



HAL
open science

**Un parcours de recherche multidisciplinaire en
mécanique: Analyse des forces de la houle et
optimisation d'une plate-forme pétrolière Calcul de
branches bifurquées par la méthode asymptotique
numérique La méthode polaire en analyse, identification
et conception par algorithme génétique des stratifiés**

Paolo Vannucci

► **To cite this version:**

Paolo Vannucci. Un parcours de recherche multidisciplinaire en mécanique: Analyse des forces de la houle et optimisation d'une plate-forme pétrolière Calcul de branches bifurquées par la méthode asymptotique numérique La méthode polaire en analyse, identification et conception par algorithme génétique des stratifiés. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Bourgogne, 2002. tel-00625958

HAL Id: tel-00625958

<https://theses.hal.science/tel-00625958>

Submitted on 23 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE DE BOURGOGNE
U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES
INSTITUT SUPERIEUR DE L'AUTOMOBILE ET DES TRANSPORTS

THESE POUR L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

PRESENTEE A L'UNIVERSITE DE BOURGOGNE PAR

PAOLO VANNUCCI

Un parcours de recherche multidisciplinaire en mécanique

Analyse des forces de la houle et optimisation d'une plate-forme pétrolière

Calcul de branches bifurquées par la méthode asymptotique numérique

**La méthode polaire en analyse, identification et conception par
algorithme génétique des stratifiés**

Thèse soutenue publiquement le 16 décembre 2002 devant le jury composé de

Professeur J.-L. Lataillade	ENSAM de Bordeaux	(rapporteur)
Professeur G. Maier	Politecnico di Milano (Italie)	
Professeur M. Potier-Ferry	Université de Metz	(président du jury)
Professeur A. Rigolot	Université Pierre et Marie Curie – Paris VI	(rapporteur)
Professeur A. Vautrin	ENSM de Saint Etienne – EMSE	(rapporteur)
Professeur G. Verchery	ISAT de Nevers	(directeur de thèse)

LRMA - Laboratoire de Recherche en Mécanique et Acoustique
ISAT- Institut Supérieur de l'Automobile et des Transports, Université de Bourgogne
49, Rue Mademoiselle Bourgeois. B.P. 31 - 58027 Nevers Cedex

REMERCIEMENTS

Les personnes que je dois remercier, et à des titres différents, sont nombreuses, et sans leur aide et soutien difficilement je serais arrivé ici.

Je me dois d'abord de remercier les personnes qui m'ont accueilli dans ce pays, qui n'est pas le mien, lorsque j'y suis arrivé pour tenter une carrière de chercheur, les Professeurs M. Potier-Ferry, B. Cochelin, S. Aivazzadeh et G. Verchery: tous m'ont accueilli chaleureusement et m'ont aidé, en sacrifiant souvent leur temps pour moi. Un remerciement particulier va à Monsieur Potier-Ferry, qui est à l'origine de beaucoup de choses, auquel me lie un sentiment d'amitié et de respect profond, et qui a bien voulu accepter d'être le président du jury.

Je n'ai pas de mots pour exprimer ma sincère gratitude à Monsieur Verchery: il n'a pas été un simple directeur de recherche pour moi, mais à juste titre un Maître qui m'a façonné comme chercheur. Avoir fait de la recherche sous sa direction a été pour moi un privilège et une aventure de la connaissance: je ne suis prêt à oublier les heures qu'il m'a consacrées pour m'introduire à un domaine qui n'était pas dans ma formation, ni les discussions riches d'observations, d'idées, de projets que nous avons eu maintes fois, parfois simplement en se croisant dans les couloirs ou tard le soir, à esquisser sur un bout de papier des idées, des formules, des hypothèses. Si je suis arrivé à faire quelque chose en mécanique des composites, je ne le dois qu'à lui.

Mes sincères remerciements vont aux Professeurs qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de cette thèse; en particulier, je remercie les Professeurs J.-L. Lataillade, A. Rigolot et A. Vautrin qui ont gentiment accepté de rapporter ce travail de thèse. J'adresse un remerciement tout particulier au Professeur G. Maier qui a accepté ma proposition de faire partie du jury avec enthousiasme et intérêt, et qui m'a montré une grande courtoisie.

J'adresse mes remerciements à tout le personnel de l'ISAT, qui m'a beaucoup donné et qui s'est toujours montré gentil et compréhensif envers moi. Je remercie encore tous les chercheurs du LRMA, en qui j'ai trouvé souvent des collaborateurs précieux pour moi.

Je remercie les thésards du LRMA, E. Valot, A. Vincenti et M. Kazemi, qui ont eu la difficile tâche de m'expérimenter comme co-encadreur de leur thèse. Avec A. Vincenti j'ai expérimenté une période de recherche soutenue, elle a su être une thésarde attentive et travailleuse, beaucoup des résultats sont dus à son intense travail.

Mes remerciements, ou peut-être plus que ça, vont à ma famille, qui m'a soutenu même contre leur amour.

A ma femme et à ma fille je demande plutôt un pardon, car la dureté de cette vie est retombée tout entière sur elles.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	3
Première partie	5
UN PROBLEME D'OPTIMISATION EN PRESENCE D'UNE INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE: LES FORCES DE LA HOULE ET LE DIMENSIONNEMENT D'UNE PLATE-FORME TLP	
<i>Chapitre 1</i>	
PRESENTATION GENERALE DE LA RECHERCHE	
1.1 Description synthétique d'une TLP.	7
1.2 Facteurs clés de l'utilisation des TLP.	7
1.3 Le but de la recherche.	9
1.4 Organisation de la recherche.	9
<i>Chapitre 2</i>	
LE PROCEDE D'OPTIMISATION DES DIMENSIONS D'UNE TLP	
2.1 Etude d'un modèle mono-colonne.	11
2.2 Optimisation d'un modèle simplifié de TLP: le mono-colonne modifié.	13
2.3 Calcul des dimensions d'une TLP.	15
2.4 Contrôle des résultats.	17
2.5 Modifications finales des résultats.	19
2.6 Comparaison avec les TLP connues.	19
<i>Chapitre 3</i>	
LA METHODE D'EVALUATION DES ACTIONS DE LA HOULE	
3.1 Le cadre théorique.	21
3.2 Rappels de résultats généraux de la théorie non-linéaire de la diffraction.	22
3.3 Calcul simplifié des forces de la houle sur un cylindre vertical non appuyé sur le fond.	23
3.4 Calcul de la force d'ensemble sur la TLP.	28
CONCLUSIONS	31
BIBLIOGRAPHIE	32
Deuxième partie	35
UNE CONTRIBUTION EN MECANIQUE NON-LINEAIRE: LE CALCUL DE BRANCHES BIFURQUEES PAR LA METHODE ASYMPTOTIQUE NUMERIQUE	
<i>Chapitre 4</i>	
GENERALITES SUR LA METHODE ASYMPTOTIQUE NUMERIQUE (MAN)	
4.1 Introduction.	37

4.2	Les équations générales.	38
4.3	L'approche perturbative.	39
4.4	La Méthode Asymptotique Numérique (MAN).	40
4.5	Critères de contrôle de la qualité de la solution et technique de continuation.	41
4.6	La détection des points de bifurcation.	42
<i>Chapitre 5</i>		
LE CALCUL DES BRANCHES BIFURQUEES PAR LA MAN		
5.1	Introduction.	45
5.2	Stratégie de recherche des branches bifurquées.	45
5.3	Recherche des tangentes au point de bifurcation.	46
5.4	Détermination des points réguliers.	47
5.5	Contrôle du résidu dans une procédure de continuation.	48
<i>Chapitre 6</i>		
ESSAIS NUMERIQUES		
6.1	Généralités sur les tests.	51
6.2	Exemple numéro 1.	51
6.3	Exemple numéro 2.	53
6.4	Exemple numéro 3.	54
6.5	Discussion des résultats.	56
CONCLUSIONS		59
BIBLIOGRAPHIE		60
Troisième partie		63
UNE ACTIVITE DE RECHERCHE EN MECANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES: LA METHODE POLAIRE EN ANALYSE, CONCEPTION ET IDENTIFICATION DES STRATIFIES		
<i>Chapitre 7</i>		
GENERALITES SUR LA METHODE POLAIRE		
7.1	Introduction.	65
7.2	Le changement de variable complexe de Verchery.	65
7.3	Caractéristiques de la transformation.	67
7.4	Transformation d'un tenseur du second ordre.	68
7.5	Transformation d'un tenseur du quatrième ordre.	70
7.6	Changement de repère par rotation.	71
7.7	Analyse des invariants par rotation.	73
7.8	Introduction des composantes polaires.	75
7.9	Analyse des symétries.	78
7.10	Interprétation harmonique des constantes polaires.	81
7.11	Interprétation énergétique des constantes polaires.	82
7.12	Inversion de la loi de comportement en polaire.	86
7.13	Méthode des équations caractéristiques généralisées.	86
7.14	Expression polaire des constantes de l'ingénieur.	88

7.15	Comparaison entre les composantes polaires et les invariants de Tsai et Pagano.	90
------	---	----

Chapitre 8

LA METHODE POLAIRE DANS LA CONCEPTION DES STRATIFIES

8.1	Introduction.	93
8.2	La théorie classique des stratifiés par la méthode polaire.	94
8.3	Les stratifiés à plis identiques.	98
8.4	Quelques remarques sur les symétries élastiques pour les stratifiés.	101
8.5	Problèmes de propriétés élastiques interprétés comme problèmes de symétries.	102
8.6	Les stratifiés de type quasi-trivial.	103
8.7	La méthode polaire dans la recherche de stratifiés isotropes.	106
8.8	Certaines solutions pour les stratifiés composés de plis à symétrie carrée.	110
8.9	L'orthotropie et la méthode polaire: une recherche à ses débuts.	113
8.10	Un commentaire final en guise de conclusion.	114

Chapitre 9

UNE APPROCHE UNIFIEE A LA CONCEPTION DES STRATIFIES PAR OPTIMISATION

9.1	Introduction.	117
9.2	Un état de l'art en conception des stratifiés.	117
9.3	Une formulation unifiée de problèmes de conception en rigidité des stratifiés.	121
9.4	Problèmes élémentaires.	122
9.5	Problèmes composés.	123
9.6	Formalisation de la quasi-homogénéité.	124
9.7	Formalisation de l'orthotropie.	125
9.8	Considérations finales.	127

Chapitre 10

BIANCA: UN ALGORITHME GENETIQUE POUR L'OPTIMISATION DES STRATIFIES

10.1	Introduction.	129
10.2	La mécanique et la biologie: une rencontre ancienne.	130
10.3	Quelques considérations préalables sur la fonction objectif.	131
10.4	Les algorithmes génétiques.	134
10.5	Mécanismes de reproduction biologique.	136
10.6	Génétique artificielle: structure de base des algorithmes génétiques.	139
10.7	Caractéristiques du fonctionnement des algorithmes génétiques.	141
10.8	L'algorithme BIANCA.	144
10.9	Quelques exemples.	151
10.10	Discussion des résultats.	151
10.11	Formalisation de nouveaux problèmes de conception avec contraintes.	157
10.12	Conclusions et perspectives.	160

Chapitre 11

AU-DELA DE L'APPROCHE DETERMINISTE: L'ANALYSE DE SENSIBILITE AUX DEFAUTS D'ORIENTATION DES COUCHES

11.1	Introduction.	163
------	---------------	-----

11.2	Degré de couplage.	163
11.3	L'empilement de B_{max} .	164
11.4	Sensibilité du découplage au défaut d'orientation d'une couche.	166
11.5	Extension de la théorie au cas de la quasi-homogénéité.	167
11.6	Etude numérique pour l'analyse statistique dans le cas de plusieurs défauts.	169
11.7	Description synthétique des résultats.	171
11.8	Conclusions.	172
<i>Chapitre 12</i>		
UNE CLASSE PARTICULIERE D'ORTHOTROPIE PLANE		
12.1	Introduction.	173
12.2	L'orthotropie R_0 .	173
12.3	Conditions cartésiennes de l'orthotropie R_0 .	177
12.4	Aspects de l'utilisation de laminae R_0 -orthotropes.	177
12.5	Une condition suffisante pour avoir une lamina R_0 -orthotrope.	180
12.6	Conclusions.	181
<i>Chapitre 13</i>		
UNE CONTRIBUTION A L'IDENTIFICATION DES PROPRIETES DES COMPOSITES		
13.1	Introduction.	183
13.2	Une tentative pour l'identification élastique d'un pli par essais sur stratifié.	183
13.3	Une étude de la rupture des stratifiés isotropes en membrane.	187
13.4	Une contribution à l'étude de la propagation de la fissure dans un stratifié.	188
CONCLUSIONS		189
BIBLIOGRAPHIE		191
CONCLUSIONS GENERALES		199

ARTICLES ANNEXES

1. P. Vannucci: "Simplified optimal design of a Tension Leg Platform (TLP)". Dans *Structural Optimization*, v. 12, pp. 265- 268. Springer & Verlag, Allemagne, 1996.
2. P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil & M. Potier-Ferry: "An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches". Dans *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 41, pp. 1365-1389. J. Wiley, UK, 1998.
3. P. Vannucci, G. Verchery: "A special class of uncoupled and quasi-homogeneous laminates". Dans *Composites Science and Technology*, v. 61, pp. 1465-1473. Elsevier Science, UK, 2001.
4. A. Vincenti, G. Verchery & P. Vannucci: "Anisotropy and symmetries for elastic properties of laminates reinforced by balanced fabrics". Dans *Composites Part A*, v. 32, pp. 1525-1532. Elsevier Science, UK, 2001.
5. P. Vannucci, G. Verchery: "Stiffness design of laminates using the polar method". Dans *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, pp. 9281-9294. Elsevier Science, UK, 2001.
6. P. Vannucci: "On bending-tension coupling of laminates". Dans *Journal of Elasticity*, v. 64, pp. 13-28. Kluwer Academic Publishers, Pays Bas, 2001.
7. P. Vannucci, G. Verchery : "A new method for generating fully isotropic laminates". Dans *Composite Structures*, v. 58, pp. 75-82. Elsevier Science, UK, 2002.
8. E. Valot, P. Vannucci & G. Verchery: "Complete in-plane elastic characterisation under tensile tests of angle-ply laminates composed of polymer-matrix layers". Dans *Polymers and Polymer Composites*, v. 10, pp. 483-492. Rapra LTD, UK, 2002.
9. A. Vincenti, P. Vannucci & G. Verchery: "Influence of orientation errors on quasi-homogeneity of composite laminates". Dans *Composites Science and Technology*, v. 63, pp. 739-749. Elsevier Science, UK, 2003.
10. P. Vannucci : "A special planar orthotropic material". A paraître dans *Journal of Elasticity*.

DOCUMENTS ANNEXES

1. Curriculum vitae détaillé
2. Présentation analytique des publications

*A la petite personne qui,
plus que quiconque,
a payé ma passion pour la connaissance,
ma fille Bianca Sofia.*

*"...Considerate la vostra semenza:
fatti non foste a viver come bruti,
ma per seguir virtute e canoscenza."
Dante, Inferno, Canto XXVI.*

INTRODUCTION GENERALE

Cette thèse est l'aboutissement d'un parcours de recherche de dix ans, que j'ai commencé en Italie, à l'Université de Pise, avec la thèse de doctorat, et qui s'est poursuivi en France, d'abord au LPMM de Metz, et ensuite à l'ISAT de Nevers, où j'ai travaillé, avec une interruption en 1997, ce dernières six ans et où je suis devenu Maître de Conférences.

Mon parcours de chercheur en mécanique ne s'est pas fait dans un seul domaine et dans la continuité, mais il a été façonné par les occasions et les exigences qui me se sont présentées dans le milieu universitaire, que j'ai saisies et auxquelles je me suis adapté pour progresser et pour apporter ma contribution. En particulier, j'ai eu l'occasion de m'investir dans trois secteurs principaux: la mécanique des fluides, des structures et des matériaux. J'ai cherché à condenser ce parcours dans ce texte, au moins dans ses étapes fondamentales. Par conséquent, ce document n'est pas un rapport sur un sujet unique, mais plutôt le résumé d'une formation pluridisciplinaire à la recherche en mécanique. De ce fait, ce rapport est divisé en trois parties, qui suivent un ordre chronologique.

La première partie porte sur les travaux rattachés à la thèse de doctorat. La recherche, qui s'est développée au sein du *Dipartimento di Ingegneria Strutturale* de l'*Università di Pisa*, sous la direction du professeur P. Villaggio, portait sur l'analyse des forces de la houle avec application au calcul d'une plate-forme flottante de type TLP (Tension Leg Platform). Le but était la conception d'une démarche simple et efficace pour déterminer les dimensions globales de la structure, à utiliser comme point de départ pour un processus successif de mise au point. L'engagement a été double: trouver une formulation nouvelle des forces de la houle sur des cylindres de grand diamètre, pour simplifier les solutions de la théorie de la diffraction non linéaire afin de les rendre utilisables dans un processus synthétique d'optimisation, et ensuite développer ce processus, en tenant compte des différentes contraintes imposées. Le but final était la minimisation du poids de la structure.

La deuxième partie du rapport présente mes activités de recherche au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM) de l'Université de Metz, sous la direction du professeur M. Potier-Ferry. Le travail portait sur l'application de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) à la détection de la bifurcation et au suivi des parcours d'équilibre post-critique pour une structure à comportement élastique. C'était mon premier contact avec des problèmes de mécanique non-linéaire et avec l'apprentissage d'une méthode nouvelle, la MAN, qui allait s'avérer être un outil très efficace d'analyse structurelle pour les problèmes présentant des non-linéarités de différentes origines. C'était aussi l'occasion d'apporter ma contribution à une équipe de recherche très engagée dans ce domaine. Mon travail s'est concrétisé dans la mise au point d'un algorithme, que j'ai ensuite intégré dans un code de calcul aux éléments finis, et qui permet la détection des points de bifurcations en mode simple, ainsi que le suivi automatique des branches bifurquées. Pour cette recherche j'ai eu aussi l'occasion de collaborer avec les professeurs B. Cochelin, maintenant à l'ESM2 de Marseille, et N. Damil, de l'Université de Casablanca, au Maroc, ainsi qu'avec d'autres chercheurs du LPMM, notamment avec J. M. Cadou.

A partir de mon premier séjour à l'ISAT de Nevers, mes recherches se sont orientées vers la mécanique des matériaux, et en particulier vers la mécanique des matériaux composites. Ici, il s'agissait d'intégrer une équipe de travail jeune, le LRMT, Laboratoire de Recherche en Mécanique des Transports, devenu ensuite le LRMA, Laboratoire de Recherche en Mécanique et Acoustique, et de développer des axes de recherche assez innovants et

prometteurs, d'abord sous la direction du professeur S. Aivazzadeh, et ensuite sous celle du professeur G. Verchery, avec qui j'ai eu ma plus longue et productive saison de recherche. La troisième partie du rapport présente ces études dans leurs lignes essentielles. L'axe porteur de mes études a été l'application de la méthode polaire à l'analyse, la conception, l'optimisation et l'identification élastique des stratifiés en matériau composite.

La méthode polaire est une technique, introduite par G. Verchery à la fin des années 70, pour la représentation des composantes d'un tenseur plan à travers ses invariants. Par rapport à d'autres méthodes déjà existantes et utilisées dans le milieu des composites, méthodes rappelées et commentées dans le rapport, l'approche de Verchery, d'une élégance intrinsèque, s'insère comme cas très élaboré et perfectionné dans la filière des méthodes qui utilisent un changement de variable complexe et qui sont largement connues en mécanique. L'intérêt de la méthode est toutefois ailleurs: il se trouve principalement dans sa capacité à interpréter facilement les propriétés élastiques, grâce à l'utilisation d'invariants indépendants qui ont chacun une signification physique bien précise. L'autre grand avantage de la méthode polaire est sa capacité de simplifier les calculs. Ces deux propriétés rendent la méthode polaire un outil très performant dans l'analyse et surtout dans la conception des stratifiés. Son utilisation nous a permis de résoudre de façon nouvelle et simple un certain nombre de problèmes inverses concernant les stratifiés, mais aussi de jeter une nouvelle lumière sur eux, grâce aux capacités interprétatives de l'anisotropie intrinsèques à la méthode.

Mes recherches se sont concentrées de façon presque inévitable sur la conception des stratifiés, et plus en particulier sur leur conception ramenée à un problème d'optimum. Après une formalisation unique, sous une forme classique de l'optimisation structurelle, d'un certain nombre de problèmes concernant les rigidités des stratifiés, le problème abordé a été celui de la mise en place d'un outil efficace d'exploration des solutions pour un problème de conception donné. Dans ce domaine, j'ai travaillé au co-encadrement d'une thèse qui s'est achevée fin 2002, dans laquelle nous avons développé une approche qui utilise la formalisation par méthode polaire citée ci-dessus et un algorithme génétique de notre création, et qui présente un certain nombre de points nouveaux.

Parallèlement à cette étude, j'ai eu l'occasion de collaborer avec d'autres chercheurs du LRMA, et notamment dans le co-encadrement d'une thèse qui s'est terminée début 2002 et qui portait sur l'analyse expérimentale des propriétés de résistance de stratifiés isotropes en membrane. J'ai développé aussi des recherches personnelles, parfois sollicité par les exigences du laboratoire, qui sont présentées dans ce rapport, et notamment un travail sur un nouveau type d'orthotropie plane et de ses applications aux stratifiés, et une démarche pour l'identification des propriétés élastiques d'un matériau composite à partir d'essais sur stratifié.

Quelque mot sur le style de ce rapport: des détails majeurs sur les différentes recherches sont donnés en début de chaque partie. J'ai cru de bien faire à mettre des chapitres non pas consacrés à la présentation de mes recherches, mais plutôt à l'introduction à une discipline ou à une méthode, car certains sujets ou techniques spécifiques ne sont pas toujours connus. En particulier, dans le chapitre 7 je me suis attardé à donner des détails sur la méthode polaire, dans le but de rassembler ce qui, jusqu'ici, était disséminé sur plusieurs articles. Au contraire, j'ai fait un effort de synthèse dans la présentation de mes recherches, le but étant celui de donner un aperçu général du travail de recherche; c'est pour cela qu'un certain nombre de détails ne sont pas indiqués, mais à chaque fois on renvoie aux références concernées. En outre, j'ai toujours essayé de mettre en évidence le parcours de recherche, de le situer dans le contexte de l'activité du laboratoire et de souligner les interactions et les collaborations avec les autres chercheurs et thésards. Finalement, j'ai tenté de condenser et de présenter mes études au mieux, dans un langage lisible sans être sûr d'y être parvenu; j'espère que la lecture de ce rapport ne s'avère pas une tâche trop lourde, mes efforts sont allés dans ce sens.

Première partie

UN PROBLEME D'OPTIMISATION EN PRESENCE D'UNE INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE: LES FORCES DE LA HOULE ET LE DIMENSIONNEMENT D'UNE PLATE-FORME TLP

Ce travail de recherche est celui accompli pendant ma thèse de doctorat, depuis février 1992 jusqu'en février 1995. La recherche a été faite au "*Dipartimento di Ingegneria Strutturale della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa*" (Département de Génie des Structures de la Faculté d'Ingénierie à l'Université de Pise), en Italie.

Le sujet de la recherche a été en partie suggéré par ma précédente expérience de travail comme ingénieur chargé de la conception de structures *off-shore* chez AGIP, la société italienne du pétrole, à Milan. Je souhaitais, par la thèse, m'introduire au domaine de l'optimisation structurelle, et d'accord avec mon directeur de thèse, le professeur Piero Villaggio, nous avons décidé le sujet: "*Sull'analisi delle forze d'onda con applicazione al calcolo di una TLP*" (Sur l'analyse des forces de la houle avec application au calcul d'une TLP).

Ce sujet me permettait de m'occuper d'optimisation structurelle tout en restant dans le domaine qui m'était le plus propre, celui des structures marines, par ma formation de base (ingénieur de génie civil, spécialité hydraulique, avec une thèse de *laurea* portant encore sur la conception d'un grand ouvrage en mer) et par mon expérience de travail.

Cette première partie du rapport de thèse est divisée en trois chapitres: le premier est une présentation générale de la recherche, le deuxième est une illustration succincte de la méthode d'optimisation proposée et le troisième porte sur la recherche faite dans le domaine du calcul des forces de la houle.

1.1 Description synthétique d'une TLP.

L'acronyme TLP signifie *Tension Leg Platform*, plate-forme à jambes tendues. C'est un type de plate-forme fixe pour l'extraction du pétrole du sous-sol marin. La caractéristique essentielle de ces structures est celle d'être des véritables îles flottantes, ancrées au fond de la mer par des câbles tendus, Fig. 1.1. La traction des câbles d'ancrage est assurée par la poussée d'Archimède, qui donne à la fois la rigidité nécessaire à la structure pour faire face aux actions horizontales et une grande capacité de porter les charges verticales.

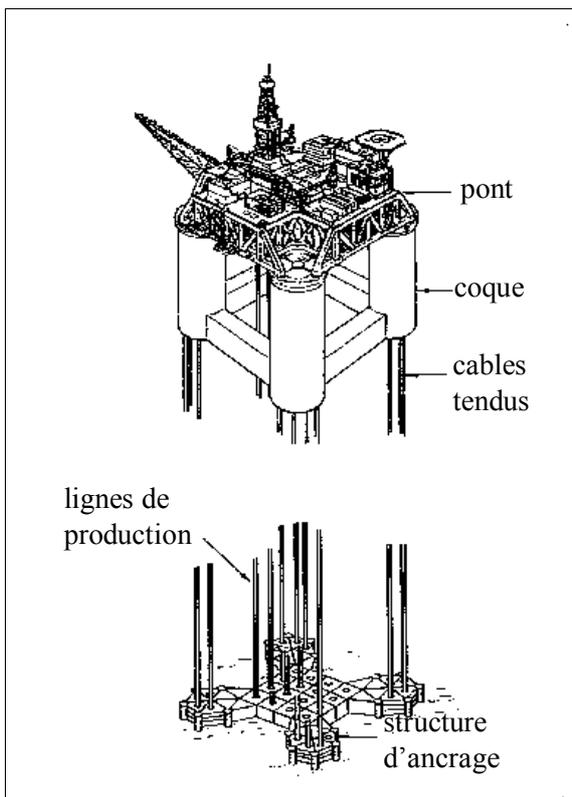


Fig. 1.1. Schéma d'une TLP.

Les parties qui composent une TLP sont essentiellement quatre: le pont (*deck*), la coque (*hull*), les câbles d'ancrage (*tethers*), la structure d'ancrage au fond de la mer (*foundation template*). La forme standard d'une TLP prévoit une coque en acier composée de quatre tours cylindriques de grand diamètre (de l'ordre de 10 m et plus), placées aux quatre coins d'un carré et unies à la base par quatre poutres en caisson (*pontoons*) de section circulaire ou rectangulaire. On a récemment réalisé une TLP avec coque en béton armé précontraint. Le pont est une structure classique dans son genre: c'est un treillis réticulé spatial en acier. Les *tethers* sont des tubes d'acier vides, à poids immergé nul. La structure d'ancrage est un treillis en acier, fixée au sol par des pieux en acier. Les phases de construction d'une TLP sont schématisées en Fig. 1.2; les moments caractéristiques sont le *mating*, union de coque et *deck*, et la mise en place des câbles d'ancrage. Dans ces deux phases on fait appel au lestage en eau de la coque, afin de donner à la TLP la configuration provisoire nécessaire et pour obtenir, après vidage des réservoirs de lestage, la poussée d'Archimède prévue.

Les actions de calcul d'une TLP sont de trois types différents: les charges structurales, dont fait partie la poussée d'Archimède, le *payload*, dans lequel on dénombre le poids de toutes les infrastructures et des matériaux stockés, les charges environnementales, d'origine météorologique, comme par exemple l'action du vent, de la houle et des courants.

Les premières études de faisabilité d'une TLP remontent au début des années 70, et en 1984 fut Hutton la première TLP installée. En 1992, date du début de la recherche, on comptait trois plates-formes installées, une en voie d'installation, deux en phase de projet et trois à l'étude. Les données principales de ces plates-formes sont résumées en Tab. 1.1.

1.2 Facteurs clés de l'utilisation des TLP.

Les TLP, par leurs caractéristiques intrinsèques, sont les seules plates-formes qui peuvent être installées sur les profondeurs de la mer les plus hautes parmi celles où l'exploration est possible, au-

delà des 1000 m de profondeur. En outre, elles ont une capacité presque illimitée en terme de *payload*, ce qui les rend particulièrement indiquées pour les gisements très grands et pour des installations avec stockage et pre-traitement du brut. Mais le facteur clé, du point de vue structural, pour l'emploi des TLP est leur comportement dynamique: les TLP ont des périodes propres pour les mouvements horizontaux nettement supérieures (de l'ordre de la minute) à celles des ondes significatives (de l'ordre de la dizaine de secondes), en minimisant ainsi l'amplification dynamique de la réponse à l'action des vagues, et de ce point de vue se comportent normalement mieux par rapport à d'autres plates-formes de type *compliant*. Au contraire, pour les mouvements verticaux, elles ont une rigidité comparable à celle des plates-formes traditionnelles, avec des périodes de l'ordre de quelques secondes, ce qui n'affecte pas le confort du personnel ni le fonctionnement des installations. Un autre facteur important pour l'utilisation des TLP est leur coût d'installation: il dépend peu de la profondeur de la mer, alors que celui d'une plate-forme traditionnelle en acier (*jacket*) varie à peu près avec le carré de la profondeur, Fig. 1.3. Au-delà d'une certaine profondeur d'installation, les TLP deviennent les structures les plus économiques. Un dernier avantage des TLP, et pas des moindres, est celui de pouvoir être réutilisées pour d'autres gisements, une fois que celui en exploitation est épuisé.

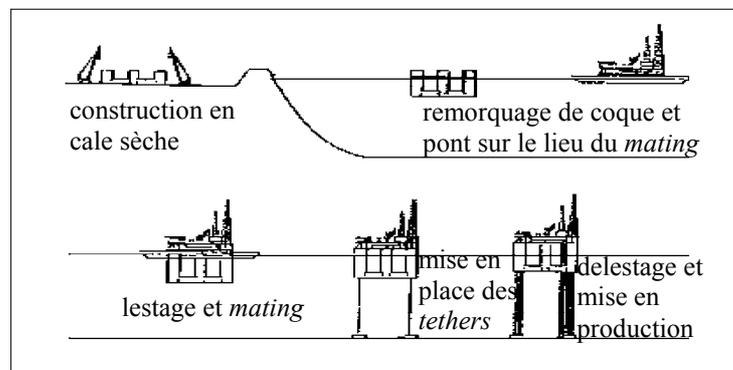


Fig. 1.2. Phases d'installation d'une TLP.

TLP	HUTTON	JOLIET	SNORRE	AUGER	AQUILA	HEIDRUN	HALTEN.	GABON	BRESIL
Phase	oper.	oper.	oper.	install.	projet	projet	étude	étude	étude
Prof. mer (m)	147	536	310	872	827	350	280	1'000	1'000
Payload (t)	7'300	3'200	18'000	12'700	7'360	20'927	4'980	22'000	8'000
Poids deck (t)	17'700	1'850	17'000	11'000	4'410	12'588	1'800	17'740	-
Poids coque (t)	22'400	4'700	38'000	22'000	11'715	27'916	8'800	37'707	9'100
Lestage (t)	740	900	6'000	1'000	700	1'500	1'274	1'500	-
Pretension (t)	13'000	4'400	25'000	14'800	8'565	19'500	6'022	28'196	11'600
Déplacement (t)	63'600	16'600	106'500	62'700	35'210	88'000	25'429	112'780	-
Nombre câbles	16	12	16	12	16	16	12	16	-
Dim. câbles (mm)	260x92,5	610x20,6	813x38	660x33	508x25,4	260x92,5	508x20	877x44	710x32
Diam. tours (m)	17,7-14,5	12,2	25	22,25	16,5	24	12,8	25,9	18
Int. tours (m)	78-74	42,7	76	65-80,5	65	75	55	80,9	52-48
Imm. (m)	33,2	24,4	37,5	27,4	30	35	35	38,8	-
Haut. pont (m)	11,25	6	13,5	21,3	13,5	-	-	-	-

Tab. 1.1. Caractéristiques des TLP existantes ou prévues (1992).

1.3 Le but de la recherche.

La conception d'une TLP, même pour la seule partie préliminaire (*layout*) est une entreprise longue et difficile, qui engage des moyens et des compétences considérables. Toutefois, on peut considérer que la conception du pont ne diffère pas par rapport au cas d'une structure traditionnelle. En outre, ses dimensions sont déterminées par les exigences productives, qui fixent les infrastructures à héberger, et par les normes de sécurité, qui établissent certaines distances minimales entre les modules de production. En définitive, au moins dans une phase préliminaire, le pont est dimensionné sur la base de considérations productives, et ceci donne à la conception de la coque deux données: les dimensions en horizontale et le poids à supporter (*payload* plus poids du pont).

Pour fixer la géométrie de la coque standard, il faut donc déterminer le diamètre et la hauteur des tours, le diamètre des pontoons et l'immersion de la coque en configuration de repos. En ce qui concerne les câbles d'ancrage, il faut préciser leur nombre et dimensions (rayon interne et externe). C'est évident que toutes ces grandeurs dépendent mutuellement les unes des autres, et les concepteurs doivent trouver leur combinaison optimale. Mais quoi optimiser? Sur ce point, de nombreuses considérations pourraient être faites, mais sans doute un paramètre économiquement important est le poids de la structure coque. Nous avons donc décidé de rechercher une méthode de calcul des dimensions de la coque afin d'en minimiser le poids. Il faut préciser que notre ambition n'était pas celle de mettre en place un procédé capable d'aboutir à la conception finale de la coque: celle-ci est en fait toujours l'aboutissement d'un processus complexe, qui doit tenir compte d'un nombre énorme d'aspects et qui nécessite des compétences les plus variées. Notre but était plutôt celui de trouver une méthode simple, rapide et peu chère pour déterminer les dimensions optimales de la coque, à utiliser comme point de départ du processus de mise au point à suivre.

Bien évidemment, en 1992 des études avaient déjà été menées sur ce sujet, voir la bibliographie, mais la plupart de ces méthodes, toujours plutôt lourdes, se basait soit sur des évaluations empiriques, soit sur des systèmes experts; dans les deux cas, c'était l'expérience qui jouait un rôle fondamental. Notre but était différent: nous voulions optimiser le poids de la coque par une méthode basée sur les seules équations de la mécanique plutôt que sur l'expérience. Dans ce faire, les difficultés intrinsèques au problème, ainsi que le manque de moyens, surtout pour le calcul des interactions hydrodynamiques, nous ont conseillés, voire obligés, à passer par des étapes allant du plus simple au plus complexe. L'organisation en différentes phases de la recherche est détaillée dans le paragraphe suivant.

1.4 Organisation de la recherche.

La recherche se compose de deux volets principaux: la mise au point du procédé d'optimisation dimensionnelle de la coque et l'étude des interactions entre la TLP et la mer.

En ce qui concerne le premier volet, nous avons d'abord procédé à l'étude d'un système semblable à une TLP, mais plus simple géométriquement: une plate-forme mono-colonne. Dans cette partie on a donc considéré l'optimisation du poids d'un tel système sous les mêmes contraintes qu'on aurait imposées après à l'optimisation de la TLP. Cette étude nous a permis de comprendre un certain nombre de points et de caractéristiques du problème. Dans une deuxième phase, il s'agissait de transposer à la TLP le procédé mis au point pour le mono-colonne. Pour cela, nous avons été amenés à ne pas considérer tout de suite la TLP, mais à passer par un autre modèle simplifié, intermédiaire entre la mono-colonne et la TLP. Le passage aux dimensions optimales de la TLP se fait dans une troisième phase, où un critère de passage entre le modèle simplifié et la TLP est proposé sur la base d'une invariance prise comme paramètre significatif et dominant de la méthode. Dans une quatrième phase on passe à la vérification des contraintes pour la TLP ainsi dimensionnée. A ce moment, des hypothèses couramment employées dans la pratique nous ont permis aussi de dimensionner les *tethers*. C'est à ce stade du processus qu'un certain nombre

d'hypothèses simplificatrices utilisées précédemment dans les phases de dimensionnement ont été abandonnées, et les contraintes ont été écrites de façon plus correcte. Sur la base des résultats calculés, on peut, comme dernière phase, retoucher la valeur de certaines dimensions, ce qui amène souvent à une diminution ultérieure et considérable du poids de la coque. Le procédé mis en place est détaillé dans le chapitre suivant.

Le deuxième volet de la recherche concernait l'étude des interactions entre la plate-forme et la mer; en effet, ces interactions apparaissent, dans leurs différentes formes, au sein des équations du procédé décrit ci-haut. Les dimensions typiques d'une TLP obligent à faire appel aux solutions propres à la théorie de la diffraction. Or, celles-ci ne concernent que des formes simples, le cylindre notamment, et sont d'usage assez compliqué. C'est pourquoi nous avons procédé à une simplification d'une de ces solutions, celle de Garrett, afin de trouver une formule simple, mais suffisamment bien approximée, pour le calcul des actions de la houle. Ces études, ainsi que la théorie utilisée pour le calcul de l'interaction entre les quatre tours et de la force sur les pontons, sont rapidement rappelées dans le chapitre 3.

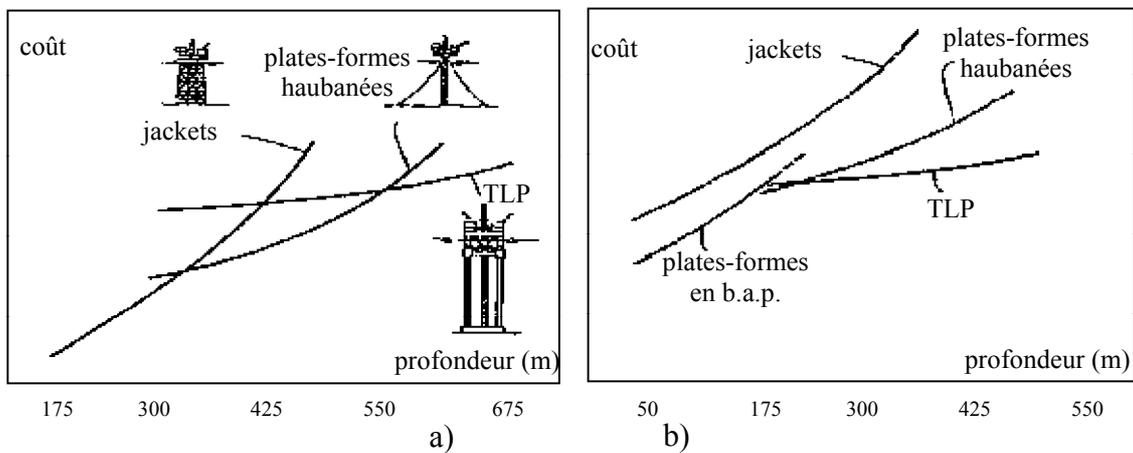


Fig. 1.3. Coût d'installation des plates-formes avec la profondeur de la mer; a): conditions normales; b): Mer du Nord.

2.1 Etude d'un modèle mono-colonne.

Comme anticipé ci-haut, nous avons d'abord procédé à l'étude du comportement d'un système proche d'une TLP, mais géométriquement plus simple: la plate-forme mono-colonne. Il s'agit d'un cylindre creux, Fig. 2.1, dont les dimensions sont b , le rayon externe, s , l'épaisseur, p , l'immersion et q , l'émersion. On pose

$$s = k_s b, \quad k_s \ll 1; \tag{2.1}$$

k_s est un facteur qu'on considère comme connue à l'avance. La raison de cela est liée à la façon dont on déterminera, au moment du dimensionnement de la coque de la TLP, le poids de la coque, qui sera fonction de ses dimensions. Ici on a choisi de faire la même chose, en simplifiant au maximum la relation entre épaisseur et rayon du cylindre. On suppose, sans perte de capacité représentative du modèle, que les deux bases du cylindre aient poids nul, et que la densité du cylindre soit ρ_s . Le cylindre est ancré au fond de la mer, de profondeur d , par n câbles inextensibles, de poids nul, équidistants. Ces câbles sont tendus par la poussée d'Archimède.

Les actions considérées sont les suivantes: le poids propre du cylindre, le *payload*, dû à une masse M_e uniformément répartie sur la surface supérieure du cylindre, une force horizontale constante H , avec excentricité e_H , une force horizontale variable F , avec excentricité e_F , la poussée d'Archimède, due à l'immersion p , éventuellement augmentée de la hauteur de marée Δu . La force H simule l'action du *drift*, voir § 3.2, des courants et du vent. La force F correspond à celle du premier ordre provoquée par un train régulier d'ondes sinusoïdales, d'amplitude a et longueur L , voire encore le § 3.2.

Comme déjà annoncé dans le chapitre précédent, le but est la minimisation du poids de la structure, sous certaines contraintes. Celles-ci concernent les déplacements, la traction des câbles d'ancrage, les fréquences propres et les dimensions de la structure. En effet, on a considéré les mêmes contraintes qu'on aurait posé sur le problème de la TLP, et qui sont toujours prises en compte lors de la conception d'une telle structure. Si l'on considère que le poids W_c du cylindre est donné par l'expression

$$W_c(b, p) = 2 \pi \rho_s k_s b^2 (p + q), \tag{2.2}$$

on peut poser le problème d'optimum avec contraintes dans la forme suivante:

minimiser la fonction de p et de b^2

$$W(b^2, p) = b^2 (p + q), \tag{2.3}$$

soumise aux contraintes

$$v1: \quad N \geq N_{min}, \tag{2.4}$$

$$v2: \quad N \leq N_{max}, \tag{2.5}$$

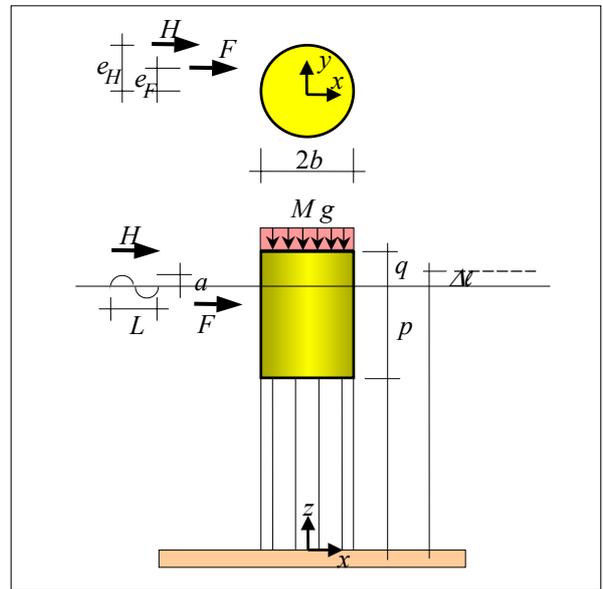


Fig. 2.1. Schéma du système mono-colonne.

$$v3: \quad \omega_{\theta} \leq \alpha_{\theta} \omega, \quad \alpha_{\theta} < 1, \quad (2.6)$$

$$v4: \quad \omega_{\psi} \leq \alpha_{\psi} \omega, \quad \alpha_{\psi} < 1, \quad (2.7)$$

$$v5: \quad \theta \leq \theta_0, \quad (2.8)$$

$$v6: \quad \psi \leq \psi_0, \quad (2.9)$$

$$v7: \quad b^2 \geq \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2, \quad (2.10)$$

$$v8: \quad a < p, \quad (2.11)$$

$$v9: \quad p < d, \quad (2.12)$$

avec

$$q = d(1 - \cos \theta_0) + a + \Delta \ell + ag, \quad (2.13)$$

où ag (*air gap*) est une distance de sécurité, normalement prise égale à 1.5 m. Dans les relations (2.4) à (2.13) N est la traction des câbles, ω est la fréquence de la houle, θ est l'inclinaison des câbles par rapport à la verticale, ψ est la rotation du cylindre autour de la verticale, ω_{θ} et ω_{ψ} les fréquences propres à ceux deux modes. Les liens v1, v2, v5, v6 et v7 sont imposés pour des raisons technologiques et de fonctionnement des installations, les v3 et v4 pour limiter l'amplification dynamique de la réponse aux actions oscillatoires de la houle, les v8 et v9 pour que la solution aie un sens; le coefficient λ est normalement choisi entre 10 et 20.

Pour expliciter les contraintes v1 à v6 en fonction de p et de b^2 , différentes hypothèses ont été considérées, afin de se situer toujours dans le cas le plus défavorable: absence de marée pour le calcul des déplacements, présence pour le calcul de la traction N , passage du creux de la houle pour N_{min} , de l'arête pour N_{max} , etc. En ce qui concerne l'action F , on a considéré la solution de Garrett, ainsi quelle a été modifiée, voir § 3.3, pour la rendre de plus simple usage; cette force a été calculée pour l'immersion effective, à chaque instant, du cylindre. Pour la masse ajoutée par unité de longueur du cylindre, on a pris celle propre à un cylindre de longueur infinie; en effet, ceci est correct si la fréquence d'oscillation est faible, comme c'est toujours le cas pour ce genre de problèmes. Les liens explicités sont:

$$v_1 \rightarrow b^2 \geq \frac{n N_{min} + M_e g}{\pi g [p(\rho - 2\rho_s k_s) - \rho a - 2\rho_s k_s q]}, \quad (2.14)$$

$$v_2 \rightarrow b^2 \leq \frac{n N_{max} \cos \theta_0 + M_e g}{\pi g [\rho(a + \Delta \ell + d(1 - \cos \theta_0)) - 2\rho_s k_s q + p(\rho \cos \theta_0 - 2\rho_s k_s)]}, \quad (2.15)$$

$$v_3 \rightarrow b^2 \leq \frac{M_e g + \alpha_{\theta}^2 \omega^2 (d - p)}{\pi c_1 p^2 + c_2 p + c_3}, \quad (2.16)$$

$$v_4 \rightarrow b^2 \leq \frac{M_e 2g + \alpha_{\psi}^2 \omega^2 (d - p)}{2\pi d_1 p^2 + d_2 p + d_3}, \quad (2.17)$$

$$v_5 \rightarrow b^2 \geq \frac{1}{\pi g} \frac{H + M_e g \theta_0}{\theta_0 (\rho p - 2\rho_s k_s (p + q)) + \frac{4\chi_x \rho a}{1 - \frac{1}{\alpha_{\theta}^2}} A(p)}, \quad (2.18)$$

$$v_6 \rightarrow b^2 \geq \frac{B(p) + \sqrt{B^2(p) + 4 \pi g \psi_0 H e_H (d-p)(\rho p - 2 \rho_s k_s (p+q))}}{2 \pi g \psi_0 (\rho p - 2 \rho_s k_s (p+q))}, \quad (2.19)$$

avec

$$c_1 = \alpha_\theta^2 \omega^2 (\rho + 2 \rho_s k_s),$$

$$c_2 = g(\rho - 2 \rho_s k_s) - \alpha_\theta^2 \omega^2 [\rho(d - \Delta\ell) + 2 \rho_s k_s (d - q)], \quad (2.20)$$

$$c_3 = g(\rho \Delta\ell - 2 \rho_s k_s q) - \alpha_\theta^2 \omega^2 d(\rho \Delta\ell + 2 \rho_s k_s q),$$

$$d_1 = 2 \alpha_\psi^2 \omega^2 \rho_s k_s,$$

$$d_2 = g(\rho - 2 \rho_s k_s) - 2 \alpha_\psi^2 \omega^2 \rho_s k_s (d - q), \quad (2.21)$$

$$d_3 = g(\rho \Delta\ell - 2 \rho_s k_s q) - 2 \alpha_\psi^2 \omega^2 \rho_s k_s q d,$$

$$A(p) = \frac{\sinh kd - \sinh k(d-p)}{\cosh kd}, \quad (2.22)$$

$$B(p) = -4 \pi \rho g \chi_x a e_F A(p)(d-p) \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_\psi^2}} + M_e g \psi_0. \quad (2.23)$$

La constante χ_x est un coefficient réductif qui affecte le calcul simplifié de la force F , § 3.3, alors que $k = 2\pi/L$ est le nombre d'onde. On peut constater que le problème est géré par des équations assez complexes.

Le problème formulé est fortement non linéaire: non seulement la fonction objectif (2.3) est non convexe (elle est la superposition d'un plan et d'un paraboloïde hyperbolique), mais les liens et le domaine admissible aussi. En Fig. 2.2 on montre un exemple de calcul: le domaine admissible est hachuré. Nous avons pu montrer que le minimum doit se trouver sur les liens qui limitent le domaine par le bas. Comme tous les liens ont été explicités par rapport à b^2 , le minimum global peut être trouvé, à peu d'effort, de façon exacte. Dans l'exemple de figure, le minimum se trouve en correspondance du point A, intersection entre v_5 et v_7 . Nous avons pu constater que celle-ci est une situation typique, ce qui comporte que la solution optimale très souvent est celle qui a le plus petit rayon compatible avec les liens, voire que la solution se situe du côté des cylindres très élancés. Une fois trouvée, l'unicité de la solution peut être facilement vérifiée graphiquement, en traçant la ligne de niveau de la fonction objectif par le point de minimum. Une autre solution existera seulement si cette courbe croise en un autre point le contour inférieur du domaine admissible. Dans le tableau 2.1 on résume les données relatives au calcul montré en figure. Avec τ on a indiqué les périodes, voire $2\pi/\omega$, tandis que x_{max} et z_{max} indiquent les déplacements maximaux dans les deux directions. On peut remarquer que la valeur prévue pour q était de 15.1 m, alors qu'à la suite du calcul on voit qu'il suffit une valeur de 7.9 m. On peut donc réduire à cette valeur la partie émergée du cylindre, ce qui donne un poids final de 2161 t, avec une réduction du 7.5%. On reviendra sur ce point au paragraphe 2.5.

2.2 Optimisation d'un modèle simplifié de TLP: le mono-colonne modifié.

Nous avons essayé l'optimisation directe de la coque d'une TLP, en adaptant à cette structure la démarche précédente. La tâche s'est avérée très compliquée, et cette voie, quoi que possible et sans

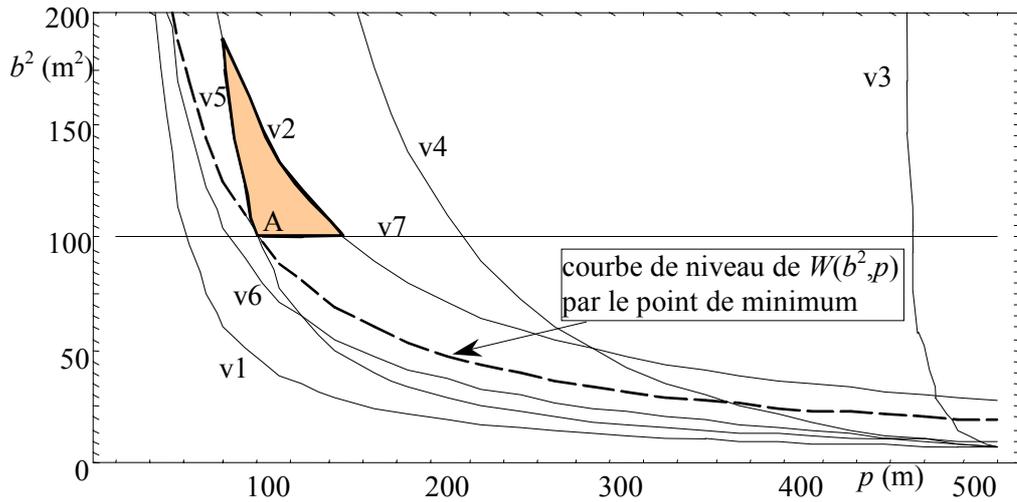


Fig. 2.2. Le domaine admissible et le point de minimum dans un cas.

<i>Données de calcul</i>	$d= 500$ m	$a= 5$ m	$L= 100$ m	$\tau= 8$ s	$\Delta t=1$ m
	$n= 16$	$H= 500$ t	$M_e= 10000$ t	$N_{min}= 10$ t	$N_{max}= 2000$ t
	$\tau_{\theta max}= \tau_{\psi max}= 16$ s	$\theta_0= 10^\circ$	$\psi_0= 20^\circ$	$\lambda= 10$	$k_s= 0.005$
	$ag= 1.5$ m	$e_F= 0.25$ m	$e_H= 0.5$ m	$\chi_x= 0.9$	$q= 15.1$ m
<i>Résultats</i>	$b= 10$ m	$p= 81.5$ m	$W= 2336$ t	$P. Arch.= 17048$ t	$N_{moy}= 857$ t
	$N_{min}= 758$ t	$N_{max}= 984$ t	$\tau_\theta= 67.8 \div 68.3$ s	$\tau_\psi= 29.5 \div 29.8$ s	$\theta_{max}= 2^\circ.4$
	$\psi_{max}= 6^\circ.2$	$x_{max}= 17.6$ m	$z_{max}= 0.37$ m	$q_{nec}= 7.9$ m	

Tab. 2.1. Résumé des données de calcul relatif à la Fig. 2.2.

doute inexplorée à l'époque de la recherche, est loin d'avoir les caractères de simplicité et rapidité d'application qu'on recherchait et qu'on avait obtenu pour le mono-colonne.

Nous avons donc pris la décision de procéder par voie synthétique: déterminer les dimensions d'une TLP en passant par un modèle réduit, plus simple du point de vue géométrique, mais avec les mêmes caractéristiques globales, et donc, vraisemblablement, le même comportement par rapport aux liens imposés au problème d'optimum. Ce modèle ne pouvait pas être directement le mono-colonne, car on a vu que dans ce cas la solution optimale se situe du côté des cylindres minces, qui ont forcément un comportement torsional très différent par rapport à une TLP; en outre, l'ordre de grandeur de l'immersion p n'est pas réaliste pour une TLP.

Nous avons eu alors l'idée de modifier le mono-colonne pour rapprocher son comportement à celui d'une TLP, sans véritablement changer ou trop alourdir la démarche décrite au paragraphe précédent. Le modèle que nous avons pris en compte est celui de Fig. 2.3. Nous avons ajouté deux plaques carrées de poids nul, rigides et fixées aux bases du cylindre, dont le côté mesure exactement ic , l'inter-axe entre les quatre tours de la TLP, qui est, pour les raisons expliquées au paragraphe 1.3, considéré comme une donnée de projet. Les câbles d'ancrage sont placés aux quatre coins de la plaque inférieure. Par cette simple modification, on obtient un système dont le comportement torsional se rapproche d'une TLP ayant la même poussée d'Archimède. La masse M_e , représentant le payload, est considérée uniformément répartie sur la plaque supérieure. On peut montrer que si

$$ic \geq b \sqrt{\frac{24 \pi \rho_s k_s b^4 (p+q)}{M_e b^2 + 12 \pi \rho_s k_s b^4 (p+q)}}, \quad (2.24)$$

alors la rigidité en torsion du système augmente plus que son inertie, par rapport au mono-colonne; cette condition est toujours vérifiée avec les dimensions normales d'une TLP.

Le problème à traiter ne change pas par rapport à celui énoncé au paragraphe 2.1, sauf pour les liens v4 et v6 qui deviennent

$$v_4 \rightarrow b^2 \leq \frac{D(p) - \sqrt{D^2(p) - 4 C(p) M_e i c^2 [3 g \alpha_\psi^2 \omega^2 (d - p)]}}{2 C(p)}, \quad (2.25)$$

$$v_6 \rightarrow b^2 \geq \frac{M_e g i c^2 \psi_o + 2 H \varphi(d - p)}{\pi g [i c^2 \psi_o (\rho p - 2 \rho_s k_s (p + q)) - 8 \chi_x \rho a \varphi E]}, \quad (2.26)$$

avec

$$C(p) = 12 \pi \rho_s k_s \alpha_\psi^2 \omega^2 (d - p)(p + q), \quad (2.27)$$

$$D(p) = 3 \pi g i c^2 [(\rho p - 2 \rho_s k_s) + \rho \Delta l - 2 \rho_s k_s] q, \quad (2.28)$$

$$E(p) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_\psi^2} - 1} (d - p) \frac{\sinh kd - \sinh k(d - p)}{\cosh kd}. \quad (2.29)$$

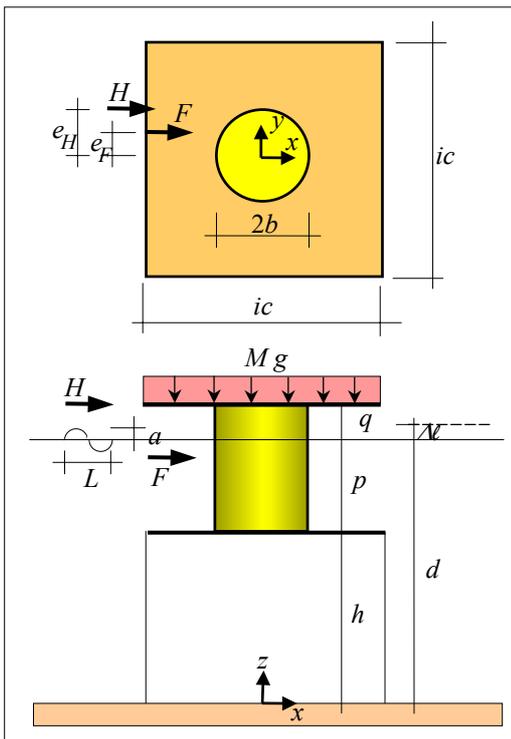


Fig. 2.3. Le modèle simplifié de TLP.

Pour évaluer l'effet du changement par rapport au mono-colonne, considérons encore l'exemple de Tab. 2.1, où on prend pour e_H la valeur 10 m, plus vraisemblable pour une TLP. Dans ce cas, voir la Fig. 2.4, on montre que le point de minimum ne change pas, et donc les résultats du calcul non plus, mais l'effet du changement de modèle est celui de rendre non vide le domaine admissible, ce qui serait le cas pour le mono-colonne, qui ne pourrait donc pas respecter les conditions imposées.

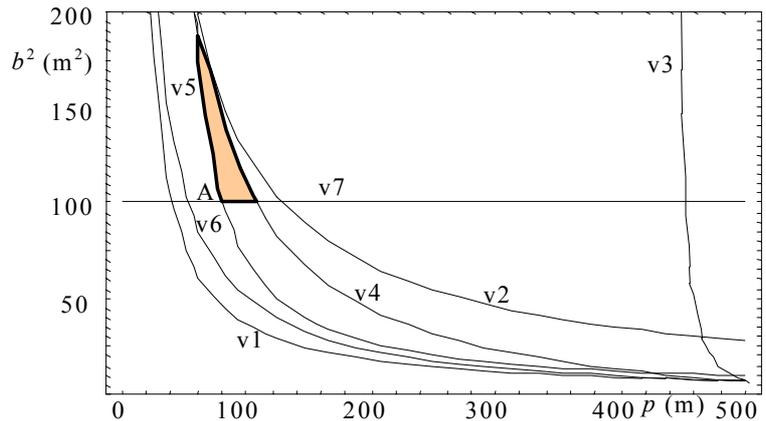


Fig. 2.4. Le domaine admissible pour le cas traité.

2.3 Calcul des dimensions d'une TLP.

Pour déterminer les dimensions d'une TLP, il faut encore fixer le rayon des tours, b , le rayon des pontons, b_p , et l'immersion, p . En effet, ic est considéré comme une donnée et q est calculé comme spécifié au paragraphe 2.1. Trois conditions sont donc nécessaires. En ce qui concerne b , on

remarque que le rayon du cylindre du modèle simplifié est souvent le minimum possible, et donc du même ordre de grandeur de celui des tours d'une TLP. On considère donc que b est la valeur qu'on obtient à la suite de l'optimisation du modèle simplifié. Ensuite, on a déjà eu l'occasion de remarquer que le facteur décisif du comportement à la fois du modèle simplifié et de la TLP est la poussée d'Archimède. Nous avons donc pris la position suivante: la TLP à dimensionner aura le même volume immergé du modèle simplifié. Dans d'autres termes, on prend comme paramètre caractéristique et invariant le volume immergé. La troisième condition est la suivante: b_p et p sont ceux qui minimisent le poids de la coque de la TLP, à parité de ic et de b .

Le poids de la coque est évidemment fonction des dimensions géométriques de la coque même; nous avons utilisé dans ce but une étude de 1983 menée par Chou *et alii*, qui donnent, sous forme de tableaux, le poids des différentes parties de la coque en fonction de ses dimensions. Nous avons obtenu une formule pour le calcul du poids par interpolation multiple:

$$W_S = 4 \left[P_1(2b) ag + P_2(2b, p + q - ag) + (ic - 2b) P_3(2b_p, p + q - ag - b_p) \right], \quad (2.30)$$

où

$$P_1(\xi) = 0,0179429 \xi^2 + 0,0457119 \xi - 0,0075, \quad (2.31)$$

$$P_2(\xi, \eta) = 0,000978645 \xi^2 \eta^2 - 0,013311 \xi^3 - 0,00134189 \eta^3 + \\ + 0,0353569 \xi^2 \eta - 0,00159962 \xi \eta^2 + 0,898661 \xi^2 + 0,167017 \eta^2 + \\ + 1,17128 \xi \eta - 16,0452 \xi - 8,78536 \eta + 112,789, \quad (2.32)$$

$$P_3(\xi, \eta) = 0,000663832 \xi^3 + 0,000177627 \eta^3 + 0,00151056 \xi^2 \eta + \\ - 0,0000447027 \xi \eta^2 + 0,0835803 \xi^2 + 0,0159566 \eta^2 + 0,0104801 \xi \eta + \\ + 0,271175 \xi - 0,401751 \eta + 1,95297. \quad (2.33)$$

Dans les formules (2.31) à (2.33) ξ est le diamètre, et η l'immersion. Nous avons vérifié au préalable, sur les TLP connues, la bonne qualité des prédictions obtenues par la (2.30).

L'invariance du volume immergé entre modèle simplifié et TLP donne la condition

$$p = \frac{p'}{4} - \frac{b_p^2}{b^2} (ic - 2b), \quad (2.34)$$

où p' est l'immersion du modèle simplifié. Sur la détermination des dimensions de la TLP on pose deux conditions, normalement adoptées dans la pratique, voir encore Chou *et alii*, 1983: le volume des quatre *pontoons* doit être compris entre le volume immergé d'une ou de deux colonnes. Ceci se traduit par les relations

$$p \geq 2 \frac{ic - 2b}{b^2} b_p^2, \quad (2.35)$$

$$p \leq 4 \frac{ic - 2b}{b^2} b_p^2. \quad (2.36)$$

Les courbes (2.34) à (2.36) sont, dans le plan (b_p, p) , des paraboles, comme en Fig. 2.5. Le problème revient à déterminer le minimum de la fonction (2.30) calculée sur

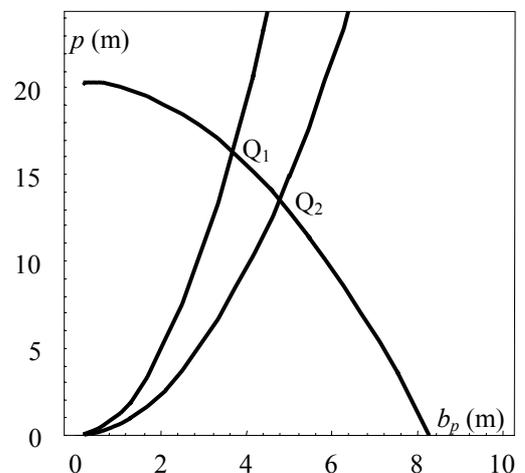


Fig. 2.5. Les courbes liant pour W_S .

l'arc de parabole (2.34) entre ses intersections Q_1 avec la (2.35) et Q_2 avec la (2.36). Normalement, le minimum se trouve en Q_2 , voire pour un volume des *pontoons* égal à celui de deux tours.

Par ce procédé, les dimensions de la TLP restent fixées. Toutefois, on ne peut pas parler, de façon propre, de dimensions optimales, mais plutôt d'un processus basé sur un critère de minimum. Il faut donc vérifier, *a posteriori*, que la TLP ainsi dimensionnée respecte les limitations imposées, voire que la solution trouvée appartient au domaine admissible.

2.4 Contrôle des résultats.

A ce stade de la démarche, les dimensions de la TLP sont connues, ce qui permet de réécrire les liens v1 à v6 de façon plus exacte, et moins restrictive. En fait, maintenant on peut mieux préciser l'inertie de la plate-forme et les forces de la houle, en prenant en compte, par exemple, les interactions entre les quatre tours. Dans cette phase, on procède aussi au calcul des *tethers*, en faisant pour ceux-ci l'hypothèse de poids immergés nul, toujours faite pour des raisons de mise en oeuvre. Les liens, pour la TLP deviennent:

$$v1 \rightarrow \frac{4\pi\rho g \left[b^2(p-a) + b_p^2(ic-2b) \right] - W_s - M_e g}{n} - \frac{H(p+q) + F_p b_p + M_w}{n ic} - \rho_s g A_t(d-p) \geq N_{min}, \quad (2.37)$$

$$v2 \rightarrow \frac{4\pi\rho g \left[b^2(d+a+\Delta\ell - (d-p)\cos\theta_o) + b_p^2(ic-2b) \right] - W_s - M_e g}{n \cos\theta_o} + \frac{H(p+q) + F_p b_p + M_w}{n ic} \leq N_{max}, \quad (2.38)$$

$$v3 \rightarrow \sqrt{g h \cos\hat{\theta} \frac{4\pi\rho \left[b_p^2(ic-2b) + b^2(d+\Delta\ell - h \hat{\theta}) \right] - M_e - M_s}{(M_e + M_s + M_\theta)h^2 + n(I_T + I_\theta)}} \leq \alpha_\theta \omega, \quad (2.39)$$

$$v4 \rightarrow ic \sqrt{g \frac{4\pi\rho \left[b_p^2(ic-2b) + b^2(d+\Delta\ell - \sqrt{h^2 - ic^2(1-\cos\hat{\psi})}) \right] - M_e - M_s}{2h \left[I_e + I_s + I_\psi(\hat{\psi}) + I_T(\hat{\psi}) + I_{T\psi}(\hat{\psi}) \right]}} \leq \alpha_\psi \omega, \quad (2.40)$$

$$v5 \rightarrow \hat{\theta} + \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_\theta^2}} \frac{F(\hat{\theta}) (\cos\omega t - \cos\omega_\theta t)}{g \left\{ 4\pi\rho \left[b_p^2(ic-2b) + b^2(d+\Delta\ell - h \hat{\theta}) \right] - M_e - M_s \right\}} \leq \theta_o, \quad (2.41)$$

$$v6 \rightarrow \hat{\psi} + \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_\psi^2}} \frac{2h}{g ic^2} \frac{F(\hat{\psi}) e_F (\cos\omega t - \cos\omega_\psi t)}{4\pi\rho \left[b_p^2(ic-2b) + b^2(d+\Delta\ell - \sqrt{h^2 ic^2(1-\cos\hat{\psi})}) \right] - M_e - M_s} \leq \psi_o. \quad (2.42)$$

Dans les équations ci-haut, F_p est la force de la houle sur les pontoons, M_w est le moment, par rapport au barycentre de la base de la coque, de la force de la houle sur les tours, M_s est la masse de la coque, I_T et I_θ sont les moments d'inertie, propre et hydrodynamique, d'un câble par rapport à la

base, $F(\hat{\theta})$ et $F(\hat{\psi})$ sont la force de la houle calculée pour les angles d'équilibre statique $\hat{\theta}$ et $\hat{\psi}$, I_e, I_s, I_ψ, I_T et $I_{T\psi}$ les moments d'inertie, par rapport à l'axe z , du *payload*, de la coque, des câbles, propres et hydrodynamiques. Les fonctions v5 et v6 sont à maximiser numériquement.

Les angles $\hat{\theta}$ et $\hat{\psi}$ sont les solutions, trouvées numériquement, des équations

$$g \tan \hat{\theta} \left[4 \pi \rho \left(b_p^2 (ic - 2b) + b^2 (d + \Delta\ell - h \cos \hat{\theta}) \right) - M_e - M_s \right] - H = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{g ic^2 \sin \hat{\psi}}{2 \sqrt{h^2 - ic^2 (1 - \cos \hat{\psi})}} \left[4 \pi \rho \left(b_p^2 (ic - 2b) + \right. \right. \quad (2.44)$$

$$\left. \left. b^2 \left(d + \Delta\ell - \sqrt{h^2 - ic^2 (1 - \cos \hat{\psi})} \right) \right) - M_e - M_s \right] - H e_H = 0.$$

Les forces $F(\hat{\theta})$ et $F(\hat{\psi})$ sont données par les expressions

$$F(\hat{\theta}) = 4 \rho g \frac{a}{k} \left[4 \frac{\eta(ic, b) \chi_x(\hat{\theta})}{k} \frac{1}{\sqrt{J_1'^2(kb) + Y_1'^2(kb)}} \right. \quad (2.45)$$

$$\left. \frac{\sinh k(d + \Delta\ell) - \sinh(k h \cos \hat{\theta})}{\cosh k(d + \Delta\ell)} + \pi(ic - 2b)(k b_p)^2 e^{-k(d + \Delta\ell - b_p - h \cos \hat{\theta})} \right],$$

$$F(\hat{\psi}) = 4 \rho \frac{a}{k} \left[4 \frac{\eta(ic, b) \chi_x(\hat{\psi})}{k} \frac{1}{\sqrt{J_1'^2(kb) + Y_1'^2(k) b}} \right.$$

$$\left. \frac{\sinh k(d + \Delta\ell) - \sinh \left(k \sqrt{h^2 - ic^2 (1 - \cos \hat{\psi})} \right)}{\cosh k(d + \Delta\ell)} + \right. \quad (2.46)$$

$$\left. + \pi(ic - 2b)(k b_p)^2 e^{-k \left(d + \Delta\ell - b_p - \sqrt{h^2 - ic^2 (1 - \cos \hat{\psi})} \right)} \right].$$

Les termes qui apparaissent dans les (2.45) et (2.46) seront expliqués au chapitre suivant, ainsi que la façon de calculer F_p . Pour le calcul des inerties hydrodynamiques, on a fait appel à l'étude expérimentale classique de Wendel, 1956, et on a admis la sommation des inerties de chaque partie de la TLP pour évaluer l'inertie hydrodynamique totale.

Une fois le lien v2 vérifié, on connaît la traction maximale N_{Tmax} dans les câbles; il est alors possible de calculer la section A_t de chaque câble, une fois choisi le matériau. Selon l'hypothèse de poids immergé nul, on obtient les valeurs des rayons externe, r_e , et celui interne, r_i ,

$$r_e = \sqrt{\frac{A_t \rho_s}{\pi \rho}} \cong 1.56 \sqrt{A_t}, \quad (2.47)$$

$$r_i = r_e \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_s}} \cong 0.932 r_e. \quad (2.48)$$

Les formules (2.47) et (2.48) permettent, entre autres, le calcul des inerties, propres et hydrodynamiques, des câbles

<i>Données de calcul</i>	$d= 500$ m	$a= 5$ m	$L= 100$ m	$\tau= 8$ s	$\Delta k=1$ m
	$n= 16$	$H= 500$ t	$M_e= 10000$ t	$N_{min}= 10$ t	$N_{max}= 2000$ t
	$\tau_{\theta_{max}} = \tau_{\psi_{max}} = 16$ s	$\theta_0= 10^\circ$	$\psi_0= 20^\circ$	$\lambda= 10$	$k_s= 0.005$
	$ic= 50$ m	$e_F= 0.25$ m	$e_H= 10$ m	$\chi_x= 0.9$	$q= 15.1$ m
<i>Résultats avant réduction de q</i>	$b= 10$ m	$p= 13.5$ m	$b_p= 4.7$ m	$W_r= 4804$ t	$W_p= 2252$ t
	$W_S= 7056$ t	$W_c= 4267$ t	$N_{min}= -163$ t	$N_{max}= 1708$ t	$\tau_{\theta}= 75\div 79$ s
	$\tau_{\psi}= 60\div 63$ s	$\theta_{max}= 3^\circ.2$	$\psi_{max}= 12^\circ.3$	$\hat{\theta}= 2^\circ.89$	$\hat{\psi}= 12^\circ.21$
	$\hat{x}= 24.5$ m	$x_{max}= 26.4$ m	$\Delta x_{max}= 1.9$ m	$z_{max}= 0.7$ m	$q_{néc}= 7.2$ m
<i>Résultats après réduction de q</i>	$h_c= 20.7$ m	$\Delta W_S= -2170$ t	$W_r= 3195$ t	$W_p= 1691$ t	$W_S= 4886$ t
	$N_{min}= 51$ t	$N_{max}= 1201$ t	$W_c= 3000$ t	$r_e= 349$ mm	$r_i= 325$ mm

Tab. 2.2. Résultats dans un cas d'exemple.

2.5 Modifications finales des résultats.

Lors du contrôle sur le lien v5, si $\theta_{max} < \theta_0$, on peut réduire la valeur de q calculée, en voie prévisionnelle, avec la (2.13). De telle façon, le poids de la coque diminue, sans par ailleurs varier la poussée d'Archimède. Les contraintes v2, v5 et v6 seront plus facilement respectées, mais pas les liens v3 et v4, sur les fréquences propres. Toutefois, on a pu remarquer que la plupart des fois ces deux liens sont respectés avec une marge considérable, et donc, normalement, la diminution de poids de la TLP ne comporte pas de problèmes avec les liens sur les fréquences. La traction maximale dans les câbles tend, à la suite du changement de q , à augmenter pour cause de diminution du poids de la coque, et à diminuer par l'inévitable baisse des déplacements maximums. *A priori* c'est impossible de prédire quel est, parmi les deux, l'effet qui domine, mais la variation de la traction maximale à la suite de la diminution du poids n'est pas, généralement, très importante. Par contre, on a pu constater que la diminution du poids de la coque est souvent assez conséquente, surtout lorsque la profondeur de la mer est grande. En outre, cette diminution peut permettre, parfois, de respecter des liens autrement non vérifiés. Le procédé de diminution du poids de la coque envisagé ci-haut peut être répété plusieurs fois, mais le bénéfice décroît rapidement, car l'immersion maximale dépend du cosinus de l'angle θ . Dans le Tab. 2.2 on complète l'exemple de Tab. 2.1; avec W_r on a indiqué le poids des quatre tours, avec W_p celui des *pontoons* et avec W_c celui des câbles d'ancrage. A remarquer que la modification du poids de la coque permet le respect du lien v1, sur la traction N_{min} , autrement non vérifié, et que l'épargne en poids total touche le 30%.

2.6 Comparaison avec les TLP connues.

La démarche proposée dans ce chapitre a été testée sur les TLP connues, voir Tab. 1.1, afin d'en

évaluer les capacités prédictives. Les résultats, montrés dans le Tab. 2.3, indiquent que la méthode donne des résultats assez proches des valeurs effectives, et donc qu'on peut considérer le dimensionnement obtenu par la démarche proposée comme un bon point de départ pour des études plus approfondies: c'était le but de la recherche.

TLP	b (m)	p (m)	b_p (m)	$h_c (=p+q)$ (m)	W_s (t)	W_{eff} (t)	ΔW (%)
JOLIET	6,7	19,1	3,8	34,2	5337	4700	+13.5
SNORRE	10,0	47,6	6,5	64,8	37574	38000	-1.1
AUGER	10,0	40,2	6,1	53,3	25103	22000	+14.1
AQUILA	8,5	29,8	4,7	40,0	11748	11715	+0.3
HEIDRUN	12,0	27,6	4,7	45,0	20200	27916	-27.6
HALTEN.	7,5	16,7	3,4	37,5	7716	8800	-12.3
GABON	10,0	43,6	6	60,6	34100	37707	-9.6

Tab. 2.3. *Comparaison entre les valeurs effectives et les valeurs de calcul pour les TLP connues.*

3.1 Le cadre théorique.

Les théories pour le calcul des actions de la houle sur des corps, en particulier sur des cylindres, sont étroitement liées au développement des structures *off-shore*. La première, et plus connue, formule est la loi de Morison, 1950: l'interaction est réduite à une force horizontale F dont la valeur maximale par unité de longueur du cylindre est donnée par

$$F = C_M \rho A \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} C_D \rho D u |u|. \quad (3.1)$$

Dans la (3.1), A est la section transversale du cylindre, u la vitesse du flux, D le diamètre, C_D un coefficient de forme ($\cong 0.7$) et C_M le coefficient de Morison. Dans cette formule, l'action est la somme de deux parties: un terme d'inertie, affecté par ce qu'on appelle normalement la masse ajoutée M_a , dont la nature, expliquée dans un contexte irrotationnel, est bien connue depuis le paradoxe de d'Alembert, et qui est liée à la variation de vitesse du fluide, et un terme connu sous le nom de *drag force*, qui, lui, est dû essentiellement à la séparation de la traînée, et qui est donc expliqué dans un contexte rotationnel. Cette formule, très employée dans le monde de l'*off-shore*, ne trouve aucune justification théorique, mais sa capacité prédictive a été confirmée par l'expérience. Le coefficient de Morison est donné par l'expression

$$C_M = 1 + \frac{M_a}{\rho A}; \quad (3.2)$$

pour un cylindre, on montre théoriquement que $M_a = \rho A$, et donc que $C_M = 2$.

La loi de Morison n'est toutefois pas indiquée pour le cas des TLP, où les grandes dimensions des tours ont un double effet: d'un côté, elles modifient de façon significative le flux propre à la houle, phénomène de la diffraction, et de l'autre côté permettent de négliger le phénomène de la séparation de la traînée pour le flux propre à la houle. Le paramètre qui distingue entre la prévalence des effets de diffraction et la prévalence des effets de séparation de la traînée est le nombre de Keulegan Carpenter, KC:

$$KC = \frac{u_{\max} T}{D}, \quad (3.3)$$

où u_{\max} est la vitesse maximale du flux dans la houle, T est la période de la houle et D le diamètre du cylindre. Si $KC < \sim 4$, alors les effets de séparation de la traînée sont négligeables, et l'interaction fluide-structure peut être étudiée dans le cadre d'une théorie irrotationnelle. On peut facilement montrer, voir Sarpkaya Isaacson, 1981, que

$$KC_{\max} \cong \frac{\pi L}{7 D}, \quad (3.4)$$

étant L la longueur d'onde; on considère que si le rapport L/D est inférieur à 5, alors il faut considérer les effets d'altération du flux provoqués par la présence du corps, voire, il n'est plus possible de considérer le flux de la houle originelle. Mais si on prend la valeur limite de 5, on trouve $KC_{\max} \cong 2.2$, et donc dans ce cas, qui est typique pour les tours d'une TLP, il faudra considérer un flux irrotationnel avec les ondes soumises au phénomène de la diffraction. C'est donc dans ce contexte, de la théorie irrotationnelle de la diffraction, qu'il faudra chercher la solution au

problème d'interaction entre la houle et la TLP. En outre, il est indispensable de prendre un compte les effets du second ordre, très importants pour le comportement dynamique d'une TLP, et donc de faire appel à des formulations non linéaires.

3.2 Rappel de résultats généraux de la théorie non-linéaire de la diffraction.

Il n'est pas question ici de rappeler dans le détail la théorie générale de la diffraction, pour l'analyse de laquelle on renvoie aux textes en bibliographie, et notamment à l'article de Molin, 1979. Il faut toutefois rappeler quelques lignes essentielles de cette méthode. D'abord, il s'agit de rechercher une fonction harmonique Φ , le potentiel cinétique, dont le gradient est la vitesse des particules dans le flux; Φ est la solution d'un problème de Neumann. Le potentiel cinétique est exprimée comme la somme de deux contributions, celle du flux originel régulier des vagues, et celle irradié par le corps; sur cette partie, il faut préciser le comportement à l'infini, ce qui est fait par la condition d'irradiation de Sommerfeld, qui établit l'extinction progressive des ondes irradiées avec la distance du corps. Dans une théorie non-linéaire, on suit la même approche de Stokes pour la théorie non linéaire des ondes, 1847, qui est essentiellement une approche de perturbation: on développe chaque partie du potentiel en série de puissances d'un paramètre petit (normalement le rapport $k a = 2\pi a/L$, amplitude sur longueur d'onde). En s'arrêtant au deuxième terme de la série, on donne lieu aux théories du second ordre. Dans ce cadre, la théorie prévoit les forces d'interaction suivantes:

$$\mathbf{F}_1 = -\omega \rho \sin \omega t \int_S \varphi_1 \mathbf{n} ds, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{F}_{2C} = -\frac{\omega^2 \rho}{4g} \int_C \varphi_1 \bar{\varphi}_1 \mathbf{n} dl + \frac{\rho}{4} \int_S \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \bar{\varphi}_1 \mathbf{n} ds, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{F}_{2T} = \text{Re} \left\{ \left[-\frac{\omega^2 \rho}{4g} \int_C \varphi_1^2 \mathbf{n} dl - \frac{\rho}{4} \int_S (\nabla \varphi_1)^2 \mathbf{n} ds + 2i \omega \rho \int_S \varphi_2 \mathbf{n} ds \right] e^{-2i\omega t} \right\}. \quad (3.7)$$

Dans les (3.5) à (3.7), S indique la surface du corps, C la courbe d'intersection entre le corps et la surface libre de la mer, ω est la fréquence de la houle originelle, \mathbf{n} la normale extérieure au corps. Les termes φ_1 et φ_2 sont les parties indépendantes du temps des potentiels cinétiques du premier et second ordre, à savoir, si on exprime Φ comme

$$\Phi = \alpha \Phi_1 + \alpha^2 \Phi_2, \quad (3.8)$$

alors on pose normalement, en séparant les variables,

$$\Phi_1 = \text{Re}[\varphi_1(x, y, z) e^{-i\omega t}], \quad (3.9)$$

$$\Phi_2 = \text{Re}[\varphi_2(x, y, z) e^{-2i\omega t}]; \quad (3.10)$$

la force totale est donnée par

$$\mathbf{F} = \alpha \mathbf{F}_1 + \alpha^2 (\mathbf{F}_{2C} + \mathbf{F}_{2T}). \quad (3.11)$$

Il est important de remarquer que la force totale dépend de trois termes: un terme du premier ordre, \mathbf{F}_1 , qui est une force qui oscille avec la même fréquence des ondes originelles, et deux termes du second ordre, \mathbf{F}_{2C} et \mathbf{F}_{2T} . En particulier, \mathbf{F}_{2C} est une force constante, appelée *drift* potentiel, alors que \mathbf{F}_{2T} est une force variable, mais avec fréquence double de celle des ondes. Autrement dit, le contenu en fréquence des actions n'est pas celui de la cause, les vagues. Bien que d'un ordre de grandeur plus petit que \mathbf{F}_1 , car proportionnelles à α^2 , les deux forces du second ordre sont très

importantes dans l'analyse du comportement dynamique d'une TLP: en effet, c'est le *drift* qui provoque l'*offset* statique, voire la plus grande partie du déplacement de la structure, et non pas F_1 , qui, elle, est responsable seulement des déplacements autour de cette position. En outre, c'est F_{2T} qui met en cause, beaucoup plus que F_1 , l'endurance à la fatigue des *tethers*, et qui peut donner lieu à un phénomène connu sous le nom de *springing*. Ceci explique pourquoi l'analyse dans le domaine linéaire des actions de la houle n'est pas adaptée pour une TLP.

Les (3.5), (3.6) et (3.7) montrent clairement que pour résoudre le problème, il faut connaître le potentiel cinétique. Or, il faut considérer que chaque terme, du premier et second ordre, est, comme déjà dit, la somme de deux termes, voire en général

$$\Phi = \alpha(\Phi_{1w} + \Phi_{1s}) + \alpha^2(\Phi_{2w} + \Phi_{2s}), \quad (3.12)$$

où l'indice w indique le flux des ondes originaires et s celui des ondes irradiées (*scattered*). La possibilité de trouver une solution analytique à un tel problème dépend bien évidemment de la géométrie du problème, voire de la forme du corps. Quelques solutions concernant les cylindres sont connues, en particulier la solution de Mc Camy et Fuchs, 1954, pour l'action sur un cylindre vertical appuyé sur le fond de la mer, celle de Ogilvie, 1963, pour un cylindre horizontal complètement submergé, et celle de Garrett, 1971, pour un cylindre vertical flottant, voire non appuyé sur le fond. Nous allons voir rapidement ci-après la simplification proposée pour la solution de Garrett, alors que pour les autres on renvoie à la littérature. Pour des raisons d'espace, le calcul de F_{2T} , qui a été traité dans la thèse, mais pas utilisé dans la procédure d'optimisation de la TLP, ne sera pas montré ici.

3.3 Calcul simplifié des forces de la houle sur un cylindre vertical non appuyé sur le fond.

Le schéma géométrique est celui de Fig. 3.1. La solution en terme de potentiel doit respecter la continuité du flux entre les deux régions Ω_1 et Ω_2 . Cette solution est obtenue par un développement en série de fonctions spéciales, et si on pose ($k=2\pi/L$):

$$\lambda = kd, \quad (3.13)$$

$$\mu = kb, \quad (3.14)$$

$$\nu = kh, \quad (3.15)$$

$$\tau = kp, \quad (3.16)$$

$$B = \pi \rho g a b^2, \quad (3.17)$$

alors sous forme adimensionnelle elle est:

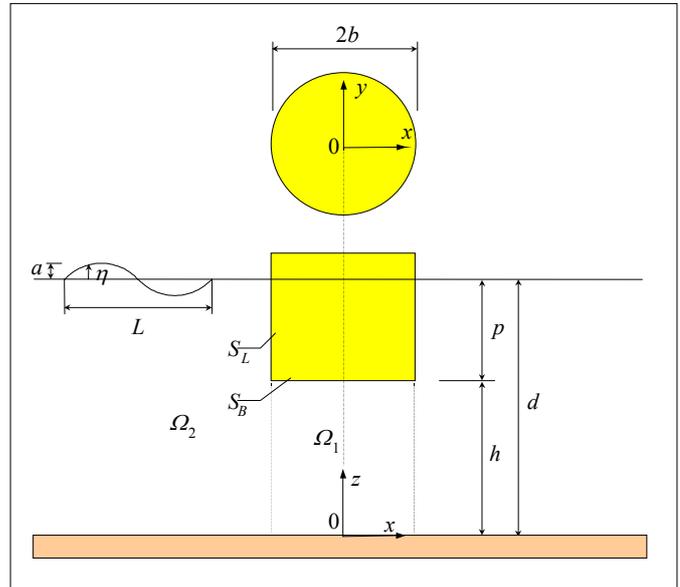


Fig. 3.1. Schéma de calcul.

$$X = \text{Re} \left[-2i\lambda \tanh \lambda \left(\sqrt{1 + \frac{\sinh 2\lambda}{2\lambda}} F_{1k} \frac{\sinh \lambda - \sinh \nu}{\mu} + \sum_q \sqrt{1 + \frac{\sinh 2\hat{\lambda}}{2\hat{\lambda}}} F_{1q} \frac{\sinh \hat{\lambda} - \sinh \hat{\nu}}{\hat{\mu}} \right) e^{-i\omega t} \right] B, \quad (3.18)$$

$$Z = \operatorname{Re} \left[2 \lambda \tanh \lambda \left(\frac{1}{2} F_{00} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n \pi \mu}{\nu} \right)^2} \frac{F_{0n}}{G_{0n}} \right) e^{-i \omega t} \right] B. \quad (3.19)$$

Ci-dessus, X est la force horizontale du premier ordre, et Z celle verticale. Les indices q sont les solutions réelles positives de l'équation

$$\omega^2 + q g \tan qd = 0, \quad (3.20)$$

et le symbole \wedge indique qu'on a utilisé q au lieu de k pour rendre adimensionnelles les quantités. Les fonctions F_{ij} , F_{0j} et G_{0j} sont des fonctions spéciales; en particulier, Garrett a utilisé une méthode de Galerkin pour trouver les fonctions F_{ij} , et cela nécessite la résolution de deux systèmes d'équations linéaires de taille infinie, qu'il faut évidemment tronquer à un certain ordre. Une fois les fonctions F_{ij} connues, les F_{0j} et G_{0j} peuvent être facilement calculées, voir Garrett, 1971.

C'est clair que l'emploi d'une telle solution dans un processus d'optimisation, où les dimensions b et p sont inconnues, est pratiquement impossible. Il était donc nécessaire de disposer d'une formule analytique donnée en forme directe, sans nécessité de passer par le procédé requis par la solution de Garrett. C'est pourquoi nous avons proposé une simplification de cette solution, suffisamment correcte pour les applications, et basée sur la considération suivante: un certain nombre d'essais numériques nous ont montré que les deux systèmes présentés sont à diagonale nettement prévalente, à tel point de pouvoir considérer négligeables les termes hors diagonale. Dans cette hypothèse, et en exploitant un certain nombre de propriétés des fonctions spéciales de Bessel, Neumann et Hankel, on trouve une expression finale pour la force horizontale qui est la suivante:

$$X \cong \frac{4 \chi_x(\lambda, \mu, \nu) \sinh \lambda - \sinh \nu}{\pi \mu^2 \cosh \lambda} \frac{1}{\sqrt{J_1'^2(\mu) + Y_1'^2(\mu)}} B, \quad (3.21)$$

où J_1 est la fonction de Bessel et Y_1 celle de Neumann, toujours du premier ordre, et

$$\chi_x(\lambda, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{J_1'^2(\mu) + Y_1'^2(\mu)}{\alpha_1^2(\lambda, \mu, \nu) + \alpha_2^2(\lambda, \mu, \nu)}}, \quad (3.22)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda, \mu, \nu) &= \sigma_1(\lambda, \mu, \nu) J_1(\mu) - J_1'(\mu), \\ \alpha_2(\lambda, \mu, \nu) &= \sigma_1(\lambda, \mu, \nu) Y_1(\mu) - Y_1'(\mu), \end{aligned} \quad (3.23)$$

et

$$\sigma_m(\lambda, \mu, \nu) = \frac{4 \pi \sinh^2 \nu}{2 \lambda + \sinh 2 \lambda} \frac{1}{\nu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{n}{\left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{\nu^2} \right)^2} \frac{I_m' \left(\frac{n \pi \mu}{\nu} \right)}{I_m \left(\frac{n \pi \mu}{\nu} \right)}, \quad (3.24)$$

où I_m est la fonction de Bessel modifié d'ordre m ,

$$I_m(\zeta) = i^{-m} J_m(i \zeta). \quad (3.25)$$

La (3.21) montre que la force horizontale est égale, au facteur χ_x près, à celle sur un cylindre appuyé sur le fond, déjà trouvée par Mc Camy et Fuchs, 1954. On a donc ramené le problème à une

forme plus simple et connue, mais la fonction (3.24) nécessite le calcul d'une série. Toutefois, nous avons pu remarquer que le coefficient χ_x est un facteur toujours inférieur à l'unité, et qui est, pour la plage des valeurs typiques pour une TLP, toujours assez proche de 1 (voir la Fig. 3.2). La force sur un cylindre flottant peut donc être calculée avec la formule de Mc Camy et Fuchs, pourvu qu'on la multiplie par un facteur réductif, qui tient compte des effets sur le bord inférieur; pour le cas des TLP cette réduction est assez faible.

Si de surcroît on considère que dans les cas pratiques on a toujours $\mu < 1$, on peut utiliser les approximations suivantes (voir par exemple Jahnke-Emde-Lösch, 1965):

$$J_1'(\mu) \cong \frac{1}{2}, \quad Y_1'(\mu) \cong \frac{2}{\pi \mu^2}, \quad (3.26)$$

et donc on aboutit à une dernière expression pour la force horizontale

$$X \cong \frac{8\chi_x}{\sqrt{16 + \pi^2 \mu^4}} \frac{\sinh \lambda - \sinh \nu}{\cosh \lambda} B, \quad (3.27)$$

où, dans la plupart des cas, χ_x peut prendre la valeur 0.95.

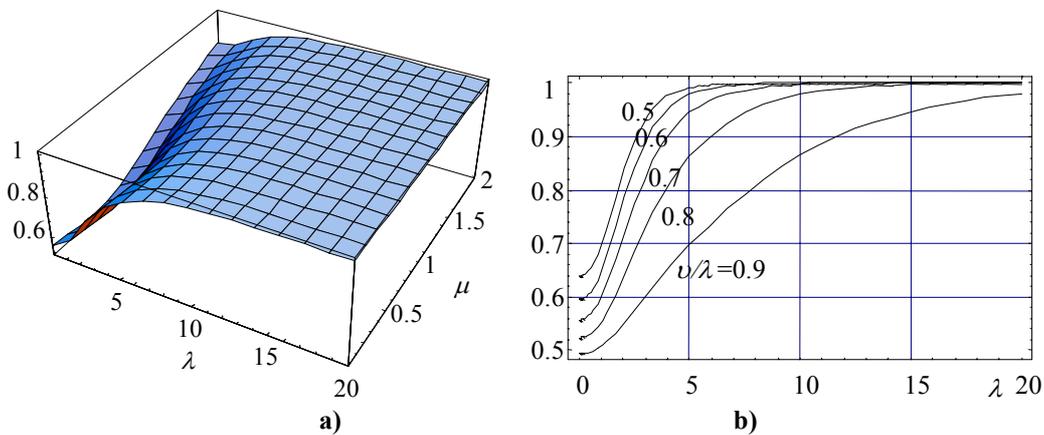


Fig. 3.2. Le facteur réductif de la force horizontale: (a) χ_x pour $\nu/\lambda=0,8$; (b) χ_x pour $\mu=0,5$ et pour différentes valeurs de ν/λ .

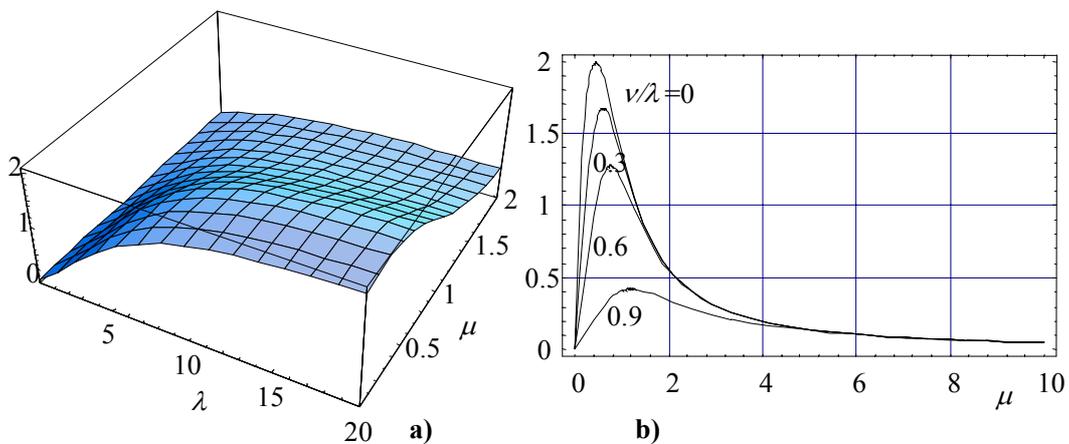


Fig. 3.3. Solution de Garrett approchée: (a) X/B pour $\nu/\lambda=0,8$; (b) X/B pour $\lambda=5\mu$ et pour différentes valeurs de ν/λ ; $\chi_x=0,95$.

En Fig. 3.3 on montre la variation de la force X/B , calculée avec la (3.27); la comparaison avec les résultats présentés par Garrett dans son mémoire original est très satisfaisante, et nous avons donc considéré correcte, dans nos buts, l'approximation trouvée.

L'action du premier ordre de la houle sur un cylindre flottant ne se limite pas à une force horizontale, il y a aussi une composante verticale Z , pour laquelle on a suivi une procédure semblable à celle décrite pour X , pour aboutir à la formule suivante:

$$Z \cong \frac{4\chi_z}{\sqrt{16 + \pi^2 \mu^4}} \frac{\sinh \nu}{\cosh \lambda} \frac{\nu + e^{-\nu}}{\nu} B. \quad (3.28)$$

Le coefficient χ_z joue le même rôle de χ_x , et son allure est montrée en Fig. 3.4; dans les cas typiques pour une TLP, on peut considérer que ce facteur est pratiquement constant et égal à l'unité. En Fig. 3.5 on montre l'allure de la force Z/B .

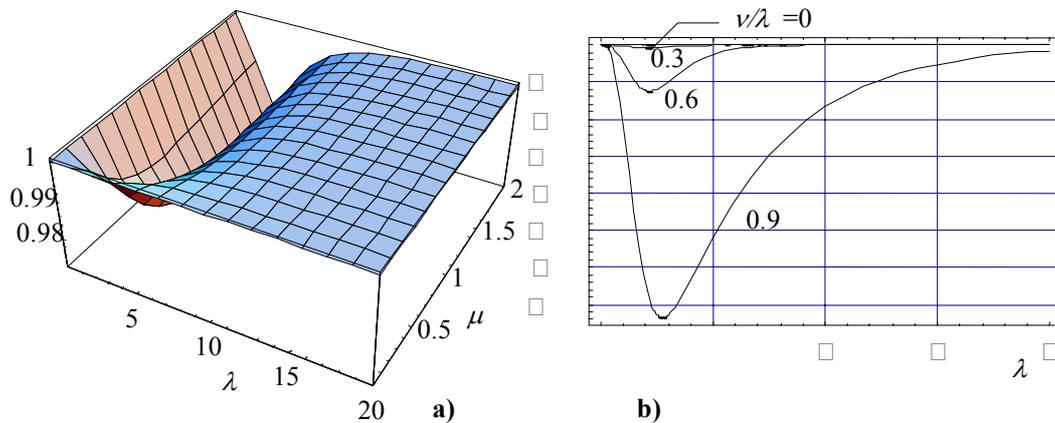


Fig. 3.4. Le facteur réductif de la force verticale: (a) χ_z pour $v/\lambda=0,8$; (b) χ_z pour $\mu=0,5$ et pour différentes valeurs de v/λ .

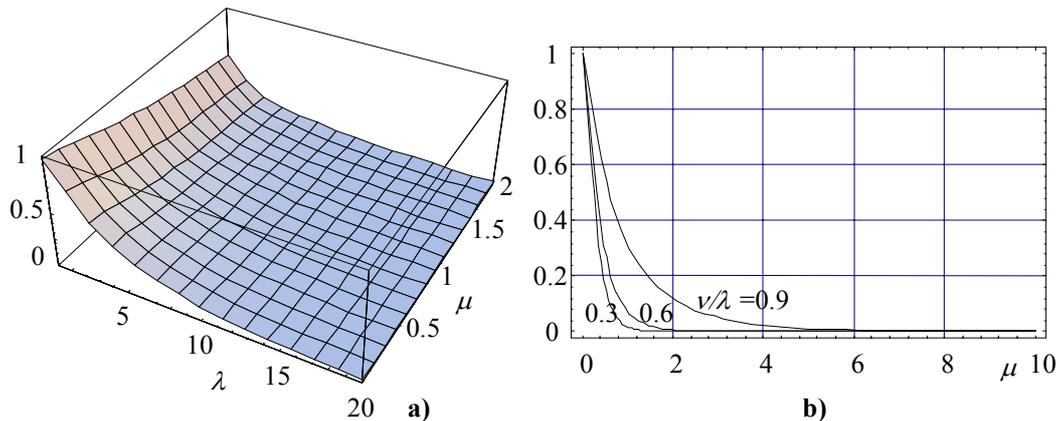


Fig. 3.5. Solution de Garrett approximée: (a) Z/B pour $v/\lambda=0,8$; (b) Z/B pour $\lambda=5\mu$ et pour différentes valeurs de v/λ ; $\chi_z=0,95$.

Le calcul des forces du second ordre présente la même difficulté que dans le cas du premier ordre, mais Garrett ne donne pas la solution dans ce cas. Dans la thèse on a pu montrer que la technique utilisée pour les forces X et Z peut s'appliquer au deuxième ordre aussi, et les calculs sont complètement développés. Par une approche semblable à celle décrite de façon succincte ci-haut, on parvient, non sans un certain nombre de difficultés analytiques, à trouver une expression approximée pour les forces du second ordre. En ne se limitant ici, pour des raisons de brièveté, qu'aux composantes de *drift*, à savoir les actions constantes dans le temps, on trouve les expressions

$$X_D \cong \frac{2 \alpha B}{\pi^2 \mu^3} \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_m(\mu) \left[\frac{m(m+1) 2\lambda - 2\nu + \sinh 2\lambda - \sinh 2\nu}{\mu^2 \sinh 2\lambda} + \frac{-2\lambda + 2\nu + \sinh 2\lambda - \sinh 2\nu}{\sinh 2\lambda} \right], \quad (3.29)$$

$$Z_D \cong -\frac{4 \alpha B}{\pi^2 \mu^3} \frac{1}{\mu \nu^2} \frac{\cosh 2\nu - 1}{\sinh 2\lambda} \left(\frac{3\nu^2 + \pi^2}{\nu^2 + \pi^2} \right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{M_m^2 + N_m^2}, \quad (3.30)$$

où

$$\zeta_m(\lambda, \mu, \nu) = \frac{M_m N_{m+1} - N_m M_{m+1}}{(M_m^2 + N_m^2)(M_{m+1}^2 + N_{m+1}^2)}, \quad (3.31)$$

$$M_m(\lambda, \mu, \nu) = \sigma_m(\lambda, \mu, \nu) J_m(\mu) - J'_m(\mu), \quad (3.32)$$

$$N_m(\lambda, \mu, \nu) = \sigma_m(\lambda, \mu, \nu) Y_m(\mu) - Y'_m(\mu). \quad (3.33)$$

Contrairement au cas du premier ordre, l'évaluation de ces forces nécessite le calcul d'une série; toutefois, il s'agit de séries à convergence assez rapide: normalement trois termes sont suffisants. En Fig. 3.6 on montre l'allure de X_D et de Z_D , ainsi que les rapports X_D/X et Z_D/Z ; les graphiques ont été tracés pour $\nu = 0.8$ et $\alpha = \pi/10$, en prenant les six premiers termes des séries. Une caractéristique des forces du second ordre apparaît évidente: leur importance relativement aux forces du premier ordre augmente en eaux basses. En outre, on remarque, comme d'ailleurs de la (3.30) aussi, que la force de *drift* vertical est dirigée vers le bas.

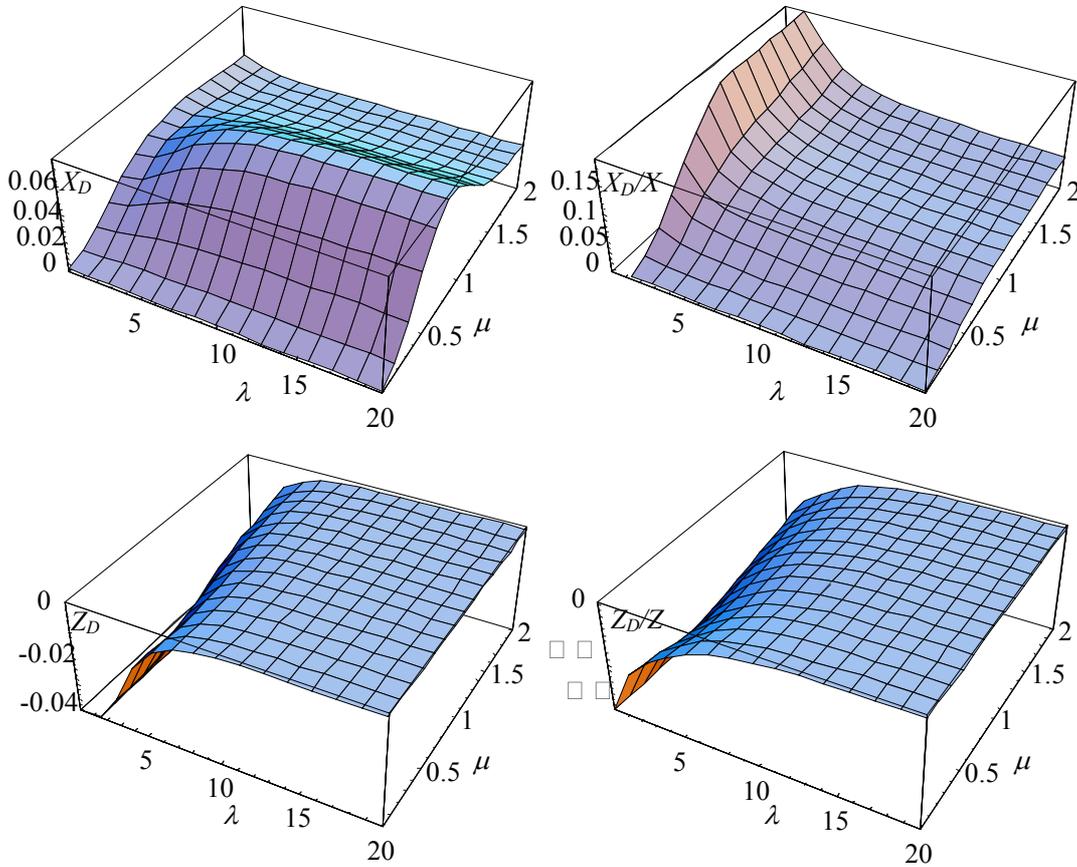


Fig. 3.6. Les forces de *drift* et leur rapport avec les forces du premier ordre.

Une approche semblable a été utilisée pour trouver une expression des forces variables du second ordre, mais dans ce cas les complications augmentent encore. En conclusion, les expressions montrées ici ont été utilisées dans la démarche d'optimisation de la TLP dont on a parlé dans le chapitre précédent. Il faut remarquer que même les moments de toutes ces forces, calculés par rapport au barycentre de la base du cylindre, ont été explicités dans le travail de la thèse.

3.4 Calcul de la force d'ensemble sur la TLP.

Pour le calcul de la force d'ensemble sur la TLP, il faut considérer les interactions entre les quatre tours et les *pontoons*.

En ce qui concerne l'action sur les *pontoons*, on a fait appel à la solution de Ogilvie, 1963, dont l'auteur même donne une approximation valable si le rayon des *pontoons* est beaucoup plus petit de la longueur d'onde, ce qui s'applique sans doute au cas des TLP: la force par unité de longueur est

$$f_p = 2\pi\rho g k a b_p^2 e^{-k(p-b_p)}, \quad (3.34)$$

où p est la profondeur de l'axe des *pontoons* et b_p leur rayon.

Or, le calcul de la force d'ensemble par simple sommation de toutes les contributions sur les tours et les *pontoons* n'est pas correct, parce que chacune des forces calculées ci-haut est celle qu'on mesure en présence d'un seul corps soumis à l'action des ondes. Lorsque plusieurs corps sont présents ensemble, la diffraction des ondes est influencée par tous les corps et par la géométrie d'ensemble, et par conséquent l'action même en est modifiée. Toutefois, des études ont été proposées pour prendre en compte la présence de plusieurs cylindres verticaux. Dans le travail de thèse on a donc fait appel à ces techniques de superposition des actions. N'étant celles-ci valables que pour les cylindres verticaux, nous prîmes la décision de calculer l'interaction effective entre les 4 tours, et puis de lui additionner les actions sur chaque *pontoon*.

Les recherches sur l'interaction des actions sont multiples; la première est celle de Spring et Monkmeyer, 1974, qui est basée sur une superposition du potentiel, exprimé comme la somme de celui propre au flux originaire des ondes plus un nombre de potentiels d'irradiation égal au nombre de cylindres. Utilisant une représentation des potentiels par séries de fonctions spéciales, et faisant appel au théorème de Graf pour l'addition des fonctions de Bessel, voir encore Jahnke-Emde-Lösch, 1965, on exprime le potentiel total dans un système de coordonnées centré sur chaque cylindre, et d'ici on parvient à l'expression de la force. Ce procédé est très lourd et compliqué à être utilisé, et il nécessite de la solution d'un système d'équations linéaires dans le champ complexe.

En 1982, Simon proposa une simplification de cette approche, en considérant l'approximation de l'onde plane: l'onde de diffraction produite par un cylindre est remplacée, au voisinage d'un autre cylindre, par une onde plane équivalente, plus un éventuel terme correcteur de la non-planéité. Cette approximation est valable si la distance entre les cylindres est grande par rapport à leur diamètre; toutefois, on a pu constater qu'on obtient de très bons résultats même pour des distances de l'ordre du diamètre. Cette approche a été employée successivement par Williams *et alii*, qui ont considéré aussi le cas du cylindre flottant. Dans la thèse, on a considéré la méthode de Simon, et on l'a appliqué à la solution de Mc Camy et Fuchs, en

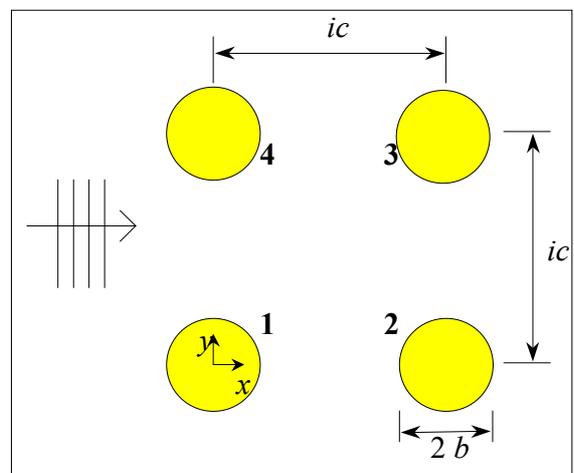


Fig. 3.7. Schéma d'analyse de l'interaction.

travaillant sur le schéma de Fig. 3.7. On a ensuite modifié la solution par le coefficient réductif χ_x , pour considérer que les tours d'une TLP ne sont pas appuyées sur le fond.

Les actions sur les tours sont données alors par les relations suivantes (X est la force sur un seul cylindre):

$$X_1 = X_4 = \left\{ 1 - \operatorname{Re} \left[c_{12} + \frac{c_{13}}{\sqrt{2}} \right] \right\} X, \quad (3.35)$$

$$X_2 = X_3 = \left\{ \cos k ic + \operatorname{Re} \left[c_{21} + \frac{c_{24}}{\sqrt{2}} \right] \right\} X. \quad (3.36)$$

Les coefficients c_{ij} se calculent comme solution d'un système de 12 équations linéaires. La force totale sera donc

$$X_{tot} = 2 \left\{ 1 + \cos k ic + \operatorname{Re} \left[c_{21} - c_{12} + \frac{c_{24} - c_{13}}{\sqrt{2}} \right] \right\} X. \quad (3.37)$$

En Fig. 3.8 on montre les actions X_1/X et X_2/X , voire les coefficients d'interaction, dans le cas de $ic/b=5$. La force peut être amplifiée ou diminuée par effet de l'interaction entre les cylindres.

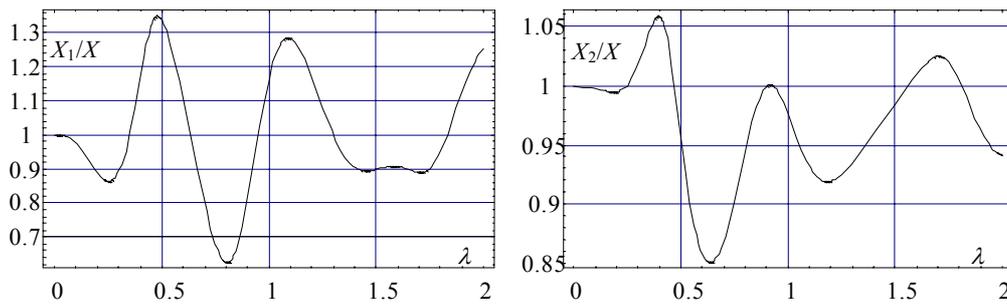


Fig. 3.8. Les coefficients d'interaction pour le schéma de Fig. 3.7, avec $ic/b=5$

CONCLUSIONS

Quelques remarques doivent être faites au sujet de la recherche brièvement décrite dans cette première partie: d'abord, le procédé mis au point pour la détermination des dimensions optimales de la coque d'une TLP n'utilise que des équations de la mécanique. Toutefois, étant ce procédé basé sur une assumption arbitraire et sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, rien ne garantit à-priori de la qualité des résultats. Seulement la comparaison, à posteriori, avec les données relatives aux TLP existantes ou à l'étude nous a confirmé les capacités prédictives de notre méthode. Cela signifie, évidemment, que les hypothèses simplificatrices prises en compte ne modifient pas de façon importante le problème, et que le critère suivi est capable d'en prendre en compte l'essentiel. La méthode est d'ailleurs simple et rapide de mise en oeuvre, et nécessite des moyens de calcul très limités: tous les développements ont été faits à l'aide d'un logiciel qui emploie le code de calcul *Mathematica*®, et qui ne prend que quelques instants pour aboutir au résultat. La plus part des calculs sont menés de façon formelle, l'emploi de méthodes numériques n'étant borné qu'au strict minimum.

En ce qui concerne l'étude des interactions entre la houle et la plate-forme, on a fait appel à des solutions existantes dans la littérature et assez peu connues; la simplification proposée pour la solution de Garrett ne modifie pas de façon essentielle les actions de la houle, et a rendu possible son utilisation au sein d'un processus d'optimisation, où les dimensions sont à priori inconnues. Les interactions entre les différentes parties de la structure ont pu être prises en compte au prix de certaines hypothèses simplificatrices; un calcul plus fin, qui tienne compte notamment de l'interaction entre tours et pontoons, aurait pu être mené seulement à l'aide d'un logiciel de calcul des actions de la houle, dont on ne pouvait pas disposer pendant la recherche. Cela aurait, tout de même, comporté aussi la perte de simplicité et rapidité de la méthode proposée.

Quoi qu'affectée par un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, la démarche proposée a montré, sur les données dont on disposait, son efficacité, et nous avons considéré que le but que nous nous étions fixé avait été atteint. La recherche a donné lieu à deux publications: une communication au 7^{ème} colloque AIOM (Association Italienne d'Ingénierie Offshore et Marine), *Infrastructures Sous-Marines*, en 1993 et un article paru sur *Structural Optimization* en 1996.

BIBLIOGRAPHIE

1. Abul Azm A. G. & Williams A. N., **1987**: Interference Effects Between Flexible Cylinders in Waves. *Ocean Engng.*, v. 14, n. 1.
2. Abul Azm A. G., Williams, A. N., **1989**: Approximation of Second-Order Diffraction Loads on Arrays of Vertical Circular Cylinders. *J. Fluids Struct.*, v. 3.
3. Abul Azm A. G., Williams, A. N., **1989**: Second-Order Diffraction Loads on Arrays of Semi-Immersed Circular Cylinders. *J. Fluids Struct.*, v. 3.
4. AGIP S.p.A., **1991**: Criteri di selezione e proprietà generali di piattaforme per la coltivazione di campi off-shore. OFFS-STIN, Rapport Interne (en Italien).
5. Almeland I. B., Gaul T. R., Pettersen D. J. & Vogel H., **1991**: Snorre TLP Configuration and Analysis Technology. *Proc. Offshore Tecnology Conference (O.T.C.)* n. 6622, Houston.
6. Batchelor G. K., **1967**: An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, UK.
7. Brewer J. H., Shive A. R. & Houghton R., **1987**: Tension Leg Platform: Norwegian North Sea Design. *Proc. Offshore Tecnology Conference (O.T.C.)* n. 5548, Houston.
8. Buresti G., **1984**: On the Design of Vertical Cylindrical Structures in Deep Waters. *Atti Ist. Aeronautica Univ. di Pisa*, Pisa, Italie (en Italien).
9. Chakrabarti S. K., **1978**: Wave Forces on Multiple Vertical Cylinders. *J. of the Waterway Port Coastal and Ocean Division*.
10. Chakrabarti S. K., **1994**: Hydrodynamics of Offshore Structures. Computational Mechanics Publications, Boston.
11. Chou F. S. F., Ghosh S. & Huang E. W., **1983**: Conceptual Design Process of a Tension Leg Platform. *SNAME Transactions*, v.91.
12. Dawson T. H., **1983**: Offshore Structural Engineering. Prentice-Hall, USA.
13. Demirbilek Z., **1990**: Design Formulae for Offset, Set-down and Tether Loads of a Tension Leg Platform (TLP). *Ocean Engng.*, v.17 n.5.
14. Eatock Taylor R., Hung M., **1985**: Wave Drift Enhancement Effects in Multi Column Structures. *Appl. Oc. Research*, v. 7, n. 3.
15. Eatock Taylor R., Zietsman J., **1982**: Hydrodynamic Loading on Multi-Component Bodies. *Proc. 3th Int. Conf. on the Behaviour of Off-Shore Structures (BOSS)*. M.I.T., Cambridge, USA.
16. Falnes J., **1984**: Wave-Power Absorption by an Array of Attenuators Oscillating with Unconstrained Amplitudes. *Appl. Oc. Research*, v. 6, n. 1.
17. Faresi R., Boote D., **1988**: Fondamenti di ingegneria offshore. CETENA, quad. n. 80, Genova (en Italien).
18. Garrett C. J. R., **1971**: Wave Forces on a Circular Dock. *J. Fluid Mech.*, v. 46.
19. Gerwick B. C., **1986**: Construction of Offshore Structures. J. Wiley & Sons, UK.
20. Grant R. G., Sircar S. & Nikodim L. A., **1991**: A Sistematic Procedure for Developing Optimum TLP Configurations. *Proc. Offshore Tecnology Conference (O.T.C.)* n. 6570, Houston.
21. Gurtin M. E., **1981**: An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press, USA.
22. Haskind M. D., **1957**: The Exciting Forces and Wetting of Ship in Waves. *Izvestia Akademii Nauk, U.R.S.S., Otdelenie Teckhnicheskikh Nauk*, n. 7 (traduction anglaise: David Taylor Model Basin Translation n. 307, Washington D.C., U.S.A., March 1962).
23. Hunter A. F., Zimmer R. A. & Wang W. J., Bozeman, J. D., Adams, C. J. & Rager, B. L., **1990**: Designing the TLWP. *Proc. Offshore Tecnology Conference (O.T.C.)* n. 6360, Houston.
24. Jahnke-Emde-Lösch, **1965**: Tables of Higher Functions. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Allemagne.
25. Kagemoto H., Yue D. P., **1986**: Interaction Among Multiple Three-Dimensional Bodies in Water Waves: an Exact Algebraic Method. *J. Fluid Mech.*, v. 166.
26. Lamb H., **1932**: Hydrodynamics. 6th Edition, Dover Publications, USA.
27. Lighthill J., **1979**: Waves and Hydrodynamic Loading. *Proc. 2nd Int. Conf. on the Behaviour of Off-Shore Structures (BOSS)*, London.
28. Lighthill J., **1986**: An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics. Oxford University Press, UK.
29. Lotsberg I., **1991**: Probabilistic Design of the Tethers of a Tension Leg Platform. *J. Offshore Mech. and Arctic*

Engng., v.113, n.5.

30. Mc Camy R. C., Fuchs R. A., **1954**: Wave Forces on Piles: a Diffraction Theory. *U. S. Army Corps of Engineers Beach Erosion Boards*, Techn. Mem. n. 69.
31. Mc Iver P., Evans D. V., **1984**: Approximation of Wave Forces on Cylinder Arrays. *Appl.Oc. Research*, v. 6, n. 2.
32. Mc Lachlan, **1955**: Bessel Functions for Engineers. Oxford Univ. Press, UK.
33. Molin B., **1979**: Second-order diffraction loads upon three-dimensional bodies. *Appl.Oc. Research*, v. 1, n. 4.
34. Newman J. N., **1962**: The Exciting Forces on Fixed Bodies in Waves. *J. Ship Research*.
35. Nordgren R. P., **1989**: The Design of Tension Leg Platforms by a Constrained Optimization Method. *J. Offshore Mech. and Arctic Engng.*, v.111, n. 8.
36. A.P.I. Norms (American Petroleum Institute) RP 2T, **1987**: Planning, Designing and Constructing Tension Leg Platforms.
37. Ogilvie T. F., **1963**: First- and Second-Order Forces on a Cylinder Submerged under a Free Surface. *J. Fluid Mech.*, v.16.
38. Pinkster J. A., **1979**: Mean and Low Frequency Wave Drifting Forces on Floating Structures. *Ocean Engng.*, v. 1, n. 4.
39. Prandtl L., Tietjens O. G., **1934**: Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics. Dover Publications, USA.
40. Rahman M., Satish M. G., **1991**: First-Order Diffraction Forces on a Pair of Cylinders. *Ocean Engng.*, v. 18, n. 1/2.
41. Rahman M., Chakravartty I. C., **1981**: Hydrodynamic Loading Calculations for Offshore Structures. *SIAM Journal of Appl. Math.*, v. 41, n. 3.
42. Sarpkaya T., Isaacson M., **1981**: Mechanics of Wave Forces on Off-Shore Structures. Van Nostrand Reinhold C., USA.
43. Simon M. J., **1982**: Multiple Scattering in Arrays of Axisymmetric Wave-Energy Devices. Part 1. A Matrix Method Using a Plane-Wave Approximation. *J. Fluid Mech.*, v. 120.
44. Spring B. H., Monkmeyer P. L., **1974**: Interaction of Plane Waves with Vertical Cylinders. *Proc. 14th Int. Conf. on Coastal Eng. (ASCE)*, Copenhagen.
45. TECNOMARE et AGIP Spa: T.L.P. Sizing Approach. Rapports Internes n. 640218-REL-C311-T087 e 640218-REL-C311-T120.
46. Truesdell C., **1966**: Continuum Mechanics I: The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics. Gordon & Breach, USA.
47. Truesdell C., **1977**: A First Course in Rational Continuum Mechanics. vol. 1. Academic Press, USA.
48. Vannucci P., **1994**: Forze d'onda su cilindri verticali immersi. *Comptes Rendus du 7^{ème} Colloque AIOM (Association Italienne d'Ingénierie Offshore et Marine) – Infrastructures sous-marines*. Pisa, Italie, 47-53 (en Italien).
49. Vannucci P., **1995**: Sull'analisi delle forze d'onda con applicazione al calcolo di una T.L.P. Thèse pour l'obtention du titre de *dottore di ricerca*, Università di Pisa (en Italien).
50. Vannucci P., **1996**: Simplified optimal design of a Tension Leg Platform (TLP). *Struct. Opt.*, v.12, 265-268.
51. Wendel K., **1956**: Hydrodynamische Massen und Hydrodynamische Massen-tragheits-Momente. *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft* v. 44. Translation no. 260, DTNSRDC.
52. Williams A. N., Demirbilek Z., **1988**: Hydrodynamic Interactions in Floating Cylinder Arrays - I. Wave Scattering. *Ocean Engng.*, v. 15, n. 6.
53. Williams A. N., Abul Azm A. G., **1989**: Hydrodynamic Interactions in Floating Cylinder Arrays - II. Wave Radiation. *Ocean Engng.*, v. 16, n. 3.
54. Williams A. N., Abul Azm A. G. & Ghalayini S. A., **1990**: A Comparison of Complete and Approximate Solutions for Second-Order Diffraction Loads on Arrays of Vertical Circular Cylinders. *Ocean Engng.*, v. 17, n. 5.

Deuxième partie

UNE CONTRIBUTION EN MECANIQUE NON-LINEAIRE: LE CALCUL DE BRANCHES BIFURQUEES PAR LA METHODE ASYMPTOTIQUE NUMERIQUE

Cette deuxième partie porte sur mes recherches à l'Université de Metz, activités qui se sont déroulées pendant un an, entre 1995 et 1996, grâce au support d'une bourse d'étude post-doctorale dans le cadre du programme européen HCM (*Human Capital and Mobility*). J'ai séjourné au LPMM, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, où j'ai travaillé au sein de l'équipe du professeur M. Potier-Ferry, et en collaboration aussi avec les professeurs B. Cochelin, maintenant à l'Université de Marseille, et N. Damil, de l'Université de Casablanca. Le sujet de la recherche était l'analyse numérique des phénomènes mécaniques non-linéaires par la MAN, Méthode Asymptotique Numérique. Cette approche, qui appartient à la famille des méthodes de perturbation, a été mise au point par le professeur Potier-Ferry et son équipe au début des années 90, et a montré depuis son efficacité dans l'analyse de nombreux problèmes de mécanique non-linéaire.

Ce séjour au LPMM a été pour moi l'occasion de m'intégrer à une équipe de recherche expérimentée, dans un domaine et un milieu pour moi totalement nouveau. L'objectif de la recherche qui m'avait été confiée, était la mise au point d'une stratégie pour la détection des parcours de bifurcation en mécanique des structures. Il s'agissait en outre de réaliser un algorithme à intégrer dans un code de calcul par éléments finis qui était utilisé par l'équipe du professeur Potier-Ferry.

La présentation de cette recherche s'articule en trois chapitres: le premier porte sur les généralités de la MAN et sur ses capacités spécifiques d'analyse de problèmes non linéaires, le deuxième sur la partie théorique de la recherche que j'ai développé et le troisième montre des exemples numériques avec discussion des résultats.

GENERALITES SUR LA METHODE ASYMPTOTIQUE NUMERIQUE (MAN)

4.1 Introduction.

Un problème typique en mécanique non linéaire est la recherche de la réponse de la structure lorsque les actions sont proportionnelles au même paramètre λ , voire le traçage des courbes charge-déplacement, appelées aussi parcours d'équilibre. Ce type de problème est normalement très compliqué, et difficilement on dispose de solutions analytiques exactes. Le recours à des techniques d'approximation est donc la règle. Deux sont les principales idées pour la solution: soit on cherche de reconstruire le parcours d'équilibre par points, soit on essaie d'en donner une expression analytique approximée.

Dans le premier cas on fait appel aux approches purement numériques, notamment aux méthodes incrémentales-itératives ou de prédiction-correction, dont la plus célèbre est celle de Newton-Raphson. Par de telles méthodes, le problème non linéaire est résolu par points: on linéarise à chaque fois le problème et on fait des itérations afin d'assurer l'équilibre. Il s'agit de méthodes très générales, qui se prêtent bien pour résoudre problèmes de nature différente. Toutefois, on peut souligner comme, de manière générale, une bonne description de la courbe solution nécessite souvent un très grand nombre d'inversion des matrices de rigidité, et on remarque aussi la difficulté rencontrée par ces méthodes au voisinage de points limites en force ou déplacement, difficulté à traiter par un choix convenable de l'incrément, voir entre autres Riks, 1972, Ramm, 1981, Crisfield, 1983.

Les méthodes qui cherchent de donner une expression analytique, bien qu'éventuellement approximée, de la courbe solution sont typiquement les méthodes de perturbation. L'idée est simple et ancienne: on cherche la solution sous forme d'un développement asymptotique, fait par rapport à un paramètre qui apparaît naturellement, ou qu'on introduit, dans les équations; un exemple d'application a été donné au § 3.2 en ce qui concerne la théorie non linéaire de la diffraction. De cette façon, on montre que le problème non linéaire est remplacé par une série de problèmes linéaires, qui sont tous gérés par le même opérateur, et qu'on peut résoudre de façon récurrente pour obtenir les coefficients de la série.

Les méthodes de perturbation comptent parmi les plus anciennes dans la solution des problèmes non linéaires, et on renvoie à la thèse d'habilitation de Cochelin, 1994, pour une présentation plus détaillée. Ici, on ne rappelle que trois contributions fondamentales dans ce domaine: d'abord, la théorie non linéaire de la houle de Stokes, 1847, qui semble être le premier à avoir utilisé une technique de perturbation, limitée au terme quadratique. Ensuite, le travail de Signorini, 1932, qui est la première application d'une technique de perturbation à la mécanique des solides. Finalement, on ne peut pas oublier le travail de Koiter, 1945, le premier à utiliser une approche de perturbation, limitée à des ordres petits, à l'analyse de sensibilité aux imperfections des structures élastiques.

Ce que les méthodes de perturbation ont de plus par rapport aux méthodes incrémentales-itératives est la représentation analytique de la courbe solution, pour laquelle on trouve une expression qui la décrit de façon continue, quoi que le plus souvent approximée. Ce sont pourtant les méthodes de prédiction-correction qui ont reçu dans le passé la plus grande attention de la communauté scientifique, et qui ont trouvé plus grande utilisation et applications. Ceci est dû essentiellement à deux circonstances: la difficulté analytique de calculer un nombre suffisamment grand de coefficients du développement asymptotique et le fait, souvent supposé, que la

représentation analytique a une petite étendue de validité. C'est à cause de ça que les méthodes de perturbation ont connu application seulement dans le domaine théorique, surtout là où les symétries géométriques et la simplicité des formes permettaient le calcul analytique des coefficients. Normalement on se bornait à un nombre petit, souvent deux, de termes du développement asymptotique.

L'idée fondamentale de Potier-Ferry a été de coupler une méthode numérique à l'approche de perturbation; dans cette stratégie, les coefficients de la série sont calculés de façon numérique, par exemple par une méthode éléments finis. Ceci résout les deux problèmes cités ci-dessus, parce que le problème de la détermination des coefficients est ramené à la solution d'un problème linéaire classique en calcul des structures, et parce que le nombre de coefficients à calculer peut être aussi grand qu'on le souhaite, et cela sans alourdir l'effort de calcul. En effet, une seule inversion de la matrice de rigidité est suffisante pour calculer un grand nombre de coefficients du développement asymptotique. C'est donc évident un autre avantage par rapport aux méthodes incrémentales-itératives qui, elles, nécessitent de nombreuses inversions. Des recherches ont été, en outre, consacrées à l'amélioration de l'intervalle de validité du développement asymptotique, voir par exemple l'utilisation des approximants de Padé proposée par Cochelin *et alii*, 1994, ou la technique de continuation, proposée par Cochelin, 1994, et qui ramène le problème du suivi d'une courbe hautement non linéaire à une suite de développements asymptotiques locales. Sur cet aspect, une contribution récente est celle de Lahmam *et alii*, 2002.

Il est bien aussi de remarquer que la méthode des éléments finis n'est pas la seule qui a été employée: des approches qui font appel à des logiciels de calcul formel, ainsi que la méthode des différences finies, ont été utilisées avec succès, voir par exemple Mordane, 1995. En outre, les applications de la MAN concernent non seulement la mécanique des structures, mais d'autres domaines typiques de la mécanique non linéaire, comme par exemple la dynamique des fluides, les problèmes de contact etc., voir à ce propos, outre le déjà cité Mordane, Tri, 1996 et Cadou, 1997.

Il faut aussi remarquer que la méthode asymptotique numérique n'est pas la seule qui couple une approche numérique et une technique de perturbation: les premiers à avoir utilisé une procédure de ce genre semblent être Thompson et Walker, en 1968; d'autres contributions sont en bibliographie, et la thèse de Cochelin en donne un commentaire assez complet. Il faut toutefois préciser l'avantage de la méthode proposée par Potier-Ferry: contrairement à d'autres approches, elle est un instrument efficace et performant, car l'ordre des développements asymptotiques peut être très élevé, alors que dans la plus part des cas on se borne à un petit nombre de termes. En outre, souvent l'approche asymptotique, chez certains auteurs, est sous-utilisée, voir par exemple Walker, 1969, où cette technique sert comme pas prédicteur dans un schéma classique de prédiction-corrrection, où Noor *et alii*, 1979, qui l'utilisent comme un générateur de base de Ritz. Dans les paragraphes qui suivent, la méthode asymptotique numérique est rapidement rappelée dans ses lignes essentielles, pour ce qui concerne l'analyse statique de structures élastiques ayant une non-linéarité géométrique.

4.2 Les équations générales.

Considérons un corps \mathcal{B} élastique linéaire, qui occupe la région Ω de l'espace Euclidien. Le problème de l'équilibre de \mathcal{B} peut être efficacement établi, dans le but du développement asymptotique, par la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner, voir par exemple Hartmann, 1985:

$$HR(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = \int_{\Omega} \left[\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) - \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} \right] d\Omega - \lambda P_e(\mathbf{u}), \quad (4.1)$$

où \mathbf{u} est le vecteur des déplacements, \mathbf{S} est le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff, \mathbf{D} le tenseur d'élasticité, $\boldsymbol{\gamma}$ le tenseur de la déformation de Green-Lagrange,

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}), \quad (4.2)$$

et P_e le travail des forces de volume \mathbf{b} et surfaciques \mathbf{t} ,

$$P_e(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d(\partial\Omega). \quad (4.3)$$

Les équations d'équilibre et la relation de comportement sont obtenues par la stationnarité de la fonctionnelle:

$$\int_{\Omega} [\delta \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \delta \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^{-1} \delta \mathbf{S}] d\Omega - \lambda P_e(\delta \mathbf{u}) = 0, \quad (4.4)$$

Si on définit le vecteur mixte d'inconnues

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix}, \quad (4.5)$$

alors l'équation (4.4) est quadratique par rapport à \mathbf{U} ; ceci est une conséquence de la formulation mixte de Hellinger-Reissner, alors qu'une formulation classique en déplacements aurait donné une non-linéarité cubique. La non-linéarité quadratique est préférable, d'un point de vue analytique et d'effort de calcul, pour le développement en série de puissances de la (4.4); c'est pourquoi le passage par une formulation mixte est plus indiqué, quoi que non strictement nécessaire. La (4.4) peut être réécrite dans la forme générale d'un résidu \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - \lambda \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (4.6)$$

où \mathbf{L} et \mathbf{Q} sont deux opérateurs, respectivement linéaire et bilinéaire, tandis que \mathbf{F} est un vecteur de forces, voir par exemple Damil et Potier-Ferry, 1990, ou Cochelin *et alii*, 1994.

4.3 L'approche perturbative.

Dans le but d'appliquer une technique perturbative à la (4.6), on fait l'hypothèse fondamentale qu'une solution $(\mathbf{U}_0, \lambda_0)$ soit connue, qu'il s'agit d'un point régulier, et qu'aux alentours de cette solution les inconnues \mathbf{U} et λ puissent être développées en séries de puissances d'un paramètre de perturbation a :

$$\mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + a \mathbf{U}_1 + a^2 \mathbf{U}_2 + \dots, \quad (4.7)$$

$$\lambda(a) = \lambda_0 + a \lambda_1 + a^2 \lambda_2 + \dots;$$

après introduction de ces relations dans la (4.6) et identification des termes d'égale puissance de a , on obtient un ensemble de problèmes linéaires mixtes,

$$\text{ordre 1:} \quad \mathbf{L}_t(\mathbf{U}_1) = \lambda_1 \mathbf{F},$$

$$\text{ordre } p \geq 2: \quad \mathbf{L}_t(\mathbf{U}_p) = \lambda_p \mathbf{F} - \sum_{k=1}^{p-1} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{p-k}), \quad (4.8)$$

où l'opérateur linéaire tangent \mathbf{L}_t est défini comme

$$\mathbf{L}_t(\cdot) = \mathbf{L}(\cdot) + 2\mathbf{Q}(\mathbf{U}_0, \cdot). \quad (4.9)$$

L'équation d'ordre 1 correspond au problème linéarisé, et $(\mathbf{U}_1, \lambda_1)$ est le vecteur tangent. C'est

important de remarquer que l'opérateur linéaire est le même à chaque ordre, ce qui conduit à la nécessité d'une seule inversion de matrice lors de la discrétisation par éléments finis.

Afin de rendre déterminés les problèmes linéaires (4.8), il est nécessaire d'ajouter une autre condition, qui doit spécifier le paramètre a . Ainsi que dans les méthodes incrémentales-itératives, il y a au moins trois façons différentes de faire ce choix, voir à ce propos Cochelin, 1994. Ces choix correspondent à une mesure en force, en déplacement ou en longueur d'arc. Si on considère ce troisième cas, qui est le plus indiqué pour aborder des problèmes qui comportent des points limites, on pose, s étant un facteur d'échelle,

$$a = \frac{1}{s^2} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{u}_1 + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1]; \quad (4.10)$$

de cette façon, les problèmes (4.8) prennent la forme

$$\begin{aligned} \text{ordre 1:} \quad & \mathbf{L}_t(\mathbf{U}_1) = \lambda_1 \mathbf{F}, \\ & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \lambda_1^2 = s^2, \\ \text{ordre } p \geq 2: \quad & \mathbf{L}_t(\mathbf{U}_p) = \lambda_p \mathbf{F} - \sum_{k=1}^{p-1} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{p-k}), \\ & \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_1 + \lambda_p \lambda_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si le point initial $(\mathbf{U}_0, \lambda_0)$ n'est pas singulier, \mathbf{L}_t est inversible et le problème est bien posé. Chaque équation peut alors être résolue en connaissant la solution aux ordres précédents.

4.4 La Méthode Asymptotique Numérique (MAN).

L'idée à la base de la MAN est celle de résoudre numériquement les équations (4.11), à l'aide, par exemple, d'une méthode par éléments finis. Le domaine Ω est alors discrétisé, et les équations différentielles deviennent des équations algébriques linéaires. Cependant, toute la formulation est mixte, jusqu'ici; dans le but d'utiliser une méthode par éléments finis classique, on revient d'abord à une formulation en déplacements. La solution de la (4.4) par rapport à $\delta \mathbf{S}$ offre la relation de comportement, qui introduite dans la (4.4) permet de retrouver l'équation d'équilibre en fonction de \mathbf{u} et λ mais pas de \mathbf{S} . Cette procédure, voir par exemple Azrar *et alii*, 1993, Cochelin *et alii*, 1994, ne détruit pas les avantages donnés par l'approche mixte, notamment le fait que les équations de base soient quadratiques.

Après discrétisation, les (4.11) deviennent

$$\begin{aligned} \text{ordre 1:} \quad & [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_0)] \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{F}, \\ & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \lambda_1^2 = s^2, \\ \text{ordre } p \geq 2: \quad & [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_0)] \mathbf{u}_p = \lambda_p \mathbf{F} + \mathbf{F}_p^{nl}, \\ & \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_1 + \lambda_p \lambda_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dans ces équations, $\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_0)$ est la matrice de rigidité tangente, qui dépend du point initial, tandis que \mathbf{F}_p^{nl} est le vecteur de forces qui représente la non-linéarité du problème à l'ordre p , voire la dépendance de l'équation d'équilibre d'ordre p des équations aux ordres précédents. La solution est obtenue de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\text{ordre 1:} \quad & \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \bar{\mathbf{u}}_1, \\
& [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_0)] \bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{F}, \\
& \lambda_1 = \frac{s}{\sqrt{1 + \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \bar{\mathbf{u}}_1}}, \\
\text{ordre } p \geq 2: \quad & \mathbf{u}_p = \frac{\lambda_p}{\lambda_1} \mathbf{u}_1 + \bar{\mathbf{u}}_p, \\
& [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_0)] \bar{\mathbf{u}}_p = \mathbf{F}_p^{nl}, \\
& \lambda_p = -\frac{\lambda_1}{s^2} \bar{\mathbf{u}}_p \cdot \mathbf{u}_1.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Les contraintes sont récupérées à l'aide de la relation de comportement; l'inversion de la matrice $\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_0)$ est faite une fois seulement, mais à chaque ordre il faut assembler le vecteur des forces au second membre, \mathbf{F}_p^{nl} .

4.5 Critères de contrôle de la qualité de la solution et technique de continuation.

Une fois trouvés les coefficients du développement asymptotique, on dispose d'une représentation analytique de la courbe solution. Un problème se pose alors tout naturellement: connaître la qualité de cette solution, voire, savoir jusqu'à quelle valeur du paramètre a le développement trouvé, qui sera nécessairement tronqué à l'ordre n , représente la solution avec la précision souhaitée. Il y a plusieurs façons de contrôler le résultat, et donc autant de critères d'arrêt, voir à ce propos la thèse de Cochelin, ou encore Cochelin, 1994, dont les plus employées sont deux: la première, consiste à contrôler la différence des déplacements à deux ordres successifs. Si ε_d est la précision souhaitée, ce critère amène à la formule approximée suivante pour le calcul de a_v , rayon de validité du développement asymptotique:

$$a_v \cong \left(\varepsilon_d \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_n\|} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{4.14}$$

Cette méthode nécessite un faible effort de calcul, mais ne donne pas toujours de bons résultats. Une deuxième façon pour le calcul de a_v est alors le contrôle direct du résidu: si on impose qu'il soit inférieur à une précision ε_r , on obtient le critère approximé d'arrêt

$$a_v \cong \left(\frac{\varepsilon_r}{\|\mathbf{F}_{n+1}^{nl}\|} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.15}$$

Certaines techniques numériques, comme par exemple les approximants de Padé, voir Cochelin *et alii*, 1994, permettent d'augmenter a_v , parfois de façon spectaculaire. En général, toutefois, on observe que si la non-linéarité du problème est forte, a_v est plus petit. Cochelin, 1994, a montré une technique pour le suivi des courbes: une fois a_v connu, le dernier point de la courbe peut être facilement calculé. Celui-ci devient alors le nouveau point de départ pour une nouvelle application de la MAN, et ainsi de suite: c'est la technique de continuation.

4.6 La détection des points de bifurcation.

La détection de points de bifurcation est généralement faite à l'aide d'un indicateur de bifurcation, une fonction scalaire qui est nulle au point de bifurcation. Plusieurs indicateurs sont connus en littérature, comme le déterminant de la matrice de rigidité tangente, sa plus petite valeur propre, la plus faible fréquence propre du système etc. Dans le cas de la MAN, des indicateurs appropriés ont été proposés, voir Bouty *et alii*, 1993 et 1994, Tri *et alii*, 1996, Cadou, 1997.

Si \mathbf{f} est un vecteur de forces perturbatrices, on peut considérer le problème linéaire de l'équilibre perturbé au voisinage d'un point (\mathbf{U}, λ) :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{V}) = \mu \mathbf{f}. \quad (4.16)$$

Ici μ est un multiplicateur de \mathbf{f} et \mathbf{V} est la réponse de la structure aux forces $\mu \mathbf{f}$; l'opérateur tangent linéaire est

$$\mathbf{L}_t(\cdot) = \mathbf{L}(\cdot) + 2\mathbf{Q}(\mathbf{U}, \cdot). \quad (4.17)$$

Le facteur μ est nul en correspondance d'un point singulier et donc peut être pris comme indicateur. L'équation (4.16) est résolue en lui couplant la condition

$$(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0) \cdot \mathbf{L}_t(\mathbf{V}_0) = 0, \quad (4.18)$$

où \mathbf{V}_0 est la solution de la (4.16) pour $\mu = 1$. L'indicateur μ est alors donné par

$$\mu = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}_0}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{L}_t^{-1}(\mathbf{f})}. \quad (4.19)$$

Pour avoir $\mu=0$ en un point de bifurcation, \mathbf{f} ne doit pas être orthogonal au mode \mathbf{V} . Comme \mathbf{V} n'est pas connu *a priori*, on évite ça en choisissant au hasard le vecteur \mathbf{f} .

Le calcul direct de μ par la (4.19), nécessite un grand effort de calcul, car \mathbf{L}_t doit être inversé à chaque point. Pour pallier à ça, même le problème représenté par les (4.16) - (4.18) est résolu par la MAN. A partir d'un point $(\mathbf{U}_0, \lambda_0)$ de la courbe, \mathbf{V} et μ sont développés comme

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(a) &= \mathbf{V}_0 + a \mathbf{V}_1 + a^2 \mathbf{V}_2 + \dots \\ \mu(a) &= 1 + a \mu_1 + a^2 \mu_2 + \dots \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dans les (4.20), a est le même paramètre de perturbation employé dans le développement de la courbe. On cherche un point de bifurcation au voisinage de $(\mathbf{U}_0, \lambda_0)$; si on injecte les (4.20) dans la (4.16) et (4.18), et on procède comme pour la courbe, on aboutit à l'ensemble suivant d'équations linéaires:

$$\begin{aligned} \text{ordre } 0: \quad & \mathbf{L}_t^0(\mathbf{V}_0) = \mathbf{f}, \\ \text{ordre } 1: \quad & \mathbf{L}_t^0(\mathbf{V}_1) = \mu_1 \mathbf{f}, \\ & \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{f} = 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \text{ordre } p \geq 2: \quad & \mathbf{L}_t^0(\mathbf{V}_p) = \mu_p \mathbf{f} - \sum_{k=1}^p \mathbf{Q}(\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_{p-k}), \\ & \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{f} = 0. \end{aligned}$$

L'opérateur tangent linéaire \mathbf{L}_t^0 est

$$\mathbf{L}_t^0(\cdot) = \mathbf{L}(\cdot) + 2\mathbf{Q}(\mathbf{U}_0, \cdot), \quad (4.22)$$

à savoir le même qui gère le problème de la courbe solution, (4.9); ceci se traduit par une sensible économie de temps de calcul. Evidemment, les problèmes (4.21) sont résolus en succession, comme déjà fait pour la courbe. Une expression de $\mu = \mu(a)$ est donc trouvée pour chaque pas de la procédure de continuation, et les zéros a_b de la fonction sont trouvés numériquement. $\mathbf{V}(a_b)$ est le vecteur propre et $\lambda(a_b)$ la valeur propre; la multiplicité de la racine a_b est celle du mode aussi.

Evidemment, même les séries (4.20) ont un rayon de validité, qui sera, en général, différent de celui de la courbe, mais qui peut être déterminé de la même façon. Dans une procédure de continuation où la recherche de points de bifurcation est prévue, il faut toujours choisir le plus petit rayon de validité parmi ceux de la courbe et de l'indicateur. Toutefois, il vaut mieux remarquer que ni l'ordre n , ni la précision souhaitée, soit elle ε_d ou ε_r , doivent obligatoirement être les mêmes pour la courbe et pour l'indicateur.

5.1 Introduction.

Dans le contexte de la MAN, la description du comportement post-critique de la structure peut être faite facilement, grâce aux caractéristiques propres à la méthode. Ceci a été fait dans les travaux de Damil et Potier-Ferry, 1990, Azrar *et alii*, 1993, Boutyour, 1994, Tri, 1996. Deux approches ont été utilisées: ou bien on introduit une petite imperfection qui casse la symétrie et fait disparaître la singularité de la bifurcation, sans pour autant changer de façon essentielle la nature du problème, ou bien on décrit le comportement post critique en partant directement du point de bifurcation. Celui-ci étant un point singulier, où l'opérateur linéaire n'est pas inversible, le problème doit être relaxé, ce qui comporte une modification de la MAN.

Le but de la recherche développée pendant la bourse était celui de trouver une nouvelle stratégie pour la description des branches post critiques, dans l'hypothèse de mode simple, sans altérer la MAN, de telle sorte à intégrer la méthode dans un code de calcul, EVE, existant au sein du LPMM. Cette procédure devait permettre un suivi automatique des branches, réduisant au minimum l'intervention de l'opérateur.

Dans ce but, la stratégie mise au point diffère non seulement des autres méthodes précédemment employées dans le cadre de la MAN, et citées ci-haut, mais aussi de l'approche classique de Koiter, 1945, qui introduit un développement de deux paramètres, par rapport à la charge et à l'amplitude modale. En complément, la nécessité de reconsidérer les critères de contrôle de la qualité de la solution, dont on a parlé au § 4.5, fut mise en évidence; en effet, lorsqu'on recherche des points de bifurcation, surtout sur des branches non triviales, il faut avoir une solution très précise, afin de ne pas introduire artificiellement des imperfections numériques qui cassent la symétrie et font disparaître la singularité. Cela nous avait amené à formuler un nouveau critère de contrôle, plus adapté au cas de la recherche des bifurcations, ainsi qu'une stratégie de correction de la solution asymptotique, afin d'éviter l'accumulation des erreurs dans un processus de continuation. Dans ce chapitre on donne un bref compte rendu de ces recherches.

5.2 Stratégie de recherche des branches bifurquées.

En hypothèse de mode simple, pour chaque point de bifurcation il y a trois branches post-critiques, correspondants à deux tangentes aux courbes de réponse, voir Fig. 5.1. Comme le point de bifurcation est singulier, il ne peut pas être pris comme point de départ de la MAN dans sa formulation classique.

L'idée à la base de la stratégie est celle de trouver un point régulier de chaque branche, proche au point de bifurcation, et de les utiliser comme point de départ de la MAN classique pour la description de chaque branche. Pour trouver ces points réguliers, la procédure est la suivante: grâce au développement asymptotique de la branche pre-critique, on trouve les deux tangentes au parcours d'équilibre au point de bifurcation. Sur ces tangentes, on choisit trois points P'_i , $i=1,2,3$, proches de la bifurcation. Ces points sont des solutions approximées, et ils sont ramenés à des points exacts et réguliers P_i par le biais d'une procédure de correction. A ce moment, on dispose d'un point de départ convenable pour la MAN classique pour chaque branche bifurquée, qui peut donc être décrite de la façon connue.

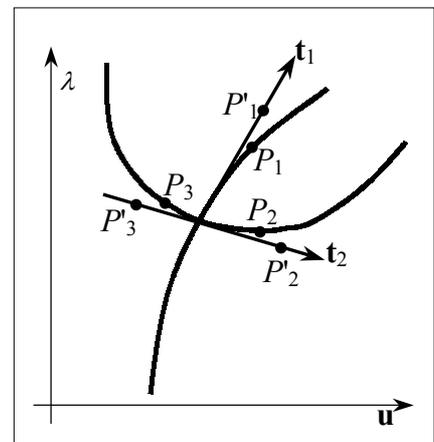


Fig. 5.1. Schéma général.

5.3 Recherche des tangentes au point de bifurcation.

La recherche des branches peut être remplacée par le problème des vitesses, c'est-à-dire des dérivées par rapport à un paramètre, voir par exemple Seydel, 1988:

$$\mathbf{R}_{,U}(\dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{R}_{,\lambda} \dot{\lambda} = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

où $\mathbf{R}_{,U}$ est le même opérateur défini par la (4.17) et $\mathbf{R}_{,\lambda} = -\mathbf{F}$. Pour rendre déterminée cette équation, une autre condition est nécessaire, et normalement on impose la normalisation

$$\dot{\mathbf{U}} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\lambda}^2 = 1. \quad (5.2)$$

Pour un mode simple, la valeur propre est unique, et le vecteur propre correspondant, le mode

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \Phi \\ \mathbf{S}_\varphi \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

qui doit coïncider avec le vecteur $\mathbf{V}(a_b)$ calculé au § 4.6, vérifie la condition

$$\mathbf{R}_{,U}(\Phi) = \mathbf{0}, \quad \Phi \neq \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

La projection de la (5.1) sur Φ donne la condition de compatibilité

$$\dot{\lambda} \mathbf{R}_{,\lambda} \cdot \Phi = 0; \quad (5.5)$$

si $\dot{\lambda} \neq 0$, la singularité est un point de bifurcation, autrement il s'agit d'un point limite. Pour trouver les tangentes au point de bifurcation, la solution de la (5.1) est écrite comme

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\lambda} \mathbf{W} + \alpha \Phi, \quad (5.6)$$

où

$$\mathbf{W} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{S}_w \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

est un vecteur mixte. De la (5.1) on tire que

$$\mathbf{R}_{,U}(\mathbf{W}) = \mathbf{F}, \quad (5.8)$$

à savoir, \mathbf{W} est la solution linéaire. Au point de bifurcation la (5.1) ne peut pas déterminer la solution, et il faut passer à la dérivée seconde qui, compte tenu de la linéarité de \mathbf{R} par rapport à λ , se réduit à:

$$\ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{R}_{,UU}(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{R}_{,U}(\ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{R}_{,\lambda} \ddot{\lambda} = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

Par le biais des (5.6) et (5.8), la (5.9), projetée sur le mode Φ , devient l'équation de bifurcation

$$\mathbf{R}_{,UU}(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}}) \cdot \Phi = 0, \quad (5.10)$$

qui, si on considère que

$$\mathbf{R}_{,UU}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{V}), \quad (5.11)$$

se réduit à l'équation algébrique de second degré

$$b \alpha^2 + 2 c \alpha \dot{\lambda} + d \dot{\lambda}^2 = 0, \quad (5.12)$$

avec les coefficients b , c et d donnés par les relations

$$\begin{aligned}
b &= \Phi \cdot Q(\Phi, \Phi), \\
c &= \Phi \cdot Q(\Phi, \mathbf{W}), \\
d &= \Phi \cdot Q(\mathbf{W}, \mathbf{W}).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Les racines de la (5.12) sont

$$\dot{\lambda}_{1,2} = \frac{\alpha_{1,2}}{d} \left(-c \pm \sqrt{c^2 - b d} \right) \tag{5.14}$$

et α_1, α_2 peuvent être obtenus par une condition de normalisation.

L'avantage de la MAN devient à ce moment tangible: le fait de disposer d'une expression analytique de la branche fondamentale jusqu'au point de bifurcation permet de résoudre le problème de la recherche des tangentes de façon simple, sans besoin de faire appel à un problème relaxé. En effet, par les (4.7) on a que la tangente \mathbf{t}_1 à la branche fondamentale est

$$\mathbf{t}_1 = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}(a_b) \\ \dot{\lambda}(a_b) \end{Bmatrix}; \tag{5.15}$$

alors, par les (5.1) et (5.6) on peut choisir

$$\mathbf{W} = \frac{\dot{\mathbf{U}}(a_b)}{\dot{\lambda}(a_b)}, \quad \alpha_1 = 0, \tag{5.16}$$

ce qui implique

$$d = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\alpha_2 \frac{b}{2c}, \tag{5.17}$$

et donc que la tangente \mathbf{t}_2 à la branche bifurquée est

$$\mathbf{t}_2 = \alpha_2 \begin{Bmatrix} -\frac{b}{2c} \mathbf{W} + \Phi \\ -\frac{b}{2c} \end{Bmatrix}. \tag{5.18}$$

5.4 Détermination des points réguliers.

Pour trouver un point régulier sur chaque branche, on détermine d'abord un point P'_i sur la tangente correspondante: si Δs est un incrément arbitraire, alors

$$\begin{aligned}
P'_1 &= P_b + \Delta s \mathbf{t}_1, \\
P'_2 &= P_b + \Delta s \mathbf{t}_2, \\
P'_3 &= P_b - \Delta s \mathbf{t}_2.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Ces points n'appartiennent pas aux branches, mais, si Δs est suffisamment petit, ils leur sont très proches. Pour trouver des points exacts on fait alors une correction de ces points. Pour cette correction, il faut s'assurer que le point corrigé ne soit pas le point de bifurcation, qui est singulier, et que cette correction amène le point sur sa branche, et non sur une autre.

Une façon simple de faire cette correction, est de la diviser en deux parties: dans la première, le point est déplacé sur la tangente, en direction du point de bifurcation. De cette façon, sa distance de la courbe diminue, et donc le résidu aussi. Pour ne jamais tomber sur le point singulier, une

méthode de dichotomie peut être employée. La seconde correction est faite en direction perpendiculaire à la tangente, jusqu'à ramener le point sur la courbe, avec une précision fixée. Ceci a été fait à l'aide de la procédure décrite dans le paragraphe suivant, en prenant pour \mathbf{u}_1 , dans la (5.27), le vecteur tangent à la courbe, ce qui garanti l'orthogonalité ci-dessus.

Les courbes post-critiques sont donc tracées en partant de chaque point P_i , avec la procédure classique de la MAN; il faut dire que dans le calcul de ces points de redémarrage, on peut se rapprocher près du point de bifurcation autant qu'on le souhaite, et finalement, d'un point de vue pratique, la discontinuité, inhérente à la stratégie décrite, disparaît.

5.5 Contrôle du résidu dans une procédure de continuation.

Le contrôle de la précision par les méthodes vues au § 4.5 peut, dans certains cas, s'avérer peu efficace. Surtout dans la recherche des points de bifurcation, il faut parfois une très grande précision de calcul, afin de ne pas introduire des erreurs factices, qui font disparaître la singularité. De surcroît, dans une technique de continuation, où chaque nouveau morceau de courbe démarre d'un point approximé, les erreurs peuvent s'accumuler. En outre, la (4.15) donne une mesure absolue de la précision, et donc, par exemple, affectée par les unités choisies, alors qu'un critère non dimensionnel semble plus approprié. Pour ces raisons nous avons proposé une nouvelle façon de contrôler la précision, et aussi une correction de la position en fin de pas, lors d'une technique de continuation.

D'abord, le contrôle de la précision est fait à l'aide d'un critère non dimensionnel sur le résidu,

$$\text{précision} = \frac{\|\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda)\|}{(1 + |\lambda|)\|\mathbf{F}\|} \quad (5.20)$$

ce qui donne la formule suivante pour le calcul approximé du rayon de validité:

$$a_v \cong \left[\varepsilon_r (1 + |\lambda_0|) \frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{F}_{n+1}^{nl}\|} \right]^{\frac{1}{n+1}}. \quad (5.21)$$

Une bonne stratégie, qui ne comporte pas une augmentation sensible de l'effort de calcul, est de prendre pour a_v le plus petit entre la (4.14) et la (5.21).

Pour corriger la position d'un point de redémarrage, on peut utiliser la phase correctrice d'un algorithme de Newton-Raphson, avec une mesure de pas en longueur d'arc, voir Riks, 1972.

Si on fait l'hypothèse que

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_0, \lambda_0) \neq \mathbf{0}, \quad (5.22)$$

on recherche des incréments $\Delta\mathbf{U}$ et $\Delta\lambda$ tels que

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U}, \lambda_0 + \Delta\lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{U}_0, \lambda_0) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{(\mathbf{U}_0, \lambda_0)} \Delta\mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \Big|_{(\mathbf{U}_0, \lambda_0)} \Delta\lambda + \dots = \mathbf{0}; \quad (5.23)$$

comme, par la (4.6) il est

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{(\mathbf{U}_0, \lambda_0)} \Delta\mathbf{U} = \mathbf{L}_t(\Delta\mathbf{U}) \quad (5.24)$$

et

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \right|_{(\mathbf{U}_0, \lambda_0)} \Delta \lambda = -\Delta \lambda \mathbf{F}, \quad (5.25)$$

la (5.23) devient, après discrétisation,

$$[\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_0)] \Delta \mathbf{u} = \Delta \lambda \mathbf{F} - \mathbf{R}_0. \quad (5.26)$$

A cette équation on ajoute une autre condition, afin de la rendre déterminée, et dans le but d'avoir la correction la plus efficace on pose

$$\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (5.27)$$

où \mathbf{u}_1 est le vecteur tangent à la branche au point de continuation, qu'on calcule facilement par la connaissance du développement asymptotique. Les (5.26) et (5.27) sont résolues de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \Delta \lambda \mathbf{u}_1 + \Delta \bar{\mathbf{u}}, \\ [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_0)] \Delta \bar{\mathbf{u}} &= -\mathbf{R}_0, \\ \Delta \lambda &= -\frac{\Delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Comme dans la (5.23) on néglige les termes d'ordre supérieur,

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_0 + \Delta \mathbf{U}, \lambda_0 + \Delta \lambda) \approx \mathbf{0}, \quad (5.29)$$

et alors par applications successives de la procédure, le résidu peut être rendu aussi petit qu'on le souhaite.

Dans l'algorithme mis au point, le rayon de validité était calculé comme le plus petit parmi les valeurs données par la (4.14) et la (5.21); si alors c'était le critère (4.14) à déterminer a_v , une correction du résidu en fin de pas pouvait se rendre nécessaire, selon la valeur de la précision ε_r fixée. L'expérience avait montré que la plupart des fois un seul pas de correction était suffisant.

6.1 Généralités sur les tests.

Une vaste série d'essais numériques ont été faits dans le but de tester la méthode, aussi bien en ce qui concerne son efficacité à suivre les branches, qu'en ce qui concerne ses prestations typiquement numériques: qualité de la solution en fonction de la précision, nombre de pas à faire etc. Une partie de ces tests sont montrés dans les publications en annexe et en bibliographie, ici on se limite à présenter trois cas particulièrement intéressants, où la méthode a été mise à rude épreuve. Les tests ont été effectués avec EVE, logiciel par éléments finis dans lequel le code ANM-BIF, qui réalise la procédure décrite dans le chapitre précédent, avait été intégré.

Les essais montrés ici concernent deux plaques appuyées et un arc circulaire. Dans tous les cas la structure a été modélisée à l'aide d'éléments triangulaires DKT, avec un maillage uniforme. On a employé des développements de 20 termes pour le suivi des branches et de 10 termes pour l'indicateur de bifurcation. Le contrôle de la qualité de la solution pour le cas des deux plaques a été fait à l'aide de la (4.14) seulement, et sans contrôle du résidu en fin de pas, avec une précision $\varepsilon_d = 10^{-8}$ pour la courbe et 10^{-4} pour l'indicateur. Dans le cas de l'arc on a effectué aussi le contrôle en fin de pas avec la (5.21), en imposant sur le résidu une précision $\varepsilon_r = 10^{-8}$. Celle-ci est aussi la précision demandée lors de la correction des points de redémarrage après bifurcation, correction qui a été toujours faite avec les deux méthodes vues. Dans tous les graphiques présentés dans la suite, les déplacements sont rendus adimensionnels en le divisant par l'épaisseur, qui est toujours unitaire. Les autres données spécifiques à chaque essai sont montrées directement dans les figures.

6.2 Exemple numéro 1.

Il s'agit d'une plaque rectangulaire appuyée, voir Fig. 6.1, soumise à une charge uniforme de compression sur les deux cotés courts. Comme la figure montre, on a modélisé seulement la moitié de la plaque, en introduisant les conditions de symétrie nécessaires; seulement les modes symétriques par rapport à l'axe y ont été donc cherchés. Le rapport entre les cotés est égal à 1.4; ce rapport a été choisi dans le but de tester l'efficacité de la méthode, capable de suivre des branches post-critiques seulement dans le cas de mode simple. Or, il est bien connu que si le rapport est $\sqrt{2}$ le mode est double. En se rapprochant beaucoup de cette valeur on a voulu tester la réponse de l'algorithme dans une condition limite.

Dans les graphiques on montre le parcours d'équilibre dans l'espace (u, θ, λ) , où u est le déplacement hors-plan du point central et θ sa rotation autour de l'axe x . Les branches avec $u \neq 0$ et $\theta = 0$ correspondent donc aux modes symétriques, alors que celles avec $u = 0$ et $\theta \neq 0$ aux modes antisymétriques.

Plusieurs bifurcations ont été trouvées, et en particulier cinq sur la branche principale, dont trois, les bifurcations impaires, avec mode symétrique et deux, les paires, avec mode antisymétrique. Sur certaines branches secondaires on a de plus trouvé une bifurcation, qui donne origine à des modes mixtes, avec $u \neq 0$ et $\theta \neq 0$. Au total on a trouvé neuf bifurcations et décrit vingt-deux branches. Conformément au fait qu'on est près d'une bifurcation double, les deux premiers points de bifurcation sont très proches, mais l'algorithme les a décelés et a décrit les branches post-critiques sans aucun problème.

En ce qui concerne la stabilité, quatre branches bifurquées sont stables, voir Potier-Ferry, 1987: les deux branches symétriques du premier mode et les deux antisymétriques du second mode.

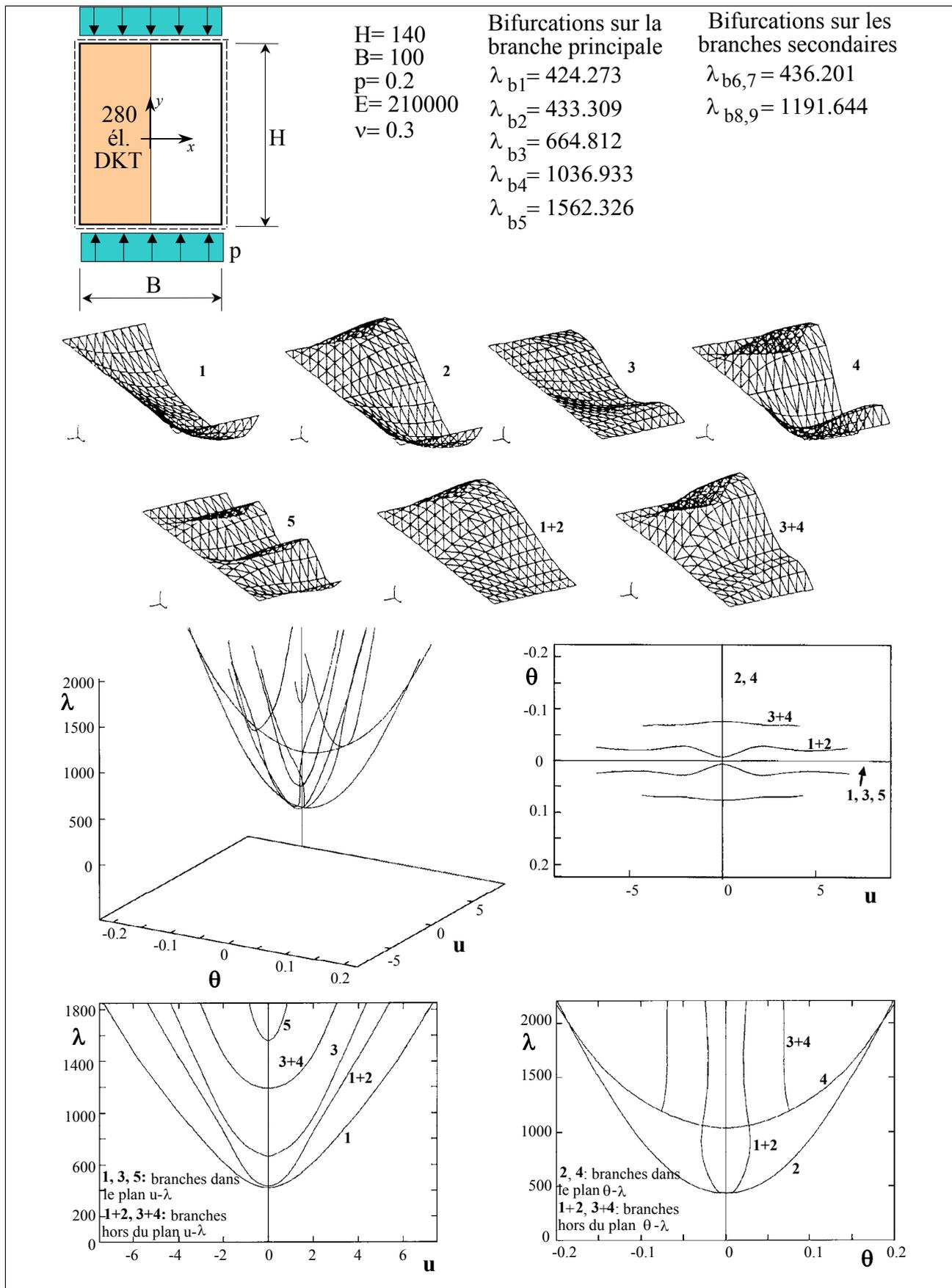


Fig. 6.1. Schéma et résultats pour le premier exemple.

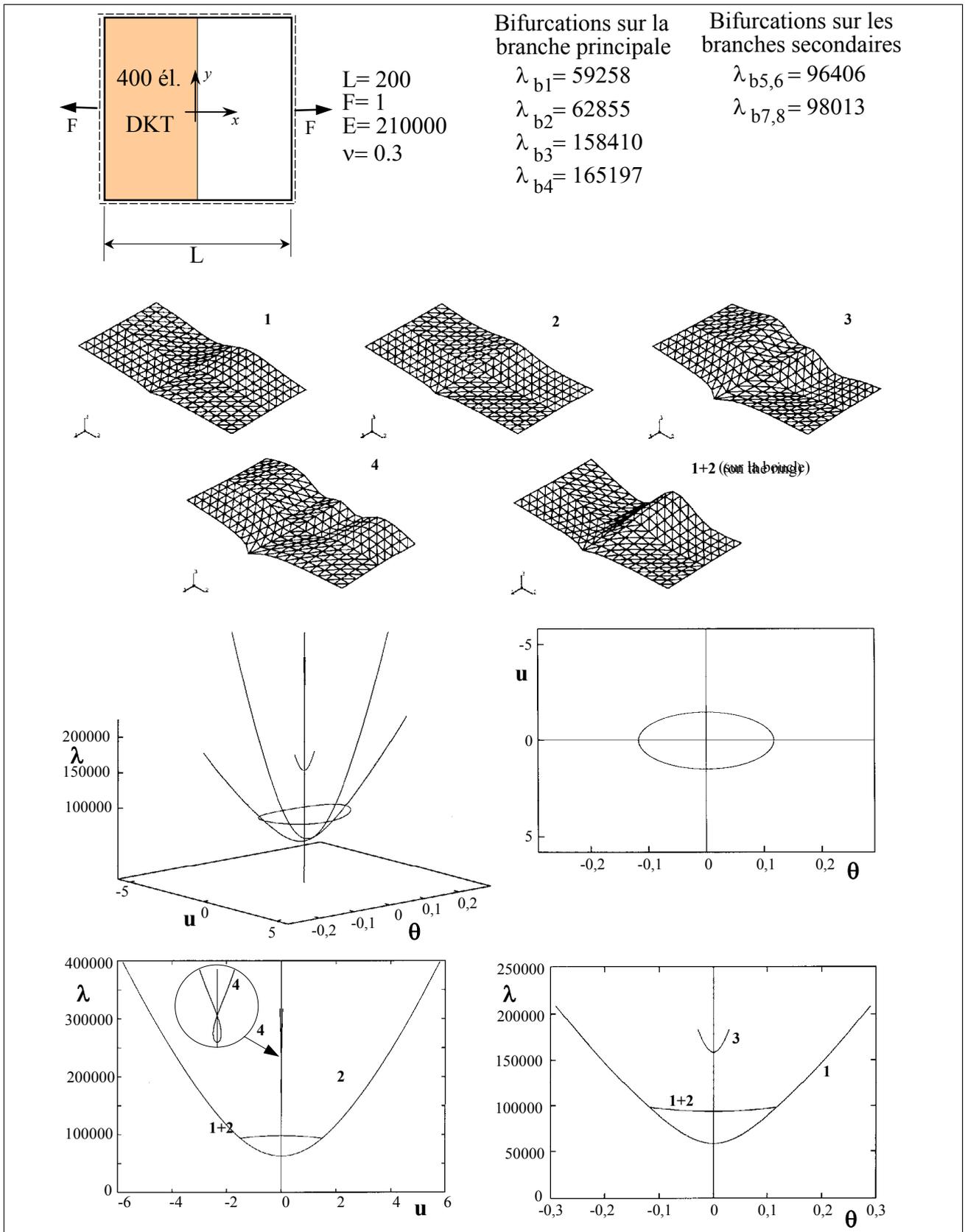


Fig. 6.2. Schéma et résultats pour le deuxième exemple.

6.3 Exemple numéro 2.

C'est le cas d'une plaque carrée soumise à une force de traction concentrée, voir Fig. 6.2. Comme dans le cas précédent, on a tracé le parcours d'équilibre dans l'espace (u, θ, λ) , et donc les mêmes

observations peuvent être faites. Dans ce cas, huit points de bifurcation ont été trouvés, dont quatre sur la branche principale et quatre sur les secondaires du premier et second mode. Les quatre branches qui passent par ces quatre bifurcations secondaires forment une boucle qui relie les deux premières branches bifurquées: cette boucle décrit un comportement de type *snapping*, voir Potier-Ferry, 1987: la première branche, mode antisymétrique, est stable jusqu'à l'intersection avec la boucle, après elle devient instable. La seconde branche, mode symétrique, est instable au début, pour devenir stable après son intersection avec la boucle.

6.4 Exemple numéro 3.

Comme montré dans la Fig. 6.3, il s'agit d'un arc circulaire, retenu par des appuis fixes, dont les

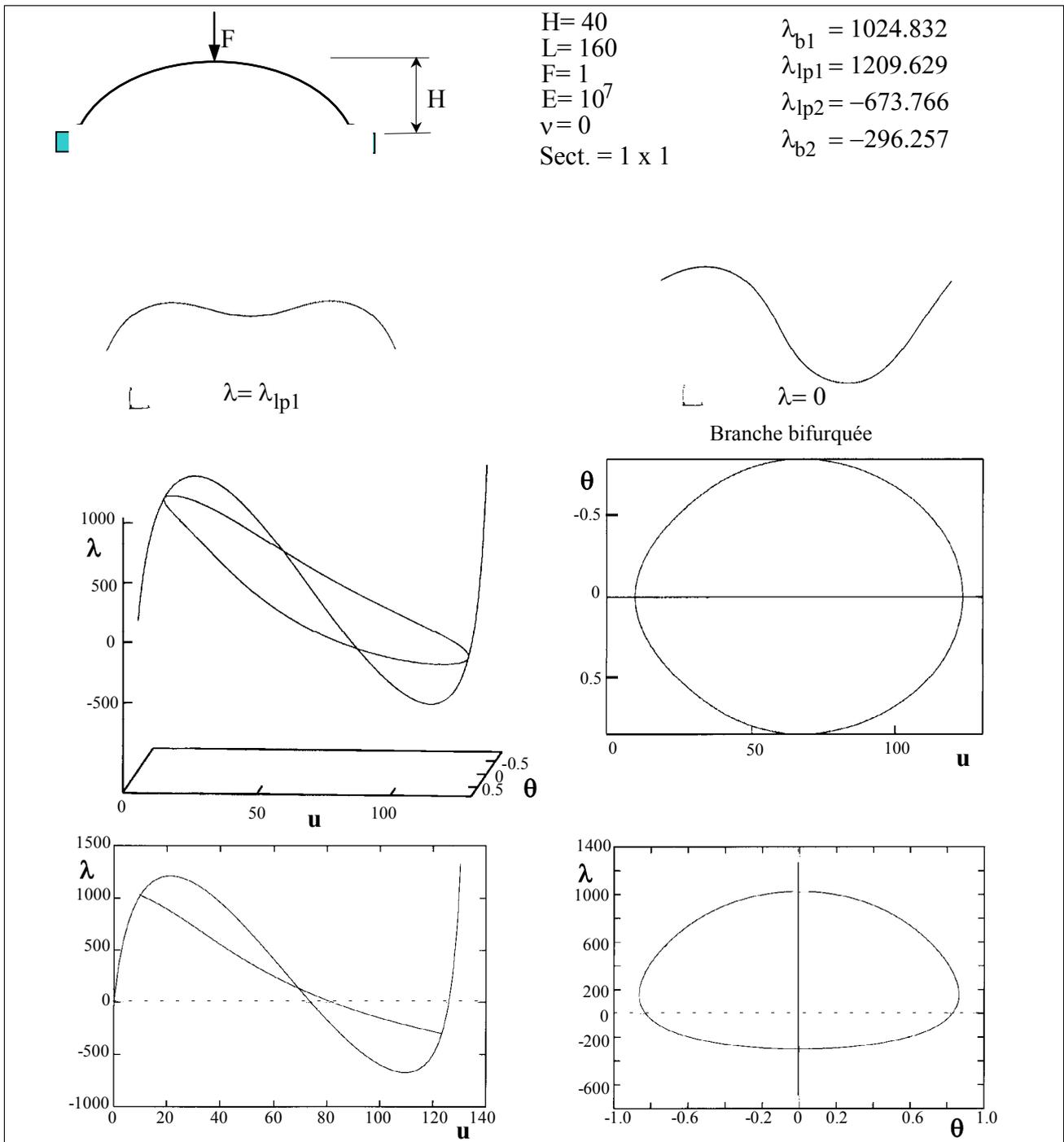


Fig. 6.3. Schéma et résultats pour le troisième exemple.

caractéristiques sont directement données sur la figure. Nous avons choisi ce cas car c'est un exemple classique, un *benchmark* souvent utilisé pour tester l'efficacité d'une méthode. Il s'agit, en effet, d'un cas avec forte non-linéarité et présence de points limite en chargement, avec comportement de type *snapping*, et bifurcation. L'arc a été discrétisé avec 200 éléments DKT, et il est soumis à une force concentrée verticale en son sommet. Le chemin d'équilibre de Fig. 6.3 a été tracé dans l'espace (u, θ, λ) , où u est le déplacement hors-plan du point central, et θ sa rotation. Nous avons décrit le chemin d'équilibre complet, avec la branche fondamentale et les bifurquées, qui ont été tracées à partir du deuxième point de bifurcation pour revenir jusqu'au premier.

Dans le but de tester la sensibilité de l'algorithme, on a considéré aussi la même structure avec une charge de perturbation égale à 1% de la charge appliquée, voir Fig. 6.4. Dans ce cas la symétrie du système est rompue, et la bifurcation disparaît. Les résultats montrent que l'algorithme n'a aucun problème à interpréter cette nouvelle situation et à suivre complètement le chemin d'équilibre.

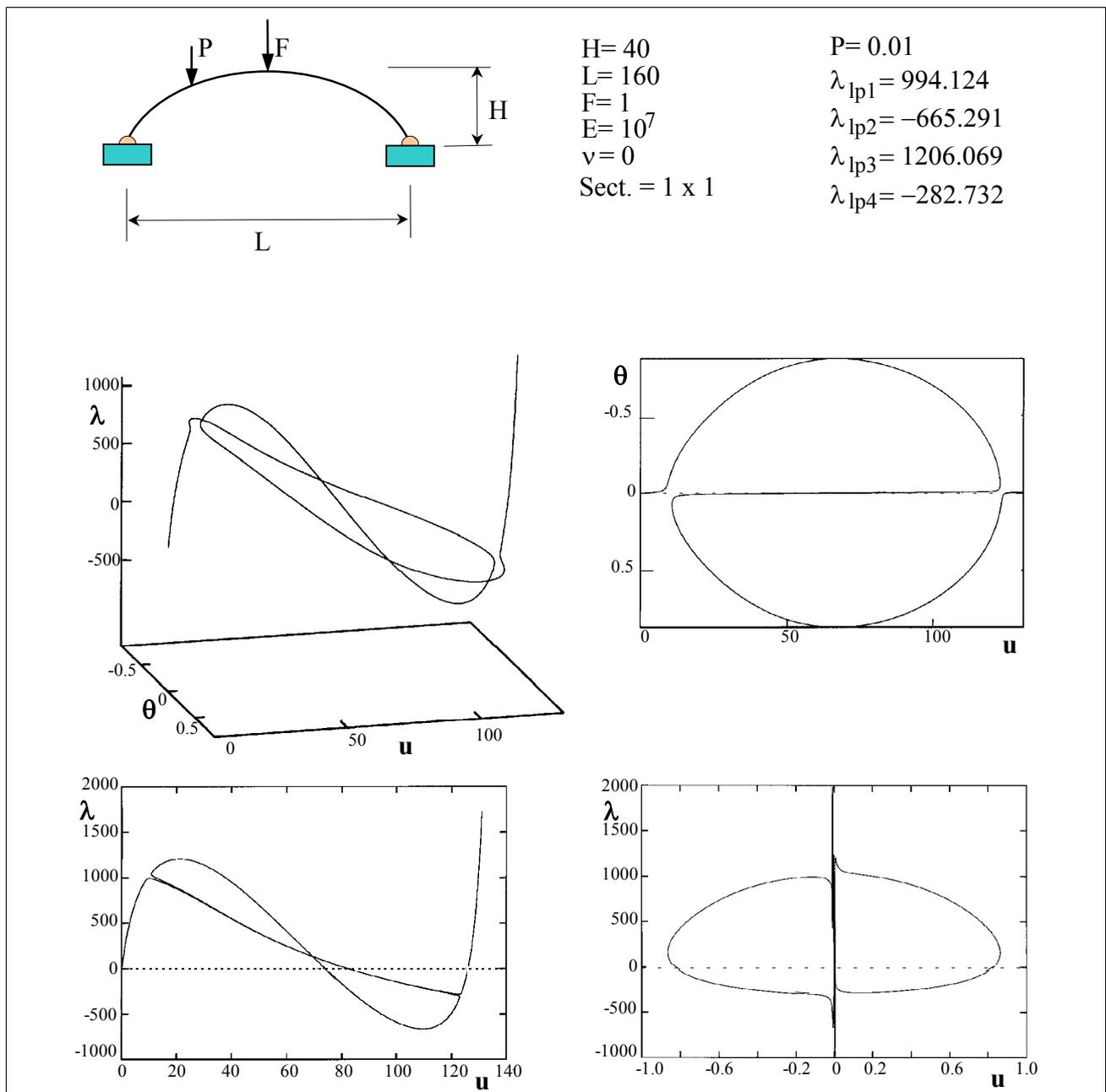


Fig. 6.4. Schéma et résultats pour le troisième exemple avec perturbation.

6.5 Discussion des résultats.

Les capacités de la méthode sont confirmées par les exemples montrés. Le point crucial est la détection de la bifurcation: une fois celle-ci trouvée, la méthode n'a jamais failli. Parfois, la bifurcation n'a pas été trouvée à la première tentative, et cela est essentiellement dû à l'introduction d'imperfections de nature numérique qui altèrent de façon factice la symétrie du système. Ces imperfections sont dues, par exemple, à un défaut de maillage, lorsqu'il ne tient pas compte des symétries, mais surtout elles peuvent être générées par les erreurs dues aux approximations numériques. C'est alors le contrôle de la précision qui devient essentiel. En faisant varier la précision demandée, mais surtout en introduisant la correction non dimensionnelle sur le résidu en fin de pas, ce genre d'inconvénient a été toujours contourné.

Comme exemple de ça, on peut citer encore le cas de l'arc: en Fig. 6.5 on montre la valeur relative du résidu en fin de pas dans le cas où on n'effectuerait pas de correction en fin de pas. La première bifurcation se trouve au 3^{ème} pas, où la précision est très bonne, et en effet la bifurcation est trouvée sans difficulté. La deuxième bifurcation, par contre, se trouve au 40^{ème} pas, là où le résidu a augmenté considérablement, à cause de l'accumulation des erreurs, et cela même si on garde une précision $\varepsilon_d = 10^{-8}$ dans le contrôle des déplacements; en conséquence de ça, l'indicateur ne s'annule pas et la bifurcation n'est pas décelée. La courbe de Fig. 6.5 montre en outre que la variation du résidu a une allure non prévisible, pas forcément monotone. Dans la même figure on a tracé aussi la courbe du résidu lorsque la correction en fin de pas est effectuée. Dans ce cas, la précision sur le résidu est limitée à $\varepsilon_r = 10^{-8}$, et aucun problème ne se manifeste dans la recherche de la deuxième bifurcation. Dans ce cas, 23 corrections ont été nécessaires pour garder la précision souhaitée.

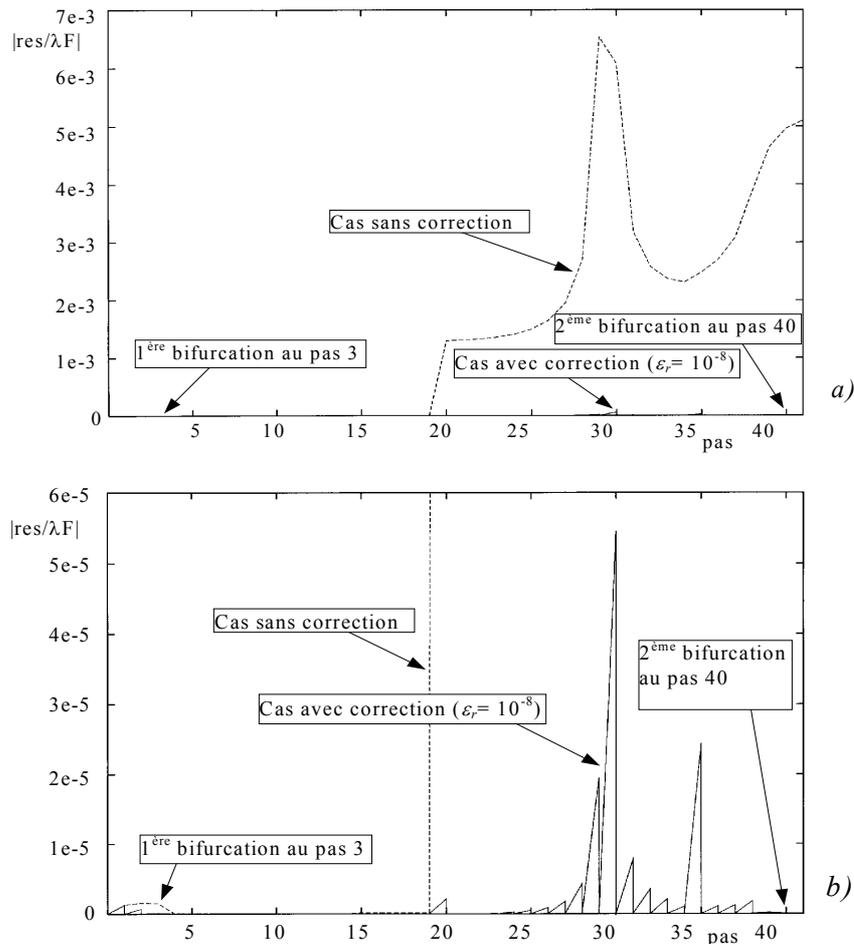


Fig. 6.5. Exemple de l'arc: a) variation du résidu avec le pas; b) zoom de la courbe précédente.

Le dernier point à considérer est justement celui-ci: le nombre de corrections à faire. Cela dépend bien sûr de la précision voulue. Pour tester cet aspect, nous avons fait le même exemple, mais cette fois en demandant une précision $\varepsilon_r = 10^{-4}$: le nombre de corrections nécessaires est passé de 23 à 2, et la bifurcation a été trouvée correctement. C'est évident qu'il existe un niveau de précision critique pour chaque problème, auquel la recherche de la bifurcation est sensible.

Un dernier mot sur l'effort de calcul: en prenant en considération toujours le cas de l'arc, la branche fondamentale a été décrite avec 40 pas de continuation de la procédure, chacun comportant une inversion de la matrice de rigidité. Comme on a vu, cela a nécessité aussi 2 corrections de type Riks en fin de pas, pour garantir la précision $\varepsilon_r = 10^{-4}$ nécessaire. Normalement, chaque procédure de correction nécessite une seule inversion de matrice, et donc au total on a fait 42 inversions. Cependant, les graphiques peuvent être tracés avec un nombre considérablement plus élevés de points, car la description asymptotique de chaque pas de la courbe nous permet d'en donner une restitution graphique presque continue. Par exemple, dans les graphiques de la Fig. 6.3 la courbe principale a été évaluée sur 200 points, afin d'obtenir une bonne qualité du résultat graphique. Bien évidemment, pour obtenir la même qualité finale avec une méthode incrémentale-itérative classique, il aurait fallu faire bien plus que 200 inversions de la matrice de rigidité, car chaque point tracé nécessite, pour être trouvé, d'un pas prédicteur et, normalement, de plusieurs pas correcteurs.

CONCLUSIONS

La recherche développée au sein du LPMM a eu comme résultat l'élaboration d'un algorithme, basé sur la MAN, capable de déterminer le comportement complet d'une structure élastique en présence de non-linéarités géométriques, avec détection de points singuliers et analyse du comportement post critique. L'algorithme, testé sur un grand nombre de problèmes, s'est montré robuste et fiable, efficace dans le suivi des chemins d'équilibre et demandant un effort de calcul sans doute inférieur à celui demandé par de méthodes plus classiques, et pour la même qualité du résultat final.

En particulier il y a deux nouveautés dans la méthode proposée: la stratégie de détection des branches bifurquées et le contrôle du résidu, qui, pour certains pas, couple un pas correcteur effectué avec la méthode de Riks. Ceci permet de contrôler efficacement la précision du calcul, afin de rendre possible la détection des points de bifurcation.

Cette recherche a donné lieu à deux communications à des congrès nationaux, à une publication sur revue nationale, et surtout à un article sur *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, paru en 1998.

En 1997, en collaboration avec le professeur S. Ligarò, de l'Université de Pise, en Italie, nous avons appliqué la méthode à l'analyse d'une plaque mince fissurée soumise à traction, et cela afin d'évaluer l'influence du flambement de la zone autour de la fissure sur la propagation de celle-ci. Les résultats de cette recherche ont été publiés dans les comptes rendus de *AIMETA XIII, Congrès National de l'Association Italienne de Mécanique Théorique et Appliquée*, tenu en 1997 à Sienne.

BIBLIOGRAPHIE

1. Azrar L., Cochelin B., Damil N. & Potier-Ferry M., **1993**: An asymptotic-numerical method to compute the post-buckling behaviour of elastic plates and shells. *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, v. 36, 1251-1277.
2. Boutyour E. H., Cochelin B. & Potier-Ferry M., **1993**: Calcul de points de bifurcation par une méthode asymptotique-numérique. *Comptes Rendus du 1^{er} Congrès National de Mécanique*, Rabat, Maroc, v.1, 371-378.
3. Boutyour E. H., **1994**: Méthode Asymptotique-Numérique pour le calcul des bifurcations: application aux structures élastiques. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Metz.
4. Cadou J. M., **1997**: Méthode asymptotique numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'interaction fluide-structure. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Metz.
5. Cochelin B., Damil N. & Potier-Ferry M., **1994**: The Asymptotic-Numerical Method, an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics. *Revue Européenne des Elements Finis*, v.3, 281-297.
6. Cochelin B., Damil N. & Potier-Ferry M., **1994**: Asymptotic-numerical methods and Padé approximants for nonlinear elastic structures. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.* 37, 1187-1213.
7. Cochelin B., **1994**: A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers and Structures*, v. 53, 1181-1192.
8. Cochelin B., **1994**: Méthodes asymptotiques-numériques pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques. Flambage et délaminage dans les composites stratifiés. Thèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches présentée à l'Université de Metz.
9. Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M. & Vannucci P., **1997**: La méthode asymptotique numérique pour la description des branches bifurquée en mécanique des solides. *Comptes Rendus du 3^{ème} Congrès National de Mécanique*, Tetouan, Maroc, 508-513.
10. Connor J., Morin N., **1970**: Perturbation techniques in the analysis of geometrically nonlinear shells. *Proc. IUTAM Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures*, Liège, Belgique.
11. Crisfield M. A., **1983**: An arc-length method including line search and acceleration. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, v.19, 1269-1289.
12. Damil N., Potier-Ferry M., **1990**: A new method to compute perturbed bifurcations: application to the buckling of imperfect elastic structures. *Int. J. Engng. Sci.*, v.28, 943-957.
13. Gallagher R. H., **1975**: Perturbation procedures in nonlinear finite element structural analysis. *Computational Mechanics – Lecture Notes in Mathematics*, v.461, 75-89, Springer-Verlag, Berlin.
14. Glaum L. W., Belytschko T. & Masur E. F., **1975**: Buckling of structures with finite prebuckling deformations - A perturbation finite element analysis. *Int. J. Solids & Structures*, v.11, 1023-1033.
15. Hangai Y., Kawamata S., **1972**: Perturbation method in the analysis of geometrically nonlinear and stability problems. Dans *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*. Univ. of Alabama, Huntsville, 473-492.
16. Hartmann F., **1985**: The mathematical foundation of structural mechanics. Springer-Verlag, Berlin.
17. Koiter W. T., **1945**: *On the stability of elastic equilibrium*. Thesis, Delft. Traduction anglaise: NASA Techn. Trans. F10, 883, 1967.
18. Lahmam H., Cadou J. M., Zahrouni H., Damil N. & Potier-Ferry M., **2002**: High-order predictor-corrector algorithms. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, v.55, 685-704.
19. Ligarò S., Potier-Ferry M. & Vannucci P., **1997**: Sull'interazione fra instabilità locale e frattura nella crisi di lastre elastiche sottili fessurate. *Comptes Rendus de AIMETA XIII, Congrès National de l'Association Italienne de Mécanique Théorique et Appliquée*, Siena, Italie, 217-222 (en Italien).
20. Masur E. F., Schreyer H. L., **1967**: A second approximation to the problem of elastic instability. *Proc. Symp. Theory of Shells*. Donnell Anniversary Volume, Univ. of Texas, Houston, 231-249.
21. Mordane S., **1995**: Calcul du problème de la houle non linéaire et instationnaire par une méthode asymptotique-numérique. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université Hassan II, Casablanca, Maroc.
22. Mordane S., Chagdali M. & Damil N., **1993**: Etude du problème bidimensionnel de la houle non-linéaire par une méthode asymptotique-numérique. *Comptes Rendus du 1^{er} Congrès National de Mécanique*, Rabat, Maroc, v.2, 121-128.
23. Noor A. K., **1981**: Recent advances in reduction methods for nonlinear problems. *Comp. Struct.*, v.13, 31-44.
24. Noor A. K., Andersen C. M. & Peters J. M., **1979**: Global-local approach for non-linear shell analysis. *Proc. 7th ASCE Conf. On Electronic Computation*, Washington University, St Louis, Missouri, 634-657.

25. Potier-Ferry M., **1987**: Foundations of elastic post-buckling theory. Dans *Buckling and Post-Buckling, Lecture Notes in Physics*, v.288, 1-82, Springer-Verlag, Berlin.
26. Ramm E., **1981**: Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, European-U.S. Workshop, Ruhr Universität Bochum, Allemagne, 63-89. Springer-Verlag, Berlin.
27. Riks E., **1972**: The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J. App. Mech.*, v. 39, 1060-1066.
28. Riks E., **1984**: Some computational aspects of the stability analysis of structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, v.47, 219-259.
29. Seydel R., **1988**: *From equilibrium to chaos. Practical Bifurcation theory and stability analysis*. Elsevier, New York.
30. Schaeffer D. G., Golubitsky M., **1979**: Boundary conditions and mode jumping in the buckling of a rectangular plate. *Comm. Math. Phys.*, v.69, 209-236.
31. Signorini A., **1930**: Sulle deformazioni termoelastiche finite. *Proc. of the 3rd Int. Congress of Appl. Mech.*, n.2, 80-89 (en Italien).
32. Thompson J. M. T., Walker A. C., **1968**: The nonlinear perturbation analysis of discrete structural systems. *Int. J. Solids Str.*, v.4, 757-768 .
33. Tri A., **1996**: Méthode asymptotique numérique pour les fluides visqueux incompressibles et la détection de la bifurcation de Hopf. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Metz.
34. Tri A., Cochelin B. & Potier-Ferry M., **1996**: Résolution des équations de Navier-Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une méthode asymptotique-numérique. *Revue Européenne des Elements Finis*, v.5, 415-442.
35. Vannucci P., Cochelin B., Damil N. & Potier-Ferry M., **1996**: Calcul de branches bifurquées par une méthode asymptotique numérique. *Récents Progrès en Génie des Procédés*, v.11, 201-207.
36. Vannucci P., Cochelin B., Damil N. & Potier-Ferry M., **1997**: Analisi post-critica col metodo asintotico numerico (M.A.N.). *Comptes Rendus de AIMETA XIII, Congrès National de l'Association Italienne de Mécanique Théorique et Appliquée*, Siena, Italie, 47-52 (en Italien).
37. Vannucci P., Cochelin B., Damil N. & Potier-Ferry M., **1998**: An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, v.41, 1365-1389.
38. Wagner W., Wriggers P., **1988**: A simple method for the calculation of postcritical branches. *Engng Comput.*, v.5, 103-109.
39. Wagner W., Wriggers P., **1991**: Calculation of bifurcation points via fold curves. Dans *Nonlinear Computational Mechanics*, P. Wriggers and W. Wagner Eds., 69-84. Springer-Verlag, Berlin,.
40. Walker A. C., **1969**: A non-linear FEA of shallow circular arches. *Int. J. Solids Str.*, v.5, 97-102.
41. Zahrouni H., **1998**: Méthode asymptotique numérique pour les coques en grandes rotations. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Metz.

Troisième partie

UNE ACTIVITE DE RECHERCHE EN MECANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES: LA METHODE POLAIRE EN ANALYSE, CONCEPTION ET IDENTIFICATION DES STRATIFIES

Cette troisième partie porte sur mes recherches en thème de matériaux composites, recherches qui se sont entièrement déroulées à l'ISAT de Nevers, au sein du LRMT, Laboratoire de Recherche en Mécanique des Transports, devenu ensuite LRMA, Laboratoire de Recherche en Mécanique et Acoustique.

Mon premier séjour à l'ISAT date de 1996, quand j'ai bénéficié d'une bourse post-doctorale du programme européen HCM (*Human Capital and Mobility*). Cette période a été pour moi une occasion de formation à la mécanique des milieux anisotropes et des matériaux composites en particulier, domaine jusqu'alors totalement inconnu pour moi. Les professeurs S. Aivazzadeh d'abord, et G. Verchery ensuite ont guidé ma formation et mes recherches, qui ont porté surtout sur l'étude des théories et des méthodes pour l'analyse de plaques stratifiées et sandwich. En particulier, je me suis occupé de réaliser deux logiciels pour le LRMT, un pour le calcul des stratifiés orthotropes par la méthode de Pagano, 1970, l'autre pour l'analyse des plaques sandwich à l'aide de la solution de Verchery et P. D. Tuan, 1976. Grâce à ces deux outils de calcul, nous avons pu mener une étude numérique concernant la qualité de plusieurs méthodes et d'éléments finis pour le calcul des plaques sandwich, recherche qui a fait l'objet d'une communication au colloque EUROMECH 360, tenu en 1997 à l'Ecole des Mines de St Etienne.

Après un séjour de quelques mois en Italie, où j'ai travaillé comme boursier au *Dipartimento di Ingegneria Strutturale* (Département de Génie des Structures) de l'Université de Pise, je suis retourné à l'ISAT en octobre 1997, grâce à une bourse post-doctorale de la Région Bourgogne. C'est à cette occasion que j'ai entamé la série de recherches sur les matériaux composites qui s'est poursuivie même après mon entrée en fonction comme Maître de Conférences en 1998, et qui continue aujourd'hui encore, toujours sous la direction du professeur G. Verchery.

L'axe porteur des recherches que j'ai développé en collaboration avec le professeur Verchery, et à l'occasion aussi avec d'autres chercheurs du LRMA, est l'application de la méthode polaire à l'analyse, la conception et l'identification de stratifiés en composite. La méthode polaire, introduite par Verchery en 1979, est l'issue d'une série de recherches menées par Verchery dès le début des années 70, recherches qui portaient sur l'utilisation de l'approche par variable complexe dans l'étude des matériaux composites, bilame isotropes d'abord et anisotropes ensuite. Il s'agit d'une méthode générale pour la représentation des tenseurs de l'élasticité bidimensionnelle, qui fait usage de paramètres invariants, ayant une signification physique précise, et qui s'avère particulièrement indiquée pour l'analyse et la conception de matériaux anisotropes, lorsque la représentation par paramètres invariants et la simplicité de la transformation par changement de repère, qualités intrinsèques à la méthode, montrent toute leur efficacité.

Pendant ces cinq dernières années, nous avons touché à plusieurs problèmes concernant la mécanique des composites, mais probablement le domaine que nous avons investigué le plus est celui de la conception de stratifiés ayant certaines caractéristiques de rigidité. Nous nous sommes occupés, plus particulièrement, de trouver de solutions aux problèmes des stratifiés non couplés ou quasi-homogènes ou encore isotropes. Un résultat important de ces recherches est la découverte des stratifiés que nous avons appelé de type quasi-trivial, ou encore la formulation de nouvelles règles synthétiques pour la détermination de stratifiés isotropes, totalement ou en partie. La continuation de ces recherches au cas de stratifiés composé de plis avec renfort en tissus nous a permis de trouver un certain nombre de solutions exactes, dans les cas à faible nombre de couches.

Ces recherches se caractérisent par la tractation entièrement analytique: toutes les solutions trouvées sont exactes et trouvées de façon analytique. Toutefois, la complication des équations qui gèrent les problèmes de conception des stratifiés nous a obligé à faire appel à des méthodes numériques, et ceci dans le but d'élargir l'ensemble des problèmes traités avec succès. Nous avons donc ouvert un nouvel axe de recherche, portant justement sur la conception des stratifiés par la méthode polaire intégrée à une approche numérique. Dans ce cas, nous avons mené une réflexion générale, soutenue par une vaste recherche bibliographique, visant à formuler d'abord une approche la plus générale possible à la conception des stratifiés, et ensuite à en donner une méthode numérique efficace de solution. Nous avons en particulier proposé une approche unifiée d'un certain nombre de problèmes de conception en rigidité, que nous avons formulés comme un seul problème de minimum, en reconduisant ainsi ces problèmes à une formulation classique de l'optimisation structurelle, tout en faisant usage de la représentation tensorielle polaire. En ce qui concerne les méthodes numériques, nous avons fait appel à plusieurs techniques classiques, comme la méthode de Monte-Carlo, ou encore les algorithmes de descente, du type gradient ou gradient conjugué. Toutefois, c'est aux algorithmes génétiques que nous nous sommes adressés enfin, et cela pour plusieurs raisons, notamment pour leur capacité de contourner les problèmes liés à la non-convexité de la fonction objectif et de maîtriser efficacement les problèmes dépendant de variables discrètes. Notre but étant celui de concevoir un outil de conception efficace pour l'ingénieur, l'emploi de méthodes capables de travailler avec des variables discrètes semblait en fait essentiel. Nous sommes en plein effort dans cette direction, notamment avec une thèse de doctorat qui vient de s'achever, et les résultats nous semblent assez prometteurs.

Les recherches que j'ai menées au LRMA ne se bornent pas à celles-ci: j'ai pu, personnellement ou en collaboration, traiter différents sujets en parallèle, selon les besoins, les idées, les occasions. Un autre axe de recherche plutôt important pour nous a été l'analyse, par la méthode polaire, de la sensibilité aux défauts d'orientation des couches de certaines propriétés des stratifiés, notamment le découplage et la quasi-homogénéité. Cette recherche m'a ensuite amené à considérer un type particulier d'orthotropie plane, qui se révèle immédiatement dans le contexte polaire, et à en analyser les propriétés. D'autres travaux portent sur l'identification des propriétés élastiques d'un matériau composite par essai sur stratifié, par une nouvelle procédure basée sur la méthode polaire. Dans ce domaine, quelque résultat est désormais bien établi, notamment en ce qui concerne les stratifiés de type *angle-ply*, alors que d'autres nécessitent encore de recherches ultérieures. Nous avons aussi appliqué certains résultats de la méthode polaire à l'analyse expérimentale de la résistance à la traction et à la propagation d'une fissure, mais dans ce domaine les recherches ne font que commencer.

Dans les chapitres qui suivent, j'ai cherché de donner un compte rendu le plus organique possible de ces recherches, en commençant par illustrer de façon succincte la méthode polaire. Compte tenu du fait que plusieurs recherches se sont développées en parallèle et que certaines publications ne sont pas forcément parues dans l'ordre temporel de rédaction, la présentation ne suit pas un ordre chronologique, mais j'ai plutôt essayé de relater les faits de façon la plus simple et claire possible, en traitant les recherches par sujet. Chaque chapitre porte donc sur un thème de recherche, mais pas forcément ces chapitres se succèdent suivant l'ordre chronologique.

7.1 Introduction.

Celle qui sera dans la suite appelée méthode polaire a été introduite en 1979 par Verchery, dans un mémoire sur les invariants d'un tenseur plan \mathbf{T} du quatrième ordre ayant les symétries typiques de l'élasticité, à savoir les symétries mineures $T_{ijkl} = T_{jikl} = T_{ijlk}$, qu'on doit à la symétrie de contraintes et déformations, et les symétries majeures, $T_{ijkl} = T_{klij}$, conséquence de l'existence d'un potentiel élastique, voir par exemple le traité de Love, 1927, ou encore celui de Green et Zerna, 1954. Le travail de Verchery, dont on va donner dans ce chapitre une présentation, propose une méthode pour la construction des invariants tensoriels de \mathbf{T} , et inversement montre la possibilité de représenter les composantes cartésiennes de \mathbf{T} comme fonctions de ces invariants.

L'intérêt de ce travail est multiple: d'abord, la méthode en elle-même, ensuite les applications possibles de la représentation polaire, notamment pour l'analyse de problèmes d'élasticité anisotrope, où les avantages de la méthode montrent toute leur efficacité. Ces avantages sont principalement deux: la signification physique des invariants, ce qui offre, entre autres, une interprétation nouvelle et élégante des propriétés élastiques, et une simplification remarquable dans l'écriture des équations concernant les couches anisotropes, simplification qui devient importante surtout lorsqu'on aborde de problèmes de conception.

Antérieurement au travail de Verchery, d'autres invariants pour les tenseurs du type de l'élasticité dans le cas bidimensionnel, trouvés par des méthodes algébriques empiriques, avaient été proposés par différents auteurs, comme Tsai et Pagano, 1968, Wu, 1970, Hahn, 1974. Le travail de Verchery complète ces résultats, mais en suivant une méthode de variable complexe, qui permet de simplifier le problème. Cette approche est classique en élasticité plane, et trouve son point de départ dans les travaux de Michell, 1902, Kolosov, 1909, Muskhelishvili, 1933, et surtout dans le traité de Green et Zerna, 1954. Des transformations analogues sont par ailleurs plus ou moins courantes en mécanique; la première application d'une méthode de transformation de variables complexes semble être due à Klein, 1896, pour l'analyse de problèmes gyroscopiques (voir Goldberg, 1950), mais bien connues sont aussi les applications en mécanique quantique.

Ce chapitre est une introduction, la plus organique possible, à la méthode polaire, en réservant toutefois au chapitre suivant les applications à la mécanique des stratifiés. Sauf là où explicitement indiqué, tout ce qui est rappelé dans ce chapitre est l'œuvre du professeur Verchery, et cette présentation s'appuie principalement sur le mémoire de 1979, paru en 1982, et sur les notes d'un séminaire sur la méthode tenu aux membres du LRMA, ainsi que sur un certain nombre de discussions et communications personnelles.

7.2 Le changement de variable complexe de Verchery.

A l'instar de Green et Zerna, Verchery propose un changement de variable complexe interprété comme un changement de repère: en particulier, si un vecteur donné a composantes $\mathbf{x} = (x, y)$ par rapport à un repère cartésien orthonormé, on définit des nouvelles composantes contravariantes $\mathbf{X}^{cont} = (X^1, X^2)$ par la transformation suivante, qui définit un changement de variable complexe

$$X^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{k}z = \frac{x+y-i(x-y)}{2},$$

$$X^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} kz = \frac{x+y+i(x-y)}{2} = \bar{X}^1,$$
(7.1)

où la variable complexe z est définie comme

$$z = x + iy$$
(7.2)

et le coefficient k est

$$k = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$
(7.3)

Les (7.1) et (7.2) nous donnent aussi

$$X^1 = \frac{\bar{k}x + ky}{\sqrt{2}},$$

$$X^2 = \frac{kx + \bar{k}y}{\sqrt{2}},$$
(7.4)

et donc on peut représenter le changement de variable par la relation

$$\mathbf{X}^{cont} = \mathbf{m}_1 \mathbf{x},$$
(7.5)

où la matrice de passage \mathbf{m}_1 est

$$\mathbf{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \bar{k} & k \\ k & \bar{k} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}.$$
(7.6)

Les composantes covariantes $\mathbf{X}_{cov} = (X_1, X_2)$ se retrouvent en exprimant d'abord la longueur d'arc infinitésimal

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dz d\bar{z} = 2dX^1 dX^2;$$
(7.7)

d'ailleurs,

$$ds^2 = d\mathbf{X}^{cont} \cdot \mathbf{g}_{cov} d\mathbf{X}^{cont} = g_{ij} dX^i dX^j,$$
(7.8)

étant \mathbf{g} le tenseur métrique de la transformation; on voit donc que

$$\mathbf{g}_{cov} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
(7.9)

et finalement que les composantes covariantes,

$$\mathbf{X}_{cov} = \mathbf{g}_{cov} \mathbf{X}^{cont},$$
(7.10)

sont

$$X_1 = X^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} kz,$$

$$X_2 = X^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{k}z.$$
(7.11)

7.3 Caractéristiques de la transformation.

La matrice de passage \mathbf{m}_1 et le tenseur métrique \mathbf{g} ont un certain nombre de caractéristiques, qui qualifient la transformation;

$$\det \mathbf{m}_1 = -i, \quad (7.12)$$

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_1^T, \quad (7.13)$$

$$\mathbf{m}_1^* (= \overline{\mathbf{m}_1^T}) = \overline{\mathbf{m}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} k & \bar{k} \\ \bar{k} & k \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

$$\mathbf{m}_1^* \mathbf{m}_1 = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{m}_1^{-1} = \mathbf{m}_1^*, \quad (7.15)$$

$$\mathbf{m}_1^{-1} = \overline{\mathbf{m}_1}, \quad (7.16)$$

$$\mathbf{m}_1 \neq \overline{\mathbf{m}_1^T}, \quad (7.17)$$

$$\mathbf{g}^{cont} = \mathbf{g}_{cov}^{-1} = \mathbf{g}_{cov}, \quad (7.18)$$

$$\mathbf{m}_1^{-1} = \mathbf{g} \mathbf{m}_1. \quad (7.19)$$

La transformation est donc unitaire et orthogonale, symétrique par rapport aux deux diagonales, mais elle n'est toutefois pas hermitienne. Encore, on remarque que pour obtenir l'inverse de \mathbf{m}_1 il suffit de changer le signe de l'unité imaginaire i .

La comparaison de la transformation de Verchery avec celle de Green et Zerna permet d'en comprendre mieux les avantages. La transformation de Green et Zerna est définie comme

$$X^1 = z, \quad (7.20)$$

$$X^2 = \bar{z},$$

ce qui donne une matrice de passage

$$m_{GZ} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}, \quad (7.21)$$

un tenseur métrique

$$\mathbf{g}_{cov_{GZ}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.22)$$

et les composantes covariantes

$$X_1 = \frac{X^2}{2} = \frac{\bar{z}}{2}, \quad (7.23)$$

$$X_2 = \frac{X^1}{2} = \frac{z}{2}.$$

Pour la transformation de Green et Zerna on a donc:

$$\det \mathbf{m}_{GZ} = -2i, \quad (7.24)$$

$$\mathbf{m}_{GZ} \neq \mathbf{m}_{GZ}^T, \quad (7.25)$$

$$\mathbf{m}_{GZ}^* (= \overline{\mathbf{m}}_{GZ}^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

$$\mathbf{m}_{GZ}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

$$\mathbf{m}_{GZ}^* = 2\mathbf{m}_{GZ}^{-1}, \quad (7.28)$$

$$\mathbf{m}_{GZ} \neq \overline{\mathbf{m}}_{GZ}^T, \quad (7.29)$$

$$\mathbf{g}_{GZ}^{cont} = \mathbf{g}_{covGZ}^{-1} \neq \mathbf{g}_{covGZ}, \quad (7.30)$$

$$\mathbf{m}_{GZ}^{-1} \neq \mathbf{g}_{covGZ} \mathbf{m}_{GZ}. \quad (7.31)$$

La transformation de Green et Zerna n'est donc ni symétrique, ni unitaire, ni orthogonale, ni hermitienne, et l'inverse ne se trouve pas en changeant simplement le signe de l'unité imaginaire i .

Ce qui est important de remarquer d'ores et déjà à propos de la transformation de Verchery, c'est que les mêmes caractéristiques de la matrice qui opère la transformation pour les vecteurs, voire pour les tenseurs d'ordre 1, on les retrouvera pour les matrices qui gèrent la transformation des tenseurs d'ordre supérieur, ce qui est un remarquable avantage en terme de simplicité de calcul. Pour résumer en ce qui concerne les transformations vectorielles, si on appelle \mathbf{M}_1 la matrice inverse \mathbf{m}_1^{-1} , on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{cont} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{x}, \\ \mathbf{X}_{cov} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{x}, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{m}_1 \mathbf{X}_{cov} = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{cont}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

7.4 Transformation d'un tenseur du second ordre.

Considérons à présent un tenseur du second ordre \mathbf{T} dans le plan (x, y) , dont les composantes par rapport à un repère cartésien orthonormé sont

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix}. \quad (7.33)$$

On peut construire facilement la matrice \mathbf{m}_2 qui donne les composantes de \mathbf{T} dans la base contravariante (X^1, X^2) définie par la transformation (7.1); en fait

$$\mathbf{m}_2 = \left[\begin{array}{c|c} m_1^{11} \mathbf{m}_1 & m_1^{12} \mathbf{m}_1 \\ \hline m_1^{21} \mathbf{m}_1 & m_1^{22} \mathbf{m}_1 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{k}\bar{k} & \bar{k}k & k\bar{k} & kk \\ \bar{k}k & \bar{k}\bar{k} & kk & k\bar{k} \\ k\bar{k} & k\bar{k} & \bar{k}\bar{k} & \bar{k}k \\ kk & k\bar{k} & \bar{k}k & \bar{k}\bar{k} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 & 1 & i \\ 1 & -i & i & 1 \\ 1 & i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & -i \end{bmatrix}, \quad (7.34)$$

et donc les composantes contravariantes de \mathbf{T} sont données par:

$$\begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{12} \\ T^{21} \\ T^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 & 1 & i \\ 1 & -i & i & 1 \\ 1 & i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{yx} \\ T_{yy} \end{pmatrix}. \quad (7.35)$$

Il est simple de vérifier que:

$$\det \mathbf{m}_2 = 1, \quad (7.36)$$

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_2^T, \quad (7.37)$$

$$\mathbf{m}_2^* (= \overline{\mathbf{m}_2^T}) = \overline{\mathbf{m}_2}, \quad (7.38)$$

$$\mathbf{m}_2^* \mathbf{m}_2 = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{m}_2^{-1} = \mathbf{m}_2^*, \quad (7.39)$$

$$\mathbf{m}_2^{-1} = \overline{\mathbf{m}_2}, \quad (7.40)$$

$$\mathbf{m}_2 \neq \overline{\mathbf{m}_2^T}. \quad (7.41)$$

Comme déjà anticipé, même la matrice \mathbf{m}_2 est symétrique par rapport aux deux diagonales, unitaire, orthogonale mais pas hermitienne, et son inverse coïncide avec sa complexe conjuguée. On remarque que

$$T^{21} = \overline{T^{12}}, \quad (7.42)$$

$$T^{22} = \overline{T^{11}},$$

voire que seulement deux composantes complexes sont suffisantes pour connaître \mathbf{T} , ainsi qu'une seule composante complexe était suffisante à connaître un vecteur. En outre,

$$tr \mathbf{T} = T^{12} + T^{21}. \quad (7.43)$$

En considérant que les composantes covariantes sont données par la relation

$$\mathbf{T}_{cov} = \mathbf{g} \mathbf{T}^{cont} \mathbf{g}, \quad (7.44)$$

on trouve immédiatement que

$$\mathbf{T}_{cov} = \begin{bmatrix} T^{22} & T^{21} \\ T^{12} & T^{11} \end{bmatrix}, \quad (7.45)$$

voire que les composantes covariantes se récupèrent de celles contravariantes simplement en changeant l'indice 1 avec l'indice 2 et inversement, et aussi que chaque composante covariante est le complexe conjugué de sa correspondante composante contravariante. Si on appelle \mathbf{M}_2 l'inverse de la matrice \mathbf{m}_2 , on a alors que

$$\mathbf{T}_{cov} = \mathbf{M}_2 \mathbf{T}, \quad (7.46)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{m}_2 \mathbf{T}_{cov} = \mathbf{M}_2 \mathbf{T}^{cont}.$$

Finalement, dans le cas d'un tenseur symétrique, on a la relation simplifiée

$$\begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{12} \\ T^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 2 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ i & 2 & -i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{yy} \end{pmatrix}. \quad (7.47)$$

7.5 Transformation d'un tenseur du quatrième ordre.

Les 16 composantes contravariantes, d'après la transformation (7.1), d'un tenseur du quatrième ordre \mathbf{T} , s'obtiennent par la matrice de passage \mathbf{m}_4 , qui se construit avec la même démarche utilisée pour \mathbf{m}_2 , en particulier:

$$\mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} m_2^{11} \mathbf{m}_2 & m_2^{12} \mathbf{m}_2 & m_2^{13} \mathbf{m}_2 & m_2^{14} \mathbf{m}_2 \\ m_2^{21} \mathbf{m}_2 & m_2^{22} \mathbf{m}_2 & m_2^{23} \mathbf{m}_2 & m_2^{24} \mathbf{m}_2 \\ m_2^{31} \mathbf{m}_2 & m_2^{32} \mathbf{m}_2 & m_2^{33} \mathbf{m}_2 & m_2^{34} \mathbf{m}_2 \\ m_2^{41} \mathbf{m}_2 & m_2^{42} \mathbf{m}_2 & m_2^{43} \mathbf{m}_2 & m_2^{44} \mathbf{m}_2 \end{bmatrix}. \quad (7.48)$$

Tout calcul fait, on obtient la transformation suivante:

$$\begin{pmatrix} T^{1111} \\ T^{1112} \\ T^{1121} \\ T^{1122} \\ T^{1211} \\ T^{1212} \\ T^{1221} \\ T^{1222} \\ T^{2111} \\ T^{2112} \\ T^{2121} \\ T^{2122} \\ T^{2211} \\ T^{2212} \\ T^{2221} \\ T^{2222} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -i & -i & 1 & -i & 1 & 1 & i & -i & 1 & 1 & i & 1 & i & i & -1 \\ -i & -1 & 1 & -i & 1 & -i & i & 1 & 1 & -i & i & 1 & i & 1 & -1 & i \\ -i & 1 & -1 & -i & 1 & i & -i & 1 & 1 & i & -i & 1 & i & -1 & 1 & i \\ 1 & -i & -i & -1 & i & 1 & 1 & -i & i & 1 & 1 & -i & -1 & i & i & 1 \\ -i & 1 & 1 & i & -1 & -i & -i & 1 & 1 & i & i & -1 & -i & 1 & 1 & i \\ 1 & -i & i & 1 & -i & -1 & 1 & -i & i & 1 & -1 & i & 1 & -i & i & 1 \\ 1 & i & -i & 1 & -i & 1 & -1 & -i & i & -1 & 1 & i & 1 & i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & -i & 1 & -i & -i & -1 & -1 & i & i & 1 & i & 1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & i & 1 & i & i & -1 & -1 & -i & -i & 1 & -i & 1 & 1 & i \\ 1 & -i & i & 1 & i & 1 & -1 & i & -i & -1 & 1 & -i & 1 & -i & i & 1 \\ 1 & i & -i & 1 & i & -1 & 1 & i & -i & 1 & -1 & -i & 1 & i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & -i & -1 & i & i & 1 & 1 & -i & -i & -1 & i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 & -i & 1 & 1 & i & -i & 1 & 1 & i & -1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & -1 & i & 1 & -i & i & 1 & 1 & -i & i & 1 & -i & -1 & 1 & -i \\ i & -1 & 1 & i & 1 & i & -i & 1 & 1 & i & -i & 1 & -i & 1 & -1 & -i \\ -1 & i & i & 1 & i & 1 & 1 & -i & i & 1 & 1 & -i & 1 & -i & -i & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{xxxx} \\ T_{xxxy} \\ T_{xxyx} \\ T_{xxyy} \\ T_{yyxx} \\ T_{yyxy} \\ T_{yyyx} \\ T_{yyyy} \\ T_{yxxx} \\ T_{yxxy} \\ T_{yxyx} \\ T_{yxyy} \\ T_{yyax} \\ T_{yyxx} \\ T_{yyyx} \\ T_{yyyy} \end{pmatrix}. \quad (7.49)$$

Comme pour les deux matrices précédentes, on vérifie facilement que pour \mathbf{m}_4 on a les propriétés suivantes:

$$\det \mathbf{m}_4 = 1, \quad (7.50)$$

$$\mathbf{m}_4 = \mathbf{m}_4^T, \quad (7.51)$$

$$\mathbf{m}_4^* (= \overline{\mathbf{m}_4^T}) = \overline{\mathbf{m}_4}, \quad (7.52)$$

$$\mathbf{m}_4^* \mathbf{m}_4 = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{m}_4^{-1} = \mathbf{m}_4^*, \quad (7.53)$$

$$\mathbf{m}_4^{-1} = \overline{\mathbf{m}_4}, \quad (7.54)$$

$$\mathbf{m}_4 \neq \overline{\mathbf{m}_4^T}. \quad (7.55)$$

Donc, même \mathbf{m}_4 est symétrique par rapport aux deux diagonales, unitaire, orthogonale mais pas hermitienne, et son inverse coïncide avec sa complexe conjuguée. Une fois encore, seulement la moitié des composantes complexes, 8 sur 16, est suffisante pour connaître \mathbf{T} ; en fait:

$$\begin{aligned}
T^{2111} &= \bar{T}^{1222}, & T^{2112} &= \bar{T}^{1221}, & T^{2121} &= \bar{T}^{1212}, & T^{2122} &= \bar{T}^{1211}, \\
T^{2211} &= \bar{T}^{1122}, & T^{2212} &= \bar{T}^{1121}, & T^{2221} &= \bar{T}^{1112}, & T^{2222} &= \bar{T}^{1111}.
\end{aligned}
\tag{7.56}$$

En considérant ensuite que les composantes covariantes sont données par la relation

$$T_{mnpq} = T^{ijkl} g_{mi} g_{nj} g_{pk} g_{ql}, \tag{7.57}$$

on retrouve la règle que pour avoir les composantes covariantes il suffit d'invertir les indices 1 et 2, et aussi qu'il suffit de prendre le complexe conjugué de la composante contravariante correspondante, voire que

$$T_{1111} = T^{2222} = \bar{T}^{1111}, \quad T_{1112} = T^{2221} = \bar{T}^{1112}, \quad T_{1121} = T^{2212} = \bar{T}^{1121}, \quad \text{etc.} \tag{7.58}$$

Finalement, même pour un tenseur du quatrième ordre, on peut constater que

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{cov} &= \mathbf{M}_4 \mathbf{T}, \\
\mathbf{T} &= \mathbf{m}_4 \mathbf{T}_{cov} = \mathbf{M}_4 \mathbf{T}^{cont}.
\end{aligned}
\tag{7.59}$$

Considérons à présent le cas particulier d'un tenseur plan du quatrième ordre qui possède les symétries de l'élasticité; dans ce cas les symétries majeures et mineures nous offrent les conditions

$$\begin{aligned}
T_{xxxy} &= T_{xyxx} = T_{xyxx} = T_{yxxx}, \\
T_{xxyy} &= T_{yyxx}, \\
T_{xyxy} &= T_{yxyx} = T_{yxyx} = T_{xyyx}, \\
T_{xyyy} &= T_{yxyy} = T_{yxyy} = T_{yyyy}.
\end{aligned}
\tag{7.60}$$

Les 10 relations ci-dessus indiquent que seulement six composantes sont indépendantes. En outre, les relations (7.49) et (7.58) nous montrent immédiatement que ces mêmes relations sont valables pour les composantes complexes T^{ijkl} et T_{ijkl} aussi, et en particulier que la transformation pour un tenseur du type de l'élasticité est

$$\begin{pmatrix} T^{1111} \\ T^{1112} \\ T^{1122} \\ T^{1212} \\ T^{1222} \\ T^{2222} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -4i & 2 & 4 & 4i & -1 \\ -i & 2 & 0 & 0 & 2 & i \\ 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ i & 2 & 0 & 0 & 2 & -i \\ -1 & 4i & 2 & 4 & -4i & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{xxxx} \\ T_{xxxxy} \\ T_{xxyy} \\ T_{xyxy} \\ T_{xyyy} \\ T_{yyyy} \end{pmatrix}. \tag{7.61}$$

Il est intéressant de remarquer que, par les (7.56), seulement quatre sont les composantes, dont deux complexes et deux réelles, nécessaires pour connaître \mathbf{T} : T^{1111} , T^{1112} , T^{1122} et T^{1212} .

7.6 Changement de repère par rotation.

Considérons un repère cartésien (x', y') , tourné de l'angle θ par rapport au repère cartésien (x, y) . Nous recherchons les lois qui permettent de passer au repère complexe (X^1, X^2) correspondant. Observons d'abord qu'un tel changement se formule de façon très simple pour ce qui concerne la coordonnée complexe z et sa conjuguée: si on pose

$$r = e^{-i\theta}, \tag{7.62}$$

alors les composantes complexes relatives au nouveau repère sont

$$\begin{aligned} z' &= r z, \\ \bar{z}' &= \bar{r} \bar{z}. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Appliquons alors le changement de variable de Verchery, (7.1): les nouvelles composantes complexes seront

$$\begin{aligned} X^1' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{k} z' = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{k} r z = r X^1, \\ X^2' &= \frac{1}{\sqrt{2}} k \bar{z}' = \frac{1}{\sqrt{2}} k \bar{r} \bar{z} = \bar{r} X^2. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Cette transformation peut se poser dans la forme

$$\mathbf{X}^{cont'} = \mathbf{R}_1 \mathbf{X}^{cont}, \quad (7.65)$$

où la matrice rotation \mathbf{R}_1 est

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \bar{r} \end{bmatrix}; \quad (7.66)$$

on remarque une caractéristique qu'on retrouvera dans la suite, à savoir que la matrice rotation est diagonale. Pour les composantes réelles, grâce aux relations (7.32) on a:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{r}_1 \mathbf{X} \quad (7.67)$$

où la matrice de passage est

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}, \quad (7.68)$$

avec $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$, on retrouve donc la matrice classique de changement de repère cartésien dans le plan.

La matrice \mathbf{R}_2 de changement de repère pour un tenseur du second ordre se construit à partir de \mathbf{R}_1 avec la même règle utilisée pour \mathbf{m}_2 , et on trouve encore une matrice diagonale:

$$\mathbf{T}^{cont'} = \mathbf{R}_2 \mathbf{T}^{cont} \quad (7.69)$$

voire

$$\begin{pmatrix} T^{11'} \\ T^{12'} \\ T^{21'} \\ T^{22'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{r}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{12} \\ T^{21} \\ T^{22} \end{pmatrix}. \quad (7.70)$$

En opérant comme pour les vecteurs, on a encore une fois, pour le passage direct entre composantes réelles, que

$$\mathbf{T}' = \mathbf{r}_2 \mathbf{T}, \quad (7.71)$$

avec bien sûr

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} c^2 & sc & sc & s^2 \\ -sc & c^2 & -s^2 & sc \\ -sc & -s^2 & c^2 & sc \\ s^2 & -sc & -sc & c^2 \end{bmatrix}. \quad (7.72)$$

Pour ce qui concerne un tenseur du quatrième ordre, en procédant de la même façon on trouve la relation

$$\mathbf{T}^{cont'} = \mathbf{R}_4 \mathbf{T}^{cont}, \quad (7.73)$$

avec \mathbf{R}_4 diagonale, et en particulier

$$\begin{pmatrix} T^{1111'} \\ T^{1112'} \\ T^{1121'} \\ T^{1122'} \\ T^{1211'} \\ T^{1212'} \\ T^{1221'} \\ T^{1222'} \\ T^{2111'} \\ T^{2112'} \\ T^{2121'} \\ T^{2122'} \\ T^{2211'} \\ T^{2212'} \\ T^{2221'} \\ T^{2222'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & r^2 & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & r^2 & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \bar{r}^2 & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & r^2 & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & \bar{r}^2 & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & \bar{r}^2 & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & \bar{r}^2 & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & & \bar{r}^4 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T^{1111} \\ T^{1112} \\ T^{1121} \\ T^{1122} \\ T^{1211} \\ T^{1212} \\ T^{1221} \\ T^{1222} \\ T^{2111} \\ T^{2112} \\ T^{2121} \\ T^{2122} \\ T^{2211} \\ T^{2212} \\ T^{2221} \\ T^{2222} \end{pmatrix}. \quad (7.74)$$

Une fois encore, le passage direct entre composantes réelles est retrouvé à l'aide de la matrice

$$\mathbf{r}_4 = \mathbf{M}_4 \mathbf{R}_4 \mathbf{m}_4, \quad (7.75)$$

qui, dans le cas d'un tenseur du type de l'élasticité, devient, c'est bien connu,

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} c^4 & 4sc^3 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & 4s^3c & s^4 \\ sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & s^3c - sc^3 & 2(s^3c - sc^3) & 3s^2c^2 - s^4 & -s^3c \\ s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & s^2c^2 \\ s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & -2s^2c^2 & c^4 + s^4 - 2s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & s^2c^2 \\ s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & sc^3 - s^3c & 2(sc^3 - s^3c) & c^4 - 3s^2c^2 & -sc^3 \\ s^4 & 4s^3c & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & 4sc^3 & c^4 \end{bmatrix}. \quad (7.76)$$

7.7 Analyse des invariants par rotation.

L'utilisation des variables complexes nous permet de trouver immédiatement les invariants par rotation. Considérons d'abord le cas d'un tenseur du second ordre: la (7.70) montre que pour un tel

tenseur il y a trois invariants réels, dont deux linéaires, T^{12} et T^{21} , et un quadratique, $T^{11} T^{22}$. En outre, la (7.43) nous assure que la somme des deux invariants linéaires est la trace du tenseur. On peut exprimer ces invariants à l'aide des composantes cartésiennes: dans le cas d'un tenseur symétrique, on a

$$\begin{aligned} T^{12} = T^{21} &= \frac{1}{2}(T_{xx} + T_{yy}), \\ T^{11}T^{22} &= \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy})^2 + T_{xy}^2, \end{aligned} \quad (7.77)$$

et donc deux sont les invariants indépendants: le linéaire est la norme de la partie sphérique, alors que le quadratique est le carré de la norme de la partie déviatorique de \mathbf{T} ; on retrouve donc le centre et le carré du rayon du cercle de Mohr.

En considérant maintenant un tenseur du quatrième ordre du type de l'élasticité, la relation (7.74) nous offre six invariants par rotation:

$$\begin{aligned} L_1 &= T^{1122} \\ L_2 &= T^{1212} \end{aligned} \quad \text{invariants linéaires,} \quad (7.78)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= T^{1111}T^{2222} \\ Q_2 &= T^{1222}T^{1112} \end{aligned} \quad \text{invariants quadratiques,} \quad (7.79)$$

$$C_1 + i C_2 = T^{1111}(T^{1222})^2 \quad \text{invariants cubiques.} \quad (7.80)$$

Toutefois, seulement cinq invariants sont indépendants, car, par les (7.56) on a:

$$\begin{aligned} C_1^2 + C_2^2 &= T^{1111}T^{2222}(T^{1222}T^{1112})^2 = Q_1Q_2^2, \\ T^{2222}(T^{1112})^2 &= C_1 - i C_2; \end{aligned} \quad (7.81)$$

la première des (7.81) est une relation de syzygie.

La relation (7.61) offre l'expression cartésienne de ces invariants:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{4}(T_{xxxx} - 2T_{xxyy} + 4T_{xyxy} + T_{yyyy}), \\ L_2 &= \frac{1}{4}(T_{xxxx} + 2T_{xxyy} + T_{yyyy}), \\ Q_1 &= \frac{1}{16}(T_{xxxx} + T_{yyyy} - 2T_{xxyy} - 4T_{xyxy})^2 + (T_{xxyy} - T_{xyxy})^2, \\ Q_2 &= \frac{1}{16}(T_{xxxx} - T_{yyyy})^2 + \frac{1}{4}(T_{xxyy} + T_{xyxy})^2, \\ C_1 &= \frac{1}{64}(T_{xxxx} + T_{yyyy} - 2T_{xxyy} - 4T_{xyxy}) \left\{ (T_{xxxx} - T_{yyyy})^2 - 4(T_{xxyy} + T_{xyxy})^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{4}(T_{xxyy}^2 - T_{xyxy}^2)(T_{xxxx} - T_{yyyy}), \\ C_2 &= \frac{1}{16} \left\{ (T_{xxyy} - T_{xyxy}) \left[(T_{xxxx} - T_{yyyy})^2 - 4(T_{xxyy} + T_{xyxy})^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - (T_{xxyy} + T_{xyxy})(T_{xxxx} - T_{yyyy})(T_{xxxx} + T_{yyyy} - 2T_{xxyy} - 4T_{xyxy}) \right\}. \end{aligned} \quad (7.82)$$

7.8 Introduction des composantes polaires.

En revenant au cas d'un tenseur symétrique du second ordre, on a déjà remarqué que deux sont les composantes nécessaires à le déterminer complètement, une réelle et une complexe, et cela peut être mis en relation avec les deux invariants indépendants. En particulier, Verchery a posé:

$$\begin{aligned} T^{11} &= -i R e^{2i\Phi}, \\ T^{12} &= T. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Les trois paramètres R , T et Φ sont appelés les composantes polaires de \mathbf{T} ; il est évident, par les relations (7.77) et (7.84), que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{T}, \\ R &= \sqrt{T^{11}T^{22}} = \sqrt{\left(\frac{T_{xx} - T_{yy}}{2}\right)^2 + T_{xy}^2}, \\ \tan 2\Phi &= \frac{2T_{xy}}{T_{xx} - T_{yy}}. \end{aligned} \quad (7.85)$$

La composante R , rayon du cercle de Mohr, est strictement positive, tandis que Φ doit être interprétée comme l'angle qui donne la direction des composantes principales de \mathbf{T} ; alors que T et R sont des invariants, l'angle Φ dépend du repère dans lequel les composantes cartésiennes sont données. C'est évident que T représente la partie sphérique de \mathbf{T} , et $R e^{2i\Phi}$ la partie déviatorique. Les trois composantes cartésiennes de \mathbf{T} peuvent donc être remplacées par les composantes polaires,

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_{xx} + T_{yy}}{2}, \\ R e^{2i\Phi} &= \frac{T_{xx} - T_{yy}}{2} + i T_{xy}, \end{aligned} \quad (7.86)$$

et inversement les composantes cartésiennes peuvent s'exprimer à l'aide des constantes polaires: soit par inversion directe des (7.86), soit en exprimant les composantes cartésiennes en fonction des composantes contravariantes, par le biais de la relation inverse de la (7.47), on obtient, en passant par les (7.84), que

$$\begin{aligned} T_{xx} &= T + R \cos 2\Phi, \\ T_{xy} &= R \sin 2\Phi, \\ T_{yy} &= T - R \cos 2\Phi, \end{aligned} \quad (7.87)$$

à savoir, les formules de la construction du cercle de Mohr. En cas de changement de repère par une rotation d'amplitude θ , la (7.70) doit être considérée dans le passage décrit ci-haut, pour aboutir aux composantes cartésiennes dans le nouveau repère:

$$\begin{aligned} T'_{xx} &= T + R \cos 2(\Phi - \theta), \\ T'_{xy} &= R \sin 2(\Phi - \theta), \\ T'_{yy} &= T - R \cos 2(\Phi - \theta). \end{aligned} \quad (7.88)$$

La transformation devient donc extrêmement simple si on utilise les composantes polaires.

Si pour un tenseur du second ordre les avantages dans l'emploi des composantes polaires sont déjà non négligeables, c'est pour les tenseurs du quatrième ordre que la méthode donne ses

meilleurs et plus important résultats. En ne se bornant qu'aux tenseurs du type de l'élasticité, pour lesquels deux composantes réelles et deux complexes sont suffisantes à décrire le tenseur, Verchery a posé:

$$\begin{aligned}
T^{1111} &= -2R_0 e^{4i\Phi_0}, \\
T^{1112} &= -2i R_1 e^{2i\Phi_1}, \\
T^{1122} &= 2T_0, \\
T^{1212} &= 2T_1,
\end{aligned} \tag{7.89}$$

les autres composantes complexes étant les conjuguées de celles-ci, (7.56). Les six paramètres T_0 , T_1 , R_0 , R_1 , Φ_0 et Φ_1 sont appelées les composantes polaires de \mathbf{T} ; il est évident, par les relations(7.78), (7.79) et (7.89) que

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2T_0, \\
L_2 &= 2T_1, \\
Q_1 &= 4R_0^2, \\
Q_2 &= 4R_1^2,
\end{aligned} \tag{7.90}$$

et donc T_0 , T_1 , R_0 et R_1 sont des invariants; en particulier, en tant que modules, R_0 et R_1 ne peuvent pas être négatifs. En outre, la (7.80) devient

$$C_1 + i C_2 = 8R_0 R_1^2 e^{4i(\Phi_0 - \Phi_1)}, \tag{7.91}$$

ce qui implique les deux relations réelles

$$\begin{aligned}
C_1 &= 8R_0 R_1^2 \cos 4(\Phi_0 - \Phi_1), \\
C_2 &= 8R_0 R_1^2 \sin 4(\Phi_0 - \Phi_1),
\end{aligned} \tag{7.92}$$

et donc, étant C_1 et C_2 , ainsi que R_0 et R_1 , des invariants, même la différence $\Phi_0 - \Phi_1$ est un invariant; on retrouve donc cinq invariants, conformément à ce qu'on avait déjà trouvé. Les paramètres Φ_0 et Φ_1 doivent être interprétés comme des angles; le résultat est donc qu'un seul de ces deux angles est libre, et dépend évidemment du repère dans lequel les coordonnées cartésiennes du tenseur sont données. En fait, si on revient aux composantes cartésiennes, on voit que celles-ci peuvent être remplacées par six autres quantités, dont 5 sont des invariants,

$$\begin{aligned}
8T_0 &= T_{xxxx} - 2T_{xxyy} + 4T_{xyxy} + T_{yyyy}, \\
8T_1 &= T_{xxxx} + 2T_{xxyy} + T_{yyyy}, \\
8R_0 e^{4i\Phi_0} &= T_{xxxx} - 2T_{xxyy} - 4T_{xyxy} + T_{yyyy} + 4i(T_{xxxy} - T_{xyyy}), \\
8R_1 e^{2i\Phi_1} &= T_{xxxx} - T_{yyyy} + 2i(T_{xxxy} + T_{xyyy}),
\end{aligned} \tag{7.93}$$

et vice-versa, en passant par la relation inverse de la (7.61) et par les (7.89),

$$\begin{aligned}
T_{xxxx} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 + 4R_1 \cos 2\Phi_1, \\
T_{xxyy} &= R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1, \\
T_{xyxy} &= -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4\Phi_0, \\
T_{xyxy} &= T_0 - R_0 \cos 4\Phi_0, \\
T_{yyyy} &= -R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1, \\
T_{yyyy} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 - 4R_1 \cos 2\Phi_1.
\end{aligned} \tag{7.94}$$

En cas de changement de repère par une rotation d'amplitude θ , la (7.74) doit être considérée dans le passage décrit ci-haut, pour aboutir aux composantes cartésiennes dans le nouveau repère:

$$\begin{aligned}
T'_{xxxx} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) + 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta), \\
T'_{xxyy} &= R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta), \\
T'_{xyxy} &= -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta), \\
T'_{xyxy} &= T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta), \\
T'_{yyyy} &= -R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta), \\
T'_{yyyy} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) - 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta).
\end{aligned} \tag{7.95}$$

On peut donner une forme matricielle à ces formules de transformation:

$$\begin{pmatrix} T'_{xxxx} \\ T'_{xxyy} \\ T'_{xyxy} \\ T'_{xyxy} \\ T'_{xyyy} \\ T'_{yyyy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) \\ R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) \\ R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta) \\ R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta) \end{pmatrix}. \tag{7.96}$$

Les inverses des (7.95) sont évidemment

$$\begin{aligned}
8T_0 &= T'_{xxxx} - 2T'_{xxyy} + 4T'_{xyxy} + T'_{yyyy}, \\
8T_1 &= T'_{xxxx} + 2T'_{xxyy} + T'_{yyyy}, \\
8R_0 e^{4i(\Phi_0 - \theta)} &= T'_{xxxx} - 2T'_{xxyy} - 4T'_{xyxy} + T'_{yyyy} + 4i(T'_{xxyy} - T'_{xyyy}), \\
8R_1 e^{2i(\Phi_1 - \theta)} &= T'_{xxxx} - T'_{yyyy} + 2i(T'_{xxyy} + T'_{xyyy}).
\end{aligned} \tag{7.97}$$

La comparaison de ces formules pour le changement de repère avec celles utilisées normalement et qui font usage de la matrice \mathbf{r}_4 , (7.76), montrent un des avantages de la transformation mise en place par Verchery, qui aboutit à des formules largement plus simples.

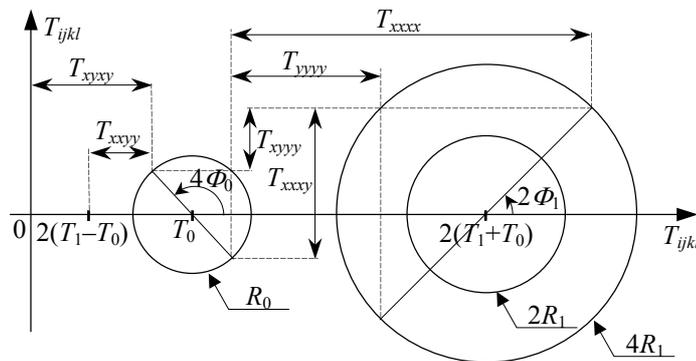


Fig. 7.1. Cercles de Mohr généralisés.

A l'instar des formules (7.87), qui pour un tenseur du second ordre sont interprétées graphiquement comme le cercle de Mohr, les (7.94) ont reçu une interprétation graphique, parfois appelée cercles de Mohr généralisés (voir par exemple Grédiac *et alii*, 1993); cette construction est présentée en Fig. 7.1. Il faut préciser que des constructions analogues avaient déjà été proposées, en rapport à d'autres transformations, voir par exemple Wu *et alii*, 1973, Tsai et Hahn, 1980.

7.9 Analyse des symétries.

Dans le cas d'un tenseur de l'élasticité, d'éventuelles symétries élastiques d'un matériau, ici une lamina, se reflètent en de conditions sur les constantes élastiques. La méthode polaire permet de retrouver très facilement ces conditions, par exemple en opérant directement sur les équations (7.95). Ici on préfère présenter d'abord la méthode employée par Verchery dans son mémoire de 1979, qui constitue une approche originale à l'étude des symétries par les invariants; dans le § 7.10 on reviendra sur l'approche directe par les relations (7.95).

Les quantités L_1, L_2, Q_1, Q_2, C_1 et C_2 sont des invariants par rotation de repère, mais une symétrie par rapport à un axe incliné de l'angle α sur l'axe x ne laisse pas inchangés toutes ces quantités; en fait une telle symétrie se traduit dans les transformations de variable complexe

$$\begin{aligned} z' &= s^2 \bar{z}, \\ \bar{z}' &= \bar{s}^2 z, \end{aligned} \tag{7.98}$$

avec

$$s = e^{i\alpha}; \tag{7.99}$$

en appliquant la transformation de Verchery, (7.1), on obtient

$$\begin{aligned} X^1 &' = -i s^2 X^2, \\ X^2 &' = i \bar{s}^2 X^1, \end{aligned} \tag{7.100}$$

et si on procède comme dans le cas des rotations, on trouve une matrice de transformation semblable à la (7.74) mais anti-diagonale, qui pour un tenseur de l'élasticité devient simplement

$$\begin{pmatrix} T^{1111}' \\ T^{1112}' \\ T^{1122}' \\ T^{1212}' \\ T^{1222}' \\ T^{2222}' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{s}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{s}^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T^{1111} \\ T^{1112} \\ T^{1122} \\ T^{1212} \\ T^{1222} \\ T^{2222} \end{pmatrix}; \tag{7.101}$$

ceci montre que L_1, L_2, Q_1 et Q_2 sont des invariants même pour une symétrie, alors que

$$C_1' + i C_2' = T^{1111}' \left(T^{1222}' \right)^2 = s^8 T^{2222} (\bar{s}^4 T^{1112})^2 = \bar{T}^{1111} (\bar{T}^{1222})^2 = C_1 - i C_2, \tag{7.102}$$

voire que C_1 est encore un invariant alors que C_2 est changé de signe par une symétrie.

Afin d'étudier l'effet d'une symétrie miroir qui fait un angle α avec l'axe x , Verchery fait un changement de repère en prenant la direction du miroir suivant la bissectrice des axes, ce qui

correspond à une rotation du repère de

$$\theta = \alpha - \frac{\pi}{4} \rightarrow r = k \bar{s}. \quad (7.103)$$

En utilisant la (7.74) on obtient alors la relation

$$\begin{pmatrix} T^{1111'} \\ T^{1112'} \\ T^{1122'} \\ T^{1212'} \\ T^{1222'} \\ T^{2222'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-4i\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ie^{-2i\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ie^{2i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{4i\alpha} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T^{1111} \\ T^{1112} \\ T^{1122} \\ T^{1212} \\ T^{1222} \\ T^{2222} \end{pmatrix}; \quad (7.104)$$

les composantes $T^{ijkl'}$ sont insensibles à la symétrie autour de la bissectrice; en se rappelant alors les (7.56), on en tire que les deux quantités

$$-e^{-4i\alpha}T^{1111}, \quad ie^{-2i\alpha}T^{1112} \quad (7.105)$$

doivent être réelles et par conséquent, par la (7.80) et les (7.104), que

$$C_2 = 0. \quad (7.106)$$

Ces résultats nous permettent d'examiner quelques cas importants; d'abord, le cas de l'orthotropie, voire de deux miroirs aux directions α et $\alpha+\pi/2$: les invariants indépendants non nuls sont au nombre de quatre, L_1, L_2, Q_2 et C_1 , alors que la relation de syzygie donne

$$Q_1 = \left(\frac{C_1}{Q_2} \right)^2. \quad (7.107)$$

En considérant le fait que

$$ie^{-2i\alpha}T^{1112} = [\sin 2\alpha \operatorname{Re}(T^{1112}) - \cos 2\alpha \operatorname{Im}(T^{1112})] + i[\sin 2\alpha \operatorname{Im}(T^{1112}) + \cos 2\alpha \operatorname{Re}(T^{1112})] \quad (7.108)$$

doit être une quantité réelle, on a la condition qui donne la direction α :

$$\tan 2\alpha = -\frac{\operatorname{Re}(T^{1112})}{\operatorname{Im}(T^{1112})}. \quad (7.109)$$

Finalement, la (7.107) permet d'exprimer la condition d'orthotropie en composantes polaires: en fait, par les (7.90) et (7.92) on a que

$$4R_0^2 = \left[\frac{8R_0 R_1^2 \cos 4(\Phi_0 - \Phi_1)}{4R_1^2} \right]^2 = 4R_0^2 \cos^2 4(\Phi_0 - \Phi_1), \quad (7.110)$$

et donc la condition d'orthotropie devient

$$\Phi_0 - \Phi_1 = K \frac{\pi}{4}, \quad K \in \mathbb{N}. \quad (7.111)$$

Mais l'orthotropie est encore possible, et cela pour une valeur quelconque de la différence angulaire $\Phi_0 - \Phi_1$, si

$$R_0 = 0, \quad (7.112)$$

ce qui correspond, en terme d'invariants, aux conditions

$$Q_1 = C_1 = 0, \quad Q_2 \neq 0, \quad (7.113)$$

ou encore à

$$T^{1111} = T^{2222} = 0. \quad (7.114)$$

Il vaut la peine de remarquer que la condition d'orthotropie plane (7.111) est, à notre connaissance, la première condition invariante, donc indépendante du repère, à avoir été donnée (elle apparaît sous cette forme dans l'article de Verchery et Vong de 1986). Etant invariante, elle permet donc de vérifier si une lamina est orthotrope et cela en connaissant ses propriétés dans un repère quelconque. C'est une simple tâche, voir par exemple Valot 2002, que de vérifier que cette condition est équivalente à celle proposée par Pedersen en 1990, et qui fait usage d'autres invariants, notamment des invariants U_i de Tsai et Pagano, 1968, sur lesquels on reviendra dans le § 7.15. Toutefois, alors que la condition de Pedersen, qui est encore une condition posée sur un invariant cubique, comme la (7.111) aussi, s'exprime de façon plutôt compliquée,

$$U_7 U_2^2 - 4U_7 U_6^2 - 4U_6 U_3 U_2 = 0, \quad (7.115)$$

la condition de Verchery apparaît plus simple, et elle a une signification physique bien précise, sur laquelle on reviendra dans le § 7.10.

Considérons à présent le cas de la symétrie du carré, voire de 4 miroirs aux directions α , $\alpha+\pi/4$, $\alpha+\pi/2$ et $\alpha+3\pi/4$. En termes d'invariants, cela comporte l'existence de trois invariants non nuls, L_1 , L_2 et Q_1 , ce qui comporte entre autre que

$$T^{1112} = T^{1222} = 0. \quad (7.116)$$

Le fait que l'invariant Q_2 soit nul implique aussi que

$$R_1 = 0, \quad (7.117)$$

qui est la condition nécessaire et suffisante pour la symétrie du carré en terme de composantes polaires. La direction α se trouve en considérant que la quantité

$$\begin{aligned} -e^{-4i\alpha} T^{1111} = & -[\cos 4\alpha \operatorname{Re}(T^{1111}) + \sin 4\alpha \operatorname{Im}(T^{1111})] + \\ & + i[\sin 4\alpha \operatorname{Re}(T^{1111}) - \cos 4\alpha \operatorname{Im}(T^{1111})] \end{aligned} \quad (7.118)$$

doit être réelle, d'où

$$\tan 4\alpha = \frac{\operatorname{Im}(T^{1111})}{\operatorname{Re}(T^{1111})}. \quad (7.119)$$

L'isotropie, finalement, pour laquelle toute direction α est de symétrie. Dans ce cas l'angle α doit pouvoir se trouver soit à l'aide de la (7.109) que de la (7.119), ce qui donne la condition

$$T^{1111} = T^{1112} = 0, \quad (7.120)$$

voire les seuls invariants non nuls sont L_1 et L_2 ; la (7.120) se traduit aussi en

$$R_0 = R_1 = 0, \quad (7.121)$$

qui est la condition d'isotropie en terme de composantes polaires. C'est pour cette raison que les constantes polaires T_0 et T_1 sont dites aussi constantes d'isotropie et les R_0 , R_1 et la différence $\Phi_0 - \Phi_1$ constantes d'anisotropie.

Pour résumer, on voit que chaque symétrie correspond à une annulation des invariants, mais aussi à des valeurs précises des composantes polaires invariantes: un multiple de $\pi/4$ pour la différence des angles polaires donne l'orthotropie, un autre type d'orthotropie, sur lequel on reviendra dans le chapitre 12, correspond à l'annulation de la constante R_0 , alors que la symétrie du carré à la valeur nulle de R_1 et l'isotropie à ces deux dernières conditions réunies.

7.10 Interprétation harmonique des constantes polaires.

Si dans le paragraphe précédent nous avons pu voir les liens existants entre symétries élastiques et invariants polaires, nous revenons ici aux équations (7.95): elles montrent une structure typique des composantes de \mathbf{T} : elles ont la forme d'une série de Fourier, avec des termes constants, à période π et à période $\pi/2$, l'amplitude de chaque harmonique étant un invariant ou une combinaison d'invariants. Choisir un repère dans lequel exprimer les composantes polaires équivaut, comme les (7.93) le montrent bien, à fixer la valeur d'un des deux angles polaires, l'autre restant fixé par l'invariance de leur différence; les autres constantes polaires ne sont pas affectées par ce choix, car elles sont des invariants. Souvent, on se place dans le repère caractérisé par la valeur nulle de l'angle Φ_1 , ce qui correspond à choisir un repère dans lequel

$$T_{xxxy} + T_{xyyy} = 0. \quad (7.122)$$

Les équations (7.95) donnent encore les conditions de symétrie en terme de constantes polaires trouvées dans le paragraphe précédent: c'est immédiat de reconnaître que la symétrie du carré correspond à la condition (7.117), de constater que la condition (7.112) donne un comportement de type orthotrope, même si de type spécial, et sur lequel on reviendra dans le chapitre 12, et que l'isotropie nécessite des conditions (7.121). Un peu moins évidente est la condition d'orthotropie (7.111). Dans ce but, remarquons d'abord que cette condition implique un résultat bien connu de l'orthotropie: en fait, considérons une lamina orthotrope dont les propriétés élastiques sont connues dans un repère quelconque. Si alors on considère les (7.97), on peut penser faire une rotation de repère de l'angle Φ_1 . Dans ce cas, les deux équations complexes des (7.97) ainsi que la condition d'orthotropie (7.111) nous livrent les deux conditions bien connues

$$T_{xxxy} = T_{xyyy} = 0, \quad (7.123)$$

selon lesquelles un matériau est orthotrope s'il existe une direction pour laquelle les (7.123) sont vérifiées; en outre, on constate que le choix du repère caractérisé par la valeur nulle de l'angle Φ_1 correspond, pour les matériaux orthotropes, à se placer sur un axe d'orthotropie, l'autre étant décalé de $\pi/2$. Or, si on fait le parcours inverse, à savoir si on prend comme caractérisation de l'orthotropie la (7.123), valable pour une certaine direction, les (7.95) nous donnent les deux conditions

$$\begin{aligned} R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta) &= 0, \\ R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta) &= 0, \end{aligned} \quad (7.124)$$

dont la solution est la (7.111).

Il vaut mieux remarquer une circonstance pas tout à fait évidente à première vue: la condition (7.111) nous montre que, si les conditions thermodynamiques sont respectées, voir le paragraphe suivant, il existe deux types différents d'orthotropie pour les mêmes constantes polaires. En fait, le coefficient K peut prendre deux valeurs significatives: 0, ou toute autre valeur paire, et 1, ou toute autre valeur impaire; dans le premier cas l'invariant C_1 est positif, dans le second il est négatif, mais avec la même valeur absolue, car les autres invariants ne changent pas. Si on se place sur un axe d'orthotropie, les composantes cartésiennes d'un tenseur orthotrope sont alors,

$$\begin{aligned}
T_{xxxx} &= T_0 + 2T_1 + (-1)^K R_0 + 4R_1, \\
T_{xxxy} &= 0, \\
T_{xxyy} &= -T_0 + 2T_1 - (-1)^K R_0, \\
T_{xyxy} &= T_0 - (-1)^K R_0, \\
T_{xyyy} &= 0, \\
T_{yyyy} &= T_0 + 2T_1 + (-1)^K R_0 - 4R_1.
\end{aligned}
\tag{7.125}$$

C'est évident aussi que pour un matériau orthotrope choisir $\Phi_1 = 0$ correspond à prendre l'axe x coïncidant avec l'axe forte d'orthotropie. En Fig. 7.2 on montre l'exemple de la composante T_{xxxx} pour deux laminae ayant les mêmes invariants T_0, T_1, R_0 et R_1 mais avec les deux différentes valeurs de $K, 0$ et 1 .

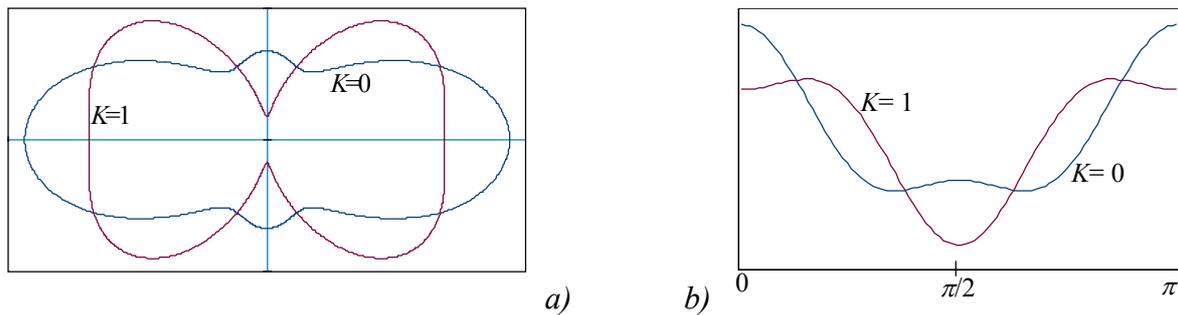


Fig. 7.2. La composante T_{xxxx} de deux laminae orthotropes ayant deux différentes valeurs de K ; a) graphique polaire, b) graphique cartésien.

Dans la lecture donnée ci-dessus des équations polaires, chaque constante polaire liée à une symétrie trouve une interprétation précise: l'invariant $\Phi_0 - \Phi_1$ représente le déphasage entre les deux harmoniques à période π et $\pi/2$; seulement lorsque ce déphasage est 0 ou $\pi/4$, ou encore lorsque l'harmonique de période $\pi/2$ manque, le comportement est orthotrope, alors qu'il sera à symétrie carrée lorsque c'est l'harmonique de période π à avoir une amplitude nulle, et finalement, bien sûr, l'isotropie correspond au cas où ces deux harmoniques ensemble manquent. La méthode polaire offre donc une nouvelle interprétation des propriétés élastiques, vues non plus et non seulement comme le reflet des conditions de symétrie, mais aussi liées à la présence des différentes harmoniques dans les expressions des composantes cartésiennes du tenseur d'élasticité. Pour terminer, on signale une présentation nouvelle et originale de l'analyse des symétries élastiques faite par la méthode polaire dans la thèse de Vincenti, 2002.

7.11 Interprétation énergétique des constantes polaires.

Considérons une couche ayant certaines propriétés élastiques décrites par le tenseur \mathbf{Q} , de composantes polaires $T_0, T_1, R_0, R_1, \Phi_0$ et Φ_1 , et soumise à un état de contrainte et déformation. Soient R, T et Φ les composantes polaires du tenseur de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ en un point donné, et t, r et φ celles du tenseur de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ au même endroit; la densité d'énergie de déformation W peut évidemment s'exprimer directement avec les composantes polaires, en utilisant les relations (7.87) :

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = T t + R r \cos 2(\Phi - \varphi);
\tag{7.126}$$

or, il est évident que, pour ce qu'on a dit au § 7.8,

$$W_S = T t
\tag{7.127}$$

est la partie de W dépendant seulement des parties sphériques de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$, alors que

$$W_D = R r \cos 2(\Phi - \varphi) \quad (7.128)$$

est celle fonction des parties déviatoriques.

Si on introduit maintenant le comportement du matériau, grâce aux (7.94), après quelques manipulations on a l'expression de W en fonction des seules composantes polaires de \mathbf{Q} et de $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} = 4T_1 t^2 + 8R_1 \cos 2(\Phi_1 - \varphi) t r + 2[R_0 \cos 4(\Phi_0 - \varphi) + T_0] r^2; \quad (7.129)$$

la variation de W à la suite d'une variation $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ de l'état de déformation est

$$\delta W = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} = 2T \delta t + 2R \cos 2(\Phi - \varphi) \delta r + 4Rr \sin 2(\Phi - \varphi) \delta \varphi, \quad (7.130)$$

et donc

$$2T = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (7.131)$$

$$2Re^{2i\Phi} = \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{i}{2r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) e^{2i\varphi}.$$

Alors, en appliquant ces règles de différentiation à la (7.129), on trouve que la partie sphérique de $\boldsymbol{\sigma}$ est

$$T = 4T_1 t + 4R_1 r \cos 2(\Phi_1 - \varphi) \quad (7.132)$$

alors que la partie déviatorique est

$$Re^{2i\Phi} = 2T_0 r e^{2i\varphi} + 2R_0 r e^{2i(2\Phi_0 - \varphi)} + 4R_1 t e^{2i\Phi_1}; \quad (7.133)$$

si on remplace ces deux relations dans l'expression de W_S et W_D on obtient finalement

$$W_S = 4T_1 t^2 + 4R_1 r t \cos 2(\Phi_1 - \varphi), \quad (7.134)$$

$$W_D = 2T_0 r^2 + 2R_0 r^2 \cos 4(\Phi_0 - \varphi) + 4R_1 r t \cos 2(\Phi_1 - \varphi).$$

Les (7.132)-(7.134) nous montrent d'abord, en forme polaire, un résultat bien connu en élasticité, à savoir que pour les matériaux anisotropes les parties sphérique et déviatorique de $\boldsymbol{\sigma}$ dépendent à la fois des parties sphérique $\boldsymbol{\varepsilon}_S$ et déviatorique $\boldsymbol{\varepsilon}_D$ de $\boldsymbol{\varepsilon}$, c'est à dire que la décomposition de W en parties dépendant uniquement de $\boldsymbol{\varepsilon}_S$ ou de $\boldsymbol{\varepsilon}_D$ est impossible. Mais ces mêmes équations nous montrent aussi le rôle joué par les paramètres polaires de \mathbf{Q} dans la décomposition de W : T_1 est directement responsable de W_S , T_0 , R_0 et Φ_0 de W_D et R_1 et Φ_1 couplent les deux parties. Il est donc évident que la condition pour la décomposition de W en parties dépendantes uniquement de $\boldsymbol{\varepsilon}_S$ ou de $\boldsymbol{\varepsilon}_D$ est la nullité de R_1 , voire que la condition minimale en terme de symétries pour une telle décomposition est la symétrie du carré, l'isotropie n'est pas strictement nécessaire. Ou encore, comme les relations (7.132) et (7.133) le montrent bien, une couche à symétrie carrée, si elle est soumise à un état plan de contrainte de type sphérique, subit seulement des variations de volume, mais pas de forme, et cela indépendamment de l'orientation des axes de symétrie.

La définition positive de l'énergie de déformation pose, bien évidemment, des limites sur les valeurs des invariants polaires: W est une forme quadratique de r et de t dont la (7.129) montre la structure:

$$W = (t, r) \cdot \begin{bmatrix} 4T_1 & 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \varphi) \\ 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \varphi) & 2[T_0 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \varphi)] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix}. \quad (7.135)$$

Les conditions de définition positive de la matrice sont donc

$$T_1 > 0, \quad (7.136)$$

$$T_0 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \varphi) > 0 \quad \forall \varphi \Rightarrow T_0 > R_0, \quad (7.137)$$

$$T_1[T_0 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \varphi)] - 2R_1^2 \cos^2 2(\Phi_1 - \varphi) > 0 \quad \forall \varphi; \quad (7.138)$$

si on pose

$$\Delta\Phi = \Phi_0 - \Phi_1 \quad (7.139)$$

et

$$\alpha = \Phi_1 - \varphi, \quad (7.140)$$

on a

$$\Phi_0 - \varphi = \Delta\Phi + \alpha \quad (7.141)$$

et la (7.138) devient

$$T_0T_1 - R_1^2 + [T_1R_0 \cos 4\Delta\Phi - R_1^2] \cos 4\alpha - T_1R_0 \sin 4\Delta\Phi \sin 4\alpha > 0 \quad \forall \alpha. \quad (7.142)$$

La (7.142) peut se mettre sous la forme

$$T_0T_1 - R_1^2 + \sqrt{[T_1R_0 \cos 4\Delta\Phi - R_1^2]^2 + T_1^2R_0^2 \sin^2 4\Delta\Phi} \cos 4(\alpha - \lambda) > 0 \quad \forall \alpha, \quad (7.143)$$

où

$$\tan 4\lambda = \frac{-T_1R_0 \sin 4\Delta\Phi}{T_1R_0 \cos 4\Delta\Phi - R_1^2}; \quad (7.144)$$

la condition est finalement

$$T_0T_1 - R_1^2 > \sqrt{[T_1R_0 \cos 4\Delta\Phi - R_1^2]^2 + T_1^2R_0^2 \sin^2 4\Delta\Phi}, \quad (7.145)$$

et donc

$$T_0T_1 > R_1^2, \quad (7.146)$$

$$T_1 (T_0^2 - R_0^2) > 2R_1^2 [T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \Phi_1)]. \quad (7.147)$$

Les (7.136), (7.137), (7.146) et (7.147) sont les conditions que la thermodynamique impose aux composantes polaires; toutefois, ce n'est pas compliqué de voir que ces quatre conditions ne sont pas indépendantes, et qu'en réalité deux seulement, la (7.137) et la (7.147), suffisent: en fait, en utilisant la majoration (7.137) dans la (7.147) on retrouve la (7.136) et la (7.146). Dans le cas des matériaux orthotropes les conditions deviennent, par la (7.111),

$$T_0 > R_0, \quad (7.148)$$

$$T_1 [T_0 + (-1)^K R_0] > 2R_1^2;$$

la deuxième des (7.148) peut être représentée graphiquement: les courbes de niveau de la surface $\mathcal{E} = 2R_1^2 / T_1$ peuvent s'interpréter comme les intersections entre cette surface et des plans où la variable composée $[T_0 + (-1)^K R_0]$ est constante. Naturellement, pour deux valeurs fixées de T_0 et R_0 respectant la première des (7.148) on a deux valeurs différentes de la variable composée:

$T_0 + R_0$ et $T_0 - R_0$, correspondants à $K=0$ et $K=1$ respectivement, et donc deux courbes de niveau de la surface \mathcal{S} Fig. 7.3. Pour un couple T_1 et R_1 , il est donc évident que si les conditions (7.148) sont respectées pour le matériau ayant $K=0$, il ne le sont pas forcément pour celui avec $K=1$: la thermodynamique pose donc une limite à l'existence des deux formes d'un matériau orthotrope.

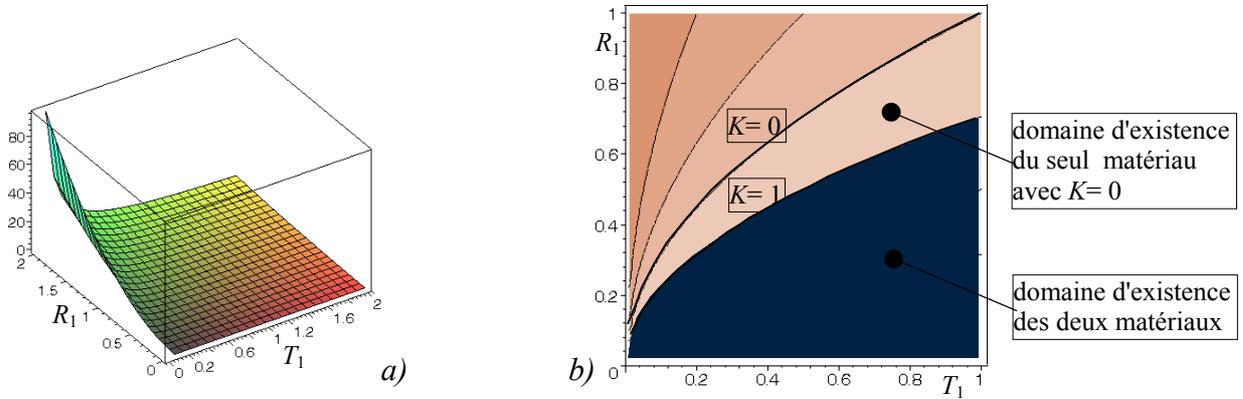


Fig. 7.3. Surface $\mathcal{S} = 2R_1^2 / T_1$: a) surface en 3D; b) surface par lignes iso-valeurs et domaines d'existence des deux formes d'un matériau orthotrope.

Pour un matériau orthotrope caractérisé par avoir R_0 nul on aura

$$\begin{aligned} T_0 &> 0, \\ T_1 T_0 &> 2R_1^2, \end{aligned} \quad (7.149)$$

alors que pour un matériau à symétrie carrée on trouve

$$\begin{aligned} T_0 &> R_0, \\ T_1 &> 0; \end{aligned} \quad (7.150)$$

finalement, pour un matériau isotrope, on a simplement

$$\begin{aligned} T_0 &> 0, \\ T_1 &> 0. \end{aligned} \quad (7.151)$$

Les conditions ci-dessus peuvent aussi être exprimées en fonction des invariants L_1, L_2, T_1 etc., par le biais des (7.90) et (7.92); on obtient alors les quatre conditions correspondantes, avec redondance,

$$\begin{aligned} L_1 &> \sqrt{Q_1}, \\ L_2 &> 0, \\ L_1 L_2 &> Q_2, \\ L_1^2 L_2 + 2C_1 - L_2 Q_1 - 2L_1 Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.152)$$

Il est intéressant de remarquer que le nombre de conditions pour la définition positive de W est seulement deux, au lieu des trois de l'expression cartésienne, qui de surcroît n'est pas formulé, en général, en terme d'invariants. D'ailleurs, même dans le cas d'un tenseur du second ordre, on montre facilement que la définition positive ne tient qu'à une seule condition exprimée en terme d'invariants polaires, au lieu des deux de l'expression cartésienne, à savoir

$$T > R. \quad (7.153)$$

Se confirme donc une des caractéristiques des méthodes qui font appel à des variables complexes, c'est-à-dire la réduction du nombre de composantes et de conditions.

7.12 Inversion de la loi de comportement en polaire.

Soit \mathbf{S} le tenseur des souplesses, inverse du tenseur de rigidité \mathbf{Q} ; il va de soi que les (7.93) sont valables pour \mathbf{S} aussi, et si on indique avec les caractères minuscules les composantes polaires de \mathbf{S} , on a

$$\begin{aligned} 8t_0 &= S_{xxxx} - 2S_{xxyy} + 4S_{xyxy} + S_{yyyy}, \\ 8t_1 &= S_{xxxx} + 2S_{xxyy} + S_{yyyy}, \\ 8r_0 e^{4i\varphi_0} &= S_{xxxx} - 2S_{xxyy} - 4S_{xyxy} + S_{yyyy} + 4i(S_{xxxy} - S_{xyyy}), \\ 8r_1 e^{2i\varphi_1} &= S_{xxxx} - S_{yyyy} + 2i(S_{xxxy} + S_{xyyy}). \end{aligned} \quad (7.154)$$

Si alors on exprime les composantes S_{ijkl} en fonctions des Q_{mnpq} et celles-ci à l'aide des composantes polaires, (7.94), on trouve les composantes polaires de \mathbf{S} en fonction de celles de \mathbf{Q} , c'est-à-dire l'inversion en polaire de la loi de comportement: si on appelle

$$\Delta = 8T_1(T_0^2 - R_0^2) - 16R_1^2[T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \Phi_1)], \quad (7.155)$$

quantité évidemment positive, comme le confirme la (7.147), et qui coïncide avec le déterminant de la matrice représentant \mathbf{Q} , alors les composantes polaires de \mathbf{S} en fonction de celles de \mathbf{Q} sont:

$$\begin{aligned} t_0 &= 2 \frac{T_0 T_1 - R_1^2}{\Delta}, \\ t_1 &= \frac{T_0^2 - R_0^2}{2\Delta}, \\ r_0 e^{4i\varphi_0} &= 2 \frac{R_1^2 e^{4i\Phi_1} - T_1 R_0 e^{4i\Phi_0}}{\Delta}, \\ r_1 e^{2i\varphi_1} &= -R_1 e^{2i\Phi_1} \frac{T_0 - R_0 e^{4i(\Phi_0 - \Phi_1)}}{\Delta}, \end{aligned} \quad (7.156)$$

A remarquer que par les (7.137), (7.146) et (7.147), même t_0 et t_1 sont des quantités positives. Il faut mettre en évidence que les formules (7.156) s'appliquent dans l'autre sens aussi, voire que les constantes polaires de \mathbf{Q} en fonction de celles de \mathbf{S} ont des formules analogues, il suffit simplement de mettre majuscules les lettres minuscules et vice-versa. En outre, les symétries propres au tenseur direct, se retrouvent aussi pour l'inverse: cela est évident, depuis les (7.156), pour l'isotropie et la symétrie du carré, voire si R_1 est nul, r_1 l'est aussi, et ainsi si le couple R_0, R_1 est nul, même r_0 et r_1 le sont. La condition d'orthotropie (7.111) se retrouve aussi pour le tenseur inverse, mais cela est un peu plus laborieux: il faut d'abord tirer la valeur de $\sin 4(\varphi_0 - \varphi_1)$ des deux dernières des (7.156); après quelque manipulation on trouve que cette quantité est proportionnelle à $\sin 4(\Phi_0 - \Phi_1)$. La nullité de l'une comporte celle de l'autre, et vice-versa, voire l'orthotropie du tenseur de rigidité implique celle du tenseur des souplesses, et inversement.

7.13 Méthode des équations caractéristiques généralisées.

Dans son article de 1979, Verchery propose une autre méthode pour la recherche des invariants d'un tenseur \mathbf{T} du type de l'élasticité; cette approche se base sur la considération que pour un tenseur symétrique du second ordre l'équation caractéristique fournit les invariants par ses coefficients,

voire par exemple Lang, 1966, ou Gurtin, 1981. Verchery propose une généralisation pour les tenseurs du quatrième ordre, en posant l'équation caractéristique sous la forme

$$\delta(m, k) = \det(\mathbf{T} - k\mathbf{E} - 2m\mathbf{I}) = 0, \quad (7.157)$$

où k et m sont deux scalaires alors que \mathbf{E} et \mathbf{I} sont deux tenseurs isotropes et indépendants du type de l'élasticité, définis dans le plan par

$$\begin{aligned} E_{ijkl} &= g_{ij}g_{kl}, \\ I_{ijkl} &= -\frac{1}{2}g_{ij}g_{kl} + \frac{1}{2}(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk}). \end{aligned} \quad (7.158)$$

Tout calcul fait, $\delta(m, k)$ s'exprime à l'aide des constantes polaires de \mathbf{T} :

$$\begin{aligned} \delta(m, k) &= -4m^2k + 8m^2T_1 + 8mkT_0 - 16m(T_0T_1 - R_1^2) - 4k(T_0^2 - R_0^2) + \\ &+ 8T_0^2T_1 - 16T_0R_1^2 - 8T_1R_0^2 + 16R_0R_1^2 \cos 4(\Phi_0 - \Phi_1); \end{aligned} \quad (7.159)$$

on peut remarquer que toutes les combinaisons constituant les coefficients de $\delta(m, k)$ sont positives par les (7.152). Les symétries matérielles caractérisent la forme de la cubique $\delta(m, k)$ dans le plan (m, k) ; pour le cas anisotrope général, la solution de la (7.157) peut se poser dans la forme

$$k = 2T_1 + 4R_1^2 \frac{m - T_0 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \Phi_1)}{(m - T_0)^2 - R_0^2}; \quad (7.160)$$

l'allure de la fonction $\delta(m, k)$ et celle de k sont en Fig. 7.4.

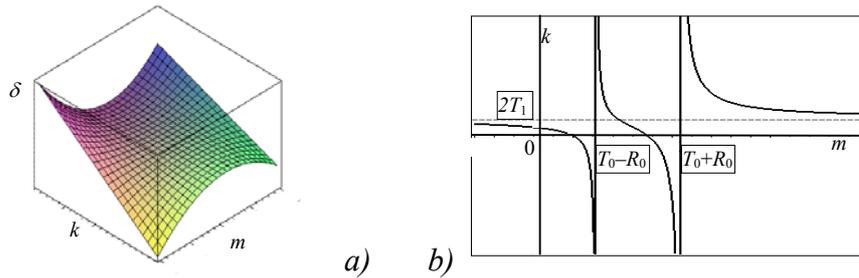


Fig. 7.4. Cas anisotrope; a) $\delta(m, k)$, b) $k(m)$.

Pour une lamina orthotrope, on distingue entre les deux valeurs de K , dans la (7.111): 0 ou 1. Dans le premier cas, la cubique $\delta(m, k)$ se décompose en une hyperbole et une droite, avec l'existence d'un point double P_1 , voir la Fig. 7.5 a):

$$k = 2T_1 + \frac{4R_1^2}{m - T_0 - R_0}, \quad (7.161)$$

$$m = T_0 - R_0.$$

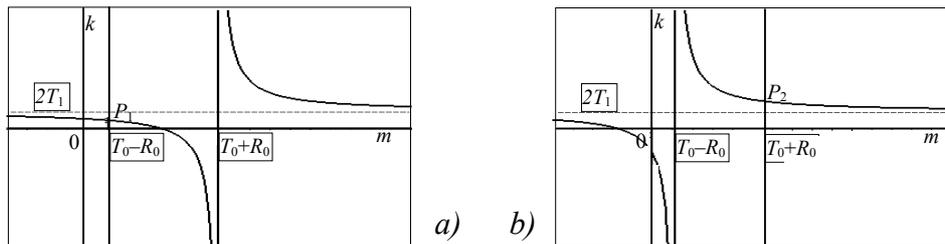


Fig. 7.5. Fonction $k(m)$ pour le cas orthotrope; a) $K=0$, b) $K=1$.

Pour $K=1$ la cubique $\delta(m, k)$ se décompose en

$$k = 2T_1 + \frac{4R_1^2}{m - T_0 + R_0}, \quad (7.162)$$

$$m = T_0 + R_0,$$

avec le point double P_2 , Fig. 7.5 b). Pour la symétrie du carré, $\delta(m, k)$ se décompose en trois droites:

$$k = 2T_1, \quad (7.163)$$

$$m = T_0 \pm R_0,$$

avec deux points doubles, P_1 et P_2 , voir la Fig. 7.6 a). Finalement, dans le cas isotrope $\delta(m, k)$ se décompose en une droite plus une droite double, avec un point triple P , voir la Fig. 7.6 b):

$$k = 2T_1, \quad (7.164)$$

$$m = T_0 \text{ deux fois.}$$

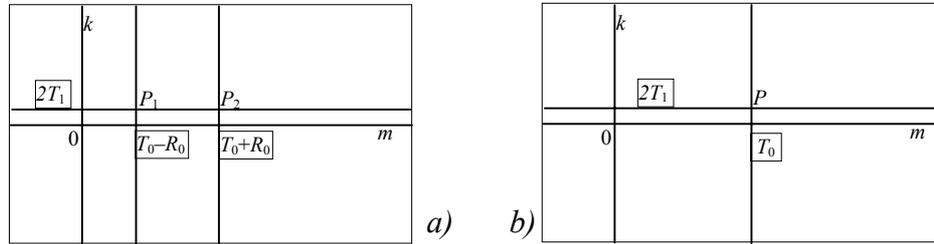


Fig. 7.6. Fonction $k(m)$ pour les cas: a) symétrie du carré, b) isotropie.

7.14 Expression polaire des constantes de l'ingénieur.

Il est évident que les constantes de l'ingénieur d'une lamina anisotrope, à savoir les modules d'Young E_{xx} , E_{yy} , le module de cisaillement G_{xy} , le coefficient de Poisson ν_{xy} et les deux coefficients d'influence mutuelle de seconde espèce, $\eta_{xy,x}$ et $\eta_{xy,y}$, peuvent s'exprimer à l'aide des constantes polaires. En utilisant les définitions de ces constantes en fonction des composantes du tenseur de souplesse \mathbf{S} , voir par exemple l'ouvrage de Jones, 1975, ou celui de Tsai et Hahn, 1980, et par le biais des (7.95) écrites pour \mathbf{S} , dont on continue à indiquer les composantes polaires par des lettres minuscules, on a, à la direction θ ,

$$\begin{aligned} E_{xx}(\theta) &= S_{xxxx}^{-1}(\theta) = [t_0 + 2t_1 + r_0 \cos 4(\varphi_0 - \theta) + 4r_1 \cos 2(\varphi_1 - \theta)]^{-1}, \\ E_{yy}(\theta) &= S_{yyyy}^{-1}(\theta) = [t_0 + 2t_1 + r_0 \cos 4(\varphi_0 - \theta) - 4r_1 \cos 2(\varphi_1 - \theta)]^{-1}, \\ \nu_{xy}(\theta) &= -S_{xyxy}(\theta)E_{xx}(\theta) = -\frac{-t_0 + 2t_1 - r_0 \cos 4(\varphi_0 - \theta)}{t_0 + 2t_1 + r_0 \cos 4(\varphi_0 - \theta) + 4r_1 \cos 2(\varphi_1 - \theta)}, \\ G_{xy}(\theta) &= \frac{1}{4}S_{xyxy}^{-1}(\theta) = \frac{1}{4[t_0 - r_0 \cos 4(\varphi_0 - \theta)]}, \\ \eta_{xy,x}(\theta) &= 2S_{xxxy}(\theta)E_{xx}(\theta) = 2\frac{r_0 \sin 4(\varphi_0 - \theta) + 2r_1 \sin 2(\varphi_1 - \theta)}{t_0 + 2t_1 + r_0 \cos 4(\varphi_0 - \theta) + 4r_1 \cos 2(\varphi_1 - \theta)}, \\ \eta_{xy,y}(\theta) &= 2S_{xyyy}(\theta)E_{yy}(\theta) = 2\frac{-r_0 \sin 4(\varphi_0 - \theta) + 2r_1 \sin 2(\varphi_1 - \theta)}{t_0 + 2t_1 + r_0 \cos 4(\varphi_0 - \theta) - 4r_1 \cos 2(\varphi_1 - \theta)}. \end{aligned} \quad (7.165)$$

En exprimant les constantes polaires de \mathbf{S} en fonction de celles du tenseur de rigidité \mathbf{Q} , à l'aide des inverses des (7.156), on arrive aussi à mettre les constantes de l'ingénieur en fonction des composantes polaires de \mathbf{Q} .

Dans un travail paru en 1999, Verchery et Gong ont montré les conditions polaires qui déterminent la forme du diagramme du module d'Young $E(\theta)$ pour un matériau orthotrope. Pour voir cela, observons d'abord que, à l'instar de ce qui a été dit pour \mathbf{Q} à propos de l'orthotropie, même pour \mathbf{S} on peut poser la condition d'orthotropie dans une forme analogue à la (7.111):

$$\varphi_0 - \varphi_1 = k \frac{\pi}{4}; \quad (7.166)$$

la première des (7.165) montre que $E(\theta)$ peut alors s'écrire

$$E_{xx}(\theta) = [t_0 + 2t_1 + (-1)^k r_0 \cos 4(\varphi_1 - \theta) + 4r_1 \cos 2(\varphi_1 - \theta)]^{-1}; \quad (7.167)$$

ses extremums sont en correspondance des directions qui annulent sa dérivée, voire, comme on constate facilement, la composante S_{xxy} , et qui se trouvent donc en résolvant l'équation

$$\sin 2(\varphi_1 - \theta) [(-1)^k r_0 \cos 2(\varphi_1 - \theta) + r_1] = 0; \quad (7.168)$$

les solutions sont

$$\varphi_1 - h \frac{\pi}{2}, \quad h = 0, 1 \quad (7.169)$$

qui sont les directions d'orthotropie, mais aussi

$$\omega = \varphi_1 - \frac{1}{2} \arccos \left[-(-1)^k \frac{r_1}{r_0} \right]. \quad (7.170)$$

La condition d'existence de la solution ω est

$$r_0 > r_1; \quad (7.171)$$

dans ce cas, $E(\theta)$ a trois extremums sur un arc égal à $\pi/2$; en résumant, trois sont les cas possibles:

- i. $k=0$ ou $k=1$ et $r_0 \leq r_1$: φ_1 est direction de minimum et $\varphi_1 + \pi/2$ de maximum;
- ii. $k=0$ et $r_0 > r_1$: φ_1 est direction de minimum absolu, $\omega \in [\varphi_1 + \pi/4, \varphi_1 + \pi/2]$ est direction de maximum absolu et $\varphi_1 + \pi/2$ de minimum relatif;
- iii. $k=1$ et $r_0 > r_1$: φ_1 est direction de maximum relatif, $\omega \in [\varphi_1, \varphi_1 + \pi/4]$ est direction de minimum absolu et $\varphi_1 + \pi/2$ de maximum absolu.

Dans le cas anisotrope général, on montre par la même démarche que les directions d'extremum de $E(\theta)$ sont les solutions de l'équation

$$\left(\frac{1}{2} r_0 \sin 4\varphi_0 - r_1 \sin 2\varphi_1 \right) \tan^4 \theta + 2(r_0 \cos 4\varphi_0 - r_1 \cos \varphi_1) \tan^3 \theta - \quad (7.172)$$

$$- 3r_0 \sin 4\varphi_0 \tan^2 \theta - 2(r_0 \cos 4\varphi_0 + r_1 \cos \varphi_1) \tan \theta + \frac{1}{2} r_0 \sin 4\varphi_0 + r_1 \sin 2\varphi_1 = 0.$$

Pour un matériau à symétrie carrée, la quatrième des (7.156) nous montre que la condition (7.117), valable pour \mathbf{Q} , implique aussi que

$$r_1 = 0; \quad (7.173)$$

si alors on tient compte de cette condition dans l'équation (7.168), on voit immédiatement que les directions d'extremum sur un arc d'amplitude $\pi/2$ sont toujours trois, à savoir les axes de symétrie, placés aux angles φ_0 , $\varphi_0 + \pi/4$ et $\varphi_0 + \pi/2$.

7.15 Comparaison entre les composantes polaires et les invariants de Tsai et Pagano.

Tsai et Pagano, 1968, ont proposé une transformation de la matrice (7.76) qui opère le changement de repère en cartésien, transformation basée sur des simples manipulations des fonctions trigonométriques. De cette façon, ils aboutissent aux relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 T_{xxxx}(\theta) &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta , \\
 T_{xxyy}(\theta) &= U_4 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta , \\
 T_{xxxy}(\theta) &= 2U_6 \cos 2\theta - U_2 \sin 2\theta + 2U_7 \cos 4\theta - 2U_3 \sin 4\theta , \\
 T_{yyyy}(\theta) &= U_1 - U_2 \cos 2\theta - 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta , \\
 T_{xyyy}(\theta) &= 2U_6 \cos 2\theta - U_2 \sin 2\theta - 2U_7 \cos 4\theta + 2U_3 \sin 4\theta , \\
 T_{xyxy}(\theta) &= U_5 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta .
 \end{aligned} \tag{7.174}$$

Les 7 paramètres U_i , connus parfois sous le nom d'invariants de Tsai et Pagano, sont

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{3T_{1111} + 2T_{1122} + 3T_{2222} + 4T_{1212}}{8} , \\
 U_2 &= \frac{T_{1111} - T_{2222}}{2} , \\
 U_3 &= \frac{T_{1111} - 2T_{1122} + T_{2222} - 4T_{1212}}{8} , \\
 U_4 &= \frac{T_{1111} + 6T_{1122} + T_{2222} - 4T_{1212}}{8} , \\
 U_5 &= \frac{T_{1111} - 2T_{1122} + T_{2222} + 4T_{1212}}{8} , \\
 U_6 &= \frac{T_{1112} + T_{1222}}{2} , \\
 U_7 &= \frac{T_{1112} - T_{1222}}{2} ;
 \end{aligned} \tag{7.175}$$

ils ne sont pas tous indépendants, car évidemment on a un maximum de six composantes distinctes pour un tenseur de rigidité dans le plan, et en effet il y a des relations entre les paramètres U_i . Ces relations se mettent bien en évidence en exprimant les U_i par les composantes polaires:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= T_0 + 2T_1 , \\
 U_2 &= 4R_1 \cos 2\Phi_1 , \\
 U_3 &= R_0 \cos 4\Phi_0 , \\
 U_4 &= -T_0 + 2T_1 , \\
 U_5 &= T_0 , \\
 U_6 &= 2R_1 \sin 2\Phi_1 , \\
 U_7 &= R_0 \sin 4\Phi_0 .
 \end{aligned} \tag{7.176}$$

On remarque tout de suite que

$$U_1 - U_4 = 2U_5, \quad (7.177)$$

et, par les (7.90) et (7.92), que

$$U_1 - U_4 = L_1,$$

$$U_1 + U_4 = 2L_2,$$

$$U_3^2 + U_7^2 = \frac{Q_1}{4}, \quad (7.178)$$

$$U_2^2 + 4U_6^2 = 4Q_2,$$

$$4U_2U_6U_7 + U_3(U_2^2 - 4U_6^2) = 2C_1.$$

Les composantes polaires, à leur tour, sont facilement exprimées en fonction des paramètres de Tsai et Pagano, en inversant les (7.176):

$$T_0 = U_5,$$

$$T_1 = \frac{U_1 - U_5}{2} = \frac{U_4 + U_5}{2},$$

$$R_0 = \sqrt{U_3^2 + U_7^2},$$

$$R_1 = \frac{1}{4} \sqrt{U_2^2 + 4U_6^2}, \quad (7.179)$$

$$\tan 4\Phi_0 = \frac{U_7}{U_3},$$

$$\tan 2\Phi_1 = 2 \frac{U_6}{U_2}.$$

Les deux approches, de Verchery et de Tsai-Pagano, sont évidemment alternatives, mais on ne peut s'empêcher de remarquer certaines différences de taille: d'abord, Tsai et Pagano font appel à sept quantités non indépendantes; parmi celles-ci, seulement U_1 , U_4 et U_5 sont des vrais invariants, et du premier ordre: en fait, les quantités U_2 , U_3 , U_6 et U_7 sont variables avec l'orientation des axes de référence, comme les (7.176) le montrent bien, si l'on se rappelle que les angles polaires dépendent du repère, mais pas leur différence. N'utilisant que des invariants du premier ordre, l'approche de Tsai et Pagano ne peut pas prendre en compte quelque fait fondamental, qui tient aux invariants d'ordre supérieur, comme par exemple le fait que dans l'expression en forme d'harmoniques de Tsai et Pagano, équations (7.174), n'apparaît pas en forme explicite le déphasage des termes oscillants à fréquence différente, ni que ce décalage est un invariant fondamental; de même, n'étant pas directement explicités les angles polaires, on n'a pas, dans la représentation par les invariants U_i , une information immédiate sur la position des axes de symétrie éventuelle. En outre, on a vu au § 7.11 le rôle joué par les constantes polaires dans la décomposition de l'énergie de déformation; cela ne peut se faire avec les paramètres U_i , comme on reconnaît facilement.

Les symétries sont mal repérées avec les paramètres U_i : dans l'esprit de son auteur, la condition de Pedersen détermine l'orthotropie, équation (7.115), qui est une relation nettement plus compliquée et moins immédiate de la (7.111). La condition de Pedersen, d'ailleurs, se récupère très facilement à partir des dernières deux des (7.179) et la (7.111). La symétrie du carré est donnée par

$$\begin{aligned} U_2 &= 0, \\ U_6 &= 0, \end{aligned} \tag{7.180}$$

et l'isotropie par

$$\begin{aligned} U_2 &= 0, \\ U_3 &= 0, \\ U_6 &= 0, \\ U_7 &= 0. \end{aligned} \tag{7.181}$$

Il est intéressant de remarquer que ces deux derniers types de symétrie s'expriment à l'aide d'un nombre double de conditions par rapport à la méthode polaire. Il faut aussi constater que, à strict rigueur, la condition de Pedersen n'est pas une caractérisation de l'orthotropie: en fait, on vérifie immédiatement, par les (7.180) et (7.181), que la (7.115) n'assure que de l'existence d'une quelque symétrie pour un tenseur plan de l'élasticité, sans pour autant pouvoir distinguer, à elle seule, de quelle symétrie s'agit-il.

En définitive, quoi qu'étant deux méthodes alternatives, l'approche de Verchery semble être plus puissante dans la définition des symétries et dans la représentation de certains phénomènes ou grandeurs. Cela tient principalement à deux faits essentiels: la méthode polaire utilise des invariants de tous les ordres et ces invariants ont une signification physique directe et claire. Par exemple, et pour terminer, Pedersen, 1993, observe que deux paramètres de Tsai et Pagano ont une signification physique, pur le cas des matériaux orthotropes: U_2 , qui mesure la différence des rigidités dans les axes d'orthotropie, et U_3 , qu'il appelle *relative shear modulus*: les matériaux avec $U_3 < 0$ sont appelés *high shear modulus*, et ceux avec $U_3 > 0$ *low shear modulus*. Si on se place dans un repère qui coïncide avec les axes d'orthotropie, voire si on prend $\Phi_1 = 0$ ou $\pi/2$, les (7.176) montrent que le premier paramètre coïncide avec $4 R_1$, alors que le deuxième est $(-1)^K R_0$. On voit donc que pour la même valeur de R_0 on peut avoir deux matériaux orthotropes, comme déjà dit dans le § 7.10: un, *high shear modulus*, celui avec K impair, et l'autre *low shear modulus*, celui avec K pair. Par contre, l'affirmation de Pedersen que la condition $U_3 = 0$ caractérise les matériaux isotropes n'est pas correcte, car cette condition ne suffit pas à caractériser l'isotropie, qui nécessite des deux conditions polaires (7.121), ou si l'on préfère des quatre conditions (7.181). Les deux premières conditions (7.181) marquent, éventuellement, le passage de l'orthotropie à l'isotropie, alors que $U_3 = 0$ est plutôt typique d'une d'orthotropie particulière, sur laquelle on reviendra au chapitre 12.

8.1 Introduction.

Ce chapitre porte sur certaines applications de la méthode polaire à la conception des stratifiés. Ces recherches ont marqué mes débuts de chercheur dans le domaine des composites, et elles se posent dans la continuation des travaux précédemment développés par Verchery avec ses collaborateurs, notamment avec Vong d'abord, 1986, et Kandil ensuite, 1988-1990.

Les différents sujets qui sont développés dans ce chapitre ont un fil commun: l'utilisation de la méthode polaire pour la détermination de stratifiés ayant des caractéristiques données du comportement élastique, notamment de leurs propriétés de rigidité. En particulier, nous avons traité des propriétés qui s'apparentent à des symétries du comportement, et on a cherché des solutions par voie analytique aux problèmes annexes. Nous avons pris en considération la recherche de stratifiés sans couplage membrane-flexion, ou encore de stratifiés quasi-homogènes, à savoir de plaques ayant un comportement semblable à celui d'une plaque homogène non stratifiée, des stratifiés isotropes, en partie ou totalement, des stratifiés orthotropes et finalement des stratifiés composés de couches renforcées par un tissu équilibré. Ces différents sujets seront rapidement rappelés dans les paragraphes qui suivent, après avoir rappelé la théorie classique des stratifiés et sa traduction en terme de constantes polaires. Avant de continuer, voici la signification des symboles les plus utilisés dans la suite:

$(0; x, y, z)$: repère générale de la plaque, avec z orthogonal au plan moyen;

$(0; x_1, x_2, z)$: repère de la couche dans lequel son tenseur d'élasticité est connu;

δ_k : angle formé par la direction x du repère de la plaque avec l'axe x_1 de la couche k ;

z_k : position le long de l'axe z de la surface supérieure de la couche k ;

\mathbf{Q}_k : tenseur de rigidité de la couche k ;

\mathbf{S}_k : tenseur de souplesse de la couche k ;

\mathbf{a}_k : tenseur des coefficients de dilatation thermique de la couche k ;

h : épaisseur totale d'un stratifié;

n : nombre des couches;

$\boldsymbol{\varepsilon}^0$: tenseur des déformations du plan moyen de la plaque;

$\boldsymbol{\chi}$: tenseur des courbures du plan moyen de la plaque;

\mathbf{N} : tenseur des efforts de membrane;

\mathbf{M} : tenseurs des moments fléchissants;

τ_0 : différence de température du plan moyen par rapport à un état non déformé;

$\Delta\tau$: différence de température entre les surfaces supérieure et inférieure de la plaque;

\mathbf{A} : tenseur du comportement de membrane;

\mathbf{B} : tenseur de couplage;

\mathbf{D} : tenseur du comportement de flexion.

8.2 La théorie classique des stratifiés par la méthode polaire.

La loi fondamentale de la théorie des stratifiés lie les efforts généralisés du plan moyen avec ses déformations et courbures; dans le contexte de la théorie infinitésimale et en retenant l'hypothèse de Kirchhoff, on se place dans le cadre de la théorie classique, et la loi ci-dessus prend la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B} \boldsymbol{\chi} - \tau_0 \mathbf{U} - \frac{\Delta\tau}{h} \mathbf{V}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D} \boldsymbol{\chi} - \tau_0 \mathbf{V} - \frac{\Delta\tau}{h} \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Les tenseurs qui apparaissent à droite sont donnés par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{k=-p}^p \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k - z_{k-1}), \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \sum_{k=-p}^p \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{3} \sum_{k=-p}^p \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k^3 - z_{k-1}^3), \end{aligned} \quad (8.2)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{k=-p}^p [\mathbf{Q}_k(\delta_k)] \mathbf{a}_k(\delta_k)(z_k - z_{k-1}), \\ \mathbf{V} &= \frac{1}{2} \sum_{k=-p}^p [\mathbf{Q}_k(\delta_k)] \mathbf{a}_k(\delta_k)(z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{3} \sum_{k=-p}^p [\mathbf{Q}_k(\delta_k)] \mathbf{a}_k(\delta_k)(z_k^3 - z_{k-1}^3), \end{aligned} \quad (8.3)$$

avec p lié à n par les relations

$$\begin{aligned} n &= 2p \quad \text{si } n \text{ est pair,} \\ n &= 2p + 1 \quad \text{si } n \text{ est impair;} \end{aligned} \quad (8.4)$$

le schéma de calcul utilisé dans ce texte est donné en Fig. 8.1, et comporte les relations suivantes pour les variables z_k , valables dans le cas de couches d'épaisseur identique h_L :

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{2k+1}{2} h_L, \quad z_{k-1} = \frac{2k-1}{2} h_L, & \text{pour } n = 2p + 1, \\ z_k &= k h_L, \quad z_{k-1} = (k-1) h_L \quad \text{si } k > 0, \\ z_k &= (k+1) h_L, \quad z_{k-1} = k h_L \quad \text{si } k < 0, & \text{pour } n = 2p. \end{aligned} \quad (8.5)$$

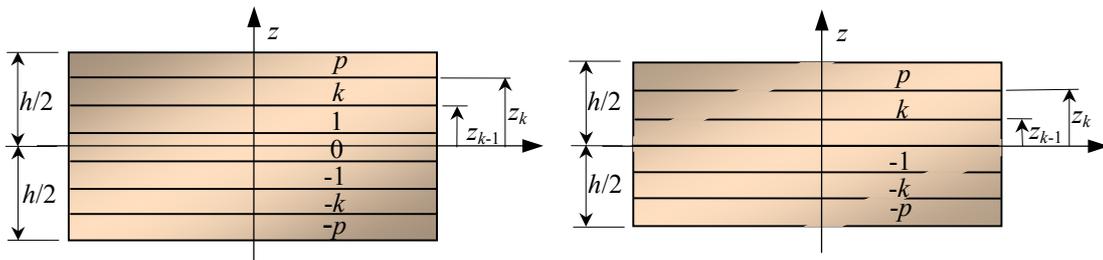


Fig. 8.1. Schéma de calcul.

Les équations (8.1) mettent en évidence deux caractéristiques fondamentales et bien connues de la mécanique des stratifiés: le couplage entre le comportement de membrane et celui de flexion et la diversité des propriétés élastiques et thermoélastiques entre ces deux comportements. Dans ce chapitre, les comportements élastique et thermoélastique seront traités conjointement; d'autres facteurs cause de dilatations, notamment l'absorption d'eau, peuvent se traiter de la même façon des dilatations d'origine thermique et donc, dans un but de synthèse, ne seront pas considérés ici.

Les tenseurs définis par les relations (8.2) et (8.3) sont souvent normalisés afin de les rendre homogènes entre eux, et cela se fait, voir par exemple Jones, 1975, ou Tsai et Hahn, 1980, de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \frac{1}{h} \mathbf{A}, & \mathbf{B}^* &= \frac{2}{h^2} \mathbf{B}, & \mathbf{D}^* &= \frac{12}{h^3} \mathbf{D}, \\ \mathbf{U}^* &= \frac{1}{h} \mathbf{U}, & \mathbf{V}^* &= \frac{2}{h^2} \mathbf{V}, & \mathbf{W}^* &= \frac{12}{h^3} \mathbf{W}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

ou le symbole * désigne un tenseur normalisé.

Il est préférable d'introduire d'ores et déjà deux autres tenseurs, qui seront assez utilisés dans la suite, et qui pourraient être appelés tenseurs d'homogénéité:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A}^* - \mathbf{D}^*, \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{U}^* - \mathbf{W}^*, \end{aligned} \quad (8.7)$$

il est évident que ces deux tenseurs décrivent la différence des propriétés, élastiques et thermoélastiques, entre le comportement de membrane et celui de flexion de la plaque stratifiée.

Les relations (8.2) et (8.3) sont des lois de composition de tenseurs qui sont valables pour toute représentation tensorielle, et en tant que telles s'appliquent aussi à la représentation polaire. De ce fait, et si l'on remarque que tourner d'un angle δ_k une couche k par rapport à un repère fixe équivaut à une rotation $-\delta_k$ du repère, on obtient immédiatement les constantes polaires des tenseurs élastiques et thermoélastiques:

tenseur \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \bar{T}_0 &= \sum_{k=-p}^p T_{0k} (z_k - z_{k-1}), \\ \bar{T}_1 &= \sum_{k=-p}^p T_{1k} (z_k - z_{k-1}), \\ \bar{R}_0 e^{4i\bar{\Phi}_0} &= \sum_{k=-p}^p R_{0k} e^{4i(\phi_{0k} + \delta_k)} (z_k - z_{k-1}), \\ \bar{R}_1 e^{2i\bar{\Phi}_1} &= \sum_{k=-p}^p R_{1k} e^{2i(\phi_{1k} + \delta_k)} (z_k - z_{k-1}); \end{aligned} \quad (8.8)$$

tenseur **B** :

$$\begin{aligned}
\hat{T}_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=-p}^p T_{0_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\
\hat{T}_1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=-p}^p T_{1_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\
\hat{R}_0 e^{4i\phi_0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=-p}^p R_{0_k} e^{4i(\phi_{0_k} + \delta_k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\
\hat{R}_1 e^{2i\phi_1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=-p}^p R_{1_k} e^{2i(\phi_{1_k} + \delta_k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2),
\end{aligned} \tag{8.9}$$

tenseur **C** :

$$\begin{aligned}
\bar{T}_0 &= \frac{1}{h^3} \sum_{k=-p}^p T_{0_k} (z_k - z_{k-1}) \left[h^2 - 4(z_k^2 + z_k z_{k-1} + z_{k-1}^2) \right], \\
\bar{T}_1 &= \frac{1}{h^3} \sum_{k=-p}^p T_{1_k} (z_k - z_{k-1}) \left[h^2 - 4(z_k^2 + z_k z_{k-1} + z_{k-1}^2) \right], \\
\bar{R}_0 e^{4i\phi_0} &= \frac{1}{h^3} \sum_{k=-p}^p R_{0_k} e^{4i(\phi_{0_k} + \delta_k)} (z_k - z_{k-1}) \left[h^2 - 4(z_k^2 + z_k z_{k-1} + z_{k-1}^2) \right], \\
\bar{R}_1 e^{2i\phi_1} &= \frac{1}{h^3} \sum_{k=-p}^p R_{1_k} e^{2i(\phi_{1_k} + \delta_k)} (z_k - z_{k-1}) \left[h^2 - 4(z_k^2 + z_k z_{k-1} + z_{k-1}^2) \right],
\end{aligned} \tag{8.10}$$

tenseur **D** :

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_0 &= \frac{1}{3} \sum_{k=-p}^p T_{0_k} (z_k^3 - z_{k-1}^3), \\
\tilde{T}_1 &= \frac{1}{3} \sum_{k=-p}^p T_{1_k} (z_k^3 - z_{k-1}^3), \\
\tilde{R}_0 e^{4i\phi_0} &= \frac{1}{3} \sum_{k=-p}^p R_{0_k} e^{4i(\phi_{0_k} + \delta_k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3), \\
\tilde{R}_1 e^{2i\phi_1} &= \frac{1}{3} \sum_{k=-p}^p R_{1_k} e^{2i(\phi_{1_k} + \delta_k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3),
\end{aligned} \tag{8.11}$$

tenseur **U** :

$$\begin{aligned}
\bar{T} &= \sum_{k=-p}^p T_k (z_k - z_{k-1}), \\
\bar{R} e^{2i\bar{\phi}} &= \sum_{k=-p}^p R_k e^{2i(\phi_k + \delta_k)} (z_k - z_{k-1}),
\end{aligned} \tag{8.12}$$

tenseur **V** :

$$\begin{aligned}
\hat{T} &= \frac{1}{2} \sum_{k=-p}^p T_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\
\hat{R} e^{2i\hat{\phi}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=-p}^p R_k e^{2i(\phi_k + \delta_k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2),
\end{aligned} \tag{8.13}$$

tenseur \mathbf{W} :

$$\tilde{T} = \frac{1}{3} \sum_{k=-p}^p T_k (z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad (8.14)$$

$$\tilde{R}e^{2i\Phi} = \frac{1}{3} \sum_{k=-p}^p R_k e^{2i(\Phi_k + \delta_k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3),$$

tenseur \mathbf{Z} :

$$\tilde{T} = \frac{1}{h^3} \sum_{k=-p}^p T_k (z_k - z_{k-1}) \left[h^2 - 4(z_k^2 + z_k z_{k-1} + z_{k-1}^2) \right] \quad (8.15)$$

$$\tilde{R}e^{2i\Phi} = \frac{1}{h^3} \sum_{k=-p}^p R_k e^{2i(\Phi_k + \delta_k)} (z_k - z_{k-1}) \left[h^2 - 4(z_k^2 + z_k z_{k-1} + z_{k-1}^2) \right]$$

Dans les formules ci-dessus, T_{0k}, T_{1k} etc. sont les composantes polaires de la couche k , et T_k, R_k, Φ_k celles du tenseur du second ordre $\mathbf{Q}_k \mathbf{a}_k$. Il n'est pas sans intérêt de remarquer que dans ces formules la dépendance des orientations des couches apparaît en forme explicite, contrairement à ce qui se passe avec une représentation tensorielle cartésienne. En outre, on peut remarquer tout de suite certaines propriétés caractéristiques: si un stratifié est composé par des couches, même différentes, mais toutes ayant la symétrie du carré, alors $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ et \mathbf{D} auront la symétrie du carré aussi: en fait, dans ce cas $R_{1k} = 0 \forall k$, et donc R_1 sera nul aussi pour $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ et \mathbf{D} , Vincenti *et alii*, 2001. La même chose peut se dire pour l'isotropie, voire pour R_0 et R_1 nuls à la fois.

En ce qui concerne l'inversion des équations (8.1), ce n'est pas une tâche difficile que celle de démontrer que

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{a}\mathbf{N} + \mathbf{b}_1\mathbf{M} + \tau_0\mathbf{u} + \frac{\Delta\tau}{h}\mathbf{v}_1, \quad (8.16)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{b}_2\mathbf{N} + \mathbf{d}\mathbf{M} + \tau_0\mathbf{v}_2 + \frac{\Delta\tau}{h}\mathbf{w},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \\ \mathbf{d} &= (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \\ \mathbf{b}_1 &= -\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}, \\ \mathbf{b}_2 &= -\mathbf{d}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{a}\mathbf{U} + \mathbf{b}_1\mathbf{V} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{U} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}), \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}\mathbf{V} + \mathbf{b}_1\mathbf{W} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}), \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{d}\mathbf{V} + \mathbf{b}_2\mathbf{U} = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}), \\ \mathbf{w} &= \mathbf{d}\mathbf{W} + \mathbf{b}_2\mathbf{V} = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}). \end{aligned} \quad (8.17)$$

A remarquer que la loi inverse (8.16) est établie à l'aide de huit tenseurs au lieu de six; toutefois, des relations (8.17) on tire facilement que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}^\top, \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}^\top, \\ \mathbf{b}_i &\neq \mathbf{b}_i^\top, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1^\top, \\ \mathbf{v}_1 &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1} [\mathbf{d}^{-1}\mathbf{v}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{W})] \end{aligned} \quad (8.18)$$

et donc que les tenseurs indépendants sont toujours au nombre de six. L'inversion des (8.1) directement en forme polaire, et notamment l'expression des composantes polaires des tenseurs \mathbf{a} , \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \mathbf{d} en fonction des composantes polaires de \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{D} , est une opération faisable mais très complexe, et finalement inutile. Nous l'avons essayé à l'aide du logiciel de calcul formel *Maple* ®, mais les résultats sont tellement lourds qu'il est impensable de les présenter. Toutefois, si

$$\mathbf{B} = \mathbf{O}, \quad (8.19)$$

c'est-à-dire en l'absence du couplage élastique membrane-flexion, les (8.17) deviennent

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{D}^{-1}, \\ \mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_2 = \mathbf{O}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}, \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Les tenseurs \mathbf{a} et \mathbf{d} s'obtiennent donc par inversion directe de \mathbf{A} et \mathbf{D} , et pour leurs composantes polaires des formules du type (7.156) peuvent être utilisées.

8.3 Les stratifiés à plis identiques.

Un cas extrêmement important pour les applications est celui des stratifiés composés par des plis identiques, qui ont donc la même épaisseur h_L et qui sont composé par un même matériau, dont le tenseur élastique est \mathbf{Q} et celui des coefficients de dilatation thermique $\boldsymbol{\alpha}$. Les relations (8.5) sont donc valables, et les relations (8.8)-(8.15) deviennent

$$\begin{aligned} &\text{tenseur } \mathbf{A} : \\ \bar{T}_0 &= h T_0, \\ \bar{T}_1 &= h T_1, \\ \bar{R}_0 e^{4i\bar{\Phi}_0} &= h_L R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=-p}^p e^{4i\delta_k}, \\ \bar{R}_1 e^{2i\bar{\Phi}_1} &= h_L R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k}; \end{aligned} \quad (8.21)$$

tenseur **B** :

$$\begin{aligned}\hat{T}_0 &= 0, \\ \hat{T}_1 &= 0,\end{aligned}\tag{8.22}$$

$$\hat{R}_0 e^{4i\Phi_0} = \frac{1}{2} h_L^2 R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=-p}^p b_k e^{4i\delta_k},$$

$$\hat{R}_1 e^{2i\Phi_1} = \frac{1}{2} h_L^2 R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k};$$

tenseur **C** :

$$\begin{aligned}\tilde{T}_0 &= 0, \\ \tilde{T}_1 &= 0,\end{aligned}\tag{8.23}$$

$$\tilde{R}_0 e^{4i\Phi_0} = \frac{1}{n^3} R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=-p}^p c_k e^{4i\delta_k},$$

$$\tilde{R}_1 e^{2i\Phi_1} = \frac{1}{n^3} R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=-p}^p c_k e^{2i\delta_k};$$

tenseur **D** :

$$\begin{aligned}\tilde{T}_0 &= \frac{h^3}{12} T_0, \\ \tilde{T}_1 &= \frac{h^3}{12} T_1,\end{aligned}\tag{8.24}$$

$$\tilde{R}_0 e^{4i\Phi_0} = \frac{1}{12} h_L^3 R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=-p}^p d_k e^{4i\delta_k},$$

$$\tilde{R}_1 e^{2i\Phi_1} = \frac{1}{12} h_L^3 R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=-p}^p d_k e^{2i\delta_k};$$

tenseur **U** :

$$\bar{T} = h T,\tag{8.25}$$

$$\bar{R} e^{2i\Phi} = h_L R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k};$$

tenseur **V** :

$$\hat{T} = 0,\tag{8.26}$$

$$\hat{R} e^{2i\Phi} = \frac{1}{2} h_L^2 R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k};$$

tenseur **W** :

$$\tilde{T} = h T,\tag{8.27}$$

$$\tilde{R} e^{2i\Phi} = \frac{1}{12} h_L^3 R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p d_k e^{2i\delta_k};$$

tenseur \mathbf{Z} :

$$\check{T} = 0, \quad (8.28)$$

$$\check{R} e^{2i\Phi} = \frac{1}{n^3} R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p c_k e^{2i\delta_k}.$$

Dans ces équations, T_0, T_1 etc. sont les composantes polaires de la couche de base, et T, R, Φ celles du tenseur du second ordre $\mathbf{Q}\mathbf{a}$, toujours pour la couche de base; les coefficients b_k, c_k et d_k sont donnés par les relations suivantes:

$$b_k = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 2p + 1, \\ 2k - \frac{k}{|k|}, b_0 = 0 & \text{si } n = 2p; \end{cases} \quad (8.29)$$

$$c_k = \begin{cases} 4(p^2 + p - 3k^2) & \text{si } n = 2p + 1, \\ 4[p^2 - 3k^2 + 3|k| - 1], c_0 = 0 & \text{si } n = 2p; \end{cases} \quad (8.30)$$

$$d_k = \begin{cases} 12k^2 + 1 & \text{si } n = 2p + 1, \\ 4[3k^2 - 3|k| + 1], d_0 = 0 & \text{si } n = 2p. \end{cases} \quad (8.31)$$

Nous remarquons que les coefficients b_k, c_k et d_k ont des propriétés importantes que nous utiliserons dans la suite: d'abord, ils sont tous des nombres entiers, et les coefficients b_k varient linéairement avec k , alors que les c_k et d_k varient de façon quadratique. Ensuite, pour un nombre quelconque de couches, il existe deux couches symétriquement placées par rapport au plan moyen, soient k^* et $-k^*$, telles que si $-k^* \leq k \leq k^*$ les coefficients c_k sont positifs, alors qu'ils sont négatifs ailleurs. On peut constater que:

$$b_{-k} = -b_k, \quad (8.32)$$

$$\sum_{k=-p}^p b_k = 0;$$

$$c_{-k} = c_k,$$

$$\sum_{k=-p}^{-k^*-1} c_k + \sum_{k=k^*+1}^p c_k = - \sum_{k=-k^*}^{k^*} c_k, \quad (8.33)$$

$$\sum_{k=-p}^p c_k = 0;$$

$$d_{-k} = d_k, \quad (8.34)$$

$$\sum_{k=-p}^p d_k = n^3.$$

La méthode polaire montre à ce stade sa capacité de synthèse dans l'analyse des propriétés matérielles: les équations (8.21) à (8.28) nous disent que pour les stratifiés à couches identiques, les parties isotropes de $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{V}$ et \mathbf{Z} sont nulles, mais aussi que celles de \mathbf{A}^* et de

\mathbf{D}^* sont les mêmes de la couche de base, et ainsi pour \mathbf{U}^* et \mathbf{W}^* . En outre, les coefficients b_k , c_k et d_k sont les mêmes pour les propriétés élastiques et thermoélastiques correspondantes.

Pour les stratifiés à couches identiques on voit bien, grâce aux relations (8.22) et (8.26) que

$$\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{O} \quad (8.35)$$

alors que le contraire n'est pas vrai. Cela signifie qu'il est possible d'avoir des stratifiés sans couplage thermoélastique mais avec couplage élastique, mais aussi que si un stratifié est découplé élastiquement, il l'est aussi thermoélastiquement. Entre autre, les (8.17) montrent que même si \mathbf{V} est nul, \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 ne le sont pas forcément: donc ils peuvent exister des stratifiés sans couplage thermoélastique en rigidité, mais pas en souplesse.

Les (8.21), (8.22) et (8.23) nous montrent aussi un autre résultat: pour un stratifié de type *cross-ply* équilibré, c'est-à-dire ayant le même nombre de couches dans deux directions orthogonales, il est aussi

$$\begin{aligned} \frac{\bar{R}_0}{h} e^{4i\bar{\phi}_0} &= \frac{12}{h^3} \tilde{R}_0 e^{4i\bar{\phi}_0} = R_0 e^{4i\phi_0}, \\ \hat{R}_0 &= \tilde{R}_0 = 0. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Un avantage avec la méthode polaire est donc le fait qu'on récupère immédiatement certaines composantes polaires des tenseurs élastiques d'un stratifié à plis identiques en connaissant simplement celles de la couche de base.

Pour terminer, on remarque que les sommations dans les (8.21)-(8.28) sont des fonctions qui s'apparentent aux *lamination parameters*, Tsai et Hahn 1980, voir aussi Miki, 1982, Fukunaga et Vanderplaats, 1991, Grédiac, 1999. Ces fonctions représentent l'influence de la séquence d'empilement et des orientations des couches sur les propriétés finales du stratifié, alors que l'influence des propriétés du matériau de base est prise en compte par les invariants polaires qui multiplient les sommations. On reviendra sur cet aspect dans la suite de ce travail.

8.4 Quelques remarques sur les symétries élastiques pour les stratifiés.

L'analyse complète des symétries des stratifiés n'est pas aussi évidente que celle d'un pli isolé. En effet, les symétries de rigidité doivent être considérées séparément des symétries de souplesse, et donc de celles des propriétés élastiques. La méthode polaire aide dans cette analyse: d'abord, considérons l'orthotropie, et en particulier un stratifié ayant un tenseur \mathbf{A} orthotrope. Si le couplage \mathbf{B} est nul, même \mathbf{a} , qui dans ce cas est l'exact inverse de \mathbf{A} , sera orthotrope (voir § 7.12) et donc même la variation des constantes de l'ingénieur le sera; la même chose peut se dire pour \mathbf{D} et \mathbf{d} . Si au contraire \mathbf{B} n'est pas nul, cela n'est plus vrai, en général, car \mathbf{a} et \mathbf{d} ne sont pas les inverses directs de \mathbf{A} et \mathbf{D} , voir les (8.17). Toutefois, on peut montrer qu'une condition suffisante est que \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{D} soient tous orthotropes dans les mêmes axes. Il est donc possible d'avoir un stratifié qui est orthotrope en rigidité, \mathbf{A} ou \mathbf{D} , mais pas en souplesse, et inversement; parler de stratifiés orthotropes lorsqu'ils ne sont pas découplés devient donc ambigu, il faut préciser de quelle orthotropie s'agit-il. Cela est intéressant parce que la réponse de la plaque à des sollicitations statiques ou dynamiques est gouvernée par les tenseurs de souplesse, tandis que son comportement en ce qui concerne la propagation d'ondes élastiques dépend de la rigidité. En outre, il faut remarquer que même si le stratifié est découplé, on peut bien sûr avoir l'orthotropie de \mathbf{A} et de \mathbf{D} , mais avec des propriétés différentes, par exemple avec des axes d'orthotropie distincts en membrane et en flexion.

La symétrie du carré a au contraire un comportement plus simple. On a déjà vu au § 7.12 que la symétrie du carré en rigidité comporte celle en souplesse et vice-versa, et cela est sans doute vrai pour les stratifiés aussi, lorsqu'ils sont découplés. De surcroît, Vincenti, 2002, a démontré dans sa thèse que cette propriété est vraie même si le stratifié est couplé, pourvu que **A**, **B** et **D** aient tous la symétrie du carré, ce qui est toujours le cas si par exemple chaque couche constituant le stratifié est renforcée par un tissu équilibré. Des considérations analogues peuvent être faites pour l'isotropie aussi.

8.5 Problèmes de propriétés élastiques interprétés comme problèmes de symétries.

Certains problèmes concernant les propriétés élastiques des stratifiés peuvent être regardés comme des problèmes de symétrie. Cela est évident lorsqu'on cherche des stratifiés orthotropes, ou à symétrie carrée, ou encore isotropes. Mais deux autres problèmes peuvent être interprétés comme problèmes concernant la symétrie des tenseurs de rigidité du stratifié, notamment le découplage et la quasi-homogénéité. Le découplage, comme déjà vu, comporte la nullité du tenseur **B**; or, les (8.22) montrent que, dans le cas de stratifiés composés par des plis identiques, la partie isotrope de **B** est automatiquement nulle. Le découplage revient alors à imposer l'isotropie de **B**, et donc à annuler sa partie anisotrope. Cela n'est pas vrai pour un stratifié composé de plis différents: dans ce cas, l'isotropie de **B** n'assure pas le découplage de la plaque.

Un raisonnement similaire en tout peut se faire pour le tenseur **C**: même dans ce cas imposer l'isotropie de **C**, pour les stratifiés à couches identiques, comporte la nullité de **C**. Une telle circonstance n'est pas sans intérêt: en fait, si **C** est nul, **A*** et **D*** sont identiques: la plaque montre donc les mêmes propriétés élastiques en membrane et en flexion. Nous appellerons, suivant la littérature, quasi-homogène un stratifié pour lequel

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{O}; \quad (8.37)$$

la raison de ce nom, encore mal compris par certains, tient au fait qu'un tel stratifié se comporte comme s'il était constitué par une seule couche d'un seul matériau: une plaque homogène, donc.

Alors que les stratifiés non couplés ont reçu une grande attention dès le début, beaucoup moins en ont eu les stratifiés quasi-homogènes: Verchery a été le premier à introduire le concept de quasi-homogénéité, dans un travail de 1988 avec Kandil; dans cet article, toutefois, on appelle quasi-homogène un stratifié qui a **C** nul, sans tenir compte de **B**; dans des travaux suivants, Vannucci *et alii*, 1998-2001, nous avons imposé même la deuxième condition. D'autres auteurs se sont intéressés aux stratifiés quasi-homogènes, notamment Wu et Avery ont annoncé, dans un article paru en 1992, l'existence de ce type de stratifiés, pour lesquels ils ont ensuite déposé un brevet aux USA, sans pour autant donner un seul exemple de stratifié quasi-homogène. Grédiac, dans une série d'articles de 1998 à 2001 qui portent sur une méthode numérique pour la recherche de stratifiés ayant certaines propriétés, traite entre autre la recherche de stratifiés quasi-homogènes.

L'importance des stratifiés quasi-homogènes est multiple: d'abord, ils sont des stratifiés plus simples à être calculés et compris; ensuite, et c'est l'intérêt le plus fort pour notre équipe de recherche, un stratifié quasi-homogène est un stratifié très intéressant du point de vue de l'optimisation, et cela pour une raison qui sera expliquée dans la suite. Finalement, l'utilisation d'échantillons en stratifié quasi-homogène peut s'avérer très intéressante dans la caractérisation d'un stratifié ou d'un matériau, et non seulement en élasticité: on reviendra sur ce point dans le chapitre 13.

Dans ce chapitre, on s'occupera principalement des stratifiés quasi-homogènes, auxquels nous avons consacré une bonne partie des nos recherches. Le chapitre suivant montrera comme peuvent être prises en compte d'autres propriétés de symétrie, comme l'isotropie ou l'orthotropie, par une autre approche, toujours dans le cadre de la méthode polaire.

8.6 Les stratifiés de type quasi-trivial.

Les conditions (8.37) spécifient mathématiquement un stratifié quasi-homogène; il vaut la peine de souligner que s'occuper de la recherche de stratifiés découplés rentre dans la recherche des stratifiés quasi-homogènes, comme il est évident en regardant les (8.37); c'est pour cela que dans la suite on continuera à ne parler que de stratifiés quasi-homogènes, et on fera référence aux découplés, comme cas particulier, le moment venu. Toutefois, il vaut mieux souligner d'ores et déjà une circonstance assez connue: un stratifié à plis identiques avec séquence d'empilement symétrique, à savoir avec

$$\delta_k = \delta_{-k} \quad \forall k \in [-p, p] \quad (8.38)$$

est sans doute découplé, cela se constate immédiatement en regardant les (8.22) et le (8.32): cette condition de découplage, suffisante et non pas nécessaire, découle de la distribution impaire des coefficients b_k par rapport au plan moyen de la plaque. C'est bien, contrairement à ce qu'on pense souvent, une condition suffisante, mais pas du tout nécessaire pour le découplage: Caprino et Crivelli-Visconti, 1982, semblent être les premiers à avoir montré l'existence de stratifiés particuliers, non symétriques et non couplés.

Au sujet des stratifiés quasi-homogènes, le but de notre étude était la recherche de règles simples et suffisamment générales pour déterminer des stratifiés quasi-homogènes: dans ce but une hypothèse s'impose, celle de stratifiés à plis identiques. Sans prendre en compte cette condition, toute solution possible reste un cas particulier, non généralisable. Nous avons donc considéré la recherche de stratifiés de type quasi-homogène et composés de plis identiques. Soulignons que dans ce cas de figure, les conditions (8.37) ne concernent que la partie anisotrope de \mathbf{B} et de \mathbf{C} , étant la partie isotrope automatiquement nulle, comme les (8.22) et (8.23) le montrent. Les résultats de notre travail, rapidement montrés dans la suite du chapitre, sont détaillés dans les articles de 1998 à 2001, en particulier sur ceux parus sur *Composite Science and Technology* et sur *International Journal of Solids and Structures*, qui sont présentés en annexe.

Pour un matériau de base quelconque, ayant au plus, comme symétrie, l'orthotropie déterminée par la condition (7.111), les conditions de quasi-homogénéité (8.37) se traduisent en quatre équations distinctes:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-p}^p b_k e^{4i\delta_k} &= 0, \\ \sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k} &= 0, \\ \sum_{k=-p}^p c_k e^{4i\delta_k} &= 0, \\ \sum_{k=-p}^p c_k e^{2i\delta_k} &= 0. \end{aligned} \quad (8.39)$$

La solution de ces équations, dont les deux premières à elles seules définissent la recherche de stratifiés simplement découplés, n'est pas disponible en forme analytique, et en général une approche numérique est nécessaire. Cette constatation n'allait pas dans le sens de nos buts, et

en plus laissait non résolue une autre question, à savoir combien de solutions existent-elles pour un nombre donné de couches. Nous reviendrons dans les chapitres suivants sur la solution numérique de ce problème et d'autres encore, mais pas ici, car il est question de montrer l'existence d'une classe particulière de stratifiés qui sont solutions des équations (8.39). En fait, quoi que de solution difficile, le système (8.39) a une structure particulière et simple: il est constitué de 4 équations, dépendant de deux jeux de coefficients, b_k et c_k , ainsi que des angles $2\delta_k$ et $4\delta_k$. Mais sont les propriétés des coefficients b_k et c_k qui permettent de trouver des solutions facilement: en fait, la somme de ces coefficients est nulle, (8.33₂) et (8.33₃). En considérant cela et les (8.39) une condition suffisante pour avoir un stratifié quasi-homogène est que la séquence d'empilement soit formée par des groupes de couches, toutes avec la même orientation, ayant une somme nulle des coefficients b_k et c_k . Nous avons appelé groupe saturé un groupe de couches pour lequel la somme des b_k et c_k est nulle, à signifier qu'aucun autre pli ne peut être ajouté au groupe pour respecter la condition de quasi-homogénéité. Les solutions qui respectent cette condition suffisante de quasi-homogénéité nous les avons appelées quasi-triviales, à signifier le fait qu'une démarche de solution vraie et propre des (8.39) n'est pas nécessaire pour les avoir, car pour les trouver il suffit de rechercher des combinaisons opportunes des coefficients b_k et c_k , un peu comme pour la solution triviale d'une équation. En outre, quand on recherche ce genre de solutions, le nombre de conditions n'est plus 4, mais 2, et cela parce que dans les (8.39) il y bien 4 équations, mais seulement 2 groupes de coefficients.

Il faut souligner certaines propriétés importantes des solutions quasi-triviales: d'abord, il s'agit de solutions exactes, étant donné que leur recherche s'appuie sur des combinaisons de nombres entiers. Encore plus important, elles ne dépendent pas des orientations, qui ne sont pas fixées a priori: en effet, une solution quasi-triviale n'indique qu'une séquence où certains plis doivent avoir la même orientation, qui est libre et qui peut donc être fixée sur la base d'autres critères sans pour autant perdre la quasi-homogénéité. Pour chaque séquence quasi-triviale et pour une couche de base donnée, est donc infini le nombre de stratifiés avec propriétés élastiques différentes, mais tous quasi-homogènes. Ensuite, chaque solution quasi-triviale avec g groupes saturés provient toujours d'une autre solution avec $g-1$ groupes saturés: cela se produit lorsqu'à l'intérieur d'un groupe saturé il y a un autre sous-groupe dont la somme des b_k et c_k est également nulle. Une conséquence de ça est que si un stratifié n'a pas de solutions quasi-triviales avec g groupes différents, il n'aura pas non plus de solutions quasi-triviales avec un nombre de couches supérieur à g : ceci est un critère d'arrêt dans un algorithme de recherche des solutions quasi-triviales, mais en même temps il ne permet pas de prédire à l'avance ni le nombre maximum de groupes saturés ni la quantité de solutions quasi-triviales pour un stratifié à nombre de couches donné. Toutefois, nous avons pu montrer que le nombre maximum possible de groupes saturés, et donc d'orientations différentes, est inférieur à p .

Les propriétés ci-dessus ont été utilisées pour élaborer un algorithme de recherche des solutions quasi-triviales, nommé QT, qui est au fond un algorithme de recherche par énumération, voir à ce sujet, entre autres, Gürdal *et alii*, 1999. Avec ça, nous avons constitué une base de données des solutions quasi-triviales, dont on donne un compte rendu dans les Tab. 8.1 et 8.2.

Il vaut la peine de souligner que si on se borne à considérer seulement la somme des coefficients b_k , voire les deux premières des (8.39), on trouvera des solutions quasi-triviales au découplage, alors que si on considère seulement la somme des coefficients c_k , voire les deux dernières des (8.39), alors on obtiendra des stratifiés de type quasi-trivial avec C nul, donc avec les mêmes propriétés en membrane et flexion, mais couplés. Dans les deux cas, il faut s'attendre à un nombre plus grand de solutions par rapport au cas quasi-homogène, car on

a un nombre inférieur de conditions. En outre, on remarque immédiatement que les solutions découplées symétriques sont un cas particulier de solutions quasi-triviales; également, les solutions de Caprino et Crivelli-Visconti sont de type quasi-trivial.

N. plis	2 g. s.	3 g. s.	4 g. s.	5 g. s.	6 g. s.	7 g. s.	8 g. s.	9 g. s.	Total
4	1	-	-	-	-	-	-	-	1
5	-	1	-	-	-	-	-	-	1
6	-	1	-	-	-	-	-	-	1
7	-	1	1	-	-	-	-	-	2
8	1	-	1	-	-	-	-	-	2
9	-	1	2	1	-	-	-	-	4
10	-	4	-	1	-	-	-	-	5
11	-	-	6	4	1	-	-	-	11
12	1	4	9	-	1	-	-	-	15
13	-	-	14	20	6	1	-	-	41
14	-	22	17	17	-	1	-	-	57
15	-	-	5	111	48	9	1	-	174
16	-	29	168	48	29	-	1	-	275
17	-	-	1	458	471	90	12	1	1033
18	-	57	746	686	104	45	-	1	1639

Tab. 8.1. Nombre de solutions indépendantes de stratifiés découplés de type quasi-trivial (g.s. = groupes saturés).

N. plis	2 g. s.	3 g. s.	4 g. s.	5 g. s.	6 g. s.	Total
7	1 (1)	-	-	-	-	1 (1)
8	1	-	-	-	-	1
9	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-
11	3 (2)	-	-	-	-	3 (2)
12	1	-	-	-	-	1
13	2	2	-	-	-	4
14	-	2 (1)	-	-	-	2 (1)
15	2	2	-	-	-	4
16	5	3 (1)	-	-	-	8 (1)
17	15	8	-	-	-	23
18	-	5	-	-	-	5
19	30	22	-	-	-	52
20	30	9	1	-	-	40
21	31	13 (2)	-	-	-	44 (2)
22	17 (2)	98 (1)	13	2	-	130 (3)
23	95 (1)	499	-	-	-	594 (1)
24	140	26	1	-	-	167
25	163	2132	57	-	-	2352
26	54	1059 (2)	354 (3)	26 (2)	2	1495 (7)
27	86 (1)	918	256	21	1	1282 (1)
28	203	4789 (1)	871 (2)	33	6	5902 (3)
29	61	37747	7546	87	-	45441
30	53	5552	512 (3)	29	-	6146 (3)

Tab. 8.2. Nombre de solutions indépendantes de stratifiés quasi-homogènes de type quasi-trivial (g.s. = groupes saturés).

Les Tab. 8.1 et 8.2 montrent le nombre de solutions indépendantes: il s'agit des solutions qui sont à la fois mathématiquement et mécaniquement distinctes: on trouve les solutions qui sont mécaniquement distinctes simplement par numérotation croissante des groupes saturés, alors que nous avons défini comme mathématiquement distincte une solution quasi-triviale de laquelle ne dérive aucune autre solution quasi-triviale avec un nombre plus grand de groupes saturés. L'algorithme QT cherche d'abord toutes les solutions et ensuite il les dépouille pour

ne conserver que les solutions indépendantes. Cette phase peut s'avérer très longue pour des stratifiés à un nombre de couches grand, car il faut souvent travailler avec la mémoire de masse de l'ordinateur, étant parfois énorme le nombre de solutions; à titre d'exemple, le 29 couches quasi-homogène a 45441 solutions indépendantes qui font partie d'un ensemble total de 81274 solutions. Des exemples de solutions quasi-triviales sont données sur les articles en annexe.

En ne comptant que les solutions indépendantes, le nombre de stratifiés à empilement symétrique est extrêmement faible: on a une seule solution symétrique pour le cas découplé, et c'est évidemment celle où l'orientation change à chaque couche, alors que pour le quasi-homogène le nombre de solutions symétriques est donné en Tab. 8.2, pour chaque cas, entre parenthèses. C'est intéressant de remarquer que le nombre de solutions symétriques est tellement faible qu'on peut les considérer comme des exceptions plutôt que comme la règle, contrairement à ce qu'on pense souvent; les résultats montrent en effet que se borner à ne considérer que les empilements symétriques peut être une sérieuse limitation pour les applications.

La base de données des solutions quasi-triviales est assez vaste pour couvrir pratiquement toutes les exigences des applications techniques; toutefois, nous nous sommes posés la question si les solutions de ce type étaient la totalité des solutions possibles; nous avons pu montrer, d'abord par voie synthétique, que cela n'est pas le cas, et que d'autres solutions peuvent exister, voir l'article en annexe paru sur *International Journal of Solids and Structures*. Ensuite, dans un travail paru en 2001 de Vincenti et alii, nous avons trouvé des solutions exactes non quasi-triviales pour des stratifiés composés de plis en tissu équilibré, voir le § 8.8.

Dans la présentation ci-haut seulement la partie élastique a été considérée; un simple regard aux équations (8.22), (8.24), (8.26) et (8.28) nous montre qu'un général le nombre de solutions quasi-homogènes de type thermoélastique est supérieur à celui de type élastique, car dans ce dernier cas on a un nombre double de conditions à respecter (le problème thermoélastique, étant géré par des tenseurs du second ordre, manque des conditions dépendant de $4\delta_k$). Toutefois, cela n'est pas vrai pour les solutions quasi-triviales, car même dans le cas thermoélastiques on travaille sur les mêmes deux groupes de coefficients à la fois, b_k et c_k . Les ensembles des solutions quasi-triviales de type élastique et thermoélastiques coïncident, et cela aussi bien pour les stratifiés découplés que pour les quasi-homogènes.

Il faut souligner maintenant un des intérêts, parmi d'autres, des solutions quasi-homogènes de type quasi-trivial: lorsqu'il s'agit de faire de l'optimisation des propriétés élastiques de flexion, utiliser l'ensemble des solutions quasi-triviales, possible car les orientations ne sont pas fixées *a priori*, permet de travailler sur les propriétés de membrane plutôt que sur celles de flexion, voir sur le tenseur \mathbf{A} , qui a une structure algébrique plus simple de \mathbf{D} , car il ne dépend pas des coefficients d_k . Nous avons pu exploiter cette stratégie à plusieurs reprises, comme relaté dans la suite de ce texte.

8.7 La méthode polaire dans la recherche de stratifiés isotropes.

La recherche de stratifiés isotropes a reçu une certaine attention de la part des scientifiques; cela tient à plusieurs raisons, dont une en particulier est la recherche de plaques à faible poids devant faire face à plusieurs conditions de chargement: l'emploi de stratifiés isotropes devient alors intéressant. Le premier travail dans cette direction, et peut être le plus connu, est celui de Werren et Norris, 1953, qui donne la fameuse règle pour fabriquer des stratifiés isotropes en membrane: une condition suffisante est de disposer autant de plis identiques à des

directions intercalées d'un angle constant, avec un minimum de trois directions. C'est encore aujourd'hui la plus utilisée des règles pratiques pour obtenir l'isotropie. Les séquences les plus utilisées sont alors celles à trois ou quatre orientations, $0^\circ/60^\circ/120^\circ$ ou $0^\circ/45^\circ/90^\circ/135^\circ$.

Toutefois, ce type de solution laisse des problèmes non résolus: d'abord, le découplage de la plaque. Ce problème est normalement résolu en prenant des empilements symétriques; il faut remarquer que les solutions de Werren et Norris, ne s'occupant que de l'isotropie en membrane, ne peuvent pas fixer l'ordre d'empilement, comme pour toute autre solution ne concernant que des propriétés membranales; cela se constate immédiatement à partir des équations (8.21), où toute dépendance du tenseur \mathbf{A} des z_k a disparue. Cette stratégie limite alors la possibilité de trouver des solutions isotropes aux stratifiés à nombre pair de couches, avec un minimum de six plis. En outre, la règle de Werren et Norris laisse sans solution le problème de l'isotropie en flexion.

D'autres chercheurs se sont alors appliqués à trouver des solutions nouvelles: on cite par exemple Tsai et Hahn, 1980, qui ont proposé un stratifié à 24 couches parfaitement isotrope en membrane et presque isotrope en flexion. Les premiers à avoir proposé un stratifié totalement isotrope semblent être Verchery et Vong, 1986, qui donnent une solution exacte à 48 couches; nous remarquons qu'on appelle totalement isotrope un stratifié découplé avec \mathbf{A} et \mathbf{D} isotropes. Ensuite, Kandil et Verchery ont proposé en 1988 une méthode pour trouver des stratifiés avec \mathbf{A} isotrope, \mathbf{B} nul et presque isotropes en flexion; dans ce même article, ils proposent une mesure non dimensionnelle de la presque isotropie. En 1990, Fukunaga propose une méthode pour trouver des empilements totalement isotropes, et montre 6 solutions différentes avec 40 plis et 4 orientations; le découplage est obtenu en utilisant les séquences de Caprino et Crivelli-Visconti. Wu et Avery montrent en 1992, en utilisant une méthode proposée par Wu en 1979, l'existence de stratifiés symétriques totalement isotropes avec 36 couches; la contrainte due à la symétrie leur a en fait empêché de trouver des stratifiés isotropes avec un nombre de couches plus petit. Paradies, 1992, propose une méthode, en partie dérivée de l'approche de Fukunaga, pour créer des stratifiés isotropes en membrane ou en flexion, et montre des solutions avec 16 couches identiques ou 12 couches différentes; par une approche numérique, Grédiac trouve en 1998 une très bonne solution approximée de stratifié totalement isotrope à 12 couches identiques, avec des orientations non usuelles.

Nous nous sommes engagés dans la recherche sur l'isotropie avec l'espoir de trouver des nouvelles règles simples et exactes pour la fabrication des stratifiés isotropes; ce paragraphe est donc un compte rendu succinct de ces études, qui ont fait l'objet de quelques communications, notamment avec Person, 2000 et 2002, et surtout d'un papier paru en 2002 sur *Composite Structures*. Tout ce qui suit concerne les stratifiés à plis identiques, auxquelles nous nous sommes bornés, pour les mêmes raisons évoquées pour les stratifiés quasi-homogènes. Dans ce cas de figure, les conditions d'isotropie totale sont

$$\begin{aligned}\bar{R}_0 &= \bar{R}_1 = 0, \\ \hat{R}_0 &= \hat{R}_1 = 0, \\ \tilde{R}_0 &= \tilde{R}_1 = 0;\end{aligned}\tag{8.40}$$

ces équations, compte tenu des relations (8.21), (8.22) et (8.24), se traduisent, pour un pli de base avec R_0 et R_1 différents de 0, dans les relations

$$\begin{aligned}\sum_{k=-p}^p e^{4i\delta_k} &= 0, \\ \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k} &= 0;\end{aligned}\tag{8.41}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-p}^p d_k e^{4i\delta_k} &= 0, \\ \sum_{k=-p}^p d_k e^{2i\delta_k} &= 0;\end{aligned}\tag{8.42}$$

et dans les deux premières des (8.39), qui assurent le découplage. Si seulement les (8.41) sont prises en compte, alors on ne considère que l'isotropie de membrane, tandis que les (8.42) définissent l'isotropie en flexion. Si le matériau de base a une symétrie autre que l'orthotropie définie par la (7.111), alors seulement une partie des ces équations est à prendre en compte: si R_0 est nul, seulement les équations fonction de $2\delta_k$, si R_1 est nul seulement celles fonction de $4\delta_k$. Dans ce cas il faut s'attendre à un nombre plus grand de solutions, car les conditions à respecter diminuent, voir par exemple Grédiac, 2001. On reviendra dans le paragraphe suivant sur le cas de stratifiés composés de plis en tissu équilibré, qui ont R_1 nul. Remarquons en passant que si les (8.41) et (8.42) sont respectées, on a automatiquement

$$\check{R}_0 = \check{R}_1 = 0,\tag{8.43}$$

ce qui montre que l'isotropie de \mathbf{A} et \mathbf{D} implique la quasi-homogénéité, même sans la condition de découplage (on peut fabriquer des stratifiés complètement isotropes mais couplés, avec couplage anisotrope).

Les (8.41) ont une interprétation géométrique simple; pour mieux la comprendre, considérons le cas où les plis sont orientés selon n_g orientations différentes, et que selon la direction j il y a n_j couches; alors les (8.41) deviennent

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n_g} n_j e^{4i\delta_j} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_g} n_j e^{2i\delta_j} &= 0;\end{aligned}\tag{8.44}$$

on reconnaît facilement que chacune de ces deux équations est l'équivalent algébrique de la règle géométrique du polygone d'équilibre des vecteurs; deux polygones doivent être considérés à la fois, qui ont des orientations différentes des vecteurs, dans le premier cas doubles que dans l'autre. Les longueurs des vecteurs sont les coefficients n_j , à savoir les nombres de plis dans chaque groupe d'orientation. Le respect de chacune des conditions équivaut graphiquement à la fermeture du polygone des vecteurs correspondant. On se rend vite compte que la règle de Werren et Norris correspond à des polygones réguliers, mais en effet il est possible de fermer des polygones non réguliers aussi, ce qui veut dire avoir un nombre de couches par direction qui n'est pas constant et des orientations qui ne sont pas décalées d'un angle fixe.

Pour l'isotropie de flexion on peut faire un raisonnement semblable, mais à deux différences près: les équations (8.42) dépendent des coefficients d_k , ce qui ne permet pas d'avoir des vecteurs des polygones de longueur constante pour un nombre constant de couches par direction, et donc la règle de Werren et Norris n'est plus valable, et puis les plis ne peuvent pas prendre une position quelconque sur l'épaisseur, par la présence des coefficients d_k , comme c'était le cas pour l'isotropie de membrane. Donc, la technique de l'empilement symétrique ne peut pas être utilisée pour assurer le découplage, qui doit alors rentrer dans la stratégie de solution.

Dans le travail avec Person, dont on donne ici une présentation et une procédure de calcul différentes, nous avons cherché une stratégie analytique pour trouver des solutions isotropes en membrane; si on se borne à des stratifiés à 4 orientations, avec

$$n_2 = n_4, \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \delta_4 = \pi - \delta_2, \quad (8.45)$$

ce qui veut dire que le second polygone des (8.44) est un trapèze isocèle, les (8.44) deviennent

$$n_1 = n_2 \gamma_1(x), \quad (8.46)$$

$$n_3 = n_2 \gamma_2(x),$$

avec

$$\gamma_1(x) = (1 - 2x)(1 + x),$$

$$\gamma_2(x) = (1 + 2x)(1 - x), \quad (8.47)$$

$$x = \cos 2\delta_2,$$

alors que le nombre total de couches est

$$n = 4n_2(1 + x)(1 - x). \quad (8.48)$$

Etant les n_i des nombres de couches, donc des entiers, il faut que les paraboles γ_1 et γ_2 soient positives, ce qui implique la condition

$$|x| \leq \frac{1}{2}, \quad (8.49)$$

et naturellement il faut rechercher les x pour lesquelles γ_1 et γ_2 prennent des valeurs entières.

Une représentation graphique du problème est donnée en figure 8.2; les courbes γ_1 et γ_2 sont tracées seulement pour les valeurs positives de la variable, car le problème est symétrique par rapport à $x=0$. La fonction

$$\gamma(x) = \frac{n_1}{n_3} = \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)} = \frac{(1+x)(1-2x)}{(1-x)(1+2x)}, \quad (8.50)$$

permet de calculer, si inversé, la variable x :

$$x = \frac{1 + \gamma + \sqrt{9\gamma^2 - 14\gamma + 9}}{4(\gamma - 1)} \quad (8.51)$$

La stratégie de solution est la suivante: on fixe deux valeurs n_1 et n_3 , avec, voir Fig. 8.2, $n_1 < n_3$; des (8.50), (8.51) et par les (8.47) on a alors δ_2 , γ_1 et γ_2 . De la (8.46₁) ou, de façon équivalente, de la (8.46₂) on tire alors la valeur de n_2 : la solution ainsi trouvée est acceptable seulement si n_2 est un entier, autrement il faut la rejeter.

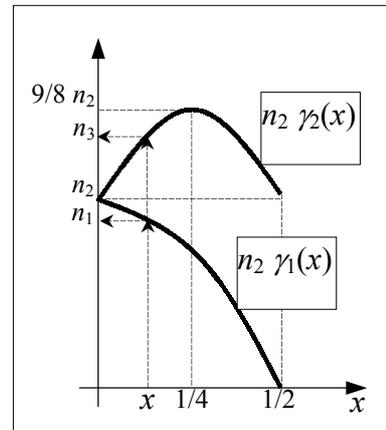


Fig. 8.2. La construction graphique (8.46).

Nous avons réalisé un logiciel d'exploration des solutions de ce type, basé sur une approche par énumération; le balayage des solutions est extrêmement efficace, on obtient un grand nombre de solutions très rapidement. Une synthèse des résultats est dans le Tab. 8.3.

Cette méthode ne s'appuie que sur des nombres entiers, c'est pourquoi elle peut être considérée comme une méthode exacte. Toutefois, tous les empilements qu'on a trouvés ne peuvent pas être découplés, et en plus il s'agit d'empilements a grand nombre de couches. Cependant, des séquences isotropes en membrane et découplées peuvent être obtenues en

redoublant, symétriquement, une solution. En effet l'intérêt de cette stratégie était surtout celui de montrer qu'il est possible de sortir du cadre étroit de la règle de Werren et Norris, sans devoir faire appel à des méthodes de recherche numérique classiques.

n_1	$n_2 (=n_4)$	n_3	n	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
1	1	1	4	0	45	90	135
5	8	9	30	0	37.761	90	142.239
4	9	10	32	0	35.264	90	144.736
7	9	10	35	0	40.203	90	139.797
7	25	27	84	0	33.211	90	146.789
22	25	27	99	0	42.13	90	137.87
13	25	28	91	0	36.271	90	143.729
18	25	28	96	0	39.232	90	140.768
11	32	35	110	0	33.988	90	146.012
27	32	35	126	0	41.41	90	138.59
10	49	52	160	0	32.312	90	147.688
45	49	52	195	0	42.952	90	137.048
19	49	54	171	0	34.538	90	145.462
40	49	54	192	0	40.893	90	139.107
27	49	55	180	0	36.699	90	143.301

Tab. 8.3. *Stratifiés à 4 orientations avec A isotrope (les angles sont en degrés).*

Une autre idée dans la recherche des stratifiés isotropes, a été celle d'exploiter l'ensemble des solutions quasi-triviales: comme les orientations des couches dans les solutions quasi-triviales sont libres, l'idée est celle d'appliquer la règle de Werren et Norris à ce type de solutions. Si l'on considère alors l'ensemble des solutions quasi-triviales découplées, on cherchera un empilement en mesure de respecter la règle citée, et donc avec un nombre de groupes saturés supérieure à trois et avec un nombre identique de couches pour chaque groupe saturé. Si alors on fixe les orientations des groupes selon la règle de Werren et Norris, on obtiendra automatiquement l'isotropie de membrane et le découplage, et comme la plupart des stratifiés de type quasi-trivial est non symétrique, on aura des stratifiés non symétriques, découplés et isotropes en membrane. Mais plus importante est l'application de cette même stratégie à l'ensemble des solutions quasi-triviales de la quasi-homogénéité: dans ce cas, la quasi-homogénéité entraîne aussi l'isotropie en flexion. Voici une application de ce qui avait été anticipé plus haut: l'utilisation de la quasi-homogénéité, surtout sur l'ensemble des solutions quasi-triviales, permet de travailler sur les propriétés de membrane pour obtenir les mêmes résultats en flexion. Dans ce cas, cette approche nous a permis d'utiliser la règle de Werren et Norris qui est valable pour les propriétés de membrane, non pas pour celles de flexion. Des exemples des solutions que nous avons pu trouver avec cette stratégie sont montrés dans l'article en annexe, paru en 2002 sur la revue *Composite Structures*. Ici on remarque seulement que nous avons pu trouver 5 séquences totalement isotropes et non symétriques avec 18 couches: elles sont aujourd'hui les solutions totalement isotropes et exactes, composées de couches quelconques, à plus faible nombre de couches.

8.8 Certaines solutions pour les stratifiés composés de plis à symétrie carrée.

Dans les paragraphes précédents on a traité de problèmes particuliers concernant la conception des stratifiés, mais dans tout ce qu'on a montré les propriétés de la couche de base n'entrent pas en jeu: toutes les solutions sont valables pour un pli quelconque, même complètement anisotrope. Il est donc tout à fait naturel de se poser la question si l'utilisation

de couches de base ayant des symétries particulières ne donne pas des solutions supplémentaires. D'autres ont considéré ce même type de problème, par exemple Grédiac, 2001.

L'étude menée dans ce sens, et qui fait partie de la thèse de Vincenti, porte sur l'emploi de plis ayant la symétrie du carré. C'est le cas, très important dans les applications, des couches renforcées par un tissu équilibré, c'est à dire ayant le même renfort en chaîne et trame. Dans ce cas de figure, comme déjà anticipé, tous les problèmes de conception vus en précédente se simplifient, parce que la condition

$$R_{1k} = 0 \quad \forall k, \quad (8.52)$$

qualifiant la circonstance que tous les plis, même si différents, ont la symétrie du carré, rend automatiquement vérifiés toutes les conditions qui dépendent de $2\delta_k$. Par exemple, on a déjà évoqué au § 8.2 que la condition (8.52) assure que les tenseurs **A**, **B**, **C** et **D** ont eux aussi au moins la symétrie du carré.

Si on revient au problème de la recherche de stratifiés isotropes en membrane, on voit facilement qu'une condition suffisante est celle de disposer un égal nombre de couches en deux directions tournées de $\pi/4$ l'une par rapport à l'autre: en fait, dans les (8.41) la deuxième équation est automatiquement vérifiée par la (8.52), et la première est satisfaite par la condition d'empilement définie ci-dessus. Voici un autre exemple, d'ailleurs bien connu, qui montre que l'utilisation de symétries particulières de la couche de base augmente les possibilités de trouver des stratifiés ayant des caractéristiques données.

Avec Vincenti, nous avons considéré encore une fois les stratifiés découplés et quasi-homogènes, dans le but de trouver des solutions ne faisant pas partie de l'ensemble quasi-trivial. D'ailleurs, voir aussi l'article en annexe paru en 2001 sur *International Journal of Solids and Structures*, il faut souligner que l'emploi de couches ayant une symétrie du carré, ainsi que de couches orthotropes selon la condition (7.112), ne donne pas de solutions quasi-triviales additionnelles: en fait, dans l'un de ces deux cas, deux des équations (8.39), la première et la troisième pour les couches ayant R_0 nul, la deuxième et la quatrième pour celles à symétrie carrée, sont automatiquement vérifiées, mais les deux autres contiennent encore les deux ensembles de coefficients b_k et c_k , et donc les solutions quasi-triviales sont exactement les mêmes que pour une couche anisotrope.

Pour ce qui concerne le découplage, nous avons considéré les stratifiés à 4 et 5 couches, pour lesquels nous avons pu trouver toutes les solutions de façon analytique, voir Vincenti *et alii*, 2001, en annexe, pour le détail des calculs. En particulier, pour le cas des 4 couches, on trouve que la solution non symétrique est du type:

$$\begin{aligned} \cos 4\delta_{-2} &= -\frac{5 \cos 4\delta_2 - 3}{3 \cos 4\delta_2 - 5}, \\ \delta_{-1} &= 0, \\ \cos 4\delta_1 &= \frac{-9 \cos^2 4\delta_2 + 3 \cos 4\delta_2 + 4}{3 \cos 4\delta_2 - 5}; \end{aligned} \quad (8.53)$$

les (8.53) montrent une solution sous forme de fonction: l'empilement est fixé pour une valeur de l'orientation δ_2 donnée. On a donc un nombre infini de solutions découplées à 4 couches, et elles ne sont pas forcément symétriques. Une solution semblable, outre celle symétrique, on la trouve pour le 5 couches:

$$\delta_{-1} = 0,$$

$$\delta_0 = \text{quelconque},$$

$$\cos 4\delta_1 = \frac{8 \cos^2 4\delta_{-2} + 4 \cos 4\delta_{-2} - 3}{4 \cos 4\delta_{-2} + 5}, \tag{8.54}$$

$$\cos 4\delta_2 = \frac{5 \cos 4\delta_{-2} + 4}{4 \cos 4\delta_{-2} + 5},$$

cette fois nous avons exprimé la solution en fonction de l'orientation δ_2 ; à remarquer que la couche 0, celle en correspondance du plan moyen, n'influence pas la solution, et cela parce que b_0 est nul, (8.29). En Fig. 8.3 et 8.4 on montre ces solutions sous forme de graphique.

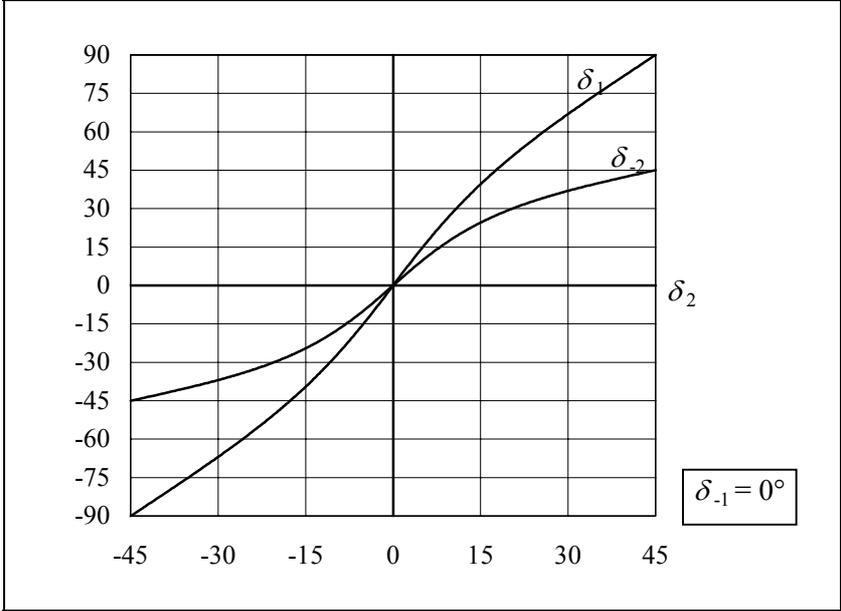


Fig. 8.3. Solution pour le 4 couches découpé avec plis à symétrie carrée.

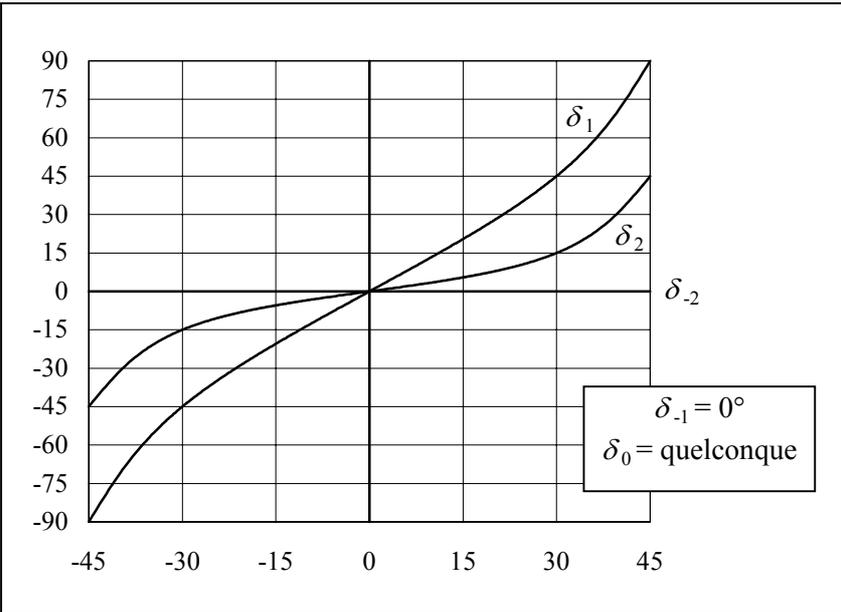


Fig. 8.4. Solution pour le 5 couches découpé avec plis à symétrie carrée.

Pour le cas quasi-homogène on a considéré d'abord le 5 couches, pour lequel on a pu démontrer qu'il n'y a pas de solutions quasi-homogènes, et ensuite le 6 couches; dans ce cas les équations à résoudre sont

$$\begin{cases} e^{4i\delta_1} - e^{4i\delta_{-1}} + 3e^{4i\delta_2} - 3e^{4i\delta_{-2}} + 5e^{4i\delta_3} - 5e^{4i\delta_{-3}} = 0, \\ 4e^{4i\delta_1} + 4e^{4i\delta_{-1}} + e^{4i\delta_2} + e^{4i\delta_{-2}} - 5e^{4i\delta_3} - 5e^{4i\delta_{-3}} = 0; \end{cases} \quad (8.55)$$

nous n'avons pas pu trouver une forme analytique à la solution des (8.55), et donc nous avons tracé cette solution sous forme de graphique, présenté en Fig. 8.5. Les solutions possibles sont deux, et nous avons observé qu'il s'agit de solutions anti-symétriques: c'est pourquoi les courbes de la Fig. 8.5 sont tracées par rapport au repère $\delta_{-3} + \delta_3 = 0$ et comme fonctions de $(\delta_3 - \delta_{-3})/2$: pour une valeur choisie de $(\delta_3 - \delta_{-3})/2$, les ordonnées des courbes donnent $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_1$ et δ_2 ; les flèches sur les courbes sont mises pour distinguer entre les deux intersections sur la même courbe.

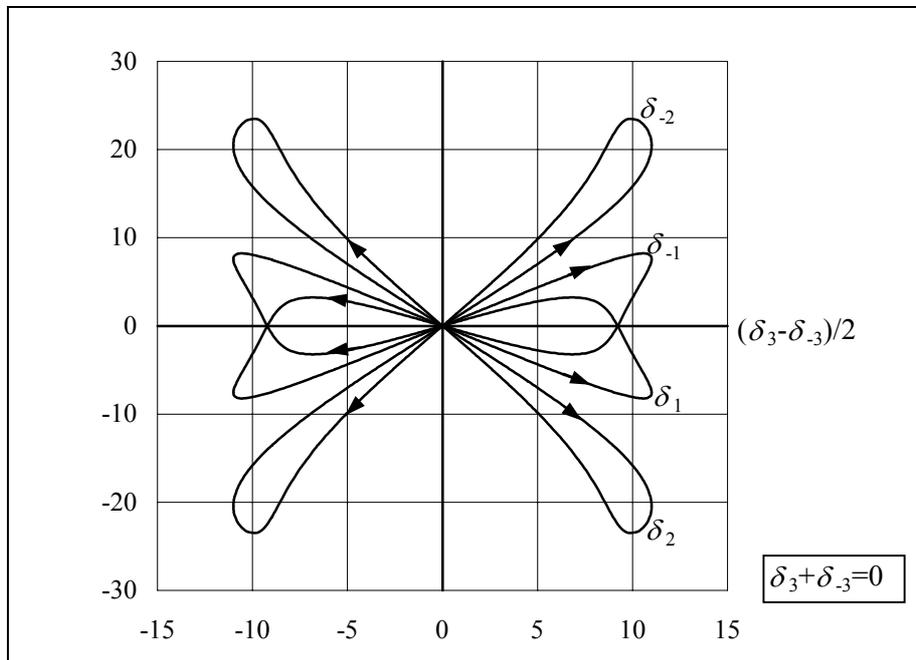


Fig. 8.5. Solutions quasi-homogènes pour un 6 couches avec plis à symétrie carrée.

A part les possibles applications, les solutions qu'on a montrées dans ce paragraphe sont intéressantes pour deux aspects: elles montrent que les solutions à certains problèmes de conception sont en forme fonctionnelle, et non pas ponctuelle, ce qui peut avoir des retombées dans les stratégies de recherches des solutions par des méthodes numériques, et puis elles représentent des cas où la solution à un problème inverse en élasticité a pu être donnée en forme exacte et complète, ce qui est en soi assez rare.

8.9 L'orthotropie et la méthode polaire: une recherche à ses débuts.

Les solutions du paragraphe précédent ne concernent que les stratifiés avec des plis à symétrie carrée; mais celle-ci n'est pas la seule symétrie possible pour une couche anisotrope, § 7.9. A part le cas, banal, des couches isotropes, deux sont encore les cas à traiter: celui de l'orthotropie définie par la (7.111) et celui de l'orthotropie définie par la (7.112). Si on laisse de côté, pour le traiter au chapitre 12, le deuxième cas, il nous reste le premier, auquel appartiennent toutes les couches avec renfort unidirectionnel et les tissus non équilibrés. Dans

ce domaine, nos recherches sont encore au début. La raison est essentiellement due au fait que, tandis que la condition de symétrie carrée, ainsi que la (7.112), s'expriment très facilement en polaire, et qu'elles ont des conséquences immédiates et importantes dans les équations, la (7.111) n'a pas ces caractéristiques: elle est une condition moins efficace, pour ainsi dire, dans les équations. Tout naturellement, donc, nous avons d'abord exploité les conditions les plus favorables, et la partie du travail concernant les conséquences de l'orthotropie (7.111) sur les propriétés des stratifiés reste encore à faire.

Néanmoins, nous avons traité quelques cas concernant l'orthotropie des stratifiés: Valot montre dans sa thèse, 2002, des règles simples pour avoir l'orthotropie d'un stratifié lorsque celui-ci est composé par des plis qui ont un couplage intrinsèque. Pour un problème particulier concernant une recherche expérimentale faite dans notre laboratoire, j'ai été amené à considérer la possibilité de réaliser des stratifiés orthotropes en membrane et flexion, avec deux seules orientations et un nombre différent de plis identiques dans les deux directions. La méthode polaire s'avère assez utile dans ce cas: encore une fois, pour obtenir l'orthotropie totale et le découplage, la stratégie a été celle d'utiliser les solutions quasi-homogènes de type quasi-trivial. Il est alors suffisant d'assurer l'orthotropie en membrane, chose plus simple que celle de flexion, car celle-ci, ainsi que le découplage, sera obtenue automatiquement. Si l'on choisit, ce qui est toujours possible, le repère matériel de la couche de base en sorte que Φ_1 soit nul, et si n_1 et n_2 sont les nombres de couches aux directions δ_1 et δ_2 , on a, (8.21), que

$$\begin{aligned}\bar{R}_0 e^{4i\bar{\Phi}_0} &= h_L R_0 e^{4i\Phi_0} (n_1 e^{4i\delta_1} + n_2 e^{4i\delta_2}), \\ \bar{R}_1 e^{2i\bar{\Phi}_1} &= h_L R_1 e^{2i\Phi_1} (n_1 e^{2i\delta_1} + n_2 e^{2i\delta_2});\end{aligned}\tag{8.56}$$

si alors on impose les deux conditions d'avoir un axe d'orthotropie sur l'axe x , et justement la condition d'orthotropie (7.111), on obtient les deux conditions

$$\begin{cases} n_1 \sin 2\delta_1 + n_2 \sin 2\delta_2 = 0, \\ n_1 \sin 4(\Phi_0 + \delta_1) + n_2 \sin 4(\Phi_0 + \delta_2) = 0. \end{cases}\tag{8.57}$$

Ces deux équations peuvent être résolues numériquement, mais on constate facilement que si $n_1=n_2$, l'empilement *angle-ply* est la solution générale, alors que si la couche de base est orthotrope selon la (7.111), le seul empilement possible pour $n_1 \neq n_2$ est le *cross-ply*. Si par contre la couche de base n'est pas orthotrope, d'autres solutions sont possibles, en fonction des valeurs de n_1 , n_2 et Φ_0 ; mais cela reste un résultat à caractère plutôt académique.

8.10 Un commentaire final en guise de conclusion.

Ce chapitre a montré une série de résultats que notre équipe a obtenue dans le domaine de la conception des stratifiés ayant des propriétés élastiques données; les résultats les plus importants, surtout en terme d'applications, sont à notre avis la découverte des solutions quasi-triviales et les empilements totalement isotropes. Toutefois, un point caractérise ces recherches: nous avons abordé différents problèmes en cherchant, par la méthode polaire, des solutions exactes, sans utiliser des calculs numériques (on ne peut pas considérer, à proprement parler, comme approche numérique l'exploration de solutions par énumération sur un ensemble discret et avec des variables entières).

Cette approche a été, chronologiquement et logiquement, notre première démarche, mais, bien que les résultats soient de notre point de vue satisfaisants, elle a montré vite ses limites: la forte non-linéarité des équations qu'on rencontre typiquement dans les types de problèmes que nous avons abordés oblige rapidement à passer à une approche numérique; nous pouvons

nous estimer déjà assez "heureux" d'avoir pu trouver les solutions dont on a parlé ci-dessus. Le parcours de notre recherche apparaît donc logique et naturel: on a abordé de façon synthétique tous les problèmes qui étaient à notre portée, puis on a spécialisé ces mêmes problèmes en introduisant des conditions supplémentaires, notamment sur les symétries de la couche de base, afin de réduire le nombre de conditions à respecter et élargir ainsi l'ensemble des solutions. Mais finalement, dans la perspective de s'attacher à un plus grand nombre de problèmes, le recours aux méthodes numériques a été inévitable.

Nous avons donc commencé une réflexion assez approfondie, qui est à l'origine du travail de thèse de Vincenti, pour établir non seulement dans quelle direction aller, quels problèmes aborder, mais aussi comment, par quels moyens et par quelles méthodes. Notre idée était celle de repenser la conception des stratifiés dès le début, pour mieux comprendre les exigences et les problèmes les plus importants, et en même temps pour essayer d'exploiter au mieux notre arme la plus efficace, la méthode polaire. L'idée de la conception des stratifiés comme problème d'optimum est venue assez tôt et tout à fait naturellement; mais pour faire quelque chose de valable, une recherche approfondie en littérature, sur l'état de l'art en matière de conception de stratifiés, s'est imposée, ainsi que l'acquisition d'un certain nombre d'outils classiques en optimisation. Dans les chapitres qui suivent ce parcours de recherche est synthétisé dans ses étapes fondamentales.

9.1 Introduction.

Comme anticipé dans le § 8.10, notre recherche s'est tournée vers la conception des stratifiés. Nous avons eu tout de suite la nécessité de faire un état de l'art, dans le but de voir qu'ils étaient les problèmes les plus fréquemment traités et intéressants, ainsi que de prendre connaissance des méthodes de solution utilisées; le paragraphe suivant est une synthèse de cette recherche.

Ce travail bibliographique, et la critique que nous en avons faite, nous a adressés vers une approche nouvelle et originale, qui est présentée dans le § 9.3; elle a comme points distinctifs l'unification d'un certain nombre de problèmes de conception dans une forme unique et typique de l'optimisation structurelle, ainsi que l'utilisation de la méthode polaire, qui permet, entre autre, de donner une caractérisation de certaines propriétés physiques en terme de propriétés de minimum, § 9.8. Il vaut la peine de souligner d'ores et déjà que cette approche à la conception des stratifiés n'est pas exhaustive, et elle ne peut pas l'être, compte tenu de l'ampleur du domaine; toutefois, elle constitue une démarche nouvelle et efficace dans l'interprétation et dans la recherche des solutions.

9.2 Un état de l'art en conception des stratifiés.

La conception des matériaux composites n'est qu'une des dernières frontières d'une discipline plus générale, l'optimisation structurelle. Ce n'est pas du ressort de ce texte de présenter une introduction historique à l'optimisation structurale, mais on ne rappellera que, presque dès le début de la mécanique, les savants ont identifié des problèmes de conception avec une exigence d'optimisation. Il vaut seulement la peine de citer des contributions majeures, comme celle de G. Galilei, qui en 1638 est le premier, dans son célèbre *Dialoghi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, véritable acte fondateur de la mécanique des structures et des solides déformables, à traiter et résoudre un problème typique de l'optimisation structurelle: la conception d'une poutre console d'égale résistance, voire de poids minimum, inspiré dans ce but par ses visites à l'arsenal de Venise. Dans ce même domaine des solides d'égale résistance, Girard publie en 1798 un traité fondamental, voir aussi Benvenuto, 1981 et 1990. C'est Lagrange, en 1770, le premier à aborder un problème isopérimétrique, à savoir la recherche de la forme à donner à une colonne afin d'en maximiser la charge critique de stabilité, tout en gardant fixes la longueur, le volume et les conditions d'appui. Sa solution était faussée par une erreur de calcul, et ce ne fut que Clausen, en 1851, à donner la solution exacte pour une colonne de section circulaire, voir aussi Banichuk, 1983.

L'optimisation est devenue une science complète et une discipline de choix pendant ces dernières décennies et cela grâce aux progrès faits dans le domaine de la solution des problèmes inverses et à cause des exigences de plus en plus poussées dans les applications de haut niveau. Pour une introduction à cette discipline, on peut consulter l'excellent article de Olhoff et Taylor, 1983, ou encore les ouvrages de Banichuk, 1983 et 1986, Fletcher, 1987, Arora, 1989, Ciarlet, 1994. De surcroît, le progrès des performances des modernes moyens de calcul a provoqué et favorisé une synergie décisive dans la matière: rendant possible la solution numérique d'un nombre de plus en plus grand de problèmes, a encouragé les chercheurs à en aborder d'autres, en repoussant les frontières de la matière et en rendant

possibles de nouvelles méthodes de calcul, complètement innovantes par rapport au cadre classique de la mécanique: systèmes experts et algorithmes évolutifs en sont deux exemples.

L'optimisation des matériaux composites et des structures en composite rentre dans la catégorie de l'optimisation structurale, et en hérite les caractéristiques et les difficultés, tout en apportant à la matière des contenus nouveaux, ainsi que des problématiques nouvelles et insolites pour la discipline. En fait, la véritable différence entre l'optimisation avec un matériau classique et celle avec un matériau composite se trouve dans la plus grande richesse de celui-ci: ses propriétés élastiques et de résistance dépendent d'un plus grand nombre de paramètres, qui peuvent être optimisés par rapport aux exigences du problème à traiter, ce qui donne aux concepteurs une plus grande liberté, mais aussi une difficulté accrue par rapport aux matériaux traditionnels, pour lesquels le processus d'optimisation se borne souvent à une optimisation dimensionnelle ou de forme, pas du matériau proprement dit.

C'est donc l'optimisation du matériau que les nouveaux matériaux font naître comme nouvelle branche de l'optimisation structurale. Un exemple pour mieux comprendre: un problème typique de l'optimisation structurale est celui du poids minimum, dans lequel on veut minimiser le poids d'une structure tout en gardant fixe sa rigidité ou sa résistance. Pour un stratifié à nombre de couches donné, c'est le problème dual qui se présente souvent à l'attention du concepteur: maximiser la rigidité ou la résistance, en faisant varier les orientations des couches: dans le premier cas il s'agit d'une minimisation de poids à rigidité donnée, dans le deuxième il faut maximiser la rigidité tout en gardant fixe le poids.

Ce n'est qu'un exemple, car les problématiques nouvelles soulevées par les matériaux composites ne sont limitées que par les possibilités offertes par ceux-ci. Même si, comme ce texte fait le plus souvent, on se borne à considérer l'optimisation du matériau plutôt que celle d'une structure en composite proprement dite, les problématiques sont très nombreuses, et une leur classification paraît une mission très difficile. Nous avons pu consulter une littérature assez vaste, présentée presque entièrement dans la bibliographie de cette partie, et étalée sur les dernières trois décennies, mais elle reste sans doute incomplète, vu l'ampleur du domaine. De surcroît, en faire une classification est très difficile, car les articles se distinguent par plusieurs aspects: nature du problème, méthode de solution, contraintes imposées sur un même problème, choix des variables, théories et hypothèses prises en compte etc. De toute façon, on donne ci de suite une rapide présentation des articles cités les plus remarquables. Pour les ouvrages d'introduction à la matière, on peut citer celui de Gürdal *et alii*, 1999, alors qu'un excellent état de l'art, avec une bonne bibliographie, est celui de Abrate, 1994; l'article de Vanderplaats et Weisshar, 1989, contient une analyse des logiciels disponibles et propose un *benchmark* pour la conception optimale des stratifiés. Il faut dire que classer les articles est presque impossible, tellement nombreux sont les paramètres à prendre en ligne de compte: variables, contraintes, objectifs, méthodes, cadre théorique, hypothèses simplificatrices. Le petit compte rendu qui suit aurait pu être présenté de façon différente, car chaque article est à considérer sous plusieurs points de vue, et parfois certains proposent des innovations sur plusieurs fronts. Nous avons retenu des points considérés essentiels et caractéristiques, mais d'autres auraient pu être pris en compte.

Parmi les travaux à caractère théorique, visant à trouver des propriétés générales, on peut citer la thèse de Girard, 1973, sur une méthode variationnelle pour l'optimisation en rigidité des plaques en composite, les travaux de Sacchi-Landriani *et alii*, 1991 et 1993, sur l'optimisation des direction d'orthotropie, de Cheng et Pedersen, 1997, sur l'emploi des principes d'extremum pour l'optimisation de l'orientation du matériau. Un certain nombre de travaux sur la conception des stratifiés porte sur l'utilisation des *lamination parameters*, déjà cités au § 8.3; Miki, est le premier à les utiliser en 1982 et dans d'autres travaux postérieurs; Fukunaga et Vanderplaats, 1990 et 1991, les utilisent encore pour des problèmes concernant

aussi la flexion, et surtout donnent des limitations auxquelles ces paramètres sont soumis. Cette technique a été employée par d'autres auteurs, comme Grédiac, dans des travaux déjà cités au chapitre précédent; Hammer *et alii*, 1997, donnent une discussion approfondie de cette technique, tandis que Foldager *et alii*, 1998 et 1999, proposent une démarche pour forcer la non-convexité de problèmes d'optimisation formulés par cette méthode. Cette technique laisse toutefois irrésolu un problème: elle n'est pas en mesure de déterminer les angles d'orientation; en outre, pour certains problèmes concernant les symétries des propriétés de rigidité, et que nous avons traité, les *lamination parameters* sont connus *a priori*, en particulier ils sont nuls; leur connaissance laisse donc inchangé ce type de problèmes.

Une grande partie des travaux s'occupent de proposer ou d'améliorer des méthodes de recherche de la solution, et de ça on parlera plus en détail dans le chapitre qui suit, mais ce qui nous a intéressés le plus a été le choix des variables et des hypothèses adoptées dans l'optimisation. Les variables les plus utilisées sont les orientations et les épaisseurs des couches, parfois elles le sont ensemble, comme dans Tauchert et Adibhatla, 1984, dans un article assez suivi portant sur la maximisation de la rigidité par minimisation de l'énergie de déformation, ou Watkins et Morris, 1987, Fukunaga et Vanderplaats, 1991, Mota Soares *et alii*, 1995. Rares sont les approches qui mettent parmi les variables le nombre de plis, citons parmi ceux-ci Hajela et Shih, 1989, Yang et Ma, 1989, ou le déjà cité Hammer *et alii*, 1997.

Pour ce qui concerne les hypothèses les plus couramment utilisées, presque la totalité des travaux se place dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, sauf, parmi ceux qu'on a examinés, Hirano, 1979, qui s'occupe de l'optimisation des stratifiés soumis à cisaillement, et qui utilise une approche élégante, essentiellement une méthode de Galerkin, Muc, 1995 et 1997, dans le cas des coques cylindriques, Walker *et alii*, 1997, et les déjà cités Foldager *et alii*, 1998. En ce qui concerne les hypothèses de travail, la plus grande partie des auteurs se borne à considérer des stratifiés symétriques. Parfois, lorsqu'il s'agit d'optimiser les propriétés de flexion, les auteurs n'hésitent pas à faire l'hypothèse, fautive, que le tenseur **D** soit orthotrope pour tout empilement possible, voir par exemple les déjà cités Fukunaga et Vanderplaats, 1991; d'autres déterminent *a priori* les orientations possibles, et se bornent à chercher la séquence d'empilement optimale ou les épaisseurs; c'est le cas de Khot *et alii*, 1973 et 1976, Schmit et Farshi, 1973 et 1977, Yang et Ma, 1989. Le Riche et Haftka, 1993, et souvent les auteurs qui utilisent les algorithmes génétiques, comme encore Kogiso *et alii*, 1994, Nagendra *et alii*, 1994, Soremekun, 1997, Todoroki et Haftka, 1998, Liu *et alii*, 2000, Soremekun *et alii*, 2001, ne considèrent que des orientations de 0° , 90° et $\pm 45^\circ$, ce qui est assez limitatif en soi. La presque totalité des articles ne considèrent que le cas de stratifiés à plis identiques; souvent, on parle de minimisation du poids de façon impropre, car le matériau est choisi à l'avance, et donc il faut plus proprement parler de minimisation du volume. La nuance n'est pas des plus insignifiantes lorsqu'il s'agit de composites: presque jamais on s'intéresse à un processus radical d'optimum, qui passe par considérer les paramètres mécaniques du matériau de base parmi les variables à optimiser.

Les objectifs de l'optimisation sont les plus variés, ainsi que les contraintes imposées au problème: le plus souvent c'est la maximisation de la rigidité, comme dans la presque totalité des articles cités, ou de la résistance, Park, 1982, Massard, 1984, Kim *et alii*, 1997, Barakat et Abu-Farsakh, 1999, Park *et alii*, 2001, parfois des deux, Schmit et Farshi, 1973; très étudiés sont aussi les problèmes d'optimisation des valeurs propres, en terme de fréquences ou de charges critiques de stabilité, comme dans Hirano, 1979, Shin *et alii*, 1989, Fukunaga et Vanderplaats, 1991, Abrate, 1995 et 1996, Hu et Ho, 1996, Joshi et Biggers, 1996, Cinquini *et alii*, 1997. Quelque auteur s'occupe de la conception sous chargement cyclique, Muc et Krawiec, 2000, ou encore de la minimisation des coefficients de dilatation thermique, Ishikawa et Fukunaga, 1986, Le Riche et Gaudin, 1998, Grédiac et Toussaint, 2000. D'autres

études concernent des problèmes particuliers, comme la conception d'un matériau composite, Sadagopan et Pitchumani, 1998, ou d'un réservoir à pression en composite, Tabakov, 2001, ou le *blending* dans la stratification des plaques pour des ailes d'avion, Soremekun *et alii*, 2002. Un certain nombre d'auteurs propose des approches multi-objectif, Watkins et Morris, 1986, ou sous plusieurs conditions de chargement, Graesser *et alii*, 1991, Kim *et alii*, 1997, Kere et Koski, 2001. Certaines études prennent en compte la possibilité que des paramètres soient stochastiques, comme dans Cinquini *et alii*, 1997, Muc et Gurba, 2001, Lombardi et Haftka, 1998. Un secteur particulier est celui de la recherche de l'orientation optimale des fibres, dans lequel les contributions sont multiples, même si parfois a caractère plutôt académique; citons dans ce domaine, mais de façon très incomplète, les contributions de Sacchi-Landriani *et alii*, 1993, Pedersen, 1993, Duvaut *et alii*, 2000 et 2001. Finalement, certains travaux concernent la mise à point d'un algorithme, comme Groenwold et Snyman, 1999, Muc et Gurba, 2001.

Si une conclusion on peut tirer de ce rapide et nécessairement incomplet état de l'art, c'est qu'un véritable état de l'art dans la matière n'existe pas ou, ce qui est la même chose, ne peut pas se configurer sur une direction précise: trop d'aspects traités, avec des approches totalement différentes et des buts divers. Une synthèse organique est impossible, et tirer des conclusions générales peut être risqué. Toutefois, nous avons retenu quelques indications qui nous ont semblé intéressantes: la plupart des auteurs fait des hypothèses souvent limitatives, comme par exemple le choix au préalable des orientations. Si celui-ci peut être en partie justifié par les applications pratiques, il rend dépourvue de validité scientifique toute optimisation faite dans ce cas de figure: en fait, c'est impossible de connaître la différence par rapport à la véritable solution optimale.

Une autre hypothèse qui peut être assez limitative est le choix d'empilements symétriques: compte tenu de ce qu'on a montré au § 8.6, il est probable que dans certains problèmes l'emploi d'un empilement découplé non symétrique pourra apporter des améliorations. Certaines autres hypothèses sont à rejeter à la base, comme par exemple celle qui considère acquise l'orthotropie de flexion si on garantit celle de membrane: une méthode moderne de calcul doit pouvoir faire mieux que ça.

Les méthodes de solution méritent un discours à part: si l'amélioration de la puissance de calcul rend moins sensible le problème de trouver des méthodes efficaces, il n'en est pas moins qu'une approche moderne devrait aller dans la direction d'une automatisation la plus complète possible du processus de choix par optimisation; c'est pour cette raison que l'utilisation des *lamination parameters* comme variables, même si dans leur forme polaire, n'a pas été retenue, car cette approche ne permet pas de déterminer les orientations et l'intervention du concepteur est nécessaire, sous une forme ou une autre. De surcroît, ce processus devrait être le plus proche possible de la réalité de l'ingénieur, et donc être capable de faire un choix sur l'ensemble disponible des paramètres, par exemple sur un ensemble fini de couches, ayant des caractéristiques fixées.

Toutes ces considérations ont animé une réflexion assez longue et approfondie, qui ne peut encore se dire terminée, mais qui nous a convaincu à suivre une voie originale, et à se détacher des voies plus ou moins classiques. Deux sont les directions dans lesquelles nous avons travaillé: une unification la plus vaste possible d'un certain nombre de problèmes de conception en rigidité, et l'idéation d'un outil de calcul efficace, suffisamment versatile et général. C'est en tout cas, et au moins pour le moment, à la conception d'un matériau stratifié qu'on s'adresse, plutôt qu'à la conception d'une structure en composite.

Dans la suite de ce chapitre, on montre l'approche théorique que nous avons mis en place, alors que le chapitre suivant est consacré à la méthode numérique utilisée.

9.3 Une formulation unifiée de problèmes de conception en rigidité des stratifiés.

On présente dans ce paragraphe une approche qui unifie un certain nombre de problèmes de conception de stratifiés ayant des propriétés données; toutes ces propriétés ont la caractéristique de concerner les symétries des rigidités de la plaque. La théorie est valable pour les stratifiés composés d'un nombre quelconque de plis et pas forcément identiques, ayant des propriétés de base générales, même totalement anisotropes. Une première version de cette théorie a été présentée dans une communication aux 12^{èmes} Journées Nationales sur les Composites de Cachan, Vannucci et Verchery, 2000; la présentation qui est faite ici, et qui ne concerne que la partie élastique, est un peu différente et plus générale, quoique identique dans l'esprit.

Les composantes tensorielles qui fixent les rigidités **A**, **B** et **D** d'un stratifiés sont, dans le cas le plus général, au nombre de 18; dans la représentation polaire, elles sont $\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{R}_0, \bar{R}_1, \bar{\Phi}_0$ et $\bar{\Phi}_1$ pour **A**, $\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{R}_0, \hat{R}_1, \hat{\Phi}_0$ et $\hat{\Phi}_1$ pour **B**, $\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{R}_0, \tilde{R}_1, \tilde{\Phi}_0$ et $\tilde{\Phi}_1$ pour **D**. Il faudra aussi considérer, dans la suite, les composantes du tenseur d'homogénéité **C**, à savoir $\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{R}_0, \tilde{R}_1, \tilde{\Phi}_0$ et $\tilde{\Phi}_1$, définies par les (8.10) dans le cas le plus général.

Définissons la forme quadratique de la matrice **H**

$$I(P_k) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{H} \mathbf{P} = H_{ij} P_i P_j, \quad i, j = 1, \dots, 18, \quad (9.1)$$

avec les paramètres adimensionnels P_k définis comme:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\bar{T}_0}{h M}, \quad P_2 = \frac{\bar{T}_1}{h M}, \quad P_3 = \frac{\bar{R}_0}{h M}, \quad P_4 = \frac{\bar{R}_1}{h M}, \quad P_5 = \bar{\Phi}_0, \quad P_6 = \bar{\Phi}_1, \\ P_7 &= \frac{2 \hat{T}_0}{h^2 M}, \quad P_8 = \frac{2 \hat{T}_1}{h^2 M}, \quad P_9 = \frac{2 \hat{R}_0}{h^2 M}, \quad P_{10} = \frac{2 \hat{R}_1}{h^2 M}, \quad P_{11} = \hat{\Phi}_0, \quad P_{12} = \hat{\Phi}_1, \\ P_{13} &= \frac{12 \tilde{T}_0}{h^3 M}, \quad P_{14} = \frac{12 \tilde{T}_1}{h^3 M}, \quad P_{15} = \frac{12 \tilde{R}_0}{h^3 M}, \quad P_{16} = \frac{12 \tilde{R}_1}{h^3 M}, \quad P_{17} = \tilde{\Phi}_0, \quad P_{18} = \tilde{\Phi}_1. \end{aligned} \quad (9.2)$$

M est un diviseur utilisé pour rendre adimensionnelles les composantes, et il peut être choisi de plusieurs façons, avec l'imposition qu'en aucun cas il soit nul. Des choix appropriés sont des moyennes des grandeurs caractéristiques des couches: dans ce but on peut prendre par exemple la norme proposée par Kandil et Verchery, 1988, et définir M comme

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{T_{0i}^2 + 2T_{1i}^2 + R_{0i}^2 + 4R_{1i}^2}; \quad (9.3)$$

ou encore, et plus simplement, ne considérer que les parties isotropes des tenseurs d'élasticité des couches, et alors poser

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{T_{0i}^2 + T_{1i}^2}, \quad (9.4)$$

ou bien

$$M = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (T_{0i} + T_{1i}), \quad (9.5)$$

mais d'autres choix sont bien évidemment possibles.

Il va de soi que les variables de projet sont tous les paramètres des couches, à savoir leur épaisseur, constantes élastiques, orientation et position dans l'empilement; en fait, les

paramètres P_k dépendent de tous ces facteurs par le biais des (8.8) à (8.11). Dans le cas de stratifiés composés de plis identiques, seule l'orientation et la position dans l'empilement jouent un rôle, outre aux éventuelles symétries propres à la couche de base.

La matrice \mathbf{H} est une matrice réelle et symétrique; le choix de ses facteurs H_{ij} détermine un problème d'optimum plutôt qu'un autre, et un grand nombre de problèmes différents peut être traité à l'aide de la forme (9.1), qui est semi-définie positive. La recherche d'un stratifié ayant des propriétés données se ramène alors à la recherche d'un vecteur \mathbf{P} de paramètres P_k qui rend nulle ou de valeur connue *a priori* la forme $I(P_k)$. On a ainsi ramené plusieurs problèmes de conception en rigidité de stratifiés, problèmes qu'on détaille dans la suite, à une forme unique, compacte et classique en optimisation des structures: la minimisation d'une forme quadratique, dont, de surcroît, la valeur des minima absolus est connue à l'avance. Voyons alors dans les paragraphes qui suivent les problèmes traités et la définition de la matrice \mathbf{H} correspondante; d'autres problèmes, n'ayant pas une importance pratique, ont été négligés dans cette présentation, quoi qu'ils puissent être traités de façon identique.

9.4 Problèmes élémentaires.

Définissons d'abord dans ce paragraphe un certain nombre de problèmes élémentaires, qui, même si pas tous intéressants en soi, composent des problèmes plus complexes définis dans la suite. Pour chaque problème on indique la propriété de rigidité concernée, qui est annulée, la forme quadratique $I(P_k)$ qui définit mathématiquement le problème, ainsi que les composantes non nulles de \mathbf{H} , les autres étant zéro. Pour les composantes hors diagonale, on sous-entend que \mathbf{H} est symétrique, et on n'indique que celles au-dessus de la diagonale principale.

$$\text{Prob. 1: } \bar{R}_0 = 0; \quad I(P_k) = P_3^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{33} = 1; \quad (9.6)$$

$$\text{Prob. 2: } \bar{R}_1 = 0; \quad I(P_k) = P_4^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{44} = 1; \quad (9.7)$$

$$\text{Prob. 3: } \hat{T}_0 = 0; \quad I(P_k) = P_7^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{77} = 1; \quad (9.8)$$

$$\text{Prob. 4: } \hat{T}_1 = 0; \quad I(P_k) = P_8^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{88} = 1; \quad (9.9)$$

$$\text{Prob. 5: } \hat{R}_0 = 0; \quad I(P_k) = P_9^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{99} = 1; \quad (9.10)$$

$$\text{Prob. 6: } \hat{R}_1 = 0; \quad I(P_k) = P_{10}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{1010} = 1; \quad (9.11)$$

$$\text{Prob. 7: } \tilde{R}_0 = 0; \quad I(P_k) = P_{15}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{1515} = 1; \quad (9.12)$$

$$\text{Prob. 8: } \tilde{R}_1 = 0; \quad I(P_k) = P_{16}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{1616} = 1; \quad (9.13)$$

$$\text{Prob. 9: } \bar{\Phi}_0 = 0; \quad I(P_k) = P_5^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{55} = 1. \quad (9.14)$$

$$\text{Prob. 10: } \bar{\Phi}_1 = 0; \quad I(P_k) = P_6^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{66} = 1; \quad (9.15)$$

$$\text{Prob. 11: } \tilde{\Phi}_0 = 0; \quad I(P_k) = P_{17}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{1717} = 1; \quad (9.16)$$

$$\text{Prob. 12: } \tilde{\Phi}_1 = 0; \quad I(P_k) = P_{18}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{1818} = 1. \quad (9.17)$$

On remarque, en passant, que les problèmes 2 et 8 définissent la recherche d'un stratifié ayant la symétrie de carré en membrane ou en flexion, respectivement.

9.5 Problèmes composés.

Comme anticipé, un certain nombre de problèmes peuvent être considérés comme des problèmes composés des précédents; voyons alors ces problèmes, qui ont, eux, un intérêt bien plus concret.

Prob. 13: isotropie de **A**: c'est la somme des problèmes 1 et 2:

$$I(P_k) = P_3^2 + P_4^2 = 0 \Rightarrow H_{33} = H_{44} = 1; \quad (9.18)$$

Prob. 14: découplage (**B=O**): c'est la somme des problèmes 3 à 6:

$$I(P_k) = \sum_{i=7}^{10} P_i^2 = 0 \Rightarrow H_{ii} = 1, i = 7, \dots, 10; \quad (9.19)$$

Prob. 15: isotropie de **D**: c'est la somme des problèmes 7 et 8:

$$I(P_k) = P_{15}^2 + P_{16}^2 = 0 \Rightarrow H_{1515} = H_{1616} = 1; \quad (9.20)$$

Prob. 16: isotropie de **A** et découplage: c'est la somme des problèmes 1 à 6:

$$I(P_k) = P_3^2 + P_4^2 + \sum_{i=7}^{10} P_i^2 = 0 \Rightarrow \quad (9.21)$$

$$H_{ii} = 1, i = 3, 4, 7, 8, 9, 10;$$

Prob. 17: isotropie de **D** et découplage: c'est la somme des problèmes 3 à 8:

$$I(P_k) = \sum_{i=7}^{10} P_i^2 + P_{15}^2 + P_{16}^2 = 0 \Rightarrow \quad (9.22)$$

$$H_{ii} = 1, i = 7, 8, 9, 10, 15, 16;$$

Prob. 18: isotropie totale: c'est la somme des problèmes 1 à 8:

$$I(P_k) = P_3^2 + P_4^2 + \sum_{i=7}^{10} P_i^2 + P_{15}^2 + P_{16}^2 = 0 \Rightarrow \quad (9.23)$$

$$H_{ii} = 1, i = 3, 4, 7, 8, 9, 10, 15, 16;$$

Prob. 19: symétrie du carré de **A** et découplage:
c'est la somme des problèmes 2 à 6:

$$I(P_k) = P_4^2 + \sum_{i=7}^{10} P_i^2 = 0 \Rightarrow \quad (9.24)$$

$$H_{ii} = 1, i = 4, 7, 8, 9, 10.$$

Prob. 20: symétrie du carré de **D** et découplage:
c'est la somme des problèmes 3 à 6 et 8:

$$I(P_k) = \sum_{i=7}^{10} P_i^2 + P_{16}^2 = 0 \Rightarrow \quad (9.25)$$

$$H_{ii} = 1, i = 7, 8, 9, 10, 16;$$

Prob. 21: symétrie du carré de **A** et **D**, avec les mêmes axes, et découplage:
c'est une combinaison des problèmes 2 à 6, 8, 9 et 11:

$$I(P_k) = P_4^2 + \sum_{i=7}^{10} P_i^2 + P_{16}^2 + (P_5 - P_{17})^2 = 0 \Rightarrow \quad (9.26)$$

$$H_{ii} = 1, i = 4, 5, 7, 8, 9, 10, 16, 17;$$

$$H_{517} = -1.$$

9.6 Formalisation de la quasi-homogénéité.

La condition que les propriétés de membrane et de flexion soient les mêmes dans chaque direction s'exprime en imposant que les composantes polaires $\check{T}_0, \check{T}_1, \check{R}_0$ et \check{R}_1 de \mathbf{C} soient nulles, ce qui donne la relation quadratique

$$\check{T}_0^2 + \check{T}_1^2 + \check{R}_0^2 + \check{R}_1^2 = 0. \quad (9.27)$$

En tenant compte des (8.10) et des (9.2) on trouve alors la condition

$$\begin{aligned} (P_1 - P_{13})^2 + (P_2 - P_{14})^2 + (P_3 e^{4iP_5} - P_{15} e^{4iP_{17}})(P_3 e^{-4iP_5} - P_{15} e^{-4iP_{17}}) + \\ (P_4 e^{2iP_6} - P_{16} e^{2iP_{18}})(P_4 e^{-2iP_6} - P_{16} e^{-2iP_{18}}) = 0. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Pour rendre plus simple la (9.28), on peut observer que le problème en question implique la coïncidence des angles polaires, ce qui peut se traduire par la relation quadratique

$$(P_5 - P_{17})^2 + (P_6 - P_{18})^2 = 0; \quad (9.29)$$

en considérant à la fois la (9.28) et la (9.29) on obtient finalement une condition qui impose, par une forme quadratique simple, l'identité des propriétés de membrane et de flexion dans chaque direction, et on peut établir le

Prob. 22: égales propriétés en membrane et flexion dans chaque direction ($\mathbf{C} = \mathbf{O}$):

$$\begin{aligned} I(P_k) &= (P_1 - P_{13})^2 + (P_2 - P_{14})^2 + (P_3 - P_{15})^2 + \\ & (P_4 - P_{16})^2 + (P_5 - P_{17})^2 + (P_6 - P_{18})^2 = 0 \Rightarrow \\ H_{ii} &= 1, \quad i = 1, \dots, 6, 13, \dots, 18; \\ H_{113} &= H_{214} = H_{315} = H_{416} = H_{517} = H_{618} = -1. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Etablir maintenant les conditions de quasi-homogénéité équivaut à ajouter à la (9.30) la condition de découplage, voire c'est la somme des problèmes 14 et 22:

Prob. 23: quasi-homogénéité ($\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{O}$):

$$\begin{aligned} I(P_k) &= (P_1 - P_{13})^2 + (P_2 - P_{14})^2 + (P_3 - P_{15})^2 + \\ & + (P_4 - P_{16})^2 + (P_5 - P_{17})^2 + (P_6 - P_{18})^2 + \\ & + P_7^2 + P_8^2 + P_9^2 + P_{10}^2 = 0 \Rightarrow \\ H_{ii} &= 1, \quad i = 1, \dots, 10, 13, \dots, 18; \\ H_{113} &= H_{214} = H_{315} = H_{416} = H_{517} = H_{618} = -1. \end{aligned} \quad (9.31)$$

On peut alors formaliser un autre problème, celui des stratifiés quasi-homogènes à symétrie carrée:

Prob. 24: stratifiés quasi-homogènes à symétrie carrée:
c'est la somme des problèmes 2 (ou 8) et 23:

$$\begin{aligned}
I(P_k) &= (P_1 - P_{13})^2 + (P_2 - P_{14})^2 + (P_3 - P_{15})^2 + \\
&+ (P_4 - P_{16})^2 + (P_5 - P_{17})^2 + (P_6 - P_{18})^2 + \\
&+ P_4^2 + P_7^2 + P_8^2 + P_9^2 + P_{10}^2 = 0 \Rightarrow \\
H_{ii} &= 1, \quad i = 1, \dots, 3, 5, \dots, 10, 13, \dots, 18; \quad H_{44} = 2; \\
H_{113} &= H_{214} = H_{315} = H_{416} = H_{517} = H_{618} = -1.
\end{aligned} \tag{9.32}$$

Il faut remarquer qu'à la place du, ou ensemble au carré de P_4 dans la (9.32), on aurait pu mettre celui de P_{16} , problème 8, car la quasi-homogénéité assure l'équivalence de ces deux conditions. Remarquons aussi que ce problème est différent du problème 21, car ce dernier n'assure pas que les propriétés de membrane et de flexion soient les mêmes.

Un problème analogue au précédent est celui de la recherche des stratifiés quasi homogènes avec l'orthotropie (7.112) :

Prob. 25: stratifiés quasi-homogènes à orthotropie de type $R_0=0$:
c'est la somme des problèmes 1 (ou 7) et 23:

$$\begin{aligned}
I(P_k) &= (P_1 - P_{13})^2 + (P_2 - P_{14})^2 + (P_3 - P_{15})^2 + \\
&+ (P_4 - P_{16})^2 + (P_5 - P_{17})^2 + (P_6 - P_{18})^2 + \\
&+ P_3^2 + P_7^2 + P_8^2 + P_9^2 + P_{10}^2 = 0 \Rightarrow \\
H_{ii} &= 1, \quad i = 1, 2, 4, \dots, 10, 13, \dots, 18; \quad H_{33} = 2; \\
H_{113} &= H_{214} = H_{315} = H_{416} = H_{517} = H_{618} = -1.
\end{aligned} \tag{9.33}$$

Encore, on aurait pu remplacer ou ajouter au carré de P_3 celui de P_{15} , problème 7.

9.7 Formalisation de l'orthotropie.

Considérons ici l'orthotropie de type (7.111), car celle déterminée par la (7.112) a déjà été prise en compte dans les problèmes 1 et 7, et prenons d'abord en compte le comportement de membrane. La (7.111) montre immédiatement que la solution orthotrope correspond à la condition

Prob. 26: orthotropie de la rigidité de membrane:

$$\begin{aligned}
I(P_k) &= (P_5 - P_6)^2 = K \frac{\pi^2}{16}, \quad K = 0, 1 \Rightarrow \\
H_{55} &= H_{66} = 1; \quad H_{56} = -1.
\end{aligned} \tag{9.34}$$

Dans ce cas, la forme $I(P_k)$ n'est pas forcément dégénérée: en fait, le coefficient K peut prendre les valeurs 0 et 1, § 7.10. Dans le premier cas, on a encore une forme dégénérée, mais pas dans le second; avec cette approche on peut donc choisir *a priori* le type d'orthotropie.

C'est intéressant aussi de remarquer que la solution appartient au lieu géométrique défini par la (9.34). Ce lieu est une conique qui se décompose en deux droites coïncidents avec la bissectrice du plan (P_5, P_6) , pour $K=0$, et en deux droites distinctes, parallèles à la même

bissectrice, pour $K=1$, voir Fig. 9.1. Dans ce deuxième cas la solution est seulement apparemment double, car $P_5 - P_6$ est une différence angulaire, et les deux différentes droites pour $K=1$ correspondent à une seule et unique solution. La même observation peut se faire pour toute autre valeur paire ou impaire de K . En effet, les seules solutions mécaniquement différentes sont celles déterminées par $K=0$ et $K=1$, toutes les autres leur sont équivalentes.

De façon absolument identique on établit la condition d'orthotropie de \mathbf{D} , pour laquelle les mêmes observations peuvent être faites:

Prob. 27: orthotropie de rigidité de flexion:

$$I(P_k) = (P_{17} - P_{18})^2 = K \frac{\pi^2}{16}, \quad K = 0, 1 \Rightarrow \quad (9.35)$$

$$H_{1717} = H_{1818} = 1; \quad H_{1718} = -1.$$

Plusieurs combinaisons de ces deux derniers problèmes, et avec les précédents aussi, peuvent être considérées, mais une en particulier est intéressante: la recherche de stratifiés orthotropes, ayant les mêmes axes d'orthotropie en membrane et en flexion et découplés: dans ce cas la condition à respecter n'est pas unique, en général, et le problème doit être formulé de la façon suivante:

Prob. 28: orthotropie de membrane et de flexion, avec les mêmes axes et le découplage:

$$\bar{I}(P_k) = (P_5 - P_6)^2 - \bar{K} \frac{\pi^2}{16} = 0, \quad \bar{K} = 0, 1;$$

$$\tilde{I}(P_k) = (P_{17} - P_{18})^2 - \tilde{K} \frac{\pi^2}{16} = 0, \quad \tilde{K} = 0, 1;$$

$$\hat{I}(P_k) = \sum_{i=7}^{10} P_i^2 + (P_6 - P_{18})^2 = 0 \Rightarrow \quad (9.36)$$

$$H_{ii} = 1, \quad i = 5, 7, \dots, 10, 17; \quad H_{66} = H_{1818} = 2;$$

$$H_{56} = H_{618} = H_{1718} = -1.$$

Si le coefficient d'orthotropie K est 0 pour la membrane et pour la flexion, les trois conditions (9.34) peuvent être sommées pour aboutir encore à une seule forme quadratique comme pour les autres problèmes. Si cela n'est pas le cas, on peut toujours récupérer une seule fonction objectif non négative par exemple en additionnant les trois fonctions (9.34) de la façon suivante

$$I(P_k) = |\bar{I}(P_k)| + |\tilde{I}(P_k)| + \hat{I}(P_k). \quad (9.37)$$

Finalement, un dernier problème qu'on considère est le suivant:

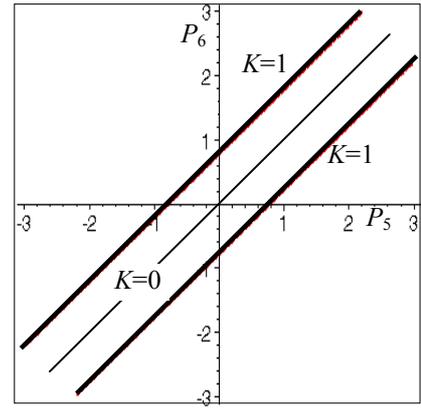


Fig. 9.1. Lieu géométrique des solutions orthotropes pour A .

Prob. 29: stratifiés quasi-homogènes et orthotropes:

c'est l'union des problèmes 23 et 26:

$$I(P_k) = (P_1 - P_{13})^2 + (P_2 - P_{14})^2 + (P_3 - P_{15})^2 + \\ + (P_4 - P_{16})^2 + (P_5 - P_{17})^2 + (P_6 - P_{18})^2 + \\ + P_7^2 + P_8^2 + P_9^2 + P_{10}^2 = 0;$$

$$\bar{I}(P_k) = (P_5 - P_6)^2 - \bar{K} \frac{\pi^2}{16} = 0, \quad \bar{K} = 0,1 \Rightarrow \quad (9.38)$$

$$H_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, 4, 7, \dots, 10, 13, \dots, 18;$$

$$H_{113} = H_{214} = H_{315} = H_{416} = H_{517} = H_{618} = -1;$$

$$H_{55} = H_{66} = 2; \quad H_{56} = -1.$$

Comme la quasi-homogénéité assure l'équivalence des propriétés de membrane et de flexion, on aurait pu considérer le problème 27 à la place du 26 dans les (9.38). Egalement, comme pour le problème 28, on peut se ramener à une seule fonction objectif lorsque le coefficient d'orthotropie est nul, ou sinon en considérant la fonction non négative

$$I(P_k) = |\bar{I}(P_k)| + I(P_k). \quad (9.39)$$

Pour terminer, remarquons qu'on peut facilement ajouter à chaque problème la condition qu'impose l'orientation du repère, simplement en ajoutant le problème 10 ou le 12 ou les deux ensemble au problème à traiter.

9.8 Considérations finales.

L'unification proposée des problèmes ci-haut est une approche élégante à la conception des stratifiés. Naturellement, elle n'est pas générale, ne considérant pas la totalité des problèmes possibles, par exemple ceux qui concernent la résistance; dans le chapitre suivant on verra comment pouvoir considérer d'autres requis, à côté de ceux établis par les problèmes énoncés. Remarquons seulement que tous les problèmes considérés constituent, dans un processus d'optimisation, des propriétés "non négociables": on ne peut pas considérer, par exemple, d'optimiser l'orthotropie ou le découplage: ces propriétés appartiennent au stratifié ou pas, la situation est binaire, pas nuancée. Cette constatation a conditionné notre approche à l'optimisation globale d'un stratifié, surtout en terme de formulation des problèmes d'optimum à plusieurs objectifs, voir à ce propos le § 10.11.

Une autre considération, à caractère purement théorique et général, peut être faite à la suite de ce qu'on a montré ci-haut: tous les problèmes traités, à l'exception faite de l'orthotropie avec $K=1$, définissent une propriété de symétrie comme une propriété de minimum du stratifié. Considérons par exemple l'isotropie: dans cette approche, elle est caractérisée par être le minimum d'une forme quadratique semi-définie positive. Cela est évidemment vrai non seulement pour le stratifié, mais pour une couche quelconque aussi. Nous avons donc une interprétation nouvelle et originale, qui est une caractérisation en termes de minimum, des propriétés de symétrie élastique d'une plaque, stratifiée ou pas. Ce qui est intéressant, par rapport à d'autres approches est le fait que l'espace des variables de la forme à minimiser est un espace physique, celui des invariants polaires, paramètres qui ont une signification mécanique bien précise, comme on a vu dans le chapitre 7.

10.1 Introduction.

Le fait que la solution des problèmes établis au chapitre précédent doit être faite de façon numérique est évident: en fait, toutes les possibilités d'approche analytique à la solution de ces problèmes avaient déjà été exploitées, comme montré au chapitre 8; d'autres possibilités éventuelles étaient envisageables, mais de portée très limitée. Si on voulait continuer à traiter des problèmes d'optimisation des stratifiés, notre chemin allait forcément dans la direction des méthodes numériques.

Sur ce point, nous avons engagé une réflexion assez importante, visant à pondérer tous les aspects concernés. Le problème au fond était le suivant: quelle procédure choisir pour résoudre au mieux les problèmes vus au chapitre précédent, et d'autres encore, notamment ceux qu'on pourrait obtenir en ajoutant des contraintes à la fonction objectif. Ce choix devait tenir compte de plusieurs facteurs: d'abord, dans notre approche la fonction objectif à minimiser est non convexe, comme il est facilement compréhensible, compte tenu qu'elle dépend de fonctions circulaires des orientations des plis. Cette circonstance, typique d'ailleurs des problèmes d'optimisation de stratifiés qui ont les orientations parmi les variables (ce n'est pas toujours le cas, au contraire, si on ne prend comme variables que les épaisseurs, voir à ce propos Schmit et Farshi, 1973), implique l'existence d'un nombre inconnu d'extrema, locaux et absolus, pour la fonction objectif.

L'approche montrée au chapitre précédent a en effet un avantage dans ce cas: la valeur de la fonction en correspondance de la solution est connue *a priori*, et normalement est zéro. Ceci permet de savoir si on a à faire à un minimum global ou local, mais il ne nous épargne pas tous les problèmes typiques de l'optimisation non convexe, à savoir la convergence à un minimum local. Une autre considération à faire est la suivante: les solutions exactes trouvées par Vannucci et Vincenti, 2001, pour les stratifiés à base de tissus équilibré, § 8.8, montrent que les solutions ne se présentent pas en forme isolée, et que l'existence d'ensembles continus de points solution est la règle: ceci implique que sur ces ensembles la fonction objectif est stationnaire.

Une autre caractéristique, cette fois technologique, des problèmes de conception des stratifiés, et d'ailleurs de nombreux autres problèmes typiques de l'ingénieur, est le fait que certaines variables peuvent être discrètes: par exemple, même si les orientations sont une variable continue, souvent on veut accepter seulement des solutions qui présentent des angles caractéristiques et usuels, à choisir sur un ensemble très limité. Ou encore, normalement les épaisseurs des couches de base sont celles dont on dispose dans le commerce, étant invraisemblable pour la plupart des problèmes l'idée de concevoir un pli sur mesure.

La réflexion que nous avons menée s'est appuyée aussi sur la recherche bibliographique qu'on a commentée au chapitre précédent, et pas seulement: nous avons tenté aussi, comme montré dans l'article présenté par Vannucci et Verchery à *JNC12*, en 2000, une première approche par la méthode de Monte Carlo. Cette technique s'est vite avérée insatisfaisante dans la recherche des solutions, et elle était performante seulement pour certains problèmes et pour un faible nombre de couches. Ensuite, on a élaboré aussi un algorithme plus classique, basé sur une méthode de descente, soit la *steepest descent method*, voir par exemple Arora, 1989, soit le *conjugate gradient method* de Fletcher et Reeves, 1964, couplés à une recherche du minimum directionnel par la méthode de la *sectio aurea* ou de l'*equivalent interval search*, voir encore Arora. Cette approche s'est montrée nettement plus efficace, mais nous n'étions

pas encore satisfaits pour plusieurs raisons, et notamment deux: l'impossibilité de traiter des problèmes avec des variables discrètes, et le temps de calcul, souvent très important. En effet, à cause de la non-convexité de la fonction objectif, on est obligés à faire plusieurs recherches, en choisissant de façon aléatoire le point de départ, voir aussi Grédiac, 1998 et suivants. Cette approche s'avère souvent frustrante, car l'exploration des solutions a toujours une partie faite à l'aveugle, qui débouche le plus souvent sur rien.

Ces considérations, et l'envie de construire un outil souple et versatile, capable d'aborder non seulement les problèmes énoncés au chapitre précédent mais d'autres encore, m'ont guidé vers le choix de réaliser un logiciel d'exploration des solutions par méthode génétique, et m'ont inspiré dans la conception de son architecture. La programmation de ce logiciel est une partie importante du travail de thèse de Vincenti. J'ai appelé ce logiciel BIANCA, acronyme de BIo-ANalyse de Composites Assemblés, mais, pour être honnête, Bianca est le prénom de ma fille; je me suis donc plié, avec satisfaction, à l'usage, assez suivi par les scientifiques, de donner un nom féminin aux codes génétiques. Nous allons parler de BIANCA dans ce chapitre, mais d'abord, une petite divagation historique, avec quelque surprise à la clé.

10.2 La mécanique et la biologie: une rencontre ancienne.

Le mécanicien habitué à vivre dans un monde mathématique, fait de lois précises qui règlent le rapport cause effet, est presque constitutionnellement incapable d'adapter sa conception du monde à celle proposée par la biologie, où, au contraire, le hasard semble s'imposer comme maître de l'évolution; et personnellement, je n'ai pas échappé à ce piège, en considérant, avec beaucoup d'*a priori*, qu'utiliser les lois de l'évolution pour résoudre des problèmes de notre beau monde mécanique était, en quelque sorte, une défaite, celle du déterminisme mathématique vis-à-vis du hasard biologique.

Les études faites depuis m'ont changé les idées, et montré que la nature suit, dans chaque domaine, des chemins cachés et inégalés par élégance. Et avec une certaine stupeur, j'ai découvert, presque par hasard, que la rencontre entre la mécanique et la biologie n'est pas affaire d'aujourd'hui, mais remonte, de façon inattendue et étrange, à l'aube de la science moderne, par l'œuvre de trois savants de premier plan: Galilei, Hooke et Maupertuis.

Si Galilei s'occupe le premier, en 1638, de la résistance des matériaux dans son déjà cité *Dialoghi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, parmi ses préoccupations il est en fait celle d'appliquer ses résultats sur le problème des dimensions maximales non seulement aux structures, mais aux dimensions des animaux et des arbres aussi: célèbre est sa divagation sur la grandeur des animaux, voir la Fig. 10.1.

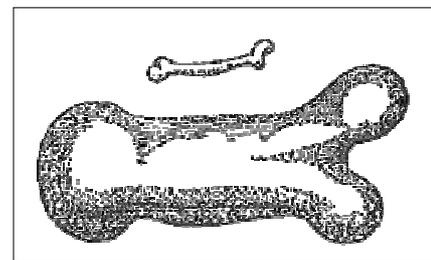


Fig. 10.1. Galilei et ses spéculations sur les dimensions des êtres vivants.

De son côté, Hooke n'est pas seulement le père "énigmatique" de la première loi de l'élasticité, découverte en 1660 mais énoncée seulement en 1676 sous forme d'anagramme, *ceiinossttuu, ut tensio sic vis*, mais, ce qui est moins connu parmi les mécaniciens, il est aussi, et à juste titre, l'initiateur de la biologie moderne: c'est à Hooke qu'on doit, en 1665, le nom de cellule, qu'il a utilisé pour décrire la texture répétitive du liège, observé avec le microscope composé qu'il s'était fabriqué, Fig. 10.2. Les premières observations en biologie cellulaire, conduites de façon systématique et avec rigueur scientifique, on les doit à celui qui est aussi l'initiateur de la moderne théorie de l'élasticité.

Quant à Maupertuis, il n'est pas seulement le controversé auteur du principe de l'action minimale, 1750, mais c'est aussi le premier à avoir formulé et démontré scientifiquement, en 1745, la transmission des caractères génétiques par le père et la mère ensemble, et à avoir formulé des prédictions exactes de transmission d'un caractère particulier, notamment de la polydactylie dans une famille berlinoise, et de l'albinisme observé chez des populations noires du Sénégal, voir Valentin, 1998; et cela, un siècle avant Mendel. En outre, il a l'intuition, bien avant Lamarck et Darwin, de la mutation comme cause de la diversité des espèces: "chaque degré d'erreur aurait fait une nouvelle espèce: et à force d'écarts répétés serait venue la diversité infinie des animaux que nous voyons aujourd'hui" (Le système de la nature, 1751).

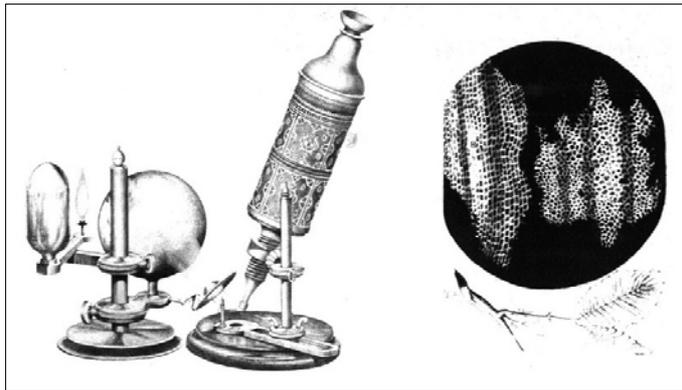


Fig. 10.2. *Le microscope composé de Hooke et ses dessins de la texture à 'cells' du liège.*

Ce sont les hasards de l'histoire qui font que ces deux disciplines, la mécanique et la biologie, se rencontrent à leurs débuts par l'œuvre de savants de premier plan, et qu'elles se retrouvent aujourd'hui, pour des raisons totalement différentes, pour se prêter une aide mutuelle: la mécanique à tenter d'interpréter des phénomènes biologiques (qui ne se souvient des cours que nos maîtres nous ont fait sur la disposition des fibres osseuses selon les lignes isostatiques, ou encore comment ne

pas considérer l'essor de la biomécanique, dans plusieurs domaines, de l'échelle cellulaire à la médecine sportive), et la biologie à proposer de nouvelles méthodes d'enquête de la nature, non conventionnelles, lointaines parfois de nos domaines de recherche, et pourtant efficaces, le monde du vivant autour de nous en étant la preuve.

A démonstration de cela, il suffit de réfléchir aux extraordinaires ressources et capacités de la transmission génétique des informations et des caractères dans la perpétuation et évolution des espèces vivantes. Ce mécanisme de sélection est capable de gérer des êtres si complexes que les hommes, et de ménager un volume d'informations et de fonctions énormément plus grand que dans n'importe quel système mécanique, si complexe soit-il: il suffit de penser que chaque cellule de l'homme contient des informations étalées sur environ 2 mètres d'ADN, et qu'au total la longueur de l'ADN d'un être humain adulte est de l'ordre de 25 milliards de kilomètres, pour un poids de 200 grammes environ (Goodenough, 1984). Toute cette énorme masse d'informations, stockées à l'échelle moléculaire, est utilisée pour accomplir des tâches extrêmement complexes, mais utilisant des mécanismes relativement simples. Après tout, donc, pourquoi une telle stratégie de gestion et utilisation des informations ne devrait-elle pas fonctionner même dans d'autres domaines? C'est, au fond, la question que les initiateurs des méthodes génétiques se sont posée.

10.3 Quelques considérations préalables sur la fonction objectif.

Lorsqu'on s'attache à résoudre des problèmes d'optimisation pour les matériaux composites, on a à faire très souvent avec des fonctions objectif qui ne sont pas convexes. Dans ce chapitre, au moins dans un premier temps, on se borne à considérer la fonction objectif (9.1) et l'approche à la conception de stratifiés présentée au chapitre précédent, avec les 29 problèmes listés. Il s'agit donc de résoudre un problème unique et général, étant donné que chacun des 29 cas distincts se différencie seulement par le choix de la matrice **H**.

On a donc à faire avec la recherche d'un minimum absolu d'une fonction non négative à $n-1$ variables; en effet, l'orientation d'une couche peut être toujours fixée a priori, et donc éliminée du lot des inconnues. Il s'agit d'un problème classique d'optimisation sans contrainte (on admet que chaque variable angulaire puisse varier sur toute la droite réelle), mais compliquée par le fait que la fonction objectif est fortement non-linéaire dans les orientations. Ceci évidemment affecte la recherche d'une solution, surtout lorsqu'on fait appel à des méthodes de descente. Pour mieux comprendre tout ça, voyons des exemples concrets.

Considérons d'abord la séquence

$$[\alpha/\beta/\gamma/\alpha/\beta/\gamma_3/\beta_2/\alpha_2/\beta/\alpha_2/\gamma_2/\beta]; \quad (10.1)$$

il s'agit d'un stratifié quasi-homogène de type quasi-trivial à 18 couches, non symétrique, et c'est une des 5 solutions évoquées au § 8.7: si les angles α , β et γ sont décalés de $2\pi/3$, on a un stratifié totalement isotrope. Si, comme dit ci-dessus, on fixe une orientation, soit par exemple $\gamma=0$, la fonction objectif (9.1) dépend seulement de α et β et elle peut être visualisée, Fig. 10.3. Il apparaît évidente la non-convexité de la fonction: les points stationnaires sont multiples; parmi ceux-ci il y a plusieurs minima locaux et globaux, qui sont autant de solutions (dans ce cas particulier ils représentent tous la même et unique solution). L'avantage, déjà souligné, de l'approche proposée est que la valeur de la fonction objectif en correspondance des solutions est connue, et égale à zéro. Toutefois, ceci n'empêche qu'une méthode de descente tombe sur un point stationnaire qui n'est pas un minimum global, et cela dépend bien sûr du point de départ choisi.

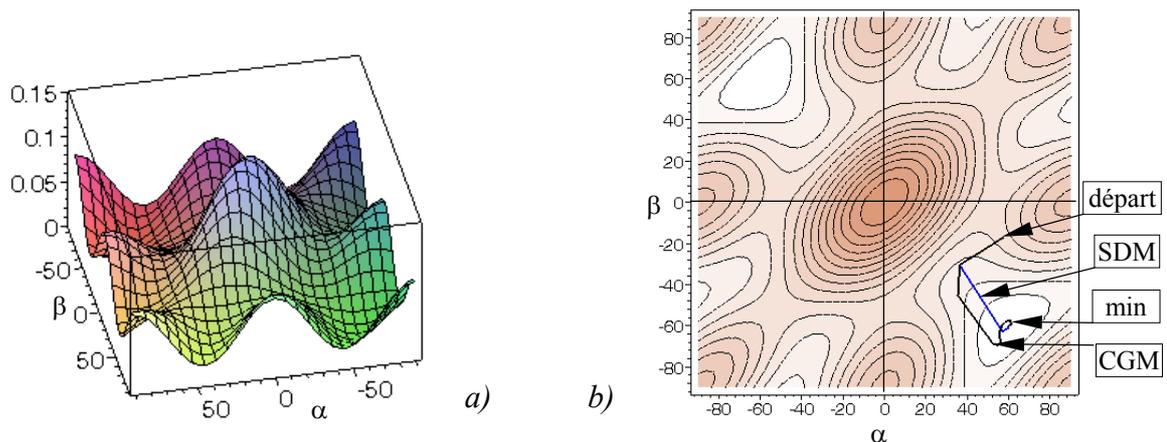


Fig. 10.3. Fonction objectif pour l'isotropie de la séquence 10.1:
a) fonction en 3D, b) fonction à courbes de niveaux.

C'est intéressant de remarquer que les autres quatre séquences à 18 couches du même type de la (10.1) ont la même fonction objectif, car l'isotropie totale ne dépend que des propriétés de membrane, qui ne sont pas influencées par la séquence d'empilement, car la solution est quasi-homogène. Dans la Fig. 10.3 b) on montre aussi les chemins de recherche de la solution par deux méthodes de descente, à partir du même point initial: la *steepest descent method*, SDM, voir Arora, 1989, et la *conjugate gradient method*, CGM, Fletcher et Reeves, 1964; contrairement à ce qu'on aurait pu s'attendre, la SDM a trouvé la solution au bout de 7 itérations, alors que la CGM au bout de 22. Il est aussi évident qu'un différent choix du point de départ aurait pu amener le parcours de recherche sur un autre point de minimum.

Un autre exemple est celui du stratifié qui sera présenté au § 12.4, le numéro 6 en Tab. 12.1; il s'agit d'une séquence totalement isotrope à base de couches R_0 -orthotropes identiques.

La Fig. 10.4 montre la fonction objectif tracée après avoir fixé les angles δ_1 - δ_6 selon la séquence solution, et lorsqu'on fait varier seulement δ_7 et δ_8 .

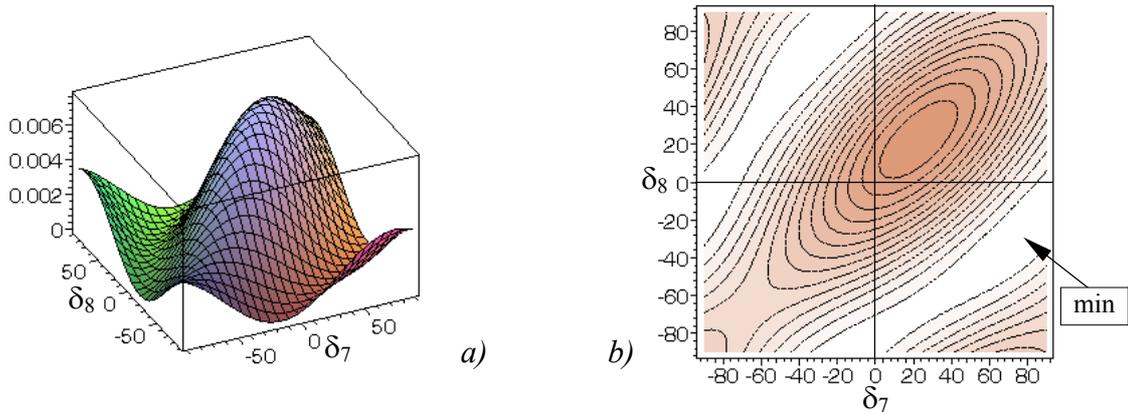


Fig. 10.4. *Fonction objectif pour l'isotropie du 8 couches:*
a) fonction en 3D, b) fonction à courbes de niveaux.

La Fig. 10.5 montre le cas d'une séquence à 12 couches totalement isotrope, qui a été trouvée par un algorithme SDM:

$$[0^\circ/-56^\circ/50^\circ/66^\circ/-66^\circ/80^\circ/-3^\circ/-37^\circ/11^\circ/27^\circ/-48^\circ/77^\circ]; \quad (10.2)$$

même ici, on a fixé tous les premiers 10 angles et on fait varier les deux derniers seulement. L'existence de minima locaux est apparente, même si on considère, comme ici, 2 seules variables sur 11, et encore plus si on fixe δ_{11} aussi à sa valeur exacte, comme en Fig. 10.6 a), ou si on fixe son rapport avec δ_{12} , Fig. 10.6 b).

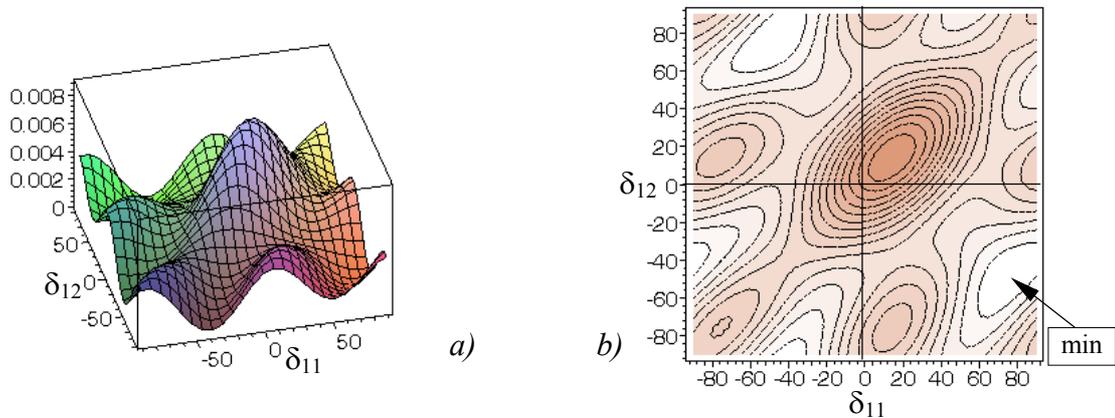


Fig. 10.5. *Fonction objectif pour l'isotropie de la séquence 10.2:*
a) fonction en 3D, b) fonction à courbes de niveaux.

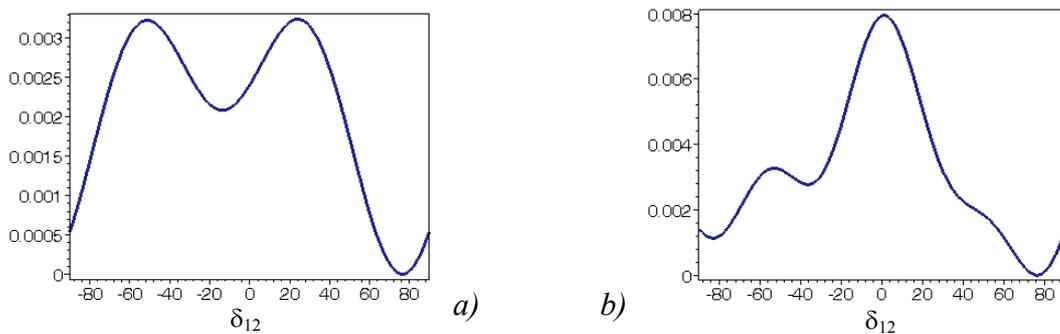


Fig. 10.6. *Fonction objectif pour l'isotropie de la séquence 10.2:*
a) $\delta_{11} = -48^\circ$, b) $\delta_{11} = -48/77\delta_{12}$.

Ceux-ci ne sont que des exemples qui peuvent aider à comprendre les difficultés annexes à la recherche de la solution, qui est beaucoup plus complexe de ce qu'il peut apparaître, car en réalité cette recherche se déroule dans un espace à dimension $n-1$, et non pas 2 comme sur les figures: la "bonne" localisation du point de départ constitue une difficulté majeure: aucune indication n'étant possible au préalable pour effectuer un choix convenable, la seule stratégie possible est celle de tirer au hasard un grand nombre de points de départ et chercher la solution à partir de chacun d'eux, en sélectionnant à la fin, parmi les minima trouvés, celui qui donne une valeur de la fonction (9.1) la plus proche de zéro. Mais même cette stratégie n'est pas efficace: souvent, même à la suite de milliers de tirages à sort du point de départ, on n'aboutit pas à des solutions, beaucoup dépend de la forme de la fonction objectif (9.1), et donc du problème à traiter. Par exemple, la Fig. 10.4 montre, sur un exemple simple, l'effet d'avoir une constante polaire, R_0 dans ce cas, automatiquement nulle, pour la recherche de l'isotropie: en éliminant de la fonction objectif toutes les fonctions circulaires de $4\delta_k$, on obtient une allure de la fonction objectif beaucoup moins tourmentée, et c'est plus facile de trouver des solutions, comme on a déjà remarqué dans le § 8.8 et comme on verra encore dans le § 12.4. Cette circonstance reflète le fait qu'une parmi les conditions à imposer, et qui sont incorporées dans la fonction objectif, est automatiquement vérifiée. Pour une discussion plus vaste sur ce sujet, voir encore la thèse de Vincenti.

L'expérience faite des méthodes de descente pour la résolution des problèmes du chapitre 9 m'a fait émettre un avis plutôt réservé sur leur efficacité. En outre, la difficulté de pouvoir traiter des cas avec des variables discrètes aurait été contournée seulement au prix d'ajouter un post-traitement des résultats, par exemple à l'aide d'une méthode *branch and bound*, voir Gürdal *et alii*, 1999. J'ai préféré changer de direction, et aborder le problème dès la racine par une approche capable à la fois de traiter des variables discrètes et de surmonter la difficulté liée à la non-convexité de la fonction objectif: c'est pour ça que je me suis tourné vers les algorithmes génétiques.

10.4 Les algorithmes génétiques.

La caractéristique fondamentale des méthodes numériques classiques comme celles de descente est le fait qu'il s'agit d'approches locales: on suit un parcours qui doit, en principe, amener à un point de minimum en partant d'un point choisi de quelque façon. Le minimum, s'il est trouvé, dépend du point de départ; en ce sens on peut dire que ces méthodes font une exploration locale de la fonction objectif; en s'appuyant sur le calcul des directions des plus forte décroissance, ces méthodes sont au moins d'ordre un, car elles nécessitent du calcul du gradient de la fonction, quoi que des approches d'ordre zéro aient été proposées dans le passé (Powell, 1964).

Les algorithmes génétiques ont une approche complètement différente: pour une présentation approfondie de ces méthodes, on renvoie aux textes référencés en bibliographie, notamment aux ouvrages fondamentaux de Holland, 1975, et de Goldberg, 1991, ou encore à Renders, 1995, Chellapilla et Fogel, 1999, Chen et Rajan, 1999, Matous *et alii*, 2000, Magnin, 2001; le déjà cité Gürdal *et alii*, 1999, donne une introduction en vue des applications aux stratifiés. D'un point de vue historique, les idées fondamentales et les premières applications sont créditées à Holland, au milieu des années 60; Kogiso *et alii*, 1994, citent aussi la contribution indépendante de Rechenberg, 1965.

Les algorithmes génétiques font partie d'une catégorie plus vaste, celle des algorithmes évolutionnaires, qui s'inspirent au concept de sélection naturelle élaboré indépendamment par C. Darwin et A. R. Wallace au milieu du 19^{ème} siècle, et on les classe normalement comme appartenant au champ de l'intelligence artificielle, dans ce cas celle de la nature.

Le concept à la base des algorithmes évolutionnaires est celui d'opérer une sélection des meilleurs individus d'une population à l'instar de ce qui se passe dans la sélection naturelle. Cette sélection doit amener vers une amélioration des caractéristiques des individus, qui à chaque génération sont sélectionnés sur la base d'un ou plusieurs critères, donc en fonction de leur capacité de s'adapter à la pression de l'environnement.

Selon Darwin, la sélection naturelle et la diversité des espèces s'expliquent de la façon suivante:

- i. tous les organismes se reproduisent et leur population tend à s'accroître avec une progression géométrique;
- ii. on observe toutefois qu'à chaque génération le nombre d'individus de l'espèce reste pratiquement constant;
- iii. ceci montre qu'il y a une lutte des individus pour survivre;
- iv. d'ailleurs, à l'intérieur de chaque espèce il y a des différences entre les individus, différences qui peuvent être héritées génétiquement;
- v. ces différences sont le produit du hasard, qui introduit des variations (mutations) dans la reproduction des individus;
- vi. certaines de ces variations favorisent les nouveaux individus par rapport aux conditions imposées par l'environnement, et les aident à survivre et à se reproduire abondamment, alors que d'autres variations sont défavorables;
- vii. en avançant dans les générations, ce sont les individus les plus adaptés qui se trouvent en plus grand nombre dans une population;
- viii. ce mécanisme crée des individus de plus en plus adaptés à l'environnement, voire de mieux en mieux répondants à certains critères;
- ix. la propagation des variations favorables qui s'accumulent explique la naissance de nouvelles espèces.

L'idée est celle de répliquer artificiellement un processus de sélection de ce genre, et de l'utiliser pour mettre en place un mécanisme de sélection des solutions d'un problème donné. Les algorithmes génétiques, en plus, s'inspirent des mécanismes propres à la génétique pour créer une population nouvelle à partir d'une autre population. Les composantes principales d'un algorithme génétique sont donc:

- un générateur, normalement aléatoire, d'une population de base, composés d'individus; chaque individu est une solution potentielle, et il est donc une grandeur numérique compatible avec le problème (scalaire ou vectorielle etc.);
- des opérateurs de reproduction, qui permettent de générer une population fille à partir d'une population de parents; ces opérateurs, qui s'inspirent de la génétique, peuvent être plusieurs, et les plus communs sont les opérateurs de croisement (*cross-over*) et de mutation;
- un opérateur d'évaluation, qui mesure l'adaptation des individus aux conditions imposées, et qui dépend donc du problème à traiter; normalement, cette évaluation est faite à l'aide d'une fonction d'adaptation (*fitness*) qui mesure la qualité de l'individu comme solution au problème;
- un opérateur de sélection, qui privilégie pour la reproduction les meilleurs individus selon l'opérateur d'évaluation.

Certaines caractéristiques fondamentales d'un algorithme génétique sont déjà évidentes: il s'agit non pas d'une méthode individuelle et locale, mais générale et globale, au sens qu'il ne traite pas l'évolution d'un individu à la fois, mais d'une population entière et explore non pas un point du domaine de recherche, mais le domaine entier. Dans ce sens, plus que d'une méthode d'optimisation au sens classique, il vaut mieux le considérer, suivant Goldberg, comme un processus d'exploration de l'espace des solutions. De ce fait, cette méthode est indiquée pour l'analyse des problèmes non convexes: en s'affranchissant du conditionnement posé par le choix du point de départ, car elle explore le domaine en plusieurs points, elle contourne à la base la difficulté.

Un autre point, qui sera plus clair dans la suite, est que les algorithmes génétiques n'ont aucune difficulté à traiter les variables discrètes, au contraire, ils sont obligés à traiter chaque variable comme discrète et à récupérer éventuellement la continuité de la même successivement. N'ayant besoin que du calcul de la fonction objectif, pour la fonction d'adaptation, et pas de son gradient, les algorithmes génétiques sont des méthodes d'ordre zéro, et l'utilisation de variables discrètes ne pose aucun problème. Par contre, il s'agit d'une stratégie conçue pour les problèmes d'optimum sans contraintes; on verra dans la suite que prendre en compte l'existence d'éventuelles contraintes est toujours possible, avec des méthodes propres aux algorithmes génétiques ou même avec des stratégies plus classiques comme celle de pénalisation.

L'épanouissement des algorithmes génétiques témoigne de leur robustesse et fiabilité, et de leur grande capacité de s'adapter à un grand nombre de problèmes très différents et dans plusieurs domaines. Dans un sens, le succès de ces algorithmes se trouve dans la constatation que, à l'instar de la nature, ce qui est important ce n'est pas le sort d'un individu, mais celui de l'espèce. Même si ceci peut, en quelque sorte, nous paraître cruel, c'est toutefois le mécanisme qui a assuré la vie biologique sur cette planète, avec les résultats que nous constatons tous les jours; après tout, la nature n'est pas le meilleur des optimisateurs? De notre côté, nous avons l'avantage que la génétique synthétique ne pose sans doute pas de problèmes de conscience.

10.5 Mécanismes de reproduction biologique.

Pour mieux comprendre la structure d'un algorithme génétique, et dans le but d'introduire la nomenclature courante, il vaut mieux rappeler très rapidement les mécanismes de reproduction biologique et de transmission des caractères.

Il y a en nature deux types de reproduction, celle des procaryotes, les cellules sans noyau, comme les bactéries, et celle des eucaryotes, les cellules des êtres vivants supérieurs. La grande différence entre les deux est que la première est en même temps une répllication cellulaire, et le patrimoine génétique passe directement de la cellule parente aux deux cellules dans laquelle elle se divise, par répllication de la chaîne de l'ADN. De ce fait, il s'agit d'un clonage, et si aucune mutation fortuite ou induite, par exemple par un virus, n'intervient pas, les cellules filles sont identiques entre elles et à la mère. Dans ce schéma, la seule possibilité de variation de l'espèce est dans les mutations, qui toutefois, il faut le souligner, sont la plupart des fois mortelles. La reproduction des eucaryotes est au contraire confiée à la rencontre d'une cellule père et d'une cellule mère, les gamètes. Le patrimoine génétique de l'enfant dépend de celui des deux parents, par le biais d'une série de mécanismes génétiques de transmission des caractères.

L'une des plus grandes conquêtes scientifiques du XX siècle est la découverte de la structure de l'ADN par Watson et Crick en 1953. Cette molécule, en forme de chaîne à double hélice, contient les informations nécessaires à un être vivant pour accomplir toutes ses

fonctions vitales. L'unité de base de la chaîne de l'ADN est le nucléotide; il existe quatre types seulement de nucléotides dans l'ADN, qui se différencient par leur base azotée: adénine, A, guanine, G, cytosine, C, et thymine, T: voici les quatre lettres qui composent l'alphabet de la vie.

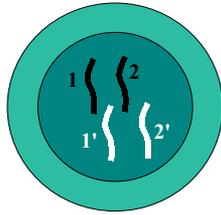
L'ordre dans lequel les nucléotides se succèdent dans la chaîne de l'ADN est extrêmement important: cette séquence détermine quelles sont les protéines à synthétiser par l'organisme, et donc les fonctions vitales. Trois nucléotides sont nécessaires pour synthétiser un aminoacide, et donc on dispose de $4^3 = 64$ codes différents pour la synthèse; comme les aminoacides sont seulement 20, il y a une redondance: plusieurs triplets de nucléotides synthétisent le même aminoacide, et seulement trois triplets ne codent rien. Une séquence de nucléotides qui synthétise un enzyme est un gène. Le gène est donc un morceau de la chaîne de l'ADN préposé à la synthèse d'une protéine et donc à la réalisation d'une fonction vitale.

Le génome, à savoir l'entier code génétique d'un individu, est normalement reparti sur plusieurs chromosomes; la plupart des êtres vivants sont diploïdes, ce qui signifie que chacune de leurs cellules a un homologue pour chaque chromosome. Le patrimoine génétique est donc doublé, mais pour chaque couple de gènes homologues, dits allèles, seulement un détermine le caractère: c'est le phénomène de la dominance, où un allèle est dominant et détermine le caractère correspondant, tandis que l'autre est récessif et n'a aucune fonction apparente. Par exemple, l'espèce humaine a 23 couples de chromosomes, pour un totale de 46. Ces chromosomes sont par une moitié d'origine maternelle et par l'autre moitié d'origine paternelle; la dominance d'un allèle sur son homologue détermine si l'héritage du caractère lié à l'allèle est en ligne maternelle ou paternelle. Un caractère récessif peut paraître dans l'individu fils seulement si les deux allèles sont homozygotes, c'est-à-dire identiques. On appelle génotype la constitution génétique d'un individu, et phénotype l'ensemble de l'expression génétique, donc des caractères: par exemple, si un individu a dans son génotype le gène qui détermine le caractère yeux clairs, le phénotype, à savoir l'individu physique, aura les yeux clairs.

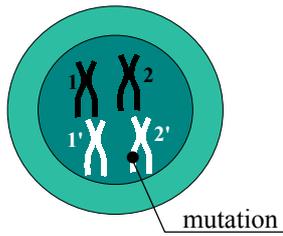
Les mécanismes d'héritage des caractères dans les eucaryotes sont complexes, et ils sont régis par les deux lois de Mendel: la première assure que les allèles ségréguent en deux gamètes distincts, la deuxième que les gènes situés sur chromosomes non homologues subissent un assortiment indépendant. Voyons tout ça dans un schéma, Fig. 10.7, où on a considéré un individu diploïde à deux fois n chromosomes (dans ce cas $n=2$ pour simplifier le schéma).

Ce qui est apparent de ce schéma, c'est que les mécanismes qui conduisent à la formation du génotype final du zygote, la cellule obtenu par l'accouplement des gamètes mère et père, sont trois: la mutation, le *cross-over* et la dominance. Les deux premiers sont des transformations et des échanges aléatoires du génome, alors que la troisième est réglé, pour chaque allèle, par des rapports établis, mais qui peuvent varier en fonction de l'influence de l'environnement. C'est en tout cas le hasard qui gère à tous les niveaux la transmission des caractères. Il faut aussi dire que la plupart des mutations conduisent à la mort de la cellule ou à des pathologies, très rares sont les mutations bénéfiques. Il est à remarquer aussi que le *cross-over* ne se produit pas entre les gamètes, mais entre les allèles d'une même cellule sexuelle, paternelle ou maternelle, lors de la première division méiotique: le *cross-over* se produit donc sur l'ADN des grands-parents, non pas des parents. Il est important de remarquer aussi que la dominance peut annuler les effets d'une mutation ou d'un *cross-over*. La nature a mis en place un système de transmission des caractères très élaboré, avec plusieurs mécanismes dont la raison d'être parfois n'est pas encore totalement claire; ces mécanismes produisent un fort mélange des génomes hérités, et dans tout ça c'est le hasard qui règne en maître. Voyons maintenant comment les algorithmes génétiques simulent ce processus.

A) Formation des gamètes haploïdes pour chaque parent.
 En noir: chromosomes d'héritage paternel
 En blanc: chromosomes d'héritage maternel

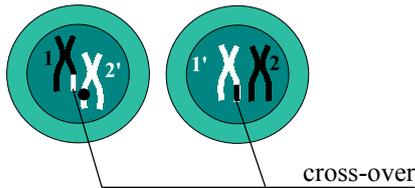


Cellule sexuelle originale diploïde:
 $2n$ chromosomes.



Phase S: duplication des chromosomes: $4n$ chromosomes.

Possibles mutations



Première division méiotique:
 assortiment indépendant des chromosomes non homologues; $2n$ chromosomes dans chaque cellule.

Possible cross-over



Deuxième division méiotique:
 ségrégation des allèles; formation des gamètes haploïdes: n chromosomes dans chaque gamète.

B) Accouplement au hasard des gamètes d'origine paternelle et maternelle: formation du zygote.

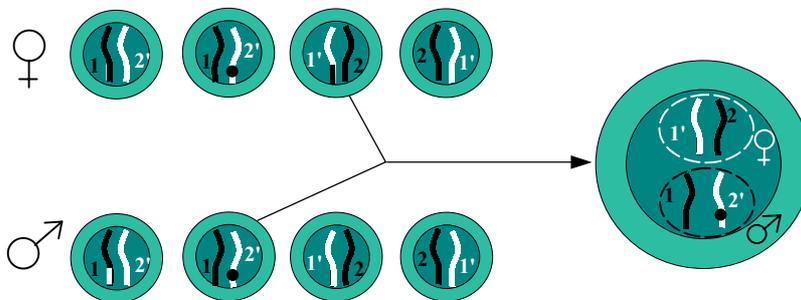


Fig. 10.7. Phases de la reproduction et mécanismes de transmission et modification du génome pour les eucaryotes.

10.6 Génétique artificielle: structure de base des algorithmes génétiques.

Dans ce chapitre on présente la structure typique d'un algorithme génétique, voir Goldberg, 1991. Les mécanismes de modification et transmission génétique mises en place dans ce type d'algorithme s'inspirent de ceux vus aux paragraphes précédents, mais ils sont différents pour plusieurs aspects. Avant de voir cela, il faut préciser quels sont les acteurs de la génétique artificielle.

Considérons un problème d'optimum sans contraintes classique: minimiser la fonction $g(\mathbf{x}_k)$, $k=1,\dots,n$. Dans l'approche génétique, à chaque vecteur de variables \mathbf{x}_k on fait correspondre un chromosome; l'ensemble de gènes qui constituent un chromosome est formé par les composantes x_k^j , $j=1,\dots,m$, de chaque vecteur, composantes qui sont les variables indépendantes du problème. Chaque gène, comme en biologie, est codé par un alphabet: le codage le plus classique, mais pas le seul possible, est le codage binaire, où le gène est un entier long, donc une chaîne de 32 bit; le bit prend donc le rôle du nucléotide, et l'alphabet est à deux lettres, 0 et 1, au lieu des quatre de la nature. Ce codage peut traiter seulement les variables entières, mais cela n'est pas un problème, car l'espace de variation d'une variable réelle peut toujours être discrétisé aussi finement qu'on veut, comme on verra. Or, à l'instar de l'ADN, l'ensemble des variables indépendantes détermine le génotype de l'individu, et la valeur finale, qui en dépend, le phénotype. Un ensemble d'individus forme ensuite une population. Finalement, un gène est un tableau de bits, un chromosome est un tableau de gènes, un individu est un tableau de chromosomes et une population est un tableau d'individus.

Dans les algorithmes génétiques de base, seulement deux opérateurs génétiques sont pris en compte: la mutation et le *cross-over*, alors que la dominance n'entre pas en jeu; en effet, dans le schéma esquissé ci-dessus, les individus sont haploïdes. L'architecture de l'algorithme est normalement celle indiquée en Fig. 10.8.

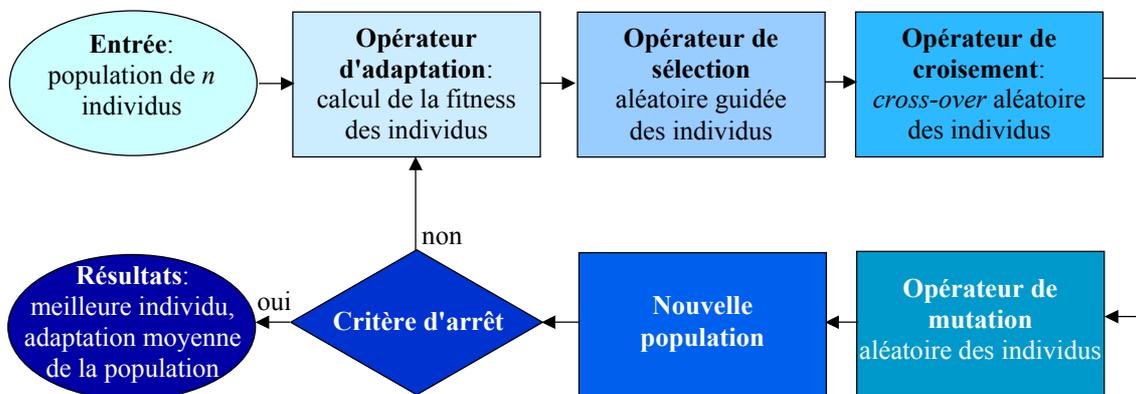


Fig. 10.8. Architecture d'un algorithme génétique de base.

Voyons de plus près les différents opérateurs: la population en entrée, dont la taille est fixée *a priori*, est normalement établie par tirage aléatoire, avec une distribution uniforme des variables x_k^j sur leur intervalle de variation.

L'opérateur d'adaptation évalue la capacité des individus à s'adapter à l'environnement, à savoir la qualité des individus par rapport à la condition imposée. Ceci n'est presque jamais fait par la fonction objectif directement, mais on préfère mesurer l'adaptation par une fonction d'adaptation (*fitness*), $f(\mathbf{x}_k)$. La fonction d'adaptation doit être une mesure de mérite positive, car elle est utilisée pour le calcul de la probabilité de reproduction dans l'opérateur de reproduction. Il n'y a pas une seule façon de construire une fonction de *fitness*, voir à ce

propos Goldberg, 1991; on discutera de ça dans la § 10.8 à propos de l'algorithme que nous avons mis en place.

L'opérateur de sélection simule la sélection darwinienne de l'espèce: il choisit de façon aléatoire "guidée" quels sont les individus qui se reproduisent, car ce choix tient compte de la fitness de chacun: les mieux adaptés ont une plus forte probabilité de se reproduire. Il y a différents opérateurs de reproduction, dont le plus connu est celui de la roue de loterie biaisée, que nous avons adopté et qui est rapidement présentée dans le § 10.8, voir toujours Goldberg, ou Matous *et alii*, 2000, ou encore Magnin, 2001.

L'opérateur de croisement réalise un échange entre le patrimoine génétique des individus, les parents, pour donner lieu à deux nouveaux individus, les enfants. La chaîne binaire de chaque gène, à l'instar de ce qu'il se passe pour l'ADN, est coupée aux mêmes endroits pour les deux individus parents, et les morceaux détachés sont échangés entre eux. Le découpage de la chaîne peut se faire de plusieurs façons, on parle par exemple de croisement en un point ou en deux points ou uniforme, voir encore Matous *et alii*, 2000. Le schéma le plus connu et le plus facile à être mis en place est le croisement en un point, qui est montré dans la Fig. 10.9. L'opérateur de *cross-over* n'est pas systématique, mais il a une probabilité p_c , fixée a priori, de se produire; couramment, p_c est fixée dans l'intervalle [60%÷90%], ce qui veut dire, si par exemple $p_c=60\%$, que le *cross-over* se produit en moyenne sur 60 couples de parents sur 100. Les choix des parents aussi est normalement fait au hasard, mais d'autres possibilités sont envisageables, comme par exemple celle de faire rencontrer les parents les meilleurs, au sens de leur *fitness*.

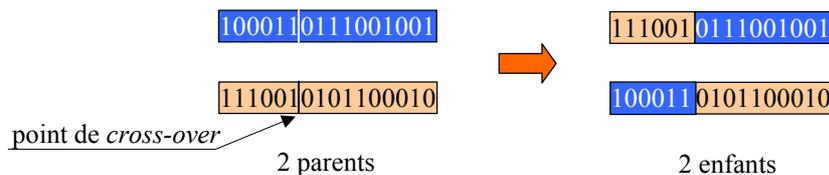


Fig. 10.9. *Cross-over en un point.*

L'opérateur mutation consiste à changer, de façon aléatoire, un bit de la chaîne, Fig. 10.10, ainsi que dans la réalité une mutation produit un changement dans un ou plusieurs nucléotides. Même la mutation n'est pas systématique, mais elle se produit avec une probabilité p_m , au sens qu'en moyenne p_m bits sur 100 sont changés à chaque génération. Des valeurs courantes de p_m sont prises dans l'intervalle [0.1% ÷ 10%]. La position de la mutation sur la chaîne est tirée au hasard aussi, mais avec une distribution uniforme de la probabilité.

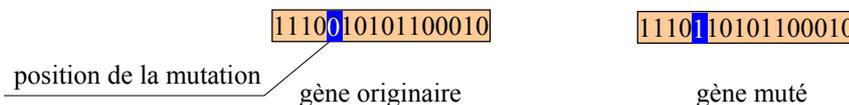


Fig. 10.10. *Mutation en un point.*

L'opérateur de mutation est introduit pour faire face aux problèmes de convergence trop rapide: l'algorithme sélectionne parfois rapidement une population avec une bonne *fitness* presque constante parmi tous les individus; au fil de générations suivantes, la *fitness* moyenne et la meilleure aussi tendront à ne pas changer, car les croisements s'effectuent sur des individus bien adaptés, qui tendent à se reproduire. Sur le modèle, cela correspond au fait qu'on a restreint l'exploration à une zone de l'espace physique. Or, si cette *fitness* n'est pas la meilleure possible, ce qui veut dire qu'on a pas atteint le minimum absolu de la fonction objectif, les population suivantes, par le fait que la *fitness* se conserve, ne seront pas capables

d'arriver au minimum absolu non plus. L'atout des algorithmes génétiques est au contraire celui d'explorer tout le domaine physique, parce que seulement de cette façon on a une chance d'aboutir au minimum. La mutation, en opérant un changement inopiné, au hasard, totalement découpé du processus de minimisation opéré par la sélection et le *cross-over*, élargit de façon aléatoire l'espace de recherche, et contraste la tendance de l'algorithme à se localiser dans un secteur de l'espace physique.

Les critères d'arrêt peuvent être plusieurs: le nombre de générations, l'obtention d'un minimum requis pour la fonction objectif, ou des contrôles de convergence qui arrêtent le calcul lorsque la *fitness* du meilleur individu ou celle moyenne de la population ne change pas sensiblement au cours des dernières générations.

Il existe d'autres opérateurs génétiques, comme l'élitisme, voir par exemple Soremekun *et alii*, 2001, ou encore le § 10.8, qui conserve un certain nombre des meilleurs individus au fil des générations, ou encore des opérateurs particulièrement conçus et bien adaptés pour certains problèmes, dans le secteur des stratifiés voir par exemple Todoroki et Haftka, 1998, Liu *et alii*, 2000.

La structure de base d'un algorithme génétique est donc simple et universelle, au sens que cette architecture est insensible au problème traité, elle fonctionne toujours. Des variations de ce schéma sont possibles, voir Magnin, 2001, mais dans la substance la structure générale est bien établie et ne s'éloigne pas beaucoup de celle de la Fig. 10.8.

Les différences entre le mécanisme de Fig. 10.7, propre à la nature, et celui de Fig. 10.8, de l'algorithme présenté, sont multiples: d'abord, le manque de diploïdie, ensuite le fait que le *cross-over* se produit sur les individus parents, et non pas sur les allèles d'un même parent. Dans l'algorithme génétique le mélange des caractères est confiée entièrement au *cross-over*, avec la mutation qui introduit des variations aléatoires pour le bon fonctionnement de l'algorithme, alors qu'elles sont souvent pathologiques en nature. Le mécanisme de la dominance, qui joue un rôle primordial en nature, dans l'algorithme présenté ici n'existe pas, ce qui implique, entre autres, que mutation et *cross-over* ont toujours effet, lorsqu'ils se produisent. La taille de la population est ensuite gardée constante de façon artificielle.

Pour résumer, l'algorithme présenté, et qui est celui de plus grand usage, n'est pas une copie des mécanismes génétiques propres à la nature, mais il les imite; quoi que simple, presque rude, il est robuste et efficace dans la plupart des cas. Des améliorations sont possibles, l'élitisme par exemple est souvent employé, mais la nature n'est pas encore recopiée de façon exacte. Or, s'il est vrai qu'il est inutile de trop compliquer les choses si les résultats sont là, il est vrai aussi que la nature ne fait jamais les choses au hasard et pour rien: si certains mécanismes sont mis en place, ils ont une raison d'être, et leur utilisation dans un schéma de calcul pourrait s'avérer important. Dans ce sens, des efforts ont été faits dans le passé, notamment pour prendre en compte la diploïdie et la dominance, voir Goldberg, 1991.

10.7 Caractéristiques du fonctionnement des algorithmes génétiques.

Les algorithmes génétiques ont démontré, dans différents domaines, leur efficacité dans la résolution des problèmes d'optimisation, se montrant souvent plus robustes et fiables que les méthodes classiques. Pour comprendre cela, analysons de plus près les caractéristiques du fonctionnement d'un algorithme génétique.

D'abord, les algorithmes génétiques travaillent sur une population d'individus-points, ce qui le met en mesure de bien explorer l'entier domaine de définition du problème; de ce même fait, si le critère d'arrêt s'y prête, un seul lancement d'un calcul peut aboutir à plusieurs

solutions. Pour la même raison, ils sont des algorithmes bien adaptés aux problèmes d'optimisation avec fonction objectif non-convexe: la distribution, sur tout le domaine de recherche des individus d'une population traités par l'algorithme, diminue le risque de convergence vers une seule "cuvette" correspondant à un minimum local. Le principe même de l'exploration stochastique est une garantie supplémentaire contre la convergence vers des minima locaux.

Toutefois, il a été mis en évidence, voir encore Goldberg ou Magnin, que les algorithmes génétiques ne sont pas complètement aveugles dans leur démarche: ils explorent simultanément plusieurs points situés dans des régions différentes du domaine et, par de simples évaluations de fonction sur ces points, ils sont capables de décider s'il vaut la peine d'exploiter ultérieurement les données appartenant à cette région ou s'il vaut plutôt mieux se tourner vers d'autres régions du domaine, plus susceptibles de contenir des points solutions.

Une autre caractéristique essentielle propre à ces méthodes, est celle d'être des algorithmes d'ordre zéro: ils ne nécessitent que de l'évaluation de la fonction objectif, et de celle de fitness correspondante, sans besoin de faire recours aux dérivées. Ceci élimine le problème du calcul numérique des dérivées et surtout donne la possibilité de traiter tout genre de variables, même celles non continues ou non dérivables.

En réalité, le codage des variables, nécessaire à la méthode, implique la manipulation des variables discrètes; si celui-ci est un cas qui se présente souvent dans le domaine de la conception et de l'optimisation en mécanique, l'utilisation de variables continues ne présente en réalité aucun problème majeur, car, comme on verra dans le paragraphe suivant, ces variables peuvent être discrétisées facilement et aussi finement qu'on veut.

A côté de ces avantages, les algorithmes génétiques présentent aussi des inconvénients, par ailleurs communs à d'autres méthodes numériques aussi: d'abord, du fait qu'ils explorent aléatoirement le champ de définition des variables, il s'agit tout naturellement de méthodes d'optimisation sans contraintes. La prise en compte d'éventuels liens imposés au problème d'optimum peut se faire de plusieurs façons, soit par des méthodes classiques, comme celle de pénalisation, voir Arora, 1989, soit par des méthodes plus propres aux algorithmes génétiques, voir à ce propos Coello-Coello, 2002.

Un autre point sensible est le calibrage des différents opérateurs de l'algorithme, et notamment, la probabilité de croisement et de mutation, ainsi que la modalité de calcul de la fitness et éventuellement la façon dont les liens sont pris en compte. Il s'agit d'une phase parfois délicate de la mise au point d'un algorithme génétique, généralement conduite de manière empirique puisque le calibrage dépend du type de problème traité. Cependant, il faut souligner que ce genre de problèmes est commun à plusieurs algorithmes et méthodes numériques, surtout lorsqu'on a à faire avec des problèmes non linéaires.

Les caractéristiques principales décrites ci-dessus n'expliquent pas pourquoi un algorithme d'exploration basé essentiellement sur une procédure en large partie stochastique soit en réalité capable de bien cibler la solution d'un problème. En effet, les algorithmes génétiques ne sont pas des instruments de recherche complètement aléatoire, comme par exemple les méthodes de Monte Carlo, mais leur recherche est d'une certaine façon guidée: c'est dans la *théorie des schèmes* de Holland, 1975, qu'on trouve l'explication du fonctionnement d'un algorithme génétique. Il n'est pas question ici de détailler cette théorie, voir à ce propos encore le traité de Goldberg, mais seulement d'en rappeler certains points essentiels, qui nous ont aussi conseillés dans les choix faits pour la mise en place du code BIANCA.

Selon Holland, une population de N individus dans un algorithme génétique ne contient pas N informations seulement, mais un nombre beaucoup plus élevé: cela est essentiellement dû à

la manière dont l'information est codée. Si on utilise un alphabet de cardinalité k , c'est-à-dire composé de k lettres (A, C, T et G pour l'ADN, 0 et 1 dans le codage binaire), et si on traite des chaînes de longueur l , le nombre possible de chaînes différentes est k^l . L'algorithme génétique ne les analyse pas toutes systématiquement, mais il évalue les motifs de similarité des chaînes les plus performantes, c'est-à-dire la répétition de certaines sous chaînes occupant la même position au sein des chaînes principales bien adaptées. Holland appelle ces séquences de bits motifs de similarité ou schèmes.

Voyons un exemple: les chaînes binaires 001 et 101 contiennent toutes les deux les schèmes

$$*01 \quad **1 \quad *0* \quad ***; \quad (10.3)$$

le symbole * indique que la position peut être occupée aussi bien par 0 que par 1. Les schèmes

$$0** \quad 00* \quad 0*1, \quad (10.4)$$

au contraire, appartiennent seulement à la première chaîne, alors que les schèmes

$$1** \quad 10* \quad 1*1, \quad (10.5)$$

sont uniquement présents dans la deuxième.

Holland a montré que chaque chaîne de longueur l contient $(k+1)^l$ schèmes: l'évaluation d'une seule chaîne correspond donc au traitement d'un nombre beaucoup plus élevé de motifs de similarité. Or, l'opérateur d'adaptation d'un algorithme génétique permet non seulement la comparaison des deux chaînes, mais il mesure aussi l'adaptation de tous les schèmes contenus en elles: si les deux chaînes ont simultanément des bonnes valeurs d'adaptation, les schèmes communs sont exaltés par une probabilité de reproduction élevée. Au contraire, si l'une des deux chaînes a une adaptation meilleure que l'autre, ce sont les schèmes de la première qui ont tendance à être reproduits au détriment des schèmes de la deuxième.

Holland a formulé aussi un théorème des schèmes, selon lequel l'algorithme génétique traite un nombre de schèmes à chaque génération proportionnel à N^3 , si N est la taille de la population. A cette propriété des algorithmes génétiques, Holland a donné le nom de parallélisme implicite. Dans cette optique, l'utilisation d'alphabets minimaux s'avère avantageuse parce que la longueur l des chaînes augmente; en conséquence, le nombre de schèmes contenus dans chaque chaîne est aussi accru. Selon Goldberg, seuls les algorithmes avec un codage par alphabet minimal peuvent être considérés comme des véritables algorithmes génétiques. Dans cette optique, nous avons choisi d'employer le codage binaire dans BIANCA, alors que souvent, dans l'application des algorithmes génétiques aux stratifiés, ce sont des alphabets maximaux qui sont employés (par exemple les orientations possibles sont fixées à 0° , $\pm 45^\circ$ et 90° et le codage utilise un caractère par orientation; voir à ce propos les travaux de Haftka, Gürdal, Soremekun, Le Riche).

Il vaut la peine de remarquer que le *cross-over* et la mutation peuvent altérer la structure des schèmes, qui peuvent parfois disparaître même s'ils ont montré une bonne adaptation. Le *cross-over* a une probabilité plus importante de couper des schèmes longs, comme $0***1$, plutôt que des schèmes courts, par exemple $**01*$. Les schèmes courts de bonne adaptation sont donc beaucoup reproduits par l'opérateur de sélection et conservés avec une bonne probabilité par l'opérateur de croisement: ils sont les "briques élémentaires" de la construction de la solution du problème d'optimisation. La mutation aussi peut modifier les schèmes, mais son effet peut être négligé, vu la faible fréquence d'application de cet opérateur. D'ailleurs, pour ce qu'on a dit au paragraphe précédent, le rôle de la mutation est justement celui de créer

de la "biodiversité", pour utiliser un terme aujourd'hui à la mode, voir de détourner le processus vers des nouvelles zones à explorer.

10.8 L'algorithme BIANCA.

Le § 10.1 a déjà fait mention des raisons qui nous ont guidés dans la conception du logiciel BIANCA: disposer d'un outil souple et versatile pour la conception des stratifiés, capable de s'adapter aux exigences différentes qu'on peut rencontrer dans ce domaine, tout en limitant au minimum l'intervention directe de l'utilisateur en cours de fonctionnement du programme. Nous nous sommes proposés de procéder par étapes, en réalisant des versions successives du logiciel, en apportant à chaque version des améliorations.

Une longue réflexion initiale nous a permis de mettre en clair certains points que nous nous sommes efforcés de respecter dans la première mise en œuvre de BIANCA:

- traitement de tous les problèmes formulés au chapitre 9;
- utilisation du codage binaire;
- architecture typique de l'algorithme génétique standard: *cross-over*, mutation, sélection par roue de loterie biaisée et taille de la population constante;
- flexibilité de la mise en œuvre, pour pouvoir ajouter de nouveaux problèmes à traiter.

Dans une deuxième phase, nous avons ajouté l'opérateur génétique d'élitisme, qui s'est avéré être très important pour les résultats. Finalement, dans la toute dernière version disponible pour l'instant, nous avons ajouté un nouveau type de problème de conception en rigidité, qui a nécessité la modification du code pour la prise en compte des liens imposés. Une description détaillée de BIANCA se trouve dans la thèse de Vincenti, et ici seulement les points essentiels seront rappelés.

Angles d'orientation: nous ne voulions pas faire comme la plupart des algorithmes génétiques pour la conception des stratifiés, qui limitent les orientations possibles à un ensemble fini et généralement très limité de possibilités. Même si cette restriction est souvent employée dans les applications, elle ne peut pas se justifier au sein d'un logiciel conçu pour l'optimisation. Nous avons donc prévu les possibilités suivantes:

- les orientations sont des variables continues définies sur l'intervalle $]-90^\circ, 90^\circ]$;
- les orientations sont des variables continues définies sur un intervalle choisi $]\alpha, \beta]$;
- les orientations sont des variables discrètes espacées d'un pas fixé sur un intervalle choisi $]\alpha, \beta]$;
- les orientations appartiennent à un ensemble fini de valeurs fixées $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]$.

Matériaux constituants les plis: dans ce cas plusieurs possibilités étaient envisageables, et cela même en dépendance du type du problème à traiter. Par exemple, si on cherche un stratifié quasi-homogène à un nombre fixé de couches identiques, la solution ne dépend pas des caractéristiques élastiques du matériau, mais, éventuellement, seulement de ses symétries, alors qu'une solution générale fait complètement abstraction du type de matériau. Par ailleurs, dans la recherche d'un stratifié de poids minimum, le choix du matériau, éventuellement différent pour chaque couche, est essentielle. Finalement, nous avons retenu les possibilités suivantes:

- aucun matériau n'est défini, et le matériau n'est pas considéré comme une variable du problème: c'est une possibilité importante lorsqu'on aborde des problèmes à plis

identiques mais indépendants de la nature du pli de base (c'est par exemple le cas de la recherche générale d'un stratifié isotrope);

- un matériau comme au cas précédent, mais dont on fixe seulement les éventuelles symétries élastiques (l'orthotropie à R_0 nul, la symétrie du carré ou l'isotropie);
- un matériau, non considéré comme variable et fixé par l'opérateur, différent pour chaque couche ou identique pour toutes les couches, et défini par l'ensemble de ses constantes élastiques;
- un matériau, non considéré comme variable et fixé par l'opérateur, différent pour chaque couche ou identique pour toutes les couches, et appartenant à une base de données des plis disponibles et qui peut être mise à jour;
- un matériau considéré comme variable et faisant partie de la base de données mais identique pour toutes les couches;
- un matériau considéré comme variable et faisant partie de la base de données, en général différent pour chaque couche;
- un matériau à concevoir, composé de fibres et matrices appartenant à des matériaux choisis dans la base de données des composants; autres variables qui déterminent la couche sont l'épaisseur et, s'il s'agit d'un tissu, l'angle entre les deux directions des fibres et le coefficient d'équilibrage.

La dernière possibilité, envisagée surtout pour aborder de problèmes concernant la conception globale du stratifié, à partir même de la couche de base, n'est toutefois pas encore opérationnelle.

Nombre de plis: dans la version actuelle de BIANCA, le nombre de plis est une constante du problème et doit être fixée par l'opérateur; dans une version ultérieure il est prévu de pouvoir insérer ce paramètre parmi les variables de projet, afin de prendre en compte de problèmes du type minimisation du poids.

Codage des variables: on a déjà anticipé que nous avons retenu le codage binaire des variables, voyons comment cela est mis en oeuvre dans BIANCA. Soit x une variable définie sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ avec une précision p_{var} , qui est la plus petite unité que la variable peut atteindre. Pour la représentation de x , il faut diviser l'intervalle $[x_1, x_2]$ en $(n_{var} - 1)$ parties, où n_{var} est le nombre total de valeurs différentes que x peut prendre :

$$n_{var} - 1 = \frac{x_2 - x_1}{p_{var}} . \quad (10.6)$$

De cette façon, x est sous-entendue être une variable toujours discrète; toutefois, si p_{var} est suffisamment petit, la discrétisation sera assez fine pour représenter une variable continue avec la précision souhaitée et, en tout cas, ciblée sur le problème à traiter. Par exemple, dans l'algorithme BIANCA, on réalise la représentation des angles d'orientation comme variables continues dans l'intervalle $[-90^\circ, 90^\circ]$, en choisissant le nombre de divisions n_{angle} , tel que :

$$n_{angle} = 2^{20} - 1 = 1048575 \quad (10.7)$$

et donc :

$$p_{angle} = \frac{180^\circ}{n_{angle}} \cong 1.7 \cdot 10^{-4} \text{ degrés} , \quad (10.8)$$

qui est une discrétisation équivalente, dans la pratique, à une variation continue des angles. D'ailleurs, les expériences numériques nous ont montré que les variations des angles d'orientation au-delà de la quatrième décimale ne perturbent pas beaucoup les résultats obtenus par l'algorithme BIANCA. Conformément à ce qui a été détaillé ci-dessus, d'autres possibilités sont envisagées: si par exemple on pose $\alpha = -30^\circ$, $\beta = 30^\circ$ et $p_{angle} = 1^\circ$, on obtient :

$$n_{angle} = \frac{\beta - \alpha}{p_{angle}} + 1 = 61 ; \quad (10.9)$$

$$\delta_i = -30^\circ + (i-1)p_{angle}, \quad i = 1 \dots n_{angle}.$$

Finalement, il existe une troisième possibilité, c'est de fixer le nombre n_{angle} de valeurs possibles pour les orientations et définir ces valeurs une par une. Dans ce cas, p_{angle} n'a pas de signification parce qu'en général l'espacement des angles ne sera pas régulier entre les valeurs minimale et maximale.

Représentation des variables par l'intermédiaire de pointeurs: le code BIANCA ne traite pas directement les variables, mais il agit plutôt sur des entiers qui sont des pointeurs à des vecteurs dont les composantes sont les valeurs discrétisées des variables. C'est la stratégie utilisée pour avoir le maximum de liberté dans le traitement des variables: une fois acquis que chaque variable est discrète, la façon la plus simple de la traiter est celle de mettre ses valeurs dans un vecteur ξ de dimension n_{var} : chaque composante $\xi(i_{var})$ est une des valeurs possibles pour x . BIANCA travaille avec les indices i_{var} , qui pointent à la valeur correspondante $\xi(i_{var})$ de x : ce sont les indices i_{var} à être codés en binaire et c'est sur eux qu'on effectue les opérations génétiques de croisement et de mutation.

La longueur l_{var} des chaînes binaires pour représenter les possibles valeurs d'un paramètre x , à savoir le nombre de bits nécessaire au codage des indices i_{var} , dépend de n_{var} :

$$l_{var} \Rightarrow 2^{(l_{var}-1)} \leq n_{var} \leq 2^{l_{var}} - 1. \quad (10.10)$$

Si $n_{var} < 2^{l_{var}} - 1$ il y a des séquences de bits 0 et 1 de longueur l_{var} qui donnent $i_{var} > n_{var}$, c'est-à-dire un pointeur qui n'a pas de correspondance dans le vecteur ξ . Lors du tirage au sort de la population initiale, BIANCA est conçu de manière à ne donner que des valeurs non supérieures à n_{var} , mais les recombinaisons des chaînes réalisées par les opérateurs génétiques (*cross-over* et mutation) peuvent donner lieu à des séquences représentant des indices sans correspondance en ξ . Nous avons envisagé plusieurs démarches pour faire face à ce problème, mais finalement on a retenu une solution semblable à la technique de traitement des contraintes dite *death penalty*, voir Coello-Coello, 2002, que nous avons appelée "stratégie de la séquence mortelle": si à la suite d'un croisement on obtient un indice "fils" supérieur à n_{var} , on le rejette et on passe les "parents" à la génération suivante. La même tactique est employée lors de la mutation. Naturellement, pour limiter la génération de séquences non acceptables et améliorer l'efficacité de l'algorithme, il est souhaitable de choisir une division du domaine de variation donnant une valeur de n_{var} la plus proche possible de $n_{var} = 2^{l_{var}} - 1$. Toutefois, si n_{var} est petit, on peut se trouver avec des cas où un pourcentage important d'indices n'est pas acceptable, ce qui peut alourdir les calculs. Une stratégie à laquelle on a pensé, mais qui n'a pas encore été mise en œuvre, est la suivante: l_{var} est choisi en sorte à diminuer la différence $2^{l_{var}} - 1 - kn_{var}$, où k est un nombre entier. De telle sorte on minimise le nombre des indices non acceptables; si $k > 1$, chaque indice est représenté k -fois, de façon cyclique, ce qui n'altère en rien la probabilité d'une valeur de la variable par rapport à une

autre. Ceci réplique un peu le mécanisme de codage des aminoacides, pour lequel, comme déjà dit, le même aminoacide est codé de plusieurs façons et certains codages ne correspondent à aucun aminoacide.

Structure de l'individu stratifié: dans BIANCA chaque stratifié est considéré comme un individu; son patrimoine génétique est composé de n chromosomes, où n est le nombre de couches. Chaque chromosome contient toutes les informations concernant le pli, et il est divisé en huit gènes différents, comme spécifié en Tab. 10.1. Puisque la conception de stratifiés est réalisée dans BIANCA pour un nombre n constant de plis, tous les individus-stratifiés d'une population de BIANCA ont le même nombre de chromosomes dans leur patrimoine génétique, tout comme tous les êtres d'une même espèce.

Gène du matériau	Gène de l'orientation	Gènes des composants					
		Matériau matrice (BdD)	Matériau fibre (BdD)	Fraction volumique	Angle de tissage	Coeff. d'équilibrage	Epaisseur
i_{mat}	i_{angle}	$i_{matrice}$	i_{fibre}	i_{vf}	i_{α}	i_k	i_h

Tab. 10.1. *Le chromosome-pli.*

Le Tab. 10.1 montre clairement la représentation des variables par indices pointeurs expliquée ci-dessus: chaque indice pointe au vecteur correspondant; le gène du matériau et celui des composants ne sont pas toujours actifs, mais seulement pour certains problèmes. Il vaut la peine de remarquer que le gène orientation du premier pli est toujours inactif: en fait, afin de fixer un repère principal pour le stratifié, son orientation est figée à 0° , ce qui réduit à $n-1$ le nombre de variables libres dans le cas d'un problème fonctions des seules orientations.

Génération de la population initiale: la population initiale est produite à l'aide d'un générateur de nombres entiers aléatoires uniformément distribués, chacun représentant l'indice d'une variable active. Les paramètres inactifs reçoivent tous la même valeur quand ils représentent un paramètre constant, ou bien ils ne sont pas traités quand ils ne sont pas des paramètres de conception.

Un problème sensible dans les algorithmes génétiques est la détermination de la taille N de la population: le choix de N doit exprimer un équilibre entre les exigences de diversité génétique, pour assurer une large exploration de l'espace des solutions, et celles de rapidité des calculs. En littérature, la taille des populations des algorithmes génétiques varie de quelques dizaines à plusieurs centaines d'individus ($N = 20...500$). En particulier, on trouve des populations de taille réduite ($N = 20...50$) dans les ouvrages plus anciens et de taille plus importante (jusqu'à $N = 500$ ou plus) dans les travaux les plus récents. Cela est dû en bonne partie à l'amélioration des moyens de calcul.

Dans le domaine des applications des algorithmes génétiques à la conception des composites, on emploie souvent des populations de petite taille ($N = 20...50$), voir Hajela et Shih, 1989, Le Riche et Haftka, 1993, Soremekun *et alii*, 2001, mais il faut remarquer que les auteurs posent de nombreuses conditions simplificatrices: une séquence d'empilement symétrique pour assurer *a priori* le découplage, ou alors un nombre limité d'orientations possibles ($0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$). La complexité du problème est ainsi considérablement réduite, et la résolution par algorithme génétique est possible même avec des populations de petite taille. Richard, 1999, au contraire a utilisé des populations de taille plus importante: $N = 200, \dots, 500$; toutefois, dans ce cas il n'y avait pas de limitations du type cité.

Dans BIANCA, on ne pose en général aucune limitation sur la forme de la séquence d'empilement et le domaine de variation des paramètres peut être très vaste. Pour cette raison, on a souvent rencontré la nécessité de travailler sur des populations de grande taille, jusqu'à $N = 1000$. Mais il faut surtout souligner que les exigences varient beaucoup selon la nature du problème traité, ainsi que du nombre de plis et du domaine de variation des paramètres. Nous avons pu constater que des problèmes simples comme le découplage pour les stratifiés à faible nombre de plis en tissu équilibré nécessitent de populations de petite taille ($N = 20$), mais un problème très complexe comme l'isotropie totale impose des tailles de population plus importantes ($N = 1000$), voir ci-après, ou encore la thèse de Vincenti pour plus de détails à ce sujet.

Evaluation de l'adaptation (*fitness*) des individus: dans un algorithme génétique le taux de reproduction des individus est lié à leur adaptation aux lois de l'environnement, c'est-à-dire à l'objectif imposé: plus le comportement du stratifié se rapproche des propriétés cherchées, plus élevée est son adaptation. L'évaluation de l'adaptation se fait par le biais d'une fonction scalaire positive. Le choix de cette fonction n'est pas unique, et les résultats peuvent dépendre sensiblement du choix fait. La structure de la fonction de *fitness* $f(\mathbf{x}_k)$, $k=1, \dots, n$, est aussi en relation avec la structure de l'algorithme génétique, et notamment avec la façon dont la sélection est opérée. Une caractéristique essentielle de la fonction de *fitness*, est qu'elle tend vers zéro pour les individus mal adaptés, alors qu'elle tend vers 1 pour les mieux adaptés. Nous avons adopté dans BIANCA une fonction de *fitness* construite de la manière suivante: pour chaque individu-stratifié j on définit le paramètre

$$a_j = g_{max} + g_{min} - g_j \quad (10.11)$$

et on calcule ensuite l'adaptation de l'individu, à la génération en cours, comme

$$f_j = \frac{a_j}{\sum_{j=1}^N a_j} \quad (10.12)$$

Dans la (10.11), g_{max} et g_{min} sont la valeur maximale et minimale, sur la génération en cours, de la fonction objectif $g(\mathbf{x}_k)$, alors que g_j est celle de l'individu j . De cette façon on est assuré que $0 \leq f \leq 1$, ce qui permet la sélection par roue de loterie biaisée, voir ci-après.

Pour le cas des problèmes d'optimisation définis dans le chapitre 9, il est tout simplement $g(\mathbf{x}_k) = I[P_i(\mathbf{x}_k)]$; il n'est pas sans intérêt de remarquer que la fonction I ne peut être prise directement comme fonction d'adaptation, car, comme toute autre fonction objectif de type coût, à savoir à minimiser, elle représente une espèce d'adaptation inverse: elle diminue à l'approche de la solution, où elle vaut zéro, et, de surcroît, elle n'est pas bornée supérieurement.

Nous avons aussi essayé de remplacer la relation (10.12) par d'autres expressions pour expérimenter l'effet de différents niveaux de sélection. Par exemple, on a testé :

$$a_j = \frac{1}{g_j^c} \quad (10.13)$$

avec c constante positive: la pression de sélection peut varier en fonction de la valeur de c , mais nous avons abandonné cette voie car la pression de sélection se révélait généralement trop élevée. Nous avons aussi envisagé la possibilité de changer la forme de f en cours de calcul en fonction de l'avancement des générations, mais la relation (10.12) a déjà donné d'excellents résultats sous sa forme constante.

Sélection: une des étapes essentielles d'un algorithme génétique est celle de la sélection des parents qui donneront lieu à la future génération. Le point clé est l'application du pur darwinisme: les individus les mieux adaptés ont une probabilité majeure de se reproduire. On comprend donc l'importance d'établir une valeur scalaire, la *fitness*, qui mesure la "qualité" des individus et qui permet de les classer selon leur adaptation. L'opérateur de sélection doit donc faire en sorte de choisir les parents qui se reproduisent avec une probabilité qui soit une fonction croissante de leur adaptation. On trouve en littérature plusieurs mécanismes de sélection, voir par exemple Matous *et alii*, 2000, ou encore Magnin, 2001. Dans BIANCA nous avons choisi une technique classique: chaque individu parent est tiré au hasard, avec une probabilité d'être sélectionné égale à son adaptation f_j . Chaque tirage correspond donc à un tour de roue de loterie, sur laquelle chaque individu est représenté par un secteur proportionnel à son adaptation. C'est pour cela que cette démarche est appelée aussi méthode de la roue de loterie biaisée.

Cross-over et mutation: dans BIANCA le *cross-over*, décrit dans le § 10.6, se produit indépendamment sur chaque gène à la fois. Celle-ci est une caractéristique de BIANCA, car la plus part des codes pour les stratifiés, qui utilisent des alphabets maximaux et non binaires, ne permettent pas ce type de choix, et ils utilisent un *cross-over* de l'entier génome, ce qui revient la plupart des fois à faire un simple changement de séquence d'empilement, voir les déjà cités Soremekun, Haftka, Le Riche etc.

Le mécanisme de *cross-over* dans BIANCA est montré dans le schéma de Fig. 10.11, qui ne considère, pour simplifier, que le cas du gène de l'orientation, voire les angles des plis.

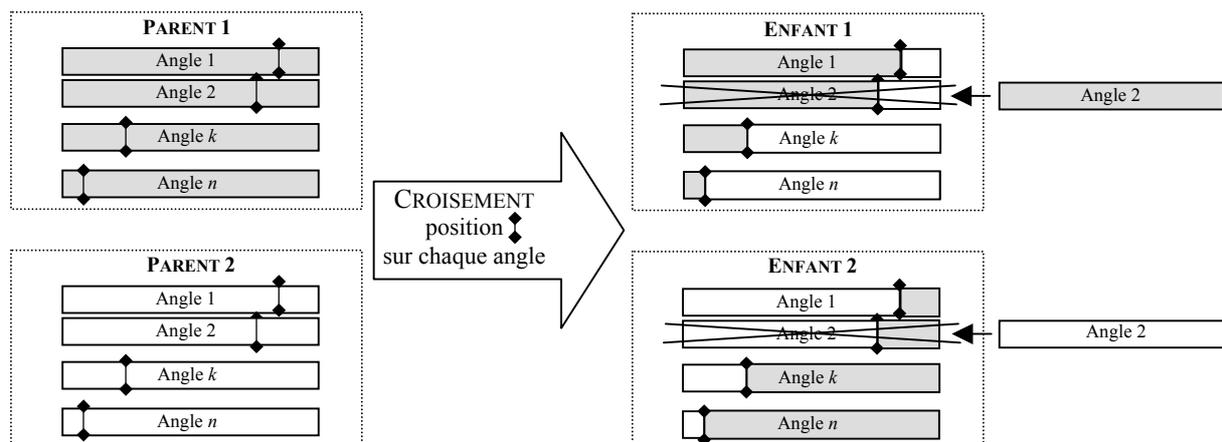


Figure 10.11. Schéma du croisement pour un couple d'individus-stratifiés.

Comme anticipé ci-haut, dans le code BIANCA si une séquence générée par croisement ne correspond à aucune valeur possible pour la variable correspondante, elle ne survit pas: tout simplement elle est refusée et les séquences relatives aux parents sont récupérées dans les enfants, comme si le croisement n'avait pas eu lieu; en Fig. 10.11 ce cas est exemplifié dans le croisement de l'angle 2.

Rappelons que le croisement ne se produit pas systématiquement sur chaque couple de gènes, mais avec une probabilité p_c . Après plusieurs tentatives de calibrage nous nous sommes fixé sur la valeur $p_c = 0.8$, qui est une valeur classique. La mutation est réalisée bit à bit comme montré en Fig. 10.10, avec une probabilité p_m . Après calibrage de l'algorithme, nous avons trouvé que $p_m = 0.001$ est une valeur correcte, des valeurs plus élevées introduisant une perturbation trop forte dans les calculs, empêchant ou retardant alors la convergence. Il faut toutefois remarquer que BIANCA permet à l'opérateur de choisir des valeurs différentes.

Élitisme: considérons le diagramme de Fig. 10.12, qui représente la courbe de convergence, à savoir la variation, au fil des générations p , de la valeur minimale de la fonction objectif $g = I(P_i)$, (9.1), pour le cas du problème 15, voire pour la recherche d'un stratifié isotrope en flexion, composé de 12 plis identiques quelconques.

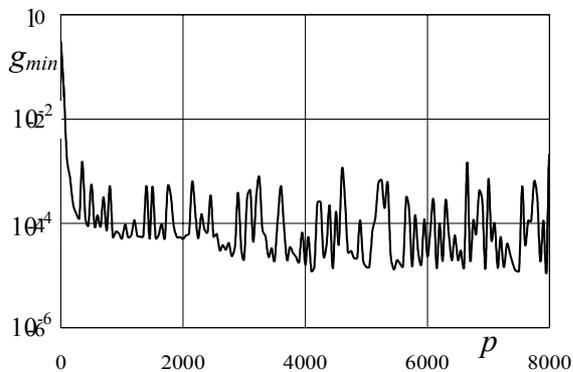


Fig. 10.12. Courbe de convergence pour le calcul d'un stratifié 12 plis isotrope en flexion (échelle logarithmique).

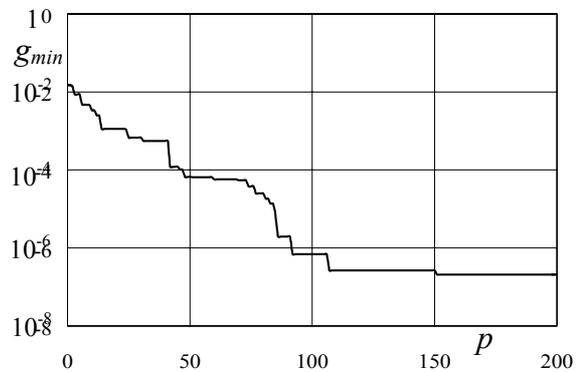


Fig. 10.13. Courbe de convergence pour le calcul d'un stratifié 12 plis isotrope en flexion avec l'opérateur d'élitisme (échelle logarithmique).

On remarque que l'algorithme génétique standard permet d'améliorer globalement la fonction objectif des stratifiés. En fait, l'objectif minimal diminue au cours des générations, d'abord abruptement et ensuite moins rapidement. Toutefois la convergence se réalise lentement, car il a fallu plus de 8000 générations pour atteindre une solution assez précise ($g_{min} = 2.02 \times 10^{-6}$). La taille de la population était fixée à $N = 200$.

La cause de cette lenteur de convergence est la perte probable des meilleurs individus de chaque population dans le passage d'une génération à la suivante. En fait, même si le processus de sélection des parents assure que les meilleurs individus participent à la reproduction, on n'a aucune garantie que la recombinaison de leur code génétique par croisement donne lieu à des enfants mieux adaptés. Bien sûr, à long terme, cela permet la convergence vers des valeurs toujours plus petites de la fonction objectif, mais ponctuellement la fonction objectif présente des oscillations très fortes comme la courbe de Fig. 10.12 le montre bien.

Afin d'améliorer la rapidité de convergence, nous avons introduit un nouvel opérateur, l'élitisme: il consiste à sauvegarder les n_{elit} meilleurs individus d'une population pour les réintroduire dans la génération suivante à la place des n_{elit} nouveaux individus les moins adaptés. Si $n_{elit} = 1$, l'opérateur prend le nom d'élitisme simple. Le premier à avoir introduit l'élitisme dans les algorithmes génétiques a été De Jong en 1975, et depuis cet opérateur est devenu une composante classique des algorithmes génétiques. En particulier, on le retrouve dans la presque totalité des travaux concernant les stratifiés, voir à ce propos les contributions de Soremekun et collaborateurs.

L'élitisme accroît nettement la rapidité de convergence: la Fig. 10.13 montre que l'utilisation de l'élitisme simple dans le problème précédent permet d'arriver à la solution après seulement 200 générations. De surcroît, la valeur finale de la fonction objectif passe de 2.02×10^{-6} à 4.07×10^{-9} . Nous avons réalisé plusieurs calculs avec des valeurs différentes de n_{elit} , de $n_{elit} = 1$ jusqu'à $n_{elit} = 50\% N$, mais on n'a pas pu observer d'améliorations sensibles de la convergence, sauf dans le cas de problèmes plus complexes comme l'isotropie totale et de toute façon avec $n_{elit} \leq 5$. Au contraire, en augmentant trop n_{elit} on court le risque d'une

convergence anticipée du calcul vers des minima locaux, autrement dit vers des stratifiés non optimaux, ce qui confirme une fois de plus que c'est la diversité qui fait la force des algorithmes génétiques.

Critère d'arrêt des calculs: plusieurs critères d'arrêt sont envisageables dans un algorithme génétique. Dans BIANCA il est possible de choisir parmi les trois suivants: le calcul a produit une solution avec une précision ε choisie par l'opérateur, le nombre maximal de générations a été atteint, la valeur de la fonction d'adaptation s'est stabilisée.

Il vaut la peine de remarquer que choisir une bonne valeur de ε ou de p , nombre maximum de générations, n'est pas chose simple, étant directement liées au type de problème traité. Pour avoir une idée de l'influence du nombre d'itérations p et de la taille de la population N sur la convergence de l'algorithme BIANCA, on montre en Fig. 10.14 la variation de la précision ε atteinte pour le calcul de stratifiés découplés à 8 plis pour différentes valeurs de p et de N . Chaque point représente la moyenne des résultats de dix lancements de l'algorithme BIANCA. Même si la surface n'a pas une allure simple, on peut observer que la précision atteinte ε diminue avec le nombre de générations p et avec la taille de la population N . En particulier, la variation avec p est très rapide au début et beaucoup moins sensible pour p plus élevé. Pour le problème du découplage de stratifiés à 8 plis, la taille optimale de la population semble être $N = 200$. Dans ce cas, on peut obtenir des précisions de l'ordre de 10^{-8} déjà avec un nombre d'itérations $p = 500$.

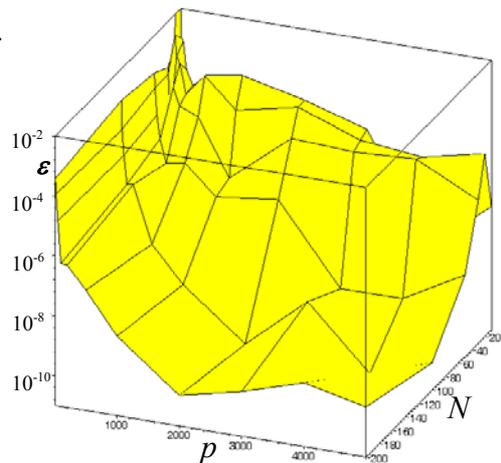


Fig. 10.14. Variation de ε en fonction de N et de p .

10.9 Quelques exemples.

Nous avons procédé à une vaste série d'essais numériques avec BIANCA, pour en tester l'efficacité. La thèse de Vincenti montre une grande partie de ces tests; ici, on se borne à montrer quelques-uns des résultats, pour donner un aperçu des capacités du logiciel.

Le Tab. 10.2 résume ces résultats; il faut dire que chaque cas correspond à un parmi les problèmes établis au chapitre 9, et que dans tous les exemples les couches sont identiques. En Tab. 10.2, n est le nombre de couches, N la taille de la population, p le nombre de générations, t le temps de calcul, f la valeur de la fonction objectif. En ce qui concerne le temps de calcul, celui-ci est indicatif, et il est présenté comme une valeur entre 1 et 100, correspondant au temps maximum employé au cours des calculs. Pour avoir un ordre de grandeur, la valeur maximale 100 correspond à environ 30 minutes de calcul sur une station de travail SPARC® de SUN MICROSYSTEMS® à 300 MHz. Le temps de calcul reste donc plutôt limité; il faut aussi dire que dans tous les exemples on a utilisé comme critère d'arrêt celui sur le nombre de générations: si l'opérateur utilise comme critère celui de l'obtention d'une seule solution avec une précision donnée, le temps de calcul peut se réduire sensiblement. En outre, dans chaque cas on a obtenu une série de solutions, mais en Tab. 10.2 on ne montre que la meilleure.

10.10 Discussion des résultats.

Les résultats présentés en Tab. 10.2 se prêtent à plusieurs commentaires. D'abord, les exemples 4 et 6 concernent la recherche de solutions sur un ensemble discret de variables, les

Numéro du problème	Type de problème	Type de couche	Ensemble de définition des orientations	n	p	t	f	Solution (°)		
1	23	Découplage	$R_1=0$	$]-45^\circ, 45^\circ]$	5	200	200	7	0	$[4.5735/0/0/1.5364/6.1092]$
2	28	Orthotropie $K=0$ pour A et D , avec axes coïncidents et découplage	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$	10	200	500	5	2.53×10^{-5}	$[0/-17.16/-2.69/5.05/-14.60/-5.97/-14.45/5.34/1.65/-12.95]$
3	28	Orthotropie $K=1$ pour A et $K=0$ pour D , avec axes coïncidents et découplage	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$	12	200	500	5	4.74×10^{-5}	$[0/44.67/15.70/-39.98/-25.46/-37.21/59.04/54.28/36.92/-38.16/18.58/-5.23]$
4	28	Orthotropie $K=1$ pour A et $K=0$ pour D , avec axes coïncidents et découplage	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$, $p_{angl\grave{e}}=10^\circ$	12	200	300	3	5.08×10^{-4}	$[0/10/40/-40/-20/50/-20/30/-40/30/10/-10]$
5	13+14+27	Isotropie de A , orthotropie $K=0$ pour D , découplage	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$	12	200	500	7	9.40×10^{-6}	$[0/75.99/-31.45/-67.48/37.97/31.97/-38.49/-76.87/57.69/89.31/14.15/-23.88]$
6	13+14+27	Isotropie de A , orthotropie $K=0$ pour D , découplage	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$, $p_{angl\grave{e}}=10^\circ$	12	200	500	7	1.13×10^{-4}	$[0/60/70/10/-60/-50/-60/50/60/0/10/70]$
7	24	quasi-homogénéité avec symétrie carrée	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$	12	1000	4000	70	2.27×10^{-5}	$[0/62.46/-53.44/81.56/-15.80/-75.75/66.59/0/-0.54/46.07/-28.12/-88.94]$
8	18	isotropie totale	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$	12	2000	3000	100	3.46×10^{-4}	$[0/51.58/-51.49/85.83/-51.34/85.04/24.09/-19.08/30.94/-11.16/63.28/-65.21]$

Tab. 10.2. Exemples de solutions trouvées avec *BIANCA*.

orientations pouvant prendre seulement les valeurs tous les 10° entre -90° et 90° : les résultats montrent la capacité du code à traiter ces genre de cas.

L'exemple 1, comme d'autres présentés dans la thèse de Vincenti, a été traité pour vérifier la capacité de BIANCA de reproduire des solutions exactes. En fait, il s'agit d'un cas déjà traité au § 8.8, celui du 5 couches découplé en tissu équilibré. Le calcul a restitué un certain nombre de solutions, que nous avons superposé aux courbes de Fig. 8.4, qui représentent la solution exacte, en Fig. 10.15: on peut constater la superposition pratiquement parfaite des solutions trouvées par BIANCA avec les courbes des solutions exactes. La Fig. 10.16 montre le même genre de résultats pour le cas du 6 couches quasi-homogène en tissu équilibré, toujours traité au § 8.8 mais non présenté en Tab. 10.2.

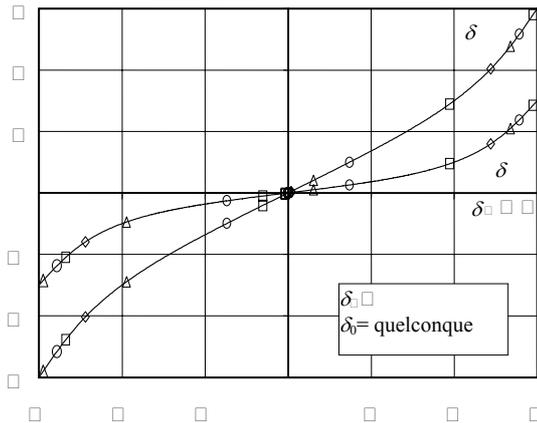


Fig. 10.15. Stratifiés découplés à 5 couches en tissu trouvés par BIANCA.

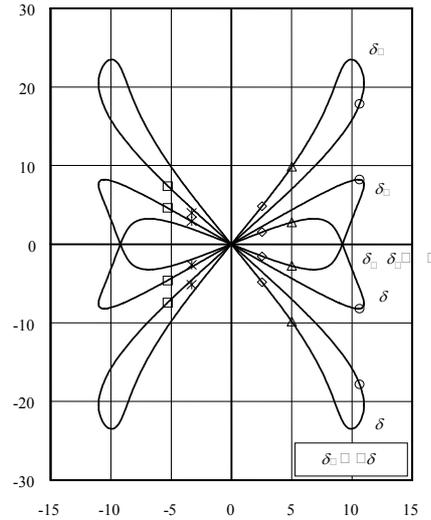


Fig. 10.16. Stratifiés quasi-homogènes à 6 couches en tissu trouvés par BIANCA.

Un autre résultat intéressant est celui de l'exemple 6: en effet, il s'agit de deux solutions de type Werren et Norris à trois orientations, $0^\circ, \pm 60^\circ$, voir le § 8.7, décalées de 10° . En outre, il s'agit d'un empilement antisymétrique, ce qui garantit l'orthotropie de \mathbf{D} , voir Caprino et Crivelli-Visconti, 1982: on peut constater facilement cela si on tourne la séquence d'un angle de -35° :

$$[-35/25/35/-25/85/-85/85/-85/25/-35/-25/35] \quad (10.14)$$

Même dans ce cas BIANCA a montré sa capacité de récupérer des solutions exactes; le résidu sur la fonction objectif est du seulement à la partie découplage.

Une analyse plus détaillée doit être faite au sujet de la précision, et pour cela on prend encore en considération l'exemple 1: on remarquera que dans ce cas la fonction objectif est exactement zéro, et que les orientations sont données avec quatre chiffres après la virgule. Or, c'est évident qu'une telle précision n'a pas de sens en pratique, car les plis peuvent être mis en place avec une précision difficilement supérieure à 1° . Toutefois, ici les résultats sont présentés de cette façon pour pouvoir apprécier la sensibilité des solutions: dans ce but, considérons le Tab. 10.3, où on compare la solution exacte, celle trouvée par BIANCA et la même, mais approchée aux valeurs des angles arrondies à la première chiffre décimale: on peut constater que la solution est déterminée par les trois premières chiffres exactes après la virgule, mais aussi, ce qui est plus important, que la valeur de la fonction objectif f s'accroît beaucoup dans le troisième cas.

Solution	Empilement (°)	f
Exacte	[4.5735/0/0/1.5361/6.1096]	0
BIANCA	[4.5735/0/0/1.5364/6.1092]	0
Approchée	[4.6/0/0/1.56/6.1]	6.7×10^{-4}

Tab. 10.3. Comparaison de différentes solutions pour l'exemple 1.

Or, d'un point de vue pratique, les trois solutions sont parfaitement coïncidentes, mais du point de vue de la solution non. Il se manifeste alors une circonstance qu'on a pu remarquer sur la presque totalité des cas: la valeur de la fonction objectif est très sensible aux approximations faites sur les orientations, même au-delà du seuil significatif pour les applications. Une confirmation de ça nous l'avons trouvé en suivant aussi une autre approche: nous avons appliqué la méthode du gradient à la solution présentée dans la Tab. 10.3 pour l'exemple 7, celui d'une plaque quasi-homogène à symétrie carrée. Cette démarche est assez typique parmi les utilisateurs des algorithmes génétiques: elle fait partie des méthodes dites hybrides, voir encore Goldberg, 1991, ou Richard, 1999. Le but est celui d'évaluer quelle est la différence entre la solution trouvée par l'algorithme génétique et la solution correspondante au minimum local le plus proche de celle-ci, aussi bien en termes de f que d'empilement. Nous avons aussi pris en considération les solutions avec les orientations arrondies à l'angle entier le plus proche: le Tab. 10.4 résume ces résultats (la solution trouvée par la méthode du gradient est approximée à la quatrième décimale pour les raisons expliquées ci-dessus).

Solution	Empilement (°)	f
BIANCA	[0/62.46/-53.44/81.56/-15.80/-75.75/66.59/0/-0.54/46.07/-28.12/-88.94]	2.27×10^{-5}
BIANCA approximée	[0/62/-53/82/-16/-76/67/0/-1/46/-28/-89]	7.84×10^{-5}
Gradient	[0/61.7640/-52.1221/82.6706/-18.2096/-78.3146/64.6143/1.0953/-2.5155/44.6293/-29.8974/-89.6532]	1.09×10^{-13}
Gradient approximée	[0/62/-52/83/-18/-78/65/1/-2 /45/-30/90]	8.56×10^{-5}

Tab. 10.4. Comparaison de différentes solutions approximées pour l'exemple 7.

Il est intéressant de remarquer que la méthode du gradient améliore beaucoup la fonction objectif, mais aussi que les angles ne changent pas beaucoup: leurs variations par rapport à la solution trouvée par BIANCA sont inférieures à 3° , qui est, du point de vu pratique, presque insignifiant. Lorsqu'on on approche la solution à l'angle entier le plus proche, la valeur de f change de peu pour le cas de l'approximation de la solution de BIANCA, alors qu'elle devient 7.85×10^8 fois plus grande si l'approximation est faite sur la solution trouvée par la méthode du gradient: ce qui est une opération d'approximation tout à fait naturelle semble donner lieu à des suites dramatiques. En réalité, il faut évaluer les effets de ce type d'approximation, et cela est difficile à se faire, car il dépend beaucoup du type de problème abordé et du paramètre pris en compte. Néanmoins, nous avons calculé les composantes polaires normalisées des stratifiés de Tab. 10.4, pour tenter une comparaison: ces calculs sont détaillés en Tab. 10.5. La couche de base est un matériau unidirectionnel en carbone-époxyde T300/5208, voir Tsai et Hahn, 1980, dont les caractéristiques élastiques sont: $E_1= 181$ GPa, $E_2= 10.30$ GPa, $G_{12}= 7.17$ GPa, $\nu_{12}= 0.28$. Les couches étant identiques, il est, § 8.3,

$$\begin{aligned}
\bar{T}_0^* &= \hat{T}_0^* = T_0 = 26.88 \text{ GPa}, \\
\bar{T}_1^* &= \hat{T}_1^* = T_1 = 24.74 \text{ GPa}, \\
\hat{T}_0^* &= \hat{T}_0^* = 0,
\end{aligned} \tag{10.15}$$

alors que les angles Φ_1 n'ont pas de sens, car la solution a la symétrie du carré. Les deux dernières lignes du Tab. 10.5 montrent les valeurs des degrés de couplage β et d'égal comportement γ , définis dans le chapitre suivant.

	BIANCA	BIANCA approximée	Gradient	Gradient approximée
\bar{R}_0^* (GPa)	7.16	7.21	6.95	6.94
\bar{R}_1^* (GPa)	0.02	0.06	1.56×10^{-6}	0.06
$\bar{\Phi}_0$ (°)	-10.66	-10.74	-11.81	-11.58
\tilde{R}_0^* (GPa)	7.16	7.13	6.95	6.91
\tilde{R}_1^* (GPa)	0.06	0.04	6.84×10^{-6}	0.08
$\tilde{\Phi}_0$ (°)	-10.70	-10.87	-11.81	-11.63
\hat{R}_0^* (GPa)	0.05	0.11	6.33×10^{-6}	0.04
\hat{R}_1^* (GPa)	0.07	0.06	5.23×10^{-6}	0.01
β	0.007	0.008	0	0.002
γ	0.002	0.004	0	0.002

Tab. 10.5. Comparaison des constantes polaires pour les solutions de Tab. 10.4.

On peut constater que la variation des différents paramètres est assez petite, sauf pour R_1 , qui varie sensiblement. Toutefois, sa valeur, si comparée avec celle de R_0 , reste, du point de vue pratique, négligeable, et toutes les solutions sont techniquement acceptables. Ceci est confirmé par les graphiques de Fig. 10.17, qui montrent la variation angulaire du module d'Young en membrane et en flexion dans les quatre cas traités: les 8 courbes sont pratiquement coïncidentes.

Ce genre de comportement a été constaté dans maints d'autres cas, relatifs à différents problèmes de conception. Ces observations nous éclairent sur la forme de la fonction objectif aux alentours des minima globaux: il semblerait que la fonction objectif présente des "vallées" très étroites et profondes et par conséquent difficiles à trouver. Les solutions

exactes, situées au fond de ces vallées, sont très sensibles aux variations d'orientation des plis, en terme de valeur de la fonction objectif: un petit écart par rapport à la solution exacte fait augmenter sensiblement la valeur de la fonction objectif, qui toutefois reste, aux alentours de ces vallées, suffisamment petite pour garantir une solution bien approchée, à tel point qu'on peut souvent la considérer comme techniquement exacte. Si l'on veut, le problème, déjà cité au § 10.8, de la bonne évaluation de la précision ε de la solution à demander par l'opérateur,

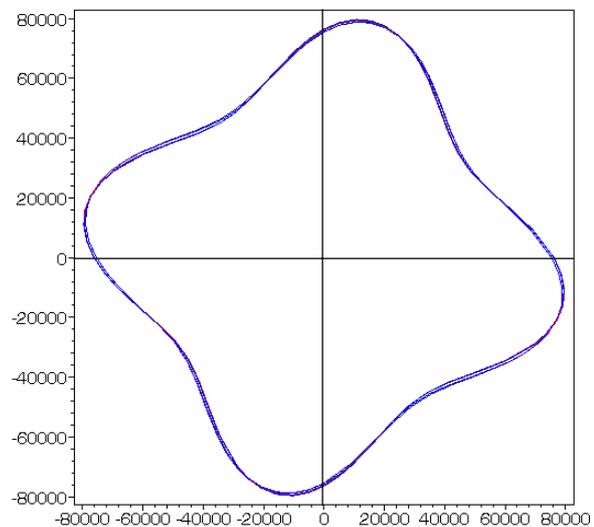


Fig. 10.17. Diagrammes du module d'Young en membrane et en flexion pour les quatre solutions en Tab. 10.4.

revient à fixer ε , voire la valeur maximale acceptable pour la fonction objectif, afin d'avoir un comportement final du stratifié techniquement correspondant au problème posé. Cela n'est pas une tâche facile, mais l'expérience que nous nous sommes faite nous amène à dire que ε devrait être fixé entre 10^{-6} et 10^{-4} : ceci donne un bon compromis entre temps de calcul et qualité de la solution.

Ce qu'on vient de dire met aussi en lumière la validité de l'approche génétique: elle n'est peut-être pas, en général, en mesure d'isoler un point-solution exact, surtout dans le cas de requêtes de conception très exigeantes, mais elle est capable de définir des régions du domaine de recherche susceptibles de contenir la solution exacte; ces régions déterminent des zones à très petites valeurs de la fonction objectif. En même temps, nous constatons que l'utilisation de démarches hybrides, utilisant la solution trouvée par algorithme génétique comme point de départ pour une méthode de descente, n'est pas toujours utile ni indiquée. Si cette approche permet parfois d'améliorer de façon spectaculaire la fonction objectif, elle ne donne souvent pas des améliorations techniquement sensibles, et amène toujours à des solutions qui ne sont pas réalisables d'un point de vu pratique, compte tenu de leurs sensibilité aux défauts. En outre, les méthodes de descente qui emploient les dérivées de la fonction objectif ne sont pas utilisables lorsqu'on n'a pas une variation continue des variables, notamment des orientations, ce qui est souvent le cas dans les applications pratiques.

Un dernier point qu'on peut mettre en évidence au sujet des solutions présentées dans le paragraphe précédent, c'est la courbe de convergence. Il faut rappeler que nous avons toujours utilisé l'opérateur d'élitisme simple, ce qui explique l'allure typique des courbes de convergence; une fois encore, on présente ici le cas de l'exemple 7, Fig. 10.18. Dans cette figure on montre non seulement la variation de la fonction objectif totale, qui coïncide dans ce cas avec la fonction (9.1), mais aussi les différentes parties qui la composent, notamment le découplage, l'homogénéité et la symétrie de carré en membrane. Il faut souligner que le diagramme donne, pour chaque génération, la valeur la plus petite de la fonction objectif totale parmi tous les individus, avec ses composantes. On peut remarquer que, si la fonction objectif totale est non croissante, grâce à l'élitisme, les autres parties ne se comportent pas de la même façon. En particulier, l'homogénéité et la symétrie de carré en membrane semblent être totalement aléatoires et non influencées par l'algorithme génétique, tandis que la partie découplage a une allure très semblable à celle de la fonction objectif totale.

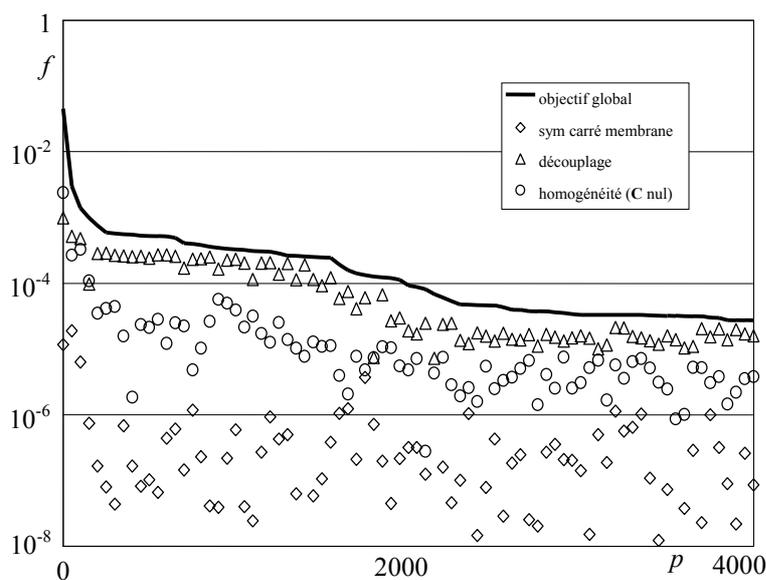


Fig. 10.18. Diagramme de convergence pour l'exemple 7 de Tab. 10.2 (échelle logarithmique).

Tout cela s'explique: la partie découplage est manifestement la partie la plus difficile à être réalisée, sa contribution au total est nettement la plus grande, et donc elle influence grandement la fonction objectif globale, alors que les deux autres parties ont souvent une influence très petite par rapport au découplage. L'algorithme se focalise donc, automatiquement, sur cette partie. En effet, le code est conçu pour trouver une solution globale, sans se soucier de minimiser chacune des composantes, mais seulement la valeur totale de la fonction objectif.

10.11 Formalisation de nouveaux problèmes de conception avec contraintes.

Tous les cas traités jusqu'ici, et possibles dans une première version de BIANCA, ne concernent que des problèmes de conception des propriétés de rigidité des stratifiés; en particulier, nous avons abordé des problèmes étroitement liés aux symétries élastiques. Le panorama est bien sûr plus vaste: non seulement on peut envisager des problèmes d'optimisation de la rigidité de nature différente, mais plus en général d'autres propriétés, comme par exemple la résistance à la rupture ou le coût, peuvent être prises en considération par les concepteurs des stratifiés. C'est pourquoi nous avons commencé à considérer d'autres problèmes à traiter avec le code BIANCA. Il faut toutefois souligner un aspect pas trop évident: les approches à l'optimisation des stratifiés sont les plus variées, comme le § 9.2 l'a montré, même si de façon incomplète. Notre approche est originale, non seulement pour la méthode suivie, mais aussi pour les objectifs formulés.

Or, notre but n'était pas de formuler une série de problèmes à caractère plutôt académique, mais bien au contraire de s'attaquer de façon organique et générale au domaine de la conception des stratifiés: mettre en place une approche et un algorithme capables de prendre en compte le plus grand nombre possible de problèmes de conception intéressants pour les ingénieurs. Dans cette optique, il ne fallait pas se borner à des cas simples et ordinaires, et surtout il fallait mettre en priorité les requis les plus importants et qui sont souvent sous-entendus dans beaucoup de travaux. Par exemple, dans une approche générale le découplage ou l'orthotropie ne peuvent pas être considérés comme des faits acquis, comme la plupart des approches le font: c'est le cas de tous les travaux où l'empilement est *a priori* symétrique, ou encore où la séquence est équilibrée et de type *angle-ply* ou $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$. C'est évident que dans ces circonstances le concepteur n'a pas à se soucier du découplage, car il est automatiquement acquis, et de même pour l'orthotropie etc. Nous avons eu aussi l'occasion de signaler que certains auteurs arrivent à forcer les choses et considèrent parfois que l'orthotropie de flexion sera automatiquement acquise, alors que cela est manifestement faux.

Dans la perspective de s'attaquer de manière générale et d'une façon rigoureuse aux problèmes de conception des stratifiés, ce genre d'acquis ne peuvent pas être pris comme base de la conception, et les propriétés de symétrie comme le découplage, l'orthotropie et d'autres encore doivent entrer à faire partie intégrante du processus de conception. Cette perspective évidemment complique sensiblement la situation, et des choix s'imposent: c'est pourquoi nous avons décidé de considérer que la conception des propriétés élastiques générales, le découplage est le cas le plus emblématique, est prioritaire par rapport à d'autres objectifs de conception. Le mot prioritaire signifie qu'il est un objectif obligatoire, parmi d'autres qui peuvent s'ajouter: en effet, les propriétés élastiques liées aux symétries ne sont pas un facteur à minimiser à proprement parler: elles appartiennent au stratifié ou elles ne lui appartiennent pas. Par exemple, si on cherche à maximiser la résistance d'un stratifié qui doit être découpé, le découplage est une propriété que la plaque doit avoir, en quelque sorte est une qualité "non négociable".

Notre optique a été alors celle d'établir de façon unitaire le nombre le plus grand possible de problèmes à caractère général, ce qui a été montré au chapitre 9, et ensuite d'ajouter des problèmes particuliers et intéressants, concernant différents aspects de la conception des plaques stratifiées. Il n'existe pas une façon unique de faire cela, et naturellement la notre n'est qu'une voie parmi d'autres. Les ouvrages généraux sur l'optimisation structurelle mettent en fait l'accent sur la formulation des problèmes, point essentiel en optimisation. En particulier, par exemple, pour ce qui concerne l'ajout d'autres propriétés à optimiser, deux voies étaient pour nous envisageables: aborder des problèmes multi-objectif ou formuler les nouvelles propriétés comme des liens à poser sur le processus d'optimisation. Si les deux approches ne

sont pas parfaitement identiques, au sens qu'elles donnent lieu en réalité à des problèmes semblables mais différents, chacune d'elles a souvent un intérêt pour les applications.

Dans la toute dernière version de BIANCA nous avons alors ajouté un autre problème, celui de la conception des stratifiés par rapport à leur rigidité. Nous avons ainsi formulé le

Prob. 30: trouver un stratifié à n plis ayant des symétries élastiques données et avec les liens suivants sur le module d'Young:

$$\begin{aligned}\bar{E}_{max} &\geq \bar{E}, \\ \bar{E}_{min} &\geq \bar{e}, \\ \tilde{E}_{max} &\geq \tilde{E}, \\ \tilde{E}_{min} &\geq \tilde{e}.\end{aligned}\tag{10.16}$$

Le matériau, identique ou même différent pour chaque pli, appartient à un ensemble donné. Parmi les liens (10.16), le concepteur a la possibilité d'en choisir seulement une partie; les limites inférieures E et e sont à spécifier par l'opérateur. Ce problème est bien évidemment différent d'un problème de maximisation de la rigidité pour un stratifié à nombre de plis donnés, mais il est intéressant pour l'ingénieur parce qu'il s'agit d'un cas de conception pour des requis minimaux, ce qui se présente souvent dans la pratique.

Ce nouveau cas se caractérise pour être un problème d'optimisation avec contraintes, les (10.16); il faut remarquer que la fonction objectif ne change pas, elle concerne toujours seulement les propriétés élastiques générales, voire, c'est toujours la (9.1). Nous avons choisi d'aborder ce problème car il a un intérêt pratique et parce qu'il nous permet d'aborder les problèmes d'optimisation sous contrainte tout en évitant pour le moment le cas des objectifs multiples, pas facilement traitable lorsqu'on considère que certains objectifs sont "non-négociables", au sens expliqué ci-dessus. Cependant, il faut maintenant introduire et traiter les liens (10.16).

D'un point de vue général, les algorithmes génétiques sont par leur nature des méthodes d'optimisation sans contrainte, comme déjà dit dans le § 10.7. Toutefois, plusieurs méthodes ont été proposées pour la prise en compte des liens. Certaines de ces méthodes sont générales et communes à d'autres approches aussi, notamment la méthode des fonctions de pénalité, Arora, 1989, alors que d'autres sont propres aux algorithmes génétiques, voir à ce propos Michalewicz *et alii*, 2001, Kurpati *et alii*, 2001, ou encore l'excellente synthèse faite par Coello-Coello, 2002.

Dans BIANCA nous avons testé une façon originale d'introduire les liens, que nous avons appelée "évolutive": en effet, la méthode consiste à introduire les liens progressivement, de façon à simuler ce qui se passe en nature, où la pression de l'environnement se produit par des modifications continues et étalées sur une certaine période. De façon semblable, notre approche consiste à diviser les bornes dans les (10.16) en n_c parties croissantes, par exemple $\bar{E}_0^1 < \bar{E}_0^2 < \dots < \bar{E}_0^{n_c}$, et le processus d'optimisation en n_c+1 phases. La phase 0, facultative, est une optimisation sans liens, visant à trouver une population d'individus déjà bien adaptés par rapport à la fonction objectif. L'introduction des liens a alors le but de sélectionner, parmi les individus déjà bien adaptés, ceux qui en plus respectent les liens. Cette introduction se fait de façon progressive, de sorte à ce que la sélection ne soit pas brutale. L'idée est celle que sur une population déjà bien adaptée par rapport aux requis imposés par la fonction objectif soit plus probable de trouver des individus qui répondent aux critères dictés par les liens.

L'opérateur doit spécifier le moment où l'algorithme doit changer de phase, et cela peut se faire essentiellement de deux façons: soit en imposant le nombre de générations à faire dans chaque phase, soit en contrôlant qu'une fraction minimale de la population réponde aux liens imposés. Dans les deux cas, la sélection s'opère par la méthode de la *death penalty*: les individus qui ne respectent pas les liens sont éliminés de la population et remplacés par des individus, choisis de façon aléatoire parmi ceux qui respectent les liens.

A titre d'exemple, on montre les cas d'un stratifié à 12 plis découplé et orthotrope en membrane, composé de plis identiques, avec imposition d'une limite inférieure sur la valeur maximale et minimale de E :

$$\begin{aligned} E_{max} &\geq 100 \text{ GPa;} \\ E_{min} &\geq 40 \text{ GPa.} \end{aligned} \tag{10.17}$$

Le matériau de base est toujours le T300/5208 du paragraphe précédent, et donc les limites imposées correspondent à $0.55 E_1$ pour E_{max} et à $3.88 E_2$ pour E_{min} . Les liens sont introduits de façon progressive et uniforme en cinq étapes successives. Nous avons fixé comme critère d'arrêt le nombre maximum de générations, 50, et nous avons échelonné l'introduction des liens toutes les 10 générations. Dans ce cas, nous n'avons pas fait la phase 0, et nous avons directement introduit la première étape d'imposition des liens. La taille de la population était de 400 individus. En outre, nous avons imposé que les orientations appartiennent à l'intervalle $]-90^\circ, 90^\circ]$ avec une discrétisation $p_{angle} = 15^\circ$. La valeur de la fonction objectif pour la meilleure solution est de 1.3×10^{-3} , avec $E_{min} = 44.74 \text{ GPa}$ et $E_{max} = 156.10 \text{ GPa}$; les valeurs les plus faibles sur la population finale sont $E_{min} = 40.038 \text{ GPa}$ et $E_{max} = 100.055 \text{ GPa}$. La séquence de solution est la suivante:

$$[0^\circ/30^\circ/-15^\circ/15^\circ/90^\circ/-75^\circ/0^\circ/45^\circ/-75^\circ/0^\circ/-15^\circ/15^\circ]; \tag{10.18}$$

le graphique polaire du module d'Young est montré en Fig. 10.19. Le temps de calcul a été de 4 minutes environ.

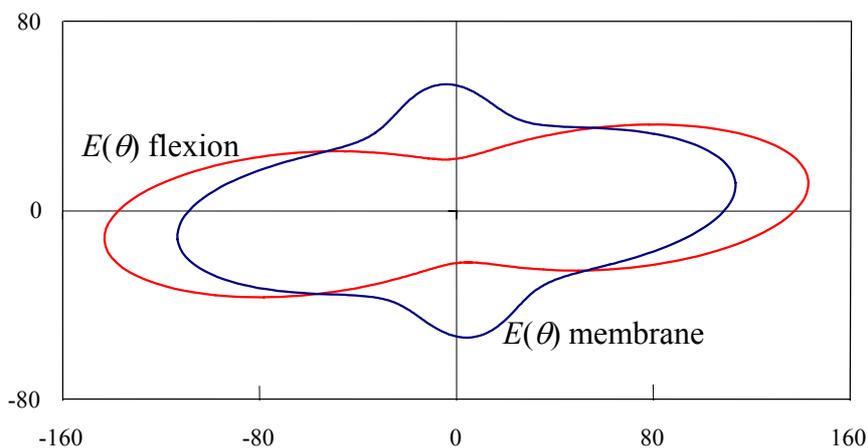


Fig. 10.19. Graphique du module d'Young pour le stratifié (10.18) (GPa).

Finalement, on montre en Fig. 10.20 la variation, au fil des générations, des modules d'Young minimum et maximum, aussi bien comme valeurs minimales que moyennes à chaque génération. On remarque l'effet à escalier dû à l'introduction progressive des liens, ainsi que le respect du lien sur le module E_{max} se fait aux dépens de la valeur moyenne de E_{min} , qui globalement diminue.

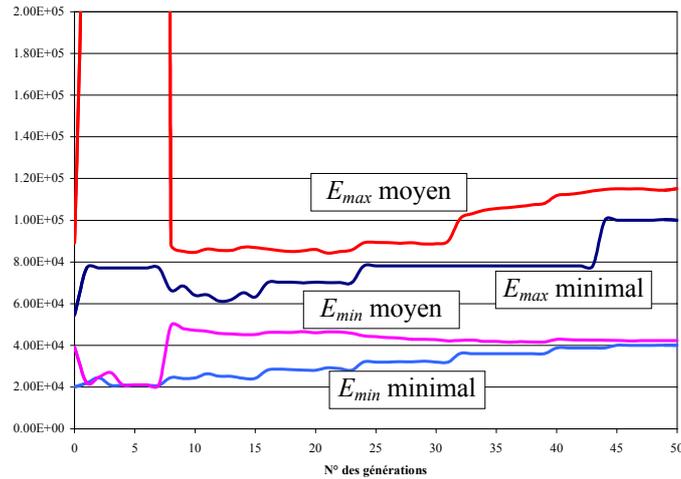


Fig. 10.20. Variation des valeurs minimale et moyennes de E_{max} et E_{min} (GPa).

10.12 Conclusions et perspectives.

La formalisation proposée dans le chapitre 9 s'est montrée une bonne approche à la conception des propriétés élastiques générales des stratifiés, et le code BIANCA, largement basé sur cette approche, a montré son efficacité et nous nous croyons satisfaits des résultats: nous avons élargi la panoplie des problèmes traités et cela sans hypothèses restrictives à la base, et nous avons obtenu des bons résultats avec des efforts et des temps de calcul qui sont compétitifs par rapport à d'autres approches. L'ajout d'un premier problème de conception, formulé comme problème d'optimisation sous contraintes, a été expérimenté avec succès, ainsi que la méthode évolutive de prise en compte des liens.

Toutefois, nous considérons que nous ne sommes qu'au début d'un plus long parcours: différentes possibilités sont envisagées, principalement dans deux directions distinctes: l'intégration au code BIANCA de nouveaux problèmes de conception et optimisation des stratifiés et l'amélioration des performances de calcul du code.

Pour ce qui concerne les nouveaux problèmes à traiter, nous pensons d'abord à la conception en résistance des stratifiés. Dans ce cas, nous envisageons, au moins dans un premier temps, de la traiter de la même façon du problème en rigidité formulé au paragraphe précédent. D'autres cas importants sont l'optimisation par rapport aux valeurs propres, soient-elles les charges critiques ou les fréquences de vibration, mais aussi la prise en compte des problèmes liés à la température: conception de stratifiés ayant des coefficients de dilatation thermique spécifiés ou minimaux etc.

Un autre domaine de développement futur sera la conception des stratifiés en partant de la conception du pli de base, problème pour lequel BIANCA a été conçu dès le début, notamment avec la mise en place des gènes des composants.

Une autre idée que nous avons la possibilité d'explorer, est celle d'utiliser, pour les problèmes à couches identiques, les solutions quasi-triviales, § 8.6. Les Tab. 8.1 et 8.2 montrent en effet que le nombre de solutions de ce type augment fortement avec le nombre de couches: par exemple, on dispose de 45441 solutions indépendantes pour un stratifiés quasi-homogène à 29 couches. L'idée est alors celle de rechercher la solution à un certain problème de conception parmi ces stratifiés, dont on rappelle la propriété fondamentale: tandis que la séquence d'empilement est fixée, les angles d'orientation sont libres. Cela a deux avantages fondamentaux: d'abord, la propriété de découplage ou de quasi-homogénéité est acquise *a priori* et donc n'affecte pas la valeur de la fonction objectif. Ensuite, le nombre de variables

décroît rapidement, car il est égal au nombre de groupes saturés et non pas au nombre de plis. Ceci doit se traduire en une économie considérable de temps de calcul. L'utilisation de l'ensemble de solutions quasi-triviales, qui sont stockées dans une base de données, est prévue à court terme, et ne nécessite que de modifications mineures du code BIANCA.

Notre ambition se porte toutefois plus loin, et l'objectif final est celui d'arriver à la conception intégrale d'un stratifié, en s'attaquant à des problèmes plus classiques, comme la minimisation du poids ou du coût du stratifié, tout en continuant à prendre en compte les propriétés élastiques générales. Cette dernière étape semble plus compliquée, car par exemple l'hypothèse utilisée jusqu'ici de nombre de pli fixe doit être supprimée. Nous sommes quand même en train de mettre en place des stratégies pour ce genre de cas.

En ce qui concerne les performances de calcul de BIANCA, nous pensons à quelques améliorations possibles. D'abord, ce qui a été envisagé au § 10.8 pour diminuer les indices pointeurs non significatifs générés par *cross-over* ou mutation. Ensuite, nous pensons à tester quelque opérateur génétique déjà connu en littérature, et qui pourrait améliorer les performances, voir par exemple Goldberg, 1991. Mais surtout, nous aimerions tester une approche génétique plus proche des mécanismes de reproduction de la nature, notamment en prenant en compte la diploïdie et la dominance. Dans ce domaine, des tentatives ont déjà été faites, voir encore Goldberg. Or, si c'est vrai que la plupart des codes génétiques ont la structure de base utilisée pour BIANCA aussi, voir ils considèrent des individus haploïdes et la dominance n'est pas prise en compte, c'est vrai aussi que la nature est sans doute l'optimisateur le plus efficace qu'il soit, et elle ne fait jamais les choses au hasard: tout a un sens et une raison d'être. Il est possible, alors, que ça vaut la peine de l'imiter.

Chapitre 11

AU-DELA DE L'APPROCHE DETERMINISTE: L'ANALYSE DE SENSIBILITE AUX DEFAUTS D'ORIENTATION DES COUCHES

11.1 Introduction.

Une des caractéristiques communes aux études présentées aux chapitres précédents, est le caractère déterministe de l'approche suivie dans chaque circonstance. Cependant, nous n'ignorons pas que la réalité des choses est bien plus complexe, étant donné le caractère aléatoire d'un grand nombre, sinon de la totalité, des grandeurs physiques et géométriques qui interviennent dans les différents problèmes traités. Nous nous sommes donc posés cette question, et, sans vouloir donner une réponse complète, qui aurait comporté une approche radicalement différente, et pour laquelle nous n'étions pas en mesure d'en assurer la réussite, nous avons abordé et traité de façon originale un problème particulièrement important dans la mécanique des stratifiés, à savoir l'étude de l'influence, sur les propriétés finales, des erreurs d'orientation des couches.

En effet, nombreuses sont les causes d'incertitude, dans la réalisation d'un stratifié, qui affectent ses nombreux paramètres et composantes: c'est en fait plutôt illusoire que de parler d'une épaisseur fixe et constante, ainsi que d'une disposition rigoureuse des fibres et de leur fraction volumique, plutôt que des leurs propriétés physiques. Notre attention s'est concentrée, par ailleurs, sur les erreurs d'orientation des couches, erreurs qu'on peut faire, de façon aléatoire ou même systématique, lors de la manufacture d'une plaque stratifiée. Il s'agit d'un type assez récurrent et presque inévitable d'erreur et, surtout, c'est le type d'erreur qui se prête le mieux à être étudié par la méthode polaire.

Le premier problème auquel nous nous sommes attaqués dans ce domaine est l'analyse de la sensibilité du découplage aux défauts d'orientation des couches. Le but était clair: évaluer les conséquences que les défauts d'orientation ont sur le tenseur \mathbf{B} pour un stratifié conçu pour être découplé. Un défaut par rapport à l'empilement théorique entraîne inévitablement la perte de la propriété de découplage, mais, même si \mathbf{B} n'est pas nul, des erreurs différentes auront des conséquences différentes sur \mathbf{B} : c'est la question que nous avons voulu examiner. Ensuite, nous avons appliqué la même démarche au cas de la quasi-homogénéité.

Cette recherche s'est étalée sur plusieurs étapes: une partie théorique, que j'ai abordée personnellement, et puis des études numériques, que j'ai menées personnellement d'abord et en collaboration avec F. Belaïd et A. Vincenti ensuite. Ces travaux ont fait l'objet d'un article paru en 2001 sur *Journal of Elasticity*, pour ce qui concerne la partie théorique sur le découplage, et d'un autre papier soumis à *Composite Science and Technology*, toujours en 2001, avec la généralisation de la théorie au cas de la quasi-homogénéité et une étude numérique, en plus de trois communications à des congrès nationaux et internationaux en 2001 et 2002.

Dans un but de synthèse, seule la partie élastique est présentée ici; pour ce qui concerne les propriétés thermoélastiques, que nous avons également traitées, on renvoie aux articles en annexe.

11.2 Degré de couplage.

La première considération à faire est comment mesurer l'effet des erreurs; or, c'est bien sûr le tenseur \mathbf{B} qui décrit complètement le couplage, mais les effets dépendent des conditions au

contour: géométrie et sollicitations. C'est alors évident que pour avoir des résultats généraux, il fallait faire des hypothèses générales et adopter une stratégie qui devait faire abstraction du cas particulier. C'est pour cela qu'on n'a considéré que des stratifiés composés de plis identiques; ensuite, il fallait trouver une mesure des effets du couplage parasite produit par les défauts, mesure elle aussi capable de faire abstraction du cas particulier, notamment du type de sollicitation. Il fallait une mesure synthétique, un "degré de couplage".

L'idée que j'ai retenue est la suivante: la mesure des effets des erreurs d'orientation des couches sur le découplage est faite à l'aide d'un degré de couplage β , défini comme

$$\beta = \frac{B}{B_{max}} ; \quad (11.1)$$

dans la (11.1), B est une norme de \mathbf{B} et B_{max} est la valeur maximale possible de cette norme pour le stratifié en question. De cette façon, β est un paramètre adimensionnel qui mesure la "quantité" de couplage de la plaque par rapport à un maximum possible: de 0, le découplage, à 1, valeur maximale possible. En outre, le choix de prendre comme fonction de mesure une norme de \mathbf{B} , plutôt qu'une composante, rend la mesure générale et indépendante de l'état de sollicitation possible; il s'agit donc, en quelque sorte, d'une mesure intrinsèque du couplage.

Pour la norme de \mathbf{B} , on a pris celle proposée par Kandil et Verchery, 1988:

$$B = \sqrt{\hat{T}_0^2 + 2\hat{T}_1^2 + \hat{R}_0^2 + 4\hat{R}_1^2} ; \quad (11.2)$$

en hypothèse de couches identiques, la partie isotrope de \mathbf{B} est nulle, (8.22), et la (11.2) se réduit à

$$B = \sqrt{\hat{R}_0^2 + 4\hat{R}_1^2} . \quad (11.3)$$

On a pu montrer que la (11.3) s'exprime dans une forme particulièrement indiquée pour les buts de cette recherche:

$$B = \frac{h_L^2}{2} \sqrt{(R_0^2 + 4R_1^2) \sum_{k=-p}^p b_k^2 + 2 \sum_{k=-p}^p \sum_{j=k+1}^p b_k b_j [R_0^2 \cos 4(\delta_k - \delta_j) + 4R_1^2 \cos 2(\delta_k - \delta_j)]}, \quad (11.4)$$

où les symboles sont encore ceux déjà employés au chapitre 8; à remarquer que les angles polaires n'apparaissent pas dans l'expression de B , qui, étant un invariant, ne peut pas dépendre de paramètres qui tiennent au choix du repère.

11.3 L'empilement de B_{max} .

Le calcul du degré de couplage β nécessite de la connaissance de B_{max} ; or, aucune règle n'était connue pour savoir dans quelles conditions d'empilement un stratifié avec un nombre donné de couches identiques a le couplage le plus grand possible. La (11.4) permet de répondre à cette question: en fait, pour maximiser le couplage, il faut rendre la plus grande possible la partie

$$\sum_{k=-p}^p \sum_{j=k+1}^p b_k b_j [R_0^2 \cos 4(\delta_k - \delta_j) + 4R_1^2 \cos 2(\delta_k - \delta_j)], \quad (11.5)$$

car le reste est une constante qui ne dépend pas de l'empilement, mais seulement des caractéristiques de la couche de base. Soit

$$\rho = \frac{R_0}{R_1}, \quad (11.6)$$

et

$$\delta_{kj} = \delta_k - \delta_j; \quad (11.7)$$

la (11.5) peut alors se réécrire

$$R_1^2 \sum_{k=-p}^p \sum_{j=k+1}^p b_k b_j \mu(\rho, \delta_{kj}), \quad (11.8)$$

avec

$$\mu(\rho, \delta_{kj}) = \rho^2 \cos 4\delta_{kj} + 4 \cos 2\delta_{kj}; \quad (11.9)$$

or, pour maximiser la (11.8) et donc B , il faut considérer que les coefficients b_k sont antisymétriques par rapport au plan moyen, (8.32); alors deux cas sont possibles: les couches k et j sont du même côté du plan moyen, ou une dans chaque côté. Dans le premier cas, le produit $b_k b_j$ est positif, et donc la (11.8) sera maximale si et seulement si la fonction (11.9) sera le maximum absolu pour chaque paire possible de couches; dans le deuxième cas, le produit $b_k b_j$ est négatif, et pour maximiser la (11.8) il faut que la (11.9) soit le minimum possible pour chaque paire de couches.

Si alors on analyse la fonction (11.9), Fig. 11.1, on voit que, si $\rho \leq 1$, $\mu(\rho, \delta_{kj})$ est maximum pour $\delta_{kj} = 0$ et minimum pour $\delta_{kj} = \pi/2$, alors que si $\rho > 1$, $\mu(\rho, \delta_{kj})$ est encore maximum pour $\delta_{kj} = 0$, mais à $\delta_{kj} = \pi/2$ elle a un maximum relatif, et le minimum absolu se trouve à

$$\delta^* = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{\rho^2}\right). \quad (11.10)$$

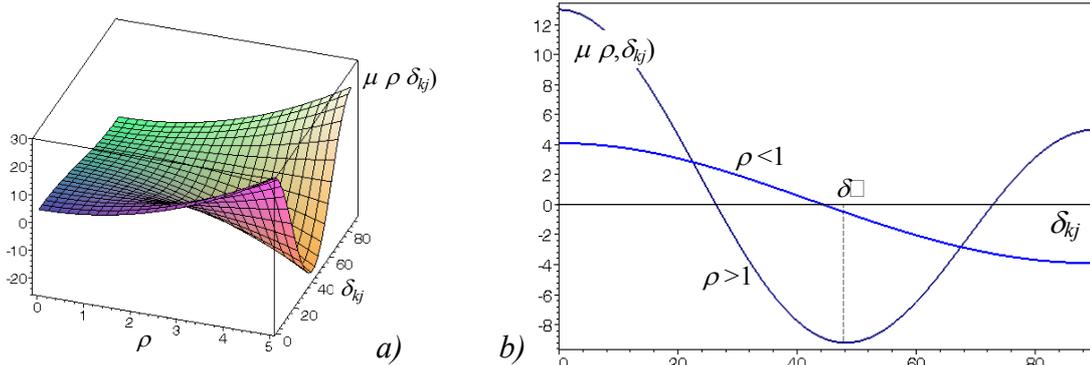


Fig. 11.1. La fonction $\mu(\rho, \delta_{kj})$: a) en 3D, b) pour deux valeurs de ρ .

On a donc la règle pour avoir B_{max} : le plan moyen divise les couches en deux parties, et chacune de ces deux parties doit avoir une seule et unique orientation pour toutes ses couches; par contre, les deux orientations doivent différer de $\pi/2$ si $\rho \leq 1$, et de δ^* si $\rho > 1$. La valeur de B_{max} peut être facilement explicitée:

$$B_{max} = \begin{cases} 2R_1 h_L^2 \sum_{k=1}^p b_k = \frac{1}{2} R_1 h_L^2 (n^2 - n \bmod 2) & \text{si } \rho \leq 1, \\ 2R_1 h_L^2 \frac{1+\rho^2}{2\rho} \sum_{k=1}^p b_k = \frac{1}{2} R_1 h_L^2 \frac{1+\rho^2}{2\rho} (n^2 - n \bmod 2) & \text{si } \rho > 1; \end{cases} \quad (11.11)$$

Dans les articles annexes, il est souligné le fait que pour la partie thermoélastique, les résultats sont légèrement différents: la norme du tenseur \mathbf{V} , (8.26), est maximale indépendamment des caractéristiques de la couche de base, et toujours pour une différence de $\pi/2$ des orientations des deux moitiés du stratifié; cela signifie que pour les matériaux qui ont $\rho > 1$ on ne peut pas avoir en même temps la norme maximale de \mathbf{B} et de \mathbf{V} . Pour les stratifiés avec couches à renfort en tissu équilibré, le rapport ρ tend vers l'infini, et l'angle δ^* est $\pi/4$.

11.4 Sensibilité du découplage au défaut d'orientation d'une couche.

Dans un premier travail, afin de comprendre les mécanismes du phénomène et d'avoir un aperçu, même synthétique, sur le rôle joué par les différents paramètres, j'ai considéré le cas où il y a une erreur d'orientation qui intéresse une seule couche du stratifié; dans cette circonstance, la méthode polaire nous a permis de mener à bien les calculs de façon entièrement analytique.

Sans se perdre dans des détails de calcul qu'on peut trouver sur l'article en annexe paru sur *Journal of Elasticity*, le premier résultat est que la norme B_ε de \mathbf{B} pour un stratifié conçu pour être découplé, lorsque la couche m est affectée par une erreur d'orientation ε_m , est donnée par

$$B_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} R_1 h_L^2 |b_m| \sqrt{\rho^2 (1 - \cos 4\varepsilon_m) + 4(1 - \cos 2\varepsilon_m)}; \quad (11.12)$$

les (11.11) et (11.12) permettent alors de calculer le degré de couplage β en fonction de ρ et de ε_m , (11.2):

$$\beta = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}|b_m|}{(n^2 - n \bmod 2)} \sqrt{\rho^2 (1 - \cos 4\varepsilon_m) + 4(1 - \cos 2\varepsilon_m)} & \text{si } \rho \leq 1, \\ \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \frac{\sqrt{2}|b_m|}{(n^2 - n \bmod 2)} \sqrt{\rho^2 (1 - \cos 4\varepsilon_m) + 4(1 - \cos 2\varepsilon_m)} & \text{si } \rho > 1. \end{cases} \quad (11.13)$$

En considérant les (11.13) et le fait que les coefficients b_k atteignent leur plus grande valeur absolue sur les couches externes, β sera le plus grand possible lorsque $m=p$, à savoir justement lorsque le défaut concerne une des deux couches extérieures. Dans ce cas on a

$$\beta_p = \begin{cases} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho^2 (1 - \cos 4\varepsilon_p) + 4(1 - \cos 2\varepsilon_p)} & \text{si } \rho \leq 1, \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \sqrt{\rho^2 (1 - \cos 4\varepsilon_p) + 4(1 - \cos 2\varepsilon_p)} & \text{si } \rho > 1. \end{cases} \quad (11.14)$$

où λ est un coefficient qui dépend seulement du nombre de couches:

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{b_p}{\sum_{k=1}^p b_k} = 2 \frac{n-1}{n^2 - n \bmod 2}. \quad (11.15)$$

La (11.15) montre aussi que la sensibilité à un même défaut décroît avec l'augmentation du nombre de couches, tandis que la (11.14) montre que les angles théoriques d'empilement n'ont aucune influence.

On montre facilement que la valeur du défaut ε_p qui maximise β_p est $\pi/2$ si $\rho \leq 1$, alors qu'elle est δ^* si $\rho > 1$, mais qu'en tout cas le maximum est

$$\beta_{p_{max}} = 2\lambda. \quad (11.16)$$

La Fig. 11.2 montre l'allure de la fonction β_p / λ ; on constate que les matériaux les plus sensibles aux défauts sont ceux qui ont ρ qui tend vers l'infini, voire les couches renforcées par un tissu équilibré, alors que les moins sensibles sont ceux avec ρ nul, ce qui correspond aux couches orthotropes avec R_0 nul. La plupart des matériaux composites ordinaires se situe autour de $\rho=1$.

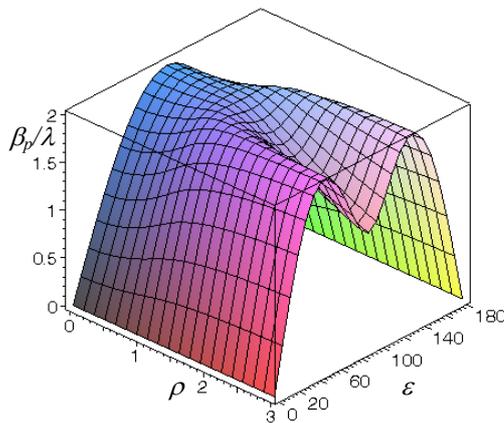


Fig. 11.2. La fonction β_p / λ .

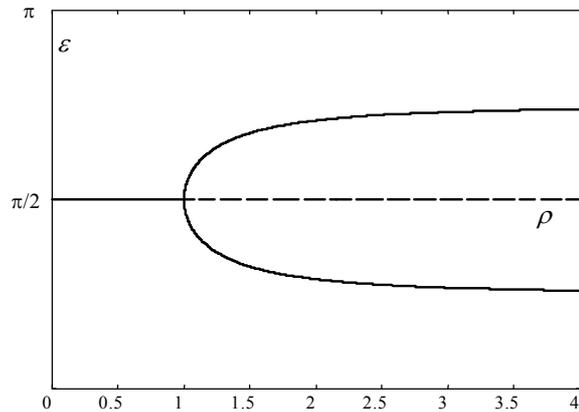


Fig. 11.3. Points stationnaires de β_p .

La Fig. 11.3 montre la courbe des points stationnaires de β_p ; l'allure ressemble étrangement à celle d'un phénomène de flambement: la ligne continue est celle des points de maximum, où la fonction prend la valeur 2λ . On remarque ce qu'on a déjà dit ci-haut: si $\rho \leq 1$ le maximum se trouve à $\pi/2$, autrement il suit la ligne bifurquée, qui donne la valeur de δ^* pour chaque ρ . En effet, c'est le phénomène qui bifurque, en fonction du paramètre de contrôle ρ , voire des propriétés d'anisotropie de la couche de base. A remarquer la ressemblance de la formule qui donne δ^* avec celle qui donne l'angle ω , § 7.14, formule (7.170).

11.5 Extension de la théorie au cas de la quasi-homogénéité.

La démarche décrite ci-haut a été successivement appliquée au cas de la quasi-homogénéité aussi, dans un travail avec Vincenti et qui est partie intégrante de sa thèse. La grande différence avec le cas du découplage c'est que pour la quasi-homogénéité il y a deux propriétés à prendre en compte: le découplage et l'égalité des propriétés de membrane et de flexion dans chaque direction. Il s'agissait donc de retracer pour le tenseur \mathbf{C} le parcours déjà fait pour \mathbf{B} , et ensuite d'intégrer les résultats dans une procédure de synthèse.

En ce qui concerne **C**, on a suivi exactement la même démarche adoptée pour **B**: nous avons d'abord introduit un degré d'égal comportement

$$\gamma = \frac{C}{C_{max}}, \quad (11.17)$$

où C est la norme de **C**, qui est donnée par une formule analogue à celle de **B**, et C_{max} est évidemment la norme maximale possible pour un stratifié donné. Nous avons pu démontrer que, à l'instar de B_{max} , pour avoir C_{max} il faut que les couches aient seulement deux orientations, décalées de $\pi/2$ si $\rho \leq 1$, et de δ^* si $\rho > 1$, mais cette fois il faut donner la même orientation aux couches telles que $-k^* \leq k \leq k^*$, et l'autre orientation aux couches extérieures à ce groupe central. Rappelons, § 8.3, que les coefficients c_k , (8.30), sont positifs pour $-k^* \leq k \leq k^*$ et négatifs ailleurs; on retrouve donc la règle que pour maximiser la norme d'un tenseur il faut disposer les couches en deux groupes déterminés par le signe des coefficients de la loi de composition du tenseur; ce constat nous dit immédiatement que c'est impossible de maximiser B et C à la fois. La valeur maximale de C est

$$C_{max} = \begin{cases} \frac{4}{n^3} R_1 \sum_{k=-k^*}^{k^*} c_k & \text{si } \rho \leq 1, \\ \frac{4}{n^3} R_1 \frac{1+\rho^2}{2\rho} \sum_{k=-k^*}^{k^*} c_k & \text{si } \rho > 1; \end{cases} \quad (11.18)$$

grâce aux propriétés (8.33) des coefficients c_k , nous avons pu montrer qu'il n'est pas nécessaire de calculer k^* pour évaluer C_{max} , et que

$$\sum_{k=-k^*}^{k^*} c_k = \begin{cases} n^2 - 1 + \sum_{k=1}^p |n^2 - 12k^2 - 1| & \text{pour } n \text{ impair,} \\ \sum_{k=1}^p |n^2 - 12k^2 + 12k - 4| & \text{pour } n \text{ pair.} \end{cases} \quad (11.19)$$

Ensuite, on a trouvé l'expression de γ , qui ressemble beaucoup à celle de β , et qui encore une fois est maximale lorsque le défaut affecte les couches extérieures, $k=\pm p$:

$$\gamma_p = \begin{cases} \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho^2(1 - \cos 4\varepsilon_p) + 4(1 - \cos 2\varepsilon_p)} & \text{si } \rho \leq 1, \\ \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \frac{2\rho}{1+\rho^2} \sqrt{\rho^2(1 - \cos 4\varepsilon_p) + 4(1 - \cos 2\varepsilon_p)} & \text{si } \rho > 1; \end{cases} \quad (11.20)$$

la seule différence par rapport à β est dans le coefficient κ , qui tient compte du nombre de couches, comme λ :

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{|c_p|}{\sum_{k=-k^*}^{k^*} c_k} = \begin{cases} \frac{(n-2)(n-1)}{n^2 - 1 + \sum_{k=1}^p |n^2 - 12k^2 - 1|} & \text{si } n = 2p + 1, \\ \frac{(n-2)(n-1)}{\sum_{k=1}^p |n^2 - 12k^2 + 12k - 4|} & \text{si } n = 2p. \end{cases} \quad (11.21)$$

Comme pour β , la valeur du défaut ε_p qui maximise γ_p est $\pi/2$ si $\rho \leq 1$, alors qu'elle est δ^* si $\rho > 1$, mais en tout cas le maximum est

$$\gamma_{p_{max}} = 2\lambda; \quad (11.22)$$

d'ailleurs, la comparaison entre les (11.20) et les (11.14) montre bien que la Fig. 11.2 est aussi le graphique de γ_p / κ et que la Fig. 11.3 est valable aussi pour γ_p .

Nous avons ensuite considéré la façon d'intégrer ces résultats à ceux concernant **B**, afin de donner une mesure de synthèse des conséquences des défauts d'orientation sur la quasi-homogénéité. Or, cette mesure ne peut pas être donnée à l'aide d'un seul paramètre, et donc nous avons proposé d'interpréter la mesure de quasi-homogénéité à l'aide d'un vecteur du plan (β, γ) , dont la norme ξ est une mesure de la déviation de l'état quasi-homogène et l'angle θ par rapport à l'axe β indique l'importance de γ relativement à β , Fig. 11.4.

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, \\ \text{tg} \theta &= \frac{\gamma}{\beta}. \end{aligned} \quad (11.23)$$

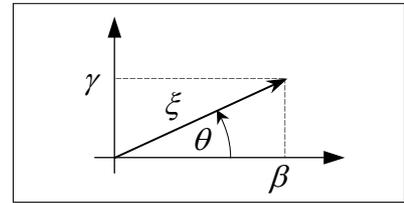


Fig. 11.4. Paramètres ξ et θ .

11.6 Etude numérique pour l'analyse statistique dans le cas de plusieurs défauts.

L'étude théorique menée pour le cas d'un seul défaut nous a fait comprendre les caractéristiques essentielles du problème, comme par exemple quels sont les matériaux qui rendent un stratifié plus sensible aux erreurs d'orientation des couches. Toutefois, cette étude est de portée limitée par rapport à la réalité, où les erreurs d'orientation peuvent affecter toutes les couches, et de façon aléatoire.

Nous avons donc considéré un vecteur d'erreurs d'orientation

$$E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n); \quad (11.24)$$

les composantes de E sont des variables aléatoires statistiquement indépendantes; les ε_k étant des erreurs aléatoires, leur distribution est une gaussienne à moyenne nulle et avec écart type

$$\sigma = 1.96 \psi; \quad (11.25)$$

l'angle caractéristique ψ est choisi comme celui pour lequel la probabilité que le défaut appartienne à l'intervalle $[-\psi, \psi]$ est égale à 95%. L'orientation réelle de chaque couche est donc calculée comme

$$\delta_k^{réelle} = \delta_k^{théorique} + \varepsilon_k, \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (11.25)$$

En se basant sur ce principe, nous avons mené une vaste campagne d'essais numériques, à l'aide d'un logiciel que nous avons réalisé. Pour ce faire, nous avons choisi des séquences d'empilements quasi-homogènes appartenant à l'ensemble quasi-trivial avec deux groupes saturés, un à la direction 0, et l'autre à la direction α . Le nombre de couches dans les deux groupes n'était pas forcément le même.

Le but de cette campagne d'essais, était celui de vérifier l'influence des différents paramètres, et notamment: l'angle caractéristique ψ , l'angle d'orientation α , le nombre de couches n et le type de matériau de la couche de base. Celui-ci, comme on a pu voir dans l'étude théorique présentée ci-haut, est pris entièrement en compte par le seul rapport ρ .

La séquence théorique de chaque stratifié, déterminé par un certain jeu des paramètres ci-dessus, a ensuite été changée 10000 fois en lui affectant autant de vecteurs d'erreur E , tirés aléatoirement par une méthode de Monte Carlo. Chaque valeur de β et de γ a donc été calculée comme moyenne sur une population de taille 10000. Pour une discussion du choix de la taille de la population, voir Belaid *et alii*, 2001. Ci de suite, certains des résultats de cette étude numérique sont présentés rapidement, et seulement pour les paramètres ξ et θ , d'autres résultats sont montrés dans les articles en annexe.

La variation de ξ avec l'angle caractéristique ψ est linéaire, Fig. 11.5, tandis que l'angle θ ne varie pas avec ψ , ce qui implique que β et γ augmentent linéairement, et dans la même proportion, avec ψ .

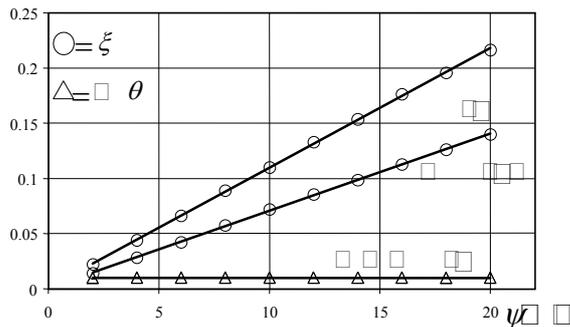


Fig. 11.5. Variation de ξ et $\tan(\theta)$ avec ψ ($\alpha = 30^\circ$, $\rho = 0.92$).

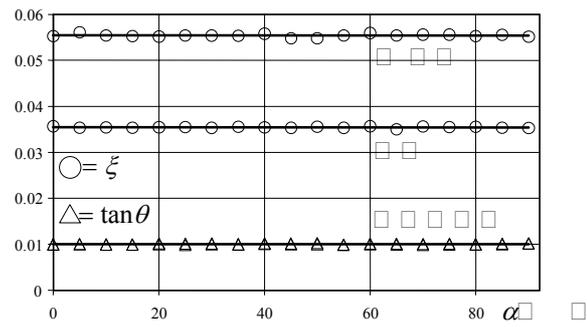


Fig. 11.6. Variation de ξ et $\tan(\theta)$ avec α ($\psi = 5^\circ$, $\rho = 0.92$).

L'angle α n'a aucun effet sur ξ et θ , comme la Fig. 11.6 le montre bien; même si cela peut paraître un résultat partiel, car on a considéré seulement des stratifiés à deux orientations, nous croyons pouvoir dire qu'il s'agit d'un résultat général, et que les orientations théoriques n'ont aucune influence. En effet, nous avons fait aussi des essais sur des stratifiés de type quasi-trivial à trois orientations, Belaid *et alii*, 2001, et sur la solution à 6 couches avec plis renforcés par un tissu équilibré présentée au § 8.8, Vincenti *et alii*, 2001, où les orientations des couches dépendent de façon fonctionnelle de l'orientation d'une seule couche. Dans tous les cas on a pu constater l'indépendance de ξ et θ de l'orientation théorique des couches, ce qui nous fait croire que celle-ci est une caractéristique générale. D'ailleurs, les (11.14) et (11.20) ont déjà montré ça dans le cas d'une seule erreur d'orientation.

Le nombre de couches n influe sur ξ et θ comme montré dans la Fig. 11.7, qui est en échelle doublement logarithmique; l'effet des défauts est moins important sur les stratifiés avec n grand, et pour les nombres pairs de plis le rapport entre γ et β reste inchangé, alors qu'il diminue avec n pour le cas de couches impaires.

L'influence de ρ sur ξ et θ est montrée en Fig. 11.8; l'observation faite pour le cas à un seul défaut est ici plus évidente encore: en échelle doublement logarithmique, la variation est du type seuil, et le rapport entre la partie supérieure et celle inférieure de la courbe est d'environ 2. La plupart des matériaux se trouvent en correspondance de $\rho=1$, et donc sur la partie à plus forte pente de la courbe. Les tissus équilibrés se trouvent à droite, pour ρ qui tend vers l'infini, et sont donc les plus sensibles aux défauts, tandis qu'à gauche se situent les matériaux les moins sensibles, ceux pour lesquels ρ est inférieur à 1, à la limite nul, ce qui correspond à l'orthotropie de type (7.112).

Il est remarquable de constater que l'étude statistique a confirmé complètement les résultats qualitatifs obtenus par voie analytique sur le modèle à un seul défaut.

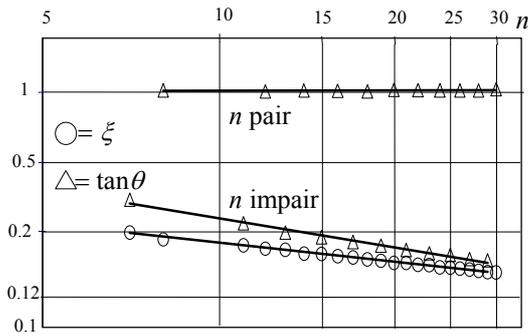


Fig. 11.7. Variation de ξ et $\tan(\theta)$ avec n ($\psi = 5^\circ$, $\rho = 0.92$, $\alpha = 30^\circ$; échelle logarithmique).

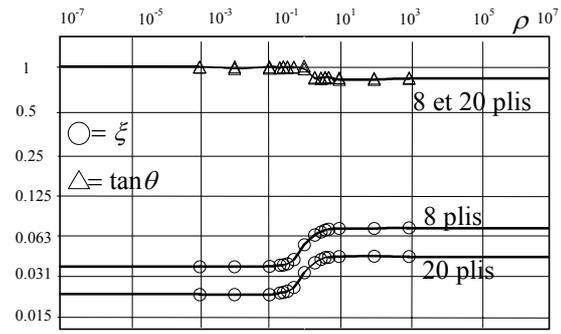


Fig. 11.8. Variation de ξ et $\tan(\theta)$ avec ρ ($\psi = 5^\circ$, $\alpha = 30^\circ$; échelle logarithmique).

11.7 Description synthétique des résultats.

L'analyse des courbes ci-haut suggère une représentation synthétique des résultats: pour une valeur fixée de l'angle caractéristique ψ , la variation de ξ en fonction de n et de ρ peut être approchée par la fonction

$$\ln f(\rho, n) = a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{(\rho + a_3)^2 + a_4 \rho}} + a_5 \ln n, \quad (11.27)$$

voir la Fig. 11.9; les coefficients a_i sont donnés dans le Tab. 11.1. Finalement, si on considère que la dépendance de ξ avec ψ est linéaire, on a l'expression synthétique finale de ξ :

$$\xi = \psi f(n, \rho). \quad (11.28)$$

Il faut souligner que pour β et γ on a des expressions tout à fait analogues, ce n'est que les coefficients a_i , qui ont été déterminés numériquement, qui changent.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
n pair	-0.38	-0.06	-0.49	0.85	-0.10
n impair	-0.34	-0.07	-0.50	0.78	-0.11

Tab. 11.1. Coefficients a_i de la fonction empirique $\ln f(n, \rho)$ pour ξ .

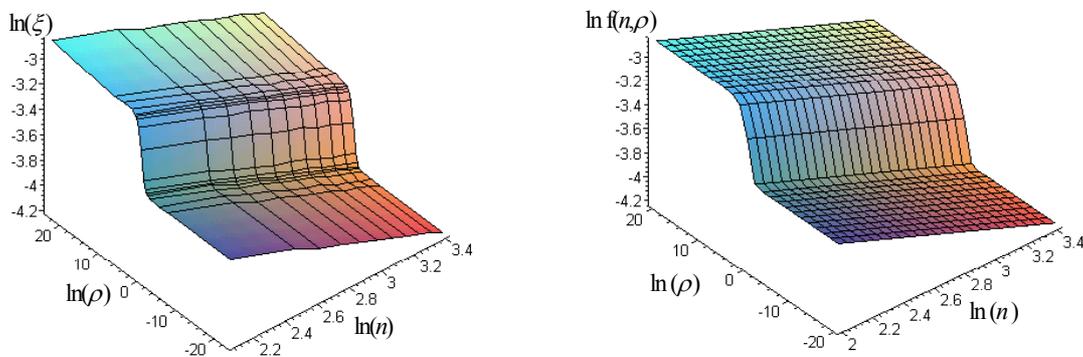


Fig. 11.9. Comparaison entre ξ et la fonction empirique $f(n, \rho)$ ($\psi = 5^\circ$, n pair).

11.8 Conclusions.

La méthode proposée dans ce chapitre est complètement originelle, et nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'autres travaux sur le même sujet. La clé de la réussite de nos calculs est la méthode plaire: avec une autre formulation ça serait été nettement plus compliqué d'aboutir aux mêmes résultats, car à plusieurs reprises les particularités de la méthode ont joué un rôle important.

Cette analyse de sensibilité aux défauts rentre dans un domaine propre à l'optimisation structurelle, à savoir l'analyse de sensibilité de la solution aux paramètres d'un problème, et dans ce sens complète en quelque sorte nos travaux sur l'optimisation. Cependant, ce ne sont que des résultats partiels, qui ne concernent que deux des propriétés que nous avons considérées lors de la conception par optimisation. Mais à bien voir, la voie est ouverte pour la tractation d'autres problèmes: l'analyse de la sensibilité aux défauts d'orientation des propriétés élastiques, en membrane ou en flexion, peut être faite de la même façon, en étudiant le tenseur différence entre celui affecté par les erreurs d'orientation et celui conçu théoriquement; c'est une recherche que nous avons prévue depuis longtemps de faire, et que seul le manque de temps nous a empêchés de mener à bien jusqu'ici.

Un autre axe de recherche est celui de vérifier sur des cas particuliers quelles sont les conséquences de certains défauts sur le comportement réel de plaques particulières, et éventuellement de procéder à une expérimentation dans ce sens. Dans un futur proche nous voulons aborder même ce sujet.

12.1 Introduction.

Comme anticipé dans les chapitres 7 et 8, cette partie est consacrée à l'analyse d'un type particulier d'orthotropie, qu'on appellera dans la suite orthotropie R_0 , car elle est déterminée par la condition (7.112), voire par le fait que la constante polaire d'anisotropie R_0 est nulle.

Cette recherche, que j'ai menée personnellement et qui a fait l'objet d'un article accepté par *Journal of Elasticity* en 2002, en annexe, a été inspirée par l'étude, montrée au chapitre précédent, sur la sensibilité aux défauts d'orientation: les résultats indiquaient clairement que les matériaux les moins sensibles aux défauts d'orientation étaient ceux caractérisés par une valeur nulle de R_0 . Cette circonstance a posé tout de suite la question de savoir quels matériaux pouvaient avoir une telle caractéristique, et l'exigence aussi d'en étudier de plus près les caractéristiques. En effet, quoique la prévision de l'existence de laminae R_0 -orthotropes soit déjà dans les équations de la méthode polaire, nous avons toujours considéré ce cas comme un cas possible mais en quelque sorte comme une curiosité, sans jamais approfondir la question. L'étude du cas a montré un certain nombre de surprises, dont on va parler dans les paragraphes qui suivent.

12.2 L'orthotropie R_0 .

Dans le § 7.9 on a montré qu'une condition suffisante d'orthotropie plane est la (7.112), voir que l'invariant d'anisotropie R_0 soit nul. Cette condition est trouvée de façon plutôt immédiate et naturelle dans le cadre de la méthode polaire, mais ses conséquences sont assez surprenantes. D'abord, le fait que R_0 soit nul implique que le nombre de paramètres nécessaires à fixer les propriétés d'une couche n'est plus de quatre, comme pour tous les matériaux orthotropes, mais il descend à trois, à savoir T_0 , T_1 , R_1 , le rôle de Φ_1 étant relégué à fixer le repère; dans la suite, on prendra toujours $\Phi_1 = 0$, ce qui veut dire que les axes d'orthotropie se trouvent à 0 et à $\pi/2$. Cette circonstance se produit même pour les laminae ayant une symétrie carrée des propriétés de rigidité, mais dans le cas présent nous n'avons pas pu trouver aucune condition supplémentaire de symétrie par rapport à un matériau orthotrope classique, de type (7.111): on a donc à faire avec une lamina pour laquelle le tenseur de rigidité a un nombre de composantes indépendantes réduit mais sans l'introduction d'ultérieures conditions de symétrie.

Le fait que R_0 soit nul implique, évidemment, l'absence de l'harmonique d'ordre 4 dans l'expression des composantes du tenseur de rigidité \mathbf{Q} de la couche, et en particulier que

$$\begin{aligned}
 Q_{xxxx}(\theta) &= T_0 + 2T_1 + 4R_1 \cos 2\theta, \\
 Q_{xxxy}(\theta) &= -2R_1 \sin 2\theta, \\
 Q_{xxyy}(\theta) &= -T_0 + 2T_1, \\
 Q_{xyxy}(\theta) &= T_0, \\
 Q_{xyyy}(\theta) &= -2R_1 \sin 2\theta, \\
 Q_{yyyy}(\theta) &= T_0 + 2T_1 - 4R_1 \cos 2\theta.
 \end{aligned} \tag{12.1}$$

Ce qu'on constate c'est que les composantes Q_{xxyy} et Q_{xyxy} sont isotropes, alors que les autres ont la variation angulaire typique d'un tenseur du second ordre, voir (7.88).

Ce qui a été dit pour les propriétés de rigidité n'est pas valable pour celles de souplesse: les (7.156), qui donnent les composantes polaires de souplesse en fonction de celles de rigidité, pour les laminae R_0 -orthotropes deviennent

$$\begin{aligned}
 t_0 &= \frac{T_0 T_1 - R_1^2}{4T_0(T_0 T_1 - 2R_1^2)}, \\
 t_1 &= \frac{T_0}{16(T_0 T_1 - 2R_1^2)}, \\
 r_0 e^{4i\varphi_0} &= \frac{R_1^2 e^{4i\Phi_1}}{4T_0(T_0 T_1 - 2R_1^2)}, \\
 r_1 e^{2i\varphi_1} &= -\frac{R_1 e^{2i\Phi_1}}{8(T_0 T_1 - 2R_1^2)},
 \end{aligned} \tag{12.2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 r_0 &= \frac{R_1^2}{4T_0(T_0 T_1 - 2R_1^2)}, \\
 r_1 &= \frac{R_1}{8(T_0 T_1 - 2R_1^2)}, \\
 \varphi_0 &= \Phi_1, \\
 \varphi_1 &= \Phi_1 + \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned} \tag{12.3}$$

Contrairement au cas de la symétrie du carré, pour laquelle

$$R_1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0, \tag{12.4}$$

pour les plis R_0 -orthotropes r_0 ne peut pas être nul, car les (12.2) montrent que cela correspondrait à l'isotropie, (7.121). Les composantes cartésiennes du tenseur de souplesse \mathbf{S} dépendent donc de l'harmonique d'ordre 4 aussi, et cela c'est un bien étrange cas, où rigidité et souplesse n'ont pas la même morphologie. Cependant, le nombre de composantes indépendantes de \mathbf{S} est encore trois, comme pour \mathbf{Q} : en fait, les (12.3_{3,4}) montrent que les deux angles polaires φ_0 et φ_1 ne sont pas indépendants, et des (12.2₂) et (12.3_{1,2}) on tire que

$$r_0 = \frac{r_1^2}{t_1}; \tag{12.5}$$

et donc, une fois établi Φ_1 pour fixer un repère, φ_0 et φ_1 sont connus, et les invariants polaires t_0 , t_1 et r_1 sont suffisants à connaître \mathbf{S} dans chaque direction. Pour $\Phi_1 = 0$ on a alors

$$\begin{aligned}
S_{xxxx} &= t_0 + 2t_1 + \frac{r_1^2}{t_1} \cos 4\theta - 4r_1 \cos 2\theta, \\
S_{xxxy} &= -\frac{r_1^2}{t_1} \sin 4\theta + 2r_1 \sin 2\theta, \\
S_{xxyy} &= -t_0 + 2t_1 - \frac{r_1^2}{t_1} \cos 4\theta, \\
S_{xyxy} &= t_0 - \frac{r_1^2}{t_1} \cos 4\theta, \\
S_{xyyy} &= \frac{r_1^2}{t_1} \sin 4\theta + 2r_1 \sin 2\theta, \\
S_{yyyy} &= t_0 + 2t_1 + \frac{r_1^2}{t_1} \cos 4\theta + 4r_1 \cos 2\theta,
\end{aligned} \tag{12.6}$$

ou encore, en injectant les (12.2) et (12.3) dans les (12.6),

$$\begin{aligned}
S_{xxxx} &= \frac{1}{8(T_0 T_1 - 2R_1^2)} \left[T_0 + 2T_1 + 2 \frac{R_1^2}{T_0} (\cos 4\theta - 1) - 4R_1 \cos 2\theta \right], \\
S_{xxxy} &= \frac{R_1}{4(T_0 T_1 - 2R_1^2)} \left[-\frac{R_1}{T_0} \sin 4\theta + \sin 2\theta \right], \\
S_{xxyy} &= \frac{1}{8(T_0 T_1 - 2R_1^2)} \left[T_0 - 2T_1 - 2 \frac{R_1^2}{T_0} (\cos 4\theta - 1) \right], \\
S_{xyxy} &= \frac{1}{4(T_0 T_1 - 2R_1^2)} \left[T_1 - \frac{R_1^2}{T_0} (\cos 4\theta + 1) \right], \\
S_{xyyy} &= \frac{R_1}{4(T_0 T_1 - 2R_1^2)} \left[\frac{R_1}{T_0} \sin 4\theta + \sin 2\theta \right], \\
S_{yyyy} &= \frac{1}{8(T_0 T_1 - 2R_1^2)} \left[T_0 + 2T_1 + 2 \frac{R_1^2}{T_0} (\cos 4\theta - 1) + 4R_1 \cos 2\theta \right].
\end{aligned} \tag{12.7}$$

On peut remarquer que, contrairement à ce qui se passe pour \mathbf{Q} , les composantes S_{xxyy} et S_{xyxy} ne sont pas isotropes, et que S_{xxxy} n'est pas constamment égale à S_{xyyy} ; toutefois, comme pour toute autre couche orthotrope, ces deux dernières composantes sont simultanément nulles en correspondance des axes d'orthotropie.

A l'instar de ce qu'on a vu au § 7.14, même pour ce genre de couches on trouve qu'il y a deux possibilités différentes en ce qui concerne la variation du module d'Young $E(\theta)$:

- i. $T_0 \geq 2R_1$: $E(\theta)$ a le maximum à 0 et le minimum à $\pi/2$;
- ii. $T_0 < 2R_1$: $E(\theta)$ a un minimum relatif à 0 et le minimum absolu à $\pi/2$, alors que le maximum absolu est à la direction $\omega \in [0, \pi/4]$ donnée par

$$\omega = \frac{1}{2} \arccos \frac{t_1}{r_1} = \frac{1}{2} \arccos \frac{T_0}{2R_1}. \tag{12.8}$$

Considérons à présent les conditions thermodynamiques d'existence d'un matériau R_0 -orthotrope, les (7.149), et les conditions aux points i et ii ci-dessus, qui déterminent la forme du diagramme de $E(\theta)$. On veut déterminer les domaines d'existence des deux types de diagramme. Appelons P un point du plan (T_1, R_1) , fixons une valeur positive T_0 de T_0 et traçons encore la surface $\mathcal{S} = 2R_1^2/T_1$ du § 7.11, conjointement avec les plans $T_0 = 2R_1$ et $T_0 = T_0$, Fig. 12.1 a). Le plan $T_0 = 2R_1$ coupe la surface \mathcal{S} selon une droite dont la projection sur le plan (T_1, R_1) est la bissectrice $T_1 = R_1$, et trois sont les possibilités, Fig. 12.1 b):

1. $P \in \text{domaine } \Omega_1: T_0 > \frac{2R_1^2}{T_1} > 2R_1 \Rightarrow$ seul le cas i est possible ($T_0 > 2R_1, T_1 < R_1$);
2. $P \in \text{domaine } \Omega_2: T_0 > 2R_1 > \frac{2R_1^2}{T_1} \Rightarrow$ encore, seul le cas i est possible ($T_0 > 2R_1, T_1 > R_1$);
3. $P \in \text{domaine } \Omega_3: 2R_1 > T_0 > \frac{2R_1^2}{T_1} \Rightarrow$ seul le cas ii est possible ($T_0 < 2R_1, T_1 > R_1$).

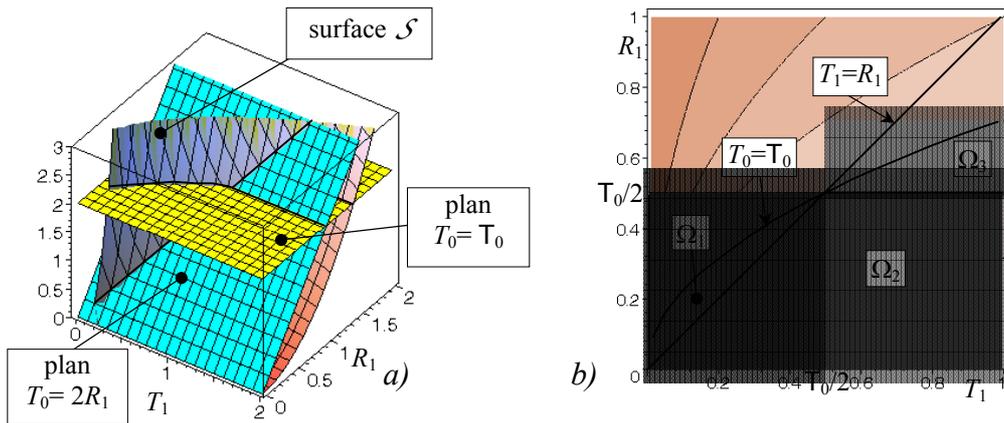


Fig. 12.1. Domaines d'existence des deux types de matériaux R_0 -orthotropes: a) vue en 3D, b) domaines dans le plan (T_1, R_1) .

On remarque que si $T_1 < T_0/2$, seul le cas i est possible, alors que si $R_1 > T_0/2$ c'est le cas ii le seul à pouvoir exister.

Pour terminer, si l'on considère la méthode des équations caractéristiques généralisées vue aux § 7.13, on peut voir que pour les matériaux R_0 -orthotropes la cubique $\delta(m, k)$ se décompose en une hyperbole et une droite:

$$k = 2T_1 + \frac{4R_1^2}{m - T_0}, \quad (12.9)$$

$$m = T_0,$$

et il n'y a pas de points doubles, Fig. 12.2.

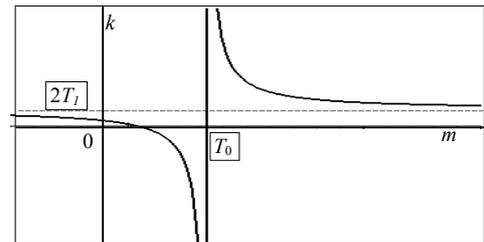


Fig. 12.2. Fonction $k(m)$ pour $R_0=0$.

12.3 Conditions cartésiennes de l'orthotropie R_0 .

Les conditions cartésiennes de l'orthotropie R_0 se trouvent facilement à partir de la (7.97₃): il faut que ce soit, pour chaque direction θ ,

$$Q_{xxxx} + Q_{yyyy} = 2Q_{xxyy} + 4Q_{xyxy}, \quad (12.10)$$

$$Q_{xxyy} = Q_{xyxy}.$$

Par les (12.1) on voit aussi que la première des (12.10) est un invariant, $2T_0+4T_1$; dans ce type d'orthotropie, les composantes de couplage contrainte normale-cisaillement sont donc identiques dans chaque direction et les deux composantes Q_{xxxx} et Q_{yyyy} sont liées de sorte que leur somme soit isotrope.

Si on considère le cas de la symétrie du carré, celle-ci se traduit en cartésien par les conditions bien connues que, pour chaque direction θ , ce soit

$$Q_{xxyy} + Q_{xyxy} = 0, \quad (12.11)$$

$$Q_{xxxx} = Q_{yyyy}.$$

La comparaison avec les relations (12.9) montre comme un échange des rôles entre les termes Q_{xxxx} et Q_{yyyy} et les Q_{xxyy} et Q_{xyxy} .

Si on utilise les composantes de Tsai et Pagano, § 7.15, on reconnaît facilement que l'orthotropie R_0 est déterminée par les conditions, voir la (7.179₄),

$$U_3 = 0, \quad (12.12)$$

$$U_7 = 0,$$

et la symétrie du carré par

$$U_2 = 0, \quad (12.13)$$

$$U_6 = 0.$$

Il vaut la peine de souligner que l'existence de laminae avec R_0 nul est manifeste seulement si on utilise la représentation polaire, qui exprime de façon immédiate cette possibilité à l'aide d'une seule condition, au lieu de deux, comme d'ailleurs pour la symétrie du carré. La représentation par invariants polaires se montre donc, encore une fois, plus efficace dans la description des propriétés intrinsèques d'une lamina anisotrope.

Si on considère la relation d'orthotropie (7.115) de Pedersen, on voit qu'elle fonctionne même pour les matériaux R_0 -orthotropes; en effet, comme déjà observé, cette formule n'est qu'une condition qui est respectée dans chaque circonstance qui correspond à une diminution du nombre des constantes élastiques indépendantes, mais elle n'est pas capable de distinguer ni de quel cas il s'agit, ni si la réduction est d'une ou de deux constantes.

12.4 Aspects de l'utilisation de laminae R_0 -orthotropes.

L'utilisation de laminae R_0 -orthotropes peut présenter quelque avantage: on a déjà eu l'occasion de remarquer que ce type de matériau est le moins sensible aux erreurs d'orientation des couches; en outre, les composantes Q_{xxxx} et Q_{yyyy} ont les extrema sur les axes d'orthotropie, ce qui exclue la possibilité, plutôt fréquente, d'avoir des directions de rigidité faibles à des directions intermédiaires; cela vaut aussi pour le module d'Young si $T_0 > 2R_1$.

Plus intéressantes sont, peut-être, les retombées de l'emploi de couches R_0 -orthotropes sur les propriétés des stratifiés: à l'instar de ce qu'il se passe avec la symétrie du carré, § 8.2 et § 8.8, si tous les plis sont R_0 -orthotropes, même si différents, alors les tenseurs **A**, **B**, **C** et **D** seront R_0 -orthotropes aussi, pour n'importe quelle séquence d'empilement et angles d'orientation. En d'autres termes, l'orthotropie, de type R_0 , est assurée automatiquement pour le stratifié si l'on utilise des plis R_0 -orthotropes, même pour un empilement donné au hasard. En outre, c'est impossible de fabriquer un stratifié, ayant la symétrie du carré, en n'utilisant que des plis R_0 -orthotropes: en fait, si l'on annule R_1 pour une quelque propriété, étant R_0 automatiquement nul on passe directement à l'isotropie: de façon plutôt inattendue, c'est impossible d'obtenir une symétrie plus forte avec ce type de laminae; la même chose se passe avec les couches à symétrie carrée, avec lesquelles il est impossible de réaliser des stratifiés R_0 -orthotropes, mais dans ce cas il s'agirait de passer à une symétrie d'ordre inférieure, et il apparaît normal que cela ne soit pas possible.

L'emploi de plis R_0 -orthotropes permet en outre de faciliter la recherche de stratifiés ayant certaines propriétés élastiques: on a déjà vu ça avec la symétrie du carré, § 8.8, et le même type de considérations peuvent être faites; dans cet esprit, nous avons recherché des stratifiés totalement isotropes, composés de plis R_0 -orthotropes identiques, et on a utilisé pour cela l'algorithme BIANCA et aussi le logiciel dont a fait mention au § 10.1, basé sur une méthode de descente (*steepest descent avec equivalent interval search*). Nous avons pu trouver dans un délai assez court un nombre très grand de stratifiés totalement isotropes: 1000 solutions à 7 couches en moins de 4 minutes et plus de 1300 stratifiés à 8 couches, en environ 15 minutes, alors que si on utilise des couches non R_0 -orthotropes on connaît beaucoup moins de solutions, avec un minimum de 12 couches, § 8.7, et qui nécessitent d'un temps, en général, considérablement plus grand pour être trouvées. Grédiac a publié, en 2001, une solution à 6 couches en tissu équilibré avec **A** et **D** isotropes mais avec un degré de couplage $\beta = 0.11$, et une solution totalement isotrope à 7 couches toujours symétriques carrées, donc avec une symétrie intrinsèque d'ordre supérieur. Le résultat est frappant: l'utilisation de couches R_0 -orthotropes facilite énormément la recherche de propriétés particulières pour les stratifiés; ce qui est intéressant pour les applications est la possibilité d'obtenir des solutions avec un faible nombre de couches. Dans le Tab. 12.1 on montre quelque séquence totalement isotrope à base de couches R_0 -orthotropes; la valeur de la fonction $I(P_k)$, équation (9.1), donne la précision de la solution en termes adimensionnels; les angles ont été approximés à l'entier le plus proche.

Comme pour les stratifiés à plis identiques en tissu équilibré, nous avons cherché les solutions, en forme analytique, pour le 4 et 5 couches découplés et pour le 6 couches quasi-homogènes; en effet, § 8.8, on a encore la même situation en terme d'équations, seulement que pour le cas des couches R_0 -orthotropes sont les équations qui dépendent de 4θ qui sont automatiquement satisfaites; la structure des solutions est alors la même, il faut simplement remplacer 4θ par 2θ . Pour le cas du 4 couches découplé la solution non symétrique est donc

$$\begin{aligned} \cos 2\delta_{-2} &= -\frac{5 \cos 2\delta_2 - 3}{3 \cos 2\delta_2 - 5}, \\ \delta_{-1} &= 0, \\ \cos 2\delta_1 &= \frac{-9 \cos^2 2\delta_2 + 3 \cos 2\delta_2 + 4}{3 \cos 2\delta_2 - 5}; \end{aligned} \tag{12.14}$$

la solution (12.14) est montrée en Fig. 12.

Pour le 5 couches découplé on a

	Nombre de plis	Orientations	$I(P_k)$
1	7	$[0^\circ \ 88^\circ \ 82^\circ \ -40^\circ \ 21^\circ \ 5^\circ \ -83^\circ]$	0.139×10^{-3}
2	7	$[0^\circ \ 84^\circ \ 86^\circ \ -39^\circ \ 15^\circ \ 15^\circ \ -79^\circ]$	0.155×10^{-3}
3	7	$[0^\circ \ 88^\circ \ -75^\circ \ 44^\circ \ -14^\circ \ -9^\circ \ 83^\circ]$	0.164×10^{-3}
4	7	$[0^\circ \ -88^\circ \ -83^\circ \ 37^\circ \ -24^\circ \ -2^\circ \ 84^\circ]$	0.259×10^{-3}
5	7	$[0^\circ \ -87^\circ \ 73^\circ \ -47^\circ \ 13^\circ \ 9^\circ \ -85^\circ]$	0.285×10^{-3}
6	8	$[0^\circ \ -79^\circ \ 63^\circ \ -63^\circ \ 31^\circ \ -4^\circ \ -29^\circ \ 75^\circ]$	0.106×10^{-7}
7	8	$[0^\circ \ 75^\circ \ -75^\circ \ -48^\circ \ 42^\circ \ 15^\circ \ -15^\circ \ 90^\circ]$	0.310×10^{-7}
8	8	$[0^\circ \ 90^\circ \ -67^\circ \ 51^\circ \ 22^\circ \ -39^\circ \ -17^\circ \ 73^\circ]$	0.374×10^{-7}
9	8	$[0^\circ \ -82^\circ \ 67^\circ \ -47^\circ \ 47^\circ \ -4^\circ \ -22^\circ \ 79^\circ]$	0.376×10^{-7}
10	8	$[0^\circ \ 74^\circ \ -78^\circ \ -56^\circ \ 6^\circ \ 42^\circ \ -2^\circ \ -80^\circ]$	0.603×10^{-7}

Tab. 12.1. Quelques stratifiés totalement isotropes composé de plis R_0 -orthotropes.

$$\begin{aligned} \delta_{-1} &= 0, \\ \delta_0 &= \text{quelconque}, \\ \cos 2\delta_1 &= \frac{8 \cos^2 2\delta_{-2} + 4 \cos 2\delta_{-2} - 3}{4 \cos 2\delta_{-2} + 5}, \\ \cos 2\delta_2 &= \frac{5 \cos 2\delta_{-2} + 4}{4 \cos 2\delta_{-2} + 5}, \end{aligned} \quad (12.15)$$

voir la Fig. 12.4.

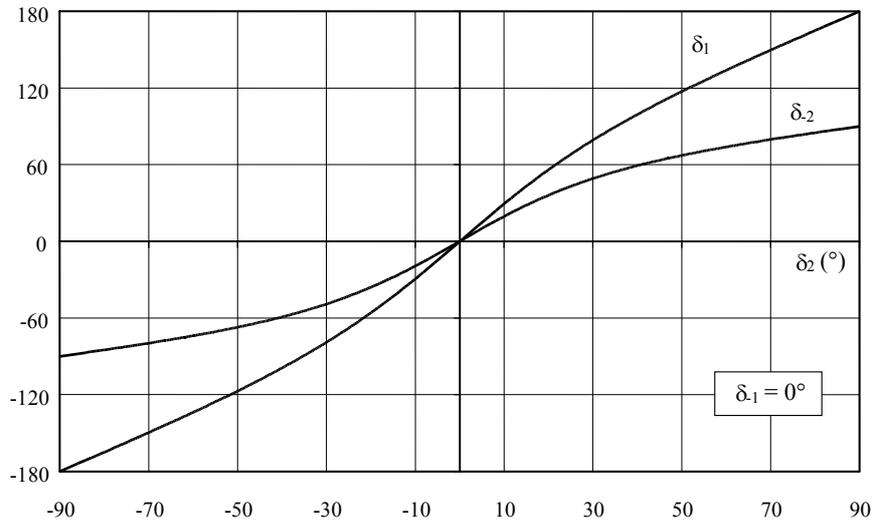


Fig. 12.3. Solution pour le 4 couches découpé avec plis R_0 -orthotropes.

Pour la quasi-homogénéité, on n'a pas de solutions pour le 5 couches et pour le 6 couches il faut résoudre les équations

$$\begin{cases} e^{2i\delta_1} - e^{2i\delta_{-1}} + 3e^{2i\delta_2} - 3e^{2i\delta_{-2}} + 5e^{2i\delta_3} - 5e^{2i\delta_{-3}} = 0, \\ 4e^{2i\delta_1} + 4e^{2i\delta_{-1}} + e^{2i\delta_2} + e^{2i\delta_{-2}} - 5e^{2i\delta_3} - 5e^{2i\delta_{-3}} = 0; \end{cases} \quad (12.16)$$

comme pour les (8.55), nous avons trouvé la solution seulement en forme de graphique, qui est montrée en Fig. 12.5.

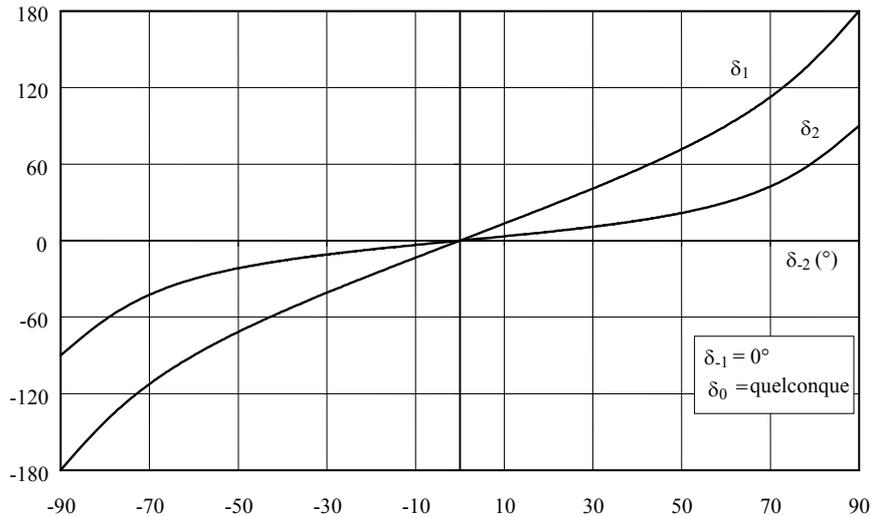


Fig. 12.4. Solution pour le 5 couches découplé avec plis R_0 -orthotropes.

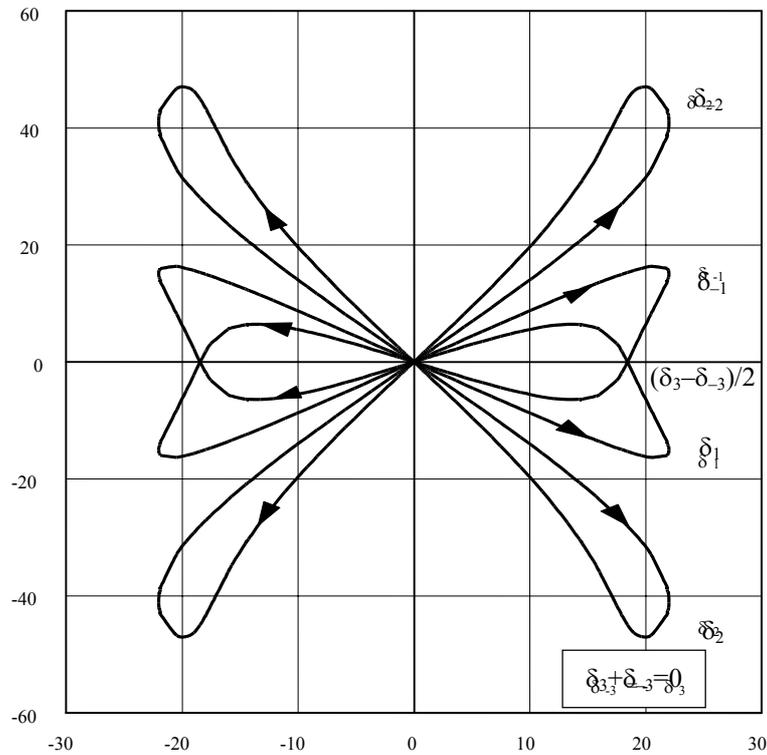


Fig. 12.5. Solutions quasi-homogènes pour un 6 couches avec plis R_0 -orthotropes.

12.5 Une condition suffisante pour avoir une lamina R_0 -orthotrope.

Bien qu'en principe il soit possible de penser à l'existence d'une lamina homogène qui soit R_0 -orthotrope, normalement l'anisotropie est obtenue avec la technique propre aux matériaux composites, en renforçant une matrice homogène par des fibres. Il est donc question de trouver les conditions qui permettent d'obtenir des couches R_0 -orthotropes.

Une règle générale est que les propriétés élastiques d'une lamina sont identiques à celles de membrane d'un stratifié qui a la même disposition des fibres. Donc, il est suffisant d'étudier

sous quelles conditions on peut avoir un stratifié à plis identiques avec

$$\bar{R}_0 = 0 ; \quad (12.17)$$

pour obtenir alors une couche R_0 -orthotrope il sera suffisant de donner la même disposition à l'ensemble des fibres de la couche, mais évidemment avec les fibres qui appartiennent au même plan. Un exemple classique est celui des plis à symétrie carrée, qui ont les mêmes propriétés élastiques qu'un stratifié *cross-ply* équilibré, en membrane. On peut d'ores et déjà dire qu'on ne peut pas obtenir l'orthotropie R_0 en employant des tissus équilibrés, car dans ce cas on passerait directement à l'isotropie, voir § 12.4.

Considérons alors un stratifié composé d'un nombre égal de couches identiques disposées dans deux directions δ_1 et δ_2 ; la (8.21₃) devient alors

$$\bar{R}_0 e^{4i\Phi_0} = \frac{h}{2} R_0 e^{4i\Phi_0} (e^{4i\delta_1} + e^{4i\delta_2}); \quad (12.18)$$

pour vérifier la (12.17) il faut alors, si chaque couche n'est pas déjà R_0 -orthotrope, ce qu'on exclut, évidemment, que

$$e^{4i\delta_1} + e^{4i\delta_2} = 0, \quad (12.19)$$

ce qui donne comme solution

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{\pi}{4}. \quad (12.20)$$

On en tire qu'une condition suffisante pour avoir une couche R_0 -orthotrope est celle de renforcer une matrice isotrope avec un tissu équilibré mais avec la chaîne et la trame qui forment un angle de 45° au lieu d'être orthogonales.

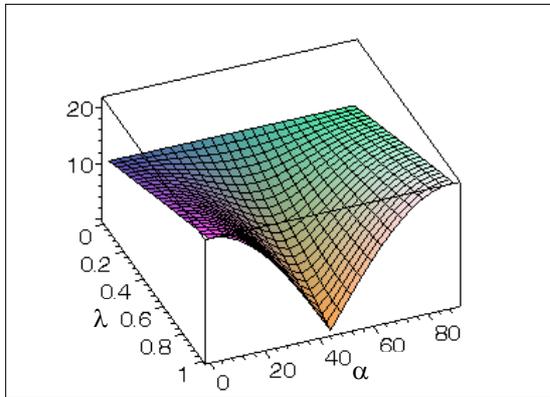


Fig. 12.6. Variation de R_0 avec α et λ .

La condition ci-dessus n'est qu'une condition suffisante, mais pas nécessaire, en général; toutefois, on a pu démontrer que si on se borne à deux seules directions de renfort, elle est la seule solution possible; en fait, voir aussi la thèse de Vincenti pour une approche plus générale à la micromécanique des constantes polaires, la variation de R_0 avec α , angle entre les deux directions des renforts, et λ , rapport entre les fractions volumiques des deux renforts, est celui montré en Fig. 12.6; il est évident que seulement pour $\alpha = \pi/4$ et pour $\lambda = 1$ on a $R_0 = 0$.

12.6 Conclusions.

Les matériaux R_0 -orthotropes, dont l'existence a pu être mise en évidence grâce à la méthode polaire, présentent des particularités assez insolites, qui ont été montrées dans le chapitre. Leur utilisation est particulièrement intéressante, car ils facilitent l'obtention de stratifiés ayant des propriétés particulières, comme l'isotropie, et en plus minimisent la sensibilité aux défauts d'orientation. En outre, le stratifié ainsi obtenu sera toujours orthotrope ou isotrope. Compte tenu des capacités de la technologie moderne en terme de produits tissés, la réalisation de ce genre de laminae n'est pas une pure question académique.

Il faut souligner aussi qu'on a présenté seulement les couches R_0 -orthotropes; cependant, pour ce qu'on a montré ci-haut, il existe en théorie un autre type assez particulier de matériaux orthotropes, ceux pour lesquels r_0 est nul. En effet ce type de condition se pose indépendamment en rigidité ou en souplesse, ce qui veut dire que deux sont les types d'orthotropie à considérer, celle de rigidité et celle de souplesse. Sans s'attarder sur cette question, disons simplement que pour les laminae avec r_0 nul toutes les considérations développées pour la rigidité sont à être faites pour la souplesse, et vice-versa. Deux remarques seulement: cette fois c'est **S** qui a des composantes constantes ou qui varient avec une loi de type tenseur du second ordre, et ceci implique que S_{xxxx} a ses extremums seulement sur les axes d'orthotropie; donc le module d'Young ne peut pas avoir une position intermédiaire entre les axes où il est stationnaire. En outre, le cas des laminae avec r_0 nul est sans doute moins intéressant pour les applications, car, étant donné que les tenseurs **A**, **B**, **C** et **D** sont des compositions des tenseurs de rigidité des couches, on n'a pas les retombées vues ci-haut pour les stratifiés (par exemple en général on n'aura pas r_0 nul pour les souplesses du stratifié).

Pour terminer, soulignons une autre circonstance: nous avons vu que les symétries élastiques sont données par l'annulation d'un invariant polaire ou, dans le cas de l'isotropie, de deux des invariants. De plus, les matériaux R_0 -orthotropes ne possèdent pas une symétrie plus forte que celle propre aux matériaux orthotropes classiques, à savoir de type (7.11). Il y a toutefois une différence entre ces invariants, pour ce qui tient à leur comportement dans les stratifiés: en effet, les conditions $R_0=0$ et $R_1=0$ passent, si propres aux plis, directement au stratifié, pour les tenseurs **A**, **B**, **C** et **D**. Au contraire, l'invariant $\Phi_0-\Phi_1$ non: tandis que, par exemple, un stratifié composé de plis à symétrie carrée aura la même symétrie pour **A**, **B**, **C** et **D**, un autre composé de plis orthotropes ne sera pas en général orthotrope. Dans ce sens, on peut en quelque sorte parler d'invariants d'anisotropie "forts", R_0 et R_1 , et "faible", $\Phi_0-\Phi_1$.

13.1 Introduction.

A côté des recherches sur la conception des stratifiés, qui est l'axe principal de mes activités, j'ai été amené pour différentes raisons, notamment pour des collaborations avec d'autres chercheurs du LRMA et pour le co-encadrement de la thèse de Valot, soutenue début 2002, à développer un certain nombre de recherches, dont le point commun est celui de l'identification de propriétés des matériaux composites, en élasticité et en rupture. Ce chapitre est une brève synthèse de ces études.

13.2 Une tentative pour l'identification élastique d'un pli par essais sur stratifié.

Il est commun de remonter aux constantes élastiques d'une couche en composite uni-directionnel par le biais de tests de traction sur des stratifiés composés avec cette lamina. Normalement, deux types de stratifié sont réalisés pour un même matériau: un presque uni-directionnel, qui a un très faible nombre de couches en direction transversale pour assurer la faisabilité des tests, utilisé pour évaluer les modules d'Young dans les axes et le coefficient de Poisson, et un *cross-ply* équilibré, qui présente donc un tenseur \mathbf{A} symétrique carré et un minimum du module d'Young sur la bissectrice des axes de symétrie, et qui permet de remonter à la valeur du module de cisaillement; dans les deux cas la séquence est symétrique afin d'assurer le découplage de la plaque. Cette procédure a l'inconvénient de ne pas effectuer toutes les mesures nécessaires non seulement sur le même échantillon, mais sur le même stratifié non plus. Cela peut entraîner des imprécisions sur les résultats, dues aux inévitables erreurs de réalisation de deux plaques différentes. C'est pour cette raison que j'ai considéré la possibilité d'utiliser un seul échantillon de stratifié pour remonter à toutes les caractéristiques élastiques de la couche de base.

Considérons d'abord le tenseur \mathbf{A}^* , à savoir le tenseur normalisé de la rigidité de membrane, (8.6), d'un stratifié composé de n couches identiques, dont les constantes élastiques sont à déterminer par essais de traction, et cherchons de récupérer les composantes polaires T_0 , T_1 , R_0 , R_1 , Φ_0 et Φ_1 du tenseur de rigidité \mathbf{Q} de la couche de base. Un premier résultat, dû au fait que les couches sont identiques, § 8.3, est que,

$$\begin{aligned} T_0 &= \bar{T}_0^*, \\ T_1 &= \bar{T}_1^*, \end{aligned} \tag{13.1}$$

à savoir, les parties isotropes de la couche et de la plaque sont les mêmes. Ensuite, par les relations (8.21),

$$\begin{aligned} n \bar{R}_0^* e^{4i\bar{\Phi}_0} &= R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=-p}^p e^{4i\delta_k}, \\ n \bar{R}_1^* e^{2i\bar{\Phi}_1} &= R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k}; \end{aligned} \tag{13.2}$$

de la première des (13.2) on tire

$$\tan 4\Phi_0 = \frac{\bar{c}_0 \tan 4\bar{\Phi}_0 - \bar{s}_0}{\bar{s}_0 \tan 4\bar{\Phi}_0 + \bar{c}_0}, \tag{13.3}$$

où

$$\begin{aligned}\bar{s}_0 &= \sum_{k=-p}^p \sin 4\delta_k, \\ \bar{c}_0 &= \sum_{k=-p}^p \cos 4\delta_k,\end{aligned}\tag{13.4}$$

et

$$R_0 = n \frac{\bar{R}_0^* \cos 4\bar{\Phi}_0}{\sum_{k=-p}^p \cos 4(\Phi_0 + \delta_k)}.\tag{13.5}$$

De la même façon, de la deuxième des (13.2) on obtient

$$\tan 2\bar{\Phi}_1 = \frac{\bar{c}_1 \tan 2\bar{\Phi}_1 - \bar{s}_1}{\bar{s}_1 \tan 2\bar{\Phi}_1 + \bar{c}_1},\tag{13.6}$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{s}_1 &= \sum_{k=-p}^p \sin 2\delta_k, \\ \bar{c}_1 &= \sum_{k=-p}^p \cos 2\delta_k,\end{aligned}\tag{13.7}$$

et

$$R_1 = n \frac{\bar{R}_1^* \cos 2\bar{\Phi}_1}{\sum_{k=-p}^p \cos 2(\Phi_1 + \delta_k)}.\tag{13.8}$$

Les relations (13.1) à (13.8) montrent de quelle façon on peut remonter des composantes polaires d'un stratifié à celles de la couche de base: les premières sont trouvées par essai de traction, les deuxièmes, une fois calculées, permettent de remonter aux constantes élastiques de la couche dans une direction quelconque, § 7.7. Il faut souligner que les (13.3) et (13.6) permettent de calculer l'invariant $\Phi_0 - \Phi_1$, qui est le vrai paramètre à déterminer; en fixant ensuite un des deux angles on fixe un repère particulier sur la couche.

Ce qui a été fait pour le tenseur \mathbf{A}^* peut être fait *verbatim* pour \mathbf{D}^* , et on obtiendra des résultats analogues:

$$T_0 = \tilde{T}_0^*,\tag{13.9}$$

$$T_1 = \tilde{T}_1^*,$$

$$\tan 4\bar{\Phi}_0 = \frac{\tilde{c}_0 \tan 4\tilde{\Phi}_0 - \tilde{s}_0}{\tilde{s}_0 \tan 4\tilde{\Phi}_0 + \tilde{c}_0},\tag{13.10}$$

$$\tilde{s}_0 = \sum_{k=-p}^p d_k \sin 4\delta_k,\tag{13.11}$$

$$\tilde{c}_0 = \sum_{k=-p}^p d_k \cos 4\delta_k,$$

$$R_0 = n^3 \frac{\tilde{R}_0^* \cos 4\tilde{\Phi}_0}{\sum_{k=-p}^p d_k \cos 4(\Phi_0 + \delta_k)},\tag{13.12}$$

$$\tan 2\tilde{\Phi}_1 = \frac{\tilde{c}_1 \tan 2\tilde{\Phi}_1 - \tilde{s}_1}{\tilde{s}_1 \tan 2\tilde{\Phi}_1 + \tilde{c}_1}, \quad (13.13)$$

$$\tilde{s}_1 = \sum_{k=-p}^p d_k \sin 2\delta_k, \quad (13.14)$$

$$\tilde{c}_1 = \sum_{k=-p}^p d_k \cos 2\delta_k,$$

$$R_1 = n^3 \frac{\tilde{R}_1^* \cos 2\tilde{\Phi}_1}{\sum_{k=-p}^p \cos 2(\Phi_1 + \delta_k)}, \quad (13.15)$$

avec les coefficients d_k qui sont donnés par les (8.31). Naturellement, dans ce cas il s'agit d'utiliser des tests de flexion. Si on utilise un empilement quasi-homogène, le même échantillon peut être soumis à des tests de traction et de flexion: les caractéristiques étant les mêmes, on a une redondance de données qui peut bénéficier à la qualité des résultats.

Les équations ci-dessus sont valables dans le cas le plus général possible; toutefois, lorsqu'on fait des tests sur un stratifié dans le seul but de remonter aux caractéristiques élastiques de la couche de base, il vaut mieux utiliser un empilement standard. Parmi les différentes possibilités, il y en a une qui semble être particulièrement indiquée: c'est une séquence quasi-triviale à 7 couches, qui donne un empilement quasi-homogène. De cette façon, l'échantillon peut être testé soit en flexion soit en traction, ou dans les deux cas, et on trouvera les mêmes valeurs des propriétés élastiques de la plaque dans les deux cas. En outre, le nombre de plis est limité, ce qui implique une faible consommation de matériau et des efforts à appliquer limités. La séquence en question est la suivante:

$$[\alpha/\beta/\alpha_3/\beta/\alpha]. \quad (13.16)$$

On prendra ensuite $\alpha = 0^\circ$ et $\beta = 90^\circ$, pour avoir ainsi un stratifié *cross-ply*, mais non équilibré. Dans ce cas, les relations ci-dessus se simplifient, et en particulier il est

$$\Phi_0 = \bar{\Phi}_0 = \tilde{\Phi}_0,$$

$$\Phi_1 = \bar{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_1,$$

$$R_0 = \bar{R}_0^* = \tilde{R}_0^*,$$

$$R_1 = n^3 \frac{\bar{R}_1^*}{\sum_{k=-p}^p (-1)^{\frac{2\delta_k}{\pi}} d_k} = n^3 \frac{\tilde{R}_1^*}{\sum_{k=-p}^p (-1)^{\frac{2\delta_k}{\pi}} d_k}. \quad (13.17)$$

En particulier, pour le 7 plis ci-haut, si l'on considère la (8.31₁), la dernière des (13.17) devient simplement

$$R_1 = \frac{7}{3} \bar{R}_1^* = \frac{7}{3} \tilde{R}_1^*. \quad (13.18)$$

Ce type de plaque peut être testé de plusieurs façons, afin de caractériser le pli de base: par le biais de trois essais, à 0° et à 90° , qui permettent de mesurer le module d'Young dans les deux directions et le coefficient de Poisson, et puis d'un troisième essai dans une autre direction; or, normalement hors axe on a des couplages qui apparaissent, dus aux termes de type S_{xxyy} et S_{yyxx} . Quoiqu'il soit possible de faire ce genre de tests, ceci comporte l'utilisation d'un appareillage spécialement conçu, et le test est plutôt compliqué et délicat. Une alternative

est celle suggéré par Verchery et Gong, 1999, qui exploite l'existence de la direction ω , (7.170), dans laquelle le terme de type S_{xxx} est nul, et qui permet donc de réaliser un test de traction ou de flexion sans effets parasites. Par ce test on mesure le module d'Young et le coefficient de Poisson dans la direction ω . La valeur du module G à la direction 0 est ensuite calculée, comme Verchery l'a montré, par la relation (on indiquera par l'indice 1 les quantités à la direction 0, par 2 celles à la direction $\pi/2$ et par ω celle à la direction ω)

$$G_1 = \frac{E_\omega}{2[1 + \nu_{12\omega}]} \quad (13.19)$$

Cette formule est semblable à

$$G_1 = \frac{E(\theta = \pi/4)}{2[1 + \nu(\theta = \pi/4)]} \quad (13.20)$$

déjà connue, mais qui comporte un test à la direction $\pi/4$, qui est une direction d'essai simple, sans effets parasites, seulement si le stratifié a la symétrie du carré, ce qui n'est pas le cas, par exemple, avec le 7 couches (13.16).

La stratégie envisagée nécessite la connaissance préalable de la direction ω ; or, dans le cas du 7 couches en cause, on peut montrer par la (7.170) et les inverses de (7.165), que

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{G_1(E_2 - E_1)}{(1 + 2\nu_{12_1})E_2G_1 + E_1G_1 - E_1E_2}, \quad (13.21)$$

et que la condition d'existence est donc

$$G_1 < \frac{E_1E_2}{2(E_1 + \nu_{12_1}E_2)}. \quad (13.22)$$

Si les modules E et ν , en membrane ou en flexion, cela dépend du type d'essai fait, se trouvent directement par les seuls tests dans les directions des axes, le module G peut se calculer seulement d'après la (13.19), donc par le test à la direction ω , qui n'est pas connue *a priori*. Pour sortir de cette impasse, trois voies sont envisagées: la première, on fait des hypothèses sur la valeur de G , et on procède par tentatives, en prenant des échantillons à la direction ω qui en découle, pour trouver l'angle où une sollicitation axiale ne produit pas des effets de cisaillement. Cette voie est possible, mais nécessite d'une certaine expérience et en tout cas ce n'est sans doute pas très avantageuse.

Une deuxième possibilité, qui a été testé au LRMA par J. Rousseau, beaucoup plus intelligente et élégante, est celle de faire appel à un test de flexion anti-clastique, voir Yamamoto *et alii*, 2001. Dans ce cas, ce n'est pas strictement nécessaire d'utiliser la séquence (13.16): avec trois tests de flexion anti-clastique faits sur trois échantillons en forme de losange, découpés de la même plaque, on peut remonter à toutes les composantes polaires de la plaque, même si totalement anisotrope, pourvu qu'elle soit découplée. Une fois les composantes polaires de flexion connues, on passe à celles du pli par les (13.9) à (13.15).

Une troisième voie, que nous avons testé avec Valot, 2002, est celle d'utiliser des séquences *angle-ply* équilibrées, voire avec le même nombre de couches dans les deux directions α et $-\alpha$, avec empilement découplé. Valot a découvert une propriété intéressante valable pour ce type de stratifiés: l'angle ω est dans la direction α , donc selon les fibres, avec une approximation très bonne (l'écart est au plus de l'ordre de 1°). Nous avons montré, Valot *et alii*, 2002, quelles sont les circonstances pour avoir une telle propriété, qui concerne surtout

les composites unidirectionnels à matrice polymère ou élastomère. La stratégie est alors claire: réaliser, avec le matériau à tester, une plaque de type angle-ply équilibré, et découper dans la même plaque trois échantillons, aux directions 0 , $\pi/2$ et α , qu'on soumet à des tests classiques de traction. Les essais à 0 et $\pi/2$ donnent les modules d'Young et le coefficient de Poisson, celui à α donne le module de cisaillement, à l'aide de la (13.19), avec $\omega=\alpha$. D'autres façons de traitement des données sont toutefois envisageables, avec aussi la possibilité d'avoir des données redondantes pour une meilleure qualité des résultats. Si la séquence *angle-ply* employée est de type quasi-homogène, à côté des tests de traction, ou à la place de ceux-ci, on peut faire des tests de flexion.

A part la première voie, que nous n'avons pas tentée, les deux autres démarches ont été suivies, mais avec une certaine surprise nous nous sommes heurtés à des problèmes: tandis que les deux stratégies envisagées ci-haut donnent des très bons résultats pour ce qui concerne les rigidités de la plaque testée, lorsqu'on cherche de remonter aux caractéristiques du pli de base on obtient des résultats non acceptables, surtout pour certains modules, comme le coefficient de Poisson, alors que d'autres sont bien ciblés. Nous avons cherché une raison à cela, mais nous ne l'avons pas encore trouvée. Une explication de ça il faut peut-être la chercher dans la nature des fonctions qui transforment les données pour la couche de base, il y a peut être un filtrage avec amplification de l'erreur. En effet, nous avons pu constater, par des simulations numériques, que si les données d'entrée sont exactes, on aboutit aux bons résultats, mais une petite erreur déclenche des anomalies considérables des résultats. Personnellement, j'ai envisagé un parcours de recherche, visant à établir les causes de ce phénomène et à en trouver des remèdes, mais pour l'instant ce n'est qu'un projet en attente. C'est pour ça que je n'ai pas encore souhaité de publier la démarche esquissée dans ce paragraphe, qui est montrée ici pour la première fois, plus comme projet de recherche que comme résultats.

13.3 Une étude de la rupture des stratifiés isotropes en membrane.

La partie de la thèse de Valot que j'ai eu l'occasion de co-encadrer concernait, entre autres, l'étude du comportement à la rupture de stratifiés isotropes en membrane et découplés. Dans ce cas, nous avons procédé à une campagne d'essais sur des plaques à 12 et 16 couches unidirectionnelles en carbone-époxyde, dont les séquences sont

$$12 \text{ couches: } [0_2/60_2/-60_2]_s, \quad (13.23)$$

$$\begin{aligned} 16 \text{ couches: type 1 } [0/45/-45/90/0/45/-45/90]_s, \\ \text{type 2 } [0/90/-45/45/0/90/-45/45]_s, \\ \text{type 3 } [0_2/90_2/-45_2/45_2]_s; \end{aligned} \quad (13.24)$$

celles-ci sont trois exemples de séquences quasi-triviales de type découplé. Comme indiqué au § 8.7, l'isotropie de membrane est obtenue en appliquant la règle de Werren et Norris, ce qui est possible parce que les quatre séquences ci-dessus ont des groupes saturés avec un même nombre de plis.

Nous avons pu constater un certain nombre de différences entre les résultats attendus, calculés de façon théorique à l'aide de différents critères de résistance, et les données expérimentales. Pour se tenir aux points essentiels, on constate d'abord, et cela même sur les prévisions théoriques, que la rupture, premier et dernier pli, n'est pas isotrope, comme au contraire les propriétés élastiques. Parler d'isotropie d'un stratifié en composite a donc sens seulement pour les propriétés élastiques, non pas pour la rupture. L'allure de la frontière du domaine de résistance qu'on peut tracer sur la base des données expérimentales a la même forme que celle prévue par la théorie, notamment avec une périodicité qui dépend du nombre

d'orientations ($\pi/3$ pour le 12 couches, $\pi/4$ pour les 16 couches); toutefois, on a constaté un décalage de $\pi/8$ entre les courbes théoriques et expérimentales pour les 16 plis. Un autre phénomène c'est la différence entre les résultats à la rupture pour les trois séquences de 16 plis, alors qu'une théorie du premier ordre prévoit le même comportement. Valot a avancé des explications à tout cela dans son travail de thèse, et nous avons formulé des hypothèses; toutefois, nous n'avons pas encore tiré des conclusions définitives dans ce domaine, car la recherche n'est pas arrivée à son but.

13.4 Une contribution à l'étude de la propagation de la fissure dans un stratifié.

J'ai été amené à collaborer à une recherche en cours au LRMA sur la propagation de la fissure dans un stratifié en composite. Cette recherche, menée par Gong et Verchery, a eu pour but l'étude de l'influence de l'orientation des fibres adjacentes la fissure sur la propagation de celle-ci jusqu'à la rupture. Or, pour mesurer expérimentalement cette influence, il fallait trouver un empilement capable d'éliminer un certain nombre d'effets parasites, comme par exemple les termes de couplage du type D_{xxxy} . Les résultats acquis en terme de solutions quasi-triviales nous ont permis de trouver la réponse: nous avons utilisé un stratifié quasi-homogène à 16 couches, obtenu par superposition symétrique d'une séquence de 8 couches, elle aussi quasi-homogène: le stratifié est

$$[\alpha/-\alpha_2/\alpha/-\alpha/\alpha_2/\alpha]_s. \quad (13.25)$$

Comme la séquence est quasi-homogène, les propriétés de flexion sont identiques à celles de membrane. Or, étant donné que le stratifié est un *angle-ply* équilibré, il est orthotrope en membrane, avec les axes à 0 et $\pi/2$; ceci implique que dans ce repère les termes A_{xxxy} et A_{yyyy} sont nuls. En outre, si on considère que la fissure est située sur le plan moyen du stratifié, on voit que celle-ci coupe la plaque en deux parties, qui ont la même composition, et qui sont chacune des *angle-ply* équilibrés aussi, comme la partie non fissurée. Cela comporte que les deux parties de la plaque séparées par la fissure et la partie encore entière ont les mêmes propriétés élastiques de membrane; non seulement, la quasi-homogénéité des deux parties et de l'entier, fait que ces propriétés sont les mêmes en flexion aussi. On a donc trouvé une plaque qui est divisée par la fissure en deux semi-parties qui se comportent en tout comme la partie entière, et de surcroît on a éliminé tous les termes de couplage (\mathbf{B} est nul partout car les séquences sont quasi-homogènes). En plus, étant les séquences de type quasi-trivial, l'angle α est libre, ce qui nous a permis d'étudier l'effet de celui-ci sur la propagation de la fissure. Les tests, Gong *et alii*, 2001, ont été conduits sur un composite en carbone-époxyde unidirectionnel, avec des angles α de 0° , 15° , 30° et 45° . Les essais ont concerné les trois différents modes de rupture: DCB (*double cantilever beam*), ENF (*end notch flexion*) et MMF (*mixed mode flexion*).

Pour plus de détails, on renvoie à l'article cité; ici il était intéressant de souligner l'apport donné par les résultats obtenus par la méthode polaire en ce qui concerne la possibilité de trouver des empilements particuliers, ayant des propriétés qui ne sont pas communes et qui peuvent être importantes dans certains cas, comme ici lors d'essais expérimentaux.

CONCLUSIONS

Cette partie a montré un certain nombre de recherches sur les stratifiés en composite, qui ont comme point commun l'emploi de la méthode polaire. Ces recherches ont touché à plusieurs domaines, mais l'axe principal a été, jusqu'ici, la conception et l'optimisation des stratifiés. Le parcours suivi dans ce secteur est sans doute original et l'utilisation de la méthode polaire a permis de résoudre de façon exacte un certain nombre de problèmes.

Le premier problème abordé, la recherche de stratifiés découplés et quasi-homogènes, a abouti à la découverte des solutions quasi-triviales, qui se sont avérées importantes, par exemple dans les applications faites en identification et montrées au chapitre 13. Ensuite, l'ajout de conditions supplémentaires sur les propriétés de la couche de base a permis de résoudre de façon exacte les mêmes problèmes pour les stratifiés à faible nombre de couches, ce qui a une importance en soi, comme cas de problème inverse complètement résolu et surtout pour les aspects qualitatifs des résultats obtenus, notamment la mise en évidence de l'existence d'un nombre infini de solutions, liées par des relations fonctionnelles. Encore, des résultats nouveaux ont été trouvés pour les stratifiés isotropes.

La généralisation de ce genre de problèmes a vu d'abord une formalisation nouvelle, qui s'appuie sur la méthode polaire, et qui unifie plusieurs cas différents. Ensuite, la nécessité de trouver des solutions en dehors de la classe quasi-triviale a été satisfaite par le recours à des méthodes numériques. Dans ce secteur, plusieurs approches ont été utilisées, notamment l'exploration par énumération sur ensembles finis, la méthode de Monte Carlo et des méthodes de descente, mais finalement c'est aux méthodes évolutives qu'on s'est adressés.

L'effort dans la création d'un algorithme génétique, BIANCA, a été et est encore assez important; cet algorithme a été conçu pour exploiter les résultats et les caractéristiques propres à la méthode polaire, mais aussi pour aborder plusieurs problèmes typiques en conception de stratifiés. De ce fait, l'algorithme a été créé avec une structure souple, capable d'accueillir des modifications ultérieures, mais il est conçu aussi pour travailler sur ensembles de variables discrètes, car c'est ce qui caractérise l'activité des concepteurs. D'un point de vue des nouveautés, BIANCA a une nouvelle méthode de traitement des contraintes imposées au problème d'optimum, et un codage minimal, binaire, qui travaille sur des vecteurs de pointeurs aux variables. Ce projet n'est pas terminé, les perspectives sont dans l'amélioration des performances de calcul et dans l'introduction de nouveaux problèmes à traiter. L'horizon ultime est celui de la conception intégrale par optimisation, le choix optimal des paramètres fait sur base automatique, sans l'intervention de l'opérateur, du choix du matériel au nombre de couches et d'orientations etc.

La réalisation de BIANCA fait partie d'un projet plus grand, que j'ai animé dès le début, à savoir la réalisation d'un logiciel d'analyse, calcul et conception de plaques stratifiées basé sur la méthode polaire. Ce logiciel, qui s'appelle POLAR-COMP, est composé de plusieurs modules indépendants mais communicants au besoin, et la première version est déjà opérationnelle au LRMA. C'est sans doute un projet ambitieux, qui doit faire les comptes avec nos forces, mais qui m'a semblé important pour notre laboratoire. Ensuite, si le projet prendra une forme digne, on pourra envisager la divulgation du logiciel.

Les perspectives ne se bornent toutefois pas à la réalisation de ce logiciel, mais touchent trois autres directions, théorique, expérimentale et appliquée. En ce qui concerne les perspectives théoriques, des efforts sont à faire pour étendre les applications de la méthode polaire: d'abord, l'utilisation de théories d'ordre supérieur pour la mécanique des plaques stratifiées. Les études présentées ici se situent dans le cadre de la théorie classique des

stratifiés; les effets liés au cisaillement transverse sont donc encore à prendre en compte.

Toujours en ce qui concerne les recherches à caractère théorique, un point intéressant est celui de l'utilisation des invariants polaires dans la formalisation par des méthodes variationnelles de certains critères d'optimum structural déjà existant en littérature: compte tenu des caractéristiques des invariants polaires, il est probable qu'on pourra obtenir des informations de caractère qualitatif et synthétique dans certains cas. Je pense notamment à certains critères d'optimum pour la maximisation de la rigidité.

Un autre secteur à investiguer théoriquement est celui de la conception optimale d'une plaque stratifiée par rapport à ces valeurs propres, fréquences ou charges critiques. Compte tenu que les constantes polaires sont des invariants dont seulement une partie dépend des orientations des couches, il est possible que même pour les problèmes évoqués on puisse obtenir des résultats qualitativement significatifs.

Ensuite, la méthode polaire est une technique générale de représentation des tenseurs dans des espaces à deux dimensions; rien n'empêche de l'utiliser pour l'étude de grandeurs de nature tensorielle autre que l'élasticité, comme par exemple l'endommagement non localisé et la piézo-élasticité.

Pour ce qui concerne les études expérimentales, il est envisageable de continuer les tests d'identification, pour parvenir, si possible, à fixer une procédure, expérimentale et de traitement des données, capable de faire face aux inconvénients mis en lumière dans le § 13.2. Mais dans ce domaine, la recherche n'est sans doute pas qu'expérimentale et nous ne sommes qu'aux débuts. Une prise de connaissance préalable des techniques d'identification, sur lesquelles je n'ai jamais fait de l'expérience, sera nécessaire.

Pour les applications, différentes idées se montrent au fur et à mesure qu'on progresse; personnellement, je m'attends, dans ce sens, à des retombées utiles et concrètes de la part du logiciel BIANCA. En outre, l'approche génétique étant désormais maîtrisée, on peut passer assez facilement à l'étude optimale, par cette voie, d'un certain nombre de problèmes particuliers, dont quelqu'un fait déjà partie d'une longue liste de recherches à développer que j'ai préparée.

Pour ce qui concerne l'approche génétique à la solution de problèmes de la mécanique, une direction intéressante est celle de construire un logiciel plus proche à la réalité biologique: si la nature a fait si bien les choses, peut-être on peut encore lui voler quelque secret.

BIBLIOGRAPHIE

1. Abrate S., **1994**: Optimal design of laminated plates and shells. *Composite Structures*, v.29, 269-286.
2. Abrate S., **1995**: Design of multispan composite plates to maximize the natural frequency. *Composites*, v.26, 691-697.
3. Abrate S., **1996**: Maximizing the fundamental natural frequency of triangular composite plates. *J. Vibr. Acoust.*, v.118, 141-146.
4. Arora J. S., **1989**: Introduction to optimum design. Mc Graw-Hill, New York.
5. Banichuk, N. V., **1983**: Problems and methods of optimal structural design. Plenum Press, New York.
6. Banichuk, N. V., **1986**: Introduction to optimization of structures. Traduction anglaise de V. Komkov, 1990, Springer-Verlag, New York.
7. Barakat S. A., Abu-Farsakh G. A., **1999**: The use of an energy-based criterion to determine optimum configurations of fibrous composites. *Compos. Sci. Techn.*, 1891-1899.
8. Belaïd F., Vannucci P. & Verchery G., **2001**: Numerical investigation of the influence of orientation defects on bending-tension coupling of laminates. *Proc. of ICCM 13 (Thirteenth International Conference on Composite Materials)*, papier 1406. Pékin, Chine, 25-29 juin 2001.
9. Benvenuto E., **1981**: La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico. G. C. Sansoni Editore, Firenze, Italie (en Italien).
10. Benvenuto E., **1990**: Introduction to the history of structural mechanics. Part 1. Springer Verlag, Berlin.
11. Caprino C., Crivelli-Visconti I., **1982**: A note on specially orthotropic laminates. *J. Composite Mat.*, v.16, 395-399.
12. Chellapilla K., Fogel D. B., **1999**: Evolution, neural networks, games and intelligence. *Proc. of IEEE*, v.87:9, 1471-1496.
13. Chen S-Y., Rajan S. D., **1999**: Using genetic algorithm as an automatic structural design tool. *Proc. of WCSMO3 (Third World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization)*, papier 19GAA2. Niagara Falls, USA, 17-21 mai 1999.
14. Cheng G., Pedersen P., **1997**: On sufficiency conditions for optimal design based on extremum principles of mechanics. *J. Mech. Phys. Solids*, v.45, 135-150.
15. Ciarlet P. G., **1994**: Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson, Paris.
16. Cinquini C., Mariani C. & Venini P., **1997**: Optimal robust design of novel materials: problems of stability and vibrations. *Eng. Opt.*, v.29, 323-345.
17. Clausen T., **1851**: Über die form Arkitektonischer Säulen. *Bulletin Physico-Mathématiques de l'Académie*, v.9.
18. Coello Coello C. A., **2002**: Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: a survey of the state of the art. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.191, 1245-1287.
19. Darwin C., **1859**: The origin of species.
20. De Jong K. A., **1975**: An analysis of the behaviour of a class of genetic adaptive systems. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université du Michigan, MI, USA. Dans: Dissertation Abstracts International, v. 36, n. 5140B.
21. Duvaut G., Terrel G., Léné F. & Verijenko V. E., **2000**: Optimization of fiber reinforced composites. *Composite Structures*, v.48, 83-89.
22. Duvaut G., Verijenko V. E., **2001**: A new elasticity problem and its application to the optimal wrapping. *Composite Structures*, v.54, 149-152.
23. Fletcher R., Reeves R. M., **1964**: Function minimization by conjugate gradients. *The Computer Journal*, v.7, 149-160.
24. Fletcher R., **1987**: Practical methods of optimization. J. Wiley & Sons, Chichester, UK.
25. Foldager J., Hansen J. S., Olhoff N., **1998**: A general approach forcing convexity of ply angle optimization in composite laminates. *Structural Optimization*, v.16, 201-211.
26. Foldager J., Hansen J. S., Olhoff N., **1999**: A convex formulation in ply-angle optimization. *Proc. of WCSMO3 (Third World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization)*, papier 26CM02. Niagara Falls, USA, 17-21 mai 1999.
27. Fukunaga H., **1990**: On isotropic laminate configurations. *J. Composite Mat.*, v.24, 519-535.

28. Fukunaga H., Vanderplaats G. N., **1990**: Optimum design of laminated composite structures. *Proc. of CADCOMP90, Computer Aided Design in composite Material 90*, 493-507.
29. Fukunaga H., Vanderplaats G. N., **1991**: Stiffness optimization of orthotropic laminated composites using lamination parameters. *AIAA Journal*, v.29, 641-646.
30. Fukunaga H., Vanderplaats G. N., **1991**: Strength optimization of laminated composites with respect to layer thickness and/or layer orientation angle. *Comput. Struct.*, v.40, 1429-1439.
31. Galileo G., **1638**: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali. Elsevier, Leiden, NL (en Italien).
32. Girard P. S., **1798**: Traité analytique de la résistance des solides et des solides d'égale résistance. Paris.
33. Girard R., **1973**: Une méthode d'optimisation appliquée aux structures composites. Thèse pour l'obtention du doctorat de 3^{ème} cycle, Université de Paris-Sud.
34. Goldberg D. E., **1991**: Genetic algorithms. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachussets, USA. Traduction française, 1994: Algorithmes génétiques. Addison-Wesley France, Paris.
35. Goldstein H., **1950**: Classical mechanics. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachussets, USA.
36. Gong X. J., Vannucci P. & Verchery G., **2001**: Effect of adjacent layer fiber orientation on the resistance of laminates to delamination fracture. *Proc. of ICCM 13 (Thirteenth International Conference on Composite Materials)*, papier 1293. Pékin, Chine, 25-29 juin 2001.
37. Goodenough U., **1984**: Genetics – Third Edition. CBS College Publishing. USA.
38. Graesser D. L., Zabinsky Z. B., Tuttle M. E. & Kim G. I., **1991**: Designing laminated composites using random search techniques. *Composite Structures*, v.18, 311-325.
39. Grédiac M., Vautrin A. & Verchery G., **1993**: A general method for data averaging of anisotropic elastic constants. *J. App Mech.*, v.60, 614-618.
40. Grédiac M., **1996**: On the direct determination of invariant parameters governing anisotropic plate bending problems. *Int. J. Solids Str.*, v.33, 3969-3982.
41. Grédiac M., **1998**: Un programme de conception de stratifiés présentant des rigidités données. *Comptes rendus du Congrès JNC 11 (11èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 197-204. Arcachon, 18-20 novembre 1998.
42. Grédiac M., **1999**: Design of laminated plates with required in-plane, coupling and bending stiffnesses using non-standard ply angles. *Proc. of ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 228. Paris, 5-9 juillet 1999.
43. Grédiac M., **1999**: A procedure for designing laminated plates with required stiffness properties. Application to thin quasi-isotropic quasi-homogeneous uncoupled laminates. *J. Composite Mat.*, v.33, 1939-1956.
44. Grédiac M., **2000**: On the design of some particular orthotropic plates with non-standard ply orientations. *J. Composite Mat.*, v.34, 1665-1699.
45. Grédiac M., Toussaint E., **2000**: Conception de stratifiés présentant des coefficients de dilatation thermique donnés: méthodologie et exemples avec faible nombre de plis. *Comptes rendus du Congrès JNC 12 (12èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 121-130. Cachan, France, 15-17 novembre 2000.
46. Grédiac M., **2001**: On the stiffness design of thin woven composites. *Composite Structures*, v.51, 245-255.
47. Green A., Zerna W., **1954**: Theoretical elasticity. Clarendon Press, Oxford, UK.
48. Groenwold A. A., Snyman J. A., **1999**: Filled functions in the global optimization of composite structures. *Proc. of WCSMO3 (Third World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization)*, papier 49EG022. Niagara Falls, USA, 17-21 mai 1999.
49. Gürdal Z., Haftka R. T. & Hajela P., **1999**: Design and optimization of laminated composite materials. J. Wiley & Sons, New York.
50. Gurtin M. E., **1981**: An introduction to continuum mechanics. Academic Press, USA.
51. Hahn H. T., **1974**: A derivation of invariants of fourth rank tensors. *J. Composite Mat.*, v.8, 1-14.
52. Hajela P., Shih C.-J., **1989**: Optimal design of laminated composites using a modified integer and discrete programming algorithm. *Comput. Struct.*, v.32, 213-221.
53. Hammer V. B., Bendsøe M. P., Lipton R. & Pedersen P., **1997**: Parametrization on laminate design for optimal compliance. *Int. J. Solids Str.*, v.34, 415-434.
54. Hirano Y., **1979**: Optimum design of laminated plates under shear. *J. Composite Mat.*, v.13, 329-334.

55. Hirano Y., **1979**: Optimum design of laminated plates under axial compression. *AIAA Journal*, v.17, 1017-1019.
56. Holland J. H., **1975**: Adaptation of natural and artificial systems. University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, USA.
57. Hooke R., **1665**: On the schematisme or texture of cork, and of the cells and pores of some other such frothy bodies. Dans Gabriel M. L., Fogel S., 1955: Great Experiments in biology. Prentice Hall, USA.
58. Hooke R., **1665**: Micrographia. UK.
59. Hu H.-T., Ho M.-H., **1996**: Influence of geometry and end conditions on optimal fundamental natural frequencies of symmetrically laminated plates. *J. Reinf. Plastics and Comp.*, v.15, 877-893.
60. Ishikawa T., Fukunaga H., **1986**: Tailored laminates with null or arbitrary coefficient of thermal expansion. *Proc. of Composites'86: Recent Advances in Japan and the USA*. Tokyo, 1986.
61. Jones R. M., **1975**: Mechanics of composite materials. Mc Graw-Hill, New York.
62. Joshi M. G., Biggers S. B., **1996**: Thickness optimization for maximum buckling loads in composite laminated plates. *Composites Part B*, v.27B, 105-114.
63. Kandil N., Verchery G., **1988**: New methods of design for stacking sequences of laminates. *Proc. of CADCOMP88, Computer Aided Design in composite Materials 88*, 243-257. Southampton, UK.
64. Kandil N., Verchery G., **1988**: Nouvelles méthodes de conception des empilements des stratifiés. *Comptes rendus du Congrès JNC 6 (6^{èmes} Journées Nationales sur les Composites)*, 891-902.
65. Kandil N., Verchery G., **1990**: Design of stacking sequences of laminated plates for thermoelastic effects. *Proc. of the 2nd Int. Conf. On Computer Aided Design in Composite Materials Technology*, Brussels. Ed. W. P. De Wilde & W. R. Blain. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 565-576.
66. Kere P., Koski J., **2001**: Design optimization of composite laminates for multiple loading conditions with an interactive descent algorithm. *Proc. of ICCM 13 (Thirteenth International Conference on Composite Materials)*, papier 1600. Pékin, Chine, 25-29 juin 2001.
67. Khot N. S., Venkayya V. B., Johnson C. D. & Tischler V. A., **1973**: Optimization of fiber reinforced composite structures. *Int. J. Solids Str.*, v.9, 1225-1236.
68. Khot N. S., Venkayya V. B. & Berke L., **1976**: Optimum desing of composite structures with stress and displacement constraints. *AIAA Journal*, v.14, 131-132.
69. Kim C. W., Hwang W., Park H. C. & Han K. S., **1997**: Stacking sequence optimization of laminated plates. *Composite Structures*, v.39, 283-288.
70. Klein F., **1896**: The mathematical theory of the top. Princeton, USA.
71. Kogiso N., Watson L. T., Gürdal Z. & Haftka R. T., **1994**: Genetic algorithms with local improvement for composite laminate design. *Struct. Opt.*, v.7, 207-218.
72. Kolosov G. V., **1909**: On an application of complex function theory to a plane problem of the mathematical theory of elasticity. Yuriev, Russie.
73. Kolosov G. V., **1935**: Application of the complex variable to the theory of elasticity. Moscou.
74. Kurpati A., Azarm S. & Wu J., **2002**: Constraint handling improvements for multiobjective genetic algorithms. *Struct. Multidisc. Optim.*, v.23, 204-213.
75. Lagrange J. L., **1770**: Sur la figure des colonnes. *Miscellanea Taurinensia*, Tomus V, 123. Voir aussi *Oeuvres*, v.2, 125-170, Gauthier-Villars, 1868.
76. Lang S., **1966**: Linear algebra. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachussets, USA.
77. Le Riche R., Haftka R. T., **1993**: Optimization of laminate stacking sequence for buckling load maximization by genetic algorithm. *AIAA Journal*, v.31, 951-956.
78. Le Riche R., Gaudin J., **1998**: Design of dimensionally stable composites by evolutionary optimization. *Composite Structures*, v.41, 97-111.
79. Liu B., Haftka R. T., Akgün M; A. & Todoroki A., **2000**: Permutation genetic algorithm for stacking sequence design of composite laminates. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.186, 357-372.
80. Lombardi M., Haftka R. T., **1998**: Anti-optimization technique for structural design under load uncertainties. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* V.157, 19-31.
81. Love A. E. H., **1927**: A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover Publications, New York.
82. Magnin V., **2001**: Optimisation et algorithmes génétiques. Cours en ligne de l'EUDIL. Disponible sur le web à l'adresse <http://www.eudil.fr/%7Evmagnin/coursag/>.

83. Massard T. N., **1984**: Computer sizing of composite laminates for strength. *J. Reinf. Plastics and Comp.*, v.3, 300-345.
84. Matous K., Leps M., Zeman J. & Seinoha M., **2000**: Applying genetic algorithms to selected topics commonly encountered in engineering practice. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.190, 1629-1650.
85. Maupertuis P. M. L. de, **1745**: *Venus Physique*. Paris.
86. Maupertuis P. M. L. de, **1750**: *Essai cosmologique*. Paris.
87. Maupertuis P. M. L. de, **1751**: *Le système de la nature*. Paris.
88. Michalewicz Z., Dasgupta D., Le Riche R. G. & Schoenauer M., **1996**: Evolutionary algorithms for constrained engineering problems. *Computers Ind. Engng.*, v.30, 851-870.
89. Michell J. H., **1902**: The inversion of plane stress. *Proc. of the London Math. Soc.*, v.34, 134-142.
90. Miki M., **1982**: Material design of composite laminates with required in-plane elastic properties. *Proc. of ICCM 4 (Fourth International Conference on Composite Materials)*, Tokio, 1725-731.
91. Miki M., **1983**: A graphical method for designing fibrous laminated composites with required in-plane stiffness. *Trans. JSCM*, v.9, 51-55.
92. Miki M., **1985**: Design of laminated fibrous composite plates with required flexural stiffness. Recent advances in composites in the USA and Japan, ASTM STP 864, Vinson J. R. and Taya M. Editors, 387-400. Philadelphia, USA.
93. Mota Soares C. M., Mota Soares C. A. & Mateus H. C., **1995**: A model for the optimum design of thin laminated plate-shell structures for static, dynamic and buckling behaviour. *Composite Structures*, v.32, 69-79.
94. Muc A., **1995**: Transverse shear effects in shape optimization of thinwalled laminated composite structures. *Composite Structures*, 399-408.
95. Muc A., **1997**: Transverse shear effects in discrete optimization of laminated compressed cylindrical shells. *Composite Structures*, v.38, 489-497.
96. Muc A., Krawiec A., **2000**: Design of composite plates under cyclic loading. *Composite Structures*, v.48, 139-144.
97. Muc A., Gurba W., **2001**: Probabilistic algorithms in optimisation problems for composite plates and shells. *Proc. of ICCM 13 (Thirteenth International Conference on Composite Materials)*, papier 1241. Pékin, Chine, 25-29 juin 2001.
98. Muc A., Gurba W., **2001**: Genetic algorithms and finite element analysis in optimization of composite structures. *Composite Structures*, v.54, 275-281.
99. Muskhelishvili N. J., **1933**: Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Traduction anglaise de J. R. M. Radok, 1953. P. Noordhoff, Gröningen, NL.
100. Narasimhan M. N. L., **1993**: Principles of continuum mechanics. J. Wiley & Sons, New York.
101. Nagendra S., Jestin D., Gürdal Z., Haftka R. T. & Watson L. T., **1996**: Improved genetic algorithm for the design of stiffened composite panels. *Comput. Struct.*, v.58, 543-555.
102. Olhoff N., Taylor J. E., **1983**: On structural optimization. *J. Appl. Mech.*, v.50, 1139-1151.
103. Pagano N. J., **1970**: Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J. Composite Mat.*, v.4, 20-34.
104. Pagano N. J., **1970**: Influence of shear coupling in cylindrical bending of anisotropic laminates. *J. Composite Mat.*, v.4, 330-343.
105. Paradies, R., **1996**: Designing quasi-isotropic laminates with respect to bending. *Compos. Sci. Techn.*, v.56, 461-472.
106. Park J. H., Hwang J. H., Lee C. S. et Hwang W., **2001**: Stacking sequence design of composite laminates for maximum strength using genetic algorithms. *Composite Structures*, v.52, 217-231.
107. Park W. J., **1982**: An optimal design of simple symmetric laminates under the first ply failure criterion. *J. Composite Mat.*, v.16, 341-355.
108. Pedersen P., **1990**: Combining material and element rotation in one formula. *Comm. In Appl. Num. Meth.*, v.6, 549-555.
109. Pedersen P., **1993**: Lecture notes on optimal design using anisotropic, non-linear materials. *Workshop on Optimum Structural Design: Analytical Approach and Computer Aided Design*. C. Cinquini editeur, Università di Pavia, Italie, 14-17 septembre 1993.

110. Pedersen P., **1997**: Elasticity – Anisotropy – Laminates. Notes de cours de la DTU – Technical University of Denmark. Disponible sur le web à l'adresse <http://www.fam.dtu.dk/html/pp.html>.
111. Person V., Vannucci P. & Verchery G., **2002**: Utilisation de la méthode polaire pour la recherche de stratifiés isotropes en membrane. *Comptes rendus du Colloque National de la Recherche Universitaire dans les I.U.T., CNRIUT 2002*. Le Creusot, France, 15-16 mai 2002.
112. Powell M. J. D., **1964**: An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *Computer Journal*, v.7, 155-162.
113. Rechenberg J., **1965**: Cybernetic solution path of an experimental problem. *Royal Aircraft Establishment*, Liberty translation 1122. Farnborough, UK.
114. Renders J. M., **1995**: Algorithmes génétiques et réseaux de neurones. Hermes, Paris.
115. Richard F., **1999**: Identification du comportement et évaluation de la fiabilité des composites stratifiés. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Franche-Comté. Besançon.
116. Sacchi-Landriani G., Rovati M., **1991**: Optimal design of fiber-reinforced orthotropic bodies. *Comptes Rendus du cours COMETT-CEEC 'Ottimizzazione Strutturale'*. Politecnico di Milano, Italie, 27-31 mai 1991.
117. Sacchi-Landriani G., Rovati M., Taliercio A., **1993**: Optimal orientation of anisotropic properties in continuum bodies. *Workshop on Optimum Structural Design: Analytical Approach and Computer Aided Design*. C. Cinquini éditeur, Università di Pavia, Italie, 14-17 septembre 1993.
118. Sadagopan D., Pitchumani R., **1998**: Application of genetic algorithms to optimal tailoring of composite materials. *Compos. Sci. Techn.*, v.58, 571-589.
119. Schmit L. A., Farshi B., **1973**: Optimum laminate design for strength and stiffness. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.7, 519-536.
120. Schmit L. A., Farshi B., **1977**: Optimum design of laminated fibre composite plates. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.11, 623-640.
121. Shin Y. S., Haftka R. T., Watson L. T. & Plaut R. H., **1989**: Design of laminated plates for maximum buckling load. *J. Compos. Mat.*, v.23, 348-369.
122. Soremekun G., **1997**: Genetic algorithms for composite laminate design and optimization. Thèse pour l'obtention du titre de 'master of science', Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, USA.
123. Soremekun G., Gürdal Z., Haftka R. T. & Watson L. T., **2001**: Composite laminate design optimization by genetic algorithm with generalized elitist selection. *Computers and Structures*, v.79, 131-143.
124. Soremekun G., Gürdal Z., Kassapoglou C. & Toni D., **2002**: Stacking sequence blending of multiple composite laminates using genetic algorithms. *Composite Structures*, v.56, 53-62.
125. Tabakov P. Y., **2001**: Multi-dimensional design optimisation of laminated structures using an improved genetic algorithm. *Composite Structures*, v.54, 349-354.
126. Tauchert T. R., Adibatla S., **1984**: Design of laminated plates for maximum stiffness. *J. Compos. Mat.*, v.18, 58-69.
127. Todoroki A., Haftka R. T., **1998**: Stacking sequence optimization by a genetic algorithm with a new recessive gene like repair strategy. *Composites Part B*, v.29B, 277-285.
128. Tsai S. W., Pagano, N. J., **1968**: Invariant properties of composite materials. Dans *Composite Materials Workshop*. Tsai S. W., Halpin J. C. & Pagano N. J. Editeurs, 233-253. Technomic, USA.
129. Tsai S. W., Hahn H. T., **1980**: Introduction to Composite Materials. Technomic, USA.
130. Tsai, S. W., **1985**: Composite design guide. Dayton, USA.
131. Tuan P. D., **1976**: Théories des plaques sandwichs élastiques anisotropes. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Technologie de Compiègne.
132. Valentin M., **1998**: Maupertuis, un savant oublié. La découverte Editions.
133. Valot E., Verchery G., Akkus N., Vannucci P., Rousseau J. & Aivazzadeh S., **2001**: Ultimate strength of quasi-isotropic laminates in tension: theoretical and experimental analysis. *Proc. of DURACOSYS 2001 - 5th International Conference on durability analysis of composite systems*. Tokyo, Japon, 6-9 novembre 2001.
134. Valot E., **2002**: Anisotropie du comportement a rupture de composites a structure isotrope. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Bourgogne. ISAT, Nevers.

135. Valot E., Vannucci P. & Verchery G., **2002**: Complete in-plane elastic characterisation under tensile tests of angle-ply laminates composed of polymer-matrix layers. *Polymers and Polymer Composites*, v.10, 483-492.
136. Vanderplaats G. N., Weisshaar T. A., **1989**: Optimum design of composite structures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, v.27, 437-448.
137. Vannucci P., Aivazzadeh S. & Verchery G., **1997**: A comparative analysis of some theories and finite elements for sandwich plates and shells. *Comptes rendus du Colloque Euromech 360: Mechanics of Sandwich Structures*, 45-52. A. Vautrin editeur. St. Etienne, France. Kluwer Academic Publisher, NL.
138. Vannucci P., Gong X. J. & Verchery G., **1998**: Détermination des stratifiés quasi-homogènes par l'approche polaire. *Comptes rendus du Congrès JNC 11 (11èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 205-214. Arcachon, 18-20 novembre 1998.
139. Vannucci P., Gong X. J. & Verchery G., **1999**: Designing with anisotropy. Part 3: Quasi-homogeneous anisotropic laminates. *Proc. of ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 573. Paris, 5-9 juillet 1999.
140. Vannucci P., Verchery G., **1999**: Designing with anisotropy. Part 2: Laminates without membrane-flexure coupling. *Proc. of ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 572. Paris, 5-9 juillet 1999.
141. Vannucci P., Verchery G., **1999**: Un metodo nuovo per la ricerca di laminati anisotropi quasi omogenei. *Atti del 14° Congresso AIMETA (Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata)*. Como, Italie, 6-9 octobre 1999 (en italien).
142. Vannucci P., Verchery G., **2000**: Caractérisation de l'isotropie et autres propriétés des stratifiés comme problème de minimum. *Comptes rendus du Congrès JNC 12 (12èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 333-342. Cachan, France, 15-17 novembre 2000.
143. Vannucci P., **2001**: On bending-tension coupling of laminates. *J. of Elasticity*, v.64, 13-28.
144. Vannucci P., Verchery G., **2001**: A special class of uncoupled and quasi-homogeneous laminates. *Compos. Sci. Techn.*, v.61, 1465-1473.
145. Vannucci P., Verchery G., **2001**: Stiffness design of laminates using the polar method. *Int. J. Solids Str.*, v.38, 9281-9294.
146. Vannucci P., Verchery G., **2002**: A new method for generating fully isotropic laminates. *Composite Structures*, v. 58, 75-82.
147. Vannucci P., **2002**: A special planar orthotropic material. A paraître dans *Journal of Elasticity*.
148. Verchery G., **1973**: Les plaques élastiques couplées: leur calcul dans le cas isotrope. Groupe commun de recherche ENSTA – ENSMP *Mécanique des matériaux composites*. Rapport 011, Paris.
149. Verchery G., **1979**: Les invariants des tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité. *Comptes rendus du Colloque Euromech 115*, Villard-de-Lans. Publié en 1982 par les Editions du CNRS, Paris, 93-104.
150. Verchery G., Vong T. S., **1986**: Une méthode d'aide graphique à la conception des séquences d'empilement dans les stratifiés. *Comptes rendus de JNC5 (5èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 267-280. Paris, 9-11 septembre 1986.
151. Verchery G., **1990**: Designing with anisotropy. *Proc. Int. Symp. Composit Materials with Textile Reinforcement for Use in Building Construction and Related Applications*, Lyon, 16-18 juillet 1990. Dans *Textile Composites in Building Construction*, Hamelin P. et Verchery G. Editeurs, Pluralis.
152. Verchery G., **1999**: Designing with anisotropy. Part 1: Methods and general results for laminates. *Proc. of ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 734. Paris, 5-9 juillet 1999.
153. Verchery G., Gong X. J., **1999**: Pure tension with off-axis tests for orthotropic laminates. *Proc. of ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 752. Paris, 5-9 juillet 1999.
154. Verchery G., Vannucci P. & Person V., **2000**: The polar method as a tool for solving inverse problems of the classical laminated plate theory. *Proc. of ISIP 2000 (International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics)*, Nagano, Japon, 7-10 mars 2000. In *Inverse problems in engineering mechanics II*, 317-326. M. Tanaka et G. S. Dulikravich Editeurs. Elsevier Science, UK.
155. Vincenti A., Vannucci P. & Verchery G., **2000**: Découplage et quasi-homogénéité pour les stratifiés renforcés par tissus équilibrés. *Comptes rendus du Congrès JNC 12 (12èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 265-274. Cachan, France, 15-17 novembre 2000.
156. Vincenti A., Vannucci P., Verchery G. & Belaïd F., **2001**: Effetti degli errori di orientazione sulla quasi-omogeneità dei laminati in composito. *Atti del 15° Congresso AIMETA (Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata)*, papier sp_so_29. Taormina, Italie, 26-29 septembre 2001 (en italien).

157. Vincenti A., Verchery G. & Vannucci P., **2001**: Anisotropy and symmetries for elastic properties of laminates reinforced by balanced fabrics. *Composites Part A*, v. 32, 1525-1532.
158. Vincenti A., Vannucci P., Verchery G. & Belaid F., **2002**: Effects of orientation errors on stiffness properties of composite laminates. *Proc. of the 8th Japanese-European Symposium*. Tokio, 16-17 avril 2002.
159. Vincenti A., Vannucci P. & Verchery G., **2003**: Influence of orientation errors on quasi-homogeneity of composite materials. *Composites Science and Technology*, v. 63, pp. 739-749.
160. Vincenti A., **2002**: Conception et optimisation de composites par méthode polaire et algorithmes génétiques. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Bourgogne. Isat, Nevers.
161. Walker M., Reiss T. & Adali S., **1997**: Optimal design of symmetrically laminated plates for minimum deflection and weight. *Composite Structures*, v.39, 337-346.
162. Watkins R. I., Morris A. J., **1986**: A multicriteria objective function optimization scheme for laminated composites for use in multilevel structural optimization schemes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.60, 233-251.
163. Watson J. D., Crick F. H. C., **1953**: Molecular structure of nucleic acids. A structure for deoxyribose nucleic acid. *Nature*, v. 171, 737-738.
164. Werren F., Norris C. B., **1953**: Mechanical properties of a laminate designed to be isotropic. *US Forest Products Laboratory*, Report 1841, USA.
165. Wu E. M., **1970**: Fourth order tensor invariants and geometric representation. Office of Naval Research/Advanced Research Projects Agency. Report HPC 1970, 70-123.
166. Wu E. M., Jerina K. L. & Lavengood R. E., **1973**: Data averaging of anisotropic composite material constants. Dans *Analysis of test methods for high modulus fibers and composites*, ASTM SPT 521, 229-252.
167. Wu K. M., **1979**: Isotropic composite plates. *Research Report EM-429*. General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan. USA.
168. Wu K. M., Avery B. L., **1992**: Fully isotropic laminates and quasi-homogeneous anisotropic laminates. *J. Composite Mat.*, v.26, 2107-2117.
169. Yamamoto I., Rousseau J. & Verchery G., **2001**: Measurement of flexural properties of elastic anisotropic plates by anticlastic bending. *Proc. of ICCM 13 (Thirteenth International Conference on Composite Materials)*, papier 1407. Pékin, Chine, 25-29 juin 2001.
170. Yang L., Ma Z. K., **1989**: Optimum design based on reliability for composite laminate layup. *Comput. Struct.*, v.31, 377-383.

CONCLUSIONS GENERALES

Ce n'est pas facile de tirer des conclusions générales à un travail qui porte sur plusieurs disciplines, probablement il n'y en a pas et d'ailleurs des conclusions spécifiques à chaque partie ont déjà été présentées. Peut-être, un résultat général est l'expérience que j'ai acquise: c'est la conséquence d'un parcours non commun, pas pour ses résultats, c'est sans doute pas à moi d'en juger, mais plutôt pour son déroulement: en ayant travaillé dans deux pays, si différents pour leur organisation des études et des carrières, je me suis trouvé à être un cas particulier dans les deux à la fois, et cela m'a posé sans doute des problèmes, pas spécialement scientifiques d'ailleurs. J'ai été surpris favorablement de l'accueil que la France m'a donné, et j'ai essayé de m'en rendre digne.

Ma formation d'abord et mon parcours de chercheur et d'enseignant après m'ont fait toucher à un nombre assez vaste de sujets en mécanique, très différents et lointains parfois: du béton armé à la dynamique des fluides, de l'optimisation structurelle à la mécanique des matériaux, de la conception des bâtiments à la mécanique computationnelle, pour n'en citer que quelques-uns. Ceci m'a formé à la pluridisciplinarité en mécanique, m'a habitué à faire des efforts de reconversion, m'a ouvert l'esprit à l'intérêt de savoir faire des parallèles entre disciplines différentes, m'a formé comme chercheur, m'a appris le travail d'équipe et d'encadrement, m'a préparé à prendre les initiatives et les responsabilités nécessaires à la recherche. Mais ces changements de domaine ont eu un prix: la nécessité de se reconvertir porte avec soi une période d'adaptation inévitable, qui m'a obligé à rester inactif pendant un certain temps pour ce qui concerne les publications.

Aujourd'hui, la situation est différente: un travail de plus de cinq ans dans le domaine des matériaux composites m'a permis de capitaliser une certaine expérience, reconnue par le fait que j'ai été sollicité par *Journal of Applied Mechanics* comme rapporteur. Cependant, ce que je considère plus important c'est que la recherche faite jusqu'ici produit maintenant de la nouvelle recherche: les résultats obtenus sont aussi des occasions pour des nouvelles questions que nous nous posons au fur et à mesure que nous progressons, signe tangible que nous sommes entrés dans un parcours de recherche bien consolidé. Les objectifs se multiplient et, comme déjà dit dans les conclusions à la troisième partie, plusieurs axes de recherche sont d'ores et déjà envisagés. L'investissement dans la création du logiciel POLAR-COMP est important en terme d'efforts, mais ça permettra au laboratoire de disposer d'un outil souple et versatile pour la recherche en thème de conception des stratifiés, ainsi que pour les besoins d'analyse et de calcul des composites des autres chercheurs.

Ma formation et mon esprit me suggèrent toutefois d'aller explorer d'autres domaines aussi: l'utilisation des algorithmes génétiques pour des problèmes d'optimisation structurale, même en dehors du domaine des matériaux composites, m'attire beaucoup, et dans cette perspective j'ai déjà entamé une recherche sur le dimensionnement optimal d'un pont à arc par cette méthode. Mais je pense aussi à un thème qui m'intéresse beaucoup, compte tenu de ma formation d'origine, à savoir l'emploi des matériaux composites en génie civil, secteur en plein essor.

La recherche des "causes ultimes" me fascine beaucoup; depuis toujours mes efforts d'enseignant et de chercheur sont consacrés aussi à l'approfondissement théorique, à la recherche de la racine et de l'élégance des choses de la nature: mes intérêts pour l'histoire des sciences en témoignent au moins en partie. J'entends faire tout le possible pour continuer dans cette optique.

Dans la rédaction de ce document j'ai mis tous mes efforts pour faire en sorte qu'il soit le témoignage d'une activité de recherche en mécanique soutenue, constante et passionnée pendant plus d'une décennie. J'espère d'avoir réussi à transmettre au lecteur non seulement les résultats, mais surtout l'envie de savoir, la passion et l'intérêt qui m'ont animé pendant cette période.

Pour conclure, de ces dix ans, parfois trop durs, je retiens bien sûr les résultats et les perspectives de recherche, mais surtout l'envie de continuer à chercher, avec la même passion, des réponses à des questions de mécanique, ainsi que l'espoir de pouvoir continuer à le faire.

*La filosofia è scritta in questo grande libro,
l'universo, che non cessa di essere aperto
davanti ai nostri occhi.*

G. Galilei, *Il Saggiatore*, 1623.

ARTICLES ANNEXES

DOCUMENTS ANNEXES

1. CURRICULUM VITAE DETAILLE

1. GENERALITES

Prénom: **Paolo**
Nom: **Vannucci**
Né à Lucca, Italie, le 5.11.1962
Marié, père d'une fille
Nationalité italienne



Adresse:
13, rue Aublanc
58000 Nevers
France

Adresse professionnelle:
ISAT - Institut Supérieur de l'Automobile et
des Transports
B.P. 31 - 49, rue Mademoiselle Bourgeois
58027 Nevers Cedex – France
Tel : (+ 33) 3 86 71 50 34
Fax : (+ 33) 3 86 71 50 01
e-mail : Paolo.Vannucci@u-bourgogne.fr

2. FORMATION

Toute ma formation scolaire et universitaire s'est déroulée en Italie, exception faite des périodes post-doctorales passées en France, à l'Université de Metz d'abord et à l'ISAT ensuite, l'Institut Supérieur de l'Automobile et des Transports de Nevers, école d'ingénieurs de l'Université de Bourgogne. Ces périodes françaises, fondamentales dans ma formation avancée, sont caractérisées par une forte activité de recherche. C'est pour cela que je ne les détaille pas ici, mais dans la partie consacrée aux activités de recherche.

Toute la période de formation supérieure, y compris le doctorat, a été accompagnée d'une activité professionnelle à temps partiel, rendue nécessaire pour raisons financières. Ceci explique, en partie, la durée d'obtention de mon diplôme d'ingénieur. Les autres raisons sont le service national (d'une durée d'un an, que j'ai accompli pendant les études) et le fait que j'ai soutenu un nombre d'examens supérieur au minimum requis par le diplôme (32 au lieu de 30), afin d'acquérir une meilleure formation scientifique, notamment dans le secteur de la mécanique structurelle, sans pour autant négliger aucun autre enseignement fondamental propre aux études de génie civil, spécialité hydraulique.

Je précise ci-après les étapes fondamentales de ma formation.

7.1981: Diplôme de Maturità Scientifica (équivalent au baccalauréat scientifique) au "Liceo Scientifico A. Vallisneri" de Lucca, note finale 60/60.

6.3.1991: Diplôme de *Laurea* d'Ingénieur en Génie Civil (équivalent au Diplôme d'Ingénieur en Génie Civil cumulé avec un D.E.A., et à un *master* dans le système anglo-saxon), spécialité hydraulique, à l'Université de Pise, note finale 110/110 *summa cum laude*. Thèse de laurea: "Struttura di protezione per una pila da ponte nello Stretto di Messina" (Structure de sauvegarde pour un pilier de pont dans le Déroit de Messine). Sujets: modèle de calcul de la probabilité de collision d'un navire avec un obstacle fixe; simulation d'un impact à haute énergie d'un navire

contre un obstacle; conception et calcul d'un ouvrage de protection. Les directeurs de thèse étaient les Professeurs R. Bartelletti, V. Milano et S. Ligarò.

17.2.1992: premier au concours d'admission au Doctorat de Recherche en Génie des Structures pour le Consortium d'Universités dirigé par l'Université de Florence, associée avec les Universités de Pise, Udine, Gènes et le Polytechnique de Bari; note finale 120/120.

19.1.1996: obtention du Doctorat de Recherche en Génie des Structures, avec jugement d'unanimité. Thèse de doctorat: "Sull'analisi delle forze d'onda con applicazione al calcolo di una TLP" (Sur l'analyse des forces de la houle avec application au calcul d'une TLP). Sujets: analyse des forces de la houle sur un cylindre vertical; optimisation dimensionnelle d'une plate-forme flottante de type TLP (Tension Leg Platform). Les directeurs de thèse étaient les Professeurs P. Villaggio et R. Bartelletti.

3. ACTIVITES DE RECHERCHE

Dans un souci de clarté, j'ai préféré présenter mes activités de recherche en plusieurs points:

- recherches concernant ma thèse de laurea;
- recherches concernant ma thèse de doctorat;
- recherches contractuelles de 1995;
- recherche post-doctorale au LPMM de l'Université de Metz;
- premier séjour à l'ISAT;
- recherches post-doctorales de l'année 1997;
- second séjour à l'ISAT;
- recherches personnelles comme maître de conférences;
- collaborations avec d'autres chercheurs;
- co-encadrements de thèses.

Ci-après ces différentes étapes sont exposées dans le détail.

Recherches concernant ma thèse de *Laurea* : mes activités de recherche ont commencé en 1989 au Département de Génie des Structures de l'Université de Pise, avec le travail concernant la thèse de *Laurea*. Il faut préciser que, dans le système italien, à la fin des examens prévus par chaque faculté, l'élève, pour obtenir le diplôme de *Laurea*, doit accomplir un travail personnel qui fait l'objet ensuite d'une soutenance publique, devant un jury composé de 11 membres. Le contenu de ce travail peut être varié, et à la demande du candidat il peut être un travail de recherche. Sa durée est très variable: d'un minimum de six mois, il peut aller jusqu'à deux ans, voire plus. Personnellement, j'avais choisi un sujet de thèse qui avait une partie prépondérante de recherche: la conception d'un ouvrage de protection, pour un pilier de pont dans le Détroit de Messine, contre des possibles collisions de navires. La recherche a abordé deux aspects: le calcul de la probabilité de collision, pour lequel j'ai proposé une nouvelle méthode, et la conception proprement dite de l'ouvrage qui, étant données les caractéristiques topographiques très particulières de l'endroit, le volume du trafic maritime et les valeurs de l'énergie de collision mises en jeu, nécessitait la conception d'une solution totalement nouvelle, avec une étude de faisabilité. J'ai donc conçu un ouvrage flottant, et j'ai réalisé un logiciel de simulation numérique de son comportement sous collision. La thèse a été complétée par les calculs de conception proprement dit de cet ouvrage de grandes dimensions, en béton armé précontraint. On peut évaluer à 20 mois la durée totale de ce travail.

Recherches concernant ma thèse de doctorat: après une période de travail chez AGIP, et suite à la réussite du concours d'admission au Doctorat de Recherche du Consortium Universitaire composé des Universités de Florence, Pise, Gènes, Udine et du Polytechnique de Bari, j'ai repris l'activité de recherche au début de l'année 1992, toujours au sein du Département de Génie des Structures, avec la thèse de doctorat. Celle-ci portait sur un problème d'optimisation dimensionnelle d'une plate-forme flottante de type TLP (Tension Leg Platform). Ces plates-formes, dont deux seulement étaient opérationnelles à l'époque et quelques autres étaient à l'étude, sont composées par une coque flottante retenue par des câbles verticaux en acier ancrés sur le fond de la mer. La rigidité de la structure est donnée par la forte poussée d'Archimède, qu'on obtient en phase constructive par une séquence précise d'opérations de lestage et délestage. La forme de la coque, en acier, est standard: 4 colonnes cylindriques, situées aux quatre coins d'un rectangle, et liées à la base par quatre poutres à caisson. En haut, cette coque porte le pont avec les installations. La conception d'un tel ouvrage est un processus extrêmement long, complexe et coûteux, qui doit tenir compte d'un nombre élevé de contraintes de différentes natures imposées à la conception et à la construction. Le but de la thèse était la détermination des dimensions de la coque afin d'en minimiser le poids. On ne cherchait pas à résoudre ce problème de façon définitive, tâche probablement irréalisable, mais on souhaitait plutôt proposer une démarche simple et efficace pour déterminer les dimensions globales de la structure, dimensions à utiliser comme point de départ dans un processus de mise au point successif. Naturellement, dans la recherche du minimum, il y a plusieurs conditions à respecter, conditions qui forment les inégalités de contrainte du problème. La thèse se compose de deux parties principales: la première aborde le problème de la détermination des forces de la houle sur la plate-forme. Il s'agit ici d'un cas très particulier, où les grandes dimensions de la coque permettent d'utiliser les solutions propres à la théorie de la diffraction-radiation, notamment les solutions de McCamy & Fuchs et surtout celle de Garrett. Cette dernière est une solution donnée sous forme de série de fonctions spéciales, et son utilisation dans un processus d'optimisation est extrêmement compliquée. C'est pourquoi, dans la thèse, on développe une analyse qualitative et quantitative de cette solution, et une simplification est proposée afin de pouvoir l'utiliser dans le but énoncé ci-dessus. Dans la deuxième partie de la thèse, on traite le problème de la recherche des dimensions de poids minimum et une démarche simplifiée est proposée. Cette méthode permet de se ramener à un cas plus simple, celui de la plate-forme mono-colonne, et, par un critère d'identification, de passer ensuite à la plate-forme complète. Les résultats donnés par la méthode proposée ont été comparés avec les données fournies par les constructeurs, pour les cas de plates-formes existantes ou à l'étude; la comparaison s'est avérée être vraiment satisfaisante.

La recherche entamée avec cette thèse avait été suggérée par ma précédente expérience de travail chez AGIP, en qualité d'ingénieur pour la conception structurelle de plate-formes offshore, et réunissait les deux aspects fondamentaux de ma formation universitaire, la mécanique des fluides et la mécanique des structures.

Recherches contractuelles de l'année 1995: au début 1995, ma thèse de doctorat terminée, je suis resté six mois au sein du Département de Génie des Structures de l'Université de Pise où j'ai répondu aux besoins du Département, notamment en travaillant sur deux contrats de recherche différents. Le premier, en collaboration avec le CREA (Centre de Recherche pour l'Emploi de l'Acier, de Massa, Italie, établissement partenaire d'une recherche européenne), concernait l'analyse numérique des effets des incendies naturels dans les bâtiments; cette recherche a comporté la rédaction d'un rapport final de 50 pages. L'autre contrat concernait le domaine des cristaux liquides; dans ce cas, ma participation a été limitée au développement de certains calculs par voie numérique.

Recherche post-doctorale au LPMM de l'Université de Metz: du 24 juin 1995 au 31 mai 1996 j'ai bénéficié d'une bourse post-doctorale dans le cadre du programme européen HCM (Human Capital and Mobility). J'ai séjourné au LPMM, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, de l'Université de Metz où j'ai travaillé au sein de l'équipe du professeur M. Potier-

Ferry, et en collaboration aussi avec les professeurs B. Cochelin, maintenant à l'ESM2 de Marseille, et N. Damil, de l'Université de Casablanca. Le sujet de la recherche était l'analyse numérique des phénomènes mécaniques non-linéaires par la MAN, Méthode Asymptotique Numérique. Je me suis particulièrement attaché à mettre au point une stratégie pour la détection complète des chemins de bifurcation dans la mécanique des structures, pour le cas de valeurs propres simples. Il s'agissait aussi de réaliser un algorithme à intégrer dans un code de calcul par éléments finis, utilisé par l'équipe du professeur Potier-Ferry. Les résultats ont été publiés sur la revue *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, ainsi que dans différentes communications à des congrès.

Premier séjour à l'ISAT: j'ai ensuite obtenu une autre bourse, toujours dans le cadre du programme HCM, du 1^{er} juillet 1996 au 31 décembre 1996, à l'ISAT, Institut Supérieur de l'Automobile et des Transports de l'Université de Bourgogne, à Nevers. Ici, j'ai travaillé d'abord sous la direction du professeur S. Aivazzadeh et ensuite du professeur G. Verchery, au LRMT, Laboratoire de Recherche en Mécanique des Transports, dans le domaine des matériaux composites. Mes travaux ont porté sur les théories de calcul de plaques stratifiées et sandwich, et c'est à cette époque que j'ai pris connaissance et ai commencé à travailler sur la théorie de représentation polaire des tenseurs d'élasticité. J'ai élaboré pour le laboratoire deux programmes de calcul pour la vérification des résultats obtenus par voie expérimentale ou numérique, basés sur les théories de Pagano et de Verchery et Pham-Dang. Ce travail a abouti à une communication à congrès en 1997, sur la comparaison de différents éléments finis et théories pour le calcul de plaques sandwich, étude que j'ai en partie continuée pendant la période suivante.

Recherches post-doctorales de l'année 1997: après le séjour à l'ISAT, je suis rentré en Italie, où j'avais obtenu entre temps une bourse post-doctorale au sein du Département de Génie des Structures de mon ancienne Université, à partir du 7 février 1997. A cette occasion, j'ai collaboré avec le professeur S. Ligarò sur une recherche relative à la propagation d'une fissure dans une plaque soumise à traction, le but étant l'analyse du véritable comportement de la plaque lorsqu'elle devient instable par traction au voisinage de la fissure. Pour cette recherche, on a appliqué la méthode MAN et le code de calcul précédemment élaboré à l'Université de Metz. Toujours durant cette période, j'ai également collaboré à une recherche européenne, dont le Département était partenaire, portant sur une étude expérimentale des pierres de taille utilisées dans la construction des monuments anciens. Je me suis précisément occupé de l'exécution d'essais en fatigue sur des échantillons de pierre.

Toujours durant cette période italienne de 1997, j'ai postulé sur des postes de Maître de Conférences en France, et j'ai été qualifié lors du concours à l'INSA de Toulouse, où j'ai été classé 4^{ème}.

Deuxième séjour à l'ISAT: le 15 octobre 1997 je suis revenu à l'ISAT, comme boursier post-doctoral avec une bourse annuelle financée par le Conseil Régional de Bourgogne. J'ai repris, sous la direction du professeur G. Verchery, la recherche dans le domaine des matériaux composites, secteur dans lequel j'ai continué depuis mon activité de chercheur. En particulier, j'ai entamé l'étude, basée sur l'utilisation de la méthode polaire de représentation des tenseurs d'élasticité plane, de la détermination de règles de conception de stratifiés composés de plis élémentaires identiques, avec certaines caractéristiques fixées au préalable. La découverte des solutions appelées ensuite quasi-triviales date de cette époque.

Recherches personnelles comme maître de conférences: en 1998 j'ai été classé premier au concours de Maître de Conférences à l'ISAT, où je travaille encore actuellement. J'ai poursuivi le travail de recherche sous la conduite de M. Verchery, dans la direction des études déjà commencées lors de mon deuxième séjour à l'ISAT. Les principaux sujets que j'ai abordés personnellement sont les suivants:

- recherche des solutions générales pour les stratifiés découplés et quasi-homogènes; recherche de toutes les solutions de type quasi-trivial par un algorithme d'exploration par énumération; constitution d'une base de données de ce type de solutions;
- recherche de stratifiés complètement isotropes: mise au point d'une stratégie nouvelle, s'appuyant sur l'existence des solutions quasi-triviales, pour la détermination de solutions exactes;
- formulation générale dans une forme unique d'un certain nombre de problèmes inverses concernant la conception en rigidité des stratifiés; réduction à un seul problème d'optimum structural, géré par une fonction objectif semi-définie positive, multi-paramétrée, non convexe; analyse de problèmes supplémentaires par l'introduction de contraintes; recherche numérique de solutions par des méthodes classiques d'optimisation non linéaire (méthode de Monte Carlo, méthode du gradient conjugué);
- analyse des effets des imperfections d'orientation des couches sur le comportement final d'un stratifié: élaboration d'une stratégie d'analyse et recherche de résultats de forme analytique pour une description synthétique et qualitative du phénomène; application au cas des stratifiés conçus pour être découplés;
- analyse d'un type particulier et jusqu'alors inconnu d'orthotropie plane;
- élaboration d'une stratégie nouvelle, s'appuyant sur la méthode polaire, pour la caractérisation élastique complète d'un matériau composite quelconque, après essai sur un seul échantillon stratifié; optimisation de la procédure (recherche encore en cours).

En parallèle à ces recherches personnelles, j'ai participé à des recherches en commun avec d'autres chercheurs du LRMA, le Laboratoire de Recherche en Mécanique et Acoustique, nouvelle dénomination du LRMT, et j'ai co-encadré des thèses; voici le détail de ces activités.

Collaborations avec d'autres chercheurs: j'ai eu l'occasion de collaborer avec trois chercheuses du LRMA:

- recherche en commun avec V. Person (IUT de Chalon sur Saône): le sujet était la recherche de règles nouvelles et générales pour l'obtention de stratifiés isotropes, sans faire appel à des méthodes de recherche numérique. Dans ce cas, le travail a été aussi un travail d'introduction et de guide dans la recherche d'un maître de conférences qui, en devenant membre du LRMA, devait suivre un parcours de reconversion scientifique. En ce moment le travail continue dans l'emploi de la méthode polaire à l'étude des vibrations des stratifiés anisotropes;
- recherche en commun avec F. Belaïd (UFR Sciences de Dijon): dans ce cas il s'agissait d'encadrer le travail post-doctoral d'un ATER, et là aussi avec un problème de reconversion thématique. Le sujet de la recherche a été la continuation, par une méthode numérique, du travail personnel sur la sensibilité des propriétés d'un stratifié aux défauts d'orientation des couches.
- recherche en commun avec X. J. Gong (ISAT): dans ce cas j'ai été amené à rechercher des stratifiés très particuliers pour la fabrication d'échantillons à utiliser dans une recherche sur le comportement à la rupture par propagation de fissure dans un stratifié. Il s'agissait de trouver des empilements à caractéristiques multiples, dans le but d'éliminer certains phénomènes parasites: quasi-homogènes, orthotropes, non couplés et tels que, une fois la fissure ouverte, les deux parties séparées et le stratifié original aient les mêmes propriétés élastiques; en outre, on voulait des séquences d'empilement dont les angles n'affectaient pas les propriétés ci-dessus. Les solutions ont été trouvées dans l'ensemble quasi-trivial.

Co-encadrements de thèses: j'ai participé à l'encadrement de trois thèses (activité toujours en cours):

- thèse de E. Valot: le titre de la thèse était "Anisotropie du comportement à rupture de composites à structure isotrope". Ma collaboration s'est limitée à une partie de la recherche, notamment à l'analyse expérimentale de la rupture de stratifiés quasi-isotropes, à la caractérisation élastique des *angle-ply* et, en partie, à l'extension de la théorie classique des stratifiés au cas des plis ayant un couplage intrinsèque entre les comportements de membrane et de flexion; la thèse, dont le directeur était le professeur G. Verchery, a été présentée en soutenance le 7 janvier 2002. Ma collaboration a commencé en février 2001; on peut évaluer à 25% ma participation à l'encadrement;
- thèse de A. Vincenti: cette thèse, dirigée par le professeur G. Verchery, a débuté en janvier 2000, a été soutenue le 13 novembre 2002 et j'ai participé à son encadrement dès le début. Le sujet de la thèse est l'application de la méthode polaire à la conception des stratifiés. Dans ce travail, un certain nombre de recherches que j'avais faites précédemment ont été reprises et complétées, d'autres ont été complètement développés: extension au cas des tissus équilibrés des résultats généraux sur le découplage et la quasi-homogénéité; conception en polaire de plis en composite par les lois classiques de la micromécanique; formalisation et discrétisation de problèmes d'optimum pour les stratifiés, pour les ramener à une forme intéressante pour les applications pratiques; création d'un nouveau algorithme génétique pour l'exploration des solutions aux problèmes d'optimum, avec ou sans contraintes imposées; extension au cas de la quasi-homogénéité de l'analyse de sensibilité aux défauts d'orientation des couches, avec étude théorique et numérique; on peut évaluer à 50% ma participation à l'encadrement de cette thèse;
- thèse de M. Kazemi: cette thèse, dirigée par les professeurs G. Verchery et S. Aivazzadeh, a débuté en janvier 2001, et j'ai participé à son encadrement dès le début. Dans ce cas, mon travail a été surtout celui d'introduire l'étudiant à la méthode polaire et à la mécanique des stratifiés; à cette occasion, on a développé une recherche sur l'analyse, par la méthode polaire, de certains résultats trouvés en littérature sur le comportement des renforts en tissu. La thèse est encore dans une phase initiale, et ma collaboration est difficilement quantifiable à l'état actuel.

En conclusion, mes activités de recherche, qui s'étendent sur plus de douze ans, se caractérisent par la diversité des sujets abordés. L'adaptation à de nouveaux environnements, ainsi qu'à différents thèmes et méthodes, ne m'a jamais posé de problèmes, et cette capacité, due à ma formation de base, m'a permis de m'intégrer rapidement dans les équipes au sein desquelles j'ai eu l'occasion de travailler, et m'a surtout conféré la capacité d'établir des liaisons entre différents domaines de la mécanique qui peuvent avoir des aspects communs.

4. ACTIVITES D'ENSEIGNEMENT

Au fil des années, j'ai eu la possibilité de collaborer avec plusieurs professeurs dans différentes activités d'enseignement, aussi bien en Italie qu'en France, et d'organiser personnellement plusieurs cours de différent niveau.

Depuis 1992 et jusqu'en 1995 j'ai travaillé avec le professeur E. Virga au Département de Génie des Structures de l'Université de Pise, pour l'enseignement de *Mécanique Rationnelle* dispensé aux élèves de la deuxième année de Génie Civil. J'étais chargé de développer certains sujets particuliers, aussi bien pour les cours magistraux que pour les travaux dirigés, et notamment l'algèbre tensorielle, l'analyse des propriétés des courbes, l'étude du mouvement d'un point matériel dans un champ de force centrale, les propriétés d'inertie d'un système, l'équilibre, la stabilité et les petites oscillations de systèmes mécaniques rigides avec souplesses concentrées, la mécanique des câbles

inextensibles, le formalisme lagrangien, etc. Chaque année, j'ai fait environ 20 heures d'enseignement, également partagées entre cours magistraux et travaux dirigés. Pour ces raisons, j'ai obtenu par l'Université de Pise la reconnaissance du statut de "Cultore della Materia", titre académique qui donne l'habilitation et le droit à faire partie des jurys d'examen.

En 1997, au sein du même Département de Génie des Structures de l'Université de Pise, j'ai collaboré avec le professeur S. Bennati pour le cours de *Résistance des Matériaux* dispensé aux élèves de la troisième année de Génie Aéronautique et Aérospatial. Dans ce cas, j'ai été chargé de développer certains sujets, cours magistraux et travaux dirigés, comme les relations de comportement pour les matériaux anisotropes, la théorie de Saint-Venant pour les poutres, la stabilité des systèmes élastiques, etc. En plus, j'ai effectué l'encadrement d'un groupe d'élèves qui m'avaient été confiés afin de les faire progresser dans la matière en vue de l'examen final. Au total, pour ce cours et hors encadrement, j'ai dispensé 24 heures d'enseignement, dont 12 de cours magistraux et 12 de travaux dirigés. En même temps, j'ai été appelé par le professeur P. Villaggio à faire partie du jury d'examen pour le cours de *Résistance des Matériaux*, dispensé aux élèves de la troisième année de Génie Mécanique.

A l'ISAT, à partir d'octobre 1997, j'ai été chargé de l'enseignement de *Fiabilité* aux élèves de l'école inscrits en double cursus au D.E.A. "Matériaux, structures et fiabilité, en génie mécanique et génie civil", D.E.A. qui regroupait l'Université Blaise Pascal et l'IFMA de Clermont Ferrand, l'ISAT, l'IUT d'Egletons (Université de Limoges), l'IUT de Bourges, et l'Ecole des Mines de Saint Etienne. Le cours a été de 24 heures au total. Ensuite, j'ai été chargé d'une partie des travaux dirigés de *Mécanique des Structures*, *Mécanique des Matériaux Solides* et *Dynamique*, toujours aux élèves du D.E.A., pour un total de 8 heures.

Après ma nomination au poste de Maître de Conférences, en 1998, j'ai pris part à plusieurs enseignements à l'ISAT; le détail est donné ci-dessous:

- **1998-99** : enseignant titulaire des cours de *Mécanique Générale* en 2^{ème} année, et de *Fiabilité* pour le D.E.A ; assistant d'*Analyse Numérique* en 4^{ème} année, intervenant dans les cours de *Mathématiques* en 2^{ème}, *Mécanique des Milieux Continus* en 4^{ème} et *Eléments Finis* en 5^{ème} année, ainsi qu'aux cours de *Mécanique des Matériaux Solides* et *Mécanique des Structures* du D.E.A.; suivi de stages d'élèves de 2^{ème}, 4^{ème} et 5^{ème} année, pour un total de 244 HETD ;
- **1999-2000** : enseignant titulaire des cours de *Mécanique Générale* en 1^{ère} et 2^{ème} année, de *Fiabilité* et de *Mécanique des Matériaux Solides* pour le D.E.A.; assistant d'*Analyse Numérique* en 4^{ème} année; suivi des projets de 3^{ème} année et des stages de 4^{ème} et 5^{ème} année, pour un total de 276.5 HETD.
- **2000-01** : enseignant titulaire des cours de *Mécanique Générale* en 1^{ère} et 2^{ème} année; assistant d'*Analyse Numérique* en 4^{ème} année; suivi des projets de 3^{ème} année et des stages de 4^{ème} et 5^{ème} année, pour un total de 249 HETD.
- **2001-02** : enseignant titulaire des cours de *Mécanique Générale* en 1^{ère} et 2^{ème} année et de *Mécanique des Matériaux Composites* pour le D.E.A.; assistant d'*Analyse Numérique* en 4^{ème} année; suivi des stages de 4^{ème} et 5^{ème} année, pour un total de 250 HETD.

Au 31.8.2002, le montant total d'heures d'enseignement s'évalue à **1135.5 HETD**.

Pour le cours de *Mécanique Générale* que je tiens en 1^{ère} et 2^{ème} année à l'ISAT, j'ai rédigé un texte polycopié de 200 pages de soutien au cours, texte qui est distribué aux élèves, avec un recueil à part de 335 exercices complètement corrigés. Pour le cours de *Mécanique des Matériaux Composites* que je dispense aux élèves du D.E.A., j'ai préparé un manuscrit de 95 pages qui est donné aux élèves.

Dans le cadre de l'activité didactique, j'ai aussi animé différents séminaires sur mes recherches,

aux Universités de Pise, Ferrara, Metz, à l'ISAT et à l'Ecole des Mines de Saint Etienne.

5. AUTRES ACTIVITES DE TRAVAIL

Mes activités de travail ne se sont pas limitées à la recherche. Pendant toutes mes études supérieures, j'ai travaillé dans plusieurs secteurs d'activité: comme ouvrier dans une entreprise de construction de pneumatiques et dans une entreprise de construction, comme employé dans l'administration publique italienne, comme enseignant de mathématiques, de construction et de génie des bâtiments dans un lycée privé, et pendant une longue période (environ 6 ans) comme caissier de péage sur l'autoroute. Après le diplôme d'ingénieur, j'ai travaillé environ un an chez AGIP (Agence Générale Italienne du Pétrole), en qualité d'ingénieur chargé de la conception structurelle de plate-formes en acier pour l'extraction du pétrole des sous-sols marins. Pendant mon doctorat, j'ai travaillé environ deux ans et demi à temps partiel dans un bureau de génie civil, où l'on m'a confié l'analyse structurelle de structures en acier, en béton armé et en béton armé précontraint.

6. DIVERS

J'ai participé à plusieurs congrès et workshops, et je me suis intéressé à plusieurs disciplines qui n'étaient pas forcément liées à mes activités de recherche ou d'enseignement. En particulier, j'ai suivi les cours de Mécanique des Fluides du professeur P. Villaggio, pour les élèves des doctorats en mathématique et physique de l'Ecole Normale Supérieure de Pise et les cours du professeur D. Speiser, de l'Université de Louvain-la-Neuve, toujours à l'Ecole Normale Supérieure, sur l'histoire de la Physique Mathématique.

J'ai été nommé représentant des thésards et des boursiers au sein du Département de Génie des Structures de l'Université de Pise, en 1997.

Je suis membre titulaire de la Commission des Spécialistes – 60^{ème} section, de l'Université de Bourgogne, depuis octobre 2001.

J'ai obtenu en 2002 la PEDR (Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche).

J'ai été *reviewer* pour *Journal of Applied Mechanics*.

J'ai été membre du jury de deux soutenances de thèse et une de D.E.A.

Je possède une bonne connaissance des langues française et anglaise, outre ma langue maternelle, l'italien.

En ce qui concerne mes connaissances informatiques, j'ai une solide expérience de programmation en langage FORTRAN et BASIC, acquise en plusieurs années d'activité de travail et recherche, sur PC (systèmes DOS et WINDOWS) et station de travail (UNIX, environnements Apollo, HP, SUN, IBM, DIGITAL). J'ai une longue expérience d'utilisateur de logiciels aux éléments finis (SAP90, SESAM, ANSYS, STRUDL, MEF COMPOSIC).

2. PRESENTATION ANALYTIQUE DES PUBLICATIONS

A. Revues et ouvrages internationaux

1. P. Vannucci: "Simplified optimal design of a Tension Leg Platform (TLP)". Dans *Structural Optimization*, v. 12, pp. 265-268. Springer & Verlag, Allemagne, 1996.
2. P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil & M. Potier-Ferry: "An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches". Dans *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 41, pp. 1365-1389. J. Wiley, UK, 1998.
3. P. Vannucci, G. Verchery: "A special class of uncoupled and quasi-homogeneous laminates". Dans *Composites Science and Technology*, v. 61, pp. 1465-1473. Elsevier Science, UK, 2001.
4. A. Vincenti, G. Verchery & P. Vannucci: "Anisotropy and symmetries for elastic properties of laminates reinforced by balanced fabrics". Dans *Composites Part A*, v. 32, pp. 1525-1532. Elsevier Science, UK, 2001.
5. P. Vannucci, G. Verchery: "Stiffness design of laminates using the polar method". Dans *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, pp. 9281-9294. Elsevier Science, UK, 2001.
6. P. Vannucci: "On bending-tension coupling of laminates". Dans *Journal of Elasticity*, v. 64, pp. 13-28. Kluwer Academic Publishers, Pays Bas, 2001.
7. P. Vannucci, G. Verchery : "A new method for generating fully isotropic laminates". Dans *Composite Structures*, v. 58, pp. 75-82. Elsevier Science, UK, 2002.
8. E. Valot, P. Vannucci & G. Verchery: "Complete in-plane elastic characterisation under tensile tests of angle-ply laminates composed of polymer-matrix layers". Dans *Polymers and Polymer Composites*, v. 10, n.7. pp. 483-492. Rapra LTD, UK, 2002.
9. A. Vincenti, P. Vannucci & G. Verchery: "Influence of orientation errors on quasi-homogeneity of composite laminates". Dans *Composites Science and Technology*, v. 63, pp. 739-749. Elsevier Science, UK, 2003.
10. P. Vannucci : "A special planar orthotropic material". A paraître dans *Journal of Elasticity*.

B. Revues et ouvrages nationaux

11. P. Vannucci: "Struttura di protezione per una pila da ponte nello Stretto di Messina" (Structure de protection pour un pilier de pont dans le Déroit de Messine). Dans *Bollettino degli Ingegneri della Toscana*, n. 6, pp. 21-23. Florence, Italie, 1992 (en italien).
12. P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil & M. Potier Ferry: "Calcul des branches bifurquées par une méthode asymptotique numérique". Dans *Récents progrès en génie des procédés*, v. 11, pp. 201-207. Nancy, 1997.

C. Conférences internationales avec comité de lecture et publication des actes

13. P. Vannucci, S. Aivazzadeh & G. Verchery: "A comparative analysis of some theories and finite elements for sandwich plates and shells". Comptes rendus de *Euromech 360: Mechanics*

of *Sandwich Structures*, pp. 45-52. A. Vautrin editeur. St. Etienne, 13-15 mai 1997. Kluwer Academic Publisher.

14. P. Vannucci, G. Verchery: "Designing with anisotropy. Part 2: Laminates without membrane-flexure coupling". Comptes rendus de *ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 572. Paris, 5-9 juillet 1999.
15. P. Vannucci, X. J. Gong & G. Verchery: "Designing with anisotropy. Part 3: Quasi-homogeneous anisotropic laminates". Comptes rendus de *ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 573. Paris, 5-9 juillet 1999.
16. G. Verchery, P. Vannucci & V. Person: "The polar method as a tool for solving inverse problems of the classical laminated plate theory". *ISIP 2000 (International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics)*, Nagano, Japon, 7-10 mars 2000. In *Inverse problems in engineering mechanics II*, pp. 317-326. M. Tanaka et G. S. Dulikravich editeurs. Elsevier Science, UK.
17. X. J. Gong, P. Vannucci & G. Verchery: "Effect of adjacent layer fiber orientation on the resistance of laminates to delamination fracture". Comptes rendus de *ICCM 13 (Thirteenth International Conference on Composite Materials)*, papier 1293. Pékin, Chine, 25-29 juin 2001.
18. F. Belaïd, P. Vannucci & G. Verchery: "Numerical investigation of the influence of orientation defects on bending-tension coupling of laminates". Comptes rendus de *ICCM 13 (Thirteenth International Conference on Composite Materials)*, papier 1406. Pékin, Chine, 25-29 juin 2001.
19. E. Valot, G. Verchery, N. Akkus, P. Vannucci, J. Rousseau & S. Aivazzadeh: "Ultimate strength of quasi-isotropic laminates in tension: theoretical and experimental analysis". Comptes rendus de *DURACOSYS 2001 - 5th International Conference on Durability Analysis of Composite Systems*. Tokyo, Japon, 6-9 novembre 2001.
20. A. Vincenti, P. Vannucci, G. Verchery & F. Belaïd: "Effects of orientation errors on stiffness properties of composite laminates". Comptes rendus de *8th Japanese-European Symposium* (à paraître). Tokyo, 16-17 avril 2002.

D. Conférences nationales avec comité de lecture et publication des actes

21. P. Vannucci: "Forze d'onda su cilindri verticali immersi" (Forces de la houle sur cylindres verticaux immergés). Comptes rendus du *7^{ème} Colloque A.I.O.M. (Associazione d'Ingegneria Offshore e Marina)*, pp. 47-53. Pise, Italie, 13-14 octobre 1993 (en italien).
22. B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry & P. Vannucci: "La méthode asymptotique numérique pour la description des branches bifurquées en mécanique des solides". Comptes rendus du *3^{ème} Congrès de Mécanique*, pp. 508-513. Tétouan, Maroc, 22-25 avril 1997.
23. S. Ligarò, M. Potier-Ferry & P. Vannucci: "Sull'interazione fra instabilità locale e frattura nella crisi di lastre elastiche sottili fessurate" (Sur l'interaction entre instabilité locale et fracture dans la crise de plaques minces élastiques fissurées). Comptes rendus du *13^{ème} Congrès AIMETA (Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata)*, pp. 217-222. Sienne, Italie, 29 septembre - 3 octobre 1997 (en italien).
24. P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil & M. Potier-Ferry: "Analisi post-critica col metodo asintotico numerico (M.A.N.)" (Analyse post-critique par la méthode asymptotique numérique). Comptes rendus du *13^{ème} Congrès AIMETA (Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata)*, pp. 47-52. Sienne, Italie, 29 septembre - 3 octobre 1997 (en italien).

25. P. Vannucci, X. J. Gong & G. Verchery: "Determination des stratifiés quasi-homogènes par l'approche polaire". Comptes rendus du *Congrès JNC 11 (11^{èmes} Journées Nationales sur les Composites)*, pp. 205-214. Arcachon, 18-20 novembre 1998.
26. P. Vannucci, G. Verchery : "Un metodo nuovo per la ricerca di laminati anisotropi quasi omogenei" (Une méthode nouvelle pour la recherche de stratifiés anisotropes quasi-homogènes). Comptes rendus du *14^{ème} Congrès AIMETA (Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata)*. Côme, Italie, 6-9 octobre 1999 (en italien).
27. P. Vannucci, G. Verchery: "Caractérisation de l'isotropie et autres propriétés des stratifiés comme problème de minimum". Comptes rendus du *Congrès JNC 12 (12^{èmes} Journées Nationales sur les Composites)*, pp. 333-342. Cachan, 15-17 novembre 2000.
28. A. Vincenti, P. Vannucci & G. Verchery: "Découplage et quasi-homogénéité pour les stratifiés renforcés par tissus équilibrés". Comptes rendus du *Congrès JNC 12 (12^{èmes} Journées Nationales sur les Composites)*, pp. 265-274. Cachan, 15-17 novembre 2000.
29. A. Vincenti, P. Vannucci, G. Verchery & F. Belaïd: "Effetti degli errori di orientazione sulla quasi-omogeneità dei laminati in composito" (Effets des erreurs d'orientation sur la quasi-homogénéité des stratifiés en composite). Comptes rendus du *15^{ème} Congrès AIMETA (Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata)*, papier sp_so_29. Taormina, Italie, 26-29 septembre 2001 (en italien).
30. V. Person, P. Vannucci & G. Verchery: "Utilisation de la méthode polaire pour la recherche de stratifiés isotropes en membrane". Comptes rendus du *Colloque National de la Recherche Universitaire dans les I.U.T., CNRIUT 2002*. Le Creusot, 15 et 16 mai 2002.
31. A. Vincenti, P. Vannucci & G. Verchery: "La conception des stratifiés en rigidité comme un problème d'optimisations structurale. 1^{ère} partie: Formalisation théorique par la méthode polaire". A paraître dans les comptes rendus du *Congrès JNC 13 (13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites)*. Strasbourg, 12-14 mars 2003.
32. A. Vincenti, P. Vannucci & G. Verchery: "La conception des stratifiés en rigidité comme un problème d'optimisations structurale. 2^{ème} partie: Résolution numérique par la méthode génétique". A paraître dans les comptes rendus du *Congrès JNC 13 (13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites)*. Strasbourg, 12-14 mars 2003.
33. E. Valot, P. Vannucci & G. Verchery: "Méthodologie de caractérisation complète par traction simple des propriétés élastiques de stratifiés angle-ply". A paraître dans les comptes rendus du *Congrès JNC 13 (13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites)*. Strasbourg, 12-14 mars 2003.

E. Conférences sans publication des actes

34. H. Zahrouni, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry & P. Vannucci: "Buckling of plates and shells by an Asymptotic-Numerical Method ". *Euromech 347*, Paris, 20-21 mai 1996.
35. G. Verchery, P. Vannucci: "Quasi-isotropic laminates". *Journées en l'honneur de S. Tsai*, Tours, juin 1999.
36. G. Verchery, X. J. Gong & P. Vannucci: "Improving the design of specimens for delamination test". *Fifth Composite Durability Workshop, CDW5*. Orly, 4 et 5 avril 2002.
37. G. Verchery, E. Valot, A. Vincenti & P. Vannucci: "Effects due to structure and placement of reinforcement in laminates made from fabrics". *Texcomp 6 – Sixth International Conference on Textile Composites*. Philadelphia, 11-13 septembre 2002.

38. A. Vincenti, P. Vannucci & G. Verchery: "A special case of orthotropy for composites reinforced by fabrics". *Texcomp 6 – Sixth International Conference on Textile Composites*. Philadelphia, 11-13 septembre 2002.

F. Rapport final de contrat de recherche

39. P. Vannucci: "Rapporto finale sulla ricerca commissionata dal consorzio CREA per lo studio dei campi di temperatura provocati da incendi negli edifici" (Rapport final sur la recherche commandée par le Consortium CREA pour l'étude des champs de température causés par les incendies dans les bâtiments). Rapport de fin de recherche pour la société CREA, pp. 50. Massa, Italie, 1995 (en italien).

G. Articles soumis à publication

40. P. Vannucci: "Designing the elastic properties of laminates as an optimisation problem: a unified approach based on polar tensor invariants". Soumis en 2002 à *International Journal of Structural and Multidisciplinary Optimisation*.
41. E. Valot, P. Vannucci & G. Verchery: "A linear theory for laminates composed of coupled layers". Soumis en 2002 à *Composite Structures*.
42. A. Vincenti, P. Vannucci & G. Verchery: "BIANCA: a genetic algorithm to solve laminate design problems". Soumis à *ICCM14 (Fourteenth International Conference on Composite Materials)*. San Diego, USA, 14-18 juillet 2003.
43. E. Valot, P. Vannucci & G. Verchery: "Study on simultaneous in-plane and bending orthotropy. Case of antisymmetric laminates". Soumis à *ICCM14 (Fourteenth International Conference on Composite Materials)*. San Diego, USA, 14-18 juillet 2003.

RESUME

Ce document est la synthèse d'un parcours de recherche en mécanique étalé sur plus de dix ans et intéressant différents secteurs de la mécanique. La thèse se compose de trois parties principales.

La première partie concerne les activités rattachées à la thèse de doctorat, portant sur l'optimisation des dimensions de la coque d'une plate-forme pétrolière de type TLP. Les deux thèmes traités dans la recherche sont rapidement présentés: la simplification des solutions pour le calcul des actions de la houle en théorie de la diffraction et la mise au point du procédé pour la détermination des dimensions de la coque de poids minimal.

La deuxième partie porte sur une recherche de mécanique non linéaire: l'application de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) à la détection des points de bifurcation de l'équilibre d'une structure élastique et au suivi des branches de réponse post-critique. Après un bref rappel de la MAN, on montre la formulation théorique de la recherche et des exemples numériques traités, avec une discussion des résultats obtenus.

La troisième partie concerne une série de travaux dans le domaine des matériaux composites, ayant pour fil conducteur l'utilisation de la méthode polaire en analyse, conception et identification des stratifiés en composite. Après une présentation détaillée et complète de la méthode polaire, les recherches développées dans ce domaine sont présentées, en les distinguant en quatre parties.

Le chapitre 8 porte sur les stratifiés découplés ou quasi-homogènes, dont on met en évidence la découverte des solutions de type quasi-trivial, en soulignant leurs propriétés. Ensuite, on aborde la conception de stratifiés isotropes, totalement ou en partie, ainsi que celle des stratifiés formés de couches à symétrie carrée. Le point commun à ces travaux est l'approche entièrement analytique, qui a permis de dégager des solutions exactes pour chacun des problèmes cités.

Dans le chapitre 9 on présente une formulation unique, sous forme d'un problème classique de l'optimisation structurale non convexe, d'un grand nombre de problèmes de conception des stratifiés, tandis que le chapitre 10 porte sur la mise au point d'un algorithme génétique de nouvelle conception, BIANCA, pour la conception et optimisation des stratifiés. Toujours en thème d'optimisation, le chapitre 11 porte sur une étude, théorique et numérique, de sensibilité de certaines solutions aux défauts d'orientation des couches.

Le chapitre 12 concerne la découverte d'un cas particulier d'orthotropie plane, dite orthotropie R_0 , dont les caractéristiques assez singulières seront mises en évidence, ainsi que la façon d'obtenir un tel type de lamina et l'intérêt à son utilisation. Finalement, le dernier chapitre concerne certaines applications de la méthode polaire à l'identification des propriétés élastiques et de rupture des composites.

MOTS-CLES: structures offshore, diffraction, méthodes numériques, bifurcation, composites, méthode polaire, conception des stratifiés, optimisation, algorithmes génétiques, orthotropie.

ABSTRACT

This report is a synthesis of ten years of researches in different domains of mechanics, and it is composed of three principal parts.

The first one concerns the PhD researches on the optimisation of the hull of an offshore platform of TLP type. The two themes dealt with in the research are briefly presented: the simplification of the diffraction exact solutions for the computing wave forces and the procedure for the determination of the minimal weight hull's dimensions.

The second part concerns a research in the field of non-linear mechanics: the use of the Asymptotic Numerical Method (ANM) for the detection of equilibrium bifurcation points of an elastic structure and for the following of the post-critical equilibrium branches. After a brief recall of the ANM, the theoretical formulation of the research is presented, along with some numerical examples and a discussion of the results.

The third part concerns a series of researches in the domain of composite materials mechanics. The common feature of these researches is the use of the polar method in analysis, design and identification of laminates. After a detailed presentation of the polar method, the researches made in this field are divided into four main parts.

Chapter 8 deals with uncoupled and quasi-homogeneous laminates, and namely it puts in evidence the discovery of quasi-trivial solutions and their properties. The design of partially or fully isotropic laminates is also concerned, as well as that of laminates composed of square symmetric plies. The feature of all these studies is the entirely theoretical approach, with the discovery of exact solutions for each one of the mentioned problems.

Chapter 9 presents a new unified formulation, under the form of a classical problem of non-convex structural optimisation, of several laminate design problems, while chapter 10 deals with a new genetic algorithm, BIANCA, for laminates design and optimisation. Still in this domain, chapter 11 shows a theoretical and numerical study on the sensitivity of certain solutions to layer orientation errors.

Chapter 12 concerns the discovery of a particular type of plane orthotropy, named R_0 -orthotropy, whose rather singular characteristics are put in light, along with the way to obtain such plies and its advantages. Finally, chapter 13 is about the use of the polar method in composite elastic and strength properties identification.

KEYWORDS: offshore structures, diffraction, numerical methods, bifurcation, composites, polar method, laminates design, optimisation, genetic algorithms, orthotropy.