HAL
open science

Méthodes particulaires avec remaillage : analyse numérique nouveaux schémas et applications pour la simulation d'équations de transport

Adrien Magni

To cite this version:

Adrien Magni. Méthodes particulaires avec remaillage : analyse numérique nouveaux schémas et applications pour la simulation d'équations de transport. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENM023 . tel-00623128

HAL Id: tel-00623128

https://theses.hal.science/tel-00623128

Submitted on 13 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Adrien MAGNI

Thèse dirigée par **Georges-Henri COTTET**

préparée au sein **du laboratoire Jean Kuntzmann**
et de **l'école doctorale MSTII : Mathématiques, Sciences et Technologies de l'information, informatique**

Méthodes particulaires avec remaillage : analyse numérique, nouveaux schémas et applications pour la simulation d'équations de transport

Thèse soutenue publiquement le **12 juillet 2011**,
devant le jury composé de :

Mr, Frédéric COQUEL
Directeur de recherche CNRS, Ecole Polytechnique, Rapporteur
Mr, Serge HUBERSON
Professeur, université de Poitiers, Rapporteur
Mr, Georges-Henri COTTET
Professeur, université Joseph Fourier, Directeur de thèse
Mme, Valérie PERRIER
Professeur, Grenoble INP, Examinateur
Mr, Christophe PICARD
Maitre de conférence, Grenoble INP, Examinateur
Mr, Iraj MORTAZAVI
Maitre de conférence, Institut Polytechnique de Bordeaux, Examinateur

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Grenoble

Spécialité MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Présentée et soutenue publiquement par

Adrien MAGNI

le 12 juillet 2011

Méthodes particulaires avec remaillage : analyse numérique, nouveaux schémas et applications pour la simulation d'équations de transport.

Thèse dirigée par Georges-Henri COTTET

Composition du jury

Frédéric COQUEL	Directeur de recherche, CNRS, Ecole Polytechnique
Serge HUBERSON	Professeur, université de Poitiers
Valérie PERRIER	Professeur, Grenoble INP
Christophe PICARD	Maitre de conférence, Grenoble INP
Iraj MORTAZAVI	Maitre de conférence, Institut Polytechnique de Bordeaux

Thèse préparée au sein du laboratoire Jean Kuntzmann dans l'École Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique.

Remerciements :

Je tiens à remercier un grand nombre de collègues et amis que j'ai pu rencontrer pendant ces années de thèse et qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ces travaux de recherche.

Je remercie principalement Georges-Henri COTTET, que je suis ravi d'avoir eu comme directeur de thèse pour ces qualités scientifiques et humaines dont découle sa réussite de mon encadrement. Merci pour ta disponibilité, ton écoute, ton réconfort, et tous tes bons conseils.

Merci aussi à

tous les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail, et en particulier aux rapporteurs Serge HUBERSON et Frédéric COQUEL,

Guillaume James, avec qui se fut un plaisir d'enseigner. J'ai apprécié tes qualités relationnelles, ta bonne humeur, ton aide, et ta volonté de faire ton travail correctement. Merci aussi aux étudiants de l'Ensimag pour leur enthousiasme à assister aux TD et leur évaluation positive de mon encadrement qui m'a redonner confiance en moi,

Franck Pérignon pour ton implication dans le developpement en calcul parallèle des méthodes particulaires et ton positivisme malgrè les nombreuses péripéties de ppm ...

tous ceux qui font vivre le laboratoire, notamment pendant les pauses cafés du 7ème,

tous les collègues que j'ai pu rencontrer lors de réunions ANR ou écoles d'été, dont les points de vus scientifiques on été instructifs,

ma famille et mes amis pour leur soutien et leurs encouragements,

Jean-Paul HUOT qui m'a poussé à faire une thèse lors de nos discussions à la cafet de l'ESA,

et enfin tous les thésards, avec qui les diverses conversations et expériences on toujours été enrichissantes, que ce soit durant les nombreuses pauses en salle 3, les repas du ru ou pendant des activitées sportives ! Je remercie en particulier Elie dont j'ai apprécié la vision de la recherche et les discussions scientifiques, Emilie et Renaud pour les sorties en pleine nature, Christophe au cine et Gaelle au Bad, Morgan, Ibrahim, Mathieu, Thomas M., Irène, Carine, Claire, Azmi, Souleymane, Mélanie, Damien, Roland, Brice, David, Madison, Rémi, Lukas, Thomas O., Matthieu B., Sam, Johanes et Carlotta pour annimer les repas du Ru ainsi qu'à Marc, Amin, Otmane, Aymen, Quentin, Bénédicte, Thomas D., Manel, Pierre-Yves, Pierre-Antoine, Jérémie, Franck, Vincent, Federico ... pour les dicussions chaleureuses.

Résumé :

Les méthodes particulaires sont des méthodes numériques adaptées à la résolution d'équations de conservation. Leur principe consiste à introduire des particules "numériques" conservant localement l'inconnue sur un petit volume, puis à les transporter le long de leur trajectoire. Lorsqu'un terme source est présent dans les équations, l'évolution de la solution le long des caractéristiques est prise en compte par une intéraction entre les particules. Ces méthodes possèdent de bonnes propriétés de conservation et ne sont pas soumises aux conditions habituelles de CFL qui peuvent être contraignantes pour les méthodes Eulériennes.

Cependant, une contrainte de recouvrement entre les particules doit être satisfaite pour vérifier des propriétés de convergence de la méthode. Pour satisfaire cette condition de recouvrement, un remaillage périodique des particules est souvent utilisé. Elle consiste à recréer régulièrement de nouvelles particules uniformément réparties, à partir de celles ayant été advectées à l'itération précédente. Quand cette étape de remaillage est effectuée à chaque pas de temps, l'analyse numérique de ces méthodes particulaires remaillées nécessite d'être reconsidérée, ce qui représente l'objectif de ces travaux de thèse. Pour mener à bien cette analyse, nous nous basons sur une analogie entre méthodes particulaires avec remaillage et schémas de grille.

Nous montrons que pour des grands pas de temps les schémas numériques obtenus souffrent d'une perte de précision. Nous proposons des méthodes de correction, assurant la consistance des schémas en tout point de grille, le pas de temps étant contraint par une condition sur le gradient du champ de vitesse. Cette méthode est construite en dimension un. Des techniques de limitation sont aussi introduites de manière à remailler les particules sans créer d'oscillations en présence de fortes variations de la solution. Enfin, ces méthodes sont généralisées aux dimensions plus grandes que un en s'inspirant du principe de splitting d'opérateurs.

Les applications numériques présentées dans cette thèse concernent la résolution de l'équation de transport sous forme conservative en dimension un à trois, dans des régimes linéaires ou non-linéaires.

Abstract :

Particle methods are numerical methods designed to solve advection dominated conservation equations. Their principle is to introduce "numerical" particles that concentrate the unknown locally on a small volume, and to transport them along their trajectories. These methods have good conservation properties and are not subject to the usual CFL conditions that can be binding for the Eulerian methods.

However, an overlap condition must be satisfied between the particles to ensure convergence properties of the method. To satisfy this condition, a periodic remeshing of the particles is often used. New particles uniformly distributed are created on a regular mesh. When this remeshing step is performed at every time step, numerical analysis of particle methods needs to be revisited. This is the purpose of this thesis. To carry out this analysis, we rely on an analogy between remeshed particle methods and grid schemes.

We show that for large time step the numerical schemes have a loss of accuracy. We propose correction methods wich ensure consistency at any grid point, provided the time step satisfies a condition based on the gradient of the velocity field. Limitation techniques are also introduced to remesh particles without creating any oscillations in the presence of strong variations of the solution. Finally, these methods are generalized to dimensions greater than one.

Numerical example on various transport equations are given to illustrate the benefit of the proposed algorithms.

Table des matières

1 Méthodes particulaires **8**
1.1 Principe des méthodes particulaires 8
1.2 Différentes classes d'applications 10
1.2.1 Ecoulements incompressibles 10
1.2.2 Ecoulements compressibles : les équations d'Euler 12
1.2.3 Transport d'interfaces et de scalaires passifs 13
1.3 Condition de recouvrement des particules 14
1.3.1 Principe du remaillage 15
1.3.2 Fréquence du remaillage et applications aux méthodes hybrides . 18

2 Limitation de flux pour le remaillage des particules **20**
2.1 Lien avec les schémas de volumes finis 21
2.1.1 Le remaillage 21
2.1.2 Point de vue de la particule ou du point de grille 23
2.1.3 Limitation de flux et formule de remaillage 24
2.2 Calcul des limiteurs 27
2.2.1 Champ de vitesse constant : $a(u,x) = a$ 27
2.2.2 Equation de conservation non-linéaire : $a(u,x) = a(u)$ 33
2.2.3 Champ de vitesse linéaire : $a(u,x) = a(x)$ 43

3 Consistance des schémas pour de grands pas de temps **56**
3.1 Mise en évidence des problèmes de consistance 56
3.2 Partition des particules en blocs 62
3.3 Formules de remaillage consistantes dans les blocs 64
3.3.1 Formules d'ordre deux en espace 65
3.3.2 Formules d'ordre 4 en espace 68
3.4 Correction des formules de remaillage entre les blocs 69
3.4.1 Cas de blocs contigus avec des indices identiques 69
3.4.2 Cas de blocs contigus avec des indices différents 71
3.4.3 Critère de choix de la taille des blocs 82
3.4.4 Schéma de remaillage d'ordre 4 84
3.4.5 Illustrations numériques 94
3.5 Introduction de limiteurs dans les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$ 95

3.5.1 Correction des formules d'ordre 1 96
3.5.2 Limitation des formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{2}}$ 98
3.5.3 Illustrations numériques 101
3.5.4 Conclusion 104

4 Généralisation aux dimensions deux et trois 113
4.1 Remaillage des particules par méthode de splitting 113
4.1.1 Remaillage par splitting directionnel 114
4.1.2 Remaillage par splitting particulaire 115
4.1.3 Prise en compte d'un terme source 122
4.1.4 Complexité algorithmique 124
4.2 Illustrations numériques 128
4.2.1 Etude de convergence 129
4.2.2 Application du splitting et de la limitation : simulations en dimension deux 134
4.2.3 Simulations en dimension trois 142

A Formules de remaillage 155
A.1 Support du noyau de taille 2 155
A.2 Support du noyau de taille 3 155
A.3 Support du noyau de taille 4 156
A.4 Support du noyau de taille 5 157
A.5 Support du noyau de taille 6 159

B Limitation des formules Λ_4 160

C Cas test 1D : calcul de la solution exacte 162

D Preuve de consistance des formules $M_{\tilde{5}}$ 164

E Remaillage par splitting 167
E.1 Splitting d'opérateur d'ordre 4 167
E.2 Principales méthodes de remaillage 168
E.2.1 Remaillage par produit tensoriel 168
E.2.2 Remaillage par splitting de Strang 169
E.2.3 Remaillage par splitting particulaire 171

F Publications 174

Introduction

La résolution numérique des équations de transport intervient dans bon nombre d'applications, en mécanique des milieux continus ou en physique. La quantité transportée peut être scalaire (densité, énergie) ou vectorielle (champ de vitesse). Elle peut être de nature physique (vorticité) ou numérique (marqueurs d'interface), et passive (concentration d'un poluant) ou couplée avec d'autres quantités (vorticité ou densité de charge électrique). Le transport lagrangien d'interface au sein d'un fluide de densité variable est un cas particulièrement intéressant. Une interface peut être une surface libre, interagir avec le fluide sous la forme d'un écoulement à courbure moyenne ou être le lieu de réactions chimiques entre différentes espèces.

La production d'erreurs numériques due à la création de petites échelles est un problème récurrent dans de nombreuses applications, en écoulement turbulent, réactif, ou pour le transport d'interface. Un axe de recherche important consiste donc à construire des méthodes de résolution numérique qui soient à la fois précises, conservatives, et qui ne créent pas d'oscillations. De nombreuses méthodes ont récemment été proposées pour répondre à ce besoin. Citons par exemple les méthodes VOF (Volume Of Fluid) [53], WENO [55], semi-lagrangienne [40], ALE [45], de Fast Marching [95] ou encore des réservoirs [2].

En particulier, des travaux récents introduisent des marqueurs lagrangiens pour améliorer la performance des méthodes de grille classiques dans la capture des interfaces de manière précise et conservative. Dans [39], des particules sont introduites dans des méthodes de level set en différences finies et dans [91] dans des méthodes Volume Of Fluid. Le but recherché est de tirer profit de la solution lagrangienne exacte du transport pour limiter la diffusion numérique des méthodes de grille et assurer la conservation de la masse.

Par ailleurs, les équations d'advection peuvent être résolues efficacement en utilisant des méthodes particulaires remaillées [52, 26], c'est à dire des méthodes particulaires où les particules sont advectées puis redistribuées sur une grille régulière à l'aide d'un noyau d'interpolation d'ordre élevé.

Les méthodes particulaires sont des techniques lagrangiennes adaptées à la résolution de problèmes physiques dont le terme d'advection est dominant. Ces méthodes sont connues pour leurs propriétés de conservation, la faible dissipation numérique introduite et leur stabilité due à l'absence de condition de Courant Friedrichs Levy. Cependant, un défaut reconnu de ces méthodes est la détérioration possible de la précision due aux distorsions présentes dans l'écoulement. Une manière de corriger ce problème consiste à

remailler périodiquement les particules, en conservant autant que possible les invariants physiques de l' écoulement, et en limitant ainsi les erreurs numériques introduites [24]. De nombreuses études ont démontré la capacité des méthodes particulaires remaillées à résoudre de manière précise et conservative des écoulements 2D et 3D [58, 11, 75, 28, 77]. Une librairie de résolution en calcul parallèle [81] a été développée et est utilisée pour du calcul intensif de dynamique des fluides [12, 20]. De plus, les méthodes particulaires remaillées permettent d'utiliser les techniques de raffinement de maillage adaptatif [9, 11] et de décomposition de domaine [73, 20].

Les échelles de temps qui contrôlent l'advection des particules et leur remaillage dépendent du taux de cisaillement de l'écoulement. Bien qu'en principe il soit nécessaire d'effectuer le remaillage sur des échelles de temps plus grandes que le pas de temps utilisé pour advecter les particules, elles sont couramment remaillées après chaque étape d'advection. L'analyse numérique de la méthode ainsi obtenue nécessite d'être revue.

Un premier travail a été fait dans ce sens dans [29], où les méthodes particulaires remaillées sont réécritent en terme de méthode de différences finies. L'objectif de cette thése est de poursuivre sous cet angle l'analyse numérique des méthodes particulaires remaillées, en nous concentrant sur les équations de transport. La difficulté principale consiste à comprendre et éviter la création d'oscillations qui sont observées proche des discontinuités, lors de la résolution d'équations non linéaires par exemple, ou lorsque la solution est régulière mais calculée en utilisant de grands pas de temps.

Le **premier chapitre** est consacré à une revue des méthodes particulaires. Le principe général y est décrit ainsi que les variantes principales, définissant différentes méthodes associées à des applications précises. On présente les méthodes SPH, utilisées essentiellement pour la simulation d'écoulements compressibles, ainsi que les méthodes particulaires remaillées généralement employées pour des fluides incompressibles, le transport de scalaires passifs et la capture d'interfaces.

Une méthode permettant de supprimer les oscillations dues aux fortes variations des solutions est développée dans le **chapitre 2**. Pour cela, les méthodes particulaires remaillées sont interprétées en terme de schémas de grilles équivalents, dans l'esprit de [93]. Des limiteurs sont alors introduits de la même manière que dans les méthodes de différences finies. Ils sont calculés afin d'imposer aux schémas la décroissance de la variation totale (TVD) de la solution. Des formules de remaillages incluant ces limiteurs sont ensuite déduites des schémas de grille TVD obtenus.

Le **chapitre 3** est consacré à l'étude des problèmes de précision rencontrés dans les méthodes particulaires remaillées lorsqu'elles utilisent des grands pas de temps. Des méthodes de correction sont proposées pour remédier à ces problèmes. Elles consistent à regrouper les particules en bloc puis à les remailler par des formules déterminées par la nature de ces blocs. Les limiteurs décrits dans le chapitre 2 sont aussi introduits dans ces formules de remaillage consistantes, et la création d'oscillations est ainsi évitée, même lorsque le nombre CFL est grand.

Dans le **chapitre 4** nous proposons des méthodes qui sont basées soit sur des méthodes de splitting traditionnelles soit sur des techniques de direction alternées spécifiques aux méthodes particulaires. Il en résulte des méthodes d'ordre deux et trois qui

s'avèrent être plus rapide que la méthode classique de remaillage par produit tensoriel des formules 1D. Des simulations numériques illustrent l'efficacité des méthodes développées en dimension deux et trois.

Enfin nous présentons **en annexe** des travaux publiés et soumis pendant ce travail de thèse. Les méthodes et résultats exposés dans ces travaux reprennent et complètent ceux présentés dans cette thèse.

Chapitre 1

Méthodes particulaires

Ce premier chapitre a pour but de rappeler les principes des méthodes particulaires. L'objectif n'est pas de faire une liste exhaustive de l'ensemble de ces méthodes, mais de présenter les plus courantes (SPH et méthodes vortex) sous un même formalisme. Ces techniques numériques sont apparues très tôt puisqu'elles permettaient de faire des simulations "à la main" dans le cas d'écoulements très simples [79]. Elles ont évolué au cours du temps pour faire face à deux difficultés majeurs : la prise en compte des conditions aux limites et la perte de précision due aux distortions des particules. Le premier peut être traité par des méthodes de frontières immergées ou de pénalisation [22] et ne sera pas abordé dans ce manuscrit. Cette thèse traite de la seconde question.

1.1 Principe des méthodes particulaires

Les méthodes particulaires sont construites pour résoudre des équations de conservation de la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} u\,dv = \int_{V(t)} F\left(x,\, u,\, \nabla u,\, t,\, ...\right)\, dv, \tag{1.1}$$

où $V(t)$ est le volume de fluide conidéré, soumis au champ de vitesse A et pouvant se déformer au cours du temps. L'inconnue u peut être scalaire ou vectorielle et représente une quantité physique (température, concentration, énergie ...) ou purement numérique (fonction indicatrice d'une interface, fonction couleur, ...). F est un terme source contenant la physique du modèle pouvant dépendre de u et de ses dérivées. Lorsque par exemple la quantité u est conservée au cours du temps et que $F = 0$, (1.1) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} u\,dv = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + div(Au)\right)\, dv = 0. \tag{1.2}$$

Cette équation étant vérifiée pour tout volume $V(t)$, elle s'écrit localement comme l'équation de transport sous forme conservative

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(Au) = 0. \tag{1.3}$$

Le travail rapporté dans cette thèse s'applique à tout problème de type (1.1), mais les applications numériques seront faites uniquement sur la résolution de l'équation de transport (1.3).

La particularité des méthodes particulaires est de résoudre (1.1) de manière lagrangienne. Le principe consiste à approcher le champ initial u par un ensemble de points appelés particules et de les transporter de manière exacte, ou par un schéma numérique précis. Mathématiquement, le champ $u = u(x,t)$ est représenté par l'approximation

$$u(x,t) \simeq \sum \alpha_p \, \delta\left(x - x_p(t)\right). \tag{1.4}$$

α_p est la quantité portée par la particule p, dont la position x_p évolue en suivant les trajectoires de l'écoulement données par le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dx_p}{dt} = A(x_p, t). \tag{1.5}$$

Si celui-ci dépend de u, le modèle (1.1) est dit non linéaire. α_p represente l'intégrale de u sur la particule p de volume v_p et peut s'écrire comme le produit de la quantité portée localement u_p par le volume v_p. La représentation particulaire de u (1.4), solution du modèle (1.1), est alors obtenue en résolvant

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = v_p \, F_p, \tag{1.6}$$

F_p représentant la valeur locale du terme source F sur la particule p. On ajoute à (1.6) une équation donnant l'évolution du volume des particules,

$$\frac{dv_p}{dt} = div \, A(x_p, t) \, v_p. \tag{1.7}$$

Cette équation est la forme discrète de celle décrivant la variation d'un volume au cours du temps :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dv = \int_{V(t)} divA \, dv. \tag{1.8}$$

Le volume des particules est donc constant dans le cas des écoulements incompressibles.

Dans le cas non linéaire, ou en vu d'un post-processing, il est coutumier de régulariser (1.4) pour obtenir une fonction continue. Il est possible d'utiliser par exemple une fonction de type gaussienne ζ de la manière suivante :

$$\delta(x) \simeq \zeta_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} \zeta\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \tag{1.9}$$

d est la dimension de l'espace et $\epsilon << 1$ un paramètre de régularisation. Finalement, le champ u est approché ainsi :

$$u(x,t) \simeq u_\epsilon(x,t) = \sum \alpha_p \, \zeta_\epsilon\left(x - x_p(t)\right). \tag{1.10}$$

Différentes manières de construire des fonctions de régularisation ont été développées dès les années 80. L'importance de la méthode de construction est exprimée dans le résultat

suivant. Si la fonction de regularisation ζ est choisie telle que les r premiers moments sont conservés, c'est à dire que

$$\begin{cases} \int \zeta(x)\, dx = 1 \\ \int x^i\, \zeta(x)\, dx = 0 \text{ si } |i| \leq r-1 \\ \int |x|^r\, |\zeta(x)|\, dx < \infty, \end{cases} \tag{1.11}$$

alors la précision de la méthode est donnée par

$$||u - u_\epsilon||_{L^p} \simeq O\left(\epsilon^r\right) + O\left(\frac{h^m}{\epsilon^m}\right) \tag{1.12}$$

où h est la distance maximale entre les particules et m dépend de la construction de ζ. Beale [5] a montré qu'il était possible d'obtenir $m = \infty$. On se référera à [24] pour plus de détail sur les preuves de convergence.

Remarque 1. *Puisque $\alpha_p = v_p\, u_p$, l'équation (1.6) se réécrit*

$$v_p \frac{du_p}{dt} = v_p\, F_p - \frac{dv_p}{dt}\, u_p, \tag{1.13}$$

et d'après (1.7),

$$\frac{du_p}{dt} = F_p - div\, A\, u_p. \tag{1.14}$$

Cette dernière équation décrit l'évolution locale de u que l'on obtiendrait également par la méthode des caractéristiques à partir de la forme non conservative de (1.1).

En pratique, les méthodes particulaires se résument ainsi. Des particules portant une quantité $\alpha_p = v_p\, u_p$ sont créés en x_p. Elles sont ensuite déplacées suivant le champ de vitesse en résolvant les systèmes $(1.5, 1.6)$ par une méthode numérique de type Runge-Kutta par exemple. La variation du volume est prise en compte par (1.7) et le terme source F est mis à jour. Enfin le champ de vitesse doit être évalué aux nouvelles positions des particules (et au temps adéquat) afin de transporter à nouveau les particules et d'itérer le processus.

En raison de leur construction de manière lagrangienne, les méthodes particulaires sont bien adaptées à la résolution d'écoulements de type hyperbolique. De plus, on peut montrer que de nombreux invariants physiques sont conservés numériquement. Citons aussi la propriété de stabilité des méthodes particulaires, le choix du pas de temps n'est pas soumis à la condition de CFL qui est restrictive quand on souhaite résoudre des équations hyperboliques par un schéma numérique explicite.

1.2 Différentes classes d'applications

1.2.1 Ecoulements incompressibles

Les équations de Navier-Stokes (NS) incompressible à densité constante sont obtenues en conservant la quantité de mouvement d'un fluide Newtonien visqueux, et s'écrivent :

$$\frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + (a.\nabla)\, a = -\nabla p + \frac{1}{Re}\, \Delta a, \tag{1.15}$$

où a est le champ de vitesse, p la pression et $Re = A\,L/\nu$ le nombre de Reynolds. En définissant la vorticité comme le rotationnel du champ de vitesse $\omega = rot(a)$ et en prenant le rotationnel de (1.15) on obtient les équations de NS en formulation vorticité-vitesse :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + (a.\nabla)\ \omega = (\omega.\nabla)\ a + \frac{1}{Re}\Delta\omega. \tag{1.16}$$

Il s'ajoute à ces équations l'hypothèse d'incompressibilité $div(a) = 0$.

Les méthodes de vortex (VM) [24, 57] sont des méthodes particulaires adaptées à la résolution de ces équations. La quantité portée par les particules est la vorticité, le champ de vorticité s'exprimant alors ainsi,

$$\omega(x,t) = \sum_p \omega_p\, \zeta(x - x_p), \tag{1.17}$$

et la méthode consiste à résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx_p}{dt} = a(x_p,t) \\ \\ \frac{d\omega_p}{dt} = [\nabla a(x_p,t)]\ \omega_p + \frac{1}{Re}\,\Delta\omega(x_p). \end{cases} \tag{1.18}$$

La loi de Biot-Savart permet d'exprimer le champ de vitesse en fonction de la vorticité :

$$a(x,t) = a_\infty(x,t) + \int K(x-y) \times \omega(y)\, dy, \tag{1.19}$$

$a_\infty(x,t)$ étant la vitesse aux bords du domaine. Le noyau K présente une singularité en zero. Le champ de vitesse est calculé en régularisant K et des développements multipolaires peuvent être utilisés pour optimiser le temps de calcul.

Le calcul de ∇a est facilité en remarquant que la dérivation peut commuter avec la convolution dans (1.17)-(1.19) et porter ainsi sur la fonction régulière ζ. En ce qui concerne le calcul des dérivées secondes du terme $\Delta\omega$, la méthode de Particle-Strength-Exchange [67, 31, 44] est souvent utilisée. Elle consiste à représenter l'opérateur différentiel (ici le Laplacien) sous la forme d'un opérateur intégral, plus facile à approximer par des formules de quadrature numériques. Les équations (1.18) s'écrivent alors

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx_p}{dt} & = & a_\infty(x_p,t) + \sum_q v_q\, K_\epsilon(x_p - x_q) \times \omega_q \\ \frac{d\omega_p}{dt} & = & \left[\sum_q v_q\, \nabla K_\epsilon(x_p - x_q) \times \omega_q\right]\ \omega_p \\ & & + \frac{1}{\epsilon^2\, Re} \sum_q v_q\, (\omega_q - \omega_p)\, \eta_\epsilon\, (|x_p - x_q|)\,. \end{array} \tag{1.20}$$

η est une fonction pair bien choisie pour approximer le laplacien par la méthode PSE.

Notons aussi que la méthode PSE a récemment été généralisée au calcul de dérivées spatiales de degré quelconque [37, 83]. Une autre manière de prendre en compte la diffusion consiste à introduire une vitesse supplémentaire. Ce sont les méthodes de vitesse de diffusion [6]. Enfin il est possible d'utiliser une grille et utiliser des méthodes classiques comme les différences finies pour prendre en compte la diffusion ou d'autres termes. Cette approche sera traitée dans le paragraphe 1.3.

Citons enfin la méthode des filaments, qui peut être considérée comme une variante des méthodes de vortex pour la simulation d'écoulement incompressibles en dimension trois. L'idée est de représenter le champ de vorticité sur des courbes plutôt que des points. Ce principe est suggéré par le théorême de Kelvin qui démontre la conservation de la circulation le long de tube de vorticité, lorsque la diffusion est nulle. Les difficultés majeures consistent d'une part à traiter la diffusion et d'autre part à initialiser correctement les filaments. Le lecteur intéressé poura se référer à [78, 56, 66, 36].

1.2.2 Ecoulements compressibles : les équations d'Euler

Les équations d'Euler expriment la conservation de la masse et de la quantité de mouvement sous des hypothèses de fluide parfait, c'est à dire d'écoulements à viscosité nulle.

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + a\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial a}{\partial x} \\ \\ \frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + a\,\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial x}. \end{cases} \tag{1.21}$$

ρ désigne la masse volumique, a le champ de vitesse et τ le tenseur des contraintes.

Les méthodes Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) [70] sont une classe de méthode particulaire très utilisées pour la résolution de ces équations. Les champs ρ et a sont représentés par un ensemble de particules régularisées :

$$\begin{array}{l} \rho(x,t) = \sum_p v_p\,\rho_p\,\zeta_\epsilon(x - x_p) \\ a(x,t) = \sum_p v_p\,a_p\,\zeta_\epsilon(x - x_p). \end{array} \tag{1.22}$$

La divergence du champ de vitesse est obtenue, comme dans les méthodes vortex, en commutant la dérivation avec la convolution,

$$\frac{\partial a}{\partial x}(x_p) = \sum_q v_q\,a_q\,\frac{\partial \zeta_\epsilon}{\partial x}(x_p - x_q). \tag{1.23}$$

Afin d'assurer la propriété de conservation, on soustrait le terme $\sum_q v_q\,a_p\,\frac{\partial \zeta_\epsilon}{\partial x}(x_p - x_q)$ à l'expression précédente.

D'après les équations (1.7) et (1.21), les poids des particules sont solutions de :

$$\begin{array}{l} \frac{dv_p}{dt} = v_p\,\sum_q v_q\,(a_q - a_p)\,\frac{\partial \zeta_\epsilon}{\partial x}(x_p - x_q) \\ \\ \frac{d\rho_p}{dt} = -\rho_p\,\sum_q v_q\,(a_q - a_p)\,\frac{\partial \zeta_\epsilon}{\partial x}(x_p - x_q) \\ \\ \frac{da_p}{dt} = \sum_q v_q\,(\tau_q - \tau_p)\,\frac{\partial \zeta_\epsilon}{\partial x}(x_p - x_q). \end{array} \tag{1.24}$$

Il existe bien entendu des "variantes" des techniques présentées précèdemment, offrant ainsi un large panel de méthodes particulaires. Il est possible d'utiliser une méthode de type SPH pour simuler un écoulement dont la vitesse est à divergence nulle. Cette incompressibilité est assurée en résolvant une équation de poisson [38],[54]. A l'inverse il est également possible de s'inspirer des méthodes vortex pour les appliquer à la simulation d'écoulements compressibles [93],[51].

1.2.3 Transport d'interfaces et de scalaires passifs

Le transport d'interfaces est un problème récurrent qui intervient lors de l'interaction de constituants physiques sous différents états (liquide, gaz, solide) ou possédant des propriétés variables (densités, concentration ...). Il est parfois nécessaire de déterminer entièrement la localisation d'un fluide possédant une certaine propriété, comme la répartition d'un polluant dans un fluide. On parle alors de transport de scalaire passif.

Les méthodes de détection d'interfaces se regroupent principalement en deux classes, les méthodes de suivi (front tracking) et celles de capture (front capturing). Dans le premier cas on suit explicitement l'évolution de l'interface avec des marqueurs et dans l'autre on considère un seul fluide, l'interface étant alors déterminée par une fonction implicite. Citons par exemple les méthodes de fast marching et Volume Of Fluid dans la première classe et les méthodes de Level Set dans la seconde. Dans les méthodes de suivi, des problèmes de distorsion contraignent à ajouter ou supprimer des marqueurs dégradant la description de l'interface et la conservation de la masse. Les méthodes de capture sont efficaces pour gérer des changements de topologies, mais la précision de l'interface est dictée par la taille de la discrétisation en espace nécessaire pour la résolution de l'equation de transport sous jacente (les schémas WENO [16] sont souvent utilisés).

L'idée des méthodes particulaires level-set, est de définir l'interface par une méthode level set mais de suivre son évolution par une méthode particulaire. La propriété d'adaptivité permet de s'affranchir de la restriction sur la discrétisation en espace. L'interface est alors capturée avec une bonne précision. De plus le pas de temps n'est pas soumis à la condition de CFL des méthodes de grille explicites.

Dans les méthodes level set, l'interface $\Gamma(t)$ incluse dans le domaine Ω est définie comme la ligne de niveau zero d'une fonction $\Phi(x,t)$, scalaire et multidimensionnelle :

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega \ : \ \Phi(x,t) = 0\} \,. \tag{1.25}$$

La fonction Φ portée par les particules peut être construite de deux manières différentes.

Si des quantitées géométriques telles que la normale n ou la courbure κ sont requises, Φ est choisie comme étant la distance à l'interface, signée différemment des deux côtés. Ainsi $|\nabla\Phi| = 1$ et

$$n = \nabla\Phi \,, \qquad \kappa = div\,(\nabla\Phi) \,. \tag{1.26}$$

Au cours de l'évolution, ϕ peut perdre sa propriété de fonction de distance et nécessite donc d'être réinitialisée. Des algorithmes de "re-distancing" ou des techniques issues des méthodes "fast marching" peuvent être adoptés pour des particules régulièrement espacées. Dans le cas contraire l'approximation suivante du premier ordre peut être utilisée :

$$|x - x_0| = \left| \frac{\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t)}{\partial\phi(x,t)/\partial x} \right| = \left| \frac{\Phi(x,t)}{\partial\phi(x,t)/\partial x} \right| \tag{1.27}$$

Lorsqu'aucune propriété géométrique n'est utile, Φ est simplement une fonction cou-

leur. On peut prendre par exemple,

$$\begin{aligned}\Phi(x) = &\ 1 \text{ si } d \geq \epsilon \\ = &\ -1 \text{ si } d \leq -\epsilon \\ = &\ \tfrac{1}{2}\left(1 + cos\left(\tfrac{\pi d}{\epsilon}\right)\right) \text{ sinon}\end{aligned} \tag{1.28}$$

ou d représente la distance entre x et l'interface (multiplié par -1 dans l'autre fluide) et ϵ est un paramètre environ égale à deux pas d'espace.

Remarquons que dans le cas ou l'on souhaite déterminer l'évolution d'un scalaire passif, celui-ci est identifié à la fonction Φ.

1.3 Condition de recouvrement des particules

La perte de recouvrement des particules au cours du temps est un problème inhérent aux méthodes purement lagrangiennes. Elles sont portées par l'écoulement et peuvent s'accumuler ou se raréfier dans les zones de fort gradient. Il est intuitif de penser qu'un manque de communication de l'information entre les particules dégrade alors la méthode.

En effet, l'analyse numérique des méthodes particulaires montre que la convergence de u_ϵ donné par (1.10) vers l'approximation (1.4) du champ u nécessite un recouvrement important entre les particules ($h/\epsilon \to 0$). Si la fonction de régularisation vérifie (1.11), il est montré dans [24] que s' il existe $s > 0$ tel que $h/\epsilon \leq \epsilon^s$, alors pour $t \in [0, T]$:

$$||(u - u_\epsilon)(., t)||_{L^p(\Omega)} \leq C(T)\epsilon^r, \tag{1.29}$$

Ω étant un domaine périodique. On réfère le lecteur désirant plus de précision sur l'analyse numérique de la convergence des méthodes particulaires aux articles suivant [47, 5, 21, 3].

D'un point de vue numérique, la perte de précision se fait ressentir dans plusieurs types de simulations. De petites echelles non physiques apparaissent lors de la simulation 2D de fluide parfaits [50, 60]. L'évolution d'un tourbillon axisymetrique est fortement dégradé lorsqu'on utilise des particules initialement distribuées de manière uniforme [24]. De plus, la simulation de la diffusion par des méthodes d'échange d'informations [31, 84] s'avère difficile voir même impossible lorsque les particules ne se recouvrent pas !

Il existe principalement trois stratégies pour remédier à ce problème. Une première méthode, introduite par Beale [4], consiste à modifier la quantité portée par les particules afin de récupérer avec la précision voulue le champ à leurs différentes positions. Lorsque par exemple les particules, placées en x_p, portent la quantité u_p, l'idée est de modifier les circulations β_p en résolvant

$$\sum_q \beta_q \zeta\left(x_p - x_q\right) = u_p \tag{1.30}$$

pour toutes les particules d'index p. Ce système est inversé par un processus itératif, dont la convergence est lente lorsque le champ de vorticité est irrégulier ou que le recouvrement entre les particules est trop important. Dans la même catégorie, des méthodes de quadrature adaptatives [85] et de “Free Lagrange” consistent à construire sur

les particules des triangulations utilisées ensuite pour interpoler le champ porté par les particules.

Une deuxième stratégie est présentée dans [83]. Il s'agit de corriger la méthode d'approximation des dérivées introduite dans [37] et généralisant les méthode PSE, pour que la discrétisation soit consistante lorsque le recouvrement des particules n'est plus assuré.

Une dernière stratégie possible consiste à recréer régulièrement de nouvelles particules dont la position est bien choisie. Dans [43] des particules sont créées (ou supprimées) si la distance entre deux d'entre elles est trop grande (ou petite). Cette méthode est efficace lorsque les particules sont portées par des courbes ou des surfaces (1D, nappes ou filaments de vorticité par exemple) [60, 56, 66, 63].

Une manière générale de créer les nouvelles particules consiste à effectuer une étape dite de remaillage, dont le principe est exposé ci-dessous. Cette stratégie est aujourd'hui très largement employée dans les méthodes de Vortex [28, 29, 19, 17], et servira de base aux travaux présentés dans ce manuscrit.

1.3.1 Principe du remaillage

Nous nous contentons ici de rappeler les principes généraux des méthodes de remaillage. Nous y reviendrons plus en détail dans les chapitres suivants. L'idée est de créer de nouvelles particules régulièrement espacées à partir de celles existantes. La manière employée consiste à positionner ces nouvelles particules sur une grille sous-jacente. Cette technique fut certainement utilisée la première fois pour des calculs de sillage de cylindre [59].

Plaçons nous en dimension un et considérons une distribution de particules q, situées en $\tilde{x}_q$, portant les quantités $\tilde{\alpha}_q$. Le remaillage crée de nouvelles particules aux points x_p d'une grille uniforme de pas Δx. Ces nouvelles quantités α_p sont interpolées à partir des anciennes à l'aide d'un noyau W, par la formule suivante :

$$\alpha_p = \sum_q \tilde{\alpha}_q W\left(\frac{x_p - \tilde{x}_q}{\Delta x}\right). \tag{1.31}$$

Rappelons que les méthodes particulaires sont utilisées pour résoudre des équations "de conservation". Un de leurs atouts majeurs est de préserver les différents moments. Citons par exemple la conservation des invariants naturels (circulation totale, impulsions linéaire et angulaire) lors de la résolution des équations d'Euler 2D de la mécanique des fluides parfaits. Le noyau d'interpolation W peut être determiné de manière à maintenir des propriétés de conservation physique. La première relation à satisfaire est la conservation de la quantité portée par les particules :

$$\sum_p W\left(\frac{x - x_p}{\Delta x}\right) = 1. \tag{1.32}$$

La conservation des m premiers moments s'exprime par les relations

$$\sum_q x_q^k W\left(\frac{x_q - x}{\Delta x}\right) = x^k \quad \text{pour } 0 \leq |k| \leq m-1. \tag{1.33}$$

Ces relations s'interprétent en terme d'interpolation. Soit α une fonction régulière. Posons

$$E(x) = \alpha(x) - \sum_q \alpha(x_q) W\left(\frac{x - x_q}{\Delta x}\right). \tag{1.34}$$

En utilisant la propriété de conservation (1.32), $E(x)$ s'écrit

$$E(x) = \sum_q \left[\alpha(x) - \alpha(x_q)\right] W\left(\frac{x - x_q}{\Delta x}\right), \tag{1.35}$$

ce qui donne en utilisant un développement de Taylor,

$$E(x) = \sum_k \sum_q \left[(x - x_q).\nabla\alpha\right]^k W\left(\frac{x - x_q}{\Delta x}\right). \tag{1.36}$$

Donc si le noyau W satisfait la propriété suivante

$$\sum_q (x - x_q)^k W\left(\frac{x - x_q}{\Delta x}\right) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq |k| \leq m - 1, \tag{1.37}$$

ou de manière équivalente (1.33), alors l'interpolation est d'ordre m, c'est à dire,

$$E(x) = O(\Delta x^m). \tag{1.38}$$

Les noyaux W utilisés en pratique se classent en trois catégories. Les premiers sont construits directement à partir des relations de conservation (1.33). Il sont notés Λ_l où l représente l'ordre maximal des moments conservés. Les plus utilisés sont donnés ci-dessous et sont représentés dans la figure 1.1 :

$$\Lambda_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \tag{1.39}$$

$$\Lambda_2(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 0.5 \\ (1 - |x|)(2 - |x|)/2 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1.5 \end{cases} \tag{1.40}$$

$$\Lambda_4(x) = \begin{cases} (1 - x^2)(4 - x^2)/4 & \text{si } -0.5 \leq |x| \leq 0.5 \\ (2 - |x|)(3 - |x|)(1 - x^2)/6 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ (1 - |x|)(2 - |x|)(3 - |x|)(4 - |x|)/24 & \text{si } 1.5 < |x| \leq 2.5 \\ 0 & \text{si } |x| > 2.5 \end{cases} \tag{1.41}$$

Ces noyaux sont peu réguliers (Λ_2 n'est pas continu), et sont donc susceptibles de créer et d'amplifier des oscillations non physiques. Nous reviendrons dans la suite sur ce point important. De manière générale, nous verrons que l'erreur d'interpolation commise par des noyaux Λ_l est d'ordre $l + 1$, et que les schémas de grille équivalents sont d'ordre l.

Une autre catégorie de noyaux ne conservent que les deux premiers moments (ordre 2) mais sont de régularité croissante. Ils sont obtenus par convolution successive de la

fonction chapeau caractéristique à support sur $[-1/2, 1/2]$, et sont notés M_l, $l \in \mathbb{N}$. Ainsi $M_2 = \Lambda_1$ et ces noyaux sont C^{l-2}, avec un support sur $2l-3$ points de grilles. Les moyaux M_3 et M_5 seront utilisés pour leurs propriétés non oscillantes.

$$M_3(x) = \begin{cases} 3/4 - x^2 & \text{si } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ (3/2 - |x|)^2/2 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1.5 \end{cases} \tag{1.42}$$

$$M_5(x) = \begin{cases} 115/192 - 5x^2/8 + x^4/4 & \text{si } -0.5 \leq |x| \leq 0.5 \\ 55/96 + 5|x|/24 - 5x^2/4 + 5|x|^3/6 - x^4/6 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ (2|x| - 5)^4/384 & \text{si } 1.5 < |x| \leq 2.5 \\ 0 & \text{si } |x| > 2.5 \end{cases} \tag{1.43}$$

Enfin une troisième classe de noyaux possèdent à la fois des propriétés de régularité et de conservation des moments d'ordre élevés. Ils sont construits en combinant les noyaux M_l avec leurs dérivées et sont notés $M_l^{'}$. Evidemment, à précision donnée, le support est plus élevé que pour les noyaux Λ_l. Donnons par exemple le noyau construit par Monaghan dans [69] :

$$M_4^{'}(x) = \begin{cases} 1 - 5x^2/2 + 3|x|^3/2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ (2 - |x|)^2(1 - |x|)/2 & \text{si } 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases} \tag{1.44}$$

Ce noyau est de classe C^1, de support $[-2, 2]$ (il nécessite donc quatre points) et conserve les trois premiers moments (il est donc d'ordre trois). Ce noyau offre un bon compromis entre régularité et précision. Il est trés utilisé en pratique dans les méthodes particulaires remaillées, c'est pourquoi on l'utilisera systématiquement à titre de comparaison dans nos illustrations numériques.

Citons également $M_5^{'}$ et $M_6^{'''}$, qui sont respectivement de classe C^2 et C^1, de support $[-2.5, 2.5]$ et $[-3, 3]$ et conserve les quatre et six premiers moments [69, 8].

$$M_5^{'}(x) = \begin{cases} (345/8 - 75x^2 + 42x^4)/48 & \text{si } 0 \leq |x| \leq 0.5 \\ (165/4 + 20|x| - 150x^2 + 120|x|^3 - 28x^4)/48 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ (|x| - 5/2)^3(7|x| - 15/2)/48 & \text{si } 1.5 < |x| \leq 2.5 \\ 0 & \text{si } |x| > 2.5 \end{cases} \tag{1.45}$$

$$M_6^{'''}(x) = \begin{cases} (1 - |x|)(60|x|^4 - 87|x|^3 - 87|x|^2 + 88|x| + 88)/88 & \text{si } |x| \leq 1 \\ (|x| - 1)(|x| - 2)(60|x|^3 - 261|x|^2 + 257|x| + 68)/176 & \text{si } 1 < |x| \leq 2 \\ -3(|x| - 2)(4|x|^2 - 17|x| + 12)(|x| - 3)^2/176 & \text{si } 2 < |x| \leq 3 \\ 0 & \text{si } |x| > 3 \end{cases} \tag{1.46}$$

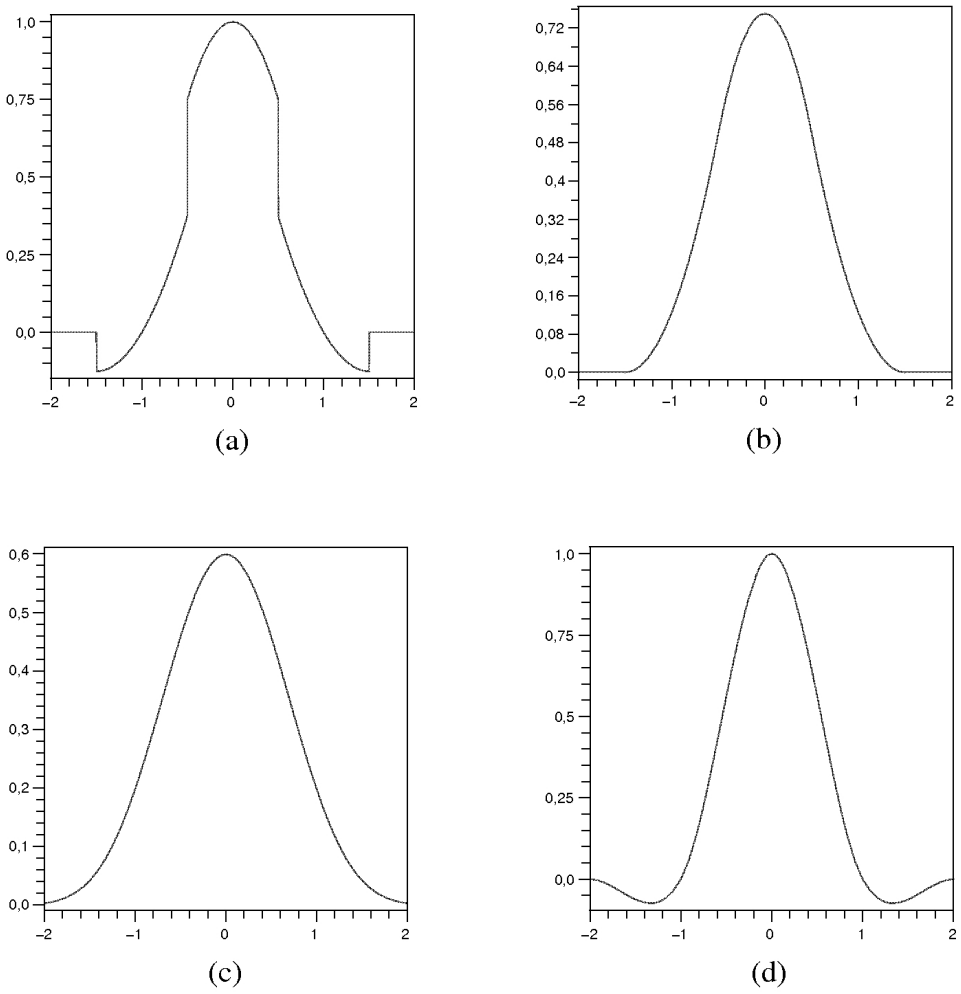


FIG. 1.1 – Noyaux d'interpolation : Λ_2 (a), M_3 (b), M_5 (c), $M_4^{'}$ (d)

1.3.2 Fréquence du remaillage et applications aux méthodes hybrides

La fréquence de remaillage des particules doit être ajustée en fonction du taux de déformation du champ de vitesse a. Comme le pas de temps utilisé pour advecter les particules est lui-même défini par une condition de type $\Delta t \leq C/||\nabla a||$, il est naturel de remailler les particules à chaque pas de temps. Bien que ce choix puisse sembler dégrader la solution par un ajout d'erreurs numériques à chaque étapes de remaillage, ce choix présente plusieurs avantages. En effet, la méthode particulaire peut alors être analysée comme une méthode de différences finies [93]. Elle peut être couplée avec des méthodes de grille classiques permettant de résoudre efficacement certains termes des équations (diffusion), appliquer de la décomposition de domaine ou du raffinement de maillage

adaptatif [73, 27, 9, 80].

Dans l'étude faite dans cette thèse on se place dans le cas où l'étape de remaillage est effectuée à chaque itération (aprés chaque étape d'advection des particules). L'analyse numérique de ces méthodes diffère de l'analyse des méthodes particulaires "classiques" et doit faire l'objet d'une étude directe, en considérant les schémas de grille qui résultent de la méthode. Notons une similarité avec la méthode des caractéristiques. Au lieu de "remonter" les courbes caractéristiques d'un point (x, t) vers la condition initiale $(x_0, 0)$, les méthodes particulaires remaillées les "descendent".

En résumé, les méthodes particulaires que l'on considère sont constituées de trois étapes, itérées à chaque pas de temps. La création et l'advection de particules, la prise en compte d'éventuels termes source en actualisant la quantité qu'elles portent, et le remaillage. La méthode sera d'autant plus précise que le remaillage conservera un grand nombre de moment, ce qui suggère d'utiliser des noyaux "d'ordre élevé", Λ_4 par exemple. Cependant, similairement à l'utilisation de schémas d'ordre élevé dans les méthodes de différences finies, on observe numériquement que l'utilisation de ces noyaux génére des oscillations non physiques. Ce phénomène possède deux origines distinctes : soit une forte variation de la solution (même pour de faibles pas de temps) soit une variation du champ de vitesse lorsque les pas de temps sont grands. Ces deux sources de problèmes seront traitées distinctement dans les chapitres suivants. On s'interesse d'abord au premier point qui consiste à éviter de créer des oscillations lors du remaillage de fonctions possédant de fortes variations. On considèrera dans un premier temps une dimension un en espace et de petit pas de temps. La création d'oscillations duent à l'utilisation de grands pas de temps sera traitée au chapitre 3 et la généralisation aux dimensions supérieures dans le chapitre 4.

Chapitre 2

Limitation de flux pour le remaillage des particules

On s'intèresse dans ce chapitre à la construction de formules de remaillage évitant la génération d'oscillations numériques lorsque les solutions présentent de fortes variations. L'apparition d'oscillations constitue une difficulté fréquente dans la résolution discrète des équations de transport. Ce problème est notamment pénalisant si l'on cherche à garantir la positivité d'une quantité telle que la concentration d'un scalaire transporté par un écoulement. Dans le cas d'équation de convection-diffusion, la prise en compte de la diffusion peut masquer ou limiter ces oscillations. Lorsque la diffusion est suffisament importante, les particules peuvent être remaillées sans créer d'oscillations numériques. De telles formules de remaillage sont construites dans [92], mais ces travaux sont restrictifs puisqu'ils ne sont pas utilisables lorsque la diffusion est faible ou nulle (pour les équations d'Euler par exemple). Une approche différente est présentée ici, indépendante du terme de diffusion physique. Nous suivons l'approche de [93, 25] qui consiste à interpréter les méthodes particulaires en terme de différences finies afin d'adapter des outils efficaces déjà existant pour ces méthodes. Les questions posées sont de nature différentes suivant le caractère linéaire ou non-linéaire des problèmes considérés. Dans le cas des équations de transport non linéaire, l'interprétation en terme de schémas aux différences finies aboutit à des schémas non standards, nécessitant de créer de nouveaux limiteurs. Dans le cas linéaire, la problèmatique est différente. Les limiteurs classiques s'adaptent facilement aux schémas obtenus lorsqu'on utilise de petit pas de temps, mais la difficulté consiste à généraliser ces limiteurs lorsque la condition de CFL est relaxée.

L'interprétation des méthodes particulaires en terme de schémas aux différences finies est développée dans une première partie. La manière d'adapter les outils existant de limitation de flux est exposée ensuite en section 2.1.3. La méthodologie utilisée pour calculer les limiteurs est ensuite donnée en section 2.2 en distinguant les cas linéaire et non linéaires. On se restreint dans ce chapitre à la dimension un, aux formules de remaillages Λ_2, Λ_4 ainsi qu'à des pas de temps contraints par des conditions de CFL. La généralisation en dimension multiple et à de plus grand pas de temps sera traitée dans les chapitres suivants.

2.1 Lien avec les schémas de volumes finis

2.1.1 Le remaillage

La notion de remaillage a été introduite à la fin du premier chapitre, où sont construits différents noyaux d'interpolations. Le but est, rappelons le, de créer des particules régulièrement espacées à partir de celles ayant été advectées durant le pas de temps Δt précédent. La grille sur laquelle sont créées les nouvelles particules est régulière, de pas d'espace Δx. Les poids de remaillage affectés aux points de grilles adjacents à une particule donnée sont déterminés en fonction du noyau d'interpolation utilisé. Considérons par exemple le noyau d'interpolation linéaire Λ_1, redonné ci dessous :

$$\Lambda_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Notons y_k (ou y s'il n'y a pas d'ambiguité possible) la distance relative de la particule k au point de grille adjacent gauche (figure 2.1).

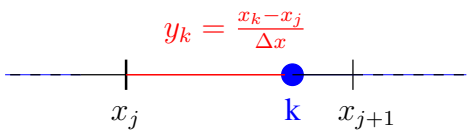


FIG. 2.1 – y_k est défini comme la distance relative de la particule k au point de grille à sa gauche.

Le support du noyau Λ_1 étant de longueur deux, le remaillage de la particule k ne créera que deux particules, une en x_j et l'autre en $x_{j+1} = x_j + \Delta x$ (fig 2.2). Si u_k

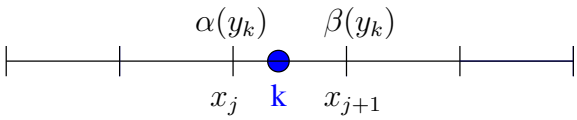


FIG. 2.2 – Poids de remaillage d'une particule k lorsque le support est de longeur deux.

est la quantité portée par la particule k, celles créées après le remaillage aux points de grilles voisins porteront une quantité $\alpha(y_k)\, u_k$ et $\beta(y_k)\, u_k$. $\alpha(y_k)$ et $\beta(y_k)$ sont appellés les poids de remaillage, et sont donnés par (2.2). Afin d'alléger les notations, les poids seront notés indifférement $\alpha_k := \alpha(y_k)$, $\beta_k := \beta(y_k)$, ...

$$\begin{cases} \alpha(y_k) = 1 - y_k \\ \beta(y_k) = y_k \end{cases} \tag{2.2}$$

Lorsque la longueur du support du noyau est un nombre impair, les formules de remaillages nécessitent de distinguer deux cas suivant la position de la particule remaillée. Les formules les plus utilisées par la suite sont données en (2.3) et (2.4). Les notations

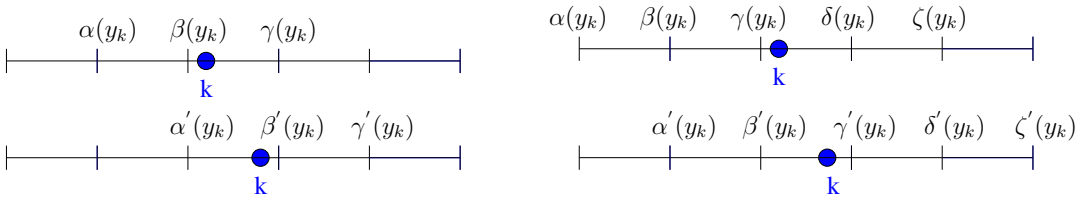


FIG. 2.3 – Notations des poids de remaillage d'une particule k. Noyau de support 3 à gauche ($M_3,\ \Lambda_2$) et 5 à droite ($M_5,\ \Lambda_4$).

correspondantes sont présentées dans la figure 2.3. Toutes les formules utilisées dans ce manuscrit sont résumées dans l'annexe A.

$$\mathbf{M_3}: \quad \text{si } y \leq 0.5 \begin{cases} \alpha(y) & = y\,(y-1)/2 + 1/8 \\ \beta(y) & = -(y-1)\,(y+1) - 1/4 \\ \gamma(y) & = y\,(y+1)/2 + 1/8 \end{cases}$$

$$\mathbf{\Lambda_2}: \quad \text{si } y \leq 0.5 \begin{cases} \alpha(y) & = y\,(y-1)/2 \\ \beta(y) & = -(y-1)\,(y+1) \\ \gamma(y) & = y\,(y+1)/2 \end{cases}$$

$$\mathbf{M_5}: \quad \text{si } y \leq 0.5 \begin{cases} \alpha(y) = (2y-1)^4/384 \\ \beta(y) = 19/96 - 11y/24 + y^2/4 + y^3/6 - y^4/6 \\ \gamma(y) = 115/192 - 5y^2/8 + y^5/4 \\ \delta(y) = 19/96 + 11y/24 + y^2/4 - y^3/6 - y^4/6 \\ \zeta(y) = 1/384 + y/48 + y^2/16 + y^3/12 + y^4/24 \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{\Lambda_4}: \quad \text{si } y \leq 0.5 \begin{cases} \alpha(y) & = (y-2)\,(y-1)\,y\,(y+1)\,(y+2)/24 \\ \beta(y) & = -(y-2)\,(y-1)\,y\,(y+2)/6 \\ \gamma(y) & = (y-2)\,(y-1)\,(y+1)\,(y+2)/4 \\ \delta(y) & = -(y-2)\,y\,(y+1)\,(y+2)/6 \\ \zeta(y) & = (y-1)\,y\,(y+1)\,(y+2)/24 \end{cases}$$

$$\mathbf{M_3},\ \mathbf{M_5},\ \mathbf{\Lambda_2},\ \mathbf{\Lambda_4}: \quad \text{si } y > 0.5 \begin{cases} \alpha'(y) & = \alpha(y-1) \\ \beta'(y) & = \beta(y-1) \\ \gamma'(y) & = \gamma(y-1) \\ \delta'(y) & = \delta(y-1) \\ \zeta'(y) & = \zeta(y-1) \end{cases} \tag{2.4}$$

D'une manière générale, les poids de remaillage des noyaux Λ_l, $l \in \mathbb{N}$ se construisent facilement en utilisant les polynômes de Lagrange. Soit l'intervalle

$$I = \begin{cases} [-\frac{l-1}{2}, \frac{l+1}{2}] & \text{si l est impair} \\ [-\frac{l}{2} + \langle y + 1/2 \rangle, \frac{l}{2} + \langle y + 1/2 \rangle] & \text{si l est pair} \end{cases} \tag{2.5}$$

où $\langle x \rangle$ représente la partie entière de x. En notant $P_k(i)$, $i \in I$ les poids de remaillage (par exemple $\alpha_k = P_k(0)$ et $\beta_k = P_k(1)$ lorsque $l = 1$), alors

$$P_k(i) = c_i \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} (y_k - j), \tag{2.6}$$

où

$$c_i = 1 / \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} (y_k - j)|_{y_k = i}. \tag{2.7}$$

2.1.2 Point de vue de la particule ou du point de grille

Jusqu'à présent nous avons adopté le point de vue d'une particule que l'on remaille, c'est à dire que l'on redistribue sur les points de grilles voisins. Il est également possible de se positionner sur un point de grille fixe, par exemple x_j, et "d'observer" ce qu'il recoit des particules voisines pour en former une nouvelle. La figure (2.4) schématise ce principe lorsque les particules sont remaillées avec des formules Λ_2. L'étape de remaillage permet

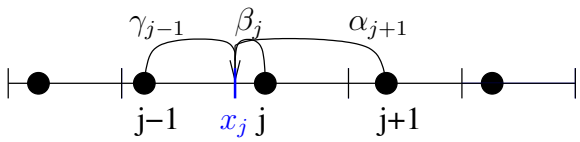


FIG. 2.4 – Schéma obtenu au point de grille j lorsque les particules sont remaillées par des formules Λ_2 ($y \leq 0.5$).

alors de déduire un schéma numérique de type différences finies puisque la valeur du champ inconnue u s'exprime aux points de grille en fonction de celle des points voisins. Dans l'exemple traité, le schéma obtenu au point x_j s'écrit,

$$u_j^{n+1} = u(x_j,\, (n+1)\Delta t) = \gamma(y_{j-1}) u_{j-1}^n + \beta(y_j) u_j^n + \alpha(y_{j+1}) u_{j+1}^n. \tag{2.8}$$

A chaque noyau de remaillage utilisé correspond donc un schéma équivalent de type "différences finies", qui dépend également du pas de temps et de la méthode numérique utilisée pour advecter les particules. Nous référons ici à [29, 93] pour plus de précisions sur ces schémas équivalents.

Le schéma (2.8) peut être explicité à condition de connaître les valeurs de y_k, $k = j-1, j, j+1$. Notons a le champ de vitesse utilisé pour advecter les particules. a correspond au champ physique lorsqu'on utilise un schéma d'advection de type Euler, mais la vitesse d'advection des particules est légèrement modifiée dans le cas où elles sont transportées par un schéma numérique plus précis, du type Runge Kutta par exemple. Les particules sont situées sur les points de grille au temps t. Leur position au temps $t + \Delta t$ est determinée en appliquant le schéma d'advection pendant un temps Δt, et la valeur de y défini dans la figure 2.1 est donc connue. La figure 2.5 explicite son calcul

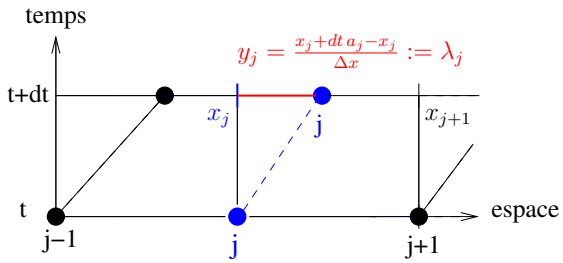


FIG. 2.5 – Evaluation de y lorsque $0 < \lambda_j < 1 \ \ \forall j$.

lorsque le pas de temps est choisi tel que $0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \max a < 1/2$. On notera par la suite $\lambda_j = \frac{\Delta t}{\Delta x} a(x_j)$.

Examinons à titre d'exemple le cas où le champ de vitesse est constant ($a_j = a(x_j) = a\, \forall j$) et fixons le pas de temps de telle sorte que $0 \leq \lambda = \Delta t\, a/\Delta x \leq 1/2$. L'utilisation des formules de remaillage Λ_2 donne le schéma (2.8) au point x_j. En remplaçant $y_j = y = \lambda$ dans les expressions de α, β et γ (2.3) , on obtient le schéma numérique suivant :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\right) u_{j-1}^n + \left(1 - y^2\right) u_j^n + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y}{2}\right) u_{j+1}^n \\ &= u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

qui est le schéma de Lax Wendroff. Dans le cas où $1/2 \leq \lambda \leq 1$, un raisonnement similaire en utilisant les coefficients (2.4) mène au schéma de Beam Warming :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \gamma(y_{j-2} - 1)u_{j-2}^n + \beta(y_{j-1} - 1)u_{j-1}^n + \alpha(y_j - 1)u_j^n \\ &= \frac{1}{2}\lambda\,(\lambda - 1)\, u_{j-2}^n + \lambda\,(2 - \lambda)\, u_{j-1}^n + \frac{1}{2}\,(\lambda - 1)\,(\lambda - 2)\, u_j^n. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Notons que l'utilisation des noyaux Λ_2 d'ordre trois donne une méthode d'ordre deux suite à l'accumulation des erreurs de troncature à chaque pas de temps. Plus généralement, l'utilisation de remaillage Λ_l correspond à un schéma de différences finies d'ordre l [93]. Comme tout schéma d'ordre élevé en différences finies, ces schémas sont réputés pour créer des oscillations numériques en présence de fortes variations. Les simulations utilisant des formules de remaillage Λ_2 dans le cas de champ de vitesse non constant témoignent également de la présence d'oscillations. Ce problème est traité dans la section suivante.

2.1.3 Limitation de flux et formule de remaillage

Il a été vu précédemment que l'utilisation du remaillage permet d'interpréter la méthode particulaire sous la forme d'un schéma de différences finies. De nombreux travaux ont été menés ces dernières années pour supprimer les oscillations numériques dans les méthodes de type difference/volume finies. Il existe principalement deux stratégies. La première consiste à limiter les flux (ou les pentes) du schéma. Nous détaillons cette

technique ci-dessous. L'autre stratégie, plus élaborée, consiste à adapter le stencil pour caluler des dérivées dans une zone où la fonction est régulière. Ces méthodes appellées ENO/WENO [64, 55, 94] sont utilisées avec succés dans de nombreuses situations. Nous avons choisi d'adapter aux méthodes particulaires la stratégie la plus simple, la limitation de flux, en l'appliquant sur le schéma numérique équivalent, ce qui permet d'en déduire des formules de remaillages modifiées.

Pour traduire en terme de remaillage les outils de limitation de flux , un premier point consiste à écrire le schéma numérique sous une forme conservative. Ceci est possible grâce à la propriété de conservation (la somme des poids de remaillage est égale à un), satisfaite lors de la construction de tous les noyaux. Prenons comme exemple les formules de remaillage Λ_2. La relation suivante est vérifiée :

$$1 - \alpha_j - \gamma_j = \beta_j, \tag{2.11}$$

le schéma numérique associé (2.8) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \left\{-\alpha_{j+1} u_{j+1}^n + \gamma_j u_j^n\right\} \\ &\quad + \left\{-\alpha_j u_j^n + \gamma_{j-1} u_{j-1}^n\right\} \\ &= u_j^n - \left\{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}\right\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Les termes $F_{j\pm 1/2}$ sont appellés flux numériques et sont donnés ci dessous lorsque $0 < \lambda_j < 1/2$ pour tout j.

$$\begin{aligned} F_{j+1/2}^2 &= -\alpha_{j+1}^2 u_{j+1}^n + \gamma_j^2 u_j^n \\ F_{j+1/2}^{M3} &= -\alpha_{j+1}^{M3} u_{j+1}^n + \gamma_j^{M3} u_j^n \\ F_{j+1/2}^4 &= -\alpha_{j+2}^4 u_{j+2}^n - (\alpha_{j+1}^4 + \beta_{j+1}^4) u_{j+1}^n + (\zeta_j^4 + \delta_j^4) u_j^n + \zeta_{j-1}^4 u_{j-1}^n. \end{aligned} \tag{2.13}$$

F^2, F^{M3} et F^4 correspondent respectivement aux flux obtenus par l'utilisation de formules Λ_2, M_3 et Λ_4 avec $0 \leq y \leq 1/2$. Des exposants sont ajoutés aux poids de remaillage afin d'identifier le type de formule auquels ils sont associés (2.3). Ces exposants sont omis lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

Le principe des méthodes de limitation de flux est de combiner un schéma précis mais oscillant avec un autre diffusif, au mieux d'ordre un, mais ne générant pas d'oscillations. Cette combinaison est faite par l'introduction d'un scalaire, appellé limiteur. Son but est de garder autant que possible le schéma précis, mais de le réduire à l'ordre un quand c'est necessaire, c'est à dire en présence de variations rapide de la solution. Le choix du limiteur sera examiné dans la prochaine section. Nous exposons ici une manière d'introduire ces limiteurs dans les formules de remaillage en nous concentrant sur des formules Λ_2.

Appelons ϕ le limiteur avec $0 \leq \phi \leq 1$ et combinons les schémas de grilles issus d'un remaillage M_3 et Λ_2. Pour des raisons de correction de consistance qui seront étudiées dans le chapitre 3, le choix des formules d'ordre un à utiliser s'est porté sur M_3 plutôt que Λ_1. La limitation par les formules Λ_1, moins diffusives, est traitée dans [25]. On suppose que la position des particules après leur advection soient telles que $y < 1/2$, ou

de manière équivalente $0 < \lambda_j < 1/2$ pour tout j. Le schéma que l'on désire obtenir au point de grille x_j est le suivant :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} =& u_j^n - \left(F_{j+1/2}^{M3} - F_{j-1/2}^{M3}\right) \\ & - \phi_{j+1/2}\left(F_{j+1/2}^{2} - F_{j+1/2}^{M3}\right) \\ & + \phi_{j-1/2}\left(F_{j-1/2}^{2} - F_{j-1/2}^{M3}\right) \\ =& u_j^n + \alpha_{j+1}^{M3} u_{j+1}^n - (\alpha_j^{M3} + \gamma_j^{M3}) u_j^n + \gamma_{j-1}^{M3} u_{j-1}^n \\ & - \phi_{j+1/2}\left\{(\gamma_j^{l2} - \gamma_j^{M3}) u_j^n - (\alpha_{j+1}^{l2} - \alpha_{j+1}^{M3}) u_{j+1}^n\right\} \\ & + \phi_{j-1/2}\left\{(\gamma_{j-1}^{l2} - \gamma_{j-1}^{M3}) u_{j-1}^n - (\alpha_j^{l2} - \alpha_j^{M3}) u_j^n\right\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ainsi, si le limiteur s'annule on retrouve le schéma issu d'un remaillage M_3, alors que $\phi = 1$ correspond au schéma issu d'un remaillage Λ_2.

La dernière étape dans la construction de formules de remaillage Λ_2 limitées consiste simplement a reprendre le point de vue des particules et utiliser (2.14) pour en déduire des formules de remaillages. Les particules sont remaillées sur les mêmes points de grille qu'avec les formules Λ_2 mais les poids sont remplacés par les suivants :

$$\begin{cases} \alpha_j^{lim} = \alpha_j^{M3} + \phi_{j-1/2}(\alpha_j^{l2} - \alpha_j^{M3}) \\ \beta_j^{lim} = 1 - \alpha_j^{M3} - \gamma_j^{M3} - \phi_{j-1/2}(\alpha_j^{l2} - \alpha_j^{M3}) - \phi_{j+1/2}(\gamma_j^{l2} - \gamma_j^{M3}) \\ \gamma_j^{lim} = \gamma_j^{M3} + \phi_{j+1/2}(\gamma_j^{l2} - \gamma_j^{M3}) \end{cases} \tag{2.15}$$

La propriété de conservation est toujours vérifiée :

$$\alpha_j^{lim} + \beta_j^{lim} + \gamma_j^{lim} = 1. \tag{2.16}$$

Dans le cas ou le champ de vitesse est négatif et $-1/2 < \lambda_j < 0$ pour tout j, la valeur de y (fig. 2.1) est supérieure à $1/2$ (fig.2.6). Les flux, notés $G(y)$, sont donnés en fonction des flux (2.13) par la formule $G(y) = F(y-1)$. Les formules de remaillage limitées sont également déduites de celles (2.15) en évaluant les poids dans les membres de droite en $y_j - 1$ au lieu de y_j.

Un travail similaire est rapporté dans l'annexe B pour limiter les formules de remaillages Λ_4 avec M_5. Les poids correspondant sont :

$$\begin{aligned} \alpha_j^{lim} =& \alpha_j^{M5} + \phi_{j-3/2}\left(\alpha_j^{l4} - \alpha_j^{M5}\right) \\ \beta_j^{lim} =& \beta_j^{M5} - \phi_{j-3/2}\left(\alpha_j^{l4} - \alpha_j^{M5}\right) + \phi_{j-1/2}\left(\alpha_j^{l4} - \alpha_j^{M5} + \beta_j^{l4} - \beta_j^{M5}\right) \\ \gamma_j^{lim} =& \gamma_j^{M5} - \phi_{j-1/2}\left(\alpha_j^{l4} - \alpha_j^{M5} + \beta_j^{l4} - \beta_j^{M5}\right) - \phi_{j+1/2}\left(\delta_j^{l4} - \delta_j^{M5} + \zeta_j^{l4} - \zeta_j^{M5}\right) \\ \delta_j^{lim} =& \delta_j^{M5} + \phi_{j+1/2}\left(\delta_j^{l4} - \delta_j^{M5} + \zeta_j^{l4} - \zeta_j^{M5}\right) - \phi_{j+3/2}\left(\zeta_j^{l4} - \zeta_j^{M5}\right) \\ \zeta_j^{lim} =& \zeta_j^{M5} + \phi_{j+3/2}\left(\zeta_j^{l4} - \zeta_j^{M5}\right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

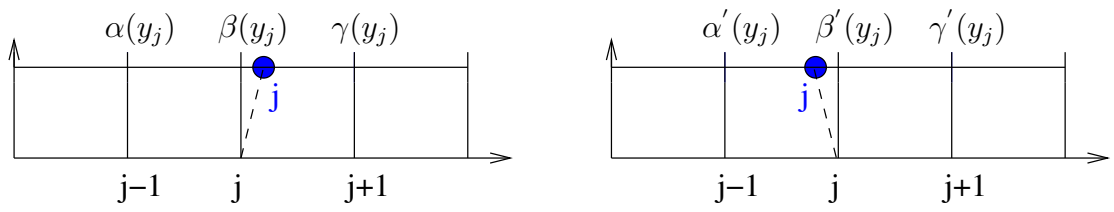


FIG. 2.6 – Advection d'une particule j pendant un pas de temps Δt tel que $-1/2 < \lambda_j < 1/2$ pour tout j. Cas d'un champ de vitesse positif à gauche et négatif à droite. Remaillage par des formules Λ_2, M_3 ou Λ_2 limitées.

2.2 Calcul des limiteurs

Les formules de remaillage limitées (2.15) et (2.17) font intervenir des limiteurs ϕ. On s'interesse ici à leur calcul. La limitation de flux est une méthode répandue pour la résolution numérique des équations de transport ou des lois de conservation. Par conséquent, la littérature traitant du calcul des limiteurs est importante [61, 88, 49, 62, 46, 89, 90, 34, 68, 30]. Les limiteurs sont principalement calculés par deux méthodes différentes, l'une est basée sur le critère TVD et sera utilisée pour les formules Λ_2, l'autre sur celui de monotonie, et sera utilisée pour les formules Λ_4.

Précisons que l'on considére uniquement les étapes d'advection et de remaillage d'une méthode particulaire en dimension un. Il s'agit ainsi de résoudre l'équation de transport sous forme conservative suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a\,u) = 0, \tag{2.18}$$

u étant l'inconnue et a le champ de vitesse.

Cette équation vérifie la propriété TVD (décroissance de la variation totale) dans le cas d'un champ de vitesse non linéaire ($a = a(u)$) d'après le théorême de Kruzkov (en particulier si le champ de vitesse est constant). Cependant, le cas linéaire ($a = a(x)$) non constant nécessite une attention particulière puisque alors (2.18) n'est pas TVD et ne satisfait pas non plus le principe du maximum. Le calcul des limiteurs sera donc détaillé en fonction du champ de vitesse considéré.

2.2.1 Champ de vitesse constant : $a(u, x) = a$

Examinons le cas d'un champ de vitesse constant. Cette hypothèse permettra de calculer facilement les limiteurs qui sont ensuite utilisés dans le cas général.

M_3 et M_5 : Des schémas positifs

Lorsque les particules sont transportées à la même vitesse $a > 0$, la distance entre leur position après un pas de temps et le point de grille à leur gauche est constante. Ainsi la valeur de y_k (fig.2.1) intervenant dans les formules de remaillage d'une particule k est

constante et notée y. Le schéma de grille obtenu en utilisant des formules de remaillage M_3 s'écrit, pour $y \leq 1/2$:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \tfrac{1}{2}\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2 u_{j-1}^n + \left(\tfrac{3}{4}-y^2\right) u_j^n + \tfrac{1}{2}\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 u_{j+1}^n \\ &:= \gamma^g\, u_{j-1}^n + \beta^g\, u_j^n + \alpha^g\, u_{j+1}^n, \end{aligned} \tag{2.19}$$

et pour $y > 1/2$:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \tfrac{1}{2}\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 u_{j-1}^n + \left(-\tfrac{1}{4}+2y-y^2\right) u_j^n + \tfrac{1}{2}\left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2 u_{j+1}^n \\ &:= \gamma^d\, u_{j-1}^n + \beta^d\, u_j^n + \alpha^d\, u_{j+1}^n. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Les coefficients β^g et β^d sont positifs pour $y \leq \sqrt{3/4}$ et $y \geq 1-\sqrt{3}/2$ respectivement. En particulier, lorsque $y \leq 1/2$ les coefficients α^g, β^g et γ^g sont positifs. Lorsque $y > 1/2$ les coefficients α^d, β^d et γ^d le sont aussi. Par définition, les schémas (2.19) et (2.20) sont alors monotones. Cela implique qu'ils sont également TVD. On dira par abus de langage que les formules de remaillage M_3 le sont aussi.

De la même manière, il est possible de montrer que les formules de remaillage M_5 sont également positives, monotones et TVD lorsque le champ de vitesse est constant puisque les poids de remaillage, donnés ci dessous, sont positifs pour les valeurs de y correspondantes.

$$\begin{aligned} &\text{si } y \leq 1/2 \begin{cases} \alpha(y) = (2y-1)^4/384 \ \geq 0\ \forall y \in [0,1] \\ \beta(y) = 19/96 - 11y/24 + y^2/4 + y^3/6 - y^4/6 \ \geq 0\ \forall y \in [0,0.9] \\ \gamma(y) = 115/192 - 5y^2/8 + y^5/4 \ \geq 0\ \forall y \in [0,1] \\ \delta(y) = 19/96 + 11y/24 + y^2/4 - y^3/6 - y^4/6 \ \geq 0\ \forall y \in [0,1] \\ \zeta(y) = 1/384 + y/48 + y^2/16 + y^3/12 + y^4/24 \ \geq 0\ \forall y \in [0,1] \end{cases} \\ &\text{si } y > 1/2 \begin{cases} \alpha^{'}(y) = (2y-3)^4/384 \ \geq 0\ \forall y \in [0,1] \\ \beta^{'}(y) = 55/96 + 5y/24 - 5y^2/4 + 5y^3/6 - y^4/6 \ \geq 0\ \forall y \in [0,1] \\ \gamma^{'}(y) = 43/192 + y/4 + 7y^2/8 - y^3 + y^4/4 \ \geq 0\ \forall y \in [0,1] \\ \delta^{'}(y) = -1/96 + y/8 - y^2/4 + y^3/2 - y^4/6 \ \geq 0\ \forall y \in [0.1,1] \\ \zeta^{'}(y) = 1/384 - y/48 + y^2/16 - y^3/12 + y^4/24 \ \geq 0\ \forall y \in [0,1] \end{cases} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Calcul du limiteur pour satisfaire la contrainte TVD dans les formules de remaillage Λ_2

La variation totale d'une solution numérique continue par morceaux est donnée par la définition suivante :

$$TV(u_j^n) = \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n|. \tag{2.22}$$

Satisfaire le critère "TVD"(total variation diminishing) consiste à imposer au schéma numérique de vérifier les hypothèses du théorême d'Harten :

Théorème 1 (Harten)**.** *Supposons que le schéma s'écrit sous la forme*

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n) - D_{j-1/2}(u_j^n - u_{j-1}^n).$$

Si $\forall\ j \in \mathbb{Z}$ *on a*

1. $C_{j+1/2} \geq 0,\ D_{j+1/2} \geq 0,$
2. $C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1,$

alors le schéma est à variation totale décroissante.

On propose d'appliquer ce théorème au calcul des limiteurs des formules Λ_2 (2.15). Supposons $0 \leq \Delta t\, a/\Delta x = \lambda = y \leq 1/2$, le schéma de grille correspondant (2.14) s'écrit

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \ & u_j^n + \tfrac{1}{2}\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 \left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) - \tfrac{1}{2}\left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)^2 \left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) \\ & -\tfrac{1}{8}\phi_{j+1/2}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) + \tfrac{1}{8}\phi_{j-1/2}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) \\ = \ & u_j^n + \tfrac{1}{2}\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 \left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) \\ & - \left(\tfrac{1}{2}\left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\phi_{j-1/2} + \tfrac{1}{8}\tfrac{\phi_{j+1/2}}{r_{j+1/2}}\right)\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right), \end{aligned} \tag{2.23}$$

où l'on a noté le rapport des pentes

$$r_{j+1/2} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}. \tag{2.24}$$

Il est donc possible d'identifier les constantes du théorème ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{j-1/2} = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \\ D_{j-1/2} = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\phi_{j-1/2} + \frac{1}{8}\frac{\phi_{j+1/2}}{r_{j+1/2}}. \end{array} \right. \tag{2.25}$$

Le schéma sera donc TVD si

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\phi_{j-1/2} + \frac{1}{8}\frac{\phi_{j+1/2}}{r_{j+1/2}} \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\phi_{j-1/2} + \frac{1}{8}\frac{\phi_{j+1/2}}{r_{j+1/2}} \leq 1 \end{array} \right. \tag{2.26}$$

ce qui s'écrit encore,

$$-4\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{\phi_{j+1/2}}{r_{j+1/2}} - \phi_{j-1/2} \leq 8 - 4\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 6 - 8\lambda^2. \tag{2.27}$$

Le limiteur $\phi_{j+1/2} = \phi\left(r_{j+1/2}\right)$ est construit de manière à être positif, et nul si le rapport de pente $r_{j+1/2}$ est négatif. Puisqu'alors le gradient change de signe, cette situation correspond à la présence d'un extremum. Notons qu'un inconvenient de cette méthode est de "tronquer" la solution lorsqu'on ne devrait pas, dans un cas d'extrum régulier par exemple. Puisque $\lambda \leq 1/2$, on impose au limiteur de satisfaire les conditions suivantes afin de vérifier (2.27) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \phi_{j+1/2} \leq r_{j+1/2} \leq 4\, r_{j+1/2} \leq r_{j+1/2}\left(6 - 8\lambda^2\right) \\ 0 \leq \phi_{j-1/2} \leq 1 \leq 4\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 \end{array} \right. \tag{2.28}$$

Un limiteur Minmod classique

$$\phi(r) = \max\left(0, \min\left(1, r\right)\right), \tag{2.29}$$

ou encore

$$\phi(r) = \max\left(0, \min\left(1, 4\,r\right)\right). \tag{2.30}$$

peut être utilisé tant que $\lambda \leq \sqrt{10}/4 \simeq 0.8$, valeur à partir de laquelle $6 - 8\lambda^2 < 1$. Cette restriction sur les bornes n'est pas necessaire et il est possible de construire un limiteur dépendant du champ de vitesse (ou du nombre CFL local) :

$$\phi(r) = \max\left(0, \min\left(4\left(y + 1/2\right)^2, \left(6 - 8y^2\right) r\right)\right), \tag{2.31}$$

ou

$$\phi(r) = \max\left(0, \min\left(1, 4\left(y + 1/2\right)^2, \left(6 - 8y^2\right) r\right)\right), \tag{2.32}$$

où $y = \lambda$.

Remarque 2. *Les limiteurs (2.31) et (2.32) sont nuls si* $y \geq \sqrt{3}/2 \simeq 0.87$ *puisque alors* $6 - 8y^2 \leq 0$.

Généralisons maintenant le calcul des limiteurs Λ_2 au cas où $-1/2 \leq \lambda \leq 0$. Les particules sont remaillées par les formules (2.4) et le schéma de grille est alors, d'après la figure 2.6 :

$$u_j^{n+1} = \gamma(y-1)u_{j-1}^n + \beta(y-1)u_j^n + \alpha(y-1)u_{j+1}^n. \tag{2.33}$$

Or $y = y_j = (x_j + \Delta t\, a - x_{j-1})/\Delta x = \lambda + 1$ donc $\alpha(y-1) = \alpha(\lambda)$ et de même pour les coefficients β et γ. Le schéma de grille est donc le même que (2.23), avec $-1/2 \leq \lambda = y - 1 \leq 0$.

Une prudence doit toutefois être portée sur les simplifications faites dans les inégalitées (2.28) pour le calcul des limiteurs. Si $-1/2 \leq \lambda \leq 0$ alors $4\left(\lambda + 1/2\right)^2 \leq 1$ et le limiteur de type Minmod (2.30) ne peut pas être utilisé. Le limiteur conservant les bornes des inégalités (2.31) permet d'obtenir un schéma TVD mais n'est pas satisfaisant. En effet, dans le pire des cas ou $\lambda = -1/2$ le limiteur s'annule, et le schéma est seulement d'ordre un.

Le limiteur nécessite donc d'être calculé différemment que dans le cas où $0 \leq \lambda \leq 1/2$. Notons le ψ. En introduisant le rapport de pente

$$\bar{r}_{j-1/2} = (u_{j+1}^n - u_j^n)/(u_j^n - u_{j-1}^n), \tag{2.34}$$

les coefficients du théorème d'Harten peuvent s'identifier ainsi :

$$\begin{cases} C_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\psi_{j+1/2} + \frac{1}{8}\frac{\psi_{j-1/2}}{\bar{r}_{j-1/2}} \\ D_{j-1/2} = \frac{1}{2}\left(\lambda + 1/2\right)^2. \end{cases} \tag{2.35}$$

Le schéma sera donc TVD en imposant

$$-4\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{\psi_{j-1/2}}{\bar{r}_{j-1/2}} - \psi_{j+1/2} \leq 6 - 8\lambda^2, \tag{2.36}$$

ou encore

$$\begin{cases} 0 \leq \psi \leq \bar{r} \leq 4\,\bar{r} \leq \bar{r}\left(6 - 8\lambda^2\right) \\ 0 \leq \psi \leq 1 \leq 4\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \tag{2.37}$$

Puisque $-1/2 \leq \lambda \leq 0$, le limiteur de type Minmod (2.30) peut à nouveau être utilisé en considérant le rapport de pente $\bar{r}$ à la place de r et le limiteur dépendant du champ de vitesse s'écrit :

$$\psi(\bar{r}) = \max\left(0, \min\left(4\,(y-1-1/2)^2\,, \left(6 - 8(y-1)^2\right)\bar{r}\right)\right), \tag{2.38}$$

ou

$$\psi(\bar{r}) = \max\left(0, \min\left(1, 4\,(y-1-1/2)^2\,, \left(6 - 8(y-1)^2\right)\bar{r}\right)\right). \tag{2.39}$$

Remarque 3. *La généralisation du calcul des limiteurs pour des pas de temps plus important sera détaillée à la fin du chapitre suivant. Dans le cas d'une vitesse constante, les même limiteurs pourront en fait être utilisés puisque la méthode est exacte durant un temps $\Delta t^{'} = n\,\Delta x/a$ avec $n \in \mathbb{N}$, et l'analyse précédente peut alors s'appliquer uniquement sur une durée $\Delta t - \Delta t^{'}$.*

Calcul du limiteur pour satisfaire la contrainte de monotonie dans les formules de remaillage Λ_4

Une deuxième manière de calculer les limiteurs résulte de la théorie des schémas monotones. Un schéma à cinq points est dit monotone si tous ses coefficients sont positifs, et vérifient ainsi les contraintes de monotonies suivantes :

$$\min(u^n_{j-2}, u^n_{j-1}, u^n_j, u^n_{j+1}, u^n_{j+2}) \leq u^{n+1}_j \leq \max(u^n_{j-2}, u^n_{j-1}, u^n_j, u^n_{j+1}, u^n_{j+2}). \tag{2.40}$$

Remarque 4. *Il est montré dans [90] qu'imposer la contrainte de monotonie est équivalent à imposer la decroissance de la variation totale dans le cas d'un champ de vitesse constant.*

Construisons maintenant les limiteurs ϕ des formules Λ_4 limitées (2.17) de manière à satisfaire les contraintes de monotonies (2.40). On se place dans le cas ou $0 \leq \lambda \leq 1/2$. En notant $E_j = u^n_j - \left(F^{M5}_{j+1/2} - F^{M5}_{j-1/2}\right)$ et $F_{j+1/2} = F^{l4}_{j+1/2} - F^{M5}_{j+1/2}$ (avec $y_k = y$ est constant), le schéma au point de grille j s'écrit

$$u^{n+1}_j = E_j + \phi_{j+1/2}F_{j+1/2} - \phi_{j-1/2}F_{j-1/2}. \tag{2.41}$$

En notant $m_j = \min(u_{j-2}, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, u_{j+2})$ et $M_j = \max(u_{j-2}, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, u_{j+2})$, les contraintes à satisfaire (2.40) deviennent alors :

$$m_j \leq E_j + \phi_{j+1/2}F_{j+1/2} - \phi_{j-1/2}F_{j-1/2} \leq M_j. \tag{2.42}$$

En supposant que $0 \leq \phi \leq 1$, on a

$$\begin{cases} m_j - E_j + \max(0, F_{j-1/2}) \leq \phi_{j+1/2}F_{j+1/2} \leq M_j - E_j + \min(0, F_{j-1/2}) \\ m_j - E_j + \max(0, -F_{j+1/2}) \leq -\phi_{j-1/2}F_{j-1/2} \leq M_j - E_j + \min(0, -F_{j+1/2}), \end{cases} \tag{2.43}$$

ce qui s'écrit encore,

$$\begin{cases} \min(A_j, B_j) \leq \phi_{j-1/2} \leq \max(A_j, B_j), \\ \min(C_j, D_j) \leq \phi_{j-1/2} \leq \max(C_j, D_j). \end{cases} \tag{2.44}$$

En notant

$$\begin{cases} A_j = \left(m_{j-1} - E_{j-1} + \max(0, F_{j-3/2})\right) / F_{j-1/2} \\ B_j = \left(M_{j-1} - E_{j-1} + \min(0, F_{j-3/2})\right) / F_{j-1/2} \\ C_j = \left(m_j - E_j + \max(0, -F_{j+1/2})\right) / - F_{j-1/2} \\ D_j = \left(M_j - E_j + \min(0, -F_{j+1/2})\right) / - F_{j-1/2}. \end{cases} \tag{2.45}$$

$\phi_{j-1/2}$ est construit afin de satisfaire (2.45) et donc (2.40) par la formule suivante : $\phi_{j-1/2} = \min(\phi_1, \phi_2)$ avec,

$$\begin{cases} \phi_1 = \max\left\{0, \min\left(1, \max(A_j, B_j)\right)\right\} \\ \phi_2 = \max\left\{0, \min\left(1, \max(C_j, D_j)\right)\right\}. \end{cases} \tag{2.46}$$

D'après (2.41), le cas où $F_{j-1/2} = 0$ ne pose pas de problème pour le calcul de $\phi_{j-1/2}$, on peut imposer par exemple $\phi_{j-1/2} = 0$.

Le cas $-1/2 < \lambda < 0$ se traite simplement en se rapellant que les poids de remaillages Λ_4 et M_5 s'expriment alors en fonction de ceux du cas $0 < \lambda < 1/2$. La répartition des poids de remaillage est explicitée dans la figure ci-dessous, où $\alpha^{'}(y_j) = \alpha(y_j - 1)$, $\beta^{'}(y_j) = \beta(y_j - 1)$, ..., $\zeta^{'}(y_j) = \zeta(y_j - 1)$. Le schéma au point x_j est indépendant du signe du champ de vitesse.

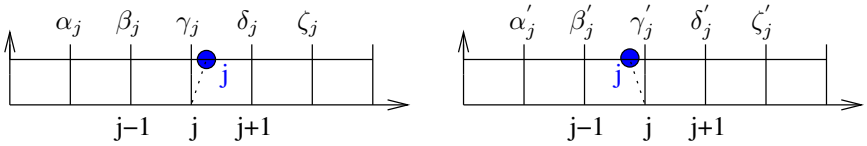


FIG. 2.7 – Répartition des poids de remaillage Λ_4, $M5$ ou Λ_4 limité lorsque $-1/2 < \lambda_j < 1/2$ pour tout j. Le cas d'un champ de vitesse positif est représenté à gauche, celui négatif à droite.

Illustrations numériques

Rappelons d'abord que lorsque le champ de vitesse a est constant, une seule itération en temps est nécessaire ($\Delta t = T_{fin}$), et la solution numérique est exacte (ou très précise si l'on effectue une étape de remaillage au temps final). On choisit ici de contraindre le pas de temps par un nombre CFL ($\Delta t = 0.4\,\Delta x$) afin d'observer le comportement des limiteurs. On verifie essentiellement des comportements de schémas aux différences finies de type Lax Wendroff avec des limiteurs d'ordre un. L'intérêt de l'approche viendra lorsqu'on l'utilisera pour des champs de vitesse non constants et des nombres de $CFL > 1$.

Un cas test classique est représenté dans les figures 2.8 et 2.9 ci dessous. Il s' agit de résoudre l'équation d'advection avec un champ de vitesse constant unité et des conditions limites périodiques. L'initialisation est composée d'un ensemble de fonctions crénaux, gaussienne, triangulaire et cosinus donnés précisément en (2.47).

$$\begin{cases} f\left(x,\, z=-0.7,\, \beta=\log\left(2\,10^4/9\right),\, \delta=5\,10^{-3}\right) & \text{si } x\in[-0.8,-0.6] \\ 1 & \text{si } x\in[-0.4,-0.2] \\ 1-|10\,(x-0.1)| & \text{si } x\in[0,0.2] \\ g(x,\,\alpha=10,\,\delta=5\,10^{-3}) & \text{si } x\in[0.4,0.6] \\ f\left(x,\, z=0.9,\, \beta=\log\left(5\,10^{-5}/36/\right),\, \delta=5\,10^{-3}\right) & \text{si } x\in[0.8,1] \\ 0.3\cos\left(-10\,x\right) & \text{si } x\in[1.2,1.8] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.47}$$

avec

$$\begin{cases} f\left(x,\, z,\, \beta,\, \delta\right) = & \frac{1}{6}\exp\left(-\beta\left(x+\delta-z\right)^2\right)+\exp\left(-\beta\left(x-\delta-z\right)^2\right) \\ & +4\exp\left(-\beta\left(x-z\right)^2\right) \\ g(x,\,\alpha,\,\delta) = & \frac{1}{6}\left(h\left(x,\,\alpha,\,1/2-\delta\right)+h\left(x,\,\alpha,\,1/2+\delta\right)+4\,h\left(x,\,\alpha,\,1/2\right)\right) \\ h(x,\,\alpha,\,d) = & \sqrt{\max\left(1-\alpha^2\left(x-d\right)^2,0\right)} \end{cases} \tag{2.48}$$

Les courbes vertes (avec des points) comparent les résultats obtenus après une advection d'un tour ($T=3$) à la solution initiale (en rouge). Des oscillations sont présentent lorsque les particules sont remaillées par les formules Λ_2 et $M_4^{'}$ (fig. 2.8).

L'utilisation des limiteurs (2.30) et (2.32) donne des solutions identiques. Une seule est représentée, dans la figure 2.9-(b). La précision de cette solution est améliorée par rapport à celle obtenue en utilisant un limiteur minmod (2.29). Notons que le champ de vitesse étant constant, la solution de la figure 2.9-(a) est celle que l'on obtiendrait en utilisant un schéma de Lax-Wendroff limité par un limiteur minmod. Le limiteur (2.31) à un comportement "anti-diffusif" (figure 2.9-(c)). La solution issue d'un remaillage Λ_4 limité est donnée à titre de comparaison dans la figure 2.9-(d).

2.2.2 Equation de conservation non-linéaire : $a(u,x)=a(u)$

Lorsque le champ de vitesse a dépend de l'inconnue u, la méthode particulaire consiste à résoudre l'équation de conservation non-linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\operatorname{div}\left(a(u)u\right)=0. \tag{2.49}$$

Cette équation étant TVD, les limiteurs seront construits en utilisant cette propriété.

Des schémas de grilles non standard

Contrairement au cas linéaire, les forts gradients de la solution (en présence de choc) contraignent à respecter une condition de CFL classique pour éviter que les particules

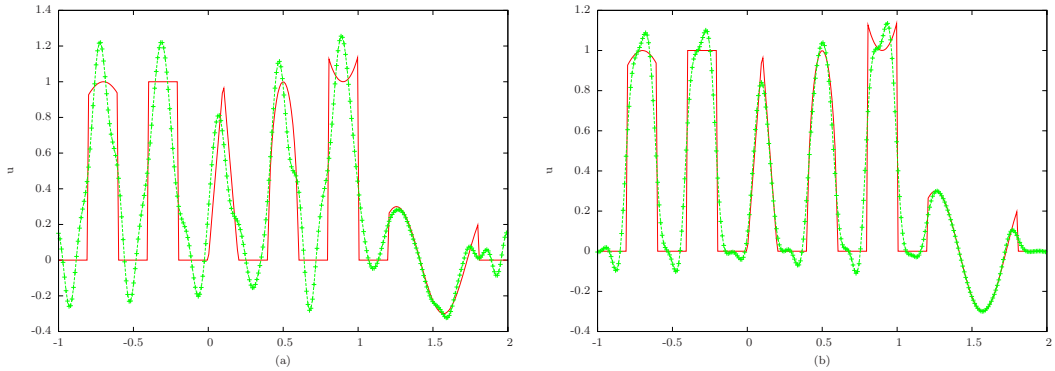


FIG. 2.8 – Advection à la vitesse 1 pendant un tour (T=3). Les particules sont remaillées par les formules Λ_2 en (a) et $M_4^{'}$ en (b). $\Delta t = 0.4\,\Delta x = 4\,10^{-3}$.

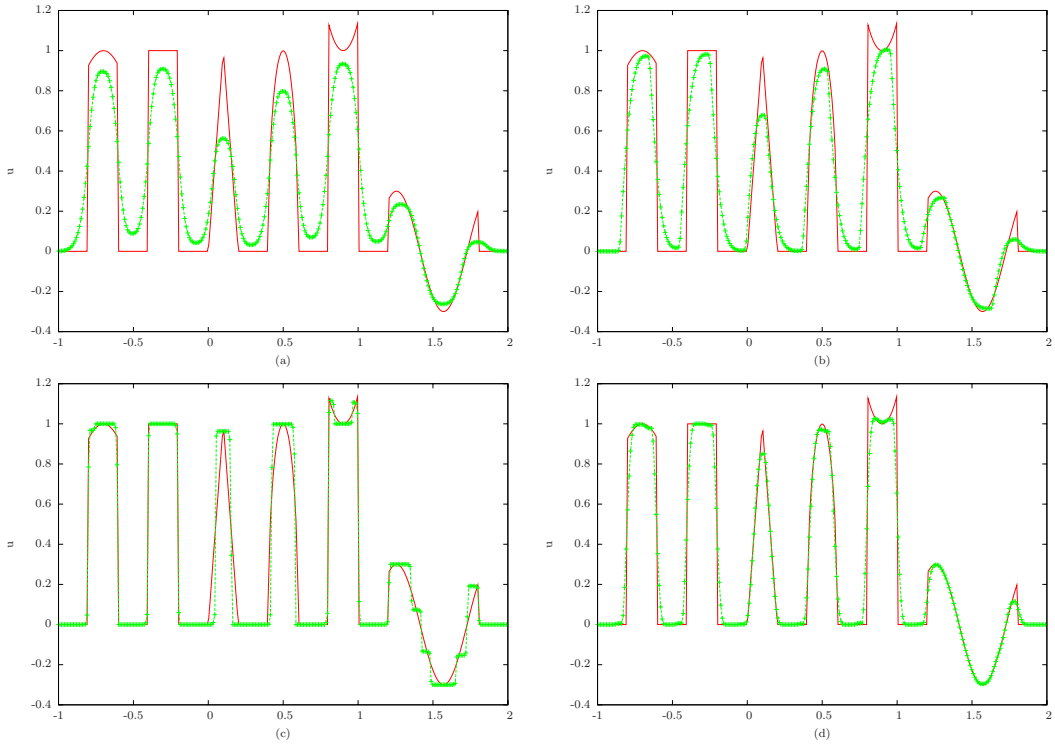


FIG. 2.9 – Advection à la vitesse 1 pendant un tour (T=3). Les particules sont remaillées par les formules Λ_2 limitées en (a,b,c) et par les formules Λ_4 limitées en (d). Les limiteurs utilisés sont le minmod "classique" (2.29) en (a), celui de type minmod (2.30) en (b) et celui dépendant de la CFL (2.31) en (c). $\Delta t = 0.4\,\Delta x = 4\,10^{-3}$.

ne se croisent (cet aspect sera détaillé dans le chapitre 3). En revanche, l'équation (2.49) discrétisée en méthode particulaire aboutit à des schémas conservatifs de type différences

finis non standard. Ceux ci sont étudiés en détails dans les travaux de thèse de L.Weynans [93]. Considérons par exemple des formules Λ_2 pour remailler les particules et un nombre CFL tel que $0 \leq \lambda_j \leq 1/2, \ \ \forall j$. Puisque d'après sa définition (fig.2.1) $y_j = (x_j + \Delta t\, a_j - x_j)/\Delta x = \lambda_j$ l'utilisation des formules Λ_2 (2.3) donne le schéma suivant au point de grille j :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \left(\frac{y_{j-1}^2}{2} + \frac{y_{j-1}}{2}\right) u_{j-1} + \left(1 - y_j^2\right) u_j + \left(\frac{y_{j+1}^2}{2} - \frac{y_{j+1}}{2}\right) u_{j+1} \\ &= u_j - \frac{\Delta t}{2\,\Delta x}(a_{j+1}u_{j+1} - a_{j-1}u_{j-1}) + \frac{\Delta t^2}{2\,\Delta x^2}\left(a_{j-1}^2 u_{j-1} - 2a_j^2 u_j + a_{j+1}^2 u_{j+1}\right), \end{aligned} \tag{2.50}$$

ou les termes sont à considérer au temps $t_n = n\,\Delta t$ lorsque l'indice en temps est omis.

Il est montré dans [93] que le schéma (2.50) est d'ordre deux en temps et en espace, lorsque les particules sont advectées par le champ de vitesse

$$a_j^n = a\left(u_j^n\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\ \mathrm{div}\ a_j\right)\right). \tag{2.51}$$

La divergence peut être évaluée par une formule de différences finies, centré et d'ordre deux. La vitesse est alors donnée par l'expression suivante :

$$a_j^n = a\left(u_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} u_j^n\left(a_{j+1} - a_{j-1}\right)\right). \tag{2.52}$$

Construction de formules de remaillage TVD d'ordre un

Le principe de limitation de flux nécessite de disposer d'une formule de remaillage TVD. Une idée naturelle est d'utiliser une des formules d'ordre un disponibles, Λ_1 ou M_3. Les formules Λ_1 sont utilisées dans les travaux [25]. Il s'avère cependant que ce choix est inadapté lorsque le champ de vitesse change de signe, puisque dans ce cas les formules Λ_1 ne sont pas consistantes (chapitre 3). Les formules M_3 ne sont pas TVD comme l'indique la figure 2.10 qui met en évidence la présence d'oscillations lorsque la solution, initialisée par un créneau, est soumise au champ de vitesse ($a(u) = u/2$) (équation de Burgers). Elles ne sont donc plus utilisables pour limiter les formules Λ_2 comme c'était le cas en présence d'un champ de vitesse constant.

Remarquons qu'un terme de diffusion numérique apparaît lorsqu'on compare les schémas obtenus en remaillant les particules par des formules Λ_2 (2.50) et M_3 (2.53).

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \ & u_j - \tfrac{\Delta t}{2\,\Delta x}(a_{j+1}u_{j+1} - a_{j-1}u_{j-1}) \\ & + \tfrac{\Delta t^2}{2\,\Delta x^2}\left(a_{j-1}^2 u_{j-1} - 2a_j^2 u_j + a_{j+1}^2 u_{j+1}\right) + \tfrac{1}{8}\left(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}\right). \end{aligned} \tag{2.53}$$

Ce terme correspond au produit de $\Delta_x^2/8$ par la discrétisation de l'opérateur de Laplace. La constante 1/8 peut donc s'interpréter comme une viscosité artificielle. L'idée est alors de construire des formules de remaillage TVD en modifiant la valeur de cette viscosité,

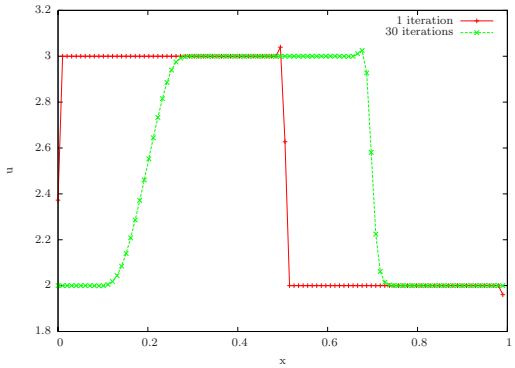


FIG. 2.10 – Résolution de l'équation de burgers par des formules M_3. Le nombre de $CFL = 0.4$, c'est à dire $\Delta t = 0.4\,\Delta x/1.5$ et $\Delta x = 10^{-2}$. La simulation rouge correspond à une seule itération ($T = \Delta t$) et la verte à 30.

que l'on notera σ. Ces nouvelles formules de remaillage sont notées $\bar{M}_3$, et sont données en (2.54). On montre dans le prochain paragraphe que le choix $\sigma = 1/6$ permet de s'assurer que les formules $\bar{M}_3$ soient TVD quand le champ de vitesse $a(u) = u/2$, c'est à dire lors de la résolution de l'équation de Burgers. Trois inégalités permettent de déterminer la valeur de σ dans le cas général d'un champ de vitesse quelconque (2.63).

$$\text{si } y \leq 0.5 \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(y) & = y\,(y-1)/2 + \sigma \\ \beta(y) & = (1-y)\,(1+y) - 2\sigma \\ \gamma(y) & = y\,(y+1)/2 + \sigma \end{array} \right. \quad \text{si } y > 0.5 \left\{ \begin{array}{ll} \alpha^{'}(y) & = \alpha(y-1) \\ \beta^{'}(y) & = \beta(y-1) \\ \gamma^{'}(y) & = \gamma(y-1) \end{array} \right. \tag{2.54}$$

La figure 2.11 correspond à la même simulation que celle de la figure 2.10, mais les particules sont remaillées par les formules $\bar{M}_3$ (avec $\sigma = 1/6$). Aucune oscillation n'est créée au niveau du choc.

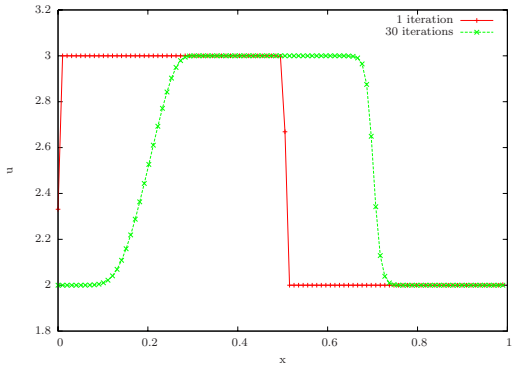


FIG. 2.11 – Résolution de l'équation de burgers par des formules $\bar{M}_3$. Les paramètres sont les mêmes que dans la figure 2.10

Calcul du limiteur pour les formules de remaillage Λ_2 limitées

Nous abordons maintenant le calcul des limiteurs introduits pour limiter les formules de remaillage Λ_2 (2.15). La présence de fort gradients lorsque le champ de vitesse est non linéaire contraint souvent le pas de temps à respecter des conditions de CFL classiques. On suppose dans la suite que le nombre de $CFL < 1/2$.

Considérons tout d'abord le cas d'un champ de vitesse positif. Ainsi $0 \leq y_k = \nu\, a_k \leq 1/2$ pour tout k, avec $\nu = \Delta t/\Delta x$. Le schéma obtenu en remaillant les particules par les formules Λ_2 limitées (2.15) est donné en (2.14). En injectant l'expression des poids de remaillage, on obtient :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \quad & u_j + \tfrac{1}{2}\,(y_{j+1}-1)\,y_{j+1}\,u_{j+1} - \tfrac{1}{2}\,(y_j+1)\,y_j\,u_j \\ & -\tfrac{1}{2}\,(y_j-1)\,y_j\,u_j + \tfrac{1}{2}\,(y_{j-1}+1)\,y_{j-1}\,u_{j-1} \\ & +\sigma\,(u_{j+1}-u_j)\left(1-\phi_{j+1/2}\right) - \sigma\,(u_j-u_{j-1})\left(1-\phi_{j-1/2}\right). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Introduisons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} g(u) = g(u, a(u)) = \nu\, a\, u\,(\nu\, a + 1) \\ h(u) = h(u, a(u)) = \nu\, a\, u\,(\nu\, a - 1) \end{aligned} \tag{2.56}$$

ainsi que les notations $r_{j+1/2} = (u_j - u_{j-1})/(u_{j+1} - u_j)$, $\Delta f_{j+1/2} = f_{j+1} - f_j$ et $\Delta f_{j-1/2} = f_j - f_{j-1}$, avec $f = g, h$ ou u. Le schéma (2.55) peut se mettre sous la forme

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n) - D_{j-1/2}(u_j^n - u_{j-1}^n), \tag{2.57}$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{j+1/2} = \sigma + \frac{1}{2}\frac{\Delta h_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}} \\ D_{j-1/2} = \sigma + \frac{1}{2}\frac{\Delta g_{j-1/2}}{\Delta u_{j-1/2}} + \sigma\left(\frac{\phi_{j+1/2}}{r_{j+1/2}} - \phi_{j-1/2}\right). \end{array} \right. \tag{2.58}$$

Effectuons un développement de Taylor de h,

$$\begin{aligned} h_{j+1} = \quad & h[u(x_j + \Delta x)] = h(u_j) + h^{'}(u_j)\,(u_{j+1} - u_j) + O\left((u_{j+1} - u_j)^2\right) \\ = \quad & h_j + h^{'}(u_j)\,(u_{j+1} - u_j) + O\left(\Delta x\, u^{'}(x_j) + O(\Delta x^2)\right)^2. \end{aligned} \tag{2.59}$$

On peut donc approcher les coefficients $C_{j+1/2}$ et $D_{j-1/2}$ ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{j+1/2} = \sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial a} a^{'}(u_j)\right) + O\,(\Delta x) \\ D_{j-1/2} = \sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial a} a^{'}(u_j)\right) + \sigma\left(\frac{\phi_{j+1/2}}{r_{j+1/2}} - \phi_{j-1/2}\right) + O\,(\Delta x). \end{array} \right. \tag{2.60}$$

D'aprés le théorême d'Harten, le schéma (2.55) sera TVD si, pour tout j

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{j-1/2} \geq 0 \\ 0 \leq D_{j-1/2} \leq 1 - C_{j-1/2}. \end{array} \right. \tag{2.61}$$

On remarque qu'en particulier, le schéma (2.55) est réduit à celui obtenu en remaillant les particules par des formules $\bar{M}_3$ si les limiteurs sont nuls. Pour Δx suffisament

petit, les formules de remaillage $\bar{M}_3$ seront TVD si le coefficient de viscosité artificielle σ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial a} a^{'}(u)\right) \geq 0 \\ \sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial a} a^{'}(u)\right) \geq 0 \\ 2\,\sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial a} a^{'}(u)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial a} a^{'}(u)\right) \leq 1. \end{array}\right. \tag{2.62}$$

En dérivant les fonctions g et h, on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma + \frac{\nu\,a}{2}\,(\nu\,a - 1) + a^{'}(u)\,\frac{\nu\,u}{2}\,(2\,\nu\,a - 1) \geq 0 \\ \sigma + \frac{\nu\,a}{2}\,(\nu\,a + 1) + a^{'}(u)\,\frac{\nu\,u}{2}\,(2\,\nu\,a + 1) \geq 0 \\ 2\,\sigma + \nu^2\,a^2 + 2\,a^{'}(u)\,\nu^2\,a\,u \leq 1. \end{array}\right. \tag{2.63}$$

Déterminons le coefficient σ tel que les formules de remaillage $\bar{M}_3$ soient TVD dans le cas particulier de la résolution de l'équation de Burgers, c'est à dire lorsque $a(u) = u/2$. Les inégalités (2.63) deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma \geq \frac{\nu\,u}{2} - \frac{3}{8}\,\nu^2\,u^2 \\ \sigma \geq -\frac{\nu\,u}{2} - \frac{3}{8}\,\nu^2\,u^2 \\ \sigma \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\,\nu^2\,u^2. \end{array}\right. \tag{2.64}$$

Rappelons que le nombre CFL est inférieur à 1/2 et que le champ de vitesse est positif. Ainsi $0 \leq y_k = \nu\,a_k = \nu\,u_k/2 \leq 1/2$ pour tout k, avec $\nu = \Delta t/\Delta x$. Soit c la valeur de la CFL, $c = \nu$ max $u/2$. Alors les inégalités (2.64) se simplifient ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma \geq 1/6, \text{ si } c \geq 1/3 \\ \sigma \geq 0 \\ \sigma \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,c^2. \end{array}\right. \tag{2.65}$$

Lorsque $c = 1/2$, la dernière inégalité devient $\sigma \leq 1/8$. Cette inégalité impose donc une restriction sur la CFL pour que les formules de remaillage $\bar{M}_3$ soient TVD. En choisissant $\sigma = 1/6$, les formules $\bar{M}_3$ sont TVD si le nombre CFL est tel que $c \leq \sqrt{2}/3 \simeq 0.47$.

De même, on vérifie que si le champ de vitesse est négatif et que le nombre de $CFL \leq 1/2$, les formules $\bar{M}_3$ sont TVD si σ vérifie les relations (2.64), avec $-1 \leq 2\,c \leq \nu\,u \leq 0$. On peut alors choisir $\sigma = 1/6$, et les formules $\bar{M}_3$ sont TVD si $c \geq -\sqrt{2}/3$.

Supposons que σ vérifie les inégalités (2.63) de sorte que les formules de remaillages $\bar{M}_3$ soient TVD et reprenons le calcul du limiteur. Puisque $C_{j-1/2}$ est positif (d'après (2.63)), le schéma (2.55) sera TVD si

$$0 \leq D_{j-1/2} \leq 1 - C_{j-1/2}, \tag{2.66}$$

qui s'écrit encore

$$0 \leq 1 + \frac{g^{'}(u)}{2\,\sigma} - \phi_{j-1/2} + \phi_{j+1/2}/r_{j+1/2} \leq \frac{1}{\sigma} - 1 - \frac{h^{'}(u)}{2\,\sigma}. \tag{2.67}$$

C'est inégalités sont satisfaites si les limiteurs vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} -1-\frac{g^{'}(u)}{2\,\sigma}\leq-\phi_{j-1/2}\leq 0 \\ 0\leq\phi_{j+1/2}/r_{j+1/2}\leq\frac{1}{\sigma}-1-\frac{h^{'}(u)}{2\,\sigma}-1-\frac{g^{'}(u)}{2\,\sigma}. \end{array}\right. \tag{2.68}$$

Ce qui donne après simplifications,

$$\left\{\begin{array}{l} 0\leq\phi_{j-1/2}\leq 1+\frac{\nu}{2\,\sigma}\left[a\,(1+\nu\,a)+a^{'}(u)\,(1+2\,\nu\,a)\,u\right] \\ 0\leq\phi_{j+1/2}\leq\frac{r_{j+1/2}}{\sigma}\left(1-2\,\sigma-\nu^2\,a^2-2\,a^{'}(u)\,\nu^2\,a\,u\right). \end{array}\right. \tag{2.69}$$

On peut déduire de ces inégalités un limiteur valable dans le cas d'un champ de vitesse non linéaire quelconque :

$$\begin{array}{rl} \phi(r)= & \max\left\{0,\min\left\{1,1+\frac{\nu}{2\,\sigma}\left[a\,(1+\nu\,a)+a^{'}(u)\,(1+2\,\nu\,a)\,u\right],\right.\right. \\ & \left.\left.\frac{r}{\sigma}\left(1-2\,\sigma-\nu^2\,a^2-2\,a^{'}(u)\,\nu^2\,a\,u\right)\right\}\right\}. \end{array} \tag{2.70}$$

Dans le cas particulier où $a(u)=u/2$ (équation de Burgers), $\sigma=1/6$ et les inégalités (2.69) deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} 0\leq\phi_{j-1/2}\leq 1+\frac{9}{4}\,\nu^2\,u^2+3\,\nu\,u \\ 0\leq\phi_{j+1/2}\leq\left(4-\frac{9}{2}\,\nu^2\,u^2\right)r_{j+1/2}. \end{array}\right. \tag{2.71}$$

Ces inégalités peuvent se simplifier en remarquant que $0\leq\nu\,u\leq 2\,c\leq 1$ avec $c=\nu\max u/2$. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 0\leq\phi_{j-1/2}\leq 1\leq 1+\frac{9}{4}\,\nu^2\,u^2+3\,\nu\,u \\ 0\leq\phi_{j+1/2}\leq\left(4-18\,c^2\right)r_{j+1/2}\leq\left(4-\frac{9}{2}\,\nu^2\,u^2\right)r_{j+1/2}. \end{array}\right. \tag{2.72}$$

Plusieurs limiteurs peuvent ensuite être construits afin de satisfaire (2.72) donc (2.61). On donne trois manière de faire.

La première consiste à affecter au limiteur la valeur maximum satisfaisant les inégalités (2.72). Son expression est donnée en (2.73). Nous avons vu que cette manière de construire le limiteur cré des "effets d'escalier" dans le cas de vitesses constantes. Nous verrons que dans le cas non linéaire, ce limiteur cré des chocs non entropiques.

$$\phi_{j+1/2}=\max\left\{0,\min\left[1+9\,y_j^2+6\,y_j,\left(4-18\,y_j^2\right)r_{j+1/2}\right]\right\} \tag{2.73}$$

La deuxième façon de construire le limiteur, donnée en (2.74), consiste à imposer $\phi=1$ (qui correspond au schéma d'ordre deux) tant que les inégalités (2.71) sont satisfaites.

$$\phi_{j+1/2}=\max\left\{0,\min\left[\mathbf{1},\,1+9\,y_j^2+6\,y_j,\left(4-18\,y_j^2\right)r_{j+1/2}\right]\right\} \tag{2.74}$$

Enfin puisque le nombre CFL est inférieur à 1/2 et que le champ de vitesse est positif, $0\leq y_k=2\,\nu\,u_k\leq 1/2,\ \forall k$, le calcul du limiteur peut être indépendant de y_k pour tout k. Le limiteur (2.74) s'écrit alors :

$$\phi_{j+1/2}=\max\left\{0,\min\left[1,\left(4-18\,c^2\right)r_{j+1/2}\right]\right\}, \tag{2.75}$$

c étant le nombre CFL.

Remarque 5. *Le limiteur (2.75) s'annule lorsque le nombre de $CFL \geq \sqrt{2}/3$. Rappelons que dans ce cas les formules de remaillages $\bar{M}_3$ ne sont pas TVD.*

Etudions maintenant le cas où le champ de vitesse non linéaire est négatif. Supposons que le nombre CFL est $-1/2 \leq c \leq 0$. Si les particules situées aux points x_{j-1}, x_j et x_{j+1} au temps $t^n = n\,\Delta t$ sont remaillées par les formules Λ_2 limitées (2.15), le schéma au point x_j et au temps t^{n+1} s'écrit :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \gamma^{lim,'}(y_{j-1})\,u_{j-1} + \beta^{lim,'}(y_j)\,u_j + \alpha^{lim,'}(y_{j+1})\,u_{j+1} \\ &= \gamma^{lim}(y_{j-1}-1)\,u_{j-1} + \beta^{lim}(y_j-1)\,u_j + \alpha^{lim}(y_{j+1}-1)\,u_{j+1}. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Puisque $1/2 \leq y_k = \nu\,a_k + 1 \leq 1$ pour tout k, le calcul du limiteur peut se faire en considérant le même schéma (2.55) que dans le cas d'un champ de vitesse positif, mais avec $-1/2 \leq y_k = \nu\,a_k \leq 0$. Les formules de remaillage $\bar{M}_3$ sont TVD si σ vérifie les inégalités (2.63). Dans le cas ou $a(u) = u/2$, $-1 \leq 2\,c \leq \nu\,u \leq 0$ et $\sigma = 1/6$ convient tant que $c \geq -\sqrt{2}/3$.

Les coefficients $C_{j+1/2}$ et $D_{j-1/2}$ peuvent être calculés afin de faire apparaître le rapport de pente $\bar{r}_{j-1/2} = \Delta u_{j+1/2}/\Delta u_{j-1/2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{j+1/2} = \sigma + \frac{1}{2}\frac{\Delta h_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}} + \sigma\left(\frac{\phi_{j-1/2}}{\bar{r}_{j-1/2}} - \phi_{j+1/2}\right) \\ D_{j-1/2} = \sigma + \frac{1}{2}\frac{\Delta g_{j-1/2}}{\Delta u_{j-1/2}}. \end{array} \right. \tag{2.77}$$

Les limiteurs sont construits en imposant

$$0 \leq C_{j+1/2} \leq 1 - D_{j+1/2}, \tag{2.78}$$

et on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \phi_{j+1/2} \leq \frac{1}{2\,\sigma}\left(2\,\sigma + \nu^2\,a^2 - \nu\,a + a^{'}(u)\,\nu\,u\,(2\,\nu\,a - 1)\right) \\ 0 \leq \phi_{j-1/2} \leq \frac{\bar{r}_{j-1/2}}{\sigma}\left(1 - \nu^2\,a^2 - 2\,a^{'}(u)\,\nu^2\,u\,a - 2\,\sigma\right). \end{array} \right. \tag{2.79}$$

Dans le cas particulier d'un champ de vitesse $a(u) = u/2$, $\sigma = 1/6$. Sous la restriction de CFL $-1 \leq 2\,c \leq \nu\,u \leq 0$, les inégalités (2.79) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \phi_{j+1/2} \leq 1 \leq 1 - 3\,\nu\,u + \frac{9}{4}\,\nu^2\,u^2 \\ 0 \leq \phi_{j-1/2} \leq \left(4 - 18\,c^2\right)\bar{r}_{j-1/2} \leq \left(4 - \frac{9}{2}\,\nu^2\,u^2\right)\bar{r}_{j-1/2}. \end{array} \right. \tag{2.80}$$

Comme dans le cas d'un champ de vitesse positif, on en déduit les limiteurs suivants

$$\phi_{j-1/2} = \max\left\{0, \min\left[1 + 9\,(y_j-1)^2 - 6\,(y_j-1), \left(4 - 18\,(y_j-1)^2\right)\bar{r}_{j-1/2}\right]\right\} \tag{2.81}$$

$$\phi_{j-1/2} = \max\left\{0, \min\left[\mathbf{1},\ 1 + 9\,(y_j-1)^2 - 6\,(y_j-1), \left(4 - 18\,(y_j-1)^2\right)\bar{r}_{j-1/2}\right]\right\} \tag{2.82}$$

$$\phi_{j-1/2} = \max\left\{0, \min\left[1, \left(4 - 18\,c^2\right)\bar{r}_{j-1/2}\right]\right\}. \tag{2.83}$$

Notons que seul le rapport de pente r change entre le calcul des limiteurs (2.75) et (2.83) .

Calcul du limiteur pour les formules de remaillage Λ_4 limitées

De manière analogue à ce qui a été fait avec la limitation Λ_2, les formules Λ_4 peuvent être limitées par des formules de remaillage M_5, de même support que Λ_4, d'ordre un, et non oscillantes. Les limiteurs utilisés dans les formules de remaillage Λ_4 (2.17) sont calculés par deux méthodes différentes consistant à satisfaire les critères de monotonie ou de décroissance de la variation totale. Pour la première méthode, la démarche est la même que celle faite dans la section 2.2.1. La seule différence consiste à utiliser les flux exacts et non ceux optenus avec l'hypothèse que $y_k = y$ est constant pour tout k.

La méthode imposant la décroissance de la variation totale s'inspire des travaux de V.Daru et C.Tenaud [30]. Cette manière de calculer le limiteur ne sera utilisée que lorsque les pas de temps sont petits (notamment en écoulement compressible). Lorsque le nombre CFL est grand, cette méthode de calcul du limiteur peut difficilement être utilisé dans les travaux présentés dans le prochain chapitre.

L'idée est d'utiliser les formules de remaillages Λ_2 limitées, mais de calculer le limiteur en utilisant les flux des formules Λ_4. En effet, rappelons que l'utilisation des formules Λ_2 lorsque $0 < \lambda_j < 1/2$ mène au schéma de grille suivant :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} =& u_j^n - \left(F_{j+1/2}^{\bar{M}3} - F_{j-1/2}^{\bar{M}3}\right) \\ & - \phi_{j+1/2}\left(F_{j+1/2}^{2} - F_{j+1/2}^{\bar{M}3}\right) \\ & + \phi_{j-1/2}\left(F_{j-1/2}^{2} - F_{j-1/2}^{\bar{M}3}\right) \\ & . \end{aligned} \tag{2.84}$$

Lorsque les limiteurs sont nuls, on obtient le schéma issu d'un remaillage $\bar{M}_3$. Un schéma d'ordre quatre sera obtenu non pas pour $\phi = 1$ mais pour $\phi = \left(F^4 - F^{\bar{M}3}\right) / \left(F^2 - F^{\bar{M}3}\right)$. Les flux F^2, F^4 et $F^{\bar{M}3}$ associés respectivement aux remaillages Λ_2, Λ_4 et $\bar{M}_3$ sont donnés en (2.13). Les limiteurs construits pour limiter les formules Λ_2 suivant le signe du champ de vitesse sont généralisés aux formules Λ_4 par les limiteurs (2.85), (2.86) lorsque le champ de vitesse est positif et (2.87), (2.88) lorsqu'il est négatif.

$$\begin{aligned} \phi_{j+1/2} = \quad & \max\Big\{0, \min\Big[\left(F_{j+1/2}^{4} - F_{j+1/2}^{\bar{M}3}\right) / \left(F_{j+1/2}^{2} - F_{j+1/2}^{\bar{M}3}\right), \\ & 1 + 9\,y_j^2 + 6\,y_j, \left(4 - 18\,y_j^2\right) r_{j+1/2}\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{2.85}$$

Enfin puisque le nombre CFL est inférieure à 1/2 et que le champ de vitesse est positif, $0 \leq y_k = 2\,\nu\,u_k \leq 1/2,\ \forall k$, le calcul du limiteur peut être indépendant de y_k pour tout k. Le limiteur (2.74) s'écrit alors :

$$\phi_{j+1/2} = \max\Big\{0, \min\Big[\left(F_{j+1/2}^{4} - F_{j+1/2}^{\bar{M}3}\right) / \left(F_{j+1/2}^{2} - F_{j+1/2}^{\bar{M}3}\right), \left(4 - 18\,c^2\right) r_{j+1/2}\Big]\Big\}, \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}\phi_{j-1/2} = \quad & \max\Big\{0, \min\Big[\Big(F^4_{j-1/2} - F^{\bar{M}3}_{j-1/2}\Big) / \Big(F^2_{j-1/2} - F^{\bar{M}3}_{j-1/2}\Big), \\ & 1 + 9\,(y_j - 1)^2 - 6\,(y_j - 1), \big(4 - 18\,(y_j - 1)^2\big)\,\bar{r}_{j-1/2}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\phi_{j-1/2} = \max\Big\{0, \min\Big[\Big(F^4_{j-1/2} - F^{\bar{M}3}_{j-1/2}\Big) / \Big(F^2_{j-1/2} - F^{\bar{M}3}_{j-1/2}\Big), \big(4 - 18\,c^2\big)\,\bar{r}_{j-1/2}\Big]\Big\}. \tag{2.88}$$

Illustrations numériques

Les différents limiteurs introduits dans les formules de remaillage Λ_2 et Λ_4 sont testés sur la résolution de l'équation de Burgers. La solution est initialisée par la fonction discontinue $2\,\chi_{[0,1/2]} + 3\,\chi_{[1/2,1]}$, ou χ est la fonction caractéristique. Les conditions aux limites étant périodiques, ce cas test permet de représenter un choc et une détente.

La figure 2.12 met en évidence les effets dus à l'utilisation d'un limiteur dans les formules Λ_2. Le limiteur "antidiffusif" (2.73) crée un choc non entropique mais corrige les oscillations de manière satisfaisante. Les limiteurs (2.74) et (2.75) se comporte raisonnablement bien pour toute valeur de CFL comprise entre 0 et 1/2. Notons cependant que la diffusion numérique est plus importante lorsque le nombre CFL est faible, ce qui dégrade la précision de la solution. C'est un comportement indépendant du calcul du limiteur. En revanche, lorsque le nombre de $CFL = 0.4$, un effet "antidiffusif" est visible aux extrémités de la détente, qui est absent lorsque les particules sont remaillées par des formules Λ_2 non limitées. Cet effet fait penser à la création de chocs non entropiques. Remarquons enfin que les résultats obtenus en limitant les formules Λ_2 avec les limiteurs (2.74) et (2.75) sont semblables. On préconise donc d'utiliser le limiteur (2.75), dont le calcul est plus rapide puisqu'il nécessite uniquement de connaître le rapport de pente et le nombre de CFL.

Les limiteurs des formules Λ_4 sont comparés dans la figure 2.13. Lorsque le nombre de $CFL = 0.1$, la précision de la solution est nettement améliorée par rapport à l'utilisation d'un remaillage Λ_2 limité. Lorsque le nombre de $CFL = 0.4$, des chocs non entropiques se forment au niveau de la détente. Remarquons que les méthodes de calcul des limiteurs par le critère de monotonie (2.46) et TVD (2.85) donnent des résultats similaires. Notons enfin que ces limiteurs sont plus complexes à mettre en oeuvre que dans le cas de la limitation des formules Λ_2. En effet, il est nécessaire de calculer les flux d'ordre un, deux et quatre, correspondant à un remaillage $\bar{M}_3$, Λ_2 et Λ_4, alors que ce calcul est évité lors d'un remaillage sans limiteur.

Condition d'entropie

Nous venons de voir que l'introduction de limiteurs dans les formules de remaillage peut créer des chocs non physiques. A notre connaissance, aucune étude n'a été menée sur les propriétés entropiques des schémas issus des méthodes particulaires. Des résultats numériques sont présentés ici afin d'ouvrir de nouvelles pistes de recherche. On considère

encore la résolution de l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, \tag{2.89}$$

avec une condition initiale discontinue $u_0 = -\chi_{[0,1/2]} + \chi_{[1/2,1]}$, χ étant la fonction caractéristique. La majorité des formules de remaillage (Λ_2, Λ_4, $M_4^{'}$, ...) semble ne pas satisfaire la condition d'entropie au niveau discret puisque un choc non physique apparait au point sonique (figure 2.14). Seule l'utilisation des formules $\bar{M}_3$ et $M_5^{'}$ permet de représenter correctement la détente. La solution numérique converge par contre vers la solution entropique lorsque la taille de grille diminue (fig.2.16), propriété qui a été démontré par L. Weynans (résultat non publié). Remarquons enfin qu'un remaillage des particules par des formules limitées semble être entropique puisque le choc au niveau du point sonique disparaît (figure 2.15).

2.2.3 Champ de vitesse linéaire : $a(u,x) = a(x)$

Lorsque le champ de vitesse est linéaire et que la fonction u est suffisament régulière, appliquer la méthode particulaire revient à résoudre l'équation sous forme non conservative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = -u\frac{\partial a}{\partial x}. \tag{2.90}$$

Lorsque le gradient $\partial_x a$ est non nul, un terme source apparaît, privant l'équation d'être TVD ou de satisfaire les conditions de monotonie. Notons qu'un champ de vitesse 2D peut être à divergence nulle bien que son gradient soit non nul.

L'idée proposée pour limiter les formules de remaillage est de se concentrer uniquement sur l'équation sans terme source, celui-ci étant supposé ne pas créer d'oscillation. Prenons l'exemple d'un remaillage Λ_1, et supposons $0 < \lambda_k < 1$ pour tout k. Le schéma de grille obtenu au point x_j est le suivant :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= (1-y_j)u_j^n + y_{j-1}u_{j-1}^n \\ &= u_j^n - y_j u_j^n + y_j u_{j-1}^n + u_{j-1}^n\,(y_{j-1} - y_j) \\ &= u_j^n - y_{j-1}u_j^n + y_{j-1}u_{j-1}^n + u_j^n\,(y_{j-1} - y_j)\,. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Puisque $y_j = \Delta t\, a_j/\Delta x = \nu\, a_j$, le schéma s'écrit :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \nu\, a_j\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) + \nu\, u_{j-1}^n\,(a_{j-1} - a_j) \\ &= u_j^n - \nu\, a_{j-1}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) + \nu\, u_j^n\,(a_{j-1} - a_j)\,, \end{aligned} \tag{2.92}$$

ce qui correspond bien à la discrétisation d'ordre1 de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = -u(x)\frac{\partial a}{\partial x}. \tag{2.93}$$

Cet exemple met en évidence que le gradient du champ de vitesse présent dans le terme source est discrétisé par les variations de y en espace. Le calcul des limiteurs peut donc

se faire en supposant y constant. Les limiteurs des formules Λ_2 pourront par exemple être calculés par les formules (2.94), (2.95) ou (2.96) lorsque $0 \leq \lambda_j \leq 1/2$ pour tout j et (2.97), (2.98) ou (2.99) lorsque $-1/2 \leq \lambda_j \leq 0$.

$$\phi_{j+1/2} = \max\left(0, \min\left(4\,(y_j + 1/2)^2\,, \left(6 - 8y_j^2\right) r_{j+1/2}\right)\right). \tag{2.94}$$

$$\phi_{j+1/2} = \max\left(0, \min\left(1., 4\,(y_j + 1/2)^2\,, \left(6 - 8y_j^2\right) r_{j+1/2}\right)\right). \tag{2.95}$$

$$\phi_{j+1/2} = \max\left(0, \min\left(1, 4\, r_{j+1/2}\right)\right). \tag{2.96}$$

$$\phi_{j-1/2} = \max\left(0, \min\left(4\,((y_j - 1) - 1/2)^2\,, \left(6 - 8(y_j - 1)^2\right) \bar{r}_{j-1/2}\right)\right). \tag{2.97}$$

$$\phi_{j-1/2} = \max\left(0, \min\left(1, 4\,((y_j - 1) - 1/2)^2\,, \left(6 - 8(y_j - 1)^2\right) \bar{r}_{j-1/2}\right)\right). \tag{2.98}$$

$$\phi_{j-1/2} = \max\left(0, \min\left(1, 4\, \bar{r}_{j-1/2}\right)\right). \tag{2.99}$$

Les limiteurs des formules Λ_4 peuvent être adaptés de la même manière.

Illustrations numériques

Le comportement des différents limiteurs est observé en appliquant la méthode particulaire advection/remaillage sur un champ de vitesse $a(x) = x$ (fig.2.17, 2.18, 2.19). Les particules sont advectées avec un schéma Runge Kutta 2, le nombre CFL étant fixée à 0.4. La solution est initialisée par la fonction suivante

$$u_0(x) = \begin{cases} f\,(-x,\, \beta,\, \delta) & \text{si } x \in [-0.8, -0.6] \\ 1 & \text{si } x \in [-0.4, -0.1] \\ 1 & \text{si } x \in [0.1, 0.4] \\ f\,(x,\, \beta,\, \delta) & \text{si } x \in [0.6, 0.8] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.100}$$

avec

$$\begin{aligned} f\,(x,\, \beta,\, \delta) = \; & \tfrac{1}{6} \exp\left(-\beta\,(x + \delta - 0.6)^2\right) + \exp\left(-\beta\,(x - \delta - 0.6)^2\right) \\ & +4 \exp\left(-\beta\,(x - 0.6)^2\right), \end{aligned} \tag{2.101}$$

$\delta = 5\,10^{-3}$ et $\beta = \log\left(2\,\delta^2/36\right)$.

La solution exacte peut être calculée par la méthode des caractéristiques. Il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + x\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -u(x,t), & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.102}$$

En cherchant u sous la forme $u(x(t), t)$, son évolution sur les courbes caractéristiques d'équation $x^{'}(t) = x(t)$ est décrite en résolvant l'équation

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = -u(x(t), t). \tag{2.103}$$

La solution de (2.102) est alors

$$\begin{aligned} u(x(t),t) &= u_0(x(0))\, e^{-t} \\ &= u_0\left(x(t)e^{-t}\right) e^{-t}. \end{aligned} \tag{2.104}$$

la figure 2.17-(a) met en évidence le caractère diffusif des formules M_3. La figure 2.17-(b) représente la solution provenant d'un remaillage $M_4^{'}$. Remarquons que les fortes variations de la solution provoquent l'apparition d'oscillations numériques. Ces formules sont utilisées pour remailler les particules dans de nombreux problèmes [74, 72, 10, 80, 76], il est donc intéressant de comparer cette solution à celle issue d'un remaillage par des formules limitées (fig. 2.18 et 2.19).

Lorsque les formules Λ_2 sont utilisées sans limiteurs, la solution (fig.2.18-(a)) présente des oscillations d'amplitude plus élevée que celle issus d'un remaillage $M_4^{'}$. Cette observation est une conséquence de la meilleure régularité du noyau d'interpolation $M_4^{'}$, de classe C^1, par rapport au noyau Λ_2 qui n'est pas continu. Rappelons que ces deux noyaux donnent des schémas d'ordre deux, ce qui est cohérent avec la précision des solutions obtenues.

Observons ensuite l'efficacité des quatre limiteurs introduits dans les formules de remaillage Λ_2 sur les solutions (b) à (e) de la figure 2.18. Les oscillations sont supprimées dans les quatres cas. Trois autres remarques ressortent de ces résultats. Tout d'abord, le limiteur minmod "classique" (2.29) est plus diffusif que celui du même type (2.96). Ensuite, les limiteurs (2.96) et (2.95) donnent des résultats très similaires. Cette remarque nous incite à utiliser un limiteur (2.96) plutôt que (2.95), puisque ce dernier est plus complexe à calculer. En effet, il nécessite de connaitre la position (ou la valeur de y) des particules voisines de celle que l'on remaille. Cependant, la solution obtenue en utilisant le limiteur (2.95) peut s'avérer être légèrement plus précise que celle optenue avec le limiteur (2.96) lorsque le nombre CFL est proche de zero. Remarquons enfin que la propriété antidiffusive du limiteur (2.94) constatée dans le cas d'un champ de vitesse constant est encore vérifiée. Les créneaux sont très bien représentés, mais un "effet d'escalier" apparaît dans les parties régulières et non constantes de la solution. Ce comportement a déjà été observé lors de l'utilisation du limiteur antidiffusif "Ultra-Bee" dans les schémas de différences-finies [34].

Analysons maintenant les résultats obtenus en remaillant les particules par des formules de type Λ_4 (fig. 2.19). Les oscillations qui apparaîssent lorsque les formules sont utilisées sans limiteur (fig. 2.19-(a)) sont plus nombreuses que celles observées lors d'un remaillage Λ_2 ou $M_4^{'}$. L'introduction des limiteurs permet de les supprimer convenablement (fig. 2.19-(a) et (b)). Cependant, la solution obtenue est légèrement dégradée au niveau des discontinuités. Les deux limiteurs fournissent des solutions similaires. Par la suite nous utiliserons uniquement le limiteur préservant les contraintes de monotonie (2.46) puisque la méthode TVD d'ordre quatre est difficilement généralisable aux techniques présentées dans les prochains chapitres.

On considère ensuite un second test numérique où l'on choisit un champ de vitesse sinusoidal $a(x) = 2 + sin(2\pi x)$ et des conditions aux bords périodiques. La condition

initiale est un créneau de support $[-0.9, -0.1]$. La solution exacte est calculée dans l'annexe B par la méthode des caractéristiques, elle est périodique de période $p = 1/\sqrt{3}$. Les figures 2.20, 2.21 et 2.22 représentent la solution après une période ($T = p$), les particules étant remaillées par différentes formules. La solution est aussi traçée pour un temps intermédiaires afin de se rendre compte de son évolution.

Les formules M_3 sont fortement diffusives, comme en atteste la figure 2.20-(a). Des oscillations sont présentent en amont des discontinuités lorsque les particules sont remaillées par des formules $M_4^{'}$ (fig. 2.20-(b)). Ces oscillations sont plus nombreuses en remaillant les particules par des formules Λ_2 ou Λ_4 (fig. 2.21-(a), 2.22-(a)). Les limiteurs (2.96) et (2.95) se comporte une fois de plus de manière identique, et suppriment convenablement les oscillations (fig. 2.21-(b), 2.22-(c)). La précision de la solution obtenue par un remaillage Λ_4 limité (fig. 2.22-(b)) est meilleure que celle d'un remaillage Λ_2 limité. Notons enfin que le limiteur antiddifusif (2.94) est peu efficace (fig. 2.21-(d)). Alors que le créneau était bien résolu dans la figure 2.18-(e), ce n'est pas le cas ici puisque la solution subit "un effet d'escalier" lors des temps intermédiaires à une période.

Conclusion

Résumons les résultats obtenus sur l'efficacité des limiteurs en analysant séparément les cas linéaire et non linéaire.

Dans le cas d'un champ de vitesse linéaire, le travail mené dans ce chapitre peut se résumer en deux points. Dans un premier temps, il a été montré comment les formules de remaillage peuvent être modifiées afin d'éviter la création d'oscillations numériques. La méthode proposée consiste à introduire des limiteurs de flux. Plusieurs méthodes de calcul on été développées dans une deuxième partie du travail. Un limiteur intéressant ressort de cette étude, permettant d'obtenir des solutions satisfaisantes par un calcul rapide. Il s'agit du limiteur (2.96)-(2.99), utilisé pour limiter les formules Λ_2. A noter cependant qu'un problème de "rognage" des fonctions régulières peut apparaître, mais celui-ci est innévitable dans la limitation de pente à l'ordre deux [87]. Dans le cas des formules Λ_4, des limiteurs ont été calculés par deux méthodes différentes. Bien que les solutions obtenues soient précises et non oscillantes, le calcul de ce limiteur nécessite encore d'être amélioré. Sa complexité de calcul pourrait être simplifiée en évitant d'utiliser les positions des particules voisines. De plus, le problème de rognage est toujours présent. Le remaillage se faisant sur cinq points il doit être possible de distinguer un extrema regulier d'une discontinuité [87]. Les calculs ont été menés dans ce chapitre, sous la contrainte d'un petit nombre CFL . L'enjeu consiste à généraliser la limitation des formules de remaillage lorsque le nombre CFL est grand, ce qui est fait dans les chapitres suivants.

Dans le cas d'un champ de vitesse non linéaire, la présence éventuelle de chocs contraint les pas de temps à satisfaire des conditions de CFL classiques. Dans ce cas, l'originalité des méthodes particulaires est marquée par l'obtention de schémas de grilles non standard. La difficulté résolue dans ce chapitre était alors de construire des limiteurs

adaptés à ces schémas, et d'en déduire des formules de remaillage limitées. Un limiteur a été construit dans un cadre général ou $a = a(u)$ et le nombre de CFL est inférieur ou égal à 1/2. Ce limiteur nécessite de connaître la dérivé du champ de vitesse $a(u)$ par rapport à u. Différents limiteurs ont ensuite été construits et analysés numériquement dans le cas du champ de vitesse particulier $a(u) = u/2$ et pour un nombre CFL inférieur ou égal à $\sqrt{2}/3$. On retiendra principalement deux limiteurs, celui donné en (2.75)-(2.83) pour limiter les formules de remaillage Λ_2 et (2.86)-(2.88) pour les formules Λ_4.

Le calcul de (2.75)-(2.83) est rapide puisqu'il nécessite uniquement de connaître le rapport de pente r. Son utilisation évite la création d'oscillations et améliore ainsi nettement la solution obtenue en remaillant les particules par des formules Λ_2 non limitées. Remarquons de plus que ce limiteur évite l'apparition d'un choc non entropique au niveau des points soniques.

Le calcul du limiteur des formules Λ_4 (2.86)-(2.88) nécessite d'évaluer des flux. Il est donc mal adapté aux formules de remaillage (qui ne nécessitent aucun calcul de flux) et peut encore être amélioré. L'utilisation de ce limiteur s'est avérée efficace lorsque le nombre CFL est faible. La précision de la solution est meilleure en remaillant les particules par des formules Λ_4 limitées par (2.86)-(2.88) que par des formules Λ_2 limitées. Le choc non entropique aux points soniques est aussi évité. Cependant, un comportement non entropique peut apparaître lorsqu'on augmente le nombre CFL.

En conclusion, ce chapitre expose une méthode permettant de limiter les formules de remaillages utilisées habituellement dans les méthodes particulaires. La façon de procéder que l'on a présenté ici permet d'utiliser les outils développés pour les méthodes de grille afin de résoudre les problèmes d'oscillations numériques. Cet avantage a été exploité en utilisant des outils classiques pour le calcul des limiteurs. Gardons à l'esprit que les limiteurs peuvent être calculés de manière plus sophistiquée si necessaire. Le "rognage" des extrémas du à l'utilisation de limiteurs TVD peut être évité en adaptant par exemple les travaux sur les limiteurs préservant la monotonie (MP) [87, 30].

L'étude menée dans ce chapitre a permi d'éviter la création d'oscillations numériques sur des fonctions présentant de fort gradients. Ces résultats ont été obtenus pour des pas de temps obéissant à des conditions de CFL similaires à celles rencontrées pour les schémas de différences finies. La généralisation de ces résultats à des nombres de CFL élevées doit faire face à un deuxième problème, également source d'oscillations, la perte de consistance des schémas de remaillage lorsque les pas de temps sont grand. L'objectif du chapitre qui suit est de résoudre cette difficulté.

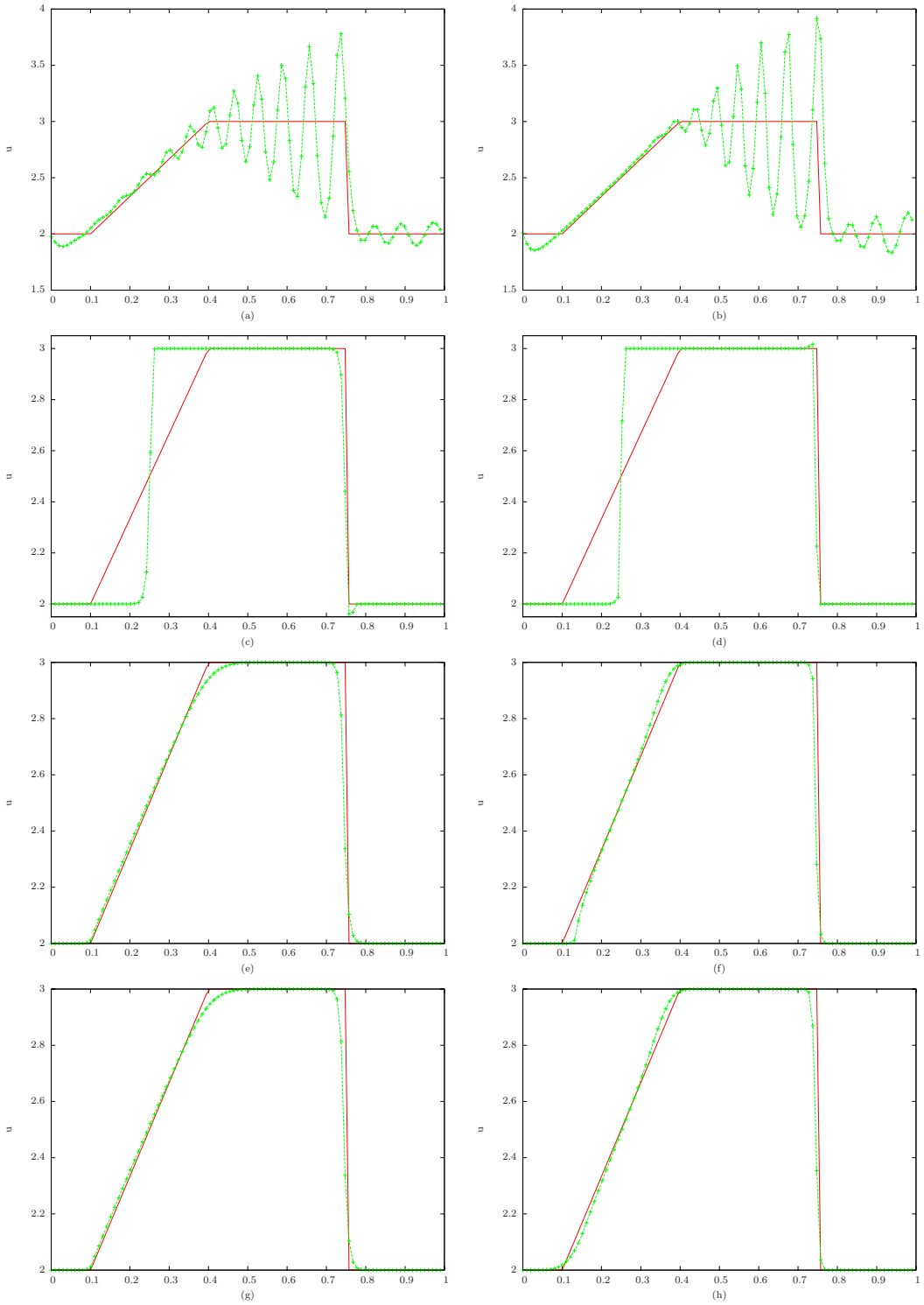


FIG. 2.12 – Solutions de l'équation de Burgers ($a(u) = u/2$) pour $T = 0.3$. Les résultats sont comparés pour deux nombres de CFL differents : 0.1 pour les figures de gauche ($\Delta t = 0.1\,\Delta x/1.5 = 6.7\,10^{-4}$) et 0.4 pour celles de droite ($\Delta t = 0.4\,\Delta x/1.5 = 2.7\,10^{-3}$). Les particules sont advectées par le schéma d'ordre deux (2.52) et remaillées par des formules Λ_2 en (a) et (b) puis limitées par le limiteur antidiffusif (2.73) en (c) et (d), le limiteur (2.74) en (e) et (f), puis celui indépendant de y (2.75) en (g) et (h).

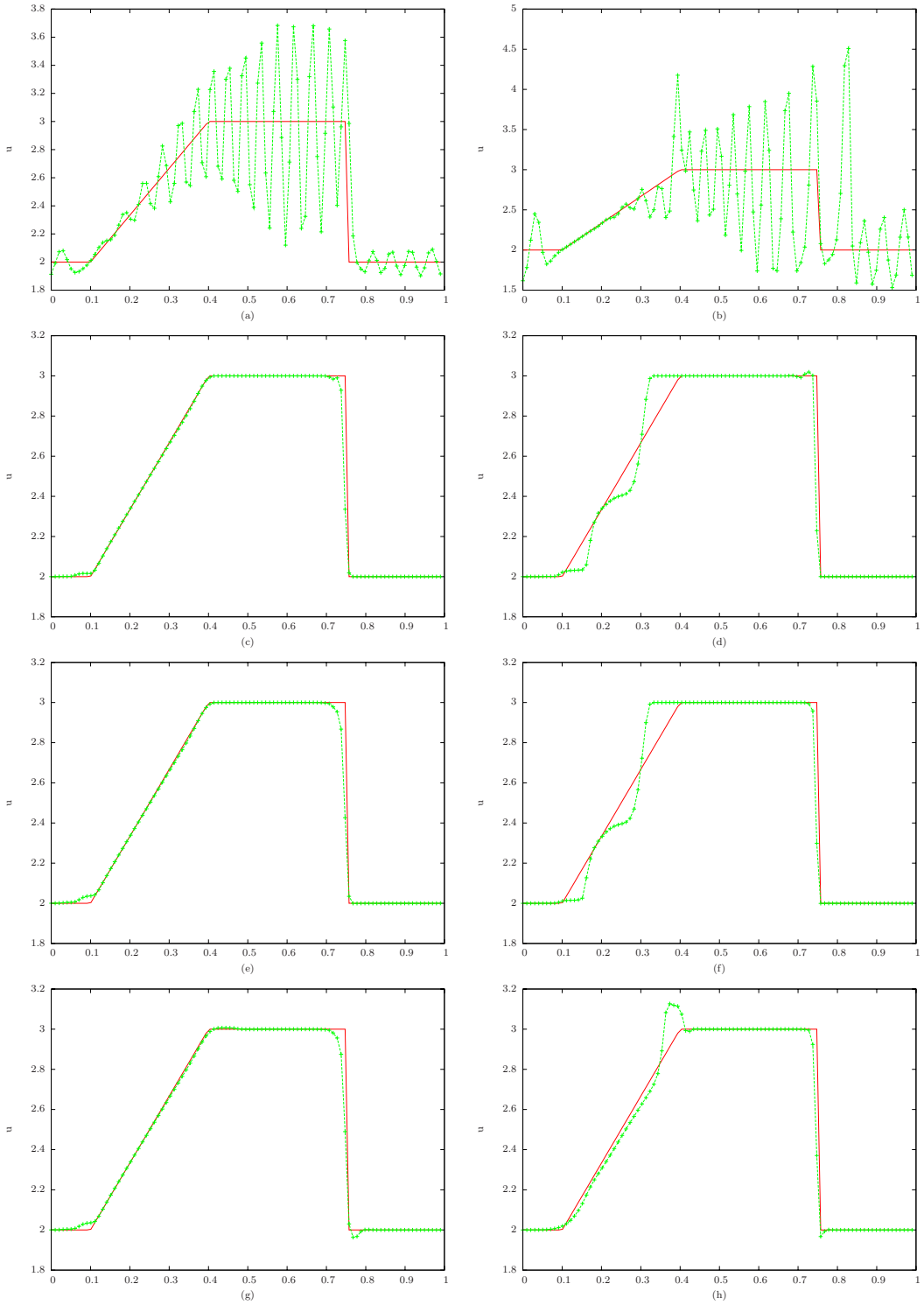


FIG. 2.13 – Solutions de l'équation de Burgers ($a(u) = u/2$) pour $T = 0.3$. Les résultats sont comparés pour deux nombres de CFL differents : 0.1 pour les figures de gauche ($\Delta t = 0.1\,\Delta x/1.5 = 6.7\,10^{-4}$) et 0.4 pour celles de droite ($\Delta t = 0.4\,\Delta x/1.5 = 2.7\,10^{-3}$). Les particules sont advectées par un schéma d'ordre deux (2.52) et remaillées par des formules Λ_4 (a) et (b) puis limitées par le limiteur construit sur le critère de monotonie (2.46) en (c) et (d) et ceux TVD (2.85) en (e) et (f), (2.86) en (g) et (h).

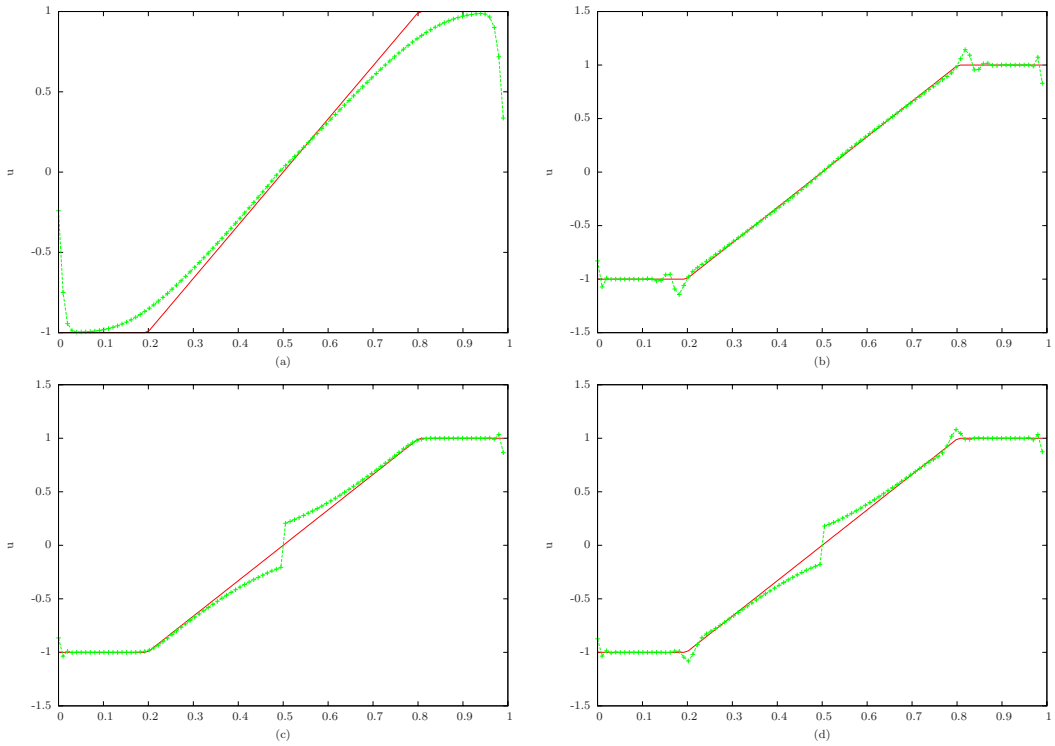


FIG. 2.14 – Résolution de l'équation de Burgers pour une condition initiale $u_0 = -\chi_{[0,1/2]} + \chi_{[1/2,1]}$. Les particules sont advectées par le schéma d'ordre deux (2.52) et remaillées par des formules $\bar{M}_3$ en (a), M_5' en (b), Λ_2 en (c) et Λ_4 en (d). Le nombre de $CFL = 0.1$. $\Delta x = 10^{-2}$, T=0.3.

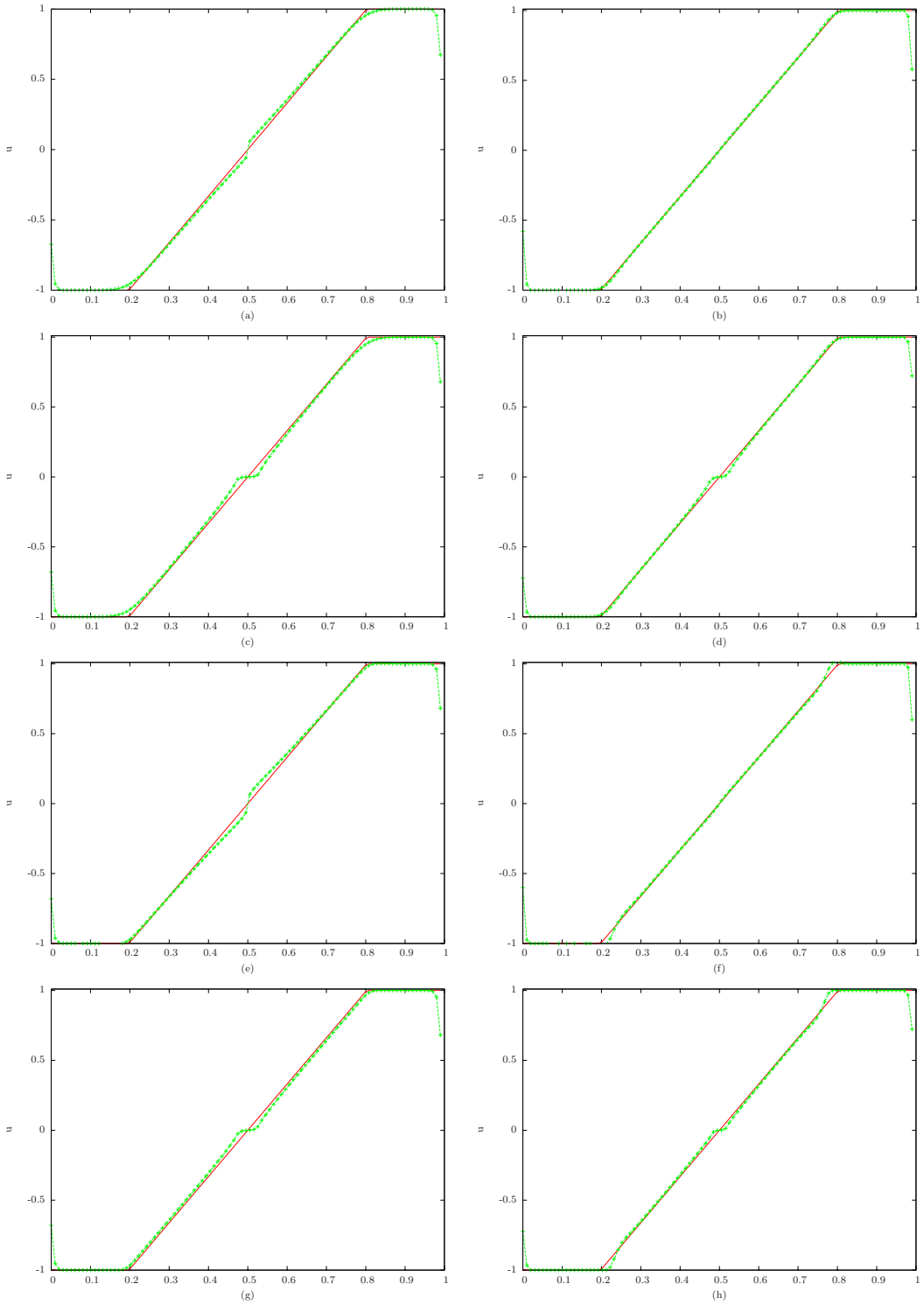


FIG. 2.15 – Résolution de l'équation de Burgers pour une condition initiale $u_0 = -\chi_{[0,1/2]} + \chi_{[1/2,1]}$. Les résultats sont comparés pour deux nombres de CFL differents : 0.1 pour les figures de gauche et 0.4 pour celles de droite. Les particules sont advectées par le schéma d'ordre deux (2.52) et remaillées par des formules Λ_2 limitées (2.75)-(2.83) en (a) et (b), (2.74)-(2.82) en (c) et (d), puis Λ_4 limitées (2.86)-(2.88) en (e) et (f), (2.85)-(2.87) en (g) et (h). T=0.3.

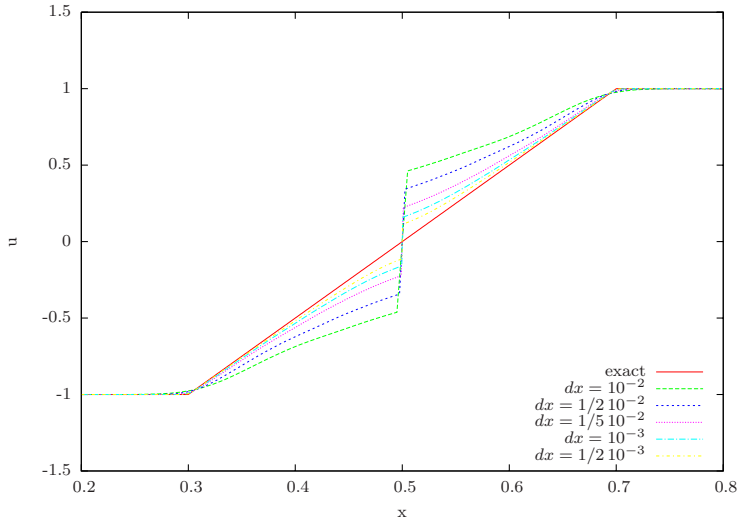


FIG. 2.16 – Convergence vers la solution numérique entropique de l'équation de Burgers. T=0.3. Remaillage des particules par les formules Λ_2. Le nombre de $CFL = 0.1$ ($\Delta t = 0.1\,\Delta x$).

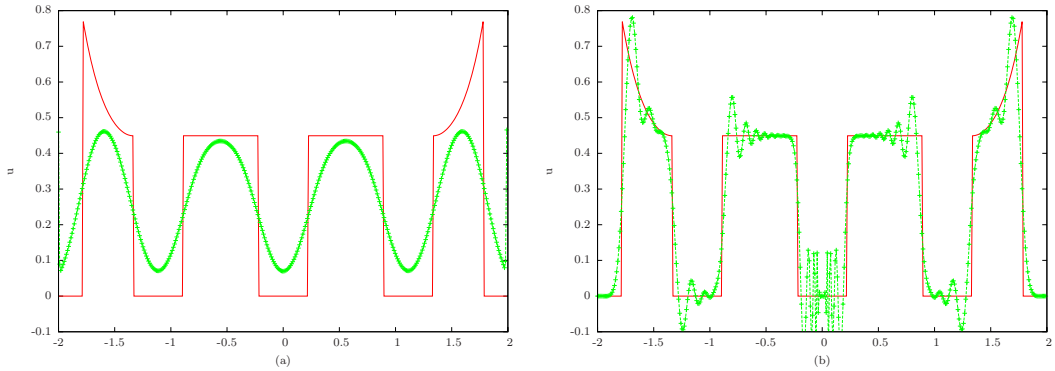


FIG. 2.17 – Initialisation des particules par (2.100), puis advection par un schéma Runge Kutta 2 suivant le champ de vitesse $a(x) = x$. $T = 0.8$, $\Delta x = 10^{-2}$ et le nombre CFL est égale à 0.4 ($\Delta t = 2\,10^{-3}$). Les particules sont remaillées par des formules M_3 en (a) et $M_4^{'}$ en (b). La solution obtenue est comparée à la solution exacte (2.104) représentée en rouge et trait continue.

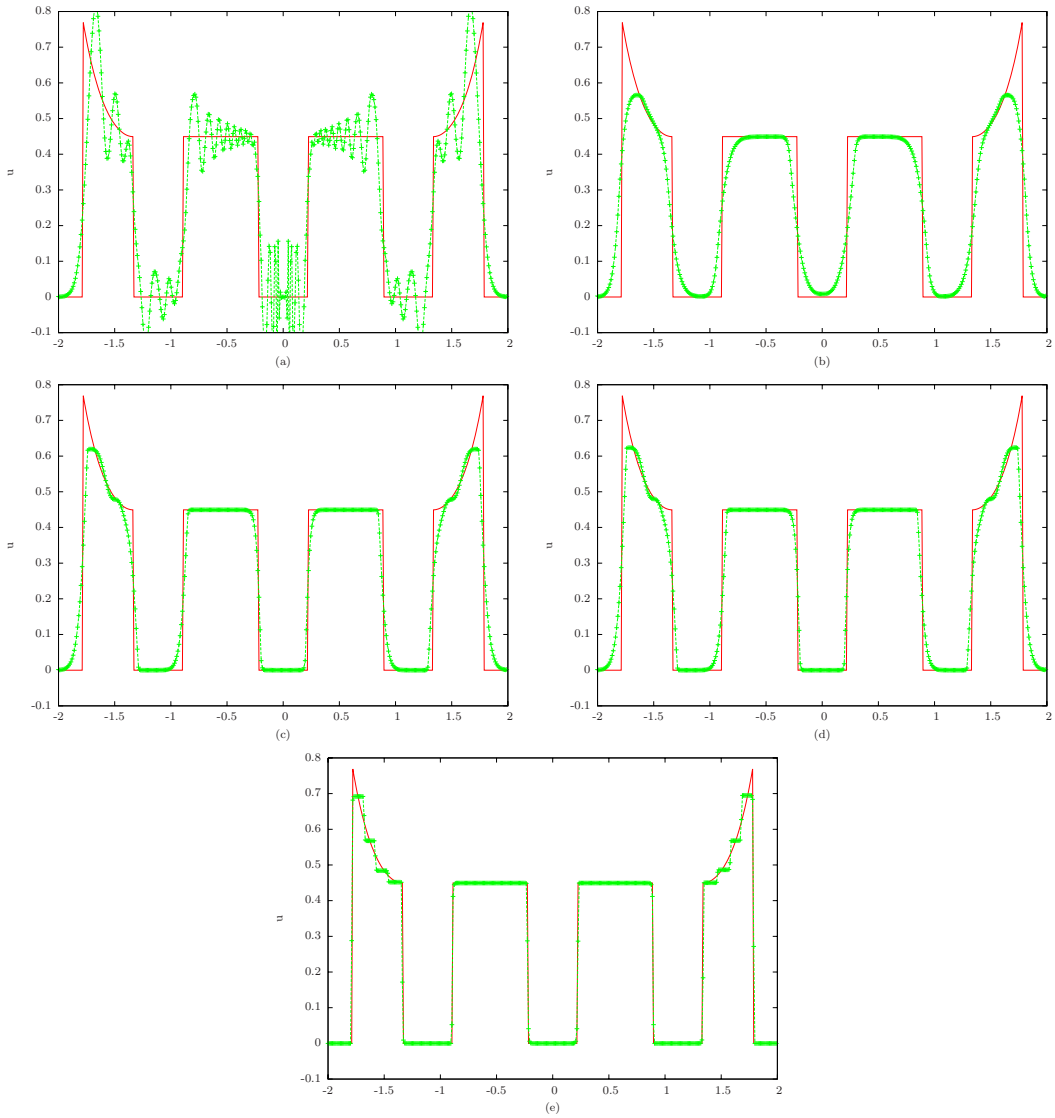


FIG. 2.18 – Les paramètres des simulations sont les mêmes que dans la figure 2.17. Les particules sont remaillées par des formules Λ_2 en (a) puis Λ_2 limitées en (b,c,d,e). Les limiteurs utilisés sont : (2.29) en (b), (2.96) en (c), (2.95) en (d) et (2.94) en (e).

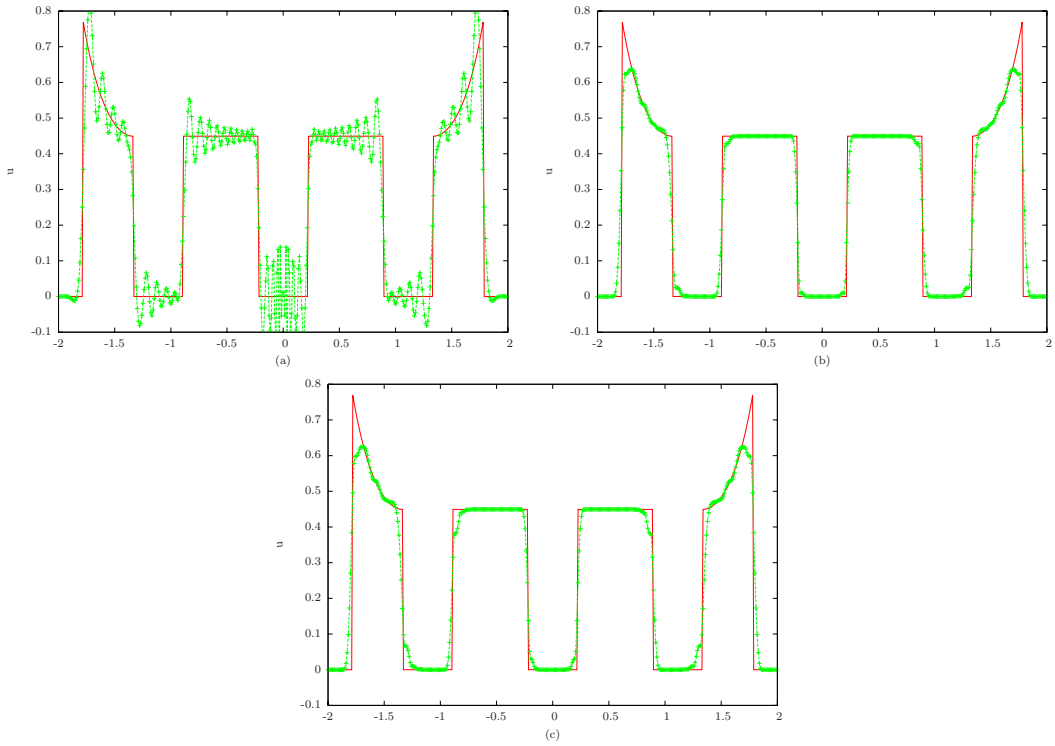


FIG. 2.19 – Les paramètres des simulations sont les mêmes que dans la figure 2.17. Les particules sont remaillées par des formules Λ_4 en (a) puis Λ_4 limitées avec la méthode de monotonie (2.46) en (b) puis TVD (annexe B) en (c).

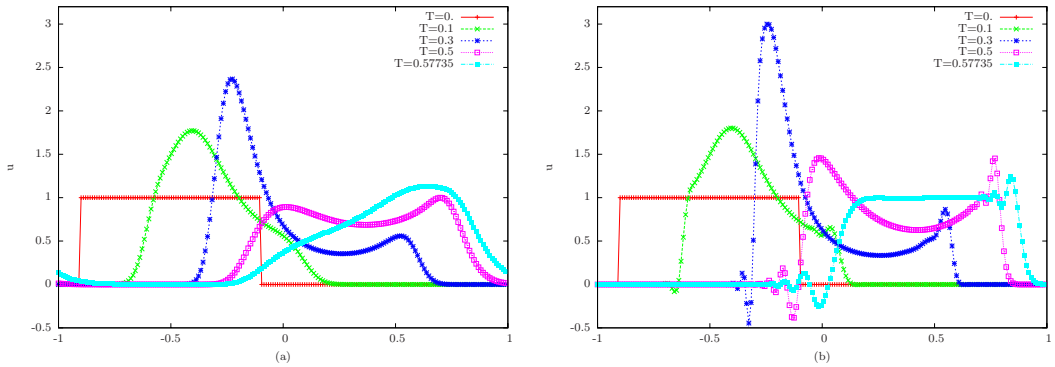


FIG. 2.20 – Advection des particules par un schéma Runge Kutta 2 suivant le champ de vitesse $a(x) = 2+sin(2\pi x)$. $\Delta x = 10^{-2}$ et le nombre CFL est égal à 0.4 ($\Delta t = 4\,10^{-3}/3$). La solution est tracée pour $T = 0$, 0.3 et $1/\sqrt{3} \simeq 0.58$. Les particules sont remaillées par des formules M_3 en (a) et $M_4^{'}$ en (b).

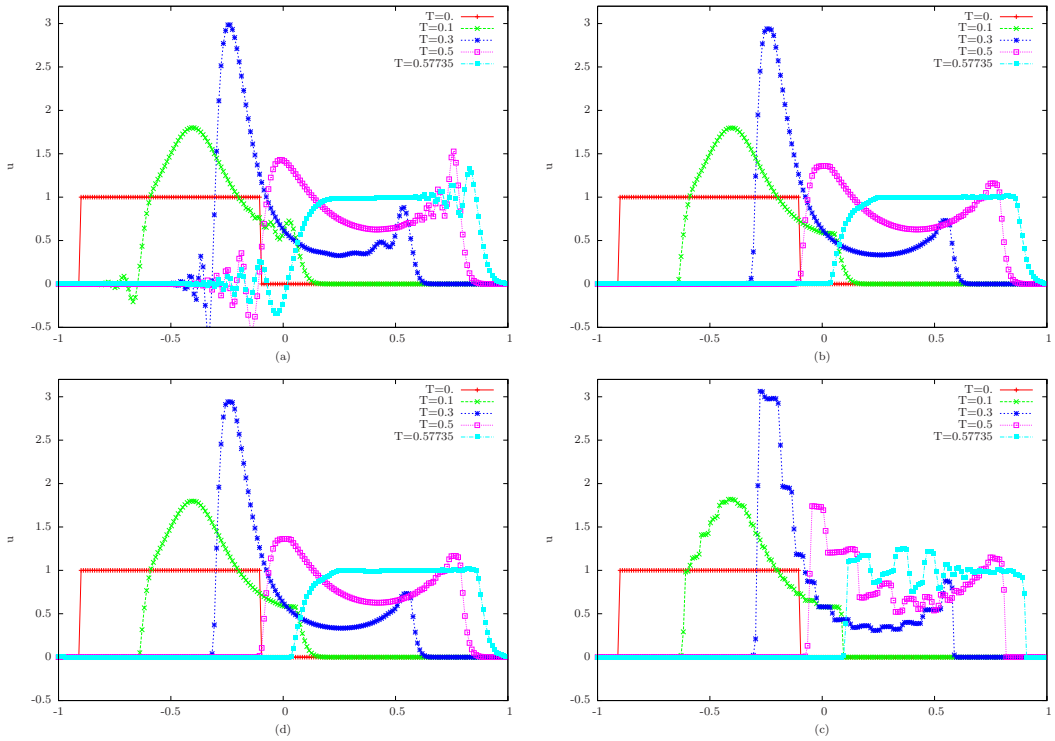


FIG. 2.21 – Les paramètres des simulations sont les mêmes que dans la figure 2.20. Les particules sont remaillées par des formules Λ_2 en (a) puis Λ_2 limitées en (b, c, d). Les limiteurs utilisés sont (2.96) en (b), (2.95) en (c) et (2.94) en (d).

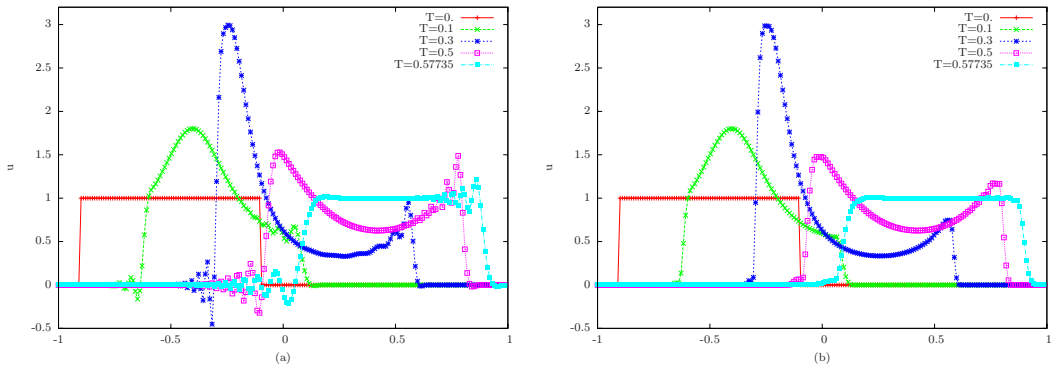


FIG. 2.22 – Les paramètres des simulations sont les mêmes que dans la figure 2.20. Les particules sont remaillées par des formules Λ_4 en (a) et Λ_4 limitées avec la méthode de monotonie (2.46) en (b).

Chapitre 3

Consistance des schémas pour de grands pas de temps

Contrairement aux méthodes explicites classiques qui sont contraintes par des condition du type CFL

$$\Delta t \, |a|_\infty \leq C \Delta x, \tag{3.1}$$

les méthodes particulaires sont linéairement inconditionnellement stables. Lorsque le champ de vitesse n'est pas constant, le pas de temps est généralement contraint par le gradient du champ de vitesse

$$\Delta t \leq \frac{C}{|a|_{1,\infty}}, \tag{3.2}$$

avec une constante C fixée de manière ad-hoc. Le fait de remailler les particules n'entraine aucun changement dans le choix du pas de temps. Or des problèmes de consistance liés aux variations de CFL locales entre particules peuvent apparaître. Ces situations problématiques sont mises en évidence dans la première section. Une solution pour y remédier est ensuite proposée en modifiant les formules de remaillages Λ_2 et Λ_4. Ces corrections sont écrites dans le cas de la dimension un. L'extension en multidimension sera faite dans le prochain chapitre. Enfin des limiteurs seront introduits dans les nouvelles formules de remaillage, généralisant ainsi les travaux du chapitre précèdent.

3.1 Mise en évidence des problèmes de consistance

Considèrons la méthode d'advection-remaillage en dimension un. On résoud donc

$$\partial_t \, u + \partial_x \, (a \, u) = 0. \tag{3.3}$$

Lorsque le champ de vitesse a est constant, une méthode numérique classique pour résoudre cette équation consiste à employer un schéma de différences finies décentré suivant le signe de a. La proposition suivante montre que l'utilisation de formules Λ_1 pour remailler les particules s'y ramène aussi.

Proposition 1. *Lorsque le champ de vitesse est constant, que les particules sont advectées par une méthode d'euler et remaillées par des formules* Λ_1*, les schémas obtenus aux points de grilles par la méthode d'advection-remaillage pour des nombres CFL* $-1 < \lambda = \Delta t\, a/\Delta x < 1$ *sont équivalents à ceux donnés par la méthode des differences finies d'ordre 1 décentrée amont.*

Preuve

Soit $a > 0$ un champ de vitesse constant, Δt le pas de temps et Δx la distance constante entre les points de grilles. Notons $\lambda = a\,\Delta t/\Delta x$ et supposons tout d'abord que $0 < \lambda < 1$. Considérons par exemple trois particules, placées aux points de grille x_{j-1}, x_j, x_{j+1} au temps $t^n = n\,\Delta t$ et portant respectivement les quantitées u^n_{j-1}, u^n_j et u^n_{j+1}. Ces particules sont advectées par un schéma d'euler durant le temps Δt, leurs nouvelles positions sont donc $x^{n+1}_k = x_k + \Delta t\, a,\ k = j-1,\, j,\, j+1$. La valeur de y_k, definit en (2.1) dans le chapitre 2 est alors

$$\begin{aligned} y_k &= \left(x^{n+1}_k - x_k\right)/\Delta x \\ &= \lambda. \end{aligned} \tag{3.4}$$

La figure (3.1) représente le remaillage Λ_1 des particules sur les points de grilles voisins. La quantité portée par la particule en t^{n+1}, au point de grille x_j est alors

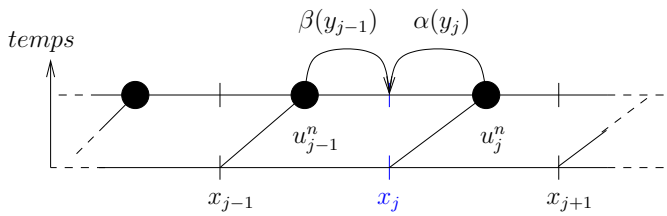


FIG. 3.1 – Remaillage des particules par des formules $\Lambda 1$ sous la condition $0 < \lambda < 1$.

$$\begin{aligned} u^{n+1}_j &= \beta(y_{j-1})\, u^n_{j-1} + \alpha(y_j)\, u^n_j \\ &= y_{j-1}\, u^n_{j-1} + (1 - y_j)\, u^n_j \\ &= u^n_j - \lambda\left(u^n_j - u^n_{j-1}\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

De la même manière, lorsque $-1 < \lambda < 0$ (figure 3.2),

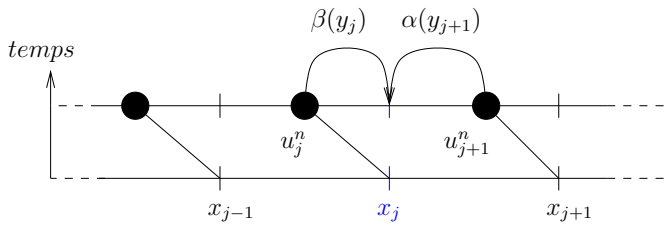


FIG. 3.2 – Remaillage des particules par des formules $\Lambda 1$ sous la condition $-1 < \lambda < 0$.

$$\begin{aligned} y_k &= \left(x_k^{n+1} - x_{k-1}\right)/\Delta x \\ &= \lambda + 1, \end{aligned} \tag{3.6}$$

et la quantité u_j^{n+1} portée par la particule j après remaillage vérifie

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \beta(y_j)\, u_j^n + \alpha(y_{j+1})\, u_{j+1}^n \\ &= y_j\, u_j^n + (1 - y_{j+1})\, u_{j+1}^n \\ &= u_j^n - \lambda \left(u_{j+1}^n - u_j^n\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

qui est un schéma de différences finies d'ordre un décentré amont.

□

Supposons maintenant que le champ de vitesse n'est plus constant, et posons $\lambda_j = \Delta t\, a_j / \Delta x$. Intéressons nous au changement de signe du champ de vitesse comme explicité dans la figure (3.3). Les schémas de grille obtenus en x_{j-1} et x_j ne sont pas consistant.

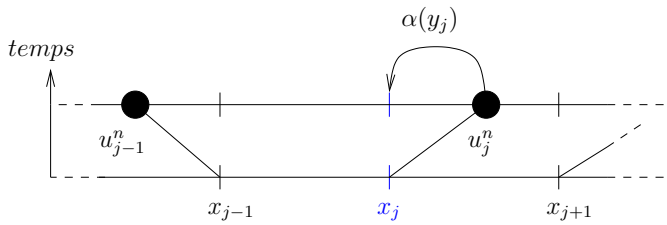


FIG. 3.3 – Changement de signe du champ de vitesse $a(x)$. Remaillage des particules par des formules Λ_1.

Par abus de language, les formules de remaillages seront alors dites non consistantes. En effet, puisqu'il n'y a pas de particule dans la maille $[x_{j-1}, x_j]$, le remaillage des particules u_k^n, $k = j-1$, j, $j+1$ forme une particule au point x_j portant la quantité

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \alpha(y_j)\, u_j^n \\ &= (1 - y_j)\, u_j^n \\ &= (1 - \lambda_j)\, u_j^n \\ &= u_j^n - \tfrac{\Delta t}{\Delta x} a_j\, u_j^n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Or, un developpement de Taylor en temps de u donne

$$u\left(x_j, (n+1)\Delta t\right) = u(x_j, n\,\Delta t) + \Delta t\, \partial_t u(x_j, n\,\Delta t) + O\left(\Delta t^2\right), \tag{3.9}$$

et en injectant l'équation (3.3) la solution exacte u vérifie :

$$u\left(x_j, (n+1)\Delta t\right) = u(x_j, n\,\Delta t) - \Delta t\, \partial_x \left(a(x_j)\, u(x_j, n\,\Delta t)\right) + O\left(\Delta t^2\right). \tag{3.10}$$

$\left(a_j\, u_j^n\right)/\Delta x$ n'étant pas une approximation de $\partial_x \left(a(x_j)\, u(x_j, n\,\Delta t)\right)$, le schéma (3.8) n'est pas consistant avec l'équation (3.3).

Remarque 6. *Le schéma (3.8) serait consistant avec (3.3) dans le cas particulier où la vitesse a_{j-1} serait nulle, puisque alors*

$$\frac{a_j\, u_j^n}{\Delta x} = \frac{a_j\, u_j^n - a_{j-1}\, u_{j-1}^n}{\Delta x} = \partial_x \left(a(x_j)\, u(x_j, n\,\Delta t)\right) + O\left(\Delta x\right). \tag{3.11}$$

Le même résultat au point x_{j-1} se montre de manière similaire. Par contre, les schémas obtenus aux points x_{j+1}, x_{j+2}, ... et x_{j-2}, x_{j-1}, ... sont consistant avec (3.3).

Le cas test de dilatation présenté dans la figure 3.4 met en évidence le défaut de consistance des formules Λ_1 lors d'un changement de signe. Le champ u, initialisé comme une fonction crenaux ($u_0 = \chi_{[-0.2,\,0.2]}$) est soumis au champ de vitesse $a(x) = x$. Lorsque les

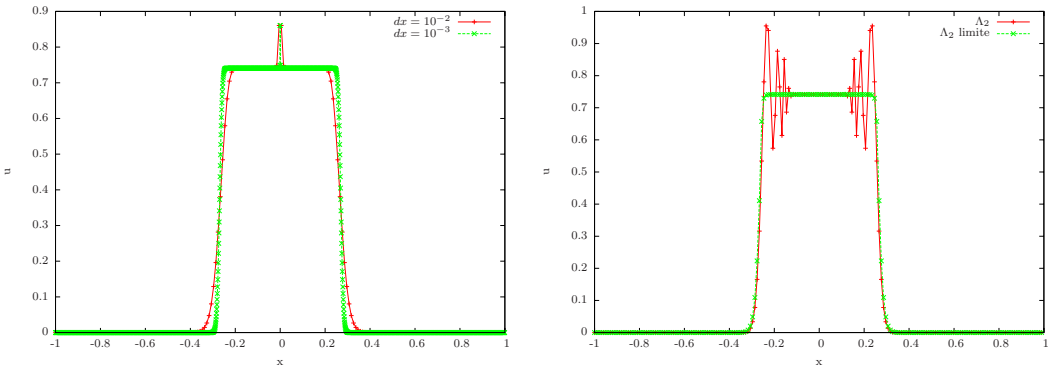


FIG. 3.4 – Advection des particules par un schéma d'Euler à la vitesse $a(x) = x$ jusqu'à $T = 0.3$, avec $\Delta t = 0.4\,\Delta x = 0.4\,10^{-2}$. Les particules sont remaillées par des formules Λ_1 à gauche ($\Delta x = 10^{-2}$, $\Delta x = 10^{-3}$) et Λ_2 à droite (avec et sans limiteur).

particules sont remaillées par les formules Λ_1, une erreur de consistance est observable en $x = 0$, où le champ de vitesse change de signe. Elle se manifeste sous la forme d'une oscillation, d'amplitude indépendante du pas d'espace (ou du nombre de particule) choisi. A l'inverse, la solution est bien représentée en $x = 0$ en remaillant avec des formules Λ_2. Les oscillations, dues à la discontinuité de la solution, sont supprimées lorsque les particules sont remaillées par des formules Λ_2 limitées (chapitre 2).

On montrera en section 3.3, dans un cadre plus général, que les formules Λ_2 sont effectivement consistantes lorsque $-1/2 < \lambda_j < 1/2$. Cependant, ceci est faux pour un pas de temps quelconque. On en donne la raison ci sessous, mais rappelons au préalable les formules de remaillage Λ_2. Les poids exprimés ci dessous sont distribués selon le schéma de la figure 3.5.

$$\text{si } y \leq 0.5 \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(y) & = y\,(y-1)\,/2 \\ \beta(y) & = 1 - y^2 \\ \gamma(y) & = y\,(y+1)\,/2 \end{array} \right. \quad \text{sinon} \left\{ \begin{array}{ll} \alpha^{'}(y) & = \alpha(y-1) \\ \beta^{'}(y) & = \beta(y-1) \\ \gamma^{'}(y) & = \gamma(y-1) \end{array} \right. \tag{3.12}$$

Une formule de remaillage alternative consiste à utiliser les coefficients α, β, γ pour

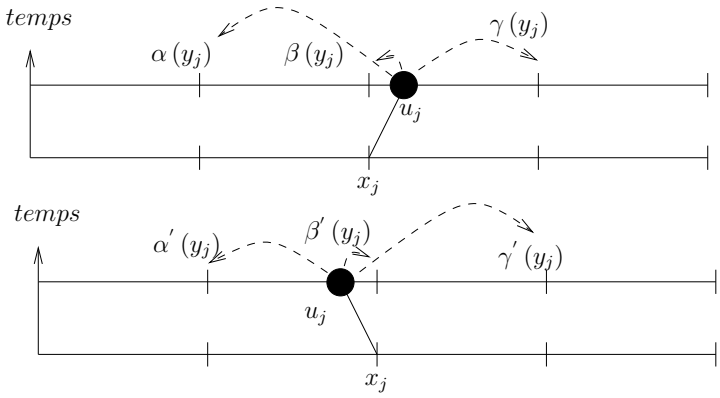


FIG. 3.5 – Remaillage d'une particules par les formules $\Lambda 2$. La figure du haut représente le cas $0 \leq y_j \leq 0.5$ et celle du bas $0.5 \leq y_j \leq 1$.

toute valeur de y $(0 \leq y \leq 1)$. Cette manière de remailler sera appelée par la suite Λ_2^g, l'exposant g exprimant un décentrage du côté gauche des poids de remaillage.

Considérons deux cas différents, le premier correspond à un changement de signe du champ de vitesse et le second à une variation de λ_k, $k = j, j+1$ autour de $1/2$. Dans la première configuration, correpondant à la figure (3.6), les valeurs de y_k sont les

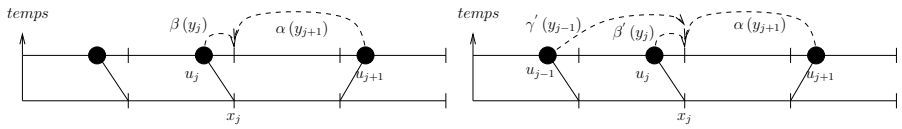


FIG. 3.6 – Cas d'un changement de signe du champ de vitesse. Les particules sont remaillées par des formules Λ_2^g dans la figure de gauche et Λ_2 dans celle de droite. Il est supposé que $-1/2 < \lambda_k < 1/2$ $k = j-1,\, j,\, j+1$.

suivantes :

$$\begin{cases} y_{j-1} = \lambda_{j-1} + 1 \\ y_j = \lambda_j + 1 \\ y_{j+1} = \lambda_{j+1}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Les schémas obtenus au point de grille x_j après remaillage Λ_2^g et respectivement Λ_2 des particules u_k^n, $k = j-1,\, j,\, j+1$ sont

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \beta(\lambda_j + 1)\, u_j^n + \alpha(\lambda_{j+1})\, u_{j+1}^n \\ &= -2\,\lambda_j\, u_j^n - 1/2\,\lambda_{j+1}\, u_{j+1}^n - \lambda_j^2\, u_j^n + 1/2\,\lambda_{j+1}^2\, u_{j+1}^n \end{aligned} \tag{3.14}$$

et

$$u_j^{n+1} = \gamma'(\lambda_{j-1} + 1)\, u_{j-1}^n + \beta'(\lambda_j + 1)\, u_j^n + \alpha(\lambda_{j+1})\, u_{j+1}^n \tag{3.15}$$

puisque $\beta'(y) = \beta(y-1)$ et $\gamma'(y) = \gamma(y-1)$. Dans le cas d'un remaillage Λ_2 le schéma obtenu en x_j (3.15) se réécrit :

$$u_j^{n+1} = \gamma(\lambda_{j-1})\, u_{j-1}^n + \beta(\lambda_j)\, u_j^n + \alpha(\lambda_{j+1})\, u_{j+1}^n. \tag{3.16}$$

On montre en section 3.3 que ce schéma est consistant. Il est identique à celui que l'on obtient sous la condition $0 \leq \lambda_k \leq 1/2$. Par contre le schéma du remaillage Λ_2^g (3.14) n'est pas consistant en x_j. Inversement, si l'on se place dans une configuration où λ varie autour de 1/2, comme décrite dans la figure 3.7, un remaillage Λ_2 donne un schéma non consistant avec l'équation (3.3) alors qu'un remaillage Λ_2^g permet d'obtenir un schéma consistant en x_j. En effet si les particules sont remaillées avec des formules Λ_2^g, le schéma

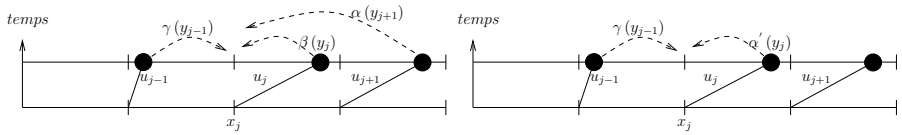


FIG. 3.7 – Cas d'une variation autour de 1/2 de $\lambda_k = \Delta t\, a_k/\Delta x \;\; k = j-1,\, j,\, j+1$. Les particules sont remaillées par des formules Λ_2^g dans la figure de gauche et Λ_2 dans celle de droite. Il est supposé que $0 < \lambda_k < 1,\; k = j-1,\, j,\, j+1$.

obtenu en x_j est

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \gamma(y_{j-1})\, u_{j-1}^n + \beta(y_j)\, u_j^n + \alpha(y_{j+1})\, u_{j+1}^n \\ &= \gamma(\lambda_{j-1})\, u_{j-1}^n + \beta(\lambda_j)\, u_j^n + \alpha(\lambda_{j+1})\, u_{j+1}^n, \end{aligned} \tag{3.17}$$

alors que des formules Λ_2 donne le schéma :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \gamma(y_{j-1})\, u_{j-1}^n + \beta(y_j)\, u_j^n \\ &= \gamma(\lambda_{j-1})\, u_{j-1}^n + \beta(\lambda_j)\, u_j^n. \end{aligned} \tag{3.18}$$

En résumé, les deux formules de remaillage considérées dans l'étude précédente ne sont satisfaisantes que pour certaines valeurs du champ de vitesse. Les formules Λ_2^g sont consistantes si $0 < \lambda_k < 1$, $\forall k$, ce qui n'est pas vérifié lors d'un changement de signe du champ de vitesse. D'un autre côté, les formules Λ_2 sont consistantes pour $-1/2 < \lambda_k < 1/2$, $\forall k$, donc notamment lors d'un changement de signe, mais leur utilisation écartent des nombres de CFL tels que $\lambda > 1/2$.

Cette incapacité à remailler de manière consistante des particules sous la condition $-1/2 < \lambda_k < 1$ avec une unique formule est confirmée numériquement dans la figure 3.8. Le champ de vitesse est linéaire $a(x) = x$ sur un domaine $x \in [-1, 1]$, et les particules sont advectées avec un nombre CFL égale à un ($\Delta t = \Delta x$) jusqu'à $T = 0.1$. La condition initiale est constante ($u_0(x) = 1\, \forall x \in [-1, 1]$) donc la solution exacte l'est aussi ($u(x,t) = e^{-t}\, \forall x \in [-1, 1]$). Des oscillations dues aux problèmes de consistance des formules de remaillage sont visibles aux points de grilles "critiques". Les formules Λ_2, dont les problèmes apparaissent lorsque λ_k varie autour de 1/2, génèrent des oscillations en $x_k = \lambda_k = 1/2$. Les formules Λ_2^g, qui posent problème lorsque λ_k varie autour de 0, génèrent des oscillations en $x = 0$.

L'étude faite ici sur les formules d'ordre 2 se généralise trivialement aux formules d'ordre plus élevé. Celles décentré d'un seul côté (Λ_{2k+1}), c'est a dire indépendante de la position de la particule dans la maille, se comportent comme Λ_2^g alors que les formules Λ_{2k} (par exemple Λ_4), M_3 et M_5 ont un comportement similaire aux formules Λ_2.

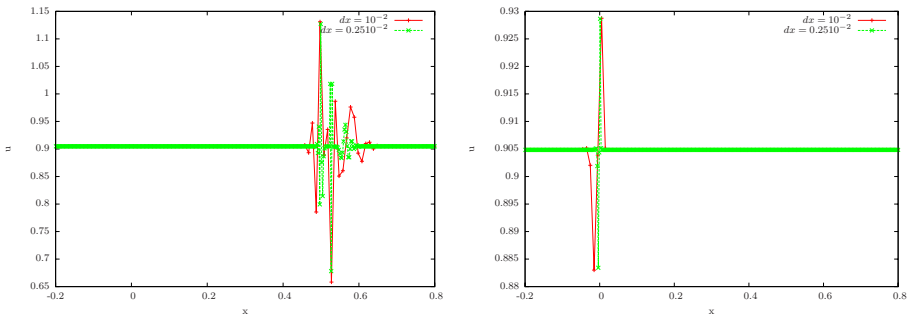


FIG. 3.8 – Mise en évidence des problèmes de consistance : Les particules sont advectées avec un nombre CFL égal à un ($\Delta t = \Delta x$) dans un champ de vitesse $a(x) = x$. Elles sont remaillées par des formules Λ_2 à gauche et Λ_2^g à droite.

Pour obtenir des schémas consistants en tout points de grille sous grande CFL, l'idée est de grouper les particules de manière à ce qu'il existe une formule consistante pour remailler toutes les particules d'un même groupe. Les particules appartenant à différentes partitions pourront ainsi être remaillées par des formules distinctes. Une attention particulière devra être portée sur le remaillage des particules situées aux extrémités des partitions. Intéressons nous tout d'abord à la manière de procéder pour regrouper les particules.

3.2 Partition des particules en blocs

On se propose de montrer qu'il est effectivement possible de grouper les particules sous forme de bloc. Elle pourront alors être remaillées par des formules consistantes, choisis en fonction du bloc auquel elles appartiennent.

Définition 1. *On appelle* ***bloc de particule*** *de taille $M\,\Delta x$ un ensemble consécutif de $M+1$ particules.*

On se place sous la condition habituelle (3.2) où la constante $C = 1/(2\,M)$:

$$\Delta t < \frac{1/2}{M\,|a|_{1,\infty}}, \tag{3.19}$$

avec $|a|_{1,\infty} = \max\left|\frac{\partial a}{\partial x}\right|$. M doit être supérieur à $1/2$ pour éviter le croisement des particules lors de leur advection. On choisira en pratique des blocs de deux ou trois particules permettant ainsi d'utiliser des grand pas de temps lorsque le champ de vitesse varie faiblement. Le choix de la taille optimale des blocs (M) sera discuté dans la section 3.4.3.

Définition 2. *M particules consécutives forment un* ***bloc centré*** *(ou de type centré), et d'****indice*** *$N \in \mathbb{N}$, si elles vérifient :*

$$N - \frac{1}{2} \leq \lambda_k = \nu\, a_k = \frac{\Delta t}{\Delta x}\, a_k \leq N + \frac{1}{2},\ \forall x_k \in B, \tag{3.20}$$

et un ***bloc gauche*** *(ou de type gauche), si :*

$$N \leq \lambda_k \leq N+1, \ \forall x_k \in B. \tag{3.21}$$

On pose $\lambda_{min} = \min(\lambda_k)$ pour toute particule k du bloc et on désigne par $[a]$ la partie entière de a. La proposition suivante donne l'existence des blocs en proposant une méthode de construction.

Proposition 2. *Sous la condition (3.19), toute particule appartient soit à un bloc de type centré soit un bloc gauche.*
Si $\lambda_{min} - [\lambda_{min}] \leq 1/2$, alors le bloc est de type gauche et son indice est $N = [\lambda_{min}]$, sinon, le bloc est de type centré et $N = [\lambda_{min}] + 1$.

Preuve

D'après la condition (3.19), deux particules situées en x_i et x_j d'une distance inférieure à $M\,\Delta x$ vérifient :

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq \frac{\Delta t}{\Delta x}\,|a|_{1,\infty}\,M\,\Delta x < 1/2. \tag{3.22}$$

Pour un bloc B donné on note $\lambda_{min} = \min(\lambda_j)$ et $\lambda_{max} = \max(\lambda_j)$, $\forall x_j \in B$. Alors d'après la définition de la partie entière, $\lambda_{min} = [\lambda_{min}] + l$, $0 \leq l < 1$ et on peut en déduire deux cas : $0 \leq l \leq 1/2$ ou $1/2 < l < 1$.

Considérons tout d'abord le premier cas. Alors

$$[\lambda_{min}] \leq \lambda_{min} \leq [\lambda_{min}] + 1/2,$$

et d'après (3.22),

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &< \lambda_{min} + 1/2 \\ &< [\lambda_{min}] + 1. \end{aligned}$$

Donc $[\lambda_{min}] \leq \lambda_{min} \leq \lambda_k \leq \lambda_{max} < [\lambda_{min}] + 1$, $\forall x_k \in B$, et en posant $N = [\lambda_{min}]$ on obtient pour tout x_k dans B

$$N \leq \lambda_k < N+1,$$

et le bloc est de type gauche.

De manière similaire, si l'on est dans le second cas $1/2 < l < 1$, alors

$$[\lambda_{min}] + 1/2 < \lambda_{min} < [\lambda_{min}] + 1,$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &< \lambda_{min} + 1/2 \\ &< [\lambda_{min}] + 3/2. \end{aligned}$$

D'où, $[\lambda_{min}] + 1/2 \leq \lambda_{min} \leq \lambda_k \leq \lambda_{max} < [\lambda_{min}] + 3/2$, $\forall x_k \in B$. En posant $N = [\lambda_{min}] + 1$, cette dernière inégalité s'écrit

$$N - 1/2 \leq \lambda_k < N + 1/2,$$

et le bloc est de type centré.

□

Les figures 3.9 et 3.10 explicitent les deux types de bloc (ici de taille $3\,\Delta x$), pour des valeurs d'indices $N = \{-1, 0, 1\}$. Les trajectoires des particules sont situées dans les zones colorées. Au moins une d'entre elles (pour laquelle le minimum de λ est atteint) a sa trajectoire dans la partie gauche (colorée en bleu). Dans le cas contraire le bloc est de l'autre type.

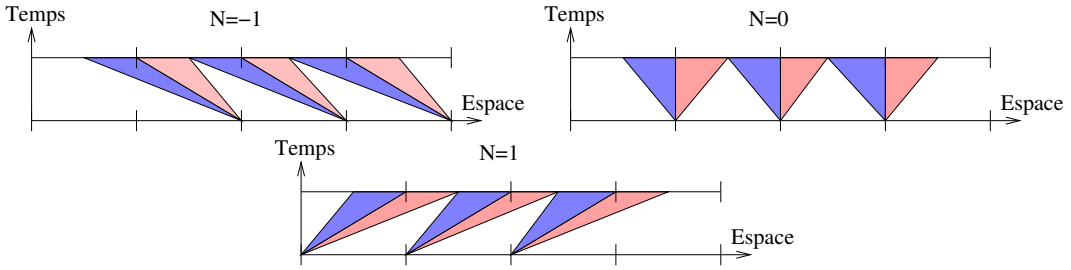


FIG. 3.9 – Exemple de bloc centré de taille $3\,\Delta x$ pour différentes valeurs d'indice ($N = \{-1, 0, 1\}$). Au moins une particule doit se situer dans la zone bleu.

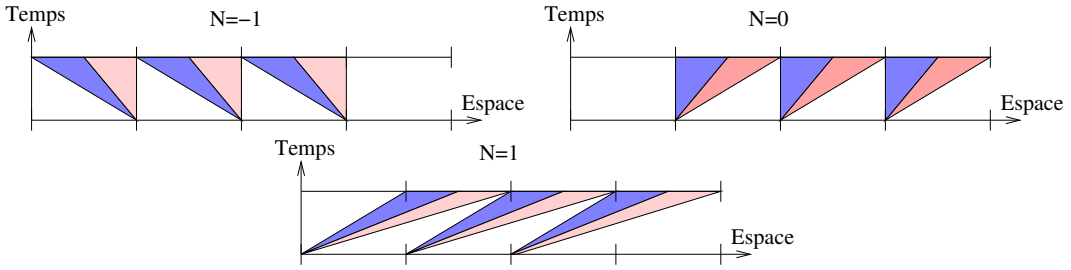


FIG. 3.10 – Exemple de bloc gauche de taille $3\,\Delta x$ pour différentes valeurs d'indice ($N = \{-1, 0, 1\}$). Au moins une particule doit se situer dans la zone bleu.

3.3 Formules de remaillage consistantes dans les blocs

Maintenant qu'il est possible de regrouper les particules en blocs suivant la proposition 2, on s'intéresse à déterminer des formules de remaillage qui soient consistantes.

L'appartenance d'une particule à l'extrémité d'un bloc dépend des formules de remaillages utilisées. Dans le cas de l'ordre deux, par définition seules la première et la dernière particule d'un bloc appartiennent à son extrémité. Dans le cas de l'ordre quatre, on considère les deux premières et deux dernières. On appelle particule intérieure à un bloc une particule appartenant au bloc, excépté celles de son extrémité.

On détermine ici des formules adéquates pour remailler les particules appartenant à l'intérieur des blocs. Les particules appartenant à l'extrémité seront remaillées par de nouvelles formules, construites dans la section 3.4. Notons que des particules formant

des blocs consécutifs de petite tailles, mais d'indice constant, seront remaillées par les mêmes formules que si le bloc était de grande taille.

3.3.1 Formules d'ordre deux en espace

Cette première section est consacrée à l'étude des formules d'ordre 2. L'ordre 4 est abordé dans la suivante.

Proposition 3. *Les formules Λ_2^g sont consistantes pour remailler les particules intérieures d'un bloc de type gauche.*

Preuve

Montrons que les schémas obtenus aux points de grilles situés à l'intérieur d'un bloc de type gauche sont consistants avec l'équation de transport sous forme conservative (3.3), si les particules sont remaillées par des formules Λ_2^g. Soit B un bloc de type gauche. Alors pour toute particule k appartenant au bloc, $N \leq \lambda_k \leq N+1$ avec $N = [min\,(\lambda_k)]$. La figure (3.11) représente une configuration avec $N = 0$, 1 et généralise au cas d'indice N quelconque. Le remaillage Λ_2^g des particules $j-1-N$, $j-N$ et $j+1-N$ donne la

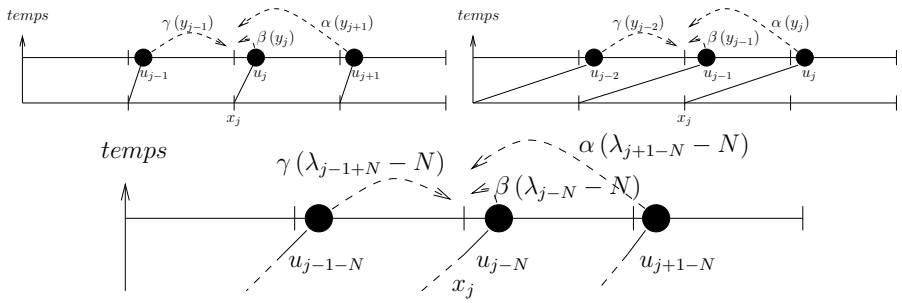


FIG. 3.11 – Remaillage des particules d'un bloc B par les formules Λ_2^g. Les particules vérifient la relation $N < \lambda_k = \Delta t\, a_k/\Delta x < N+1, \;\; \forall\, k \in B$. Trois cas sont représentés, $N = 0$ (en haut à gauche), $N = 1$ (en haut à droite) et N quelconque (en bas).

valeur suivante de u en x_j, au temps $(n+1)\,\Delta t$:

$$u_j^{n+1} = \gamma\,(y_{j-1-N})\,u_{j-1-N}^n + \beta(y_{j-N})\,u_{j-N}^n + \alpha(y_{j+1-N})\,u_{j+1-N}^n. \tag{3.23}$$

Puisque

$$\left\{\begin{array}{ll} y_{j-1-N} & = \{x_j - (N+1)\,\Delta x + \Delta t\, a_{j-1-N} - (x_j - \Delta x)\}\,/\Delta x = \lambda_{j-1-N} - N, \\ y_{j-N} & = \{x_j - N\,\Delta x + \Delta t\, a_{j-N} - x_j\}\,/\Delta x = \lambda_{j-N} - N, \\ y_{j+1-N} & = \{x_j - (N-1)\,\Delta x + \Delta t\, a_{j+1-N} - (x_j + \Delta x)\}\,/\Delta x = \lambda_{j+1-N} - N, \end{array}\right. \tag{3.24}$$

le schéma au point de grille x_j se réécrit ainsi,

$$\begin{array}{rll} u_j^{n+1} = & u_{j-N}^n & + \left[\frac{1}{2}\,\lambda_{j-1-N}^2 + \lambda_{j-1-N}\left(\frac{1}{2} - N\right) + \frac{1}{2}\,N\,(N-1)\right]\,u_{j-1-N}^n \\ & & - \left[\lambda_{j-N}^2 - 2\,\lambda_{j-N}\,N + N^2\right]\,u_{j-N}^n \\ & & + \left[\frac{1}{2}\,\lambda_{j+1-N}^2 - \lambda_{j+1-N}\left(N + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,N\,(N+1)\right]\,u_{j+1-N}^n. \end{array} \tag{3.25}$$

Montrons que ce schéma est consistant avec (3.3). On suppose que les particules sont advectées par un schéma d'Euler, c'est à dire à la vitesse $a(x,t)$. Ainsi $\lambda_k = \Delta t\, a_k/\Delta x$ et un développement de Taylor de u, $a\,u$ et $a^2\,u$ en j permet de réécrire le schéma (3.25) ainsi

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} = \quad & \tfrac{1}{2}N(N-1)\left[u_j - (1+N)\,\Delta x\,\partial_x u_j + \tfrac{(1+N)^2\,\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx} u_j\right] \\
& +(1-N^2)\left[u_j - N\,\Delta x\,\partial_x u_j + \tfrac{N^2\,\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx} u_j\right] \\
& +\tfrac{1}{2}\,N(N+1)\left[u_j + (1-N)\,\Delta x\,\partial_x u_j + \tfrac{(1-N)^2\,\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx} u_j\right] + O\left(\Delta x^3\right) \\
+\tfrac{\Delta t}{\Delta x} \quad & \Big\{\left(\tfrac{1}{2}-N\right)\left[a_j u_j - (1+N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j u_j\right) + \tfrac{(1+N)^2\,\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx}\left(a_j u_j\right)\right] \\
& +2N\left[a_j u_j - N\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j u_j\right) + \tfrac{N^2\,\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx}\left(a_j u_j\right)\right] \\
& -\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\left[a_j u_j + (1-N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j u_j\right) + \tfrac{(1-N)^2\,\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx}\left(a_j u_j\right)\right]\Big\} + O\left(\Delta t\,\Delta x^2\right) \\
+\tfrac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \quad & \Big\{\tfrac{1}{2}\left[a_j^2 u_j - (1+N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2 u_j\right) + \tfrac{(1+N)^2\,\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx}\left(a_j^2 u_j\right)\right] \\
& -\left[a_j^2 u_j - N\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2 u_j\right) + \tfrac{N^2\,\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx}\left(a_j^2 u_j\right)\right] \\
& +\tfrac{1}{2}\left[a_j^2 u_j + (1-N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2 u_j\right) + \tfrac{(1-N)^2\,\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx}\left(a_j^2 u_j\right)\right]\Big\} + O\left(\Delta t^2\,\Delta x\right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Or,

$$\begin{cases}
\tfrac{1}{2}N(N-1)(-1-N)^\alpha + (1-N^2)(-N)^\alpha + \tfrac{1}{2}N(N+1)(1-N)^\alpha = 1 \text{ si } \alpha = 0 \text{ et } 0 \text{ sinon} \\
\left(\tfrac{1}{2}-N\right)(-1-N)^\alpha + 2\,N(-N)^\alpha - \left(N+\tfrac{1}{2}\right)(1-N)^\alpha = -1 \text{ si } \alpha = 1 \text{ et } 0 \text{ sinon} \\
\tfrac{1}{2}(-1-N)^\alpha - (-N)^\alpha + \tfrac{1}{2}(1-N)^\alpha = 1 \text{ si } \alpha = 2 \text{ et } 0 \text{ sinon,}
\end{cases} \tag{3.27}$$

d'où, après simplification, u_j^{n+1} vérifie :

$$u_j^{n+1} = u_j - \Delta t\,\partial_x\left(a_j u_j\right) + \frac{\Delta t^2}{2}\,\partial^2_{xx}\left(a_j^2 u_j\right) + O\left(\Delta t\,\Delta x^2 + \Delta t^2\,\Delta x + \Delta x^3\right). \tag{3.28}$$

Remarque 7. *Ce résultat est obtenu dans [93] (proposition 3, chapitre 2) de manière différente.*

L'erreur de consistance est alors

$$\begin{aligned}
\frac{u(j\,\Delta x,(n+1)\,\Delta t) - u_j^{n+1}}{\Delta t} &= \partial_t u_j - \partial_x\left(a_j u_j\right) + O\left(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta x^3/\Delta t\right) \\
&= O\left(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta x^3/\Delta t\right),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

et le schéma est consistant.

Lorsque les particules sont advectées avec un schéma d'ordre plus élevé, l'erreur d'approximation est plus faible. Utilisons par exemple un schéma Runge-Kutta d'ordre 2. Les particules sont alors transportées à la vitesse

$$a\left(x + \frac{\Delta t}{2}\,a(x,t),\; t + \frac{\Delta t}{2}\right), \tag{3.30}$$

soit, en utilisant un développement de Taylor,

$$a + \frac{\Delta t}{2}\left(a\,\partial_x a + \partial_t a\right) + O\left(\Delta t^2\right). \tag{3.31}$$

En remplacant a par cette nouvelle expression dans (3.28), alors u_j^{n+1} vérifie :

$$u_j^{n+1} = u_j - \Delta t\,\partial_x\left(a_j u_j\right) + \frac{\Delta t^2}{2}\left[-\partial_x\left(a_j u_j \partial_x a_j\right) - \partial_x\left(u_j \partial_t a_j\right) + \partial_{xx}^2\left(a_j^2 u_j\right)\right] + O\left(\Delta t^3\right), \tag{3.32}$$

et l'erreur de consistance est d'ordre 2 puisque on peut montrer en utilisant l'équation (3.3) que

$$-\partial_x\left(a_j u_j \partial_x a_j\right) - \partial_x\left(u_j \partial_t a_j\right) + \partial_{xx}^2\left(a_j^2 u_j\right) = \partial_{tt}^2 u_j. \tag{3.33}$$

□

Proposition 4. *Les formules Λ_2 sont consistantes pour remailler les particules intérieures d'un bloc de type centré.*

Preuve

Soit B le bloc de type centré. Alors pour toute particule k appartenant au bloc, $N - 1/2 \leq \lambda_k \leq N + 1/2$ avec $N = [min\,(\lambda_k)] + 1$. La figure (3.12) représente les cas d'indice 0, 1 et N. Le schéma obtenu au point x_j après remaillage est le suivant :

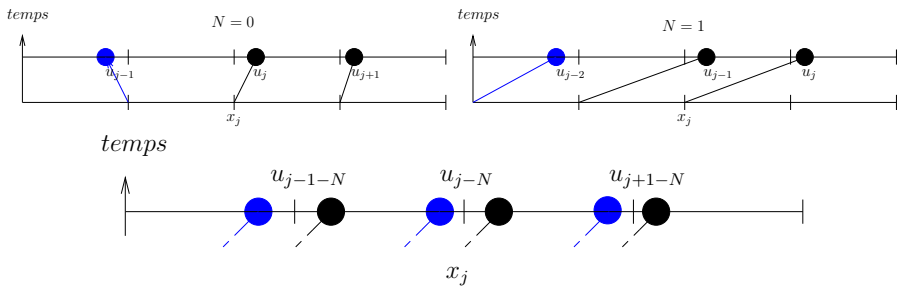


FIG. 3.12 – Remaillage des particules d'un bloc B par les formules Λ_2. Les particules vérifient la relation $N - 1/2 < \lambda_k = \Delta t\, a_k/\Delta x < N + 1/2, \quad \forall\, k \in B$. Trois cas sont représentés, $N = 0$ (en haut à gauche), $N = 1$ (en haut à droite) et N quelconque (en bas). Lorsque $\lambda < N$ les particules sont représentées en bleu, et en noir dans le cas contraire.

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \quad & u_{j-1-N}^n \begin{cases} \gamma(y_{j-1-N}) \text{ si } \lambda_{j-1-N} > N \\ \gamma^{'}(y_{j-1-N}) \text{ si } \lambda_{j-1-N} < N \end{cases} \\ & +u_{j-N}^n \begin{cases} \beta(y_{j-N}) \text{ si } \lambda_{j-N} > N \\ \beta^{'}(y_{j-N}) \text{ si } \lambda_{j-N} < N \end{cases} \\ & +u_{j+1-N}^n \begin{cases} \alpha(y_{j+1-N}) \text{ si } \lambda_{j+1-N} > N \\ \alpha^{'}(y_{j+1-N}) \text{ si } \lambda_{j+1-N} < N \end{cases} \end{aligned} \tag{3.34}$$

De plus, en appliquant la définition de y (2.1) donnée dans le chapitre 2, on obtient pour $k = j-1-N, j-N, j+1-N$:

$$y_k = \begin{cases} \lambda_k - N, \text{ si } \lambda_k > N \\ \lambda_k - N + 1, \text{ si } \lambda_k < N. \end{cases} \tag{3.35}$$

Puisque $\alpha^{'}(\lambda_k - N + 1) = \alpha(\lambda_k - N)$, $\beta^{'}(\lambda_k - N + 1) = \beta(\lambda_k - N)$ et $\gamma^{'}(\lambda_k - N + 1) = \gamma(\lambda_k - N)$, le schéma au point x_j est identique à (3.25). Ce schéma est donc consistant d'après la proposition précédente.

□

3.3.2 Formules d'ordre 4 en espace

La démarche présentée dans le cas des formules d'ordre deux est généralisable pour des formules d'ordre plus élevé. Les résultats obtenus avec l'ordre 4 sont donnés dans la proposition qui suit. On rappelle que dans ce cas, ce sont les deux premières et deux dernières particules d'un bloc qui appartiennent à son extrémité, les autres étant des particules intérieures.

Proposition 5. *Les formules Λ_4^g (respectivement Λ_4) sont consistantes pour remailler les particules intérieures d'un bloc de type gauche (centré).*

Preuve

On procède de la même manière que pour les formules Λ_2. Un unique schéma de grille est obtenu, que l'on remaille les particules par des formules Λ_4^g à l'intérieur d'un bloc de type gauche ou par des formules Λ_4 dans un bloc centré :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & \{\zeta(y_{j-2-N})\, u_{j-2-N} + \delta(y_{j-1-N})\, u_{j-1-N} + \gamma(y_{j-N})\, u_{j-N} + \beta(y_{j+1-N})\, u_{j+1-N} \\ & + \alpha(y_{j+2-N})\, u_{j+2-N}\} \,|_{y_k=\lambda_k-N} \\ = & \left\{ \frac{\lambda_{j-2-N}^4}{24} + \frac{\lambda_{j-2-N}^3}{12}(1-2\,N) + \frac{\lambda_{j-2-N}^2}{24}\left(-1-6\,N+6\,N^2\right) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_{j-2-N}}{12}\left(-1+N+3\,N^2-2\,N^3\right) + \frac{N}{24}\left(2-N-2\,N^2+N^3\right) \right\} u_{j-2-N} \\ & + \left\{ -\frac{\lambda_{j-1-N}^4}{6} + \frac{\lambda_{j-1-N}^3}{6}(4\,N-1) + \frac{\lambda_{j-1-N}^2}{6}\left(4+3\,N-6\,N^2\right) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_{j-1-N}}{6}\left(4-8\,N-3\,N^2+4\,N^3\right) + \frac{N}{6}\left(-N^3+N^2+4\,N-4\right) \right\} u_{j-1-N} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{\frac{\lambda_{j-N}^4}{4}-\lambda_{j-N}^3\,N+\frac{\lambda_{j-N}^2}{4}\left(6\,N^2-5\right)+\frac{\lambda_{j-N}}{2}\left(5\,N-2\,N^3\right)\right.\\
&\left.+\frac{N}{4}\left(N^3-5\,N\right)+1\right\}u_{j-N}\\
&+\left\{-\frac{\lambda_{j+1-N}^4}{6}+\frac{\lambda_{j+1-N}^3}{6}\left(1+4\,N\right)+\frac{\lambda_{j+1-N}^2}{6}\left(4-3\,N-6\,N^2\right)\right.\\
&\left.+\frac{\lambda_{j+1-N}}{6}\left(-4-8\,N+3\,N^2+4\,N^3\right)+\frac{N}{6}\left(-N^3-N^2+4\,N+4\right)\right\}u_{j+1-N}\\
&+\left\{\frac{\lambda_{j+2-N}^4}{24}+\frac{\lambda_{j+2-N}^3}{12}\left(-1-2\,N\right)+\frac{\lambda_{j+2-N}^2}{24}\left(6\,N^2+6\,N-1\right)\right.\\
&\left.+\frac{\lambda_{j+2-N}}{12}\left(1+N-3\,N^2-2\,N^3\right)+\frac{N}{24}\left(-2-N+2\,N^2+N^3\right)\right\}u_{j+2-N}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

On effectue les développements de Taylor en j et on trouve après simplification que u_j^{n+1} vérifie :

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1}= \quad & u_j-\Delta t\,\partial_x\left(a_j u_j\right)+\frac{\Delta t^2}{2}\,\partial_{xx}^2\left(a_j^2 u_j\right)+\frac{\Delta t^3}{6}\,\partial_{xxx}^3\left(a_j^3 u_j\right)+\frac{\Delta t^4}{24}\,\partial_{xxxx}^4\left(a_j^4 u_j\right)\\
&+O\left(\Delta x^5+\Delta t\,\Delta x^4+\Delta t^2\,\Delta x^3+\Delta t^3\,\Delta x^2+\Delta t^4\,\Delta x\right).
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Le schéma est donc consistant et l'ordre de précision dépend du schéma utilisé pour advecter les particules.

□

En conclusion, l'utilisation des formules Λ_2 (ou Λ_4) dans les blocs centrés et Λ_2^g (ou Λ_4^g) dans les blocs de type gauche donne des schémas de grille équivalents qui sont consistants, à condition d'être suffisament loin des bords. En effet, lors du remaillage, les points de grille situés aux extrémités des blocs "recoivent" des poids de particules appartenants à des blocs differents. Les schémas peuvent alors présenter des problèmes de consistance. Cette analyse est développée dans la section suivante, ou de nouvelles formules consistantes sont construites pour remailler les particules appartenant aux extrémités des blocs.

3.4 Correction des formules de remaillage entre les blocs

Les propositions de la section précèdente proposent des formules pour remailler les particules intérieures d'un bloc. On construit ici des formules remaillant de manière consistante les particules appartenant aux extrémités. Elles sont dépendantes de la variation des indices entre les blocs. L'analyse est menée à l'ordre deux et les nouvelles formules seront notées $\Lambda_{\tilde{2}}$. La méthode employée à l'ordre quatre est identique, les formules $\Lambda_{\tilde{4}}$ obtenues sont établis à la fin de la section. Des illustrations numériques sont également présentées.

3.4.1 Cas de blocs contigus avec des indices identiques

Si le type de deux blocs contigus et de même indice est identique, la situation est équivalente à celle d'un seul bloc comportant l'ensemble des particules. Les formules de

remaillage proposées dans les propositions 3 et 4 sont alors consistantes .

Il est possible que deux blocs contigus soient de même indice, mais de type différent. La proposition suivante assure que dans ce cas, ces formules sont encore consistantes.

Proposition 6. *Soient deux blocs de particules B_m et B_{m+1} de même indice N. Alors les formules de remaillages suggérées dans les propositions 3 et 4 sont consistantes.*

Preuve

Supposons l'indice des blocs nul sans perte de généralités. En effet le cas d'indices non nuls s'y ramène en constatant que la différence entre les deux situations consiste à advecter les particules de manière exacte pendant un pas de temps $\Delta t^{'} < \Delta t$. Les figures 3.13 et 3.14 représentent les deux cas possibles : B_m est de type gauche, B_{m+1} de type centré ou l'inverse. Concentrons nous sur le cas de la figure 3.13. La première particule du

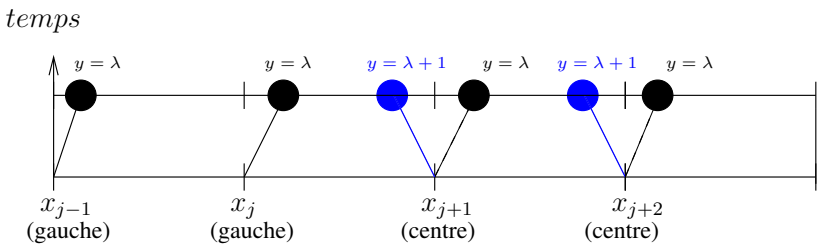


FIG. 3.13 – Configuration de deux blocs contigus d'indice nul et de type différent. Le premier est de type gauche, le second centré. Le cas $\lambda > 0$ est représenté en noir, $\lambda < 0$ en bleu.

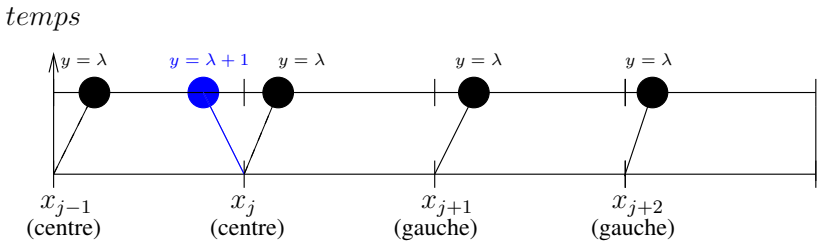


FIG. 3.14 – Configuration de deux blocs contigus d'indice nul et de type différent. Le premier est de type centré, le second gauche. Le cas $\lambda > 0$ est représenté en noir, $\lambda < 0$ en bleu.

bloc centré, $j+1$, est remaillée sur les points x_j, x_{j+1}, x_{j+2}. Les points x_{j-1}, x_{j-2}, ... sont donc "à l'intérieur" du bloc B_m et x_{j+2}, x_{j+3}, ... de B_{m+1}. Les schémas sont consistants en ces points d'après les propositions 3 et 4. La preuve consiste donc à montrer que les schémas obtenus aux points x_j et x_{j+1} sont également consistants.

Remarquons que lorsque les particules du bloc centré B_{m+1} possèdent la trajectoire dessinée en noir dans la figure 3.13 ($\lambda_k \geq 0, \quad k = j+1, j+2 \ldots$), les formules de remaillage Λ_2 et Λ_2^g sont équivalentes puisque $y \leq 0.5$. La situation est donc identique

à celle d'un seul bloc de type gauche, et les schémas en x_j, x_{j+1} sont consistants. Nous allons maintenant montrer que lorsque les particules de B_{m+1} possèdent les trajectoires dessinées en bleu dans la figure 3.13 ($\lambda_k \leq 0,\ \ k = j+1,\ j+2\ldots$) les poids recus par les points de grilles lors du remaillage sont les mêmes que dans la configuration précèdente (trajectoire en noir). La preuve sera alors terminée.

Utilisons pour cela deux remarques. Tout d'abord, $\alpha^{'}(\lambda+1) = \alpha(\lambda)$, $\beta^{'}(\lambda+1) = \beta(\lambda)$ et $\gamma^{'}(\lambda+1) = \gamma(\lambda)$. Ensuite, la valeur de y qui intervient dans les formules de remaillage (défini dans la figure 2.1 du chapitre 2) vérifie $y_j = (x_j + \Delta t\, a_j - x_{j-1})/\Delta x = \lambda_j + 1$ lorsque $\lambda_k \leq 0,\ \ k = j+1,\ j+2\ldots$ et $y_j = (x_j + \Delta t\, a_j - x_j)/\Delta x = \lambda_j$ lorsque $\lambda_k \geq 0$. Ainsi, en notant y_j^+ la valeur de y_j lorsque $\lambda_k \geq 0$ et y_j^- quand $\lambda_k \leq 0$, $\alpha^{'}(y_j^-) = \alpha(y_j^+)$, $\beta^{'}(y_j^-) = \beta(y_j^+)$ et $\gamma^{'}(y_j^-) = \gamma(y_j^+)$. En comparant la distribution des poids dans la figure 3.15, on en déduit que les schémas au point de grille seront les mêmes, que la vitesse des particules $j+1$, $j+2$, ... soit positive ou négative. Les schémas en x_j et x_{j+1} sont donc consistants.

Enfin, le cas où B_m est de type centré et B_{m+1} de type gauche (fig.3.14) se traite de la même manière.

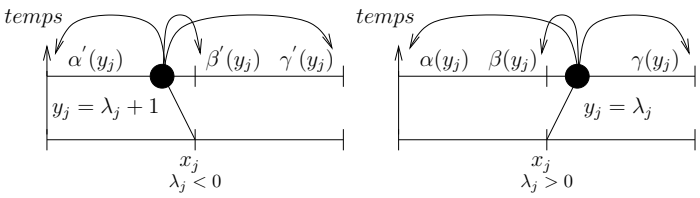


FIG. 3.15 – Les poids "reçus" sur les points de grilles x_{j-1}, x_j, x_{j+1} sont indépendant du signe de λ_i lorsque la particule j est remaillée par des formules Λ_2.

□

3.4.2 Cas de blocs contigus avec des indices différents

Il reste à traiter le cas où des blocs d'indice différents se suivent. Comme on l'a vu au début du chapitre, le remaillage n'est pas consistant pour les particules situées à la frontière de ces blocs. Considérons par exemple le premier cas étudié (figure 3.6) où λ change de signe. En supposant que le premier bloc se termine avec la particule j (et $y_{j-2} \leq 0.5$), alors cette situation représente le passage entre deux bloc de type gauche d'indice $N_m = -1$ et $N_{m+1} = 0$. Il a été montré qu'un remaillage Λ_2^g n'est pas consistant en x_j et x_{j+1} (3.14), alors qu'il doit être employé à l'intérieur des blocs d'après la proposition 3. Dans l'autre cas (figure 3.7), un remaillage Λ_2 n'est pas consistant (3.18) alors que les blocs sont centré d'indice $N_m = 0$ et $N_{m+1} = 1$ (si $a_{j-2} \leq 0$, et que le premier bloc fini avec la particule $j-1$).

L'étude qui suit a pour but de construire des formules de remaillage consistantes adaptées aux différentes configurations possibles. Huit cas sont à priori envisageables, suivant la variation de l'indice et du type de bloc. La proposition suivante permet de réduire le nombre de possibilités à six, schématisées dans les figures 3.16 à 3.21.

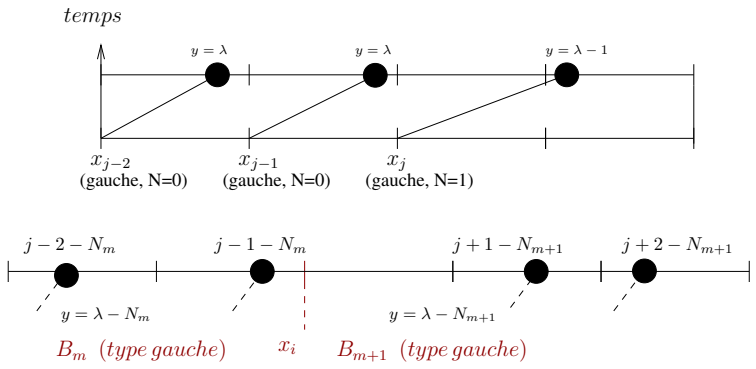


FIG. 3.16 – Configuration de deux blocs contigus de type gauche et d'indices respectifs N_m et $N_m + 1$. Le cas particulier où l'indice $N_m = 0$ est représenté sur la figure du haut.

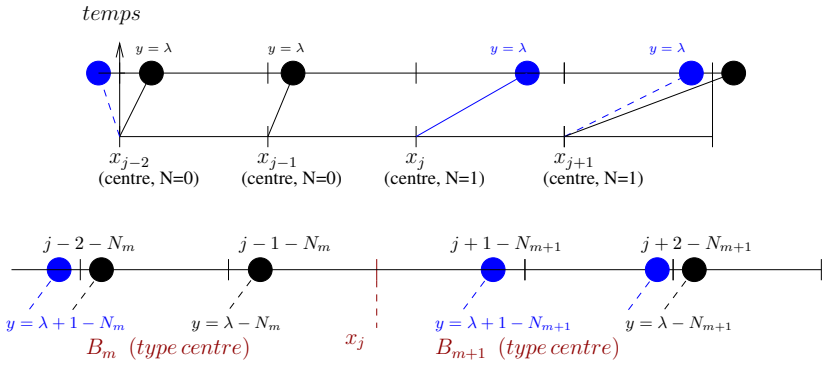


FIG. 3.17 – Configuration de deux blocs contigus de type centré et d'indices respectifs N_m et $N_m + 1$. Le cas particulier où l'indice $N_m = 0$ est représenté sur la figure du haut.

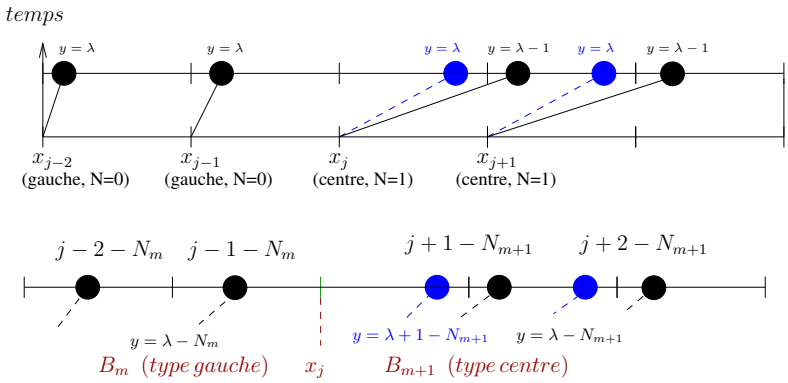


FIG. 3.18 – Configuration de deux blocs contigus de type gauche puis centré, d'indices respectifs N_m et $N_m + 1$. Le cas particulier où l'indice $N_m = 0$ est représenté sur la figure du haut.

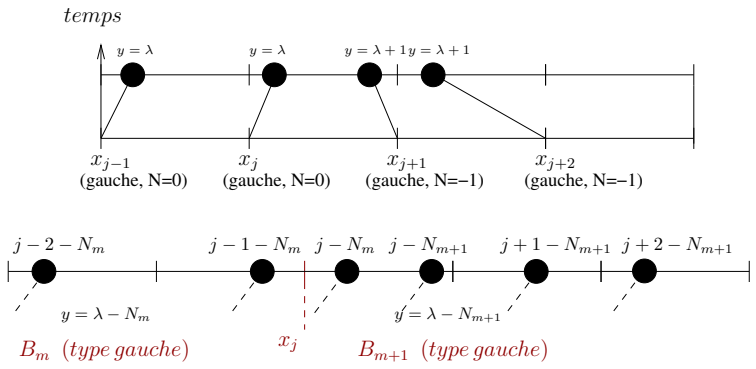


FIG. 3.19 – Configuration de deux blocs contigus de type gauche et d'indices respectifs N_m et $N_m - 1$. Le cas particulier où l'indice $N_m = 0$ est représenté sur la figure du haut.

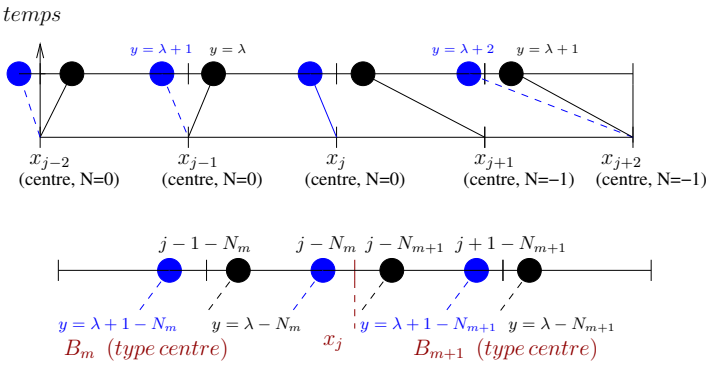


FIG. 3.20 – Configuration de deux blocs contigus de type centré et d'indices respectifs N_m et $N_m - 1$. Le cas particulier où l'indice $N_m = 0$ est représenté sur la figure du haut.

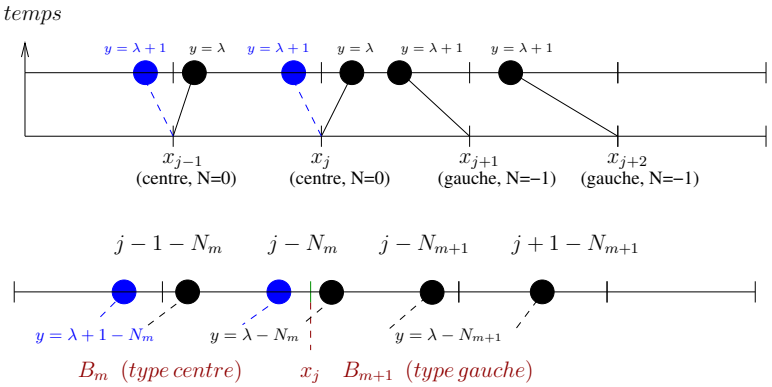


FIG. 3.21 – Configuration de deux blocs contigus de type centré puis gauche, d'indices respectifs N_m et $N_m - 1$. Le cas particulier où l'indice $N_m = 0$ est représenté sur la figure du haut.

Proposition 7. *Soient B_m et B_{m+1} deux blocs contigus, d'indice respectif N_m et N_{m+1}. Si B_m est de type centré et B_{m+1} de type gauche, alors $N_{m+1} - N_m \in \{-1, 0\}$. Si B_m est de type gauche et B_{m+1} de type centré, alors $N_{m+1} - N_m \in \{0, 1\}$.*

Preuve

Supposons que les blocs B_m et B_{m+1} sont respectivement de type gauche et centré. Alors, d'après (3.20) et (3.21),

$$\begin{array}{l} |\lambda_i - N_m - 1/2| \leq 1/2, \ \ \forall x_i \in B_m \\ |\lambda_i - N_{m+1}| \leq 1/2, \ \ \forall x_i \in B_{m+1} \\ . \end{array} \tag{3.38}$$

Or,

$$|N_m + 1/2 - N_{m+1}| \leq |N_m + 1/2 - \lambda_i| + |\lambda_{i+1} - N_{m+1}| + |\lambda_i - \lambda_{i+1}|, \tag{3.39}$$

donc $|N_m + 1/2 - N_{m+1}| < 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2$, d'où $N_m - N_{m+1} \in \{-1, 0\}$. De manière similaire, si B_m est un bloc de type centré et B_{m+1} de type gauche, on a

$$\begin{array}{ll} |N_m - 1/2 - N_{m+1}| & \leq |N_m - \lambda_i| + |\lambda_i - 1/2 - N_{m+1}| \\ & \leq 1/2 + 1/2, \end{array} \tag{3.40}$$

d'où $N_m - N_{m+1} \in 0, 1$.

□

Donnons une dernière proposition qui sera utile pour simplifier les formules de remaillages construites prochainement .

Proposition 8. *Soient B_m et B_{m+1} deux blocs contigus, d'indice respectif N_m et N_{m+1}. Soit p la dernière particule de B_m et $p+1$ la première de B_{m+1}.*

1. *Si $N_{m+1} = N_m - 1$, alors, soit B_{m+1} est de type gauche soit $\lambda_{p+1} = \Delta t\, a_{p+1}/\Delta x \geq N_{m+1}$.*
2. *Si $N_{m+1} = N_m + 1$, alors soit B_m est de type gauche soit $\lambda_p \geq N_m$.*

Preuve

Montrons tout d'abord le premier point. Si $N_{m+1} = N_m - 1$, d'après la proposition 7, soit B_{m+1} est de type gauche, soit B_m et B_{m+1} sont de type centrés. On se place dans ce dernier cas et on montre qu'alors $\lambda_{p+1} \geq N_{m+1}$.
$N_{m+1} = N_m - 1 < N_m$ donc

$$\lambda_{p+1} < \lambda_p \tag{3.41}$$

puisque les blocs sont centrés, et leur indice est donné par $N = [\lambda_{min}] + 1$ d'après la proposition 2. De plus, il a été vu dans la démonstration de cette proposition que la restriction sur le pas de temps (3.19) implique que

$$|\lambda_i - \lambda_j| < 1/2 \text{ si } |x_i - x_j| \leq M\, \Delta x. \tag{3.42}$$

On a alors d'après (3.41)

$$\lambda_p < \lambda_{p+1} + 1/2. \tag{3.43}$$

Raisonnons maintenant par l'absurde, en supposant que $\lambda_{p+1} < N_{m+1}$. Alors

$$\lambda_p < N_{m+1} + 1/2 = N_m - 1/2 < N_m.$$

Cette dernière inégalité est en contradiction avec le fait que B_m est de type gauche, car alors par définition

$$N_m \leq \lambda_k \leq N_{m+1} \; \forall \, x_k \in B_m.$$

On en conclut que $\lambda_{p+1} \geq N_{m+1}$, ce qui termine la preuve du premier point.

Le second point se montre de manière analogue. Si $N_{m+1} = N_m + 1$, d'après la proposition 7, soit B_m est de type gauche, soit B_m et B_{m+1} sont de type centrés. On se place dans ce dernier cas et on montre qu'alors $\lambda_p \geq N_m$.
$N_{m+1} > N_m$ donc $\lambda_{p+1} > \lambda_p$ et d'après (3.42) $\lambda_{p+1} < \lambda_p + 1/2$.
Raisonnons par l'absurde en supposant $\lambda_p < N_m$. Alors

$$\lambda_{p+1} \leq N_m + 1/2 = N_{m+1} - 1/2 < N_{m+1}. \tag{3.44}$$

Or, $p+1 \in B_{m+1}$, qui est un bloc de type gauche par hypothèse, donc $N_{m+1} \leq \lambda_{p+1} \leq N_{m+1} + 1$. Cette dernière inégalitée est en contradiction avec 3.44 donc $\lambda_p \geq N_m$, ce qui termine la preuve.

□

Les formules indiquées dans les propositions 3 et 4 sont consistantes pour remailler les particules de blocs contigus d'indice constant. Introduisons des formules de remaillage consistantes pour des blocs d'indice variables et résumons toutes ses formules en une seule notation.

Soit deux blocs contigus B_m et B_{m+1}, d'indice respectif N_m et N_{m+1}. Notons $p-n$ la première particule du bloc B_m, p la dernière, $p+1$ la première de B_{m+1} et $p+n$ la dernière. Soit α, β, γ, $\alpha^{'}$, $\beta^{'}$ et $\gamma^{'}$ les poids des formules Λ_2. On désigne par P[0] le poids distribué sur le premier point de grille à gauche de la particule remaillée, comme indiqué dans la figure 3.22. On appelle alors $\Lambda_{\tilde{\mathbf{2}}}$ les formules suivantes :

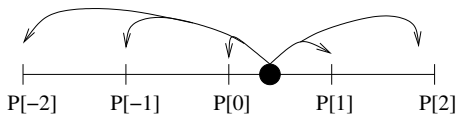


FIG. 3.22 – Notation permettant de répartir les poids de remaillage d'une particule sur ces points de grille voisin.

– **Particules à "l'intérieur" des blocs :**

  – Si B_m est de type gauche :
    les particules $p-n+1$, ..., $p-1$ sont remaillées par des formules Λ_2^g

  - Si B_m est de type centré :
    les particules $p-n+1$, ..., $p-1$ sont remaillées par des formules Λ_2

  - Si B_{m+1} est de type gauche :
    les particules $p+2$, ..., $p+n-1$ sont remaillées par des formules Λ_2^g

  - Si B_{m+1} est de type centré :
    les particules $p+2$, ..., $p+n-1$ sont remaillées par des formules Λ_2

- **Si $\mathbf{N_{m+1} = N_m}$:**

  - Si B_m est de type gauche : la particule p est remaillée par des formules Λ_2^g

  - Si B_m est de type centré : la particule p est remaillée par des formules Λ_2

  - Si B_{m+1} est de type gauche : la particule $p+1$ est remaillée par des formules Λ_2^g

  - Si B_{m+1} est de type centré : la particule $p+1$ est remaillée par des formules Λ_2

- **Si $\mathbf{N_{m+1} = N_m + 1}$:**

  - la particule p est remaillée par

$$\left\{\begin{array}{rl} P[-1] & = \alpha(y_p) = y_p\,(y_p-1)\,/2 \\ P[0] & = \beta(y_p) = 1-y_p^2 \\ P[1] & = \gamma(y_p) - \gamma(y_p-1) = y_p \\ P[2] & = \gamma(y_p-1) = y_p\,(y_p-1)\,/2 \end{array}\right. \tag{3.45}$$

  - la particule $p+1$ est remaillée par

$$\begin{cases} P[-2] &= \alpha(y_{p+1}+1) \\ &= y_{p+1}\left(y_{p+1}+1\right)/2 \\ P[-1] &= \alpha(y_{p+1}) - \alpha(y_{p+1}+1) \\ &= -y_{p+1} \\ P[0] &= \beta(y_{p+1}) \\ &= 1 - y_{p+1}^2 \\ P[1] &= \gamma(y_{p+1}) \\ &= y_{p+1}\left(y_{p+1}+1\right)/2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{,si } B_{m+1} \text{ est de type gauche ou} \\ \text{si } B_{m+1} \text{ est de type centré et } y_{p+1} \leq 0.5 \end{array}$$

$$\begin{cases} P[-1] &= \alpha^{'}(y_{p+1}+1) \\ &= y_{p+1}\left(y_{p+1}-1\right)/2 \\ P[0] &= \alpha^{'}(y_{p+1}) - \alpha^{'}(y_{p+1}+1) \\ &= 1 - y_{p+1} \\ P[1] &= \beta^{'}(y_{p+1}) \\ &= y_{p+1}\left(2-y_{p+1}\right) \\ P[2] &= \gamma^{'}(y_{p+1}) \\ &= y_{p+1}\left(y_{p+1}-1\right)/2 \end{cases} \quad \text{,si } B_{m+1} \text{ est de type centré et } y_{p+1} > 0.5 \tag{3.46}$$

- **Si $\mathbf{N_{m+1} = N_m - 1}$:**
  - la particule p est remaillée par

$$\begin{cases} P[-1] &= \alpha(y_p) \\ &= y_p\left(y_p-1\right)/2 \\ P[0] &= \beta(y_p) + \gamma(y_p) \\ &= 1 - y_p\left(y_p-1\right)/2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{,si } B_m \text{ est de type gauche ou} \\ \text{si } B_m \text{ est de type centré et } y_p \leq 0.5 \end{array}$$

$$\begin{cases} P[0] &= \alpha^{'}(y_p) \\ &= \left(y_p-1\right)\left(y_p-2\right)/2 \\ P[1] &= \beta^{'}(y_p) + \gamma^{'}(y_p) \\ &= -y_p\left(y_p-3\right)/2 \end{cases} \quad \text{,si } B_m \text{ est de type centré et } y_p > 0.5 \tag{3.47}$$

  - la particule $p+1$ est remaillée par

$$\begin{cases} P[0] &= \alpha(y_{p+1}) + \beta(y_{p+1}) = 1 - y_{p+1}\left(y_{p+1}+1\right)/2 \\ P[1] &= \gamma(y_{p+1}) = y_{p+1}\left(y_{p+1}+1\right)/2 \end{cases} \tag{3.48}$$

Proposition 9. *Les formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{2}}$ sont consistantes.*

Preuve

La preuve se fait en deux parties. La première présente la méthode générale permettant de construire les formules remaillant les particules situées à l'extrémité des blocs. La seconde prouve que les schémas obtenus sur les points de grilles sont consistants.

Construction des formules de remaillage consistantes

Notons x_j le point de grille situé entre les particules p et $p+1$, où voisin à celui-ci dans certains cas. Il est indiqué dans les figures 3.16 à 3.21. Des formules Λ_2 ou Λ_2^g sont utilisées à l'intérieur des blocs. L'objectif est alors de trouver des formules adéquates pour remailler les particules p et $p+1$. (Dans le cas d'un remaillage par des formules Λ_4/Λ_4^g on s'autorisera à modifier le remaillage des particules $p-1$, p, $p+1$ et $p+2$). L'idée est de calculer les poids tels que les schémas aux points de grilles différents de x_j soient consistants. Il est par exemple possible de choisir ceux étudiés en 3.4.1 , correspondants à des blocs possédant la même constante N. Les seuls poids qui reste à determiner sont ceux affectés au point de grille x_j. Ils sont calculés de manière à satisfaire la condition de conservation c'est à dire tel que la somme des poids de remaillage d'une particule soit égal à un. Notons que le schéma obtenu au point x_j n'a aucune raison d'être identique à ceux des autres points, on vérifie qu'il est consistant, même si la précision est dégradée.

Prenons un exemple pour illustrer le raisonnement précédent. Considérons deux blocs de type gauche d'indice $N_m = 0$ pour le premier et $N_{m+1} = 1$ pour le second. Cet exemple est illustré en haut de la figure 3.16. L'idée est donc d'optenir, après l'étape de remaillage, un schéma aux points x_{j-1}, x_{j-2}, ... identique à celui obtenu si $N_{m+1} = 0$. De même, celui aux points x_{j+1}, x_{j+2}, ... doit être celui que l'on obtiendrait si $N_m = 1$. Suppposons que $N_{m+1} = N_m = 0$, le schéma obtenu aux points x_k, $k = j-1$, $j-2$, ... est le suivant :

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= \gamma(y_{k-1})\, u_{k-1}^n + \beta(y_k)\, u_k^n + \alpha(y_{k+1})\, u_{k+1}^n \\ &= \gamma(\lambda_{k-1})\, u_{k-1}^n + \beta(\lambda_k)\, u_k^n + \alpha(\lambda_{k+1})\, u_{k+1}^n. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Si maintenant $N_m = N_{m+1} = 1$, le schéma aux points x_k, $k = j+1$, $j+2$, ... est celui-ci :

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= \gamma(y_{k-2})\, u_{k-2}^n + \beta(y_{k-1})\, u_{k-1}^n + \alpha(y_k)\, u_k^n \\ &= \gamma(\lambda_{k-2} - 1)\, u_{k-2}^n + \beta(\lambda_{k-1} - 1)\, u_{k-1}^n + \alpha(\lambda_k - 1)\, u_k^n. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Sachant que les particules situées à l'intérieur des blocs sont remaillées par des formules Λ_2^g, il est facile de trouver les poids des particules $j-1$ et j s'appliquant aux points de grilles autres que x_j. Une attention doit être portée sur le fait que la dépendance de y en fonction de λ peut varier en fonction des blocs. Dans le cas considéré (fig. 3.16) $y_k = \lambda_k$ pour $k = j$, $j-1$, ... alors que $y_k = \lambda_k + 1$ pour $k = j+1$, $j+2$, ... D'après (3.49), le point x_{j-2} doit recevoir un poids $\alpha(\lambda_{j-1} = y_{j-1})$ de la particule $j-1$. Le point x_{j-1} doit recevoir un poids $\beta(\lambda_{j-1} = y_{j-1})$ de la particule $j-1$ et $\alpha(\lambda_j = y_j + 1)$ de la particule j. D'après (3.50), le point x_{j+1} doit recevoir un poids $\gamma(\lambda_{j-1} - 1 = y_{j-1} - 1)$ de la particule $j-1$ et un poids $\beta(\lambda_j - 1 = y_j)$ de j. Enfin le point x_{j+2} doit recevoir le poids $\gamma(\lambda_j - 1 = y_j)$ de la particule j. En résumé, la particule $j-1$ est remaillée avec les poids $\alpha(y_j)$, $\beta(y_j)$ et $\gamma(y_j - 1)$ sur les points x_{j-2}, x_{j-1}, x_{j+1}. Son poids sur le points x_j est alors déterminé pour satisfaire la propriété de conservation, c'est à dire $1 - \alpha(y_j) - \beta(y_j) - \gamma(y_j - 1) = \gamma(y_j) - \gamma(y_j - 1)$. De même, la particule j est remaillée avec les poids $\alpha(y_j + 1)$, $\alpha(y_j) - \alpha(y_j + 1)$, $\beta(y_j)$ et $\gamma(y_j)$ sur les points de grille x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}.

Ce raisonnement ce généralise aux six cas possibles, schématisés dans les figures 3.16 à 3.21. Les formules de remaillage des particules situées aux extrémités de blocs d'indice

différents sont données dans les tableaux 3.1 et 3.2. Une colonne représente une particule donnée et ses poids de remaillages. La propriété de conservation est vérifiée puisque la somme des coefficients d'une colonne est égal à un, en particulier pour celles de part et d'autre de la double barre séparant les blocs. De plus, les lignes donnent les schémas obtenus sur les points de grille après remaillage des particules. La deuxième partie de la preuve consiste à vérifier leur consistence.

Indice	N_m					$N_{m+1} = N_m + 1$					
Part.	$j-3$ $-N_m$		$j-2$ $-N_m$		$j-1$ $-N_m$	$j+1$ $-N_{m+1}$		$j+2$ $-N_{m+1}$		$j+3$ $-N_{m+1}$	
	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$
y=	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda + 1 - N_{m+1}$	$\lambda - N_{m+1}$	$\lambda + 1 - N_{m+1}$	$\lambda - N_{m+1}$	$\lambda + 1 - N_{m+1}$	$\lambda - N_{m+1}$
x_{j-2}	$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$	$\beta'(y)$	$\beta(y)$	$\alpha(y)$						
x_{j-1}			$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$	$\beta(y)$	$\alpha'(y+1)$	$\alpha(y+1)$				
x_j					$\gamma(y)-\gamma(y-1)$	$\alpha'(y)-\alpha'(y+1)$	$\alpha(y)-\alpha(y+1)$				
x_{j+1}					$\gamma(y-1)$	$\beta'(y)$	$\beta(y)$	$\alpha'(y)$	$\alpha(y)$		
x_{j+2}						$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$	$\beta'(y)$	$\beta(y)$	$\alpha'(y)$	$\alpha(y)$

TAB. 3.1 – Construction des formules de remaillage des particules de blocs consécutifs d'indices N_m et $N_m + 1$. Les colonnes représentent les formules de remaillage associées aux particules en fonction du type de bloc et de la valeur de λ. Les lignes fournissent les schémas aux points de grilles correspondants. On a noté $(\star)$ la condition $\{\lambda <$indice et le bloc est de type centré$\}$ et $(\star\star)$ celle $\{\lambda >$indice ou le bloc est de type gauche$\}$.

Remarque 8. *Deux colonnes ont été supprimées dans les tableaux 3.1 et 3.2 grâce à la proposition 8. En effet,*

- *Lorsque $N_{m+1} = N_m+1$, le cas B_m de type centré et $\lambda_{i-1-N_m} < N_m$ est impossible.*
- *Lorsque $N_{m+1} = N_m - 1$, le cas B_{m+1} de type centré et $\lambda_{i-N_{m+1}} < N_{m+1}$ est impossible.*

Consistance des formules de remaillage

Lorsque les indices des blocs sont tels que $N_{m+1} = N_m + 1$, le schéma obtenu au point

Indice	N_m						$N_{m+1} = N_m - 1$				
Part. Part.	$i-2$ $-N_m$		$i-1$ $-N_m$		i $-N_m$		i $-N_{m+1}$	$i+1$ $-N_{m+1}$		$i+2$ $-N_{m+1}$	
	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$
y=	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda - N_{m+1}$	$\lambda + 1 - N_{m+1}$	$\lambda - N_{m+1}$	$\lambda + 1 - N_{m+1}$	$\lambda - N_{m+1}$
x_{i-1}	$\gamma^{'}(y)$	$\gamma(y)$	$\beta^{'}(y)$	$\beta(y)$	$\alpha^{'}(y)$	$\alpha(y)$					
x_i			$\gamma^{'}(y)$	$\gamma(y)$	$\beta^{'}(y)+\gamma^{'}(y)$	$\beta(y)+\gamma(y)$	$\alpha(y)+\beta(y)$	$\alpha^{'}$	$\alpha(y)$		
x_{i+1}							$\gamma(y)$	$\beta^{'}(y)$	$\beta(y)$	$\alpha^{'}(y)$	$\alpha(y)$

TAB. 3.2 – Construction des formules de remaillage des particules de blocs consécutifs d'indices N_m et $N_m - 1$. Les colonnes représentent les formules de remaillage associées aux particules en fonction du type de bloc et de la valeur de λ. Les lignes fournissent les schémas aux points de grilles correspondants. On a noté $(\star)$ la condition $\{\lambda <$indice et le bloc est de type centré$\}$ et $(\star\star)$ celle $\{\lambda >$indice ou le bloc est de type gauche$\}$.

x_j est donné dans la ligne correspondante du tableau 3.1 :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & \left(\gamma(y) - \gamma(y-1)\right)\big|_{y=\lambda_{j-1-N_m}-N_m} u_{j-1-N_m} \\ & + \left[\left(\alpha(y) - \alpha(y+1)\right)\big|_{y=\lambda_{j+1-N_{m+1}}} - N_{m+1}\right] u_{j+1-N_{m+1}} \\ = & \left(\lambda_{j-1-N_m} - N_m\right) u_{j-1-N_m} + \left(1 + N_m - \lambda_{j-N_m}\right) u_{j-N_m}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

Notons $N = N_m$, et effectuons un developpement de Taylor en j de u et au, u_j^{n+1} vérifie :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & -N\left[u_j - (N+1)\,\Delta x\,\partial_x u_j + O\left(\Delta x^2\right)\right] + (1+N)\left[u_j - N\,\Delta x\,\partial_x u_j + O\left(\Delta x^2\right)\right] \\ & + \tfrac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\left[a_j u_j - (N+1)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j u_j\right)\right] - \left[a_j u_j - N\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j u_j\right)\right] + O\left(\Delta x^2\right)\right\} \\ = & \; u_j - \Delta t\,\partial_x\left(a_j u_j\right) + O\left(\Delta x^2 + \Delta t\,\Delta x\right). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Le schéma (3.51) est donc consistant avec l'équation (3.3).

Remarque 9. *Ce schéma est aussi obtenu dans les blocs de type gauche en remaillant les particules par des formules* Λ_1 *.*

Si les particules sont advectées par un schéma de Runge-Kutta 2, on obtient en injectant l'expression de a (3.31) dans (3.52) :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & \; u_j - \Delta t\,\partial_x\left(a_j u_j\right) - N\,(N+1)\,\tfrac{\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx} u_j + \tfrac{(2N+1)}{2}\,\partial^2_{xx}(a_j\,u_j)\,\Delta t\,\Delta x \\ & + \tfrac{\Delta t^2}{2}\left[-\partial_x\left(a_j u_j \partial_x a_j + u_j \partial_t a_j\right) + \tfrac{(2N+1)}{2}\partial x x^2\left(a_j u_j \partial_x a_j + u_j \partial_t a_j\right)\Delta x\right] \\ & + O\left(\Delta x^3 + \Delta t\,\Delta x^2\right). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Remarquons que ce schéma est seulement d'ordre un en temps.

Lorsque $N_{m+1} = N_m - 1$, le schéma au point x_j est différent de (3.51). D'après le tableau 3.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= \gamma(y_{j-1-N_m})u^n_{j-1-N_m} + \left[\beta(y_{j-N_m}) + \gamma(y_{j-N_m})\right] u^n_{j-N_m} \\
&+ \left[\alpha(y_{j-N_{m+1}}) + \beta(y_{j-N_{m+1}})\right] u^n_{j-N_{m+1}} + \alpha(y_{j+1-N_{m+1}})u^n_{j+1-N_{m+1}} \\
&= \gamma(\lambda_{j-1-N_m} - N_m)u^n_{j-1-N_m} + \left[\beta(\lambda_{j-N_m} - N_m) + \gamma(\lambda_{j-N_m} - N_m)\right] u^n_{j-N_m} \\
&+ \left[\alpha(\lambda_{j-N_{m+1}} - N_{m+1}) + \beta(\lambda_{j-N_{m+1}} - N_{m+1})\right] u^n_{j-N_{m+1}} \\
&+ \alpha(\lambda_{j+1-N_{m+1}} - N_{m+1})u^n_{j+1-N_{m+1}} \\
&= \left[1/2\,\lambda^2_{j-1-N_m} + \lambda_{j-1-N_m}\,(1/2 - N_m) + 1/2\,N_m\,(N_m - 1)\right] u^n_{j-1-N_m} \\
&+ \left[-1/2\,\lambda^2_{j-N_m} + \lambda_{j-N_m}\,(N_m + 1/2) - 1/2\,N_m\,(1 + N_m) + 1\right] u^n_{j-N_m} \\
&+ \left[-1/2\,\lambda^2_{j-N_{m+1}} + \lambda_{j-N_{m+1}}\,(N_{m+1} - 1/2) + 1/2\,N_{m+1}\,(1 - N_{m+1}) + 1\right] u^n_{j-N_{m+1}} \\
&+ \left[1/2\,\lambda^2_{j+1-N_{m+1}} - \lambda_{j+1-N_{m+1}}\,(1/2 + N_{m+1}) + 1/2\,N_{m+1}\,(N_{m+1} + 1)\right] u^n_{j+1-N_{m+1}},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

D'où par des développements de Taylor, en notant $N = N_m$, u_j^{n+1} vérifie :

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} = \quad & \tfrac{1}{2}N(N-1)\left[u_j - (1+N)\,\Delta x\,\partial_x u_j\right] \\
& + \left(1 - \tfrac{1}{2}\,N\,(N+1)\right)\left[u_j - N\,\Delta x\,\partial_x u_j\right] \\
& + \left(1 - \tfrac{1}{2}\,(N-1)\,(N-2)\right)\left[u_j + (1-N)\,\Delta x\,\partial_x u_j\right] \\
& + \tfrac{1}{2}\,N\,(N-1)\left[u_j + (2-N)\,\Delta x\,\partial_x u_j\right] + O\left(\Delta x^2\right) \\
+\tfrac{\Delta t}{\Delta x} \quad & \Big\{\left(\tfrac{1}{2} - N\right)\left[a_j u_j - (1+N)\,\Delta x\,\partial_x\,(a_j u_j)\right] \\
& + \left(\tfrac{1}{2} + N\right)\left[a_j u_j - N\,\Delta x\,\partial_x\,(a_j u_j)\right] \\
& - \left(N - \tfrac{3}{2}\right)\left[a_j u_j + (1-N)\,\Delta x\,\partial_x\,(a_j u_j)\right] \\
& - \left(N - \tfrac{1}{2}\right)\left[a_j u_j + (2-N)\,\Delta x\,\partial_x\,(a_j u_j)\right]\Big\} + O\left(\Delta t\,\Delta x\right) \\
+\tfrac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \quad & \Big\{\tfrac{1}{2}\left[a_j^2 u_j - (1+N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2 u_j\right)\right] \\
& - \tfrac{1}{2}\left[a_j^2 u_j - N\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2 u_j\right)\right] \\
& - \tfrac{1}{2}\left[a_j^2 u_j + (1-N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2 u_j\right)\right] \\
& + \tfrac{1}{2}\left[a_j^2 u_j + (2-N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2 u_j\right)\right]\Big\} + O\left(\Delta t^2\right).
\end{aligned} \tag{3.55}$$

D'où après simplifications,

$$u_j^{n+1} = u_j - \Delta t\,\partial_x\,(a_j u_j) + O\left(\Delta t\,\Delta x + \Delta t^2 + \Delta x^2\right), \tag{3.56}$$

et le schéma (3.54) est consistant avec l'équation (3.3).

Il est possible de montrer en poussant les développements à l'ordre trois que la constante en Δx^2 est non nulle et que celle en Δt^2 est $\partial^2_{xx}\left(a_j^2 u_j\right)$. Le schéma est donc seulement d'ordre un en temps et en espace, même si les particules sont advectées par un schéma d'ordre élevé (il manque un facteur 1/2 dans la constante en Δt^2 d'aprés

(3.33)). La précision de la solution est dégradée aux points de grilles situés entre deux blocs d'indice différents.

□

3.4.3 Critère de choix de la taille des blocs

Dans les études précédentes la longeur des bloc $M\,\Delta x$ était supposée grande, de manière à ce que la méthode de correction des formules de remaillage (section 3.4) soit applicable. Un intérêt est porté ici sur le choix de la longueur des blocs. En raison de la condition (3.19) qui contraint le pas de temps en fonction du gradient de vitesse et de la longueur M, l'objectif est d'utiliser des pas de temps aussi grand que possible, et donc des tailles de blocs $M\,\Delta x$ petites.

Proposition 10. *Les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ sont consistantes si $M \geq 1$, c'est à dire si chaque bloc possède au moins deux particules.*

Preuve

Vérifions que dans le cas le plus contraignant, c'est à dire lorsque $M = 1$, le schéma obtenu après remaillage en tout point de grille est consistant. On procède en examinant tous les schémas qu'il est possible d'obtenir lorsque les particules sont regroupées en bloc de deux et remaillées par les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$. Ces cas sont résumés dans le tableau 3.3, où les différentes variation d'indices sont différentiées par plusieurs couleurs. Seuls les coefficients sans prime ont été utilisés, puisqu'il est toujours possible de se ramener à ce cas.

Trois schémas de grilles sont obtenus, et sont ceux qui on déjà été étudiés. Ils sont consistants d'après les propositions 3 et 9. On les rappelle ci-dessous :

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= [\gamma(y)-\gamma(y-1)]|_{y=\lambda-N}\ u_{j-1-N}^n + [\alpha(y)-\alpha(y+1)]|_{y=\lambda-N-1}\ u_{j-N}^n \\
u_j^{n+1} &= \gamma(y)|_{y=\lambda-N}\ u_{j-2-N}^n + [\beta(y)+\gamma(y)]|_{y=\lambda-N}\ u_{j-1-N}^n \\
&\quad + [\alpha(y)+\beta(y)]|_{y=\lambda-N+1}\ u_{j-N}^n + [\alpha(y)]|_{y=\lambda-N+1}\ u_{j+1-N}^n \\
u_j^{n+1} &= \gamma(y)|_{y=\lambda-N}\ u_{j-1-N}^n + \beta(y)|_{y=\lambda-N}\ u_{j-N}^n + \alpha(y)|_{y=\lambda-N}\ u_{j+1-N}^n.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

indice	$-2/\ 0/\ 0/\ 2$		$-1/\ 1/$		0		$-1/\ 1$		$2/\ 0/\ 0/\ -2$	
Part.	$j-6$	$j-5$	$j-4$	$j-3$	$j-2$	$j-1$	j	$j+1$	$j+2$	$j+3$
y=		$\lambda + 2/\ \lambda/\ \lambda/\ 2$	$\lambda + 1/\ \lambda + 1/\ \lambda - 1/\ \lambda - 1$	$\lambda + 1/\ \lambda - 1$	$\lambda/\ \lambda$	$\lambda/\ \lambda$	$\lambda + 1/\ \lambda - 1$	$\lambda - 1/\ \lambda - 1/\ \lambda + 1/\ \lambda + 1$	$\lambda - 2/\ \lambda/\ \lambda/\ 2$	$\lambda +$
j-5	$\gamma(\lambda)$	$\gamma(y-1)\ \beta(y) + \gamma(y)$	$\beta(y)\ \alpha(y) + \beta(y)$	$\alpha(y)$						
j-4			$\gamma(y)\ \gamma(y)$	$\beta(y)$	$\alpha(y+1)$					
j-3	$\gamma(\lambda-2)$	$\gamma(y-1)\ \beta(y) + \gamma(y)$	$\beta(y)\ \alpha(y) + \beta(y)$	$\gamma(y) - \gamma(y-1)\ \alpha(y)$	$\alpha(y) - \alpha(y+1)$					
j-2			$\gamma(y)\ \gamma(y)$	$\gamma(y-1)\ \beta(y) + \gamma(y)$	$\beta(y)\ \alpha(y) + \beta(y)$	$\alpha(y)\ \alpha(y)$				
j-1					$\gamma(y)\ \gamma(y)$	$\beta(y) + \gamma(y)\ \beta(y)$	$\alpha(y) + \beta(y)\ \alpha(y+1)$	$\alpha(y)\ \alpha(y)$		
j						$\gamma(y) - \gamma(y-1)$	$\gamma(y)\ \alpha(y) - \alpha(y+1)$	$\beta(y)\ \beta(y) + \gamma(y)$	$\alpha(y+1)\ \alpha(y) + \beta(y)$	$\alpha(\lambda+2)$
j+1						$\gamma(y-1)$	$\beta(y)$	$\alpha(y)\ \alpha(y)$		
j+2							$\gamma(y)$	$\beta(y)\ \beta(y) + \gamma(y)$	$\alpha(y+1)\ \alpha(y) + \beta(y)$	$\alpha(\lambda)$

TAB. 3.3 – Schémas de grille obtenus par remaillage des particules de blocs gauches et de taille Δx. Plusieurs variations d'indices sont représentés dans le même tableau, par des couleurs différentes.

□

D'après la proposition précédente, il est possible de choisir des blocs constitués uniquement de deux particules. Ce choix est intéressant en raison de la contrainte (3.19) sur le pas de temps. Cependant, le choix d'une longueur de bloc $M = \Delta x$ n'est pas toujours optimal. En effet les corrections entre les blocs créent des schémas dégradant localement la solution d'un ordre de précision. Or si les blocs sont plus nombreux il peut exister plus de points de grille où la précision de la solution est dégradée. La figure 3.23 donne un exemple ou un point de grille sur deux est d'ordre 1 si les blocs sont de taille Δx, alors que les schémas sont d'ordre 2 en tout points si les blocs contiennent une particule de plus. Cet exemple se généralise. Si on considère par exemple trois particules satisfaisant

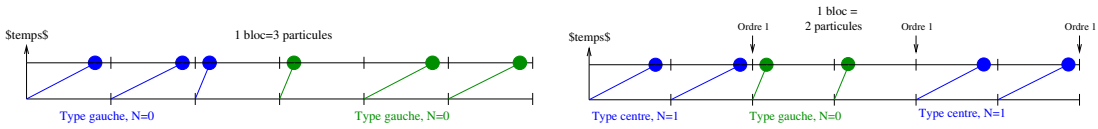


FIG. 3.23 – Deux configurations sont représentés pour la même position des particules mais des tailles de blocs différentes. Des blocs de taille deux necessitent une correction des formules de remaillage qui est évitée pour des blocs de taille trois.

$0 < \lambda < 1/2$, suivi de trois autres vérifiant $1/2 < \lambda < 1$ et ainsi de suite, si $M = 3$ tous les blocs seront de type gauche d'indice nul. Les schémas seront alors d'ordre 2 pour tout les points de grille. Mais si les blocs sont de taille $2\,\Delta x$, ils seront alternativement de type centré d'indice 1 et gauche d'indice nul ce qui entraine un point de grille sur trois d'ordre un du à la correction de consistance des formules de remaillage .

3.4.4 Schéma de remaillage d'ordre 4

L'étude précédente a montré que la modification des formules de remaillage Λ_2 et Λ_2^g pour les rendre consistantes pour des nombres de CFL élevés, mène à des schémas d'ordre 1 en certains points de grille. Pour monter en ordre nous considérons ici des formules de remaillage conservant les 4 premiers moments, donnant des schémas d'ordre 4 sur la majorité des points de grille et réduits à l'ordre 3 lorsque les formules doivent être modifiées.

La méthodologie de remaillage est la même que celle détaillée précédement. Les particules sont regroupées en bloc de la même manière que pour un remaillage d'ordre deux (la méthode de construction est donnée dans la proposition 2). Les formules de remaillage utilisent un nombre de points plus grand, ce qui rend necessaire de considérer des blocs de taille plus grande que précèdemment. On imposera $M \geq 2$. Le cas particulier $M = 2$ nécessite d'apporter une modification sur les formules de remaillage qui sera détaillée à la fin de la section.

Si une particule appartient à un bloc de type centré, elle sera remaillée par une formule Λ_4 dont les poids sont donnés ci-dessous. Leur répartition sur les points de grille est explicitée dans la figure 3.24.

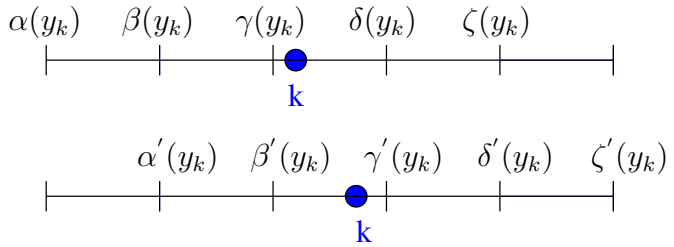


FIG. 3.24 – Répartition des poids de remaillage Λ_4 sur les points de grille adjacents à la particule remaillée.

$$\text{si } y \leq 1/2, \quad \begin{cases} \alpha(y) = (y-2)(y-1)y(y+1)/24 \\ \beta(y) = -(y-2)(y-1)y(y+2)/6 \\ \gamma(y) = (y-2)(y-1)(y+1)(y+2)/4 \\ \delta(y) = -(y-2)y(y+1)(y+2)/6 \\ \zeta(y) = (y-1)y(y+1)(y+2)/24 \end{cases}$$

$$\text{sinon}, \quad \begin{cases} \alpha'(y) = \alpha(y-1) \\ \beta'(y) = \beta(y-1) \\ \gamma'(y) = \gamma(y-1) \\ \delta'(y) = \delta(y-1) \\ \zeta'(y) = \zeta(y-1). \end{cases} \tag{3.58}$$

De la même manière qu'à l'ordre 2, des formules Λ_4^g sont construites en utilisant les formules Λ_4 correspondant à $y \leq 1/2$ mais indépendamment de la position de la particule, c'est à dire $\forall y \in [0,1]$. Elles sont utilisées pour remailler les particules appartenant à des bloc de type gauche.

Concernant le remaillage des particules appartenant aux extrémités des blocs (les deux premières et deux dernières), aucune modification des formules n'est necessaire lorsque deux blocs sucessifs sont de même indice. Dans le cas contraire, les formules utilisées sont modifiées. La méthodologie employée est identique au cas de l'ordre 2, et permet de construire les tableaux 3.4 et 3.5. On peut ensuite en déduire les formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{4}}$ explicitées ci dessous.

Soient B_m et B_{m+1} deux blocs contigus d'indices différents et p la dernière particule du bloc B_m. On utilise une fois de plus la notation de la figure 3.22 explicitant la répartition des poids de remaillage. Lorsque l'indice des blocs est croissant ($N_{m+1} =$

Indice	N_m					$N_{m+1} = N_m + 1$					
Part. Part.	$j-3$ $-N_m$		$j-2$ $-N_m$		$j-1$ $-N_m$	$j+1$ $-N_{m+1}$		$j+2$ $-N_{m+1}$		$j+3$ $-N_{m+1}$	
	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$
y=	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda - 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda - 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda - 1 - N_m$
x_{j-5}	$\alpha'(y)$	$\alpha(y)$									
x_{j-4}	$\beta'(y)$	$\beta(y)$	$\alpha'(y)$	$\alpha(y)$							
x_{j-3}	$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$	$\beta'(y)$	$\beta(y)$	$\alpha(y)$						
x_{j-2}	$\delta'(y)$	$\delta(y)$	$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$	$\beta(y)$	$\alpha'(y+1)$	$\alpha(y+1)$				
x_{j-1}	$\zeta'(y)$	$\zeta(y)$	$\delta'(y)$	$\delta(y)$	$\gamma(y)$	$\beta'(y+1)$	$\beta(y+1)$	$\alpha'(y+1)$	$\alpha(y+1)$		
x_j			$\zeta'(y) - \zeta'(y-1)$	$\zeta(y) - \zeta(y-1)$	$\delta(y) - \delta(y-1) + \zeta(y) - \zeta(y-1)$	$\alpha'(y) - \alpha'(y+1) + \beta'(y) - \beta'(y+1)$	$\alpha(y) - \alpha(y+1) + \beta(y) - \beta(y+1)$	$\alpha'(y) - \alpha'(y+1)$	$\alpha(y) - \alpha(y+1)$		
x_{j+1}			$\zeta'(y-1)$	$\zeta(y-1)$	$\delta(y-1)$	$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$	$\beta'(y)$	$\beta(y)$	$\alpha'(y)$	$\alpha(y)$
x_{j+2}					$\zeta(y-1)$	$\delta'(y)$	$\delta(y)$	$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$	$\beta'(y)$	$\beta(y)$
x_{j+3}						$\zeta'(y)$	$\zeta(y)$	$\delta'(y)$	$\delta(y)$	$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$
x_{j+4}								$\zeta'(y)$	$\zeta(y)$	$\delta'(y)$	$\delta(y)$
x_{j+5}										$\zeta'(y)$	$\zeta(y)$

TAB. 3.4 – Construction des formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{4}}$, cas de blocs contigus d'indices croissants : $N_{m+1} = N_m + 1$. Les colonnes représentent les formules de remaillage associées aux particules en fonction du type de bloc et de la valeur de λ. Les lignes fournissent les schémas aux points de grilles correspondants. Les poids de la ligne x_j sont déduits de la condition de conservation (somme des poids égale à un). On a noté $(\star)$ la condition $\{\lambda <$indice et le bloc est de type centré$\}$ et $(\star\star)$ celle $\{\lambda >$indice ou le bloc est de type gauche$\}$.

$N_m + 1$), la particule $p-1$ est remaillée par :

$$\begin{cases} P[-2] &= \alpha(y_{p-1}) \\ P[-1] &= \beta(y_{p-1}) \\ P[0] &= \gamma(y_{p-1}) \\ P[1] &= \delta(y_{p-1}) \\ P[2] &= \zeta(y_{p-1}) - \zeta(y_{p-1}-1) \\ P[3] &= \zeta(y_{p-1}-1) \end{cases} \quad \text{,si } B_m \text{ est de type gauche ou si } B_m \text{ est de type centré et } y_{p-1} \leq 1/2,$$

$$\begin{cases} P[-1] &= \alpha'(y_{p-1}) \\ P[0] &= \beta'(y_{p-1}) \\ P[1] &= \gamma'(y_{p-1}) \\ P[2] &= \delta'(y_{p-1}) \\ P[3] &= \zeta'(y_{p-1}) - \zeta'(y_{p-1}-1) \\ P[4] &= \zeta'(y_{p-1}-1) \end{cases} \quad \text{,si } B_m \text{ est de type centré et } y_{p-1} > 1/2. \tag{3.59}$$

Indice	N_m						$N_{m+1} = N_m - 1$				
Part. Part.	$j-2$ $-N_m$		$j-1$ $-N_m$		j $-N_m$		j $-N_{m+1}$	$j+1$ $-N_{m+1}$		$j+2$ $-N_{m+1}$	
	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star)$	$(\star\star)$
y=	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda - N_m$	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda + 2 - N_m$	$\lambda + 1 - N_m$	$\lambda + 2 - N_m$	$\lambda + 1 - N_m$
x_{j-4}	$\alpha'(y)$	$\alpha(y)$									
x_{j-3}	$\beta'(y)$	$\beta(y)$	$\alpha'(y)$	$\alpha(y)$							
x_{j-2}	$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$	$\beta'(y)$	$\beta(y)$	$\alpha'(y)$	$\alpha(y)$					
x_{j-1}	$\delta'(y)$	$\delta(y)$	$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$	$\beta'(y)$	$\beta(y)$	$\alpha(y-1)$				
x_j	$\zeta'(y)$	$\zeta(y)$	$\delta'(y)+\zeta'(y)$	$\delta(y)+\zeta(y)$	$\gamma'(y)+\delta'(y)-\delta'(y+1)+\zeta'(y)$	$\gamma(y)+\delta(y)-\delta(y+1)+\zeta(y)$	$\alpha(y)-\alpha(y-1)+\beta(y)+\gamma(y)$	$\alpha'(y)+\beta'(y)$	$\alpha(y)+\beta(y)$	$\alpha'(y)$	$\alpha(y)$
x_{j+1}					$\zeta'(y+1)$	$\zeta(y+1)$	$\delta(y)$	$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$	$\beta'(y)$	$\beta(y)$
x_{j+2}							$\zeta(y)$	$\delta'(y)$	$\delta(y)$	$\gamma'(y)$	$\gamma(y)$
x_{j+3}								$\zeta'(y)$	$\zeta(y)$	$\delta'(y)$	$\delta(y)$
x_{j+4}										$\zeta'(y)$	$\zeta(y)$

TAB. 3.5 – Construction des formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{4}}$, cas de blocs contigus d'indices decroissants : $N_{m+1} = N_m - 1$. Les colonnes représentent les formules de remaillage associées aux particules en fonction du type de bloc et de la valeur de λ. Les lignes fournissent les schémas aux points de grilles correspondants. Les poids de la ligne x_j sont déduits de la condition de conservation (somme des poids égale à un). On a noté $(\star)$ la condition $\{\lambda <$indice et le bloc est de type centré$\}$ et $(\star\star)$ celle $\{\lambda >$indice ou le bloc est de type gauche$\}$.

La particule p est remaillée par

$$\begin{cases} P[-2] &= \alpha(y_p) \\ P[-1] &= \beta(y_p) \\ P[0] &= \gamma(y_p) \\ P[1] &= \delta(y_p) - \delta(y_p - 1) + \zeta(y_p) - \zeta(y_p - 1) \\ P[2] &= \delta(y_p - 1) \\ P[3] &= \zeta(y_p - 1). \end{cases} \tag{3.60}$$

La particule $p+1$ est remaillée par

$$\begin{cases} P[-3] &= \alpha(y_{p+1}+1) \\ P[-2] &= \beta(y_{p+1}+1) \\ P[-1] &= \alpha(y_{p+1}) - \alpha(y_{p+1}+1) \\ & +\beta(y_{p+1}) - \beta(y_{p+1}+1) \\ P[0] &= \gamma(y_{p+1}) \\ P[1] &= \delta(y_{p+1}) \\ P[2] &= \zeta(y_{p+1}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{,si } B_{m+1} \text{ est de type gauche ou} \\ \text{si } B_{m+1} \text{ est de type centré et } y_{p+1} \leq 1/2, \end{array}$$

$$\begin{cases} P[-2] &= \alpha^{'}(y_{p+1}+1) \\ P[-1] &= \beta^{'}(y_{p+1}+1) \\ P[0] &= \alpha^{'}(y_{p+1}) - \alpha^{'}(y_{p+1}+1) \\ & +\beta^{'}(y_{p+1}) - \beta^{'}(y_{p+1}+1) \\ P[1] &= \gamma^{'}(y_{p+1}) \\ P[2] &= \delta^{'}(y_{p+1}) \\ P[3] &= \zeta^{'}(y_{p+1}) \end{cases} \quad \text{,si } B_{m+1} \text{ est de type centré et } y_{p+1} > 1/2. \tag{3.61}$$

La particule $p+2$ est remaillée par

$$\begin{cases} P[-3] &= \alpha(y_{p+2}+1) \\ P[-2] &= \alpha(y_{p+2}) - \alpha(y_{p+2}+1) \\ P[-1] &= \beta(y_{p+2}) \\ P[0] &= \gamma(y_{p+2}) \\ P[1] &= \delta(y_{p+2}) \\ P[2] &= \zeta(y_{p+2}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{,si } B_{m+1} \text{ est de type gauche ou} \\ \text{si } B_{m+1} \text{ est de type centré et } y_{p+2} \leq 1/2, \end{array}$$

$$\begin{cases} P[-2] &= \alpha^{'}(y_{p+2}+1) \\ P[-1] &= \alpha^{'}(y_{p+2}) - \alpha^{'}(y_{p+2}+1) \\ P[0] &= \beta^{'}(y_{p+2}) \\ P[1] &= \gamma^{'}(y_{p+2}) \\ P[2] &= \delta^{'}(y_{p+2}) \\ P[3] &= \zeta^{'}(y_{p+2}) \end{cases} \quad \text{,si } B_{m+1} \text{ est de type centré et } y_{p+2} > 1/2. \tag{3.62}$$

Lorsque l'indice des blocs est décroissant ($N_{m+1} = N_m - 1$), la particule $p-1$ est

remaillée par :

$$\begin{cases} P[-2] &= \alpha(y_{p-1}) \\ P[-1] &= \beta(y_{p-1}) \\ P[0] &= \gamma(y_{p-1}) \\ P[1] &= \delta(y_{p-1}) + \zeta(y_{p-1}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{,si } B_m \text{ est de type gauche ou} \\ \text{si } B_m \text{ est de type centré et } y_{p-1} \leq 1/2, \end{array}$$

$$\begin{cases} P[-1] &= \alpha^{'}(y_{p-1}) \\ P[0] &= \beta^{'}(y_{p-1}) \\ P[1] &= \gamma^{'}(y_{p-1}) \\ P[2] &= \delta^{'}(y_{p-1}) + \zeta^{'}(y_{p-1}) \end{cases} \quad \text{,si } B_m \text{ est de type centré et } y_{p-1} > 1/2. \tag{3.63}$$

La particule p est remaillée par

$$\begin{cases} P[-2] &= \alpha(y_p) \\ P[-1] &= \beta(y_p) \\ P[0] &= \gamma(y_p) + \delta(y_p) \\ & +\zeta(y_p) - \zeta(y_p+1) \\ P[1] &= \zeta(y_p+1) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{,si } B_m \text{ est de type gauche ou} \\ \text{si } B_m \text{ est de type centré et } y_p \leq 1/2, \end{array}$$

$$\begin{cases} P[-1] &= \alpha^{'}(y_p) \\ P[0] &= \beta^{'}(y_p) \\ P[1] &= \gamma^{'}(y_p) + \delta^{'}(y_p) \\ & +\zeta^{'}(y_p) - \zeta^{'}(y_p+1) \\ P[2] &= \zeta^{'}(y_p+1) \end{cases} \quad \text{,si } B_m \text{ est de type centré et } y_p > 1/2. \tag{3.64}$$

La particule $p+1$ est remaillée par

$$\begin{cases} P[-1] &= \alpha(y_{p+1}-1) \\ P[0] &= \alpha(y_{p+1}) - \alpha(y_{p+1}-1) \\ & +\beta(y_{p+1}) + \gamma(y_{p+1}) \\ P[1] &= \delta(y_{p+1}) \\ P[2] &= \zeta(y_{p+1}) \end{cases} \tag{3.65}$$

La particule $p+2$ est remaillée par

$$\begin{cases} P[-1] &= \alpha(y_{p+2}) + \beta(y_{p+2}) \\ P[0] &= \gamma(y_{p+2}) \\ P[1] &= \delta(y_{p+2}) \\ P[2] &= \zeta(y_{p+2}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{,si } B_{m+1} \text{ est de type gauche ou} \\ \text{si } B_{m+1} \text{ est de type centré et } y_{p+2} \leq 1/2, \end{array}$$

$$\begin{cases} P[0] &= \alpha^{'}(y_{p+2}) + \beta^{'}(y_{p+2}) \\ P[1] &= \gamma^{'}(y_{p+2}) \\ P[2] &= \delta^{'}(y_{p+2}) \\ P[3] &= \zeta^{'}(y_{p+2}) \end{cases} \quad \text{,si } B_{m+1} \text{ est de type centré et } y_{p+2} > 1/2. \tag{3.66}$$

Comme dans le cas de l'ordre 2, on notera $\Lambda_{\tilde{4}}$ les formules de remaillage consistuées des formules Λ_4 lorsque la particule remaillée appartient à un bloc de type centré, des formules Λ_4^g quand le bloc est de type gauche, et des formules (3.59) à (3.66) lorsque la particule est l'une des deux premières ou deux dernières d'un bloc contigu à un autre d'indice différent.

Dans le cas particulier où les blocs sont constitués de trois particules ($M = 2$), les particules $p-1$ et $p+2$ sont remaillées par des formules qui dépendent de la variation des indices des blocs B_{m-1}, B_m et B_{m+1}, B_{m+2}. Ces formules sont données dans les tableaux 3.6 à 3.9 dans le cas où les bloc sont de type gauche. Le cas centré avec $y > 1/2$ se généralise trivialement en introduisant des primes dans les poids de remaillage.

	P[-3]	P[-2]	P[-1]	P[0]	P[1]	P[2]	P[3]
$N_{m-1} = N_m$		$\alpha(y_{p-1})$	$\beta(y_{p-1})$	$\gamma(y_{p-1})$	$\delta(y_{p-1})$	$\zeta(y_{p-1})-\zeta(y_{p-1}-1)$	$\zeta(y_{p-1}-1)$
$N_{m-1} = N_m + 1$			$\alpha(y_{p-1})+\beta(y_{p-1})$	$\gamma(y_{p-1})$	$\delta(y_{p-1})$	$\zeta(y_{p-1})-\zeta(y_{p-1}-1)$	$\zeta(y_{p-1}-1)$
$N_{m-1} = N_m - 1$	$\alpha(y_{p-1}+1)$	$\alpha(y_{p-1})-\alpha(y_{p-1}+1)$	$\beta(y_{p-1})$	$\gamma(y_{p-1})$	$\delta(y_{p-1})$	$\zeta(y_{p-1})-\zeta(y_{p-1}-1)$	$\zeta(y_{p-1}-1)$

TAB. 3.6 – Formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{4}}$ de la particule $p-1$ du bloc B_m ($M = 2$). Cas d'indices croissants $N_{m+1} = N_m + 1$.

	P[-3]	P[-2]	P[-1]	P[0]	P[1]	P[2]	P[3]
$N_{m+2} = N_{m+1}$	$\alpha(y_{p+2}+1)$	$\alpha(y_{p+2})-\alpha(y_{p+2}+1)$	$\beta(y_{p+2})$	$\gamma(y_{p+2})$	$\delta(y_{p+2})$	$\zeta(y_{p+2})$	
$N_{m+2} = N_{m+1} - 1$	$\alpha(y_{p+2}+1)$	$\alpha(y_{p+2})-\alpha(y_{p+2}+1)$	$\beta(y_{p+2})$	$\gamma(y_{p+2})$	$\delta(y_{p+2})+\zeta(y_{p+2})$		
$N_{m+2} = N_{m+1} + 1$	$\alpha(y_{p+2}+1)$	$\alpha(y_{p+2})-\alpha(y_{p+2}+1)$	$\beta(y_{p+2})$	$\gamma(y_{p+2})$	$\delta(y_{p+2})$	$\zeta(y_{p+2})-\zeta(y_{p+2}-1)$	$\zeta(y_{p+2}-1)$

TAB. 3.7 – Formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{4}}$ de la particule $p+2$ du bloc B_{m+1} ($M = 2$). Cas d'indices croissants $N_{m+1} = N_m + 1$.

Vérifions, en conclusion de cette section, que les schémas obtenus après remaillage sont consistants en tous points de grille. Comme dans le cas des formules d'ordre 2, trois schémas différents peuvent être obtenus. Au passage d'un bloc d'indice N à $N+1$, le

	P[-3]	P[-2]	P[-1]	P[0]	P[1]
$N_{m-1} = N_m$		$\alpha(y_{p-1})$	$\beta(y_{p-1})$	$\gamma(y_{p-1})$	$\delta(y_{p-1}) + \zeta(y_{p-1})$
$N_{m-1} = N_m + 1$			$\alpha(y_{p-1}) + \beta(y_{p-1})$	$\gamma(y_{p-1})$	$\delta(y_{p-1}) + \zeta(y_{p-1})$
$N_{m-1} = N_m - 1$	$\alpha(y_{p-1}+1)$	$\alpha(y_{p-1}) - \alpha(y_{p-1}+1)$	$\beta(y_{p-1})$	$\gamma(y_{p-1})$	$\delta(y_{p-1}) + \zeta(y_{p-1})$

TAB. 3.8 – Formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{4}}$ de la particule $p-1$ du bloc B_m ($M=2$). Cas d'indices décroissants $N_{m+1} = N_m - 1$.

	P[-1]	P[0]	P[1]	P[2]	P[3]
$N_{m+2} = N_{m+1}$	$\alpha(y_{p+2}) + \beta(y_{p+2})$	$\gamma(y_{p+2})$	$\delta(y_{p+2})$	$\zeta(y_{p+2})$	
$N_{m+2} = N_{m+1} - 1$	$\alpha(y_{p+2}) + \beta(y_{p+2})$	$\gamma(y_{p+2})$	$\delta(y_{p+2}) + \zeta(y_{p+2})$		
$N_{m+2} = N_{m+1} + 1$	$\alpha(y_{p+2}) + \beta(y_{p+2})$	$\gamma(y_{p+2})$	$\delta(y_{p+2})$	$\zeta(y_{p+2}) - \zeta(y_{p+2}-1)$	$\zeta(y_{p+2}-1)$

TAB. 3.9 – Formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{4}}$ de la particule $p+2$ du bloc B_{m+1} ($M=2$). Cas d'indices décroissants $N_{m+1} = N_m - 1$.

schéma en x_j s'écrit :

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} = & \{e(y) - e(y-1)\}\,|_{y=\lambda_{j-2-N}-N}\, u_{j-2-N} \\
+ & \{d(y) - d(y-1) + e(y) - e(y-1)\}\,|_{y=\lambda_{j-1-N}-N}\, u_{j-1-N} \\
+ & \{a(y) - a(y+1) + b(y) - b(y+1)\}\,|_{y=\lambda_{j-N}-N-1}\, u_{j-N} \\
+ & \{a(y) - a(y+1)\}\,|_{y=\lambda_{j+1-N}-N-1}\, u_{j+1-N} \\
= & \left\{ \frac{\lambda_{j-2-N}^3}{6} - \lambda_{j-2-N}^2 \frac{N}{2} + \frac{\lambda_{j-2-N}}{6}\left(3\,N^2 - 1\right) + \frac{N}{6}\left(1 - N^2\right) \right\} u_{j-2-N} \\
& + \left\{ -\frac{\lambda_{j-1-N}^3}{2} + \frac{\lambda_{j-1-N}^2}{2}\left(1 + 3\,N\right) + \lambda_{j-1-N}\left(1 - N - \frac{3}{2}N^2\right) \right. \\
& \left. + \frac{N}{2}\left(-2 + N + N^2\right) \right\} u_{j-1-N} \\
& + \left\{ \frac{\lambda_{j-N}^3}{2} - \frac{\lambda_{j-N}^2}{2}\left(2 + 3\,N\right) + \frac{\lambda_{j-N}}{2}\left(-1 + 4\,N + 3\,N^2\right) \right. \\
& \left. + \frac{N}{2}\left(1 - 2\,N - N^2\right) + 1 \right\} u_{j-N} \\
& + \left\{ -\frac{\lambda_{j+1-N}^3}{6} + \frac{\lambda_{j+1-N}^2}{2}\left(1 + N\right) + \frac{\lambda_{j+1-N}}{6}\left(-2 - 6\,N - 3\,N^2\right) \right. \\
& \left. + \frac{N}{6}\left(2 + 3\,N + N^2\right) \right\} u_{j+1-N}.
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

d'où en appliquant des développements de Taylor de u, au, a^2u et a^3u en j, u_j^{n+1} vérifie :

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} = \quad & \tfrac{1}{6}(N-N^3)\left[u_j-(2+N)\,\Delta x\,\partial_x u_j+...\right] \\
& +\tfrac{1}{2}(-2N+N^2+N^3)\left[u_j-(1+N)\,\Delta x\,\partial_x u_j+...\right] \\
& +\left(1+\tfrac{1}{2}(N-2N^2-N^3)\right)\left[u_j-N\,\Delta x\,\partial_x u_j+...\right] \\
& +\tfrac{1}{6}(2N+3N^2+N^3)\left[u_j+(1-N)\,\Delta x\,\partial_x u_j+...\right] \\
+\tfrac{\Delta t}{\Delta x} \quad & \Big\{\tfrac{1}{6}(3N^2-1)\left[a_ju_j-(2+N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_ju_j\right)+...\right] \\
& +\left(1-N-\tfrac{3}{2}N^2\right)\left[a_ju_j-(1+N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_ju_j\right)+...\right] \\
& +\tfrac{1}{2}(-1+4N+3N^2)\left[a_ju_j-N\,\Delta x\,\partial_x\left(a_ju_j\right)+...\right] \\
& +\tfrac{1}{6}(-2-6N-3N^2)\left[a_ju_j+(1-N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_ju_j\right)+...\right]\Big\} \\
+\tfrac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \quad & \Big\{-\tfrac{N}{2}\left[a_j^2u_j-(2+N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2u_j\right)+...\right] \\
& \tfrac{1}{2}(1+3N)\left[a_j^2u_j-(1+N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2u_j\right)+...\right] \\
& -\tfrac{1}{2}(2+3N)\left[a_j^2u_j-N\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2u_j\right)+...\right] \\
& +\tfrac{1}{2}(1+N)\left[a_j^2u_j+(1-N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2u_j\right)+...\right]\Big\} \\
+\tfrac{\Delta t^3}{\Delta x^3} \quad & \Big\{\tfrac{1}{6}\left[a_j^2u_j-(2+N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2u_j\right)+...\right] \\
& -\tfrac{1}{2}\left[a_j^2u_j-(1+N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2u_j\right)+...\right] \\
& +\tfrac{1}{2}\left[a_j^2u_j-N\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2u_j\right)+...\right] \\
& -\tfrac{1}{6}\left[a_j^2u_j+(1-N)\,\Delta x\,\partial_x\left(a_j^2u_j\right)+...\right]\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

soit,

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} = \quad & u_j-\Delta t\,\partial_x\left(a_ju_j\right)+\tfrac{\Delta t^2}{2}\,\partial_{xx}^2\left(a_j^2u_j\right)+\tfrac{\Delta t^3}{6}\,\partial_{xxx}^3\left(a_j^3u_j\right) \\
& +O\left(\Delta x^4+\Delta t\,\Delta x^3+\Delta t^2\,\Delta x^2+\Delta t^3\,\Delta x\right),
\end{aligned} \tag{3.69}$$

puisque $\forall\alpha\in[0,3]$

$$\begin{cases}
\tfrac{1}{6}(N-N^3)(-2-N)^\alpha+\tfrac{1}{2}(-2N+N^2+N^3)(-1-N)^\alpha \\
+\tfrac{1}{2}(2+N-2N^2-N^3)(-N)^\alpha+\tfrac{1}{6}(2N+3N^2+N^3)(1-N)^\alpha=1 \text{ si } \alpha=0 \text{ et } 0 \text{ sinon} \\
\\
\tfrac{1}{6}(-1+3N^2)(-2-N)^\alpha+\left(1-N-\tfrac{3}{2}N^2\right)(-1-N)^\alpha \\
+\tfrac{1}{2}(-1+4N+3N^2)(-N)^\alpha+\tfrac{1}{6}(-2-6N-3N^2)(1-N)^\alpha=-1 \text{ si } \alpha=1 \text{ et } 0 \text{ sinon} \\
\\
\tfrac{-N}{2}(-2-N)^\alpha+\tfrac{1}{2}(1+3N)(-1-N)^\alpha-\tfrac{1}{2}(2+3N)(-N)^\alpha \\
+\tfrac{1}{2}(1+N)(1-N)^\alpha=1 \text{ si } \alpha=2 \text{ et } 0 \text{ sinon} \\
\\
\tfrac{1}{6}(-2-N)^\alpha-\tfrac{1}{2}(-1-N)^\alpha+\tfrac{1}{2}(-N)^\alpha-\tfrac{1}{6}(1-N)^\alpha=-1 \text{ si } \alpha=3 \text{ et } 0 \text{ sinon.}
\end{cases} \tag{3.70}$$

Remarque 10. *Les expressions (3.70) sont non nulles pour $\alpha=4$, donc la précision du schéma est seulement d'ordre 3 en espace au passage de blocs d'indices différents.*

A l'inverse, lorsque les indices sont décroissants, le schéma en x_j est

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} = \;& e(y=\lambda_{j-2-N}-N)\,u_{j-2-N} + \{d(y)+e(y)\}\,|_{y=\lambda_{j-1-N}-N}\,u_{j-1-N} \\
& + \{c(y)+d(y)+e(y)-e(y+1)\}\,|_{y=\lambda_{j-N}-N}\,u_{j-N} \\
& + \{a(y)+b(y)+c(y)-a(y-1)\}\,|_{y=\lambda_{j+1-N}-N+1}\,u_{j+1-N} \\
& + \{a(y)+b(y)\}\,|_{y=\lambda_{j+2-N}-N+1}\,u_{j+2-N} + a(y=\lambda_{j+3-N}-N+1)\,u_{j+3-N} \\
= \;& \Big\{ \tfrac{\lambda_{j-2-N}^4}{24} + \tfrac{\lambda_{j-2-N}^3}{12}(1-2\,N) + \tfrac{\lambda_{j-2-N}^2}{24}\left(-1-6\,N+6\,N^2\right) \\
& + \tfrac{\lambda_{j-2-N}}{12}\left(-1+N+3\,N^2-2\,N^3\right) + \tfrac{N}{24}\left(2-N-2\,N^2+N^3\right) \Big\}\, u_{j-2-N} \\
& + \Big\{ -\tfrac{\lambda_{j-1-N}^4}{8} + \tfrac{\lambda_{j-1-N}^3}{12}(-1+6\,N) + \tfrac{\lambda_{j-1-N}^2}{8}\left(5+2\,N-6\,N^2\right) \\
& + \tfrac{\lambda_{j-1-N}}{12}\left(7-15\,N-3\,N^2+6\,N^3\right) + \tfrac{N}{12}\left(-7+\tfrac{15}{2}N+N^2-\tfrac{3}{2}N^3\right) \Big\}\, u_{j-1-N} \\
& + \Big\{ \tfrac{\lambda_{j-N}^4}{12} + \tfrac{\lambda_{j-N}^3}{3}(-1-N) + \tfrac{\lambda_{j-N}^2}{12}\left(-13+12\,N+6\,N^2\right) \\
& + \tfrac{\lambda_{j-N}}{6}\left(2+13\,N-6\,N^2-2\,N^3\right) + \tfrac{N}{12}\left(-4-13\,N+4\,N^2+N^3\right) + 1 \Big\}\, u_{j-N} \\
& + \Big\{ \tfrac{\lambda_{j+1-N}^4}{12} + \tfrac{\lambda_{j+1-N}^3}{3}(2-N) + \tfrac{\lambda_{j+1-N}^2}{12}\left(5-24\,N+6\,N^2\right) \\
& + \tfrac{\lambda_{j+1-N}}{6}\left(-7-5\,N+12\,N^2-2\,N^3\right) + \tfrac{N}{12}\left(14+5\,N-8\,N^2+N^3\right) \Big\}\, u_{j+1-N} \\
& + \Big\{ -\tfrac{\lambda_{j+2-N}^4}{8} + \tfrac{\lambda_{j+2-N}^3}{12}(-5+6\,N) + \tfrac{\lambda_{j+2-N}^2}{8}\left(1+10\,N-6\,N^2\right) \\
& + \tfrac{\lambda_{j+2-N}}{12}\left(5-3\,N-15\,N^2+6\,N^3\right) + \tfrac{N}{12}\left(-5+\tfrac{3}{2}N+5\,N^2-\tfrac{3}{2}\,N^3\right) \Big\}\, u_{j+2-N} \\
& + \Big\{ \tfrac{\lambda_{j+3-N}^4}{24} + \tfrac{\lambda_{j+3-N}^3}{12}(1-2\,N) + \tfrac{\lambda_{j+3-N}^2}{24}\left(-1-6\,N+6\,N^2\right) \\
& + \tfrac{\lambda_{j+3-N}}{12}\left(-1+N+3\,N^2-2\,N^3\right) + \tfrac{N}{24}\left(2-N-2\,N^2+N^3\right) \Big\}\, u_{j+3-N}
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

et en procédant comme précédement, u_j^{n+1} vérifie :

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} = \;& u_j - \Delta t\,\partial_x\left(a_j u_j\right) + \tfrac{\Delta t^2}{2}\,\partial_{xx}^2\left(a_j^2 u_j\right) + \tfrac{\Delta t^3}{6}\,\partial_{xxx}^3\left(a_j^3 u_j\right) \\
& + O\left(\Delta x^4 + \Delta t\,\Delta x^3 + \Delta t^2\,\Delta x^2 + \Delta t^3\,\Delta x\right).
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Enfin, lorsque les indices sont constant, le schéma obtenu en x_j est le même qu'à l'intérieur d'un bloc (3.36). Ce schéma est consistant d'après la preuve de la section 3.3.2, il est notament d'ordre 4 en espace d'après (3.37).

Remarque 11. *Des formules de remaillages consistantes sont exposées dans les tableaux 1 à 4 de l'article [65] mis en annexe F. La méthode de remaillage utilisée est la même,*

mais une hypothèse plus restrictive sur le pas de temps permet de simplifier les formules en remarquant que des blocs contigus d'indice différent ne peuvent pas être de même type.

3.4.5 Illustrations numériques

La validation numérique des formules consistantes $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$ est présentée tout d'abord en dimension un. Les solutions obtenues en remaillant les particules par des formules $M_4^{'}$ sont aussi représentées.

On considère un champ de vitesse sinusoidal ($a = 2+sin(2\pi x)$) et des conditions aux bord périodiques. Les particules sont initialisées par une valeur constante, $u(x,0) = 1$. Le temps final est $T = 1$ et la solution exacte, calculée en annexe B, est :

$$u(t,x) = u(0,x_0)\frac{(\sin(2\pi x_0)+2)}{(\sin(2\pi x)+2)}, \tag{3.73}$$

avec

$$\sin(2\pi x_0) = \frac{2\tan(\pi x_0)}{1+\tan^2(\pi x_0)}, \tag{3.74}$$

et

$$\tan(\pi x_0) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}\tan(\sqrt{3}\pi t) - 1 - 2\tan(\pi x)}{\sqrt{3}+\tan(\sqrt{3}\pi t)\,(1+2\tan(\pi x))}\right]. \tag{3.75}$$

Les particules sont advectées par un schéma de Runge Kutta d'ordre 4 afin de se concentrer sur les erreurs dues au remaillage. La dérivée du champ de vitesse étant $a^{'}(x) = 2\pi\, cos(2\pi x)$ la contrainte sur le pas de temps (3.19) s'écrit lorsque $\Delta x \to 0$:

$$\Delta t < \frac{1}{4\pi M}, \tag{3.76}$$

où M est la longueur des blocs. On choisi $M = 1$ si les particules sont remaillées par des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $M = 2$ pour celles $\Lambda_{\tilde{4}}$. Ainsi, le plus grand pas de temps admis correspond à un nombre CFL classique $\Delta t \max a/\Delta x = 11$ lorsque la distance entre les points de grille $\Delta x = 10^{-2}$ ($\Delta t = 11\,\Delta x/3 < 1/(8\,\pi)$). Ce nombre est proportionel à Δx, par exemple un nombre CFL de 23 est possible lorsque $\Delta x = 1/2 * 10^{-2}$.

La figure 3.25 met en évidence l'efficacité des nouvelles formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{2}}$ sur la consistance des schémas. Alors que le remaillage par des formules Λ_2 ordinaires pour un nombre CFL de 4 ($3\,\Delta t/\Delta x = 4$) met en évidence des erreurs de consistance, l'utilisation des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ corrige de manière satisfaisante ce problème. D'après (3.52) et (3.56), l'erreur est seulement d'ordre 1 en temps en certains points, ce qui est rendu visible par la présence d'oscillations quand Δt est grand. Remarquons que l'erreur de consistance due au remaillage des particules par des formules $M_4^{'}$ est du même ordre de grandeur.

La figure 3.26 met en évidence l'intérêt de remailler les particules par des formules $\Lambda_{\tilde{4}}$ plutôt que $\Lambda_{\tilde{2}}$. La précision supplémentaire permet d'obtenir une solution précise pour un grand pas de temps.

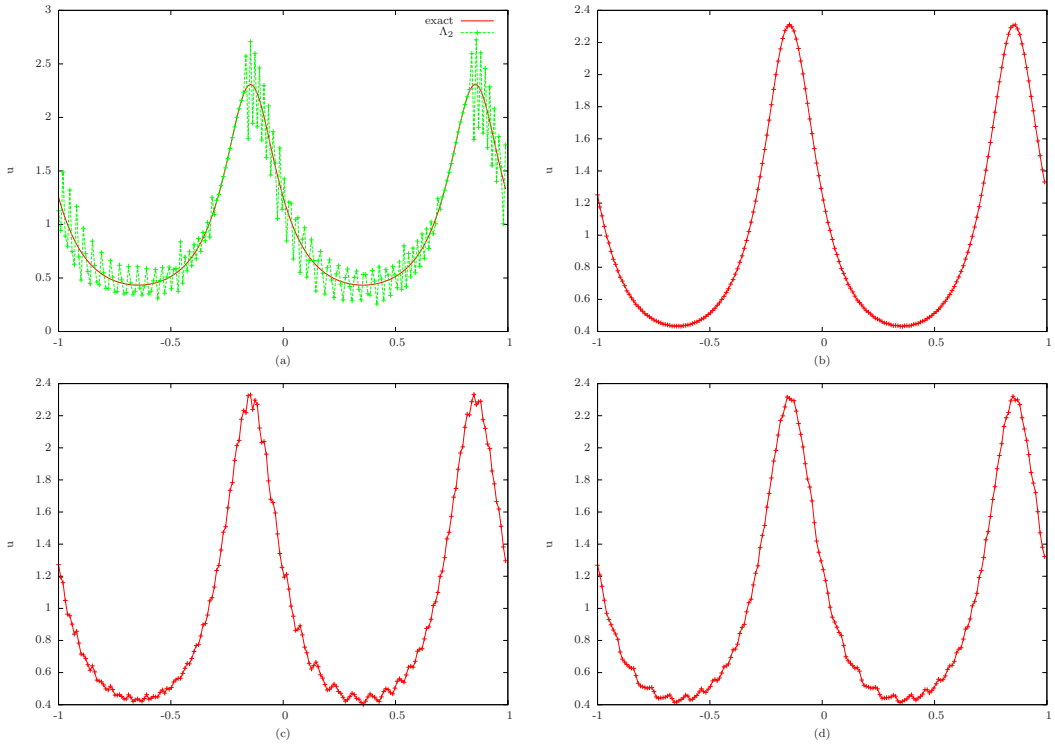


FIG. 3.25 – Remaillage par les formules Λ_2 (a), $\Lambda_{\tilde{2}}$ (b, c) et $M_4^{'}$ en (d). Un nombre CFL de 4 ($\Delta t = 4\,\Delta x/3 = 4\,10^{-2}/3$) est imposée en (a, b), et de 8 en (c, d).

La solution exacte à ce problème étant connue, on propose de tracer des courbes d'erreur afin d'étudier quantitativement la consistance des nouvelles formules de remaillage proposées. L'erreur L2 est tracée en fonction du pas d'espace en echelle logarithmique dans la figure 3.27. Lorsque les particules sont remaillées par des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$, seulement 12 % (CFL 4) ou 20 % (CFL 8) des particules sont remaillées par des formules corrigées, c'est à dire différentes de Λ_2 ou Λ_2^g. Lors d'un remaillage $\Lambda_{\tilde{4}}$, ce sont 27 % des particules à CFL 4 et 45 % à CFL 8 qui sont remaillées par des formules corrigées.

L'utilisation des formules consistantes $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$ permet d'obtenir l'ordre voulu, c'est à dire des droites de pente 2 et 4. Notons que la solution est légérement meilleure pour des pas de temps plus faible (sont comparées des nombres CFL de 4 et de 8). Les erreurs de consistance sont mises en évidence lors du remaillage par des formules "classiques" Λ_2 et Λ_4, les droites correspondantes ayant une pente inférieure à un. Le remaillage $M_4^{'}$ permet d'obtenir une erreur de pente quasiment 2.

3.5 Introduction de limiteurs dans les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$

Des formules de remaillage limitées, évitant la création d'oscillations numériques, ont été introduites dans le chapitre 2. Le pas de temps était restreint à une condition

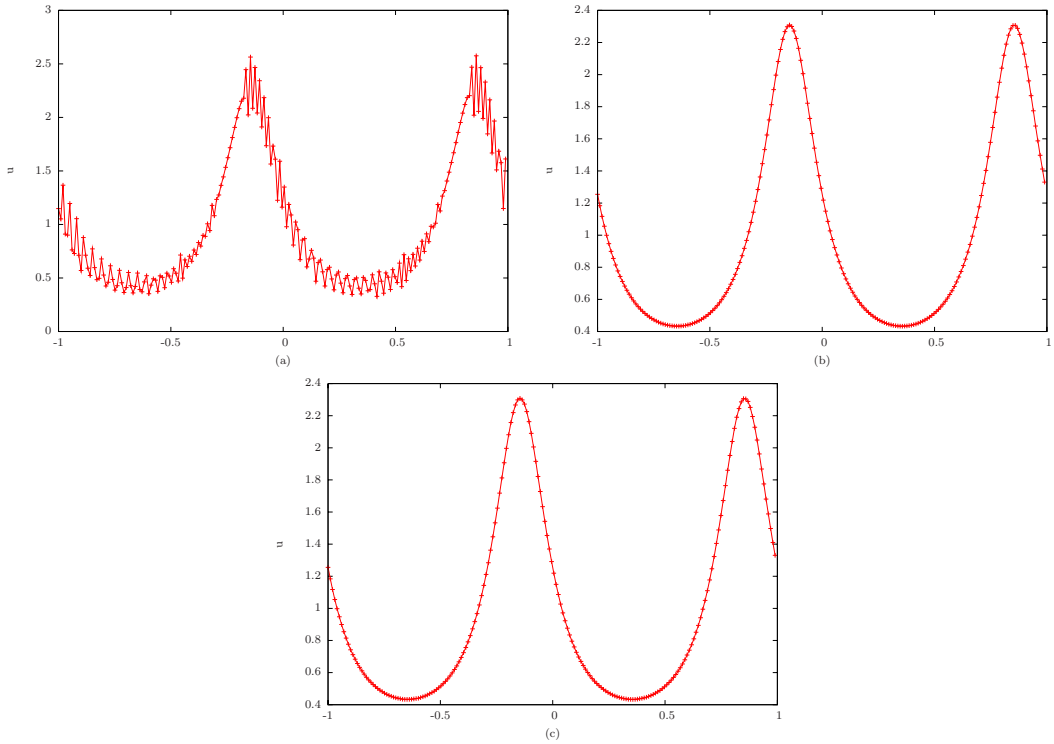


FIG. 3.26 – Remaillage par les formules Λ_4 en (a) et $\Lambda_{\tilde{4}}$ en (b, c). Un nombre CFL de 4 ($\Delta t = 4\,\Delta x/3 = 4\,10^{-2}/3$) est imposée en (a, b), et de 8 en (c).

du type $-1/2 \leq \Delta t \max a/\Delta x \leq 1/2$, alors justifiée puisque les formules non limitées Λ_2 et Λ_4 sont consistantes sous la même restriction. Puisque des nombres de CFL plus importants sont maintenant autorisées en remaillant les particules avec les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$, on s'interesse à introduire des limiteurs dans ces formules. Pour cela, les formules d'ordre un M_3 et M_5, utilisées dans la limitation des formules Λ_2 et Λ_4 pour un nombre CFL inférieur à 1/2 doivent être modifiées. Les nouvelles formules notées $M_{\tilde{3}}$ et $M_{\tilde{5}}$ sont consistantes pour des nombres de CFL élévés. Elles sont construites dans la section 3.5.1. La limitation est introduite dans la section 3.5.2 et des résultats numériques sont exposés en 3.5.3.

3.5.1 Correction des formules d'ordre 1

La stratégie utilisée pour construire les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$ peut à nouveau être utilisée pour rendre consistantes les formules M_3 et M_5 pour des nombres de CFL élevés. Les formules $M_{\tilde{3}}$ et $M_{\tilde{5}}$ obtenues s'expriment comme les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ (3.45) à (3.48) et $\Lambda_{\tilde{4}}$ (3.59) à (3.66), où les coefficients α, β, ... sont ceux des formules M_3 et M_5.

Proposition 11. *Les formules $M_{\tilde{3}}$ et $M_{\tilde{5}}$ sont consistantes.*

Preuve

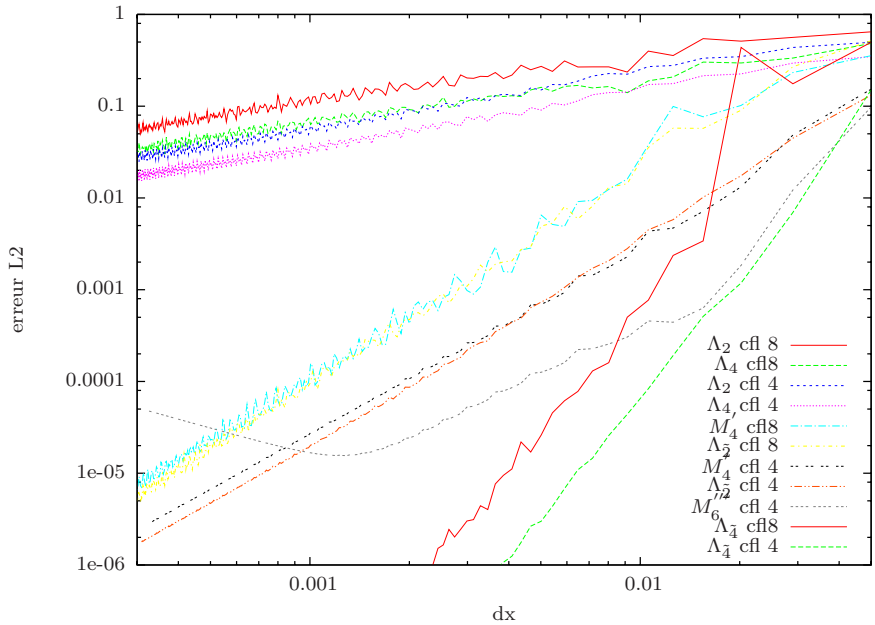


FIG. 3.27 – Courbes d'erreur L2 pour différentes formules de remaillage et nombres de CFL. La légende est classée dans l'ordre d'apparition des courbes, du haut vers le bas.

Vérifions que les schémas obtenus en remaillant les particules par des formules $M_{\bar{3}}$ sont consistants. A l'intérieur des blocs, c'est à dire sans correction, le schéma au point x_j est le suivant :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \; & (\gamma(y))|_{y=\lambda_{j-1-N_m}-N_m} \; u_{j-1-N_m} \\ & + (\beta(y))|_{y=\lambda_{j-N_m}-N_m} \; u_{j-N_m} \\ & + (\alpha(y))|_{y=\lambda_{j+1-N_m}-N_m} \; u_{j+1-N_m} \\ \\ = \; & u^n_{j-N_m} + \left[\tfrac{1}{2}\,\lambda^2_{j-1-N_m} + \lambda_{j-1-N_m}\left(\tfrac{1}{2} - N_m\right) + \tfrac{1}{2}\,N_m\,(N_m-1) + \tfrac{1}{8}\right] u^n_{j-1-N_m} \\ & - \left[\lambda^2_{j-N_m} - 2\,\lambda_{j-N_m}\,N_m + N_m^2 + \tfrac{1}{4}\right] u^n_{j-N_m} \\ & + \left[\tfrac{1}{2}\,\lambda^2_{j+1-N_m} - \lambda_{j+1-N_m}\left(N_m + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\,N_m\,(N_m+1) + \tfrac{1}{8}\right] u^n_{j+1-N_m}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Lorsque $N_{m+1} = N_m + 1$, le schéma obtenu au point x_j est :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \; & (\gamma(y) - \gamma(y-1))|_{y=\lambda_{j-1-N_m}-N_m} \; u_{j-1-N_m} \\ & + \left[(\alpha(y) - \alpha(y+1))|_{y=\lambda_{j+1-N_{m+1}}} - N_{m+1}\right] u_{j+1-N_{m+1}} \\ \\ = \; & (\lambda_{j-1-N_m} - N_m)\, u_{j-1-N_m} + (1 + N_m - \lambda_{j-N_m})\, u_{j-N_m}, \end{aligned} \tag{3.78}$$

Et lorsque $N_{m+1} = N_m - 1$, le schéma obtenu au point x_j est :

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= \gamma(y_{j-1-N_m})u^n_{j-1-N_m} + [\beta(y_{j-N_m}) + \gamma(y_{j-N_m})]\, u^n_{j-N_m} \\
&+ \left[\alpha(y_{j-N_{m+1}}) + \beta(y_{j-N_{m+1}})\right] u^n_{j-N_{m+1}} + \alpha(y_{j+1-N_{m+1}})u^n_{j+1-N_{m+1}} \\
&= \gamma(\lambda_{j-1-N_m} - N_m)u^n_{j-1-N_m} + [\beta(\lambda_{j-N_m} - N_m) + \gamma(\lambda_{j-N_m} - N_m)]\, u^n_{j-N_m} \\
&+ \left[\alpha(\lambda_{j-N_{m+1}} - N_{m+1}) + \beta(\lambda_{j-N_{m+1}} - N_{m+1})\right] u^n_{j-N_{m+1}} + \alpha(\lambda_{j+1-N_{m+1}} - N_{m+1})u^n_{j+1-N_{m+1}} \\
&= \left[1/2\,\lambda^2_{j-1-N_m} + \lambda_{j-1-N_m}\,(1/2 - N_m) + 1/2\,N_m\,(N_m - 1) + \tfrac{1}{8}\right] u^n_{j-1-N_m} \\
&+ \left[-1/2\,\lambda^2_{j-N_m} + \lambda_{j-N_m}\,(N_m + 1/2) - 1/2\,N_m\,(1 + N_m) + 1 - \tfrac{1}{8}\right] u^n_{j-N_m} \\
&+ \left[-1/2\,\lambda^2_{j-N_{m+1}} + \lambda_{j-N_{m+1}}\,(N_{m+1} - 1/2) + 1/2\,N_{m+1}\,(1 - N_{m+1}) + 1 - \tfrac{1}{8}\right] u^n_{j-N_{m+1}} \\
&+ \left[1/2\,\lambda^2_{j+1-N_{m+1}} - \lambda_{j+1-N_{m+1}}\,(1/2 + N_{m+1}) + 1/2\,N_{m+1}\,(N_{m+1} + 1) + \tfrac{1}{8}\right] u^n_{j+1-N_{m+1}}.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Le schéma (3.78) est identique à celui obtenu en utilisant des formules Λ_1, il est consistant d'aprés la preuve de la proposition 6. De plus, les deux autres schémas (3.77,3.79) diffèrent de ceux obtenus par l'utilisation des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ uniquement par l'ajout et la soustraction de la constante 1/8. Ainsi, la consistance est toujours vérifiée.

La preuve de la consistance des formules $M_{\tilde{5}}$ est donnée en annexe D.

□

3.5.2 Limitation des formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{2}}$

L'objectif de cette section est d'introduire des limiteurs dans les formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{2}}$ afin d'éviter la création d'oscillations numériques pour des nombres de CFL élevés.

Résumons tout d'abord les résultats du chapitre 2 concernant la limitation des formules de remaillage Λ_2. On considère $-1/2 \leq \lambda_j = \Delta t\, a_j/\Delta x \leq 1/2\ \forall j$. Deux cas sont alors à envisager lorsqu'on remaille les particules. Si $0 \leq \lambda_j \leq 1/2\ \forall j$ ou de manière équivalente $y_j \leq 1/2$, les particules sont remaillées à l'aide des poids suivant :

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha(y_j) &= \alpha_j = \alpha_j^{(1)} + \phi_{j-1/2}(\alpha_j^{(2)} - \alpha_j^{(1)}) \\
&= \tfrac{1}{2}\,(y_j - 1/2)^2 - \tfrac{1}{8}\phi_{j-1/2} \\
\beta(y_j) &= \beta_j = 1 - \alpha_j^{(1)} - \gamma_j^{(1)} - \phi_{j-1/2}(\alpha_j^{(2)} - \alpha_j^{(1)}) - \phi_{j+1/2}(\gamma_j^{(2)} - \gamma_j^{(1)}) \\
&= \tfrac{3}{4} - y_j^2 + \tfrac{1}{8}\phi_{j-1/2} + \tfrac{1}{8}\phi_{j+1/2} \\
\gamma(y_j) &= \gamma_j = \gamma_j^{(1)} + \phi_{j+1/2}(\gamma_j^{(2)} - \gamma_j^{(1)}) \\
&= \tfrac{1}{2}\,(y_j + 1/2)^2 - \tfrac{1}{8}\phi_{j+1/2},
\end{aligned}\right. \tag{3.80}$$

où les exposants (1) et (2) différencient les poids des formules M_3 (d'ordre 1) et Λ_2 (d'ordre 2). La distribution sur les points de grille voisins est schématisée dans la figure 3.28.

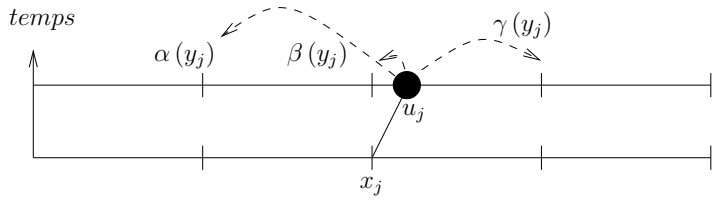


FIG. 3.28 – Répartition des poids de remaillage Λ_2 limitées (3.80) sur les points de grille voisins ($0 < \lambda_j < 1/2$).

Dans l'autre cas, si $-1/2 \leq \lambda_j \leq 0\ \forall j$ (ou $y_j \geq 1/2$), les poids sont

$$\begin{cases} \alpha^{'}(y_j) = \alpha(y_j - 1) \\ \beta^{'}(y_j) = \beta(y_j - 1) \\ \gamma^{'}(y_j) = \gamma(y_j - 1), \end{cases} \tag{3.81}$$

dont la distribution est schématisée dans la figure 3.29.

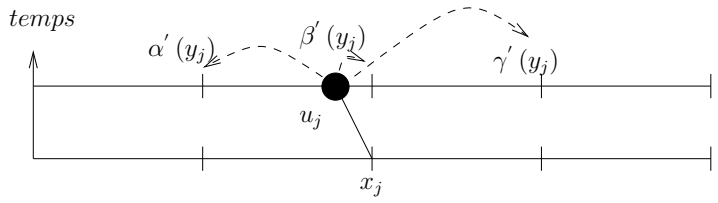


FIG. 3.29 – Répartition des poids de remaillage Λ_2 limitées (3.81) sur les points de grille voisins ($-1/2 < \lambda_j < 0$).

Le schéma de grille obtenu au point x_j est alors

$$u_j^{n+1} = \gamma(z_{j-1})\, u_{j-1} + \beta(z_j)\, u_j + \alpha(z_{j+1})\, u_{j+1}, \tag{3.82}$$

où $z_k = y_k,\ k = j-1,\ j,\ j+1$ dans le premier cas, c'est à dire lorsque $0 \leq \lambda_k = y_k \leq 1/2$ et $z_k = y_k - 1,\ k = j-1,\ j,\ j+1$ dans le second, lorsque $-1/2 \leq \lambda_k = y_k - 1 \leq 0$. Les limiteurs sont alors construits de deux manières différentes suivant le signe du champ de vitesse. Ils sont notés ϕ et ψ.

Si la vitesse est négative ($-1/2 \leq z_k \leq 0$), on introduit le rapport de pentes

$$\bar{r}_{j-1/2} = \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}}, \tag{3.83}$$

et la condition à imposer pour que le schéma soit TVD lorsque $z_{j-1} = z_j = z_{j+1} = z$ est

$$-4\,(z - 1/2)^2 \leq \psi_{j-1/2}/\bar{r}_{j-1/2} - \psi_{j+1/2} \leq 6 - 8z^2. \tag{3.84}$$

Le limiteur ψ est alors calculé par une de ces trois formules

$$\psi_{j-1/2} = \max\left(0, \min\left(4\,(z_j - 1/2)^2\,, \left(6 - 8z_j^2\right)\bar{r}_{j-1/2}\right)\right), \tag{3.85}$$

$$\psi_{j-1/2} = \max\left(0, \min\left(1, 4\left(z_j - 1/2\right)^2, \left(6 - 8z_j^2\right)\bar{r}_{j-1/2}\right)\right), \tag{3.86}$$

ou

$$\psi_{j-1/2} = \max\left(0, \min\left(1, 4\,\bar{r}_{j-1/2}\right)\right). \tag{3.87}$$

Si maintenant la vitesse est positive ($0 \leq z_k \leq 1/2$), on introduit le rapport de pentes

$$r_{j+1/2} = \frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j}, \tag{3.88}$$

et la condition à imposer pour que le schéma soit TVD lorsque $z_{j-1} = z_j = z_{j+1} = z$ est

$$-4\left(z + 1/2\right)^2 \leq \phi_{j+1/2}/r_{j+1/2} - \phi_{j-1/2} \leq 6 - 8z^2. \tag{3.89}$$

Le limiteur ϕ est alors calculé par une de ces trois formules

$$\phi_{j+1/2} = \max\left(0, \min\left(4\left(y_j + 1/2\right)^2, \left(6 - 8y_j^2\right)r_{j+1/2}\right)\right), \tag{3.90}$$

$$\phi_{j+1/2} = \max\left(0, \min\left(1., 4\left(y_j + 1/2\right)^2, \left(6 - 8y_j^2\right)r_{j+1/2}\right)\right), \tag{3.91}$$

ou

$$\phi_{j+1/2} = \max\left(0, \min\left(1, 4\,r_{j+1/2}\right)\right). \tag{3.92}$$

Les limiteurs calculés par (3.85) et (3.90) ont un comportement antidiffusif, comme le limiteur ultrabee [88]. Ils permettent de transporter avec une bonne précision des fonctions de type crénaux, mais présentent un “effet d’escalier” lors de la résolution de fonctions régulières. Les limiteurs (3.86) et (3.91) permettent d’éviter la création d’oscillation, tout en conservant la précision de la solution obtenue par un remaillage Λ_2. Des extrémas de solutions régulières peuvent être néanmoins “rognés”. Enfin les limiteurs (3.87) et (3.92) sont ceux que l’on conseille d’utiliser en pratique puisqu’ils sont quasiment aussi précis que (3.86) et (3.91) et plus facile à implémenter car ils sont indépendants de la vitesse des particules.

Rappelons aussi d’importantes remarques faites dans le chapitre 2. Premièrement, Les limiteurs (3.86) et (3.91) sont nul, et la solution est donc réduite à l’ordre un, si $y \geq \sqrt{3}/2 \simeq 0.87$. Ensuite, l’inégalité $y \leq \sqrt{10}/4 \simeq 0.8$ est utilisée pour construire les limiteurs (3.87) et (3.92). Enfin, dans le cas d’un champ de vitesse constant, les formules M_3 ne sont plus TVD lorsque $y \geq \sqrt{3}/2$. Malgré ces trois remarques, les limiteurs ϕ et ψ seront aussi utilisés lorsque $1/2 \leq z \leq 1$ ou $-1 \leq z \leq -1/2$. Ces cas ne seront en fait que rarement atteint comme le montre le calcul suivant.

Ces cas ne peuvent être atteint que dans un bloc de type gauche, donc par définition $\lambda_{min} - N \leq 1/2$. Considérons $N = 0$ sans perte de généralité, et une vitesse positive. Notons a_c la vitesse critique pour laquelle $y_c = \lambda_c = \Delta t\, a_c/\Delta x > \sqrt{10}/4$. Le bloc étant de taille $M\,\Delta x$,

$$|a_c - a_{inf}| < M\,\Delta x\,|a|_{1,\infty}, \tag{3.93}$$

et

$$|\lambda_c - \lambda_{inf}| < 1/2, \tag{3.94}$$

d'après la condition sur Δt

$$\Delta t < \frac{1/2}{M\ |a|_{1,\infty}}. \tag{3.95}$$

Donc $\lambda \leq \sqrt{10}/4$ dans tout le bloc si

$$\Delta x < \frac{\sqrt{10}-2}{4(M+1/2)}, \tag{3.96}$$

puisque alors

$$M\,\Delta x + \Delta t\,(a_c - a_{inf}) < \frac{\sqrt{10}}{4} - \frac{1}{2}. \tag{3.97}$$

L'introduction des limiteurs dans les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ se généralise facilement. Les coefficients α, β, γ intervenant dans les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ (3.59) à (3.66) sont remplacés par les expressions (3.80), (3.81), où les limiteurs sont calculés par (3.90), (3.91) ou (3.92) lorsque la vitesse de la particule remaillée est positive et (3.85), (3.86) ou (3.87) lorsque la vitesse est négative.

Remarque 12. *La limitation des formules $\Lambda_{\tilde{4}}$ se généralise par la même technique.*

3.5.3 Illustrations numériques

L'utilisation des limiteurs dans les formules de remaillage consistantes est illustré sur un cas d'advection et de compression de fonctions présentant de forte variations. D'autres illustrations sont présentées dans l'article de l'annexe F.

Le premier cas étudié considére une fonction initialisée sous la forme de trois creneaux, de longeur 0.2, centré en 0 et en ± 0.35. Le champ de vitesse est $a(x) = x$, les particules sont advectées par un schéma de Runge Kutta 4 et soumises à une condition au bord de libre sortie. Les figures 3.30 à 3.43 représente la solution à trois instants (t=0, 0.4 et 1) et compare différentes formules de remaillage, pour différents nombres de CFL.

Les erreurs de consistance sont visible en $x = 1/2$ lorsque $\Delta t = \Delta x$ puisque alors $\lambda = \Delta t\, x/\Delta x = 1/2$. Elles sont bien corrigées en utilisant des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$. Cette amélioration est d'autant plus marquée que le nombre CFL est élevé, puisque les erreurs de consistances sont alors plus nombreuses. Les oscillations duent à la discontinuité de la fonction crénaux sont toujours présentes aprés la correction de consistance, mais sont correctement supprimées en utilisant les formules consistantes limitées. Le limiteur antidiffusif permet d'obtenir une bonne représentation des crénaux. Le limiteur (3.86 ou 3.91) est aussi efficace que celui (3.87 ou 3.92), au moins dans les configurations de cette simulation.

Le second cas (figures 3.35 à 3.39) considére les mêmes paramètres, mais une initialisation par des fonctions différentes. La solution est représentée aux instants ($T = 0$, 0.8 et 1.5).

Le choix du pas de temps à une grande répercution sur la qualité de la solution obtenu. Plus il est grand et moins d'itérations sont effectuées, la solution est alors plus

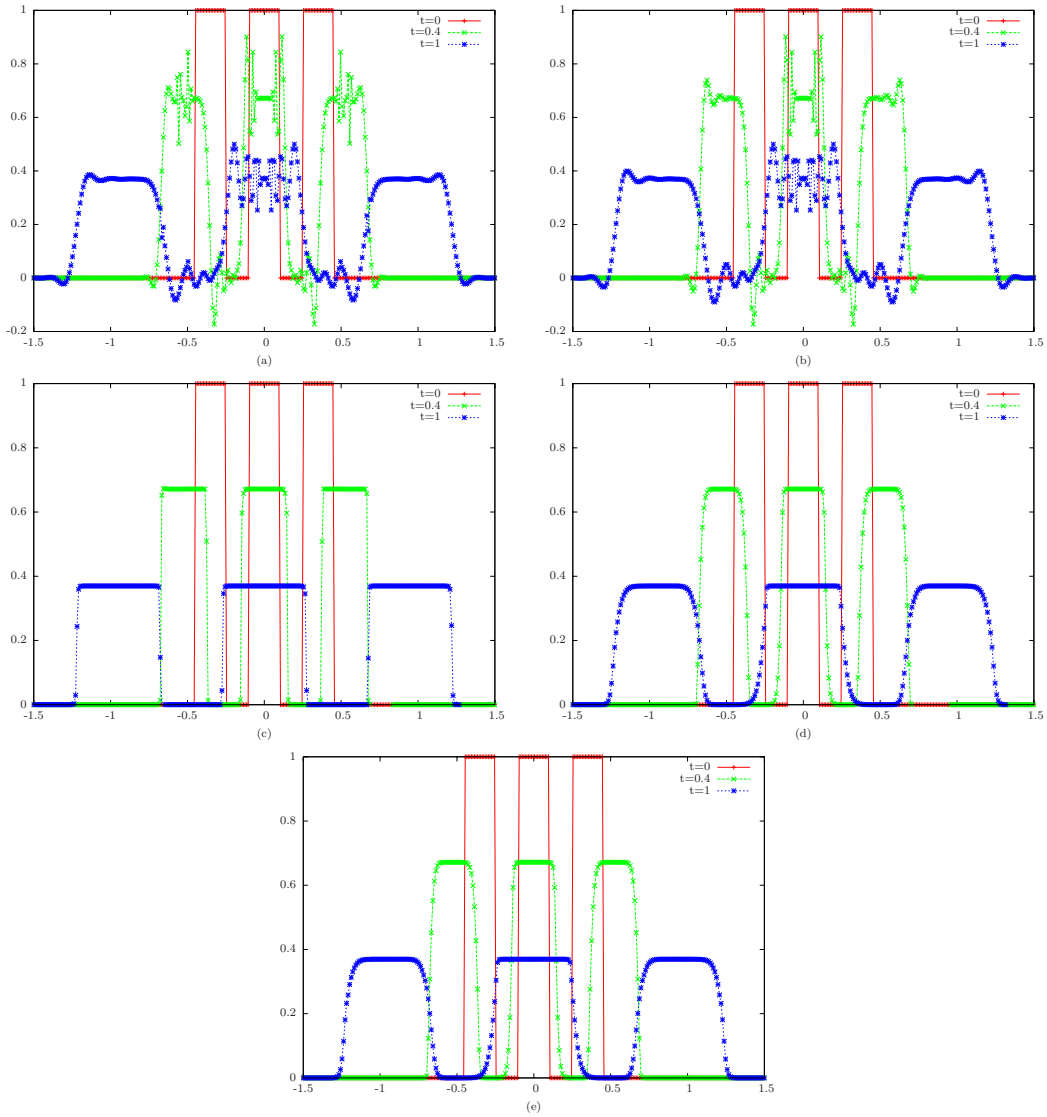


FIG. 3.30 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = \Delta x = 10^{-2}$ puis remaillage par des formules d'ordre deux, Λ_2 en (a), $\Lambda_{\tilde{2}}$ en (b), $\Lambda_{\tilde{2}}$ limitées par le limiteur antidiffusif (3.85 ou 3.90) en (c), dépendant de a (3.86 ou 3.91) en (d) et de type minmod (3.87 ou 3.92) en (e). La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0$, 0.4, 1.

précise. Cependant, un compromis doit être fait sur la taille du pas de temps puisque l'erreur de consistance entre également en considération. Ceci est mis en évidence dans la figure (3.39), où la solution est dégradée lorsque le pas de temps est grand. Cette perte de précision, due aux erreurs de consistances, dépend des formules de remaillage utilisées. La figure 3.40 représente la solution obtenue pour trois valeurs de CFL différentes. Une

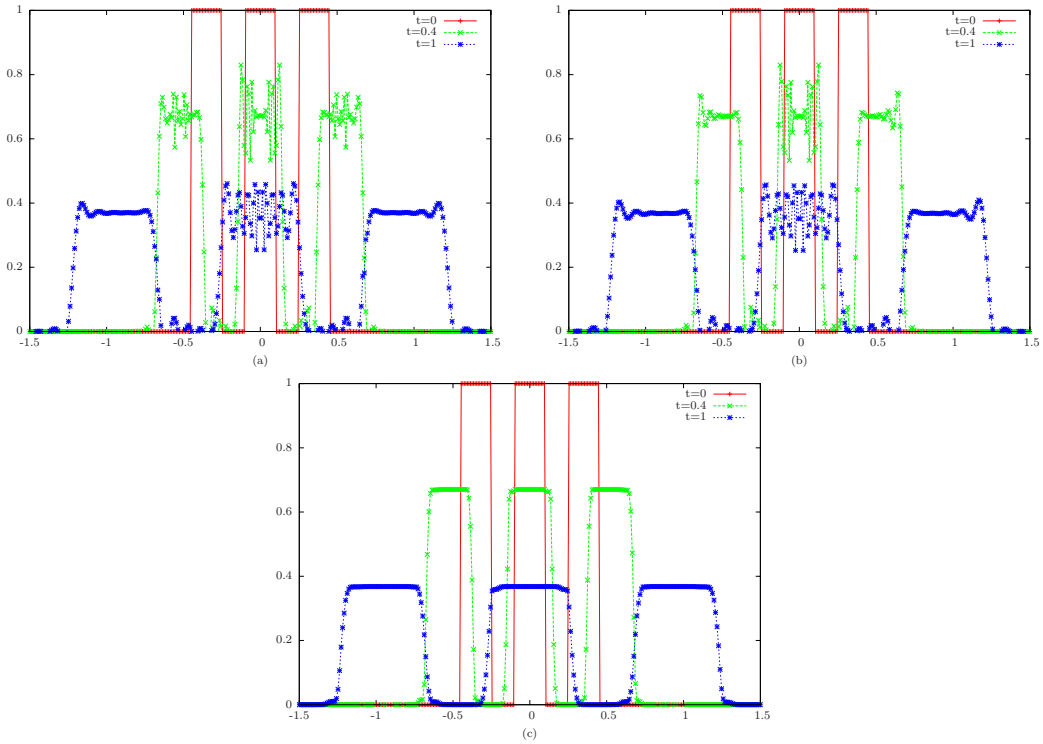


FIG. 3.31 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = \Delta x = 10^{-2}$ puis remaillage par des formules d'ordre quatre, Λ_4 en (a), Λ_4 consistantes en (b), Λ_4 consistantes limitées en (c). La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0, 0.4, 1$.

CFL de 10 semble être un bon compromis, la solution obtenue à $CFL = 2$ étant plus diffusive et celle à $CFL = 40$ présentant de grandes erreurs de consistance. Il est constaté une fois de plus dans les figures 3.41 et 3.42 que la solution obtenue pour un nombre de $CFL = 15$ est plus précise que celle obtenue pour $CFL = 0.4$.

Les résultats obtenus avec un remaillage $M_4^{'}$ sont donnés à titre de comparaison dans la figure 3.43. Il est possible de montrer que, dans ce cas, ces formules sont consistantes mais d'ordre un uniquement. Cette dégradation de la précision est visible en $x = 0$ lorsque les pas de temps sont grands. Des oscillations duent aux fortes variations sont présentes, mais d'amplitude faible à comparé de celles obtenus par un remaillage Λ_2 ou Λ_4.

La répartition des différents blocs de particule est représentée dans la figure 3.44. Les particules appartenant aux extrémités des blocs, et necessitant d'être remaillées par une formule "modifiée", sont peu nombreuses.

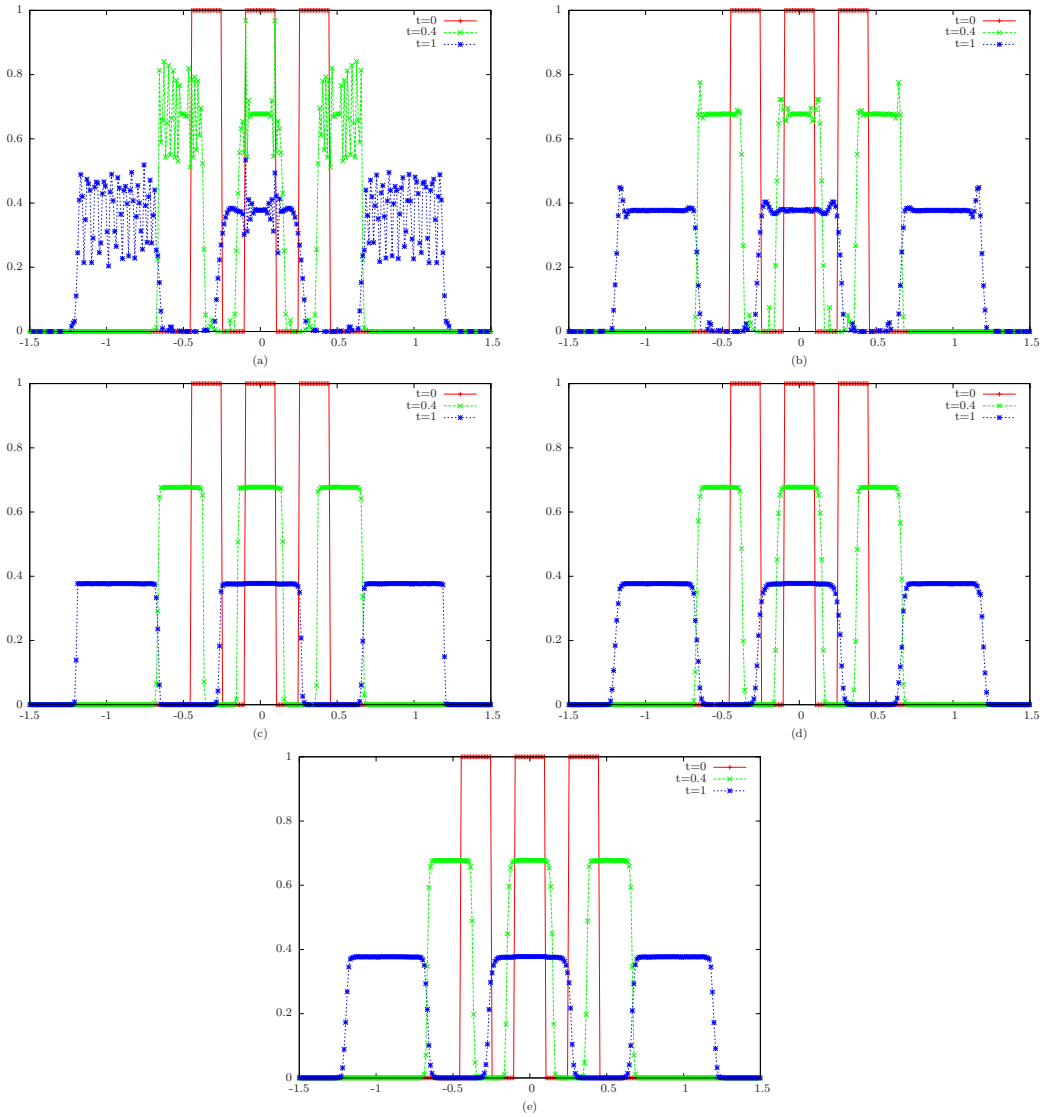


FIG. 3.32 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = 5\,\Delta x = 5\,10^{-2}$ puis remaillage par des formules d'ordre deux, Λ_2 en (a), $\Lambda_{\tilde{2}}$ en (b), $\Lambda_{\tilde{2}}$ limitées par le limiteur antidiffusif (3.85 ou 3.90) en (c), dépendant de a (3.86 ou 3.91) en (d) et de type minmod (3.87 ou 3.92) en (e). La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0$, 0.4, 1.

3.5.4 Conclusion

Retenons en conclusion de ce chapitre que l'utilisation de grands pas de temps permet d'une part d'effectuer un gain en temps de calcul et d'autre part d'améliorer la qualité de la solution obtenue. Pour cela, les particules doivent être advectées et remaillées avec une précision d'ordre élevée. Or les particules sont souvent remaillées par des formules

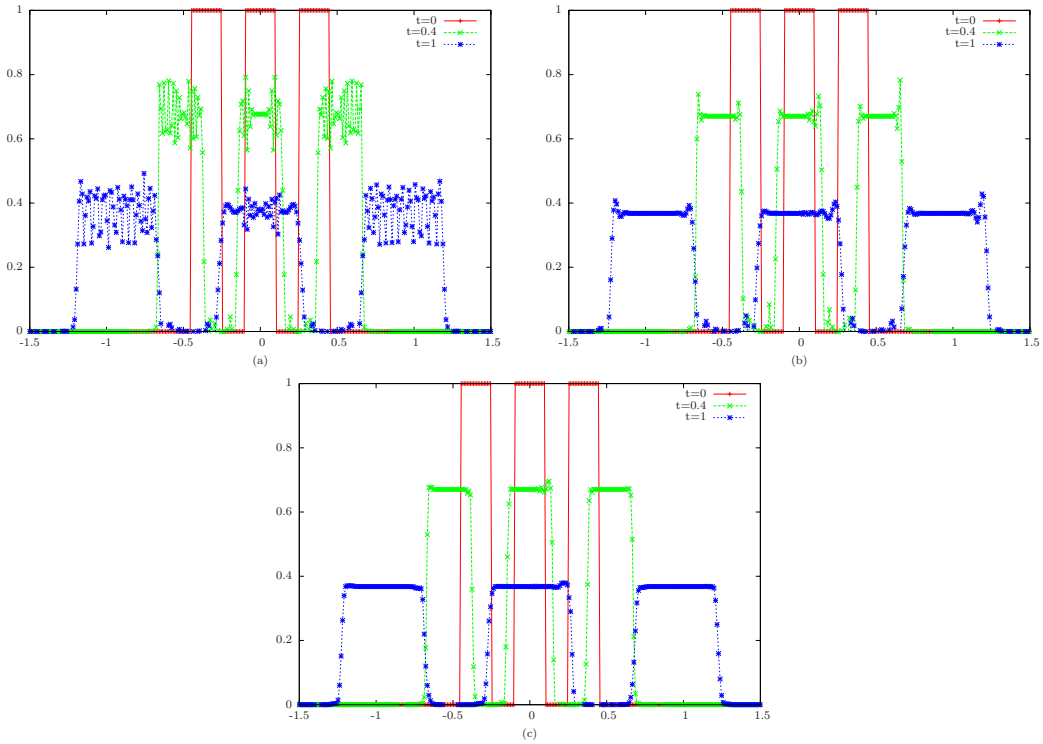


FIG. 3.33 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = 5\,\Delta x = 5\,10^{-2}$ puis remaillage par des formules d'ordre quatre, Λ_4 en (a), Λ_4 consistantes en (b), Λ_4 consistantes limitées en (c). La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0$, 0.4, 1.

M_4'. Construites sur des critères de régularité, ces formules d'ordre deux sont dégradées à l'ordre un en certains points de grille et leur précision peut s'avérer insuffisante lorsque les pas de temps sont grands. D'un autre côté, des formules Λ_m permettent de remailler les particules avec une précision élevée, d'ordre m. Nous avons montré dans ce chapitre que ces formules peuvent cependant souffrir de problèmes de consistance sur des points de grilles correspondant à une variation de la CFL locale. Une méthode de correction à été introduite sur les formules Λ_2 et sa généralisation à un ordre plus élevé a été donnée sur les formules Λ_4. Des formules de remaillage d'ordre m peuvent ainsi être utilisées pour des nombres de CFL élevés, les schémas équivalents obtenus étant consistants et au moins d'ordre $m - 2$ en tout point de grille. De plus, les limiteurs construits dans le chapitre 2 peuvent être adaptés, évitant ainsi la création d'oscillations en présence de fortes variations. Ces nouvelles formules de remaillage ont été construites en dimension un et nécessite d'être généralisées aux dimensions supérieures. C'est l'objectif du chapitre qui suit.

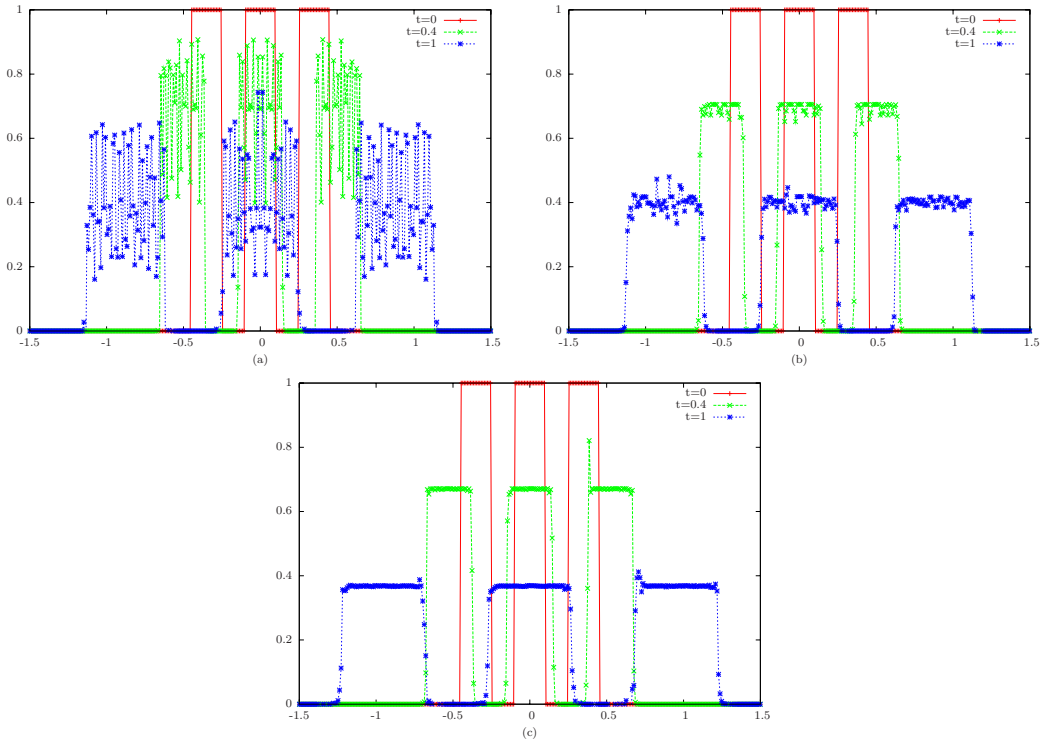


FIG. 3.34 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = 20\,\Delta x = 2\,10^{-1}$ puis remaillage par des formules Λ_2 en (a), $\Lambda_{\tilde{2}}$ limitées par le limiteur de type min-mod (3.87 ou 3.92) en (b) et Λ_4 consistantes limitées en (c). La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0$, 0.4, 1.

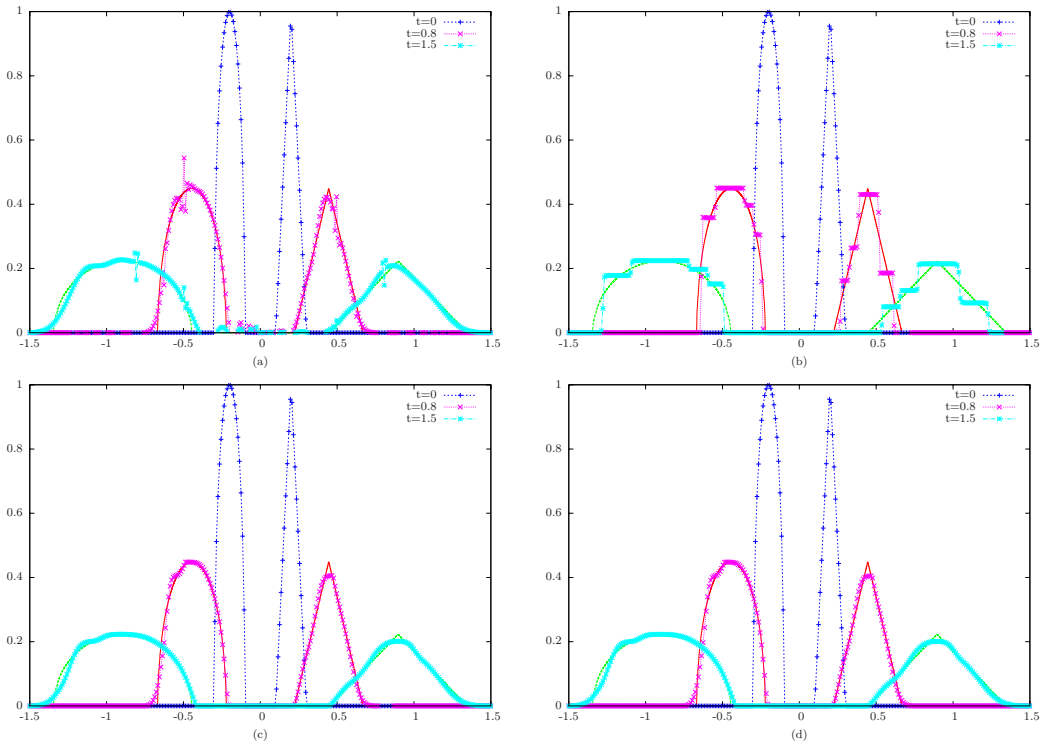


FIG. 3.35 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = \Delta x = 10^{-2}$ puis remaillage par des formules Λ_2 en (a), $\Lambda_{\tilde{2}}$ limitées par le limiteur antidiffusif (3.85 ou 3.90) en (b), dépendant de a (3.86 ou 3.91) en (c) et de type minmod (3.87 ou 3.92) en (d). La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0$, 0.8, 1.5.

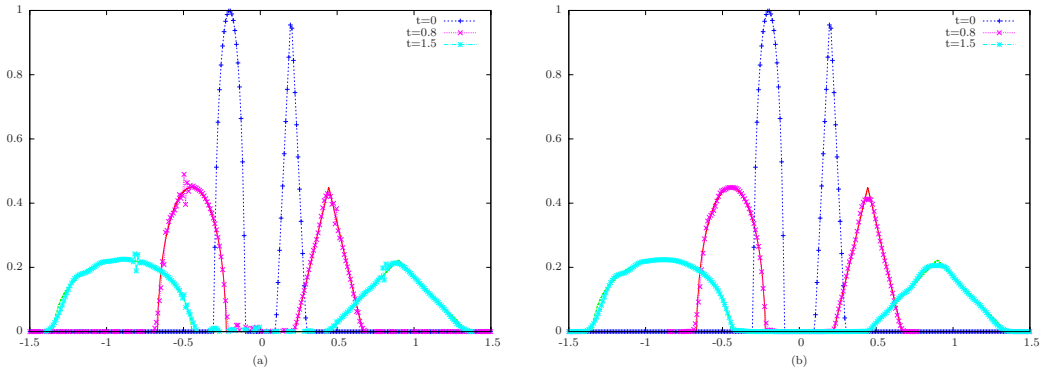


FIG. 3.36 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = \Delta x = 10^{-2}$ puis remaillage par des formules Λ_4 en (a), Λ_4 consistantes limitées en (b). La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0$, 0.8, 1.5.

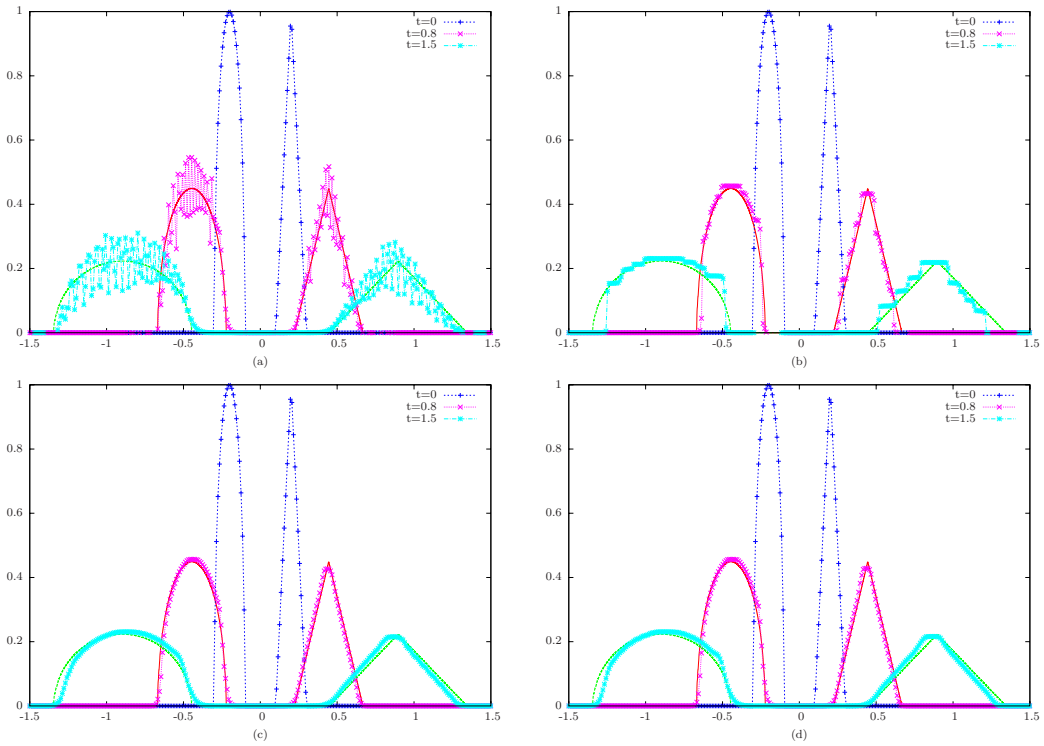


FIG. 3.37 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = 5\,\Delta x = 5\,10^{-2}$ puis remaillage par des formules Λ_2 en (a), $\Lambda_{\tilde{2}}$ limitées par le limiteur antidiffusif (3.85 ou 3.90) en (b), dépendant de a (3.86 ou 3.91) en (c) et de type minmod (3.87 ou 3.92) en (d). La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0$, 0.8, 1.5.

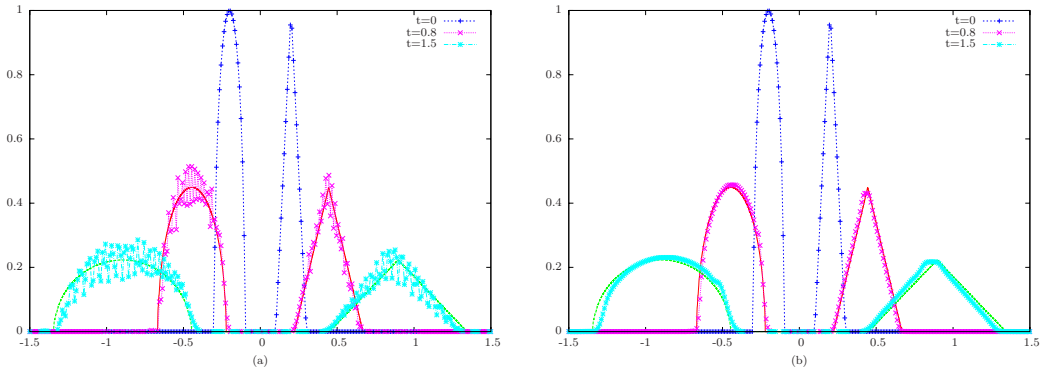


FIG. 3.38 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = 5\,\Delta x = 5\,10^{-2}$ puis remaillage par des formules Λ_4 en (a), Λ_4 consistantes limitées en (b). La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0$, 0.8, 1.5.

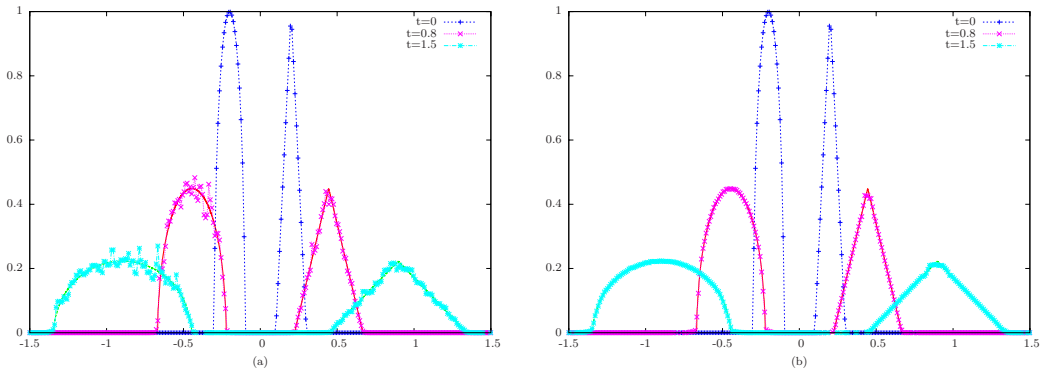


FIG. 3.39 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = 20\,\Delta x = 2\,10^{-1}$ puis remaillage par des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ limitées par le limiteur de type minmod (3.87 ou 3.92) en (a) et Λ_4 consistantes limitées en (b). La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0$, 0.8, 1.5.

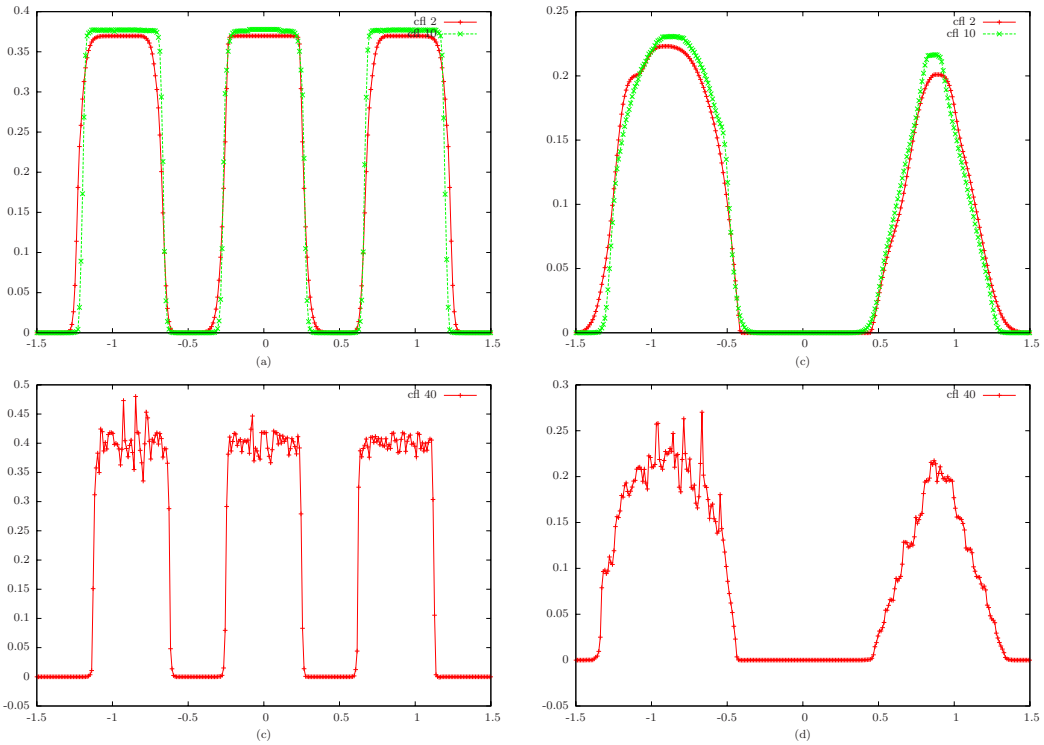


FIG. 3.40 – Influence du nombre CFL : les particules sont remaillées par des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ limitées par le limiteur minmod pour des nombres de CFL de 2,10 en (a) et (b) puis 40 en (c) et (d). $T = 1$ à gauche et $T = 1.5$ à droite.

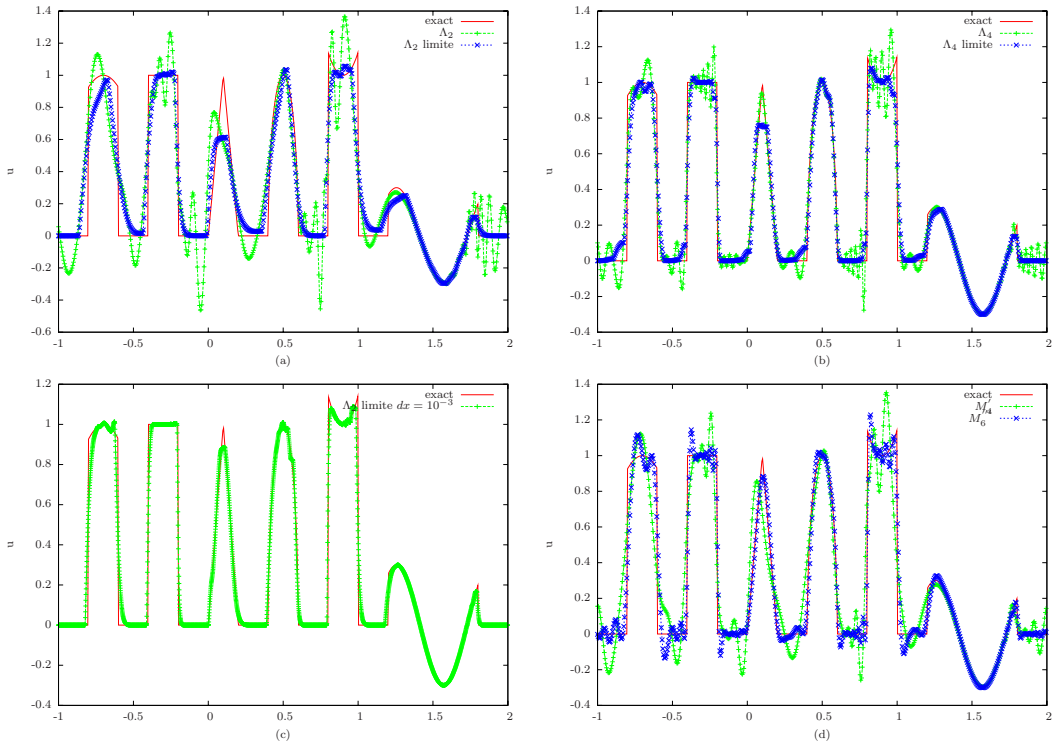


FIG. 3.41 – Comparaison de la précision de la solution en fonction des formules de remaillage utilisées. Les particules sont advectées suivant le champ $a(x) = 2 + sin(2\,\pi\,x)$ par un schéma Runge-Kutta 4 pendant 3 périodes ($T = \sqrt{3} \simeq 1.7$) et pour un nombre CFL de 0.4 ($\Delta t = 0.4\,\Delta x/3 = 2\,10^{-3}/3$).

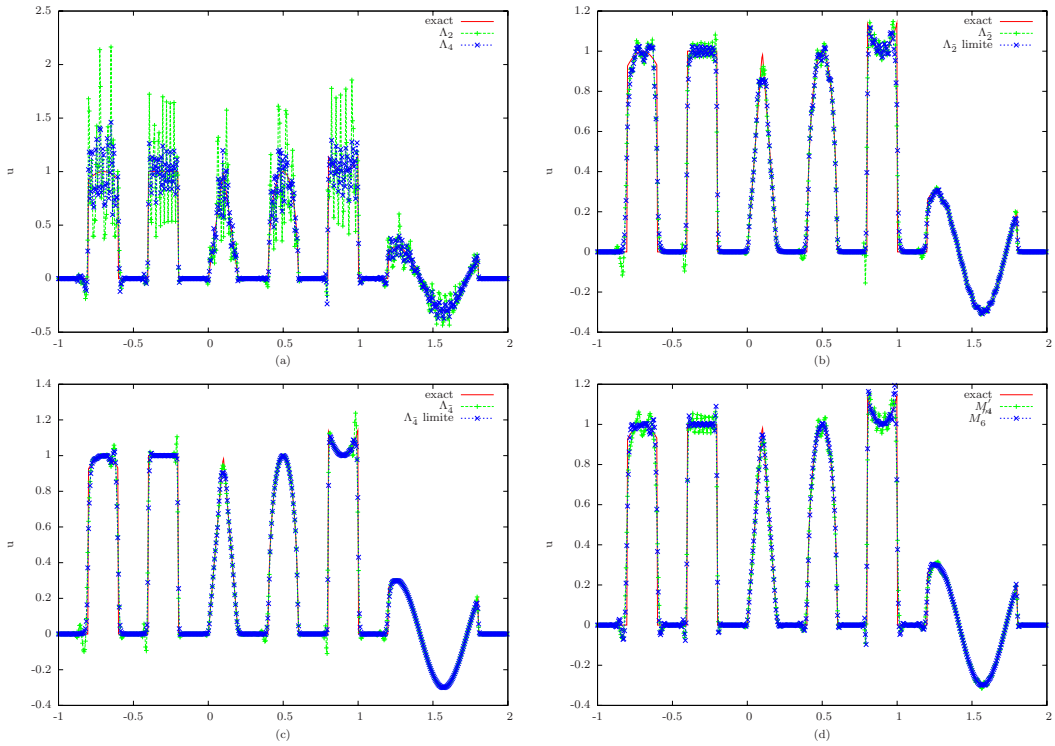


FIG. 3.42 – Comparaison de la précision de la solution en fonction des formules de remaillage utilisées. Les particules sont advectées suivant le champ $a(x) = 2 + sin(2\,\pi\,x)$ par un schéma Runge-Kutta 4 pendant 3 périodes ($T = \sqrt{3} \simeq 1.7$) et pour un nombre CFL de 15 ($\Delta t = 15\,\Delta x/3 = 75\,10^{-3}/3$).

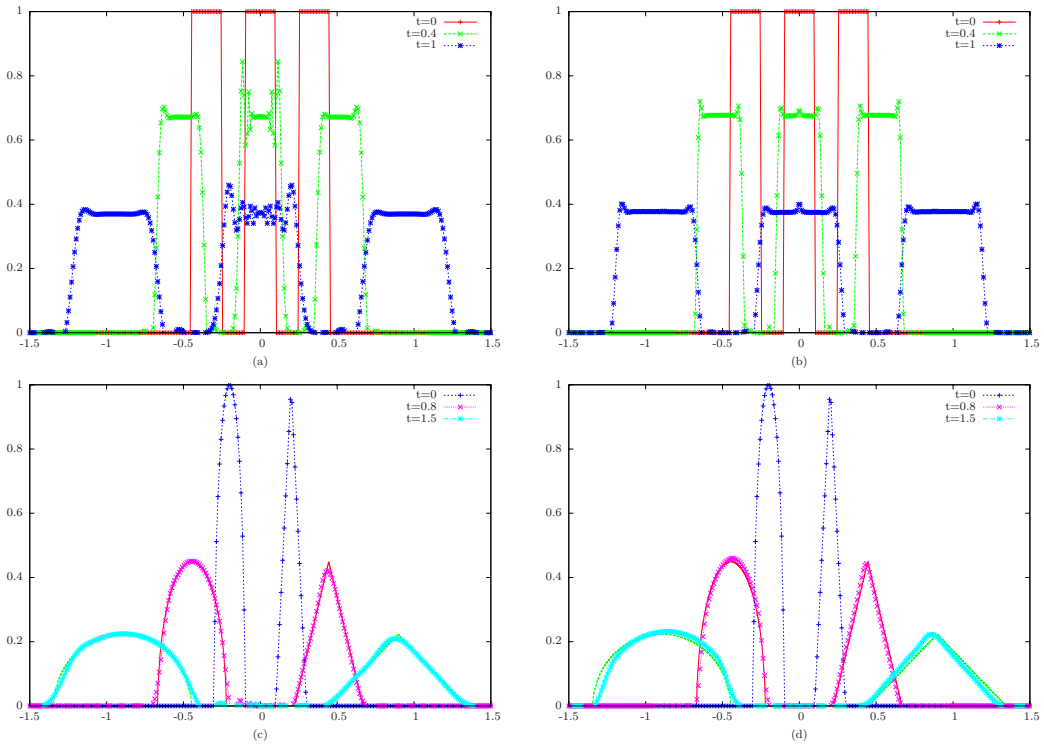


FIG. 3.43 – Advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4 avec $\Delta t = \Delta x = 10^{-2}$ en (a,c) et $\Delta t = 5\,\Delta x = 5\,10^{-2}$ en (b,d) puis remaillage par des formules $M_4^{'}$. La solution est représentée à trois instant successifs, $T = 0$, 0.4, 1.

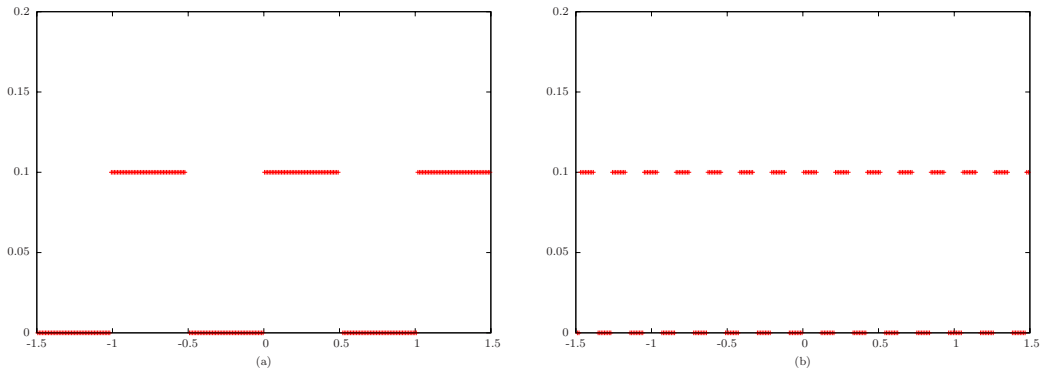


FIG. 3.44 – Répartition des blocs de particule dans le cas de l'advection à la vitesse $a(x) = x$ par un schéma RK4. Les croix du bas représentent les particules appartenant à des blocs de type centré et celles du haut à des blocs de type gauche. $\Delta t = \Delta x = 10^{-2}$ en (a) et $\Delta t = 5\,\Delta x = 5\,10^{-2}$ en (b).

Chapitre 4

Généralisation aux dimensions deux et trois

Le remaillage des particules en dimension deux ou trois est généralement traité par produit tensoriel des formules 1D. Cependant, la généralisation directe au cas multidimensionnel des techniques décrites aux chapitres précédents semble difficile. La stratégie choisie ici est donc de se ramener à une succession d'étapes d'advection dans chaque direction en décomposant les équations d'advection multi-dimensionnelles. Les particules sont alors remaillées en dimension deux et trois, de manière consistante, et sans créer d'oscillations numériques.

Deux techniques pour alterner les étapes d'advection avec la précision souhaitée sont présentées. La première consiste à adapter la méthode de splitting directionnel, connue encore sous le nom de splitting d'opérateurs séquentiel, additif ou de Strang. Les formules de remaillage construites en dimension un sont alors utilisées alternativement dans les différentes directions d'espace. Une évaluation appropriée de la vitesse d'advection des particules permet de proposer une deuxième méthode, que l'on nommera splitting particulaire, tout aussi efficace que la première, mais dont le cout de calcul est plus faible dans certains cas.

Pour ces deux méthodes, l'obtention d'un ordre élévé en temps est plus délicate que pour les méthodes d'advection-remaillage multi-dimensionnelles traditionnelles. Des algorithmes d'ordre deux et trois sont exposés dans une première section et leur complexité algorithmique est analysée. Leur validation numérique est faite en seconde section. Des simulations numériques sont également présentées pour illustrer l'efficacité des méthodes développées dans les chapitres précédents et généralisées ici aux dimensions deux et trois.

4.1 Remaillage des particules par méthode de splitting

On rappelle tout d'abord les principales méthodes de splitting directionnel et leur mise en oeuvre pour les méthodes particulaires. Une méthode moins couteuse en temps de calcul sera ensuite construite et analysée.

4.1.1 Remaillage par splitting directionnel

Les méthodes de splitting d'opérateurs sont souvent utilisées lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes posés en dimension deux ou trois. Les opérateurs considérés sont liés à l'espace et l'on parle alors de splitting directionnel. Leur avantage est de généraliser facilement le cas de la dimension un, mais leur inconvénient est de se compliquer lorsque une précision élevée est désirée. La littérature sur le sujet est vaste et variée, on se réfère de manière non exhaustive aux récents travaux de I.Farago [41, 42] ou à l'article original de G.Strang [86].

L'idée est de décomposer les opérateurs du problème et de résoudre successivement des équations plus simples, comportant un seul opérateur. Plus précisément, placons nous en dimension deux et notons A et B des opérateurs. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = (A+B)\ u(t),\ t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

En notant $t^n = n\,\Delta t$, la méthode sequentielle consiste à résoudre

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \partial_t\, u^{(1)} &= A\, u^{(1)} \\ u^{(1)}(t^n) &= u(t^n) \end{cases} && ,t \in [t^n, t^{n+1}] \\ &\begin{cases} \partial_t\, u^{(2)} &= B\, u^{(2)} \\ u^{(2)}(t^n) &= u^{(1)}(t^{n+1}). \end{cases} && ,t \in [t^n, t^{n+1}] \end{aligned} \tag{4.2}$$

La solution au temps t^{n+1} est alors donnée par $u(t^{n+1}) = u^{(2)}(t^{n+1})$.

Cet algorithme est simple, mais il est uniquement d'ordre un en temps. Une méthode très utilisée, d'ordre deux, consiste à ajouter une étape supplémentaire. Ce splitting (dit formule de Strang) est décrit par l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \partial_t\, u^{(1)} &= A\, u^{(1)} \\ u^{(1)}(t^n) &= u(t^n) \end{cases} && ,t \in [t^n, t^{n+1/2}] \\ &\begin{cases} \partial_t\, u^{(2)} &= B\, u^{(2)} \\ u^{(2)}(t^n) &= u^{(1)}(t^{n+1/2}) \end{cases} && ,t \in [t^n, t^{n+1}] \\ &\begin{cases} \partial_t\, u^{(3)} &= A\, u^{(3)} \\ u^{(3)}(t^{n+1/2}) &= u^{(2)}(t^{n+1}) \end{cases} && ,t \in [t^{n+1/2}, t^{n+1}], \end{aligned} \tag{4.3}$$

et la solution au temps t^{n+1} est $u(t^{n+1}) = u^{(3)}(t^{n+1})$.

Il est possible d'écrire des algorithmes d'ordre plus élevé, mais au prix d'une plus grande complexité. Un splitting d'ordre quatre est donné à titre d'exemple dans l'annexe E. La résolution sur un pas de temps necessite de résoudre huit problèmes de Cauchy (au lieu de deux à l'ordre un et trois pour l'ordre deux).

L'algorithme de Strang (4.3) s'écrit ainsi :

Advection suivant la première direction pendant $\Delta t/2$

- Evaluation des vitesses aux points milieu : $\widetilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1(\widetilde{\mathbf{x}}_p,\, t + \Delta t/2)$ avec $\widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p + \mathbf{a}_1(\mathbf{x}_p,\, t)\Delta t/4$
- Advection des particules suivant le premier axe : $\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_1 \Delta t/2$
- Remaillage 1D des particules suivant le premier axe : $(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)$

Advection suivant la seconde direction pendant Δt

- Evaluation des vitesses aux points milieu : $\widetilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2(\widetilde{\mathbf{x}}_p,\, t + \Delta t/2)$ avec $\widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p + \mathbf{a}_2(\mathbf{x}_p,\, t)\Delta t/2$
- Advection des particules suivant le second axe : $\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_2 \Delta t$
- Remaillage 1D des particules suivant le second axe : $(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)$

Advection suivant la première direction pendant $\Delta t/2$

- Evaluation des vitesses aux points milieu : $\widetilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1(\widetilde{\mathbf{x}}_p,\, t + \Delta t/2)$ avec $\widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p + \mathbf{a}_1(\mathbf{x}_p,\, t)\Delta t/4$
- Advection des particules suivant le premier axe : $\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_1 \Delta t/2$
- Remaillage 1D des particules suivant le premier axe : $(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)$

où l'on a noté $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ le champ de vitesse, $\mathbf{a}_1 = (a_1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, a_2)$, $\mathbf{x}_p$ la position des particules et ∂_1, ∂_2 les dérivées respectives par rapport à la première et seconde direction d'espace.

Bien évidemment, chaque étape d'un algorithme de splitting d'ordre n doit être résolu au moins à l'ordre n. On choisira d'advecter les particules par un schéma de Runge Kutta d'ordre deux lorsqu'on utilise un splitting de Strang.

La méthode de splitting sequentiel (4.2), ou celles d'ordre supérieur s'interprètent de la même manière. Les algorithmes des différentes méthodes de remaillage en dimension deux et trois sont résumés dans l'annexe E.

4.1.2 Remaillage par splitting particulaire

L'idée est toujours d'utiliser une advection suivie d'un remaillage 1D des particules de manière alternée dans chaque direction d'espace. Ceci permet de diminuer le nombre d'étapes de remaillage (ou de problèmes de Cauchy à résoudre) à d, d étant la dimension de l'espace. On donne d'abord une manière intuitive de construire la méthode avant de démontrer rigoureusement sa convergence à l'ordre deux.

Considérons tout d'abord le cas classique d'une particule advectée par un schéma Runge Kutta d'ordre 2 puis remaillée par produit tensoriel (figure 4.1). Une particule initialement en $\mathbf{x}^0$ et portant la quantité $u(\mathbf{x}^0)$ se retrouve après l'advection en $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta t\, \mathbf{a}(\widetilde{\mathbf{x}}^0)$, où les composantes de $\widetilde{\mathbf{x}}^0$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x}_1^0 = x_1^0 + a_1(\mathbf{x}^0)\, \Delta t/2 \\ \widetilde{x}_2^0 = x_2^0 + a_2(\mathbf{x}^0)\, \Delta t/2. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Le remaillage cré ensuite une nouvelle particule en $\mathbf{x}_0$.

En procédant maintenant par splitting directionnel, la méthode devient celle schématisée dans la figure 4.2. La première étape consiste à advecter puis remailler les particules suivant l'axe x. La vitesse d'advection est la même que lors d'un remaillage tensoriel, mais on ne considère que la première composante : $x_1^1 = x_1^0 + \Delta t\, a_1(\widetilde{\mathbf{x}}^0)$ et $x_2^1 = x_2^0$. La

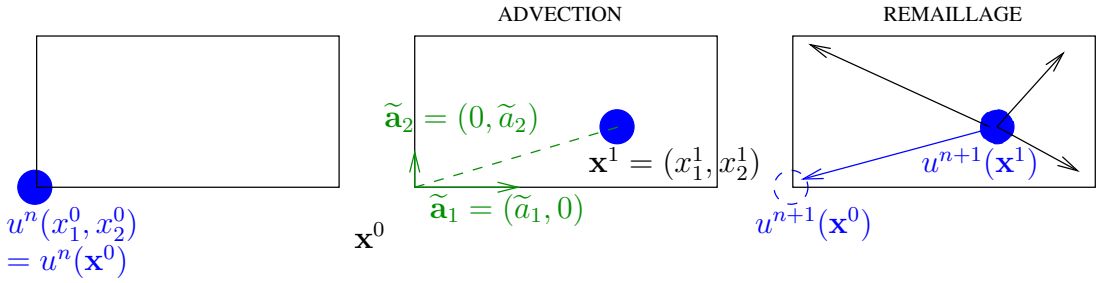


FIG. 4.1 – Remaillage par produit tensoriel d'une particule advectée par un schéma RK2.

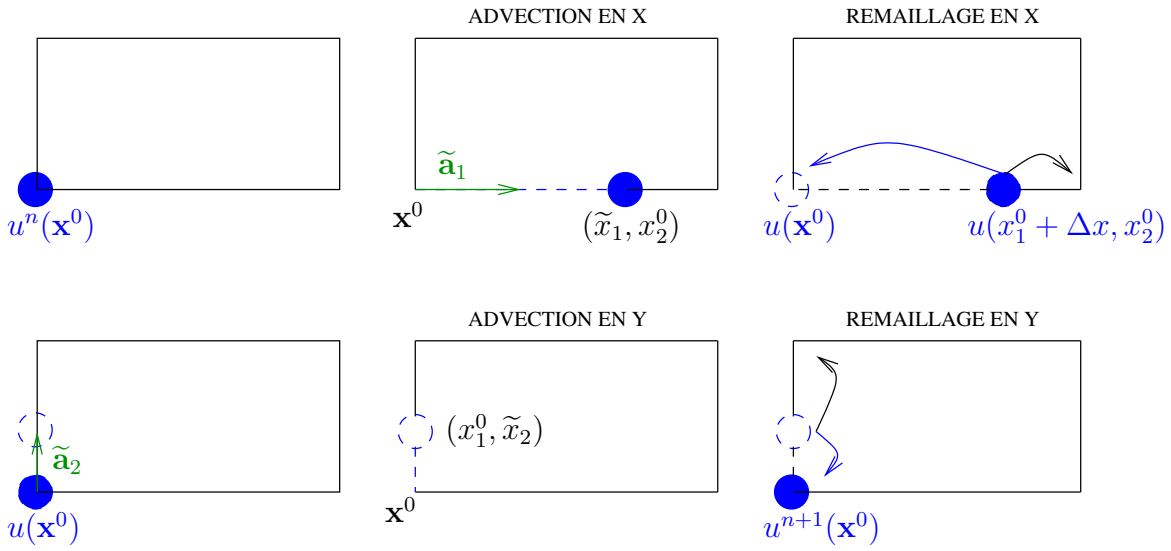


FIG. 4.2 – Méthode de remaillage par splitting particulaire

seconde étape consiste à advecter puis remailler les particules suivant l'axe y. Cependant, l'évaluation des vitesses necessite une attention particulière, puisqu'elle necessite de tenir compte de la première advection effectuée (fig. 4.3). En effet, si la particule est advectée

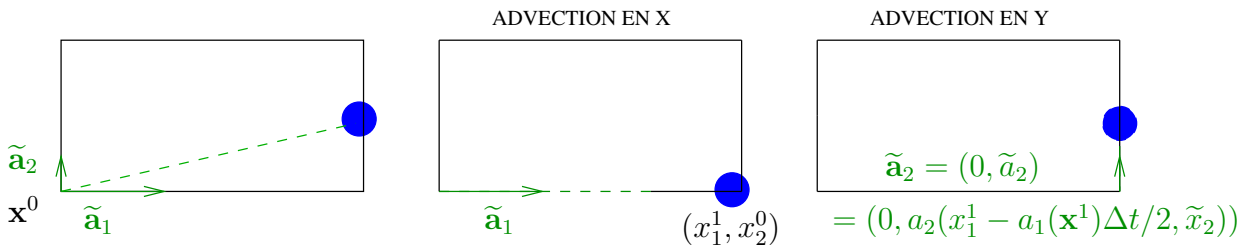


FIG. 4.3 – Evaluation de la vitesse pour l'advection suivant y

en $x_1^1 = x_1^0 + \Delta x$ durant la première étape, elle se situe à la même place après remaillage. Pour obtenir le même "point milieu" $\widetilde{x}_1$, où est évaluée la vitesse d'advection, que dans

le cas d'un remaillage tensoriel, il doit être calculé ainsi : $\widetilde{x}_1^1 = x_1^1 - a_1(\mathbf{x}^1)\,\Delta t/2$, puisque $x_1^1 = x_1^0 + \Delta t a_1(\mathbf{x}^0 + O(\Delta t))$ et $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + O(\Delta t)$. On montrera que cette évaluation est une bonne approximation, indépendamment de la position de la particule à la fin de la première étape x_1^1.

L'algorithme s'écrit finalement :

Advection suivant la première direction pendant Δt

- Evaluation des vitesses aux points milieu : $\widetilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1(\widetilde{\mathbf{x}}_p)$ avec $\widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p + \mathbf{a}(\mathbf{x}_p)\Delta t/2$
- Advection des particules suivant le premier axe : $\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_1 \Delta t$
- Remaillage 1D des particules suivant le premier axe : $(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)$

Advection suivant la seconde direction pendant Δt

- Evaluation des vitesses aux points milieu : $\widetilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2(\widetilde{\mathbf{x}}_p)$ avec $\widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p - \mathbf{a}_1(\mathbf{x}_p)\Delta t/2 + \mathbf{a}_2(\mathbf{x}_p)\Delta t/2$
- Advection des particules suivant le second axe : $\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_2 \Delta t$
- Remaillage 1D des particules suivant le second axe : $(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)$

où $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{a}_1 = (a_1, 0)$ et $\mathbf{a}_2 = (0, a_2)$.

Remarque 13. *Si le champ de vitesse dépend du temps, l'évaluation des vitesses $\widetilde{\mathbf{a}}$ et $\mathbf{a}$ se fait respectivement en $t + \Delta t/2$, et en t.*

Proposition 12. *Lorsque les particules sont remaillées par une formule d'ordre deux minimum, la méthode de splitting particulaire 2D stationnaire résoud l'équation de transport sous forme conservative (4.17) avec une erreur de consistance d'ordre deux.*

Preuve

D'après les preuves des propositions 3, 4 ou 5 du chapitre 3 ou les travaux de thèse de L.Weynans [93], la méthode d'advection (à la vitesse a) puis de remaillage (d'ordre deux minimum) de particules dans la direction 1 admet l'équation équivalente suivante :

$$u_j^{n+1} = u_j - \Delta t\,\partial_1\left(a\,u_j\right) + \frac{\Delta t^2}{2}\,\partial_{11}^2\left(a^2\,u_j\right) + O\left(\Delta x^3 + \Delta t\,\Delta x^2 + \Delta t^2\,\Delta x\right), \tag{4.5}$$

où l'on note comme d'habitude $u_j = u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t)$.

La première étape de l'algorithme consiste à advecter les particules à la vitesse $\mathbf{a}_1(\mathbf{x}_p + \mathbf{a}(\mathbf{x}_p)\Delta t/2)$, puis à les remailler. L'équation équivalente donnant la valeur de $u_j^\star$ en x_j à la fin de la première étape est alors donnée en injectant l'expression de la vitesse

$$\begin{aligned} &a_1\left(x_1 + a_1(x_1,x_2)\,\Delta t/2, x_2 + a_2(x_1,x_2)\,\Delta t/2\right) \\ &= a_1(x_1,x_2) + \Delta t/2\left(a_1(x_1,x_2)\partial_1 a_1 + a_2(x_1,x_2)\partial_2 a_1\right) + O\left(\Delta t^2\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

à la place de a dans (4.5). On trouve :

$$\begin{aligned} u_j^\star = \;& u_j - \Delta t\,\partial_1\left[a_1\,u_j + \Delta t/2\left(a_1\partial_1 a_1 + a_2\partial_2 a_1\right)\,u_j + O(\Delta t^2)\right] \\ &+ \tfrac{\Delta t^2}{2}\,\partial_{11}^2\left[a_1^2\,u_j + O(\Delta t)\right] + O\left(\Delta t^3 + \Delta x^3 + \Delta t\,\Delta x^2 + \Delta t^2\,\Delta x\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

La seconde partie de l'algorithme consiste à initialiser les particules sur la grille, les advecter suivant le champ $\widetilde{\mathbf{a}}_2 = (0, a_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2))$ avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x}_1 = x_1 - a_1(x_1, x_2)\Delta t/2 \\ \widetilde{x}_2 = x_2 + a_2(x_1, x_2)\Delta t/2 \end{array} \right. \tag{4.8}$$

puis à les remailler suivant la seconde direction. D'après (4.5), u_j^{n+1} vérifie alors :

$$\begin{array}{rl} u_j^{n+1} = & u^\star - \Delta t\, \partial_2 \left(a_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\, u^\star\right) + \frac{\Delta t^2}{2}\, \partial_{22}^2 \left(a_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)^2\, u^\star\right) \\ & +O\left(\Delta x^3 + \Delta t\, \Delta x^2 + \Delta t^2\, \Delta x\right). \end{array} \tag{4.9}$$

En y injectant l'expression suivante

$$\begin{array}{l} a_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = a_2\left(x_1 - a_1(x_1, x_2)\, \Delta t/2, x_2 + a_2(x_1, x_2)\, \Delta t/2\right) \\ = a_2(x_1, x_2) + \Delta t/2\left(-a_1(x_1, x_2)\partial_1 a_2(x_1, x_2) + a_2(x_1, x_2)\partial_2 a_2(x_1, x_2)\right) + O\left(\Delta t^2\right) \\ = a_2 + \Delta t/2\left(-a_1\partial_1 a_2 + a_2\partial_2 a_2\right) + O\left(\Delta t^2\right) \end{array} \tag{4.10}$$

on obtient

$$\begin{array}{rl} u_j^{n+1} = & u^\star - \Delta t\, \partial_2 \left(a_2\, u^\star + \frac{\Delta t}{2}\, u^\star \left(-a_1\, \partial_1 a_2 + a_2\, \partial_2 a_2\right)\right) + \frac{\Delta t^2}{2}\, \partial_{22}^2 \left(a_2^2\, u^\star\right) \\ & +O\left(\Delta t^3 + \Delta x^3 + \Delta t\, \Delta x^2 + \Delta t^2\, \Delta x\right). \end{array} \tag{4.11}$$

Il ne reste plus qu'à injecter (4.7) dans l'expression précédente :

$$\begin{array}{rl} u_j^{n+1} = & u_j - \Delta t\, \partial_1 \left[a_1\, u_j + \Delta t/2\left(a_1\partial_1 a_1 + a_2\partial_2 a_1\right)\, u_j\right] + \frac{\Delta t^2}{2}\, \partial_{11}^2 \left(a_1^2\, u_j\right) \\ & -\Delta t\, \partial_2 \left(a_2\, u_j - \Delta t\, a_2\, \partial_1 \left(a_1\, u_j\right) + \frac{\Delta t}{2}\, u_j \left(-a_1\, \partial_1 a_2 + a_2\, \partial_2 a_2\right)\right) \\ & +\frac{\Delta t^2}{2}\, \partial_{22}^2 \left(a_2^2\, u_j\right) + O\left(\Delta t^3 + \Delta x^3 + \Delta t\, \Delta x^2 + \Delta t^2\, \Delta x\right). \end{array} \tag{4.12}$$

En factorisant par Δt, on a :

$$\begin{array}{rl} u_j^{n+1} = & u_j - \Delta t\left[\partial_1(a_1\, u_j) + \partial_2(a_2\, u_j)\right] \\ & +\frac{\Delta t^2}{2}\left[-\partial_1\left(u_j\left(a_1\partial_1 a_1 + a_2\partial_2 a_1\right)\right) + \partial_{11}^2\left(a_1^2\, u_j\right) + 2\,\partial_2\left(a_2\,\partial_1(a_1\, u_j)\right)\right. \\ & \left.-\partial_2\left(u_j\left(-a_1\,\partial_1 a_2 + a_2\,\partial_2 a_2\right)\right) + \partial_{22}^2\left(a_2^2\, u_j\right)\right] \\ & +O\left(\Delta t^3 + \Delta x^3 + \Delta t\, \Delta x^2 + \Delta t^2\, \Delta x\right). \end{array} \tag{4.13}$$

En développant $\partial_{22}^2\left(a_2^2\, u_j\right) = \partial_2\left(u_j\, \partial_2 a_2^2\right) + \partial_2\left(a^2\, \partial_2 u_j\right)$, le terme en facteur de $\Delta t^2/2$ s'écrit comme la somme des trois termes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} t1 = -\partial_1\left(a_1\, u_j\, \partial_1 a_1\right) + \partial_{11}^2\left(a_1^2\, u_j\right) + \partial_2\left(a_2\, \partial_1\left(a_1\, u_j\right) + a_2^2\, \partial_2 u_j\right) \\ t2 = -\partial_1\left(a_2\, u_j\, \partial_2 a_1\right) + \partial_2\left(a_2\, \partial_1\left(a_1\, u_j\right)\right) + \partial_2\left(a_1\, u_j\, \partial_1 a_2\right) \\ t3 = \partial_2\left(u_j\, \partial_2 a_2^2\right) - \partial_2\left(a_2\, u_j\, \partial_2 a_2\right). \end{array} \right. \tag{4.14}$$

Ces trois termes se simplifient comme ceci :

$$\left\{\begin{array}{ll}
t1 & -\partial_1\left(a_1\,u_j\,\partial_1 a_1\right)+\partial_{11}^2\left(a_1^2\,u_j\right)+\partial_2\left(a_2\,\partial_1\left(a_1\,u_j\right)+a_2^2\,\partial_2 u_j\right)\\
& =\partial_1(-a_1\,u_j\,\partial_1 a_1+u_j\,\partial_1(a_1^2)+a_1^2\,\partial_1 u_j)+\partial_2(a_2\,\partial_1(a_1\,u_j)+a_2^2\,\partial_2 u_j)\\
& =\partial_1(a_1\,u_j\,\partial_1 a_1+a_1^2\,\partial_1 u_j)+\partial_2(a_2\,\partial_1(a_1\,u_j)+a_2^2\,\partial_2 u_j)\\
& =\partial_1(a_1\,\partial_1(a_1\,u_j))+\partial_2(a_2\,\partial_1(a_1\,u_j)+a_2^2\,\partial_2 u_j)\\
& \\
t2 & =\partial_2\left(a_2\,\partial_1\left(a_1\,u_j\right)\right)+\partial_2\left(a_1\,u_j\,\partial_1 a_2\right)-\partial_1\left(a_2\,u_j\,\partial_2 a_1\right)\\
& =a_2\,\partial_1(\partial_2(a1\,u_j))+\partial_2 a_2\,\partial_1(a_1\,u_j)+a_1\,u_j\,\partial_1(\partial_2 a_2)+\partial_2(a_1\,u_j)\,\partial_1 a_2+\partial_1(-a_2\,u_j\,\partial_2 a_1)\\
& =a_2\,\partial_1(\partial_2(a1\,u_j))+\partial_1(a_1\,u_j\,\partial_2 a_2)+\partial_2(a_1\,u_j)\,\partial_1 a_2+\partial_1(-a_2\,u_j\,\partial_2 a_1)\\
& =\partial_1(a_1\,u_j\,\partial_2 a_2)+\partial_1(a_2\,\partial_2(a_1\,u_j))+\partial_1(-a_2\,u_j\,\partial_2 a_1)\\
& =\partial_1(a_1\,u_j\,\partial_2 a_2)+\partial_1(a_1\,a_2\,\partial_2 u_j)\\
& =\partial_1(a_1\partial_2(a_2\,u_j))\\
& \\
t3 & =\partial_2\left(u_j\,\partial_2 a_2^2\right)+\partial_2\left(-a_2\,u_j\,\partial_2 a_2\right)\\
& =\partial_2(a_2\,u_j\,\partial_2 a_2)
\end{array}\right. \tag{4.15}$$

Le terme en facteur de $\Delta t^2/2$ dans (4.13) s'écrit finalement,

$$\begin{array}{ll}
t1+t2+t3 & =\partial_1(a_1\,\partial_1(a_1\,u_j))+\partial_2(a_2\,\partial_1(a_1\,u_j)+a_2^2\,\partial_2 u_j)\\
& +\partial_1(a_1\partial_2(a_2\,u_j))+\partial_2(a_2\,u_j\,\partial_2 a_2)\\
& \\
& =\partial_1\left(a_1\,\partial_1(a_1\,u_j)+a_1\,\partial_2(a_2\,u_j)\right)\\
& +\partial_2\left(a_2\,\partial_1(a_1\,u_j)+a_2\,\partial_2(a_2\,u_j)\right)\\
& \\
& =\partial_1\left[a_1\left(\partial_1(a_1\,u_j)+\partial_2(a_2\,u_j)\right)\right]\\
& +\partial_2\left[a_2\left(\partial_1(a_1\,u_j)+\partial_2(a_2\,u_j)\right)\right].
\end{array} \tag{4.16}$$

Enfin, puisque

$$\partial_t u_j=-\partial_1(a_1\,u_j)-\partial_2(a_2\,u_j), \tag{4.17}$$

(4.13) se simplifie ainsi :

$$\begin{array}{rl}
u_j^{n+1}= & u_j+\Delta t\left[-\partial_1(a_1\,u_j)-\partial_2(a_2\,u_j)\right]\\
& +\frac{\Delta t^2}{2}\left(-\partial_1(a_1\,\partial_t u_j)-\partial_2(a_2\,\partial_t u_j)\right)\\
& +O\left(\Delta t^3+\Delta x^3+\Delta t\,\Delta x^2+\Delta t^2\,\Delta x\right)\\
= & u_j+\Delta t\left[-\partial_1(a_1\,u_j)-\partial_2(a_2\,u_j)\right]\\
& +\frac{\Delta t^2}{2}\left(-\partial_1(\partial_t(a_1\,u_j))-\partial_2(\partial_t(a_2\,u_j))\right)\\
& +O\left(\Delta t^3+\Delta x^3+\Delta t\,\Delta x^2+\Delta t^2\,\Delta x\right)\\
& \\
= & u_j+\Delta t\,\partial_t u_j+\frac{\Delta t^2}{2}\,\partial_{tt}^2 u_j+O\left(\Delta t^3+\Delta x^3+\Delta t\,\Delta x^2+\Delta t^2\,\Delta x\right).
\end{array} \tag{4.18}$$

L'erreur de consistance avec l'équation de transport (4.17) est alors

$$\frac{u\left[(n+1)\,\Delta t,x_1,x_2\right]-u^{n+1}(x_1,x_2)}{\Delta t}=O\left(\Delta t^2+\frac{\Delta x^3}{\Delta t}+\Delta x^2+\Delta t\,\Delta x\right) \tag{4.19}$$

et l'algorithme de splitting étudié est d'ordre 2 en temps si $\Delta x=O(\Delta t)$.

□

Considérons maintenant le champ de vitesse suivant pour advecter les particules :

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1 = x_1 + \frac{2}{3}\,\Delta t\, a_1(x_1,x_2) \\ \widetilde{x}_2 = x_2 + \frac{2}{3}\,\Delta t\, a_2(x_1,x_2) \\ \widetilde{\widetilde{x}}_1 = x_1 - \frac{1}{4}\,\Delta t\, a_1(x_1,x_2) + \frac{1}{4}\,\Delta t\, a_1(\widetilde{x}1,\widetilde{x}2) \\ \widetilde{\widetilde{x}}_2 = x_2 - \Delta t\, a_2(x_1,x_2) + \Delta t\, a_2(\widetilde{x}1,\widetilde{x}2) \end{cases}$$
$$\widetilde{\mathbf{a}}_1 = \Big(-a_1(x_1,x_2) + \tfrac{3}{4}\,a_1(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}2) + a_1(\widetilde{\widetilde{x}}_1,x_2) + \tfrac{1}{4}\,a_1(x_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2),0\Big)$$
$$\begin{cases} \widetilde{x}_1^{(1)} = x_1 - \frac{1}{6}\,\Delta t\, a_1(x_1,x_2) \\ \widetilde{x}_1^{(2)} = x_1 - \frac{2}{3}\,\Delta t\, a_1(x_1,x_2) \\ \widetilde{x}_2 = x_2 + \frac{1}{3}\,\Delta t\, a_2(x_1,x_2) \\ \widetilde{\widetilde{x}}_1 = x_1 + \Delta t\, a_1(x_1,x_2) - \Delta t\, a_1(\widetilde{x}1^{(1)},\widetilde{x}2) \\ \widetilde{\widetilde{x}}_2 = x_2 - \Delta t\, a_2(x_1,x_2) + 2\,\Delta t\, a_2(\widetilde{x}1^{(2)},\widetilde{x}2) \end{cases} \tag{4.20}$$
$$\widetilde{\mathbf{a}}_2 = \Big(0,-a_2(x_1,x_2) + \tfrac{3}{4}\,a_2(\widetilde{x}_1^{(2)},\widetilde{x}2) + a_2(\widetilde{\widetilde{x}}_1,x_2) + \tfrac{1}{4}\,a_2(x_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2)\Big)$$

La proposition suivante montre qu'il est alors possible de monter en ordre de précision tout en effectuant une seule étape de remaillage par direction d'espace pour une itération en temps. Le prix à payer consiste à effectuer un plus grand nombre d'interpolation du champ de vitesse.

Proposition 13. *Lorsque les particules sont advectées par les vitesses (4.20) et remaillées par une formule d'ordre trois minimum (Λ_4 ou $\Lambda_{\tilde{4}}$), la méthode de splitting particulaire admet une erreur de consistance d'ordre trois.*

Preuve

La preuve est similaire à celle de la proposition 12. En effectuant des développements de Taylor, on obtient les expressions suivantes des vitesses d'advection des particules :

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_1 = \;& a_1 + \tfrac{\Delta t}{2}\,(a_1\,\partial_1 a_1 + a_2\,\partial_2 a_1) + \tfrac{\Delta t^2}{6}\,\big(a_1^2\,\partial_{11}^2 a_1 + 2\,a_1\,a_2\,\partial_{12}^2 a_1 + a_2^2\,\partial_{22}^2 a_1 + a_1\,(\partial_1 a_1)^2 \\ & + a_2\,\partial_1 a_1\,\partial_2 a_1 + a_1\,\partial_2 a_1\,\partial_1 a_2 + a_2\,\partial_2 a_1\,\partial_2 a_2\big) + O\left(\Delta t^3\right) \\ \widetilde{a}_2 = \;& a_2 + \tfrac{\Delta t}{2}\,(a_2\,\partial_2 a_2 - a_1\,\partial_1 a_2) + \tfrac{\Delta t^2}{6}\,\big(a_2^2\,\partial_{22}^2 a_2 - 2\,a_1\,\partial_2 a_2 \partial_1 a_2 + a_2\,(\partial_2 a_2)^2 + a_1^2\,\partial_{11}^2 a_2 \\ & - a_1\,a_2\,\partial_{12}^2 a_2 + a_1\,\partial_1 a_1\,\partial_1 a_2 - 2\,a_2\,\partial_1 a_2\,\partial_2 a_1\big) + O\left(\Delta t^3\right). \end{aligned} \tag{4.21}$$

La première étape de la méthode consiste à advecter les particules à la vitesse $\widetilde{a}_1$ et à les remailler dans la direction 1. D'après la preuve de la proposition 5 du chapitre 3, la valeur de $u(x_j)$ vérifie alors :

$$\begin{aligned} u_j^\star = \;& u_j - \Delta t\,\partial_1\,(\widetilde{a}_1\,u_j) + \tfrac{\Delta t^2}{2}\,\partial_{11}^2\,(\widetilde{a}_1^2\,u_j) - \tfrac{\Delta t^3}{6}\partial_{111}^3\,(\widetilde{a}_1^3\,u_j) \\ & + O\left(\Delta x^4 + \Delta t\,\Delta x^3 + \Delta t^2\,\Delta x^2 + \Delta t^3\,\Delta x\right), \end{aligned} \tag{4.22}$$

ce qui donne en injectant l'expression (4.21) de $\widetilde{a}_1$:

$$\begin{aligned} u_j^\star = \; & u_j - \Delta t\, \partial_1(a_1\, u_j) + \tfrac{\Delta t^2}{2}\left[-\partial_1\left(u_j(a_1\, \partial_1 a_1 + a_2\, \partial_2 a_1)\right) + \partial_{11}^2(a_1^2\, u_j)\right] \\ & + \tfrac{\Delta t^3}{6}\left[-\partial_1\left(u_j\left(a_1^2\, \partial_{11}^2 a_1 + 2\, a_1\, a_2\, \partial_{12}^2 a_1 + a_2^2\, \partial_{22}^2 a_1 + a_1\, (\partial_1 a_1)^2 + a_2\, \partial_1 a_1\, \partial_2 a_1\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. + a_1\, \partial_2 a_1\, \partial_1 a_2 + a_2\, \partial_2 a_1\, \partial_2 a_2\right)\right) + 3\, \partial_{11}^2\left(a_1\, u_j\left(a_1\, \partial_1 a_1 + a_2\, \partial_2 a_1\right)\right) - \partial_{111}^3(a_1^3\, u_j)\right] \\ & + O\left(\Delta x^4 + \Delta t\, \Delta x^3 + \Delta t^2\, \Delta x^2 + \Delta t^3\, \Delta x + \Delta t^4\right). \end{aligned} \tag{4.23}$$

La seconde étape consiste ensuite à initialiser les particules sur la grille, à les advecter à la vitesse $\widetilde{a}_2$ puis à les remailler suivant la seconde direction. u_j^{n+1} vérifie alors :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \; & u_j^\star - \Delta t\, \partial_2\left(\widetilde{a}_2\, u_j^\star\right) + \tfrac{\Delta t^2}{2}\, \partial_{22}^2\left(\widetilde{a}_2^2\, u_j^\star\right) - \tfrac{\Delta t^3}{6}\partial_{222}^3\left(\widetilde{a}_2^3\, u_j^\star\right) \\ & + O\left(\Delta x^4 + \Delta t\, \Delta x^3 + \Delta t^2\, \Delta x^2 + \Delta t^3\, \Delta x\right). \end{aligned} \tag{4.24}$$

En y injectant l'expression de $\widetilde{a}_2$ donnée en (4.21), on obtient :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \; & u_j^\star - \Delta t\, \partial_2(a_2\, u_j^\star) + \tfrac{\Delta t^2}{2}\left[-\partial_2\left(a_2\, u_j^\star\, \partial_2 a_2 - a_1\, u_j^\star\, \partial_1 a_2\right) + \partial_{22}^2(a_2^2\, u_j^\star)\right] \\ & + \tfrac{\Delta t^3}{6}\left[-\partial_2\left(u_j^\star\left(a_2^2\, \partial_{22}^2 a_2 - 2\, a_1\, \partial_2 a_2 \partial_1 a_2 + a_2\, (\partial_2 a_2)^2 + a_1^2\, \partial_{11}^2 a_2 - a_1\, a_2\, \partial_{12}^2 a_2\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. + a_1\, \partial_1 a_1\, \partial_1 a_2 - 2\, a_2\, \partial_1 a_2\, \partial_2 a_1\right)\right) + 3\, \partial_{22}^2\left(a_2\, u_j^\star\left(a_2\, \partial_2 a_2 - a_1\, \partial_1 a_2\right)\right) - \partial_{222}^3(a_2^3\, u_j^\star)\right] \\ & + O\left(\Delta x^4 + \Delta t\, \Delta x^3 + \Delta t^2\, \Delta x^2 + \Delta t^3\, \Delta x + \Delta t^4\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

on injecte maintenant la valeur de $u_j^\star$ donnée par (4.23). En ne gardant que les termes jusqu'à l'ordre 3 en temps, on a :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \; & u_j^\star - \Delta t\left[\partial_1(a_1\, u_j) - \partial_2(a_2\, u_j)\right] \\ & + \tfrac{\Delta t^2}{2}\left[\partial_{11}^2(a_1^2\, u_j) - \partial_1(a_1\, u_j\, \partial_1 a_1 + a_2\, u_j\, \partial_2 a_1) + 2\, \partial_2(a_2\, \partial_1(a_1\, u_j))\right. \\ & \left. - \partial_2(a_2\, u_j\, \partial_2 a_2 - a_1\, u_j\, \partial_1 a_2) + \partial_{22}^2(a_2^2\, u_j)\right] \\ & + \tfrac{\Delta t^3}{6}\left[-\partial_{111}^3(a_1^3\, u_j) + 3\, \partial_{11}^2\left(a_1\, u_j\left(a_1\, \partial_1 a_1 + a_2\, \partial_2 a_1\right)\right) - \partial_1\left(u_j\left(a_1^2\, \partial_{11}^2 a_1\right.\right.\right. \\ & \left. + 2\, a_1\, a_2\, \partial_{12}^2 a_1 + a_2^2\, \partial_{22}^2 a_1 + a_1\, (\partial_1 a_1)^2 + a_2\, \partial_1 a_1\, \partial_2 a_1 + a_1\, \partial_2 a_1\, \partial_1 a_2\right. \\ & \left. + a_2\, \partial_2 a_1\, \partial_2 a_2\right)\right) - \partial_2\left(3\, a_2\left(\partial_{11}^2(a_1^2\, u_j) - \partial_1(a_1\, u_j\, \partial_1 a_1 + a_2\, u_j\, \partial_2 a_1)\right)\right) \\ & - 3\, \partial_2\left(a_2\, \partial_2 a_2(-\partial_1(a_1\, u_j)) - a_1\, \partial_1 a_2(-\partial_1(a_1\, u_j))\right) + 3\, \partial_{22}^2\left(a_2^2(-\partial_1(a_1\, u_j))\right) \\ & - \partial_2\left(u_j\left(a_2^2\, \partial_{22}^2 a_2 - 2\, a_1\, \partial_2 a_2 \partial_1 a_2 + a_2\, (\partial_2 a_2)^2 + a_1^2\, \partial_{11}^2 a_2 - a_1\, a_2\, \partial_{12}^2 a_2\right.\right. \\ & \left.\left. + a_1\, \partial_1 a_1\, \partial_1 a_2 - 2\, a_2\, \partial_1 a_2\, \partial_2 a_1\right)\right) + 3\, \partial_{22}^2\left(a_2\, u_j(a_2\, \partial_2 a_2 - a_1\, \partial_1 a_2)\right) \\ & \left. - \partial_{222}^3(a_2^3\, u_j)\right] + O\left(\Delta x^4 + \Delta t\, \Delta x^3 + \Delta t^2\, \Delta x^2 + \Delta t^3\, \Delta x + \Delta t^4\right). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Appelons t_2 le terme d'ordre deux :

$$\begin{aligned} t_2 = \; & \partial_{11}^2(a_1^2\, u_j) - \partial_1(a_1\, u_j\, \partial_1 a_1 + a_2\, u_j\, \partial_2 a_1) + 2\, \partial_2(a_2\, \partial_1(a_1\, u_j)) \\ & - \partial_2(a_2\, u_j\, \partial_2 a_2 - a_1\, u_j\, \partial_1 a_2) + \partial_{22}^2(a_2^2\, u_j). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ce terme est identique à celui obtenu dans la preuve de la proposition 12. Il a été montré, en utilisant l'équation (4.17), qu'il se simplifie en $t_2 = \partial_{tt}^2 u_j$. De la même manière, le

terme d'ordre trois

$$\begin{aligned} t_3 = \; & -\partial^3_{111}(a_1^3\, u_j) + 3\,\partial^2_{11}\left(a_1\, u_j\,(a_1\,\partial_1 a_1 + a_2\,\partial_2 a_1)\right) - \partial_1\Big(u_j\,(a_1^2\,\partial^2_{11} a_1 \\ & +2\,a_1\,a_2\,\partial^2_{12} a_1 + a_2^2\,\partial^2_{22} a_1 + a_1\,(\partial_1 a_1)^2 + a_2\,\partial_1 a_1\,\partial_2 a_1 + a_1\,\partial_2 a_1\,\partial_1 a_2 \\ & +a_2\,\partial_2 a_1\,\partial_2 a_2)) - 3\partial_2\Big(a_2\,\partial^2_{11}(a_1^2\,u_j) - a_2\,\partial_1(a_1\,u_j\,\partial_1 a_1 + a_2\,u_j\,\partial_2 a_1)\Big) \\ & -3\,\partial_2\left(-a_2\,\partial_2 a_2\,\partial_1(a_1\,u_j) + a_1\,\partial_1 a_2\,\partial_1(a_1\,u_j)\right) - 3\,\partial^2_{22}\Big(a_2^2\,\partial_1(a_1\,u_j)\Big) \\ & -\partial_2\Big(u_j\,\Big(a_2^2\,\partial^2_{22} a_2 - 2\,a_1\,\partial_2 a_2 \partial_1 a_2 + a_2\,(\partial_2 a_2)^2 + a_1^2\,\partial^2_{11} a_2 - a_1\,a_2\,\partial^2_{12} a_2 \\ & +a_1\,\partial_1 a_1\,\partial_1 a_2 - 2\,a_2\,\partial_1 a_2\,\partial_2 a_1)) + 3\,\partial^2_{22}\left(a_2\,u_j(a_2\,\partial_2 a_2 - a_1\,\partial_1 a_2)\right) \\ & -\partial^3_{222}(a_2^3\,u_j), \end{aligned} \tag{4.28}$$

se simplifie en

$$\begin{aligned} t_3 = \; & \partial_1\left[a_1\,\partial_1\left(-a_1\,\partial_1(a_1\,u_j) - a_1\,\partial_2(a_2\,u_j)\right) + a_1\,\partial_2\left(-a_2\,\partial_1(a_1\,u_j) - a_2\,\partial_2(a_2\,u_j)\right)\right] \\ & +\partial_2\left[a_2\,\partial_1\left(-a_1\,\partial_1(a_1\,u_j) - a_1\,\partial_2(a_2\,u_j)\right) + a_2\,\partial_2\left(-a_2\,\partial_1(a_1\,u_j) - a_2\,\partial_2(a_2\,u_j)\right)\right], \end{aligned} \tag{4.29}$$

puis en utilisant (4.17), on a

$$\begin{aligned} t_3 = \; & \partial_1 a_1\left[\partial_1\partial_t(a_1\,u_j) + \partial_2\partial_t(a_2\,u_j)\right] \\ & +\partial_2 a_2\left[\partial_1\partial_t(a_1\,u_j) + \partial_2\partial_t(a_2\,u_j)\right] \\ = \; & \partial_t\left[\partial_1 a_1\,\partial_1(a_1\,u_j) + \partial_1 a_1\,\partial_2(a_2\,u_j) + \partial_2 a_2\,\partial_1(a_1\,u_j) + \partial_2 a_2\,\partial_2(a_2\,u_j)\right] \\ = \; & \partial_t\left[\partial_1 a_1\left(\partial_1(a_1\,u_j) + \partial_2(a_2\,u_j)\right) + \partial_2 a_2\left(\partial_1(a_1\,u_j) + \partial_2(a_2\,u_j)\right)\right] \\ = \; & \partial_t\left(-\partial_1\partial_t(a_1\,u_j) - \partial_2\partial_t(a_2\,u_j)\right) \\ = \; & \partial_t\left(\partial_t\left(-\partial_1(a_1\,u_j) - \partial_2(a_2\,u_j)\right)\right) \\ = \; & \partial^3_{ttt} u_j. \end{aligned} \tag{4.30}$$

L'expression (4.26) de u_j^{n+1} se réécrit donc

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \; & u_j + \Delta t\,\partial_t u_j + \tfrac{\Delta t^2}{2}\,\partial^2_{tt} u_j - \tfrac{\Delta t^3}{6}\,\partial^3_{ttt} u_j \\ & +O\left(\Delta x^4 + \Delta t\,\Delta x^3 + \Delta t^2\,\Delta x^2 + \Delta t^3\,\Delta x + \Delta t^4\right), \end{aligned} \tag{4.31}$$

et l'erreur de consistance avec (4.17) est d'ordre trois.

□

Les algorithmes qui étendent les résultats des propositions 12 et 13 à la dimension trois et aux champs de vitesses instationnaires sont donnés dans l'annexe E.

4.1.3 Prise en compte d'un terme source

Les algorithmes de remaillage traités jusqu'à présent correspondent à la résolution d'une équation de transport sous forme conservative :

$$\partial_t u + \partial_1\left(a_1\,u\right) + \partial_2\left(a_2\,u\right) = s \tag{4.32}$$

Le problème qui se pose alors est d'étendre les méthodes de splitting précédemment étudiée à la résolution de (4.32). Comme précédemment, on se place en dimension deux et on considère des champs de vitesse indépendants du temps.

Considérons l'algorithme suivant :

– **Evaluation du terme source**

$$u_j \leftarrow u_j + \Delta t\, s(x_1, x_2)/2 \tag{4.33}$$

– **Advection/remaillage suivant la première direction**

$$\begin{array}{l} \widetilde{x}_1 = x_1 + a_1(x_1, x_2)\,\Delta t/2 \\ \widetilde{x}_2 = x_2 + a_2(x_1, x_2)\,\Delta t/2 \\ x_1 \leftarrow x_1 + a_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\,\Delta t \\ (\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p) \end{array} \tag{4.34}$$

– **Advection/remaillage suivant la deuxième direction**

$$\begin{array}{l} \widetilde{x}_1 = x_1 - a_1(x_1, x_2)\,\Delta t/2 \\ \widetilde{x}_2 = x_2 + a_2(x_1, x_2)\,\Delta t/2 \\ x_2 \leftarrow x_2 + a_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\,\Delta t \\ (\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p) \end{array} \tag{4.35}$$

– **Evaluation du terme source**

$$u_j \leftarrow u_j + \Delta t\, s(x_1, x_2)/2 \tag{4.36}$$

Proposition 14. *La méthode définie par l'algorithme précédent résoud 4.32 avec une précision d'ordre deux.*

Preuve

Procédons comme dans la preuve de la proposition 12. La première étape consiste à ajouter $\Delta t\, s(x_1, x_2)/2$ à u_j. Notons $\bar{u_j}$ la valeur obtenue : $\bar{u_j} = u_j + \Delta t\, s(x_1, x_2)/2$. En remplacant u_j par $\bar{u_j}$ dans (4.7), la valeur de u en x_j à la fin de la deuxième étape de l'algorithme vérifie

$$\bar{u_j}^\star = u_j^\star + \frac{\Delta t}{2}\, s - \frac{\Delta t^2}{2}\, \partial_1(a_1\, s). \tag{4.37}$$

En injectant cette expression à la place de $u_j^\star$ dans (4.11), on retrouve l'expression (4.13) dans laquelle est ajouté le terme

$$\Delta t\, s - \frac{\Delta t^2}{2}\, (\partial_1(a_1\, s) + \partial_2(a_2\, s)) \tag{4.38}$$

c'est à dire :

$$\begin{array}{rl} u_j^{n+1} = & u_j - \Delta t\, [\partial_1(a_1\, u_j) + \partial_2(a_2\, u_j)] \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[-\partial_1 \left(u_j \left(a_1 \partial_1 a_1 + a_2 \partial_2 a_1 \right) \right) + \partial_{11}^2 \left(a_1^2\, u_j \right) + 2\, \partial_2 \left(a_2\, \partial_1 (a_1\, u_j) \right) \right. \\ & \left. -\partial_2 \left(u_j \left(-a_1\, \partial_1 a_2 + a_2\, \partial_2 a_2 \right) \right) + \partial_{22}^2 \left(a_2^2\, u_j \right) \right] \\ & + \Delta t\, s - \frac{\Delta t^2}{2} \left(\partial_1(a_1\, s) + \partial_2(a_2\, s) \right) + O\left(\Delta t^3 + \Delta x^3 + \Delta t\, \Delta x^2 + \Delta t^2\, \Delta x \right). \end{array} \tag{4.39}$$

En utilisant (4.14) et (4.16) u_j^{n+1} vérifie :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \; & u_j + \Delta t \left[-\partial_1(a_1\, u_j) - \partial_2(a_2\, u_j) + s \right] \\ & + \tfrac{\Delta t^2}{2} \left[\partial_1 \left(a_1 \left(\partial_1(a_1\, u_j) + \partial_2(a_2\, u_j) - s \right) \right) \right. \\ & \left. + \partial_2 \left(a_2 \left(\partial_1(a_1\, u_j) + \partial_2(a_2\, u_j) - s \right) \right) \right] \\ & + O\left(\Delta t^3 + \Delta x^3 + \Delta t\, \Delta x^2 + \Delta t^2\, \Delta x \right). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Finalement, puisque

$$\partial_t u_j = -\partial_1(a_1\, u_j) - \partial_2(a_2\, u_j) + s, \tag{4.41}$$

u_j^{n+1} vérifie :

$$u_j^{n+1} = u_j + \Delta t\, \partial_t u_j + \frac{\Delta t^2}{2}\, \partial_{tt}^2 u_j + O\left(\Delta t^3 + \Delta x^3 + \Delta t\, \Delta x^2 + \Delta t^2\, \Delta x \right), \tag{4.42}$$

et la méthode est d'ordre deux.

□

L'extension à la dimension trois ainsi qu'aux champs de vitesse dépendant du temps est traitée dans l'annexe E.

4.1.4 Complexité algorithmique

Les paragraphes précédents ont permis d'étudier différentes méthodes pour réaliser les étapes d'advection et de remaillage en dimension deux et trois. On analyse ici la complexité de ces méthodes pour guider le choix de l'utilisateur. La notion de complexité algorithmique permet de comparer les méthodes en fonction de leur temps de calcul, indépendamment de l'architecture des calculateurs. Cependant, les résultats exposés doivent être considérés comme des indicateurs approximatifs, ne révèlant que grossièrement le temps de calcul qui serait réellement observé. Les accés à la mémoire ne sont pas pris en compte, et le temps nécessaire pour effectuer une opération de multiplication est supposé identique à celui d'une addition.

Complexité du remaillage et de l'interpolation

La première des trois méthodes que l'on propose de comparer est une méthode classique, qui consiste à advecter les particules par un schéma de type Runge-Kutta puis de les remailler par produit tensoriel des formules 1D. Les deux autres méthodes sont celles étudiées dans la section 4.1, le splitting de type Strang et particulaire. Les algorithmes de ces méthodes sont résumés dans l'annexe E. Les étapes les plus coûteuses sont le remaillage et l'interpolation du champ de vitesse. On suppose que les champs de vitesse sont indépendants du temps et que les interpolations sont faites à l'aide des mêmes noyaux que ceux utilisés pour le remaillage. On considère uniquement les noyaux Λ_m définis dans le chapitre 1. La complexité dépend alors du nombre de moments conservés m et de la dimension de l'espace n. Remarquons que l'utilisation d'un noyau Λ_m permet de remailler à l'ordre m ou d'interpoler à l'ordre $m+1$. Une étape de remaillage ou

d'interpolation peut être décomposé ainsi :

1. *Calcul des points de grille adjacents à la particule à remailler :* $2\,n + (m+2)n$ *opérations.*
2. *Calcul de la distance entre la particule et le premier point de grille à sa gauche :* $6\,n$ *opérations.*
3. *Numero des points de grille adjacents aprés evaluation des conditions au bord périodiques :* $3\,n$ *opérations.*
4. *Calcul des poids de remaillage :* $2\,m(m+1)n$ *opérations.*
5. *Affectation des poids :* $(3\,n+1)(m+1)^n$ *opérations.*

La complexité d'une étape entière de remaillage (ou d'interpolation), notée $c_r(n,m)$, est alors donnée en fonction de la dimension de l'espace n et de la précision m par la formule :

$$c_r(n,m) = n\,(13+m) + 2\,m(m+1)n + (3\,n+1)\,(m+1)^n\,. \tag{4.43}$$

Complexité des différentes méthodes

Le point fondamental pour calculer la complexité d'une méthode est d'évaluer l'ordre d'interpolation du champ de vitesse à satisfaire pour éviter de dégrader la précision de la solution. Pour la méthode de splitting particulaire d'ordre deux, l'erreur de consistance est en $O\left(\Delta t^2 + \frac{\Delta x^3}{\Delta t} + \Delta x^2 + \Delta t\,\Delta x\right)$ d'après (4.19), à condition que les développements (4.6) et (4.10) soient satisfaits, c'est à dire que

$$\begin{aligned} a_1(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) &= a_1\left(x_1 + a_1(x_1,x_2)\,\Delta t/2, x_2 + a_2(x_1,x_2)\,\Delta t/2\right) \\ &= a_1(x_1,x_2) + \Delta t/2\,\left(a_1(x_1,x_2)\partial_1 a_1 + a_2(x_1,x_2)\partial_2 a_1\right) + O\left(\Delta t^2\right) \\ a_2(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) &= a_2\left(x_1 - a_1(x_1,x_2)\,\Delta t/2, x_2 + a_2(x_1,x_2)\,\Delta t/2\right) \\ &= a_2 + \Delta t/2\,\left(-a_1\partial_1 a_2 + a_2\partial_2 a_2\right) + O\left(\Delta t^2\right). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Les champs de vitesses doivent donc être interpolés avec une précision d'ordre 2 ($m=1$).

De la même manière, la méthode de splitting particulaire d'ordre trois possède une erreur de consistance en $O\left(\Delta x^4/\Delta t + \Delta x^3 + \Delta t\,\Delta x^2 + \Delta t^2\,\Delta x + \Delta t^3\right)$, donnée par (4.31), à condition que les vitesses utilisées pour advecter les particules dans les directions 1 et 2 vérifient :

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_1 &= -a_1(x_1,x_2) + \tfrac{3}{4}\,a_1(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}2) + a_1(\widetilde{\widetilde{x}}_1,x_2) + \tfrac{1}{4}\,a_1(x_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2) \\ &= a_1 + \tfrac{\Delta t}{2}\,(a_1\,\partial_1 a_1 + a_2\,\partial_2 a_1) + \tfrac{\Delta t^2}{6}\,\left(a_1^2\,\partial_{11}^2 a_1 + 2\,a_1\,a_2\,\partial_{12}^2 a_1 + a_2^2\,\partial_{22}^2 a_1 + a_1\,(\partial_1 a_1)^2\right. \\ &\quad \left. + a_2\,\partial_1 a_1\,\partial_2 a_1 + a_1\,\partial_2 a_1\,\partial_1 a_2 + a_2\,\partial_2 a_1\,\partial_2 a_2\right) + O\left(\Delta t^3\right) \\ \\ \widetilde{a}_2 &= -a_2(x_1,x_2) + \tfrac{3}{4}\,a_2(\widetilde{x}_1^{(2)},\widetilde{x}2) + a_2(\widetilde{\widetilde{x}}_1,x_2) + \tfrac{1}{4}\,a_2(x_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2) \\ &= a_2 + \tfrac{\Delta t}{2}\,(a_2\,\partial_2 a_2 - a_1\,\partial_1 a_2) + \tfrac{\Delta t^2}{6}\,\left(a_2^2\,\partial_{22}^2 a_2 - 2\,a_1\,\partial_2 a_2 \partial_1 a_2 + a_2\,(\partial_2 a_2)^2 + a_1^2\,\partial_{11}^2 a_2\right. \\ &\quad \left. - a_1\,a_2\,\partial_{12}^2 a_2 + a_1\,\partial_1 a_1\,\partial_1 a_2 - 2\,a_2\,\partial_1 a_2\,\partial_2 a_1\right) + O\left(\Delta t^3\right). \end{aligned} \tag{4.45}$$

	Strang	Particulaire (ordre 2)	Tensoriel (RK2)
2D	$3\,c_r(1,2) + 3\,c_r(1,m) + 17$	$2\,c_r(2,2) + 2\,c_r(1,m) + 16$	$2\,c_r(2,2) + c_r(2,m) + 10$
3D	$5\,c_r(1,2) + 5\,c_r(1,m) + 29$	$3\,c_r(3,2) + 3\,c_r(1,m) + 33$	$3\,c_r(3,2) + c_r(3,m) + 15$

TAB. 4.1 – Nombre d'opérations nécessaires pour effectuer une itération en temps des méthodes de splitting de strang, particulaire et de remaillage par produit tensoriel. Les algorithmes sont donnés dans l'annexe E. $c_r(n,m)$ (4.43) représente la complexité pour effectuer un remaillage ou une interpolation de dimension n et d'ordre m.

Pour que ces développement soit vérifiés, les champs de vitesses doivent être interpolés à l'ordre trois ($m = 2$).

Ce constat se vérifie aussi numériquement. Considérons la solution stationnaire

$$u(r) = \begin{cases} (1-r^2)^6, & \text{si } r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.46}$$

soumise au champ de vitesse $\mathbf{a}(x_1, x_2) = cos(3\,\pi\,r/2)\,(-x_2, x_1)$ dans le domaine $\Omega = [-1,1]^2$. On soumet le pas de temps à un nombre de CFL de 0.4 ($\Delta t = 0.4\,\Delta x$), et on fixe le temps final $T = 0.4$. L'erreur L^2 est représentée en fonction du pas de temps et en échelle logarithmique dans la figure 4.4. Les particules sont remaillées par des formules Λ_6 afin que l'erreur en espace soit négligeable. Pour des méthodes de splitting d'ordre deux (a, b), l'erreur numérique est effectivement d'ordre deux lorsque le champ de vitesse est interpolé par des formules Λ_m, $m \geq 1$. On constate cependant qu'il est intéressant d'interpoler à l'ordre supérieur (Λ_2) pour minimiser l'erreur, et c'est ce que nous ferons par la suite. Il est par contre inutile d'interpoler le champ de vitesse avec un ordre ≥ 4.

Concernant la méthode de splitting particulaire d'ordre trois (cas c), on constate que les champs de vitesses doivent être interpolés par un noyau Λ_3 pour obtenir une erreur minimale (bien que l'ordre trois soit obtenu avec le noyau Λ_2). Il est intéressant de remarquer qu'il est aussi possible d'interpoler le champ de vitesse a_1 à l'ordre trois en $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$, et à l'ordre quatre en $(\widetilde{\widetilde{x}}_1, x_2)$, $(x_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2)$. De même, le champ de vitesse a_2 peut être interpolé à l'ordre trois en $(\widetilde{x}_1^{(2)}, \widetilde{x}2)$, et à l'ordre quatre en $(\widetilde{\widetilde{x}}_1, x_2)$, $(x_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2)$. Une perte de précision est alors observable, mais peut être acceptable lorsqu'on privilégie la vitesse de calcul.

La figure (4.4)-(d) se rapportant à la méthode classique de remaillage par produit tensoriel met en évidence l'importance de la précision de l'interpolation du champ de vitesse. Les particules sont advectées par un schéma de type Runge-Kutta d'ordre trois.

Les complexités algorithmiques des différentes méthodes sont exprimées en fonction de l'expression (4.43) de $c_r(n,m)$ dans les tableaux 4.1 et 4.2. Le premier est consacré aux méthodes d'ordre deux et le second à l'ordre trois.

Comparaison des complexités entre méthodes de splitting et tensorielles

Utiliser une méthode de type splitting plutôt que tensorielle permet d'employer des formules de remaillage 1D, moins coûteuses que celles utilisées en dimension multiple

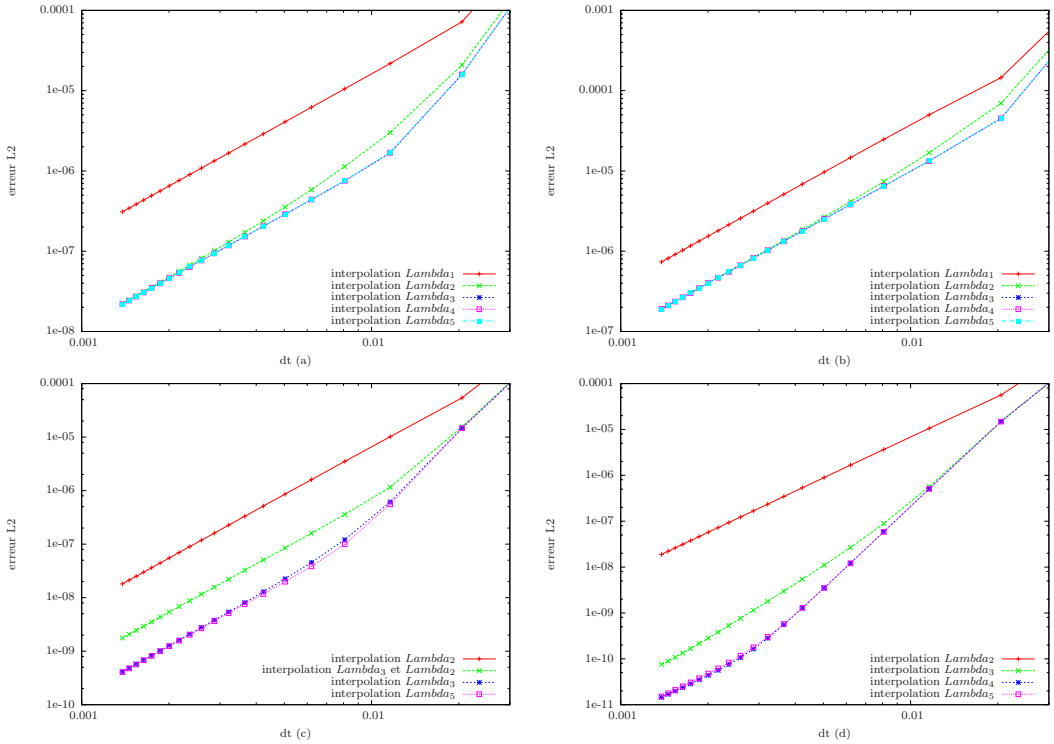


FIG. 4.4 – Etude de l'erreur d'interpolation des vitesses d'advection. Les particules sont remaillées par des formules Λ_6. Une méthode de splitting de Strang est utilisée en (a), de splitting particulaire d'ordre deux en (b), d'ordre trois en (c), et de remaillage par produit tensoriel (advection rk3) en (d).

mais nécessite d'avantage d'interpolations. La difficulté dans l'analyse de la complexité des algorithmes est donc de faire le compromis entre le coût des interpolations et celui du remaillage. Cette étude est menée en examinant la figure 4.5. La complexité des méthodes de splitting d'ordre deux est largement inférieure à celle "classique" qui consiste à remailler les particules à l'aide d'un produit tensoriel des formules 1D. Ceci est d'autant plus marqué en dimension trois. En effet, le remaillage tensoriel Λ_3 de particules advectées par un schéma Runge-Kutta d'ordre deux nécessite le même coût de calcul que celui d'une méthode de splitting particulaire d'ordre deux utilisant un remaillage Λ_{10}. La solution numérique sera donc beaucoup plus précise en utilisant une méthode de type splitting plutot que tensorielle pour un même temps de calcul.

Le gain apporté par les méthodes de splitting est moins spectaculaire à l'ordre trois. Leur utilisation s'avère plus rapide que les méthodes tensorielles uniquement lorsqu'on utilise un remaillage d'ordre élevé. Précisons cependant que seules les méthodes de type splitting permettent de généraliser les travaux réalisés sur les formules 1D des chapitres 2 et 3, et que les champs de vitesse peuvent être interpolés moins précisément si l'on souhaite privilégier la vitesse de calcul.

Remarquons enfin que remailler les particules par des formules d'ordre élevé plutot

	Particulaire (ordre 3)	Tensoriel (RK3)
2D	$4\,c_r(2,3) + 4\,c_r(1,3) + 2\,c_r(1,m) + 56$	$4\,c_r(2,3) + c_r(2,m) + 40$
3D	$9\,c_r(3,3) + 9\,c_r(1,3) + 3\,c_r(1,m) + 118$	$6\,c_r(3,3) + c_r(3,m) + 87$

TAB. 4.2 – Nombre d'opérations nécessaires pour effectuer une itération en temps des méthodes de splitting particulaire d'ordre trois et de remaillage par produit tensoriel. Les algorithmes sont donnés dans l'annexe E. $c_r(n,m)$ (4.43) représente la complexité pour effectuer un remaillage ou une interpolation de dimension n et d'ordre m .

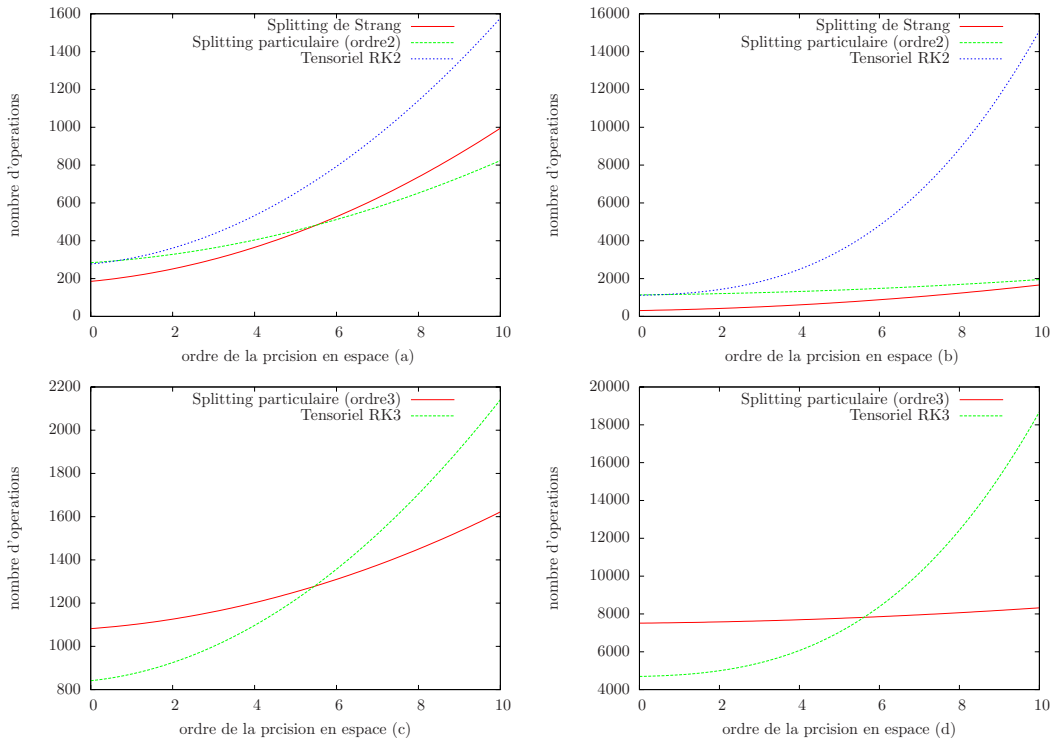


FIG. 4.5 – Nombre d'opérations nécessaires pour faire une itération en temps. Les méthodes d'ordre deux sont comparées en 2D (a) et en 3D (b), ainsi que celles d'ordre trois (2D en c et 3D en d).

que d'ordre deux ou trois nécessite peu de calcul supplémentaire lorsqu'une méthode de type splitting est utilisée.

4.2 Illustrations numériques

Cette section a pour objectif de comparer et valider numériquement, en dimension deux et trois, les méthodes de remaillage et de splitting précédemment étudiées. Des courbes d'erreur permettent de comparer quantitativement l'efficacité des méthodes. Des cas tests classiques sont aussi présentés afin de visualiser la qualité des solutions en

terme de précision et de suppression des oscillations.

4.2.1 Etude de convergence

Le premier cas numérique présenté permet de valider les méthodes de splitting d'ordre deux et trois. Le nombre de CFL est fixé à 0.4, et les solutions numériques sont comparées à celles obtenues par une méthode "classique" d'advection par un schéma Runge-Kutta puis remaillage par produit tensoriel des formules 1D.

On considère la fonction

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} (1 - r^2)^6, & \text{si } r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.47}$$

avec $(x_1, x_2) \in [-1, 1]^2$. Le champ de vitesse

$$\mathbf{a}(x_1, x_2) = cos(\frac{3\pi}{2}\, r)(-x_2, x_1) \tag{4.48}$$

possède une symétrie radiale, et la fonction u est donc une solution stationnaire de l'équation de conservation

$$\partial_t u + \partial_1(a_1\, u) + \partial_2(a_2\, u) = 0. \tag{4.49}$$

Les courbes d'erreur en norme L_2 en fonction de Δt sont représentées dans la figure 4.6 pour un temps final $T = 0.8$. Rappellons que l'erreur de consistance des méthodes d'ordre

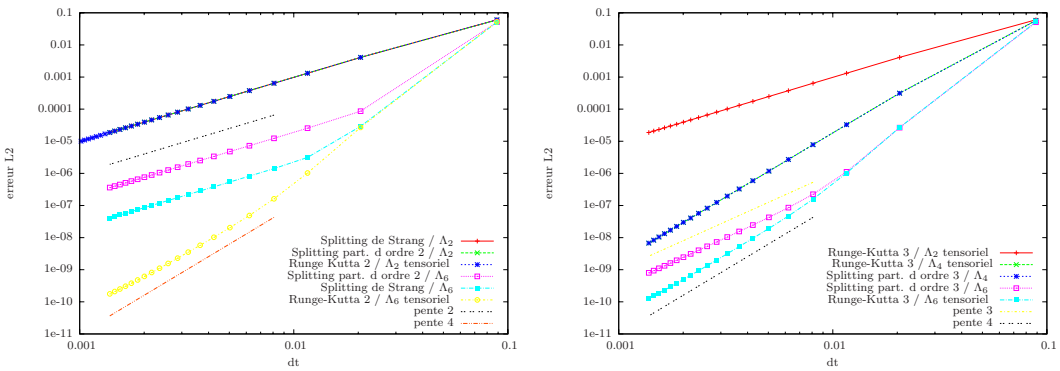


FIG. 4.6 – Erreur L_2 en échelle logarithmique. Cas 2D d'une gaussienne stationnaire dans un champ de vitesse en rotation. Le temps final est $T = 0.8$. Comparaison des différentes méthodes (d'ordre deux à gauche et d'ordre trois à droite) pour un nombre de CFL de 0.4 ($\Delta t = 0.4\,\Delta x$).

deux est en $O\left(\Delta t^2 + \frac{\Delta x^3}{\Delta t} + \Delta x^2 + \Delta t\,\Delta x\right)$ d'après (4.19) et en $O\left(\Delta x^4/\Delta t + \Delta x^3 + \Delta t\,\Delta x^2 + \Delta t^2\,\Delta x + \Delta t^3\right)$ pour les méthodes d'ordre trois (4.31). L'ordre numérique attendu est bien obtenu puisque les droites correspondant aux méthodes de splitting d'ordre deux et trois sont respectivement de pente au moins deux et trois. Notons que la méthode

de splitting de Strang (figure de gauche) est légèrement plus précise dans ce cas test que celle de splitting particulaire. La formule de remaillage utilisée est aussi un critère important. L'erreur est réduite en utilisant des formules Λ_6 plutot que Λ_2 (à l'ordre deux) ou Λ_4 (à l'ordre quatre). Notons enfin que la méthode de remaillage classique par produit tensoriel s'avère très précise dans ce cas test. Il est surprenant d'obtenir une pente 4 en advectant les particules par un schéma Runge Kutta d'ordre deux ou trois.

La consistance des formules de remaillages $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$ est maintenant validée en dimension deux dans la même configuration que précédemment, mais pour un nombre de CFL plus élevé ($\Delta t = 3\,\Delta x$). Les courbes d'erreur sont représentées dans la figure 4.7. Les trois premières courbes mettent en évidence la perte de consistance quelque

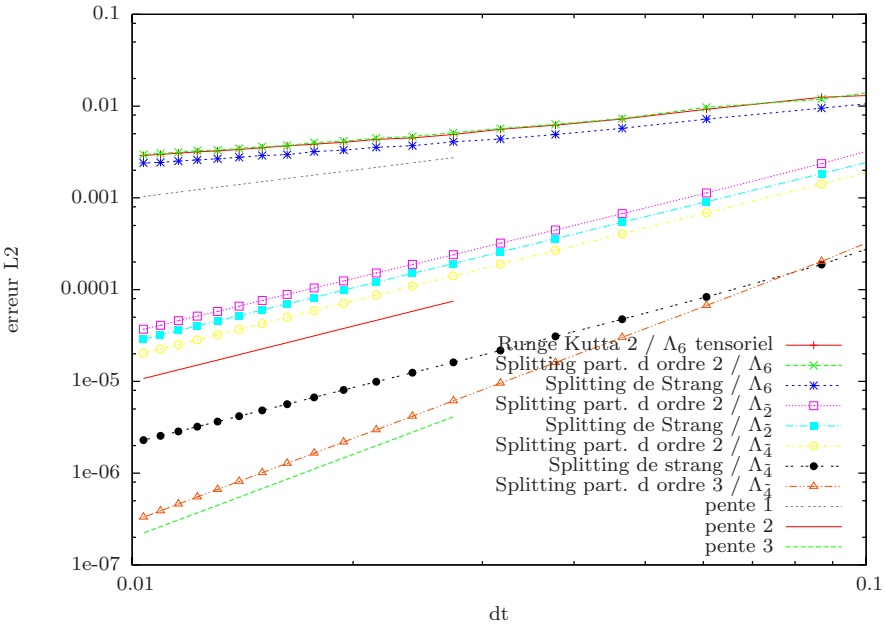


FIG. 4.7 – Erreur L_2 en échelle logarithmique. Cas 2D d'une gaussienne stationnaire dans un champ de vitesse en rotation. Le temps final est $T = 0.8$. Comparaison des différentes méthodes pour un nombre de CFL de 3 ($\Delta t = 3\,\Delta x$).

soit la formule de remaillage utilisée (ici Λ_6). Les quatre courbes suivantes confirment numériquement la correction de ce problème lorsque les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ ou $\Lambda_{\tilde{4}}$ sont utilisées. D'après la dernière courbe l'ordre trois est assuré lorsque les particules sont advectées par la méthode de splitting particulaire d'ordre trois et remaillées par les formules $\Lambda_{\tilde{4}}$.

Le test suivant a pour objectif de valider les méthodes de splitting lorsque le champ de vitesse dépend du temps. On considère la fonction

$$u(x_1, x_2, t) = cos(2\pi x_1)\, cos(2\pi x_2)\, cos(\pi t/0.2),\ (x_1, x_2) \in [0, 1]^2 \tag{4.50}$$

soumise au champ de vitesse $\mathbf{a}(x_1, x_2, t) = (a_1(x_1, x_2, t), a_2(x_1, x_2, t))$, avec

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2, t) &= sin(2\pi x_1)\, sin(2\pi x_2)\, cos(\pi t/0.3) \\ a_2(x_1, x_2, t) &= cos(2\pi x_1)\, cos(2\pi x_2)\, cos(\pi t/0.3) \end{aligned} \tag{4.51}$$

et des conditions aux bords périodiques. u est alors solution de l'équation de transport sous forme conservative

$$\partial_t u + \partial_1(a_1\, u) + \partial_2(a_2\, u) = s, \tag{4.52}$$

avec un terme source

$$\begin{aligned} s(x_1, x_2, t) = \quad & -\left[\pi\, cos(2\pi x_1)\, cos(2\pi x_2)\, sin(\pi t/0.2)\right]/0.2 \\ & -\left[2\pi\, sin^2(2\pi x_1)\, sin(2\pi x_2)\, cos(2\pi x_2)\, cos(\pi t/0.2)\, cos(\pi t/0.3)\right] \\ & -\left[2\pi\, cos^2(2\pi x_1)\, cos(2\pi x_2)\, sin(2\pi x_2)\, cos(\pi t/0.2)\, cos(\pi t/0.3)\right]. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Les erreurs obtenues en advectant les particules par des méthodes d'ordre 2 sont représentées dans la figure 4.8. Deux nombres de CFL sont imposés, 0.4 dans la figure de

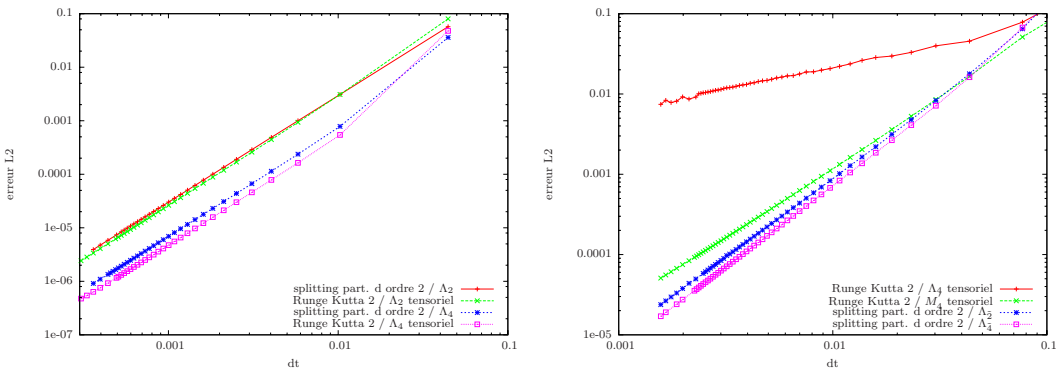


FIG. 4.8 – Erreur L_2 en échelle logarithmique. Cas 2D instationnaire. Le temps final est $T = 0.8$. Comparaison des différentes méthodes d'ordre deux pour un nombre de CFL de 0.4 ($\Delta t = 0.4\,\Delta x$) à gauche et 3 ($\Delta t = 3\,\Delta x$)à droite.

gauche et 3 dans celle de droite. Les pentes des droites correspondent à l'ordre attendu. Remarquons cependant qu'un remaillage des particules par des formules $M_4^{'}$ permet d'obtenir une droite de pente proche de deux.

La dernière figure (4.9) met en évidence la précision d'ordre deux obtenue par la méthode de splitting d'ordre deux en dimension trois. La fonction portée par les particules est

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = cos(2\pi x_1)\, cos(2\pi x_2)\, cos(2\pi x_3)\, cos(\pi t/0.2),\ (x_1, x_2, x_3) \in [0, 1]^3, \tag{4.54}$$

soumise au champ de vitesse $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3, t) = (a_1(x_1, x_2, x_3, t), a_2(x_1, x_2, x_3, t), a_3(x_1, x_2, x_3, t))$, avec

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2, x_3, t) &= 2sin^2(\pi x_1)\, sin(2\pi x_2)\, sin(2\pi x_3)\, cos(\pi t/0.3) \\ a_2(x_1, x_2, x_3, t) &= -sin(2\pi x_1)\, sin^2(\pi x_2)\, sin(2\pi x_3)\, cos(\pi t/0.3) \\ a_3(x_1, x_2, x_3, t) &= -sin(2\pi x_1)\, sin(2\pi x_2)\, sin^2(\pi x_3)\, cos(\pi t/0.3) \end{aligned} \tag{4.55}$$

et des conditions aux bords périodiques. u est solution de l'équation de transport sous forme conservative

$$\partial_t u + \partial_1(a_1\, u) + \partial_2(a_2\, u) = s, \tag{4.56}$$

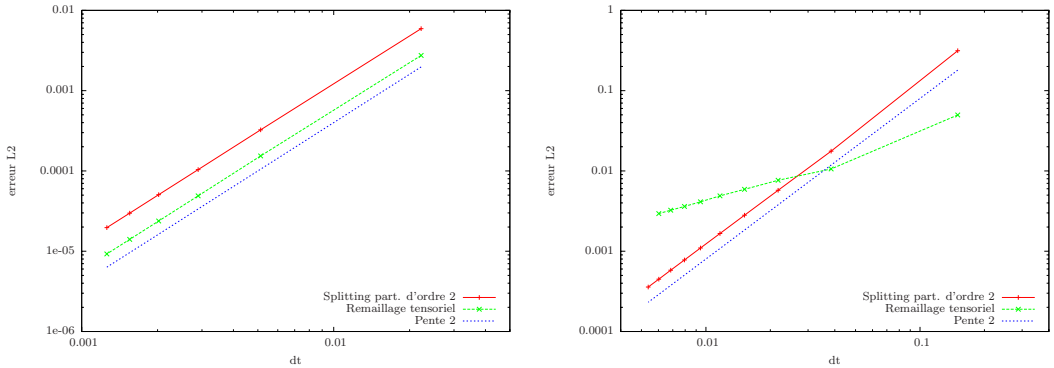


FIG. 4.9 – Erreur L_2 en échelle logarithmique. Cas 3D instationnaire. Le temps final est $T = 0.15$. Comparaison entre la méthode de splitting particulaire d'ordre deux et un remaillage classique par produit tensoriel des formules Λ_2 (et advection RK2). Le nombre de CFL est de 0.4 ($\Delta t = 0.2\,\Delta x$) à gauche et 3 à droite.

avec s le terme source correspondant. Les courbes d'erreur obtenues par un remaillage Λ_2 (pour $\Delta t = 0.2\,\Delta x$) et $\Lambda_{\tilde{2}}$ (pour $\Delta t = 1.5\,\Delta x$) sont identiques, de pente deux. L'erreur issue de la méthode classique d'advection par un schéma Runge-Kutta deux et remaillage par produit tensoriel des formules Λ_2 est légèrement inférieure à celle obtenue par la méthode de splitting. Cependant, la méthode de remaillage par produit tensoriel n'est plus consistante lorsque $\Delta t = 1.5\,\Delta x$.

Lorsque les gradients du champ de vitesse sont faibles, les méthodes particulaires permettent d'utiliser de grands pas de temps. Une question qui se pose alors est de déterminer un pas de temps optimal pour obtenir une solution de précision fixée en un temps de calcul minimal. Ce point est étudié en comparant deux nombres de CFL différents pour résoudre le problème de la gaussienne (4.47) soumise au champ de vitesse (4.48). Notons que la solution est régulière. La cas d'une solution présentant de fortes variations sera abordé plus tard.

Il est montré dans [72], que le temps CPU pour effectuer une itération d'une méthode de Vortex, que l'on note c_{it}, dépend linéairement du nombre de point de grille (la complexité est en $O\,(n \log n)$). Supposons donc que $c_{it} = k\,\Delta x\,\Delta y$. On suppose aussi que le temps de calcul d'une itération pour un nombre CFL de 0.4 est le même que celui pour un nombre de $CFL = 3$, c'est à dire que le temps de calcul pour effectuer la correction de consistance est négligeable. Le coût de calcul total c_T pour mener une simulation jusqu'au temps T s'exprime comme le produit du nombre d'itérations en temps à effectuer (n_{it}) par le coût d'une itération. Puisque $T = n_{it}\,\Delta t$, le coût de calcul total s'exprime ainsi

$$\begin{aligned} c_T &= n_{it}\,c_{it} \\ &= \frac{T}{\Delta t}\,k\,\Delta x\,\Delta y \\ &= T\,k\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Les courbes d'erreur L_2 en fonction de $\Delta x\,\Delta y/\Delta t$ sont représentées dans la figure 4.10

pour deux valeurs différentes de CFL, dans le cas de la gaussienne (4.47) soumise au champ de vitesse (4.48) dans le domaine périodique $[-1,1]^2$ jusqu'à $T = 0.8$. Lorsque les

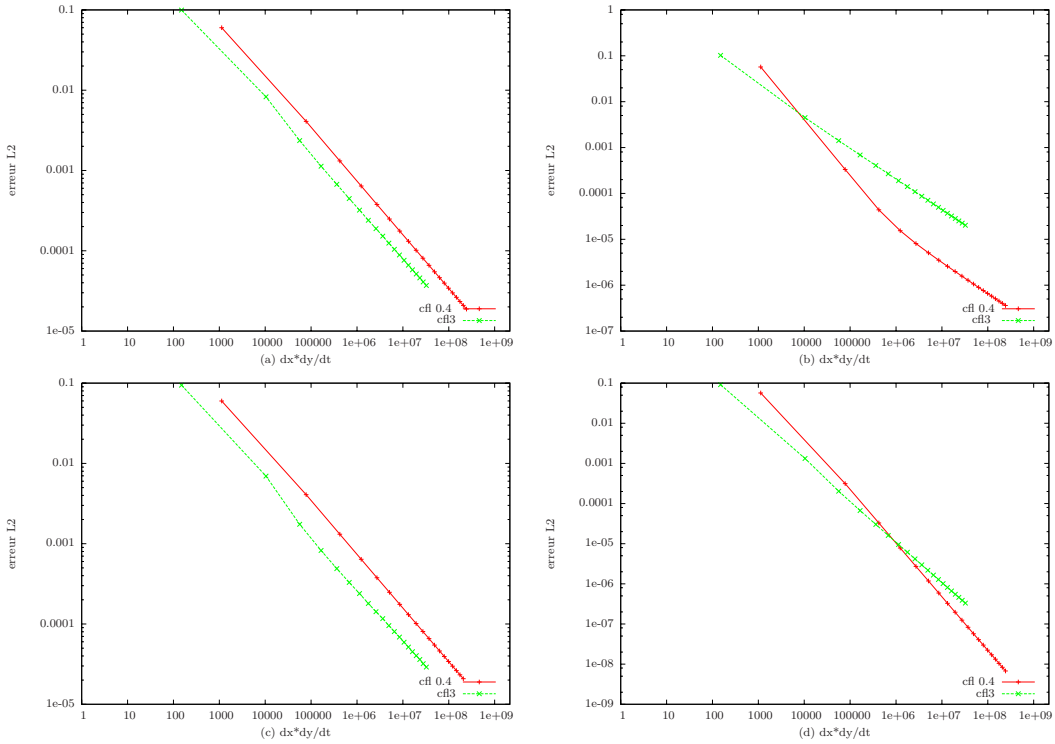


FIG. 4.10 – Evaluation de l'erreur en fonction du coût de calcul pour deux nombres de CFL différents (0.4 et 3). Les particules sont advectées par une méthode de splitting particulaire d'ordre deux en (a, b) et d'ordre trois en (c, d). Elles sont remaillées par des formules Λ_2 (CFL 0.4) et $\Lambda_{\tilde{2}}$ (CFL 3) en (a,c), Λ_4 et $\Lambda_{\tilde{4}}$ en (b,d).

particules sont remaillées par des formules d'ordre deux (à gauche), et à coût de calcul fixé, l'erreur est plus faible en utilisant un grand pas de temps (nombre de CFL 3 plutot que 0.4). Supposons maintenant que les particules sont remaillées à l'ordre quatre. On tolère une erreur sur la solution d'ordre ϵ, avec $\epsilon \leq 10^{-2}$ si les particules sont advectées à l'ordre deux et $\epsilon \leq 10^{-5}$ si les particules sont advectées à l'ordre trois. Il est alors moins coûteux en temps de calcul de choisir un pas de temps élevé (CFL 3). En revanche, si l'on désire obtenir une solution d'erreur inférieure à ϵ il est préférable de choisir un faible pas de temps (CFL 0.4). En conclusion, lorsqu'on souhaite obtenir une solution de précision fixée, il est moins coûteux en terme de temps de calcul d'utiliser un grand pas de temps, à condition d'advecter les particules avec une précision suffisamment élevée. Notons qu'il serait intéressant d'estimer la valeur de la constante k en fonction des méthodes d'advection et de remaillage des particules utilisées. Il serait alors possible de comparer le coût de calcul entre une méthode advectant les particules de manière précise, utilisée avec un grand pas de temps, et une méthode d'advection moins précise mais en utilisant

de faibles pas de temps.

4.2.2 Application du splitting et de la limitation : simulations en dimension deux

Deux tests sont exposés en dimension deux. Le premier permet de constater la performance des méthodes de splitting face au compromis à faire entre temps de calcul et précision de la solution. Le second met en évidence l'utilité des limiteurs dans les simulations de fonctions discontinues.

Le premier test fut initialement proposé par J.Bell et ses co auteurs [7]. Ce cas est particulièrement sévère et a été repris pour comparer l'efficacité de nouvelles méthodes [39, 52, 91].

Le scalaire porté par les particules, de valeur 1, est initialisé dans un domaine $[0,1]^2$ sous la forme d'un cercle centré en $(0.5, 0.75)$, de rayon 0.15. Il est soumis au champ de vitesse

$$\begin{aligned} a_1(x_1,x_2) &= -2\,sin^2(\pi x_1)\,sin(\pi x_2)\,cos(\pi x_2) \\ a_2(x_1,x_2) &= 2\,sin^2(\pi x_2)\,sin(\pi x_1)\,cos(\pi x_1). \end{aligned} \tag{4.58}$$

On fixe le nombre de CFL à 0.4, la valeur de cutoff à 10^{-5} et la grille est composée de 128^2 points. Les particules sont advectées par un schéma d'ordre deux en temps. On représente les isocontours 0.5 du scalaire aux temps $T = 3$ et $T = 5$ pour différentes formules de remaillages dans les figures 4.11 et 4.12.

Les figures 4.11-(d) et 4.12-(d) sont considérées comme les solutions de référence (312 924 et 411 662 particules pour $T = 3$ et $T = 5$). Comme attendu, lorsque les particules sont remaillées par des formules Λ_m (d'ordre m), plus m est élevé et plus la solution est précise. Ici les filaments sont plus longs lorsqu'on utilise un remaillage Λ_4 plutot que Λ_3. On peut aussi remarquer que la solution est identique, que l'on utilise une méthode de remaillage par produit tensoriel ou par splitting (à condition que les formules Λ_m soient de même indice m). Enfin, les figures 4.13 et 4.14 mette en évidence des solutions de précision similaire, indépendamment du nombre CFL utilisé. Un gain de calcul significatif est réalisé en utilisant un nombre de CFL élevé puisque seulement 154 (t=3) et 256 (t=5) itérations ont été nécessaires pour un nombre de $CFL = 5$ alors qu'il faut en effectuer 1920 (t=3) et 3200 (t=5) pour un nombre de $CFL = 0.4$.

Les temps cpu obtenus en remaillant les particules par des formules Λ_3, Λ_4, Λ_6 et des méthodes de splitting ou produit tensoriel sont résumés dans les tableaux 4.3 à 4.6. Contrairement à l'étude de complexité menée en 4.1.4, le temps de calcul de la méthode remaillant les particules par splitting s'avère être du même ordre de grandeur que celle remaillant par produit tensoriel. Les raisons peuvent être d'une part le faible nombre de particules et donc du temps de calcul et d'autre part un temps non négligeable des accés mémoire, notamment lors de la création des particules qui sont deux fois plus nombreuses dans le cas d'une méthode de splitting plutôt que tensorielle.

Le second cas que l'on considère est à symétrie radiale. Notons $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. On initialise le champ $u(x_1, x_2, t) = u(r, \theta, t) = u(r, t)$ sous la forme d'un anneau donné par

	Création des particules	Interpolation Λ_2 du champ de vitesse	Remaillage	Advection	Total	Nombre de particule ($T = 3$)
Λ_3	0.57	2.93	1.65	0.24	5.48	12380
Λ_4	0.7	3.43	3.95	0.27	8.54	13500
Λ_6	0.54	3.51	6.5	0.34	11.05	13831

TAB. 4.3 – Répartition du temps CPU lors du cas test des filaments. $T = 3$ (1920 itérations), les particules sont remaillées par produit tensoriel des formules 1D et sont créées si $u > 10^{-5} \max u$.

	Création des particules	Interpolation Λ_2 du champ de vitesse	Remaillage	Advection	Total	Nombre de particule ($T = 3$)
Λ_3	0.63	5.16	3.41	0.52	9.9	16129
Λ_4	0.99	5.01	6.67	0.55	13.39	16129
Λ_6	0.95	5.22	9.64	0.57	16.6	16129

TAB. 4.4 – Répartition du temps CPU lors du cas test des filaments. $T = 3$ (1920 itérations), les particules sont remaillées par produit tensoriel des formules 1D et sont créées sur tous les points de grille.

	Création des particules	Interpolation Λ_2 du champ de vitesse	Remaillage	Advection	Total	Nombre de particule ($T = 5$)
Λ_3	1.25	3.02	2.1	0.3	6.82	12268
Λ_4	1.36	3.38	4.37	0.32	9.72	13487
Λ_6	1.76	3.54	6.11	0.23	11.95	13784

TAB. 4.5 – Répartition du temps CPU lors du cas test des filaments. $T = 5$ (3200 itérations), les particules sont remaillées par une méthode de splitting particulaire d'ordre deux et sont créées si $u > 10^{-5} \max u$.

	Création des particules	Interpolation Λ_2 du champ de vitesse	Remaillage	Advection	Total	Nombre de particule ($T = 5$)
Λ_3	1.82	5.47	4.23	0.56	12.36	16129
Λ_4	2.44	5.15	6.8	0.6	15.33	16129
Λ_6	2.53	5.31	9.43	0.52	18.16	16129

TAB. 4.6 – Répartition du temps CPU lors du cas test des filaments. $T = 5$ (3200 itérations), les particules sont remaillées par une méthode de splitting particulaire d'ordre deux et sont créées sur tous les points de grille.

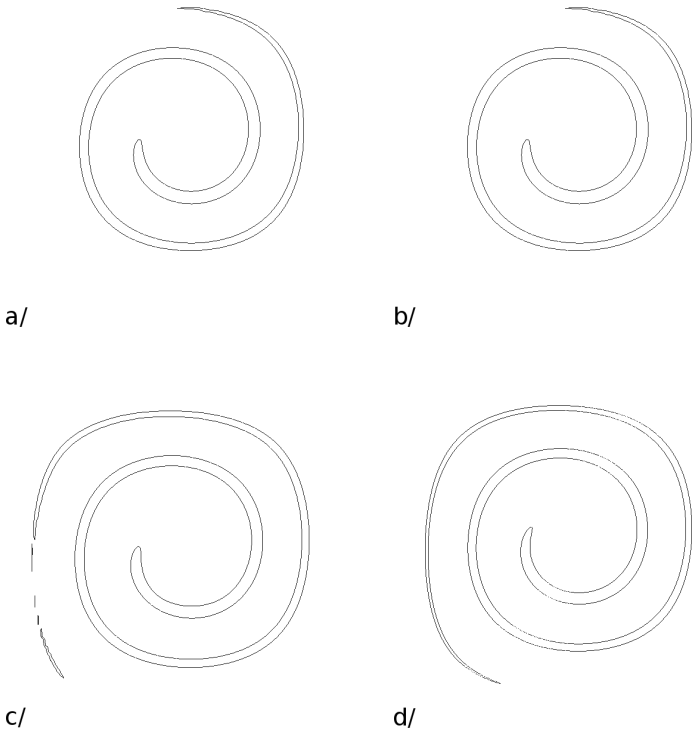


FIG. 4.11 – Isocontours 0.5 obtenus pour $T = 3$. Les particules sont advectées par un schéma d'ordre deux, et remaillées par produit tensoriel des formules Λ_3 en (a), puis par splitting particulaire et formule Λ_3 en (b), Λ_4 en (c) et enfin Λ_6 avec $\Delta x = 10^{-3}$ en (d). Le nombre de CFL est 0.4 et $\Delta x = 1/128$.

l'une des deux fonctions suivantes

$$u_0^{dis}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0.5 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.59}$$

$$u_0^{reg}(r) = \begin{cases} p_1(r) & \text{si } 0.4 \leq r \leq 0.6 \\ 1 & \text{si } 0.6 \leq r \leq 0.8 \\ p_2(r) & \text{si } 0.8 \leq r \leq 1. \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.60}$$

avec

$$\begin{cases} p_1(r) = -512 + 5400\,r - 22500\,r^2 + 46250\,r^3 - 46875\,r^4 + 18750\,r^5 \\ p_2(r) = 10625 - 60000\,r + 135000\,r^2 - 151250\,r^3 + 84375\,r^4 - 18750\,r^5. \end{cases} \tag{4.61}$$

u_0^{dis} est discontinue en $r = 1/2$ et $r = 1$. u_0^{reg} est une fonction de classe C^2.

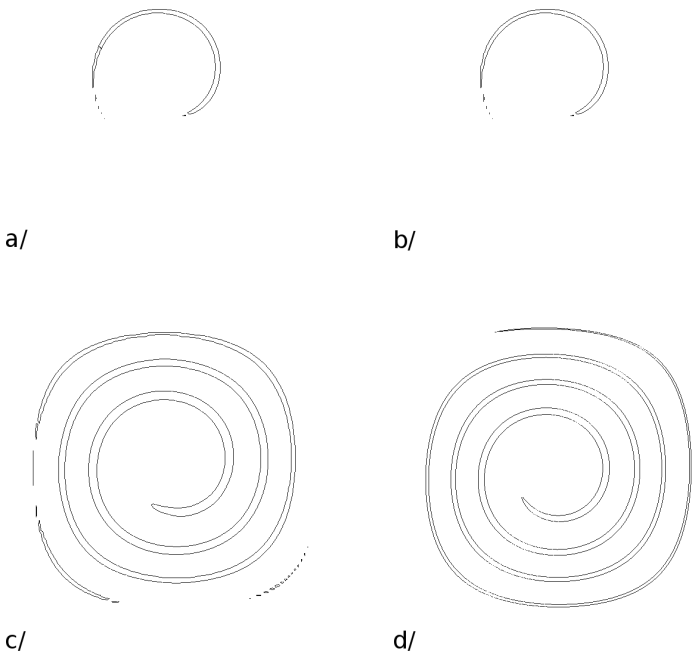


FIG. 4.12 – Isocontours 0.5 obtenus pour $T = 5$. Les paramètres de simulations sont les mêmes que dans la figure 4.11.

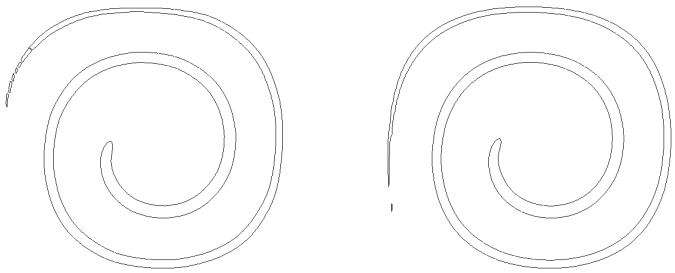


FIG. 4.13 – Isocontours 0.5 obtenus pour $T = 3$ et un nombre de $CFL = 5$ avec $dx = 1/128$. Les particules sont advectées par un schéma d'ordre deux, et remaillées par splitting particulaire et formule $\Lambda_{\tilde{2}}$ à gauche, $\Lambda_{\tilde{4}}$ à droite.

Le champ de vitesse est radial $\mathbf{a} = (x_1/r, x_2/r) = (1, 0)$ en coordonnées polaires.

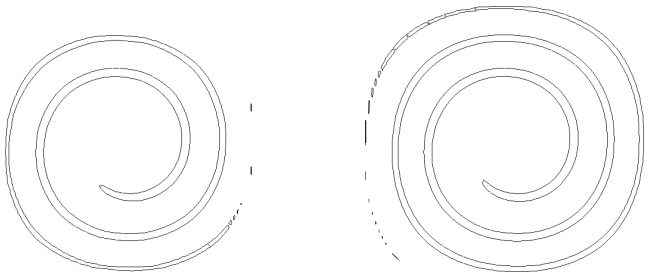


FIG. 4.14 – Isocontours 0.5 obtenus pour $T = 5$ et un nombre de $CFL = 5$ avec $dx = 1/128$. Les particules sont advectées par un schéma d'ordre deux, et remaillées par splitting particulaire et formule $\Lambda_{\tilde{2}}$ à gauche, $\Lambda_{\tilde{4}}$ à droite.

$u(r,t)$ est donc solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + div(\mathbf{a}u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \\ u(r,0) = u_0(r) \end{cases} \tag{4.62}$$

La solution excacte se calcule par la méthode des caractéristiques. En paramétrant u par s, $u = u\left[r(s), t(s)\right]$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dr}{ds} = 1 \\ \frac{du}{ds} = -\frac{u}{r}. \end{cases} \tag{4.63}$$

En fixant $t(s=0) = 0$ on obtient $t = s$ et

$$\begin{cases} r(t) = t + r(t=0) \\ \frac{du}{dt} = -\frac{u}{t+r(t=0)}, \end{cases} \tag{4.64}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} r(t=0) = r(t) - t \\ u(t) = \frac{r(t=0)}{t+r(t=0)} u\left[r(t=0), 0\right]. \end{cases} \tag{4.65}$$

La solution de (4.62) est alors

$$u(t) = \left(1 - \frac{t}{r}\right) u_0(r-t), \tag{4.66}$$

l'expression de u_0 étant donnée par (4.59) ou (4.60).

On considère un domaine $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [-2,2]^2$ comportant l'anneau jusqu'au temps $T = 1$. Puisque $|\mathbf{a}|_\infty = 1$ et $|\mathbf{a}|_{1,\infty} = 2$ pour $\mathbf{x} \in [1/2, 2]^2$, le pas de temps doit vérifier :

$$\Delta t < \frac{1/2}{M\,|\mathbf{a}|_{1,\infty}} = \frac{1}{4M}, \tag{4.67}$$

Pour que les formules de remaillages $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$ soient consistantes. On fixe $M = 1$ dans le cas d'un remaillage $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $M = 2$ dans le cas $\Lambda_{\tilde{4}}$.

Remarque 14. *La condition (4.67) correspond à un nombre de CFL classique*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}|\mathbf{a}|_\infty = \frac{1}{4\,M\,\Delta x}. \tag{4.68}$$

Ainsi, le nombre de CFL sera d'autant plus grand que le pas d'espace Δx sera choisi petit.

Les solutions obtenues pour $T = 0.4$ par une méthode de splitting particulaire advectant les particules à l'ordre trois sont comparées pour différentes formules de remaillage dans les figures 4.15 à 4.19. Les particules sont initialisées par l'anneau défini en (4.59). La grille utilisée comporte $400*400$ points ($\Delta x = 10^{-2}$). Les nombres de CFL sont fixées à 0.4 et 10.

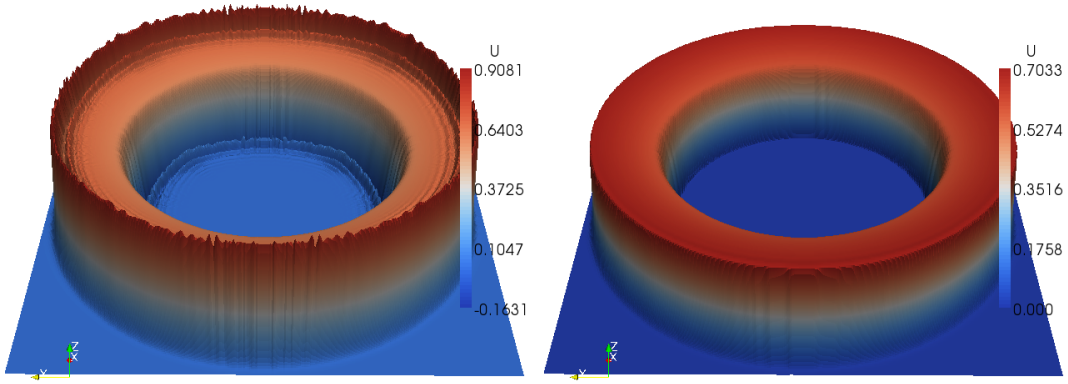


FIG. 4.15 – Représentation 3D de u à $T = 0.4$. Le nombre de CFL est 0.4 ($\Delta t = 0.4\,\Delta x = 0.4\,10^{-2}$). Les particules sont advectées à l'ordre trois et remaillées par une méthode de splitting particulaire (formules Λ_2 à gauche et Λ_2 limitées à droite).

Lorsque les particules sont remaillées par des formules Λ_2, Λ_4 ou $M_4^{'}$, les simulations pour un nombre de CFL de 0.4 (figures 4.15, 4.16 et 4.19) mettent en évidence la présence d'oscillations au niveau des discontinuités de la solution (et du côté amont). Ces oscillations sont correctement supprimées en introduisant un limiteur dans les formules Λ_2 (fig. 4.15), la solution u étant notamment positive. En revanche, le limiteur des formules Λ_4 n'est efficace que sur une petite portion des discontinuités. La construction de ce limiteur nécessite d'être encore améliorée.

Lorsque le nombre de CFL est fixée à 10, les formules Λ_2, Λ_4 et $M_4^{'}$ ne sont plus consistantes. Ceci est mis en évidence par l'apparition d'oscillations dans la partie régulière de l'anneau (figures 4.17 et 4.18 en haut à gauche, figure 4.19 à droite). Ces

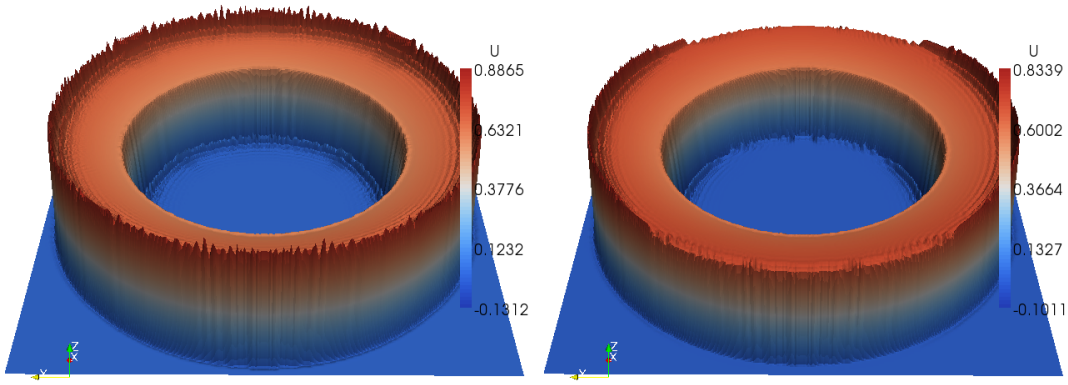


FIG. 4.16 – Mêmes conditions de simulation qu'à la figure 4.15, mais les particules sont remaillées par des formules Λ_4 à gauche et Λ_4 limitées à droite.

oscillations sont réduites en remaillant les particules par des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ (figure 4.17 en haut à droite) et supprimées par des formules $\Lambda_{\tilde{4}}$ (figure 4.18 en haut à droite). Comme attendu, de meilleurs résultats sont obtenus en utilisant les formules $\Lambda_{\tilde{4}}$ puisqu'elles sont d'ordre trois aux passages de CFL, contrairement aux formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ qui ne sont que d'ordre un. Les oscillations duent à la présence d'une discontinuité aux bords de l'anneau sont toujours visibles. L'introduction des limiteurs dans les formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ permet de les supprimer (figure 4.17 en bas). Notons que de légères oscillations persistent.

On trace des coupes de l'anneau en y=1.5 et pour $T = 0.8$ dans la figure (4.20). Il est ainsi plus facile de comparer la solution obtenue avec la valeur exacte. Les particules sont toujours initialisées par (4.59), $\Delta x = 0.02$ et le nombre de CFL vaut 5.

On s'interesse maintenant aux oscillations duent uniquement aux erreurs de consistance. On trace pour cela des coupes de l'anneau de classe C^2 (les particules sont initialisées par (4.60)) en $y = 1.5$ et pour $T = 0.8$ dans les figures 4.21 et 4.22. Les oscillations sont très marquées lorsque les particules sont remaillées par des formules Λ_2 (fig.4.21) ou Λ_4 (fig.4.22). Elles le sont beaucoup moins en utilisant des formules $M_4^{'}$. L'utilisation des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ provoque encore de légères oscillations, duent à la faible précision des formules de remaillage aux points où la CFL locale change. Le remaillage $\Lambda_{\tilde{4}}$ permet d'obtenir une très bonne solution.

Des courbes d'erreurs sont aussi représentées dans la figure 4.23 pour un nombre CFL de 5. Les pentes issues des remaillages Λ_2 et Λ_4 indiquent clairement le problème de consistance pour des nombres de CFL élevés. La pente correspondant au remaillage $\Lambda_{\tilde{2}}$ est comprise entre un et deux, ce qui était prévisible puisque ces formules de remaillage

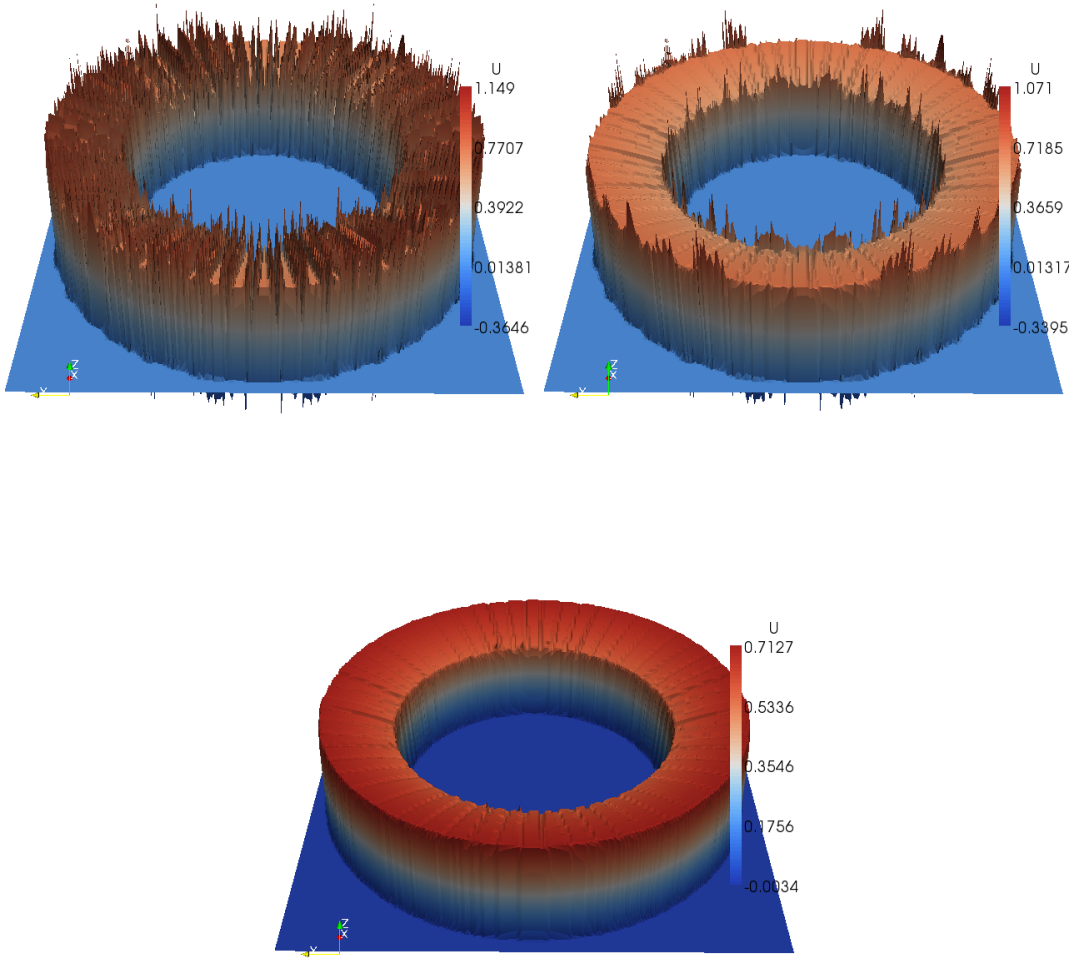


FIG. 4.17 – Représentation 3D de u à $T = 0.4$. Le nombre de CFL est 10 ($\Delta t = 10\,\Delta x = 0.1$). Les particules sont advectées à l'ordre trois et remaillées par une méthode de splitting particulaire. Les particules sont remaillées par des formules Λ_2 (figure en haut à gauche), $\Lambda_{\tilde{2}}$ (figure en haut à droite), et $\Lambda_{\tilde{2}}$ limitées (figure du bas).

sont d'ordre deux sauf en certains points où elles se réduisent à l'ordre un. L'erreur en norme L^∞ est même légèrement meilleure à celle attendue. Les formules $\Lambda_{\tilde{4}}$ étant d'ordre quatre ou trois en certains points, la pente de l'erreur obtenue devrait être égale à 3 puisque les particules sont advectées par un schéma d'ordre 3. On constate des résultats légèrement moins bons.

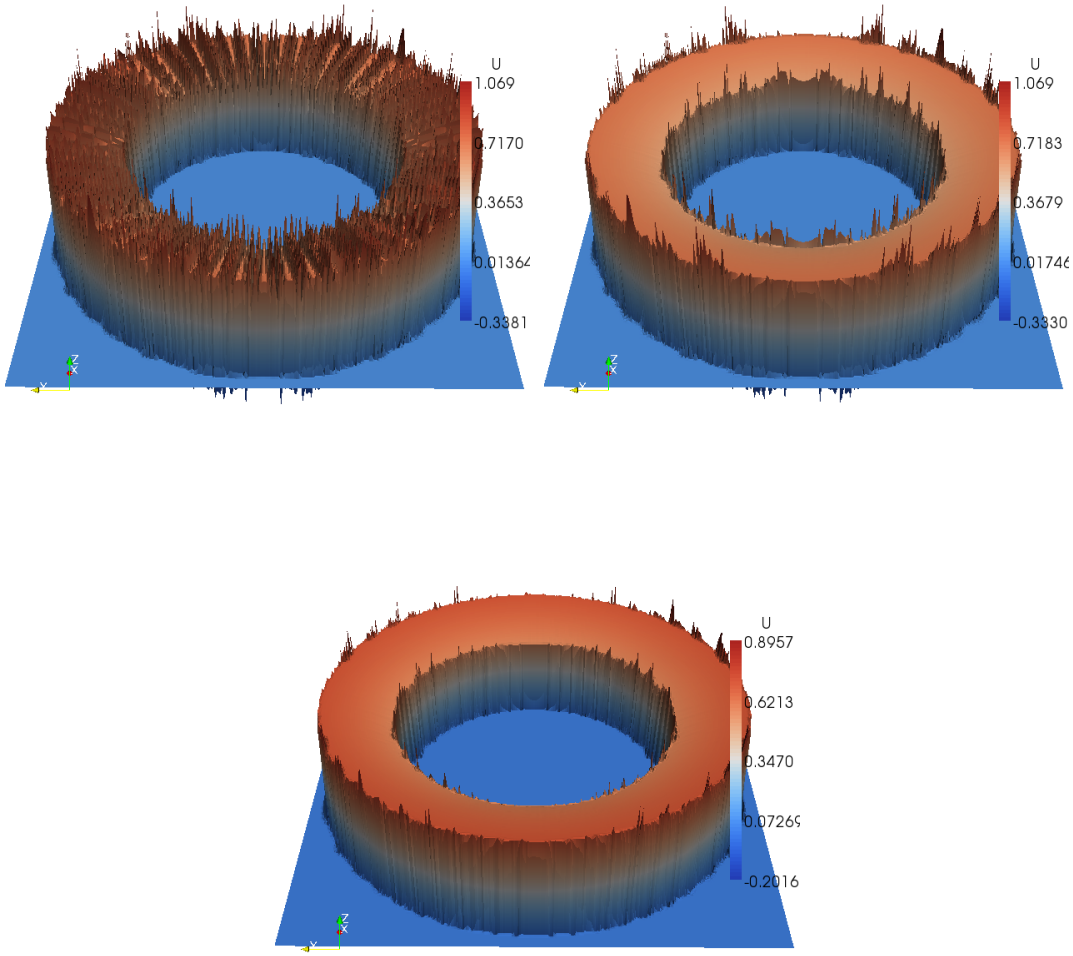


FIG. 4.18 – Mêmes conditions de simulation qu'à la figure 4.17, mais les particules sont remaillées par des formules Λ_4 (figure en haut à gauche), $\Lambda_{\tilde{4}}$ (figure en haut à droite), et $\Lambda_{\tilde{4}}$ limitées (figure du bas).

4.2.3 Simulations en dimension trois

Pour illustrer et comparer les méthodes en dimension trois, on reprend le cas test considéré dans [39, 52]. Un scalaire passif de valeur unitaire ($u = 1$) est initialisé sous la forme d'une sphère de rayon 0.15 et centré en $(0.35, 0.35, 0.35)$ dans le domaine $\Omega = [0, 1]^3$. Ce scalaire est advecté suivant le champ de vitesse incompressible donné en (4.69) jusqu'à $T = 1$. Une valeur seuil de 10^{-4} est appliquée, une particule p est créée

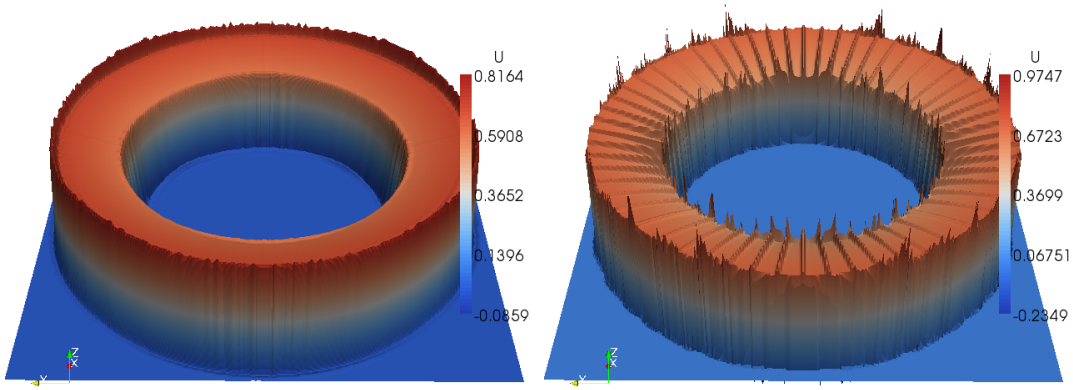


FIG. 4.19 – Représentation 3D de u à $T = 0.4$. Le nombre de CFL est 0.4 à gauche et 10 à droite. Les particules sont advectées à l'ordre trois et remaillées par une méthode de splitting particulaire et des fomrules $M_4^{'}$.

uniquement si $|u_p| >= 10^{-4}|u|_\infty$.

$$\text{si } t \leq 1 \begin{cases} a_1 = 2\, sin^2(\pi x_1)\, sin(2\pi x_2)\, sin(2\pi x_3) \\ a_2 = -sin(2\pi x_1)\, sin^2(\pi x_2)\, sin(2\pi x_3) \\ a_3 = -sin(2\pi x_1)\, sin(2\pi x_2)\, sin^2(\pi x_3) \end{cases} \tag{4.69}$$

Les isocontours 0.5 du scalaire sont représentés pour différents instants jusqu'à $T = 1$ dans la figure 4.24. Tous les résultats suivants seront ensuite donnés pour $T = 1$, temps qui correspond au maximum de déformations.

Puisque $|\mathbf{a}|_\infty = 2$ et $|\mathbf{a}|_{1,\infty} = 4\,\pi$ le pas de temps est contraint par la condition

$$\Delta t < \frac{1}{8\,\pi\, M}, \tag{4.70}$$

avec $M = 1$ et $M = 2$ si les particules sont remaillées par des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$. Le nombre CFL maximal que l'on peut imposer est donc égal à $1/\,(4\,\pi\, M\, \Delta x)$. Les figures 4.25 à 4.27 représentent les isocontours obtenus par différentes formules de remaillage et pour un nombre de points de grille de 100^3, 140^3 et 200^3. Lorsque les particules sont remaillées par des formules Λ_2 ou Λ_4 pour des nombres CFL supérieurs à 1/2, les problèmes de consistance sont responsables de la création d' "ondulations" visibles également lorsqu'on raffine la grille. Ce problème est corrigé en utilisant les formules de remaillage $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$. Remarquons cependant que l'utilisation des formules $\Lambda_{\tilde{2}}$ laisse encore apparaitre de légers "moutonnements" qui disparaissent totalement en remaillant les particules par les formules $\Lambda_{\tilde{4}}$. Cette dernière remarque peut s'expliquer par la présence de points de grille où le schéma équivalent, de type différence finie, est d'ordre un seulement. Le schéma est d'ordre trois en ces points lorsqu'on utilise les formules $\Lambda_{\tilde{4}}$.

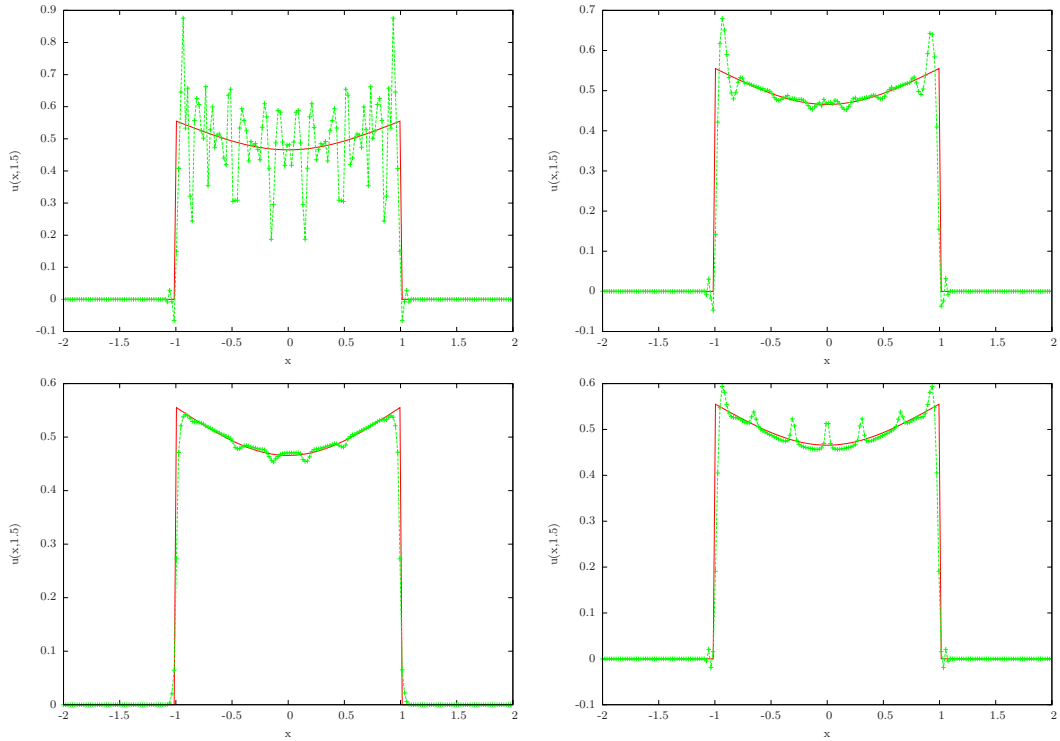


FIG. 4.20 – Coupe en y=1.5. Les particules sont advectées à l'ordre trois, le nombre CFL vaut 5, $\Delta x = 0.02$ et le temps final est $T = 0.8$. Les solutions obtenues lorsque les particules sont remaillées par des formules Λ_2 (en haut à gauche), $\Lambda_{\tilde{2}}$ (en haut à droite), $\Lambda_{\tilde{2}}$ limitées (en bas à gauche) et $M_4^{'}$ (en bas à droite) sont comparées à la solution exacte (en trait fin).

On compare ensuite les trois méthodes de remaillage (produit tensoriel, splitting de Strang et splitting particulaire) dans la figure 4.28. Les particules sont advectées à l'ordre deux et le nombre CFL est fixé à 0.4. Les isocontours à 0.5 étant très semblables, les trois méthodes sont identiques du point de vue de la précision de la solution.

On souhaite maintenant comparer les différentes formules de remaillage de manière quantitative. On trace pour cela la masse du scalaire supérieur à 0.3 au cours du temps dans la figure 4.29, le nombre CFL étant fixé à 3 et $\Delta x = 0.01$. Les formules de remaillage d'ordre quatre (Λ_4, $\Lambda_{\tilde{4}}$) diffusent moins la solution que celles d'ordre deux (Λ_2, $\Lambda_{\tilde{2}}$, $M_4^{'}$).

On étudie enfin le coût de calcul des différentes formules de remaillage étudiées. Le tableau 4.7 compare les temps CPU relatifs aux méthodes de splitting particulaire d'ordre deux et de remaillage par produit tensoriel pour simuler la déformation de la sphère jusqu'à $T = 1$. Le nombre de CFL est fixé à 0.4. Le tableau 4.8 compare les temps CPU relatifs aux trois méthodes de remaillages : produit tensoriel, splitting particulaire et splitting de Strang. Le tableau 4.9 met en évidence le temps de calcul nécessaire à la correction de consistance des formules de remaillage Λ_2 et Λ_4.

Contrairement à l'étude de complexité menée en 4.1.4, les temps d'execution de la

	Splitting particulaire d'ordre 2 (interpolation Λ_2 du champ de vitesse)		Remaillage tensoriel (advection Runge Kutta 2)	
	Λ_2	Λ_4	Λ_2	Λ_4
n=100 np.init.=14108	t=160s np=155534	t=221s np=171137	t=127s np=164485	t=195s np=182529
n=140 np.init=38848	t=631s np=318390	t=722s np=335022	t=391s np=332456	t=570s np=353770
n=200 np.init=113042	t=1613s np=717060	t=1762s np=734440	t=1029s np=739312	t=1342s np=762459

TAB. 4.7 – Comparaison du temps CPU et du nombre de particules entre une méthode de splitting particulaire d'ordre deux et un remaillage par produit tensoriel. Les isocontours sont représentées dans les figures 4.25 à 4.27. Le nombre CFL vaut 0.4, et un seuil de 10^{-4} est appliqué pour la création des particules.

	Remaillage par produit tensoriel			splitting particulaire d'ordre 2			splitting de Strang		
Interpolations	exacte	Λ_1	Λ_2	exacte	Λ_1	Λ_2	exacte	Λ_1	Λ_2
Λ_2	t=7s	t=13s	t=9s	t=19s	t=28s	t=30s	t=44s	t=39s	t=46s
Λ_4	t=11s	t=20s	t=15s	t=25s	t=27s	t=35s	t=50s	t=51s	t=54s
Λ_6	t=21s	t=28s	t=23s	t=30s	t=30s	t=32s	t=55s	t=55s	t=59s
Λ_8	t=30s	t=35s	t=37s	t=30s	t=27s	t=30s	t=58s	t=59s	t=63s

TAB. 4.8 – Comparaison des temps cpu issus du calcul de déformation de la sphère jusqu'à $T = 1$, sous CFL=5 et pour une grille de 140^3 points. Les particules sont advectées à l'ordre deux. On compare l'utilisation de l'expression exacte du champ de vitesse avec des interpolations par les noyaux Λ_1 et Λ_2. Un écart de 30% peut être obtenu sur les temps affichés.

	Λ_2	$\Lambda_{\tilde{2}}$	Λ_4	$\Lambda_{\tilde{4}}$	M_4'
n=100 CFL=3 np.init.=14108	t=10s np=96683	t=33s np=100205	t=14s np=116725	t=36s np=117807	t=14s np=106208
n=140 CFL=5 np.init=38848	t=30s np=171607	t=125s np=180445	t=35s np=205324	t=113s np=210311	t=30s np=196999
n=200 CFL=7 np.init=113042	t=86s np=359123	t=405s np=376892	t=94s np=421370	t=331s np=433571	t=66s np=416807

TAB. 4.9 – Coût de la correction de consistance en terme de temps de calcul. Les temps CPU et nombre de particules donnés correspondent à une méthode de splitting particulaire d'ordre deux. Les isocontours correspondants sont représentés dans les figures 4.25 à 4.27. Un seuil de 10^{-4} est appliqué pour la création des particules.

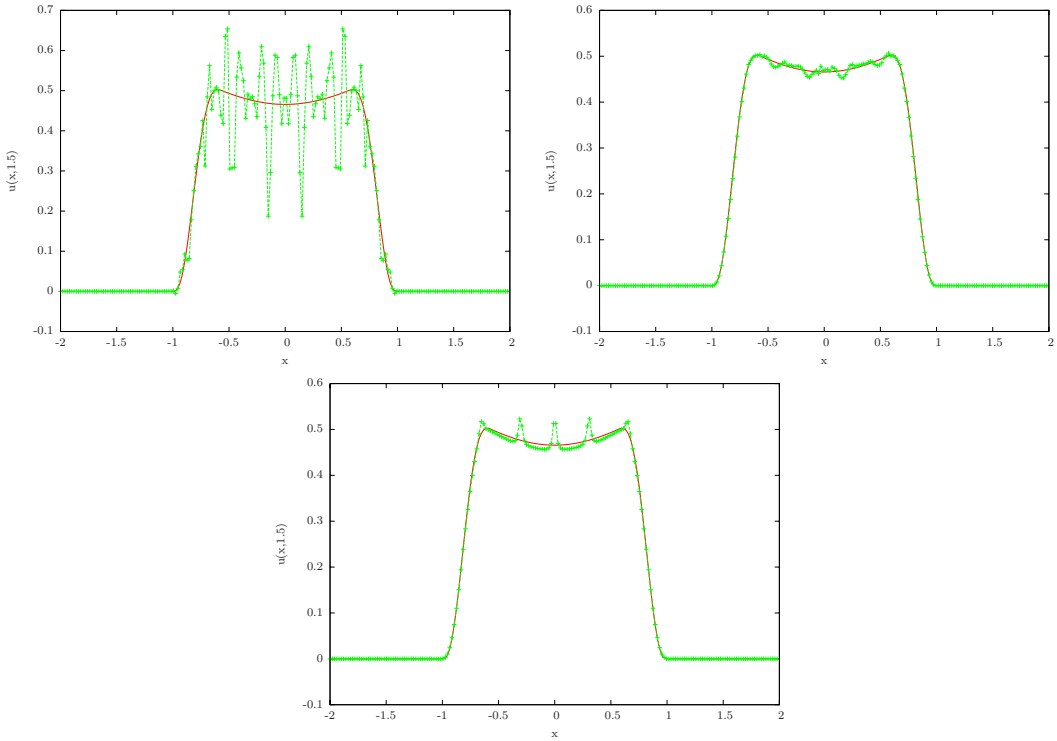


FIG. 4.21 – Coupe en y=1.5. Les particules sont advectées à l'ordre trois, le nombre CFL vaut 5, $\Delta x = 0.02$ et le temps final est $T = 0.8$. Les solutions obtenues lorsque les particules sont remaillées par des formules Λ_2 (en haut à gauche), $\Lambda_{\tilde{2}}$ (en haut à droite) et $M_4^{'}$ (en bas) sont comparées à la solution exacte (en trait fin).

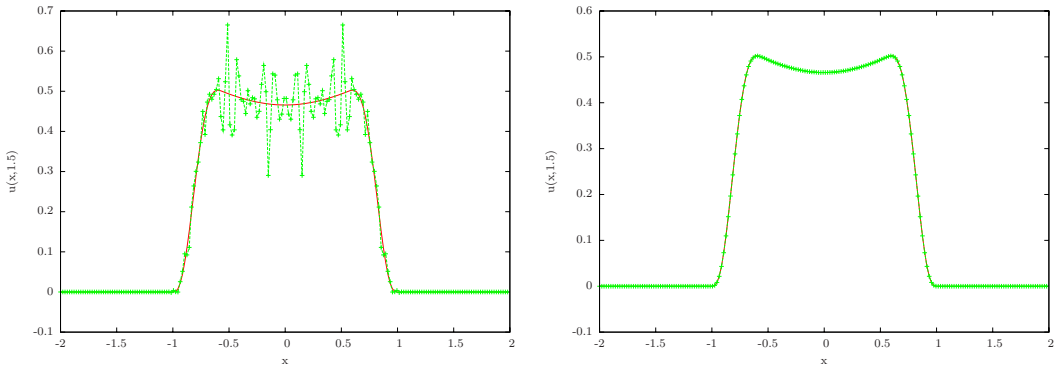


FIG. 4.22 – Les conditions de simulation sont les mêmes que dans la figure 4.21, mais les particules sont remaillées par des formules Λ_4 (à gauche) et $\Lambda_{\tilde{4}}$ (à droite).

méthode de remaillage par produit tensoriel sont légèrement inférieurs à ceux de la méthode par splitting particulaire. Les temps CPU indiqués dans le tableau 4.8 sont

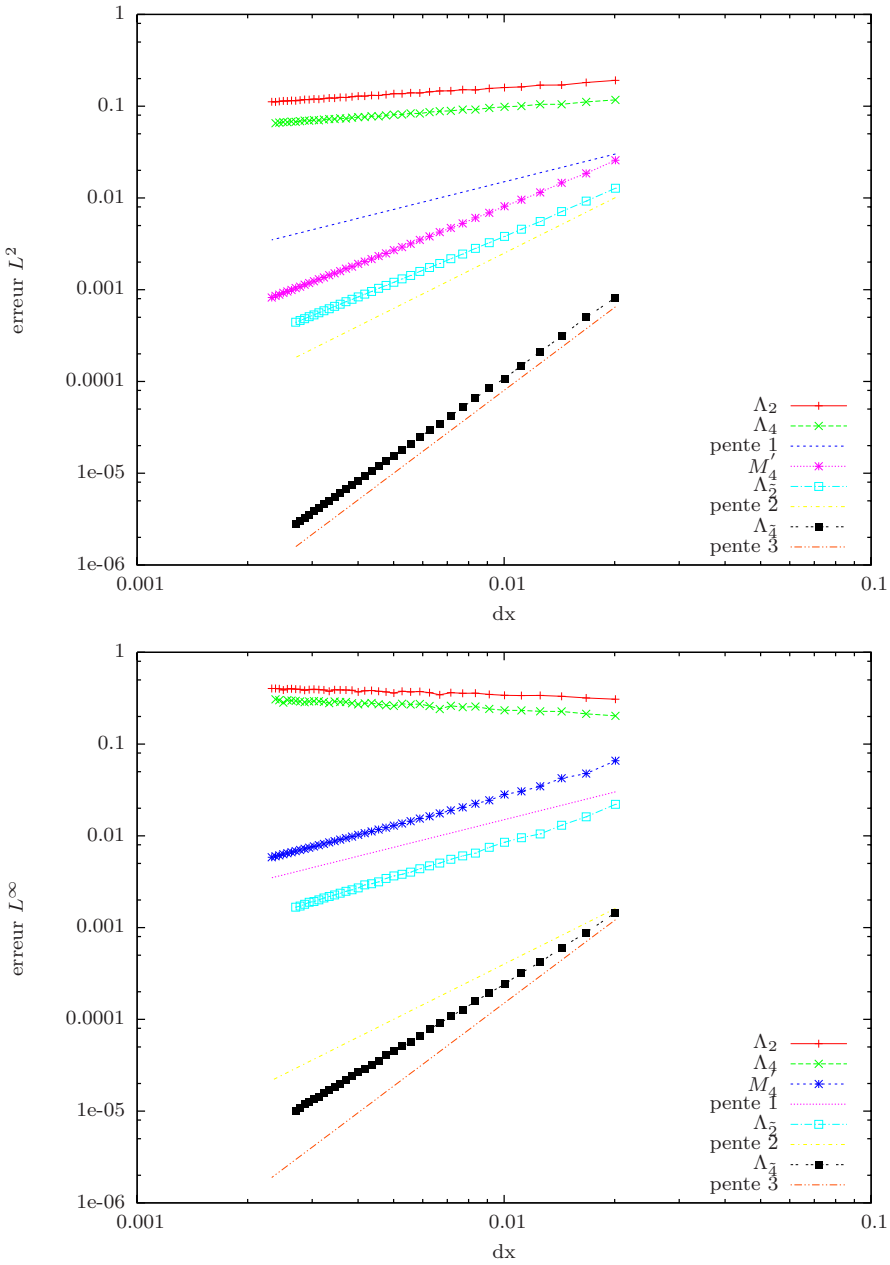


FIG. 4.23 – Courbes d'erreurs L^2 (en haut) et L^∞ (en bas) pour le cas test de l'anneau régulier. Les particules sont advectées à l'ordre trois jusqu'à $T = 0.8$, pour un nombre CFL égale à 5.

à considérer avec prudence puisque un écart de 30% peut être obtenu entre plusieurs executions successives de la même méthode. On retiendra qu'en pratique les temps de calcul d'une méthode de remaillage par produit tensoriel des formules 1D et de splitting

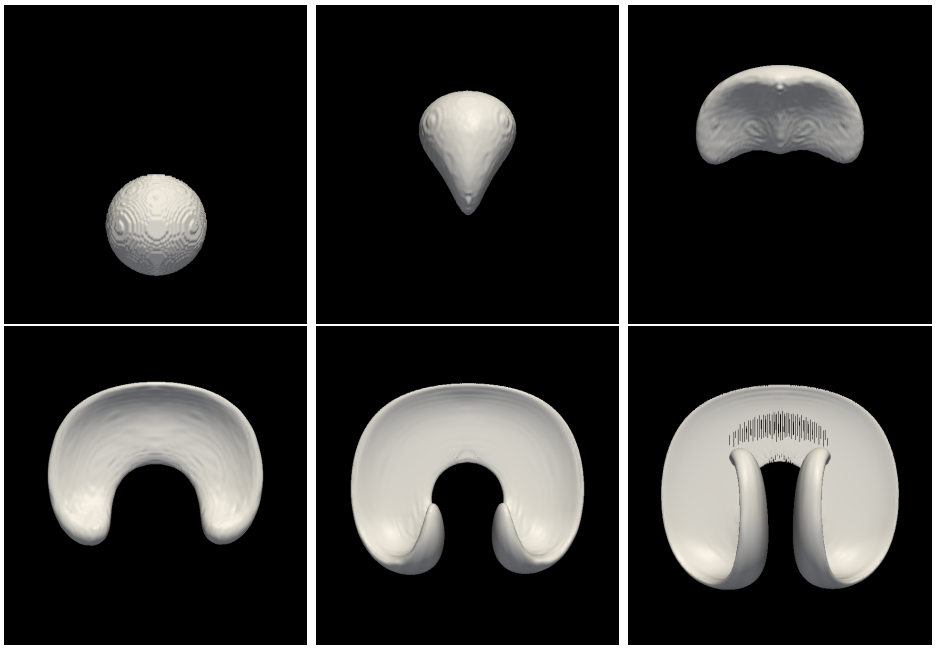


FIG. 4.24 – Isocontours 0.5 du scalaire pour $T = 0$, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1. Les particules sont advectées par une méthode de splitting particulaire d'ordre deux et remaillées par des formules Λ_6. Le nombre CFL est égal à 0.4 et $\Delta x = \Delta y = 5\,10^{-3}$.

particulaire sont très proches. En revanche, la méthode de remaillage par splitting de Strang est deux fois plus lente.

Rappelons que l'utilisation d'une méthode de splitting est nécessaire pour appliquer les formules de remaillages $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$, consistantes en dimension 1 pour de grands pas de temps. L'intérêt d'un tel choix est confirmé par les résultats du tableau 4.9. Les calculs effectués en choisissant un grand pas de temps sont 5 fois plus rapides que sous un nombre CFL classique lorsque les problèmes de consistances sont corrigés et 20 fois plus rapide en remaillant les particules par des formules Λ_2, Λ_4 ou $M_4^{'}$.

Une autre méthode de programmation est utilisée dans l'article [65] de l'annexe F. Les temps CPU obtenus pour effectuer la correction sont alors marginaux. Le repérage des particules dont le remaillage est modifié est séparé de la phase de remaillage. D'autres illustrations numériques sont aussi présentées. Les équations de Navier-Stokes sont résolues pour simuler un jet en régime turbulent.

En conclusion de ce chapitre, la méthode de splitting particulaire permet de généraliser en dimension deux et trois les formules de remaillages $\Lambda_{\tilde{2}}$ et $\Lambda_{\tilde{4}}$ construites au chapitre 3. Son efficacité en terme de temps de calcul est similaire à une méthode remaillant les particules par produit tensoriel des formules 1D. Des limiteurs peuvent aussi être introduits évitant ainsi de créer des oscillations lorsque la quantité portée par les particules présente de fortes variations.

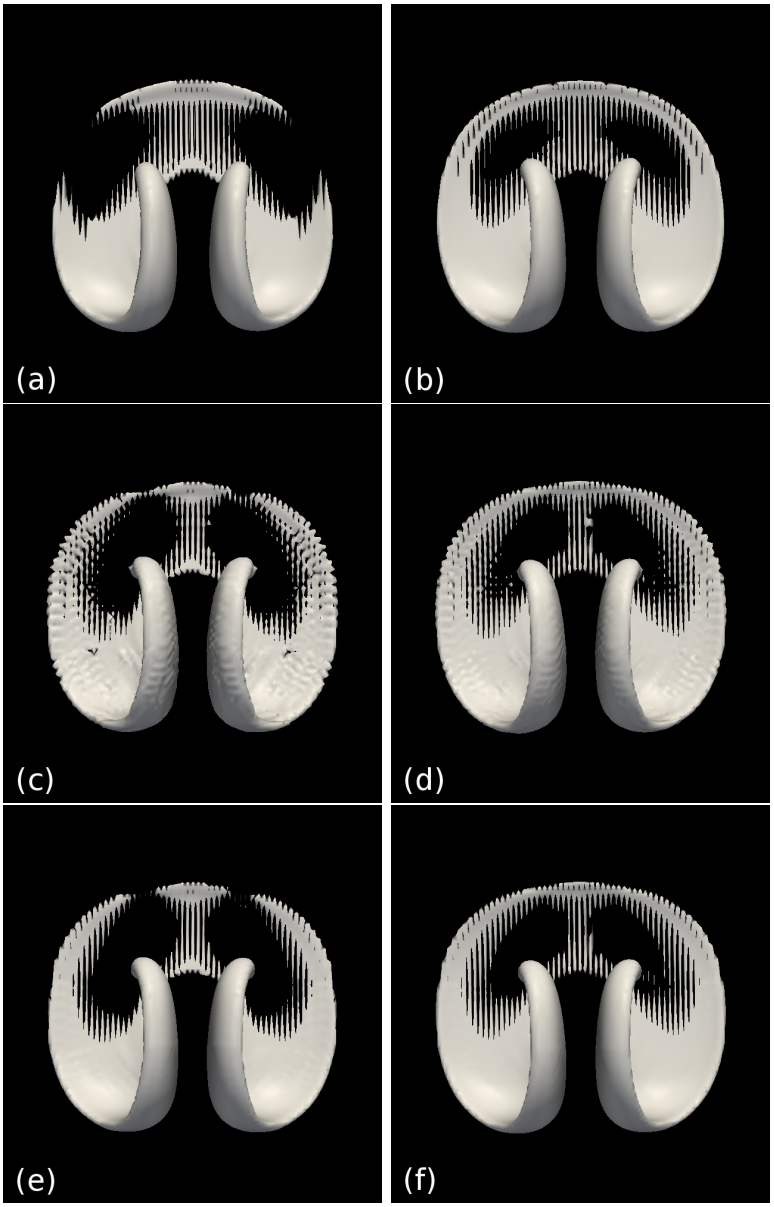


FIG. 4.25 – Isocontours 0.5 du scalaire pour $T = 1$. Les particules sont advectées par une méthode de splitting particulaire d'ordre deux et remaillées par des formules Λ_2 (a,c), $\Lambda_{\tilde{2}}$ (e), Λ_4 (b,d) et $\Lambda_{\tilde{4}}$ (f) . Le nombre CFL est égal à 0.4 en (a,b) et 3 en (c,d,e,f). $\Delta x = \Delta y = 10^{-2}$.

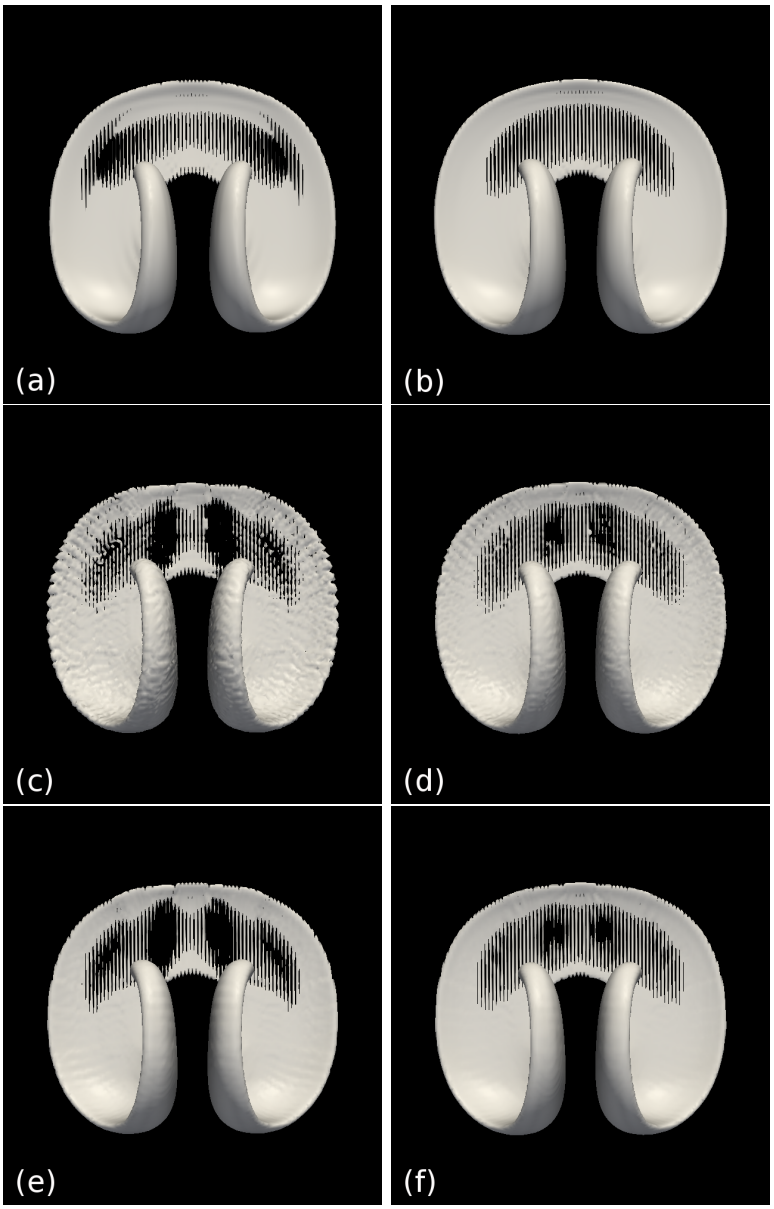


FIG. 4.26 – Isocontours 0.5 du scalaire pour $T = 1$. Les particules sont advectées par une méthode de splitting particulaire d'ordre deux et remaillées par des formules Λ_2 (a,c), $\Lambda_{\tilde{2}}$ (e), Λ_4 (b,d) et $\Lambda_{\tilde{4}}$ (f) . Le nombre CFL est égal à 0.4 en (a,b) et 5 en (c,d,e,f). $\Delta x = \Delta y = 1/140$.

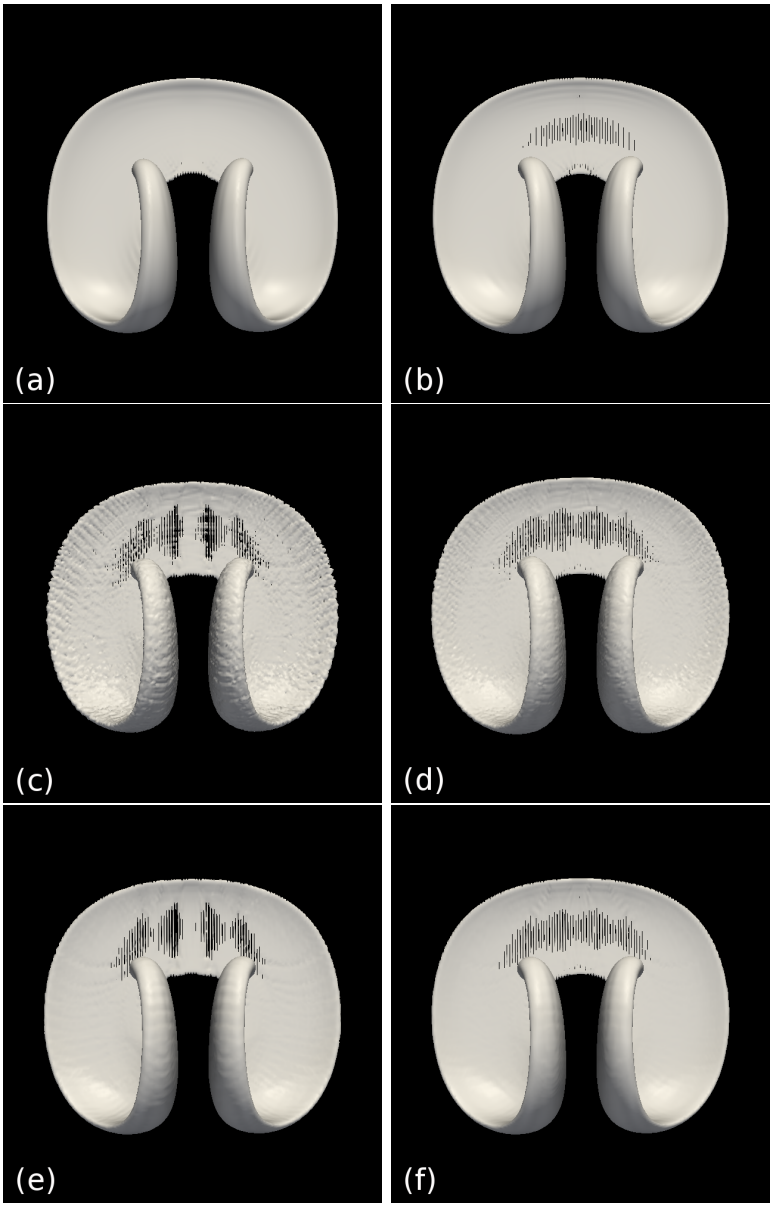


FIG. 4.27 – Isocontours 0.5 du scalaire pour $T = 1$. Les particules sont advectées par une méthode de splitting particulaire d'ordre deux et remaillées par des formules Λ_2 (a,c), $\Lambda_{\tilde{2}}$ (e), Λ_4 (b,d) et $\Lambda_{\tilde{4}}$ (f) . Le nombre CFL est égal à 0.4 en (a,b) et 7 en (c,d,e,f). $\Delta x = \Delta y = 5\,10^{-3}$.

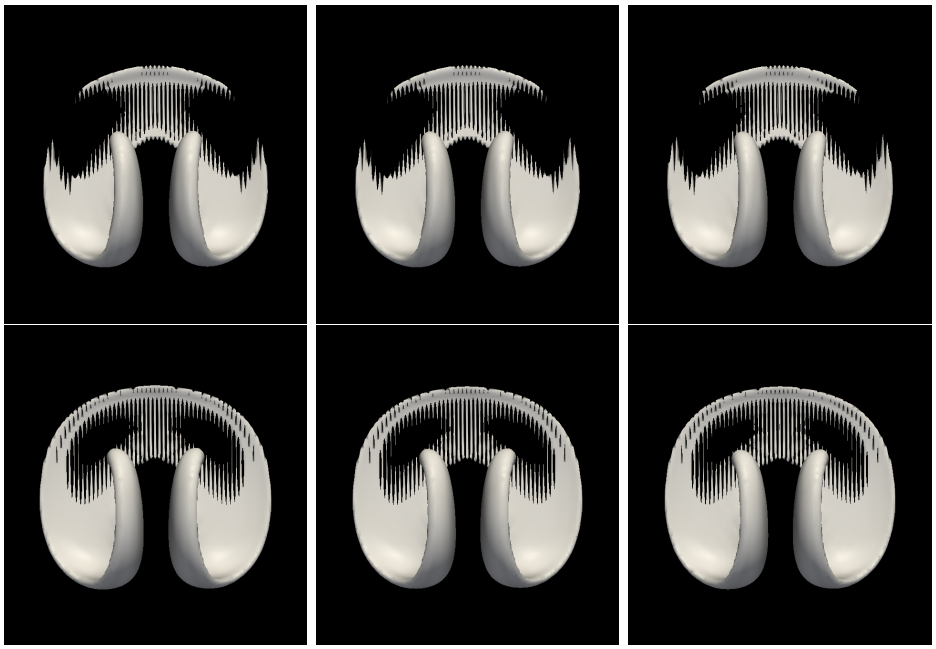


FIG. 4.28 – Isocontours 0.5 du scalaire pour $T = 1$. Le remaillage est réalisé par des formules Λ_2 (en haut) et Λ_4 (en bas). Les particules sont advectées par une méthode Runge Kutta 2 (et remaillées par produit tensoriel) à gauche, une méthode de splitting particulaire d'ordre deux au centre et une méthode de splitting de strang à droite. Le nombre CFL est égal à 0.4, et $\Delta x = \Delta y = 10^{-2}$.

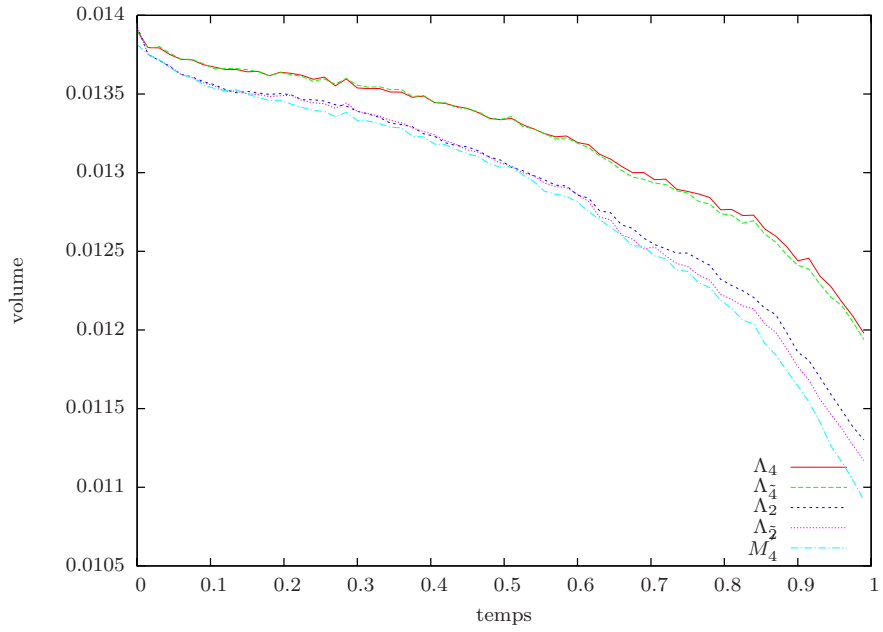


FIG. 4.29 – Masse du scalaire supérieur à 0.5. Les particules sont initialisées par une sphère de rayon 0.15 centrée en $(0.35, 0.35, 0.35)$ et advectées par le champ de vitesse (4.69) à l'ordre trois, pour un nombre CFL de 3. La grille est telle que $\Delta x = 0.01$. Les particules sont créées si $u > 10^{-4}|u|_\infty$.

Conclusion

Ce travail de thèse a abouti principalement à trois avancées dans le domaine des méthodes particulaires.

Des limiteurs ont été introduits dans les formules de remaillage. L'idée est simplement d'appliquer les outils de limitation utilisés dans les méthodes de différences finies sur les schémas de grille équivalents. On en déduit alors des formules de remaillage adéquates. La création d'oscillations numériques est ainsi évitée lorsque les quantités portées par les particules présentent de fortes variations. Ces méthodes s'appliquent aussi bien dans le cas d'équations de transport linéaires que non-linéaires.

La deuxième contribution apportée dans ce travail concerne les problèmes de perte de précision lorsque le nombre de CFL est grand. Des formules de remaillage appropriées sont construites. La consistance des schémas est démontrée en tout point de grille. Elle est d'ordre deux ou quatre, suivant les formules utilisées, sauf en certains points ou la précision est réduite à l'ordre un ou trois.

Enfin, les méthodes précédentes étant développées en dimension un, le dernier point étudié a consisté à les généraliser en dimension deux et trois. Le principe de splitting d'opérateurs a été adapté aux méthodes particulaires. En dimension n, l'advection des particules suivant un champ de vitesse bien choisi permet d'effectuer seulement n étapes de remaillage 1D par itération en temps. Les méthodes proposées sont d'ordre deux ou trois en temps. Des illustrations numériques dans des configurations variées sont données pour valider les méthodes proposées et évaluer leurs mérites et limitations.

Les analyses des méthodes et leurs illustrations montrent l'intérêt de choisir des pas de temps déterminés par le taux de déformation local de l'écoulement. Ceci suggère d'utiliser des pas de temps locaux et d'adapter les formules de remaillage en conséquence. Un autre développement sera d'étendre les fonctionnalités de la bibliothèque de calcul parallèle PPM [81] aux formules de remaillage par lignes et aux techniques de correction et de limitation introduites dans ce travail. Cette bibliothèque a été construite pour advecter des particules, calculer des champs en effectuant des transferts particules-grille puis remailler les particules. Les formules de remaillage implémentées dans cette bibliothèque sont jusqu'à présent basées sur des produits tensoriels. Enfin, l'analyse numérique des méthodes particules-grille dans le cas de systèmes de lois de conservation et les liens entre ces méthodes et les méthodes de transport-projection apparaissent comme un prolongement naturel de ce travail.

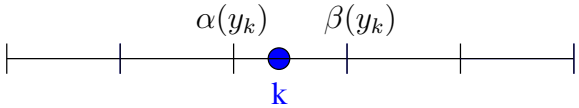
Annexe A

Formules de remaillage

A.1 Support du noyau de taille 2

Le noyau Λ_1 concerve les moments d'ordre 0 et 1 :

$$\Lambda_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$



Les formules Λ_1 donnent les poids de remaillage :

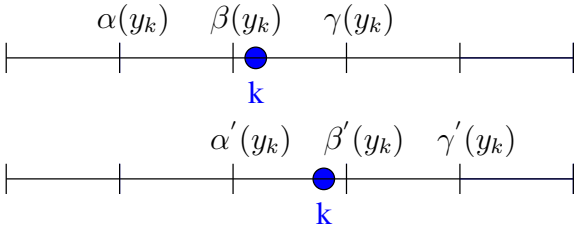
$$\begin{cases} \alpha(y) = 1 - y \\ \beta(y) = y \end{cases}$$

A.2 Support du noyau de taille 3

Le noyau $M_3 = \chi \star \chi \star \chi$, χ étant la fonction chapeau caractéristique dans $[-1/2, 1/2]$, est quadratique par morceaux. Il est de classe C^1 et ne conserve que les deux premiers moments (d'ordre 0 et 1).

$$M_3(x) = \begin{cases} 3/4 - x^2 & \text{si } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ (3/2 - |x|)^2/2 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1.5 \end{cases}$$

Les formules M_3 équivalentes sont



$$\text{si } y \leq 0.5 \begin{cases} \alpha(y) & = 1/8 - y/2 + y^2/2 \\ & = (y-1/2)^2/2 \\ \beta(y) & = 3/4 - y^2 \\ \gamma(y) & = 1/8 + y/2 + y^2/2 \\ & = (y+1/2)^2/2 \end{cases} \qquad \text{si } y > 0.5 \begin{cases} \alpha^{'}(y) & = \alpha(y-1) \\ \beta^{'}(y) & = \beta(y-1) \\ \gamma^{'}(y) & = \gamma(y-1) \end{cases}$$

Les formules $\bar{M}_3$ on été introduites dans le chapitre 2 en remplacant la viscosité artificielle 1/8 par σ ($\sigma = 1/6$ dans le cas de l'équation de Burgers) :

$$\text{si } y \leq 0.5 \begin{cases} \alpha(y) & = \sigma - y/2 + y^2/2 \\ \beta(y) & = 1 - 2\,\sigma - y^2 \\ \gamma(y) & = \sigma + y/2 + y^2/2 \end{cases} \qquad \text{si } y > 0.5 \begin{cases} \alpha^{'}(y) & = \alpha(y-1) \\ \beta^{'}(y) & = \beta(y-1) \\ \gamma^{'}(y) & = \gamma(y-1) \end{cases}$$

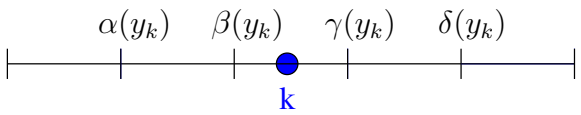
Le noyau Λ_2 conserve les moments jusqu'à l'ordre 2, il n'est pas continu.

$$\Lambda_2(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 0.5 \\ (1-|x|)(2-|x|)/2 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1.5 \end{cases}$$

Les poids de remaillage correspondants sont donnés par les formules suivantes :

$$\text{si } y \leq 0.5 \begin{cases} \alpha(y) & = y^2/2 - y/2 \\ & = y(y-1)/2 \\ \beta(y) & = 1 - y^2 \\ & = (1-y)(1+y) \\ \gamma(y) & = y/2 + y^2/2 \\ & = y(1+y)/2 \end{cases} \qquad \text{si } y > 0.5 \begin{cases} \alpha^{'}(y) & = \alpha(y-1) \\ \beta^{'}(y) & = \beta(y-1) \\ \gamma^{'}(y) & = \gamma(y-1) \end{cases}$$

A.3 Support du noyau de taille 4



Le noyau Λ_3 conserve les moments jusqu'à l'ordre 3 :

$$\Lambda_3(x) = \begin{cases} (1-x^2)(2-|x|)/2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ (1-|x|)(2-|x|)(3-|x|)/6 & \text{si } 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Les poids de remaillage correspondants sont :

$$\begin{cases} \alpha(y) = -y/3 + y^2/2 - y^3/6 = -y(y-1)(y-2)/6 \\ \beta(y) = 1 - y/2 - y^2 + y^3/2 = (y-2)(y^2-1)/2 \\ \gamma(y) = y + y^2/2 - y^3/2 = y(y+1)(2-y)/2 \\ \delta(y) = -y/6 + y^3/6 = y(y^2-1)/6 \end{cases}$$

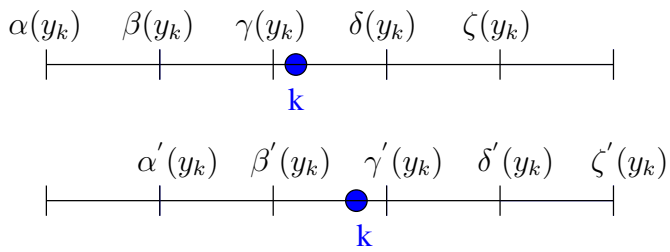
Le noyau $M_4^{'}$ est construit par combinaison linéaire de M_4 et de sa dérivé [69]. Il est de classe C^1 et conserve les moments jusqu'à l'ordre 2.

$$M_4^{'}(x) = \begin{cases} 1 - 5x^2/2 + 3|x|^3/2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ (2-|x|)^2(1-|x|)/2 & \text{si } 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Les poids de remaillage correspondants sont :

$$\begin{cases} \alpha(y) = -y/2 + y^2 - y^3/2 = -y(y-1)^2/2 \\ \beta(y) = 1 - 5y^2/2 + 3y^3/2 = (y-1)(3y^2-2y-2)/2 \\ \gamma(y) = y/2 + 2y^2 - 3y^3/2 = y(1+4y-3y^2)/2 \\ \delta(y) = -y^2/2 + y^3/2 = y^2(y-1)/2 \end{cases}$$

A.4 Support du noyau de taille 5



Le noyau $M_5 = \chi \star \chi \star \chi \star \chi \star \chi$, χ étant la fonction chapeau caractéristique dans $[-1/2, 1/2]$. Il est de classe C^3 et conserve les moments jusqu'à l'ordre 1.

$$M_5(x) = \begin{cases} 115/192 - 5x^2/8 + x^4/4 & \text{si } -0.5 \leq |x| \leq 0.5 \\ 55/96 + 5|x|/24 - 5x^2/4 + 5|x|^3/6 - x^4/6 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ (2|x|-5)^4/384 & \text{si } 1.5 < |x| \leq 2.5 \\ 0 & \text{si } |x| > 2.5 \end{cases}$$

Les poids correspondants sont :

$$\text{si } y \leq 0.5 \begin{cases} \alpha(y) = (2y-1)^4/384 \\ \beta(y) = 19/96 - 11y/24 + y^2/4 + y^3/6 - y^4/6 \\ \gamma(y) = 115/192 - 5y^2/8 + y^5/4 \\ \delta(y) = 19/96 + 11y/24 + y^2/4 - y^3/6 - y^4/6 \\ \zeta(y) = 1/384 + y/48 + y^2/16 + y^3/12 + y^4/24 \end{cases}$$

$$\text{si } y > 0.5 \begin{cases} \alpha^{'}(y) = (2y-3)^4/384 \\ \beta^{'}(y) = 55/96 + 5y/24 - 5y^2/4 + 5y^3/6 - y^4/6 \\ \gamma^{'}(y) = 43/192 + y/4 + 7y^2/8 - y^3 + y^4/4 \\ \delta^{'}(y) = -1/96 + y/8 - y^2/4 + y^3/2 - y^4/6 \\ \zeta^{'}(y) = 1/384 - y/48 + y^2/16 - y^3/12 + y^4/24 \end{cases}$$

Le noyau Λ_4 conserve les moments jusqu'à l'ordre 4 :

$$\Lambda_4(x) = \begin{cases} (1-x^2)(4-x^2)/4 & \text{si } -0.5 \leq |x| \leq 0.5 \\ (2-|x|)(3-|x|)(1-x^2)/6 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ (1-|x|)(2-|x|)(3-|x|)(4-|x|)/24 & \text{si } 1.5 < |x| \leq 2.5 \\ 0 & \text{si } |x| > 2.5 \end{cases}$$

Les formules correspondantes sont

$$\text{si } y \leq 0.5 \begin{cases} \alpha(y) &= (2y - y^2 - 2y^3 + y^4)/24 \\ &= (y-2)(y-1)y(y+1)/24 \\ \beta(y) &= (-4y + 4y^2 + y^3 - y^4)/6 \\ &= -(y-2)(y-1)y(y+2)/6 \\ \gamma(y) &= 1 + (-5y^2 + y^4)/4 \\ &= (y-2)(y-1)(y+1)(y+2)/4 \\ \delta(y) &= (4y + 4y^2 - y^3 - y^4)/6 \\ &= -(y-2)y(y+1)(y+2)/6 \\ \zeta(y) &= (-2y - y^2 + 2y^3 + y^4)/24 \\ &= (y-1)y(y+1)(y+2)/24 \end{cases} \quad \text{si } y > 0.5 \begin{cases} \alpha^{'}(y) &= \alpha(y-1) \\ \beta^{'}(y) &= \beta(y-1) \\ \gamma^{'}(y) &= \gamma(y-1) \\ \delta^{'}(y) &= \delta(y-1) \\ \zeta^{'}(y) &= \zeta(y-1) \end{cases}$$

Le noyau $M_5^{'}$ est construit par combinaison linéaire de M_5 et de ses dérivés [69]. Il est de classe C^2 et conserve les moments jusqu'à l'ordre 3.

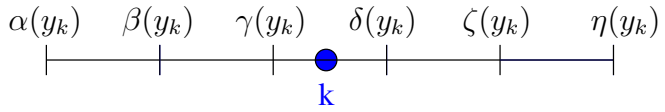
$$M_5^{'}(x) = \begin{cases} (345/8 - 75x^2 + 42x^4)/48 & \text{si } 0 \leq |x| \leq 0.5 \\ (165/4 + 20|x| - 150x^2 + 120|x|^3 - 28x^4)/48 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ (|x| - 5/2)^3(7|x| - 15/2)/48 & \text{si } 1.5 < |x| \leq 2.5 \\ 0 & \text{si } |x| > 2.5 \end{cases}$$

Les formules correspondantes sont :

$$\text{si } y \leq 0.5 \begin{cases} \alpha(y) = -13/768 + y/12 - 3y^2/32 - y^3/12 + 7y^4/48 \\ \beta(y) = 13/192 - 2y/3 + 7y^2/8 + y^3/6 - 7y^4/12 \\ \gamma(y) = 115/128 - 25y^2/16 + 7y^4/8 \\ \delta(y) = 13/192 + 2y/3 + 7y^2/8 - y^3/6 - 7y^4/12 \\ \zeta(y) = -13/768 - y/12 - 3y^2/32 + y^3/12 + 7y^4/48 \end{cases}$$

$$\text{si } y > 0.5 \begin{cases} \alpha^{'}(y) = 9/256 - 9y/16 + 33y^2/32 - 2y^3/3 + 7y^4/48 \\ \beta^{'}(y) = 55/64 + 5y/12 - 25y^2/8 + 5y^3/2 - 7y^4/12 \\ \gamma^{'}(y) = 27/128 - 3y/8 + 59y^2/16 - 7y^3/2 + 7y^4/8 \\ \delta^{'}(y) = -9/64 + 3y/4 - 17y^2/8 + 13y^3/6 - 7y^4/12 \\ \zeta^{'}(y) = 9/256 - 11y/48 + 17y^2/32 - y^3/2 + 7y^4/48 \end{cases}$$

A.5 Support du noyau de taille 6



On donne enfin le noyau $M_6^{'''}$, de classe C^1 et conservant les moments jusqu'à l'ordre 5.

$$M_6^{'''}(x) = \begin{cases} (1-|x|)(60|x|^4 - 87|x|^3 - 87|x|^2 + 88|x| + 88)/88 & \text{si } |x| \leq 1 \\ (|x|-1)(|x|-2)(60|x|^3 - 261|x|^2 + 257|x| + 68)/176 & \text{si } 1 < |x| \leq 2 \\ -3(|x|-2)(4|x|^2 - 17|x| + 12)(|x|-3)^2/176 & \text{si } 2 < |x| \leq 3 \\ 0 & \text{si } |x| > 3 \end{cases}$$

Dont les formules sont :

$$\begin{cases} \alpha(y) = 9/88\, y - 3/16\, y^2 + 27/176\, y^4 - 3/44\, y^5 \\ \beta(y) = -31/44\, y + 19/16\, y^2 - 1/44\, y^3 - 141/176\, y^4 + 15/44\, y^5 \\ \gamma(y) = 1 - 175/88\, y^2 + 147/88\, y^4 - 15/22\, y^5 \\ \delta(y) = 31/44\, y + 107/88\, y^2 + 3/22\, y^3 - 153/88\, y^4 + 15/22\, y^5 \\ \zeta(y) = -9/88\, y - 49/176\, y^2 - 2/11\, y^3 + 159/176\, y^4 - 15/44\, y^5 \\ \eta(y) = 9/176\, y^2 + 3/44\, y^3 - 3/16\, y^4 + 3/44\, y^5 \end{cases}$$

Annexe B

Limitation des formules Λ_4

De manière analogue à ce qui a été fait avec la limitation Λ_2, les formules Λ_4 peuvent être limitées par des formules de remaillage M_5, de même support que Λ_4, d'ordre un, et non oscillantes.

Supposons que $0 < \lambda_j = \Delta t\, a_j/\Delta x < 1/2$ pour tout j. La propriété de conservation s'écrit :

$$1 - \alpha_j - \beta_j - \delta_j - \zeta_j = \gamma_j. \tag{B.1}$$

Elle est vérifiée par construction des formules de remaillages Λ_4 et M_5. Le schéma numérique en x_j obtenu apres remaillage Λ_4 ou M_5 s'écrit donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j^{n+1} = u_j^n - \left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}\right) \\ F_{j+1/2} = -\alpha_{j+2}u_{j+2} - (\alpha_{j+1} + \beta_{j+1})u_{j+1} + (\delta_j + \zeta_j)u_j + \zeta_{j-1}u_{j-1}. \end{array} \right. \tag{B.2}$$

En choisissant les poids des formules de remaillage Λ_4 limités ainsi :

$$\begin{aligned}
\alpha_j^{lim} =& \alpha_j^{M5} + \phi_{j-3/2}\left(\alpha_j^{l4} - \alpha_j^{M5}\right) \\
\beta_j^{lim} =& \beta_j^{M5} - \phi_{j-3/2}\left(\alpha_j^{l4} - \alpha_j^{M5}\right) + \phi_{j-1/2}\left(\alpha_j^{l4} - \alpha_j^{M5} + \beta_j^{l4} - \beta_j^{M5}\right) \\
\gamma_j^{lim} =& \gamma_j^{M5} - \phi_{j-1/2}\left(\alpha_j^{l4} - \alpha_j^{M5} + \beta_j^{l4} - \beta_j^{M5}\right) - \phi_{j+1/2}\left(\delta_j^{l4} - \delta_j^{M5} + \zeta_j^{l4} - \zeta_j^{M5}\right) \\
\delta_j^{lim} =& \delta_j^{M5} + \phi_{j+1/2}\left(\delta_j^{l4} - \delta_j^{M5} + \zeta_j^{l4} - \zeta_j^{M5}\right) - \phi_{j+3/2}\left(\zeta_j^{l4} - \zeta_j^{M5}\right) \\
\zeta_j^{lim} =& \zeta_j^{M5} + \phi_{j+3/2}\left(\zeta_j^{l4} - \zeta_j^{M5}\right),
\end{aligned} \tag{B.3}$$

le schéma obtenu après remaillage est alors

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} =& \zeta_{j-2}^{M5} + \phi_{j-1/2}\left(\zeta_{j-2}^{l4} - \zeta_{j-2}^{M5}\right) u_{j-2}^n \\
&+ ... \\
&+ \alpha_{j+2}^{M5} + \phi_{j+1/2}\left(\alpha_{j+2}^{l4} - \alpha_{j+2}^{M5}\right) u_{j+2}^n \\
\\
=& \zeta_{j-2}^{M5} u_{j-2}^n + \delta_{j-1}^{M5} u_{j-1}^n + \gamma_j^{M5} u_j + \beta_{j+1}^{M5} u_{j+1}^n + \alpha_{j+2}^{M5} u_{j+2}^n \\
&- \phi_{j+1/2}\left\{\left(\zeta_{j-1}^{l4} - \zeta_{j-1}^{M5}\right) u_{j-1}^n + \left(\delta_j^{l4} - \delta_j^{M5} + \zeta_j^{l4} - \zeta_j^{M5}\right) u_j^n \right. \\
&\left. - \left(\alpha_{j+1}^{l4} - \alpha_{j+1}^{M5} + \beta_{j+1}^{l4} - \beta_{j+1}^{M5}\right) u_{j+1}^n - \left(\alpha_{j+2}^{l4} - \alpha_{j+2}^{M5}\right) u_{j+2}^n\right\} \\
&+ \phi_{j-1/2}\left\{\left(\zeta_{j-2}^{l4} - \zeta_{j-2}^{M5}\right) u_{j-2}^n + \left(\delta_{j-1}^{l4} - \delta_{j-1}^{M5} + \zeta_{j-1}^{l4} - \zeta_{j-1}^{M5}\right) u_{j-1}^n \right. \\
&\left. - \left(\alpha_j^{l4} - \alpha_j^{M5} + \beta_j^{l4} - \beta_j^{M5}\right) u_j^n - \left(\alpha_{j+1}^{l4} - \alpha_{j+1}^{M5}\right) u_{j+1}^n\right\} \\
\\
=& u_j^n - \left(F_{j+1/2}^{M5} - F_{j-1/2}^{M5}\right) \\
&- \phi_{j+1/2}\left(F_{j+1/2}^{l4} - F_{j+1/2}^{M5}\right) \\
&+ \phi_{j-1/2}\left(F_{j-1/2}^{l4} - F_{j-1/2}^{M5}\right) \\
&.
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

Le cas $-1/2 < \lambda_j < 0$ se traite simplement en se rapellant que dans ce cas les poids de remaillages Λ_4 et M_5 s'expriment en fonction de ceux du cas $0 < \lambda_j < 1/2$. La répartition des poids de remaillage est explicitée dans la figure ci-dessous, où $\alpha^{'}(y_j) = \alpha(y_j - 1)$, $\beta^{'}(y_j) = \beta(y_j - 1)$, ..., $\zeta^{'}(y_j) = \zeta(y_j - 1)$. Le schéma au point x_j est indépendant du signe du champ de vitesse.

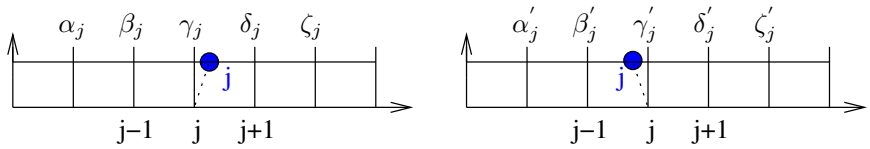


FIG. B.1 – Répartition des poids de remaillage Λ_4, $M5$ ou Λ_4 limité lorsque $-1/2 < \lambda_j < 1/2$ pour tout j. Le cas d'un champ de vitesse positif est représenté à gauche, celui négatif à droite.

Annexe C

Cas test 1D : calcul de la solution exacte

Un cas test utilisé dans les chapitres 2 et 3 consiste à advecter les particules avec le champ de vitesse suivant :

$$a = a(x) = \sin(2\pi x) + 2. \tag{C.1}$$

La méthode particulaire (advection/remaillage) consiste alors à résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(\sin(2\pi x) + 2\right)\right] = 0, \\ u(t=0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{C.2}$$

On se propose de démontrer dans les grandes lignes l'expression de la solution exacte de (C.2). On pose,

$$w(t,x) = u(t,x)\left(\sin(2\pi x) + 2\right). \tag{C.3}$$

Par changement de variable, (C.2) devient,

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \left(\sin(2\pi x) + 2\right)\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ w(0,x) = u(0,x)\left(\sin(2\pi x) + 2\right). \end{cases} \tag{C.4}$$

La solution $w(t,x)$ est constante sur les caractéristiques :

$$\begin{aligned} w(t,x) &= w(0,x_0) \\ &= u(0,x_0)\left(\sin(2\pi x) + 2\right), \end{aligned} \tag{C.5}$$

d'où

$$u(t,x) = u(0,x_0)\frac{(\sin(2\pi x_0) + 2)}{(\sin(2\pi x) + 2)}. \tag{C.6}$$

L'équation des caractéristiques :

$$\frac{dx}{dt} = sin(2\pi x) + 2, \tag{C.7}$$

peut être intégrée,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{2 + sin(2\pi\xi)} = t, \tag{C.8}$$

d'où,

$$\begin{aligned}\tan(\pi x_0) &= -\frac{\sqrt{3}}{6}\left\{\sqrt{3}+3\tan\left[-\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan(\pi x)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{3}\pi t\right]\right\} \\ &= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}\tan(\sqrt{3}\pi t)-1-2\tan(\pi x)}{\sqrt{3}+\tan(\sqrt{3}\pi t)\,(1+2\tan(\pi x))}\right].\end{aligned} \tag{C.9}$$

Cette dernière expression de $\tan(\pi x_0)$ peut être injectée dans la solution $u(t,x)$ (C.6) en utilisant

$$\sin(2\pi x_0) = \frac{2\tan(\pi x_0)}{1+\tan^2(\pi x_0)}. \tag{C.10}$$

Remarquons que $\tan(\pi x_0) = \tan(\pi x)$ quand $t = n/\sqrt{3}$ avec $n = 0, 1, \ldots$. La solution est donc périodique de période $T = 1/\sqrt{3}$. Elle est représentée à différents instants dans la figure C.1.

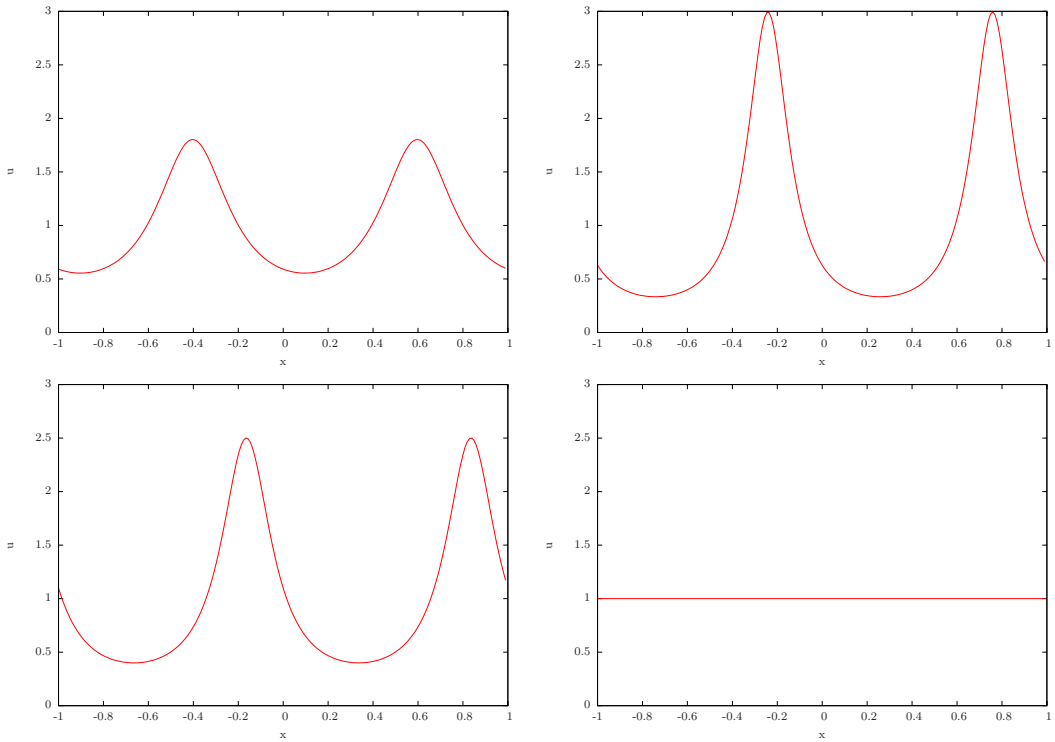


FIG. C.1 – Représentation de la solution exacte pour un champ de vitesse sinusoïdal $2 + sin(2\pi x)$ et une solution initiale constante $u_0 = 1$. $\Delta t = 0.4\,\Delta x/3 = 0.4\,10^{-2}/3$. De gauche à droite et de haut en bas : $T = 0.1$,$T = 0.3$,$T = 0.4$,$T = 1/\sqrt{3}$

Annexe D

Preuve de consistance des formules $M_{\tilde{5}}$

On développe ici la preuve de la proposition 11 du chapitre 3. Il est possible d'obtenir trois schémas différents lorsqu'on remaille les particules par des formules $M_{\tilde{5}}$. Si x_j se trouve à l'intérieur d'un bloc, ou au passage de blocs de même indices N, le schéma est alors

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = \quad & \{\zeta(y_{i-2-N})\, u_{i-2-N} + \delta(y_{i-1-N})\, u_{i-1-N} + \gamma(y_{i-N})\, u_{i-N} + \beta(y_{i+1-N})\, u_{i+1-N} \\ & +\alpha(y_{i+2-N})\, u_{i+2-N}\} \,|_{y_k=\lambda_k-N} \end{aligned} \tag{D.1}$$

avec,

$$\begin{cases} \alpha(y) = (2y-1)^4/384 \\ \beta(y) = 19/96 - 11y/24 + y^2/4 + y^3/6 - y^4/6 \\ \gamma(y) = 115/192 - 5y^2/8 + y^5/4 \\ \delta(y) = 19/96 + 11y/24 + y^2/4 - y^3/6 - y^4/6 \\ \zeta(y) = 1/384 + y/48 + y^2/16 + y^3/12 + y^4/24. \end{cases} \tag{D.2}$$

Il se réécrit donc,

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \quad & \Big\{ \tfrac{\lambda_{j-2-N}^4}{24} + \tfrac{\lambda_{j-2-N}^3}{12}\,(1-2\,N) + \tfrac{\lambda_{j-2-N}^2}{16}\,(2\,N-1)^2 \\ & -\tfrac{\lambda_{j-2-N}}{48}\,(2\,N-1)^3 + \tfrac{1}{384} - \tfrac{N}{48} + \tfrac{N^2}{16} - \tfrac{N^3}{12} + \tfrac{N^4}{24} \Big\}\, u_{j-2-N} \\ & + \Big\{ -\tfrac{\lambda_{j-1-N}^4}{6} + \tfrac{\lambda_{j-1-N}^3}{6}\,(4\,N-1) + \tfrac{\lambda_{j-1-N}^2}{4}\,\left(1+2\,N-4\,N^2\right) \\ & +\lambda_{j-1-N}\left(\tfrac{11}{24} - \tfrac{N^2}{2} - \tfrac{N}{2} + \tfrac{2\,N^3}{3}\right) + \tfrac{19}{96} - \tfrac{11}{24}\,N + \tfrac{1}{4}\,N^2 + \tfrac{1}{6}\,N^3 - \tfrac{1}{6}\,N^4 \Big\}\, u_{j-1-N} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{\frac{\lambda_{j-N}^4}{4}-\lambda_{j-N}^3\,N+\frac{\lambda_{j-N}^2}{8}\left(-5+12\,N^2\right)-\frac{\lambda_{j-N}}{4}\,N\left(-5+4\,N^2\right)\right.\\
&\left.+\frac{115}{192}-\frac{5}{8}\,N^2+\frac{1}{4}\,N^4\right\}u_{j-N}\\
&+\left\{-\frac{\lambda_{j+1-N}^4}{6}+\frac{\lambda_{j+1-N}^3}{6}\,(1+4\,N)+\frac{\lambda_{j+1-N}^2}{4}\left(1-2\,N-4\,N^2\right)\right.\\
&\left.+\lambda_{j+1-N}\left(-\frac{11}{24}-\frac{N}{2}+\frac{N^2}{2}+\frac{2}{3}\,N^3\right)+\frac{19}{96}+\frac{11}{24}\,N+\frac{1}{4}\,N^2-\frac{1}{6}\,N^3-\frac{1}{6}\,N^4\right\}u_{j+1-N}\\
&+\left\{\frac{\lambda_{j+2-N}^4}{24}-\frac{\lambda_{j+2-N}^3}{12}\,(1+2\,N)+\frac{\lambda_{j+2-N}^2}{16}\,(1+2\,N)^2\right.\\
&\left.-\frac{\lambda_{j+2-N}}{48}\,(1+2\,N)^3+\frac{1}{384}+\frac{N}{48}+\frac{N^2}{16}+\frac{N^3}{12}+\frac{N^4}{24}\right\}u_{j+2-N}
\end{aligned}
\tag{D.3}
$$

On effectue les développements de Taylor de u, au, a^2u, a^3u et a^4u en j puis on trouve après simplification que u_j^{n+1} vérifie :

$$
u_j^{n+1}=u_j-\Delta t\,\partial_x\left(a_j u_j\right)+O\left(\Delta x^2+\Delta t\,\Delta x\right). \tag{D.4}
$$

Au passage de bloc d'indices croissants (N à $N+1$), le schéma est celui ci :

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1}= &\ \{e(y)-e(y-1)\}\,|_{y=\lambda_{j-2-N}-N}\,u_{j-2-N}\\
+&\ \{d(y)-d(y-1)+e(y)-e(y-1)\}\,|_{y=\lambda_{j-1-N}-N}\,u_{j-1-N}\\
+&\ \{a(y)-a(y+1)+b(y)-b(y+1)\}\,|_{y=\lambda_{j-N}-N-1}\,u_{j-N}\\
+&\ \{a(y)-a(y+1)\}\,|_{y=\lambda_{j+1-N}-N-1}\,u_{j+1-N}\\
=&\ \left\{\frac{\lambda_{j-2-N}^3}{6}-\lambda_{j-2-N}^2\,\frac{N}{2}+\frac{\lambda_{j-2-N}}{24}\left(1+12\,N^2\right)+\frac{-N}{24}-\frac{N^3}{6}\right\}u_{j-2-N}\\
&+\left\{-\frac{\lambda_{j-1-N}^3}{2}+\frac{\lambda_{j-1-N}^2}{2}\,(1+3\,N)+\lambda_{j-1-N}\left(\frac{3}{8}-N-\frac{3}{2}N^2\right)\right.\\
&\left.\frac{5}{24}-\frac{3}{8}\,N+\frac{1}{2}\,N^2+\frac{1}{2}\,N^3\right\}\,u_{j-1-N}\\
&+\left\{\frac{\lambda_{j-N}^3}{2}-\frac{\lambda_{j-N}^2}{2}\,(2+3\,N)+\frac{\lambda_{j-N}}{8}\left(1+16\,N+12\,N^2\right)\right.\\
&\left.+\frac{7}{12}-\frac{N}{8}-N^2-\frac{N^3}{2}\right\}\,u_{j-N}\\
&+\left\{-\frac{\lambda_{j+1-N}^3}{6}+\frac{\lambda_{j+1-N}^2}{2}\,(1+N)+\frac{\lambda_{j+1-N}}{24}\left(-13-24\,N-12\,N^2\right)\right.\\
&\left.+\frac{5}{24}+\frac{13}{24}\,N+\frac{1}{2}\,N^2+\frac{1}{6}\,N^3\right\}\,u_{j+1-N}.
\end{aligned}
\tag{D.5}
$$

d'où en appliquant des développements de Taylor de u, au, a^2u et a^3u en j, u_j^{n+1} vérifie :

$$
u_j^{n+1}=u_j-\Delta t\,\partial_x\left(a_j u_j\right)+O\left(\Delta x^2+\Delta t\,\Delta x\right). \tag{D.6}
$$

Enfin, au passage de bloc d'indices décroissants (N à $N-1$), le schéma est celui la :

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} = \;& e(y=\lambda_{j-2-N}-N)\, u_{j-2-N} + \{d(y)+e(y)\}\,|_{y=\lambda_{j-1-N}-N}\, u_{j-1-N} \\
& + \{c(y)+d(y)+e(y)-e(y+1)\}\,|_{y=\lambda_{j-N}-N}\, u_{j-N} \\
& + \{a(y)+b(y)+c(y)-a(y-1)\}\,|_{y=\lambda_{j+1-N}-N+1}\, u_{j+1-N} \\
& + \{a(y)+b(y)\}\,|_{y=\lambda_{j+2-N}-N+1}\, u_{j+2-N} + a(y=\lambda_{j+3-N}-N+1)\, u_{j+3-N} \\
= \;& \Big\{ \tfrac{\lambda_{j-2-N}^4}{24} + \tfrac{\lambda_{j-2-N}^3}{12}(1-2N) + \tfrac{\lambda_{j-2-N}^2}{16}(-1+2N)^2 \\
& - \tfrac{\lambda_{j-2-N}}{48}(-1+2N)^3 + \tfrac{1}{384} - \tfrac{N}{48} + \tfrac{N^2}{16} - \tfrac{N^3}{12} + \tfrac{N^4}{24} \Big\}\, u_{j-2-N} \\
& + \Big\{ -\tfrac{\lambda_{j-1-N}^4}{8} + \tfrac{\lambda_{j-1-N}^3}{12}(-1+6N) - \tfrac{\lambda_{j-1-N}^2}{16}(1+2N)(6N-5) \\
& + \lambda_{j-1-N}\Big(\tfrac{23}{48} - \tfrac{5}{8}N - \tfrac{N^2}{4} + \tfrac{N^3}{2}\Big) \\
& + \tfrac{77}{384} - \tfrac{23}{48}N + \tfrac{5}{16}N^2 + \tfrac{1}{12}N^3 - \tfrac{1}{8}N^4 \Big\}\, u_{j-1-N} \\
& + \Big\{ \tfrac{\lambda_{j-N}^4}{12} - \tfrac{\lambda_{j-N}^3}{3}(1+N) + \tfrac{\lambda_{j-N}^2}{8}\big(-7+8N+4N^2\big) \\
& + \tfrac{\lambda_{j-N}}{12}\big(-1+21N-12N^2-4N^3\big) \\
& + \tfrac{113}{192} + \tfrac{N}{12} - \tfrac{7}{8}N^2 + \tfrac{N^3}{3} + \tfrac{N^4}{12} \Big\}\, u_{j-N} \\
& + \Big\{ \tfrac{\lambda_{j+1-N}^4}{12} + \tfrac{\lambda_{j+1-N}^3}{3}(2-N) + \tfrac{\lambda_{j+1-N}^2}{8}\big(5-16N+4N^2\big) \\
& + \lambda_{j+1-N}\big(-\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{4}N + 2N^2 - \tfrac{1}{3}N^3\big) \\
& + \tfrac{41}{192} + \tfrac{1}{3}N + \tfrac{5}{8}N^2 - \tfrac{2}{3}N^3 + \tfrac{1}{12}N^4 \Big\}\, u_{j+1-N} \\
& + \Big\{ -\tfrac{\lambda_{j+2-N}^4}{8} + \tfrac{\lambda_{j+2-N}^3}{12}(-5+6N) - \tfrac{\lambda_{j+2-N}^2}{16}(6N-1)(2N-3) \\
& + \lambda_{j+2-N}\big(-\tfrac{5}{48} + \tfrac{3}{8}N - \tfrac{5}{4}N^2 + \tfrac{1}{2}N^3\big) \\
& - \tfrac{1}{128} + \tfrac{5}{48}N - \tfrac{3}{16}N^2 + \tfrac{5}{12}N^3 - \tfrac{1}{8}N^4 \Big\}\, u_{j+2-N} \\
& + \Big\{ \tfrac{\lambda_{j+3-N}^4}{24} + \tfrac{\lambda_{j+3-N}^3}{12}(1-2N) + \tfrac{\lambda_{j+3-N}^2}{16}(-1+2N)^2 \\
& - \tfrac{\lambda_{j+3-N}}{48}(2N-1)^3 + \tfrac{1}{384} - \tfrac{1}{48}N + \tfrac{1}{16}N^2 - \tfrac{1}{12}N^3 + \tfrac{1}{24}N^4 \Big\}\, u_{j+3-N}
\end{aligned}
\tag{D.7}
$$

et en procédant comme précédement, u_j^{n+1} vérifie :

$$
u_j^{n+1} = u_j - \Delta t\, \partial_x (a_j u_j) + O\left(\Delta x^2 + \Delta t\, \Delta x\right). \tag{D.8}
$$

Annexe E

Remaillage par splitting

E.1 Splitting d'opérateur d'ordre 4

Un splitting d'opérateur d'ordre quatre est donné à titre d'exemple de splitting d'ordre élevé. Huit résolutions de problèmes de Cauchy sont necessaires pour effectuer une seule itération en temps. Cette méthode est construite par extrapolation de Richardson du splitting de Strang. Elle peut être mise en oeuvre en méthode particulaire sur le même principe que la méthode de splitting de Strang étudiée dans le chapitre 4, et nécessite d'effectuer huit étapes de remaillage à chaque itération en temps.

L'équation que l'on cherche à résoudre est

$$\partial_t u = -\partial_1 (a_1 u) - \partial_2 (a_2 u) \, , \, t \in [t^n, t^{n+1}] \tag{E.1}$$

que l'on écrit

$$\partial_t u = (A + B) \, u. \tag{E.2}$$

La méthode consiste alors à calculer les problèmes de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \, u^{(1)} & = A \, u^{(1)} \\ u^{(1)}(t^n) & = u(t^n) \end{array} \right. \quad , t \in [t^n, t^{n+1/4}]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \, u^{(2)} & = B \, u^{(2)} \\ u^{(2)}(t^n) & = u^{(1)}(t^{n+1/4}) \end{array} \right. \quad , t \in [t^n, t^{n+1/2}]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \, u^{(3)} & = A \, u^{(3)} \\ u^{(3)}(t^{n+1/4}) & = u^{(2)}(t^{n+1/2}) \end{array} \right. \quad , t \in [t^{n+1/4}, t^{n+3/4}].$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \, u^{(4)} & = B \, u^{(4)} \\ u^{(4)}(t^{n+1/2}) & = u^{(3)}(t^{n+3/4}) \end{array} \right. \quad , t \in [t^{n+1/2}, t^{n+1}]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \, u^{(5)} & = A \, u^{(5)} \\ u^{(5)}(t^{n+3/4}) & = u^{(4)}(t^{n+1}) \end{array} \right. \quad , t \in [t^{n+3/4}, t^{n+1}].$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \, u^{(6)} & = A \, u^{(6)} \\ u^{(6)}(t^n) & = u(t^n) \end{array} \right. \quad , t \in [t^n, t^{n+1/2}]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \, u^{(7)} & = B \, u^{(7)} \\ u^{(7)}(t^n) & = u^{(6)}(t^{n+1/2}) \end{array} \right. \quad , t \in [t^n, t^{n+1}]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \, u^{(8)} & = A \, u^{(8)} \\ u^{(8)}(t^{n+1/2}) & = u^{(7)}(t^{n+1}) \end{array} \right. \quad , t \in [t^{n+1/2}, t^{n+1}].$$

La solution après une itération en temps est alors

$$u(t^{n+1}) = \frac{4}{3}u^{(5)}(t^{n+1}) - \frac{1}{3}u^{(8)}(t^{n+1}) \tag{E.3}$$

E.2 Principales méthodes de remaillage

Les principales méthodes de remaillage en dimension ≥ 2 sont résumés ci-dessous. L'utilisation classique du produit tensoriel, ainsi que les différentes méthodes de splitting sont exposées en 2D, 3D et pour différentes précisions. La dépendance en temps du champ de vitesse a été négligée dans les démonstrations du chapitre 4, elle est précisée dans les algorithmes qui suivent.

On utilise les notations suivantes en dimension deux :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_1, 0), \quad a_1 = a_1(t, x_1, x_2), \\ \mathbf{a}_2 &= (0, a_2), \quad a_2 = a_2(t, x_1, x_2), \end{aligned} \tag{E.4}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_1, 0, 0), \quad a_1 = a_1(t, x_1, x_2, x_3), \\ \mathbf{a}_2 &= (0, a_2, 0), \quad a_2 = a_2(t, x_1, x_2, x_3), \\ \mathbf{a}_3 &= (0, 0, a_3), \quad a_3 = a_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \tag{E.5}$$

en dimension trois. Lorsque la vitesse est calculée en $\widetilde{x}$ ou $\widetilde{\widetilde{x}}$ au lieu de x, un tilde ou double tilde est ajouté à la vitesse a. Ainsi, par exemple $\widetilde{\mathbf{a}}_1 = (\widetilde{a}_1, 0)$ avec $\widetilde{a}_1 = a_1(t, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$. On désigne par $s = s(x_1, x_2)$ en 2D ou $s = s(x_1, x_2, x_3)$ en 3D le terme source. Enfin l'indice i est représenté pour indiquer les points de grille et l'indice p pour les particules.

E.2.1 Remaillage par produit tensoriel

En dimension deux

– Advection Runge-Kutta 2 des particules

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}_1 = x_1 + a_1\,\Delta t/2 \\ &\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\,\Delta t/2 \\ &x_1 \leftarrow x_1 + \Delta t\, a_1(t + \Delta t/2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \\ &x_2 \leftarrow x_2 + \Delta t\, a_2(t + \Delta t/2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \\ &u \leftarrow u + \Delta t\, s(t + \Delta t/2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \end{aligned} \tag{E.6}$$

– Remaillage des particules par produit tensoriel $(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)$

Remarque 15. *L'algorithme d'ordre trois consiste à advecter les particules par la méthode de Runge-Kutta 3 suivante :*

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 + a_1\,\Delta t/2\\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\,\Delta t/2\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_1 = x_1 - \Delta t\,a_1 + 2\,\Delta t\,a_1(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_2 = x_2 - \Delta t\,a_2 + 2\,\Delta t\,a_2(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)\\
&x_1 \leftarrow x_1 + \Delta t\,\Big(a_1/6 + 2/3\,a_1(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) + a_1(t+\Delta t,\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2)/6\Big)\\
&x_2 \leftarrow x_2 + \Delta t\,\Big(a_2/6 + 2/3\,a_2(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) + a_2(t+\Delta t,\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2)/6\Big)\\
&u \leftarrow u + \Delta t\,\Big(s/6 + 2/3\,s(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) + s(t+\Delta t,\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2)/6\Big)
\end{aligned}
\tag{E.7}
$$

En dimension trois

– Advection Runge-Kutta 2 des particules

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 + a_1\,\Delta t/2\\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\,\Delta t/2\\
&\widetilde{x}_3 = x_3 + a_3\,\Delta t/2\\
&x_1 \leftarrow x_1 + \Delta t\,a_1(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)\\
&x_2 \leftarrow x_2 + \Delta t\,a_2(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)\\
&x_3 \leftarrow x_3 + \Delta t\,a_3(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)\\
&u \leftarrow u + \Delta t\,s(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)
\end{aligned}
\tag{E.8}
$$

– ou advection Runge-Kutta 3 des particules

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 + a_1\,\Delta t/2\\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\,\Delta t/2\\
&\widetilde{x}_3 = x_3 + a_3\,\Delta t/2\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_1 = x_1 - \Delta t\,a_1 + 2\,\Delta t\,a_1(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_2 = x_2 - \Delta t\,a_2 + 2\,\Delta t\,a_2(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_3 = x_3 - \Delta t\,a_3 + 2\,\Delta t\,a_3(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)\\
&x_1 \leftarrow x_1 + \Delta t\,\Big(a_1/6 + 2/3\,a_1(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3) + a_1(t+\Delta t,\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2,\widetilde{\widetilde{x}}_3)/6\Big)\\
&x_2 \leftarrow x_2 + \Delta t\,\Big(a_2/6 + 2/3\,a_2(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3) + a_2(t+\Delta t,\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2,\widetilde{\widetilde{x}}_3)/6\Big)\\
&x_3 \leftarrow x_3 + \Delta t\,\Big(a_3/6 + 2/3\,a_3(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3) + a_3(t+\Delta t,\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2,\widetilde{\widetilde{x}}_3)/6\Big)\\
&u \leftarrow u + \Delta t\,\Big(s/6 + 2/3\,s(t+\Delta t/2,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3) + s(t+\Delta t,\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2,\widetilde{\widetilde{x}}_3)/6\Big)
\end{aligned}
\tag{E.9}
$$

– Remaillage des particules par produit tensoriel $(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)$

E.2.2 Remaillage par splitting de Strang

En dimension deux

– **Evaluation du terme source**

$$
u_i \leftarrow u_i + dt\,s(t, x_1, x_2)/2 \tag{E.10}
$$

– Advection/remaillage suivant la première direction pendant $dt/2$

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}_1 = x_1 + a_1\, dt/4 \\ &x_1 \leftarrow x_1 + a_1(t + dt/2, \widetilde{x}_1, x_2)\, dt/2 \\ &(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p) \end{aligned} \tag{E.11}$$

– Advection/remaillage suivant la seconde direction pendant dt

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\, dt/2 \\ &x_2 \leftarrow x_2 + a_2(t + dt/2, x_1, \widetilde{x}_2)\, dt \\ &(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p) \end{aligned} \tag{E.12}$$

– Advection/remaillage suivant la première direction pendant $dt/2$

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}_1 = x_1 + a_1\, dt/4 \\ &x_1 \leftarrow x_1 + a_1(t + dt/2, \widetilde{x}_1, x_2)\, dt/2 \\ &(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p) \end{aligned} \tag{E.13}$$

– **Evaluation du terme source**

$$u_i \leftarrow u_i + dt\, s(t + dt, x_1, x_2)/2 \tag{E.14}$$

En dimension trois

– **Evaluation du terme source**

$$u_i \leftarrow u_i + dt\, s(x_1, x_2)/2 \tag{E.15}$$

– Advection/remaillage suivant la première direction pendant $dt/2$

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}_1 = x_1 + a_1\, dt/4 \\ &x_1 \leftarrow x_1 + a_1(\widetilde{x}_1, x_2, x_3)\, dt/2 \\ &(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p) \end{aligned} \tag{E.16}$$

– Advection/remaillage suivant la deuxième direction pendant $dt/2$

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\, dt/4 \\ &x_2 \leftarrow x_2 + a_2(x_1, \widetilde{x}_2, x_3)\, dt/2 \\ &(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p) \end{aligned} \tag{E.17}$$

– Advection/remaillage suivant la troisième direction pendant dt

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}_3 = x_3 + a_3\, dt/2 \\ &x_3 \leftarrow x_3 + a_3(x_1, x_2, \widetilde{x}_3)\, dt \\ &(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p) \end{aligned} \tag{E.18}$$

– Advection/remaillage suivant la deuxième direction pendant $dt/2$

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\, dt/4 \\ &x_2 \leftarrow x_2 + a_2(x_1, \widetilde{x}_2, x_3)\, dt/2 \\ &(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p) \end{aligned} \tag{E.19}$$

– Advection/remaillage suivant la première direction pendant $dt/2$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 + a_1\, dt/4 \\
&x_1 \leftarrow x_1 + a_1(\widetilde{x}_1, x_2, x_3)\, dt/2 \\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.20}$$

– **Evaluation du terme source**

$$u_i \leftarrow u_i + dt\, s(x_1, x_2)/2 \tag{E.21}$$

E.2.3 Remaillage par splitting particulaire

En dimension deux, à l'ordre deux

– **Evaluation du terme source**

$$u_i \leftarrow u_i + dt\, s(t, x_1, x_2)/2 \tag{E.22}$$

– Advection/remaillage suivant la première direction

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 + a_1\, dt/2 \\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\, dt/2 \\
&x_1 \leftarrow x_1 + a_1(t + dt/2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\, dt \\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.23}$$

– Advection/remaillage suivant la seconde direction

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 - a_1\, dt/2 \\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\, dt/2 \\
&x_2 \leftarrow x_2 + a_2(t + dt/2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\, dt \\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.24}$$

– **Evaluation du terme source**

$$u_i \leftarrow u_i + dt\, s(t + dt, x_1, x_2)/2 \tag{E.25}$$

En dimension deux, à l'ordre trois

– Advection/remaillage suivant la première direction

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 + 2\, a_1\, dt/3 \\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + 2\, a_2\, dt/3 \\
&\widetilde{\widetilde{x}}_1 = x_1 + dt\ (-a_1/4 + a_1(t + 2/3\, dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)/4) \\
&\widetilde{\widetilde{x}}_2 = x_2 + dt\ (-a_2 + a_2(t + 2/3\, dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)) \\
&x_1 \leftarrow x_1 + dt\ \Big(-a_1 + 3/4\, a_1(t + 2/3\, dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) + a_1(t, \widetilde{\widetilde{x}}_1, x_2) + a_1(t, x_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2)/4\Big) \\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.26}$$

– Advection/remaillage suivant la seconde direction

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1^{(1)} = x_1 - 2\,a_1\,dt/3\\
&\widetilde{x}_1^{(2)} = x_1 - a_1\,dt/6\\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\,dt/3\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_1 = x_1 + dt\,\Big(a_1 - a_1(t + 1/3\,dt, \widetilde{x}_1^{(2)}, \widetilde{x}_2)\Big)\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_2 = x_2 + dt\,\Big(-a_2 + 2\,a_2(t + 1/3\,dt, \widetilde{x}_1^{(1)}, \widetilde{x}_2)\Big)\\
&x_2 \leftarrow x_2 + dt\,\Big(-a_2 + 3/4\,a_2(t + 1/3\,dt, \widetilde{x}_1^{(1)}, \widetilde{x}_2) + a_2(t, \widetilde{\widetilde{x}}_1, x_2) + a_2(t + dt, x_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2)/4\Big)\\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.27}$$

En dimension trois, à l'ordre deux

– **Evaluation du terme source**

$$u_i \leftarrow u_i + dt\,s(t, x_1, x_2, x_3)/2 \tag{E.28}$$

– Advection/remaillage suivant la première direction

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 + a_1\,dt/2\\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\,dt/2\\
&\widetilde{x}_3 = x_3 + a_3\,dt/2\\
&x_1 \leftarrow x_1 + a_1(t + dt/2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)\,dt\\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.29}$$

– Advection/remaillage suivant la seconde direction

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 - a_1\,dt/2\\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + a_2\,dt/2\\
&\widetilde{x}_3 = x_3 + a_3\,dt/2\\
&x_2 \leftarrow x_2 + a_2(t + dt/2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)\,dt\\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.30}$$

– Advection/remaillage suivant la troisième direction

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 - a_1\,dt/2\\
&\widetilde{x}_2 = x_2 - a_2\,dt/2\\
&\widetilde{x}_3 = x_3 + a_3\,dt/2\\
&x_3 \leftarrow x_3 + a_3(t + dt/2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)\,dt\\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.31}$$

– **Evaluation du terme source**

$$u_i \leftarrow u_i + dt\,s(t + dt, x_1, x_2, x_3)/2 \tag{E.32}$$

En dimension trois, à l'ordre trois

– Advection/remaillage suivant la première direction

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 + 2\,a_1\,dt/3\\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + 2\,a_2\,dt/3\\
&\widetilde{x}_3 = x_3 + 2\,a_3\,dt/3\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_1 = x_1 + dt\ (-a_1 + a_1(t + 2/3\,dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3))\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_2 = x_2 + dt\ (-a_2 + a_2(t + 2/3\,dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3))\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_3 = x_3 + dt\ (-a_3 + a_3(t + 2/3\,dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3))\\
&x_1 \leftarrow x_1 + dt\ (-a_1/2 + 3/4\,a_1(t + 2/3\,dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)\\
&+a_1(t, \widetilde{\widetilde{x}}_1, x_2, x_3)/4 + a_1(t, x_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2, x_3)/4 + a_1(t, x_1, x_2, \widetilde{\widetilde{x}}_3)/4\Big)\\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.33}$$

– Advection/remaillage suivant la deuxième direction

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1^{(1)} = x_1 - a_1\,dt/3\\
&\widetilde{x}_1^{(2)} = x_1 - 4\,a_1\,dt/3\\
&\widetilde{x}_2 = x_2 + 2\,a_2\,dt/3\\
&\widetilde{x}_3 = x_3 + 2\,a_3\,dt/3\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_1 = x_1 + dt\ \Big(a_1 - 2\,a_1(t + 2/3\,dt, \widetilde{x}_1^{(1)}, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)\Big)\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_2 = x_2 + dt\ \Big(-a_2 + a_2(t + 2/3\,dt, \widetilde{x}_1^{(2)}, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)\Big)\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_3 = x_3 + dt\ \Big(-a_3/4 + a_3(t + 2/3\,dt, \widetilde{x}_1^{(2)}, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)/4\Big)\\
&x_2 \leftarrow x_2 + dt\ \Big(-5/4\,a_2 + 3/4\,a_2(t + 2/3\,dt, \widetilde{x}_1^{(1)}, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)\\
&+a_2(t, \widetilde{\widetilde{x}}_1, x_2, x_3)/4 + a_2(t, x_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2, x_3)/4 + a_2(t, x_1, x_2, \widetilde{\widetilde{x}}_3)\Big)\\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.34}$$

– Advection/remaillage suivant la troisième direction

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1 - 2\,a_1\,dt/3\\
&\widetilde{x}_2 = x_2 - 2\,a_2\,dt/3\\
&\widetilde{x}_3^{(1)} = x_3 + a_3\,dt/3\\
&\widetilde{x}_3^{(2)} = x_3 + 4\,a_3\,dt/3\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_1 = x_1 + dt\ \Big(-a_1 + a_1(t + 4/3\,dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3^{(2)})\Big)\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_2 = x_2 + dt\ \Big(a_2 - a_2(t + 4/3\,dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3^{(2)})\Big)\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_3 = x_3 + dt\ \Big(-a_3 + 2\,a_3(t + 1/3\,dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3^{(1)})\Big)\\
&x_2 \leftarrow x_2 + dt\ \Big(3/4\,a_3(t + 1/3\,dt, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3^{(1)})\\
&-a_3(t, \widetilde{\widetilde{x}}_1, x_2, x_3)/4 + a_3(t, x_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2, x_3)/4 + a_3(t + dt, x_1, x_2, \widetilde{\widetilde{x}}_3)/4\Big)\\
&(\mathbf{x}_i, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)
\end{aligned} \tag{E.35}$$

Annexe F

Publications

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1367–1372

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Partial Differential Equations/Numerical Analysis

TVD remeshing formulas for particle methods

Georges-Henri Cottet, Adrien Magni

Université de Grenoble and CNRS, Laboratoire Jean Kuntzmann, BP 53, Grenoble Cedex 9, France

Received 14 September 2009; accepted after revision 8 October 2009

Available online 27 October 2009

Presented by Olivier Pironneau

Abstract

We derive TVD remeshing formulas for particle methods. The derivation is inspired from a finite-difference analysis but the method retains the essential features of particle methods. Numerical illustrations give evidence of the improved stability and computational cost resulting from these new algorithms. ***To cite this article: G.-H. Cottet, A. Magni, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Résumé

Schémas de remaillage TDV en méthodes particulaires. On décrit dans cette Note des techniques de remaillage TVD pour les méthodes particulaires, en s'insipirant de la méthodologie des schémas de différences finies. Des exemples numériques montrent les gains obtenus par ces nouveaux algorithmes tant en stabilité qu'en coût de calcul. ***Pour citer cet article : G.-H. Cottet, A. Magni, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Méthodes particulaires avec remaillage

Des techniques de remaillage sont souvent utilisées en conjonction avec les méthodes particulaires pour en garantir la précision. Si le remaillage est effectué à chaque pas de temps, on obtient des méthodes de différences finies. L'analyse conduite dans [2] montre que les méthodes particulaires peuvent alors être vues comme des généralisation sans condition CFL de schémas de différences finies multi-dimensionnels. Dans cette Note nous poursuivons cette approche en empruntant aux méthodologies différences finies pour construire des méthodes particulaires TVD.

D'une manière générale les formules de remaillage sont construites pour conserver autant de moments que voulus dans la distribution de particules. La formule générale conservant n moments, et utilisant n points de remaillage en 1D, conduit au schéma (4) (voir aussi la Fig. 1 pour $n = 3$). Dans le cas non-linéaire, il est démontré dans [2] que, pour obtenir l'ordre 2 en temps, il suffit d'évaluer la vitesse des particules grâce à la formule (5). La suite de la Note

E-mail addresses: georges-henri.cottet@imag.fr (G.-H. Cottet), adrien.magni@imag.fr (A. Magni).

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2009.10.009

concerne le schéma de remaillage dit Λ_2, correspondant à $n = 3$. L'extension à des formules TVD ou préservant la monotonie d'ordre plus élevé pourra être trouvée dans la référence [4].

Le cas linéaire

Dans le cas linéaire, sous CFL inférieure à un, la formule (6) est équivalente au schéma de Lax–Wendroff. L'utilisation des limiteurs classiques dans ce contexte (voir par exemple [3]) conduit à la formule de remaillage modifiée (9).

Le cas non-linéaire

Dans le cas non-linéaire, le traitement particulaire du flux écrit sous la forme $g(u)u$ nécessite une analyse spécifique pour définir des limiteurs appropriés. En supposant $g \geqslant 0$ et sous CFL 1 une méthode particulaire avec remaillage Λ_2 peut se réécrire sous la forme incrémentale (12). Les calculs sont menés dans le cas de l'équation de Burgers, et permettent de définir de limiteurs à partir des formules (12), (13). Le schéma de remaillage résultant est TVD sous CFL $2/3$.

Illustrations numériques et relaxation de la condition CFL

On commence par un exemple dans le cas non-linéaire, pour l'équation de Burgers. La condition initiale est un créneau périodique qui engendre un choc et une détente se propageant vers la droite. La comparaison de la formule TVD avec le schéma Λ_2 brut (Fig. 1) montre une nette amélioration à la fois dans résolution du choc et de la détente.

On considère ensuite le cas du transport d'un scalaire passif dans un champ de vitesse incompressible. Cet exemple permet d'illustrer le passage au cas multi-dimensionnel, et comment relaxer la condition CFL. L'option choisie est une technique de splitting où les particules sont successivement poussées et remaillées dans chaque direction. Ce schéma n'est plus équivalent à un schéma de différences finies simple mais les limiteurs conservent son caractère TVD. Pour s'affranchir de la condition CFL, une stratégie consiste à définir localement des vitesses uniformes dont ne diffère que de peu la vitesse réelle. La Fig. 2 est une comparaison entre un remaillage TVD Λ_2 à 9 points et la formule à 16 points Λ_3 souvent utilisée en pratique, dans la cas de la rotation dans une boite $[-1, +1]$ d'un disque de rayon 0,1. Cette expérience, menée sous CFL 4, met en évidence à la fois la meilleure qualité des résultats de la méthode TVD et le fait qu'elle génère beaucoup moins de particules, ce qui la rend plus économique.

1. Introduction

Remeshing techniques are often used in conjunction with particle methods for the numerical simulation of advection-dominated problems. These formulas are devised to maintain regularity in the particle distribution. They are necessary to ensure accuracy and have been an essential ingredient for performing reliable DNS of both compressible and incompressible flows. Remeshing techniques are based on interpolation formulas that are designed to conserve a certain number of moments of the particle distribution.

In [2] an analysis of remeshed particle methods was proposed in the framework of finite-difference methods. We in particular proved that remeshed particle methods can be viewed as CFL-free, multidimensional generalization of high order finite-difference methods. Remeshed particle simulations in particular share with high order finite-difference schemes the possible problems related to oscillations. In the present Note, we continue to exploit the analogy between remeshed particle and finite-difference methods to deduce from classical limiters non-oscillatory remeshing formulas for particle methods.

The outline of this Note is as follows. In Section 2 we recall the results of [2]. In Section 3 we derive TVD remeshing formulas for linear and non-linear advection equations. Section 4 is devoted to preliminary numerical illustrations and to a discussion of the CFL number and of the sign independence of the method. Further developments of this approach and applications to gas dynamics, passive advection and incompressible flows will be given elsewhere [4].

2. Previous work

Let us consider the model non-linear scalar equation, describing the evolution of the quantity u carried by the flow at the material velocity $g(u)$:

$$u_t + \big(g(u)u\big)_x = 0. \tag{1}$$

Particle methods consist of sampling u on particles advected with velocity $g(u)$ and constant strength:

$$u(x) \simeq \sum_p \alpha_p \delta(x - x_p), \qquad \dot{x}_p = g(u_p). \tag{2}$$

The strengths of the particles combine local volumes v_p and local u values u_p: $\alpha_p = v_p u_p$. Note that, while particle strengths are constant, volumes and local values evolve according to

$$\dot{v}_p = \big(\partial g(u)/\partial x\big)(x_p) v_p, \qquad \dot{u}_p = -\big(\partial g(u)/\partial x\big)(x_p) u_p. \tag{3}$$

In remeshed particle methods, every *few* time-steps particles are remeshed on a predefined regular grid. New particles at locations x_p with strengths α_p are obtained from old particles $\tilde{x}_p$, $\tilde{\alpha}_p$ resulting form advection by the following general formula $\alpha_p = \sum_q \tilde{\alpha}_q \Lambda(x_p - \tilde{x}_q)$. The accuracy of remeshing is governed by the conservation of successive moments $\int x^m u(x)\,dx$ of the particle distribution which can be enforced by increasing the size of the support of the kernel Λ [1].

In [2] an analysis of remeshed particle methods is done on the basis of their analogy with finite-difference schemes. Let us consider the case when particles are remeshed at every time-step (we will call this particle method "push-and-remesh") with a remeshing formula preserving the n first moments of the particle distribution. In the case of a linear advection equation, $g(u) = a$, with constant advection velocity $a > 0$, when $a\Delta t \leqslant h$, if a particle initialized at ih is located at x after an advection step, one has $\lambda = \frac{x - ih}{h} = a\Delta t/h$ and we obtain the following scheme:

$$u_i^{n+1} = \sum_{-[\frac{n-1}{2}] \leqslant j \leqslant [\frac{n}{2}]} w_j u_{i-j}^n, \quad w_j = c_k \prod_{-[\frac{n-1}{2}] \leqslant k \neq j \leqslant [\frac{n}{2}]} (\lambda - k), \tag{4}$$

where $c_k = (-1)^{[\frac{n-1}{2}]+k}([\frac{n-1}{2}] + k)!([\frac{n}{2}] + k)!$. Not surprisingly, we obtain general finite-difference formulas for the linear advection equation [5]. For $n = 3$ we obtain $w_0 = 1 - \lambda^2$, $w_{\pm 1} = \mp\lambda(1 \mp \lambda)/2$ – the Lax–Wendroff scheme. Following [1], we will call this scheme the left-Λ_2 remeshing scheme.

In the more general non-linear case (1), the link with finite-difference methods is not as direct and we do not recover *classical* finite-difference formulas. It is proved in [2] that if particle velocities are evaluated at time t_n by the formula

$$u_j^{n+1/2} = \tilde{g}\big(u_j^n\big) = g\left(u_j^n\left[1 - \frac{\Delta t}{4h}\big(g\big(u_{j+1}^n\big) - g\big(u_{j-1}^n\big)\big)\right]\right), \tag{5}$$

the push-and-remesh scheme (4) with $n = 3$ and $\lambda_j = \tilde{g}(u_j^n)\Delta t/h \leqslant 1$ is equivalent to a stable second-order (both in space and time) finite-difference scheme. For a sake of clarity we denote by α_i, β_i, γ_i the weights in formula (4), associated to grid points from left to right (see Fig. 1) for the left-Λ_2 remeshing, which thus reads:

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n \gamma_{i-1} + u_i^n \beta_i + u_{i+1}^n \alpha_{i+1}. \tag{6}$$

3. TVD remeshing formulas

In this section we show how finite-difference inspired limiters allow to construct TVD remeshing formulas. We here restrict ourselves to the case $n = 3$ and refer to [4] for higher order TVD and Monotony Preserving formulas.

3.1. The 1D, linear, constant-coefficient, case

We first consider the case $g(u) = a$, $a > 0$, and set $\lambda = a\Delta t/h$ and $\Delta u_{i+1/2} = u_{i+1} - u_i$. We start from classical flux-limited versions of the Lax–Wendroff scheme [3]:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(u_i - u_{i-1}) - \lambda(1 - \lambda)(\phi_{i+1/2}\Delta u_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}\Delta u_{i-1/2})/2, \tag{7}$$

where

$$\phi_{i+1/2} = \phi(r_{i+1/2}), \quad r_{i+1/2} = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}. \tag{8}$$

This gives the limited left-Λ_2 remeshing formula (6) with

$$\alpha_{i+1} = -\frac{\lambda}{2}(1-\lambda)\phi_{i+1/2}, \qquad \beta_i = 1 - \lambda + \frac{\lambda}{2}(1-\lambda)(\phi_{i-1/2} + \phi_{i+1/2}), \qquad \gamma_{i-1} = \lambda - \frac{\lambda}{2}(1-\lambda)\phi_{i-1/2}. \tag{9}$$

By Harten's theorem [3], this remeshing scheme is TVD under the condition $|\phi(r)/r - \phi(s)| \leqslant \Phi$ with:

$$1 - (1-\lambda)\Phi/2 \geqslant 2, \qquad 1 + (1-\lambda)\Phi/2 \leqslant 1/\lambda.$$

If $a < 0$, the remeshing formula is equivalent to a Beam–Warming upwind. One can then show, and this is important from a practical point of view, that Eq. (9) can still be used to determine the remeshing weights. This property will be illustrated below in the example of a rotating patch.

3.2. The non-linear case

We consider Eq. (1) and the push-and-remesh method with left-Λ_2 remeshing, with particle velocities evaluated through (5). We assume here that $\tilde{g} > 0$ and set $\nu = \Delta t/h$, $\tilde{f}_j = \tilde{g}_j u_j$, $h_j = \tilde{f}_j(1 - \nu\tilde{g}_j)$.

The push-and-remesh method can then be rephrased as the following centered finite-difference scheme

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu\Delta\tilde{f}_i - \nu(\Delta h_{i+1/2} - \Delta h_{i-1/2})/2. \tag{10}$$

We look for a TVD modification of the above scheme under the form

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu\Delta\tilde{f}_i - \nu(\phi_{i+1/2}\Delta h_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}\Delta h_{i-1/2})/2, \tag{11}$$

from which the remeshing weights can be recovered using (9). Because of the way particle methods handle fluxes, we need a specific derivation of the limiter ϕ that we outline here. We set $r_{i+1/2} = \Delta h_{i-1/2}/\Delta h_{i+1/2}$ so that (11) can be rewritten in incremental form

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta u_{i-1/2} D_{i-1/2}, \quad D_{j-1/2} = \nu\frac{\Delta h_{i-1/2}}{\Delta u_{i-1/2}}\left[\frac{\Delta f_{i-1/2}}{\Delta h_{i-1/2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\phi_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} - \phi_{i-1/2}\right)\right]. \tag{12}$$

To obtain a TVD scheme we need to construct ϕ such that $0 \leqslant D_{i+1/2} \leqslant 1$ under some CFL conditions. We derive these conditions below in the particular case of the Burgers equation $g(u) = u/2$, with $u > 0$. We set $\lambda = \nu \max|u|$ and we further assume the usual CFL condition $\lambda \leqslant 1$.

We have $f'(u) = u$, $h'(u) = u(1 - 3u/4)$ so that $\Delta h_{i-1/2}/\Delta u_{i-1/2} \geqslant 0$, $\Delta f_{i-1/2}/\Delta h_{i-1/2} \geqslant 0$. Moreover

$$\left|\frac{\Delta h_{i-1/2}}{\Delta u_{i-1/2}}\right| \leqslant \lambda(1 - 3\lambda/4) \leqslant 1/3, \qquad \left|\frac{\Delta f_{i-1/2}}{\Delta h_{i-1/2}}\right| \leqslant \frac{1}{1 - 3\lambda/4}$$

so that the scheme (12) is TVD, provided the function ϕ satisfies (see [3])

$$\left|\frac{\phi(r)}{r} - \phi(s)\right| \leqslant \Phi, \qquad \frac{1}{1-3\lambda/4} + \frac{\Phi}{2} \leqslant 3, \qquad \frac{1}{1-3\lambda/4} - \frac{\Phi}{2} \geqslant 0. \tag{13}$$

It is readily checked that the value $\Phi = 2$ is allowed provided the CFL condition is reduced to $\lambda \leqslant 2/3$. In that case, the usual TVD limiters, such as Van-Leer or Superbee can be used.

4. Numerical illustrations, sign independence and extension to CFL larger than 1

We first consider the Burgers equation. The initial condition is a step function in $[-1, +1]$, $u_0(x) = 0$ if $x \leqslant 0$, $u_0(x) = 1$ otherwise, with periodic boundary conditions. It develops a shock and a rarefaction wave propagating to the right.

Fig. 1 shows the solution obtained at $t = 0.8$ for the original and TVD Λ_2 remeshing, for $h = 0.02$ and a CFL number $2/3$. The TVD remeshing formula used a Van-Leer limiter. The TVD remeshing formula removes the oscillations. Note that, unlike the Lax–Wendroff scheme, the remeshed particle method satisfies the entropy condition, an important property which remains to be rigorously proved.

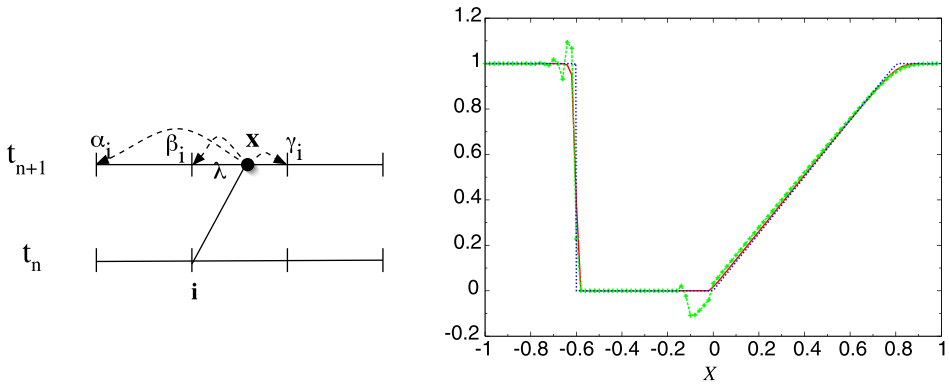


Fig. 1. Left picture: sketch of push-and-remesh Λ_2 scheme. Right picture: simulation of the Burgers equation; original (green crosses) or TVD (red continuous line) remeshing schemes compared to exact solution (blue dotted lines).

We continue with the linear case of the passive transport of a scalar in a 2D incompressible flows. Although it does not enter the general case, this case is useful to illustrate how the TVD formulas are extended to the multidimensional case and how the CFL condition can be relaxed. To deal with advection in a multidimensional field, the approach we choose follows the classical splitting used in finite-difference methods. In a push and remesh methods, it means that particles are advected in one direction, then remeshed, then advected in a second direction and so on. This is clearly a first order in time method and higher order strategies can be devised as for classical differential equations. Note that this method, for not constant velocity values, is no longer equivalent to a finite-difference method, because particle in the second and following advection stages "see" velocity values at the location where they have been remeshed.

In this experiment we consider the evolution of a circular patch in a rotating rigid velocity field. We used a splitting method together with the left-Λ_2 TVD remeshing after advection of particle in each direction. In this example we used the Superbee limiter. As announced earlier, despite the sign changes we were able to use the same remeshing weights at all particle locations. The derivation of the TVD remeshing formulas is based on the assumption of a CFL number less than 1. However one specific feature of particle methods is that they are CFL free, which often enables to use much larger time-step than for Eulerian methods. It is therefore very much desirable to relax the CFL condition for the TVD remeshing formulas. The CFL condition is clearly not necessary for the constant velocity case, because in this case particles conserve their slopes during advection. One way to relax the CFL condition in the general case is to determine zones of the flow where the velocity is close to a constant value. If $a(x) = \bar{a} + \tilde{a}(x)$, and if Δt is such that $\bar{a}\Delta t = Nh$ and $\max|\tilde{a}|\Delta t \leqslant h$, the idea is to advect particles with $\bar{a}$, without remeshing, and to follow this advection with a push-and-remesh TVD method. This algorithm will be given in more details in [4]. In the present example, a CFL number equal to 4 could be used by partitioning the computational domain in 16 boxes.

Fig. 2 shows, for the left-Λ_2 TVD scheme, using 3 grid points, and the original Λ_3 scheme using 4 grid points, a cross-section and contours of the patch after one turn. The patch had a radius of 0.1. The particle spacing was 0.01. For a better comparison we have translated the patch obtained by the TVD remeshing formulas by 0.25 in the vertical direction. This figure illustrates the improved accuracy obtained by TVD formulas. It also shows the time-evolution of the number of particles, initially located inside the patch. In practice, at the end of the remeshing step, particles having a strength less than a given cut-off (say 10^{-6} times the maximum value) are discarded. The number of particles generated by the TVD formula is remarkably lower than for the original Λ_3 remeshing formula. In this example the TVD formula is much less expensive by the combined effects of the following factors: it generates less particles and it uses a smaller stencil (3 points instead of 4). Moreover, one can observe that the splitting strategy is by itself less expensive than the traditional remeshing strategy: in 3D, for a Λ_2 formula, the cost of the splitting method is O(9N) instead of O(64N) for a regular Λ_3 formula.

5. Conclusion

We have introduced a methodology inspired from finite-difference methods to design TVD remeshing formulas for the simulation of advection-dominated problems by particle methods. We have shown that these methods can retain the important features of particle methods with respect to localization and time-step limits. Preliminary validations illustrate the gain offered by the new remeshing formulas not only in stability but also in computational cost.

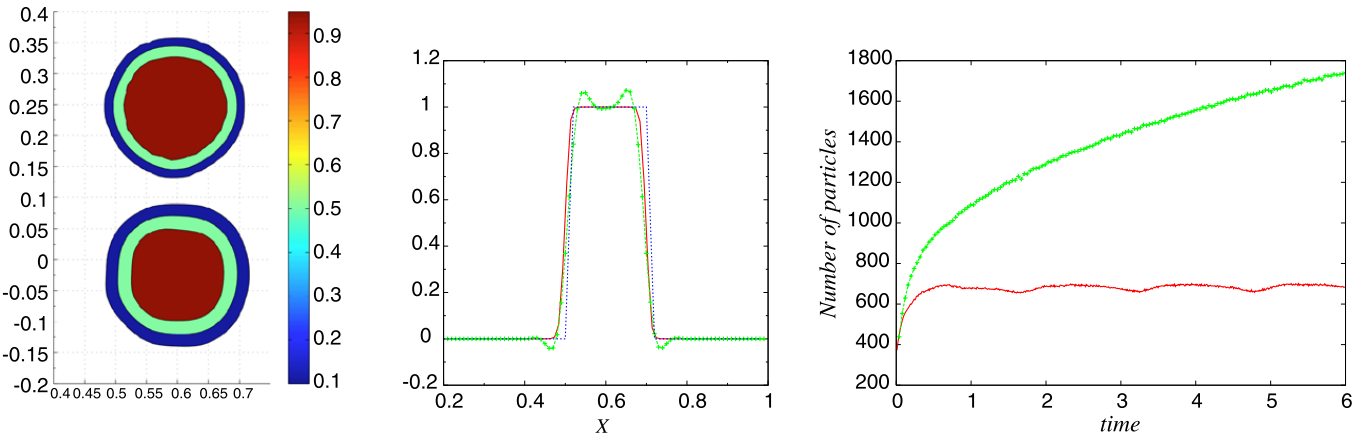


Fig. 2. Passive transport of circular patch in a rigid vorticity field, after one turn. Left picture: contours for values 0.1, 0.5 and 0.95. Middle picture: cross sections. Right picture: time evolution of the number of particles. Green crosses: classical Λ_3 remeshing; red continuous line: TVD Λ_2; blue dotted line: exact solution.

Acknowledgement

This work was partially supported by ANR under grant # ANR-06-BLAN-0306.

References

[1] G.-H. Cottet, P. Koumoutsakos, Vortex Methods, Cambridge University Press, 2000.
[2] G.-H. Cottet, L. Weynans, Particle methods revisited: A class of high order finite-difference methods, C. R. Acad. Sci. Paris I 343 (2006) 51–56.
[3] E. Godlewski, P.-A. Raviart, Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, 1996.
[4] A. Magni, G.-H. Cottet, New remeshing formulas for particle methods, in preparation.
[5] G. Strang, Trigonometric polynomials and difference methods of maximum accuracy, J. Math. Phys. 41 (1962) 147–520.

Accurate, non-oscillatory, remeshing schemes for particle methods

A. Magni and G.-H. Cottet

Université de Grenoble and CNRS, Laboratoire Jean Kuntzmann,
BP 53, 38041 Grenoble Cédex, France

Abstract

In this article we propose and validate new remeshing schemes for the simulation of transport equations by particle methods. Particle remeshing is a common way to control the regularity of the particle distribution which is necessary to guarantee the accuracy of particle methods in presence of strong strain in a flow. Using a grid-based analysis, we derive remeshing schemes that can be used in a consistent way at every time-step in a particle method. The schemes are obtained by local corrections of classical third order and fifth order interpolation kernels. The time-step to be used in the resulting push-and-remesh particle method is determined on the basis of rigorous bounds and can significantly exceed values obtained by CFL conditions in usual grid-based Eulerian methods. In addition, we extend the analysis of [5] to obtain TVD remeshing schemes that avoid oscillations of remeshing formulas near sharp variations of the solution. These methods are illustrated in several flow conditions in 1D, 2D and 3D.

Keywords : particle methods, transport equation, remeshing scheme, TVD method, level set method, Navier-Stokes equations.

1 Introduction

The accurate simulation of transport equations is a central issue in many problems in physics or engineering. The transported quantity can either be a passive scalar or vector (concentration, density, marker of a Lagrangian interface) or produce a feedback to the velocity vector and other quantities of interest (momentum or energy in fluid mechanics, charge density in plasma physics). The case of a Lagrangian interface, in particular inside a variable density fluid, is of particular interest. An interface can be just a marker indicating a free surface or interact with the fluid itself, for example in a curvature driven motion or in reacting fluids where reactions take place at the interface between different species.

The production of small scales is a typical feature of transport in many important applications e.g in turbulent, free surface or reactive flows. A great deal of work has therefore been devoted to the derivation of methods that are at the same time accurate, oscillation-free and conservative. In particular, recent works have been done where Lagrangian markers are used to improve or correct grid-based methods to capture interface dynamics in a conservative and accurate way. In [12] sub-grid particles are introduced near the interface to improve the accuracy of finite-difference level set

methods. [25] describes a Volume-of-Fluid method for advection problems designed in the same spirit for general transport equations. These works take advantage of the *exact* Lagrangian solution to advection equation in order to limit the numerical diffusion of grid-based method and enforce mass conservation. In [15, 10], on the other hand, the use of *regular* remeshed particle methods was advocated to ensure an efficient treatment of advection equations. By remeshed particles methods, we mean particle methods where particles are simply advected and remeshed on a regular grid through high order interpolation kernels.

Particle methods are Lagrangian techniques that have been designed for advection-dominated physical problems. Among the features that are generally acknowledged for these methods are the lack of numerical dissipation and the robustness due to the absence of Courant type stability condition. A well recognized drawback is the potential accuracy deterioration resulting form high distortion in the flow. In particle methods macroscopic quantities are recovered by regularizing particle into overlapping cores, and the overlapping ratio should in principle increase as the particle spacing is reduced. In practice this condition is rarely satisfied and flow distortions result in a deterioration of the accuracy of the method. A now commonly used remedy to this problem is the periodic remeshing of particles in a way that conserves as much as possible the physical invariants of the flow. Although particle remeshing was already used in some of the early simulations using particles, systematic and generic use of remeshing was first used in [17] to deliver high resolution analysis of a flow past a two-dimensional obstacle. Three-dimensional simulations using remeshed particle methods followed [7, 21, 6, 24]. A parallel library of particle-mesh programs has been designed [22] and used for extensive simulations of vortex dynamics [3, 4]. Remeshed particle methods also enable the use of Adaptive Mesh Refinement [1, 2] and particle-grid domain decomposition [20, 4].

Obviously, remeshing comes at the expense of introducing numerical errors in methods that, for advection problems with constant coefficient, are otherwise exact. The truncation errors related to remeshing can be measured on the basis of the conservation of the invariants of the advected quantities [9]. Particle remeshing is performed through interpolation formulas that can be derived to conserve as many of these invariants as desired. In practical implementation of the method it turns out that the time-scales which control the particle advection schemes and on which particle remeshing is done are both given in terms of the flow shear. Although in principle remeshing should be done on a time scale larger than the time step used to advect particles, with a ratio increasing as the particle resolution increases, in practice it is performed every "few" time steps, and often at every time step. In such implementations of particle methods, which we will call remeshed particle methods, it is clearly necessary to revisit the numerical analysis of the method.

In [11, 26] remeshed particle methods were rewritten as finite-difference methods and analyzed as such. This analysis in particular led to a new understanding of remeshed particle methods for nonlinear conservation laws. In [13] a similar analysis is used to take into account remeshing in the solution of diffusion for viscous terms. The work of [11] was further pursued in [5] with the objective of understanding and overcoming oscillations generated by remeshing formulas near discontinuities. TVD remeshing formulas were derived for both linear and nonlinear advection equations. The present paper is a continuation of this work, with a particular emphasis on the design of non-oscillatory remeshing formulas for linear advection problems with large time-steps.

The outline of the paper is as follows. In section 2 we recall our previous work on the finite-difference interpretation of remeshed particle methods. In section 3 we derive corrections formulas to ensure

consistency of second and fourth order remeshing formulas for large time steps. In section 4 we derive limiting techniques to avoid oscillations generated by sharp variations of the solution. In section we describe alternate direction techniques to extend the 1D formulas to multi-dimensional problems and we sketch the overall algorithm of the method. Finally section is devoted to numerical illustrations of the methods designed in sections 3 to 5. Finally, conclusions and directions for future work are given in section 7.

2 Previous work

Throughout this work, we assume that particles are initialized and remeshed on a uniform grid of grid-size h. In [5, 26] an analysis of remeshed particle methods in terms of grid-based schemes was given, and is summarized below.

Consider the constant coefficient linear advection equation in 1 space dimension : $\partial u/\partial t + a\partial u/\partial x = 0$, with $a > 0$. The advection of particles over a time-step Δt followed by a remeshing over the nearest grid points conserving the m first moments of the solution leads to the following formula for each grid point i :

$$u_i^{n+1} = \sum_{-[\frac{m-1}{2}] \leq j \leq [\frac{m}{2}]} w_j u_{i-j-l}^n \ , \ w_j = c_j \prod_{-[\frac{m-1}{2}] \leq k \neq j \leq [\frac{m}{2}]} (\lambda' - k), \tag{1}$$

where the integer l is defined by $l = [a\Delta t/h]$, $\lambda' = a\Delta t/h - l$ and

$$c_k = (-1)^{[\frac{m-1}{2}]+k} \, ([\frac{m-1}{2}] + k) \, ! \, ([\frac{m}{2}] + k) \, !.$$

Not surprisingly, if $\lambda = a\Delta t/h \leq 1$ then $\lambda' = \lambda$ is the usual CFL number, and we obtain general finite-difference formulas for the linear advection equation [23]. For $m = 3$ we obtain $w_0 = 1 - \lambda^2, w_{\pm 1} = \mp\lambda(1 \mp \lambda)/2$ - the Lax-Wendroff scheme. If $\lambda > 1$, the resulting solution consists of the exact solution of the equation over a time-step $\Delta t' = lh/a$ followed by a finite difference scheme of order $m - 1$ over the time interval $\Delta t - \Delta t'$.

More generally, consider the advection equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(au) = 0. \tag{2}$$

where $a = a(x, t)$. Assume at a given time-step t_n particles carrying the local values of u move with a velocity $\tilde{a}(x)$ and then are remeshed by a formula which conserves the m first moments of u. Then it is proved in [26] that, if $\tilde{a}$ and u are smooth enough and $\lambda \leq 1/2$, the values u_j^{n+1} obtained at the grid points satisfy

$$u_j^{n+1} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \frac{\Delta t^i}{i!} \frac{\partial}{\partial x^i} (\tilde{a}^i u)(x_j, t_n) + O(h^m). \tag{3}$$

In particular, if particles are advected by a second order Runge-Kutta scheme, with $\tilde{a}(x) = a(x + \delta t a(x)/2)$ and $m = 3$, the scheme is second order.

Consider finally the case of non-linear systems of the form

$$U_t + \mathrm{div}(G(U) \bigotimes U) = 0. \tag{4}$$

In that case, particle methods consist of sampling U on particles advected with velocity $G(U)$ and constant strength:

$$U(x) \simeq \sum_p \alpha_p \delta(x - x_p) \ , \ \dot{x}_p = G(U_p). \tag{5}$$

The strength of particles combines local volumes v_p and local values U_p of U : $\alpha_p = v_p U_p$. From the conservative nature of (5), particle strengths are constant, but their volumes and local values evolve according to

$$\dot{v}_p = \mathrm{div}\, G(U_p) v_p \ , \ \dot{U}_p = -\mathrm{div}\, G(U_p) U_p. \tag{6}$$

A second order in time and space remeshed particle methods is obtained as follows. At time t_n particles x_p are located on a regular grid. Particle velocities at time $t_n + \Delta t/2$ are evaluated on the basis of (6) by the following formula:

$$G_p^{n+1/2} = G\left[U_p^n \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \mathrm{div}\, G_p\right)\right]. \tag{7}$$

In the above formulas, $\mathrm{div}\, G_p$ is evaluated by second order centered finite-differences of the quantity $G(U)$ at the particle (coinciding with a grid point) x_p. Then, according to (5), particles move with the velocities $G_p^{n+1/2}$:

$$x_p^{n+1} = x_p^n + \Delta t\, G_p^{n+1/2}$$

and are finally remeshed with a three points formula preserving the three first moments of the particle distribution. The resulting scheme is second order in time and space.

For systems of conservation laws, U is a vector whose components are the density, the momentum and the energy. The system (4) is complemented by a pressure gradient in the right hand side. The complete system can then be solved in an Euler-Lagrange fashion by alternating the particle scheme just described and a finite-difference scheme for the gradient part of the system on the grid [26].

In [5] this analysis is further used to derive limiters in order to remove oscillations that are produced in remeshed particle methods near discontinuities. In this reference, limiters inspired by finite-difference formulas, are derived under CFL conditions for constant coefficient linear equations and for the Burgers equation, and turned into non linear remeshing schemes.

Figure 2 illustrates the effect of the remeshing schemes with limiters for the Burgers equation. The initial condition is a Heaviside function

$$u_0(x) = 0 \text{ if } x \leq 0, u_0(x) = 1 \text{ otherwise.}$$

It develops a shock and a wave, both propagating to the right. The boundary conditions are periodic. The remeshing scheme is the three-points piecewise quadratic function preserving the 3 first moments described in section 3. TVD remeshing formula were derived with a Van-Leer limiter. The solution is shown at time $t = 0.8$ for $h = 0.02$ and a CFL number $2/3$. The TVD remeshing formula removes the oscillations that are visible when a classical remeshing scheme is used. One goal of the present work is to extend the work in [5] in the case of linear equations by relaxing the constraint on the time-step.

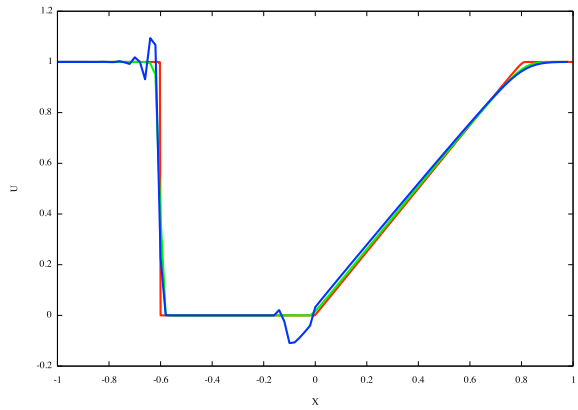


Figure 1: From [5]. Simulation of the Burgers equation with $h = 0.02$ and CFL number $2/3$. Particle method with a classical 3-points remeshing scheme (blue line) or a TVD 3 points remeshing scheme (green line), compared to the exact solution (red line).

3 Consistent 1D remeshing formulas for large CFL numbers

In this section we focus on the linear advection equation (2) and we analyze, in the case of large CFL numbers, particle methods which consist for each time-step of a motion of particles with their local velocities followed by a remeshing step. The underlying grid is assumed to have a fixed grid size h.

To begin with, let us consider the case when particles are advected with an Euler scheme and remeshed with a linear interpolation. For a sake of simplicity in the notations, we assume that the advection velocity a is time-independent. We denote by $x_j = jh$ the particles lying on the grid after remeshing, by a_j their velocity and we set $\nu = \Delta t/h$ and $\lambda_j = a_j\nu$.

If we assume that for all particle $0 \leq \lambda_j \leq 1$ then it is readily that the corresponding finite-difference scheme is

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \nu(a_i u_i^n - a_{i-1}u_{i-1}^n)$$

which is the first order upwind scheme. If now at a given particle i we have a local CFL number satisfying $\lambda_i < 0 \leq \lambda_{i+1} \leq 1$ then we obtain $u_i^{n+1} = u_i^n + \nu a_j$, which is not consistent with the advection equation. The same difficulty arises if $\lambda_i < 1 \leq \lambda_{i+1}$.

Higher order remeshing schemes can be obtained by ensuring the conservation of the 3 first moments of the particles. One then obtains the so-called Λ_2 interpolation kernel,cas

$$\Lambda_2(x) = \begin{cases} 1 - |x|^2 & \text{if } |x| \leq 1/2, \\ (1-|x|)(2-|x|) & \text{if } 1/2 < |x| \leq 3/2, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \tag{8}$$

It is readily seen that if remeshing is performed at every time-step, the resulting finite-difference schemes will be consistent (and second order) under the conditions $|\lambda_i| \leq 1/2$. A one-sided version of this remeshing formula, which will be defined in the next section, is consistent if $0 \leq \lambda_i \leq 1$.

We wish to stress the fact that in the discussion above it is not the value itself of the local CFL numbers that matters, but rather its variations from one particle to the next. For instance the centered-Λ_2 scheme will be consistent and second order if all particles have a local CFL number value between $N - 1/2$ and $N + 1/2$ for a given integer number N. Likewise, the one-sided Λ_2 scheme will be second order if all particles have a local CFL number value between N and $N+1$ for a given integer number N. The same properties are valid with all centered or one-sided remeshing formulas of even order.

A smoother version of the Λ_2 kernel, the so-called M_4' scheme originally proposed in [19], is often used in practice. It uses one additional grid point and is given by :

$$M_4'(x) = \begin{cases} 1 - 5|x|^2/2 + |x|^2/2 & \text{if } |x| \leq 1, \\ (1-|x|)(2-|x|)^2/2 & \text{if } 1 < |x| \leq 2, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \tag{9}$$

This kernel does not suffer the consistency problem of Λ_2 but one can check that it is only first order at sonic points, independently of the local time-step value, and more generally when the CFL number crosses an integer value.

3.1 Correction formulas for second order remeshing schemes

In this section and the following we focus on the case of the Λ_2 remeshing schemes, and we derive formulas to enforce a consistent treatment of CFL variations between neighboring particles. Let us first define some notations. We denote by y the distance between the particle after an advection step and its nearest grid point i on the left, normalized by the grid-size. We thus have $y = \lambda - [\lambda]$. The left-Λ_2 scheme assign to the grid points $i-1$, i and $i+1$ weights respectively defined by (see figure 2)

$$\alpha(y) = y(y-1)/2 \ , \ \beta(y) = 1 - y^2 \ , \ \gamma(y) = y(1+y)/2 \ . \tag{10}$$

Similarly the right-Λ_2 scheme uses the grid points i, $i+1$ and $i+2$ wit the following weights

$$\alpha'(y) = (y-1)(y-2)/2 \ , \ \beta'(y) = y(2-y) \ , \ \gamma'(y) = y(y-1)/2 \ . \tag{11}$$

We can observe that the following relationships hold:

$$\alpha'(y) = \alpha(y-1) \ , \ \beta'(y) = \beta(y-1) \ , \ \gamma'(y) = \gamma(y-1). \tag{12}$$

The center-Λ_2 remeshing scheme uses the weights α, β, γ if $y \leq 1/2$ and α', β', γ' if $y \geq 1/2$.

The solution we propose to overcome inconsistencies due to CFL variations is to combine centered and left remeshing schemes. The idea is to split particles in patches where either centered or left formulas can be used in a consistent way. More precisely, at the beginning of a given time step, we split the particles into blocks of size Mh. Each box thus contains $M+1$ particles. We first choose the time step on the basis of the strain rate of the flow, as it is usual for particle methods, and on the integer M, with the formula

$$\Delta t = \frac{1}{2(M+1)|a|_{1,\infty}} \tag{13}$$

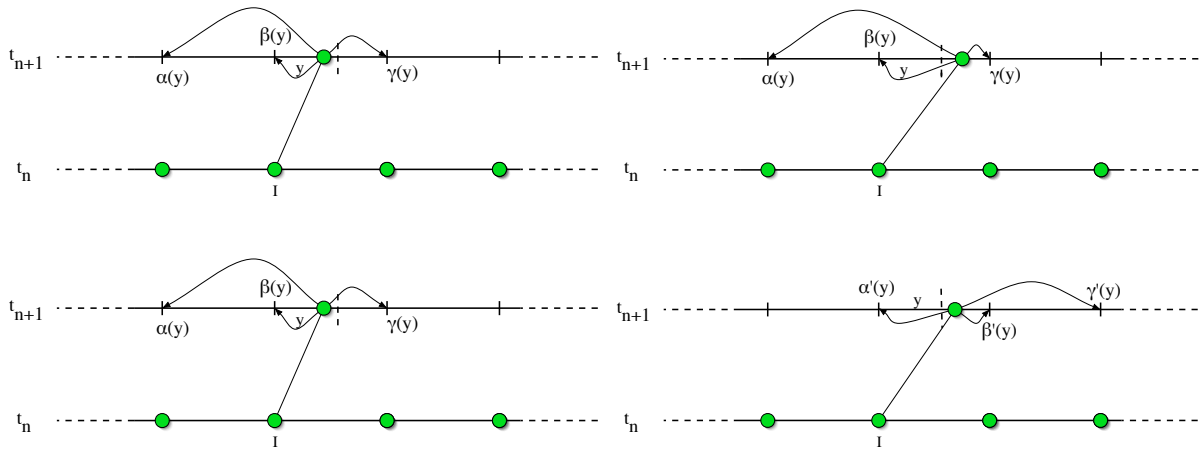


Figure 2: Left and center Λ_2 remeshing schemes. Top row: left remeshing, bottom row : center remeshing. Left (respectively right) pictures correspond to the case $\lambda \leq 1/2$ (respectively $\lambda \geq 1/2$). The middle of the cell is materialized by a dashed line. Weight values are given in (10) and (11).

where $|a|_{1,\infty}$ denotes the maximum of the absolute values of the derivatives of the advection field a. In the sequel M can be any positive integer (and in practice it can be chosen equal to 1).

Let us consider two particles $x_i = ih$ and $x_j = jh$ lying in the same block. We can write

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq |a|_{1,\infty} \Delta t M h/h \leq 1/2.$$

As a result we can state that, for a given block B, there exists an integer N such that, either

$$\forall i \text{ such that } x_i \in B, |\lambda_i - N| \leq 1/2, \tag{14}$$

or

$$\forall i \text{ such that } x_i \in B, |\lambda_i - N - 1/2| \leq 1/2. \tag{15}$$

The determination of the case to be considered, and thus of the formula to be used, can be done by computing the minimal displacement of the particles within a block. We set

$$\bar{\lambda} = \min_{x_i \in B'} \lambda_i, \tag{16}$$

where B' is the block B extended to the next particle to the right (the reason for choosing B' instead of B will be apparent below). If $\mathcal{N}(\lambda)$ denotes the nearest integer to λ, it is straightforward to check that, for a certain value of N

- if $\bar{\lambda} \leq \mathcal{N}(\bar{\lambda})$, then all particles in B satisfy (14),
- if $\bar{\lambda} > \mathcal{N}(\bar{\lambda})$, then all particles in B satisfy (15).

Using the appropriate remeshing formulas, depending on which case one falls, guarantees the consistency of the push-and-remesh scheme *inside* each block.

Let us denote by B_m the blocks as defined above and by N_m the corresponding integers defined by (14) or (15). We will call this integer the index of the block. We will say that a given block B_m is

of type C if (14) is satisfied, in which case a center-Λ_2 scheme is used for its particles, and of type L if (15) is satisfied, in which case the left-Λ_2 formula is used. The question is now to determine the formula to be used for the last and first particles in each block.

Let us first show that if two blocks of the same type (C or L) follow each other, then they can be merged into a single block where the center or left Λ_2 formula is consistent. Consider the case of two C-blocks B_m and B_{m+1} and denote by N_m the index of B_m. There exists $x_j \in B_m$ such that $\lambda_j \leq N_m$. Let us denote by x_l the first particle in B_{m+1}. We have $|x_j - x_l| \leq (M+1)h$ and, by (13), $|\lambda_i - \lambda_l| \leq (M+1)/2(M+1) = 1/2$. Therefore $\lambda_l \leq N_m + 1/2$. This implies that $N_{m+1} = N_m$. All particles in blocks $B_m \cup B_{m+1}$ have a value of λ in $[N_m - 1/2, N_m + 1/2]$ and thus the center-Λ_2 remeshing is consistent in $B_m \cup B_{m+1}$. A similar argument shows that if two type L blocks are next to each other, these two blocks can be merged into a single block where the left-Λ_2 scheme is consistent.

It remains now to consider the case of neighboring blocks of different types.
Assume two blocks B_m and B_{m+1} of different type are next to each other. Denote by i the index of the last particle in B_m. If B_m is of type L and B_{m+1} is of type C we can write

$$|N_m + 1/2 - N_{m+1}| \leq |N_m + 1/2 - \lambda_i| + |N_{m+1} - \lambda_{i+1}| + |\lambda_i - \lambda_{i+1}| \leq 1/2 + 1/2 + 1/2(M+1).$$

Since we have assumed $M \geq 1$ we thus have $|N_m + 1/2 - N_{m+1}| < 5/4$ which implies that $N_m - N_{m+1} \in \{-1, 0\}$. Similarly, If B_m is of type C and B_{m+1} is of type L then $N_m - N_{m+1} \in \{0, +1\}$.

For a sake of simplicity we fix $m = 1$ and we denote by I the index of the last particle in B_1. Consider first the case when B_1 is of type L and B_2 of type C. We can assume without restricting the generality that $N_1 = 0$. We represent in Figure 3 the possible configurations. The two first correspond to $N_2 = 0$, respectively with $\lambda_{I+1} \leq 0$ (we will denote this configuration as case (a)) and $\lambda_{I+1} \geq 0$ (case b) and the others to $N_2 = 1$, respectively with $\lambda_{I+1} \leq 1$ (case c) and $\lambda_{I+1} \geq 1$ (case d).

We need to determine how to modify the remeshing schemes for particles I and $I+1$ in order to recover a consistent scheme at time t_{n+1} at all grid points.

For case (a), we observe that, due to (13) with $M \geq 1$, we have $0 \leq \lambda_{I-1} \leq 1/2$ and $0 \leq \lambda_I \leq 1/2$. Thus for particles $I-1$ and I the left and center remeshing schemes are equivalent and the remeshing formulas give a consistent 2nd order value to the grid point I and $I+1$. In other words no corrections are needed at this block interface. Similarly, for case (b), we observe that the center and left remeshing schemes are equivalent for particle $I+1$ and that the left scheme is consistent including for the particle $I+1$ (recall that this scheme is inconsistent only when λ crosses an integer value). Therefore, no modification is needed in this case for particles I and $I+1$.

Let us next consider the case (c). In that case the center-Λ_2 scheme used for the particle $I+1$ uses the right formulas (11). First we observe that if we choose the weights $\alpha(y_I)$, $\beta(y_I)$ for the particle I respectively on grid points $I-1$ and I, and the weight $\alpha(y_{I+1})$ for the particle $I+1$ on the grid point I we obtain a finite-difference scheme on grid points $I-1$ and I equivalent to that obtained if a left-Λ_2 remeshing scheme was used up to the particle $I+1$, that is a second order scheme. Similarly, assigning a weight $\gamma'(y_I)$ from the particle I on the grid point $I+2$ and the weights $\beta'(y_{I+1})$ and $\gamma'(y_{I+1})$ from particle $I+1$ onto grid points $I+2$ and $I+3$ gives on the

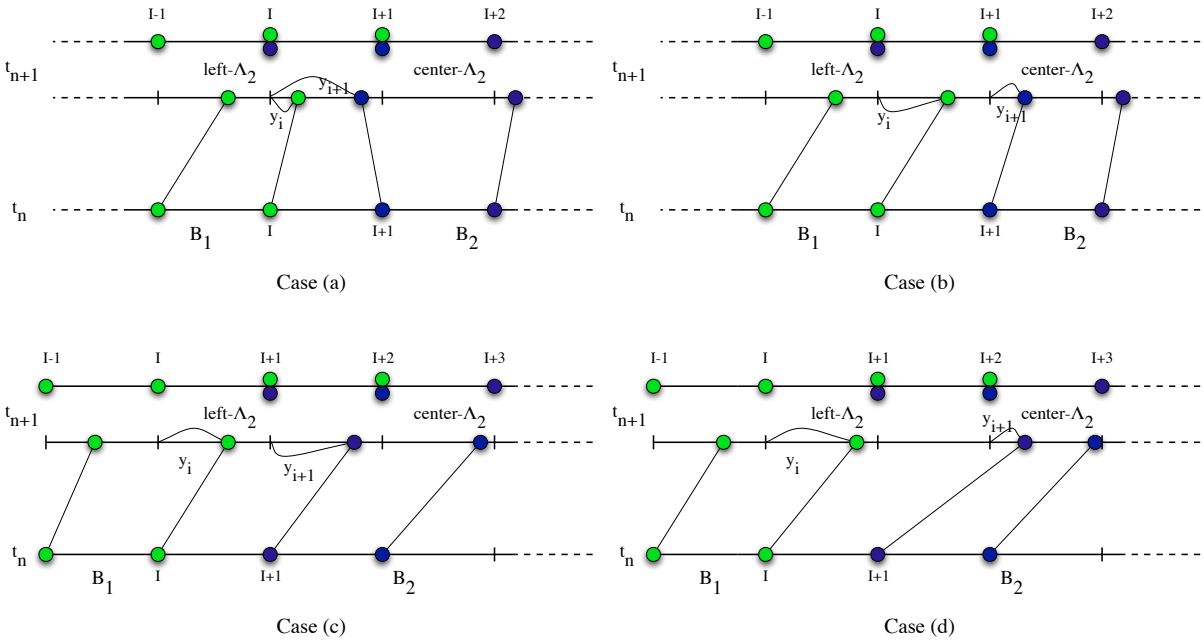


Figure 3: The different possible configurations at the interface between a block of type L (B_1) and a block of type C (B_2). Particles of B_1 (resp. B_2) are in green (resp. blue). On the top rows, the colors indicate what type of particle contributes to the grid values after remeshing.

grid points $I+2$ second order finite difference formulas corresponding to the right-Λ_2 schemes for the particles I and $I+1$. It thus only remains to determine the contributions of particles I and $I+1$ to the grid-point $I+1$. To do this, we remark that to ensure conservation of the mass of each particle, since $\alpha+\beta+\gamma=\alpha'+\beta'+\gamma'=1$ the weight assigned to the grid point I from the particle need to be $\gamma(y_I)-\gamma'(y_I)=y_I$, and the weight assigned from the particle $I+1$ on the same grid point has to be $\alpha'(y_{I+1})-\alpha(y_{I+1})=1-y_{I+1}$. Particles with indices below I do not contribute to the grid point $I+1$: due to (13), $y_{I-1}\leq 1$ and this particle remeshed with the left-Λ_2 scheme does not contribute to the grid point $I+1$. Similarly, particles with indices beyond $I+2$ do not contribute to the grid point $I+1$: because the particle $I+2$ is in a block of type C, it satisfies $y_{I+2}\geq 1/2$ and the center-Λ_2 formula does not assign weight to the grid point $I+1$. As a result the final contribution to the grid point $I+1$ is $y_I u_I+(1-y_{I+1})u_{I+1}$ which corresponds to the upwind scheme. We have therefore derived a correction formula which is locally first order.

We now turn to the last case (d). Particle I is dealt with the same way as in case (c): it is remeshed with weights $\alpha(y_I)$, $\beta(y_I)$, y_I and $\gamma'(y_I)$ respectively for grid points $I-1$, I, $I+1$ and $I+2$. To determine the weights to remesh the particle $I+1$, we observe that $\lambda_{I+1}=y_{I+1}+1$. Therefore, to obtain a second order finite-difference scheme at the grid point I, this particle must assign there a weight $\alpha(y_{I+1}+1)$. To obtain a second order scheme on grid points $I+2$ and $I+3$, it must assign weights $\beta(y_{I+1})$ and $\gamma(y_{I+1})$ on these grid points. Finally, to ensure mass conservation, the weight assigned by particle $I+1$ to the grid point $I+1$ must be $\alpha(y_{I+1})-\alpha(y_{I+1}+1)=-y_{I+1}$. Since $-y_{I+1}=1-\lambda_{I+1}$, it is now readily seen that at the grid-point $I+1$ we recover the first order upwind scheme. Note that in cases (c) and (d), the remeshing formulas spread on a stencil of 4 grid points.

Grid points	Particles					
	Cases (a) / (b)		Case (c)		Case (d)	
	I	$I+1$	I	$I+1$	I	$I+1$
$I'-1$	$\alpha(y_I)$	0	$\alpha(y_I)$	0	$\alpha(y_I)$	0
I'	$\beta(y_I)$	$\alpha'\,/\,\alpha\,(y_{I+1})$	$\beta(y_I)$	$\alpha'(y_{I+1}+1)$	$\beta(y_I)$	$\alpha(y_{I+1}+1)$
$I'+1$	$\gamma(y_I)$	$\beta'\,/\,\beta\,(y_{I+1})$	y_I	$1-y_{I+1}$	y_I	$-y_{I+1}$
$I'+2$	0	$\gamma'\,/\,\gamma\,(y_{I+1})$	$\gamma'(y_I)$	$\beta'(y_{I+1})$	$\gamma'(y_I)$	$\beta(y_{I+1})$
$I'+3$	0	0	0	$\gamma'(y_{I+1})$	0	$\gamma(y_{I+1})$

Table 1: Remeshing weights at the interface between a block of type L and a block of type C. The cases are illustrated in Figure 3. The weights α, β, $\cdots$ are given in (10) and (11). I' denotes the nearest grid-point on the left of particle I after one advection step.

The general case (when $N \neq 0$) is simply recovered by shifting appropriately the grid indices. The corrections derived above are summarized in Table 1. We now consider the case of a block B_2 of type L following a block B_1 of type C. We denote by N_1 and N_2 the indices of B_1 and B_2. For simplicity, we again assume that $N_1 = 0$, which implies that $N_2 = 0$ or $N_2 = -1$. Again, 4 cases have to be considered, as depicted in Figure 4. The two first cases correspond to $N_2 = 0$.

In case (a'), which corresponds to $\lambda_I \leq 0$ we observe that, by (13), $\lambda_{I+2} \leq 1/2$ and the remeshing formula at particles I and $I+1$ are equivalent to the centered one, which ensures a consistent second order scheme at grid points I and $I+1$. If $\lambda_I \geq 0$ (case (b')), center and left remeshing formulas are equivalent for particles I which again ensures a consistent second order scheme at grid points I and $I+1$. Therefore, cases (a') and (b') do not require any special treatment.

We now consider case (c') in Figure 4, which corresponds to $\lambda_I \leq 0$ and $N_1 = -1$. To ensure a consistent second order treatment at grid points $I-1$ and $I+2$, it is readily seen that the particle I must assign a weight $\alpha'(y_I)$ to the grid point $I-1$ and the particle $I+1$ must assign a weight $\gamma(y_{I+1})$ to the grid point $I+1$. To conserve their mass, the particles I and $I+1$ must then assign respectively a weight $\beta'(y_I)+\gamma'(y_I)$ and a weight $\alpha(y_{I+1})+\beta(y_{I+1})$ to the grid point I. The proof of the consistency of the resulting finite-difference scheme is postponed to the appendix.
We finally consider the case (d') which corresponds to $\lambda_I \geq 0$ and $N_1 = -1$. To obtain a consistent second order upwind scheme on grid-points satisfying $J \leq I-1$ or $J \geq I+1$ we assign a weight $\gamma(y_{I+1})$ from particle $I+1$ onto the grid point $I+1$ and a weight $\alpha(y_I)$ from particle I onto the grid-point $I-1$. To ensure mass conservation, the particles I and $I+1$ must assign respectively the weights $\beta(y_I)+\gamma(y_I)$ and $\alpha(y_{I+1})+\beta(y_{I+1})$ onto the grid-point I. The proof that this results in a first order scheme at the grid-point I is given in the appendix.

The remeshing formulas just derived are summarized in Table 2.

3.2 Higher order schemes

Higher order remeshing formulas for particle methods are obtained by redistributing the weights of the particles on a larger number of grid-points to enforce the conservation of additional moments. We consider here the case of the fourth order Λ_4 remeshing scheme. This scheme uses 5 points.

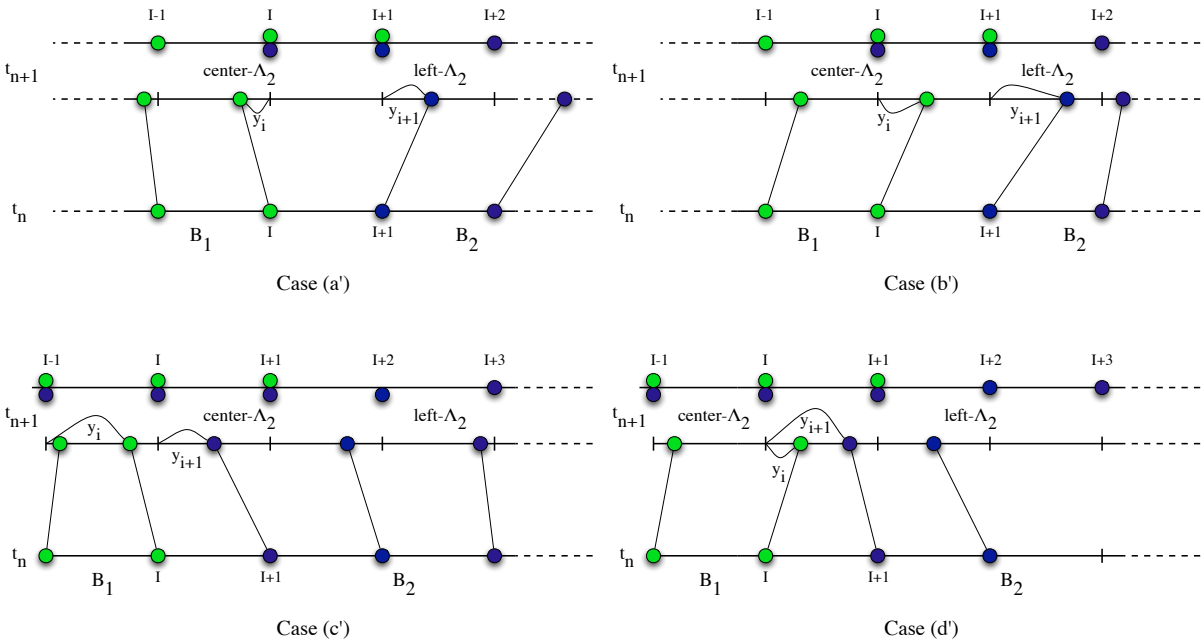


Figure 4: The different possible configurations at the interface between a block of type C (B_1) and a block of type L (B_2). Particles of B_1 (resp. B_2) are in green (resp. blue). On the top rows, the colors indicate what type of particle contributes to the corresponding grid values after remeshing.

Grid points	Particles					
	Cases (a') and (b')		Case (c')		Case (d')	
	I	$I+1$	I	$I+1$	I	$I+1$
$I'-1$	$\alpha'/\alpha(y_I)$	0	$\alpha'(y_I)$	0	$\alpha(y_I)$	0
I'	$\beta'/\beta(y_I)$	$\alpha(y_{I+1})$	$(\beta'+\gamma')(y_I)$	$(\alpha+\beta)(y_{I+1})$	$(\beta+\gamma)(y_I)$	$(\alpha+\beta)(y_{I+1})$
$I'+1$	$\gamma'/\gamma(y_I)$	$\beta(y_{I+1})$	0	$\gamma(y_{I+1})$	0	$\gamma(y_{I+1})$
$I'+2$	0	$\gamma(y_{I+1})$	0	0	0	0

Table 2: Same as in Table 1 for a block of type L following a block of type C. The cases correspond to Figure 4. I' denotes the nearest grid-point to particle I after one advection step.

Using the same notations as above, for the left-Λ_4 scheme, the weights associated to the grid points $i-2$, $i-1$, i, $i+1$ and $i+2$ are respectively

$$\begin{array}{l} \alpha(y) = \frac{1}{24}(y+1)y(y-1)(y-2)\ ,\ \beta(y) = -\frac{1}{6}(y+2)y(y-1)(y-2) \\ \gamma(y) = \frac{1}{4}(y+2)(y+1)(y-1)(y-2)\ ,\ \delta(y) = -\frac{1}{6}(y+2)(y+1)y(y-2) \\ \eta(y) = \frac{1}{24}(y+2)(y+1)y(y-1). \end{array} \tag{17}$$

For the right-Λ_4 scheme, the weights associated to the grid points $i-1$, i, $i+1$, $i+2$, and $i+3$ are respectively given by the following relationships

$$\alpha'(y) = \alpha(y-1)\ ,\ \beta'(y) = \beta(y-1)\ ,\ \gamma'(y) = \gamma(y-1)\ ,\ \delta'(y) = \delta(y-1)\ ,\ \eta'(y) = \eta(y-1). \tag{18}$$

As for the Λ_2 remeshing schemes, the centered-Λ_4 (respectively left-Λ_4) scheme will be consistent if all particles have a local CFL number value between $N-1/2$ and $N+1/2$ (respectively N and $N+1$) for a given integer number N. Blocks where centered and left formulas can be used are therefore determined in the same way as previously, and corrections in the remeshing weights are needed at the interface between two blocks of different types and different indices.

Assume two blocks B_m and B_{m+1} of different type are next to each other. As for the Λ_2-remeshing scheme, $N_m - N_{m+1} \in \{0,1\}$ if B_m is of type C, B_{m+1} of type L and $N_m - N_{m+1} \in \{-1,0\}$ otherwise. The same cases - (a) to (d) if a block of type C follows a block of type L, (a') to (d') otherwise - have to be considered. Corrections have to be derived only in the cases (c), (d), (c') and (d'). As for the second order remeshing formulas, no correction is needed in the cases (a), (b), (a'), (b'). For the other cases, because the stencil is larger for the remeshing function Λ_4, one needs to distinguish several sub-cases depending on the CFL number of the particle $I+2$. These cases are denoted by c_1, c_2, d_1, d_2, c'_1, c'_2, d'_1, d'_2 and are defined as follows. Cases (c_1) and (d_1) (resp (c_2) and (d_2)) correspond to particles I and $I+1$ in the configuration of the case (c) or (d) in Figure 3, and $\lambda_{I+2} \leq N$ (resp $\lambda_{I+2} > N$) where N is the index of the block containing the particle $I+2$. Similarly, cases (c'_1) and (d'_1) (resp (c'_2) and (d'_2)) correspond to particles I and $I+1$ in the configuration of the case (c') or (d') in Figure 4, and $\lambda_{I-1} \leq N$ (respectively $\lambda_{I-1} > N$) where N is the index of the block containing the particle $I-1$. For blocks of size Mh with $M \geq 3$, and time-steps satisfying the condition (13), the corrected remeshing schemes which need to be used for particles $I-1$ to $I+2$ in each of these cases are given in the tables 3 for cases (c) and (d) and 4 for cases (c') and (d'). The proof that these remeshing schemes lead to grid formulas of third order under the condition on the time-step is given in [16]. In this reference these correction formulas are also extended to the case of smaller blocks ($M \geq 1$).

4 Limiting techniques for TVD remeshing formulas

High order remeshing formulas, like any non-dissipative grid-based methods, are likely to produce oscillations wherever the advected quantity undergoes strong variations. In this section we extend the approach of [5] to derive limiting techniques for remeshing formulas in the case when the CFL number is larger than 1.

We restrict here our discussion the case of the 3-points Λ_2 remeshing formula considered in section 3.1. Limiting techniques for the 4th order formulas derived in section 3.2 is studied elsewhere

Grid points	Particles	
	$I-1$	I
$I'-4$	$\alpha(y_{I-1})$	0
$I'-3$	$\beta(y_{I-1})$	$\alpha(y_I)$
$I'-2$	$\gamma(y_{I-1})$	$\beta(y_I)$
$I'-1$	$\delta(y_{I-1})$	$\gamma(y_I)$
I'	$\eta(y_{I-1})-\eta(y_{I-1}-1)$	$(\delta+\eta)(y_I)-(\delta+\eta)(y_I-1)$
$I'+1$	$\eta(y_{I-1}-1)$	$\delta(y_I-1)$
$I'+2$	0	$\eta(y_I-1)$

Grid points	Particles			
	$I+1$		$I+2$	
	Case (c_1) / (c_2)	Case (d_1) / (d_2)	Case (c_1) / (d_1)	Case (c_2) / (d_2)
$I'-2$	$\alpha'(y_{I+1}+1)$	$\alpha(y_{I+1}+1)$	0	0
$I'-1$	$\beta'(y_{I+1})$	$\beta'(y_{I+1})$	$\alpha'(y_{I+2}+1)$	$\alpha(y_{I+2}+1)$
I'	$(\alpha'+\beta')(y_{I+1})$ $-(\alpha'+\beta')(y_{I+1}+1)$	$(\alpha+\beta)(y_{I+1})$ $-(\alpha+\beta)(y_{I+1}+1)$	$\alpha'(y_{I+2})$ $-\alpha'(y_{I+2}+1)$	$\alpha(y_{I+2})$ $-\alpha(y_{I+2}+1)$
$I'+1$	$\gamma'(y_{I+1})$	$\gamma(y_{I+1})$	$\beta'(y_{I+2})$	$\beta(y_{I+2})$
$I'+2$	$\delta'(y_{I+1})$	$\delta(y_{I+1})$	$\gamma'(y_{I+2})$	$\gamma(y_{I+2})$
$I'+3$	$\eta'(y_{I+1})$	$\eta(y_{I+1})$	$\delta'(y_{I+2})$	$\delta(y_{I+2})$
$I'+4$	0	0	$\eta'(y_{I+2})$	$\eta(y_{I+2})$

Table 3: 4th order remeshing weights at the interface between a block of type L and a block of type C. The weights α, β, $\cdots$ are given in (17) and (18). Cases are defined in the text below (18) and in Figure 3 .

Grid points	Particles			
	$I-1$		I	
	Case (c_1') / (d_1')	Case (c_2') / (d_2')	Case (c_1') / (c_2')	Case (d_1') / (d_2')
$I'-3$	$\alpha'(y_{I-1})$	$\alpha(y_{I-1})$	0	0
$I'-2$	$\beta'(y_{I-1})$	$\beta(y_{I-1})$	$\alpha'(y_I)$	$\alpha(y_I)$
$I'-1$	$\gamma'(y_{I-1})$	$\gamma(y_{I-1})$	$\beta'(y_I)$	$\beta(y_I)$
I'	$\delta'(y_{I-1})$ $+\eta'(y_{I-1})$	$\delta(y_{I-1})$ $+\eta' y_{I-1})$	$(\gamma'+\delta'+\eta')(y_I)$ $-\delta'(y_I+1)$	$(\gamma+\delta+\eta)(y_I)$ $-\delta(y_I+1)$
$I'+1$	$\delta'(y_{I+1})$	$\delta(y_{I+1})$	$\gamma'(y_{I+2})$	$\gamma(y_{I+2})$

Grid points	Particles	
	$I+1$	$I+2$
$I'-1$	$\alpha(y_{I+1}-1)$	0
I'	$(\alpha+\beta+\gamma)(y_{I+1})-\alpha(y_{I+1}-1)$	$(\alpha'+\beta')(y_{I+2})$
$I'+1$	$\delta(y_{I+1})$	$\gamma'(y_{I+2})$
$I'+2$	$\eta(y_{I+1})$	$\delta'(y_{I+2})$
$I'+3$	0	$\eta'(y_{I+2})$

Table 4: 4th order remeshing weights at the interface between a block of type C and a block of type L. The cases are illustrated in Figure 3. The weights α, β, $\cdots$ are given in (17) and (18). Cases are defined in the text below (18) and in Figure 4.

[16]. In [5] we derived limiters that were based on the linear first order remeshing scheme. As we have already seen, this scheme is not appropriate when the advection velocity changes sign. To be able to combine limiting techniques to the corrections just derived, we will instead use two different first order formulas based on quadratic splines and using three grid points. The first formula is obtained by taking successive convolutions of the top hat function. This is the formula used in traditional Particle In Cell methods for the so-called TSC (for *Triangular Shape Clouds*) assignment schemes. Following the terminology of [9], we will call M_3 this remeshing technique, with left and right variants as for the Λ_2 formulas. With the same notations as in (11), the weights assigned from a particle to the grids points for the left-M_3 formula are, from left to right

$$\alpha(y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+y)^2 \ , \ \beta(y) = 3/4 - y^2 \ , \ \gamma(y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-y)^2 \ . \tag{19}$$

As for the case of the Λ_2 formulas, the weights corresponding to the right formula are obtained by the formulas

$$\alpha'(y) = \alpha(y-1) \ , \ \beta'(y) = \beta(y-1) \ , \ \gamma'(y) = \gamma(y-1). \tag{20}$$

The center M_3 formula consists of taking the α, β, γ if $y \leq 1/2$ and α', β', γ' otherwise.

For a constant velocity field a, it is readily seen that if $\lambda = a\Delta t/h$ is such that $|\lambda| \leq 1/2$ the center-M_3 remeshing formula (19) is equivalent the following finite-difference scheme

$$u_j^{n+1} = u_j^n(\frac{3}{4}-\lambda^2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\lambda)^2 u_{j-1}^n + (\frac{1}{2}-\lambda)^2 u_{j+1}^n. \tag{21}$$

This scheme can be rewritten as a central finite-difference scheme corrected by an artificial viscosity term:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + (\frac{\lambda^2}{2}+\frac{1}{8})(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \tag{22}$$

From this expression, one can see that this scheme is TVD provided that $\lambda^2 + 1/4 \leq 1$, a condition which is satisfied when $0 \leq \lambda \leq 1/2$.

This calculation actually shows that the center-M_3 remeshing scheme is TVD for any value of the CFL number, and that the left-M_3 scheme is TVD for $\lambda - [\lambda] \leq \sqrt{3/4}$. In the case the center-M_3 scheme, if n is the nearest integer to $a\Delta t/h$, the method can be seen as an exact solution over a time nh/a, a step which is clearly TVD, followed by the above finite difference scheme over a time $\Delta t' = \Delta t - nh/a$. Since $|a\Delta t'/h| \leq 1/2$ this method is TVD. In the case of the left-M_3 scheme, this remeshing scheme is equivalent to the exact solution to the advection equation over a time $\Delta t' = [\lambda h/a]$ followed by the finite-difference scheme (21), over a time-step equal to $\Delta t - \Delta t'$. Since $a(\Delta t - \Delta t') \leq \sqrt{3/4}h$ this scheme is TVD.

In the general case of a varying velocity field, if $|\nu a_j| \leq 1/2$ for all j the finite-difference equation (22) extends in the following way :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu}{2}(a_{j+1}u_{j+1}^n - a_{j-1}u_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(a_{j+1}u_{j+1}^n - 2a_ju_j^n + a_{j-1}u_{j-1}^n) + \frac{1}{8}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (23)$$

This proves that, in all blocks of type C, as defined in the previous section, the center-M_3 scheme is consistent with the advection equation, with a truncation error of the order of $((a^2u)'' + u''/4)h^2/\Delta t$. Similarly, it can be checked that the left-M_3 scheme is consistent in all blocks of type L.

We now show how these first-order remeshing formulas can be used to limit the left and center-Λ_2 schemes devised in the previous section in order to give a TVD remeshing scheme. Let us go back to the case of an advection equation with constant velocity field (note that for a varying velocity field the advection equation in conservation form is not TVD so there is no clear cut criterion to limit oscillations in this case). We recall that the choice of the left or center remeshing schemes is based on the value of $\bar{\lambda}$ as defined in (16) compared to its nearest integer. If we consider the linearized advection equation we thus have two cases to consider for λ, up to the addition of an integer : either $0 \leq \lambda = a\Delta t/h \leq 1/2$, in which case left-formulas are used, or $-1/2 \leq \lambda = a\Delta t/h \leq 0$, in which case the center formulas are used. Let us first consider the case $0 \leq \lambda = a\Delta t/h \leq 1/2$. We proceed like in [5] and write the finite-difference forms of the remeshing formulas in incremental form. The left-Λ_2 scheme is then equivalent to the Lax-Wendroff scheme and can be written as

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^{(2)}\Delta u_{j+1/2}^n - D_{j-1/2}^{(2)}\Delta u_{j-1/2}^n, \quad (24)$$

where we used the classical notation $\Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j$ and the coefficient C and D take the following values:

$$C_{j+1/2}^{(2)} = -\frac{\lambda}{2}(1-\lambda)\ ,\ D_{j-1/2}^{(2)} = \frac{\lambda}{2}(1+\lambda).$$

Similarly, the left-M_3 remeshing scheme yields the following incremental form

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^{(1)}\Delta u_{j+1/2}^n - D_{j-1/2}^{(1)}\Delta u_{j-1/2}^n, \quad (25)$$

where :

$$C_{j+1/2}^{(1)} = \frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{2})^2\ ,\ D_{j-1/2}^{(1)} = \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{2})^2.$$

We thus have

$$C_{j+1/2}^{(2)} = C_{j+1/2}^{(1)} - \frac{1}{8}\ ,\ D_{j-1/2}^{(2)} = D_{j-1/2}^{(1)} - \frac{1}{8}.$$

Following the approach of [14] we now look for a limiter of the Λ_2 formula by the M_3 formula under the form:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + (C_{j+1/2}^{(1)} - \frac{\phi_{j+1/2}}{8})\Delta u_{j+1/2}^n - (D_{j-1/2}^{(1)} - \frac{\phi_{j-1/2}}{8})\Delta u_{j-1/2}^n \\ &= u_j^n + \frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{2})^2 \Delta u_{j+1/2}^n - \Delta u_{j-1/2}^n \left[\frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{\phi_{j-1/2}}{8} - \frac{\phi_{j+1/2}}{8r_{j+1/2}}\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

In the above equation we have set $r_{j+1/2} = \Delta u_{j-1/2}^n / \Delta u_{j+1/2}^n$ and $\phi_{j+1/2} = \phi(r_{j+1/2})$, where ϕ is the limiter function to be determined. Equation (26) defines a TVD scheme provided the following conditions are satisfied [14]:

$$\phi \geq 0 \ , \ \phi(r) = 0 \text{ if } r \leq 0, \text{ and } |\phi(s) - \phi(r)/r| \leq \Phi$$

where the constant Φ is such that the coefficients of $\Delta u_{j\pm1/2}^n$ in (26) are positive and have a sum less than or equal to 1. This yields the following conditions: :

$$\frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{\Phi}{8} \geq 0$$

and

$$\frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{\Phi}{8} = \lambda^2 + \frac{1}{4} + \frac{\Phi}{8} \leq 1.$$

If $0 \leq \lambda = a\Delta t/h \leq 1/2$, these conditions are satisfied as soon as $\Phi \leq 1$. One may then use the classical limiter formulas to derive eligible function ϕ. For a given limiter choice, the finite difference formula becomes:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = \ & u_j^n + \left[\frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{2})^2 - \frac{\phi_{j+1/2}}{8r_{j+1/2}}\right] \Delta u_{j+1/2}^n - \left[\frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{\phi_{j-1/2}}{8}\right] \Delta u_{j-1/2}^n \\ = \ & u_j^n + \left[\frac{3}{4} - \lambda^2 + \frac{\phi_{j+1/2} + \phi_{j-1/2}}{8}\right] \\ & + u_{j-1}^n \left[\frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{\phi_{j-1/2}}{8}\right] + u_{j+1}^n \left[\frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{2})^2 - \frac{\phi_{j+1/2}}{8}\right]. \end{aligned} \tag{27}$$

This scheme can in turn be interpreted as a particle scheme using a left remeshing formula. Using the same notations as in (10), (19), it is readily seen that for a given particle j the weights α, β, γ assigned to the grid points $i-1$, i, $i+1$ are given by the formula:

$$\alpha(y) = \frac{3}{4} - y^2 + \frac{\phi_{j+1/2} + \phi_{j-1/2}}{8} \ , \ \beta(y) = \frac{1}{2}(y + \frac{1}{2})^2 - \frac{\phi_{j+1/2}}{8} \ , \ \gamma(y) = \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2})^2 - \frac{\phi_{j-1/2}}{8}. \tag{28}$$

As expected, one recovers for $\phi = 1$ the left-Λ_2 scheme, and, for $\phi = 0$, the left-M_3 scheme.

Let us now consider the case $-1/2 \leq \lambda = a\Delta t/h \leq 0$. Proceeding as before, we can write the center-Λ_2 scheme, limited by the center-M_3 scheme in the following incremental form:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{2})^2 \Delta u_{j-1/2}^n + \Delta u_{j+1/2}^n \left[\frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{2})^2 - \frac{\psi_{j+1/2}}{8} + \frac{\psi_{j-1/2}}{8\tilde{r}_{j-1/2}}\right]. \tag{29}$$

where $\tilde{r}_{j-1/2} = \Delta u_{j+1/2}^n / \Delta u_{j-1/2}^n$ and $\psi_{j+1/2} = \psi(\tilde{r}_{j+1/2})$. The conditions on ψ to enforce the TVD property of the finite-difference scheme are similar to those found above for ϕ, namely:

$$\psi \geq 0 \ , \ \psi(r) = 0 \text{ if } r \leq 0, \text{ and } |\psi(s) - \psi(r)/r| \leq 1.$$

The incremental formula (29) can then be turned into the following remeshing weights:

$$\alpha'(y) = \frac{1}{2}(y-\frac{3}{2})^2 - \frac{\psi_{j-1/2}}{8}\ ,\ \beta'(y) = \frac{3}{4} - (y-1)^2 + \frac{\psi_{j+1/2}+\psi_{j-1/2}}{8}\ ,\ \gamma'(y) = \frac{1}{2}(y-\frac{1}{2})^2 - \frac{\psi_{j+1/2}}{8}. \tag{30}$$

Note that the upwinding direction only appears in the choice of the slopes in the formulas giving ϕ (for positive velocities) and ψ (for negative velocities).

5 Extension to higher dimension

Particle remeshing in dimension higher than one is in general performed by formulas that are tensor products of 1D formulas. However, the correction and limiters that we have just derived do not extend to tensor product formulas. It is therefore necessary to adopt the viewpoint of directional splitting to deal with multi-dimensional problems. Using 1D remeshing formulas saves computational time compared to the traditional tensor-product approach (for instance, for the 5 points Λ_4 remeshing, in 3D the cost will be of the order of $O(15N)$ instead of $O(125N)$ if N is the number of particles) but makes the derivation of high order time-stepping schemes less straightforward.

In the context of particle methods, splitting can be envisioned in two different ways. The first option is to follow the classical Strang splitting method, which alternates advection equation in all directions. In this case, one has to successively push then remesh particles along each axis. If second order is desired, one has to alternate directions over half time-steps. In case a second order Runge-Kutta scheme is used to advect particles, in 2 dimensions one time-step push-and-remesh second order time stepping can be sketched as follows:

Advection along 1st direction for $\Delta t/2$

- Evaluation of velocities by mid-point rule : $\widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p + \mathbf{a}_1(\mathbf{x}_p)\Delta t/4$, then $\widetilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1(\widetilde{\mathbf{x}}_p)$
- Advection of particles along 1st axis: $\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_1\Delta t/2$
- 1D particle remeshing along 1st axis: $(\mathbf{x_i}, u_i) \leftarrow (\mathbf{x}_p, u_p)$

Advection along 2nd direction for Δt

- Evaluation of velocities by mid-point rule : $\widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p + \mathbf{a}_2(x_p)\Delta t/2$, then $\widetilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2(\tilde{x}_p)$
- Advection of particles along 2nd axis: $\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_2\Delta t$
- 1D particle remeshing along 2nd axis

Advection along 1st direction for $\Delta t/2$ $\cdots$

In the above description, the velocity a_1, a_2 are the components of the velocity field $\mathbf{a}$, and, by extension, we also denote by $\mathbf{a}_1$ the velocity field $(a_1, 0)$.

The second option is specific to particle methods. Assume again we choose a second order Runge-Kutta method for the particle advection. This means that at the beginning of a time-step one has

available a velocity field which allows to advect particles with accuracy $O(\Delta t^2)$. Of course one obtains the same output by advecting particles successively along each axis with the corresponding velocity component. If remeshing takes place after advection in each direction, one can obtain the same accuracy in time provided some care is taken on the velocity values used after remeshing in the first direction. Instead of the local velocity on the grid points, one needs to track back the proper velocity. More precisely, the algorithm at time $t_n = n\Delta t$ is as follows:

Computation of velocity first component by a RK2 scheme

$$\text{Advection of particles in 2D for } \Delta t/2 \;:\; \widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p + \mathbf{a}(\mathbf{x}_p, t_n)\Delta t/2 \tag{31}$$

$$\text{Velocity evaluation by mid-point rule} \;:\; \widetilde{\mathbf{a}}_1(\mathbf{x}_p) = \mathbf{a}_1(\widetilde{\mathbf{x}}_p, t_n + \Delta t/2) \tag{32}$$

Push and remesh along 1st direction for Δt

$$\text{Advection of particles along 1st axis} : \mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_1(\mathbf{x}_p)\Delta t \tag{33}$$

$$\text{1D Particle remeshing along first axis} \tag{34}$$

Computation of velocity second component by a RK2 scheme

$$\text{Advection of particles in 2D for } \Delta t/2 \;:\; \widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p + (-a_1(\mathbf{x}_p, t_n)\Delta t/2, a_2(\mathbf{x}_p, t_n)\Delta t/2) \tag{35}$$

$$\text{Velocity evaluation by mid-point rule} \;:\; \widetilde{\mathbf{a}}_2(\mathbf{x}_p) = \mathbf{a}_2(\widetilde{\mathbf{x}}_p, t_n + \Delta t/2) \tag{36}$$

Push and remesh along 2nd direction for Δt

$$\text{Advection of particles along 2nd axis} : \mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_2(\mathbf{x}_p)\Delta t \tag{37}$$

$$\text{1D Particle remeshing along second axis.} \tag{38}$$

The reason for choosing the velocity field $\widetilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2(\widetilde{\mathbf{x}}_p)$, where $\widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p + (-a_1\Delta t/2, a_2\Delta t/2)$ in (35), can be best understood in the case when a given particle moves exactly to the next grid point after advection along the first axis. In this case, remeshing does not change its weights and this particle should next move along the second axis with the RK2 velocity computed at the beginning of the time-step. It is not difficult to realize that $\widetilde{\mathbf{a}}_2$ is a second order approximation of this velocity. The extension to 3D of this scheme is straightforward: one just has to add a push-and-remsh step in the third direction, with velocities evaluated on particles $\widetilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p + (-a_1\Delta t/2, -a_2\Delta t/2, a_3\Delta t/2)$.

This scheme only requires two remeshing formulas - one in each direction, instead of 3 for the first option, so it is mode economical if velocity values are known analytically.

The extension to third order goes along the following lines :

Push and remesh along 1st direction for Δt

- Computation of velocity:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(1)}(\mathbf{x}_p) = \;& \mathbf{a}\left[\mathbf{x}_p + (\tfrac{2}{3}\,\Delta t\, a_1(\mathbf{x}_p), \tfrac{2}{3}\,\Delta t\, a_2(\mathbf{x}_p)\right] \\ \widetilde{a}_1(\mathbf{x}_p) = \;& -a_1(\mathbf{x}_p) + \tfrac{3}{4}\, a_1^{(1)}(\mathbf{x}_p) + a_1\left[\mathbf{x}_p + \tfrac{\Delta t}{4}(-a_1(\mathbf{x}_p) + a_1^{(1)}(\mathbf{x}_p), 0)\right] \\ & + \tfrac{1}{4}\, a_1\left[\mathbf{x}_p - \Delta t(0,\, a_2(\mathbf{x}_p) + a_2^{(1)}(\mathbf{x}_p)\right] \end{aligned} \tag{39}$$

- Advection of particles along 1st axis : $\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_1 \Delta t$
- 1D Particle remeshing

Push and remesh along 2nd axis for Δt

- Computation of velocity:

$$\begin{aligned} a_1^{(1)}(\mathbf{x}_p) = \quad & a_1\left[\mathbf{x}_p + (-\tfrac{1}{6}\,\Delta t\, a_1(\mathbf{x}_p), \tfrac{1}{3}\,\Delta t\, a_2(\mathbf{x}_p)\right] \\ a_2^{(1)}(\mathbf{x}_p) = \quad & a_2\left[\mathbf{x}_p + (-\tfrac{2}{3}\,\Delta t\, a_1(\mathbf{x}_p), \tfrac{1}{3}\,\Delta t\, a_2(\mathbf{x}_p)\right] \\ \widetilde{a}_2(\mathbf{x}_p) = \quad & -a_2(\mathbf{x}_p) + \tfrac{3}{4}\, a_2^{(1)}(\mathbf{x}_p) + a_2\left[\mathbf{x}_p + \Delta t(a_1(\mathbf{x}_p) - a_1^{(1)}(\mathbf{x}_p), 0)\right] \\ & +\tfrac{1}{4}\, a_2\left[\mathbf{x}_p - \Delta t(0,\, a_2(\mathbf{x}_p) + 2a_2^{(1)}(\mathbf{x}_p)\right] \end{aligned} \tag{40}$$

- Advection of particles along 2nd axis : $\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_p + \widetilde{\mathbf{a}}_2 \Delta t$
- 1D Particle remeshing.

The numerical analysis of the above splitting methods are given in [16].

To conclude this section, let us give some remarks on the overall algorithm. For a 2D or 3D simulation, whatever time-splitting strategy is chosen, the algorithm proceeds by alternating advection-remeshing steps in successive direction. For an advection-remeshing step in a given direction, one proceeds line by line. On each line, particles with a strength beyond a certain threshold are created and sorted in blocks. Then one determines, on the basis of the time step and the local velocity of particles in each blocks, the types (L or C) and the indices of the blocks. Particles at the interface of blocks of different type and indices are tagged, together, for the corrected Λ_4 scheme, with the next particles on the left and on the right. Finally untagged particles are remeshed by regular remeshing kernels, and tagged particles with the corrected formulas. For the schemes with TVD limiters, slopes are determined when particles are created, and then incorporated in the Λ_2 remeshing formulas.

Concerning the corrected Λ_2 remeshing formulas, one may observe that one goes from case (c) to case (d) by changing, for the particle $I+1$, the weights α, β, γ into α', β', γ', or equivalently using the distance of the particle under consideration to the nearest grid point instead of the nearest grid point on the left. The same observation ca be made for the particle I in cases (c') and (d'). In the case of the corrected Λ_4 this observation is also valid to go from cases (c_1) or (d_1) to (c_2) or (d_2) for particle $I+2$, and from cases (c_1') or (d_1') to (c_2') or (d_2') for particle $I-1$. In practice this means that in the actual algorithm for the corrected Λ_2 or Λ_4 formulas, only two type of formulas have to be implemented. Overall, in a 3D code, the correction formulas concern only a portion of the particles and have therefore a marginal cost. The algorithm for sorting and tagging particles takes about the same amount of CPU time as the 3 line-by-line one-dimensional remeshing algorithms.

6 Numerical illustrations

In all the experiments below we have taken blocks of size $M = 1$ for the second order Λ_2 remeshing schemes, and $M = 3$ for the 4th order Λ_4 remeshing scheme.

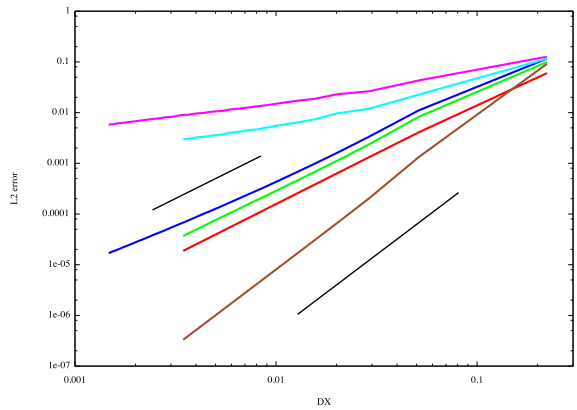


Figure 5: Refinement study for the case of a smooth blob rotating in an incompressible flow. Remeshing by (from top to bottom) : uncorrected Λ_2 (pink), uncorrected Λ_6 (magenta), M_4' (blue), corrected Λ_2 (green), uncorrected Λ_2 (red) and corrected Λ_4 (brown). Except for the red curve, all cases used a CFL number of 3. For the red curve, the uncorrected Λ_2 remeshing was used with CFL number 0.4. All cases used a RK2 particle pusher and a second order time-splitting, except for the Λ_4 and Λ_6 cases which used a third Runge-Kutta and time-splitting. Black lines correspond to second and third order convergence rates.

6.1 Convergence study in 2D flows

To illustrate the correction formulas given in section 3 and the time-stepping schemes in section 4, we first consider the case of 2D flows. Our first example is a smooth axisymmetric blob u advected by an incompressible rotating field a:

$$u(x,y) = \max(0,(1.-(x^2+y^2))^6) \ \ , \ \ a(x,y) = \cos(3\pi\sqrt{x^2+y^2})(y,-x) \tag{41}$$

The solution to this problem is stationary. In Figure 5 we show the relative L^2 error for increasing resolution for several remeshing schemes and CFL numbers at $t = 0.8$. The remeshing schemes are the original and corrected Λ_2 schemes, the nominally 6th order Λ_6 scheme, and the corrected Λ_4 scheme. We also consider the case of the M_4' remeshing formula (9). For the time advancement of particles we chose in all cases a classical RK3 scheme. Second order methods were used in combination with the second order time splitting method (31)-(37), and higher order methods were used with the third order time splitting method (39)-(40). As expected, the plain Λ_2 formula gives second order accuracy for CFL numbers smaller that 0.5. For larger CFL numbers (3 in this experiment) it is barely convergent. The higher order Λ_6 remeshing formula fails to converge with the expected accuracy. On the contrary the corrected second order formula gives almost second order accuracy, and the corrected 4th order formula, in combination with third order splitting and particle time-stepping yields the desired 3rd order accuracy. One may also observe that in this test case the M_4' formula also exhibits second order convergence. We next consider the case of the advection of a smooth ring in an expanding velocity field. The computational box is the square $[-2,+2]^2$. The initial condition is the C^2 axisymmetric function with value 0 for $r \leq 0.4$ or $r \geq 1$, value 1 for $0.6 \leq r \leq 0.8$ and polynomial of degree 5 for $0.4 \leq r \leq 0.6$ and $0.8 \leq r \leq 1$. The velocity field is

$$\mathbf{a}(x,y) = (x/r, y/r) \tag{42}$$

Figure 6 shows a 3D view of the solution at time $t = 0.8$ for $h = 0.01$ and CFL number equal to 6, for the M_4' formula, and the corrected Λ_2 and Λ_4 formulas. One can see that the M_4' schemes generate oscillations along radii that correspond to variations of the local CFL number. Oscillations created by the original Λ_2 scheme (not shown) are even larger. The corrected Λ_2 and Λ_4 formulas avoid theses oscillations. One can also notice the effects of the first order corrections in the corrected Λ_2 formula.

The bottom-right picture in Figure 6 is a convergence study in the L^∞ norm for the same test, which illustrates the gain in accuracy of the corrected formulas.

6.2 Illustrations in incompressible 3D flows

Interface capturing is an important particular case where transport equations need to be solved with high accuracy. We first consider here the classical test case of a sphere advected in a shear flow proposed in [18]. The computations are done in a unit cubic box.The sphere is initially centered at the point of coordinates $(0.5, 0.5, 0.5)$ and its radius is 0.15. In Figure 7 we compare the particle method using the corrected Λ_4 scheme and a second order time splitting, with several similar recent experiments in the literature where lagrangian markers are used to complement grid-based methods: the particle level set method [12] and the volume of fluid method [25]. To compare with [12, 25] we have first considered the following velocity field

$$\begin{cases} u(x,y,z,t) & = 2f(t)\,\sin^2(\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z), \\ v(x,y,z,t) & = -f(t)\,\sin(2\pi x)\sin^2(\pi y)\sin(2\pi z), \\ w(x,y,z,t) & = -f(t)\,\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin^2(\pi z) \end{cases} \tag{43}$$

with $f(t) = \cos(\pi t/T)$, $T = 3$. Figure 7 shows the interface at time $t = T/2$ when the flow distortion is maximum. In the top left picture, we show the results of [12]. In this method, 5th order finite-difference weno scheme is used to advance and reinitialize the level set equation. The method uses 100 grid points in each direction, supplemented by 4 particles per grid-size in each direction to improve the accuracy at the interface. The time-step value is not mentioned in the reference, but the CFL number, related to the finite-difference grid spacing is presumably of the order of 1. The top right picture shows the results of [25]. In this reference a Volume of Fluid method is used on a 64^3 grid, and complemented with nine markers per cell, and the CFL number was 0.1. On the bottom left picture we use the particle method with the corrected Λ_4 remeshing formula on a grid using 100 points in each direction. The CFL number resulting from (13) is 8. The VOF and the particle method discretize a color function, with value 1 inside the sphere and 0 outside. The particle level set method of [12] captures a distance function to the surface of the sphere. The bottom-right picture corresponds to the same simulation on a grid using 160 points with a CFL number equal to 12. The three first results agree rather well. However the particle method uses significantly less particles than in [12] and the time step is larger. Our number of particles is comparable to that in [25] but our time step is significantly larger. The higher resolution case is shown to illustrate the resolution necessary to prevent the lack of connectivity of the surface. In all our experiments particles carrying a value smaller than 10^{-4} were discarded. In the higher resolution case, the number of particles started at $63,000$ and reached $345,000$. The total mass was conserved up to 0.04%. A complete run takes about 30 seconds for 40 iterations on a MacInstosh laptop running a 3.06 GhZ intel processor. Note that, if in interface capturing applications one

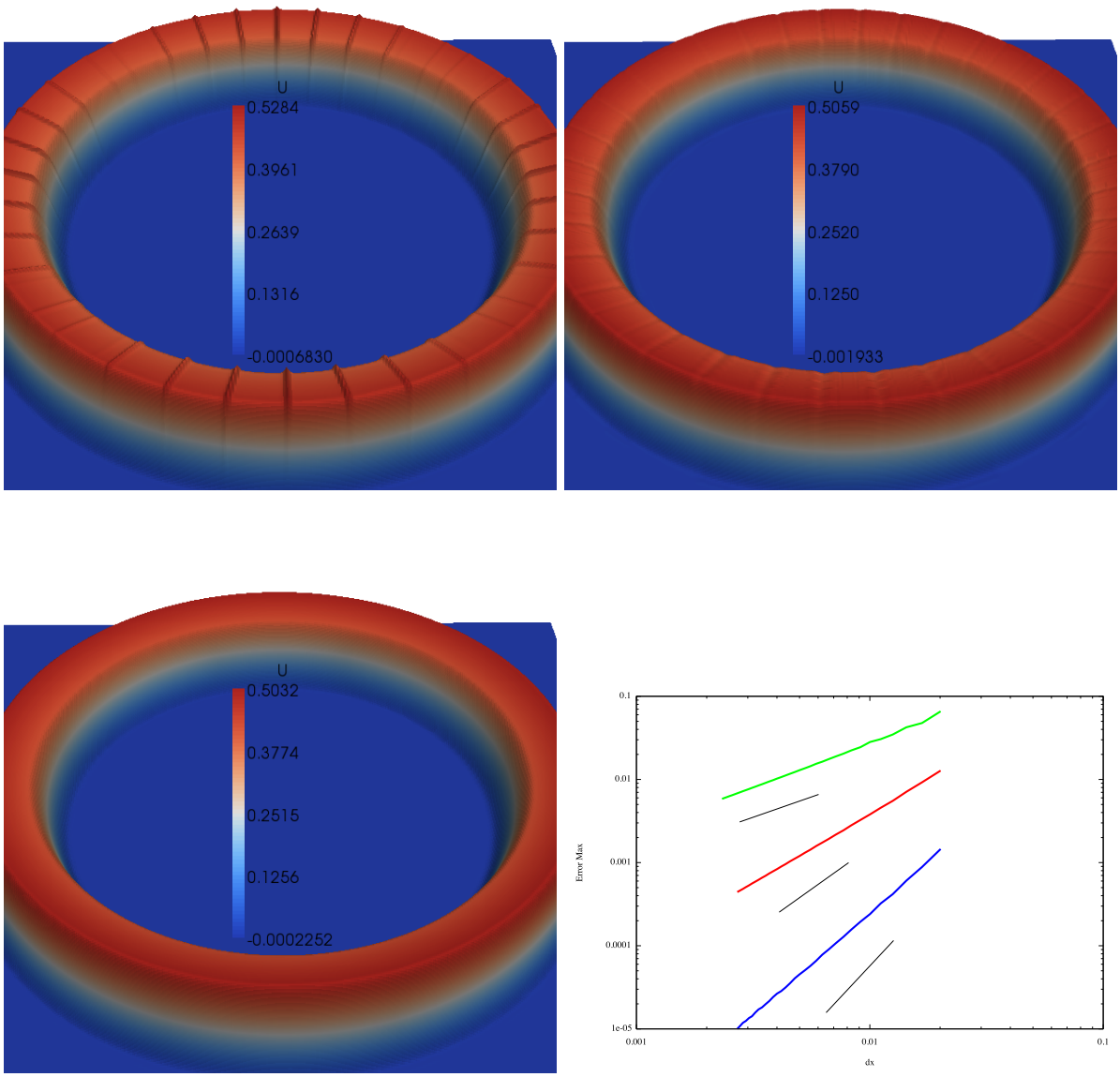


Figure 6: Advection of a smooth axisymmetric function with a radial velocity fieldd (42). Top-left M_4' remeshing scheme with second order time-splitting. Top-right corrected Λ_2 with second order time-splitting. Bottom left : corrected Λ_4 with second-order time-splitting. $N = 400$ and $CFL = 6$. Bottom-right convergence study in the maximum error norm for the M_4' (green curve), Λ_2 (red curve), and Λ_4 (blue curve) for a CFL number equal to 3. The lines corresponding to first, second order and third order convergence.

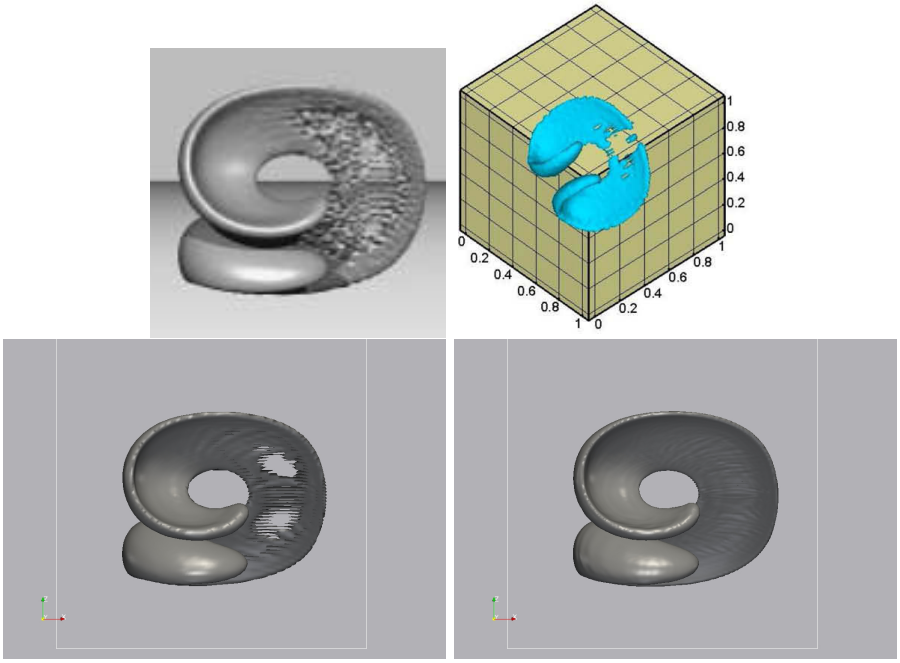


Figure 7: Sphere advected in a shear flow (43). Top-left : [12] with $N = 100$ grid points complemented with 4 particles per grid-size in each direction around the interface. Top-right : [25], $N = 64$ and 9 particles per grid-cell, $CFL = 0.1$. Bottom : present 4th order method with $N = 100$ and $CFL = 8$ (left picture), $N = 160$ and $CFL = 12$ (right picture).

is only interested in contours for levels above 0.5, one may choose a higher cut-off level without changing the results. Taking a value of 0.025 like in [15] divides the final number of particle by a factor about 2, with of course a further reduction in the CPU cost.

For this particular experiment, very similar results are obtained with the same CFL condition by the classical M_4' remeshing scheme that was used in [15]. A more quantitative comparison with other methods can be obtained by looking at the volume contained inside isosurfaces of different values. Ideally all these volumes should give the same constant value, equal to the volume of the sphere. In Figure 8 we show the values obtained by the M_4' and the corrected Λ_4 remeshing schemes, for the isosurfaces corresponding to the levels 0.5 and 0.75. The grid uses 100 points in each direction and the CFL number is equal to 8 in both cases. For this experiment we do not modulate the value of the velocity (in other words we take $f(t) = 1$ in (43)) and we run for longer times. This experiment shows the increased accuracy obtained by the Λ_4 scheme. One can observe in passing that in the previous experiment the solution at the time of maximum strain $T/2$ is equivalent to the one obtain here at time $t = T/\pi < 1$. At this time for the iso-surface 0.5 both remeshing methods gives similar volumes for the isosurface 0.5, with an error less than 1%. In passing we notice that this case is most challenging without modulating the velocity field on times larger than 1.

Our next experiment is of a more qualitative nature but shows the potential and limitation of the present methods. This experiment concerns the transport of a scalar in a turbulent plane jet. The jet is computed by the vortex in cell method using the M_4' remeshing scheme [7], in a periodic

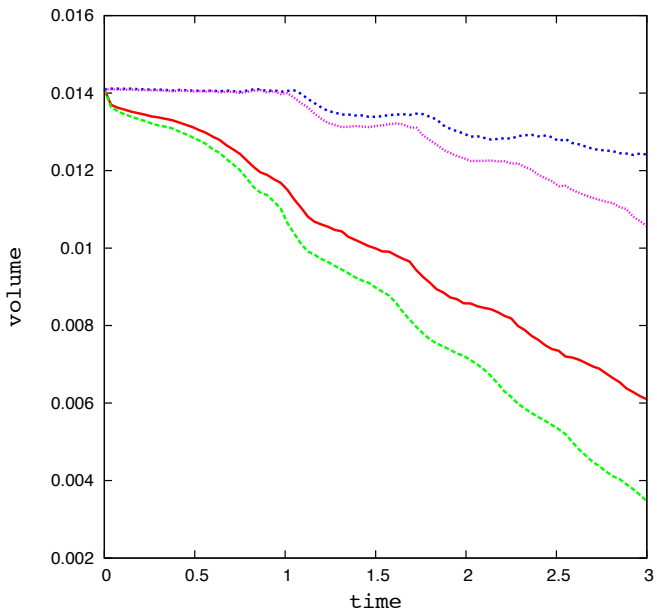


Figure 8: Sphere advected in a shear flow (43). Volumes contained inside the 0.5 (top curves) and 0.75 (bottom curves) contours for the M_4' (magenta and green curves) and the fourth order remeshing scheme (blue and red curves). In both cases $N = 100$ and the CFL number is equal to 8.

box of size 1 using 128^3 grid points. The scalar is advected by the velocity field obtained from the vortex method, filtered on a 32^3 grid. The goal of such experiment, following the idea of [8], is to explore the possibility to use particle methods at a sub-grid resolution in a flow LES to resolve small scales of the scalar.

More precisely, the initial condition is as follows. In the unit box $[0,1]^3$, the initial vorticity is given by $\omega(x,y,z) = \nabla \times \mathbf{u}(x,y,z) + rand(x,y,z)$ where

$$u_x(x,y,z) = (1 + \tanh(y')(1 + \lambda \sin 8\pi x)/2, \quad u_y = u_z = 0 \tag{44}$$

where $rand$ is a random perturbation of magnitude 0.05, $\lambda = 0.3$, $y' = (|y - 0.5| - w/2)\eta$, $\eta = 0.02$ and $w = 0.1$. The advected scalar is initialized with the same profile as u_x.
The scalar is discretized by particles remeshed on a 256^3 uniform grid. The Reynolds number, based on the jet width w, is equal to 10^3 and the Schmidt number, ratio of the scalar diffusivity and flow viscosity is equal to 10. In this experiment we use the corrected Λ_4 remeshing scheme, a classical second-order alternate direction Strang time-splitting for the scalar advection and a second order Runge Kutta time-stepping for the particle motion. The time-step is adapted at every time-step to the flow conditions to satisfy the upper bound of the condition (13) with $M = 3$.

The left picture of figure 9 shows the time evolution of the enstrophy, the time step for the scalar advection and the percentage of particles where corrections are implemented in the remeshing formula. The scalar time-step is expressed as a CFL number related to the maximal flow velocity and the scalar grid-size $h = 1/256$. One can observe that in a first stage, when the jet is laminar, the scalar time-step corresponds to CFL number of the order of 10 to 20. When the flow evolves

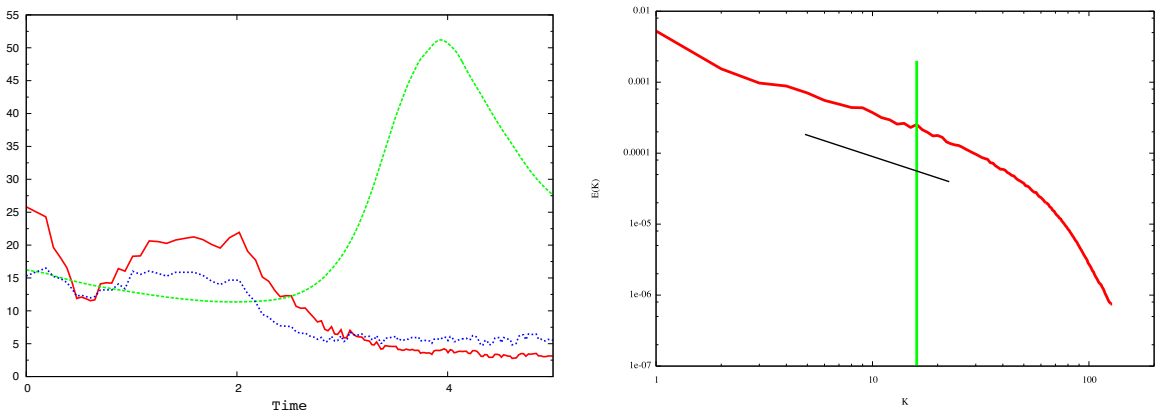


Figure 9: Scalar transport in a plane jet using a filtered 32^3 velocity field and a scalar discretization on 256^3 points. Left picture : time evolution of the enstrophy (green curve), CFL number (red curve) and percentage of particles using correction formulas in Λ_4 remeshing. Right picture: three-dimensional scalar spectrum at time $t = 4.5$ (red curve). Black line : k^{-1} slope, green line : velocity cut-off wave number. The jet initial condition is given in (44)

to a turbulent stage, something which is correlated to a rapid enstrophy increase, the CFL number decreases to 3-4. Figure 10 shows the scalar contours in a top and side views through the middle of the jet. The 3D scalar spectrum at time $t = 4.5$ is shown on the right picture of Figure 9. It exhibits a k^{-1}decay beyond the cut-off scale corresponding to the flow velocity. This test illustrates the capabilities of the method to allow very fine resolution of advected scalar without the need to reduce the time-step at a prohibitive value. However, when the advection field becomes turbulent the advantage of particle methods over more classical grid-based schemes is less clear. In that case, to take full advantage of the Lagrangian nature of particle methods, it is advisable to adapt locally the time-step, a possibility that was used in [1] but was not yet tested in the context of non-oscillatory formulas, independently of the local grid refinement.

6.3 Results for remeshing formulas with limiters

We now give numerical illustrations of the limiters that we have derived in section 4 for the Λ_2 remeshing formula. In one dimension, it of course does not make sense to consider the usual constant velocity case : in this case, as predicted by the condition (13), it is not necessary to remesh particles, and particle methods give the exact solution. We instead consider the case of the advection of a discontinuous function in a deformation field. The computational domain is the interval $[-1, +1]$. The scalar is at time $t = 0$ a double top hat function and the velocity field a is a periodic sinusoidal wave:

$$u_0(x) = 1 \text{ if } x \in [-0.3, -0.1] \bigcup [0.1, 0.3] \text{ , } 0 \text{ elsewhere,} \tag{45}$$

$$a(x) = 1 + \sin(\pi\, x)/2. \tag{46}$$

This velocity field results in a translation to the right together with alternating increase and decrease of the solution. The solution is time periodic with a period given by $T = 4/\sqrt{3}$. In the top picture

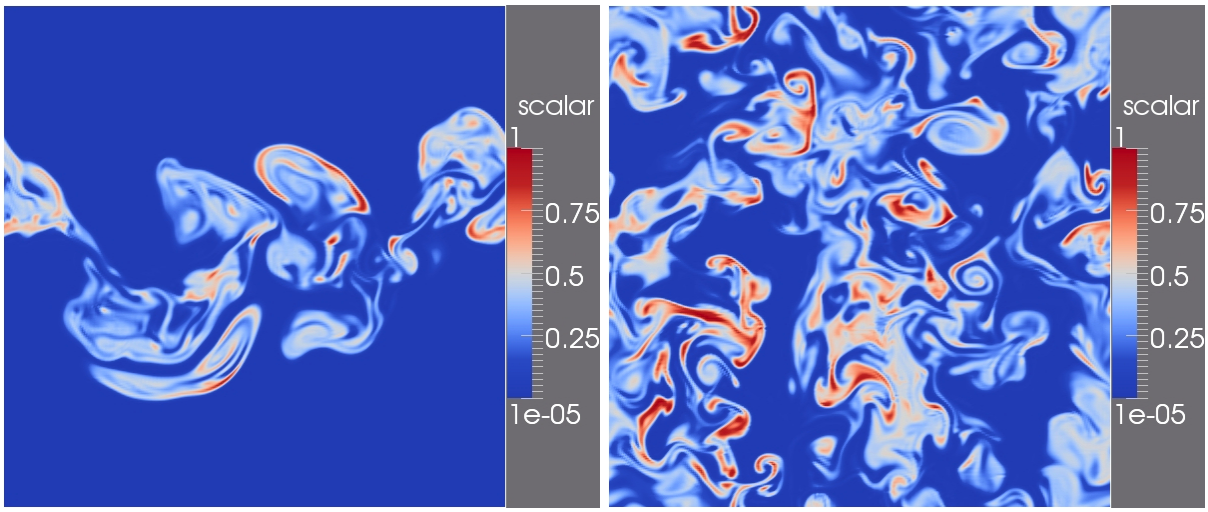


Figure 10: Side and top view of scalar contours at $t = 4.5$ for the jet (44).

of Figure 11 we compare the solution obtained by the limited Λ_2 scheme with the solution obtained by a 5th order Weno scheme using a Lax-Friedrichs flux and a RK3 time-stepping. In both cases we take $h = 0.005$. The particle method uses a Van Leer limiter and the CFL number is equal to 12. For the Weno scheme the CFL number is equal to 2. The bottom-left picture of this figure shows a comparison of these 2 methods after 3 turns. One can see that the particle method resolves better the sharp variations of the solution, although it is only second order and uses a time-step 6 times larger. Finally the bottom-left picture is a comparison of our method with the result of a particle method using the same number of points, the same CFL number and the M_4' remeshing formula. One can see that the M_4' formula gives acceptable results for the location of the discontinuities, but produces overshoots and oscillations of the order of 10% of the maximum value of the solution. Finally the bottom-right picture of this figure shows the result of our method when a CFL number of 0.5 is used. In this case, no correction is implemented for the remeshing formula, but the limitation introduces a large amount of diffusion. This is not surprising, since, for this value of the CFL number, the particle method with Λ_2 remeshing reduces to a plain second order finite-difference scheme with first-order correction. This case is interesting in showing that using high CFL numbers is important, not only because it reduces the computational cost but also because, by taking advantage that particle methods give the exact solution when the advection field is constant, it reduces numerical diffusion.

Our last illustration is the ring in a radial velocity field already considered, but with an initial condition which is 1 inside the ring, 0 outside. For this case, we compare our second order corrected and limited Λ_2 scheme with the M_4' remeshing scheme. In both case we use a grid with $h = 0.01$ and a CFL number equal to 10. In Figure 12 one can see that the M_4' scheme produces oscillations near the discontinuities, in additions to those already seen in the smooth zone of the solution. The corrected and limited Λ_2 scheme avoids these oscillations.

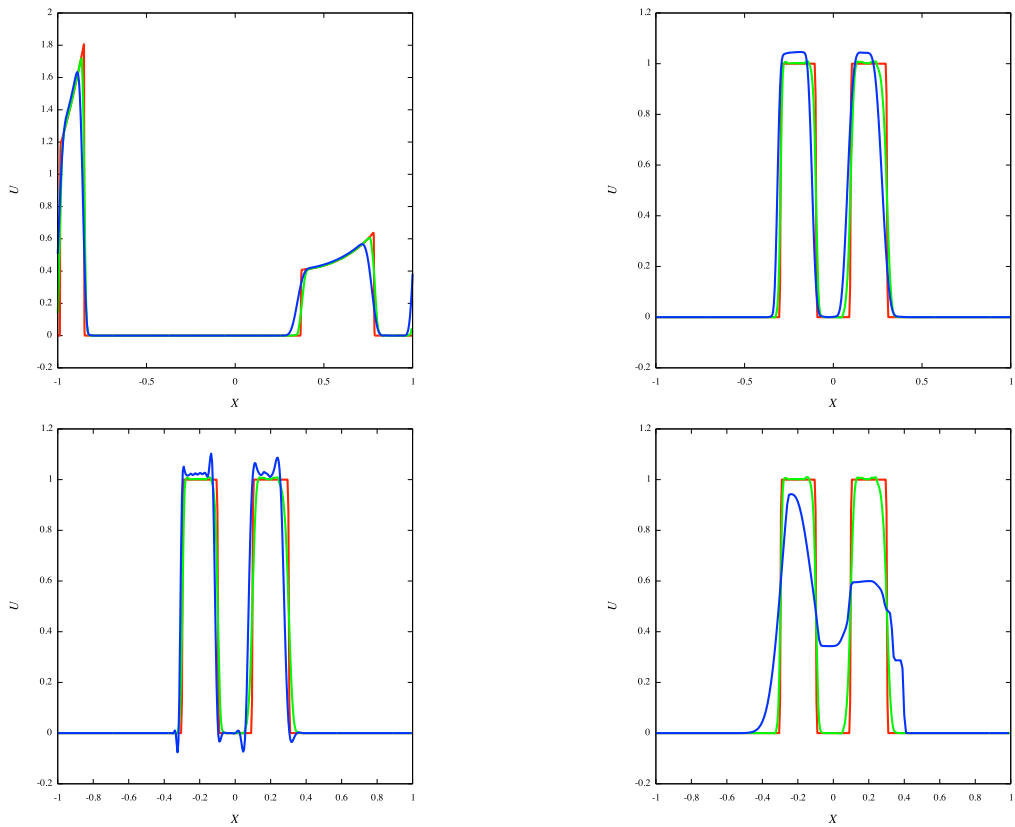


Figure 11: Discontinuous profile (45) in a deformation field (46). Top pictures: Comparisons of particle methods with second order remeshing and TVD limiter at CFL12 (green curves) to the exact solution (red curve) and to a 5th order Weno scheme at CFL 2 (blue curve). Solution shown at $t = 3$ (top-left) and t=6.926 $= 3T$ (top-right). Bottom picture : comparison at time $t = 3T$ with results of the M_4' remeshing scheme at CFL 12 (blue curve, bottom-left) and to second order TVD remeshing at CFL 0.5. In all cases $h = 0.005$.

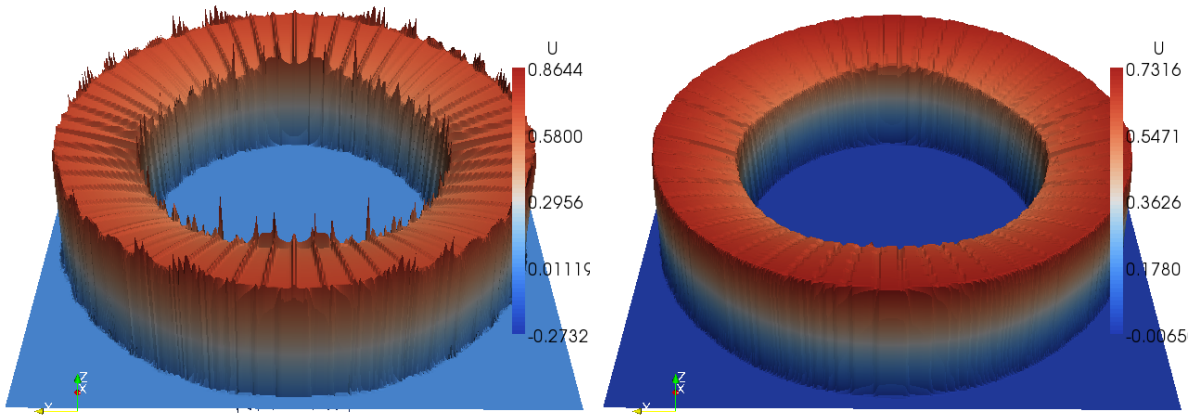


Figure 12: Same as top pictures in Figure 6 with top hat profile inside the ring.

7 Conclusion

In this paper we have analyzed remeshing formulas, when they are used at every time-step in particle methods, in a grid-based framework. We have derived, for second order and fourth order remeshing interpolation kernels, correction formulas to ensure the consistency of the resulting grid schemes when the CFL number varies from one particle to the next. In addition we have shown that the grid-based analysis enables the implementation of TVD limiters in remeshing formulas. This analysis yields rigorous bounds for the time step, or remesh frequency, to be used in remeshed particle methods. The accuracy of the resulting methods have been demonstrated in several examples. The results in particular show that the efficiency of the method, both in terms of computational cost and accuracy, is very much related to the possibility to use large time-steps only limited by the local flow strain.

Ongoing works include the implementation of these new remeshing schemes in AMR based particle methods and their applications in high resolution simulations of scalar transport in turbulent flows.

Acknowledgment

Part of this work was completed while the second author was visiting the Institute of Computational Science at ETH Zurich. He is grateful for the hospitality of P. Koumoutsakos and the stimulating discussions in his group during his stay.

Appendix

We prove here that the remeshing formulas defined in Table 2 are consistent in the cases (c') and (d'). We first consider the case (c'). We set $\lambda_i = a(x_i)\Delta t/h$, $\alpha_I = \alpha(y_I)$ and similar notations for the other remeshing weights and indices.. Let us first assume $\lambda_{I-1} \leq 0$.

At the grid point I we obtain after remeshing the following value at time t_{n+1}:

$$u'_I = \gamma'_{I-1}u_{I-1} + (\beta'_I + \gamma'_I)u_I + (\alpha_{I+1} + \beta_{I+1})u_{I+1} + \alpha_{I+2}u_{I+2}. \tag{47}$$

We next evaluate the weights by the formulas (10), (11) and observe that $y_{I-1} = 1 + \lambda_{I-1}$, $y_I = 1 + \lambda_I$, $y_{I+1} = 1 + \lambda_{I+1}$, $y_{I+2} = 1 + \lambda_{I+2}$. After some elementary calculations we obtain

$$u'_I = \frac{\lambda_{I-1}}{2}(\lambda_{I-1}+1)u_{I-1} + (1 - \frac{\lambda_I}{2}(\lambda_I - 1))u_I - \frac{\lambda_{I+1}}{2}(\lambda_{I+1}+3)u_{I+1} + \frac{\lambda_{I+2}}{2}(\lambda_{I+2}+1)u_{I+2}. \tag{48}$$

A Taylor expansion of u gives

$$a_J u_J = a_I u_I + (J - I)h\frac{\partial}{\partial x}(au)(x_I, t_n) + O(h^2)$$

and thus

$$\lambda_J u_J = \lambda_I u_I + (J - I)\Delta t\frac{\partial}{\partial x}(au)(x_I, t_n).$$

Using this equality for J from $I - 1$ to $I + 2$ in (48) gives

$$u'_I = u_I - \Delta t\frac{\partial}{\partial x}(au)(x_I, t_n) + \frac{1}{2}(\lambda^2_{I-1}u_{I-1} - \lambda^2_I u_I - \lambda^2_{I+1}u_{I+1} + \lambda^2_{I+2}u_{I+2}) + O(h^2). \tag{49}$$

Finally, it is readily seen that

$$a^2_{I-1}u_{I-1} - a^2_I u_I - a^2_{I+1}u_{I+1} + a^2_{I+2}u_{I+2} = 2h^2\frac{\partial}{\partial x^2}(a^2u)(x_i) + 0(h^3).$$

Therefore:

$$u'_I = u_I - \Delta t\frac{\partial}{\partial x}(au)(x_I, t_n) + O(h^2),$$

which is consistent with one time-step for the advection equation (2).

In he case when $\lambda_{I-1} > 0$ the term γ'_{I-1} in (47) has to be replaced by γ_{I-1} but in this case $y_{I-1} = \lambda_{I-1}$ and the contribution to the grid point $I - 1$ is the same as in (48).

We now turn to the grid point $I + 1$. We obtain after remeshing the following value at time t_{n+1}:

$$u'_{I+1} = \gamma_{I+1}u_{I+1} + \beta_{I+2}u_{I+2} + \alpha_{I+3}u_{I+3} \tag{50}$$

From (10) we get

$$u'_{I+1} = (1 + \frac{\lambda_{I+1}}{2}(\lambda_{I+1}+3))u_{I+1} - \lambda_{I+2}(2 + \lambda_{I+2})u_{I+2} + \frac{\lambda_{I+3}}{2}(\lambda_{I+3}+1)u_{I+3}. \tag{51}$$

By Taylor expansions of au around the grid point $I + 1$ we get

$$u'_{I+1} = u_{I+1} - \Delta t\frac{\partial}{\partial x}(au)(x_{I+1}, t_n) + \frac{1}{2}(\lambda^2_{I+1}u_{I+1} - 2\lambda^2_{I+2}u_{I+2} + \lambda^2_{I+3}u_{I+3}) + O(h^2). \tag{52}$$

Finally, it is readily seen that

$$a_{I+1}^2 u_{I+1} - 2a_{I+2}^2 u_{I+2} + a_{I+3}^2 u_{I+3} = h^2 \frac{\partial}{\partial x^2}(a^2 u)(x_{I+2}) + 0(h^4)$$

and therefore

$$u'_{I+1} = u_{I+1} - \Delta t \frac{\partial}{\partial x}(au)(x_{I+1}, t_n) + O(h^2)$$

which is consistent with one time-step for the advection equation (2) at the grid point $I+1$.

We now turn to the case (d'). Let us consider the grid point I. We first assume that $\lambda_{I-1} \geq 0$, and we get after remeshing the following value:

$$u'_I = \gamma_{I-1} u_{I-1} + (\beta_I + \gamma_I) u_I + (\alpha_{I+1} + \beta_{I+1}) u_{I+1} + \alpha_{I+2} u_{I+2}. \tag{53}$$

We have $y_{I-1} = \lambda_{I-1}$, $y_I = \lambda_I$, $y_{I+1} = 1 + \lambda_{I+1}$ and $y_{I+2} = 1 + \lambda_{I+2}$, and we obtain after some calculation a formula identical to (48), and thus the same, consistent, finite difference approximation to the advection equation. In the case when $\lambda_{I-1} \geq 0$, on has to replace γ_{I-1} by γ'_{I-1}. Since in this case $y_{I-1} = 1 + \lambda_{I-1}$ and $\gamma'(y) = \gamma(y-1)$, we again find the same finite-difference formula.

Finally, on can notice that at the grid point $I+1$ we obtain the same value in the case (d') as in the case (c').

References

[1] M. Bergdorf, G.-H. Cottet, and P. Koumoutsakos *Multilevel adaptive particle methods for convection-diffusion equations*, SIAM Multiscale Modeling and Simulation, **4**, 328–357, 2005.

[2] M. Bergdorf, P. Koumoutsakos, *A Lagrangian Particle-Wavelet Method*, SIAM Multiscale Modeling and Simulation, **5**(3), 980-995, 2006.

[3] M. Bergdorf, P. Koumoutsakos and A. Leonard, *Direct Numerical Simulations of Vortex Rings at Re=7,500*, J. Fluid Mechanics, **581**, 495-505, 2007.

[4] R. Cocle, G. Winckelmans and G. Daeninck *Combining the vortex-in-cell and parallel fast multipole methods for efficient domain decomposition simulations*, J. Comput. Phys., **227**, 9091–9120, 2008

[5] G.-H.Cottet and A. Magni, *TVD remeshing formulas for particle methods*, C. R. Math., **347** (23-24), 1367–1372, 2009.

[6] G.-H. Cottet, P. Poncet, *Advances in direct numerical simulations of 3D wall-bounded flows by vortex-in-cell methods*, J. Comput. Phys. **193**,136–158, 2003.

[7] G.-H. Cottet, B. Michaux , S. Ossia and G. Vanderlinden, *A comparison of spectral and vortex methods in three-dimensional incompressible flows*, J. Comput. Phys., **175** (2), 702–712, 2002.

[8] G.-H. Cottet, G. Balarac and M. Coquerelle, *Subgrid particle resolution for the turbulent transport of a passive scalar*, Advances in Turbulence XII, Springer Proceedings in Physics, **132**, 779–782, 2009.

[9] G.-H. Cottet and P. Koumoutsakos, Vortex methods: Theory and practice, Cambridge University Press, 2000.

[10] G.-H. Cottet and E. Maitre, *A level-set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces*, Mathematical Models and Methods in the Applied Sciences, **16** 415–438, 2006.

[11] G.-H. Cottet and L. Weynans, *Particle methods revisited: a class of high-order finite-difference schemes*, C.R. Acad. Sci. Paris, **343** , 51–56, 2006

[12] D. Enright, R. Fedkiw, J. Ferziger, I. Mitchell, *A hybrid particle level set method for improved interface capturing*, J. Comput. Phys., **183**, 83–116, 2002.

[13] A. Ghoniem and D. Wee, *Modified interpolation kernels for treating dffusion and remeshing in vortex methods.* J. Comput. Phys., **213** , 239–263, 2006.

[14] E. Godlewski and P.-A. Raviart, Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws, Applied Mathematical Sciences, Volume 118, Springer, 1996.

[15] S. E. Hieber and P. Koumoutsakos, *A Lagrangian particle level set method*, J. Comput. Phys., **210**, 342-367, 2005

[16] A. Magni, PhD Thesis, Université de Grenoble, 2011.

[17] P. Koumoutsakos and A. Leonard, *High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods*, J. Fluid Mech., **296**, 1–38, 1995.

[18] R.J. LeVeque, *High-resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow*, SIAM J. Numer. Anal., **33**, 627–665,1996.

[19] J. J. Monaghan, *Extrapolating B-splines for interpolation*, J. Comput. Phys., **60**, 253–262, 1985.

[20] Ould Salihi Mohamed-Lemine, Cottet Georges-Henri, El Hamraoui Mohammed, *Blending finite-difference and vortex methods for incompressible flow calculations*, SIAM J. Sci. Comput., **22** (5), 165–1674, 2000.

[21] P. Ploumhans, G. S. Winckelmans, J. K. Salmon, A. Leonard and M. S. Warren, *Vortex Methods for Direct Numerical Simulation of Three-Dimensional Bluff Body Flows: Application to the Sphere at Re=300, 500, and 1000*, J. Comput. Phys., **178**,427–463, 2002

[22] I.F. Sbalzarini, J.H. Walther, M. Bergdorf, S.E. Hieber, E.M. Kotsalis, P. Koumoutsakos, *PPM - A highly efficient parallel particle-mesh library for the simulation of continuum systems*, J. Comput. Phys., **215**, 566-588, 2006.

[23] G. Strang, *Trigonometric polynomials and difference methods of maximum accuracy*, J. Math. and Phys., **41**, 147–520, 1962.

[24] W.M. van Rees , A. Leonard, D.I. Pullin and P. Koumoutsakos, *A comparison of vortex and pseudo-spectral methods for the simulation of periodic vortical flows at high Reynolds numbers*, J. Comput. Phys., **230**(8), 2794-2805, 2011.

[25] S. Vincent, G. Balmigère, J.-P. Caltagirone, E. Meillot, *EulerianLagrangian multiscale methods for solving scalar equations Application to incompressible two-phase flows*, J. of Comput. Phys., **229**, 73–106, 2010.

[26] L. Weynans, Méthode particulaire multi-niveaux pour la dynamique des gaz, application au calcul d'écoulements multifluides, PhD thesis, Universit de Grenoble, 2006, http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00121346/en/

Bibliographie

[1] F. Alouges and E. Lorin G. Le Coq. Two-dimensional extension of the reservoir technique for some linear advection systems. *Journ. of Scient. Comput.*, 2006.

[2] F. Alouges, F. De Vuyst, and al. The reservoir technique : a way to make godunov-type schemes zero or very low diffuse. application to collela-glaz solver. *European Journ. of Mech. B/Fluids*, 27 :643–664, 2008.

[3] J.T. Beale. A convergent 3d vortex method with grid-free stretching. *Math. Comput.*, 46 :401–424, 1986.

[4] J.T. Beale. On the acccuracy of vortex methods at large time, in comp fluid dynamics and reacting gas flows. *Springer-Verlag, New York*, pages 19–32, 1988.

[5] J.T. Beale and A.Majda. Vortex methods ii : high order accuracy in 2 and 3 dimensions. *Math. Comput.*, 32 :29–52, 1982.

[6] A. Beaudoin and E. Rivoalen S. Huberson. Simulation of anisotropic diffusion by means of a diffusion velocity method. *Journ. of Comput. Phys.*, 186 :122–135, 2003.

[7] J. Bell and H. Glaz P. Colella. A second-order projection method for the incompressible navier–stokes equations. *journ. of comp. phys.*, 85 :257, 1989.

[8] M. Bergdorf. *Multiresolution particle methods for the simulation of growth and flow.* PhD thesis, Swiss federal institute of technology, Zurich, 2007.

[9] M. Bergdorf and P. Koumoutsakos G.-H. Cottet. Multilevel adaptive particle methods for convection-diffusion equations. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 4 :328–357, 2005.

[10] M. Bergdorf and P. Koumoutsakos If. Sbalzarini. A lagrangian particle method for reaction-diffusion systems on deforming surfaces. *Journ. of Math. Biology*, 61 :649–663, 2010.

[11] M. Bergdorf and P. Koumoutsakos. A lagrangian particle-wavelet method. *SIAM Multiscale Modeling and simulation*, 5(3) :980–995, 2006.

[12] M. Bergdorf and A. Leonard P. Koumoutsakos. Direct numerical simulations of vortex rings at re=7,500. *J.Fluid Mech.*, 581 :495–505, 2007.

[13] B. Bidégaray-Fesquet. Méthodes de splitting pour les problèmes multi-échelles. Technical report, Cours de M2R., 2006-2007.

[14] O. Bokanowski and H. Zidani. Anti-dissipative schemes for advection and application to hamilton-jaccobi-bellmann equations :. *Journ. of Scient. Computing*, 30, 2007.

[15] F. Bouchut. An antidiffusive entropy scheme for monotone scalar conservation laws. *Journ. of Scient. Comput.*, 21 :1–30, 2004.

[16] S. Bryson and D. Levy. High-order central weno schemes for multidimensional hamilton-jacobi equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 41 :1339–1369, 2003.

[17] P. Chatelain and al. Billion vortex particle direct numerical simulations of aircraft wakes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :13–16,1296–1304, 2008.

[18] P. Chatelain and P. Koumoutsakos G-H. Cottet. Particle mesh hydrodynamics for astrophysics simulations. *International journal of modern physics*, 2007.

[19] P. Chatelain and A. Leonard. Isotropic compact interpolation schemes for particle methods. *Journ. of Comput. Phys.*, 227 :3244–3259, 2007.

[20] R. Cocle and G. Daeninck G. Winckelmans. Combining the vortex-in-cell and parallel fast multipole methods for efficient domain decomposition simulations. *Journ. of Comput. Phys.*, 227 :9091–9120, 2007.

[21] G.-H. Cottet. PhD thesis, Université Paris 6, Paris, 1982.

[22] G-H. Cottet and I. Mortazavi F. Gallizio, A. Magni. A vortex immersed boundary method for bluff body flows. In *ASME fluids engineering summer meeting, Montreal, Canada*, 2010.

[23] G.-H. Cottet and M. Coquerelle G. Balarac. Subgrid particle resolution for the turbulent transport of a passive scalar. *12th Euromech Conference, Marburg*, September 7-10, 2009.

[24] G.-H. Cottet and P. Koumoutsakos. *Vortex Methods : Theory and Practice.* Cambridge University Press, 2000.

[25] G.-H. Cottet and A. Magni. Tvd remeshing formulas for particle methods. *C.R.Acad.Sci.Paris*, 347 :1367–1372, 2009.

[26] G-H. Cottet and E. Maitre. A level-set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces. *Mathematical Models and Methods in the Applied Sciences*, 16 :415–438, 2006.

[27] G.-H. Cottet and M.L. Ould Salihi P. koumoutsakos. Vortex methods with spatially varying cores. *Journ. of Comput. Phys.*, 162 :164–185, 2000.

[28] G.-H. Cottet and P. Poncet. Advances in direct numerical simulations of 3d wall-bounded flows by vortex-in-cell methods. *Journ. of Comput. Phys.*, 2003.

[29] G.-H. Cottet and L. Weynans. Particle methods revisited : a class of high-order finite-difference schemes. *C.R.Acad.Sci.Paris*, 343 :51–56, 2006.

[30] V. Daru and C. Tenaud. High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. *Journ. of Comput. Phys.*, 193 :563–594, 2004.

[31] P. Degond and S. Mas-Gallic. The weighted particle method for convection-diffusion equations. *Math. Comput.*, 53 :485–526, 1989.

[32] B. Despres. Lagrangian systems of conservation laws. *Numerische Mathematik*, 89 :99–134, 01.

[33] B. Despres. Inégalité entropique pour un solveur conservatif du système de la dynamique des gaz en coordonnéees de lagrange. *C.R.Acad.Sci.Paris*, pages 1301–1306, 1997.

[34] B. Despres and F. Lagoutière. Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics. *Journ. of scient. comp.*, 16 :479–524, 2001.

[35] B. Despres and F. Lagoutière. Numerical resolution of a two-component compressible fluid model with interfaces. *Progress in comp. fluid dynamics*, 7 :295–310, 2007.

[36] D.G. Dritschel. Contour dynamics and contour surgery : numerical algorithms for extended, high resolution modelling of vortex dynamics in two dimensional, inviscid, incompressible flows. *Comput. Phys Rep.*., pages 1077–146, 1989.

[37] J.D. Eldredge and T. Colonius A. Leonard. A general deterministic treatment of derivatives in particle methods. *Journ. of Comput. Phys.*, 180 :686–709, 2002.

[38] M. Ellero and P. Espanol M. Serrano. Incompressible smoothed particle hydrodynamics. *Journ. of Comput. Phys.*, 226(2) :1731–1752, 2007.

[39] D. Enright, R. Fedkiw, and al. A hybrid particle level set method for improved interface capturing. *Journ. of Comput. Phys.*, 183 :83–116, 2002.

[40] M. Falcone and R. Ferretti. Semi-lagrangian schemes for hamilton-jacobi equations, discrete representation formulae and godunov methods. *Journ. of Comput. Phys.*, 175 :559–575, 2002.

[41] I. Farago. A modified iterated operator splitting method. *Applied Mathematical Modelling*, 2007.

[42] I. Farago and A. Havasi B. Gnandt. Additive and iterative operator splitting methods and their numerical investigation. *Computers and mathematics with applications*, 2007.

[43] Y. Farjoun and B. Seibold. An exactly conservative particle method for one dimensional scalar conservation laws. *Journ. of Comput. Phys.*, 228 :5298–5315, 2009.

[44] D. Fishelov. A new vortex scheme for viscous flows. *Journ. of Comput. Phys.*, 86 :211–224, 1990.

[45] P. Geuzaine and C. Farhat C. Grandmont. Design and analysis of ale schemes with provable second-order time-accuracy for inviscid and viscous flow simulations. *journ. of comp. phys.*, 191 :206–227, 2003.

[46] E. Godlewski and P-A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws.* Applied Mathematical Sciences, 1996.

[47] O. Hald. Convergence of vortex methods ii. *SIAM J. Numer.Anal.*, 16 :726–755, 1979.

[48] F.H. Harlow. Particle in cell computing method for fluid dynamics. *Methods Comput. Phys.*, 3 :319–43, 1964.

[49] A. Harten. resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *journ. of comp. phys.*, 1982.

[50] W.D. Henshaw, H.-O. Kreiss, and L.G. Reyna. On the smallest scale for the compressible navier-stokes equations. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 1 :65–95, 1989.

[51] S. E. Hieber and P. Koumoutsakos J.H. Walther. Remeshed smoothed particle hydrodynamics simulation of the mechanical behavior of human organs. *Technology and Health Care*, 12 :305–314, 04.

[52] S. E. Hieber and P. Koumoutsakos. A lagrangian particle level set method. *Journ. of Comput. Phys.*, 210 :342–367, 2005.

[53] C.W. Hirt and B.D. Nichols. Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *Journ. of Comput. Phys.*, 39 :201–225, 1981.

[54] X.Y. Hu and N.A. Adams. An incompressible multi-phase sph method. *Journ. of Comput. Phys.*, 227(1) :264–278, 2007.

[55] G-S. Jiang and C-W. Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journ. of Comput. Phys.*, 126 :202–228, 1996.

[56] O. Knio and A. Ghoniem. Three dimensional vortex simulation of rollup and entrainment in a shear layer. *Journ. of Comput. Phys.*, 97 :172–223, 1991.

[57] P. Koumoutsakos. Multiscale flow simulations using particles. *ANNUAL REVIEW OF FLUID MECHANICS*, 37 :457–487, 2005.

[58] P. Koumoutsakos and A. Leonard. High-resolution simulations of the flow around an implusively started cylinder using vortex methods. *J. Fluid. Mech.*, 296 :1–38, 1995.

[59] P. Koumoutsakos and A. Leonard. High resolution simulations using vortex methods. *J.Fluid Mech.*, 296 :1–38, 1995.

[60] R. Krasny. A study of singularity formation in a vortex sheet by the point vortex approximation. *J. Fluid Mech.*, 167 :65–93, 1986.

[61] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. ii : Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journ. of Comput. Phys.*, 14 :361–370, 1974.

[62] B.P. Leonard. The ultimate conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 88 :17–74, 1991.

[63] K. Lindsay and R. Krasny. A particle method and adaptive treecode for vortex sheet motion in three dimensional flow. *Journ. of Comput. Phys.*, 172 :879–907, 2001.

[64] X-D. Liu and T. Chan S. Osher. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journ. of Comput. Phys.*, 115 :200–212, 1994.

[65] A. Magni and G-H. Cottet. Accurate, non-oscillatory, remeshing schemes for particle methods. soumis.

[66] J.E. Martin and E. Meiburg. Numerical investigation of three-dimensionally evolving jets under helical perturbations. *J.Fluid Mech.*, 243 :457–487, 1992.

[67] S. Mas-Gallic. *Contribution à l'analyse numérique des méthodes particulaires.* PhD thesis, Thèse d'Etat, Université Paris VI, 1987.

[68] R. McDermott. Notes on explicit numerical methods for passive scalar transport in energy conserving lerge-eddy simulation. 2004.

[69] J. J. Monaghan. Extrapolating b-splines for interpolation. *Journ. of Comput. Phys.*, 60(2) :253–262, 1985.

[70] J.J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on progress in physics*, 68(8) :1703–1759, 2005.

[71] C.D. Munz. On godunov-type schemes for lagrangian gas dynamics. *SIAM J. Numer.Anal.*, 31 :17–42, 1994.

[72] M. El. Ossmani and P. Poncet. Efficiency of multiscale hybrid grid-particle vortex methods. *SIAM-Multiscale Model. Simul*, 8 :1671–1690, 2010.

[73] M. Ould-Salihi and M. El Hamraoui G.-H. Cottet. Blending finite-difference and vortex methods for incompressible flow computations. *SIAM J. Sci. Comp.*, 22 :1655–1674, 2000.

[74] G. Pinon and G. Pignot E. Rivoalen H. Bratec, S. Heberson. Vortex method for simulation of a 3d round jet in a cross-stream. *J. of Turbulence*, 6, n°18 :1–25, 2005.

[75] P. Ploumhans and A. Leonard M.S. Warren G.S. Winckelmans, J.K. Salmon. Vortex methods for direct numerical simulation of three-dimensional bluff body flows : Application to the sphere at re=300, 500, and 1000. *Journ. of Comput. Phys.*, 178 :427–463, 2002.

[76] P. Poncet and P. Koumoutsakos R. Hildebrand, G-H Cottet. Spatially distributed control for optimal drag reduction of the flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 599 :11–120, 2008.

[77] W.M. Van Rees and P. Koumoutsakos A. Leonard, D.I.Pullin. A comparison of vortex and pseudo-spectral methods for the simulation of periodic vortical flows at high reynolds numbers. *Journ. of Comput. Phys.*, 230(8) :2794–2805, 2011.

[78] C. Rehbach. Numerical calculation of three-dimensional unsteady flows with vortex sheets. *AIAA*, Paper 111, 1978.

[79] L. Rosenhead. The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 134 :170, 1931.

[80] D. Rossinelli and P. Koumoutsakos M. Bergdorf, G.-H. Cottet. Gpu accelerated simulations of bluff body flows using vortex methods. *Journ. of Comput. Phys.*, 229(9) :3316–3333, 2010.

[81] I.F. Sbalzarini and S.E. Hieber E.M. Kotsalis P.Koumoutsakos J.H. Walther, M.Bergdorf. Ppm- a highly efficient pearallel particle-mesh library for the simulation of continuum systems. *Journ. of Comput. Phys.*, 215 :566–588, 2006.

[82] F. Schlegel and A. F. Ghoniem D. Wee. fast 3d particle method for the simulation of buoyant flow. *Journ. of Comput. Phys.*, 227 :9063–9090, 2008.

[83] B. Schrader and I. Sbalzarini S. Redoux. Discretization correction of general integral pse operators for particle methods. *Journ. of Comput. Phys.*, 229 :4159–4182, 2010.

[84] S. Shankar and L. Van Dommelen. A new diffusion procedure for vortex methods. *Journ. of Comput. Phys.*, 127 :88–109, 2002.

[85] J.A. Strain. Fast adaptive 2d vortex methods. *Journ. of Comput. Phys.*, 132 :108–122, 1997.

[86] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM J. Numer.Anal.*, 5 :506–517, 1968.

[87] A. Suresh and H.T. Huynh. Accurate monotonicity preserving schemes with runge-kutta time stepping. *Journ. of Comput. Phys.*, 136 :83–99, 1997.

[88] P.K. Sweby. High resolution tvd schemes using flux limiters. *Lect. Appl. Math.*, 22 :289–309, 1985.

[89] J. Thuburn. Multidimensional flux-limited advection schemes. *Journ. of Comput. Phys.*, 123 :74–83, 1995.

[90] J. Thuburn. Tvd schemes, postive schemes and the universal limiter. *monthly weather review*, 125 :1990–1993, 1996.

[91] S. Vincent, G.Balmigère, and al. Eulerian-lagrangian multiscale methods for solving scalar equations ; application to incompressible two-phase flows. *Journ. of Comput. Phys.*, 229 :73–106, 2010.

[92] D. Wee and A. F. Ghoniem. Modified interpolation kernels for treating diffusion and remeshing in vortex methods. *Journ. of Comput. Phys.*, 213 :239–263, 2006.

[93] L. Weynans. *Méthode particulaire multi-niveaux pour la dynamique des gaz, application au calcul d'écoulements multifluides.* PhD thesis, MSTII-Grenoble, 2006.

[94] Z. Xu and C-W. Shu. Anti-diffusive flux corrections for high order finite difference weno schemes. *Journ. of Comput. Phys.*, 205 :458–485, 2005.

[95] L. Yatziv and G. Sapiro A. Bartesaghi. O(n) implementation of the fast marching algorithm. *Journ. of Comput. Phys.*, 212 :393–399, 2006.