \text{sur} \quad \Sigma_u \\ \phi &= v_e^{(k)} \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\phi}^{(k)} \quad (k = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Les hypothèses étant explicitées, l'expression (2.28) peut être développée. Tout d'abord, la contribution de la coénergie cinétique à la variation de l'action sur l'intervalle  $[t_i, t_f]$  peut être réécrite à l'aide d'une intégration par parties. Il vient alors :

$$\int_{t_i}^{t_f} \delta\mathcal{T}^* dt = \left[ \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta u_i d\Omega \right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \left[ \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega \right] dt \quad (2.32)$$

Or, d'après la relation (2.30), le premier terme de la relation précédente est nul et la contribution de la coénergie cinétique à la variation du lagrangien se réduit à :

$$\boxed{\int_{t_i}^{t_f} \delta \mathcal{T}^* dt = - \int_{t_i}^{t_f} \left[ \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega \right] dt} \quad (2.33)$$

La contribution de l'énergie élastique de l'enthalpie libre  $\mathcal{G}_2$  à la variation du lagrangien est maintenant considérée. En substituant dans ce terme l'expression linéarisée (1.9) du tenseur des déformations et fort de la propriété de commutativité entre la dérivation et la variation, cette quantité se met sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} T_{ij} \delta S_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{ij} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) d\Omega \quad (2.34)$$

D'où, par intégration par parties, en notant que la variation des déplacements ne peut se faire que sur la partie  $(\Sigma_T)$  de la surface fermée  $(\Sigma)$  où ils ne sont pas imposés, il vient :

$$\int_{\Omega} T_{ij} \delta S_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_T} T_{ij} (\delta u_i d\Sigma_j + \delta u_j d\Sigma_i) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T_{ij,j} \delta u_i + T_{ij,i} \delta u_j) d\Omega \quad (2.35)$$

où  $d\Sigma_j$  symbolise les composantes de l'élément de surface  $d\mathbf{\Sigma}$ , aire élémentaire sur laquelle le milieu piézoélectrique imprime au milieu extérieur une force  $T_{ij} d\Sigma_j$ . Ainsi, en vertu de la propriété de symétrie du tenseur des contraintes, la contribution de l'énergie élastique à la variation du lagrangien s'exprime finalement par la relation suivante :

$$\boxed{\int_{\Omega} T_{ij} \delta S_{ij} d\Omega = \int_{\Sigma_T} T_{ij} n_j \delta u_i d\Sigma - \int_{\Omega} T_{ij,j} \delta u_i d\Omega} \quad (2.36)$$

( $n_j$  désignent les cosinus directeurs de la normale extérieure à  $(\Omega)$  :  $n_j d\Sigma = d\Sigma_j$ ).

Concernant la contribution de la partie électrique de l'enthalpie libre  $\mathcal{G}_2$ , comme le champ électrique  $\{E\}$  dérive du potentiel scalaire  $\phi$ , cette dernière peut, en invoquant une fois encore la propriété de commutativité entre la dérivation et la variation, se mettre sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} D_i \delta E_i d\Omega = - \int_{\Omega} D_i (\delta \phi)_{,i} d\Omega \quad (2.37)$$

Sachant que pour tout scalaire  $f$  et tout vecteur  $\mathbf{v}$ , la formule d'analyse vectorielle suivante est vérifiée :

$$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f \quad (2.38)$$

La relation (2.37) se réécrit alors :

$$\int_{\Omega} D_i \delta E_i d\Omega = \int_{\Omega} D_{i,i} \delta \phi d\Omega - \int_{\Omega} (D_i \delta \phi)_{,i} d\Omega \quad (2.39)$$

Enfin, en appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky au deuxième terme du membre de droite de l'égalité précédente, la contribution de l'énergie électrique à la variation du lagrangien s'exprime comme suit :

$$\boxed{\int_{\Omega} D_i \delta E_i d\Omega = \int_{\Omega} D_{i,i} \delta \phi d\Omega - \int_{\Sigma} D_i n_i \delta \phi d\Sigma} \quad (2.40)$$

Concernant la variation  $\delta W_{nc}$  des travaux virtuels des forces non-conservatives, elle s'exprime simplement comme la somme des travaux virtuels des forces extérieures et des tensions électriques appliquées. D'après [Tie67], le terme mécanique, pour toute variation virtuelle des composantes des déplacements  $\delta u_i$ , s'écrit :

$$\int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Sigma_T} \bar{t}_i \delta u_i d\Sigma \quad (2.41)$$

Le terme électrique n'est autre que la somme des travaux élémentaires fournis par les  $N$  générateurs extérieurs au milieu piézoélectrique. La formulation magnéto-statique étant adoptée, la contribution électrique aux travaux virtuels des forces non-conservatives s'écrit par conséquent :

$$\sum_{k=1}^N i_e^{(k)} \delta \varphi_e^{(k)} \quad (2.42)$$

où  $i_e^{(k)}$  est l'intensité du courant traversant la  $k^{\text{ème}}$  électrode excitatrice. De ce fait, à partir de la somme des expressions (2.41) et (2.42), la variation des travaux virtuels des forces non-conservatives s'exprime par le relation suivante :

$$\boxed{\delta W_{nc} = \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Sigma_T} \bar{t}_i \delta u_i d\Sigma + \sum_{k=1}^N i_e^{(k)} \delta \varphi_e^{(k)}} \quad (2.43)$$

Le contribution électrique de cette dernière quantité sur l'intervalle  $[t_i, t_f]$  peut faire l'objet d'une intégration par parties afin de faire apparaître les grandeurs physiquement existantes de sorte que :

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_i}^{t_f} i_e^{(k)} \delta \varphi_e^{(k)} dt = \sum_{k=1}^N \left[ q_e^{(k)} \delta \varphi_e^{(k)} \right]_{t_i}^{t_f} - \sum_{k=1}^N \int_{t_i}^{t_f} q_e^{(k)} \delta v_e^{(k)} dt \quad (2.44)$$

Or, comme l'évolution du système se fait entre limites définies, d'après la relation (2.30), la relation précédente se simplifie comme suit :

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_i}^{t_f} i_e^{(k)} \delta \varphi_e^{(k)} dt = - \sum_{k=1}^N \int_{t_i}^{t_f} q_e^{(k)} \delta v_e^{(k)} dt \quad (2.45)$$

Finalement, en tenant compte de l'expression (2.43) donnant la variation des travaux virtuels des forces non-conservatives et puisque sur chaque électrode la quantité de charges  $q_e^{(k)}$  délivrée par le  $k^{\text{ème}}$  générateur est reliée à la densité surfacique  $\bar{\sigma}_e$  par la relation  $q_e^{(k)} = \int_{\Sigma_\phi^{(k)}} \bar{\sigma}_e d\Sigma$ , la variation de l'action  $\delta\mathcal{S}$  a pour expression :

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \int_{\Omega} [(T_{ij,j} + f_i - \rho\ddot{u}_i)\delta u_i + (D_{i,i})\delta\phi] d\Omega + \int_{\Sigma_T} (\bar{t}_i - T_{ij}n_j)\delta u_i d\Sigma - \int_{\Sigma_D} (D_i n_i)\delta\phi d\Sigma - \sum_{k=1}^N \int_{\Sigma_\phi^{(k)}} [\bar{\sigma}_e \delta v_e^{(k)} + (D_i n_i)\delta\phi] d\Sigma \right\} dt = 0 \quad (2.46)$$

Ainsi, puisque les variations  $\delta u_i$  et  $\delta\phi$  sont arbitrairement choisies à l'intérieur du volume ( $\Omega$ ), les équations d'équilibre vérifiées au sein de ce même volume s'écrivent :

$$\begin{cases} T_{ij,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i \\ D_{i,i} = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.47)$$

En outre, pour les intégrales surfaciques, les variations du déplacement  $\delta u_i$  et du potentiel  $\delta\phi$  ont également des valeurs arbitraires sur les surfaces ( $\Sigma_T$ ) et ( $\Sigma_D$ ) respectivement. Il vient alors :

$$\begin{cases} T_{ij}n_j = \bar{t}_i & \text{sur } \Sigma_T \\ D_i n_i = 0 & \text{sur } \Sigma_D \end{cases} \quad (2.48)$$

Concernant le dernier terme de la variation de l'intégrale d'action (2.46), du fait de la condition (2.31) donnant le potentiel électrique sur ( $\Sigma_\phi$ ), la stationnarité de l'action nécessite que les relations suivantes soient simultanément vérifiées sur ( $\Sigma_\phi$ ) :

$$\begin{cases} \phi = v_e^{(k)} \\ D_i n_i = -\bar{\sigma}_e \end{cases} \quad \text{sur } \Sigma_\phi^{(k)} \quad (k = 1, \dots, N) \quad (2.49)$$

Ainsi, grâce au principe de moindre action, les équations décrivant la dynamique d'un milieu piézoélectrique de volume ( $\Omega$ ) et les conditions aux limites mécaniques et électriques vérifiées sur l'enveloppe ( $\Sigma$ ) de ce même volume ont pu être établies. La démarche employée dans cette partie va constituer dans la section suivante le cadre théorique permettant une description globale du comportement électromécanique de tous dispositifs piézoélectriques et plus particulièrement des transformateurs.

---

2. Il est possible de définir la densité surfacique  $\bar{\sigma}_e$  comme une fonction continue par morceaux respectant une condition de nullité sur les parties non électrodées du milieu piézoélectrique. La charge débitée par le  $k^{\text{ème}}$  générateur est par conséquent exactement l'intégrale sur ( $\Sigma_\phi^{(k)}$ ) de la densité surfacique de charge [GA98].

## 2.4 Modélisation des transformateurs piézoélectriques

En comparaison à l'étendue des résultats théoriques qu'ont connus et que connaissent encore les transducteurs et autres résonateurs piézoélectriques, l'essor en termes de modélisation du comportement électromécanique des transformateurs piézoélectriques a été plus tardif. Les modèles classiques reposent généralement sur l'exploitation d'un schéma électrique équivalent, dont la structure et la définition des différents éléments qui le composent ont été rappelées dans la section § 1.3.2.1. Par le biais de cette approche, une simulation complète des caractéristiques électriques des transformateurs piézoélectriques telles que le gain en tension, l'admittance d'entrée, la puissance de sortie ou encore le rendement peut être réalisée avec une précision généralement satisfaisante pour une approche qualitative. Il est alors possible d'étudier l'impact sur ces quantités d'une éventuelle charge résistive placée aux bornes du secondaire [Ive02] ou d'examiner l'influence de la géométrie du transformateur sur ces mêmes grandeurs [Fuk98]. Cette modélisation peut être également le point de départ d'une procédure d'optimisation en vue de déterminer la structure adéquate répondant à des spécifications précises [Pig07]. Cependant, cette démarche suppose un découplage parfait entre les modes (ceci nécessite de respecter un certain rapport entre les dimensions géométriques), un fonctionnement en régime linéaire (limitation des contraintes subies et du champ électrique appliqué), des conditions de surface parfaites et bien d'autres hypothèses restrictives. De ce fait, ces modèles très idéaux demeurent valables sur une étroite plage de fréquence située autour de la fréquence du mode vibratoire considéré. Néanmoins, leur extension à une plus large plage de fréquence peut être faite par l'introduction de branches motionnelles supplémentaires en nombre égal au nombre de modes susceptibles d'être excités [Lin01].

Une autre approche théorique pour l'étude des transformateurs piézoélectriques réside dans la résolution directe des équations dynamiques issues de la théorie linéaire de la piézoélectricité. Nonobstant, en raison d'un fort couplage électromécanique et de l'anisotropie nécessaire à l'existence du phénomène piézoélectrique, les solutions exactes découlant des équations 3D de la piézoélectricité sont rares et représentent encore à ce jour un véritable défi mathématique. Les solutions analytiques rencontrées dans la littérature sont en général le fruit de modèles simplifiés à une ou deux dimensions appliqués à des architectures de transformateurs de forme élémentaire telle qu'une plaque, une poutre, un cylindre ou bien encore un anneau. Le transformateur de type Rosen reste assurément la structure la plus étudiée de part la simplicité de son architecture et ses propriétés remarquables en élévateur de tension [Yan02] [Kar00]. Les transformateurs de type disque ou anneau jouissent également d'une attention toute particulière [Pul07a] [Pul07b]. A l'instar de la modélisation par schéma électrique équivalent, ces modèles permettent la détermination des différentes grandeurs électriques qui caractérisent le transformateur piézoélectrique. Les tracés fréquentiels du gain en tension, de la puissance de sortie et du rendement pour différentes charges placées au secondaire sont tout aussi

réalisables. L'avantage de cette modélisation réside dans une paramétrisation plus fine des grandeurs électriques et mécaniques. L'étude des pertes est alors possible et les articles de V.L. Karlash en sont d'ailleurs une démonstration probante. Il a en effet pu étudier leur influence sur le déplacement mécanique, la contrainte, l'admittance d'entrée et le gain en tension pour un transformateur de type Rosen et un transformateur discoïdal [Kar00]-[Kar05]. De tels modèles peuvent également être mis à contribution pour des études plus originales telles que l'impact d'une variation de section droite sur le comportement d'un transformateur de type Rosen [Xue08] ou l'influence de l'ajout de masses sur les extrémités de cette même structure [Yan10].

Dans la suite de cette partie, sur la base de la théorie développée dans la section précédente, une nouvelle modélisation pour décrire la dynamique des transformateurs piézoélectriques est proposée. En effet, à partir du principe de moindre action, il a été possible d'établir, grâce aux résultats depuis longtemps connus de la mécanique analytique, une méthode générale d'étude du comportement électrodynamique des milieux piézoélectriques. Une base théorique solide reposant sur la théorie linéaire de la piézoélectricité est par conséquent constituée pour expliquer la double conversion électromécanique et mécanoélectrique de l'énergie qui s'opère au sein des transformateurs. L'exploitation d'une telle démarche est récente et n'a suscité jusqu'alors qu'un faible intérêt dans l'univers des transformateurs piézoélectriques. Il faut tout de même noter la prolifique contribution de S.T. Ho qui dans une série de six articles a mis en œuvre le principe de Hamilton pour modéliser le comportement électromécanique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen [Ho07a] [Ho07b] et étudier de surcroît la dynamique de structures de forme discoïdale [Ho07c] [Ho07d] et annulaire [Ho07e] [Ho07f].

Cependant, avant même d'employer une telle procédure, l'application du principe de moindre action nécessite au préalable de lever l'indétermination sur la forme prise par le champ de déplacement et le potentiel électrique. S'il semble tout à fait utopique de vouloir calculer les solutions exactes du problème de la piézoélectricité en trois dimensions, il est en revanche possible d'approximer les déplacements mécaniques par des fonctions d'essai se rapprochant autant que possible de la réalité physique. Ainsi, dès lors qu'une approximation du champ de déplacement (exprimée en termes de variables généralisées) est mise en exergue, la mise en équation du problème électromécanique réside alors dans la simple application du principe de Hamilton à la fonctionnelle approximant les déplacements. Compte tenu de cette approximation, le potentiel électrique découle simplement des équations constitutives de la piézoélectricité et des conditions aux limites imposées.

Sur la base de cette théorie, un modèle analytique par approche variationnelle du comportement électromécanique des transformateurs piézoélectriques est proposée dans cette section et ce quel que soit leur géométrie ou leur agencement.



### 2.4.1 Modèle analytique par approche variationnelle

#### Problème général et hypothèses

Soit un référentiel ( $\mathcal{R}$ ) défini par un repère orthonormé  $R$  d'origine  $O$  dans lequel est considéré un transformateur piézoélectrique de géométrie quelconque occupant dans sa configuration  $\kappa_0$  un volume ( $\Omega_0$ ) délimité par une surface fermée ( $\Sigma_0$ ). Dans sa configuration  $\kappa$ , le domaine occupé par le transformateur et son enveloppe sont notés respectivement ( $\Omega$ ) et ( $\Sigma$ ). On désigne par  $\rho$  la masse volumique de la structure supposée constante. Le transformateur piézoélectrique peut être vu comme l'association de deux transducteurs de sorte que les géométries du primaire et du secondaire puissent être définies séparément. Ainsi, de manière générale, dans la configuration  $\kappa$ , le primaire et le secondaire s'étendent respectivement sur les domaines ( $\Omega_p$ ) et ( $\Omega_s$ ) dont les enveloppes respectives sont l'union des surfaces ( $\Sigma_p$ ) et ( $\Sigma_{p/s}$ ) pour le primaire et ( $\Sigma_s$ ) et ( $\Sigma_{p/s}$ ) pour le secondaire. Par définition, ( $\Sigma_p$ ) est la surface externe du primaire, ( $\Sigma_s$ ) est la surface externe du secondaire et ( $\Sigma_{p/s}$ ) est l'aire à l'intersection entre les domaines ( $\Omega_p$ ) et ( $\Omega_s$ ). A l'instar de l'étude menée sur un milieu piézoélectrique et comme l'illustre la figure 2.5, la surface ( $\Sigma$ ) du transformateur piézoélectrique peut être subdivisée en surfaces complémentaires telles que les relations suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} \Sigma_p \cup \Sigma_s = \Sigma \\ \Sigma_p \cap \Sigma_s = \emptyset \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Sigma_u^i \cup \Sigma_T^i = \Sigma_\phi^i \cup \Sigma_D^i = \Sigma_i \\ \Sigma_u^i \cap \Sigma_T^i = \Sigma_\phi^i \cap \Sigma_D^i = \emptyset \end{cases} \quad i \in \{p, s\} \quad (2.50)$$

où ( $\Sigma_u^i$ ) et ( $\Sigma_T^i$ ) sont respectivement les surfaces sur lesquelles sont imposés le déplacement et la contrainte. De la même manière, pour les conditions aux limites électriques, ( $\Sigma_\phi^i$ ) et ( $\Sigma_D^i$ ) se rapportent respectivement aux surfaces où le potentiel électrique et l'induction électrique sont donnés.

Ayant fait la lumière sur la géométrie du transformateur piézoélectrique, les hypothèses du problème peuvent alors précisées :

1. Le transformateur est alimenté au primaire par  $n_p$  générateurs qui délivrent une quantité de charges  $q_p^{(k)}$  sur chaque surface électrodée ( $\Sigma_\phi^{p(k)}$ ) ce qui revient à fixer le potentiel électrique à la valeur  $v_p^{(k)}$  sur chacune de ces surfaces.
2. Le secondaire du transformateur est relié à  $n_s$  charges résistives  $R_{ch}^{(k)}$ . On note respectivement  $v_s^{(k)}$  et  $i_s^{(k)}$  la tension aux bornes de la  $k^{\text{ème}}$  résistance et l'intensité du courant qui la traverse.
3. Aucune charge libre surfacique n'est présente sur les surfaces ( $\Sigma_D^p$ ) et ( $\Sigma_D^s$ ).
4. Mécaniquement, aucune contrainte n'est imposée sur l'enveloppe du transformateur et aucune force extérieure s'appliquant sur le volume de la structure n'est considérée (le poids est par conséquent négligé).
5. L'épaisseur des électrodes est négligeable devant la plus petite dimension du transformateur.

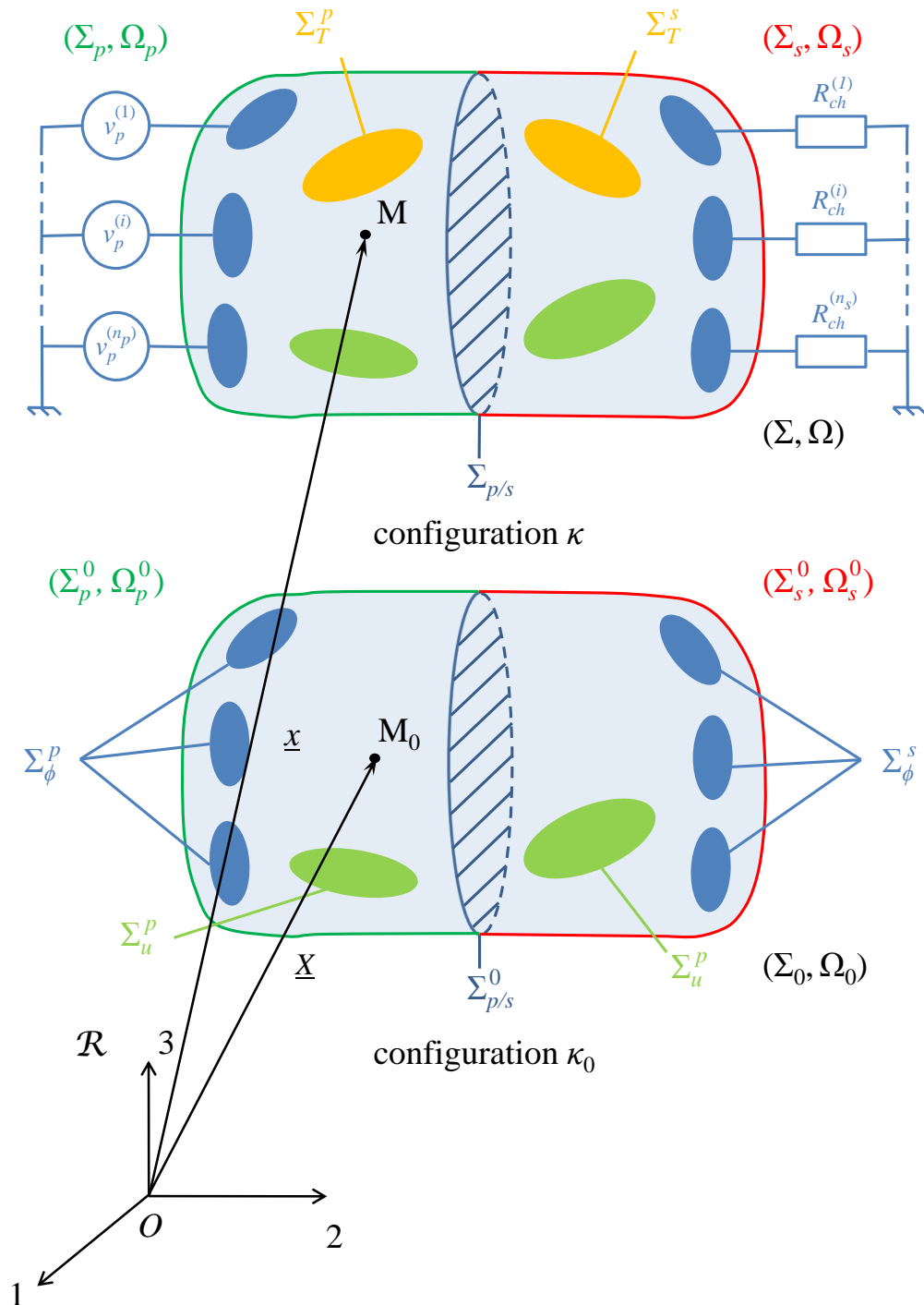


FIGURE 2.5 – Configurations d'un transformateur piézoélectrique de géométrie quelconque dans le référentiel  $(\mathcal{R})$

### Expressions du vecteur déplacement et du tenseur des déformations

Afin d'appliquer le principe de moindre action, il a été suggéré précédemment de pouvoir approximer le champ de déplacement par des fonctions d'essai se rapprochant autant que possible de la réalité physique de la structure étudiée. La méthode de Rayleigh-Ritz [GR98] est assurément la plus courante et accessible des méthodes permettant un choix adéquat des fonctions d'approximations. Concrètement, chaque composante de la déformée modale  $u_i(x_k, t)$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) du champ de déplacement est approximée par une combinaison linéaire de termes s'écrivant comme le produit d'une fonction de l'espace  $\lambda_{ij}^m(x_k)$  et d'une amplitude  $\eta_j(t)$  dépendant du temps qui s'apparente à l'amplitude du  $j^{\text{ème}}$  mode. Ainsi, selon la méthode de Rayleigh-Ritz, dans l'hypothèse où  $n_m$  modes sont considérés pour l'approximation, il vient :

$$u_i(x_k, t) = \sum_{j=1}^{n_m} \lambda_{ij}^m(x_k) \eta_j(t) \quad (2.51)$$

Chaque vecteur d'approximation  $\lambda_j^m(x_k) = [\lambda_{1j}^m(x_k) \ \lambda_{2j}^m(x_k) \ \lambda_{3j}^m(x_k)]^T$  doit conjointement vérifier les conditions de continuité au sein du système et les conditions aux limites cinématiques. Les conditions aux limites relatives aux contraintes mécaniques ne doivent pas nécessairement être vérifiées. Elles pourront en revanche faire l'objet d'une approximation par application de la démarche variationnelle aux  $n_m$  amplitudes modales  $\eta_j(t)$  [GA98]. L'approximation (2.51) peut également s'écrire sous forme matricielle de sorte que :

$$\{u\} = \lambda_m \{\eta\} \quad \text{avec} \quad \lambda_m = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^m(x_i) & \cdots & \lambda_{1n_m}^m(x_i) \\ \lambda_{21}^m(x_i) & \cdots & \lambda_{2n_m}^m(x_i) \\ \lambda_{31}^m(x_i) & \cdots & \lambda_{3n_m}^m(x_i) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

avec  $\lambda_m$  la matrice de déflexion de dimension  $3 \times n_m$  et  $\{\eta\}$  le vecteur des amplitudes modales de vibration constitué de  $n_m$  composantes [Hag95]. En outre, compte tenu de la notation matricielle précédente, il est possible d'exprimer le tenseur des déformations  $\{S\}$  par le truchement du vecteur des amplitudes modales  $\{\eta\}$ . En effet, à la lumière de la formule (1.9) donnée lors du bref descriptif de la théorie de l'élasticité linéaire, il est loisible d'écrire le tenseur des déformations comme le produit d'un opérateur matriciel noté  $L_m$  et du vecteur déplacement  $\{u\}$  tel que :

$$\{S\} = L_m \{u\} = N_m \{\eta\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_m = L_m \lambda_m \\ \dim N_m = 6 \times n_m \end{cases} \quad (2.53)$$

Par définition, la quantité  $L_m$  est appelée opérateur gradient symétrique et s'exprime, dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes, comme suit :

$$L_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}^T \quad (2.54)$$

### Expressions des grandeurs électriques

Afin d'explicitier les expressions des différentes grandeurs électriques, le transformateur est toujours supposé comme l'association de deux transducteurs piézo-électriques. Dans ce cas, il est possible d'affirmer sans équivoque que le primaire et le secondaire réalisent respectivement les fonctions d'actionneur et de capteur. Les expressions des différentes grandeurs électriques au sein du transformateur peuvent alors être déduites.

Comme il a pu être souligné dans la partie § 2.3.2, la fonction actionneur permet au travers des électrodes d'alimentation de fixer les équipotentielles de sorte que le champ électrique est directement lié à la tension d'alimentation. A l'instar du vecteur déplacement, le potentiel électrique peut être défini comme le produit scalaire d'un vecteur  $\lambda_p$  ne dépendant que des variables d'espace  $x_i$  par le vecteur des tensions d'alimentation  $\{v_p\}$  tel que :

$$\phi(x_k, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_p^{(j)}(x_i) v_p^{(j)}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \lambda_p^T \{v_p\} \quad (2.55)$$

$\lambda_p$  permet de rendre compte de la disposition spatiale des électrodes du primaire. En outre, sachant que le champ électrique dérive du potentiel électrique, le vecteur champ peut être écrit comme suit :

$$\{E\} = L_p \phi \quad \text{avec} \quad L_p = \left[ -\frac{\partial}{\partial x_1} \quad -\frac{\partial}{\partial x_2} \quad -\frac{\partial}{\partial x_3} \right]^T \quad (2.56)$$

Il vient alors :

$$\{E\} = N_p \{v_p\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_p = L_p \lambda_p^T \\ \dim N_p = 3 \times n_p \end{cases} \quad (2.57)$$

De même, le secondaire réalisant une fonction capteur, la condition à imposer a trait à l'induction électrique. Or, physiquement, cette dernière grandeur peut être reliée d'après la formule (2.49) à la quantité de charges  $\{q_s\}$  du secondaire par la relation :

$$\{q_s\} = \int_{\Sigma_\phi^s} \bar{\sigma}_s d\Sigma = \int_{\Sigma_\phi^s} (-D_i n_i) d\Sigma \quad (2.58)$$

où  $\bar{\sigma}_s$  est la densité surfacique de charges présente sur les électrodes du secondaire. Dans l'hypothèse où l'induction est constante dans le volume ( $\Omega_s$ ) (ceci est sans nul doute l'hypothèse la plus restrictive du modèle proposé), la quantité  $D_i n_i$  peut être extraite de l'intégrale de sorte qu'il soit possible d'écrire le vecteur  $\{D\}$  sous la forme :

$$\{D\} = N_s \{q_s\} \quad \text{avec} \quad \dim N_s = 3 \times n_s \quad (2.59)$$

où la  $i^{\text{ème}}$  composante des  $n_s$  vecteurs  $N_j^s = [N_{1j}^s \quad N_{2j}^s \quad N_{3j}^s]^T$  qui construisent la matrice  $N_s$  s'exprime sous la forme :

$$N_{ij}^s = -\frac{1}{\int_{\Sigma_\phi^s(j)} d\Sigma_i} \quad (2.60)$$

### Application du principe de Hamilton

Afin de décrire le comportement électrodynamique d'un transformateur piézo-électrique, le principe de moindre action est mis en œuvre. Avant même d'exploiter la stationnarité de l'intégrale d'action voulue par le principe de Hamilton, il faut définir les coordonnées généralisées qui interviendront dans la formulation variationnelle exposée par la suite. Dès les premiers pas effectués dans l'élaboration du modèle expliquant la dynamique d'un transformateur, il a été supposé que ce dernier puisse être considéré comme l'association de deux résonateurs piézoélectriques, le primaire et le secondaire assurant respectivement une fonction d'actionneur et de capteur. Selon cette hypothèse et d'après les conclusions de la section § 2.3.2, il paraît alors approprié d'employer respectivement une formulation de type déplacement/flux et déplacement/charge pour expliquer le comportement du primaire et du secondaire. Par conséquent, le vecteur déplacement  $\{u\}$ , le vecteur des flux magnétiques du primaire  $\{\varphi_p\}$ <sup>3</sup> et le vecteur des quantités de charges du secondaire  $\{q_s\}$  constituent les coordonnées généralisées du problème relatif à la dynamique des transformateurs piézoélectriques.

Fort de ce constat, il est par conséquent aisé de définir le lagrangien d'un transformateur piézoélectrique. En effet, ce dernier s'écrit comme la somme des lagrangiens du primaire et du secondaire de sorte que :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_s = (\mathcal{T}_p^* + \mathcal{T}_s^*) - \mathcal{G}_2^p - \mathcal{F}^s \quad (2.61)$$

A l'aide des relations (2.24) et (2.26), il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_p} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega + \int_{\Omega_s} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega \right] \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} \left[ \{S\}^T [c^E] \{S\} - 2\{S\}^T [e]^T \{E\} - \{E\}^T [\varepsilon^S] \{E\} \right] d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \left[ \{S\}^T [c^D] \{S\} - 2\{S\}^T [h]^T \{D\} + \{D\}^T [\beta^S] \{D\} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2.62)$$

En substituant les relations (2.52), (2.53), (2.57) et (2.59) dans l'équation précédente, le lagrangien du transformateur piézoélectrique exprimé en termes de coordonnées et vitesses généralisées est obtenu :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \{\dot{\eta}\}^T [M] \{\dot{\eta}\} - \frac{1}{2} \{\eta\}^T [K] \{\eta\} + \{\eta\}^T [\psi_p] \{v_p\} \\ & + \frac{1}{2} \{v_p\}^T [C_p] \{v_p\} + \{\eta\}^T [\chi_s] \{q_s\} - \frac{1}{2} \{q_s\}^T [C_s]^{-1} \{q_s\} \end{aligned}} \quad (2.63)$$

3. Bien que le vecteur flux magnétique du primaire  $\{\varphi_p\}$  n'ait pas de véritable réalité physique dans le problème étudié, sa présence ne change rien à l'application de principe de moindre action. Pour s'en affranchir, il suffira par la suite d'utiliser une intégration par parties au moment venu afin de faire apparaître les quantités physiquement existantes comme le vecteur des tensions d'alimentation du primaire  $\{v_p\}$ , le vecteur des quantités de charges présentes sur les électrodes excitatrices  $\{q_p\}$  et le vecteur des courants les traversant  $\{i_p\}$ .

où  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[\psi_p]$ ,  $[\chi_s]$ ,  $[C_p]$  et  $[C_s]$  sont respectivement les matrices des masses et des raideurs modales du transformateur, les matrices des facteurs de conversion électromécanique et les matrices des capacités bloquées du primaire et du secondaire. Ces matrices ont pour expression :

$$[M] = \int_{\Omega_p} \lambda_m^T \rho \lambda_m d\Omega + \int_{\Omega_s} \lambda_m^T \rho \lambda_m d\Omega \quad \text{avec} \quad \dim [M] = n_m \times n_m \quad (2.64)$$

$$[K] = \int_{\Omega_p} N_m^T [c^E] N_m d\Omega + \int_{\Omega_s} N_m^T [c^D] N_m d\Omega \quad \text{avec} \quad \dim [K] = n_m \times n_m \quad (2.65)$$

$$[\psi_p] = \int_{\Omega_p} N_m^T [e]^T N_p d\Omega \quad \text{avec} \quad \dim [\psi_p] = n_m \times n_p \quad (2.66)$$

$$[\chi_s] = \int_{\Omega_s} N_m^T [h]^T N_s d\Omega \quad \text{avec} \quad \dim [\chi_s] = n_m \times n_s \quad (2.67)$$

$$[C_p] = \int_{\Omega_p} N_p^T [\varepsilon^S] N_p d\Omega \quad \text{avec} \quad \dim [C_p] = n_p \times n_p \quad (2.68)$$

$$[C_s] = \left[ \int_{\Omega_s} N_s^T [\beta^S] N_s d\Omega \right]^{-1} \quad \text{avec} \quad \dim [C_s] = n_s \times n_s \quad (2.69)$$

En plus d'avoir explicité les formules que revêtaient ces différentes grandeurs, la dimension de chacune de ces matrices a été précisée<sup>4</sup>. Dès lors, le principe de moindre action peut être appliqué. D'après § 2.2.5, ce dernier suggère la stationarité de l'intégrale d'action pour un système se mouvant sur un intervalle de temps considéré. En invoquant une fois de plus la relation (2.14), la variation de l'action est donnée par l'équation suivante :

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} (\delta \mathcal{L} + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (2.70)$$

Cette formule doit être complétée de l'hypothèse d'évolution entre limites définies qui imposent des conditions aux instants initial et final telles qu'aucune variation des coordonnées généralisées aux extrémités de la trajectoire ne soit autorisée. Il vient alors :

$$\begin{cases} \delta \eta^{(i)}(t_i) = \delta \eta^{(i)}(t_f) = 0 & i = 1, \dots, n_m \\ \delta \varphi_p^{(i)}(t_i) = \delta \varphi_p^{(i)}(t_f) = 0 & i = 1, \dots, n_p \\ \delta q_s^{(i)}(t_i) = \delta q_s^{(i)}(t_f) = 0 & i = 1, \dots, n_s \end{cases} \quad (2.71)$$

En l'absence de contraintes mécaniques appliquées au transformateur piézoélectrique, la variation des travaux virtuels  $\delta W_{nc}$  des efforts extérieurs auxquels est assujettie la structure se réduit à la variation de l'énergie électrique fournie au

4. A noter que toutes les matrices carrées introduites ( $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[C_p]$  et  $[C_s]$ ) ne présentent pas *a priori* la propriété de symétrie ( $A^T = A$ ).

primaire diminuée de l'énergie électrique restituée au secondaire. En termes de variables généralisées, cette quantité a pour expression :

$$\delta W_{nc} = \{i_p\}^T \{\delta \varphi_p\} - \{v_s\}^T \{\delta q_s\} \quad (2.72)$$

A noter que le signe «  $-$  » signifie qu'au secondaire du transformateur, l'énergie est réellement transférée au milieu extérieur. Concernant la variation du lagrangien  $\delta \mathcal{L}$ , en raison de la propriété de linéarité de cette dernière, il suffit d'examiner la variation de chacun des termes qui composent l'expression (2.63). Il vient par conséquent :

$$\delta \left( \frac{1}{2} \{\dot{\eta}\}^T [M] \{\dot{\eta}\} \right) = \{\delta \dot{\eta}\}^T [M] \{\dot{\eta}\} \quad (2.73)$$

$$\delta \left( \frac{1}{2} \{\eta\}^T [K] \{\eta\} \right) = \{\delta \eta\}^T [K] \{\eta\} \quad (2.74)$$

$$\delta \left( \{\eta\}^T [\psi_p] \{v_p\} \right) = \{\delta \eta\}^T [\psi_p] \{v_p\} + \{\eta\}^T [\psi_p] \{\delta v_p\} \quad (2.75)$$

$$\delta \left( \{\eta\}^T [\chi_s] \{q_s\} \right) = \{\delta \eta\}^T [\chi_s] \{q_s\} + \{\eta\}^T [\chi_s] \{\delta q_s\} \quad (2.76)$$

$$\delta \left( \frac{1}{2} \{v_p\}^T [C_p] \{v_p\} \right) = \{\delta v_p\}^T [C_p] \{v_p\} = \{v_p\}^T [C_p]^T \{\delta v_p\} \quad (2.77)$$

$$\delta \left( \frac{1}{2} \{q_s\}^T [C_s]^{-1} \{q_s\} \right) = \{\delta q_s\}^T [C_s]^{-1} \{q_s\} = \{q_s\}^T ([C_s]^{-1})^T \{\delta q_s\} \quad (2.78)$$

Ainsi, en remplaçant les formules (2.72) à (2.78) dans l'équation (2.70), la variation de l'intégrale d'action d'un transformateur piézoélectrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int_{t_i}^{t_f} \left[ \{\delta \dot{\eta}\}^T [M] \{\dot{\eta}\} + \{\delta \eta\}^T ( - [K] \{\eta\} + [\psi_p] \{v_p\} + [\chi_s] \{q_s\} ) \right] dt \\ &+ \int_{t_i}^{t_f} \left[ ( [\psi_p]^T \{\eta\} + [C_p] \{v_p\} )^T \{\delta v_p\} + \{i_p\}^T \{\delta \varphi_p\} \right] dt \\ &+ \int_{t_i}^{t_f} ( [\chi_s]^T \{\eta\} - [C_s]^{-1} \{q_s\} - \{v_s\} )^T \{\delta q_s\} dt = 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

L'énergie cinétique et le terme dépendant du vecteur des variations des tensions d'alimentation du primaire  $\{\delta v_p\}$  peuvent faire l'objet d'une intégration par parties.

L'équation précédente se réécrit alors :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S} = & \left[ \{\delta\eta\}^T [M] \{\dot{\eta}\} \right]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \{\delta\eta\}^T ( - [M] \{\ddot{\eta}\} - [K] \{\eta\} + [\psi_p] \{v_p\} + [\chi_s] \{q_s\} ) dt \\
& + \left[ ([\psi_p]^T \{\eta\} + [C_p] \{v_p\})^T \{\delta\varphi_p\} \right]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} ( - [\psi_p]^T \{\dot{\eta}\} - [C_p] \{\dot{v}_p\} + \{i_p\} )^T \{\delta\varphi_p\} dt \\
& + \int_{t_i}^{t_f} ([\chi_s]^T \{\eta\} - [C_s]^{-1} \{q_s\} - \{v_s\})^T \{\delta q_s\} dt = 0
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Par conséquent, d'après l'hypothèse d'évolution entre limites définies donnée par la relation (2.71), les termes entre crochets disparaissent. D'autre part, la stationnarité de l'action devant être assurée quelles que soient les variations  $\{\delta\eta\}$ ,  $\{\delta\varphi_p\}$  et  $\{\delta q_s\}$ , les expressions entre parenthèses dans chacune des intégrales doivent être identiquement nulles. Ainsi, le principe de moindre action fournit immédiatement les équations régissant la dynamique d'un transformateur piézoélectrique exprimées en termes de degrés de liberté mécaniques et électriques. Le fonctionnement d'un transformateur piézoélectrique est donc régi par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} [M] \{\ddot{\eta}\} + [K] \{\eta\} = [\psi_p] \{v_p\} + [\chi_s] \{q_s\} \\ \{i_p\} = [\psi_p]^T \{\dot{\eta}\} + [C_p] \{\dot{v}_p\} \\ [\chi_s]^T \{\eta\} = [C_s]^{-1} \{q_s\} + \{v_s\} \end{cases} \tag{2.81}$$

Ce système d'équations peut être retravaillé : en multipliant à gauche la troisième équation par la matrice des capacités bloquées du secondaire, il est possible d'extraire l'expression de  $\{q_s\}$  qui prend alors la forme suivante :

$$\{q_s\} = [C_s] [\chi_s]^T \{\eta\} - [C_s] \{v_s\} \tag{2.82}$$

L'équation (2.82) peut être réinjectée dans la première équation du système (2.81) afin de relier dans l'équation d'équilibre mécanique le vecteur des amplitudes modales de déplacement avec les vecteurs des tensions du primaire et du secondaire. La matrice des facteurs de conversion électromécanique du secondaire est alors introduite et elle a pour expression :

$$[\psi_s] = [\chi_s] [C_s] \quad \text{avec} \quad \dim [\psi_s] = n_m \times n_s \tag{2.83}$$

En outre, la dérivée temporelle du vecteur des quantités de charges du secondaire permet de faire apparaître les courants traversant les charges résistives placées au secondaire du transformateur. Finalement, le système d'équations décrivant la dynamique d'un transformateur piézoélectrique s'écrit :

$$\boxed{
\begin{cases} [M] \{\ddot{\eta}\} + ([K] - [\chi_s] [C_s] [\chi_s]^T) \{\eta\} = [\psi_p] \{v_p\} - [\psi_s] \{v_s\} \\ \{i_p\} = [\psi_p]^T \{\dot{\eta}\} + [C_p] \{\dot{v}_p\} \\ [C_s] [\chi_s]^T \{\dot{\eta}\} = \{i_s\} + [C_s] \{\dot{v}_s\} \end{cases} \tag{2.84}$$



L'équation mécanique du second ordre révèle un comportement résonant de la structure de pulsations caractéristiques  $\omega_i$  pour  $i = 1, \dots, n_m$ . Quant aux équations électriques, les  $n_p$  premières caractérisent la conversion électromécanique de l'énergie s'opérant au sein du primaire et montre que le vecteur des intensités provenant de l'alimentation est la somme de deux contributions, l'une d'origine diélectrique est un vecteur de courants purement capacitifs de la forme  $[C_p]\{\dot{v}_p\}$ , l'autre est le fruit du couplage piézoélectrique sous l'effet duquel le vecteur des courants résultant est directement proportionnel au vecteur des amplitudes modales des vitesses vibratoires  $\{\dot{\eta}\}$ . Les  $n_s$  dernières équations électriques rendent compte de la conversion mécanoélectrique de l'énergie qui a lieu au secondaire et indiquent que le vecteur proportionnel à  $\{\dot{\eta}\}$  s'avère être composé d'un vecteur de courants capacitifs  $[C_s]\{\dot{v}_s\}$  et du vecteur des courants du secondaire  $\{i_s\}$  qui traversent les charges résistives placées en sortie du transformateur.

A partir de ce système d'équations il est intéressant d'étudier le problème aux valeurs propres dans le cas où le secondaire est respectivement court-circuité (cas série) et en circuit ouvert (cas parallèle) :

- **Cas série** : Les modes propres d'un transformateur piézoélectrique en court-circuit sont les solutions du système d'équations (2.84) lorsque le primaire et le secondaire sont conjointement court-circuités. Ces conditions imposent que les vecteurs des tensions du primaire et du secondaire soient identiquement nuls de sorte que  $\{v_p\} = \{v_s\} = 0$ . Le système (2.84) se réduit alors à :

$$\boxed{\begin{cases} [M]\{\ddot{\eta}\} + ([K] - [\chi_s][C_s][\chi_s]^T)\{\eta\} = 0 \\ \{i_p\} = [\psi_p]^T\{\dot{\eta}\} \\ [C_s][\chi_s]^T\{\dot{\eta}\} = \{i_s\} \end{cases}} \quad (2.85)$$

Dans l'hypothèse d'une évolution temporelle harmonique des différentes grandeurs, les pulsations propres  $\omega_r$  et les vecteurs propres  $\{\eta_r\}$  sont, dans le cas série, les  $n_m$  solutions du problème suivant :

$$\{([K] - [\chi_s][C_s][\chi_s]^T) - \omega^2[M]\}\{\eta\} = 0 \quad (2.86)$$

De prime abord, la formule précédente laisserait à penser que les fréquences de résonance dans le cas série sont dépendantes des matrices des constantes piézoélectriques  $[h]$  et des impermittivités  $[\beta^S]$ , ce qui irait tout simplement à l'encontre des conditions physiques dans lesquelles est obtenu le cas série. En effet, les courts-circuits imposés au primaire et au secondaire du transformateur permettent de s'affranchir des effets piézoélectriques. La structure se comporte alors comme un solide purement élastique et les fréquences de résonance ne s'expriment qu'à l'aide des seules matrices des masses et des raideurs modales. La formule (2.86) est néanmoins valide. Pour s'en convaincre, il faut revenir à l'expression de la matrice des raideurs modales du transformateur donnée par l'équation (2.65). Cette quantité est la somme des matrices des raideurs modales du primaire et du secondaire qui dépendent respectivement

des matrices des rigidités à champ électrique constant  $[c^E]$  et à induction électrique constante  $[c^D]$ . La constance de l'induction pour la définition de  $[c^D]$  sous-entend la prise en compte des effets piézoélectriques pour l'évaluation des éléments qui la composent. De ce fait, lorsque la quantité  $[\chi_s][C_s][\chi_s]^T$  est otée à la matrice des raideurs  $[K]$ , c'est comme omettre la considération des effets piézoélectriques dans la définition de  $[c^D]$  approximant par conséquent la matrice  $[K]$  à une matrice fonction de matrices de rigidités semblables à celles d'un solide purement élastique.

- **Cas parallèle** : Les modes propres d'un transformateur piézoélectrique en circuit ouvert sont les solutions du système d'équations (2.84) lorsque le primaire et le secondaire sont respectivement court-circuité et ouvert. Ces conditions imposent que les vecteurs des tensions du primaire et des quantités de charges du secondaire soient identiquement nuls de sorte que  $\{v_p\} = 0$  et  $\{q_s\} = 0$ . Le système (2.81), dont est issu le système (2.84), se réduit alors à :

$$\boxed{\begin{cases} [M]\{\ddot{\eta}\} + [K]\{\eta\} = 0 \\ \{i_p\} = [\psi_p]^T\{\dot{\eta}\} \\ [C_s][\chi_s]^T\{\dot{\eta}\} = [C_s]\{\dot{v}_s\} \end{cases}} \quad (2.87)$$

D'après l'hypothèse d'une évolution temporelle harmonique des différentes grandeurs, les pulsations propres  $\omega_r$  et les vecteurs propres  $\{\eta_r\}$  sont, dans le cas parallèle, les  $n_m$  solutions du problème suivant :

$$([K] - \omega^2[M])\{\eta\} = 0 \quad (2.88)$$

Un ajout de raideur de la forme  $[\chi_s][C_s][\chi_s]^T$  par rapport au cas série est à mentionner.

## 2.4.2 Vibrations libres d'un transformateur piézoélectrique

Mécaniquement, d'après les hypothèses avancées pour élaborer le modèle précédent, un transformateur piézoélectrique a un comportement proche d'un milieu élastique « classique ». Au regard du système d'équations (2.84) régissant la dynamique des transformateurs piézoélectriques, un phénomène de résonance linéaire a pu être mis en exergue pour de faibles amplitudes de vibration. Fort de ce constat, les méthodes classiques utilisées pour l'étude mécanique des milieux élastiques [GR98] seront appliquées aux transformateurs piézoélectriques. L'emploi d'une telle démarche à un milieu piézoélectrique avait déjà été entrepris par C. Giraud-Audine [GA98] et ce travail servira de base à la réflexion menée par la suite.

Ainsi, soit un transformateur piézoélectrique libre de toute influence extérieure quelle soit d'origine mécanique ou électrique (si ce n'est éventuellement de pouvoir placer en sortie du transformateur des charges résistives). L'hypothèse d'une évolution harmonique des différentes grandeurs peut être faite puisque le milieu piézoélectrique est supposé linéaire. Le déplacement mécanique et le potentiel électrique

au sein de la structure peuvent par conséquent s'écrire de manière très générale sous la forme :

$$u_i(x_k, t) = u_i(x_k) \cos(\omega t) \quad (2.89)$$

$$\phi(x_k, t) = \phi(x_k) \cos(\omega t) \quad (2.90)$$

Aucun déphasage entre ces deux grandeurs n'a été introduit puisque le potentiel est issu des contraintes, elles-mêmes en phase avec les déplacements vu que les pertes visco-élastiques n'ont pas été considérées. En outre, comme le transformateur est libre de toute influence externe, les conditions aux limites homogènes imposent, d'un point de vue mécanique, les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_i = 0 & \text{sur } \Sigma_u \quad (= \Sigma_u^p \cup \Sigma_u^s) \\ T_{ij}n_j = 0 & \text{sur } \Sigma_T \quad (= \Sigma_T^p \cup \Sigma_T^s) \end{cases} \quad (2.91)$$

Ces surfaces correspondent respectivement à des zones d'imposition et de liberté cinématique. D'un point de vue électrique, les relations suivantes sont imposées :

$$\begin{cases} \phi = 0 & \text{sur } \Sigma_\phi^p \\ D_i n_i = 0 & \text{sur } \Sigma_D \quad (= \Sigma_D^p \cup \Sigma_D^s) \end{cases} \quad (2.92)$$

Autrement dit, l'étude des vibrations libres d'un transformateur piézoélectrique se fait lorsque le primaire est court-circuité. Il est toutefois possible de relier le secondaire à un réseau de charges résistives afin d'en étudier l'influence sur les résultats issus de la résolution du problème aux valeurs propres.

De ce fait, le lagrangien d'un transformateur piézoélectrique dans le cas de vibrations harmoniques est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_p} [\rho \omega^2 \{u\}^T \{u\}] \sin^2(\omega t) d\Omega + \int_{\Omega_s} [\rho \omega^2 \{u\}^T \{u\}] \sin^2(\omega t) d\Omega \right] \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} \left[ \{S\}^T [c^E] \{S\} - 2\{S\}^T [e]^T \{E\} - \{E\}^T [\varepsilon^S] \{E\} \right] \cos^2(\omega t) d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \left[ \{S\}^T [c^D] \{S\} - 2\{S\}^T [h]^T \{D\} + \{D\}^T [\beta^S] \{D\} \right] \cos^2(\omega t) d\Omega \end{aligned} \quad (2.93)$$

En appliquant le principe de moindre action sur l'intervalle de temps particulier  $[t_i, t_f] = [-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}]$ , sachant que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\int_{-T/4}^{T/4} \cos^2(\omega t) dt = \int_{-T/4}^{T/4} \sin^2(\omega t) dt = \frac{\pi}{2\omega} \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.94)$$

la variation de l'intégrale d'action s'écrit sous forme indicielle :

$$\delta \mathcal{S} = \frac{\pi}{2\omega} \left[ \int_{\Omega} \rho \omega^2 u_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega_p} (T_{ij} \delta S_{ij} - D_i \delta E_i) d\Omega - \int_{\Omega_s} (T_{ij} \delta S_{ij} + E_i \delta D_i) d\Omega \right] \quad (2.95)$$

En s'inspirant de la méthode développée à la section § 2.3.3 permettant de déterminer les équations d'équilibre local d'un milieu piézoélectrique, il est possible de donner celles qui régissent la dynamique d'un transformateur piézoélectrique dans le cas de conditions aux limites homogènes. Il vient alors :

$$\begin{cases} T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i^2 = 0 \\ D_{i,i} = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.96)$$

Il faut également ajouter la condition électrique relative au secondaire du transformateur qui se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi = v_s^{(k)} \\ D_i n_i = -\bar{\sigma}_s \end{cases} \quad \text{sur } \Sigma_\phi^{s(k)} \quad (k = 1, \dots, n_s) \quad (2.97)$$

où la densité surfacique de charges  $\bar{\sigma}_s$  est définie comme une fonction continue par morceaux qui prend une valeur nulle sur les parties non électrodées du secondaire du transformateur. La charge imposée par la  $k^{\text{ème}}$  résistance  $R_{ch}^{(k)}$  correspond exactement à l'intégration sur la surface ( $\Sigma_\phi^{s(k)}$ ) de la densité surfacique de charges.

L'ensemble des équations obtenues constitue le problème aux valeurs propres de la dynamique d'un transformateur piézoélectrique dont les solutions propres sont en nombre infini et définies par les couples :

$$\begin{cases} \{v^{(n)}\} = \begin{bmatrix} \{u^{(n)}\} \\ \phi^{(n)} \end{bmatrix} \\ \omega_n \end{cases} \quad (2.98)$$

Il est à noter que chaque couple comporte cinq inconnues (les trois composantes du déplacement mécanique, le potentiel électrique et la pulsation) et chacun d'eux est solution d'un problème régi par quatre équations (2.96) associées aux conditions aux limites homogènes. Il est par conséquent impossible de déterminer de façon unique les fonctions solutions : ceci constitue l'indétermination existant sur l'amplitude des modes propres  $\{v^{(n)}\}$ .

### 2.4.3 Orthogonalité des modes propres - Critère de normalisation

Afin de prouver la propriété d'orthogonalité des modes propres, les équations d'équilibre dont le vecteur propre  $\{v^{(n)}\}$  est solution sont multipliées par le vecteur propre  $\{v^{(m)}\}$  puis intégrées sur le volume du transformateur piézoélectrique de sorte que la relation suivante soit vérifiée :

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \{u^{(m)}\} \\ \phi^{(m)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \text{div}\{T^{(n)}\} + \rho\omega_n^2 \{u^{(n)}\} \\ -\text{div}\{D^{(n)}\} \end{bmatrix} d\Omega = 0 \quad (2.99)$$

En développant le produit scalaire, l'expression précédente se réécrit à l'aide de la notation indiciale comme suit :

$$\int_{\Omega} \left[ \rho\omega_n^2 u_i^{(m)} u_i^{(n)} + u_i^{(m)} T_{ij,j}^{(n)} - \phi^{(m)} D_{i,i}^{(n)} \right] d\Omega = 0 \quad (2.100)$$

En appliquant la formule d'analyse vectorielle (2.38) aux deux derniers termes sous le signe intégrale, il vient :

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \omega_n^2 u_i^{(m)} u_i^{(n)} + \left\{ (u_i^{(m)} T_{ij}^{(n)})_{,i} - u_{i,j}^{(m)} T_{ij}^{(n)} \right\} - \left\{ (\phi^{(m)} D_i^{(n)})_{,i} - \phi_{,i}^{(m)} D_i^{(n)} \right\} \right] d\Omega = 0 \quad (2.101)$$

Il est alors possible d'appliquer le théorème de Green-Ostrogradsky aux deuxième et quatrième termes de l'équation précédente. En outre, comme le champ électrique  $\{E\}$  dérive du potentiel électrique  $\phi$  de sorte que  $E_i = -\phi_{,i}$  et que par définition la relation  $u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = S_{ij}$  est vérifiée, il vient :

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \omega_n^2 u_i^{(m)} u_i^{(n)} - S_{ij}^{(m)} T_{ij}^{(n)} - E_i^{(m)} D_i^{(n)} \right] d\Omega + \int_{\Sigma} \left[ u_i^{(m)} (T_{ij}^{(n)} n_j) - \phi^{(m)} (D_i^{(n)} n_i) \right] d\Sigma = 0 \quad (2.102)$$

De plus, d'après les conditions aux limites homogènes (2.91) et (2.92) auxquelles est ajoutée la condition (2.97), l'intégrale surfacique se réduit à :

$$\int_{\Sigma} \left[ u_i^{(m)} (T_{ij}^{(n)} n_j) - \phi^{(m)} (D_i^{(n)} n_i) \right] d\Sigma = - \int_{\Sigma_{\phi}^s} \phi^{(m)} (D_i^{(n)} n_i) d\Sigma = \{v_s^{(m)}\}^T \{q_s^{(n)}\} \quad (2.103)$$

Finalement, l'expression (2.99) s'exprime sous forme indicielle à l'aide de la notation de Voigt, comme suit :

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \omega_n^2 u_i^{(m)} u_i^{(n)} - S_{\lambda}^{(m)} T_{\lambda}^{(n)} - E_i^{(m)} D_i^{(n)} \right] d\Omega + \{v_s^{(m)}\}^T \{q_s^{(n)}\} = 0 \quad (2.104)$$

En tenant compte des lois constitutives de la piézoélectricité relatives au primaire et au secondaire du transformateur, l'expression précédente peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \rho \omega_n^2 u_i^{(m)} u_i^{(n)} \right] d\Omega + \{v_s^{(m)}\}^T \{q_s^{(n)}\} \\ & - \int_{\Omega_p} \left[ c_{\lambda\mu}^E S_{\lambda}^{(m)} S_{\mu}^{(n)} - (e_{i\lambda} S_{\lambda}^{(m)} E_i^{(n)} - e_{i\lambda} S_{\lambda}^{(n)} E_i^{(m)}) + \varepsilon_{ij}^S E_i^{(m)} E_j^{(n)} \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega_s} \left[ c_{\lambda\mu}^D S_{\lambda}^{(m)} S_{\mu}^{(n)} - 2h_{i\lambda} S_{\lambda}^{(m)} D_i^{(n)} + \beta_{ij}^S D_i^{(m)} D_j^{(n)} \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Cette relation peut encore être simplifiée en développant la relation suivante :

$$\int_{\Omega_p} \left[ \phi^{(n)} \operatorname{div}\{D^{(m)}\} - \phi^{(m)} \operatorname{div}\{D^{(n)}\} \right] d\Omega + 2 \int_{\Omega_s} \left[ \phi^{(m)} \operatorname{div}\{D^{(n)}\} \right] d\Omega = 0 \quad (2.106)$$

De ce fait, en invoquant une fois encore la relation d'analyse vectorielle (2.38) à la suite de laquelle le théorème de Green-Ostrogradsky est appliqué, sachant que le

champ électrique  $\{E\}$  dérive du potentiel électrique  $\phi$ , il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_p} \left[ E_i^{(n)} D_i^{(m)} - E_i^{(m)} D_i^{(n)} \right] d\Omega + \int_{\Sigma_p \cup \Sigma_{p/s}} \left[ \phi^{(n)}(D_i^{(m)} n_i) - \phi^{(m)}(D_i^{(n)} n_i) \right] d\Sigma \\ & + 2 \int_{\Omega_s} \left[ E_i^{(m)} D_i^{(n)} \right] d\Omega + 2 \int_{\Sigma_s \cup \Sigma_{p/s}} \left[ \phi^{(m)}(D_i^{(n)} n_i) \right] d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (2.107)$$

Compte tenu des lois constitutives de la piézoélectricité relatives au primaire et au secondaire et des conditions aux limites homogènes, l'expression précédente se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_p} \left[ e_{i\lambda} S_\lambda^{(m)} E_i^{(n)} - e_{i\lambda} S_\lambda^{(n)} E_i^{(m)} \right] d\Omega + 2 \int_{\Omega_s} \left[ h_{i\lambda} S_\lambda^{(m)} D_i^{(n)} \right] d\Omega = 2 \int_{\Omega_s} \left[ \beta_{ij}^S D_i^{(m)} D_j^{(n)} \right] d\Omega \\ & - 2 \{v_s^{(m)}\}^T \{q_s^{(n)}\} + \int_{\Sigma_{p/s}} \left\{ \phi^{(m)} [D_i^{(n)} n_i(p \rightarrow s)] - \phi^{(n)} [D_i^{(m)} n_i(p \rightarrow s)] + 2\phi^{(m)} [D_i^{(n)} n_i(s \rightarrow p)] \right\} d\Sigma \end{aligned} \quad (2.108)$$

où  $n_i(p \rightarrow s)$  et  $n_i(s \rightarrow p)$  représentent les cosinus directeurs des vecteurs normaux dirigés respectivement du primaire vers le secondaire et du secondaire vers le primaire. Par conséquent, la relation  $n_i(p \rightarrow s) = -n_i(s \rightarrow p)$  est vérifiée et l'intégrale surfacique de l'équation précédente se réduit à la formule suivante :

$$- \int_{\Sigma_{p/s}} \left\{ \phi^{(m)} [D_i^{(n)} n_i(p \rightarrow s)] + \phi^{(n)} [D_i^{(m)} n_i(p \rightarrow s)] \right\} d\Sigma \quad (2.109)$$

Ainsi, en réinjectant l'équation (2.108) complétée de (2.109) dans la formule (2.105), il vient la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \rho \omega_n^2 u_i^{(m)} u_i^{(n)} \right] d\Omega - \{v_s^{(m)}\}^T \{q_s^{(n)}\} \\ & - \int_{\Omega_p} \left[ c_{\lambda\mu}^E S_\lambda^{(m)} S_\mu^{(n)} - \varepsilon_{ij}^S E_i^{(m)} E_j^{(n)} \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega_s} \left[ c_{\lambda\mu}^D S_\lambda^{(m)} S_\mu^{(n)} - \beta_{ij}^S D_i^{(m)} D_j^{(n)} \right] d\Omega \\ & - \int_{\Sigma_{p/s}} \left\{ \phi^{(m)} [D_i^{(n)} n_i(p \rightarrow s)] + \phi^{(n)} [D_i^{(m)} n_i(p \rightarrow s)] \right\} d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (2.110)$$

Une hypothèse peut être faite afin de s'affranchir de l'intégrale surfacique dans l'expression précédente. En effet, puisque les conditions aux limites homogènes impose la nullité du potentiel électrique sur les électrodes excitatrices du primaire, cela implique un potentiel nul à l'interface entre primaire et secondaire (hypothèse vérifiée pour les géométries les plus simples comme le transformateur de type Rosen

ou la structure discoïdale). Par conséquent, l'intégrale relative à la surface ( $\Sigma_{p/s}$ ) est identiquement nulle. En outre, il est à noter que pour les cas série ( $\{v_s\} = 0$ ) et parallèle ( $\{q_s\} = 0$ ) le terme  $\{v_s^{(m)}\}^T \{q_s^{(n)}\}$  est nul. Par la suite, seuls ces deux cas seront considérés. Fort de ces remarques, la relation (2.110) se réécrit :

$$\int_{\Omega} [\rho \omega_n^2 u_i^{(m)} u_i^{(n)}] d\Omega = \int_{\Omega_p} [c_{\lambda\mu}^E S_{\lambda}^{(m)} S_{\mu}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^S E_i^{(m)} E_j^{(n)}] d\Omega + \int_{\Omega_s} [c_{\lambda\mu}^D S_{\lambda}^{(m)} S_{\mu}^{(n)} - \beta_{ij}^S D_i^{(m)} D_j^{(n)}] d\Omega \quad (2.111)$$

Dès lors, si les rôles des différents modes sont intervertis, c'est-à-dire si les équations vérifiées par le mode  $m$  sont projetées selon le vecteur propre  $\{v^{(n)}\}$ , une équation similaire à (2.111) est obtenue avec une permutation sur les indices. L'expression ainsi déterminée ne diffère alors que par la pulsation relative au vecteur propre qui vérifie les équations régissant la dynamique d'un transformateur piézoélectrique en régime harmonique, de sorte que :

$$\int_{\Omega} [\rho \omega_m^2 u_i^{(m)} u_i^{(n)}] d\Omega = \int_{\Omega_p} [c_{\lambda\mu}^E S_{\lambda}^{(m)} S_{\mu}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^S E_i^{(m)} E_j^{(n)}] d\Omega + \int_{\Omega_s} [c_{\lambda\mu}^D S_{\lambda}^{(m)} S_{\mu}^{(n)} - \beta_{ij}^S D_i^{(m)} D_j^{(n)}] d\Omega \quad (2.112)$$

En soustrayant les relations (2.111) et (2.112), la condition d'orthogonalité sur le vecteur déplacement pour deux modes distincts est obtenue :

$$\int_{\Omega} \rho u_i^{(m)} u_i^{(n)} d\Omega = \delta_{mn} \quad (m, n = 1, \dots, n_m) \quad (2.113)$$

où  $\delta_{mn}$  est le symbole de Kronecker. Par conséquent, la relation d'orthogonalité concernant les champs de déplacement et les potentiels électriques induits par deux modes propres  $m$  et  $n$  ( $m, n = 1, \dots, n_m$ ) s'écrit :

$$\int_{\Omega_p} [c_{\lambda\mu}^E S_{\lambda}^{(m)} S_{\mu}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^S E_i^{(m)} E_j^{(n)}] d\Omega + \int_{\Omega_s} [c_{\lambda\mu}^D S_{\lambda}^{(m)} S_{\mu}^{(n)} - \beta_{ij}^S D_i^{(m)} D_j^{(n)}] d\Omega = \delta_{mn} \omega_m^2 \quad (2.114)$$

Il est possible de généraliser les deux relations d'orthogonalité précédentes en les exprimant par le truchement des vecteurs des amplitudes modales  $\{\eta\}$ , des tensions d'alimentation du primaire  $\{v_p\}$  et des quantités de charges du secondaire  $\{q_s\}$ . Pour  $(m, n) \in \{1, \dots, n_m\}^2$ , il vient alors :

$$\boxed{\begin{cases} \{\eta\}^T [M] \{\eta\} = \delta_{mn} \\ \{\eta\}^T [K] \{\eta\} - \{v_p^{(m)}\}^T [C_p] \{v_p^{(n)}\} - \{q_s^{(m)}\}^T [C_s]^{-1} \{q_s^{(n)}\} = \delta_{mn} \omega_m^2 \end{cases}} \quad (2.115)$$

Il est désormais aisé de donner les relations d'orthogonalité des modes propres dans les cas série et parallèle :

- **Cas série** : les modes propres du cas série sont établis lorsque le primaire et le secondaire sont simultanément court-circuités ( $\{v_p\} = \{v_s\} = 0$ ). Or, d'après le système d'équations (2.85), le vecteur des quantités de charge du

secondaire  $\{q_s\}$  est lié au vecteur des amplitudes modales  $\{\eta\}$  par la relation  $\{q_s\} = [C_s][\chi_s]^T\{\eta\}$ . Ainsi les relations d'orthogonalité pour le cas série se simplifient comme suit :

$$\forall (m, n) \in \{1, \dots, n_m\}^2 \begin{cases} \{\eta\}^T [M] \{\eta\} = \delta_{mn} \\ \{\eta\}^T ([K] - [\chi_s][C_s][\chi_s]^T) \{\eta\} = \delta_{mn} \omega_m^2 \end{cases} \quad (2.116)$$

- **Cas parallèle** : les modes propres du cas parallèle sont établis lorsque le primaire et le secondaire sont respectivement court-circuité et ouvert ( $\{v_p\} = 0$  et  $\{q_s\} = 0$ ). Par conséquent, les relations d'orthogonalité pour le cas parallèle s'écrivent très simplement :

$$\forall (m, n) \in \{1, \dots, n_m\}^2 \begin{cases} \{\eta\}^T [M] \{\eta\} = \delta_{mn} \\ \{\eta\}^T [K] \{\eta\} = \delta_{mn} \omega_m^2 \end{cases} \quad (2.117)$$

Le fait que les vecteurs modaux ne soient définis qu'à un facteur près laisse le choix quant à la normalisation des formes propres à adopter. Voici quelques possibilités :

- Une solution est de donner une valeur unitaire à la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur des amplitudes modales  $\{\eta\}$  de sorte que  $\eta^{(i)} = 1$ . En règle générale, il s'agit de la première composante, donc  $\eta^{(1)} = 1$ .
- Une autre possibilité est de fixer à l'unité la plus grande des composantes du vecteur des amplitudes modales :  $\max_{i \in [1, n_m]} \eta^{(i)} = 1$ .
- Une autre approche est de supposer la matrice des masses modales  $[M]$  semblable à la matrice identité. Au vue des relations d'orthogonalité (2.116) et (2.117), c'est la procédure de normalisation qui sera retenue par la suite.

Compte tenu de ce choix, les matrices des masses et des rigidités modales ( $[K] - [\chi_s][C_s][\chi_s]^T$  pour le cas série et  $[K]$  pour le cas parallèle) sont par conséquent diagonales. En outre, dans le cadre de cette normalisation, il est donné de constater que la matrice des raideurs modales s'identifie à la matrice des valeurs propres du système considéré (en l'occurrence le carré des pulsations naturelles de la structure). De plus, en revenant aux relations d'orthogonalité (2.115), il est également possible d'affirmer que les matrices des capacités du primaire  $[C_p]$  et du secondaire  $[C_s]$  sont diagonales.

A noter que l'analyse modale des cas série et parallèle permet au travers de leurs valeurs propres de mettre en exergue les bornes fréquentielles de l'intervalle dans lequel évoluent les fréquences de résonance du transformateur en fonction de la charge résistive placée au secondaire.



## 2.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, une modélisation systématique de la dynamique d'un transformateur piézoélectrique a été proposée. Basée sur des considérations énergétiques, le principe de moindre action a été mis en œuvre permettant au travers des propriétés locales de la piézoélectricité de décrire le comportement global du système.

Développé à l'origine dans un contexte purement mécanique, le principe de Hamilton offre une alternative intéressante aux modélisations par schéma électrique équivalent classiquement rencontrées dans la littérature. En s'inspirant de travaux antérieurs ayant trait à la description de la dynamique d'un milieu piézoélectrique par approche variationnelle, un modèle général adaptable à différentes géométries de transformateur a pu être mis en place. Les propriétés d'orthogonalité des modes d'un transformateur piézoélectrique pour un fonctionnement en court-circuit (cas série) et en circuit ouvert (cas parallèle) ont pu être démontrées et les solutions générales du problème exprimées par le truchement d'une décomposition modale ont été définies. Nonobstant, la mise en œuvre de cette approche nécessite au préalable une détermination du champ de déplacement et du potentiel électrique. S'il semble tout à fait utopique de vouloir calculer les solutions exactes du problème considéré, une approximation peut toutefois être proposée. L'approche retenue est la méthode d'approximation de Rayleigh-Ritz où le champ de déplacement s'écrit comme la combinaison linéaire de fonctions qui vérifient conjointement les relations de continuité et les conditions aux limites cinématiques. La mise en équation du problème et l'obtention des équations du mouvement consistent par conséquent en l'application du principe de moindre action selon le champ de déplacement approximé et les coordonnées généralisées choisies.

L'intérêt d'une telle approche, en comparaison des modèles classiques de type schéma électromécanique équivalent de Mason, est de pouvoir s'appliquer à n'importe quelle géométrie de transformateur d'une part, et d'autre part d'offrir la possibilité de considérer plusieurs modes vibratoires dans sa formulation. De ce fait, cette modélisation analytique est particulièrement adaptée à l'optimisation d'une structure répondant à un cahier des charges précis.

Dans le chapitre suivant, une architecture de type Rosen sera considérée afin d'illustrer la méthodologie précédemment développée et initier l'étude analytique d'un transformateur dédié à la décharge plasma.

# Chapitre 3

## Application au transformateur piézoélectrique de type Rosen

### Table des matières

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>100</b>
<b>3.2</b>	<b>Modélisation analytique</b>	<b>100</b>
3.2.1	Hypothèses du problème	100
3.2.2	Analyse vibratoire	103
3.2.3	Problème aux valeurs propres	105
3.2.4	Application du principe de moindre action	109
3.2.5	Application au cas série ( $R_{ch} = 0$ )	114
3.2.6	Application au cas parallèle ( $R_{ch} \rightarrow +\infty$ )	118
3.2.7	Commentaires	121
<b>3.3</b>	<b>Validation numérique et expérimentale</b>	<b>122</b>
3.3.1	Modèle numérique d'un transformateur piézoélectrique	122
3.3.2	Caractérisation expérimentale	126
3.3.2.1	Méthode d'identification conventionnelle [Bri07]	127
3.3.2.2	Application aux transformateurs piézoélectriques	132
<b>3.4</b>	<b>Simulation des modèles : comparaisons et discussions</b>	<b>134</b>
<b>3.5</b>	<b>Représentation du potentiel électrique environnant</b>	<b>152</b>
3.5.1	Étude aux vibrations forcées	152
3.5.2	Cartographie du potentiel électrique	158
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>163</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans cette partie, afin d'éprouver la méthode de modélisation précédemment mise en place, le modèle analytique est appliqué à un transformateur piézoélectrique de type Rosen à primaire feuilleté. A l'aide d'hypothèses simplificatrices d'ordres mécanique et électrique, les lois constitutives de la piézoélectricité seront réduites puis couplées aux équations régissant la dynamique du phénomène piézoélectrique. Par la suite, une analyse vibratoire sera entreprise afin de déterminer les déformées modales ainsi que les fréquences propres de la structure. Le lagrangien sera alors spécifié et les matrices caractérisant le problème aux valeurs propres des cas série et parallèle seront calculées. Un schéma électrique équivalent sera proposé pour les deux cas puis les résultats seront confrontés à l'expérimentation et à la simulation numérique réalisée à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis ANSYS®.

Suite à cette modélisation, une extension en sera proposée pour déterminer l'amplitude du potentiel électrique de surface produit par un transformateur piézoélectrique de type Rosen à secondaire ouvert (cas parallèle). L'analyse modale souffrant en effet d'une indétermination sur l'amplitude des déformées calculées, une étude aux vibrations forcées dans laquelle un amortissement mécanique aura été introduit sera entreprise. Au sortir de cette étude, une modélisation numérique du potentiel électrique environnant sera mise en œuvre à l'aide de la méthode des différences finies. A l'aide de considérations élémentaires, des cartographies 2D du potentiel seront obtenues pour les premiers modes longitudinaux du transformateur Rosen selon un couplage faible. Ces dernières seront brièvement comparées à quelques motifs de décharges plasma obtenues expérimentalement.

## 3.2 Modélisation analytique

### 3.2.1 Hypothèses du problème

#### Géométrie du transformateur

La figure 3.1 est une représentation schématique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen de longueur  $L$ , de largeur  $l$  et d'épaisseur  $e$ . Les longueurs respectives du primaire et du secondaire sont notées  $L_1$  et  $L_2$ . L'origine du repère du système de coordonnées cartésiennes est située au centre de l'interface entre le primaire et le secondaire. Le primaire compris dans l'intervalle  $-L_1 < x_1 < 0$  est composé de  $n$  couches d'épaisseur respective  $e/n$ , chacune d'entre elles étant alimentée par une tension sinusoïdale d'amplitude  $V_p$  et de pulsation  $\omega$  calée aux environs d'une résonance mécanique de la structure. Le secondaire est situé dans l'intervalle  $0 < x_1 < L_2$  et l'électrode de sortie repérée par l'abscisse  $x_1 = L_2$  est reliée à une résistance de charge  $R_{ch}$ .

La géométrie étant définie, les hypothèses sur lesquelles est basée la modélisation analytique du comportement électromécanique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen, issue de l'application du principe de moindre action, peuvent être explicitées.

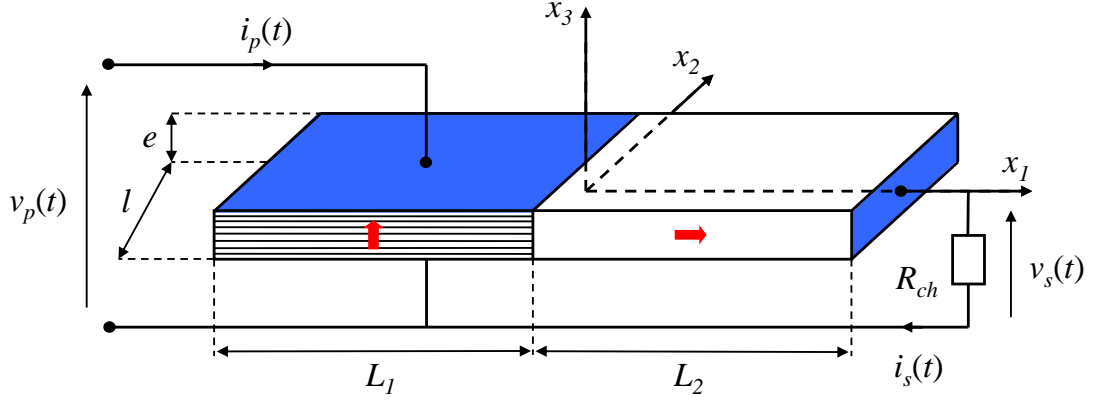


FIGURE 3.1 – Transformateur piézoélectrique de type Rosen multicouche

### Hypothèses mécaniques

- Comme l'optimum des performances est obtenu pour des modes longitudinaux, le transformateur est considéré comme une fine poutre de section rectangulaire composée d'un milieu piézoélectrique anisotrope dont seuls les premiers modes en extension selon l'axe  $(Ox_1)$  sont pris en considération (hypothèse des mouvements à basse fréquence [IEEE]). Cette hypothèse a pour nécessité de respecter un certain ratio entre les dimensions caractéristiques de la structure de sorte que  $L \gg l$  et  $L \gg e$ . Les épaisseurs des électrodes d'alimentation et de celle recueillant la quantité de charges au secondaire sont par ailleurs négligées.
- Les déplacements suivants les directions  $(Ox_2)$  et  $(Ox_3)$  et la dépendance avec les coordonnées  $x_2$  et  $x_3$  du déplacement selon  $(Ox_1)$  sont négligés. Les relations suivantes sont par conséquent vérifiées :

$$u_2 = u_3 = 0 \quad \text{et} \quad u_1(x_k, t) = u_1(x_1, t) \quad (3.1)$$

- Du fait que le transformateur puisse être considéré comme une fine poutre élancée, la contrainte normale suivant l'axe  $(Ox_1)$  de la structure est supposée prépondérante si bien que  $T_1 \gg T_2$  et  $T_1 \gg T_3$ , soit encore :

$$T_2 = T_3 = 0 \quad (3.2)$$

En outre, la structure est supposée libre de toute contrainte de cisaillement ce qui impose :

$$T_4 = T_5 = T_6 = 0 \quad (3.3)$$

- Le transformateur piézoélectrique est supposé ne subir aucune contrainte à l'extrémité du primaire et du secondaire. Ces conditions aux limites dites « libre - libre » s'écrivent simplement :

$$T_1(x_1 = -L_1, t) = T_1(x_1 = L_2, t) = 0 \quad (3.4)$$

- L'axe de polarisation étant différent au primaire et au secondaire, les matrices des coefficients des matériaux pour chaque partie doivent respecter un système de coordonnées local (cf. tableau [1.4]). Pour le transformateur piézoélectrique de type Rosen, si ce dernier est composé d'une céramique PZT, les matrices des propriétés électromécaniques du primaire (polarisé selon l'axe  $(Ox_3)$ ) et du secondaire (polarisé selon l'axe  $(Ox_1)$ ) sont données dans le tableau [3.1].

TABLE 3.1 – Définitions des matrices caractérisant les propriétés électromécaniques du primaire et du secondaire d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen

Matrices caractérisant les propriétés électromécaniques du primaire					
$[c^E] = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix}$	$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$				
$[\varepsilon^S] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix}$					
Matrices caractérisant les propriétés électromécaniques du secondaire					
$[c^D] = \begin{bmatrix} c_{33}^D & c_{13}^D & c_{13}^D & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^D & c_{11}^D & c_{12}^D & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^D & c_{12}^D & c_{11}^D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^D \end{bmatrix}$	$[h] = \begin{bmatrix} h_{33} & h_{31} & h_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 \end{bmatrix}$				
$[\beta^S] = \begin{bmatrix} \beta_{33}^S & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{11}^S \end{bmatrix}$					

### Hypothèses électriques

- De part la structure du primaire, chaque couche le composant est alternativement connectée à la tension d'alimentation et à la masse. L'épaisseur de chacune d'elles pouvant être supposée raisonnablement mince, il est légitime de considérer une variation linéaire du potentiel électrique avec la variable  $x_3$  au sein de chaque couche. Ainsi, comme le champ électrique dérive du potentiel électrique, celui-ci est constant et orienté selon l'axe  $(Ox_3)$  de sorte que :

$$\{E\} = [0 \quad 0 \quad -\phi_{,3}]^T \quad (3.5)$$

De ce fait, puisque par construction les polarisations de chacune des couches sont alternées, il est possible de montrer que la quantité  $d_{31}\phi$ , produit du potentiel électrique par le coefficient piézoélectrique caractéristique du mode transversal, est constante [GA98]. Dès lors, le primaire multicouche peut se ramener à une céramique massive de longueur  $L_1$ , de largeur  $l$  et d'épaisseur  $e$  polarisée selon l'axe  $(Ox_3)$  et alimentée par une tension d'amplitude  $n$  fois supérieure à l'amplitude  $V_p$  réellement appliquée.

- Pour le secondaire, comme ce dernier n'est pas électrodé sur sa surface latérale, il est loisible de négliger les composantes de l'induction électrique selon les directions  $(Ox_2)$  et  $(Ox_3)$  de sorte que :

$$\{D\} = [D_1 \ 0 \ 0]^T \quad (3.6)$$

En outre, puisqu'il a été supposé lors de l'établissement des équations générales régissant la dynamique d'un transformateur piézoélectrique que l'induction électrique devait être constante au sein du secondaire, la composante  $D_1$  de ce vecteur l'est par conséquent tout autant.

### 3.2.2 Analyse vibratoire

Compte tenu des hypothèses mécaniques, le transformateur piézoélectrique de type Rosen ne subit qu'une contrainte uniaxiale selon l'axe  $(Ox_1)$  engendrant une déformation longitudinale selon ce même axe. Par conséquent, les tenseurs des déformations et des contraintes se réduisent à une composante ne dépendant que de la variable  $x_1$ , d'après l'hypothèse faite sur la forme du vecteur déplacement, si bien que :

$$\begin{aligned} \{S\} &= [S_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \{T\} &= [T_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \end{aligned} \quad (3.7)$$

Fort de la forme scalaire prise par les grandeurs mécaniques, à l'aide des hypothèses électriques et du tableau [1.2] donnant les lois constitutives suivant le couple de variables indépendantes adopté, il est aisé de donner les équations réduites de la piézoélectricité pour le primaire et le secondaire :

- Le comportement du primaire étant régi par le couple de variable  $(S, E)$ , les équations de la piézoélectricité au sein de ce milieu s'écrivent comme suit :

$$\boxed{\begin{cases} T_1 = \bar{c}_{11}^E S_1 - \bar{e}_{31} E_3 \\ D_3 = \bar{e}_{31} S_1 + \bar{\epsilon}_{33}^S E_3 \end{cases}} \quad (3.8)$$

où  $\bar{c}_{11}^E$ ,  $\bar{e}_{31}$  et  $\bar{\epsilon}_{33}^S$  sont donnés par les relations suivantes :

$$\bar{c}_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E} ; \bar{e}_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} ; \bar{\epsilon}_{33}^S = \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \quad (3.9)$$

Ces coefficients sont issus de l'inversion du système d'équations relatif au mode de couplage transversal donné dans le tableau [1.5]. Par ailleurs, il

faut ajouter aux relations constitutives les équations régissant l'équilibre du primaire qui d'après (2.47) et les hypothèses avancées précédemment ont pour expression simplifiée :

$$\boxed{\begin{cases} T_{1,1} = \rho \ddot{u}_1 \\ D_{3,3} = 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad -L_1 < x_1 < 0} \quad (3.10)$$

- Le comportement du secondaire étant quant à lui régi par le couple de variable  $(S, D)$ , les équations de la piézoélectricité au sein de ce milieu s'écrivent alors :

$$\boxed{\begin{cases} T_1 = \bar{c}_{33}^D S_1 - \bar{h}_{33} D_1 \\ E_1 = -\bar{h}_{33} S_1 + \bar{\beta}_{33}^S D_1 \end{cases}} \quad (3.11)$$

où  $\bar{c}_{33}^D$ ,  $\bar{h}_{33}$  et  $\bar{\beta}_{33}^S$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$\bar{c}_{33}^D = \frac{1}{s_{33}^E(1 - k_{33}^2)} ; \bar{h}_{33} = \frac{d_{33}}{s_{33}^E \epsilon_{33}^T(1 - k_{33}^2)} ; \bar{\beta}_{33}^S = \frac{1}{\epsilon_{33}^T(1 - k_{33}^2)} \quad (3.12)$$

Ces coefficients sont issus de l'inversion du système d'équations relatif au mode de couplage longitudinal donné dans le tableau [1.5]. Par ailleurs, il faut ajouter aux relations constitutives le système d'équations régissant l'équilibre du secondaire qui d'après (2.47) et les hypothèses avancées précédemment prend la forme réduite :

$$\boxed{\begin{cases} T_{1,1} = \rho \ddot{u}_1 \\ D_{1,1} = 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad 0 < x_1 < L_2} \quad (3.13)$$

Les équations régissant l'évolution du déplacement mécanique et du potentiel électrique peuvent désormais être établies. Cependant, comme les propriétés diffèrent au primaire et au secondaire du transformateur, dû à une direction de polarisation différente pour chacun d'eux, l'équation du mouvement doit être établie séparément au sein de ces deux parties. Il en va de même pour le traitement de l'équation de Maxwell-Gauss qui mène aux équations vérifiées par le potentiel électrique. Ainsi, pour le primaire, en injectant l'expression de la contrainte  $T_1$  donnée par (3.8) dans l'équation de Newton du système (3.10), l'équation d'onde vérifiée par le vecteur déplacement est obtenue. En outre, en dérivant l'expression de l'induction électrique  $D_3$  toujours donnée par (3.8) par rapport à la variable  $x_3$  et en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss du système (3.10), l'équation vérifiée par le potentiel électrique apparaît. Finalement, pour le primaire, il vient :

$$\boxed{\begin{cases} \bar{c}_{11}^E u_{1,11} = \rho \ddot{u}_1 \\ \phi_{,33} = 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad -L_1 < x_1 < 0} \quad (3.14)$$

De même, pour le secondaire, l'expression de la contrainte  $T_1$  donnée par (3.11) est injectée dans l'équation de Newton du système (3.13) ce qui amène à une nouvelle équation d'onde vérifiée par le vecteur déplacement qui diffère de celle du primaire par la raideur sollicitée. De la même manière, en dérivant l'expression du champ

électrique  $E_1$  donnée par (3.8) par rapport à la variable  $x_1$  et en invoquant une fois encore l'équation de Maxwell-Gauss relative au secondaire, l'équation vérifiée par le potentiel électrique est obtenue. Ainsi, pour le secondaire, le système suivant est obtenu :

$$\boxed{\begin{cases} \bar{c}_{33}^D u_{1,11} = \rho \ddot{u}_1 \\ \phi_{,11} = \bar{h}_{33} u_{1,11} \end{cases} \quad \text{pour } 0 < x_1 < L_2} \quad (3.15)$$

### 3.2.3 Problème aux valeurs propres

La résolution du problème aux valeurs propres d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen constitué des systèmes d'équations (3.14) et (3.15) s'effectue sous l'hypothèse d'une évolution harmonique des grandeurs. Par conséquent, le vecteur déplacement et le potentiel électrique sont recherchés sous une forme où un découplage entre les coordonnées spatiales et la variable temporelle est opéré de sorte que :

$$u_1(x_1, t) = \underline{u}_1(x_1) \cos(\omega t) \quad (3.16)$$

$$\phi(x_1, x_3, t) = \underline{\phi}(x_1, x_3) \cos(\omega t) \quad (3.17)$$

Par la suite, toutes les grandeurs soulignées rencontrées symboliseront la partie spatiale des quantités qu'elles représentent, autrement dit leur amplitude. Ceci étant convenu, à partir de (3.14) et (3.15), les amplitudes  $\underline{u}_1$  et  $\underline{\phi}$  de la déformée mécanique et du potentiel électrique ont pour expression générale :

$$\boxed{\underline{u}_1(x_1) = \begin{cases} A_u \cos(k_1 x_1) + B_u \sin(k_1 x_1) & , -L_1 < x_1 < 0 \\ C_u \cos(k_2 x_1) + D_u \sin(k_2 x_1) & , 0 < x_1 < L_2 \end{cases}} \quad (3.18)$$

$$\boxed{\underline{\phi}(x_1, x_3) = \begin{cases} A_\phi x_3 + B_\phi & , -L_1 < x_1 < 0 \\ \bar{h}_{33} \underline{u}_1(x_1) + C_\phi x_1 + D_\phi & , 0 < x_1 < L_2 \end{cases}} \quad (3.19)$$

où  $A_u$ ,  $B_u$ ,  $C_u$ ,  $D_u$ ,  $A_\phi$ ,  $B_\phi$ ,  $C_\phi$  et  $D_\phi$  sont des constantes d'intégration.  $k_1$  et  $k_2$  représentent les vecteurs d'onde du primaire et du secondaire qui ont pour expressions respectives :

$$k_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\bar{c}_{11}^E}} = \omega \sqrt{\rho s_{11}^E} \quad ; \quad k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\bar{c}_{33}^D}} = \omega \sqrt{\rho s_{33}^E (1 - k_{33}^2)} \quad (3.20)$$

Après obtention des formes générales prises par les déformées, quelques vérifications intermédiaires peuvent d'ores et déjà être faites. Premièrement, le potentiel électrique au sein du primaire varie bien linéairement avec la variable  $x_3$ . En outre, il faut s'assurer que l'induction électrique au sein du secondaire est bien constante. Pour ce faire, il suffit d'injecter dans la deuxième équation du système (3.11) l'expression générale de l'amplitude du potentiel électrique  $\underline{\phi}$ . Dans le cadre d'une évolution harmonique, le calcul proposé amène bien à conclure sur la constance de l'induction électrique dans le secondaire comme en atteste la relation suivante :

$$\underline{D}_1 = \frac{1}{\bar{\beta}_{33}^S} (\underline{E}_1 + \bar{h}_{33} \underline{S}_1) = \frac{1}{\bar{\beta}_{33}^S} (-\bar{h}_{33} \underline{u}_{1,1} - C_\phi + \bar{h}_{33} \underline{u}_{1,1}) \Leftrightarrow \underline{D}_1 = -\frac{C_\phi}{\bar{\beta}_{33}^S} \quad (3.21)$$



L'étude des vibrations libres d'un transformateur piézoélectrique, menant au problème aux valeurs propres dont cette partie fait l'objet, s'opère pour une structure libre de toutes contraintes mécaniques (hypothèse de conditions aux limites « libre - libre » émise dans la partie § 3.2.1) et suppose d'autre part un primaire court-circuité. Ceci implique dès à présent la nullité des quantités  $A_\phi$  et  $B_\phi$  et, de ce fait, une dépendance de l'amplitude du potentiel électrique de la seule variable  $x_1$ . Afin de déterminer les autres inconnues que sont la pulsation  $\omega$  et les six autres constantes d'intégration, les conditions aux limites mécaniques et électriques, auxquelles il faut ajouter les relations de continuité à l'interface entre primaire et secondaire, vont être exploitées.

Les conditions de raccordement aux abscisses  $x_1 = 0^-$  et  $x_1 = 0^+$  sont en premier lieu examinées. Pour ces dernières, la continuité du déplacement mécanique, de la contrainte et du potentiel électrique est assurée. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \underline{u}_1(x_1 = 0^-) &= \underline{u}_1(x_1 = 0^+) \Leftrightarrow A_u = C_u \\ \underline{T}_1(x_1 = 0^-) &= \underline{T}_1(x_1 = 0^+) \Leftrightarrow \bar{c}_{11}^E k_1 B_u = \bar{c}_{33}^D k_2 D_u + \frac{\bar{h}_{33}}{\bar{\beta}_{33}^S} C_\phi \\ \underline{\phi}_1(x_1 = 0^-) &= \underline{\phi}_1(x_1 = 0^+) \Leftrightarrow 0 = \bar{h}_{33} C_u + D_\phi \end{aligned} \quad (3.22)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, les conditions « libre - libre » données par la relation (3.4) doivent être associées à la condition relative à la valeur du potentiel électrique imposée par la tension en sortie du transformateur. Par conséquent, cela mène aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{T}_1(x_1 = -L_1) &= 0 \Leftrightarrow \bar{c}_{11}^E k_1 (A_u \sin X_1 + B_u \cos X_1) = 0 \\ \underline{T}_1(x_1 = L_2) &= 0 \Leftrightarrow \bar{c}_{33}^D k_2 (-C_u \sin X_2 + D_u \cos X_2) + \frac{\bar{h}_{33}}{\bar{\beta}_{33}^S} C_\phi = 0 \\ \underline{\phi}_1(x_1 = L_2) &= \underline{v}_s \Leftrightarrow \bar{h}_{33} (C_u \cos X_2 + D_u \sin X_2) + C_\phi L_2 + D_\phi = \underline{v}_s \end{aligned} \quad (3.23)$$

où les quantités adimensionnées  $X_1 = k_1 L_1$  et  $X_2 = k_2 L_2$  ont été introduites. L'amplitude de la tension du secondaire est bien évidemment dépendante de la charge résistive  $R_{ch}$  placée en sortie. Cette dernière influence directement la forme des déformées et la valeur des fréquences propres de la structure. Il est possible de la faire apparaître explicitement dans le système d'équations précédent. En effet, d'après l'expression (3.21) donnant l'induction électrique au sein du secondaire, la constante  $C_\phi$  peut être considérée comme image du courant circulant dans la résistance de charge. De ce fait, elle peut être reliée à l'amplitude de la tension du secondaire. Dans l'hypothèse d'une évolution harmonique, à l'aide de la notation complexe et en respectant la convention donnée sur la figure 3.1, il vient :

$$\underline{v}_s = R_{ch} \underline{i}_s \quad \text{avec} \quad \underline{i}_s = -j\omega \underline{q}_s \quad (3.24)$$

or la quantité de charge du secondaire est liée à l'induction électrique par la relation suivante :

$$\underline{q}_s = \int_{\Sigma_\phi^s} (-\underline{D}_i n_i) d\Sigma = - \int_{\Sigma_\phi^s} \underline{D}_1 dx_2 dx_3 = C_s C_\phi L_2 \quad (3.25)$$

où  $C_s$  représente la capacité « bloquée » du secondaire qui a pour expression :

$$C_s = \frac{le}{L_2} \frac{1}{\bar{\beta}_{33}^S} = \frac{le}{L_2} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \quad (3.26)$$

Finalement, l'amplitude de la tension du secondaire est liée à la constante  $C_\phi$  par la relation suivante :

$$\underline{v}_s = -j R_{ch} C_s \omega C_\phi L_2 \quad (3.27)$$

Ainsi, en combinant les systèmes d'équations (3.22) et (3.23) dans lesquels est injectée la relation (3.27), le système d'équations du problème aux valeurs propres d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen à secondaire chargé s'écrit matriciellement :

$$\mathbf{M}(\omega) \begin{bmatrix} A_u \\ B_u \\ C_u \\ D_u \\ C_\phi \\ D_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

où  $\mathbf{M}(\omega)$  de dimension  $6 \times 6$  est la matrice caractéristique du système d'équations linéaires précédent dont les coefficients dépendent explicitement de la pulsation  $\omega$ . Elle a pour expression :

$$\mathbf{M}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{11}^E k_1 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_2 & -\bar{h}_{33} / \bar{\beta}_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} & 0 & 0 & 1 \\ \bar{c}_{11}^E k_1 \sin X_1 & \bar{c}_{11}^E k_1 \cos X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_2 \sin X_2 & \bar{c}_{33}^D k_2 \cos X_2 & \bar{h}_{33} / \bar{\beta}_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} \cos X_2 & \bar{h}_{33} \sin X_2 & (1 + j R_{ch} C_s \omega) L_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fréquences propres et les déformées modales de la structure sont dès lors accessibles. Voici la marche à suivre :

- **Fréquences propres** : les pulsations propres  $\omega_n$  sont calculées en résolvant l'équation caractéristique  $\det \mathbf{M}(\omega) = 0$ .
- **Déformées modales** : comme il a pu être souligné dans la partie §2.4.2, il existe une indétermination sur l'amplitude des modes propres. Par conséquent, la  $n^{\text{ème}}$  déformée modale est définie à une constante multiplicative près. Pour fixer les choses, les cinq constantes d'intégration  $B_u$ ,  $C_u$ ,  $D_u$ ,  $C_\phi$  et  $D_\phi$  seront par la suite exprimées en fonction de la première  $A_u$ . Cette dernière est ensuite déterminée en utilisant la condition de normalisation de la masse modale (2.113) qui, appliquée au problème du transformateur piézoélectrique de type Rosen, s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{-L_1}^{L_2} \rho l e [u_1^{(n)}(x_1)]^2 dx_1 = 1 \quad (3.29)$$

Suite au calcul analytique des modes propres, en vue d'appliquer le principe de moindre action, il faut expliciter, d'après les hypothèses retenues, la forme de la matrice de déflexion  $\lambda_m$  et l'expression des matrices relatives au primaire et au secondaire, à savoir  $N_p$  et  $N_s$ . Les matrices correspondant aux grandeurs mécaniques sont en premier lieu étudiées :

- Comme le champ de déplacement est déterminé à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz, ce dernier s'exprime comme une somme de  $n_m$  termes s'écrivant comme le produit des déformées modales, qui ont été calculées auparavant, par les amplitudes modales de vibration associées. Pour le problème étudié, il vient :

$$\{u\} = \lambda_m \{\eta\} \quad \text{avec} \quad \lambda_m = \begin{bmatrix} \underline{u}_1^{(1)}(x_1) & \cdots & \underline{u}_1^{(n_m)}(x_1) \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

En outre, d'après la relation (2.53), le tenseur des déformations  $\{S\}$  peut être exprimé par le truchement du vecteur des amplitudes  $\{\eta\}$ . Compte tenu de la relation précédente et de (2.54) donnant l'expression de l'opérateur gradient symétrique  $L_m$ , le tenseur des déformations pour ce problème s'écrit comme suit :

$$\{S\} = N_m \{\eta\} \quad \text{avec} \quad N_m = \begin{bmatrix} \underline{u}_{1,1}^{(1)}(x_1) & \cdots & \underline{u}_{1,1}^{(n_m)}(x_1) \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

- D'après les hypothèses électriques faites sur la structure du primaire, le potentiel électrique varie linéairement avec la variable  $x_3$  imposant de ce fait un champ électrique constant dirigé selon l'axe ( $Ox_3$ ) au sein du primaire. Ce dernier étant considéré comme une céramique de dimensions  $L_1 \times l \times e$  alimentée par une tension alternative d'amplitude  $n$  fois supérieure à l'amplitude de la tension appliquée (afin de tenir compte du caractère multicouche du transformateur), il vient :

$$\phi(x_3, t) = \frac{n}{e} \left( x_3 + \frac{e}{2} \right) v_p(t) \quad \Rightarrow \quad \lambda_p = \frac{n}{e} \left( x_3 + \frac{e}{2} \right) \quad (3.32)$$

Par conséquent, d'après la relation (2.57), la matrice  $N_p$  s'écrit :

$$N_p = L_p \lambda_p^T = [-,1 \quad -,2 \quad -,3]^T \left[ \frac{n}{e} \left( x_3 + \frac{e}{2} \right) \right]^T = [0 \quad 0 \quad -n/e]^T \quad (3.33)$$

Ainsi, le champ électrique  $\{E\}$  est relié à la tension d'alimentation du primaire  $v_p(t)$  par la relation :

$$\{E\} = N_p v_p(t) \quad \text{avec} \quad N_p = [0 \quad 0 \quad -n/e]^T \quad (3.34)$$

A noter que le vecteur des tensions d'alimentation du primaire  $\{v_p\}$  se réduit dans le cas présent à un scalaire.

- Au secondaire, comme l'induction électrique est supposée constante et orientée selon l'axe  $(Ox_1)$ , d'après (2.59) et (2.60),  $\{D\}$  est alors lié à la quantité de charges du secondaire  $q_s(t)$  par la relation :

$$\{D\} = N_s q_s(t) \quad \text{avec} \quad N_s = [-1/le \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.35)$$

Même remarque que pour le primaire, le vecteur des quantités de charges du secondaire  $\{q_s\}$  se limite à un scalaire.

### 3.2.4 Application du principe de moindre action

Suite à l'analyse vibratoire qui a permis une détermination précise des modes propres, l'application du principe de moindre action au problème de la dynamique du transformateur piézoélectrique de type Rosen peut être envisagée. D'après la formulation générale développée dans la section § 2.4.1 et les hypothèses avancées dans la partie § 3.2.1, le lagrangien d'un transformateur de type Rosen s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{\dot{\eta}\}^T [M] \{\dot{\eta}\} - \frac{1}{2} \{\eta\}^T [K] \{\eta\} + \{\eta\}^T [\psi_p] v_p + \frac{1}{2} C_p v_p^2 + \{\eta\}^T [\chi_s] q_s - \frac{1}{2} \frac{q_s^2}{C_s}$$

Par conséquent, l'application du principe de moindre action mène aux équations régissant la dynamique de la structure et d'après (2.84), elles s'écrivent :

$$\begin{cases} [M] \{\ddot{\eta}\} + ([K] - [\psi_s][\psi_s]^T / C_s) \{\eta\} = [\psi_p] v_p - [\psi_s] v_s \\ i_p = [\psi_p]^T \{\dot{\eta}\} + C_p \dot{v}_p \\ [\psi_s]^T \{\dot{\eta}\} = i_s + C_s \dot{v}_s \end{cases} \quad (3.36)$$

Les matrices caractérisant les propriétés électromécaniques du transformateur sont précisées ci-dessous :

- **Expression de  $[M]$**  : d'après l'orthogonalité des modes propres et le critère de normalisation donné par la relation (3.29), la matrice des masses modales s'apparente à la matrice identité. Il vient alors :

$$[M] = \text{diag} (M^{(1)}, \dots, M^{(n_m)}) \quad (3.37)$$

où chacun des éléments qui la composent est égale à l'unité de sorte que la relation suivante pour  $i = 1, \dots, n_m$  soit vérifiée :

$$M^{(i)} = \int_{-L_1}^0 \rho l e \left[ \underline{u}_1^{(i)}(x_1) \right]^2 dx_1 + \int_0^{L_2} \rho l e \left[ \underline{u}_1^{(i)}(x_1) \right]^2 dx_1 = 1 \quad (3.38)$$

Cette dernière relation permettra de déterminer la constante  $A_u$ .

- **Expression de  $[K]$**  : d'après l'orthogonalité des modes propres, la matrice des raideurs modales est semblable à une matrice diagonale. Elle s'écrit par conséquent :

$$[K] = \text{diag} (K^{(1)}, \dots, K^{(n_m)}) \quad (3.39)$$

Chacun des éléments qui la composent est calculé à partir de la relation (2.65). En introduisant les matrices des rigidités  $[c^E]$  et  $[c^D]$  issues du tableau [3.1] et le résultat (3.31), il vient pour  $i = 1, \dots, n_m$  :

$$K^{(i)} = \frac{le}{s_{11}^E} \int_{-L_1}^0 [\underline{u}_{1,1}^{(i)}(x_1)]^2 dx_1 + \frac{le}{s_{33}^E(1-k_{33}^2)} \int_0^{L_2} [\underline{u}_{1,1}^{(i)}(x_1)]^2 dx_1 \quad (3.40)$$

- **Expression de  $[C_p]$**  : à partir de la relation (2.68) dans laquelle sont injectées la matrice des permittivités  $[\varepsilon^S]$  issue du tableau [3.1] et l'expression (3.34), la matrice des capacités bloquées du primaire se réduit à un scalaire comme suit :

$$[C_p] = \int_{\Omega_p} N_p^T [\varepsilon^S] N_p d\Omega = \int_{\Omega_p} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -n/e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -n/e \end{bmatrix} d\Omega = n^2 \frac{L_1 l}{e} \bar{\varepsilon}_{33}^S$$

En utilisant la relation (3.9) donnant  $\bar{\varepsilon}_{33}^S$  en fonction des coefficients caractéristiques du mode transversal, il vient finalement :

$$C_p = n^2 \frac{L_1 l}{e} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \quad (3.41)$$

- **Expression de  $[C_s]$**  : à partir de la relation (2.69) dans laquelle sont injectées la matrice des impermittivités  $[\beta^S]$  issue du tableau [3.1] et l'expression (3.35), la matrice des capacités bloquées du secondaire se réduit également à un scalaire comme suit :

$$[C_s]^{-1} = \int_{\Omega_s} N_s^T [\beta^S] N_s d\Omega = \int_{\Omega_s} \begin{bmatrix} -1/le \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \beta_{33}^S & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{11}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/le \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\Omega = \frac{L_2}{le} \bar{\beta}_{33}^S$$

En utilisant la relation (3.12) donnant  $\bar{\beta}_{33}^S$  en fonction des caractéristiques du mode longitudinal, il vient finalement :

$$C_s = \frac{el}{L_2} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \quad (3.42)$$

- **Expression de  $[\psi_p]$**  : à partir de la relation (2.66) dans laquelle sont introduites la matrice des coefficients piézoélectriques  $[e]$  issue du tableau [3.1] et les expressions de  $N_m$  et  $N_p$  données respectivement par (3.31) et (3.34), la

matrice des facteurs de conversion électromécanique du primaire se restreint à un simple vecteur colonne de  $n_m$  éléments de sorte que :

$$\begin{aligned}
[\psi_p] &= \int_{\Omega_p} N_m^T [e]^T N_p d\Omega \\
&= \int_{\Omega_p} \begin{bmatrix} \underline{u}_{1,1}^{(1)}(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{u}_{1,1}^{(n_m)}(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -n/e \end{bmatrix} d\Omega \\
&= [\psi_p^{(1)} \quad \dots \quad \psi_p^{(n_m)}]^T
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.9) donnant l'expression de  $\bar{e}_{31}$  en fonction des coefficients caractéristiques du mode transversal, chacun des éléments qui composent ce vecteur vérifie alors pour  $i = 1, \dots, n_m$  la relation suivante :

$$\boxed{\psi_p^{(i)} = -nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \int_{-L_1}^0 \underline{u}_{1,1}^{(i)}(x_1) dx_1} \quad (3.43)$$

- **Expression de  $[\psi_s]$**  : à partir de la relation (2.83) dans laquelle sont introduites la matrice des coefficients piézoélectriques  $[h]$  issue du tableau [3.1] et les expressions de  $N_m$  et  $N_s$  données respectivement par (3.31) et (3.35), la matrice des facteurs de conversion électromécanique du secondaire se restreint également à un simple vecteur colonne de  $n_m$  éléments de sorte que :

$$\begin{aligned}
[\psi_s] &= [\chi_s][C_s] = C_s \int_{\Omega_s} N_m^T [h]^T N_s d\Omega \quad \text{car} \quad [C_s] = C_s \\
&= C_s \int_{\Omega_s} \begin{bmatrix} \underline{u}_{1,1}^{(1)}(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{u}_{1,1}^{(n_m)}(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{33} & 0 & 0 \\ h_{31} & 0 & 0 \\ h_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{15} \\ 0 & h_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/le \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\Omega \\
&= [\psi_s^{(1)} \quad \dots \quad \psi_s^{(n_m)}]^T
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.12), donnant l'expression de  $\bar{h}_{33}$  en fonction des coefficients caractéristiques du mode longitudinal, et l'expression de la capacité bloquée du secondaire (3.42), chacun des éléments qui composent ce vecteur vérifie alors pour  $i = 1, \dots, n_m$  la relation suivante :

$$\boxed{\psi_s^{(i)} = -\frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \int_0^{L_2} \underline{u}_{1,1}^{(i)}(x_1) dx_1} \quad (3.44)$$

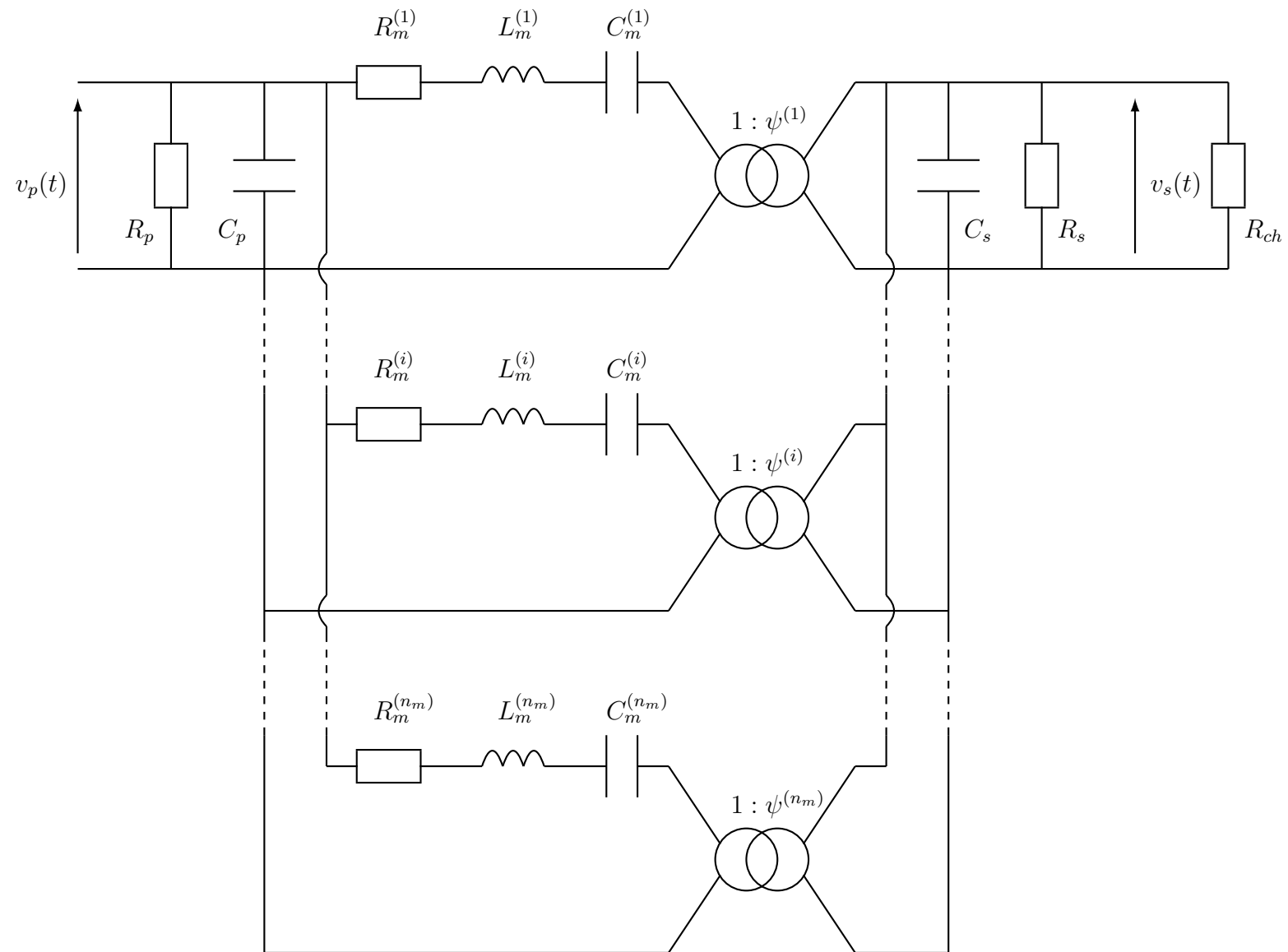


FIGURE 3.2 – Schéma électrique équivalent d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen chargé au secondaire par une résistance  $R_{ch}$

Il est possible d'interpréter les équations d'équilibre (3.36) en termes de schéma électrique équivalent. Ce dernier s'apparente aux schémas communément rencontrés dans la littérature (cf. figure 1.17) à ceci près que le caractère multimodal de l'étude est pris en considération. Ainsi le schéma figure l'association en série d'une cellule RC, image des caractéristiques diélectriques du primaire, d'un quadripôle composé de cellules RLC connectées en parallèle, en nombre égal au nombre de modes susceptibles d'être sollicités, et d'une autre cellule RC caractérisant le comportement diélectrique du secondaire. Une résistance de charge  $R_{ch}$  achève le circuit. Le schéma électrique équivalent général d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen est représenté sur la figure 3.2. Les résistances  $R_p$  et  $R_s$  permettent de tenir compte des pertes diélectriques au sein du primaire et du secondaire. Elles

sont liées à l'angle de pertes  $\delta$  du matériau par la relation :

$$R_i(\omega) = \frac{1}{\omega C_i \tan \delta} \quad \text{pour} \quad i = p, s \quad (3.45)$$

De même, dans chaque branche motionnelle, une résistance  $R_m^{(i)}$  est adjointe au dipôle LC série afin de prendre en considération les pertes mécaniques au sein de la structure. Cette résistance est inversement proportionnelle au facteur de qualité mécanique  $Q_m$  de l'élément résonant de sorte que :

$$R_m^{(i)} = \frac{1}{Q_m} \sqrt{\frac{L_m^{(i)}}{C_m^{(i)}}} \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n_m \quad (3.46)$$

L'inductance  $L_m^{(i)}$  et la capacité  $C_m^{(i)}$  qui apparaissent dans l'expression précédente rendent compte des propriétés élastodynamiques du transformateur piézo-électrique. L'association en parallèle des branches motionnelles caractérisant les modes sollicités a été ramenée au primaire. De ce fait, les quantités  $L_m^{(i)}$  et  $C_m^{(i)}$  sont respectivement définies à partir de la masse modale  $M^{(i)}$  et de la raideur modale  $K^{(i)}$ , expressions valables pour  $i = 1, \dots, n_m$ , de la manière suivante :

$$L_m^{(i)} = \frac{M^{(i)}}{[\psi_p^{(i)}]^2} \quad ; \quad C_m^{(i)} = \frac{[\psi_p^{(i)}]^2}{K^{(i)} - \frac{[\psi_s^{(i)}]^2}{C_s}} \quad (3.47)$$

En outre, le rapport de transformation de la structure a été introduit et il est défini pour chaque mode permettant de quantifier la contribution de chacun dans la conversion de l'énergie. Il s'exprime très simplement par le rapport entre les facteurs de conversion électromécanique du primaire et du secondaire comme suit :

$$\psi^{(i)} = \frac{\psi_p^{(i)}}{\psi_s^{(i)}} \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n_m \quad (3.48)$$

Grâce à ce type de représentation, il sera aisé de comparer le modèle analytique aux différentes simulations numériques et caractérisations expérimentales. Il suffira pour ce faire d'analyser les caractéristiques électriques du schéma telles que l'admittance d'entrée, le gain en tension ou encore la puissance absorbée. Néanmoins, il faut rappeler que la validité d'un tel schéma est tributaire des hypothèses qui ont amené à son élaboration. En effet, le caractère unidimensionnel du modèle conduit à ne considérer qu'un petit nombre de modes longitudinaux limitant la validité du schéma à une faible plage de fréquence. Par conséquent, pour les structures étudiées par la suite, il faudra s'assurer que les dimensions de l'architecture satisfassent un rapport entre elles justifiant l'hypothèse unidimensionnelle. En d'autres termes, il faut veiller à ce que les rapports  $L/l$  et  $L/e$  soient grands devant l'unité.

Ce qui vient d'être établi correspond au problème aux valeurs propres de la dynamique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen dont le secondaire est connecté à une charge résistive  $R_{ch}$  de valeur quelconque. Afin d'illustrer cette étude, les résultats pour les deux cas extrêmes que sont les cas série et parallèle vont être respectivement explicités dans les deux prochaines sections.



### 3.2.5 Application au cas série ( $R_{ch} = 0$ )

Le problème aux valeurs propres d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen dans le cas série est obtenu lorsque le primaire et le secondaire sont conjointement court-circuités ( $\forall t > 0, v_p(t) = v_s(t) = 0$ ). Dans ce cas, la résistance de charge placée au secondaire est considérée comme nulle et la matrice du système général d'équations régissant la dynamique de la structure se simplifie alors par :

$$\mathbf{M}_0(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{11}^E k_{10} & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{20} & -\bar{h}_{33}/\bar{\beta}_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} & 0 & 0 & 1 \\ \bar{c}_{11}^E k_{10} \sin X_{10} & \bar{c}_{11}^E k_{10} \cos X_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{20} \sin X_{20} & \bar{c}_{33}^D k_{20} \cos X_{20} & \bar{h}_{33}/\bar{\beta}_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} \cos X_{20} & \bar{h}_{33} \sin X_{20} & L_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Fort de cette formulation, il est alors possible de déterminer les fréquences propres, les déformées modales, les propriétés électromécaniques et les équations d'équilibre du problème :

- **Fréquences propres** : l'annulation du déterminant de la matrice  $\mathbf{M}_0(\omega)$  conduit à l'équation en fréquence dont les pulsations propres sont solutions. Cette équation notée ( $E_0$ ) est donnée dans le tableau [3.2]. Dans ( $E_0$ ), il apparaît le facteur  $\eta$  qui rend compte de la différence de raideurs sollicitées au primaire et au secondaire. Il a pour expression :

$$\eta = \sqrt{\frac{\bar{c}_{11}^E}{\bar{c}_{33}^D}} = \sqrt{\frac{s_{33}^E(1 - k_{33}^2)}{s_{11}^E}} \quad (3.49)$$

- **Déformées modales** : l'établissement des expressions des déformées mécaniques modales et des potentiels électriques modaux consistent en la simple détermination des constantes d'intégration  $B_u, C_u, D_u, C_\phi$  et  $D_\phi$  en fonction de  $A_u$  à partir du système d'équations caractérisé par la matrice  $\mathbf{M}_0(\omega)$ . Les calculs sont développés dans l'annexe A et les expressions des  $i^{\text{èmes}}$  déformées mécanique  $\underline{u}_{10}^{(i)}$  et électrique  $\underline{\phi}_{-0}^{(i)}$  sont regroupées dans le tableau [3.2]. Les facteurs  $U_0^{(i)}$  et  $\Phi_0^{(i)}$  sont issus de la condition de normalisation (3.29). En effet,  $U_0^{(i)}$  s'apparente à la constante d'intégration  $A_u$  et  $\Phi_0^{(i)}$  est définie par une relation de proportionnalité avec la grandeur  $U_0^{(i)}$  de rapport  $\bar{h}_{33}$ . De plus, afin de simplifier l'écriture des relations du tableau [3.2], les constantes  $\alpha_0^{(i)}$  et  $\beta_0^{(i)}$  sont introduites et elles ont pour expressions respectives :

$$\alpha_0^{(i)} = \frac{\eta \tan X_{10}^{(i)} + \sin X_{20}^{(i)}}{\cos X_{20}^{(i)} - 1} \quad (3.50)$$

$$\beta_0^{(i)} = \frac{1 + 2\alpha_0^{(i)} \tan X_{20}^{(i)} - [\alpha_0^{(i)}]^2}{1 + [\alpha_0^{(i)}]^2} \quad (3.51)$$

- **Propriétés électromécaniques** : les différentes caractéristiques électrodynamiques du transformateur piézoélectrique de type Rosen, que sont les éléments de la matrice des raideurs modales, les composantes des vecteurs des

facteurs de conversion électromécanique du primaire et du secondaire et les capacités bloquées en entrée et en sortie de la structure, sont déterminées respectivement à partir des relations (3.40), (3.43), (3.44), (3.41) et (3.42). Le développement des calculs est donné dans l'annexe A et les résultats sont répertoriés dans le tableau [3.2].

- **Équations d'équilibre** : d'après (3.36), le système d'équations régissant la dynamique d'un transformateur piézoélectrique pour le cas série ( $\forall t > 0, v_s(t) = 0$ ) s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} [M_0]\{\ddot{\eta}\} + ([K_0] - [\psi_{s0}][\psi_{s0}]^T/C_s)\{\eta\} = [\psi_{p0}]v_p \\ i_p = [\psi_{p0}]^T\{\dot{\eta}\} + C_p\dot{v}_p \\ [\psi_{s0}]^T\{\dot{\eta}\} = i_s \end{cases}} \quad (3.52)$$

Compte tenu des conditions électriques permettant l'obtention du cas série, le schéma électrique équivalent donné sur la figure 3.2 doit être amputé de la branche statique située au secondaire du transformateur. Il reste alors le schéma électrique représenté sur la figure 3.3 où les expressions des éléments des différentes branches motionnelles, valables pour  $i = 1, \dots, n_m$ , sont indiquées ci-dessous :

$$R_{m0}^{(i)} = \frac{1}{Q_m} \sqrt{\frac{L_{m0}^{(i)}}{C_{m0}^{(i)}}} \quad ; \quad L_{m0}^{(i)} = \frac{M_0^{(i)}}{[\psi_{p0}^{(i)}]^2} \quad ; \quad C_{m0}^{(i)} = \frac{[\psi_{p0}^{(i)}]^2}{K_0^{(i)} - \frac{[\psi_{s0}^{(i)}]^2}{C_s}}$$

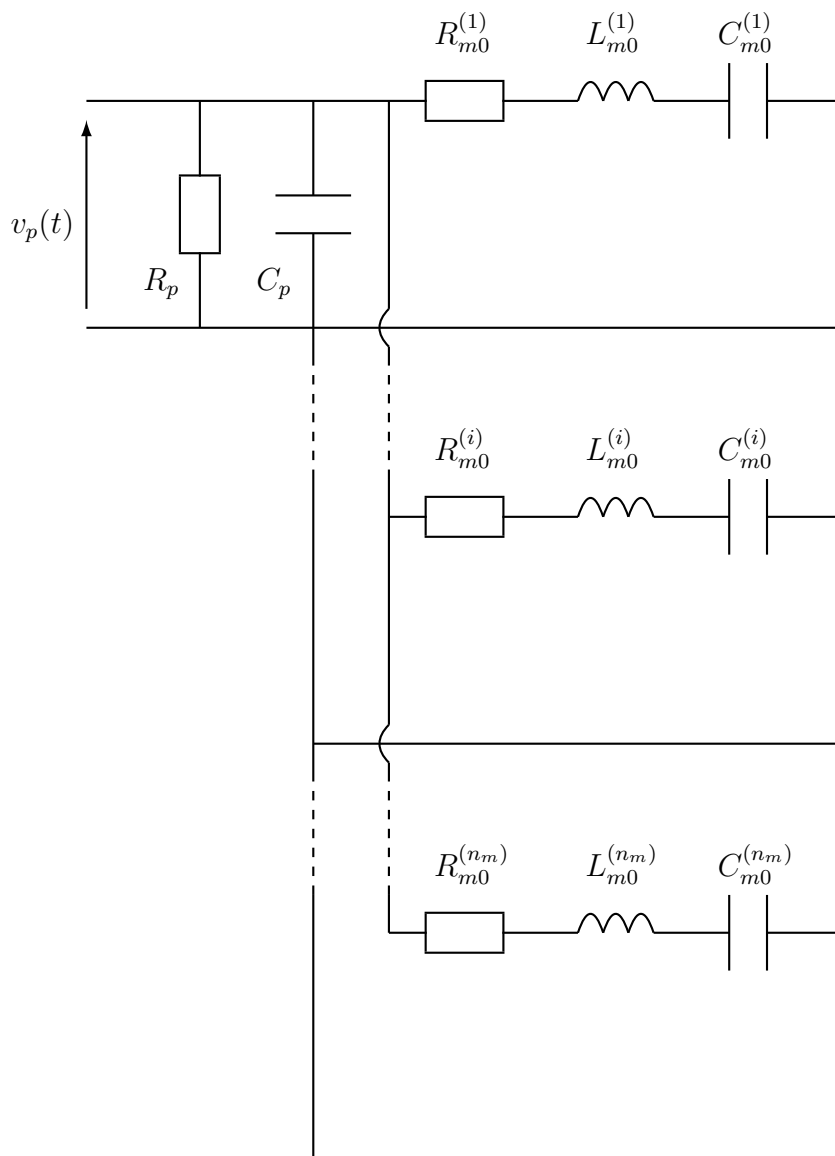


FIGURE 3.3 – Schéma électrique équivalent d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen – Cas série ( $R_{ch} = 0$ )

TABLE 3.2 – Paramètres du modèle analytique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen (cas série  $\Leftrightarrow R_{ch} = 0$ )

Équation en fréquence	$(E_0) \Leftrightarrow \eta \sin X_{10} \cos X_{20} + \cos X_{10} \sin X_{20} - \frac{k_{33}^2}{X_{20}} \left[ 2 \cos X_{10} (1 - \cos X_{20}) + \eta \sin X_{10} \sin X_{20} \right] = 0$
Déformée mécanique modale $\underline{u}_{10}^{(i)}$	$\underline{u}_{10}^{(i)}(x_1) = U_0^{(i)} \begin{cases} \cos(k_{10}^{(i)} x_1) - \tan X_{10}^{(i)} \sin(k_{10}^{(i)} x_1) & , -L_1 < x_1 < 0 \\ \cos(k_{20}^{(i)} x_1) + \alpha_0^{(i)} \sin(k_{20}^{(i)} x_1) & , 0 < x_1 < L_2 \end{cases}$
Potentiel électrique modal $\underline{\phi}_0^{(i)}$	$\underline{\phi}_0^{(i)}(x_1) = \Phi_0^{(i)} \begin{cases} 0 & , -L_1 < x_1 < 0 \\ \cos(k_{20}^{(i)} x_1) - 1 + \alpha_0^{(i)} \sin(k_{20}^{(i)} x_1) - (k_{20}^{(i)} x_1) \operatorname{sinc}(X_{20}^{(i)}) \left[ \alpha_0^{(i)} - \tan \frac{X_{20}^{(i)}}{2} \right] & , 0 < x_1 < L_2 \end{cases}$
Critère de normalisation	$\frac{1}{[U_0^{(i)}]^2} = \rho l e \left[ \frac{L_1}{2} \frac{1 + \operatorname{sinc}(2X_{10}^{(i)})}{\cos^2 X_{10}^{(i)}} + \frac{L_2}{2} \left[ 1 + (\alpha_0^{(i)})^2 \right] \left[ 1 + \beta_0^{(i)} \operatorname{sinc}(2X_{20}^{(i)}) \right] \right]$
Raideur modale	$K_0^{(i)} = [U_0^{(i)}]^2 \left[ \frac{1}{s_{11}^E} \frac{le}{2L_1} (X_{10}^{(i)})^2 \frac{1 - \operatorname{sinc}(2X_{10}^{(i)})}{\cos^2 X_{10}^{(i)}} + \frac{1}{s_{33}^E (1 - k_{33}^2)} \frac{le}{2L_2} (X_{20}^{(i)})^2 \left[ 1 + (\alpha_0^{(i)})^2 \right] \left[ 1 - \beta_0^{(i)} \operatorname{sinc}(2X_{20}^{(i)}) \right] \right]$
Facteurs modaux de conversion	$\psi_{p0}^{(i)} = U_0^{(i)} n l \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{1 - \cos X_{10}^{(i)}}{\cos X_{10}^{(i)}} \quad ; \quad \psi_{s0}^{(i)} = U_0^{(i)} \frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \left[ 1 - \cos X_{20}^{(i)} - \alpha_0^{(i)} \sin X_{20}^{(i)} \right]$
Capacités bloquées	$C_p = n^2 \frac{L_1 l}{e} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \quad ; \quad C_s = \frac{le}{L_2} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)$

### 3.2.6 Application au cas parallèle ( $R_{ch} \rightarrow +\infty$ )

Le problème aux valeurs propres d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen dans le cas parallèle est obtenu lorsque le primaire et le secondaire sont respectivement court-circuité et ouvert ( $\forall t > 0, v_p(t) = 0, q_s(t) = 0$ ). De ce fait, d'après la relation (3.25), la constante d'intégration  $C_\phi$  est nulle et la matrice du système général d'équations régissant la dynamique de la structure devient :

$$\mathbf{M}_\infty(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{2\infty} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} & 0 & 1 \\ \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} \sin X_{1\infty} & \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} \cos X_{1\infty} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \sin X_{2\infty} & \bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \cos X_{2\infty} & 0 \end{bmatrix}$$

A l'instar du cas série, il est alors aisé de déterminer les fréquences propres, les déformées modales, les propriétés électromécaniques et les équations d'équilibre qui en découlent :

- **Fréquences propres** : l'annulation du déterminant de la matrice  $\mathbf{M}_\infty(\omega)$  conduit à l'équation en fréquence dont les pulsations propres sont solutions. Cette équation notée ( $E_\infty$ ) est donnée dans le tableau [3.3]. Dans ( $E_\infty$ ), comme dans ( $E_0$ ), le facteur  $\eta$ , rapport des raideurs sollicitées au primaire et au secondaire, apparaît.
- **Déformées modales** : comme pour le cas série, l'établissement des expressions des déformées mécaniques modales et des potentiels électriques modaux consistent en la simple détermination des constantes d'intégration  $B_u, C_u, D_u$  et  $D_\phi$  en fonction de  $A_u$  à partir du système d'équations caractérisé par la matrice  $\mathbf{M}_\infty(\omega)$ . Les calculs sont développés dans l'annexe A et les expressions des  $i^{\text{èmes}}$  déformées mécanique  $\underline{u}_{1\infty}^{(i)}$  et électrique  $\underline{\phi}_\infty^{(i)}$  sont regroupées dans le tableau [3.3]. Les facteurs  $U_\infty^{(i)}$  et  $\Phi_\infty^{(i)}$  sont issus de la condition de normalisation (3.29). En effet,  $U_\infty^{(i)}$  s'apparente, comme  $U_0^{(i)}$ , à la constante d'intégration  $A_u$  et  $\Phi_\infty^{(i)} = \bar{h}_{33} U_\infty^{(i)}$ .
- **Propriétés électromécaniques** : les différentes caractéristiques électrodynamiques pour le cas parallèle sont finalement déduites selon les mêmes relations que précédemment. Le développement des calculs est donné dans l'annexe A et les résultats sont répertoriés dans le tableau [3.3].
- **Équations d'équilibre** : d'après (3.36), le système d'équations régissant la dynamique d'un transformateur piézoélectrique pour le cas parallèle ( $\forall t > 0, q_s(t) = 0$ ) s'écrit :

$$\begin{cases} [M_\infty]\{\ddot{\eta}\} + [K_\infty]\{\eta\} = [\psi_{p\infty}]v_p \\ i_p = [\psi_{p\infty}]^T\{\dot{\eta}\} + C_p\dot{v}_p \\ [\psi_{s\infty}]^T\{\dot{\eta}\} = C_s\dot{v}_s \end{cases} \quad (3.53)$$

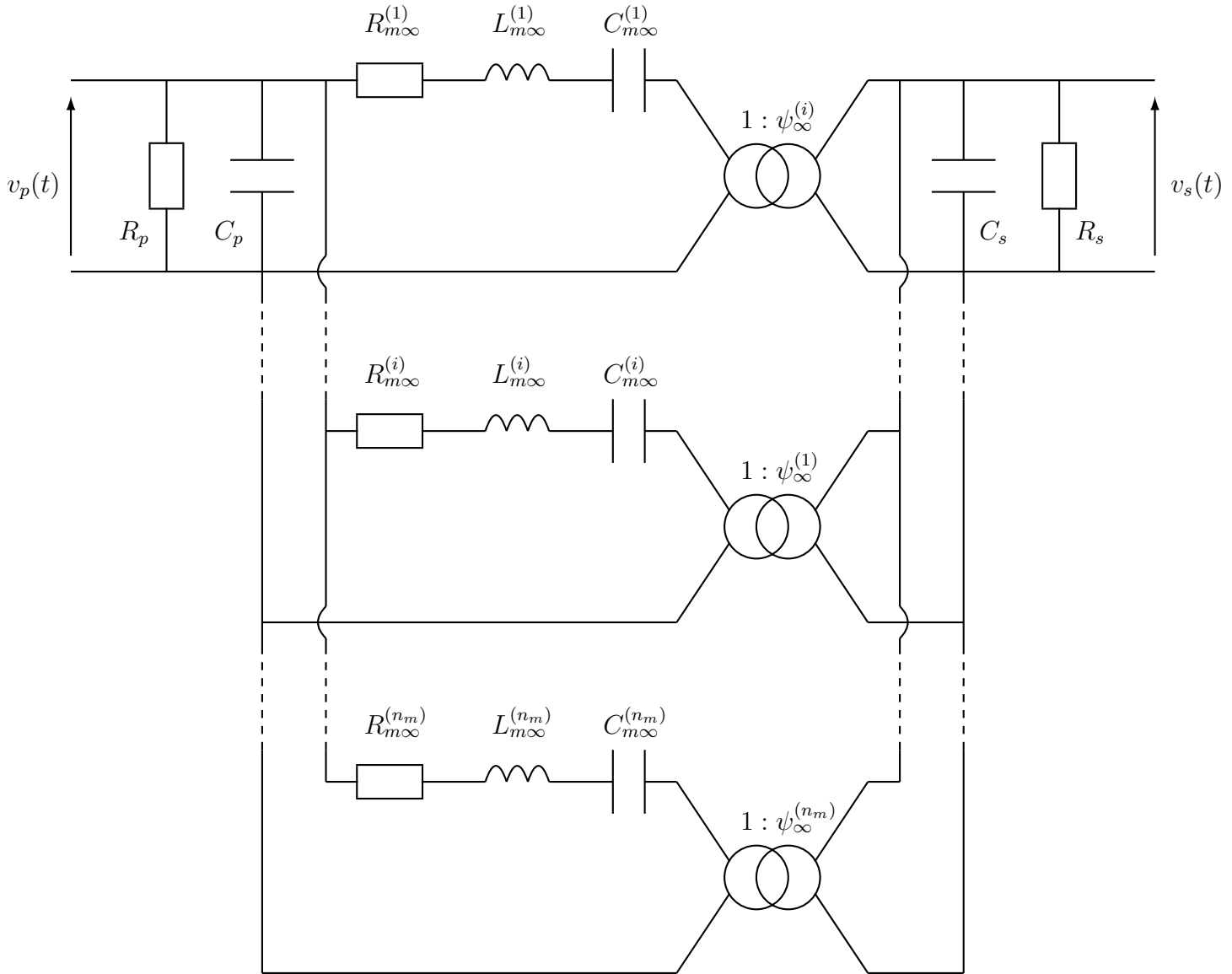


FIGURE 3.4 – Schéma électrique équivalent d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen – Cas parallèle ( $R_{ch} \rightarrow +\infty$ )

Compte tenu des conditions électriques permettant l'obtention du cas parallèle, le schéma électrique équivalent donné sur la figure 3.2 diffère du schéma général par la simple absence de la résistance de charge ( $R_{ch} \rightarrow +\infty$ ). Par conséquent, le schéma électrique équivalent pour le cas parallèle se ramène au schéma donné sur la figure 3.4 où les expressions des éléments des différentes branches motionnelles, valables pour  $i = 1, \dots, n_m$ , sont exposées ci-dessous :

$$R_{m\infty}^{(i)} = \frac{1}{Q_m} \sqrt{\frac{L_{m\infty}^{(i)}}{C_{m\infty}^{(i)}}} ; \quad L_{m\infty}^{(i)} = \frac{M_{\infty}^{(i)}}{[\psi_{p\infty}^{(i)}]^2} ; \quad C_{m\infty}^{(i)} = \frac{[\psi_{p\infty}^{(i)}]^2}{K_{\infty}^{(i)} - \frac{[\psi_{s\infty}^{(i)}]^2}{C_s}}$$

TABLE 3.3 – Paramètres du modèle analytique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen (cas parallèle  $\Leftrightarrow R_{ch} \rightarrow +\infty$ )

Équation en fréquence	$(E_\infty) \Leftrightarrow \eta \sin X_{1\infty} \cos X_{2\infty} + \cos X_{1\infty} \sin X_{2\infty} = 0$
Déformée mécanique modale $\underline{u}_{1\infty}^{(i)}$	$\underline{u}_{1\infty}^{(i)}(x_1) = U_\infty^{(i)} \begin{cases} \cos(k_{1\infty}^{(i)} x_1) - \tan X_{1\infty}^{(i)} \sin(k_{1\infty}^{(i)} x_1) , & -L_1 < x_1 < 0 \\ \cos(k_{2\infty}^{(i)} x_1) + \tan X_{2\infty}^{(i)} \sin(k_{2\infty}^{(i)} x_1) , & 0 < x_1 < L_2 \end{cases}$
Potentiel électrique modal $\underline{\phi}_\infty^{(i)}$	$\underline{\phi}_\infty^{(i)}(x_1) = \Phi_\infty^{(i)} \begin{cases} 0 , & -L_1 < x_1 < 0 \\ \cos(k_{2\infty}^{(i)} x_1) - 1 + \tan X_{2\infty}^{(i)} \sin(k_{2\infty}^{(i)} x_1) , & 0 < x_1 < L_2 \end{cases}$
Critère de normalisation	$\frac{1}{[U_\infty^{(i)}]^2} = \rho l e \left[ \frac{L_1}{2} \frac{1 + \text{sinc}(2X_{1\infty}^{(i)})}{\cos^2 X_{1\infty}^{(i)}} + \frac{L_2}{2} \frac{1 + \text{sinc}(2X_{2\infty}^{(i)})}{\cos^2 X_{2\infty}^{(i)}} \right]$
Raideur modale	$K_\infty^{(i)} = [U_\infty^{(i)}]^2 \left[ \frac{1}{s_{11}^E} \frac{l e}{2L_1} (X_{1\infty}^{(i)})^2 \frac{1 - \text{sinc}(2X_{1\infty}^{(i)})}{\cos^2 X_{1\infty}^{(i)}} + \frac{1}{s_{33}^E(1 - k_{33}^2)} \frac{l e}{2L_2} (X_{2\infty}^{(i)})^2 \frac{1 - \text{sinc}(2X_{2\infty}^{(i)})}{\cos^2 X_{2\infty}^{(i)}} \right]$
Facteurs modaux de conversion	$\psi_{p\infty}^{(i)} = U_\infty^{(i)} n l \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{1 - \cos X_{1\infty}^{(i)}}{\cos X_{1\infty}^{(i)}} \quad ; \quad \psi_{s\infty}^{(i)} = U_\infty^{(i)} \frac{l e}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \frac{\cos X_{2\infty}^{(i)} - 1}{\cos X_{2\infty}^{(i)}}$
Capacités bloquées	$C_p = n^2 \frac{L_1 l}{e} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \quad ; \quad C_s = \frac{l e}{L_2} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)$

### 3.2.7 Commentaires

Quelques remarques sur l'application de la modélisation générale par approche variationnelle au transformateur piézoélectrique de type Rosen peuvent d'ores et déjà être faites.

Premièrement, lors de l'analyse vibratoire permettant l'établissement de la forme du champ de déplacement, une distinction sur les raideurs sollicitées au primaire et au secondaire de la structure a été supposée. Cette hypothèse dite « anisotrope » n'est généralement pas prise en considération. Les modèles proposés dans la littérature font souvent appel à l'hypothèse « isotrope » qui considère pour l'analyse vibratoire le transformateur comme une unique poutre de raideur constante  $c$  et de densité volumique  $\rho$  [Ho07a][Ho07b]. Or, si le développement des calculs s'en trouve simplifié, les résultats diffèrent sensiblement. En effet, d'après [Nad09], sur un transformateur piézoélectrique de type Rosen à secondaire ouvert, les deux hypothèses mènent à des résultats concordants pour le mode  $\lambda$  (deuxième mode d'élongation) et divergent progressivement, et ce de manière significative, avec l'augmentation du rang du mode. Toutefois, il ne faut pas écarter l'hypothèse isotrope aussi promptement. Le choix de telle ou telle hypothèse réside dans les objectifs finaux de la modélisation. Le modèle simple, basé sur l'hypothèse isotrope, sera suffisant pour étudier la dynamique de l'architecture autour du mode principal de fonctionnement du transformateur. Le modèle plus précis, s'appuyant sur l'hypothèse anisotrope, devient nécessaire si une approche multimodale est requise pour un problème d'optimisation sans sélection modale préalable ou dans le cas d'une étude précise de la répartition du potentiel électrique à la surface du secondaire.

Deuxièmement, le nombre  $n_m$  de modes longitudinaux à considérer dans l'approximation du vecteur déplacement  $\{u\}$  n'a pas été fixé dans l'étude précédente. Ce dernier dépend des dimensions géométriques de la structure considérée. En effet, le modèle unidimensionnel développé précédemment suppose un découplage parfait entre les modes de sorte que les fréquences de résonance des modes en extension soient largement inférieures aux fréquences de résonance des autres modes. En d'autres termes, les vibrations selon la largeur et l'épaisseur du transformateur doivent pouvoir être négligées. Ainsi, plus les facteurs de forme  $L/l$  et  $L/e$  sont grands devant l'unité, plus  $n_m$  est important. Par la suite,  $n_m$  sera préalablement déterminé de manière expérimentale par le biais d'une caractérisation fréquentielle de l'architecture retenue. Toutefois, les conditions dimensionnelles à satisfaire pour réduire l'étude au cas d'une fine poutre n'éliminent nullement l'existence de modes de flexion susceptibles d'apparaître dans le plage de fréquence opérationnelle. Dans le cadre d'une étude théorique étendue à différents types de déformations (flexion, cisaillement,...), la méthode analytique précédemment développée pourra à nouveau être exploitée pour ces modes qualifiées d'indésirables.

En outre, il est nécessaire de remarquer que les vecteurs de la base modale sont définis par la relation  $\{v^{(n)}\} = U^{(n)}\{\underline{v}^{(n)}\}$  où  $U^{(n)}$ , issu du critère de norma-



lisation, s'exprime en  $kg^{-1/2}$  et  $\{\underline{v}^{(n)}\}$  est le vecteur des déformées adimensionnelles mécanique et électrique solutions des systèmes d'équations (3.14) et (3.15). Par conséquent, les quantités  $M^{(i)}$ ,  $K^{(i)}$ ,  $\psi_p^{(i)}$  et  $\psi_s^{(i)}$ , qui dépendent explicitement du coefficient  $U^{(i)}$ , n'ont pas nécessairement de valeurs physiques réelles de part leur définition modale. Seules les grandeurs apparaissant dans le schéma électrique équivalent ont un véritable sens et de ce fait, serviront par la suite de points de comparaison entre les différents modèles mis en place.

Enfin, le schéma électrique équivalent issu de la modélisation, qui permet de rendre compte des propriétés électromécaniques de la structure, voit ses caractéristiques évoluées en fonction de la charge résistive placée au secondaire. En effet, chaque élément  $R_m^{(i)}$ ,  $L_m^{(i)}$  et  $C_m^{(i)}$  de la  $i^{\text{ème}}$  branche motionnelle prend respectivement des valeurs dans les intervalles  $[R_{m0}^{(i)}, R_{m\infty}^{(i)}]$ ,  $[L_{m0}^{(i)}, L_{m\infty}^{(i)}]$  et  $[C_{m0}^{(i)}, C_{m\infty}^{(i)}]$  lorsque la charge résistive varie. Il en va de même pour le facteur de transformation  $\psi^{(i)}$ .

Ce qui vient d'être formulé constitue la modélisation analytique de la dynamique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen par application du principe de moindre action. Afin de valider le modèle ainsi établi, les résultats vont être confrontés aux conclusions issues de plusieurs simulations numériques obtenues à l'aide du logiciel de calculs par éléments finis ANSYS® et comparés à différentes caractérisations expérimentales. La partie suivante aura pour but de décrire les procédures numériques et expérimentales mises à contribution pour la validation du modèle analytique.

### 3.3 Validation numérique et expérimentale

#### 3.3.1 Modèle numérique d'un transformateur piézoélectrique

La modélisation numérique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen proposée dans cette section réside dans l'identification des paramètres du schéma électrique équivalent à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis ANSYS®(v11.0). Cette méthode, largement utilisée pour caractériser les dispositifs piézoélectriques, permet une vérification simple et accessible du modèle théorique établi précédemment. Plus spécifiquement, après avoir défini la géométrie de la structure et précisé les conditions aux limites mécaniques et électriques, la méthode d'identification s'appuie sur une étude statique et une analyse modale de l'architecture retenue afin d'extraire les capacités bloquées du primaire et du secondaire et les éléments modaux de chaque branche motionnelle [Fig10]. Les différentes phases autour desquelles s'articulent l'identification numérique des paramètres du schéma électrique équivalent sont détaillées ci-après.

#### Géométrie du transformateur

La structure étudiée est naturellement le transformateur piézoélectrique de type Rosen considéré comme l'association de deux blocs rectangulaires (cf. figure 3.5(a))

pour lesquels les matrices des matériaux sont définies en respectant les directions de polarisation de chacune des parties (cf. tableau [1.4]). Le caractère multicouche du primaire n'est pas explicitement pris en considération dans la définition de la géométrie mais son influence préalablement occultée sera directement répercutée dans les calculs développés par la suite. En outre, les effets thermiques et les effets non linéaires, issus physiquement de contraintes mécaniques trop élevées ou d'un champ électrique appliqué trop important, ne sont pas pris en considération dans le modèle numérique présenté dans cette section. Concernant les conditions aux limites, mécaniquement, à l'instar des hypothèses avancées pour l'établissement du modèle analytique, aucune contrainte n'est imposée sur la structure (conditions aux limites « libre - libre »). Pour les hypothèses électriques, plusieurs groupes de nœuds doivent être sélectionnés afin de matérialiser les électrodes d'alimentation et de masse du primaire et l'électrode du secondaire (cf. figure 3.5(b)). Sur chacune d'elles pourront être imposées à loisir des potentiels électriques (pour différencier par exemple le cas série et le cas parallèle) ou estimer la quantité de charges recueillie pour chacun des modes de vibration. Il est à préciser que l'étude numérique se réduit au volume de l'élément piézoélectrique, omettant légitimement l'impact du milieu environnant sur le comportement électromécanique ou électromagnétique.

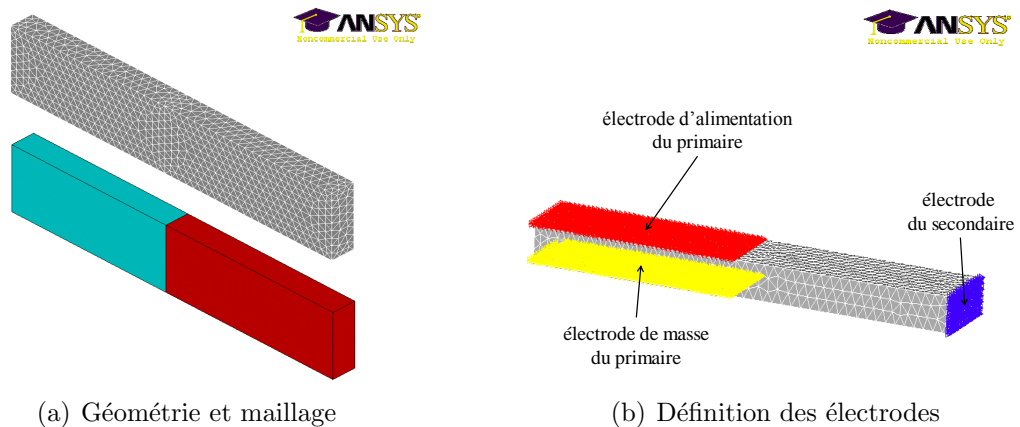


FIGURE 3.5 – Transformateur piézoélectrique de type Rosen sous ANSYS®

### Étude statique

L'étude statique permet de déterminer les capacités bloquées du primaire et du secondaire à partir des propriétés diélectriques de la céramique. L'idée est d'appliquer une différence de potentiel entre les électrodes concernées (typiquement 1 V) et d'évaluer la quantité de charges résultante. La capacité statique est alors obtenue par la simple relation :

$$C_i^0 = \frac{q_i}{V} \quad \text{pour } i = p, s \quad (3.54)$$

où  $q_p$ ,  $q_s$  et  $V$  sont respectivement les quantités de charges relatives aux électrodes du primaire et du secondaire et la tension appliquée. Cependant, les capacités

ainsi calculées ne correspondent pas aux capacités bloquées du schéma électrique équivalent. En effet, l'effet piézoélectrique implique par son action une pondération de l'expression par le coefficient de couplage adéquat. Il vient alors :

$$\boxed{\begin{aligned} C_p &= n^2 C_p^0 (1 - k_{31}^2) \\ C_s &= C_s^0 (1 - k_{33}^2) \end{aligned}} \quad (3.55)$$

Il est à noter que le caractère multicouche du primaire a été pris en compte dans l'expression de la capacité bloquée associée. En effet, le primaire étant constitué de  $n$  couches, la capacité  $C_p$  se voit être multipliée par un facteur  $n^2$ .

### Analyse modale

L'analyse modale permet d'extraire les fréquences de résonance et les déformées mécaniques et électriques modales de la structure. Comme lors de l'analyse vibratoire du modèle analytique précédemment établi, il existe une indétermination sur l'amplitude de ces déformées de sorte qu'il faille opter pour un critère de normalisation afin de lever le voile sur cette inconnue. Le logiciel ANSYS® propose un choix entre deux critères de normalisation : soit le maximum de l'amplitude des déformées est ramené à l'unité, soit la matrice des masses modales est normalisée. C'est sur cette dernière option que se base l'analyse modale qui va suivre. En outre, comme la charge résistive placée au secondaire influence le comportement électromécanique du transformateur, l'imposition des conditions électriques au travers des électrodes d'alimentation et de masse de l'architecture mène à une identification différente des paramètres modaux. Par la suite, seuls les cas série ( $R_{ch} = 0$ ) et parallèle ( $R_{ch} \rightarrow +\infty$ ) seront examinés. Par conséquent, l'obtention de tels cas suppose que soit imposé un potentiel nul sur les électrodes d'alimentation et de masse du primaire. Un potentiel nul sera de surcroît imposé sur l'électrode du secondaire pour l'étude du cas série. Pour le cas parallèle, en revanche, aucune précision sur l'état électrique de l'électrode du secondaire ne sera à apporter (circuit secondaire ouvert).

A l'issue de l'analyse modale, sans distinction préalable, une liste de modes de vibration et leur fréquence associée est obtenue. Une recherche systématique des modes de fonctionnement opérationnel doit être effectuée afin d'en extraire les déformées caractéristiques. Pour le transformateur piézoélectrique de type Rosen, seuls les quatre premiers modes d'élongation selon l'axe ( $Ox_1$ ) suscitent un intérêt (les trois premiers sont physiquement pertinents car ils présentent un gain en transformation significatif, en tout cas pour une structure présentant des longueurs au primaire et au secondaire sensiblement égales). En guise d'illustration, les déformées mécaniques 3D des modes longitudinaux d'une structure à secondaire ouvert sont données sur la figure 3.6.

Outre l'estimation des fréquences propres et le tracé des déformées modales, cette méthode permet une identification des paramètres du schéma électrique équivalent basée sur une estimation des énergies caractéristiques et l'exploitation des co-

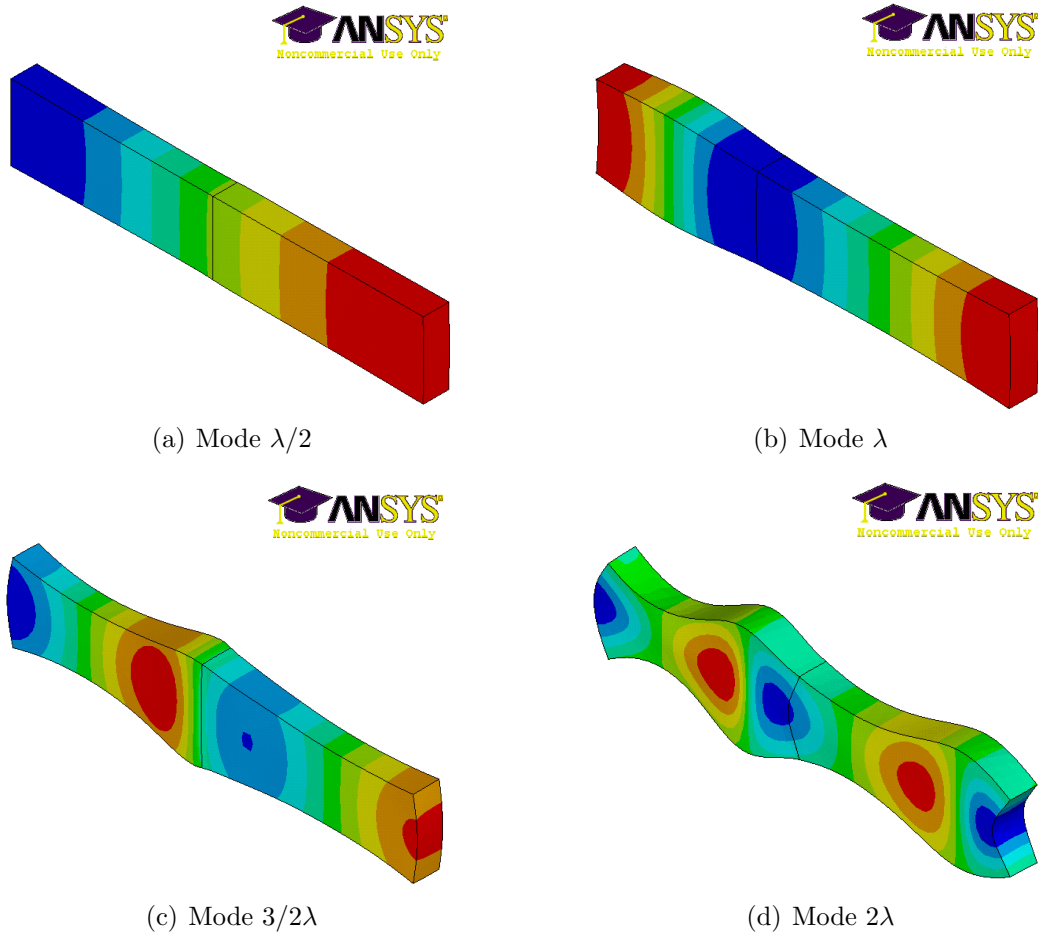


FIGURE 3.6 – Déformées mécaniques 3D obtenues sous ANSYS® pour les quatre premiers modes longitudinaux d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen

ordonnées généralisées du problème considéré. Plus concrètement, ANSYS® peut calculer les énergies cinétique et élastique du transformateur, respectivement notées  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{U}$ , à partir de l'amplitude maximale de déplacement  $q_u$ , variable communément adoptée comme coordonnée généralisée mécanique. Par définition, ces énergies sont liées à  $q_u$  par les relations suivantes :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}M\dot{q}_u^2 = \frac{1}{2}M\omega_r^2 q_u^2 \quad (3.56)$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}Kq_u^2 \quad (3.57)$$

où  $M$  et  $K$  sont respectivement les masses et raideurs modales de la structure. Ces quantités sont déterminées pour chaque mode de pulsation de résonance  $\omega_r$  retenu.

Les facteurs de conversion électromécanique du primaire et du secondaire sont quant à eux respectivement calculés à partir des rapports entre les quantités de charges  $q_p$  et  $q_s$  et l'amplitude maximale de déplacement  $q_u$ . Comme le primaire est court-circuité, la quantité de charges  $q_p$  est accessible de sorte que le facteur

de conversion électromécanique du primaire s'exprime, aussi bien pour le cas série que pour le cas parallèle, comme suit :

$$\boxed{\psi_p = n \frac{q_p}{q_u}} \quad (3.58)$$

Cette quantité est de plus proportionnelle au nombre  $n$  de couches dont est constitué le primaire. Concernant le facteur de conversion électromécanique du secondaire, une précision est à apporter sur son expression prise dans le cas parallèle : comme il est impossible d'évaluer la quantité de charges présente sur l'électrode du secondaire (transformateur ouvert), la grandeur  $\psi_{s\infty}$  est donnée en fonction de l'amplitude  $V_s$  du potentiel électrique pris par l'électrode (cf. dernière équation du système (3.53)). De ce fait, le facteur de conversion électromécanique du secondaire s'écrit différemment, pour les cas série et parallèle, de sorte que :

$$\boxed{\psi_{s0} = \frac{q_s}{q_u}} \quad ; \quad \boxed{\psi_{s\infty} = \frac{C_s V_s}{q_u}} \quad (3.59)$$

Les caractéristiques modales sont dès lors évaluées, à l'exception de la résistance motionnelle  $R_m$  et des pertes diélectriques, et les paramètres du schéma électrique équivalent peuvent être calculés. Ainsi, pour les cas série et parallèle, l'inductance motionnelle  $L_m$ , la capacité motionnelle  $C_m$  et le rapport de transformation  $\psi$  sont données par les relations suivantes :

- Cas série :

$$\boxed{L_{m0} = \frac{M_0}{\psi_{p0}^2}} \quad ; \quad \boxed{C_{m0} = \frac{\psi_{p0}^2}{K_0}} \quad ; \quad \boxed{\psi_0 = \frac{\psi_{p0}}{\psi_{s0}}} \quad (3.60)$$

- Cas parallèle :

$$\boxed{L_{m\infty} = \frac{M_\infty}{\psi_{p\infty}^2}} \quad ; \quad \boxed{C_{m\infty} = \frac{\psi_{p\infty}^2}{K_\infty - \frac{\psi_{s\infty}^2}{C_s}}} \quad ; \quad \boxed{\psi_\infty = \frac{\psi_{p\infty}}{\psi_{s\infty}}} \quad (3.61)$$

### 3.3.2 Caractérisation expérimentale

La caractérisation expérimentale d'un transformateur piézoélectrique réside dans l'identification des paramètres du schéma électrique équivalent caractérisant son comportement électromécanique. Afin de déterminer ces valeurs, la procédure classique de modélisation du comportement électrodynamique d'une céramique piézoélectrique par schéma électrique équivalent (schéma de Mason) est mise à contribution. Très simplement, ce modèle rassemble sous la forme d'un schéma électrique les caractéristiques électriques et mécaniques d'un système fonctionnant autour d'une fréquence de résonance particulière. Après une brève présentation de cette méthode où seront exposés les conditions d'application et les résultats susceptibles d'être obtenus, cette démarche sera employée à la détermination des paramètres du schéma électrique équivalent du transformateur considéré.

### 3.3.2.1 Méthode d'identification conventionnelle [Bri07]

Cette démarche expérimentale rapide et simple s'appuie sur l'exploitation du diagramme de Bode et du tracé dans le plan de Nyquist de l'admittance et de l'impédance interprétés en termes de schéma électrique vu des bornes. En effet, le comportement électrodynamique d'une céramique piézoélectrique est classiquement représenté par le schéma électrique équivalent présenté sur la figure 3.7, en supposant valide l'hypothèse consistant à isoler une des branches motionnelles lorsque cette dernière est alimentée proche de sa résonance. Le schéma est constitué des éléments suivants :

- Une branche statique d'admittance  $\underline{Y}_0$  symbolisée par une cellule RC parallèle et image des propriétés diélectriques de la structure.  $C_0$  est la capacité de l'élément piézoélectrique encastré et dépend directement du mode de couplage piézoélectrique élémentaire sollicité.  $R_0$  représente les pertes diélectriques de la structure. Ces pertes regroupent les effets dus à la conductivité parasite et à l'hystérésis (dans le plan champ-déplacement) qui caractérise son comportement ferroélectrique. Elles sont dépendantes de la fréquence d'utilisation et de l'angle de pertes caractéristique du matériau.
- Une branche dynamique d'impédance  $\underline{Z}_m$  représentée par une branche RLC série et image des propriétés mécaniques de l'élément vibrant. Le couple  $(L_m, C_m)$  rend compte du phénomène de résonance et les pertes mécaniques, dues aux frottements internes (mouvement des parois délimitant les domaines élémentaires du milieu) apparaissant sous l'effet de la déformation, sont symbolisées par la résistance  $R_m$ .

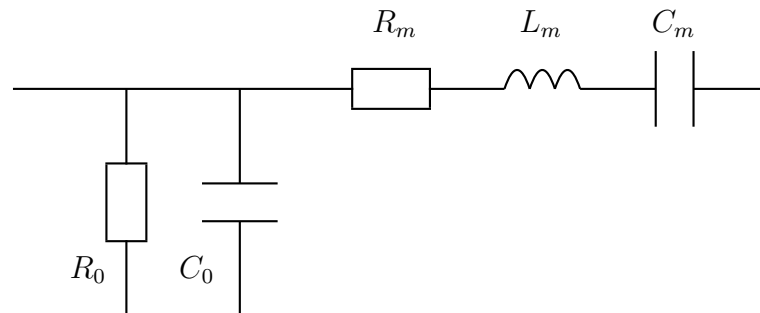


FIGURE 3.7 – Schéma électrique équivalent d'une céramique piézoélectrique fonctionnant au voisinage de la résonance

Fort de ces définitions, l'admittance globale d'une céramique piézoélectrique vue des bornes s'exprime très simplement par la relation suivante :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_0 + \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{1}{R_0} + jC_0\omega + \frac{1}{R_m[1 + jQ_m\Delta(\omega)]} \quad (3.62)$$

où  $Q_m$  et  $\Delta(\omega)$  désignent respectivement le facteur de qualité mécanique, image de l'acuité de la résonance, et la dissonance. Ils ont pour expression :

$$Q_m = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{L_m}{C_m}} \quad ; \quad \Delta(\omega) = \frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \quad \text{avec} \quad \omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}} \quad (3.63)$$

Il est intéressant de tracer l'admittance car l'alimentation de la céramique se faisant généralement à tension constante, la partie réelle et la partie imaginaire de l'admittance sont directement représentatives de la puissance active et de la puissance réactive absorbées. En outre, dans l'hypothèse d'un facteur de qualité mécanique élevé, il est possible de montrer que le tracé de l'admittance dans le plan de Nyquist s'apparente à un cercle. En effet, les parties réelle et imaginaire de  $\underline{Y}$  s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\underline{Y}) = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_m[1 + Q_m^2 \Delta^2(\omega)]} \\ \operatorname{Im}(\underline{Y}) = C_0 \omega - \frac{Q_m \Delta(\omega)}{R_m[1 + Q_m^2 \Delta^2(\omega)]} \end{cases} \quad (3.64)$$

Par conséquent,  $\operatorname{Re}(\underline{Y})$  et  $\operatorname{Im}(\underline{Y})$  sont liées par l'équation suivante :

$$\left[ \operatorname{Re}(\underline{Y}) - \frac{1}{R_0} - \frac{1}{2R_m} \right]^2 + \left[ \operatorname{Im}(\underline{Y}) - C_0 \omega \right]^2 = \left( \frac{1}{2R_m} \right)^2 \quad (3.65)$$

Cette dernière égalité peut s'interpréter, pour de faibles variations de la pulsation autour de  $\omega_s$ , comme l'équation d'un cercle de centre  $\Omega(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{2R_m}, C_0 \omega_s)$  et de rayon  $\frac{1}{2R_m}$ . La figure 3.8(b) illustre ce propos et permet de surcroît de mettre en évidence un certain nombre de pulsations caractéristiques par le truchement desquelles l'identification des paramètres va être rendue possible. Voici une brève description des caractéristiques que revêtent ces différentes grandeurs :

- **Pulsation de résonance série**  $\omega_s$  : cette pulsation correspond à la valeur maximale de la partie réelle de l'admittance. Elle annule de plus la dissonance  $\Delta(\omega)$  si bien qu'elle s'écrit simplement :

$$\max[\operatorname{Re}(\underline{Y})] \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}} \quad (3.66)$$

A cette pulsation, les parties réelle et imaginaire de l'admittance prennent des relations simples qui s'avèreront utiles pour l'identification de sorte que :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\underline{Y}(\omega_s)] = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_m} \\ \operatorname{Im}[\underline{Y}(\omega_s)] = C_0 \omega_s \end{cases} \quad (3.67)$$

- **Pulsation de résonance parallèle**  $\omega_p$  : cette pulsation permet d'obtenir la valeur maximale de la partie réelle de l'impédance. Dans l'hypothèse où la résistance diélectrique  $R_0$  est négligée et pour un important facteur de

qualité mécanique, l'expression analytique de cette pulsation prend la forme suivante :

$$\max[\operatorname{Re}(\underline{Z})] \leftrightarrow \boxed{\omega_p = \omega_s \sqrt{1 + \frac{1}{\delta}}} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{C_0}{C_m} \quad (3.68)$$

- **Pulsations quadrantales**  $\omega_1$  et  $\omega_2$  : ces pulsations correspondent à un argument de l'admittance égal à  $\pm \frac{\pi}{4}$  ou, de manière équivalente, à un module de l'admittance égal à  $\frac{|Y|_{max}}{\sqrt{2}}$ . De ce fait, l'expression mathématique prise par ces pulsations donne :

$$\arg(\underline{Y}) = \pm \frac{\pi}{4} \leftrightarrow \boxed{\omega_{1,2} = \frac{\omega_s}{2Q_m} \left[ \mp 1 + \sqrt{1 + 4Q_m^2} \right]} \quad (3.69)$$

En outre, de part la définition de ces pulsations, la différence  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  s'apparente clairement à la bande passante à  $-3dB$ . Une mesure directe de cette dernière permet d'estimer le facteur de qualité mécanique de la structure. Cependant, par la suite, cette méthode ne sera pas retenue pour évaluer  $Q_m$  puisque la mesure elle-même dépend fortement du facteur de qualité. On préférera utiliser directement la mesure des fréquences quadrantales puisque d'après la relation (3.69), la résolution de l'équation vis-à-vis du facteur de qualité mécanique mène à la relation :

$$Q_m = \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\Delta\omega} \quad (3.70)$$

De plus, pour les fréquences quadrantales, les parties réelle et imaginaire de l'admittance ont des expressions simples qui complètent avantageusement le système (3.66) de sorte que les quantités  $R_0$ ,  $C_0$  et  $R_m$  puissent être déterminées. Ces quantités s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\underline{Y}(\omega_{1,2})] = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2R_m} \\ \operatorname{Im}[\underline{Y}(\omega_{1,2})] = C_0 \omega_{1,2} \pm \frac{1}{2R_m} \end{cases} \quad (3.71)$$

- **Pulsations de résonance**  $\omega_r$  et **d'antirésonance**  $\omega_a$  : ces pulsations sont définies par l'annulation de la partie imaginaire de l'admittance. Il est possible de donner une expression analytique à ces deux pulsations dans l'hypothèse où la résistance diélectrique de la céramique est négligée et dans le cas où le facteur de qualité mécanique est élevé. Il vient alors :

$$\operatorname{Im}(\underline{Y}) = 0 \leftrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_s \sqrt{1 + \frac{\delta}{Q_m^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_a = \omega_p \sqrt{1 - \frac{\delta}{Q_m^2}}} \quad (3.72)$$

En pratique, l'estimation des fréquences annulant la partie imaginaire de l'admittance étant peu précise, l'utilisation des pulsations  $\omega_r$  et  $\omega_a$  dans l'identification des paramètres du schéma électrique équivalent est écartée.



A noter que, comme les céramiques couramment utilisées présentent un facteur de qualité mécanique élevé ( $Q_m \gg 1$ ), les pulsations série et parallèle peuvent s'écrire :

$$\omega_s = \frac{\omega_M + \omega_r}{2} \quad , \quad \omega_p = \frac{\omega_m + \omega_a}{2} \quad (3.73)$$

où  $\omega_M$  et  $\omega_m$  sont respectivement les pulsations du maximum et du minimum du module de l'admittance.

Au regard des caractéristiques mises en lumière sur les différents tracés, il est possible de dégager une procédure d'identification des éléments du schéma électrique équivalent. Cette méthode très largement utilisée et depuis longtemps éprouvée recelle néanmoins quelques variantes dans son application en jouant notamment sur les propriétés de l'admittance et de l'impédance aux différentes fréquences caractéristiques. De ce fait, les relations proposées par la suite menant à la détermination des éléments du schéma électrique équivalent ne sont pas uniques. En pratique, il a été choisi d'estimer classiquement la résistance diélectrique  $R_0$  à basse fréquence (ou en tout cas pour des pulsations éloignées de la fréquence série) et, en vertu de la première relation du système (3.67), d'en déduire la résistance motionnelle  $R_m$ . Par la connaissance de cette dernière quantité et en mettant à profit les expressions remarquables des parties réelle et imaginaire de l'admittance aux fréquences quadrantes (cf. équation (3.71)), le restant des éléments motionnels peut être atteint. Enfin, la capacité motionnelle  $C_m$  étant connue, la capacité bloquée  $C_0$  peut être calculée à l'aide des fréquences série et parallèle. En résumé, l'identification des éléments du schéma électrique équivalent s'effectuera par le biais des relations suivantes :

- Caractéristiques diélectriques :

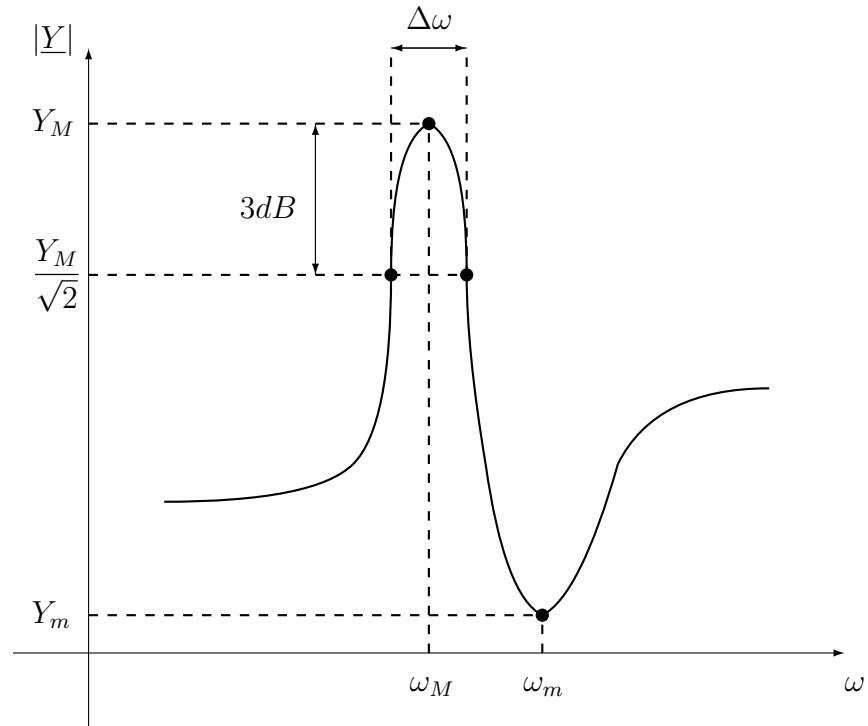
$$\boxed{R_0 = \frac{1}{\operatorname{Re}[\underline{Y}(\omega \ll \omega_s)]}} \quad ; \quad \boxed{C_0 = \frac{C_m}{\omega_p^2/\omega_s^2 - 1}} \quad (3.74)$$

- Caractéristiques motionnelles :

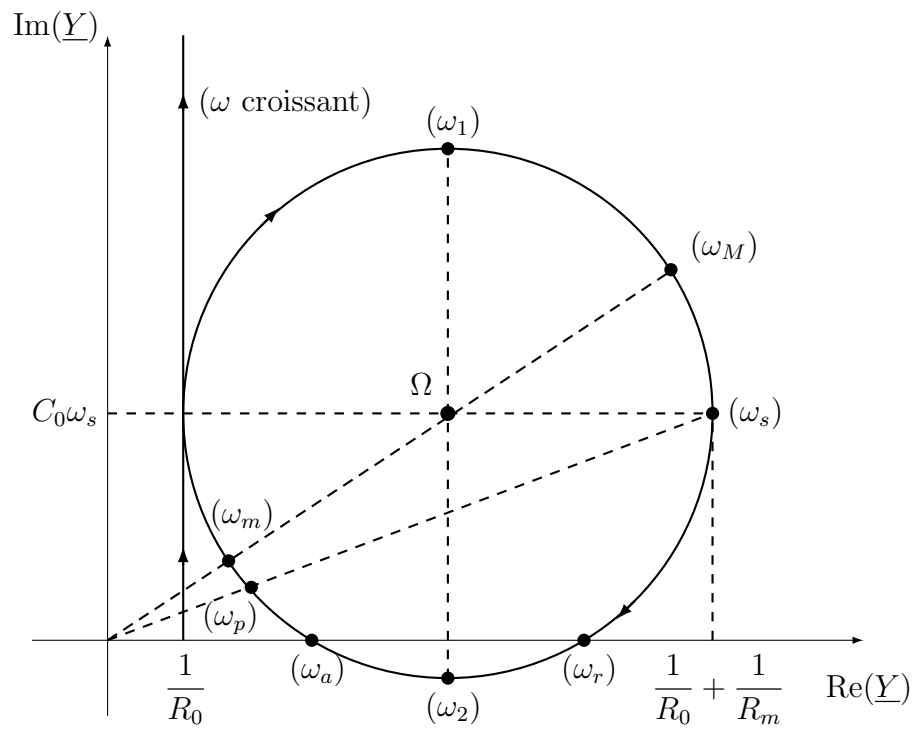
$$\boxed{R_m = \frac{1}{\operatorname{Re}[\underline{Y}(\omega_s)] - \frac{1}{R_0}}} \quad ; \quad \boxed{L_m = \frac{R_m}{\omega_2 - \omega_1}} \quad ; \quad \boxed{C_m = \frac{1}{R_m} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 \omega_2}} \quad (3.75)$$

En outre, le facteur de qualité mécanique  $Q_m$  est calculé à l'aide de la méthode des fréquences quadrantes (cf. relation (3.70)).

La méthode d'identification qui vient d'être détaillée constitue l'outil principal pour la caractérisation expérimentale des transformateurs piézoélectriques. Dans la section suivante, la procédure générale de détermination des éléments du schéma électrique équivalent d'un transformateur sera présentée et appliquée à une structure de type Rosen pour les cas série et parallèle.



(a) Diagramme de Bode (module)



(b) Diagramme de Nyquist

FIGURE 3.8 – Tracés de l'admittance équivalente autour d'une résonance

### 3.3.2.2 Application aux transformateurs piézoélectriques

La caractérisation expérimentale des transformateurs piézoélectriques est basée sur une double mesure d'admittance au primaire et au secondaire de la structure autour des modes principaux de fonctionnement de l'architecture considérée. En pratique, ces mesures sont réalisées à l'aide d'un analyseur d'impédance de précision (Agilent 4294A, Agilent Technologies Inc., Santa Clara, CA) sous faible tension (analyse « petits signaux »). Cet analyseur permet également de déterminer automatiquement les éléments de plusieurs schémas électriques équivalents (RLC série, parallèle,...) incluant le schéma précédemment introduit. Voici la démarche à adopter pour caractériser le comportement d'un transformateur piézoélectrique dans les cas série et parallèle (à noter que par la suite chaque grandeur mesurée relative aux admittances vue du primaire et du secondaire seront respectivement indicées à l'aide du chiffre 1 et 2).

**Cas série :** la détermination des éléments du schéma électrique équivalent pour le cas série s'effectue, pour chaque mode, au travers de deux relevés d'admittance, l'un mettant en évidence l'admittance, notée  $\underline{Y}_{p0}$ , vue du primaire à secondaire court-circuité (essai SecCC), l'autre figurant l'admittance, notée  $\underline{Y}_{s0}$ , vue du secondaire à primaire court-circuité (essai PrimCC). Les informations susceptibles d'être extraites pour chacun de ces essais sont explicitées ici :

- **essai SecCC :** pour l'essai à secondaire court-circuité, grâce à la modélisation par schéma électrique équivalent proposée dans la section précédente, l'admittance  $\underline{Y}_{p0}$  est rapprochée du schéma de la figure 3.7 de sorte que les éléments diélectriques du primaire et les caractéristiques motionnelles du transformateur puissent être directement déduites par le biais des relations suivantes :

$$\boxed{R_p = R_{01}} ; \boxed{C_p = C_{01}} ; \boxed{R_{m0} = R_{m1}} ; \boxed{L_{m0} = L_{m1}} ; \boxed{C_{m0} = C_{m1}}$$

- **essai PrimCC :** pour la mesure à primaire court-circuité, l'admittance  $\underline{Y}_{s0}$  est également rapprochée du schéma de la figure 3.7 permettant de poursuivre l'identification par la détermination des éléments diélectriques du secondaire via les relations suivantes :

$$\boxed{R_s = R_{02}} ; \boxed{C_s = C_{02}}$$

En outre, à l'aide des caractéristiques motionnelles obtenues lors du premier essai complétées de celles relevées au second essai, il est possible de déterminer pour chaque mode le facteur de transformation  $\psi_0$  qui vérifie conjointement les relations suivantes :

$$\boxed{\psi_0 = \sqrt{\frac{R_{m2}}{R_{m1}}} = \sqrt{\frac{L_{m2}}{L_{m1}}} = \sqrt{\frac{C_{m1}}{C_{m2}}}}$$

**Cas parallèle :** la détermination des paramètres du schéma électrique équivalent se fait d'une manière similaire au cas série par le biais de deux relevés d'admittance, l'un montrant l'admittance, notée  $\underline{Y}_{p\infty}$ , vue du primaire à secondaire

ouvert (essai SecO), l'autre donnant l'admittance, notée  $\underline{Y}_{p\infty}$ , vue du secondaire à primaire ouvert (essai PrimO). Les éléments qu'il est possible de calculer pour chacun de ces essais sont précisés ici :

- **essai SecO** : pour l'essai à secondaire ouvert, tout comme pour les mesures précédentes, l'admittance  $\underline{Y}_{p\infty}$  est rapprochée du schéma de la figure 3.7. Les éléments diélectriques du primaire se déduisent alors très simplement par les relations suivantes :

$$\boxed{R_p = R_{01}} \quad ; \quad \boxed{C_p = C_{01}}$$

Par contre, les caractéristiques motionnelles ne se calculent pas aussi aisément que pour le cas série. En effet, comme le transformateur est ouvert au secondaire, la capacité  $C_{m1}$  est fonction de la capacité motionnelle  $C_{m\infty}$  et de la capacité bloquée du secondaire  $C_s$  pondérée du facteur de transformation  $\psi_\infty$ . Ainsi, l'identification des caractéristiques motionnelles du transformateur mène aux égalités suivantes :

$$\boxed{R_{m\infty} = R_{m1}} \quad ; \quad \boxed{L_{m\infty} = L_{m1}} \quad ; \quad \boxed{\frac{C_{m\infty} C_s \psi_\infty^2}{C_{m\infty} + C_s \psi_\infty^2} = C_{m1}}$$

- **essai PrimO** : pour la mesure à primaire ouvert, l'admittance  $\underline{Y}_{s\infty}$  est également rapprochée du schéma de la figure 3.7. De la même façon que pour l'essai précédent, les éléments diélectriques du secondaire se déduisent très simplement à l'aide des relations :

$$\boxed{R_s = R_{02}} \quad ; \quad \boxed{C_s = C_{02}}$$

Afin de compléter l'identification, il ne reste plus qu'à exploiter la relation liant les différentes capacités pour une mesure au secondaire. Ceci peut être résumé par l'expression suivante :

$$\boxed{\frac{1}{\psi_\infty^2} \frac{C_{m\infty} C_p}{C_{m\infty} + C_p} = C_{m2}}$$

Par conséquent, la capacité motionnelle  $C_{m\infty}$  vérifie simultanément les égalités suivantes :

$$\boxed{C_{m\infty} = \frac{C_{m1} C_s \psi_\infty^2}{C_s \psi_\infty^2 - C_{m1}} = \frac{C_{m2} C_p \psi_\infty^2}{C_p - C_{m2} \psi_\infty^2}}$$

Enfin, à partir de ces deux essais, le rapport de transformation de la structure pour le cas parallèle peut être atteint puisqu'il vérifie conjointement les relations suivantes :

$$\boxed{\psi_\infty = \sqrt{\frac{R_{m2}}{R_{m1}}} = \sqrt{\frac{L_{m2}}{L_{m1}}} = \sqrt{\frac{C_p C_{m1} (C_s + C_{m2})}{C_s C_{m2} (C_p + C_{m1})}}$$

Par la suite, dans la partie relative aux résultats obtenus par les différents modèles, les tracés expérimentaux, pour les cas série et parallèle et pour chaque mode retenu, mettront en lumière :

- les mesures d'admittances réalisées à l'aide de l'analyseur d'impédance,
- les admittances déduites selon l'identification automatique du schéma électrique équivalent fournie par l'analyseur d'impédance,
- les admittances déduites à partir des calculs des éléments du schéma électrique équivalent précédemment développés dans la section § 3.3.2.

### 3.4 Simulation des modèles : comparaisons et discussions

Afin de vérifier la pertinence des modèles analytique, numérique et expérimental, un transformateur piézoélectrique de type Rosen CMT (Ceramic Multilayer Transformer) manufacturé par la société Noliac (Noliac Group, Kvistgaard, Danemark) [Nol@] est considéré. Il est façonné dans une céramique PZT de forme parallélépipédique avec un primaire feuilleté et un secondaire monocouche. Par construction, les couches supérieure et inférieure du primaire, tout comme une fine zone au commencement de la structure, ne sont pas polarisées (cf. figure 3.9). Ces parties passives qui ne contribuent pas à la conversion de l'énergie n'ont cependant aucune incidence sur le bon fonctionnement de l'architecture en raison d'une épaisseur négligeable devant la dimension principale du transformateur. Ce dernier a été dimensionné de sorte que le mode  $\lambda$  soit le mode principal de fonctionnement. Les caractéristiques géométriques et quelques coefficients relatifs au matériau de constitution de la structure sont présentés dans le tableau [3.4].

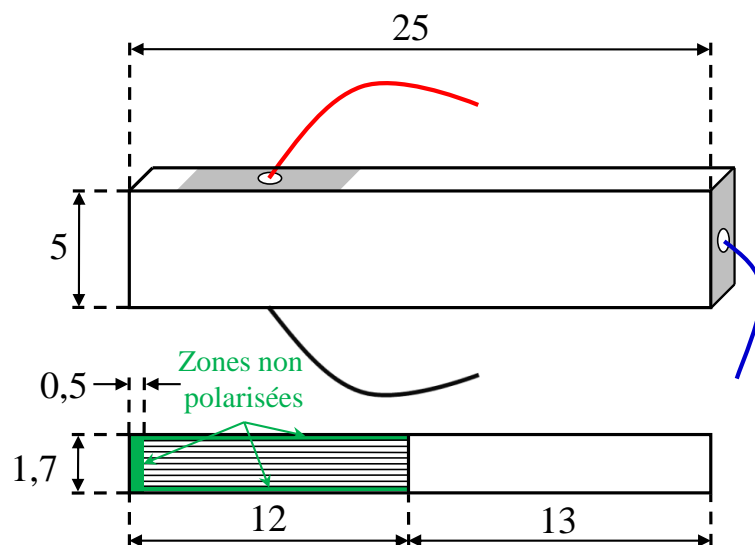


FIGURE 3.9 – Dimensions du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac

TABLE 3.4 – Caractéristiques géométriques et propriétés matérielles du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac [Nol@]

	Définition	Valeur	Unité
$L_0$	Longueur totale	25	mm
$L_1$	Longueur du primaire	12	mm
$L_2$	Longueur du secondaire	13	mm
$l$	Largeur	5	mm
$e$	Épaisseur	1.7	mm
$m$	Nombre de couches au primaire	16	
$\rho$	Masse volumique	7600	kg/m <sup>3</sup>
$s_{11}^E$	Compliance transversale à $\{E\}$ constant	$1.256 \times 10^{-11}$	m <sup>2</sup> /N
$s_{33}^E$	Compliance longitudinale à $\{E\}$ constant	$1.610 \times 10^{-11}$	m <sup>2</sup> /N
$d_{31}$	Coefficient piézoélectrique transversal	$-1.329 \times 10^{-10}$	m/N
$d_{33}$	Coefficient piézoélectrique longitudinal	$3.086 \times 10^{-10}$	m/N
$\varepsilon_{33}^T$	Permittivité longitudinale à $\{T\}$ constant	$1454\varepsilon_0$	F/m
$k_{31}$	Coefficient de couplage transversal	0.330	
$k_{33}$	Coefficient de couplage longitudinal	0.678	
$Q_m$	Facteur de qualité mécanique	300	
$\tan \delta$	Tangente de l'angle de pertes	0.003	

De plus, les matrices nécessaires à la mise en œuvre des différentes simulations numériques sous le logiciel ANSYS® sont données ci-après pour une polarisation définie selon l'axe ( $Ox_1$ ) :

- Matrice  $[c^E]$  des raideurs à champ électrique constant :

$$[c^E] = \begin{bmatrix} 14.1 & 8.06 & 7.87 & 0 & 0 & 0 \\ 8.06 & 14.1 & 7.87 & 0 & 0 & 0 \\ 7.87 & 7.87 & 11.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.04 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ en N/m}^2$$

- Matrice  $[e]$  des coefficients piézoélectriques :

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 13.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.3 & 0 & 0 \\ -5.16 & -5.16 & 15.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en C/m}^2$$

- Matrice  $[\varepsilon^S]$  des permittivités à déformation constante :

$$[\varepsilon^S] = \begin{bmatrix} 820 & 0 & 0 \\ 0 & 820 & 0 \\ 0 & 0 & 759 \end{bmatrix} \times \varepsilon_0 \text{ en F/m}$$

Avant même d'expliciter les différents résultats, il faut fixer le nombre  $n_m$  de modes longitudinaux à considérer dans l'approximation du champ de déplacement nécessaire à la mise en œuvre de la modélisation analytique unidimensionnelle. Un début de réponse quant à la valeur à lui donner avait été suggéré lors de la présentation de la modélisation numérique puisque, pour une structure présentant une longueur de primaire et de secondaire sensiblement égales, la pertinence à considérer les trois premiers modes d'élongation avait été soulignée du fait de leur gain en transformation manifeste. Plus qu'une simulation numérique, c'est assurément une caractérisation expérimentale de la structure qui va permettre d'entériner la valeur à donner à  $n_m$ . Pour ce faire, les tracés fréquentiels des modules de l'admittance vue du primaire pour les cas série et parallèle ont été relevés (cf. figure 3.10). Ces derniers font apparaître les quatre premiers modes longitudinaux et

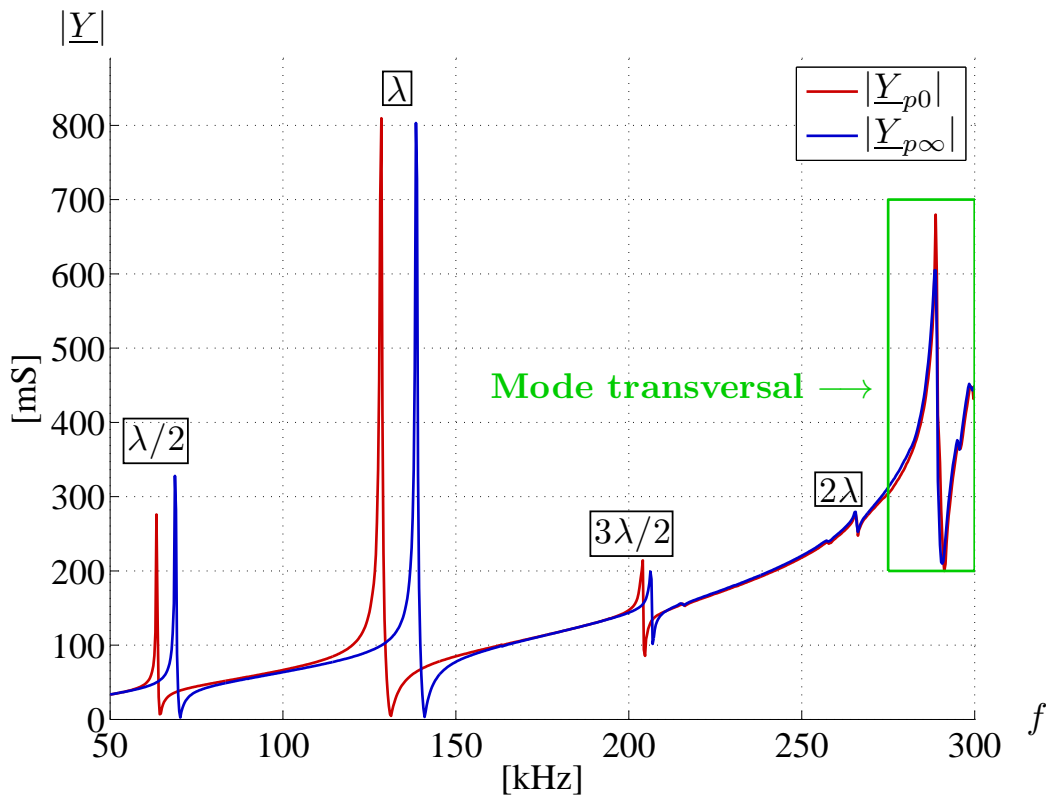


FIGURE 3.10 – Module de l'admittance du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac vue du primaire pour le cas série et le cas parallèle – Mise en évidence du premier mode transversal

le premier mode transversal de l'architecture. Afin de s'assurer de la nature de ce dernier mode, sans passer par une analyse vibrométrique de la structure, ces graphes ont été rapprochés du tracé fréquentiel, proposé dans [Kar04], du gain en tension d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen de dimension  $80 \times 18 \times 2$  mm<sup>3</sup>, composé d'un matériau dont les propriétés sont sensiblement identiques au matériau qui constitue le transformateur CMT-Noliac. Dans cet article, l'auteur fait état sur une large plage de fréquence des différents modes sollicités, aussi bien

longitudinaux que transversaux. Compte tenu d'un facteur de forme transversal assez proche, ( $L/l = 5$  pour le CMT-Noliac et  $L/l = 4.44$  pour le transformateur étudié dans [Kar04]), il est légitime, suite à la comparaison, d'assimiler le dernier mode apparaissant sur les tracés de la figure 3.10 à un mode transversal. Fort de ce constat, seuls les quatre premiers modes longitudinaux sont retenus pour l'approximation du champ de déplacement nécessaire à la mise en branle du modèle théorique. Par la suite, ces derniers bénéficieront d'une attention toute particulière et feront l'objet de toutes les comparaisons au travers notamment du tracé des déformées modales, aussi bien mécaniques qu'électriques, du calcul des paramètres du schéma électrique équivalent et du diagramme de Bode de l'admittance d'entrée. Tout ceci est naturellement examiné pour les cas série et parallèle afin d'éprouver davantage les différents modèles.

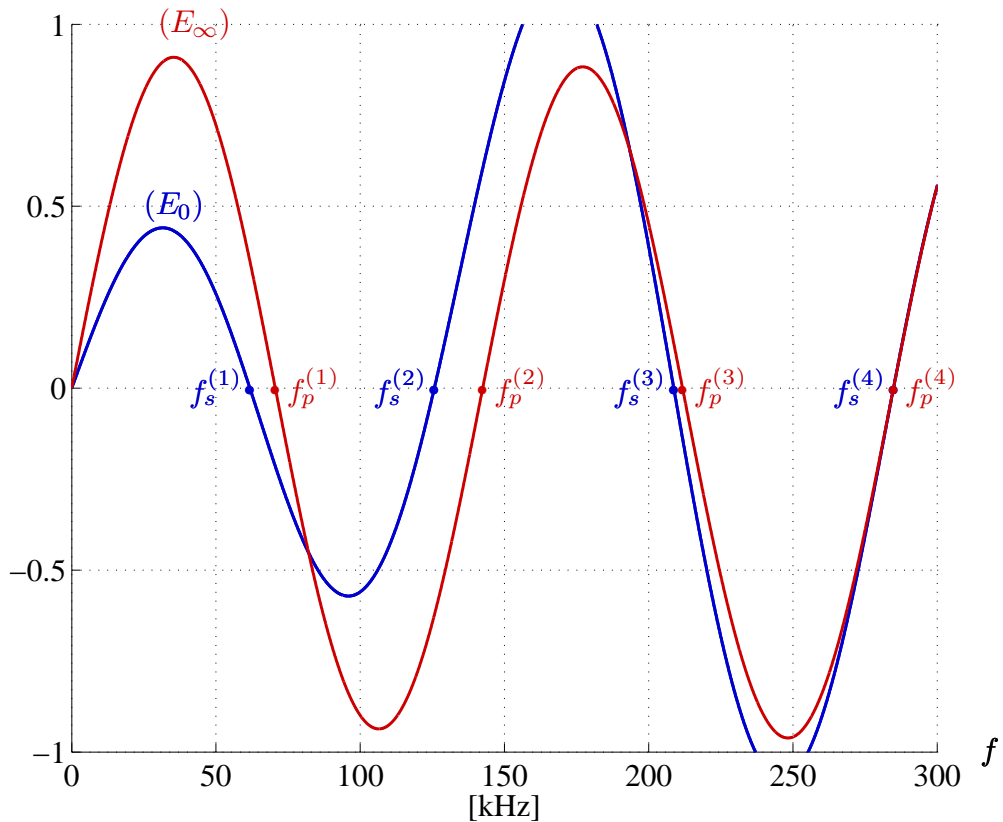


FIGURE 3.11 – Résolution graphique de l'équation en fréquence pour le cas série ( $E_0 = 0$ ) et le cas parallèle ( $E_\infty = 0$ ) du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac

La valeur de  $n_m$  étant fixée, la mise en œuvre de la modélisation analytique peut être entreprise. La démarche débute par la détermination des fréquences propres issues de l'équation en fréquence ( $E_0 = 0$  pour le cas série et  $E_\infty = 0$  pour le cas parallèle). Une résolution graphique de ces dernières est donnée sur la figure 3.11. Les fréquences  $f_s (= f_{r0})$  et  $f_p (= f_{r\infty})$  représentent respectivement les fréquences série



et parallèle du transformateur étudié. Cette résolution graphique permet d'ores et déjà de mettre en lumière l'intervalle de variation de la fréquence de résonance de chaque mode en fonction de la charge placée au secondaire. En effet, la fréquence de résonance est fortement dépendante du niveau de charge du transformateur et elle évolue logiquement, de manière croissante, entre les fréquences de résonance correspondant au cas série et au cas parallèle ( $f_s \leq f_r \leq f_p$ ) [Sar05]. Pour la géométrie retenue, la différence la plus significative est observée pour le mode  $\lambda$ , mode de fonctionnement autour duquel l'architecture est prévue d'être utilisée. Analytiquement, elle est estimée à 16.8 kHz. Les modes  $\lambda/2$  et  $3\lambda/2$  observent respectivement une augmentation théorique de la fréquence de résonance de 8.8 kHz et 3 kHz entre les fonctionnements en court-circuit et en circuit ouvert. En revanche, cette variation semble inexistante pour le mode  $2\lambda$ . Dans la suite, afin de rendre compte de l'influence de la charge sur la fréquence, au lieu d'estimer directement la différence  $\Delta f = f_p - f_s$ , l'évaluation du facteur de couplage électromécanique effectif  $k_{\text{eff}}$  sera préférée. Sa définition est analogue à ce qui est proposé dans la norme [IEEE] et elle confère à  $k_{\text{eff}}$  l'expression suivante :

$$k_{\text{eff}} = \sqrt{1 - \frac{f_s^2}{f_p^2}} \quad (3.76)$$

Ce facteur est dépendant du niveau de charge appliqué et des dimensions de la géométrie considérée.

Les fréquences de résonance des quatre premiers modes étant établies, les déformées modales mécaniques et électriques peuvent être obtenues. Analytiquement, ces déformées découlent des relations donnant  $\underline{u}_1^{(i)}$  et  $\underline{\phi}^{(i)}$  contenues dans les tableaux [3.2] et [3.3] pour le cas série et le cas parallèle. Les figures 3.12 et 3.13 permettent de visualiser respectivement la répartition spatiale du champ de déplacement et du potentiel électrique pour les quatre premiers modes d'élongation selon ( $Ox_1$ ) dans le cas d'un fonctionnement en court-circuit et en circuit ouvert. A ces courbes ont été superposées les déformées modales obtenues par simulation numérique. De prime abord, une excellente corrélation est à observer entre les courbes calculées et simulées. Au regard des figures 3.12 et 3.13, il semblerait toutefois que l'hypothèse unidimensionnelle soit progressivement mise en défaut avec l'accroissement du rang du mode, constat notifié par un décalage manifeste entre le tracé calculé et simulé pour le mode  $2\lambda$ . En outre, la charge résistive placée au secondaire, en plus d'influer sur la fréquence de résonance de l'architecture, a une incidence directe sur l'allure des déformées modales. En effet, sur le tracé des déplacements mécaniques modaux, le mode  $\lambda/2$  présente un nœud au secondaire du transformateur pour le cas série tandis qu'il se situe côté primaire pour le cas parallèle. Le phénomène est également observé pour le ventre du mode  $\lambda$  puisque ce dernier est localisé dans le primaire pour le cas parallèle et à l'intersection primaire/secondaire pour le cas série. Ce déplacement de nœud et de ventre en fonction de la charge agit nécessairement sur la qualité de la conversion d'énergie et par conséquent sur l'aspect élévateur en tension du transformateur piézoélectrique de type Rosen.

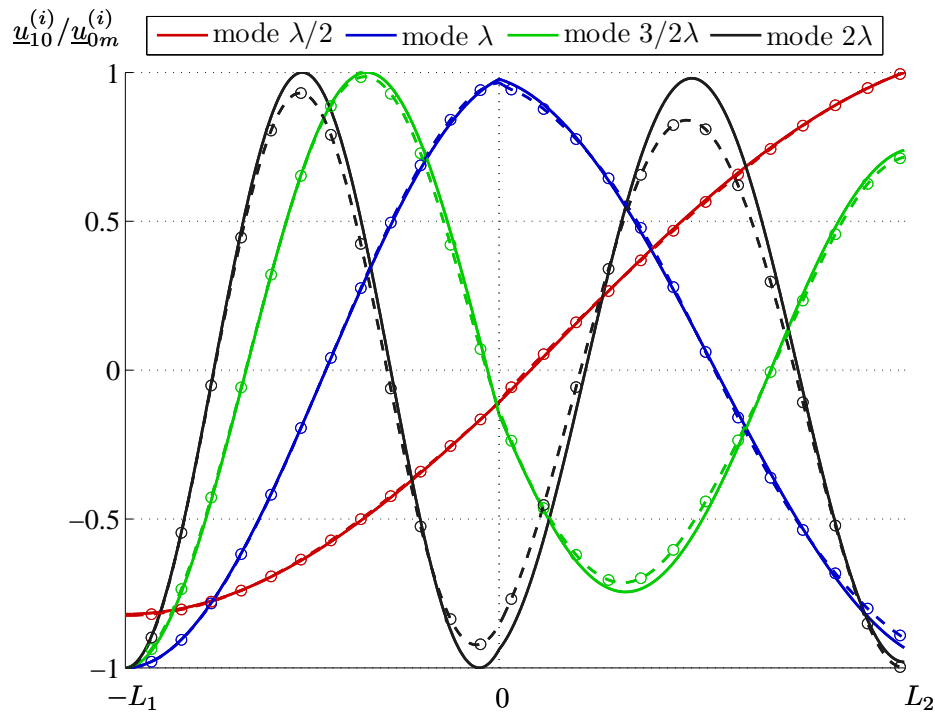
Une interprétation de ce phénomène peut être faite à partir des formules donnant les facteurs de conversion électromécanique modaux du primaire et du secondaire. Effectivement, en analysant les relations (3.43) et (3.44),  $\psi_p^{(i)}$  et  $\psi_s^{(i)}$  dépendent explicitement des valeurs du champ de déplacement aux extrémités de la structure et à l'interface primaire/secondaire de sorte que :

$$\begin{cases} \psi_p^{(i)} \sim \underline{u}_1^{(i)}(-L_1) - \underline{u}_1^{(i)}(0^-) \\ \psi_s^{(i)} \sim \underline{u}_1^{(i)}(0^+) - \underline{u}_1^{(i)}(+L_2) \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_m$$

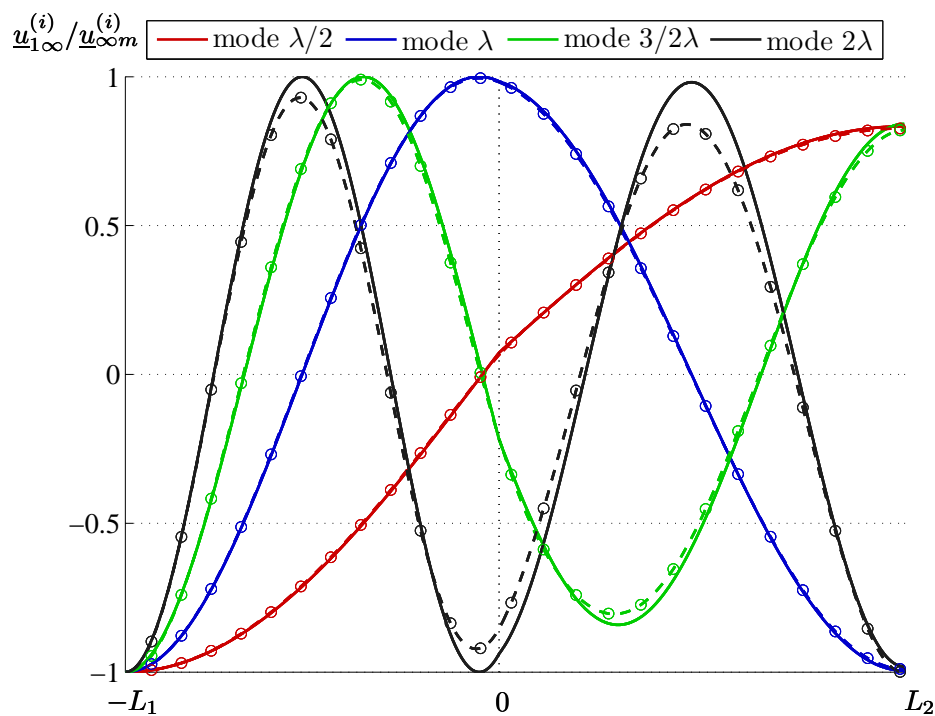
Fort de ce constat, il est judicieux de s'intéresser pour la géométrie considérée à la nature particulière du mode d'élongation  $2\lambda$  :

- Premièrement, d'après l'étude théorique, ce mode présente des fréquences série et parallèle sensiblement égales, égalité confirmée par la simulation numérique (cf. tableau [3.8]), de sorte que la charge placée au secondaire semblerait n'avoir aucune emprise sur le comportement dynamique de ce mode. Cette particularité est observable expérimentalement sur le figure 3.10.
- Deuxièmement, compte tenu d'une forme caractéristique de la déformée mécanique le long du transformateur correspondant à une double sinusoïde, dont la première alternance vient mourir à l'interface entre le primaire et le secondaire de la structure, les valeurs du déplacement mécanique aux extrémités de l'architecture et à l'interface primaire/secondaire sont par conséquent assez proches impliquant de ce fait de faibles facteurs de conversion électromécanique (cf. relations ci-dessus).

En pratique, cette singularité modale se caractérise par une amplitude très faible devant les amplitudes des trois premiers modes longitudinaux, phénomène visible sur le tracé de l'admittance d'entrée de la figure 3.10. Selon [Kar01], ce mode est même parfois indétectable sur certaines structures. Ce comportement est de surcroît accru pour un rapport  $L_2/L_1$  proche de l'unité. A noter également que ces variations dans l'allure des déformées ne peuvent pas être mises en évidence lors d'une définition « isotrope » du transformateur [Nad09], hypothèse couramment avancée pour une modélisation classique.

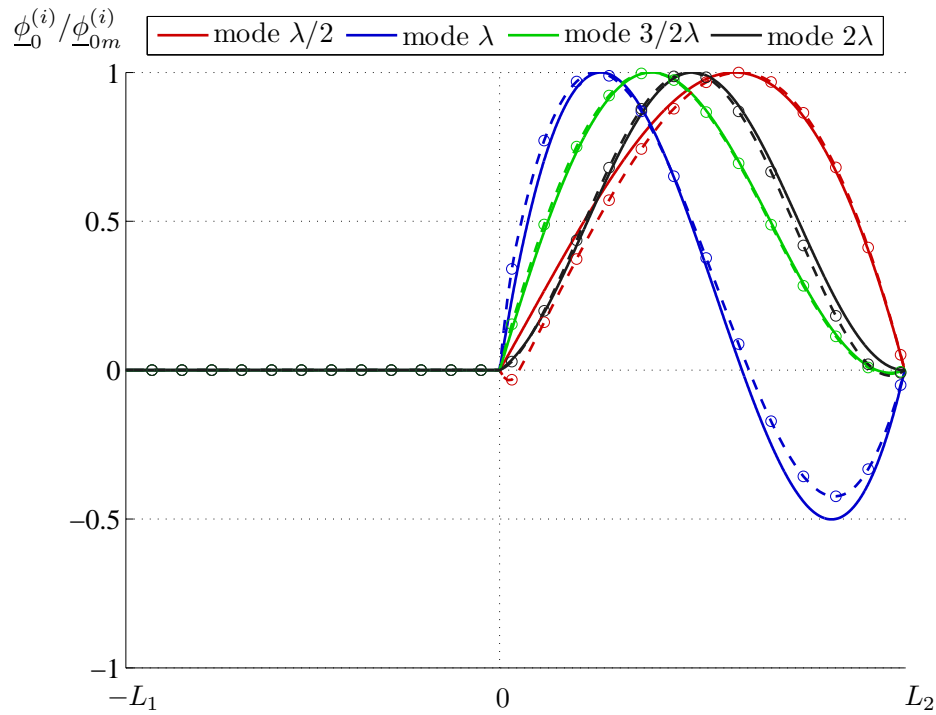


(a) Cas série

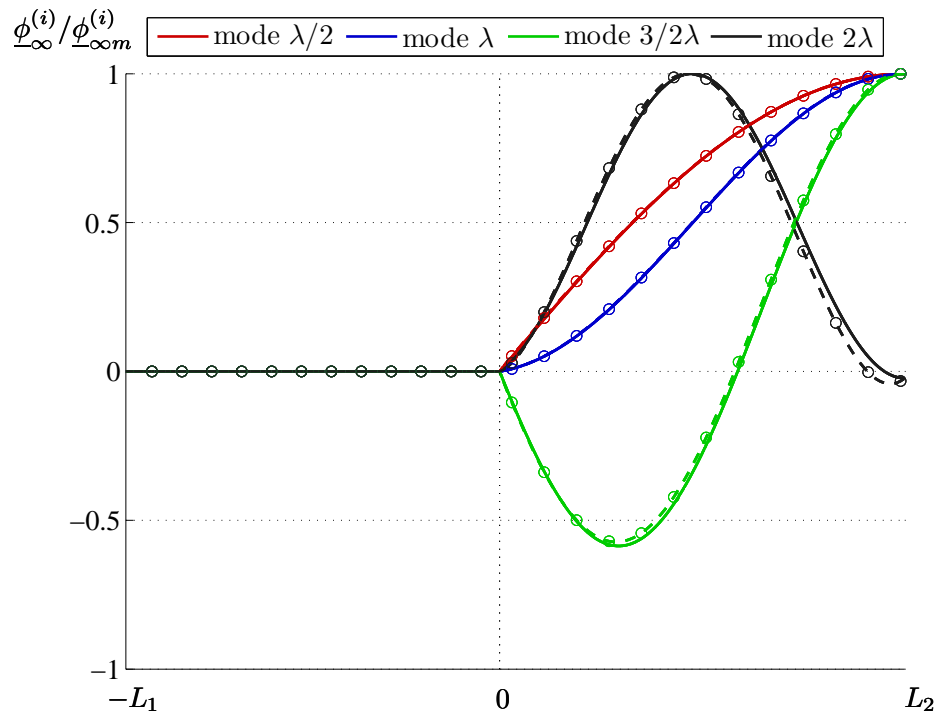


(b) Cas parallèle

FIGURE 3.12 – Répartition spatiale selon l'axe  $(Ox_1)$  de la déformée mécanique normalisée à son maximum pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Comparaison entre les modèles analytique (traits pleins) et numérique (traits pointillés)



(a) Cas série



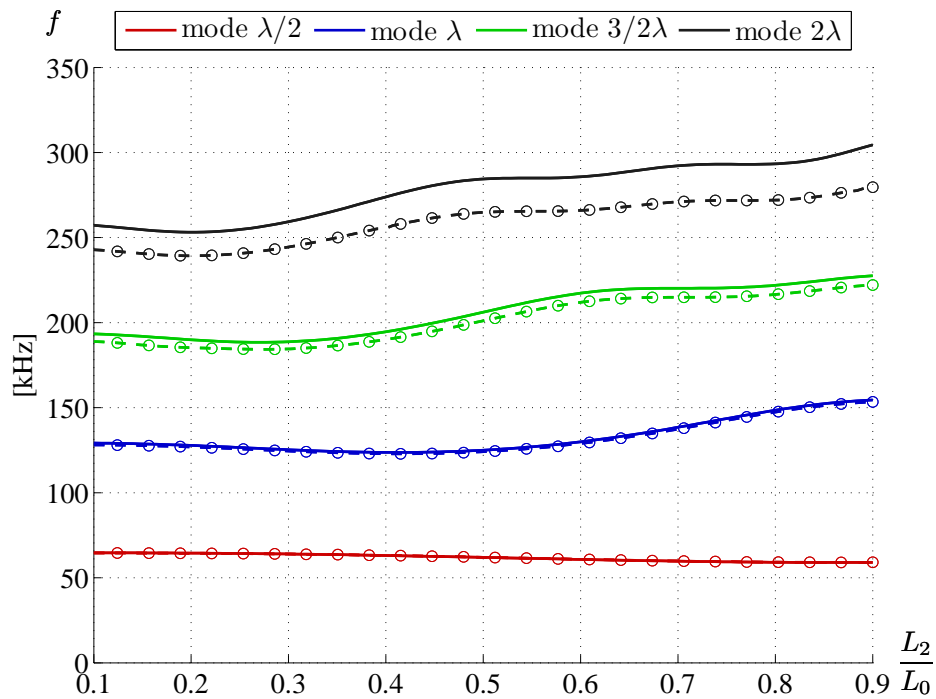
(b) Cas parallèle

FIGURE 3.13 – Répartition spatiale selon l'axe ( $Ox_1$ ) du potentiel électrique normalisé à son maximum pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Comparaison entre les modèles analytique (traits pleins) et numérique (traits pointillés)

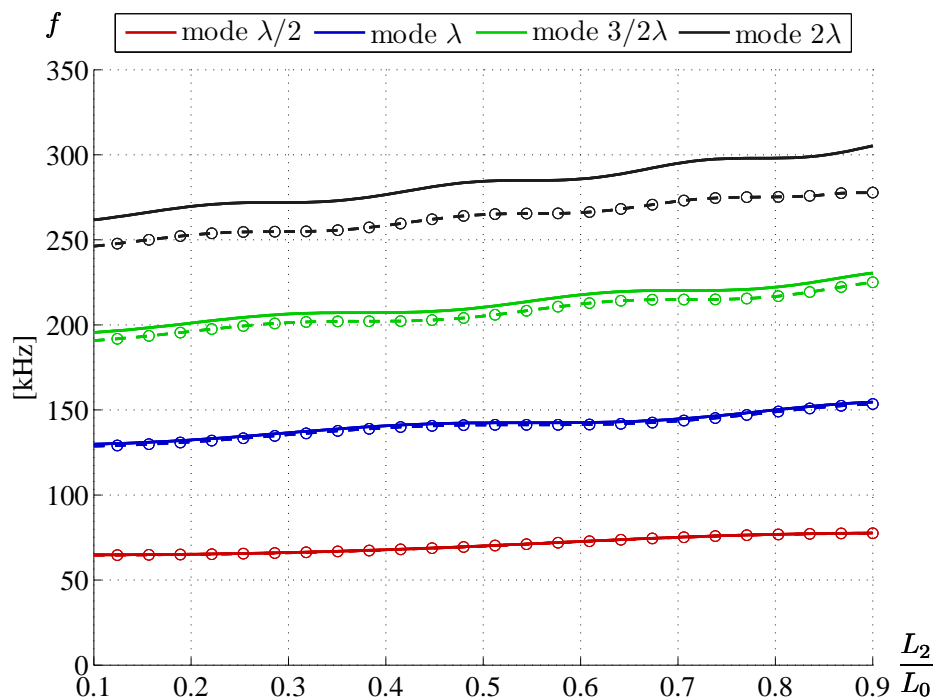
Afin d'éprouver la pertinence du modèle analytique en tant qu'outil de prédimensionnement, celui-ci est mis à l'épreuve sous l'effet d'une variation paramétrique et comparé aux simulations numériques. Pour ce faire, une étude de la variation des fréquences de résonance en fonction de la proportion longueur du secondaire sur longueur totale a été entreprise. Ce choix paramétrique est motivé par sa forte incidence sur le comportement électromécanique de la structure et constitue par ailleurs une bonne illustration de l'importance d'une définition « anisotrope » du transformateur. La figure 3.14 présente la variation des fréquences de résonance pour les quatre premiers modes d'élongation pour une évolution entre 10% et 90% du rapport  $L_2/L_0$  pour les cas série et parallèle.

En premier lieu, une bonne corrélation est à constater entre les tracés analytiques et numériques pour les modes  $\lambda/2$  et  $\lambda$ . Les courbes commencent cependant à différer pour le mode  $3\lambda/2$  et cette différence est amplifiée significativement pour le mode  $2\lambda$ . Toutefois, les tendances observées entre les courbes analytiques et numériques, pour tous les modes étudiés et les régimes de fonctionnement envisagés, sont remarquablement identiques. La disparité constatée s'explique quant à elle par le devenir trop restrictif avec l'accroissement du rang du mode de l'hypothèse unidimensionnelle du modèle analytique. En effet, d'après les données fournies dans les tableaux [3.5] à [3.8], les fréquences de résonance issues du modèle théorique s'écartent sensiblement avec l'augmentation du rang du mode de celles données par la simulation numérique et l'identification expérimentale.

Les données numériques et expérimentales sont en revanche en très bon accord. Ceci peut s'expliquer par une prise en compte, lors de la simulation numérique sous ANSYS®, des effets dus aux dimensions autre que la dimension longitudinale. En outre, il a été supposé que les déformées modales du modèle théorique puissent s'apparenter à des ondes planes, or l'étude de la propagation des ondes dans des milieux de dimensions finies montre que ce ne sont pas réellement de telles ondes qui sont générées et que les fréquences de résonance associées dépendent fortement des facteurs de formes de la structure considérée [Bri07]. Par conséquent, bien qu'elle permette d'aboutir à un modèle cohérent et réaliste, la modélisation unidimensionnelle souffre d'une impossibilité d'en déterminer rigoureusement les limites de validité ce qui constitue l'inconvénient majeur de cette approximation. Des critères de validité peuvent néanmoins être envisagés, s'appuyant par exemple sur une discrimination des énergies mises en jeu selon les différents axes de déformations simultanément obtenues.



(a) Cas série



(b) Cas parallèle

FIGURE 3.14 – Évolution de la fréquence de résonance en fonction du rapport  $L_2/L_0$  pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Comparaison entre les modèles analytique (traits pleins) et numérique (traits pointillés)

Les diagrammes de Bode de l'admittance vue du primaire issus de la modélisation analytique, de la simulation numérique et de l'identification expérimentale sont également comparés au tracé réel. Pour ce faire, il faut au préalable déterminer l'expression analytique de l'admittance d'entrée de la structure correspondant au schéma électrique équivalent de la figure 3.2. En appliquant très simplement les lois de Kirchoff au circuit, l'admittance d'entrée  $\underline{Y}_p$  d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen chargé par une résistance  $R_{ch}$  au secondaire s'écrit :

$$\underline{Y}_p = \frac{1}{\underline{Z}_{dp}} + \sum_{i=1}^{n_m} \frac{1}{\underline{Z}_m^{(i)}} - \underline{G} \sum_{i=1}^{n_m} \frac{1}{\psi^{(i)} \underline{Z}_m^{(i)}} \quad (3.77)$$

avec  $\underline{Z}_{dp}$ ,  $\underline{Z}_m^{(i)}$  et  $\underline{G}$  symbolisant respectivement l'impédance des caractéristiques du primaire, l'impédance de la  $i^{\text{ème}}$  branche motionnelle et le gain en tension du transformateur. Chacune de ces quantités a pour expression :

$$\underline{Z}_{dp} = \frac{R_p}{1 + jR_p C_p \omega} \quad (3.78)$$

$$\underline{Z}_m^{(i)} = R_m^{(i)} + jL_m^{(i)}\omega + \frac{1}{jC_m^{(i)}\omega} \quad (3.79)$$

$$\underline{G} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n_m} \frac{1}{\psi^{(i)} \underline{Z}_m^{(i)}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{ds}} + \sum_{i=1}^{n_m} \frac{1}{(\psi^{(i)})^2 \underline{Z}_m^{(i)}}} \quad (3.80)$$

Il apparaît dans l'expression du gain en tension l'impédance  $\underline{Z}_{ds}$  qui représente l'association en parallèle de l'impédance des caractéristiques diélectriques du secondaire et de la résistance de charge. Son expression est la suivante :

$$\underline{Z}_{ds} = \frac{R_{eq}}{1 + jR_{eq} C_s \omega} \quad \text{avec} \quad R_{eq} = \frac{R_s R_{ch}}{R_s + R_{ch}} \quad (3.81)$$

Fort de ces relations, le diagramme de Bode de l'admittance d'entrée est simulée à l'aide des éléments du schéma électrique équivalent extraits des différents modèles. Ces derniers sont regroupés dans les tableaux [3.5] à [3.8]. Chaque tableau correspond à un mode longitudinal dont les paramètres ont été identifiés pour un fonctionnement du transformateur en court-circuit et en circuit ouvert. Le facteur de couplage électromécanique effectif a été de surcroît précisé. Les figures 3.15 et 3.16 représentent respectivement le diagramme de Bode de l'admittance d'entrée pour le cas série et le cas parallèle. Les courbes ont été obtenues sans prendre en considération les résistances  $R_p$  et  $R_s$  caractérisant les pertes diélectriques puisque les quantités  $R_p C_p \omega_s^{(1)}$  et  $R_s C_s \omega_s^{(1)}$  sont très grandes devant l'unité pour les différents modèles si bien que les impédances  $\underline{Z}_{dp}$  et  $\underline{Z}_{ds}$  se réduisent aux expressions suivantes :

$$\underline{Z}_{dp} = \frac{1}{jC_p \omega} \quad ; \quad \underline{Z}_{ds} = \frac{1}{jC_s \omega}$$

En outre, les courbes relatives à la simulation numérique ont été calculées pour un facteur de qualité mécanique fini ( $Q_m = 300$ ).

Au regard des figures 3.15 et 3.16, une corrélation satisfaisante entre les tracés issus des différents modèles et le relevé expérimental est à constater, en tout cas pour les deux premiers modes d'élongation. En effet, après le mode  $\lambda$ , l'influence du mode transversal se fait ressentir et le tracé réel diverge des autres courbes. Si une comparaison conjointe des résultats donnés par les différentes modélisations est opérée, il est à noter que le modèle analytique, comme il a pu être souligné précédemment, s'écarte au fil des modes de la simulation numérique et de l'identification expérimentale. Cela reste tout à fait pertinent pour les modes  $\lambda/2$  et  $\lambda$ .

Quelques remarques sont également à apporter sur les éléments du schéma électrique équivalent déterminés à partir des différentes modélisations. Tout d'abord, il est à noter que les valeurs des masses modales, des raideurs modales et des facteurs modaux de conversion électromécanique du primaire et du secondaire ne figurent pas dans les tableaux [3.5] à [3.8]. Ces dernières quantités dépendant explicitement de l'amplitude modale fixée par le critère de normalisation de la masse, elles ne présentent pas de valeurs qui puissent être interprétées physiquement et comparées à des grandeurs issues de l'expérimentation. Toutefois, les signes des facteurs de conversion électromécanique ont été indiqués afin de rendre compte du signe pris par le gain en transformation de la structure. Analytiquement et numériquement ces derniers concordent. Expérimentalement, seule la valeur absolue de ces gains a été précisée. Néanmoins, si l'indétermination sur leur signe devait être levée, le tracé fréquentiel de la phase du gain en tension pourrait s'avérer utile puisque  $\underline{G}$  est directement proportionnel à  $\psi$  (pour s'en convaincre il suffit de réécrire l'expression (3.80) autour d'un mode de résonance), le changement de phase à la résonance de chaque mode renseigne sur le signe du gain en transformation du mode considéré. Cette étude n'a cependant pas été menée pour la structure retenue. Nonobstant, en guise d'exemple, l'alternance du signe du gain en tension sur une large plage fréquentielle est illustré dans [Lin01] pour un transformateur radial.



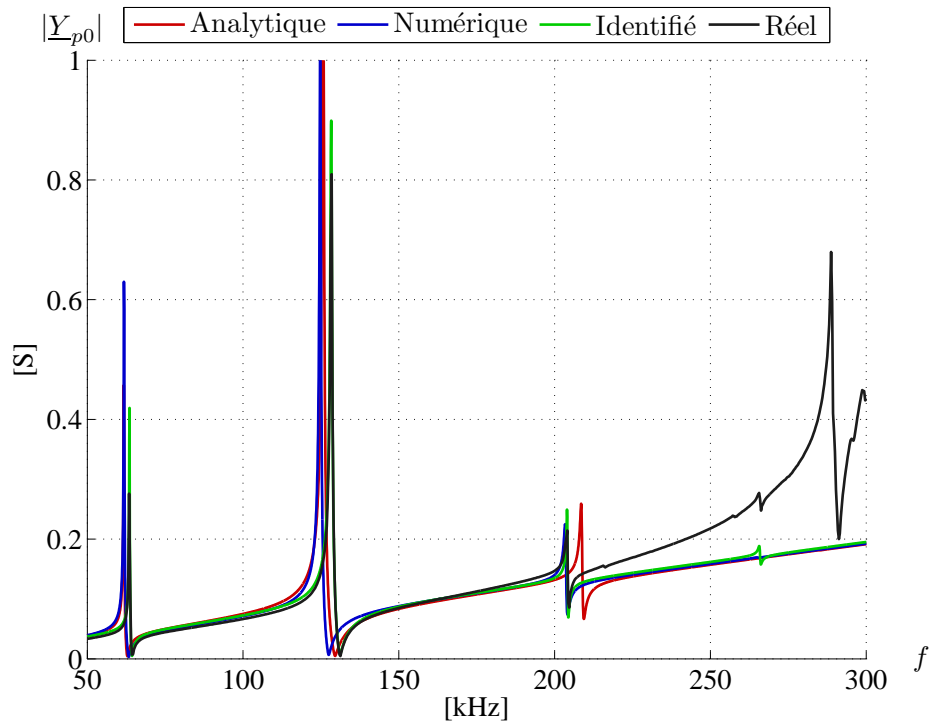
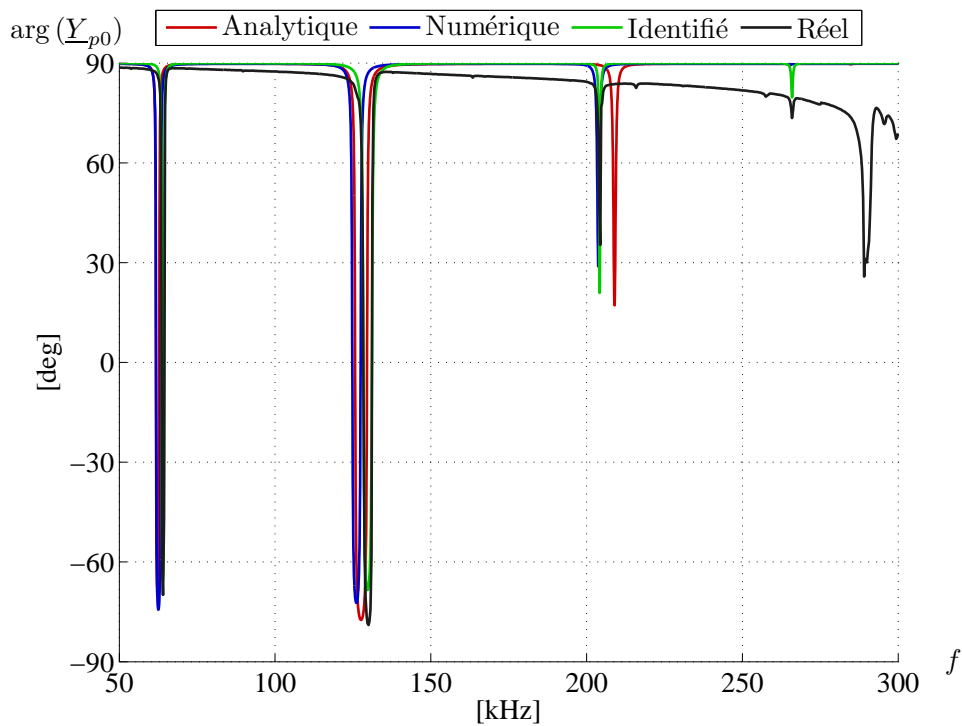
(a) Module de  $Y_{p0}$ (b) Phase de  $Y_{p0}$ 

FIGURE 3.15 – Module et phase de l'admittance vue du primaire pour le transformateur piézoélectrique CMT-Noliac dans le cas série – Comparaison entre le modèle analytique, la simulation numérique, l'identification expérimentale et le tracé réel

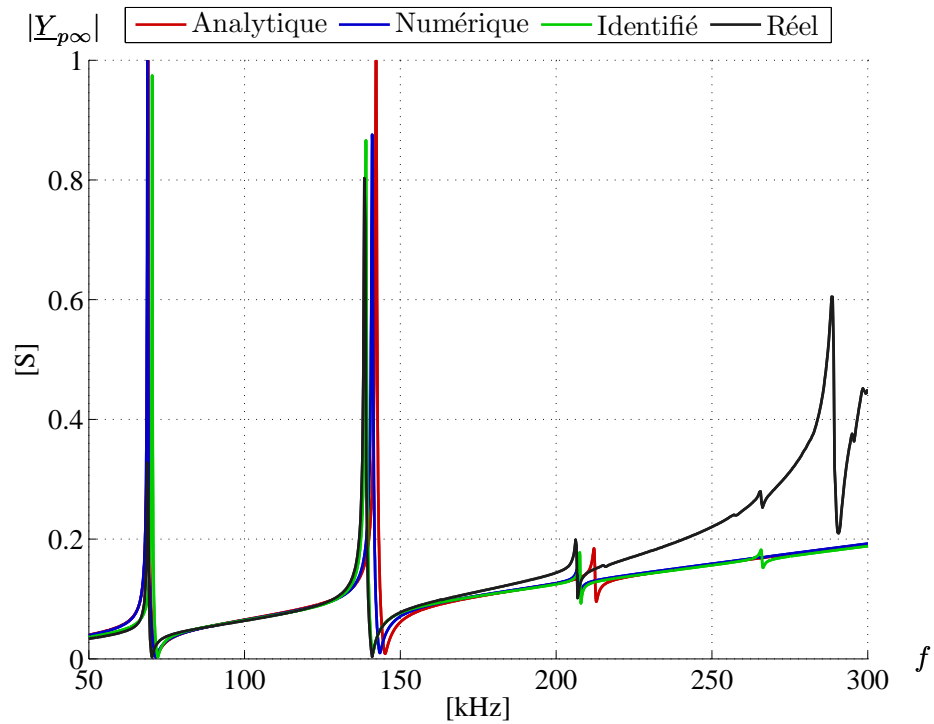
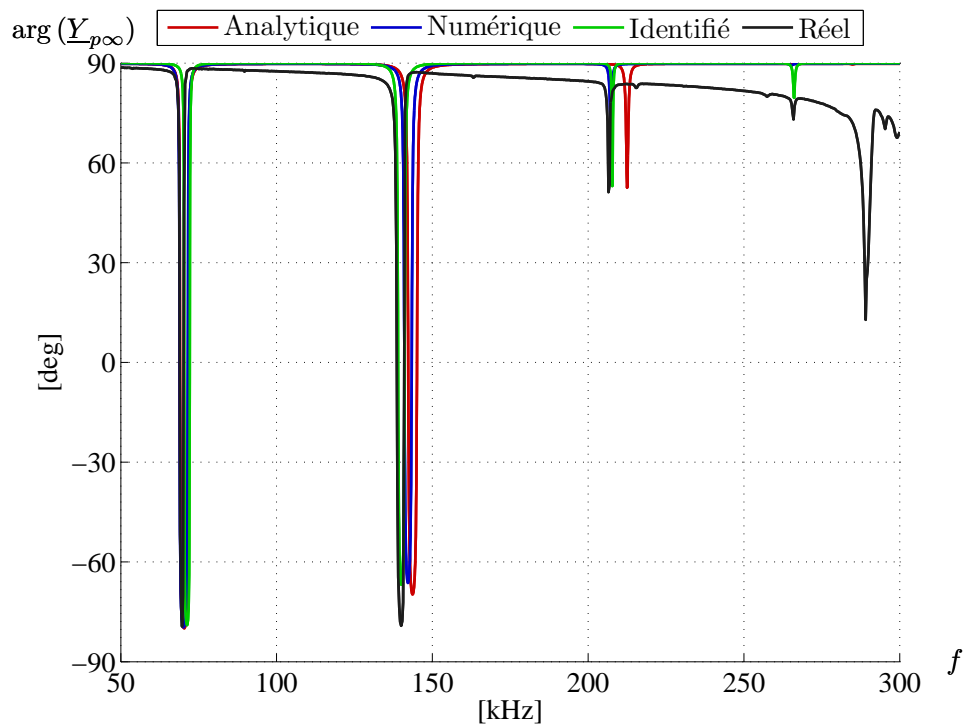
(a) Module de  $Y_{p\infty}$ (b) Phase de  $Y_{p\infty}$ 

FIGURE 3.16 – Module et phase de l'admittance vue du primaire pour le transformateur piézoélectrique CMT-Noliac dans le cas parallèle – Comparaison entre le modèle analytique, la simulation numérique, l'identification expérimentale et le tracé réel

TABLE 3.5 – Paramètres du schéma électrique équivalent du transformateur CMT-Noliac pour les cas série et parallèle – Comparaison entre les modèles analytique, numérique et l'identification expérimentale – Mode  $\lambda/2$

Cas série				
	Unité	Analytique	Numérique	Expérimental
$f_s$	[Hz]	61758	61813	63552
$C_p$	[nF]	103.63	103.63	97.138
$R_p$	[ $\Omega$ ]	8289	×	892.7
$C_s$	[pF]	4.551	4.551	6.634
$R_s$	[M $\Omega$ ]	×	×	×
$R_{m0}$	[ $\Omega$ ]	2.154	×	2.401
$L_{m0}$	[mH]	1.665	1.214	2.184
$C_{m0}$	[nF]	3.989	5.461	2.871
$Q_m$		300	×	363
$\text{sgn}(\psi_{p0})$		-	-	×
$\text{sgn}(\psi_{s0})$		+	+	×
$\psi_0$		-43.40	-51.87	44.52

Cas parallèle				
	Unité	Analytique	Numérique	Expérimental
$f_p$	[Hz]	70569	70467	68939
$C_p$	[nF]	103.63	103.63	86.819
$R_p$	[ $\Omega$ ]	7254	×	958.4
$C_s$	[pF]	4.551	4.551	6.430
$R_s$	[M $\Omega$ ]	165.2	×	60.96
$R_{m\infty}$	[ $\Omega$ ]	1.123	×	1.608
$L_{m\infty}$	[mH]	0.823	0.851	1.545
$C_{m\infty}$	[nF]	7.260	7.057	4.299
$Q_m$		300	×	373
$\text{sgn}(\psi_{p\infty})$		+	+	×
$\text{sgn}(\psi_{s\infty})$		-	-	×
$\psi_\infty$		-95.36	-93.65	52.11

Facteur de couplage électromécanique effectif				
$k_{\text{eff}}$		0.4839	0.4801	0.3875

TABLE 3.6 – Paramètres du schéma électrique équivalent du transformateur CMT-Noliac pour les cas série et parallèle – Comparaison entre les modèles analytique, numérique et l'identification expérimentale – Mode  $\lambda$

<b>Cas série</b>				
	Unité	Analytique	Numérique	Expérimental
$f_s$	[Hz]	125692	124782	128302
$C_p$	[nF]	103.63	103.63	105.05
$R_p$	[ $\Omega$ ]	4073	×	475.8
$C_s$	[pF]	4.551	4.551	4.921
$R_s$	[M $\Omega$ ]	×	×	×
$R_{m0}$	[ $\Omega$ ]	0.656	×	1.118
$L_{m0}$	[mH]	0.249	0.362	0.330
$C_{m0}$	[nF]	6.429	4.491	4.668
$Q_m$		300	×	238
$\text{sgn}(\psi_{p0})$		+	+	×
$\text{sgn}(\psi_{s0})$		+	+	×
$\psi_0$		69.91	59.35	65.63

<b>Cas parallèle</b>				
	Unité	Analytique	Numérique	Expérimental
$f_p$	[Hz]	142465	141249	138660
$C_p$	[nF]	103.63	103.63	101.30
$R_p$	[ $\Omega$ ]	3593	×	466.3
$C_s$	[pF]	4.551	4.551	3.914
$R_s$	[M $\Omega$ ]	81.83	×	42.63
$R_{m\infty}$	[ $\Omega$ ]	0.756	×	1.053
$L_{m\infty}$	[mH]	0.285	0.333	0.376
$C_{m\infty}$	[nF]	5.542	4.835	4.253
$Q_m$		300	×	282
$\text{sgn}(\psi_{p\infty})$		+	+	×
$\text{sgn}(\psi_{s\infty})$		+	+	×
$\psi_\infty$		67.68	62.90	71.03

<b>Facteur de couplage électromécanique effectif</b>				
$k_{\text{eff}}$		0.4708	0.4686	0.3792

TABLE 3.7 – Paramètres du schéma électrique équivalent du transformateur CMT-Noliac pour les cas série et parallèle – Comparaison entre les modèles analytique, numérique et l'identification expérimentale – Mode  $3\lambda/2$

Cas série				
	Unité	Analytique	Numérique	Expérimental
$f_s$	[Hz]	208702	203551	204094
$C_p$	[nF]	103.63	103.63	90.837
$R_p$	[ $\Omega$ ]	2453	×	81.99
$C_s$	[pF]	4.551	4.551	4.181
$R_s$	[M $\Omega$ ]	×	×	×
$R_{m0}$	[ $\Omega$ ]	5.175	6.592	5.524
$L_{m0}$	[mH]	1.184	1.546	2.605
$C_{m0}$	[nF]	0.491	0.395	0.233
$Q_m$		300	300	605
$\text{sgn}(\psi_{p0})$		-	-	×
$\text{sgn}(\psi_{s0})$		+	+	×
$\psi_0$		-64.59	-58.91	39.71

Cas parallèle				
	Unité	Analytique	Numérique	Expérimental
$f_p$	[Hz]	211742	206492	206664
$C_p$	[nF]	103.63	103.63	99.979
$R_p$	[ $\Omega$ ]	2418	×	58.76
$C_s$	[pF]	4.551	4.551	4.283
$R_s$	[M $\Omega$ ]	55.06	×	4.516
$R_{m\infty}$	[ $\Omega$ ]	6.847	12.58	7.010
$L_{m\infty}$	[mH]	1.569	2.957	3.252
$C_{m\infty}$	[nF]	0.372	0.208	0.189
$Q_m$		300	300	592
$\text{sgn}(\psi_{p\infty})$		-	-	×
$\text{sgn}(\psi_{s\infty})$		+	+	×
$\psi_\infty$		-49.70	-36.87	35.45

Facteur de couplage électromécanique effectif				
$k_{\text{eff}}$		0.1689	0.1682	0.1572

TABLE 3.8 – Paramètres du schéma électrique équivalent du transformateur CMT-Noliac pour les cas série et parallèle – Comparaison entre les modèles analytique, numérique et l'identification expérimentale – Mode  $2\lambda$

<b>Cas série</b>				
	Unité	Analytique	Numérique	Expérimental
$f_s$	[Hz]	284857	265266	265918
$C_p$	[nF]	103.63	103.63	152.38
$R_p$	[ $\Omega$ ]	1.797	×	21.05
$C_s$	[pF]	4.551	4.551	4.769
$R_s$	[M $\Omega$ ]	×	×	×
$R_{m0}$	[k $\Omega$ ]	1.717	0.758	0.032
$L_{m0}$	[H]	0.288	0.136	0.0093
$C_{m0}$	[pF]	1.0845	2.640	38.40
$Q_m$		300	300	490
$\text{sgn}(\psi_{p0})$		-	-	×
$\text{sgn}(\psi_{s0})$		-	-	×
$\psi_0$		98.70	163.8	78.21

<b>Cas parallèle</b>				
	Unité	Analytique	Numérique	Expérimental
$f_p$	[Hz]	284861	265269	266004
$C_p$	[nF]	103.63	103.63	153.64
$R_p$	[ $\Omega$ ]	1797	×	19.69
$C_s$	[pF]	4.551	4.551	4.722
$R_s$	[M $\Omega$ ]	40.92	×	30.49
$R_{m\infty}$	[k $\Omega$ ]	1.717	0.687	0.034
$L_{m\infty}$	[H]	0.288	0.124	0.0086
$C_{m\infty}$	[pF]	1.084	2.910	41.51
$Q_m$		300	300	427
$\text{sgn}(\psi_{p\infty})$		-	-	×
$\text{sgn}(\psi_{s\infty})$		-	-	×
$\psi_\infty$		96.52	164.4	89.36

<b>Facteur de couplage électromécanique effectif</b>				
$k_{\text{eff}}$		0.0050	0.0048	0.0253

### 3.5 Représentation du potentiel électrique environnant

Dans l'optique d'une meilleure compréhension des interactions mises en jeu entre le transformateur piézoélectrique et le plasma qu'il génère dans son environnement proche, une première modélisation du couplage existant entre ces deux milieux de propriétés physiques si différentes est entreprise. La modélisation analytique précédemment établie décrit, au travers d'une évolution unidimensionnelle des grandeurs caractéristiques, le comportement électromécanique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen. S'il s'avère suffisant pour caractériser la conversion électromécanique de l'architecture, et notamment en permettant la visualisation de l'évolution de la vibration mécanique et du potentiel électrique le long de la dimension principale, il souffre d'une indétermination sur l'amplitude de ces quantités.

Par conséquent, il paraît évident qu'une extension du modèle précédent s'avère nécessaire pour lever cette indétermination d'une part, et d'autre part mettre en lumière les paramètres favorisant la promotion de décharges plasma et d'en étudier leur influence. Plus concrètement, le but du modèle proposé ci-après est d'étendre la modélisation analytique précédemment développée afin de donner une première représentation du potentiel électrique entourant la structure. Cette approche repose sur une analyse aux vibrations forcées dans laquelle un amortissement mécanique est introduit. Le modèle ainsi obtenu sera par la suite exploité pour les différents modes vibratoires.

A l'issue de cette modélisation analytique, un modèle numérique 2D du potentiel électrique environnant, à l'origine présumée de la décharge plasma, est développé à l'aide d'une formulation par différences finies. Si cette première modélisation ne prend pas en considération le couplage entre le plasma et le milieu piézoélectrique, elle permettra néanmoins de souligner la corrélation entre la répartition du potentiel électrique et le motif lumineux de la décharge plasma. Cette première étape de modélisation sera qualifiée de couplage faible.

#### 3.5.1 Étude aux vibrations forcées

L'étude aux vibrations forcées d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen est basée sur les équations développées dans la section § 3.2.2 et sur l'hypothèse d'une évolution harmonique des grandeurs. Le transformateur est supposé être alimenté par une tension sinusoïdale de la forme  $v_p(t) = V_p \cos(\omega t)$  où  $\omega$  est une pulsation prise autour d'une résonance mécanique de l'architecture. A l'instar de l'hypothèse formulée lors de l'étude aux valeurs propres (cf. § 3.2.4), le déplacement mécanique et le potentiel électrique ont une évolution harmonique de sorte que :

$$u_1(x_1, t) = \underline{u}_1(x_1) \cos(\omega t) \quad (3.82)$$

$$\phi(x_1, x_3, t) = \underline{\phi}(x_1, x_3) \cos(\omega t) \quad (3.83)$$

A partir des équations du mouvement (3.14) et (3.15), les amplitudes  $\underline{u}_1$  et  $\underline{\phi}$  de la déformée mécanique et du potentiel électrique ont alors pour expression :

$$\underline{u}_1(x_1) = \begin{cases} A_u \cos(k_1 x_1) + B_u \sin(k_1 x_1) & , -L_1 < x_1 < 0 \\ C_u \cos(k_2 x_1) + D_u \sin(k_2 x_1) & , 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (3.84)$$

$$\underline{\phi}(x_1, x_3) = \begin{cases} A_\phi x_3 + B_\phi & , -L_1 < x_1 < 0 \\ \bar{h}_{33} \underline{u}_1(x_1) + C_\phi x_1 + D_\phi & , 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (3.85)$$

L'étude aux vibrations forcées d'un transformateur piézoélectrique s'opère pour une structure libre de toutes contraintes mécaniques (hypothèse de conditions aux limites « libre - libre ») alimentée par une tension sinusoïdale au primaire. Les hypothèses électriques avancées dans la section § 3.2.1 sont supposées être vérifiées impliquant par conséquent la constance de l'amplitude du champ électrique au sein du primaire de sorte que :

$$\underline{E}_3 = -n \frac{V_p}{e} \quad (3.86)$$

En outre, l'étude se limite au cas du transformateur évoluant à secondaire ouvert (cas parallèle) conformément aux conditions expérimentales dans lesquelles ont été obtenues les décharges plasma (cf. chapitre 4). La constante  $C_\phi$ , image du courant en sortie du transformateur, est par conséquent nulle. Afin de déterminer les sept autres constantes d'intégration, les conditions aux limites mécaniques et électriques, auxquelles il faut ajouter les relations de continuité à l'interface entre primaire et secondaire, sont exploitées.

Les conditions de raccordement aux abscisses  $x_1 = 0^-$  et  $x_1 = 0^+$  sont en premier lieu examinées. Pour ces dernières, la continuité du déplacement mécanique, de la contrainte et du potentiel électrique est assurée. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{1\infty}(x_1 = 0^-) = \underline{u}_{1\infty}(x_1 = 0^+) & \Leftrightarrow A_u = C_u \\ \underline{T}_{1\infty}(x_1 = 0^-) = \underline{T}_{1\infty}(x_1 = 0^+) & \Leftrightarrow \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} B_u + \bar{e}_{31} (nV_p/e) = \bar{c}_{33}^D k_{2\infty} D_u \\ \underline{\phi}_{1\infty}(x_1 = 0^-, x_3) = \underline{\phi}_{1\infty}(x_1 = 0^+, x_3) & \Leftrightarrow A_\phi x_3 + B_\phi = \bar{h}_{33} C_u + D_\phi(x_3) \end{aligned}$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, les conditions « libre - libre » données par la relation (3.4) doivent être associées à la condition relative à la valeur du potentiel électrique imposée par la tension en entrée du transformateur. Par conséquent, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \underline{T}_{1\infty}(x_1 = -L_1) = 0 & \Leftrightarrow \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} [A_u \sin X_{1\infty} + B_u \cos X_{1\infty}] + \bar{e}_{31} (nV_p/e) = 0 \\ \underline{T}_{1\infty}(x_1 = L_2) = 0 & \Leftrightarrow \bar{c}_{33}^D k_{2\infty} [-C_u \sin X_{2\infty} + D_u \cos X_{2\infty}] = 0 \\ \underline{\phi}_{1\infty}(x_1, x_3 = -e/2) = 0 & \Leftrightarrow -A_\phi(e/2) + B_\phi = 0 \\ \underline{\phi}_{1\infty}(x_1, x_3 = +e/2) = 0 & \Leftrightarrow A_\phi(e/2) + B_\phi = nV_p \end{aligned}$$

Les constantes d'intégration  $A_\phi$  et  $B_\phi$  peuvent être directement déterminées. Elles ont pour expression :

$$A_\phi = \frac{nV_p}{e} \quad \text{et} \quad B_\phi = \frac{nV_p}{2} \quad (3.87)$$



A partir de ces relations, la constante  $D_\phi$  revêt l'expression suivante :

$$D_\phi(x_3) = -\bar{c}_{33}C_u + \frac{nV_p}{e}\left(x_3 + \frac{e}{2}\right) \quad (3.88)$$

Ainsi, le système d'équations de l'étude aux vibrations forcées se réduit à la détermination des constantes d'intégration  $A_u$ ,  $B_u$ ,  $C_u$  et  $D_u$ . Il s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \\ \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} \sin X_{1\infty} & \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} \cos X_{1\infty} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \sin X_{2\infty} & \bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \cos X_{2\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_u \\ B_u \\ C_u \\ D_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{e}_{31}(nV_p/e) \\ -\bar{e}_{31}(nV_p/e) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sa résolution mène aux expressions des constantes d'intégration, il vient alors :

$$\begin{cases} A_u = -\frac{1}{\Delta_\infty} \bar{e}_{31} (1 - \cos X_{1\infty}) \cos X_{2\infty} \frac{nV_p}{e} \\ B_u = -\frac{1}{\Delta_\infty} \bar{e}_{31} (\sin X_{1\infty} \cos X_{2\infty} + \eta \sin X_{2\infty}) \frac{nV_p}{e} \\ C_u = -\frac{1}{\Delta_\infty} \bar{e}_{31} (1 - \cos X_{1\infty}) \cos X_{2\infty} \frac{nV_p}{e} \\ D_u = -\frac{1}{\Delta_\infty} \bar{e}_{31} (1 - \cos X_{1\infty}) \cos X_{2\infty} \frac{nV_p}{e} \end{cases} \quad (3.89)$$

où la quantité  $\Delta_\infty$  est issue du déterminant de la matrice du système d'équations précédent comme suit :

$$\Delta_\infty = \frac{\det \mathbf{M}(\omega)}{\bar{c}_{11}^E k_{1\infty} \bar{c}_{33}^D k_{2\infty}} = \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} \sin X_{1\infty} \cos X_{2\infty} + \bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \cos X_{1\infty} \sin X_{2\infty} \quad (3.90)$$

Finalement, l'amplitude de la déformée mécanique s'exprime ainsi :

$$\underline{u}_{1\infty}(x_1) = U_m \begin{cases} \cos(k_{1\infty}x_1) + \frac{\sin X_{1\infty} + \eta \tan X_{2\infty}}{1 - \cos X_{1\infty}} \sin(k_{1\infty}x_1) , & -L_1 < x_1 < 0 \\ \cos(k_{2\infty}x_1) + \tan X_{2\infty} \sin(k_{2\infty}x_1) , & 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (3.91)$$

tandis que l'amplitude du potentiel électrique s'écrit :

$$\underline{\phi}(x_1, x_3) = \begin{cases} \frac{nV_p}{e} \left(x_3 + \frac{e}{2}\right) , & -L_1 < x_1 < 0 \\ \phi_m [\cos(k_{2\infty}x_1) - 1 + \tan X_{2\infty} \sin(k_{2\infty}x_1)] + \frac{nV_p}{e} \left(x_3 + \frac{e}{2}\right) , & 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (3.92)$$

où les quantités  $U_m$  et  $\phi_m$  sont liées par la relation suivante :

$$\phi_m = \bar{h}_{33}U_m = -\frac{1}{\Delta_\infty} \bar{e}_{31} \bar{h}_{33} \cos X_{2\infty} (1 - \cos X_{1\infty}) \frac{nV_p}{e} \quad (3.93)$$

Ainsi, l'analyse aux vibrations forcées a permis de déterminer les expressions des amplitudes du déplacement mécanique et du potentiel électrique du transformateur à secondaire ouvert. Toutefois, évaluer ces dernières pour une fréquence proche d'une résonance mécanique de la structure les amènerait à diverger. En effet, la quantité  $\Delta_\infty$  étant proportionnelle au déterminant de la matrice du système d'équations précédent, dont le polynôme caractéristique a exactement pour racines les valeurs propres de cette dynamique, elle tend nécessairement vers zéro pour n'importe quelle fréquence de résonance. Par conséquent, afin de quantifier l'amplitude du potentiel électrique de surface, il semble nécessaire de prendre en compte les pertes qui, à la résonance, sont d'origine majoritairement mécanique (dues aux frottements internes) [Ber68]. Pour ce faire, une représentation complexe des constantes de raideur  $\bar{c}_{11}^E$  et  $\bar{c}_{33}^D$  est à considérer dans l'expression (3.92). Classiquement, ces grandeurs complexes sont définies de la manière suivante [Kar04] :

$$\hat{c}_{11}^E = \bar{c}_{11}^E \left(1 + \frac{j}{Q_m}\right) \quad \text{et} \quad \hat{c}_{33}^D = \bar{c}_{33}^D \left(1 + \frac{j}{Q_m}\right) \quad (3.94)$$

où  $Q_m$  est le facteur de qualité mécanique. A partir de ces expressions, dans l'hypothèse d'un facteur de qualité mécanique élevé ( $Q_m \gg 1$ ), les vecteurs d'onde du primaire et du secondaire s'écrivent et se simplifient comme suit :

$$\hat{k}_{i\infty} = k_{i\infty} \left(1 + \frac{j}{Q_m}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq k_{i\infty} \left(1 - \frac{j}{2Q_m}\right) \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (3.95)$$

Fort de ces considérations, l'amplitude complexe du potentiel électrique peut être calculée. Dans l'hypothèse où la variation selon l'axe ( $Ox_3$ ) est négligée et pour une fréquence d'alimentation calée sur une résonance mécanique du transformateur, cette amplitude prend la forme suivante :

$$\hat{\phi}_\infty^{(i)}(x_1) = \hat{\phi}_{\underline{m}}^{(i)} \left[ \cos(k_{2\infty}^{(i)} x_1) - 1 + \tan X_{2\infty}^{(i)} \sin(k_{2\infty}^{(i)} x_1) \right] - \frac{j}{2Q_m} \hat{\phi}_{\underline{m}1}^{(i)} \times \left[ \frac{X_{2\infty}^{(i)}}{\cos^2 X_{2\infty}^{(i)}} \sin(k_{2\infty}^{(i)} x_1) + (k_{2\infty}^{(i)} x_1) \left[ \tan X_{2\infty}^{(i)} \cos(k_{2\infty}^{(i)} x_1) - \sin(k_{2\infty}^{(i)} x_1) \right] \right] \quad (3.96)$$

où la quantité  $\hat{\phi}_{\underline{m}}^{(i)}$  a pour expression :

$$\hat{\phi}_{\underline{m}}^{(i)} = \hat{\phi}_{\underline{m}1}^{(i)} - \frac{j}{2Q_m} \hat{\phi}_{\underline{m}2}^{(i)}$$

avec

$$\begin{cases} \hat{\phi}_{\underline{m}1}^{(i)} = -\frac{1}{\hat{\Delta}_\infty} \bar{e}_{31} \bar{h}_{33} (1 - \cos X_{1\infty}^{(i)}) \cos X_{2\infty}^{(i)} \frac{nV_p}{e} \\ \hat{\phi}_{\underline{m}2}^{(i)} = -\frac{1}{\hat{\Delta}_\infty} \bar{e}_{31} \bar{h}_{33} \left[ X_{1\infty}^{(i)} \sin X_{1\infty}^{(i)} \cos X_{2\infty}^{(i)} - X_{2\infty}^{(i)} (1 - \cos X_{1\infty}^{(i)}) \sin X_{2\infty}^{(i)} \right] \frac{nV_p}{e} \end{cases}$$

et

$$\hat{\Delta}_\infty = \frac{j}{2Q_m} \bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \left[ (X_{1\infty}^{(i)} + \eta X_{2\infty}^{(i)}) \sin X_{1\infty}^{(i)} \sin X_{2\infty}^{(i)} - (\eta X_{1\infty}^{(i)} + X_{2\infty}^{(i)}) \cos X_{1\infty}^{(i)} \cos X_{2\infty}^{(i)} \right]$$

A l'issue de cette approche une valeur finie de l'amplitude du potentiel électrique est obtenue. Afin d'éprouver le modèle ainsi établi, le transformateur piézoélectrique Rosen CMT-Noliac est considéré. Ses caractéristiques géométriques et les paramètres structuraux de cette architecture sont rappelés dans le tableau [3.4]. Tout d'abord, une comparaison de la répartition du potentiel électrique de surface le long du transformateur est proposée sur la figure 3.17. Pour cette géométrie, les

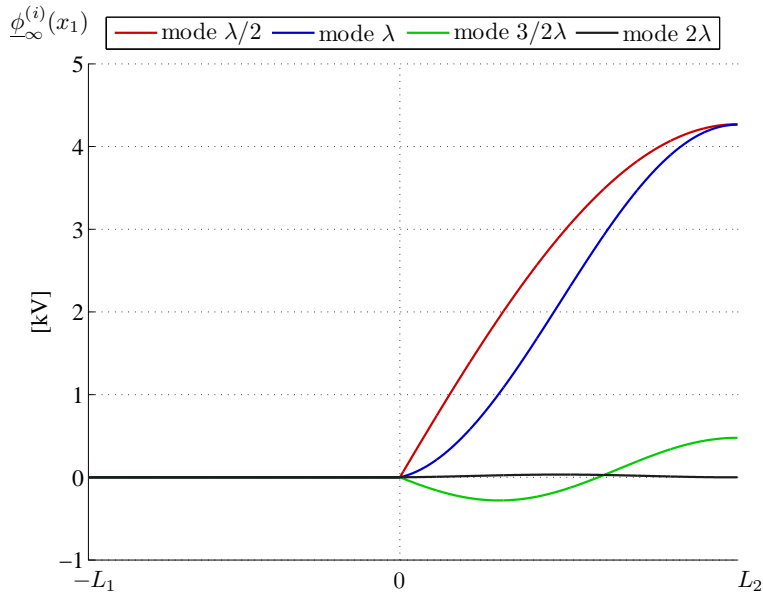


FIGURE 3.17 – Répartition spatiale selon l'axe ( $Ox_1$ ) du potentiel électrique de surface issu de la modélisation avec pertes pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Cas parallèle

deux premiers modes sont relativement similaires en termes de répartition, l'amplitude maximale, d'une valeur sensiblement égale, étant atteinte pour chacun d'eux à l'extrémité du secondaire. Pour un facteur de qualité mécanique égal à 300, l'ordre de grandeur de ces amplitudes est de quelques kilovolts. Par ailleurs, il est à noter l'amplitude négligeable, mais existante, du mode  $2\lambda$  comparativement à celles des autres modes, phénomène déjà constaté dans la section § 3.4.

Dans l'hypothèse d'une relation linéaire implicitement admise<sup>1</sup> entre le potentiel électrique de surface et la tension d'entrée, il est possible de tracer son évolution illustrée sur la figure 3.18 pour différentes valeurs de  $V_p$ . S'il est admis qu'il existe une tension seuil au delà de laquelle la décharge soit générée, la répartition non uniforme du potentiel de surface conduira nécessairement à faire évoluer la zone de décharge, croissante avec la tension d'entrée. Il est à noter par ailleurs que cette maîtrise de la zone de décharge peut être obtenue en sollicitant les différents modes vibratoires. Cette capacité sera démontrée au chapitre suivant.

1. la limite de validité de cette hypothèse sera discutée au chapitre suivant

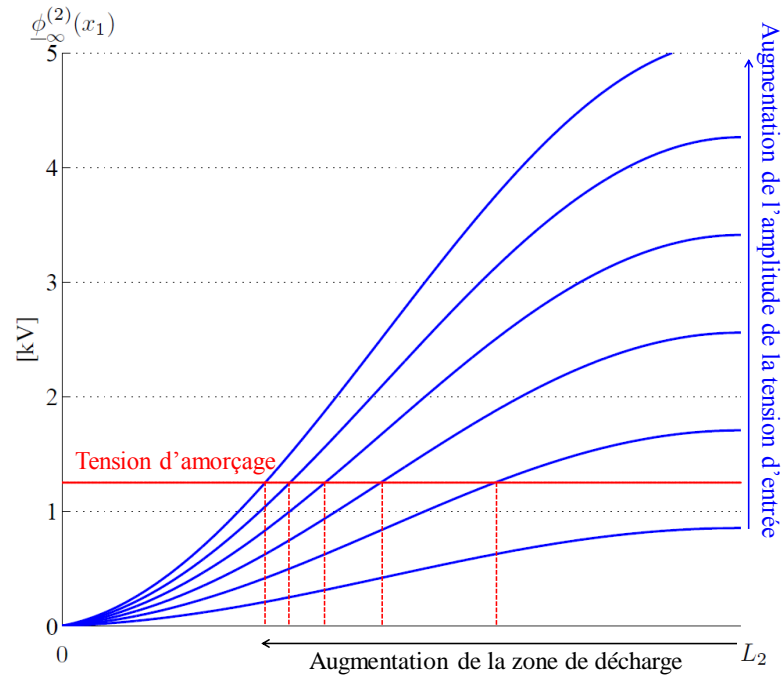


FIGURE 3.18 – Évolution du potentiel de surface en fonction de la tension d’entrée pour le mode  $\lambda$  d’un transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Cas parallèle

Outre le tracé de la répartition du potentiel électrique, l’influence sur l’amplitude maximale disponible du rapport longueur du secondaire sur longueur totale du transformateur a été simulée pour les quatre premiers modes longitudinaux. La figure 3.19 illustre cette étude. A la lecture de ce graphe, quelques commentaires peuvent être émis : premièrement, quelle que soit la proportion primaire/secondaire, l’amplitude maximale est la plus significative pour les modes  $\lambda/2$  et  $\lambda$ , ce qui confirme, dans la plupart des applications employant un transformateur piézoélectrique de type Rosen, l’exploitation de l’architecture autour des deux premiers modes longitudinaux afin de tirer parti des meilleures performances. Deuxièmement, pour des géométries présentant des longueurs de primaire et de secondaire approximativement égales ( $L_2/L_0 \simeq 0.5$ ), l’élévation en tension semble optimale pour les deux premiers modes, tandis qu’en comparaison, l’amplitude maximale du potentiel électrique du mode  $2\lambda$  est dérisoirement faible. Ceci confirme son inexistence sur la figure 3.17 et entérine une fois encore les remarques faites dans la section § 3.4. A noter que dans le cadre de la génération de décharge plasma par effet piézoélectrique, un avantage notoire consiste en la capacité à déployer à loisir un potentiel électrique à différents endroits. A ce titre, le basculement d’un mode vibratoire à un autre permet théoriquement de « délocaliser » le lieu de la décharge (fait remarquablement vérifié dans la section suivante sur la figure 3.22). Malheureusement, hormis pour les modes  $\lambda/2$  et  $\lambda$ , il n’existe pas de rapport  $L_2/L_0$  permettant de satisfaire simultanément à un optimum de potentiel électrique pour l’ensemble des modes ici considérés. Face à un tel besoin, il sera alors nécessaire d’aboutir à un compromis d’optimisation et compenser par l’amplitude de la tension d’entrée la faiblesse du facteur d’élévation des modes défavorisés.

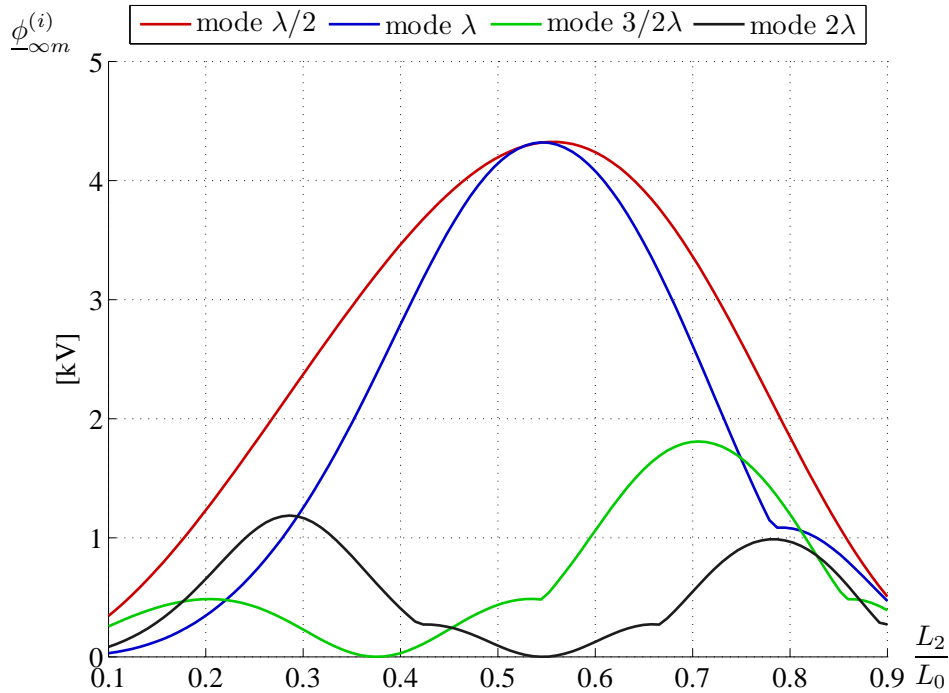


FIGURE 3.19 – Évolution de l'amplitude maximale du potentiel électrique issue de la modélisation avec pertes en fonction du rapport  $L_2/L_0$  pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique CMT-Noliac – Cas parallèle

### 3.5.2 Cartographie du potentiel électrique

Jusqu'à présent, le confinement des lignes de champ au sein du transformateur était légitimement supposé en raison d'une permittivité diélectrique intrinsèque d'une valeur mille fois supérieure à celle de l'air. Or, le bref état de l'art du chapitre 1 et les investigations expérimentales du chapitre 4 indiquent la présence d'un champ électrique environnant, cause présumée des décharges plasma que peut promouvoir un transformateur piézoélectrique. En d'autres termes, l'influence du plasma sur la carte de potentiel électrique et son couplage avec les propriétés piézoélectriques avaient jusqu'alors été occultés. Toutefois, cette partie n'a pas vocation à expliquer les phénomènes complexes qui lient intimement la piézoélectricité et le plasma. Cette section constitue une première étape à la compréhension de ce couplage et son objectif sera modestement d'établir une relation entre la vibration mécanique du transformateur et le potentiel électrique environnant. Pour ce faire, une modélisation numérique 2D de ce potentiel établie à partir de la méthode des différences finies est proposée. Après avoir posé les hypothèses du problème, la méthode des différences finies sera brièvement décrite. Les résultats issus de cette modélisation clôtureront cette partie.

## Hypothèses

La figure 3.20 illustre le domaine d'étude dans lequel seule la moitié supérieure du transformateur piézoélectrique est considérée. Le milieu environnant, le primaire, le secondaire et la bordure du domaine d'étude sont respectivement notés  $\Omega$ ,  $\Omega_p$ ,  $\Omega_s$  et  $\Gamma_D$ . Afin d'obtenir une cartographie 2D du potentiel électrique, les hypothèses simplificatrices suivantes sont avancées :

- Le transformateur est supposé baigner dans l'air dont la permittivité diélectrique s'apparente à celle du vide  $\varepsilon_0$ .
- Le primaire est considéré comme un milieu diélectrique de permittivité égale à  $\varepsilon_{33}^T(1 - k_{31}^2)$  calculée à partir des données consignées dans le tableau [3.4].
- Le potentiel électrique du secondaire est imposé. Sa répartition est issue de l'étude aux vibrations forcées de la partie précédente.
- Le potentiel électrique est supposé symétrique par rapport à l'axe  $(Ox_1)$  et invariant par translation selon l'axe  $(Ox_3)$ . Les effets de bord ne sont par conséquent pas pris en compte dans ce modèle.
- Le régime permanent est établi de sorte que le potentiel électrique évolue sinusoïdalement avec le temps.
- Une condition aux limites de Dirichlet est considérée : le potentiel électrique est pris nul sur le contour  $\Gamma_D$ .

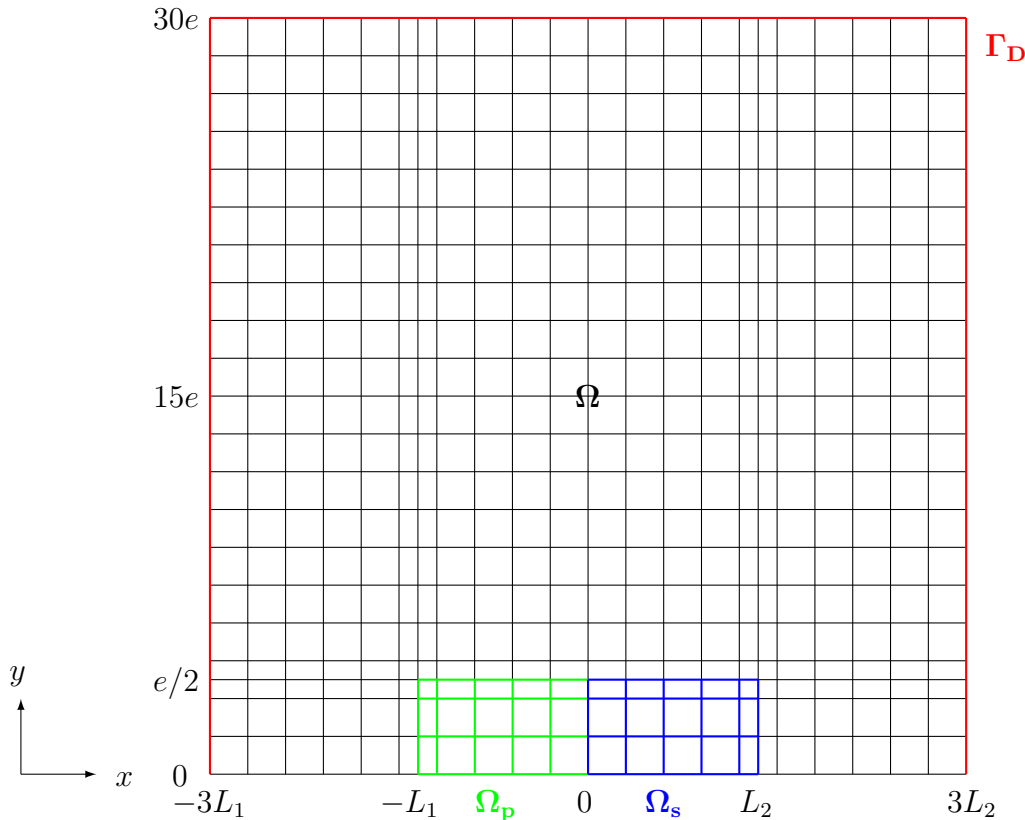


FIGURE 3.20 – Domaine d'étude de la modélisation numérique du potentiel électrique généré par un transformateur piézoélectrique de type Rosen

Fort de ces considérations, le potentiel électrique dans le domaine d'étude considéré vérifie le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_0 \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega_p \\ \phi = \phi_{PT} & \text{dans } \Omega_s \\ \phi = 0 & \text{sur } \Gamma_D \end{array} \right. \quad (3.97)$$

où  $\Delta$  symbolise l'opérateur laplacien et  $\phi_{PT}$  le potentiel électrique issu de l'analyse aux vibrations forcées de la partie précédente. Une remarque intermédiaire peut d'ores et déjà être formulée sur le modèle numérique proposé ici : les équations de la piézoélectricité gouvernant le comportement électromécanique du transformateur ne sont pas explicitement résolues par la méthode des différences finies, le primaire étant considéré comme un simple milieu diélectrique et le potentiel électrique étant imposé au secondaire. De ce fait, cette approche constitue clairement une modélisation numérique 2D à couplage faible.

### Méthode des différences finies : principe et application au problème

Afin de résoudre le problème stationnaire précédemment énoncé, la méthode des différences finies est mise en œuvre. Cette méthode numérique permet de résoudre les équations aux dérivées partielles par une discrétisation des opérateurs différentiels réalisée à l'aide de développements de Taylor. Dans le cas présent, le potentiel électrique vérifie une équation de Laplace aussi bien dans le primaire que dans le milieu environnant. Afin de discrétiser cette équation aux dérivées partielles elliptique, le schéma à 5 points utilisant un pas de discrétisation quelconque est utilisé (cf. figure 3.21). A partir de ce maillage, les dérivées secondes selon les variables  $x$  et  $y$  présentes dans l'équation de Laplace sont discrétisées à l'aide d'une différence centrée. Il vient finalement :

$$\frac{\phi_{i-1,j}}{h_1(h_1 + h_3)} + \frac{\phi_{i,j-1}}{h_2(h_2 + h_4)} - \left( \frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4} \right) \phi_{i,j} + \frac{\phi_{i+1,j}}{h_3(h_1 + h_3)} + \frac{\phi_{i,j+1}}{h_4(h_2 + h_4)} = 0 \quad (3.98)$$

Pour un maillage uniforme ( $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ ), cette équation se simplifie comme suit :

$$\phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} = 0 \quad (3.99)$$

En plus de l'équation vérifiée par le potentiel électrique dans les différents milieux, il faut préciser les équations aux interfaces et en bordure du domaine. Ici, le potentiel vérifie une condition de Dirichlet aux limites du domaine ( $\phi = 0$  sur  $\Gamma_D$ ) et une condition de symétrie par rapport à l'axe ( $Ox$ ) sur la bordure inférieure. Les équations aux interfaces entre l'air et le transformateur sont développées dans l'annexe C. Finalement, l'application de la méthode aux différences finies pour résoudre l'équation de Laplace se réduit à la simple résolution d'un système linéaire de la forme  $A\phi = B$ .

Le modèle numérique ainsi établi est simulé pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique Rosen CMT-Noliac. Le domaine

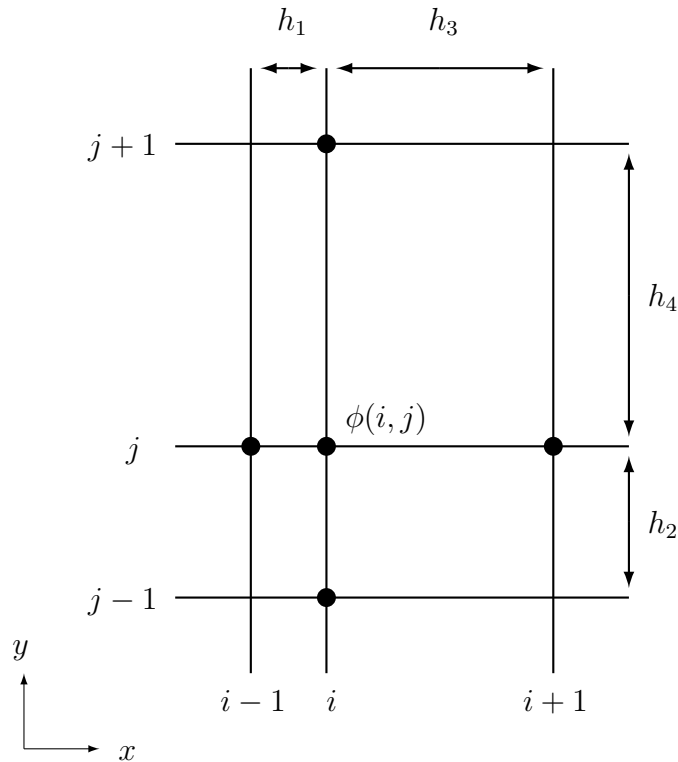


FIGURE 3.21 – Schéma à 5 points à pas de discrétisation quelconque

d'étude est un rectangle de dimensions  $[-3L_1, 3L_2] \times [0, 30e]$  réduit aux intervalles  $[-2L_1, 2L_2] \times [0, 15e]$  sur les résultats graphiques pour plus de clarté. Les tracés sont regroupés sur la figure 3.22. Afin de confirmer la pertinence des simulations numériques, les cartographies 2D du potentiel électrique sont rapprochées des clichés expérimentaux figurant des décharges plasma obtenues pour les différents modes vibratoires. A noter qu'aucun relevé expérimental n'a pu être obtenu pour le mode  $2\lambda$  en raison d'un faible potentiel électrique produit, phénomène justifiée analytiquement et numériquement pour un transformateur présentant des longueurs de primaire et de secondaire approximativement égales. La comparaison permet de constater une bonne corrélation entre les régions de fort champ électrique et les zones lumineuses  $j$  pour les trois premiers modes longitudinaux. Pour information, le tableau [3.9] mentionne les conditions expérimentales d'obtention des décharges plasma. Le chapitre 4 reviendra plus en détail sur la production de ces décharges.

mode	$P$ [mbar]	$V_p$ [V]	$f$ [kHz]
$\lambda/2$	2.4	1.8	70.80
$\lambda$	2.4	1.8	140.9
$3/2\lambda$	4.2	1.8	207.6

TABLE 3.9 – Conditions expérimentales d'obtention des décharges plasma pour les trois premiers modes longitudinaux d'un transformateur piézoélectrique Rosen CMT-Noliac.



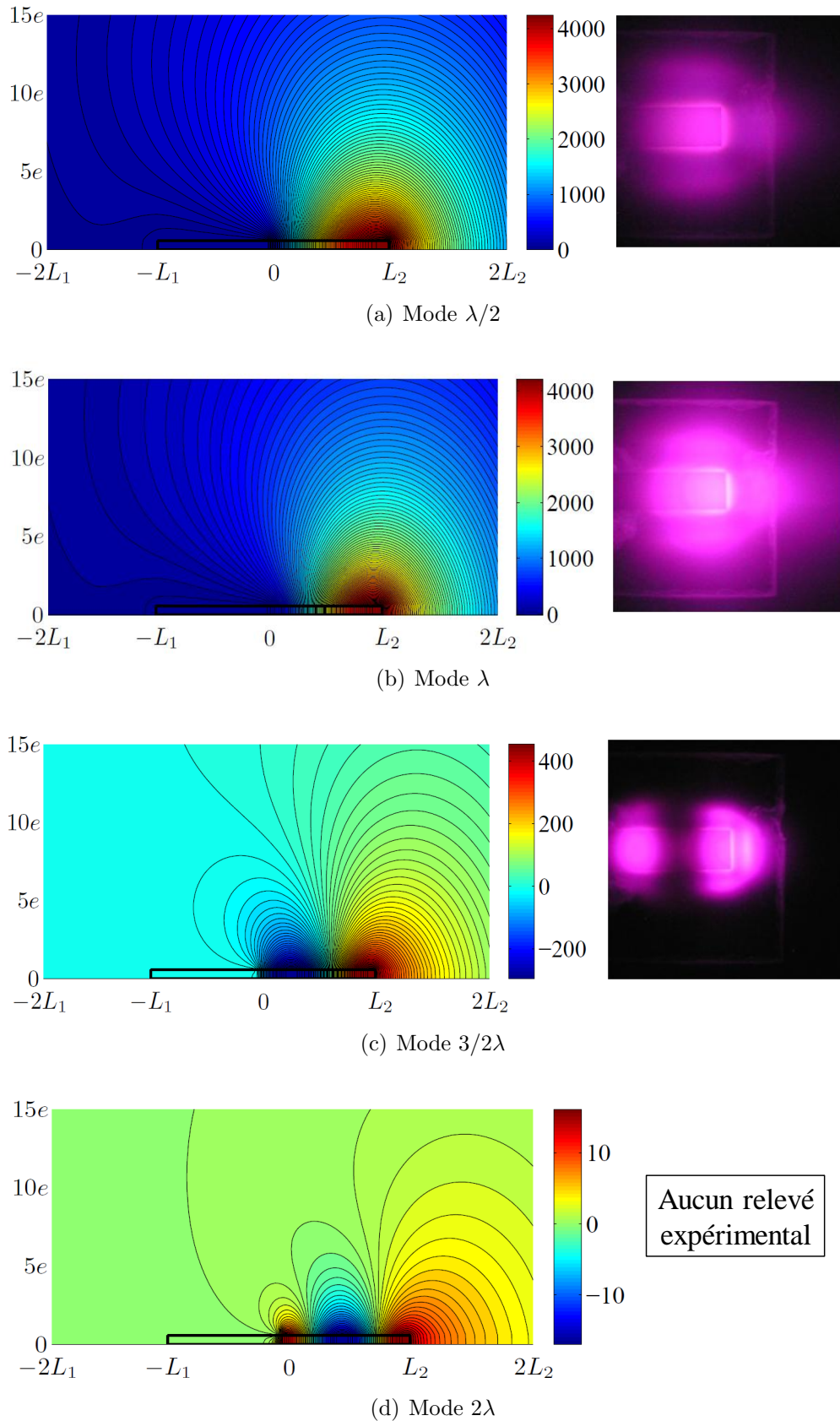


FIGURE 3.22 – Cartographie 2D du potentiel électrique (en V) produit par un transformateur piézoélectrique CMT-Noliac pour les quatre premiers modes longitudinaux simulée à l'aide de la méthode des différences finies – Comparaison aux motifs lumineux des décharges plasma obtenues expérimentalement

## 3.6 Conclusion

Au cours de cette partie, la modélisation théorique développée dans le chapitre précédent a été éprouvée sur une architecture classique : le transformateur piézo-électrique de type Rosen. A partir d'hypothèses simplificatrices, notamment une évolution spatiale unidimensionnelle des grandeurs caractéristiques, les équations du mouvement ont été obtenues et interprétées en termes de schéma électrique équivalent pour permettre une comparaison à l'expérimentation. En parallèle et afin de conforter la modélisation théorique, une identification numérique et expérimentale des caractéristiques modales selon les quatre premiers modes longitudinaux a été entreprise.

Il est à rappeler que la démarche présentée offre, en comparaison des méthodes classiques, un caractère multimodal intéressant dans l'optique d'une optimisation de la structure répondant à des spécifications précises et s'avère de surcroît être exploitable pour tout type de géométrie de transformateur piézoélectrique.

Les conclusions tirées des différents tracés comparatifs ont permis de mettre en exergue les limites de la modélisation unidimensionnelle, hypothèse classiquement invoquée dans tous les modèles analytiques visant à décrire le comportement électrodynamique des transducteurs et autres résonateurs piézoélectriques. Ces modèles constituent néanmoins un support remarquable pour aborder de manière rigoureuse le prédimensionnement ou l'optimisation d'un dispositif devant répondre à un cahier des charges bien déterminé. En outre, l'originalité et l'inexpérience relatives à l'application des transformateurs piézoélectriques à la promotion de décharges plasma de surface nécessitent incontestablement une connaissance en amont du comportement électromécanique du transformateur, ici obtenu grâce au système d'équations issu de la méthode développée dans ce chapitre.

En outre, une extension de cette modélisation a permis de poser les premiers jalons à l'étude de l'interaction entre les domaines de la piézoélectricité et du plasma. Même si l'approche s'est avérée élémentaire, compte tenu de nombreuses hypothèses simplificatrices, et notamment un couplage faible supposé entre le transformateur et le milieu environnant, les résultats obtenus ont d'ores et déjà montré une corrélation remarquable entre les cartographies 2D du potentiel électrique issues du modèle numérique et les zones lumineuses des décharges plasma générées expérimentalement. L'objectif final d'une telle entreprise est de développer un modèle champ-circuit complet et précis reliant le plasma et les grandeurs électriques mesurables en entrée du transformateur.



# Chapitre 4

## Investigations expérimentales et analyses

### Table des matières

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>166</b>
<b>4.2</b>	<b>Moyens et procédure de caractérisation</b>	<b>166</b>
<b>4.3</b>	<b>Caractérisation à pression atmosphérique</b>	<b>170</b>
4.3.1	Mesures expérimentales	170
4.3.2	Interprétation du comportement non-linéaire	173
4.3.2.1	Non-linéarités diélectriques	175
4.3.2.2	Non-linéarités piézoélectriques	175
4.3.2.3	Non-linéarités élastiques	175
4.3.3	Modélisation du comportement non-linéaire	176
4.3.3.1	Modélisation approchée du comportement non-linéaire [Yan07b]	177
4.3.3.2	Identification expérimentale du coefficient $\bar{\gamma}$	182
4.3.3.3	Simulation du modèle non-linéaire	186
<b>4.4</b>	<b>Caractérisation en condition de décharges</b>	<b>189</b>
4.4.1	Mesures expérimentales	189
4.4.1.1	Validation expérimentale préalable	190
4.4.1.2	Caractérisation sous pression contrôlée	191
4.4.1.3	Observations	192
4.4.2	Exploitation des mesures en condition de décharge	198
4.4.2.1	Caractérisation en régime de décharge	198
4.4.2.2	Exploitation du modèle linéaire	201
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>206</b>

---

## 4.1 Introduction

Les précédents chapitres ont permis d'établir une méthode rigoureuse pour aborder la modélisation analytique des transformateurs piézoélectriques quelle que soit leur géométrie, et de formuler explicitement les relations théoriques attenantes au potentiel électrique de surface. Ce potentiel constitue la condition nécessaire à la promotion d'une décharge dans le gaz environnant. La maîtrise des hypothèses simplificatrices au fil de la résolution analytique permet de contrôler la complexité et la précision du modèle. Toutefois, cette approche théorique, confortée par des comparaisons expérimentales classiques, ne permet pas de rendre compte en l'état du comportement du dispositif sous l'effet de la génération d'une décharge.

Le comportement électromécanique dans de telles conditions de fonctionnement reste pour ainsi dire « inconnu », compte tenu du peu d'études menées sur le sujet et des difficultés liées aux conditions expérimentales. Ce dernier chapitre traite donc de la caractérisation expérimentale préliminaire menée sur un transformateur piézoélectrique de type Rosen afin de fournir les premiers éléments de discussion quant au fonctionnement du dispositif face à une décharge plasma. Cette première caractérisation s'appuie sur des mesures essentiellement électriques au travers de la mesure d'admittance au primaire du transformateur. Ces conditions de caractérisation volontairement simples conduisent néanmoins à mettre en évidence des phénomènes non pris en compte dans le modèle précédent : tout d'abord l'incidence d'une excitation à la résonance faiblement amortie (transformateur à vide), puis l'influence directe des décharges plasma sur les grandeurs électriques.

Ces essais conduiront à aborder la question de la validité de l'approximation linéaire des lois constitutives de la piézoélectricité, puis à établir les conditions nécessaires sur le potentiel électrique pour favoriser l'apparition d'une décharge plasma à la surface du secondaire du transformateur.

## 4.2 Moyens et procédure de caractérisation

La caractérisation est entreprise à l'aide d'un transformateur Rosen initialement destiné à une utilisation conventionnelle, c'est-à-dire comme élévateur de tension pour l'alimentation des lampes fluorescentes à cathode froide utilisée pour le rétroéclairage des écrans LCD. Celui-ci a précédemment fait l'objet d'une caractérisation détaillée dans l'annexe B et d'une comparaison approfondie au modèle analytique § 3.4. Compte tenu des contraintes initialement imposées par le choix du transformateur Rosen, le banc de caractérisation doit intégrer les moyens nécessaires à favoriser la génération de décharge à l'aide du transformateur disponible. Ainsi, pour favoriser la génération des décharges, le banc d'essais intègre une chambre à vide permettant de réduire les contraintes sur le niveau de champ électrique nécessaire. Ce banc d'essais, illustré en figure 4.1, se caractérise par les éléments suivants :

- une enceinte à vide,
- un passe-câble FISHER permettant l'alimentation,
- un groupe de pompage turbomoléculaire VARIAN,

- une jauge Eyesys Mini-IMG  $3 \cdot 10^{-9}$  mbar à  $10^{-3}$  mbar,
- un manomètre capacitif absolue BARATRON gamme  $10^{-2}$  mbar à 1000 mbar,
- une vanne de condamnation pour le maintien en basse pression de la chambre,
- une vanne de remise à air,
- un amplificateur linéaire  $\pm 200$  V/DC/500 kHz/4 A,
- un analyseur de signaux deux voies HP3562A.

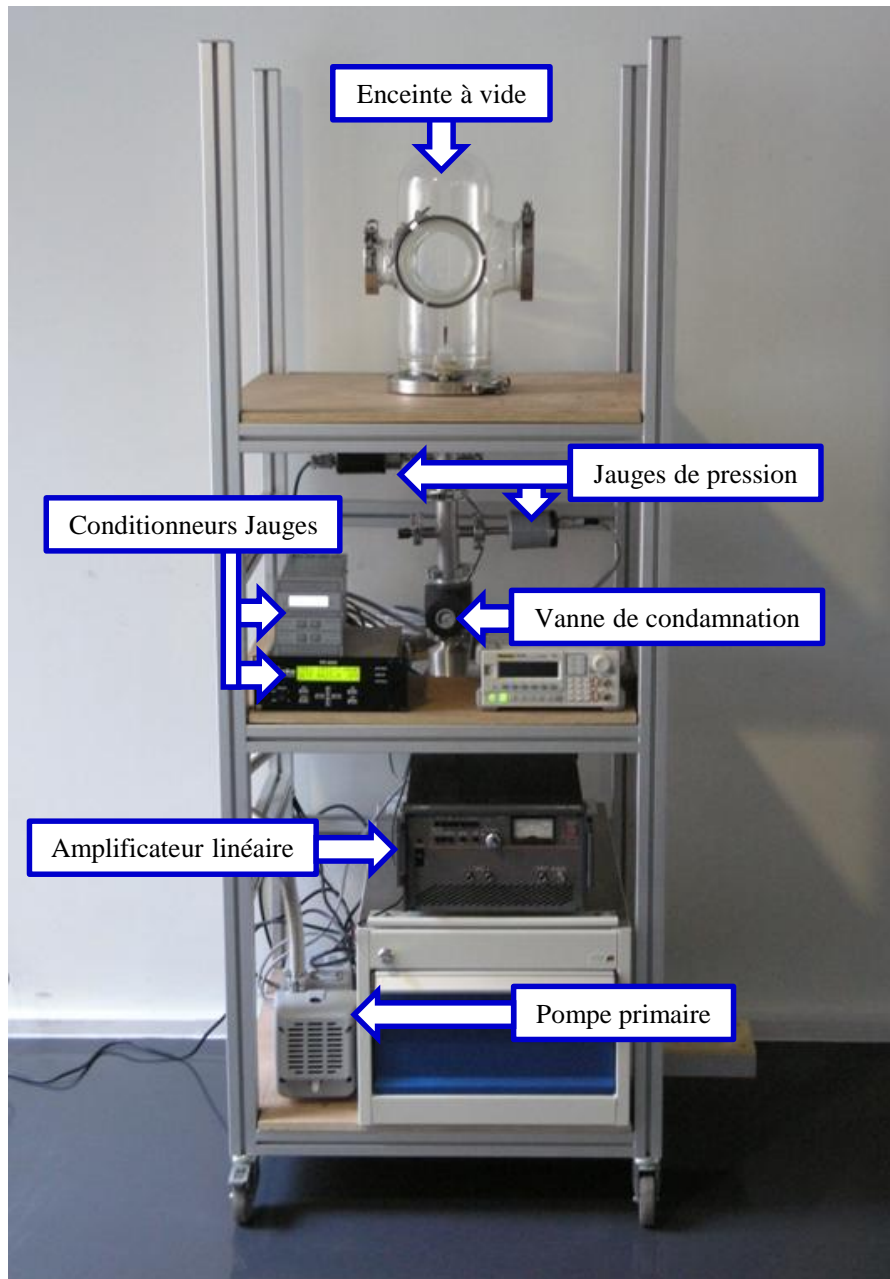


FIGURE 4.1 – Banc d’essais – Chambre à vide pour la caractérisation du transformateur piézoélectrique en condition de génération de décharge

La gamme de pression utile sera conduite par l’apparition d’une décharge lumineuse lors d’une alimentation du transformateur en condition normale, c’est-à-dire

quelques volts en tension d'entrée. L'objectif étant de produire la décharge en surface du secondaire du transformateur, celui-ci est laissé libre et sans gainage, rendant possible l'ionisation du gaz environnant et la recombinaison probable des charges à sa surface. Il est à rappeler brièvement que les différents types de décharges plasma peuvent être classifiées selon leur caractéristique tension/courant [Sub07], telle qu'illustrée sur la figure 4.2. Les courbes inférieure et supérieure représentent respectivement le profil tension/courant à basse pression ( $\approx < 1$  mbar) et haute pression. Le mode de fonctionnement expérimental visé concerne les décharges lumineuses de faibles puissances, à faible pression, conduisant à un plasma hors-équilibre peu ionisé. En outre, les conditions de claquage d'un gaz sont régies par la loi de Paschen. Ce dernier a établi de manière empirique que la tension de claquage (ou disruptive), pour un gaz et un matériau d'électrodes donnés, dépend uniquement du produit de la pression  $P$  et de la distance inter-électrodes  $d$  [Pas89].

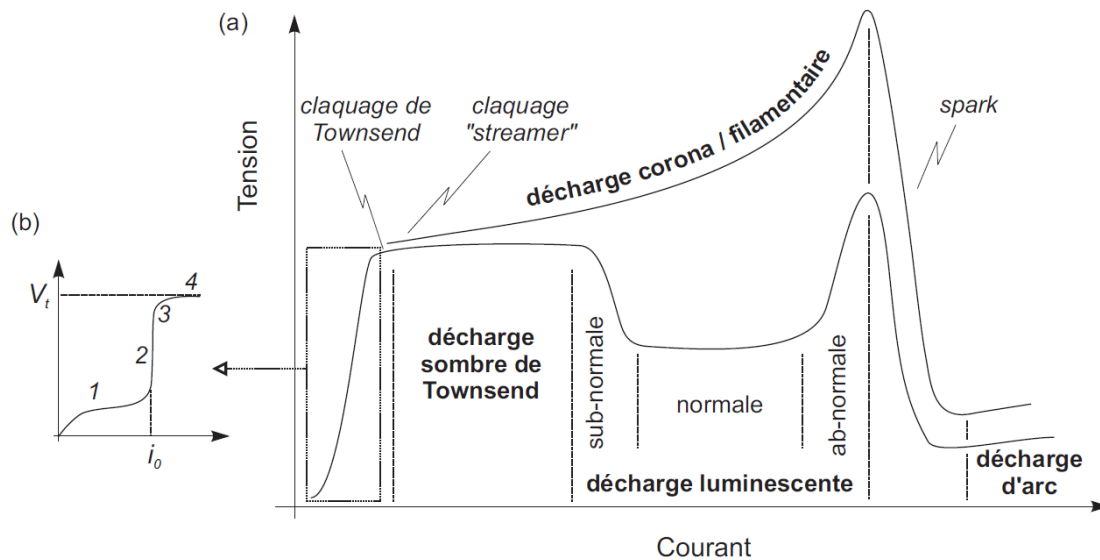


FIGURE 4.2 – Caractéristiques tension-courant des décharges plasma [Sub07]

En outre, il a été décidé de faire fonctionner le transformateur en tirant profit de ses propriétés diélectriques. A l'instar des dispositifs à décharges à barrière diélectriques, utilisée notamment pour éviter toute transition à l'arc, l'électrodage secondaire du transformateur sera supprimé. Le secondaire du transformateur, sous l'action vibratoire du primaire, s'apparente donc dans ces conditions à un matériau diélectrique chargé. Bien évidemment, compte tenu de la sollicitation vibratoire nécessaire du transformateur, la source de champ électrique ainsi obtenue est alternative et de fréquence identique à celle de l'alimentation au primaire.

Cette étude préliminaire ne portera pas sur une description plus détaillée du type de décharge entretenue à l'aide du dispositif, ne cherchant pas à identifier les processus secondaires.

La figure 4.3 illustre les terminaisons électrodées ou non du transformateur piézoélectrique au secondaire, ainsi que sa disposition verticale dans la chambre à vide. Il apparaît très visiblement que l'électrodage du primaire est disposé sur les flancs du transformateur. Le choix de placer ces électrodes et leurs liaisons soudées sur les côtés de la structure est lié à une facilité de conception et à l'existence d'un nœud de vibration de l'onde à cette position lors d'une déformation en mode  $\lambda$ , mode de fonctionnement initial du transformateur. Disposer les soudures en ce point permet ainsi de réduire leur mise sous contrainte mécanique pouvant conduire à leur détérioration (cassure, décollement) d'une part, et d'autre part à limiter la mise en mouvement de la masse passive qu'elles constituent. En dépit d'un fonctionnement selon différents modes vibratoires durant l'étude, l'électrodage restera identique.

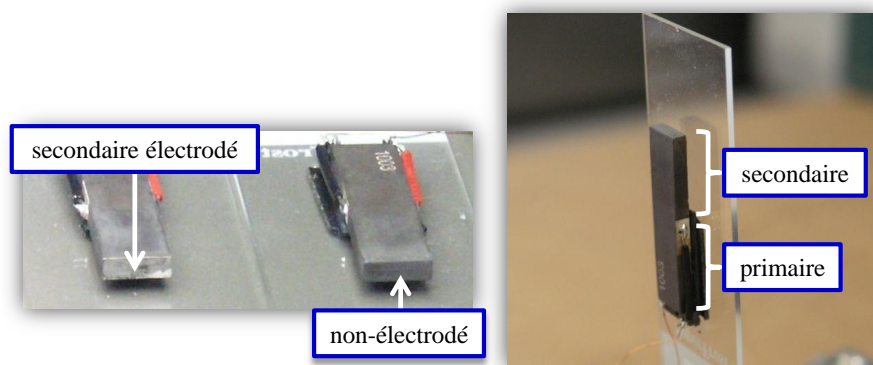


FIGURE 4.3 – Disposition du transformateur pour sa caractérisation et condition d'électrodage au secondaire

Les tensions appliquées au primaire à l'aide des électrodes sont de faibles amplitudes ( $< 2\text{ V}$ ), si bien qu'elles ne peuvent conduire à une décharge. L'une d'elles porte cependant le potentiel nul, la décharge étant ainsi attendue entre le diélectrique au potentiel suffisamment élevé (extrémité du secondaire) et la masse. En outre, cette disposition sur les flancs contrarie manifestement d'éventuelles hypothèses de décharges uniquement selon un unique plan orthogonal ( $Ox_1x_3$ ) comme il en était question lors du chapitre précédent. Toutefois, compte tenu de la faible valeur du potentiel électrique au niveau du primaire du transformateur, et de la comparaison qualitative qui est faite entre le potentiel électrique théorique précédemment modélisé et la visualisation pratique de la décharge, cette disposition n'aura que peu d'incidence sur les conclusions à tirer. Il est important de noter que les effets thermiques, qu'ils soient issus des frottements internes du transformateur ou de la décharge sont négligés à cette étape de la caractérisation pratique. Les précautions sont prises simplement en laissant refroidir suffisamment le dispositif entre les différents essais, et éviter de le soumettre à un échauffement de trop longue durée, pouvant mener à une détérioration définitive (dépolarisation par franchissement de la température de Curie) ou un vieillissement prématuré. Ces contraintes thermiques deviennent d'autant plus importantes que le refroidissement naturel par convection se dégrade sous basse pression.



En raison des conditions de confinement nécessaire à l'étude, ainsi que de l'impossibilité de mesure de la tension au secondaire du transformateur (absence d'électrode secondaire), l'ensemble de la caractérisation se fait au travers des mesures d'admittance au primaire. L'objectif est ici d'aborder de manière simple le couplage pouvant apparaître entre l'apparition de décharges environnantes et les grandeurs électriques d'entrée du dispositif. Cette mesure d'admittance est faite à l'aide d'un analyseur de signaux HP3562A afin d'obtenir le diagramme de Bode.

Le relevé expérimental de l'admittance est classiquement abordé selon deux moyens d'alimentation distincts : alimentation en courant ou en tension. Lorsqu'il s'agit de dispositifs piézoélectriques, ces deux méthodes permettent de discriminer le comportement électromécanique, tension et courant étant respectivement analogues à des forces et vitesses mécaniques. L'une des solutions pour élaborer simplement une alimentation en courant selon [Ish98a] consiste à intégrer un circuit passif d'antirésonance et un circuit de retard. Toutefois, cette solution reposant sur un ajustement précis de la fréquence d'antirésonance du circuit d'accord, elle peut être insatisfaisante si la résonance du dispositif vient à évoluer dans une trop grande proportion (effet thermique et/ou non-linéaire) ou pour une caractérisation large de part et d'autre de la fréquence de résonance. Pour cette raison, l'alimentation à courant constant n'est pas retenue pour l'étude détaillée ci-après. Le transformateur sera donc alimenté en tension à l'aide d'un amplificateur linéaire  $\pm 200$  V/DC/500 kHz/4 A qui permettra ainsi de solliciter les différents modes vibratoires  $\lambda/2$ ,  $\lambda$ ,  $3\lambda/2$  et  $2\lambda$ . Dans les deux cas d'alimentation, la difficulté principale réside dans le comportement de l'échantillon piézoélectrique lors de sa mise en résonance. En effet, lorsque le dispositif piézoélectrique est sujet à un très faible amortissement, ce qui s'avère être le cas du transformateur avec secondaire à vide, sa faible impédance d'entrée à la résonance peut devenir sensiblement équivalente voire inférieure à l'impédance de sortie de la source d'alimentation. Cette faible impédance peut conduire à une mauvaise stabilité de l'alimentation. Les essais préliminaires de qualification du banc d'essais ont permis de vérifier le comportement acceptable de l'amplificateur linéaire, malgré une variation notable de son gain à la résonance. Pour cette raison, il sera convenu que la tension d'alimentation est considérée constante sur toute la plage de fréquence explorée.

## 4.3 Caractérisation à pression atmosphérique

### 4.3.1 Mesures expérimentales

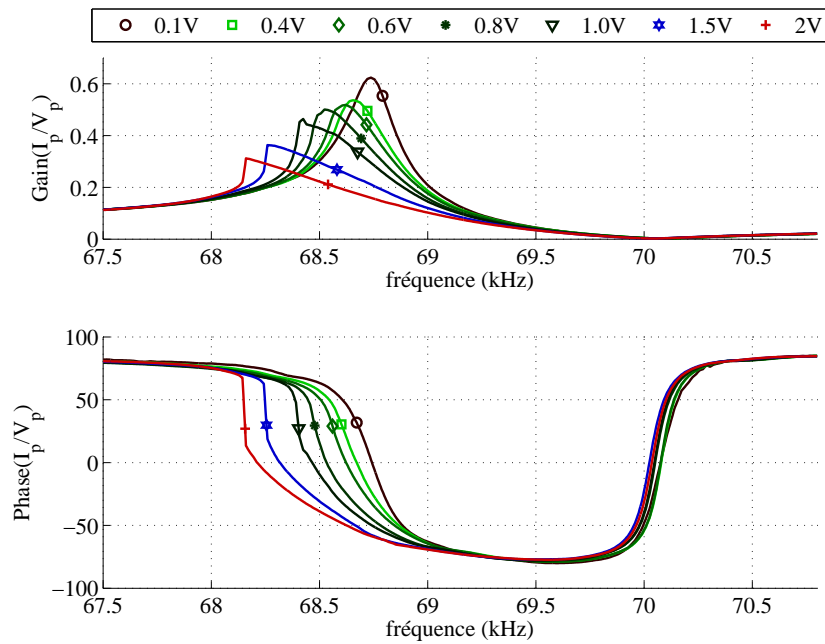
Avant d'aborder la caractérisation du transformateur en condition de décharge plasma, une première étude préliminaire est menée afin de vérifier son comportement à vide. Pour ce faire, il est nécessaire de se mettre en condition de fonctionnement nominal en tension, sans que cela ne conduise à produire une quelconque décharge. Ce point de fonctionnement est très facilement atteint. En effet, comme l'influence de l'impédance acoustique sur le comportement vibratoire du transformateur est légitimement négligée quelle que soit la condition de pression, il suffit de

mesurer l'admittance du transformateur à pression atmosphérique. De cette manière, le produit pression  $\times$  distance est très élevé permettant de se placer dans des conditions qui s'éloignent significativement des conditions de claquage.

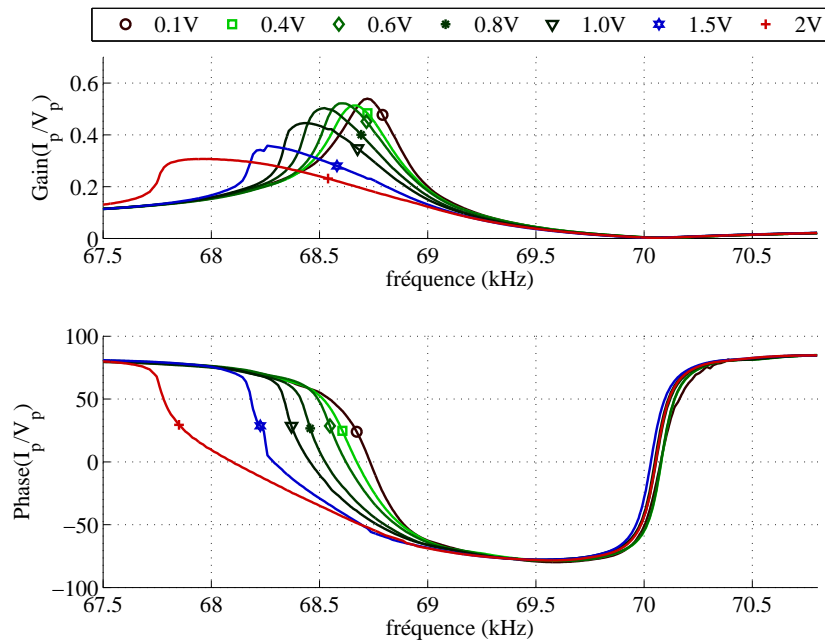
Les relevés reposant sur le tracé des diagrammes de Bode sont limités en fréquence à 100 kHz en raison des caractéristiques de fonctionnement de l'analyseur de signaux. Par conséquent, l'admittance est relevée expérimentalement pour le mode vibratoire  $\lambda/2$  dont la fréquence est située aux environs de 70 kHz. Les mesures obtenues en fréquence croissante et décroissante sont représentées respectivement sur les figures 4.4(a) et 4.4(b). L'observation de ces courbes suscite immédiatement l'interrogation. En effet, le comportement diffère de celui décrit par le modèle analytique développé au § 3.4 ainsi que des résultats issus de l'étude expérimentale. Il est à rappeler que la caractérisation détaillée dans l'annexe B s'appuie sur les relevés effectués à l'aide d'un analyseur d'impédance Agilent 4294A. Son principe réside sur une analyse « petits signaux ». Or, la caractérisation faite à l'aide de l'analyseur de signaux HP3562A permet de s'affranchir de la limitation en puissance inhérente à l'analyseur d'impédance. Pour mieux appréhender le comportement selon l'exploration en fréquence croissante ou décroissante, les admittances relevées dans ces deux cas de figure sont superposées sur le même graphique (cf. figure 4.5). Au regard de ces relevés en fréquence, les remarques suivantes peuvent être signalées :

- La fréquence de résonance tend à diminuer avec l'augmentation de  $V_p$ .
- L'amplitude maximale de l'admittance suit une tendance décroissante monotone avec l'augmentation de  $V_p$ .
- L'allure du diagramme de Bode ne s'apparente plus à une fonction continue au delà d'une certaine amplitude de  $V_p$ .
- Contrairement à la fréquence de résonance, la fréquence d'antirésonance varie peu quelle que soit l'amplitude de la tension d'alimentation  $V_p$  ou le sens de la variation en fréquence.
- La plage de fréquence apparentée au comportement inductif ( $\phi \approx -90^\circ$ ) s'étend avec l'augmentation de  $V_p$ .
- Le diagramme présente un phénomène d'hystérésis au delà d'une certaine amplitude de tension (particulièrement visible sur la figure 4.5).

Il faut rappeler que le tracé du diagramme de Bode résulte de la variation en amplitude et en phase du signal (par rapport à une référence) en fonction de la fréquence principale qualifiée de fondamentale. Ainsi, les harmoniques susceptibles d'exister ou d'apparaître ne sont pas visibles à l'aide de ce relevé. Ce comportement à l'évidence non-linéaire n'est pas un comportement propre à ce type de transformateur piézoélectrique. Des phénomènes électriques similaires sont observables sur des actionneurs ou simplement transducteurs piézoélectriques dès lors qu'ils pré-



(a) Fréquence croissante



(b) Fréquence décroissante

FIGURE 4.4 – Admittance d'entrée pour différents niveaux de tension en fréquence croissante et décroissante

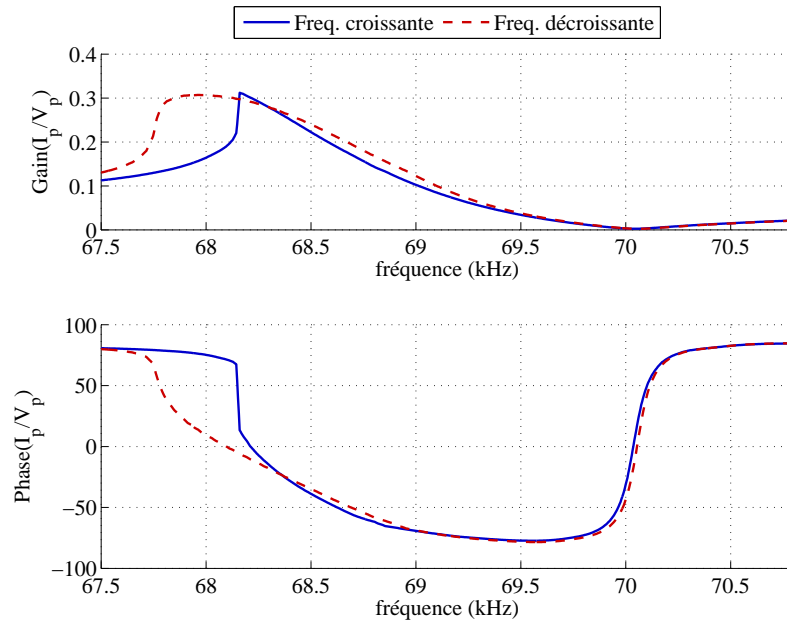


FIGURE 4.5 – Comparaison de l’admittance d’entrée à  $V_p = 2\text{ V}$  en fréquence croissante et décroissante

sentent un faible amortissement et une sollicitation électrique et/ou mécanique importante. Une discussion plus large concernant les non-linéarités est abordée en section § 4.3.2.

Il apparaît ici nécessaire de modérer les conclusions quant à la validité du modèle analytique développé précédemment. Le modèle présenté au § 3.4 s’avère tout à fait viable dans les conditions de fonctionnement « petits signaux » ou fonctionnement amorti, c’est-à-dire lorsqu’une charge électrique résistive est placée au secondaire du transformateur. Un complément d’étude au modèle analytique précédent est abordé au § 4.3.3 afin d’étudier et de prendre en compte ce comportement non-linéaire.

### 4.3.2 Interprétation du comportement non-linéaire

La description du comportement piézoélectrique selon des relations linéaires est très largement admise dans les études scientifiques ou les caractéristiques des fabricants. Cette approximation amplement répandue n’est pas aberrante, mais doit admettre une plage de validité restreinte aux applications à faibles champs électriques internes et petites déformations.

Lorsqu’il s’agit d’aborder les non-linéarités des milieux ferroélectriques, il est nécessaire de s’autoriser quelques approximations et simplifications tant les sources de manifestations non-linéaires sont nombreuses. Il suffit pour s’en convaincre de

revenir aux multiples interactions existantes au sein des matériaux ferroélectriques (cf. figure 1.6) pour en admettre la complexité. En outre, ces comportements anharmoniques ou non-linéaires ne concernent pas exclusivement les transformateurs piézoélectriques. Les actionneurs comme les transducteurs piézoélectriques témoignent du même comportement, dès lors que les puissances ou les déplacements deviennent conséquents. Il est à ajouter par ailleurs que ces comportements non-linéaires apparaissent également au sein de structures mécaniques parfaitement passives soumises à des énergies vibratoires importantes [Lan76]. Ces phénomènes de saturation ou d'hystérésis se manifestent notamment par l'apparition d'harmoniques de rangs supérieurs au fondamental, dans le domaine électrique ou mécanique.

Par définition, tout matériau ferroélectrique présente une relation non-linéaire entre le champ électrique et la polarisation, mise en lumière par l'application de champs suffisamment élevés, et due à une réorientation spontanée de la polarisation. D'ailleurs, la plupart des phénomènes non-linéaires (réversibles ou non) sont attribués au mouvement des parois des domaines ferroélectriques et/ou à leur changement d'orientation. Ces effets impactent directement sur les propriétés diélectriques et piézoélectriques du matériau et ont fait l'objet de nombreuses études. A ce propos, [Hal01] présente un récapitulatif assez exhaustif des investigations expérimentales et théoriques menées dans ce domaine. Si ces études ont principalement concerné l'identification et l'interprétation de ces comportements non-linéaires à partir d'une céramique simple, elles sont bien plus rares lorsqu'il s'agit des transformateurs, associant par définition au moins deux éléments aux propriétés non-linéaires.

L'objectif de cette partie n'est pas de traiter de manière complète les différentes non-linéarités susceptibles d'exister, mais plutôt de discriminer celles-ci afin d'identifier la cause principale se manifestant dans notre cas, et ainsi aborder sa modélisation de manière ciblée. Généralement, les comportements des domaines ferroélectriques se distinguent selon trois phénomènes distincts, auxquels sont attribuées différentes manifestations macroscopiques :

- la vibration des parois des domaines,
- le déplacement des parois,
- la commutation de l'orientation du domaine (inversion de polarisation).

Ces comportements influencent différemment les propriétés diélectriques, piézoélectriques et élastiques du milieu. Il est largement convenu que ces manifestations peuvent se traduire selon des mécanismes intrinsèques (propre au domaine) et extrinsèques (interactions extérieures).

Ainsi, la mise en évidence distincte de ces phénomènes passe par la qualification d'échantillons ferroélectriques face à l'évolution en fréquence, au champ électrique continu, aux effets thermiques, au vieillissement, etc. Une description sommaire, établie à partir de l'article [Hal01], des phénomènes non-linéaires attribués aux différents paramètres des milieux piézoélectriques est entreprise ci-après.

#### 4.3.2.1 Non-linéarités diélectriques

Au travers de nombreuses études, l'apparition d'une valeur « seuil » du champ électrique au delà de laquelle la permittivité et les pertes diélectriques augmentent brutalement a pu être mise en exergue. Cette valeur « seuil », visiblement définie par le déplacement des parois de domaine et/ou à la commutation des domaines, a fait l'objet d'analyses selon la composition des céramiques, la température ou encore le vieillissement. La non-linéarité diélectrique est potentiellement accentuée par le *pinning effect*, c'est-à-dire l'existence d'impuretés ou de singularités dans la maille conduisant à des basculements abrupts vers des positions d'équilibre. Pour les céramiques dures, l'évolution de la permittivité selon le champ électrique se manifeste très distinctement selon 3 zones : une zone constante, une zone linéaire (attribuée au déplacement des parois de domaine) et une zone exponentielle (attribuée à la commutation des domaines). De manière générale, la dépendance de la permittivité avec le champ électrique semble être convenablement approchée par une fonction polynomiale, ou une fonction de Rayleigh du premier ordre. Cette fonction de Rayleigh tend à conforter l'expression des fonctions selon des mécanismes intrinsèques (indépendants) et extrinsèques (pluri-dépendants).

#### 4.3.2.2 Non-linéarités piézoélectriques

L'identification de ces non-linéarités piézoélectriques a fait l'objet de moins d'études que les précédentes en raison d'une plus grande difficulté à les caractériser. Il a néanmoins pu être démontré à l'aide d'une sollicitation mécanique calibrée que le coefficient piézoélectrique  $d_{33}$  obéit dans une certaine mesure à une relation linéaire dépendante de la pression mécanique appliquée. Conformément aux relations piézoélectriques données dans le tableau [1.2], cette dépendance linéaire du coefficient piézoélectrique conduit à une évolution quadratique de la quantité de charges induite en surface. De même, une dépendance décroissante avec la fréquence de la sollicitation mécanique a été identifiée.

Certaines études ont notamment permis le rapprochement des caractéristiques diélectriques et piézoélectriques face à une variation de champ. La ressemblance de ces caractéristiques a conduit à leur attribuer la même origine physique, à savoir le déplacement des parois de domaine. Fort de ce constat, une déduction des paramètres piézoélectriques peut être entreprise à partir des propriétés non-linéaires diélectriques, réduisant significativement le nombre de paramètres requis pour la description de ces non-linéarités.

#### 4.3.2.3 Non-linéarités élastiques

Il a été démontré qu'une sollicitation mécanique excessive d'un élément ferroélectrique pouvait conduire à sa dépolarisation, affectant ainsi ses propriétés diélectriques et piézoélectriques. Ces sollicitations mécaniques peuvent notamment induire une déformation permanente. Ces effets sont dus au réarrangement forcé des domaines ferroélectriques sous l'action mécanique. En outre, le temps durant lequel la contrainte mécanique est appliquée à l'échantillon affecte également ses capacités.

### 4.3.3 Modélisation du comportement non-linéaire

Il paraît difficile d'exprimer analytiquement et catégoriquement une variation macroscopique des paramètres sur la base d'un comportement physique précis. En effet, au sein du matériau se manifestent simultanément des comportements complexes et variés (translations de parois et commutations) à l'échelle des dimensions des domaines, auxquels viennent s'ajouter les phénomènes dus aux singularités issues de la constitution polycristalline ou à l'irrégularité des grains.

Le but de ce chapitre étant d'établir une description analytique de l'effet non-linéaire observé lors des mesures expérimentales, il ne sera pas fait état des différents modèles numériques existants tels que les méthodes par éléments finis ou autres micro-modèles.

La modélisation analytique de ces manifestations non-linéaires peut être abordée de diverses manières par une approche phénoménologique ou des modèles physiques. La plupart des comportements non-linéaires précédemment introduits sont interprétés de manière assez précise à l'aide de fonctions polynomiales de degrés raisonnables, voire linéaires pour certaines. Cette approche offre la possibilité de conserver des hypothèses de modélisation commodes, telle qu'une répartition uniforme du champ électrique dans le milieu. Ces relations reposent sur une approche phénoménologique, s'attachant à décrire les observations sans aborder une définition physique de celles-ci. Par conséquent, si ces relations polynomiales sont fort utiles pour définir les limites opérationnelles d'un domaine de fonctionnement, elles reposent rarement sur une interprétation physique et conduisent finalement à la constitution d'abaques propres à chaque céramique et à leur agencement.

La modélisation par hystérésis des milieux ferroélectriques a débuté naturellement avec l'analogie aux milieux magnétiques dont la perméabilité traduit une loi non-linéaire bien connue depuis sa description par Rayleigh en 1887. La définition de domaines magnétiques au sein du matériau par le physicien français Pierre Weiss (1865-1940) ont conduit Ferenc F. Preisach à définir un modèle à hystérésis décrit selon des seuils qui traduisent les transitions réversibles et non-réversibles du milieu. Ainsi, des modèles physiques à hystérésis peuvent être développés prenant raisonnablement en considération les mouvements intimes des domaines au sein de la matière, malheureusement souvent au prix d'une lourdeur calculatoire conséquente, ou alors reposant sur des définitions probabilistes et statistiques.

Une autre alternative pour une description analytique repose sur les lois de la thermodynamique. L'existence des termes non-linéaires et des différents couplages qu'ils impliquent est issue de l'expression de la variation de l'enthalpie libre au travers de séries de Taylor. Il semblerait cependant que cette approche n'ait pas conduit à une retranscription fidèle des non-linéarités observées expérimentalement.

Parmi les différentes sources de manifestation non-linéaire énumérées précédemment, certaines sont prépondérantes et décisives dans le cas des transformateurs piézoélectriques. Conservant l'hypothèse d'un comportement isotherme, certaines non-linéarités seront volontairement omises, admettant néanmoins une certaine to-

lérance face à cette première approximation, notamment concernant la précision des relevés expérimentaux.

Face au contexte spécifique des transformateurs et plus particulièrement dans le cadre actuel (mesures de l'admittance d'entrée à secondaire ouvert), il est possible d'écarter certaines sources de non-linéarité :

- Tout d'abord, les effets irréversibles sont écartés. Il a été vérifié au travers d'essais répétés, qu'il n'apparaît aucun effet de vieillissement ou de dégradation excessive des propriétés à la suite des mesures d'admittance.
- Les variations éventuelles des paramètres diélectriques se manifestent essentiellement au travers des permittivités et donc des valeurs des capacités primaire et secondaire. Conformément aux relations théoriques du cas parallèle (secondaire ouvert) consignées dans le tableau [3.3], nulle autre grandeur caractéristique n'est affectée par ces paramètres. En outre, dans le contexte expérimental actuel, c'est la dépendance de la permittivité au champ électrique qui est susceptible d'apparaître. Si ce champ est effectivement important au secondaire, sa capacité est tellement faible (quelques picofarads) que l'impact éventuel d'un comportement non-linéaire a peu de chance d'être perçu au primaire. Au primaire, le champ électrique est imposé par l'alimentation et, en dépit de sa constitution en couches minces, il reste de faible valeur. Ceci est enteriné par la constance de  $\epsilon_{33}$  confirmée par l'absence de variation de la fréquence d'antirésonance sur les caractéristiques expérimentales données sur les figures 4.4(a) et 4.4(b). En effet, conformément à l'équation (3.72), cette pulsation caractéristique est directement dépendante de la capacité diélectrique du primaire.

Au titre des différentes remarques et hypothèses formulées auparavant, l'origine principale des manifestations non-linéaires sera attribuée uniquement au domaine mécanique. Il s'agira donc d'intégrer des termes supplémentaires à la partie mécanique des relations constitutives. Ce complément au modèle est l'objet de la partie ci-après, appuyé par les travaux antérieurs de [Yan07b].

#### 4.3.3.1 Modélisation approchée du comportement non-linéaire [Yan07b]

Pour mettre en évidence les relations introduites par le modèle non-linéaire, la démonstration suivante repose sur la définition d'une forme d'onde approchée du mode  $\lambda/2$ . Cette approximation par une fonction sinus (4.1), synonyme d'une structure de transformateur Rosen définie par une unique rigidité (hypothèse « isotrope »), conduit à des expressions plus simples, alors qu'elles seraient relativement lourdes en exploitant l'équation d'onde  $\underline{u}_{1\infty}^{(i)}(x_1)$  présentée dans le tableau [3.3] (hypothèse « anisotrope »). Une comparaison graphique est donnée sur la figure 4.6 témoignant de la différence entre l'expression simplifiée et celle déduite du chapitre précédent. A l'issue de la démonstration, le modèle sera de nouveau abordé à partir des paramètres obtenus au chapitre § 3.2.6 pour une interprétation plus fidèle des



résultats expérimentaux.

$$\begin{cases} u_1(x_k, t) = u_1(x_1, t) = U_0 \sin[k(x_1 - \delta)]\eta(t) \\ \phi(x_k, t) = \phi(x_1, t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = \frac{\pi}{L_1 + L_2} \\ \delta = \frac{L_2 - L_1}{2} \end{cases} \quad (4.1)$$

Comme au chapitre précédent, la constante  $U_0$  dépend de la condition de normalisation choisie.

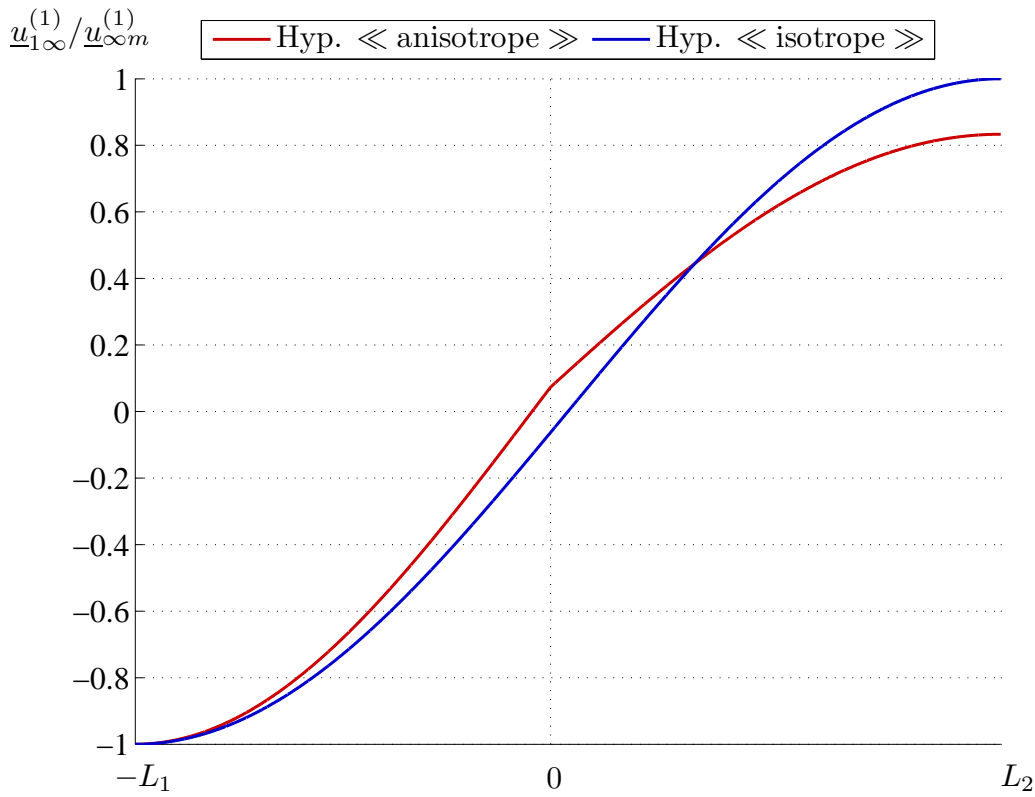


FIGURE 4.6 – Comparaison pour le mode  $\lambda/2$  des déformées mécaniques modales issues des hypothèses « anisotrope » et « isotrope »

Pour rendre compte du comportement non-linéaire, les équations constitutives (3.8) sont complétées de termes d'ordre deux ( $\xi_{ij}$ ) et trois ( $\gamma_{ij}$ ), admettant des coefficients distincts selon chaque mode de couplage, telles que :

$$\begin{cases} T_1 = \bar{c}_{11}^E u_{1,1} - \bar{e}_{31} E_3 + \bar{\xi}_{31} u_{1,1}^2 + \bar{\gamma}_{31} u_{1,1}^3 \\ D_3 = \bar{e}_{31} u_{1,1} + \bar{\varepsilon}_{33}^S E_3 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} T_1 = \bar{c}_{33}^D u_{1,1} - \bar{h}_{33} D_1 + \bar{\xi}_{11} u_{1,1}^2 + \bar{\gamma}_{11} u_{1,1}^3 \\ E_1 = -\bar{h}_{33} u_{1,1} + \bar{\beta}_{33}^S D_1 \end{cases} \quad (4.3)$$

A ces relations constitutives, il faut préciser les équations d'équilibre mécanique et électrique relatives au primaire et au secondaire du transformateur. Très classiquement, elles prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} T_{1,1} = \rho \ddot{u}_1 \\ D_{3,3} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} T_{1,1} = \rho \ddot{u}_1 \\ D_{1,1} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Ces dernières relations permettent d'aboutir à l'expression du potentiel électrique le long du transformateur Rosen de sorte que :

$$\phi(x_1, x_3, t) = \begin{cases} A_\phi(t)x_3 + B_\phi(t) & , -L_1 < x_1 < 0 \\ \bar{h}_{33}u_1(x_1, t) + C_\phi(t)x_1 + D_\phi(t) & , 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $A_\phi$ ,  $B_\phi$ ,  $C_\phi$  et  $D_\phi$  sont des constantes d'intégration potentiellement dépendantes de la variable temporelle. A partir des définitions (4.2), (4.3), de la déformée propre (4.1) et du potentiel électrique (4.6), l'application du calcul variationnel selon les mêmes hypothèses mécaniques et électriques énoncées au § 3.2 est entreprise. Considérant la coordonnée généralisée  $\eta$  et l'unique mode vibratoire  $\lambda/2$ , le calcul variationnel conduit à l'équation d'équilibre (4.7), laissant apparaître des termes d'ordre deux et trois.

$$\ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta - \bar{e}_D \frac{v_p}{e} + \bar{\xi} \eta^2 + \bar{\gamma} \eta^3 + \bar{e}_R C_\phi = 0 \quad (4.7)$$

Les différents paramètres constituant l'équation d'équilibre (4.7) sont définis ainsi :

- La pulsation propre  $\omega_0$  :

$$\omega_0^2 = \frac{2k^2(\bar{c}_{11}L_1 + \bar{c}_{33}L_2) + k(\bar{c}_{33} - \bar{c}_{11})\sin(2k\delta)}{2\rho(L_1 + L_2)} \quad (4.8)$$

- Le facteur modal de conversion électromécanique du primaire :

$$\bar{e}_D = -\frac{2\bar{e}_{31}}{U_0\rho(L_1 + L_2)}[1 - \sin(k\delta)] \quad (4.9)$$

- Le facteur modal de conversion électromécanique du secondaire :

$$\bar{e}_R = \frac{2\bar{e}_{33}}{U_0\rho(L_1 + L_2)}[1 + \sin(k\delta)] \quad (4.10)$$

- Le facteur mécanique de second ordre :

$$\bar{\xi} = \frac{U_0k^2}{3\rho(L_1 + L_2)} \left[ 4(\bar{\xi}_{31} + \bar{\xi}_{11}) + (\bar{\xi}_{31} - \bar{\xi}_{11})[3\sin(k\delta) + \frac{1}{3}\sin(3k\delta)] \right] \quad (4.11)$$

- Le facteur mécanique de troisième ordre :

$$\bar{\gamma} = \frac{U_0^2k^3}{4\rho(L_1 + L_2)} \left[ 3k(\bar{\gamma}_{31}L_1 + \bar{\gamma}_{11}L_2) + (\bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{31})[2\sin(2k\delta) + \frac{1}{4}\sin(4k\delta)] \right] \quad (4.12)$$

Hormis les coefficients de second et de troisième ordre nouvellement introduits, l'ensemble des paramètres a été préalablement défini dans le tableau [3.4]. De plus, pour prendre en compte le nombre de couches au primaire, le facteur de conversion électromécanique est défini par la relation  $\bar{e}_p = n\bar{e}_D/e$ .

Le développement simplifié selon l'équation d'onde issue de l'hypothèse « isotrope » prend tout son intérêt à la lecture des coefficients (4.8) à (4.12). En effet, la déformée mécanique modale choisie (4.1) facilite l'interprétation au prix d'une précision moindre. Ainsi, à l'instar de la résolution de l'équation en fréquence (3.49), la pulsation propre  $\omega_0$  apparaît dépendante des propriétés mécaniques et géométriques du primaire et du secondaire dans l'équation (4.8). De la même manière, cette participation commune primaire/secondaire se manifeste sur les coefficients de deuxième et troisième ordre (4.11) et (4.12), par l'apparition de termes additionnés et soustraits. Fort de ce constat, il est alors possible d'affirmer que les effets non-linéaires, portés par ces coefficients, peuvent être maîtrisés dans une certaine mesure par une combinaison appropriée du primaire et du secondaire, et cela sans avoir à présumer du signe des termes  $\bar{\gamma}_{11}$ ,  $\bar{\gamma}_{31}$ ,  $\bar{\xi}_{11}$  et  $\bar{\xi}_{31}$ .

Pour faciliter la résolution numérique de l'équation d'équilibre non-linéaire (4.7), les variables dynamiques sont décomposées selon les notations suivantes :

$$\begin{cases} \eta(t) = \eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) \\ C_\phi(t) = C'_\phi \cos(\omega t) + C''_\phi \sin(\omega t) \\ D_\phi(t) = D'_\phi \cos(\omega t) + D''_\phi \sin(\omega t) \\ v_p(t) = V'_p \cos(\omega t) \\ v_s(t) = V'_s \cos(\omega t) + V''_s \sin(\omega t) \end{cases} \quad (4.13)$$

Puisque l'analyse expérimentale ne tient compte que des composantes fondamentales du courant et de la tension, le développement de l'équation d'équilibre à l'aide des relations (4.13) est faite de sorte à ne conserver que les termes associés au fondamental de pulsation  $\omega$ . Ainsi l'influence du terme du second ordre  $\bar{\xi}$  ne transparait pas sur la composante fondamentale, contrairement au terme  $\bar{\gamma}$ . Il en résulte le couple d'équations (4.14).

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)\eta_1 + \bar{e}_R C'_\phi + \frac{3}{4}\bar{\gamma}(\eta_1^3 + \eta_1\eta_2^2) = \bar{e}_p V'_p \\ (\omega_0^2 - \omega^2)\eta_2 + \bar{e}_R C''_\phi + \frac{3}{4}\bar{\gamma}(\eta_2^3 + \eta_2\eta_1^2) = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

A partir de l'expression générale du potentiel électrique (3.19) et du respect des conditions aux limites et de continuité (3.22) et (3.23), le potentiel électrique s'écrit :

$$\begin{cases} V'_p \cos(\omega t) & , -L_1 < x_1 < 0 \\ \left[ \begin{array}{c} \bar{h}_{33}\eta_1 \sin(k(x_1 - \delta) + C'_\phi x_1 + D'_\phi) \\ \bar{h}_{33}\eta_2 \sin(k(x_1 - \delta) + C''_\phi x_1 + D''_\phi) \end{array} \right]^T \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix} & , 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (4.15)$$

L'équation à l'interface primaire/secondaire donne :

$$\phi(x_1 = 0^-, t) = \phi(x_1 = 0^+, t) \Rightarrow \begin{cases} -\bar{h}_{33}\eta_1 \sin(k\delta) + D'_\phi = V'_p \\ -\bar{h}_{33}\eta_2 \sin(k\delta) + D''_\phi = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Le potentiel électrique à l'extrémité du secondaire s'écrit selon les composantes de la tension de sortie comme suit :

$$\phi_1(x_1 = L_2, t) = v_s(t) \Rightarrow \begin{cases} \bar{h}_{33}\eta_1 + C'_\phi L_2 + D'_\phi = V'_s \\ \bar{h}_{33}\eta_2 + C''_\phi L_2 + D''_\phi = V''_s \end{cases} \quad (4.17)$$

De même, les composantes de la tension  $v_s(t)$  peuvent s'exprimer à partir de la relation (3.27) qui introduit une charge résistive  $R_{ch}$  de sorte que :

$$v_s(t) = -R_{ch}\dot{q}_s(t) \Rightarrow \begin{cases} V'_s = -R_{ch}C_s\omega L_2 C'_\phi \\ V''_s = R_{ch}C_s\omega L_2 C''_\phi \end{cases} \quad (4.18)$$

Finalement, l'expression de l'admittance d'entrée est établie afin de permettre la comparaison aux mesures expérimentales. En notation complexe, il vient :

$$\underline{Y}_p = \frac{\underline{i}_p}{\underline{v}_p} = \frac{j\omega \underline{q}_p}{\underline{v}_p} = \frac{j\omega}{\underline{v}_p} \int_{\Sigma} (\bar{\epsilon}_{31}u_{1,1} - \bar{\epsilon}_{33}\phi_{,3}) dx_1 dx_2 \quad (4.19)$$

ce qui donne :

$$Y_p(t) = Y'_p \cos(\omega t) + Y''_p \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Y'_p = -\frac{\psi_p \eta_2}{V'_p} \omega \\ Y''_p = \frac{\psi_p \eta_1}{V'_p} \omega - C_p \omega \end{cases} \quad (4.20)$$

où  $\psi_p$  est le facteur de conversion électromécanique défini comme suit :

$$\psi_p = U_0 n l \bar{\epsilon}_{31} [1 - \sin(k\delta)] = -U_0^2 \bar{\epsilon}_p \frac{\rho(L_1 + L_2) l e}{2} \quad (4.21)$$

Les derniers éléments à définir sont les capacités bloquées du primaire  $C_p$  et du secondaire  $C_s$ . Celles-ci sont obtenues à partir des équations (3.41) et (3.42) respectivement.

Le système d'équations (4.14) constitué des inconnues  $\eta_1$  et  $\eta_2$  peut être aisément résolu numériquement, donnant ainsi accès à la tension de sortie et à l'admittance d'entrée à partir de (4.18) et (4.20). Cependant, ces équations sont valables dans la mesure où le transformateur est en charge. L'impédance  $R_{ch}$  forme alors l'élément d'amortissement principal. Or, dans le cadre de la caractérisation expérimentale précédemment entreprise, le transformateur est en circuit ouvert, et l'amortissement qu'il subit est essentiellement issu des frottements internes. En conséquence, ce modèle en l'état est inadapté et requiert quelques ajustements. Tout d'abord, la disposition du secondaire en condition de circuit ouvert amène à considérer celui-ci dans le cas parallèle détaillé à la section § 3.2.6. Conformément

à cette condition de fonctionnement, la quantité de charges au secondaire (3.25) est considérée nulle; les termes  $C'_\phi$  et  $C''_\phi$ , d'après l'équation (4.14), le sont par conséquent tout autant.

Ensuite, il est nécessaire d'introduire les pertes mécaniques du transformateur, qualifiées à l'aide d'un facteur de qualité mécanique  $Q_m$ , à l'instar de ce qui a été entrepris pour le schéma électrique équivalent (3.48). Il est toutefois important de noter que ce paramètre ne supporte pas explicitement la même définition analytique dans ce chapitre et le précédent.

Ces deux modifications conduisent finalement à reformuler le système d'équations de sorte que :

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)\eta_1 + \frac{\omega_0}{Q_m}\omega\eta_2 + \frac{3}{4}\bar{\gamma}(\eta_1^3 + \eta_1\eta_2^2) = \bar{e}_p V'_p \\ (\omega_0^2 - \omega^2)\eta_2 + \frac{\omega_0}{Q_m}\omega\eta_1 + \frac{3}{4}\bar{\gamma}(\eta_2^3 + \eta_2\eta_1^2) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Le facteur de qualité mécanique est ici directement introduit au sein de l'équation d'équilibre mécanique conduisant à une définition de l'amortissement relativement à la pulsation  $\omega_0$ . Sa valeur numérique s'obtient à l'aide de celle de l'impédance motionnelle  $R_m$  selon les mesures expérimentales « faibles signaux » (3.75) et l'expression :

$$Q_m = \frac{l\omega_0}{2R_m U_0^2 \rho(L_1 + L_2)} \quad (4.23)$$

#### 4.3.3.2 Identification expérimentale du coefficient $\bar{\gamma}$

Afin de pouvoir simuler le modèle non-linéaire précédemment établi, il est nécessaire d'identifier la valeur numérique du coefficient  $\bar{\gamma}$ . Celui-ci est effectivement absent des caractéristiques fournies par le constructeur. Cependant, l'expression analytique de ce coefficient à l'aide des grandeurs expérimentales est particulièrement ardue, compte tenu du degré du polynôme à considérer. Certaines simplifications sont donc à introduire afin de rendre cette identification possible.

Tout d'abord, le système d'équations (4.22) est manipulé de manière à introduire le module  $|\eta| = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$  donnant la relation suivante :

$$\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)|\eta| + \frac{3}{4}\bar{\gamma}|\eta|^3 \right]^2 + \left[ \frac{\omega_0}{Q_m}\omega|\eta| \right]^2 = (\bar{e}_p V'_p)^2 \quad (4.24)$$

Compte tenu de la faible valeur de  $|\eta|^3$ , il est légitime de considérer que l'influence de  $\bar{\gamma}$  n'est perceptible qu'à proximité de la fréquence de résonance  $\omega_0$ . La pulsation est donc définie au voisinage de la pulsation de résonance de sorte que  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ . Il est alors possible d'introduire cette pulsation en négligeant les termes  $(\Delta\omega)^2$ , ce qui conduit à la relation :

$$\left( \Delta\omega - \frac{3\bar{\gamma}|\eta|^2}{8\omega_0} \right)^2 + \left( \frac{\omega_0}{2Q_m} \right)^2 = \left( \frac{\bar{e}_p V'_p}{2|\eta|\omega_0} \right)^2 \quad (4.25)$$

En outre, la sollicitation à proximité de la fréquence de résonance permet légitimement de négliger le courant issu de la capacité bloquée  $C_p$  par rapport au courant motionnel. Cette hypothèse revient à admettre le courant d'entrée tel que  $|I_p| = \omega_0 \psi_p |\eta|$ . Il devient alors possible de définir la tension d'entrée en fonction du courant :

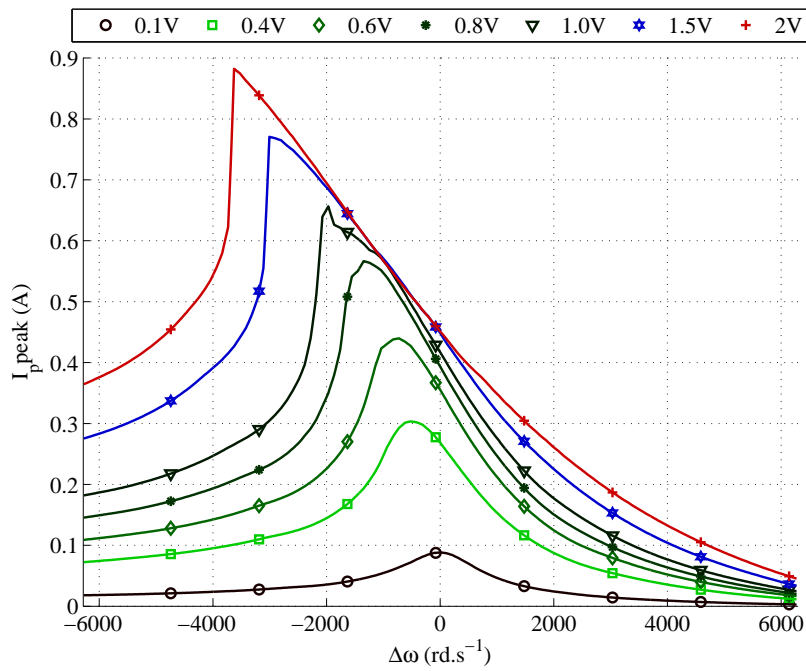
$$V_p' = \pm \frac{2|I_p|}{\bar{\epsilon}_p \psi_p} \sqrt{\left(\Delta\omega - \frac{3\bar{\gamma}|I_p|^2}{8\psi_p^2 \omega_0^3}\right)^2 + \frac{\omega_0^2 + 2\omega_0 \Delta\omega}{4Q_m^2}} \quad (4.26)$$

L'équation (4.26) permet alors d'identifier le coefficient  $\bar{\gamma}$  à l'aide des grandeurs électriques  $V_p'$  et  $I_p$  pour toutes valeurs de  $\Delta\omega$ . En outre, il semble évident que son identification doit être faite à  $\Delta\omega = 0$ . Il vient alors l'équation (4.27) à résoudre.

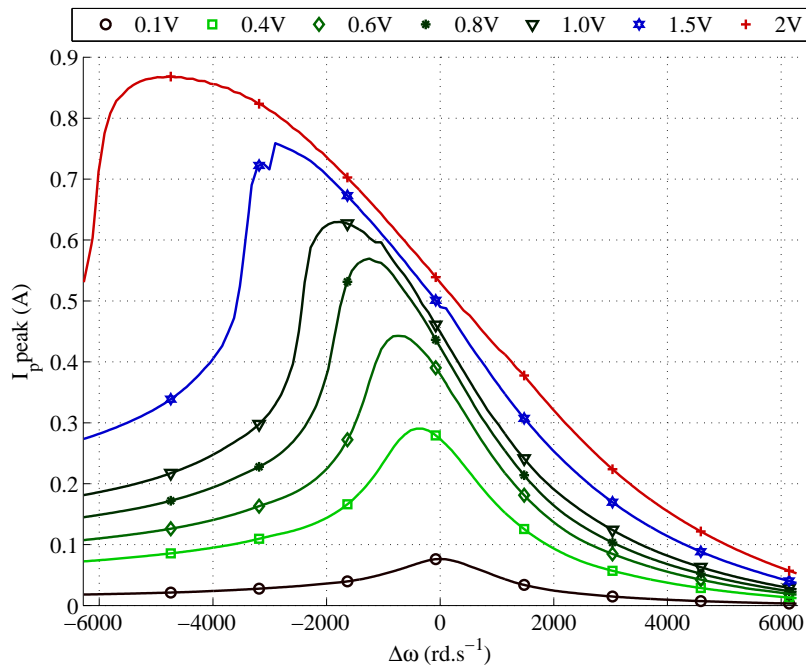
$$V_p' = \pm U_0^2 \frac{I_p}{\psi_p^2} \frac{\rho(L_1 + L_2)le}{2} \sqrt{\left(\frac{3\bar{\gamma}I_p^2}{4\psi_p^2 \omega_0^3}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q_m}\right)^2} \quad (4.27)$$

L'identification de  $\bar{\gamma}$  requiert d'extraire le courant fondamental crête  $|I_p|$  pour différentes valeurs crêtes  $V_p'$  de la tension d'alimentation à partir des relevés expérimentaux, et ce relativement à la pulsation de résonance  $\omega_0$  obtenue à « petits signaux ». L'intensité du courant est donc estimée à partir des mesures d'admittance en fréquence croissante et décroissante présentées sur les figures 4.4(a) et 4.4(b), conduisant aux figures 4.7(a) et 4.7(b). Pour coller aux besoins de l'équation à résoudre (4.27), le tracé du courant à  $\Delta\omega = 0$  est entrepris selon les fréquences croissantes et décroissantes illustré sur la figure 4.8(a). Or, contrairement à ce que l'expression analytique laisse entrevoir à  $\Delta\omega = 0$ , la valeur du courant est légèrement sensible au sens d'exploration en fréquence. Cette différence est attribuée aux effets annexes non considérés dans l'étude, tels que les effets thermiques ou encore le comportement de l'alimentation à la résonance. En outre, puisque la non-linéarité se manifeste à gauche de  $\Delta\omega = 0$ , il apparaît plus judicieux d'utiliser le relevé en fréquence décroissante.

Finalement, l'identification de  $\bar{\gamma}$  est entreprise à l'aide d'une méthode numérique par les moindres carrés sous MATLAB (méthode *lsqnonlin*). Conformément à l'équation (4.27), les seuls paramètres sensibles à la précision du modèle sont  $\bar{\gamma}$  et  $\psi_p$ . Pour cette raison, ces deux paramètres sont considérés comme les inconnues du problème d'optimisation. Les résultats de la minimisation par les moindres carrés conduisent à la fonction illustrée graphiquement sur la figure 4.8(b) et aux valeurs numériques réunies dans le tableau [4.1]. Le carré de la norme euclidienne du résidu  $|res|$  est également présenté dans le tableau [4.1] afin de rendre compte de la convergence de la méthode. En dépit des simplifications apportées à l'équation à résoudre (4.27) et à la simplicité de la procédure expérimentale, une bonne concordance du modèle avec la courbe expérimentale donnant l'intensité du courant d'entrée  $I_p$  à  $\Delta\omega = 0$  est à constater. À noter que le signe du coefficient  $\bar{\gamma}$  est négatif. Ce signe implique que le comportement instable se manifeste à gauche de la fréquence de résonance. Il est théoriquement possible que, selon les propriétés de la céramique et du mode de couplage sollicité, ce terme soit positif et conduise ainsi à une zone instable à droite de la résonance [Hu06].

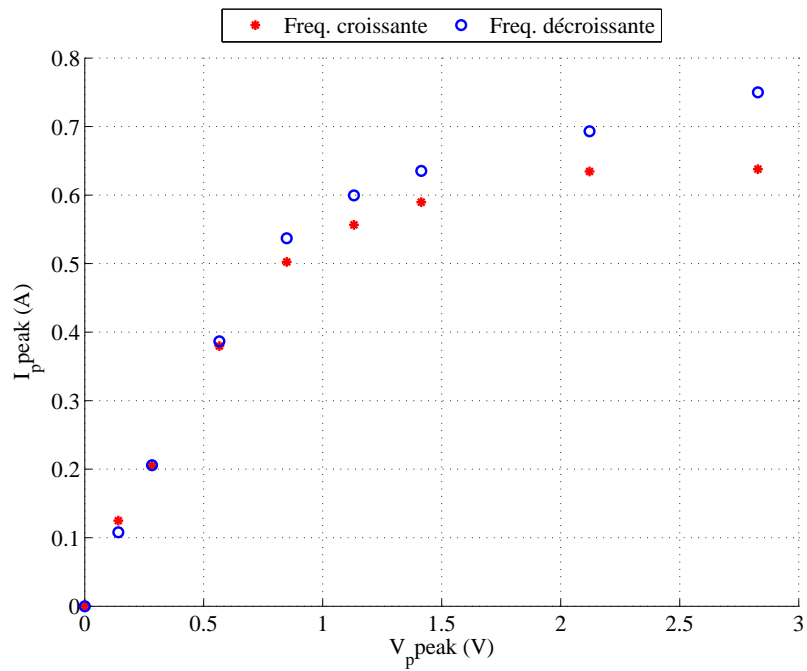
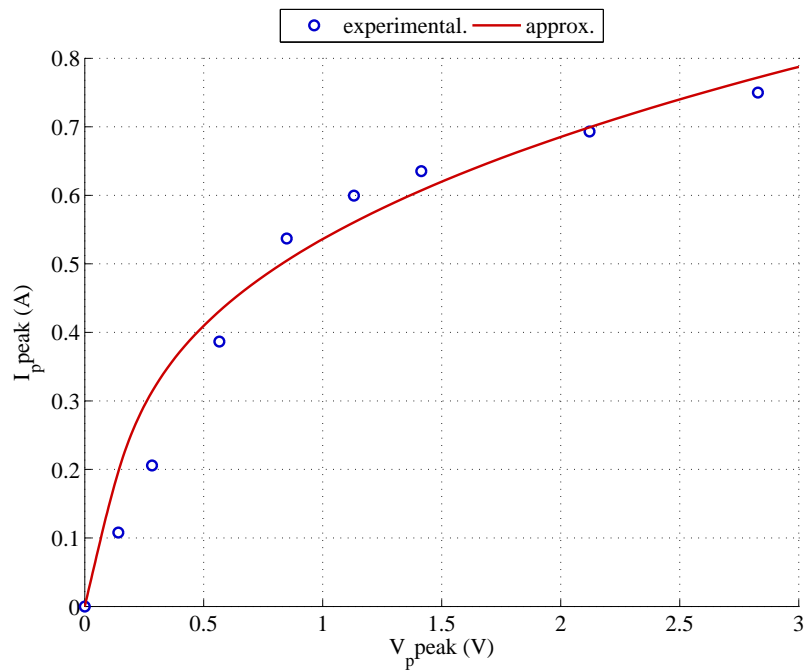


(a) Fréquence croissante



(b) Fréquence décroissante

FIGURE 4.7 – Relevés expérimentaux du courant relativement à la pulsation de résonance « petits signaux »

(a)  $\hat{I}_p$  à  $\Delta\omega = 0$  – Fréquence croissante et décroissante

(b) Identification de la fonction (4.27)

FIGURE 4.8 – Identification de  $\bar{\gamma}$  à  $\Delta\omega = 0$  par la méthode des moindres carrés



TABLE 4.1 – Paramètres du modèle non-linéaire identifiés expérimentalement

	Définition	Valeur	Unité
$Q_m$	Facteur de qualité mécanique	227.3	
$\bar{\gamma}$	Facteur mécanique du 3 <sup>ème</sup> ordre	$-27.34 \times 10^{20}$	N/m <sup>2</sup>
$\psi_p$	Facteur de conversion électromécanique du primaire	-1.504	N/V
$ res $	Résidu (méthode des moindres carrés)	0.210	

Cette méthode conduit à l'identification du coefficient  $\bar{\gamma}$ , mais ne permet pas d'identifier distinctement les coefficients des termes du troisième ordre au primaire  $\bar{\gamma}_{11}$  et au secondaire  $\bar{\gamma}_{31}$ . Leur détermination requiert manifestement des essais spécifiques et distincts pour chaque segment de céramique, selon leur mode de couplage (transversal et longitudinal).

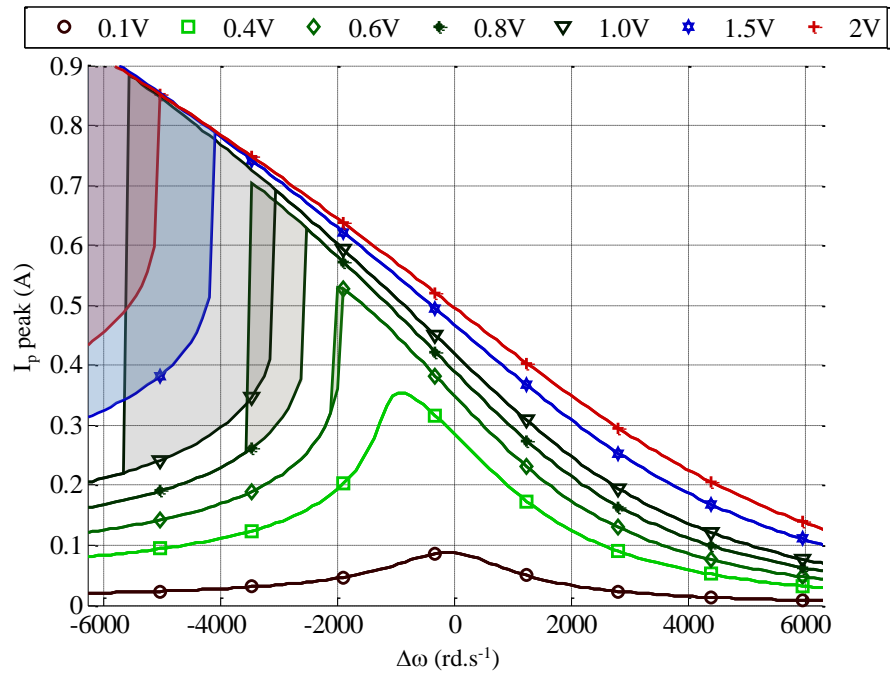
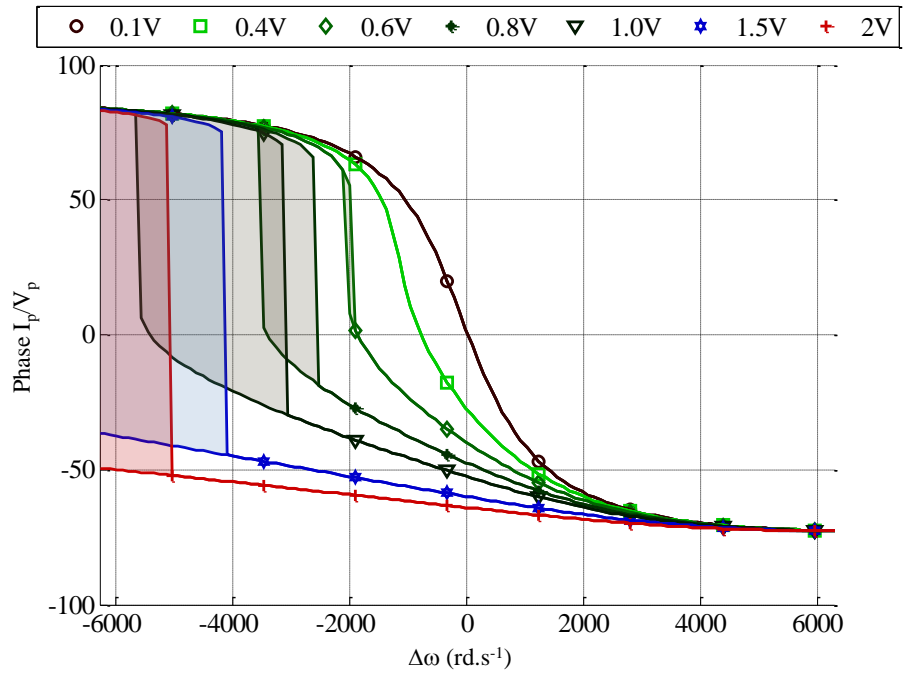
A l'issue de l'identification des paramètres expérimentaux  $Q_m$  et  $\bar{\gamma}$ , il est finalement possible de simuler le modèle non-linéaire.

#### 4.3.3.3 Simulation du modèle non-linéaire

Ce modèle est issu de la résolution des variables  $\eta_1$  et  $\eta_2$  des équations (4.22) pour toutes valeurs de  $\omega$  autour de la résonance. Les solutions de ce système d'équations n'étant pas triviales compte tenu du degré des polynômes, leur résolution est entreprise de manière numérique à l'aide du logiciel Maple12<sup>TM</sup>.

La résolution numérique fournit finalement les solutions multiples qui traduisent l'instabilité remarquable entre les fonctions à fréquences croissantes et décroissantes. A partir des équations (4.26) et (4.21), l'intensité du courant crête est simulée autour de la fréquence de résonance donnant ainsi les caractéristiques illustrées figures 4.9(a) et 4.9(b). A noter que le facteur de conversion électromécanique  $\psi_p$  utilisé dans le modèle est issu de son expression théorique, et non de la valeur obtenue lors de l'identification par les moindres carrés (cf. tableau [4.1]). Ces simulations sont à comparer aux relevés expérimentaux donnés précédemment sur les figures 4.7(a) et 4.7(b). Afin de rendre plus visible les zones d'instabilité sur les caractéristiques en admittance, les courbes 4.9(a) et 4.9(b) sont représentées selon les fronts instables plutôt que par la représentation de l'équation exacte. Il résulte de la comparaison qualitative entre les caractéristiques expérimentales et simulées une concordance tout à fait remarquable, appuyée par les remarques suivantes :

- L'évolution de la fréquence de résonance vers la gauche et la déformation de la caractéristique coïncident avec l'expérimentation.
- Les caractéristiques obtenues pour  $V_p \leq 0.6$  V ne présentent pas de phénomènes d'hystérésis, conformément à l'observation réalisées sur les courbes à fréquence croissante et décroissante données par les figures 4.7(a) et 4.7(b).

(a) Simulation du courant  $\hat{I}_p$ (b) Simulation de la phase  $I_p/V_p$ FIGURE 4.9 – Simulation des grandeurs électriques selon  $V_p$  et  $\Delta\omega$

- La transition brutale observée expérimentalement pour des niveaux de tension suffisants, s'opère approximativement dans la zone définie théoriquement par le modèle.
- La non-linéarité se manifeste également sur le diagramme de phase de la figure 4.9(b), par son étirement vers les basses fréquences puis par sa transition abrupte dans la zone instable, phénomène également observable expérimentalement sur les figures 4.4(a) et 4.4(b).

Ce modèle non-linéaire initié à partir de l'approximation de la déformée modale selon celle de la section § 4.3.3.1 présente donc une concordance tout à fait satisfaisante au regard de cette comparaison selon  $\Delta\omega$ . Toutefois, cette satisfaction apparaît bien plus mitigée lorsqu'il s'agit de comparer les caractéristiques sur une échelle absolue de la pulsation  $\omega$ . En effet, l'identification des paramètres  $Q_m$  et  $\bar{\gamma}$  se fait de manière relative à la pulsation de résonance  $\omega_0$ , conformément aux relations (4.23) et (4.27). En conséquence, une erreur d'estimation du modèle sur cette valeur de la pulsation n'impacte que faiblement sur l'allure du modèle ramenée autour de la résonance.

Il est possible d'exploiter avantageusement le modèle développé dans la partie § 3.2.6 pour une meilleure précision. Il s'agit simplement de remplacer les valeurs de  $\omega_0$  et de  $\bar{e}_p$  dans l'expression du système d'équations (4.22) par celles regroupées dans le tableau [4.2]. Il est important de préciser que la comparaison des valeurs

TABLE 4.2 – Valeurs numériques issues des modèles développés dans les sections § 4.3.3.1 et § 3.2.6 – Comparaison à l'expérimentation

	Unité	Selon la section § 4.3.3.1	Selon la section § 3.2.6	Expérimental
$f_0$	kHz	72.052	70.569	68.940
$\psi_p$	N/V	-0.790	-0.908	$\approx \pm 1.504$

numériques des facteurs de conversion  $\psi_p$  selon les différents modèles n'est possible qu'en admettant les mêmes conditions de normalisation, en l'occurrence, il a été convenu que  $U_0$  était égal à l'unité. Qui plus est, la valeur obtenue expérimentalement mérite les plus grandes précautions puisqu'il s'agit de la valeur obtenue à l'aide de la méthode des moindres carrés, appliquée à l'équation simplifiée (4.26). Une détermination plus rigoureuse de ce paramètre passe par la mise en œuvre de mesures vibratoires additionnelles.

Si le modèle non-linéaire précédemment développé et sa validation ne portent que sur l'allure de l'admittance d'entrée  $\underline{Y}_p$ , il ne faut en aucun cas omettre l'impact de cette manifestation non-linéaire sur la capacité du transformateur à l'élévation en tension. En effet, puisque la non-linéarité porte sur le comportement mécanique et, compte tenu de la dépendance de la conversion électromécanique à cette

grandeur, il paraît évident que la tension de sortie, tout comme le potentiel de surface au secondaire, s'en retrouvent affectés. J. Yang fait état de cette influence sur le gain en tension [Yan07b] dans le cas d'un transformateur en mode épaisseur. A l'instar de la déformation de la courbe d'admittance observée précédemment, l'amplitude de la tension de sortie (tout comme le potentiel de surface) s'en trouve amoindrie lorsque la manifestation de la non-linéarité devient trop importante. La perte de la relation de proportion entre la tension d'entrée et la tension de sortie (à fréquence et charge constantes) devient alors problématique dans le cadre de la génération de plasma puisqu'il ne suffit plus d'augmenter la tension d'alimentation pour accroître la puissance de la décharge. Un dimensionnement spécifique pour ce type d'application devient alors indispensable face à cette nouvelle contrainte.

Cette caractérisation et cette modélisation du comportement non-linéaire à pression atmosphérique se résumera néanmoins dans cette étude à celle de l'admittance, pour finalement aborder l'étude électrique en condition de décharge plasma dans la section suivante. Cette dernière partie expérimentale mettra indirectement en exergue l'impact de ce comportement non-linéaire sur le potentiel électrique du secondaire et sur les conditions d'apparition de décharges plasma.

## 4.4 Caractérisation en condition de décharges

### 4.4.1 Mesures expérimentales

La caractérisation expérimentale du transformateur en condition de décharge plasma s'appuie sur une approche simple précédemment utilisée à savoir, la mesure de l'admittance d'entrée  $\underline{Y}_p$ . A l'instar de la méthode précédente, l'objectif est de vérifier les différences remarquables sur ces mesures comparées avec celles prédites par le modèle analytique linéaire. Cette caractérisation ne sera que qualitative compte tenu de la complexité des phénomènes mis en jeu lors des décharges. En effet, celles-ci se manifestent de manière très variée selon les conditions de pression et de potentiel, pouvant prendre des allures de spot aux points géométriques singuliers (effets de pointes), de décharges diffuses ou encore filamenteuses (streamer). Les conditions expérimentales sont choisies de sorte à favoriser les décharges de type spots et diffuses sans autre distinction, et de s'affranchir d'un régime de décharges filamenteuses (par une limitation du niveau de tension). Le régime d'arc est également évité, notamment grâce à la suppression de l'électrode du secondaire.

Pour l'ensemble des essais menés, les décharges s'effectueront dans l'air à l'aide du banc de caractérisation détaillé à la section § 4.2 sous pression contrôlée. En raison des faibles puissances mises en jeu et de la basse pression du milieu, il sera admis que la qualité du gaz environnant (taux d'impuretés) ne remet pas en cause la répétabilité des mesures. En outre, compte tenu de la faible impédance acoustique constituée par ce même gaz, comparée à celle du domaine piézoélectrique, il est raisonnable d'admettre que cette impédance reste négligeable quelles que soient les conditions de pression.

#### 4.4.1.1 Validation expérimentale préalable

Tout d'abord, une exploration du spectre en pression est entreprise afin d'identifier les gammes favorables à la génération des décharges, selon des niveaux de tension  $V_p$  comparables à ceux appliqués jusqu'alors (tension d'entrée  $V_p < 2$  V). Le mode  $2\lambda$  ayant montré analytiquement une très faible capacité à l'élévation du potentiel de sortie, seuls les trois premiers modes longitudinaux ( $\lambda/2$ ,  $\lambda$ ,  $3\lambda/2$ ) présentent des aptitudes à la génération de décharges luminescentes. La figure 4.10 illustre l'apparition des décharges luminescentes en fonction de la pression <sup>1</sup>.

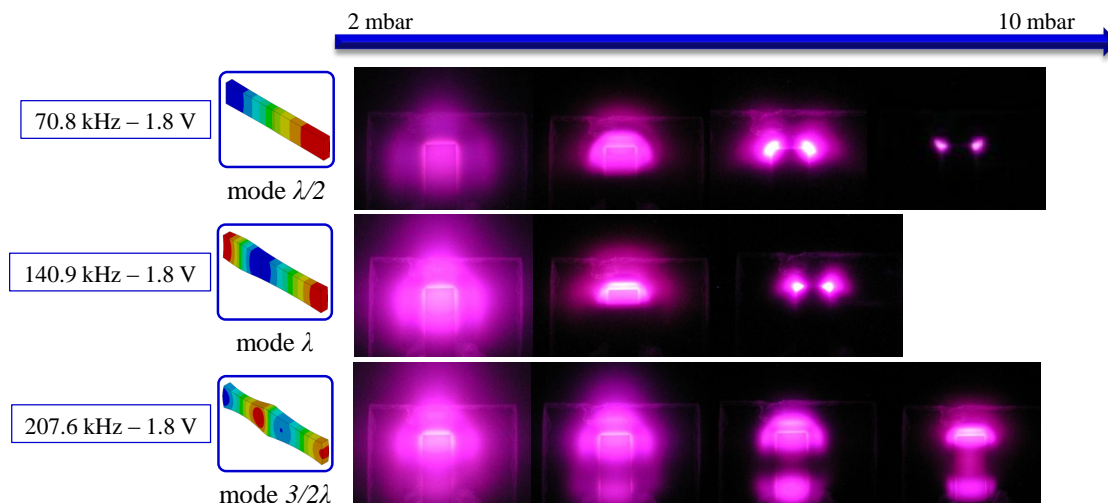


FIGURE 4.10 – Illustration de l'évolution de la décharge en fonction de la pression

La première remarque évidente à l'issue de ces essais préalables est la très faible valeur de tension d'entrée à l'origine de la décharge (de l'ordre du volt). Pour comprendre l'incidence de l'effet piézoélectrique sur l'amplitude de la tension nécessaire à la décharge, il est utile de rappeler que le régime luminescent précède le régime d'arc électrique. Cela donne une valeur comparative maximale, le niveau de tension disruptive conduisant au claquage dans l'air. Ainsi, si la longueur du secondaire ( $\approx 10$  mm) est considérée comme étant l'équivalent d'une distance inter-électrodes, pour une pression de quelques millibars, la tension disruptive selon la courbe de Paschen est d'environ trois ordres de grandeur supérieure à la tension ici appliquée. Bien évidemment, une comparaison plus avancée serait maladroite tant les différences sont nombreuses entre la caractérisation de Paschen et celle ici effectuée (propriété diélectrique de la céramique, absence d'électrode au secondaire, non-homogénéité du champ électrique dans l'espace inter-électrodes...). Toutefois, ce rapport des tensions atteste de l'un des avantages remarquables de la solution piézoélectrique : l'élévation locale de tension. En effet, dans un environnement global à basse pression, promouvoir la décharge exactement à l'endroit désiré est une réelle difficulté, puisque les décharges peuvent apparaître le long des conducteurs

1. L'échelle de pression de la figure 4.10 est qualitative et ne constitue pas une représentation fidèle des conditions de pression attachée aux motifs des décharges

porteurs du potentiel électrique. Ceci requiert des précautions contraignantes d'espacement des conducteurs ou encore d'isolation. La solution piézoélectrique permet de s'affranchir de cette difficulté technique, l'élévation en tension se faisant à l'endroit même de la décharge.

Par ailleurs, il apparaît très clairement une correspondance visuelle entre l'allure prise par la décharge lumineuse et le profil théorique du potentiel électrique établi au chapitre précédent. Les extrema de potentiel correspondent manifestement aux zones les plus lumineuses. Cette remarque tout à fait qualitative ne présume en rien du comportement des différentes charges, mais atteste néanmoins de l'agitation électronique dans ces zones au potentiel électrique élevé. De plus, il est facilement remarquable sur ces images que la décharge lumineuse évolue d'une forme diffuse à celle de spots avec l'augmentation de la pression, se concentrant aux extrémités, lieu des gradients de potentiel les plus élevés. Finalement, au delà d'une certaine valeur de pression, le potentiel électrique devient insuffisant pour maintenir la décharge, conformément à l'évolution des courbes indicatives de Paschen [Sub07]. La caractérisation expérimentale se concentrera donc sur une plage de pression essentiellement comprise entre 0.1 et 100 mbar afin de convenablement cerner les conditions de décharge plasma, ainsi que son incidence sur le comportement de l'admittance d'entrée.

#### 4.4.1.2 Caractérisation sous pression contrôlée

De prime abord, il peut paraître étrange, voire totalement inapproprié, de faire appel à une méthode aussi simple que l'analyse par diagramme de Bode pour qualifier des phénomènes aussi complexes et non-linéaires que les décharges plasma. Le but de ces essais préliminaires n'est pas d'appréhender des grandeurs telles que le courant des charges d'espace, mais simplement de s'assurer de l'influence de la décharge sur les grandeurs électriques d'entrée.

Car en effet, la manifestation de la décharge affecte l'allure de l'admittance d'entrée, de sorte qu'il est possible de qualifier celle-ci, ou pour le moins, caractériser les conditions électriques nécessaires à son apparition. Ainsi, un ensemble de relevés est présenté dans cette section, de sorte à mener une réflexion sur l'ensemble du spectre opérationnel en pression.

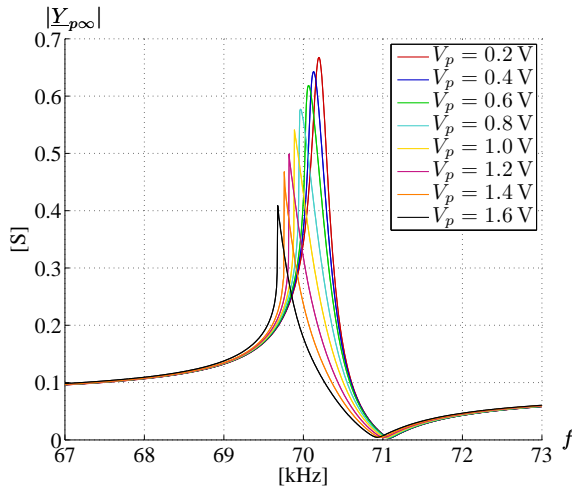
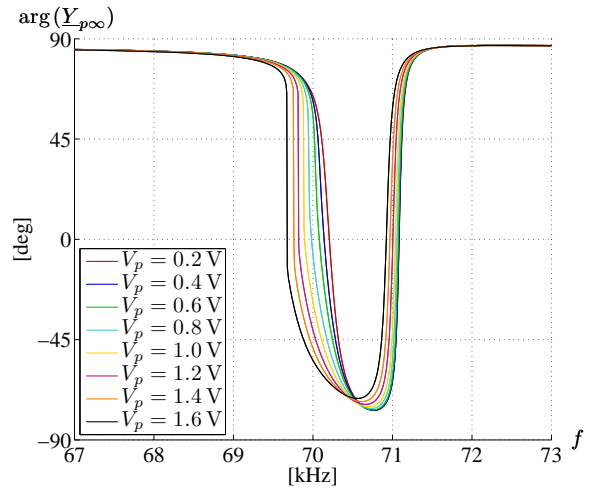
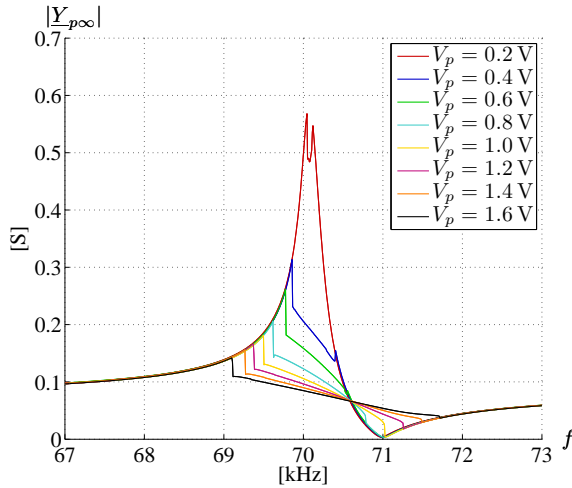
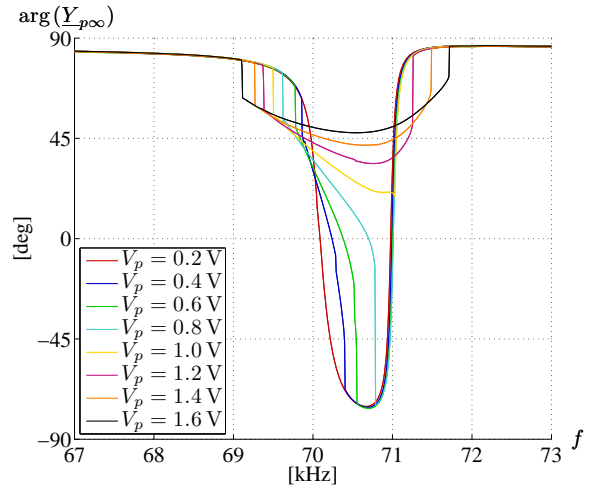
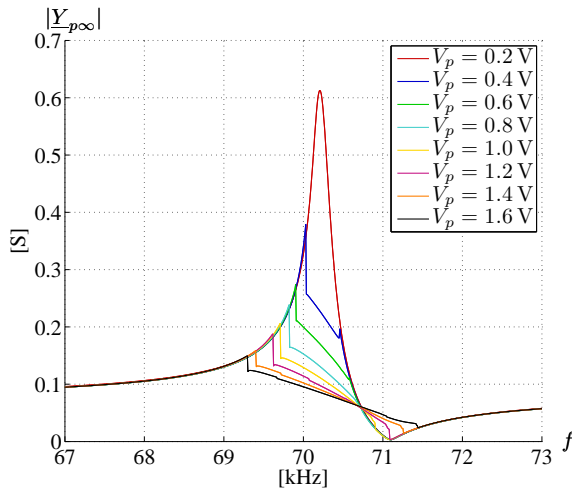
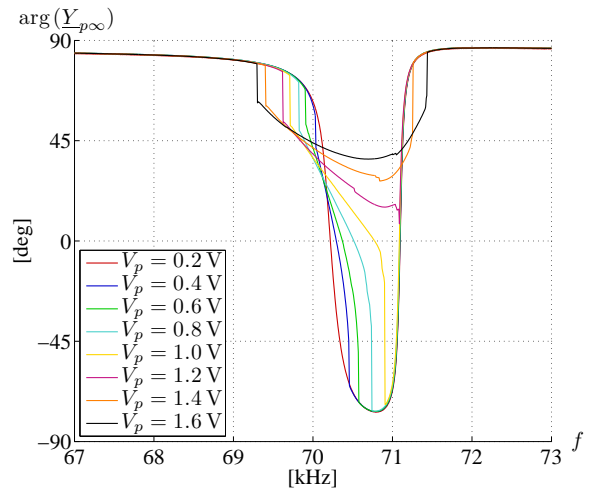
Pour des raisons similaires à celles de la caractérisation à pression atmosphérique (limite en fréquence de l'analyseur de signaux), les mesures électriques ne porteront que sur le premier mode vibratoire  $\lambda/2$ . Il est à ajouter que le transformateur utilisé pour cette caractérisation n'est pas identique à celui utilisé au cours des chapitres précédents. En effet, en dépit de dimensions identiques et de la même fabrication, celui-ci présente des fréquences propres ainsi que des pertes sensiblement différentes du précédent. Ces différences peuvent être raisonnablement attribuées à l'histoire distincte des transformateurs, de leur vieillissement propre et de l'usage différent qu'il en fût fait. Si ces différences n'autorisent pas une transposition directe des valeurs numériques déduites des modèles linéaire et non-linéaire des sections § 3.4 et § 4.3.3.1, les analyses qui y sont faites restent tout à fait valables dans cette partie.

Afin de simplifier la lecture des caractéristiques, seules les mesures issues d'un balayage en fréquence croissante (sweep up) sont présentées sur les figures 4.11 à 4.14 (pages 193–196). Ensuite, parmi ces relevés, les plus significatifs sont sélectionnés pour être comparés à ceux obtenus lors d'un balayage en fréquence décroissante (sweep down) sur la figure 4.15 (page 197).

#### 4.4.1.3 Observations

A la lecture des caractéristiques 4.11 à 4.14, l'ensemble des observations suivantes peuvent être émises :

- Tout d'abord, le premier relevé à  $P = 0.5$  mbar donné sur la figure 4.11(a) ne diffère pas des caractéristiques non-linéaires obtenues à pression atmosphérique par son profil comme par son évolution avec le niveau de tension. Il est à ajouter qu'aucune décharge lumineuse n'a été observée durant cet essai.
- Il en est tout autrement pour la caractéristique suivante à  $P = 5.6$  mbar illustrée par la figure 4.11(c). En effet, la présence de la décharge s'est traduite par une « rupture » de la courbe du module de l'admittance autour de l'extremum, point témoin de la résonance ainsi que de l'amplification du potentiel au secondaire du transformateur. Cette nouvelle manifestation non-linéaire diffère par sa forme et sa nature de celle précédemment identifiée comme étant une non-linéarité intrinsèque au comportement électrodynamique.
- Cette rupture significative avec la courbe d'admittance apparaît de manière répétée pour l'ensemble des caractéristiques allant jusqu'à une pression de  $P = 200$  mbar. Au-delà de cette valeur, les décharges lumineuses ne sont plus produites (du moins dans la gamme de tension usitée 0.2 V–1.6 V).
- Les diagrammes de phase témoignent également de l'influence des décharges.
- En guise d'illustration, il apparaît très visiblement sur le diagramme à  $P = 10.6$  mbar que la zone dite de « rupture » de la courbe d'admittance s'étend avec l'augmentation de la tension d'entrée. Cette remarque constitue l'objet principal de la partie suivante, qui s'attache à traduire ce comportement au travers de l'utilisation des modèles précédemment développés.

(a) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 0.5$  mbar(b) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 0.5$  mbar(c) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 5.6$  mbar(d) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 5.6$  mbar(e) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 10.6$  mbar(f) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 10.6$  mbarFIGURE 4.11 – Diagrammes de Bode de l'admittance vue des bornes à pression fixe – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ )



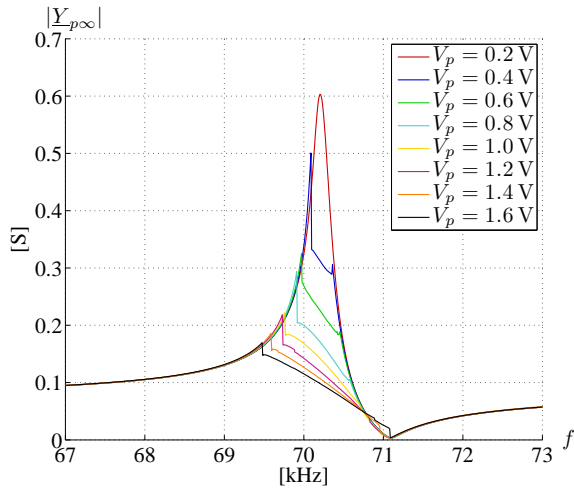
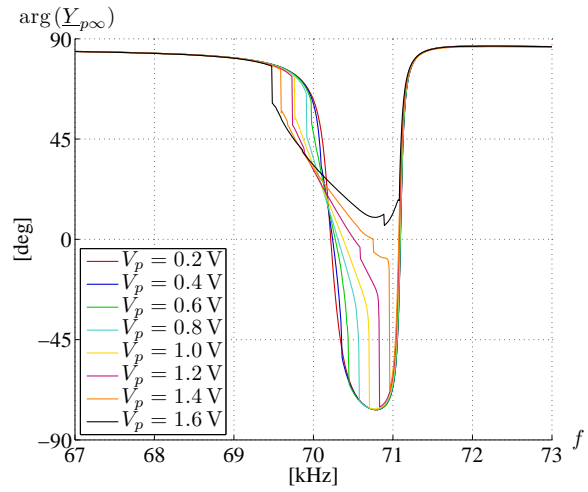
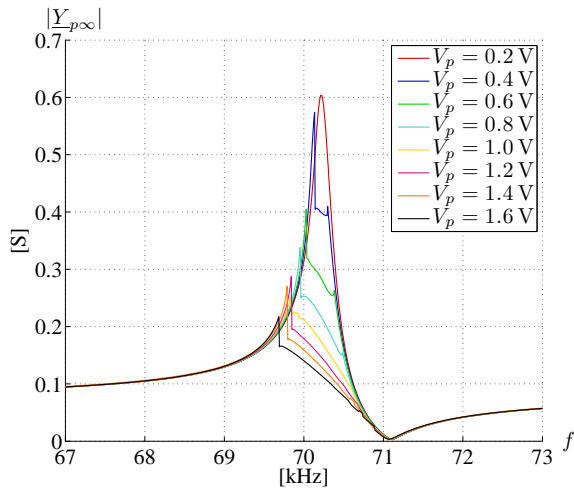
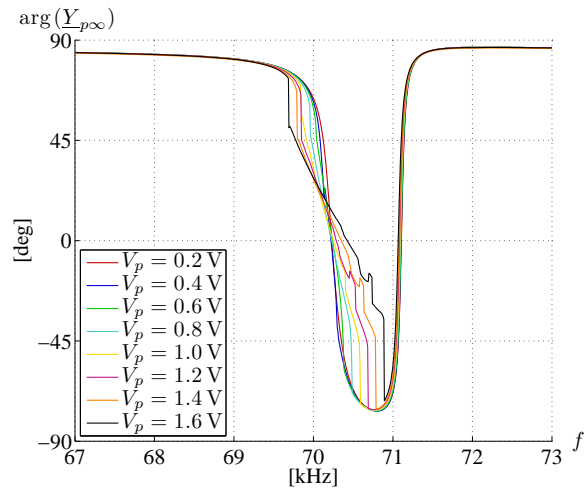
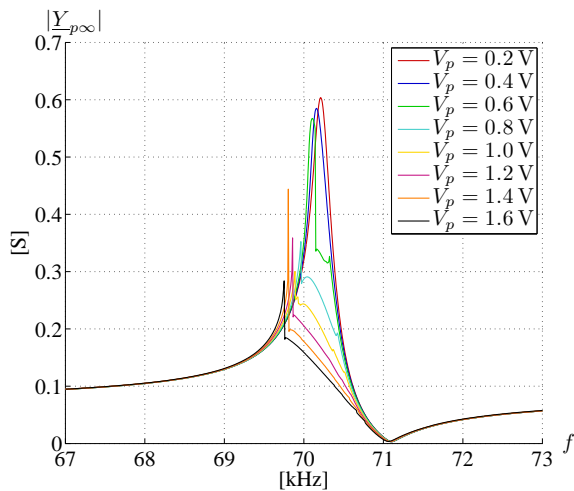
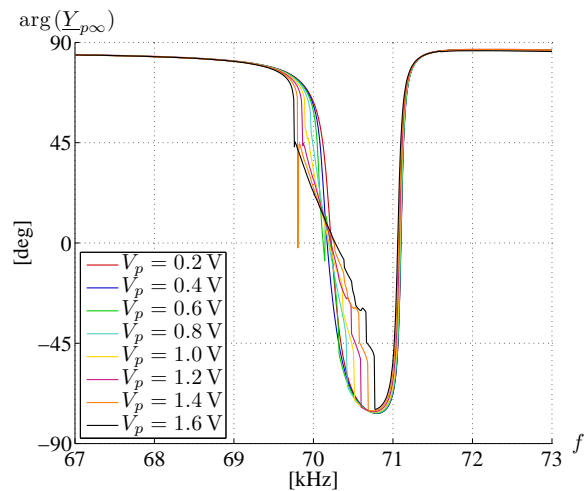
(a) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 20$  mbar(b) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 20$  mbar(c) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 30$  mbar(d) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 30$  mbar(e) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 40$  mbar(f) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 40$  mbar

FIGURE 4.12 – Diagrammes de Bode de l'admittance vue des bornes à pression fixe – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ )

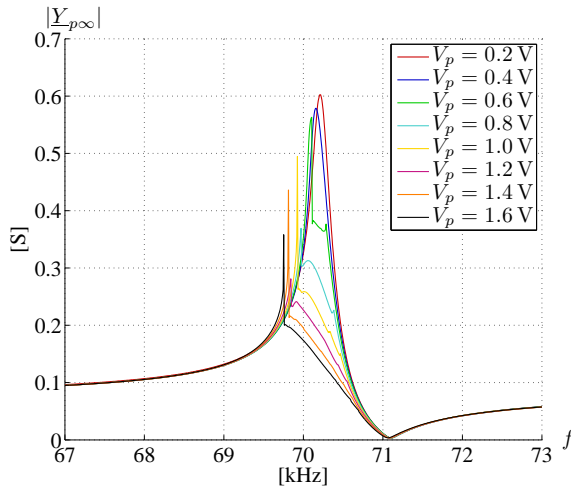
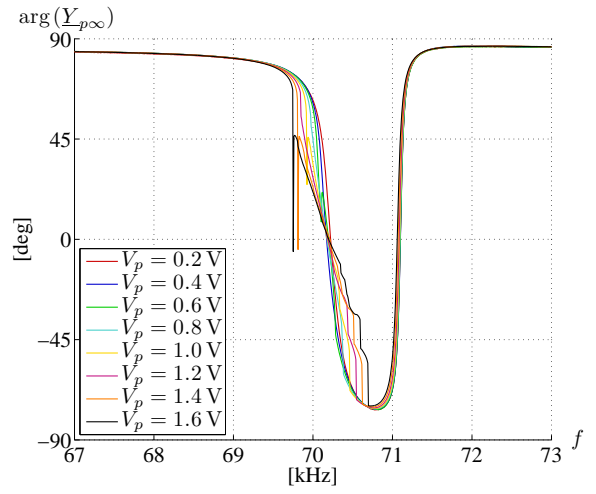
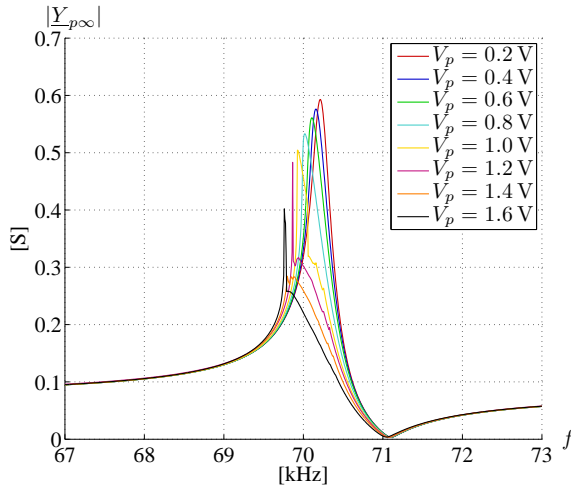
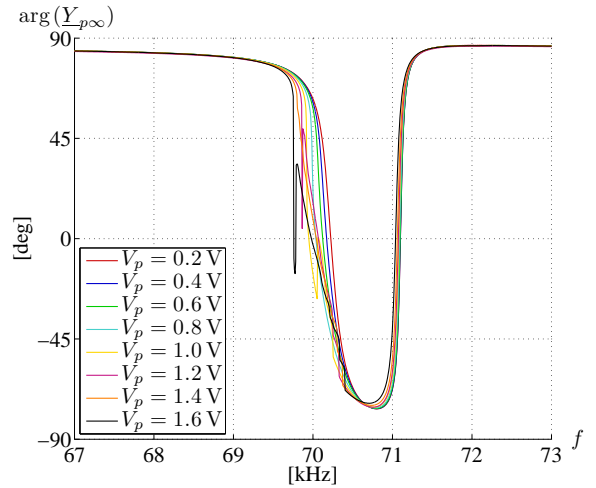
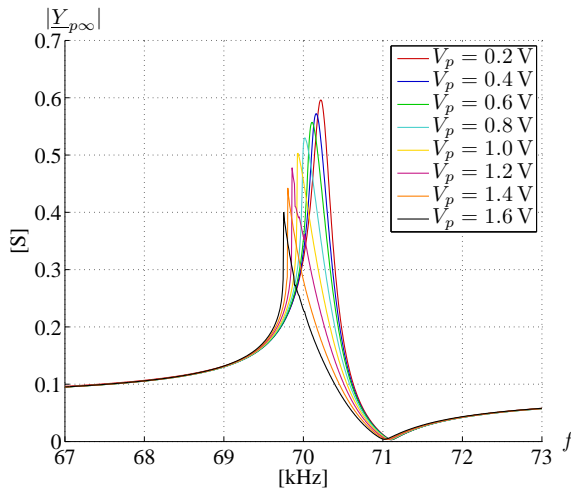
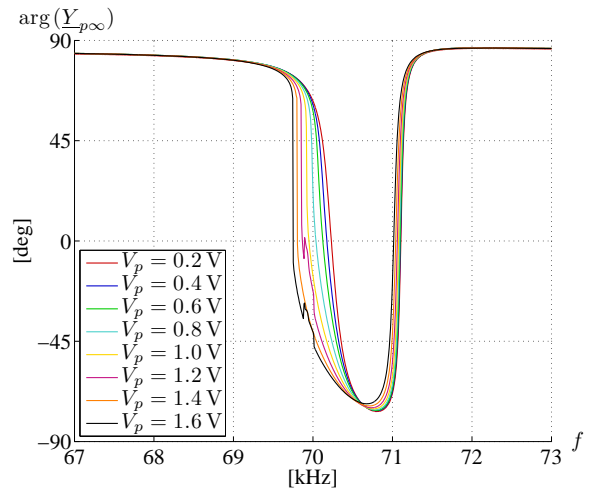
(a) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 50$  mbar(b) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 50$  mbar(c) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 100$  mbar(d) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 100$  mbar(e) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 200$  mbar(f) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 200$  mbar

FIGURE 4.13 – Diagrammes de Bode de l'admittance vue des bornes à pression fixe – Balayage en fréquence sweep up (SU)

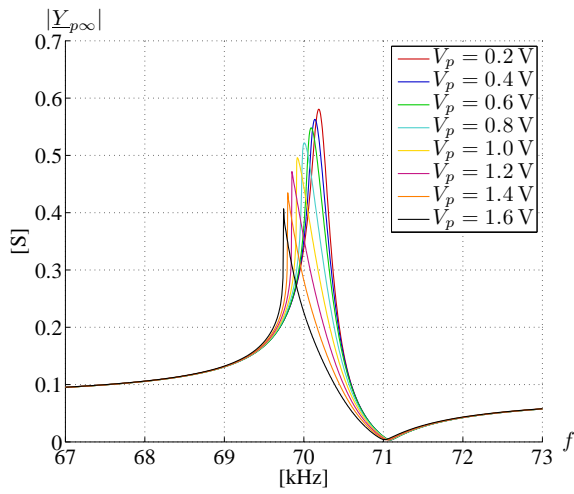
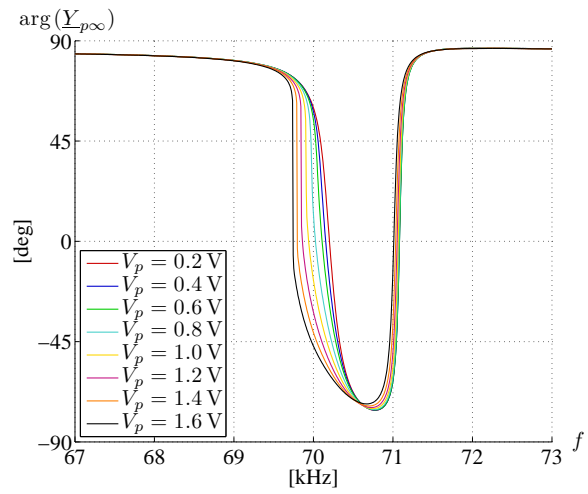
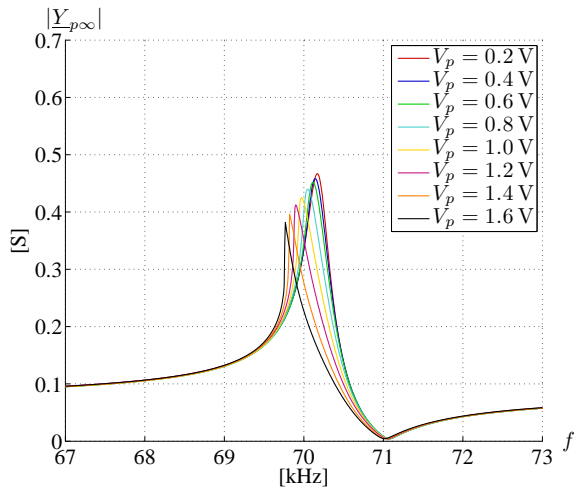
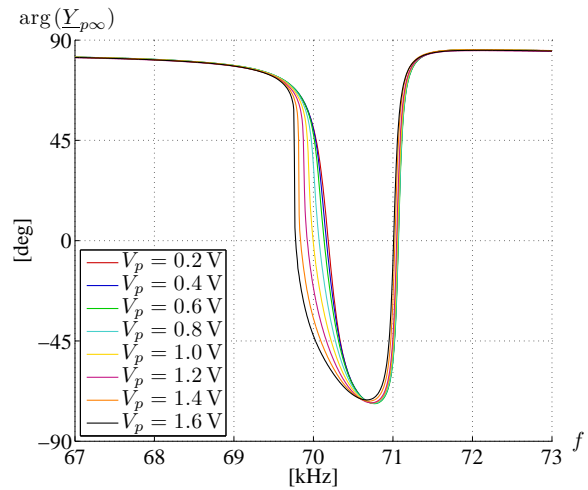
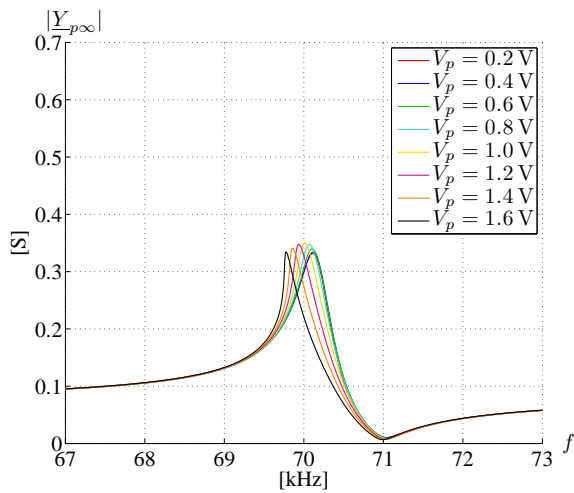
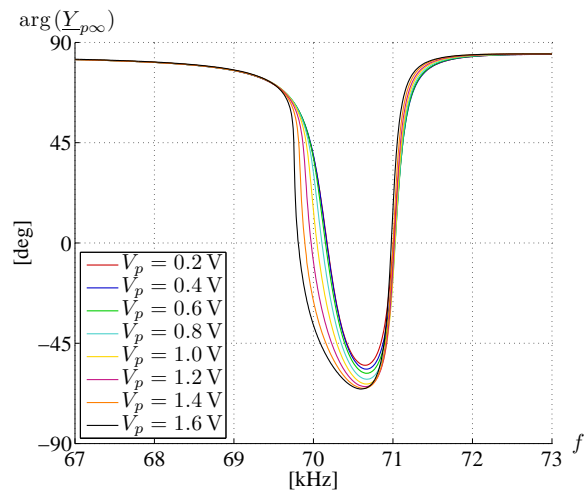
(a) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 300$  mbar(b) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 300$  mbar(c) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 500$  mbar(d) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 500$  mbar(e) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 1000$  mbar(f) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 1000$  mbar

FIGURE 4.14 – Diagrammes de Bode de l'admittance vue des bornes à pression fixe – Balayage en fréquence sweep up (SU)

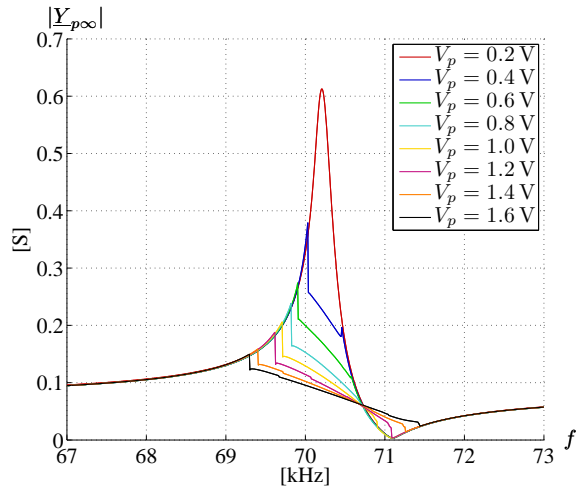
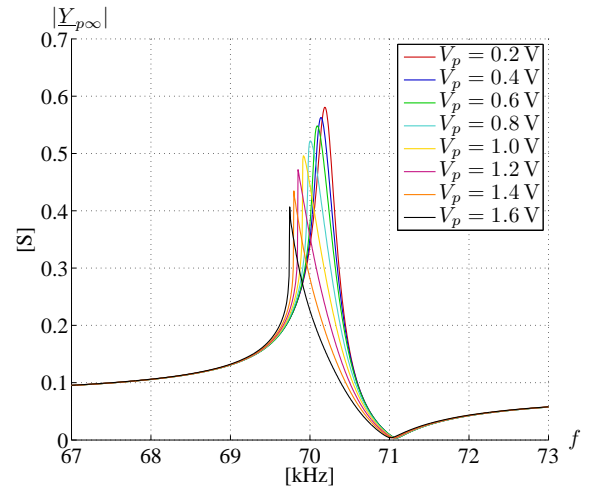
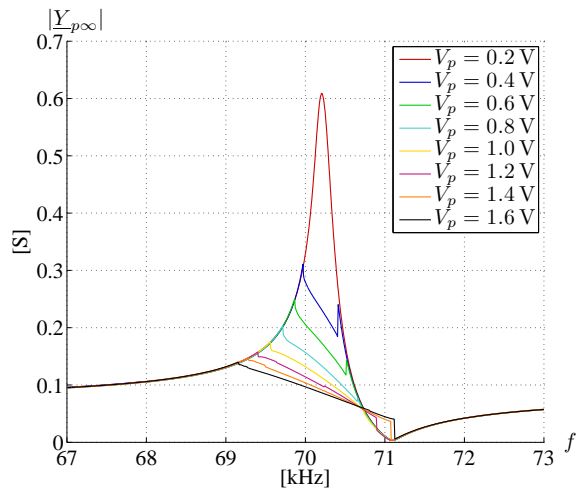
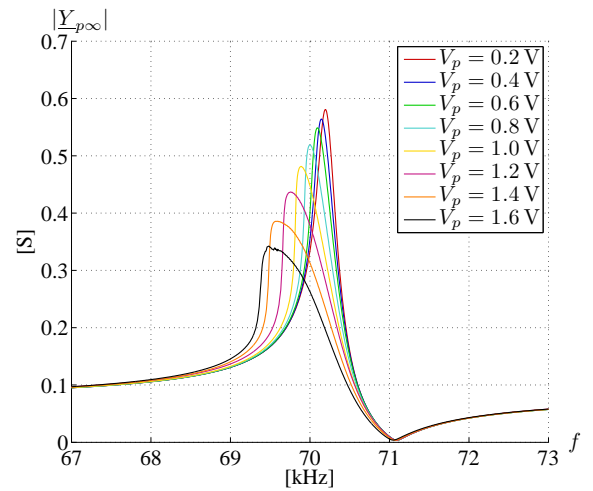
(a) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 10.6$  mbar – sweep up(b) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 300$  mbar – sweep up(c) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 10.6$  mbar – sweep down(d) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$  à  $P = 300$  mbar – sweep down

FIGURE 4.15 – Diagrammes de Bode de l'admittance vue des bornes à pression fixe – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) et sweep down ( $SD$ )

## 4.4.2 Exploitation des mesures en condition de décharge

### 4.4.2.1 Caractérisation en régime de décharge

A l'issue de ces caractérisations faisant usage du diagramme de Bode, valable uniquement pour une interprétation au fondamental et en régime permanent, il est inconcevable de chercher une analyse dans le domaine non-linéaire. Cette approche par admittance n'est d'ailleurs pas une méthode usuelle et adaptée à l'étude des phénomènes électriques liés aux décharges plasma. Toutefois, de part et d'autre de la plage de fréquence où apparaît la décharge, les modèles développés au chapitre précédent demeurent applicables, comme en atteste l'allure des courbes d'admittance. De cette manière, il est possible de tirer quelques informations par l'utilisation des modèles, et ce jusqu'aux deux points de rupture du diagramme de Bode. A noter que ces points témoignent de l'apparition et de l'extinction de la décharge.

En préparation à l'exploitation du modèle linéaire, les mesures en admittance sont utilisées afin d'en extraire la valeur des fréquences pour lesquelles sont constatées l'apparition ( $f_{app}$ ) et l'extinction ( $f_{ext}$ ) de la décharge lumineuse. Cette campagne d'analyse porte sur les essais effectués de  $P = 0.5$  mbar jusqu'à  $P = 40$  mbar. Au delà de ces pressions, la génération des décharges est moins évidente d'une part, et d'autre part, l'influence de la non-linéarité issue du comportement vibratoire rend la lecture plus délicate. Les fréquences d'apparition et d'extinction du plasma sont finalement tracées en fonction de l'amplitude de la tension d'entrée  $V_p$ , selon l'exploration en fréquence croissante ( $SU$ ) et décroissante ( $SD$ ) (cf. figure 4.16). A la lecture de ces courbes, quelques remarques peuvent être formulées :

- Il apparaît très clairement que les fréquences  $f_{app}$  et  $f_{ext}$  présentent une dépendance linéaire avec la tension d'alimentation. Cette forme affine est toutefois mise en défaut pour les caractéristiques à plus hautes pressions (à  $P = 40$  mbar figure 4.16(e) et au delà). Ce comportement trouvera une explication un peu plus tard, à l'issue de l'exploitation du modèle linéaire. La surface triangulaire délimitée par les droites représente la zone dans laquelle les conditions en tension et en fréquence satisfont à l'apparition d'une décharge. Cette aire diminue manifestement avec la montée en pression.
- L'extrapolation des courbes obtenues pour chaque pression, pour une amplitude de la tension d'entrée  $V_p$  tendant vers zéro, conduit à l'intersection des droites donnant les fréquences d'apparition et d'extinction de la décharge plasma. Cette intersection renseigne alors sur la valeur minimale de la tension d'entrée à imposer *a priori* pour générer une décharge. Les résultats obtenus pour le régime de balayage en fréquence croissante sont consignés dans le tableau [4.3]. La fréquence associée à chaque valeur de tension a été de surcroît précisée. Une augmentation de l'amplitude de la tension d'entrée avec la pression environnante peut être observée. En d'autres termes, pour la gamme de pression considérée, plus cette dernière est importante plus il est nécessaire d'apporter de l'énergie aux électrons pour créer la décharge. Il est à noter que les valeurs de tension relevées pour un balayage en fréquence

décroissante n'ont pas été indiquées en raison d'une différence tout au plus évaluée à quelques dizaines de millivolts par rapport à celles mentionnées dans le tableau [4.3].

TABLE 4.3 – Amplitude minimale de la tension d'entrée pour générer une décharge plasma en fonction de la pression environnante – Valeurs obtenues pour un balayage en fréquence sweep up (*SU*)

$P$ [mbar]	$V_{min}$ [V]	$f_{min}$ [Hz]
5.6	0.138	70061
10.6	0.141	70211
20.0	0.173	70201
30.3	0.178	70181
40.0	0.286	70186

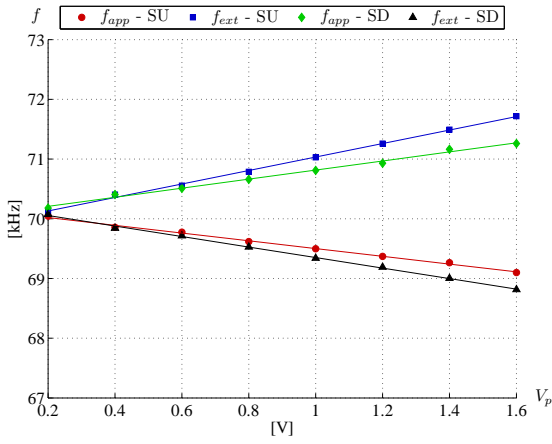
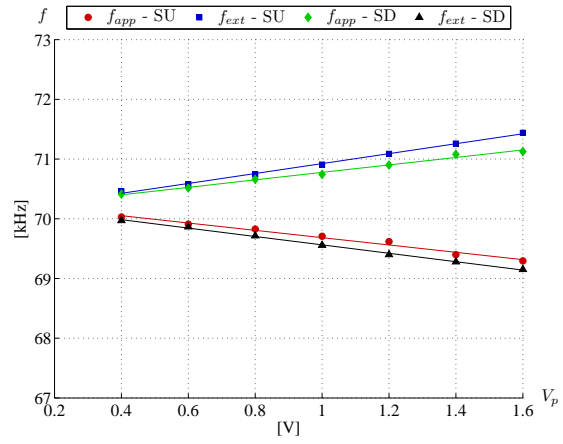
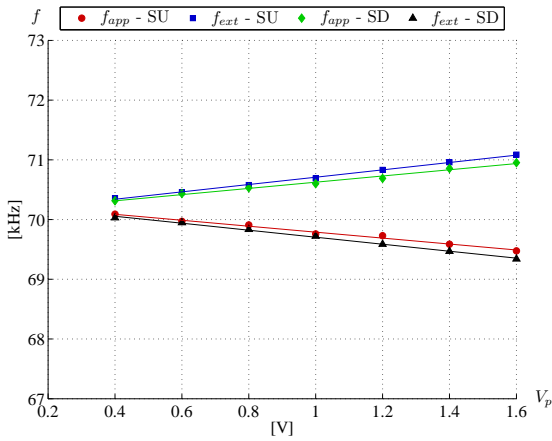
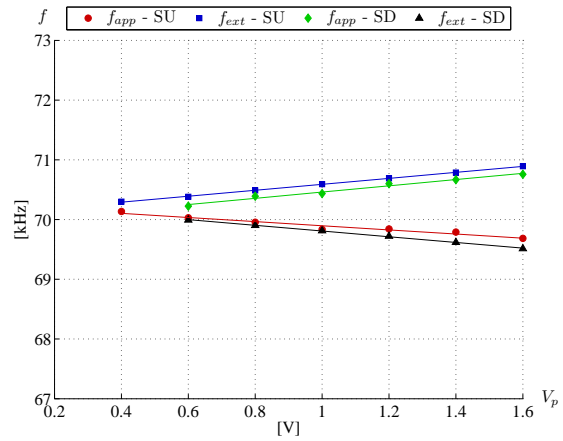
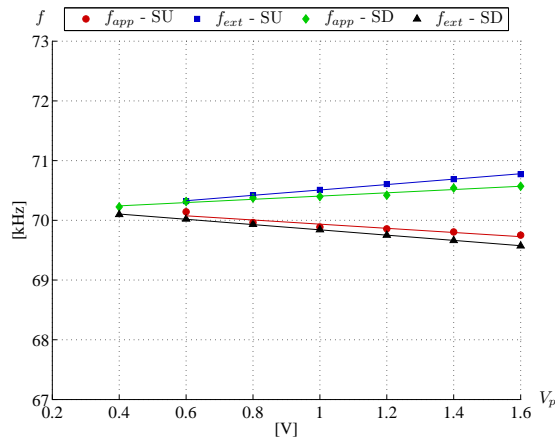
(a)  $P = 5.6$  mbar(b)  $P = 10.6$  mbar(c)  $P = 20$  mbar(d)  $P = 30$  mbar(e)  $P = 40$  mbar

FIGURE 4.16 – Fréquences d'apparition  $f_{app}$  et d'extinction  $f_{ext}$  des décharges en fonction de l'amplitude de la tension d'entrée  $V_p$  – Balayage en fréquence sweep up (SU) et sweep down (SD)

#### 4.4.2.2 Exploitation du modèle linéaire

Afin de consolider l'interprétation aux remarques émises précédemment, il est possible d'exploiter le modèle linéaire dans les zones hors décharge plasma jusqu'aux frontières de celles-ci.

Tout d'abord, la linéarité avérée entre les fréquences d'apparition  $f_{app}$  et d'extinction  $f_{ext}$  de la décharge et l'amplitude de la tension d'alimentation peut être expliquée au travers du gain en tension, dont la définition, valable autour d'une fréquence de résonance mécanique de la structure, a été donnée au chapitre 1 lors de l'établissement des principales caractéristiques électriques d'un transformateur. Pour mémoire, ce gain revêtait l'expression suivante :

$$|G| = \frac{|v_s|}{|v_p|} = \frac{\psi}{\sqrt{\left[1 - \delta \left(\frac{\omega^2}{\omega_s^2} - 1 - \frac{Q}{Q_m}\right)\right]^2 + \left[\frac{\delta}{Q_m} \frac{\omega}{\omega_s} + \delta Q \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega}\right)\right]^2}} \quad (4.28)$$

Pour retrouver l'allure des courbes des figures 4.16, il faut se placer dans les conditions expérimentales dans lesquelles elles ont été obtenues, c'est-à-dire dans le cas d'un transformateur à secondaire ouvert ( $R_{ch} \rightarrow +\infty$ ). Par ailleurs, dans l'hypothèse où la résistance  $R_s$  symbolisant les pertes diélectriques au secondaire est supposée infinie (hypothèse réaliste en raison d'un ordre de grandeur supérieur au mégaohm), le facteur de surtension électrique  $Q$  tend alors vers 0. De ce fait, pour un gain en tension fixé à une valeur  $G$ , la pulsation réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_s}$  vérifie l'équation suivante :

$$\delta^2 x^4 + \left[\frac{\delta^2}{Q_m^2} - 2\delta(\delta + 1)\right] x^2 + (\delta + 1)^2 - \frac{\psi^2}{G^2} = 0 \quad (4.29)$$

Le carré de la pulsation réduite est solution de cette simple équation du second degré et a par conséquent pour expression :

$$x^2 = 1 + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2Q_m^2} \pm \frac{1}{\delta} \sqrt{\left(\frac{\delta}{2Q_m^2}\right)^2 - \frac{\delta^2}{Q_m^2}(\delta + 1) + \frac{\psi^2}{G^2}} \quad (4.30)$$

Dans l'hypothèse d'un important facteur de qualité mécanique ( $Q_m \gg 1$ ), l'expression précédente se simplifie et la fréquence vérifie la relation suivante :

$$f = f_p \sqrt{1 \pm \frac{|\psi|}{G(\delta + 1)}} \quad \text{avec} \quad f_p = f_s \sqrt{1 + \frac{1}{\delta}} \quad (4.31)$$

Enfin, si la fraction sous la racine est faible devant l'unité, un développement limité au premier ordre de l'expression précédente peut être effectué. En faisant apparaître les amplitudes  $V_p$  et  $V_s$  des tensions en entrée et en sortie du transformateur respectivement, il vient alors :

$$f(V_p) = f_p \pm \theta V_p \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{f_p |\psi|}{2V_s(\delta + 1)} \quad (4.32)$$



La relation affine qui existe entre la fréquence et la tension d'entrée étant à présent justifiée analytiquement, il est alors possible d'émettre quelques remarques à ce sujet. Bien évidemment, ces remarques ne peuvent être admises que sur la plage de pression pour laquelle la non-linéarité du comportement vibratoire n'a pas eu de répercussions notables sur les caractéristiques d'admittance, soit de 5.6 mbar à 40 mbar. Cette plage opérationnelle permet alors d'admettre la validité du modèle linéaire de part et d'autre de la zone de décharge. Ainsi, la relation linéaire qui lie respectivement les fréquences  $f_{app}$  et  $f_{ext}$  à l'amplitude de la tension d'entrée, les relie également linéairement à la tension fictive du secondaire comme en atteste la relation (4.32). Cette tension est qualifiée de fictive puisque le secondaire du transformateur est dépourvu d'électrode. Cette tension déduite du modèle appliqué selon le cas parallèle constitue néanmoins une grandeur théorique qualificative du potentiel électrique de surface. La relation linéaire (4.32) atteste donc indubitablement de l'existence d'une valeur constante de la tension de sortie fictive pour laquelle la décharge apparaît. Il en est de même pour la fréquence d'extinction.

Ainsi pour finir de s'en convaincre, le modèle linéaire est à nouveau employé afin de représenter la tension de sortie en fonction de la fréquence, et pour différentes valeurs de la tension d'entrée (cf. figures 4.17 et 4.18). Ces tracés sont obtenus à partir du schéma électrique équivalent précédemment identifié. A ces courbes sont superposées les valeurs de la tension fictive du secondaire calculées pour les fréquences d'apparition et d'extinction des décharges à l'aide de l'équation (4.28). Ces différents tracés sont donnés pour différentes pressions et pour les balayages en fréquence croissante et décroissante et conduisent aux remarques suivantes :

- Il apparaît très clairement la constance de la tension de sortie, dont la valeur est distincte pour l'amorçage et l'extinction de la décharge.
- Quel que soit le sens du balayage en fréquence, la tension de déclenchement est toujours supérieure à celle de l'extinction. Cette remarque coïncide avec les besoins à l'amorçage de n'importe quel gaz ionisé.
- La tension nécessaire à l'amorçage est croissante avec la pression, ce qui s'accorde avec la réduction de la surface délimitée par les droites en fréquence de la figure 4.16.
- A pression donnée, il est évident que certaines courbes de la tension fictive du secondaire ne peuvent satisfaire à la condition d'amorçage (cf. par exemple les figures 4.17(e) et 4.17(f)). La valeur limite converge nécessairement vers la fréquence de résonance, comme en témoignaient précédemment les valeurs relevées dans le tableau [4.3].
- La constance des tensions d'apparition et d'extinction devient plus discutable lorsqu'il s'agit des relevés à plus hautes pressions illustrés par les courbes de la figure 4.18 ( $P = 30$  mbar et  $P = 40$  mbar). En effet, s'appuyant sur l'allure de l'impédance obtenue pour ces pressions (cf. figures 4.12(c) et 4.12(e)), il

est plausible d'attribuer cette variation par la manifestation perceptible de la non-linéarité du comportement vibratoire. Celui-ci implique une variation de la fréquence de résonance, ainsi que la manifestation de transition hystérique, rendant inadéquate l'approximation précédente par le modèle linéaire. En outre, la stabilité des conditions de décharges devient également incertaine avec l'augmentation de la pression, pouvant s'ajouter aux origines de la discontinuité constatée.

Si la relation (4.32) a permis de conforter l'interprétation faite sur l'origine de la relation linéaire apparente entre les fréquences caractéristiques et la tension d'entrée, il serait maladroit à cette étape d'en déduire la valeur de la tension d'amorçage au secondaire tant les hypothèses avancées sont simplificatrices. En outre, celle-ci ne sert qu'à définir une tension de sortie fictive. Une caractérisation plus appropriée engagerait la nécessité de mesurer le potentiel électrique effectif dans l'environnement du transformateur. Si cette mesure n'a pas été réalisée dans l'étude ici présentée, il est à noter qu'elle a été entreprise par Teranishi *et al.* à l'aide d'un électrodage sectorisé surplombant un transformateur de type Rosen, et par la considération de multiples couplages capacitifs [Ter05].

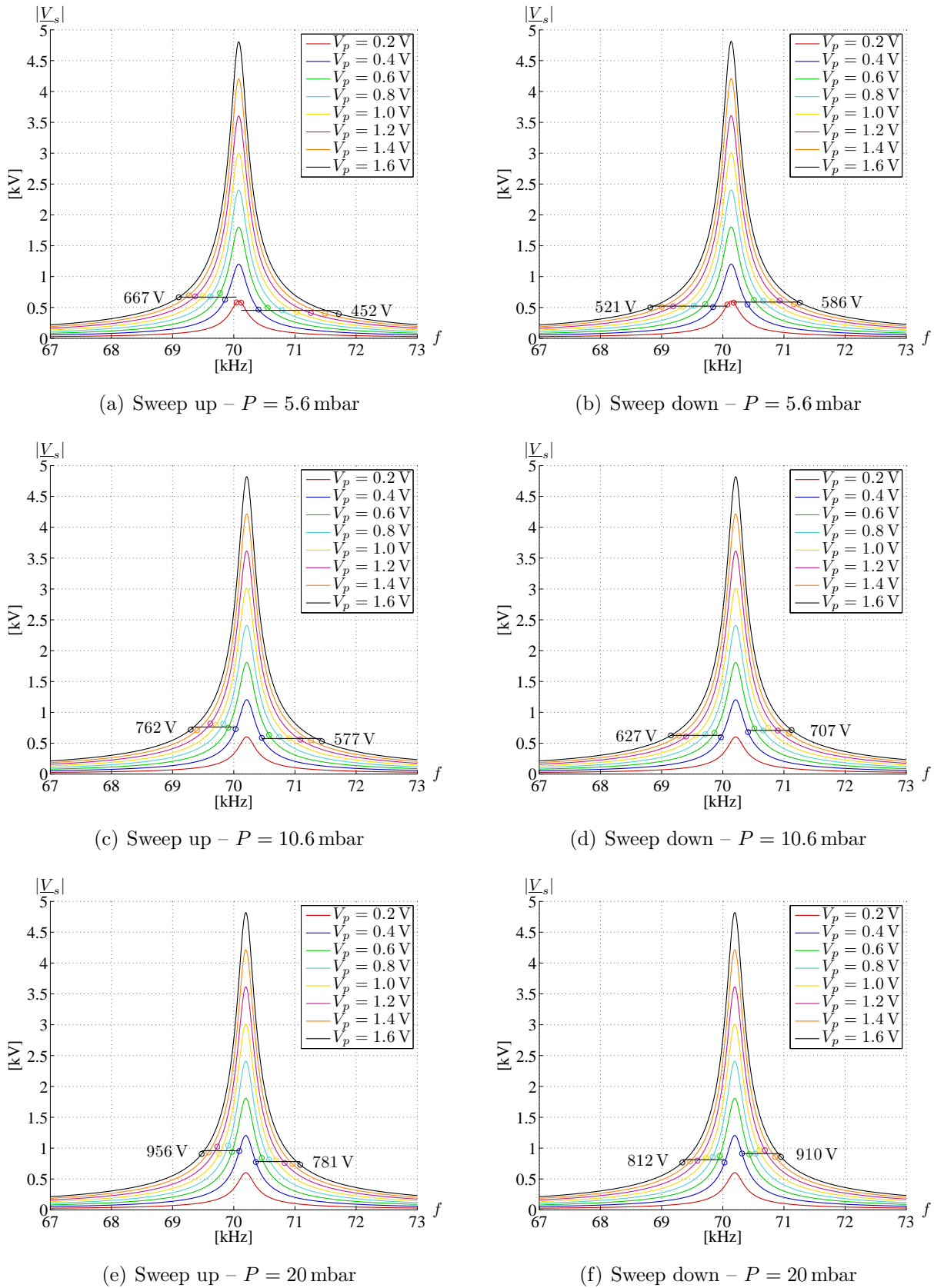


FIGURE 4.17 – Estimation de l'amplitude de la tension de sortie  $V_s$  selon le modèle linéaire pour différentes pressions – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) et sweep down ( $SD$ )

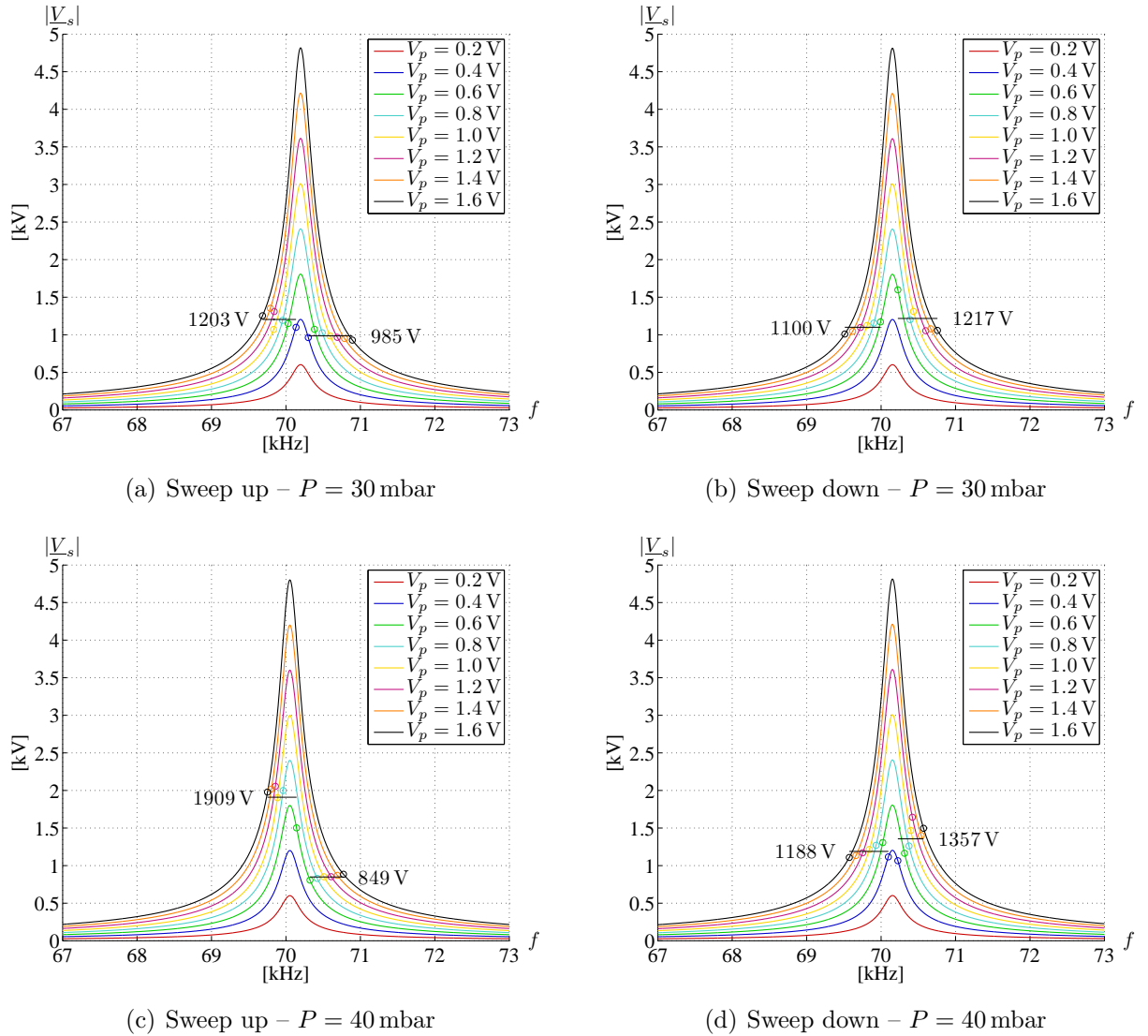


FIGURE 4.18 – Estimation de l’amplitude de la tension de sortie  $V_s$  selon le modèle linéaire pour différentes pressions – Balayage en fréquence sweep up ( $SU$ ) et sweep down ( $SD$ )

## 4.5 Conclusion

Au cours de ce quatrième et dernier chapitre, différents essais expérimentaux ont été entrepris afin de conforter ou éprouver les modèles précédemment formulés. Au titre d'une première caractérisation par mesure d'admittance, en condition de pression atmosphérique et pour des tensions d'alimentation d'à peine quelques volts, le modèle initialement établi a montré une incapacité à rendre compte des phénomènes réellement observés pour les tensions les plus élevées. C'est finalement l'utilisation du transformateur à vide et à faible amortissement qui conduit à promouvoir des phénomènes non-linéaires généralement négligés dans les applications les plus courantes. Ce constat atteste indubitablement de la nécessité d'aborder les générateurs plasmas à effet piézoélectrique comme des dispositifs au comportement spécifique.

Sans avoir à remettre en cause la méthode de modélisation établie au chapitre précédent et sa validation en condition de petits signaux, un complément aux définitions linéaires des relations constitutives de la piézoélectricité a été introduit impactant sur les variables mécaniques. La non-linéarité observée expérimentalement a été attribuée au domaine vibratoire après avoir éliminé les autres origines probables de non-linéarités, moins prépondérantes, sur la base d'une étude bibliographique. Le développement d'un modèle non-linéaire a ensuite été abordé, réduit aux grandeurs fondamentales. Il a été conduit sur la base d'une nouvelle approximation de la forme d'onde mécanique, afin de mettre en exergue l'expression des différents paramètres de l'équation d'équilibre nouvellement définie. La réflexion menée sur le modèle enjoint d'identifier le nouveau paramètre introduit. A l'issue de cette identification, le modèle non-linéaire est simulé puis comparé aux relevés expérimentaux, témoignant d'une bonne corrélation et d'une manifestation cohérente avec l'observation. Finalement, ces investigations conduisent nécessairement à s'interroger quant aux limites de puissances transmissibles au gaz environnant et des solutions envisageables pour s'en accommoder.

Une fois l'indétermination levée sur l'origine principale de la non-linéarité observée, un début de qualification de la décharge plasma, ou pour le moins, des conditions nécessaires à son amorçage, a été engagé. La plage utile de pression a été définie afin de promouvoir des décharges luminescentes à l'aide du transformateur disponible. La qualification du transformateur en condition de décharge a consisté en l'observation de la rupture visible sur les caractéristiques du diagramme de Bode lors de l'apparition du plasma. En outre, son amorçage et son extinction se manifestent très clairement sur ces relevés, laissant apparaître deux points tout à fait caractéristiques. Sur les tracés aux plus basses pressions, la non-linéarité due au comportement vibratoire est totalement occultée par celle issue de la décharge. En conséquence le modèle linéaire a pu être mis à profit pour caractériser l'admittance de part et d'autre de la zone délimitant l'existence de la décharge. Ainsi, il est clairement apparu, au travers du relevé des fréquences d'amorçage et d'extinction des décharges et de l'utilisation du modèle, une manifestation linéaire remarquable entre l'amplitude de la tension d'entrée et les conditions de décharge.

Ceci met en lumière l'un des avantages majeurs de la solution piézoélectrique pour la génération de plasma, à savoir sa capacité à l'élévation en tension au plus

---

près de la zone de décharge. De manière tout à fait qualitative, ces essais ont permis de mettre en évidence la possibilité de promouvoir une décharge à un niveau de tension en entrée d'un ordre de grandeur deux à trois fois inférieur à un générateur conventionnel.

De surcroît, les essais entrepris ont permis de souligner l'existence d'un couplage entre les grandeurs électriques d'entrée et la présence d'un plasma. Les origines de ce couplage devront faire l'objet d'études approfondies afin d'aboutir à une meilleure maîtrise de cette nouvelle technologie pour la génération des décharges plasma.



# Conclusion générale

Les travaux dont le présent mémoire a fait l'objet ont consisté en une première étude théorique et expérimentale des transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de décharges plasma. Défini selon son plus large périmètre, l'objectif principal fut ici d'établir un socle de connaissances préliminaires et de fournir les outils nécessaires à l'interprétation des phénomènes mis en jeu. En effet, si la littérature récente témoigne de la viabilité de cette technologie, celle-ci ne traite aucunement de la modélisation des transformateurs dans ce cadre si spécifique. Tout d'abord, un bref rappel du phénomène piézoélectrique et des relations linéaires auquel il obéit est présenté au cours du premier chapitre introductif. Un état de l'art plus particulièrement tourné vers les transformateurs est ensuite abordé, illustrant les différentes architectures existantes ainsi que les applications dans lesquels ces derniers sont employés. Ensuite, une brève illustration de l'emploi de ces transformateurs pour la génération de décharges plasma est entreprise.

Les interrogations inhérentes à ce mode d'utilisation ont préalablement conduit à élaborer une démarche méthodique pour la modélisation des transformateurs. Dans un premier temps, un rappel du principe des travaux virtuels et de la moindre action a été proposé, ainsi que la justification de leur emploi pour la définition de systèmes faisant conjointement appel à des énergies de natures différentes (mécanique et électrique). Au travers du respect des équations constitutives, des relations de passage entre les différents milieux et des conditions aux limites mécaniques et électriques, une définition matricielle du système d'équations auquel obéissent les transformateurs piézoélectriques a été formulée, quelle qu'en soit la géométrie ou les modes de déformation choisis. Cette description matricielle intègre notamment la possibilité d'une définition simultanée de plusieurs rangs de modes vibratoires. La méthode déployée est finalement applicable pour toute définition structurelle, aussi bien des transformateurs que des actionneurs piézoélectriques dès lors qu'ils admettent un fonctionnement résonant.

Bien évidemment, cette méthode analytique ne prétend pas prendre en considération l'ensemble des phénomènes de couplages, notamment les relations persistantes dans les différentes directions ou les effets aux frontières. Néanmoins, sous gouverne d'une utilisation maîtrisée des hypothèses simplificatrices, il est possible de définir assez fidèlement bon nombre d'architectures, constituant ainsi un moyen efficace pour la définition et le prédimensionnement de dispositifs, conformés au domaine linéaire de la piézoélectricité.



Suite à la formulation de cette méthode analytique générale, celle-ci a été employée pour formuler le modèle d'un transformateur de type Rosen pour les principaux modes de déformation selon la dimension principale. Le modèle analytique a été ensuite comparé aux résultats obtenus expérimentalement (en condition petits signaux) ainsi qu'à ceux fournis par un modèle numérique établi selon la méthode des éléments finis. Le modèle numérique, faisant intervenir les effets tridimensionnels dans l'identification, a constitué un support pertinent pour éprouver la solution analytique et ses simplifications. Ainsi, il a permis de mettre en exergue le domaine de validité du modèle analytique selon les modes principaux. Il a également été possible d'effectuer une variation paramétrique des deux modèles et ainsi vérifier la pertinence de la solution analytique. En outre, celui-ci a également démontré l'excellente corrélation subsistant entre les déformées propres et la répartition du potentiel électrique de surface obtenue analytiquement et numériquement. Elle atteste notamment de l'influence remarquable de l'anisotropie entre le primaire et le secondaire, asymétrie très couramment négligée lors de la modélisation classique de ces transformateurs. Or, dans le cadre précis de l'utilisation du transformateur à secondaire ouvert, l'allure des déformées tout comme celle de la répartition du potentiel, constitue un élément primordial quant à la précision des coefficients de conversion électromécanique.

Pour répondre explicitement aux besoins requis pour interpréter l'origine de la source de la décharge plasma, la valeur absolue du potentiel électrique de surface est nécessaire. Cette nécessité a conduit à une étude analytique complémentaire incluant l'amortissement mécanique de la structure Rosen. A l'issue de cette étude en vibration forcée, la modélisation 2D du potentiel électrique réparti dans l'environnement proche du transformateur est abordée à l'aide d'une définition par différences finies. Cette modélisation admettant comme condition source le potentiel électrique de surface précédemment calculé ne traduit qu'un couplage faible entre les différents milieux. L'influence d'une décharge plasma ainsi que le comportement des charges d'espace n'a pas été pris en compte, de même que leur influence sur le comportement électromécanique du milieu piézoélectrique. Cette influence a été initialement admise comme négligeable, en dépit de l'influence indéniable de ces décharges sur le comportement électrique observé expérimentalement. Cette première étape a néanmoins permis de souligner une évidente corrélation entre le profil des décharges lumineuses avec celui du potentiel électrique environnant le transformateur, et plus particulièrement avec le gradient de ce dernier. Les investigations expérimentales furent l'objet du dernier chapitre.

Le transformateur utilisé durant le chapitre trois pour éprouver la méthode analytique a également servi de générateur pour les investigations expérimentales en condition de décharge. La conduite de ces caractérisations pratiques a nécessité le développement d'un banc d'essai spécifique, alliant les besoins d'alimentation, de caractérisation électrique et la maîtrise des conditions de pression. La caractérisation est présentée selon deux modes distincts, soulignant spécifiquement deux comportements linéaires dont l'origine est différente. Tout d'abord, en condition de pression atmosphérique, soit en l'absence de décharge plasma, les mesures ont at-

testé d'une divergence remarquable entre le modèle analytique et le comportement électrique mesuré. A l'issue de ce constat, il est apparu impossible de négliger plus avant les termes de second et de troisième ordre additionnels aux relations linéaires constitutives de la piézoélectricité. Une étude analytique complémentaire a donc été entreprise afin de prendre en considération le comportement non-linéaire de la conversion électromécanique.

Une large campagne d'essais a ensuite été entreprise en condition de décharge plasma, cherchant à qualifier ces décharges au travers de mesures d'admittance. Les mesures se sont volontairement réduites aux relevés électriques, cherchant à qualifier de manière simple les différences pouvant apparaître entre le modèle et les relevés expérimentaux réduits à leur terme harmonique fondamental en régime permanent. Les essais effectués selon différentes conditions d'alimentation et de pression ont témoigné de l'existence de non-linéarités supplémentaires à celles auparavant observées. S'appuyant sur le modèle linéaire précédemment établi et connaissant les limites du domaine de validité de ce dernier, un ensemble de discussions préliminaires a pu être engagé. La principale information fut la confirmation de l'existence d'une tension de claquage seuil au-delà de laquelle survient la décharge.

Ce travail dans son ensemble a donc permis d'une part, d'élaborer les moyens analytiques nécessaires au dimensionnement des transformateurs piézoélectriques, d'en vérifier la précision et les limites de validité, et d'autre part, d'amorcer les premiers éléments de réflexions quant à l'usage de ces transformateurs comme source de plasma. Au terme de ces travaux de thèse, il devient possible d'aborder un dimensionnement de transformateur spécifiquement dédié à la génération de plasma. Jusqu'ici, l'étude expérimentale précédemment détaillée s'appuyait avantageusement sur un transformateur commercial, initialement dévoué à une toute autre utilisation. Ce « détournement » d'un dispositif peu adapté justifie en partie les faibles performances de décharges observées. Il a été démontré durant cette étude que la décharge était d'une part, corrélée à l'amplitude de potentiel du milieu piézoélectrique, lui-même assujéti au couplage électromécanique et à ses éventuelles non-linéarités, et d'autre part à la géométrie de la structure ou au mode vibratoire provoqué. Sur la base de ces premiers paramètres caractéristiques, il est alors possible d'imaginer une nouvelle architecture de générateur de décharges, d'en exprimer le modèle structural et finalement d'en déduire un dimensionnement optimisé.

Par ailleurs, si ces travaux constituent une contribution préliminaire indéniable, les étapes dans les études théoriques comme expérimentales restent encore nombreuses pour identifier convenablement le couplage existant entre le milieu piézoélectrique et son environnement en phase de décharge. L'étape suivante la plus évidente serait d'étudier le comportement harmonique, d'une part issu de la conversion électromécanique non-linéaire, et d'autre part lors des décharges. La discrimination de ces comportements au travers de mesures complémentaires, notamment vibratoires apparaît alors incontournable. En outre, il a aussi été démontré que la

manifestation de cette non-linéarité de la conversion électromécanique était rédhibitoire pour accéder à des décharges aux pressions les plus élevées. Cette rupture de la linéarité entre la condition d'alimentation et les conditions de décharge constitue alors l'un des verrous majeurs quant aux prétentions d'accroître notablement les puissances transmises. Il apparaît à présent indéniable que ce nouveau cadre applicatif doit faire l'objet d'une attention particulière. La promotion de cette solution technologique alternative devra nécessairement passer, soit par la maîtrise, soit par la minimisation de l'effet préjudiciable que constitue la non-linéarité dans la conversion électromécanique.

Finalement, une étape future incontournable pour l'approfondissement des connaissances dans ce processus de génération et sa valorisation consistera en la caractérisation de la décharge plasma (énergie, courant de décharges, espèces,...), et de son interaction directe ou indirecte avec le milieu piézoélectrique. S'il existe quelques travaux concernant la qualification expérimentale des décharges plasma obtenues à l'aide de matériaux ferroélectriques, ceux-ci sont pour ainsi dire inexistantes s'agissant de la génération faisant intervenir l'effet piézoélectrique. Des moyens expérimentaux spécifiques devront alors être mis en œuvre : par exemple, compte tenu du comportement résonant de la source constituée par le transformateur piézoélectrique, ainsi que de l'absence d'électrode, il apparaît délicat de mesurer le courant de décharge, classiquement observé par une boucle de Rogowski. La disposition d'un potentiel non homogène à la surface de l'élément source constitue également une difficulté supplémentaire, aussi bien pour la caractérisation expérimentale que pour la modélisation du comportement du plasma.

Les propriétés d'intégration, diélectriques, ou d'amplification, la liberté dans les géométries, le contrôle spatial de la répartition des potentiels électriques selon le mode vibratoire, sont autant d'aptitudes offertes par cette solution technologique qu'est le transformateur piézoélectrique. Ces prédispositions, associées à l'étendue considérable des applications intégrant des besoins de décharges plasma faibles puissances ne peuvent qu'encourager à la persévérance dans la compréhension, la modélisation et la valorisation de cette nouvelle opportunité imputable à l'amélioration sans cesse croissante des matériaux électroactifs.

# Annexe A

## Développement des calculs issus de la modélisation analytique

Cette section a pour but de présenter les développements analytiques permettant l'établissement des déformées modales et les propriétés électrodynamiques du transformateur piézoélectrique de type Rosen dans les cas série et parallèle (cf. § 3.2.5 et § 3.2.6 pour ces deux cas respectivement). Les expressions de ces grandeurs sont répertoriées pour les cas série et parallèle dans les tableaux [3.2] et [3.3] respectivement.

Pour mémoire, d'après l'étude aux valeurs propres menée dans la section § 3.2.4, les déformées mécanique et électrique revêtent les expressions suivantes :

$$\underline{u}_1(x_1) = \begin{cases} A_u \cos(k_1 x_1) + B_u \sin(k_1 x_1) & , -L_1 < x_1 < 0 \\ C_u \cos(k_2 x_1) + D_u \sin(k_2 x_1) & , 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\underline{\phi}(x_1) = \begin{cases} 0 & , -L_1 < x_1 < 0 \\ \bar{h}_{33} \underline{u}_1(x_1) + C_\phi x_1 + D_\phi & , 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où  $A_u, B_u, C_u, D_u, C_\phi$  et  $D_\phi$  sont des constantes d'intégration.  $k_1$  et  $k_2$  représentent quant à eux les vecteurs d'onde relatifs au primaire et au secondaire.

### A.1 Cas série

#### A.1.1 Problème aux valeurs propres

D'après la section § 3.2.5, le problème aux valeurs propres de la dynamique d'un transformateur de type Rosen à secondaire court-circuité est régi par le système d'équations suivant :

$$A_u - C_u = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{c}_{11}^E k_{10} B_u - \bar{c}_{33}^D k_{20} D_u - \bar{h}_{33} / \bar{\beta}_{33}^S C_\phi = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{h}_{33} C_u + D_\phi = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{c}_{11}^E k_{10} [A_u \sin(X_{10}) + B_u \cos(X_{10})] = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{c}_{33}^D k_{20} [-C_u \sin(X_{20}) + D_u \cos(X_{20})] + \bar{h}_{33} / \bar{\beta}_{33}^S C_\phi = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{h}_{33} [C_u \cos(X_{20}) + D_u \sin(X_{20})] + C_\phi L_2 + D_\phi = 0 \quad (\text{A.8})$$

Le système aux valeurs propres dont est issu le système d'équations précédent pâtit d'une indétermination sur l'amplitude modale des déformées (sept inconnues que sont la pulsation et les six constantes d'intégration pour six équations). La pulsation  $\omega$  est obtenue par l'annulation du déterminant de la matrice associée au système d'équations précédent (équation ( $E_0$ ) du tableau [3.2]) et les constantes d'intégrations sont exprimées en fonction d'une seule autre, en l'occurrence  $A_u$ , comme telles :

- **Expression de  $B_u$**  : à partir de (A.6), il vient :

$$B_u = -A_u \tan(X_{10}) \quad (\text{A.9})$$

- **Expression de  $C_u$**  : à partir de (A.3), il vient :

$$C_u = A_u \quad (\text{A.10})$$

- **Expression de  $D_u$**  : à partir de (A.4) et (A.7), en éliminant  $C_\phi$ , il vient :

$$D_u = A_u \frac{\eta \tan(X_{10}) + \sin(X_{20})}{\cos(X_{20}) - 1} \quad (\text{A.11})$$

- **Expression de  $C_\phi$**  : à partir de (A.7), fort de l'expression de  $D_u$ , il vient :

$$C_\phi = \frac{A_u \bar{h}_{33} X_{20} \eta \tan(X_{10}) \cos(X_{20}) + \sin(X_{20})}{L_2 k_{33}^2 \cos(X_{20}) - 1} \quad (\text{A.12})$$

- **Expression de  $D_\phi$**  : à partir de (A.5), il vient :

$$D_\phi = -A_u \bar{h}_{33} \quad (\text{A.13})$$

Dès lors, les expressions modales de la déformée mécanique et du potentiel électrique sont entièrement déterminées (à une constante multiplicative près). Les expressions sont données dans le tableau [3.2] où apparaissent les facteurs  $U_0^{(i)}$  et  $\Phi_0^{(i)}$ , liés par la relation  $\Phi_0^{(i)} = \bar{h}_{33} U_0^{(i)}$ , issus du critère de normalisation de la masse.

### A.1.2 Critère de normalisation

La condition de normalisation de la masse modale appliquée au problème du transformateur piézoélectrique de type Rosen s'écrit comme suit :

$$\int_{-L_1}^0 \rho l e \left[ \underline{u}_1^{(i)}(x_1) \right]^2 dx_1 + \int_0^{L_2} \rho l e \left[ \underline{u}_1^{(i)}(x_1) \right]^2 dx_1 = 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_m \quad (\text{A.14})$$

En reportant les expressions de la déformée mécanique relatives à chacune des parties du transformateur, il vient pour le cas série :

$$U_0^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\rho l e \left[ \mathcal{I}_{p0}^{(i)} + \mathcal{I}_{s0}^{(i)} \right]}} \quad (\text{A.15})$$

avec

$$\mathcal{I}_{p0}^{(i)} = \int_{-L_1}^0 \left[ \cos(k_{10}^{(i)} x_1) - \tan(X_{10}^{(i)}) \sin(k_{10}^{(i)} x_1) \right]^2 dx_1 \quad (\text{A.16})$$

et

$$\mathcal{I}_{s0}^{(i)} = \int_0^{L_2} \left[ \cos(k_{20}^{(i)} x_1) + \alpha_0^{(i)} \sin(k_{20}^{(i)} x_1) \right]^2 dx_1 \quad (\text{A.17})$$

• **Calcul de  $\mathcal{I}_{p0}$**  (l'indice  $i$  est volontairement omis)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{p0} &= \int_{-L_1}^0 \left[ \cos^2(k_{10} x_1) - \tan(X_{10}) \sin(2k_{10} x_1) + \tan^2(X_{10}) \sin^2(k_{10} x_1) \right] dx_1 \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{p0} &= \left[ \left[ \frac{x_1}{2} + \frac{\sin(2k_{10} x_1)}{4k_{10}} \right] - \tan(X_{10}) \left[ -\frac{\cos(2k_{10} x_1)}{2k_{10}} \right] + \tan^2(X_{10}) \left[ \frac{x_1}{2} - \frac{\sin(2k_{10} x_1)}{4k_{10}} \right] \right]_{-L_1}^0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{p0} &= \frac{L_1}{2} \left[ 1 + \text{sinc}(2X_{10}) \right] + \frac{L_1}{2} \left[ \frac{2}{X_{10}} \tan(X_{10}) \sin^2(X_{10}) \right] + \frac{L_1}{2} \tan^2(X_{10}) \left[ 1 - \text{sinc}(2X_{10}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{p0} &= \frac{L_1}{2} \left[ \left[ 1 + \tan^2(X_{10}) \right] + \left[ 1 - \tan^2(X_{10}) \right] \text{sinc}(2X_{10}) + \frac{1}{X_{10}} \tan^2(X_{10}) \sin(2X_{10}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{p0} &= \frac{L_1}{2} \frac{1}{\cos^2(X_{10})} \left[ 1 + \left[ \cos^2(X_{10}) - \sin^2(X_{10}) + 2 \sin^2(X_{10}) \right] \text{sinc}(2X_{10}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{p0} &= \frac{L_1}{2} \frac{1 + \text{sinc}(2X_{10})}{\cos^2(X_{10})} \end{aligned}$$

• **Calcul de  $\mathcal{I}_{s0}$**  (l'indice  $i$  est volontairement omis)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s0} &= \int_0^{L_2} \left[ \cos^2(k_{20} x_1) + \alpha_0 \sin(2k_{20} x_1) + \alpha_0^2 \sin^2(k_{20} x_1) \right] dx_1 \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{s0} &= \left[ \left[ \frac{x_1}{2} + \frac{\sin(2k_{20} x_1)}{4k_{20}} \right] + \alpha_0 \left[ -\frac{\cos(2k_{20} x_1)}{2k_{20}} \right] + \alpha_0^2 \left[ \frac{x_1}{2} - \frac{\sin(2k_{20} x_1)}{4k_{20}} \right] \right]_0^{L_2} \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{s0} &= \frac{L_2}{2} \left[ 1 + \text{sinc}(2X_{20}) \right] + \frac{L_2}{2} \left[ \frac{2}{X_{20}} \alpha_0 \sin^2(X_{20}) \right] + \frac{L_2}{2} \alpha_0^2 \left[ 1 - \text{sinc}(2X_{20}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{s0} &= \frac{L_2}{2} \left[ \left[ 1 + \alpha_0^2 \right] + \left[ 1 - \alpha_0^2 \right] \text{sinc}(2X_{20}) + \frac{1}{X_{20}} \alpha_0 \tan(X_{20}) \sin(2X_{20}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{s0} &= \frac{L_2}{2} \left[ 1 + \alpha_0^2 \right] \left[ 1 + \frac{1 + 2\alpha_0 \tan(X_{20}) - \alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2} \text{sinc}(2X_{20}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{s0} &= \frac{L_2}{2} \left[ 1 + \alpha_0^2 \right] \left[ 1 + \beta_0 \text{sinc}(2X_{20}) \right] \end{aligned}$$

Fort des relations précédentes, la quantité  $U_0^{(i)}$  a finalement pour expression vérifiée

pour  $i = 1, \dots, n_m$  :

$$U_0^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{M_1}{2} \frac{1 + \operatorname{sinc}(2X_{10}^{(i)})}{\cos^2(X_{10}^{(i)})} + \frac{M_2}{2} [1 + (\alpha_0^{(i)})^2] [1 + \beta_0^{(i)} \operatorname{sinc}(2X_{20}^{(i)})]}} \quad (\text{A.18})$$

où  $M_1 = \rho L_1 l e$  et  $M_2 = \rho L_2 l e$  sont respectivement les masses au repos du primaire et du secondaire.

### A.1.3 Raideur modale $K_0^{(i)}$

Les éléments diagonaux de la matrice des raideurs modales d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen s'écrivent comme suit :

$$K^{(i)} = \int_{-L_1}^0 \frac{le}{s_{11}^E} [\underline{u}_{1,1}^{(i)}(x_1)]^2 dx_1 + \int_0^{L_2} \frac{le}{s_{33}^E(1 - k_{33}^2)} [\underline{u}_{1,1}^{(i)}(x_1)]^2 dx_1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_m \quad (\text{A.19})$$

En reportant les expressions de la déformée mécanique relatives à chacune des parties du transformateur, il vient pour le cas série :

$$K_0^{(i)} = [U_0^{(i)}]^2 \left[ \frac{le}{s_{11}^E} (k_{10}^{(i)})^2 \mathcal{J}_{p0}^{(i)} + \frac{le}{s_{33}^E(1 - k_{33}^2)} (k_{20}^{(i)})^2 \mathcal{J}_{s0}^{(i)} \right] \quad (\text{A.20})$$

avec

$$\mathcal{J}_{p0}^{(i)} = \int_{-L_1}^0 \left[ \sin(k_{10}^{(i)} x_1) + \tan(X_{10}^{(i)}) \cos(k_{10}^{(i)} x_1) \right]^2 dx_1 \quad (\text{A.21})$$

et

$$\mathcal{J}_{s0}^{(i)} = \int_0^{L_2} \left[ \sin(k_{20}^{(i)} x_1) - \alpha_0^{(i)} \cos(k_{20}^{(i)} x_1) \right]^2 dx_1 \quad (\text{A.22})$$

- **Calcul de  $\mathcal{J}_{p0}$**  (l'indice  $i$  est volontairement omis)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{p0} &= \int_{-L_1}^0 \left[ \sin^2(k_{10} x_1) + \tan(X_{10}) \sin(2k_{10} x_1) + \tan^2(X_{10}) \cos^2(k_{10} x_1) \right] dx_1 \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{p0} &= \left[ \frac{x_1}{2} - \frac{\sin(2k_{10} x_1)}{4k_{10}} \right] + \tan(X_{10}) \left[ -\frac{\cos(2k_{10} x_1)}{2k_{10}} \right] + \tan^2(X_{10}) \left[ \frac{x_1}{2} + \frac{\sin(2k_{10} x_1)}{4k_{10}} \right] \Big|_{-L_1}^0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{p0} &= \frac{L_1}{2} [1 - \operatorname{sinc}(2X_{10})] - \frac{L_1}{2} \left[ \frac{2}{X_{10}} \tan(X_{10}) \sin^2(X_{10}) \right] + \frac{L_1}{2} \tan^2(X_{10}) [1 + \operatorname{sinc}(2X_{10})] \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{p0} &= \frac{L_1}{2} \left[ [1 + \tan^2(X_{10})] - [1 - \tan^2(X_{10})] \operatorname{sinc}(2X_{10}) - \frac{1}{X_{10}} \tan^2(X_{10}) \sin(2X_{10}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{p0} &= \frac{L_1}{2} \frac{1}{\cos^2(X_{10})} \left[ 1 - [\cos^2(X_{10}) - \sin^2(X_{10}) + 2 \sin^2(X_{10})] \operatorname{sinc}(2X_{10}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{p0} &= \frac{L_1}{2} \frac{1 - \operatorname{sinc}(2X_{10})}{\cos^2(X_{10})} \end{aligned}$$

- **Calcul de  $\mathcal{J}_{s0}$**  (l'indice  $i$  est volontairement omis)

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{s0} &= \int_0^{L_2} \left[ \sin^2(k_{20}x_1) - \alpha_0 \sin(2k_{20}x_1) + \alpha_0^2 \cos^2(k_{20}x_1) \right] dx_1 \\
\Leftrightarrow \mathcal{J}_{s0} &= \left[ \left[ \frac{x_1}{2} - \frac{\sin(2k_{20}x_1)}{4k_{20}} \right] - \alpha_0 \left[ -\frac{\cos(2k_{20}x_1)}{2k_{20}} \right] + \alpha_0^2 \left[ \frac{x_1}{2} + \frac{\sin(2k_{20}x_1)}{4k_{20}} \right] \right]_0^{L_2} \\
\Leftrightarrow \mathcal{J}_{s0} &= \frac{L_2}{2} \left[ 1 - \text{sinc}(2X_{20}) \right] - \frac{L_2}{2} \left[ \frac{2}{X_{20}} \alpha_0 \sin^2(X_{20}) \right] + \frac{L_2}{2} \alpha_0^2 \left[ 1 + \text{sinc}(2X_{20}) \right] \\
\Leftrightarrow \mathcal{J}_{s0} &= \frac{L_2}{2} \left[ \left[ 1 + \alpha_0^2 \right] - \left[ 1 - \alpha_0^2 \right] \text{sinc}(2X_{20}) - \frac{1}{X_{20}} \alpha_0 \tan(X_{20}) \sin(2X_{20}) \right] \\
\Leftrightarrow \mathcal{J}_{s0} &= \frac{L_2}{2} \left[ 1 + \alpha_0^2 \right] \left[ 1 - \frac{1 + 2\alpha_0 \tan(X_{20}) - \alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2} \text{sinc}(2X_{20}) \right] \\
\Leftrightarrow \mathcal{J}_{s0} &= \frac{L_2}{2} \left[ 1 + \alpha_0^2 \right] \left[ 1 - \beta_0 \text{sinc}(2X_{20}) \right]
\end{aligned}$$

Fort des relations précédentes, le  $i^{\text{ème}}$  élément diagonal de la matrice des raideurs modales  $K_0^{(i)}$  est obtenu et il revêt l'expression indiquée dans le tableau [3.2].

#### A.1.4 Facteurs de conversion électromécanique

Les éléments du vecteur des facteurs de conversion électromécanique du primaire d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen pour le cas série s'écrivent, pour  $i = 1, \dots, n_m$ , comme suit :

$$\begin{aligned}
\psi_{p0}^{(i)} &= -nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \int_{-L_1}^0 \underline{u}_{10,1}^{(i)}(x_1) dx_1 = -nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \left[ \underline{u}_{10}^{(i)}(0) - \underline{u}_{10}^{(i)}(-L_1) \right] \\
\Leftrightarrow \psi_{p0}^{(i)} &= -U_0^{(i)} nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \left[ 1 - \left[ \cos(X_{10}^{(i)}) + \tan(X_{10}^{(i)}) \sin(X_{10}^{(i)}) \right] \right] \\
\Leftrightarrow \psi_{p0}^{(i)} &= -U_0^{(i)} nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \left[ 1 - \frac{1}{\cos(X_{10}^{(i)})} \right] \\
\Leftrightarrow \psi_{p0}^{(i)} &= U_0^{(i)} nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{1 - \cos(X_{10}^{(i)})}{\cos(X_{10}^{(i)})}
\end{aligned}$$

Concernant les éléments du vecteur des facteurs de conversion électromécanique du secondaire d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen, pour  $i = 1, \dots, n_m$ ,



il vient pour le cas série :

$$\begin{aligned}\psi_{s0}^{(i)} &= -\frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \int_0^{L_2} \underline{u}_{10,1}^{(i)}(x_1) dx_1 = -\frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \left[ \underline{u}_{10}^{(i)}(L_2) - \underline{u}_{10}^{(i)}(0) \right] \\ \Leftrightarrow \psi_{s0}^{(i)} &= -U_0^{(i)} \frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \left[ \left[ \cos(X_{20}^{(i)}) + \alpha_0^{(i)} \sin(X_{20}^{(i)}) \right] - 1 \right] \\ \Leftrightarrow \psi_{s0}^{(i)} &= U_0^{(i)} \frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \left[ 1 - \cos(X_{20}^{(i)}) - \alpha_0^{(i)} \sin(X_{20}^{(i)}) \right]\end{aligned}$$

## A.2 Cas parallèle

### A.2.1 Problème aux valeurs propres

D'après la section §3.2.6, le problème aux valeurs propres de la dynamique d'un transformateur de type Rosen à secondaire ouvert est régi par le système d'équations suivant :

$$A_u - C_u = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\bar{c}_{11}^E k_{1\infty} B_u - \bar{c}_{33}^D k_{2\infty} D_u = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\bar{h}_{33} C_u + D_\phi = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\bar{c}_{11}^E k_{1\infty} [A_u \sin(X_{1\infty}) + B_u \cos(X_{1\infty})] = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\bar{c}_{33}^D k_{2\infty} [-C_u \sin(X_{2\infty}) + D_u \cos(X_{2\infty})] = 0 \quad (\text{A.27})$$

Le système aux valeurs propres dont est issu le système d'équations précédent pâtit d'une indétermination sur l'amplitude modale des déformées (six inconnues que sont la pulsation et les cinq constantes d'intégration pour cinq équations). La constante  $C_\phi$ , image de la quantité de charges collectée sur l'électrode du secondaire, est en effet nulle pour la configuration considérée. La pulsation  $\omega$  est obtenue par l'annulation du déterminant de la matrice associée au système d'équations précédent (équation ( $E_\infty$ ) du tableau [3.3]) et les constantes d'intégrations sont exprimées en fonction d'une seule autre, en l'occurrence  $A_u$ , comme telles :

- **Expression de  $B_u$**  : à partir de (A.26), il vient :

$$B_u = -A_u \tan(X_{1\infty}) \quad (\text{A.28})$$

- **Expression de  $C_u$**  : à partir de (A.23), il vient :

$$C_u = A_u \quad (\text{A.29})$$

- **Expression de  $D_u$**  : à partir (A.27), il vient :

$$D_u = A_u \tan(X_{2\infty}) \quad (\text{A.30})$$

- **Expression de  $D_\phi$**  : à partir de (A.25), il vient :

$$D_\phi = -A_u \bar{h}_{33} \quad (\text{A.31})$$

Dès lors, les expressions modales de la déformée mécanique et du potentiel électrique sont entièrement déterminées (à une constante multiplicative près). Les expressions sont données dans le tableau [3.3] où apparaissent les facteurs  $U_\infty^{(i)}$  et  $\Phi_\infty^{(i)}$ , liés par la relation  $\Phi_\infty^{(i)} = \bar{h}_{33}U_\infty^{(i)}$ , issus du critère de normalisation de la masse.

### A.2.2 Critère de normalisation

La condition de normalisation de la masse modale appliquée au problème du transformateur piézoélectrique de type Rosen s'écrit comme suit :

$$\int_{-L_1}^0 \rho l e \left[ u_1^{(i)}(x_1) \right]^2 dx_1 + \int_0^{L_2} \rho l e \left[ u_1^{(i)}(x_1) \right]^2 dx_1 = 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_m \quad (\text{A.32})$$

En reportant les expressions de la déformée mécanique relatives à chacune des parties du transformateur, il vient pour le cas parallèle :

$$U_\infty^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\rho l e \left[ \mathcal{I}_{p\infty}^{(i)} + \mathcal{I}_{s\infty}^{(i)} \right]}} \quad (\text{A.33})$$

avec

$$\mathcal{I}_{p\infty}^{(i)} = \int_{-L_1}^0 \left[ \cos(k_{1\infty}^{(i)} x_1) - \tan(X_{1\infty}^{(i)}) \sin(k_{1\infty}^{(i)} x_1) \right]^2 dx_1 \quad (\text{A.34})$$

et

$$\mathcal{I}_{s\infty}^{(i)} = \int_0^{L_2} \left[ \cos(k_{2\infty}^{(i)} x_1) + \tan(X_{2\infty}^{(i)}) \sin(k_{2\infty}^{(i)} x_1) \right]^2 dx_1 \quad (\text{A.35})$$

• **Calcul de  $\mathcal{I}_{p\infty}$**  (l'indice  $i$  est volontairement omis)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{p\infty} &= \int_{-L_1}^0 \left[ \cos^2(k_{1\infty} x_1) - \tan(X_{1\infty}) \sin(2k_{1\infty} x_1) + \tan^2(X_{1\infty}) \sin^2(k_{1\infty} x_1) \right] dx_1 \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{p\infty} &= \left[ \left[ \frac{x_1}{2} + \frac{\sin(2k_{1\infty} x_1)}{4k_{1\infty}} \right] - \tan(X_{1\infty}) \left[ -\frac{\cos(2k_{1\infty} x_1)}{2k_{1\infty}} \right] + \tan^2(X_{1\infty}) \left[ \frac{x_1}{2} - \frac{\sin(2k_{1\infty} x_1)}{4k_{1\infty}} \right] \right]_{-L_1}^0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{p\infty} &= \frac{L_1}{2} \left[ 1 + \text{sinc}(2X_{1\infty}) \right] + \frac{L_1}{2} \left[ \frac{2}{X_{1\infty}} \tan(X_{1\infty}) \sin^2(X_{1\infty}) \right] + \frac{L_1}{2} \tan^2(X_{1\infty}) \left[ 1 - \text{sinc}(2X_{1\infty}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{p\infty} &= \frac{L_1}{2} \left[ \left[ 1 + \tan^2(X_{1\infty}) \right] + \left[ 1 - \tan^2(X_{1\infty}) \right] \text{sinc}(2X_{1\infty}) + \frac{1}{X_{1\infty}} \tan^2(X_{1\infty}) \sin(2X_{1\infty}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{p\infty} &= \frac{L_1}{2} \frac{1}{\cos^2(X_{1\infty})} \left[ 1 + \left[ \cos^2(X_{1\infty}) - \sin^2(X_{1\infty}) + 2 \sin^2(X_{1\infty}) \right] \text{sinc}(2X_{1\infty}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}_{p\infty} &= \frac{L_1}{2} \frac{1 + \text{sinc}(2X_{1\infty})}{\cos^2(X_{1\infty})} \end{aligned}$$

- **Calcul de  $\mathcal{I}_{s\infty}$**  (l'indice  $i$  est volontairement omis)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{s\infty} &= \int_0^{L_2} \left[ \cos^2(k_{20}x_1) + \tan(X_{2\infty}) \sin(2k_{20}x_1) + \tan^2(X_{2\infty}) \sin^2(k_{20}x_1) \right] dx_1 \\
\Leftrightarrow \mathcal{I}_{s\infty} &= \left[ \left[ \frac{x_1}{2} + \frac{\sin(2k_{2\infty}x_1)}{4k_{2\infty}} \right] + \tan(X_{2\infty}) \left[ -\frac{\cos(2k_{2\infty}x_1)}{2k_{2\infty}} \right] + \tan^2(X_{2\infty}) \left[ \frac{x_1}{2} - \frac{\sin(2k_{2\infty}x_1)}{4k_{2\infty}} \right] \right]_0^{L_2} \\
\Leftrightarrow \mathcal{I}_{s\infty} &= \frac{L_2}{2} \left[ 1 + \text{sinc}(2X_{2\infty}) \right] + \frac{L_2}{2} \left[ \frac{2}{X_{2\infty}} \tan(X_{2\infty}) \sin^2(X_{2\infty}) \right] + \frac{L_2}{2} \tan^2(X_{2\infty}) \left[ 1 - \text{sinc}(2X_{2\infty}) \right] \\
\Leftrightarrow \mathcal{I}_{s\infty} &= \frac{L_2}{2} \left[ \left[ 1 + \tan^2(X_{2\infty}) \right] + \left[ 1 - \tan^2(X_{2\infty}) \right] \text{sinc}(2X_{2\infty}) + \frac{1}{X_{2\infty}} \tan^2(X_{2\infty}) \sin(2X_{2\infty}) \right] \\
\Leftrightarrow \mathcal{I}_{s\infty} &= \frac{L_2}{2} \frac{1}{\cos^2(X_{2\infty})} \left[ 1 + \left[ \cos^2(X_{2\infty}) - \sin^2(X_{2\infty}) + 2 \sin^2(X_{2\infty}) \right] \text{sinc}(2X_{2\infty}) \right] \\
\Leftrightarrow \mathcal{I}_{s\infty} &= \frac{L_2}{2} \frac{1 + \text{sinc}(2X_{2\infty})}{\cos^2(X_{2\infty})}
\end{aligned}$$

Fort des relations précédentes, la quantité  $U_\infty^{(i)}$  a finalement pour expression vérifiée pour  $i = 1, \dots, n_m$  :

$$U_\infty^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{M_1}{2} \frac{1 + \text{sinc}(2X_{1\infty}^{(i)})}{\cos^2(X_{1\infty}^{(i)})} + \frac{M_2}{2} \frac{1 + \text{sinc}(2X_{1\infty}^{(i)})}{\cos^2(X_{1\infty}^{(i)})}}} \quad (\text{A.36})$$

où  $M_1 = \rho L_1 l e$  et  $M_2 = \rho L_2 l e$  sont respectivement les masses au repos du primaire et du secondaire.

### A.2.3 Raideur modale $K_\infty^{(i)}$

Les éléments diagonaux de la matrice des raideurs modales d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen s'écrivent comme suit :

$$K^{(i)} = \int_{-L_1}^0 \frac{le}{s_{11}^E} \left[ \underline{u}_{1,1}^{(i)}(x_1) \right]^2 dx_1 + \int_0^{L_2} \frac{le}{s_{33}^E(1 - k_{33}^2)} \left[ \underline{u}_{1,1}^{(i)}(x_1) \right]^2 dx_1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_m \quad (\text{A.37})$$

En reportant les expressions de la déformée mécanique relatives à chacune des parties du transformateur, il vient pour le cas parallèle :

$$K_\infty^{(i)} = \left[ U_\infty^{(i)} \right]^2 \left[ \frac{le}{s_{11}^E} (k_{1\infty}^{(i)})^2 \mathcal{J}_{p\infty}^{(i)} + \frac{le}{s_{33}^E(1 - k_{33}^2)} (k_{2\infty}^{(i)})^2 \mathcal{J}_{s\infty}^{(i)} \right] \quad (\text{A.38})$$

avec

$$\mathcal{J}_{p\infty}^{(i)} = \int_{-L_1}^0 \left[ \sin(k_{1\infty}^{(i)}x_1) + \tan(X_{1\infty}^{(i)}) \cos(k_{1\infty}^{(i)}x_1) \right]^2 dx_1 \quad (\text{A.39})$$

et

$$\mathcal{J}_{s\infty}^{(i)} = \int_0^{L_2} \left[ \sin(k_{2\infty}^{(i)} x_1) - \tan(X_{2\infty}^{(i)}) \cos(k_{2\infty}^{(i)} x_1) \right]^2 dx_1 \quad (\text{A.40})$$

• **Calcul de  $\mathcal{J}_{p\infty}$**  (l'indice  $i$  est volontairement omis)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{p\infty} &= \int_{-L_1}^0 \left[ \sin^2(k_{1\infty} x_1) + \tan(X_{1\infty}) \sin(2k_{1\infty} x_1) + \tan^2(X_{1\infty}) \cos^2(k_{1\infty} x_1) \right] dx_1 \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{p\infty} &= \left[ \left[ \frac{x_1}{2} - \frac{\sin(2k_{1\infty} x_1)}{4k_{1\infty}} \right] + \tan(X_{1\infty}) \left[ -\frac{\cos(2k_{1\infty} x_1)}{2k_{1\infty}} \right] + \tan^2(X_{1\infty}) \left[ \frac{x_1}{2} + \frac{\sin(2k_{1\infty} x_1)}{4k_{1\infty}} \right] \right]_{-L_1}^0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{p\infty} &= \frac{L_1}{2} \left[ 1 - \text{sinc}(2X_{1\infty}) \right] - \frac{L_1}{2} \left[ \frac{2}{X_{1\infty}} \tan(X_{1\infty}) \sin^2(X_{1\infty}) \right] + \frac{L_1}{2} \tan^2(X_{1\infty}) \left[ 1 + \text{sinc}(2X_{1\infty}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{p\infty} &= \frac{L_1}{2} \left[ \left[ 1 + \tan^2(X_{1\infty}) \right] - \left[ 1 - \tan^2(X_{1\infty}) \right] \text{sinc}(2X_{1\infty}) - \frac{1}{X_{1\infty}} \tan^2(X_{1\infty}) \sin(2X_{1\infty}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{p\infty} &= \frac{L_1}{2} \frac{1}{\cos^2(X_{1\infty})} \left[ 1 - \left[ \cos^2(X_{1\infty}) - \sin^2(X_{1\infty}) + 2 \sin^2(X_{1\infty}) \right] \text{sinc}(2X_{1\infty}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{p\infty} &= \frac{L_1}{2} \frac{1 - \text{sinc}(2X_{1\infty})}{\cos^2(X_{1\infty})} \end{aligned}$$

• **Calcul de  $\mathcal{J}_{s\infty}$**  (l'indice  $i$  est volontairement omis)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{s\infty} &= \int_0^{L_2} \left[ \sin^2(k_{2\infty} x_1) - \tan(X_{2\infty}) \sin(2k_{2\infty} x_1) + \tan^2(X_{2\infty}) \cos^2(k_{2\infty} x_1) \right] dx_1 \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{s\infty} &= \left[ \left[ \frac{x_1}{2} - \frac{\sin(2k_{2\infty} x_1)}{4k_{2\infty}} \right] - \tan(X_{2\infty}) \left[ -\frac{\cos(2k_{2\infty} x_1)}{2k_{2\infty}} \right] + \tan^2(X_{2\infty}) \left[ \frac{x_1}{2} + \frac{\sin(2k_{2\infty} x_1)}{4k_{2\infty}} \right] \right]_0^{L_2} \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{s\infty} &= \frac{L_2}{2} \left[ 1 - \text{sinc}(2X_{2\infty}) \right] - \frac{L_2}{2} \left[ \frac{2}{X_{2\infty}} \tan(X_{2\infty}) \sin^2(X_{2\infty}) \right] + \frac{L_2}{2} \tan^2(X_{2\infty}) \left[ 1 + \text{sinc}(2X_{2\infty}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{s\infty} &= \frac{L_2}{2} \left[ \left[ 1 + \tan^2(X_{2\infty}) \right] - \left[ 1 - \tan^2(X_{2\infty}) \right] \text{sinc}(2X_{2\infty}) - \frac{1}{X_{2\infty}} \tan^2(X_{2\infty}) \sin(2X_{2\infty}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{s\infty} &= \frac{L_2}{2} \frac{1}{\cos^2(X_{2\infty})} \left[ 1 - \left[ \cos^2(X_{2\infty}) - \sin^2(X_{2\infty}) + 2 \sin^2(X_{2\infty}) \right] \text{sinc}(2X_{2\infty}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}_{s\infty} &= \frac{L_2}{2} \frac{1 - \text{sinc}(2X_{2\infty})}{\cos^2(X_{2\infty})} \end{aligned}$$

Fort des relations précédentes, le  $i^{\text{ème}}$  élément diagonal de la matrice des raideurs modales  $K_{\infty}^{(i)}$  est obtenu et il revêt l'expression indiquée dans le tableau [3.3].

### A.2.4 Facteurs de conversion électromécanique

Les éléments du vecteur des facteurs de conversion électromécanique du primaire d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen pour le cas parallèle s'écrivent, pour  $i = 1, \dots, n_m$ , comme suit :

$$\begin{aligned}\psi_{p\infty}^{(i)} &= -nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \int_{-L_1}^0 \underline{u}_{1\infty,1}^{(i)}(x_1) dx_1 = -nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \left[ \underline{u}_{1\infty}^{(i)}(0) - \underline{u}_{1\infty}^{(i)}(-L_1) \right] \\ \Leftrightarrow \psi_{p\infty}^{(i)} &= -U_{\infty}^{(i)} nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \left[ 1 - \left[ \cos(X_{1\infty}^{(i)}) + \tan(X_{1\infty}^{(i)}) \sin(X_{1\infty}^{(i)}) \right] \right] \\ \Leftrightarrow \psi_{p\infty}^{(i)} &= -U_{\infty}^{(i)} nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \left[ 1 - \frac{1}{\cos(X_{1\infty}^{(i)})} \right] \\ \Leftrightarrow \psi_{p\infty}^{(i)} &= U_{\infty}^{(i)} nl \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{1 - \cos(X_{1\infty}^{(i)})}{\cos(X_{1\infty}^{(i)})}\end{aligned}$$

Concernant les éléments du vecteur des facteurs de conversion électromécanique du secondaire d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen, pour  $i = 1, \dots, n_m$ , il vient pour le cas parallèle :

$$\begin{aligned}\psi_{s\infty}^{(i)} &= -\frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \int_0^{L_2} \underline{u}_{1\infty,1}^{(i)}(x_1) dx_1 = -\frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \left[ \underline{u}_{1\infty}^{(i)}(L_2) - \underline{u}_{1\infty}^{(i)}(0) \right] \\ \Leftrightarrow \psi_{s\infty}^{(i)} &= -U_{\infty}^{(i)} \frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \left[ \left[ \cos(X_{2\infty}^{(i)}) + \tan(X_{2\infty}^{(i)}) \sin(X_{2\infty}^{(i)}) \right] - 1 \right] \\ \Leftrightarrow \psi_{s\infty}^{(i)} &= -U_{\infty}^{(i)} \frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \left[ \frac{1}{\cos(X_{2\infty}^{(i)})} - 1 \right] \\ \Leftrightarrow \psi_{s\infty}^{(i)} &= U_{\infty}^{(i)} \frac{le}{L_2} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \frac{\cos(X_{2\infty}^{(i)}) - 1}{\cos(X_{2\infty}^{(i)})}\end{aligned}$$

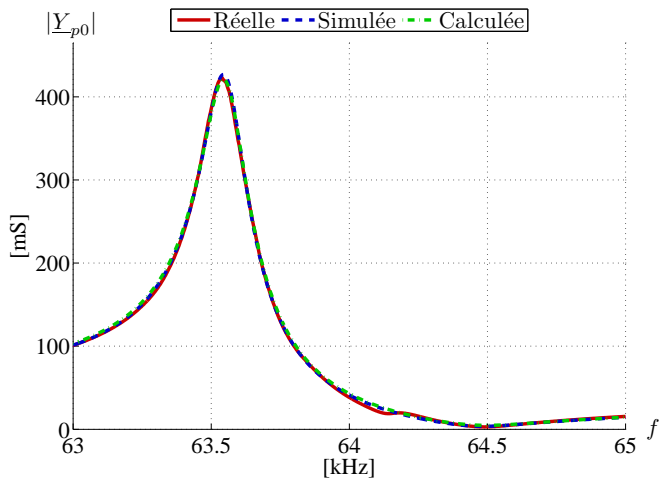
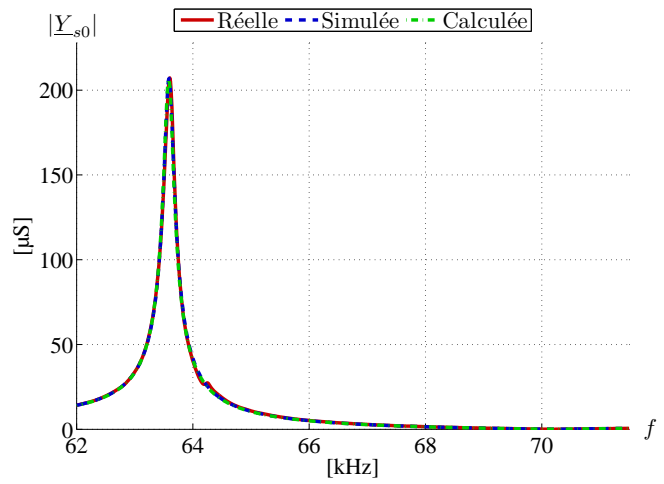
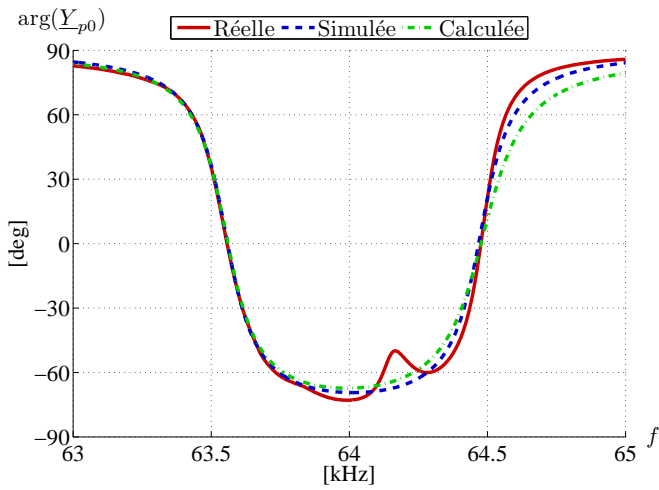
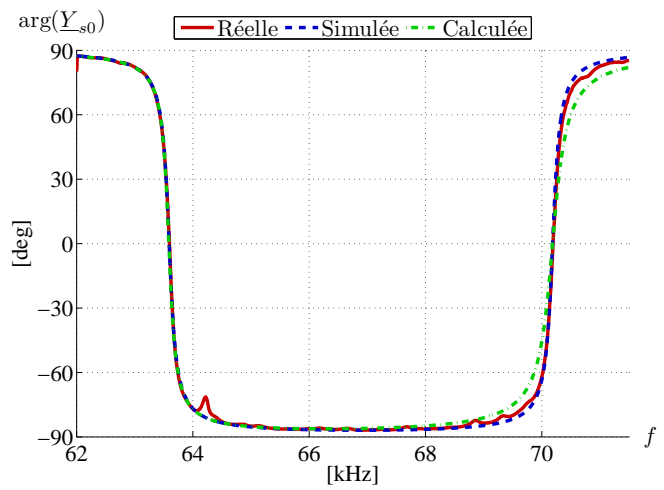
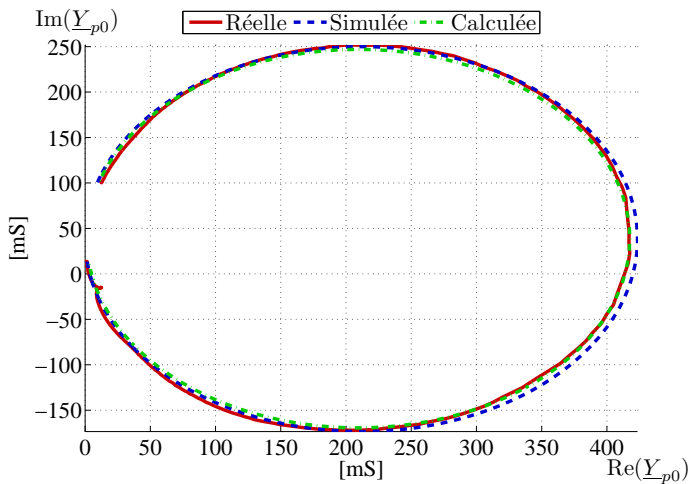
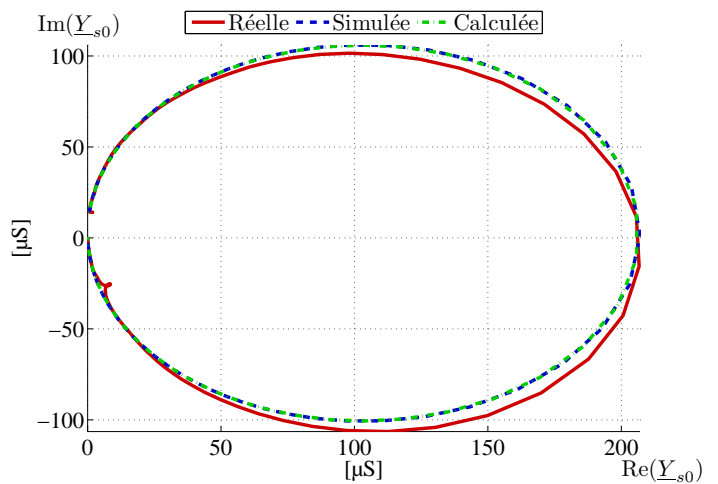
# Annexe B

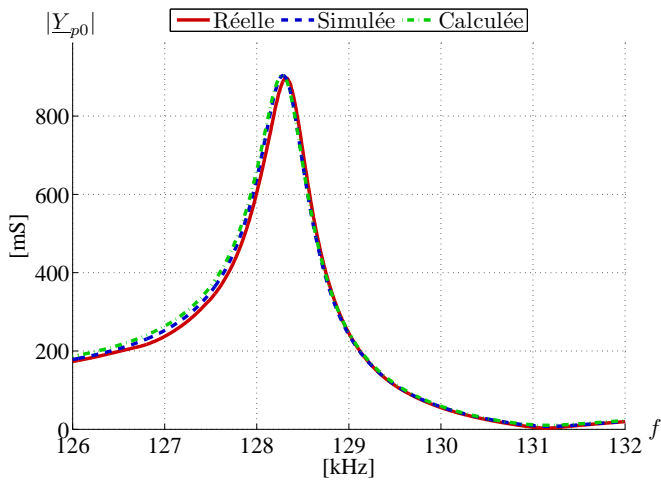
## Tracés pour l'identification expérimentale

Cette annexe présente les tracés expérimentaux du diagramme de Bode et du tracé dans le plan de Nyquist de l'admittance pour les essais SecCC, PrimCC, SecO et PrimO pour les quatre premiers modes longitudinaux du transformateur piézoélectrique de type Rosen CMT-Noliac. Ces essais permettent de caractériser le fonctionnement en court-circuit (cas série) et circuit ouvert (cas parallèle) de la structure considérée et permet de valider les modèles analytique et numérique développés dans le chapitre 3.

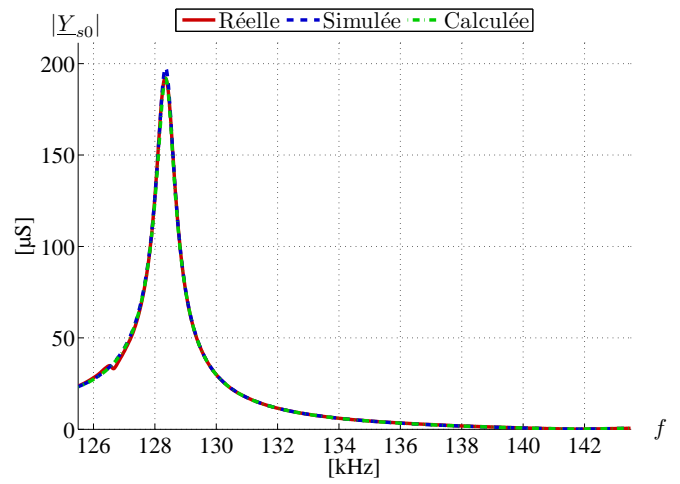
Sur chaque figure sont superposées les admittances :

- relevées par l'analyseur d'admittance,
- simulées par l'analyseur d'admittance à partir des éléments calculés,
- calculées par le biais des éléments identifiés à partir du tracé réel.

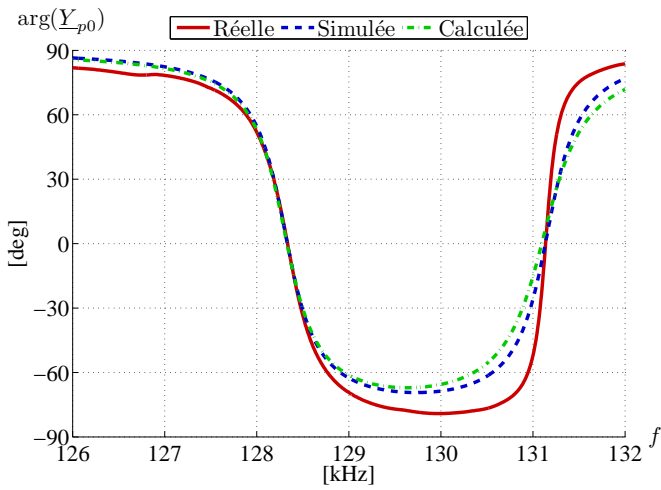
(a) Module de  $\underline{Y}_{p0}$ (b) Module de  $\underline{Y}_{s0}$ (c) Phase de  $\underline{Y}_{p0}$ (d) Phase de  $\underline{Y}_{s0}$ (e) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{p0}$ (f) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{s0}$ FIGURE B.1 – Caractérisation expérimentale pour le mode  $\lambda/2$  - Cas série.



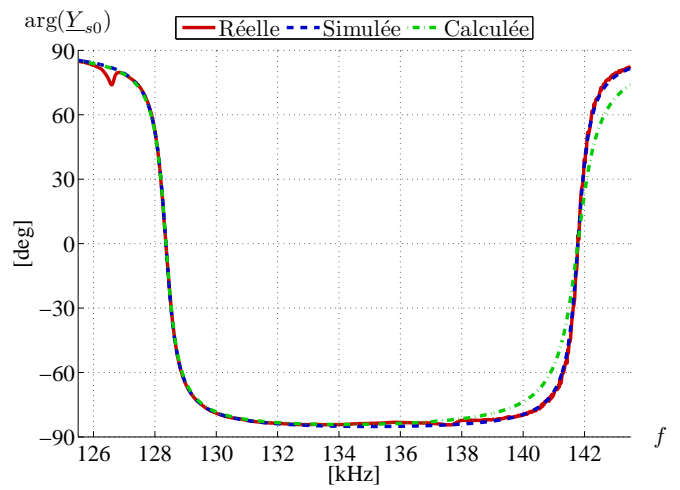
(a) Module de  $\underline{Y}_{p0}$



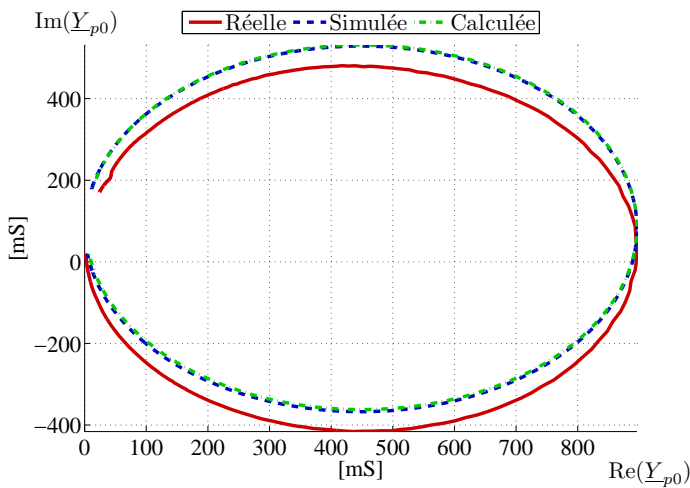
(b) Module de  $\underline{Y}_{s0}$



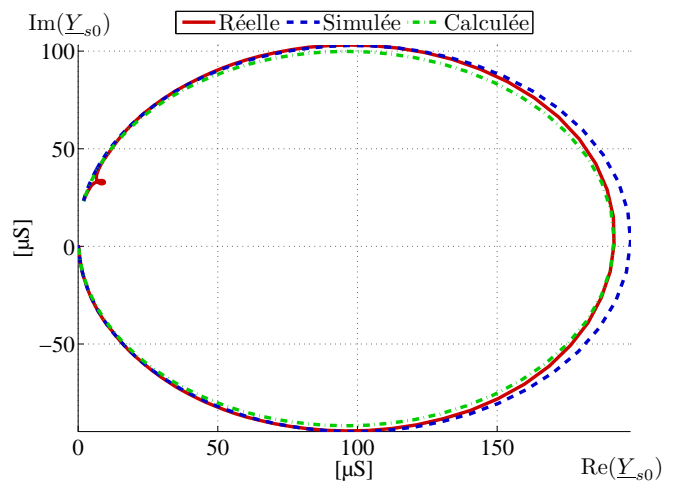
(c) Phase de  $\underline{Y}_{p0}$



(d) Phase de  $\underline{Y}_{s0}$



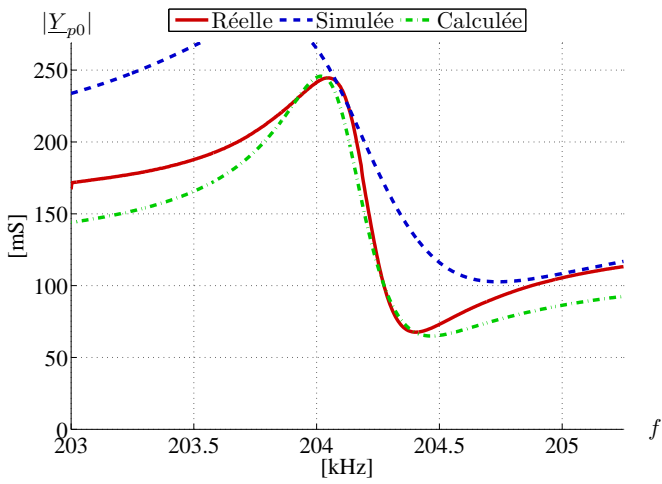
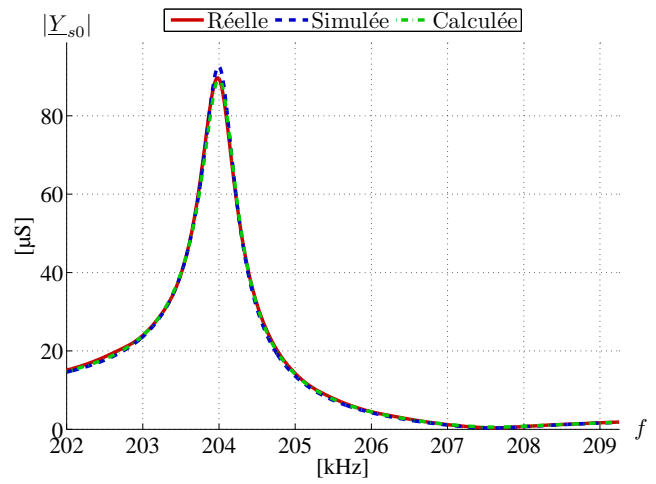
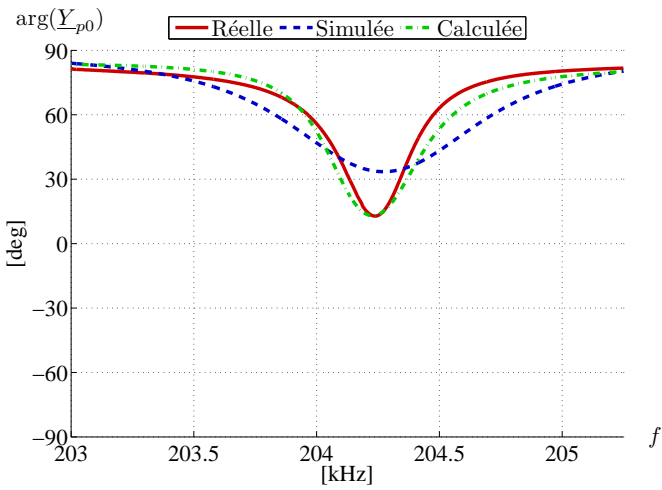
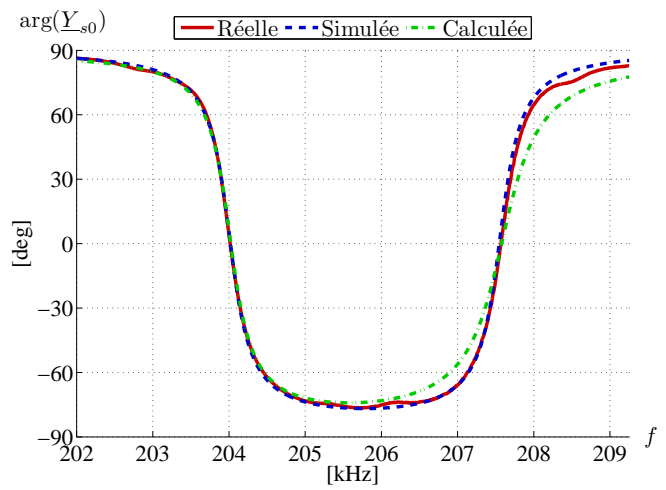
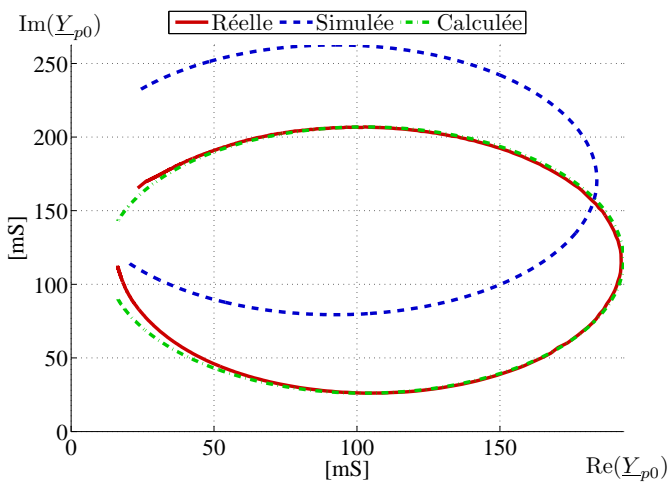
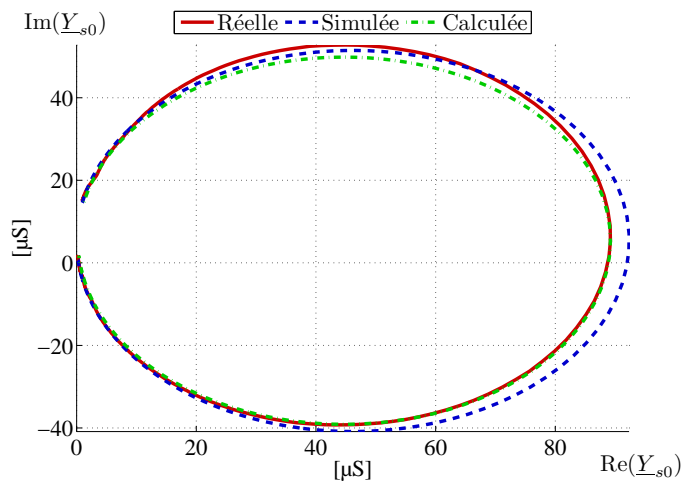
(e) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{p0}$

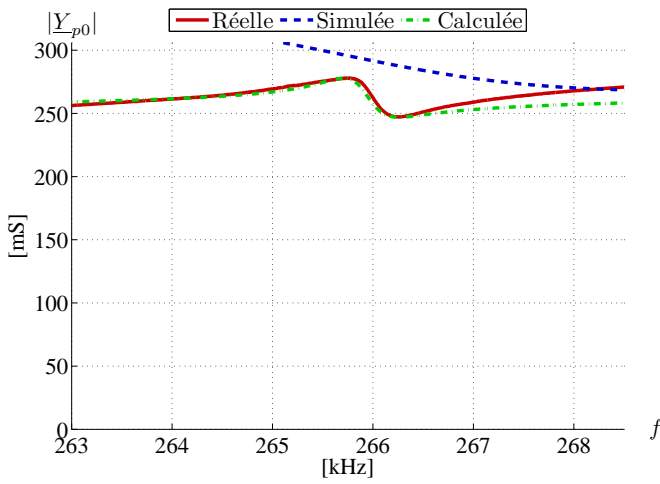


(f) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{s0}$

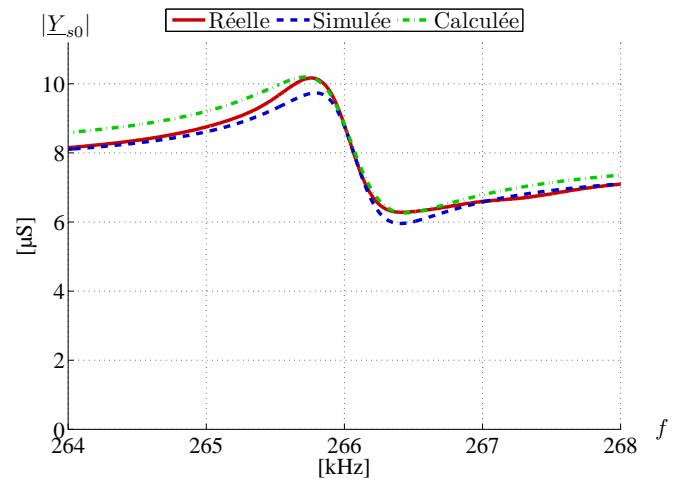
FIGURE B.2 – Caractérisation expérimentale pour le mode  $\lambda$  - Cas série.



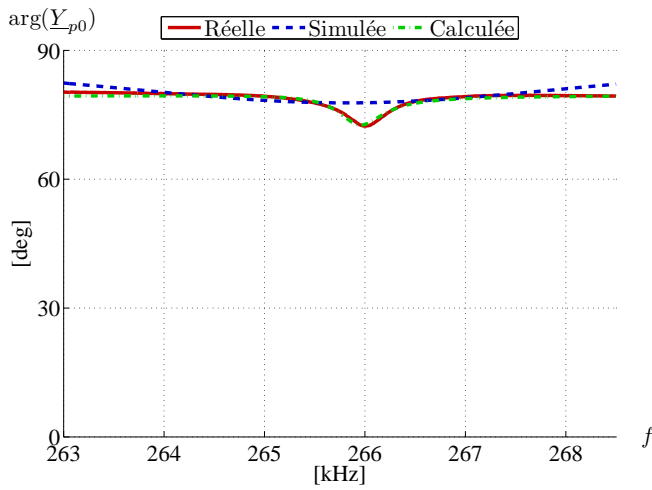
(a) Module de  $\underline{Y}_{p0}$ (b) Module de  $\underline{Y}_{s0}$ (c) Phase de  $\underline{Y}_{p0}$ (d) Phase de  $\underline{Y}_{s0}$ (e) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{p0}$ (f) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{s0}$ FIGURE B.3 – Caractérisation expérimentale pour le mode  $3\lambda/2$  - Cas série.



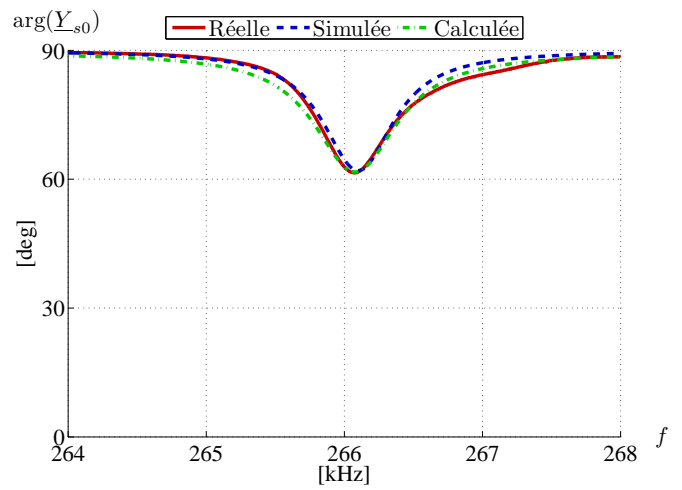
(a) Module de  $\underline{Y}_{p0}$



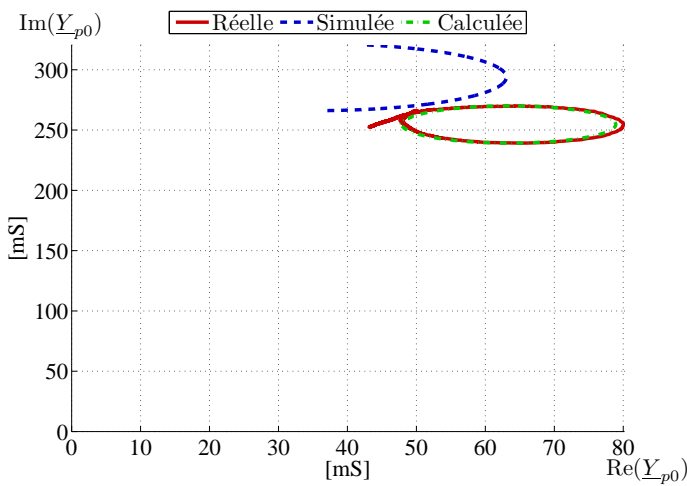
(b) Module de  $\underline{Y}_{s0}$



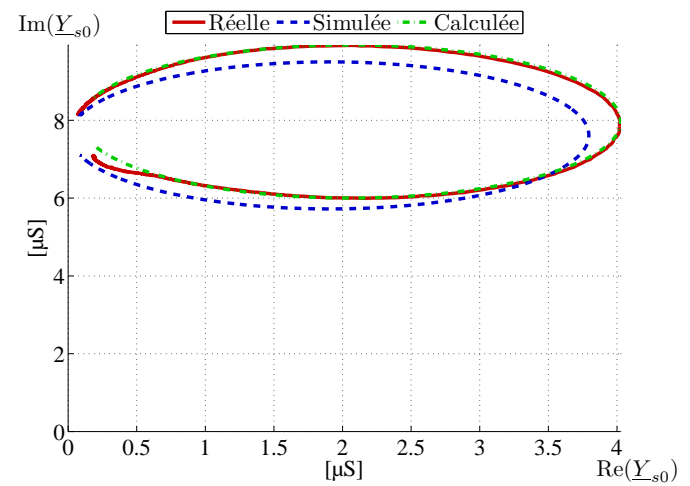
(c) Phase de  $\underline{Y}_{p0}$



(d) Phase de  $\underline{Y}_{s0}$

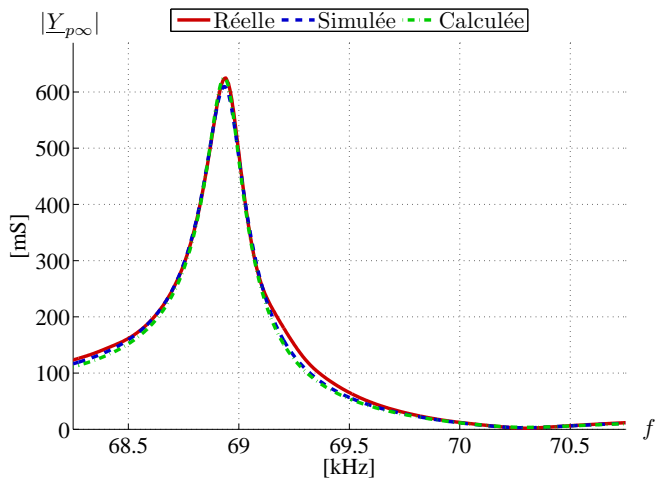
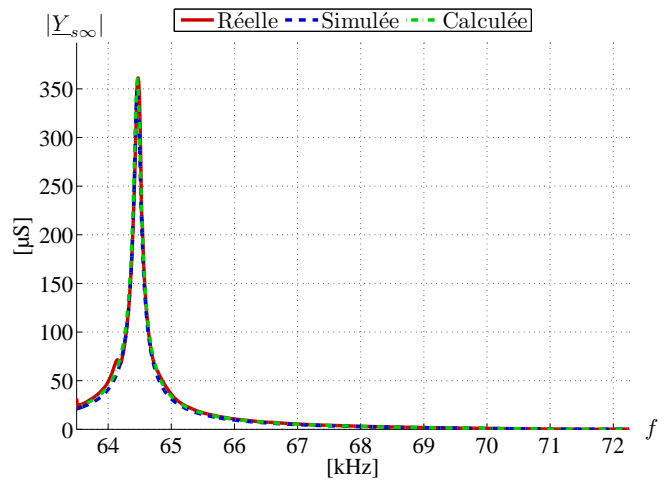
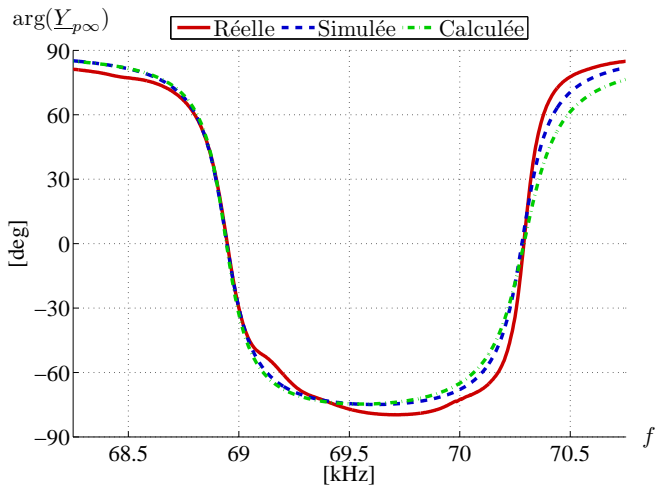
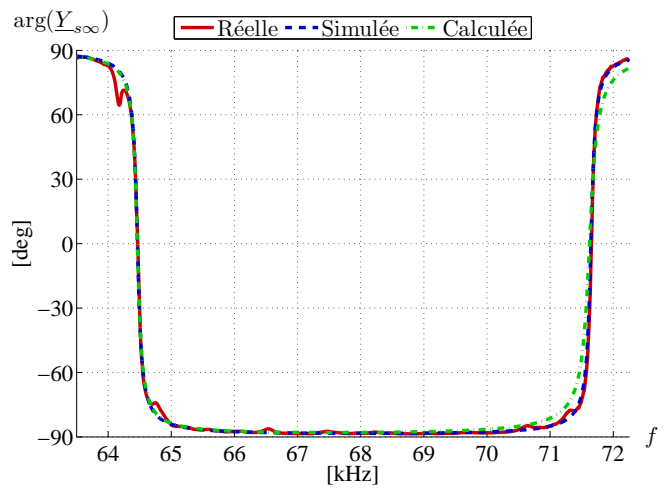
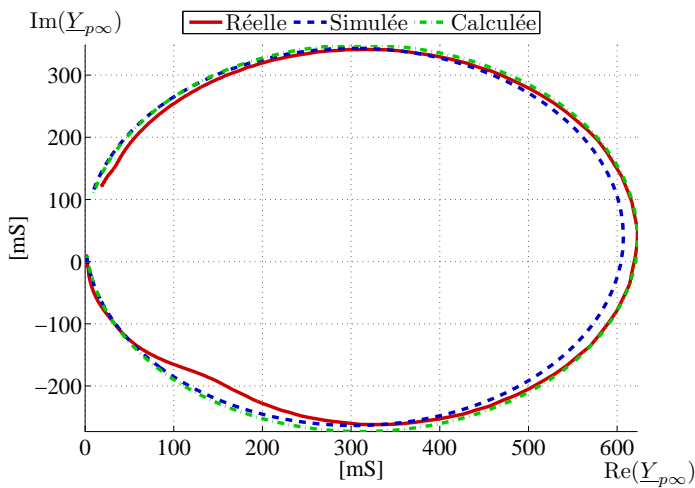
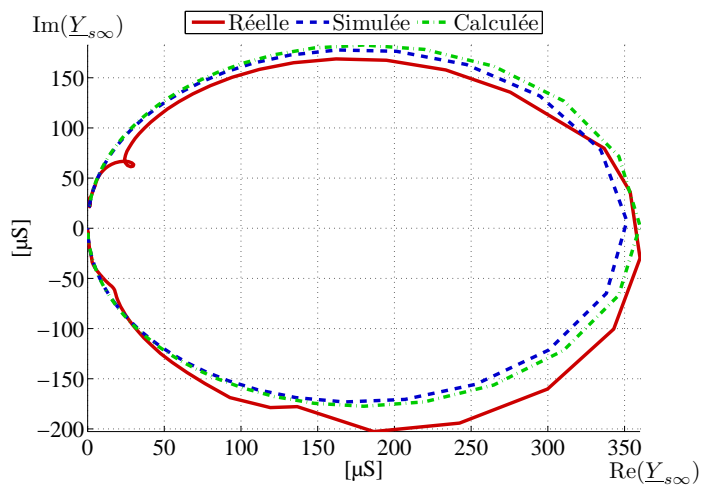


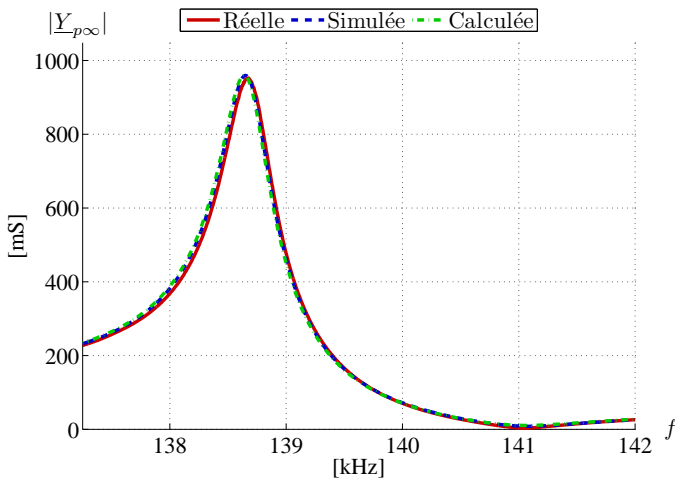
(e) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{p0}$



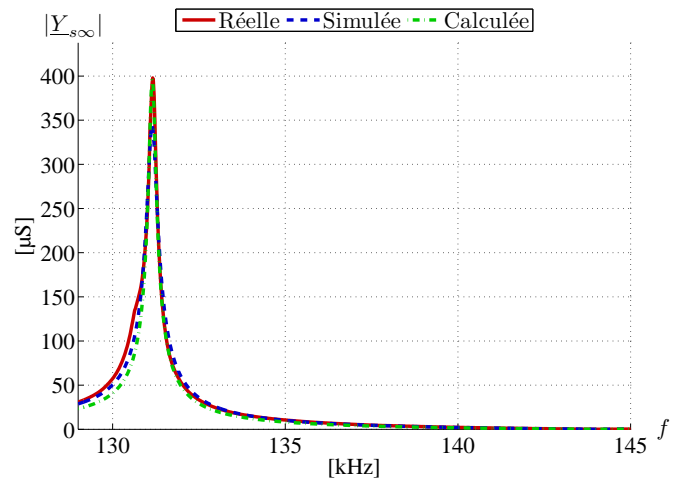
(f) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{s0}$

FIGURE B.4 – Caractérisation expérimentale pour le mode  $2\lambda$  - Cas série.

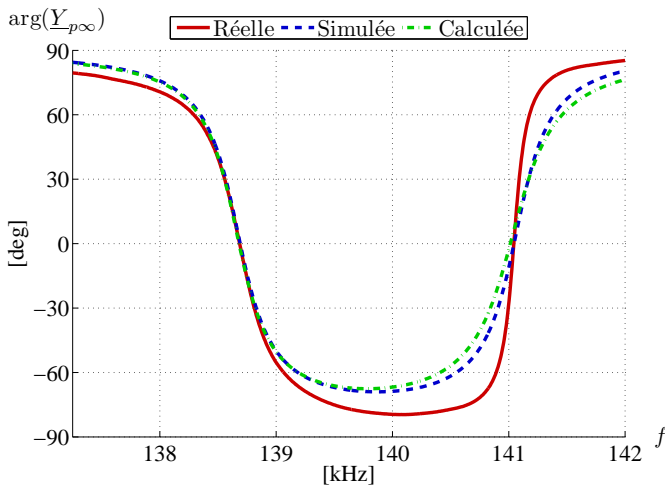
(a) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$ (b) Module de  $\underline{Y}_{s\infty}$ (c) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$ (d) Phase de  $\underline{Y}_{s\infty}$ (e) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{p\infty}$ (f) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{s\infty}$ FIGURE B.5 – Caractérisation expérimentale pour le mode  $\lambda/2$  - Cas parallèle.



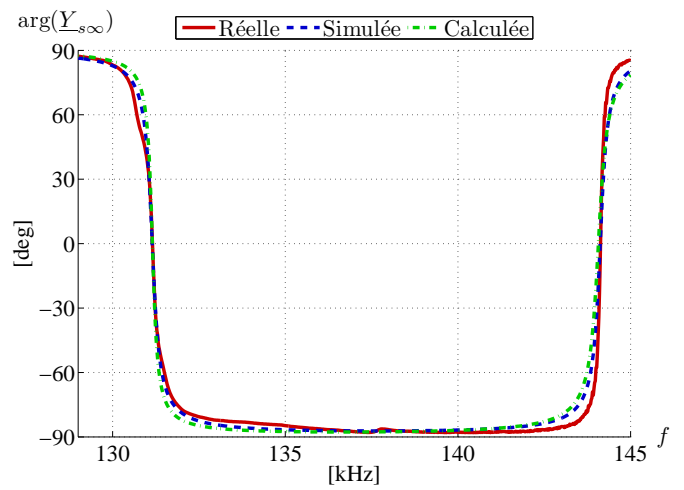
(a) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$



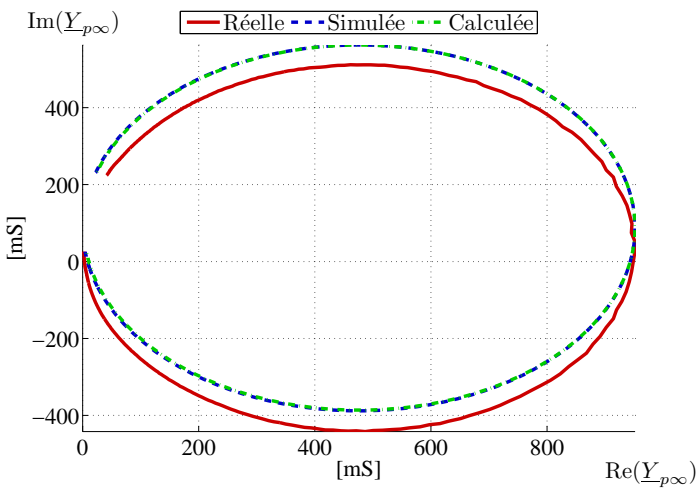
(b) Module de  $\underline{Y}_{s\infty}$



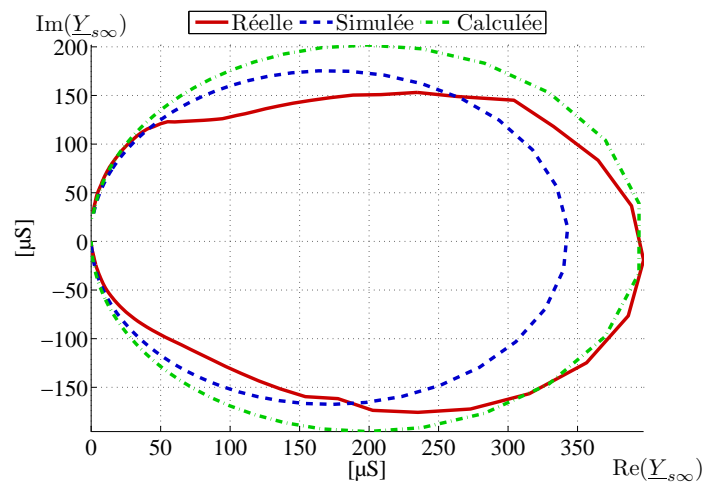
(c) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$



(d) Phase de  $\underline{Y}_{s\infty}$

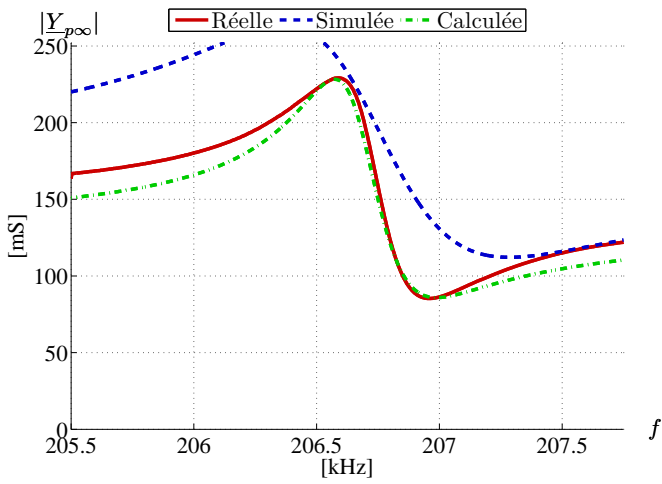
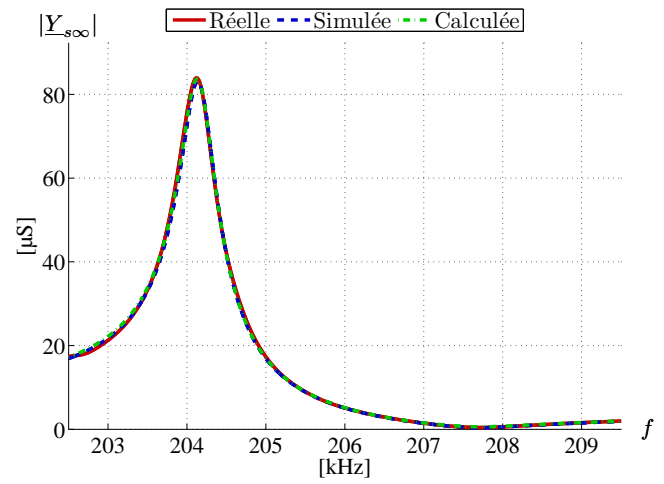
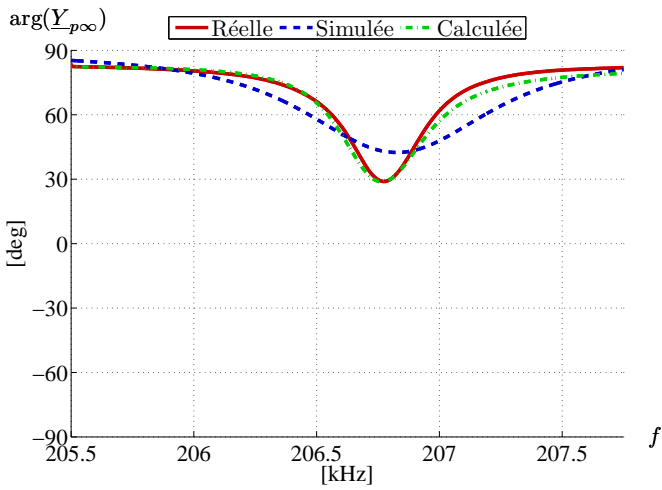
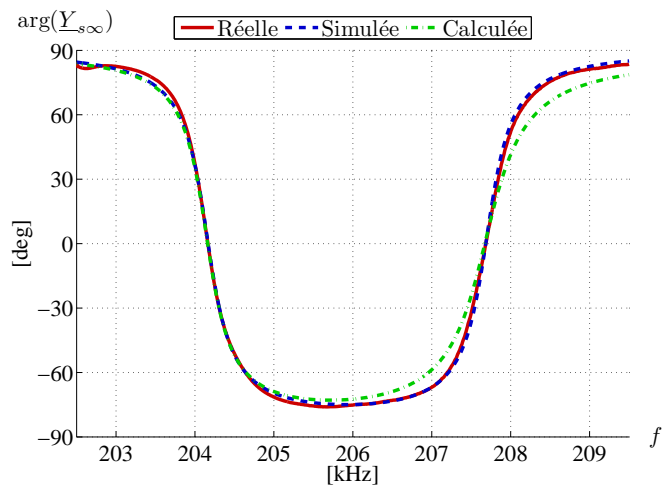
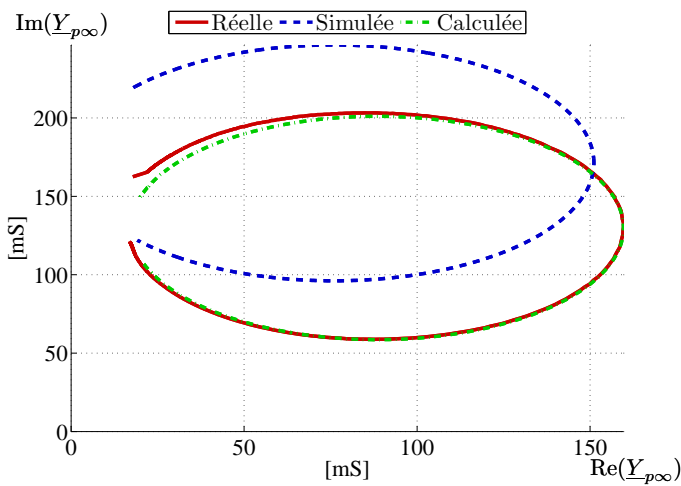
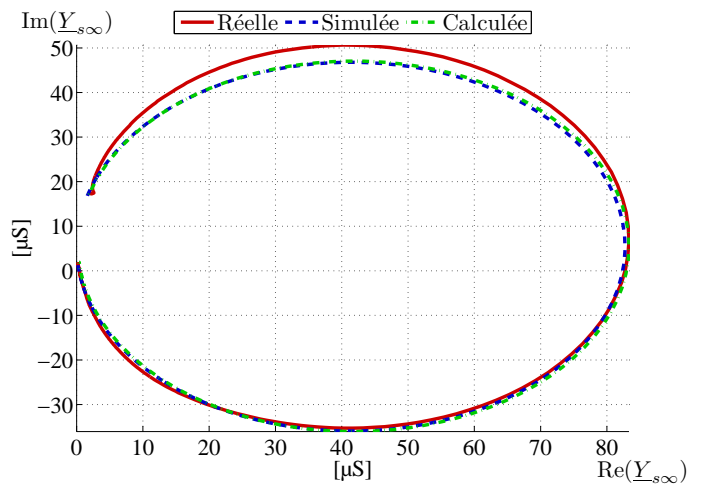


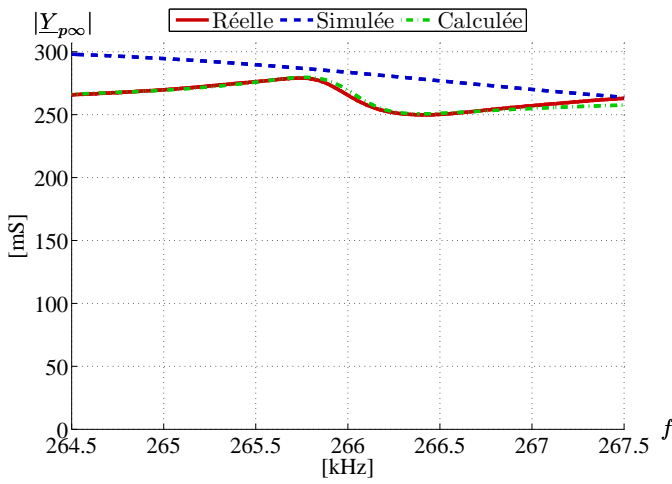
(e) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{p\infty}$



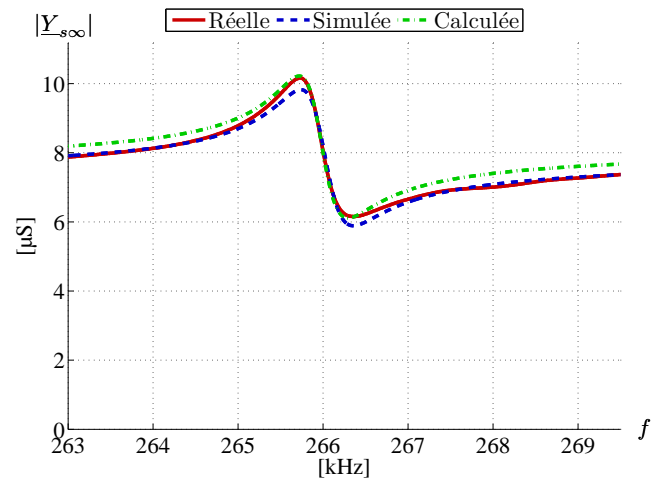
(f) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{s\infty}$

FIGURE B.6 – Caractérisation expérimentale pour le mode  $\lambda$  - Cas parallèle.

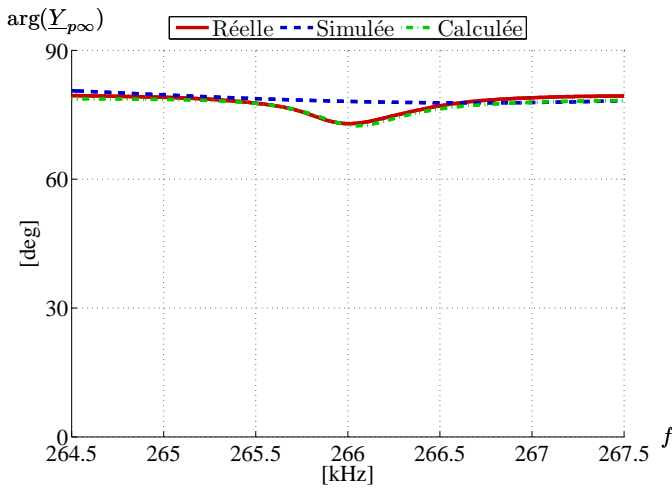
(a) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$ (b) Module de  $\underline{Y}_{s\infty}$ (c) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$ (d) Phase de  $\underline{Y}_{s\infty}$ (e) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{p\infty}$ (f) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{s\infty}$ FIGURE B.7 – Caractérisation expérimentale pour le mode  $3\lambda/2$  - Cas parallèle.



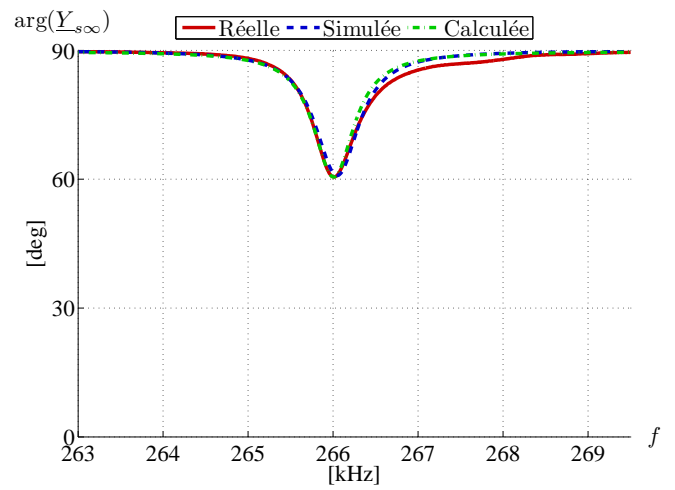
(a) Module de  $\underline{Y}_{p\infty}$



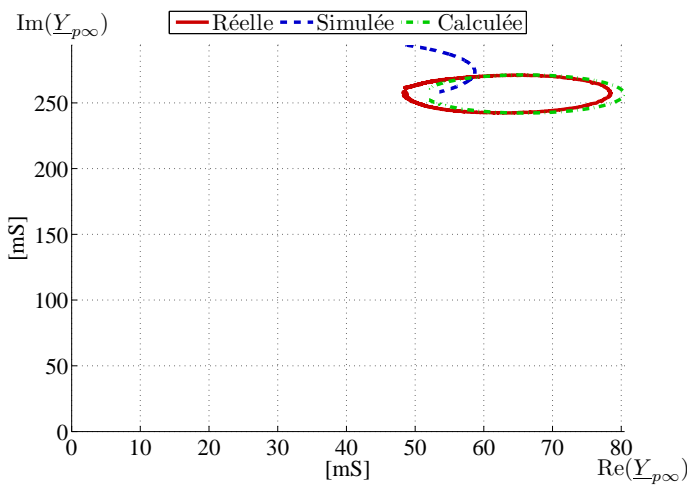
(b) Module de  $\underline{Y}_{s\infty}$



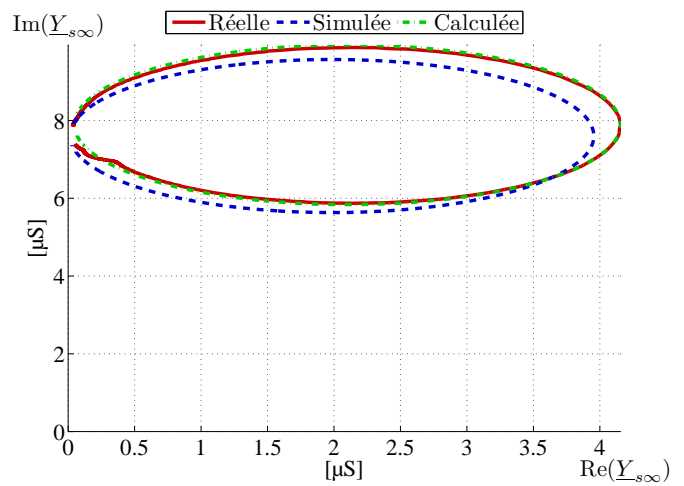
(c) Phase de  $\underline{Y}_{p\infty}$



(d) Phase de  $\underline{Y}_{s\infty}$



(e) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{p\infty}$



(f) Diagramme de Nyquist de  $\underline{Y}_{s\infty}$

FIGURE B.8 – Caractérisation expérimentale pour le mode  $2\lambda$  - Cas parallèle.



# Annexe C

## Principe de la Méthode des Différences Finies

Dans cette annexe sera abordée la résolution par la méthode des différences finies du problème régi par le système d'équations donné dans la section § 3.5.2. Cette méthode est basée sur une discrétisation du domaine d'étude et des opérateurs définissant le problème à résoudre par l'utilisation des développements de Taylor. Sa mise en œuvre aisée permet son emploi pour une résolution de problèmes à une, deux ou trois dimensions obéissant à des conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou mixtes. Le maillage est discrétisé sur le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles du problème considéré mais doit également comprendre les nœuds situés aux limites du domaine et aux interfaces entre deux milieux de propriétés différentes. De ce fait, cette annexe se composera de trois parties qui mettront respectivement en lumière les équations aux différences finies opérant à l'intérieur des milieux, aux interfaces et aux limites du domaine d'étude donné sur la figure 3.20. Pour une meilleure compréhension, les nœuds caractéristiques du problème ont été spécifiés comme illustré sur la figure C.1.

### C.1 Équations à l'intérieur des milieux

Les équations constitutives des milieux pour l'air et le primaire du transformateur piézoélectrique (il n'est pas besoin de préciser celles du secondaire puisque, par hypothèse, le potentiel électrique  $y$  est imposé) sont respectivement :

$$\mathbf{D}_a = \varepsilon_0 \mathbf{E}_a \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{D}_p = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \mathbf{E}_p \quad (\text{C.2})$$

D'après les hypothèses de la piézoélectricité linéaire, les quantités électriques au sein du primaire sont régies par les lois de l'électrostatique, lois également vérifiées dans l'air environnant le transformateur. Pour mémoire ces dernières revêtent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$



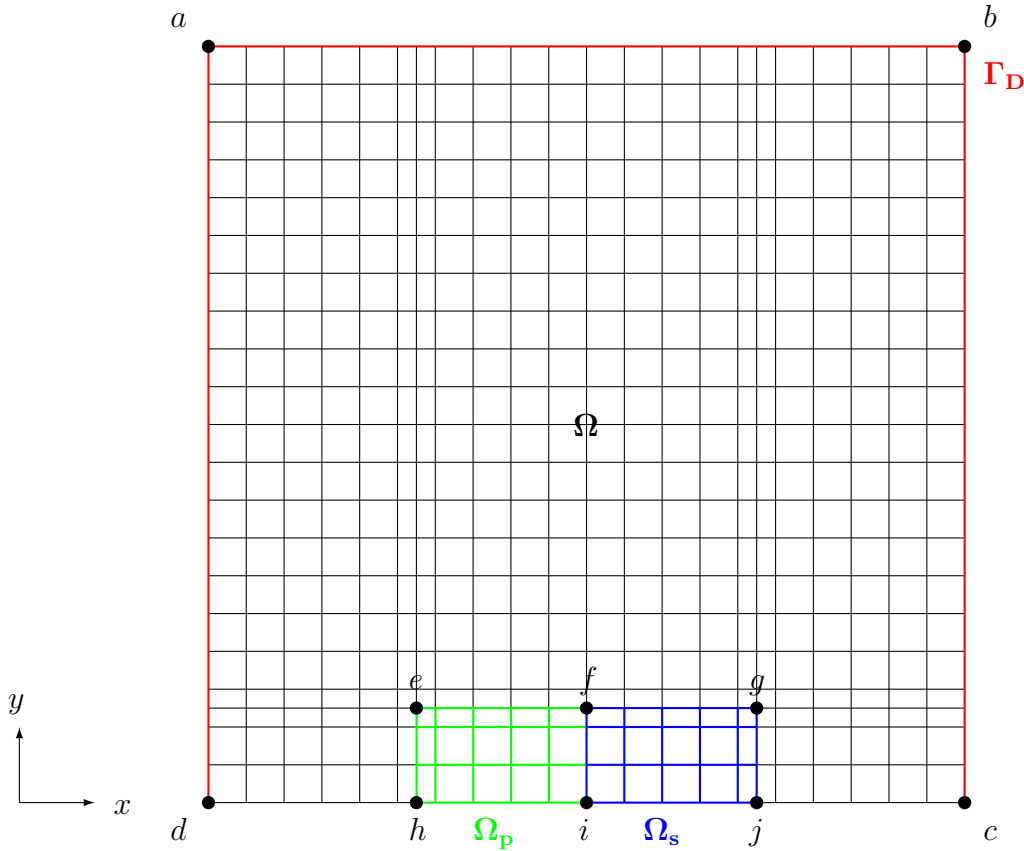


FIGURE C.1 – Domaine d'étude de la modélisation numérique du potentiel électrique généré par un transformateur piézoélectrique de type Rosen

De ce fait, le champ électrique dérive dans chacun des milieux d'un potentiel électrique  $\phi$  tel que :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \phi \quad (\text{C.4})$$

Par conséquent, le potentiel électrique vérifie invariablement dans le primaire et l'air environnant une équation de Laplace qui s'écrit dans un système de coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{C.5})$$

En utilisant la méthode des différences finies sur la grille illustrée sur la figure C.2, chaque dérivée seconde présente dans l'équation précédente peut être discrétisée à l'aide d'une différence centrée au nœud  $(i, j)$  de sorte que :

$$\frac{\partial^2 \phi_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{2}{h_1(h_1 + h_3)} \phi_{i-1,j} - \frac{2}{h_1 h_3} \phi_{i,j} + \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)} \phi_{i+1,j} \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{2}{h_2(h_2 + h_4)} \phi_{i,j-1} - \frac{2}{h_2 h_4} \phi_{i,j} + \frac{2}{h_4(h_2 + h_4)} \phi_{i,j+1} \quad (\text{C.7})$$

La discrétisation de l'équation de Laplace dans une grille à pas quelconque s'écrit finalement :

$$\frac{\phi_{i-1,j}}{h_1(h_1+h_3)} + \frac{\phi_{i,j-1}}{h_2(h_2+h_4)} - \left( \frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4} \right) \phi_{i,j} + \frac{\phi_{i+1,j}}{h_3(h_1+h_3)} + \frac{\phi_{i,j+1}}{h_4(h_2+h_4)} = 0 \quad (\text{C.8})$$

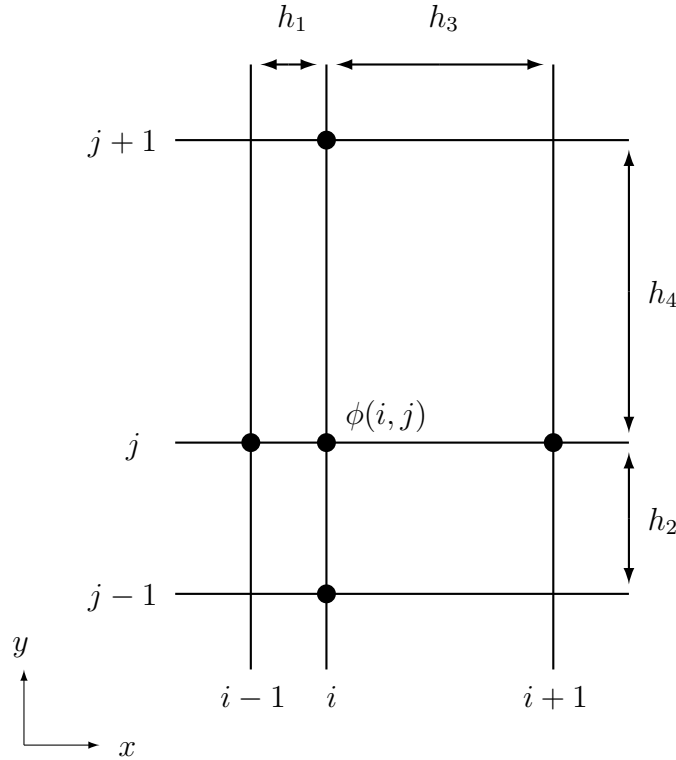


FIGURE C.2 – Grille à pas de discrétisation quelconque pour l’application de la méthode des différences finies à l’intérieur d’un milieu de permittivité diélectrique constante

## C.2 Équations aux interfaces

Dans cette section, l’application des différentes formules au problème de départ impose que  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$  et  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{33}^T(1 - k_{31}^2)$ .

### • Interface ]eh[

Au niveau de l’interface ]eh[, de manière générale, la grille considérée est donnée par la figure C.3. L’écriture de la condition de continuité de la composante normale de l’induction électrique  $D_n$  à l’interface entre les deux milieux, supposés de permittivités diélectriques différentes, s’écrit en termes de potentiel électrique comme suit :

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_1 \left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \right)_1 = \varepsilon_2 \left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \right)_2 \quad (\text{C.9})$$

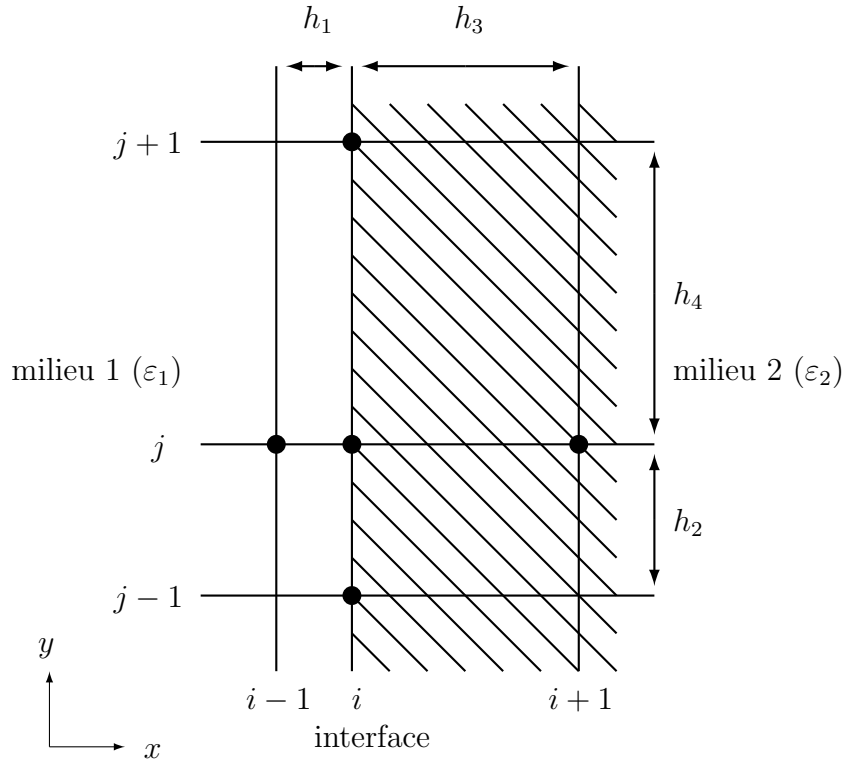


FIGURE C.3 – Grille à pas de discrétisation quelconque pour l'application de la méthode des différences finies à l'interface entre le primaire du transformateur piézoélectrique et l'air environnant - Interface ] $eh$ [

A l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre deux, la valeur du potentiel électrique  $\phi_{i-1,j}$  contenue dans le milieu 1 s'écrit :

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - h_1 \left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \right)_1 + \frac{h_1^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_{i,j}}{\partial x^2} \right)_1 \quad (\text{C.10})$$

Par conséquent, la dérivée première pour le milieu 1 a pour expression :

$$\left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \right)_1 = -\frac{1}{h_1} \phi_{i-1,j} + \frac{1}{h_1} \phi_{i,j} + \frac{h_1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_{i,j}}{\partial x^2} \right)_1 \quad (\text{C.11})$$

Or, d'après l'équation (C.5) régissant l'évolution du potentiel électrique dans l'air et la formule (C.7) donnant la discrétisation de la dérivée seconde selon  $y$ , la dérivée première pour le milieu 1 s'écrit finalement :

$$\left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \right)_1 = -\frac{1}{h_1} \phi_{i-1,j} - \frac{h_1}{h_2(h_2 + h_4)} \phi_{i,j-1} + \left( \frac{1}{h_1} + \frac{h_1}{h_2 h_4} \right) \phi_{i,j} - \frac{h_1}{h_4(h_2 + h_4)} \phi_{i,j+1} \quad (\text{C.12})$$

En appliquant une méthode analogue, la dérivée première pour le milieu 2 a pour expression :

$$\left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \right)_2 = \frac{h_3}{h_2(h_2 + h_4)} \phi_{i,j-1} - \left( \frac{1}{h_3} + \frac{h_3}{h_2 h_4} \right) \phi_{i,j} + \frac{1}{h_3} \phi_{i+1,j} + \frac{h_3}{h_4(h_2 + h_4)} \phi_{i,j+1} \quad (\text{C.13})$$

Par conséquent, en soustrayant  $\varepsilon_1 \times (C.12)$  à  $\varepsilon_2 \times (C.13)$ , la condition de continuité de la composante normale de l'induction électrique donnée par (C.9) se discrétise comme suit :

$$\frac{\varepsilon_1}{h_1} \phi_{i-1,j} + \frac{\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_3}{h_2(h_2 + h_4)} \phi_{i,j-1} - \left( \frac{\varepsilon_1}{h_1} + \frac{\varepsilon_2}{h_3} + \frac{\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_3}{h_2 h_4} \right) \phi_{i,j} + \frac{\varepsilon_2}{h_3} \phi_{i+1,j} + \frac{\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_3}{h_4(h_2 + h_4)} \phi_{i,j+1} = 0 \quad (C.14)$$

• **Interface ]ef[**

Au niveau de l'interface ]ef[, de manière générale, la grille considérée est donnée par la figure C.4. L'écriture de la condition de continuité de la composante normale de l'induction électrique  $D_n$  à l'interface entre les deux milieux, supposés de permittivités diélectriques différentes, s'écrit en termes de potentiel électrique comme suit :

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_1 \left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \right)_1 = \varepsilon_2 \left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \right)_2 \quad (C.15)$$

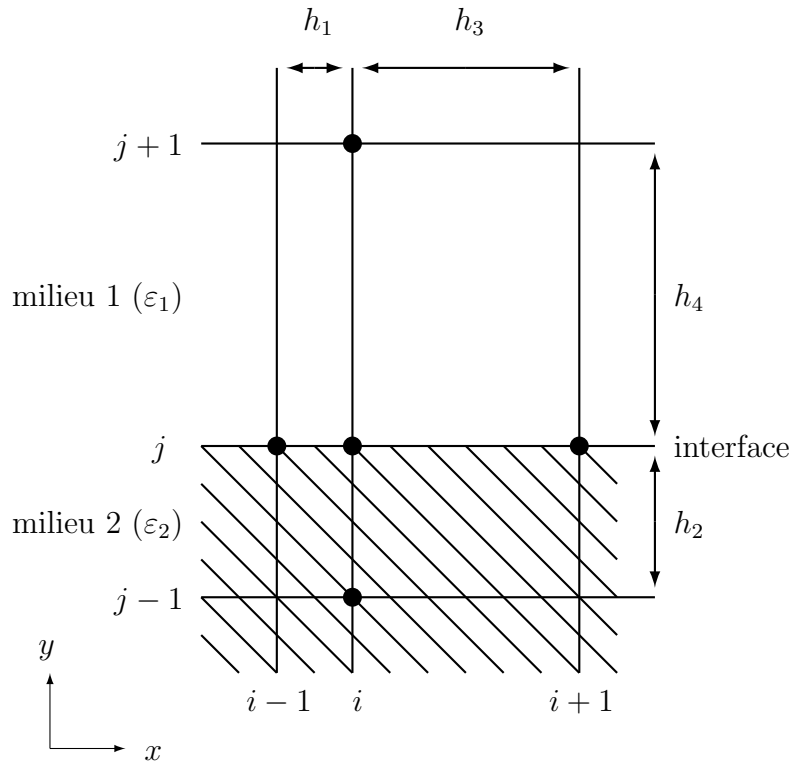


FIGURE C.4 – Grille à pas de discrétisation quelconque pour l'application de la méthode des différences finies à l'interface entre le primaire du transformateur piézoélectrique et l'air environnant - Interface ]ef[

A l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre deux, la valeur du potentiel

électrique  $\phi_{i,j+1}$  contenue dans le milieu 1 s'écrit :

$$\phi_{i,j+1} = \phi_{i,j} + h_4 \left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \right)_1 + \frac{h_4^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_{i,j}}{\partial y^2} \right)_1 \quad (\text{C.16})$$

Par conséquent, la dérivée première pour le milieu 1 a pour expression :

$$\left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \right)_1 = -\frac{1}{h_4} \phi_{i,j} + \frac{1}{h_4} \phi_{i,j+1} + \frac{h_4}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_{i,j}}{\partial y^2} \right)_1 \quad (\text{C.17})$$

Or, d'après l'équation (C.5) régissant l'évolution du potentiel électrique dans l'air et la formule (C.6) donnant la discrétisation de la dérivée seconde selon  $x$ , la dérivée première pour le milieu 1 s'écrit finalement :

$$\left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \right)_1 = \frac{h_4}{h_1(h_1 + h_3)} \phi_{i-1,j} - \left( \frac{1}{h_4} + \frac{h_4}{h_1 h_3} \right) \phi_{i,j} + \frac{h_4}{h_3(h_1 + h_3)} \phi_{i+1,j} + \frac{1}{h_4} \phi_{i,j+1} \quad (\text{C.18})$$

En appliquant une méthode analogue, la dérivée première pour le milieu 2 a pour expression :

$$\left( \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \right)_2 = -\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_3)} \phi_{i-1,j} - \frac{1}{h_2} \phi_{i,j-1} + \left( \frac{1}{h_2} + \frac{h_2}{h_1 h_3} \right) \phi_{i,j} - \frac{h_2}{h_3(h_1 + h_3)} \phi_{i+1,j} \quad (\text{C.19})$$

Par conséquent, en soustrayant  $\varepsilon_1 \times (\text{C.18})$  à  $\varepsilon_2 \times (\text{C.19})$ , la condition de continuité de la composante normale de l'induction électrique donnée par (C.15) se discrétise comme suit :

$$\boxed{\frac{\varepsilon_2 h_2 + \varepsilon_1 h_4}{h_1(h_1 + h_3)} \phi_{i-1,j} + \frac{\varepsilon_2}{h_2} \phi_{i,j-1} - \left( \frac{\varepsilon_2}{h_2} + \frac{\varepsilon_1}{h_4} + \frac{\varepsilon_2 h_2 + \varepsilon_1 h_4}{h_1 h_3} \right) \phi_{i,j} + \frac{\varepsilon_2 h_2 + \varepsilon_1 h_4}{h_3(h_1 + h_3)} \phi_{i+1,j} + \frac{\varepsilon_1}{h_4} \phi_{i,j+1} = 0} \quad (\text{C.20})$$

### • Équation aux angles : nœud $e$

Au niveau du nœud  $b$ , la grille considérée est uniforme (pas de discrétisation constant et égal à  $h$ ) et donnée par la figure C.5. L'équation pour un coin supérieur gauche d'un maillage carré est donnée dans [Dur66a] et elle revêt l'expression suivante :

$$\boxed{2\varepsilon_1 \phi_{i-1,j} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \phi_{i,j-1} - 2(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \phi_{i,j} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \phi_{i+1,j} + 2\varepsilon_1 \phi_{i,j+1} = 0} \quad (\text{C.21})$$

## C.3 Équations aux limites du domaine

Dans cette section, l'application des différents formules au problème de départ impose que  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$  et  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2)$ .

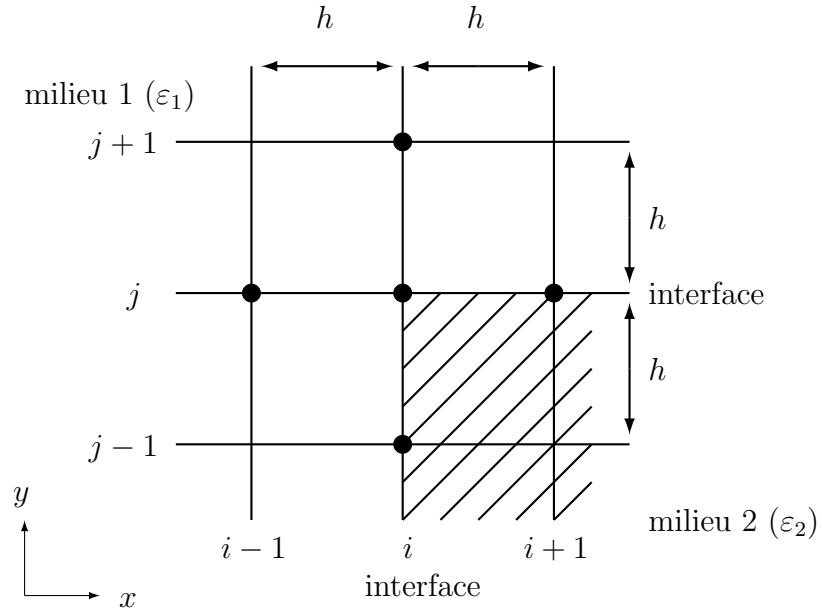


FIGURE C.5 – Grille à pas de discrétisation uniforme pour l'application de la méthode des différences finies à l'interface entre le primaire du transformateur piézo-électrique et l'air environnant - Nœud  $e$

Les conditions aux limites utilisées sont de type Dirichlet homogène sur le contour  $(\Gamma_D)$  imposant par là même sur les segments  $]ab[$ ,  $]bc[$  et  $]da[$  un potentiel électrique nul comme suit :

$$\phi = 0 \quad (\text{C.22})$$

Au niveau de l'interface  $]cd[$ , la condition de symétrie par rapport à l'axe des  $x$  doit être respectée de sorte que la relation suivante soit vérifiée :

$$\phi_{i,j-1} = \phi_{i,j+1} \quad (\text{C.23})$$

Fort de cette condition, les équations le long de l'interface  $]cd[$  peuvent être précisées en s'appuyant notamment sur l'équation de Laplace discrétisée (C.8) pour les nœuds des segments  $]cj[$ ,  $]dh[$  et  $]hi[$  et l'équation vérifiée le long de l'interface  $]eh[$  pour le nœud  $h$ .

- Interfaces  $]cj[$  -  $]dh[$  -  $]hi[$

$$\frac{\phi_{i-1,j}}{h_1(h_1 + h_3)} - \left( \frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4} \right) \phi_{i,j} + \frac{\phi_{i+1,j}}{h_3(h_1 + h_3)} + \frac{\phi_{i,j+1}}{h_2 h_4} = 0 \quad (\text{C.24})$$

- Nœud  $h$

$$\frac{\varepsilon_1}{h_1} \phi_{i-1,j} - \left( \frac{\varepsilon_1}{h_1} + \frac{\varepsilon_2}{h_3} + \frac{\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_3}{h_2 h_4} \right) \phi_{i,j} + \frac{\varepsilon_2}{h_3} \phi_{i+1,j} + \frac{\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_3}{h_2 h_4} \phi_{i,j+1} = 0 \quad (\text{C.25})$$



# Bibliographie

- [Bak05] E. Baker, W. Huang, D.Y. Chen et F.C. Lee, *Radial Mode Piezoelectric Transformer Design for Fluorescent Lamp Ballast Applications*, IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 20, No. 5, pp. 1213–1220, septembre 2005.
- [Bas10] J.L. Basdevant, *Le principe de moindre action et les principes variationnels en physique*, Vuibert, Paris, octobre 2010.
- [Ber68] D.A. Berlincourt, *Piezoelectric and Ferroelectric Energy Conversion*, IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. 15, No. 2, pp. 89–96, avril 1968.
- [Bis98] R.P. Bishop, *Multi-layer Piezoelectric Transformer*, US Patent 5834882, novembre 1998.
- [Bok06] J. Bok et C. Kounelis, *Paul Langevin (1872-1946) – De la butte Montmartre au Panthéon : Parcours d’un physicien d’exception*, Reflets de la physique, n°1, pp. 14–16, Paris, septembre-octobre 2006.
- [Bov00] T. Bove, W. Wolny, E. Ringgaard et K. Breboel, *New Type of Piezoelectric Transformer With Very High Power Density*, 12<sup>th</sup> IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics, Vol. 1, pp. 321–324, Honolulu, juillet-août 2000.
- [Bri07] M. Brissaud, *Matériaux piézoélectriques : Caractérisation, modélisation et vibration*, 1<sup>ère</sup> édition, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2007.
- [Car99] A.V. Carazo et R. Bosch, *Non-resonant Transformer Measure High Voltage*, Journal of the European Ceramic Society, Elsevier, Vol. 19(6-7), pp. 1275–1279, juin 1999.
- [Car03a] A.V. Carazo, *Multilayer Piezoelectric Transformer*, US Patent 6614144, septembre 2003.
- [Car03b] A.V. Carazo, *Piezoelectric Transformers for Space Applications*, 5<sup>th</sup> International Conference on Intelligent Materials, juin 2003.
- [Car03c] A.V. Carazo, *50 Years of Piezoelectric Transformers. Trends in the Technology*, Proceedings of Material Research Society Symposium, Vol. 785, pp. D1.7.1–D1.7.12, Boston, MA, décembre 2003.
- [Car03d] A.V. Carazo, *Revolutionary Innovations in Piezoelectric Actuators and Transformers at FACE*, 5<sup>th</sup> International Conference on Intelligent Materials, juin 2003.



- [Cho04] C. Chong, W.P. Chen, H.L.W. Chan et P.C.K. Liu, *Nonlinear behaviour of piezoceramics and piezocomposites under various ac fields*, Sensors and Actuators A : Physical, Vol. 116, No. 2, pp. 320–328, avril 2004.
- [Dam98] D. Damjanovic, *Ferroelectric, dielectric and piezoelectric properties of ferroelectric thin films and ceramics*, Reports on Progress in Physics, Vol. 61, No. 9, pp. 1267–1324, mai 1998.
- [Day02] M. Day and B.S. Lee, *Understanding piezoelectric transformers in CCFL backlight applications*, Analog Applications Journal, Texas Instruments Incorporated, 2002.
- [Du04a] J. Du, J. Hu et K.J. Tseng, *High-Power, Multioutput Piezoelectric Transformers Operating at Thickness-Shear Vibration Mode*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 51, No. 5, pp. 502–509, mai 2004.
- [Du04b] J. Du, J. Hu et K.J. Tseng, *Modeling of the Dual-Output Piezoelectric Transformer Operating at Thickness Shear Vibration Mode*, 2004 14<sup>th</sup> IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics, pp. 225–228, Montréal, août 2004.
- [Du06] J. Du, J. Hu, K.J. Tseng, C.S. Kai et G.C. Siong, *Modeling and Analysis of Dual-Output Piezoelectric Transformer Operating at Thickness-Shear Vibration Mode*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 53, No. 3, pp. 579–585, mars 2006.
- [Du07] J. Du, J. Hu et K.J. Tseng, *Vibration Distribution in Output Sections of a Piezoelectric Transformer Operating at Thickness Shear Mode*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 54, No. 10, pp. 1984–1991, octobre 2007.
- [Dur64] E. Durand, *Électrostatique Tome I : les Distributions*, Masson et C<sup>ie</sup>, 1964.
- [Dur66a] E. Durand, *Électrostatique Tome II : Problèmes Généraux - Conducteurs*, Masson et C<sup>ie</sup>, 1966.
- [Dur66b] E. Durand, *Électrostatique Tome II : Méthodes de Calcul - Diélectriques*, Masson et C<sup>ie</sup>, 1966.
- [Fuk98] H. Fukunaga, H. Kakehashi, H. Ogasawara et Y. Ohta, *Effect of Dimension on Characteristics of Rosen-Type Piezoelectric Transformer*, 29<sup>th</sup> Annual IEEE Conference of Power Electronics Specialists, Vol. 2, pp. 1504–1510, Fukuoka, mai 1998.
- [GA98] C. Giraud-Audine, *Contribution à la Modélisation d'Actionneurs piézo-électriques en vue de leur Conception et Dimensionnement*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, LEEI, décembre 1998.
- [GR98] M. Géradin, D. Rixen, *Mechanical Vibrations : Theory and Applications to Structural Dynamics*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, New-York, 1998.
- [Guo07] M. Guo, K.H. Lam, S. Wang, K.W. Kwok, H.L.W. Chan et X.Z. Zhao, *A study on the disk-shaped piezoelectric transformer with multiple outputs*, Review of Scientific Instruments, Vol. 78, No. 12, pp. 125103.1–125103.7, décembre 2007.

- [Hal01] D.A. Hall, *Review nonlinearity in piezoelectric ceramics*, Journal of Materials Science, Vol. 36, No. 19, pp. 4575–4601, février 2001.
- [Hem02] T. Hemsel, W. Littman et J. Wallascheck, *Piezoelectric Transformers - State of the Art and Development Trends*, Proceedings of 2002 IEEE Ultrasonics Symposium, Vol. 1, pp. 645–648, octobre 2002.
- [Hag95] N.W. Hagood IV et A.J. McFarland, *Modeling of a Piezoelectric Rotary Ultrasonic Motor*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 42, No. 2, pp. 210–224, mars 1995.
- [Ho07a] S.T. Ho, *Electromechanical Model of a Longitudinal Mode Piezoelectric Transformer*, 7<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Drive Systems, pp. 267–272, Bangkok, novembre 2007.
- [Ho07b] S.T. Ho, *Design of the Longitudinal Mode Piezoelectric Transformer*, 7<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Drive Systems, pp. 1639–1644, Bangkok, novembre 2007.
- [Ho07c] S.T. Ho, *Modeling of Disk-Type Piezoelectric Transformer*, The 2<sup>nd</sup> International Conference on Industrial Electronics and Applications, pp. 1863–1868, Harbin, mai 2007.
- [Ho07d] S.T. Ho, *Modeling of a Disk-Type Piezoelectric Transformer*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 54, No. 10, pp. 2110–2119, octobre 2007.
- [Ho07e] S.T. Ho, *Modeling and Analysis on Ring-Type Piezoelectric Transformer*, IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, pp. 1–6, Zurich, septembre 2007.
- [Ho07f] S.T. Ho, *Modeling and Analysis on Ring-Type Piezoelectric Transformer*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 54, No. 11, pp. 2376–2384, novembre 2007.
- [Hor07] E.L. Horsley, M.P. Foster et D.A. Stone, *State-of-the-art Piezoelectric Transformer Technology*, 2007 European Conference on Power Electronics and Applications, pp. 1–10, Aalborg, septembre 2007.
- [Hu06] Y. Hu, H. Xue et J. Yang, *Nonlinear Behavior of a Piezoelectric Power Harvester Near Resonance*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 53, No. 7, pp. 1387–1391, juillet 2006.
- [IEEE] IEEE, *Standart on Piezoelectricity*, ANSI/IEEE Std 176, 1987.
- [Ike96] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, New-York, 1996.
- [Ish98a] K. Ishii, N. Akimoto, S. Tashirio et H. Igarashi, *Influence of Load Resistance on Higher Harmonic Voltages Generated in a Piezoelectric Transformer*, Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 37(1), No. 9B, pp. 5330–5333, 1998.
- [Ish98b] K. Ishii, N. Akimoto, S. Tashiro et H. Igarashi, *Analysis of Nonlinear Phenomena in Piezoelectric Ceramics Under High-Power Vibration*, Journal of the Ceramic Society of Japan, Vol. 106, No. 6, pp. 555–558, 1998.

- [Ish03] K. Ishii, S. Tashiro et K. Nagata, *Influence of Temperature on Nonlinear Piezoelectricity in a Piezoelectric Ceramic*, Transactions of Materials Research Society of Japan, Vol. 28, No. 1, pp. 149–152, 2003.
- [Ish07] K. Ishii et S. Tashiro, *Effect of Sr Substitution on a Nonlinear Piezoelectric Coefficient of Third-Higher Term in Lead-Zirconate-Titanate Based Piezoelectric Ceramics*, Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 46(1), No. 10B, pp. 7048–7052, 2007.
- [Ito02] H. Itoh, K. Teranishi et S. Suzuki, *Observation of Light Emissions Around a Piezoelectric Transformer in Various Gases*, IEEE Transactions on Plasma Science, Vol. 30, No. 1, pp. 124–125, février 2002.
- [Ito06] H. Itoh, K. Teranishi et S. Suzuki, *Discharge plasmas generated by piezoelectric transformers and their applications*, Plasma Sources Science and Technology, Vol. 15, No. 2, pp. S51–S61, mai 2006.
- [Ito08] H. Itoh, K. Teranishi, Y. Hashimoto, D. Inada, K. Shimomura et S. Suzuki, *Self-Organized Patterns of Dielectric Barrier Discharge Generated by Piezoelectric Transformers*, IEEE Transactions on Plasma Science, Vol. 36, No. 4, pp. 1348–1349, août 2008.
- [Ive02] G. Ivensky, I. Zafrany et S. Ben-Yaakov, *Generic Operational Characteristics of Piezoelectric Transformers*, IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 17, No. 6, pp. 1049–1057, novembre 2002.
- [Kar00] V.L. Karlash, *The forced electroelastic vibrations of a planar piezoelectric transformer of longitudinal-transverse type*, International Applied Mechanics, Vol. 36, No. 7, pp. 92–98, juillet 2000.
- [Kar01] V.L. Karlash, *The stress state of a rectangular piezoceramic plate with transverse-longitudinal polarization*, International Applied Mechanics, Vol. 37, No. 3, pp. 386–392, mars 2001.
- [Kar03] V.L. Karlash, *Electroelastic characteristics of a piezoelectric transformer plate*, International Applied Mechanics, Vol. 39, No. 7, pp. 870–874, juillet 2003.
- [Kar04] V.L. Karlash, *Electroelastic vibrations and transformation ratio of a planar piezoceramic transformer*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 277, No. 1-2, pp. 353–367, mars 2004.
- [Kar05] V.L. Karlash, *Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates*, International Applied Mechanics, Vol. 41, No. 7, pp. 3–46, juillet 2005.
- [Kim02] H.W. Kim, S. Dong, P. Laoratanakul, K. Uchino et T.G. Park, *Novel Method for Driving the Ultrasonic Motor*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 49, No. 10, pp. 1356–1362, octobre 2002.
- [Kim09] H. Kim, A. Brockhaus et J. Engemann, *Atmospheric pressure argon plasma jet using a cylindrical piezoelectric transformer*, Applied Physics Letters, Vol. 95, No. 21, pp. 211501–211501, novembre 2009.
- [Koc99] B. Koc, S. Alkoy et K. Uchino, *A Circular Piezoelectric Transformer with Crescent Shape Input Electrodes*, Proceedings of 1999 IEEE Ultrasonics Symposium, Vol. 2, pp. 931–934, Caesars Tahoe, NV, octobre 1999.

- [Koc03] B. Koc, S. Alkoy et K. Uchino, *Design of a Circular Piezoelectric Transformer with Crescent-Shaped Input Electrodes*, Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 42, pp. 509–514, février 2003.
- [Lan76] L. Landau et E. Lifchitz, *The Classical Theory of Fields, Fourth Edition (Course of Theoretical Physics Series)*, Vol.1, Third Edition Butterworth Heinemann, 1976.
- [Lao04] P. Laoratanakul et K. Uchino, *Designing a Radial Mode Laminated Piezoelectric Transformer for High Power Applications*, 2004 14<sup>th</sup> IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics, pp. 229–232, Montréal, août 2004.
- [Lin97] C.Y. Lin, *Design and Analysis of Piezoelectric Transformers Converters*, PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, juillet 1997.
- [Lin01] R.L. Lin, *Piezoelectric Transformer Characterization and Application of Electronic Ballast*, PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA, novembre 2001.
- [Lan86] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, 4<sup>th</sup> edition, Dover Publications, New-York, 1986.
- [LL90] L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité linéaire*, Physique Théorique, Vol. 7, Editions MIR Moscou, traduction française, 1990.
- [Mar06] F. Martin-Robine, *Histoire du principe de moindre action : Trois siècles de principes variationnels de Fermat à Feynman*, Vuibert, Paris, juin 2009.
- [Man02] S. Manuspiya, P. Laoratanakul et K. Uchino, *Integration of a piezoelectric transformer and an ultrasonic motor*, Ultrasonics, Elsevier, Vol. 41(2), pp. 83–87, juillet 2002.
- [Man03] S. Manuspiya, T. Ezaki, B. Koc et K. Uchino, *Laptop Adaptor Using a Piezoelectric transformer - Drive Circuit Development*, 5<sup>th</sup> International Conference on Intelligent Materials, juin 2003.
- [Nad09] C. Nadal et F. Pigache, *Multimodal Electromechanical Model of Piezoelectric Transformers by Hamilton's Principle*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 56, No. 11, pp. 2530–2543, novembre 2009.
- [Nad10] C. Nadal, F. Pigache et Y. Lefèvre, *Analytical Modeling of Electrical Potential Repartition on Piezoelectric Transformer*, IEEE International Frequency Control Symposium, pp. 602–607, Newport Beach, CA, juin 2010.
- [Nic31] A. McLean Nicolson, *Piezoelectric Crystal Transformer*, US Patent 1829234, octobre 1931.
- [Nog05] B. Nogarède, *Electrodynamique appliquée : Bases et principes physiques de l'électrotechnique*, Dunod, Paris, 2005.
- [Nol@] <http://www.noliac.com>
- [Pas89] F. Paschen, *Über die zum Funkenübergang in Luft, Wasserstoff und Kohlensäure bei verschiedenen Drücken erforderliche Potential differenz*, Annalen der Physik, Vol. 273(5), pp. 69–96, 1889.

- [Pig07] F. Pigache, F. Messine et B. Nogarede, *Optimal Design of Piezoelectric Transformers : A Rational Approach Based on an Analytical Model and a Deterministic Global Optimization*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 54, No. 7, pp. 1293–1302, juillet 2007.
- [Pig10] F. Pigache et C. Nadal, *Identification Methodology of Electrical Equivalent Circuit of the Piezoelectric Transformers by FEM*, www.ansys.net, octobre 2010.
- [Pul07a] P. Pulpan, J. Erhart et O. Stipek, *Analytical modeling of piezoelectric transformers*, Ferroelectrics, Vol. 351, pp. 204–215, 2007.
- [Pul07b] P. Pulpan et J. Erhart, *Transformation ratio of « ring-dot » planar piezoelectric transformer*, Sensors and Actuators A-Physical, Vol. 140, No. 2, pp. 215–224, novembre 2007.
- [Pre06] A. Preumont, *Mechatronics : Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*, Springer-Verlag, Dordrecht, 2006.
- [Ros56a] C.A. Rosen, *Ceramic transformers and filters*, Proceedings of the Electronic Components Symposium, pp 205–211, 1956.
- [Ros56b] C.A. Rosen, *Analysis and Design of Ceramic Transformer and Filter Elements*, PhD thesis, Electrical Engineering Department, Syracuse University, août 1956.
- [Ros58] C.A. Rosen, K.A. Fish et H.C. Rothenberg, *Electromechanical Transducer*, US Patent 2830274, avril 1958.
- [Sal05] J. Salençon, *Mécanique des milieux continus : Concepts généraux*, Tome 1, Les Editions de l’Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2005.
- [Sar05] E. Sarraute, D. Vasic et F. Costa, *Transformateurs statiques piézoélectriques*, Techniques de l’ingénieur, D3015, février 2005.
- [Sub07] A. Sublet, *Caractérisation de décharges à barrières diélectriques atmosphériques et sub-atmosphériques et application à la déposition de couches d’oxyde de silicium*, Thèse de doctorat n°3801, Université de Savoie, Annecy, juin 2007.
- [Sye01a] E.M. Syed, *Analysis and Modeling of Piezoelectric Transformers*, PhD thesis, Graduate Department of Electrical and Computer Engineering, University of Toronto, 2001.
- [Sye01b] E.M. Syed, F.P. Dawson et E.S. Rogers, Sr, *Analysis and modeling of a Rosen type piezoelectric transformer*, 32<sup>th</sup> IEEE International Conference of Power Electronics Specialists, Vol. 4, pp. 1761–1766, Vancouver, juin 2001.
- [Ter01] K. Teranishi, S. Suzuki et H. Itoh, *Luminous Phenomenon of silent Discharge Using a Piezoelectric Transformer*, Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 40, No. 9B, pp. 5766–5768, septembre 2001.
- [Ter02] K. Teranishi, H. Itoh, et S. Suzuki, *Dynamic Behavior of Light Emissions Generated by Piezoelectric Transformers*, IEEE Transactions On Plasma Science, Vol. 30, No. 1, pp. 122–123, février 2002.

- [Ter04] K. Teranishi, S. Suzuki et H. Itoh, *A Novel Generation Method of Dielectric Barrier Discharge and Ozone Production Using a Piezoelectric Transformer*, Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 43, No. 9B, pp. 6733–6739, juin 2004.
- [Ter05] K. Teranishi et H. Itoh, *Absolute Measurement of Surface Potential and Discharge Power Distributions for Piezoelectric Transformer-Based Plasma Reactor*, The Japan Society of Applied Physics, Vol. 44, No. 9B, pp. 7083–7088, septembre 2005.
- [Tes09] M. Teschke et J. Engemann, *Piezoelectric Low Voltage Atmospheric Pressure Plasma Sources*, Contributions to Plasma Physics, Vol. 49, No. 9, pp. 614–623, novembre 2009.
- [Thu94] R.N. Thurston, *Warren P. Mason (1900-1986) : Physicist, Engineer, Inventor, Author, Teacher*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 41, No. 4, pp. 425–434, juillet 1994.
- [Tie67] H.F. Tiersten, *Hamilton's Principle for Linear Piezoelectric Media*, Proceedings Letters of the IEEE Journal, pp. 1523–1524, août 1967.
- [Tse04] K.J. Tseng, J. Du et J. Hu, *Piezoelectric transformer with high power density and multiple outputs*, IEE Electronics Letters, Vol. 40, No. 12, pp. 786–788, juin 2004.
- [Ume99] M. Umeda, K. Nakamura et S. Ueha, *Effects of Vibration Stress and Temperature on the Characteristics of Piezoelectric Ceramics Under High Vibration Amplitude Levels Measured by Electrical Transient Responses*, Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 38, No. 9B, pp. 5581–5585, 1999.
- [Voi10] V.W. Voigt, *Lehrbuch der kristallphysik*, Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1910.
- [Xu05] C.H. Xu, C.H. Voo et S. Shi, *Current Oscillation of Piezoelectric-Ceramic Vibrators Driven by a Constant High Electric Field*, Journal of American Ceramic Society, Vol. 88, No. 3, pp. 624–627, 2005.
- [Xue08] H. Xue, J.S. Yang et Y. Hu, *Analysis of Rosen Piezoelectric Transformers with a Varying Cross-Section*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 55, No. 7, pp. 1632–1639, juillet 2008.
- [Yan02] J.S. Yang et X. Zhang, *Extensional vibration of a nonuniform piezoceramic rod and high voltage generation*, International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, Vol. 16, No. 1-2/2002, pp. 29–42, janvier 2002.
- [Yan05] J.S. Yang, *An Introduction to the Theory of Piezoelectricity*, Springer Science+Business Media, New-York, 2005.
- [Yan06] J.S. Yang, *Analysis of Piezoelectric Devices*, World Scientific Publishing, 2006.
- [Yan07a] J.S. Yang, Z. Chen et Y. Hu, *Theoretical modeling of a thickness-shear mode circular cylinder piezoelectric transformer*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 54, No. 3, pp. 621–626, mars 2007.

- [Yan07b] J. Yang, Z. Chen, Y. Hu, S. Jiang et S. Guo, *Weakly Nonlinear Behavior of a Plate Thickness-Mode Piezoelectric Transformer*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 54, No. 4, pp. 877–881, avril 2007.
- [Yan07c] J.S. Yang, *Piezoelectric Transformer Structural Modeling - A Review*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 54, No. 6, pp. 1154–1170, juin 2007.
- [Yan10] J.S. Yang, S. Jiang et Y. Hu, *Analysis of Rosen piezoelectric transformers with end masses*, International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, Vol. 32, No. 2/2010, pp. 97–110, février 2010.