



**HAL**  
open science

# Géométrie des surfaces munies de métriques plates à singularités coniques: paramètres, fonctions longueur et espaces des déformations

Ousama Malouf

► **To cite this version:**

Ousama Malouf. Géométrie des surfaces munies de métriques plates à singularités coniques: paramètres, fonctions longueur et espaces des déformations. Mathématiques [math]. Université de Strasbourg, 2011. Français. NNT: . tel-00622883v1

**HAL Id: tel-00622883**

**<https://theses.hal.science/tel-00622883v1>**

Submitted on 13 Sep 2011 (v1), last revised 25 Sep 2011 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de docteur de  
l'Université de Strasbourg  
Spécialité MATHÉMATIQUES

---

## Géométrie des surfaces munies de métriques plates à singularités coniques : paramètres, fonctions longueur et espaces des déformations

---

*Auteur :*  
Ousama Malouf

*Directeur de thèse :*  
Athanasé Papadopoulos

Soutenue le 23 septembre 2011  
devant le jury composé de:

Athanasé Papadopoulos  
Robert Lutz  
Fabrizio Broglia  
Charalampos Charitos  
Norbert A'Campo  
Robert Penner

Directeur de thèse  
Président du jury  
Rapporteur  
Rapporteur  
Membre  
Membre



# Table des matières

<i>Remerciements</i>	v
<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>1 Surfaces plates à singularités coniques</b>	<b>1</b>
1.1 Secteur euclidien et Cône euclidien . . . . .	2
1.1.1 Existence et unicité des géodésiques . . . . .	4
1.2 Surfaces plates à singularités coniques . . . . .	9
1.2.1 Existence et unicité des géodésiques . . . . .	10
1.3 La convexité dans un plan plat à singularités coniques . . . . .	15
1.4 Exemples de surfaces plates à singularités coniques . . . . .	17
<b>2 Paramétrisation de l'espace des déformations</b>	<b>23</b>
2.1 Espace des déformations . . . . .	24
2.1.1 Marquage . . . . .	24
2.1.2 Espace de Teichmüller . . . . .	25
2.1.3 Marquage par déformation . . . . .	25
2.1.4 Marquage combinatoire . . . . .	25
2.1.5 Marquage combiné et l'espace des déformations . . . . .	26
2.2 La paramétrisation de l'espace des déformations . . . . .	28
2.2.1 La triangulation et la paramétrisation des polygones . . . . .	28
2.2.2 La triangulation et la paramétrisation des s.p.s.c. . . . .	30
2.2.3 Le comptage des paramètres . . . . .	31
<b>3 Paramétrisation du pantalon plat à singularité conique</b>	<b>35</b>
3.1 Les paramètres du pantalon plat à singularité conique . . . . .	37
3.2 L'espace des déformations du pantalon plat . . . . .	39
3.3 Paramétrisation par les classes d'arcs . . . . .	41
3.4 Les géodésiques simples fermées sur une sphère plate singulière à trous	49

<b>4</b>	<b>Flot de Frenchel-Nielsen sur les espaces des déformations</b>	<b>53</b>
4.1	Le marquage et le flot de Frenchel-Nielsen . . . . .	54
4.2	L’injectivité du flot de Frenchel-Nielsen . . . . .	57
<b>A</b>	<b>Paramètres</b>	<b>75</b>
A.1	Paramètres du triangle euclidien . . . . .	77
A.2	Paramètres du quadrilatère . . . . .	79
A.3	Paramètres du triangle avec un point singulier à l’intérieur . .	84
<b>B</b>	<b>Polygone conique, un outil de réflexion</b>	<b>87</b>
B.1	Surfaces fabriquées de polygones coniques . . . . .	89
B.1.1	Polygone conique et origami . . . . .	91
B.2	Classification des diagonales . . . . .	93
B.3	Les géodésiques dans un polygone rectangle . . . . .	96
<b>C</b>	<b>Trigonométrie au voisinage d’un point singulier conique</b>	<b>103</b>
C.1	La vision à partir d’un point . . . . .	104
C.2	Classification des triangles singuliers . . . . .	105
C.3	Théorème de Pythagore pour un triangle singulier . . . . .	108
C.4	Théorème d’Al-Kashi pour un triangle singulier . . . . .	112
C.4.1	Un triangle singulier avec la singularité sur un côté . .	112
C.4.2	Un triangle singulier avec la singularité à l’intérieur . .	115
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>

## *Remerciements*

*Peu de temps avant la soutenance de ma thèse, ce moment qui marquera l'un des plus grand chapitre de ma vie, je pense à tous ceux qui ont été à mes côtés, à tous ceux qui se sont donnés du mal de près ou de loin pour que je réussisse, à tous ceux qui m'ont nourri d'espoir d'amour et d'amitié. Tous ces gens si nombreux sont ancrés dans ma mémoire et je leur suis reconnaissant à jamais.*

*Mes remerciements vont tout particulièrement :*

*A Athanase Papadopoulos, mon directeur de thèse, qui a mis sa confiance en moi, et avec qui nous avons travaillé dans un souci de professionnalisme et d'humanité en gardant à l'esprit la recherche de la vérité mathématique. J'ai appris avec lui de ne pas me satisfaire d'avoir commencé un travail, mais de l'avoir terminé. Son expérience, sa disponibilité et son soutien permanents ont été des facteurs essentiels de ma réussite.*

*Aux membres du jury, d'avoir accepté d'évaluer mes travaux de recherche. Je suis tout particulièrement reconnaissant à Fabrizio Broglia et Charalampos Charitos d'avoir accepté d'être rapporteurs pour les travaux réalisés au cours de ma thèse, ainsi qu'à Robert Lutz de m'avoir honoré en acceptant de présider mon jury de thèse. Je remercie également Norbert A'Campo et Bob Penner d'avoir accepté de faire partie du jury.*

*A Ma famille, qui a supporté que je sois éloigné d'elle durant toutes ces années, une pensée particulière pour ma mère, mon père et mon frère Anas.*

*A Jeanne Siffert, ma marraine strasbourgeoise, qui a été tant dévouée durant les années que j'ai passées à Strasbourg et qui m'a entouré de sa bienveillance.*

*A Robert Lutz, qui depuis notre première rencontre n'a pas cessé de m'encourager avec un ton amical transgénérationnel. Il a également consacré beaucoup du temps à lire soigneusement mon travail dès ses premières versions.*

*A Charalampos Charitos, pour tout ce que nous avons échangé. Par sa lecture critique de ma thèse, il a rendu mon travail meilleur.*

*A Feng Luo, Robert Penner, Guillaume Théret, Marc Troyanov, Vladimir Fock, Norbet A'Campo et Gabriela Weitze-Schmithüsen qui m'ont fait bénéficier de leurs connaissances.*

*A Francesco Costantino, pour l'atmosphère décontractée et amicale dont j'ai bénéficié en travaillant avec lui.*

*A Mohammad El-Scheikh, professeur d'université à l'université de Damas, pour tout le soutien qu'il m'a apporté de loin durant quelques années.*

*A Florian Hechner, Amal Najjar, Humam Al Barazy, Dalal Radwan, Audrey Finkler, Séba Asselot et Houssam Hnaidi mes amis, qui n'ont jamais hésité à me tendre la main quand j'en avais besoin.*

*Enfin à tout le personnel de l'IRMA et de l'UFR Math-Info qui a été si agréable avec moi.*

# Introduction

Couper un secteur angulaire en papier et coller ses côtés pour en faire un cône, ou coller les côtés opposés d'un carré en papier pour en faire un tore plat sont des exercices très simples pour montrer ce qu'est une structure plate (à singularités coniques) sur une surface.

Une structure plate à singularités coniques sur une surface peut être perçue de manière intuitive en imaginant des polygones en papier dont on colle les côtés pour fabriquer une surface. Des exemples simples, comme les polyèdres réguliers, sont connus depuis les premiers pas de la géométrie et les pyramides en Égypte en témoignent. La connaissance du plan euclidien et du cône euclidien est suffisante pour avoir une idée de ces structures et pour donner des exemples.

L'étude de ces structures sur les surfaces topologiques est assez récente, ne datant que du siècle dernier. Pour des notions de bases vous pouvez consulter le livre de Hopf [12] et le livre d'Aleksandrov et Zalgaller [2], ainsi que les travaux d'Aleksandrov. Ces structures ont été étudiées de manières différentes qui dépendent de la définition considérée. Certains chercheurs les définissent de manière analytique, comme les structures définies par des différentielles quadratiques ou deux feuilletages mesurés transverses. Par exemple, vous pouvez regarder les travaux de H. Masur, K. Strebel, A. Eskin et A. Zorich. D'autres chercheurs ont étudié ces structures dans le cadre de l'étude de flots de billard dans un polygone. Par exemple, les travaux de S. Tabachnikov et son livre [25]. D'autres les ont définies à partir d'un polygone dans le plan euclidien ayant les côtés deux à deux parallèles et de même longueur. La surface est obtenue en identifiant les côtés du polygone par translation. Un cas spécial et qui a beaucoup d'intérêt est le cas des origamis. Ces surfaces sont obtenues en recollant des carrés de côté unité d'une certaine manière. Pour savoir plus sur les origamis on peut lire la thèse de G. Schmithüsen [23] et l'article de F. Herrlich [11].

La plupart des recherches menées sur ces structures portent sur des cas spéciaux. Le cas général n'est pas encore suffisamment étudié et reste riche en questions ouvertes. Une *structure plate à singularités coniques* (en général)



est définie par des cartes d'isométries locales avec des ouverts dans  $\mathbb{R}^2$  dans le complémentaire d'un nombre fini de points. Les applications de changement de cartes doivent conserver la métrique. Les points exclus peuvent être à l'intérieur ou sur le bord. Un point qui a un voisinage isométrique à un voisinage du sommet d'un cône euclidien, avec le sommet du cône comme image de ce point, s'appelle *point singulier conique*. L'angle total en ce point est différent de  $2\pi$  et peut prendre n'importe quelle valeur dans  $]0, +\infty[$ . Un point sur le bord qui a un voisinage isométrique à un voisinage du sommet d'un secteur euclidien, avec le sommet du secteur comme image de ce point, s'appelle *point singulier*. L'angle total en ce point est différent de  $\pi$  et peut prendre n'importe quelle valeur dans  $]0, +\infty[$ . La surface munie d'une structure plates à singularités coniques est appelée *surface plate à singularités coniques*, en abrégé s.p.s.c.

L'*espace des déformations* est l'espace de toutes les structures plates à singularités coniques à isotopie près sur une surface donnée. L'étude des espaces des déformations de ces structures est l'une des questions les plus intéressantes. On n'a pas encore une description complète de ces espaces. Le travail présenté dans cette thèse traite cette question parmi d'autres. On a obtenu quelques résultats qui répondent partiellement à la description des espaces des déformations.

On aborde maintenant le contenu de cette thèse.

Dans le chapitre 1, on présente les définitions de bases et quelques résultats bien connus. On définit les surfaces plates à singularités coniques. Dans cette définition on a (topologiquement) une surface connexe compacte orientable munie d'une métrique plate pouvant avoir des points singuliers coniques, sans restriction sur les valeurs des angles totaux en ces points. On insiste sur la formule de Gauss-Bonnet,

$$K = 2\pi\chi,$$

compte-tenu de son importance. Cette formule relie la courbure totale  $K$  de la s.p.s.c. avec sa caractéristique d'Euler  $\chi$ . On traite aussi des géodésiques sur les s.p.s.c., de leur existence et de leur unicité. On parle brièvement de la convexité dans un plan plat à singularités coniques. Le chapitre termine par quelques exemples démonstratifs des différentes façons de définir une structure plate à singularités coniques.

Dans le chapitre 2, on définit l'espace des déformations et étudie la paramétrisation de cet espace. Pour définir l'espace des déformations, on définit un marquage spécial appelé *marquage combiné*. Ce marquage laisse invariant un nombre fini de points appelés *points marqués* et qui correspondent aux points singuliers sur la s.p.s.c.. Ensuite, on aborde la paramétrisation des

polygones à singularités coniques en utilisant quelques résultats sur la triangulation des polygones euclidiens par des diagonales. À partir de ces cas simples on avance vers un décompte des paramètres d'une s.p.s.c.. On dit qu'une s.p.s.c. est *paramétrable* si les paramètres donnés la détermine de manière unique. On a les résultats suivants :

**Théorème 0.0.1.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. de genre  $g$  à bord avec  $b$  composantes du bord. Supposons que chaque composante du bord a des points singuliers. Soient  $n_1$  le nombre de points singuliers à l'intérieur de  $S$  et  $n_2$  le nombre de points singuliers sur le bord. Alors,  $S$  est paramétrable par*

$$p = 6g + 3b + 3n_1 + 2n_2 - 6$$

*longueurs de segments géodésiques joignant des points singuliers qui ne passent par aucun point singulier.*

**Théorème 0.0.2.** *Une s.p.s.c. de genre  $g$  à bord avec  $b$  composantes du bord et  $n$  points singuliers à l'intérieur est paramétrable par*

$$p = 6g + 3b + 3n - 6$$

*paramètres, dont  $p - b$  longueurs de segments géodésiques joignant des points singuliers qui ne passent par aucun point singulier et  $b$  segments géodésiques qui joignent des points singuliers aux composantes du bord.*

La triangulation des s.p.s.c. par des segments géodésiques joignant des points singuliers coniques et qui ne passent par aucun point singulier a été utilisée par Thurston pour prouver son théorème [26, Theorem 0.2] sur la classification des métriques p.s.c. sur la sphère.

Le chapitre 3 est consacré à décrire l'espace des déformations du pantalon plat à une singularité conique. Pour ce cas fondamental on a trouvé trois ensembles de paramètres de l'espace des déformations. Chaque ensemble a quelques avantages sur les deux autres. Les paramètres sont des longueurs de certains segments géodésiques joignant le point singulier à lui-même ou les composantes du bord ou une composante du bord et le point singulier. À l'origine de l'idée d'étudier ce cas est l'article de Charitos et Papadoperakis [6], qui ont étudié le cas du pantalon hyperbolique à point singulier conique, ainsi que d'autres cas plus avancés. Dans [7], les auteurs traitent la question de paramétrisation d'un cas spécial des s.p.s.c. utilisant des longueurs de courbes comme c'est le cas ici. Certains de leurs résultats rejoignent nos résultats du chapitre 4 même si leurs techniques sont différentes.

Soit  $M$  une surface plate avec une singularité conique  $s$ , homéomorphe au disque avec deux trous. On appelle cette surface un *pantalon plat à singularité*

*conique* (ou tout simplement *pantalon plat*). Soient  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  les composantes du bord de  $M$ , qui sont géodésiques d'après l'unicité de la singularité et la formule de Gauss-Bonnet. Soient  $l_i$  les longueurs des  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  respectivement. Soient  $d_i$  des géodésiques qui réalisent les distances  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  entre la singularité  $s$  et les composantes du bord  $c_i$ . Soient  $k_i$  des géodésiques qui réalisent les distances  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  entre les composantes du bord<sup>1</sup>  $c_{i+1}$  et  $c_{i+2}$ , figure 1.

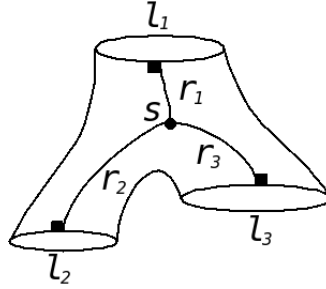


FIGURE 1 – Le pantalon avec certaines longueurs qui peuvent servir comme paramètres.

Dans [17], on a démontré que le pantalon plat admet un découpage en trois rectangles et un triangle, figure 2. Soit  $\partial M = c_1 \cup c_2 \cup c_3$  le bord de  $M$

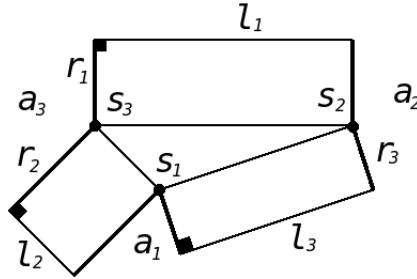


FIGURE 2 – Le pantalon découpé avec des longueurs qui peuvent servir comme paramètres.

et  $d(.,.)$  la fonction distance sur  $M \times M$ . On a donc  $r_i = d(s, c_i)$  et  $d_i \perp c_i$ . On a démontré aussi que les longueurs  $l_i, r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , qui sont soumises à certaines conditions, peuvent servir comme paramètres, ou alternativement les longueurs  $l_i, a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , soumises à certaines conditions. Les deux ensembles de paramètres sont liés par les relations :

$$r_i + r_{i+1} = a_{i+2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

1. Pour alléger les notations des indices, on convient que  $i + j = ((i + j - 1) \bmod 3) + 1$ .

On a les résultats suivants :

**Proposition 0.0.3.** *Soit  $M$  un pantalon plat à une singularité conique  $s$ . Soient  $l_i, i = 1, 2, 3$  les longueurs des composantes du bord  $c_i$ , et  $r_i$  les longueurs des segments géodésiques entre  $s$  et les  $c_i$ . Les longueurs  $l_i$  et  $r_i$  sous les conditions suivantes :*

- 1)  $0 < l_i < \infty, i = 1, 2, 3,$
- 2)  $l_i \leq l_{i+1} + l_{i+2}, i = 1, 2, 3,$
- 3)  $0 \leq r_i < \infty, i = 1, 2, 3,$
- 4)  $0 < r_i + r_{i+1}, i = 1, 2, 3,$
- 5) *Si pour un certain  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $l_i = l_{i+1} + l_{i+2}$  alors  $0 < r_i < \infty,$*   
*sont des paramètres qui déterminent  $M$  de manière unique à isométrie près.*

On introduit de nouveaux paramètres qui peuvent être plus convenables, car ils sont soumis à des conditions plus cohérentes qui permettent de faire le rapprochement avec l'espace des déformations de l'ensemble de deux triangles euclidiens, et ils ne requièrent pas la connaissance de la position du point singulier. Soit  $k_i$  le segment géodésique qui réalise la distance entre  $c_{i+1}$  et  $c_{i+2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , figure 3.

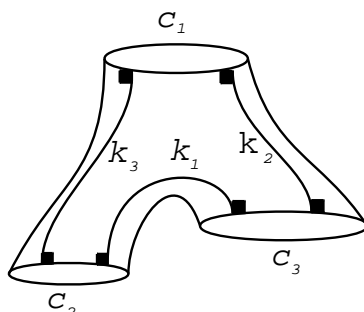


FIGURE 3 – Le segment géodésique  $k_i$  réalisant la distance  $a_i$  entre  $c_{i+1}$  et  $c_{i+2}$ .

**Proposition 0.0.4.** *Soit  $M$  un pantalon plat à une singularité conique  $s$ . Soient  $l_i, i = 1, 2, 3$  les longueurs des composantes du bord  $c_i$ , et  $a_i$  les longueurs des segments géodésiques joignant les  $c_i$ . Les longueurs  $l_i, a_i, i = 1, 2, 3$  sous les conditions suivantes :*

- 1)  $0 < l_i < \infty, i = 1, 2, 3,$
- 2)  $l_i \leq l_{i+1} + l_{i+2}, i = 1, 2, 3,$

- 3)  $0 < a_i < \infty, i = 1, 2, 3,$   
 4)  $a_i \leq a_{i+1} + a_{i+2}, i = 1, 2, 3,$   
 5) *Si pour un certain  $i \in \{1, 2, 3\}, l_i = l_{i+1} + l_{i+2}$  alors*  
 $a_i < a_{i+1} + a_{i+2},$

*sont des paramètres qui déterminent  $M$  de manière unique à isométrie près.*

Notons par  $\mathcal{C}$  l'ensemble de toutes les structures plates définies par les paramètres  $l_i, a_i, i = 1, 2, 3$  sous les conditions précédentes, et par  $\mathcal{B}$  l'ensemble de tous les 6-uplets  $(l_1, l_2, l_3, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^6$  qui satisfont ces conditions. On peut définir une application bijective  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  telle qu'à une structure plate  $\mathfrak{f} \in \mathcal{C}$  correspond l'unique 6-uplet  $(l_1, l_2, l_3, a_1, a_2, a_3)$  de  $\mathcal{B}$  qui détermine  $\mathfrak{f}$ . Clairement, on a  $\Phi(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ .

Notons par  $\mathcal{F}(M)$  l'espace de toutes les structures plates avec un seul point singulier sur le pantalon  $M$ . Fixons une orientation sur  $M$  et soit  $\text{Homeo}^+(M, \partial)$  l'ensemble des homéomorphismes de  $M$  qui préservent l'orientation et chaque composante du bord de  $M$  (en tant qu'ensemble). Il est bien connu que chaque élément de  $\text{Homeo}^+(M, \partial)$  est isotope à l'identité (voir exposé 2 dans [1]). L'espace  $\text{Homeo}^+(M, \partial)$  agit sur  $\mathcal{F}(M)$  comme suit : Si  $h \in \text{Homeo}^+(M, \partial)$  et  $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}(M)$  est considérée comme une fonction distance, alors  $(h, \mathfrak{f}) \mapsto h*\mathfrak{f}$  où  $h*\mathfrak{f}(x, y) := \mathfrak{f}(h(x), h(y))$ . On définit l'espace des déformations  $\mathcal{T}(M)$  de  $M$  comme étant le quotient  $\mathcal{F}(M)/\text{Homeo}^+(M, \partial)$ .

On considère une topologie sur les sous-espaces de  $\mathcal{T}(M)$  des structures à singularités fixés. Pour un tel sous-espace, sur le complémentaire des points singuliers on a une structure plate au sens usuel (une métrique riemannienne de courbure nulle partout), et la structure est définie par un atlas à valeurs dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  avec changements de cartes isométriques (c'est une structure géométrique), et on prend la topologie usuelle sur l'espace de ces structures.

**Proposition 0.0.5.** *L'application  $\Phi : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{B}$  est un homéomorphisme.*

*Remarque 0.0.1.* Soit  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(M)$  l'espace des déformations des structures plates à une singularité conique sur un pantalon définies par une paire de feuilletages mesurés transverses. Cet espace est de dimension 4. Puisque  $\mathcal{T}(M)$ , l'espace des déformations de toutes les structures plates à une singularité conique sur un pantalon est de dimension 6, comme le montre la proposition 0.0.3,  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(M) \subsetneq \mathcal{T}(M)$ . Par conséquent, l'espace des structures plates que l'on étudie ici est bien plus grand que l'espace des structures plates induites par les différentielles quadratiques holomorphes avec un zéro.

Pour l'espace des déformations on a la description suivante :

**Corollaire 0.0.6.** *L'espace des déformations  $\mathcal{T}(M)$  du pantalon plat à une singularité conique est homéomorphe à une sous-variété non-compacte de  $\mathbb{R}^6$  de dimension 6. Cet espace a une structure cellulaire constituée d'une cellule de dimension 6 et six cellules de co-dimension un sur le bord.*

Sur la figure 4, on illustre la structure cellulaire de l'espace des déformations et les intersections entre les composantes du bord de cet espace.

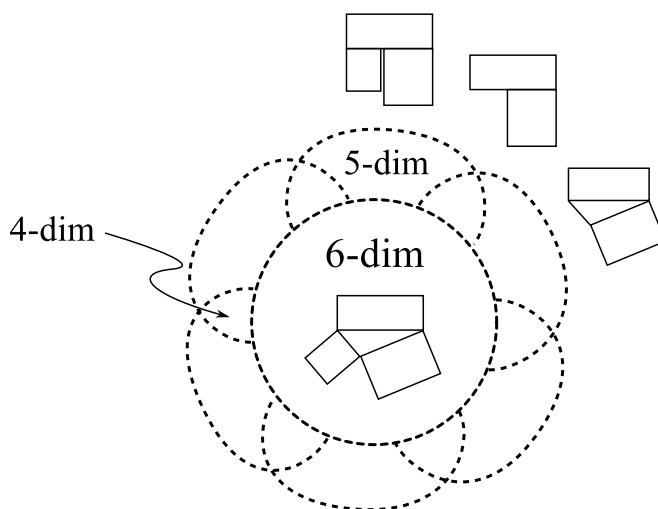


FIGURE 4 – Une section dans l'espace des déformations du pantalon plat qui est de dimension 6 et ses composantes du bord.

On a le résultat :

**Théorème 0.0.7.**  *$\mathcal{T}(M)$  est un espace contractile.*

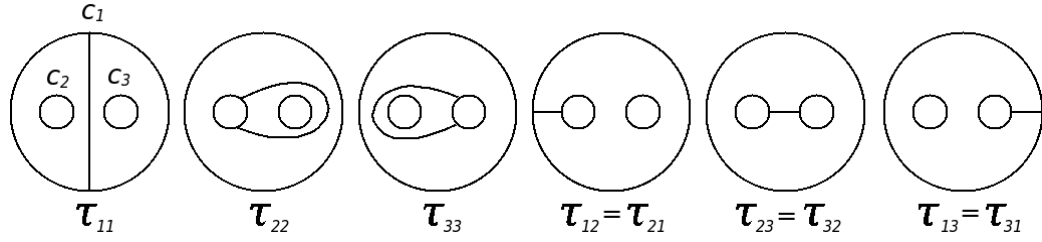
On passe à un autre ensemble de paramètres qui ne contient ni des longueurs des composantes du bord ni des longueurs des segments géodésiques entre le point singulier et les composantes du bord.

On sait que (voir [1, p. 28]) :

**Lemme 0.0.8.** *L'ensemble  $A(M)$  des classes d'isotopie d'arcs  $I \subset M$ , avec  $\partial I \subset \partial M$ , chaque extrémité pouvant bouger sur la composante connexe respective de  $\partial M$ , et représentant des éléments non-triviaux de  $\pi_1(M, \partial M)$ , possède exactement six éléments, classés par les composantes connexes de  $\partial M$  où tombent les extrémités des arcs.*

Les éléments de  $A(M)$  sont donnés sur la figure 5. Ils sont notés  $\tau_{ij}$ , où  $i, j$  sont les numéros des composantes du bord où tombent les extrémités de l'arc  $\tau_{ij}$ .

On a le résultat :

FIGURE 5 – Les six modèles de  $A(M)$ .

**Théorème 0.0.9.** *Un pantalon plat à singularité conique admet pour paramètres les longueurs des géodésiques représentant les classes d'isotopie d'arcs entre les composantes de bord.*

Après avoir détaillé sur le cas du pantalon plat à singularité conique, on continue à étudier les s.p.s.c. en général et leurs espaces des déformations.

**Proposition 0.0.10.** *Sur une s.p.s.c. à bord, ayant une singularité, de genre zéro et avec  $b > 3$  composantes du bord, toutes les géodésiques fermées essentielles passent par le point singulier.*

**Proposition 0.0.11.** *Sur une s.p.s.c. de genre zéro à bord avec quatre composantes du bord ayant deux points singuliers coniques, chacun ayant une courbure égale à  $-2\pi$ , il existe au plus une seule classe d'homotopie de courbes simples fermées essentielles telle qu'une géodésique représentant cette classe ne passe par aucun point singulier.*

Dans le chapitre 4, on définit et étudie le flot de Fenchel-Nielsen sur un espace des déformations. Ce flot provient d'un twist de Fenchel-Nielsen sur une s.p.s.c.. On utilise une définition analogue à la définition de même nom qui est classique dans le cas des structures hyperboliques. Un *twist de Fenchel-Nielsen* (ou simplement *twist*) est le fait de couper une s.p.s.c.  $S$  le long d'une géodésique simple fermée  $\gamma$ , puis de recoller les deux côtés de la surface coupée après avoir effectué une translation de l'un par rapport à l'autre. En fixant une orientation, un signe peut être accordé à cette distance et nous aurons un paramètre noté  $t$  de cette opération et qui prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Au temps  $t$  on translate d'une distance  $t$  "vers la droite" si  $t > 0$  et "vers la gauche" si  $t < 0$ . Un twist de Fenchel-Nielsen le long de  $\gamma$  et de distance  $t$  est noté  $\mathcal{E}_\gamma^t$ . Un twist de Fenchel-Nielsen définit alors un flot sur l'espace des déformations qui dépend d'un paramètre réel.

Pour mesurer l'impact d'un twist sur la structure plate de la surface, on prend un segment géodésique entre deux points singuliers (ou d'un point singulier à lui-même) ou bien une géodésique simple fermée qui est transverse

à la géodésique  $\gamma$  du twist et noté  $\eta$ . Puis, on regarde la longueur de  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  le segment géodésique image de  $\eta$  en fonction du paramètre du twist. En étudiant la variation de la fonction de longueur  $\ell(t) = \ell(\mathcal{E}_\gamma^t(\eta))$  on montre que le flot de Frenkel-Nielsen sur l'espace des déformations est injectif.

On a les résultats suivants :

**Proposition 0.0.12.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée différente du tore plat et du cylindre. Supposons qu'il existe sur  $S$  une géodésique simple fermée  $\gamma$  qui ne passe par aucun point singulier. Soit  $F$  un anneau plat de  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ . Soit  $\eta$  un segment géodésique joignant deux points marqués  $A$  et  $B$  dans  $F$ . Supposons que  $\eta$  et  $\gamma$  s'intersectent en un seul point  $C$  avec un angle  $\theta$  de  $\eta$  à  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  le segment géodésique image de  $\eta$  après le twist. Alors, la fonction longueur  $\ell(t) = \ell(\mathcal{E}_\gamma^t(\eta))$  est strictement convexe avec un seul minimum en  $t = -\ell(0) \cos \theta$ .*

**Théorème 0.0.13.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée différente du tore plat et du cylindre. Supposons qu'il existe une géodésique simple fermée  $\gamma$  sur  $S$  qui ne passe par aucun point singulier. Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ , avec  $t$  non-nul. Alors,  $S$  et  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  sont des points différents de l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$ .*

**Proposition 0.0.14.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée. Supposons qu'il existe sur  $S$  deux géodésiques simples fermées  $\gamma$  et  $\eta$  qui ne passent par aucun point singulier et qui s'intersectent en un seul point  $C$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  le segment géodésique image de  $\eta$  après le twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ . Alors, la fonction longueur  $\ell(t) = \ell(\mathcal{E}_\gamma^t(\eta))$  est strictement convexe.*

*La fonction longueur  $\ell(t)$  a une dérivée seconde strictement positive en  $t = 0$  qui dépend de l'angle d'intersection  $\theta$  de  $\eta$  à  $\gamma$ , et de la longueur  $\ell(0)$  de  $\eta$ . Elle est donnée par :*

$$\ell''(0) = \frac{\sin^2 \theta}{\ell(0)}.$$

*La dérivée première en  $t = 0$  est  $\ell'(0) = \cos \theta$ . Elle dépend de l'angle d'intersection.*

**Proposition 0.0.15.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée. Supposons qu'il existe deux géodésiques simples fermées  $\gamma$  et  $\eta$  sur  $S$  qui ne passent par aucun point singulier et qui s'intersectent en un seul point  $C$  avec un angle  $\theta$  de  $\eta$  à  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ , avec  $t$  non-nul. Si  $\ell(\gamma) < | -2\ell(\eta) \cos \theta |$ , alors les deux surfaces  $S$  et  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  sont des points différents de l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$ .*



**Théorème 0.0.16.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée. Supposons qu'il existe sur  $S$  deux géodésiques simples fermées  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , qui ne passent par aucun point singulier et qui s'intersectent en un seul point  $C$ . Supposons que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient orthogonales en  $C$ . Soit  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t(S)$ ,  $i = 1$  ou  $2$  la surface obtenue après un twist  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t$ , avec  $t$  non-nul. Alors  $S$  et  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t(S)$  sont des points différents de l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$ .*

**Proposition 0.0.17.** *Un twist de Frenkel-Nielsen le long d'une géodésique simple fermée sur un tore plat définit un flot injectif dans son espace des déformations.*

On peut généraliser la proposition 0.0.12 au cas où un segment géodésique et une géodésique simple fermée s'intersectent en un nombre fini de points.

**Proposition 0.0.18.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée différente du tore plat et du cylindre. Supposons qu'il existe sur  $S$  une géodésique simple fermée  $\gamma$  qui ne passe par aucun point singulier. Soit  $\eta$  un segment géodésique joignant deux points marqués  $A$  et  $B$ . Supposons que  $\eta$  et  $\gamma$  s'intersectent en un nombre fini  $n$  de points  $C_i$ ,  $i = 1..n$  avec des angles  $\theta_i$  de  $\eta$  à  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_{\gamma}^t(S)$  la s.p.s.c. obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_{\gamma}^t$  le long de  $\gamma$  d'une distance  $t$ . Soit  $\mathcal{E}_{\gamma}^t(\eta)$  le segment géodésique image de  $\eta$  après le twist  $\mathcal{E}_{\gamma}^t$ . Alors, la fonction longueur  $\ell(t) = \ell(\mathcal{E}_{\gamma}^t(\eta))$  est strictement convexe.*

La fonction longueur  $\ell(t)$  a une dérivée seconde strictement positive en  $t = 0$  qui dépend des  $\theta_i$ ,  $i = 1..n$  et de la longueur  $\ell(0)$  de  $\eta$ . Elle est donnée par :

$$\ell''(0) = \frac{(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i)^2}{\ell(0)}.$$

La dérivée première en  $t = 0$  est

$$\ell'(0) = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i.$$

Elle dépend des angles d'intersection.

On peut généraliser la proposition 0.0.14 au cas où deux géodésiques simples fermées s'intersectent en un nombre fini de points.

**Proposition 0.0.19.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée. Supposons qu'il existe sur  $S$  deux géodésiques simples fermées  $\gamma$  et  $\eta$  qui ne passent par aucun point singulier et qui s'intersectent en un nombre fini  $n$  de points  $C_i$ ,  $i = 1..n$ , avec des angles  $\theta_i$  de  $\eta$  à  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_{\gamma}^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue après un twist  $\mathcal{E}_{\gamma}^t$  le long de  $\gamma$  d'une distance  $t$  (à droite ou à gauche). Soit  $\mathcal{E}_{\gamma}^t(\eta)$  une géodésique simple fermée image de  $\eta$  après le twist  $\mathcal{E}_{\gamma}^t$ . Alors, la fonction longueur  $\ell(t) = \ell(\mathcal{E}_{\gamma}^t(\eta))$  est strictement convexe.*

La fonction longueur  $\ell(t)$  a une dérivée seconde strictement positive en  $t = 0$  qui dépend des  $\theta_i$ ,  $i = 1..n$  et de la longueur  $\ell(0)$  de  $\eta$ . Elle est donnée par :

$$\ell''(0) = \frac{(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i)^2}{\ell(0)}.$$

La dérivée première en  $t = 0$  est

$$\ell'(0) = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i.$$

Elle dépend des angles d'intersection.

Les formules de dérivées des fonctions longueur prouvées dans les propositions 0.0.18 et 0.0.19 sont des analogues des formules de Kerckhoff [14] pour le cas hyperbolique.

**Théorème 0.0.20.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée. Supposons qu'il existe sur  $S$  deux géodésiques simples fermées  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  qui ne passent par aucun point singulier et qui s'intersectent en un nombre fini de points. Supposons que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont orthogonales en tout point d'intersection. Soit  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t(S)$ ,  $i = 1$  ou  $2$  la s.p.s.c. marquée obtenue après un twist  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t$ , avec  $t$  non-nul. Alors  $S$  et  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t(S)$  sont des points différents de l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$ .*

On a le corollaire suivant pour les origamis.

**Corollaire 0.0.21.** *Un twist non-trivial le long d'une géodésique simple fermée qui ne passe par aucun point singulier sur un origami donne toujours une s.p.s.c. différente de l'origami dans son espace des déformations.*

Les trois derniers annexes sont des réflexions supplémentaires à la thèse et ils n'en constituent pas une partie essentielle.

L'annexe A est une discussion de l'idée de paramétrisation avec quelques exemples dont le triangle euclidien et le quadrilatère.

L'annexe B est consacré à l'étude du polygone conique. Un *polygone conique* est une s.p.s.c. homéomorphe au disque et qui contient un seul point singulier dans son intérieur et un nombre fini de points singuliers sur le bord dont les angles sont dans l'intervalle  $]0, \pi[$ . On peut avoir, par exemple, un polygone conique autour d'un point singulier conique sur une s.p.s.c.

Dans cette annexe on démontre quelques résultats simples concernant les géodésiques en utilisant des propriétés propres à ce type de polygones. On utilise également un cas particulier de ces polygones, le polygone conique rectangle, pour donner une configuration pour un origami différente de celle donnée utilisant des carrés unités.

L'annexe C est consacré au triangle singulier. Un *triangle singulier* est une s.p.s.c. qui a un point singulier dans son intérieur et trois sur le bord, ou bien quatre points singulier sur le bord. On peut, par exemple, avoir un triangle singulier sur une s.p.s.c.

On prouve certaines relations trigonométriques pour ces triangles. En particulier, un théorème d'Al-Kashi et un théorème de Pythagore.

# Chapitre 1

## Surfaces plates à singularités coniques

Ce chapitre est une présentation des définitions et quelques résultats bien connus.

On définit les surfaces plates à singularités coniques. Dans cette définition on a (topologiquement) une surface connexe compacte orientable sur laquelle on a une métrique plate pouvant avoir des points singuliers coniques<sup>1</sup>. Les surfaces de translation représentent une catégorie spéciale de surfaces plates. Ce sont des surfaces qui ont une holonomie linéaire triviale. C'est-à-dire, transporter parallèlement un vecteur le long d'une boucle autour d'un point singulier va le ramener sur lui-même. Cette structure peut être définie en utilisant des différentielles quadratiques définies sur des surfaces de Riemann compactes ou simplement en recollant des polygones par translation (respecter le parallélisme.) Des surfaces plus spéciales ont été étudiées comme les origamis, voir par exemple [11] et [23], ou encore les billards rationnels, voir par exemple les travaux de Tabachnikov et son livre [25].

Parfois les structures plates sont considérées à homothétie près comme le fait Troyanov dans [28]. Dans cette thèse, on n'identifie pas deux surfaces si elles sont obtenues l'une de l'autre en multipliant la fonction distance par un facteur constant.

La définition est ici basée sur un atlas dans le complémentaire des points singuliers coniques avec des applications de changement de cartes isomé-

---

1. La définition est donnée sans avoir recours à aucune autre structure (feuilletage, forme différentielle, structure complexe, triangulation, origami, structure de translation, etc.) Certains auteurs ont employé le terme "surface plate" pour des cas particuliers. A titre d'exemple, Masur [18, p. 529] utilise ce terme pour les surfaces de translation. Ainsi l'ont fait Zorich dans [30, p. 445] et Eskin avec les deux précédents dans [8, p. 63] et Bowman dans [4, p. 13] et Möller dans [19, p. 369].

triques.

On traite dans ce chapitre des segments géodésiques et des géodésiques fermées sur les surfaces plates à singularités coniques et on étudie leur existence et unicité. On discute brièvement la convexité dans un plan plat à singularités coniques. A la fin, on donne quelques exemples démonstratifs.

## 1.1 Secteur euclidien et Cône euclidien

Avant de pouvoir donner une définition de ces surfaces, on aborde quelques notions annexes.

**Définition 1.1.1.** On appelle *secteur euclidien* une partie du plan euclidien qui a comme bord la réunion de deux demi-droites (appelées *côtés*) issues d'un même point ou un recollement successif par isométrie de secteurs de ce genre le long de leurs côtés tel que leurs sommets soient identifiés et le premier et le dernier secteur gardent chacun un côté libre. figure 1.1.

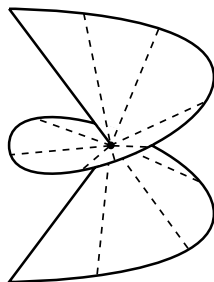


FIGURE 1.1 – L'angle d'un secteur euclidien peut prendre toutes les valeurs positives.

**Définition 1.1.2.** On appelle *cône euclidien* la surface obtenue en recollant par isométrie les deux côtés d'un secteur euclidien.

La métrique sur un secteur euclidien ou un cône euclidien est définie par ce que l'on appelle une structure de longueur. Pour plus de détails sur cette structure consulter [5, p. 26].

On obtient une structure de longueur sur un secteur euclidien ou un cône euclidien, si l'on définit la fonction de longueur de chemin par les deux axiomes suivants :

- La longueur  $\ell(c)$  d'un chemin  $c$  dans un secteur euclidien d'angle inférieur<sup>2</sup> à  $\pi$  muni d'une métrique induite euclidienne est égale à la longueur euclidienne.

---

2. Comme il est d'usage en français, on va employer le mot *inférieur* dans le sens  $\leq$  et

- La fonction longueur de chemin  $\ell$  est additive : Si  $c$  est la concaténation de deux chemins  $c_1$  et  $c_2$  alors  $\ell(c) = \ell(c_1) + \ell(c_2)$ .

Les chemins pour cette structure sont tous les chemins dans chaque secteur euclidien d'angle inférieur à  $\pi$  muni d'une métrique induite euclidienne et toutes leurs concaténations.

Pour  $x$  et  $y$  dans un tel secteur euclidien ou cône euclidien, on définit la distance :

$$d(x, y) = \inf\{\ell(\gamma); \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma \in B, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\},$$

où  $B$  est l'ensemble de tous les chemins.

Si un point a un voisinage isométrique à un ouvert dans le plan euclidien, l'angle total en ce point est égal à  $2\pi$  et on appelle ce point *régulier*. L'angle d'un secteur euclidien ou l'angle total d'un cône euclidien est défini comme la somme des angles des secteurs euclidiens composants. Un point sur le bord est dit *régulier* si l'angle en ce point est égal à  $\pi$ . On appelle *point singulier* le sommet d'un secteur euclidien ayant un angle total différent de  $\pi$ . Ainsi, on appelle *point singulier conique* ou *singularité conique* ou tout simplement *singularité* le sommet d'un cône euclidien d'angle total différent de  $2\pi$ .

*Remarque 1.1.1.* Même si l'on a l'impression que l'on peut faire un tour complet autour d'un sommet d'un cône euclidien, l'angle est différent de  $2\pi$ . On peut voir ceci en découpant le cône le long d'un générateur où on obtient un secteur euclidien d'angle différent de  $2\pi$ , figure 1.2.

La notion d'angle est une proportion entre la longueur d'un arc circulaire, centré au sommet et le rayon de cet arc.

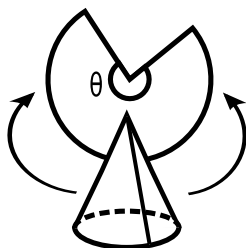


FIGURE 1.2 – Le découpage d'un cône euclidien le long d'un générateur produit un secteur euclidien

**Définition 1.1.3.** On appelle *secteur conique* un secteur angulaire ayant pour sommet un point singulier.

le mot *supérieur* dans le sens  $\geq$ . Pour les relations stricte  $<$  et  $>$ , on va employer le mot *strictement*.

*Remarque 1.1.2.* Dans un cône euclidien, chaque point régulier définit une demi-droite basée sur le point singulier. Deux demi-droites de ce type délimitent deux secteurs coniques opposés, figure 1.3. On considère par défaut le secteur conique sur un cône euclidien comme étant celui d'angle le plus petit sauf mention différente.

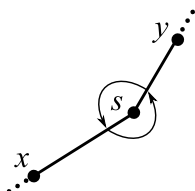


FIGURE 1.3 – Sur un cône euclidien, deux secteurs coniques sont définis par deux points réguliers.

### 1.1.1 Existence et unicité des géodésiques

**Définition 1.1.4** (Géodésique). Soit  $X$  un espace métrique. Un *chemin géodésique* (ou simplement *géodésique*) dans  $X$  est un chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  qui préserve les distances, c'est-à-dire il vérifie  $d(\gamma(t_1) - \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$  pour tous  $t_1$  et  $t_2$  dans  $[a, b]$ .

**Définition 1.1.5** (Segment géodésique). Soit  $X$  un espace métrique. Soient  $x, y$  deux points dans  $X$ . Un *segment géodésique* joignant  $x$  et  $y$  dans  $X$  est l'image d'un chemin géodésique  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tel que  $\gamma(a) = x$  et  $\gamma(b) = y$ .

*Remarque 1.1.3.* Un segment géodésique joignant deux points n'existe pas toujours. Par exemple, sur la figure 1.4 qui représente un disque dans le plan euclidien privé d'un segment, il n'y a pas de segment géodésique joignant les deux points marqués.

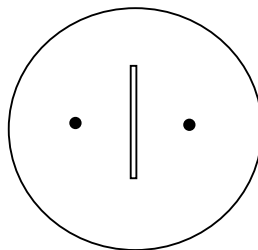


FIGURE 1.4 – Disque privé d'un segment.

On peut utiliser le théorème de Hopf et Rinow (voir [21, p.63]) pour garantir l'existence de géodésiques sur un secteur euclidien ou un cône euclidien. Le théorème dit qu'un espace de longueur est géodésique (il existe un segment géodésique joignant deux points quelconques) si et seulement s'il est complet et localement compact.

On va décrire les segments géodésiques. On va la détailler cas par cas. Le plus facile est le cas d'un secteur euclidien d'angle total inférieur à  $\pi$ , parce que les géodésiques sont identiques à celles de la métrique euclidienne dans le plan ; des segments euclidiens, et elles sont uniques entre deux points donnés. En particulier, la géodésique joignant le point singulier (le sommet) et n'importe quel autre point est un segment euclidien (Voir figure 1.5).

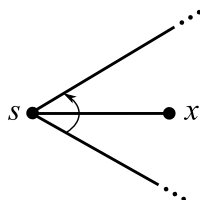


FIGURE 1.5 – La géodésique joignant la singularité et un point régulier sur un secteur euclidien.

A partir de ceci on peut élaborer les autres cas.

Soit maintenant  $P_1$  un cône euclidien et soient  $x$  et  $y$  deux points réguliers dans  $P_1$ . Soit  $\theta$  l'angle total au point singulier conique  $s$ . Le segment géodésique joignant  $s$  et  $x$  est le segment euclidien  $xs$  car on peut toujours inclure ces deux points dans un secteur conique d'angle inférieur à  $\pi$ , figure 1.5. La longueur de ce segment géodésique est la longueur euclidienne.

Le segment géodésique joignant deux points réguliers dépend de leurs positions. Tout dépend de l'angle du secteur conique  $\widehat{xsy}$  défini par ces deux points ; bien entendu celui d'angle le plus petit.

1. Si le secteur conique  $\widehat{xsy}$  est d'angle strictement inférieur à  $\pi$ , il est isométrique à un secteur du même angle dans le plan euclidien. Le segment géodésique joignant  $x$  et  $y$  est le segment euclidien  $xy$  et sa longueur est la longueur euclidienne, figure 1.6.
2. Si le secteur conique  $\widehat{xsy}$  est d'angle  $\pi$ , il est isométrique à un secteur du même angle dans le plan euclidien. Le segment géodésique joignant  $x$  et  $y$  passe par  $s$  et est composée des deux segments euclidiens  $xs$  et  $sy$ . Sa longueur est la somme des longueurs des deux segments euclidiens, qui est égale à la longueur du segment euclidien  $xy$  dans le secteur euclidien isométrique, figure 1.7.



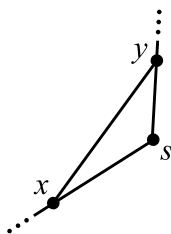


FIGURE 1.6 – Le segment géodésique joignant deux points réguliers  $x$  et  $y$  est un segment euclidien si le secteur conique défini par  $x$  et  $y$  est d'angle inférieur à  $\pi$ .

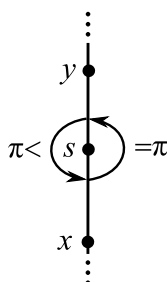


FIGURE 1.7 – Le segment géodésique joignant  $x$  et  $y$  est un segment euclidien qui passe par  $s$  si le secteur conique défini par  $x$  et  $y$  est d'angle égal à  $\pi$ .

3. Si le secteur conique  $\widehat{xsy}$  est d'angle strictement supérieur à  $\pi$ , il n'existe pas un segment euclidien qui relie les deux points. Un segment géodésique joignant  $x$  et  $y$  est la réunion des deux segments euclidiens  $xs$  et  $sy$  et sa longueur est la somme de leurs longueurs, figure 1.8.

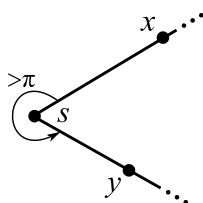


FIGURE 1.8 – Le segment géodésique joignant  $x$  et  $y$  est une concaténation des deux segments euclidiens  $xs$  et  $sy$  si le secteur conique défini par  $x$  et  $y$  est d'angle strictement supérieur à  $\pi$ .

Voici une démonstration de ces deux derniers faits.

**Proposition 1.1.1.** *Soit  $P_1$  un cône euclidien d'angle total  $\theta$  au point singulier conique  $s$ . Soient  $x$  et  $y$  deux points réguliers dans  $P_1$ . Si le secteur*

conique  $\widehat{xsy}$  est d'angle supérieur à  $\pi$ , alors un segment géodésique joignant les deux points  $x$  et  $y$  est la réunion des deux segments euclidiens  $xs$  et  $sy$  et sa longueur est la somme de leurs longueurs.

*Démonstration.* Un segment géodésique joignant les deux points  $x$  et  $y$  ne peut être qu'une concaténation de segments euclidiens, parce que l'on peut toujours remplacer toute partie d'une courbe incluse dans un secteur euclidien d'angle inférieur à  $\pi$  par un segment euclidien.

Procédons comme suit : Comme le secteur conique  $\widehat{xsy}$  est connexe par arcs, on peut prendre une courbe simple joignant  $x$  et  $y$  contenue complètement dans ce secteur. On prend des points consécutifs sur la courbe tels que deux points consécutifs quelconques soient inclus dans un secteur euclidien d'angle inférieur à  $\pi$  et tels que trois points consécutifs quelconques ne le soient pas. En remplaçant chaque partie de la courbe délimitée par deux points consécutifs par le segment euclidien qui les joint, on obtient une courbe plus courte composée de segments euclidiens.

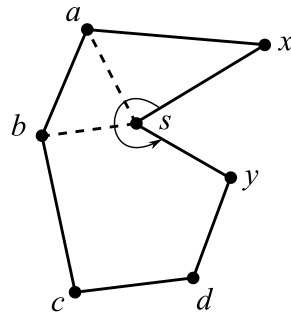


FIGURE 1.9 – Courbe géodésique par morceaux joignant  $x$  et  $y$ .

Selon ce qui précède on a, par exemple,  $\widehat{xsb} = \widehat{xsa} + \widehat{asb} > \pi$ .

Considérons maintenant les deux triangles  $(xsa)$  et  $(asb)$ . On va prouver que  $xs + sb < xa + ab$ . Comme  $\widehat{xsa} + \widehat{asb} > \pi$  et  $\widehat{xsa} < \pi$  alors il existe une demi-droite  $sz$  faisant un angle  $\pi$  avec  $sx$  et qui coupe  $ab$ . Notons le point d'intersection par  $q$ , figure 1.10.

Un simple calcul nous donne le résultat,

$$\begin{aligned}
 & xs + sb \\
 & \leq xs + sq + qb \\
 & = xq + qb \\
 & \leq xa + aq + qb \\
 & = xa + ab
 \end{aligned}$$

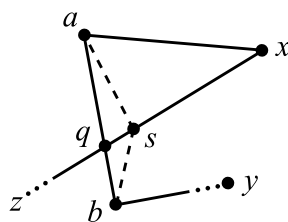


FIGURE 1.10 –

On peut appliquer la même procédure aux autres couples de segments euclidiens consécutifs pour en finir avec la concaténation de  $xs$  et  $sy$  comme le chemin le plus court.

Ce raisonnement s'applique aussi sur le secteur conique opposé, parce que son angle est strictement supérieur à  $\pi$  (voir la définition 1.1.3 et la remarque 1.1.2).  $\square$

L'unicité de cette géodésique est discutée plus loin.

**Exemple 1.1.1.** La géodésique joignant deux points quelconques  $x, y \in P_1$  n'est pas toujours unique. Ceci motive l'étude de l'unicité des géodésiques. Par exemple, dans le cas d'un cône euclidien d'angle total  $\theta < 2\pi$ , si  $\widehat{xsy} = \frac{\theta}{2}$ , il y a exactement deux segments géodésiques qui joignent  $x$  et  $y$  et qui réalisent la distance entre  $x$  et  $y$ , figure 1.11.

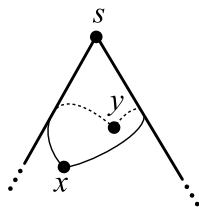


FIGURE 1.11 – La non unicité de segments géodésiques sur un cône euclidien d'angle strictement inférieur à  $2\pi$ .

**Proposition 1.1.2.** *Le segment géodésique joignant deux points dans un secteur euclidien est unique. De même, le segment géodésique joignant deux points dans un cône euclidien d'angle total supérieur à  $2\pi$  est unique.*

*Démonstration.* Dans un secteur euclidien d'angle inférieur à  $\pi$ , il est clair que le segment géodésique joignant deux points est unique, et qu'il est un segment euclidien. En particulier, le segment euclidien qui joint le sommet à n'importe quel autre point est unique.

Quand le secteur euclidien est d'angle strictement supérieur à  $\pi$ , le segment géodésique joignant deux points situés dans un secteur conique d'angle inférieur à  $\pi$  est unique d'après le paragraphe précédent. Tandis que pour deux points dont le secteur conique est d'angle supérieur à  $\pi$ , la démonstration de la proposition 1.1.1, qui s'applique dans ce cas aussi, montre qu'il existe un segment géodésique joignant ces deux points composées des deux segments euclidiens qui joignent ces deux points au sommet du secteur, figure 1.12.

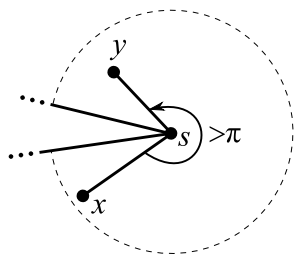


FIGURE 1.12 --

Les mêmes raisons s'appliquent pour un cône euclidien d'angle supérieur à  $2\pi$ . Si les deux points sont dans un secteur conique d'angle inférieur à  $\pi$ , les cas précédents expliquent l'unicité du segment géodésique. Si les deux points sont dans un secteur conique d'angle strictement supérieur à  $\pi$ , la démonstration de la proposition 1.1.1 montre l'existence d'un segment géodésique composée de deux segments euclidiens concaténés au sommet.  $\square$

Ce raisonnement ne marche pas pour un cône d'angle strictement inférieur à  $2\pi$  comme on a vu dans l'exemple 1.1.1.

*Remarque 1.1.4.* Bien que le secteur euclidien et le cône euclidien soient des cas spéciaux des surfaces plates à singularités coniques, on n'a pas attendu de prouver l'unicité des géodésiques dans le cas général pour l'appliquer ici car dans la définition d'une surface plate à singularités coniques on s'est basé sur les définitions de ces deux cas spéciaux.

## 1.2 Surfaces plates à singularités coniques

On donne maintenant la définition de surface plate à singularités coniques.

**Définition 1.2.1.** Soit  $S_{g,b}$  (notée  $S$  s'il n'y a pas de confusion possible) une surface connexe compacte orientable de genre  $g$  et qui a  $b$  composantes du bord. Soit  $\Sigma = \{s_1, \dots, s_n\}$  un ensemble fini de points marqués sur cette surface. On suppose que toutes les composantes du bord de  $S$  sont des courbes

fermées (homéomorphes au cercle). On note par  $\partial S$  le bord de  $S$  et par  $\text{Int}(S) = S \setminus \partial S$  l'intérieur de  $S$ . La surface  $S$  est munie d'une métrique localement isométrique à des ouverts du plan euclidien, d'un secteur euclidien ou d'un cône euclidien. On suppose que les applications de changement de cartes conservent les longueurs. Plus précisément :

- Pour tout point  $x \in \text{Int}(S) \setminus \Sigma$  il existe un voisinage  $U(x)$  isométrique à un disque ouvert dans le plan euclidien.
- Pour tout point  $s \in \Sigma \cap \text{Int}(S)$  il existe un voisinage isométrique à un voisinage du sommet d'un cône euclidien d'angle total  $0 < \theta < +\infty$ , avec  $\theta \neq 2\pi$ .
- Pour tout point  $x \in \partial S \setminus \Sigma$  il existe un voisinage isométrique à un voisinage du sommet d'un secteur euclidien avec une mesure d'angle égal à  $\pi$  qui a comme sommet l'image de  $x$ .
- Pour tout point  $s \in \Sigma \cap \partial(S)$  il existe un voisinage isométrique à un voisinage du sommet d'un secteur euclidien d'angle  $0 < \tau < +\infty$  qui a comme sommet l'image de  $s$  avec  $\tau \neq \pi$ .

On appelle  $S$  une *surface plate à singularités coniques* (à bord s'il existe.) Ou en abrégé *surface plate* ou encore *s.p.s.c.*.

On va abréger aussi l'adjectif "plate à singularités coniques" par *p.s.c.*.

*Remarque 1.2.1.* Un constat qui découle directement de la définition 1.2.1 est qu'une composante du bord d'une s.p.s.c. est soit géodésique soit géodésique par morceaux.

Maintenant, pour pouvoir parler d'une métrique sur cette surface, on rappelle que la définition donnée est basée sur des cartes dans des espaces de longueur. On définit la longueur  $L(\gamma)$  d'un chemin  $\gamma$  sur la surface comme étant la somme des longueurs de ses parties calculées par les métriques de longueur sur chaque carte.

**Définition 1.2.2** (Métrique plate à singularités coniques). On définit sur une surface plate à singularités coniques une métrique de longueur dite *métrique plate à singularités coniques*, ou *structure plate à singularités coniques* (*structure plate*) sur la surface  $S$ , par

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} L(\gamma) .$$

### 1.2.1 Existence et unicité des géodésiques

L'existence d'un segment géodésique joignant deux points est évident par le théorème de Hopf et Rinow (voir [21, p. 63]).

Pour la suite de l'étude il nous faut démontrer l'existence et l'unicité de segments géodésiques dans chaque classe d'homotopie joignant deux points sur une s.p.s.c., comme on l'a déjà fait pour le secteur euclidien et le cône euclidien.

On donne maintenant un exemple sur l'existence de segments géodésiques de classes d'homotopie différentes qui joignent deux points.

**Exemple 1.2.1.** Prenons un cylindre euclidien de longueur finie. Pour faciliter la vision, on coupe le cylindre le long d'un générateur  $\Delta$  le transformant en rectangle. Soient  $x$  et  $y$  deux points suffisamment proches de  $\Delta$ , et soit  $U$  un voisinage tel que  $x, y \in U$  et que  $U \cap \Delta = \emptyset$ .

Entre  $x$  et  $y$  il existe deux segments géodésiques de deux classes d'homotopie différentes. L'un qui traverse  $\Delta$  et on le voit sur le cylindre, l'autre est inclus entièrement dans  $U$ , figure 1.13

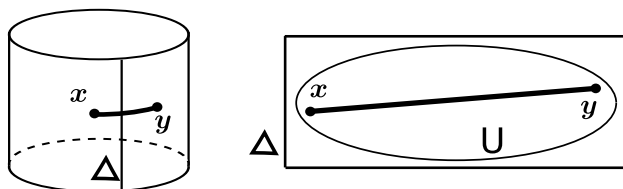


FIGURE 1.13 – Un segment géodésique entre deux points n'est pas forcément le plus court.

Ceci signifie que l'on ne peut pas toujours considérer un segment géodésique par rapport à la métrique définie intrinsèquement sur un morceau d'une s.p.s.c. comme étant le plus court par rapport à la métrique de longueur définie sur toute la surface.

L'exemple suivant est hors sujet car la métrique considérée n'est pas plate au sens de la définition 1.2.1, mais il n'est pas banal.

**Exemple 1.2.2.** Un segment géodésique joignant deux points d'une composante du bord d'un cylindre est un morceau du bord borné par ces deux points, figure (1.14,a). Si on colle la composante du bord du cylindre qui porte les deux points avec le bord d'un cône de la même longueur, alors le segment géodésique joignant ces deux points sera différent du segment géodésique de départ, figure (1.14,b), car le chemin le plus court passe maintenant à l'intérieur du cône.

La question que l'on se pose est : Sous quelles conditions a-t-on une garantie que le segment géodésique joignant deux points que j'observe localement (dans le voisinage  $U$  de l'exemple 1.2.1) est bien le segment géodésique le plus

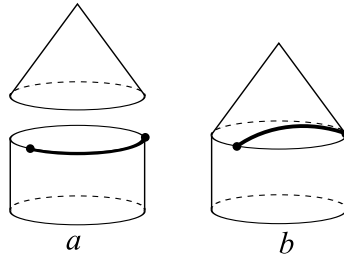


FIGURE 1.14 – Recollement d'un cylindre avec un cône et son effet sur les segments géodésiques.

court parmi tous et que ceci ne changera ni par une opération de recollement ou découpage ni en considérant un voisinage plus grand ?

La réponse est apporté par les propositions suivantes.

**Proposition 1.2.1.** *Sur une s.p.s.c.  $S$ , tout point régulier  $x_0$  a un voisinage  $U$  tel que entre deux points quelconques de  $U$  il existe un segment géodésique unique inclus entièrement dans  $U$  et qui est strictement plus court que tous les segments géodésiques de  $S$  joignant ces deux point.*

*Démonstration.* Évident parce que c'est localement euclidien.  $\square$

La proposition suivante donne la même idée. Mais, au voisinage d'un point singulier.

**Proposition 1.2.2.** *Sur une s.p.s.c.  $S$ , tout point singulier  $s$  a un voisinage  $U$  tel que entre deux points quelconques de  $U$  il existe un segment géodésique inclus entièrement dans  $U$  et qui est strictement plus court que tous les segments géodésiques de  $S$  joignant ces deux points. Si l'angle total en  $s$  est strictement supérieur à  $2\pi$ , ce segment géodésique est unique.*

*Démonstration.* Soit  $U_0 = U_0(s, r_0)$  une boule ouverte homéomorphe à un disque de centre  $s$  et de rayon  $r_0$  qui n'a aucun point singulier différent de  $s$ , figure 1.15. Soit  $U = U(s, r)$  la boule ouverte homéomorphe à un disque de centre  $s$  et de rayon  $r = \frac{r_0}{2}$ . Soient  $y, z \in U$ . L'existence et l'unicité sont prouvable de la même manière que dans les démonstrations des propositions 1.1.1, 1.1.2 et l'exemple 1.11. Soit  $\gamma$  un segment géodésique joignant  $y$  et  $z$  et réalisant la distance entre eux, qui est inclus entièrement dans  $U$ . Toute courbe joignant  $y$  et  $z$  et qui quitte  $U_0$  est de longueur  $> 2r$ , et donc elle est plus longue que  $\gamma$ .

$\square$

D'après ces propositions, on peut sous certaines conditions regarder les segments géodésiques du point de vue d'une métrique plate définie localement

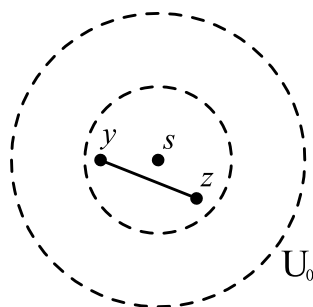


FIGURE 1.15 –

tout en étant sûr qu'ils sont les segments géodésiques qui réalisent la distance du point de vue de la métrique plate de la surface ambiante, ou même du point de vue d'une métrique plate obtenue par recollement ou découpage.

Jusqu'ici on décrivait la singularité par son angle total. Une description plus en harmonie avec la théorie des surfaces est lié à la courbure.

**Définition 1.2.3.** La courbure  $\kappa$  en un point singulier  $s$  d'angle total  $\theta$  est donnée par  $\kappa = 2\pi - \theta$ . La courbure en un point singulier sur le bord d'angle  $\tau$  est donnée par  $\kappa = \pi - \tau$ .

La *courbure totale* d'une s.p.s.c. est la somme de toutes les courbures aux points singuliers de la surface.

Cette définition permet de déduire une relation entre l'aspect géométrique de la surface (la courbure totale) et l'aspect topologique (la caractéristique d'Euler). C'est la formule de Gauss-Bonnet qui concrétise cette relation, un outil indispensable pour l'étude et la compréhension des s.p.s.c.. Plusieurs résultats peuvent en être directement déduits. Pour une démonstration de cette formule, on vous propose [12, p. 113], [2, p. 190] ou [27, p. 85-86]. L'énoncée donné ici avec sa démonstration est disponible dans mon article [17].

**Proposition 1.2.3** (La formule de Gauss-Bonnet). *Soit  $S$  une s.p.s.c. de genre  $g$  à bord de  $b$  composantes, avec  $n$  singularités à l'intérieur et  $m$  singularités sur le bord. Soient  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  les angles totaux aux singularités à l'intérieur et  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  les angles totaux aux singularités sur le bord. Alors, on a :*

$$\sum_{i=1}^n (2\pi - \theta_i) + \sum_{j=1}^m (\pi - \tau_j) = (4 - 4g - 2b)\pi. \quad (1.1)$$



La caractéristique d'Euler pour une surface  $S$  de genre  $g$  avec  $b$  composantes du bord est donnée par

$$\chi(S) = 2 - 2g - b ,$$

et la courbure totale est donnée par

$$K = \sum_{i=1}^n (2\pi - \theta_i) + \sum_{j=1}^m (\pi - \tau_j) .$$

La formule de Gauss-Bonnet en terme de la caractéristique d'Euler et de la courbure totale est :

$$K = 2\pi\chi(S) ,$$

comme c'est exprimé pour le cas des surfaces hyperboliques ou de Riemann.

*Remarque 1.2.2.* Dans la suite de la thèse, et sauf mention contraire, on entend par s.p.s.c. une s.p.s.c. dont la courbure en tout point singulier est négative. Ceci implique que les composantes du bord sont géodésiques.

On démontre maintenant l'unicité.

**Proposition 1.2.4.** *Sur une s.p.s.c.  $S$  dans chaque classe d'homotopie de chemins joignant deux point  $x, y \in S$  il existe un segment géodésique qui est unique.*

*Démonstration.* L'existence est expliquée juste avant. L'unicité est prouvée dans des cas divers semblables (voir [24, p. 72] et [13, p. 84]). La preuve que l'on donne est une adaptation à la situation présente.

Soit  $\gamma$  un segment géodésique sur  $S$  joignant  $x$  et  $y$ . Supposons qu'il existe un autre segment géodésique  $\gamma_1$  joignant  $x$  et  $y$  qui est dans la classe d'homotopie de  $\gamma$  et qui est différent de  $\gamma$ .

On sait que des segments géodésiques différents peuvent partager des parties par le fait de la présence des points singuliers (voir la section C.1). Mais, être différent signifie qu'en un certain point,  $\gamma$  et  $\gamma_1$  se séparent faisant entre eux un angle  $\alpha$  différent de zéro pour se rejoindre plus loin avec un angle  $\beta$  différent de zéro. Comme  $\gamma$  et  $\gamma_1$  sont dans la même classe d'homotopie, s'ils enferment entre eux une partie de la surface, cette partie est un disque immergé. On prend un disque minimal (du point de vue de l'inclusion), l'intérieur de ce disque est alors plongé. On représente l'un de ces disques possibles sur la figure 1.16, où un sous-segment géodésique de  $\gamma$  et un sous-segment de  $\gamma_1$  constituent le bord de ce disque plongé. Les points singuliers sont représentés par des point  $\bullet$ .

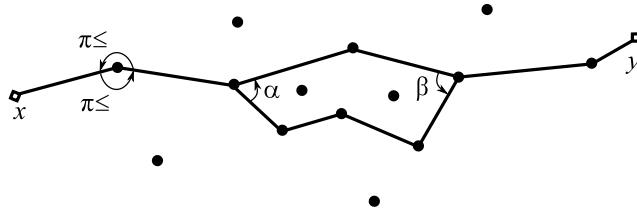


FIGURE 1.16 – Hypothèse de deux segments géodésiques différentes dans la même classe d'homotopie.

On sait qu'une géodésique qui passe en un point singulier fait en ce point un angle supérieur à  $\pi$  de chaque côté. Ainsi, sur le bord du disque, on a une courbure négative en les points singuliers sauf aux points où les angles sont  $\alpha$  et  $\beta$  où la courbure peut être positive, figure 1.16.

En appliquant la formule de Gauss-Bonnet au disque dont la caractéristique d'Euler  $\chi = 1$ , on conclut que  $\alpha = \beta = 0$ . Et donc un tel disque n'existe pas et l'unicité du segment géodésique est prouvée.  $\square$

Comme conséquence de la preuve de la proposition 1.2.4, on a ce résultat :

**Proposition 1.2.5.** *Sur une s.p.s.c. il n'existe pas de disque dont le bord est composé de deux segments géodésiques.*

**Proposition 1.2.6.** *Sur une s.p.s.c. deux géodésiques simples fermées homotopes sont soit coïncidentes soit disjointes bordant un cylindre euclidien.*

*Démonstration.* Supposons que les deux géodésiques soient disjointes. Puisqu'elles sont homotopes, elles bordent un anneau. Puisque la courbure en les points singuliers est négative, l'existence de cet anneau est impossible par la formule de Gauss-Bonnet, sauf si c'est un cylindre euclidien.

Supposons que les deux géodésiques ne soient pas disjointes sans être coïncidentes. Alors, elles partagent au moins un segment géodésique. Ceci implique que leurs relèvements au revêtement universel de la surface sont deux lignes géodésiques distinctes qui partagent plusieurs segments géodésiques disjoints, ce qui est impossible par la proposition 1.2.6. Donc, la seule possibilité est que les deux géodésiques soient coïncidentes.  $\square$

### 1.3 La convexité dans un plan plat à singularités coniques

**Définition 1.3.1** (Plan plat à singularités coniques). On appelle *plan plat à singularités coniques* (abrégé *p.p.s.c.*), une s.p.s.c. homéomorphe à un disque ouvert.

Le p.p.s.c. peut être un revêtement universel d'une s.p.s.c. d'où l'intérêt de comprendre sa géométrie.

**Définition 1.3.2.** Un ensemble dans un p.p.s.c. est convexe si pour deux points quelconques de cet ensemble le segment géodésique entre ces deux points est inclus entièrement dans cet ensemble.

D'après la définition, un ensemble convexe est connexe.

*Remarque 1.3.1.* Est-ce que l'intérieur d'un ensemble convexe dans un p.p.s.c. est convexe? La réponse est négative. On prend un polygone  $D \subset P$  avec un point singulier  $s$  sur son bord  $\partial D$  tel que le secteur conique formé par le bord en  $s$  est d'angle supérieur à  $\pi$ . A l'intérieur  $\text{Int}(D)$  de ce polygone on peut trouver deux points tels que le segment géodésique entre eux passe par  $s \notin \text{Int}(D)$ , figure 1.17 (gauche). Donc, si un ensemble dans  $P$  est convexe,

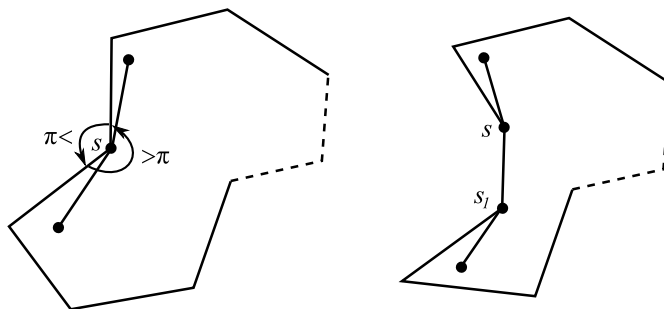


FIGURE 1.17 – Le segment géodésique joignant deux points d'un domaine convexe risque d'avoir dans son intérieur des points du bord.

son intérieur ne l'est pas forcément. Et quand le bord contient plus d'un point singulier, le segment géodésique joignant deux points peut contenir un segment du bord, figure 1.17 (droite).

**Lemme 1.3.1.** Dans un p.p.s.c. une ligne géodésique subdivise le plan en deux ensembles fermés convexes.

*Démonstration.* La supposition d'être fermé nous épargne de traiter ici des cas spéciaux et de mettre des conditions sur la ligne géodésique, voir remarque 1.3.1.

Soit  $L$  une ligne géodésique dans  $P$ . Soient  $D_1$  et  $D_2$  les deux ensembles obtenus de la subdivision de  $P$  par  $L$ .  $L$  est le bord en commun entre les deux ensembles. Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $D_1$ . Si  $A, B \in L$ , le segment géodésique  $AB \subset L$  car  $L$  est une ligne géodésique sur un disque.

Soient  $A, B \in D_1$  et supposons qu'une partie du segment géodésique  $AB$  soit à l'intérieur de  $D_2$ . Alors  $AB$  coupe  $L$  en au moins deux points. Soient  $I_1, I_2 \in L$  deux points qui bornent une partie de  $AB$  à l'intérieur de  $D_2$ . Ceci implique l'existence de deux segments géodésiques différents joignant  $I_1$  et  $I_2$ , la chose qui contredit l'unicité du segment géodésique dans cet espace. Alors  $AB$  est inclus entièrement dans  $D_1$ . Donc  $D_1$  est convexe. Du même pour  $D_2$ . D'où le résultat.  $\square$

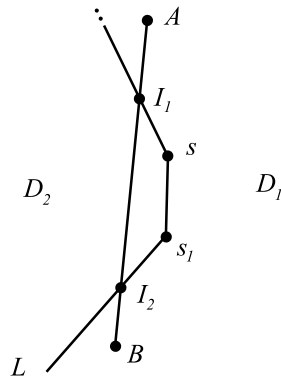


FIGURE 1.18 – Subdivision du p.p.s.c. en deux convexes

Il n'est pas difficile de voir ceci :

**Lemme 1.3.2.** *L'intersection de deux ensembles convexes, dans un p.p.s.c., est convexe.*

**Proposition 1.3.3.** *Deux lignes géodésiques dans un p.p.s.c. s'intersectent au plus en un seul ensemble connexe (un segment géodésique ou un point). Deux lignes géodésiques qui s'intersectent subdivisent le p.p.s.c. en quatre ensembles convexes.*

*Démonstration.* Résultat direct de la proposition 1.2.5 et de la proposition 1.3.2.  $\square$

## 1.4 Exemples de surfaces plates à singularités coniques

Avant de donner quelques exemples de s.p.s.c., on rappelle quelques faits sur les surfaces hyperboliques.

Le sujet des surfaces hyperboliques orientables, fermées ou à bord géodésique, a été étudié pendant longtemps. Il est bien connu qu'une surface

hyperbolique est décomposable en pantalons par des géodésiques simples fermées disjointes. Les surfaces hyperboliques sont classées par le biais de la classification des métriques hyperboliques sur les pantalons à bord géodésique.

On fait parfois un rapprochement entre surfaces hyperboliques ou surfaces de Riemann percées (i.e. avec un nombre fini de points enlevés de la surface) et les s.p.s.c. [28].

On présente ici quelques exemples de s.p.s.c. qui peuvent donner une idée des différentes approches pour étudier ces surfaces.

**Exemple 1.4.1** (Le tore). Le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  quotienté par l'action libre du groupe  $\mathbb{Z}^2$ , donne l'espace quotient  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  qui est équipé d'une structure plate dont le domaine fondamental est un parallélogramme. C'est la seule surface plate sans singularités. Si le tore a des singularités coniques, par la formule de Gauss-Bonnet on déduit qu'il y en a forcément à courbure positive.

**Exemple 1.4.2** (Surfaces plates par recollement). On peut obtenir des s.p.s.c. en recollant par isométries des morceaux du plan Euclidien puis équiper la surface obtenue par la métrique de longueur. Si un chemin est réparti sur plusieurs morceaux, sa longueur est la somme des longueurs sur chaque morceau.

Les premiers exemples sont les polyèdres dont on a choisi le dodécaèdre vu dans la figure 1.19<sup>3</sup>. En général, toutes les s.p.s.c. peuvent être obtenues en recollant des triangles euclidiens.

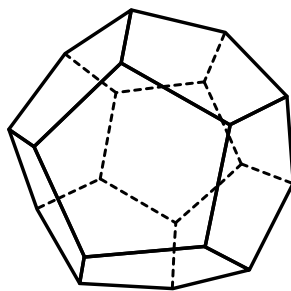


FIGURE 1.19 – Dodécaèdre régulier.

**Exemple 1.4.3** (Revêtement ramifié). Soit  $S$  une surface plate (avec ou sans singularités), soit  $S'$  un revêtement ramifié de  $S$ , alors  $S'$  est une s.p.s.c.. Prenons l'exemple suivant d'un tore plat, figure 1.20, et un revêtement, de ce tore, d'ordre quatre, ramifié en deux points '@' et '\*', figure 1.21<sup>4</sup>.

3. Basé sur : <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:POV-Ray-Dodecahedron.svg>

4. Extrait de [23].

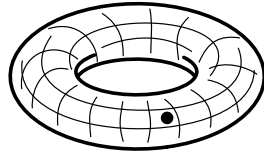
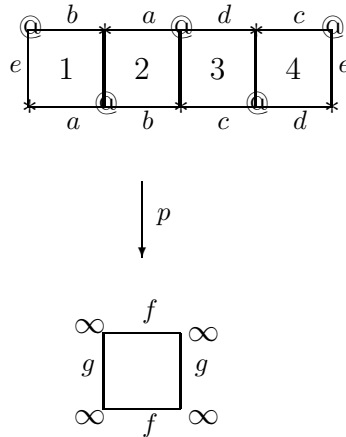


FIGURE 1.20 – Tore plat avec un point marqué.

FIGURE 1.21 – L'origami  $S$ 

L'angle total en '@' et '\*' est  $4\pi$ . Par la formule de Gauss-Bonnet, c'est une s.p.s.c. de genre 2.

De ce genre de s.p.s.c. on a des s.p.s.c. qui sont fabriquées à base de carrés collés d'une certaine façon et qui s'appellent origamis. On en parle plus dans l'exemple suivant.

**Exemple 1.4.4** (Origamis). On prend un nombre fini de copies du carré euclidien unité. On les colle selon les trois règles suivantes :

1. Un côté gauche d'un carré est identifié par translation avec un côté droit,
2. Un côté haut est identifié par translation avec un côté bas,
3. La surface fermée obtenue est connexe.

Cette s.p.s.c. est appelée origami.

Il y a deux propriétés intéressantes de ces surfaces. D'abord, toute singularité a un angle total multiple de  $2\pi$ . Puis, il y a toujours des géodésiques simples fermées qui ne passent par aucun point singulier.

Un origami est souvent représenté par un dessin plat de carrés avec des marques pour déterminer les identifications entre les côtés. Comme sur la figure 1.22.

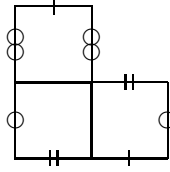


FIGURE 1.22 – Un origami

**Exemple 1.4.5** (Métriques définies par deux feuilletages mesurés  $F_1, F_2$  transverses). Sur une surface topologique on peut construire un feuilletage. A part dans le cas de quelques surfaces simples, ce feuilletage a des singularités. On s'intéresse aux cas où les singularités sont du type selle, de valence trois ou plus, voir figure 1.23.

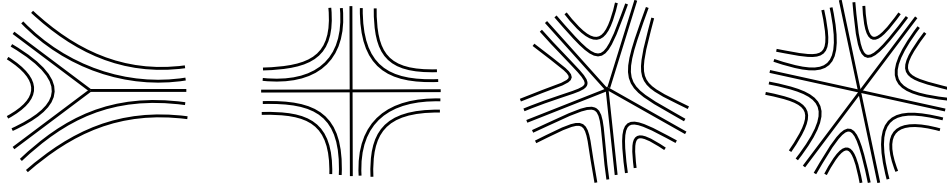


FIGURE 1.23 – Selles à 3, 4, 5, 6 séparatrices

On définit une mesure transverse sur le feuilletage (feuilletage mesuré), en accordant à tout arc transverse au feuilletage une mesure de Lebesgue qui ne change pas sous l'holonomie, figure 1.24.

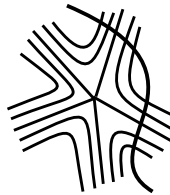


FIGURE 1.24 – Courbe transverse au feuilletage.

On prend un autre feuilletage mesuré  $F_2$  transverse au premier  $F_1$ . Le produit des deux mesures donne une structure plate sur la surface. En effet, pour tout point régulier, on peut trouver une carte  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  où  $U$  est un rectangle ouvert comme dans la figure 1.25 dans laquelle les feuilletages horizontal et vertical sont  $F_1$  et  $F_2$ , tel que  $\varphi$  envoie chacune des feuilles horizontales (resp. verticales) sur un segment horizontal (resp. vertical) de  $\mathbb{R}^2$ , et tel que  $\varphi$  envoie la mesure transverse à ces feuilles sur la mesure de Lebesgue du plan. Il découle de l'invariance des mesures transverses de  $F_1$

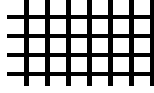


FIGURE 1.25 – Rectangle ouvert.

et  $F_2$  que les changements de cartes sont des isométries de  $\mathbb{R}^2$ . D'où une structure plate dans le complémentaire des singularités. Aux singularités, on obtient des singularités coniques d'angles multiples à  $\pi$ , figure 1.26. Tout

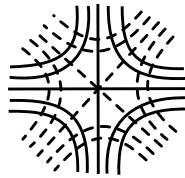


FIGURE 1.26 – Deux feuilletages transverses.

point régulier a un voisinage sur lequel une isométrie peut être définie avec un voisinage du plan euclidien.

Ces surfaces peuvent être définies de manière équivalente par des différentielles quadratiques holomorphes sur des surfaces de Riemann.

**Exemple 1.4.6** (Contrexemple [27]). Un feuilletage n'existe pas toujours sur les s.p.s.c. même si les angles sont des multiple de  $\pi$ . Prenons la s.p.s.c. obtenue par l'identification habituelle des côtés de l'octogone régulier, figure 1.27. Comme il est clair sur la figure, si l'on tente de faire une feuille, elle va

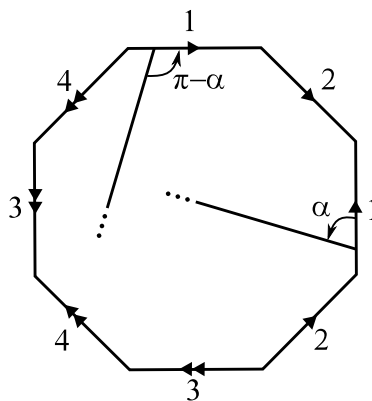


FIGURE 1.27 – Une feuille sur cette surface se coupe en un point régulier. se croiser en un point régulier. Ce qui est contraire à l'idée de feuilletage.



**Exemple 1.4.7** (Surface de translation). On peut construire une s.p.s.c. d'une manière assez générale qui couvre plusieurs des exemples présentés plus haut. On construit la s.p.s.c. à partir d'un polygone dans le plan euclidien. On fournit à ce polygone une orientation du bord telle que le polygone soit à gauche. On fixe aussi le plongement dans le plan euclidien en imposant une direction préférée, disons le nord, pour distinguer un polygone d'un autre obtenu du premier par une rotation non triviale. On impose, enfin, que le polygone ait des paires de côtés parallèles de même longueur. La surface est obtenue en identifiant par translation chaque paire de côtés, figure 1.28. C'est pour cela que l'on l'appelle surface de translation. Cette procédure

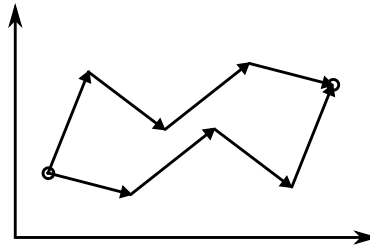


FIGURE 1.28 – Un polygone qui est à la base d'une surface de translation.

donne lieu à une surface équipée d'une structure p.s.c.. On dit que ces s.p.s.c. ont une holonomie linéaire triviale. Ce qui signifie qu'un vecteur transporté parallèlement autour d'une singularité garde son sens de départ à son retour au point de départ. Ceci implique que l'angle total en un point singulier est un multiple de  $2\pi$ . Ceci permet aussi de conserver la notion de parallélisme héritée du plan euclidien. Pour les surface d'holonomie non-triviale on donne une définition généralisée du parallélisme dans l'annexe B.

## Chapitre 2

# Paramétrisation de l'espace des déformations

Ce chapitre est consacré à discuter les notions nécessaires à la construction et la compréhension de l'espace des déformations des s.p.s.c. et sa paramétrisation.

Dans cette thèse, on a préféré d'utiliser le terme "espace des déformations" plutôt que "espace de Teichmüller", car ce dernier a une signification bien établie qui ne correspond pas au sujet de cette thèse. L'espace de Teichmüller est, en effet, l'espace des déformations des structures conformes marquées sur une surface topologique compacte, [9, p. 142]. Alors que notre étude porte sur l'espace des déformations des structures plates à singularités coniques (marquées) sur une surface topologique compacte. On a mis le mot "marqué" entre parenthèses car ce n'est pas le marquage usuel, comme on va voir.

Une autre raison pour utiliser le terme "espace des déformations" est que notre étude de cet espace se fait en déformant une structure par un flot de Fenchel-Nielsen. Ce que l'on va voir au chapitre 4.

Afin de comprendre l'espace des déformations, sa topologie et autres aspects liés à cet espace, on cherche le plus souvent un espace homéomorphe à l'espace des déformations que l'on appelle *espace des paramètres*. Ces paramètres sont récupérés à partir des s.p.s.c. en question. Les s.p.s.c. sont considérées comme des points de l'espace des déformations.

La construction de l'espace des déformations exige une notion de marquage. Cette notion est présentée ci-dessous dans le contexte de l'étude classique de l'espace de Teichmüller. Puis, on explique la notion de marquage utilisée pour notre étude.

Ensuite, on aborde la question de paramétrisation des polygones en tant que s.p.s.c. Cette étude permet de mieux comprendre l'évolution du nombre de paramètres, avec la complexité de la s.p.s.c..

## 2.1 Espace des déformations

On présente l'espace de Teichmüller qui est une sorte d'espace des déformations.

### 2.1.1 Marquage

Soit  $S$  une surface topologique fermée de genre  $g$ . Une structure hyperbolique sur  $S$  est une surface  $S'$  hyperbolique avec un homéomorphisme  $f' : S \rightarrow S'$ . C'est donc une paire  $(f', S')$  appelée une *structure hyperbolique marquée* où  $f'$  c'est le marquage. Donc, un *marquage* pour une structure hyperbolique est un homéomorphisme entre la surface sous-jacente  $S'$  et une surface topologique de base  $S$ .

On dit que deux structures hyperboliques marquées  $(f', S')$  et  $(f'', S'')$  sont équivalentes  $(f', S') \sim (f'', S'')$ , s'il existe une isométrie  $\iota$  telle que le diagramme suivant soit homotopiquement commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & S' \\ & \nearrow f' & \downarrow \iota \\ S & & \\ & \searrow f'' & \\ & & S'' \end{array}$$

c'est-à-dire  $\iota \circ f'$  soit homotope à  $f''$  et on écrit ceci  $\iota \circ f' \simeq f''$ . Ce qui veut dire que  $\iota$  est une isométrie qui conserve le marquage.

Deux structures hyperboliques marquées  $(f'_1, S')$  et  $(f'_2, S')$ , pour une même surface hyperbolique  $S'$ , sont équivalentes si  $f'_1 \simeq f'_2$ .

En particulier, si  $g : S \rightarrow S$  est un homéomorphisme qui n'est pas homotope à l'identité sur  $S$  et  $(f', S')$  est une structure hyperbolique marquée sur  $S$ , alors

$$f' \circ g : S \rightarrow S'$$

est une nouvelle structure hyperbolique sur  $S$ , et  $(f' \circ g, S')$  n'est pas équivalente à  $(f', S')$ .

Le diagramme suivant montre la délicatesse de cette idée :

$$\begin{array}{ccc} & & S' \\ & \nearrow f' & \downarrow Id \\ S & & \\ & \searrow f' \circ g & \\ & & S' \end{array}$$

L'application identité  $Id : S' \rightarrow S'$ , bien qu'elle soit une isométrie, ne rend pas ce diagramme homotopiquement commutatif, sauf si  $g$  lui même est homotope à l'identité.

Les classes d'homotopie d'homéomorphismes de  $S$  constituent un groupe qui s'appelle le *mapping class group* MCG.

### 2.1.2 Espace de Teichmüller

Le MCG agit sur l'espace des classes d'équivalences de structures hyperboliques marquées sur la surface  $S$ , qui s'appelle *l'espace de Teichmüller*, envoyant une classe d'équivalence de structure hyperbolique marquée sur une classe d'équivalence de structure hyperbolique marquée, qui n'est pas la même si  $g$  n'est pas homotope à l'identité. Autrement dit, le MCG est le groupe des homéomorphismes qui changent le marquage. Par rapport à l'espace de Teichmüller, équipé de la métrique de Teichmüller, c'est le groupe d'isométrie de cet espace [22].

On note le groupe de tous les homéomorphismes sur  $S$  par  $\text{Homeo}(S)$ . Dans ce groupe, les homéomorphismes homotopes à l'identité forment un sous-groupe noté  $\text{Homeo}_0(S)$ . Le mapping class group est alors le quotient

$$\text{MCG} = \text{Homeo}(S)/\text{Homeo}_0(S).$$

### 2.1.3 Marquage par déformation

Au lieu d'utiliser la notion de marquage expliquée ci-dessus, on peut considérer comme surface de base une s.p.s.c. et définir des déformations continues.

Par exemple, la structure plate marquée sur le tore est déterminée par les longueurs de trois géodésiques simples fermées [7]. En variant leurs longueurs on varie la structure plate. Un autre exemple plus avancé est le pantalon plat à une singularité conique dont on a trouvé les paramètres, voir chapitre 3. On peut passer d'un pantalon à un autre en variant les paramètres.

### 2.1.4 Marquage combinatoire

Le mot marquage peut avoir un autre sens. On parle, par exemple, d'un disque avec trois points marqués sur le bord, ou d'une surface à bord avec les composantes du bord marquées. On va appeler ce marquage par *marquage combinatoire*. Ce marquage est utile dans le cas où la surface a un bord à plusieurs composantes, ainsi que dans le cas où la structure a des points singuliers. Il permet de distinguer entre deux composantes du bord et entre deux points marqués.

### 2.1.5 Marquage combiné et l'espace des déformations

Le marquage utilisé pour définir l'espace de Teichmüller permet de distinguer les classes d'homotopies de courbes simples fermées sur la surface, permettant ainsi de distinguer entre les différentes géodésiques simples fermées et de distinguer entre les composantes du bord. C'est en ce sens que la paramétrisation de l'espace de Teichmüller par des longueurs de géodésiques simples fermées devient possible. On ne sait pas encore si une paramétrisation de l'espace des déformations des structures p.s.c. sur une surface par des longueurs de géodésiques simples fermées est possible. Mais, il est évident que le nombre des points singuliers et leur positionnement est en lien directe avec le nombre de paramètres exigés pour paramétriser la structure p.s.c. sur une surface. Les exemples : triangle euclidien (3 paramètre), triangle singulier (6 paramètres) et quadrilatère (5 paramètres), montrent bien ce lien, annexe A.

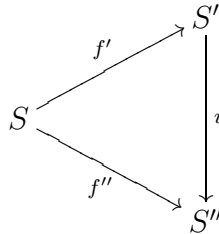
Pour que le marquage réponde mieux à ces besoins, on impose un marquage combinatoire d'un nombre fini de points sur la surface de base, déterminant ainsi le nombre de points singuliers sur la surface et leur positionnement. Ces points marqués rentrent dans la détermination du type topologique de la surface aux côtés du genre et le nombre des composantes du bord.

On donne une définition de ce nouveau marquage qui combine les deux notions : *marquage* et *marquage combinatoire* sous appellation *marquage combiné*.

**Définition 2.1.1** (marquage combiné). Soit  $S = S_{g,b,n}$  une surface topologique connexe compacte orientable de genre  $g$  à bord avec  $b$  composantes du bord et  $n$  points marqués. Une structure plate à singularités coniques sur  $S$  est une s.p.s.c.  $S'$  avec un homéomorphisme  $f' : S \rightarrow S'$  qui lie chaque point marqué de  $S$  avec un point singulier de  $S'$  et vice versa. C'est donc une paire  $(f', S')$  appelée une *structure plate à singularités coniques marquée* où  $f'$  est le marquage combiné. Donc, un *marquage combiné* pour une structure p.s.c. est un homéomorphisme entre la surface sous-jacente  $S'$  et une surface topologique de base  $S$  à points marqués qui respecte le lien entre les points marqués et les points singuliers.

On dit que deux structures p.s.c. marquées  $(f', S')$  et  $(f'', S'')$  sont équivalentes  $(f', S') \sim (f'', S'')$ , s'il existe une isométrie  $\iota$  telle que le diagramme

suivant soit homotopiquement commutatif :



**Définition 2.1.2** (L'espace des déformations). On appelle *espace des déformations* l'espace de classes d'équivalences de structures plates à singularités coniques marquées sur une surface topologique  $S$  à points marqués, et on le note  $\mathcal{T}(S)$

*Remarque 2.1.1.* Sur la s.p.s.c.  $S$  sur la figure 2.1, les deux courbes simples fermées homotopes, qui bornent un anneau avec un point marqué à l'intérieur, représentent deux classes différentes de courbes du point de vue du marquage combiné. Une déformation qui fait passer une géodésique simple fermée d'une classe à une autre est considérée comme une déformation qui change la structure p.s.c. marquée.

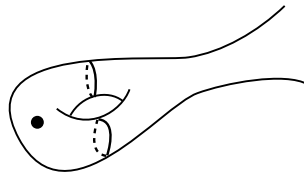


FIGURE 2.1 – Deux classes de courbes différentes.

Il est bon à savoir que le marquage combiné préserve :

- Toute composante du bord en tant qu'ensemble.
- Chaque point singulier sur une composante du bord.
- Chaque point singulier à l'intérieur.

*Remarque 2.1.2.* La définition 2.1.2 de l'espace des déformations basée sur le marquage combiné est très restrictive, mais cohérente avec l'idée de structure p.s.c.. D'après cette définition, pour une s.p.s.c. ayant un nombre donné de points singuliers marqués on a un espace des déformations. Si un point singulier sur le bord passe à l'intérieur, la s.p.s.c. obtenue n'est plus dans le même espace des déformations.

Des espaces des déformations différents peuvent être réunis pour constituer un espace plus grand telle qu'une courbe qui traverse d'un espace à l'autre représente une déformation continue d'une structure p.s.c..

Pour éclaircir ceci, prenons par exemple une s.p.s.c.  $S = S_{g,b,n}$  de genre  $g$  à bord avec  $b$  composantes du bord et  $n > 0$  points singuliers à l'intérieur. Par la définition des s.p.s.c., sur  $S$  il y a un cylindre au voisinage de chaque composante du bord. Ce cylindre est borné par une géodésique simple fermée qui passe par des points singuliers. On va découper  $S$  le long de l'une de ces géodésiques pour séparer un cylindre. On note le reste de la surface par  $S' = S'_{g,b,n}$ .

L'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$  de  $S$  est différent de l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S')$  de  $S'$ . Mais  $S'$  est une dégénération de  $S$  quand la hauteur d'un cylindre au bord tend vers zéro. On peut retrouver  $S$  à partir de  $S'$  si on connaît la valeur de la hauteur du cylindre lié à cette composante du bord. La hauteur du cylindre est indépendant de la structure p.s.c. sur  $S'$  et est alors un paramètre de la structure p.s.c. sur  $S$ .

Comme  $S'$  est une limite de  $S$  quand la hauteur du cylindre tend vers zéro, alors  $\mathcal{T}(S')$  peut être vu comme une composante du bord de  $\mathcal{T}(S) \cup \mathcal{T}(S')$ .

En faisant dégénérer tous les cylindres voisins aux composantes du bord de  $S$ , et sous conditions que le résultat soit une surface, on obtient une s.p.s.c. à bord avec des points singuliers sur chaque composante du bord. Notons  $S'' = S''_{g,b,n}$  cette surface. Comme les hauteurs des cylindre voisins aux composantes du bord de  $S$  sont des paramètres indépendants de la structure p.s.c., alors  $S''$  a au moins  $b$  paramètres de moins que  $S$ .

## 2.2 La paramétrisation de l'espace des déformations

Pour déterminer une s.p.s.c., on cherche des paramètres qui la déterminent de manière unique. Si de tels paramètres existent, on dit que la s.p.s.c. est *paramétrable*. Les paramètres qu'on considère sont des longueurs de segments géodésiques joignant des points singuliers, de segments géodésiques joignant un point singulier à une composante du bord ou de géodésiques simples fermées.

### 2.2.1 La triangulation et la paramétrisation des polygones

Un quadrilatère est paramétrable par cinq paramètres qui sont les longueurs de ses côtés et une diagonale<sup>1</sup>. Ceci implique que pour déterminer un

---

1. Pour une discussion avancée de ce sujet voir annexe A.

$n$ -gone,  $n \geq 4$ , par des longueurs de segments géodésiques, il faut le trianguler.

*Remarque 2.2.1.* Supposons qu'une triangulation a un point régulier comme sommet. On peut toujours modifier cette triangulation en translatant ce point vers un autre sommet voisin, changeant ainsi la triangulation vers une triangulation avec deux triangles de moins. Cette opération ne change pas la métrique p.s.c.. En étirant cette opération on arrive à une triangulation avec comme sommets que des points singuliers.

Existe-t-il toujours pour un polygone une triangulation utilisant que les sommets du polygone? Autrement dit, par des diagonales. Avant de répondre, on donne une définition du polygone.

**Définition 2.2.1.** Un *polygone euclidien* est une s.p.s.c. homéomorphe à un disque et qui n'a pas de points singuliers coniques à l'intérieur.

Cette définition inclut des polygones qui ne sont pas plongeable dans le plan euclidien, mais qui sont important pour notre étude.

Tout polygone est triangulable par des diagonales. La preuve que l'on fait est valide pour tout polygone, même s'il n'est pas plongeable dans le plan euclidien. La preuve est une reprise de [20, p.12] avec les modifications nécessaires au contexte ici.

**Proposition 2.2.1** (Triangulation du polygone euclidien). *Un polygone euclidien à  $n$  sommets peut être triangulé en  $n-2$  triangles par  $n-3$  diagonales intérieures.*

*Démonstration.* On procède par induction sur  $n$ . Le théorème est trivial pour  $n = 3$ . Soit  $P$  un polygone avec  $n \geq 4$  sommets. Soit  $v_2$  un sommet de  $P$  de courbure positive. Ce qui existe, puisque le polygone est homéomorphe à un disque, dont la caractéristique d'Euler est égale à 1. Ce qui implique d'après la formule de Gauss-Bonnet que la courbure totale du polygone est égale à  $2\pi$  et donc la somme de ses angles est  $n\pi - 2\pi$ . Puisque il y a  $n$  angles, ils ne peuvent pas tous être  $\geq \pi$ .

Considérons les trois sommets consécutifs  $v_1, v_2, v_3$ . Nous cherchons une diagonale intérieure  $d$ . Si le segment  $v_1v_3$  est entièrement à l'intérieure de  $P$ , alors posons  $d = v_1v_3$ . Sinon, le triangle fermé  $(v_1v_2v_3)$  doit contenir au moins un sommet de  $P$ . Soit  $x$  le sommet de  $P$  le plus proche à  $v_2$ , et posons  $d = v_2x$ .

Dans les deux cas,  $d$  subdivise  $P$  en deux polygones plus petits  $P_1$  et  $P_2$ . Si  $P_i$ ,  $i = 1, 2$  a  $n_i$  sommets, alors  $n_1 + n_2 = n + 2$  parce que les deux extrémités de  $d$  sont partagées entre  $P_1$  et  $P_2$ . Clairement,  $n_i \geq 3$ ,  $i = 1, 2$ , ce qui implique que  $n_i < n$ ,  $i = 1, 2$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence sur



chacun des polygones entraîne une triangulation de  $P$  en  $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$  triangle, et  $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n - 3$  diagonales,  $d$  y compris.  $\square$

Si on considère un polygone comme une s.p.s.c. de base avec un marquage combiné, on a ce corollaire :

**Corollaire 2.2.2.** *Un polygone à  $n$  sommets est paramétrable par  $2n - 3$  longueurs de segments géodésiques entre ses sommets.*

## 2.2.2 La triangulation et la paramétrisation des s.p.s.c.

**Définition 2.2.2.** Un *polygone singulier* est une s.p.s.c. homéomorphe à un disque et qui a des points singuliers coniques à l'intérieur.

La triangulabilité d'une surface topologique a été étudiée par Hatcher [10]. Ici on donne une preuve sur la triangulabilité d'une s.p.s.c.

**Proposition 2.2.3** (Triangulation d'une s.p.s.c.). *Toute s.p.s.c. différente du tore plat et du cylindre, à bord et qui a des points singuliers sur chaque composante du bord, est triangulable en triangles euclidiens par des segments géodésiques entre points singuliers qui n'ont pas de points singuliers à l'intérieur.*

*Démonstration.* On va procéder à prouver l'existence de la triangulation en décomposant la surface en parties. On considère que le marquage des points singuliers est conservé sous le découpage. C'est à dire on reconnaît un point singulier de la surface même si ce point n'est pas singulier sur une partie de la surface obtenue après le découpage. Ce qui nous intéresse c'est que les coupes soient faites le long des segments géodésiques entre points singuliers.

A l'exception du tore plat, le cylindre et le cas où une composante du bord de la surface n'a pas de points singuliers, sur une s.p.s.c. toute partie cylindrique est bornée par deux géodésiques simples fermées homotopes qui passent par des points singuliers. Les segments euclidiens qui composent ces géodésiques peuvent servir comme côtés dans la triangulation voulue de la surface. Alors, si on veut utiliser une géodésique de cette classe d'homotopie pour découper la surface on utilise l'une des deux géodésiques qui bornent le cylindre et passent par des points singuliers. Le fait qu'il existe une partie cylindrique sur cette surface ne constitue pas une information à prendre en compte pour la paramétrisation recherchée. La définition d'une structure p.s.c. marquée sur une surface n'implique pas l'existence d'une partie cylindrique qu'aux voisinage d'une composante du bord. Ce qui est exclue dans cette proposition.

Toute classe de courbes simples fermées contient une géodésique simple fermée qui passe par des points singuliers. On découpe la surface le long d'une géodésique simple fermée, puis on découpe la surface obtenue le long d'une géodésique simple fermée sur celle-là, et ainsi de suite, et on s'arrête quand la partie obtenue est de genre zéro. Puisque la surface est de type fini, cette opération est finie et mène à un nombre fini de parties.

Toute partie obtenue a des points singuliers de la surface sur chaque composante du bord. On découpe chaque partie le long des segments géodésiques entre points singuliers de composantes du bord différentes de telle manière que toute partie obtenue est homéomorphe à un disque.

Les parties obtenues sont soit des polygones euclidiens et c'est déjà traité dans la proposition 2.2.1, soit des polygones singuliers qui sont clairement décomposable, par des segments géodésiques entre points singuliers, en polygones euclidiens.  $\square$

### 2.2.3 Le comptage des paramètres

**Théorème 2.2.4.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. différente du tore plat et du cylindre, de genre  $g$  à bord avec  $b$  composantes du bord. Supposons que chaque composante du bord a des points singuliers. Soient  $n_1$  le nombre de points singuliers à l'intérieur de  $S$  et  $n_2$  le nombre de points singuliers sur le bord. Alors,  $S$  est paramétrable par*

$$p = 6g + 3b + 3n_1 + 2n_2 - 6 \quad (2.1)$$

*longueurs de segments géodésiques joignant des points singuliers qui ne passent par aucun point singulier.*

*Démonstration.* D'après la proposition 2.2.3,  $S$  admet une triangulation dont les sommets sont les points singuliers et ses côtés sont des segments géodésiques entre points singuliers qui ne passent par aucun point singulier.

Soit

$$n = n_1 + n_2, \quad (2.2)$$

le nombre total des points singuliers sur  $S$ . Soit

$$k = k_1 + k_2, \quad (2.3)$$

le nombre de côtés de la triangulation, où  $k_1$  est le nombre des côtés à l'intérieur de  $S$  et  $k_2$  est le nombre des côtés sur le bord. Soit  $t$  le nombre des triangles de la triangulation. Chaque triangle a trois côtés. Chaque côté à l'intérieur de la surface est partagé entre deux triangles. D'où l'égalité

$$3t = 2k_1 + k_2. \quad (2.4)$$

Des relations (2.3) et (2.4) on a :

$$t = \frac{2k - k_2}{3}. \quad (2.5)$$

Sur chaque composante du bord le nombre des points singuliers est égal au nombre de segments entre eux, d'où  $k_2 = n_2$ . On substitue dans (2.4) :

$$t = \frac{2k - n_2}{3}. \quad (2.6)$$

D'après la formule d'Euler on a :

$$\chi(S) = n - k + t = 2 - 2g - b. \quad (2.7)$$

On substitue (2.2) et (2.6) dans (2.7) pour obtenir :

$$k = 2g + b + n_1 + n_2 + \frac{2k - n_2}{3} - 2,$$

d'où

$$k = 6g + 3b + 3n_1 + 2n_2 - 6 \quad (2.8)$$

D'après l'étude de la paramétrisation du quadrilatère et des polygones euclidiens et la remarque 2.2.1, ce nombre de côtés de la triangulation est nécessaire pour déterminer la métrique p.s.c. sur  $S$ . Donc, ceci représente le nombre de paramètres de la structure p.s.c. sur  $S$ . D'où le résultat.  $\square$

*Remarque 2.2.2.* D'après la relation (2.1), à chaque fois un point singulier quitte le bord vers l'intérieur de la s.p.s.c., le nombre de paramètres exigés augmente par un. De ce point de vue, on peut considérer qu'une s.p.s.c. à bord dont chaque composante du bord a un seul point singulier est le cas le plus général parmi les s.p.s.c. qui sont du même type topologique et qui ont le même nombre de points singuliers et dont chaque composantes du bord a des points singuliers.

Donc, le nombre de paramètres pour une s.p.s.c.  $S$  de genre  $g$  à bord avec  $b$  composantes du bord et  $n$  points singuliers telle qu'il y ait un point singulier sur chaque composante du bord, est :

$$p = 6g + 3b + 3(n - b) + 2b - 6 = 6g + 2b + 3n - 6 \quad (2.9)$$

*Remarque 2.2.3.* Sur une s.p.s.c. à bord dont certaines composantes n'ont pas de singularité, au voisinage de chacune des composantes qui n'ont pas de singularité, il existe un cylindre borné par une géodésiques simple fermée qui passe par des points singuliers. D'après la remarque 2.1.2, l'enlèvement

d'un cylindre par découpage de la surface le long de la géodésique simple fermée qui le sépare du reste de la surface correspond à diminuer le nombre de paramètres exigés pour déterminer la surface par un.

Après l'enlèvement des cylindres au bord, on obtient une s.p.s.c. qui a des points singuliers sur chaque composante du bord. Donc une s.p.s.c. à bord dont certaines composantes n'ont pas de singularité est un cas plus général que la s.p.s.c. obtenue en enlevant les cylindres au voisinages des composantes du bord.

**Théorème 2.2.5.** *Une s.p.s.c. différente du tore plat et du cylindre, de genre  $g$  à bord avec  $b$  composantes du bord et  $n$  points singuliers à l'intérieur est paramétrable par*

$$p = 6g + 3b + 3n - 6 \tag{2.10}$$

*paramètres, dont  $p - b$  longueurs de segments géodésiques joignant des points singuliers qui ne passent par aucun point singulier et  $b$  segments géodésiques qui joignent des points singuliers aux composantes du bord.*

*Démonstration.* D'après les remarques 2.2.2 et 2.2.3, on obtient le résultat en ajoutant  $b$ , le nombre de cylindres qu'on peut ajouter au bord de la s.p.s.c. traité dans la remarque 2.2.2, au nombre de paramètres exigés.  $\square$



# Chapitre 3

## Paramétrisation du pantalon plat à singularité conique

Soit  $M$  une surface plate avec une singularité conique  $s$ , homéomorphe à la sphère à trois trous. On appelle cette surface un *pantalon plat à singularité conique* (ou tout simplement *pantalon*). Dans mon article [17], on a trouvé de bons paramètres pour une telle s.p.s.c.. Dans ce chapitre on rappelle les résultats prouvés dans [17], et on prouve de nouveaux résultats concernant la paramétrisation de cette surface.

Les paramètres sont des longueurs de segments géodésiques ou de géodésiques fermées. Les segments géodésiques sont soit des segments géodésiques joignant les composantes du bord, soit des segments géodésiques joignant le point singulier à une composante du bord. Comme géodésiques fermées on peut prendre les composantes du bord géodésiques.

Sur une s.p.s.c. en général, en plus de ce que l'on a avancé ci-dessus, on peut considérer des longueurs des segments géodésiques joignant des points singuliers.

Sur le pantalon  $M$ , soient  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ses composantes du bord. Elles sont géodésiques d'après l'unicité de la singularité et la formule de Gauss-Bonnet et la remarque 1.2.1. Soient  $l_i$  les longueurs des  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  respectivement. Soient  $d_i$  des segments géodésiques qui réalisent les distances  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  entre la singularité  $s$  et les composantes du bord  $c_i$ . Soient  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  des segments géodésiques qui réalisent les distances  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  entre les composantes du bord  $c_{i+1}$  et  $c_{i+2}$ .

Dans [17], on a démontré que le pantalon admet un découpage en trois rectangles et un triangle. On a démontré aussi que les longueurs  $l_i$ ,  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , qui sont soumises à certaines conditions, peuvent servir comme paramètres, ou alternativement les longueurs  $l_i$ ,  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , soumises à certaines condi-

tions. Les deux ensembles de paramètres sont liés par les relation :

$$r_i + r_{i+1} = a_{i+2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

La figure 3.1 montre les différents paramètres sur le pantalon et la figure 3.2 les montre sur le pantalon découpé le long des  $d_i$ .

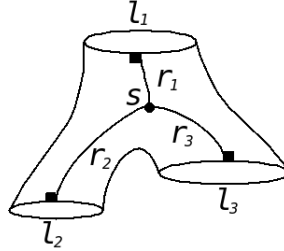


FIGURE 3.1 – Le pantalon avec certaines longueurs qui peuvent servir comme paramètres.

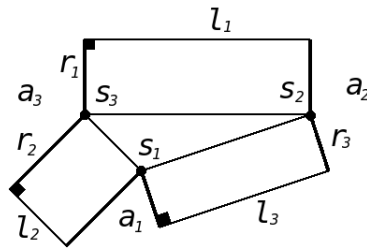


FIGURE 3.2 – Le pantalon découpé avec des longueurs qui peuvent servir comme paramètres.

*Remarque 3.0.4.* Pour alléger les notations des indices, on va convenir que  $i + j = ((i + j - 1) \bmod 3) + 1$ . C'est pour que les indices commencent par 1 au lieu de 0.

*Remarque 3.0.5.* On a trois points à remarquer :

- Un pantalon plat ne peut pas être sans point singulier (à l'intérieur ou sur le bord). Car l'hypothèse de l'existence d'un tel pantalon implique nécessairement par la formule de Gauss-Bonnet que  $0 = -2\pi$ . Ce qui est impossible.
- Les longueurs des composantes du bord ne sont pas suffisantes pour paramétrer le pantalon plat. Car à une composante du bord on peut toujours coller un cylindre pour obtenir un pantalon plat différent avec les mêmes longueurs de composantes du bord. On voit cette opération sur la figure 3.3.

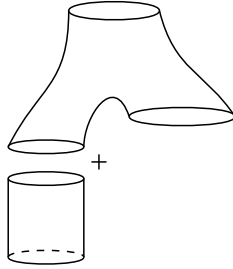


FIGURE 3.3 – On peut changer la classe d'isométrie d'un pantalon plat sans changer les longueurs de ses composantes du bord.

- Le pantalon plat ne peut être décomposé en deux hexagones rectangles identiques (comme c'est le cas dans le cas hyperbolique.) Car la formule de Gauss-Bonnet nous dit que l'angle total en le point singulier  $s$  est égal à  $4\pi$ . Et la même formule dit qu'un hexagone rectangle sans point singulier n'existe pas. Ce qui implique que si une décomposition en deux hexagones rectangles existe, les deux hexagones rectangles doivent partager le point singulier  $s$  sur leur bord en commun. On n'a pas de garantie que les deux hexagones soient identiques.

Ces remarques montrent que l'on ne peut pas raisonner par analogie avec le cas d'un pantalon hyperbolique.

### 3.1 Les paramètres du pantalon plat à singularité conique

Soit  $\partial M = c_1 \cup c_2 \cup c_3$  le bord de  $M$  et  $d(.,.)$  la fonction distance sur  $M \times M$ . Comme on a dit, on note par  $d_i$  un segment géodésique réalisant la distance  $d(s, c_i)$  entre le point singulier  $s$  et la composante du bord  $c_i$ . Ce segment géodésique est orthogonale à la composante du bord. Il est clair que les longueurs  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  dépendent de la position de  $s$ . On a la proposition suivante.

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $M$  un pantalon plat à une singularité conique  $s$ . Soient  $l_i, i = 1, 2, 3$  les longueurs des composantes du bord  $c_i$ , et  $r_i$  les longueurs des segments géodésiques  $d_i$  entre  $s$  et les  $c_i$ . Les longueurs  $l_i$  et  $r_i$  sous les conditions suivantes :*

- 1)  $0 < l_i < \infty, i = 1, 2, 3,$
- 2)  $l_i \leq l_{i+1} + l_{i+2}, i = 1, 2, 3,$
- 3)  $0 \leq r_i < \infty, i = 1, 2, 3,$



- 4)  $0 < r_i + r_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  
 5) Si pour un certain  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $l_i = l_{i+1} + l_{i+2}$  alors  $0 < r_i < \infty$ ,  
 sont des paramètres qui déterminent  $M$  de manière unique à isométrie près.

*Remarque 3.1.1.* Soit  $D_n$  une surface plate à singularité conique  $s$ , homéomorphe à la sphère avec  $n$  trous,  $n \geq 4$ . On note par  $c_i$  les composantes du bord de  $D_n$  et par  $d_i$  un segment géodésique réalisant la distance entre  $s$  et  $c_i$ . Soit  $l_i$  la longueur de  $c_i$  et  $r_i$  la longueur de  $d_i$ , alors les paramètres  $l_i, r_i$ ,  $i = 1..n$  ne caractérisent pas  $D_n$  dans le sens de la proposition 3.1.1. En effet, si l'on découpe  $D_n$  le long de  $d_1 \cup d_2 \cup \dots \cup d_n$  on obtient à la place du triangle  $(s_1 s_2 s_3)$  le  $n$ -gone qui ne se détermine pas de manière unique par les longueurs de ses côtés.

Revenons au cas du pantalon. On va introduire de nouveaux paramètres qui peuvent être plus convenables, car ils sont soumis à des conditions plus cohérentes qui permettent de voir l'espace des déformations du pantalon comme l'espace des déformations de l'ensemble de deux triangles euclidiens, et ils ne requièrent pas la connaissance de la position du point singulier. Soit  $k_i$  le segment géodésique qui réalise la distance  $a_i$  entre  $c_{i+1}$  et  $c_{i+2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , figure 3.4.

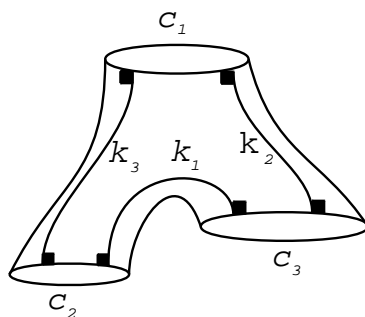


FIGURE 3.4 – Le segment géodésique  $k_i$  réalise la distance  $a_i$  entre  $c_{i+1}$  et  $c_{i+2}$ .

On a la proposition suivante.

**Proposition 3.1.2.** Soit  $M$  un pantalon plat à une singularité conique  $s$ . Soient  $l_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  les longueurs des composantes du bord  $c_i$ , et  $a_i$  les longueurs des segments géodésiques joignant les  $c_i$ . Les longueurs  $l_i, a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sous les conditions suivantes :

- 1)  $0 < l_i < \infty$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,
- 2)  $l_i \leq l_{i+1} + l_{i+2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

- 3)  $0 < a_i < \infty$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  
 4)  $a_i \leq a_{i+1} + a_{i+2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  
 5) Si pour un certain  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $l_i = l_{i+1} + l_{i+2}$  alors  
 $a_i < a_{i+1} + a_{i+2}$ ,

sont des paramètres qui déterminent  $M$  de manière unique à isométrie près.

Les conditions dans la proposition 3.1.2 sont équivalentes à dire que l'on a deux triangles euclidiens (les quatre premières conditions) pour lesquels un cas dégénéré d'un triangle empêche un cas dégénéré de l'autre (la cinquième condition).

## 3.2 L'espace des déformations du pantalon plat

Notons par  $\mathcal{C}$  l'ensemble de tous les structures plates définissable par les paramètres  $l_i, a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sous les conditions précédentes, et par  $\mathcal{B}$  l'ensemble de tous les 6-uplets  $(l_1, l_2, l_3, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^6$  qui satisfont ces conditions. On peut définir une application bijective  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  telle qu'à une structure plate  $\mathfrak{f} \in \mathcal{C}$  correspond l'unique 6-uplet  $(l_1, l_2, l_3, a_1, a_2, a_3)$  de  $\mathcal{B}$  qui détermine  $\mathfrak{f}$ . Clairement, on a  $\Phi(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ .

Notons par  $\mathcal{F}(M)$  l'espace de toutes les structures plates avec un seul point singulier sur le pantalon  $M$ . Fixons une orientation sur  $M$  et soit  $\text{Homeo}^+(M, \partial)$  l'ensemble des homéomorphismes de  $M$  qui préservent l'orientation et chaque composantes du bord de  $M$  (en tant qu'ensemble). Il est bien connu que chaque élément de  $\text{Homeo}^+(M, \partial)$  est isotope à l'identité (voir Exposé 2 dans [1]). L'espace  $\text{Homeo}^+(M, \partial)$  agit sur  $\mathcal{F}(M)$  comme suit : Si  $h \in \text{Homeo}^+(M, \partial)$  et  $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}(M)$  est considérée comme une fonction distance, alors  $(h, \mathfrak{f}) \mapsto h^*\mathfrak{f}$  où  $h^*\mathfrak{f}(x, y) := \mathfrak{f}(h(x), h(y))$ .

**Définition 3.2.1.** On définit l'espace des déformations  $\mathcal{T}(M)$  de  $M$  comme étant le quotient  $\mathcal{F}(M)/\text{Homeo}^+(M, \partial)$ .

*Remarque 3.2.1.* La définition 3.2.1 est équivalente à la définition 2.1.2 puisqu'on a un seul point singulier sur le pantalon plat  $M$ .

Clairement,  $\mathcal{T}(M)$  consiste de toutes les structures plates qui appartiennent à  $\mathcal{C}$ . A chaque structure plate à singularité conique sur  $M$  on peut associer une configuration unique, qui consiste en un triangle  $T$  et trois rectangles  $R_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , collés comme sur la figure 3.2. Inversement, à chaque configuration on peut associer une structure plate unique à une singularité

conique sur  $M$ . Ceci définit une application bijective  $\Phi : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{B}$ , et  $\Phi(\mathcal{T}(M)) = \mathcal{B}$ .

On considère une topologie sur les sous-espaces de  $\mathcal{T}(M)$  des structures à singularités fixés. Pour un tel sous-espace, sur le complémentaire des points singuliers on a une structure plate au sens usuel (une métrique riemannienne de courbure nulle partout), et la structure est définie par un atlas à valeurs dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  avec changements de cartes isométriques (c'est une structure géométrique), et on prend la topologie usuelle sur l'espace de ces structures.

**Proposition 3.2.1.** *L'application  $\Phi : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{B}$  est un homéomorphisme.*

Il est clair que  $\mathcal{B}$  est un sous-ensemble convexe non-borné de  $\mathbb{R}^6$ . En effet, l'ensemble de paramètres  $l_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  peut être vu comme l'espace de tous les triangles euclidiens qui peuvent être dégénérés, mais sans qu'aucun côté ne soit de longueur nulle. Représenté dans  $\mathbb{R}^3$ , cet ensemble donne une pyramide non-bornée de trois faces dont le sommet et les trois côtés sont enlevés. Cet espace est convexe dans  $\mathbb{R}^3$ . La même chose peut être dite de l'ensemble des paramètres  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Par conséquent,  $\mathcal{B}$  est convexe dans  $\mathbb{R}^6$ .

Le bord  $\partial\mathcal{B}$  a six composantes qui sont des sous-ensembles convexes non-bornés de  $\mathbb{R}^5$ . Elles correspondent aux cas d'égalités dans les inégalités triangulaires. Notons  $\partial_i\mathcal{B}_l$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  la composante du bord déterminée par

$$l_i = l_{i+1} + l_{i+2}.$$

Les ensembles  $\partial_i\mathcal{B}_l$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont des sous-ensembles de  $\partial\mathcal{B}$  d'intersection vide deux à deux. De manière semblable, notons  $\partial_j\mathcal{B}_a$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$  la composante du bord déterminée par

$$a_j = a_{j+1} + a_{j+2}.$$

Les ensembles  $\partial_j\mathcal{B}_a$ ,  $j = 1, 2, 3$  sont aussi des sous-ensembles de  $\partial\mathcal{B}$  d'intersection vide deux à deux.

L'intersection  $\partial_{i,j}(\partial\mathcal{B}) = \partial_i\mathcal{B}_l \cap \partial_j\mathcal{B}_a$ , est un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}^4$  homéomorphe à  $\mathbb{R}^4$  si  $i \neq j$ , et vide si  $i = j$ .

Alors, par l'homéomorphisme  $\Phi$ , on a la description suivante de l'espace des déformations :

**Corollaire 3.2.2.** *L'espace des déformations  $\mathcal{T}(M)$  du pantalon plat à une singularité conique est homéomorphe à une sous-variété non-compacte de  $\mathbb{R}^6$  de dimension 6. Cet espace a une structure cellulaire constituée d'une cellule de dimension 6 et six cellules de co-dimension un sur le bord.*

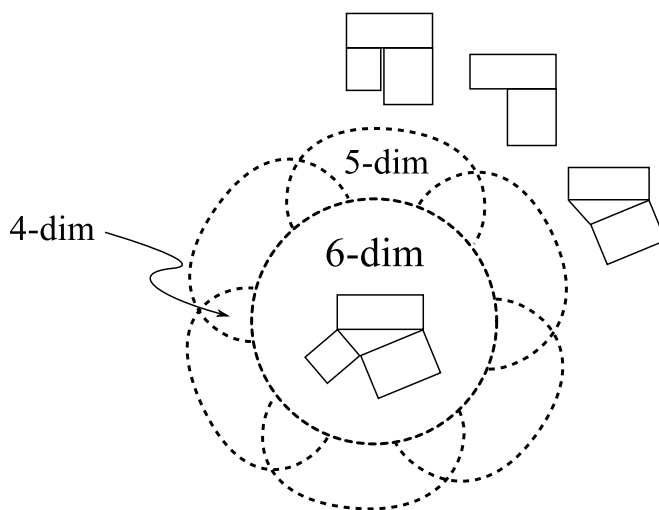


FIGURE 3.5 – Une section dans l’espace des déformations du pantalon plat qui est de dimension 6 et ses composantes du bord. Les composantes du bord représentent deux façons différentes de dégénération qui alternent

Sur la figure 3.5, on illustre la structure cellulaire de l’espace des déformations et les intersections entre les composantes du bord de cet espace.

On sait que tout sous-ensemble convexe d’un espace euclidien  $\mathbb{E}^n$  est contractile. Ce qui implique le résultat :

**Théorème 3.2.3.**  $\mathcal{T}(M)$  est un espace contractile.

*Remarque 3.2.2* (Due à Athanase Papadopoulos). Soit  $\mathcal{T}_M(M)$  l’espace des déformations des structures plates à une singularité conique sur le pantalon définie par une paire de feuilletages mesurés transverses. Cet espace est de dimension 4. Puisque  $\mathcal{T}(M)$ , l’espace des déformations de toutes les structures plates à une singularité conique sur le pantalon, est de dimension 6, comme le montre la proposition 3.1.1, alors  $\mathcal{T}_M(M) \subsetneq \mathcal{T}(M)$ . Par conséquent, l’espace des structures plates que l’on étudie ici est bien plus grand que l’espace des structures plates induites par les différentielles quadratiques holomorphes avec un zéro.

### 3.3 Paramétrisation par les classes d’arcs

On sait que (voir [1, p. 28]) :

**Corollaire 3.3.1.** L’ensemble  $A(M)$  des classes d’isotopie d’arcs  $I \subset M$ , avec  $\partial I \subset \partial M$ , chaque extrémité pouvant bouger sur la composante connexe

relative de  $\partial M$ , et représentant des éléments non-triviaux de  $\pi_1(M, \partial M)$ , possède exactement six éléments, classés par les composantes connexes de  $\partial M$  où tombent les extrémités des arcs respectifs.

Les éléments de  $A(M)$  sont donnés sur la figure 3.6. Ils sont notés  $\tau_{ij}$ , où  $i, j$  sont les numéros des composantes du bord où tombent les bouts de l'arc  $\tau_{ij}$ .

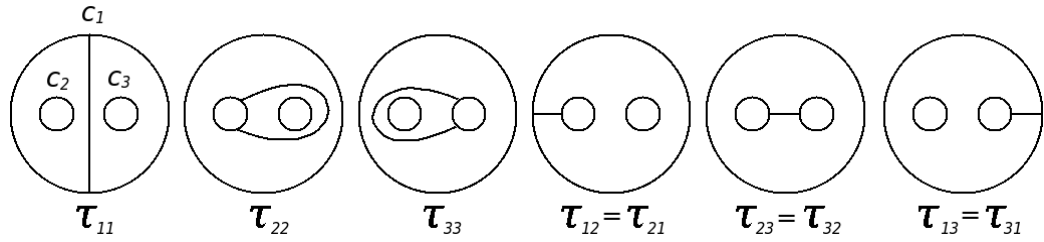


FIGURE 3.6 – Les six modèles de courbes dans  $A(M)$ .

Maintenant, on se pose la question : Est-ce que les longueurs des segments géodésiques représentant ces classes d'arcs sur le pantalon plat à singularité conique paramétrisent ces pantalons ? La réponse est donnée par cette proposition :

**Proposition 3.3.2.** *Un pantalon plat à singularité conique admet pour paramètres les longueurs des segments géodésiques représentant les classes d'isotopie d'arcs entre les composantes du bord.*

Pour prouver cette proposition on a besoin des lemmes suivants :

**Lemme 3.3.3.** *Soit  $(ABC)$  un triangle euclidien de longueurs de côtés  $\alpha, \beta, \gamma$ , comme sur la figure 3.7. La hauteur du triangle  $h_a$  issue de  $A$  est à l'intérieur du triangle si et seulement si :*

$$\alpha^2 > |\beta^2 - \gamma^2|.$$

*Démonstration.* Il est facile de voir qu'il est nécessaire et suffisant pour que la hauteur  $h_a$  soit à l'intérieur du triangle que les deux angles de base  $\widehat{B}$  et  $\widehat{C}$  soient aigus. C'est-à-dire :

$$\cos(\widehat{B}) > 0, \cos(\widehat{C}) > 0$$

Utilisant la formule d'Al-Kashi :

$$\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} > 0, \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} > 0$$

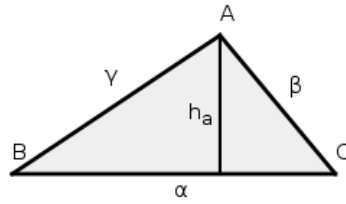


FIGURE 3.7 – Une hauteur à l'intérieur du triangle.

Ce qui équivaut

$$\alpha^2 > \beta^2 - \gamma^2, \alpha^2 > \gamma^2 - \beta^2$$

et donc

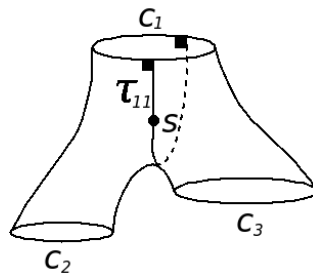
$$\alpha^2 > |\beta^2 - \gamma^2|$$

□

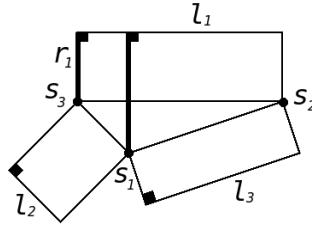
**Lemme 3.3.4.** *A l'intérieur d'un triangle euclidien, il y a une seule hauteur ou bien les trois hauteurs.*

*Démonstration.* La somme de mesures des angles dans un triangle est égale à  $\pi$ . Donc, au moins deux de ses angles sont aigus. Ceci implique qu'il a au moins une hauteur à l'intérieur du triangle. Par ailleurs, si deux hauteurs sont à l'intérieur du triangle, ceci implique que tous les angles sont aigus, et donc la troisième hauteur est à l'intérieur du triangle. □

*Démonstration de la proposition 3.3.2.* On va utiliser la même notation  $\tau_{ij}$  pour les segments géodésiques représentant les classes d'arcs, et on note par  $t_{ij}$  la longueur de  $\tau_{ij}$ . La figure 3.8 montre  $\tau_{11}$  sur le pantalon. La figure 3.9


 FIGURE 3.8 –  $\tau_{11}$  sur le pantalon.

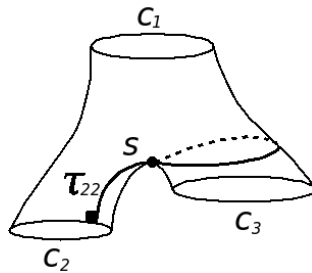
montre la même géodésique  $\tau_{11}$  (en gras) mais sur le pantalon découpé. Les informations que l'on possède sur le pantalon et son découpage permettent d'affirmer que les  $\tau_{ij}$  passent par la singularité  $s$ . En effet, pour les géodésiques

FIGURE 3.9 –  $\tau_{11}$  (en gras) sur le pantalon découpé.

$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$ , ceci est expliqué en détails dans [17], car ce sont les géodésiques  $k_3, k_1, k_2$  respectivement, figure 3.2. Pour les autres  $\tau_{ij}$  quand  $i = j$ , on peut vérifier leur passage par la singularité sur la figure 3.9.

On peut alors voir une géodésique  $\tau_{ij}$  comme étant une concaténation de deux segments géodésiques non homotopes reliant la singularité aux composantes du bord  $c_i$  et  $c_j$ . Si  $i \neq j$ , ce sont les segments géodésiques  $k_i$  composés de deux segments géodésiques  $d_i$  et  $d_j$ . Si  $i = j$ , chaque  $\tau_{ii}$  est composée de  $d_i$  et d'un autre segment géodésique non-homotope reliant la singularité  $s$  à  $c_i$  aussi. Ce dernier, comme on peut voir sur la figure 3.9, est une concaténation, à son tour, de deux segments géodésiques. Un d'entre eux est isométrique à  $d_i$ . L'autre peut être en l'un des deux cas :

- Soit la hauteur  $h_i$  du triangle sur son côté parallèle à  $c_i$  si la hauteur est à l'intérieur du triangle. Comme c'est le cas pour  $\tau_{11}$  sur la figure 3.9.
- Soit le côté le plus court du triangle parmi les deux côtés parallèles à  $c_{i+1}$  et  $c_{i+2}$ . Sur les figures 3.10 et 3.11, c'est  $\tau_{22}$  qui représente ce cas.

FIGURE 3.10 –  $\tau_{22}$  sur le pantalon, quand un côté du triangle en fait partie.

On va noter par  $v_i$  la longueur du segment géodésique  $h_i$  qui réalise la hauteur du triangle sur son côté parallèle à  $c_i$ . D'après la discussion précédente et le lemme 3.3.3, on peut trouver les relations suivantes entre les longueurs des  $\tau_{ij}$  et les différentes longueurs décrites plus haut :

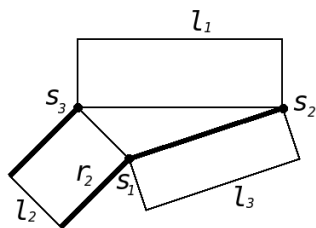


FIGURE 3.11 –  $\tau_{22}$  sur le pantalon découpé, quand un côté du triangle en fait partie.

$$t_{ij} = \begin{cases} r_i + r_j & \text{si } i \neq j, \\ 2r_i + v_i & \text{si } i = j \\ & \text{et } l_i^2 > |l_{i+1}^2 - l_{i+2}^2|, \\ 2r_i + \min(l_{i+1}, l_{i+2}) & \text{si } i = j \\ & \text{et } l_i^2 \leq |l_{i+1}^2 - l_{i+2}^2|. \end{cases} \quad (3.2)$$

Peut-on construire un homéomorphisme entre l'espace donné par les paramètres  $l_i, a_i, i = 1, 2, 3$  et l'espace donné par les  $t_{ij}$  ?

Pour  $i \neq j$ , les segments géodésiques  $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$ , qui sont notées dans [17] par  $k_3, k_1, k_2$  respectivement, ont comme longueurs  $t_{12} = a_3, t_{23} = a_1, t_{13} = a_2$  respectivement. Donc, il reste à démontrer que la connaissance des longueurs  $t_{ii}, i = 1, 2, 3$  est équivalente à la connaissance des  $l_i, i = 1, 2, 3$ .

Si on connaît les  $l_i$ , qui sont les longueurs des côtés du triangle vu sur le pantalon découpé, figure 3.2, alors on peut calculer les hauteurs du triangle. Ceci est facile à partir de la formule de Héron (A.1) pour calculer l'aire du triangle, et la formule connue de l'aire :

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}. \quad (3.3)$$

Donc, on peut calculer les  $t_{ii}$  à partir des relation (3.2).

Maintenant, si l'on connaît les  $t_{ii}$ , peut-on retrouver les  $l_i$  ? Les conditions sur les relations (3.2) sont exprimées par les  $l_i$  qui ne devraient pas être connues a priori. Quelles sont les relations et les conditions qui nous permettent de calculer les longueurs  $l_i$  ?

La connaissance des  $t_{ij}, i \neq j$  permet de calculer les  $r_i$ . On va noter par  $q_i = t_{ii} - 2r_i, i = 1, 2, 3$  les nombres obtenus de la connaissance des  $t_{ii}$  et des  $r_i$  par les relations (3.2). Reste à savoir si ces nombres représentent des longueurs de hauteurs ou de côtés dans le triangle. Surtout, prouver l'impossibilité du double sens pour un nombre  $q_i$ .



Par le lemme 3.3.4, à l'intérieur du triangle sur le pantalon, il existe une seule hauteur ou les trois hauteurs. Alors, parmi les trois nombres  $q_i$ , soit il existe la longueur d'une hauteur et les deux autres sont les longueurs des deux côtés voisins, soit tous les trois sont des longueurs de hauteurs. Dans les deux cas on peut affirmer que le plus petit nombre est une longueur d'une hauteur. De plus, cette longueur correspond à la hauteur issue du sommet du plus grand angle et projette sur le côté le plus grand.

Sans perte de généralité, on suppose que  $q_1$  est le plus petit parmi les  $q_i$ , et que l'on a l'ordre  $q_1 \leq q_2 \leq q_3$ . Soit  $A$  le sommet duquel est issue la hauteur correspondante  $h_1$ .

Le fait que  $q_2, q_3$  soient des longueurs de côtés équivaut à dire que les deux hauteurs  $h_2, h_3$  ne sont pas à l'intérieur du triangle, et en relation :

$$\cos(\widehat{A}) \leq 0. \quad (3.4)$$

Et le fait que  $q_2, q_3$  soient des longueurs des hauteurs équivaut à dire que les deux hauteurs  $h_2, h_3$  sont à l'intérieur du triangle, autrement dit, tous les  $h_i$  sont à l'intérieur du triangle, et en relation :

$$\cos(\widehat{A}) > 0. \quad (3.5)$$

Il est clair que ces deux cas ne peuvent pas arriver en même temps.

Reste à savoir s'il est possible de reconnaître la nature des valeurs  $q_i, i = 1, 2, 3$ . Ceci est possible car les relations (3.4) et (3.5) à l'aide de la formule d'Al-Kashi donnent la relation que les  $q_i$  doivent vérifier dans chacun des cas.

La relation (3.4), sachant que dans ce cas on a

$$l_2 = q_2, l_3 = q_3, l_1 = \sqrt{q_3^2 - q_1^2} + \sqrt{q_2^2 - q_1^2},$$

(voir les triangles droits sur la figure 3.12) donne :

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{A}) &\leq 0, \\ \frac{q_2^2 + q_3^2 - \left(\sqrt{q_3^2 - q_1^2} + \sqrt{q_2^2 - q_1^2}\right)^2}{2q_2q_3} &\leq 0, \\ q_2^2 + q_3^2 &\leq \left(\sqrt{q_3^2 - q_1^2} + \sqrt{q_2^2 - q_1^2}\right)^2. \end{aligned}$$

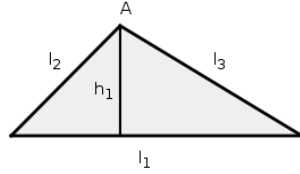


FIGURE 3.12 – La petite hauteur correspond à l'angle et au côté les plus grands.

On développe sachant que  $q_1 \leq q_2 \leq q_3$ ,

$$\begin{aligned} q_2^2 + q_3^2 &\leq q_3^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_1^2 + 2\sqrt{(q_3^2 - q_1^2)(q_2^2 - q_1^2)}, \\ q_1^2 &\leq \sqrt{(q_3^2 - q_1^2)(q_2^2 - q_1^2)}, \\ q_1^4 &\leq q_3^2 q_2^2 - q_1^2 q_2^2 - q_1^2 q_3^2 + q_1^4, \end{aligned}$$

enfin

$$q_1^2 \leq \frac{q_2^2 q_3^3}{q_2^2 + q_3^2}. \quad (3.6)$$

La relation (3.5), sachant que dans ce cas on a

$$l_i = \frac{2\text{Aire}}{q_i}, \quad q_i \neq 0,$$

donne :

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{A}) &> 0, \\ \frac{\frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_1^2}}{2 \frac{1}{q_2} \frac{1}{q_3}} &> 0, \\ \frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_1^2} &> 0, \\ \frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_3^2} &> \frac{1}{q_1^2}, \\ q_3^2 q_1^2 + q_2^2 q_1^2 &> q_2^2 q_3^2, \end{aligned}$$

et donc

$$q_1^2 > \frac{q_2^2 q_3^3}{q_2^2 + q_3^2}. \quad (3.7)$$

Le cas  $q_1 = 0$  est inclus dans le cas de la relation (3.4).

Enfin pour résumer : Si l'on a les  $t_{ij}$ , on calcule les

$$r_i = \frac{t_{i,i+1} + t_{i,i+2} - t_{i+1,i+2}}{2}, i = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

et les

$$q_i = t_{ii} - 2r_i, i = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Les paramètres  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont donnés par :

$$a_1 = t_{23}, a_2 = t_{13}, a_3 = t_{12}.$$

Puis si la condition (3.6) est vérifiée, les paramètres  $l_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont donnés par :

$$l_1 = \sqrt{q_3^2 - q_1^2} + \sqrt{q_2^2 - q_1^2}, l_2 = q_2, l_3 = q_3, \quad (3.10)$$

et sinon, la condition (3.7) est vérifiée et les  $l_i$  sont donnés par :

$$l_i = \frac{2Aire}{q_i}.$$

L'aire du triangle peut être calculée à partir des longueurs  $v_i$  de ses hauteurs par une relation facile à déduire de la formule de Héron (A.1) [3, formule 3 p.136].

$$Aire = \frac{v_1^2 v_2^2 v_3^2}{\sqrt{(v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_1)(v_1 v_2 + v_2 v_3 - v_3 v_1)(v_1 v_2 - v_2 v_3 + v_3 v_1)(-v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_1)}}.$$

On a alors les relations qui définissent un homéomorphisme entre les deux ensembles de paramètres. Pour compléter la description de l'espace des paramètres il faut donner les conditions qui maîtrisent les paramètres. Malheureusement, on va voir que ces conditions sont beaucoup plus compliquées que les conditions sur l'ensemble des paramètres  $l_i, r_i$  ou l'ensemble des paramètres  $l_i, a_i$ , malgré qu'elles en découlent.

D'abord, comme les paramètres  $t_{ij}$ ,  $i \neq j$  ne sont rien d'autre que les  $a_i$ , ils sont soumis aux mêmes conditions. Donc

$$t_{ij} \leq t_{i+1,j+1} + t_{i+2,j+2}, i, j = 1, 2, 3, i \neq j.$$

Ce qui est équivalent aussi aux conditions :  $0 \leq r_i < \infty$ ,  $i = 1, 2, 3$ , d'après les égalités (3.8).

Le cas où l'hauteur  $h_i$  est la seule à être à l'intérieur du triangle (relation (3.6)) : A partir des relations (3.2) et les conditions :

$$0 < l_i < \infty, i = 1, 2, 3 \text{ et } 0 \leq r_i < \infty, i = 1, 2, 3,$$

les  $t_{i+1,i+1}, t_{i+2,i+2}$  vérifient

$$\begin{aligned} 0 < t_{i+1,i+1} < \infty, \\ 0 < t_{i+2,i+2} < \infty, \end{aligned}$$

et à partir de la condition :

Si pour un certain  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $l_i = l_{i+1} + l_{i+2}$ , alors  $0 < r_i < \infty$ ,

et le fait que  $0 \leq v_i < \infty$ ,  $v_i = 0$  implique que  $0 < r_i < \infty$ . Et donc les relations (3.2) donnent :

$$0 < t_{ii} < \infty.$$

Pour le cas où toutes les hauteurs sont à l'intérieur du triangle, on raisonne pareillement. On conclut que l'on a, dans tous les cas, les conditions :

$$0 < t_{ii} < \infty, i = 1, 2, 3.$$

La condition  $l_i \leq l_{i+1} + l_{i+2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , si  $h_i$  est la seule hauteur à l'intérieur du triangle, nous donne :

$$t_{ii} \geq \frac{2Aire}{t_{i+1,i+1} + t_{i+2,i+2} - 2t_{i+1,i+2}} + t_{i,i+1} + t_{i,i+2} - t_{i+1,i+2}$$

Et, si toutes les hauteurs sont à l'intérieur du triangle, on a :

$$\begin{aligned} t_{ii} \geq & \frac{(t_{i+2,i+2} + t_{i,i+1} - t_{i+1,i+2} - t_{i,i+2})(t_{i+1,i+1} - t_{i,i+1} - t_{i+1,i+2} + t_{i,i+2})}{t_{i+1,i+1} + t_{i+2,i+2} - 2t_{i+1,i+2}} \\ & + t_{i,i+1} + t_{i,i+2} - t_{i+1,i+2}. \end{aligned}$$

L'aire du triangle peut être calculée en fonction des  $t_{ij}$  utilisant la formule (3.3) et la relation qui donne  $l_1$  dans (3.10) et les relations (3.9), où  $q_1$  est égale à la longueur  $v_1$  de la hauteur  $h_1$ .  $\square$

### 3.4 Les géodésiques simples fermées sur une sphère plate singulière à trous

Il est utile parfois de savoir si une géodésique particulière passe par un point singulier ou pas. Ceci sera plus clair dans le chapitre 4, où on étudie le phénomène de stagnation d'un segment géodésique ou une géodésique fermée en un point singulier malgré sa soumission à un twist de Frenkel-Nielsen le long d'une géodésique simple fermée transverse.

**Proposition 3.4.1.** *Sur une s.p.s.c. à bord, ayant une singularité, de genre zéro et avec  $b > 3$  composantes du bord, toutes les géodésiques fermées essentielles passent par le point singulier.*

*Démonstration.* Une géodésique essentielle sépare la surface en deux sous-surfaces, chacune de genre zéro et avec un nombre de composantes du bord strictement inférieur à  $b$ . Supposons que cette géodésique essentielle  $\gamma$  ne passe pas par le point singulier  $s$ . Ceci implique que  $s$  appartient à l'une des sous-surfaces obtenues, ce qui est impossible par la formule de Gauss-Bonnet, car la courbure en  $s$  est  $\kappa = (2 - b) \times 2\pi$  et sur chacune des sous-surfaces obtenues la courbure permise doit être strictement supérieure.  $\square$

A titre d'exemple, la figure 3.13 montre une surface de genre zéro à bord à quatre composantes du bord. Sur cette surface on a représenté trois courbes essentielles.

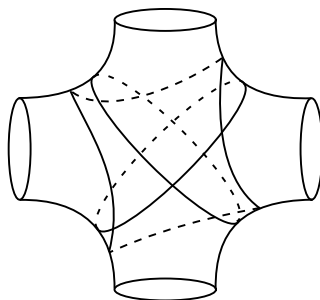


FIGURE 3.13 – Des courbes essentielles

**Proposition 3.4.2.** *Sur une s.p.s.c. de genre zéro à bord avec quatre composantes du bord ayant deux points singuliers coniques, chacun ayant une courbure égale à  $-2\pi$ , il existe au plus une seule classe d'homotopie de courbes simples fermées essentielles telle qu'une géodésique représentant cette classe ne passe par aucun point singulier.*

*Démonstration.* Supposons qu'il y ait deux géodésiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  représentant deux classes d'homotopie de courbes simples fermées essentielles différentes. Supposons que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ne passent par aucun point singulier. Donc, elles sont entièrement à l'intérieur de la surface et elles forment entre elles des angles à valeurs dans l'intervalle  $]0, \pi[$ . Puisque les géodésiques sont simples, sur le bord d'un anneau ou d'un disque on a une alternance de sous-segments de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Chaque géodésique sépare la surface en deux pantalons. Les deux géodésiques à la fois séparent la surface en quatre anneaux et des disques. Donc, chaque anneau est borné par un bigone et chaque disque est un quadrilatère. D'après la condition sur les valeurs des angles, chaque anneau a

deux points singuliers sur une composante du bord avec des courbures strictement positives. Puisque la caractéristique d'Euler d'un anneau est nulle, chaque anneau doit avoir des points singuliers de courbure négative avec une somme de courbures strictement supérieure à  $-2\pi$ . Donc aucun des deux points singuliers de la s.p.s.c. ne peut être à l'intérieur de l'un des anneaux ni sur une composante du bord de la surface. De même, aucun des deux points singuliers de la s.p.s.c. ne peut être à l'intérieur de l'un des quadrilatères. Mais notre hypothèse implique qu'aucun des deux points singuliers de la surface n'est sur l'une des deux géodésiques supposées, ce qui implique que sur cette s.p.s.c. il n'y a pas de points singuliers. On conclue que notre hypothèse sur l'existence de deux géodésiques est fausse.  $\square$

*Remarque 3.4.1.* Ceci implique clairement que cette surface contient au plus un seul cylindre essentiel comme sous-surface.



# Chapitre 4

## Flot de Frenchel-Nielsen sur les espaces des déformations

Dans ce chapitre on étudie l'injectivité du flot de Frenchel-Nielsen sur l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$  d'une surface plate à singularités coniques  $S$ . On utilise une définition que l'on appelle twist de Frenchel-Nielsen, analogue à la définition de même nom qui est classique dans le cas des structures hyperboliques. Un twist de Frenchel-Nielsen définit un flot sur l'espace des déformations qui dépend d'un paramètre réel.

Pour mesurer l'impact d'un twist sur la structure plate de la surface, on peut prendre un segment géodésique joignant deux points singuliers (ou un point singulier à lui-même) d'intersection non vide avec la géodésique simple fermée  $\gamma$  du twist ou bien une géodésique simple fermée d'intersection non vide avec  $\gamma$ . Puis, on regarde la longueur de l'arc ou la géodésique transverse en fonction du paramètre du twist  $t$ . En effet, les longueur d'un tel arc ou d'une telle courbe sont des invariants de la classe d'homotopie de la s.p.s.c. et on peut donc les utiliser pour distinguer des points de l'espace des déformations.

En étudiant la variation de la fonction longueur  $\ell(t)$  on montrera que le flot de Frenchel-Nielsen sur l'espace des déformations est injectif.

Les formules des dérivées des fonctions longueur prouvées dans les propositions 4.2.8 et 4.2.9 sont des analogues des formules de Kerckhoff [14] pour le cas hyperbolique.

Pour faire simple, on utilise parfois le mot *twist* au lieu de *twist de Frenchel-Nielsen* et le mot *flot* au lieu de *flot de Frenchel-Nielsen*.



## 4.1 Le marquage et le flot de Frenchel-Nielsen

**Définition 4.1.1** (Twist de Frenchel-Nielsen). Soient  $S$  une s.p.s.c. et  $\gamma$  une géodésique simple fermée sur  $S$ . Un *twist de Frenchel-Nielsen* à gauche (resp. à droite) est le fait de couper  $S$  le long de  $\gamma$  puis recoller les deux composantes du bord obtenues par isométrie après avoir translaté l'une par rapport à l'autre à gauche (resp. à droite) d'une distance  $t$  par rapport au recollement initial. L'inverse d'un twist à gauche est un twist à droite.

Un twist de Frenchel-Nielsen d'une distance  $t$  le long d'une géodésique simple fermée  $\gamma$  sur une s.p.s.c.  $S$  est noté  $\mathcal{E}_\gamma^t$  et donne lieu à une s.p.s.c. qu'on note  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$ .

On remarque que dans le cas où  $\gamma$  passe par des points singuliers de  $S$ , le twist peut changer la structure des points singuliers de  $S$  qui sont sur  $\gamma$ . La figure 4.1, montre le cas où un point singulier, après un twist, est remplacé par deux points singuliers d'angle total en chaque point inférieur à l'angle total en le point singulier avant le twist. De la même manière, deux points singulier peuvent s'unir après un twist.

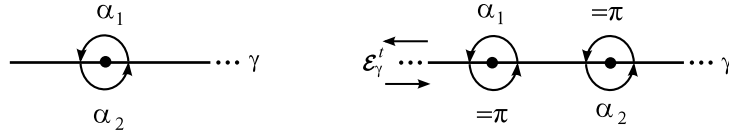


FIGURE 4.1 – L'effet d'un twist le long d'une géodésique  $\gamma$  qui passe par un point singulier  $s$ , faisant en ce point deux angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  supérieurs à  $\pi$ . Sur la surface obtenue,  $s$  est remplacé par deux points singuliers.

La surface  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  obtenue par un twist d'une distance  $t$  est équipée par un marquage combiné<sup>1</sup> naturel provenant de la surface  $S$  qui est considérée comme une surface de base. Ainsi, si l'on part d'une surface marquée  $S$ , alors en composant les marquages, on obtient après le twist une surface marquée  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$ .

Sur la figure 4.2, le passage de la surface  $S$  à la surface  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  est discontinu : l'image d'un segment géodésique  $\eta$  qui est transverse à  $\gamma$  dans  $S$  est l'union des deux segments  $\eta_1$  et  $\eta_2$  dans  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$ . Mais il y a un marquage combiné naturel entre les deux surfaces, dans lequel l'image de  $\eta$  est le segment géodésique  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  homotope au chemin composé de  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  et le sous-segment géodésique de  $\gamma$  joignant les deux copies du point d'intersection.  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  est représenté par une ligne pointillée.

1. Défini dans le chapitre 2.

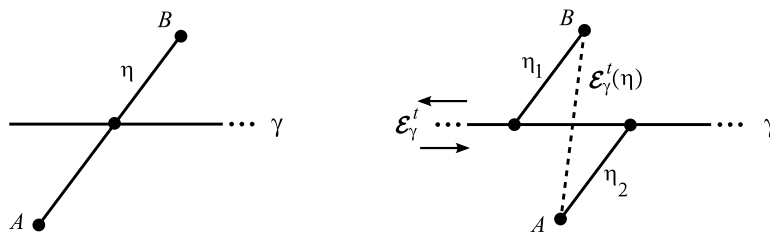


FIGURE 4.2 – L'image du segment géodésique  $\eta$  par le twist est le segment géodésique  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$ .

*Remarque 4.1.1.* Si la s.p.s.c. contient une partie cylindrique, alors sur cette partie il existe une famille infinie de géodésiques simples fermées dans la même classe d'homotopie. Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux géodésiques de cette famille, alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E}_{\gamma_1}^t(S)$  et  $\mathcal{E}_{\gamma_2}^t(S)$  sont égales en tant que s.p.s.c. marquées.

Ceci mène à cette proposition :

**Proposition 4.1.1.** *Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux géodésiques simples fermées homotopes sur une s.p.s.c.  $S$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E}_{\gamma_1}^t(S)$  et  $\mathcal{E}_{\gamma_2}^t(S)$  sont égales en tant que s.p.s.c. marquées.*

*Démonstration.* Si les images de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ne coïncident pas, alors, par la proposition 1.2.6, elles sont les composantes du bord d'un cylindre dans  $S$ ; pour cela les deux s.p.s.c.  $\mathcal{E}_{\gamma_1}^t(S)$  et  $\mathcal{E}_{\gamma_2}^t(S)$  sont isotopes.  $\square$

**Définition 4.1.2** (Le flot de Frenchel-Nielsen sur l'espace des déformations). Soient  $S$  une s.p.s.c. et  $\gamma$  une géodésique simple fermée sur  $S$ . Le *flot de Frenchel-Nielsen* à gauche (resp. à droite) passant par  $S$  est la famille  $(\mathcal{E}_\gamma^t(S))_{t \in \mathbb{R}}$  de s.p.s.c. telle que pour tout  $t \geq 0$  (resp.  $t \leq 0$ ),  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  est la s.p.s.c. obtenue de  $S$  par un twist de Frenchel-Nielsen de distance  $t$  le long de  $\gamma$ .

**Définition 4.1.3** (La fonction longueur de géodésique). Soient  $S_0$  une s.p.s.c. de base et  $h$  une classe d'homotopie de courbes simples fermées (resp. de chemins joignant deux points singuliers) dans  $S_0$ . On définit une application sur  $\mathcal{T}(S_0)$ ,  $l_h : \mathcal{T}(S_0) \rightarrow \mathbb{R}$  en accordant à toute s.p.s.c.  $S$  dans  $\mathcal{T}(S_0)$ , la valeur  $l_h(S)$  qui est la longueur d'une<sup>2</sup> géodésique simple fermée (resp. du segment géodésique joignant deux points singuliers) sur  $S$  dans la classe d'homotopie  $h$ .

2. On rappelle qu'une géodésique simple fermée dans une classe d'homotopie n'est pas toujours unique, mais sur une s.p.s.c. elles ont la même longueur.

Les fonctions longueurs sont les fonctions les plus étudiées sur l'espace des déformations des structures hyperboliques (espace de Teichmüller).

Dans ce qui suit, la longueur d'une géodésique simple fermée (resp. un segment géodésique joignant deux points singuliers)  $\eta$ , sur une s.p.s.c. donnée  $S$ , est noté  $\ell(\eta)$ . Quand  $S$  subit un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$  d'une distance  $t$  le long d'une géodésique simple fermée  $\gamma$  transverse à  $\eta$ , la longueur de la géodésique image  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  de  $\eta$  varie en fonction de  $t$  et est noté  $\ell_\eta(t)$  ou  $\ell(t)$ .

On considère que la surface  $S$  est orientée telle que le sens positif est dans le sens antihoraire. Tous les angles sont mesurés dans le sens positif.

**Lemme 4.1.2.** *Soit  $S$  une s.p.s.c.. S'il existe une géodésique simple fermée  $\gamma$  sur  $S$  qui ne passe par aucun point singulier, alors  $\gamma$  est contenue dans un cylindre maximal euclidien à bord géodésique. Si la surface  $S$  est différente du tore plat et du cylindre euclidien, alors la géodésique  $\gamma$  est contenue dans un cylindre maximal euclidien à bord géodésique qui a des points singuliers sur le bord. Si, de plus,  $\gamma$  est essentielle, alors  $\gamma$  est contenue dans un cylindre maximal euclidien à bord géodésique qui a des points singuliers sur chaque composante du bord.*

*Démonstration.* Puisque  $\gamma$  est géodésique et ne passe par aucun point singulier alors en tout point  $x$  de  $\gamma$  l'angle total de chaque côté est égal à  $\pi$ . Puisque le nombre de points singuliers sur  $S$  est supposé fini, on peut choisir un  $\varepsilon$ -voisinage de  $\gamma$  qui ne contient pas des points singuliers (appelé voisinage régulier). Dans ce voisinage on a une famille de géodésiques parallèles à  $\gamma$  qui constituent un cylindre autour de  $\gamma$ . Cette famille peut être élargie aussi loin qu'un voisinage régulier existe. Sur le tore plat et le cylindre euclidien cette famille maximale remplit la surface. Si la surface  $S$  est différente du tore plat et du cylindre euclidien, elle contient des points singuliers sur son bord, et le cylindre maximal qui contient  $\gamma$  ne peut pas être étendue au-delà des points singuliers.  $\square$

On va appeler ce cylindre un *anneau plat* de  $\gamma$  ou simplement un *anneau*.

**Lemme 4.1.3.** *Soit  $S$  une s.p.s.c.. Un segment géodésique  $\eta$  sur  $S$  joignant deux points singuliers  $A$  et  $B$  qui ne passe par aucun autre point singulier, a un voisinage plat  $V$  tel que  $A$  et  $B$  sont sur le bord  $\partial\bar{V}$  de son adhérence.*

*Démonstration.* Par la définition de s.p.s.c., tout point régulier a un voisinage plat. Pour le segment géodésique, on prend l'union des voisinages plats de ses points intérieurs. Ceci constitue un voisinage plat  $V$  de  $\eta$ . Il est clair que l'on peut prendre  $V$  tel que  $A, B \in \partial\bar{V}$ .  $\square$

*Remarque 4.1.2.* En particulier, l'adhérence du voisinage peut être un quadrilatère avec deux côtés parallèles au segment géodésique. On va appeler l'adhérence de ce voisinage une *bande plate*.

## 4.2 L'injectivité du flot de Frenché-Nielsen

On va étudier la variation de la fonction longueur d'un segment géodésique joignant deux points singuliers (resp. une géodésique fermée)  $\eta$ . Au lieu de considérer deux points singuliers, on considère deux points marqués combinatoirement  $A$  et  $B$ . Cette considération n'a pas d'effet sur la formule obtenue de la fonction longueur. En même temps, elle permettra d'appliquer la formule trouvée sur le cas d'une géodésique simple fermée.

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée différente du tore plat et du cylindre. Supposons qu'il existe sur  $S$  une géodésique simple fermée  $\gamma$  qui ne passe par aucun point singulier. Soit  $F$  un anneau plat de  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ . Soit  $\eta$  un segment géodésique joignant deux points marqués  $A$  et  $B$  dans  $F$ . Supposons que  $\eta$  et  $\gamma$  s'intersectent en un seul point  $C$  avec un angle  $\theta$  de  $\eta$  à  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  le segment géodésique image de  $\eta$  après le twist. Alors, la fonction longueur  $\ell(t) = \ell(\mathcal{E}_\gamma^t(\eta))$  est strictement convexe avec un seul minimum en  $t = -\ell(0) \cos \theta$ .*

*Démonstration.* Soit  $\ell(0)$  la longueur de  $AB = \mathcal{E}_\gamma^0(\eta)$  en  $t = 0$ . Soit  $\tilde{S}$  le revêtement universel de  $S$ . L'anneau plat  $F$  se relève en une bande plate  $\tilde{F}$  du relevé  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$ . Pour les autres géodésiques et points on garde les mêmes notations pour noter leurs relevés au revêtement universel pour éviter une notation lourde. L'état initial avant le twist dans  $\tilde{F}$  est illustré dans la figure 4.3, où on voit une copie du relevé de  $\eta$  traversant  $\tilde{\gamma}$  avec un angle  $\theta$ .

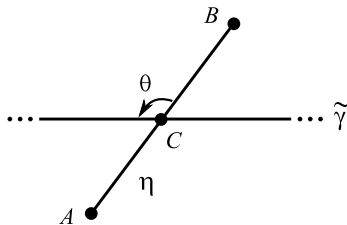
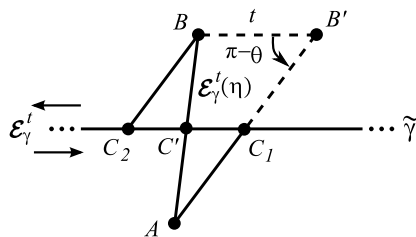


FIGURE 4.3 – L'état initial dans  $\tilde{F}$ .

Trouvons la longueur  $\ell(t)$  de  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  après un twist à gauche, figure 4.4. Après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ , l'anneau plat de  $\gamma$  reste régulier. Le point d'intersection  $C$

FIGURE 4.4 – Après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$  à gauche.

est scindé en deux copies  $C_1$  et  $C_2$ . Les segments  $AC$  et  $BC$  sur la figure 4.3 deviennent  $AC_1$  et  $BC_2$  respectivement sur la figure 4.4, et leurs longueurs ne changent pas. On considère  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  comme le segment géodésique joignant  $A$  et  $B$  homotope à la ligne cassée  $AC_1C_2B$ . Après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ , le nouveau segment géodésique  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  est contenu dans  $\tilde{F}$ . Soit  $B'$  un point sur l'extension géodésique de  $AC_1$  tel que  $\ell(AB') = \ell(0)$  et  $C_1 \in AB'$ . Alors, on peut considérer le triangle  $(AB'B)$ , dont l'angle en  $B'$  est égal à  $\pi - \theta$ , et on peut appliquer le théorème d'Al-Kashi :

$$\ell^2(t) = t^2 + \ell^2(0) - 2\ell(0)t \cos(\pi - \theta)$$

$$\ell^2(t) = t^2 + \ell^2(0) + 2\ell(0)t \cos \theta$$

et donc,

$$\ell(t) = \sqrt{t^2 + 2\ell(0) \cos(\theta)t + \ell^2(0)}. \quad (4.1)$$

La fonction  $\ell(t)$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ . En effet, le polynôme de second degré sous la racine carrée n'a pas de zéros, car son discriminant  $\Delta = -4\ell^2(0) \sin^2(\theta)$  est négatif. Puisque  $\ell(0) > 0$ , ce polynôme est strictement positif par le théorème des accroissements finis, et donc  $\ell(t)$  l'est aussi. Il est clair que  $\ell(t)$  est continue dérivable sur  $\mathbb{R}$ . En dérivant on trouve :

$$\ell'(t) = \frac{t + \ell(0) \cos \theta}{\sqrt{t^2 + 2\ell(0) \cos(\theta)t + \ell^2(0)}}. \quad (4.2)$$

La dérivée première  $\ell'(t)$  admet un zéro unique et ce zéro est en  $t = -\ell(0) \cos \theta$ . C'est une fonction continue dérivable sur  $\mathbb{R}$ . En dérivant à nouveau :

$$\ell''(t) = \frac{\ell^2(0) \sin^2 \theta}{(t^2 + 2\ell(0) \cos(\theta)t + \ell^2(0))^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.3)$$

La dérivée seconde  $\ell''(t)$  n'a pas de zéro, puisque  $\ell(0) > 0$  et  $0 < \theta < \pi$ . Ces limitations proviennent du fait que  $A, B \notin \gamma$ . La dérivée seconde  $\ell''(t)$  est strictement positive.

Alors, la fonction longueur  $\ell(t)$  est une fonction strictement convexe avec un seul minimum.

Quand on a déduit la fonction longueur (4.1) on a considéré un twist à gauche. Comme c'est convenu ci-dessus,  $t$  est pris positif quand le twist est à gauche et négatif quand le twist est à droite. On peut montrer que la relation (4.1) est la même pour les twists à gauche comme à droite.

La figure 4.5, montre le cas d'un twist à droite, pour lequel  $t \leq 0$ . La longueur du côté correspondant du triangle est alors  $-t$ . L'angle en  $B'$  est égal à  $\theta$ . De la même manière, on trouve :

$$\begin{aligned}\ell^2(t) &= (-t)^2 + \ell^2(0) - 2\ell(0) \cos(\theta) \times (-t) \\ \ell^2(t) &= t^2 + \ell^2(0) + 2\ell(0) \cos(\theta)t,\end{aligned}$$

et on a à nouveau la relation (4.1).

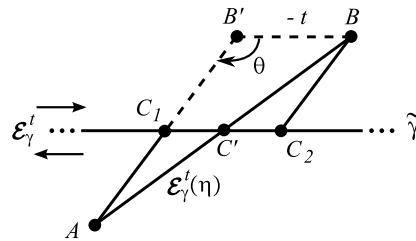


FIGURE 4.5 – Après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$  à droite.

□

On peut appliquer ce résultat à l'étude de l'effet d'un twist sur une structure plate à singularités coniques sur une surface. La proposition 4.2.1 implique directement le corollaire suivant :

**Corollaire 4.2.2.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée différente du tore plat et du cylindre. Supposons qu'il existe sur  $S$  une géodésique simple fermée  $\gamma$ , qui ne passe par aucun point singulier. Soit  $F$  un anneau plat de  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ . Soit  $\eta$  un segment géodésique joignant deux points marqués  $A$  et  $B$  dans  $F$ . Supposons que  $\eta$  et  $\gamma$  s'intersectent en un seul point  $C$  avec un angle  $\theta$  de  $\eta$  à  $\gamma$ . Alors, le segment géodésique  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  peut avoir la même longueur que  $\eta$  pour au plus deux valeurs de  $t$ , qui sont  $t = 0$  et  $t = -2\ell(0) \cos \theta$ .*

*De plus, si  $\eta$  est orthogonal à  $\gamma$ , alors  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  n'a jamais la même longueur que  $\eta$ , et ce pour toute valeur non-nulle de  $t$ .*

*Démonstration.* Le fait qu'il y ait au plus deux valeurs de  $t$  pour lesquelles  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  a la même longueur que  $\eta$  découle directement de la relation (4.1) dans la preuve de la proposition 4.2.1. Les valeurs de  $t$  sont facilement trouvées en résolvant l'équation  $\ell(t) = \ell(0)$ .

Si  $\eta$  est orthogonal à  $\gamma$  alors  $\cos \theta = 0$ . Ceci implique qu'il n'y a pas de valeur non-nulle de  $t$  pour laquelle  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  a la même longueur que  $\eta$ .  $\square$

**Théorème 4.2.3.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marqué différente du tore plat et du cylindre. Supposons qu'il existe une géodésique simple fermée  $\gamma$  sur  $S$  qui ne passe par aucun point singulier. Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ , avec  $t$  non-nul. Alors,  $S$  et  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  sont des points différents de l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 4.1.2, il y a un anneau plat  $F$  autour de  $\gamma$  avec points singuliers sur chaque composante de son bord. Prenons un point singulier sur chacune des composantes du bord. Notons ces points  $s_1$  et  $s_2$ . Il est clair que l'on peut prendre des segments géodésiques non-homotopes joignant  $s_1$  et  $s_2$  dans l'anneau plat  $F$ , figure 4.6. Sur ces segments géodé-

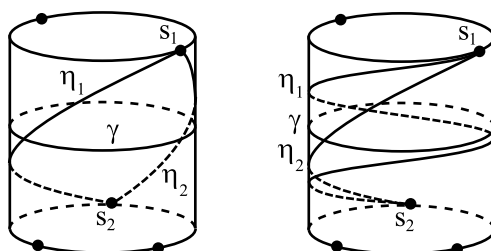


FIGURE 4.6 – Exemples de segments géodésiques non-homotopes joignant  $s_1$  et  $s_2$  à l'intérieur d'un anneau plat  $F$ .

siques les seuls points singuliers sont leurs extrémités  $s_1$  et  $s_2$ . Alors, on peut appliquer le corollaire 4.2.2 à cette situation. Soit  $\eta_1$  un segment géodésique dans  $F$  joignant  $s_1$  et  $s_2$ . Il rencontre  $\gamma$  en un seul point. Soit  $\theta_1$  l'angle de  $\eta_1$  à  $\gamma$ . Par le corollaire 4.2.2, la fonction longueur  $\ell_1(t) = \ell(\mathcal{E}_\gamma^t(\eta_1))$  peut avoir la même valeur que sa valeur en  $t = 0$  pour une valeur différente de  $t$ , ce qui veut dire que l'on ne peut pas distinguer la surface  $S$  de son image  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$ , comme points de l'espace des déformations, utilisant les valeurs de cette fonction. Pour cela on va considérer un autre segment géodésique  $\eta_2$  dans  $F$  joignant  $s_1$  et  $s_2$  non-homotope à  $\eta_1$ . Soit  $\theta_2$  l'angle de  $\eta_2$  à  $\gamma$ . On associe à  $\eta_2$  la fonction longueur  $\ell_2 = \ell(\mathcal{E}_\gamma^t(\eta_2))$ .

Soit  $t_1$  la valeur de  $t$  pour laquelle la fonction longueur  $\ell_1$  a la même valeur que sa valeur initiale en  $t = 0$ ; ce qui veut dire que l'on a  $\ell_1(t_1) = \ell_1(0)$ ,  $t_1 \neq 0$ . Par le corollaire 4.2.2,  $t_1 = -2\ell_1(0) \cos \theta_1$ . Maintenant, on

a besoin de voir s'il est possible que l'autre fonction longueur  $\ell_2$  prenne la même valeur que sa valeur initiale  $\ell_2(0)$  au même moment  $t_1$  que la fonction longueur  $\ell_1$ ; ce qui veut dire que  $\ell_2(t_1) = \ell_2(0)$ . Par le corollaire 4.2.2, on sait que  $\ell_2$  prend la même valeur que sa valeur initiale  $\ell_2(0)$ ,  $t = 0$  en une valeur  $t_2 = -2\ell_2(0) \cos \theta_2$ .

Vérifions s'il est possible que  $t_1 = t_2$ . On suppose que cette égalité soit vérifiée et on cherche une contradiction.

L'égalité  $t_1 = t_2$  donne,

$$\ell_1(0) \cos \theta_1 = \ell_2(0) \cos \theta_2. \quad (4.4)$$

Regardons le relevé  $\tilde{F}$  de l'anneau plat  $F$  au revêtement universel, figure 4.7. Notons  $\ell_\gamma$  la longueur du segment géodésique joignant les deux copies de  $s_2$ . Il est facile de voir que  $\ell_\gamma = p\ell(\gamma)$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .

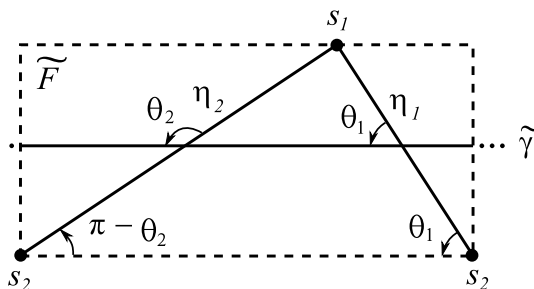


FIGURE 4.7 – Sur le relevé  $\tilde{F}$ .

Du triangle défini par  $s_1$  et les deux copies de  $s_2$  sur la figure 4.7 on trouve,

$$\cos \theta_1 = \frac{\ell_1^2(0) + \ell_\gamma^2 - \ell_2^2(0)}{2\ell_1(0)\ell_\gamma},$$

$$-\cos \theta_2 = \cos(\pi - \theta_2) = \frac{\ell_2^2(0) + \ell_\gamma^2 - \ell_1^2(0)}{2\ell_2(0)\ell_\gamma}.$$

De l'hypothèse dans la relation (4.4) on trouve  $\ell_\gamma = 0$ , qui implique  $\ell(\gamma) = 0$ . Ceci contredit le fait que  $\gamma$  est une géodésique simple fermée sur une surface. Alors pour tout twist non-trivial, il existe un segment géodésique joignant deux points singuliers dont la longueur change, et on a le résultat.  $\square$

**Exemple 4.2.1** (Recollement de deux pantalons plats, chacun à une singularité conique à l'intérieur). Soit  $P_1$  et  $P_2$  deux pantalons plats, chacun avec un point singulier à l'intérieur. Soit  $s_i$  le point singulier dans  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ . Soit  $\gamma_i$  une composante du bord de  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ . Supposons  $\ell(\gamma_1) = \ell(\gamma_2)$ . Notons



$\gamma$  la géodésique simple fermée obtenue en identifiant  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  par isométrie. Soit  $F$  l'anneau plat de  $\gamma$  qui a  $s_1$  et  $s_2$  sur son bord. Les longueurs de deux segments géodésiques non-homotopes joignant  $s_1$  et  $s_2$  et qui sont à l'intérieur de  $F$  sont suffisantes pour montrer que les deux s.p.s.c. obtenues par deux recollements différents sont différentes. Mais, ces longueurs ne sont pas nécessaires pour paramétriser la s.p.s.c. obtenue, puisque le flot de Frenchel-Nielsen a un seul paramètre  $t$  qui définit un chemin d'une surface à l'autre dans l'espace des déformations. On peut paramétrer toutes les s.p.s.c. obtenues par recollement de  $P_1$  et  $P_2$  le long de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en utilisant  $t$  seulement en plus des paramètres de  $P_1$  et  $P_2$ . Tout ce dont on a besoin est un point de départ dans l'espace des déformations; ce qui veut dire un recollement initial auquel on accorde la valeur  $t = 0$ . On choisit le recollement initial là où il existe un segment géodésique joignant  $s_1$  et  $s_2$  qui est orthogonal à  $\gamma$ , car il est de longueur minimale. D'après la proposition 3.4.2, la s.p.s.c. obtenue contient un seul cylindre essentiel.

De la même manière, on peut paramétrer le recollement de deux pantalons plats, chacun avec une singularité qui peut être sur la composante du bord utilisée pour le recollement.

**Proposition 4.2.4.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée. Supposons qu'il existe sur  $S$  deux géodésiques simples fermées  $\gamma$  et  $\eta$  qui ne passent par aucun point singulier et qui s'intersectent en un seul point  $C$  avec un angle  $\theta$  de  $\eta$  à  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  le segment géodésique image de  $\eta$  après le twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ . Alors, la fonction longueur  $\ell(t) = \ell(\mathcal{E}_\gamma^t(\eta))$  est strictement convexe.*

*La fonction longueur  $\ell(t)$  a en  $t = 0$  une dérivée seconde strictement positive qui dépend de l'angle d'intersection  $\theta$  et de la longueur  $\ell(0)$  de  $\eta$ . Elle est donnée par :*

$$\ell''(0) = \frac{\sin^2 \theta}{\ell(0)}.$$

*La dérivée première en  $t = 0$  est  $\ell'(0) = \cos \theta$ . Elle dépend de l'angle d'intersection.*

*Démonstration.* Par le lemme 4.1.2, chacune des géodésiques  $\eta$  et  $\gamma$  a un anneau plat. Notons  $F_1$  l'anneau plat de  $\eta$ . Supposons  $t$  suffisamment petit tel que l'image de  $\eta$  (la ligne cassée composée de  $\eta \setminus C$  et le segment géodésique le long  $\gamma$  liant les deux copies de  $C$  après le twist) reste contenue dans un anneau plat  $F_2$ . On marque un point  $D$  sur  $\eta$  différent de  $C$ . Coupons  $F_1$  orthogonalement à  $\eta$  en  $D$ . La figure 4.8 montre l'état avant (gauche), et l'état après (droite) le twist. Le point  $D$  est représenté par ses copies après la coupe, notées  $D_1$  et  $D_2$  avant le twist et  $D'_1$  et  $D'_2$  après le twist. Les

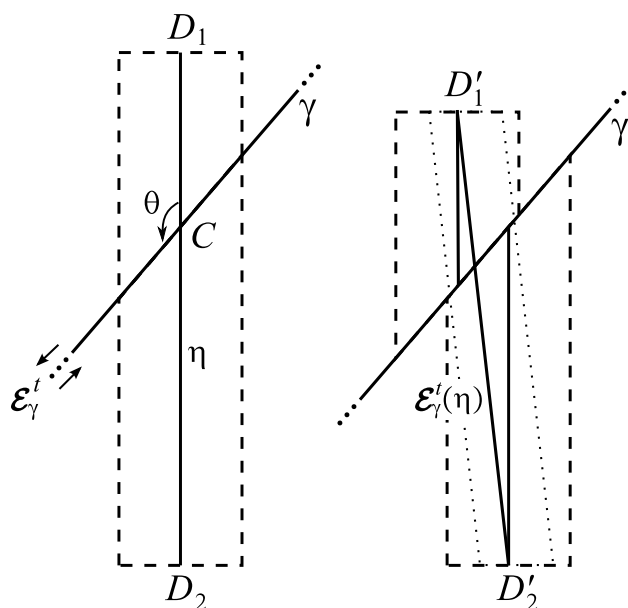


FIGURE 4.8 – L'anneau plat autour d'une géodésique fermée subissant un twist.

deux côtés de la coupe sont parallèles puisqu'ils sont orthogonaux au même segment géodésique  $D_1D_2$  qui ne passe par aucun point singulier. Ils restent parallèles après le twist puisque le twist a lieu le long d'une géodésique sans singularités.

Prenons le segment géodésique homotope à l'image de  $\eta$  joignant  $D'_1$  et  $D'_2$ . Ce segment géodésique forme une courbe fermée sur la surface  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$ . Elle fait un angle plat de chaque côté en le point  $D$ , car elle rencontre les deux côtés de la coupe avec le même angle. Alors, c'est une géodésique fermée homotope à l'image de  $\eta$  et elle ne passe par aucun point singulier. C'est, alors, la géodésique simple fermée  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$ .

Sa longueur est donnée par la relation (4.1) déjà trouvée dans la proposition 4.2.1, si l'on considère la géodésique fermée comme un segment géodésique de  $D_1$  à  $D_2$  croisant  $\gamma$  en  $C$ . On peut aussi vérifier cette relation directement sur la figure 4.8 avec un peu de calcul. La raison pour laquelle ceci marche, même si on se fixe un point  $D$  par marquage, est que  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  appartient à une famille de géodésiques fermées parallèles de la même longueur, et alors fixer  $D$  correspond tout simplement à choisir la géodésique de cette famille qui passe par  $D$ .

Les restrictions sur les valeurs de  $t$  sont imposées par les limites de l'anneau plat et ne nous permettent pas de trouver les dérivées pour n'importe quelle valeur de  $t$ . On travaille seulement dans un voisinage de zéro et alors

on peut assurer les dérivées en  $t = 0$  que l'on déduit directement des relations (4.2) et (4.3) données dans la preuve de la proposition 4.2.1.  $\square$

*Remarque 4.2.1.* Dans le cadre du cas traité dans la proposition 4.2.4, la fonction longueur donnée par (4.1) est bien définie sur un intervalle  $I$  pour lequel la géodésique simple fermée  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  ne passe par aucun point singulier à aucun moment différent des extrémités de  $I$ , et passe par des points singuliers quand  $t \in \partial I$ . La proposition 4.2.4 montre que la fonction longueur  $\ell(t)$  de  $\eta$  est strictement convexe sur  $I$ . Si  $-\ell(0) \cos \theta \in I \setminus \partial I$ , la fonction longueur a un minimum local en  $-\ell(0) \cos \theta$ , le moment où les deux géodésiques fermées  $\eta$  et  $\gamma$  sont orthogonales.

Divisons  $I$  en deux intervalles fermés en le point  $-\ell(0) \cos \theta$ . Soit  $I_1$  l'intervalle de ces deux qui contient  $-\ell(0) \cos \theta$ , figure 4.9. La fonction longueur

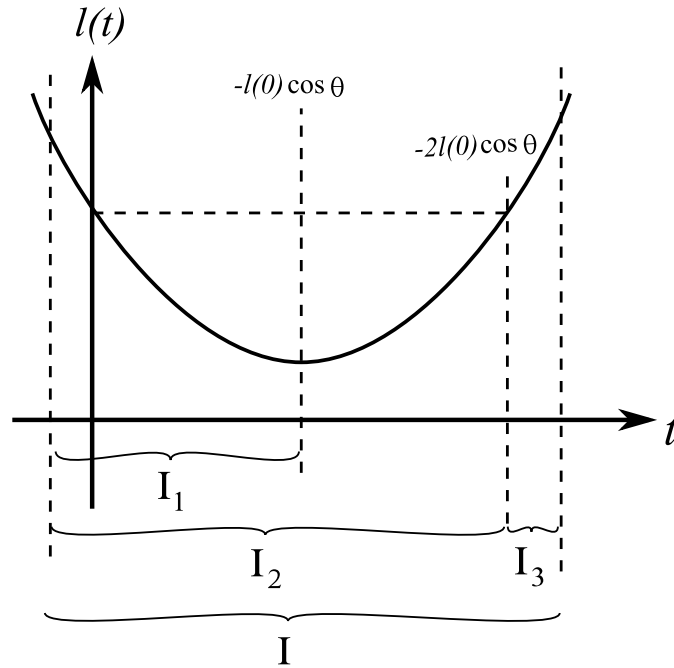


FIGURE 4.9 – Illustration de la fonction longueur convexe et des différents intervalles définis.

est injective sur  $I_1$  et par conséquent le flot correspondant est injective sur l'espace des déformations.

Si  $-2\ell(0) \cos \theta \in I$ , la fonction longueur prend à nouveau la valeur  $\ell(0)$  en  $-2\ell(0) \cos \theta$ . Divisons  $I$  différemment en deux intervalles ouverts en le point  $-2\ell(0) \cos \theta$ . Soit  $I_2$  l'intervalle de ces deux qui contient le zéro, et soit

$I_3$  l'autre intervalle. La fonction longueur sur  $I_2$  prend la valeur  $\ell(0)$  une fois seulement.

**Proposition 4.2.5.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée. Supposons qu'il existe deux géodésiques simples fermées  $\gamma$  et  $\eta$  sur  $S$  qui ne passent par aucun point singulier et qui s'intersectent en un seul point  $C$  avec un angle  $\theta$  de  $\eta$  à  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ , avec  $t$  non-nul. Si  $\ell(\gamma) < |-2\ell(\eta) \cos \theta|$ , alors les deux surfaces  $S$  et  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  sont des points différents de l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$ .*

*Démonstration.* D'après la remarque 4.2.1, sur l'intervalle  $I_2$  (défini dans la remarque 4.2.1) lié à la fonction longueur  $\ell(t) = \ell(\mathcal{E}_\gamma^t(\eta))$ , la fonction longueur  $\ell(t)$  prend la valeur  $\ell(0)$  une fois seulement, et ce pour  $t = 0$ . Alors,  $S$  et  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  sont des points différents de l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$  pour  $t \in I_2 \setminus \{0\}$ .

Sur l'intervalle  $I_3 \cup \{-2\ell(0) \cos \theta\}$ , la condition  $\ell(\gamma) < |-2\ell(0) \cos \theta|$  implique que  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  a une classe d'homotopie différente de celle de  $\eta$  et on a le résultat à nouveau.

Pour  $t \in \partial I$ ,  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  passe par des points singuliers et on a le résultat.

Pour  $t \in \mathbb{R} \setminus I$ ,  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  est d'une classe différente (pour le marquage combiné, remarque 2.1.1) de la classe de  $\eta$  car aux moments  $t \in \partial I$  elle passe par des points singuliers, et au-delà, soit elle stagne au point singulier soit elle quitte le point singulier à l'autre côté. Dans les deux cas elle a une classe différente de la classe de  $\eta$ , et on a le résultat à nouveau.  $\square$

**Proposition 4.2.6.** *Un twist le long d'une géodésique simple fermée sur un tore plat définit un flot injectif dans son espace des déformations.*

*Démonstration.* Soient  $\gamma$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  trois géodésiques simples fermées de classes d'homotopie différentes sur un tore plat  $T$ . Soit  $\theta_i$  l'angle de  $\eta_i$  à  $\gamma$ ,  $i = 1, 2$ . On peut choisir  $\theta_1$  et  $\theta_2$  tels que  $\theta_1 = \pi - \theta_2$ . Ceci n'affecte aucune des hypothèses précédentes, et donne la relation

$$\cos \theta_1 = -\cos \theta_2. \quad (4.5)$$

Puisque  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont des classes d'homotopie différentes alors  $\theta_1 \neq \theta_2$ . On peut voir ceci facilement sur le revêtement universel  $\tilde{T}$ . Ceci exclut le cas  $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t$  un twist le long de  $\gamma$  d'une distance  $t$ . Soit  $\ell_i(t) = \ell(\mathcal{E}_\gamma^t(\eta_i))$  la fonction longueur associée à  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2$ . D'après la preuve de la proposition 4.2.4, les fonctions longueurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont données par la relation (4.1). Cette relation dit que  $\ell_1$  et  $\ell_2$  reprennent leurs valeurs initiales  $\ell_1(0)$  et  $\ell_2(0)$  respectivement au même moment si la relation (4.4) est vérifiée. Ce qui est impossible par la relation (4.5), où les cosinus sont non-nuls de signes différents.  $\square$

**Théorème 4.2.7.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée. Supposons qu'il existe sur  $S$  deux géodésiques simples fermées  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  qui ne passent par aucun point singulier et qui s'intersectent en un seul point  $C$ . Supposons que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient orthogonales en  $C$ . Soit  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t(S)$ ,  $i = 1$  ou  $2$  la surface obtenue après un twist  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t$ , avec  $t$  non-nul. Alors  $S$  et  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t(S)$  sont des points différents de l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$ .*

*Démonstration.* Par l'unicité du minimum de la fonction longueur on obtient le résultat. La condition mentionnée dans le théorème 4.2.5 n'est plus nécessaire car la fonction longueur prend la valeur  $\ell(0)$  seulement pour  $t = 0$ .  $\square$

*Remarque 4.2.2.* La proposition 4.2.6 peut être obtenue comme un cas spécial du théorème 4.2.7.

*Remarque 4.2.3.* Certains origamis ont ce type de géodésiques simples fermées non-singulières orthogonales qui se rencontrent en un point. En effet, sur un origami on peut toujours trouver des géodésiques simples fermées non-singulières, une horizontale et l'autre verticale, qui se rencontrent en un nombre fini de points. Le théorème 4.2.7 couvre le cas de croisement en un seul point. Pour le cas général on a besoin d'un théorème plus général c'est le théorème 4.2.10.

On peut généraliser la proposition 4.2.1, pour le cas où un segment géodésique et une géodésique simple fermée s'intersectent en un nombre fini de points.

**Proposition 4.2.8.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée différente du tore plat et du cylindre. Supposons qu'il existe sur  $S$  une géodésique simple fermée  $\gamma$  qui ne passe par aucun point singulier. Soit  $\eta$  un segment géodésique joignant deux points marqués  $A$  et  $B$ . Supposons que  $\eta$  et  $\gamma$  s'intersectent en un nombre fini  $n$  de points  $C_i$ ,  $i = 1..n$  avec des angles  $\theta_i$  de  $\eta$  à  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_{\gamma}^t(S)$  la s.p.s.c. obtenue de  $S$  après un twist  $\mathcal{E}_{\gamma}^t$  le long de  $\gamma$  d'une distance  $t$ . Soit  $\mathcal{E}_{\gamma}^t(\eta)$  le segment géodésique image de  $\eta$  après le twist  $\mathcal{E}_{\gamma}^t$ . Alors, la fonction longueur  $\ell(t) = \ell(\mathcal{E}_{\gamma}^t(\eta))$  est strictement convexe.*

*La fonction longueur  $\ell(t)$  a en  $t = 0$  une dérivée seconde strictement positive qui dépend des  $\theta_i$ ,  $i = 1..n$  et de la longueur  $\ell(0)$  de  $\eta$ . Elle est donnée par :*

$$\ell''(0) = \frac{(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i)^2}{\ell(0)}.$$

*La dérivée première en  $t = 0$  est*

$$\ell'(0) = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i.$$

*Elle dépend des angles d'intersection.*

*Démonstration.* Par le lemme 4.1.3 et la remarque 4.1.2, le segment géodésique  $\eta$  a une bande plate  $F_1$ . Sans perte de généralité, on suppose  $F_1$  rectangulaire. Soit  $t$  suffisamment petit tel que l'image de  $\eta$  après le twist (c'est la ligne cassée composée de  $\eta \setminus \{C_i, i = 1..n\}$  et les segments géodésiques le long de  $\gamma$  joignant les deux copies de chaque  $C_i$ ) reste contenue dans une bande plate  $F_2$  (le parallélogramme pointillé sur la figure 4.10 (droite)). La

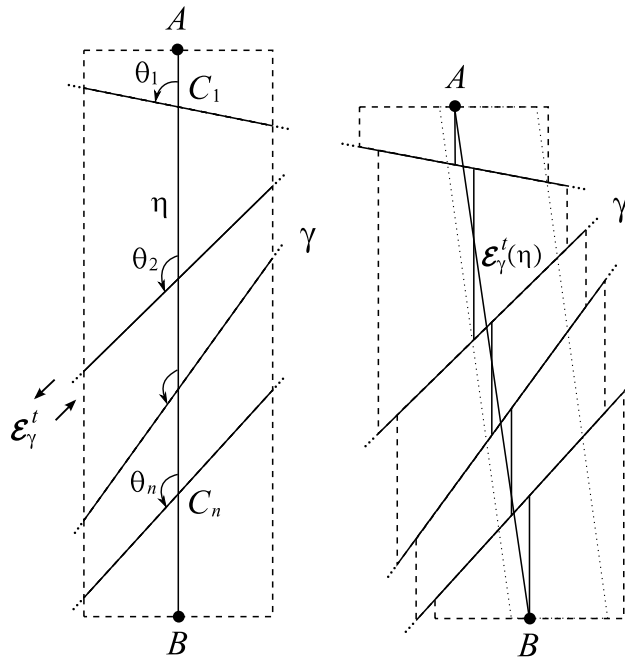


FIGURE 4.10 – La bande plate autour de  $\eta$ , avant (gauche) et après (droite) le twist.

figure 4.10 montre l'état initial (gauche) et l'état final (droite) après le twist dans la bande plate  $F_1$  autour de  $\eta$ . A l'état initial, les deux côtés (supérieur et inférieur) de  $F_1$  sont parallèles puisqu'ils sont orthogonaux à  $\eta$ . Les côtés inférieur et supérieur (ou au moins les parties de ces côtés contenues dans la bande plate  $F_2$ ) restent parallèles après le twist, puisque le twist dans ce cas fait seulement une translation le long d'une géodésique sans singularités. Le Parallélisme après le twist peut être vu dans le sens où un côté peut être translaté à l'intérieur de  $F_2$  sur l'autre côté.

Après le twist, prenons le segment géodésique  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  image de  $\eta$  joignant  $A$  et  $B$  (sur la figure 4.10 (droite), le segment géodésique joignant  $A$  et  $B$ ). Trouvons sa longueur. Le segment géodésique  $\eta$  est un orthogonal en commun sur les deux côtés de  $F_1$  à l'état initial. Sa longueur est  $\ell(0)$ . Sans perte de généralité, on peut considérer  $t$  suffisamment petit tel que la bande plate  $F_2$

(état final, figure 4.10) contient un orthogonal en commun sur les deux côtés de  $F_2$  passant par  $B$ , noté  $BG$  sur la figure 4.11. Considérons, dans la bande

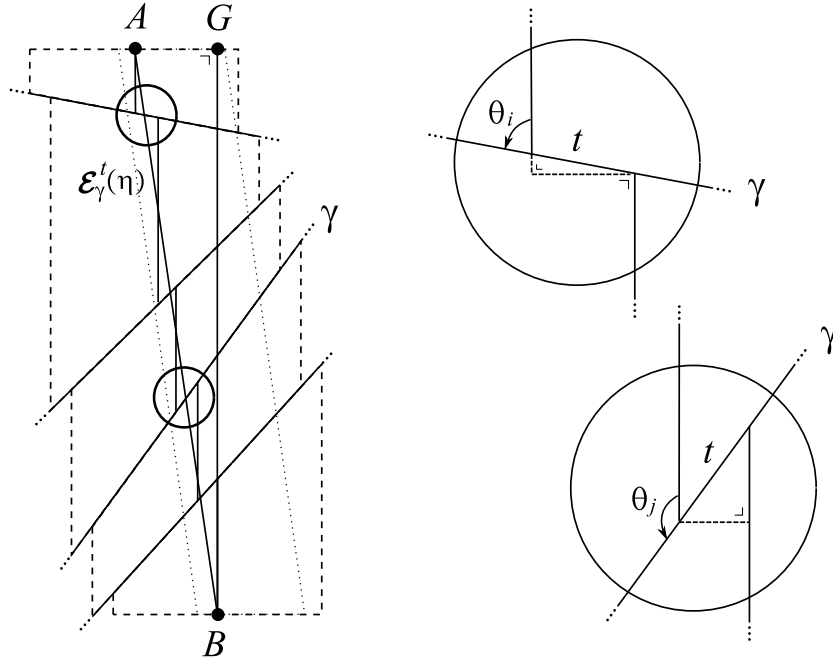


FIGURE 4.11 –  $F_2$  est supposée assez large pour contenir l'orthogonal  $GB$ . A droite, on voit deux régions agrandies autour des intersections. En haut, quand l'angle d'intersection est aigu, en bas quand l'angle est obtus.

plate  $F_2$ , la direction orthogonale à  $BG$  comme direction horizontale et la direction de  $BG$  comme direction verticale. Pour trouver la longueur  $\ell(t)$  de  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$ , on peut utiliser le triangle rectangle ( $AGB$ ). Pour ceci on a besoin de connaître les longueurs des côtés  $GA$  et  $GB$ .

Le twist coupe le segment géodésique  $\eta = \mathcal{E}_\gamma^0(\eta)$  (état initial) en morceaux dont la somme des longueurs est égale à  $\ell(0)$ , et il les laisse verticaux. Ces morceaux sont décalés verticalement et horizontalement. La longueur de  $GB$  est la longueur de  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  à son état initial plus les décalages verticaux entre les morceaux pris avec signes. La longueur de  $GA$  est la somme des décalages horizontaux entre morceaux. En tout point de croisement  $C_i$ , on peut calculer le décalage horizontal et le décalage vertical utilisant le triangle qui a comme sommets les deux copies de  $C_i$ , et la projection d'une copie sur le sous-segment vertical de l'image de  $\eta$  portant l'autre copie. Sur la figure 4.11 (droite), on a agrandi deux cas :

- $\theta_i$  est aigu : Du triangle on obtient le décalage vertical noté  $v_i$  :

$$v_i = t \cos \theta_i,$$

et le décalage horizontal  $h_i$  :

$$h_i = t \sin \theta_i .$$

- $\theta_j$  est obtus : Du triangle on obtient le décalage vertical noté  $v_j$  :

$$v_j = -t \cos(\pi - \theta_j) = t \cos \theta_j ,$$

où le moins provient de l'orientation du décalage, et le décalage horizontal  $h_j$  :

$$h_j = t \sin(\pi - \theta_j) = t \sin \theta_j .$$

D'où on trouve,

$$\ell(GB) = \ell(0) + \sum_{p=1}^n v_p = \ell(0) + t \sum_{p=1}^n \cos \theta_p ,$$

et

$$\ell(GA) = \sum_{q=1}^n h_q = t \sum_{q=1}^n \sin \theta_q .$$

Enfin, du triangle ( $AGB$ ) on trouve,

$$\begin{aligned} \ell^2(t) &= \ell^2(GA) + \ell^2(GB) \\ &= \left( \ell(0) + t \sum_{p=1}^n \cos \theta_p \right)^2 + \left( t \sum_{q=1}^n \sin \theta_q \right)^2 \\ &= \ell^2(0) + t^2 \left( \sum_{p=1}^n \cos \theta_p \right)^2 \\ &\quad + 2 \ell(0) \left( \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right) t + t^2 \left( \sum_{q=1}^n \sin \theta_q \right)^2 \\ &= \left( \left( \sum_{p=1}^n \cos \theta_p \right)^2 + \left( \sum_{q=1}^n \sin \theta_q \right)^2 \right) t^2 \\ &\quad + 2 \ell(0) \left( \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right) t + \ell^2(0) \end{aligned}$$

Notons  $M$  le coefficient de  $t^2$  et calculons le,

$$\begin{aligned} M &= \left( \sum_{p=1}^n \cos \theta_p \right)^2 + \left( \sum_{q=1}^n \sin \theta_q \right)^2 \\ &= \sum_{p=1}^n \cos^2 \theta_p + 2 \sum_{\substack{i \neq k \\ i < k}}^n \cos \theta_i \cos \theta_k \\ &\quad + \sum_{q=1}^n \sin^2 \theta_q + 2 \sum_{\substack{j \neq r \\ j < r}}^n \sin \theta_j \sin \theta_r \\ &= \sum_{p=1}^n (\cos^2 \theta_p + \sin^2 \theta_p) + \sum_{\substack{i, k=1 \\ i \neq k}}^n \cos \theta_i \cos \theta_k + \sum_{\substack{j, r=1 \\ j \neq r}}^n \sin \theta_j \sin \theta_r \\ &= \sum_{p=1}^n (\cos^2 \theta_p + \sin^2 \theta_p) + \sum_{\substack{i, k=1 \\ i \neq k}}^n \cos \theta_i \cos \theta_k + \sin \theta_i \sin \theta_k \end{aligned}$$



A ce niveau on peut utiliser la notation matricielle

$$M(i, j) = \cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j, \quad i, j = 1..n,$$

et on écrit

$$M = \sum_{i,j=1}^n M(i, j).$$

Utilisant des relations trigonométriques on trouve,

$$M = n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \cos(\theta_i - \theta_j).$$

Alors,

$$\ell^2(t) = \left( n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \cos(\theta_i - \theta_j) \right) t^2 + 2\ell(0) \left( \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right) t + \ell^2(0) \quad (4.6)$$

Maintenant on peut trouver les dérivées, pour cela on donne explicitement la formule de la fonction longueur  $\ell(t)$ ,

$$\ell(t) = \sqrt{\left( n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \cos(\theta_i - \theta_j) \right) t^2 + 2\ell(0) \left( \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right) t + \ell^2(0)}. \quad (4.7)$$

La fonction  $\ell(t)$  dans la relation (4.7) peut être définie sur  $\mathbb{R}$  (si les restrictions sur  $t$  permettent), car le discriminant  $\Delta$  du polynôme est négatif, et le polynôme est strictement positif (puisque positif pour  $t = 0$ ). Effectivement,

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\ell^2(0) \left( \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right)^2 - 4\ell^2(0) \left( n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \cos(\theta_i - \theta_j) \right) \\ &= 4\ell^2(0) \left( \left( \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right)^2 - n - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \cos(\theta_i - \theta_j) \right) \\ &= 4\ell^2(0) \left( \sum_{k=1}^n \cos^2 \theta_k + \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n \cos \theta_p \cos \theta_q - n \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j \right) \\ &= 4\ell^2(0) \left( n - \sum_{k=1}^n \sin^2 \theta_k - \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n \sin \theta_p \sin \theta_q - n \right) \\ &= -4\ell^2(0) \left( \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right)^2 < 0 \end{aligned}$$

La dérivée première de  $\ell(t)$  est donnée par,

$$\ell'(t) = \frac{\left( n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \cos(\theta_i - \theta_j) \right) t + \ell(0) \left( \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right)}{\sqrt{\left( n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \cos(\theta_i - \theta_j) \right) t^2 + 2\ell(0) \left( \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right) t + \ell^2(0)}}. \quad (4.8)$$

La positivité du polynôme sous la racine carrée implique aussi que la dérivée  $\ell'(t)$  peut être bien définie sur  $\mathbb{R}$ . On a  $\ell'(t) = 0$  pour

$$t = \frac{-\ell(0) \left( \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right)}{n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \cos(\theta_i - \theta_j)}.$$

Les restrictions sur les valeurs de  $t$  ne nous permettent pas de trouver la dérivée pour toute valeur de  $t$ . On travaille seulement dans un voisinage du zéro et on peut assurer la dérivée en  $t = 0$  que l'on calcule directement de la relation (4.8) :

$$\ell'(0) = \sum_{k=1}^n \cos \theta_k.$$

La dérivée seconde est

$$\ell''(t) = \frac{\ell^2(0) \left( \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right)^2}{\left( \left( n + \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n \cos(\theta_p - \theta_q) \right) t^2 + 2\ell(0) \left( \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right) t + \ell^2(0) \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.9)$$

La dérivée seconde  $\ell''(t)$  est une fonction strictement positive qui peut être bien définie sur  $\mathbb{R}$ . Sa valeur pour  $t = 0$  est

$$\ell''(0) = \frac{\left( \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right)^2}{\ell(0)}.$$

Alors la fonction longueur est strictement convexe.  $\square$

On peut généraliser la proposition 4.2.4, pour le cas où les deux géodésiques simples fermées s'intersectent en un nombre fini de points.

**Proposition 4.2.9.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée. Supposons qu'il existe sur  $S$  deux géodésiques simples fermées  $\gamma$  et  $\eta$  qui ne passent par aucun point singulier et qui s'intersectent en un nombre fini  $n$  de points  $C_i$ ,  $i = 1..n$ , avec des angles  $\theta_i$  de  $\eta$  à  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$  la s.p.s.c. marquée obtenue après un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$  le long de  $\gamma$  d'une distance  $t$ . Soit  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  une géodésique simple fermée*

image de  $\eta$  après le twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ . Alors, la fonction longueur  $\ell(t) = \ell(\mathcal{E}_\gamma^t(\eta))$  est strictement convexe.

La fonction longueur  $\ell(t)$  a en  $t = 0$  une dérivée seconde strictement positive qui dépend des  $\theta_i, i = 1..n$  et de la longueur  $\ell(0)$  de  $\eta$ . Elle est donnée par :

$$\ell''(0) = \frac{(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i)^2}{\ell(0)}.$$

La dérivée première en  $t = 0$  est

$$\ell'(0) = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i.$$

Elle dépend des angles d'intersection.

*Démonstration.* Par le lemme 4.1.2, chacune des géodésiques  $\eta$  et  $\gamma$  a un anneau plat. Notons l'anneau plat de  $\eta$  par  $F_1$ . Supposons  $t$  soit suffisamment petit tel que l'image de  $\eta$  après le twist (c'est la ligne cassée composée de  $\eta \setminus \{C_i, i = 1..n\}$  et les segments géodésiques le long de  $\gamma$  liant les deux copies de chaque  $C_i$ ) reste contenue dans un anneau plat  $F_2$  (le parallélogramme pointillé sur la figure 4.12 (droite)). On marque un point  $D$  sur  $\eta$  différent des

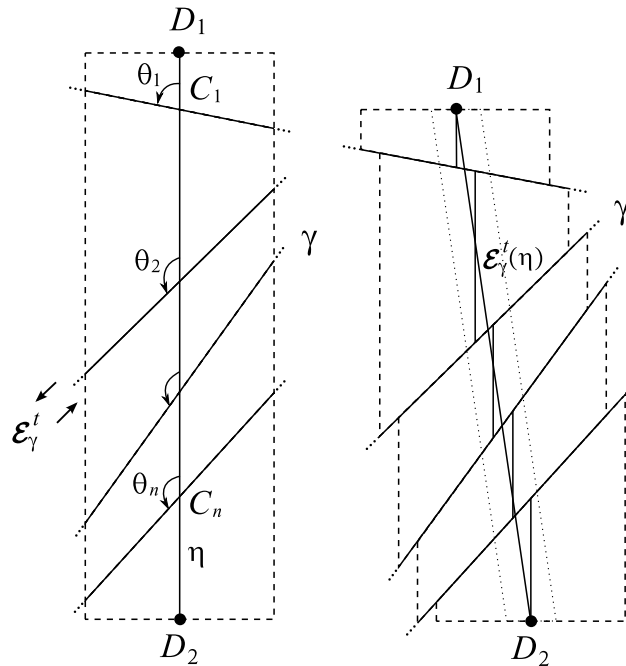


FIGURE 4.12 – L'anneau plat autour de  $\eta$ , avant (gauche) et après (droite) le twist.

$C_i, i = 1..n$ . La figure 4.12 montre l'état initial (gauche) et l'état final (droite)

après le twist dans l'anneau plat  $F_1$  de  $\eta$  représenté ici après une coupe orthogonale à  $\eta$  en  $D$ . A l'état initial, les deux côtés de la coupe sont parallèles car ils sont orthogonaux au segment géodésique sans singularités liant les deux copies  $D_1, D_2$  de  $D$ . Les côtés de la coupe (ou au moins les parties de ces côtés contenues dans l'anneau plat  $F_2$ ) restent parallèles après le twist, car le twist fait une translation le long d'une géodésique sans singularités.

La situation est identique à la situation dans la proposition 4.2.8. Après le twist, prenons le segment géodésique homotope à l'image de  $\eta$  joignant  $D_1$  et  $D_2$ . Ce segment géodésique forme une courbe simple fermée sur la surface  $\mathcal{E}_\gamma^t(S)$ . Elle fait un angle plat de chaque côté en le point  $D$ , car elle rencontre les deux côtés de la coupe avec le même angle. Alors, c'est une géodésique fermée homotope à l'image de  $\eta$  et ne passe par aucun point singulier. C'est, alors, la géodésique simple fermée  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$ .

Donc, les relations et résultat donnés dans la proposition 4.2.8 sont applicable ici. D'où le résultat.  $\square$

**Théorème 4.2.10.** *Soit  $S$  une s.p.s.c. marquée. Supposons qu'il existe sur  $S$  deux géodésiques simples fermées  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  qui ne passent par aucun point singulier et qui s'intersectent en un nombre fini de points. Supposons que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient orthogonales en tout point d'intersection. Soit  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t(S)$ ,  $i = 1$  ou  $2$  la s.p.s.c. marquée obtenue après un twist  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t$ , avec  $t$  non-nul. Alors  $S$  et  $\mathcal{E}_{\gamma_i}^t(S)$  sont des points différents de l'espace des déformations  $\mathcal{T}(S)$ .*

*Démonstration.* Par l'unicité du minimum de la fonction longueur et le fait que ce minimum est réalisé sous les hypothèses du théorème, on obtient le résultat.  $\square$

**Corollaire 4.2.11.** *Un twist non-trivial le long d'une géodésique simple fermée qui ne passe par aucun point singulier sur un origami donne toujours une s.p.s.c. différente de l'origami dans son espace des déformations.*

*Démonstration.* Résultat direct de la proposition 4.2.10.  $\square$

Jusqu'ici, on a évité d'étudier la longueur d'une géodésique simple fermée qui passe par des points singuliers coniques sous l'effet d'un twist le long d'une géodésique simple fermée transverse. L'exemple suivant montre une propriété de ces géodésiques que l'on appelle la *stagnation*.

**Exemple 4.2.2.** Soit  $S$  une s.p.s.c. Soient  $\gamma$  et  $\eta$  deux géodésiques simples fermées sur  $S$  qui se croisent en un seul point régulier. Supposons que  $\eta$  passe par un seul point singulier  $s$ . Sur la figure 4.13, on a une partie de  $S$  où on voit  $\eta$  et  $s$  et une partie de  $\gamma$ .

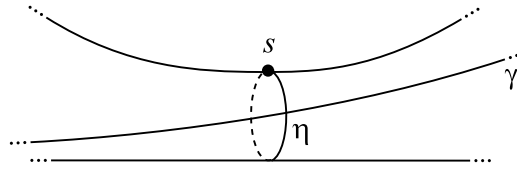


FIGURE 4.13 – Sur une surface  $S$ , deux géodésiques simples fermées  $\gamma$  et  $\eta$  se croisant en un point régulier.  $\eta$  passe par un point singulier  $s$ .

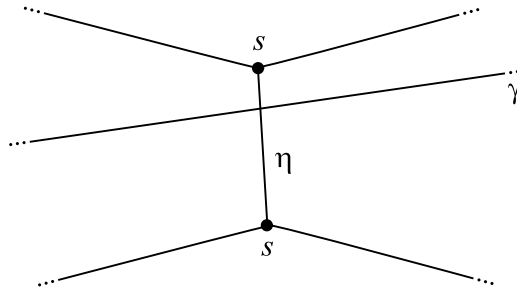


FIGURE 4.14 – La même configuration après découpage.

Pour éclaircir la vue, on représente cette partie de la surface sur la figure 4.14 après avoir découpé le long d'une ligne géodésique qui passe par  $s$  et qui ne traverse pas  $\gamma$  dans cette partie de  $S$ . On fait un twist  $\mathcal{E}_\gamma^t$ . Pour  $t$  assez petit, on voit clairement, sur la figure 4.15, que la géodésique  $\mathcal{E}_\gamma^t(\eta)$  passe

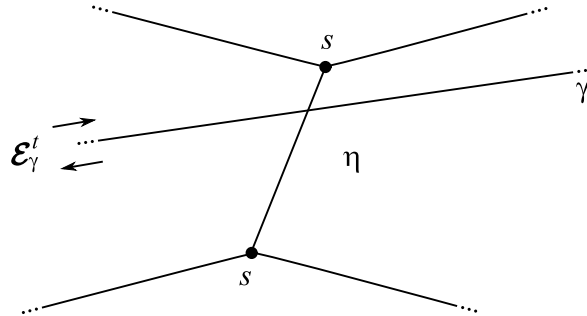


FIGURE 4.15 – Après le twist.

par le point singulier  $s$ , ce qui montre cette propriété de stagnation d'une géodésique en un point singulier malgré qu'elle ait subi un twist transversal.

# Annexe A

## Paramètres

Cet annexe et les annexes suivants sont des réflexions supplémentaires à la thèse et ils n'en constituent pas une partie essentielle.

Ce premier annexe concerne les paramétrages et les marquages de quelques objets géométriques simples.

On entend par paramètres des variables à valeurs souvent numériques qui déterminent un objet dans une famille d'objets bien définie ou un état parmi d'autres états du même genre. Puisque les paramètres s'attachent à un objet ou un état, ils sont sous contrainte de la définition et les propriétés de l'objet ou l'état considéré. Connaître les conditions qui gèrent l'ensemble de toutes les valeurs possibles est essentiel pour que l'étude de l'espace des paramètres soit en accord avec l'espace d'objets ou d'états correspondant. L'étude de cet espace est une alternative à avoir traité l'ensemble d'objets ou d'états.

Par exemple, quand on parle des paires de lunettes on peut identifier une paire de lunettes par son degré, disons  $3^\circ$ . Ici le paramètre est le degré, sa valeur est trois et il détermine l'objet paire de lunettes. En fait, d'autres paramètres peuvent être pris en compte comme la couleur par exemple, mais le choix de paramètres dépend de la définition considérée de l'objet. Dans cet exemple, une paire de lunettes se détermine par son degré. On remarque pourtant que ce paramètre sert à déterminer pas seulement une seule paire de lunettes mais toutes les paires de lunettes du même degré. Ceci est en accord avec la définition en considération parce que la personne à qui appartient la paire de lunettes ne nous intéresse pas et si elle nous intéressait on l'aurait ajouté comme paramètre!

Les valeurs du degré sont soumis aux conditions suivantes :

- Le degré  $d$  est un nombre approché au multiple de quart d'unité supérieur  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots)$ ,
- $0 < d \leq 10$ .

Souvent on est confronté à étudier des problèmes qui engagent plusieurs paramètres. On distingue souvent les paramètres l'un de l'autre. Par exemple, si l'on prend deux paramètres, la température  $t$  et la pression  $p$  de l'atmosphère, on utilise implicitement l'information sur leurs natures qui distinguent un paramètre de l'autre. Cette distinction (marquage combinatoire) se fait en utilisant des notations différentes de ces paramètres.

Peut-on prétendre que cette information n'est pas significative ? Il suffit de se tromper en accordant notre mesure de température à la pression, et vice versa, et notre étude n'aura plus de sens.

Par contre si notre étude porte sur les rectangles dans le plan, et que l'on ne fait pas de distinction entre deux rectangles identiques (dans le sens élémentaire du mot), la distinction entre longueur et largeur n'a pas de sens. Les deux paramètres peuvent s'échanger sans problème. On parle toujours du même rectangle. La figure A.1 nous montre la différence entre les espaces des paramètres des rectangles dans le cas où les paramètres sont distingués et le cas où ils ne le sont pas.

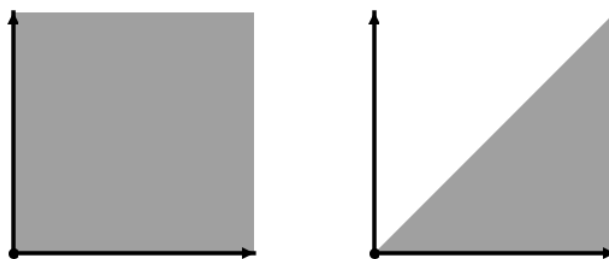


FIGURE A.1 – L'espace des paramètres du rectangle avec marquage (à gauche) et sans (à droite)

Si on a plus de deux paramètres certains paramètres peuvent s'échanger sans effet sur l'objet déterminé et d'autres ne peuvent pas. De préférence, on procède comme suit : On détermine l'espace des paramètres en faisant la distinction entre les paramètres (marquage combinatoire), puis on procède à un processus d'identification de points dans cet espace selon que certains paramètres sont échangeables sans effet sur la détermination de l'objet ou de l'état. Ce qui veut dire, sans violation de la définition de l'objet ou l'état. Si deux paramètres  $x, y$  sont échangeable, l'espace de paramètres est réduit à moitié par l'hyperplan affine  $x = y$  qui constitue un bord pour le nouvel espace, comme dans l'exemple de rectangle, figure A.1.

On s'intéresse aux paramètres qui déterminent un objet géométriques en l'occurrence un espace métrique. Si deux objets ont les mêmes valeurs de paramètres, on ne fait pas de distinction entre eux. On les considère comme

un même et seul objet. Dans l'espace des paramètres ils sont représentés par un seul point.

Ce qui est intéressant aussi, c'est de considérer deux objets comme un seul et même objet s'ils sont isométriques, même s'ils ont des valeurs de paramètres différentes. À partir de l'espace des paramètres, on obtient le nouvel espace en identifiant les points qui représentent des objets isométriques. Ce qui se fait aussi en choisissant un point parmi eux comme représentant de tous les autres. Autrement dit, quotienter par la relation d'équivalence "être isométrique". Si l'espace des paramètres est homéomorphe à l'espace des objets, ceci est équivalent à quotienter par le groupe d'isométrie de cet espace.

On commence par le segment euclidien.

**Exemple A.0.3** (Le segment). Un segment dans le plan euclidien peut être décrit, à isométrie près, par un seul paramètre, sa longueur  $\ell$ . La définition de longueur impose la condition :  $0 \leq \ell < +\infty$ . Dans ce cas particulier, tous les segments isométriques entres eux sont représentés par un seul point dans l'espace des paramètres.

*Remarque A.0.4.* Quand on définit une paramétrisation, il y a deux aspects à contrôler. Le premier est le domaine de définition de chaque paramètre, tel que deux valeurs différentes d'un même paramètre ne donnent pas lieux à un même objet. Le deuxième est qu'aucun objet n'échappe à la paramétrisation. Autrement dit : On voudrait définir une application  $ob : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  entre l'espace  $\mathcal{P}$  des paramètres et l'espace  $\mathcal{M}$  des objets tel que  $ob$  soit bijective. La paramétrisation exige un marquage combiné. Autrement dit : On voudrait définir une application  $ob : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  entre l'espace  $\mathcal{P}$  des paramètres et l'espace  $\mathcal{M}$  des objets isométriques marqués tel que  $ob$  soit bijective.

Signalons que l'idée d'introduire un marquage dans l'étude des surfaces de Riemann est l'une des contributions importantes de Teichmüller.

## A.1 Paramètres du triangle euclidien

Un triangle est déterminé, à isométrie près, par les longueurs de ses côtés. Ce sont les paramètres. Les longueurs des côtés sont soumises aux inégalités triangulaires. Ce sont les conditions qui déterminent l'espace des paramètres.

Plus précisément, si  $\Delta$  est un triangle dans le plan euclidien, avec des longueurs de côtés  $a, b, c$ , les inégalités triangulaires sont :

$$|b - c| < a < b + c.$$

Ces inégalités gèrent les valeurs pour lesquelles il existe un triangle.



Si on représente l'espace de ces paramètres dans  $\mathbb{R}^3$  en tenant compte des inégalités triangulaires, on obtient une pyramide infinie à trois faces avec sommet à l'origine dont les côtés sont des première-bissectrices, figure A.2.

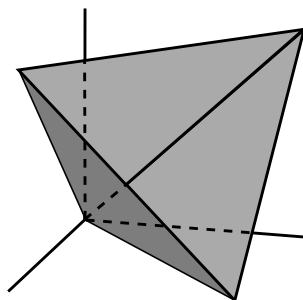


FIGURE A.2 – L'espace des triangles d'après les inégalités triangulaires.

Cette présentation prend en compte la distinction entre les paramètres et représente l'espace des paramètres. Donc, si l'on aimerait représenter les triangles isométriques par un seul point de la pyramide, certains points dans la pyramide seront identifiés. Dans ce cas les inégalités triangulaires ne sont pas les seules contraintes sur les paramètres. On peut vérifier facilement que deux triangles sont isométriques s'ils ont les mêmes valeurs de paramètres en dépit de leur affectation. Pour quotienter par l'isométrie on fait soumettre les paramètres à une condition qui empêche la répétition. Donner un ordre aux paramètres peut être une façon de faire dans ce cas. On impose que :

$$a \leq b \leq c.$$

L'espace des paramètres des triangles à isométrie près est une pyramide aussi qui fait une part sur six de la pyramide d'origine. Ceci provient du fait que le nombre de permutations de trois éléments est égal à six. Si on fait une section orthogonale à l'axe de la pyramide d'origine, la nouvelle pyramide est représentée par la partie hachurée sur la figure A.3. Ce nouvel espace est obtenu en considérant les hyperplans  $a = b, b = c, a = c$ .

Le cas du triangle est un cas particulier, parce que le groupe d'isométries du triangle est identique au groupe symétrique qui permute les paramètres.

Pour les  $n$ -gones,  $n > 3$ , le groupe de permutation des paramètres n'exprime pas toutes les possibilités pour obtenir un polygone isométrique. Certains polygones isométriques sont paramétrés par des ensembles de paramètres différents. De plus, les éléments de ce groupe de permutations ne sont pas tous des isométries. (Voir le cas du quadrilatère ci-après).

Le groupe symétrique qui permet la permutation entre les longueurs des côtés d'un  $n$ -gone est le groupe diédral  $D_n$ . Il est vu comme le groupe d'isométrie du  $n$ -gone régulier dans le plan euclidien, mais aussi comme le groupe

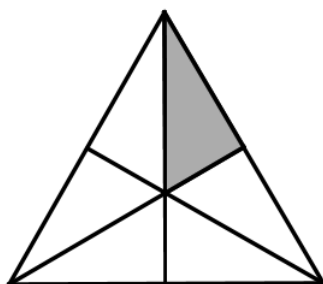
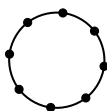


FIGURE A.3 – L'espace des triangles

d'automorphisme du graphe constitué d'un cercle avec  $n$  sommets, figure A.4. C'est dans ce dernier sens que ce groupe joue le rôle de permutateur de

FIGURE A.4 – Graphe circulaire avec  $n$  sommets

longueur de côtés.

*Remarque A.1.1 (Relation réductrice).* Parfois, un choix d'un ensemble de paramètres pour un objet géométrique marqué n'est pas valable pour tout l'espace des déformations de cet objet. On est obligé alors de considérer un ensemble élargi de paramètres avec des relations entre eux qui permettent de réduire le nombre de paramètres considérés pour un objet, pour qu'il soit égal à la dimension de l'espace des déformations. On appelle *relation réductrice* ce genre de relation, parce qu'elle permet de réduire le nombre de paramètres. Toutes les relations ne sont pas réductrices. Pour être réductrice une relation doit être soluble de manière unique pour l'un des paramètres en fonction des autres.

Ces relations permettent alors de passer d'un paramétrage à un autre quand deux paramétrages sont valides pour un objet en particulier.

## A.2 Paramètres du quadrilatère

Le quadrilatère n'est pas rigide comme le triangle. Ses angles peuvent être modifiés tout en gardant les longueurs de ses côtés fixées, modifiant ainsi la classe d'isométrie.

Donc, pour déterminer le quadrilatère on a besoin des paramètres supplémentaires. On ne va pas prendre des angles comme paramètres pour deux

raisons. La première c'est que la définition de l'angle est basée sur la distance, comme la proportion entre la circonférence d'un arc circulaire et son rayon, et la deuxième, c'est que l'on préfère des paramètres du même genre pour étudier leur interchangeabilité en préservant la classe d'isométrie. Si on considère la longueur d'une diagonale comme paramètre on peut déterminer les deux triangles obtenus et par conséquent le quadrilatère.

Soit  $ABCD$  un quadrilatère, dont les deux diagonales sont à l'intérieur, avec le marquage combiné qui conserve les sommets. Soient  $a, b, c, d, e, f$  les longueurs des segments géodésiques comme sur la figure A.5. Avec un mar-

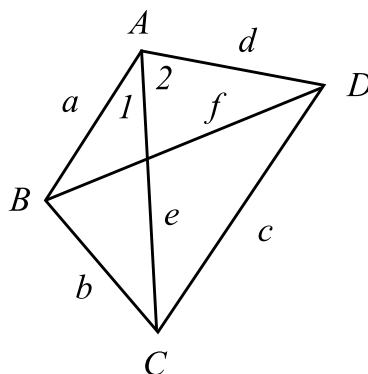
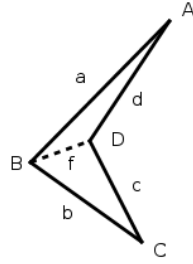


FIGURE A.5 – Changement de paramètres de quadrilatère

quage combiné, les longueurs des quatre côtés et d'une diagonale suffisent comme paramètres, disons  $a, b, c, d, e$ . On rappelle que l'on prend le quadrilatère avec la métrique intrinsèque définie au chapitre 1. Si le sommet  $D$  s'approche de la diagonale  $e$  jusqu'à venir sur elle, ce paramétrage reste valide en ayant perdu un des paramètres à cause de la relation  $e = d + c$  mise en place. Si  $D$  continue son mouvement vers  $B$ , la diagonale  $e$  n'est plus à l'intérieur et les informations en notre possession ne suffisent pas pour paramétrer le quadrilatères. On a besoin d'aller chercher une information supplémentaire. C'est la longueur de la diagonale  $f$ . On a le même problème si l'on considère  $a, b, c, d, f$  comme paramètres. Ceci nous mène à dire que pour paramétrer tous les quadrilatères, il faut les six paramètres et une relation réductrice.

On se demande si l'on peut trouver une relation entre les six paramètres pour un quadrilatère. Pour le quadrilatère dont les deux diagonales sont à l'intérieur, on peut choisir entre deux ensembles de paramètres  $a, b, c, d, e$  ou bien  $a, b, c, d, f$ . On montre ici la relation entre les deux paramétrages.

FIGURE A.6 – Quadrilatère avec une relation réductrice  $e = d + c$ 

A partir de la figure A.5, on peut écrire

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ \cos(A) &= \cos(A_1 + A_2) \\ \cos(A) &= \cos(A_1) \cos(A_2) - \sin(A_1) \sin(A_2) \end{aligned}$$

Utilisant la formule d'Al-Kashi dans les triangles correspondants aux angles, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad} &= \frac{e^2 + d^2 - c^2}{2de} \frac{a^2 + e^2 - b^2}{2ae} \\ &\quad - \sqrt{1 - \frac{(a^2 + e^2 - b^2)^2}{4a^2e^2}} \sqrt{1 - \frac{(d^2 + e^2 - c^2)^2}{4d^2e^2}} \end{aligned}$$

Par le fait que  $A_1, A_2$  sont dans des triangles, leurs sinus sont positifs et donc c'est la valeur positive de la racine carrée qu'il faut considérer. En résolvant cette équation par rapport à  $f^2$  et en tenant compte de la positivité des variables, on trouve :

$$\begin{aligned} f^2 &= \frac{1}{2e^2} \left( \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2e^2 + 2b^2e^2 - a^4 - b^4 - e^4} \right. \\ &\quad \times \sqrt{2c^2d^2 + 2c^2e^2 + 2d^2e^2 - c^4 - d^4 - e^4} \\ &\quad \left. + e^2 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2) + (a^2 - b^2) (c^2 - d^2) \right) \end{aligned}$$

Les montants sous les racines sont positifs, parce qu'en factorisant ces montants on trouve :

$$2a^2b^2 + 2a^2e^2 + 2b^2e^2 - a^4 - b^4 - e^4 = (a + b + e)(a + b - e)(a - b + e)(-a + b + e)$$

et

$$2c^2d^2 + 2c^2e^2 + 2d^2e^2 - c^4 - d^4 - e^4 = (c + d + e)(c + d - e)(c - d + e)(-c + d + e)$$

qui sont des produits de termes positifs parce que les paramètres sont soumis aux inégalités triangulaires.

Par les deux faits déjà mentionnés : que  $f$  est positif et que l'on ne considère que la racine carrée positive pour les sinus, on conclut que cette formule donne une valeur unique à  $f$ . Par ce fait et la symétrie d'une paramétrisation par rapport à l'autre, on conclut que le passage d'une paramétrisation à l'autre est une bijection. Et on a bien une relation réductrice entre les paramètres. Donc dans tous les cas on peut dire qu'un quadrilatère est paramétrable par six paramètres et une relation.

*Remarque A.2.1.* Rappelons la formule de Héron. Pour un triangle  $\Delta$  de longueurs de côté  $a, b, c$  l'aire est donné par :

$$A_{\Delta}(a, b, c) = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{4}. \quad (\text{A.1})$$

On a clairement les aires de deux triangles qui vont apparaître dans la formule de changement de paramètres. Voir [15].

Par cette remarque, on peut écrire la formule plus simplement comme :

$$f^2 = \frac{8A_{\Delta}(a, b, e)A_{\Delta}(c, d, e)}{e^2} + \frac{e^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2) + (a^2 - b^2)(c^2 - d^2)}{2e^2}, \quad (\text{A.2})$$

On pourrait peut-être trouver une signification du deuxième terme.

On peut facilement à partir d'ici trouver une formule d'aire du quadrilatère, notons-la  $A_Q$ , et sachant que :

$$A_Q = A_{\Delta}(a, b, e) + A_{\Delta}(c, d, e)$$

à l'aide de la formule de Héron on trouve :

$$\begin{aligned} A_Q^2 &= \left( \frac{\sqrt{(a+b+e)(a+b-e)(a-b+e)(-a+b+e)}}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{(c+d+e)(c+d-e)(c-d+e)(-c+d+e)}}{4} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16} \times 2 \sqrt{(a+b+e)(a+b-e)(a-b+e)(-a+b+e)} \\ &\quad \times \sqrt{(c+d+e)(c+d-e)(c-d+e)(-c+d+e)} \\ &\quad + \frac{1}{16} ((a+b+e)(a+b-e)(a-b+e)(-a+b+e))^2 \\ &\quad + \frac{1}{16} ((c+d+e)(c+d-e)(c-d+e)(-c+d+e))^2 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de changement de paramètres, on peut se débarrasser des racines carrés et trouver :

$$A_Q^2 = \frac{(2ef - d^2 + c^2 - b^2 + a^2)(2ef + d^2 - c^2 + b^2 - a^2)}{16}$$

d'où

$$A_Q = \frac{\sqrt{2ef - d^2 + c^2 - b^2 + a^2} \sqrt{2ef + d^2 - c^2 + b^2 - a^2}}{4}$$

*Remarque A.2.2.* La relation A.2 déduite plus haut n'est pas une chose nouvelle. Le déterminant de Cayley-Menger (voir [29, p. 256]), nous permet de trouver le volume  $V$  d'un tétraèdre en fonction des longueurs de ses côtés, notés ici  $a, b, c, d, e, f$  :

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & d^2 & e^2 & 1 \\ b^2 & d^2 & 0 & f^2 & 1 \\ c^2 & e^2 & f^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant, quand il est mis en égalité avec zéro, permet d'établir une relation entre les six distances entre quatre points coplanaires.

Ce point de vue ne fait pas de distinction entre les côtés du quadrilatère et ses diagonales. Ceci nous empêche de distinguer entre les quadrilatères concaves donnés par les mêmes longueurs, figure A.7.

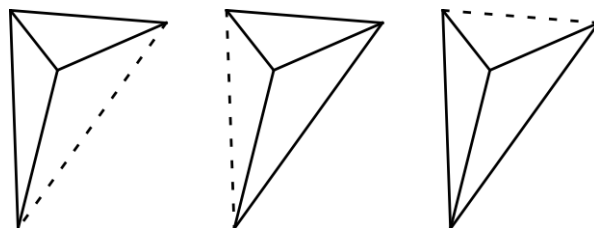


FIGURE A.7 – On voit clairement que ces quadrilatères n'ont pas la même métrique.

Une relation similaire se trouve dans l'article de Feng Luo [16]. Sa relation est exprimée pour un quadrilatère dans le plan complexe avec normalisation (la longueur d'un des côtés est fixé à 1), figure A.8.

On explique un peu cette relation, parce qu'il n'est pas évident de la comprendre dans [16].

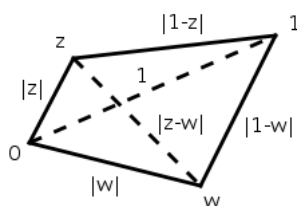


FIGURE A.8 – Le tétraèdre aplati.

De façon équivalente, Feng voit le quadrilatère comme un graphe. Ceci permet de traiter les côtés et les diagonales de façon égale. Ayant ceci en tête, on peut lire la relation :

$$\sum_{x|/y} (x^2y + xy^2) + \sum_{\Delta xyz} xyz = \sum_{x|\setminus y|z} xyz$$

Où  $x, y, z$  sont des carrés de longueurs de côtés.

Donc, il y a six termes dans la première somme, quatre dans la deuxième et douze dans la troisième. L'inconvénient de cette relation est le même que pour le déterminant de Cayley-Menger. Ce qui manque les deux est un marquage qui fait la distinction entre côté et diagonale.

On conclut que :

- Un quadrilatère est paramétrable par cinq paramètres qui sont les longueurs de ses côtés et une diagonale.
- Pour déterminer un  $n$ -gone,  $n \geq 4$ , par des longueurs de segments géodésiques, il faut le trianguler.

### A.3 Paramètres du triangle avec un point singulier à l'intérieur

On considère une s.p.s.c.  $\Delta$  homéomorphe à un disque, qui a trois points singuliers  $A, B$  et  $C$  sur le bord et un point singulier  $s$  à l'intérieur. Par la formule de Gauss-bonnet, l'angle total  $\theta$  au point singulier  $s$  à l'intérieur est strictement inférieur à  $3\pi$ . Et pour éviter qu'un angle du triangle soit supérieur à  $\pi$ , ce qui entraîne une multitude de solutions pour l'équation  $\cos x = c$ , on va supposer aussi que  $\theta > 2\pi$ . Donc, on va considérer  $2\pi < \theta < 3\pi$ . Sous cette hypothèse les segments géodésiques entre  $s$  et chacun des points  $A, B$  et  $C$  sont à l'intérieur de  $\Delta$ , figure A.9, proposition B.0.1. On appelle *triangle singulier* cette surface.

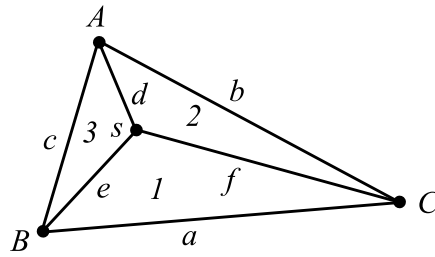


FIGURE A.9 – Triangle singulier composé de trois triangles euclidiens

Pour déterminer un triangle singulier en tant que s.p.s.c. les longueurs des côtés ne suffisent pas. Sans détermination de l'angle  $\theta$ , les longueurs des segments géodésiques entre  $s$  et les trois points  $A, B$  et  $C$  sont nécessaires pour déterminer la métrique.

En effet, si l'on connaît ces six longueurs, on peut par simple calcul avec la formule d'Al-Kashi euclidienne trouver les angles  $s_1, s_2, s_3$  et en conséquence l'angle total de la singularité  $\theta$ . On peut aussi, par la formule d'Al-Kashi singulier on obtenir les angles  $A, B, C$ . La restriction sur l'angle total de la singularité  $2\pi < \theta < 3\pi$  assure l'unicité des valeurs calculées par le biais de la formule d'Al-Kashi. D'où le résultat :

**Proposition A.3.1.** *Soit  $(ABC)$  un triangle singulier. Soit  $s$  le point singulier à l'intérieur. Soient  $a, b, c$  les longueurs de ses côtés opposé à  $A, B, C$  respectivement et  $d, e, f$  les longueurs des segments géodésiques joignant  $s$  et  $A, B, C$  respectivement. Les longueurs  $a, b, c, d, e, f$  sont des paramètres qui déterminent  $(ABC)$  en tant que s.p.s.c. de manière unique.*

*Le paramètres  $a, b, c, d, e, f$  sont soumis aux inégalités triangulaires issues des triangles euclidiens qui composent le triangle singulier, qui sont :*

$$\begin{aligned} |e - f| < a < e + f \\ |d - f| < b < d + f \\ |d - e| < c < d + e \end{aligned}$$





## Annexe B

# Polygone conique, un outil de réflexion

Dans cet annexe, on considère un polygone singulier qui a un seul point singulier à l'intérieur appelé *polygone conique*. On étudie les géodésiques et les diagonales dans un polygone conique, surtout de part de leur passage par le point singulier à l'intérieur. On étudie des s.p.s.c. obtenues par recollement par isométries de côtés de polygones coniques, et leur lien avec les origamis.

**Définition B.0.1.** Un *polygone conique* est une s.p.s.c. homéomorphe au disque avec un seul point singulier à l'intérieur et un nombre fini de points singuliers sur le bord dont les angles sont dans l'intervalle  $]0, \pi[$ .

Cette s.p.s.c. peut faciliter l'étude des s.p.s.c. dans certains cas. Il est comparable au polygone fondamental (en topologie ou géométrie hyperbolique) où une surface est obtenue en identifiant des paires de côtés du polygone fondamental.

De plus, il aide à visualiser certains aspects géométriques sur les s.p.s.c. (origamis, s.p.s.c. fermée à une singularité conique, surfaces de translation.)

On appelle *sommet* un point singulier sur le bord du polygone, *côté* le segment géodésique entre deux sommets et *le point singulier* le point singulier qui est à l'intérieur que l'on note  $s$ .

Dans un autre contexte on aurait pu accepter qu'un polygone conique ait des angles supérieur à  $\pi$  aux sommets. Mais dans ce chapitre on préfère de ne pas traiter ces cas.

**Proposition B.0.1.** *Dans un polygone conique, le point singulier est joignable à tout point du bord par un segment géodésique dont l'intérieur est à l'intérieur du polygone conique. Un polygone conique est décomposable en triangles euclidiens qui ont le point singulier comme sommet en commun.*

*Démonstration.* Soient  $C$  ce polygone. Soient  $R$  un segment géodésique qui joint  $s$  et un point  $p$  du bord sans passer par d'autres points du bord. L'existence de  $R$  implique l'existence d'un intervalle dans lequel  $R$  peut changer de sens continûment tel que  $p$  se déplace continûment sur le bord. Supposons qu'à certain moment  $R$  rencontre une partie du bord qui interrompe ce processus avant que  $p$  termine un tour complet sur le bord, figure B.1. Ceci ne

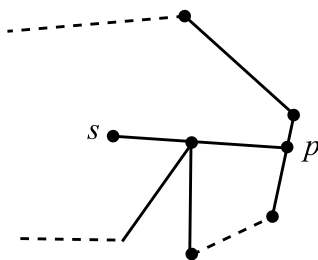


FIGURE B.1 – Un sommet du polygone empêchant un mouvement continue du point  $p$  sur le bord.

peut arriver que si l'angle en un sommet de  $C$  est strictement supérieur à  $\pi$ , ce qui contredit l'hypothèse sur les angles de  $C$ .

Puisqu'il n'y a pas d'autre point singulier à l'intérieur du polygone, les segments géodésiques joignant  $s$  aux sommets ne s'intersectent pas. Donc  $C$  est triangulable. □

On applique dans ce chapitre une version simplifiée de la formule de Gauss-Bonnet (1.1). Cette formule s'applique seulement pour un polygone conique. La formule est :

$$\theta = d, \tag{B.1}$$

où  $\theta$  est l'angle total en  $s$  et  $d$  est la somme des courbures aux sommets. La courbure en un sommet d'angle  $\tau$  est donnée par  $\pi - \tau$ .

**Proposition B.0.2.** *Dans un polygone conique ayant  $n$  côtés, l'angle total  $\theta$  au point singulier vérifie  $\theta < n\pi$ .*

*Démonstration.* Par l'hypothèse sur les angles du polygone conique on a  $d < n\pi$ . La formule de Gauss-Bonnet (B.1) donne  $\theta < n\pi$ . □

On fait la distinction entre deux types de polygones coniques qui se montrent utiles dans certaines situations.

**Définition B.0.2.** On appelle *polygone ajusté* un polygone conique dont la somme d'angles est égale à  $2\pi$ .

De la relation (B.1), dans un  $n$ -gone ajusté, l'angle total au point singulier est  $\theta = (n - 2)\pi$  et la courbure en ce point est  $\kappa = (4 - n)\pi$ .

**Définition B.0.3.** On appelle *polygone rectangle* un polygone conique dont tous les angles sont droits.

De la relation (B.1), dans un  $n$ -gone rectangle, l'angle total au point singulier est  $\theta = n(\pi - \frac{\pi}{2}) = n\frac{\pi}{2}$  et la courbure en ce point est  $\kappa = 2\pi - n\frac{\pi}{2} = (4 - n)\frac{\pi}{2}$ .

**Définition B.0.4.** Un polygone conique est dit *régulier* si ses côtés ont la même longueur et ses angles sont égaux.

## B.1 Surfaces fabriquées de polygones coniques

**Définition B.1.1.** On appelle *configuration de départ de polygones coniques* (ou *configuration de départ*), la s.p.s.c. homéomorphe à un disque obtenue par identification par isométries deux à deux des côtés de polygones coniques, chaque côté d'un recollement appartenant à un polygone conique différent.

Un polygone conique est une configuration de départ obtenue par zéro identifications.

**Définition B.1.2.** Deux côtés d'une configuration de départ sont dits *parallèles* si la somme des courbures aux sommets de la configuration de départ qui sont entre les deux côtés dans chaque sens est un multiple de  $\pi$ .

À titre d'exemple on voit la figure B.2.

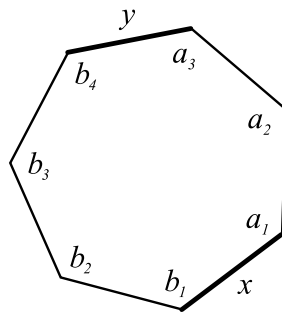


FIGURE B.2 – Les deux côtés  $x$  et  $y$  sont parallèles si  $\sum(\pi - a_i)$  et  $\sum(\pi - b_i)$  sont des multiples de  $\pi$ .

*Remarque B.1.1.* Cette notion de parallélisme est compatible avec le parallélisme dans le plan euclidien. Son avantage est qu'elle est facile à détecter.

**Définition B.1.3.** On dit que deux côtés sont *opposés* s'ils sont parallèles et la somme des courbures aux sommets de la configuration de départ dans chaque sens est différente de  $\pi$  par un multiple de  $2\pi$ .

**Définition B.1.4.** Dans une configuration de départ on appelle *identification permise* l'identification par isométrie de deux côtés opposés.

**Définition B.1.5.** On appelle *surface permise* la surface obtenue d'une configuration de départ par des identifications permises.

La notion de polygone conique permet de voir des s.p.s.c. comme les Origamis et certaines surfaces de translation de façon nouvelle. Ceci est possible grâce à ces deux propositions :

**Proposition B.1.1.** *La s.p.s.c. de genre  $g > 1$  obtenue par l'identification par translation des côtés opposés d'un  $4g$ -gone euclidien régulier peut être obtenue par des identifications permises des côtés d'un polygone conique régulier ajusté, et vice-versa.*

*Démonstration.* Prenons un polygone euclidien régulier qui a  $4g$  côtés,  $g > 1$ . Découpons-le le long des médiatrices de ses côtés. Il est divisé en  $4g$  morceaux de la forme donnée sur la figure B.3, qui est un triangle rectangle avec

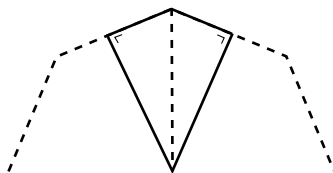


FIGURE B.3 – Un morceau après le découpage.

sa réflexion dans son hypoténuse. On identifie les demi-côtés opposés d'après l'identification d'origine. Chaque identification de deux demi-côtés fait apparaître un côté du polygone conique recherché, figure B.4. Tous les sommets du polygone d'origine sont identifiés en un seul point, à l'intérieur du polygone obtenue. L'angle total en ce point est égal à  $(4g - 2)\pi$ , la somme d'angles du polygone d'origine.

L'angle à chaque sommet est égal à  $\frac{2\pi}{4g} = \frac{\pi}{2g}$  donc strictement inférieur à  $\pi$ , et la courbure en chaque sommet est  $\pi - \frac{\pi}{2g} = \frac{(2g-1)\pi}{2g}$ . Les côtés du polygone conique ont la même longueur, car le découpage est effectué le long des médiatrices des côtés du polygone régulier. Donc, on obtient un polygone conique régulier.

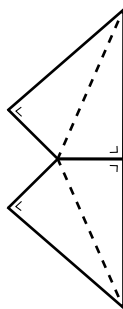


FIGURE B.4 – L'identification des demi-côtés.

Pour vérifier le parallélisme au sens de la définition B.1.2 on trouve la somme des courbures entre les deux côtés de chaque sens. Pour deux côtés qui sont les copies des mêmes médiatrices, la somme des courbures est égale à  $2g \frac{(2g-1)\pi}{2g} = (2g-1)\pi$ . Elle est différente de  $\pi$  par un multiple de  $2\pi$ . Ce qui veut dire que les deux côtés sont opposés. Ils sont donc permis d'être identifiés. Après identification les nouveaux sommets sont identifiés en un seul point régulier car l'angle total en ce point est  $4g \frac{\pi}{2g} = 2\pi$ . Ce qui signifie que le polygone est ajusté. Alors on peut obtenir la même surface à partir d'une polygone régulier ajusté. Passer inversement du polygone conique régulier ajusté au polygone euclidien se fait de la même manière.  $\square$

### B.1.1 Polygone conique et origami

**Proposition B.1.2.** *Un origami peut être obtenu par identifications permises des côtés d'une configuration de départ de polygones coniques réguliers rectangles.*

*Démonstration.* Un origami est obtenu en identifiant par translation les côtés des carrées d'identités (voir l'exemple 1.4.4). On découpe chaque carrée le long des médiatrices de ses côtés. Chaque quart de carrée porte au plus une copie d'un point singulier de l'origami sur l'un de ses sommets, figure B.5. On identifie les côtés des quarts de carrées d'après l'identification d'origine.

On remarque que tous deux quarts de carrée font apparaître un côté orthogonal à un côté de l'identification d'origine, figure B.6, et que les quarts qui partagent un point singulier forme un polygone rectangle régulier autour de ce point, puisque les nouveaux côtés ont la même longueur et les nouveaux angles sont droits. Les polygones coniques obtenus ont chacun un nombre de côtés multiple de quatre et l'angle total en le point singulier est multiple de  $2\pi$ .

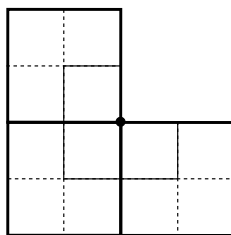


FIGURE B.5 – Les carrés sont découpés puis les quarts recollés

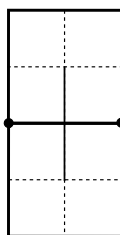


FIGURE B.6 – Un nouveau côté est orthogonal à un côté de carré.

On peut utiliser les identifications d'origine pour obtenir une configuration de départ. Les côtés de la configuration de départ proviennent du découpage fait. Ce qui permet de les classer en paire. La somme de courbures aux sommets entre deux côtés qui sont en paire dans chaque sens est différente de  $\pi$  par un multiple de  $2\pi$ , car les identifications d'origine sont faites par translation. On peut voir ceci en imaginant qu'on démarre d'un côté et se déplace sur le bord de la configuration de départ, figure B.7. On conclut que les deux côtés sont opposés et donc permis d'être identifiés. En identifiant à nouveau les côtés de la configuration de départ on trouve l'origami.  $\square$

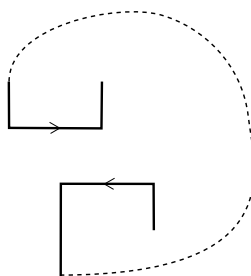


FIGURE B.7 – Deux côtés de la configuration de départ qui sont opposés.

## B.2 Classification des diagonales

Pour être capable de parler des diagonales avec précision, on préfère les classer. Commençons par la définition d'une diagonale.

**Définition B.2.1.** Une *diagonale* dans un polygone conique est un segment géodésique entre deux sommets.

On remarque que les côtés d'un polygone sont considérés comme diagonales par cette définition. On classe les côtés comme diagonales de classe zéro. De chaque sommet partent deux diagonales de classe zéro vers les deux sommets voisins. Les deux diagonales suivantes qui partent de ce sommet vers les deux sommets suivants sont classés en classe un et ainsi de suite, figure B.8.

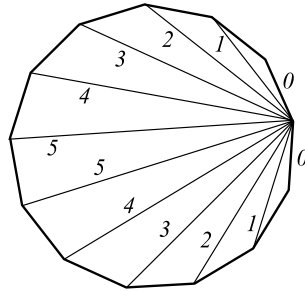


FIGURE B.8 – Classification des diagonales

Mais une diagonale peut être classée sous deux classes différentes selon le sens par lequel on commence à compter. Dans l'exemple du pentagone sur la figure B.9, la même diagonale peut être classée en classe un ou de classe

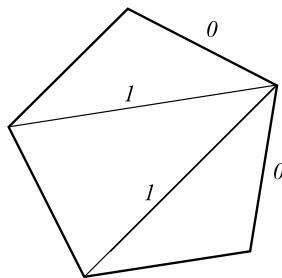


FIGURE B.9 – Les classes des diagonales dans un pentagone.

deux. Pour être plus précis, on choisit la classe d'ordre inférieur. Alors, un pentagone n'a que des diagonales de classes zéro et un.

Quand on parle des diagonales, les côtés du polygone sont exclus sauf mention contraire.



**Proposition B.2.1.** *Dans un  $n$ -gone conique avec  $n \geq 4$ , si l'angle total au point singulier vérifie :  $(n-1)\pi \leq \theta < n\pi$ , alors toutes les diagonales passent par le point singulier.*

*Démonstration.* Soient  $P$  le polygone conique et  $s$  le point singulier. L'angle total en  $s$  vérifie la condition  $\theta < n\pi$  qui garantit l'existence d'un  $n$ -gone autour de  $s$ , par la proposition B.0.2. Mais il ne vérifie pas la condition  $\theta < n_1\pi$  pour  $n_1 < n$ , alors  $s$  ne peut être à l'intérieur d'un  $n_1$ -gone, pour  $n_1 < n$ . Toute diagonale subdivise  $P$  en deux polygones chacun a  $n-1$  côté au plus. Alors le point singulier ne peut être dans aucun d'eux, ce qui implique que  $s$  est sur la diagonale.  $\square$

**Exemple B.2.1.** Un point singulier d'angle total  $3\pi$  à l'intérieur d'un quadrilatère est forcé d'être sur l'intersection des deux diagonales.

**Proposition B.2.2.** *Dans un  $n$ -gone conique avec  $n \geq 4$ , si toutes les diagonales passent par le point singulier alors l'angle total  $\theta$  au point singulier vérifie  $\theta \geq n\frac{\pi}{2}$ .*

*Démonstration.* Soient  $P$  ce polygone et  $s$  le point singulier. Soient  $S_1, S_2, \dots, S_n$  les angles des secteurs coniques définis par les sommets de  $P$ . Puisque toutes les diagonales passent par  $s$ , pour tous deux secteurs consécutifs on a :

$$\begin{aligned} S_i + S_{i+1} &\geq \pi, \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n 2S_i &\geq n\pi \\ \Rightarrow 2\theta &\geq n\pi \\ \Rightarrow \theta &\geq n\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\square$

*Remarque B.2.1.* L'inverse de la proposition B.2.2 n'est pas toujours valide. Un contre exemple : Un quadrilatère conique avec  $\theta = 5\frac{\pi}{2}$ . Le point singulier peut bien être dans un triangle, et donc on peut avoir une diagonale qui ne passe pas par  $s$ .

**Proposition B.2.3.** *Dans un  $n$ -gone conique avec  $n \geq 4$ , la classe d'une diagonale est au plus*

- $\frac{n-2}{2}$  si  $n$  est pair
- $\frac{n-3}{2}$  si  $n$  est impair

*Démonstration.* Soient  $P$  ce polygone. Une diagonale  $d$  subdivise  $P$  en deux polygones  $P_1, P_2$ . Soient  $n_i, i = 1, 2$  le nombre de côtés de  $P_i$ . On a :

$$n = n_1 + n_2 - 2, \quad (\text{B.2})$$

et la classe  $c_d$  de la diagonale  $d$  est :

$$c_d = \min(n_1, n_2) - 2.$$

$$\max_d c_d = \max_d (\min(n_1, n_2) - 2)$$

De la relation (B.2) on a :

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= n + 2 \\ \Rightarrow \max_d \min(n_1, n_2) &= \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Alors

$$\max_d c_d = \begin{cases} \frac{n-2}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-3}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

□

Les valeurs de  $n_1$  et  $n_2$  en fonction de la classe de la diagonale qui les sépare sont calculées dans la proposition suivante.

**Proposition B.2.4.** *Une diagonale de classe  $c$  dans un  $n$ -gone le subdivise en deux polygones : un  $(c+2)$ -gone et un  $(n-c)$ -gone.*

*Démonstration.* Soient  $P$  ce  $n$ -gone et  $d$  une diagonale de classe  $c$ . Par la définition de la classe de diagonale, on a d'un côté de la diagonale un  $(c+2)$ -gone. Alors  $(c+2) - 1 = c+1$  côtés de  $P$  appartiennent à ce  $(c+2)$ -gone. Pour l'autre polygone de la subdivision il reste  $n - (c+1)$  côtés de  $P$ . Plus la diagonale, on trouve que l'autre polygone a  $n - (c+1) + 1 = n - c$  côtés. □

**Proposition B.2.5.** *Dans un  $n$ -gone conique avec  $n \geq 4$ , si l'angle total  $\theta$  au point singulier vérifie*

$$(n_1 - 1)\pi \leq \theta < n_1\pi, \quad 1 \leq n_1 \leq n,$$

*alors les diagonales de classe  $c \geq n - n_1 + 1$  passent par le point singulier.*

*Démonstration.* Soient  $P$  ce  $n$ -gone et  $s$  le point singulier. Par la proposition B.2.4, une diagonale de classe  $c$  subdivise  $P$  en deux polygones, un  $(c+2)$ -gone et un  $(n-c)$ -gone. Par la proposition B.2.3, la classe d'une diagonale est bornée selon les inégalités :

$$1 \leq c \leq \begin{cases} \frac{n-2}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-3}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Alors

$$3 \leq c+2 \leq \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right\} \frac{\begin{array}{l} n+2 \\ n+3 \end{array}}{2} \leq n-c \leq n-1.$$

Alors

$$n-c \begin{cases} \geq c+2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ > c+2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

D'où,

$$\max(c+2, n-c) = n-c, \forall n \text{ et } \forall c \text{ dans leurs limites.}$$

C'est le nombre maximale de côtés pour un polygone issue de la subdivision d'un  $n$ -gone par une diagonale de classe  $c$ . Mais, avec un angle total soumis à la condition :

$$(n_1 - 1)\pi \leq \theta < n_1\pi, 1 \leq n_1 \leq n,$$

le point singulier ne peut pas être à l'intérieur d'un polygone avec un nombre de côtés inférieur à  $n_1 - 1$ , la proposition B.0.2. Alors, si  $n-c \leq n_1 - 1$ , le point singulier ne peut pas être à l'intérieur d'aucun polygone de la subdivision, puisque  $n-c$  est le maximum. Donc  $s$  est sur la diagonale.  $\square$

### B.3 Les géodésiques dans un polygone rectangle

Les polygones rectangles permettent de faire un recollement de deux côtés sans faire apparaître de nouveaux points singuliers.

Soient  $P$  un  $n$ -gone rectangle. On rappelle que l'angle total au point singulier est  $\theta = n\frac{\pi}{2}$  et la courbure en ce point est  $\kappa = 2\pi - n\frac{\pi}{2}$ . De ces valeurs, on peut avoir une idée sur les polygones rectangles.

Les 1-gone, 2-gone et 3-gone rectangles n'ont pas de géodésiques qui passent par le point singulier, car la courbure en le point singulier est positive.

A partir de  $n = 4$  il existe des géodésiques qui passent par le point singulier, et à partir de  $n = 6$ , il existe des diagonales qui passent par le point singulier.

Le 4-gone rectangle est le seul polygone rectangle qui n'a pas de point singulier.

En recollant six triangles rectangles isocèles le long de leurs côtés adjacents aux angles droits on obtient un hexagone rectangle régulier avec  $\theta = 2\pi - 6\frac{\pi}{2} = 3\pi$ .

**Proposition B.3.1.** *Un  $n$ -gone avec  $n \geq 4$ , dont tous les angles sont droits à l'exception de deux angles qui sont aigus, est singulier.*

*Démonstration.* Soient  $d$  la somme des courbures aux sommets et  $d_1$  la somme des courbures aux deux sommets d'angles aigus. Supposons que le polygone n'est pas singulier. Par la formule de Gauss-Bonnet :

$$\begin{aligned} d &= 2\pi \\ (n-2)\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + d_1 &= 2\pi \\ d_1 &= 3\pi - n\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow d_1 &\leq \pi \text{ pour } n \geq 4. \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que les deux angles sont aigus.  $\square$

**Proposition B.3.2.** *Dans un  $n$ -gone rectangle avec  $n \geq 6$ , les diagonales de classes supérieures à deux passent par le point singulier.*

*Démonstration.* Une diagonale de classe  $c \geq 2$  subdivise le  $n$ -gone en deux polygones, un  $(c+2)$ -gone et un  $(n-c)$ -gone. Dans chacun tous les angles sont droits à l'exception de deux angles qui sont aigus. Par la proposition B.3.1, les deux polygones sont singuliers. En effet,  $c \geq 2$  implique  $c+2 \geq 4$  pour le premier polygone. Pour le deuxième,  $n-c \geq c+2$ , comme on a vu dans la preuve de la proposition B.2.5. On a, alors, deux polygones singuliers et un point singulier. Ce qui implique que le point singulier est sur le côté en commun entre les deux polygones, qui est la diagonale.  $\square$

**Proposition B.3.3.** *Dans un  $n$ -gone rectangle avec  $n \geq 6$ , un segment géodésique, entre deux points du bord séparés par quatre sommets ou plus, passe par le point singulier.*

*Démonstration.* Prenons un côté du polygone entre deux sommets  $A$  et  $B$  et prenons un point  $C$  sur ce côté. Les diagonales de classes supérieures à deux qui partent de chacun des points  $A$  et  $B$  passent par le point singulier, proposition B.3.2. Alors, il y a un secteur conique éclipsé par le point singulier par rapport à  $C$  (voir proposition C.1.1 et la discussion qui la précède). Ce secteur conique contient toutes les parties des diagonales de classe supérieur à deux qui partent de  $A$  et  $B$  après le point singulier  $s$ . On ne connaît pas les côtés de ce secteur. Pour cela on va considérer les deux secteurs coniques délimités par des diagonales de classe deux partant des points  $A$  et  $B$ . Sur la figure B.10, les deux secteurs coniques sont  $\widehat{FsG}$  et  $\widehat{DsE}$  dans le sens

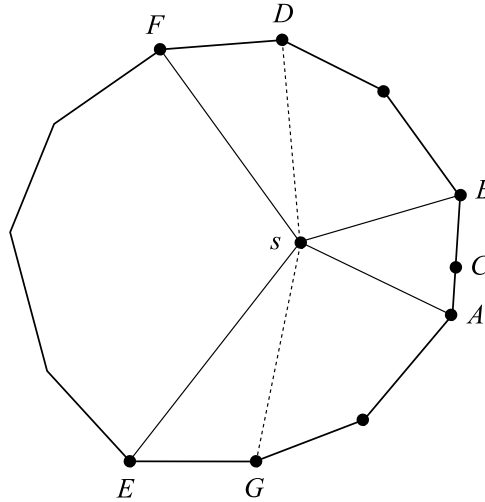


FIGURE B.10 – Partie éclipsée par rapport à  $C$

anti-horaire. Ils s'intersectent dans le secteur  $\widehat{FsE}$ . Ce secteur est contenu en même temps dans le secteur éclipsé par rapport à  $A$  et dans le secteur éclipsé par rapport à  $B$ . Puisque l'éclipse est une relation symétrique alors  $A$  et  $B$  sont dans le secteur éclipsé par rapport à tout point du bord contenu dans le secteur  $\widehat{FsE}$ . Puisque le secteur conique est connexe et convexe alors le côté  $AB$  est éclipsé par rapport à tout point du bord dans  $\widehat{FsE}$ . Alors, un segment géodésique d'un point comme  $C \in AB$  à un point du bord dans  $\widehat{FsE}$  passe par le point singulier. On voit clairement qu'il y a plus que quatre sommets qui séparent  $C$  de chacun de ces points.  $\square$

**Proposition B.3.4.** *Un polygone rectangle est décomposable en rectangles, chacun a le point singulier et un sommet du polygone rectangle comme sommets.*

*Démonstration.* Par la proposition B.0.1, le point singulier peut être lié aux sommets par des segments subdivisant le polygone en triangles. Puisque le polygone est rectangle, les angles de ces triangles aux sommets du polygone sont aigus. La hauteur qui passe par le point singulier est à l'intérieur du polygone. Prenons toutes les hauteurs du point singulier sur les côtés du polygone. Le polygone rectangle va être subdivisé en quadrilatères, figure B.3, chacun a trois angles droits et n'a aucun point singulier et donc est un rectangle.  $\square$

**Corollaire B.3.5.** *Un polygone rectangle qui a un nombre pair de côtés est décomposable en rectangles. Chaque rectangle a le point singulier à l'intérieur de l'un de ses côtés et a deux sommets du polygone rectangle comme sommets sur le côté opposé. Il existe deux décompositions différentes.*

*Démonstration.* Tous deux rectangles adjacents, de la décomposition vue dans la proposition B.3.4, partagent un côté en commun et constituent ensemble un rectangle, figure B.11.

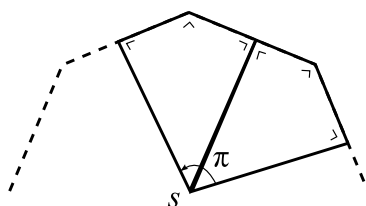


FIGURE B.11 – Deux rectangles qui composent un rectangle.

Si on donne des numéros aux rectangles comme suit  $1, \dots, 2n$ , on peut les combiner en couples de deux manières  $(1, 2), (3, 4), \dots, (2n - 1, 2n)$  ou  $(2n, 1), (2, 3), \dots, (2n - 2, 2n - 1)$ . Ce qui fait deux décompositions.  $\square$

**Exemple B.3.1.** Un hexagone rectangle est décomposable par deux manières différentes en trois rectangles. Prenons une de ces décompositions. Soient  $a, b, c$  les longueurs des segments de la décomposition qui joignent  $s$  aux trois côtés. Supposons que les côtés du hexagone, qui sont en même temps des côtés des rectangles de la décomposition, ont la même longueur. On note cette longueur  $l$ , figure B.12.

On a  $a + b = b + c = c + a = l \Rightarrow a = b = c = l/2$ . D'où le résultat suivant.

**Proposition B.3.6.** *Si un hexagone rectangle a, alternativement, trois côtés de la même longueur, alors l'hexagone est décomposable en trois rectangles qui ont des côtés de la même longueur et le point singulier est au milieu du côté sur lequel il est.*

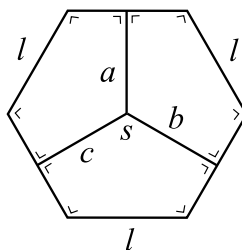


FIGURE B.12 – Hexagone rectangle décomposé en trois rectangle.

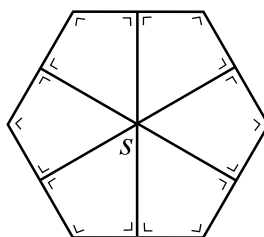


FIGURE B.13 –

Plus généralement,

**Proposition B.3.7.** *Un polygone rectangle qui a, alternativement, des côtés de la même longueur  $l$ , est décomposable en rectangles qui ont des côtés de la même longueur  $l$  et le point singulier est au milieu du côté sur lequel il est.*

**Proposition B.3.8.** *Si un hexagone rectangle est régulier alors toutes ses diagonales passent par le point singulier.*

*Démonstration.* On sait que toutes les diagonales de classe supérieure à deux, dans un hexagone rectangle, passent par le point singulier, proposition B.3.2. Décomposons l'hexagone en rectangles dans le sens de la proposition B.3.4, figure B.13.

Trois rectangles consécutifs font un polygone de la forme  $L$ . Ce polygone contient deux rectangles provenant des deux décompositions au sens de la proposition B.3.6. Par la proposition B.3.6, le polygone en forme  $L$  est composé de trois carrées, car  $s$  est au milieu du côté de chaque rectangle, figure B.14. Il est alors facile de voir que la diagonale de classe un passe par le point singulier  $s$ .  $\square$

*Remarque B.3.1.* Puisque ceci marche pour trois rectangles quelconques consécutifs, l'hexagone est décomposable en carrées au sens de la proposition B.3.4.

Plus généralement,

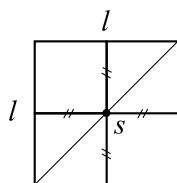


FIGURE B.14 – bla

**Proposition B.3.9.** *Dans un polygone rectangle régulier, toutes les diagonales passent par le point singulier, et le polygone est décomposable en carrées.*





## Annexe C

# Trigonométrie au voisinage d'un point singulier conique

Notre objectif est de fournir quelques formules trigonométriques applicables au voisinage d'un point singulier conique sur une s.p.s.c. Pour ceci, on se met dans le contexte d'un plan plat à un seul point singulier conique. En termes du chapitre 1, c'est un cône euclidien. Les formules déduites dans ce contexte sont applicables dans un voisinage d'un point singulier conique sur une s.p.s.c.

On note  $P_1$  un plan plat à un seul point singulier conique. On note  $s$  le point singulier et  $\theta$  l'angle total en  $s$ .

La définition d'un *triangle* dépend de la surface sur laquelle on voudrait définir le triangle. Par exemple dans le plan euclidien un triangle est défini par la donnée de trois points. Les côtés sont déterminés en conséquence comme étant les segments géodésiques qui représentent les chemins les plus courts entre les trois points. Puis, on peut déterminer l'intérieur du triangle et ses angles.

Sur certaines s.p.s.c. il existe plus qu'un seul segment géodésique qui représente le chemin le plus court entre deux points (voir l'exemple 1.1.1). La définition d'un triangle requiert aussi la donnée des segments géodésiques considérés comme côtés. C'est le cas sur  $P_1$  si l'angle total en  $s$  est inférieur à  $2\pi$ .

Sur d'autres s.p.s.c. il existe entre deux points une multitude de segments géodésiques de classes d'homotopie différentes. Dans ce cas aussi, il faut déterminer les segments géodésiques considérés comme côtés pour définir le triangle. C'est le cas, par exemple d'une s.p.s.c. de genre deux. Il se peut que l'on ait besoin de déterminer l'intérieur du triangle pour bien le définir. Comme c'est le cas sur une s.p.s.c. homéomorphe à la sphère.

**Exemple C.0.2** (Exemple modèle). Prenons les trois triangles euclidiens donnés sur la figure C.1 dont les longueurs de côtés sont données sur la figure. En recollant ces triangles autour du point  $\bullet$ , on obtient un triangle singulier avec un point singulier à l'intérieur et de longueurs de côtés 1, 1, 3. On remarque que  $3 > 1 + 1$  contredisant l'inégalité triangulaire usuelle.

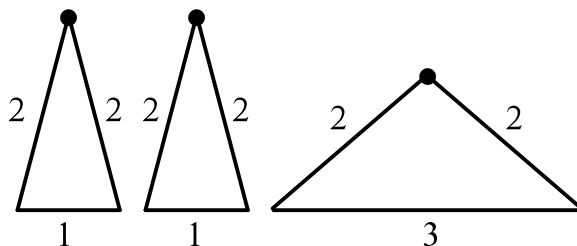


FIGURE C.1 – Triangles euclidiens utilisés pour fabriquer un triangle singulier avec le point singulier à l'intérieur.

Dans le plan euclidien les inégalités triangulaires sont en même temps les conditions qui définissent l'espace des paramètres de l'espace des déformations des triangles. Par contre, d'après l'exemple C.0.2, l'espace des paramètres de l'espace des déformations des triangles singuliers dans  $P_1$  n'est pas soumis aux inégalités triangulaires usuelles. Ceci revient au fait qu'on a une multitude de segments géodésiques entre deux points donnés qui sont de classes d'homotopies différentes, et que ces triangles ont d'autres paramètres en plus de leurs longueurs de côtés.

Dans ce chapitre, un *triangle* est défini par la donnée de trois points (appelés *sommets* du triangle) et trois segments géodésiques entre ces points (appelés *côtés* du triangle). Un triangle subdivise  $P_1$  en deux parties. On appelle la partie bornée l'*intérieur du triangle*.

## C.1 La vision à partir d'un point

Les idées présentées dans cette section peuvent être exprimées en terme d'existence et d'unicité des géodésiques. Mais les notions données ici présentent quelques avantages.

Dans la vie de tous les jours, un objet est visible par rapport à l'œil s'il existe une géodésique (de lumière) qui joint l'objet à l'œil. En ce sens on peut parler de la visibilité en géométrie. Dans le plan euclidien tout point voit tout autre point, la vision ainsi est *totale*, et il le voit dans un seul sens, la vision ainsi est *unique*. Dans  $P_1$  ce n'est pas le cas. Il y a un seul point qui a la vision totale et unique, c'est le point singulier  $s$ . Pour les autres points

la vision dépend de la courbure en  $s$ . Soient  $x, y$  deux points réguliers dans  $P_1$ . Soit  $\kappa$  la courbure en  $s$ . On distingue deux cas :

1. Si  $\kappa > 0$ ,  $\theta < 2\pi$  : l'angle d'un secteur conique  $\widehat{AsB}$  est inférieur à  $\pi$  et le segment géodésique  $AB$  est un segment euclidien qui ne passe pas par  $s$ . Entre certains points la vision n'est pas unique, figure 1.11.
2. Si  $\kappa < 0$ ,  $\theta > 2\pi$  : l'angle d'un secteur conique  $\widehat{AsB}$  peut être supérieur à  $\pi$  et le segment géodésique  $AB$  passe par  $s$ . Par rapport à un point fixé  $A$ , l'ensemble des points  $B$ , qui forment avec  $A$  des secteurs coniques d'angles supérieurs à  $\pi$ , est le secteur conique formé par les deux demi-droites issues de  $s$  et qui font avec  $A$  des angles égaux à  $\pi$ , et qui ne contient pas  $A$ , figure C.2. Ce secteur est d'angle  $\theta - 2\pi = -\kappa$ .

Alors, par rapport à tout point régulier  $A$ , le point singulier  $s$  éclipe derrière lui un secteur conique. Le point  $A$  ne voit ce secteur que comme un seul point. On appelle ce secteur le *secteur éclipsé par le point singulier conique  $s$  par rapport au point  $A$*  (ou le *secteur éclipsé par rapport à  $A$* ).

A part du secteur éclipsé, on peut distinguer deux demi-plans euclidiens bornés par la demi-droite  $sA$  et l'une ou l'autre des demi-droite qui délimitent le secteur éclipsé.

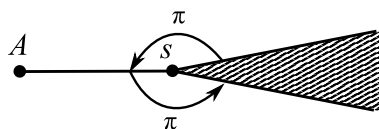


FIGURE C.2 – Le secteur éclipsé par le point singulier conique  $s$  par rapport au point  $A$ .

**Proposition C.1.1.** *La relation “Le point  $B$  est dans le secteur éclipsé par le point singulier par rapport au point  $A$ ” est une relation symétrique, non-réflexive, et non-transitive.*

On l'appelle la *relation d'éclipse*.

## C.2 Classification des triangles singuliers

Pour classer les triangles dans  $P_1$  on va préciser notre terminologie.

**Définition C.2.1.** Un triangle est dit *euclidien* s'il n'a pas de points singuliers différents de ses sommets ni sur le bord ni à l'intérieur. Sinon il est dit *singulier*.

*Remarque C.2.1.* Un triangle dont tous les sommets et tous les côtés sont dans un même secteur conique d'angle inférieur à  $\pi$  est euclidien, et vis versa, figures C.3, C.4 et C.6.

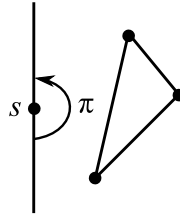


FIGURE C.3 –

On va classer les triangles d'après la position du point singulier par rapport au triangle.

1. Si  $s$  est un sommet d'un triangle ( $AsB$ ), on a trois possibilités :
  - (a) L'angle du triangle au sommet  $s$  est strictement inférieur à  $\pi$ . Dans ce cas le triangle est à l'intérieur d'un secteur conique d'angle inférieur à  $\pi$ . Donc, ce triangle est euclidien.

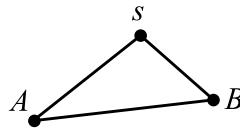


FIGURE C.4 –

- (b) L'angle du triangle au sommet  $s$  est égal à  $\pi$ . Dans ce cas on a un triangle euclidien dégénéré avec une somme d'angle égal à  $\pi$ .
  - (c) L'angle du triangle au sommet  $s$  est strictement supérieur à  $\pi$ . Ce qui arrive seulement si  $\theta > 2\pi$ . Dans ce cas le segment  $AB$  passe par  $s$  et le triangle est singulier dégénéré avec une somme d'angle strictement supérieur à  $\pi$ . La somme d'angles ne dépasse pas  $\theta$  l'angle total en  $s$ , figure C.5.
2. Si  $s$  est sur un seul côté du triangle ( $ABC$ ), par exemple sur le côté  $AB$ . Ce qui arrive seulement si  $\theta > 2\pi$ . On a deux cas différents :
  - (a) Si l'angle du secteur conique  $\widehat{AsB}$  est égal à  $\pi$ , le triangle est euclidien, figure C.6.

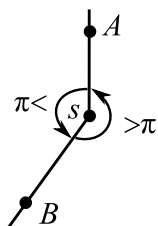


FIGURE C.5 – Triangle singulier dégénéré.

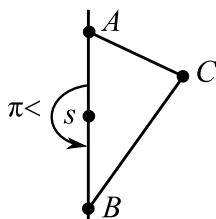


FIGURE C.6 –

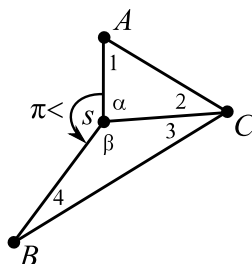


FIGURE C.7 –

- (b) Si l'angle du secteur conique  $\widehat{AsB}$  est strictement supérieur à  $\pi$ , le triangle est singulier avec une somme d'angles strictement inférieure à  $\pi$ , figure C.7.

*Démonstration.* Avec la notation sur la figure C.7, on note la somme des angles du triangle  $(ABC)$  par  $\Sigma = \widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} + \widehat{4}$ . Les triangles  $(AsC)$  et  $(CsB)$  sont des triangles euclidiens parce que la singularité est un sommet (cas (1,a)), et les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont strictement inférieurs à  $\pi$ . Sinon  $s$  sera sur plus d'un seul côté, les cas discutés plus loin. On a donc :  $\widehat{1} + \widehat{2} = \pi - \widehat{\alpha}$  et  $\widehat{3} + \widehat{4} = \pi - \widehat{\beta}$ . Alors,  $\Sigma = 2\pi - (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta})$ . Mais  $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} > \pi$ , et donc  $\Sigma < \pi$ .  $\square$

*Remarque C.2.2.* Ce résultat peut être obtenu à partir de la for-

mule de Gauss-Bonnet si l'on considère la métrique intrinsèque sur ce triangle.

3. Si  $s$  est sur deux côtés seulement du triangle  $(ABC)$ , par exemple sur  $AB$  et  $AC$ , figure C.8. Ce qui arrive seulement si  $\theta > 2\pi$ . Dans ce

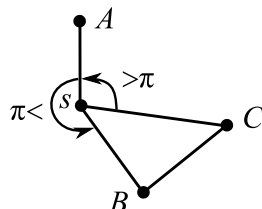


FIGURE C.8 –

cas le triangle  $(ABC)$  est singulier avec une somme d'angle strictement inférieur à  $\pi$ , sauf si  $B$  et  $C$  sont sur une même demi-droite basé sur  $s$ , la somme est égale à  $\pi$  et le triangle est dégénéré.

4. Si  $s$  est sur les trois côtés du triangle  $(ABC)$ , le triangle est dégénéré avec une somme d'angles égale à zéro, figure C.9. Ce qui arrive seulement si  $\theta \geq 3\pi$ .

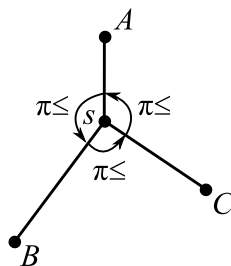


FIGURE C.9 –

5. Si  $s$  est à l'intérieur du triangle  $(ABC)$ , les côtés sont des segments et la somme d'angles est strictement inférieur à  $\pi$  si  $\theta > 2\pi$ , et strictement supérieur à  $\pi$  si  $\theta < \pi$ .

### C.3 Théorème de Pythagore pour un triangle singulier

Parmi les triangles singuliers rencontrés dans  $P_1$ , on a trois cas où le triangle singulier peut avoir un angle droit. Ces cas sont : Le triangle avec

le point singulier sur un seul côté, le point singulier est sur deux côtés ou le point singulier est à l'intérieur du triangle. Dans chaque cas on peut trouver une relation du type Pythagore.

1. Si  $s$  est sur un seul côté du triangle, on a deux possibilités :

(a) L'angle droit est adjacent à la singularité, figure C.10 :

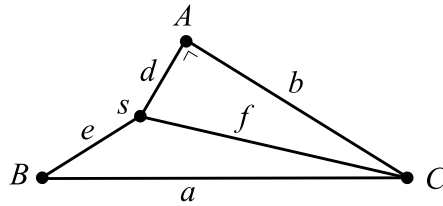


FIGURE C.10 – Triangle singulier rectangle.

On peut appliquer le théorème de Pythagore euclidien sur le triangle  $(BsC)$  et on a  $f^2 = e^2 + a^2$ , qui est la relation dans ce cas.

(b) L'angle droit est opposé à la singularité, figure C.11 : La somme

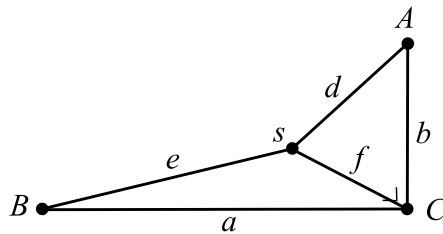


FIGURE C.11 – Triangle singulier avec le point singulier sur un côté et un angle droit opposé au point singulier.

d'angles du triangle est strictement inférieur à  $\pi$ , et donc chacun de ses angles l'est,

$$0 < A, B, C < \pi. \quad (\text{C.1})$$

On prouve l'équivalence entre le fait que l'angle  $C$  soit droit et une relation de Pythagore entre les paramètres de ce triangle  $a, b, d, e, f$ .

Notons par  $C_1$  l'angle du triangle  $(BCs)$  au sommet  $C$  et par  $C_2$  l'angle au sommet  $C$  du triangle  $(ACs)$ . Sous la condition C.1 on



a :

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_2 &= C = \frac{\pi}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos C_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - C_2\right) \\
 \Leftrightarrow \cos C_1 &= \sin C_2 \\
 \Leftrightarrow \cos^2 C_1 &= \sin^2 C_2 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{f^2 + a^2 - e^2}{2fa}\right)^2 &= 1 - \left(\frac{f^2 + b^2 - d^2}{2fb}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow b^2 (f^2 + a^2 - e^2)^2 + a^2 (f^2 + b^2 - d^2)^2 - 4a^2 b^2 f^2 &= 0
 \end{aligned}$$

D'où la relation de Pythagore :

$$4a^2 b^2 f^2 = b^2 (f^2 + a^2 - e^2)^2 + a^2 (f^2 + b^2 - d^2)^2 \quad (\text{C.2})$$

*Remarque C.3.1.* Une autre relation peut être extraite mais en terme d'autres paramètres. Prenons la notation sur la figure C.12 où  $a = g + h$  et  $b = k + l$ . Les hauteurs  $sD$  et  $sE$  sont à l'intérieur des triangles  $(AsC)$  et  $(BsC)$  respectivement du fait que c'est nécessaire pour que le côté  $AB$  passe par  $s$ . On a du triangle rectangle  $(ADs)$ ,  $d^2 = l^2 + h^2$  et du  $(ECs)$ ,  $e^2 = g^2 + k^2$  donc :  $d^2 + e^2 = h^2 + k^2 + g^2 + l^2$ . Le fait que l'angle  $C$  soit droit se traduit par  $f^2 = k^2 + h^2$ . D'où :

$$d^2 + e^2 = f^2 + g^2 + l^2. \quad (\text{C.3})$$

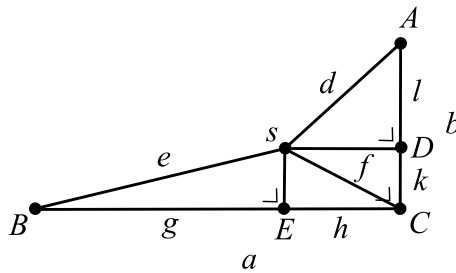


FIGURE C.12 – Triangle singulier avec le point singulier sur un côté, avec des nouveaux paramètres.

C'est bien une relation de Pythagore. En effet, prenons cinq longueurs qui vérifient cette relation. Les deux segments  $d, e$  se rencontrent obligatoirement en  $s$ . Les deux segments  $l, k$  sont alignés

ainsi que  $g, h$ . On prend les perpendiculaires  $sD, sE$  de longueurs  $h', k'$  respectivement. Le quadrilatère  $sECD$  contient deux angles droits,  $D, E$ . On va démontrer qu'il est un rectangle et donc  $C$  est droit. On a  $h'^2 = d^2 - l^2$  et  $k'^2 = e^2 - g^2$ . De la relation (C.3) on a  $h'^2 + k'^2 = h^2 + k^2$ . Comme  $D, E$  sont droits alors des deux triangles rectangles  $(sDC), (sEC)$  on a  $h'^2 + k^2 = h^2 + k'^2$ . On prend la différence  $k'^2 - k^2 = k^2 - k'^2$  d'où  $k^2 = k'^2$  donc  $k = k'$ . Ainsi l'on trouve  $h = h'$ . Donc  $sECD$  est bien un rectangle et  $C$  est droit.

2. Si  $s$  est sur deux côtés triangle, figure C.13 :

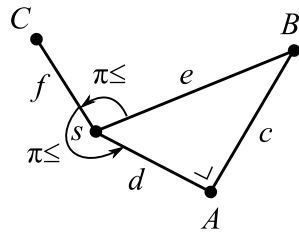


FIGURE C.13 – Triangle singulier droit avec le point singulier sur deux côtés.

On constate que la relation suivante est la bonne :  $e^2 = c^2 + d^2$ .

3. Le cas où le point singulier est dans le triangle : On peut constater facilement que la relation de Pythagore (C.2) est applicable dans ce cas si  $\theta > 2\pi$ . Le côté  $c$  n'intervient donc pas dans cette relation, figure C.17.

Si  $\theta < 2\pi$ , les sommets du triangle ne sont pas forcément joignable à  $s$  par des segments euclidiens. Voici l'exemple :

**Exemple C.3.1.** Sur le cône dans la figure C.14, on voit un triangle singulier droit avec un point singulier à l'intérieur. Le point singulier n'est pas joignable par segment euclidien au sommet d'angle droit.

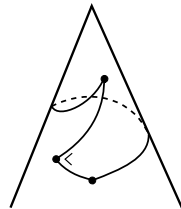


FIGURE C.14 –

On peut aussi trouver un triangle dont les hauteurs sur les côtés à partir du point singulier ne sont pas toujours à l'intérieur du triangle. Voici l'exemple :

**Exemple C.3.2.** Prenons les trois triangles euclidiens donnés sur la figure C.15, avec les longueurs et angles donnés sur la figure. En recollant ces triangles autour du point  $\bullet$ , on obtient un triangle rectangle avec le point singulier à l'intérieur. Deux hauteurs du point singulier sur les côtés ne sont pas à l'intérieur du triangle singulier.

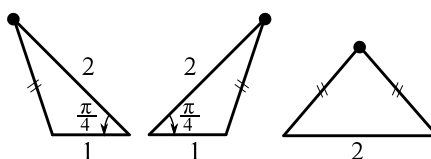


FIGURE C.15 –

## C.4 Théorème d'Al-Kashi pour un triangle singulier

Dans la littérature on anglophone cette formule par la loi des cosinus. Elle permet de calculer les cosinus des angles d'un triangles à partir des longueurs de ses côtés. Comme on a vu pour la formule de Pythagore, la formule d'Al-Kashi n'est pas le même dans tous les cas des triangles singuliers. La position du point singulier  $s$  joue un rôle dans les valeurs d'angles du triangle singulier. Cette position est définie par ses distances des sommets du triangle singulier.

### C.4.1 Un triangle singulier avec la singularité sur un côté

Considérons le triangle  $(ABC)$  dans la figure C.16 :

Après avoir subdivisé le triangle singulier  $(ABC)$  en deux triangles euclidiens,  $(BsC), (AsC)$  numérotés 1 et 2 respectivement, on peut appliquer les relations de sinus et de cosinus connues pour un triangle euclidien. On va noter les angles d'après les numéros. Alors l'angle  $C = C_1 + C_2$ . La présence de la singularité sur un seul côté implique des formules d'Al-Kashi différentes pour les angles, selon que la singularité est sur le côté opposé à l'angle, comme c'est le cas pour  $C$ , ou sur le côté adjacent à l'angle, comme c'est le cas pour  $A$  et  $B$ .

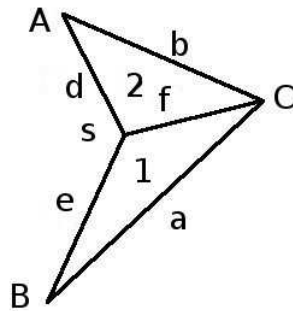


FIGURE C.16 – Triangle singulier avec la singularité sur un seul côtés

La formule d'Al-Kashi pour  $A$  ne dépend que du triangle euclidien  $(AsC)$ ,

$$\cos A = \frac{b^2 + d^2 - f^2}{2bd}.$$

De la même manière pour  $B$ .

On cherche la formule pour l'angle  $C$ . Par la formule d'Al-Kashi on a :

$$\cos C_1 = \frac{f^2 + a^2 - e^2}{2fa},$$

$$\cos C_2 = \frac{f^2 + b^2 - d^2}{2fb}.$$

On a aussi par la formule de sinus dans  $(CsB)$  :

$$\frac{\sin s_1}{a} = \frac{\sin C_1}{e}$$

et dans  $(AsC)$ ,

$$\frac{\sin s_2}{b} = \frac{\sin C_2}{d}$$

On substitue dans la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\cos C &= \cos (C_1 + C_2) = \cos C_1 \cos C_2 - \sin C_1 \sin C_2 \\
&= \frac{f^2 + a^2 - e^2}{2 f a} \times \frac{f^2 + b^2 - d^2}{2 f b} - \frac{e}{a} \sin s_1 \times \frac{d}{b} \sin s_2 \\
&= \frac{(f^2 + a^2 - e^2)(f^2 + b^2 - d^2)}{4 a b f^2} - \frac{d e}{a b} \sin s_1 \sin s_2 \\
&= \frac{(f^2 + a^2 - e^2)(f^2 + b^2 - d^2)}{4 a b f^2} - \frac{d e}{a b} (\cos s_1 \cos s_2 - \cos (s_1 + s_2)) \\
&= \frac{(f^2 + a^2 - e^2)(f^2 + b^2 - d^2)}{4 a b f^2} \\
&\quad - \frac{d e}{a b} \left( \frac{e^2 + f^2 - a^2}{2 e f} \times \frac{d^2 + f^2 - b^2}{2 d f} - \cos (s_1 + s_2) \right) \\
&= \frac{(f^2 + a^2 - e^2)(f^2 + b^2 - d^2)}{4 a b f^2} \\
&\quad - \frac{d e}{a b} \left( \frac{(e^2 + f^2 - a^2)(d^2 + f^2 - b^2)}{4 d e f^2} - \cos (s_1 + s_2) \right) \\
&= \frac{(f^2 + a^2 - e^2)(f^2 + b^2 - d^2)}{4 a b f^2} \\
&\quad - \frac{(e^2 + f^2 - a^2)(d^2 + f^2 - b^2)}{4 a b f^2} + \frac{d e}{a b} \cos (s_1 + s_2)
\end{aligned}$$

Après simplification on a la formule d'Al-Kashi recherchée :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - e^2 - d^2 + 2 d e \cos (s_1 + s_2)}{2 a b}$$

On peut faire intervenir la somme  $c$  des longueurs des deux segments  $d$  et  $e$ , en remplaçant  $d^2 + e^2$  par  $c^2 - 2 d e$  pour obtenir,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2 e d (\cos (s_1 + s_2) + 1)}{2 a b}.$$

De cette dernière formule, il est claire que si  $s_1 + s_2 = \pi$  (le triangle est euclidien) la formule prend sa forme euclidienne. Cette formule est bien définie parce que la somme  $s_1 + s_2$  dans ce cas vérifie  $\pi < s_1 + s_2 < 2\pi$ .

On reprend la relation suivante du calcul précédent :

$$\cos C = \cos C_1 \cos C_2 - \sin C_1 \sin C_2,$$

et on utilise la relation

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

pour obtenir la formule d'Al-Kashi en fonction des paramètres de ce triangle :

$$\cos C = \frac{1}{4abf^2}((f^2 + a^2 - e^2)(f^2 + b^2 - d^2) - 16 \text{Area}(AsC)\text{Area}(BsC)),$$

où

$$\text{Area}(AsC) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+e+f)(a+e-f)(a-e+f)(-a+e+f)},$$

$$\text{Area}(BsC) = \frac{1}{4}\sqrt{(b+d+f)(b+d-f)(b-d+f)(-b+d+f)}.$$

### C.4.2 Un triangle singulier avec la singularité à l'intérieur

On considère le cas où  $\theta > 2\pi$  pour avoir des segments entre  $s$  et les sommets du triangle à l'intérieur. Par cela on évite des cas comme l'exemple C.3.1. Dans ce cas, la position de  $s$  à l'intérieur du triangle est nécessaire à la détermination du triangle. Si la courbure en  $s$  est connue, la position de  $s$  est définie par deux nombres, qui sont les distances de  $s$  de deux sommets du triangle ou bien les angles de deux secteurs coniques définis par les sommets du triangle. Si la courbure n'est pas connue, on a besoin de trois paramètres pour déterminer la position de la singularité. Considérons la figure C.17. Après avoir divisé le triangle singulier  $(ABC)$  en trois triangles eucli-

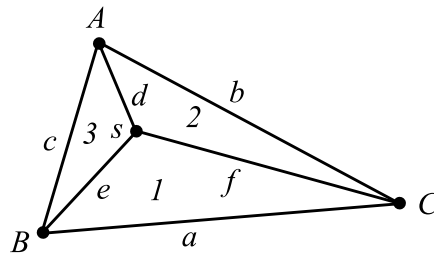


FIGURE C.17 – Triangle singulier avec le point singulier à l'intérieur.

diens,  $(AsB)$ ,  $(AsC)$ ,  $(BsC)$ , on peut appliquer les relations de sinus et de cosinus connues pour l'euclidien. Cette subdivision est toujours possible, par la proposition B.0.1. Les triangles sont numérotés et on va noter les angles d'après les numéros. Alors l'angle  $C = C_1 + C_2$ . On peut profiter du calcul déjà fait pour l'angle  $C$  dans le cas où la singularité est sur une seul côté, qui s'applique même si la ligne cassée  $AsB$  n'est pas une géodésique. On avait trouvé

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - e^2 - d^2 + 2ed \cos(s_1 + s_2)}{2ab}$$

Pour un angle  $\theta$  fixé en  $s$ , on peut obtenir une relation en fonction de la courbure en  $s$ . De l'égalité  $s_1 + s_2 = \theta - s_3$  on a

$$\begin{aligned} \cos(s_1 + s_2) &= \cos(\theta - s_3) \\ &= \cos(2\pi - \kappa - s_3) \\ &= \cos(\kappa + s_3) \\ &= \cos \kappa \cos s_3 - \sin \kappa \sin s_3 \\ &= \cos \kappa \frac{d^2 + e^2 - c^2}{2de} - \sin \kappa \sqrt{1 - \left(\frac{d^2 + e^2 - c^2}{2de}\right)^2} \\ &= \cos \kappa \frac{d^2 + e^2 - c^2}{2de} - \sin \kappa \frac{\sqrt{4d^2e^2 - (d^2 + e^2 - c^2)^2}}{2de} \\ &= \cos \kappa \frac{d^2 + e^2 - c^2}{2de} - \sin \kappa \frac{4\text{Area}(AsB)}{2de}. \end{aligned}$$

On fait le remplacement dans la formule d'Al-Kashi précédente pour obtenir

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - e^2 - d^2 + (e^2 + d^2 - c^2) \cos \kappa - 4\text{Area}(AsB) \sin \kappa}{2ab}.$$

On constate que cette formule prend sa forme euclidienne si  $\theta = 2\pi$ .

# Bibliographie

- [1] *Travaux de Thurston sur les surfaces. Séminaire Orsay. 2nd ed.* Centre National de la Recherche Scientifique. Astérisque, 66-67. Paris : Société Mathématique de France. 286 p., 1991.
- [2] A. D. Aleksandrov and V. A. Zalgaller. *Intrinsic geometry of surfaces.* Translated from the Russian by J. M. Danskin. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 15. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [3] M. Baker. A collection of formulae for the area of a plane triangle. *Ann. of Math.*, 1(6) :134–138, 1885.
- [4] J. P. Bowman. Orientation-reversing involutions of the genus 3 arnoux-yoccoz surface and related surfaces. In Mario Bonk et al., editors, *In the tradition of Ahlfors-Bers, V. Proceedings of the 5th triennial Ahlfors-Bers colloquium, Newark, NJ, USA, May 8–11, 2008*, pages 13–23. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2010.
- [5] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [6] C. Charitos and I. Papadoperakis. On the geometry of hyperbolic surfaces with a conical singularity. *Ann. Global Anal. Geom.*, 23(4) :323–357, 2003.
- [7] M. Duchin, C. J. Leininger, and K. Rafi. Length spectra and degeneration of flat metrics. *Invent. Math.*, 182(2) :231–277, 2010.
- [8] A. Eskin, H. Masur, and A. Zorich. Moduli spaces of abelian differentials : the principal boundary, counting problems, and the siegel-veech constants. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 97 :61–179, 2003.
- [9] O. García-Prada, J. P. Bourguignon, and S. Salamon, editors. *The many facets of geometry. A tribute to Nigel Hitchin.* Oxford : Oxford University Press. xviii, 434 p. , 2010.
- [10] A. E. Hatcher. On triangulations of surfaces. *Topology Appl.*, 40(2) :189–194, 1991.



- 
- [11] F. Herrlich. *Introduction to Origamis in Teichmüller Space*, volume 18 of *Strasbourg Master-Class in Geometry, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*. to appear in 2011.
- [12] H. Hopf. *Differential geometry in the large*, volume 1000 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1989. Notes taken by Peter Lax and John W. Gray, With a preface by S. S. Chern, With a preface by K. Voss.
- [13] J. H. Hubbard. *Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller*. PhD thesis, Mem. Am. Math. Soc. 166, 137 p., 1976.
- [14] S. P. Kerckhoff. The nielsen realization problem. *Ann. of Math. (2)*, 117(2) :235–265, 1983.
- [15] S. Kurz. On the characteristic of integral point sets in  $e^m$ . *Australas. J. Comb.*, 36 :241–248, 2006.
- [16] F. Luo. *Grothendieck’s reconstruction principle and 2-dimensional topology and geometry*, volume II of *Handbook of Teichmüller theory*, pages 733–765. Zürich : European Mathematical Society (EMS). IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 13, 2009.
- [17] O. Malouf. On the classification of singular flat structures on surfaces. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 15(1) :90–103, 2010.
- [18] H. Masur. Ergodic theory of translation surfaces. In B. Hasselblatt et al., editors, *Handbook of dynamical systems*, pages 527–547. Amsterdam : Elsevier, 2006.
- [19] Martin Möller. Affine groups of flat surfaces. In A. Papadopoulos, editor, *Handbook of Teichmüller theory. Volume II*, pages 369–387. Zürich : European Mathematical Society (EMS), 2009.
- [20] J. O’Rourke. *Art gallery theorems and algorithms*. The International Series of Monographs on Computer Science, 3. New York - Oxford : Oxford University Press. XIV, 282 p., 1987.
- [21] A. Papadopoulos. *Metric spaces, convexity and nonpositive curvature*, volume 6 of *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2005.
- [22] H. L. Royden. Automorphisms and isometries of teichmüller space. Adv. Theory Riemann Surfaces, Proc. 1969 Stony Brook Conf., 369-383, 1971.
- [23] G. Schmithüsen. *Veech groups of origamis*. PhD thesis, Institut für Algebra und Geometrie (Inst. f. Algebra u. Geometrie), 2005.
- [24] K. Strebel. *Quadratic differentials*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Band 5. Berlin etc. : Springer-Verlag. XII, 184 p., 1984.

- 
- [25] S. Tabachnikov. *Billiards*. Paris : Société Mathématique de France, 1995.
- [26] W. P. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. *Geom. Topol. Monogr.*, 1 :511–549, 1998.
- [27] M. Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. (euclidean surfaces with cone singularities). *Enseign. Math., II. Sér.*, 32 :79–94, 1986.
- [28] M. Troyanov. *On the moduli space of singular Euclidean surfaces.*, volume 1 of *Handbook of Teichmüller theory*, pages 507–540. Papadopoulos, A., zürich : european mathematical society (ems). irma lectures in mathematics and theoretical physics 11 edition, 2007.
- [29] J. V. Uspensky. *Theory of Equations*. New York : McGraw-Hill, 1948.
- [30] A. Zorich. Flat surfaces. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, pages 437–583. Springer, Berlin, 2006.