



**HAL**  
open science

# Commande de systèmes dynamiques: stabilité absolue, saturation et bilinéarité

Calliero Tognetti

► **To cite this version:**

Calliero Tognetti. Commande de systèmes dynamiques: stabilité absolue, saturation et bilinéarité. Mathématiques [math]. INSA de Toulouse, 2009. Français. NNT: . tel-00621132

**HAL Id: tel-00621132**

**<https://theses.hal.science/tel-00621132>**

Submitted on 9 Sep 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse*

**Discipline ou spécialité :** *Systèmes Automatiques*

*Préparée conjointement au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS et à l'Université de Campinas (Brésil)*

---

**Présentée et soutenue par** *Taïs Calliero TOGNETTI*  
**Le** *06 novembre 2009*

**Titre :** *Commande de Systèmes Dynamiques : Stabilité Absolue, Saturation et Bilinéarité*

---

### JURY

Président : *Isabelle QUEINNEC*  
Rapporteurs : *João Manoel Gomes da SILVA*  
*Jamal DAAFOUZ*  
Examineur : *Vinícius Foletto MONTAGNER*  
Co-Directeurs : *Sophie TARBOURIECH*  
*Pedro Luis Dias PERES*

---

**Ecole doctorale :** *Systèmes (EDSYS)*  
**Unité de recherche :** *Laboratoire d'Analyse et d'Architecture - LAAS - CNRS*  
**Directeur(s) de Thèse :** *Sophie TARBOURIECH et Pedro Luis Dias PERES*



AOS MEUS PAIS E AO EDUARDO.



# Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué conjointement au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) du CNRS, au sein du groupe Méthodes et Algorithmes en Commande (MAC), et à l'Université de Campinas (UNICAMP, Brésil). Je remercie Mr Raja Chatila, Directeur du LAAS, pour m'avoir acceptée dans ce prestigieux laboratoire, Mme Isabelle Queinnec, responsable du groupe MAC, pour m'avoir accueillie dans son groupe, et l'agence brésilienne Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) qui a financé mon séjour en France. Je remercie également toutes les personnes du LAAS qui m'ont aidée.

Je remercie mes directeurs de thèse, Mme Sophie Tarbouriech, directeur de recherche au CNRS, et Mr Pedro Luis Dias Peres, professeur à l'UNICAMP. Je leur suis reconnaissante d'avoir accepté d'encadrer mon travail de thèse. Je les remercie pour les sujets proposés, pour leurs précieux conseils, leur patience ainsi que pour leur disponibilité pour toute discussion scientifique. C'est aussi grâce à Pedro que j'ai pu rencontrer des personnes d'horizons si différents et m'enrichir auprès d'eux.

Je tiens à remercier Jamal Daafouz, professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, et João Manoel Gomes da Silva Jr., professeur à Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie également Isabelle Queinnec, chargée de recherche au CNRS (LAAS-CNRS), et Vinícius F. Montagner, professeur à Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), pour leurs participations au jury. Je leur suis reconnaissante pour la lecture attentive de mon manuscrit, pour leurs remarques et leurs compliments.

Merci à mes amis, qui m'ont permis d'améliorer mon français, de rire et de discuter : Giórgio, Osvino, Gabriel, Gustavo, Alberto, Laia, Josep, Vincent, Mounir, Bogdan, Hayad, Virgille, Emilie, Damien, Timothée.

Enfin un grand merci est adressé à Eduardo, mon mari, et à mes parents, parce qu'ils ont toujours su m'encourager, me soutenir, et aussi pour leur tendresse.



# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer ao Prof. Pedro pela orientação, incentivo e pela oportunidade de realizar este doutorado em regime co-tutela.

Agradeço a Sophie Tarbouriech pela atenção, orientação e também pelo esforço para consolidar a defesa deste trabalho de doutorado em regime de co-tutela, o que permitiu a obtenção de dois títulos. Agradeço também a Isabelle pela acolhida, paciência e pelas discussões técnicas durante minha estada no LAAS-CNRS de Toulouse.

Agradeço,

à CAPES, o apoio financeiro durante minha estada em Toulouse (bolsa PDEE) e em Campinas.

aos amigos, Vinícius e Renato as idéias compartilhadas, João Henrique, Elizângela, Walter, Alessandro e Sileuza, o simples fato de sempre poder contar com vocês.

aos colegas do DT (Departamento de Telemática) Ricardo (ceará), Ricardo, André, Fábio, Giuliano, Vandemberg, Talía, Jussara, Júlio, Edilson, Nathalie, a convivência e conversas descontraídas do café.

à FEEC/UNICAMP a excelente estrutura de trabalho.

aos membros da banca examinadora os comentários, sugestões e contribuições, que ajudaram a melhorar a qualidade e a redação final do manuscrito.

aos meus pais, o carinho e apoio incondicional.

ao Eduardo a cumplicidade, o apoio e a compreensão.

a todos que de alguma forma contribuíram com este trabalho.





# Résumé

Cette thèse présente des contributions aux problèmes d'analyse de stabilité et de synthèse de contrôleurs par retour d'état pour des systèmes dynamiques qui ont des éléments non-linéaires, à partir de conditions sous la forme d'inégalités matricielles linéaires et de fonctions de Lyapunov. Pour les systèmes à commutations soumis à saturation sur les actionneurs, sont fournies des conditions convexes pour le calcul des gains commutés et robustes. La saturation est modélisée comme une non-linéarité de secteur et une estimation du domaine de la stabilité est déterminée. Pour les systèmes linéaires avec des incertitudes polytopiques et des non-linéarités de secteurs, sont fournies des conditions convexes de dimension finie pour construire des fonctions de Lur'e avec dépendance polynomiale homogène en les paramètres. Si elles sont satisfaites, les conditions garantissent la stabilité pour tout le domaine d'incertitudes et pour toutes les non-linéarités dans le secteur, et permettent le calcul de contrôleurs stabilisants robustes par retour linéaire et non-linéaire. Pour les systèmes bilinéaires instables, continus et en temps discret, est fournie une procédure pour calculer un gain stabilisant de commande par retour d'état. La méthode est basée sur la solution alternée de deux problèmes d'optimisation convexe décrits par des inégalités matricielles linéaires, et caractérise une estimation du domaine de la stabilité. Des extensions pour traiter les contrôleurs robustes et linéaires variants avec des paramètres sont aussi présentées.

Mots-clés : Systèmes bilinéaires. Systèmes à commutations. Saturation sur les actionneurs. Fonctions de Lyapunov. Inégalités matricielles linéaires. Non-linéarité de secteur. Domaine de stabilité.



# Abstract

This thesis presents contributions to the solution of the problems of stability analysis and synthesis of state feedback controllers for dynamic systems with non-linear elements, by means of conditions based on linear matrix inequalities and Lyapunov functions. For switched systems subject to saturation in the actuators, convex conditions to design switched and robust controllers are presented. The saturation is modeled as a sector non-linearity and an estimate of the domain of stability is determined. For linear systems with polytopic uncertainties and sector non-linearities, convex conditions of finite dimension to build Lur'e functions with homogeneous polynomially parameter dependence are provided. If satisfied, the conditions guarantee the stability of the entire domain of uncertainty for all sector non-linearities, allowing the design of linear and non-linear robust state feedback stabilizing controllers. For continuous and discrete-time unstable bilinear systems, a procedure to design a state feedback stabilizing control gain is proposed. The method is based on the alternate solution of two convex optimization problems described by linear matrix inequalities, providing an estimate of the domain of stability. Extensions to handle robust and linear parameter varying controllers are also presented.

Key-words: Bilinear systems. Switching systems. Saturation of actuators. Lyapunov functions. Linear matrix inequalities. Sector non-linearities. Stability domain.



# Resumo

Esta tese apresenta contribuições para a solução de problemas de análise de estabilidade e síntese de controladores por realimentação de estados de sistemas dinâmicos que possuem elementos não-lineares, por meio de condições na forma de desigualdades matriciais lineares e funções de Lyapunov. Para sistemas chaveados sujeitos a saturação nos atuadores, são fornecidas condições convexas para o cálculo de ganhos chaveados e robustos. A saturação é modelada como uma não-linearidade de setor e uma estimativa do domínio de estabilidade é determinada. Para sistemas lineares com incertezas politópicas e não-linearidades pertencentes a setores, são fornecidas condições convexas de dimensão finita para construir funções de Lur'e com dependência polinomial homogênea nos parâmetros. Se satisfeitas, as condições garantem a estabilidade para todo o domínio de incertezas e para todas as não-linearidades pertencentes ao setor e permitem o cômputo de controladores estabilizantes robustos por realimentação linear e não-linear. Para sistemas bilineares instáveis, contínuos e discretos no tempo, é proposto um procedimento para calcular um ganho estabilizante de controle por realimentação de estados. O método baseia-se na solução alternada de dois problemas de otimização convexa descritos por desigualdades matriciais lineares, fornecendo uma estimativa do domínio de estabilidade. Extensões para tratar controladores robustos e lineares variantes com parâmetros são também apresentadas.

Palavras-chave: Sistemas bilineares. Sistemas chaveados. Saturação de atuadores. Funções de Lyapunov. Desigualdades matriciais lineares. Não-linearidade de setor. Domínio de estabilidade.



# Lista de figuras/Liste des figures

2.1	Região circular para alocação dos autovalores de $(A_j + B_j K_j)$ , com raio $r_j$ , centro $(-(d_j + r_j), 0)$ localizada no semi-plano esquerdo do plano complexo. . . . .	18
2.2	Estimativas de domínios de atração da origem para o sistema do Exemplo 2.1 fornecidas pelas condições do Corolário 2.2: domínio $\mathcal{E}_1$ , obtido para $d_j = 1$ , $r_j = 3$ , $j = 1, \dots, 6$ e domínio $\mathcal{E}_2$ , obtido para $d_j = 1$ , $r_j = 0.1$ , $j = 1, \dots, 6$ . . . . .	24
2.3	Curvas para $\beta^*$ em função de $r$ , para $d = 1$ e $d = 3$ , obtidas aplicando o Corolário 2.3 para o sistema do Exemplo 2.1. . . . .	25
2.4	Curvas para $\beta^*$ em função de $d$ , para $r = 1$ e $r = 3$ , obtidas aplicando o Corolário 2.4 para o sistema do Exemplo 2.1. . . . .	25
2.5	Circuito elétrico chaveado com entrada saturante em amplitude. . . . .	26
2.6	Domínio de estabilidade (2.25) do circuito chaveado da Figura 2.5 para chaveamentos arbitrários obtido pelas condições do Corolário 2.1 para parâmetros de alocação de pólos $d_j = 1000$ , $r_j = 500$ , $j = 1, 2$ . . . . .	27
2.7	Curvas de $\beta^*$ em função de $r$ , para $d = 1$ , obtidas por meio do Corolário 2.1 (rob) e Corolário 2.3 (sw) para o sistema do Exemplo 2.3. . . . .	28
4.1	Regiões de estabilidade obtidas pelo Algoritmo 4.1 ( $\Gamma$ ) e por [ACM07b] ( $\epsilon$ ) para o Exemplo 4.1 (com $\mathcal{P}$ o politopo inicial). . . . .	56
4.2	Região de atração e conjunto elipsoidal obtidos com a condição inicial do Exemplo 4.2. . . . .	57
4.3	Evolução no tempo para $x(0) = [0 \ 3]'$ para o Exemplo 4.2. . . . .	57
4.4	Entrada de controle para o Exemplo 4.2. . . . .	58
4.5	Estimativa do domínio de estabilidade obtida com a condição inicial do Exemplo 4.4, representada pela interseção das elipses. . . . .	59
6.1	Région circulaire pour placement des valeurs propres de $(A_j + B_j K_j)$ , avec rayon $r_j$ , centre $(-(d_j + r_j), 0)$ , localisée dans le demi-plan gauche du plan complexe. . . . .	80



6.2	Estimations du domaine d'attraction de l'origine pour le système de l'Exemple 6.1 fournies par les conditions du Corollaire 6.2 : le domaine $\mathcal{E}_1$ , obtenu pour $d_j = 1$ , $r_j = 3$ , $j = 1, \dots, 6$ , et le domaine $\mathcal{E}_2$ , obtenu pour $d_j = 1$ , $r_j = 0.1$ , $j = 1, \dots, 6$ .	86
6.3	Courbes de $\beta^*$ en fonctions de $r$ , pour $d = 1$ et $d = 3$ , obtenues en appliquant le Corollaire 6.3 pour le système de l'Exemple 6.1.	87
6.4	Courbes de $\beta^*$ en fonctions de $d$ , pour $r = 1$ et $r = 3$ , obtenues en appliquant le Corollaire 6.4 pour le système de l'Exemple 6.1.	87
6.5	Circuit électrique commuté avec l'entrée limitée en amplitude.	88
6.6	Domaine de stabilité (6.25) du circuit commuté de la Figure 6.5 avec des commutations arbitraires, obtenu par les conditions du Corollaire 6.1 avec les paramètres de placement de pôles $d_j = 1000$ , $r_j = 500$ , $j = 1, 2$ .	89
6.7	Courbe de $\beta^*$ en fonction de $r$ , pour $d = 1$ , obtenues par le Corollaire 6.1 (rob) et le Corollaire 6.3 (sw) pour le système de l'Exemple 6.3.	90
8.1	Régions de stabilité obtenues par l'Algorithme 8.1 ( $\Gamma$ ) et par [ACM07b] ( $\epsilon$ ) pour l'Exemple 8.1 (avec $\mathcal{P}$ le polytope initial).	118
8.2	Région d'attraction et ensemble ellipsoïdal obtenus avec la condition initiale de l'Exemple 8.2.	119
8.3	Évolution dans le temps pour $x(0) = [0 \ 3]'$ pour l'Exemple 8.2.	119
8.4	L'entrée de commande pour l'Exemple 8.2.	120
8.5	Estimation du domaine de stabilité obtenue avec la condition initiale de l'Exemple 4.4.	121

# Lista de tabelas/Liste des tableaux

3.1 Valores obtidos por meio das condições do Teorema 3.3 para o sistema do Exemplo 3.1 com  $\gamma^* \triangleq \min \gamma$  s.a. (3.15)-(3.18)  $\Delta = \mathbf{I}$ ,  $\Gamma = \gamma \mathbf{I}$ ,  $A_i = \mathbf{0}$  e  $\tilde{A}_i, i = 1, \dots, 3$ , dados em (3.24)-(3.26). . . . . 41

7.1 Estimations du domaine de stabilité robuste pour le système de l'Exemple 7.1, données par la région  $\mathcal{S}$ , avec  $\gamma^* \triangleq \min \gamma$  s.a. (7.15)-(7.18),  $\Delta = \mathbf{I}$ ,  $\Gamma = \gamma \mathbf{I}$ ,  $A_i = \mathbf{0}$  et  $\tilde{A}_i, i = 1, \dots, 3$ , donnés en (7.24)-(7.26). . . . . 103



# Sumário/Table des matières

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Definições e resultados preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Fundamentos e conceitos básicos . . . . .	5
1.1.1 Resultados auxiliares . . . . .	5
1.1.2 Segundo método de Lyapunov . . . . .	6
1.1.3 Domínio de atração e de estabilidade . . . . .	7
1.2 Sistemas lineares com termos não-lineares . . . . .	8
1.2.1 Descrição dos sistemas . . . . .	8
1.2.2 Estabilidade . . . . .	8
1.2.3 Estabilizabilidade . . . . .	11
<b>2 Controle de sistemas chaveados</b>	<b>15</b>
2.1 Introdução . . . . .	15
2.2 Definição do problema . . . . .	16
2.3 Preliminares . . . . .	17
2.4 Resultados principais . . . . .	19
2.5 Extensões . . . . .	21
2.6 Exemplos . . . . .	23
2.7 Conclusão . . . . .	28
<b>3 Estabilidade absoluta baseada em funções de Lur'e polinomiais</b>	<b>31</b>
3.1 Introdução . . . . .	31
3.2 Definição do problema . . . . .	32
3.3 Preliminares . . . . .	33
3.4 Resultados principais . . . . .	36
3.5 Exemplos . . . . .	39
3.6 Conclusão . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Controle de sistemas bilineares</b>	<b>43</b>
4.1	Introdução . . . . .	43
4.2	Formulação do problema . . . . .	45
4.3	Caso contínuo no tempo . . . . .	45
4.4	Caso discreto no tempo . . . . .	50
4.5	Extensões . . . . .	51
4.6	Aspectos numéricos . . . . .	54
4.7	Exemplos . . . . .	55
4.8	Conclusão . . . . .	59
	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>61</b>
	<b>Introduction générale</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>Définitions et résultats préliminaires</b>	<b>67</b>
5.1	Fondements et concepts basiques . . . . .	67
5.1.1	Résultats auxiliaires . . . . .	67
5.1.2	Seconde méthode de Lyapunov . . . . .	68
5.1.3	Domaine d'attraction et de stabilité . . . . .	69
5.2	Systèmes linéaires avec termes non-linéaires . . . . .	70
5.2.1	Description des systèmes . . . . .	70
5.2.2	Stabilité . . . . .	70
5.2.3	Stabilisation . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Synthèse pour les systèmes à commutation</b>	<b>77</b>
6.1	Introduction . . . . .	77
6.2	Définition du problème . . . . .	78
6.3	Préliminaires . . . . .	80
6.4	Résultats principaux . . . . .	82
6.5	Extensions . . . . .	83
6.6	Exemples . . . . .	85
6.7	Conclusion . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Stabilité absolue basée sur des fonctions de Lur'e polynomiales</b>	<b>93</b>
7.1	Introduction . . . . .	93
7.2	Formulation du problème . . . . .	94
7.3	Préliminaires . . . . .	95
7.4	Résultats principaux . . . . .	98
7.5	Exemples . . . . .	102
7.6	Conclusion . . . . .	104

<b>8</b>	<b>Commande de systèmes bilinéaires</b>	<b>105</b>
8.1	Introduction . . . . .	105
8.2	Formulation du problème . . . . .	107
8.3	Cas continu dans le temps . . . . .	107
8.4	Systèmes discrets dans le temps . . . . .	112
8.5	Extensions . . . . .	113
8.6	Complexité numérique . . . . .	116
8.7	Exemples . . . . .	117
8.8	Conclusion . . . . .	121
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>123</b>
	<b>Bibliografia/Bibliographie</b>	<b>125</b>



# Introdução

Um dos primeiros sistemas de controle importantes foi o regulador centrífugo desenvolvido por James Watts para o controle de velocidade de uma máquina a vapor, no início da revolução industrial. Tão logo esse sistema foi aperfeiçoado de modo a melhorar seu desempenho, foram encontrados alguns problemas que hoje são denominados de instabilidade. Assim, ainda que de forma incipiente, surgiram os dois problemas básicos da teoria de controle: a análise de estabilidade do sistema de controle e o projeto do controlador.

As exigências de controle, desempenho e operação dos sistemas físicos têm aumentado significativamente, tornando essencial o uso de ferramentas de análise e síntese cada vez mais sofisticadas e também mais eficientes do ponto de vista da complexidade computacional associada aos algoritmos [BEFB94, Kha02].

O modelo que representa um fenômeno físico é, na maioria das vezes, um sistema dinâmico não-linear. Devido à escassez de ferramentas numéricas para tratar essa classe de sistemas, é comum recorrer à linearização em pontos de interesse, que descreve o comportamento da dinâmica na vizinhança do ponto. Os modelos lineares têm incorporado cada vez mais informações sobre dinâmicas não-modeladas como não-linearidades, ruídos, etc. Essas informações são na maioria das vezes consideradas na forma de incertezas, que podem ser modeladas de diversas maneiras, como transformação linear fracionária (do inglês, *Linear Fractional Transformation* – *LFT*), representações nas formas afim e politópica [Bar94, BB91, FAG96].

O estudo de técnicas que asseguram a estabilidade de um sistema em malha fechada, mesmo na presença de elementos não-lineares como, por exemplo, restrições estruturais e não-linearidades limitadas em setor, tornou-se um importante campo da teoria de controle. Além disso, garantir certas características de desempenho para o sistema sujeito a não-linearidades tem implicações imediatas nos aspectos de segurança, qualidade do produto e economia do processo. Nesse sentido, especificações comuns são: localização dos pólos de malha fechada do sistema em determinadas regiões do plano complexo e garantia de estabilidade do sistema em uma determinada região do espaço de estados.

Um dos resultados mais importantes e amplamente usado para tratar a estabilidade e síntese de controladores de um sistema dinâmico é o “método direto” ou “segundo método” de Lyapunov, que fornece uma condição suficiente para a estabilidade de um ponto de equilíbrio [Kha02].



Para isso supõe-se a existência de uma função escalar auxiliar definida positiva que possui a propriedade de ser decrescente ao longo das trajetórias do sistema, chamada de função de Lyapunov. Essa propriedade é verificada sem o conhecimento explícito das trajetórias do sistema por meio da derivada no tempo da função de Lyapunov [BM08].

O problema de análise de estabilidade e síntese de controladores utilizando o método de Lyapunov consiste, em geral, na escolha de uma função de Lyapunov. Assim, grande parte das pesquisas realizadas nas últimas décadas procuram verificar a existência de uma função de Lyapunov do tipo quadrática [Bar85], isto é, uma mesma função de Lyapunov independente dos parâmetros incertos, que garante a estabilidade do sistema para todo o domínio de incertezas. A partir da estabilidade quadrática, foram desenvolvidos vários resultados para análise, controle e filtragem robusta, com critérios de desempenho tais como as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  (veja, por exemplo, [BEFB94] e referências internas). Uma característica comum na obtenção de condições de análise e síntese é a transformação do problema de controle em um problema convexo de otimização, na maioria das vezes descrito por meio de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs), que podem ser resolvidas de maneira eficiente por algoritmos baseados em pontos interiores [NN94]. Atualmente, existem vários resolvidores de LMIs (SeDuMi [Stu99], *LMI Control Toolbox* [GNLC95], etc.), e interfaces de programação (LMILab [GNLC95], YALMIP [Löf04], etc.) que permitem uma programação simples e consistente de problemas gerais envolvendo LMIs.

No contexto de síntese de controladores, o controle robusto por realimentação de estados aplicado a sistemas dinâmicos lineares incertos é baseado em funções de Lyapunov quadráticas [BPG89]. Esse resultado permite estabilizar o sistema em malha fechada com ganhos fixos, a partir da solução de um conjunto de LMIs descritas nos vértices do polítopo de incertezas. A principal desvantagem em utilizar ganhos fixos é que os resultados podem ser conservadores, pois usa-se uma mesma matriz de Lyapunov. Estratégias de ganhos escalonados podem reduzir o conservadorismo na solução do problema de estabilização de sistemas dinâmicos com incertezas variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter Varying - LPV*) [RS00, BP94, AA98].

O objetivo deste trabalho é tratar o problema de análise de estabilidade, calcular um ganho de controle estabilizante e definir uma estimativa da região de estabilidade, para uma classe de sistemas dinâmicos que possuem elementos não-lineares em termos do estado e do controle. Esses termos não-lineares podem aparecer, por exemplo, de forma aditiva na equação dinâmica. Além disso, a parte linear do sistema pode ser afetada por incertezas politópicas.

## Estrutura da tese

- Capítulo 1: é apresentada uma breve revisão dos conceitos de estabilidade considerando o método direto de Lyapunov. São também apresentadas uma descrição geral dos sistemas que serão estudados nos próximos capítulos, condições do tipo LMI da literatura para a análise de estabilidade e para o cálculo de ganhos de leis de controle por realimentação de

estados que estabilizam o sistema.

- Capítulo 2: a proposta do capítulo é fornecer uma condição convexa de cômputo de ganhos chaveados de realimentação de estados que estabilizam um sistema chaveado contínuo no tempo com subsistemas lineares sujeito a chaveamentos arbitrários e à saturação nos atuadores. A condição é descrita na forma de LMIs que utilizam como informação as matrizes do modelo do sistema, os valores de saturação em amplitude dos atuadores e parâmetros de alocação de pólos para cada subsistema linear. A factibilidade da condição proposta fornece um conjunto de ganhos para o controlador e uma região de estabilidade para o sistema sujeito a qualquer função de chaveamento arbitrária. O conjunto de ganhos obtidos garante ainda a alocação dos pólos de cada subsistema linear em regiões circulares no semi-plano esquerdo, fornecendo limitantes para a resposta transitória sempre que o sistema opera na região linear. São também apresentadas extensões do resultado principal para tratar problemas de controle robusto e descentralizado, problemas de falhas de atuadores, para maximizar a estimativa da região de atração da origem e para investigar o compromisso (*tradeoff*) entre a alocação de pólos e o tamanho da estimativa do domínio de estabilidade. Ao final do capítulo, exemplos ilustrativos da eficiência das condições propostas são apresentados. Os resultados apresentados no capítulo podem ser encontrados em parte em [MCP<sup>+</sup>06].
- Capítulo 3: são apresentadas condições convexas de dimensão finita para construir funções de Lur'e com dependência polinomial homogênea nos parâmetros. O objetivo é verificar a estabilidade de sistemas não-lineares sujeitos a parâmetros incertos pertencentes ao simplex unitário, com não-linearidades dependentes do estado, pertencentes a setores. As condições propostas são escritas como LMIs parametrizadas em termos do grau  $g$  da função de Lyapunov dependente de parâmetros e em termos do nível de relaxação  $d$  das restrições LMIs, baseadas em uma extensão do Teorema de Pólya. À medida que  $g$  e  $d$  crescem, as condições tornam-se cada vez menos conservadoras. Os resultados contêm algumas condições existentes na literatura como casos especiais para análise de estabilidade robusta e para estabilidade absoluta. Além disso, uma solução convexa para o projeto de controladores por realimentação de estados e exemplos numéricos que ilustram a eficiência das condições propostas são também apresentados. O capítulo é baseado no artigo [MOC<sup>+</sup>09].
- Capítulo 4: trata o problema de estabilização de sistemas bilineares instáveis em malha aberta por meio de controle de realimentação de estado. O objetivo implícito é fornecer uma estimativa da região de estabilidade para o sistema em malha fechada. A metodologia proposta pode ser decomposta em dois problemas de otimização descritos em termos de LMIs: i) Dado um politopo contendo a origem, no qual os valores das variáveis de estado são limitadas, encontrar uma lei de controle e uma região de estabilidade associada tão

grande quanto possível dentro do politopo. ii) Para a solução do primeiro problema, encontrar o maior politopo que contém o elipsóide que satisfaz as condições de estabilidade. Pela iteração desses dois passos, são construídas condições para computar um controle de realimentação de estado que maximiza a estimativa da região de estabilidade. Os resultados são ilustrados por meio de exemplos. Os resultados apresentados no capítulo são parcialmente encontrados em [TQCP09].

- Capítulo 5: Apresenta as conclusões finais da tese e algumas perspectivas de trabalhos futuros.

# Definições e resultados preliminares

Este capítulo apresenta resultados clássicos da literatura que servem de base para o desenvolvimento dos resultados no decorrer do manuscrito, como o Lema de Finsler, o complemento de Schur, a *S-procedure* e algumas definições para o estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos por meio do segundo método de Lyapunov. As definições de conjunto positivamente invariante e domínio de estabilidade são apresentadas na sequência. Para maiores detalhes, veja [Kha02, BM08]. Em seguida é apresentada a descrição geral dos sistemas estudados nos próximos capítulos, juntamente com algumas condições da literatura baseadas em escolhas particulares da função de Lyapunov para análise de estabilidade e síntese de controladores.

## 1.1 Fundamentos e conceitos básicos

### 1.1.1 Resultados auxiliares

Algumas desigualdades matriciais não-lineares podem ser transformadas em LMIs por meio do complemento de Schur, conforme descrito abaixo [BEFB94].

**Lema 1.1** *O conjunto de desigualdades matriciais não-lineares*

$$\{A_{11} > 0, A_{22} > A'_{12}A^{-1}_{11}A_{12}\}$$

em que  $A_{11} = A'_{11}$  e  $A_{22} = A'_{22}$ , é equivalente a

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A'_{12} & A_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (1.1)$$

Permutando linhas e colunas na matriz acima, tem-se ainda que (1.1) é equivalente ao conjunto

$$\{A_{22} > 0, A_{11} > A_{12}A^{-1}_{22}A'_{12}\}$$

A *S-procedure* permite concatenar várias restrições escalares de desigualdade em uma única [BEFB94]. Para reduzir o conservadorismo, este procedimento introduz multiplicadores como fatores de ponderação a serem determinados.

**Lema 1.2** (*S-procedure*) Sejam  $T_0, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas dadas e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Considere a seguinte condição em  $T_0, \dots, T_p$ :

$$\xi' T_0 \xi > 0, \quad \forall \xi \neq 0 : \xi' T_i \xi \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.2)$$

Se existem escalares  $\tau_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$  tais que

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0, \quad (1.3)$$

então (1.2) é satisfeita.

O lema de Finsler, apresentado em seguida, pode ser utilizado para escrever novas condições de estabilidade, introduzindo variáveis matriciais em problemas de otimização, ou ainda para eliminar variáveis.

**Lema 1.3** Sejam  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica e  $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $\text{rank}(\tilde{B}) < n$ . As seguintes condições são equivalentes:

- i)  $\zeta' \mathcal{L} \zeta < 0$ ,  $\forall \zeta$  tal que  $\tilde{B} \zeta = 0$ ,  $\zeta \neq 0$ .
- ii)  $\tilde{B}^{\perp'} \mathcal{L} \tilde{B}^{\perp} < 0$ , em que  $\tilde{B}^{\perp}$  denota uma base para o espaço nulo de  $\tilde{B}$ .
- iii)  $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{L} - \mu \tilde{B}' \tilde{B} < 0$ .
- iv)  $\exists R \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{L} + R \tilde{B} + \tilde{B}' R' < 0$ .

A prova do Lema 1.3 pode ser encontrada em [dOS01].

### 1.1.2 Segundo método de Lyapunov

Considere o sistema autônomo descrito pela seguinte equação:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.4)$$

na qual  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função localmente Lipschitz no domínio  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

A idéia básica do método direto de Lyapunov é a descrição matemática da observação de um fenômeno físico: se a energia total de um sistema elétrico (ou mecânico) é continuamente dissipada, então o sistema, seja linear ou não-linear, deve finalmente parar em um ponto de equilíbrio. Assim, pode-se concluir sobre a estabilidade do sistema sem calcular suas trajetórias, como mostra o seguinte teorema [Kha02].

**Teorema 1.1** Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio de (1.4),  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  um domínio contendo  $x = 0$  e  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que

$$V(0) = 0 \quad e \quad V(x) > 0 \quad em \quad D - \{0\} \quad (1.5)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad em \quad D \quad (1.6)$$

então,  $x = 0$  é estável. Além disso, se

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{em} \quad D - \{0\} \quad (1.7)$$

então,  $x = 0$  é assintoticamente estável.

**Definição 1.1** Uma função  $V(x)$  definida positiva que satisfaz a condição (1.6) ou (1.7) do Teorema 1.1 é chamada de função de Lyapunov.

**Definição 1.2** Seja  $V(x)$  uma função de Lyapunov. A superfície no espaço de estados

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = c\}$$

é chamada de superfície de Lyapunov ou superfície de nível.

### 1.1.3 Domínio de atração e de estabilidade

Se a origem do sistema é assintoticamente estável, é interessante investigar se existe uma vizinhança ao redor da origem na qual as trajetórias do sistema convergem para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ . Na busca da solução desse problema, é necessário definir invariância positiva de um conjunto, domínio de atração e de estabilidade.

**Definição 1.3** Um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , contendo a origem, é positivamente invariante em relação ao sistema (1.4), se toda trajetória  $\phi(t, x_0)$  do sistema (1.4) com  $x(0) = x_0 \in D$  permanece em  $D$ ,  $\forall t \geq 0$ .

**Definição 1.4** Um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é contrativo em relação ao sistema (1.4) se toda trajetória do sistema (1.4), com condição inicial pertencente a  $D$ , evolui sempre em direção ao interior deste conjunto.

Observe que um conjunto contrativo é sempre positivamente invariante, mas a recíproca não é verdadeira.

**Definição 1.5** Seja  $\phi(t, x_0)$  uma solução de (1.4) com condição inicial  $x_0$  no instante  $t = 0$ . Então, a região de atração é o conjunto dos pontos  $x_0$  tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_0) = 0$ .

Determinar analiticamente a região de atração de um sistema é uma tarefa, em geral, difícil ou, em alguns casos, impossível. Contudo, pode-se determinar uma estimativa da região de atração, ou seja, determinar regiões no espaço de estados nos quais a convergência assintótica das trajetórias do sistema é garantida.

**Definição 1.6** Se para toda condição inicial  $x_0 \in D$  tem-se que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_0) = 0$ , então  $D$  é uma região (ou domínio) de estabilidade assintótica para o sistema (1.4).

É sempre possível determinar uma estimativa da região de estabilidade assintótica à partir da existência de uma função de Lyapunov. Supondo uma função de Lyapunov candidata  $V(x)$  para o sistema (1.4), então o domínio

$$S_c = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c, c > 0\}$$

é uma estimativa da região de estabilidade se  $\dot{V}(x) \leq 0$  para  $\forall x \in S_c$ . Neste caso,  $S_c$  é um conjunto contrativo.

## 1.2 Sistemas lineares com termos não-lineares

### 1.2.1 Descrição dos sistemas

No decorrer dos próximos capítulos serão estudados sistemas que podem ser escritos, de maneira geral, como

$$\delta[x] = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + g(x(t), u(t)) \quad (1.8)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado e  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle. As matrizes  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  pertencem ao conjunto convexo  $\mathcal{P}$  e  $g(\cdot)$  é uma função não-linear. O símbolo  $\delta[\cdot]$  representa a derivada em relação ao tempo para sistemas contínuos e o operador avanço para sistemas discretos no tempo. O conjunto  $\mathcal{P}$  é dado por

$$\mathcal{P} = \left\{ (A, B)(\alpha) : (A, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A, B)_i; \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (1.9)$$

sendo que os vértices  $A_i, B_i, i = 1, \dots, N$ , são conhecidos.

### 1.2.2 Estabilidade

O problema de estabilidade do sistema

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) \quad (1.10)$$

em que  $A(\alpha) \in \mathcal{P}$  pode ser estudado por meio de uma função Lyapunov, pois o sistema (1.10) é uma classe particular do sistema (1.4) com  $B(\alpha) = 0$  e  $g(\cdot) = 0$ . Então, uma candidata a função de Lyapunov para o sistema (1.10) é

$$v(x(t)) = x(t)'Px(t) \quad (1.11)$$

com

$$\dot{v}(x(t)) = x(t)'(A(\alpha)'P + PA(\alpha))x(t) < 0 \quad (1.12)$$

Uma condição suficiente para a estabilidade é dada pela estabilidade quadrática [Bar85]. O lema a seguir apresenta esse resultado.

**Lema 1.4** *Se existir uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que*

$$A_i'P + PA_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.13)$$

*então o sistema (1.10) é estável, com uma função de Lyapunov quadrática dada por (1.11).*

**Observação 1.1** Pelo fato da desigualdade (1.12) ser convexa, é suficiente testar a desigualdade de Lyapunov (1.13) apenas nos vértices do politopo de incertezas para verificar a estabilidade do sistema. Embora, o Lema 1.4 tenha sido apresentado como uma condição apenas suficiente, esse lema caracteriza de maneira necessária e suficiente a estabilidade quadrática e, para o caso precisamente conhecido ( $A(\alpha) = A$ ) é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema.

Para o caso em que o sistema (1.10) é discreto e variante no tempo,

$$x(t+1) = A(\alpha(t))x(t) \quad (1.14)$$

em que  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^N$  é o vetor dos parâmetros incertos variantes no tempo que pertencem ao simplex unitário para todo  $t \geq 0$

$$\mathcal{U}_N = \left\{ \alpha(t) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1, \alpha_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (1.15)$$

e matriz  $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pertencente ao politopo

$$\mathcal{P} = \left\{ A(\alpha(t)) : A(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)A_i, \alpha \in \mathcal{U}_N \right\} \quad (1.16)$$

a estabilidade do sistema pode ser investigada por meio da função de Lyapunov dependente de parâmetros

$$v(x(t)) = x(t)'P(\alpha(t))x(t) \quad (1.17)$$

Note que

$$v(x(t+1)) = x(t+1)'P(\alpha(t+1))x(t+1) \quad (1.18)$$

então, a função diferença  $\Delta v(x(t)) \triangleq v(x(t+1)) - v(x(t))$  é dada por

$$\Delta v(x(t)) \triangleq x(t)'(A(\alpha)'P(\alpha(t+1))A(\alpha) - P(\alpha(t)))x(t) \quad (1.19)$$

Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema (1.14) é dada pela existência de matrizes simétricas definidas positivas  $P(\alpha(t+1)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$A(\alpha)'P(\alpha(t+1))A(\alpha) - P(\alpha(t)) < 0 \quad (1.20)$$

A estabilidade quadrática é baseada na escolha particular  $P(\alpha(t+1)) = P(\alpha(t)) = P$ . O lema a seguir apresenta uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática [GPB91], que é apenas suficiente para a estabilidade do sistema.



**Lema 1.5** *Se existir uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que*

$$A'_i P A_i - P < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.21)$$

*então o sistema (1.14) é estável, com uma função de Lyapunov dada por (1.17).*

Comentário análogo ao da Observação 1.1 também é válido.

Uma condição menos conservadora do que a do Lema 1.5 foi apresentada em [DB01], utilizando a função de Lyapunov (1.18) com uma matriz  $P(\alpha(t))$  na forma afim

$$P(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) P_i, \quad P_i = P'_i > 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad \alpha(t) \in \mathcal{U}_N \quad (1.22)$$

Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetro na forma afim dada por (1.22) é ilustrada pelo seguinte lema [DB01].

**Lema 1.6** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

*i) Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  tais que*

$$A'_i P_j A_i - P_i < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.23)$$

*o sistema (1.14) é estável, com  $P(\alpha(t))$  dada por (1.22) a matriz da função de Lyapunov (1.18);*

*ii) Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  tais que*

$$\begin{bmatrix} P_i & A'_i P_j \\ \star & P_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.24)$$

*o sistema (1.14) é estável, com  $P(\alpha(t))$  dada por (1.22) a matriz da função de Lyapunov (1.18);*

*iii) Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  tais que*

$$\begin{bmatrix} S_i & S_i A'_i \\ \star & S_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.25)$$

*o sistema (1.14) é estável, com  $P(\alpha(t)) = S(\alpha(t))^{-1}$  a matriz da função de Lyapunov (1.18)*

$$S(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) S_i, \quad S_i = S'_i > 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad \alpha(t) \in \mathcal{U}_N \quad (1.26)$$

*iv) Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  e matriz  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que*

$$\begin{bmatrix} G_i + G'_i - S_i & G'_i A'_i \\ \star & S_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.27)$$

*o sistema (1.14) é estável, com  $P(\alpha(t)) = S(\alpha(t))^{-1}$ , em que  $S(\alpha(t))$  é dada por (1.26), a matriz da função de Lyapunov (1.18).*

**Prova:** Para mostrar a equivalência de i) e ii) aplica-se o complemento de Schur na desigualdade (1.23) que resulta diretamente em (1.24). Para obter iii) a partir de ii) basta pré e pós-multiplicar (1.24) por

$$\begin{bmatrix} P_i^{-1} & 0 \\ 0 & P_j^{-1} \end{bmatrix}$$

e fazer a transformação de variáveis  $S_i = P_i^{-1}$ ,  $S_j = P_j^{-1}$ , e vice-versa. Equivalência iii) e iv): se (1.25) tem solução  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , então (1.27) também será factível com  $G_i = G'_i = S_i$ . Se (1.27) é factível, então multiplicando (1.27) à esquerda por

$$T = \begin{bmatrix} -A_i & I \end{bmatrix}$$

e à direita por  $T'$ , tem-se  $S_j - A_i S_i A'_i > 0$  que é o complemento de Schur de (1.25). ■

**Observação 1.2** *A condição de estabilidade quadrática dada pelo Lema 1.5 está contida no Lema 1.6, basta fazer  $P_i = P_j = P$ ,  $i = 1, \dots, N$  em (1.23).*

### 1.2.3 Estabilizabilidade

Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t) \quad (1.28)$$

em que  $(A, B)(\alpha(t)) \in \mathcal{P}$ . Suponha uma lei de controle por realimentação de estados com ganho fixo  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$u(t) = Kx(t) \quad (1.29)$$

O sistema em malha fechada é dado por

$$\dot{x}(t) = (A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K)x(t) \quad (1.30)$$

Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema (1.30) é obtida pela existência de uma função de Lyapunov (1.11), conhecida como estabilizabilidade quadrática, apresentada no seguinte lema [BPG89].

**Lema 1.7** *Se existir uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que*

$$A_i W + W A'_i + B_i Y + Y' B'_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.31)$$

*então o sistema (1.28) é estável com a lei de controle (1.29), cujo ganho é dado por*

$$K = ZW^{-1} \quad (1.32)$$

*sendo  $P = W^{-1}$  a matriz da função de Lyapunov (1.11).*

**Prova:** Considere a função de Lyapunov quadrática (1.11), com  $P = P' > 0$ , então

$$(A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K)'P + P(A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K) < 0 \quad (1.33)$$

Pré e pós-multiplicando (1.33) por  $P^{-1}$  e fazendo as substituições de variáveis  $W = P^{-1}$  e  $Z = KW$ , tem-se

$$A(\alpha(t))W + WA(\alpha(t))' + B(\alpha(t))Z + Z'B(\alpha(t))' < 0 \quad (1.34)$$

Como  $(A, B)(\alpha(t)) \in \mathcal{P}$ , a desigualdade (1.34) é convexa, portanto, a existência de solução para (1.31) é necessária e suficiente para garantir a factibilidade de (1.34). ■

Os resultados da condição do Lema 1.7 podem ser conservadores, pois em alguns casos o sistema (1.28) não admite um ganho fixo estabilizante ou esse ganho não é calculável por meio da condição (1.31). Nos próximos capítulos são apresentadas estratégias de síntese de controladores por realimentação de estados baseadas em ganhos dependentes de parâmetros que podem gerar resultados menos conservadores.

Considera-se agora, o problema de estabilizabilidade para o sistema discreto no tempo

$$x(t+1) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t) \quad (1.35)$$

em que  $(A, B)(\alpha(t)) \in \mathcal{P}$ . Suponha uma lei de controle por realimentação de estados com ganho fixo  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  como em (1.29).

O sistema em malha fechada é dado por

$$x(t+1) = (A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K)x(t) \quad (1.36)$$

De forma análoga ao problema de análise de estabilidade, uma condição suficiente para a estabilidade do sistema (1.36) é a condição resultante da substituição de  $A(\alpha)$  em (1.20) por  $A(\alpha) + B(\alpha)K$ .

Um condição suficiente para a estabilização do sistema (1.35) sujeito à lei de controle (1.29), é dada pela chamada estabilizabilidade quadrática, reproduzida no lema a seguir.

**Lema 1.8** *Se existir uma matriz simétrica definida positiva  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que*

$$\begin{bmatrix} S & SA'_i + YB'_i \\ \star & S \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.37)$$

*então o sistema (1.35) é estável com a lei de controle (1.29), cujo ganho é  $K = YS^{-1}$ , sendo  $P = S^{-1}$  a matriz da função de Lyapunov (1.17).*

**Prova:** Suponha que existe uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$(A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K)'P(A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K) - P < 0 \quad (1.38)$$

Aplicando o complemento de Schur em (1.38), obtém-se

$$\begin{bmatrix} P & (A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K)'P \\ \star & P \end{bmatrix} > 0$$

Multiplicando à esquerda e à direita por

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ \star & P^{-1} \end{bmatrix}$$

e fazendo a troca de variáveis  $P^{-1} = S$  e  $Y = KS$  tem-se

$$\begin{bmatrix} S & SA(\alpha(t))' + YB(\alpha(t))' \\ \star & S \end{bmatrix} > 0 \quad (1.39)$$

Graças à convexidade, é suficiente testar (1.39) apenas nos vértices  $(A, B)_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , como em (1.37). ■

Resultado menos conservador do que o apresentado no Lema 1.8 pode ser obtido utilizando uma estratégia com variáveis de folga [DB01].

**Lema 1.9** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que*

$$\begin{bmatrix} G + G' - S_i & G'A_i' + YB_i' \\ \star & S_j \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.40)$$

então a estabilidade do sistema (1.35) é assegurada pela lei de controle (1.29), com ganho  $K = YG^{-1}$ .

**Prova:** Substituindo  $A_i$  na expressão da estabilidade do sistema autônomo (1.27) por  $A_i + B_iK$  e fazendo a troca de variáveis  $Y = KG$  obtém-se a condição (1.40). ■

Observe que a condição (1.40) contém a estabilizabilidade quadrática (1.37) como um caso particular, bastando fazer  $G = G' = S_i = S_j = S$  em (1.40). Além disso, a matriz da função de Lyapunov está desacoplada da matriz dinâmica do sistema, permitindo que a matriz do ganho seja recuperada a partir da variável extra, tratando por exemplo restrições de estrutura sobre o ganho  $K$  sem impor restrições na função de Lyapunov.



# Controle de sistemas chaveados

## 2.1 Introdução

Sistemas chaveados são uma classe de sistemas híbridos, definidos por vários modos de operação (subsistemas) e uma regra que determina qual modo é ativado a cada instante de tempo [DBPL00]. Por exemplo, dinâmicas chaveadas podem ser encontradas em circuitos elétricos com chaves eletrônicas (conversores de potência) e em sistemas sujeitos a leis de controle chaveadas (por exemplo [KSV91, LM99, Kha02]). Para o caso de sistemas chaveados com subsistemas lineares sujeitos a funções de chaveamento arbitrárias, é importante mencionar que o cômputo de um controlador para cada subsistema de modo a assegurar a estabilidade de cada subsistema isoladamente não é condição suficiente para garantir a estabilidade do sistema sob chaveamentos arbitrários [LM99, LSL<sup>+</sup>03]. Um ganho robusto (fixo) de realimentação de estado que garante a estabilidade do sistema em malha fechada sujeito a chaveamentos arbitrários pode ser computado por meio da condição de estabilizabilidade quadrática [Bar85, BPG89]. Entretanto, um ganho robusto quadraticamente estabilizante muitas vezes não pode ser computado ou, quando computável, frequentemente não é capaz de garantir um bom desempenho ao sistema, sendo interessante a determinação de um conjunto de ganhos (um ganho para cada subsistema linear) de modo que o sistema em malha fechada seja estável para funções de chaveamento arbitrárias.

Além disso, sistemas dinâmicos são frequentemente afetados por algumas não-linearidades, como por exemplo saturação [HL01, TGG07]. Para sistemas sujeitos à saturação dos atuadores, diferentes técnicas de controle podem ser utilizadas, conforme a representação escolhida para a saturação: técnicas de inclusões diferenciais e representação politópica do sistema [GT01, TGG02, HLC02, HTZ06], ou ainda condição modificada de setor [GT05, TPG06].

Do ponto de vista da modelagem, sistemas lineares afetados por elementos não-lineares como blocos do tipo liga-desliga (chaves ideais), saturações, zonas mortas, etc. podem ser representados utilizando modelos lineares por partes [Joh03], em que o modelo que determina a dinâmica do sistema é selecionado por regras no espaço de estados ou por funções do tempo. A estabilidade de sistemas lineares por partes pode ser investigada utilizando a abordagem

baseada em funções de Lyapunov, sendo importantes nesse contexto as funções de Lyapunov múltiplas [LM99] e as funções de Lyapunov lineares por partes [RJ00, Joh03]. A abordagem de Lyapunov também é importante para a síntese de controladores e um problema que merece investigação mais aprofundada é a obtenção de condições de projeto de controladores baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs) [BEFB94] no contexto de sistemas chaveados com subsistemas lineares sujeitos a funções de chaveamento arbitrárias no tempo e com atuadores saturantes.

O objetivo deste capítulo é propor uma condição convexa de projeto de ganhos chaveados de realimentação de estados para sistemas chaveados contínuos no tempo sujeitos a funções de chaveamento arbitrárias e, simultaneamente, com saturação nos atuadores. A condição proposta é descrita por um conjunto de LMIs, estendendo o uso da condição de [GT05] para o caso de sistemas chaveados, incluindo requisitos de desempenho em termos de alocação de pólos e maximizando o domínio de estabilidade do sistema para funções de chaveamento arbitrárias. Os *tradeoffs* entre o tamanho da região de alocação de pólos e o tamanho da região de estabilidade local são também investigados. As condições propostas podem também ser aplicadas a problemas de controle robusto e descentralizado, e para problemas de controle com falha de atuadores.

## 2.2 Definição do problema

Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \quad (2.1)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle e

$$\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{J}, \mathcal{J} = \{1, 2, \dots, N\} \quad (2.2)$$

é uma função de chaveamento que seleciona arbitrariamente as matrizes  $(A, B)_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  do sistema (2.1) que estão ativas em cada instante de tempo.

Assuma que  $\sigma(t)$  e  $x(t)$  estão disponíveis em tempo real para realimentação. Suponha uma lei de controle por realimentação de estados com ganhos chaveados sujeita à saturação

$$u(t) = \text{sat}(K_{\sigma(t)}x(t)), K_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \sigma(t) \in \mathcal{J} \quad (2.3)$$

em que cada elemento do vetor  $u(t)$  é definido como

$$u_{(i)}(t) = \text{sat}(v_{(i)}) = \begin{cases} \rho_{(i)}, & \text{se } v_{(i)} > \rho_{(i)} \\ v_{(i)}, & \text{se } -\rho_{(i)} \leq v_{(i)} \leq \rho_{(i)} \\ -\rho_{(i)}, & \text{se } v_{(i)} < -\rho_{(i)} \end{cases} \quad (2.4)$$

com  $v_{(i)} = K_{(i)\sigma(t)}x(t)$ . Defina a função zona morta como

$$\psi(v_{(i)}) = v_{(i)} - \text{sat}(v_{(i)}) \quad (2.5)$$

em que cada elemento é dado por

$$\psi(v_{(i)}) = \begin{cases} v_{(i)} - \rho_{(i)}, & \text{se } v_{(i)} > \rho_{(i)} \\ 0, & \text{se } -\rho_{(i)} \leq v_{(i)} \leq \rho_{(i)} \\ v_{(i)} + \rho_{(i)}, & \text{se } v_{(i)} < -\rho_{(i)} \end{cases} \quad (2.6)$$

$i = 1, \dots, m; \sigma(t) \in \mathcal{J}$

Considerando (2.3) e (2.5), o sistema em malha fechada pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{cl\sigma(t)}x(t) - B_{\sigma(t)}\psi(K_{\sigma(t)}x(t)) \\ A_{cl\sigma(t)} &\triangleq A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

O objetivo principal deste capítulo é fornecer uma solução para o seguinte problema.

**Problema 2.1** *Determine os ganhos  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  para a lei de controle chaveado com saturação (2.3) e uma região  $\mathcal{E}$  no espaço de estado tais que:*

- i) o sistema saturado (2.7) é estável para qualquer função de chaveamento arbitrária quando inicializado dentro da região  $\mathcal{E}$ ;*
- ii) para o sistema (2.7) operando na região linear (isto é,  $\psi(K_{\sigma(t)}x(t)) = 0$ ), os autovalores de cada subsistema linear em malha fechada  $(A_j + B_jK_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$  pertencem a um círculo  $\mathcal{C}_j$ , mostrado na Figura 2.1, de raio  $r_j$  e centro  $(-(d_j + r_j), 0)$  contido no semi-plano esquerdo do plano complexo, sendo  $d_j$  e  $r_j$  escalares reais estritamente positivos.*

**Observação 2.1** *Note que a propriedade i) descrita no Problema 2.1 está relacionada à estabilidade do sistema saturado em malha fechada (2.7) para funções de chaveamento arbitrárias. Lembre que a escolha de ganhos  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  que garantem que os autovalores de cada subsistema linear  $(A_j + B_jK_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$  estejam no semi-plano esquerdo do plano complexo é uma condição apenas necessária para a estabilidade do sistema no caso de funções de chaveamento arbitrárias [LM99].*

**Observação 2.2** *A propriedade ii) descrita no Problema 2.1 está relacionada ao comportamento do sistema na região linear de operação ( $\psi(K_{\sigma(t)}x(t)) = 0$ ). Neste caso, os autovalores de cada subsistema  $(A_j + B_jK_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$  estão contidos em um círculo  $\mathcal{C}_j$ . Observe que, a cada chaveamento, um novo transitório ocorre e os limitantes de tempo de acomodação e sobressinal desse transitório dependem dos valores de  $d_j$  e  $r_j$ . Além disso, os autovalores de cada subsistema linear podem ser alocados em círculos independentes.*

## 2.3 Preliminares

**Lema 2.1** *Considere o sistema (2.7) sem saturação (isto é,  $\psi(K_{\sigma(t)}x(t)) = 0$ ). Para escalares reais estritamente positivos dados  $d_j, r_j, j = 1, \dots, N$ , se existir uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}, j = 1, \dots, N$  tais que*

$$\begin{bmatrix} A_jW + WA'_j + B_jZ_j + Z'_jB'_j + 2d_jW & A_jW + B_jZ_j + d_jW \\ \star & -r_jW \end{bmatrix} < 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.8)$$



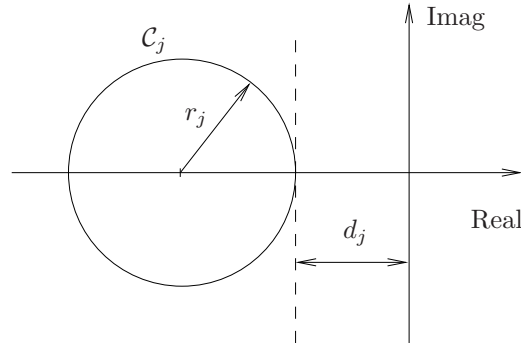


Figura 2.1: Região circular para alocação dos autovalores de  $(A_j + B_j K_j)$ , com raio  $r_j$ , centro  $(-d_j - r_j, 0)$  localizada no semi-plano esquerdo do plano complexo.

então o sistema em malha fechada com ganhos chaveados dados por

$$K_j = Z_j W^{-1}, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

é estável para qualquer função de chaveamento arbitrária  $\sigma(t) \in \mathcal{J}$  e os autovalores de cada subsistema linear  $(A_j + B_j K_j)$  pertencem a  $\mathcal{C}_j$ .

**Prova:** A factibilidade de (2.8) garante a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada, visto que, com  $Z_j = K_j W$ , tem-se

$$(A_j + B_j K_j) W + W (A_j + B_j K_j)' < -2d_j W < 0, \quad j = 1, \dots, N$$

e então o sistema em malha fechada é estável para qualquer função de chaveamento arbitrária  $\sigma(t) \in \mathcal{J}$ . Além disso, pré e pós-multiplicando (2.8) por

$$\begin{bmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & W^{-1} \end{bmatrix}$$

com  $W^{-1} = P$  e usando o complemento de Schur, observa-se que (2.8) é equivalente a

$$\Gamma_j' P \Gamma_j - P < 0$$

$$\Gamma_j = \frac{A_j + B_j K_j + (d_j + r_j) \mathbf{I}}{r_j}$$

o que garante que os autovalores de  $(A_j + B_j K_j)$  pertencem ao círculo de centro  $(-d_j - r_j, 0)$  e raio  $r_j$ . ■

Definindo o conjunto

$$\mathcal{S} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : |K_{(i)\sigma(t)} - G_{(i)\sigma(t)}| x(t) \leq \rho_{(i)}, \quad i = 1, \dots, m; \quad \sigma(t) \in \mathcal{J}\} \quad (2.10)$$

o seguinte lema pode ser enunciado. Este resultado pode ser visto como uma extensão da condição de setor generalizada apresentada em [GT05].

**Lema 2.2** Se  $x(t) \in \mathcal{S}$ , a não-linearidade  $\psi(K_{\sigma(t)}x(t))$  dada por (2.5) satisfaz

$$\psi(K_{\sigma(t)}x(t))' T_{\sigma(t)} [\psi(K_{\sigma(t)}x(t)) - G_{\sigma(t)}x(t)] \leq 0 \quad (2.11)$$

para qualquer matriz  $T_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva.

**Prova:** Considere os três casos a seguir.

**a)**  $-\rho_{(i)} \leq K_{(i)\sigma(t)}x(t) \leq \rho_{(i)}$ . Neste caso, pela definição, tem-se que

$$\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t))' T_{(i,i)\sigma(t)} [\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t)] = 0$$

**b)**  $K_{(i)\sigma(t)}x(t) > \rho_{(i)}$ . Neste caso, tem-se que  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) = K_{(i)\sigma(t)}x(t) - \rho_{(i)}$ . Se  $x(t) \in \mathcal{S}$ , segue que  $K_{(i)\sigma(t)}x(t) - G_{(i)\sigma(t)}x(t) \leq \rho_{(i)}$ , então  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t) = K_{(i)\sigma(t)}x(t) - \rho_{(i)} - G_{(i)\sigma(t)}x(t) \leq 0$  e, como  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) > 0$ , tem-se que

$$\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t))' T_{(i,i)\sigma(t)} [\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t)] \leq 0, \quad \forall T_{(i,i)\sigma(t)} > 0$$

**c)**  $K_{(i)\sigma(t)}x(t) < -\rho_{(i)}$ . Neste caso, tem-se que  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) = K_{(i)\sigma(t)}x(t) + \rho_{(i)}$ . Se  $x(t) \in \mathcal{S}$ , segue que  $K_{(i)\sigma(t)}x(t) - G_{(i)\sigma(t)}x(t) \geq -\rho_{(i)}$ , então  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t) = K_{(i)\sigma(t)}x(t) + \rho_{(i)} - G_{(i)\sigma(t)}x(t) \geq 0$  e, como  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) < 0$ , tem-se que

$$\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t))' T_{(i,i)\sigma(t)} [\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t)] \leq 0, \quad \forall T_{(i,i)\sigma(t)} > 0$$

Em decorrência desses três casos, tem-se que, para todo  $x(t) \in \mathcal{S}$  com  $\psi$  definido por (2.5), a desigualdade

$$\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t))' T_{(i,i)\sigma(t)} [\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t)] \leq 0$$

é verificada  $\forall T_{(i,i)\sigma(t)} > 0, \forall i = 1, \dots, m, \sigma(t) \in \mathcal{J}$  e portanto tem-se (2.11). ■

## 2.4 Resultados principais

Uma solução convexa para o Problema 2.1 é dada no teorema a seguir.

**Teorema 2.1** Dados escalares reais estritamente positivos  $d_j$  e  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , se existir uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Y_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e matrizes diagonais definidas positivas  $S_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $j = 1, \dots, N$  tais que

$$\Omega_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} W & Z'_{(i)j} - Y'_{(i)j} \\ \star & \rho_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.12)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, N$$

$$\Theta_j \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{M} & \mathcal{N} & \mathcal{L} \\ \star & -r_j W & 0 \\ \star & \star & -2S_j \end{bmatrix} < 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= A_j W + W A'_j + B_j Z_j + Z'_j B'_j + 2d_j W \\ \mathcal{N} &= A_j W + B_j Z_j + d_j W \\ \mathcal{L} &= -B_j S_j + Y'_j\end{aligned}$$

então a lei de controle (2.3) com ganhos chaveados dados por  $K_j = Z_j W^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, N$  garante:

*i)* a estabilidade do sistema (2.7) na região elipsoidal

$$\mathcal{E} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)' P x(t) \leq 1\} \quad (2.14)$$

com  $P = W^{-1}$ , para qualquer função de chaveamento  $\sigma(t) \in \mathcal{J}$ ;

*ii)* a inclusão dos autovalores de  $(A_j + B_j K_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$  no círculo  $\mathcal{C}_j$  com centro em  $(-(d_j + r_j), 0)$  e raio  $r_j$ , dado na Figura 2.1, sempre que o sistema opera na região linear (isto é,  $\psi(K_{\sigma(t)} x(t)) = 0$ ).

**Prova:** Primeiramente, observe que  $\Omega_{ij} \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, N$ , nas condições do Teorema 2.1 garante que  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ , com  $\mathcal{E}$  dado por (2.14) e  $\mathcal{S}$  dado por (2.10) [BEFB94]. Seja

$$V(x(t)) = x(t)' P x(t), \quad P = P' > 0, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.15)$$

uma candidata a função de Lyapunov. A derivada temporal de (2.15) ao longo das trajetórias do sistema (2.7) é dada por

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)' (A'_{cl\sigma(t)} P + P A_{cl\sigma(t)}) x(t) - 2x(t)' P B_{\sigma(t)} \psi(K_{\sigma(t)} x(t)) \quad (2.16)$$

Se  $x \in \mathcal{S}$ , então pelo Lema 2.2 tem-se que

$$\dot{V}(x(t)) \leq \dot{V}(x(t)) - 2\psi(K_{\sigma(t)} x(t))' T_{\sigma(t)} \psi(K_{\sigma(t)} x(t)) + 2\psi(K_{\sigma(t)} x(t))' T_{\sigma(t)} G x(t) \quad (2.17)$$

O lado direito da expressão (2.17) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x(t)' & \psi(K_{\sigma(t)})' \end{bmatrix} \Lambda_{\sigma(t)} \begin{bmatrix} x(t) \\ \psi(K_{\sigma(t)}) \end{bmatrix}$$

com

$$\Lambda_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} A'_{cl\sigma(t)} P + P A_{cl\sigma(t)} & -P B_{\sigma(t)} + G'_{\sigma(t)} T_{\sigma(t)} \\ \star & -2T_{\sigma(t)} \end{bmatrix}$$

Pré e pós multiplicando  $\Lambda_{\sigma(t)}$  por

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & T_{\sigma(t)}^{-1} \end{bmatrix}$$

e considerando  $W = P^{-1}$ ,  $S_{\sigma(t)} = T_{\sigma(t)}^{-1}$  e  $Y'_{\sigma(t)} = W G'_{\sigma(t)}$ , segue que

$$\Xi_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} W A'_{cl\sigma(t)} + A_{cl\sigma(t)} W & -B_{\sigma(t)} S_{\sigma(t)} + Y'_{\sigma(t)} \\ \star & -2S_{\sigma(t)} \end{bmatrix}$$

Note que a factibilidade de  $\Theta_j < 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , garante que

$$\Theta_{\sigma(t)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{\sigma(t)} & \mathcal{N}_{\sigma(t)} & \mathcal{L}_{\sigma(t)} \\ \star & -r_{\sigma(t)}W & 0 \\ \star & \star & -2S_{\sigma(t)} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \sigma(t) \in \mathcal{J} \quad (2.18)$$

$$\mathcal{M}_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}W + WA'_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}Z_{\sigma(t)} + Z'_{\sigma(t)}B'_{\sigma(t)} + 2d_{\sigma(t)}W$$

$$\mathcal{N}_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}W + B_{\sigma(t)}Z_{\sigma(t)} + d_{\sigma(t)}W$$

$$\mathcal{L}_{\sigma(t)} = -B_{\sigma(t)}S_{\sigma(t)} + Y'_{\sigma(t)}$$

Aplicando o complemento de Schur em (2.18) obtém-se

$$\Pi_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{M}}_{\sigma(t)} & -B_{\sigma(t)}S_{\sigma(t)} + Y'_{\sigma(t)} \\ \star & -2S_{\sigma(t)} \end{bmatrix} < 0$$

$$\bar{\mathcal{M}}_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}W + WA'_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}Z_{\sigma(t)} + Z'_{\sigma(t)}B'_{\sigma(t)} + 2d_{\sigma(t)}W$$

$$+ \left( A_{\sigma(t)}W + B_{\sigma(t)}Z_{\sigma(t)} + d_{\sigma(t)}W \right) \frac{W^{-1}}{r_{\sigma(t)}} \left( WA'_{\sigma(t)} + Z'_{\sigma(t)}B'_{\sigma(t)} + d_{\sigma(t)}W \right)$$

Note que o termo (1, 1) de  $\Pi_{\sigma(t)} < 0$  é equivalente à condição do Lema 2.1. Finalmente, conclui-se que  $\Pi_{\sigma(t)} < 0$  é uma condição suficiente para  $\Xi_{\sigma(t)} < 0$ .  $\blacksquare$

O resultado do Teorema 2.1 permite a síntese de ganhos distintos (um para cada modo linear) por meio das matrizes  $Z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . A estabilidade é garantida para chaveamento arbitrário pela existência de uma matriz de Lyapunov  $P = W^{-1}$  comum a todos os subsistemas.

## 2.5 Extensões

Trata-se o problema de controle robusto por meio das condições do Teorema 2.1, como descrito no seguinte corolário.

**Corolário 2.1** *Se existe uma solução para o Teorema 2.1 com  $Z_j = Z$ ,  $j = 1, \dots, N$ , então o ganho robusto de realimentação de estado  $K = ZW^{-1}$  satisfaz as propriedades i) e ii) do Teorema 2.1.*

O seguinte corolário fornece um problema de otimização convexa para maximizar a estimativa do domínio de atração da origem.

**Corolário 2.2** *Se existir uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Y_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , matrizes diagonais definidas positivas  $S_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $j = 1, \dots, N$  e um escalar real positivo  $\beta$  resolvendo*

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^* \triangleq \min \beta \\ \text{s.a} \\ \begin{bmatrix} \beta \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ \text{LMIs (2.12) - (2.13)} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

então o menor eixo da região elipsoidal de estabilidade robusta do sistema chaveado  $\mathcal{E}$  é maximizado [BEFB94].

Outro critério para a maximização do conjunto  $\mathcal{E}$  pode ser usado, como por exemplo, a inclusão de um conjunto poliedral, definido como a combinação convexa de vetores pertencentes ao  $\mathbb{R}^n$ , em uma região elipsoidal. O procedimento de otimização é definido como a maximização do parâmetro de escala do conjunto poliedral, como em [GT05].

Os próximos dois corolários fornecem condições baseadas em problemas de otimização convexa para investigar *tradeoffs* entre os parâmetros da região obtida pela alocação de pólos e o tamanho da estimativa do domínio de atração da origem,  $\mathcal{E}$ .

**Corolário 2.3** *Considere  $d_j = d$  e  $r_j = r$ ,  $j = 1, \dots, N$  e um escalar real estritamente positivo  $d$ . Uma solução do Corolário 2.2 para valores de  $r$  pertencentes ao intervalo para o qual o Teorema 2.1 é satisfeito permite obter um compromisso entre  $\beta^*$  (parâmetro relacionado com o tamanho do domínio de atração da origem) e  $r$  (parâmetro do círculo para a alocação dos pólos de malha fechada de cada subsistema linear).*

**Corolário 2.4** *Considere  $d_j = d$  e  $r_j = r$ ,  $j = 1, \dots, N$  e um escalar real estritamente positivo  $r$ . Uma solução do Corolário 2.2 para valores de  $d$  pertencentes ao intervalo para o qual o Teorema 2.1 é satisfeito permite obter um compromisso entre  $\beta^*$  (parâmetro relacionado com o tamanho do domínio de atração da origem) e  $d$  (parâmetro do círculo para a alocação dos pólos de malha fechada de cada subsistema linear).*

Considerando estruturas especiais às matrizes  $W$  e  $Z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  do Corolário 2.2 é possível tratar o problema de controle descentralizado de sistemas chaveados em estudo, conforme o seguinte corolário.

**Corolário 2.5** *Se existe uma solução para o Corolário 2.2 com  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $W$  com estrutura bloco-diagonal, então i) e ii) do Teorema 2.1 são garantidas para ganhos chaveados de realimentação de estado  $K_j = Z_j W^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , com estrutura bloco-diagonal, que pode ser usada para tratar problemas de controle descentralizado.*

Para o problema de controle sujeito a falhas de atuadores, os quais estão também sujeitos a saturação de amplitude, enuncia-se o seguinte corolário.

**Corolário 2.6** *Considere o sistema*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \tilde{B}D_{\sigma(t)}u(t) \quad (2.20)$$

*sujeito a saturação de atuadores (2.6) e uma função de chaveamento arbitrária (2.2). Cada matriz  $D_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  é diagonal com  $m$  elementos, sendo que o  $i$ -ésimo elemento,  $i =$*

$1, \dots, m$  representa o grau da falha do atuador  $\mu_i$  (0 para falha total e 1 para sem falha). Esse sistema pode ser reescrito como um sistema chaveado com saturação nos atuadores

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_{\sigma(t)}u(t), \quad B_{\sigma(t)} = \tilde{B}D_{\sigma(t)} \quad (2.21)$$

Usa-se o Corolário 2.2 diretamente para computar um conjunto de ganhos estabilizantes (um ganho  $K_j$  para cada matriz  $B_j$ ), resolvendo assim, o problema de controle sujeito a saturação e a falhas de atuadores.

## 2.6 Exemplos

**Exemplo 2.1** Considere o sistema chaveado (2.1) com  $N = 6$  subsistemas lineares dados por

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 10 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & 6 \\ 9 & 3 & 8 \end{bmatrix}; \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 1 & 9 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 8 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}; \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_6 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 4 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Este sistema tem  $n = 3$  estados e  $m = 3$  atuadores, cujos valores de saturação em amplitude são dados por  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 10$ . Escolhendo os parâmetros de alocação de pólos dos subsistemas lineares em  $d_j = 1$ ,  $r_j = 3$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , tem-se que Corolário 2.1 não se aplica para este sistema, ou seja, não é possível computar um ganho robusto quadraticamente estabilizante. Por outro lado, as condições do Corolário 2.2 têm como solução

$$\beta^* = \min \beta = 0.4170$$

$$W = \begin{bmatrix} 15.1686 & 6.2250 & -9.6943 \\ 6.2250 & 6.4931 & -6.4038 \\ -9.6943 & -6.4038 & 12.4123 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

sendo a região elipsoidal

$$\mathcal{E}_1 = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)'W^{-1}x(t) \leq 1\}$$

com  $W$  dado por (2.22) uma estimativa para o domínio de atração da origem para qualquer função de chaveamento arbitrária.

É possível restringir a alocação de pólos para este sistema. Assim, mantendo  $d_j = 1$ , e reduzindo  $r_j$  para  $r_j = 0.1$ ,  $j = 1, \dots, 6$  tem-se como solução do Corolário 2.2

$$\beta^* = \min \beta = 1.4612$$

$$W = \begin{bmatrix} 2.4747 & 2.7781 & -2.5364 \\ 2.7781 & 5.3199 & -4.3179 \\ -2.5364 & -4.3179 & 4.7274 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

sendo a região elipsoidal

$$\mathcal{E}_2 = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)'W^{-1}x(t) \leq 1\}$$

com  $W$  dado por (2.23) uma estimativa para o domínio de atração da origem para qualquer função de chaveamento arbitrária neste caso.

A Figura 2.2 mostra a comparação entre as duas regiões de estabilidade local garantidas pelo Corolário 2.2 para cada uma das alocações de pólos. É possível observar que escolhas de  $d_j$  e  $r_j$  que impõem alocações de pólos mais restritivas ao sistema levam a reduções nas estimativas do domínio de atração da origem (i.e. aumento de  $\beta^*$ ).

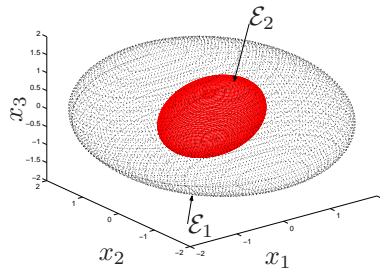


Figura 2.2: Estimativas de domínios de atração da origem para o sistema do Exemplo 2.1 fornecidas pelas condições do Corolário 2.2: domínio  $\mathcal{E}_1$ , obtido para  $d_j = 1$ ,  $r_j = 3$ ,  $j = 1, \dots, 6$  e domínio  $\mathcal{E}_2$ , obtido para  $d_j = 1$ ,  $r_j = 0.1$ ,  $j = 1, \dots, 6$ .

Investigam-se sistematicamente *tradeoffs* entre os parâmetros  $d$  e  $r$ , os quais determinam a região para a alocação de pólos, e o parâmetro  $\beta^*$ , relacionado com o tamanho do domínio de atração da origem, por meio dos Corolários 2.3 e 2.4, como mostram as figuras 2.3 e 2.4. Note que na Figura 2.3, os valores de  $\beta^*$  decrescem (isto é, a estimativa do domínio de atração da origem torna-se menos conservadora) quando o valor de  $r$  cresce, então aumentando  $r$  tem-se condições LMIs em (2.13) menos conservadoras. Na Figura 2.4, tem-se que  $\beta^*$  cresce com o crescimento de  $d$ , logo, valores grandes para  $d$  fornecem mais restrições para as LMIs em (2.13).

**Exemplo 2.2** Este exemplo tem como objetivo a aplicação das condições fornecidas anteriormente a um sistema físico que apresenta chaveamento e saturação. O sistema em questão é um circuito elétrico com um indutor  $L$ , um capacitor  $C$  e um resistor  $R$  conectado em série com uma chave  $S$ , que é ligada e desligada arbitrariamente no tempo, sendo a entrada do circuito o sinal de tensão  $u$ , conforme mostra a Figura 2.5. Circuitos como este podem ser encontrados, por exemplo, em estágios finais de conversores estáticos de potência em que a carga é suposta chaveada [KSV91]. Os valores dos parâmetros são  $L = 1mH$ ,  $C = 100\mu F$  e  $R = 12\Omega$  e supõe-se que a entrada  $u$  é gerada pela realimentação das variáveis de estado  $v_C$  (tensão no capacitor) e  $i_L$  (corrente no indutor) e que  $|u| \leq 100V$ . A estabilização robusta pode ser utilizada como

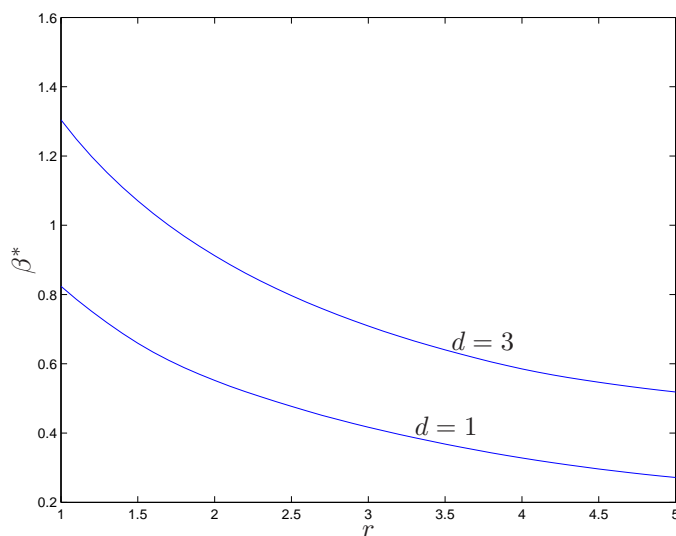


Figura 2.3: Curvas para  $\beta^*$  em função de  $r$ , para  $d = 1$  e  $d = 3$ , obtidas aplicando o Corolário 2.3 para o sistema do Exemplo 2.1.

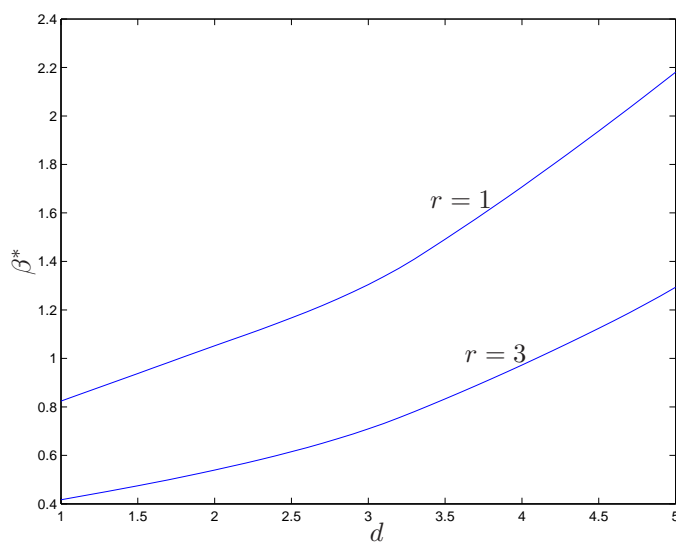


Figura 2.4: Curvas para  $\beta^*$  em função de  $d$ , para  $r = 1$  e  $r = 3$ , obtidas aplicando o Corolário 2.4 para o sistema do Exemplo 2.1.



uma das etapas da ação de controle, deixando por exemplo a tarefa de seguir uma referência para outro tipo de controlador, a ser acrescentado em um estágio posterior.

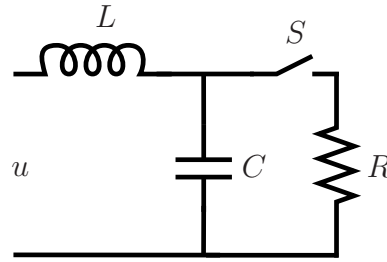


Figura 2.5: Circuito elétrico chaveado com entrada saturante em amplitude.

Considerando o vetor de estados  $x = [v_C \ i_L]'$ , este circuito pode ser modelado por dois subsistemas lineares dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \quad \text{S ligada}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \quad \text{S desligada}$$

Substituindo os valores dos parâmetros do circuito, tem-se

$$A_1 = \begin{bmatrix} -833.3333 & 10000 \\ -1000 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10000 \\ -1000 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Aplicando as condições do Corolário 2.1 para  $\rho_1 = 100$  e  $d_j = 1000$ ,  $r_j = 500$ ,  $j = 1, 2$ , não foi encontrado um ganho robusto quadraticamente estabilizante. Entretanto, para um conjunto de  $Y_j$ ,  $S_j$ ,  $j = 1, 2$ , as condições do Corolário 2.2 têm como solução

$$\beta^* = \min \beta = 0.1916$$

$$W = \begin{bmatrix} 6911.4471 & -748.7401 \\ -748.7401 & 86.3931 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

estabilizando o circuito para qualquer chaveamento arbitrário por meio dos ganhos

$$K_1 = [0.8750 \ -3.0000], \quad K_2 = [0.8405 \ -2.5494]$$

Uma estimativa do domínio de atração da origem é descrita pela região

$$\mathcal{E} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)'W^{-1}x(t) \leq 1\} \quad (2.25)$$

com  $W$  dada por (2.24), mostrada na Figura 2.6.

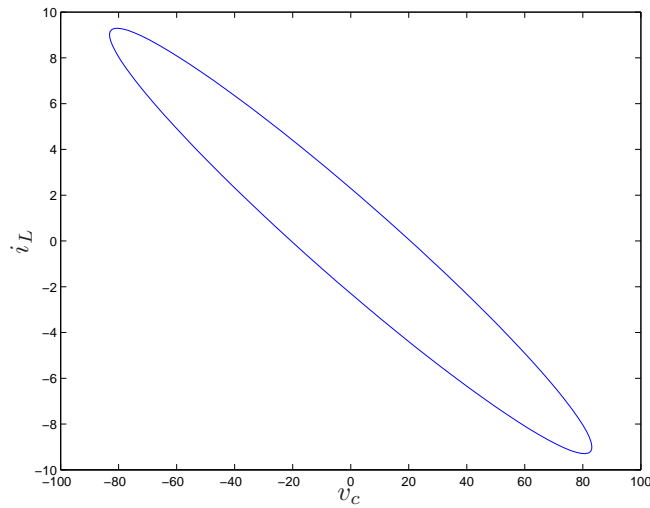


Figura 2.6: Domínio de estabilidade (2.25) do circuito chaveado da Figura 2.5 para chaveamentos arbitrários obtido pelas condições do Corolário 2.1 para parâmetros de alocação de pólos  $d_j = 1000$ ,  $r_j = 500$ ,  $j = 1, 2$ .

**Exemplo 2.3** Considere o problema de controle sujeito a falha de atuadores e saturação, descrito no Corolário 2.6. As matrizes do sistema são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1712 & 0 & 0.0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.0732 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.0732 \end{bmatrix}$$

Estas matrizes foram retiradas do modelo do avião AC1 em [LL03]. O par  $(A, B)$  representa o sistema sujeito a falha parcial do atuador  $u_2$ , isto é, o elemento  $(2, 2)$  em  $B$  pode variar entre 1 (atuador operando 100%) e 0.5 (atuador com 50% de sua força).

Para  $d_1 = d_2 = 1$  e  $r_1 = r_2 = 1$ , utilizando o Corolário 2.2 tem-se que  $\beta^* = 31.0202$  com o seguintes ganhos de controle

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.1544 & 0.1840 & 1.5188 & -0.0581 & -1.0552 \\ -0.2135 & -1.7376 & -0.3102 & -0.1941 & 0.2590 \\ 1.8391 & 0.5610 & 4.8911 & 1.1982 & -2.8743 \end{bmatrix}$$

para o sistema operando sem falha nos atuadores e

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.1538 & 0.1649 & 1.5117 & -0.0662 & -1.0545 \\ 0.0804 & -2.0545 & -0.5826 & -0.2282 & 0.4336 \\ 1.8166 & 0.5168 & 4.9112 & 1.2002 & -2.8801 \end{bmatrix}$$

para o sistema operando com falha de 50% em  $u_2$ . O Corolário 2.1 também fornece uma solução para este sistema, para  $d_1 = d_2 = 1$  e  $r_1 = r_2 = 1$ , a solução é  $\beta^* = 31.9244$  e o ganho robusto de realimentação de estado é

$$K = \begin{bmatrix} 1.0956 & 0.1244 & 1.5326 & -0.0480 & -1.0455 \\ 0.1619 & -2.4676 & -0.1246 & -0.1745 & 0.1511 \\ 1.8342 & 0.4193 & 4.9722 & 1.2006 & -2.9199 \end{bmatrix}$$

A Figura 2.7 mostra o compromisso entre  $\beta^*$  e  $r$  para  $d = 1$ , encontrados pelos corolários 2.1 e 2.3. Para ambos corolários, é evidente que o aumento de  $r$  (relaxação das restrições de alocação de pólos) contribui para estimativas menos conservadoras do domínio de atração da origem. Além disso, o Corolário 2.3 fornece sempre condições menos conservadoras que o Corolário 2.1, visto que o Corolário 2.1 é um caso particular.

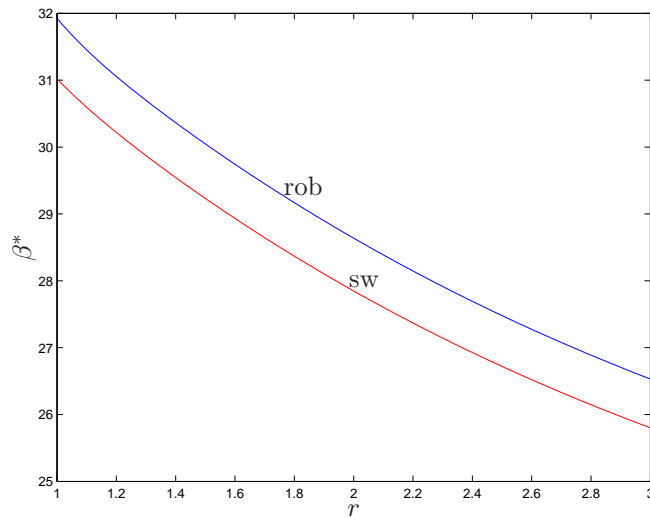


Figura 2.7: Curvas de  $\beta^*$  em função de  $r$ , para  $d = 1$ , obtidas por meio do Corolário 2.1 (rob) e Corolário 2.3 (sw) para o sistema do Exemplo 2.3.

## 2.7 Conclusão

Este capítulo apresentou um problema convexo de otimização com restrições do tipo LMI cuja solução permite calcular um conjunto de ganhos de realimentação de estados e uma região de estabilidade no espaço de estados para um sistema chaveado com subsistemas lineares sujeito a funções de chaveamento arbitrárias e à saturação de atuadores. As condições propostas incluem especificações de alocação de pólos dos subsistemas lineares do sistema chaveado, impondo limitantes para as respostas transitórias do sistema sempre que o sistema opera na região linear. A condição de projeto proposta permite computar controladores para sistemas dinâmicos sujeitos a não-linearidades muito comuns na prática (chaveamento e saturação) por meio de procedimentos de otimização convexa. Os *tradeoffs* entre especificações de limite para a resposta

---

transitória e o tamanho da região de estabilidade podem também ser investigados. Além disso, as condições propostas podem ser usadas para tratar problemas de falhas de atuadores bem como problemas de controle robusto.



# Estabilidade absoluta baseada em funções de Lur'e polinomiais

## 3.1 Introdução

Utiliza-se a metodologia baseada em funções de Lyapunov para investigar a estabilidade de sistemas dinâmicos sujeitos a não-linearidades pertencentes a um setor, pelo fato desta produzir condições na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs), que podem ser resolvidas em tempo polinomial com convergência global [BEFB94, GNLC95, Stu99]. Por exemplo, a estabilidade de sistemas não-lineares com não-linearidades dependentes do estado pertencentes a setores, pode ser investigada por uma função de Lyapunov integral (chamada função de Persidskii [Per69]), implicando que a existência de uma solução diagonal definida positiva da desigualdade de Lyapunov é suficiente para garantir a estabilidade para todas as funções não-lineares pertencentes ao setor. Para essa classe de sistemas não-lineares, a *S-procedure* e as funções Lyapunov quadráticas podem ser usadas para verificar a estabilidade absoluta, o que estabelece uma relação com o critério do círculo [BEFB94]. Funções de Lyapunov quadráticas nos estados e integrais com relação as não-linearidades (conhecidas como funções de Lur'e) são associadas ao critério de Popov, interpretado no domínio da frequência como a positividade estrita da função de transferência [BEFB94, Pop61, Wil71]. No contexto de síntese de controle, o critério de Popov e do círculo têm sido investigados para prover condições de projeto de realimentação não-linear baseadas em LMIs [AK01, ALK03, CTQ08].

Entretanto, quando tratam-se de não-linearidades de setor, a maioria das abordagens não leva em conta que as matrizes do sistema podem estar sujeitas a incertezas paramétricas. Nesse caso, abordagens baseadas em matrizes independentes de parâmetro na função de Lyapunov levam a resultados conservadores. No contexto de estabilidade robusta de sistemas lineares sujeito a incertezas, o conservadorismo dos resultados obtidos por meio de funções de Lyapunov constantes é reduzido ao utilizarem-se funções de Lyapunov dependentes de parâmetros de forma afim [GAC96, GdOH98, PABB00, RP02]. Mais recentemente, mostrou-se que se existe uma solução para uma LMI dependente de parâmetro com parâmetros em um conjunto compacto então, sem

perda de generalidade, existe uma solução dependente de parâmetros polinomial [Bli04]. Condições para construir tais soluções são dadas em [CGTV05, OP06, HAPL04, SH06]. O estudo de estabilidade absoluta de sistemas incertos baseado em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros é um problema que merece investigação.

O principal objetivo deste capítulo é a análise de estabilidade de sistemas com matrizes incertas invariantes no tempo pertencentes a um politopo e que são sujeitas a não-linearidades dependentes do estado pertencentes a uma classe geral de setores. As condições propostas baseiam-se na factibilidade de LMIs dependentes de parâmetros obtidas por meio de uma função de Lur'e dependente de parâmetros cuja a solução garante a estabilidade para todo o domínio de incertezas e para todas as não-linearidades pertencentes ao setor. É mostrado que, sem perda de generalidade, a solução de tais LMIs dependentes de parâmetros é dada por matrizes polinomiais homogêneas dependentes de parâmetros. São apresentadas condições necessárias e suficientes para construir essas matrizes com grau arbitrário nos parâmetros, usando relaxações LMIs (de precisão crescente) menos conservadoras baseadas no Teorema de Pólya [HLP52, OP05]. As condições propostas contêm como caso particular as condições de [dOGH02], que visam computar a estabilidade absoluta de sistemas precisamente conhecidos, e as condições de [OP06], para estabilidade robusta de sistemas politópicos incertos. É também provada uma condição convexa para a síntese de controladores estabilizantes robustos por realimentação de estados linear e não-linear para sistemas com funções não-lineares no estado. Os resultados, nesse caso, são válidos também para parâmetros arbitrariamente variantes no tempo.

## 3.2 Definição do problema

Considere o sistema não-linear contínuo no tempo

$$\dot{x} = A(\alpha)x + \tilde{A}(\alpha)f(x) + B(\alpha)u \quad (3.1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é entrada de controle, as matrizes  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são incertas, invariantes no tempo e pertencem ao politopo  $\mathcal{P}$  dado por

$$\mathcal{P} = \left\{ (A, \tilde{A}, B)(\alpha) : (A, \tilde{A}, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A, \tilde{A}, B)_i, \alpha \in \mathcal{U} \right\} \quad (3.2)$$

com vértices  $A_i, \tilde{A}_i, B_i, i = 1, \dots, N$ . O vetor  $\alpha \in \mathbb{R}^N$  é o vetor de incertezas paramétricas invariantes no tempo pertencente ao simplex unitário

$$\mathcal{U} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (3.3)$$

O vetor  $f(x)$  é o vetor de funções não-lineares no estado, radialmente ilimitadas, pertencentes à classe geral de funções de setor dadas por [BEFB94, dOGH02, Kha02]

$$\mathcal{F}(\gamma, \delta) = \left\{ x \rightarrow f(x) = [f_1(x_1) \dots f_n(x_n)]' : \gamma_i \tau^2 \leq f_i(\tau) \tau \leq \delta_i \tau^2, 0 < \gamma_i \leq 1 \leq \delta_i, \right. \\ \left. f_i(0) = 0, i = 1, \dots, n \right\} \quad (3.4)$$

Note que cada componente  $f_i(\cdot)$  atua de forma independente no  $i$ -ésimo elemento do vetor de estados  $x$ , ou seja,  $f_i(x_i)$ . Observe que  $\mathcal{F}(\gamma, \delta)$  pode também representar todo o primeiro e o terceiro quadrante, escolhendo-se  $\gamma_i = \beta$ ,  $\delta_i = 1/\beta$  e  $\lim \beta \rightarrow 0^+$ . Devido à interpretação geométrica da definição (3.4) diz-se que uma função pertencente a  $\mathcal{F}(\gamma, \delta)$  encontra-se no setor  $\mathcal{F}(\gamma, \delta)$ .

O objetivo deste capítulo é tratar os seguintes problemas.

**Problema 3.1** *Determinar se o sistema não-linear (3.1), com  $u = 0$ , é globalmente assintoticamente estável (GAS) para  $x = 0$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ . Em outras palavras, determinar se o sistema autônomo é robustamente (em relação a  $\alpha$ ) absolutamente (em relação a  $f(x)$ ) globalmente assintoticamente estável para  $x = 0$ .*

**Problema 3.2** *Considerando que  $x$  e  $f(x)$  são disponíveis para a realimentação por meio da lei de controle*

$$u = Kx + \tilde{K}f(x) \quad (3.5)$$

*determinar  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que o sistema em malha fechada*

$$\dot{x} = A_{cl}(\alpha)x + \tilde{A}_{cl}(\alpha)f(x), \quad A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K, \quad \tilde{A}_{cl}(\alpha) = \tilde{A}(\alpha) + B(\alpha)\tilde{K} \quad (3.6)$$

*é GAS para  $x = 0$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ .*

### 3.3 Preliminares

**Teorema 3.1** *Considere uma LMI dependente de parâmetros escrita como*

$$G(\xi, \alpha) = G_0(\alpha) + \xi_1 G_1(\alpha) + \dots + \xi_M G_M(\alpha) > 0 \quad (3.7)$$

*em que  $\alpha \in \mathcal{U}$ . Suponha que  $G_i(\alpha)$ ,  $i = 0, \dots, M$  são funções contínuas. Se  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$  existe uma solução dependente de parâmetros  $\xi(\alpha) \in \mathbb{R}^M$  tal que  $G(\xi(\alpha), \alpha) > 0$ , então existe uma solução polinomial homogênea  $\xi^*(\alpha) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^M$  tal que,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ ,  $G(\xi^*(\alpha), \alpha) > 0$ .*

**Prova:** Em [Bli04], prova-se que, com a hipótese de continuidade de  $G_i(\alpha)$ , se existir uma solução  $\xi(\alpha) \in \mathbb{R}^M$  para a LMI dependente de parâmetros (3.7), então existe, sem perda de generalidade, uma solução polinomial  $\xi^{**}(\alpha)$  tal que,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ ,  $G(\xi^{**}(\alpha), \alpha) > 0$ . Sendo  $g$  o maior grau possível dentre os monômios de  $\xi^{**}(\alpha)$ , tem-se

$$\xi^{**}(\alpha) = \sum_{0 \leq \beta_1 + \dots + \beta_N \leq g, \beta_i \geq 0} c_{\beta_1, \dots, \beta_N} \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_N^{\beta_N}$$



Considere agora o seguinte polinômio homogêneo de grau  $g$  denotado por  $\xi^*(\alpha)$ :

$$\xi^*(\alpha) = \sum_{0 \leq \beta_1 + \dots + \beta_N \leq g, \beta_i \geq 0} c_{\beta_1, \dots, \beta_N} \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_N^{\beta_N} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^{g - \sum_i \beta_i}$$

Note que  $\xi^*(\alpha)$  coincide com  $\xi^{**}(\alpha)$  em  $\mathcal{U}$ . Portanto, o polinômio homogêneo  $\xi^*(\alpha)$  é uma solução para a LMI dependente de parâmetros (3.7) para qualquer valor de  $\alpha \in \mathcal{U}$ . ■

Mais detalhes sobre o resultado apresentado no Teorema 3.1 podem ser encontrados em [BOMP06].

Combinando o Teorema 3.1 e os resultados de [dOGH02], uma condição suficiente para resolver o Problema 3.1 é apresentada no próximo teorema.

**Teorema 3.2** *Dada uma matriz diagonal  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$ ,  $\Delta = \text{diag}\{\delta_i\}$ , com  $0 < \gamma_i \leq 1 \leq \delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , se  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ , se existe uma matriz diagonal definida positiva polinomial homogênea  $P_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz simétrica polinomial homogênea  $W_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que*

$$W_g(\alpha) + P_g(\alpha)\Gamma > 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11}(\alpha) & \mathcal{T}_{12}(\alpha) \\ \star & \mathcal{T}_{22}(\alpha) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.9)$$

com

$$\mathcal{T}_{11}(\alpha) \triangleq \tilde{A}(\alpha)'P_g(\alpha) + P_g(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - Q_g(\alpha)$$

$$\mathcal{T}_{12}(\alpha) \triangleq \tilde{A}(\alpha)'W_g(\alpha) + P_g(\alpha)A(\alpha) + \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta)Q_g(\alpha)$$

$$\mathcal{T}_{22}(\alpha) \triangleq A(\alpha)'W_g(\alpha) + W_g(\alpha)A(\alpha) - \Gamma\Delta Q_g(\alpha)$$

então o sistema (3.1), com  $u = 0$ , é GAS para  $x = 0$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ .

**Prova:** Seja a função de Lur'e dependente de parâmetros uma candidata a função de Lyapunov

$$v(x) = x'W(\alpha)x + 2 \sum_{i=1}^n p_{ii}(\alpha) \int_0^{x_i} f_i(\tau) d\tau \quad (3.10)$$

De (3.4), tem-se que

$$\int_0^{x_i} \gamma_i \tau d\tau \leq \int_0^{x_i} f_i(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

implicando que a existência de uma matriz simétrica  $W(\alpha)$  e uma matriz diagonal definida positiva  $P(\alpha)$  tais que

$$W(\alpha) + P(\alpha)\Gamma > 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{U} \quad (3.12)$$

com  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$ , é suficiente para garantir que  $v(x) > 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ ,  $\forall x \neq 0$ . A derivada temporal de (3.10) ao longo de qualquer trajetória do sistema (3.1) com  $u = 0$  resulta em

$$\dot{v}(x) = \eta' \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11}(\alpha) & \mathcal{S}_{12}(\alpha) \\ \star & \mathcal{S}_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \eta$$

com  $\eta' = [ f(x)' \quad x' ]$  e

$$\mathcal{S}_{11}(\alpha) \triangleq \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha)$$

$$\mathcal{S}_{12}(\alpha) \triangleq \tilde{A}(\alpha)'W(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha)$$

$$\mathcal{S}_{22}(\alpha) \triangleq A(\alpha)'W(\alpha) + W(\alpha)A(\alpha)$$

Para toda  $f(x) \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ , tem-se que

$$\sum_{i=1}^n (f_i(x_i) - \gamma_i x_i) q_{ii}(\alpha) (f_i(x_i) - \delta_i x_i) \leq 0$$

é válido  $\forall q_{ii}(\alpha) > 0, \forall \alpha \in \mathcal{U}$ . Logo,

$$\Theta \triangleq \eta' \begin{bmatrix} Q(\alpha) & -\frac{1}{2}(\Gamma + \Delta)Q(\alpha) \\ \star & \Gamma\Delta Q(\alpha) \end{bmatrix} \eta \leq 0$$

para qualquer  $Q(\alpha) = \text{diag}\{q_{ii}(\alpha)\}$ , para  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$  e  $\Delta = \text{diag}\{\delta_i\}$ , com  $0 < \gamma_i \leq 1 \leq \delta_i$ . Visto que  $\dot{v}(x) \leq \dot{v}(x) - \Theta$ , então, se  $\dot{v}(x) - \Theta < 0$ , tem-se que,  $\forall \eta \neq 0$ , a existência de uma matriz  $W(\alpha)$  simétrica, e matrizes  $P(\alpha)$  e  $Q(\alpha)$  diagonais definidas positivas tais que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11}(\alpha) - Q(\alpha) & \mathcal{S}_{12}(\alpha) + \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta)Q(\alpha) \\ \star & \mathcal{S}_{22}(\alpha) - \Gamma\Delta Q(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{U} \quad (3.13)$$

garante que  $\dot{v}(x) < 0 \forall \alpha \in \mathcal{U}, \forall f \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ . Portanto, se as LMIs dependentes de parâmetros (3.12) e (3.13) possuem uma solução dada por  $P(\alpha)$ ,  $Q(\alpha)$  e  $W(\alpha)$ , então  $v(x)$  em (3.10) é uma função de Lur'e que assegura a estabilidade absoluta robusta para o sistema. Finalmente, o Teorema 3.1 garante que se existem  $P(\alpha)$ ,  $Q(\alpha)$  e  $W(\alpha)$  soluções para (3.13), então existem matrizes polinomiais homogêneas  $P_g(\alpha)$ ,  $Q_g(\alpha)$  e  $W_g(\alpha)$  que também solucionam (3.13). ■

Na sequência, algumas notações e definições são introduzidas para construir matrizes polinomiais homogêneas de grau arbitrário que resolvem o Teorema 3.2.

## Notações e definições

Uma matriz polinomial homogênea  $P_g(\alpha)$  de grau arbitrário  $g$  pode ser escrita como

$$P_g(\alpha) = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} P_{\mathcal{K}}, \quad k = k_1 k_2 \cdots k_N \quad (3.14)$$

em que  $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N}$ ,  $\alpha \in \mathcal{U}$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}_+$  (inteiros não negativos),  $i = 1, \dots, N$  são os monômios, e  $P_{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $k \in \mathcal{K}(g)$  são matrizes simétricas a ser determinadas. Por definição,  $\mathcal{K}(g)$  é o conjunto das  $N$ -uplas obtidas como todas as possíveis combinações de inteiros não-negativos  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tais que  $k_1 + k_2 \cdots k_N = g$ . Sendo  $N$  o número de vértices do politopo  $\mathcal{P}$ , o número de elementos em  $\mathcal{K}(g)$  é dado por

$$J(g) = \frac{(N + g - 1)!}{g!(N - 1)!}$$

Por exemplo, seja um polinômio homogêneo de grau  $g = 3$  com  $N = 2$  variáveis, tem-se que  $\mathcal{K}(3) = \{03, 12, 21, 30\}$  (assim  $J(3) = 4$ ), que corresponde a forma genérica  $P_3(\alpha) = \alpha_2^3 P_{03} + \alpha_1 \alpha_2^2 P_{12} + \alpha_1^2 \alpha_2 P_{21} + \alpha_1^3 P_{30}$ . Note que, para  $g = 0$  em (3.14),  $P_0(\alpha) = P_0$  que é uma matriz constante.

Define-se, para  $N$ -uplas  $k, k'$ , que  $k \succeq k'$  se  $k_i \geq k'_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . As operações de soma ( $k + k'$ ) e subtração ( $k - k'$ ) são realizadas componente a componente. Considere também a seguinte definição para  $N$ -uplas  $e_i$  e o coeficiente  $\pi(k)$

$$e_i = 0 \dots 0 \underbrace{1}_{i\text{-ésimo}} 0 \dots 0, \quad \pi(k) \triangleq (k_1!)(k_2!) \dots (k_N!)$$

### 3.4 Resultados principais

Uma condição convexa de dimensão finita necessária e suficiente, solução para o Teorema 3.2, é apresentada no teorema seguinte.

**Teorema 3.3** *Dadas matrizes diagonais  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$ ,  $\Delta = \text{diag}\{\delta_i\}$ , com  $0 < \gamma_i \leq 1 \leq \delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , existirem matrizes polinomiais homogêneas de grau arbitrário  $g$  solução do Teorema 3.2 se, e somente se, existir matrizes diagonais  $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes simétricas  $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $k \in \mathcal{K}(g)$ , e  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tais que*

$$\mathcal{N}_{1k} \triangleq \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \succeq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} (P_{k-k'}) > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d) \quad (3.15)$$

$$\mathcal{N}_{2k} \triangleq \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \succeq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} (Q_{k-k'}) > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d) \quad (3.16)$$

$$\mathcal{M}_{1k} \triangleq \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} (W_{k-k'-e_i} + \Gamma P_{k-k'-e_i}) > 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d+1) \quad (3.17)$$

$$\mathcal{M}_{2k} \triangleq \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} \\ \star & \mathcal{X}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d+1) \quad (3.18)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{11} &\triangleq \tilde{A}'_i P_{k-k'-e_i} + P_{k-k'-e_i} \tilde{A}_i - Q_{k-k'-e_i} \\ \mathcal{X}_{12} &\triangleq \tilde{A}'_i W_{k-k'-e_i} + P_{k-k'-e_i} A_i + \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta) Q_{k-k'-e_i} \\ \mathcal{X}_{22} &\triangleq A'_i W_{k-k'-e_i} + W_{k-k'-e_i} A_i - \Gamma \Delta Q_{k-k'-e_i} \end{aligned}$$

**Prova:** Se existe, para um dado grau  $g$ , uma matriz simétrica polinomial homogênea  $P_g(\alpha) > 0$  para todo  $\alpha \in \mathcal{U}$ , então para qualquer  $d \in \mathbb{Z}_+$

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)^d P_g(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}(g+d)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_N^{k_N} \mathcal{N}_{1k}, \quad k = k_1 k_2 \dots k_N \quad (3.19)$$

em que  $\mathcal{N}_{1k}$ , dado por (3.15) é uma matriz de grau  $g+d$  definida positiva. Usando a extensão do Teorema de Pólya para o caso matricial [OP05, Sch03, Sch05], existe um  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tal que (3.19) possui todos os termos  $\mathcal{N}_{1k} > 0$ ,  $k \in \mathcal{K}(g+d)$ . Por outro lado, se  $\mathcal{N}_{1k} > 0$ , então  $P_g(\alpha) > 0 \forall \alpha \in \mathcal{U}$ . Aplica-se o mesmo procedimento para demonstrar que (3.16), (3.17) e (3.18) são necessárias e suficientes (para  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande) para garantir que  $Q_g(\alpha) > 0$ , e que (3.8) e (3.9) são factíveis  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ . ■

Observe que no Teorema 3.3, o incremento de  $d$  permite reduzir o conservadorismo dos resultados devido às relaxações das LMIs (sem aumentar o número de variáveis de decisão para um dado grau  $g$ ). Além disso, se as LMIs do Teorema 3.3 são factíveis para  $\hat{d} \in \mathbb{Z}_+$ , então essas LMIs são factíveis para qualquer  $d > \hat{d}$ , pois as LMIs para  $\hat{d} + 1$  podem ser escritas como combinações positivas das LMIs para  $\hat{d}$ . O uso de graus maiores de  $g$  para as variáveis matriciais do Teorema 3.3 introduz mais variáveis escalares ao problema, o que pode também reduzir o conservadorismo dos resultados (ver [OP07]). O número de variáveis escalares para solucionar o Teorema 3.3 é  $\mathcal{V} = (2n + n(n+1)/2)J(g)$  e o número de linhas de LMI é  $\mathcal{R} = 2nJ(g+d) + 3nJ(g+d+1)$ . Usando algoritmos baseados em pontos interiores como o *LMI Control Toolbox* do Matlab [GNLC95], soluciona-se este problema em tempo polinomial, proporcional à  $\mathcal{V}^3 \mathcal{R}$ .

As condições do Teorema 3.3 podem ser especializadas para a análise de estabilidade robusta de sistemas lineares definindo a matriz  $\tilde{A}_i$  e a matriz de coeficientes  $P_k$  iguais a zero. Nesse caso, a condição (3.17) garante que  $W_g(\alpha) > 0$  e a condição (3.18), com a escolha  $\Gamma = \Delta = \mathbf{I}$ , torna-se necessária e suficiente para solucionar  $A(\alpha)'W_g(\alpha) + W_g(\alpha)A(\alpha) < 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{U}$ . Recuperam-se dessa forma os resultados de [OP06] para análise de estabilidade robusta.

Com o Teorema 3.3 é possível estudar a estabilidade robusta absoluta do sistema (3.1) com  $A(\alpha) = 0$  e  $u = 0$ . Definindo as matrizes  $A_i$  iguais a zero e  $\tilde{A}_i = A$ , e escolhendo  $g = 0$  (isto é, variáveis matriciais constantes), as condições do Teorema 3.3 tornam-se as mesmas de [dOGH02]. Entretanto, o uso de matrizes independentes de parâmetros no Teorema 3.3 para tratar a análise de estabilidade para matrizes incertas  $\tilde{A}(\alpha)$  podem levar a resultados conservadores. Por outro lado, resultados progressivamente menos conservadores são obtidos pelo incremento de  $g$  e  $d$ , graças à formulação geral das condições do Teorema 3.3.

Suponha que (3.15)-(3.18) são factíveis para  $A_i = \mathbf{0}$ , obtendo como solução matrizes que permitem construir  $P_g(\alpha)$ ,  $Q_g(\alpha)$  e  $W_g(\alpha)$ . A interpretação no domínio da frequência dada em [dOGH02] para o caso de sistema com matrizes precisamente conhecidas é diretamente aplicável para o caso de matrizes sujeitas a incertezas abordadas neste capítulo. Por exemplo,

a factibilidade do Teorema 3.3 é equivalente ao fato de a função de transferência

$$M(s, \alpha) = \left( \frac{1}{2}Q_g(\alpha)(\Gamma - \Delta) - P_g(\alpha)\tilde{A}(\alpha)\Gamma \right) \left( s\mathbf{I} - \tilde{A}(\alpha) \right)^{-1} \tilde{A}(\alpha) + \left( \frac{1}{2}Q_g(\alpha) - P_g(\alpha)\tilde{A}(\alpha) \right)$$

ser estritamente positiva real (ver [dOGH02, Theorem 3]). Além disso, seguindo [dOGH02, Lemma 9], se o critério do círculo ou de Popov são satisfeitos, então o Teorema 3.3 será factível.

É também interessante mencionar que ao assumir  $A_i = \mathbf{0}$  e a matriz de coeficientes  $W_k = \mathbf{0}$  no Teorema 3.3 é possível realizar a análise de estabilidade de sistemas não-lineares incertos autônomos (3.1) por meio de uma função de Lur'e dependente de parâmetros, a qual, nesse caso, é uma função puramente integral (também chamada de função de Persidskii). Portanto, o Teorema 3.3 reduz-se a um teste de estabilidade robusta diagonal de  $\tilde{A}(\alpha)$ . Adicionalmente, usando o Teorema 3.3 com matriz de coeficientes  $P_k = \mathbf{0}$ , ou seja, com a função de Lur'e reduzida a uma função puramente quadrática, tem-se, de [dOGH02, Lemma 11], que a factibilidade de (3.16)-(3.18) é equivalente ao fato de que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência

$$M(s, \alpha) = \frac{1}{2}Q_g(\alpha)^{1/2}(\Gamma - \Delta) \left( s\mathbf{I} - \frac{1}{2}\tilde{A}(\alpha)(\Gamma + \Delta) \right)^{-1} \tilde{A}(\alpha)Q_g(\alpha)^{-1/2}$$

é menor que um,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ .

Como uma observação final, considera-se o caso em que os parâmetros do setor  $\mathcal{F}(\gamma, \delta)$  não são conhecidos. Nesse caso, utilizam-se as condições do Teorema 3.3 também para otimizar os parâmetros do setor, ou seja, determinar o maior setor para o qual o Teorema 3.3 garante a estabilidade do sistema. Consequentemente, o sistema suportará uma classe maior de perturbações  $f(\cdot)$ , apresentando uma maior robustez em relação às não-linearidades limitadas pelo setor. Como por exemplo, o problema de estabilidade local de um sistema sujeito a saturação de amplitude nas variáveis de estado pode ser representado escolhendo  $\Delta = \mathbf{I}$  e  $\Gamma = \gamma\mathbf{I}$  em (3.4). Neste caso, os melhores parâmetros do setor dados pelas condições do Teorema 3.3 para representar a saturação são obtidos solucionando o problema de otimização

$$\begin{cases} \gamma^* \triangleq \min \gamma \\ \text{s.a} \\ \text{LMIs (3.15)-(3.18)} \end{cases} \quad (3.20)$$

Uma solução convexa para o Problema 3.2 é dada no próximo teorema.

**Teorema 3.4** *Dadas matrizes diagonais  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$ ,  $\Delta = \text{diag}\{\delta_i\}$ , com  $0 < \gamma_i \leq 1 \leq \delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , se existirem matrizes diagonais definidas positiva  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , matrizes  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &\triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{11} & \mathcal{V}_{12} \\ \star & \mathcal{V}_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N \\ \mathcal{V}_{11} &\triangleq S\tilde{A}'_i + \tilde{Z}'B'_i + \tilde{A}_iS + B_i\tilde{Z} - R_i \\ \mathcal{V}_{12} &\triangleq S\tilde{A}'_i + \tilde{Z}'B'_i + A_iS + B_iZ + \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta)R_i \\ \mathcal{V}_{22} &\triangleq SA'_i + Z'B'_i + A_iS + B_iZ - \Gamma\Delta R_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

então os ganhos de controle

$$K = ZS^{-1} \quad , \quad \tilde{K} = \tilde{Z}S^{-1} \quad (3.22)$$

garantem que o sistema em malha fechada (3.6) é globalmente assintoticamente estável para  $x = 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ .

**Prova:** Se o Teorema 3.4 é factível, tem-se que  $\mathcal{M}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{M}_i < 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ , com

$$\mathcal{M}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{11}(\alpha) & \mathcal{V}_{12}(\alpha) \\ \star & \mathcal{V}_{22}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}_{11}(\alpha) = S\tilde{A}_{cl}(\alpha)' + \tilde{A}_{cl}(\alpha)S - R(\alpha)$$

$$\mathcal{V}_{12}(\alpha) = S\tilde{A}_{cl}(\alpha)' + A_{cl}(\alpha)S + \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta)R(\alpha)$$

$$\mathcal{V}_{22}(\alpha) = SA_{cl}(\alpha)' + A_{cl}(\alpha)S - \Gamma\Delta R(\alpha)$$

e  $A_{cl}(\alpha)$  e  $\tilde{A}_{cl}(\alpha)$  dados por (3.6). Pré e pós-multiplicando  $\mathcal{M}(\alpha)$  by  $\text{diag}\{S^{-1}, S^{-1}\}$  e aplicando a transformação de variável  $S^{-1} = P$ , tem-se (3.9), com  $A(\alpha) = A_{cl}(\alpha)$  e  $\tilde{A}(\alpha) = \tilde{A}_{cl}(\alpha)$  e com  $P_g(\alpha) = P$ ,  $W_g(\alpha) = P$  e  $Q_g(\alpha) = S^{-1}R(\alpha)S^{-1}$ . Logo, a factibilidade do Teorema 3.4 garante a existência de uma função de Lur'e

$$v(x) = x'Px + 2 \sum_{i=1}^n p_{ii} \int_0^{x_i} f_i(\tau) d\tau \quad (3.23)$$

que assegura a estabilidade robusta absoluta do sistema em malha fechada. ■

As condições do Teorema 3.4 são também válidas para o caso de parâmetros incertos variantes no tempo com taxas de variação desconhecidas (mesmo ilimitadas), pertencentes ao simplex unitário, desde que essas condições sejam baseadas em uma função de Lur'e com uma matriz  $P$  fixa. Observe também que é possível tratar o problema de controle descentralizado diretamente por meio do Teorema 3.4 usando uma estrutura bloco diagonal para as matrizes  $Z$  e  $\tilde{Z}$ . Como um comentário final, note que os resultados do Teorema 3.4 aplicam-se ao caso de estabilização por realimentação de estados puramente linear (i.e.  $u = Kx$ ), escolhendo-se  $\tilde{Z} = 0$ , ou para o caso de estabilização por realimentação de estado puramente não-linear (i.e.  $u = \tilde{K}f(x)$ ), fazendo-se  $Z = 0$ .

## 3.5 Exemplos

Os exemplos apresentados abaixo foram gerados aleatoriamente para ilustrar a potencialidade das condições propostas. A precisão dos resultados obtidos melhora à medida que os graus de relaxações  $d$  e  $g$  aumentam. O primeiro exemplo trata o problema de GAS utilizando as condições propostas no Teorema 3.3, enquanto o segundo aborda o projeto de controle robusto por meio do Teorema 3.4. Em ambos os casos, é utilizado o *LMI Control Toolbox* do Matlab [GNLC95] para verificar a factibilidade das LMIs relacionadas.

**Exemplo 3.1** Considere o sistema (3.1) com  $A(\alpha) = \mathbf{0}$ ,  $u = 0$  e os seguintes vértices

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -1.94 & 0.25 & 0.63 & 0.38 \\ 0.81 & -1.57 & 0.77 & 0.80 \\ 0.60 & 0.33 & -1.49 & 0.69 \\ 0.24 & 0.33 & 0.76 & -1.46 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} -1.59 & 0.24 & 0.44 & 0.86 \\ 0.22 & -1.27 & 0.76 & 0.59 \\ 0.80 & 0.57 & -1.84 & 0.39 \\ 0.42 & 0.52 & 0.96 & -2.16 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{bmatrix} -2.03 & 0.85 & 0.19 & 0.72 \\ 0.87 & -2.10 & 0.87 & 0.80 \\ 0.23 & 0.79 & -1.94 & 0.95 \\ 0.98 & 0.44 & 0.39 & -1.96 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

O objetivo deste exemplo é determinar o maior setor para o qual a estabilidade do sistema sujeito a saturação nas variáveis de estado dadas por

$$f_{(i)}(x_i) = \text{sat}(x_i) = \begin{cases} \rho & \text{se } x_i > \rho \\ x_i & \text{se } -\rho \leq x_i \leq \rho \\ -\rho & \text{se } x_i < -\rho \end{cases} \quad (3.27)$$

com  $i = 1, \dots, 4$  e  $\rho = 1$  é garantida. O setor definido em (3.4) pode ser usado para representar localmente a saturação (3.27), escolhendo os parâmetros do setor como  $\Delta = \mathbf{I}$  e  $\Gamma = \gamma \mathbf{I}$ . Assim, para determinar o maior setor para esse sistema não-linear, dados  $g$  e  $d$  basta resolver o problema (3.20). A região do espaço de estados para a qual as condições do Teorema 3.3 são válidas é dada por

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x_i| \leq \frac{1}{\gamma^*}, i = 1, \dots, 4\}$$

caracterizando assim uma condição de estabilidade local. A Tabela 3.1 mostra os resultados obtidos. Da Tabela 3.1, observa-se que o Teorema 3.3 aplicado ao caso de matrizes independentes de parâmetros (i.e.  $g = 0$ ) não fornece solução para a estimativa do domínio de estabilidade robusta para esse sistema, mesmo com o incremento de  $d$ . Por outro lado, as condições do Teorema 3.3 com matrizes polinomiais homogêneas fornecem condições de setor menos conservadoras, à medida que  $g$  e  $d$  crescem. Para um dado  $g$ , o conservadorismo dos resultados é reduzido à medida que  $d$  cresce, por força das relaxações das restrições LMI do problema. Por outro lado, para um dado  $d$ , o incremento de  $g$  permite obter melhores resultados pelo fato de serem usadas mais variáveis escalares no problema. Observa-se uma grande melhoria em termos de  $\gamma^*$ , de 0.72 para 0.06, com o incremento de  $g$  e  $d$ .

**Exemplo 3.2** Como um exemplo para tratar o problema de controle, considere o sistema (3.1) com vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.19 \\ 0.19 & 0.68 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.82 \\ 0.90 & 0.64 \end{bmatrix}$$

Tabela 3.1: Valores obtidos por meio das condições do Teorema 3.3 para o sistema do Exemplo 3.1 com  $\gamma^* \triangleq \min \gamma$  s.a. (3.15)-(3.18)  $\Delta = \mathbf{I}$ ,  $\Gamma = \gamma \mathbf{I}$ ,  $A_i = \mathbf{0}$  e  $\tilde{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , dados em (3.24)-(3.26).

$g$	$d$	$\gamma^*$
0	any	infactível
1	0	0.72
	1	0.62
	2	0.57
2	0	0.29
	1	0.24
	2	0.20
3	0	0.20
	1	0.16
	2	0.14
4	0	0.14
	1	0.11
	2	0.08
5	0	0.09
	1	0.07
	2	0.06

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.15 \\ 0.54 & 0.70 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.82 & 0.34 \\ 0.66 & 0.29 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.85 \\ 0.86 & 0.59 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.34 & 0.73 \\ 0.53 & 0.31 \end{bmatrix}$$

O setor é definido com  $\Gamma = 10^{-\eta_1} \mathbf{I}$  e  $\Delta = 10^{\eta_2} \mathbf{I}$ , com  $\eta_1$  e  $\eta_2$  assumindo valores no conjunto dos números naturais. O objetivo deste exemplo é estabilizar o sistema para máximo  $\eta_1 + \eta_2$ , para todo  $\alpha \in \mathcal{U}$ . Para a lei de controle de realimentação de estado puramente linear  $u = Kx$ , o Teorema 3.4 garante a estabilidade para  $\Gamma = 10^{-12} \mathbf{I}$  e  $\Delta = 10^3 \mathbf{I}$ , isto é, para  $\eta_1 + \eta_2 = 15$ . No caso de lei de controle de realimentação de estado puramente não-linear  $u = \tilde{K}f(x)$ , o Teorema 3.4 garante a estabilidade para  $\Gamma = 10^{-3} \mathbf{I}$  e  $\Delta = 10^{12} \mathbf{I}$ , resultando em  $\eta_1 + \eta_2 = 15$ . Quando ambos os vetores de estado, linear e não-linear, são usados para calcular a lei de controle  $u = Kx + \tilde{K}f(x)$ , o Teorema 3.4 garante a estabilidade do sistema em malha fechada para  $\Gamma = 10^{-12} \mathbf{I}$ ,  $\Delta = 10^{12} \mathbf{I}$ , ou seja, para  $\eta_1 + \eta_2 = 24$ , ilustrando assim que ao usar simultaneamente realimentação linear e não-linear pode-se aumentar o setor no qual o sistema em malha fechada é estável. Para  $\Gamma = 10^{-12} \mathbf{I}$  e  $\Delta = 10^{12} \mathbf{I}$ , os ganhos de estabilização fornecidos pelo Teorema 3.4 são os seguintes

$$K = \begin{bmatrix} 8.86 & 0.74 \\ -6.05 & -5.11 \end{bmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} 8.41 & 1.58 \\ -5.68 & -5.31 \end{bmatrix}$$



e a matriz  $S$  é

$$S = \begin{bmatrix} 17846.43 & 0.00 \\ 0.00 & 22091.81 \end{bmatrix}$$

sendo  $P = S^{-1}$  a matriz da função de Lur'e (3.23) que garante a estabilidade robusta absoluta do sistema em malha fechada para qualquer parâmetro incerto  $\alpha$  variante no tempo com taxas de variação arbitrárias.

## 3.6 Conclusão

Este capítulo apresentou condições LMIs cuja solução permite construir funções de Lur'e dependentes de parâmetros polinomiais homogêneas. A existência de tais funções garante a estabilidade absoluta robusta de sistemas politópicos perturbados por não-linearidades de setor no vetor de estado que pertencem a uma classe geral de setores. Dado um grau para a função candidata de Lur'e, uma extensão do Teorema de Pólya é usada para fornecer relaxações LMIs progressivamente menos conservadoras que avaliam a estabilidade absoluta robusta do sistema. Condições existentes na literatura para a estabilidade robusta de sistemas lineares e para a estabilidade absoluta de sistemas não-lineares são recuperadas como casos particulares das condições propostas. Foi também apresentada uma extensão para o projeto de controlador robusto aplicado à classe de sistemas não-lineares em estudo, que se mostrou útil como uma ferramenta convexa para computar o controlador estabilizante usando separadamente somente uma realimentação de estados linear ou não-linear, ou ainda usando ambas as leis de controle.

# Controle de sistemas bilineares

## 4.1 Introdução

Sistemas bilineares são uma classe especial de sistemas não-lineares que representam vários processos físicos, como por exemplo, aplicações em engenharia nuclear, processos químicos, aplicações em biologia e imunologia [Moh91]. Além disso, muitos problemas práticos podem ser aproximados por um modelo bilinear [MK80].

Na literatura, muitos trabalhos tratam o problema de estabilização de sistemas bilineares contínuos no tempo [Lon80, Gut81, KN83, RB83, GT88, LN89, CYM91, CT00, SU03], alguns consideram restrições na lei de controle [Che98, BCK03] e sistemas bilineares discretos no tempo [SY96, YCB89]. Um problema estreitamente relacionado é o cálculo de uma estimativa da região de atração de um sistema não linear, em particular para o caso de sistemas não lineares quadráticos [Fra75, CHW88, CT89, ACM07a] ou polinomiais [TVG96, Tib00, TH00]. Na maioria dos casos, a lei de controle e a região de estabilidade são obtidas por meio da existência de uma função de Lyapunov, e o problema é fornecer condições construtivas para computar o controlador de realimentação e a matriz de Lyapunov associada. Por exemplo, em [DN80], o projeto de uma lei de controle por realimentação de estados linear e a região de estabilidade correspondente são reduzidos ao problema de encontrar uma solução definida positiva de uma equação algébrica de Riccati parametrizada. Por outro lado, o problema de estimativa da região de atração de um sistema bilinear discreto no tempo tem recebido menos atenção na literatura.

Mais recentemente, o problema de controle de realimentação de estados de sistemas não-lineares quadráticos tem sido abordado como um problema de otimização por meio de LMIs [ACM07a, ACM07b], sendo também computada uma estimativa do domínio de atração. Na verdade, o problema é investigado da seguinte forma: Dado um politopo, encontrar um ganho de realimentação de estados tal que o politopo esteja inteiramente contido no domínio de atração do sistema em malha fechada. A parte linear do modelo é considerada precisamente conhecida e o termo quadrático não-linear é majorado de forma que a derivada temporal da função de Lyapunov seja negativa dentro da região de interesse para o sistema de malha fechada estabili-

zado por um ganho de realimentação de estados constante. Não é fornecido um procedimento sistemático para maximizar a estimativa da região de estabilidade. Em relação a sistemas discretos no tempo, [GT06] propõe condições LMIs para resolver o problema de estabilização e estimativa da região de atração de sistemas não-lineares por meio da existência de uma função de Lyapunov.

Neste capítulo é investigado o problema de controle de realimentação de estados de um sistema não-linear. A parte linear do modelo representa a matriz dinâmica do sistema, precisamente conhecida, e a matriz de entrada, enquanto que o termo não-linear é decorrente de um produto entre as entradas de controle e os estados (isto é, um sistema bilinear). Essa mesma classe de sistemas bilineares foi estudada em [ACM07b, ACM07a], que tratam um modelo ligeiramente diferente do modelo objeto de estudo neste capítulo. O sistema em malha aberta é, por hipótese, instável e o termo bilinear é modelado como um envelope convexo de um conjunto de vetores lineares por inclusões diferenciais lineares [BEFB94]. Estratégia similar foi usada em [MTG02] para tratar o problema de controle robusto de um sistema bilinear com as matrizes dinâmicas afetadas por incertezas limitadas em norma.

O principal objetivo deste capítulo é computar uma lei de controle estabilizante e uma estimativa, tão grande quanto possível, da região de estabilidade do sistema em malha-fechada, garantindo a estabilidade assintótica da origem. O procedimento para computar um ganho de controle por realimentação de estados é descrito como dois problemas de otimização convexa sujeito a restrições LMIs, que podem ser resolvidas por meio de algoritmos especializados de pontos interiores [BEFB94]. No primeiro passo, dado um politopo que delimita uma região na qual os estados estão contidos, é computado um ganho de realimentação estabilizante e uma estimativa da região de estabilidade (tão grande quanto possível). No segundo passo, é usado um problema de otimização para encontrar o maior politopo associado à solução encontrada no passo anterior. Uma discussão sobre a iteração dos dois passos e o critério de parada é também apresentada. São apresentadas também extensões para tratar taxas de convergência exponencial e limitações de energia ou limitações de amplitude nas entradas. Apesar de basear-se na estabilidade quadrática, uma estratégia para buscar resultados menos conservadores é apresentada por meio do Lema de Finsler. Além disso, condições suficientes LMIs para a existência de um ganho de realimentação de estados robusto e de um ganho de controle linear dependente de parâmetros são apresentadas para o caso em que a parte linear do sistema é afetada por incertezas que pertencem a um domínio politópico. Em relação aos sistemas bilineares incertos discretos no tempo, são propostas condições que estabilizam o sistema por controle robusto e fornecem uma estimativa da região de estabilidade, por meio de uma condição estendida de estabilidade apresentada para sistemas lineares discretos no tempo em [dOBG99].

## 4.2 Formulação do problema

Considere o seguinte sistema bilinear invariante no tempo

$$\delta[x(t)] = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{q=1}^m N_q x(t) u_q(t) \quad (4.1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado e  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle. As matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $N_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $q = 1, \dots, m$  são constantes, por hipótese. O símbolo  $\delta[\cdot]$  representa a derivada em relação ao tempo para sistemas contínuos e o operador avanço para sistemas discretos no tempo. O objetivo é estabilizar o sistema (4.1) por meio de uma lei de controle de realimentação de estados

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.2)$$

A região de atração do sistema (4.1)-(4.2), denotada por  $\mathcal{B}_a$ , é definida como o conjunto de todos os  $x \in \mathbb{R}^n$  tais que para  $x(0) \in \mathcal{B}_a$ , a trajetória correspondente converge assintoticamente para a origem. Em particular, quando a estabilidade global do sistema pode ser assegurada, a região de atração corresponde a todo o espaço de estados  $\mathbb{R}^n$ . Porém, no caso geral, assegurar a estabilidade global e assim obter  $\mathbb{R}^n$  como a região de atração é tarefa difícil, diretamente relacionada com a estabilidade do sistema em malha aberta. Portanto, é importante obter uma estimativa da região de atração. Nesse sentido, regiões de estabilidade assintótica podem ser usadas para estimar a região de atração. Por outro lado, em algumas aplicações práticas pode ser interessante assegurar a estabilidade para um conjunto dado de condições iniciais possíveis. Do ponto de vista prático esse conjunto pode ser visto como uma região de operação para o sistema, ou uma região na qual os estados do sistemas podem permanecer devido a uma ação de perturbações temporárias [Kha02, ACM07a].

O objetivo deste capítulo é propor uma metodologia para solucionar o seguinte problema.

**Problema 4.1** *Encontrar um ganho de realimentação  $K$  e uma região de estabilidade  $\mathcal{S}_0$ , tão grande quanto possível, tais que o sistema em malha fechada*

$$\delta[x(t)] = (A + (B + [N_1 x(t) \dots N_m x(t)])K)x(t) \quad (4.3)$$

*seja assintoticamente estável para qualquer condição inicial  $x(0)$  pertencente a  $\mathcal{S}_0$ .*

Para resolver o Problema 4.1, exploram-se algumas propriedades de politopos e funções de Lyapunov quadráticas.

## 4.3 Caso contínuo no tempo

Um resultado clássico para resolver o Problema 4.1 é a teoria de Lyapunov, que consiste em determinar uma função definida positiva  $V(x)$ , uma matriz de ganho  $K$  e um conjunto  $\mathcal{S}_0$  tais que [Kha02]:

(i)  $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ ;

(ii)  $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} < 0, \forall x(0) \in \mathcal{S}_0$ .

ao longo das trajetórias do sistema (4.3).

Dado um politopo  $\chi(x) \subset \mathbb{R}^n$  descrito por

$$\chi(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \preceq q\} \quad (4.4)$$

ou, equivalentemente,

$$\chi(x) = \text{co} \{v_j, j = 1, \dots, s\} \quad (4.5)$$

em que  $Q \in \mathbb{R}^{g \times n}$ ,  $n \leq g$ ,  $\text{rank}(Q) = n$ ;  $q \in \mathbb{R}^g$  e  $q_{(i)} > 0, \forall i = 1, \dots, g$ , e os vetores  $v_j \in \mathbb{R}^n$  são os vértices que permitem descrever o envelope convexo que contém os pontos de  $\chi(x)$ . Note que a positividade do vetor  $q$  significa que a origem pertence ao interior de  $\chi(x)$ . Logo, para qualquer  $x \in \chi(x)$ , tem-se

$$\begin{aligned} [N_1 x(t) \quad \cdots \quad N_m x(t)] &= \sum_{j=1}^s \beta_j(t) [N_1 v_j \quad \cdots \quad N_m v_j] \\ &= \sum_{j=1}^s \beta_j(t) \mathbb{B}_j = \mathbb{B}(\beta(t)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

com  $\beta(t) \in \mathbb{R}^s$  pertencendo ao simplex unitário

$$\mathcal{U}_s = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^s : \sum_{j=1}^s \beta_j = 1, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, s \right\} \quad (4.7)$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Teorema 4.1** *Considere o conjunto poliedral  $\chi(x)$  definido em (4.4) (ou, equivalentemente, em (4.5)). Se existe uma função definida positiva  $V(x)$ , um ganho de realimentação de estados  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , uma matriz  $Q \in \mathbb{R}^{g \times n}$ , vetores  $v_j, j = 1, \dots, s$ , um vetor positivo  $q \in \mathbb{R}_+^g$  e um escalar positivo  $\gamma$  satisfazendo*

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} [(A + (B + \mathbb{B}(\beta(t))) K) x] < 0, \quad (4.8)$$

para todo  $x \in \Gamma(x)$ ,  $x \neq 0$ , com

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq \gamma^{-1}\} \subseteq \chi(x) \quad (4.9)$$

então o ganho  $K$  e o conjunto  $\Gamma(x)$  são soluções para o Problema 4.1.

**Prova:** Se (4.9) é verificada então o conjunto  $\Gamma(x)$ , definido em termos da função positiva  $V(x)$  e pelo escalar positivo  $\gamma$ , está incluso no conjunto poliedral  $\chi(x)$ . Para todo  $x(t) \in \Gamma(x)$ ,

$\forall t \geq 0$ , segue que se existe  $\beta(t) \in \mathcal{U}_s$  o sistema (4.3) pode ser representado usando (4.6). Além disso, se (4.8) é satisfeita, a derivada no tempo de  $V(x)$  é estritamente negativa ao longo das trajetórias de (4.3)-(4.6). Note que o modelo (4.3) é representado localmente pelo sistema (4.3)-(4.6) somente dentro de  $\chi(x)$ . Visto que  $\Gamma(x)$  está incluso em  $\chi(x)$ , a função  $V(x)$  é uma função localmente decrescente para o sistema em malha fechada no conjunto  $\Gamma(x)$ . Portanto,  $\Gamma(x)$  é um conjunto contrativo com respeito às trajetórias do sistema (4.3)-(4.6) e assim  $\Gamma(x)$  é um domínio de estabilidade para o sistema em malha fechada. ■

O Teorema 4.1 fornece uma condição suficiente para resolver o Problema 4.1, mas não apresenta um método construtivo para procurar uma função  $V(x)$  adequada e um ganho  $K$ . Com o objetivo de desenvolver condições tratáveis numericamente, exploram-se as propriedades de funções de Lyapunov quadráticas, considerando  $V(x) = x'Px$  com  $P = P' > 0$ . Além disso, o conjunto poliedral  $\chi(x)$  é escolhido como

$$\chi(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : -\mu \preceq x \preceq \mu\} \quad (4.10)$$

com  $\mu \in \mathbb{R}^n$  e  $\mu_{(i)} > 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Logo, a definição dos vértices  $v_j$  de um conjunto  $\chi(x)$ , dada por (4.10), é construída a partir de  $2^n$  combinações formadas com as entradas dos vetores  $\mu$  e  $-\mu$ . De fato, os vetores  $v_j$  são obtidos em função de  $\mu$  por combinações lineares

$$v_j = D_j \mu, j = 1, \dots, 2^n \quad (4.11)$$

em que  $D_j, j = 1, \dots, 2^n$ , são matrizes diagonais em  $\mathbb{R}^{n \times n}$  constituídas de todas as combinações formadas com 1 e  $-1$ .

Considerando um politopo  $\chi(x)$  como definido em (4.10), estabelece-se a seguinte proposição procedente do Teorema 4.1.

**Proposição 4.1** *Se existirem uma matriz definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , um vetor positivo  $\mu \in \mathbb{R}^n$  e um escalar positivo  $\gamma$  satisfazendo*

$$\begin{aligned} \Upsilon_j = AW + WA' + (B + [N_1 D_j \mu \ \cdots \ N_m D_j \mu])Y \\ + Y'(B + [N_1 D_j \mu \ \cdots \ N_m D_j \mu])' < 0, \quad j = 1, \dots, 2^n \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{(i)} W & WI'_{(i)} \\ \star & \gamma \mu_{(i)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

então o ganho de controle  $K = YW^{-1}$  e o conjunto

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'W^{-1}x \leq \gamma^{-1}\} \quad (4.14)$$

são soluções para o Problema 4.1.

**Prova:** Considere uma função de Lyapunov quadrática  $V(x) = x'Px$ , com  $P = W^{-1} > 0$ . Dado um politopo  $\chi(x)$  como em (4.10), a condição (4.13) assegura que o conjunto  $\Gamma(x)$  definido em

(4.14) está incluso no politopo  $\chi(x)$  e, para qualquer  $x \in \Gamma(x) \subseteq \chi(x)$ , a definição (4.6) é válida. Levando em conta o fato que  $Y = KW$ , a derivada no tempo de  $V(x)$  ao longo das trajetórias do sistema (4.3),  $\forall x \in \Gamma(x) \subseteq \chi(x)$ , é dada por  $\dot{V}(x) = x' \sum_{j=1}^{2^n} \beta_j \dot{V}_j x$ , com

$$\begin{aligned} \dot{V}_j &= (A + (B + [N_1 D_j \mu \ \cdots \ N_m D_j \mu])K)' W^{-1} \\ &\quad + W^{-1} (A + (B + [N_1 D_j \mu \ \cdots \ N_m D_j \mu])K) = W^{-1} \Upsilon_j W^{-1} \end{aligned}$$

Portanto,  $\dot{V}(x) = x' W^{-1} (\sum_{j=1}^{2^n} \beta_j \Upsilon_j) W^{-1} x$  e conclui-se que se a condição (4.12) é satisfeita, a derivada no tempo de  $V(x)$  é estritamente negativa para qualquer  $x \in \Gamma(x)$ . Logo, conforme o Teorema 4.1,  $\Gamma(x)$  é um conjunto contrativo com relação as trajetórias do sistema (4.3)-(4.6) e  $\Gamma(x)$  é um domínio de estabilidade para o sistema em malha fechada. ■

**Observação 4.1** As principais diferenças entre a metodologia proposta neste capítulo e as existentes na literatura são as seguintes. Em [DN80], o procedimento baseia-se na existência de uma equação de Riccati parametrizada, a qual é utilizada para determinar um ganho de realimentação de estado estabilizante e um conjunto em que a estabilidade do sistema em malha fechada é garantida, mas o método é altamente dependente da escolha dos parâmetros. Em [ACM07b, AAA<sup>+</sup>07], os autores fornecem, para um dado politopo, condições LMI suficientes para a existência de um ganho de realimentação de estados estabilizante que garante que o politopo dado é uma região de estabilidade para o sistema em malha fechada. O método consiste em enquadrar o politopo dentro de uma elipse que é contida em outro politopo, obtido pelo escalonamento do politopo original por meio de uma busca linear. Não é fornecido um procedimento para aumentar a estimativa do domínio de estabilidade. Além disso, o método possui uma grande dependência da escolha do politopo inicial.

**Observação 4.2** Do ponto de vista de projeto, pode ser interessante requerer uma certa taxa de convergência exponencial  $\delta$  para o sistema [BEFB94]. Nesse caso, é suficiente adicionar ao lado esquerdo da relação (4.12) o termo  $2\delta W$ .

**Observação 4.3** No contexto de desempenho, um critério a ser considerado é a minimização da energia do sinal de entrada, ou que esta seja ao menos limitada. Em outras palavras, minimiza-se um escalar positivo  $\sigma$  tal que

$$\int_0^T u' u dt \leq \sigma, \quad \forall T \geq 0 \quad (4.15)$$

Nesse caso, a derivada no tempo da função de Lyapunov deve ser tal que  $\dot{V} + (\sigma\gamma)^{-1} u' u \leq 0$  ao longo das trajetórias do sistema em malha fechada. Então, basta substituir a condição (4.12) por

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{ij} & Y' \\ \star & -\eta I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, 2^n \quad (4.16)$$

em que  $\eta$  é uma variável de decisão extra. Portanto, se (4.16) e (4.13) são satisfeitas, a condição (4.15) é verificada com  $\sigma = \eta\gamma^{-1}$ .

**Observação 4.4** Para limitar a amplitude do controle, adiciona-se a seguinte restrição

$$\begin{bmatrix} W & Y_{(i)}' \\ \star & \gamma u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.17)$$

em que  $u_0$  é o limite exigido em  $u$ . Se (4.17) é satisfeita, a região de estabilidade  $\Gamma(x)$ , definida em (4.14), está incluída no conjunto poliedral  $\{x \in \mathbb{R}^n; -u_0 \preceq Kx \preceq u_0\}$  e assim, para qualquer  $x \in \Gamma(x)$ , tem-se  $|u = Kx| \preceq u_0$ . Além disso, do ponto de vista prático pode ser interessante especificar o valor de  $u_0$  que melhor atende os objetivos de desempenho para o sistema. A estratégia é então considerar  $u_0$  também como variável de decisão. Isso pode ser realizado na mesma LMI substituindo  $u_{0(i)}^2$  pelas novas variáveis  $\zeta_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$  em (4.17) e considerando um critério de custo linear em  $\zeta_{(i)}$ .

As relações de equivalência do Lema 1.3 (Lema de Finsler) podem ser utilizadas para escrever novas condições de estabilidade para o sistema (4.1).

Definem-se o vetor aumentado  $\xi$  e as matrizes  $\mathcal{L}$  e  $\tilde{B}$  como

$$\zeta = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = [A + BK + \mathbb{B}_j K \quad -I]$$

Então, a condição de estabilidade (4.8) do Teorema 4.1, pode ser escrita na forma  $\xi' \mathcal{L} \xi < 0$ , para todo  $\xi$  tal que  $\tilde{B}\xi = 0$ , que é a condição (i) do Lema 1.3. Utilizando a equivalência entre as condições (i) e (ii) desse Lema e definindo

$$R = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

obtém-se uma condição de estabilidade equivalente à condição (4.12) da Proposição 4.1

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M} & -F + P + A'F' + K'B'F' + K'\mathbb{B}'_j F' \\ P + GA + GBK + G\mathbb{B}_j K - F' & -G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

com

$$\mathcal{M} \triangleq FA + FBK + F\mathbb{B}_j K + A'F' + K'B'F' + K'\mathbb{B}'_j F'$$

escolhendo  $F = G$ ,  $Y = KG^{-1}$ ,  $S = G^{-1}$ ,  $V = SPS'$  pré e pós multiplicando (4.18) por matrizes  $\text{diag}\{S, S\}$  e  $\text{diag}\{S', S'\}$ , respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} AS + BY + \mathbb{B}_j Y + S'A' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j & V - S' + SA' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j \\ V + AS' + BY + \mathbb{B}_j Y - S & -S - S' \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

Então, pode-se estabelecer o resultado a seguir.

**Proposição 4.2** *Se existirem uma matriz definida positiva  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  um vetor positivo  $\mu \in \mathbb{R}^n$  e um escalar positivo  $\gamma$  satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} AS + BY + \mathbb{B}_j Y + S'A' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j & V - S' + SA' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j \\ V + AS' + BY + \mathbb{B}_j Y - S & -S - S' \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$



$$\begin{bmatrix} \mu_{(i)}V & S\mathbf{\Gamma}'_{(i)} \\ \star & \gamma\mu_{(i)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

então o ganho de controle  $K = YS$  e o conjunto

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : x'S^{-1}VS^{-1}x \leq \gamma^{-1}\} \quad (4.22)$$

são soluções para o Problema 4.1.

Note que o problema de maximização do conjunto  $\Gamma(x)$  torna-se mais complexo neste caso, pois envolve as matrizes  $S$  e  $V$ .

## 4.4 Caso discreto no tempo

Uma solução para o Problema 4.1 pode ser obtida por meio da existência de uma função de Lyapunov, ou seja, se existe  $V(x(t))$  tal que

- (i)  $V(x(t)) > 0, \forall x \neq 0$ ;
- (ii)  $\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) < 0, \forall x(0) \in \mathcal{S}_0$ .

ao longo das trajetórias do sistema (4.3).

A definição de  $\mathcal{S}_0$  e as considerações para o politopo  $\chi(x) \subset \mathbb{R}^n$  são as mesmas do caso contínuo no tempo.

**Teorema 4.2** *Considere o conjunto poliedral  $\chi(x)$  definido em (4.4) (ou, equivalentemente, em (4.5)). Se existirem uma função definida positiva  $V(x(t))$ , um ganho de realimentação de estados  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , uma matriz  $Q \in \mathbb{R}^{g \times n}$ , vetores  $v_j, j = 1, \dots, s$ , um vetor positivo  $q \in \mathbb{R}_+^g$  e um escalar positivo  $\gamma$  satisfazendo*

$$\Delta V(x(t)) = V[(A + (B + \mathbb{B}(\beta(t)))K)x] - V(x(t)) < 0, \quad (4.23)$$

para todo  $x \in \Gamma(x), x \neq 0$ , com

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq \gamma^{-1}\} \subseteq \chi(x) \quad (4.24)$$

então o ganho  $K$  e o conjunto  $\Gamma(x)$  são soluções para o Problema 4.1.

Uma condição descrita em termos de LMIs, considerando uma função de Lyapunov quadrática (Lema 1.5), para resolver o Problema 4.1 é dada pela proposição a seguir.

**Proposição 4.3** *Se existirem uma matriz definida positiva  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , um vetor positivo  $\mu \in \mathbb{R}^n$  e um escalar positivo  $\gamma$  satisfazendo*

$$\Theta_j = \begin{bmatrix} S & AS + BY + \mathbb{B}_j Y \\ SA' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j & S \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, \dots, 2^n \quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{(i)}S & S\mathbf{I}'_{(i)} \\ \star & \gamma\mu_{(i)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (4.26)$$

então o ganho de controle  $K = YS^{-1}$  e o conjunto

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : x'S^{-1}x \leq \gamma^{-1}\} \quad (4.27)$$

são soluções para o Problema 4.1.

**Prova:** Segue passos similares aos da prova da Proposição 4.1. Considere uma função de Lyapunov quadrática  $V(x(t)) = x(t)'Px(t)$  com  $P = S^{-1} > 0$ . Levando em conta que  $Y = KS$ , pré e pós multiplicando  $\Theta_j$  por  $\text{diag}\{S^{-1}, S^{-1}\}$ , aplicando a transformação de variável  $P = S^{-1}$  e o complemento de Schur na expressão resultante tem-se

$$(A' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j)P(A + YB + Y\mathbb{B}_j) - P < 0$$

e assim conclui-se que a condição (4.25) é satisfeita.  $\blacksquare$

## 4.5 Extensões

Considera-se agora o caso em que as matrizes  $A$  e  $B$  do sistema (4.1) dependem de parâmetros variantes no tempo

$$\delta[x(t)] = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t) + \sum_{q=1}^m N_q x(t)u_q(t) \quad (4.28)$$

em que  $\alpha \in \mathbb{R}^N$  é o vetor dos parâmetros variantes no tempo que pertencem ao simplex unitário

$$\mathcal{U}_N = \left\{ \alpha(t) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1, \alpha_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (4.29)$$

e matrizes  $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  pertencentes ao politopo

$$\mathcal{P} = \left\{ (A, B)(\alpha(t)) : (A, B)(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)(A, B)_i, \alpha \in \mathcal{U}_N \right\} \quad (4.30)$$

com vértices  $A_i, B_i, i = 1, \dots, N$ . O símbolo  $\delta[\cdot]$  representa a derivada em relação ao tempo para sistemas contínuos e o operador avanço para sistemas discretos no tempo.

Nesse caso, têm-se duas estratégias possíveis para obter uma estimativa da região de estabilidade com  $\alpha$  e  $\beta$  parâmetros variantes no tempo (os quais implicitamente dependem de  $x(t)$ ), por meio de ganho de controle robusto, independente de  $\alpha \in \mathcal{U}_N$  e de  $\beta \in \mathcal{U}_s$ , ou por meio de um controle de realimentação de estados LPV

$$K(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2^n} \alpha_i \beta_j K_{ij} \quad (4.31)$$

Assume-se que  $\alpha(t)$  está disponível para leitura em tempo real e que  $\beta(t)$  é obtido de (4.6) a partir do conhecimento de  $x(t)$ .

Considerando o sistema (4.28) contínuo no tempo, uma condição suficiente para a existência de ganhos  $K_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  soluções para o Problema 4.1 com incertezas politópicas é dada pelo seguinte corolário.

**Corolário 4.1** *Se existirem uma matriz definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Y_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , um vetor positivo  $\mu \in \mathbb{R}^n$  e um escalar positivo  $\gamma$  satisfazendo a relação (4.13) tais que*

$$\Theta_{ij} = A_i W + W A_i' + (B_i + \mathbb{B}_j) Y_{ij} + Y_{ij}' (B_i + \mathbb{B}_j)' < 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, 2^n \quad (4.32)$$

$$\Theta_{ijk} = 2(A_i W + W A_i') + (B_i + \mathbb{B}_j) Y_{ik} + (B_i + \mathbb{B}_k) Y_{ij} + Y_{ik}' (B_i + \mathbb{B}_j)' + Y_{ij}' (B_i + \mathbb{B}_k)' < 0, \\ i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, 2^n - 1; \quad k = j + 1, \dots, 2^n \quad (4.33)$$

$$\Theta_{i\ell j} = (A_i + A_\ell) W + W (A_i + A_\ell)' + (B_i + \mathbb{B}_j) Y_{\ell j} + (B_\ell + \mathbb{B}_j) Y_{ij} + Y_{\ell j}' (B_i + \mathbb{B}_j)' \\ + Y_{ij}' (B_\ell + \mathbb{B}_j)' < 0, \quad i = 1, \dots, N - 1; \quad \ell = i + 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, 2^n \quad (4.34)$$

$$\Theta_{i\ell j k} = 2(A_i + A_\ell) W + 2W (A_i + A_\ell)' + (B_i + \mathbb{B}_j) Y_{\ell k} + (B_i + \mathbb{B}_k) Y_{\ell j} + (B_\ell + \mathbb{B}_j) Y_{ik} \\ + (B_\ell + \mathbb{B}_k) Y_{ij} + Y_{\ell k}' (B_i + \mathbb{B}_j)' + Y_{\ell j}' (B_i + \mathbb{B}_k)' + Y_{ik}' (B_\ell + \mathbb{B}_j)' + Y_{ij}' (B_\ell + \mathbb{B}_k)' < 0, \\ i = 1, \dots, N - 1; \quad \ell = i + 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, 2^n - 1; \quad k = j + 1, \dots, 2^n \quad (4.35)$$

então o controle LPV  $K(\alpha, \beta)$  dado por

$$K(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2^n} \alpha_i \beta_j K_{ij}, \quad K_{ij} = Y_{ij} W^{-1}; \quad \alpha \in \mathcal{U}_N, \quad \beta \in \mathcal{U}_{2^n}$$

e o conjunto  $\Gamma(x)$  definido em (4.14) são soluções para o Problema 4.1.

**Prova:** A demonstração deste corolário pode ser construída multiplicando as LMIs acima por  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  e somando-as, seguindo os passos descritos em [MOP<sup>+</sup>07]. ■

Note que fixando  $Y_{ij} = Y$  e considerando somente (4.32), recupera-se a Proposição 4.1 para tratar o problema de controle robusto de realimentação de estado. Além disso, pode-se usar as condições do Corolário 4.1 para o caso de controle LPV dependendo somente de  $\alpha$ , fazendo  $Y_{ij} = Y_{i1}$  e considerando as condições (4.32) e (4.34), ou somente de  $\beta$ , fixando  $Y_{ij} = Y_{1j}$  e considerando somente (4.32) e (4.33). As variáveis  $Y_{ij}$  das condições Corolário 4.1 fornecem graus de liberdade adicionais ao projeto do controlador, permitindo estabilizar quadraticamente por meio de ganhos do tipo LPV sistemas que não admitem um ganho de realimentação robusto, mas é preciso implementar uma estratégia mais complexa de realimentação baseada na disponibilidade dos parâmetros variantes no tempo  $\alpha$  e  $\beta$ .

Para o caso em que o sistema (4.28) é discreto no tempo uma condição menos conservadora do que a da Proposição 4.3 é dada pelo corolário a seguir.

**Corolário 4.2** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $S_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, N$ , matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , um vetor positivo  $\mu \in \mathbb{R}^n$  e um escalar positivo  $\gamma$  tais que*

$$\Delta_{ijk} = \begin{bmatrix} S_j & A_i G + B_i Z + \mathbb{B}_k Z \\ G' A'_i + Z' B'_i + Z' \mathbb{B}'_k & G + G' - S_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N; \\ j = 1, \dots, N; \quad k = 1, \dots, 2^n \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{(i)} S_j & S_j \mathbf{I}'_{(i)} \\ \star & \gamma \mu_{(i)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, N; \quad (4.37)$$

então a lei de controle  $u = Kx$  com

$$K = ZG^{-1}$$

garante a estabilidade assintótica robusta para o sistema (4.28) em malha fechada e o conjunto

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : x' P(\alpha) x \leq \gamma^{-1}\}$$

com

$$P(\alpha) = S(\alpha)^{-1} \quad e \quad S(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i S_i; \quad \forall \alpha \in \mathcal{U}$$

é uma estimativa da região de estabilidade.

**Prova:** Considerando  $Z = KG$ , se a expressão

$$\begin{bmatrix} S(\alpha(t+1)) & (A(\alpha(t)) + (B(\alpha(t)) + \mathbb{B}(\beta(t)))K)G \\ G'(A(\alpha(t)) + (B(\alpha(t)) + \mathbb{B}(\beta(t)))K)' & G + G' - S(\alpha(t)) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.38)$$

é factível então, pré e pós multiplicando (4.38) por  $R = [-\mathbf{I} \quad A(\alpha(t)) + (B(\alpha(t)) + \mathbb{B}(\beta(t)))K]$  e por  $R'$ , respectivamente, tem-se

$$S(\alpha(t+1)) - (A(\alpha(t)) + (B(\alpha(t)) + \mathbb{B}(\beta(t)))K)S(\alpha(t)) \\ \times (A(\alpha(t)) + (B(\alpha(t)) + \mathbb{B}(\beta(t)))K)' > 0$$

que é uma condição suficiente para a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Reescrevendo (4.38) com  $(A, B)(\alpha(t))$  conforme em (4.30),  $\mathbb{B}(\beta(t))$  dado por (4.6),  $S(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) S_i$ ,  $\alpha(t) \in \mathcal{U}_N$ ,  $S(\alpha(t+1)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t+1) S_i = \sum_{i=1}^N \gamma_j(t) S_j$ ,  $\gamma(t) \in \mathcal{U}_N$ , e multiplicando a expressão resultante por  $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t)$ ,  $\sum_{j=1}^N \gamma_j(t)$ ,  $\sum_{k=1}^s \beta_k(t)$  é possível reescrever (4.38) como

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \gamma_j(t) \sum_{k=1}^s \beta_k(t) \Delta_{ijk} \quad (4.39)$$

com  $\Delta_{ijk}$  dada por (4.36). A factibilidade de (4.36) é suficiente para que a expressão (4.39) seja definida positiva, o que garante (4.38). ■

**Observação 4.5** *É interessante comentar que, para o caso do sistema precisamente conhecido  $A_i = A$ ,  $i = 1, \dots, n$ , fazendo  $G = G' = S_j = S_i = S$  e  $Y = Z$  na condição (4.36), esta contém a condição (4.25) de estabilidade quadrática como um caso particular.*

**Observação 4.6** A matriz  $G$  da condição (4.36) fornece um grau de liberdade adicional ao projeto de um controlador, permitindo tratar com menos conservadorismo problemas de controle com ganhos com restrições de estrutura. Para isso, impõem-se estruturas particulares às matrizes  $G$  e  $Z$ , sem necessidade de particularizações das matrizes de Lyapunov  $S_j$ .

## 4.6 Aspectos numéricos

É importante notar que as variáveis de decisão da Proposição 4.1 são  $W$ ,  $Y$ ,  $\mu$  e  $\gamma$ , sendo que  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, 2^n$  depende linearmente de  $\mu$  como descrito em (4.11). Devido a presença de termos que envolvem a multiplicação entre algumas dessas variáveis, as desigualdades de (4.12) são não-lineares. Este fato torna difícil e em alguns casos impossível resolver as desigualdades simultaneamente. Uma forma de superar este problema consiste em fixar, a priori, o valor de uma variável de decisão enquanto buscam-se outras.

O objetivo de síntese considerado neste capítulo é determinar um controlador que conduz a uma região de estabilidade, que é uma estimativa da região de atração, tão grande quanto possível, entre as soluções possíveis para as desigualdades da Proposição 4.1. Um maneira de maximizar indiretamente o volume do conjunto  $\Gamma(x)$  definido em (4.14) é minimizar o traço de  $W^{-1}$  e/ou  $\gamma$  [KG02, TGG07]. Para computar um controle capaz de aumentar a estimativa da região de atração do sistema em malha fechada, utiliza-se o algoritmo seguinte.

### Algoritmo 4.1

**Passo 1:** Inicialização. Escolha  $\mu_{(i)}, i = 1, \dots, n$ .

**Passo 2:** Compute  $W$ ,  $Y$  e  $\gamma$ , soluções para:

$$\begin{aligned} & \min\{\omega_1 \text{Traço}(T) + \omega_2 \gamma\} \\ & \text{sujeito às condições da Proposição 4.1} \\ & \begin{bmatrix} T & \mathbf{I}_n \\ \star & W \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

em que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são parâmetros de ponderação.

**Passo 3:** Fixe  $W$ ,  $Y$  and  $\gamma$ . Compute  $\mu_{(i)}, i = 1, \dots, n$  soluções para:

$$\begin{aligned} & \max\left\{\sum_{i=1}^n \mu_{(i)}\right\} \\ & \text{sujeito às relações do Proposição 4.1} \end{aligned} \quad (4.41)$$

**Passo 4:** Retorne para o passo 1 até que mudanças significativas não ocorram nos valores desejados de critério.

O primeiro problema de otimização (4.40) maximiza o tamanho de  $\Gamma(x)$  considerando um critério baseado no Traço ( $W^{-1}$ ) e no escalar  $\gamma$ . O objetivo do segundo problema de otimização (4.41) é maximizar o vetor  $\mu$ , para tentar aumentar o tamanho de  $\chi(x)$ .

Observa-se que as condições da Proposição 4.1, bem como as do Algoritmo 1, foram simplificadas com respeito às condições em [MTG02], em particular em termos de complexidade numérica. Além disso, usando o fato de a região de estabilidade obtida com o procedimento proposto ser simétrica, o Passo 3 produz melhores resultados que os apresentados em [MTG02] em termos do aumento do polítopo e do elipsóide.

## 4.7 Exemplos

**Exemplo 4.1** O sistema utilizado para este exemplo foi retirado de [ACM07b], com uma pequena modificação na representação do termo bilinear. Para o sistema (4.1) contínuo no tempo, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 & 4 \\ 4.3 & 6.0 & 5.0 \\ 3.2 & 6.8 & 7.2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -0.7 & -1.3 \\ 0 & -4.3 \\ 0.8 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Algoritmo 4.1 com  $\mu = [2 \ 2 \ 2]'$ , depois de 6 iterações, obtém-se o ganho de controle

$$K = \begin{bmatrix} 0.0016 & 0.0035 & 0.0034 \\ 2.2404 & 3.2676 & 5.9199 \end{bmatrix}$$

A Figura 4.1 mostra a estimativa do domínio de estabilidade para o sistema, fornecida pelo Algoritmo 4.1 (região  $\Gamma$ ) e a estimativa fornecida por [ACM07b] (região  $\epsilon$ ), em que  $\Gamma(x)$  é dado por (4.14) com

$$\gamma = 1.0890, W = \begin{bmatrix} 63.1224 & -1.6258 & -15.6454 \\ -1.6258 & 4.3546 & -0.3996 \\ -15.6454 & -0.3996 & 5.3342 \end{bmatrix}$$

O cubo é o polítopo inicial  $\mathcal{P}$  conforme a metodologia proposta em [ACM07b]. Note que o problema estudado em [ACM07b] é: dado um polítopo (não necessariamente simétrico em relação à origem), encontre um elipsóide inscrito que, mediante escalonamento, resulta em um domínio de estabilidade que contém o polítopo inicial. Apesar dos objetivos não serem exatamente os mesmos, o método proposto neste capítulo pode também encontrar uma solução factível para o sistema estudado em [ACM07b] e, além disso, fornece uma estimativa da região de estabilidade menos conservadora.

**Exemplo 4.2** Considere o sistema (4.1) contínuo no tempo descrito pelos seguintes dados

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

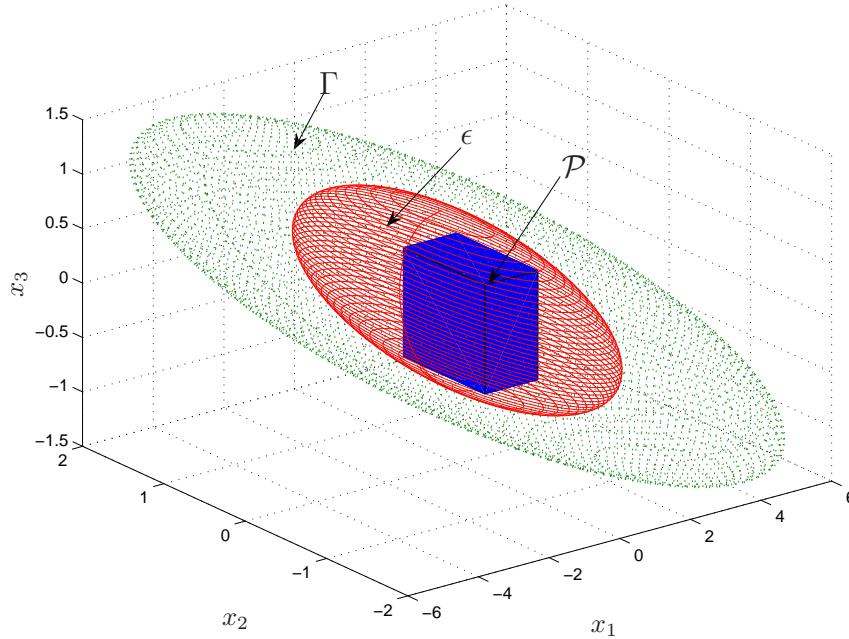


Figura 4.1: Regiões de estabilidade obtidas pelo Algoritmo 4.1 ( $\Gamma$ ) e por [ACM07b] ( $\epsilon$ ) para o Exemplo 4.1 (com  $\mathcal{P}$  o politopo inicial).

e o Algoritmo 4.1 com uma restrição adicional no problema de otimização do Passo 2, para limitar a norma do ganho. Com a condição inicial  $\mu = [1 \ 1]'$ , obtém-se, depois de 10 iterações, o ganho de realimentação de estados

$$K = \begin{bmatrix} 0.5437 & 23.8399 \\ -0.6428 & -9.5656 \end{bmatrix}$$

com elipsóide associado descrito por  $\Gamma(x)$  como em (4.14) e

$$\gamma = 0.7008, \quad W = \begin{bmatrix} 55.144 & -0.1004 \\ -0.1004 & 1.4488 \end{bmatrix}$$

mostrados na Figura 4.2, de volume proporcional  $\sqrt{\det(W/\gamma)} = 12.7526$ . A verdadeira região de atração (obtida por simulação) do sistema em malha fechada, também mostrada na figura, permite avaliar o conservadorismo do método proposto.

A evolução no tempo do sistema com condições iniciais  $[0 \ 3]'$  e entrada de controle  $u = Kx$  são mostradas na Figura 4.3 e 4.4, respectivamente.

Da Figura 4.4, é possível ver que o esforço do controle é importante no início da simulação uma vez que a amplitude do controle atinge valores elevados. Nesse caso, as estratégias para limitar as entradas de controle, discutidas nas Observações 4.3 e 4.4, podem ser aplicadas. Além disso, pode ser interessante considerar uma limitação de amplitude durante a síntese do controlador, por meio de funções de saturação.

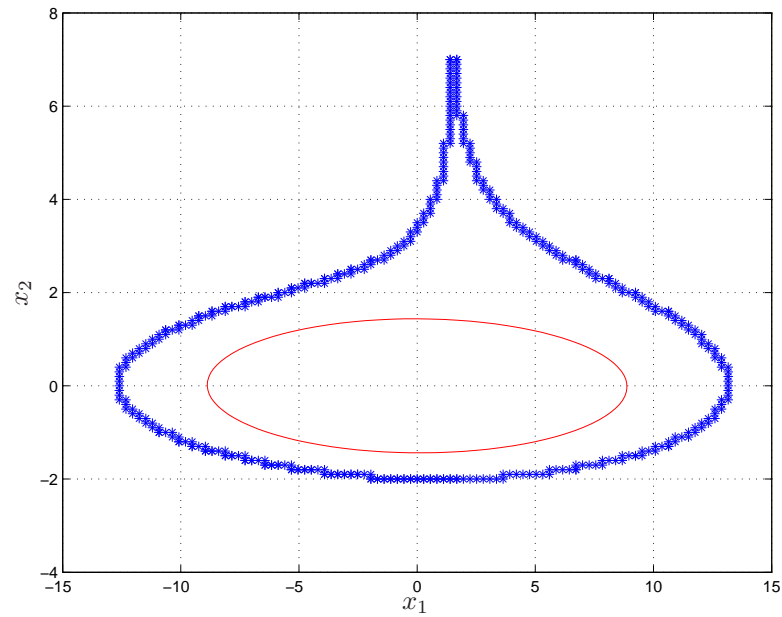


Figura 4.2: Região de atração e conjunto elipsoidal obtidos com a condição inicial do Exemplo 4.2.

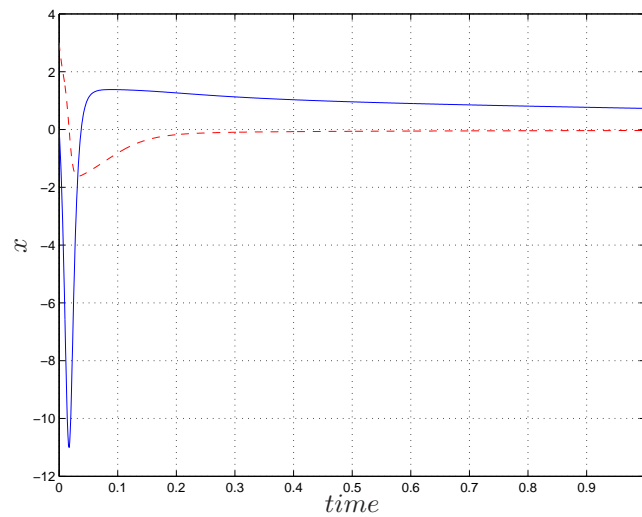


Figura 4.3: Evolução no tempo para  $x(0) = [0 \ 3]'$  para o Exemplo 4.2.

**Exemplo 4.3** Considere agora o sistema contínuo com parâmetros variantes no tempo (4.28), pertencentes ao politopo descrito pelos seguintes vértices:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -0.48 & 0.44 & -0.42 \\ -0.02 & -0.66 & 0.91 \\ -0.85 & -0.45 & 0.12 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -3.70 & 1.00 \\ 2.90 & -0.30 \\ -3.40 & -3.90 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5.75 & -0.40 \\ 0.65 & 1.10 \\ 2.65 & -1.70 \end{bmatrix}$$



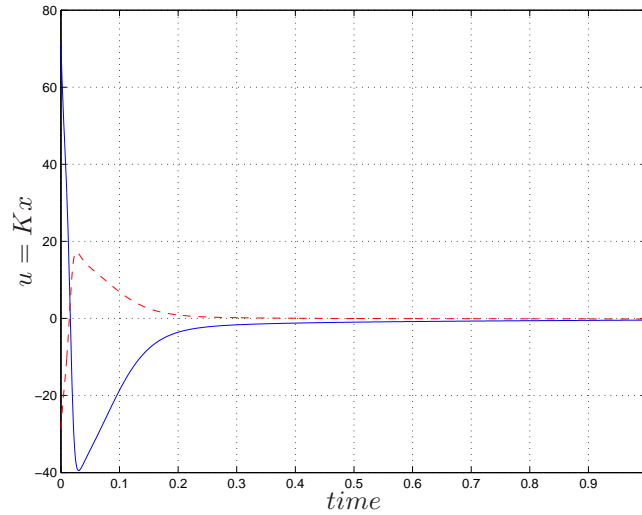


Figura 4.4: Entrada de controle para o Exemplo 4.2.

e os termos bilineares descritos pelas seguintes matrizes:

$$N_1 = \begin{bmatrix} -2.55 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} -1.10 & 0 & 0 \\ 0 & 3.60 & 0 \\ 0 & 0 & 4.10 \end{bmatrix}$$

Conforme a Observação 4.2, considera-se um termo adicional,  $+2\delta W$ , ao lado esquerdo da equação (4.32), o que corresponde a fixar a taxa de convergência exponencial  $\delta = 0.75$ . Em tal caso, para a condição inicial  $\mu = [0.25 \ 0.25 \ 0.25]'$ , não é possível computar um ganho robusto de realimentação de estados por meio do Corolário 4.1. Por outro lado, o Corolário 4.1 fornece uma solução factível, para um ganho LPV que depende de  $\alpha$  e  $\beta$ , o que ilustra o interesse por essa classe de controladores para tratar múltiplas especificações de desempenho de malha-fechada, ao preço de implementar-se uma lei de controle mais complexa.

**Exemplo 4.4** Considere o sistema com incertezas (4.28) discreto no tempo gerado aleatoriamente

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.7582 & 0.6802 \\ -0.6919 & -1.0725 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0.6234 \\ 0.5859 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.8998 & 0.2847 \\ -2.1231 & -0.7333 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.6773 \\ 0.8768 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -0.7734 & -0.3368 \\ 0.1518 & 0.9708 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} 0.0129 \\ 0.3104 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e o termo bilinear descrito pela seguinte matriz:

$$N = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.015 \\ 0.010 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Algoritmo 4.1 com  $\mu = [1 \ 1]'$  não é possível encontrar um ganho de realimentação de estados estabilizante por meio da condição (4.25) da Proposição 4.3. Por outro lado,

a condição (4.36) do Corolário 4.2 fornece o seguinte ganho robusto estabilizante

$$K = [0.2946 \quad -0.1373]$$

A Figura 4.5 mostra a estimativa do domínio de estabilidade  $\Gamma(\alpha)$  para o sistema, descrita por

$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x' S(\alpha)^{-1} x \leq \gamma^{-1}\} \quad (4.42)$$

com  $S(\alpha) = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3$ ,  $\alpha \in \mathcal{U}_N$  e

$$\gamma = 2.5087, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 1.078 & -0.9078 \\ -0.9078 & 2.3520 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0.8154 & -0.8362 \\ -0.8362 & 2.5087 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0.8696 & -0.8177 \\ -0.8177 & 2.3844 \end{bmatrix}$$

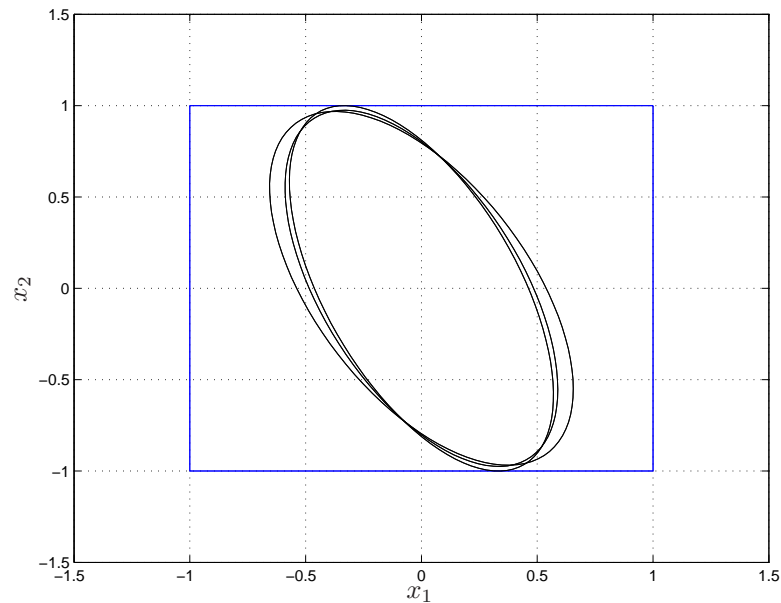


Figura 4.5: Estimativa do domínio de estabilidade obtida com a condição inicial do Exemplo 4.4, representada pela interseção das elipses.

## 4.8 Conclusão

Foi apresentado neste capítulo um método iterativo decomposto em dois passos convexos para o projeto de um controlador estabilizante por realimentação de estados associado a uma região de estabilidade para sistemas bilineares. Os resultados principais são dados como condições construídas em termos de LMIs explorando algumas propriedades de politopos e funções de Lyapunov quadráticas.



# Conclusões e perspectivas

Foram apresentadas contribuições para a solução de problemas de análise de estabilidade e síntese de controladores por realimentação de estados de sistemas dinâmicos que possuem elementos não-lineares. Mais especificamente, buscou-se a caracterização de uma região na qual a estabilidade assintótica da origem é garantida.

Para o problema de controle de sistemas chaveados contínuos no tempo sujeitos a funções de chaveamento arbitrárias e com saturação nos atuadores, foram fornecidas condições suficientes na forma de LMIs para a determinação de ganhos chaveados que estabilizam o sistema e uma estimativa da região de estabilidade. As condições propostas incluem especificações de alocação de pólos aos subsistemas lineares do sistema chaveado, impondo limitantes para as respostas transitórias do sistema sempre que o sistema opera na região linear. Considerando que a alocação de pólos em uma região específica do plano complexo representa uma alteração do comportamento dinâmico e, portanto, uma especificação de desempenho, foi investigado o compromisso entre a exigência de desempenho e o tamanho da estimativa da região de estabilidade. As condições propostas foram também aplicadas nos problemas de controle robusto e falha de atuadores.

Com respeito a sistemas não-lineares incertos sujeitos a não-linearidades de setor, a principal contribuição foi a construção de condições convexas de dimensão finita cuja solução permite prover funções de Lur'e com dependência polinomial homogênea nos parâmetros, as quais são menos conservadoras do que as funções de Lur'e que não levam em conta as incertezas. Dado um grau para a função candidata de Lur'e, uma extensão do Teorema de Pólya foi usada para fornecer relaxações LMIs progressivamente menos conservadoras, que asseguram a estabilidade absoluta robusta do sistema. Para síntese de controladores foi apresentada uma condição convexa para a determinação de um ganho robusto estabilizante por realimentação linear e não-linear.

Em relação a sistemas bilineares instáveis em malha aberta foi proposto um procedimento para determinar um ganho estabilizante por realimentação de estados e uma estimativa da região de estabilidade assintótica. O termo bilinear foi modelado como um envelope convexo de um conjunto de vetores lineares por inclusões diferenciais lineares. O procedimento proposto foi descrito como dois problemas de otimização convexa sujeito a restrições LMIs. Para o caso de sistemas bilineares contínuos no tempo as condições obtidas basearam-se em uma função de

Lyapunov quadrática. Condições para tratar especificações de desempenho do sistema em malha fechada, controle robusto e controle linear dependente de parâmetros foram também apresentadas. Para o caso discreto incerto variante no tempo foram propostas condições baseadas em função de Lyapunov afim, com variáveis de folga, para tratar o mesmo problema de síntese por realimentação de estados e de estimativa da região de atração.

## Perspectivas

A pesquisa realizada neste trabalho aponta alguns temas de interesse que podem ser explorados em novas investigações. A seguir são listados alguns desses temas:

- extensão dos resultados da tese considerando restrições de estrutura no controlador, como por exemplo realimentação de saída e controladores dinâmicos.
- utilização de funções de Lyapunov  $v(x(t)) = x(t)P(\alpha(t))x(t)$ , cujas matrizes  $P(\alpha(t))$  apresentam dependência polinomial nos parâmetros, para reduzir o conservadorismo das condições de análise e síntese apresentadas para sistemas bilineares contínuos variantes no tempo com parâmetros pertencentes a um politopo sujeitos a taxas de variação limitadas. Conforme mostrado no Capítulo 3, o uso de funções polinomiais homogêneas para o caso de sistemas não-lineares incertos invariantes no tempo mostra que o conservadorismo dos resultados diminui à medida que se aumenta o grau da função de Lyapunov.
- a busca de diferentes estruturas para a lei de controle, particularmente quando não existe matriz de entrada na parte linear do modelo considerado no Capítulo 4.

## Publicações

S. Tarbouriech, I. Queinnec, T. R. Calliero e P. L. D. Peres. Control design for bilinear systems with a guaranteed region of stability: an LMI-based approach, In *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp. 809-814, Thessaloniki, Greece, June 2009.

V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, T. R. Calliero, R. A. Borges, P. L. D. Peres, C. Prieur. Robust absolute stability and nonlinear state feedback stabilization based on polynomial Lur'e functions. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications*, volume 70, pp. 1803-1812, 2009.

V. F. Montagner, T. R. Calliero, P. L. D. Peres, I. Queinnec e S. Tarbouriech. Controle de sistemas chaveados com saturação de atuadores por meio de desigualdades matriciais lineares. In *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática*, Salvador, BA, Outubro 2006.

# Introduction générale

Un des premiers systèmes de contrôle important a été le régulateur centrifuge développé par James Watts pour le contrôle de vitesse d'une machine à vapeur, au début de la révolution industrielle. Tout de suite ce système a été amélioré de façon à optimiser sa performance, mais a dû faire face à des problèmes liés à son instabilité. Ainsi, sont apparus les deux problèmes basiques de la théorie de la commande : l'analyse de stabilité du système de contrôle et la synthèse du contrôleur.

Les exigences de contrôle, de performance et d'opérations des systèmes physiques augmentent significativement, rendant essentiel l'usage d'outils d'analyse et synthèse chaque fois plus sophistiqués et aussi plus efficaces du point de vue de la complexité de calcul des ordinateurs associés aux algorithmes [BEFB94, Kha02].

Le modèle qui représente un phénomène physique est, le plus souvent, un système dynamique non-linéaire. À cause de l'insuffisance d'outils numériques pour traiter cette classe de systèmes, il est usuel de recourir à la linéarisation en des points d'intérêt, qui permet de décrire le comportement de la dynamique autour du voisinage d'un point. Les modèles linéaires incorporent de plus en plus d'informations sur les dynamiques non-modélisées comme certaines non-linéarités, bruits, etc . . . Ces informations sont la plupart du temps considérées sous la forme d'incertitudes, qui peuvent être modélisées de plusieurs manières, via une transformation linéaire fractionnaire (en anglais, *Linear Fractional Transformation – LFT*), des représentations sous la forme affine et polytopique [Bar94, BB91, FAG96].

L'étude de techniques qui assurent la stabilité d'un système en boucle fermée, même en présence d'éléments non-linéaires comme, par exemple, des restrictions structurales et des non-linéarités inscrites dans un secteur, est devenu un important domaine de la théorie de la commande. De plus, garantir certaines caractéristiques de performance pour le système soumis à des non-linéarités a des implications immédiates au niveau des aspects de sécurité, de qualité du produit et d'économie du processus. Dans ce sens, des spécifications communes sont : la localisation des pôles de la boucle fermée dans des régions du plan complexe et la garantie de stabilité du système bouclé dans une région déterminée de l'espace d'état.

Un des résultats le plus important, et amplement utilisé pour traiter la stabilité et la synthèse de contrôleurs d'un système dynamique, est la “seconde méthode” ou “méthode directe” de

Lyapunov, qui fournit une condition suffisante, pour la stabilité d'un point d'équilibre [Kha02]. Pour cela on suppose l'existence d'une fonction scalaire auxiliaire définie positive qui possède la propriété d'être décroissante au long des trajectoires du système, appelée fonction de Lyapunov. Cette propriété est vérifiée sans nécessiter la connaissance explicite des trajectoires du système grâce au signe de la dérivée dans le temps de la fonction de Lyapunov [BM08].

Les problèmes d'analyse de stabilité et de synthèse de contrôleurs utilisant la méthode de Lyapunov consistent, en général, à choisir une fonction de Lyapunov adéquate. Ainsi, la plupart des recherches réalisées dans les dernières décennies cherchent à vérifier l'existence d'une fonction de Lyapunov du type quadratique [Bar85], c'est-à-dire, une même fonction de Lyapunov indépendante des paramètres incertains, qui garantit la stabilité du système pour le domaine d'incertitudes. À partir de la stabilité quadratique, ont été développés plusieurs résultats pour l'analyse, la commande et le filtrage robuste, avec des critères de performance tels que les normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  (voir, par exemple, [BEFB94] et les références internes). Une caractéristique commune sur l'obtention de conditions d'analyse et de synthèse est la transformation du problème de commande en un problème d'optimisation convexe, avec des contraintes du type inégalités matricielles linéaires (en anglais, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs), qui peuvent être résolues de manière efficace par des algorithmes basés sur la méthode des points intérieurs, par exemple [NN94]. Actuellement, il existe plusieurs programmes pour résoudre des LMIs (SeDuMi [Stu99], *LMI Control Toolbox* [GNLC95], etc.), et différentes interfaces de programmation (LMILab [GNLC95], YALMIP [Löf04], etc.) qui permettent une programmation simple et consistante de problèmes généraux.

Dans le contexte de synthèse de contrôleurs, la commande robuste par retour d'état appliquée à des systèmes dynamiques linéaires incertains est basée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques [BPG89]. Ce résultat permet de stabiliser le système en boucle fermée avec des gains fixes, à partir de la solution d'un ensemble de LMIs décrites en chacun des sommets du polytope d'incertitudes. Le principal inconvénient lorsque l'on utilise des gains fixes est que les résultats peuvent être conservateurs, car ils utilisent une même matrice de Lyapunov. Des stratégies de gains échelonnés peuvent réduire le conservatisme de la solution du problème de stabilisation de systèmes dynamiques avec incertitudes variantes dans le temps (en anglais, *Linear Parameter Varying* - LPV) [RS00, BP94, AA98].

Le but de ce travail est de traiter le problème de stabilité, calculer un gain de commande stabilisant et définir une estimation de la région de stabilité, pour une classe de systèmes dynamiques qui possèdent des éléments non-linéaires sur l'état et la commande. Ces termes non-linéaires peuvent apparaître de façon additive sur l'équation dynamique du système. Par ailleurs, la partie linéaire du système peut être soumise à des incertitudes polytopiques.

## Structure de la thèse

- Chapitre 1 : on présente une étude bibliographique. Le problème général de la stabilité pour mettre en place les fondements nécessaires à la compréhension des chapitres suivants est abordé. Ensuite, sont aussi présentées, une description générale des systèmes étudiés et des conditions du type LMI issues de la littérature pour l'analyse de la stabilité et pour le calcul de gains de retour d'état qui stabilisent le système.
- Chapitre 2 : le but du chapitre est de fournir une condition convexe pour le calcul des gains commutés de retour d'état qui stabilisent un système à commutation continu dans le temps avec des sous-systèmes linéaires soumis à des commutations arbitraires et à des actionneurs saturés. La condition est formulée en terme de LMIs qui utilisent comme information les matrices du modèle du système, les valeurs de l'amplitude de la saturation des actionneurs et les paramètres de placement de pôles pour chaque sous-système linéaire. La faisabilité de la condition proposée fournit un ensemble de gains pour le contrôleur et une région de stabilité pour le système soumis à des commutations arbitraires. L'ensemble de gains obtenus garantit encore le placement des pôles de chaque sous-système linéaire sur des régions circulaires dans le demi-plan gauche, en fournissant des bornes pour la réponse transitoire tant que le système opère dans la région linéaire. Sont aussi présentées des extensions du résultat principal pour traiter des problèmes de commande robuste et décentralisée, des problèmes de fautes des actionneurs, et pour maximiser l'estimation de la région d'attraction de l'origine. Le compromis entre le placement de pôles et la taille de l'estimation du domaine de stabilité est également étudié. À la fin du chapitre, des exemples illustrant l'efficacité des conditions proposées sont présentés. Les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être trouvés en partie dans [MCP<sup>+</sup>06].
- Chapitre 3 : sont présentées des conditions convexes de dimension finie pour construire des fonctions de Lur'e avec dépendance polynomiale homogène en les paramètres. Le but est de vérifier la stabilité des systèmes non-linéaires soumis à des paramètres incertains appartenant au simplexe unitaire et à des non-linéarités dépendantes de l'état, appartenant à des secteurs. Les conditions proposées sont écrites comme des LMIs paramétrisées dans des termes de degré  $g$  de la fonction de Lyapunov dépendant de paramètres et dans des termes du niveau de relaxation  $d$  des restrictions LMIs, basées sur une extension du Théorème de Pólya. À mesure que  $g$  et  $d$  grandissent, les conditions deviennent à chaque fois moins conservatives. Les résultats contiennent certaines conditions existantes dans la littérature comme des cas particuliers pour l'analyse de stabilité robuste et pour la stabilité absolue. Une solution convexe pour la synthèse de contrôleurs par retour d'état et des exemples numériques qui illustrent l'efficacité des conditions proposées sont aussi présentés. Le chapitre est basé sur l'article [MOC<sup>+</sup>09].
- Chapitre 4 : ce chapitre traite le problème de stabilisation de systèmes bilinéaires instables



en boucle ouverte via une commande par retour d'état. Le but implicite est de fournir une estimation de la région de stabilité pour le système en boucle fermée. La méthodologie proposée peut être décomposée en deux problèmes d'optimisation décrits en termes de LMIs : i) Soit un polytope contenant l'origine, dans lequel les valeurs des variables d'état sont bornées, trouver une loi de commande et une région de stabilité associée aussi grande que possible à l'intérieur du polytope. ii) Pour la solution du premier problème, trouver le plus grand polytope qui contient l'ellipsoïde qui satisfait les conditions de stabilité. Par l'itération de ces deux étapes, des conditions sont construites pour calculer une commande par retour d'état qui maximise l'estimation de la région de stabilité. Les résultats sont illustrés sur des exemples. Les résultats présentés dans ce chapitre sont partiellement issus de [TQCP09].

- Chapitre 5 : on présente les conclusions finales de la thèse et quelques perspectives de recherche pour les travaux futurs.

## Définitions et résultats préliminaires

Ce chapitre présente des résultats classiques de la littérature qui servent de base pour le développement des résultats du manuscrit, comme le Lemme de Finsler, le complément de Schur, la S-procédure et quelques définitions pour l'étude de la stabilité de systèmes dynamiques autonomes via la seconde méthode de Lyapunov. Les définitions d'ensemble invariant et de domaine de stabilité sont présentées. Pour plus détails, voir [Kha02, BM08]. Ensuite est présentée la description générale des systèmes étudiés dans les chapitres suivants, conjointement avec quelques conditions de la littérature basées sur des choix particuliers de la fonction de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité et la synthèse de contrôleurs.

### 5.1 Fondements et concepts basiques

#### 5.1.1 Résultats auxiliaires

Quelques inégalités matricielles non-linéaires peuvent être transformées en LMIs grâce à l'utilisation du complément de Schur, comme décrit ci-dessous [BEFB94].

**Lemme 5.1** *L'ensemble d'inégalités matricielles non-linéaires*

$$\{A_{11} > 0, A_{22} > A'_{12}A^{-1}_{11}A_{12}\}$$

où  $A_{11} = A'_{11}$  et  $A_{22} = A'_{22}$ , est équivalent à

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A'_{12} & A_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.1)$$

En échangeant des lignes et des colonnes dans la matrice ci-dessus, on obtient encore que (1.1) est équivalent à l'ensemble

$$\{A_{22} > 0, A_{11} > A_{12}A^{-1}_{22}A'_{12}\}$$

La S-procédure permet de concaténer plusieurs inégalités en une seule. Pour réduire le conservatisme, cette procédure introduit des multiplicateurs comme des facteurs de pondération, qui doivent être déterminés.

**Lemme 5.2** (*S-procédure*) Soient  $T_0, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices symétriques données et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Considérons la condition suivante en  $T_0, \dots, T_p$  :

$$\xi' T_0 \xi > 0, \forall \xi \neq 0 : \xi' T_i \xi \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (5.2)$$

S'il existe des scalaires  $\tau_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , tels que

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0, \quad (5.3)$$

alors (5.2) est satisfait.

Le lemme de Finsler, présenté ensuite, peut être utilisé pour écrire de nouvelles conditions de stabilité, en introduisant de nouvelles variables matricielles dans des problèmes d'optimisation, ou encore pour éliminer certaines variables.

**Lemme 5.3** Soient  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique et  $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  avec  $\text{rank}(\tilde{B}) < n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\zeta' \mathcal{L} \zeta < 0$ ,  $\forall \zeta$  tel que  $\tilde{B} \zeta = 0$ ,  $\zeta \neq 0$ .
- ii)  $\tilde{B}^\perp \mathcal{L} \tilde{B}^\perp < 0$ , où  $\tilde{B}^\perp$  dénote une base pour l'espace nul de  $\tilde{B}$ .
- iii)  $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{L} - \mu \tilde{B}' \tilde{B} < 0$ .
- iv)  $\exists R \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{L} + R \tilde{B} + \tilde{B}' R' < 0$ .

La démonstration du Lemme 5.3 peut être trouvée en [dOS01].

### 5.1.2 Seconde méthode de Lyapunov

Considérons le système autonome décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (5.4)$$

où  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction localement Lipschitz dans le domaine  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

L'idée basique de la méthode directe de Lyapunov est la description mathématique de l'observation d'un phénomène physique : si l'énergie totale d'un système électrique (ou mécanique) est dissipée continuellement, alors le système, soit linéaire ou non-linéaire, doit finalement s'arrêter dans un point d'équilibre. Ainsi, on peut conclure sur la stabilité du système sans calculer ses trajectoires, comme, le montre le théorème suivant.

**Théorème 5.1** Soit  $x = 0$  un point d'équilibre de (5.4),  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un domaine contenant  $x = 0$  et  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continuellement différentiable tels que

$$V(0) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0 \quad \text{sur} \quad D - \{0\} \quad (5.5)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{sur} \quad D \quad (5.6)$$

alors,  $x = 0$  est stable. Si de plus

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{sur} \quad D - \{0\} \quad (5.7)$$

alors,  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

**Définition 5.1** Une fonction  $V(x)$  définie positive qui satisfait la condition (5.6) ou (5.7) du Théorème 5.1 est appelée fonction de Lyapunov.

**Définition 5.2** Soit  $V(x)$  une fonction de Lyapunov. La surface dans l'espace d'état

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = c\}$$

est appelée surface de Lyapunov ou surface de niveau.

### 5.1.3 Domaine d'attraction et de stabilité

Si l'origine du système est asymptotiquement stable, il est intéressant d'étudier s'il existe un voisinage autour de l'origine dans lequel les trajectoires du système convergent à l'origine quand  $t \rightarrow \infty$ . Dans la recherche de la solution de ce problème, il faut définir les notions d'invariance positive d'un ensemble, de domaine d'attraction et de stabilité.

**Définition 5.3** Un ensemble  $D \subset \mathbb{R}^n$ , contenant l'origine, est positivement invariant pour le système (5.4), si toute trajectoire  $\phi(t, x_0)$  du système (5.4) avec  $x(0) = x_0 \in D$  reste dans  $D \forall t \geq 0$ .

**Définition 5.4** Un ensemble  $D \subset \mathbb{R}^n$  est contractif par rapport au système (5.4) si toute trajectoire du système (5.4), issue d'une condition initiale appartenant à  $D$ , évolue toujours vers l'intérieur de cet ensemble.

Notons qu'un ensemble contractif est toujours positivement, mais la réciproque n'est pas vérifiée.

**Définition 5.5** Soit  $\phi(t, x_0)$  une solution de (5.4) avec une condition initiale  $x_0$  à l'instant  $t = 0$ . Alors, la région d'attraction est l'ensemble des points  $x_0$  tels que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_0) = 0$ .

Déterminer analytiquement la région d'attraction d'un système est une tâche, en général, difficile voire, impossible. Néanmoins, une estimation de la région d'attraction peut être déterminée. Dans ce cas, il s'agit de caractériser des régions dans l'espace d'état dans lesquelles la convergence asymptotique des trajectoires du système à l'origine est garantie.

**Définition 5.6** Si pour toute condition initiale  $x_0 \in D$  on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_0) = 0$ , alors  $D$  est une région (ou un domaine) de stabilité asymptotique pour le système (5.4).

Il est toujours possible de déterminer une estimation de la région de stabilité asymptotique à partir de l'existence d'une fonction de Lyapunov. En considérant une fonction de Lyapunov candidate  $V(x)$  pour le système (5.4), alors le domaine

$$S_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c, c > 0\}$$

est une région de stabilité si  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in S_c$ . Dans ce cas,  $S_c$  est un ensemble contractif.

## 5.2 Systèmes linéaires avec termes non-linéaires

### 5.2.1 Description des systèmes

Dans les chapitres suivantes seront étudiés les systèmes qui peuvent être écrits, de façon générale, comme

$$\delta[x] = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + g(x(t), u(t)) \quad (5.8)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état et  $u \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée de commande. Les matrices  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  appartiennent à l'ensemble convexe  $\mathcal{P}$  et  $g(\cdot)$  est une fonction non-linéaire. Le symbole  $\delta[\cdot]$  représente la dérivée par rapport au temps pour les systèmes continus et l'opérateur avance pour les systèmes discrets dans le temps. L'ensemble  $\mathcal{P}$  est donné par

$$\mathcal{P} = \left\{ (A, B)(\alpha); (A, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A, B)_i; \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (5.9)$$

où les sommets  $A_i, B_i, i = 1, \dots, N$ , sont supposés connus.

### 5.2.2 Stabilité

Le problème de stabilité du système

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) \quad (5.10)$$

où  $A(\alpha) \in \mathcal{P}$  peut être étudié via l'utilisation d'une fonction de Lyapunov, car le système (5.10) est une classe particulière du système (5.4) avec  $B(\alpha) = 0$  et  $g(\cdot) = 0$ . Alors, fonction de Lyapunov candidate pour le système (5.10) est

$$v(x(t)) = x(t)'Px(t) \quad (5.11)$$

avec sa dérivée

$$\dot{v}(x(t)) = x(t)'(A(\alpha)'P + PA(\alpha))x(t) \quad (5.12)$$

Une condition suffisante pour la stabilité est donnée par la stabilité quadratique [Bar85]. Le lemme qui suit présente ce résultat.

**Lemme 5.4** *S'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que*

$$A_i'P + PA_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.13)$$

*alors le système (5.10) est stable, avec une fonction de Lyapunov quadratique donnée par (5.11).*

**Remarque 5.1** Etant donné que l'inégalité (5.12) est convexe en  $P$ , il est suffisant de tester l'inégalité de Lyapunov (5.13) seulement aux sommets du polytope d'incertitudes pour vérifier la stabilité du système. Bien que le Lemme 5.4 présente une condition suffisante seulement, ce lemme caractérise de manière nécessaire et suffisante la stabilité quadratique. Dans le cas précisément connu ( $A(\alpha) = A$  et donc  $A_i = A$ ), la condition (5.13) est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du système.

Pour le cas où le système (5.10) est discret et variant dans le temps,

$$x(t+1) = A(\alpha(t))x(t) \quad (5.14)$$

où  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur de paramètres incertains variants dans le temps qui appartient au simplexe unitaire pour tout  $t \geq 0$

$$\mathcal{U}_N = \left\{ \alpha(t) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1, \alpha_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (5.15)$$

avec la matrice  $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  appartenant au polytope

$$\mathcal{P} = \left\{ A(\alpha(t)) : A(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)A_i, \alpha \in \mathcal{U}_N \right\} \quad (5.16)$$

la stabilité du système peut être étudiée avec de la fonction de Lyapunov dépendante de paramètres

$$v(x(t)) = x(t)'P(\alpha(t))x(t) \quad (5.17)$$

Notons que

$$v(x(t+1)) = x(t+1)'P(\alpha(t+1))x(t+1) \quad (5.18)$$

Alors, la fonction différence  $\Delta v(x(t)) \triangleq v(x(t+1)) - v(x(t))$  est donnée par

$$\Delta v(x(t)) \triangleq x(t)'(A(\alpha)'P(\alpha(t+1))A(\alpha) - P(\alpha(t)))x(t) \quad (5.19)$$

Une condition suffisante pour la stabilité du système (5.14) est donnée par l'existence de matrices symétriques définies positives  $P(\alpha(t+1)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que

$$A(\alpha)'P(\alpha(t+1))A(\alpha) - P(\alpha(t)) < 0 \quad (5.20)$$

La stabilité quadratique est basée sur le choix particulier  $P(\alpha(t+1)) = P(\alpha(t)) = P$ . Le lemme qui suit présente une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité quadratique [GPB91], qui est seulement suffisante pour la stabilité du système.

**Lemme 5.5** *S'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que*

$$A'_i P A_i - P < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.21)$$

*alors le système (5.14) est stable, avec une fonction de Lyapunov donnée par (5.17).*

Une remarque analogue à la Remarque 5.1 pourrait être formulée.

Une condition moins conservative que celle du Lemme 5.5 a été présentée dans [DB01], en utilisant la fonction de Lyapunov (5.18) avec une matrice  $P(\alpha(t))$  dans la forme affine

$$P(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) P_i, \quad P_i = P'_i > 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad \alpha(t) \in \mathcal{U}_N \quad (5.22)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une matrice de Lyapunov dépendante de paramètres dans la forme affine donnée par (5.22) est illustrée par le lemme suivant [DB01].

**Lemme 5.6** *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

*i) S'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , telles que*

$$A'_i P_j A_i - P_i < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.23)$$

*le système (5.14) est stable, avec  $P(\alpha(t))$  donnée par (5.22) la matrice de la fonction de Lyapunov (5.18) ;*

*ii) S'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , telles que*

$$\begin{bmatrix} P_i & A'_i P_j \\ \star & P_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.24)$$

*le système (5.14) est stable, avec  $P(\alpha(t))$  donnée par (5.22) la matrice de la fonction de Lyapunov (5.18) ;*

*iii) S'il existe des matrices symétriques définies positives  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , telles que*

$$\begin{bmatrix} S_i & S_i A'_i \\ \star & S_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.25)$$

*le système (5.14) est stable, avec  $P(\alpha(t)) = S(\alpha(t))^{-1}$  la matrice de la fonction de Lyapunov (5.18) et*

$$S(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) S_i, \quad S_i = S'_i > 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad \alpha(t) \in \mathcal{U}_N \quad (5.26)$$

*iv) S'il existe des matrices symétriques définies positives  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , et une matrice  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que*

$$\begin{bmatrix} G_i + G'_i - S_i & G'_i A'_i \\ \star & S_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.27)$$

*le système (5.14) est stable, avec  $P(\alpha(t)) = S(\alpha(t))^{-1}$ , où  $S(\alpha(t))$  est donnée par (5.26) et correspond à la matrice de la fonction de Lyapunov (5.18).*

**Preuve:** Pour montrer l'équivalence de i) et ii) on applique le complément de Schur dans l'inégalité (5.23) qui nous donne directement (5.24). Pour obtenir iii) à partir de ii) il est suffisant de post et pré-multiplier (5.24) par

$$\begin{bmatrix} P_i^{-1} & 0 \\ 0 & P_j^{-1} \end{bmatrix}$$

et d'utiliser la transformation de variables  $S_i = P_i^{-1}$ ,  $S_j = P_j^{-1}$ . Équivalence iii) et iv) : si (5.25) a une solution  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , alors (5.27) est faisable aussi avec  $G_i = G'_i = S_i$ . Si (5.27) est faisable, alors en multipliant (5.27) à gauche par

$$T = \begin{bmatrix} -A_i & I \end{bmatrix}$$

et à droite par  $T'$ , on obtient  $S_j - A_i S_i A'_i > 0$  qui est le complément de Schur de (5.25). ■

**Remarque 5.2** La condition de stabilité quadratique donnée par le Lemme 5.5 est contenu dans le Lemme 5.6, il suffit de choisir  $P_i = P_j = P$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dans (5.23).

### 5.2.3 Stabilisation

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t) \quad (5.28)$$

où  $(A, B)(\alpha(t)) \in \mathcal{P}$ . Supposons comme une loi de commande par retour d'état avec gain fixe  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$u(t) = Kx(t) \quad (5.29)$$

Le système en boucle fermée est donné par

$$\dot{x}(t) = (A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K)x(t) \quad (5.30)$$

Une condition suffisante pour la stabilité du système (5.30) est obtenue s'il existe une fonction de Lyapunov (5.11), permettant de vérifier la stabilisation quadratique. Ceci est présenté dans le lemme suivant [BPG89].

**Lemme 5.7** *S'il existe une matrice symétrique définie positive  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que*

$$A_i W + W A'_i + B_i Y + Y' B'_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.31)$$

*alors le système (5.28) est stable avec la loi de commande (5.29), dont le gain est donné par*

$$K = ZW^{-1} \quad (5.32)$$

*où  $P = W^{-1}$  est la matrice de la fonction de Lyapunov (5.11).*



**Preuve:** Considérons la fonction de Lyapunov quadratique (5.11), avec  $P = P' > 0$ , alors

$$(A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K)'P + P(A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K) < 0 \quad (5.33)$$

En pré et post-en multipliant (5.33) par  $P^{-1}$  et en faisant les substitutions de variables  $W = P^{-1}$  et  $Z = KW$ , on obtient

$$A(\alpha(t))W + WA(\alpha(t))' + B(\alpha(t))Z + Z'B(\alpha(t))' < 0 \quad (5.34)$$

Comme  $(A, B)(\alpha(t)) \in \mathcal{P}$ , l'inégalité (5.34) est convexe en  $P$  et  $Z$ , donc, l'existence de solution pour (5.31) est nécessaire et suffisante pour assurer la faisabilité de (5.34). ■

Les résultats de la condition du Lemme 5.7 peuvent être conservatifs, parce que dans quelques cas le système (5.28) n'admet pas un gain fixe stabilisant ou ce gain n'est pas calculable avec la condition (5.31). Dans les chapitres suivants sont présentées des stratégies de synthèse de contrôleurs par retour d'état basés sur des gains dépendants de paramètres qui peuvent produire des résultats moins conservatifs.

Considérons maintenant, le problème de stabilisation pour le système discret dans le temps

$$x(t+1) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t) \quad (5.35)$$

où  $(A, B)(\alpha(t)) \in \mathcal{P}$ . Supposons une loi de commande par retour d'état avec gain fixe  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  comme dans (5.29).

Le système en boucle fermée est donné par

$$x(t+1) = (A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K)x(t) \quad (5.36)$$

De façon analogue au problème d'analyse de stabilité, une condition suffisante pour la stabilité du système (5.36) est la condition résultant de la substitution de  $A(\alpha)$  dans (5.20) par  $A(\alpha) + B(\alpha)K$ .

Une condition suffisante pour la stabilisation du système (5.35) soumis à loi de commande (5.29), est donnée par l'utilisation de la stabilisation quadratique, reproduite dans le lemme qui suit.

**Lemme 5.8** *S'il existe une matrice symétrique définie positive  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que*

$$\begin{bmatrix} S & SA'_i + YB'_i \\ \star & S \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.37)$$

*alors le système (5.35) est stable avec la loi de commande (5.29), dont le gain est  $K = YS^{-1}$ , où  $P = S^{-1}$  est la matrice de la fonction de Lyapunov (5.17).*

**Preuve:** Supposons qu'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que

$$(A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K)'P(A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K) - P < 0 \quad (5.38)$$

En appliquant le complément de Schur à l'inégalité (5.38), on obtient

$$\begin{bmatrix} P & (A(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K)'P \\ \star & P \end{bmatrix} > 0$$

En multipliant à gauche et à droite par

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ \star & P^{-1} \end{bmatrix}$$

et en faisant le changement de variables  $P^{-1} = S$  et  $Y = KS$ , on obtient

$$\begin{bmatrix} S & SA(\alpha(t))' + YB(\alpha(t))' \\ \star & S \end{bmatrix} > 0 \quad (5.39)$$

Grâce à la convexité, il est suffisant de tester (5.39) seulement dans les sommets  $(A, B)_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ce qui donne la condition (5.37). ■

Un résultat moins conservatif que celui présenté dans le Lemme 5.8 peut être obtenu en utilisant une stratégie de gain robuste [DB01].

**Lemme 5.9** *S'il existe des matrices symétriques définies positives  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , des matrices  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que*

$$\begin{bmatrix} G + G' - S_i & G'A_i' + YB_i' \\ \star & S_j \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.40)$$

*alors la stabilité du système (5.35) est assurée par le loi de commande (5.29), avec le gain  $K = YG^{-1}$ .*

**Preuve:** En substituant  $A_i$  dans l'expression de la stabilité du système autonome (5.27) par  $A_i + B_iK$  et en faisant le changement de variables  $Y = KG$  on obtient la condition (5.40). ■

Remarquons que la condition (5.40) contient la stabilisation quadratique (5.37) comme un cas particulier, il suffit de faire  $G = G' = S_i = S_j = S$  dans (5.40).



# Synthèse pour les systèmes à commutation

## 6.1 Introduction

Les systèmes à commutation sont une classe de systèmes hybrides, définis par plusieurs modes d'opération (sous-systèmes) et une règle qui détermine quel mode est activé à chaque instant du temps [DBPL00]. Par exemple, des dynamiques commutées peuvent être trouvées dans les circuits électriques avec clés électronique (convertisseurs de puissance) et dans des systèmes soumis à des lois de commande commutées (par exemple [KSV91, LM99, Kha02]). Pour le cas de systèmes à commutation avec sous-systèmes linéaires soumis à des fonctions de commutation arbitraires, il est important de mentionner que le calcul d'un contrôleur pour chaque sous-système de façon à assurer la stabilité de chaque sous-système isolément n'est pas une condition suffisante pour assurer la stabilité du système sous commutations arbitraires [LM99, LSL<sup>+</sup>03]. Un gain robuste (fixe) de retour d'état qui assure la stabilité du système en boucle fermée soumis aux commutations arbitraires peut être calculé via la condition de stabilisation quadratique [Bar85, BPG89]. Cependant, un gain robuste quadratiquement stabilisant souvent ne peut pas être calculé ou, quand c'est possible, n'est pas toujours capable d'assurer une bonne performance au système. Il est alors intéressant de déterminer un ensemble de gains (un gain pour chaque sous-système linéaire) afin que le système en boucle fermée soit stable pour des fonctions de commutation arbitraires.

De plus, les systèmes dynamiques sont fréquemment soumis à des non-linéarités, comme par exemple des saturations [HL01, TGG07]. Pour des systèmes soumis à saturation dans les actionneurs, différentes techniques de commande peuvent être utilisées, selon la représentation choisie pour la saturation: techniques d'inclusions différentielles et représentation polytopique du système [GT01, TGG02, HLC02, HTZ06], ou encore condition modifiée de secteur [GT05, TPG06].

Du point de vue de la modélisation, les systèmes linéaires affectés par des éléments non-linéaires comme un bloc de type on-off (clés idéales), saturations, zones mortes, . . . , peuvent être représentés en utilisant des modèles linéaires par morceaux [Joh03], où le modèle qui détermine

la dynamique du système est sélectionné par des règles dans l'espace d'état ou par des fonctions du temps. La stabilité des systèmes linéaires par morceaux peut être recherchée en utilisant l'approche basée sur la recherche de fonctions de Lyapunov, comme par exemple les fonctions de Lyapunov multiples [LM99] et les fonctions de Lyapunov linéaires par morceaux [RJ00, Joh03]. L'approche de Lyapunov est aussi importante pour la synthèse de contrôleurs. Un problème qui mérite une étude plus approfondie est l'obtention de conditions de synthèse de contrôleurs basées sur des inégalités matricielles linéaires (LMIs) dans le contexte de systèmes à commutation avec des sous-systèmes linéaires soumis à des fonctions de commutation arbitraires dans le temps et avec des actionneurs saturants.

Le but de ce chapitre est de proposer une condition convexe de synthèse de gains commutés par retour d'état pour des systèmes à commutation continus dans le temps soumis à des fonctions de commutation arbitraires et, simultanément, à des saturations dans les actionneurs. La condition proposée est décrite par un ensemble de LMIs, étendant l'usage de la condition de [GT05] pour le cas de systèmes à commutation. Des contraintes sur la performance en termes de placement de pôles et sur la maximisation du domaine de stabilité du système pour des fonctions de commutation arbitraires sont également considérées. Les compromis entre la taille de la région de placement des pôles et la taille de la région de stabilité locale sont aussi étudiés. Les conditions proposées peuvent aussi être appliquées aux problèmes de commande robuste et décentralisée, ou de commande avec faute des actionneurs.

## 6.2 Définition du problème

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \quad (6.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande et

$$\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{J}, \mathcal{J} = \{1, 2, \dots, N\} \quad (6.2)$$

est une fonction de commutation qui sélectionne arbitrairement les matrices  $(A, B)_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  du système (6.1) qui sont actives dans chaque instant de temps.

Supposons que  $\sigma(t)$  et  $x(t)$  sont disponibles dans le temps réel pour être utilisés par la loi de commande. Supposons une loi de commande par retour d'état avec gains commutés soumis à la saturation :

$$u(t) = \text{sat}(K_{\sigma(t)}x(t)), K_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \sigma(t) \in \mathcal{J} \quad (6.3)$$

où chaque composante du vecteur  $u(t)$  est définie comme

$$u_{(i)}(t) = \text{sat}(v_{(i)}) = \begin{cases} \rho_{(i)}, & \text{si } v_{(i)} > \rho_{(i)} \\ v_{(i)}, & \text{si } -\rho_{(i)} \leq v_{(i)} \leq \rho_{(i)} \\ -\rho_{(i)}, & \text{si } v_{(i)} < -\rho_{(i)} \end{cases} \quad (6.4)$$

avec  $v_{(i)} = K_{(i)\sigma(t)}x(t)$ . Définissons la fonction zone morte comme

$$\psi(v_{(i)}) = v_{(i)} - \text{sat}(v_{(i)}) \quad (6.5)$$

où chaque composante est donnée par

$$\psi(v_{(i)}) = \begin{cases} v_{(i)} - \rho_{(i)}, & \text{si } v_{(i)} > \rho_{(i)} \\ 0, & \text{si } -\rho_{(i)} \leq v_{(i)} \leq \rho_{(i)} \\ v_{(i)} + \rho_{(i)}, & \text{si } v_{(i)} < -\rho_{(i)} \end{cases} \quad (6.6)$$

$i = 1, \dots, m; \sigma(t) \in \mathcal{J}$

Considérons (6.3) et (6.5), le système en boucle fermée peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{cl\sigma(t)}x(t) - B_{\sigma(t)}\psi(K_{\sigma(t)}x(t)) \\ A_{cl\sigma(t)} &\triangleq A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Le but principal de ce chapitre est de fournir une solution pour le problème suivant.

**Problème 6.1** Déterminer les gains  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , pour la loi de commande commutée avec saturation (6.3) et une région  $\mathcal{E}$  dans l'espace d'état tels que:

- i)* le système saturé (6.7) est stable pour toute fonction de commutation arbitraire quand initialisé dans la région  $\mathcal{E}$ ;
- ii)* pour le système (6.7), opérant dans la région linéaire (c'est-à-dire,  $\psi(K_{\sigma(t)}x(t)) = 0$ ), les valeurs propres de chaque sous-système linéaire en boucle fermée  $(A_j + B_jK_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , appartiennent à un cercle  $\mathcal{C}_j$ , montré sur la Figure 6.1, de rayon  $r_j$  et de centre  $-(d_j + r_j), 0$  contenu dans le demi-plan gauche du plan complexe,  $d_j$  et  $r_j$  étant des scalaires réels strictement positifs.

**Remarque 6.1** Notons que la propriété i) décrite dans le Problème 6.1 est liée à la stabilité du système saturé en boucle fermée (6.7) soumis à des fonctions de commutation arbitraires. Le choix de gains  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  qui garantit que les valeurs propres de chaque sous-système linéaire  $(A_j + B_jK_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , soient dans le demi-plan gauche du plan complexe, n'est qu'une condition nécessaire pour la stabilité du système dans le cas de fonctions de commutation arbitraires [LM99].

**Remarque 6.2** La propriété ii) décrite dans le Problème 6.1 est liée au comportement du système dans la région linéaire d'opération ( $\psi(K_{\sigma(t)}x(t)) = 0$ ). Dans ce cas, les valeurs propres de chaque sous-système  $(A_j + B_jK_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , sont contenues dans un cercle  $\mathcal{C}_j$ . Remarquons qu'à chaque commutation, un nouveau transitoire se produit et les limitations du temps de réponse et du dépassement de ce transitoire dépendent des valeurs de  $d_j$  et  $r_j$ . De plus, les valeurs propres de chaque sous-système linéaire peuvent être placées dans des cercles indépendants.

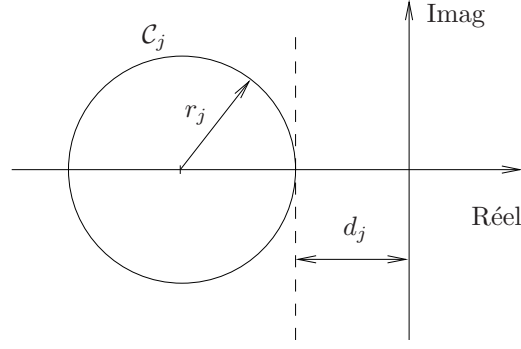


Figure 6.1: Région circulaire pour placement des valeurs propres de  $(A_j + B_j K_j)$ , avec rayon  $r_j$ , centre  $(-(d_j + r_j), 0)$ , localisée dans le demi-plan gauche du plan complexe.

### 6.3 Préliminaires

Avant de présenter les résultats principaux de ce chapitre, nous donnons quelques résultats préliminaires.

**Lemme 6.1** *Considérons le système (6.7) sans saturation (c'est-à-dire,  $\psi(K_{\sigma(t)}x(t)) = 0$ ). Pour des scalaires réels strictement positifs données  $d_j, r_j, j = 1, \dots, N$ , s'il existe une matrice symétrique définie positive  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et des matrices  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}, j = 1, \dots, N$ , telles que*

$$\begin{bmatrix} A_j W + W A_j + B_j Z_j + Z_j' B_j + 2d_j W & A_j W + B_j Z_j + d_j W \\ \star & -r_j W \end{bmatrix} < 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (6.8)$$

alors le système en boucle fermée avec gains commutés donnés pour

$$K_j = Z_j W^{-1}, \quad j = 1, \dots, N \quad (6.9)$$

est stable pour toute fonction de commutation arbitraire  $\sigma(t) \in \mathcal{J}$ , et les valeurs propres de chaque sous-système linéaire  $(A_j + B_j K_j)$  appartiennent à  $\mathcal{C}_j$ .

**Preuve:** La faisabilité de (6.8) garantit la stabilité quadratique du système en boucle fermée, puisque, avec  $Z_j = K_j W$ , on obtient

$$(A_j + B_j K_j) W + W (A_j + B_j K_j)' < -2d_j W < 0, \quad j = 1, \dots, N$$

Ainsi le système en boucle fermée est stable pour toute fonction de commutation arbitraire  $\sigma(t) \in \mathcal{J}$ . De plus, en multipliant (6.8) à gauche et à droite par

$$\begin{bmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & W^{-1} \end{bmatrix}$$

avec  $W^{-1} = P$  et en utilisant le complément de Schur, on observe que (6.8) est équivalent à

$$\Gamma_j' P \Gamma_j - P < 0$$

$$\Gamma_j = \frac{A_j + B_j K_j + (d_j + r_j) \mathbf{I}}{r_j}$$

ce qui garantit que les valeurs propres de  $(A_j + B_j K_j)$  appartiennent au cercle de rayon  $r_j$  et de centre  $(-(d_j + r_j), 0)$ . ■

Définissons l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : |K_{(i)\sigma(t)} - G_{(i)\sigma(t)}| x(t) \leq \rho_{(i)}, i = 1, \dots, m; \sigma(t) \in \mathcal{J}\} \quad (6.10)$$

Le lemme suivant peut être énoncé. Ce résultat peut être vu comme une extension de la condition de secteur généralisée présentée dans [GT05].

**Lemme 6.2** *Si  $x(t) \in \mathcal{S}$ , la non-linéarité  $\psi(K_{\sigma(t)}x(t))$  donnée par (6.5) satisfait*

$$\psi(K_{\sigma(t)}x(t))' T_{\sigma(t)} [\psi(K_{\sigma(t)}x(t)) - G_{\sigma(t)}x(t)] \leq 0 \quad (6.11)$$

pour toute matrice  $T_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonale définie positive.

**Preuve:** Considérons les trois cas qui suivent.

**a)**  $-\rho_{(i)} \leq K_{(i)\sigma(t)}x(t) \leq \rho_{(i)}$ . Dans ce cas, par définition, on obtient

$$\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t))' T_{(i,i)\sigma(t)} [\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t)] = 0$$

**b)**  $K_{(i)\sigma(t)}x(t) > \rho_{(i)}$ . Dans ce cas, on obtient  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) = K_{(i)\sigma(t)}x(t) - \rho_{(i)}$ . Si  $x(t) \in \mathcal{S}$ , il suit que  $K_{(i)\sigma(t)}x(t) - G_{(i)\sigma(t)}x(t) \leq \rho_{(i)}$ , donc  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t) = K_{(i)\sigma(t)}x(t) - \rho_{(i)} - G_{(i)\sigma(t)}x(t) \leq 0$  et, comme  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) > 0$ , on obtient

$$\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t))' T_{(i,i)\sigma(t)} [\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t)] \leq 0, \quad \forall T_{(i,i)\sigma(t)} > 0$$

**c)**  $K_{(i)\sigma(t)}x(t) < -\rho_{(i)}$ . Dans ce cas,  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) = K_{(i)\sigma(t)}x(t) + \rho_{(i)}$ . Si  $x(t) \in \mathcal{S}$ , il suit que  $K_{(i)\sigma(t)}x(t) - G_{(i)\sigma(t)}x(t) \geq -\rho_{(i)}$ , donc  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t) = K_{(i)\sigma(t)}x(t) + \rho_{(i)} - G_{(i)\sigma(t)}x(t) \geq 0$  et, comme  $\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) < 0$ , on obtient

$$\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t))' T_{(i,i)\sigma(t)} [\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t)] \leq 0, \quad \forall T_{(i,i)\sigma(t)} > 0$$

Ainsi, on obtient que, pour tout  $x(t) \in \mathcal{S}$ , avec  $\psi$  définie par (6.5), l'inégalité

$$\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t))' T_{(i,i)\sigma(t)} [\psi(K_{(i)\sigma(t)}x(t)) - G_{(i)\sigma(t)}x(t)] \leq 0$$

est vérifiée  $\forall T_{(i,i)\sigma(t)} > 0, \forall i = 1, \dots, m, \sigma(t) \in \mathcal{J}$ , et donc on obtient (6.11). ■



## 6.4 Résultats principaux

Une solution convexe pour le Problème 6.1 est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 6.1** *Soient les scalaires réels positifs  $d_j$  et  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . S'il existe une matrice symétrique définie positive  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices  $Y_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et des matrices diagonales définies positives  $S_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , telles que*

$$\Omega_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} W & Z'_{(i)j} - Y'_{(i)j} \\ \star & \rho_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.12)$$

$$i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, N$$

$$\Theta_j \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{M} & \mathcal{N} & \mathcal{L} \\ \star & -r_j W & 0 \\ \star & \star & -2S_j \end{bmatrix} < 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= A_j W + W A'_j + B_j Z_j + Z'_j B'_j + 2d_j W \\ \mathcal{N} &= A_j W + B_j Z_j + d_j W \\ \mathcal{L} &= -B_j S_j + Y'_j \end{aligned}$$

alors la loi de commande (6.3) avec gains commutés donnés par  $K_j = Z_j W^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , garantit :

*i)* la stabilité du système (6.7) dans la région ellipsoïdale

$$\mathcal{E} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)' P x(t) \leq 1\} \quad (6.14)$$

avec  $P = W^{-1}$ , pour toute fonction de commutation  $\sigma(t) \in \mathcal{J}$ ;

*ii)* l'inclusion des valeurs propres de  $(A_j + B_j K_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , dans le cercle  $\mathcal{C}_j$  de rayon  $r_j$  et de centre  $-(d_j + r_j), 0$ , quand le système opère dans la région linéaire (c'est-à-dire,  $\psi(K_{\sigma(t)} x(t)) = 0$ ).

**Preuve:** D'abord, observons que  $\Omega_{ij} \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, N$ , garantit que  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ , avec la région  $\mathcal{E}$  donnée par (6.14) et l'ensemble  $\mathcal{S}$  donné par (6.10) [BEFB94]. Soit

$$V(x(t)) = x(t)' P x(t), \quad P = P' > 0, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (6.15)$$

une fonction de Lyapunov candidate. La dérivée temporelle de (6.15) le long des trajectoires du système (6.7) est donnée par

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)' (A'_{cl\sigma(t)} P + P A_{cl\sigma(t)}) x(t) - 2x(t)' P B_{\sigma(t)} \psi(K_{\sigma(t)} x(t)) \quad (6.16)$$

Si  $x \in \mathcal{E}$ , en utilisant le Lemme 6.2 puisque  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ , on obtient

$$\dot{V}(x(t)) \leq \dot{V}(x(t)) - 2\psi(K_{\sigma(t)} x(t))' T_{\sigma(t)} \psi(K_{\sigma(t)} x(t)) + 2\psi(K_{\sigma(t)} x(t))' T_{\sigma(t)} G x(t) \quad (6.17)$$

L'expression du coté droit de (6.17) peut être réécrite comme

$$\begin{bmatrix} x(t)' & \psi(K_{\sigma(t)})' \end{bmatrix} \Lambda_{\sigma(t)} \begin{bmatrix} x(t) \\ \psi(K_{\sigma(t)}) \end{bmatrix}$$

avec

$$\Lambda_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} A'_{cl\sigma(t)}P + PA_{cl\sigma(t)} & -PB_{\sigma(t)} + G'_{\sigma(t)}T_{\sigma(t)} \\ \star & -2T_{\sigma(t)} \end{bmatrix}$$

En multipliant  $\Lambda_{\sigma(t)}$  à gauche et à droite par

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & T_{\sigma(t)}^{-1} \end{bmatrix}$$

et en considérant que  $W = P^{-1}$ ,  $S_{\sigma(t)} = T_{\sigma(t)}^{-1}$  et  $Y'_{\sigma(t)} = WG'_{\sigma(t)}$ , on obtient

$$\Xi_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} WA'_{cl\sigma(t)} + A_{cl\sigma(t)}W & -B_{\sigma(t)}S_{\sigma(t)} + Y'_{\sigma(t)} \\ \star & -2S_{\sigma(t)} \end{bmatrix}$$

Notons que la faisabilité de  $\Theta_j < 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , garantit que

$$\Theta_{\sigma(t)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{\sigma(t)} & \mathcal{N}_{\sigma(t)} & \mathcal{L}_{\sigma(t)} \\ \star & -r_{\sigma(t)}W & 0 \\ \star & \star & -2S_{\sigma(t)} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \sigma(t) \in \mathcal{J} \quad (6.18)$$

$$\mathcal{M}_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}W + WA'_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}Z_{\sigma(t)} + Z'_{\sigma(t)}B'_{\sigma(t)} + 2d_{\sigma(t)}W$$

$$\mathcal{N}_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}W + B_{\sigma(t)}Z_{\sigma(t)} + d_{\sigma(t)}W$$

$$\mathcal{L}_{\sigma(t)} = -B_{\sigma(t)}S_{\sigma(t)} + Y'_{\sigma(t)}$$

En appliquant le complément de Schur dans (6.18) on a

$$\Pi_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{M}}_{\sigma(t)} & -B_{\sigma(t)}S_{\sigma(t)} + Y'_{\sigma(t)} \\ \star & -2S_{\sigma(t)} \end{bmatrix} < 0$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_{\sigma(t)} &= A_{\sigma(t)}W + WA'_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}Z_{\sigma(t)} + Z'_{\sigma(t)}B'_{\sigma(t)} + 2d_{\sigma(t)}W \\ &+ \left( A_{\sigma(t)}W + B_{\sigma(t)}Z_{\sigma(t)} + d_{\sigma(t)}W \right) \frac{W^{-1}}{r_{\sigma(t)}} \left( WA'_{\sigma(t)} + Z'_{\sigma(t)}B'_{\sigma(t)} + d_{\sigma(t)}W \right) \end{aligned}$$

Notons que l'élément (1, 1) de  $\Pi_{\sigma(t)} < 0$  est équivalent à la condition (6.8) du Lemme 6.1. Finalement, on conclut que  $\Pi_{\sigma(t)} < 0$  est une condition suffisante pour satisfaire  $\Xi_{\sigma(t)} < 0$ . ■

## 6.5 Extensions

Maintenant nous abordons le problème de commande robuste en utilisant les conditions du Théorème 6.1, comme cela est décrit dans le corollaire suivant.

**Corollaire 6.1** *S'il existe une solution pour le Théorème 6.1 avec  $Z_j = Z$ ,  $j = 1, \dots, N$ , alors le gain robuste de retour d'état  $K = ZW^{-1}$  satisfait les propriétés i) et ii) du Théorème 6.1.*

Le corollaire suivant fournit un problème d'optimisation convexe pour maximiser l'estimation du domaine d'attraction de l'origine.

**Corollaire 6.2** *S'il existe une matrice symétrique définie positive  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices  $Y_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , des matrices diagonales définies positives  $S_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , et un scalaire réel positif  $\beta$  qui sont solutions de :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^* \triangleq \min \beta \\ \text{s.a} \\ \begin{bmatrix} \beta \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ \text{LMIs (6.12) - (6.13)} \end{array} \right. \quad (6.19)$$

alors l'axe mineur de la région ellipsoïdale  $\mathcal{E}$  de stabilité robuste du système à commutation est maximisé [BEFB94].

D'autres critères pour la maximisation de l'ensemble  $\mathcal{E}$  peuvent être utilisés, comme par exemple, l'inclusion dans  $\mathcal{E}$  d'un ensemble polyédral, défini comme la combinaison convexe de vecteurs appartenant à  $\mathbb{R}^n$ . La procédure d'optimisation est définie comme la maximisation du paramètre d'échelle de l'ensemble polyédral, comme dans [GT05].

Les deux prochains corollaires fournissent des conditions basées sur des problèmes d'optimisation convexe pour rechercher les compromis entre les paramètres de la région obtenue par placement de pôles et la dimension de l'estimation du domaine d'attraction de l'origine  $\mathcal{E}$ .

**Corollaire 6.3** *Considérons  $d_j = d$ ,  $r_j = r$ ,  $j = 1, \dots, N$ , et un scalaire réel strictement positif  $d$ . Une solution du Corollaire 6.2 pour des valeurs de  $r$  appartenant à l'intervalle pour lequel le Théorème 6.1 est satisfait, permet obtenir un compromis entre  $\beta^*$  (paramètre lié à la dimension du domaine d'attraction de l'origine) et  $r$  (paramètre du cercle pour le placement de pôles en boucle fermée de chaque sous-système linéaire).*

**Corollaire 6.4** *Considérons  $d_j = d$ ,  $r_j = r$ ,  $j = 1, \dots, N$ , et un scalaire réel strictement positif  $r$ . Une solution du Corollaire 6.2 pour des valeurs de  $d$  appartenant à l'intervalle pour lequel le Théorème 6.1 est satisfait, permet obtenir un compromis entre  $\beta^*$  (paramètre lié à la dimension du domaine d'attraction de l'origine) et  $d$  (paramètre du cercle pour le placement de pôles en boucle fermée de chaque sous-système linéaire).*

Le résultat présenté dans le Corollaire 6.2 peut aussi être utilisé pour le problème de commande décentralisée de systèmes à commutation, en imposant une structure spéciale aux matrices  $W$  et  $Z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , comme cela est décrit dans le corollaire suivant.

**Corollaire 6.5** *S'il existe une solution pour le Corollaire 6.2 avec  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $W$  avec une structure bloc-diagonale, alors les propriétés i) et ii) du Théorème 6.1 sont garanties par des gains commutés de retour d'état  $K_j = Z_j W^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , avec structure bloc-diagonale.*

Pour le problème de commande soumis à des fautes des actionneurs, qui sont aussi soumis à des saturations en amplitude, le corollaire suivant peut être énoncé.

**Corollaire 6.6** *Considérons le système*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \tilde{B}D_{\sigma(t)} \text{sat}(K_{\sigma(t)}x(t)) \quad (6.20)$$

*soumis à saturation des actionneurs (6.6) et une fonction de commutation arbitraire (6.2). Chaque matrice  $D_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , est diagonale avec  $m$  éléments, où le  $i$ -ième élément,  $i = 1, \dots, m$ , représente le degré de fautes de l'actionneur  $\mu_i$  (0 pour faute totale et 1 sans faute). Ce système peut être réécrit comme un système à commutation avec saturation dans les actionneurs*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_{\sigma(t)} \text{sat}(K_{\sigma(t)}x(t)), \quad B_{\sigma(t)} = \tilde{B}D_{\sigma(t)} \quad (6.21)$$

*On utilise le Corollaire 6.2 directement pour calculer un ensemble de gains stabilisants (un gain  $K_j$  pour chaque matrice  $B_j$ ), en résolvant ainsi, le problème de commande soumis à des saturation et à des fautes d'actionneurs.*

## 6.6 Exemples

**Exemple 6.1** Considérons le système à commutation (6.1) avec  $N = 6$  sous-système linéaires donnés par

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 10 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & 6 \\ 9 & 3 & 8 \end{bmatrix}; \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 1 & 9 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 8 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}; \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_6 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 4 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ce système a  $n = 3$  états et  $m = 3$  actionneurs, dont les valeurs des seuils de saturation en amplitude sont données par  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 10$ . En choisissant les paramètres de placement de pôles des sous-systèmes linéaires comme  $d_j = 1$ ,  $r_j = 3$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , il apparaît que le Corollaire 6.1 ne permet pas de résoudre cet exemple, c'est-à-dire, il n'est pas possible de calculer un gain robuste quadratiquement stabilisant. D'autre part, les conditions du Corollaire 6.2 donnent comme solution

$$\beta^* = \min \beta = 0.4170$$

$$W = \begin{bmatrix} 15.1686 & 6.2250 & -9.6943 \\ 6.2250 & 6.4931 & -6.4038 \\ -9.6943 & -6.4038 & 12.4123 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

où la région ellipsoïdale

$$\mathcal{E}_1 = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)'W^{-1}x(t) \leq 1\}$$

avec  $W$  donnée par (6.22) est une estimation du domaine d'attraction de l'origine pour toute fonction de commutation arbitraire.

Il est possible restreindre le placement de pôles pour ce système. Ainsi, en choisissant  $d_j = 1$ , et en réduisant  $r_j$  pour  $r_j = 0.1$ ,  $j = 1, \dots, 6$  on a comme solution du Corollaire 6.2

$$\beta^* = \min \beta = 1.4612$$

$$W = \begin{bmatrix} 2.4747 & 2.7781 & -2.5364 \\ 2.7781 & 5.3199 & -4.3179 \\ -2.5364 & -4.3179 & 4.7274 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

où la région ellipsoïdale

$$\mathcal{E}_2 = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)'W^{-1}x(t) \leq 1\}$$

avec  $W$  donnée par (6.23) est une estimation du domaine d'attraction de l'origine pour toute fonction de commutation arbitraire dans ce cas.

La Figure 6.2 montre la comparaison entre les deux régions de stabilité locale garanties par le Corollaire 6.2 pour chacun des placements de pôles. Il est possible d'observer que les choix plus contraignants de  $d_j$  et  $r_j$  pour les placements de pôles impliquent de plus petites estimations du domaine d'attraction de l'origine (c'est-à-dire, l'augmentation de  $\beta^*$ ).

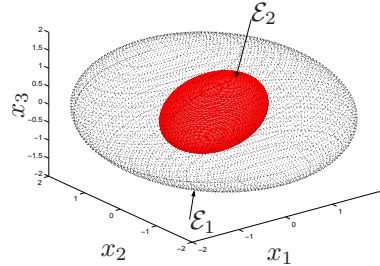


Figure 6.2: Estimations du domaine d'attraction de l'origine pour le système de l'Exemple 6.1 fournies par les conditions du Corollaire 6.2 : le domaine  $\mathcal{E}_1$ , obtenu pour  $d_j = 1$ ,  $r_j = 3$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , et le domaine  $\mathcal{E}_2$ , obtenu pour  $d_j = 1$ ,  $r_j = 0.1$ ,  $j = 1, \dots, 6$ .

Les compromis entre les paramètres  $d$  et  $r$ , qui déterminent la région pour le placement des pôles, et le paramètre  $\beta^*$ , lié à la taille du domaine d'attraction de l'origine, (Corollaires 6.3 et 6.4) sont étudiées systématiquement et reportés dans les Figures 6.3 et 6.4. Notons que dans le Figure 6.3, les valeurs de  $\beta^*$  décroissent (c'est-à-dire, l'estimation du domaine d'attraction de l'origine devient moins conservative) quand la valeur de  $r$  grandit : en augmentant  $r$  les conditions LMIs en (6.13) deviennent moins conservatives. Sur la Figure 6.4, on peut observer

que  $\beta^*$  grandit avec de  $d$ , donc, les valeurs grandes pour  $d$  fournissent plus de restrictions pour les LMIs dans (6.13).

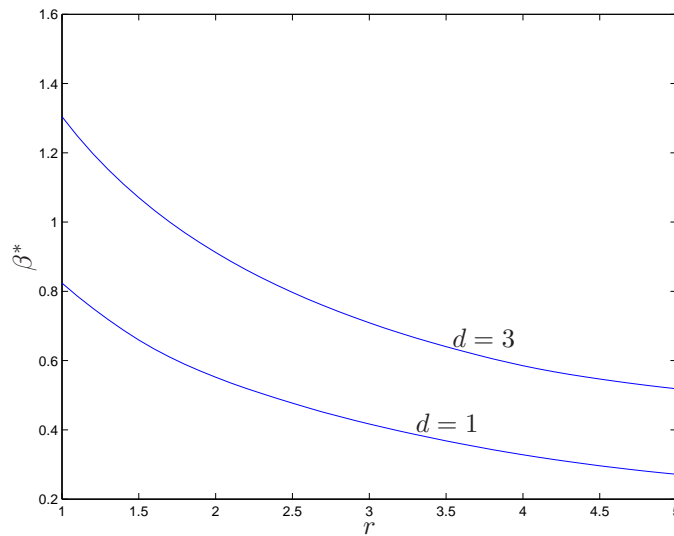


Figure 6.3: Courbes de  $\beta^*$  en fonctions de  $r$ , pour  $d = 1$  et  $d = 3$ , obtenues en appliquant le Corollaire 6.3 pour le système de l'Exemple 6.1.

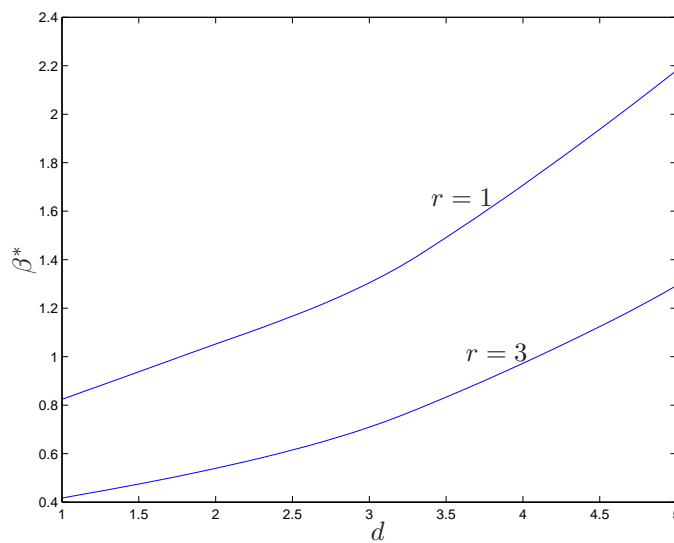


Figure 6.4: Courbes de  $\beta^*$  en fonctions de  $d$ , pour  $r = 1$  et  $r = 3$ , obtenues en appliquant le Corollaire 6.4 pour le système de l'Exemple 6.1.

**Exemple 6.2** Le but de cet exemple est l'application des conditions fournies précédemment à un système physique qui présente des commutations et des saturations. Le système est un circuit électrique avec un inducteur  $L$ , un condensateur  $C$  et une résistance électrique  $R$  reliée en série avec un interrupteur  $S$ , qui est 'on' et 'off' arbitrairement dans le temps. L'entrée du circuit est la tension  $u$ , comme montrée la Figure 6.5. Ces circuits peuvent être trouvés, par exemple, dans des convertisseurs statiques de puissance où la charge est supposée à commutation

[KSV91]. Les valeurs des paramètres sont  $L = 1mH$ ,  $C = 100\mu F$  et  $R = 12\Omega$  et on suppose que l'entrée  $u$  est produite par la réalimentation des variables d'état  $v_C$  (tension du condensateur) et  $i_L$  (courant sur l'inducteur) et que  $|u| \leq 100V$ .

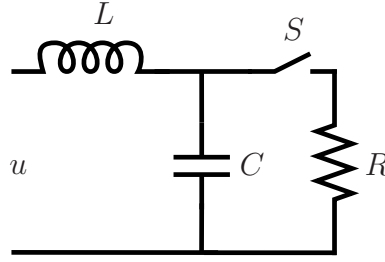


Figure 6.5: Circuit électrique commuté avec l'entrée limitée en amplitude.

Considérons le vecteur d'état  $x = [v_C \ i_L]'$ . Ce circuit peut être modélisé par deux sous-système linéaires donnés par

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \quad \text{S on}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \quad \text{S off}$$

En remplaçant les valeurs des paramètres du circuit, on a

$$A_1 = \begin{bmatrix} -833.3333 & 10000 \\ -1000 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10000 \\ -1000 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

En appliquant les conditions du Corollaire 6.1 pour  $\rho_1 = 100$  et  $d_j = 1000$ ,  $r_j = 500$ ,  $j = 1, 2$ , on ne peut pas trouver de gain robuste quadratiquement stabilisant dans ce cas. Cependant, pour un ensemble de  $Y_j$ ,  $S_j$ ,  $j = 1, 2$ , les conditions du Corollaire 6.2 ont comme solution

$$\beta^* = \min \beta = 0.1916$$

$$W = \begin{bmatrix} 6911.4471 & -748.7401 \\ -748.7401 & 86.3931 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

stabilisant le circuit pour toute commutation arbitraire avec les gains

$$K_1 = [0.8750 \ -3.0000], \quad K_2 = [0.8405 \ -2.5494]$$

Une estimation du domaine d'attraction de l'origine décrite par la région

$$\mathcal{E} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)'W^{-1}x(t) \leq 1\} \quad (6.25)$$

avec  $W$  donnée par (6.24), est montrée sur la Figure 6.6.

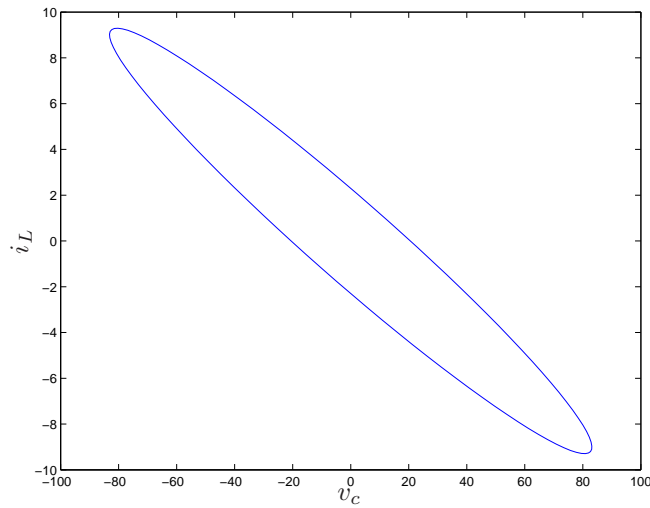


Figure 6.6: Domaine de stabilité (6.25) du circuit commuté de la Figure 6.5 avec des commutations arbitraires, obtenu par les conditions du Corollaire 6.1 avec les paramètres de placement de pôles  $d_j = 1000$ ,  $r_j = 500$ ,  $j = 1, 2$ .

**Exemple 6.3** Considérons le problème de commande sujet à des fautes d'actionneurs et des saturation, décrit dans le Corollaire 6.6. Les matrices du système sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1712 & 0 & 0.0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.0732 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.0732 \end{bmatrix}$$

La paire  $(A, B_1)$  représente le modèle pour le système opérant sans fautes des actionneurs. Ces matrices ont été retirées du modèle de l'avion AC1 en [LL03]. La paire  $(A, B_2)$  représente le système opérant avec 50% d'échelle de l'actionneur  $u_2$ . Les niveaux de saturation en amplitude des actionneurs sont  $\rho_j = 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Pour  $d_1 = d_2 = 1$  et  $r_1 = r_2 = 1$ , en utilisant le Corollaire 6.2, on obtient  $\beta^* = 31.0202$  avec les gains de commande suivants

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.1544 & 0.1840 & 1.5188 & -0.0581 & -1.0552 \\ -0.2135 & -1.7376 & -0.3102 & -0.1941 & 0.2590 \\ 1.8391 & 0.5610 & 4.8911 & 1.1982 & -2.8743 \end{bmatrix}$$

pour le système opérant sans fautes dans les actionneurs et

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.1538 & 0.1649 & 1.5117 & -0.0662 & -1.0545 \\ 0.0804 & -2.0545 & -0.5826 & -0.2282 & 0.4336 \\ 1.8166 & 0.5168 & 4.9112 & 1.2002 & -2.8801 \end{bmatrix}$$



pour le système opérant avec des fautes de 50% sur  $u_2$ . Le Corollaire 6.1 fournit aussi une solution pour ce système, pour  $d_1 = d_2 = 1$  et  $r_1 = r_2 = 1$  : la solution est  $\beta^* = 31.9244$  et le gain robuste de retour d'état est

$$K = \begin{bmatrix} 1.0956 & 0.1244 & 1.5326 & -0.0480 & -1.0455 \\ 0.1619 & -2.4676 & -0.1246 & -0.1745 & 0.1511 \\ 1.8342 & 0.4193 & 4.9722 & 1.2006 & -2.9199 \end{bmatrix}$$

La Figure 6.7 montre les compromis entre  $\beta^*$  et  $r$  pour  $d = 1$ , trouvés par les Corollaires 6.1 et 6.3. Pour les deux corollaires, il est évident que l'augmentation de  $r$  (relaxation des restriction de placement de pôles) contribue à réduire le conservatisme des estimations du domaine d'attraction de l'origine. En plus, le Corollaire 6.3 fournit toujours des conditions moins conservatives que le Corollaire 6.1, étant donné que le Corollaire 6.1 est un cas particulier.

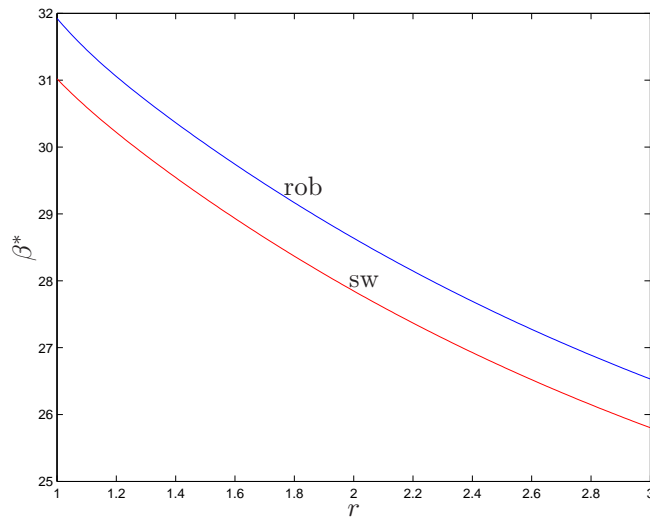


Figure 6.7: Courbe de  $\beta^*$  en fonction de  $r$ , pour  $d = 1$ , obtenues par le Corollaire 6.1 (rob) et le Corollaire 6.3 (sw) pour le système de l'Exemple 6.3.

## 6.7 Conclusion

Cet chapitre a présenté un problème d'optimisation convexe avec contraintes du type LMI dont la solution permet de calculer un ensemble de gains de retour d'état et une région de stabilité dans l'espace d'état pour un système à commutation avec des sous-systèmes linéaires soumis à des fonctions de commutation arbitraires et à des saturation des actionneurs. Les conditions proposées incluent des spécifications de placement de pôles des sous-système linéaires du système à commutation, imposant des bornes pour les réponses transitoires du système lorsque le système opère dans la région linéaire (sans saturation). La condition de synthèse proposée permet de calculer des contrôleurs pour des systèmes dynamiques soumis à des non-linéarités très usuelles dans le pratique (commutation et saturation) grâce à des procédures

---

d'optimisation convexe. Les compromis entre spécifications de borne pour la réponse transitoire et la taille de la région de stabilité peuvent aussi être étudiés. En plus, les conditions proposées peuvent être utilisées pour traiter des problèmes de fautes des actionneurs ainsi que les problèmes de commande robuste.



# Stabilité absolue basée sur des fonctions de Lur'e polynomiales

## 7.1 Introduction

On utilise la méthodologie basée sur des fonctions de Lyapunov pour étudier la stabilité de systèmes dynamiques soumis à des non-linéarités appartenant à un secteur, car cela peut permettre d'obtenir des conditions sous la forme de LMIs, qui peuvent être résolues en temps polynomial avec convergence globale [BEFB94, GNLC95, Stu99]. Par exemple, la stabilité de systèmes non-linéaires avec des non-linéarités dépendantes de l'état appartenant à des secteurs, peut être abordée en utilisant une fonction de Lyapunov intégrale (appelée fonction de Persidskii [Per69]), impliquant que l'existence d'une solution diagonale définie positive de l'inégalité de Lyapunov est suffisante pour garantir la stabilité pour toutes les fonctions non-linéaires appartenant au secteur. Pour cette classe de systèmes non-linéaires, la *S-procédure* et les fonctions de Lyapunov quadratiques peuvent être utilisées pour vérifier la stabilité absolue, ce qui établit une relation avec le critère du cercle [BEFB94]. Des fonctions de Lyapunov quadratiques sur les états et intégrales par rapport aux non-linéarités (connues comme des fonctions de Lur'e) sont associées au critère de Popov, interprété dans le domaine de la fréquence comme la positivité stricte de la fonction de transfert [BEFB94, Pop61, Wil71]. Dans le contexte de synthèse de commande, le critère de Popov et du cercle ont été étudiés pour donner des conditions de synthèse par retour non-linéaire basées sur des LMIs [AK01, ALK03, CTQ08].

Cependant, quand il s'agit de non-linéarités de secteur, la plupart des méthodologies ne tiennent pas compte du fait que les matrices du système peuvent être affectées par des incertitudes paramétriques. Dans ce cas, des méthodologies basées sur des matrices indépendants des paramètres dans la fonction de Lyapunov mènent à des résultats conservatifs. Dans le contexte de stabilité robuste de systèmes linéaires soumis à des incertitudes, le conservatisme des résultats obtenus avec des fonctions de Lyapunov constantes est réduit quand on utilise des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres de forme affine [GAC96, GdOH98, PABB00, RP02]. Plus récemment, il a été montré que s'il existe une solution pour une LMI dépendante de paramètres

avec les paramètres dans un ensemble compact alors, sans perte de généralité, il existe une solution dépendante de paramètres polynomiale [Bli04]. Des conditions pour construire de telles solutions sont données dans [CGTV05, OP06, HAPL04, SH06]. L'étude de stabilité absolue de systèmes incertains basées sur des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres est un problème qui mérite d'être étudié.

Le principal but de ce chapitre est l'analyse de stabilité de systèmes avec des matrices incertaines invariantes dans le temps appartenant à un polytope et qui sont soumis à des non-linéarités dépendantes de l'état appartenant à une classe de secteurs. Les conditions proposées se basent sur la faisabilité de LMIs dépendantes de paramètres obtenues avec une fonction de Lur'e dépendant de paramètres dont la solution assure la stabilité pour tout le domaine d'incertitudes et pour toutes les non-linéarités appartenant au secteur. Il est montré que, sans perte de généralité, la solution de telles LMIs dépendantes de paramètres est donnée par des matrices polynomiales homogènes dépendantes de paramètres. Sont présentées des conditions nécessaires et suffisantes pour construire ces matrices avec degré arbitraire sur les paramètres, en utilisant des relaxations LMIs (de précision croissante) moins conservatives et basées sur le Théorème de Pólya [HLP52, OP05]. Les conditions proposées contiennent comme cas particulier les conditions de [dOGH02], qui testent la stabilité absolue de systèmes précisément connues, et les conditions de [OP06], pour la stabilité robuste de systèmes polytopiques incertains. Une condition convexe pour la synthèse de contrôleurs stabilisants robustes par retour linéaire et non-linéaire pour des systèmes avec des fonctions non-linéaires dans l'état est également proposée. Les résultats, dans ce cas, sont aussi valables pour des paramètres arbitrairement variants dans le temps.

## 7.2 Formulation du problème

Considérons le système non-linéaire en temps continu

$$\dot{x} = A(\alpha)x + \tilde{A}(\alpha)f(x) + B(\alpha)u \quad (7.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  l'entrée de commande. Les matrices  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont incertaines, invariantes dans le temps et appartiennent au polytope  $\mathcal{P}$  donné par

$$\mathcal{P} = \left\{ (A, \tilde{A}, B)(\alpha) : (A, \tilde{A}, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A, \tilde{A}, B)_i, \alpha \in \mathcal{U} \right\} \quad (7.2)$$

avec sommets  $A_i, \tilde{A}_i, B_i, i = 1, \dots, N$ . Le vecteur  $\alpha \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur d'incertitudes paramétriques invariantes dans le temps appartenant au simplexe unitaire

$$\mathcal{U} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (7.3)$$

Le vecteur  $f(x)$  est le vecteur des fonctions non-linéaire dans l'état, radialement non-bornées, qui appartiennent à la classe des fonctions de secteur données par [BEFB94, dOGH02, Kha02]

$$\mathcal{F}(\gamma, \delta) = \left\{ x \rightarrow f(x) = [f_1(x_1) \dots f_n(x_n)]' : \gamma_i \tau^2 \leq f_i(\tau) \tau \leq \delta_i \tau^2, 0 < \gamma_i \leq 1 \leq \delta_i, \right. \\ \left. f_i(0) = 0, i = 1, \dots, n \right\} \quad (7.4)$$

Observons que  $\mathcal{F}(\gamma, \delta)$  peut aussi représenter un secteur infini, en choisissant  $\gamma_i = \beta$ ,  $\delta_i = 1/\beta$  et  $\lim \beta \rightarrow 0^+$ . À cause de l'interprétation géométrique de la définition (7.4) on dit qu'une fonction appartenant à  $\mathcal{F}(\gamma, \delta)$  se trouve dans le secteur  $\mathcal{F}(\gamma, \delta)$ .

Le but de ce chapitre est de traiter les problèmes suivants.

**Problème 7.1** Déterminer si le système non-linéaire (7.1), avec  $u = 0$ , est globalement asymptotiquement stable (GAS) pour  $x = 0$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ . En d'autres termes, déterminer si le système autonome est robustement (par rapport à  $\alpha$ ) absolument (par rapport à  $f(x)$ ) globalement asymptotiquement stable pour  $x = 0$ .

**Problème 7.2** Considérant que  $x$  et  $f(x)$  sont disponibles pour la loi de commande

$$u = Kx + \tilde{K}f(x) \quad (7.5)$$

déterminer  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tel que le système en boucle fermée

$$\dot{x} = A_{cl}(\alpha)x + \tilde{A}_{cl}(\alpha)f(x), \quad A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K, \quad \tilde{A}_{cl}(\alpha) = \tilde{A}(\alpha) + B(\alpha)\tilde{K} \quad (7.6)$$

est GAS pour  $x = 0$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ .

## 7.3 Préliminaires

**Théorème 7.1** Considérons une LMI dépendant de paramètres écrite comme suit

$$G(\xi, \alpha) = G_0(\alpha) + \xi_1 G_1(\alpha) + \dots + \xi_M G_M(\alpha) > 0 \quad (7.7)$$

où  $\alpha \in \mathcal{U}$ . Supposons que  $G_i(\alpha)$ ,  $i = 0, \dots, M$  sont des fonctions continues. Si  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$  il existe une solution dépendant de paramètres  $\xi(\alpha) \in \mathbb{R}^M$  telle que  $G(\xi(\alpha), \alpha) > 0$ , alors il existe une solution polynomiale homogène  $\xi^*(\alpha) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^M$  telle que,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ ,  $G(\xi^*(\alpha), \alpha) > 0$ .

**Preuve:** Dans [Bli04], il est prouvé que, avec l'hypothèse de continuité de  $G_i(\alpha)$ , s'il existe une solution  $\xi(\alpha) \in \mathbb{R}^M$  pour la LMI dépendant de paramètres (7.7), alors il existe, sans perte de généralité, une solution polynomiale  $\xi^{**}(\alpha)$  telle que,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ ,  $G(\xi^{**}(\alpha), \alpha) > 0$ . Étant donné  $g$  le plus grand degré possible parmi les monômes de  $\xi^{**}(\alpha)$ , on obtient

$$\xi^{**}(\alpha) = \sum_{0 \leq \beta_1 + \dots + \beta_N \leq g, \beta_i \geq 0} c_{\beta_1, \dots, \beta_N} \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_N^{\beta_N}$$

Considérons maintenant le polynôme homogène de degré  $g$  dénoté par  $\xi^*(\alpha)$  :

$$\xi^*(\alpha) = \sum_{0 \leq \beta_1 + \dots + \beta_N \leq g, \beta_i \geq 0} c_{\beta_1, \dots, \beta_N} \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_N^{\beta_N} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^{g - \sum_i \beta_i}$$

On note que  $\xi^*(\alpha)$  coïncide avec  $\xi^{**}(\alpha)$  sur  $\mathcal{U}$ . Donc, le polynôme homogène  $\xi^*(\alpha)$  est une solution pour la LMI dépendant de paramètres (7.7) pour toute valeur de  $\alpha \in \mathcal{U}$ . ■

Plus de détails sur le résultat présenté dans le Théorème 7.1 peuvent être trouvés dans [BOMP06].

Combinant le Théorème 7.1 et les résultats de [dOGH02], une condition suffisante pour résoudre le Problème 7.1 est présentée dans le théorème suivant.

**Théorème 7.2** *Soit une matrice diagonale  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$ ,  $\Delta = \text{diag}\{\delta_i\}$ , avec  $0 < \gamma_i \leq 1 \leq \delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . S'il existe une matrice diagonale définie positive polynomiale homogène  $P_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice symétrique polynomiale homogène  $W_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que*

$$W_g(\alpha) + P_g(\alpha)\Gamma > 0 \quad (7.8)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11}(\alpha) & \mathcal{T}_{12}(\alpha) \\ \star & \mathcal{T}_{22}(\alpha) \end{bmatrix} < 0 \quad (7.9)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{11}(\alpha) &\triangleq \tilde{A}(\alpha)'P_g(\alpha) + P_g(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - Q_g(\alpha) \\ \mathcal{T}_{12}(\alpha) &\triangleq \tilde{A}(\alpha)'W_g(\alpha) + P_g(\alpha)A(\alpha) + \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta)Q_g(\alpha) \\ \mathcal{T}_{22}(\alpha) &\triangleq A(\alpha)'W_g(\alpha) + W_g(\alpha)A(\alpha) - \Gamma\Delta Q_g(\alpha) \end{aligned}$$

alors le système (7.1), avec  $u = 0$ , est GAS pour  $x = 0$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ .

**Preuve:** Soit la fonction de Lur'e dépendant de paramètres une fonction de Lyapunov candidate

$$v(x) = x'W(\alpha)x + 2 \sum_{i=1}^n p_{ii}(\alpha) \int_0^{x_i} f_i(\tau) d\tau \quad (7.10)$$

A partir de la définition (7.4), on obtient

$$\int_0^{x_i} \gamma_i \tau d\tau \leq \int_0^{x_i} f_i(\tau) d\tau \quad (7.11)$$

impliquant que l'existence d'une matrice symétrique  $W(\alpha)$  et d'une matrice diagonale définie positive  $P(\alpha)$  telles que

$$W(\alpha) + P(\alpha)\Gamma > 0, \forall \alpha \in \mathcal{U} \quad (7.12)$$

avec  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$ , est suffisante pour garantir que  $v(x) > 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ ,  $\forall x \neq 0$ . La dérivée temporelle de (7.10) le long des trajectoires du système (7.1) avec  $u = 0$  s'écrit :

$$\dot{v}(x) = \eta' \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11}(\alpha) & \mathcal{S}_{12}(\alpha) \\ \star & \mathcal{S}_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \eta$$

avec  $\eta' = [ f(x)' \quad x' ]$  et

$$\mathcal{S}_{11}(\alpha) \triangleq \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha)$$

$$\mathcal{S}_{12}(\alpha) \triangleq \tilde{A}(\alpha)'W(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha)$$

$$\mathcal{S}_{22}(\alpha) \triangleq A(\alpha)'W(\alpha) + W(\alpha)A(\alpha)$$

Pour toute fonction  $f(x) \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^n (f_i(x_i) - \gamma_i x_i) q_{ii}(\alpha) (f_i(x_i) - \delta_i x_i) \leq 0$$

qui est valable  $\forall q_{ii}(\alpha) > 0, \forall \alpha \in \mathcal{U}$ . Donc,

$$\Theta \triangleq \eta' \begin{bmatrix} Q(\alpha) & -\frac{1}{2}(\Gamma + \Delta)Q(\alpha) \\ \star & \Gamma\Delta Q(\alpha) \end{bmatrix} \eta \leq 0$$

pour toute  $Q(\alpha) = \text{diag}\{q_{ii}(\alpha)\}$ , pour  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$  et  $\Delta = \text{diag}\{\delta_i\}$ , avec  $0 < \gamma_i \leq 1 \leq \delta_i$ . Puisque  $\dot{v}(x) \leq \dot{v}(x) - \Theta$ , donc, si  $\dot{v}(x) - \Theta < 0$ , on obtient que,  $\forall \eta \neq 0$ , l'existence d'une matrice  $W(\alpha)$  symétrique, et des matrices  $P(\alpha)$  et  $Q(\alpha)$  diagonales définies positives telles que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11}(\alpha) - Q(\alpha) & \mathcal{S}_{12}(\alpha) + \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta)Q(\alpha) \\ \star & \mathcal{S}_{22}(\alpha) - \Gamma\Delta Q(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{U} \quad (7.13)$$

garantit que  $\dot{v}(x) < 0, \forall \alpha \in \mathcal{U}, \forall f \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ . Donc, si les LMIs dépendantes de paramètres (7.12) et (7.13) possèdent une solution donnée par  $P(\alpha), Q(\alpha)$  et  $W(\alpha)$ , alors  $v(x)$  en (7.10) est une fonction de Lur'e qui assure la stabilité absolue robuste pour le système. Finalement, le Théorème 7.1 garantit que s'il existe  $P(\alpha), Q(\alpha)$  et  $W(\alpha)$  solutions pour (7.13), alors il existe aussi des matrices polynomiales homogènes  $P_g(\alpha), Q_g(\alpha)$  et  $W_g(\alpha)$  solutions de (7.13). ■

Quelques notations et définitions sont maintenant introduites pour construire des matrices polynomiales homogènes de degré arbitraire qui résolvent le Théorème 7.2.

## Notations et définitions

Une matrice polynomiale homogène  $P_g(\alpha)$  de degré arbitraire  $g$  peut être écrite comme

$$P_g(\alpha) = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} P_{\mathcal{K}}, \quad k = k_1 k_2 \cdots k_N \quad (7.14)$$

où  $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N}$ ,  $\alpha \in \mathcal{U}$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}_+$  (entiers non négatifs),  $i = 1, \dots, N$  sont les monômes, et  $P_{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $k \in \mathcal{K}(g)$  sont des matrices symétriques à déterminer. Par définition,  $\mathcal{K}(g)$  est l'ensemble des  $N$ -uplets obtenus comme toutes les combinaisons possibles d'entiers non négatifs  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tels que  $k_1 + k_2 \cdots k_N = g$ . Soit  $N$  le nombre de sommets du polytope  $\mathcal{P}$ , le nombre d'éléments en  $\mathcal{K}(g)$  est donné par

$$J(g) = \frac{(N + g - 1)!}{g!(N - 1)!}$$



Par exemple, soit un polynôme homogène de degré  $g = 3$  avec  $N = 2$  variables, on obtient  $\mathcal{K}(3) = \{03, 12, 21, 30\}$  (ainsi  $J(3) = 4$ ), qui correspond à la forme générique  $P_3(\alpha) = \alpha_2^3 P_{03} + \alpha_1 \alpha_2^2 P_{12} + \alpha_1^2 \alpha_2 P_{21} + \alpha_1^3 P_{30}$ . On note que, pour  $g = 0$  dans (3.14), on a  $P_0(\alpha) = P_0$  qui est une matrice constante.

On définit, pour  $N$ -uplets  $k, k'$ , que  $k \succeq k'$  si  $k_i \geq k'_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Les opérations d'addition ( $k + k'$ ) et soustraction ( $k - k'$ ) sont réalisées composante par composante. Considérons aussi la définition suivante pour  $N$ -uplets  $e_i$  et le coefficient  $\pi(k)$ :

$$e_i = 0 \dots 0 \underbrace{1}_{i\text{-ième}} 0 \dots 0, \quad \pi(k) \triangleq (k_1!)(k_2!) \dots (k_N!)$$

## 7.4 Résultats principaux

Une condition convexe de dimension finie nécessaire et suffisante, solution pour le Théorème 7.2, est présentée dans le théorème suivant.

**Théorème 7.3** *Soient des matrices diagonales  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$ ,  $\Delta = \text{diag}\{\delta_i\}$ , avec  $0 < \gamma_i \leq 1 \leq \delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Il existe des matrices polynomiales homogènes de degré arbitraire  $g$  solutions du Théorème 7.2 si, et seulement si, il existe des matrices diagonales  $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrices symétriques  $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $k \in \mathcal{K}(g)$ , et  $d \in \mathbb{Z}_+$  suffisamment grand tels que*

$$\mathcal{N}_{1k} \triangleq \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \succeq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} (P_{k-k'}) > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d) \quad (7.15)$$

$$\mathcal{N}_{2k} \triangleq \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \succeq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} (Q_{k-k'}) > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d) \quad (7.16)$$

$$\mathcal{M}_{1k} \triangleq \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} (W_{k-k'-e_i} + \Gamma P_{k-k'-e_i}) > 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d+1) \quad (7.17)$$

$$\mathcal{M}_{2k} \triangleq \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} \\ \star & \mathcal{X}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d+1) \quad (7.18)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{11} &\triangleq \tilde{A}'_i P_{k-k'-e_i} + P_{k-k'-e_i} \tilde{A}_i - Q_{k-k'-e_i} \\ \mathcal{X}_{12} &\triangleq \tilde{A}'_i W_{k-k'-e_i} + P_{k-k'-e_i} A_i + \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta) Q_{k-k'-e_i} \\ \mathcal{X}_{22} &\triangleq A'_i W_{k-k'-e_i} + W_{k-k'-e_i} A_i - \Gamma \Delta Q_{k-k'-e_i} \end{aligned}$$

**Preuve:** S'il existe, pour un donné degré  $g$ , une matrice symétrique polynomiale homogène  $P_g(\alpha) > 0$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{U}$ , alors pour tout  $d \in \mathbb{Z}_+$  on a :

$$\left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^d P_g(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}(g+d)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_N^{k_N} \mathcal{N}_{1k}, \quad k = k_1 k_2 \dots k_N \quad (7.19)$$

où  $\mathcal{N}_{1k}$ , donnée par (7.15) est une matrice de degré  $g+d$  définie positive. En utilisant l'extension du Théorème de Pólya pour le cas matricielle [OP05, Sch03, Sch05], il existe un  $d \in \mathbb{Z}_+$  suffisamment grand tel que (7.19) possède tous les termes  $\mathcal{N}_{1k} > 0$ ,  $k \in \mathcal{K}(g+d)$ . D'autre part, si  $\mathcal{N}_{1k} > 0$ , alors  $P_g(\alpha) > 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ . On applique la même procédure pour démontrer que (7.16), (7.17) et (7.18) sont nécessaires et suffisantes (pour  $d \in \mathbb{Z}_+$  suffisamment grand) pour garantir que  $Q_g(\alpha) > 0$ , et que (7.8) et (7.9) sont faisables  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ . ■

Remarquons que dans le Théorème 7.3, l'incrément de  $d$  permet de réduire le conservatisme des résultats grâce aux relaxation des LMIs (sans augmenter le nombre de variables de décision pour un degré  $g$  donné). De plus, si les LMIs du Théorème 7.3 sont faisables pour  $\hat{d} \in \mathbb{Z}_+$ , alors ces LMIs sont faisables pour tout  $d > \hat{d}$ , car les LMIs pour  $\hat{d} + 1$  peuvent être écrites comme des combinaisons positives des LMIs pour  $\hat{d}$ . L'utilisation de degrés plus grand de  $g$  pour les variables matricielles du Théorème 7.3 introduit plus de variables scalaires au problème, ce qui peut aussi réduire le conservatisme des résultats (voir [OP07]). Le nombre de variables scalaires pour solutionner le Théorème 7.3 est  $\mathcal{V} = (2n + n(n+1)/2)J(g)$  et le nombre de lignes de LMI est  $\mathcal{R} = 2nJ(g+d) + 3nJ(g+d+1)$ . En utilisant des algorithmes basés sur la méthode des points intérieurs comme le *LMI Control Toolbox* du Matlab [GNLC95], on solutionne ce problème en temps polynomial, proportionnel à  $\mathcal{V}^3 \mathcal{R}$ .

Les conditions du Théorème 7.3 peuvent être spécialisées pour l'analyse de stabilité robuste de systèmes linéaires définissant la matrice  $\tilde{A}_i$  et la matrice de coefficients  $P_k$  égales à zéro. Dans ce cas, la condition (7.17) garantit que  $W_g(\alpha) > 0$  et la condition (7.18), avec le choix  $\Gamma = \Delta = \mathbf{I}$ , devient nécessaire et suffisante pour résoudre  $A(\alpha)'W_g(\alpha) + W_g(\alpha)A(\alpha) < 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ . On récupère ainsi les résultats de [OP06] pour l'analyse de stabilité robuste.

Avec le Théorème 7.3 il est possible d'étudier la stabilité robuste absolue du système (7.1) avec  $A(\alpha) = \mathbf{0}$  et  $u = 0$ . Définissant les matrices  $A_i$  égales à zéro et  $\tilde{A}_i = A$ , et choisissant  $g = 0$  (c'est-à-dire, variables matricielles constantes), les conditions du Théorème 7.3 deviennent les mêmes que celles de [dOGH02]. Cependant, l'usage de matrices indépendantes de paramètres dans le Théorème 7.3 pour traiter l'analyse de stabilité pour des matrices incertaines  $\tilde{A}(\alpha)$  peut mener à des résultats conservatifs. D'autre part, des résultats progressivement moins conservatifs sont obtenus par l'incrément de  $g$  et de  $d$ , grâce à la formulation générale des conditions du Théorème 7.3.

Supposons que (7.15)-(7.18) sont faisables pour  $A_i = \mathbf{0}$ , obtenant comme solution des matrices qui permettent construire  $P_g(\alpha)$ ,  $Q_g(\alpha)$  et  $W_g(\alpha)$ . L'interprétation dans le domaine fréquentiel donnée en [dOGH02] pour le cas de système avec matrices précisément connues est directement applicable pour le cas de matrices affectées par des incertitudes abordées dans ce

chapitre. Par exemple, la faisabilité du Théorème 7.3 est équivalente au fait que la fonction de transfert

$$M(s, \alpha) = \left( \frac{1}{2} Q_g(\alpha)(\Gamma - \Delta) - P_g(\alpha) \tilde{A}(\alpha) \Gamma \right) \left( s\mathbf{I} - \tilde{A}(\alpha) \right)^{-1} \tilde{A}(\alpha) + \left( \frac{1}{2} Q_g(\alpha) - P_g(\alpha) \tilde{A}(\alpha) \right)$$

est strictement positive réelle (voir [dOGH02, Theorem 3]). De plus, conformément le [dOGH02, Lemma 9], si le critère du cercle ou de Popov sont satisfaits, alors le Théorème 7.3 est faisable.

Il est intéressant de mentionner que si on choisit  $A_i = \mathbf{0}$  et la matrice de coefficients  $W_k = \mathbf{0}$  dans le Théorème 7.3, il est possible de faire l'analyse de stabilité de systèmes non-linéaires incertains autonomes (7.1) avec une fonction de Lur'e dépendant de paramètres, qui est, dans ce cas, une fonction purement intégrale (appelé aussi fonction de Persidskii). Donc, le Théorème 7.3 se réduit à un test de stabilité robuste diagonal de  $\tilde{A}(\alpha)$ . De plus, en utilisant le Théorème 7.3 avec  $P_k = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire, avec la fonction de Lur'e réduite à une fonction purement quadratique, en utilisant [dOGH02, Lemma 11], on peut montrer que la faisabilité de (7.16)-(7.18) est équivalente au fait que la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de la fonction de transfert

$$M(s, \alpha) = \frac{1}{2} Q_g(\alpha)^{1/2} (\Gamma - \Delta) \left( s\mathbf{I} - \frac{1}{2} \tilde{A}(\alpha) (\Gamma + \Delta) \right)^{-1} \tilde{A}(\alpha) Q_g(\alpha)^{-1/2}$$

est plus petite que 1,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ .

Comme une remarque finale, on considère le cas où les paramètres du secteur  $\mathcal{F}(\gamma, \delta)$  ne sont pas connus. Dans ce cas, on utilise les conditions du Théorème 7.3 pour optimiser aussi les paramètres du secteur, ce qui permet, par exemple, d'estimer le domaine de stabilité d'un système soumis à saturation. Observons que la saturation en amplitude sur les variables d'état peut être représentée en choisissant  $\Delta = \mathbf{I}$  et  $\Gamma = \gamma\mathbf{I}$  dans (7.4). La solution du problème d'optimisation

$$\begin{cases} \gamma^* \triangleq \min \gamma \\ \text{s.a} \\ \text{LMIs (7.15)-(7.18)} \end{cases} \quad (7.20)$$

permet alors d'obtenir la meilleure estimation du domaine de stabilité utilisant le secteur (7.4) pour représenter la saturation et les conditions du Théorème 7.3 pour la stabilité.

Une solution convexe pour le Problème 7.2 est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 7.4** *Soient les matrices diagonales  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$ ,  $\Delta = \text{diag}\{\delta_i\}$ , avec  $0 < \gamma_i \leq 1 \leq \delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . S'il existe des matrices diagonales définies positives  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , des matrices  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_i &\triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{11} & \mathcal{V}_{12} \\ \star & \mathcal{V}_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N & (7.21) \\
\mathcal{V}_{11} &\triangleq S\tilde{A}'_i + \tilde{Z}'B'_i + \tilde{A}_iS + B_i\tilde{Z} - R_i \\
\mathcal{V}_{12} &\triangleq S\tilde{A}'_i + \tilde{Z}'B'_i + A_iS + B_iZ + \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta)R_i \\
\mathcal{V}_{22} &\triangleq SA'_i + Z'B'_i + A_iS + B_iZ - \Gamma\Delta R_i
\end{aligned}$$

alors les gains de commande

$$K = ZS^{-1}, \quad \tilde{K} = \tilde{Z}S^{-1} \quad (7.22)$$

garantissent que le système en boucle fermée (7.6) est globalement asymptotiquement stable pour  $x = 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(\gamma, \delta)$ .

**Preuve:** Si le Théorème 7.4 est faisable, on obtient que  $\mathcal{M}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{M}_i < 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ , avec

$$\mathcal{M}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{11}(\alpha) & \mathcal{V}_{12}(\alpha) \\ \star & \mathcal{V}_{22}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}_{11}(\alpha) = S\tilde{A}_{cl}(\alpha)' + \tilde{A}_{cl}(\alpha)S - R(\alpha)$$

$$\mathcal{V}_{12}(\alpha) = S\tilde{A}_{cl}(\alpha)' + A_{cl}(\alpha)S + \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta)R(\alpha)$$

$$\mathcal{V}_{22}(\alpha) = SA_{cl}(\alpha)' + A_{cl}(\alpha)S - \Gamma\Delta R(\alpha)$$

et  $A_{cl}(\alpha)$  et  $\tilde{A}_{cl}(\alpha)$  donnés par (7.6). En multipliant  $\mathcal{M}(\alpha)$  à gauche et à droite par  $\text{diag}\{S^{-1}, S^{-1}\}$  et en appliquant le changement de variables  $S^{-1} = P$ , on obtient (7.9), avec  $A(\alpha) = A_{cl}(\alpha)$ ,  $\tilde{A}(\alpha) = \tilde{A}_{cl}(\alpha)$  et avec  $P_g(\alpha) = P$ ,  $W_g(\alpha) = P$  et  $Q_g(\alpha) = S^{-1}R(\alpha)S^{-1}$ . Donc, la faisabilité du Théorème 7.4 garantit l'existence d'une fonctions de Lur'e

$$v(x) = x'Px + 2 \sum_{i=1}^n p_{ii} \int_0^{x_i} f_i(\tau) d\tau \quad (7.23)$$

que assure la stabilité robuste absolue du système en boucle fermée. ■

Les conditions du Théorème 7.4 sont aussi valables dans le cas de paramètres incertains variants dans le temps avec taux de variation inconnues (même sans borne), appartenant au simplex unitaire, tant que ces conditions sont basées sur l'utilisation d'une fonctions de Lur'e avec une matrice  $P$  fixe. On remarque aussi qu'il est possible de traiter le problème de commande décentralisée directement avec le Théorème 7.4 en utilisant une structure bloc diagonale pour les matrices  $Z$  et  $\tilde{Z}$ . Comme un remarque finale, on note que les résultats du Théorème 7.4 peuvent être appliqués au cas de stabilisation par retour d'état purement linéaire (c'est-à-dire,  $u = Kx$ ), en choisissant  $\tilde{Z} = \mathbf{0}$ , ou pour le cas de stabilisation par retour d'état purement non-linéaire (c'est-à-dire  $u = \tilde{K}f(x)$ ), on fait  $Z = \mathbf{0}$ .

## 7.5 Exemples

Les résultats présentés ci-dessous ont été construits aléatoirement pour illustrer l'applicabilité des conditions proposées. La précision des résultats obtenus s'améliore au fur et à mesure que les degrés de relaxations  $d$  et  $g$  augmentent. Le premier exemple traite le problème de GAS en utilisant les conditions proposées dans le Théorème 7.3, tandis que le deuxième traite la synthèse de commande robuste en utilisant le Théorème 7.4. Dans les deux cas, on utilise le *LMI Control Toolbox* de Matlab [GNLC95] pour vérifier la faisabilité des LMIs.

**Exemple 7.1** Considérons le système (7.1) avec  $A(\alpha) = \mathbf{0}$ ,  $u = 0$  et les sommets suivants

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -1.94 & 0.25 & 0.63 & 0.38 \\ 0.81 & -1.57 & 0.77 & 0.80 \\ 0.60 & 0.33 & -1.49 & 0.69 \\ 0.24 & 0.33 & 0.76 & -1.46 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} -1.59 & 0.24 & 0.44 & 0.86 \\ 0.22 & -1.27 & 0.76 & 0.59 \\ 0.80 & 0.57 & -1.84 & 0.39 \\ 0.42 & 0.52 & 0.96 & -2.16 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{bmatrix} -2.03 & 0.85 & 0.19 & 0.72 \\ 0.87 & -2.10 & 0.87 & 0.80 \\ 0.23 & 0.79 & -1.94 & 0.95 \\ 0.98 & 0.44 & 0.39 & -1.96 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Le but de cet exemple est d'évaluer le domaine de stabilité robuste du système soumis à des saturation sur les variables d'état données par

$$f_{(i)}(x_i) = \text{sat}(x_i) = \begin{cases} \rho & \text{se } x_i > \rho \\ x_i & \text{se } -\rho \leq x_i \leq \rho \\ -\rho & \text{se } x_i < -\rho \end{cases} \quad (7.27)$$

avec  $i = 1, \dots, 4$  et  $\rho = 1$ . Le secteur défini en (7.4) peut être utilisé pour représenter (localement) la saturation (7.27), en choisissant les paramètres du secteur comme  $\Delta = \mathbf{I}$  et  $\Gamma = \gamma \mathbf{I}$ . Ainsi, pour évaluer le domaine de stabilité robuste pour ce système non-linéaire, étant donné  $g$  et  $d$  il suffit de résoudre le problème (7.20). L'estimation du domaine de stabilité robuste obtenue avec la procédure proposée est

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x_i| \leq \frac{1}{\gamma^*}, i = 1, \dots, 4\}$$

La Table 7.1 montre les résultats obtenus. Sur la Table 7.1, on remarque que le Théorème 7.3 appliqué dans le cas des matrices indépendantes des paramètres (c'est-à-dire  $g = 0$ ) ne fournit pas de solution pour l'estimation du domaine de stabilité robuste pour ce système, même avec l'incrément de  $d$ . D'autre part, les conditions du Théorème 7.3 avec des matrices polynomiales homogènes fournissent des estimations du domaine de stabilité robuste moins conservatives

progressivement, à mesure que  $g$  et  $d$  croissent. Pour un  $g$  donné, le conservatisme des résultats est réduit au fur et à mesure que  $d$  croît, grâce aux relaxations des contraintes LMIs du problème. D'autre part, pour  $d$  donné, l'incrément de  $g$  permet d'obtenir des meilleurs résultats car plus de variables scalaires sont utilisées dans le problème. On remarque une grande amélioration en termes de  $\gamma^*$  (qui passe de 0.72 à 0.06), avec l'incrément de  $g$  et  $d$ .

Table 7.1: Estimations du domaine de stabilité robuste pour le système de l'Exemple 7.1, données par la région  $\mathcal{S}$ , avec  $\gamma^* \triangleq \min \gamma$  s.a. (7.15)-(7.18),  $\Delta = \mathbf{I}$ ,  $\Gamma = \gamma \mathbf{I}$ ,  $A_i = \mathbf{0}$  et  $\tilde{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , donnés en (7.24)-(7.26).

$g$	$d$	$\gamma^*$
0	tout	infaisables
1	0	0.72
	1	0.62
2	2	0.57
	0	0.29
3	1	0.24
	2	0.20
4	0	0.20
	1	0.16
5	2	0.14
	0	0.14
6	1	0.11
	2	0.08
7	0	0.09
	1	0.07
8	2	0.06

**Exemple 7.2** Pour traiter le problème de commande, considérons le système (7.1) avec les sommets donnés par

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.30 & 0.19 \\ 0.19 & 0.68 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0.50 & 0.82 \\ 0.90 & 0.64 \end{bmatrix} \\
 \tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0.30 & 0.15 \\ 0.54 & 0.70 \end{bmatrix}, & \tilde{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0.82 & 0.34 \\ 0.66 & 0.29 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0.38 & 0.85 \\ 0.86 & 0.59 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.34 & 0.73 \\ 0.53 & 0.31 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Le secteur est défini avec  $\Gamma = 10^{-\eta_1} \mathbf{I}$  et  $\Delta = 10^{\eta_2} \mathbf{I}$ , avec  $\eta_1$  et  $\eta_2$  prenant des valeurs dans l'ensemble des entiers naturels. Le but de cet exemple est de stabiliser le système en maximisant  $\eta_1 + \eta_2$ , pour tout  $\alpha \in \mathcal{U}$ . Pour la loi de commande par retour d'état purement linéaire  $u = Kx$ , le Théorème 7.4 garantit la stabilité pour  $\Gamma = 10^{-12} \mathbf{I}$  et  $\Delta = 10^3 \mathbf{I}$ , c'est-à-dire, pour  $\eta_1 + \eta_2 = 15$ . Dans le cas de la loi de commande par retour d'état purement

non-linéaire  $u = \tilde{K}f(x)$ , le Théorème 7.4 garantit la stabilité pour  $\Gamma = 10^{-3}\mathbf{I}$  et  $\Delta = 10^{12}\mathbf{I}$ , avec  $\eta_1 + \eta_2 = 15$ . Quand les deux vecteurs d'état, linéaire et non-linéaire, sont utilisés pour calculer la loi de commande  $u = Kx + \tilde{K}f(x)$ , le Théorème 7.4 garantit la stabilité du système en boucle fermée pour  $\Gamma = 10^{-12}\mathbf{I}$ ,  $\Delta = 10^{12}\mathbf{I}$ , c'est-à-dire, pour  $\eta_1 + \eta_2 = 24$ . Ceci illustre ainsi qu'utiliser simultanément un retour linéaire et non-linéaire permet augmenter le domaine de stabilité du système en boucle fermée. Pour  $\Gamma = 10^{-12}\mathbf{I}$  et  $\Delta = 10^{12}\mathbf{I}$ , les gains de stabilisation donnés par le Théorème 7.4 sont les suivants

$$K = \begin{bmatrix} 8.86 & 0.74 \\ -6.05 & -5.11 \end{bmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} 8.41 & 1.58 \\ -5.68 & -5.31 \end{bmatrix}$$

et la matrice  $S$  est

$$S = \begin{bmatrix} 17846.43 & 0.00 \\ 0.00 & 22091.81 \end{bmatrix}$$

avec  $P = S^{-1}$  la matrice de la fonction de Lur'e (7.23) qui garantit la stabilité robuste absolue du système en boucle fermée pour tout paramètre incertain  $\alpha$  variant dans le temps avec un taux de variation arbitraire.

## 7.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté des conditions LMIs dont la solution permet de construire des fonctions de Lur'e dépendantes de paramètres polynomiales homogènes. L'existence de telles fonctions garantit la stabilité absolue robuste de systèmes polytopiques perturbés par des non-linéarités de secteur sur le vecteur d'état. En considérant un degré pour la fonction candidate de Lur'e, une extension du Théorème de Pólya est utilisé pour fournir des relaxations LMIs progressivement moins conservatrices qui testent la stabilité absolue robuste du système. Des conditions existantes dans la littérature pour la stabilité robuste de systèmes linéaires et pour la stabilité absolue de systèmes non-linéaires sont montrées comme étant des cas particuliers des conditions proposées. A été aussi présentée une extension pour la synthèse de contrôleur robuste appliqué à la classe de systèmes non-linéaires étudiées ici. Cette extension a permis de développer un outil convexe utile pour calculer le contrôleur stabilisant en utilisant séparément seulement un retour d'état linéaire ou non-linéaire, ou encore combinant les deux lois de commande.

# Commande de systèmes bilinéaires

## 8.1 Introduction

Les systèmes bilinéaires sont une classe particulière de systèmes non-linéaires qui peuvent représenter plusieurs processus physiques, comme par exemple, des applications en ingénierie nucléaire, des processus chimiques, des applications en biologie et en immunologie [Moh91]. De plus, beaucoup de problèmes pratiques peuvent être approchés par un modèle bilinéaire [MK80].

Dans la littérature, beaucoup de travaux traitent le problème de stabilisation de systèmes bilinéaires continus dans le temps [Lon80, Gut81, KN83, RB83, GT88, LN89, CYM91, CT00, SU03], quelques travaux considèrent des restrictions sur la loi de commande [Che98, BCK03] et étudient les systèmes bilinéaires discrets dans le temps [SY96, YCB89]. Un problème convexe intéressant est la caractérisation de la région d'attraction de l'origine pour un système non-linéaire. Des résultats dans ce contexte ont émergés dans le cas des systèmes non-linéaires quadratiques [Fra75, CHW88, CT89, ACM07a, VTG09] ou polynomiaux [TVG96, Tib00, TH00]. Dans la plupart des cas, la loi de commande et la région de stabilité associée sont obtenues à partir de l'existence d'une fonctions de Lyapunov. Le problème est alors de fournir des conditions constructives pour calculer le contrôleur de retour et la matrice de Lyapunov associée. Par exemple, dans [DN80], la synthèse d'une loi de commande par retour d'état linéaire et la région de stabilité correspondante sont réduits au problème de trouver une solution définie positive d'une équation algébrique de Riccati paramétrisée. Par ailleurs, le problème d'estimation de la région d'attraction d'un système bilinéaire discret dans le temps a reçu moins d'attention dans la littérature.

Plus récemment, le problème de commande par retour d'état de systèmes non-linéaires quadratiques a été abordé comme un problème d'optimisation via l'utilisation d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) [ACM07a, ACM07b], permettant également de calculer une estimation du domaine de attraction. Le problème est étudié de la façon suivante : étant donné un polytope, trouver un gain de retour d'état tel que le polytope soit entièrement contenu dans le domaine d'attraction du système en boucle fermée. La partie linéaire du modèle est considérée précisé-



ment connue et le terme quadratique non-linéaire est majoré afin que la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov soit négative dans de la région d'intérêt. Il n'est cependant pas fourni une procédure systématique pour maximiser l'estimative de la région de stabilité.

Dans ce chapitre est étudié le problème de commande par retour d'état d'un système bilinéaire. La partie linéaire du modèle représente la matrice dynamique du système, précisément connue, et la matrice d'entrée est constituée d'un terme linéaire et d'un terme dépendant de l'état, impliquant la présence de produits entre les entrées de commande et les états. Cette même classe de systèmes bilinéaires a été étudiée dans [ACM07b, ACM07a], qui traitent un modèle légèrement différent du modèle étudié dans ce chapitre. Le système en boucle ouverte est, par hypothèse, instable et le terme bilinéaire est modélisé comme une enveloppe convexe d'un ensemble de vecteurs linéaires grâce à l'utilisation des inclusions différentielles linéaires [BEFB94]. Une stratégie similaire a été utilisée dans [MTG02] pour traiter le problème de commande robuste d'un système bilinéaire avec les matrices dynamiques affectées par des incertitudes bornées en norme. Le principal but de ce chapitre est de calculer une loi de commande stabilisante et une estimation, aussi grande que possible, de la région de stabilité du système en boucle fermée, en garantissant la stabilité asymptotique de l'origine. La procédure pour calculer un gain de commande par retour d'état est décrite comme deux problèmes d'optimisation convexe avec des contraintes LMIs, qui peuvent être résolues par des algorithmes spécialisés de points intérieurs [BEFB94]. Tout d'abord, étant donné un polytope qui borne les valeurs de l'état et qui contient l'origine, il s'agit de trouver une loi de commande par retour d'état et une région de stabilité associée, aussi large que possible, contenue dans ce polytope. A partir d'une solution de la première étape, il s'agit de déterminer le plus grand polytope contenant un ellipsoïde dans lequel les conditions de stabilité asymptotique sont satisfaites. Une procédure itérative combinant ces deux étapes permet de décrire des conditions constructives afin de calculer le gain de retour d'état qui maximise l'estimation bassin d'attraction de l'origine du système bouclé. Les résultats développés dans ce chapitre simplifient la procédure utilisée dans [MTG02] et peuvent être considérés comme complémentaires aux travaux dans [ACM07a, ACM07b, VTG09]. Une discussion sur l'itération des deux étapes et le critère d'arrêt est aussi présentée. Sont aussi présentées quelques extensions pour traiter des taux de convergence exponentielle et des limitations d'énergie ou limitations de l'amplitude sur les entrées. Bien que basée sur la stabilité quadratique, une stratégie pour obtenir des résultats moins conservatifs est présentée via l'utilisation du Lemme de Finsler. De plus, des conditions suffisantes LMIs pour l'existence d'un gain de retour d'état robuste et d'un gain de commande linéaire dépendant de paramètres sont présentés dans le cas où la partie linéaire du système est affectée par des incertitudes qui appartiennent à un domaine polytopique. Dans le contexte des systèmes bilinéaires incertains discrets dans le temps, sont proposées des conditions qui stabilisent le système par commande robuste et fournissent une estimation de la région de stabilité, grâce à l'extensions d'une condition de stabilité présentée pour systèmes linéaires discrets dans le temps en [dOBG99].

## 8.2 Formulation du problème

Considérons le système bilinéaire invariant dans le temps suivant

$$\delta[x(t)] = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{q=1}^m N_q x(t) u_q(t) \quad (8.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état et  $u \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée de commande. Les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , et  $N_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $q = 1, \dots, m$ , sont constantes, par hypothèse. Le symbole  $\delta[\cdot]$  représente la dérivée par rapport au temps pour les systèmes continus et l'opérateur d'avancement pour les systèmes discrets dans le temps. Le but est de stabiliser le système (8.1) avec une loi de commande par retour d'état

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (8.2)$$

La région d'attraction du système (8.1)-(8.2), dénotée par  $\mathcal{B}_a$ , est définie comme l'ensemble de tous les  $x \in \mathbb{R}^n$  tels que pour  $x(0) \in \mathcal{B}_a$ , la trajectoire correspondante converge asymptotiquement vers l'origine. En particulier, quand la stabilité globale du système peut être assurée, la région d'attraction correspond à tout l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$ . Néanmoins, dans le cas général, garantir la stabilité globale, et ainsi obtenir  $\mathbb{R}^n$  comme la région d'attraction, est une tâche difficile, directement liée à la stabilité du système en boucle ouverte. Il est donc important d'obtenir une estimation de la région d'attraction. Dans ce sens, des régions de stabilité asymptotique peuvent être utilisées pour estimer la région d'attraction. D'autre part, dans certaines applications pratiques il peut être intéressant d'assurer la stabilité pour un ensemble donné de conditions initiales. D'un point de vue pratique, cet ensemble peut être vu comme une région d'opération pour le système, ou une région dans laquelle les états du système peuvent aller dû à une action de perturbation temporaire [Kha02, ACM07a]. Le but de ce chapitre est de proposer une méthodologie pour résoudre le problème suivant.

**Problème 8.1** *Trouver un gain de retour  $K$  et une région de stabilité  $\mathcal{S}_0$ , aussi grande que possible, tels que le système de boucle fermée*

$$\delta[x(t)] = (A + (B + [N_1 x(t) \dots N_m x(t)])K)x(t) \quad (8.3)$$

*est asymptotiquement stable pour toute condition initiale  $x(0)$  appartenant à  $\mathcal{S}_0$ .*

Pour résoudre le Problème 8.1, on exploite quelques propriétés des polytopes et des fonctions de Lyapunov quadratiques.

## 8.3 Cas continu dans le temps

Un résultat classique pour résoudre le Problème 8.1 est la théorie de Lyapunov, qui consiste à déterminer une fonction définie positive  $V(x)$ , une matrice de gain  $K$  et un ensemble  $\mathcal{S}_0$  tels que [Kha02] :

(i)  $V(x) > 0, \forall x \neq 0;$

(ii)  $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} < 0, \forall x(0) \in \mathcal{S}_0.$

le long des trajectoires du système (8.3).

Soit un polytope  $\chi(x) \subset \mathbb{R}^n$  décrit par

$$\chi(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \preceq q\} \quad (8.4)$$

ou, de manière équivalente

$$\chi(x) = \text{co} \{v_j, j = 1, \dots, s\} \quad (8.5)$$

où  $Q \in \mathbb{R}^{g \times n}$ ,  $n \leq g$ ,  $\text{rank}(Q) = n$ ,  $q \in \mathbb{R}^g$  et  $q_{(i)} > 0, \forall i = 1, \dots, g$ . Les vecteurs  $v_j \in \mathbb{R}^n$  sont les sommets qui permettent décrire l'enveloppe convexe qui contient les points de  $\chi(x)$ . On note que la positivité du vecteur  $q$  signifie que l'origine appartient à l'intérieur de  $\chi(x)$ . Donc, pour tout  $x \in \chi(x)$ , on obtient

$$\begin{aligned} [N_1 x(t) \quad \cdots \quad N_m x(t)] &= \sum_{j=1}^s \beta_j(t) [N_1 v_j \quad \cdots \quad N_m v_j] \\ &= \sum_{j=1}^s \beta_j(t) \mathbb{B}_j = \mathbb{B}(\beta(t)) \end{aligned} \quad (8.6)$$

avec  $\beta(t) \in \mathbb{R}^s$  appartenant au simplexe unitaire

$$\mathcal{U}_s = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^s : \sum_{j=1}^s \beta_j = 1, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, s \right\} \quad (8.7)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

**Théorème 8.1** *Considérons l'ensemble polyédral  $\chi(x)$  défini dans (8.4) (ou, dans (8.5)). S'il existe une fonction définie positive  $V(x)$ , un gain de retour d'état  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , une matrice  $Q \in \mathbb{R}^{g \times n}$ , des vecteurs  $v_j, j = 1, \dots, s$ , un vecteur positif  $q \in \mathbb{R}_+^g$  et un scalaire positif  $\gamma$  satisfaisant*

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} [(A + (B + \mathbb{B}(\beta(t))) K) x] < 0, \quad (8.8)$$

pour tout  $x \in \Gamma(x)$ ,  $x \neq 0$ , avec

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq \gamma^{-1}\} \subseteq \chi(x) \quad (8.9)$$

alors le gain  $K$  et l'ensemble  $\Gamma(x)$  sont des solutions pour le Problème 8.1.

**Preuve:** Si (8.9) est vérifiée alors l'ensemble  $\Gamma(x)$ , défini en fonction de la fonction positive  $V(x)$  et du scalaire positif  $\gamma$ , est inclus dans l'ensemble polyédral  $\chi(x)$ . Pour tout  $x(t) \in \Gamma(x)$ ,  $\forall t \geq 0$ , il suit que s'il existe  $\beta(t) \in \mathcal{U}_s$  le système (8.3) peut être représenté en utilisant (8.6).

De plus, si (8.8) est satisfaite, la dérivée temporelle de  $V(x)$  est strictement négative le long des trajectoires de (8.3)-(8.6). On remarque que le modèle (8.3) est représenté localement par le système (8.3)-(8.6), c'est-à-dire, seulement dans  $\chi(x)$ . Puisque  $\Gamma(x)$  est inclus dans  $\chi(x)$ , la fonction  $V(x)$  est une fonction localement décroissante pour le système en boucle fermée sur l'ensemble  $\Gamma(x)$ . Donc,  $\Gamma(x)$  est un ensemble contractif par rapport aux trajectoires du système (8.3)-(8.6) et ainsi  $\Gamma(x)$  est un domaine de stabilité pour le système en boucle fermée. ■

Le Théorème 8.1 fournit une condition suffisante pour résoudre le Problème 8.1, mais il ne présente pas une méthode constructive pour déterminer une fonction  $V(x)$  adéquate et un gain  $K$ . Dans le but de développer des conditions traitables numériquement, on exploite les propriétés des fonctions de Lyapunov quadratiques, en considérant  $V(x) = x'Px$  avec  $P = P' > 0$ . De plus, l'ensemble polyédral  $\chi(x)$  est choisi comme

$$\chi(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : -\mu \preceq x \preceq \mu\} \quad (8.10)$$

avec  $\mu \in \mathbb{R}^n$  et  $\mu_{(i)} > 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Les sommets  $v_j$  d'un ensemble  $\chi(x)$ , donné par (8.10), sont construits à partir des  $2^n$  combinaisons formées avec les entrées des vecteurs  $\mu$  et  $-\mu$ . En fait, les vecteurs  $v_j$  sont obtenus en fonction de  $\mu$  par combinaisons linéaires

$$v_j = D_j \mu, j = 1, \dots, 2^n \quad (8.11)$$

où  $D_j, j = 1, \dots, 2^n$ , sont des matrices diagonales dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  constituées de toutes les combinaisons formées avec 1 et  $-1$ .

En considérant un polytope  $\chi(x)$  comme défini en (8.10), on établit la proposition suivante provenant du Théorème 8.1.

**Proposition 8.1** *S'il existe une matrice définie positive  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , un vecteur positif  $\mu \in \mathbb{R}^n$  et un scalaire positif  $\gamma$  satisfaisant*

$$\Upsilon_j = AW + WA' + (B + [N_1 D_j \mu \ \cdots \ N_m D_j \mu])Y + Y'(B + [N_1 D_j \mu \ \cdots \ N_m D_j \mu])' < 0, j = 1, \dots, 2^n \quad (8.12)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{(i)} W & W I'_{(i)} \\ \star & \gamma \mu_{(i)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (8.13)$$

alors le gain de commande  $K = YW^{-1}$  et l'ensemble

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : x'W^{-1}x \leq \gamma^{-1}\} \quad (8.14)$$

sont solutions pour le Problème 8.1.

**Preuve:** Considérons une fonction de Lyapunov quadratique  $V(x) = x'Px$ , avec  $P = W^{-1} > 0$ . Donné un polytope  $\chi(x)$  comme en (8.10), la condition (8.13) assure que l'ensemble  $\Gamma(x)$  défini en (8.14) est inclus dans le polytope  $\chi(x)$  et, pour tout  $x \in \Gamma(x) \subseteq \chi(x)$ , la définition (8.6) est

valable. En considérant que  $Y = KW$ , la dérivée temporelle de  $V(x)$  le long des trajectoires du système (8.3),  $\forall x \in \Gamma(x) \subseteq \chi(x)$ , est donnée par  $\dot{V}(x) = x' \sum_{j=1}^{2^n} \beta_j \dot{V}_j x$ , avec

$$\begin{aligned} \dot{V}_j &= (A + (B + [N_1 D_j \mu \ \cdots \ N_m D_j \mu])K)' W^{-1} \\ &\quad + W^{-1} (A + (B + [N_1 D_j \mu \ \cdots \ N_m D_j \mu])K) = W^{-1} \Upsilon_j W^{-1} \end{aligned}$$

Donc,  $\dot{V}(x) = x' W^{-1} (\sum_{j=1}^{2^n} \beta_j \Upsilon_j) W^{-1} x$  et on conclut que si la condition (8.12) est satisfaisante, la dérivée temporelle de  $V(x)$  est strictement négative pour tout  $x \in \Gamma(x)$ . Par conséquent, selon le Théorème 8.1,  $\Gamma(x)$  est un ensemble contractif par rapport aux trajectoires du système (8.3)-(8.6) et  $\Gamma(x)$  est un domaine de stabilité pour le système en boucle fermée. ■

**Remarque 8.1** Les principales différences entre l'approche proposée dans ce chapitre et celles que l'on trouve dans la littérature sont les suivants. Dans [DN80], une procédure basée sur une équation de Riccati paramétrée est utilisée pour déterminer un gain stabilisant et une région de stabilité associée. Cependant, la méthode est extrêmement dépendante du choix de plusieurs paramètres sans aucun critère permettant de guider ce choix. Dans [ACM07b, AAA<sup>+</sup>07], les auteurs présentent, pour un polytope donné, des conditions LMI suffisantes garantissant l'existence d'un gain de retour d'état stabilisant assurant que le polytope est une région de stabilité pour le système bouclé. La méthode consiste alors à obtenir un ellipsoïde qui contient le polytope original. L'ellipsoïde doit être également contenu dans un autre polytope directement obtenu du précédent par un facteur d'échelle. Aucun algorithme n'est proposé pour augmenter l'estimation du bassin d'attraction obtenu. Par ailleurs, la méthode dépend fortement du polytope initial choisi. Notre approche est aussi tributaire de cet inconvénient.

**Remarque 8.2** Du point de vue de la synthèse, il peut être intéressant d'imposer un taux de convergence exponentielle  $\delta$  pour le système [BEFB94]. Dans ce cas, il suffit de rajouter dans le côté gauche de l'inégalité (8.12) le terme  $2\delta W$ .

**Remarque 8.3** Dans un contexte de performance, un critère lié à la minimisation de l'énergie du signal d'entrée, ou imposant une borne à celle-ci, peut être considéré. Autrement dit, on minimise un scalaire positif  $\sigma$  tel que

$$\int_0^T u' u dt \leq \sigma, \quad \forall T \geq 0 \quad (8.15)$$

Dans ce cas, la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov doit être telle que  $\dot{V} + (\sigma\gamma)^{-1} u' u \leq 0$  le long des trajectoires du système en boucle fermée. Il alors suffit de remplacer la condition (8.12) par

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{ij} & Y' \\ \star & -\eta \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, 2^n \quad (8.16)$$

où  $\eta$  est une variable de décision supplémentaire. Donc, si (8.16) et (8.13) sont satisfaites, la condition (8.15) est vérifiée avec  $\sigma = \eta\gamma^{-1}$ .

**Remarque 8.4** Pour limiter l'amplitude du signal de commande, on ajoute la contrainte suivante

$$\begin{bmatrix} W & Y^{(i)} \\ \star & \gamma u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (8.17)$$

où  $u_0$  est la borne exigée en  $u$ . Si (8.17) est satisfaite, la région de stabilité  $\Gamma(x)$ , définie en (8.14), est incluse dans l'ensemble polyédral  $\{x \in \mathbb{R}^n : -u_0 \preceq Kx \preceq u_0\}$  et ainsi, pour tout  $x \in \Gamma(x)$ , on obtient  $|u = Kx| \preceq u_0$ . De plus, d'un point de vue pratique il peut être intéressant de spécifier la valeur de  $u_0$  qui permet d'atteindre le meilleur niveau de performance pour le système. La stratégie est donc de considérer  $u_0$  comme une variable de décision. Cela peut être réalisé sur la même LMI en remplaçant  $u_{0(i)}^2$  par les nouvelles variables  $\zeta_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$  en (8.17) et en considérant un critère de coût linéaire en  $\zeta_{(i)}$ .

Les relations d'équivalence du Lemme 5.3 (Lemme de Finsler) peuvent être utilisées pour écrire de nouvelles conditions de stabilité pour le système (8.1).

On définit le vecteur augmenté  $\xi$  et les matrices  $\mathcal{L}$  et  $\tilde{B}$  comme

$$\zeta = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = [ A + BK + \mathbb{B}_j K \quad -\mathbf{I} ]$$

Alors, la condition de stabilité (8.8) du Théorème 8.1, peut être réécrite sous la forme  $\xi' \mathcal{L} \xi < 0$ , pour tout  $\xi$  tel que  $\tilde{B} \xi = 0$ , qui est la condition (i) du Lemme 5.3. En utilisant l'équivalence entre les conditions (i) et (ii) de ce Lemme et en définissant

$$R = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

on obtient une condition de stabilité

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M} & -F + P + A'F' + K'B'F' + K'\mathbb{B}'_j F' \\ P + GA + GBK + G\mathbb{B}_j K - F' & -G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (8.18)$$

avec

$$\mathcal{M} \triangleq FA + FBK + F\mathbb{B}_j K + A'F' + K'B'F' + K'\mathbb{B}'_j F'$$

En choisissant  $F = G$ ,  $Y = KG^{-1}$ ,  $S = G^{-1}$ ,  $V = SPS'$ , en multipliant à gauche et à droite (8.18) par les matrices  $\text{diag}\{S, S\}$  et  $\text{diag}\{S', S'\}$ , respectivement, on obtient

$$\begin{bmatrix} AS + BY + \mathbb{B}_j Y + S'A' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j & V - S' + SA' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j \\ AS' + BY + \mathbb{B}_j Y - S + V & -S - S' \end{bmatrix} < 0 \quad (8.19)$$

Alors, on peut établir le résultat qui suit.

**Proposition 8.2** *S'il existe une matrice définie positive  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , un vecteur positif  $\mu \in \mathbb{R}^n$  et un scalaire positif  $\gamma$  satisfaisant*

$$\begin{bmatrix} AS + BY + \mathbb{B}_j Y + S'A' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j & V - S' + SA' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j \\ AS' + BY + \mathbb{B}_j Y - S + V & -S - S' \end{bmatrix} < 0 \quad (8.20)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{(i)}V & S\mathbf{I}_{(i)} \\ \star & \gamma\mu_{(i)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (8.21)$$

alors le gain de commande  $K = YS$  et l'ensemble

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : x'S^{-1}VS^{-1}x \leq \gamma^{-1}\} \quad (8.22)$$

sont solutions pour le Problème 8.1.

## 8.4 Systèmes discrets dans le temps

Une solution pour le Problème 8.1 dans le cas discret peut être obtenue via l'existence d'une fonction de Lyapunov, c'est-à-dire, s'il existe  $V(x(t))$  tel que

(i)  $V(x(t)) > 0, \forall x \neq 0;$

(ii)  $\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) < 0, \forall x(0) \in \mathcal{S}_0.$

le long des trajectoires du système (8.3).

Les considérations pour le polytope  $\chi(x) \subset \mathbb{R}^n$  sont les mêmes que dans le cas continu dans le temps.

**Théorème 8.2** *Considérons l'ensemble polyédral  $\chi(x)$  défini en (8.4) (ou, en (8.5)). S'il existe une fonction définie positive  $V(x(t))$ , un gain de retour d'état  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , une matrice  $Q \in \mathbb{R}^{g \times n}$ , des vecteurs  $v_j, j = 1, \dots, s$ , un vecteur positif  $q \in \mathbb{R}_+^g$  et un scalaire positif  $\gamma$  satisfaisant*

$$\Delta V(x(t)) = V[(A + (B + \mathbb{B}(\beta(t)))K)x] - V(x(t)) < 0, \quad (8.23)$$

pour tout  $x \in \Gamma(x), x \neq 0$ , avec

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \gamma^{-1}\} \subseteq \chi(x) \quad (8.24)$$

alors le gain  $K$  et l'ensemble  $\Gamma(x)$  sont solutions pour le Problème 8.1.

Une condition décrite en termes de LMIs, considérant une fonction de Lyapunov quadratique (Lemme 5.5), pour résoudre le Problème 8.1, est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 8.3** *S'il existe une matrice définie positive  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , un vecteur positif  $\mu \in \mathbb{R}^n$  et un scalaire positif  $\gamma$  satisfaisant*

$$\Theta_j = \begin{bmatrix} S & AS + BY + \mathbb{B}_j Y \\ SA' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j & S \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, \dots, 2^n \quad (8.25)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{(i)}S & S\mathbf{I}_{(i)} \\ \star & \gamma\mu_{(i)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (8.26)$$

alors le gain de commande  $K = YS^{-1}$  et l'ensemble

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : x'S^{-1}x \leq \gamma^{-1}\} \quad (8.27)$$

sont solutions pour le Problème 8.1.

**Preuve:** Elle est similaire à la preuve de la Proposition 8.1. On considère une fonction de Lyapunov quadratique  $V(x(t)) = x(t)'Px(t)$  avec  $P = P' = S^{-1} > 0$ . En posant  $Y = KS^{-1}$ , en multipliant  $\Theta_j$  à gauche et à droite par  $\text{diag}\{S^{-1}, S^{-1}\}$ , appliquant le changement de variable  $P = S^{-1}$  et le complément de Schur sur l'expression résultante on obtient

$$(A' + Y'B' + Y'\mathbb{B}'_j)P(A + YB + Y\mathbb{B}_j) - P < 0$$

et ainsi on conclut que la condition (8.25) est satisfaite.  $\blacksquare$

## 8.5 Extensions

Considérons maintenant le cas où les matrices  $A$  et  $B$  du système (8.1) dépendent de paramètres variants dans le temps

$$\delta[x(t)] = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t) + \sum_{q=1}^m N_q x(t)u_q(t) \quad (8.28)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur des paramètres variants dans le temps qui appartient au simplexe unitaire

$$\mathcal{U}_N = \left\{ \alpha(t) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1, \alpha_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (8.29)$$

Les matrices  $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  appartiennent au polytope

$$\mathcal{P} = \left\{ (A, B)(\alpha(t)) : (A, B)(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)(A, B)_i, \alpha \in \mathcal{U}_N \right\} \quad (8.30)$$

avec les sommets  $A_i, B_i, i = 1, \dots, N$ . Le symbole  $\delta[\cdot]$  représente la dérivée par rapport au temps pour les systèmes continus et l'opérateur avance pour les systèmes discrets dans le temps.

Dans ce cas, on a deux stratégies possibles pour obtenir une estimative de la région de stabilité avec  $\alpha$  et  $\beta$  paramètres variants dans le temps (lesquels implicitement dépendent de  $x(t)$ ), avec le gain de commande robuste, indépendant de  $\alpha \in \mathcal{U}_N$  et de  $\beta \in \mathcal{U}_s$ , ou avec de une commande par retour d'état de type LPV définie par :

$$K(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2^n} \alpha_i \beta_j K_{ij} \quad (8.31)$$

Considérant le système (8.28) continu dans le temps, une condition suffisante pour l'existence de gains  $K_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  solutions pour le Problème 8.1 est donnée par le corollaire suivant.

**Corollaire 8.1** *S'il existe une matrice définie positive  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices  $Y_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , un vecteur positif  $\mu \in \mathbb{R}^n$  et un scalaire positif  $\gamma$  satisfaisant la relation (8.13) et les relations suivantes :*

$$\Theta_{ij} = A_i W + W A_i' + (B_i + \mathbb{B}_j) Y_{ij} + Y_{ij}' (B_i + \mathbb{B}_j)' < 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, 2^n \quad (8.32)$$



$$\Theta_{ijk} = 2(A_i W + W A_i') + (B_i + \mathbb{B}_j) Y_{ik} + (B_i + \mathbb{B}_k) Y_{ij} + Y_{ik}'(B_i + \mathbb{B}_j)' + Y_{ij}'(B_i + \mathbb{B}_k)' < 0, \\ i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, 2^n - 1; \quad k = j + 1, \dots, 2^n \quad (8.33)$$

$$\Theta_{ilj} = (A_i + A_\ell) W + W(A_i + A_\ell)' + (B_i + \mathbb{B}_j) Y_{lj} + (B_\ell + \mathbb{B}_j) Y_{ij} + Y_{lj}'(B_i + \mathbb{B}_j)' \\ + Y_{ij}'(B_\ell + \mathbb{B}_j)' < 0, \quad i = 1, \dots, N - 1; \quad \ell = i + 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, 2^n \quad (8.34)$$

$$\Theta_{iljk} = 2(A_i + A_\ell) W + 2W(A_i + A_\ell)' + (B_i + \mathbb{B}_j) Y_{lk} + (B_i + \mathbb{B}_k) Y_{lj} + (B_\ell + \mathbb{B}_j) Y_{ik} \\ + (B_\ell + \mathbb{B}_k) Y_{ij} + Y_{lk}'(B_i + \mathbb{B}_j)' + Y_{lj}'(B_i + \mathbb{B}_k)' + Y_{ik}'(B_\ell + \mathbb{B}_j)' + Y_{ij}'(B_\ell + \mathbb{B}_k)' < 0, \\ i = 1, \dots, N - 1; \quad \ell = i + 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, 2^n - 1; \quad k = j + 1, \dots, 2^n \quad (8.35)$$

alors la commande LPV  $K(\alpha, \beta)$  donnée par

$$K(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2^n} \alpha_i \beta_j K_{ij}, \quad K_{ij} = Y_{ij} W^{-1}; \quad \alpha \in \mathcal{U}_N, \quad \beta \in \mathcal{U}_{2^n}$$

et l'ensemble  $\Gamma(x)$  défini en (8.14) sont solutions pour le Problème 8.1.

**Preuve:** La démonstration de ce corollaire peut être construite en multipliant les LMIs au-dessus par  $\alpha_i$  et  $\beta_j$ , et en les additionnant. Il suffit ensuite de suivre les étapes décrites dans [MOP<sup>+</sup>07]. ■

On note qu'en fixant  $Y_{ij} = Y$  et en considérant seulement (8.32), on récupère la Proposition 8.1 pour traiter le problème de commande robuste par retour d'état. De plus, on peut utiliser les conditions du Corollaire 8.1 pour le cas de la commande LPV dépendant seulement de  $\alpha$ , en faisant  $Y_{ij} = Y_{i1}$  et en considérant les conditions (8.32) et (8.34), ou dépendant seulement de  $\beta$ , en fixant  $Y_{ij} = Y_{1j}$  et en considérant (8.32) et (8.33). Les variables  $Y_{ij}$  des conditions du Corollaire 8.1 fournissent des degrés de liberté additionnelles pour la synthèse du contrôleur, permettant de stabiliser quadratiquement avec des gains de type LPV des systèmes qui n'admettent pas un gain de retour robuste. Mais il faut implanter une stratégie plus complexe de retour d'état basée sur la disponibilité des paramètres variants dans le temps  $\alpha$  et  $\beta$ .

Dans le cas où le système (8.28) est discret dans le temps une condition moins conservative que celle de la Proposition 8.3 est donnée par le corollaire qui suit.

**Corollaire 8.2** *S'il existe des matrices symétriques définies positives  $S_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, N$ , des matrices  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , un vecteur positif  $\mu \in \mathbb{R}^n$  et un scalaire positif  $\gamma$  tels que*

$$\Delta_{ijk} = \begin{bmatrix} S_j & A_i G + B_i Z + \mathbb{B}_k Z \\ G' A_i' + Z' B_i' + Z' \mathbb{B}_k' & G + G' - S_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N; \\ j = 1, \dots, N; \quad k = 1, \dots, 2^n \quad (8.36)$$

$$\begin{bmatrix} \mu^{(i)} S_j & S_j \mathbf{I}^{(i)} \\ \star & \gamma \mu^{(i)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, N; \quad (8.37)$$

alors la loi de commande  $u = Kx$  avec

$$K = ZG^{-1}$$

assure la stabilité asymptotique robuste pour le système (8.28), cas discret, en boucle fermée et l'ensemble

$$\Gamma(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : x'P(\alpha)x \leq \gamma^{-1}\}$$

avec

$$P(\alpha) = S(\alpha)^{-1} \text{ et } S(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i S_i; \quad \forall \alpha \in \mathcal{U}$$

est une estimation de la région de stabilité.

**Preuve:** En considérant  $Z = KG$ , si l'expression

$$\begin{bmatrix} S(\alpha(t+1)) & (A(\alpha(t)) + (B(\alpha(t)) + \mathbb{B}(\beta(t)))K)G \\ G'(A(\alpha(t)) + (B(\alpha(t)) + \mathbb{B}(\beta(t)))K)' & G + G' - S(\alpha(t)) \end{bmatrix} > 0 \quad (8.38)$$

est faisable alors, en multipliant (8.38) à gauche et à droite par  $R = [-\mathbf{I} \quad A(\alpha(t)) + (B(\alpha(t)) + \mathbb{B}(\beta(t)))K]$  et par  $R'$ , respectivement, on obtient

$$S(\alpha(t+1)) - (A(\alpha(t)) + (B(\alpha(t)) + \mathbb{B}(\beta(t)))K)S(\alpha(t))(A(\alpha(t)) + (B(\alpha(t)) + \mathbb{B}(\beta(t)))K)' > 0$$

qui est une condition suffisante pour la stabilité asymptotique du système en boucle fermée. En réécrivant (8.38) avec  $(A, B)(\alpha(t))$  comme en (8.30),  $\mathbb{B}(\beta(t))$  donnée par (8.6),  $S(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)S_i$ ,  $\alpha(t) \in \mathcal{U}_N$ ,  $S(\alpha(t+1)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t+1)S_i = \sum_{i=1}^N \gamma_j(t)S_j$ ,  $\gamma(t) \in \mathcal{U}_N$ , et en multipliant l'expression résultante par  $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t)$ ,  $\sum_{j=1}^N \gamma_j(t)$ ,  $\sum_{k=1}^s \beta_k(t)$ , on obtient ;

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \gamma_j(t) \sum_{k=1}^s \beta_k(t) \Delta_{ijk} \quad (8.39)$$

avec  $\Delta_{ijk}$  donnée par (8.36). La faisabilité de (8.36) est suffisante pour que l'expression (8.39) soit définie positive, ce qui garantit (8.38). ■

**Remarque 8.5** Il est intéressant de noter que dans le cas précisément connu  $A_i = A$ ,  $i = 1, \dots, n$ , en choisissant  $G = G' = S_j = S_i = S$  et  $Y = Z$ , la condition (8.36) contient la condition (8.25) de stabilité quadratique qui peut donc être vue comme un cas particulier.

**Remarque 8.6** La matrice  $G$  de la condition (8.36) fournit un degré de liberté additionnel pour la synthèse d'un contrôleur, permettant ainsi de traiter avec moins conservatisme des problèmes de commande avec des gains avec des contraintes de structure. Pour cela, on impose des structures particulières aux matrices  $G$  et  $Z$ , sans nécessité de particularisation des matrices de Lyapunov  $S_j$ .

## 8.6 Complexité numérique

Il est important de noter que les variables de décision de la Proposition 8.1 sont  $W$ ,  $Y$ ,  $\mu$  et  $\gamma$ , étant donné que  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, 2^n$ , dépend linéairement de  $\mu$  comme décrit en (8.11). Dû à la présence de produits entre certaines de ces variables implique que les inégalités de (8.12) sont non-linéaires. Ceci signifie qu'il peut être difficile, voire impossible, de résoudre ces inégalités directement. Un moyen de contourner ce problème est de fixer, a priori, les valeurs de certaines variables de décision et de chercher les autres.

Le but de synthèse considéré dans ce chapitre est de déterminer un contrôleur qui mène à une estimation de la région d'attraction, la plus grande possible, parmi les solutions possibles pour les inégalités de la Proposition 8.1. Une façon de maximiser indirectement le volume de l'ensemble  $\Gamma(x)$  défini en (8.14) est de minimiser le trace de  $W^{-1}$  et/ou minimiser  $\gamma$  [KG02, TGG07]. Pour calculer une commande capable de maximiser l'estimation de la région d'attraction du système en boucle fermée, on utilise l'algorithme suivant.

### Algorithme 8.1

**Pas 1:** *Initialisation.* Choisir  $\mu_{(i)}, i = 1, \dots, n$ .

**Pas 2:** *Calculer*  $W$ ,  $Y$  et  $\gamma$ , solutions de :

$$\begin{aligned} & \min\{\omega_1 \text{Trace}(T) + \omega_2 \gamma\} \\ & \text{sous les relations de la Proposition 8.1} \\ & \begin{bmatrix} T & \mathbf{I}_n \\ \star & W \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{8.40}$$

avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$  des paramètres de pondération, permettant de donner plus ou moins de poids à  $\text{Trace}(T)$  (et donc  $\text{Trace}(W^{-1})$ ) ou  $\gamma$ .

**Pas 3:** *Fixer*  $W$ ,  $Y$  et  $\gamma$ . Calculer  $\mu_{(i)}, i = 1, \dots, n$  solutions de :

$$\begin{aligned} & \max\left\{\sum_{i=1}^n \mu_{(i)}\right\} \\ & \text{sous les relations de la Proposition 8.1} \end{aligned} \tag{8.41}$$

**Pas 4:** *Retourner au Pas 1 tant qu'un changement non significatif des valeurs des critères, n'est pas obtenu.*

Le premier problème d'optimisation (8.40) maximise le taille de  $\Gamma(x)$  en considérant un critère basé sur la trace de  $W^{-1}$  et le scalaire  $\gamma$ . L'objectif du deuxième problème d'optimisation (8.41) est de maximiser le vecteur  $\mu$ , afin d'augmenter le taille de  $\chi(x)$ .

On peut observer que les conditions de la Proposition 8.1, ainsi que l'Algorithme 1, ont été simplifiés par rapport aux conditions développées dans [MTG02], en particulier concernant les aspects en des termes de complexité numérique. De plus, en utilisant le fait que la région de stabilité obtenue avec la procédure proposée est symétrique, l'algorithme 1 donne de meilleurs résultats que celui présenté dans [MTG02] en termes de l'augmentation du polytope et de l'ellipsoïde.

## 8.7 Exemples

**Exemple 8.1** Le système utilisé pour cet exemple est issu de [ACM07b], avec une petite modification sur la représentation du terme bilinéaire. Pour le système (8.1) continu dans le temps, on obtient

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 & 4 \\ 4.3 & 6.0 & 5.0 \\ 3.2 & 6.8 & 7.2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -0.7 & -1.3 \\ 0 & -4.3 \\ 0.8 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant l'Algorithme 8.1 avec  $\mu = [2 \ 2 \ 2]'$ , après 6 itérations, on obtient le gain de commande

$$K = \begin{bmatrix} 0.0016 & 0.0035 & 0.0034 \\ 2.2404 & 3.2676 & 5.9199 \end{bmatrix}$$

La Figure 8.1 montre l'estimation du domaine de stabilité pour le système, fournie par l'Algorithme 8.1 (région  $\Gamma$ ) et la estimation fournie par [ACM07b] (région  $\epsilon$ ). La région  $\Gamma(x)$  est donnée par (4.14) avec

$$\gamma = 1.0890, \quad W = \begin{bmatrix} 63.1224 & -1.6258 & -15.6454 \\ -1.6258 & 4.3546 & -0.3996 \\ -15.6454 & -0.3996 & 5.3342 \end{bmatrix}$$

Le cube est le polytope initial  $\mathcal{P}$  utilisé par la méthode proposée en [ACM07b]. Bien que les objectifs ne soient pas exactement les mêmes, on remarque que la méthode proposée dans ce chapitre peut aussi trouver une solution possible pour le système étudié dans [ACM07b] et, de plus, fournit une estimation de la région de stabilité moins conservatrice.

**Exemple 8.2** Considérons le système (8.1) continu dans le temps décrit par les données suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Nous appliquons l'Algorithme 8.1 en ajoutant une contrainte dans le problème d'optimisation du Pas 2, pour borner la norme du gain. Avec la condition initiale  $\mu = [1 \ 1]'$ , on obtient, après 10 itérations, le gain de retour d'état

$$K = \begin{bmatrix} 0.5437 & 23.8399 \\ -0.6428 & -9.5656 \end{bmatrix}$$

avec l'ellipsoïde associé décrit par  $\Gamma(x)$  comme en (4.14) et

$$\gamma = 0.7008, \quad W = \begin{bmatrix} 55.144 & -0.1004 \\ -0.1004 & 1.4488 \end{bmatrix}$$

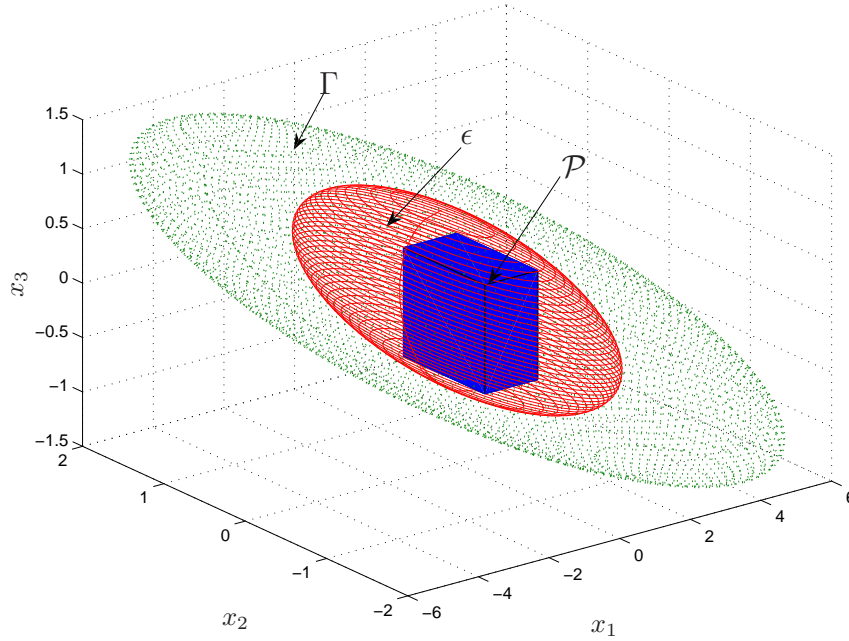


Figure 8.1: Régions de stabilité obtenues par l'Algorithme 8.1 ( $\Gamma$ ) et par [ACM07b] ( $\epsilon$ ) pour l'Exemple 8.1 (avec  $\mathcal{P}$  le polytope initial).

Cet ellipsoïde est d'un volume proportionnel  $\sqrt{\det(W/\gamma)} = 12.7526$ , et est tracé sur la Figure 8.2. La vraie région d'attraction (obtenue par simulation) du système en boucle fermée, est aussi montrée sur la figure, permettant d'évaluer le conservatisme de la procédure proposée.

L'évolution dans le temps du système avec des conditions initiales  $[0 \ 3]'$  et de l'entrée de commande  $u = Kx$  sont montrées sur les Figures 8.3 et 8.4, respectivement.

Dans la Figure 8.4, il est possible de voir que l'effort de commande est important dans le début de la simulation montrant que l'amplitude de la commande atteint des valeurs élevées. Dans ce cas, les stratégies pour borner les entrées de commande, discutées dans les Remarques 8.3 et 8.4, peuvent être appliquées. De plus, il peut être intéressant de considérer une limitation en amplitude pendant la synthèse du contrôleur, via l'utilisation des fonctions de saturation.

**Exemple 8.3** Considérons maintenant le système (8.28) avec des incertitudes, appartenant au polytope décrit par les sommets suivants :

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -0.48 & 0.44 & -0.42 \\ -0.02 & -0.66 & 0.91 \\ -0.85 & -0.45 & 0.12 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -3.70 & 1.00 \\ 2.90 & -0.30 \\ -3.40 & -3.90 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5.75 & -0.40 \\ 0.65 & 1.10 \\ 2.65 & -1.70 \end{bmatrix}$$

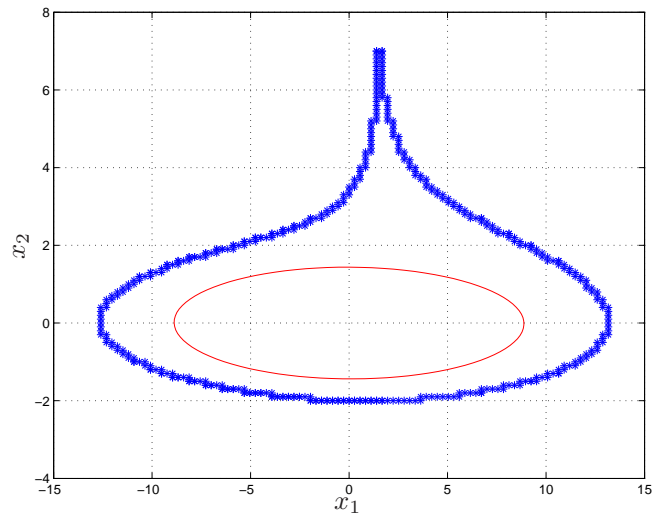


Figure 8.2: Région d'attraction et ensemble ellipsoïdal obtenus avec la condition initiale de l'Exemple 8.2.

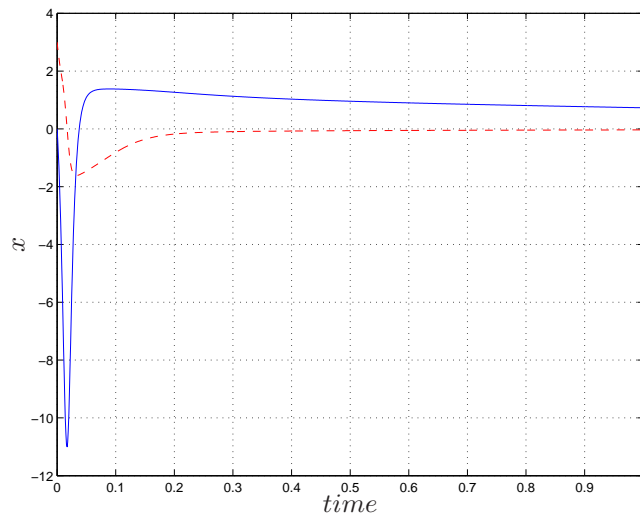


Figure 8.3: Évolution dans le temps pour  $x(0) = [0 \ 3]'$  pour l'Exemple 8.2.

et les termes bilinéaires décrits par les matrices suivantes:

$$N_1 = \begin{bmatrix} -2.55 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} -1.10 & 0 & 0 \\ 0 & 3.60 & 0 \\ 0 & 0 & 4.10 \end{bmatrix}$$

Comme dans la Remarque 8.2, on considère un terme additionnel,  $+2\delta W$ , au côté gauche de l'équation (8.32), ce qui correspond à fixer le taux de convergence exponentielle  $\delta = 0.75$ . Dans un tel cas, pour la condition initiale  $\mu = [0.25 \ 0.25 \ 0.25]'$ , il n'est pas possible de calculer un gain robuste de retour d'état avec le Corollaire 8.1. D'autre part, le Corollaire 8.1 fournit une solution faisable, pour un gain LPV qui dépend de  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui illustre l'intérêt pour cette classe de contrôleurs pour traiter des spécifications de performance de boucle fermée multiples,

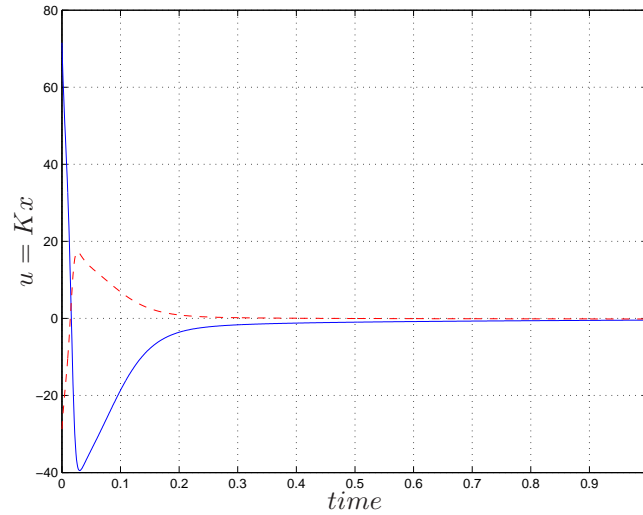


Figure 8.4: L'entrée de commande pour l'Exemple 8.2.

au prix d'une implantation de la loi de commande plus complexe.

**Exemple 8.4** Considérons le système (8.28) discret dans le temps soumis à des incertitudes les matrices définissant le système sont produites aléatoirement :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.7582 & 0.6802 \\ -0.6919 & -1.0725 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0.6234 \\ 0.5859 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.8998 & 0.2847 \\ -2.1231 & -0.7333 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.6773 \\ 0.8768 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -0.7734 & -0.3368 \\ 0.1518 & 0.9708 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} 0.0129 \\ 0.3104 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le terme bilinéaire est décrit par la matrice suivante:

$$N = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.015 \\ 0.010 & 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant l'Algorithme 8.1 avec  $\mu = [1 \ 1]'$ , il n'est pas possible de trouver un gain de retour d'état stabilisant avec de la condition (8.25) de la Proposition 8.3. Cependant, la condition (8.36) du Corollaire 8.2 fournit le gain robuste stabilisant suivant

$$K = [0.2946 \quad -0.1373]$$

La Figure 8.5 montre l'estimation du domaine de stabilité  $\Gamma(\alpha)$  pour le système, décrit par

$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x' S(\alpha)^{-1} x \leq \gamma^{-1}\} \quad (8.42)$$

avec  $S(\alpha) = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3$ ,  $\alpha \in \mathcal{U}_N$  et

$$\begin{aligned} \gamma &= 2.5087, & S_1 &= \begin{bmatrix} 1.078 & -0.9078 \\ -0.9078 & 2.3520 \end{bmatrix} \\ S_2 &= \begin{bmatrix} 0.8154 & -0.8362 \\ -0.8362 & 2.5087 \end{bmatrix}, & S_3 &= \begin{bmatrix} 0.8696 & -0.8177 \\ -0.8177 & 2.3844 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

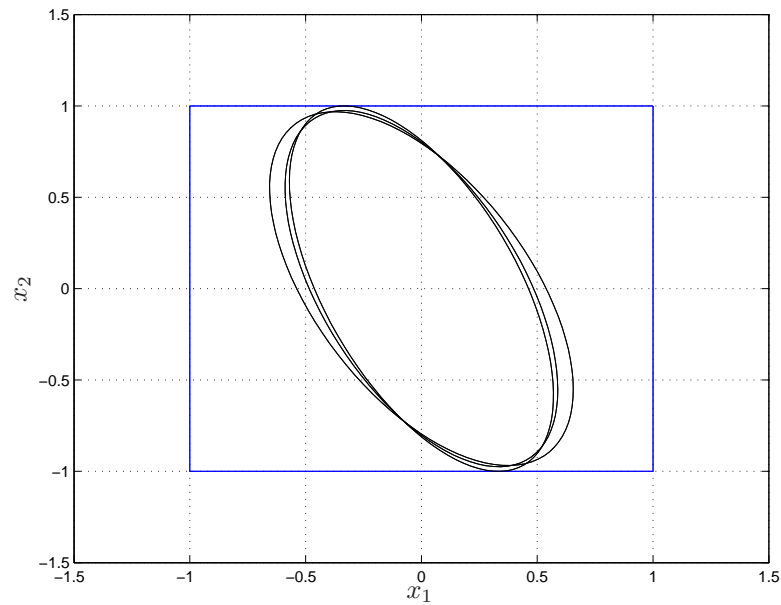


Figure 8.5: Estimation du domaine de stabilité obtenue avec la condition initiale de l'Exemple 4.4.

## 8.8 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre une procédure itérative décomposée en deux étapes convexes pour la synthèse d'un contrôleur stabilisant par retour d'état associé à une région de stabilité pour les systèmes bilinéaires. Les résultats principaux sont donnés comme des conditions constructives en termes de LMIs en exploitant certaines propriétés des polytopes et des fonctions de Lyapunov quadratiques.

De nombreuses questions restent cependant ouvertes. Nous pouvons par exemple qu'il serait intéressant d'étudier par la suite : 1) utiliser des fonctions de Lyapunov avec des structures particulières, telles que celles utilisant les  $k$ -dérivées successives de l'état, afin de réduire le conservatisme; 2) s'intéresser à différentes structures pour la loi de commande, en particulier, dans le cas où la matrice  $B$  est nulle.





# Conclusions et perspectives

Cette thèse présente des contributions à la solution des problèmes de l'analyse de stabilité et de la synthèse de contrôleurs par retour d'état pour des systèmes dynamiques qui sont non-linéaires en termes de l'état et/ou de la commande. Plus particulièrement, on vise à déterminer une région de comportement non-linéaire en boucle fermée dans laquelle la stabilité asymptotique de l'origine est garantie.

Pour le problème de commande de systèmes à commutation en temps continu soumis à des fonctions arbitraires et avec saturation sur les actionneurs, ont été fournies des conditions suffisantes sous la forme de LMIs pour la détermination de gains commutés qui stabilisent le système et d'une estimation de la région de stabilité. Les conditions proposées comprennent une spécification de placement de pôles pour les sous-systèmes linéaires du système à commutation, en imposant des bornes à la réponse transitoire du système lorsque celui-ci opère dans la région linéaire. Considérant que le placement des pôles dans une région spécifique du plan complexe représente une spécification autour de l'origine, le compromis entre l'exigence de la performance et la taille de l'estimation de la région de stabilité a été étudié. Les conditions proposées ont également été appliquées à des problèmes de commande robuste et de faute des actionneurs.

En ce qui concerne les systèmes non-linéaire incertains soumis à des non-linéarités de secteur la principale contribution a été la construction de conditions convexes de dimension finie dont la solution permet de construire des fonctions de Lur'e avec dépendance polynomiale homogène en les paramètres, qui sont moins conservatives que les fonctions de Lur'e qui ne prennent pas en compte les incertitudes. Étant donné un degré pour le fonction Lur'e candidate, une extension du Théorème de Pólya a été utilisée pour fournir des relaxations LMIs progressivement moins conservatives qui garantissent la stabilité robuste absolue du système. Pour la synthèse de contrôleurs une condition convexe pour la détermination d'un gain stabilisant robuste par retour d'état linéaire et non-linéaire a été proposée.

Pour les systèmes bilinéaires instables, nous avons proposé une procédure pour déterminer un gain stabilisant par retour d'état et une estimation de la région de stabilité asymptotique. Le terme bilinéaire a été modélisée via une enveloppe convexe d'un ensemble de vecteurs linéaires en utilisant les inclusions différentielles linéaires. La procédure proposée a été décrite comme deux problèmes d'optimisation convexe soumis à des contraintes LMIS. Pour le cas des systèmes

bilinéaires continus dans le temps les conditions obtenues sont basées sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique. Des conditions pour traiter des spécifications de performance pour le système en boucle fermée, dans un contexte de commande robuste et linéaire dépendant de paramètres, ont été également présentées. Dans le cas discret incertain variant dans le temps ont été proposées des conditions basées sur des fonctions de Lyapunov affines et avec variables supplémentaires pour traiter le problème de la synthèse par retour d'état et pour estimer la région d'attraction.

## Perspectives

La recherche réalisée dans ce travail indique quelques sujets d'intérêt qui peuvent être exploités et donner lieu à de nouvelles recherches. Nous énumérons quelques-uns de ces sujets :

- extension des résultats de la thèse en considérant des contraintes de structure sur le contrôleur, comme par exemple, des structures de type retour de sortie et contrôleurs dynamiques.
- l'utilisation des fonctions de Lyapunov  $v(x(t)) = x(t)P(\alpha(t))x(t)$ , où les matrices  $P(\alpha(t))$  ont une dépendance polynomiale en les paramètres pour réduire le conservatisme des conditions d'analyse et de synthèse présentées pour les systèmes bilinéaires continus variants dans les temps avec des paramètres appartenant à un polytope sujets à des taux de variation bornés. Comme cela a été montré dans le Chapitre 3, l'usage de fonctions polynomiales homogènes, dans le cas de systèmes non-linéaires incertains invariants dans le temps, montrent que le conservatisme des résultats diminue à mesure qu'on augmente le degré de la fonction de Lyapunov.
- la recherche de différentes structures pour la loi de commande, en particulier dans le cas où il n'y a pas de matrice d'entrée dans la partie linéaire du modèle considéré dans le Chapitre 4.

## Publications

S. Tarbouriech, I. Queinnec, T. R. Calliero e P. L. D. Peres. Control design for bilinear systems with a guaranteed region of stability: an LMI-based approach, In *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Thessaloniki, Greece, Juin 2009.

V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, T. R. Calliero, R. A. Borges, P. L. D. Peres, C. Prieur. Robust absolute stability and nonlinear state feedback stabilization based on polynomial Lur'e functions. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications*, volume 70, pp. 1803-1812, 2009.

---

V. F. Montagner, T. R. Calliero, P. L. D. Peres, I. Queinnec e S. Tarbouriech. Controle de sistemas chaveados com saturação de atuadores por meio de desigualdades matriciais lineares. In *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática*, Salvador, BA, Outubro 2006.



# Bibliografia/Bibliographie

- [AA98] P. Apkarian and R. J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1):21–32, 1998.
- [AAA<sup>+</sup>07] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino, and A. Merola. State feedback control of nonlinear quadratic systems. In *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1699–1703, New Orleans, LA, USA, December 2007.
- [ACM07a] F. Amato, C. Cosentino, and A. Merola. On the region of attraction of nonlinear quadratic systems. *Automatica*, 43(12):2119–2123, December 2007.
- [ACM07b] F. Amato, C. Cosentino, and A. Merola. Stabilization of bilinear systems via linear state feedback control. In *Proceedings of the 15th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED2007)*, Athens, Greece, 2007.
- [AK01] M. Arcaç and P. Kokotovic. Feasibility conditions for circle criterion designs. *Systems & Control Letters*, 42(5):405–412, April 2001.
- [ALK03] M. Arcaç, M. Larsen, and P. Kokotovic. Circle and Popov criteria as tools for nonlinear feedback design. *Automatica*, 39(4):643–650, April 2003.
- [Bar85] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4):399–408, August 1985.
- [Bar94] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, USA, 1994.
- [BB91] S. P. Boyd and C. H. Barratt. *Linear Control Design: Limits of Performance*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.
- [BCK03] M. Bacic, M. Cannon, and B. Kouvaritakis. Constrained control of SISO bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(8):1443–1447, August 2003.

- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [Bli04] P.-A. Bliman. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems & Control Letters*, 51(3-4):165–169, March 2004.
- [BM08] F. Blanchini and S. Miani. *Set-Theoretic Methods in Control*. Birkhäuser, Boston, 2008.
- [BOMP06] P.-A. Bliman, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1486–1491, San Diego, CA, USA, December 2006.
- [BP94] G. Becker and A. Packard. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems & Control Letters*, 23(3):205–215, September 1994.
- [BPG89] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1):65–72, July 1989.
- [CGTV05] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3):365–370, March 2005.
- [Che98] M. S. Chen. Exponential stabilization of constrained bilinear systems. *Automatica*, 34(8):989–992, August 1998.
- [CHW88] H.-D. Chiang, M. W. Hirsch, and F. F. Wu. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(1):16–27, January 1988.
- [CT89] H.-D. Chiang and J. S. Thorp. Stability regions of nonlinear dynamical systems: a constructive methodology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(12):1229–1241, December 1989.
- [CT00] M. S. Chen and S. T. Tsao. Exponential stabilization of a class of unstable bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5):989–992, May 2000.
- [CTQ08] E.B. Castelan, S. Tarbouriech, and I. Queinnec. Control design for a class of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 44(08):2034–2039, August 2008.

- [CYM91] L. K. Chen, X. Yang, and R. R. Mohler. Stability analysis of bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11):1310–1315, November 1991.
- [DB01] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5):355–359, August 2001.
- [DBPL00] R. A. DeCarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1069–1082, July 2000.
- [DN80] I. Derese and E. Noldus. Design of linear feedback laws for bilinear systems. *International Journal of Control*, 31(2):219–237, 1980.
- [dOBG99] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, July 1999.
- [dOGH02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and L. Hsu. A new absolute stability test for systems with state-dependent perturbations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(14):1209–1226, December 2002.
- [dOS01] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 241–257. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [FAG96] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):1041–1046, July 1996.
- [Fra75] M. Frayman. On the relationship between bilinear and quadratic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(4):567–568, August 1975.
- [GAC96] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442, March 1996.
- [GdOH98] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3):69–80, December 1998.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.



- [GPB91] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(2):381–402, March 1991.
- [GT88] R. Genesio and A. Tesi. The output stabilization of SISO bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(10):950–952, October 1988.
- [GT01] J. M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls: An LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(1):119–125, January 2001.
- [GT05] J. M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: An LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):106–111, January 2005.
- [GT06] J. M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Antiwindup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 55(03):184–192, March 2006.
- [Gut81] P. O. Gutman. Stabilizing controllers for bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):917–922, April 1981.
- [HAPL04] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, and J. B. Lasserre. On parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of linear systems. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 887–892, Paradise Island, Bahamas, December 2004.
- [HL01] T. Hu and Z. Lin. *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Birkhäuser, Boston, MA, 2001.
- [HLC02] H. Hu, Z. Lin, and B. M. Chen. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, 38(2):351–359, February 2002.
- [HLP52] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2 edition, 1952.
- [HTZ06] T. Hu, A. R. Teel, and L. Zaccarian. Stability and performance for saturated systems via quadratic and nonquadratic lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(11):1770–1786, November 2006.
- [Joh03] M. Johansson. *Piecewise Linear Control Systems — A Computational Approach*, volume 284 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2003.

- [KG02] V. Kapila and K. M. Grigoriadis, editors. *Actuator Saturation Control*. Control Engineering Series. Marcel Dekker, Inc., New York, NY, 2002.
- [Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition, 2002.
- [KN83] D. E. Koditschek and K. S. Narendra. Stabilizability of second-order bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(10):987–989, October 1983.
- [KSV91] J. G. Kassakian, M. F. Schlecht, and G. C. Verghese. *Principles of Power Electronics*. Addison-Wesley, Boston, MA, 1991.
- [LL03] F. Leibfritz and W. Lipinski. Description of the benchmark examples in Compleib 1.0. Technical report, University of Trier, 2003. <http://www.complib.de/>.
- [LM99] D. Liberzon and A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5):59–70, October 1999.
- [LN89] R. Luesink and H. Nijmeijer. On the stabilization of bilinear systems via constant feedback. *Linear Algebra and Its Applications*, 122–124:457–474, September–November 1989.
- [Löf04] J. Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pages 284–289, Taipei, Taiwan, September 2004. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- [Lon80] R. Longchamp. Controller design for bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):547–548, June 1980.
- [LSL<sup>+</sup>03] D. J. Leith, R. N. Shorten, W. E. Leithead, O. Mason, and P. Curran. Issues in the design of switched linear control systems: a benchmark study. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 17(2):103–118, March 2003.
- [MCP<sup>+</sup>06] V. F. Montagner, T. R. Calliero, P. L. D. Peres, I. Queinnec, and S. Tarbouriech. Controle de sistemas chaveados com saturação de atuadores por meio de desigualdades matriciais lineares. In *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática*, Salvador, BA, Outubro 2006.
- [MK80] R. R. Mohler and W. J. Kolodziej. An overview of bilinear system theory and applications. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 10(10):683–688, October 1980.

- [MOC<sup>+</sup>09] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, T. R. Calliero, R. A. Borges, P. L. D. Peres, and C. Prieur. Robust absolute stability and nonlinear state feedback stabilization based on polynomial Lur'e functions. *Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications*, 70(5):1803–181, March 2009.
- [Moh91] R. R. Mohler. *Nonlinear Systems: V.2 Application to Bilinear Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [MOP<sup>+</sup>07] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, S. Tarbouriech, and I. Queinnec. Gain-scheduled controllers for linear parameter-varying systems with saturating actuators: LMI-based design. In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, pages 6067–6072, New York, NY, USA, July 2007.
- [MTG02] V. Mahout, S. Tarbouriech, and G. Garcia. Controller design for unstable uncertain bilinear systems. In *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED2002)*, Lisbon, Portugal, July 2002. CD-rom.
- [NN94] Y. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [OP05] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, 405:209–228, August 2005.
- [OP06] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 55(1):52–61, January 2006.
- [OP07] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(7):1334–1340, July 2007.
- [PABB00] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust  $\mathcal{D}$ -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30, May 2000.
- [Per69] S. K. Persidskii. Problem of absolute stability. *Automation and Remote Control*, 12:1889–1895, 1969.
- [Pop61] V.-M. Popov. On the absolute stability of nonlinear controlled systems. *Avtomatika i telemekhanika*, 8:961–970, 1961.

- [RB83] E. P. Ryan and N. J. Buckingham. On asymptotically stabilizing feedback control of bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(8):863–864, August 1983.
- [RJ00] A. Rantzer and M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4):629–637, April 2000.
- [RP02] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678, April 2002.
- [RS00] W. J. Rugh and J. S. Shamma. Research on gain scheduling. *Automatica*, 36(10):1401–1425, October 2000.
- [Sch03] C. W. Scherer. Higher-order relaxations for robust LMI problems with verifications for exactness. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4652–4657, Maui, HI, USA, December 2003.
- [Sch05] C. W. Scherer. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(2):365–395, 2005.
- [SH06] C. W. Scherer and C. W. J. Hol. Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs. *Mathematical Programming: Series B*, 107(1–2):189–211, June 2006.
- [Stu99] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12:625–653, 1999. <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- [SU03] S. Sasaki and K. Uchida. Quadratic cost output feedback control for bilinear systems. *International Journal of Systems Science*, 34(5):345–355, April 2003.
- [SY96] Y. Stepanenko and X. Yang. Stabilizing controllers for discrete bilinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 06(08):855–867, June 1996.
- [TGG02] S. Tarbouriech, G. Garcia, and J. M. Gomes da Silva Jr. Robust stability of uncertain polytopic linear time-delay systems with saturating inputs: an LMI approach. *Computers & Electrical Engineering*, 28(3):157–169, May 2002.
- [TGG07] S. Tarbouriech, G. Garcia, and A. H. Glattfelder, editors. *Advanced Strategies in Control Systems with Input and Output Constraints*, volume 346 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2007.

- [TH00] B. Tibken and O. Hachicho. Estimation of the domain of attraction for polynomial systems using multidimensional grid. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3870–3874, Sydney, Australia, December 2000.
- [Tib00] B. Tibken. Estimation of the domain of attraction for polynomial systems via LMI's. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3860–3865, Sydney, Australia, December 2000.
- [TPG06] S. Tarbouriech, C. Prieur, and J. M. Gomes da Silva Jr. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8):1364–1371, August 2006.
- [TQCP09] S. Tarbouriech, I. Queinnec, T. R. Calliero, and P. L. D. Peres. Control design for bilinear systems with a guaranteed region of stability: an lmi-based approach. In *Proc. 17th Medit. Conf. Contr. Aut. (MED2009)*, pages 809–814, Thessaloniki, Greece, 2009.
- [TVG96] A. Tesi, F. Villoresi, and R. Genesio. On the stability domain estimation via a quadratic Lyapunov function: convexity and optimality properties for polynomial systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(11):1650–1657, November 1996.
- [VTG09] G. Valmorbida, S. Tarbouriech, and G. Garcia. State feedback design for input-saturating nonlinear quadratic systems. In *Proceedings of the 2009 American Control Conference*, St. Louis, USA, 2009.
- [Wil71] J. C. Willems. Least squares stationary optimal control and algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16(6):621–634, December 1971.
- [YCB89] X. Yang, L. Chen, and R. Burton. Stability of discrete bilinear systems with output feedback. *International Journal of Control*, 50(05):2085–2092, May 1989.