



HAL
open science

**Des mathématiques pour enseigner : analyse de
l'influence des connaissances mathématiques
d'enseignants vaudois sur leur enseignement des
mathématiques à l'école primaire**

Stéphane Clivaz

► **To cite this version:**

Stéphane Clivaz. Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire. Education. Université de Genève, 2011. Français. NNT: . tel-00626935

HAL Id: tel-00626935

<https://theses.hal.science/tel-00626935>

Submitted on 28 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

**FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE
ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION**

Section des Sciences de l'Éducation

Sous la direction de Jean-Luc DORIER

Des mathématiques pour enseigner

Analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois
sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire

THESE

Présentée à la
Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de Docteur en **Sciences de l'Éducation**

par

Stéphane CLIVAZ

de

Randogne (VS)

Thèse No 494

GENEVE

Septembre 2011

87404273

UNIVERSITÉ DE GENEVE
FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'EDUCATION
SECTION DES SCIENCES DE L'EDUCATION

Des mathématiques pour enseigner

Analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois
sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire

Stéphane Clivaz

COMPOSITION DU JURY DE THESE

Jean-Luc Dorier (Directeur de thèse), Université de Genève

Isabelle Bloch, Université Montesquieu, Bordeaux IV

Joachim Dolz-Mestre, Université de Genève

Claire Margolinas, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Préambule

Merci !

Il paraît que le travail de thèse est un effort individuel. C'est faux. Mais, bien entendu, ce n'est qu'une étude de cas et il n'est pas possible de généraliser. Disons donc plutôt que je peux témoigner d'un travail de thèse qui a été à chaque heure un réel et profond plaisir de par les rencontres qu'il m'a permis.

Alors voilà, tant pis si cela ressemble à une mauvaise cérémonie de remise de quelqu'oscar...

Merci à Dominique, Sacha, Camille et Andrea qui m'ont ouvert leur classe et une certaine intimité de leurs relations aux mathématiques. Vous êtes devenus plus que des sujets d'observation, des compagnons de route. Je ne vous ai plus parlé depuis le moment de mes observations, mais je me réjouis que cette recherche soit terminée afin de vous recroiser peut-être pour parler plus librement.

Merci à Alexandra, Bénédicte, Carole, Denis, Elise, François, Gaëlle, Huguette, Ignace, Juliette, Kate, Laurence, Martin, Nicole, Odette et Patricia de m'avoir accordé un peu de vous-même pour un entretien.

Merci aux directrices et directeurs d'école qui m'ont ouvert les portes de leur établissement et m'ont aidé à contacter les enseignants.

Merci à Jean-Luc qui m'a accueilli, soutenu, dirigé, guidé sans contraindre, encouragé... Tes remarques m'ont toujours fait avancer et ta disponibilité efficace et sans concession doit faire pâlir de jalousie mes collègues thésards !

Merci à Isabelle, Claire et Joaquim qui ont accepté de faire partie du jury de thèse. Isabelle, le dialogue avec toi m'a ouvert des horizons didactiques que je ne soupçonnais pas et que je me réjouis d'explorer peut-être. Claire, tes avis ont été si percutants qu'ils m'ont fait avancer, le sourire qui les accompagnait a fait que les bouts de chemin à reprendre ont été un plaisir. Joaquim, tes encouragements et ton regard différents ont toujours été éclairants.

Merci à Kristine, Joaquim, Sabine et André qui ont accompagné avec tact notre volée doctorale.

Merci à Kay, João Pedro et Filippo† qui m'ont encouragé de loin et m'ont apporté des impulsions décisives.

Merci à Cyril et à Jacques qui m'ont fait confiance et m'ont permis de me lancer dans cette aventure. Merci au comité de direction de la HEP Vaud qui a poursuivi ce soutien matériel et humain.

Merci à Claire, Luco, Michel, Audrey, Mallory qui ont relu le manuscrit et lui ont enlevé force coquille, maladresse syntaxique et transition bancale ou m'ont aidé à préparer la soutenance.

Merci à toute l'équipe DiMaGe. Merci Annick, Audrey, Céline, Christine, François, Michel, Pierre-Alain, Pierre-François, Ruhai et Sylvia.

Merci à toute l'UER MS qui m'a porté et souvent déchargé. Merci Chantal, Charles, Elisabeth, François, Jean-Cristophe, Luco, Michel et Michel, Mireille, Philippe, Sveva et Thierry.

Merci aux membres de la SSRDM et à Jean-Michel et Chantal qui ont accompagné mes premiers pas de chercheur.

Merci à mes amis, "jeunes" chercheurs, doctorants et amis, qui ont partagé avec moi cafés ou bières, journées de travail ou nuits de fête, emails interminables ou Skypage acharné pour une traduction. Merci, entre autres, Ana, Carolina, Charlotte, Hussein, Joris, Julia, Marianne, Michella, Mike, Nicolas, Raquel, Samuel, Sara, Valeria, Valérie, Zeynab.

Merci à Céline pour son aide et sa fierté.

Merci à Lara, Clément et Damien. Depuis le jour où vous avez spontanément dit « génial, papa, tu fais une thèse ! », vous n'avez jamais cessé d'être là, attentifs et discrets. Aimants.

Merci à Claire. Cette thèse a été pour toi...

Femmes-hommes, mode d'emploi

Les enseignant-e-s que j'ai rencontré-e-s sont majoritairement des femmes. J'ai donc dans un premier temps rédigé toute cette thèse en mettant le féminin ET le masculin de tous les noms, adjectifs, pronoms... La lourdeur des tournures a eu finalement raison de mon obstination. J'ai ensuite pensé, comme l'a fait Daniel Perrin dans *Mathématiques d'école*, (2005), utiliser tout simplement le terme générique d'*enseignantes* pour désigner femmes et hommes. Le problème était alors qu'on avait l'impression que les constatations énoncées ne concernaient que les enseignantes de genre féminin. Ramené à la dure réalité sexiste de la langue de la Marquise de Sévigné, je me suis résolu à utiliser le terme d'enseignant qui, dans mon esprit, est un terme générique désignant les individus masculins et féminins au même titre que hibou ou chouette... Merci aux lectrices et lecteurs d'en tenir compte.

Sommaire

Préambule	5
Sommaire	9
Partie A Cadre de la recherche	11
Chapitre 1 Introduction	13
Chapitre 2 Influence des connaissances mathématiques des enseignants sur les performances des élèves	15
Chapitre 3 Découpages des connaissances mathématiques des enseignants	23
Chapitre 4 Liping Ma : les connaissances mathématiques des enseignants sous l'éclairage de comparaisons internationales	43
Chapitre 5 La place de l'enseignant dans les modélisations proposées par la didactique des mathématiques francophone.....	51
Chapitre 6 Le milieu et sa structuration	53
Chapitre 7 La pertinence mathématique du professeur.....	61
Chapitre 8 Questions de recherche et éléments méthodologiques	65
Partie B Les connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants vaudois : une comparaison internationale	67
Chapitre 9 Le dispositif.....	69
Chapitre 10 Comparaison des résultats.....	85
Chapitre 11 Conclusion de la Partie B.....	115
Partie C Les connaissances mathématiques des enseignants dans leur pratique ordinaire de classe	117
Chapitre 12 L'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres : le choix de ce sujet d'enseignement	119
Chapitre 13 L'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres : éléments d'analyse épistémologique	121
Chapitre 14 Dispositif de recueil et d'analyse des observations.....	142
Chapitre 15 Résultats.....	155
Chapitre 16 Conclusion de la partie C	231
Partie D Conclusion	233
Chapitre 17 Synthèse des résultats et de leur discussion	235
Chapitre 18 Ouverture en guise de conclusion : l'évolution des connaissances mathématiques pour l'enseignement chez les enseignants.....	241
Références bibliographiques	247
Table des illustrations	267

Partie A
Cadre de la recherche

Chapitre 1 Introduction

1.1 Origines de la recherche

I hate math! I couldn't learn it, and I can't teach it!
(Cornell, 1999)

« J'ai toujours été nulle en maths... et je vais devoir les enseigner ! » Ce cri du cœur, entendu ou lu dans les regards de mes étudiantes à maintes reprises fait écho à la déclaration péremptoire d'une autre étudiante : « Je vais enseigner à l'école primaire, je n'ai pas besoin de vos cours de maths ! ». Ces réactions et ces regards rencontrés dans mon travail de formateur sont à l'origine de ce travail. Lors de mes contacts à la *Harvard Graduate School of Education* en 2003-2004, ces deux types de réactions spontanées ont trouvé écho dans le livre de Liping Ma (1999), que m'avait offert Kay Merseth¹ : *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. La question de Ma, dans son titre déjà, a été le fil conducteur de mon questionnement : quel est le lien entre *savoir* et *enseigner* les mathématiques ?

Tout au long du chemin, de nombreuses lectures, des discussions passionnantes, des observations captivantes ont permis de modeler, de préciser ce questionnement. L'interaction avec la formation des enseignants du primaire n'a pas cessé, faisant parfois écho à mes lectures :

Ils semblent tellement occupés à comprendre ce qu'ils ont à enseigner ou encore à lutter contre leur ressentiment envers les mathématiques qu'ils ont du mal à prendre du recul par rapport à ce qu'ils font pour poser un regard critique sur leur acte d'enseigner. (Morin, 2008, p. 541)

Afin de prendre une posture de chercheur, j'ai essayé le plus possible de ne pas mélanger mon travail de formateur et celui de chercheur. J'ai surtout cherché à décrire et peut-être à comprendre. J'ai écarté la question des moyens possibles de faire évoluer ces connaissances. Cette dernière question se pose maintenant pour moi. Elle sera formulée à la fin de ce travail.

Cette thèse s'inscrit dans le courant de l'importance croissante, au sein de la recherche en éducation, de la question des connaissances disciplinaires dans l'enseignement. Les travaux du groupe de travail numéro 1 d'EMF 2012², « Articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement : pratiques et formation » ou la parution en 2011, au moment où se terminait cette thèse de *Mathematical Knowledge in Teaching* (Rowland & Ruthven, 2011) le montrent dans le domaine de l'enseignement des mathématiques. De manière plus large, les dialogues avec la sociologie ou avec les études sur la formation des enseignants (re-)mettent la question des savoirs au premier plan.

Les réponses que cette thèse tente d'apporter sont bien entendu modelées par ce cheminement de chercheur. J'espère qu'elles auront pu acquérir un certain degré de maturation en gardant la fraîcheur de ma question initiale : qu'est-ce que ça change de savoir les maths quand on les enseigne ?

¹ Katherine K. Merseth est professeur à la Harvard Graduate School of Education et directrice du Teacher Education Program

² Voir <http://www.emf2012.unige.ch/>, consulté le 18 juillet 2011.

1.2 Plan de la thèse

Afin de répondre à cette question naïve, la partie A fait une revue de la littérature en s'intéressant tout d'abord à l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur les résultats de leurs élèves (Chapitre 2). La question de la mesure de cette influence et sa description amènera à examiner quelques catégorisations des connaissances mathématiques des enseignants (Chapitre 3), en particulier celle de Ball (3.2), et à considérer l'éclairage apporté par les comparaisons internationales dont celle de Ma (Chapitre 4). Ces éléments nous amèneront à ramener le questionnement sur l'influence des connaissances des enseignants sur leur enseignement. Afin de décrire ces phénomènes didactiques, nous considérerons les travaux de didactique des mathématiques francophones sur l'enseignant (Chapitre 5) et plus particulièrement le modèle de la *structuration du milieu* (Chapitre 6) et le concept de *pertinence mathématique des interventions de l'enseignant* (Chapitre 7). Cette partie pourra alors déboucher sur les questions de recherche et sur quelques éléments méthodologiques généraux (Chapitre 8).

Le dispositif de recherche se décompose en deux parties. La partie B s'appuie sur une version adaptée à notre contexte du questionnaire élaboré par Liping Ma (1999) en vue d'interroger les connaissances mathématiques des enseignants du primaire en tentant une comparaison avec leurs collègues chinois et étatsuniens. La partie C observera quatre séquences en classe de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Cette observation se fera à plusieurs échelles. Chacune de ces deux parties comportera une section de description du dispositif, une présentation des résultats et une analyse.

La conclusion (partie D) permettra de faire la synthèse des deux parties de la recherche (Chapitre 17), de formuler des réponses aux questions de recherche (17.2) et d'ouvrir quelques nouvelles pistes (Chapitre 18).

Chapitre 2 Influence des connaissances mathématiques des enseignants sur les performances des élèves

Many questions on mathematics teachers' knowledge, its content, structure, and how it influences teaching and learning, remain open³. (Krauss, Baumert & Blum, 2008, p. 873)

2.1 Portée de la question

L'opinion populaire affirme à la fois qu'il n'est pas nécessaire d'avoir beaucoup étudié les mathématiques pour enseigner « à des petits », mais aussi qu'il faut « être bon en maths » pour être capable de les expliquer. L'amélioration de la qualité de l'enseignement est un enjeu politique fondamental (Petrou & Goulding, 2011, p. 9) et la question des connaissances disciplinaires des enseignants y est centrale, particulièrement aux Etats-Unis (National Mathematics Advisory Panel, 2008b, chapitre C3) où le problème est clairement posé en termes économiques : « Teacher preparation programs tend to work in a zero-sum game environment where additional preparation in mathematics will result in decreased preparation in some other area (such as pedagogy)⁴ » (Kahan, Cooper & Bethea, 2003, p. 224). Et pourtant, dans un même temps, l'opposition entre connaissance du contenu et connaissances pédagogiques est considérée comme absurde (Henry & Cornu, 2001, p. 495).

Dans la littérature francophone autour de la professionnalisation de l'enseignant, la question des « savoirs à enseigner » (Altet, 2001, p. 35) est considérée comme centrale. Pourtant elle est le plus souvent traitée très rapidement comme un élément du « paradigme du maître instruit » (Paquay & Wagner, 2001, p. 155).

En France les connaissances en mathématiques sont considérées comme un préliminaire à la partie initiale de la formation des professeurs des écoles en IUFM et constituent une part importante du concours. La commission Kahane (2002) recommande d'ailleurs de maintenir cette antériorité de la formation mathématique, dans la mesure où les préoccupations des professeurs stagiaires devient ensuite plus « professionnelle ». Toutefois l'opposition entre un contenu purement disciplinaire et des orientations professionnelles est transcendée, dans la mesure où ils sont « dispensés de façon à revisiter les savoirs mathématiques de base, à les réorganiser de façon à les rendre efficaces au service du “ professionnel ” » (p. 18). Les contenus sont d'ailleurs explicités dans ce sens dans les nombreux manuels destinés à la préparation des concours de recrutement des enseignants français, par exemple par Fenichel (2001) : « Le candidat doit être capable non seulement de résoudre à son niveau les exercices et problèmes proposés par les documents pédagogiques mais aussi d'exprimer les notions mathématiques sous-jacentes et d'expliquer en quoi l'exercice ou le problème résolu vont participer à la compréhension de ces notions » (p. 29). Certains ouvrages sont mêmes spécifiquement consacrés à ces *mathématiques d'école* (en particulier Perrin, 2005). Pourtant, une fois le concours passé, « les connaissances mathématiques actuelles et potentielles des enseignants des lycées et collèges ne sont jamais questionnées » (Robert, 2001, p. 70).

³ Bien des questions demeurent ouvertes à propos des connaissances mathématiques des enseignants, leurs contenus, leur structure et comment elles influencent l'enseignement et l'apprentissage.

La traduction est la mienne, comme toutes celles de ce travail, sauf mention contraire.

⁴ Les plans d'études pour la formation des enseignants fonctionnent dans un jeu à somme nulle dans lequel toute formation plus importante dans le domaine disciplinaire résultera en une diminution de la formation dans les autres domaines (comme la pédagogie).

En Suisse, les règlements de reconnaissance intercantonale des diplômes pour les degrés primaires sont extrêmement laconiques, se contentant de préciser que « l'évaluation s'étend en particulier aux domaines suivants : [...] formation dans les disciplines d'enseignement » (CDIP, 1999/2005, article 9).

Dans le canton de Vaud, le référentiel des compétences professionnelles (HEP-Vaud, 2004) comprend, parmi ses 11 compétences-clés, une compétences relatives aux connaissances des enseignants : « Agir en tant que professionnel critique et porteur de connaissances et de culture ». Le référentiel précise encore que

L'enseignante ou l'enseignant dispose d'une compréhension et d'une maîtrise éclairées des disciplines qu'il enseigne. Ses connaissances approfondies dépassent les seuls contenus retenus dans le plan d'études et s'appuient sur des repères structurés et structurants. Il pourra ainsi développer chez les élèves des connaissances et des compétences qu'ils pourront déployer dans des contextes diversifiés. [...] En plus d'une compréhension approfondie des contenus et de la structure de la discipline enseignée, l'enseignante ou l'enseignant doit également en connaître la genèse, l'évolution et en discerner les rapports et les limites. (p. 2)

Cette compétence est encore précisée dans le niveau de maîtrise « manifester une compréhension critique des savoirs à enseigner afin de favoriser la création de liens significatifs chez l'élève ». Ce référentiel est un référentiel de formation et n'est pas utilisé par les services employeurs. En revanche cette compétence sert de socle à la présence de cours de savoirs disciplinaires dans la formation préscolaire-primaire⁵ et ce niveau de maîtrise est un des critères d'évaluation des étudiants, en particulier en didactique des mathématiques.

La question des connaissances mathématiques des enseignants primaire est particulièrement vive. En général ces enseignants n'ont plus fait de mathématiques en tant que telles depuis la fin de leur école secondaire et ils n'ont donc jamais développé une vision d'adulte sur les mathématiques qu'ils doivent enseigner (Hodgson, 2001, p. 509). Même s'il existe des disparités à travers le monde (Tatto, Lerman & Novotna, 2010, p. 320)⁶, Tatto et ses collègues constatent que, dans la plupart des pays, les enseignants primaires sont des généralistes et que leur formation met peu ou pas du tout l'accent sur les contenus mathématiques (Tatto *et al.*, 2010, p. 321). Dès lors la formation mathématique des enseignants généralistes est régulièrement questionnée lors des réformes des systèmes de formation ou au moment des réformes scolaires. Le manque éventuel de connaissances mathématiques des enseignants primaires est alors souvent vu comme un frein aux modifications des pratiques, tant en terme de curriculum qu'en terme de méthode d'enseignement (Cooney, 2001, p. 462).

2.2 Mesures de l'influence, quelques revues d'études et quelques chemins d'influence

It is clear that teachers' knowledge of mathematics is positively related to student achievement. However, evidence about the relationship of elementary and middle school teachers' mathematical knowledge to students' mathematics achievement remains

⁵ Le plan d'études de la formation préscolaire-primaire à la HEP, valable de 2005 à 2012 comporte un cours de savoirs disciplinaires dans les disciplines d'enseignements "académiques", en particulier en mathématiques pour 2 crédits ECTS.

⁶ Tatto et ses collègues donnent un tableau comparatif selon les pays, mais la Suisse n'y figure pas !

uneven and has been surprisingly difficult to produce⁷. (National Mathematics Advisory Panel, 2008b, p. 37)

L'opinion communément répandue que les connaissances mathématiques de l'enseignant influencent l'apprentissage des élèves est soutenue par l'idée qu'il faut avoir une connaissance approfondie de ce que l'on enseigne ou encore par celle que l'enseignant personifie ces connaissances dans la classe (Lampert, 1990, p. 41). Pourtant le passage de l'idée de sens commun à des résultats validés par la recherche est loin d'être une évidence. Dans un premier temps, les études générales de types processus-produit à ce sujet seront mentionnées (2.2.1). Une revue plus large des études consacrées au cas des mathématiques sera ensuite faite (2.2.2) et esquissera quelques manières de décrire une éventuelle influence des connaissances mathématiques de l'enseignant sur les résultats des élèves.

2.2.1 Les études processus-produit

La mesure des effets de l'enseignement sur l'apprentissage des élèves a fait l'objet de nombreuses recherches de type processus-produit⁸, surtout aux USA depuis les années 1960 (Crahay, 2006). Ces tentatives de mesurer un *effet-maître* se sont surtout axées sur les aspects transversaux de l'enseignement. La question de l'effet des connaissances disciplinaires des enseignants y intervient peu (Hill, Rowan & Ball, 2005, p. 374; Shulman, 1986, p. 6), d'autant plus que ces études montrent que l'efficacité d'un enseignant à faire progresser les résultats de ses élèves est générale.

D'une manière générale, il apparaît qu'un enseignant – à moins qu'il ne faille dire une classe – caractérisé(e) par un score moyen élevé dans un domaine se caractérise également par des scores moyens élevés dans les autres domaines composant le test. (Crahay, 2006, p. 69)

2.2.2 Quelques études spécifiques aux mathématiques

En revanche dès que la question des connaissances disciplinaires des enseignants se pose, les mathématiques en apparaissent comme l'exemple emblématique (Fennema & Franke, 1992, p. 148). Dans ce contexte, de nombreuses études ont tenté de mesurer les effets potentiels des cours de mathématiques suivis par les enseignants et de leurs connaissances mathématiques sur la qualité de leur enseignement. Ces études sont si nombreuses dans le monde anglo-saxon que nous partirons d'abord ici de cinq revues d'études, celle de Fennema et Franke (1992), celle de Begle (1979), celle de Darling-Hammond (1999), celle du National Mathematics Advisory Panel (2008b) et celle de Ahn et Choi (2004) combinée avec celle de Kennedy, Ahn et Choi (2008).

Fennema et Franke (1992) relèvent que bon nombre d'études⁹ ne montrent pas de corrélation directe entre connaissances des enseignants et résultats des élèves. Citant d'autres études¹⁰, Darling-Hammond (1999, pp. 6-7) arrive également à la conclusion que :

⁷ Il est clair que les connaissances mathématiques des enseignants sont positivement corrélées à la réussite des élèves. Cependant les preuves de la relation entre les connaissances mathématiques des enseignants de l'école primaire et du secondaire 1 et les résultats de leurs élèves ont été étonnement difficiles à produire.

⁸ Courant de recherche, développé dans le monde anglo-saxon depuis les années 1960, dont l'objectif est l'analyse des effets de l'enseignement sur l'apprentissage des élèves (Crahay, 2006, p. 3).

⁹ En particulier les études de Eisenberg (1977) ; General Accounting Office (1984) ; *National Longitudinal Study of Mathematical Abilities* (NLSMA) (1972).

¹⁰ En particulier les études de Andrews, Blackmon et Mackey (1980) ; Ayers et Qualls (1979) ; Haney, Madaus et Kreitzer (1986) ; Monk et King (1994) ; Quirk, Witten et Weinberg (1973) ; Summers et Wolfe (1975) et les revues d'études de Ashton et Crocker (1987) ; Begle et Geeslin (1972) ; Byrne (1983).

It makes sense that knowledge of the material to be taught is essential to good teaching, but also that returns to subject matter expertise would grow smaller beyond some minimal essential level, which exceeds the demands of the curriculum being taught¹¹.(p. 7)

Cette absence d'influence des connaissances mathématiques des enseignants au-delà d'un certain niveau avait également été relevée par Begle (1979) au travers de 17 études. Askew, à la suite d'une étude sur les enseignants britanniques, affirme même que l'efficacité d'un enseignant n'est pas associée à un haut niveau de qualification en mathématiques (Askew, 1999, p. 96).

De tels résultats sont assez décourageants pour les promoteurs d'une amélioration des connaissances disciplinaires des enseignants, au point que Begle conclut, dans son ouvrage posthume, que : « the effects of a teacher's subject matter knowledge [...] seem to be far less powerful than most of us had realized [...]. Our attempts to improve mathematics education would not profit from further studies of teachers » (1979, pp. 54-55).

2.2.2.1 La revue du National Mathematics Advisory Panel

Une synthèse d'études paraissait au moment où ce travail de thèse débutait, celle de la commission d'experts, réunie par le président George W. Bush (National Mathematics Advisory Panel, 2008b). Cette commission réunissait des experts reconnus, tant mathématiciens que spécialistes de *math education* ou psychologues cognitivistes. Durant deux ans de travaux, elle a passé en revue plus de 16'000 rapports et recherches. Une des principales questions traitée est celle des enseignants et de leur formation, et en particulier des connaissances mathématiques des enseignants (National Mathematics Advisory Panel, 2008b, pp. 35-38). L'effet des connaissances mathématiques des enseignants sur la réussite de leurs élèves est développé dans le rapport du sous-groupe de travail présidé par Deborah Ball (National Mathematics Advisory Panel, 2008a, pp. 20-36).

Le sous-groupe passe en revue les études comparatives en les distinguant d'une part selon leur qualité¹² et d'autre part selon le type de mesure des connaissances des enseignants. Lorsque cette mesure est faite à partir de la certification des enseignants¹³, aucune influence ne peut être dégagée (National Mathematics Advisory Panel, 2008a, pp. 21-25). Lorsque sont pris en compte les cours de mathématiques suivis durant la formation de premier cycle universitaire¹⁴, certains effets sont mesurés, mais seulement au delà du neuvième degré (National Mathematics Advisory Panel, 2008a, pp. 25-29). En revanche certains effets apparaissent aux degrés élémentaires lorsque les études mesurent les connaissances mathématiques des enseignants directement au moyen de tests¹⁵ (National Mathematics Advisory Panel, 2008a, pp. 29-33). De plus, les recherches qui font état des résultats les plus concluants sont celles qui mesurent les connaissances au plus proche des connaissances mathématiques utilisées lors de l'enseignement. Le rapport cite particulièrement celle de Hill, Rowan et Ball (2005) sur la-

¹¹ Il est raisonnable de penser que la connaissance de la matière à enseigner est essentielle à un bon enseignement, mais aussi que l'effet de l'expertise dans la maîtrise de la matière croîtrait moins au delà d'un niveau minimal de base qui dépasserait les demandes du *curriculum* enseigné.

¹² Les études de haute qualité sont celles qui ont un échantillon de grande taille, un contrôle statistique adéquat, des spécifications multiples et/ou des test de robustesse des résultats, des données individuelles, et une identification adéquate des variables (National Mathematics Advisory Panel, 2008a, p. 17).

¹³ Les études considérées sont Darling-Hammond, 1999; Fetler, 1999; Goldhaber, & Brewer, 1997b; Goldhaber, & Brewer, 2000; Harris, & Sass, 2007a; Hawkins, Stancavage, & Dossey, 1998; Hill, Rowan, Ball, 2005; Kane, Rockoff, & Staiger 2006; King Rice, 2003; Larson, 2000; Mandeville, & Liu, 1997; Rowan, Correnti, & Miller, 2002

¹⁴ Les études considérées sont Darling-Hammond, 1999; Darling-Hammond, Berry, & Thoreson, 2001; Eisenberg, 1977; Goldhaber, & Brewer, 1997b; Goldhaber, & Brewer, 2000; Harris, & Sass, 2007b; Hill, Rowan, & Ball, 2005; Monk, & King, 1994; Monk, 1994; Rowan, Chiang, & Miller, 1997; Rowan, Correnti, & Miller, 2002

¹⁵ Les études considérées sont Clotfelter, Ladd, & Vigdor, 2007; Harbison, & Hanushek, 1992; Harris, & Sass, 2007b; Hill, Rowan, & Ball, 2005; Mullens, Murnane, & Willett, 1996; Rowan, Chiang, Miller, & 1997; Sheehan, & Marcus, 1978

quelle nous reviendrons en 3.2.2. On peut noter que ce dernier point avait déjà été relevé par Fennema et Franke :

[...] when teacher knowledge of content has been defined in a way that is congruent with the nature of mathematics and/or when a conceptual organization of knowledge was considered, a positive relationship was found between content knowledge of teachers and their instruction. (1992, pp. 152-153)

2.2.2.2 Les revues de Kennedy et al.

Plus récemment encore, dans deux articles, l'équipe de la *Michigan State University* a fait de l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur les résultats des élèves une question méthodologique.

Kennedy, Ahn et Choi (2008) ont recensé les études¹⁶ « de qualité »¹⁷ étudiant les effets sur les performances des élèves (mesurées par des augmentations de scores à des tests standardisés) des connaissances mathématiques de leur enseignants (mesurées par le nombre de cours de mathématiques suivis dans leurs parcours universitaires), de leur connaissances pédagogiques (mesurée par le nombre de cours suivi) et de leur « intelligence et bonne éducation » (mesurée par le prestige de leur *Alma Mater*). Les résultats de ces études sont ramenés à une même échelle et comparés. Constatant un certain nombre de contradictions entre les études, les auteurs estiment qu'une des causes de ces contradictions se trouve dans des problèmes méthodologiques (Kennedy *et al.*, 2008, p. 6). Leurs conclusions tendent à montrer l'existence d'une corrélation, toutefois relativement faible, entre la qualité des apprentissages des élèves et les cours suivis par leurs enseignants dans les domaines des mathématiques, de la pédagogie et de l'enseignement des mathématiques. De plus, une corrélation négative est même constatée pour certains cours de mathématiques « avancés », ce qui met les chercheurs dans l'embarras et les conduit à chercher une hypothèse explicative dans les qualités *préalables* des enseignants qui, alors qu'il étaient étudiants, ont suivis ces cours supplémentaires : ce seraient ceux qui ont une personnalité, des valeurs ou des convictions différentes des autres étudiants (Kennedy *et al.*, 2008, p. 15).

Plus fondamentalement, les auteurs concluent qu'il serait nécessaire d'examiner le contenu effectif des cours suivis (p. 27). Hill (2007) signale d'ailleurs que l'influence des cours de mathématiques suivis par les enseignants lors de leurs études initiales devrait impérativement être distinguée selon le degré scolaire dans lequel ils enseignent ensuite (p. 111).

Cette question de la mesure des connaissances mathématiques des enseignants avait déjà été discutée par une partie de la même équipe. Ahn et Choi (2004) passent en revue 41 études quantitatives et font une méta-analyse de 27 d'entre-elles¹⁸ et, après une étude détaillée des types de mesures, arrivent à la conclusion que l'effet observé dépend essentiellement du type de mesure des connaissances mathématiques des enseignants. Si ces connaissances sont

¹⁶ Aaronson, Barrow & Sander (2003) ; Betts, Zao & Rice (2003) ; Brewer & Goidhaber (1996) ; Goidhaber & Brewer (1996a, 1997a, 1997b, 1999, 2000) ; Chiang (1996) ; Rowan, Chiang, Miller (1997) ; Clotfelter, Ladd, Vigdor (2004a, 2004b, 2006) ; Darling-Hammond, Holtzman, Gatlin & Hellig (2005a ; 2005b) ; Decker, Mayer & Glazerman (2004) ; Eberts & Stone (1984) ; Fagnano (1988) ; Guarino, Hamilton, Lockwood & Rathbun (2006) ; Harris & Sass (2006) ; Hilt, Rowan & Ball (2005) ; Monk (1994) ; Monk & King (1994) ; Raymond & Fletcher (2002a, 2002b) ; Raymond *et al.* (2001) ; Rowan, Correnti & Miller (2002) ; Rowley (2004) ; Taddese (1997).

¹⁷ « We address these problems in part by limiting ourselves to stronger research studies, studies that are more likely to have addressed these issues. We include only those studies that meet these important criteria. [...] Our criteria have been recognized by numerous other researchers as indicators of better research designs.» (Kennedy *et al.*, 2008, pp. 9-11).

¹⁸ Bachman (1968) ; Bassham (1962) ; Begle (1972) ; Begle & Geeslin (1972) ; Brown (1988) ; Caezza (1969) ; Chiang (1996) ; Dicks (1990) ; Bigenberg (1977) ; Fagnano (1988) ; Hawk (1985) ; Hawk, Coble, & Swanson (1985) ; Koch (1972) ; Kim (1992) ; Lampela (1966) ; Vlandeville&Liu (1997) ; Moody (1968) ; Moore (1965) ; Peskin (1964) ; Frather (1991) ; Frekeges (1973) ; Teddelie, Falk, & Falkowski (1983) ; Turgoose (1996) ; Reed (1986) ; Rouse (1967) ; Smith (1964) ; Soeteber (1969).

mesurées par leur parcours scolaire en mathématiques, l'effet est quasi nul (très légèrement positif pour les enseignants secondaire et très légèrement négatif pour les enseignants primaires). En revanche, si les connaissances sont mesurées par un test, leur effet sur les résultats des élèves est manifeste.

Ahn et Choi incitent donc à la plus grande prudence dans la manipulation des résultats d'enquête : « Thus we argue that educational researchers and policy makers should carefully examine different aspects of measurement such as scales, types of measures, and unit of analysis before making inferences from the findings » (pp. 33-34). Ils appellent à des mesures plus fines des connaissances mathématiques des enseignants (p. 32). Les auteurs font de plus une claire distinction entre les études quantitatives qui ne montrent que des effets limités et les études qualitatives qui se concentrent plus sur les pratiques d'enseignement que sur les résultats des élèves et démontrent plus clairement un effet positif des connaissances mathématiques des enseignants (Ahn & Choi, 2004, p. 32).

Cette distinction était déjà signalée par Fennema et Franke (1992) qui citent plusieurs recherches qualitatives¹⁹, s'intéressant à l'enseignement lui-même comme médiation entre les connaissances de la matière de l'enseignant et l'apprentissage des élèves, permettant de mettre en évidence un effet des connaissances mathématiques des enseignants : « From the descriptions of their teaching, it is clear that the teachers' knowledge of mathematics had an impact on their instruction. The nature of that impact and the impact on their students' learning is less clear » (p. 149).

C'est précisément la question de la nature de cet impact que cette thèse vise à explorer. Quelques pistes ont été ouvertes, en partie justement par certaines recherches qualitatives, et sont explorées ici rapidement.

2.2.2.3 Quelques chemins d'influence possibles

Pour expliquer les contradictions entre les études de l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur les performances des élèves, Muijs et Reynolds font l'hypothèse qu'il y aurait un effet de seuil : un niveau de connaissance minimal de connaissances mathématiques serait nécessaire, mais, au delà d'un certain point, une sorte de « Loi des rendements décroissants » opérerait (2002, p. 6). Dans leur propre étude quantitative, ces deux auteurs élaborent un modèle théorique des influences (Figure 1), mais leurs données, recueillies sur 103 enseignants primaires britanniques, les amènent à conclure à une influence directe non significative des connaissances des enseignants sur la réussite des élèves (p. 12). Ils relèvent en revanche une influence indirecte, via le comportement de l'enseignant (Figure 2).

¹⁹ Dans le domaine de l'enseignement des mathématiques : Ball (1991) ; Carpenter & Fennema (1992) ; Carpenter, Fennema, Peterson & Carey (1988) ; Fennema, Carpenter & Peterson (1989) ; Lampert (1989) ; Schoenfeld (1985). Pour d'autres branches : Hashweh (1986) ; Wineburg and Wilson (1991).

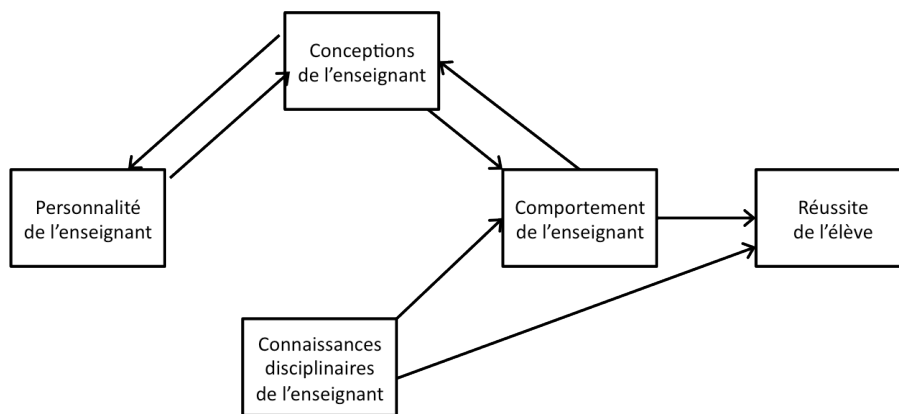


Figure 1 : Modèle théorique des relations entre les caractéristiques de l'enseignant et l'apprentissage de l'élève (Muijs & Reynolds, 2002, p. 7)²⁰.

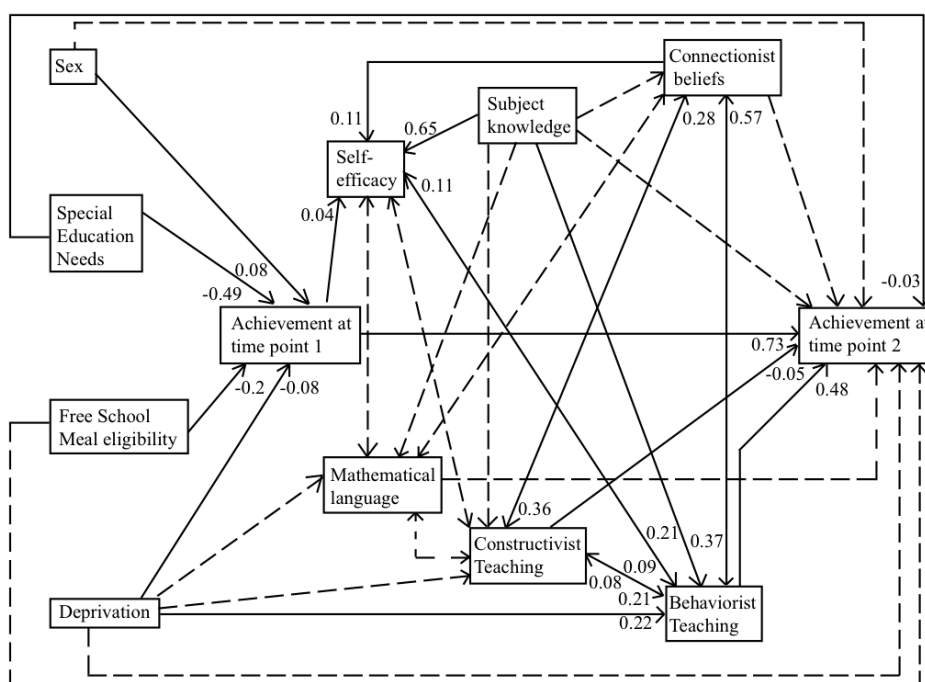


Figure 2 : Facteurs influençant la réussite de l'élève (Muijs & Reynolds, 2002, p. 11)²¹.

Comme pour la plupart des études de type processus-produit, ces résultats sont à prendre avec prudence, toutefois ils indiquent l'intérêt d'étudier plus précisément l'influence des connaissances mathématiques de l'enseignant sur son comportement en classe.

Pour décrire plus finement ce comportement, Stein et ses collègues ont lié les défauts dans les connaissances mathématiques d'un enseignant de 5^{ème} degré à sa difficulté à créer des occasions de connexion pour ses élèves entre les notions mathématiques et entre les représentations d'une notion (Stein, Baxter & Leinhardt, 1990). Ce type de difficultés serait particulièrement fort dans la gestion des problèmes pouvant être résolus de plusieurs manières différentes (Leikin & Levav-Waynberg, 2007), que ce soit dans la gestion de ces tâches ou dans le choix des exemples (Rowland, 2008). Selon Leikin et Levav-Waynberg, ce manque de connaissances serait même la cause de la divergence constatée entre les recommandations faites aux enseignants d'utiliser ce type de problèmes et la pratique effective.

²⁰ Les termes de Muijs et Reynolds sont : *Teacher personality, teacher belief, teacher subject, teacher behaviors* et *student achievement*.

²¹ Le schéma étant particulièrement complexe, il s'agit de la reproduction de celui donnée par Muijs et Reynolds.

L'étude COACTIV (Krauss *et al.*, 2008) constate pour sa part une corrélation entre les connaissances mathématiques et les connaissances sur l'enseignement des mathématiques et une forte corrélation entre ces dernières connaissances et les résultats des élèves participant à PISA 2003 en Allemagne. En revanche la corrélation directe entre les connaissances mathématiques des enseignants et les résultats des élèves est faible.

Une autre influence pourrait passer par la préparation des leçons et en particulier par le choix des tâches proposées aux élèves. Selon Osana et ses collègues, les futurs enseignants ayant obtenu de meilleurs résultats dans un test standardisé en mathématiques sont capables de mieux trier des problèmes en fonction de leur complexité cognitive (Osana, Lacroix, Tucker & Desrosiers, 2006). Cela ne signifie toutefois pas que ces futurs enseignants utiliseront cette capacité. En effet, dans son étude consacrée à des enseignants secondaires en formation, Coppé constate que, si la préparation de séances est un moment fondamental dans l'activité du professeur, les stagiaires ne partent pas vraiment du savoir mathématique et que, en particulier, les critères de choix des exercices portent essentiellement sur leur forme et non sur les connaissances qu'ils permettent d'enseigner (Coppé, 2007, pp. 158-159). Les connaissances mathématiques des enseignants sont ainsi utilisées pour résoudre les exercices, mais pas pour élaborer ou choisir des activités (p. 165).

Afin d'étudier l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur leur enseignement, nous explorerons tout d'abord la question du découpage des connaissances mathématiques des enseignants, nous décrirons ensuite quelques comparaisons internationales et nous rendrons compte des outils développés par la didactique *française*²² des mathématiques pour analyser l'enseignement. Ceci nous conduira à préciser les éléments de notre méthodologie.

²² Si les développements de la didactique des mathématiques francophone ne peuvent se réduire au travaux réalisés en France, ceux-ci sont très largement dominants et nous utiliserons le terme courant de didactique *française* plutôt que de didactique *francophone*.

Chapitre 3 Découpages des connaissances mathématiques des enseignants

No one questions the idea that what a teacher knows is one of the most important influences on what is done in classrooms and ultimately on what students learn. However, there is no consensus on what critical knowledge is necessary to ensure that students learn mathematics²³. (Fennema & Franke, 1992, p. 147)

La question de l'efficacité de l'enseignement et la nécessité de former et de sélectionner des enseignants pouvant être efficaces a conduit à distinguer et à catégoriser les connaissances nécessaires à l'enseignement et à construire des outils permettant de tester ces connaissances. L'histoire des modèles théoriques de catégorisation des connaissances des enseignants est étroitement liée aux types de tests utilisés pour évaluer les étudiants à l'enseignement ou les enseignants, particulièrement aux USA (Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007). Dans un premier temps, la contribution de Shulman dans le travail de catégorisation des connaissances pour l'enseignement sera exposée (3.1), puis le développement réalisé par Ball et son équipe à propos des connaissances mathématiques pour l'enseignement sera détaillé (3.2). Après avoir mentionné d'autres évolutions dans la lignée de Shulman (3.3), nous précisons la distinction entre connaissances et conceptions d'une part (3.4) et entre connaissance et savoir d'autre part (3.5).

3.1 Les catégories de Shulman

3.1.1 Those who understand ...

Le but de Lee Shulman, dans son « adresse présidentielle » de 1985 à la rencontre annuelle de l'*American Educational Research Association* (Shulman, 1986), était de renverser la tendance d'une formation des maîtres essentiellement axée sur une formation pédagogique. De fait, peu de conférences ou d'articles auront été autant cités : Ball, Thames et Phelps (2008, p. 392) ont recensé plus de 1200 citations de cet article et du subséquent publié dans la *Harvard Education Review* (Shulman, 1987). Ces citations sont de plus fort diversifiées puisqu'elles ont eu lieu dans des articles publiés dans 125 revues de tous les domaines. Cet intérêt se poursuit, au rythme d'une cinquantaine de citations chaque année. Ces deux articles peuvent ainsi être considérés comme un tournant dans la recherche concernant la formation des enseignants. Nous allons donc en donner quelques éléments.

Shulman constate que si, en 1875, 95% des examens pour les futurs enseignants élémentaires portaient sur la « connaissance de la matière » (Shulman, 1986, pp. 4-5), celle-ci est presque complètement absente de la formation des futurs enseignants aux USA en 1985. Ce renversement est généralement justifié par les recherches sur l'efficacité de l'enseignement. Shulman ne remet pas en cause la validité de ces recherches, mais il constate que, de par leur caractère général, ces recherches ne traitent justement pas du contenu alors même qu'elles influencent considérablement la politique scolaire.

In their necessary simplification of the complexities of classroom teaching, investigators ignored one central aspect of classroom life: the subject matter. This omission also

²³ Personne ne met en question d'idée que ce qu'un enseignant sait constitue une des influences les plus importantes sur ce qui est fait en classe et finalement sur ce que l'élève apprend. Cependant, il n'existe aucun consensus sur les connaissances cruciales qui seraient nécessaires afin que les élèves apprennent les mathématiques.

characterized most other research paradigms in the study of teaching. [...] No one focused on the subject matter content itself. No one asked how subject matter was transformed from the knowledge of the teacher into the content of instruction. [...]

Policymakers read the research on teaching literature and find it replete with references to direct instruction, time on task, wait time, ordered turns, lower order questions, and the like. They find little or no references to subject matter, so the resulting standards or mandates lack any reference to content dimensions of teaching. Similarly, even in the research community, the importance of content has been forgotten. Research programs that arose in response to the dominance of process product work accepted its definition of the problem and continued to treat teaching more or less generically, or at least as if the content of instruction were relatively unimportant²⁴. (p. 6)

Une caricature de cette mise à l'écart de la connaissance est donnée par la citation de Shaw (1905) qui sert de pivot à l'article : « He who can, does. He who cannot, teaches »²⁵.

Cependant, cette opposition, stérile du point de vue de Shulman, n'existait pas au Moyen Âge où l'accomplissement de la connaissance était l'enseignement (p. 7). Ainsi Shulman suggère de citer Aristote plutôt que Shaw :

Ce qui donne la supériorité du savoir aux chefs des ouvriers, ce n'est pas leur habileté pratique, c'est qu'ils possèdent la théorie et qu'ils connaissent les causes. Ajoutez que le caractère principal de la science, c'est de pouvoir se transmettre par l'enseignement. Aussi, dans l'opinion commune, l'art, plus que l'expérience, est de la science ; car les hommes d'art peuvent enseigner, et les hommes d'expérience ne le peuvent pas.²⁶

Pour Shulman, l'équilibre et l'articulation des connaissances du contenu et de la pédagogie sont la seule voie vers un enseignement de qualité. Il s'agit donc de rééquilibrer la recherche et d'accorder à la question du contenu et de sa compréhension la même attention que celle dévolue à la pédagogie (p. 8), afin de retourner la pique de Shaw : « Those who can, do. Those who understand, teach » (p. 14).

3.1.2 Catégories de connaissances

Afin de réorienter une part de la recherche en éducation sur la question du contenu, Shulman appelle à des développements théoriques. Il propose plusieurs catégorisations des connaissances des enseignants, décrit plus précisément certaines de ces connaissances et appelle enfin à d'autres développements.

Shulman distingue trois catégories de connaissances du contenu. La connaissance de la matière elle-même, la connaissance pédagogique du contenu (*pedagogical content*

²⁴ « Dans leur nécessaire simplification des complexités de l'enseignement dans la classe, les chercheurs ignoraient un aspect central de la vie de la classe : la discipline (*subject matter*). [...] Personne n'est concentrée sur le contenu disciplinaire en soi (*subject matter content itself*). Personne ne s'est demandé comment, à partir du savoir de l'enseignant, la discipline a été transformée en contenu d'enseignement. [...]

Les responsables des politiques éducatives lisent la littérature de recherche sur l'enseignement et la trouvent remplie de références à l'instruction directe, au temps consacré à la tâche, au temps d'attente, à la distribution de parole, aux questions d'ordre inférieur, et ainsi de suite. Ils trouvent peu ou pas d'indications sur la discipline, ce qui fait que les standards ou obligations qui en résultent, pèchent par manque de toute référence à la dimension des contenus de l'enseignement liées à la discipline. D'une manière similaire, même dans la communauté de recherche, l'importance des contenus a été oubliée. Les programmes de recherches qui se sont développées en réponse à la domination de la perspective processus/produit ont accepté sa définition du problème et continué à traiter l'enseignement plus ou moins génériquement, ou au moins comme si le contenu d'enseignement était relativement peu important. » Traduction de Gérard Sensevy et Chantal Amade-Escot dans (Shulman, 1986 / 2007)

²⁵ Shaw, B. (1905). *Man and superman: A comedy and a philosophy*. New York: Brentano's.

Notons qu'en fait la citation, abondamment utilisée pour railler les enseignants, est sortie de son contexte et que Shaw parlait des révolutionnaires plus que des professeurs.

²⁶ Aristote. (1840). *La métaphysique* (V. Cousin, Trad.). Paris: Ebrard-Joubert.

knowledge) et la connaissance du curriculum (1986, pp. 9-10). Ces catégories sont complétées dans l'article de la *Harvard Education Review* (Shulman, 1987, p. 8) par :

- connaissance du contenu
- connaissances pédagogiques générales
- connaissance du curriculum
- connaissance pédagogique du contenu
- connaissance des élèves et de leurs caractéristiques
- connaissance du contexte de la classe ou de l'école
- connaissance des finalités, des valeurs, et des fondements philosophiques et historiques de l'éducation

Parmi ces catégories, le *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) est pour Shulman d'un intérêt tout particulier,

[...] because it identifies the distinctive bodies of knowledge for teaching. It represents the blending of content and pedagogy into an understanding of how particular topics, problems, or issues are organized, represented, and adapted to the diverse interests and abilities of learners, and presented for instruction. Pedagogical content knowledge is the category most likely to distinguish the understanding of the content specialist from that of the pedagogue²⁷. (Shulman, 1987, p. 8)

De fait, c'est bien cette catégorie qui fera le succès des propositions de Shulman, tant aux USA que dans le monde francophone où le PCK est parfois simplement traduit par *didactique*, comme par Coppé qui affirme que, « compte tenu des recherches françaises, il est possible de faire cette traduction et donc, d'introduire cette catégorie [didactique] qui nous semble bien recouvrir ce que Shulman indique » (Coppé, 2007, p. 144). Il est parfois considéré comme légèrement différent, comme par Bloch (2009) qui le traduit par « didactique pratique ou pratique de la didactique » (p. 2) ou par Margolinas, Coulange et Bessot (2005, p. 206) qui souhaitent utiliser *didactique* même en anglais, car elles considèrent que la signification n'est pas identique. Pour sa part Chevallard, dans ses articles parus en anglais, utilise *didactic*, par exemple dans (Chevallard, 2007). Cette discussion est naturellement une manière de se poser, sans y répondre, la question de l'absence d'usage du terme « didactique » dans le monde anglo-saxon (Andrews, 2007; Hamilton, 1999). Etant donné que PCK et didactique sont d'ailleurs généralement identifiés dans les études internationales (Liljedahl *et al.*, 2009, p. 25), il nous semble pour notre part que les deux concepts ne sont pas identiques, mais qu'ils peuvent servir d'équivalent entre le monde francophone et le monde anglophone.

Nous verrons en 3.2 et 3.3.3 quelques développements ultérieurs de cette catégorie, mais signalons immédiatement que Shulman considère que le PCK est bien de l'ordre de la *connaissance du contenu* : « I still speak of content knowledge here, but of the particular form of content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability²⁸ » (Shulman, 1986, p. 9).

Il nous faut donc revenir à cette connaissance du contenu et à quelques caractéristiques qu'en donne Shulman.

²⁷ [...] parce qu'il constitue le corps caractéristique des connaissances pour l'enseignement. Il représente le mélange de contenu et de pédagogie dans la compréhension de la façon donc les sujets particuliers, les problèmes ou les questions sont organisés, représentés et adaptés aux divers intérêts et capacités des apprenants, et présentés pour l'enseignement. Le PCK est la catégorie la plus plausible pour distinguer la compréhension du spécialiste de la matière de celle du pédagogue.

²⁸ « Je parle encore de connaissance du contenu ici, mais de cette forme particulière de connaissance du contenu qui intègre les aspects du contenu les plus liés à son enseignabilité ». Traduction de Gérard Sensevy et Chantal Amade-Escot dans (Shulman, 1986 / 2007)

3.1.3 La connaissance du contenu

Pour dépasser les lieux communs et les bonnes intentions, il ne suffit bien entendu pas de dire que les enseignants doivent maîtriser les contenus qu'ils enseignent et une description plus détaillée est indispensable.

Le *Content Knowledge* (CK) est défini comme la somme et l'organisation des connaissances en tant que telles dans l'esprit de l'enseignant. Mais il s'agit d'aller plus loin que les seuls concepts et de comprendre les structures de la matière, les liens entre les concepts et leurs importance relative²⁹ (Shulman, 1986, p. 9). Il faut également dépasser la seule affirmation de la vérité et pouvoir expliciter les critères de vérité³⁰. Un enseignant doit également avoir une compréhension multiple et pouvoir fournir plusieurs explications différentes (Shulman, 1987, p. 9). Enseigner, c'est d'abord comprendre (Shulman, 1987, p. 14).

Si certaines de ces exigences sont imposées par l'appartenance de l'enseignant à une communauté scientifique, d'autres lui sont particulières et justifiées par la nécessité, en tant que source première de la compréhension de l'élève, de pouvoir utiliser ses anciennes connaissances afin de favoriser une compréhension nouvelle (Shulman, 1987, p. 9).

3.2 Les catégories de Ball

3.2.1 Une catégorisation des connaissances mathématiques pour l'enseignement

Shulman appelait de ses vœux le développement de la recherche sur les connaissances de enseignants et la nécessité d'un « cadre théorique cohérent » (1986, p. 9). Selon (Ball *et al.*, 2008, p. 389 et 394) peu de progrès ont été réalisés sur ce point, en dépit du succès rencontré par le concept de *Pedagogical Content Knowledge*. Ball et son équipe attribuent ce paradoxe à la fois au manque de liens entre les domaines de recherche et aux caractères généralistes de près d'un tiers des articles utilisant le PCK sans l'ancrer dans une branche, dans un *content area* (p. 394). Le travail de Ball et de l'équipe de l'Université du Michigan³¹, depuis sa thèse (Ball, 1988), au travers de très nombreux articles et jusqu'à sa présidence du groupe de travail sur la formation des enseignants dans le *National mathematics advisory panel* (2008a), est justement de contribuer à ce travail de clarification théorique. Son effort tend à la fois à définir précisément les termes utilisés, à mieux catégoriser les connaissances des enseignants, à mieux les mesurer et à en déterminer l'effet sur les performances des élèves. Ces travaux se déploient dans les champs de la *Math Education* et de la formation des enseignants des mathématiques, mais ils tissent aussi des liens avec l'enseignement des autres disciplines. En partie grâce à ces efforts, mais surtout de par un contexte lié à la politique de l'éducation aux USA, le sujet des connaissances mathématiques des enseignants est devenu depuis les années 2000 un des sujets de préoccupation majeure, et un de ceux recueillant le plus d'investissements financiers (Hill, 2010, p. 513), même si les connaissances mathématiques des enseignants continuent à être rarement mesurées directement et à large échelle, à la fois à

²⁹ Shulman rapproche cette partie du CK de la structure substantive de Schwab, J. J. (1964). The structures of the disciplines: Meanings and significance. In G. W. Ford & L. Pugno (Eds.), *The structure of knowledge and the curriculum*. Chicago: Rand McNally.

³⁰ Rapporté par Shulman à la structure syntaxique de Schwab.

³¹ La plupart des travaux de Ball sont effectués en équipe. Dans la suite de ce texte, nous ne mentionnerons parfois que Ball en omettant de préciser « et ses collègues ». Ball est en particulier au centre de plusieurs projets développés à l'université du Michigan : le *Mathematics Teaching and Learning to Teach (MTLT)*, le *Learning Mathematics for Teaching (LMT)*, le *Study of Instructional Improvement (SII)*, ... (Ball, 2008). Ces projets s'interpénètrent et les différents articles utilisent leurs données ou en sont des émanations.

cause de la résistance potentielle des enseignants, pour des raisons de coût, mais surtout par manque d'accord sur le type de connaissances à mesurer (pp. 515-516).

Une question centrale pour Ball et ses collègues est donc de déterminer ce que les enseignants doivent savoir pour être efficaces. Plutôt que d'examiner les *curricula* des élèves ou les recherches sur leurs difficultés d'apprentissages en maths, plutôt que d'interroger les mathématiciens, Ball et ses collègues partent des pratiques d'enseignement. Ils se focalisent sur la manière dont les enseignants maîtrisent les contenus enseignés, sur ce qu'ils doivent savoir en plus sur ces contenus et sur la façon dont ils utilisent ces connaissances dans la pratique. Cette approche pose ainsi les fondations d'une *practice-based theory of mathematical knowledge for teaching* (Ball & Bass, 2003; Ball *et al.*, 2008, p. 395).

Dans ce cadre, les *Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement* (CME) sont définies comme les connaissances mathématiques nécessaires pour réaliser la tâche d'enseigner les mathématiques. Il faut signaler que cette définition part de l'enseignement et non de l'enseignant (Ball *et al.*, 2008, p. 395).

Grâce à des analyses qualitatives extensives des pratiques d'enseignement³² et à des mesures des CME³³, Ball et ses collègues ont cherché à déterminer quelles sont les tâches et les problèmes récurrents de l'enseignement³⁴ des mathématiques, ce que font les enseignants quand ils enseignent les mathématiques, quelles sont les connaissances, habiletés, *sensibilities*, requises pour accomplir ces tâches. Le résultat est un rudimentaire « tableau périodique » des connaissances des enseignants (Ball *et al.*, 2008, pp. 395-396) :

³² Pour cette analyse, Ball et ses collègues du projet LMT se sont basés principalement sur les enregistrements intégraux (vidéo, transcriptions, copies des élèves...) de toutes les leçons d'une classe de maths de 3^{ème} année réalisés en 1989-1990.

³³ Pour ces mesures, Ball et ses collègues ont utilisé le projet SII (SII, 2000).

³⁴ Le mot enseignement est utilisé ici au sens large et comprend tout ce que l'enseignant fait pour favoriser l'apprentissage des élèves, tant en classe que lors des préparations, évaluations, contact avec les parents ou les autres partenaires de l'école...

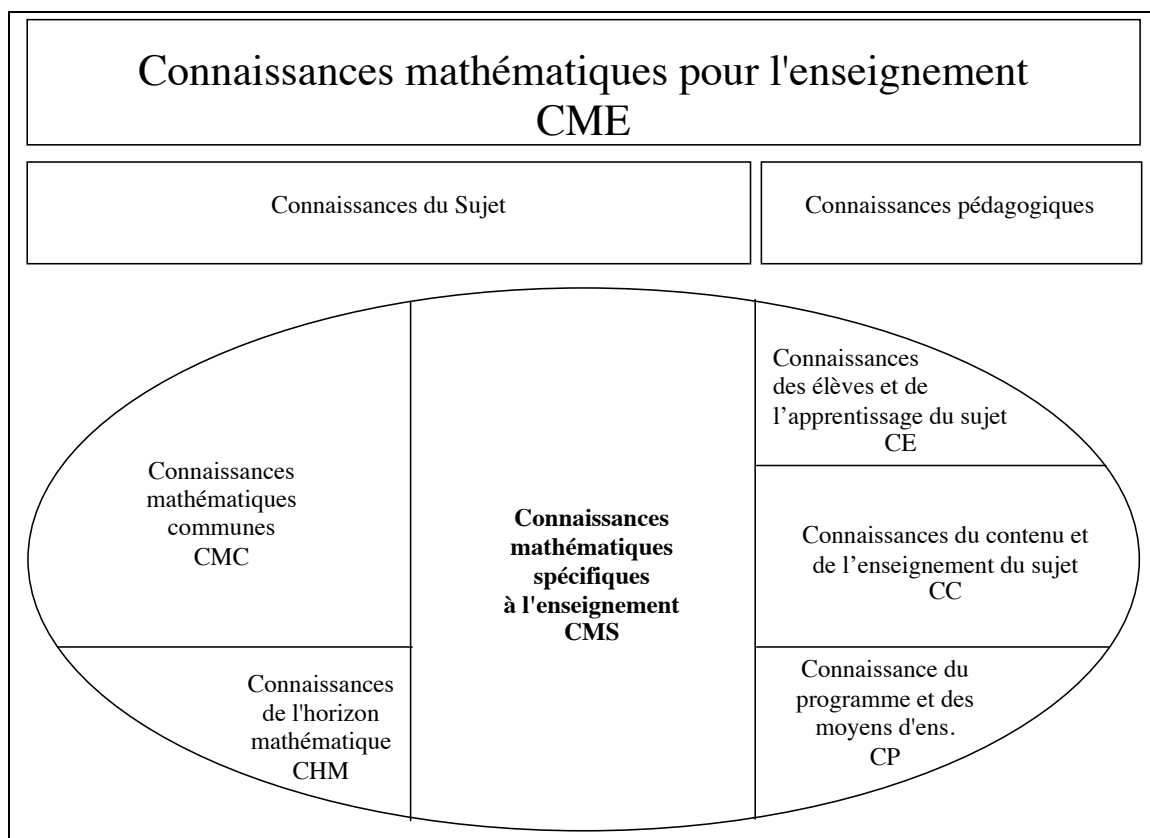


Figure 3 : Connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball *et al.*, 2008, p. 403)³⁵

Une première distinction est opérée en des connaissances de type pédagogique d'une part (3.2.1.1) et des connaissances du sujet d'autre part (3.2.1.2).

3.2.1.1 Les connaissances pédagogiques

Les *Connaissances des Elèves et de l'apprentissage du sujet* (CE) concernent les connaissances qu'ont les enseignants des représentations des élèves, de leur motivation à faire des mathématiques, leur capacité à interpréter les réponses des élèves, leurs difficultés. Ces connaissances sur l'apprentissage sont liées à des connaissances pédagogiques générales et pour les mesurer Ball utilise souvent des recherches et des questionnaires venues des champs de la pédagogie (Ball *et al.*, 2008, p. 401).

Les *Connaissances du Contenu et de l'enseignement du sujet* (CC) concernent la construction de l'enseignement des mathématiques. Elles sont liées au type de séquence, aux choix des exemples, du matériel, du rythme pour la classe... Ces connaissances sur l'enseignement sont mesurées par Ball à l'aide de questions sur des choix de matériel ou, par exemple, sur le langage et les métaphores utilisées (pp. 401-402).

La catégorie des *Connaissances du programme et des moyens d'enseignement* (CP) est reprise directement de Shulman.

3.2.1.2 Les connaissances du sujet

Les *Connaissances Mathématiques Communes* (CMC) sont utilisées ailleurs que dans l'enseignement, quand il s'agit de calculer, de résoudre des problèmes, d'utiliser un vocabulaire cor-

³⁵ Ma traduction des termes de la figure : Mathematical Knowledge for Teaching / Subject Matter Knowledge / Pedagogical Content Knowledge / Common Content Knowledge / Horizon Knowledge / Specialized Content Knowledge / Knowledge of Content and Teaching / Knowledge of Content and Students / Knowledge of Content and Curriculum.

rect... Ces connaissances sont essentielles et absolument nécessaires pour l'enseignant, mais d'autres personnes disposent de ces connaissances. C'est le cas en particulier de certains parents qui ont ainsi parfois l'impression de pouvoir eux aussi « enseigner ». Les CMC sont évaluées par Ball et ses collègues par des questions du type « Donner un nombre compris entre 1,1 et 1,11 » ou « Quel est le résultat de $0 : 7 ?$ » ou encore en observant si le carré est considéré ou non comme un rectangle (Ball *et al.*, 2008, p. 399).

Pourtant un certain nombre de tâches quotidiennes de l'enseignant font aussi appel à des connaissances mathématiques, mais des connaissances dont ne disposent pas d'autres professionnels utilisant les mathématiques. C'est le cas par exemple quand il s'agit d'expliquer pourquoi « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro », quand il faut analyser des erreurs d'élèves ou quand il faut décider si une procédure originale proposée par un élève est correcte. Une situation particulière nécessitant ces *Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'Enseignement* (CMS) est celle de l'enseignement des algorithmes de la soustraction (Ball *et al.*, 2008, pp. 396-399) ou de la multiplication (Ball, Hill & Bass, 2005, pp. 17-21)³⁶. Ces CMS se distinguent des CMC, mais aussi des connaissances pédagogiques du contenu :

Knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably. [...] Important to note is that each of these common tasks of teaching involves *mathematical* reasoning as much as it does pedagogical thinking.³⁷ (Ball *et al.*, 2005, p. 21)

Si ces connaissances sont mises en évidence par les mesures réalisées par Ball, Hill et leur équipe, Hill signale dans son article le plus récent que la description de ces CMS doit encore être affinée (Hill, 2010, p. 537). Cet affinement pourrait permettre de répondre à la critique de Petrou et Goulding qui considèrent que cette catégorie relève en fait de connaissances d'ordre pédagogique (2011, p. 17).

Les *Connaissances de l'Horizon Mathématique* (CHM) concernent la conscience des liens entre les sujets mathématiques sur l'ensemble du curriculum. Par exemple la perception des liens entre la droite numérique, telle que vue au primaire avec des entiers et telle que vue au secondaire pour l'ensemble des réels. Ball et ses collègues disent hésiter à considérer qu'il s'agit d'un type de CME distinct ou plutôt de connaissances traversant les autres catégories.

3.2.2 Effets des CMS sur les résultats des élèves

Cette catégorisation a permis à Hill, Rowan et Ball (2005) de mettre en évidence une influence des CMS sur les résultats des élèves. Contrairement à la plupart des études qui mesurent les connaissances mathématiques des enseignants à l'aide de *proxies*, diplômes obtenus, cours de mathématique suivis ou tests généraux de maths (voir 2.2), ces auteurs ont utilisé les données issues de la *Study of Instructional Improvement* (Ball & Rowan, 2004; SII, 2000) qui mesurent à la fois les CMC des enseignants et leurs CMS. La mesure des CMS cible spécifiquement les connaissances mathématiques utilisées par les enseignants en classe, connaissances spécifiques au degré concerné. Les items, rédigés par des formateurs, des mathématiciens et des enseignants, testés et validés à large échelle (Hill, Schilling & Ball, 2004) ont été administrés à près de 700 enseignants des degrés 1 et 3. Le travail important de validation du test est décrit d'un point de vue psychométrique dans une série d'articles (Hill, Ball, Blunk, Goffney & Rowan, 2007; Hill, Dean & Goffney, 2007; Schilling & Hill, 2007a, 2007b). Ces

³⁶ Pour un exemple de CMS tiré des travaux de l'équipe de Ball, voir Annexe 8.

³⁷ Connaître des mathématiques en vue de les enseigner demande un type de profondeur et de détail qui va bien au delà de ce qui est nécessaire pour effectuer l'algorithme de manière fiable. [...] Il est important de remarquer que chacune de ces tâches ordinaires d'enseignement implique un raisonnement *mathématique* autant qu'une pensée pédagogique.

données ont été complétées par un journal de bord rempli 60 fois par an par chaque enseignant et par un questionnaire annuel.

Pour ce qui est de la mesure d'*output*, elle a été conduite dans plus de 140 écoles durant quatre ans et l'échantillon final était constitué de près de 3000 élèves dont les progrès en mathématiques ont été mesurés à l'aide de tests standardisés (Hill *et al.*, 2005, p. 382).

Les conclusions de ce travail sont claires : « Teachers' content knowledge for teaching mathematics was a significant predictor of student gains³⁸ » (p. 396). Plus précisément, les connaissances mathématiques des enseignants constituent « l'effet maître » le plus important, supérieur au degré de certification des enseignants (effet non significatif) ou à leurs études de mathématiques (effet très faible), aux années d'expérience (effet très faible), à la durée quotidienne ou annuelle passée à faire des mathématiques. Une augmentation d'un écart type de la mesure des connaissances mathématiques des enseignants correspond à l'effet produit sur les performances des élèves par deux à trois semaines d'enseignement. De plus, l'ampleur de cet effet est comparable à celui combiné du statut socio-économique, de l'*ethnicité* et du genre des élèves.

La question de l'existence de l'ampleur de l'effet de CMS des enseignants sur les performances des élèves étant démontrée, il reste, selon ces auteurs, à décrire comment cette influence s'exerce :

A [...] line of inquiry could focus on investigating whether and how the instructional practices of mathematically knowledgeable and less knowledgeable teachers differ. Teachers do not improve student learning simply by scoring well on multiple-choice assessments such as ours. However, what knowledgeable teachers do in classrooms—or how knowing mathematics affects instruction—has yet to be studied and analyzed. Does teachers' knowledge of mathematics affect the decisions they make? Their planning? How they work with students, or use their textbooks? How they manage students' confusion or insights, or how they explain concepts?³⁹ (Hill *et al.*, 2005, p. 401)

Nous espérons que notre travail puisse contribuer à apporter quelques éléments de réponse à cette question : « comment *savoir les mathématiques* influence l'enseignement ? ».

3.2.3 Effets des CME sur l'enseignement-apprentissage

Les éléments décrits dans ce chapitre 3.2.3 ne sont parus qu'au moment où nos analyses étaient déjà terminées. Nous ne les avons donc pas utilisés. Toutefois, comme ils ont été développés par l'équipe TELT réunie autour de Ball et Hill et qu'ils ont une fonction proche du concept de *pertinence mathématique du professeur* (voir Chapitre 7) que nous avons utilisé, nous pensons utile de les décrire brièvement ici. Nous reviendrons également en conclusion sur les apports possibles de cet instrument de mesure.

L'équipe LMT (LMT, 2010) constate tout d'abord que toutes les recherches tentant de mesurer l'efficacité de l'enseignement, essentiellement les études de type processus-produit (voir 2.2.1) n'ont pas donné de résultat convainquant pour les mathématiques et

³⁸ « Les connaissances du contenu de l'enseignant étaient un facteur significatif déterminant les gains des élèves [aux tests standardisés]. »

³⁹ « Une ligne de recherche pourrait étudier si et comment diffèrent les pratiques d'enseignement des enseignants ayant des connaissances mathématiques et celles de ceux en possédant moins. Les enseignants n'améliorent pas l'apprentissage des élèves simplement en obtenant de bons résultats dans QCM comme les nôtres. Toutefois, ce que font les enseignants ayant de bonnes connaissances mathématiques –ou encore, comment les fait de savoir les mathématiques influence l'enseignement– doit encore être étudié et analysé. Les connaissances mathématiques des enseignants influencent-elles les décisions qu'ils prennent ? Leur planification ? La manière dont ils travaillent avec les élèves ou utilisent les manuels ? Comment ils traitent les erreurs ou les idées des élèves, ou comment ils expliquent les concepts ? »

qu'elles n'ont en particulier pas réussi à isoler les propriétés propres aux mathématiques elles-mêmes, car celles-ci sont masquées par les manières d'enseigner (2010, p. 26). De fait, il est essentiel pour Ball, Hill et leurs collègues, de pouvoir séparer les aspects non spécifiques aux mathématiques et les aspects mathématiques afin de pouvoir déterminer les effets de l'un et de l'autre (2010, p. 30). Ces aspects proprement mathématiques de l'acte d'enseignement-apprentissage sont baptisés *Mathematical Quality of Instruction* (MQI). Le mot de qualité réfère essentiellement au caractéristique de nature plus qu'à la valeur. Le terme instruction signifie l'ensemble du processus d'enseignement-apprentissage. La MQI est ainsi définie comme un cadre multidimensionnel qui doit prendre en compte la richesse et la précision⁴⁰ des mathématiques, le degré d'engagement des élèves dans le travail mathématique, la façon dont l'enseignant utilise le langage et les représentations mathématiques et enfin la manière dont il entend et utilise les réflexions mathématiques des élèves (Ball & Hill, 2008, p. 91).

Constatant qu'il n'existe pas d'instrument de mesure permettant de mesure des MQI hors des éléments incluant les éléments pédagogiques (LMT, 2010, p. 29), l'équipe LMT a mené un projet permettant à la fois de développer une théorie des caractéristiques mathématiques de l'instruction et de construire (et de valider) un instrument permettant de mesure ces caractéristiques. Pour ce faire, les chercheurs ont testé les CME de 10 enseignants, puis les ont filmés durant 9 leçons chacun, chaque leçon étant suivie d'un entretien. Les vidéos ont été visionnées, souvent à plusieurs reprises, découpées en segments de 5 minutes. Les codes ont ensuite été développés de manière itérative durant près de deux ans. Chaque code était ensuite noté dans chaque segment comme étant présent ou absent, approprié ou inapproprié, et cela selon des critères précis et explicites (voir Hill & LMT, 2010). Des tests psychométriques ont permis de tester la fiabilité des échelles ainsi construites et de les affiner encore (LMT, 2010, pp. 31-33). Un glossaire détaillé (Hill & LMT, 2010) et un travail par duos de codeurs ont permis un accord inter-juges de 65 à 100% par code (LMT, 2010, p. 41).

Les éléments de la MQI ainsi obtenus sont :

- Richesse des mathématiques
 - Présence de plusieurs modèles mathématiques (par exemple représentations symboliques et représentations visuelles)
 - Liens faits entre ces modèles
 - Explications mathématiques
 - Justifications mathématiques
 - Discussions explicites à propos du langage mathématique
 - Discussions explicites à propos du raisonnement mathématique
 - Discussions explicites à propos des pratiques mathématiques
- Réponses aux élèves
 - Interprétations des productions et des interventions des élèves
 - Utilisation des erreurs des élèves
- Liens entre la pratique de classe et les mathématiques
 - Lien entre l'activité des élèves et les concepts ou procédures mathématiques
 - Le sujet mathématique prévu pour la leçon est-il traité durant ce segment ?
 - Le temps d'enseignement est-il consacré aux mathématiques
- Langage
 - Présence de symboles mathématiques
 - Présence de termes mathématiques
 - Usage de termes du langage courant pour exprimer des idées mathématiques

⁴⁰ Ball et Hill utilisent le terme *accuracy*.

- Équité dans l'accès aux mathématiques de tous les élèves
- Présence d'erreurs mathématiques (reprennent les P/I des codes précédents, ne sont pas comptés si corrigés rapidement – moins de 5 minutes)
 - générales
 - techniques
 - langage
 - liens entre représentations
 - explications
 - justifications

D'après (Hill *et al.*, 2008b, p. 437; LMT, 2010, pp. 34-37)

Du point de vue de l'équipe LMT, au moment où paraît l'article de 2010, l'outil ainsi construit constitue un bon point de départ mais doit être encore affiné. En effet, il possède une bonne fiabilité et une forte corrélation est observée entre les résultats au test mesurant les CME et la MQI d'un enseignant, particulièrement en ce qui concerne la présence d'erreur et les réponses appropriées aux élèves (LMT, 2010, pp. 42-43). Toutefois cet outil est encore très dépendant de son utilisateur. En particulier la stabilité du codage n'a pu être obtenue que par un très long travail d'équipe et l'instrument ne peut, en l'état, pas être utilisé facilement par d'autres chercheurs. Il reste également, en terme de validité, à démontrer que la MQI ne mesure pas d'autres éléments comme la gestion de classe ou l'effet-maître (p. 44).

La corrélation remarquée entre CME et MQI est quelque peu problématique. Dans la mesure où elle sert de vérification de la validité de l'instrument de mesure, il est difficile de tirer une conclusion de cette corrélation en terme d'influence des connaissances mathématiques pour l'enseignement sur la qualité mathématique de l'instruction.

3.3 D'autres adaptations du PCK aux connaissances mathématiques des enseignants

De nombreux auteurs dans le champ de la *math education* reconnaissent la puissance créatrice et l'influence des propositions de Shulman. L'expression consacrée dans plusieurs articles est d'ailleurs « seminal work » (p. ex. Adler, 2008, p. 1; Carrillo, 2011, p. 273; Hill, Ball & Schilling, 2008a, p. 372; Rowland, 2008, p. 151; Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005, p. 255; Tsamir & Tirosh, 2008, p. 862). Toutefois, comme Ball et ses collègues, ils regrettent souvent que cette catégorisation ne soit pas liée à la spécificité des connaissances mathématiques et proposent de préciser ces catégories en vue d'établir un cadre théorique permettant à la fois une analyse de ces connaissances, mais aussi leur évaluation et leur développement (Ruthven, 2011, p. 83).

Nous présentons rapidement ici quatre adaptations : le cadre de Shulman-Fishbein (3.3.1), celui de l'étude COACTIV (3.3.2), la catégorisation de Fennema et Franke (3.3.3), le *quartetknowledge* (3.3.4) et les catégories de Pirie et Kieren (3.3.5). Nous n'avons pas utilisé ces catégories. Il nous semble toutefois utile de les présenter sommairement afin de décrire les raisons qui nous ont poussé à choisir la catégorisation de Ball (3.3.6).

3.3.1 Le cadre Shulman-Fischbein

Ainsi, par exemple, alors que Ball subdivisait le PCK, Tsamir et Tirosh (2008) proposent de croiser ces catégories de connaissances professionnelles avec les catégories de connaissances mathématiques décrites par Fischbein (1987, cité par Tsamir & Tirosh, 2008).

Fischbein distingue trois composantes des connaissances mathématiques. La première est une composante *algorithmique*. Elle est de nature procédurale et inclut les règles et les processus de résolution mathématique. Elle implique la compréhension des raisons qui font qu'un algorithme fonctionne ainsi que la connaissance du choix d'une procédure mathématique adéquate. La composante *formelle* comprend les axiomes, définitions, théorèmes, preuves et la connaissance du fonctionnement des mathématiques. La composante *intuitive* enfin, particulièrement travaillée par Fischbein, est celle qui donne le sentiment de l'évidence. Elle peut être primaire (venue des expériences personnelles) ou secondaire (transformation des connaissances formelles) (Tsamir & Tirosh, 2008, p. 862).

Tsamir et Tirosh proposent alors de croiser ces trois composantes avec les deux catégories de Shulman dans un tableau :

		Dimensions des connaissances de l'enseignant (Shulman)	
		SMK	PCK
Composantes des connaissances mathématiques (Fischbein)	Algorithmique	Cellule 1	Cellule 4
	Formelle	Cellule 2	Cellule 5
	Intuitive	Cellule 3	Cellule 6

Tableau 1 : Le cadre théorique Shulman-Fischbein (Tsamir & Tirosh, 2008, p. 863)

Tsamir et Tirosh décrivent chacune des six cellules obtenues et illustrent l'usage des cellules 2 et 4 dans deux recherches sur les connaissances des enseignants.

Ce modèle semble une alternative intéressante à la catégorisation de Ball et de son équipe. Elle nous semble toutefois être à un stade de maturation trop peu avancée pour que nous puissions en faire usage, ce d'autant plus qu'elle combine déjà deux cadres théoriques alors que nous allons nous-mêmes utiliser à la fois les cadres de Ball et de la théorie des situations didactiques (voir Chapitre 5). Il faut par ailleurs signaler que Tirosh, Tsamir et Levenson ont proposé un autre croisement sous forme de tableau à double entrée entre les catégories de CME de Ball et la théorie de Tall et Vinner (1981) au sujet du concept-image et du concept-définition (Tirosh, Tsamir & Levenson, 2011). Ces différents croisements montrent l'intérêt qu'il peut y avoir à utiliser un modèle se focalisant sur les connaissances mathématiques des enseignants, tout en le croisant avec un modèle permettant de décrire la réalisation de ces connaissances en classe.

3.3.2 Les catégories de l'étude COACTIV

De son côté, l'étude COACTIV (Krauss *et al.*, 2008) teste, pour des enseignants du secondaire 1 allemands, trois subdivisions du PCK pour l'enseignement des mathématiques. La première est celle des *tâches*, ou plus précisément, la capacité à résoudre un problème de plusieurs manières, la seconde est celle de la connaissance des *difficultés* et des *conceptions erronées* des élèves et la troisième est celle des *explications* et des *représentations* permettant de donner des explications ou des exemples. Le *Content Knowledge* de son côté n'est pas subdivisé (pp. 875-876).

Dans leur étude de la consistance de leur test, Krauss et ses collègues constatent que leur subdivision est compatible avec celle de l'équipe de Ball. Ils notent quelques différences, en particulier leur absence de subdivision entre CMC et CMS et estiment que cette division opérée par Ball se justifie essentiellement à l'école élémentaire. Ils remarquent par ailleurs une forte corrélation entre PCK et CK et constatent d'ailleurs leur échec à construire des items d'évaluation permettant de n'évaluer que le PCK sans qu'il soit « contaminé » par le CK (Krauss *et al.*, 2008, p. 888).

3.3.3 La catégorisation de Fennema et Franke

Après avoir passé en revue un certain nombre de catégories de connaissances mathématiques des enseignants (voir 2.2) Fennema et Franke (1992) proposent leur modèle dynamique des connaissances des enseignants.

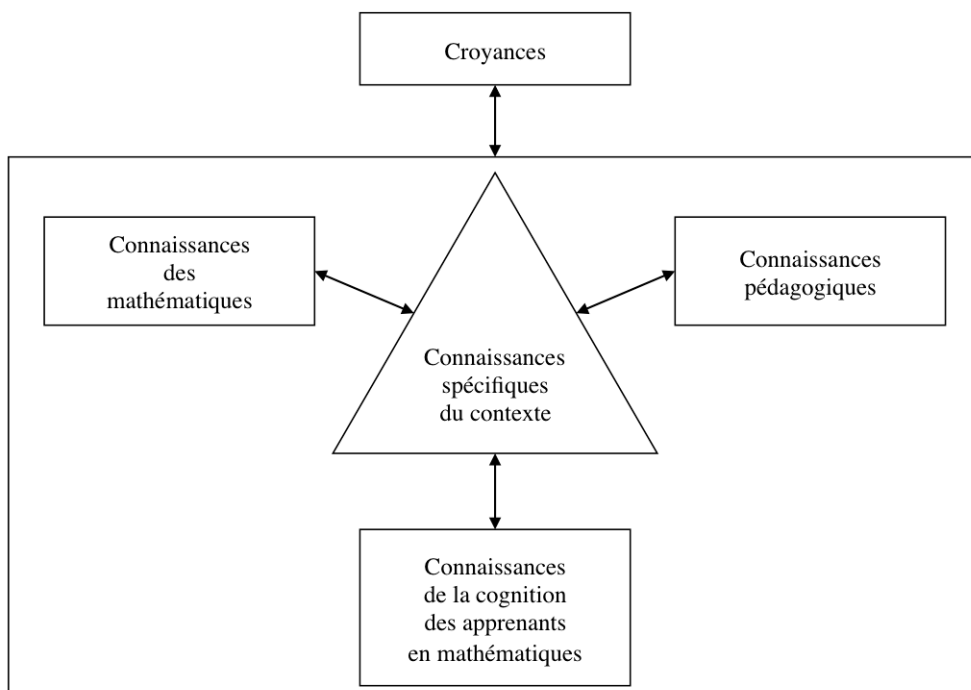


Figure 4 : Les connaissances des enseignants : Développement en contexte (Fennema & Franke, 1992, p. 162)⁴¹

Ces auteurs insistent particulièrement sur la nature contextualisée (les connaissances se manifestent dans le contexte spécifique de la classe), dynamique (ces connaissances évoluent) et interactive de leur modèle. Le caractère interactif, essentiel de ce modèle, se manifeste pour un type de connaissances comme les connaissances mathématiques qui incluent la connaissance des concepts, des procédures et des manières de résoudre les problèmes du domaine considéré, mais surtout des liens entre concepts, procédures et résolution de problèmes ainsi que les liens entre les idées mathématiques. (p. 162)

Mais cette interactivité est aussi essentielle entre les types de connaissances dans la mesure le contexte définit quelles composantes de chaque type de connaissances entrent en jeu et où, « within a given context, teachers' knowledge of content interacts with knowledge of pedagogy and students' cognitions and combines with beliefs to create a unique set of

⁴¹ Ma traduction des termes de la figure « Teachers' knowledge: Developing in context » : Beliefs / Knowledge of mathematics / Context specific knowledge / Pedagogical knowledge / Knowledge of learners' cognition in mathematics.

knowledge that drives classroom behavior⁴² » (p. 162). L'interaction est également mentionnée entre cet ensemble de connaissances en contexte et les *beliefs* des enseignants. Fennema et Franke ne définissent pas précisément ce terme, considérant même que la distinction est souvent floue, voire invisible (p. 159). Cette question des *beliefs* sera reprise en (3.4).

3.3.4 Le Knowledge Quartet

Le *Knowledge Quartet* (KQ) plonge lui aussi ses racines dans la catégorisation de Shulman (1986), mais il s'est développé dans les circonstances de politiques scolaires différentes en Angleterre et au Pays de Galle autour de Rowland et de l'équipe de l'université de Cambridge (Petrou & Goulding, 2011, p. 18). Cette catégorisation s'est développée de manière située à partir de l'observation de leçons données par de futurs enseignants primaires. Les vingt catégories obtenues ont été regroupées en quatre supra-catégories (Turner & Rowland, 2011).

Le Knowledge Quartet	
Fondement	Conscience du but Identification des erreurs Connaissance explicite du sujet Fondements théoriques de la pédagogie Utilisation de la terminologie Utilisation des manuels Dépendance par rapport aux procédures
Transformation	Démonstrations de l'enseignant Utilisation du matériel Choix des représentations Choix des exemples
Connexion	Création de liens entre procédures Création de liens entre concepts Anticipation de la complexité Décision dans le découpage Reconnaissance de l'adéquation d'un concept
Contingence	Réponse aux idées des élèves Utilisation des opportunités Changement par rapport à la leçon prévue Perspicacité de l'enseignant

Tableau 2 : Le *Knowledge Quartet*, adapté et traduit de (Rowland *et al.*, 2005, pp. 265-266) et (Turner & Rowland, 2011, pp. 200-202)

La supra-catégorie *Foundation* porte sur les connaissances et les conceptions des enseignants, indépendamment de leur utilisation. C'est ce que les enseignants apprennent durant leur scolarité et durant leur formation. La supra-catégorie *Transformation* est constituée de connaissances dans l'action révélées lors de la préparation et lors de la conduite de l'enseignement.

⁴² « dans un contexte donné, les connaissances du contenu des enseignants interagissent avec leur connaissances de la pédagogie et de la cognition des élèves et se combine avec les *beliefs* pour créer un ensemble unique de connaissances qui guident le comportement en classe »

La supra-catégorie *Connection* regroupe les connaissances dans l'action qui portent sur les liens créés par l'enseignant alors que le regroupement *Contingency* porte sur l'interaction entre l'enseignant et les élèves.

Cette catégorisation met un accent important sur les choix effectués par l'enseignant et nous semble donc porter plus sur les effets des connaissances mathématiques que sur ces connaissances elles mêmes. Elle a été utilisée par Rowland et ses collègues dans le cadre de formations initiale et continue des enseignants comme outil pour favoriser la réflexion et les discussions (Turner & Rowland, 2011, p. 202) et semble adéquate pour cet usage (Ruthven, 2011, p. 85). Il nous semble par contre, comme le relève également Ruthven (2011, p. 85) que le risque d'une grande flexibilité dans l'interprétation des codes est élevé.

3.3.5 Pirie et Kieren

Le modèle développé par Pirie et Kieren (Pirie & Kieren, 1994) pour comprendre le développement de la compréhension mathématiques des élèves a été utilisé par Nillas (Nillas, 2010) pour caractériser la compréhension algébrique de futurs enseignants. Ce modèle utilise huit disques emboîtés (Figure 5) pour représenter les niveaux de compréhension mathématique comme un processus dynamique et non linéaire (p. 187).

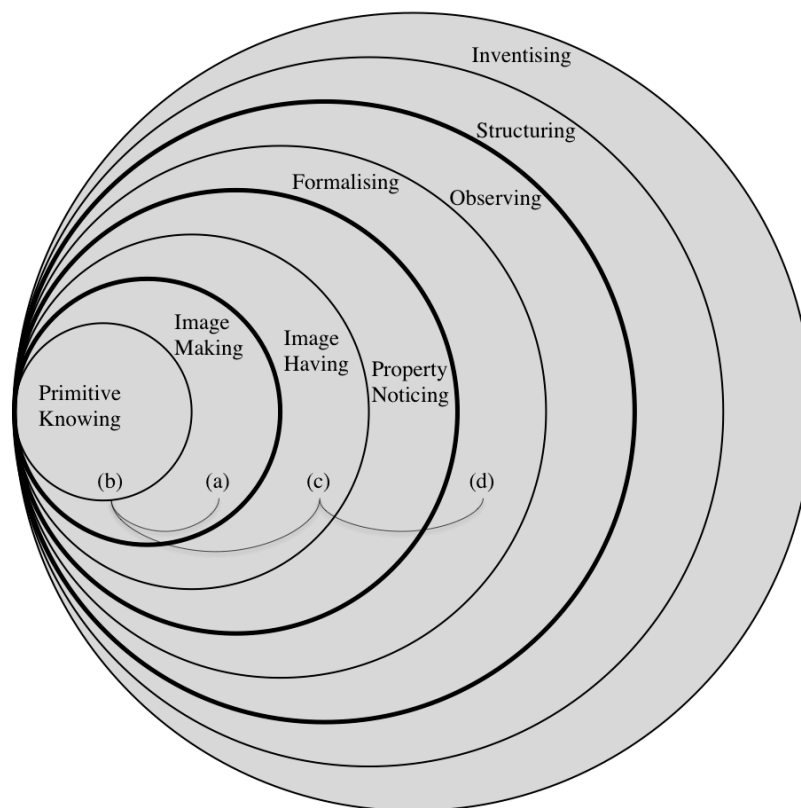


Figure 5 : Niveaux de compréhension mathématique (Pirie & Kieren, 1994, p. 167) et carte des niveaux de compréhension mathématique de Rachel (Nillas, 2010, p. 14)

Le nom de chaque niveau n'est pas traduit ici car il faudrait une adaptation assez fine pour certains termes. *Primitive Knowing* inclut toutes les connaissances préalables, à l'exception de celles sur le sujet mathématique concerné. Au deuxième niveau, *Image Making*, l'élève ou l'étudiant peut faire des distinctions entre les connaissances anciennes et les utiliser de manière nouvelle. Au niveau d'*Image Having*, l'étudiant utilise au moins une image mentale et l'utilise pour travailler sur une tâche particulière. Cette image est dépendante de ce contexte.

Au quatrième niveau, *Property Noticing*, les étudiants font des liens entre les images mentales. C'est à ce niveau qu'ils peuvent « validate their mathematical knowledge with comprehension⁴³ » (Nillas, 2010, p. 2). Au niveau de *Formalizing*, les concepts sont généralisés et décontextualisés. Au sixième niveau, *Observing* l'étudiant exprime des généralisations sous forme de théorème. Au niveau du *Structuring*, des liens sont perçus entre les observations formelles et entre les théorèmes pour former une théorie. Les affirmations mathématiques peuvent être justifiées. Finalement, au niveau huit, *Inventising*, les étudiants peuvent montrer une compréhension complète des concepts mathématiques et peuvent inventer des questions qui conduiront à la création de nouveaux concepts (Nillas, 2010, p. 2). Certaines frontières (celles en gras dans la Figure 5) ne sont pas nécessairement perçues (*Don't need Boundaries*) et des chemins de retour vers l'intérieur sont possibles (*Folding Back*) pour un étudiant (Pirie & Kieren, 1994, pp. 68-69), comme indiqué à la Figure 5.

Ce modèle n'est à notre connaissance pas très utilisé et il traite de compréhension mathématique plus que de connaissances mathématiques. Il ne conviendra donc pas à notre analyse. Nous l'avons toutefois rapidement mentionné ici car il permet de décrire un cheminement par niveau qui n'est pas sans rappeler une autre structure en oignon, celle de la structuration du milieu (voir Chapitre 6) que nous utiliserons.

3.3.6 Notre choix de la catégorisation de Ball

Parmi les diverses catégorisations proposées, nous avons retenu celle proposée par Ball et son équipe (Ball *et al.*, 2008). Comme évoqué en 1.1, la première raison est liée à notre entrée dans le sujet par l'ouvrage de Ma (1999) et par une forme de prolongement cohérent entre l'analyse de Ma et le travail réalisé par l'équipe de l'université du Michigan. Par ailleurs, la catégorisation proposée par Ball fait actuellement l'objet d'un grand intérêt aux USA et en Europe non francophone, mais aussi d'un certain nombre de critiques. Nous reviendrons en sur le bilan de leur utilisation, mais quelques arguments peuvent être donnés ici pour donner les motivations de notre choix. Tout d'abord cette catégorisation est une catégorisation des connaissances propre aux mathématiques et propre à l'enseignement. Elle permet de mettre en évidence les connaissances spécifiquement mathématiques dans des actes d'enseignement, évoqués ou réels, et est donc particulièrement adaptée à notre objectif.

Cette catégorisation permet de plus une utilisation purement quantitative telle que celle réalisée par l'équipe LMT, mais aussi une utilisation descriptive (Hill, 2010, p. 518), voir compréhensive. Elle a été validée en fonction des ses liens avec l'enseignement et avec les résultats des élèves (p. 515).

Un parallèle intéressant peut être tiré entre la catégorisation de Ball et la notion de praxéologie développée par Chevallard (2002b). C'est ce que fait Huillet (2009) en considérant que les CMS se rapprochent de la composante technologique de la praxéologie, particulièrement pour ce qui est du *unpacking* : « [...] ce que Ball et ses collègues appellent 'décortiquer' (*unpacking*) et que nous pourrions classer de discours technologique. La notion de 'décortiquer' renvoie à une analyse du discours technologique des enseignants à l'école primaire » (p. 9). Le nombre de cadres théoriques déjà présents dans notre recherche ne nous permet pas de développer ce point, mais nous y ferons occasionnellement référence.

Cette catégorisation ne traite que des connaissances et laisse de côté les conceptions des enseignants. Il est maintenant nécessaire d'examiner la question des conceptions afin de voir si ceci est conforme à notre questionnement.

⁴³ « valider leur connaissances mathématiques par la compréhension »

3.4 Connaissances mathématiques et conception des mathématiques

Fennema et Franke (1992), suivant en cela Ball (1988), ne distinguent pas vraiment *beliefs* et *knowledge* quand il s'agit de connaissances mathématiques. Ball utilise d'ailleurs la plupart du temps l'expression « knowledge and beliefs ». En revanche, chez Ball comme chez la plupart des auteurs, le terme *beliefs* est généralement utilisé quand il se rapporte à aux conceptions d'apprentissage ou d'enseignement.

Si, comme nous l'avons vu, un certain nombre de recherches se sont intéressées aux connaissances mathématiques des enseignants, sans forcément les distinguer des *beliefs*, quelques auteurs se sont plus précisément intéressés aux *beliefs about mathematics*. Nous examinerons rapidement les contributions de Ernest (Ernest, 1989a, 1989b), de Thompson (1992) de Stipek, Givvin, Salmon et MacGyvers, (2001) et de Handal (2003).

Le concept de *belief* a connu un intérêt variable dans l'histoire des sciences de l'éducation. Très en vogue dans les années 1900, porté par l'intérêt pour la psychologie sociale, il a connu un certain déclin durant la période phare de l'associationnisme et du béhaviorisme, avant de revenir sur le devant de la scène dès les années 1970, en lien d'une part avec des recherche de type *process-product* et d'autre part avec le développement des sciences cognitives. Peu de recherches s'étaient axées spécifiquement sur les mathématiques jusqu'aux années 1980 (Thompson, 1992, p. 129).

Pourtant le concept de *belief* n'est guère travaillé d'un point de vue conceptuel. La distinction avec les connaissances est souvent peu claire, chez les auteurs comme d'ailleurs chez les enseignants eux-mêmes (Thompson, 1992, p. 129). Thompson considère que les *beliefs* possèdent trois caractéristiques qui les distinguent des connaissances. Les *beliefs* peuvent être tenues avec divers degrés de conviction et elles ne sont pas consensuelles ; elles ne sont pas justifiables. Ces *beliefs* sont organisées en systèmes dynamiques qui évoluent et se restructurent lorsque les individus confrontent leurs *beliefs* et leurs expériences (p. 130). Green (1971), repris par Thompson, relève que ces systèmes sont indépendants les uns des autres et peuvent ainsi être contradictoires entre eux. Thompson introduit de plus la notion de *conceptions* vue comme « more general mental structure, encompassing beliefs, meanings, concepts, propositions, rules, mental images, preferences, and the like⁴⁴ » (1992, p. 130). Elle utilise d'ailleurs par la suite essentiellement ce terme-là. Etant donné que ce mot existe en français, et qu'il nous semble plus approprié pour traduire *beliefs* que *croyance*, nous l'utiliserons désormais.

Dans sa revue des études consacrée aux conceptions que les enseignants ont des mathématiques, Thompson (1992) cite d'abord Ernest (1989a) qui considère que les conceptions que les enseignants ont des mathématiques sont un des principaux déterminants de leur manière d'enseigner. Ceci est également corroboré par d'autres recherches⁴⁵ citées par Thompson (pp. 134-135). Par ailleurs, elle cite plusieurs études qui ont catégorisé les conceptions des mathématiques. Ernest (1989a) les classe en instrumentalistes, platonistes et dynamiques⁴⁶ ;

⁴⁴ Structure mentale plus générale, englobant les *beliefs*, les significations, les concepts, les théorèmes, les règles, les images mentales, les préférences, etc...

⁴⁵ Thompson, 1984 ; Steinberg *et al.*, 1985 ; Grossman *et al.*, 1989 ; Kesler, 1985 ; McGalliard, 1983 ; Scheffler, 1965 ; Munby, 1982.

⁴⁶ First of all, there is the instrumentalist view that mathematics is an accumulation of facts, rules and skills to be used in the pursuance of some external end. Thus mathematics is a set of unrelated but utilitarian rules and facts. Secondly, there is the Platonist view of mathematics as a static but unified body of certain knowledge. Mathematics is discovered, not created.

Lerman (1983)⁴⁷ en absolutistes et faillibilistes (ou quasi-empiriques) ; Copes (1979)⁴⁸, reprenant les schèmes du développement intellectuel et éthique de Perry (1970)⁴⁹ en absolutistes, multiplistes, relativistes et dynamiques ; Skemp (1978)⁵⁰ en instrumentales et relationnelles (Thompson, 1992, pp. 132-134).

Selon Thompson (pp. 135-139) qui cite plusieurs recherches⁵¹, les conceptions des enseignants à propos des mathématiques sont également en lien avec leurs conceptions de l'enseignement-apprentissage des mathématiques. La catégorisation de ces conceptions mise en avant par Thompson est celle, souvent reprise, de Kuhs et Ball :

at least four dominant and distinctive views of how mathematics should be taught:

1. Learner-focused: mathematics teaching that focuses on the learner's personal construction of mathematical knowledge;
2. Content-focused with an emphasis on conceptual understanding: mathematics teaching that is driven by the content itself but emphasizes conceptual understanding;
3. Content-focused with an emphasis on performance: mathematics teaching that emphasizes student performance and mastery of mathematical rules and procedures; and
- 4 Classroom-focused: mathematics teaching based on knowledge about effective classrooms⁵². (Kuhs & Ball, 1986, p. 2, cité par Thompson, 1992, p. 136)

Cette cohérence est également montrée par Stipek et ses collègues (2001), qui ont observé une forte corrélation entre les diverses conceptions mesurées, en particulier entre une conception instrumentaliste des mathématiques et une conception de l'enseignement centrée sur le contenu et la performance.

Five dimensions of beliefs were strongly associated with each other: (1) mathematics is a set of operations to be learned; (2) students' goal is to get correct solutions; (3) the teacher needs to exercise complete control over mathematics activities; (4) mathematics ability is fixed and stable; and (5) extrinsic rewards and grades are effective strategies for motivating students to engage in mathematics. Or, looking at the opposite end of the dimensions, there was coherence in the belief that mathematics is a tool for thought, that students' goal is to understand, that students should have some autonomy, that mathematics ability is amenable to change, and that, in the absence of rewards, students

Thirdly, there is the problem solving view of mathematics as a dynamic, continually expanding field of human creation and invention, a cultural product. Mathematics is a process of enquiry and coming to know, not a finished product, for its results remain open to revision. (Ernest, 1989a)

⁴⁷ Lerman, S. (1987). Problem solving or knowledge centered: The influence of philosophy on mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(1), 59-66.

⁴⁸ Copes, L. (1979). *The Perry development scheme and the teaching of mathematics*. Texte présenté au Annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Warwick, England.

⁴⁹ Perry, W. G. (1970). *Forms of intellectual and ethical development in the college years, a scheme*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

⁵⁰ Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.

⁵¹ Copes, 1979 ; Lerman, 1983 ; Thompson, 1984 ; Cobb, Wood, & Yackel, 1991 ; Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988.

⁵² Au moins quatre visions dominantes et caractéristiques de la façon dont les mathématiques devraient être enseignées :

1. Centrée sur l'apprenant : le discours de l'enseignement des mathématiques est centré sur la construction personnelle de la connaissance mathématique par l'apprenant
2. Centrée sur le contenu avec un accent sur la compréhension conceptuelle : l'enseignement des mathématiques est guidé par le contenu lui-même, mais il met l'accent sur la compréhension des concepts mathématiques
3. Centrée sur le contenu avec un accent sur la performance : l'enseignement des mathématiques accentue la performance de l'élève et son contrôle des règles et des procédures mathématiques ;
4. Centré sur la classe : l'enseignement des mathématiques se base sur les connaissances au sujet de l'efficacité de la gestion de classe.

will want to engage in mathematics if the tasks are interesting and challenging⁵³. (Stipek *et al.*, 2001, p. 222)

Thompson (1992) note que les études ont montré un lien entre ces conceptions et les pratiques des enseignants, ainsi qu'une forte résistance au changement. En particulier plusieurs auteurs⁵⁴ constatent l'échec de formations continues visant à faire évoluer les pratiques d'enseignement, les enseignants assimilant (en les dénaturant) les nouvelles pratiques pour qu'elles correspondent à leurs conceptions, sans que ces dernières évoluent (Stipek *et al.*, 2001, p. 214). Toutefois ce lien est moins fort que celui avec leurs conceptions au sujet des mathématiques. Une des explications, donnée par Thompson, est la nécessité de connaissances mathématiques suffisantes pour pouvoir mettre en œuvre une conception basée sur l'apprenant (Thompson, 1992, p. 138).

Stipek *et al.* (2001, p. 224) relèvent par ailleurs un lien entre la confiance de l'enseignant envers ses propres capacités mathématiques et celles de ses élèves. Cette confiance étant liée à ses connaissances mathématiques, les auteurs bouclent la boucle en suggérant ainsi une amélioration des connaissances mathématiques des enseignants ...

Une certaine évolution des conceptions sur la nature des mathématiques au cours de la formation initiale et une influence des conceptions des formateurs sur cette évolution ont été décrites par Felbrich et ses collègues en Allemagne (Felbrich, Müller & Blömeke, 2008). Toutefois, de leur point de vue, l'influence de ces conceptions sur les pratiques d'enseignement demeure une question ouverte (p. 774). De même, au travers de sa revue des recherches sur les conceptions des mathématiques, Handal arrive finalement à la conclusion que, si les conceptions des mathématiques influencent certainement les pratiques d'enseignement, une véritable correspondance ne peut être établie à cause des multiples facteurs qui médiatisent cette influence (2003, p. 54).

Finalement, ce tour d'horizon à propos des conceptions nous ramène à l'utilité, pour notre recherche, de la distinction entre connaissances et conception. Nous nous rangerons à l'opinion de Liljedahl qui considère que la distinction est une fausse dichotomie et que conceptions et connaissances sont des construits sociaux et individuels (Liljedahl, 2008, p. 1; Liljedahl *et al.*, 2009, p. 27). Ainsi, on peut considérer que la frontière n'est peut-être qu'une question de gradation dans la croyance, comme le dit Leatham :

Of all the things we believe, there are some things that we "just believe" and other things we "more than believe – we know." Those things we "more than believe" we refer to as knowledge and those things we "just believe" we refer to as beliefs. Thus beliefs and knowledge can profitably be viewed as complementary subsets of the things we believe⁵⁵. (2006, p. 92)

⁵³ Cinq dimensions de représentations étaient fortement associées les unes aux autres : (1) les mathématiques sont une ensemble d'opérations à apprendre ; (2) le but de l'élève est d'obtenir une solution correcte ; (3) l'enseignant doit exercer un contrôle complet sur les activités mathématiques ; (4) les capacités mathématiques sont déterminées et stables ; (5) les récompenses et les notes sont des stratégies efficaces pour motiver les élèves à s'investir en mathématiques. Ou encore, si on regarde les choses du point de vue opposé, il y avait une cohérence entre le fait de croire que les mathématiques sont un outil pour penser, que le but de l'élève est de comprendre, que l'élève devrait bénéficier d'une certaine autonomie, que les capacités mathématiques sont appelées à changer, et que, en l'absence de récompense, les élèves vont avoir envie de s'engager dans une activité mathématique si les tâches sont intéressantes et exigeantes.

⁵⁴ Par exemple Skemp, 1978 ; Schram & Wilcox, 1988 ; Cohen & Ball, 1990

⁵⁵ Parmi toutes les choses que nous croyons, il y a des choses auxquelles nous « croyons sans plus » et d'autres auxquelles nous « faisons plus que croire – nous savons ». Ces choses auxquelles nous « faisons plus que croire », nous y référons en tant que connaissances et ces choses que nous « croyons sans plus », nous y référons en tant que conceptions. Ainsi conceptions et connaissances peuvent avantageusement être vues comme des sous-ensembles complémentaires des choses auxquelles nous croyons.

Cette brève incursion du côté des conceptions nous conduit de fait à nous centrer sur les connaissances des enseignants. Nous allons essayer de mieux préciser ce terme de *connaissance* et le distinguant de celui de *savoir*.

3.5 Connaissance et savoir

Là où l'anglais ne possède que le mot de *knowledge*, le français possède deux termes, *savoir* et *connaissance*. Cette particularité des langues romanes (il en va de même pour l'espagnol, le portugais ou l'italien) pose souvent des problèmes de traduction (Krainer, Goffree & Berger, 1999, p. 105), mais elle nécessite surtout pour nous une clarification conceptuelle.

Selon la définition de Brousseau et Centeno,

Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicites, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou à une exigence sociale. [...] Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. (Brousseau & Centeno, 1991, p. 176).

Cette définition, donnée en note par Brousseau et Centeno, précise donc bien que la connaissance est de l'ordre de l'activité, alors que le savoir est de l'ordre culturel et vise à organiser les connaissances et à produire de nouveaux savoirs. Ainsi pour Margolinas (2004, p. 44), un savoir mathématique donné se définit par un ensemble de connaissances. Pour Conne, la distinction est différente : « le savoir est une connaissance qui contrôle une situation et ses transformations, elles mêmes inductrices de connaissances » (Conne, 1992, p. 225). Ces deux points de vue sont toutefois repris par Brousseau (2003) quand il présente les savoirs comme des connaissances faisant « explicitement l'objet d'une action ou d'une étude, d'une identification, d'une classification, d'une articulation avec d'autres etc. donne alors à ces connaissances une autre fonction : celle d'objets de l'action du sujet ». Une simplification de cette distinction serait, comme le dit Brun, de considérer que les savoirs sont constitués et ont trait au projet d'enseignement, alors que les connaissances relèvent du développement et de l'expérience du côté du sujet (Brun, 1994, p. 70).

Cette distinction est généralement suffisante parmi les chercheurs en didactique française des mathématiques qui n'utilisent du coup guère d'autres termes. Comme le dit Margolinas, « dans le paradigme dans lequel je me place, je ne vois aucune raison, ni théorique, ni technique, d'introduire d'autres termes comme 'savoir-faire', 'compétence', 'croyance' etc. » (Margolinas, 2002b, p. 149).

Pour en revenir à la question de la traduction en anglais de cette distinction, Conne propose d'utiliser *knowing* pour *connaissance* et *knowledge* pour *savoir* (Krainer *et al.*, 1999, p. 105). De son côté les éditeurs de Brousseau, (Brousseau, 2003) proposent respectivement *c-knowledge* et *s-knowledge*. Pour notre part, nous ne sommes pas persuadés qu'une distinction, utile mais culturellement et linguistiquement ancrée, puisse passer dans une autre culture par de tels artifices de traduction et constatons le peu de succès de ces auteurs dans la traduction de cette distinction. L'abandon de certaines nuances fait probablement partie du prix momentané à payer pour le dialogue international dans le domaine de la recherche sur l'enseignement des mathématiques. Ce dialogue à propos des connaissances mathématiques pour l'enseignement peut avoir lieu entre chercheurs lors de colloques internationaux consacrés en partie à ce sujet (voir par exemple EMF 2006 (Bednarz & Mary, 2009), EMF 2009 (Kuzniak & Sokhana, 2010), CERME 7 ou le colloque des 100 ans de l'ICMI (Menghini, F.

Furinghetti, L. Giacardi & Arzarello, 2008), ou lors de comparaisons internationales mettant en lumière ces connaissances.

Dans la suite de cette thèse, le terme de connaissance sera ainsi utilisé comme générique, équivalent de *knowledge*, regroupant à la fois la notion de savoir et celle de connaissance.

Chapitre 4 Liping Ma : les connaissances mathématiques des enseignants sous l'éclairage de comparaisons internationales

4.1 Les comparaisons internationales au sujet des connaissances mathématiques des enseignants

Si les comparaisons internationales, en fort développement depuis les années 1990 (Artigue & Winsløw, 2010), sont souvent utilisées en vue d'établir des classements, utilisés ensuite par les médias et les politiques, l'utilisation des chercheurs est souvent différente car la comparaison permet de prendre du recul par rapport à des pratiques qui semblent aller de soi dans un pays (Kessel & Ma, 2001, p. 467). C'est en particulier le cas des articles qui comparent les systèmes de formation des enseignants, comme celui de Comiti et Ball (Comiti & Ball, 1996) qui met en évidence les différences entre les systèmes de formation européens, particulièrement français, et étatsuniens. Mais ces comparaisons permettent aussi de souligner des traits communs comme celui du faible nombre d'heures consacré à développer la compréhension mathématique, et à réviser et approfondir les notions connues pour de futurs enseignants arrivant en formation avec un bagage mathématique n'ayant guère évolué depuis la fin de leur propre scolarité (Comiti & Ball, 1996, p. 1146). La question posée par Comiti et Ball à la fin de leur texte concernant l'influence des différences des systèmes de formation initiale sur les résultats de cette formation ((p. 1149) a depuis fait l'objet d'un certain nombre de recherches.

Dans la foulée de TIMSS, des comparaisons de performance ont ainsi eu lieu entre institutions de formation des enseignants, en particulier sur les connaissances mathématiques des diplômés. C'est en particulier le cas de l'étude *Mathematics Teaching in the 21st Century* (Schmidt *et al.*, 2007) dont le rapport s'intitule *The preparation gap*, faisant ainsi écho au *Learning gap* (Stevenson & Stigler, 1992) et au *Teaching gap* (Stigler & James, 1999). Cette série montre bien l'intérêt croissant à expliquer les différences de résultats des élèves, par l'enseignement et finalement par la formation des enseignants.

Le numéro 40 de ZDM (Blömeke, Kaiser, Lehmann & Schmidt, 2008) sur *l'Empirical research on mathematics teachers and their education*, dont certains articles sont cités dans cette thèse, reprend cette étude MT21 dans plusieurs contributions en développant certains aspects. Il met surtout en évidence le manque de bases théoriques pour mesurer et comparer l'efficacité de la formation des enseignants en mathématiques (Blömeke *et al.*, 2008, p. 715), comme d'ailleurs l'avait déjà relevé le rapport plus général de l'AERA sur la formation des enseignants (Cochran-Smith & Zeichner, 2005). Un des efforts principaux de l'étude MT21, réalisée auprès de 2627 futurs enseignants de Bulgarie, Taïwan, Allemagne, Corée du Sud, Mexique et des USA, est donc de créer un modèle conceptuel des compétences d'un futur enseignant (Figure 6) et de collecter des données permettant de comparer ces compétences au plan international.

Macro level	Level III	Cultural context					
		Rationale of the society	Social status of the teaching profession		Social status of mathematics		
	Level II	Education system					
		Rationale of the education system		Goals of schooling	Working conditions of teachers		
	Level I	Teacher-education system					
		Goals of teacher education	Content structure	Institutional structure	Relationship of theory and practice	Selectivity	
Intermediate level	Level II	Institutionally intended curriculum					
		Learning goals and content	Teaching methods	Accountability	Academic advising	Selectivity	
	Level I	Teacher educators			Institutionally implemented curriculum		
		Knowledge	Beliefs	Demographics	Learning goals/content	Teaching methods	Selectivity
		Intended learning goals	Intended teaching methods		Accountability	Academic advising	FTs composition
Micro level	Level II	Individual Future Teacher's preconceptions		Individual Future Teacher's use of curriculum			
		Knowledge	Beliefs	Perception of learning goals and use of content		Experience with teaching methods	
		Personality	Demographics	Accountability		Academic advising	Selectivity
				Amount of learning time		Learning strategies	Emotions
	Level I	Individual Future Teacher's competencies					
		Knowledge	Beliefs	Personality characteristics		Demographics	

Figure 6 : Cadre théorique de l'étude MT21 (Schmidt *et al.*, 2007, p. 11)

Comme relevé par Li et Kulm, l'accent de MT21 est plus porté sur les conceptions que sur les connaissances (Li & Kulm, 2008), toutefois, l'étude et ses développements permettent de mettre en évidence des connaissances au dessus de la moyenne pour les pays asiatiques et au dessous de celle-ci pour les USA, l'Allemagne se situant à mi-chemin. Toutefois, la confiance que les futurs enseignants étatsuniens ont dans leurs connaissances est nettement plus grande que celle de leurs collègues asiatiques. Li et Kulm constatent, à propos du sujet emblématique de la division par une fraction, que cet écart correspond à une compréhension purement procédurale démontrée par les étudiants étatsuniens (pp. 840-841).

4.2 La connaissance et l'enseignement des mathématiques élémentaires en Chine et aux USA : l'étude de Liping Ma

Chinese students typically outperform U.S. students on international comparisons of mathematics competency. Paradoxically, Chinese teachers seem far less mathematically educated than U.S. teachers⁵⁶. (Ma, 1999, p. xvii)

Les premiers mots de l'ouvrage de Liping Ma, *Knowing and teaching elementary mathematics*, indiquent que cette étude est ancrée dans ce contexte polémique international et particulièrement étatsunien. C'est donc à la fois pour chercher une explication au paradoxe

⁵⁶ Les élèves chinois surpassent les élèves étatsuniens dans les comparaison internationales à propos des compétences mathématiques. Mais, paradoxalement, les enseignants chinois semblent avoir une formation mathématique bien inférieure à celle des enseignants étatsuniens.

d'enseignants chinois moins bien formés mais apparemment plus efficaces que leurs collègues étatsuniens et pour répondre à sa stupeur d'enseignante chinoise observant des classes dans le Michigan que Ma a entamé sa recherche.

Le contexte culturel jouant ici un certain rôle, il nous semble utile de situer le parcours de Liping Ma. Adolescente de huitième année dans la Chine de Mao, elle doit quitter Shanghai pour être « rééduquée » dans un village de montagne. Personne la plus instruite du village, elle en devient « la maîtresse », elle y enseignera durant plusieurs années avant de poursuivre ses études, en Chine, puis aux USA, à l'Université d'état du Michigan (avec Deborah Ball), et à Stanford où elle réalisera sa thèse sous la direction de Lee Shulman. A son arrivée aux USA, elle travaille au codage des entretiens que l'étude TELT (TELT, 1991) avait faits auprès d'enseignants américains au sujet de leurs connaissances mathématiques. Elle est immédiatement choquée par les réponses données et particulièrement par le faible nombre de réponses correctes (Ma, 1999, p. xviii). Elle est également marquée par un épisode durant lequel une enseignante stagiaire fait une grosse erreur au tableau noir sans que ni les élèves, ni la « praticienne-formatrice », ni le « professeur-formateur » ne la mentionne, ni même ne la remarque.

As an elementary teacher and as a researcher who worked with teachers for many years, I had developed certain expectations about elementary teachers' knowledge of mathematics. However, the expectation I had developed in China did not seem to hold in the United States⁵⁷. (p. xviii)

Le travail de Ma (1999) se situe dans la suite des développements du PCK (Shulman, 1986). Shulman était le directeur de thèse de Ma à Stanford et il a rédigé la préface de son livre. Ce travail se situe également dans le prolongement des travaux de Ball et de son équipe, en particulier du projet TELT (1991). Ma a ainsi repris le design expérimental de TELT, les données recueillies par TELT sur des enseignants étatsuniens et a conduit la même recherche en Chine afin d'aboutir à une comparaison. Le but de cette comparaison est d'abord de mieux comprendre un phénomène, celui de l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur les résultats des élèves et donc de théoriser ce phénomène. Shulman affirme dans la préface que la plus grande contribution de l'ouvrage est théorique (Ma, 1999, pp. x-xi). La notion principalement développée est celle de *Profound Understanding Of Fundamental Mathematics* (PUFM), la *Compréhension Profonde des Mathématiques Fondamentales* (CPMF)⁵⁸.

Pour Ma, les mathématiques enseignées dans les premiers degrés scolaires sont *fondamentales* en ce sens qu'elles sont à la fois au *fondement* des mathématiques, *premières* et *élémentaires*⁵⁹. Elles sont au fondement des mathématiques car elles posent les bases de l'arithmétique et de la géométrie que toutes les branches des mathématiques utilisent. Elles sont premières car elles contiennent les rudiments de bien des concepts plus élaborés : commutativité, distributivité, associativité, correspondance terme à terme, réunion (liée à l'addition), produit cartésien (lié à la multiplication), analyse (présente dans les calculs d'aire)... Elles sont enfin élémentaires car ces concepts complexes se trouvent au début de l'apprentissage mathématique et apparaissent ainsi simples et faciles (Ma, 1999, pp. 116-118).

Certains enseignants parviennent à percevoir ce caractère fondamental et ont une compréhension profonde de ces mathématiques. Ma (pp. 122-123) donne quatre propriétés de

⁵⁷ En tant qu'enseignante primaire et en tant que chercheuse ayant travaillé avec des enseignants pendant de nombreuses années, j'avais développé certaines attentes à propos des connaissances mathématiques des enseignants primaires. Pourtant les attentes que j'avais développées en Chine ne semblaient pas être celles qu'on pouvait avoir aux Etats-Unis.

⁵⁸ Ma traduction. Dans la suite de ce travail, nous utiliserons l'acronyme français.

⁵⁹ Les trois mots utilisés par Ma (1999, pp. 116-118) sont *foundational*, *primary* et *elementary*.

cette CPMF : la *connectivité*, les *multiples perspectives*, les *idées de base*, et la *cohérence longitudinale*⁶⁰.

- *Connectivité* : Un enseignant avec une CPMF fait des liens entre les concepts et les procédures mathématiques. Ces liens se retrouvent dans son enseignement et cela permet aux élèves un apprentissage non fragmenté. Au lieu d'apprendre des sujets isolés, les élèves apprennent un corps uni de savoirs.
- *Perspectives multiples* : Les enseignants disposant d'une CPMF évaluent les différentes facettes d'une idée, les différentes manières d'arriver à la solution ainsi que les avantages et les inconvénients de chacune. Ils sont capables d'en fournir des explications mathématiques et amènent ainsi leurs élèves à une compréhension souple des mathématiques.
- *Idées de base* : Ces enseignants sont conscients de la puissance des concepts mathématiques de base, par exemple celui d'équation. Ils revisitent et renforcent ces idées, ce qui non seulement encourage les élèves à entrer dans les problèmes mais surtout les conduit à une réelle activité mathématique.
- *Cohérence longitudinale* : Les enseignants avec une CPMF ne se limitent pas aux connaissances devant être enseignées une année donnée, mais ils ont une compréhension de l'ensemble du curriculum des mathématiques élémentaires. Avec cette compréhension ils sont prêts à tout moment à exploiter une opportunité de revenir sur un concept crucial étudié auparavant. Ils savent aussi ce que les élèves étudieront ultérieurement et en profitent pour poser les fondations de ces apprentissages futurs.

Ces quatre propriétés sont liées et constituent une compréhension du terrain des mathématiques fondamentales qui est profonde, étendue et détaillée (Ma, 1999, pp. 118-123).

Nous décrivons le dispositif de Ma et discuterons ses résultats en parallèle avec les nôtres en Partie B. Signalons toutefois, dans ce chapitre consacré aux comparaisons internationales, que l'ouvrage de Ma a eu un grand retentissement aux Etats-Unis où, en pleine *math war* il a fait l'unanimité, tant chez les partisans d'un enseignement des mathématiques réformé, basé sur une compréhension conceptuelle et conforme aux standards de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 1989/2000) que chez les partisans du « back to basics » (Petrou & Goulding, 2011, p. 17). Cette unanimité et la qualité de la comparaison internationale ont également permis à cet ouvrage d'être abondamment cité tout autour de la planète. Une réplique à petite échelle a en particulier été effectuée par Leung (Leung & Park, 2002; Leung, 2006, pp. 35-40) à Hong-Kong et en Corée. Récemment encore, les résultats de Ma sur les compétences mathématiques des enseignants chinois, particulièrement sur la division par une fraction, ont été développés par Li et ses collègues (Li & Huang, 2008; Li, Ma & Pang, 2008).

4.3 D'autres comparaisons des connaissances mathématiques des enseignants entre la Chine et les USA

Si l'étude de Ma (1999) laisse un peu au second plan les différences culturelles, elle dresse en fait une comparaison non seulement entre deux groupes d'enseignants ou même entre deux pays, mais bien entre deux cultures. Artigue et Winsløw (2010) ont classifié les niveaux de comparaisons des études internationales en fonction des niveaux de codéterminations didactiques développé par Chevallard (2002a, pp. 49-56). Sans pouvoir entrer ici dans une classifi-

⁶⁰ Les quatre mots utilisés par Ma (1999, pp. 116-118) sont *connectedness*, *multiple perspectives*, *basic ideas* et *longitudinal coherence*.

cation détaillée des niveaux auxquels se situent les comparaisons internationales et celle de Ma en particulier, il nous semble que celle-ci traite du niveau de la civilisation, sans toutefois prendre complètement en compte cette dimension, pas plus d'ailleurs que les aspects linguistiques, tant pour ce qui est de la traduction des questions (contrairement à ce que fait, par exemple, Cai, 2006) que de l'influence de ces aspects sur les dires des enseignants. La prise en compte de cet aspect culturel est d'ailleurs un phénomène récent (Stylianides & Delaney, 2011, p. 181) et encore peu répandu (Andrews, 2011, p. 100). L'étude ICMI 13 *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West* (Leung, Graf & Lopez-Real, 2006) se situe clairement dans cette ligne.

De nombreuses comparaisons dans le domaine de l'éducation sont en particulier menées entre la Chine et les USA. Ce phénomène, probablement lié à l'émergence de la Chine comme une superpuissance dans le domaine économique (Li & Huang, 2008, pp. 845-846), mais aussi dans le domaine de l'éducation, a suscité une littérature abondante consacrée au système éducatif chinois et en particulier à l'enseignement/apprentissage des mathématiques. Ces ouvrages donnent parfois une perspective de l'intérieur, comme *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives From Insiders* (Fan, Wong, Cai & Li, 2004) ou comparent les styles cognitifs comme *European and Chinese cognitive styles and their impact on teaching mathematics* (Spagnolo & Di Paola, 2010). Il n'est pas possible dans le cadre de cette thèse d'entrer plus avant dans une revue de littérature de cet immense sujet pour lequel les spécialistes eux-mêmes déclarent qu'ils n'ont pas (encore) de vision claire (Cai, Lin & Fan, 2004, p. 551). Nous ne retiendrons que quelques caractéristiques permettant de placer dans un contexte les comparaisons des connaissances mathématiques des enseignants chinois et étatsuniens et leur effet sur leur enseignement.

Tout d'abord, selon Cai et ses collègues, les enseignants chinois, contrairement à leurs collègues étatsuniens, tendent à demander à leurs élèves de résoudre des problèmes numériques selon une « stratégie généralisée » en vue de développer une pensée de type algébrique (Cai, 2004; Cai *et al.*, 2004; Cai & Nie, 2007). Le but ultime de la résolution de problème n'est ainsi pas pour les enseignant chinois de résoudre des problèmes, mais bien de « comprendre les mathématiques » (Wang & Cai, 2007, p. 290). Du point de vue de la pratique de classe, une grande cohérence est observée par Wang et ses collègues (Wang & Cai, 2007; Wang & Murphy, 2004). Cette cohérence est à la fois remarquée dans le discours, dans la conduite de chaque leçon durant laquelle, la plupart du temps, un seul problème est résolu de plusieurs manières (Wang & Murphy, 2004, p. 109).

Une des explications donnée par Wang et Murphy est que les enseignants primaires chinois n'enseignent généralement que les mathématiques, qu'ils n'enseignent que moins de trois heures chaque jour et passent pourtant plus de neuf heures à l'école à préparer leurs cours en groupes avec leurs collègues ou à partir des manuels (p. 116). Ces différences ont été développées dans un séminaire animé par Ma en 2010 en Californie et sont résumées dans le Tableau 3.

CHINE	USA
Les enseignants de mathématiques sont généralement des spécialistes, même au niveau primaire.	Les enseignants sont des généralistes au niveau primaire et des spécialistes au niveau secondaires.
L'enseignement est un acte public, avec des normes et des structures (temps, salles des maître par groupes d'enseignants de maths	L'enseignement est une pratique essentiellement privée avec des normes et des structures qui favorisent l'autonomie.

des mêmes degrés...) qui favorisent la collaboration).

Les enseignants collaborent beaucoup. Ils n'ont pas de salle de classe attribuée et travaillent donc dans leur salle des maîtres. Ils assistent régulièrement aux leçons données par leurs collègues et les discutent avec eux.

La profession enseignante a une structure de carrière hiérarchique avec des rangs distincts allant du novice au maître-enseignant.

Les maîtres-enseignants continuent à enseigner et exercent leurs autres responsabilités en utilisant leur classe comme base. Ce travail a lieu dans le contexte communautaire de l'école

La formation continue est insérée dans la vie quotidienne de l'école.

Un curriculum national laisse plus de temps aux enseignants pour une amélioration continue de leur préparation de leçons.

Les enseignants de l'école obligatoire sont activement impliqués dans la production de connaissances au sujet de l'amélioration de l'enseignement.

La progression dans l'échelle professionnelle est liée à la pratique de la recherche appliquée et à la publication d'articles.

Les enseignants sont très respectés.

Le nombre d'élèves par classe est de 40 à 50.

Les enseignants enseignent 2 à 3 périodes par jour. Le reste du temps est dévolu à la préparation (1/3 du temps) et à la collaboration (1/3 du temps).

La question de l'évaluation des élèves est vue comme secondaire par rapport à leur apprentissage.

Les enseignants travaillent de manière autonome. Ils préparent leurs leçons dans leur classe et n'assistent pas aux leçons de leurs collègues.

La profession enseignante n'a pas de hiérarchie claire, même si des mouvements existent en vue de la création de rôles différenciés pour les enseignants.

Les enseignants qui sont promus n'enseignent plus.

La formation continue a généralement lieu hors de la vie quotidienne de l'école.

En l'absence d'un curriculum national, les enseignants passent beaucoup de temps à mettre en parallèles les standards, le curriculum, les tests... plutôt que de développer des leçons et de réfléchir sur les leçons passées.

La recherche et la pratique sont séparées.

Les enseignants ne sont pas vraiment socialement respectés.

Le nombre d'élèves par classe est de 20 à 25.

Les enseignants enseignent toute la journée.

La réussite des élèves aux tests est essentielle.

Toute l'attention de la leçon est dirigée vers le contenu mathématique. Autrefois, les élèves participaient peu aux discussions mathématiques, mais cela a évolué.	Une partie importante de l'attention durant les cours de mathématiques n'est pas focalisée sur les mathématiques.
Les futurs enseignants primaires de mathématiques ont les mathématiques comme branche principale à leur formation.	Les futurs enseignants primaires ont des résultats en mathématiques inférieurs à ceux de la moyenne des autres étudiants.
La formation primaire se fait dans des écoles normales après l'école obligatoire. Durant ces études l'étude du contenu mathématique est plus importante que celle de la pédagogie.	La formation en mathématiques durant les études pour l'enseignement primaire (niveau bachelor) est généralement équivalente à un cours de 6h sur 1 semestre, elle peut aller jusqu'à 12h.

Tableau 3 : Différences dans la profession d'enseignant de mathématiques entre la Chine et les USA, adapté et traduit de (Ferrerias, Olson & Sztein, 2010)

Nous reviendrons en conclusion de cette thèse (Partie D) sur les différences ainsi mises en évidence en Chine et USA et sur leurs implications pour la formation initiale et continue des enseignants. Toutefois, ce qui frappe immédiatement, c'est que les caractéristiques professionnelles des enseignants vaudois sont proches de celles des enseignants étatsuniens, voire s'éloigne encore plus de celles des enseignants chinois (encore moins de crédits de mathématiques en formation initiale, pratique encore plus « privée » de l'enseignement⁶¹, formation continue encore moins présente...).

Une autre particularité des enseignants chinois par rapport à leurs collègues étatsuniens et qu'une des compétences professionnelles essentielles pour les enseignants chinois est de pouvoir comprendre de manière détaillée les connaissances mathématiques du manuel et de pouvoir construire des leçons à partir du manuel (Wang & Cai, 2007). Cette importance de l'usage du manuel est également relevé par Li (2004) à propos de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Li met particulièrement en évidence le fait que les manuels sont des textes qui font autorité car ils étaient traditionnellement du ressort de l'administration scolaire, tout comme les plans d'études (p. 263).

⁶¹ Cette constatation repose sur les visites de classes effectuées dans le canton de Vaud où il n'arrive quasiment jamais qu'un autre enseignant observe une leçon alors que, lors mon séjour dans la région de Boston en 2003-2004, j'ai été chaleureusement accueilli dans plusieurs classes de plusieurs écoles, y croisant parfois d'autres observateurs.

Chapitre 5 La place de l'enseignant dans les modélisations proposées par la didactique des mathématiques francophone

Despite our expressed intention to focus on knowledge use, our categories seem static. [...] How knowledge is actually used and what features of teacher thinking shape its use remain tacit and unexamined. How to capture the common and specialized aspects of teacher thinking, as well as how different categories of knowledge come into play in the course of teaching, needs to be addressed more effectively in this work. (Ball *et al.*, 2008, p. 403)

Les chapitres précédents ont bien montré que la question des connaissances mathématiques des enseignants était vive, tant aux USA qu'au plan international. Cependant, si cette thématique est présente dans la culture francophone, en particulier au Québec, elle y a moins d'écho. De plus, si certaines recherches, notamment celles autour de Ball, ont permis de théoriser de façon fine et convaincante la question des connaissances mathématiques des enseignants (Bednarz & Proulx, 2009, p. OSV1), les outils mis en place pour mesurer les connaissances des enseignants ne parviennent que très difficilement à déterminer comment ces connaissances sont mises en jeu dans le déroulement de l'enseignement (Ball *et al.*, 2008, p. 403).

Or, pour traiter cette question de la « mise en jeu des connaissances dans le déroulement de l'enseignement », les outils de la didactique française⁶² des mathématiques permettent une approche d'un autre point de vue, en particulier grâce aux travaux étudiant le rôle de l'enseignant.

Dans un premier temps, l'approche de l'enseignant par la didactique française des mathématiques sera replacée dans son contexte historique. Deux modèles développés dans le cadre de la *Théorie des Situations Didactiques* seront ensuite décrits, la structuration du milieu (Chapitre 6) et la pertinence mathématique (Chapitre 7).

La *Théorie des Situations Didactiques* (TSD), formulée progressivement par Brousseau (Brousseau, 1986) dès les années 1970 en terme de théorie des jeux, s'est d'abord axée sur la modélisation de situations d'apprentissage quasi isolées, ne se préoccupant pas de modéliser le rôle du professeur (Bloch, 2005, pp. 59-61). La modélisation s'est surtout centrée sur le couple connaissance/savoir. En ce sens, dans les modélisations, l'élève et surtout l'enseignant étaient considérés comme génériques, en quelque sorte transparents (Dorier, à paraître, p. 13). L'importance de l'ingénierie didactique dans la construction de cette théorie, et le rôle qui y est assigné au professeur ont rendu difficile l'émergence du professeur en tant qu'acteur de la situation didactique (Margolinas, 2004, pp. 15-23). Mais la difficulté de la diffusion des ingénieries didactiques a montré la nécessité de prendre en compte dans la modélisation les élèves et le professeur (Dorier, à paraître, p. 13) Des travaux sur la modélisation du professeur dans la TSD, et sur son rôle dans la dévolution et la gestion des phases des situations à dimension adidactique, ont vu le jour dans les années 90⁶³. Selon Bloch (1999, p. 139), il y a là d'une part la possibilité de permettre l'étude de la contingence, en particulier en

⁶² Si les développements de la didactique des mathématiques francophone ne peuvent se réduire au travaux réalisés en France, ceux-ci sont très largement dominants et nous utiliserons le terme courant de didactique *française* plutôt que de didactique *francophone*.

⁶³ On peut signaler qu'un développement semblable de l'intérêt pour l'enseignant dès les années 1980 est remarqué par da Ponte et Chapman au niveau international dans les études de l'*International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (da Ponte & Chapman, 2006).

tentant d'identifier les connaissances dont l'enseignant a besoin pour gérer une situation d'enseignement/apprentissage, avec une manière d'entrer dans la modélisation des situations didactiques mais aussi ordinaires :

L'idée est que l'observation des situations d'enseignement/apprentissage ne se fasse plus par seule référence aux connaissances, erreurs, conceptions... de l'élève, mais par une reconnaissance d'interactions. [...] En ce sens il est possible de rapporter, dans une certaine mesure, l'activité de l'élève à celle de l'enseignant, (et réciproquement) et de regarder ce que nous apprennent ces activités sur la situation et sur le milieu - ainsi bien sûr que ce que nous apprend le milieu sur les connaissances que peut y rencontrer l'élève, et sur celles que doit y porter l'enseignant. Autrement dit il s'agit de prendre en compte, dans la situation, le *fonctionnement cognitif* du professeur, comme on prend en compte celui de l'élève. Cette analyse de l'activité mathématique peut d'ailleurs être étendue à tous types de situations, et si nous continuons à privilégier la recherche de situations didactiques pour l'enseignement de l'analyse, il nous paraît que les critères "activité, pratiques" peuvent s'avérer efficaces pour l'observation de situations "ordinaires" d'enseignement/apprentissage. (Bloch, 1999, p. 146)

Pour Margolinas, le professeur n'est plus seulement « un élément du dispositif permettant la réalisation de situations », mais bien « un sujet dont on cherche à étudier l'activité (2002b, p. 141). Robert (2008b, pp. 20-21) relève que cet intérêt pour l'enseignant se marque également dans les autres théories didactiques : théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), théorie de l'action conjointe (Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni, 2000), double approche (Robert, 2008a).

En ce qui concerne les recherches sur les connaissances mathématiques des enseignants, Cherix et ses collègues citent plusieurs recherches (Cherix, Conne, Daina, Dorier & Fluckiger, à paraître) se situant dans la cadre de la double approche. Le travail de Pian (1999), consacré aux connaissances mathématique d'étudiants préparant le CAPES, montre la difficulté à créer des liens entre ces connaissances et les connaissances à enseigner. La recherche de Grugeon (2008) analyse l'évolution de la pratique d'un stagiaire en IUFM et l'impact de sa formation en didactique des mathématiques sur les séances de classe. Pour sa part Robert (2001; 2005) a montré à quel point les connaissances mathématiques étaient peu activées dans le travail de préparation des séances de classe d'enseignants débutants du second degré.

La question de la place de l'enseignant et de la mise en évidence de ses connaissances sont développées dans les modèles que nous utiliserons : la structuration du milieu décrite au Chapitre 6 et la pertinence mathématique développée au Chapitre 7.

Chapitre 6 Le milieu et sa structuration

Le développement des études sur l'enseignant dans la TSD est en particulier marqué par les efforts visant à mieux définir le milieu et à mieux distinguer le milieu vu du point de vue de l'élève et le milieu vu du point de vue de l'enseignant. De plus cette structuration du milieu « s'attache à préciser les connaissances des acteurs impliqués dans la situation, à chaque niveau de celle-ci » (Bloch, 1999, p. 142), elle peut donc permettre de structurer cette recherche.

6.1 Niveaux d'activité et structuration du milieu

Le milieu est défini par Brousseau (2003) comme « tout ce qui agit sur l'élève ou/et ce sur quoi l'élève agit ». Brousseau propose le schéma suivant :

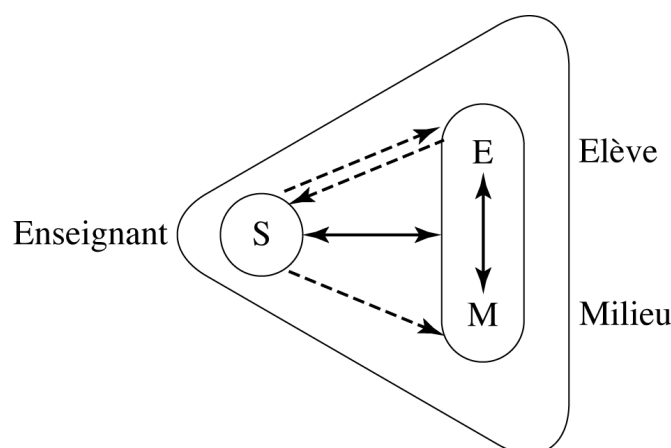


Figure 7 : Le milieu du professeur (Brousseau, 1986, p. 88)

« L'interaction principale du professeur s'effectue avec un système lui-même composé de l'interaction élève-milieu. Ce schéma correspond au niveau de la situation didactique. Mais il s'agit là d'un milieu pour le professeur [...] » (Margolinas, 2002b, p. 144). Brousseau propose alors un modèle d'emboîtement des milieux pour l'analyse de situations effectives.

Dans ces situations, [les situations didactiques réelles], nous pouvons distinguer au moins quatre personnes, quatre sujets distincts auxquels l'élève peut s'identifier et donc cinq milieux avec lesquels il peut interagir selon des modes différents. Ces milieux étant emboîtés, nous les décrirons comme des niveaux du "milieu" de l'élève. » (Brousseau, 1986, p. 40)

On a ainsi un emboîtement de situations dont chacune sert de milieu à la suivante (Brousseau, 2003), une structure d'*oignon* (voir Figure 8).

Dans la perspective d'une étude plus approfondie de l'activité du professeur dans de telles situations, en vue de « décrire le professeur comme un sujet dont les connaissances lui permettent d'interagir avec un milieu, qui en retour permet de transformer ses connaissances, c'est à dire d'apprendre » (Margolinas, 2002b, p. 143), Margolinas précise les niveaux d'activité du professeur à chaque niveau du milieu :

P ₊₃	Niveau noosphérique ou idéologique	[...] activité du professeur qui réfléchit de façon très générale à l'enseignement, ou bien, toujours en général, à l'enseignement des mathématiques. A ce niveau, l'activité du professeur n'est pas finalisée.
P ₊₂	Niveau de construction ou de conception d'un thème	[...] activité du professeur est de concevoir les grandes lignes de l'enseignement d'un thème. Du point de vue de l'ingénierie didactique, c'est à ce niveau qu'intervient de façon caractéristique la recherche d'une situation fondamentale. Si l'on considère l'observation des pratiques ordinaires, on pourrait parler à ce niveau de recherche de problématique.
P ₊₁	Niveau de projet de leçon	[...] activité du professeur qui détermine le scénario d'une leçon.
P ₀	Niveau de la situation didactique	[...] action du professeur en classe. Il s'agit du <i>niveau de base</i> dans lequel les élèves et le professeur interagissent es-qualité ; et c'est pourquoi il reçoit le numéro zéro.
P ₋₁	Niveau d'observation ou de dévolution	[Niveau] de la dévolution ou de l'observation de l'activité des élèves.

Tableau 4 : Niveaux d'activité du professeur, d'après (Margolinas, 2002b, p. 142)

Elle précise également qu'il ne s'agit pas d'un modèle temporel mais d'un modèle structurel permettant « une multiplicité d'interprétation de l'activité du professeur du point de vue temporel » (p. 143). Elle souhaite surtout insister sur le fait que le professeur, dans une position donnée, est toujours en interaction avec le niveau supérieur (et les niveaux supérieurs) et le niveau inférieur (et les niveaux inférieurs).

Grâce à l'observation de l'activité des élèves (Niveau -1), le professeur peut prendre des décisions en classe (Niveau 0) qu'il n'avaient pas anticipé, mais aussi transformer sa séquence (Niveau +1) voire sa conception du thème mathématiques (Niveau +2) et même une de ses idées sur l'enseignement en général (Niveau +3). (Margolinas, 2002b, p. 143)

Pour tenir compte de cette complexité, elle élargit et modifie le modèle initial dans la perspective d'une étude plus approfondie de l'activité du professeur, les rôles de l'enseignant et de l'élève deviennent ainsi symétriques. Margolinas (1995, 2002b) présente ainsi le modèle sous la forme d'un tableau qui, s'il fait moins apparaître l'emboîtement, permet de hiérarchiser les situations et de mettre en évidence les symétries.

M ₊₃ : M-Construction		P ₊₃ : P-Noosphérique	S ₊₃ : Situation noosphérique
M ₊₂ : M-Projet		P ₊₂ : P-Constructeur	S ₊₂ : Situation de construction
M ₊₁ : M-Didactique	E ₊₁ : E-Réflexif	P ₊₁ : P-Projeteur	S ₊₁ : Situation de projet
M ₀ : M-Apprentissage	E₀ : Elève	P₀ : Professeur	S₀ : Situation didactique
M ₋₁ : M-Référence	E ₋₁ : E-Apprenant	P ₋₁ : P-Observateur	S ₋₁ : Situation d'apprentissage
M ₋₂ : M-Objectif	E ₋₂ : E-Agissant		S ₋₂ : Situation de référence
M ₋₃ : M-Matériel	E ₋₃ : E-Objectif		S ₋₃ : Situation objective

Tableau 5 : Structuration du milieu (Margolinas, 2002b, p. 145)

Les situations ne sont pas réduites au temps de la leçon en classe, même si certaines phases d'une situation didactique sont partiellement caractérisées par des situations de niveaux différents. Elles ne sont pas non plus temporellement successives (Margolinas, 1995, p. 96) et chaque niveau peut être considéré dans le présent de l'action, mais aussi dans le passé ou le futur. Par exemple, durant le travail en classe, le professeur peut travailler au niveau +1 en projetant une future leçon ou en se souvenant de son travail passé de préparation. De la même manière, il est en tension entre son ambition, qu'elle concerne la leçon (niveau +1), le thème

(niveau +2) ou plus généralement l'enseignement (niveau +3) et ce qu'il pense que les élèves pourront répondre (niveau 0) ou la façon dont il souhaite les observer (niveau -1) (Margolinas, 2004, p. 75).

6.2 Analyse ascendante et analyse descendante

Cette présentation permet de déterminer les situations S_i soit par une analyse ascendante, du point de vue de l'élève, de S_{-3} à S_0 , soit par une analyse descendante, de S_3 à S_0 , du point de vue du professeur. En effet, suivant l'idée de Perrin-Glorian, on peut

[...] considérer qu'à chaque instant l'enseignant interagit avec deux milieux: d'une part le milieu constitué par l'élève agissant sur son propre milieu contenant lui-même tous les niveaux de rang inférieur [...] d'autre part en se plaçant à un niveau donné, l'enseignant interagit aussi avec les milieux de niveaux surdidactiques, emboîtés dans l'autre sens. (1999, p. 305)

La situation S_0 a alors un statut particulier car le milieu M_0 est déterminé à la fois par les niveaux de rang inférieur et par les milieux surdidactiques. Dans son cours de la 11^{ème} école d'été de didactique, Margolinas (2002b, pp. 145-148)⁶⁴ obtient ainsi quatre nouvelles composantes du milieu de la situation S_0 . Pour cette détermination, la double référence, à la représentation en tableau ci-dessus et à la représentation en oignon nous semble nécessaire. Rappelons que le milieu M_i est constitué du triple $(M_{i-1}; E_{i-1}; S_{i-1})$ du niveau inférieur. Ce qui donne pour les milieux voisins de M_0 :

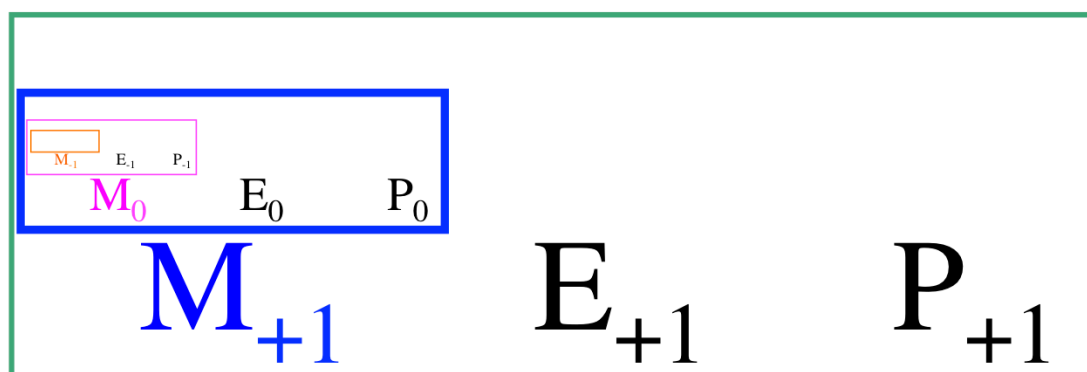


Figure 8 : Emboîtement des milieux -1 à +1

Cette détermination nous permettra d'analyser le rôle joué par les connaissances mathématiques dans certaines situations de classe que nous avons observées.

En position 0, le maître et l'élève sont en interaction avec le milieu M_0 . Pour l'élève, il est milieu d'apprentissage. Pour le professeur, il s'agit d'un milieu d'observation $M_0 = (M_{-1}; E_{-1}; S_{-1})$.

⁶⁴ Un CD-ROM accompagne ces actes et les schémas d'emboîtement de la structuration du milieu y sont plus détaillés que dans la version papier de l'article.

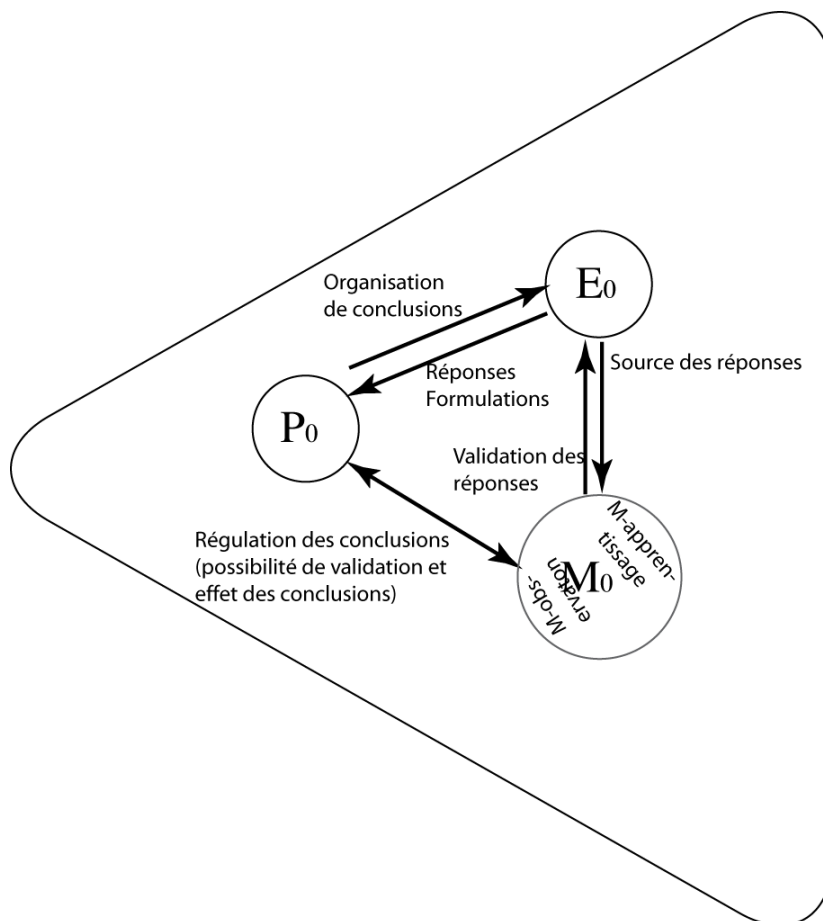


Figure 9 : Situation didactique S_0 , détermination par l'analyse ascendante, d'après Margolinas⁶⁵ (2002b, p. 146)

Mais le maître et l'élève sont aussi en interaction avec leur position de niveau supérieur. Pour l'élève, il s'agit de E-Réflexif et pour le maître de P-projeteur. Ce qui donne respectivement un composant réflexif et un composant projecteur à cette partie supérieure du milieu M_0 .

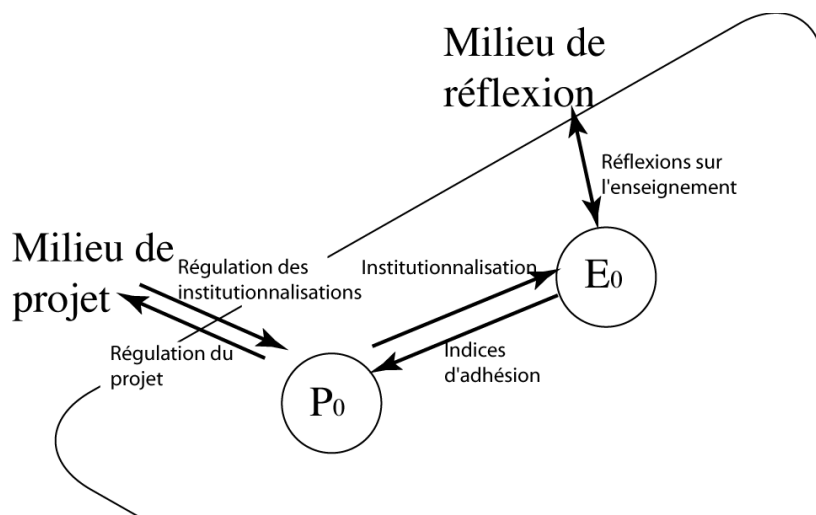


Figure 10 : Situation didactique S_0 , détermination par l'analyse descendante, d'après Margolinas⁶⁶ (2002b, p. 147)

⁶⁵ Nous avons choisi de replacer les sommets du triangle dans la même position que le schéma de Brousseau en Figure 7 et avons précisé le sens des flèches entre E_0 et le milieu d'apprentissage.

On peut réunir ces deux schémas dans un développement de la structure d'oignon :

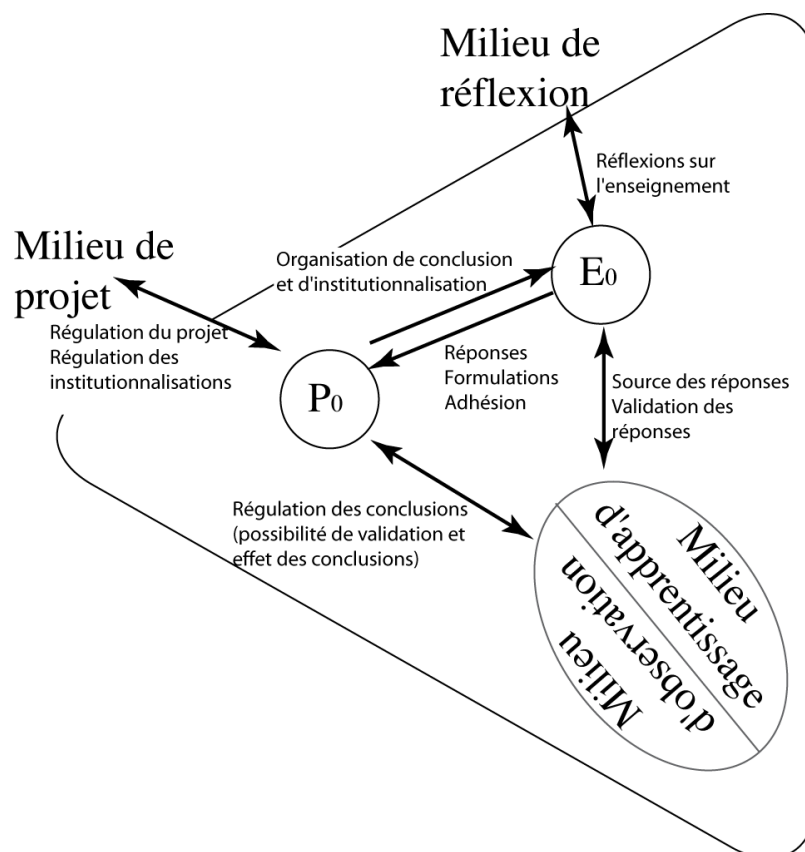


Figure 11 : Les milieux de la situation didactique S_0

La fonction du professeur est ici à la fois de conclure (ce qui provient de l'analyse ascendante) et d'institutionnaliser (ce qui provient de l'analyse descendante). La dimension chronogénétique de la situation apparaît dans les interactions entre P_0 et le milieu de projet, ainsi que dans celle de E_0 avec le milieu de réflexion. La dimension topogénétique intervient elle dans la distinction des différentes composantes du milieu (Margolinas, 2002b, p. 147). Plus simplement, on peut résumer tout ceci dans un tableau :

S_0 Situation didactique	E_0	M-réflexion	M-projet	P_0	S_0 Situation didactique
		M-apprentissage	M-observation		

Tableau 6 : Situation didactique S_0 , détermination par l'analyse descendante (Margolinas, 2002b, p. 147)

Margolinas (2002a) donne de la même manière la détermination des situations S_{+1} ; S_{+2} ; S_{+3} et S_{-1} que nous résumons ici sous la seule forme tableau :

⁶⁶ Nous avons choisi de replacer les sommets du triangle dans la même position que le schéma de Brousseau en Figure 7 et avons précisé le sens des flèches entre P_0 et le milieu de projet.

		M-(construction)thème	P ₊₃ P-Noosphérien	S ₊₃ Situation noosphérienne
		M-idéologique	P ₊₂	S ₊₂
		M-projet de séquence	P-Constructeur	Situation de construction
E ₊₁ E-Réflexif		M-thème	P ₊₁	S ₊₁
	M-didactique	M-état didactique	P-Projeteur	Situation de projet
E ₀ Elève	M-réflexion	M-projet	P ₀ Professeur	S ₀ Situation didactique
	M-apprentissage	M-observation		
E ₋₁ E-Apprenant	M-didactique	M-décisions didactiques	P ₋₁	S ₋₁
	M-référence		P-Observateur	Situation d'apprentissage
E ₋₂ E-Agissant	M-objectif			S ₋₂ Situation de référence
E ₋₃ E-Objectif	M-Matériel			S ₋₃ Situation objective

Tableau 7 : Composantes des milieux d'après (Margolinas, 2002a). Les milieux surlignés correspondent à la version « simple » de la structuration présentée dans le Tableau 4

Des analyses descendantes et ascendantes ont été réalisées dans plusieurs articles, par exemple (Comiti, Grenier & Margolinas, 1995), (Margolinas, 1995), (Margolinas, 1998), (Perrin-Glorian, 1998), (Bloch, 1999), (Margolinas, 1999), (Coulange, 2001), (Perrin-Glorian & Hersant, 2003), (Margolinas *et al.*, 2005).

6.2.1 Analyse descendante

L'analyse descendante est centrée sur l'activité du professeur. Elle permet d'appréhender la façon dont l'enseignant perçoit la situation d'enseignement et ses intentions didactiques. Elle présente un caractère *a priori* relativement aux faits observés (Coulange, 2001, p. 320). Les niveaux +3 à +1 sont réalisés, les niveaux inférieurs sont projetés (Perrin-Glorian, 1998, p. 28). Cette analyse constitue le point de vue du professeur. Ce point de vue est construit avant la réalisation en classe et sert de filtre au travers duquel le professeur est susceptible de prendre des décisions et d'interpréter les actions des élèves (Margolinas, 2004, p. 78). Du point de vue de la méthode, on s'appuie le plus souvent sur le protocole de l'entretien avec les enseignants. Ce « choix de méthode ne donne qu'un accès partiel au projet préalable de l'enseignant » (Coulange, 2001, p. 320).

6.2.2 Analyse ascendante

L'analyse ascendante présente « la caractéristique évidente d'une analyse *a priori*, dans le sens qu'elle ne dépend pas des faits d'expérience ou d'observation » (Margolinas, 1994, p. 30). Les connaissances des élèves sont moins complexes que celles de l'enseignant, toutefois elles ne sont pas de nature uniquement mathématique, mais aussi de l'ordre des « règles pérennes du contrat didactique » (Coulange, 2000, p. 246). Cette analyse est effectuée du point de vue de l'élève générique. Au sens strict, ce point de vue correspond à la constitution de la position E₀. Selon l'hypothèse faite par Margolinas, « on peut considérer une temporalité di-

dactique dans laquelle les positions E_{n-1} sont passées et les positions E_{n+1} sont à venir » (1998), et donc partir de la position E_{-3} pour déterminer E_0 .

Lorsque l'activité ne met en jeu que des savoirs très anciennement institués, le niveau -3 n'implique que des connaissances naturalisées, le niveau -2 ne fait appel qu'à des connaissances stables, réactualisées par la situation, le niveau -1 est absent. De telles situations sont appelées *nildidactiques* (Margolinas, 2004, p. 65).

6.2.3 Bifurcations didactiques

Cette analyse ascendante du point de vue de l'élève conduit parfois à déterminer une ou plusieurs situations S_0 qui ne correspondent pas à la situation S_0 déterminée par analyse descendante du point de vue du professeur. Margolinas (2004) parle alors de *bifurcations didactiques* et considère les situations S_{-3} , S_{-2} , S_{-1} déterminées successivement et aboutissant à la situation S_0 du professeur comme une *branche principale* et les éventuelles autres branches comme des *branches marginales*. Ces branches peuvent être adidactiques ou nildidactiques et conduire au niveau +1 à des tensions entre P_{+1} et E_{+1} , tensions considérées du point de vue du professeur comme des malentendus, et du point de vue de l'élève comme une rupture du contrat didactique, puisque le professeur n'a pas fourni le bon problème pour l'apprentissage du savoir visé (pp. 85-87).

6.3 Structuration du milieu et étude cognitive

Nous nous intéressons au professeur et à ses connaissances mathématiques. Nous considérons donc essentiellement les milieux du professeur. La situation du professeur n'a pas été conçue pour que ce dernier apprenne. Elle est donc non didactique (Margolinas, 2002b, p. 154). Toutefois l'enseignant peut « se mettre en situation réflexive sur son action et apprendre de la situation d'enseignement » (Perrin-Glorian, 1999, p. 305). Margolinas propose ainsi de reprendre, pour le professeur, l'idée de deux natures possibles du milieu introduite par Fregona (1994) : antagoniste et allié⁶⁷. Elle en donne les définitions suivantes :

On dira qu'un milieu est de nature antagoniste s'il est susceptible de produire des rétroactions sur les connaissances du sujet. On dira qu'un milieu est de nature allié s'il ne permet que l'action du sujet, mais n'est pas susceptible de produire des rétroactions. (Margolinas, 2002b, p. 148)

Margolinas (2002b, p. 149) pose alors l'hypothèse que, dans les situations S_0 , S_{+1} et S_{+2} , les milieux inférieurs sont des milieux antagonistes pour le professeur, alors que les milieux supérieurs sont le plus souvent des milieux alliés.

Le cadre de Margolinas (2002b) est alors en place pour étudier les connaissances du professeur en situation :

Quand nous parlons de professeur ou d'élève, c'est en fait des connaissances de ces sujets que nous parlons. Ce sont les connaissances du sujet qui lui permettent d'agir sur un milieu, la rétroaction du milieu pouvant conduire à une modification de ces connaissances (l'apprentissage). Comme tout sujet, dans l'interaction avec un milieu, le professeur utilise et produit des connaissances. Ce sont ces connaissances qui vont nous intéresser ici. (p. 149)

⁶⁷ Bloch propose plutôt le terme *amorphe* car « n'ayant pas de connaissance cristallisée à l'intérieur de lui, si bien qu'il ne renverra rien sur une connaissance spécifique, puisqu'il n'est pas structuré en fonction de cette connaissance » (2005, p. 57).

Ces interactions ont été schématisées par Coulange (Figure 12).

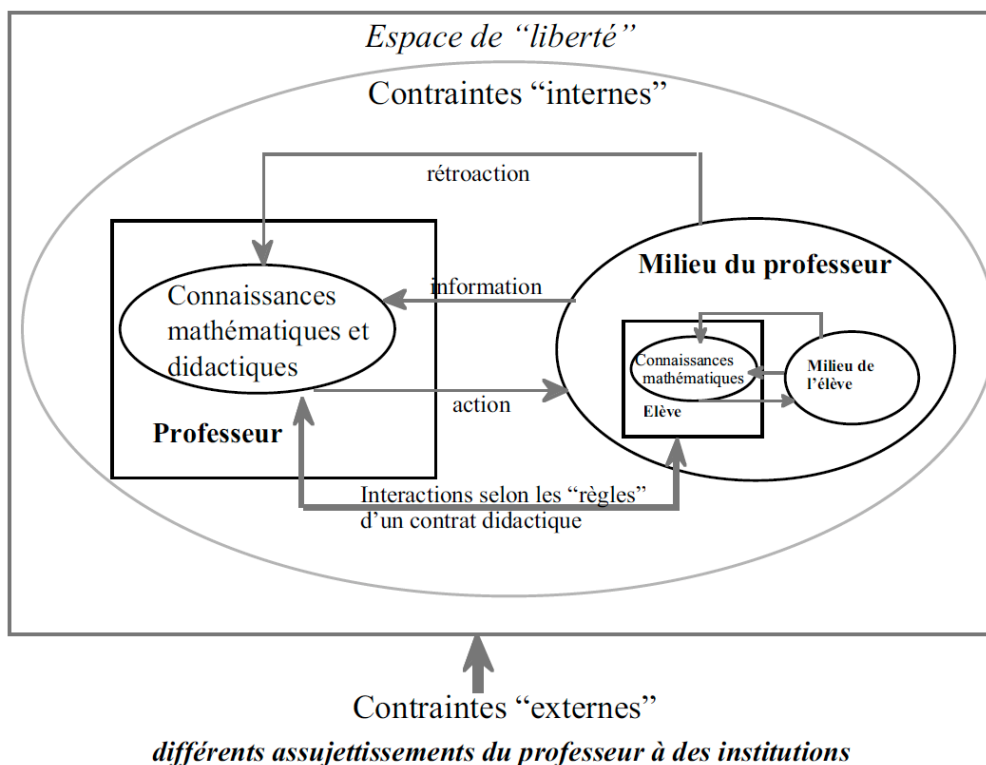


Figure 12 : Modèle de la situation du professeur (Coulange, 2000, p. 6)

Nous analyserons donc les épisodes de nos observations en déterminant à quel niveau d'activité du professeur l'enseignant se situe, avec quel milieu il est en interaction et quelles sont les connaissances mathématiques qu'il utilise, voire produit. Ce type d'analyse a été effectué par exemple par Comiti, Grenier et Margolinas (1995), Margolinas (2002b, pp. 150-153); Coulange (2001) ou Margolinas, Coulange et Bessot (2005). Selon Robert (2008b, p. 20), « ce type d'investigation assez globale ne [prend pas] en compte la chronologie des séances ni surtout leur déroulement précis ». Nous ne partageons pas ce point de vue⁶⁸ et tenterons de l'infirmer en intégrant la chronologie des séances dans notre analyse. Notre particularité sera de plus de nous focaliser sur les *connaissances mathématiques pour l'enseignement* (voir 3.2), et de les interroger à la lumière du concept de pertinence qui sera développé dans le prochain paragraphe.

⁶⁸ Voir par exemple (Coulange, 2000, chapitre C3)

Chapitre 7 La pertinence mathématique du professeur

Nous avons constaté (voir en particulier 2.2 ou 3.2.2) la difficulté d'évaluer les connaissances mathématiques des enseignants, et plus encore de quantifier leur influence sur les résultats des élèves. Nous avons vu également l'appel venu des Etats-Unis pour déterminer « what knowledgeable teachers do in classrooms—or how knowing mathematics affects instruction » (Hill *et al.*, 2005, p. 401). Cette question de l'effet sur l'enseignement, plutôt que sur l'apprentissage, ne peut pas, à notre avis, être complètement traitée par les méthodes quantitatives principalement utilisées outre-Atlantique. La didactique *française* des mathématiques propose des approches permettant de traiter cette interrogation de l'effet sur l'enseignement, en particulier grâce à la structuration du milieu, mais aussi grâce au concept de pertinence introduit par Bloch (2009).

7.1 Origines et définition du concept de pertinence chez Bloch

La constatation de la difficulté du passage entre les études universitaires et la pratique de l'enseignement est assez généralement partagée. Bloch (2009) cite en particulier les importantes difficultés rencontrées par les professeurs français ayant réussi leur CAPES⁶⁹ de mathématiques et qui rencontrent d'importantes difficultés dans leurs premières tentatives d'enseignement. Une part importante de ces difficultés est due à « une conception très formelle des mathématiques, qui leur interdit d'envisager des "mises en scène" du savoir mathématique, ainsi que de comprendre les procédures d'élèves rencontrées dans leurs classes » (p. 27). Cette conception formelle, ainsi que le manque de connaissances disponibles⁷⁰, sont mis en évidence par Pian (1999, p. 12) à propos d'étudiants de CAPES. Dans la même veine, Robert (2001) insiste sur le fait que ces connaissances sont « insuffisantes, trop isolées, manifestées en des productions écrites dont, affirment certains, le "sens" est trop souvent absent » (p. 74).

Il s'agit donc, pour la formation de ces jeunes enseignants, de faire évoluer leur épistémologie personnelle (Bloch, 2009, p. 29). Cette épistémologie se manifeste par le refus de rédiger complètement une solution d'exercices, par la difficulté à prévoir des exercices sur un thème donné et à anticiper des procédures d'élèves, par un manque de tolérance aux formulations des élèves vues comme non conformes à l'écriture mathématique correcte (p. 29).

En vue de faire évoluer ce contrat, Bloch propose une mise en œuvre de situations ouvertes en formation. Afin d'observer l'évolution du contrat, elle observe l'évolution de la pertinence mathématique des interventions du professeur.

Une intervention mathématique est pertinente si elle rend compte dans une certaine mesure de la fonctionnalité de l'objet mathématique visé ; ou, s'agissant d'enseignement, si elle permet au moins de progresser dans l'appréhension de cette fonctionnalité, avec des énoncés de propriétés mathématiques contextualisées ou non, des arguments appropriés sur la validité de procédures ou sur la nature des objets mathématiques. (2009, p. 32)

⁶⁹ Concours du certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré.

⁷⁰ « Ce niveau se réfère à la possibilité de savoir, d'une part résoudre ce qui est proposé sans indication, en allant rechercher seul dans ses connaissances ce qui peut intervenir, d'autre part de pouvoir construire des contre-exemples, appliquer des méthodes non prévues, changer de point de vue. Ce niveau est lié à une organisation des connaissances, à la possibilité de se servir de situations de référence. L'étudiant est autonome, découvre ou redécouvre seul un savoir nouveau. » (Pian, 1999, p. 10)

7.2 Critères de la pertinence mathématique

Cette pertinence peut être évaluée indirectement par les effets de cette intervention sur les « actions ou formulations nouvelles des élèves qu'a permis l'intervention » (Bloch, 2009, p. 32). Cependant, il faut signaler que, le plus souvent, l'identification de la pertinence passe par la mise à jour de son manque (Bloch, 2009, p. 32).

Par le moyen d'une étude de cas, Bloch établit des critères permettant de déterminer plus directement la pertinence mathématique des interventions du professeur. Ces trois critères, peu nombreux afin de rendre possible leur identification en classe, sont valables pour les mises en œuvre de situations complexes comportant une dimension adidactique (C1 à C3) et pour les séances *ordinaires* (C1 et C2) :

- C1 est la capacité à interagir avec les élèves sur des éléments mathématiques de la situation et à encourager l'activité des élèves par des interventions et des retours sur leur production mathématique ;
- C2 est la tolérance aux formulations provisoires et approximatives, aux expressions dans l'action, et la capacité à reconnaître les idées mathématiques qui sont incluses dans des ostensifs non canoniques ;
- C3 est l'aptitude à conduire la situation à son terme avec une phase de débat et validation ; ceci inclut la capacité à sélectionner des formulations et à en laisser d'autres de côté, et à gérer la chronologie du débat sans le tuer par l'énoncé immédiat des meilleures productions ou du savoir visé. (Bloch, 2009, p. 33)

Ces critères de pertinence peuvent être rapprochés d'autres modélisations permettant de lier les connaissances de l'enseignant au déroulement effectif des leçons, par exemple la description en terme de résonance des interventions d'élèves sur le projet du professeur (Comiti *et al.*, 1995, pp. 103-104).

7.3 Adaptation des critères de pertinence

Les critères développés par Bloch (2009) et plus généralement son analyse (1997) ont été développés pour de jeunes enseignants du secondaire, sortant d'une formation de mathématiques et pour la modélisation de situation adidactique. Il est donc nécessaire d'examiner s'ils sont adéquats pour l'enseignement primaire et pour un enseignement ordinaire –souvent ostensif– et, le cas échéant, envisager leur adaptation.

7.3.1 Primaire

En ce qui concerne les connaissances mathématiques des enseignants, Bloch (1997, pp. 16-17) estime que le problème se pose à peu près dans les mêmes termes au primaire qu'au secondaire en ce qui concerne le contrôle de l'activité mathématique des élèves, malgré l'absence de formation mathématique universitaire des professeurs. Perrin-Glorian, de son côté, considère que la question du savoir mathématique du professeur est encore plus cruciale au primaire pour trois raisons :

- les savoirs sont naturalisés et automatisés
- les mathématiques sont souvent moins visibles car imbriquées dans des contextes concrets
- les enseignants ont une formation initiale très diverse en mathématiques (Perrin-Glorian, 2008, p. 24).

Ces trois caractéristiques ne sont pas en contradiction avec les définitions de Bloch. La définition de la pertinence et les critères ne comportant effectivement pas d'éléments particuliers à l'enseignement secondaire, une adaptation ne semble pas nécessaire.

7.3.2 Ostension

L'utilisation de connaissances mathématiques par l'enseignant, ainsi que les possibilités d'apprentissage pour lui, apparaissent essentiellement lors des phases didactiques, et plus particulièrement lors du

[...] débat sur les critères de validité. En effet c'est lors de cette phase que les connaissances et savoirs mathématiques sont discutés publiquement dans la classe, et qu'ils ont la possibilité d'être éprouvés, confrontés au milieu mis en place par le professeur et régulé par ses soins. Or les élèves doivent disposer de temps, et d'un milieu résistant, pour éprouver les critères; il en résulte que :

— soit le milieu prévu est suffisant, ce qui signifie que le professeur a mis en place, d'emblée, un milieu complexe, suffisamment riche pour être éprouvé et résister aux tests sur les critères de validité; il s'agit donc d'un professeur qui dispose des connaissances nécessaires sur la situation (bien que l'on puisse considérer que ces connaissances vont s'actualiser dans le jeu de cette situation);

— soit il s'avère insuffisant, et le professeur devra réagir en adaptant et en complexifiant le milieu, auquel cas cette adaptation lui apportera des connaissances sur la situation.

Mais dans les deux cas, le milieu comporte bien des critères de validité, et un débat possible sur l'efficacité de ces critères. Nous soutenons que là peut être l'origine de l'apprentissage du professeur. (Bloch, 1999, p. 169)

En revanche, dans un enseignement magistral ou dans un enseignement par ostension,

le professeur n'utilise pas, à supposer qu'il les possède, ses connaissances sur ces notions : il n'a pas à le faire, car rien dans la situation, ni le milieu, ni les élèves [...] ne le sollicite. Il ne les construit bien évidemment pas non plus, si c'était nécessaire.

Le professeur dans ce cas, en fin d'apprentissage, vise exactement l'utilisation, par les élèves et par lui-même, des mêmes connaissances. (p. 172)

Afin de discuter cette affirmation, il semble nécessaire de rappeler quelques définitions du procédé d'ostension et de distinguer les types d'ostension.

L'enseignement par ostension part de l'idée que pour enseigner, il suffit de montrer ce qu'il faut faire. Plus précisément Ratsimba-Rajohn (1977) définit la présentation ostensive comme la donnée par l'enseignant de « tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée ». Les particularités d'un contrat d'ostension ont été décrites par Brousseau :

Le professeur "montre" un objet, ou une propriété, l'élève accepte de le "voir" comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. La communication de connaissance, ou plutôt de reconnaissance, ne passe pas par son explicitation sous forme d'un savoir. (Brousseau, 1997, p. 50)

Berthelot et Salin (par exemple (Berthelot & Salin, 1993-1994)) ont bien montré la prégnance de ce type de pratique dans l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et au collège et Salin (1999) a décrit des pratiques d'« ostension assumée » et d'« ostension déguisée ». La plupart des auteurs ont également démontré le peu d'efficacité de ce type d'enseignement en mathématiques, mais il faut bien reconnaître avec Brousseau que, « bien que fondé sur une épistémologie "fausse", [le contrat d'ostension] est pourtant très utilisé par les enseignants car

il fonctionne très bien dans de nombreux cas où une définition mathématique serait trop lourde ou inutile » (1997, p. 51).

L'importance de l'ostension dans l'enseignement ordinaire oblige donc le chercheur souhaitant effectuer une recherche naturaliste à articuler son cadre théorique et cette pratique. Du point de vue des savoirs et des connaissances, Bloch (1999, pp. 173-174) considère qu'ostension et connaissances de l'enseignant sont liés différemment selon les types d'ostension. Lors d'une ostension de savoir, le professeur ne peut sortir de sa position sur les savoirs et les connaissances ne peuvent survenir. Lors d'une ostension de connaissances mathématiques, le professeur montre le savoir (par exemple la formule) et explique comment s'en servir sur des exemples bien choisis. Il peut également parfois y avoir ostension de connaissances mathématiques non pertinentes par rapport au savoir ou encore ostension de connaissances non mathématiques, culturelles par exemple.

Ainsi donc, l'étude de l'utilisation que fait l'enseignant de ses connaissances mathématiques n'est pas mise de côté par Bloch dans son article de 1999. Cette étude n'est peut-être pas aussi fondamentale que celle de la situation adidactique, elle n'en est pas pour autant inutile. D'ailleurs les deux premiers critères de pertinence mathématique de l'enseignant se réfèrent explicitement aux situations ordinaires (voir 7.2). Nous verrons en (14.1.6.2) quelle adaptation pourra être faite du troisième critère.

On retrouve d'ailleurs ici le point de vue de Margolinas (2002b, p. 144) qui considère que le professeur est dans une situation non didactique (personne n'a construit cette situation pour qu'il apprenne), mais qu'il peut transformer ses connaissances dans l'interaction avec son milieu, comme dans toute situation non didactique. Cependant il s'agit pour lui généralement d'une situation d'action et rarement d'une situation de formulation, de validation ou d'institutionnalisation et il ne dépasse que rarement la dialectique de l'action.

Chapitre 8 Questions de recherche et éléments méthodologiques

Il y a toujours un décalage entre la forme opératoire de la connaissance, celle qu'on utilise dans l'action, et la forme prédicative de la connaissance, faite de mots et d'énoncés. (Vergnaud, 2005, p. 134)

8.1 Questions de recherche

Les questions de mesure de l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur les résultats des élèves nous ont conduit, en amont, à distinguer les types de connaissances mathématiques et à considérer principalement la classification développée par Ball et son équipe à la suite de Shulman. Elles nous ont mené, en aval, à leur utilisation dans des comparaisons internationales principalement l'étude de Ma. Cette étude nous a conduit à nous intéresser plus aux effets sur l'enseignement qu'à ceux sur les performances des élèves et aux outils développés par la didactique française des mathématiques pour décrire le rôle de l'enseignant, plus spécifiquement la structuration du milieu et la pertinence mathématique de l'enseignant. Ces éléments de cadrage nous permettent de préciser nos questions et nos éléments de méthodologie.

Ainsi nos questions de recherche sont de façon large :

1. Quelles sont les connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants primaires vaudois ?
2. En mathématiques et pour des enseignants généralistes, à quels niveaux d'activité du professeur les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement se manifestent-ils ?
3. Quels effets les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants ont-ils sur la pertinence mathématique de leurs interventions et sur l'organisation didactique de leurs cours de mathématiques à l'école primaire ?

Il est bien évident, qu'il va nous falloir spécifier ces questions et que nous ne pourrions les aborder que sur des contenus et une population restreints. Nous répondrons à ces trois questions en deux parties. Le détail des indications méthodologiques sera précisé dans chaque partie (B et C). Nous donnons ici un bref aperçu de ces indications, ainsi que la description d'un point de vue méthodologique de l'articulation entre ces deux parties.

8.2 Eléments méthodologiques

Dans un premier temps (Partie B), afin de donner une caractérisation des connaissances de mathématiques élémentaires des enseignants vaudois, nous avons tenté de les situer par rapport à celles des enseignants chinois et à celles des enseignants états-uniens selon l'étude de Ma (1999). Dans ce sens, nous avons traduit les quatre questions de Ma (1999) puis nous les avons analysées et adaptées à notre contexte culturel. Elles mettent en scène une situation de classe nécessitant une réaction de l'enseignant, propre à nous informer sur la pertinence du recours aux connaissances mathématiques de l'enseignant. Seize enseignants généralistes des degrés 3 à 6 de deux écoles ont été interrogés. Leurs réponses ont été analysées et décomptées selon les critères proposés par Ma pour chaque question en vue d'une comparaison de portée

relativement limitée. L'analyse de cette partie utilisera le concept de *compréhension profonde des mathématiques fondamentales* (voir 4.2) développé par Ma.

Dans un deuxième temps (Partie C), afin d'analyser plus finement le *type de connaissances mathématiques pour l'enseignement* et leur pertinence au travers des niveaux d'activité du professeur, nous avons observé toutes les leçons à propos de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres chez quatre enseignants de 4P⁷¹. Il s'agit d'une observation de type « naturaliste », c'est-à-dire que nous ne sommes pas intervenus sur le choix des activités laissé au libre arbitre de chaque enseignant. Les observations ont été précédées et suivies d'un entretien semi-dirigé. Les leçons ont été filmées (caméra en fond de classe et micro cravate pour l'enseignant) et quelques passages significatifs du point de vue des connaissances mathématiques pour l'enseignement ont été mis en évidence. Les enregistrements des séquences et des entretiens ont été traités à l'aide du logiciel Transana (Fassnacht & Woods, 2002-2011) afin de relever pour chaque extrait le niveau d'activité du professeur et, pour les passages où des connaissances mathématiques sont utilisées, leur type et leur pertinence. Les corrélations entre des trois catégories ont été mises en évidence. Ces extraits peuvent être situés dans la séquence grâce à la réalisation d'un *synopsis* (Schneuwly, Dolz & Ronveaux, 2006) et d'une *macrostructure* (Dolz & Toulou, 2008). Le moment d'explication de l'algorithme et les choix d'activités des quatre enseignants ont été comparés en fonction de leur connaissance mathématique de l'algorithme. Ce moment d'explication de l'algorithme, mais aussi les explications faisant suite à des difficultés d'élèves, ont été transcrits et analysés avec un grain plus fin. En particulier une analyse ascendante et une analyse descendante d'un épisode a été conduite afin de mettre en évidence des bifurcations didactiques.

La première partie prend donc en compte la forme prédicative des connaissances des enseignants (Vergnaud, 2005, p. 134), ou, autrement dit, leur partie explicite (Morselli, 2005). L'usage de scénarios de classe, hypothétiques mais fondés sur des questions prototypiques, est considéré comme un moyen d'approcher les pratiques réelles (Biza, Nardi & Zachariades, 2007, p. 301). La seconde analyse leur forme opératoire (Vergnaud) ou encore implicite (Morselli). Cette recherche s'inscrit donc dans la ligne appelée par da Ponte et Chapman des connaissances des enseignants qui se comprennent dans leur relation à la pratique (da Ponte & Chapman, 2006, p. 487).

Les enseignants observés dans la seconde partie ne font pas partie du groupe de ceux interrogés lors de la première partie, à la fois pour des raisons pratiques (ils ont été contactés avant que nous n'ayons contacté les écoles pour le questionnaire de Ma), mais aussi pour éviter d'influencer leur comportement lors des séances de classe et lors de la préparation de ces séances. Le lien entre les deux parties se fera donc à la fois par le sujet de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres, présent dans les deux parties et par la discussion des résultats obtenus dans chacune des deux parties.

⁷¹ Elèves de 9 à 10 ans, équivalent CM1 en France. Voir Annexe 2.

Partie B
Les connaissances mathématiques
pour l'enseignement
des enseignants vaudois :
une comparaison internationale

En vue de réaliser une première approche de l'influence des connaissances mathématiques des enseignants vaudois sur leur pratique d'enseignement, nous avons utilisé la comparaison effectuée par Ma (1999) entre enseignants chinois et étatsuniens afin de comparer à notre tour les réponses d'un groupe d'enseignants vaudois à celles recueillies par Ma. Cette partie met donc constamment en parallèle l'étude de Ma et la nôtre. Dans le Chapitre 9, les deux dispositifs de recherche sont décrits. Le Chapitre 10 donne les résultats des enseignants vaudois et les compare à ceux de Ma, le Chapitre 11 enfin tire les conclusions de cette comparaison.

Chapitre 9 Le dispositif

Les premiers éléments de l'étude de Ma (1999) ont été présentés au Chapitre 4. Nous reprendrons ici le dispositif de recueil des données utilisé par Ma (9.1) avant que de présenter les éléments de notre dispositif (9.2) et de discuter de l'effet des adaptations réalisées (9.3). Enfin nous présenterons notre méthodologie d'analyse des données à partir de celle de Ma (9.4).

9.1 L'étude de Ma : recueil des données

9.1.1 Les enseignants US

Le point de départ de la recherche de Ma est constitué des données recueillies par le projet *Teacher Education and Learning to Teach* (TELT, 1991), sur lequel elle a travaillé en tant qu'assistante à la *Michigan State University*. Elle considère que ces questions, initialement développées par Ball (1988) pour sa thèse, permettent de bien mettre en évidence les connaissances mathématiques des enseignants dans le contexte de l'enseignement. De plus ces quatre questions ont une bonne couverture des mathématiques élémentaires (Ma, 1999, pp. xx-xxi).

Les données de TELT concernent 23 enseignants considérés comme au dessus de la moyenne. Un groupe de 12 enseignants est interrogé après une année d'enseignement durant leur participation à un programme de Master de l'université du Nouveau Mexique. Onze enseignants sont interrogés au début d'un programme de formation continue au *Mount Holyoke College* dans le Massachussets. Ils sont considérés comme particulièrement intéressés par l'enseignement des mathématiques et sûrs d'eux en mathématiques. Leur expérience d'enseignement se situe entre 5 et 23 ans.

9.1.2 Les enseignants chinois

Le groupe de 72 enseignants chinois interrogés par Ma est à la fois plus nombreux et, selon la volonté de Ma, plus représentatif de la diversité de son pays d'origine. Les enseignants sont répartis dans cinq écoles : trois écoles de la région de Shanghai, dont une de très bonne qualité, une moyenne et une très basse, une bonne école d'une petite ville dans une région rurale et une école rurale de montagne de basse qualité. 40 enseignants ont une expérience d'enseignement de moins de cinq ans et 32 une expérience de plus de cinq ans (Ma, 1999, pp. xxii-xxiii).

9.1.3 Le questionnaire de Ma

Le questionnaire de Ma comporte quatre questions. Celles-ci seront détaillées en 9.2.2. Chacune des questions est construite en « weaving a particular mathematical idea into a classroom

scenario in which that idea played a crucial role⁷² » (Ma, 1999, p. xxi). Les sujets mathématiques couverts sont la soustraction avec retenues, la multiplication de nombres à plusieurs chiffres, la division par une fraction et la relation entre périmètre et aire. Les quatre situations sont proposées successivement à chaque enseignant par écrit. Chaque situation se termine par une question demandant à l'enseignant comment il réagirait. L'enseignant donne oralement cette réaction et certaines questions lui sont posées (entretien semi-dirigé). La réponse à chaque question dure environ 10 minutes. Les entretiens sont enregistrés de manière audio (Ma, communication personnelle, 4 décembre 2004).

9.2 Notre dispositif de recueil des données

9.2.1 Les enseignants vaudois

Nous avons interrogés 16 enseignants vaudois de 2 écoles réparties sur plusieurs sites. Il n'était pas possible dans le cadre de cette partie de thèse de viser à une réelle représentativité, comme pour Ma d'ailleurs. Nous avons toutefois choisi une école située en zone urbaine et une autre dont les bâtiments scolaires se trouvent en partie dans une petite ville et en partie à la campagne. Comme souvent dans le Canton de Vaud, aucune des deux écoles n'a de réputation de qualité particulière. Le Tableau 8 donne quelques caractéristiques des 16 enseignants interrogés.

⁷² « en tissant une idée mathématique dans un scénario de classe dans lequel cette idée joue un rôle crucial. »

Surnom	Sexe	Ecole	Degré d'enseignement actuel	Tranche d'âge	Formation secondaire	Formation à l'enseignement	Autre formation	Expériences dans les degrés	Nombre d'années d'expérience
Elise	F	R	5-6	20-30	Maturité ⁷³	HEP ⁷⁴		5-6	1
Bénédicte	F	R	3P-4P	20-30	Matu C ⁷⁵	HEP	1 a. psycho	3-4	<5
Nicole	F	S	3P-4P	20-30	Diplôme ⁷⁶	HEP		3-4	<5
Alexandra	F	S	3P-4P	40-50	Diplôme	EN ⁷⁷		-2+2	5-15
Carole	F	R	3P-4P	20-30	Maturité	EN		3-4	5-15
François	M	R	5-6	50-60	Matu C	SPES ⁷⁸	Lic. Sces	5-6	5-15
Gaëlle	F	R	3P-4P	30-40	Maturité	EN		3-4	5-15
Ignace	M	R	3P-4P	30-40	Maturité	EN		1-4	5-15
Kate	F	R	3P-4P	30-40	Maturité	EN		1-4	5-15
Laurence	F	R	5-6	40-50	Diplôme	EN		3-6	5-15
Martin	M	S	3P-4P	20-30	Maturité	EN		3-4	5-15
Denis	M	R	5-6	40-50	Matu C	SPES	Lic. Sces	5-7	15-30
Hugette	F	S	1P-4P	50-60	Diplôme	Au ⁷⁹	Lic. ScesEduc.	1-6	15-30
Juliette	F	R	5-6	40-50	Maturité	Au		3-6	15-30
Odette	F	S	3P-4P	40-50	Diplôme	EN		3-4	15-30
Patricia	F	S	3P-4P	50-60	Diplôme	EN		1-4	15-30

Tableau 8 : Caractéristiques des enseignants vaudois interrogés

Le groupe d'enseignants interrogés comprend 12 femmes et 4 hommes. 10 enseignent en 3P⁸⁰-4P⁸¹ et parmi eux 4 ont aussi enseigné aux degrés inférieurs, 5 enseignent en 5-6⁸² et parmi eux 2 ont aussi enseigné aux degrés inférieurs, 1 aux degrés supérieurs et 2 uniquement en 5-6. Pour ce qui est de l'expérience d'enseignement, 3 enseignantes enseignent depuis moins de 5 ans et pour l'une d'entre-elles depuis 1 année, 8 enseignent depuis 5 à 15 ans et 5 depuis plus de 15 ans. La plupart des enseignants interrogés sont titulaires d'un brevet d'enseignant généraliste pour les degrés primaires, même si l'institution de formation a changé de dénomination. Les personnes interrogées avaient auparavant obtenu un diplôme de culture générale (6 personnes), une maturité académique (7 personnes) ou une maturité académique scientifique (3 personnes). 2 personnes interrogées sont des enseignants spécialistes et ont une formation de maître secondaire après une licence en sciences naturelles.

⁷³ Maturité : Maturité de type non scientifique

⁷⁴ HEP : Haute Ecole Pédagogique, dans ce cas, formation d'enseignant primaire. Diplôme délivré depuis 2004

⁷⁵ Matu C : Maturité de type scientifique

⁷⁶ Diplôme de culture générale

⁷⁷ EN : Ecole normale. Formation des enseignants primaires jusqu'en 2001

⁷⁸ SPES : Séminaire pédagogique de l'enseignement secondaire : formation professionnelle des enseignants secondaires vaudois entre 1960 et 2002

⁷⁹ Au : Autre type de formation d'enseignant primaire.

⁸⁰ Elèves de 8 à 9 ans, équivalent CE2 en France. Voir Annexe 2.

⁸¹ Elèves de 9 à 10 ans, équivalent CM1 en France. Voir Annexe 2.

⁸² Dans le canton de Vaud, les degrés 5 et 6 constituent le cycle de transition. Il regroupe des élèves de 10 à 12 ans (équivalent français CM2 et 6^{ème} respectivement). Jusqu'en 2011, ces degrés appartenaient au secondaire. Des enseignants généralistes (primaires) et des spécialistes (secondaires) y enseignent.

L'ensemble des enseignants des degrés 3P-4P d'une école et des degrés 3P-6 de l'autre ont été invités à participer à la recherche au moyen d'un email (voir Annexe 3.1) et, pour un des établissements par une intervention du chercheur lors d'une conférence des maîtres. Cette information était soutenue par la direction de chaque école, en revanche l'email comme le contrat de recherche annexé (Annexe 3.2) précisait bien qu'aucun retour ne serait donné à la direction de l'établissement. Afin de ne pas focaliser l'attention des enseignants sur les connaissances mathématiques, il leur était simplement précisé, dans le contrat comme en début d'entretien, que le thème était l'enseignement des mathématiques aux degrés 3P à 6P et que « la recherche vise à mieux comprendre certains phénomènes d'enseignement, en particulier de l'enseignement du calcul » (email aux enseignants, Annexe 3.1), ou encore que la recherche concerne « les mathématiques enseignées à l'école obligatoire » (contrat de recherche, Annexe 3.2). Chaque entretien se rapprochait ensuite le plus possible du déroulement utilisé par Ma (voir 9.1.3) tel que nous avons pu en avoir connaissance. Les situations, comme les questions de l'entretien semi-dirigé, étaient tirées de Ma (1999) telles que retravaillées après notre analyse *a priori* validée par un test auprès de 3 enseignants.

9.2.2 Analyse *a priori* des tâches proposées aux enseignants

La nécessité de traduire les questions était d'une part linguistique et d'autre part liée au contexte local. Il était également nécessaire d'établir un canevas d'entretien semi-dirigé afin que les données recueillies apportent les renseignements comparables à ceux décrits par Ma. Cette construction a été réalisée à l'aide d'une analyse de chacune des quatre situations données par Ma. Chaque analyse débute par la question telle que posée par Ma, en anglais, et donne également la version utilisée pour nos entretiens.

Nous traitons ensuite du canevas d'entretien (9.2.2.5), puis le point 9.2.2.6 résume les questions traitées par chaque situation. L'effet global des adaptations réalisées est enfin discuté en 9.3. Les quatre situations, dans les deux versions, sont également regroupées en Annexe 4.

9.2.2.1 Première question : soustractions avec retenues

Let's spend some time thinking about one particular topic that you may work with when you teach, subtraction with regrouping. Look at these questions

$$\begin{array}{r} 52 \\ -25 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 91 \\ -79 \\ \hline \end{array} \quad \text{etc.}$$

How would you approach these problems if you were teaching second grade?
What would you say pupils would need to understand or be able to do before they could start learning subtraction with regrouping?

(Ma, 1999, p. 1)

Cette situation vise à répondre aux trois questions suivantes :

1. Quels liens sont faits entre les connaissances mathématiques au moment de l'introduction d'un nouveau sujet ?
2. Quelle est la richesse et la variété de ces liens ?
3. Existe-t-il une influence de la richesse des liens mobilisables entre connaissances sur la variété des approches proposées aux élèves ?

L'analyse *a priori* part de la version de Ma ci-dessus avec deux adaptations culturelles : d'une part l'expression *with regrouping* a été transformée en *par échanges*⁸³ pour respecter la dénomination romande officielle (Gagnebin, Guignard & Jaquet, 1998, p. 133), d'autre part l'année de référence est la 3P⁸⁴, pour respecter le plan d'études (DFJ, 2006).

La mise en scène est très sobre. Il ne s'agit pas ici d'une situation de classe, ni même explicitement du moment de la préparation, mais d'un moment *pour réfléchir* à une situation hypothétique mais plausible. Il serait possible de poser la question des connaissances liées à l'algorithme de soustraction en situation de classe, mais l'enseignant serait dans une situation de stress et disposerait de moins de recul. De plus, il s'agit d'assurer une certaine variété entre les quatre questions et de permettre une entrée relativement douce dans l'entretien.

Le sujet est d'abord présenté de manière générale, puis des exemples sont donnés et la question est à nouveau posée de manière générale. Les alternatives possibles seraient de donner directement des exemples ou de poser la question sur ces exemples, ou encore de rester au niveau général. Le but est ici de susciter chez l'enseignant des réponses mathématiques générales et d'éviter de rester au niveau des exemples. La formulation de la question va dans cette direction. Dans le même ordre d'idée, le vocabulaire utilisé est la dénomination mathématique officielle : *algorithme de soustraction par échanges*. Toutefois il s'agit de s'assurer que l'enseignant a bien compris de quoi il s'agit, et des exemples lui sont donnés.

Les deux exemples donnés sont du même type : soustraction d'un nombre de deux chiffres par un nombre de deux chiffres dont le chiffre des unités est supérieur à celui du premier nombre, nécessitant l'échange d'une dizaine. Ils ont toutefois des chiffres qui se retrouvent et qui pourraient interférer. Ils ne permettent donc que d'illustrer les mots *soustraction par échanges*. Le petit *etc.* signale bien qu'il ne s'agit que d'une illustration. Pourtant l'injonction est donnée : *Examinons ces questions*. Il serait ici possible de proposer un certain nombre de pistes à l'enseignant par le moyen d'autres exemples. La donnée d'un calcul du type
$$\begin{array}{r} 102 \\ -15 \\ \hline \end{array}$$
 permettrait de les aiguiller sur les questions d'échanges successifs. Le risque étant, *a contrario*, d'une part de les faire se focaliser sur ce point et d'autre part d'axer la suite de la discussion sur cet exemple. Les pré-tests ont permis d'écarter ce risque. Dans le même ordre d'idée, il serait possible de proposer des erreurs d'élèves pour interroger plus précisément les connaissances mathématiques de l'enseignant. Toutefois la question du traitement des erreurs intervient dans la situation 2 et il est préférable de garder un aspect plus ouvert à cette question afin de pouvoir examiner non seulement quels liens sont faits, mais aussi quelles sont la richesse et la variété de ces liens. De plus la question des erreurs sera utilisée en relance (voir ci-dessous).

La question posée ensuite est double. Elle porte sur l'approche du sujet et sur les connaissances préalables des élèves. Examinons tout d'abord ces deux questions d'un point de vue général avant de considérer leur formulation plus précise.

L'objectif de la question est d'une part d'examiner les liens que fait l'enseignant entre les connaissances mathématiques et d'autre part de mettre en lumière l'influence de ces liens sur le type d'approches didactiques utilisées. La double question est donc utile ici. L'ordre choisi pourrait être inversé. Cela permettrait de mettre les connaissances mathématiques au premier plan. Un tel choix induirait toutefois une influence des connaissances mathématiques sur les choix didactiques et nous préférons observer cette influence *a posteriori* dans le discours de l'enseignant.

⁸³ L'algorithme par échange est majoritairement utilisé en Suisse romande comme aux USA. La situation est différente en France où l'algorithme par écart constant est prépondérant.

⁸⁴ Voir Annexe 2.

La formulation de la première question pourrait être plus précise. Toutefois on ne souhaite pas ici particulièrement aborder l'enseignement de l'algorithme, mais bien voir le lien qui peut être fait entre des approches didactiques relativement spontanées et les connaissances. Il nous semble donc souhaitable de garder ce niveau de généralité.

La seconde question est plus précise. Toutefois elle s'avance masquée et questionne ce que *les enfants* doivent *comprendre* ou *être capable de faire*. Il serait possible d'être plus direct avec une formulation du genre : *quelles vous semblent être les connaissances mathématiques liées à ce sujet ou préalables à cet algorithme*. Il serait également possible de proposer un choix de connaissances ou encore de demander une hiérarchisation parmi une liste. Ceci permettrait de mieux resserrer les réponses. Toutefois cela écraserait considérablement les différences entre les enseignants. De plus, on risquerait de considérer qu'un enseignant est capable de faire un lien alors que les connaissances ne sont pas mobilisables, ou en tous les cas pas mobilisées lors de la réflexion sur la tâche didactique. En revanche la formulation plus directe semble mieux permettre d'interroger les connaissances des enseignants et de mieux établir le lien. Elle évite également les questions d'interprétation à propos du mot *understand*, *comprendre*.

La nouvelle formulation de la situation sera donc la suivante :

Prenons quelques instants pour réfléchir à un sujet particulier avec lequel vous pourriez avoir à travailler quand vous enseignez : l'algorithme de soustraction par échange.

Examinons ces questions :

$$\begin{array}{r} 52 \\ -25 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 91 \\ -79 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 102 \\ -15 \\ \hline \end{array} \quad \text{etc.}$$

Comment approcheriez-vous ces calculs si vous enseigniez en 3e primaire ? Que pensez-vous que des enfants devraient comprendre ou être capables de faire avant de pouvoir commencer à apprendre la soustraction avec échanges ?

9.2.2.2 Deuxième question : multiplication de nombres à plusieurs chiffres

Some six-grade teachers noticed that several of their students were making the same mistake in multiplying large numbers. In trying to calculate

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline \end{array}$$

the students seemed to be forgetting to “move the numbers” (i.e., the partial products over on each line. They were doing this:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 1845 \end{array}$$

instead of this:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 79335 \end{array}$$

While these teachers agreed that this was a problem, they did not agree on what to do about it. What would you do if you were teaching sixth grade and you noticed that several of your students were doing this?

(Ma, 1999, pp. 28-29)

Cette situation vise à répondre aux trois séries de questions suivantes :

1. Quel est le contrôle mathématique des tâches didactiques *analyse d'erreur* et *traitement d'erreur* dans le cas de l'algorithme de multiplication en colonne ? En particulier, les connaissances mathématiques sont-elles mobilisées pour aller au-delà de la seule application d'une procédure ?
2. Quelles sont les connaissances mobilisées par les enseignants à propos de :
 - a. l'algorithme de multiplication
 - b. la numération de position
 - c. la distributivité ?
3. Ces connaissances sont-elles reliées entre elles ?
4. La compréhension des raisons mathématiques de l'algorithme influence-t-elle un traitement de l'erreur basé sur la compréhension plutôt que sur l'application correcte de règles mécaniques ? Permet-elle de donner plusieurs explications ?

L'analyse *a priori* qui suit part de la version de Ma ci-dessus avec une adaptation concernant l'année de référence (5^e⁸⁵) pour respecter le plan d'études (DFJ, 2006). Des alternatives seront

⁸⁵ voir Annexe 2.

envisagées, toutefois la version originale sera si possible conservée afin de maintenir des possibilités de comparaison.

Cette seconde situation est contextualisée de façon vague : *quelques enseignants de 5^e, plusieurs élèves*. La question est ensuite personnalisée : *que feriez-vous ?* Le but est ici d'obtenir des réponses précises et concrètes, mais d'un certain degré de généralité. Il ne semble donc souhaitable ni de préciser trop le contexte (du type : Marie, une de vous élèves...), ni d'être trop vague (du type : imaginons que des élèves).

L'exemple donné est ensuite précisé avec un grand luxe de détails : il s'agit d'un exemple précis et détaillé (donnée, algorithme erroné, algorithme correct), la cause apparente de l'erreur est précisée de deux manières : en langage courant (*ils semblaient oublier de déplacer les nombres*) et en langage mathématique (*c'est-à-dire les produits partiels*). Une alternative consisterait à donner simplement l'erreur, sans l'énoncé, sans le corrigé et sans les explications. Ceci permettrait de laisser à la charge de l'enseignant ce travail. Le surplus de détails semble effectivement superflu. Toutefois il permettra de se concentrer sur l'essentiel de la question sans avoir à réécrire tout ou partie de la multiplication. De plus la présence des deux *explications*, l'une de type procédural l'autre de type mathématique, permettra une discrimination entre les réponses des enseignants qui seront conduit à privilégier l'un ou l'autre type d'explication.

L'exemple choisi (multiplication d'un nombre de trois chiffres par un nombre de trois chiffres) permet d'introduire deux *décalages* et donc de travailler à deux niveaux successifs. Il laisse à la charge de l'enseignant la réduction éventuelle du problème à une multiplication d'un nombre de deux chiffres par un nombre de deux chiffres. Il évite soigneusement le chiffre 0 qui n'apparaît ni dans les produits partiels, ni comme *marqueur de décalage*, alors même qu'il est un des enjeux principaux. Si on avait choisi des nombres qui donnent des 0 dans les produits partiels, le chiffre 0 aurait alors joué deux rôles, risquant de créer des quiproquos lors de l'entretien. Il aurait aussi été possible de placer les 0 comme *marqueur de décalage*, mais le but est ici d'offrir la possibilité à l'enseignant de placer ces 0 et de lui demander lors de l'entretien de justifier l'usage de ces 0.

La version en français de la situation que nous avons retenue est donc une traduction très proche de la version anglaise :

Quelques enseignant(e)s de 5^e ont noté que plusieurs de leurs élèves faisaient la même erreur lors de la multiplication de grands nombres. En essayant de calculer

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline \end{array}$$

les élèves semblaient oublier de "déplacer les nombres" (c'est-à-dire les produits partiels) à chaque ligne. Ils faisaient ceci :

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 1845 \end{array}$$

au lieu de cela :

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 79335 \end{array}$$

Si ces enseignant(e)s s'accordaient à dire que ceci constituait un problème, ils n'étaient pas du même avis sur ce qu'ils devaient faire pour le régler. Que feriez-vous si vous enseigniez en 5^e et que plusieurs de vos élèves fassent cette erreur ?

9.2.2.3 Troisième question : division par une fraction

Version Ma

People seem to have different approaches to solving problems involving division with fractions. How do you solve a problem like this one?

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$$

Imagine that you are teaching division with fractions. To make this meaningful for kids, something that many teachers try to do is relate mathematics to other things. Sometimes they try to come up with real-world situations or story-problems to show the application of some particular piece of content. What would you say would be a good story or model for $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$?

(Ma, 1999, p. 55)

Version adaptée

Les gens semblent avoir diverses approches au sujet de la manière de résoudre un problème impliquant la division par une fraction. Comment résolvez-vous un problème du type

$$18 : \frac{1}{2}$$

Imaginez qu'un élève vous demande ce que représente ce calcul. Quelle explication, quelle représentation vous semblerait adéquate pour $18 : \frac{1}{2}$?

Cette situation vise à répondre aux trois questions suivantes :

1. Quelles sont les connaissances mathématiques en calcul de niveau scolaire secondaire inférieur⁸⁶ des enseignants généralistes ? En particulier, savent-ils diviser par une fraction ?
2. Les enseignants sont-ils capables de créer une représentation d'une situation mathématique ?
3. Existe-t-il un lien entre connaissances mathématiques et capacité à représenter une situation ?

L'analyse *a priori* qui suit compare la version de Ma avec la version adaptée, en vue de justifier nos choix.

Aux USA, les fractions font partie de la vie courante. Etant donné l'usage d'un système de mesure dit *customary* (littéralement *coutumier*) non décimal, presque toutes les mesures non entières sont données par des fractions. A l'école, elles apparaissent dès le *second grade* et la question de la division par une fraction est au programme de *6th grade* (NCTM, 2006). De plus les fractions sont écrites avec la partie entière de la fraction extraite et les autres écritures sont considérées comme *improper*. La question fait donc partie du programme

⁸⁶ Les degrés 7 à 9 de la scolarité, élèves de 12 à 15 ans, équivalent 5^{ème} à 3^{ème}. Voir Annexe 2.

du primaire, mais est considérée par Ma (1999, p. 55) comme une des plus difficiles, dans la mesure où elle fait intervenir, en plus de la question de la division par une fraction, tous les types de transformation entre fractions *proper* et *improper* ainsi que la distributivité.

Les fractions ne jouent pas le même rôle dans la culture francophone et, en Suisse romande, elles n'interviennent que de façon diffuse jusqu'en 6^{ème}. La division par une fraction, si elle peut arriver dès la 7^{ème}⁸⁷ (DFJ, 2006), n'y est traitée que sous la forme d'une règle de calcul : « pour diviser une fraction par une autre fraction, on multiplie la première par l'inverse de la seconde » (Brêchet, Calame & Chastellain, 2003, p. 61). Il n'est donc pas possible de poser la même question que Ma. Toutefois la question de la division par une fraction, et surtout de sa représentation, est fort intéressante. En particulier elle permet de voir si les enseignants peuvent voir la division comme opération réciproque de la multiplication. Nous choisissons donc de garder le « divisé par une demie⁸⁸ » mais de remplacer le dividende par 18. Le choix de ce nombre pair permet d'écarter toutes les difficultés d'écriture de fraction, il permet également de laisser ouverte la tentation de diviser par 2. Il aurait également été possible de travailler en version décimale et de diviser par 0,5. Ceci aurait entraîné plus de réponses du type « diviser par 5 et corriger le résultat ». Ceci aurait également entraîné d'autres représentations plus éloignées de l'idée d'opération réciproque de la multiplication.

La question des représentations joue un rôle important dans l'enseignement des mathématiques aux USA⁸⁹. L'accent y est mis autant sur le processus de modélisation que sur celui, en quelque sorte inverse, de la représentation. Cet accent semble moins fort en Suisse Romande. Dans sa formulation, Ma insiste longuement sur la demande d'inventer une *story-problem*. Sa demande risquerait de paraître saugrenue aux enseignants romands et nous faisons le choix d'une formulation plus ouverte et parlant uniquement d'*explication* et de *représentation*. Ces deux termes laissent la place à des explications du type *opération réciproque* ou du type *quelqu'un partage*.

Le but de la mise en situation est d'interroger la capacité des enseignants à se représenter la situation, mais aussi d'examiner leurs connaissances à ce sujet et surtout le lien connaissances-représentations. C'est la raison pour laquelle la question posée est d'abord de résoudre le problème puis de donner des représentations. Le choix de cet ordre permet de ne pas bloquer l'enseignant sur la question la plus délicate, mais aussi de minimiser l'influence des représentations sur le mode de calcul. L'enseignant pourra être confronté à la cohérence des deux aspects par question lors de l'entretien. Le but est de laisser ce mode de calcul le plus ouvert possible. La mise en scène de Ma que nous reprenons parle donc de *diverses approches* qu'ont *les gens*. Il s'agit également de dédramatiser une éventuelle absence de réponse ou une réponse erronée en parlant du *comment* le calcul est effectué. En fait il aurait été naturel de parler de calcul, mais Ma fait le choix du mot *problème* qui, à notre sens, permet de mieux prendre en compte la complexité de la question et de préparer la question de la représentation.

Ma demande à l'enseignant d'imaginer devoir enseigner la division par une fraction. Cela n'est pas possible pour les enseignants interrogés, car ce sujet ne figure pas parmi ceux qu'ils enseignent. Nous choisissons donc d'imaginer la question d'un élève qui pose une question à partir d'objets mathématiques connus (la division, la fraction $\frac{1}{2}$), ce qui permet de redonner une certaine vraisemblance à sa question et de mettre l'enseignant dans la situation

⁸⁷ Voir Annexe 2.

⁸⁸ C'est un particularisme linguistique suisse romand que de mettre au féminin le demi français.

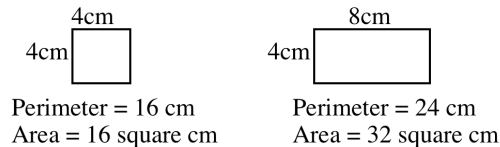
⁸⁹ Voir par exemple <http://standardstrial.nctm.org/document/chapter3/index.htm> (consulté le 18 juillet 2011), ou encore (Cuoco, 2001).

didactique de répondre à une question hors programme. Il sera peut-être d'ailleurs nécessaire en entretien d'insister pour qu'il réponde malgré tout, fusse partiellement, à la question !

9.2.2.4 Quatrième situation : la relation entre périmètre et aire

Version Ma

Imagine that one of your students comes to class very excited. She tells you that she has figured out a theory that you never told the class. She explains that she has discovered that as the perimeter of a closed figure increases, the area also increases. She shows you this picture to prove what she is doing:

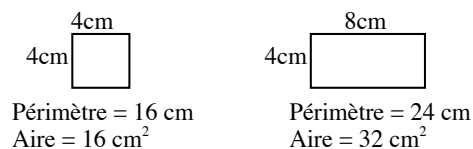


How would you respond to this student?

(Ma, 1999, p. 84)

Version traduite

Imaginons qu'une de vos élèves arrive en classe très enthousiaste. Elle vous dit qu'elle a inventé une théorie que vous n'avez jamais enseignée en classe. Elle explique qu'elle a découvert que si le périmètre d'une figure fermée augmente, alors son aire augmente aussi. Elle vous montre un croquis pour prouver ce qu'elle avance :



Comment répondriez-vous à cette élève ?

Cette situation ne pose pas de problème d'adaptation particulier. Nous discuterons donc directement la version traduite. Elle vise à répondre aux quatre questions suivantes :

1. Quelle est la part de la gestion mathématique par rapport à la gestion psychologique ?
2. Quelle est la réaction face une situation mathématique inconnue et déstabilisante ?
3. Quel est l'état des connaissances mathématiques sur la distinction aire-périmètre ?
4. Quel est l'état des connaissances mathématiques sur les notions de preuve, d'exemple, de contre-exemple ?

Il s'agit de placer l'enseignant dans une situation plausible, mais avec une certaine distance. La situation évoquée est exceptionnelle du point de vue de l'intérêt porté par l'élève et il s'agit de faire réagir l'enseignant au niveau de la relation avec l'élève, voire avec la classe. Il s'agit sur-

tout de le faire réagir au plan mathématique, à la fois sur la distinction aire-périmètre et sur la notion de preuve. Il sera particulièrement intéressant d'observer la part qu'occupe la gestion psychologique par rapport à la gestion mathématique de cette tâche didactique.

La situation donnée est hypothétique. Ceci est marqué par le verbe *imaginons*, par l'emploi du conditionnel *répondriez*, par le fait que l'élève n'est pas nommée, et par le style indirect pour rapporter le propos de cette élève. Cependant, elle est plausible dans la mesure où il s'agit d'une de *vos* élèves et que l'on s'adresse directement à *vous* (à quatre reprises).

La particularité de la situation est soulignée par le fait que ce point n'a *jamais été enseigné en classe* et que néanmoins l'élève est *enthousiaste*, qu'elle a *inventé, découvert*, qu'elle *avance* quelque chose. Ces éléments vont influencer la réponse dans le sens de considérations au niveau de la relation avec l'élève. Ils pourraient inciter l'enseignant à encourager l'élève dans cette voie en lui dévoluant la charge de la réponse à la question, alors même qu'il est demandé à *l'enseignant* de répondre à l'élève. Cet aspect de la question est totalement indépendant du contenu mathématique, mais peut fortement inciter l'enseignant à mettre au premier plan le côté psychologique, occultant entièrement la gestion proprement didactique du problème. Il s'agit donc d'observer si cet effet se produit et, le cas échéant, prévoir une relance de la question afin que l'enseignant soit conduit à se prononcer sur la partie mathématique. Notons encore que l'élève en question est une fille, et que cela correspond à certains stéréotypes de l'élève qui « fait des maths à la maison ». La situation est particulière, mais pas invraisemblable.

L'élève utilise un vocabulaire mathématique rigoureux : elle parle d'*aire* et de *périmètre* d'une *figure fermée*, *explique* une *théorie* en termes de *si ... alors* et elle *prouve* ce qu'elle avance en *montrant un croquis*. Ces termes mathématiques vont susciter des réponses au plan mathématique pour ce qui est de la *vérité* de la *théorie*. Ils créent un *milieu mathématique* visant à faire émerger une discussion sur la notion de preuve ou d'exemple. Ce milieu permettra à l'enseignant de s'exprimer en termes mathématiques et le poussera (si nécessaire avec relance du chercheur) à justifier ses affirmations.

Examinons maintenant quelques autres justifications que l'on pourrait attribuer à l'élève et quel type de réponses pourraient en être attendues. Nous terminerons par la formulation de la justification choisie par Ma.

L'élève pourrait produire une affirmation générale, parallèle à la *théorie* de l'élève, du genre « quand une figure grandit, son aire et son périmètre augmentent ». Ce genre d'affirmation conduirait l'enseignant à répondre lui aussi de manière générale. De plus il ne permettrait pas de questionner à la fois la question géométrique et la question des règles de la démonstration mathématique.

On pourrait attribuer à l'élève une affirmation générale qui précise l'augmentation dans une ou deux dimensions, du genre : « quand on allonge les côtés de la figure de départ, l'aire et le périmètre augmentent ». Cette assertion pourrait être accompagnée d'un ou plusieurs exemples ou croquis. Une telle affirmation est correcte. Le risque serait alors grand que la discussion porte sur cette dernière et non sur les exemples produits par l'élève.

Dans le cas d'un exemple plus quelconque, accompagné ou non d'une figure, faisant augmenter à la fois la longueur et la largeur, du genre un rectangle 3x2 passant à un rectangle 5x4, l'enseignant pourrait avoir l'impression que l'exemple est choisi au hasard et ne pas savoir dans quelle direction chercher.

L'élève pourrait ne donner qu'exemple particulier qui parte d'un rectangle et augmente une seule dimension. Ce choix est proche de celui de Ma. Toutefois il mentionne lui-

même l'augmentation alors que Ma se contente de poser les deux figures en laissant à la charge de l'enseignant la mise en évidence du passage de l'une à l'autre.

Le choix de Ma est de poser un exemple à l'aide d'une figure codée respectant les proportions. L'exemple donné part d'un *carré* qui est doublé afin de former un *rectangle*. Cette situation particulière permet, plus qu'une affirmation plus générale, une discrimination entre d'une part les enseignants qui percevront le caractère particulier de cette *augmentation* et pourront soit signaler que la *théorie* est vraie dans ce cas particulier, soit chercher un contre-exemple où la figure de départ est *augmentée* d'une autre manière ; et d'autre part les enseignants qui seront confortés dans l'idée de la véracité de la *théorie* par le fait qu'ils chercheront d'autres exemples du même type. La présence immédiate de données numériques particulières vise également à ramener l'enseignant sur une réponse mathématique et non psychologique à l'élève. La confusion potentielle entre aire et périmètre est encore renforcée par la confusion possible, voire l'omission, des unités de mesure puisque le carré de départ possède une aire de 16 « égale » au périmètre de 16. Ceci pourrait soit pousser l'enseignant à discuter de la notion de preuve, soit le piéger.

Notons encore la présence en arrière plan de *la classe*. Cette mention, à la fois comme lieu et comme moment, peut inciter l'enseignant (si nécessaire avec relance du chercheur) à envisager de présenter la question aux autres élèves, à *la classe* en tant que groupe.

9.2.2.5 Le canevas d'entretien et les conditions de passation

Après l'analyse de chaque situation et le choix de sa formulation, nous avons d'une part déterminé des catégories de réponses possibles des enseignants et d'autre part, en fonction de ces réponses, les questions à poser lors de l'entretien. Ces choix dépendaient de l'analyse *a priori* et en particulier des questions auxquelles chaque situation devait permettre de répondre. Ils ont constitué le canevas d'entretien (Annexe 5).

Au moment des entretiens, les degrés 3P et 4P appartenaient à l'école primaire alors que les degrés 5 et 6 étaient rattachés au secondaire⁹⁰. Les enseignants passent rarement de l'un à l'autre et nous avons donc choisi d'écarter la question la plus étrangère pour eux. Pour les enseignants exerçant aux degrés 3P-4P, la question concernant la division par une fraction n'a pas été posée et ils n'ont donc été interrogés que sur les questions 1, 2 et 4. En effet, comme indiqué en 9.2.2.3, la notion de division par une fraction était trop loin de leurs pratiques d'enseignement. Pour la même raison, la question de l'algorithme de la soustraction n'a pas été posée aux enseignants des degrés 5-6.

Chaque entretien durait environ 40 minutes. Il débutait par le rappel des buts de la recherche et du contrat de recherche (voir 9.2.1 et Annexe 3.2) et par la signature de ce contrat. Le chercheur présentait ensuite le questionnaire en lisant le texte figurant au début du canevas d'entretien (Annexe 5) et en insistant sur le fait que les situations demandent à l'enseignant comment il réagirait dans une situation scolaire, sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un test, qu'il n'y a souvent pas de réponse correcte unique aux questions et que ce qui intéresse le chercheur est « la relation que les enseignants entretiennent globalement avec ces sujets ». Ainsi le but de la recherche n'est pas mentionné précisément afin d'éviter une focalisation des enseignants sur les connaissances mathématiques.

L'énoncé de la première situation est ensuite remis à l'enseignant sur une page A4 dont la moitié inférieure est vide. Un crayon est à disposition. L'enseignant répond à la question telle qu'écrite et, en fonction de ses réponses, les questions prévues par le canevas

⁹⁰ Voir Annexe 2.

d'entretien sont posées. Les autres questions se succèdent de la même manière. Le temps accordé à chaque question est d'approximativement 10 minutes.

Une pré-expérimentation de ces entretiens a été réalisée auprès de trois enseignants parmi nos connaissances. Ceci a permis de trancher entre certaines options laissées ouvertes après l'analyse *a priori*, de valider ou de corriger certains choix, en particulier pour la traduction, et de tester les conditions de passation.

9.2.2.6 Résumé des questions traitées par chaque situation

Le Tableau 9 résume les principaux éléments de l'analyse *a priori* et permet de visualiser l'étendue des sujets traités par les quatre situations.

	Précision de la mise en scène	Tâche didactique	Connaissances maths.	Question sur les connaissances	Question sur le contrôle math. de la tâche did.	Par rapport à Ma	Quelques relances
1. soustractions	Vague, hypothétique	Réflexion générale sur la préparation de sujet d'enseignement	Numération de position, algorithme de soustraction	Lien entre connaissances	Richesse des liens ? ⇒ variété des approches	Formulation légèrement différente, exemples différents	Demander de justifier l'importance, <u>éventuellement</u> : erreurs, utilité, algorithme alternatif
2. multiplications	Générale, contextualisée	Analyse d'erreur, traitement de l'erreur	Algorithme de multiplication, numération de position, distributivité	Capacité à repérer les connaissances mathématiques, lien entre connaissances	Compréhension de l'algorithme ? ⇒ traitement de l'erreur et explications	Semblable	Faire émerger plusieurs explications, faire justifier les 0
3. division frac.	Vague, hypothétique	Répondre à une question hors programme, fournir une représentation	Division, opération réciproque, fraction	Savoir diviser par une fraction	Lien entre la représentation et la manière de calculer	Fortes différences	"Dédramatiser", demander d'explicitier le lien
4. aire-périmètre	Précise, hypothétique	Répondre à un élève	Aire-périmètre, justification	Distinction aire-périmètre, distinction preuve-exemple	Gestion mathématique / gestion psychologique, réaction face à une situation inconnue	Semblable	Focaliser sur l'aspect mathématique

Tableau 9 : Synthèse de l'analyse *a priori* des quatre situations.

9.3 Différence des populations et effet des adaptations réalisées

Les trois groupes nationaux d'enseignants sont composés de manière fort différente car, dans un premier temps, la comparaison avec les enseignants chinois n'était pas prévue initialement lors des entretiens avec les enseignants étatsuniens. Dans un second temps, l'ajout d'un troisième terme à la comparaison se fait à partir d'éléments préexistants. Cette comparaison se

déroule également dans trois contextes culturels très différents. Une des différences étant la langue, la traduction en chinois et en français des questions n'est certainement pas neutre. De plus, comme décrit en 9.2.2, la traduction en français a également nécessité, pour deux questions, des adaptations au contexte des mathématiques et de leur enseignement. Le but des adaptations des questions 1 et 3 a été de permettre une récolte de renseignements la plus proche possible de ceux décrits par Ma (1999) et non de pouvoir faire une stricte comparaison des réponses aux questions. Il sera donc nécessaire, particulièrement pour les deux questions adaptées, de garder à l'esprit que le but de la comparaison est de mettre en évidence des tendances propres aux enseignants des trois régions considérées, mais que cette comparaison ne peut en aucun cas être généralisée sans des études beaucoup plus approfondies.

9.4 Traitement et analyse des données

Les entretiens ont été enregistrés en audio. Pour chacune des situations proposées, des étiquettes ont été attribuées à partir des analyses effectuées par Ma (1999). Ces étiquettes seront détaillées au début de l'analyse des résultats de chaque situation dans le Chapitre 10. Pour nous comme pour Ma, il ne s'agit pas de quantifier le temps en entretien correspondant à une étiquette donnée, ni de compter les interventions correspondant à cette étiquette, mais bien de relever que, dans ses réponses à une situation, un enseignant donné s'est vu attribué cette étiquette.

Les données audio des entretiens ont été analysées à l'aide du logiciel HyperRESEARCH (1992-2007). Ce logiciel permet une analyse des données audio sans passage par la transcription. A chaque fois qu'un extrait audio relevait d'une ou plusieurs des étiquettes, celle-ci était attribuée à cet extrait. HyperRESEARCH permet alors d'obtenir un rapport de ces étiquettes permettant de construire un tableau pour chacune des quatre situations. Les enseignants figurent en ligne et les étiquettes en colonnes. Le nombre 1 indique que l'enseignant a apporté une réponse correspondant à cette étiquette. Des totaux en colonnes indiquent le nombre d'enseignants ayant apporté cette réponse. Ces tableaux sont donnés en Annexe 6.

Chapitre 10 Comparaison des résultats

Ce chapitre compare les résultats obtenus par Ma (1999) auprès des enseignants étatsuniens et auprès des enseignants chinois aux réponses apportés par les 16 enseignants vaudois que nous avons interrogés. Dans un premier temps, les réponses à chacune des quatre questions sont décrites et analysées (10.1) puis les résultats sont examinés de manière globale (10.2).

10.1 Les réponses des enseignants aux quatre questions

Dans ce qui suit, pour chaque question, nous commençons par synthétiser les résultats obtenus par Ma (1999) pour les enseignants nord-américains et pour les enseignants chinois. En particulier les nombreux extraits d'interview donnés par Ma ne sont pas repris. Les résultats des enseignants vaudois sont ensuite donnés de manière quantitative et un graphique, repris de Ma, compare les trois groupes d'enseignants d'un point de vue quantitatif. Une dernière partie analyse les réponses des enseignants vaudois de manière qualitative et donne également des extraits des entretiens. Cette analyse reprend les points soulevés par Ma et n'utilise donc pas les éléments de notre cadre théorique que Ma n'emploie pas (type de connaissances mathématiques, pertinence, niveau d'activité).

Au travers de ces entretiens, nous visons à analyser les connaissances mathématiques des enseignants. Nous n'avons toutefois pas un accès direct à ces connaissances et tout ce que nous pouvons affirmer, c'est qu'un enseignant a manifesté qu'il avait telle ou telle connaissance ou qu'il ne l'avait pas. Nous ne pouvons jamais affirmer qu'il ne possédait pas cette connaissance à ce moment-là, et encore moins qu'il ne la possédait pas de manière générale.

10.1.1 Première question : soustractions avec retenues

Prenons quelques instants pour réfléchir à un sujet particulier avec lequel vous pourriez avoir à travailler quand vous enseignez : l'algorithme de soustraction par échange.

Examinons ces questions :

$$\begin{array}{r} 52 \quad 91 \quad 102 \\ -25 \quad -79 \quad -15 \quad \text{etc.} \end{array}$$

Comment approcheriez-vous ces calculs si vous enseigniez en 3e primaire ? Que pensez-vous que des enfants devraient comprendre ou être capables de faire avant de pouvoir commencer à apprendre la soustraction avec échanges ?

« Subtraction with regrouping is so elementary that it is hard to imagine that teachers might not possess adequate knowledge of this topic. However [...] » (Ma, 1999, p. 26). Pourtant ce sujet de mathématiques élémentaires permet à Ma une première catégorisation des enseignants étatsuniens (10.1.1.1) et chinois (10.1.1.2). Il nous permet également de situer les enseignants vaudois (10.1.1.3).

⁹¹ « La soustraction avec retenue est si élémentaire qu'il est difficile d'imaginer que des enseignants puissent ne pas posséder les connaissances adéquates sur ce sujet. Et pourtant [...] »

10.1.1.1 L'approche des enseignants US : emprunt plutôt que regroupement (Ma, 1999, pp. 2-7)

Lors des entretiens, la plupart des enseignants ont débuté par ce qu'ils souhaitaient que leurs élèves apprennent. Pour 83% des personnes interrogées, il s'agit de la technique de calcul. Les explications que donnent ces enseignants posent problème d'un point de vue mathématique. En effet, certains affirment qu'on ne peut soustraire un grand nombre d'un plus petit et qu'il faut alors *emprunter chez le voisin*. Cette explication est à la fois mathématiquement incorrecte et dangereuse, car elle incite à penser que les chiffres d'un nombre sont indépendants et qu'un nombre peut changer arbitrairement au cours du calcul.

Seuls 17% des enseignants US veulent que leurs élèves apprennent plus que le seul algorithme. Ils expliquent la règle d'échange. Une enseignante donne plusieurs écritures équivalentes d'un même nombre. Leurs explications sont conceptuellement beaucoup plus correctes.

Pour ce qui est de la façon d'enseigner le sujet, tous les enseignants sauf un parlent de manipulations. Mais ces manipulations sont soit des manipulations qui évacuent l'idée de regroupement, soit des manipulations incorrectes avec de l'argent. Les rares manipulations correctes ne sont pas pleinement utilisées. Une seule manipulation adéquate est mentionnée par une enseignante ayant une bonne compréhension conceptuelle.

10.1.1.2 L'approche des enseignants chinois : décomposition de l'entité supérieure (Ma, 1999, pp. 7-21)

14% des enseignants chinois ont une compréhension procédurale. Celle-ci est proche de leurs collègues US du même groupe.

Par contre une majorité d'entre eux (51%) privilégie l'approche de *décomposition de l'entité supérieure* et la lie à la composition en entité supérieure lors d'additions avec retenue. Les enseignants utilisent pour cela des termes venus de la manipulation de l'abaque. Certains insistent sur le fait que le *taux de composition* est toujours de 10. Cette idée est plus *fondamentale* (voir 4.2) car elle n'est pas seulement liée à l'algorithme de la soustraction

De plus 35% des enseignants chinois proposent plusieurs décompositions de chacun des deux termes⁹², dont certaines peuvent venir de leurs élèves. Ils sont prêts à accepter des propositions originales de leurs élèves, car ils les comprennent et en voient les avantages. De plus ces décompositions sont proches du calcul réfléchi. Ma signale également, mais uniquement en note, l'avantage de la numération orale chinoise.

Les enseignants chinois insistent sur le fait que les soustractions se développent d'abord jusqu'à 20 où ces décompositions multiples peuvent se travailler. Elles ne sont pas des calculs appris par cœur comme aux USA.

De plus les enseignants chinois font plus souvent des liens avec d'autres sujets mathématiques connexes (en moyenne 4,7 sujets contre 2,1 pour les américains). Un réseau de connaissances (Figure 13) est dessiné par Ma pour représenter ces liens.

⁹² Par exemple pour $53-26 = 53-(20+3+3) = 53-20-3-3 = 50-20-3 = 50-3-20 = 47-20 = 27$

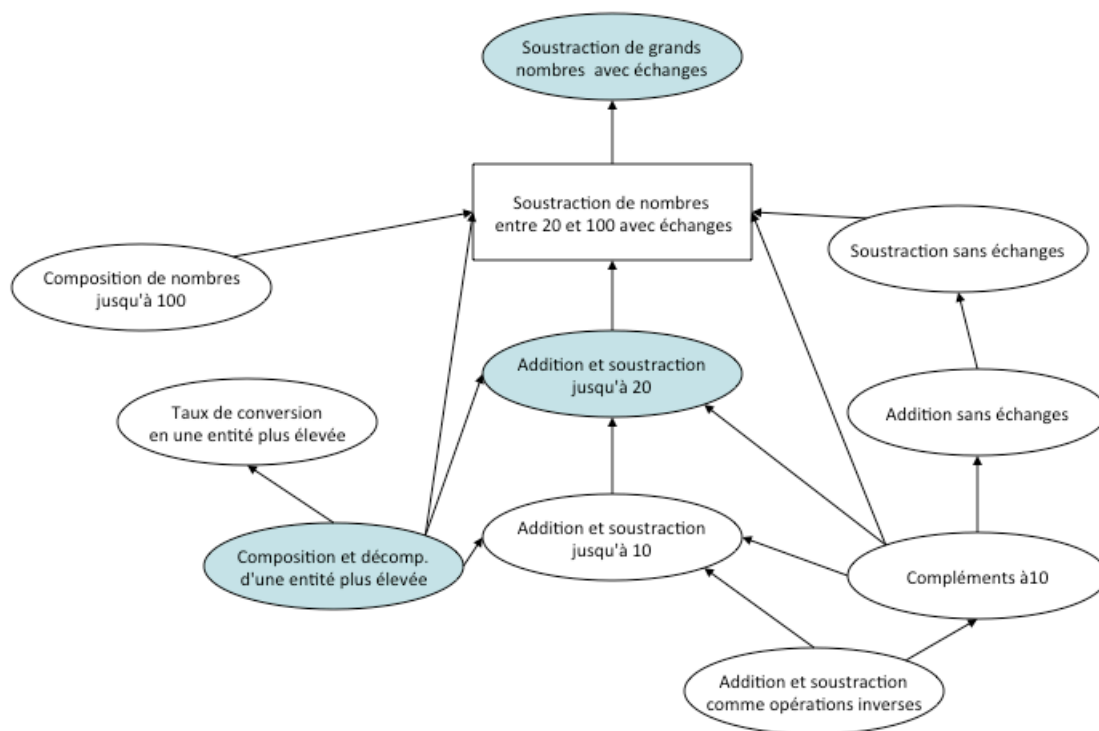


Figure 13 : Un réseau de connaissance pour la soustraction avec retenue (Ma, 1999, p. 19)⁹³

Une autre différence avec les enseignants US réside dans un usage moins fréquent de manipulations. Les enseignants chinois sont aussi plus conscients des implications mathématiques de ces manipulations et ils disent en discuter les limites avec leurs élèves. Ces discussions ne sont possibles qu'avec une grande compréhension du sujet.

10.1.1.3 L'approche des enseignants vaudois : emprunt contre décomposition

Comparaison quantitative

Le tableau des réponses des enseignants interrogés figure en Annexe 6.1. Seuls les enseignants des degrés 3P et 4P ayant été interrogés (voir 9.2.2.5), leur nombre n'est que de 11. 6 enseignants sur 11 (55%) utilisent essentiellement l'idée d'emprunt et 5 (45%) celle de décomposition. Plusieurs donnent les deux explications, mais à chaque fois l'une des deux prédomine et l'autre n'est pas vraiment utilisée comme illustré dans les exemples ci-dessous.

⁹³ Ma précise que le rectangle représente le sujet de la situation proposée, les ellipses sont les sujets connexes, les pièces clés étant colorées. Les flèches indiquent que du point de vue de l'enseignement, un sujet soutient l'autre et devrait être vu avant celui-ci, mais que, du point de vue de l'apprentissage, le second sujet renforce le premier.

En reprenant les deux graphiques de Ma (1999, p. 39) et en y ajoutant ces données, nous obtenons la Figure 14 :

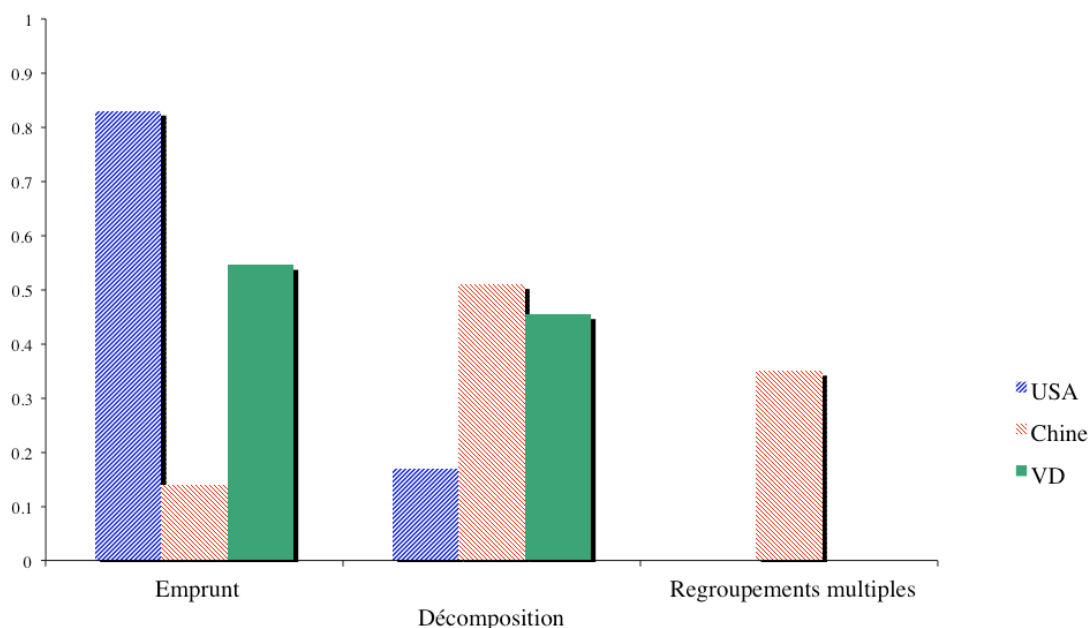


Figure 14 : Compréhension de la soustraction avec retenues.

Cette première comparaison quantitative place les enseignants vaudois à mi-chemin entre leurs collègues étatsuniens et chinois. Ils utilisent souvent l'idée d'emprunt (55%), mais de façon moins exclusive qu'aux USA. En revanche aucun d'entre eux ne propose des regroupements multiples comme en Chine. Si on s'intéresse au nombre de sujets mathématiques connexes cités, la moyenne par enseignants suisse est de 4.82 soit un nombre encore plus élevé que les chinois. Ce positionnement un peu paradoxal est repris dans la comparaison qualitative.

L'emprunt chez la voisine

La présentation de la soustraction avec retenue par les enseignants interrogés utilise souvent des images. La plus courante est celle d'un emprunt chez le voisin ou chez la voisine. Comme indiqué en 10.1.1.1, cette image est incorrecte et dangereuse, car elle donne une représentation erronée du nombre. Ce danger est illustré par les déclarations de plusieurs enseignants, par exemple celle de Kate :

Je leur donne la technique que, quand ils ont pas assez dans leur réserve, ils doivent aller chercher des réserves ailleurs. Donc, Madame unité qui est toute seule, doit aller chercher des réserves chez sa copine la dizaine, qui en a tout plein à côté. Donc elle traverse la rue, elle frappe à la porte : "Toc, toc... Bonjour, les dizaines, j'aurais besoin de réserves, parce que je dois faire une grosse livraison et j'ai pas assez". Comme la dizaine est sympa parce qu'elle en a 9, elle va lui donner une dizaine. Mais l'unité ne peut pas amener une dizaine chez elle, elle doit la transformer en unités, donc elle va ramener 10 unités à la maison, puis, comme elle en a déjà une, ça fait 11... Donc là j'explique aux enfants de... Je leur dit que notre dizaine qui en avait 9, elle en a plus que 8, parce qu'elle a été sympa et elle en a donné une dizaine à ses copines, à sa copine l'unité... L'unité, elle transforme cette dizaine en unités, donc il y en a 10, mais elle en avait déjà une. Donc elle en a maintenant 11. Parce qu'elle a fait 10 plus 1, et puis souvent au début je leur met ça en haut pour les aider (Kate écrit, voir Figure 15). Et puis après, on peut sous-

traire comme on le faisait, et puis on fait 11 moins 9. Ce qui donne 2 et on va faire 8 moins 7, ce qui donne 1. (Q701, Kate)

$$\begin{array}{r}
 (10+1) \\
 8 \ 11 \\
 \cancel{8} \ \cancel{1} \\
 \hline
 -79 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

Figure 15 : Soustraction écrit par Kate

Outre les questions suscitées par l'idée d'emprunt, le problème posé quant à la conception du nombre et de son écriture est cristallisé dans l'hésitation entre le singulier et le pluriel à propos des mots *dizaine* et *unité*. Pour Kate, la fameuse voisine est à la fois LA dizaine, c'est à dire la colonne, celle qui possède LES dizaines et à la fois LES dizaines. Toutefois Kate n'est pas consciente de la difficulté et déclare que cela n'a jamais posé problème pour les élèves. De la même manière, Martin considère que l'objection du remboursement de l'emprunt est un faux problème :

Martin : Etant donné que on pouvait pas prendre, on ne pouvait pas soustraire deux, on est face à une situation problématique, il y a des enfants qui disent "ah ben ça fait -3" par exemple, mais je dis "mais on rentre pas dans le négatif déjà en troisième année!"... Après, étant donné que ça fonctionnait pas, et ben je leur disais, techniquement qu'on allait, enfin de façon mnémotechnique, qu'on allait chez le voisin et puis qu'on enlevait, pour cette situation-là, une dizaine au voisin et que lui généreusement nous offrait 10 petites pièces qu'on rajoutait à ce qui était déjà présent, c'est-à-dire au 2 par exemple. Et après on résolvait le calcul comme ça.

Chercheur : Qu'est-ce qui fait qu'on ne doit pas rendre au voisin généreux?

Martin : C'est une bonne question, ça! Ben, parce qu'il en a suffisamment pour lui !

Chercheur : Pas toujours, par exemple dans 122 moins 25... il en avait suffisamment, mais au moment où on va aller lui en chercher, il va être embêté !

Martin : Bon, là on est sur un problème moral, mais... le principe du voisin généreux, ils sont tous... ça n'a jamais posé de problème! Il n'y a pas de soucis pour eux ! La c'est vraiment un cadre moral, on est dans deux dimensions! Mathématique et puis politique, un petit peu. Mais ça pose pas de problème, surtout que on a fait avec cette classe et puis d'autres des marchés pour aider une association, alors pour eux c'est normal, je pense. (Q813, Martin)

L'analogie devient ici plus forte que la rationalité mathématique et l'éthique devient un argument quasiment mathématique. Cette analogie cohabite d'ailleurs fort bien avec un argument d'autorité sur le fait qu'il est « impossible » d'enlever 5 à 2... du moins en 3P !

Cette question de l'impossibilité de soustraire 5 de 2 est d'ailleurs l'occasion pour la plupart des enseignants utilisant la notion d'emprunt de justifier cet emprunt. C'est le cas de Gaëlle :

Je parle souvent de bonbons, parce que je trouve que ça marche assez bien, que c'est plus représentatif, et puis je leur dit que s'ils ont 2 bonbons, ils ne peuvent pas en manger 5. Bon, c'est pas clair, ce que je dis... Que si... bon... je sais plus très bien comment je leur fais, d'ailleurs... Non, je leur dis que s'ils sont 5 copains, et qu'il n'y a que deux bonbons, ben ça va être difficile de les partager, donc il faut aller... je leur explique qu'on va aller chercher, on va aller en chercher chez le voisin pour pouvoir en avoir plus..... Faut pas que je mélange avec d'autres algorithmes... Je leur fais bien comprendre qu'on peut pas faire quelque chose de petit moins quelque chose de plus grand. Et puis donc je leur dis que 2 moins 5 c'est pas possible, donc on va aller chercher chez le voisin et puis ben, on... je fais vraiment en colonnes et on voit que c'est les dizaines... Je reprends en fait que ce 5 représente 50. Et puis que du coup on va chercher chez le voisin 10, 10 bonbons pour pouvoir aller après soustraire les 5 qu'on a envie de manger. Et puis... ça c'est la première fois. Et si ça passe pas, je... on fait aussi des fois des petits paquets d'allumettes, de petits bâtonnets... Pour justement qu'ils puissent comprendre ! (Q552, Gaëlle)

Gaëlle, qui par ailleurs est l'enseignante qui crée le plus de liens entre les diverses notions en jeu, ajoute à la confusion sur l'emprunt, celle entre la soustraction et la division-partage. Ces confusions indiquent bien une compréhension très superficielle de l'algorithme et des notions en jeu. Ce manque de compréhension est masqué par un fort recours à des analogies ou à du matériel, mais ces analogies et ce matériel sont justement mal choisis et ne sont pas « représentatifs » de la notion qui pose problème, ici celle du regroupement par 10, alors même que Gaëlle affirme utiliser ce matériel pour que les élèves « puissent comprendre ».

La décomposition d'une dizaine

Comme leurs collègues américains, les enseignants vaudois qui donnent une explication en terme de décomposition utilisent aussi presque tous du matériel. En revanche ce matériel est adapté à au travail de la valeur décimale et aux groupements et « dégroupements » décimaux puis qu'il s'agit des *blocs base dix* (Figure 16).

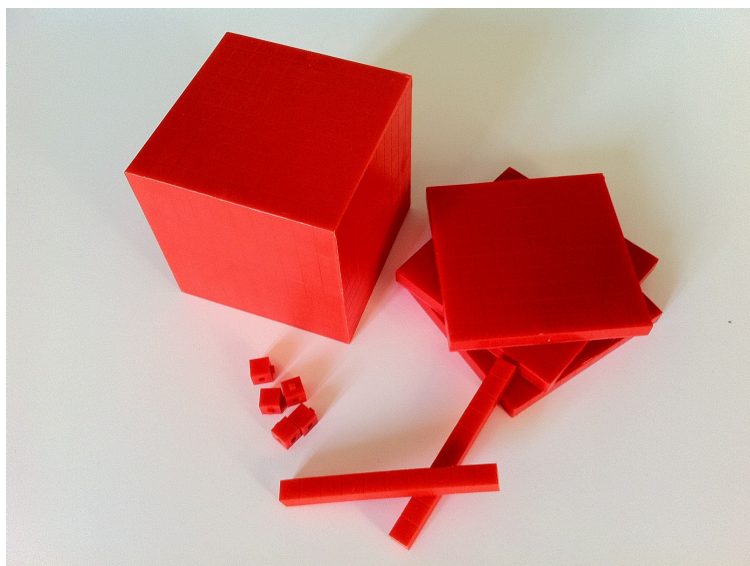


Figure 16 : Blocs base dix⁹⁴.

Je leur expliquerais comment ça va, et puis je prendrais les blocs. Le bloc de cent, le bloc... des dizaines, des unités. Puis je leur montrerais, enfin je reverrais ça, que ben... 52,

⁹⁴ Ce matériel fait partie du matériel officiel édité par COROME (Commission Romande des Moyen d'Enseignement et d'apprentissage). Les petits cubes (unités) peuvent s'assembler en barres (dizaines). Ces barres gardent la marque des petits cubes. Les plaques (centaines) et le gros cube (millier) gardent eux aussi la marque des petits cubes.

ben je prendrais 5 blocs de dizaines et puis 2 unités. Et puis après, pour faire ça, je changerais une dizaine avec des petits... des unités. Pour leur montrer en manipulant comment ça marche.

Et puis après, on ferait que sur le tableau noir. Donc faire avec les blocs et puis à chaque fois on change. Par exemple quand je prends le bloc des dizaines et puis que je change en dix unités, ben je le fais avec les blocs et je l'écris sur le calcul aussi. (Q157, Bénédicte)

Le matériel est ici au service de la compréhension du nombre et de sa notation décimale. Il permet donc à Bénédicte d'effectuer en parallèle le travail avec les blocs et avec la notation chiffrée. Ce même matériel permet d'ailleurs à une autre enseignante de construire l'algorithme avec ses élèves :

Je leur demanderais, d'après la situation que je leur aurais exposée, d'utiliser le matériel dont on aurait besoin pour résoudre le problème. Exemple, voilà, un enfant, Pierre, collectionne les cubes pour faire des constructions, il en a 52, et puis il va en donner une certaine quantité à sa sœur, il va lui donner 25, et puis j'aimerais savoir combien va-t-il rester de cubes à Pierre? Comment vous feriez ce calcul-là, à l'aide du matériel.

Alors je demanderais à un enfant de me montrer comment il ferait, et ce que j'attendrais de lui, c'est qu'il prenne 52 cubes et puis qu'ensuite il réfléchisse à comment enlever 25 de cette quantité. Euh... Et puis, il va vite être confronté au fait que, s'il a pris 5 barres de 10 et 2 cubes uniques, il ne peut pas enlever 5 cubes uniques...

Avant cela, excusez-moi, avant qu'on fasse l'échange, je leur demanderais quand même d'écrire le calcul. Il me dit, j'en ai 52 ici et je vais en enlever 25, je... comment vous feriez ça par écrit? Et puis j'attendrais d'eux "je ferais 52 moins 25". Et puis ensuite, lorsqu'il voit qu'il a 52, et puis qu'il veut en enlever 5, et puis que concrètement il y a une difficulté, d'observer ça sur le calcul. Sur les unités, on voit, on a 2 et on aimerait enlever 5, on peut pas. Alors qu'est-ce qu'on peut faire? Et puis là j'attendrais d'eux qu'ils me proposent de faire un échange, c'est-à-dire de prendre une des barres de dix et de l'échanger par 10 petits cubes, pour ensuite pouvoir faire l'échange, pouvoir faire la soustraction, au niveau des unités.

Et puis je reviendrais au calcul en disant : "Bon ben, qu'est-ce qu'on a fait ? On a changé cette barre par 10 petits cubes, ce qui fait que maintenant on se trouve avec 12 petits cubes, puis je peux en enlever 5". Euh... voyons voir... Pour leur faire com...

Je reviens un peu en arrière... L'étape que j'ai sautée... Vu qu'il y a la possibilité avec ces 5 barres de dix, ensuite de prendre 5 unités, vu qu'on fait un échange, là il faut le noter. C'est dire qu'il a enlevé une barre de 10, puis il l'a remplacée par 10 petits cubes, ça je demanderai de le noter sur le calcul. Donc de biffer le 5, de mettre 4, et puis ces 10 petits cubes qu'on a amenés, de les noter sur le calcul, ce qui fait qu'on en a 12, de petits cubes, puis ensuite de faire la soustraction avec les cubes, donc voilà, j'en ai enlevé 5, combien est-ce qu'il m'en reste ? Il m'en reste 7, alors voilà, je peux noter sur le calcul... etc. (Q252, Carole)

L'accent est mis par ces enseignants autant sur la difficulté du concept de notation décimale du nombre que sur celle de la soustraction, montrant ainsi une compréhension profonde de ces deux notions mathématiques. Il offrent ainsi à leurs élèves la possibilité de créer des liens allant bien au delà du seul algorithme de la soustraction. En revanche aucune personne interrogée ne propose plusieurs variantes de l'algorithme et seules deux d'entre-elles mentionnent accepter un autre algorithme lorsqu'il est utilisé par un élève.

De la même manière et contrairement aux enseignants chinois⁹⁵, aucun enseignant vaudois ne propose de décomposition multiple.

Les sujets connexes

A la question de savoir quels étaient les sujets « que des enfants devraient comprendre ou être capables de faire avant de pouvoir commencer à apprendre la soustraction avec échanges ? », les enseignants interrogés donnent un nombre de sujets plus grand que leurs collègues chinois ou américains, soit en moyenne 4,82. Ces sujets et les liens exprimés sont représentés dans la Figure 17.

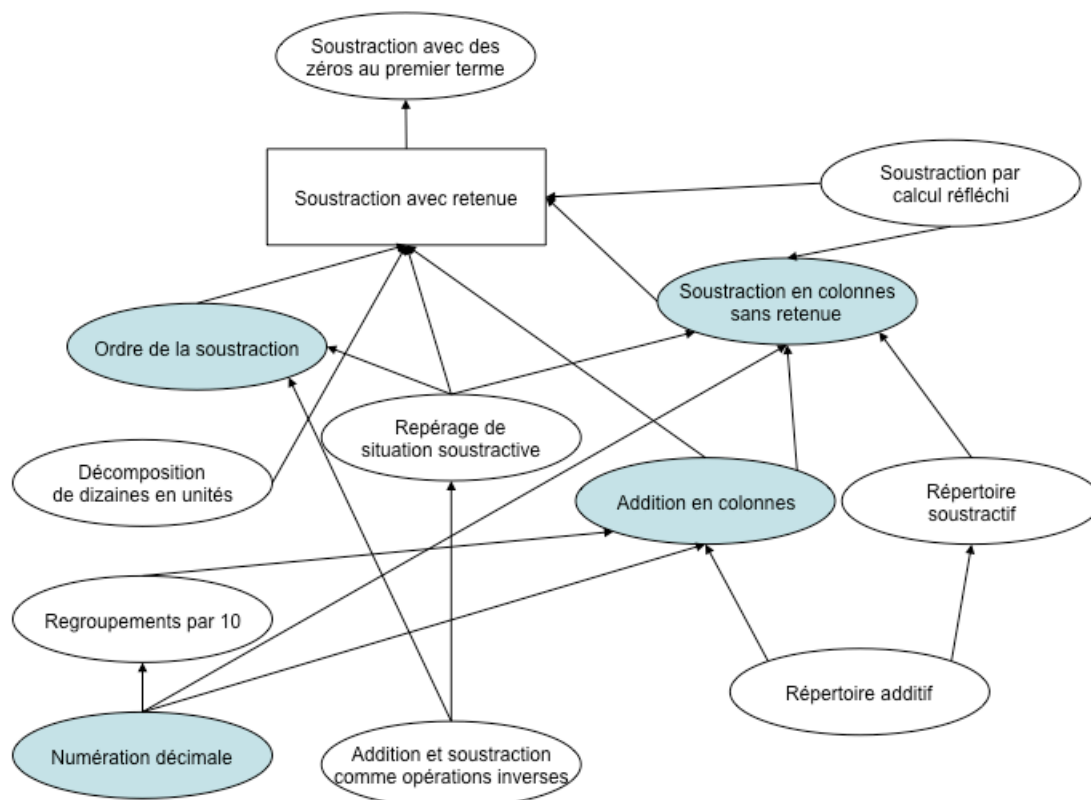


Figure 17 : Réseau de connaissance des enseignants vaudois pour la soustraction avec retenue⁹⁶.

Comparé au *réseau chinois*, celui-ci est plus touffu mais moins ordonné. L'impression, à l'écoute des sujets énoncés par les enseignants, est plus proche de l'énumération d'un certain nombre de thèmes que de celle de sujets en lien les uns avec les autres. Les flèches indiquent d'ailleurs que les sujets sont mentionnés par un enseignant donné et pas forcément qu'il tisse un lien explicite. Sans accès aux transcriptions en chinois de Ma, il ne nous est pas possible de savoir si cette différence est due aux enseignants ou à une différence dans la manière exacte de poser les questions. Il sera donc nécessaire d'observer si cette différence se retrouve dans les autres questions.

Le lien entre addition et soustraction est souvent mentionné. Toutefois il est plus souvent fait entre les opérations ou entre les situations mathématiques qu'entre les algorithmes, alors que c'est le sujet de la question posée. En particulier, le lien entre les regroupements par 10 et la soustraction avec retenue est très fréquent.

⁹⁵ Voir note 92.

⁹⁶ Le rectangle représente le sujet de la situation proposée, les ellipses sont les sujets connexes, les pièces clés étant colorées. Les flèches indiquent que du point de vue de l'enseignement, un sujet soutient l'autre et devrait être vu avant celui-ci, mais que, du point de vue de l'apprentissage, le second sujet renforce le premier.

pements par 10 intervenant dans l'algorithme de l'addition et la décomposition de dizaine en unité n'est mentionné par personne. La question de l'ordre dans lequel on effectue la soustraction, « le plus grand moins le plus petit » préoccupe beaucoup les enseignants, à la fois dans leurs explications et dans les connaissances mentionnées, alors que ce sujet n'intervenait pas du tout chez Ma.

10.1.2 Deuxième question : multiplication de nombres à plusieurs chiffres

Quelques enseignant(e)s de 5^e ont noté que plusieurs de leurs élèves faisaient la même erreur lors de la multiplication de grands nombres. En essayant de calculer

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline \end{array}$$

les élèves semblaient oublier de "déplacer les nombres" (c'est-à-dire les produits partiels) à chaque ligne. Ils faisaient ceci :

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 1845 \end{array}$$

au lieu de cela :

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 79335 \end{array}$$

Si ces enseignant(e)s s'accordaient à dire que ceci constituait un problème, ils n'étaient pas du même avis sur ce qu'ils devaient faire pour le régler. Que feriez-vous si vous enseigniez en 5^e et que plusieurs de vos élèves fassent cette erreur ?

10.1.2.1 L'approche des enseignants US : alignement ou séparation en trois problèmes (Ma, 1999, pp. 28-38)

Pour 70% des enseignants US, la cause de l'erreur est procédurale (Groupe Procédural) alors que pour 30% d'entre eux (Groupe Conceptuel), la cause est à chercher dans le fait que les élèves n'ont pas compris l'algorithme et ont des difficultés avec la numération décimale de position. Tous les enseignants utilisent fréquemment l'expression de *place value* (valeur positionnelle), mais les enseignants du premier groupe ne la comprennent que comme « position des nombres dans l'algorithme ». De même, ils utilisent les mots « centaines » et « dizaines » comme nom des colonnes, mais sans s'interroger sur leur signification.

Une cause de cette orientation procédurale est la compréhension que les enseignants eux-mêmes ont de l'algorithme. En effet, tous les enseignants du Groupe Conceptuel étaient capables d'expliquer l'algorithme, alors que pour presque tous les enseignants du Groupe Procédural, « you just do it! ».

Ces enseignants classés dans le Groupe Procédural se focalisent sur la question de l'alignement et utilisent plusieurs *stratégies*⁹⁷ pour ce faire. Ils rappellent la règle de l'alignement, utilisent du papier avec des lignes verticales, ou utilisent un graphisme pour *garder la place* : 0, ou * ou un symbole quelconque. Le symbole 0 n'est pas forcément privilégié et, à la question posée à ces enseignants de savoir si ajouter 0 à 492 n'allait pas changer le nombre, certains ont dit que, dans ce cas, ils mettraient plutôt une étoile alors que d'autres ont répondu que le nombre ne serait pas modifié « car $492+0=492$ ».

Les enseignants du Groupe Conceptuel ont en revanche tous répondu correctement à la question des zéros. Leur stratégie d'enseignement est d'expliquer que $123=100+20+3$ et de séparer la multiplication en trois problèmes (123×5 , 123×40 , 123×600). En revanche aucun ne donne de justification et ne prononce le mot de distributivité.

10.1.2.2 L'approche des enseignants chinois : élaboration du concept de valeur positionnelle (Ma, 1999, pp. 38-51)

Seule une minorité d'enseignants chinois (8%) font partie du Groupe Procédural. Leur approche est très proche de celles des enseignants US, tant sur les causes de l'erreur que sur les stratégies d'enseignement. La suite de ce point 10.1.2.2 ne traite que du Groupe Conceptuel.

Ces enseignants interprètent l'erreur des élèves du point de vue de la distributivité (31%⁹⁸), souvent mentionnée explicitement, ou en terme de valeur positionnelle (61%).

Instead of saying that the 4 in 645 is *40* and 123×40 is *4920*, these teachers argued that the 4 in 645 is *4 tens* and 123 multiplied by 4 tens is *492 tens*. Then they explained why the 492 should be lined up with the tens place⁹⁹. (Ma, 1999, p. 42)

De plus 15% des enseignants chinois utilisent les deux interprétations et les comparent.

Les connaissances mentionnées par les enseignants chinois du Groupe Conceptuel sont organisées dans un réseau (Figure 18).

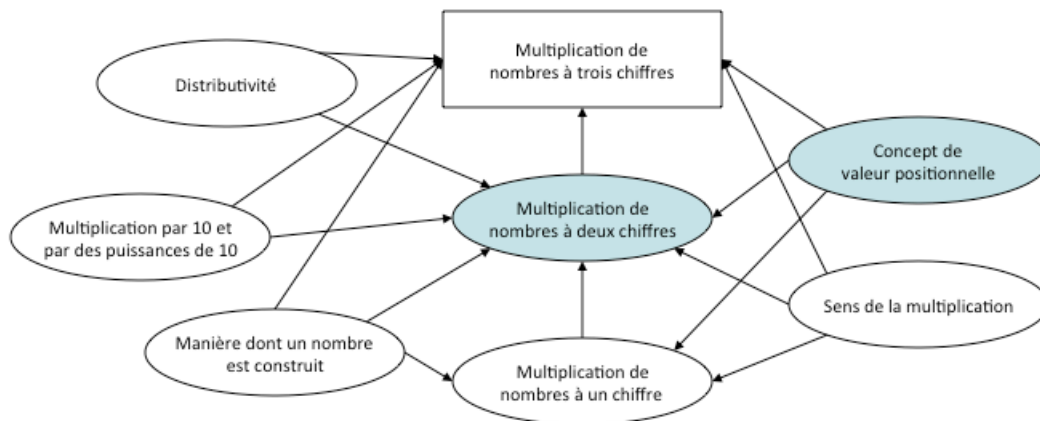


Figure 18 : Réseau de connaissance des enseignants chinois à propos de la situation de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres (Ma, 1999, p. 47)¹⁰⁰

⁹⁷ Ma utilise le terme anglais *strategy*. Il est ici traduit littéralement dans son sens commun en français.

⁹⁸ Tous les pourcentages sont donnés par rapport au nombre total d'enseignants chinois interrogés, contrairement à ce que fait Ma.

⁹⁹ « Au lieu de dire que le 4 de 645 vaut *40* et que 123×40 est égal à *4920*, ces enseignants ont affirmé que le 4 de 645 c'est *4 dizaines* et que 123 multiplié par 4, c'est *492 dizaines*. Ils ont ensuite expliqué pourquoi le 492 devait être aligné avec la colonne des dizaines. » Les italiques sont de Ma.

Dans ce réseau de connaissances, la notion mathématique mise en scène par la situation n'occupe pas la place centrale, car pour les enseignants de ce groupe, l'essentiel du travail de compréhension se fait au moment de l'enseignement de la multiplication de nombres à deux chiffres.

Les enseignants chinois classés dans le Groupe Conceptuel proposent plusieurs stratégies d'enseignement : explication des raisons mathématiques du fonctionnement de l'algorithme (30%), travail en groupes pour que les élèves donnent les raisons du fonctionnement de l'algorithme (40%), discussion collective à partir de l'erreur écrite au tableau, séries de questions dirigée posées à la classe (comment le nombre est-il formé...), proposition d'une série d'exercices permettant de remédier à la difficulté en faisant comprendre les raisons mathématiques, révision de la procédure et comparaison avec les raisons mathématiques, proposition d'autres décompositions des facteurs donnant d'autres produits partiels.

10.1.2.3 L'approche des enseignants vaudois : distributivité implicite et règle du zéro

Comparaison quantitative

Le tableau des réponses des enseignants interrogés figure en Annexe 6.2. 4 enseignants vaudois sur 16 (25%) montrent une compréhension purement procédurale de l'algorithme, alors que 12 (75%) en ont une compréhension au moins partiellement conceptuelle. Pour ce qui est des stratégies d'enseignement, 4 enseignants interrogés (25%) envisagent essentiellement de retravailler la règle et 12 (75%) se dirigent plutôt vers une explication des raisons mathématiques de l'algorithme.

En reprenant les deux graphiques de Ma (1999, p. 39) et en y ajoutant ces données, nous obtenons la Figure 19 et la Figure 20.

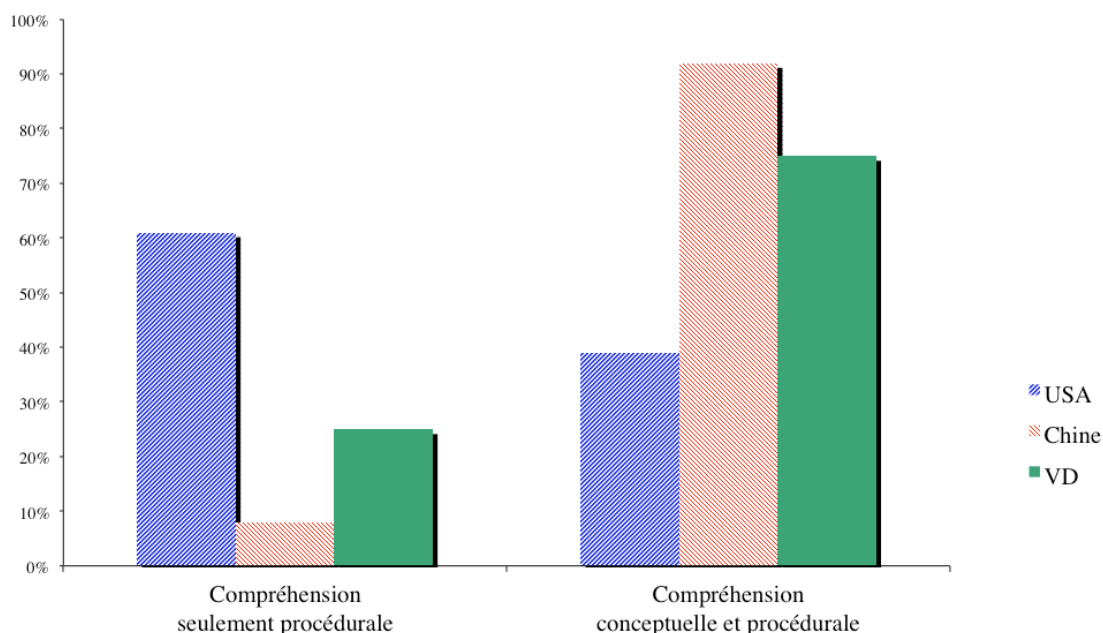


Figure 19 : Connaissance de l'algorithme des enseignants

¹⁰⁰ Ma précise que le rectangle représente le sujet de la situation proposée, les ellipses sont les sujets connexes, les pièces clés étant colorées. Les flèches indiquent que du point de vue de l'enseignement, un sujet soutient l'autre et devrait être vu avant celui-ci, mais que, du point de vue de l'apprentissage, le second sujet renforce le premier.

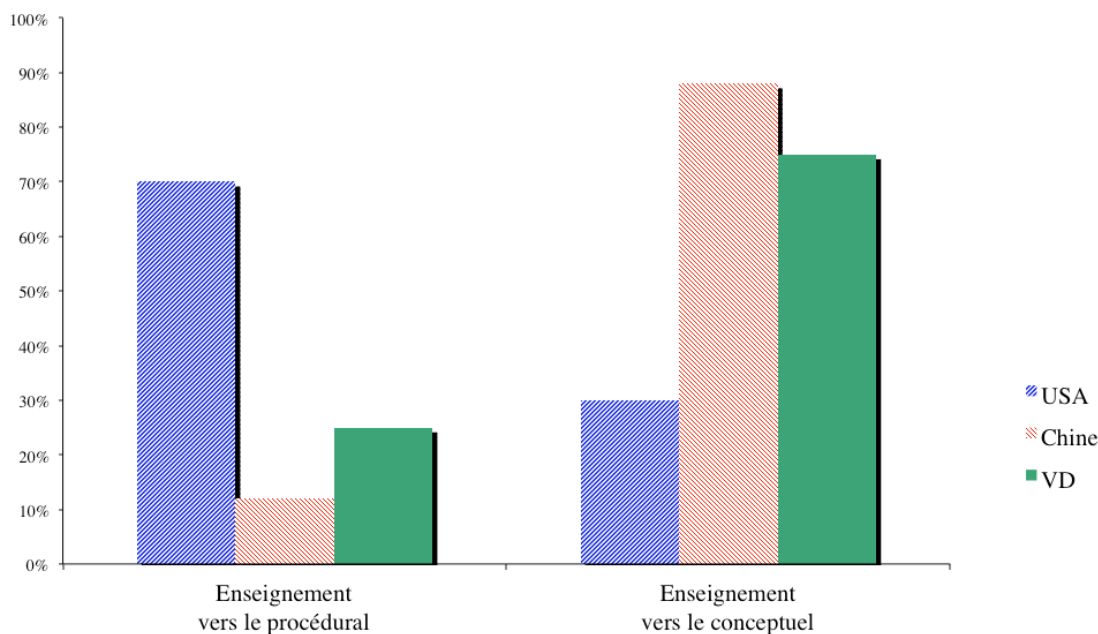


Figure 20 : Stratégies d'enseignement des enseignants

Cette première vision quantitative place à nouveau les enseignants vaudois à mi chemin entre les enseignants US et les chinois. Une vision plus qualitative est nécessaire pour mieux décrire cette position.

Cause de l'erreur et stratégie d'enseignement : un groupe procédural

Pour 8 enseignants vaudois (50%) la cause de l'erreur est essentiellement un oubli de la règle et 4 d'entre eux proposent des stratégies d'enseignement visant uniquement à permettre aux élèves d'effectuer l'algorithme en leur répétant la procédure à suivre ou en leur donnant un certain nombre de *trucs*. Comme signalé par Ma (pp. 29-30) chez les enseignants US, ces *recettes* peuvent utiliser des termes mathématiques comme de purs moyens de nommer les objets. C'est le cas en particulier des termes unité, dizaine et centaine qui ne servent pour certains qu'à désigner un endroit sur la feuille de papier de l'élève.

Je pars de ce principe-là, de posi... enfin, d'unité, de dizaine, centaine etc. Enfin, on commence comme ça par l'unité, puis ensuite en descendant, ben on place au niveau de la dizaine, centaine... etc. Mais autrement, je ne sais pas. (Q813 Martin)

La désignation des actions est parfois imagée. Huguette dit à ses élèves de « faire un escalier » ou encore, pour la troisième ligne, que « plus il y a d'étages, plus il y a d'escaliers! ». Carole fait elle dessiner une clochette.

J'ai essayé, ça, j'ai dit, il doit y avoir une petite clochette, il doit y avoir quelque chose dans ta tête, là, avant que tu commences à calculer. Je leur ai même dessiné la petite clochette, au dessus de 4, ça fait "ding, ding, ding, ding", tu dois penser à quelque chose. Ah, oui, le zéro. (Q252 Carole)

Ces images, ces *trucs* peuvent être considérés comme très efficaces par l'enseignant, comme pour Nicole :

Pour passer au deuxième rang, il me manque ce zéro. Alors pour qu'il tienne, je l'ai appelé "Super Zéro". Il y a Super Zéro qui arrive et qui vient nous aider. [...] Et puis ce Super Zéro, je lui ai mis un visage, parce qu'ils doivent se rappeler que c'est Super Zéro, qu'il existera toujours et qu'il vient nous aider pour faire ces calculs. C'est ce système que

j'ai trouvé. [...] Et le Super Zéro est en rouge! Toujours en rouge. [...]
Maintenant, nous on est à deux, mais on va passer à trois chiffres, donc Super Zéro, ben il s'est marié, et puis ils sont Super Zéro et Madame Super Zéro, de nouveaux des gentils, bien sûr, et puis ces deux vont maintenant nous aider, et je les laisse aussi en rouge, puisque c'est mari et femme, et puis on continue l'exercice dans ce sens-là.
Au début, je leur explique simplement Super Zéro, comment faire, qu'il existe, qu'il faut le mettre, et quand ils ont bien compris ce calcul de base, je leur fais faire, comparer pourquoi on le met. Donc je leur fais faire le calcul sans le zéro et puis le calcul avec, et qu'ils voient pourquoi est-ce qu'il y a ce Super Zéro qui est là. Et ils remarquent tout de suite que ben ça donne pas le même résultat. Et après c'est pour... on réfléchit... bon ça, ce sera après en 5ème. En 4ème, je vais peut-être pas aller aussi loin, pour montrer le décalage, pourquoi ça fait ça. Ca après, en 5ème je l'approfondirai. (Q829, Nicole)

Le reste de l'entretien avec Nicole montre qu'elle ne dispose pas de la connaissance du « pourquoi on fait ça ». Pourtant avec son sens pédagogique, elle recouvre cette absence de connaissance par un enseignement vraisemblablement efficace à court et peut-être même à long terme, du moins si l'efficacité de l'enseignement est mesurée selon la capacité des élèves à effectuer correctement l'algorithme de la multiplication. Elle est en tous les cas satisfaite du « système » qu'elle a trouvé et n'a aucune raison d'en changer. En revanche, de la même manière que chez la majorité des enseignants US de Ma, le recouvrement des connaissances mathématique sur l'algorithme par des trucs pédagogiques empêche la création de liens entre la notion étudiée et les autres connaissances, ici entre l'algorithme de la multiplication à trois chiffres et la numération décimale de position, les propriétés des opérations... Super Zéro permet également aux élèves d'éviter de tisser ces liens et de considérer l'algorithme de la multiplication comme un *truc*, un peu magique, contribuant ainsi à la construction d'une conception des mathématiques comme une collection de *trucs* un peu magiques...

Interrogées dès lors sur le fait d'utiliser un zéro plutôt qu'un autre symbole, comme un trait, une étoile ou un symbole quelconque, Nicole répond également par des considérations de type pédagogique.

C'est tout simplement pour pas qu'ils mélangent avec le fois, le moins... un autre signe. Parce que j'ai remarqué que, les enfants, s'ils mettent... Il y en a qui faisaient ça, mais ils comprenaient pas après pourquoi est-ce qu'on met un moins là et puis qu'il y a un plus devant. Alors ils faisaient des moins. Et puis si on met une croix, la même chose, c'est des fois, c'est pas des... Alors que zéro, c'est un chiffre, on reste en maths, c'est toujours un chiffre et puis ça continue dans la lignée. (Q829, Nicole)

Des arguments de bon sens du même type se retrouvent également chez des enseignants qui ont une compréhension purement procédurale d'une partie de l'algorithme, par exemple de la raison qui fait que, alors qu'on est dans une multiplication, on additionne les trois lignes.

Gaëlle : En séparant comme ça les calculs, on peut dire qu'on a trois réponses, qu'il faut bien qu'on en fasse quelque chose, de ces réponses. Enfin, qu'on va forcément les mettre ensemble pour trouver... un résultat final.

Chercheur : Et si on les multipliait ?

Gaëlle : Ben on... on finirait jamais !

Ces arguments semblent donc parfois remplacer une connaissance mathématique manquante. L'étude de ce remplacement dépasse le cadre de cette thèse, il nous semble toutefois, en entendant les termes *comprendre, pourquoi, expliquer...* que l'hypothèse pourrait être faite que souvent l'enseignant ne distingue pas le statut anecdotique de ces arguments des arguments à portée mathématique.

D'autres enseignants, en particulier Elise et Huguette distinguent voire opposent les arguments mathématiques et les explications de type procédural. Pour Elise, ce sont les élèves qui préfèrent appliquer des recettes.

Ouais, j'essayerai de leur expliquer, mais c'est peut-être un peu faussé, enfin, un peu compliquer la vie, mais que... là par exemple c'est 123 fois 645, en fait on fait l'unité, donc c'est 5, ça on le fait normalement. Après la dizaine, comme c'est pas 4, mais c'est 40, ben il faut rajouter un zéro, comme quand on fait fois 10. Et puis pareil pour le 6 qui est pas 6 mais 600. Là on rajoute deux zéros, comme quand on fait fois 100. En fait, c'est ce que j'essayerai de leur expliquer.

Je sais que, certains élèves, ça leur parle pas du tout, ce genre d'explication, que la dizaine, c'est pas 4, mais c'est 40. Enfin, quand on le dit, on dit six, cent, quarante, cinq. Mais je sais que j'ai des élèves dans ma classe qui préfèrent apprendre une marche à suivre point après point que de comprendre vraiment pourquoi c'est comme ça. (Q311 Elise)

Si Elise pense que ses élèves préfèrent appliquer une marche à suivre plutôt que de comprendre « pourquoi c'est comme ça », ses propos indiquent que c'est aussi le cas pour elle. Toutefois, elle semble comprendre les raisons du fonctionnement de l'algorithme, du moins pour ce qui concerne la présence du zéro. Pourtant, interrogée sur l'explication du fait que chaque chiffre du second facteur multiplie chaque chiffre du premier, elle répond :

Parce que, en fait, on multiplie pas les unités ensemble, mais on multiplie une unité avec le tout, comme on multiplierait un paquet de bonbons, il y a 20 bonbons, on en prend 5, on l'a multiplié, on n'a pas additionné les 20 bon... bons... Enfin si, quand même. (rire) Ouais... c'est difficile, alors là, oui. Vous me... Comment lui expliquer que ce ne serait pas en colonnes... Mmm... Ouais, je sais pas... C'est... des fois, il y a des choses qui me paraissent trop évidentes pour trouver une explication! Multiplication et division, c'est différent...

Je peux pas vous en dire plus, il faudrait que je réfléchisse... encore un moment pour trouver des manières un peu plus... réalistes d'expliquer les choses. (Q311 Elise)

Si Elise sait que le zéro de la seconde ligne apparaît parce que « c'est pas 4, mais c'est 40 », elle ne peut pas mobiliser les connaissances mathématiques permettant de comprendre le fonctionnement de l'algorithme. Du coup elle aussi tente de trouver des analogies avec des situations réelles. N'en trouvant pas de satisfaisante, elle tentera d'en trouver de plus « réalistes », de plus liées à la réalité concrète.

Dans ce *Groupe Procédural*, une enseignante se détache, Huguette. Elle est expérimentée et a fait des études en sciences de l'éducation. C'est la seule enseignante du groupe qui fait clairement la distinction entre des descriptions procédurales, qu'elle appelle du bachotage, et des explications mathématiques :

C'est l'aspect "truc" ! Expliquer l'escalier... moi je dis "fais un escalier", "n'oublie pas ton escalier, hein!" Moi j'ai travaillé beaucoup avec les enfants qui ont de la peine, donc... c'est toujours l'escalier, l'escalier, hein ! Deux escaliers. Plus il y a d'étages, plus il y a d'escaliers! Ca, c'est du bachotage! Maintenant, la logique, au fond, j'ai jamais pu l'expliquer, la logique réelle.

J'ai jamais vraiment cherché. J'ai jamais vraiment... Bon, les calculs, du sens de la multiplication, de l'estimation, et puis qu'à partir de là, il y a un truc pour que ça retombe juste! Mais en fait, j'aurais pu discuter... Parce que c'est vrai qu'il est intéressant, ce problème, pourquoi il y a les escaliers ? Comment vous l'expliquer, vous ? Moi ça m'intéresse, ça !

Parce que c'est vrai que on n'a pas le temps... On dit que bon, le but c'est d'amener tous les élèves avec, qu'ils ne se plantent pas, et qui qu'à un moment donné, ils puissent résoudre des problèmes, qu'ils puissent estimer, et puis que là c'est un réel problème mathématique, là ! (Q654 Huguette)

En plus de la conscience de cette distinction, Huguette est désireuse d'en savoir plus, de connaître les raisons mathématiques. Nous avons répondu à sa demande en fin d'entretien, nous y reviendrons en 10.2. Une autre singularité de la réponse d'Huguette à la situation de l'algorithme de la multiplication est qu'elle se distingue de sa réaction par rapport à l'algorithme de la soustraction. En effet, Huguette faisait partie du groupe conceptuel pour la soustraction (voir 10.1.1) : elle donnait des explications de type mathématique pour l'algorithme de la soustraction alors qu'elle reste purement procédurale pour celui de la multiplication. Interrogée à ce sujet, Huguette répond :

Pour moi c'est mécanique... je dois dire... et puis j'ai jamais vraiment... En fait je reconnais, mes connaissances en mathématiques insuffisantes, là! Et puis peut-être que, personnellement, on ne me l'a jamais expliqué. J'ai pris ce truc, je m'en suis occupé... J'aime pas trop les maths! (rire) Ca vous étonne peut-être pas, mais... c'est comme la majorité des filles... Malheureusement, voilà! On reporte certains schémas, mais c'est vrai que j'aime pas les maths! Mais j'aime bien expliquer, j'aime bien m'occuper des enfants... (Q654 Huguette)

Huguette pointe donc clairement la raison de ces choix didactiques : dans un cas elle dispose des connaissances mathématiques et fait donc un choix didactique mathématiquement pertinent au sens de Bloch, dans l'autre, elle ne dispose pas de ces connaissances et n'interagit pas avec les élèves sur les éléments mathématiques de la situation. Et c'est dans cette circonstance, en situation d'interview en tout cas, quelle exprime ses conceptions. Ces représentations, qui devraient agir pour un algorithme comme pour l'autre, ne semblent donc pas être la cause des choix didactiques de Huguette. Ils serviraient ici plutôt de justificatif, presque d'excuse face au chercheur, mais peut-être aussi face aux élèves.

Cause de l'erreur et stratégie d'enseignement : un groupe conceptuel

Pour 8 enseignants (50%), la cause de l'erreur est essentiellement un défaut de compréhension de l'algorithme. 4 autres considèrent que l'erreur est plutôt due à un oubli de la procédure, mais ils proposent des explications de type conceptuel pour remédier à cet oubli. Ce groupe comporte donc 12 enseignants (75%). Comme l'erreur concernait le décalage, ces enseignants proposent deux types d'explications à leurs élèves pour justifier ce décalage.

La plus fréquente consiste à expliquer qu'à la deuxième ligne, il ne s'agit pas d'une multiplication par 4, mais d'une multiplication par 40 et qu'il faut donc mettre un zéro. De façon cohérente, les enseignants de ce groupe refusent la suggestion d'utiliser un autre symbole pour marquer le décalage.

Moi, je leur dit de mettre un zéro...

Parce que ça correspond au 10. Et puis le 10, c'est 0. Et puis là, quand on additionne... Autrement, pourquoi est-ce qu'on irait... Bon... S'il n'y avait rien, pourquoi est-ce qu'on les mettrait à gauche? Les enfants, ils oublieraient. Donc c'est pour ça qu'il faut mettre quelque chose. Et puis autrement, pour moi, une barre c'est "divisé". C'est pas 0. Donc, moi, maintenant, les enfants, ils peuvent mettre comme ils veulent, je leur laisse le choix, mais si c'est moi qui fais, je mets un zéro, parce que c'est zéro.

La réponse de 40 fois 123, c'est 4920, c'est pas quatre, neuf, deux et puis une barre, quand on écrit le nombre.

Et puis je dirais aussi que c'est que je l'ai appris comme ça. (rire)

Mais pour moi, dans un nombre, il n'y a pas de barre. Quand on doit additionner, c'est des zéros, c'est pas des « rien du tout » ou barre comme ça! (Q157 Bénédicte)

La deuxième stratégie d'enseignement utilisée est de considérer qu'on multiplie le premier terme par des unités, puis par des dizaines et enfin par des centaines. Les enseignants qui utilisent cette vision proposent souvent, de manière cohérente, d'utiliser un trait ou un autre symbole pour marquer le décalage vers la gauche :

Quand on fait fois, le deuxième nombre, enfin fois 645, on s'occupe d'abord des unités, donc on fait, on part des unités et on multiplie le 123 par les unités, donc on fait 5 fois et puis je mets une flèche. Et puis ensuite, le 4, c'est pas 4 unités, mais c'est 4 dizaines, donc je leur ai dit qu'on décale en fait le chiffre, euh, du côté de la dizaine. En fait on doit sauter parce qu'en fait on s'occupe des dizaines. Et puis j'ai décalé ça comme ça et puis après on a recopié des centaines et puis on décale comme ça.

[...] Pour la compréhension, c'est ce qu'on avait dit, c'est pas 4, c'est 40, en fait, dans la décomposition des nombres.

Moi j'ai accepté les deux solutions, [qu'ils mettent un trait ou un 0] J'ai dit les deux solutions. J'ai dit on peut mettre un zéro parce que il y a 0 unités, mais enfin il n'y a pas zéro, non, c'est pas zéro, mais j'ai... j'ai aussi mis un trait en disant, ben, on s'occupe pas de cette zone là, parce que c'est les unités, on a déjà fait, donc on saute et puis on passe aux... J'ai accepté le trait ou le zéro, parce qu'il y a certains enfants qui ont travaillé avec leurs parents, et puis ils ont déjà mis le zéro, alors je me suis dit que je ne voulais pas trop interférer... Mais je préfère le trait! Parce qu'en fait on n'a pas fait 0 fois quelque chose et puis ça fait 0, donc... J'ai dit bon, ben ma foi, maintenant que c'est fait, c'est fait, mais autrement on le fait avec le trait. (Q146 Alexandra)

Cette stratégie d'enseignement, utilisée par 60% des enseignants chinois, mais pas par les étatsuniens, est utilisée par 5 enseignants vaudois (31%).

Chez les enseignants de ce groupe, l'explication du zéro est liée à celle de la raison qui nécessite d'écrire plusieurs lignes de calculs. Bénédicte écrit :

$$123 \times 645 = (123 \times 5) + (123 \times 40) + (123 \times 600)$$

Figure 21 : Ecriture de la distributivité, Bénédicte

D'autres explicitent et écrivent cette distributivité en colonnes et la lient à la présence des zéros. C'est le cas de Patricia qui écrit :

Ils faisaient ceci:

$$\begin{array}{r}
 123 \\
 \times 645 \\
 \hline
 615 \\
 4920 \\
 73800 \\
 \hline
 1845
 \end{array}$$

Handwritten notes in a circle: 5×123 , 40×123 , 600×123

au lieu de cela:

$$\begin{array}{r}
 123 \\
 \times 645 \\
 \hline
 615 \\
 4920 \quad 40 \times 123 \\
 73800 \\
 \hline
 79335
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 123 \\
 \times 5 \\
 \hline
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 123 \\
 \times 40 \\
 \hline
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 123 \\
 \times 600 \\
 \hline
 \end{array}$$

Figure 22 : Ecriture de la distributivité, Patricia

Toutefois, le mot *distributivité* n'est jamais prononcé. Il n'est pas non plus illustré par une représentation de la multiplication comme produit cartésien ou comme aire d'un rectangle. La seule représentation de la multiplication utilisée est celle d'une addition itérées et Patricia est la seule enseignante à utiliser cette représentation pour expliciter la proportionnalité.

C'est le raccourci de l'addition, ça, il faut bien se dire que c'est pas la même opération. Bon, si je fais 5 fois 123, (écrit en colonnes l'addition de $123+123+123+123+123$) vous commencez par faire 5 fois 123. Ben vous allez commencer par faire $3+3+3+3+3$. Qui fait 15, etc. Donc vous faites bien d'abord 5 fois 3, puis après vous faites 5 fois 2, et puis après vous faites 5 fois 1. Et ça c'est mon premier calcul. C'est 5 fois 123. Et ça pour moi c'est parce que c'est un raccourci. On met tout en œuvre. En fait ce calcul là, c'est trois calculs. C'est 123 fois 5, plus 123 fois 40, plus 123 fois 600 (voir Figure 22). Et puis après, vous faites ça plus ça plus ça. Seulement ici c'est à la verticale... C'est en fait un raccourci de tout ça. (Q867 Patricia).

Cette représentation additive conduit d'ailleurs plusieurs personnes à distinguer l'ordre dans lequel s'effectue le produit, sans autre raison que de coller à cette représentation, comme pour Alexandra :

Alexandra : 12 fois 3... J'essaye de voir aussi qu'ils ont bien compris que c'est 12 fois... voilà, le 3 qui est pris 12 fois. Et puis pas que c'est 12 qui est pris 3 fois.

Chercheur : C'est aussi 12 qui est pris 3 fois, non ?

Alexandra : Euh... Oui, 12 qui est pris... Mais c'est, c'est 12 fois 3. Donc il y a des enfants qui disent c'est 12 qui est pris trois fois, ou c'est 3 qui est pris 12 fois. Donc, si c'est 3 fois 12, c'est 3... ouais, ouais... bon déjà... On peut, on peut leur proposer les deux, mais disons que... je sais qu'il y a des fois des... quand on décompose... et si on voit 8 fois 3, c'est 8 fois 3 et pas 3 fois 8. (Q146 Alexandra)

Des hésitations de ce type, voire des erreurs mathématiques, existent d'ailleurs chez les enseignants de ce groupe conceptuel. Deux erreurs ont en particulier été relevées. La première est la confusion entre chiffre et nombre chez trois enseignants, par exemple chez Bénédicte :

Chez les 3^{èmes}, j'ai déjà fait avec un nombre, et je vais leur apprendre avec deux nombres, fois deux nombres. (Q157 Bénédicte)

La seconde erreur consiste à énoncer une règle générale, une version de la fameuse *règle du zéro* alors que son domaine de validité ne se trouve que dans les nombres entiers.

Je peux pas faire un nombre multiplié par 10 et avoir une réponse qui se termine par 5, c'est pas possible. Il y aura toujours aucune unité, parce que... parce que euh... parce que ça se multiplie et que c'est comme ça !!! (Q701 Kate).

Les liens proposés par les enseignants vaudois

Un réseau de connaissances tel que celui de la Figure 18 ne peut être proposé pour les enseignants vaudois. Des liens sont faits entre l'algorithme et la distributivité, entre l'algorithme et la numération décimale de position, entre l'algorithme et le sens de la multiplication. Toutefois il ne s'agit presque toujours que d'un lien entre deux éléments et pas d'un véritable réseau de connaissances. Pour les enseignants vaudois interrogés, ces liens sont un moyen de parvenir à maîtriser l'algorithme, ils ne sont presque jamais mis en avant comme un but d'apprentissage en lui-même.

10.1.3 Troisième question : division par une fraction

Pour les raisons exposées en 9.2.2.3, cette question n'a été posée qu'à 5 enseignants et elle a été fortement transformée par rapport à la version de Ma (1999, p. 55). Nous nous contenterons donc pour cette question de résumer rapidement les constatations faites par Ma pour les enseignants étatsuniens et chinois, puis de donner quelques éléments concernant les enseignants vaudois ayant répondu à cette question.

10.1.3.1 La performance de calcul et les représentations des enseignants US et chinois

Les enseignants interrogés par Liping Ma devaient répondre à la question suivante :

Les gens semblent avoir diverses approches au sujet de la manière de résoudre un problème impliquant la division de fractions. Comment résolvez-vous un problème du type

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$$

Imaginez que vous deviez enseigner la division par une fraction. Pour donner du sens à ceci pour des enfants, un moyen que bien des enseignants utilisent est de lier les mathématiques à d'autres choses. Parfois ils fournissent des situations réelles ou des "histoires-problèmes" pour montrer les applications de points particuliers.

Quelle histoire, quel modèle vous semblerait adéquat pour $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$?

(Ma, 1999, p. 55), ma traduction, pour la version originale, voir 9.2.2.3

Les enseignants US interrogés ne sont que 39% à parvenir à effectuer correctement le calcul. Pour la plupart ils appliquent la règle « inverser la seconde fraction et multiplier ». Aucun ne donne une autre explication. 26% des enseignants ne parviennent pas à donner une représenta-

tion, 70% donnent des histoires erronées qui reviennent par exemple à diviser par 2 (43%) ou à multiplier par $\frac{1}{2}$ (26%). Un seul enseignant donne une histoire correcte. 9 enseignants sur 21 (43%) ont donné une histoire incorrecte alors qu'ils avaient effectué correctement le calcul. 4 ne s'en sont par rendus compte et 5 l'ont remarqué mais ne sont pas parvenus pour autant à produire une histoire correcte. Ma en déduit que leur connaissance de la procédure de calcul était inadéquate et entravait leur approche de la signification de l'opération et que, de plus, leurs connaissances pédagogiques ne parvenaient pas à masquer leur ignorance du concept (Ma, 1999, p. 70)¹⁰¹.

Les enseignants chinois en revanche donnent tous une réponse correcte et souvent la justifie, parfois de plusieurs manières. 73% donnent une représentation correcte et 17% en donnent deux ou plus. Plusieurs concepts sont liés par ces enseignants à celui de la division par une fraction. Le principal étant celui de la multiplication par une fraction.

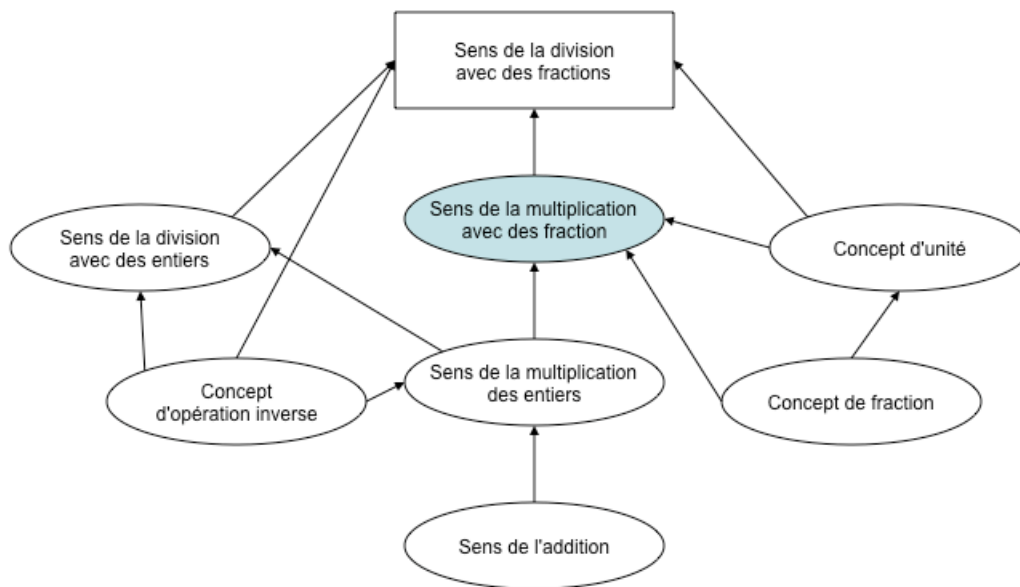


Figure 23 : Réseau de connaissance des enseignants chinois à propos de la division par une fraction (Ma, 1999, p. 77)¹⁰².

Les méthodes de calcul proposées ont révélé chez les enseignants chinois des traits de la compréhension et de leur attitude envers les mathématiques. En particulier ils ont montré un véritable plaisir à donner plusieurs représentations, à faire preuve de flexibilité et à donner des justifications de leur manière de calculer (Ma, 1999, pp. 80-82).

La comparaison est résumée d'un point de vue quantitatif dans la Figure 24.

¹⁰¹ « Their inadequate knowledge of the computational procedure impeded their approach to the meaning of the operation. [...] Even their pedagogical knowledge could not make up for their ignorance of the concept. »

¹⁰² Ma précise que le rectangle représente le sujet de la situation proposée, les ellipses sont les sujets connexes, les pièces clés étant colorées. Les flèches indiquent que du point de vue de l'enseignement, un sujet soutient l'autre et devrait être vu avant celui-ci, mais que, du point de vue de l'apprentissage, le second sujet renforce le premier.

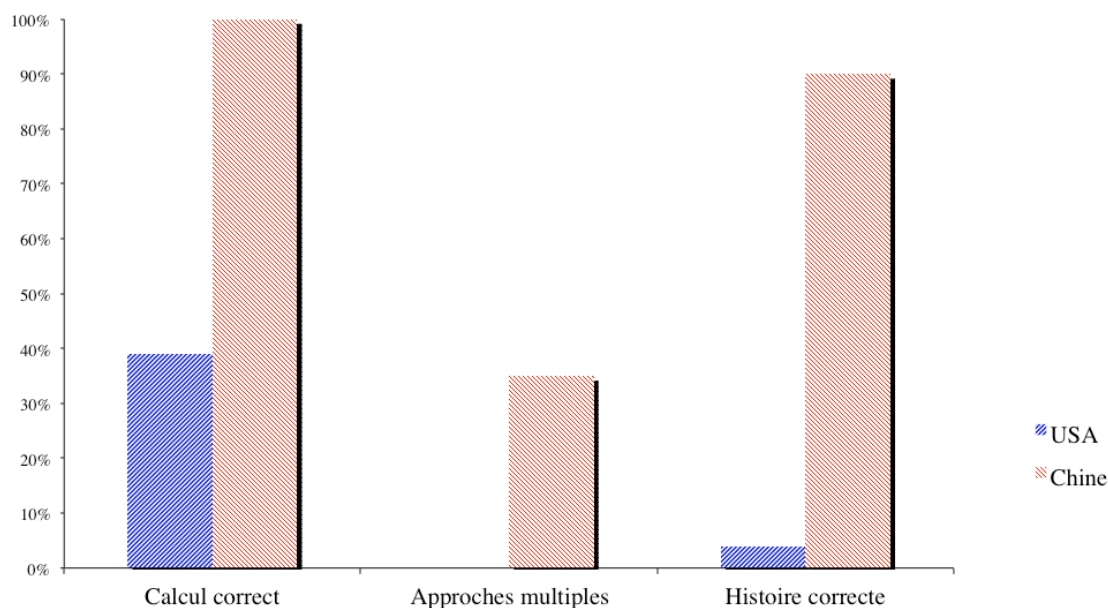


Figure 24 : Comparaison des connaissances des enseignants US et chinois sur la division par une fraction (Ma, 1999, p. 73)

Il faut toutefois relever que, dans une étude récente (Li & Huang, 2008), si les performances des enseignants chinois dans le calcul de la division par une fraction sont confirmées, leur capacité à en donner des explications procédurales variées est remise en question pour les enseignants débutants puisqu'une majorité des enseignants chinois débutants interrogés par Li et ses collègues se contente d'une explication procédurale (pp. 847-848), contrairement aux enseignants expérimentés.

10.1.3.2 Les enseignants vaudois

Les 5 enseignants vaudois ont répondu à la question suivante :

Les gens semblent avoir diverses approches au sujet de la manière de résoudre un problème impliquant la division par une fraction. Comment résolvez-vous un problème du type

$$18 : \frac{1}{2}$$

Imaginez qu'un élève vous demande ce que représente ce calcul. Quelle explication, quelle représentation vous semblerait adéquate pour $18 : \frac{1}{2}$?

3 enseignants sur 5 ont effectué le calcul correctement et ont donné une histoire adéquate. De plus, une autre enseignante a effectué le calcul de manière erronée et a ensuite proposé une représentation correcte qui lui a permis de revenir sur son calcul et de donner une réponse correcte. Une enseignante enfin a effectué le calcul de manière exacte mais n'a pas pu générer de représentation.

Les résultats pour le calcul ne peuvent pas être comparés à ceux obtenus avec $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$. En particulier plusieurs enseignants helvétiques sont passés par la division par 0,5, ce qui est plus simple quand il s'agit d'opérer sur un entier. En revanche les représentations générées rapprochent ces enseignants de leurs collègues chinois et sont toutes du type « combien de

demi-objets dans 18 objets ». Un enseignant, Denis, fait en plus le parallèle avec l'opération réciproque :

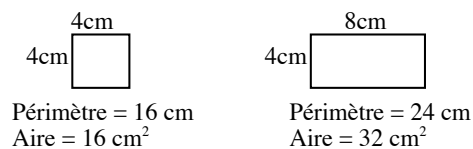
Ouais, avec l'histoire des gâteaux, on pourrait faire 18 gâteaux divisés en parts d'une demi, combien ça fait de parts... en jouant après sur la preuve pour dire: vous voyez, 36 parts d'une demi, et remonter dans le truc puisque la division, ils connaissent la preuve depuis un bout de temps, donc euh... Après en remontant leur dire: voyez si on fait la preuve, on va faire 36 fois... et puis là ils retrouveraient quelque chose de connu... Ils reprendraient une marque connue avec la multiplication en faisant la preuve après... Effectivement, 36 parts d'une demi, ça fait bien 18 gâteaux. Donc 18 gâteaux que je partage en parts d'une demi, ça fait 36 parts. 36 parts d'un demi gâteaux, ça donne 18 gâteaux. (Q253, Denis)

Comme chez les enseignants chinois également, la difficulté de générer des représentations apparaît comme significative de la nécessité d'une bonne compréhension du contenu mathématique :

Parce que... ben voilà... c'est vrai qu'on a souvent besoin de maîtriser ce qu'on enseigne, hein. Ou de savoir où on va, même si c'est bien d'être surpris, mais il faut quand même faire face... (Q698, Juliette)

10.1.4 Quatrième question : la relation entre périmètre et aire

Imaginons qu'une de vos élèves arrive en classe très enthousiaste. Elle vous dit qu'elle a inventé une théorie que vous n'avez jamais enseignée en classe. Elle explique qu'elle a découvert que si le périmètre d'une figure fermée augmente, alors son aire augmente aussi. Elle vous montre un croquis pour prouver ce qu'elle avance :



Comment répondriez-vous à cette élève ?

Pour les enseignants des trois nationalités, l'affirmation est nouvelle et une proportion faible d'entre eux accepte l'affirmation sans grande hésitation. Tous savent ce que représentent les deux mesures et presque tous savent les calculer. A partir de ce point toutefois, les chemins des enseignants divergent selon leur provenance.

10.1.4.1 Comment les enseignants US explorent cette nouvelle idée

Seuls 9% des enseignants étatsuniens acceptent la théorie de l'élève sans la mettre en doute. 22% d'entre eux disent qu'ils iraient consulter un manuel, car, en particulier, 17% ne se souviennent plus de la manière de calculer l'aire ou le périmètre. 57% pensent qu'il faut essayer avec d'autres exemples. Ils utilisent des arguments *profanes* et non mathématiques, considérant en particulier qu'un nombre suffisant d'exemple permettrait de valider la théorie. Seuls 13% utilisent une approche mathématique et chez un seul enseignant (4%) cette approche est correcte par exhibition d'un contre-exemple.

Pour ce qui est du type de réaction par rapport à l'élève, aucun enseignant n'esquive la question et presque tous au contraire louent l'initiative de leur élève. 28% donnent des ex-

plications et 72% poussent l'élève à poursuivre ses investigations, en donnant éventuellement quelques pistes. En particulier, plusieurs suggèrent d'essayer avec d'autres exemples.

10.1.4.2 Comment les enseignants chinois explorent cette nouvelle idée

Seuls 8% des enseignants chinois acceptent la théorie de l'élève sans discussion. La plupart des autres réfléchissent assez longuement avant de répondre. Par rapport aux américains, les chinois montrent un intérêt allant au-delà de la réflexion au sujet de l'affirmation de l'élève et explorent globalement la question de la relation entre aire et périmètre. En fin de discussion, aucun ne termine en disant qu'il ne sait pas.

22% justifie l'affirmation par des arguments du genre « si on augmente les termes d'un produit, celui-ci augmente » ou « si on augmente le périmètre, on couvrira une nouvelle surface ». Il s'agit donc d'arguments mathématiques quoiqu'incorrects. La majorité des enseignants (69%) réfutent l'affirmation : 19% de l'ensemble des enseignants interrogés donnent un contre-exemple correct, 11% décrivent plus précisément la relation entre aire et périmètre en donnant des exemples de périmètre fixe et d'aire variable ou d'aire fixée pour un périmètre variable, 36% vont encore plus loin en décrivant les circonstances particulières dans lesquelles l'affirmation est correcte et 8% expliquent ces conditions¹⁰³.

Si les Chinois louent eux aussi l'initiative de l'élève, les réponses données sont nettement plus substantielles et pertinentes que celles des enseignants US, que ce soit pour celles et ceux qui donneraient directement une explication détaillée (62%) ou pour celles et ceux qui pousseraient l'élève à poursuivre sa réflexion (30%). Cette dernière attitude se retrouve surtout chez les enseignants qui sont le plus au point mathématiquement.

10.1.4.3 Comment les enseignants vaudois explorent cette nouvelle idée

Comparaison quantitative

Le tableau des réponses des enseignants interrogés figure en Annexe 6.4. 1 enseignante vaudoise sur 16 (6%) accepte l'affirmation sans la discuter. Ce taux est comparable à ceux obtenus par Ma. 3 autres ne savent pas et ne donnent pas d'explication. En comparant la proportion d'enseignants qui, acceptant ou non l'affirmation, ne font aucune exploration mathématique, les enseignants US sont 83%, les vaudois 25% et les chinois 8%. Pour ce qui est d'une exploration mathématique incorrecte, 3 enseignants vaudois (19%) peuvent être classés dans cette catégorie, et une exploration correcte a été réalisée par 9 vaudois (56%).

En reprenant les deux graphiques de Ma (1999, p. 92) et en y ajoutant ces données, nous obtenons la Figure 25.

¹⁰³ La somme est supérieure à 69% car les catégories ne sont pas disjointes.

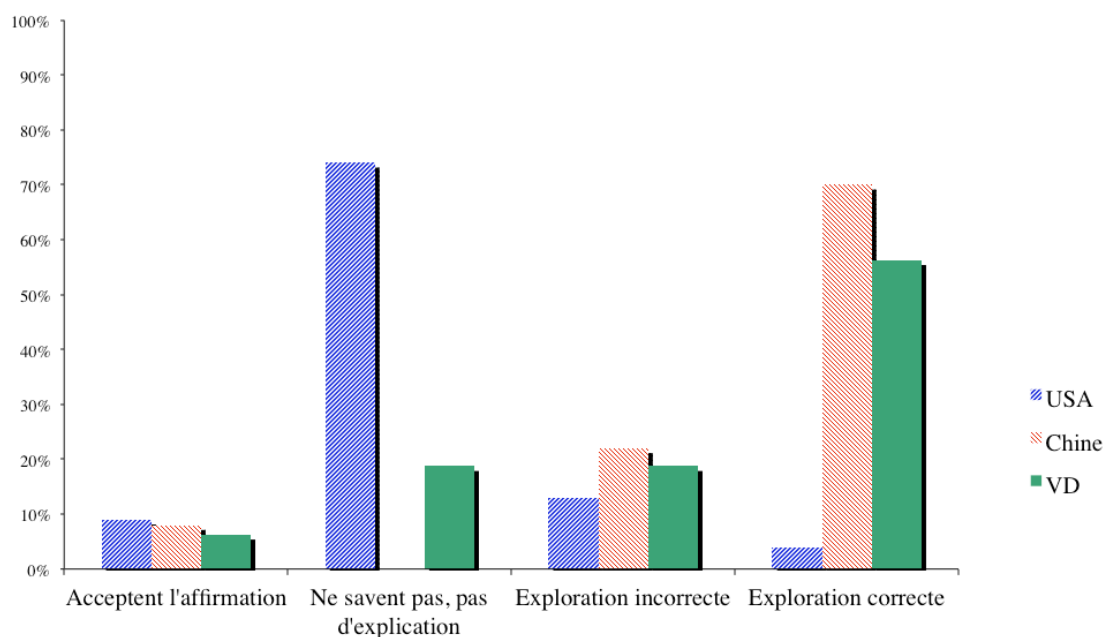


Figure 25 : Comparaison des réactions des enseignants à l'affirmation de l'élève

D'un point de vue quantitatif, le profil des enseignants vaudois est ici assez proche de leurs collègues chinois, ce qui distingue cette question des quatre autres.

Une question qui suscite la réflexion

Cette question est celle qui a nécessité le plus de réflexion de la part des enseignants interrogés. Pour la plupart d'entre eux, un long temps de silence a précédé le début de la discussion. Certains sont d'ailleurs revenus sur ce point à la fin de la discussion de cette question, comme Carole qui, après avoir exhibé un contre-exemple, se remémore ses hésitations :

Comme toute situation... Je... Cela dit, personnellement, je suis vite... J'ai très vite des doutes quand des élèves m'affirment des choses et puis étant personnellement plus à l'aise dans... les maths, c'est pas une branche dans laquelle je suis forcément très à l'aise, je me renseigne avant de rendre réponse. Je prends toujours le temps de...

Je... je... en tout cas pas... Là, vous vouliez que je réponde maintenant... Je poserais la question à d'autres personnes. Clairement. (Q252, Carole)

9 enseignants sur 16 (56%) mentionnent explicitement ce besoin de réfléchir et 4 d'entre eux (25%) déclarent qu'ils demanderaient conseil. 1 seul dit qu'il consulterait un livre pour savoir si l'affirmation est correcte (6% contre 22% des américains). Ces proportions semblent montrer une bonne lucidité quant à la difficulté de la question et à son caractère inhabituel. La demande de réflexion et d'aide appropriée, c'est-à-dire aux collègues plutôt qu'à un manuel (dans lequel la réponse ne serait justement pas directement accessible), dénote aussi un certain réalisme au niveau de leurs capacités à traiter cette question. Toutefois ces proportions pourraient aussi dénoter chez les enseignants vaudois le faible usage qu'ils font des manuels... Les quatre questions posées ne nous permettent pas de trancher entre ces deux interprétations.

Cette modestie concerne autant les enseignants qui explorent l'affirmation de manière mathématique que ceux qui, comme Martin, ne savent pas et ne parviennent pas à se placer au niveau mathématique.

Je ne sais pas, au niveau de la connaissance. Au niveau de l'intuition, j'imagine que c'est faux... Parce que la formulation sous-entend une erreur, en fait. Mais, au niveau de la

connaissance, je ne me rappelle pas. Mais j'ai l'intuition que c'est faux, en fait, mais bon, c'est vraiment trop subjectif. (Q813, Martin)

Les explorations mathématiques correctes sont de trois types. 6 enseignants (37.5%) mettent en évidence que l'aire (ou le périmètre) d'un rectangle peut être fixée alors que son périmètre (ou son aire) varie. Une seule enseignante, Elise, passe d'ailleurs par le cadre arithmétique pour explorer cette idée et l'exprimer.

Mais le périmètre, il augmente pas forcément, il peut rester le même. Enfin... Et puis l'aire aussi, si on veut. C'est une histoire de multiples. Parce que par exemple si on fait... 9, dans le rectangle-là, 9 centimètres et 3... Si on le diminue... Attendez. Mais là on prend les multiples... les diviseurs de 24, bon, prenons 6 et 4... non, pas 6 et 4... Je raconte des bêtises. Euh... 32, c'est les diviseurs de 32. 16 et 2. Après ça fait 32... (inaudible, elle griffonne un rectangle de 16 sur 2 et un autre de 32 sur 1) L'aire reste la même, mais le périmètre augmente... (Q311, Elise)

6 enseignants (37.5%, partiellement les mêmes) exhibent un contre-exemple. Pour certains c'est de manière quasi immédiate, comme chez François, enseignant expérimenté ayant une formation d'enseignant du secondaire.

Alors 10 et 2... on augmente le périmètre et on diminue l'aire. Euh... avec 10 et 2, j'ai encore le même. Alors je vais arranger un petit peu. 12 et 2, On a augmenté le périmètre et réduit l'aire. (Q397, François)

Pour d'autres, ces contre-exemples sont découverts après une longue réflexion.

Carole Ca me paraît correct... (silence) Vous êtes pas d'accord ?

Chercheur Qu'est-ce qui vous fait dire que ça semble correct ?

Carole Ben, du moment que le périmètre est plus grand, et plus long, forcément la surface sera plus grande aussi. Enfin, attendez voir... Ah... Ouais, ouais. Ouais, non, en fait, c'est pas... Non...Non, non, non... C'est pas... Je reviens en arrière. Je crois pas. (silence) Par exemple là, en faisant un dessin précis (dessine)...



Je pense que ce périmètre est plus long, mais la surface est plus, est plus petite, en fait. (Q252, Carole)

Ce contre-exemple original, en tout cas le seul de ce type fourni lors de l'ensemble des entretiens, est d'autant plus intéressant qu'il est l'œuvre d'une jeune enseignante (6 ans d'expérience), Carole, qui affirme ensuite, comme nous l'avons vu ci-dessus, être peu à l'aise en mathématiques et avoir besoin de temps de réflexion.

3 enseignants enfin (19%, contre 36% chez les enseignants chinois) expriment dans quelles circonstance l'affirmation de l'élève est correcte :

Là, je me demande un truc, est-ce que c'est vraiment vrai ? Est-ce que c'est vraiment vrai, son théorème ? Le périmètre, c'est 16... Mais c'est pas vrai! Quand l'aire... (dessine) C'est pas forcément... Ça dépend. Si elle garde un des côtés, c'est vrai, mais si elle change les dimensions, les deux dimensions, c'est plus vrai.

Donc, ça ne jouerait pas tout le temps, et puis, ben je lui montrerais, avec des plus jolis schémas, n'est-ce pas, mais je lui montrerais que, ben oui, elle a tout à fait raison, que si

on gardait un côté, et puis que c'est l'autre qu'on changeait, et ben l'aire augmenterait. Mais que il y a des fois, si on change, ben ça pourrait pas jouer tout le temps. (Q157, Bénédicte)

Au cours de la discussion, certains enseignants affirment qu'ils vont chercher d'autres exemples pour voir si la théorie de l'élève est correcte, ou à d'autres moment qu'il faut prouver que cela marche toujours. Ces deux types d'affirmations se retrouvent parfois chez la même personne. Pour d'autres enseignants, la possibilité existe d'avoir en mathématiques des affirmations qui sont « vraies avec des exceptions ». Il a ainsi souvent été difficile de déterminer pour quelles personnes les critères de vérité mathématique étaient clairs. Il apparaît finalement qu'ils le sont pour 9 enseignants (56%) et qu'ils ne le sont pas pour 5 (31%). Une telle confusion peut être observée chez Nicole :

Je ferais des essais, et, une fois que c'est juste... bon déjà gratifier l'élève, et puis... si c'est juste... après lui proposer de faire des exercices et on sort une règle de ça, donc comprendre la règle. Et puis si c'est faux, à l'inverse, expliquer... ouais, c'est difficile de dire, expliquer pourquoi c'est faux, parce que je sais pas pourquoi ce serait faux. (rire) Je ne vois pas maintenant la règle. C'est difficile d'expliquer si on... quand je connais pas, mais... Non, c'est pas très clair, tout ça, mais... (Q829, Nicole)

Comme Nicole, la plupart des enseignants (69%) louent spontanément l'initiative de l'élève. A la question de savoir s'ils impliqueraient la classe, 87.5% répondent positivement. De plus 6 enseignants (37.5%) retournent la question à l'élève et l'encouragent à poursuivre sa réflexion. Cette attitude, plus fréquente encore que chez les chinois, se retrouve ici aussi plus fréquemment chez les enseignants ayant réalisé une exploration mathématique de la tâche.

10.2 Résultats globaux

Les quatre questions de Ma (1999) visaient une certaine progression dans le genre de tâche proposée. Cette progression est marquée par les sous-titres donnés par Ma :

1. Approche de l'enseignement d'un sujet (algorithme de la soustraction)
2. Traitement des erreurs des élèves (algorithme de la multiplication)
3. Générer des représentations (division par une fraction)
4. Explorer de nouvelles connaissances (relation périmètre-aire)

Le portrait comparé qu'elle dresse au fil des quatre questions est ensuite développé en prenant comme référence les enseignants chinois. Nous reprenons ici la structure de ce développement en ajoutant le pôle vaudois à cette comparaison. Les éléments mentionnés sont résumés dans le Tableau 10. Une synthèse de ces portraits comparés et plus particulièrement de celui des enseignants vaudois figurera dans la conclusion, en 17.2.

	USA	Chine	VD
Capacité à faire des liens	Peu de liens	Liens riches et bien ordonnés. Importance de l'ordre dans lequel les sujets sont traités. Structure autour d'un élément central.	Liens riches mais mal ordonnés Vision des sujets nécessaire à l'apprentissage d'un autre, mais le plus souvent sans voir la relation dans l'autre sens. Peu de hiérarchisation.
Algorithme-opération	Algorithme vu comme séparé de la compréhension. L'algorithme prime sur l'opération. Chaque opération est vue séparément. Le terme d'opération inverse n'est jamais mentionné.	« Savoir comment, mais aussi savoir pourquoi ». Ramènent l'algorithme à l'opération et font des liens entre les opérations et avec les ensembles de nombres. Liens entre opérations inverses.	Le mot « comprendre » signifie souvent savoir faire. Liens entre les opérations, non systématique Opérations inverses (implicites).
Lien compréhension/explication procédural/conceptuel	Pas de réflexion conceptuelle dans les algorithmes	Fort lien entre les aspects conceptuels et procéduraux	Liens affirmés mais pas véritablement faits.
Manipulations, matériel	Usage inadéquat	Usage adéquat	Usage adéquat.
Écritures mathématiques	Peu utilisées et de façon inexacte (« = » veut dire « enter »)	Utilisation adéquate du symbolisme. Justifications verbale et symbolique cohérente. Rigueur (exemple pour le signe « = »).	Utilisation rare du symbolisme.
Représentations	Représentations particulièrement concrètes, souvent inadéquates, uniques, gênées par leur mauvaise connaissance du sujet	Représentations variées, adéquates, multiples, basées sur leur connaissance du sujet	Représentations adéquates, uniques, concrètes. Dans un cas la représentation permet de revenir sur le calcul. Souvent des analogies non mathématiques.
Attitude par rapport aux maths, procédures de résolution	Pas d'investigation. Probablement gênée par leur manque d'aisance dans le calcul et par une attitude « profane » vis à vis des maths : attitude par rapport à la possibilité de résoudre soi-même le problème.	Démarche d'investigation. Utilisation de procédures multiples et variées. Plaisir.	Démarche d'investigation. Une seule procédure.
Discours	Discours peu organisé, focalisé sur les questions pédagogiques plus que mathématiques. Pas de lien entre les 4 questions. Reflète la façon dont le curriculum est fragmenté aux USA.	Discours plus focalisé sur les maths, mieux organisé. Ils sont acculturés aux maths Peut-être lié au style d'enseignement plus magistral. Liens fréquents entre les 4 questions.	Discours peu organisé, focalisé sur les questions pédagogiques plus que mathématiques. Quelques liens entre les 4 questions.

Tableau 10 : Caractéristiques des trois groupes d'enseignants.

10.2.1 Les liens entre les connaissances

La caractéristique principale des enseignants chinois interrogés par Ma est leur capacité à faire des liens. Les réseaux de connaissances dessinés par Ma pour les divers sujets montrent

la grande richesse de ces liens, ainsi qu'un agencement bien ordonné autour d'une connaissance centrale. Pour les enseignants chinois, il est nécessaire et efficace de faire en sorte que les élèves aient dès le début une très bonne compréhension de cette connaissance essentielle (Ma, 1999, p. 115). C'est sur cette base que sont construites les autres connaissances, dans un processus qui permet à la fois de fonder ces connaissances ultérieures et de renforcer la connaissance de base : «learning is a continual process during which new knowledge is supported by previous knowledge and the previous knowledge is reinforced and deepened by new knowledge¹⁰⁴» (p. 77).

Ces liens sont notamment tissés entre les aspects procéduraux et les aspects conceptuels. Pour ces enseignants, il est important de « Know how, and also know why¹⁰⁵ » (p. 108). Les enseignants chinois interrogés sur un algorithme font immédiatement le lien avec l'opération et se focalisent surtout sur cette opération, tissant des liens avec les autres opérations, en particulier avec l'opération réciproque, et les ensembles de nombres (pp. 112-113). Les quatre questions, bien que posées séparément, sont ainsi souvent mises en dialogue par les enseignants interrogés.

Par comparaison, les enseignants US ne font quasiment pas de lien entre les connaissances mathématiques. Ils séparent également le plus souvent vision procédurale et vision conceptuelle, considérant par exemple les algorithmes pour eux-mêmes, et se focalisant presque uniquement sur la recette à appliquer. Ils ne tissent pas de lien entre les quatre questions. Selon Ma, cela reflète la façon dont le curriculum est fragmenté aux USA. Elle ne considère toutefois pas la fragmentation du curriculum comme une cause de la fragmentation des connaissances des enseignants, mais bien comme un effet de la conception des mathématiques élémentaires aux USA (pp. 107-108).

Les enseignants vaudois interrogés proposent beaucoup de liens entre les notions mathématiques. Ces liens sont toutefois peu ordonnés. Si l'antériorité nécessaire de l'apprentissage d'une connaissance est mentionnée, l'apport des apprentissages ultérieurs sur la connaissance première n'est pas pris en compte. Les connaissances sont d'ailleurs souvent juxtaposées et ne sont guère hiérarchisées.

Les enseignants vaudois affirment souvent faire des liens entre la procédure d'un algorithme de calcul et sa compréhension. Toutefois, l'affirmation «je veux que les élèves comprennent l'algorithme» signifie finalement le plus souvent : «je veux que les élèves sachent effectuer l'algorithme». Cet écart entre une intention déclarée et sa signification apparaît particulièrement à propos de l'algorithme de la multiplication que beaucoup d'enseignants interrogés ne comprennent en fait pas. L'étude de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres étant repris en partie C, la question de cet écart y sera reprise.

Des liens sont faits entre les opérations, en particulier entre opérations réciproques, mais de manière moins systématique et moins explicite que chez les enseignants chinois. Quelques renvois aux autres questions sont faits.

10.2.2 Manipulations, usage des écritures mathématiques et des représentations

Les trois groupes d'enseignants se distinguent également par leur utilisation d'éléments pédagogiques servant d'illustration ou de support au raisonnement mathématique. Les enseignants

¹⁰⁴ «L'apprentissage est un processus continu durant lequel les connaissances nouvelles sont portées par les connaissances anciennes et les connaissances anciennes sont renforcées et approfondies par les nouvelles».

¹⁰⁵ « Savoir comment, mais aussi savoir pourquoi ».

US utilisent du matériel dans le but de rendre les mathématiques plus concrètes, mais souvent ce matériel n'est pas adéquat par rapport au concept mathématique sous-jacent (voir 10.1.1.1). De manière similaire, les notations mathématiques ne sont utilisées que pour mettre par écrit un argument, quitte à ne pas respecter la signification mathématique d'un signe, comme par exemple le signe « = » qui signifie « effectuer le calcul » (pp. 110-111). Les représentations proposées enfin sont particulièrement concrètes, mais souvent inadéquates (par exemple des pizzas pour la division par une fraction, voir 10.1.3.1). Selon Ma, ce manque d'adéquation est dû à une mauvaise compréhension du sujet mathématique (p. 70).

Par opposition, les enseignants chinois utilisent des manipulations et du matériel souvent moins concrets, mais qui illustrent mieux le concept enseigné. De plus ils discutent avec leurs élèves des limites de l'utilisation de ces manipulations. Les écritures mathématiques, arithmétiques ou algébriques, sont utilisées en cohérence avec les justifications orales (pp. 110-111). Elles sont utilisées de manière rigoureuse et servent de support au raisonnement et lui permettent de progresser. Les représentations utilisées ne sont pas forcément concrètes, en revanche elles sont variées et souvent multiples, presque toujours adéquates et en lien avec les connaissances mathématiques des enseignants.

Les enseignants vaudois interrogés utilisent matériel et manipulation de manière adéquate. Ils connaissent en particulier bien le matériel proposé par les moyens COROME. En revanche et malgré la possibilité, voire l'incitation qui leur était faite lors de l'entretien, ils n'ont que peu écrit et n'ont en particulier que peu utilisé de symbolisme mathématique. Pour ce qui est des représentations utilisées, elles sont adéquates, mais uniques et tendent à être le plus concrètes possible.

10.2.3 Attitude par rapport aux mathématiques

Les enseignants nord-américains interrogés ne sont pas convaincus de la possibilité de résoudre un problème de mathématiques par soi-même. Leur manque d'aisance dans le calcul est renforcé par une « layperson-like attitude toward mathematics¹⁰⁶ » (p. 104). A l'opposé, les enseignants chinois ont une véritable attitude de mathématiciens, ils empoignent le problème, et ont une véritable démarche d'investigation et proposent des démarches multiples et variées : « They may or may not have reached a correct answer, but their attitude toward the possibility of solving a mathematical problem independently and their ways of thinking mathematically promoted their inquiries¹⁰⁷ » (p. 104).

On trouve également cette attitude chez une majorité, toutefois moins importante, des enseignants vaudois interrogés. La plupart d'entre eux font preuve du même type de démarche d'investigation que celle qu'ils prônent pour leurs élèves. Ils semblent en revanche moins rigoureux que leurs collègues chinois et ne proposent presque jamais plusieurs démarches pour résoudre un même problème. En fait, tout se passe pour eux comme si la résolution du problème était un but en soi, nécessitant l'utilisation de connaissances mathématiques, mais que l'activité de faire des maths en elle-même ne suscitait pas vraiment d'intérêt ou de plaisir.

10.2.4 Le discours

Le discours des enseignants chinois est essentiellement centré sur les mathématiques. Il est extrêmement bien organisé. Ma met en évidence l'*acculturation* de ces enseignants par rapport aux mathématiques : « That is the acculturation of the Chinese mathematics teachers to

¹⁰⁶ « une attitude profane par rapport aux mathématiques »

¹⁰⁷ « Ils peuvent avoir obtenu une réponse correcte ou non, mais leur attitude par rapport à la possibilité de résoudre un problème mathématique de manière indépendante et leur façon de penser de manière mathématique favorise leurs investigations. »

the discipline. [...] They tend to think rigorously, tend to use mathematical terms to discuss a topic, and tend to justify their opinions with mathematical arguments¹⁰⁸ » (p. 105). La cause de cette capacité à parler de mathématiques est probablement à chercher dans le style d'enseignement habituel en Chine. En effet, lorsqu'ils introduisent une nouvelle notion, les enseignants préparent un exposé qui présente et explique cette notion. Ce type de petite conférence structure l'enseignement et les habitue à tenir un discours mathématique organisé (pp. 104-105).

Le discours des enseignants US est en revanche centré sur les questions pédagogiques et il est peu organisé. Cette caractéristique de désorganisation se retrouve chez les enseignants vaudois que nous avons interrogés. De manière similaire, les préoccupations pédagogiques occupent presque toujours le premier plan. Les raisons pédagogiques viennent parfois même *remplacer* les raisons mathématiques sans que l'enseignant ne soit conscient qu'il ne s'agit pas d'une explication mathématique. Ces comparaisons, ces explications de type analogique rencontrées en particulier pour l'algorithme de la soustraction (emprunt chez la voisine, voir 10.1.1.3, ou Super Zéro, voir 10.1.2.3), semblent être une caractéristique des enseignants vaudois et il sera intéressant de voir si cette caractéristique se retrouve dans les séquences sur la multiplication analysées en partie C.

¹⁰⁸ « Il s'agit de l'acculturation des enseignants de mathématiques chinois à cette discipline. [...] Ils ont tendance à penser de manière rigoureuse, à utiliser de termes mathématiques pour discuter d'un sujet et à justifier leur opinion par des arguments mathématiques. »

Chapitre 11 Conclusion de la Partie B

La comparaison faite par Ma conduit à opposer les enseignants US et les enseignants chinois sur presque toutes les caractéristiques de leurs connaissances des mathématiques élémentaires et de l'usage qu'ils en font pour l'enseignement. Notre étude tend à situer les enseignants vaudois interrogés entre ces deux extrêmes.

De fait les enseignants vaudois se rapprochent tantôt de leurs collègues chinois, de par leur capacité à faire des liens entre notions mathématiques ou par leur usage adéquat des manipulations, du matériel ou des représentations d'opérations. Ils essayent de résoudre eux-mêmes des problèmes mathématiques. Cependant, les liens entre notions sont moins bien ordonnés, les conséquences de ces liens sur la construction des apprentissages ne sont pas exprimées, l'usage du matériel est moins discuté et les représentations sont moins riches. Ils font également preuve de moins de richesse et de rigueur que les Chinois dans leurs démarches d'investigation et dans leur argumentation.

Sur d'autres points, les enseignants vaudois ont des caractéristiques proches des enseignants étatsuniens. Ils mettent souvent au premier plan le discours et les justifications pédagogiques au détriment du discours et des arguments mathématiques. Leur discours est mal ordonné et le lien entre la résolution d'un problème mathématique et l'apprentissage des notions contenues dans ce problème n'est pas fait.

Finalement, de la même manière que Ma voyait les mêmes caractéristiques dans le curriculum américain que chez les enseignants, il est frappant de remarquer que les caractéristiques apparaissant chez les enseignants vaudois interrogés sont proches de celles mises en avant par les moyens COROME et la formation, initiale et continue, délivrée au moment de leur introduction. Les forces et les faiblesses, relevées par Tièche Christinat (2005) ou Antonietti (2005) ou par nos observations de formateur, recourent ces caractéristiques : bonne approche de la résolution de problème mais manque de construction de séquences d'enseignement, nombreux liens possibles ou suggérés mais hiérarchisation problématique, matériel et tâches appropriés mais difficulté d'utilisation, difficulté à faire ressortir les connaissances mathématiques enchâssées dans la tâche, manque de phase d'institutionnalisation... Nous ne nous risquons pas à l'interprétation délicate d'une adaptation des enseignants aux moyens d'enseignement ou d'une conception des moyens COROME reflétant une culture de l'enseignement des mathématiques en Suisse Romande. En revanche, un fait est inquiétant pour la qualité de l'apprentissage des élèves : les faiblesses des enseignants dans les connaissances de mathématiques élémentaires ne permettent pas de compenser les points faibles des moyens d'enseignement, voire les accentuent. Cela devrait inciter à réfléchir à la fois à la conception de la partie méthodologiques des moyens et à la formation, initiale et continue, des enseignants vaudois, en particulier pour ce qui concerne les connaissances mathématiques pour l'enseignement.

Ce manque a d'ailleurs été relevé par plusieurs enseignants interrogés qui, une fois l'entretien terminé et le micro coupé, nous ont demandé des explications supplémentaires sur une ou l'autre des quatre questions. Ces demandes, repoussées lors de l'entretien et partiellement satisfaites ensuite, sont une claire incitation à considérer les implications de cette recherche sur la formation des enseignants. Nous esquisserons cette piste au Chapitre 18 en comparant la situation vaudoise à la situation chinoise décrite par Ma.

L'exemple chinois, en tout cas tel que vu par Ma (1999), permet d'avoir une vision sophistiquée et cohérente des mathématiques du primaire. Il montre que les mathématiques

élémentaires ne sont pas qu'une simple collection de tables de calculs déconnectées et d'algorithmes. Elles sont plutôt un champ intellectuellement exigeant et passionnant, un fondement sur lequel les connaissances et les compétences mathématiques plus sophistiquées pourront être bâties (p. 116). Cet exemple permet également de considérer l'influence sur l'enseignement de cette vision sophistiquée et cohérente. Pour reprendre les mots de Tr. Mao, un enseignant chinois ayant exercé durant plus de 30 ans aux degrés primaire,

as a mathematics teacher one needs to know the location of each piece of knowledge in the whole mathematical system, its relation with previous knowledge. [...] On the other hand, I have to know what knowledge will be built on what I am teaching today.¹⁰⁹ (Ma, 1999, p. 115)

Cet idéal, naturel pour Tr. Mao, pose bien entendu la question de l'acquisition d'une *Compréhension Profonde des Mathématiques Fondamentales* (CPMF)¹¹⁰. Ce point, traité par Ma (Ma, 1999, pp. 125-143) dépasse le cadre de cette recherche, mais nous y reviendrons brièvement dans les pistes d'ouverture au Chapitre 18.

¹⁰⁹ « En tant qu'enseignant de mathématiques, on doit connaître la place de chaque élément de connaissance dans tout le système mathématique, ses relations avec les connaissances précédentes. [...] Mais d'un autre côté, je dois savoir quelles connaissances seront bâties sur ce que j'enseigne aujourd'hui. »

¹¹⁰ Ma parle de *Deep Understanding of Fundamental Mathematics* (PUFM).

Partie C
Les connaissances mathématiques
des enseignants
dans leur pratique ordinaire de classe

Chapitre 12 L'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres : le choix de ce sujet d'enseignement

Les entretiens réalisés sur le canevas de Ma (1999) et la comparaison avec les enseignants étatsuniens et chinois ont permis une première analyse des connaissances mathématiques liées à l'enseignement chez des enseignants vaudois. Toutefois, comme le signale Morselli (2005), les entretiens ne donnent accès qu'aux conceptions explicites des enseignants, alors que l'observation de leur pratique donne un regard vers leurs conceptions implicites des mathématiques. Afin de pouvoir analyser plus précisément et plus concrètement l'influence des connaissances mathématiques sur l'enseignement, nous avons donc observé des enseignants primaires vaudois dans leur pratique en classe. Un même sujet, celui de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres a été choisi.

Cette partie C expose cette partie de la recherche. Dans ce premier chapitre nous justifions le choix de l'étude de l'enseignement de cet algorithme. Le Chapitre 13 présente des éléments d'une analyse épistémologique du sujet choisi en examinant tout d'abord l'algorithme lui-même (13.1) puis en décrivant quelques manières possibles de l'introduire en classe (13.4). Le Chapitre 14 décrit le dispositif de recherche ainsi que les quatre enseignants et leurs classes. Enfin le Chapitre 15 présente les résultats obtenus.

La première raison de ce choix est que ce sujet correspondait à une des questions de Ma et à un exemple souvent donné par Ball (par exemple (Ball *et al.*, 2005, pp. 17-20)). L'autre raison est que, d'une part comme décrit en 13.1, cet algorithme utilise plusieurs connaissances mathématiques élémentaires et que, d'autre part comme décrit dans la partie B, les enseignants possèdent ces connaissances à des degrés divers et déclarent vouloir ou non partager ces connaissances avec leurs élèves. Cette opinion est d'ailleurs confirmée par Menon :

The reasons for focusing on just the domain of multiplying 2-digit numbers are: it is fundamental and very familiar; it is a good place to start to clarify the difference between having procedural knowledge and having conceptual knowledge; and it can make clearer the connections between abstract mathematical laws and principles and their application to common computations. (2003, p. 1)

Dans son étude, réalisée sur 77 futurs enseignants étatsuniens, Menon (2003) constate d'ailleurs qu'une proportion de 31% à 61% des étudiants ne sont pas capables d'expliquer des versions inhabituelles de l'algorithme de la multiplication en colonnes par un nombre à deux chiffres et qu'ainsi une compréhension profonde des mathématiques nécessaire à la justification de l'algorithme manquait chez ces futurs enseignants. Dans une recherche ultérieure réalisée sur 64 étudiants à l'enseignement pour les degrés 5 à 8, Menon (2009) observe que 72% des étudiants ne disposent pas des connaissances mathématiques pour l'enseignement permettant d'expliquer cet algorithme.

Chapitre 13 L'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres : éléments d'analyse épistémologique

Afin de pouvoir analyser le traitement par les enseignants observés de l'algorithme de la multiplication d'un nombre entier par un nombre à deux chiffres, nous présentons ici une analyse de cet algorithme, tout d'abord du point de vue des connaissances qu'il met en jeu puis du point de vue des manières possibles de l'enseigner.

13.1 Connaissances en jeu autour de l'algorithme

En partant des définitions de la multiplication et de ses représentations (13.1.1), les différents algorithmes de la multiplication et leurs propriétés sont examinés (13.1.2). Le décalage ou la *règle du zéro*, qui intervient de manière encapsulée dans l'algorithme est traitée séparément (13.2) et enfin les erreurs possibles sont passées en revue (13.3).

13.1.1 Définitions et représentations de la multiplication

La multiplication de deux nombres entiers a et b peut être définie mathématiquement de plusieurs manières qui dépendent elles mêmes de la définition des entiers naturels. Une d'entre elles consiste à définir un entier comme le cardinal de tous les ensembles équipotents entre eux, et le produit de deux entiers a et b comme le cardinal du produit cartésien d'un ensemble de cardinal a par un ensemble de cardinal b . Autrement dit :

$$(\text{Card } A) (\text{Card } B) = \text{Card } (A \times B)$$

Cette définition ensembliste permet de démontrer les propriétés de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité par rapport à l'addition, existence d'un élément neutre 1, existence d'un élément absorbant 0) en se basant sur la théorie des ensembles. L'utilisation de cette définition au moments des maths modernes (par exemple (Comte, Ferrari, Wetzler & Ferrario, 1980, OP59)) a permis de dégager la multiplication des « opérations sur les grandeurs » (Noirfalise & Matheron, 2009, p. 245).

Cette définition, « en tant qu'ostensif, est en rapport direct avec l'aire d'un rectangle de dimensions entières » (Noirfalise & Matheron, 2009, p. 242). Cet ostensif permet une représentation de la multiplication comme l'aire d'un rectangle, il permet également d'illustrer les propriétés de la multiplication (sauf l'associativité qui nécessite de considérer le volume d'un parallélépipède) et d'étendre aisément la définition aux réels positifs (voire à tout \mathbb{R} pour autant que l'aire soit orientée). Pour ce qui est des entiers, produit cartésien et aire sont très proches et ne seront généralement pas distingués dans la suite de cette thèse.

Une seconde définition consiste à définir la multiplication dans \mathbb{N} par récurrence :

$$0 \cdot x = 0$$

$$1 \cdot x = x$$

$$\text{et pour } n \geq 0 \text{ par : } (n+1) \cdot x = n \cdot x + x$$

(Bouvier, George & Le Lionnais, 2009, p. 608)

Cette définition est en rapport avec une représentation de l'addition comme une addition itérée : $nx = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ fois}}$. Cette représentation est la première rencontrée par les enfants. Selon Vergnaud (1994, p. 121), c'est même la seule possible si l'on veut partir d'un matériel concret. Elle est engendrée par des situations du type « Une équipe gagne 5 enveloppes contenant chacune 6 jetons. Combien de jetons cette équipe a-t-elle gagnés ? » ou encore « On a un ruban constitué de 5 morceaux de 6 cm chacun, combien mesure ce ruban ? » (Noirfalise & Matheron, 2009, pp. 245-246). Dans ce cas les facteurs n et x , respectivement 5 et 6, ne jouent pas le même rôle. x (respectivement 6) est un nombre concret, il est pourvu d'une unité, alors que n (respectivement 5) est un nombre abstrait ((Noirfalise & Matheron, 2009, p. 246) ou encore un opérateur scalaire (Vergnaud, 1994, p. 167). Cette dissymétrie des rôles rend impossible la perception de la commutativité de la multiplication ainsi que l'extension à la multiplication de deux nombres réels positifs. Elle a donc « l'inconvénient de rendre difficile la justification, c'est-à-dire le discours technologique, de certaines propriétés essentielles de cette opération comme découlant de sa définition » (Noirfalise & Matheron, 2009, p. 246).

lon Vergnaud (1994, p. 121), c'est même la seule possible si l'on veut partir d'un matériel concret. Elle est engendrée par des situations du type « Une équipe gagne 5 enveloppes contenant chacune 6 jetons. Combien de jetons cette équipe a-t-elle gagnés ? » ou encore « On a un ruban constitué de 5 morceaux de 6 cm chacun, combien mesure ce ruban ? » (Noirfalise & Matheron, 2009, pp. 245-246). Dans ce cas les facteurs n et x , respectivement 5 et 6, ne jouent pas le même rôle. x (respectivement 6) est un nombre concret, il est pourvu d'une unité, alors que n (respectivement 5) est un nombre abstrait ((Noirfalise & Matheron, 2009, p. 246) ou encore un opérateur scalaire (Vergnaud, 1994, p. 167). Cette dissymétrie des rôles rend impossible la perception de la commutativité de la multiplication ainsi que l'extension à la multiplication de deux nombres réels positifs. Elle a donc « l'inconvénient de rendre difficile la justification, c'est-à-dire le discours technologique, de certaines propriétés essentielles de cette opération comme découlant de sa définition » (Noirfalise & Matheron, 2009, p. 246).

13.1.2 Propriétés sous-jacentes aux algorithmes

Il existe un grand nombre d'algorithmes¹¹¹ de la multiplication. Plusieurs d'entre eux utilisent les mêmes propriétés mathématiques et se distinguent essentiellement par des éléments de disposition. Il s'agit des algorithmes en colonnes (13.1.2.3), en tableau (13.1.2.2) ou *per gelosia* (13.1.2.4). Ces algorithmes sont appelés ici *algorithmes de type 1*. Ces propriétés sont d'abord décrites de manière générale (13.1.2.1) et leur utilisation dans ces algorithmes sont analysées en détail (13.1.2.2 et 13.1.2.3). Une brève présentation d'autres algorithmes sera ensuite donnée (13.1.2.4).

13.1.2.1 Propriétés sous-jacentes aux algorithmes de type 1

Tous les algorithmes de type 1 décomposent les nombres à multiplier (ou certains d'entre eux) en une somme de nombres plus petits et plus faciles à multiplier. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est ensuite appliquée. Chaque produit plus simple est effectué et la somme finale peut alors être calculée :

$$a \cdot b = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \cdot (b_0 + b_1 + \dots + b_m) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + \dots + a_n b_m \quad (1)$$

Cette application de la distributivité peut être vue dans le cadre numérique ou dans le cadre géométrique d'une représentation de la multiplication comme produit cartésien ou comme aire.

¹¹¹ Nous utilisons le mot *algorithme* dans son sens courant et adoptons la même définition « naïve » que Vergnaud : « un algorithme est une règle (ou une conjonction de règles) qui permet, devant tout problème d'une classe donnée à l'avance, de conduire à une solution, s'il en existe une, ou, le cas échéant, de montrer qu'il n'y a pas de solution » (1994, p. 208)

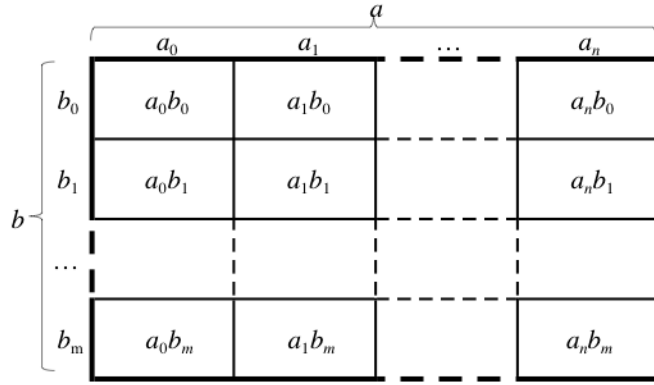


Figure 26 : Décomposition du produit $a \cdot b$ dans le cadre géométrique

Elle peut aussi être vue dans le cadre ensembliste comme le produit cartésien des ensembles A et B , où $A = \{a_0; a_1; \dots; a_n\}$ et $B = \{b_0; b_1; \dots; b_m\}$

Tous ces algorithmes de type 1 utilisés dans notre système de numération utilisent le caractère décimal positionnel (Gagnebin *et al.*, 1998, p. 85) de ce système. La décomposition des deux nombres à multiplier est alors la décomposition décimale en unité, dizaines, centaines... Sauf mention contraire, c'est cette décomposition canonique qui sera utilisée désormais. L'égalité ci-dessus peut s'écrire :

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \dots + a_n \cdot 10^n) \cdot (b_0 \cdot 10^0 + b_1 \cdot 10^1 + \dots + b_m \cdot 10^m) \\ &= (a_0 \cdot 10^0) \cdot (b_0 \cdot 10^0) + (a_0 \cdot 10^0) \cdot (b_1 \cdot 10^1) + \dots + (a_n \cdot 10^n) \cdot (b_m \cdot 10^m) \end{aligned} \quad (2)$$

On peut alors appliquer successivement à chaque terme l'associativité et commutativité de la multiplication :

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0 \cdot 10^0 \cdot b_0 \cdot 10^0) + (a_0 \cdot 10^0 \cdot b_1 \cdot 10^1) + \dots + (a_n \cdot 10^n \cdot b_m \cdot 10^m) \\ &= (a_0 \cdot b_0 \cdot 10^0 \cdot 10^0) + (a_0 \cdot b_1 \cdot 10^0 \cdot 10^1) + \dots + (a_n \cdot b_m \cdot 10^n \cdot 10^m) \end{aligned} \quad (3)$$

On utilise ensuite les propriétés des puissances (qui découlent elle-même de la commutativité et de l'associativité de la multiplication) :

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_0 \cdot b_0 \cdot 10^{0+0} + a_0 \cdot b_1 \cdot 10^{0+1} + \dots + a_n \cdot b_m \cdot 10^{n+m} \\ &= a_0 \cdot b_0 \cdot 10^0 + a_0 \cdot b_1 \cdot 10^1 + \dots + a_n \cdot b_m \cdot 10^{n+m} \end{aligned} \quad (4)$$

Selon les algorithmes de type 1, les termes sont alors regroupés de diverses manières, nous y reviendrons ci-dessous, mais le résultat final peut s'écrire (en faisant apparaître quelques termes supplémentaires) :

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_0 \cdot b_0 \cdot 10^0 + a_0 \cdot b_1 \cdot 10^1 + a_1 \cdot b_0 \cdot 10^1 + \dots + a_n \cdot b_m \cdot 10^{n+m} \\ &= a_0 \cdot b_0 \cdot 10^0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \cdot 10^1 + \dots + a_n \cdot b_m \cdot 10^{n+m} \end{aligned} \quad (5)$$

Ou encore sous forme de somme :

$$a \cdot b = \sum_{i=0}^n a_i 10^i \cdot \sum_{j=0}^m b_j 10^j = \sum_{h=0}^{n+m} \left(\sum_{k+l=h} a_k b_l \right) 10^h \quad (6)$$

Les coefficients a_k et b_l étant des nombres entiers compris entre 0 et 9, l'application de la décomposition décimale, de la distributivité de la multiplication sur l'addition, de l'associativité

et de la commutativité de la multiplication, des propriétés des puissances permettent de réduire le calcul à $m \cdot n$ produits de deux nombres naturels inférieurs à 10 et à l'addition de ces produits.

13.1.2.2 L'algorithme en tableau, l'algorithme en rectangle

L'algorithme en tableau représente la distributivité, comme dans l'égalité (1), mais sous forme de produit cartésien dans un tableau à double entrée. Cette représentation peut s'utiliser indépendamment de la décomposition décimale mais elle n'est développée ici que pour cette décomposition. Afin de faire correspondre les colonnes du tableau au tableau décimal des nombres, la décomposition est écrite selon les puissances décroissantes de 10. Les sommes peuvent alors être faites en ligne puis ces sommes peuvent être additionnées à leur tour. Il est aussi possible de faire d'abord les sommes par colonnes et d'additionner la ligne de ces sommes. Les résultats sont identiques par commutativité de l'addition.

	$a_n \cdot 10^n$...	$a_1 \cdot 10^1$	$a_0 \cdot 10^0$	
$b_m \cdot 10^m$	$a_n b_m 10^{n+m}$		$a_1 b_m 10^{m+1}$	$a_0 b_m 10^m$	$a \cdot b_m \cdot 10^m$
...					
$b_1 \cdot 10^1$	$a_n b_1 10^{n+1}$		$a_1 b_1 \cdot 10^2$	$a_0 b_1 \cdot 10$	$a \cdot b_1 \cdot 10$
$b_0 \cdot 10^0$	$a_n b_0 10^n$		$a_1 b_0 \cdot 10$	$a_0 b_0$	$a \cdot b_0$
	$a_n \cdot b \cdot 10^n$		$a_1 \cdot b \cdot 10$	$a_0 \cdot b$	$a \cdot b$

Figure 27 : Algorithme en tableau

Ce tableau est très proche de la représentation sous forme de produit cartésien ou d'aire, en décomposant chaque côté du rectangle de manière décimale, tant d'un point de vue purement visuel que d'un point de vue mathématique (voir 13.1.1). Les sommes peuvent être faites dans un ordre quelconque, mais si une systématique en ligne d'abord ou en colonnes d'abord est utilisée, on peut parler d'*algorithme en rectangle*¹¹².

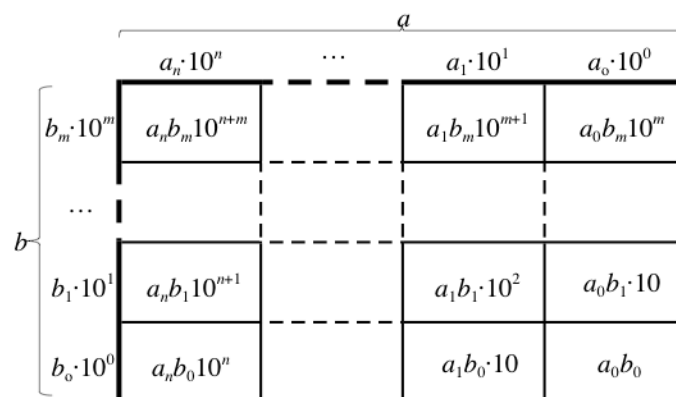


Figure 28 : Algorithme en rectangle

¹¹² Le terme est de mon cru.

Bloch (2008) considère que cet ostensif est une hypoicône¹¹³ :

Le découpage fonctionne comme un schéma qui soutient le raisonnement, avec une règle incorporée, c'est ce que Peirce appelle un *diagramme* ou une *hypoicône* [...]. Une hypoicône est précisément cela : quelque chose que l'on utilise presque sans avoir besoin d'y penser. (Bloch, 2008, p. 105)

Ainsi, cet algorithme fonctionne directement à partir de la représentation de la multiplication comme une aire en utilisant les propriétés de découpage-recomposition de l'aire comme support à sa propre règle de fonctionnement.

13.1.2.3 Les algorithmes en colonnes

Les algorithmes en colonnes utilisent pleinement la *positionnalité* du système de numération. Les deux nombres a et b à multiplier sont déjà décomposés de par leur écriture décimale. La notation des puissances de 10 et l'addition de chaque terme est prise en charge par le *tableau décimal*. L'algorithme complet consiste alors à :

- multiplier chaque facteur a_k par chaque facteur b_l
- placer chaque produit sur une nouvelle ligne, dans la colonne des 10^{k+l} pour son chiffre des unités et dans la colonne des 10^{k+l+1} pour son chiffre des dizaines
- indiquer le facteur 10^{k+l} par $k+l$ zéros placés dans chacune des $k+l$ colonnes situées à droite du produit
- additionner en colonnes les $n+m$ produits partiels ainsi obtenus

	10^{n+m}	...	10^n	...	10^0	Dizaines	Unités	
			a_n	...	a_m	a_1	a_0	
					b_m	b_1	b_0	
						$a_0 b_0$	0	
						$a_1 b_0$	0	
						$a_2 b_0$	0	
						\vdots	\vdots	
						$a_0 b_1$	0	
						$a_1 b_1$	0	
						\vdots	\vdots	
						$a_m b_1$	0	
						\vdots	\vdots	
			$a_n b_m$...	0	...	0	
						0	0	
			somme en colonnes					

Figure 29 : Algorithme en colonnes complet. Par commodité de la représentation, on a considéré $n > m$. Les flèches vers la gauche indiquent la notation du chiffre des dizaines du produit $a_k b_l$ dans la colonne située immédiatement à gauche.

Les étapes 1 et 4 correspondent à la distributivité telle qu'écrite en 13.1.2.1 et sont semblables à celles effectuées dans l'algorithme en tableau ou dans l'algorithme en rectangle. Les étapes 2 et 3 correspondent à la prise en charge, par la numération décimale de position, des puissances de 10 et des regroupements de 10 éléments de rang inférieur en 1 élément de rang supérieur. Cette prise en charge, sur laquelle reviendra la question de la multiplication par 10 (13.2), s'appuie sur la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication.

¹¹³ Ce terme pourrait être rapproché du terme *encapsulation* utilisé en anglais (I. Bloch, communication personnelle, 5 juillet 2011).

Cet algorithme s'effectue sur $n+m+1$ colonnes et $m \cdot n$ lignes. L'ordre des lignes est indifférent. L'usage est toutefois de procéder dans l'ordre indiqué dans la Figure 29 afin de parvenir à l'algorithme condensé.

La forme condensée de l'algorithme consiste à ne pas écrire une nouvelle ligne pour chaque produit, mais à sommer directement les produits de b_l par chacun des a_k . Pour ce faire, le premier produit effectué est $a_0 b_k$. Le chiffre des unités de ce produit est noté dans la colonne des unités et le chiffre des dizaines est gardé en mémoire. Le produit $a_1 b_k$ est effectué. On lui ajoute le nombre mémorisé et on note le chiffre des unités du résultat dans la colonne des dizaines. Le chiffre des dizaines du résultat est gardé en mémoire. On procède de la même manière jusqu'à arriver au produit $a_m b_k$. Les k zéros à droite de $a_0 b_k$ sont notés de la même manière que dans l'algorithme complet, la somme finale est également effectuée de la même manière.

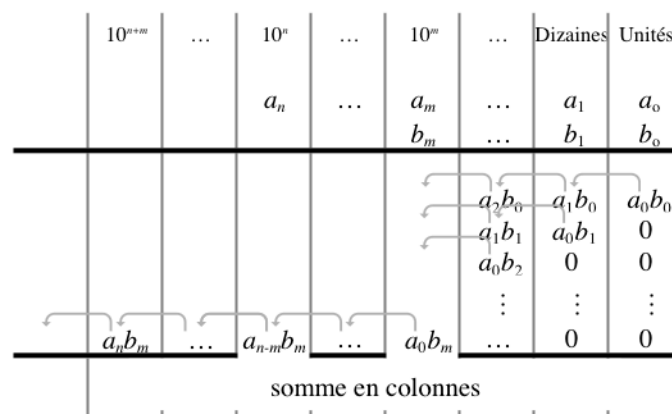


Figure 30 : Algorithme en colonnes condensé. Par commodité de la représentation, on a considéré $n > m$. Les flèches vers la gauche indiquent la notation du chiffre des dizaines du produit $a_k b_l$ dans la colonne située immédiatement à gauche ET son addition avec le produit qui occupera cette case.

Cet algorithme condensé semble plus économique puisqu'il utilise $n+m+1$ colonnes et m lignes, mais les calculs sont en fait les mêmes que dans l'algorithme complet, une partie des sommes étant effectuée *au fur et à mesure* entre chaque multiplication. Le fonctionnement complet de cet algorithme a été décrit par Brousseau (1973, 1976, 2010) sous la forme d'un ordinogramme extrêmement complexe décrivant chaque opération élémentaire à effectuer et permettant de modéliser le risque d'erreur dans le résultat final en fonction du risque d'erreur à chaque étape.

Les connaissances utilisées pour écrire cet algorithme de manière générale ne sont pas celles d'un enseignant généraliste. Toutefois, si on considère la multiplication en colonnes d'un entier par un nombre entier à deux chiffres, la décomposition décimale des nombres et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sont mise en œuvre pour justifier la séparation en deux lignes, puis à nouveau pour effectuer les calculs de chaque ligne avec, à plusieurs reprises, l'utilisation des regroupements par 10 et donc la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication. La règle de la multiplication par 10, qui elle même utilise plusieurs propriétés de la multiplication (voir 13.2), est également nécessaire, ainsi que toutes les propriétés sous-jacentes à l'addition en colonnes qui ne sont pas détaillées ici. Les connaissances des liens entre ces propriétés et l'algorithme peuvent être considérées comme des connaissances technologico-théoriques ou comme des CME (voir la discussion à ce sujet en 15.6.1.2) puisque, d'un premier point de vue, elles justifient l'algorithme qui est une connaissance mathématique et que, d'un second point de vue, elles ne sont utilisées que dans l'enseignement.

13.1.2.4 Autres algorithmes

De nombreux autres algorithmes existent. Certains sont des algorithmes de type 1. Mentionnons particulièrement l'algorithme *per gelosia* qui est présent dans certains manuels et qui est proche de l'algorithme en colonnes développé, mais qui prend en charge graphiquement plutôt que par l'ajout de zéro les multiplications des puissances de 10.

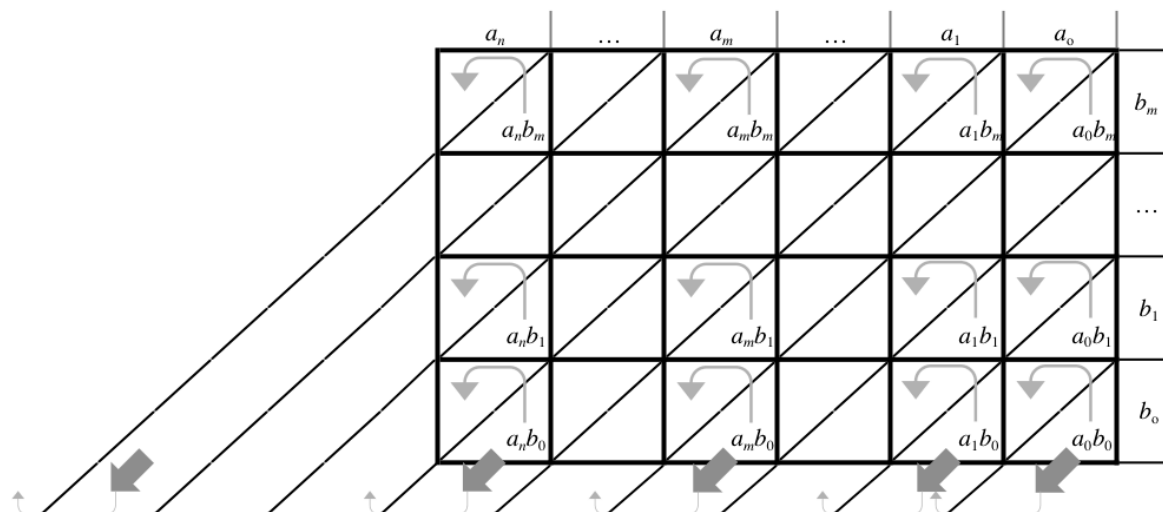


Figure 31 : Algorithme *per gelosia*. Les flèches fines gris clair signifient que le chiffre des dizaines est écrit dans la case désignée, les flèches épaisses foncées que la somme est effectuée en diagonale.

Cet algorithme met bien en évidence tous les produits $a_j b_k$. La gestion des puissances de 10 et des regroupements est en revanche plus opaque, la mise en parallèle avec l'algorithme en colonnes développé semblant la manière la plus efficace de justifier cette gestion. En revanche l'efficacité en terme d'utilisation est nettement supérieure à celle de l'algorithme en colonne, et surtout le risque d'erreur est nettement diminué comme l'a démontré Brousseau (1973, 1976, 2010) Cet algorithme est donc présenté dans certains manuels, par exemple les moyens COROME¹¹⁴ (voir 13.4.6.2).

D'autres algorithmes existent également. Certains sont des variantes de disposition de l'algorithme en colonnes, comme les méthodes *per rombo*, *per copa*, ou *per scacchiri* (Guinet, 1978). D'autres sont de type 1 mais n'utilisent pas la décomposition décimale, les carrés de Babylone par exemple (Deledicq, 1993, p. 16). D'autres encore ne sont pas des algorithmes de type 1 car ils utilisent d'autres propriétés : l'algorithme à la Russe, à l'Egyptienne (Chastellain & Jaquet, 2001, F8T2), la recette des mousquetaires, la méthode mentale du rectangle (Deledicq, 1993, pp. 19-21)... Ces algorithmes font les beaux jours des jeux et concours mathématiques ou des illustrations culturelles. Ils sont parfois présentés dans certains manuels, mais ils y interviennent après que les algorithmes traditionnels soient en place et sont peu utilisés par les enseignants. Ils ne seront donc pas développés ici¹¹⁵.

¹¹⁴ Par exemple (Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1999), (Chastellain & Jaquet, 2001)

¹¹⁵ Avec l'apparition de l'informatique et la nécessité de multiplier des grands nombres, de nouveaux algorithmes ont été développés en utilisant les propriétés de la multiplication, et éventuellement des propriétés mathématiques plus élaborées (transformée de Fourier, calcul matriciel). On peut citer les algorithmes de Karatsuba, de Toom-Cook, de Schönhage-Strassen ou de Fürer

13.2 La multiplication par 10

Les développements de 13.1.2 permettent de décrire les propriétés mathématiques utilisées dans l'algorithme en colonnes. Toutefois, comme évoqué dans la partie B à propos de la question 3 (9.2.2.2 et 10.1.2), la question du décalage ou du zéro intervenant à la deuxième ligne (et dans les lignes suivantes) pose un problème particulier. Il semble donc utile d'examiner brièvement les propriétés utilisées lors de la multiplication en ligne d'un nombre entier par 10 ou, plus généralement, d'un nombre se terminant par 0. La question peut être considérée comme un problème de multiplication ou comme un problème de numération.

Si on considère la question du point de vue de la multiplication, et en utilisant les mêmes notations qu'en 13.1.2.1, les étapes de calcul et les propriétés utilisées pour multiplier un nombre entier a par 10 sont successivement les suivantes :

$$a \cdot 10 = (a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \dots + a_n \cdot 10^n) \cdot 10$$

Distributivité de la multiplication sur l'addition

$$= (a_0 \cdot 10^0) \cdot 10 + (a_1 \cdot 10^1) \cdot 10 + \dots + (a_n \cdot 10^n) \cdot 10$$

Associativité de la multiplication

$$= a_0 \cdot 10^0 \cdot 10 + a_1 \cdot 10^1 \cdot 10 + \dots + a_n \cdot 10^n \cdot 10$$

Propriétés des puissances (repose sur l'associativité de la multiplication)

$$= a_0 \cdot 10^1 + a_1 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^{n+1}$$

Remise du nombre sous sa forme canonique dans l'écriture décimale

$$= 0 \cdot 10^0 + a_0 \cdot 10^1 + a_1 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^{n+1}$$

Dans le système décimal de position, cela signifie que les chiffres des unités est 0, que a_0 est le chiffre des dizaines, a_1 celui des centaines, etc. Autrement dit que les chiffres dans l'écriture du nombre a sont décalés d'un rang avec « ajout d'un zéro » comme chiffre des unités. Cette encapsulation de connaissances, qui devient donc une règle d'action, est valable pour tout nombre décimal et peut être décrite de la manière suivant : « pour multiplier un nombre par 10, on le décale d'un rang vers la gauche dans le tableau des nombres » Elle n'est en revanche valable que pour les entiers sous sa forme « pour multiplier un nombre par 10, on ajoute un zéro à droite ». Nous nous référerons à cette dernière formulation comme *règle du zéro*.

Si, plus généralement, il s'agit de multiplier par un nombre à deux chiffres se terminant par 0, il s'agit au préalable d'appliquer l'associativité de la multiplication.

$$a \cdot b = (a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \dots + a_n \cdot 10^n) \cdot (b_1 \cdot 10)$$

Associativité de la multiplication

$$= [(a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \dots + a_n \cdot 10^n) \cdot b_1] \cdot 10$$

On est alors ramené au cas précédent.

On pourrait avoir l'impression que les étapes nombreuses et les propriétés utilisées sont liées à la volonté d'une écriture générale, mais on peut constater sur un exemple que cela n'est pas le cas. Prenons l'exemple de $174 \cdot 80$:

$$\begin{aligned} 174 \cdot 80 &= 174 \cdot (8 \cdot 10) \stackrel{\text{associativité mult.}}{=} (174 \cdot 8) \cdot 10 = 1392 \cdot 10 = (1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 2) \cdot 10 \\ &\stackrel{\text{distributivité}}{=} (1 \cdot 10^3) \cdot 10 + (3 \cdot 10^2) \cdot 10 + (9 \cdot 10) \cdot 10 + 2 \cdot 10 \\ &\stackrel{\text{associativité mult.}}{=} 1 \cdot 10^3 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 \cdot 10 + 9 \cdot 10 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \stackrel{\text{puissances (ass. mult.)}}{=} 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 = 13920 \end{aligned}$$

Si on traite la multiplication par 10 du point de vue de la numération, on peut encore considérer la question de deux manières. La première insiste sur l'aspect *positionnel* et la seconde sur l'aspect *décimal* de notre système de numération, ou encore, pour utiliser la terminologie anglaise, la première met en avant *the place* et la seconde sur *the value* de la *place value* (Tempier, 2010)¹¹⁶.

Si on met en avant la position de chaque chiffre, multiplier un nombre par 10 revient à augmenter chaque ordre de groupement de 1. Le chiffre des unités devient le chiffre des dizaines, celui des dizaines devient celui des centaines... et la place vide des unités doit être comblée par le chiffre zéro. Le cas de la multiplication par un nombre à deux chiffres se terminant par 0 se traite alors comme ci-dessus.

L'aspect décimal (*value*) insiste sur la valeur et considère que, pour multiplier un nombre entier par un nombre à deux chiffres se terminant par 0, on multiplie ce nombre par des dizaines et donc que le résultat est donné en dizaines. On a alors un « nombre de dizaines ». Comme il s'agit de donner le résultat en unités, on dégroupé ou on échange chaque dizaine contre 10 unités. Cette manière de voir pose toutefois une difficulté quand, par exemple, on multiplie des dizaines par des dizaines, car cela conduit à une « unité composée » du type DxD ou encore D².

La discussion des difficultés et des liens entre ces différents points de vue devrait être développée, elle dépasse toutefois le cadre de cette thèse.

¹¹⁶ Tempier (2010), citant en particulier Ma (1999, p. 129), relève la prédominance de l'aspect positionnel dans les curricula français et étatsuniens.

13.3 Erreurs dans l'algorithme

Les occasions d'erreurs dans la conduite de l'algorithme en colonne de la multiplication sont nombreuses. Plusieurs auteurs ont étudié ces erreurs, leurs causes et les manières de les éviter. En particulier aux USA, les articles à ce sujet sont nombreux (par exemple Anghileri, 1999; Lampert, 1986).

Dans le cadre de sa « description simplifiée du comportement d'un enfant qui calcule le produit de deux nombres », Brousseau (1973, 2010) a ainsi calculé la probabilité d'erreur de l'algorithme en colonnes en fonction de la taille de l'opération et de la probabilité d'erreur à chaque étape et a constaté qu'une amélioration de la fiabilité pouvait être obtenue de manière plus significative par un passage à la méthode *per gelosia* que par une augmentation de la fiabilité de chaque étape dans la multiplication en colonnes.

Dans son mémoire de licence, Gianferrari (2000) a classé les erreurs possibles lors de la réalisation par des élèves de multiplications en colonnes à un et deux chiffres. Elle a ensuite fait réaliser à une centaine d'élèves vaudois de 5^{ème} année dix multiplications en colonnes dont sept à deux chiffres. Le nombre et la répartition par types d'erreurs sont résumés dans le Tableau 11 :

	% des calculs à un chiffres	% des calculs à deux chiffres	% des calculs
Diagramme de l'opération écrite	3.00	28.00	20.80
Aligner le second produit partiel sous le premier, sans décalage			
Ecrire en suivant sur une seule ligne les produits partiels par concaténation			
Multiplier seulement les unités du multiplicateur, pas les dizaines			
Ecrire les produits partiels sans les additionner			
Ajouter un produit partiel lorsqu'il n'y a qu'un seul chiffre au dénominateur			
Ajouter un zéro au deuxième produit partiel, à droite des unités			
Mettre deux fois le même produit partiel, en ajoutant un zéro sous la colonne des unités			
Echanges	8.00	7.00	7.30
Multiplier les échanges			
Multiplier les échanges au dessus des centaines lorsque le multiplicande n'a que deux chiffres			
Ignorer les échanges			
Ignorer les échanges des centaines, ne pas les reporter dans la colonne des centaines			
Réutiliser les échanges du premier produit partiel pour le deuxième			
Ajouter des échanges			
Inverser l'échange et le chiffre à poser			
Abaisser le chiffre des centaines comme si c'était un échange			
Utiliser l'échange au-dessus des dizaines comme une centaine			
Opérations	7.00	20.00	16.10
Multiplier selon la règle de l'addition les unités par les unités et les dizaines par les dizaines			
Multiplier indifféremment les chiffres des unités par ceux des dizaines et des unités			
Multiplier le chiffre des unités du multiplicateur une fois comme unité et une fois comme dizaine			
Additionner à la place de multiplier			
Multiplier les produits partiels au lieu de les additionner			
Soustraire les produits partiels			
Additionner un produit partiel au multiplicateur			

Erreurs de livret ¹¹⁷ et/ou de calcul			
Calcul non analysable			
Valeur des nombres 0 et 1	1.00	2.00	1.60
Utiliser le 0 comme élément neutre			
Considérer le 1 comme élément absorbant			
Considérer le 0 comme sans valeur positionnelle			
TOT	19.00	57.00	45.80

Tableau 11 : Classification des erreurs et pourcentage par type d'erreurs, résumé de (Gianferrari, 2000, pp. 52-58), seuls les proportions par catégorie d'erreurs sont données ici.

La proportion d'erreur augmente d'un facteur trois avec les multiplications à deux chiffres, principalement à cause des erreurs dans le diagramme de l'opération. Les trois erreurs les plus fréquentes dans les algorithmes à deux chiffres sont, de plus, particulièrement intéressantes du point de vue des connaissances sous-jacentes décrites en 13.1.2.1 et donc du point de vue des connaissances mathématiques que l'enseignant pourrait être amené à mobiliser pour traiter cette erreur. Il s'agit de l'omission du zéro à la seconde ligne (aligner le second produit partiel sous le premier, sans décalage, représente 14.14% des multiplications à deux chiffres) ; de l'absence de l'addition finale (écrire les produits partiels sans les additionner, représente 3.86% des multiplications par un nombre à deux chiffres) et d'une multiplication *en colonnes strictes* (multiplier selon la règle de l'addition, les unités par les unités et les dizaines par les dizaines, voir Figure 33 p. 144, représente 3.14% des multiplication par un nombre à deux chiffres).

13.4 Des manières d'introduire l'algorithme : quelques variables didactiques

Bessot (2003), à partir de la définition de Brousseau (1982), considère les *variables didactiques* comme des modélisations des choix de l'enseignant visant à provoquer l'apprentissage de l'élève.

L'apprentissage est une *modification* du rapport à la connaissance produite par l'élève lui-même, que l'enseignant peut seulement provoquer par des choix (volontaires ou involontaires) qui sont modélisés comme des valeurs de *variables* de la situation adidactique. (Bessot, 2003, p. 8)

Ces variables didactiques sont généralement utilisées dans les analyses *a priori* de situations didactiques, nous avons décidé d'étendre cette manière de faire à une analyse des manières d'introduire l'algorithme. Comme souvent dans les analyses *a priori* cette analyse n'est pas préalable et l'éventail des possibles est influencé par les observations, par exemple par la réduction des manuels étudiés à ceux utilisés par les enseignants observés. Elle conserve toutefois son caractère *a priori* puisqu'elle essaye de parcourir l'éventail des choix possibles pour un enseignant vaudois générique de 4P¹¹⁸.

La variable didactique du choix d'une description ou d'une explication sera d'abord détaillée et déclinée en fonction des représentations de la multiplication (13.4.1). Cette variable est considérée comme principale. D'autres variables seront ensuite croisées avec les choix d'explications : notation du zéro de la seconde ligne (13.4.2), gestion des retenues (13.4.2), gestion graphique (13.4.4) et choix de nombres (13.4.5). Ces cinq variables et leurs valeurs seront codées dans des quintuplets. Pour chaque choix de variable, les connaissances

¹¹⁷ Ou tables de multiplications.

¹¹⁸ Elèves de 9 à 10 ans, équivalent CM1 en France. Voir Annexe 2.

mathématiques sous-jacentes seront liées aux connaissances décrites ci-dessus. Enfin quelques manuels utilisés seront situés quant à ces variables didactiques (13.4.6).

13.4.1 Description ou explication de l'algorithme

La première variable didactique, et le premier choix devant lequel se trouve l'enseignant, est celui de donner une description procédurale de l'algorithme sous forme de marche à suivre, de recette (P) ou alors d'expliquer cet algorithme (C). Ce choix peut être influencé par des raisons d'ordre pédagogique qui ne sont pas l'objet de cette recherche ou par des raisons d'efficacité didactique, l'enseignant estimant qu'il est plus efficace de donner ou non des explications de type technologique permettant de justifier l'algorithme. Mais ces raisons peuvent aussi être liées aux connaissances mathématiques nécessaires pour donner des justifications à l'algorithme.

Si le choix est fait, par l'enseignant ou par le manuel, d'une description purement procédurale, celle-ci pourra conduire à l'algorithme condensé (P_c), mais aussi à l'algorithme développé (P_d) ou à la forme *per gelosia* (P_g), selon que primeront les habitudes sociales ou l'efficacité (voir 13.1.2.4).

Si le choix est fait, par l'enseignant ou par le manuel, de donner des explications à l'algorithme de la multiplication d'un entier par un nombre à deux chiffres, ces explications pourront s'appuyer sur une représentation de la multiplication comme une addition itérée (AI), sur une représentation de la multiplication comme aire d'un rectangle (RE) ou encore sur une vision de produit cartésien (PC).

La multiplication comme addition itérée permet de donner une explication de la distributivité dans le cadre de l'algorithme. Multiplier un nombre par $10b_1 + b_0$, c'est le multiplier par $10b_1$ puis par b_0 en vertu de l'associativité de l'addition itérée sous-jacente à celle multiplication, puis à additionner les deux termes ainsi obtenus :

$$\begin{aligned} (10b_1 + b_0) \cdot a &= \underbrace{a + a + \dots + a}_{10b_1 + b_0 \text{ fois}} \\ &= \left(\underbrace{a + a + \dots + a}_{10b_1 \text{ fois}} \right) + \left(\underbrace{a + a + \dots + a}_{b_0 \text{ fois}} \right) = 10b_1 \cdot a + b_0 \cdot a \end{aligned}$$

Dans l'égalité qui précède, le facteur décomposé se trouve à droite et cette égalité permet donc de justifier la décomposition du premier facteur dans une multiplication en colonnes par un nombre à UN chiffre. Si on veut l'utiliser pour justifier la décomposition du second terme dans une multiplication par un nombre à deux chiffres, il est nécessaire d'utiliser tout d'abord la commutativité de la multiplication (Vergnaud, 1994, p. 122). Dans ce cas, la décomposition du premier terme dans la multiplication à un chiffre est encapsulée et utilisée telle quelle, seule celle du second terme est développée.

Cette représentation additive permet également de justifier la *règle du zéro* et par là même l'ajout du zéro à la seconde ligne en utilisant la distributivité, ou encore en argumentant sur le fait que l'addition itérée dix fois permet de grouper chaque élément pris dix fois en un élément d'ordre supérieur, ceci transformant unités en dizaines, dizaines en centaines... Les deux justifications peuvent être présentées d'une façon purement numérique (AI_n) ou habillées dans une situation plus ou moins concrète (AI_c).

La multiplication en colonnes à deux chiffres $a \cdot (10b_1 + b_0)$ peut alors être réalisée, soit en écrivant directement l'algorithme traditionnel (AI_n_c et AI_c_c), soit en écrivant deux mul-

tiplications $a \cdot b_0$ et $a \cdot b_1$, en appliquant la *règle du zéro* et en additionnant les deux résultats (AIn_ε et AIC_ε), ou encore en écrivant l'algorithme développé (AIn_d et AIC_d). Dans ce cas, l'algorithme condensé apparaît ultérieurement comme un raccourci d'écriture.

La multiplication $a \cdot b$ vue comme l'aire du rectangle de côtés entiers a et b constitue un algorithme contenant ses propres règles de fonctionnement (13.1.2.2). Le choix peut alors être d'utiliser cet algorithme directement (REr), l'algorithme en colonnes apparaissant ensuite comme un raccourci d'écriture, soit sous sa forme développée (REr_d) soit sous sa forme condensée après une somme en ligne des aires (REr_c). Les divers algorithmes pourront alors éventuellement cohabiter dans la classe. L'autre choix consiste à ne décomposer que b et à utiliser l'aire du rectangle pour justifier l'algorithme en colonnes à deux chiffres en s'appuyant sur la connaissance encapsulée de celui à un chiffre (REe). Dans tous les cas, la *règle du zéro* est un prérequis et le zéro de la seconde ligne de l'AMC2 apparaît par comparaison avec les aires des rectangles décomposés. Ce prérequis ne peut lui-même pas être entièrement justifié à l'aide de la représentation sous forme d'aire car cette représentation est peu adéquate pour justifier l'associativité (voir 13.1.1) sur laquelle repose cette *règle du zéro* (voir 13.2).

La multiplication considérée comme un produit cartésien représenté en tableau conduit aux mêmes variables selon qu'il est utilisé directement (PCt) avec un raccourci sous forme développée (PCt_d) ou condensée après une somme en ligne des aires (PCt_c) ; ou alors qu'il serve de justification à l'algorithme en colonne condensé (PCe).

13.4.2 Le zéro de la seconde ligne ou le décalage

Pour ce qui est de l'algorithme en colonnes, la difficulté du zéro ou du décalage de la seconde ligne a été soulignée en 10.1.2 dans la partie B. Celui-ci sera donc considéré pour lui-même dans cette analyse *a priori*. Tout d'abord le zéro pourra être noté (Z), mais la place des unités dans la seconde ligne peut également être laissée vide (V) ou encore marquée par un trait, un point ou un autres symbole (Y).

Il est ensuite envisageable pour l'enseignant de choisir de donner ou non des explications indépendamment du choix fait pour la structure de l'algorithme. L'absence d'explication pour le zéro ou le décalage sera notée (S), et la seule référence non justifiée à la *règle du zéro* (R). Si le zéro ou le décalage est expliqué ou réexpliqué, de manière plus ou moins rigoureuse, ce pourra être en utilisant l'argument du travail avec des dizaines (D), par exemple en disant qu'en multipliant par des dizaines, on obtient des dizaines. Si la *règle du zéro* est expliquée ou réexpliquée, cela pourra se faire de manière inductive en déduisant la présence du zéro grâce à un certain nombre d'exemples (I), ou alors être justifié en adaptant aux élèves les explications mathématiques données en 13.2, soit du point de vue de la numération décimale de position, soit en utilisant la distributivité (E).

13.4.3 La gestion des retenues

La question des retenues ne se pose de manière particulière que dans l'algorithme en colonnes condensé. Elle a été travaillée dans l'algorithme de l'addition et dans celui de la multiplication par un nombre à un chiffre. Son explication n'est donc pas considérée ici. En revanche, la façon de noter les retenues pourra être influencée par la compréhension de leur rôle dans l'algorithme et éventuellement influencer celle des élèves. De plus, cette gestion pourra éventuellement être différente de celle de la multiplication à un chiffre à cause de la superposition des retenues des multiplications successives.

Les retenues peuvent être retenues « dans la tête » (T) ou « sur les doigts » (D). Ce choix peut être motivé par le risque de confusion entre les lignes de calcul, par des raisons de propreté ou encore par l'impression que le fait de ne pas écrire les retenues est un signe de maîtrise d'un algorithme. En revanche, cette absence de notation est susceptible de faire perdre à la retenue son sens d'échange ou de groupement de dix éléments de rang inférieur contre un élément de rang supérieur et de devenir uniquement une quantité que l'on additionne au moment désigné. Cela peut être le signe que la retenue n'a pas cette signification pour l'enseignant. Il est également possible de noter la retenue « ailleurs » (A), à côté de la disposition en colonnes par exemple et de la tracer à chaque fois. Cette manière de faire a les mêmes caractéristiques que les deux précédentes, mais elle évite la surcharge de la mémoire ou la complexité de l'usage des doigts.

Les retenues peuvent également être notées dans la colonne située immédiatement à gauche de celle dans laquelle les unités du produit partiel effectué est noté, généralement au dessus. Cela crée un risque de confusion qui peut être géré en traçant ou en effaçant les retenues à la fin de la première multiplication partielle (E), en utilisant des couleurs (C) ou en laissant les retenues (L) et en notant les retenues sur deux étages. Cette manière de faire offre l'avantage de conserver la signification d'échange de la retenue.

Il est aussi possible de noter les retenues dans une « boîte à retenue » (B), sorte de tableau des nombres annexe, dans lequel figurent les intitulés des colonnes et une ligne par multiplication partielle effectuée. Cette façon de faire permet de marquer le sens de la retenue tout en évitant les confusions. Elle est en revanche un peu lourde dans son utilisation.

13.4.4 Les ajouts graphiques

Un certain nombre d'éléments graphiques peuvent être ajoutés aux algorithmes en colonnes. Ils peuvent être de pures aides graphiques à la réalisation des étapes de l'algorithme ou matérialiser des éléments de compréhension de celui-ci.

Les colonnes peuvent être tracées (K), accompagnées ou non de leur en-tête (K_{et} ou K_{e}), se prolongeant ou non sur les lignes des produits partiels et de l'addition (K_{p} ou K_{p}). Ces colonnes sont une aide graphique à un bon alignement, mais elles permettent aussi à l'enseignant d'insister sur l'importance de la numération décimale de position et sur les échanges ou les groupements.

Des traits ou des flèches (T) peuvent être tracés, au fur et à mesure que les produits partiels sont effectués, entre chaque paire de chiffres à multiplier. Ces traits permettent de ne pas oublier un produit et peuvent marquer la double distributivité. Les flèches peuvent être ascendantes (T_{a}) ou descendantes (T_{d}) selon le sens dans lequel le produit est effectué.

Afin de mieux marquer graphiquement les deux multiplications dans l'algorithme condensé, il est possible d'utiliser des couleurs (C) ou d'entourer (E) la multiplication en cours (c'est à dire d'entourer le premier terme et un chiffre du second terme). Ceci permet de ne pas mélanger les produits partiels, mais aussi de pointer la distributivité. Pour insister sur le produit partiel effectué, on peut noter, par exemple en ligne à côté de la ligne effectuée, le produit partiel dont il s'agit (P).

Pour éviter son oubli, le zéro des unités de la deuxième ligne de l'algorithme en colonnes condensé peut être noté en couleur (Z). Ce moyen peut être explicitement justifié par la *règle du zéro* ou être exclusivement un moyen mnémotechnique.

Ces ajouts graphiques peuvent être utilisés lors de l'explication de l'algorithme. Toutefois, étant donné leur lourdeur d'utilisation, ils ne sont pas nécessairement conservés par la suite.

13.4.5 Le choix des nombres

Le choix des nombres multipliés pour l'explication de l'algorithme ou pour les exemples proches de ce moment d'explication vont influencer la compréhension des élèves et les difficultés des opérations. La connaissance du lien entre le choix des nombres et les caractéristiques de la multiplication effectuée est une connaissance mathématique, spécifique à l'enseignement (CMS). La prise en compte des caractéristiques de la multiplication effectuée sur l'apprentissage des élèves est elle de type didactique ou, pour utiliser la classification de Ball, une connaissance du contenu et de l'enseignement du sujet (CC).

Le premier terme peut être à deux (P_2), trois (P_3), ... chiffres. Le fait de choisir comme multiplicande un nombre à deux chiffres permet d'éviter de trop longs calculs et de mettre l'accent sur les autres difficultés de l'algorithme. Ce choix permet également d'écrire l'algorithme développé, ce qui est plus délicat et fastidieux si on part d'un nombre à trois chiffres. Il pourrait cependant empêcher de voir la répétition des étapes à chaque ligne si la multiplication à un chiffre n'est pas maîtrisée. Le choix d'un nombre à trois chiffres permet de bien marquer la distinction des rôles joués dans l'algorithme par le multiplicande et par le multiplicateur. Cela ne permet pas, dans un premier temps, d'écrire la multiplication en inversant les facteurs. L'utilisation d'un multiplicande à quatre chiffres ou plus rend l'opération longue et multiplie les risques d'erreurs. Ce choix donne une forte insistance sur la mécanique de l'algorithme plus que sur le fonctionnement de ses éléments.

Le second terme peut être pris entre 11 et 19 (S_D). Ceci donnera une seconde ligne avec des multiplications extrêmement simples, voire triviales incitant à simplement recopier le multiplicande. Ce risque est également présent avec les nombres se terminant par 0 (S_Z) où la première ligne devient un truisme et où la *règle du zéro* est plus adéquate que l'algorithme. Le dernier choix devant probablement être évité dans un premier temps est celui d'un nombre constitué de deux chiffres identiques (S_I) conduisant à deux lignes ne se distinguant que par leur décalage. Si le multiplicateur choisi ne possède aucune de ces caractéristiques, il sera dit quelconque (S_Q).

La relation entre les chiffres des deux nombres peut elle aussi être déterminée selon qu'elle évite les difficultés de livrets (R_l) par exemple en n'utilisant pas les chiffres 7 ou 8 ; en évitant, complètement ou partiellement, les retenues dans les produits partiels (R_r) ou encore en évitant l'apparition du chiffre 0 à droite d'un des produits partiels (R_z) par l'absence du chiffre 5 comme chiffre des dizaines du multiplicateur ou comme unité d'un des facteurs si l'autre facteur est pair.

Les choix sur chacun des nombres et sur leur relation ne sont pas tous possibles et peuvent entrer en conflit. De tels cas ne sont pas déterminés ici *a priori*.

Pour noter de façon abrégée les valeurs des variables didactiques choisies ou utilisées par un enseignant ou par un manuel pourront être notées dans un quintuplet :

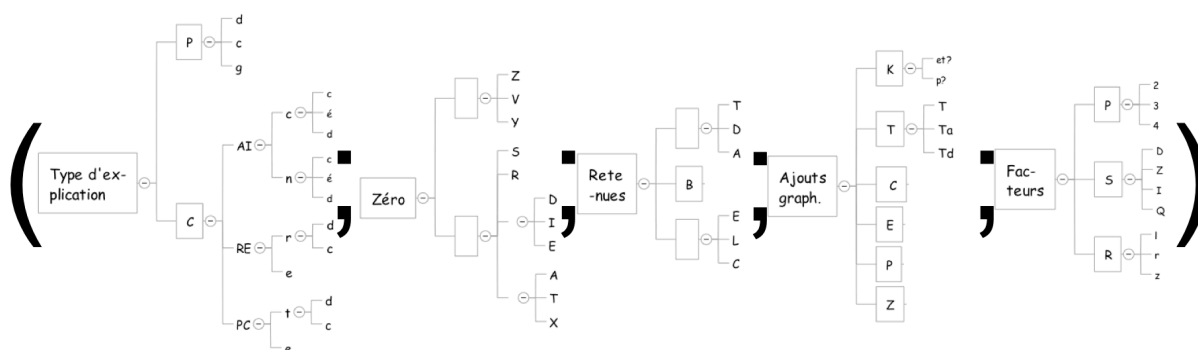


Figure 32 : Quintuplet de l'analyse *a priori* des variables didactiques de l'explication de l'algorithme. Le rappel de la signification des notations figure en Annexe 1.2.

13.4.6 Le plan d'études et les manuels utilisés

Les valeurs des variables déterminées par les séquences observées dépendent des choix fait par les manuels utilisés. Seuls les manuels ou les ressources utilisés par les enseignants observés sont donc décrits ici de ce point de vue.

13.4.6.1 Le plan d'études

Le Plan d'Etudes Vaudois¹¹⁹, le PEV (DFJ, 2006), est rédigé en terme de compétences. Les algorithmes de calcul sont classés sous la compétence « calculer de façon efficace » parmi les autres outils de calcul :

- utiliser des propriétés des opérations et du système de numération pour effectuer des calculs
- évaluer la pertinence d'un résultat obtenu à l'aide de la calculatrice
- mémoriser les tables :
 - d'addition de 0+0 à 9+9
 - de soustraction de 0-0 à 19-9
 - de multiplication de 0x0 à 9x9
- utiliser des algorithmes de :
 - l'addition
 - la soustraction
 - la multiplication (DFJ, 2006, pp. 12-12)

Les années de 3^{ème} et 4^{ème} primaire (3P¹²⁰ et 4P¹²¹) constituent un cycle d'apprentissage et le découpage des sujets n'est pas déterminé entre les deux années. Toutefois l'habitude et la référence aux moyens d'enseignement COROME (voir 13.4.6.2) conduisent habituellement les enseignants à traiter des algorithmes de l'addition, de la soustraction et de la multiplication par un nombre à un chiffre en 3P et de celle par un nombre à deux chiffres en 4P.

Ces prescriptions du PEV sont contraignantes, car, selon la loi scolaire, les enseignants « sont tenus d'appliquer les programmes fixés par le département et d'utiliser les moyens d'enseignement retenus par celui-ci » (*Loi scolaire*, 1984). Toutefois le manque de précision à propos des algorithmes et l'absence de document d'accompagnement ne permettent pas de déterminer la valeur des variables didactiques.

¹¹⁹ Pour les mathématiques, ce plan d'études est une réorganisation du *Plan d'études romand de mathématiques, degrés 1 à 6*. (DFJ, 2006)

¹²⁰ Elèves de 8 à 9 ans, équivalent CE2 en France. Voir Annexe 2.

¹²¹ Elèves de 9 à 10 ans, équivalent CM1 en France. Voir Annexe 2.

13.4.6.2 Les moyens COROME

Les manuels officiels, généralement appelés *moyens d'enseignement*, comme dans la loi scolaire citée ci-dessus, sont donc obligatoires pour l'ensemble des enseignants. La collection introduite en Suisse Romande pour les degrés 1P à 4P entre 1997 et 2002 est éditée par la Commission Romande des Moyens d'Enseignement et d'apprentissage (COROME), commission désignée par les instances officielles des cantons romands. Les travaux de l'équipe ERMEL ont été une source d'inspiration importante dans la rédaction de ces moyens (Dorier & Maréchal, 2008, p. 70). Pour les degrés 3P et 4P (Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1998; Danalet *et al.*, 1999), ces moyens comprennent, pour l'élève, un fichier et un livre dans lesquels les tâches sont classées par ordre alphabétique. La classe dispose d'un fichier de formes prédécoupées et de divers matériels pédagogiques. Pour sa part, l'enseignant est muni d'un classeur dans lequel les tâches sont classées selon sept *modules*¹²². Chaque module est muni d'une introduction générale puis chaque tâche est très brièvement commentée. Ces commentaires se réduisent le plus souvent à quelques lignes concernant l'organisation, les objectifs, les stratégies possibles des élèves et des prolongements envisageables. Pour ce qui est de la construction de séquences d'enseignement, les moyens COROME ne donnent que très peu d'indications. Il est simplement précisé en trois demi-pages que « les ouvrages (enseignant et élève) ne sont pas conçus pour être utilisés dans leur totalité, ils sont une ressource dans laquelle il faut opérer des choix » et que, en particulier, « les activités étant classées par ordre alphabétique, il ne faut pas y voir de hiérarchie ni de succession privilégiée dans le temps » (Danalet *et al.*, 1999, livre du maître p. 302). Finalement « l'enseignant choisira l'activité proposée aux élèves; il estimera le temps nécessaire selon son expérience » (Danalet *et al.*, 1999, livre du maître p. 303). La construction d'une planification annuelle est également laissée à la charge de l'enseignant puisque quatre grilles très vagues sont proposées mais que « la meilleure option consiste à composer soi-même la grille qui convient » (Danalet *et al.*, 1999, livre du maître p. 304). Ces moyens d'enseignement sont donc très différents de manuels au sens habituel du terme (Dorier & Maréchal, 2008, p. 69). Ces moyens sont ainsi essentiellement des *ouvrages ressources* et déterminent moins les choix didactiques qu'un manuel usuel, comme le précisent les *commentaires didactiques* :

Parmi les soutiens offerts au maître pour le seconder dans sa tâche, les moyens d'enseignement occupent une place importante. Ce ne sont néanmoins que des aides parmi d'autres, pour atteindre les objectifs déterminés par les programmes officiels. Ce serait accorder trop de poids au document écrit et sous-estimer la responsabilité et les compétences professionnelles du maître que de les confondre avec des directives légales, voire une doctrine imposée. On considère d'ailleurs ces moyens comme des « ouvrages ressources ». (Gagnebin *et al.*, 1998, p. 10)

Ces *commentaires didactiques* (Gagnebin *et al.*, 1998) sont une ressource plus générale pour les enseignants. Cependant, s'ils ont été utilisés lors de l'introduction des moyens COROME et s'ils le sont encore en formation initiale à la HEP du canton de Vaud, ils ne sont presque jamais consultés par les enseignants (Tièche Christinat & Delémont, 2005, p. 159).

Ainsi aucun élément de *cours* n'est donné et une part importante du travail de préparation est laissée à la charge des enseignants (Dorier & Maréchal, 2008, p. 70). Le rapport des enseignants à ces moyens d'enseignement a été analysé par Tièche Christinat et Delémont (Tièche Christinat & Delémont, 2005) dans une étude au niveau romand.

¹²² Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement, des problèmes pour approcher le nombre et lui donner du sens, des problèmes pour connaître l'addition, des problèmes pour connaître la multiplication, des problèmes pour explorer et organiser l'espace, des problèmes pour approcher les figures géométriques et les transformations du plan, des problèmes pour mesurer.

Ces moyens d'enseignement étant obligatoirement utilisés par les enseignants vaudois, la description de leur contenu au sujet de l'algorithme de la multiplication sera relativement exhaustive et sera modélisé selon les variables didactiques déterminées ci-dessus en partant du plus général, les *commentaires didactiques*, puis les introductions aux modules et enfin les tâches proposées et leurs commentaires.

Les *commentaires didactiques* (Gagnebin *et al.*, 1998) traitent abondamment des algorithmes de calcul. Les pages 129 à 141 leur sont consacrées, en particulier à celui de la multiplication (pp. 136-138). Elles figurent en Annexe 12.1.

Ces *commentaires* affirment qu'une des raisons d'apprendre cet algorithme est la mise en œuvre des propriétés du système de numération et des opérations. Sont citées en particulier la décomposition additive d'un nombre en unités, dizaines, centaines..., la *règle des zéros*, la distributivité de la multiplication sur l'addition qui « même si elle n'est pas explicite, doit "fonctionner" » (Gagnebin *et al.*, 1998, p. 137). Les diverses dispositions sont ensuite présentées (type calcul littéral, en tableau, en colonnes développé, en colonnes condensé, *per gelosia*) avec la précision qu'il ne s'agit que de variations dans la disposition et qu'il faut accepter la diversité des procédures algorithmiques. Ces *commentaires* sont écrits en particulier à destination des enseignants qui utilisaient les moyens *maths modernes* (en particulier les fiches OP, voir 13.4.6.3) et il est donc précisé qu'il ne s'agit plus de travailler les algorithmes dans le but de travailler les propriétés des opérations, qu'ils ne sont plus des savoirs à enseigner en tant que tel, mais des outils de calculs dans lesquels « les élèves doivent pouvoir expliquer leurs procédures, sans qu'elles soient l'objet de justifications raisonnées. (Il suffit de savoir "comment ça marche", il n'est pas nécessaire de pouvoir dire "pourquoi ça marche".) » (Gagnebin *et al.*, 1998, p. 140). Il faut signaler que ces pages sur les algorithmes ne figuraient pas dans la première édition de 1997 et qu'elles sont issues d'un colloque organisé au sujet de « L'approche des algorithmes dans la nouvelle collection de moyens d'enseignement des mathématiques » (Gurtner & Jaquet, 1997).

Comme relevé de manière générale ci-dessus, les *commentaires didactiques* ne sont presque jamais consultés par les enseignants et en particulier aucun des enseignants interrogés ne les a mentionnés lors des entretiens.

La deuxième source proposée par les moyens COROME au sujet de l'algorithme de la multiplication se trouve dans les introductions aux modules 4 de 3P et 4P, *Des problèmes pour connaître la multiplication* se trouvant dans le *Livre du maître* (Danalet *et al.*, 1998, 1999). En ce qui concerne la 4P, après un premier chapitre consacré aux problèmes multiplicatifs et divisifs, le second est consacré aux outils de calculs : calcul réfléchi (comprenant une partie assez détaillée sur les propriétés utilisées : associativité, commutativité, priorité des opérations, élément neutre, élément réciproque, distributivité), calculatrice, répertoire multiplicatif et algorithmes écrits. A propos de ces algorithmes écrits, l'introduction au module consacré à la multiplication insiste d'abord sur le rôle d'outil de calcul des algorithmes, le seul critère étant l'obtention rapide d'une réponse exacte, chaque élève pouvant adopter ses algorithmes personnels. En ce qui concerne la multiplication par un nombre à deux ou trois chiffres, la multiplication en colonnes est présentée comme une possibilité, l'algorithme *per gelosia* est encouragé pour son efficacité et d'autres procédures algorithmiques sont présentées à partir d'exemples car « particulièrement illustratrices des propriétés de la multiplication » (Danalet *et al.*, 1999, p. 161): disposition en ligne proche du calcul réfléchi, algorithme en rectangle, algorithme en tableau, algorithme en arbre, *per gelosia* (très détaillé, sur trois exemples avec une suggestion de leçon autour de cet algorithme et l'affirmation qu'une heure d'entraînement suffit pour utiliser cet algorithme efficacement) et enfin la multiplication en colonnes. Cette dernière n'est pourtant qu'effleurée car « cet algorithme est trop connu pour

qu'on s'y attarde ici » (Danalet *et al.*, 1999, p. 164) et seul l'algorithme développé est donné sur deux exemples. La difficulté de l'algorithme en colonnes et subséquemment le nombre élevé d'heures d'entraînement sont signalés avant de conclure :

C'est à l'élève, conseillé par l'enseignant, de savoir s'il souhaite investir beaucoup de temps dans cette procédure, alors qu'il y en a de beaucoup plus simples et efficaces ("per gelosia"), plus représentatifs de la distributivité (arbres et tableaux). Il faut aussi être conscient que cet algorithme ne sera généralement plus pratiqué dans la scolarité de l'élève à partir de la sixième année. On peut même se demander si le citoyen du XXI^e siècle, qui disposera vraisemblablement de calculatrices ou d'autres instruments de calcul, l'utilisera encore ou l'oubliera! (Danalet *et al.*, 1999, p. 164)

Pour compléter ces indications, il est nécessaire de voir également ce qui est indiqué en 3P au moment de l'algorithme de la multiplication par un nombre à un chiffre puisqu'il est abordé l'année qui précède. Dans l'introduction au module 4, l'algorithme à un chiffre, sous forme développée et sous forme condensée, est décrit précisément à partir d'un exemple et toutes les étapes sont détaillées et justifiées par les propriétés des opérations. Il est cependant indiqué qu'il ne s'agit pas de faire construire l'algorithme par les élèves mais qu'une « approche globale, à partir d'exemples ou de pratiques déjà acquises par certains élèves, paraît préférable. Les "explications" ou "justifications" se feront à partir de questions ou d'erreurs, lors de mises en commun » (Danalet *et al.*, 1998, p. 160).

La troisième ressource que pourraient proposer les moyens COROME serait les tâches proposées aux élèves dans leur fichier ou dans le livre. Mais là, une surprise attend l'utilisateur de ces moyens d'enseignement, car les approches suggérées dans le livre du maître ou dans les *commentaires méthodologiques* ne sont étonnamment pas concrétisées par des tâches à destination des élèves.

Pour ce qui est des tâches potentiellement utilisable pour introduire l'algorithme à deux chiffres, elles sont extrêmement peu nombreuses voire inexistantes. Certaines figuraient en 3P (Danalet *et al.*, 1998) pour l'algorithme à un chiffre (avec en particulier *Au Grand Rex*, LM162 et *A vos baguettes*, LM180). En tous les cas et pour les deux années, les exercices d'entraînement sont complètement absents, si l'on excepte les quelques multiplications que les élèves peuvent effectuer en colonne en résolvant un ou l'autre problème. Ce choix semble aller dans le même sens que les *commentaires didactiques* : « les algorithmes ne font pas l'objet d'un entraînement systématique » (Gagnebin *et al.*, 1998, p. 140). Toutefois il est étonnant qu'aucune tâche ne permette l'enseignement et l'entraînement de l'algorithme, comme c'est le cas dans ERMEL (1995, pp. 245-249, 256-261) ou comme dans les moyens d'enseignement romands des degrés suivants qui donnent une présentation de ces algorithmes (comme s'il s'agissait de la découverte de ces algorithmes) et quelques exercices d'entraînement (Chastellain & Jaquet, 2001, fiches 6-9, thème 2).

Il est dès lors impossible de déterminer, en termes de variables didactiques, quels sont les choix ou même les tendances des moyens COROME, à la fois à cause de l'absence de matériel plus ou moins directement utilisable pour l'enseignement, mais aussi par les injonctions paradoxales, voire contradictoires sur le degré d'explication ou de compréhension demandé à l'enseignant ou aux élèves quant au fonctionnement de l'algorithme de la multiplication. Ce choix de variables est donc entièrement à la charge de l'enseignant. Il lui revient également de chercher dans des sources externes ou de créer des tâches liées à cet algorithme.

Etant donné cette absence quasi totale de tâches directement liées à l'algorithme de la multiplication, tous les enseignants ont utilisé d'autres tâches. Nous examinerons les sources que les enseignants observés ont utilisées.

13.4.6.3 Les fiches OP

Les enseignants observés ont tous utilisés les moyens d'enseignements romands précédents, que ce soit en tant qu'élèves ou en tant qu'enseignants et plusieurs d'entre eux ont utilisés certaines fiches de ces moyens et en ont parlé dans les entretiens. Les choix proposés par ces moyens d'enseignement au sujet de l'algorithme de la multiplication peuvent être décrits selon les variables didactiques déterminées en 13.4.

La série de moyens d'enseignement romands issue des mathématiques modernes a été introduite à partir de 1973. La version pour la quatrième année utilisée par les enseignants observés date de 1991 (Ferrari, Wetzler, Ferrario, Jatton & Queroub, 1991). Les années d'introduction des notions liées à la multiplication sont similaires à celles en cours en 2008-2010, en revanche la façon de l'introduire en 2P par exemple est très marquée par les maths modernes puisque la première apparition de la multiplication est un tableau pour un produit cartésien 2 fleurs x 3 couleurs (Comte *et al.*, 1980, OP59). En troisième et quatrième année, l'algorithme de la multiplication à un et deux chiffres est introduit et travaillé dans une série de fiches de « l'avenue » OP (pour opérations).

La série de fiches consacrées à l'algorithme de la multiplication en 4P porte les numéros OP25 à OP33. Les indications méthodologiques qui y sont attachées et des tâches supplémentaires se trouvent aux pages 183 à 196 du classeur du maître.

Les fiches OP25 à OP29 et l'activité 4.1 (méthodologie pp. 189-192)¹²³ travaillent sur les décompositions d'aires de rectangles en mettant en parallèle l'algorithme en colonnes. Le fait qu'il ne suffit pas d'effectuer deux produits (*colonnes strictes*, voir Figure 33 p. 144) est explicitement lié aux quatre aires obtenues. Le zéro de la seconde ligne est noté, mais aucune explication particulière n'est donnée. Les retenues sont notées au dessus et laissées lors du passage à la seconde ligne. Aucun ajout graphique n'est mentionné et le premier terme est à deux chiffres alors que le second est compris entre 11 et 19. Les zéros dans les produits sont évités. Le quintuplet de variables didactiques est donc (C RE r_d ; Z S ; L ; / ; $P_2 S_D R_z$).

Les fiches OP30 à OP32¹²⁴ travaillent à partir d'additions itérées et séparent la multiplication à deux chiffres en deux multiplications. Le zéro du second algorithme est noté, sans explication particulière. En revanche une fiche entière (OP32) est consacrée à des multiplications par un nombre du type $10 \cdot n$, $1 \leq n \leq 9$. La question des retenues ne se pose pas et aucun ajout graphique n'est mentionné. Le premier terme est à deux ou trois chiffres et le second terme se termine par zéro dans la fiche OP32 ainsi que dans les algorithmes décomposés. Le quintuplet est alors (C AI N_ϵ ; ZS ; / ; / ; $P_{2,3} S_D$).

La fiche OP33¹²⁵ et l'activité 4.2 (méthodologie pp. 192-196) travaillent la multiplication en tableau et la mettent en parallèle avec l'algorithme en colonnes, servant de justification à ce dernier. Le zéro de la seconde ligne est donc noté sans qu'une justification particulière ne soit mentionnée. Rien n'est indiqué au sujet des retenues et aucun ajout graphique n'est proposé. Le premier terme comprend deux ou trois chiffres et le second est à deux chiffres n'évitant ni les difficultés de livrets ni l'apparition de zéros. Les quintuplet des variables est ainsi (C PC t_c ; ZS ; / ; / ; $P_{2,3} S_Q$).

Ainsi les fiches OP proposent toutes une explication de l'algorithme et elles le font en utilisant les trois représentations déterminées dans l'analyse *a priori*.

¹²³ La fiche la plus représentative de cette série, OP29 est donnée en Annexe 12.4.

¹²⁴ Annexe 12.4.

¹²⁵ Annexe 12.4.

13.4.6.4 Cap Maths

Comme les moyens COROME, les manuels Cap Maths, édités par Hatier sous la responsabilité de Charnay, ont été influencés par la série ERMEL. Une présentation en contraste avec les moyens romands est faite par Jaquet (2003) qui relève à la fois la proximité du point de vue des conceptions d'apprentissage et la différence du point de vue de l'utilisation du manuel par l'enseignant. Jaquet met en évidence la différence entre les ouvrages ressources romands et le manuel français à l'aspect « programmation », voire « clé en main » (p. 42). Cette caractéristique permet une description selon les variables didactiques décrites en 13.4. Une des enseignantes observées ayant utilisé Cap Maths, cette description permettra une première détermination des choix de cette enseignante.

Le manuel utilisé est celui du CE2 dans son édition de 2007 (Charnay, Combier, Dussuc, Madier & Madier, 2007b). L'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres se trouve dans l'unité 12 aux pages 254 à 261¹²⁶ du *guide de l'enseignant* et aux pages 106 et 107 du *manual de l'élève*.

La situation de base proposée aux élèves est la suivante. « Tim est monté 50 fois au sommet du phare. Plume n'y est monté que 4 fois. Maïa est plus courageuse. Elle est montée 54 fois au sommet du phare. [...] Combien chacun a-t-il monté de marches? » (manuel de l'élève p. 106). D'autres tâches du même type sont proposées et conduisent à décomposer la multiplication par un nombre à deux chiffres en deux multiplications suivies d'une addition, chacune des trois opérations étant réalisée en colonnes. Un réinvestissement sous forme d'aire d'un rectangle à décomposer est également proposé de façon marginale. La technique usuelle en colonnes est ensuite expliquée à partir d'un exemple préalablement décomposé. Il s'agit donc d'une explication basée sur une représentation additive, habillée dans une situation pseudo-concrète avec deux algorithmes préalables ($C_{AI} C_6$). Dans l'algorithme usuel la multiplication réalisée à chaque ligne est indiquée en ligne par une flèche (P). Les retenues sont notées dans deux *boîtes à retenues* placées à côté du calcul posé (B). Cette méthode est ensuite entraînée sur d'autres multiplications de nombres à deux ou trois chiffres par des nombres à deux, voire à trois chiffres quelconques ($P_{2,3} S_Q$) dans lesquels ni les zéros ni les difficultés de livret ne sont évités. En ce qui concerne le zéro de la seconde ligne, aucune explication n'est donnée car il apparaît dans les algorithmes séparés (S). Le quintuplet des variables peut ainsi s'écrire ($C_{AI} C_6 ; ZS ; B ; P ; P_{2,3} S_Q$).

Cette analyse des ressources utilisées clôt les éléments d'analyse épistémologique de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Ces éléments *a priori* serviront à situer les choix des enseignants observés.

¹²⁶ Annexe 12.3.

Chapitre 14 Dispositif de recueil et d'analyse des observations

Dans ce chapitre, d'ordre méthodologique, nous décrivons tout d'abord notre dispositif de recueil et d'analyse des données (partie 14.1) puis nous faisons une brève présentation de chacun des enseignants observés et de leur classe (partie 14.2).

14.1 Recueil et traitement des données

La description du dispositif de recherche débute par la définition du type d'observation (14.1.1). Les diverses parties du dispositif sont ensuite exposées : contrat de recherche (14.1.2), entretiens (14.1.3), séquence en classe (14.1.4). Enfin la transcription (14.1.5) et le traitement des données (14.1.6) sont détaillés.

14.1.1 Une observation naturaliste

L'observation est de type naturaliste (Comiti *et al.*, 1995, pp. 98-99) en ce sens que le chercheur n'est intervenu d'aucune façon dans la conception et dans la mise en œuvre de la séquence. De manière proche de Comiti et ses collègues, nous avons également élaboré un contrat de recherche passé avec chaque enseignant (14.1.2). Nous avons recueilli des données « internes » : enregistrement vidéos des leçons, notes prises lors de ces dernières, traces des productions des élèves (14.1.4). Nous avons enfin récolté des données « externes » sous forme d'entretien *ante* et *post* séquence (14.1.3), ainsi que sous la forme des préparations écrites éventuelles.

14.1.2 Le contrat de recherche

Le contrat de recherche¹²⁷ a été communiqué à chaque enseignant au moment du premier contact et signé par le chercheur et l'enseignant au début du premier entretien. Le but de ce contrat est tout d'abord de préciser ce à quoi le chercheur s'engage en terme de confidentialité ou d'information (des autorités scolaires et des parents) et ce à quoi l'enseignant s'engage (entretiens enregistrés, séquence filmée). Mais son but principal est surtout « d'inscrire la relation chercheur/enseignant et la relation observateur/observé dans le champ de la recherche, et non dans celui du contrôle » (Comiti *et al.*, 1995, p. 98). A cette fin, il est précisé que si la direction de l'école est informée de l'observation, elle ne reçoit aucun compte-rendu ; que la recherche n'est liée à aucune formation ou encore que les résultats de la recherche seront communiqués à l'enseignant. Le contrat précise également l'aspect naturaliste de l'observation, c'est à dire le fait que « l'observation s'insère dans la vie normale de la classe [et que] le moment, la durée et la manière de conduire la séquence d'enseignement ne devraient pas être influencés par la présence du chercheur » (Contrat, 2.b).

Même si l'enseignant n'était pas impliqué dans la recherche, contrairement à l'étude de Flückiger (2000), comme elle, nous considérons que ce contrat de recherche a un point commun avec le contrat didactique, en ce sens que, si ce contrat est partiellement explicite, une part essentielle, celle concernant le savoir visé, est « explicitement implicite ». En effet, si le texte remis à l'enseignant précisait que l'observation visait l'enseignement de l'algorithme de la multiplication à plusieurs chiffres, le chercheur précisait oralement que c'étaient certains aspects qui étaient particulièrement observés, mais que ceux-ci ne pouvaient être précisés à

¹²⁷ Annexe 3.3.

l'avance. La focalisation sur les connaissances mathématiques de l'enseignant liées à l'algorithme de la multiplication n'apparaît que lors de l'entretien *post*, et surtout à la fin de celui-ci. Le but est évidemment ici de réduire l'influence sur l'enseignant. Pour des raisons de limitation du périmètre de la recherche, le choix a été fait de ne pas inclure la discussion des analyses dans cette recherche et ce n'est que lors de la communication des résultats de la thèse que cette discussion pourra avoir lieu si l'enseignant le souhaite.

14.1.3 Entretiens

Les entretiens constituent la source principale à la fois des analyses *a priori* faites du point de vue de l'enseignant, mais aussi des renseignements sur leurs connaissances mathématiques. Cette méthode pose un certain nombre de problèmes, relevé par les auteurs ayant effectué des analyses *a priori* du même type. Coulange par exemple relève que cette méthode ne donne qu'un accès partiel au projet de l'enseignant puisque « le professeur interviewé dévoile rarement les choix et décision qui vont de soi pour lui ou qui lui semblent de moindre importance » (2001, p. 320).

Les entretiens *ante* et *post* ont été enregistrés de manière audio et se sont déroulés selon le canevas décrit ci-dessous. A plusieurs reprises les techniques de l'entretien d'explicitation (Vermersch, 1997) ont été utilisées, en particulier en ce qui concerne les relances (Vermersch, Martinez, Marty, Maurel & Faingold, 2003).

Le plan d'ensemble des deux canevas s'inspire de celui proposé par Margolinas (2004, pp. 89-90) et part du niveau +1 pour procéder ensuite en spirale.

14.1.3.1 Entretien *ante*

L'entretien précédant la séquence a eu lieu quelques jours avant la première leçon. Sa durée a varié entre 1:09 et 1:16. Comme précisé dans le contrat de recherche, cet entretien visait à expliciter la manière dont l'enseignant envisageait la séquence. Il se déroulait selon le canevas figurant en Annexe 9. Les principales rubriques abordées étaient successivement les habitudes de la classe et de l'enseignant, la préparation de la séquence et particulièrement de la leçon ou des leçons dans lesquelles apparaîtrait l'algorithme, le thème de la multiplication dans son enseignement, les autres rencontres de l'enseignant avec cet algorithme, pas uniquement en tant qu'enseignant, et enfin la vision plus globale de l'enseignement des mathématiques.

14.1.3.2 Entretien *post*

L'entretien suivant l'ensemble de la séquence d'enseignement a eu lieu quelques semaines après la fin de cette dernière, afin de permettre au chercheur un premier visionnement des vidéos de classe de sorte à pouvoir revenir sur les moments les plus significatifs du point de vue des connaissances mathématiques de l'enseignant. L'objectif était ici d'une part de recueillir la perception de l'enseignant sur ces moments, éventuellement sous la forme d'une brève auto-confrontation à l'enregistrement vidéo, et d'autre part de mieux déterminer les connaissances mathématiques de l'enseignant, liées à ce moment particulier ou à l'algorithme de la multiplication en général. Le canevas, donné en Annexe 10, part du niveau +1 pour procéder en spirale, les aspects temporels étant abordés d'abord vers le passé puis vers le futur (Margolinas, 2002a). Le retour se fait ainsi d'abord sur l'ensemble de la séquence, puis sur un ou deux moments particuliers au moyen de la vidéo ainsi que sur l'institutionnalisation de l'algorithme. Les réactions des élèves puis la place de cet algorithme dans la scolarité et dans la société ont été abordées avec un regard vers le passé et vers le futur. La dernière partie de l'entretien est consacrée à des questions plus précises concernant les connaissances mathématiques de l'enseignant liées à l'algorithme de la multiplication, avec en particulier la demande

de lister les connaissances mathématiques liée à l'algorithme et la demande d'une réaction par rapport à un élève qui effectuerait des multiplication en *colonnes strictes*¹²⁸, un peu comme s'il s'agissait d'une addition :

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline 695 \end{array}$$

Figure 33 : Multiplication en *colonnes strictes*

La réaction de l'enseignant à cette demande permettait de faire émerger les représentations de la multiplication. Au cas où la seule représentation était celle d'une addition itérée, une question au sujet de la commutativité était posée : comment expliquer que $\underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ fois}} = \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \text{ fois}} ?$

14.1.4 La séquence en classe

Chaque séquence a été intégralement filmée. C'est l'enseignant qui déterminait à quel moment débutait la séquence consacrée à l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Les horaires des séances étaient ensuite déterminés afin de permettre au chercheur d'être présent. La caméra était placée sur un trépied en fond de classe et le son était recueilli par un micro-cravate porté par l'enseignant. Ce dispositif permettait ainsi de réduire l'impact de la présence de la caméra tout en ayant une bonne focalisation du son et de l'image sur l'enseignant. L'ensemble des éléments notés au tableau noir ou sur des affiches a été photographié. Tous les documents distribués ont été récoltés, dans une version vierge, mais aussi après avoir été remplis par les élèves. Le cas échéant, les cahiers de ces derniers ont également été photographiés.

14.1.5 Transcription réduite de la séquence : synopsis et macrostructure

Les connaissances des enseignants se manifestent à divers niveaux d'activités du professeur, mais aussi à plusieurs échelles de temps. En vue d'une observation suffisamment souple du point de vue de ces échelles, permettant des allers-retours entre elles, nous avons opté pour le procédé du *synopsis* et de la *macrostructure* développés par le Groupe de Recherche d'Analyse du Français Enseigné (GRAFE) de l'université de Genève.

Le synopsis est un procédé de réduction des transcriptions d'une séquence¹²⁹ d'enseignement, permettant d'en saisir la structure et de situer chaque moment analysé dans un tout (Schneuwly, Sales & Dolz, 2005, p. 82). Il « facilite le repérage des moments et des lieux où se réalisent les gestes professionnels de l'enseignant » (Schneuwly *et al.*, 2006, p. 180)¹³⁰. D'un point de vue méthodologique, le synopsis s'effectue sur la transcription des enregistrements de leçons, avec un recours aux supports distribués et aux entretiens *ante* et *post*

¹²⁸ Le terme est de moi

¹²⁹ La séquence est définie comme «une unité relativement bien circonscrite, comprenant diverses activités articulées entre elles, organisées pour l'enseignement d'un objet à enseigner, comportant un début et une fin ». (Schneuwly, Jacquin, Haller & Toulou, 2007, pp. 4-5)

¹³⁰ De façon intéressante, les gestes mentionnés par Schneuwly, Dolz et Ronveaux sont justement des gestes permettant l'expression des connaissances de l'enseignant. Parmi ces gestes, les plus caractéristiques sont les suivants: la mise en temporalité de l'objet (mémoire et anticipation didactique); les dispositifs didactiques (formulation des tâches, supports et formes de travail); la régulation et la mémoire didactique; la réaction à l'imprévu et l'effet des obstacles rencontrés sur la construction de l'objet; l'institutionnalisation de nouveaux savoirs; l'évaluation, etc. (p. 180). Nos cadres théoriques ayant déjà trois dimensions (CME, pertinence, niveau d'activité), nous avons choisi de ne pas ajouter cette dimension des gestes professionnels de l'enseignant.

avec les enseignants. Une première lecture de l'ensemble la séquence est effectuée, elle permet un premier découpage séquentiel, non nécessairement hiérarchisé. Dans un deuxième temps, *le niveau des activités scolaires* est dégagé et un découpage est effectué à ce niveau. La définition du terme *activité scolaire* permet de donner un critère de découpage :

L'activité scolaire délimite une activité d'enseignement/apprentissage finalisée par une composante ou une dimension précise de l'objet enseigné. [...]

Les deux critères majeurs pour délimiter l'activité sont le déclencheur et le maintien d'un support matériel limité au cours de l'action ou de l'interaction en cours. Le déclencheur d'une activité est généralement une consigne orale ou écrite, l'introduction d'un nouveau support matériel (texte, questionnaire, transparents, notes au tableau noir) ou la mise en place d'un nouveau dispositif (l'exercice, la lecture à voix haute d'un texte). On parlera de changement d'activité scolaire à l'intérieur d'un niveau chaque fois que la modalité de l'activité proposée à propos du même objet (les actions et les interactions) et/ou les conditions scolaires ou de réalisation de ces activités se modifient. Un niveau supérieur peut comprendre une seule activité scolaire si le passage d'une activité à une autre suppose un changement radical de l'objet, de l'activité de travail finalisée proposée et de l'environnement. (Schneuwly *et al.*, 2006, p. 184)

Ce niveau est numéroté n-n-n. C'est le seul niveau défini *a priori* (Schneuwly *et al.*, 2006, p. 185). Dans un troisième temps, les unités séquentielles sont regroupées en unités superordonnantes hiérarchisées. Le niveau n-n-n est éventuellement décomposé. Un va-et-vient entre les niveaux hiérarchiquement inférieurs et supérieurs permet l'établissement du texte du synopsis sous une disposition tabulaire (p. 182). Cette démarche comporte un fort caractère inductif et assume la part d'appréciation, et déjà d'interprétation, dévolue au chercheur :

C'est au chercheur, en fonction de l'appréciation du déroulement de la séquence et d'indices donnés par l'enseignant, de décider s'il est nécessaire ou non d'introduire un niveau n-n-n-n, Le principe d'économie de la description doit également le guider dans sa décision. Les niveaux n et n-n regroupent les n-n-n en fonction de la logique de l'action didactique inférée par le chercheur sur la base d'indices fournis par les différents systèmes sémiotiques sollicités. (p. 184)

Pour notre part, nous sommes partis du niveau n-n-n et les regroupements successifs nous ont conduit à arriver un niveau n correspondant à la séquence réalisée par un enseignant. Les quatre synopsis figurent en Annexe 15.

Afin de mieux « cerner la séquence d'enseignement comme un tout dont les parties sont solidaires » et de permettre en particulier de « situer l'extrait analysé dans l'ensemble de la séquence d'enseignement » (Dolz & Toulou, 2008, para 12), il est apparu nécessaire aux chercheurs du GRAFE de recourir à une « nouvelle concentration des données sous forme de schéma arborescent synthétisant les trois premiers niveaux du synopsis » (para 11). Pour notre part, nous avons créé une arborescence contenant tous les niveaux du synopsis, voire des épisodes encore plus précis, au moyen du logiciel MindManager (MindJet, 1999-2006). Ce logiciel permet la création de schémas heuristiques et offre la possibilité de modifier le niveau de détail de l'affichage. Cette particularité nous permet à la fois d'utiliser notre macrostructure pour analyser la structure de la séquence d'enseignement et pour situer un extrait analysé. Les macrostructures des séquences des quatre enseignants sont données en Annexe 15.

14.1.6 Traitement des données audio et vidéo

14.1.6.1 Présentation du logiciel utilisé

Les deux entretiens avec chaque enseignant et les enregistrements vidéo des séquences d'enseignement ont été traités à l'aide du logiciel Transana (Fassnacht & Woods, 2002-2011). Ce logiciel permet de transcrire les données audio et vidéo, de découper la transcription chronologiquement selon des niveaux de granularité différents, d'extraire des clips et de les indexer suivant des mots-clés, de lier et d'analyser les occurrences de mots-clés. Il permet surtout de garder le lien entre ces éléments et de revenir à tout moment à l'enregistrement de base.

Ce logiciel est de plus en plus largement utilisé dans la recherche en éducation, en particulier par l'équipe GRAFE et par l'équipe FASTEF de Lyon. Cette dernière équipe décrit Transana en ces termes :

Le logiciel TRANSANA comporte quatre fenêtres (audio, vidéo, transcription, et base de données). Parmi ces quatre fenêtres, la « base de données » est celle qui permet au chercheur d'organiser, selon l'orientation voulue, les films et les clips. Les composants de cette fenêtre sont :

- la « série » qui a pour fonction de regrouper les enregistrements vidéo préalablement réalisés et compressés à un format (MPEG1) compatible avec le logiciel que nous utilisons (TRANSANA) pour le traitement et l'analyse ;
- la « collection » qui a pour fonction de regrouper les différents clips ou micro-clips créés par le chercheur ;
- la catégorie « mots-clés » qui permet de regrouper les différents mots-clés qui ont pour fonction de repérer ou d'identifier les clips ou les micro-clips ;
- et la catégorie « recherche » qui, grâce à des requêtes, permet de trouver des clips ou micro-clips dans lesquels se trouvent des mots-clés.

Le nombre de films dans une « série » dépend de l'orientation que le chercheur a choisie. Les collections peuvent être imbriquées ou non.

Un clip ou un micro-clip est limité par les « balises temporelles » dans la transcription, ces dernières indiquent le début et la fin du clip. (Seck & Tiberghien, 2009)

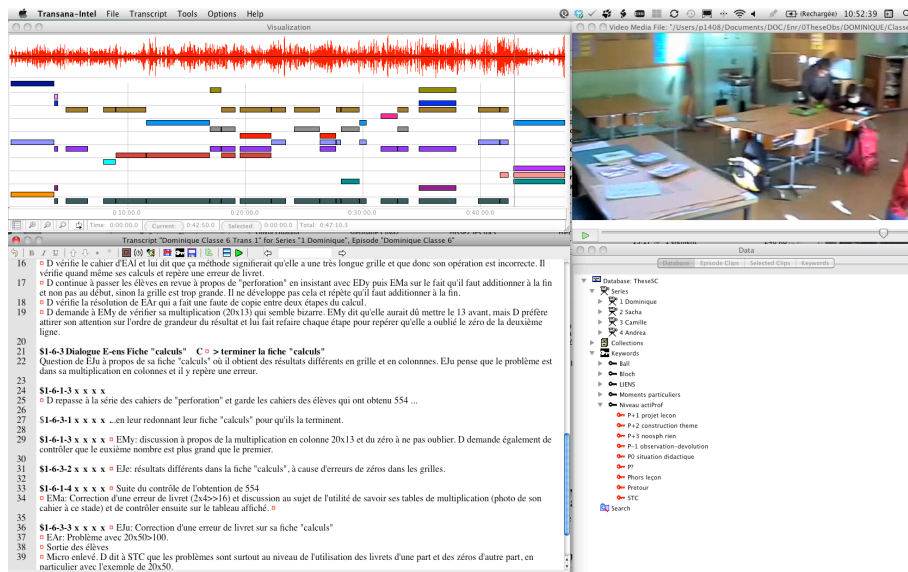


Figure 34 : L'écran et les quatre fenêtres de Transana

14.1.6.2 Types de traitement et d'analyse

Nous utilisons ces potentialités afin de permettre plusieurs niveaux d'analyse. La première opération consiste à réaliser un résumé narrativisé de la vidéo en intégrant la numérotation propre au synopsis. Des repères temporels sont insérés à chaque changement de niveau, ainsi qu'à chaque nouvel épisode. Ce résumé peut ensuite être exporté dans un logiciel de traitement de texte et y être traité, en particulier du point de vue de la mise en page, afin d'obtenir un tableau correspondant à l'usage de Schneuwly et al. (2006). Ce passage vers un logiciel de traitement de texte est rendu nécessaire par les limitations de Transana en ce qui concerne les possibilités de mise en forme, en particulier par l'absence de tableau. Il n'est alors plus possible de revenir automatiquement du synopsis à la vidéo. C'est la raison pour laquelle la version de référence reste le texte de Transana, le lien vers les autres logiciels (Word et MindManager) étant assuré par la numérotation.

Le niveau de détail de ce résumé narrativisé peut être plus ou moins grand selon l'intérêt que nous trouvons aux moments considérés. Il n'est pas figé et, lors de l'attribution des mots-clés, un passage est parfois détaillé de façon plus précise, voire intégralement transcrit.

Attribution des mots-clés

Les mots-clés sont définis à partir du cadre théorique. Ils sont attribués aux passages du récit, des transcriptions ou des entretiens et décrivent le niveau d'activité de l'enseignant, le type de connaissances mathématiques en jeu et leur pertinence.

Les *connaissances mathématiques pour l'enseignement* (CME) ont été définies en 3.2. Les codes et les définitions sont répertoriés dans le Tableau 12. Lorsqu'une connaissance d'un type donné est présente et correcte dans un clip, elle est notée *c*. Lorsqu'une telle connaissance est erronée, elle est notée *f*. Le code *f* est également attribué si une connaissance n'est pas manifestée alors que, par une question de l'expérimentateur lors d'un entretien ou en classe par une demande d'élève, l'enseignant est incité à la manifester. Dans le cas où une connaissance est manifestée sans qu'il soit possible de déterminer si elle est correcte ou non, le code *i* est attribué.

Avant le début de l'attribution des mots-clés, un premier découpage a déjà été effectué selon les critères du *synopsis* définis en 14.1.5. Au moment d'attribuer une CME et une valence, une nouvelle subdivision est introduite et deux ou plusieurs clips sont créés si plusieurs CME interviennent et peuvent être attribuées à des passages distincts. Ainsi un clip donné peut contenir zéro, une, ou plusieurs CME. Ce dernier cas se produit lorsque, autour d'une même intervention, plusieurs types de CME sont présents.

Types de connaissance		Caractérisation	Mot-clé
Connaissances du sujet	Connaissances mathématiques communes	manifestation de connaissances correctes	sCMC/c
		manifestation de l'absence de connaissances ou de connaissances erronées	sCMC/f
		manifestation de l'existence de connaissances dont on ne peut déterminer si elles sont correctes	sCMC/i
	Connaissances de l'horizon mathématique	manifestation de connaissances correctes	sCHM/c
		manifestation de l'absence de connaissances ou de connaissances erronées	sCHM/f
		manifestation de l'existence de connaissances dont on ne peut déterminer si elles sont correctes	sCHM/i
	Connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement	manifestation de connaissances correctes	sCMS/c
		manifestation de l'absence de connaissances ou de connaissances erronées	sCMS/f
		manifestation de l'existence de connaissances dont on ne peut déterminer si elles sont correctes	sCMS/i
Connaissances pédagogiques	Connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet	manifestation de connaissances correctes	pCE/c
		manifestation de l'absence de connaissances ou de connaissances erronées	pCE/f
		manifestation de l'existence de connaissances dont on ne peut déterminer si elles sont correctes	pCE/i
	Connaissances du contenu et de l'enseignement du sujet	manifestation de connaissances correctes	pCC/c
		manifestation de l'absence de connaissances ou de connaissances erronées	pCC/f
		manifestation de l'existence de connaissances dont on ne peut déterminer si elles sont correctes	pCC/i
	Connaissances du programme et des moyens d'enseignement	manifestation de connaissances correctes	pCP/c
		manifestation de l'absence de connaissances ou de connaissances erronées	pCP/f
		manifestation de l'existence de connaissances dont on ne peut déterminer si elles sont correctes	pCP/i

Tableau 12 : Désignation des connaissances mathématiques pour l'enseignement par des mots-clés

Les critères de la pertinence mathématique de l'enseignant ont été décrits en 7.2. Etant donné que ces critères sont définis par Bloch (2009) pour des situations de classe et, pour le critère C3, pour des situations adidactiques, il a été nécessaire, après discussion avec Isabelle Bloch d'apporter deux modifications aux critères de pertinence.

Afin de prendre en compte la part d'adidacticité présente dans les situations d'enseignement par ostension, nous avons tout d'abord précisé le troisième critère « Capacité à conduire la situation à son terme avec une phase de débat et validation » en y ajoutant, pour la conduite de la situation, la *capacité à choisir l'intervention permettant au mieux de maintenir la dévolution de l'activité mathématique à l'élève*.

Nous avons ensuite ajouté un quatrième critère pouvant être utilisé pour les entretiens. Ce critère de *rendre compte* est défini comme la *Capacité à rendre compte de la fonctionnalité de l'objet mathématique visé*.

Les codes et les définitions sont répertoriés dans le Tableau 13. Pour chaque clip comportant une intervention mathématique de l'enseignant, un critère de pertinence a été attribué avec la valence + si le critère déterminait une pertinence de cette intervention, une valence – si le critère déterminait un manque de pertinence et enfin une valence 0 si le critère le plus applicable ne permettait pas de déterminer la pertinence.

Critère	Caractérisation	Mot-clé
Capacité à interagir avec les élèves sur les éléments mathématiques de la situation	manifestation de la pertinence	C1.+
	pas de manifestation de la pertinence	C1.0
	manifestation de l'absence de pertinence	C1.-
Tolérance aux formulations provisoires	manifestation de la pertinence	C2.+
	pas de manifestation de la pertinence	C2.0
	manifestation de l'absence de pertinence	C2.-
Capacité à conduire la situation à son terme avec une phase de débat et validation <i>En particulier capacité à choisir l'intervention permettant au mieux de maintenir la dévolution de l'activité mathématique à l'élève</i>	manifestation de la pertinence	C3.+
	pas de manifestation de la pertinence	C3.0
	manifestation de l'absence de pertinence	C3.-
Capacité à rendre compte de la fonctionnalité de l'objet mathématique visé	manifestation de la pertinence	C4.+
	pas de manifestation de la pertinence	C4.0
	manifestation de l'absence de pertinence	C4.-

Tableau 13 : Désignation de la pertinence des connaissances mathématiques par des mots-clés

Les niveaux d'activité du professeur ont été décrits en 6.1. Les codes et les définitions sont répertoriés dans le Tableau 14.

Désignation du niveau	Mot-Clé
P ₊₃ Niveau noosphérique ou idéologique	P+3
P ₊₂ Niveau de construction ou de conception d'un thème	P+2
P ₊₁ Niveau de projet de leçon	P+1
P ₀ Niveau de la situation didactique	P0
P ₋₁ Niveau d'observation ou de dévolution	P-1
Niveau de retour sur un moment précédent lors des entretiens	Pretour

Tableau 14 : Désignation des niveaux d'activité de l'enseignant par des mots-clés.

Lors du codage, il a été nécessaire d'ajouter un niveau qui caractérise la position du professeur qui revient sur un épisode précédent. Parfois ce retour n'était pas lié à une réflexion sur le thème ou sur la leçon et l'attribution de ce mot-clé a permis de caractériser ces passages.

Méthode de découpage et de classification des clips

Lorsque la manifestation d'une CME est détectée, au moins un mot-clé de chaque catégorie est attribué au passage considéré. Cette opération crée automatiquement un clip. Un nom, comportant la numérotation correspondant au synopsis ainsi que quelques mots permettant de retrouver le passage, est attribué à ce dernier. Les clips sont ensuite organisés en collections les regroupant par thèmes mathématiques (commutativité, retenues, livrets,...).

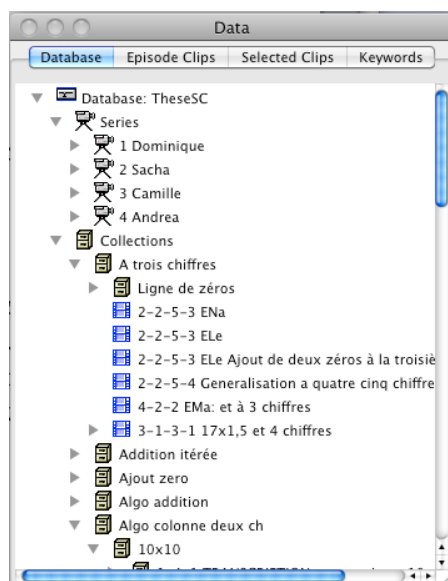


Figure 35 : Visualisation des différentes collections regroupant les différents clips

Nous sommes ainsi en présence d'un découpage temporel fixé dans le synopsis et la macro-structure, d'un découpage selon les thèmes mathématiques et d'un triple découpage selon les catégories didactiques issues de notre cadre théorique. Ces découpages peuvent être combinés et liés grâce à la fonction de recherche fournie par Transana (Badreddine & Buty, 2011, p. 782).

Le logiciel fournit encore la possibilité de visualiser la succession des mots-clés d'un point de vue chronologique ainsi que d'un point de vue quantitatif, absolu ou relatif.

Signalons enfin que les données de la vidéo sont en lien permanent avec les clips et donc avec les différents niveaux de découpage. Il est aisé de faire apparaître le clip et les mots-clés liés à un instant de vidéo. De la même manière, la sélection d'un clip fait défiler le passage vidéo correspondant.

Le dispositif de recueil et de traitement des données est utilisé pour analyser les séquences d'enseignement de quatre enseignants. La section 14.2 présente ces quatre enseignants ainsi que leur classe.

14.2 Les quatre enseignants et leur classe

Quatre enseignants ont été observés durant une séquence d'enseignement d'un même sujet, l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. La variété la plus grande possible a été recherchée parmi des enseignants. Trois d'entre eux étaient des femmes et un était un homme, mais des prénoms fictifs n'insistant pas sur cette caractéristique de genre leur ont été donnés. Ces enseignants étaient volontaires et n'avaient pas de liens entre eux, ni avec le chercheur. Une certaine diversité était recherchée tant au niveau du milieu urbain ou rural, ou des expériences d'enseignement (entre 6 et 18 ans), même si les âges sont relativement semblables (entre 29 et 36 ans). Les classes ont, elles aussi, une certaine diversité qui apparaîtra dans la description rapide de chacune.

Les quatre rapides portraits qui suivent concernent quelques éléments de biographie de chaque enseignant, sa façon d'organiser l'enseignement des mathématiques et ses déclarations sur les mathématiques et leur enseignement en général. Les éléments plus spécifiques

concernant leurs connaissances mathématiques ou leurs déclarations plus précises au sujet de l'algorithme de la multiplication seront données en 15.5.

14.2.1 Dominique

Dominique est un enseignant d'environ 35 ans. Il enseigne depuis 11 ans aux degrés 3P-4P dans le canton de Vaud, dont quelques années dans des classes à effectif réduit¹³¹. Après un diplôme général littéraire¹³², il a obtenu son diplôme de l'école normale de Lausanne. Il a effectué une formation de praticien-formateur¹³³ à la HEP Vaud et accueille régulièrement des stagiaires dans sa classe. Durant le semestre considéré, et en particulier durant les périodes observées, il accueillait une stagiaire dans sa classe.

La classe de Dominique est une classe multi-âge¹³⁴ de 3P-4P. Ce n'est pas son choix, mais celui de l'école pour des raisons d'effectifs et si Dominique n'y voit pas vraiment d'avantages, il dit fort bien s'en accommoder. La classe compte 17 élèves dont 7 élèves de 4P. Pour les séances observées, seules les élèves de 4P sont concernés. La stagiaire fait des activités mathématiques de 3P avec les autres élèves. Dominique décrit ses élèves de 4P comme « petits », mais qui « suivent bien », en partie grâce à de bonnes méthodes de travail acquises avec lui en troisième. Un de ces élèves revient de centre de jour¹³⁵. Cet élève ne s'est pas distingué des autres par son comportement durant la séquence.

Dominique gère le français et les mathématiques à l'aide de plans de travail (PT)¹³⁶. Ces plans, confectionnés par l'enseignant, donnent le travail pour une durée de trois à quatre semaines. Ils comprennent du français et des mathématiques, des exercices de divers types et sur divers sujets, à faire individuellement ou en petits groupes. Les élèves de troisième et de quatrième disposent de plans différents et, durant les périodes gérées par plan, les élèves effectuent donc tous des tâches différentes. Des mises en commun sont parfois organisées en fin de semaine pour une ou l'autre activité.

Dominique effectue son travail de préparation et de correction entièrement à l'école, dans sa classe ou à la salle des maîtres. Cette préparation est effectuée à l'échelle du thème. Dominique écrit sur une page A4 le thème et le but de chaque leçon ainsi que les tâches prévues.

Les fiches figurant sur le PT sont tirées des moyens officiels COROME (Danalet *et al.*, 1998, 1999) que Dominique apprécie, en particulier pour l'aspect moins « sur des rails » que les manuels qu'il a utilisés en début de carrière. En particulier, ils offrent la possibilité de donner des activités permettant « d'aller plus loin » pour les élèves qui ont terminé leur plan. Dominique donne des devoirs en maths sous forme de fiches de calculs qu'il crée ou qui sont

¹³¹ Les classes à effectif réduit, ou classe R, ont les mêmes objectifs que les classes ordinaires. Leur effectif est diminué de moitié pour permettre un meilleur encadrement d'élèves en difficulté.

¹³² Le diplôme générale littéraire (GL) était délivré dans le canton de Vaud entre les années 1957 et 1997. Ce diplôme de culture générale accueillait essentiellement de futurs étudiants des écoles normales. Ces élèves étaient issus de la « voie moyenne » (voie secondaire supérieure ou « primaire supérieure »). Voir http://www.vd.ch/fileadmin/user_upload/organisation/dfj/sg-dfj/fichiers_pdf/DFJinfo_Lesdossiers_N1.pdf, consulté le 18 juillet 2011.

¹³³ Les praticiens-formateurs accueillent des stagiaires HEP. Ils ont bénéficié d'une formation de 10 crédits ECTS. Cette formation ne comprend pas de partie disciplinaire et comprend une partie didactique peu développée.

¹³⁴ Pour des détails sur la pratique des classes multi-âge dans le canton de Vaud, voir Perrenoud (Perrenoud, 2005). Signalons simplement que les années 3P et 4P constitue le second cycle primaire (CYP2) et que les établissements peuvent choisir de constituer ces classes en « mono-âge » ou en « multi-âge ». Les deux types de classe peuvent cohabiter dans le même établissement.

¹³⁵ Classe officielle de l'enseignement spécialisé qui prend en charge des élèves souffrant des troubles du comportement et de la personnalité

¹³⁶ Pour une description plus précise de ce qu'est un plan de travail et de son usage dans les classes vaudoises, voir par exemple (Weber, 2005)

reprises de fiches fribourgeoises¹³⁷. Il demande également aux élèves, et aux parents, de faire chaque jour cinq minutes de livrets Certaines parties de l'enseignement des mathématiques sont extérieures au PT. Il s'agit d'une part des nouveaux jeux qui sont d'abord introduits sous forme d'ateliers avant que d'être placés dans le « coin maths » pour être faits comme activités du PT, d'autre part des nouvelles notions à expliquer. Pour ces nouvelles explications, Dominique utilise parfois les périodes d'appui où il n'a qu'un groupe d'âge ou parfois donne une tâche individuelle aux élèves d'un des niveaux pendant qu'il travaille avec les autres. La présence d'une stagiaire permet de mieux gérer ces moments.

Pour ces moments collectifs avec un des groupes d'âge, Dominique place ses élèves en demi-cercle autour d'une table sur laquelle il pose une grande affiche. Il se place de l'autre côté de la table et, en dialogue avec les élèves, écrit sur l'affiche, à l'envers pour lui. Parfois, il demande à un élève d'écrire directement sur l'affiche, par exemple pour effectuer un calcul.

En mathématiques, la progression annuelle de Dominique est construite de PT en PT, à la fois en comblant les difficultés apparues durant le PT précédent et en gardant en vue les objectifs du plan d'étude et les épreuves cantonales de référence¹³⁸. Les tests sont généralement de deux types. Les tests techniques sont constitués de calculs et de problèmes rattachés à une technique. Les tests de fin de PT sont constitués de problèmes similaires à ceux figurant dans le PT. Les deux types de tests ne sont pas préparés avant la séquence.

Des calculettes se trouvent dans un bac sur le bureau de Dominique. Il autorise parfois les élèves à les utiliser pour effectuer des calculs qui ne sont pas encore à leur portée et qui apparaissent parfois dans des problèmes, ou, de temps à autre, il en donne une à des élèves pour vérifier le résultat d'une opération.

14.2.2 Sacha

Sacha est âgée d'environ 30 ans. Titulaire d'une maturité C (scientifique), elle a effectué sa formation d'enseignante dans une école normale vaudoise.

La classe observée est située dans une petite ville. Elle compte 21 élèves de 4P. Sacha ne signale rien de particulier à propos de cette classe

Sacha n'utilise pas les moyens d'enseignement COROME (Danalet *et al.*, 1998, 1999) mais le manuel Cap Maths (Charnay, Combier, Dussuc, Madier & Madier, 2007a) décrit en 13.4.6.4, qu'elle suit assez rigoureusement dans l'enchaînement des séances, avec un regard critique qui la fait parfois s'en éloigner un peu. Sacha déclare ne pas être gênée par l'aspect relativement directif de Cap Maths et apprécier le fait que les difficultés et les réactions des élèves soient prévues par le manuel de l'enseignant. Elle relève que l'organisation stricte de ce manuel convient bien à son « esprit très cartésien » et que cette structure a également un effet positif sur l'organisation des cahiers des élèves. Sacha est consciente du léger écart existant entre les programmes et utilise le manuel du niveau CE2 durant un an et demi (3P et début de 4P), avec donc un léger décalage.

Sacha pense que des devoirs à domicile sont nécessaires pour entraîner les techniques. Comme tout manuel français, Cap Maths n'en propose pas¹³⁹ et Sacha crée donc ses propres fiches pour ces devoirs. Cap Maths facilite beaucoup la préparation des leçons de ma-

¹³⁷ Si les moyens d'enseignements sont romands, plusieurs cantons ont développés des moyens complémentaires, en particulier pour pallier au manque d'exercices de calcul des moyens COROME. Ces moyens complémentaires sont parfois utilisés par des enseignants d'autres cantons de manière individuelle et non officielle.

¹³⁸ Evaluations externes en français et en mathématiques, réalisées par le département et passées par l'ensemble des élèves du degré concerné dans tout le canton de Vaud. En mathématiques elles ont lieu en fin de 4P (CM1), à deux reprises en 6^{ème} (6^{ème}) et en 8^{ème} (4^{ème}).

¹³⁹ Les devoirs à domicile sont interdits pour les enfants de moins de 11 ans depuis la Circulaire du 29 décembre 1956.

thématiques pour Sacha à qui il suffit de lire les indications du guide de l'enseignant, de préparer le matériel et de préparer des exercices à donner en devoirs.

Pour Sacha, le plus important dans l'enseignement des mathématiques est le fait de comprendre la raison pour laquelle on fait une chose, par exemple pourquoi on choisit une opération plutôt qu'une autre.

14.2.3 Camille

Camille a environ 35 ans et enseigne depuis plus de 15 ans en 3P et 4P dans le canton de Vaud. Après une maturité D (langues modernes) elle a obtenu son diplôme de l'école normale de Lausanne. Elle a participé comme *accompagnatrice*¹⁴⁰ à l'introduction des moyens COROME (Danalet *et al.*, 1998, 1999) et les a donc beaucoup explorés à cette occasion qui date de plus de dix ans et les apprécie toujours beaucoup.

La classe de Camille est une classe de campagne multi-âge de 3P-4P. Le regroupement des deux années a été choisi pour permettre de garder cette dernière classe dans le village. La classe compte 17 élèves, en particulier 10 élèves de 4P dont 2 nouveaux. L'arrivée et le départ d'élèves sont fréquents dans cette classe.

Les deux degrés travaillent de manière séparée, la plupart du temps à l'aide de plans de travail (PT). Pour les mathématiques, chaque plan est constitué de tâches de plusieurs types et de plusieurs modules des moyens COROME (Danalet *et al.*, 1998, 1999). Ils sont de difficulté croissante en cours d'années, par contre à l'intérieur de chaque plan, chaque élève peut traiter les tâches proposées dans un ordre quelconque. Certaines tâches rassemblent plusieurs enfants qui se retrouvent pour la réaliser. Un *plan bis* permet d'occuper les élèves les plus rapides. Il n'y a presque jamais de mise en commun regroupant tous les élèves d'un degré, mais plutôt des duos que Camille forme pour faire comparer des résultats ou des stratégies de résolution. Ce type de gestion laisse une grande disponibilité à Camille qui peut répondre aux questions des élèves, aider ceux qui sont en difficulté ou qui viennent d'arriver, mais aussi pour préparer du matériel pour d'autres activités. Les moments collectifs concernent le lancement d'un nouveau jeu de maths ou d'une nouvelle activité délicate. Dans ce cas, le jeu ou l'activité ne sont pas réalisés immédiatement par les élèves mais ils apparaîtront dans le cheminement de leur PT. En début de journée, Camille organise parfois des moments de calcul collectif, par exemple sous forme de *Compte est bon* (voir Annexe 11.3). Une *fiche de la semaine*, constituée d'exercices de calculs ou de tâches créés par Camille sur le modèle de celles figurant dans le plan de travail en cours, est à réaliser à domicile. Un test ponctue la fin de chaque plan, toutes les six à huit semaines. Il est constitué de tâches proches de celle figurant dans les PT. Des *tests assimilés* (petits tests) évaluent la maîtrise des opérations. Plans de travail, fiches de la semaine et tests sont repris d'une année à l'autre moyennant quelques modifications éventuelles réalisées aux ciseaux et à la colle. Un coin de la classe est réservé aux jeux de maths disposés sur une bibliothèque. Une partie de ces jeux ont été confectionnés par Camille et un moment leur est réservé durant la semaine.

Camille travaille à temps partiel dans cette classe et s'occupe de la partie numérique et de la partie logique du programme de mathématiques (modules 1 à 4).

¹⁴⁰ Pour la formation continue mise en place dans le canton de Vaud lors de l'introduction des moyens COROME, une vingtaine d'enseignants ont été formés pour accompagner leurs collègues. Cette formation comportait en particulier un module de 9 heures intitulé *Histoire et épistémologie des mathématiques, des pistes pour ma classe* dont le contenu était « Histoire et épistémologie des nombres: leur conception, leur vocabulaire, leur écriture. / Les nombres et les calculs d'ici et d'ailleurs: l'abaque romain, le boulier chinois. / Notre numération: des origines à nos jours. / Révolution du zéro. / Autres algorithmes. »

Camille aime enseigner les mathématiques. C'est ce qui fonctionne le mieux dans sa classe. Elle dit avoir eu un passé d'élève douloureux en mathématiques jusqu'au gymnase¹⁴¹, ou elle a eu un déclic grâce à un professeur qui « avait une autre façon de présenter les choses, il racontait des histoires, il enrobait ses problèmes dans les tas de machin, dans des aventures, je sais pas quoi... C'est devenu évident ! ». Elle veut éviter que ses élèves aient la même crainte des mathématiques qu'elle a connue et leur dit qu'il faut qu'ils « apprivoisent les maths ». Elle souhaite mettre en avant à la fois le plaisir de faire des mathématiques et leur aspect routinier, voire mécanique. Tant lors des entretiens qu'en classe, elle insiste à de nombreuses reprises sur le fait que résoudre une tâche mathématique, c'est « trouver une truc, une combine ». Elle se considère comme « un quincaillier qui leur fournit des outils » mais souhaite que ses élèves puissent aussi « trouver une combine s'ils n'ont pas appris », comme « quelqu'un qui est obligé de changer une roue ». Quand ses élèves sont bloqués, elle dit ne rien leur expliquer, mais leur donner des indices, soit individuellement, soit en petits groupes, mais toujours de façon improvisée.

14.2.4 Andrea

Agée d'environ 30 ans, Andrea a obtenu une maturité D (langues modernes), fait deux ans d'études universitaires en sciences de l'éducation et effectué sa formation d'enseignante dans une HEP d'un autre canton romand.

La classe compte 22 élèves. Selon Andrea, il s'agit d'une bonne classe, dynamique et ayant de « chouettes idées ». Située en milieu urbain, la classe accueille deux élèves ayant des besoins particuliers, que ce soit au niveau du langage ou du comportement, ainsi que plusieurs élèves ayant précédemment suivi leur scolarité à l'étranger.

Pour les mathématiques, Andrea alterne exercices individuels, travaux de groupes et moments collectifs, tant pour donner des explications que pour faire des mises en commun. Elle donne chaque jour un devoir à domicile en mathématiques (fiche de calculs, petits problèmes,...) et parfois, en plus, des choses à apprendre ou à revoir (livrets...). Des petits tests de calculs sont effectués régulièrement. Les évaluations significatives comprennent à la fois des éléments de technique et des problèmes. Elles sont données par l'enseignante quand elle estime que la classe est prête. Quand il s'agit d'introduire un nouveau sujet, Andrea dit avoir l'habitude de le faire par petites doses successives.

Andrea soigne particulièrement le dialogue avec les parents d'élèves, en particulier pour des sujets sur lesquels les parents interviennent souvent, l'apprentissage des livrets ou des algorithmes de calcul par exemple.

Andrea apprécie les moyens COROME (Danalet *et al.*, 1998, 1999), même si elle trouve que les problèmes sont souvent trop simples... ou trop difficiles. Elle leur reproche également de ne rien proposer au sujet des algorithmes. En revanche elle dit n'avoir pas de difficulté à construire des itinéraires d'enseignement.

Dans son enseignement des mathématiques, Andrea dit mettre en avant le plaisir, l'utilité des outils traités et la compréhension. Elle se souvient d'avoir toujours aimé les mathématiques, en particulier la résolution de problèmes et espère transmettre ce goût à ses élèves, tout en leur permettant de comprendre des choses qu'elle même n'avait pas comprises en tant qu'élève. Andrea dit à plusieurs reprises être intéressée par l'aspect à la fois ordonné et mystérieux des mathématiques.

¹⁴¹ Scolarité postobligatoire, degrés 10 à 12, élèves de 15-18 ans, voir Annexe 2.

Chapitre 15 Résultats

Les données récoltées et analysées selon la description donnée au Chapitre 14 sont interprétées à plusieurs échelles. Dans un premier temps nous brosserons un portrait général de ces données en décrivant de manière globale les catégorisations obtenues (15.1) et en résumant et en caractérisant chaque séquence d'enseignement du point de vue des choix effectués par chaque enseignant (15.2). Dans un second temps nous analyserons beaucoup plus précisément les interactions entre CME, pertinence et niveau d'activité en partant de l'analyse ponctuelle d'un épisode (15.3), en élargissant ensuite successivement au quatre moments d'explication de l'algorithme (15.4), puis à l'ensemble des données de chaque enseignant (15.5) et enfin en examinant ces interactions pour l'ensemble de nos données (15.6).

15.1 Catégorisation des données

Dans un premier temps les données analysées sont quantifiées (15.1.1) puis, pour chaque série de mots-clés attribués, le nombre d'occurrence total est donné et commenté (15.1.2).

15.1.1 Quantification des données

Rappelons que les quatre séquences d'enseignement observées ont été filmées et analysées à l'aide de Transana (voir 14.1.6). Le nombre de séances en classe, la durée de chaque séance et de chaque entretien ainsi que le nombre et la durée des clips découpés sont indiqués dans le Tableau 15.

Enseignant-e	Séance	Durée	Nombre clips
Dominique	Entretien ante	1:09:06	33
	Entretien post	1:39:00	35
	TOTAL entretiens	2:48:06	68
	séance 1	0:39:28	20
	séance 2	0:32:13	19
	séance 3	0:34:48	20
	séance 4	0:55:15	65
	séance 5	1:12:42	39
	séance 6	0:47:10	21
	séance 7	0:50:11	24
TOTAL en classe	5:31:47	208	
Sacha	Entretien ante	1:16:14	32
	Entretien post	1:08:16	26
	TOTAL entretiens	2:24:30	58
	séance 1	1:01:54	29
	séance 2	1:39:21	79
TOTAL en classe	2:41:15	108	
Camille	Entretien ante	1:15:58	27
	Entretien post	1:36:06	17
	TOTAL entretiens	2:52:04	44
	séance 1	1:00:08	58
	séance 2	1:06:23	42
TOTAL en classe	2:06:31	100	
Andrea	Entretien ante	1:15:48	16
	Entretien post	2:09:05	19
	TOTAL entretiens	3:24:53	35
	séance 1	0:47:22	30
	séance 2	0:46:11	37
	séance 3	0:50:00	16
	séance 4	1:00:03	8
	séance 5	0:47:50	28
	séance 6	0:38:27	19
	séance 7	0:37:23	21
	séance 8	0:40:34	12
	séance 9	0:41:26	4
	TOTAL en classe	6:49:16	175
TOTAUX	TOTAL entretiens	11:29:33	205
	TOTAL classe	17:08:49	591
	TOTAL	28:38:22	796

Tableau 15 : Nombre et durée des séances en classe, des entretiens et de clips des quatre séquences

Deux enseignants ont un nombre important de séances, neuf pour Andrea et sept pour Dominique, alors que Camille et Sacha n'ont été observées que pendant les deux séances qu'elles ont consacrées à ce sujet. La durée des séances varie entre 0:37 et 1:40, celle des entretiens entre 1:08 et 2:09. Ce sont au total plus de 17:00 de séances en classe et 11:30 d'entretiens qui ont été traitées.

Environ 80% des données ont fait l'objet d'un codage par mot-clés. Les parties non codées dans les entretiens correspondent aux moments de salutation ou de rappel des conditions de la recherche. Elles varient entre 10% et 23%. Les parties en classe non codées sont des moments durant lesquels l'enseignant n'est pas dans une position didactique, mais dans une pure position de gestion de classe. Ils varient entre 1% et 58%. Ces proportions n'ont pas de signification particulière dans la mesure où, les conditions d'enregistrement variant, la caméra n'a pas toujours été déclenchée de la même manière et où, par exemple, un incident extérieur a parfois occupé une partie de la leçon. Elles permettent toutefois de signaler qu'une partie importante des leçons a été codée.

Le nombre de clips ainsi générés a été de près de 800, dont environ 200 en entretien et 600 en situation d'enseignement.

Au moment du traitement de ces données, les quantités ont été traitées à la fois du point de vue du nombre de clips et du point de vue de la durée de ces clips. Ces nombres ont été considérés d'un point de vue absolu (nombre de clips ou temps) et d'un point de vue relatif (nombre de clips comportant le mot-clé par rapport à la quantité de clips attribués, respectivement durée occupée par ces clips par rapport à la durée de l'ensemble des clips), pour chaque leçon ou entretien, pour chaque enseignant ou pour les quatre enseignants réunis. La répartition des durées des clips peut être résumée dans le Tableau 16 ou visualisée dans le graphique en « boîte à moustaches » de la Figure 36.

Longueur des clips en secondes

	N	Moyenne	Médiane	Ecart-type	Variance	Minimum	Maximum
Classe	610	86,7	54,3	110,0	12101,7	0,6	1217,9
Entretien	187	156,6	109,8	153,7	23611,9	5,5	950,7
Total	797	103,1	64,2	125,1	15654,9	0,6	1217,9

Tableau 16 : Répartition de la longeurs des clips pour les séquences de classe et pour les entretiens

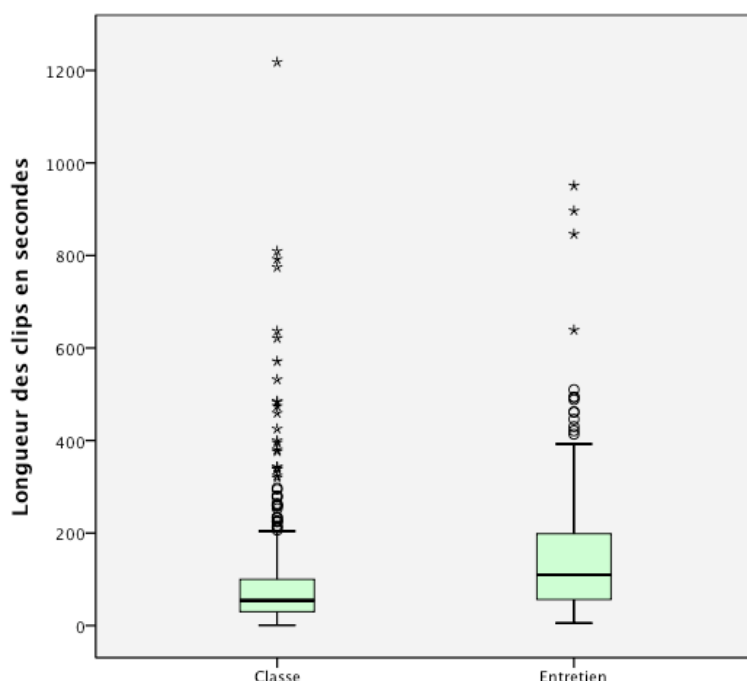


Figure 36 : Longueurs des clips pour les séquences de classe et pour les entretiens¹⁴²

Il était toutefois nécessaire de choisir entre le point de vue du nombre de clips et le point de vue de la durée. Etant donné le mode de découpage des clips, délimité par un changement au niveau des CME ou du niveau d'activité de l'enseignant, le point de vue le plus intéressant relève du nombre d'occurrence de ces éléments et non de leur durée, tant en classe qu'en entretien où un long développement est parfois fait sans raison particulière. Quoi qu'il en soit, toutes les premières analyses effectuées selon les deux points de vues montrent qu'ils ne diffèrent pas.

¹⁴² La ligne au centre du rectangle représente la médiane Q2. Les bornes inférieures et supérieures des boîtes sont données par le premier quartile Q1 (25% inférieur des valeurs) et le troisième quartile Q3 (25% supérieur des valeurs). Les extrémités des moustaches sont données par l'adjacente inférieure $Q1 - 1.5(Q3 - Q1)$ et l'adjacente supérieure $Q3 + 1.5(Q3 - Q1)$. Les valeurs extrêmes sont représentées par de petits cercles ou de petites astérisques (pour les valeurs égales à plus de trois fois la hauteur des boîtes).

15.1.2 Occurrences de chaque catégorie

Pour chaque série de mots-clés, le nombre de passages auxquels chaque mot clé a été attribué est donné ici pour les quatre enseignants, en distinguant entre les moments en classe et les moments d'entretien. Il ne s'agit pas dans cette section d'analyser les liens entre la pertinence mathématique et les connaissances mathématiques pour l'enseignement (ceci sera fait en 15.6), ni de comparer les enseignants entre eux (ce qui sera fait en 15.3 et 15.5), mais bien de donner une première analyse globale des occurrences de chaque catégorie dans les entretiens et dans les séquences en classe.

15.1.2.1 Les niveaux d'activité du professeur

Le nombre de clips contenant chaque niveau d'activité du professeur est donné dans le Tableau 17.

			Niveau actiProf : P+3 noosphérien	Niveau actiProf : P+2 construction thème	Niveau actiProf : P+1 projet leçon	Niveau actiProf : P0 situation didactique	Niveau actiProf : P-1 observation-dévolution
Nbre clips absolu	Dominique	classe	2	3	11	181	13
		entretiens	17	38	13	7	6
		total	19	41	24	188	19
	Sacha	classe	0	1	3	99	4
		entretiens	12	24	7	13	2
		total	12	25	10	112	6
	Camille	classe	0	2	8	94	3
		entretiens	20	16	2	8	2
		total	20	18	10	102	5
	Andrea	classe	0	6	19	162	9
		entretiens	11	16	3	9	2
		total	11	22	22	171	11
	TOT	1234c	2	12	41	536	29
		1234e	60	94	25	37	12
total		62	106	66	573	41	
Nbre clips relatif	Dominique	classe	1.0	1.5	5.5	90.0	6.5
		entretiens	25.4	56.7	19.4	10.4	9.0
		total	7.1	15.3	9.0	70.1	7.1
	Sacha	classe	0.0	1.0	2.9	94.3	3.8
		entretiens	20.7	41.4	12.1	22.4	3.4
		total	7.4	15.3	6.1	68.7	3.7
	Camille	classe	0.0	2.0	8.0	94.0	3.0
		entretiens	45.5	36.4	4.5	18.2	4.5
		total	13.9	12.5	6.9	70.8	3.5
	Andrea	classe	0.0	3.4	10.9	92.6	5.1
		entretiens	30.6	44.4	8.3	25.0	5.6
		total	5.2	10.4	10.4	81.0	5.2
	4 ens.	classe	0.3	2.1	7.0	91.9	5.0
		entretiens	29.3	45.9	12.2	18.0	5.9
		total	7.9	13.5	8.4	72.7	5.2

Tableau 17 : Nombre de clips contenant chaque niveau d'activité du professeur en valeurs absolues et relatives (pourcentage de clips contenant le mot-clé par rapport au nombre total de clips).
Les sommes des totaux relatifs peuvent être supérieures à 100 (propos relevant de plusieurs niveaux).

Les niveaux d'activité les plus présents dans les entretiens sont les niveaux P_{+2} et P_{+3} . Cette constatation correspond bien à la visée de l'entretien qui était de recueillir, avant et après la séquence, des éléments généraux sur celle-ci. Le canevas de l'entretien était identique, cependant une enseignante, Camille, s'est plus exprimée en termes généraux que de façon précise sur le thème. A l'inverse Dominique a beaucoup parlé de la structure de sa séquence d'enseignement, tant dans l'entretien *ante* que dans l'entretien *post*. Le niveau du projet de leçon est peu abordé durant les entretiens, particulièrement par Camille et Andrea.

Pour les parties en classe, le niveau très nettement le plus présent est celui de la situation didactique. Les positions P_{+3} et P_{+2} sont très rarement observables, en revanche un certain nombre d'interventions de l'enseignant au niveau du projet de leçon ont été observées. On peut encore noter que le niveau P_{-1} est assez peu présent. Ceci peut être noté à propos des entretiens durant lesquels les enseignants parlent peu de ce qu'ils vont ou ont observé ou de la manière dont ils vont ou ont dévolué le problème, mais aussi en classe où les moments durant lesquels l'enseignant observe ou dévolue sans proposer de connaissances sont relativement rares.

15.1.2.2 Les connaissances mathématiques pour l'enseignement

Le nombre de clips contenant des CME est donné dans le Tableau 18.

			pCC Contenu et ens	pCE E et ens	pCP Programme et ME	sCHM Horizon Math	sCMC Maths Comm	sCMS Maths Spécifiques ens
Nbre clips absolu	Dominique	classe	10	27	1	2	105	110
		entretiens	11	12	18	8	7	32
		total	21	39	19	10	112	142
	Sacha	classe	13	6	4	2	49	42
		entretiens	20	9	19	3	8	39
		total	33	15	23	5	57	81
	Camille	classe	11	23	7	3	62	49
		entretiens	10	0	7	3	9	20
		total	21	23	14	6	71	69
	Andrea	classe	57	49	0	0	64	116
		entretiens	11	4	9	3	8	22
		total	68	53	9	3	72	138
	TOT	1234c	91	105	12	7	280	317
		1234e	52	25	53	17	32	113
		total	143	130	65	24	312	430
Nbre clips relatif	Dominique	classe	5.0	13.4	0.5	1.0	52.2	54.7
		entretiens	16.4	17.9	26.9	11.9	10.4	47.8
		total	7.8	14.6	7.1	3.7	41.8	53.0
	Sacha	classe	12.1	5.6	3.7	1.9	45.8	39.3
		entretiens	34.5	15.5	32.8	5.2	13.8	67.2
		total	20.0	9.1	13.9	3.0	34.5	49.1
	Camille	classe	11.0	23.0	7.0	3.0	62.0	49.0
		entretiens	22.7	0.0	15.9	6.8	20.5	45.5
		total	14.6	16.0	9.7	4.2	49.3	47.9
	Andrea	classe	32.6	28.0	0.0	0.0	36.6	66.3
		entretiens	30.6	11.1	25.0	8.3	22.2	61.1
		total	32.2	25.1	4.3	1.4	34.1	65.4
	4 ens.	classe	15.6	18.0	2.1	1.2	48.0	54.4
		entretiens	25.4	12.2	25.9	8.3	15.6	55.1
		total	18.1	16.5	8.2	3.0	39.6	54.6

Tableau 18 : Nombre de clips contenant des connaissances mathématiques pour l'enseignement en valeur absolues et relatives (pourcentage de clips contenant le mot-clé par rapport au nombre total de clips)

Les catégories de connaissances mathématiques ont été attribuées à la quasi totalité des clips déterminés en classe et en entretien. Seuls 55 clips (environ 7% des clips et 7,5% du temps) n'ont pas pu se voir déterminer une catégorie de connaissances mathématiques. Il s'agit essentiellement de moments d'observation, de moments de gestion de classe avec interactions didactiques (lecture de consigne par exemple) ou de déclarations relativement générales durant les entretiens pour lesquels il n'était pas possible de déterminer, même en questionnant l'enseignant, quel type de connaissance elles mettaient en jeu.

Quelques exemples de chaque type de connaissances mathématiques ainsi qu'une première analyse du nombre d'occurrences vont permettre de mieux se familiariser avec ces catégories définies en 3.2.1.

Connaissances du contenu et de l'enseignement du sujet (CC)

Les CC sont souvent présentes dans les déclarations des enseignants. Elles concernent la plupart du temps la construction de la séquence, le choix du matériel ou le choix d'une manière d'écrire par exemple les retenues.

Avant je prenais deux couleurs, j'entourais 4×86 en rouge et puis je faisais tout en rouge, et puis après une autre couleur. Mais c'est vrai que ces boîtes à retenue, c'est pas mal... Je n'ai pas encore décidé comment faire. Je n'y avais pas pensé. C'est maintenant que je vois. (Sacha, entretien *ante*)

En classe, ces connaissances sont perceptibles par exemple au moment du choix des exemples. Ainsi au moment d'éviter que les élèves ne décomposent le premier facteur dans une multiplication à deux chiffres, Andrea choisit de prendre 12 comme second facteur.

Les CC sont fréquemment perceptibles durant les entretiens (entre 16,4% et 34,5). Elles sont plus rarement relevées en situation de classe chez Dominique (5%), en revanche elles sont très présentes chez Andrea (32,6%) qui doit fréquemment faire des choix non prévus d'exemples ou de comparaisons suite à de nombreuses questions de ses élèves.

Connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet (CE)

Les CE relevées ont souvent trait aux difficultés prévues des élèves lors des entretiens *ante* ou à l'interprétation de leurs réponses en situation de classe ou en entretien *post*.

Chercheur : Il y a un élève qui a fait régulièrement des additions au lieu des multiplications, c'est Eje qui est venu plusieurs fois, une fois c'était 3×3 , 6 et une autre 6×3 , 9 (Dominique approuve et se souvient) et vous lui avez dit "Tu sais pas tes livrets" et à mon avis ce n'était pas que un problème de livret...

Dominique : Effectivement, c'était pas ça, il faisait des additions. Et puis il y a aussi un problème de concentration certains jours, pour lui il y avait trop de choses en même temps. C'était étonnant, il y arrivait le jour d'avant et le lendemain plus. Parce qu'en fait ça a un rapport avec le livret 3. 3×3 et $3 + 3$... (Dominique, entretien *post*)

Les CE sont présentes chez les quatre enseignants en classe, en particulier lorsqu'il faut interpréter et traiter une difficulté d'un élève.

ESu est toujours complètement bloquée pas ses livrets. Andrea lui propose donc d'aller corriger ce calcul à l'aide du tableau de multiplication du livre. (Andrea, synopsis, 4-8-2)

Elles apparaissent moins chez Sacha (5,6%) chez laquelle la séquence s'est déroulée avec peu de difficultés d'élèves et peu de réponses inattendues de leur part. Pour ce qui est des entretiens, les occurrences sont relativement uniformes sauf pour Camille chez qui ces connaissances sont évoquées de façon groupée dans un seul moment de chaque entretien.

Connaissances du programme et des moyens d'enseignement (CP)

Les CP sont surtout présentes en entretien. Elles relèvent de déclarations au sujet des moyens d'enseignement ou du plan d'étude.

J'enseigne que les modules 1-2-3-4, c'est ma collègue qui fait 5-6-7, donc la partie géométrie. Sur les 1-2-3-4, le choix des activités est déterminé par leur niveau de difficulté, en fait. Sur le premier plan, en début d'année, il y avait des choses beaucoup plus au niveau de la numération, ce qu'on appelle "le furet", ces chaînes de nombres à compléter, ou bien Mistigri, avec la bande numérique... Donc ça c'était plutôt pour démarrer, des petits problèmes additifs, assez basiques. Plus tard il y a eu des choses plus pointues au niveau dizaine-centaine-unité, l'activité "à la carte" qui consiste à faire, en mettant deux cartes de 1000, trois de 100, deux de 10 et trois de un, à dire quelle somme on a dans le porte-monnaie... Et puis des problèmes un peu plus complexes, des problèmes soustractifs qui sont apparus. Plus tard on a abordé la multiplication avant Noël avec les troisièmes, donc il y a eu des problèmes multiplicatifs... C'est plutôt le niveau de difficulté que l'activité qui détermine... (Camille, entretien *ante*)

Connaissances de l'horizon mathématique (CHM)

Les CHM sont rarement perceptibles, tant en entretien qu'en classe. Elles apparaissent par exemple quand l'enseignant dit, aux élèves ou au chercheur, à quoi va servir cet algorithme ou pourquoi il est indispensable d'apprendre les livrets.

Sacha dit à ces deux élèves qu'il faut travailler les livrets car c'est important. Elle demande à la classe pourquoi c'est important et une élève répond que c'est pour les divisés, une autre que c'est pour les multiplications en colonnes. Sacha approuve et dit que c'est aussi le cas dans la vie de tous les jours. (Sacha, synopsis, 2-2-1)

Connaissances mathématiques communes (CMC)

Les CMC sont très présentes en classe, avec des taux particuliers pour certains enseignants. Pour Camille et Dominique par exemple, qui passent beaucoup de temps en classe à faire des multiplications avec leurs élèves en se situant presque exclusivement au niveau de l'algorithme, ces CMC sont souvent relevées (62% en classe pour Camille). Pour les entretiens, le nombre d'occurrence est plus faible et ces CMC sont souvent liées à des CMS, par exemple pour la « règle du zéro », comme dans le passage ci-dessous. Nous reviendrons sur ce « couplage » en 15.6.1.2.

Camille lui demande d'expliquer pourquoi on met un zéro au deuxième étage et ECh répond que c'est pour plus qu'il nous embête. Camille lui demande de préciser et ECh ajoute qu'on sait que ça va finir par zéro, parce que c'est 20. Camille ajoute que c'est pas un 2, c'est un faux 2, c'est un 20 et que on met le zéro et qu'ensuite on dit que c'est un 2. Elle lui demande d'essayer le problème du tableau. (Camille, synopsis, 3-2-2-2')

Connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (CMS)

Les CMS ont été mise en évidence dans environ 55% des clips, tant en situation de classe qu'en entretien. Il est évident que l'attention du chercheur était portée sur ces connaissances et qu'elles ont probablement été plus traquées que les autres. Ces connaissances spécifiques sont le plus souvent liées à des connaissances mathématiques communes, les premières pouvant être erronées alors que les secondes sont correctes. C'est par exemple le cas à propos de la « règle du zéro », comme ci-dessus, ou lorsque l'enseignant répond à un élève qui demande pourquoi on fait telle chose dans l'algorithme.

Andrea demande pourquoi on fait plus à la troisième ligne et EDa répond que c'est parce qu'on fait deux calculs différents, d'abord 5 fois le calcul et puis 10 fois le calcul et qu'après il faut mettre tout ensemble et que ça fait 15 fois le calcul. Andrea approuve très rapidement et dit qu'il y aurait aussi une autre technique qui serait de faire d'abord 235×5 , puis 235×10 (elle écrit les deux multiplications à côté de 235×15) et de mettre ces deux réponses ensemble, donc de faire un plus, et d'arriver au même résultat (Andrea, synopsis, 4-5-1)

Nous reviendrons sur les liens observés entre les CMS et les autres connaissances mathématiques en 15.6.1.

15.1.2.3 La pertinence

Le nombre de clips dans lesquels la pertinence est évaluée est donné dans le Tableau 18.

			Pert. : C. non déterminée	Pert. : C1. interactions maths	Pert. : C2. tolérance	Pert. : C3. adidacticité	Pert. : C4. fonctionnalité
Nbre clips absolu	Dominique	classe	7	158	11	16	1
		entretiens	1	3	0	0	54
		total	8	161	11	16	55
	Sacha	classe	3	78	7	10	0
		entretiens	0	8	0	0	42
		total	3	86	7	10	42
	Camille	classe	1	76	4	6	0
		entretiens	0	0	0	1	24
		total	1	76	4	7	24
	Andrea	classe	4	142	8	14	2
		entretiens	0	13	0	0	22
		total	4	155	7	14	24
	TOT	1234c	15	454	29	46	3
		1234e	1	24	0	1	142
total		16	478	29	47	145	
Nbre clips relatif	Dominique	classe	3.5	78.6	5.5	8.0	0.5
		entretiens	1.5	4.5	0.0	0.0	80.6
		total	3.0	60.1	4.1	6.0	20.5
	Sacha	classe	2.8	72.9	6.5	9.3	0.0
		entretiens	0.0	13.8	0.0	0.0	72.4
		total	1.8	52.1	4.2	6.1	25.5
	Camille	classe	1.0	76.0	4.0	6.0	0.0
		entretiens	0.0	0.0	0.0	2.3	54.5
		total	0.7	52.8	2.8	4.9	16.7
	Andrea	classe	2.3	81.1	4.0	8.0	1.1
		entretiens	0.0	36.1	0.0	0.0	61.1
		total	1.9	73.5	3.3	6.6	11.4
	4 ens.	classe	2.6	77.9	5.0	7.9	0.5
		entretiens	0.5	11.7	0.0	0.5	69.3
total		2.0	60.7	3.7	6.0	18.4	

Tableau 19 : Nombre de clips contenant une évaluation de la pertinence mathématique, en valeurs absolues et relatives (pourcentage de clips contenant le mot-clé par rapport au nombre total de clips)

Un critère de pertinence a principalement été utilisé en classe, il s'agit de C_1 , la capacité à interagir sur les éléments mathématiques. Ce critère a été appliqué dans 73% à 81% des clips en classe. C_2 et C_3 sont appliqués dans 4% à 9% de clips en classe. C_4 , la capacité à rendre compte de la fonctionnalité de l'objet mathématique visé, avait été définie pour servir essentiellement lors des entretiens. Elle n'est effectivement presque jamais utilisée en classe. Elle permet en revanche de déterminer la pertinence dans 54% à 81% des clips tirés des entretiens.

Le nombre de clips et le nombre d'occurrence de chaque catégorie d'analyse ont été décrits dans ce chapitre. Avant que de commencer l'analyse, il s'agit encore de décrire les quatre séquences d'enseignement observées.

15.2 Les quatre séquences

Le traitement des séquences observées a amené à la rédaction d'un synopsis et d'une macrostructure (14.1.5) pour chacune des quatre séquences. Ce paragraphe présente chaque séquence au moyen de la macrostructure et d'un tableau extrait du synopsis donnant la succession des tâches proposées aux élèves. Cette présentation vise à la fois à permettre une vision globale de chaque série de leçons et à pouvoir situer les épisodes dont il sera question dans la suite du chapitre

Pour chaque enseignant, le synopsis et la macrostructure complète figurent en Annexe 15. Seule une version de la macrostructure développée jusqu'au niveau 3 ou 4 est donnée ici.

15.2.1 Dominique

La séquence d'enseignement de la multiplication par un nombre à deux chiffres est répartie sur sept séances dont la durée est comprise entre 0:32 et 1:13. La durée totale de ces sept séances est de 5:31. La macrostructure de la Figure 38 donne le déroulement des leçons. Le Tableau 20 donne la succession des tâches réalisées par les élèves.

La séquence débute par une « situation où [les élèves] n'arrivent pas à faire le calcul » (Dominique, entretien *ante*). Il s'agit de la première grille de *Sous pli*, consistant à déterminer des nombres de carreaux dans un rectangle partiellement caché de côté 14 et 12 (Figure 37).

Ces quatre feuilles rectangulaires ont été rongée (A), pliée (B), effacée (C) ou partiellement cachée (D).

Trouve le nombre de carreaux qu'on pouvait voir sur chaque feuille lorsqu'elle n'était pas rongée, pliée, effacée ou partiellement cachée.

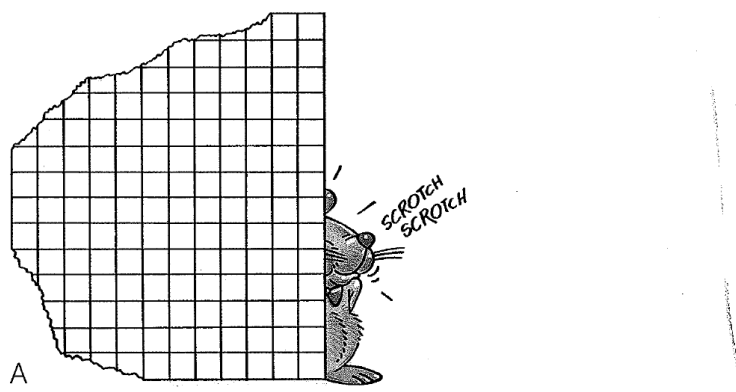


Figure 37 : *Sous pli*, première grille (Danalet et al., 1999, LE 70-71)

Deux leçons sont ensuite consacrées à revoir la multiplication par un nombre à un chiffre, en tableau et en colonnes, puis une fiche est effectuée durant la quatrième leçon afin de travailler la décomposition en dizaines et unités et d'effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre. L'explication de l'algorithme intervient lors de la quatrième leçon. Celui-ci est montré par Dominique tout d'abord en tableau, puis en colonnes. Cette explication est détaillée en

15.4 et un passage est analysé de façon précise en 15.3. Ces deux algorithmes sont repris et entraînés conjointement à l'aide d'une série d'exercices « maison » et d'une tâche tirée des moyens COROME, *Perforation*¹⁴³. Les difficultés des élèves sont traitées au fur et à mesure. Un test (non observé) est effectué, dans lequel seuls quatre items¹⁴⁴ concernent la multiplication. Dominique ayant constaté dans les leçons précédentes des difficultés avec les zéros apparaissant dans les produits partiels, la dernière leçon est consacrée au travail sur ce sujet à l'aide d'un moment de jeux de carte collectif et de multiplications à effectuer individuellement.

¹⁴³ Annexe 11.2.

¹⁴⁴ Annexe 13.4.

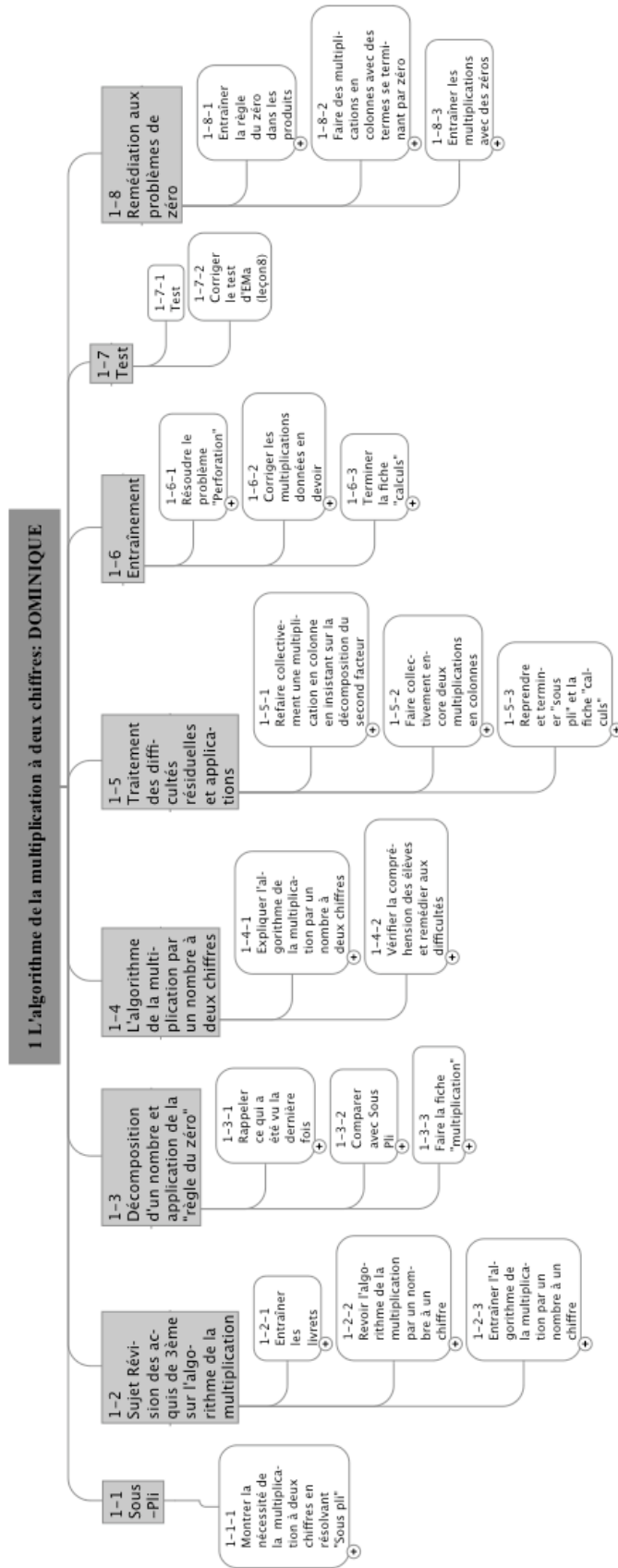


Figure 38 : Macrostructure de la séquence de Dominique

Tâche	Source ou support	Contenu	Gestion
Sous pli	Fiche COROME, voir Annexe 11.1	Aires de rectangles 14x12, 19x14, 17x19, 17x16	Tentative de résolution par 2
Livrets	Cartes		Jeux en 2 groupes
Multiplications à 1 chiffre en tableau et en colonnes	Sur affiche	14x5 248x6	Collectif
Multiplications à 1 chiffre en tableau et en colonnes	Au tableau noir	Déjà disposé : 14x5 16x8 17x9	Individuel
Fiche multiplication	Fiche ad hoc, voir Annexe 13.1	Décompositions dizaines-unités Multiplications par 10 13x4, 18x5, 17x8 en ligne avec décomposition 16x9, 18x6 en tableau et en colonnes	Individuel
Explication de l'algorithme à deux chiffres, en tableau et en colonnes		12x17 17x19 16x23 (seulement pour 3 élèves)	Collectif, sur affiche
Rappel de l'algorithme en tableau et en colonnes		18x14 19x19 17x13 (seulement pour 2 élèves)	Collectif, sur affiche
Sous pli	Fiche COROME, voir Annexe 11.1		Reprise collective
Fiche calculs	Fiche ad hoc, voir Annexe 13.2	En tableau puis en colonnes (déjà disposé) : 26x14 43x17 36x16 En colonnes puis en tableau (déjà disposé) : 75x13 57x24	Individuel
Perforation	Fiche COROME, voir Annexe 11.2	Dénombrement de points en quinconce dans un rectangle	Alternance individuel-collectif
Test	Annexe 13.4	Seuls quatre items concernaient la multiplication Problème : 16x12 Nombre de cases dans un rectangle 18x12	

d'entraînement confectionnée par Sacha (Annexe 13.3) qui est commencée par les élèves pendant que Sacha observe, répond aux questions puis corrige individuellement les premières multiplications.

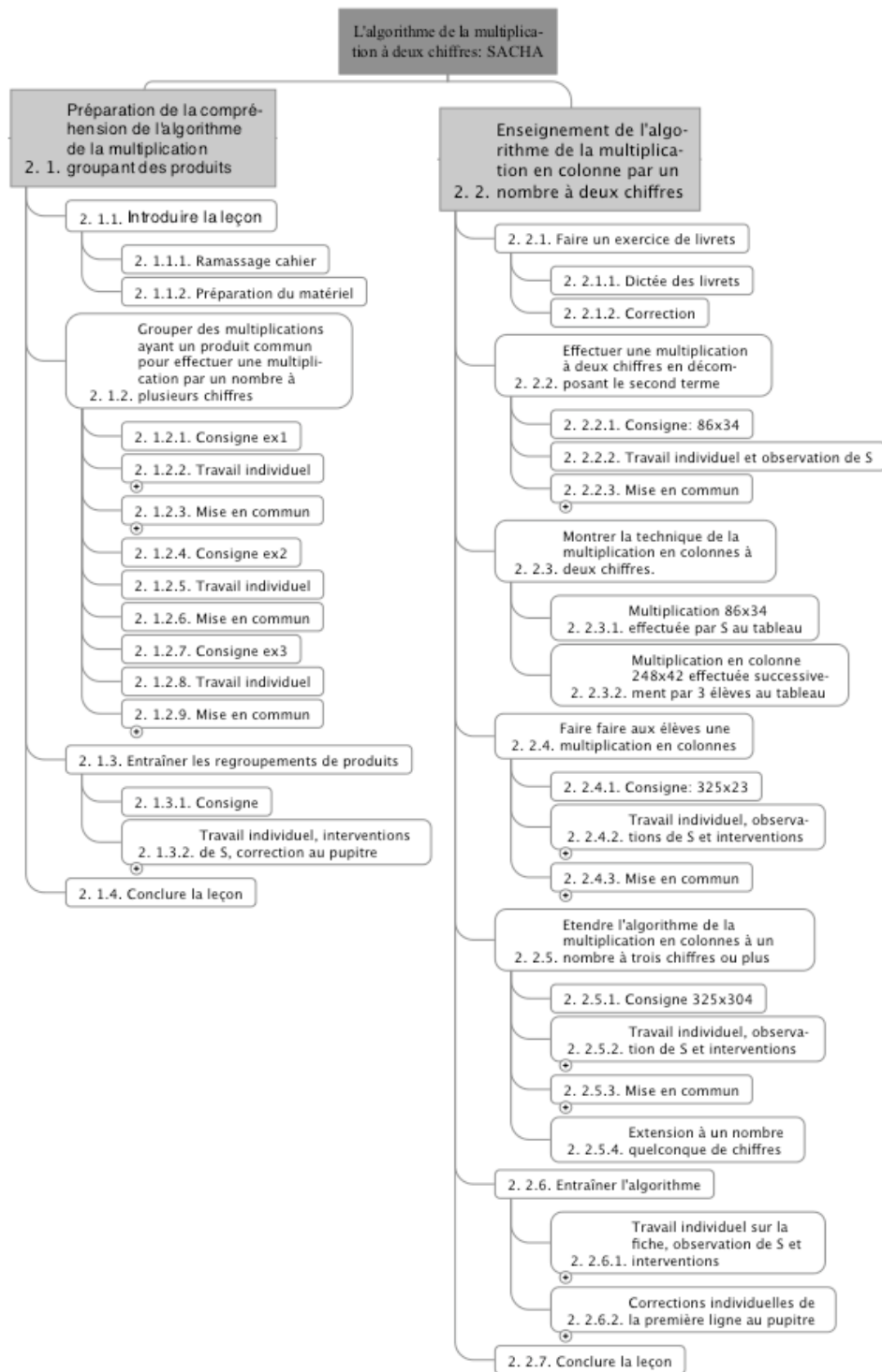


Figure 40 : Macrostructure de la séquence de Sacha

Tâche	Source ou support	Contenu	Gestion
Calculs de produits à partir des produits décomposés	Cap Maths 1 voir Annexe 12, cahiers	456x3, 456x60, 456x200, 456x600	Individuel Mise en commun
Calculs de produits à partir des produits décomposés	Cap Maths 2, voir Annexe 12, cahiers	456x63, 456x33	Individuel Mise en commun
Calculs de produits à partir des produits décomposés	Cap Maths 3, voir Annexe 12, cahiers	456x603, 456x263	Individuel Mise en commun
Calculs de produits à partir des produits décomposés	Cap Maths 4, voir Annexe 12, cahiers	436x4=1744, 436x6=2616 (donnés) 436x400, 436x60, 436x664, 436x460, 436x604	Individuel Correction au pupitre
Dictée de livrets	Oral, feuille de calcul mental	6x7, 9x8, 7x4, 7x9, combien de fois 7 dans 21, ... 7 dans 42, ... 7 dans 56, ... 7 dans 70	Dictée Correction collective et mise en commun des procédés de calcul réfléchi ou des « trucs » pour les produits non connus
Calcul d'un produit par décomposition	Cap Maths, voir Annexe 12, cahiers	86x34	Individuel Mise en commun
Explication de l'algorithme en colonnes	Cap Maths, voir Annexe 12, tableau noir	86x34	Collectif
Exemple de multiplication en colonnes	Tableau noir		Collectif Un élève au tableau pour chaque ligne
Multiplication en colonnes	Cap Maths, voir Annexe 12, cahiers	325x23	Individuel Mise en commun
Multiplication en colonnes	Cap Maths, voir Annexe 12, cahiers	325x304	Individuel Mise en commun
Multiplications en colonnes	Fiche crée par Sacha, Annexe 12	723x70, 509x36, 936x23, 624x54, 625x25	Individuel Correction au pupitre

Tableau 21 : Succession des tâches de la séquence de Sacha

15.2.3 Camille

La séquence de Camille se déroule sur deux leçons. La première dure 1:00 et la seconde 1:06 pour un total de 2:06. La macrostructure de la Figure 42 donne le déroulement des leçons. Le Tableau 22 donne la succession des tâches réalisées par les élèves.

La première leçon débute par un *Compte est bon* (Danalet *et al.*, 1999, LM186) collectif avec l'ensemble des élèves de 3P et 4P, puis Camille donne du travail au 3P et rassemble les 4P en cercle. Elle leur fait d'abord faire individuellement une multiplication par un nombre à un chiffre, puis leur explique la multiplication en colonnes par un nombre à deux

chiffres. Ce moment est décrit en détail en 15.4. Camille invente ensuite avec les élèves un problème multiplicatif. Ce dernier conduit à effectuer en collectif la multiplication 3545×65 . Camille donne ensuite deux autres multiplications que les élèves effectuent individuellement, sur de petits papiers, à même le sol. Chaque multiplication est suivie d'une correction collective.

Lors de la seconde leçon, la technique de l'algorithme est rappelée, en particulier pour les deux élèves absents lors de la leçon précédente. Ce rappel est effectué sous forme dialoguée avec les élèves. Camille écrit ensuite sur une affiche deux multiplications par groupes de deux élèves et demande à chacun de faire une des multiplications pendant que l'autre vérifie. Camille corrige chaque multiplication, en redonne aux élèves ayant eu des difficultés et donne un problème multiplicatif à résoudre aux élèves ayant terminé (Figure 41).

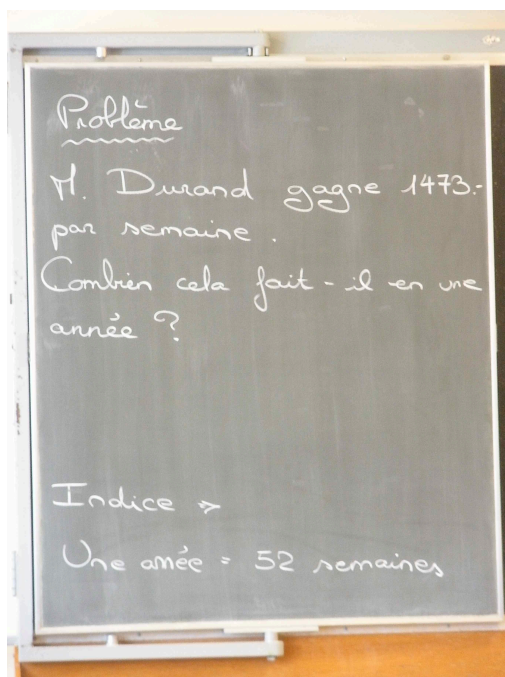


Figure 41 : Problème noté par Camille au tableau noir

Les élèves ayant terminé sont ensuite invités à poursuivre leur plan de travail pendant que Camille répond aux questions liées aux multiplications ou au plan de travail.

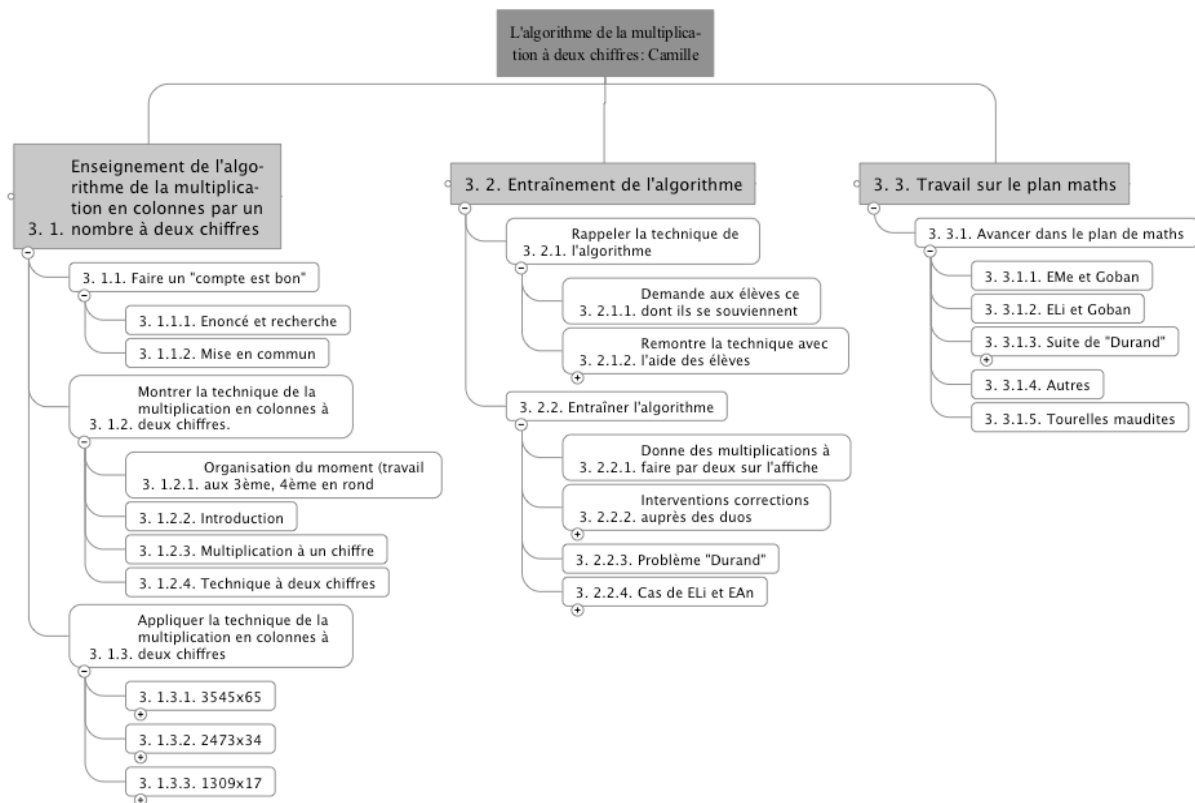


Figure 42 : Macrostructure de la séquence de Camille

Tâche	Source ou support	Contenu	Gestion
Le Compte est bon	Tableau noir, cahiers	Nombres-cible : 81, 414, 1579, 145, 1605. Cartes à disposition : 100, 15, 4, 20, 1	Recherche individuelle, mise en commun
Multiplications en colonnes à un chiffre	Petits papiers	Multiplications identiques par duos	Individuel, correction par duo
Explication de la multiplication en colonnes par un nombre à deux chiffres	Affiche	2417x25	Collectif
Exemple de multiplication en colonnes	Affiche	3545x65	Collectif
Entraînement algorithme	Petits papiers	2473x34	Individuel Correction collective
Entraînement algorithme	Petits papiers	1309x17	Individuel Correction collective
Rappel algorithme	Affiche	583x35	Collectif, dialogué
Entraînement algorithme	Affiche	Une multiplication par élève	Duos
Entraînement algorithme pour les élèves ayant eu des difficultés	Affiche	Une multiplication par élève	Individuel
Problème	Tableau noir, feuilles	M. Durand gagne 1473.- par semaine. Combien cela fait-il en une année ? (Indice : une année = 52 semaines)	Individuel
Plan de travail	Feuilles, cahiers		Individuel

Tableau 22 : Succession des tâches de la séquence de Camille

15.2.4 Andrea

La séquence d'enseignement de la multiplication par un nombre à deux chiffres est répartie sur neuf séances dont la durée est comprise entre 0:37 et 1:00. La durée totale de ces neuf séances est de 6:49. La macrostructure de la Figure 45 donne le déroulement des leçons. Le Tableau 23 donne la succession des tâches réalisées par les élèves.

La séquence débute par quelques multiplications à un chiffre effectuées en colonnes par des élèves au tableau noir afin de rappeler cet algorithme. Andrea annonce ensuite qu'un nouvel algorithme va être découvert pour multiplier en colonnes par un nombre à deux chiffres se terminant par 0 et elle demande aux élèves d'effectuer par deux le produit 346×10 en colonnes. Lors de la mise en commun, elle envoie successivement six élèves au tableau qui présentent presque tous des solutions incorrectes.

Après un moment de discussion, Andrea valide le résultat correct à l'aide de la calculatrice. Comme plusieurs élèves ont décomposé 346 plutôt que 10, Andrea tente de montrer que cela ne serait pas possible avec une multiplication par 13, mais l'élève envoyé au tableau effectue le produit 346×13 en décomposant le 346. Andrea choisit un autre exemple, 346×72 et là les élèves sont convaincus. Andrea montre alors comment effectuer la multiplication. Ces moments sont détaillés en 15.4.2.4. L'algorithme est rappelé lors de la leçon suivante en de-

mandant à un élève d'effectuer 376×10 au tableau devant la classe avec un très fort guidage de l'enseignante. Trois autres produits sont effectués de la même manière et une fiche est distribuée afin que les élèves pratiquent cet algorithme individuellement. Lors de la troisième leçon, après un rappel effectué par un élève au tableau sur l'exemple 136×10 , les élèves sont invités à rédiger un mode d'emploi pour la multiplication par un nombre à deux chiffres se terminant par zéro. Certains modes d'emploi sont ensuite discutés et testés sur des exemples par d'autres élèves que ceux l'ayant rédigé. L'explication de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres intervient au début de la cinquième leçon sous forme de cours dialogué, l'enseignante et la classe disant ce qu'il faut faire à l'élève envoyé au tableau noir. Ce moment est détaillé en 15.4.2.4. Un second exemple est effectué de la même manière. Les élèves doivent ensuite retourner à leurs fiches pour terminer les multiplications par un nombre à deux chiffres se terminant par 0. Deux leçons sont ensuite consacrées à l'entraînement de l'algorithme général en alternant des phases individuelles et des phases collectives avec un cours dialogué pour noter les erreurs à ne pas commettre (Figure 43) ou avec un élève effectuant une multiplication au tableau.

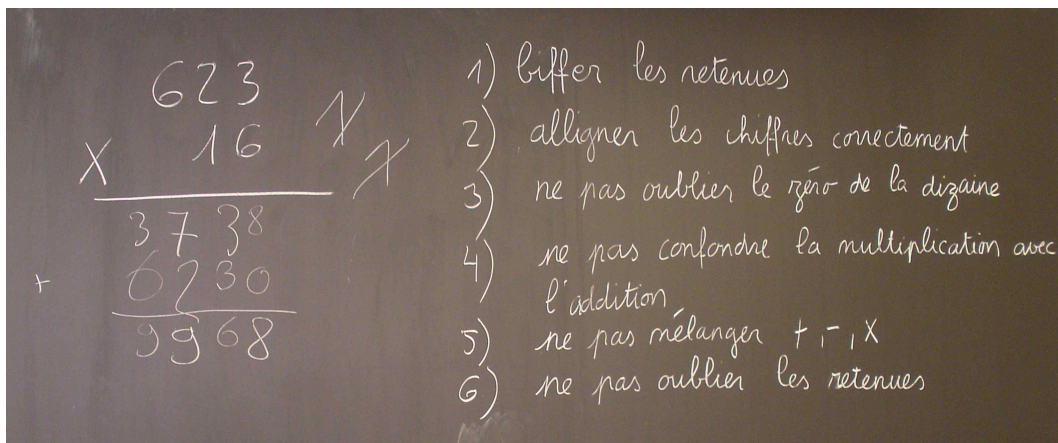


Figure 43 : Points à retenir pour l'algorithme, notés au tableau après un exemple lors de la leçon 6.

La huitième leçon est une leçon d'appui en demi-classe durant laquelle une partie des élèves entraînent les livrets avec un logiciel de drill tandis que l'autre partie passe vers l'enseignante pour corriger les fautes apparues lors des multiplications effectuées lors des leçons précédentes. Les tâches sont inversées à mi-leçon. La neuvième leçon revient sur le mode d'emploi précédent avec la rédaction collective d'un mode d'emploi de l'algorithme. Celle-ci est basée sur un exemple déjà effectué et l'enseignante guide la rédaction et notant les étapes sur son ordinateur avec projection sur vidéoprojecteur (Figure 44).

MODE D'EMPLOI MULTIPLICATION

$$\begin{array}{r} 6 9 \\ 7 \\ \times \underline{4} \\ \hline 1 8 \\ + 2 6 \\ \hline 2 1 8 \end{array}$$

Je fais 2×9 , je note la retenue à droite, je mets l'unité en bas.

Je fais 2×7 , j'ajoute la retenue au calcul, je la trace et je note la nouvelle retenue. Je note l'unité dans la colonne des dizaines.

Je fais 2×6 , j'ajoute la retenue au calcul, je la trace et je note la nouvelle retenue. Je note l'unité dans la colonne des centaines et la dizaine dans la colonne des milliers.

Attention ! Je note le zéro des dizaines dans la colonne des unités.

Je fais 4×9 , je note la retenue à droite, je mets l'unité en bas dans la colonne des dizaines.

Je fais 4×7 , j'ajoute la retenue au calcul, je la trace et je note la nouvelle retenue. Je note l'unité dans la colonne des centaines.

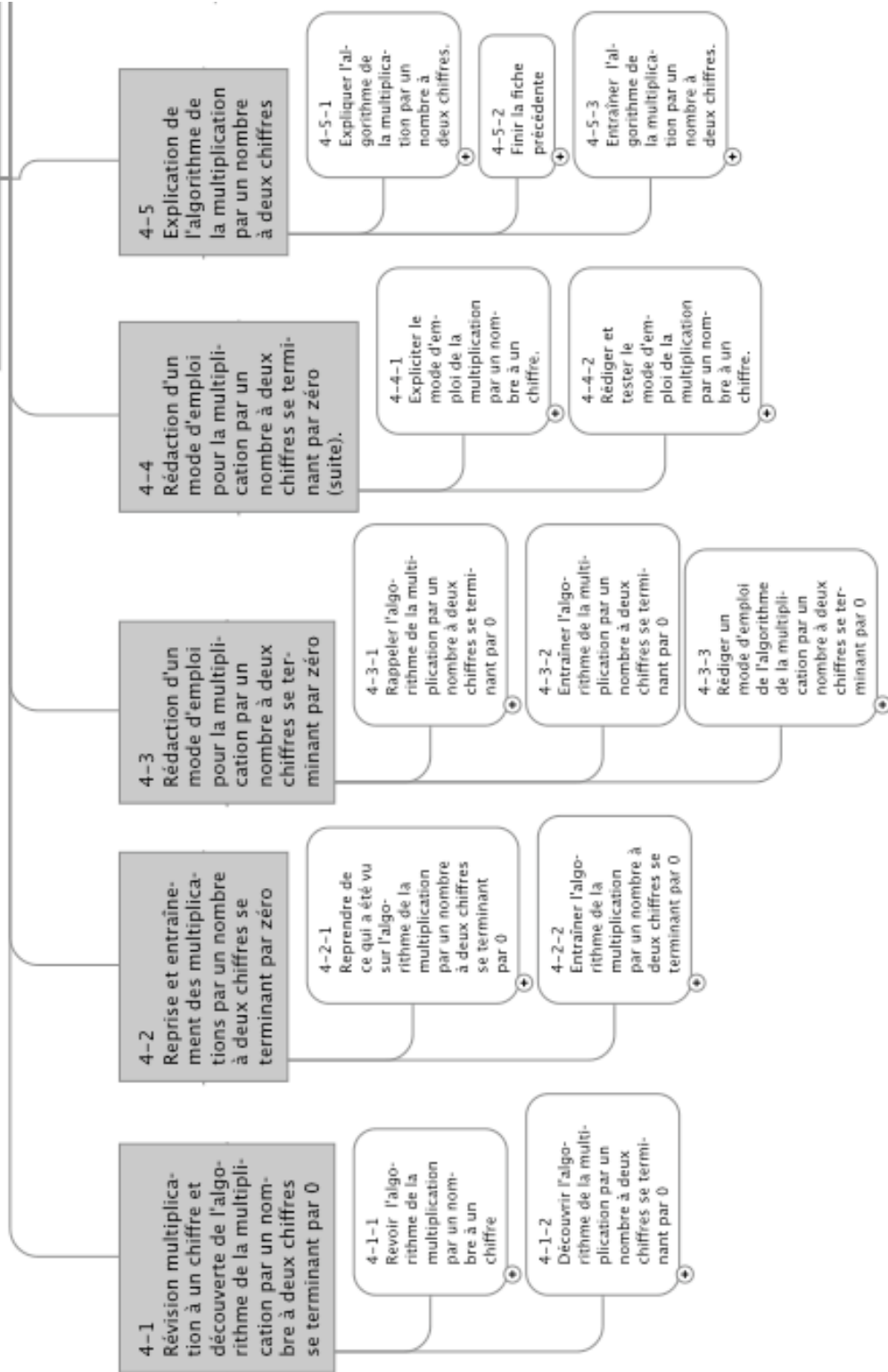
Je fais 4×6 , j'ajoute la retenue, je trace l'ancienne retenue, je note l'unité dans la colonne des milliers. Je note la dizaine dans la colonne des dizaines de milliers.

Attention ! J'additionne les deux lignes de résultat.

Figure 44 : Mode d'emploi rédigé lors de la leçon 9

Une liste d'erreurs à ne pas commettre est rédigée de la même manière (Annexe 13.5). Des copies du mode d'emploi et de la liste d'erreurs seront distribués aux élèves lors de la leçon suivante (non observée).

L'algorithme de la multiplication à deux chiffres: Andrea



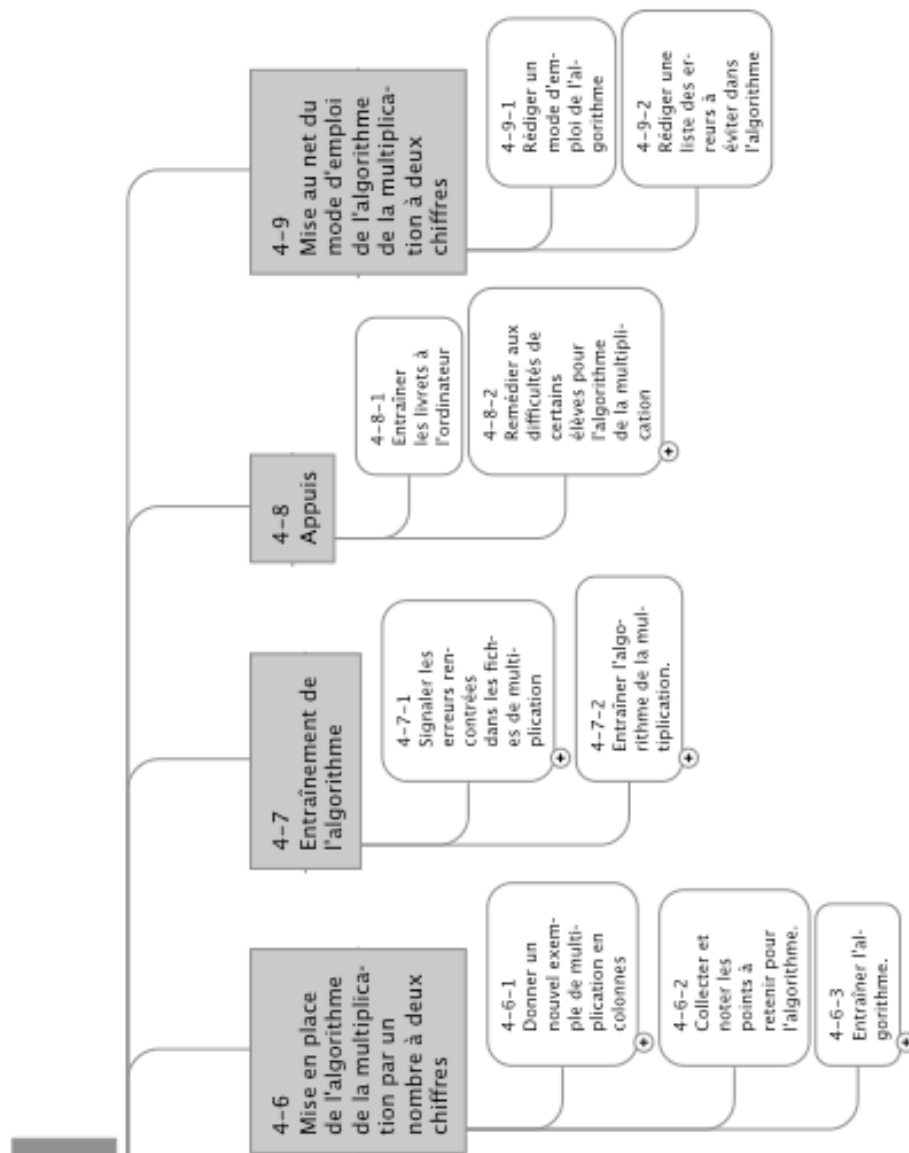


Figure 45 : Macrostructure de la séquence de Andrea (en deux parties)

Tâche	Source ou support	Contenu	Gestion
Multiplications en colonnes à un chiffre	Tableau noir	323x3, 445x4, 751x8	Collectif, un élève au tableau
Multiplications en colonnes par un nombre à deux chiffres se terminant par 0	Tableau noir	346x10,	Duos, mise en commun avec plusieurs élèves successivement au tableau
Multiplications en colonnes par un nombre à deux chiffres se terminant par 0	Tableau noir	376x10, 376x20, 548x30, 292x40	Collectif, cours dialogué, élèves successivement au tableau
Multiplications en colonnes par un nombre à deux chiffres se terminant par 0	Fiche CDM4.14, voir Annexe 12.5	14x10, 17x19, 21, 10, 36x10, 12x20, ...	Individuel
Multiplications en colonnes par un nombre à deux chiffres se terminant par 0	Tableau noir	136x10	Collectif, cours dialogué, élève au tableau
Rédaction d'un mode d'emploi pour la multiplication par un nombre à deux chiffres se terminant par zéro	Affiche au tableau, feuille		Individuel, mise en commun
Explication de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres	Tableau noir	182x12, 235x15	Collectif, cours dialogué, élèves successivement au tableau
Multiplications en colonnes par un nombre à deux chiffres se terminant par 0	Fiche « multiplications par un nombre à deux chiffres »	932x60, 858x60, 209x60, 279x60, ...	Individuel, nouvel exemple
Nouvel exemple de multiplication en colonnes à deux chiffres	Tableau noir	623x16	Collectif, élève au tableau
Recueil de points à retenir pour l'algorithme	Tableau, voir Figure 43		Cours dialogué
Multiplications en colonnes à deux chiffres	Fiche CDM4.13, CDM4.16, voir Annexe 12.5	138x6, 138x10, 138x16, ... 132x23, 45x23, 61x23, 218x23, ...	Individuel
Recueil d'erreurs à éviter pour l'algorithme	Tableau, voir Annexe 13.5		Cours dialogué
Multiplications en colonnes à deux chiffres	Fiche CDM4.13, CDM4.16, voir Annexe 12.5	138x6, 138x10, 138x16, ... 132x23, 45x23, 61x23, 218x23, ...	Individuel
Travailler les livrets	Informatique		Individuel
Multiplications en colonnes à deux chiffres	Fiche CDM4.13, CDM4.16, voir Annexe 12.5	138x6, 138x10, 138x16, ... 132x23, 45x23, 61x23, 218x23, ...	Individuel

Rédaction d'un mode d'emploi pour la multiplication par un nombre à deux chiffres et d'une liste d'erreurs à éviter	Ordinateur, beamer		Cours dialogué
---	--------------------	--	----------------

Tableau 23 : Succession des tâches de la séquence de Andrea

Ces descriptions globales des quatre séquences vont être utiles pour situer les analyses précises à venir. Ces analyses iront du niveau le plus micro à un niveau de plus en plus général. Elles débutent avec l'analyse d'un épisode survenu dans une des classes. Cette analyse utilisera le modèle de structuration du milieu.

15.3 Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations de situation, analyse d'un épisode

Le modèle de structuration du milieu a été décrit au Chapitre 6. Ce modèle d'analyse va permettre de décrire *a priori* un des épisodes observés, du point de vue de l'enseignant (15.3.1) puis de l'élève (15.3.2) et d'en analyser *a posteriori* la réalisation effective (15.3.3.1 et 15.3.3.2) afin de déterminer selon un grain fin l'influence des connaissances mathématiques pour l'enseignement sur le déroulement de cet épisode (15.3.3.3). Pour effectuer ce travail, un moment particulier a été choisi, celui de l'explication de l'algorithme dans la classe de Dominique. Ce moment est à la fois représentatif des séquences observées, puisqu'il s'agit du moment d'explication de l'algorithme¹⁴⁵ et particulier parce qu'il donne lieu à une bifurcation didactique.

Ce moment est situé dans la quatrième leçon de Dominique (voir 15.2.1), il porte le numéro 1-4-1 dans le synopsis (Annexe 15.1) et sa transcription se trouve en Annexe 14.1.

15.3.1 Analyse descendante du point de vue de l'enseignant

Cet épisode a été choisi après le déroulement de la séquence. Les indications fournies par Dominique lors de l'entretien préalable ne sont donc pas plus détaillées que pour d'autres moments et il sera parfois nécessaire à certains niveaux de considérer des indications tirées de l'entretien *post*.

Les connaissances du professeur se déclinent dans les niveaux successifs et la structuration en niveaux ne doit pas masquer la déclinaison d'une même connaissance à plusieurs niveaux. Les connaissances sont donc résumées dans un tableau à chaque niveau et, afin de visualiser cette unité verticale, une figure (Figure 48) est présentée en 15.3.1.6. D'autre part les éléments correspondants sont présentés dans le même ordre à chaque niveau.

15.3.1.1 Niveau +3 : situation noosphérienne.

M ₊₃ : M-Construction		P ₊₃ : P-Noosphérien	S ₊₃ : situation noosphérienne
----------------------------------	--	---------------------------------	---

P₊₃ pense qu'il est indispensable que les élèves connaissent les tables d'additions, de soustractions et de multiplication. Il demande donc aux parents de prendre cinq minutes chaque jour avec leurs enfants pour cet entraînement. Le rôle des parents est également pris en compte par P₊₃ quand il envisage l'évolution de l'enseignement de l'algorithme.

¹⁴⁵ La comparaison des ces moments chez les quatre enseignants sera détaillée en 15.4

Les algorithmes de calcul sont vus par P_{+3} comme des outils au service de la résolution de problème. La manière est secondaire et P_{+3} donne généralement plusieurs versions des algorithmes. Ces outils de calcul jouent ainsi un rôle semblable à celui de la calculette qui est d'ailleurs utilisée lorsque les algorithmes n'ont pas encore été vus. La calculette est également utilisée comme outil de vérification et P_{+3} considère que si tout adulte a dans sa poche un téléphone portable-calculette, il est nécessaire d'apprendre aux élèves à se servir d'une calculette.

Pour P_{+3} , la difficulté de l'enseignement, tant en français qu'en mathématiques, est de faire des liens entre différentes notions pour les utiliser correctement. P_{+3} lie les algorithmes de calcul entre eux dans la succession des activités de troisième et de quatrième. Il met en évidence le lien de réciprocity entre addition et soustraction, au niveau des opérations et au niveau des algorithmes, et entre l'opération de la multiplication et de la division.

Parmi les difficultés pratiques, il mentionne essentiellement les rythmes différents des élèves et la nécessité d'arriver à ce que tous aient compris, sans que les plus rapides doivent trop attendre. P_{+3} pense donc que son enseignement des mathématiques doit s'adapter aux élèves. On pourrait même dire que le moteur de l'avancement est justement cette adaptation, tant au niveau d'une leçon, d'une séquence que de l'année puisque chaque plan de travail vise à combler les manques constatés durant les exercices du plan précédent.

P_{+3} pense que l'essentiel dans l'enseignement des mathématiques est que les élèves « mettent du sens dans ce qu'ils font », en particulier lorsqu'ils résolvent un problème ; qu'ils ne choisissent pas n'importe quelle opération mais qu'ils lisent correctement, repèrent ce qui est important et cherchent la question. Pour cela, il est important qu'ils acquièrent des méthodes de travail, particulièrement pour lire les énoncés mathématiques.

P_{+3} a peu de souvenirs de son passé d'élève. Il se souvient toutefois des fiches OP (voir 13.4.6.3) et les utilise parfois dans son enseignement. Il pense que l'enseignement des mathématiques a évolué vers une plus grande part de compréhension. Il voit d'ailleurs une évolution dans son propre enseignement puisqu'autrefois il montrait généralement une technique et demandait aux élèves de reproduire cette technique sur de nombreux exercices. Si cette façon de faire était simple pour lui, P_{+3} pense que ce n'était pas très efficace, surtout pour les élèves les moins à l'aise, et que les mêmes erreurs revenaient ensuite sans cesse, sans qu'il puisse vraiment les combattre. Toutefois, P_{+3} pense que l'enseignement évolue assez lentement et que les parents en particulier sont toujours rassurés par le fait de retrouver des éléments connus, comme les livrets ou la disposition en colonnes d'un algorithme. Un autre frein est également à voir du côté des enseignants des années suivantes car il sera exigé des élèves d'utiliser des procédures et des algorithmes standardisés. Il est à noter que Dominique fait également ce type de réflexion en position P_{+3} en classe dans le dialogue avec certains élèves quand il leur déclare que cette disposition doit être privilégiée car elle sera demandée en cinquième ou que les livrets seront exigés les années suivantes.

P_{+3} apprécie les moyens d'enseignement (ME) actuels. Ayant enseigné avec les moyens précédents, ses commentaires se font souvent sur le mode de la comparaison. Les ME sont « plus agréables », « moins rébarbatifs », « permettent d'aller plus vite et plus loin, même si les parents les trouvent moins structurés et avec moins de calculs ». Il estime justement que ces moyens moins structurés lui correspondent mieux car il déteste être sur des rails, même si la prise en mains de ces ME est difficile pour les enseignants. Toutefois, P_{+3} pense qu'il est nécessaire de donner des exercices d'entraînement et, pour ce faire, confectionne des feuilles de calculs qu'il donne chaque semaine.

Connaissances	Type de connaissance	Commentaire
Connaissance du plan d'études.	pCP/c	Les affirmations de P_{+3} sont exactes et les conséquences qu'il en tire sont correctes.
Utilité des livrets pour les élèves.	sCHM/c sCMC/c	P_{+3} connaît la nécessité des livrets. Les décisions qu'il souhaite prendre découlent de cette connaissance.
Usage de la calculatrice.	pCC/c pCP/c	Connaissance correcte de certains usages possibles de la calculatrice et de ce qui est prévu dans les ME et dans le plan d'études.
Devenir de l'usage de l'algorithme pour les élèves. Aspect utilitaire de cet algorithme.	sCHM/c pCP/c	P_{+3} sait ce que va devenir l'algorithme, en particulier en 5 ^{ème} . Les décisions qu'il souhaite prendre découlent de cette connaissance.
Connaissance de l'existence d'autres algorithmes de la multiplication, connaissance de certains de ces algorithmes.	sCMS/c pCP/c	P_{+3} cite d'autres algorithmes en en connaît certains. Il dit parfois utiliser ces algorithmes et être toujours ouvert à leur utilisation par les élèves.
Liens entre les opérations (réciprocité) et entre les algorithmes.	sCHM/c sCMC/f sCMS/s	Les liens entre les opérations sont corrects. En revanche P_{+3} étend ce lien aux algorithmes, ce qui est incorrect, en particulier pour la multiplication et la division (CMC fausses). Cependant P_{+3} ne fait pas certains liens entre les algorithmes, par exemple de la soustraction par rapport à l'addition (CMS superficielles).
Il est difficile de faire des liens entre les notions avec les élèves	pCE/c pCC/c	P_{+3} considère que cette difficulté se rencontre tant en mathématiques que dans d'autres branches.
Construction de l'avance dans le programme en comblant au fur et à mesure les difficultés des élèves.	pCC/f	Cela ne correspond pas à un plan d'études rédigé en terme de compétences.
Importance pour les élèves de mettre du sens dans le problème qu'on leur pose, importance d'apprendre à lire ces problèmes, importance du choix de l'opération.	pCP/c	Correspond au plan d'étude.
Connaissance des moyens d'enseignement actuels et passés.	pCP/c	P_{+3} a une connaissance globale fidèle de ces ME.

Tableau 24 : CME de Dominique manifestées au niveau +3

15.3.1.2 Niveau +2 : situation de construction

M_{+2} : M-Projet		P_{+2} : P-Constructeur	S_{+2} : situation de construction
---------------------	--	---------------------------	--------------------------------------

Les moments durant lesquels l'enseignant occupe la position P_{+2} ont été observés essentiellement lors de l'entretien préalable. Toutefois certaines réflexions sur la construction du thème, amenant parfois à des modifications du cours de la séquence, peuvent être relevées durant les leçons ou lors de brèves déclarations à l'issue d'une leçon. D'autre part un certain nombre de points qui poseront problème dans le déroulement de la séquence ne sont pas mentionnés par Dominique durant l'entretien *ante*. Comme ces points auront fait l'objet de discussion dans l'entretien *post*, il est parfois possible, en creux, de reconstituer à l'aide de ces déclarations, une posture de l'enseignant au niveau P_{+2} .

Pour l'ensemble de la séquence, P_{+2} envisage un certain nombre d'erreurs qu'il pourra observer (niveau -1). Les erreurs de livrets sont les principales erreurs anticipées par P_{+2} . Il

mentionne également les difficultés d'alignement et souhaite donc insister sur la mise en page par le biais des colonnes centaines, dizaines, unités. En cours de séquence (déclaration après la séance 6), il constate qu'il y a effectivement des difficultés de livrets, mais qu'il y a aussi des problèmes avec les zéros supplémentaires qui apparaissent au cours de la multiplication (dans 20x50 par exemple). Il ne s'agit pas ici d'un élément *a priori* du point de vue de la séquence d'enseignement, mais bien d'une adaptation de celle-ci au niveau +2.

Pour cette séquence, P₊₂ veut essentiellement insister sur la façon de faire et souhaite mettre de côté le plus possible les questions de livret. Comme ces livrets n'ont pas été revus depuis l'année précédente, il prévoit, pour toute la séquence, de laisser aux élèves la table de multiplication (table de Pythagore) figurant à la fin du livre de mathématiques.

Pour P₊₂ le but principal dans l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication est que les élèves sachent le faire, mais aussi ensuite qu'ils sachent l'utiliser lors de la résolution de problèmes.

Pour P₊₂ la multiplication est un raccourci d'une addition répétée. Cette affirmation apparaît à la fois avant la séquence, pendant et lors de l'entretien *post*. Même sollicité, il ne mentionne jamais d'autres représentations. Pourtant il a effectué en 3P avec ces mêmes élèves un grand nombre d'exercices d'aire de rectangles et il déclare que « les élèves ont tous compris l'utilité de la multiplication en prenant la ligne fois la colonne ». Cette apparente contradiction sera reprise en 15.3.3.1.

P₊₂ a planifié une séquence de six leçons pour traiter l'algorithme de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Si le découpage en leçons relève du niveau +2, le détail de la leçon considérée sera décrit en position +1. P₊₂ prévoit de démarrer sa séquence à partir d'un des rares exercices du livre de 4P qui permette de faire des multiplications par des nombres supérieurs à 10, *Sous Pli*¹⁴⁶, puis de revoir la multiplication à un chiffre en tableau et en colonnes (« les deux réponses doivent coïncider »), telle qu'effectuée l'année précédente. Il a planifié ensuite de faire des exercices de multiplication par 10 (« 7x10, puis augmenter progressivement ») pour rappeler qu'on ajoute un zéro dans ce cas et pour mettre l'accent sur ce zéro qui est souvent oublié. Pour ce faire, Dominique a prévu d'utiliser de « vieilles fiches de maths », en particulier la fiche OP32¹⁴⁷. P₊₂ a ensuite décidé de montrer tout d'abord un algorithme en tableau qui a déjà été vu avec ces élèves l'an passé pour la multiplication par un nombre à un chiffre, puis de passer à l'algorithme en colonne traditionnel. Il prévoit de laisser les élèves choisir s'ils préfèrent utiliser un algorithme ou l'autre, mais n'est pas très sûr de ce choix avant que la séquence ne débute. En ce qui concerne la gestion des retenues pour l'algorithme en colonnes, P₊₂ demandera aux élèves de ne pas les noter afin de ne pas mélanger les retenues provenant des deux lignes, cependant il craint que cette mise en mémoire ne pose problème et n'exclut pas de les faire noter au crayon et de les faire effacer après chaque ligne. P₊₂ n'a pas prévu que les élèves gardent une trace particulière de ces algorithmes autre que les exercices qui se trouveront dans leurs cahiers. Il envisage ensuite de distinguer entre les élèves qui « ont compris », à qui il donnera la fiche *Perforation*, et ceux qui n'ont pas compris avec lesquels il reprendra OP32.

P₊₂ prévoit d'adapter son rythme à l'assimilation des élèves. Il envisage de faire deux tests pour évaluer l'algorithme. Un premier sera axé sur la technique de l'algorithme, avec peut-être quelques petits problèmes, le second sera constitué de problèmes semblables à *Sous Pli*, mais avec une présentation différente. P₊₂ considère que l'apprentissage de l'algorithme

¹⁴⁶ Annexe 11.1.

¹⁴⁷ Annexe 12.4.

ne sera pas terminé à la fin de la séquence, mais qu'il faudra encore utiliser les trois algorithmes dans des problèmes où il s'agira de choisir la bonne opération.

Connaissances	Type de connaissance	Commentaire
Difficulté de l'algorithme : zéros supplémentaires introduits par les élèves.	sCMS/c	P se rend compte de la difficulté en position P_{+1} . Il modifie le cours de la séquence en position P_{+2} .
Pour multiplier par 10, on ajoute un zéro. Pour que les élèves le comprennent, on leur donne une série d'exemples qu'ils généraliseront.	sCMC/c sCMS/s	Analyse détaillée en 15.4.4.1
Difficulté de l'algorithme : le zéro de la deuxième ligne.	pCE/c	Analyse détaillée en 15.4.4.1
Dans l'algorithme, les chiffres doivent être correctement alignés. Cet alignement se fait grâce au placement des chiffres dans les colonnes des unités, des dizaines...	sCMS/c	Le lien est fait par P_{+2} entre un alignement graphique correct et sa justification mathématique. Le lien est également fait avec le travail dans les tableaux de nombres effectué précédemment.
Pour la multiplication en colonnes à deux chiffres, il est plus efficace de garder les retenues sur les doigts.	sCMC/c sCMS/f pCE/f	C'est exact et fonctionnel pour un expert. Ca ne l'est pas forcément pour un débutant. De plus le rôle et la signification de la retenue sont ainsi perdus.
Utilité des livrets pour l'algorithme	sCMC/c	Voir aussi ligne suivante.
Il ne faut pas mettre l'accent sur les livrets au moment du travail de l'algorithme et donc laisser une table de multiplication aux élèves	pCC/f pCE/c	Si cette séparation a du sens du point de vue de l'enseignement, elle n'en a pas du point de vue de l'apprentissage. Cela revient en effet à laisser croire que les livrets ne sont pas utiles ou moment où ils le sont justement.
Le but de l'algorithme est d'être efficace, particulièrement en situation de résolution de problème	pCP/c sCHM/c	Conforme au plan d'études.
L'algorithme en colonnes permet de gagner du temps pour des problèmes d'aire de rectangle du type de <i>Sous Pli</i>	sCMS/s	Pour des calculs d'aire de ce type (deux longueurs entières inférieures à 20), la décomposition du rectangle serait de fait plus efficace.
Il existe plusieurs algorithmes de la multiplication, en particulier en tableau et en colonnes. Du point de vue de l'efficacité le choix importe peu, en revanche l'algorithme en colonne devra être privilégié pour des raisons sociales.	pCP/c sCHM/c	Conforme au plan d'étude.
L'algorithme en tableau et l'algorithme en colonnes coïncident car ils donnent les mêmes réponses	sCMS/s	La correspondance est bien plus forte. Toutefois P_{+2} n'en mentionne par vraiment d'autre, même interrogé, sauf lors de l'entretien <i>post</i> où il dit que dans l'un comme dans l'autre on doit faire des croisements.
La multiplication est un raccourci d'une addition itérée. Elle n'est que cela	sCMC/c sCMS/s	Analyse détaillée en 15.4.5
Il n'est pas nécessaire d'institutionnaliser l'algorithme autrement qu'en en faisant plusieurs avec des élèves.	pCC/f pCE/f	Contraire aux indications méthodologiques fournies aux enseignants. Voir par exemple (Gagnebin <i>et al.</i> , 1998, p. 62; Tièche Christinat & Delémont, 2005).
P_{+2} prévoit un cheminement et une durée pour la séquence, mais il prévoit la pos-	pCC/c pCE/c	Ce qui n'était pas adéquat au niveau macro, l'est ici au niveau du thème

sibilité d'aménager l'un et l'autre selon ce qu'il observera des élèves.		
Choix des tâches proposées en fonction du but que P se fixe	pCP/c pCP/f sCMS/s	Les tâches choisies permettent d'atteindre partiellement les buts fixés. Toutefois ce n'est pas leur potentialité principale, et cette potentialité est justement ignorée par P ₊₂ . C'est en particulier le cas de <i>Sous Pli</i> qui permettrait de faire le lien avec la multiplication comme aire d'un rectangle, de OP32 qui ne travaille que partiellement la question des zéros ou du non-choix de OP29 qui permettrait de travailler l'algorithme en colonnes à partir de l'aire.
Connaissance du plan d'études et de ce qui doit être évalué, connaissance des tâches des moyens d'enseignement.	pCC/c	P ₊₂ a une connaissance exacte de ces éléments à l'échelle du chapitre.

Tableau 25 : CME de Dominique manifestées au niveau +2

15.3.1.3 Niveau +1 : situation de projet

M ₊₁ : M-Didactique	E ₊₁ : E-Réflexif	P ₊₁ : P-Projeteur	S ₊₁ : situation de projet
--------------------------------	------------------------------	-------------------------------	---------------------------------------

Les informations concernant la position P₊₁ ont été recueillies lors de l'entretien précédent la séquence. Nous ne retenons ici que ce qui concerne la leçon analysée, ou éventuellement ce qui pourrait influencer cette dernière. Toutefois, la leçon considérée étant la quatrième, comme prévu par P₊₂ lors de l'entretien, les considérations de P₊₁ sont encore peu précises et très rares. Ce niveau n'est pas prépondérant ici, contrairement à ce qui est décrit par Margolinas (2004, p. 111). Ceci met en évidence l'influence du moment des entretiens sur la focalisation des enseignants sur un niveau ou sur l'autre : niveau +3 et +2 dans des entretiens réalisés avant une séquence, niveau +1 dans des entretiens réalisés avant une leçon, comme chez Margolinas (2004).

P₊₁ prévoit de montrer la multiplication en tableau sur le modèle de ce qui a été fait à un chiffre et de monter ensuite l'algorithme en colonne. Il prévoit de placer les nombres dans le tableau afin que le parallèle puisse être fait aisément avec l'algorithme en colonnes. La nature de ce parallélisme n'est pas précisée.

Et puis la 4ème leçon, leur montrer, avec le tableau, donc comme ça...

The image shows handwritten mathematical work. On the left is a multiplication table with columns labeled '8', '20', and '84'. The first row is '3' and the second row is '20'. The products are: 3x8=24, 3x20=60, 3x84=84; 20x8=160, 20x20=400, 20x84=560. Arrows point from the '84' and '560' cells to the right. On the right is a columnar multiplication: 28 x 23 = 644. The '84' from the table is written below the '23' in the columnar multiplication, and the '560' is written below that, with a plus sign and a horizontal line above it. An arrow points from the table to the columnar multiplication.

Figure 46 : Multiplication en tableau et multiplication en colonnes écrites par Dominique lors de l'entretien *ante*.

Et d'insister pour mettre les dizaines en dessous. C'est pas très logique, mais ça permet d'avoir les deux en face. Donc ils ont la réponse là qui doit correspondre à celle-là et celle-ci à celle-là. Et puis après on peut faire l'addition et retrouver le... (Dominique, entretien *ante*)

P_{+1} a prévu de montrer ces algorithmes d'abord sur une grande feuille, puis au tableau noir, puis de faire faire une fiche d'exercice, si tout va bien. P_{+1} écrit sur sa fiche de préparation :

(4) Montrer à tous + 1 au T.N. fiche ex sion.

Figure 47 : Sujet de la leçon 4 écrit par Dominique sur sa feuille de préparation rédigée avant l'entretien *ante*.

Connaissances	Type de connaissance	Commentaire
Le zéro de la deuxième ligne.		Cette question n'apparaît pas spécifiquement pour P_{+1} à propos de la leçon considérée, mais au niveau P_{+2} , voir donc 15.3.1.2
Parallèle entre la multiplication en tableau et la multiplication en colonnes.	sCMS/c	Les connaissances sont correctes. Cependant à ce stade la nature du parallélisme n'est pas précisé.
Multiplication en tableau.	sCMS/s	L'absence de lien avec l'aire du rectangle et/ou le produit cartésien conduit P_{+1} à ne considérer le tableau que comme une disposition pour le calcul.
Multiplication en colonnes.	sCMC/c	La connaissance de la technique de l'algorithme est correcte.
Il faut s'adapter au rythme des élèves.	pCC/c pCE/c	Ce qui n'était pas adéquat au niveau macro, l'est ici au niveau du projet de leçon.

Tableau 26 : CME de Dominique manifestées au niveau +1

15.3.1.4 Niveau 0 : situation didactique

M_0 : M-Apprentissage	E_0 : Elève	P_0 : Professeur	S_0 : situation didactique
-------------------------	---------------	--------------------	------------------------------

Les moments durant lesquels le professeur se projette en situation P_0 pour la leçon 4 sont rares durant l'entretien qui précède l'ensemble de la séquence.

Pour la multiplication en colonnes, P_0 a prévu de reparler à chaque fois des colonnes avec centaines, dizaines et unités.

D'autre part, il a prévu de pallier les erreurs ou les incertitudes de livrets en laissant certains élèves utiliser la table de multiplication de leur livre.

P_0 a prévu, pour la multiplication en tableaux, d'insister auprès des élèves pour que les dizaines soient notées à la deuxième ligne. Il est conscient que « ce n'est pas très logique » mais il souhaite pouvoir faire le parallèle avec l'algorithme en colonnes.

Connaissances	Type de connaissance	Commentaire
L'algorithme en colonnes peut être placé dans des colonnes CDU.	sCMS/c	Connaissance exprimée au niveau P_{+2} qui est ici prévue au niveau des interactions didactiques.
Il faut laisser certains élèves se référer à leur table de multiplication.	pCC/f pCE/c	Connaissance exprimée au niveau P_{+2} qui est ici prévue au niveau des interactions didactiques.
Lien multiplication en tableaux-multiplication	sCMS/s	Le fait que les lignes doivent être inversées mais pas les colonnes n'est pas expliqué par D. En fait on a là une nouvelle indication que l'algorithme en colonnes comme raccourci de la distributivité (et donc

en colonnes.		du tableau) grâce à l'utilisation des retenues est une connaissance dont D ne dispose pas.
Il faut s'adapter au rythme des élèves.	pCC/c pCE/c	Ce qui n'était pas adéquat au niveau macro, l'est ici au niveau des interactions didactiques.

Tableau 27 : CME de Dominique manifestées au niveau 0

15.3.1.5 Niveau -1 : situation d'apprentissage

M ₁ : M-Référence	E ₁ : E-Apprenant	P ₁ : P-Observateur	S ₁ : situation d'apprentissage
------------------------------	------------------------------	--------------------------------	--

Pour ce qui est de la part d'observation, P₁ a envisagé un certain nombre de difficultés pouvant être observées chez les élèves : oubli du zéro à la deuxième ligne, erreurs de livrets, problèmes d'alignement, difficultés dans la gestions des retenues, placement des dizaines et des unités dans la multiplication en tableau. Le traitement de ces difficultés est envisagé dans les niveaux supérieurs.

P₁ ne mentionne pas certaines difficultés : la question de l'ordre des nombres multipliés, ni plus généralement la commutativité de la multiplication, les croisements des produits partiels ou plus généralement la distributivité. L'entretien *post* confirme qu'il n'était pas conscient de ces difficultés avant la séquence. La question de savoir quelle est sa perception à l'issue de la séquence sera reprise en 15.3.3.1.

P₁ affirme à plusieurs reprises qu'il observera les élèves et qu'il adaptera son itinéraire en fonction de ses observations. Il parle de « voir si c'est en ordre », « voir comment ils assimilent ».

Connaissances	Type de connaissance	Commentaire
Difficultés des élèves.	pCE/c sCME/c sCMS/f	La liste des difficultés probables des élèves au sujet de l'apprentissage de l'algorithme est correcte. En revanche les difficultés suscitées par la situation matérielle créée par P ne sont pas perçues (voir 15.3.2)
Aucune mention de la possibilité d'inverser les facteurs, ni du lien entre cette inversion dans l'algorithme en colonnes et les totaux en ligne ou en colonne dans la multiplication en tableau.	sCMS/f	L'absence de mention dans l'entretien ante, l'absence de prise en compte en classe, les réponses de P lors de l'entretien post permettent de considérer cette connaissance comme non mobilisable.

Tableau 28 : CME de Dominique manifestées au niveau -1

15.3.1.6 Résumé de l'analyse descendante

La détermination successive des milieux par l'analyse descendante ainsi que les connaissances successivement mises en jeu peuvent être rassemblées dans le tableau figurant en Annexe 16, ou, de façon plus synthétique dans la Figure 48. Cette représentation schématique permet de visualiser la déclinaison des connaissances pointées et leur influence sur la mise en place de la situation S₀.

La pertinence des connaissances ne peut être analysée à chaque niveau, elle ne peut surtout pas l'être *a priori*. Ces critères de pertinence seront donc repris dans l'analyse *a posteriori* en 15.3.3.3.

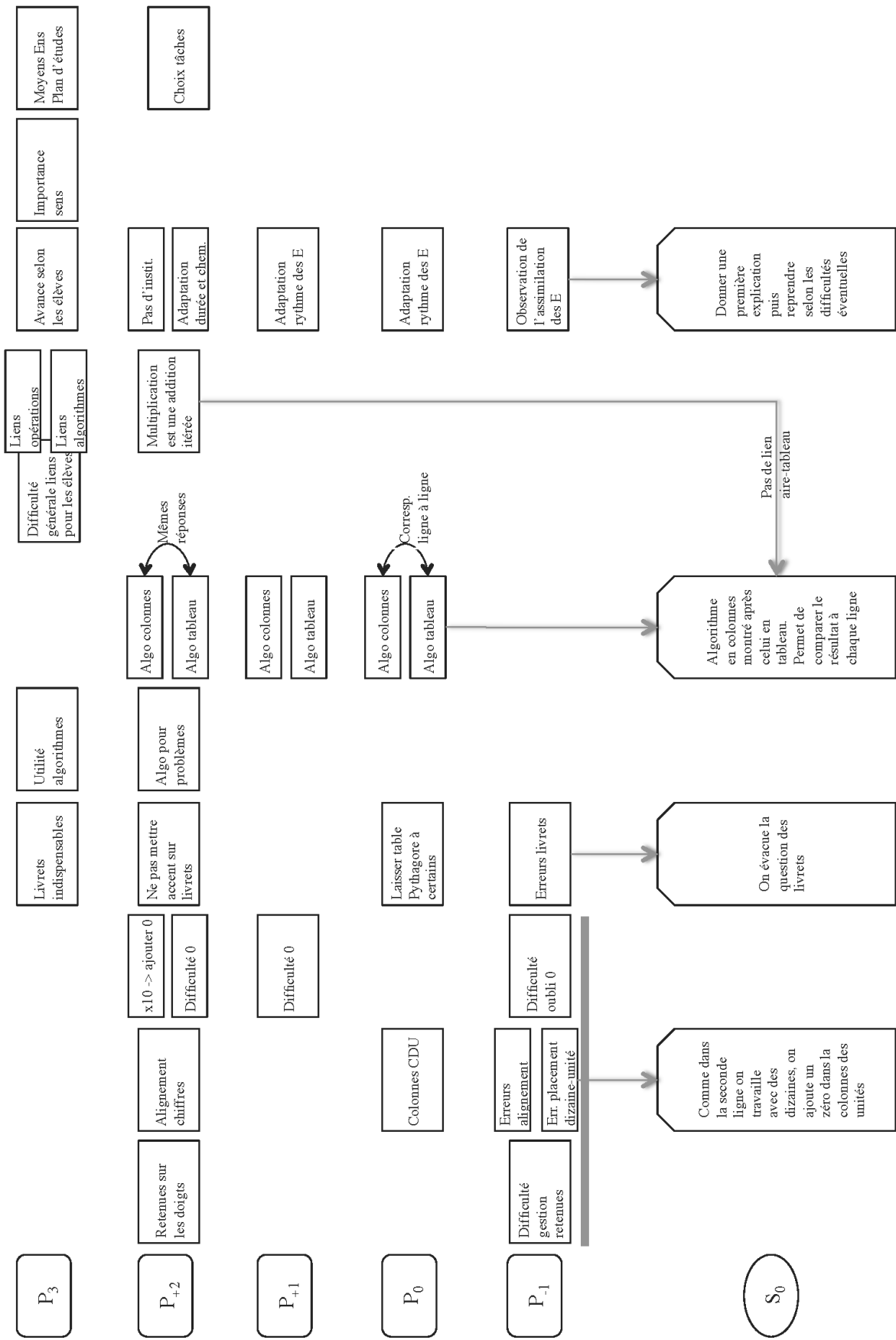


Figure 48 : Connaissances mathématiques pour l'enseignement relevées lors de l'analyse descendante de l'épisode 1-4 et influence sur la détermination de la situation S₀

15.3.2 Analyse ascendante du point de vue de l'élève

Pour expliquer la technique de la multiplication par un nombre à deux chiffres, le professeur n'a pas prévu de phase adidactique. Toutefois il s'agit bien d'une situation didactique et l'enseignant a installé un milieu pour cette situation. Ce milieu de la situation didactique S_0 a été déterminé par l'analyse descendante du point de vue de l'enseignant. Le milieu matériel auquel l'élève est effectivement confronté va déterminer, du point de vue de l'élève, une situation didactique S_0 .

Selon Margolinas, Brousseau considère « le milieu comme un concept nécessaire pour prendre en compte *le fonctionnement d'une situation didactique quelconque*¹⁴⁸, [...] dans une problématique qui n'est plus exclusivement adidactique » (1995, p. 90). Margolinas utilise donc le modèle de structuration du milieu pour analyser des problèmes classiques ou des réalisations didactiques très ordinaires (1995, p. 94). C'est ce que cette analyse ascendante du point de vue de l'élève se propose de réaliser.

15.3.2.1 Niveau -3 : situation objective

M_{-3} : M-Matériel	E_{-3} : E-Objectif		S_{-3} : situation objective
-----------------------	-----------------------	--	--------------------------------

Selon Margolinas (1995, p. 99) le milieu matériel M_{-3} pour E_{-3} doit contenir les éléments nécessaires pour entrer dans la question. La situation est non finalisée (Comiti *et al.*, 1995, p. 106). M_{-3} est donc constitué de la description “brute” de l'algorithme donnée par l'enseignant sur un exemple et par les connaissances anciennes et, en principe, mobilisables d'un élève générique.

Connaissances de E_{-3}

Ces connaissances ne sont pas formalisées ou verbalisées par E_{-3} , mais elles sont disponibles en vue d'une utilisation. Dans les faits, cette disponibilité est variable selon les connaissances et les élèves, mais dans le cadre d'une analyse *a priori* d'un élève générique, ces connaissances sont considérées comme disponibles.

E_{-3} sait effectuer une addition en colonnes.

E_{-3} connaît les tables de multiplication jusqu'à 9×9 .

E_{-3} sait que pour multiplier par 10, on ajoute un zéro. Cette “règle du zéro” a été rappelée de multiples fois et “justifiée” par induction à partir de produits connus (voir 3.5). Elle est complètement naturalisée pour les élèves.

E_{-3} sait que les nombres (implicitement inférieurs à 100) peuvent être décomposés en dizaines et unités, soit dans un tableau comportant deux colonnes, soit dans une écriture en ligne (rappelée sur l'exemple $24=20+4$). En particulier dans une nombre entre 11 et 19, le 1 « c'est pas un, c'est dix ».

E_{-3} sait qu'on peut effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre dans un tableau. Le résultat s'obtient en sommant en lignes les cases du tableau (rappelé en leçon 2 sur plusieurs exemples, dont 14×5 ou 248×6)

¹⁴⁸ L'italique est de Margolinas

$$14 \times 5 = \begin{array}{r|l|l|l} \times & 10 & 4 & \\ \hline 5 & 50 & 20 & 70 \\ \hline & & & \end{array}$$

Figure 49 : Multiplication en tableau 14x5 effectuée sur affiche lors de la leçon 2.

Pour $E_{3,3}$, on peut aussi effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre en colonnes. Le résultat s'obtient en multipliant successivement (du haut vers le bas) les chiffres du premier nombre par le nombre placé sur la deuxième ligne, en partant de la droite ; en notant le chiffre des unités du nombre obtenu, en gardant le chiffre des dizaines en retenue sur les doigts afin de l'ajouter au résultat de la multiplication suivante.

Figure 50 : Multiplication en colonnes 14x5 effectuée sur affiche lors de la leçon 2. Les flèches et les colonnes sont tracées par l'enseignant sur les affiches, mais jamais par les élèves dans leur cahier ou sur leurs fiches.

Description des algorithmes pour 12x17

A ce niveau, la situation n'est pas finalisée. E_3 ne considère donc la description donnée par l'enseignant et pas les justifications proposées (niveau -2) ni le caractère générique de l'exemple donné.

Algorithme en tableau pour 12x17

Pour effectuer la multiplication 12x17 en tableau, on place le second nombre 17 à la verticale dans le tableau en mettant d'abord les unités, 7 puis les dizaines, 10. Les cases sont ensuite remplies par les produits, comme pour la version à un chiffre. Les sommes sont faites en ligne : $70+14$ et $100+20$. Le premier résultat, 84 correspond à la multiplication 10×7 et le second, 120 à la multiplication 12×10 .

Figure 51 : Multiplication en tableau 12x17 effectuée sur affiche lors de la leçon 4

Description de l'algorithme en colonnes pour 12x17

La multiplication 12x17 en colonnes ressemble à celle en tableau. On place 12 et 17 alignés dans des colonnes appelées d (dizaines) et u (unités). On ne s'occupe d'abord pas du 1 de 17 (cache) et on effectue la multiplication à un chiffre. On passe ensuite à la ligne suivante. On effectue la multiplication en colonnes 12x1, mais auparavant, on ajoute un zéro. On effectue ensuite l'addition en colonnes des deux lignes précédentes.

Figure 52 : Multiplication en colonnes 12x17 effectuées sur affiche lors de la leçon 4

Lien entre les deux algorithmes pour 12x17

La première ligne du tableau donne le même résultat que la première ligne de la disposition en colonnes, il en va de même pour la deuxième. La somme finale est identique.

Figure 53 : Lien entre les deux façons d'effectuer la multiplication 12x17, effectuées sur affiche lors de la leçon 4

15.3.2.2 Niveau -2 : situation de référence

M ₂ : M-Objectif	E ₂ : E-Agissant	S ₂ : situation de référence
-----------------------------	-----------------------------	---

L'élève E₂ est un élève agissant. Pour décrire S₂, il faut trouver un enjeu dont la conclusion puisse être obtenue dans l'interaction de l'élève agissant avec le milieu objectif (Margolinas, 1995, p. 99). Cet enjeu peut donc être de "faire la multiplication" en même temps que l'enseignant qui donne son explication en interrogeant les élèves à chaque étape.

Le milieu M₂ est alors constitué de la situation S₃ ainsi que des explications et connaissances qui s'y trouvent. Il faut y ajouter les justifications que donne l'enseignant et les connaissances du "métier d'élève" de E, son habitude d'interagir avec cet enseignant et de

répondre aux attentes d'un enseignement par ostension. Ces réponses pourront parfois être la manifestation d'une compréhension des explications de l'enseignant, parfois un effet Topaze... Les réponses possibles peuvent être déterminées *a priori* à partir des éléments du milieu.

La multiplication 12×17 en tableau est présentée comme une extension de la procédure vue l'année précédente. Selon ce qui est dit par l'enseignant, tant durant cette explication que lors des entretiens, il s'agit là d'une disposition de calcul. Le lien avec le produit cartésien ou l'aire du rectangle (lien dont l'enseignant n'est pas conscient) n'est jamais établi. Chaque produit est calculé pour lui-même. Pour E_2 , la "règle du zéro" est appliquée mécaniquement et la somme par ligne, écrite en ligne à la leçon 2, semble évidente. E_2 applique cet algorithme en tableau (à une ligne) de façon automatique. Le fait de décomposer le second facteur 17 en 10 et 7 et de créer ainsi une deuxième ligne ne sera pas remis en question. Cette remise en question sera d'autant plus fermée que l'enseignant a prévu de mettre les unités avant les dizaines, en ne le motivant auprès de élèves que par une utilité future pour la multiplication en colonnes. A la suite des deux sommes en ligne, E_2 , placé dans un contexte additif effectuée par analogie une addition. Il est toutefois possible qu'une incitation de l'enseignant soit nécessaire afin de lui faire faire une opération (il pourrait laisser le tableau en l'état). L'apparition d'une multiplication semble ici peu probable, ne serait-ce que parce que les nombres en jeu (84 et 120) sont plus difficiles à multiplier que les nombres de départ.

En revanche les élèves vont pouvoir présenter des réactions différenciées quant au lien entre la multiplication en tableau et la multiplication en colonnes et quant au zéro de la deuxième ligne. Le cas est ici différent de celui des bifurcations didactiques décrites par Margolinas (Comiti *et al.*, 1995) puisque la situation S_3 est ici unique, mais que la bifurcation est occasionnée par l'élève E_2 agissant sur le milieu matériel M_3 .

La multiplication en colonnes de 12×17 est présentée immédiatement après celle en tableau et disposée à côté de cette dernière. Pourtant, ni le tracé des colonnes pour les dizaines et les unités, ni le fait d'écrire deux lignes en séparant les deux chiffres du 17, ni la façon d'effectuer ces deux lignes n'est rapprochée de la multiplication en tableau. Les deux lignes et la séparation du 17 sont simplement énoncées par l'enseignant et la façon d'effectuer chaque ligne est ramenée à la multiplication en colonnes par un nombre à deux chiffres. Le parallèle est fait exclusivement en comparant le résultat de chaque ligne à la somme obtenue dans le tableau. Face à cette présentation l'élève agissant E_2 va pouvoir investir quatre situations, notées en colonnes dans le Tableau 29. Il peut soit utiliser les mêmes règles d'action que celles énoncées par l'enseignant (correspondance ligne à ligne), soit utiliser les résultats de chaque case du tableau pour établir la ligne correspondante (correspondance produit à produit), soit encore ne pas effectuer la multiplication en colonnes et écrire directement le résultat de chaque ligne, voire le résultat final (utilisation directe du tableau). Il peut également ne faire aucune correspondance et effectuer les deux opérations de façon indépendante (algorithmes indépendants).

Pour ce qui est du zéro de la deuxième ligne, selon l'explication de l'enseignant, il faut « faire 12 fois 1, mais comme il ne s'agit pas de 1, mais de 10, il faut ajouter un zéro ». Ici trois situations S_2 semblent possibles. Elles sont notées en ligne dans le Tableau 29. La première serait d'appliquer mécaniquement la "recette" en mettant le zéro et en effectuant la suite de la multiplication (application recette), la deuxième serait de mettre en rapport ce zéro avec ceux figurant comme dernier chiffre dans chaque produit de la deuxième ligne du tableau (correspondance des zéros), la troisième serait de prendre en compte l'explication de l'enseignant, et donc de rajouter un zéro à chaque fois que, dans la multiplication en colonnes, le chiffre représente une dizaine (ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines).

En croisant les réactions possibles sur le lien entre les deux algorithmes et celles sur le zéro, il serait donc possible d’imaginer 12 situations :

		Attitudes par rapport au lien entre les deux algorithmes			
		Correspon- dance ligne à ligne <i>L</i>	Correspon- dance pro- duit à pro- duit <i>P</i>	Utilisation directe du tableau <i>D</i>	Algo- rithmes indépen- dants <i>I</i>
Attitudes par rapport au zéro de la deuxième ligne	Application recette <i>r</i>	$(S_{-2})_r^L$	$(S_{-2})_r^P$	$(S_{-2})_r^D$	$(S_{-2})_r^I$
	Correspondance des zéros <i>z</i>	$(S_{-2})_z^L$	$(S_{-2})_z^P$	$(S_{-2})_z^D$	$(S_{-2})_z^I$
	Ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines <i>a</i>	$(S_{-2})_a^L$	$(S_{-2})_a^P$	$(S_{-2})_a^D$	$(S_{-2})_a^I$

Tableau 29 : Situations S_{-2} possibles.

Dans le tableau, chaque situation correspond à une des attitudes possibles par rapport au lien entre les algorithmes (codée en exposant) à une attitude possible par rapport au zéro (codée en indice). Les cases grisées correspondent à des situations incohérentes. Quelques situations sont décrites ci-dessous.

La situation $(S_{-2})_r^L$ représente la situation d’un élève E_{-2} qui verrait une correspondance entre chaque ligne de la multiplication en colonnes et le résultat de chaque ligne du tableau et qui, au moment de commencer la deuxième ligne placerait un zéro sans s’interroger sur la signification de ce zéro. La situation est celle d’un élève qui mettrait en correspondance chaque case du tableau avec un produit partiel en colonnes, remarquerait alors que les lignes de l’algorithme en colonnes sont déjà le résultat d’une addition, et verrait également que chaque produit de la deuxième ligne du tableau se termine par zéro, voire que ce zéro est “ajouté” puisqu’on multiplie par un nombre se terminant par 0, et donc que ce zéro est “ajouté” de la même manière à la deuxième ligne de la multiplication en colonnes. La situation est paradoxale. D’une côté elle respecte la visée de l’enseignant déterminée par l’analyse descendante, puisqu’elle suppose un élève effectuant une correspondance ligne à ligne et appliquant la “règle du zéro”. D’un autre côté, elle pourrait conduire cet élève à “ajouter un zéro” à chaque fois qu’il travaille avec des dizaines, c’est à dire pour chaque produit partiel de la deuxième ligne, mais aussi pour le deuxième produit de la première ligne. Cette situation est donc mathématiquement incohérente, mais c’est celle qui correspond le mieux au contrat didactique.

D’autres situations sont incohérentes. Par exemple, pour $(S_{-2})_a^P$, si l’élève fait une correspondance entre chaque case de la multiplication en tableau et le produit partiel corres-

pendant de la multiplication en colonnes, il ne pourra pas appliquer la “recette du zéro” directement et sans se poser de question. Etant donné que ces situations, en plus d’être incohérentes ne correspondent pas aux intentions de l’enseignant déterminées par l’analyse descendante, elles sont très peu probables, voire impossibles. Ces cases sont grisées dans le tableau ci-dessus.

En revanche une situation n’apparaît pas dans la combinaison des possibilités, puisque E_{-2} peut recopier directement les lignes du tableau sans se préoccuper du zéro. Cette situation est nommée $(S_{-2})_*^D$. Le nombre des situations S_{-2} possibles est ainsi de six.

15.3.2.3 Niveau -1 : situation d’apprentissage

M_{-1} : M-Référence	E_{-1} : E-Apprenant	P_{-1} : P-Observateur	S_{-1} : situation d'apprentissage
------------------------	------------------------	--------------------------	--------------------------------------

L’élève E_{-1} est un élève apprenant. A partir de l’exemple qui se déroule sous ses yeux, il se prépare à effectuer d’autres multiplications avec d’autres nombres. Il peut s’agir d’une généralisation (faire la même chose avec d’autres nombres), ou de la formulation de règles d’action. L’enseignant favorise ce premier transfert en proposant, immédiatement après la première (double) multiplication, d’en effectuer une deuxième, sur le même modèle, en collectif. Pour les situations $(S_{-1})_r^I$; $(S_{-1})_a^L$; $(S_{-1})_a^I$; $(S_{-1})_*^D$, ce niveau ne se distingue pas du niveau -2. On peut donc considérer que dans ces branches de bifurcations didactiques, le niveau -1 est absent et on est donc dans une branche nildidactique ((Margolinas, 2004, p. 65), voir 6.2.1). On ne trouve donc que deux situations : $(S_{-1})_r^L$, généralisation de la correspondance ligne à ligne et placement du zéro sans interrogation, et $(S_{-1})_z^P$, formulation de règles d’action par la correspondance terme à terme et correspondance des zéros.

15.3.2.4 Niveau 0 : situation didactique

M_0 : M-Apprentissage	E_0 : Elève	P_0 : Professeur	S_0 : situation didactique
-------------------------	---------------	--------------------	------------------------------

Selon Comiti, Grenier et Margolinas (1995), on trouve dans la situation S_0 les réponses des élèves aux questions posées. Dans le cas qu’elles analysent, « la situation S_0 comprend une phase de conclusion, qui peut être de validation (gestion par E_0) soit d’évaluation (gestion par P_0), elle comprend également une phase d’institutionnalisation pilotée par P_0 et partagée par E_0 » (Comiti *et al.*, p. 106).

Dans le cas de l’explication ostensive d’un algorithme, S_0 est la réalisation d’autres multiplications. En effet, c’est lors de cette réalisation qu’a lieu la réponse de l’élève à la question posée, la validation et/ou l’évaluation. Quant à l’institutionnalisation, l’enseignant n’en a pas prévu, ou plus exactement il considère que ce sont les multiplications effectuées qui constituent cette institutionnalisation.

Cela pose le problème de la délimitation de l’épisode analysé ici, dans la mesure où cette réalisation de la situation S_0 est à la fois déterminée par les situations S_{-3} à S_{-1} , mais où il faut élargir cette situation aux énoncés des multiplications à effectuer. Nous considérons ici les premières multiplications effectuées, en collectif ou en individuel, suite à la première explication. Celles-ci sont au nombre de neuf.

Ces multiplications à effectuer sont toutes des multiplications d’un nombre à deux chiffres par un autre nombre à deux chiffres, le second nombre est toujours compris entre 12 et 19. La multiplication en tableau est placée à gauche, celle en colonnes à droite. Les lignes

correspondantes sont placées côte à côte. La multiplication en tableau doit être effectuée en premier.

Là encore E_0 peut investir six situations déterminées par celle des niveaux inférieurs : $(S_0)_r^L$; $(S_0)_r^I$; $(S_0)_z^P$; $(S_0)_a^L$; $(S_0)_a^I$; $(S_0)_*^D$. Elles seront résumées dans la Figure 54 ci-dessous.

15.3.3 Démultiplication de la situation S_0

La détermination de la situation S_0 du point de vue de l'élève fait ainsi apparaître six situations. Une d'entre elle semble correspondre à la situation S_0 . Cette correspondance n'est toutefois pas complète puisque le fait d' « ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines » n'est appliqué par l'enseignant que pour le premier produit partiel de la seconde ligne de l'algorithme en colonnes.

En terme de bifurcations didactiques, on ne peut donc considérer aucune branche comme principale ; toutes les branches sont donc marginales. De fait, la situation matérielle mise en place ne peut pas conduire à la situation didactique souhaitée par l'enseignant.

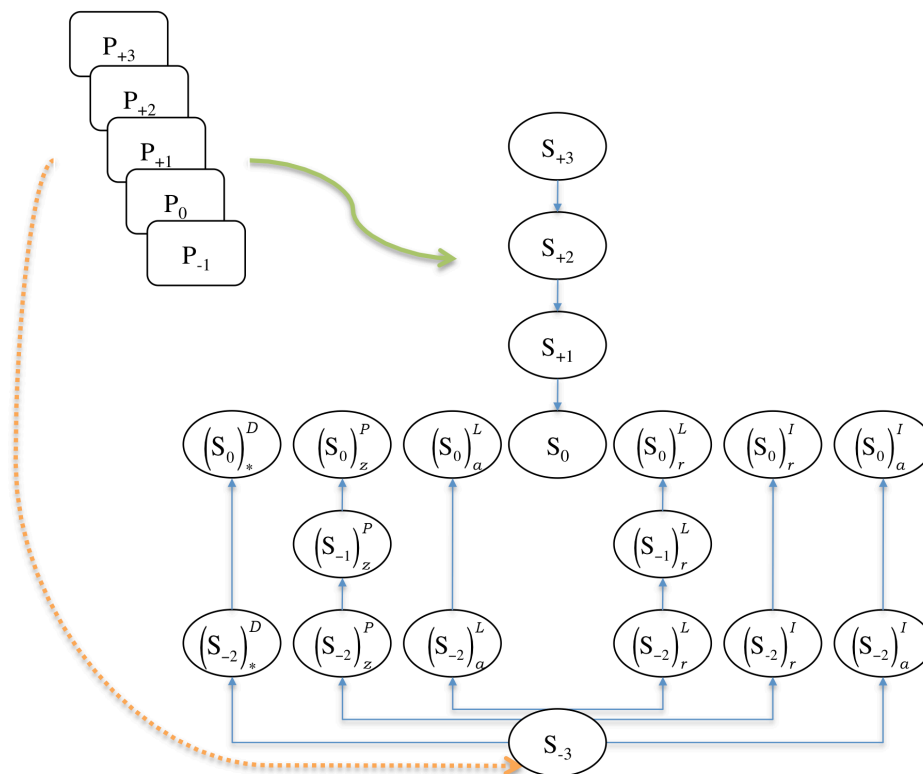


Figure 54 : Détermination des situations successives par analyse descendante et analyse ascendante.

Dans chacune de ses positions, P installe une situation de S_{+3} à S_0 . La situation S_0 est donc la situation déterminée du point de vue de l'enseignant (flèche épaisse). Mais c'est aussi l'enseignant qui met en place le milieu matériel (flèche pointillée). Et c'est ce milieu matériel qui va permettre la démultiplication des situations didactiques du point de vue de l'élève. Il s'agit donc dans un premier temps d'analyser *a posteriori* le déroulement du passage étudié à partir de la grille de lecture que constitue la double analyse *a priori*, puis dans un deuxième temps d'analyser les situations de niveau 0 rencontrées en les comparant avec les situation

déterminées *a priori* et enfin, dans un troisième temps de déterminer si les CME de l'enseignant peuvent expliquer une partie des phénomènes observés.

15.3.3.1 Analyse *a posteriori* de l'épisode 1-4

La structuration du milieu et la détermination des situations du point de vue de l'enseignant et du point de vue de l'élève permettent d'analyser le déroulement de l'épisode considéré.

Le début de l'épisode se déroule conformément à ce que Dominique avait prévu. Cette première partie est donnée ici telle qu'apparaissant dans le résumé narrativisé du synopsis (Annexe 15.1).

D fait venir les élèves autour de la table et leur dit que ce qui va être fait aujourd'hui est très important. Il rappelle qu'il a été vu que quand les nombres avaient des dizaines et des unités, ils pouvaient être décomposés. Il fait faire la décomposition de 24 sur l'affiche, puis d'autres nombres par oral.

D rappelle que le problème de "sous pli" était qu'on avait deux nombres avec dizaines et unités. Il prend l'exemple de $17 \times 12 = (10+7) \times (10+2)$ et propose d'utiliser une grille comme EJe l'avait fait. Il trace une grille (voir Figure 55) et place 12 (horizontalement) et 17 (verticalement avec 7 en haut). Il justifie ce placement par le fait que cela va aider pour la multiplication en colonnes. Il effectue la multiplication (de gauche à droite) avec l'aide des E (en rappelant pour le 10×10 que quand on a des dizaines on ajoute un zéro) et écrit les produits partiels en ligne (après les avoir partiellement mis en évidence par des couleurs dans la grille) sous la forme $12 \times 7 = 84$ et $12 \times 10 = 120$. Il demande ce qu'il faut faire ensuite et sur suggestion de EAl, il additionne 84 et 120.

D annonce qu'il est temps de passer à "la grande révélation", comment on fait pour multiplier en colonnes. EJe dit que ça va être la même chose, ce que D confirme. Après un instant d'hésitation (ordre des termes), D écrit la multiplication et trace les colonnes nommées "u" et "d". Il dit qu'il va commencer à travailler avec les unités et cache le 1 de 17. Il dit que c'est ce que les E savent faire. Il fait la première multiplication en dessinant des flèches vers le bas et fait remarquer aux élèves qu'on retrouve 84. Il le met en évidence par une flèche. Il dit qu'il faut encore faire $12 \times \dots$. Les E disent 1, mais D leur fait dire 10. D rappelle que, quand on travaille avec les dizaines, il faut ajouter un zéro. Il pose le zéro en couleur en disant qu'on fait fois 10 et non fois 1, puis dit deux fois un, deux puis une fois un, un. Là encore il trace une flèche entre les deux 120. Il effectue l'addition. Les E remarquent que c'est la même chose.

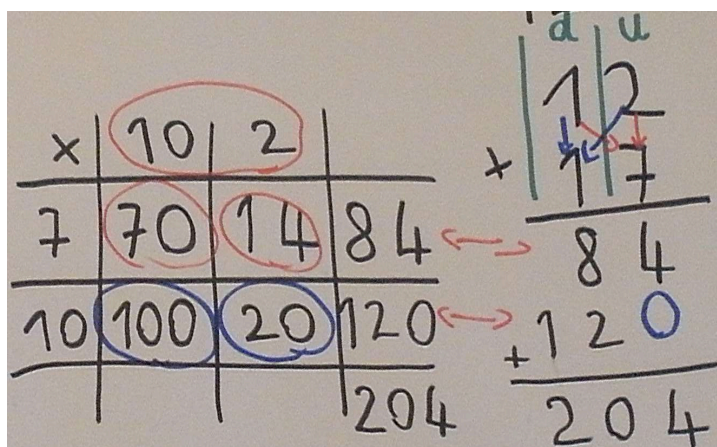


Figure 55 : Multiplication en tableau et multiplication en colonnes réalisées sur affiche par Dominique.

A ce moment de l'explication, la situation S_0 envisagée par l'enseignant semble être identique à celle des élèves. C'est alors qu'intervient EAr.

59. EAr: Mais pourquoi là on fait, euh, (inaudible), là on a fait, euh, deux fois dix.
60. D: Mm Mm...
61. EAr: Mais pourquoi là on fait une fois un? Alors pas par exemple fois dix?
62. EJu: Parce qu'après y a plus qu'à ajouter un zéro.
63. EAr: Ah parce qu'on a...
64. D (l'interrompt): Mais là, alors, si je mets comme ça. Je vais essayer de mettre avec des couleurs pour que tu voies ce que ça donne. On a fait deux fois sept.
65. EAr: Mm Mm...
66. D: D'accord? C'est la réponse qui est là. (D entoure le 14 dans la grille).
67. EAr: Mm Mm...
68. D: Comme ça (D redessine la flèche descendante du 2 vers le 7). Ca joue?
69. EAr: Mm Mm...
70. D: Ensuite on a fait une fois sept, mais c'est pas une fois sept, c'est... Ca ça vaut combien, celui-là (D pointe le 1 de 12)?
71. E: Dix fois sept.
72. EAr: C'est dix.
73. D: C'est dix! Donc dix fois sept, ça donne quel résultat là-dessus? (D montre la grille)
74. EAr: Septante.
75. D: Donc c'est lequel?
76. EAr: Septante là (EAr montre le 70 de la grille).
77. D: D'accord (D entoure en rouge le 70).
78. EJe: Mais là on avait mis un zéro, mais là... (EJe montre sur la multiplication en colonne le 0 coloré puis la colonne des dizaines de la multiplication en colonnes)
79. EMy (en arrière plan): Et puis y avait encore la dizaine...
80. D: Et puis après, on a travaillé avec la dizaine, donc on a fait deux fois (D retrace la flèche descendante du 2 vers le 1 du 17)...
81. E: Dix.
82. D: Ca donne quel résultat?
83. EAr: Vingt.
84. D: Donc il est où?
85. EJu: Euh, là (EJu montre le 20 de la grille et D l'entoure).
86. D: Celui-là. Et pour terminer, on a dû faire... (D retrace la flèche descendante du 1 vers le 1)
87. E: Dix fois dix.
88. D: Et le résultat, c'est celui-là (EJu montre le 100 de la grille et D l'entoure). Donc quand on multiplie (D montre la multiplication en colonnes) comme ça, ça fait combien de calculs?
89. EAl: Quatre.
90. D: Quatre, sans compter l'addition qu'on a à la fin (D montre l'addition). On est d'accord?
91. Les élèves acquiescent mais EAr semble bouder.

L'intervention d'EAr (59 et 60) révèle brusquement qu'au moins un élève ne parvient pas à suivre la démarche proposée par l'enseignant. Plus précisément, EAr veut appliquer la règle donnée par l'enseignant, assortie de l'explications de cette règle : on met un zéro parce qu'on travaille avec les dizaines. Il se trouve donc dans la situation $(S_0)_a^L$. Cette situation ne correspond pas à la situation S_0 puisque EAr veut appliquer la règle « ajouter un zéro quand on travaille avec les dizaines » à tous les produits partiels dans lesquels on travaille avec des dizaines (voir 15.3.2.2). Comme il constate que EAr dans sa question décompose chaque produit, Dominique va s'appuyer sur la multiplication en tableau. Il pourrait à ce moment-là don-

ner une correspondance produit par produit et indiquer la correspondance des zéros, c'est à dire se placer en situation $(S_0)_z^P$, mais il choisit de se contenter de désigner les correspondances (interventions 66, 73-75, 82-85 et 88) et de constater qu'il y a quatre "calculs" (88-90). Il se place donc dans la situation $(S_0)_a^P$, situation dont l'analyse ascendante nous avait pourtant montré qu'elle était impossible. Les causes de ce choix seront discutées en 15.3.3.3 après l'examen de la suite du déroulement. Le cheminement est donné sous la forme narrativisée du synopsis, les interventions significatives sont données sous forme de transcription et sont suivies de l'analyse.

D demande aux élèves de proposer un calcul à faire sur la plaquette. EJu propose quatre fois... mais D refuse et d'autres E propose 17x14, 17x20 et finalement D choisit 17x19. D fait placer les nombres dans la grille. EJe demande pourquoi on inverse et D répond que cela permet d'avoir les égalités en face de la multiplication en colonnes. D dit qu'il faut maintenant savoir les livrets et que c'est là qu'est le problème. D remplit les cases de la grille en suivant les indications des élèves. Les additions horizontales sont effectuées sans difficulté. L'addition finale est laissée de côté.

D effectue ensuite la multiplication en colonnes en dialogue avec les élèves. Au moment où D demande de mettre le zéro au début de la deuxième ligne, EAr demande pourquoi on le met.

123. D: Oui? Donc je commence, je peux commencer directement par mettre mon zéro. D'accord, EAr?
124. EAr: Mmm...
125. D: T'es sûr?
126. EAr: Mm, non. Mais pourquoi est-ce qu'on met le zéro là?
127. D: Ben parce que, si je fais 7 fois 10, le zéro, il va dans les?
128. EAr: Ben les unités.
129. D: Donc on met le zéro dans les?
130. EAr: (hésite) z'unités.
131. D: On est d'accord?
132. EAr: Mais là, ça a pas fait 7 fois 10!
133. D: Ben si, parce que ça (montre le 1 du 19), c'est la dizaine...
134. EJe (l'interrompant): Ca fait 323, M'sieur, là?
135. D: On verra. Donc, ça c'est la dizaine, je fais 7 fois ?
136. E?: 1.
137. E?: 7 fois 10.
138. D: Donc j'oublie pas de mettre mon?
139. E: zéro.
140. D: 7 fois 1, 7. 1 fois 1?
141. E?: 1.
142. D: Donc c'est bien 10 fois 10, on est d'accord?

EAr intervient une deuxième fois pour demander une justification au fait de poser un zéro au moment de passer à la seconde ligne (126). Dominique répond dans le cadre de la situation S_0 (127-130) et termine la multiplication, toujours dans cette situation, tout en prévenant une objection de EAr en tenant compte en 142 de l'objection que l'élève avait faite lors de sa première intervention (59).

D Demande aux E qui a compris et la moitié d'entre eux lève la main.

D envoie ces élèves à leur place faire les deux multiplications notées au tableau (14x19 et 16x23, notées en ligne, avec la grille et la disposition en colonnes, mais avec les facteurs inversés) et propose aux autres (EMy, EAr et EJe) de refaire une multiplication ensemble. D note en ligne 16x18 et tend le feutre à EJe. En dialogue avec D et les deux autres E, EJe dessine la grille, EAr place 16 et 18 dans la grille, EMy effectue les produits partiels dans la grille (de gauche à droite), EJe effectue les additions partielles (en expliquant $80+48$ uniquement par du calcul mental).

EMy place la multiplication en colonnes et D dessine les colonnes et les en-têtes *u d c*. EAr effectue la première ligne selon la procédure expliquée (D dessine les flèches).

155. D: Ensuite?
156. EAr: Euh, euh... (longue hésitation)... 10 fois 8?
157. D: Vous êtes d'accord?
158. EJe et EMy: Oui.
159. D: On...
160. EAr: Euh, c'est 80.
161. D: Ouais, mais là on fait une fois huit.
162. EAr: Ah, oui.
163. D: Ouais, ça fait 8.
164. EAr: Mais là c'est normalement DIX fois huit!
165. D: Oui mais... (hésitation), on travaille avec les dizaines, on est d'accord, mais ça fait 8. Et puis on rajoute le ?
166. EAr: Zéro.
167. D: Non, on rajoute la retenue, que tu avais dans ta tête.
168. EAr: Huitante quatre, ça fait. Non ça fait...
169. EMy: Ca fait 12.
170. EAr: Ca fait...
171. D: Alors mets ce que tu penses et on regardera si ça correspond à ce qu'il y a à côté.
172. EAr: Mmm... (silence)
173. D: 6 fois 8, on a dit 48, on a mis le 8, tu as gardé le 4. Maintenant on doit faire... là c'est combien? (montre le 1 du 16)
174. EAr: 10.
175. D: (regarde EAr sans rien dire)
176. EMy: On fait: une fois 8, ça fait 8. Et après on rajoute le 4.
177. D: Ca fait?
178. EMy et EJe: 12.
179. D: 12. Et puis maintenant, tu mets ton?
180. EAr: Zéro?
181. D: Non. (silence) Marque ton 12!
182. EAr: (se penche pour écrire mais se relève) Mais, je mets 2 et puis je retiens 1.
183. D: Ouais.
184. EAr: (écrit le 2)
185. D: Et puis le 1, tu vas le mettre où?
186. EAr: Le 1, je vais le mettre... là?
187. D: Là! (EAr écrit le 1). [...]

La troisième intervention d'EAr (156) est une nouvelle application de la règle "Ajouter un zéro quand on travaille avec le dizaines" dans un cas non prévu par l'enseignant. Dominique est obligé de reconnaître la validité de l'argument de EAr, mais il choisit dans un premier temps de l'écartier sans justification : « Oui mais... , on travaille avec les dizaines, on est d'accord, mais ça fait 8 » et de "passer en force" en demandant d'ajouter la retenue. On assiste

alors à un moment où chaque protagoniste ou groupe de protagonistes se situe dans une situation différente. D'un côté Dominique en S_0 , tentant de terminer sa multiplication, aidé par EMy et EJe (interventions 169, 176, 178) qui sont en situation $(S_0)_r^L$ et appliquent la recette de l'ajout du zéro. De l'autre côté EAr est en situation $(S_0)_a^L$, tentant d'appliquer la règle de l'ajout du zéro avec obstination. Ce dédoublement de la situation, donne même lieu à un qui-proquo en 165-167 et en 179-181. Finalement EAr semble capituler et accepter de jouer l'élève de Topaze (182-187).

Dans un second temps, l'enseignant semble toutefois remarquer que EAr n'a pas compris et ne répond que comme un automate à ses sollicitations. Il reprend donc la question.

187. D: [...] Voilà, alors, ce qui t'embête, c'est que t'aimerais mettre huitante. (D prolonge les traits séparant les colonnes *u d c* au deux produits partiels). Mais, là on est dans la colonne des?
188. EAr: Dizaines.
189. D: Dizaines. Et puis là on est dans la colonne des?
190. EAr: Centaines.
191. D: Donc 80 plus ton 40 qui restait, ça fait bien cent... vingt... ?
192. EAr: 128.
193. D: Sauf que le zéro, ben on... on le met pas puisqu'il y a déjà les 8 unités.
194. EJe: Ben c'est maintenant qu'on va travailler par les... avec le zéro. C'est maintenant qu'on va travailler avec le zéro.
195. D: C'est maintenant qu'on travaille avec les dizaines, et c'est maintenant qu'il faut pas se planter. T'es prêt, EJe? Ou peut-être EMy, tu veux faire?
196. EMy: Euh, c'était surtout ça que j'avais pas très bien compris.
197. D: Ouais, ben c'est pour ça que c'est bien que ça tombe sur toi. Je te mets les flèches. Maintenant, qu'est-ce qu'on va faire comme calcul?
198. EJe: Je sais!
199. EMy: C'est 10 fois 6, non 6 fois 10, ça fait 60.

Dominique a perçu que la difficulté de EAr se situait au niveau de la “mise ensemble” de tous les produits partiels. Il reprend donc l'explication esquissée en 66-88, cette fois en explicitant un peu plus le jeu de retenues, mais en revanche sans faire référence au tableau. Autrement dit, il se situe dans une situation non prévue *a priori* en évitant encore la situation $(S_0)_z^P$. Cette situation peut apparaître car l'enseignant modifie le milieu matériel en écartant la multiplication en tableau. EAr est relativement absent de cette partie de l'échange, même s'il répond assez mécaniquement aux questions de Dominique. En revanche les interventions 194 et 199 confirment que EJe et EMy se situent bien dans une situation $(S_0)_r^L$.

EMy fait la seconde ligne en faisant $6 \times 10 = 60$. Elle note le 0 et hésite (D aussi) à noter le 6.

210. EAr: Mais pourquoi là y a un zéro?
211. D: Là? Parce qu'on travaille avec les?
212. E: Dizaines.
213. D: Dizaines!
214. EJe: Mais là y a aussi parce que c'est dans ce sens (montre horizontalement la ligne du second produit partiel).

215. D: Ouais. Donc..., mais... Comme on va travailler avec les dizaines, on travaille plus dans cette colonne-là (montre la colonne des unités), on va travailler dans cette colonne ici (montre la colonne des dizaines). Donc 6 fois 1, ça fait bien 6.
216. EMy: Après on fait...
217. D: Mais il faut mettre...
218. EMy:... 1 fois 1 et puis ça fait 160.
219. D: Une fois un ça fait?
220. EMy: Un.
221. D: Ouais, alors, mets ton 1.
222. EMy: Ca fait 160.
223. D: Et puis qu'est-ce qu'on fait maintenant?
224. EMy: On additionne (elle met le signe + et trace le trait).
225. EJe: Je peux faire maintenant?
226. EAr: (début de phrase inaudible)... je comprends pas pourquoi on rajoute un zéro.
227. D: Parce qu'on travaille avec des dizaines. C'est pas 1, là (montre le 1 du 18). C'est?
228. EAr: Dix.
229. D: Dix. Donc on commence, quand on a dit, tout ce qu'on a fait la semaine dernière, chaque fois qu'on travaille avec des dizaines, on multiplie par dix, qu'est-ce qui se passe?
230. EAr: On met un zéro.
231. EMy: Ca fait 288.

EAr revient une quatrième fois à la charge au moment où EMy ajoute le zéro de la deuxième ligne (210). L'enseignant se contente de rappeler la règle dans les mêmes termes que précédemment : « C'est parce qu'on travaille avec les dizaines » (intervention 211-213). Pour ce faire il est aidé par les deux autres élèves. EAr se tait pendant un moment mais repose sa question une nouvelle fois (226), recueillant la même réponse de Dominique (227) qui prend soin cette fois de faire répondre directement EAr à sa demande de ce qui se passe quand on travaille avec les dizaines. La question de EAr est alors transformée en une question dans S_0 . Même s'il n'a pas obtenu de réponse à sa question, qui se situe dans $(S_0)_a^L$, EAr ne peut pas la poser une nouvelle fois car il a obtenu (et même donné) une réponse à la question "de substitution".

232. EAr: Et puis, il vient d'où ce 1?
233. D: Lequel, celui-là? (montre le 1 de 160)
234. EAr: Oui.
235. D: Une fois un.
236. EMy: Ca fait 288.
237. EAr: Pourquoi est-ce qu'on fait pas 8 fois 1? Enfin, euh. Ah on a déjà fait.
238. D: Lequel?
239. EAr: Mais pourquoi est-ce qu'on ferait pas 8 fois 1?
240. D: Ben... (hésite) on l'a déjà fait. On a fait ici.
241. (interruption d'un autre élève sans rapport avec la discussion)
242. EAr: Mais pourquoi est-ce qu'on fait pas 8 fois 1?
243. D: Où?
244. EAr: Mais là! (montre le 8 de 18 et le 1 de 16)
245. D: Mais on l'a fait!
246. EAr: Non. Je vois pas de 8.
247. D: (hésite) Vous avez compris les deux... (il veut renvoyer EJe et EMy à leur place faire les exercices)

248. EMy: C'est que après, on fait 6 fois...
249. D: Bon. Si on regarde bien, la première fois, on fait comme vous savez faire habituellement avec un chiffre. On est d'accord? puis après on fait...
250. EMy: On prend le chiffre d'en haut...
251. D: Multiplié par celui-là. Ensuite celui-là par celui-là.
252. EMy: D'accord.
253. D: On a simplement décalé d'un parce qu'on travaille avec des dizaines. C'est tout. C'est bon? OK.

Pour ses cinquièmes et sixièmes questions, toujours dans la nécessité de rendre cohérente la situation $(S_0)_a^L$, EAr va donc déplacer la point de son questionnement du “pourquoi on ajoute un zéro” à celui de savoir pourquoi un tel zéro n’apparaît pas dans les autres cas où on travaille avec des dizaines. Il le fait pour le produit d’une dizaine par une dizaine (intervention 232 avec le 1x1) et pour celui de la dizaine du premier terme par l’unité du second (interventions 237 à 246 avec le 8x1). Dominique semble ne pas comprendre où se situe la demande de EAr. Il choisit donc de terminer rapidement avec EJe et EMy qui sont toujours dans la situation $(S_0)_r^L$. Ces deux élèves ne se posent en fait pas de question sur le zéro et la remarque de Dominique en 253 s’adresserait donc plutôt à EAr vers qui il va revenir.

254. EAr: Mais je comprends pas où est le 8.
255. D: Quel 8?
256. EAr: Mais 8 fois 1.
257. D: Il est là. (montre le 128 d'un geste circulaire). On a fait 6 fois 8, ça fait?
258. EAr: 48.
259. D: Bien. On a gardé le 4 et ensuite on a fait 8 fois 1, ça fait 8. Plus le 4, ça fait 12. Il est là-dedans, le 8 fois 1.
260. EAr: (long silence, EAr repart à sa place sans rien dire)
261. D: T'es convaincu ou pas?
262. EAr: (revient vers D)
263. D: T'es convaincu ou pas?
264. EAr: Euh... mmm... Pourquoi est-ce qu'on fait d'abord, euh... Pourquoi là on fait 8 fois 1 et pas... Pourquoi est-ce qu'on fait pas en même temps 8 fois 1 et 6 fois 1?
265. D: (semble perplexe) Parce qu'on peut pas faire deux choses en même temps!
266. EAr: Mmm (retourne à sa place)
267. D: (semble toujours perplexe puis se tourne vers d'autres élèves)

Resté seul avec l’enseignant, EAr reprend en 254 la question déjà posée à deux reprises, celle de la multiplication du 8 (chiffre des unités du second terme) par le 1 (chiffre des dizaines du premier terme). Ce produit a donc exactement le même statut que celui de 1 par 6 qui a généré l’apparition du zéro. Cette similitude apparaît en travaillant sur une correspondance terme à terme avec le tableau, c’est à dire dans une situation $(S_0)_z^P$. Pourtant l’enseignant ne profite pas de cette possibilité et il décrit chaque produit ainsi que les retenues (259). Cela correspond pour Dominique à la situation S_0 , mais pour EAr cela représente une situation de type $(S_0)_r^L$. D’abord résigné, il tente une septième et dernière question en 264. EAr a bien compris grâce à l’explication de l’enseignant en 259 que “on met plusieurs calculs ensemble”. Il demande donc pourquoi on ne met pas ensemble le produit unité par dizaine EAr est ainsi très proche des questions de commutativité des termes, ou de sommation en ligne ou en colonne du tableau, autrement dit de la situation $(S_0)_z^P$.

La réponse de l'enseignant en revanche, « on ne peut pas faire deux choses en même temps » indique que Dominique n'a pas compris, à ce moment-là, que les sommes peuvent être faites dans un autre ordre. Il ne considère toujours que la correspondance mécanique entre les deux algorithmes dans sa situation S_0 . Il n'entend donc pas la référence à son intervention 259 et en revient à un argument non mathématique qui est paradoxal dans le cadre de cet algorithme en colonne où justement on fait tout le temps deux choses en même temps.

15.3.3.2 Situations de niveau 0 effectives et situations déterminées *a priori*

Les situations déterminées *a priori* ne se sont pas toutes réalisées. A l'inverse, une situation déterminée comme impossible est apparue furtivement ainsi qu'une situation non prévue. La comparaison de ces situations, sur l'ensemble de l'épisode, permet de résumer cette description.

Les situations dans lesquelles les algorithmes sont indépendants n'apparaissent pas dans cet épisode. Elles apparaîtront dans la suite de la leçon qui n'est pas analysée ici, au moment des exercices d'entraînement dans lesquels les élèves doivent effectuer une série de multiplications avec les deux algorithmes. Cela confirme que le milieu matériel pouvait générer de telles situations didactiques. Par contre, dans une première phase, l'effet du contrat didactique explicite (il faut vérifier la correspondance de chaque ligne) et suffisamment fort pour empêcher l'apparition des situations $(S_0)_r^I$; $(S_0)_a^I$ et $(S_0)_*^D$.

La force de ce contrat contraint également tous les élèves à se situer dans des situations de correspondance ligne à ligne. EJe et EMy, se situent dans un respect de la consigne donnée par l'enseignant, sans vraiment prendre en compte la justification donnée et se placent ainsi dans une situation $(S_0)_r^L$.

EAr (mais ce sera également le cas de deux autres élèves dans la suite de la leçon) se situe dans la situation $(S_0)_a^L$. Cette situation n'est pas cohérente. Elle nécessite soit le passage en $(S_0)_r^L$ par l'abandon de la justification « on ajoute un zéro quand on travaille avec des dizaines », soit le passage en $(S_0)_z^P$ pour comprendre cette justification. Le premier passage est obstinément refusé par EAr qui semble ne pas supporter d'appliquer une recette sans la comprendre. Le second passage est systématiquement évité par l'enseignant qui tente généralement de ramener EAr à la situation S_0 . Mais cette situation de l'enseignant n'est pas compatible avec le milieu matériel mis en place, sauf en modifiant le milieu en appliquant mécaniquement la « règle du zéro », c'est à dire en rabattant la situation S_0 en situation $(S_0)_r^L$. Pour une partie des élèves, cet abandon d'un élément du milieu matériel se fait sans difficulté car il est effectué au profit du respect du contrat didactique. En revanche pour trois élèves (EAr dans cet épisode, mais aussi EDy et EJu, en 1-4-2-4 par exemple) le conflit ne pourra être résolu rapidement.

A un moment (interventions 66-90), l'enseignant tente d'introduire une comparaison produit à produit sans faire correspondre les zéros. Cette situation $(S_0)_z^P$ semblait impossible lors de l'analyse *a priori* dans le sens où une correspondance partielle était inutile pour expliquer l'apparition du zéro de la deuxième ligne. Cette situation ne sera d'ailleurs pas acceptée par EAr et sera rapidement abandonnée par Dominique. De façon similaire, l'enseignant tente

à un moment (187-193) de laisser de côté l'algorithme en tableau pour ne décrire le fonctionnement des retenues que sur l'algorithme en colonnes. Il s'agit là d'une modification apportée au milieu matériel et cette situation n'est donc pas apparue dans l'analyse *a priori*. Elle est également rapidement abandonnée.

15.3.3.3 Connaissances mathématiques pour l'enseignement, pertinence et bifurcations didactiques

Cette démultiplication des situations de niveau 0 et le sentiment d'incommunicabilité, voire de quiproquo entre ces situations sont causés par certains choix faits par l'enseignant, soit au moment de la détermination de S_0 , soit au moment de la mise en place de la situation de référence S_3 . Ils sont également provoqués par l'impuissance de l'enseignant en position P_0 à adapter ses interventions didactiques à la situation de l'élève, ne serait-ce que pour faire évoluer cette dernière. Il s'agit maintenant de reprendre ces choix en les décrivant en terme de variables didactiques (voir 13.4), notés entre crochets, et en les rattachant aux *connaissances mathématiques pour l'enseignement* de Dominique et à la *pertinence mathématique* de ses interventions.

Le premier choix à considérer est celui d'appuyer l'algorithme de la multiplication en colonnes sur celui de la multiplication en tableau [t.] en insistant sur la correspondance entre les lignes de l'algorithme en colonnes et les sommes par lignes du tableau. Par opposition, les autres choix possibles, sans introduire d'autres éléments en terme de variables didactiques tels que décrits en 13.4, auraient été d'une part de ne pas utiliser le tableau ou, d'autre part de détailler la correspondance produit par produit. Le premier de ces choix aurait conduit à une situation du type $(S_0)_r^L$. Cette situation est celle vers laquelle l'enseignant et une partie des élèves ont rapidement glissé puisque dès la séance 5, les deux algorithmes ont été effectués séparément, la seule utilité du double algorithme étant la vérification. L'argument qui semble avoir détourné Dominique de faire ce choix est d'une part la volonté affirmée au niveau noosphérique que les élèves mettent du sens dans ce qu'ils font en mathématiques et, d'autre part, la représentation de la difficulté du zéro à placer au début de la deuxième ligne. Il faut également signaler la disponibilité de l'algorithme en tableau, tant pour l'enseignant qui l'a vu dans les fiches OP que pour les élèves qui l'ont utilisée l'année précédente avec le même enseignant pour la multiplication à un chiffre. Les connaissances mises en jeu pour faire ce choix sont des connaissances du contenu du point de vue de son enseignement (CC, de par la volonté d'expliquer l'algorithme), des connaissances du programme et des moyens d'enseignement (CP, de par la connaissance de plusieurs algorithmes et de l'usage de l'algorithme en tableau) et enfin des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (CMS, de par la connaissance de l'algorithme en tableau). Ces connaissances sont correctes. Il est plus difficile d'expliquer le choix de ne pas mettre en évidence la correspondance terme à terme dans les interventions 187 à 193, voire les tentatives d'esquiver cette correspondance ou d'en réduire la portée à un nombre de calcul à effectuer dans les interventions 64 à 90. En fait Dominique possède la CMS de cette correspondance, comme il le montre lors des entretiens, mais cette connaissance n'est pas pertinente puisqu'elle ne lui permet pas d'interagir sur les éléments mathématiques de la situation, c'est à dire de se placer dans la situation où $(S_0)_z^P$ il aurait pu retrouver EAr dans le passage considéré (ainsi d'ailleurs qu'à d'autres moments de même que pour EDy et EJu en 1-4-2-4). La raison de cette absence de pertinence pour une CMS correcte et apparemment disponible est probablement à chercher dans la représentation qu'a Dominique de la multiplication.

Lors des séances en classe, Dominique affirme à plusieurs reprises que la multiplication est un raccourci de l'addition. Interrogé à ce sujet lors de l'entretien *post*, il répétera cela et ne donnera aucune représentation de type produit cartésien ou aire d'un rectangle, et ce malgré les multiples sollicitations à propos de la commutativité ou de la multiplication des décimaux. Il ne fait d'ailleurs aucun lien entre l'activité d'introduction choisie (Sous pli) qui consiste à calculer des aires de rectangles, et un découpage de ces rectangles qui mènerait à l'algorithme en tableau. Pour Dominique, l'aire d'un rectangle se calcule au moyen d'une multiplication, cette dernière pouvant être effectuée en tableau, en colonne ou par un autre moyen de calcul, mais le lien avec le rectangle disparaît complètement, l'aire ne sert pas à représenter une multiplication. De manière condensée on pourrait dire que, pour lui, l'aire est une multiplication, en revanche la multiplication n'est pas une aire. Ainsi la distributivité est connue, mais elle est une pure règle de calcul. De même, la disposition en tableau est une disposition pratique, mais elle est purement formelle et n'est pas directement liée aux propriétés de la multiplication. Comme cette disposition pratique a été introduite pour les multiplications par un nombre à un chiffre, les sommes sont faites en ligne et Dominique n'imagine pas que les cases puissent être additionnées d'une autre manière. Il ne lie pas une somme en colonnes au produit des termes dans l'ordre inverse, au point que, suite à une erreur de copie au tableau (ordre inversé entre la disposition en tableau et la disposition en colonnes en 1-4-2-4) il fait inverser les termes. Autrement dit, la CMS de la multiplication en tableau est purement procédurale, le tableau n'est pas vu comme un produit cartésien, mais comme un endroit où l'on range des produits à additionner ensuite en ligne. Ce manque de compréhension du fondement de la multiplication en tableau va l'empêcher de l'utiliser avec pertinence pour interagir sur les aspects mathématiques de la multiplication en colonnes représentés par la situation $(S_0)_z^P$.

Le deuxième choix est celui de donner une recette pour la *règle du zéro* [D]. Ce choix pose problème, on l'a vu, à la fois dans l'application dans l'algorithme en colonnes puisqu'on n'« ajoute un zéro quand on travaille avec les dizaines » qu'au début de la deuxième ligne. Il pose également un problème de vocabulaire additif (« ajouter ») dans une situation multiplicative, et est confondu avec l'ajout de la retenue. Ce vocabulaire est celui habituellement utilisé dans la classe. Dans l'entretien *post*, Dominique déclare que la seule autre manière qu'il envisagerait pour exprimer cette règle serait de parler du zéro de la dizaine qu'on déplace. Ce type d'explication imagée et sans fondement mathématique est utilisé à plusieurs reprises en classe pour rappeler la règle du zéro. Dominique fait donc preuve ici d'une connaissance mathématique commune correcte mais d'une connaissance mathématique spécifique à l'enseignement incorrecte. Mis en présence de l'explication du décalage vers la gauche du nombre dans le tableau MCDU, Dominique semble la découvrir et se l'approprier. La non pertinence de la connaissances mathématique commune est ainsi liée dans ce cas à l'absence de la « version spécifique » de cette connaissance.

D'autres choix, plus secondaires, sont faits par l'enseignant et influencent la situation didactique. Il faut mentionner en particulier, parmi les éléments qui déterminent le milieu objectif et par suite les situations successives, le choix des nombres multipliés, tous compris entre 12 et 19 pour tous les premiers calculs $[P_2 S_D]$. Les raisons de ce choix ne sont pas explicitées par Dominique, mais on peut penser qu'il vise une progression dans la difficulté. Ce choix a pour conséquence de rendre la seconde ligne de la multiplication en colonnes triviale, ce que l'enseignant ne mentionne jamais. Il a aussi pour conséquence de donner l'impression de refaire plusieurs fois la même multiplication et incite EA à poser plusieurs fois la même question à propos de plusieurs multiplications : « c'est 1x1 ou 10x10 ? ».

L'analyse de cet épisode du point de vue de la structuration du milieu et des bifurcations didactiques a permis de mettre en évidence des liens entre CME, pertinence et gestion

didactique dans un cas très ponctuel. Nous allons maintenant élargir l'analyse de ces liens au moment d'explication de l'algorithme chez les quatre enseignants.

15.4 Le moment d'explication de l'algorithme

Les quatre séquences observées comportaient toutes un moment bien défini d'explication de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Cette section va comparer ces quatre moments, tout d'abord de façon globale (15.4.1), puis en contrastant plus particulièrement les éléments liés aux trois variables didactiques (voir 13.4) de l'explication de la séparation du second terme (15.4.2), de la gestion des retenues et de l'alignement (15.4.3) et enfin de la manière d'« amener » le zéro de la deuxième ligne (15.4.4). Cette comparaison reprendra les choix des enseignants en terme de variables didactiques, notés entre crochets, et s'appuiera sur les CME mises en œuvre et sur la pertinence mathématique de ces explications. La transcription des quatre moments figure en Annexe 14. Lorsqu'un point particulier peut être éclairé par un autre moment d'une séquence, ce dernier sera également examiné.

15.4.1 Le moment d'explication

Le début du moment d'explication est délimité par le choix d'une multiplication à effectuer et par l'annonce de l'enseignant qu'il va montrer ou expliquer la multiplication en colonnes à deux chiffres. Le choix de chaque exemple ainsi que les autres valeurs des variables didactiques sont donnés dans le Tableau 30. Dominique et Sacha effectuent une multiplication d'un nombre à deux chiffres [P2] alors que Camille et Andrea multiplient un nombre à trois ou quatre chiffres [P3 ou P4]. Dominique et Andrea choisissent comme second terme un nombre compris entre 11 et 19 [D] et les quatre enseignants veillent à utiliser des nombres composés de chiffres ne posant en principe pas de problème de livrets [I].

Chez les quatre enseignants, le moment d'explication de l'algorithme est caractérisé par une forme de cours dialogué dans lequel l'enseignant décrit les étapes de l'algorithme en posant au groupe classe des questions, et en faisant effectuer les étapes de calcul aux élèves. Une enseignante, Andrea, fait effectuer directement chacune des trois lignes à trois élèves. Ce cours dialogué a lieu au tableau noir face à la classe entière chez Sacha et Andrea, autour d'une affiche face à la moitié de la classe chez les deux enseignants en charge d'une classe multi-âge, Dominique et Camille. Ce moment a une durée comprise entre 5 et 10 minutes.

La fin du moment d'explication est marquée par le choix d'une nouvelle multiplication à effectuer. Chez les quatre enseignants, ce nouvel exemple ressemble très fortement au premier du point de vue du choix des nombres et il est effectué par un ou plusieurs élèves selon un mode proche de celui utilisé précédemment (tableau noir ou affiche).

	Dominique	Sacha	Camille	Andrea
Durée	09:14	05:01	10:16	06:55
Support	Affiche	Tableau noir	Affiche	Tableau noir
Rôle élèves	Remplir texte à trous Acquiescer Dire qu'ils ont compris Faire les calculs chiffre à chiffre (collectivement)	Remplir texte à trous Acquiescer Dire qu'ils ont compris Faire les calculs chiffre à chiffre (collectivement)	Remplir texte à trous Acquiescer Dire qu'ils ont compris Faire les calculs chiffre à chiffre (collectivement) Donner leur avis sur "on va faire comment"	Remplir texte à trous Acquiescer Dire qu'ils ont compris Faire les calculs chiffre à chiffre Donner leur avis sur "on va faire comment"
Particularité	explication des 2 algos	Juste avant, 86x34 décomposé		Avant: mult. par un nombre entier se terminant par 0
Fin du moment	Question fondamentale EAr	Question aux élèves pour savoir si c'est OK	Fin de la multiplication	Résumé et série de question de A, série de question des élèves
tout de suite après	Autre exemple collectif 17x19	248x42, trois élèves au TN pour chaque ligne	Exemple contextualisé 1225x25 en collectif	Autre exemple 235x15 effectué par une élève au TN
Exemple	12x17	86x34	2417x25	182x12
Variables didactiques	(C PC t _c ; Z D; T; K _{et p} T _a C Z; P ₂ S _D R _{1z})	(C A I C é; Z S; C; C E P; P ₂ Q R _z)	(P c; Z I; D; T C; P ₄ Q R ₁)	(C A I N c; Z I; A; /; P ₃ S _Z puis D R ₁)

Tableau 30 : Principales caractéristiques du moment d'explication de l'algorithme par les quatre enseignants. Les codes pour les variables didactiques sont donnés en 13.4 et rappelés en Annexe 1.2.

15.4.2 La séparation en deux lignes puis l'addition : le lien avec la distributivité

La présentation aux élèves de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres comporte un moment durant lequel l'enseignant dit, montre ou explique qu'il faut *séparer le calcul en deux*, un moment où il *ramène chaque calcul à une multiplication à un chiffre*, et un moment où il *additionne les deux lignes*. Ces trois éléments découlent de la numération décimale de position et surtout de la distributivité de la multiplication sur l'addition (voir 13.1.2.1). Examinons les liens entre la connaissance de cette propriété chez chaque enseignant, telle qu'elle apparaît essentiellement lors des entretiens, en particulier au moment d'une question sur une erreur de type *colonnes strictes* (voir Figure 33 p. 144), et les explications données aux élèves, particulièrement au moment de l'explication de l'algorithme, sur ces trois « actes ».

15.4.2.1 Dominique

Le moment d'explication de l'algorithme en colonnes est précédé chez Dominique par l'explication de la multiplication en tableau. La séparation en deux lignes est donc prise en charge par le parallèle fort établi avec l'algorithme en tableau et par un cache posé par Dominique sur le chiffre des dizaines du second terme. En terme de variables didactiques, le type d'explications est axé sur la compréhension sur la base d'une représentation de la multiplica-

tion comme produit cartésien avec un tableau utilisé directement dans un algorithme condensé [C PC t_c]. Pour ce qui est du choix des nombres multipliés, le premier est à deux chiffres et le second est compris entre 11 et 19. De plus les difficultés de livret sont évitées ainsi que les zéros dans les produits [P₂ SD R_{1z}].

Au moment où, à la fin de la première ligne de calculs, un élève fait remarquer que « on n'a pas le résultat » (29¹⁴⁹), Dominique rebondit sur cette question pour demander, « on doit faire encore quoi ? » (32) et il déplace le cache. Pour ce qui est de ramener à une multiplication à un chiffre, Dominique indique simplement que « c'est ce que vous avez fait jusqu'à maintenant » (16) et le fait d'additionner les deux lignes découle de l'addition des deux lignes du tableau. Il est donc nécessaire d'examiner les explications données au moment de la multiplication en tableau.

Ce moment est décrit ici tel qu'apparaissant dans le synopsis (Annexe 15.1, 1-4-1) ainsi que par l'affichette produite.

D fait venir les élèves autour de la table et leur dit que ce qui va être fait aujourd'hui est très important. Il rappelle qu'il a été vu que quand les nombres avaient des dizaines et des unités, ils pouvaient être décomposés. Il fait faire la décomposition de 24 sur l'affiche, puis d'autres nombres par oral. D rappelle que le problème de "sous pli" était qu'on avait deux nombres avec dizaines et unités, 17 et 12. Il écrit $10+7$ et $10+2$ et propose d'utiliser une grille comme EJe l'avait fait. Il trace une grille et place 12 (horizontalement) et 17 (verticalement avec 7 en haut). Il justifie ce placement par le fait que cela va aider pour la multiplication en colonnes. Il effectue la multiplication (de gauche à droite) avec l'aide des E (en rappelant pour le 10×10 que quand on a des dizaines on ajoute un zéro) et écrit les produits partiels en ligne (après les avoir partiellement mis en évidence par des couleurs dans la grille) sous la forme $12 \times 7 = 84$ et $12 \times 10 = 120$. Il demande ce qu'il faut faire ensuite et sur suggestion de EAl, il additionne 84 et 120.

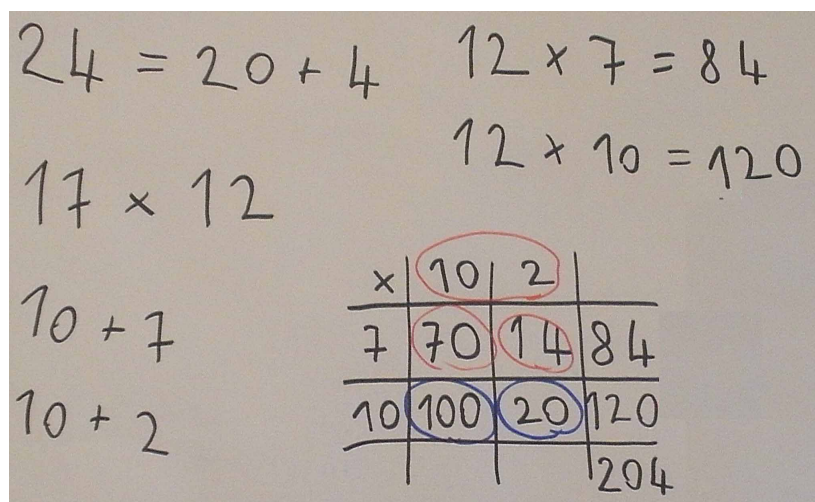


Figure 56 : Dominique, affiche de la multiplication en tableau

La séparation en deux lignes est ici une disposition pratique induite par la décomposition usuelle des nombres. Le fait qu'il y ait des « croisements » n'est pas abordé, l'addition n'est nullement justifiée. Les écritures $12 \times 7 = 84$ et $12 \times 10 = 120$ interviennent à la fin de la multiplication en tableau comme résumé de l'écriture de ce dernier. Les interventions de Dominique doivent donc être ici considérées comme non pertinentes selon le critère C₁ car les interactions ne se situent pas au plan mathématique, mais bien sur celui des conventions (décomposition con-

¹⁴⁹ Les numéros renvoient au numéros de ligne de la transcription figurant en Annexe 14.1

ventionnelle des nombres, voir 15.4.3) ou des dispositions graphiques déjà utilisées précédemment (tableau). Comme cela a déjà été relevé lors de l'analyse des bifurcations didactiques en 15.3, l'absence de lien entre la multiplication en tableau et la représentation de la multiplication comme un produit cartésien ou comme une aire est largement à l'origine de cette absence d'interactions mathématiques. Il s'agit donc là d'une CMS dont ne dispose pas l'enseignant. Ce point sera repris chez les quatre enseignants en 15.4.5.

La distributivité n'est jamais mentionnée par Dominique lors des entretiens. Toutefois, interrogé lors de l'entretien *post* sur le cas d'un élève qui effectuerait une multiplication en *colonnes strictes* (voir Figure 33 p. 144), il ramène immédiatement cela à l'algorithme en tableau. La CMC commune existe donc, mais elle n'est pas utilisée en classe pour justifier l'algorithme en tableau. De plus, cette CMC est non pertinente selon le critère C_4 .

15.4.2.2 Sacha

Pour Sacha, le moment d'explication de l'algorithme est amené depuis longtemps par la progression de Cap Maths. En particulier Sacha mentionne les « produits approchés¹⁵⁰ » qui ont été calculés, comme 16×21 déduit de 15×21 , le nombre de carrés d'un rectangle (Charnay *et al.*, 2007a, p. 107), ou le problème du phare :



1 Dimanche, Tim est monté 50 fois au sommet du phare.
Plume n'y est monté que 4 fois.
Maïa est plus courageuse. Elle est montée 54 fois au sommet du phare.
Dimanche, combien chacun a-t-il monté de marches ?

Figure 57 : Énoncé du problème du phare (Charnay *et al.*, 2007c, p. 106)

Durant la leçon précédente, plusieurs exercices ont été effectués consistant à déterminer le résultat d'une multiplication par un nombre à deux ou trois chiffres à l'aide des produits partiels.

1 Calcule :

a. 456×3 b. 456×60 c. 456×200 d. 456×30 e. 456×600

2 Utilise les résultats obtenus à la question 1 pour calculer :

a. 456×63 b. 456×33

3 Utilise les résultats obtenus à la question 1 pour calculer :

a. 456×603 b. 456×263

Figure 58 : Exercice effectué lors de la première leçon observée (Charnay *et al.*, 2007c, p. 107)

Enfin, juste avant d'expliquer l'algorithme sur la multiplication 86×34 , elle fait faire cette même multiplication aux élèves sur le modèle utilisé dans l'exercice ci-dessus.

Pour ce qui concerne le moment d'explication lui-même, Sacha utilise une couleur pour chaque ligne, à la fois pour entourer le calcul, pour écrire de quel calcul il s'agit et pour effectuer le calcul lui-même.

¹⁵⁰ Il s'agit de la dénomination utilisée par l'enseignante. Cap Math parle de « calcul de produits en appui sur des résultats connus » (Charnay *et al.*, 2007a, p. XXIV)

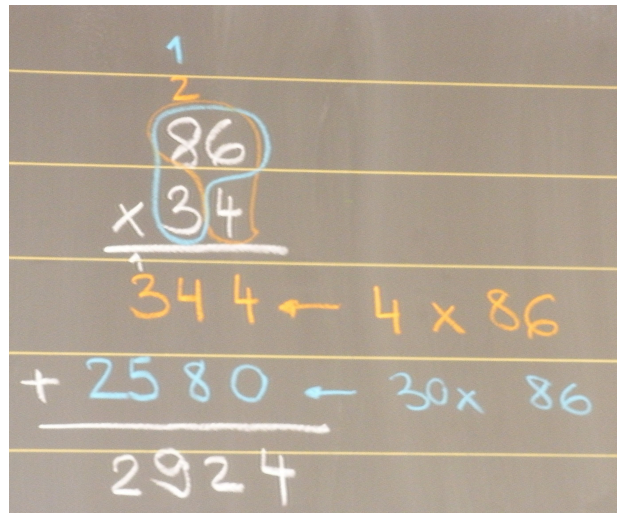


Figure 59 : Sacha, explication de l’algorithme au tableau noir

Le fait de séparer en deux calcul ne suscite aucun commentaire ni aucune question tant il semble naturel pour tout le monde. Il en va de même pour l’addition.

Cette pratique de la séparation d’une multiplication en deux est décrite par Sacha lors de l’entretien *ante* :

Ca veut dire que 17×25 , soit il fait $10 \times 25 + 7 \times 25$, mais après on demande si quelqu'un a fait autrement et quelqu'un dira qu'il a fait $20 \times 17 + 5 \times 17$, et un autre aura fait $10 \times 17 + 10 \times 17 + 5 \times 17$ et puis tout le monde apporte son petit grain de sel, on note tout au tableau, au final on arrive tous à la même réponse, on est tous contents, mais ils voient qu'il n'y a pas un seul chemin. (Sacha, entretien *ante*)

En termes de variables didactiques, le type d’explications est axé sur la compréhension. Ces explications utilisent la représentation de la multiplication comme addition itérée avec une représentation concrète (voir 13.4.1). L’algorithme est précédé des deux algorithmes préalables [C AI C é]. Pour ce qui est du choix des nombres, le premier est à deux chiffres, le second est quelconque et les zéros dans les produits sont évités [P_2 Q R_z]. Il faut également mentionner les ajouts graphiques que sont les couleurs, l’entourage et la notation en ligne des multiplications partielles [C E P].

Sacha ne mentionne jamais le terme de distributivité, mais l’application de cette propriété découle d’une pratique du calcul réfléchi en lien à la fois avec une représentation additive de la multiplication (problème du phare) et avec une représentation comme produit cartésien (aire de rectangles). De plus l’algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres est vu comme une simple disposition pratique conforme aux pratiques déjà utilisées tant en calcul réfléchi que par la décomposition en deux multiplications en colonnes. Même si elle n’est pas nommée, la CMS de la distributivité et de son lien avec l’algorithme est donc ici considérée comme correcte. Les interventions de Sacha à propos de la distributivité sont pertinentes car elles permettent l’interaction avec les élèves d’un point de vue mathématique (critère C_1).

Toutefois, interrogée lors de l’entretien *post* sur le cas d’un élève qui effectuerait une multiplication en *colonnes strictes*, Sacha est un peu désemparée et affirme qu’elle n’a jamais vu cela et qu’il faudrait « tout recommencer, avec les problèmes de phare, etc... ». Cela peut indiquer une difficulté potentielle de l’utilisation par Sacha d’un manuel extrêmement structuré et quelque peu rigide. Cette difficulté n’ayant pas été observée et n’ayant pas été évoquée par l’enseignante, elle ne sera pas développée ici.

15.4.2.3 Camille

Camille a décidé de « montrer l'algorithme de la multiplication » par un nombre à deux chiffres de manière « expéditive », sans préparation particulière autre que la révision de l'algorithme à un chiffre. En terme de variables didactiques, il s'agit donc d'une explication procédurale avec un algorithme condensé [P c].

Camille démarre directement en posant la multiplication de 2417 par 25, ce qui du point de vue des variables didactiques peut être noté $[P_4 Q R_1]$: 4 chiffres pour le premier terme, le second terme ne débute pas par 1 et ne finit pas par 0, les difficultés de livret sont évitées. Elle cache immédiatement le 2 de 25 à l'aide d'un morceau de papier :

1. [...] Alors, attention les vélos, regardez bien ce que je vais faire. (C pose un cache sur le 2 du second terme). Je cache le 2. Et ce qui nous reste là, c'est ?
2. E: 5
3. C: Ouais, c'est une multiplication ?
4. E: A un chiffre
5. C: Par 5, comment?
6. E: A un chiffre
7. C: A un chiffre, comme vous venez de faire sur vos billets. Alors on va voir, normalement vous devez la maîtriser. (Camille, leçon 2, transcription)

Camille ne donne aucune autre explication ou justification de la première ligne. Arrivée au bout de celle-ci, elle enlève le cache et demande aux élèves comment ils pensent que l'on va continuer : « Formulez des hypothèses. Si c'est pas les bonnes, c'est pas grave ». Ces deux interventions sont non-pertinentes car l'interaction n'est pas au plan mathématique (C_1). Les effets de ce manque de pertinence mathématiques sont perceptibles dans les réponses des élèves qui se lancent dans un jeu de devinettes. Devant la diversité des réponses (pour la plupart incorrectes), Camille décrit la règle du zéro (voir 15.4.3.3) et effectue le calcul de la seconde ligne après avoir placé le cache sur le 5, toujours sans explication.

L'addition finale est justifiée par le fait que « on n'a pas vraiment une réponse, là » et par le fait que plusieurs élèves avaient parlé d'une addition au moment des hypothèses à formuler. Là encore l'interaction est non-mathématique et donc, selon C_1 , non-pertinente.

Pour mieux décrire le rapport de Camille à la distributivité, il est nécessaire d'examiner le moment où, par la suite, lors de la deuxième leçon, Camille récapitule l'algorithme sur la multiplication 583×35 et demande aux élèves d'expliquer chaque passage. Pour la première ligne, l'explication consiste à cacher le 3. Ce qui est à nouveau une intervention mathématiquement non pertinente. Puis, au moment de passer à la seconde ligne d'une multiplication, Camille demande aux élèves pourquoi il faut ajouter un zéro à la seconde ligne. Elle constate que les explications sont confuses et elle décompose le second terme et traces des flèches vers celui-ci (voir Figure 60), mais ce n'est pas pour justifier la séparation en deux lignes, mais bien pour dire qu'il s'agit de 30 et que c'est là la raison de l'ajout du zéro (voir 15.4.3.3).

$$\begin{array}{r}
 583 \\
 \times 35 \\
 \hline
 2915
 \end{array}$$

$35 = 30 + 5$

Figure 60 : Camille, écriture de $35=30+5$ et traçage des flèches avant le passage à la seconde ligne.

Au moment de passer à l'addition, Camille justifie qu'il faut additionner, « parce que c'est pas fini, on n'a pas une réponse, on a deux étages » et que cela ressemble à un calcul donné en devoir. Elle écrit :

$$24 \times 3 = (20 \times 3) + (4 \times 3) = 60 + 12 = 72$$

Figure 61 : Camille, explication du fait qu'il faut additionner les deux lignes de la multiplication 583×35

Camille ajoute ensuite que c'est la même chose et qu'il faut donc additionner.

La CMC de la distributivité est donc présente chez Camille, la CMS que constitue son lien avec l'algorithme de la multiplication est également disponible, mais l'utilisation de cette connaissance n'est pas pertinente pour au moins trois raisons. Tout d'abord la comparaison entre la multiplication 583×35 et 24×3 n'est pas utilisée à bon escient puisqu'il s'agit une fois de « distributivité à gauche » et l'autre fois de « distributivité à droite ». Ensuite cette explication ne vient qu'en appui d'une technique déjà présentée lors de la leçon précédente, un peu comme un truc pour s'en souvenir. Enfin et surtout, même si le lien est fait, il l'est par référence à un calcul déjà effectué et donc pour les élèves, cela se traduit plus par « il faut faire comme dans l'exercice untel » que comme « l'algorithme en colonnes revient à effectuer la même décomposition des opérations que le calcul réfléchi ». Autrement dit, là encore, l'interaction n'est pas au niveau mathématique.

Par ailleurs, le cours de l'entretien *post* ayant conduit à parler de la représentation de la multiplication comme l'aire d'un rectangle avant la question au sujet de la multiplication en *colonnes strictes*, Camille fait immédiatement le lien entre l'erreur de l'élève et le produit cartésien, confirmant par là même la disponibilité de cette CMS.

15.4.2.4 Andrea

L'explication de l'algorithme chez Andrea n'intervient qu'au cours de la cinquième leçon de la séquence et elle a été précédée en séance 1 par l'explication de l'algorithme par un nombre à deux chiffres se terminant par 0 et la question de la « séparation du calcul » est essentiellement prise en charge lors de cette première séance. Il est donc nécessaire d'observer d'abord ce premier moment.

Après avoir revu collectivement une multiplication à un chiffre, Andrea a choisi de faire découvrir « par logique » la multiplication en colonnes par un nombre à deux chiffres qui se termine par 0. Interrogée sur cette expression « par logique », Andrea se réfère plutôt à une connaissance que les élèves auraient déjà acquise de leurs parents ou de leurs aînés.

En classe, Andrea écrit en colonnes au tableau noir la multiplication 346×10 et demande aux élèves de l'effectuer en précisant qu'elle ne leur demande pas de faire de tête, mais d'essayer de trouver la technique. L'intervention d'Andrea, telle que prévue et telle qu'effectivement réalisée est non pertinente selon le critère C_1 . Les effets en seront une variété incontrôlée des procédures des élèves puisque sur les six procédures présentées lors de la mise en commun, trois sont farfelues, deux consistent à ajouter un zéro et une revient à décomposer le premier nombre :

Moi j'ai fait 6 fois 10, ça fait 60 (écrit 0 et met le 6 en retenue à côté). J'ai fait 4 fois 10, ça fait 40, 40 plus 6, ça fait 46 (note le 6 et met le 4 en retenue). 3 fois 10, ça fait 30, 30 plus 4, ça fait 34 (note le 3, puis le 4). (Andrea, leçon 1, transcription de l'explication donnée par une élève)

N'ayant pas obtenu la procédure attendue, Andrea doit tout d'abord valider certains résultats, ce qu'elle fait par comparaison avec le résultat obtenu à la calculatrice. Là encore, l'interaction ne se fait pas sur le terrain mathématique et n'est donc pas mathématiquement pertinente.

Andrea reste fidèle à son idée de « découverte » et souhaite écarter la procédure de décomposition du premier nombre en demandant aux élèves d'effectuer 346×12 sur le même modèle, puis, se ravisant, elle demande 346×13 . Andrea met à l'œuvre ici une connaissance mathématique spécifique à l'enseignement, consistant à choisir un exemple adéquat par rapport à une explication à donner, ou encore un exemple ne possédant pas certaines particularités. Cette connaissance est ici erronée puisque la multiplication par 13 permet la décomposition du premier nombre. C'est d'ailleurs ce qu'un élève va proposer lors de la mise en commun. Lorsque l'élève propose ce calcul, Andrea affirme d'ailleurs que c'est faux. Comme elle ne peut donner d'argument de procédure, elle décrète que le résultat n'est pas assez grand par rapport à celui de 346×10 . Elle demande toutefois une vérification à la calculatrice et le résultat s'avère correct. La connaissance mathématique commune d'estimation est donc incorrecte. L'interaction a bien lieu –partiellement– au plan mathématique, en revanche elle n'est pas pertinente en vertu du critère C_2 .

Andrea affirme alors que certes, cela marche avec « fois 13 », mais que cela ne marchera pas avec « fois 72 » et qu'elle va donc montrer une méthode, tout d'abord avec « fois 10 ». L'usage d'un exemple inadéquat (CMS incorrecte) et d'un manque de pertinence mathématique conduisent donc Andrea à renoncer à une connaissance des élèves et de l'enseignement (CE) qui était adéquate. En lieu et place, elle va donner une méthode qui n'est pas découverte par les élèves et qui est imposée dans un cas où elle est particulièrement inefficace. Les élèves vont d'ailleurs réagir immédiatement en demandant si ce sera plus simple avec cette méthode. Ils manifesteront par la suite leur mécontentement en décrétant systématiquement qu'ils ne comprennent rien.

Andrea effectue et décrit alors la multiplication 448×10 en colonnes sans faire aucun commentaire et sans donner aucune explication sauf sur le 0 de la deuxième ligne. Elle coupe toute question de la part des élèves car la classe doit se rendre à la bibliothèque.

Après quatre autres leçons consacrées à la multiplication par un nombre se terminant par 0 (voir 15.2.4), Andrea reprendra l'explication de l'algorithme sur la multiplication 182×12 . Là encore, elle ne donne aucune explication sur la séparation en deux lignes, ni sur l'addition. En revanche, sitôt la multiplication terminée, elle demande quel calcul a été effectué sur la deuxième ligne. Elle n'obtient comme réponse que « on a ajouté un zéro » ou « on a fait 1 fois 2 » ou encore « on a fait 182 fois 1 ». Elle finit donc par dire que la première ligne c'est 182 fois 2 et la deuxième 182 fois 10 et elle écrit les deux multiplications en colonnes avec des flèches indiquant à quelle ligne chacune correspond.

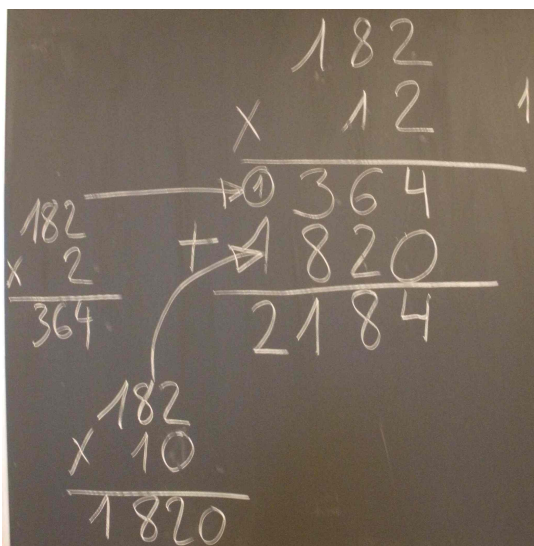


Figure 62 : Andrea, explication de l'algorithme au tableau noir

L'addition finale est également justifiée :

122. Donc, c'est comme si on avait fait le calcul en deux fois, 182 fois 2, 182 fois 10, parce que 12, c'est 2 et 10 ensemble, non? Vous êtes d'accord, 12, c'est 2 et 10? C'est 10 plus 2.

[...]

127. A: Donc on a fait en deux fois le calcul, et puis on a fait une ligne pour chaque calcul, pour avoir ensuite la réponse. On a pris les deux calculs ensemble. (Andrea, leçon 5, transcription)

La CMS de la distributivité et de son lien avec l'algorithme est donc présente et mobilisable, ce qui est confirmé dans l'entretien *post* au moyen de la question des *colonnes strictes*. De plus, pour cette dernière partie, l'intervention est mathématiquement pertinente. On peut se demander ce qui a empêché à cette pertinence et à cette CMS de s'exprimer plus tôt dans la séquence. Nous tenterons de répondre à cette question en 15.4.4.4.

En terme de variables didactiques, il est très difficile de faire entrer ces moments d'explications dans les catégories déterminées *a priori*. Toutefois le choix de l'enseignante est bien de donner une explication axée sur la compréhension. Cette explication repose sur une représentation de la multiplication comme addition itérée avec une esquisse directe de la proportionnalité. L'algorithme est directement condensé [C A I N c]. Pour ce qui est des nombres multipliés, le premier est à 3 chiffres, le second dans un premier temps se termine par 0 puis dans un second temps est compris entre 11 et 19, dans tous les cas, les difficultés de livrets sont évitées [P_3 $S_{Z \text{ puis } D}$ R_1].

15.4.3 L'alignement et la gestion des retenues : le lien avec la numération décimale de position

Les quatre enseignants observés présentent à leurs élèves quatre gestions des retenues différentes. Ils gèrent également de façon différenciée l'alignement et verbalisent ou non le lien avec la numération de position.

15.4.3.1 Dominique

Dominique est très attentif à la numération de position. Il insiste régulièrement sur les mots *unité*, *dizaine*, ou *centaine* lors des décompositions des nombres avant la présentation de

l'algorithme. Lors de l'explication, et à chaque algorithme de multiplication en colonnes effectué sur affiche, il trace des colonnes et les nomme au moyen d'une lettre (u , d et c). L'alignement des chiffres au moment du calcul est fait de façon correcte, mais les colonnes ne sont pas prolongées et la position des chiffres n'est pas désignée oralement selon la colonne, mais uniquement par un « là » ou un « ici ». La CMS correspondant au lien entre l'algorithme et la numération décimale de position (voir 13.1.2.3) n'est donc ici que partiellement présente. La pertinence mathématique de plusieurs interventions sera liée à l'aspect purement procédural du placement des chiffres et ne permettra pas de répondre aux difficultés des élèves semblables à celles de EAr évoquées en 15.3, par exemple en développant le fait que la multiplication du chiffre des dizaines par le chiffre des dizaines se trouve dans la colonnes des centaines et des milliers.

Dès le début de la séquence, lors de la révision de l'algorithme de la multiplication à un chiffre, Dominique demande aux élèves de ne plus noter les retenues et de les garder « dans la tête, même si c'est difficile, parce que ce sera utile pour après ». Dominique ne donne durant la séquence ou durant les entretiens, aucune explication autre que procédurale au sujet des retenues. La CMC est correcte, en revanche la CMS que constitue le lien entre retenue et numération décimale n'est pas manifestée et les interventions ne sont pas mathématiquement pertinentes (critère C_1).

En terme de variables didactiques, le fait de garder les retenues dans la tête est codé [T] et celui de tracer des colonnes uniquement pour les termes multipliés [$K_{et p}$].

15.4.3.2 Sacha

Lors de l'explication de l'algorithme, Sacha ne dessine pas de colonnes. En revanche, tant durant cette explication que lors des autres algorithmes de multiplication effectués de façon publique, elle désigne la place des chiffres en parlant de « la colonne de unités », ou de la « colonne des dizaines »... Pour ce qui est des retenues, elle choisit, contrairement à ce qui est recommandé dans Cap Math¹⁵¹, de les noter directement sur la multiplication (et donc dans les colonnes adéquates), en utilisant la même couleur que celle employée pour écrire la ligne correspondante [C] (voir Figure 59 p. 208). Ce faisant, elle résout le problème du mélange tout en conservant les sens de la retenue. Ainsi, même si elle n'est pas verbalisée, la CMS des liens entre numération décimale de position, alignement et retenue est manifestée et correcte. De plus, par l'utilisation des couleurs, par une notation et un vocabulaire rigoureux, les interventions de Sacha se situent au plan mathématique et sont donc mathématiquement pertinentes selon le critère C_1 .

15.4.3.3 Camille

Durant l'explication de l'algorithme, comme durant les autres multiplications, Camille ne donne aucune explication particulière sur l'alignement, elle ne nomme pas les colonnes et demande de retenir les retenues sur les doigts pour la multiplication [D]. En entretien, elle motive cette manière de faire par le risque de mélange entre les deux lignes et par le risque d'ajout de la retenue avant d'effectuer la multiplication. L'absence de prise en compte de ces éléments se marque également à plusieurs moments particuliers durant l'explication de l'algorithme. C'est le cas quand une élève soustrait les retenues au lieu de les additionner, Camille la reprend, sans autre explication. C'est surtout le cas quand, à chaque ligne de produit partiel comme dans la ligne finale, Camille ajoute le séparateur des milliers, ce qui occupe une des colonnes virtuelles (voir Figure 63) et demande à un élève de lire le nombre ob-

¹⁵¹ Cap Math demande de noter les retenues dans une « boîte à retenue » placée à côté de la multiplication et comportant une ligne d'en tête avec les lettres m, d, c et u et une ligne pour les retenues de chaque produit partiel, voir 13.4.6.4.

tenu, ce qui rompt la régularité du système de numération (à cause des « dizaines de milliers »).

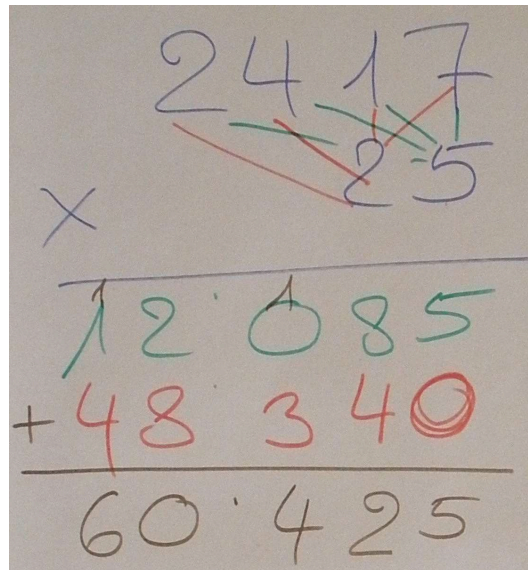


Figure 63 : Camille, explication de l’algorithme sur affiche

La CMS considérée est donc absente et les interventions de l’enseignante sont mathématiquement non pertinentes (C_1)

15.4.3.4 Andrea

Andrea accorde peu d’importance à l’alignement dans l’explication de l’algorithme comme d’ailleurs dans le reste de la séquence. Elle signale qu’il faut aligner mais ne nomme pas les colonnes et ne reprend pas les élèves au tableau quand ils sont peu rigoureux. Ces questions apparaîtront plus dans la rédaction du mode d’emploi de l’algorithme en séance 9. Lors de la rédaction de ce mode d’emploi, Andrea doit nommer les colonnes car elle ne peut pas les montrer. En revanche une confusion est générée car elle parle régulièrement du chiffre des unités et du chiffre des dizaines pour désigner les chiffres du produit partiel effectué, ce qui donne la phrase :

Je fais 4×6 , j’ajoute la retenue, je trace l’ancienne retenue, je note l’unité dans la colonne des milliers. Je note la dizaine dans la colonne des dizaines de milliers. (Andrea, Mode d’emploi, séance 9, voir Figure 44)

En fait la retenue est notée à côté et tracée dès qu’elle a été utilisée [A]. Cette gestion de la retenue met très en avant l’aspect procédural, et elle ne prend pas en compte la signification de la retenue et le lien avec la numération de position. Cela entraîne une difficulté, puisque ce mode d’emploi n’a pas de degré de généralité, non seulement parce qu’il utilise les nombres pris comme exemple, mais aussi parce que chaque étape est particulière, notamment celle de la multiplication du dernier chiffre où la retenue doit être gérée différemment. Interrogée lors de l’entretien *post*, Andrea est consciente du manque de généralité de ce mode d’emploi, mais elle est persuadée de son utilité.

La CMC est correcte, en revanche la CMS que constitue le lien entre retenue et numération décimale n’est pas manifestée dans cet épisode et les interventions ne sont pas mathématiquement pertinentes (critère C_1).

15.4.4 Et le zéro ?

Avant la séquence, les quatre enseignants estimaient que le zéro de la seconde ligne constituerait la principale difficulté dans l'enseignement de l'algorithme. Tous ont donc prévu une manière de traiter cette difficulté et l'ont utilisée. Par ailleurs, tous ont affirmé qu'ils/elles souhaitaient que les élèves *comprennent* ce zéro et tous ont appuyé leur explication sur la *règle du zéro* (voir 13.2). La population observée diffère ici de celle ayant participé aux entretiens analysés dans la Partie B (10.1.2.3) où seuls 75% des enseignants vaudois déclaraient une stratégie d'enseignement orientée vers la compréhension. Aucun des quatre enseignants n'a précisé explicitement aux élèves que cette règle n'était valable que pour les nombres entiers, alors même que les quatre enseignants en étaient conscients.

15.4.4.1 Dominique

La raison donnée par Dominique pour placer le zéro de la seconde ligne est le fait qu'on travaille avec des dizaines, et que, lorsqu'on travaille avec de dizaines, on ajoute un zéro.

36. D: C'est 1, ça?
37. E?: 10
38. D: C'est 10 ! Donc attention, quand on travaille avec les dizaines, qu'est-ce qu'on doit rajouter?
39. EAr: Un zéro. (Dominique, leçon 4, transcription)

Dominique s'appuie ici directement sur plusieurs rappels effectués en particulier durant la leçon précédente (épisode 1-3-1) à propos de cette *règle du zéro*. Il avait à ce moment là dit sur plusieurs exemples, « quand on multiplie par 10 on ajoute un zéro ». La formulation devient ici « quand on travaille avec les dizaines », ce qui semble indiquer qu'il insiste sur l'aspect décimal [Z D].

Cette formulation dans ce contexte est correcte du point de vue des CMC, pour autant qu'on ne la sorte pas de ce contexte et en particulier qu'on ne cherche pas à l'appliquer à d'autres moments dans l'algorithme. En effet, si on la prend au pied de la lettre, et c'est ce que font certains élèves, en particulier EAr (voir 15.3), elle conduit à ajouter d'autres zéro. En fait cette règle, dans le contexte de l'algorithme de la multiplication, est un raccourci de l'associativité de la multiplication et du caractère positionnel décimal du système de numération (voir 13.2). Le problème est alors qu'un raccourci efficace, une connaissance encapsulée, ne permet pas une interaction mathématiquement pertinente. Autrement dit la CMS consistant à décortiquer une CMC n'est pas présente ici.

Par ailleurs, comme analysé en 15.3.3, l'enseignant n'appuie pas l'explication du zéro sur l'algorithme en tableau qu'il vient de présenter. Là encore une occasion d'interaction mathématiquement pertinente n'est pas saisie.

15.4.4.2 Sacha

Lors de l'explication de l'algorithme, la question du zéro ne suscite pas de discussion particulière [Z S] :

9. ELA: On doit rajouter un zéro.
10. S: Pourquoi?
11. ELA: Parce que c'est 30

Ceci s'explique par la construction méticuleuse mise au point par Cap Math. En fait, il faut remonter à la multiplication décomposée pour chercher une explication au sujet du zéro. Lorsque Sacha demande aux élèves d'effectuer 86×34 , ceux-ci effectuent 86×3 en colonnes,

puis écrivent en ligne 86×30 en « ajoutant un zéro ». Sacha est d'ailleurs très attentive à leur demander de ne pas ajouter le zéro directement dans la multiplication en colonnes, comme elle le mentionne déjà lors de l'entretien *ante*. La *règle du zéro* qui justifie l'ajout du zéro à la seconde ligne de l'algorithme de la multiplication à deux chiffres par 34 s'appuie sur le fait, rappelé dans la leçon précédente, qu'il s'agit d'une multiplication par 30 et qu'une multiplication par 30 s'effectue en ajoutant un zéro à droite d'une multiplication par 3. Ces connaissances sont mentionnées et le lien entre elles est explicité par l'enseignante. Cette CMS de *décortilage* permet donc ici une pertinence mathématique de l'enseignante.

15.4.4.3 Camille

Camille a fait le choix de ne pas préparer l'arrivée du zéro avant l'explication de l'algorithme. Elle va donc devoir placer une parenthèse sur la *règle du zéro* au milieu de l'explication. Cette parenthèse durant plus de 20 interventions, elle est donnée ici en partie dans sa version *synopsis*.

42. C: On va voir qui a raison! Alors, je vais déjà changer de couleur pour pas vous trop, vous... pour pas que ce soit plus clair. Est-ce que dans l'esprit de tout le monde, c'est bien clair que 25 c'est 20... et 5 (dit en chœur en même temps par les élèves). C'est OK, ça? Hein, 25 c'est bien 20 et 5 (C écrit sur l'affiche 25 (espace) 20 plus 5, de même pour les nombres suivants), 37...
43. E (en chœur) : 30 plus 7
44. C: Euh... 14?
45. E: 10 et 4, (un élève dit distinctement 1 et 4)
46. C: Pas 1, 10, j'ai entendu 1. 10! Toujours garder ça à l'esprit. Euh 58?
47. E: 50 plus 8
48. C: Donc là nous avons 5, c'est fait, et ?
49. E: Vingt
50. C: Mmh mmh. Et ce vingt, c'est pas tout à fait un deux. C'est bien un vingt. (Camille, leçon 1, transcription)

Camille demande ce qui se passe quand on fait des livrets genre 8×20 ou 4×20 . Elle écrit $4 \times 20 = 80$ sur l'affiche et fait de même avec 7×20 (une réponse 114 est rejetée); 10×20 et 3×20 . Elle entoure les résultats et demande aux élèves quelle conclusion ils peuvent tirer en voyant ces quatre réponses. Elle fait dire que chaque fois qu'on fait $x \times 20$, c'est fois deux et qu'on rajoute un zéro, que donc dans la colonne des unités, c'est toujours zéro, et que c'est la même chose quand on fait $x \times 10$, $x \times 30$, $x \times 50$... (Camille, leçon 1, synopsis)

70. C: Dans la colonne des unités, c'est toujours zéro. Et c'est pareil si je fais fois 10, fois 30, fois 40, fois 50, on sera toujours avec un zéro, pour terminer le calcul.
71. C: C'est pour ça que là, je vous propose, au deuxième étage, parce qu'il y aura bien un deuxième étage, bravo à tous ceux qui ont eu l'idée du deuxième étage, de mettre ici un zéro (C repasse chaque zéro de la série de calculs 4×20 ...) pour montrer que ça finira forcément par un zéro. Est-ce que ça, ça vous parle ? Est-ce que vous voyez où je veux en venir? (Camille, leçon 1, transcription)

Ce qui ressort de cette parenthèse, c'est que les multiplications par 10, 20, 30... se terminent toujours par zéro et qu'il faut donc mettre un zéro puisqu'on multiplie par 20. Telle que formulée ici, cette justification de type inductif [Z I] rend plausible la présence du zéro. Néanmoins, vue comme une recette, elle va conduire certains élèves à ajouter des zéro lors de la multiplication par 20 de chaque chiffre du premier nombre et mettre Camille dans une situation délicate dont elle va se sortir en disant qu'il suffit de mettre le zéro une fois.

86. C: Bon, alors... C'est marrant, parce que ça m'est jamais arrivé que des élèves me disent ça. Euh, comment est-ce que je vais m'y prendre? Euh...
87. C: Ca, c'était fois 5. C'est bon, on a fait fois 5, c'est l'étage vert, ça vous a pas posé de problème. OK. Ensuite, j'enlève mon petit cache, je le pose là (C déplace le cache du 2 sur le 5), et je me retrouve avec un 2. Et puis moi je vous dis "mais c'est pas tout à fait 2. En vrai, c'est 20. Alors comme on doit faire chaque fois fois 20, et qu'on sait que la réponse va finir par zéro, puisqu'on a vu que chaque fois qu'on fait fois 20, notre réponse finit par zéro, on place notre zéro déjà à l'avance. C'est plus pratique. Et une fois qu'on a placé le zéro, on considère notre 20 comme un 2 (dit par les E en chœur en même temps). (C se tourne vers EBa) T'as plus besoin de faire fois 20, je rajoute un zéro, il est là, le zéro, c'est bon! Après je vous montrerai ce que ça fait, si on oublie de rajouter ce zéro.
88. C: Mais vous voulez me faire plaisir en me disant "c'est pas 20, c'est pas 2, c'est 20", mais c'est bon, on a dit c'est pas deux, c'est 20, donc on place notre zéro. C'est OK? (Camille, leçon 1, transcription)

Cet argument n'est pas de nature mathématique et de fait la justification de la présence du zéro ne l'était déjà pas puisqu'elle se contentait de constater un fait sur des exemples sans en expliquer la cause. La CMS permettant de justifier ou d'expliquer la CMC n'est pas présente ici. Dans les termes de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2002b) on pourrait dire comme Huillet (2009) que la composante *technologico-théorique* n'est pas présente (voir 3.3.6 et 15.6.1.2). Cette absence entraîne un manque de pertinence mathématique.

15.4.4.4 Andrea

Le moment d'explication de l'algorithme chez Andrea ne dit pas grand chose sur le zéro de la seconde ligne :

45. A: Ca c'est 1? Ca c'est 1? EDa, c'est 1, ça? C'est le même... c'est 1 comme ça c'est (montre le 2 de 12) les unités, ça?
46. EDa: Non, les dizaines.
47. Es: Les dizaines
48. A: Ah, c'est des dizaines, hein.
49. Es: On met le zéro.
50. A: On met le zéro? On essaye? (écrit le zéro) On met le zéro, et puis ensuite? (Andrea, leçon 5, transcription)

Mais ce moment d'explication intervient en cinquième séance et la question du zéro a occupé une partie importante des séances précédentes.

Lors de l'entretien *ante*, Andrea affirme qu'elle souhaite que les élèves « aient compris pourquoi on fait comme ça, et pas qu'ils le fassent de façon méthodique, sans réfléchir » (Andrea, entretien *ante*). En particulier pour le zéro, elle anticipe une difficulté et espère d'autant plus que les élèves vont « comprendre pourquoi on rajoute un zéro ». Pour ce faire, elle a prévu de débiter en posant une multiplication par un nombre à deux chiffres se terminant par zéro, de laisser les élèves faire tous seuls et de voir ce qui se passe. La réalisation en classe de cette multiplication 346×10 a été décrite en 15.4.2.4 du point de vue de la distributivité. Comme aucun des élèves ayant proposé une procédure au tableau n'a écrit deux lignes, Andrea rappelle la *règle du zéro* sur trois exemples puis effectue et décrit la multiplication 448×10 en colonnes sans faire aucun commentaire et sans donner aucune explication, sauf sur le 0 de la deuxième ligne. Au moment de commencer la seconde ligne, elle indique que, comme c'est une dizaine, elle va faire comme dans les exemples précédents [Z I], ajouter un zéro et ensuite calculer avec le 1. Andrea utilise donc la *règle du zéro* pour effectuer un algorithme dont le résultat sera... la *règle du zéro* ! Le cercle est bouclé et on pourrait imaginer

une *règle du sept* et arriver au résultat de la multiplication de 346×10 qui serait 3467. Il y a ici une erreur logique qui relève à la fois d'une CMC et d'une CMS en ce qu'elle est située dans une situation purement scolaire consistant à effectuer une multiplication par 10 en colonnes. Andrea ne semble pas consciente du problème posé, même si elle est obligée de s'appuyer sur un élément externe (la calculatrice) pour produire une justification du résultat.

Cette autojustification intervient à d'autres moments de la séquence, en particulier durant la séance 2 où Andrea fait *démontrer* la *règle du zéro* à une élève en lui faisant effectuer successivement en colonnes 376×1 et 376×10 avec la méthode montrée en leçon 1. Interrogée sur cette *démonstration* lors de l'entretien *post* au moyen de la vidéo de ce passage, Andrea déclare qu'il ne s'agit pas vraiment d'une démonstration mais ne perçoit pas le cercle vicieux. Les élèves en revanche, probablement surtout gênés par la complication apportée par l'algorithme pour multiplier par des nombres à deux chiffres se terminant par zéro, mais aussi par la pétition de principe, ne cessent de répéter qu'ils ne comprennent pas et Andrea va devoir passer quatre leçons avant de pouvoir passer à l'algorithme général. De plus, la pertinence est en défaut car les interventions de l'enseignante se situent à un niveau qu'on pourrait qualifier de *pseudo-mathématique* étant donné que les interactions utilisent certes des mathématiques, mais de façon erronée et inadéquate par rapport au but visé.

15.4.5 Les représentations de la multiplication

Comme illustré dans l'ensemble de ce paragraphe consacré au moment d'explication de l'algorithme, les connaissances mathématiques spécifiques mises en évidence prennent fortement appui sur les ostensifs de la multiplication. Chez les quatre enseignants la représentation de la multiplication comme addition itérée est prédominante, voire unique. Cette constatation avait déjà été faite par Davis et Simmt au Canada (2006, p. 299) ou par Amato (Amato, 2004; Amato, 2005) au Brésil. Dans le cas de Sacha où cette représentation est en accord avec le manuel utilisé et où celui-ci construit les connaissances des élèves sur des bases mathématiques que l'on peut considérer comme adéquates, cela ne pose pas problème. En revanche quand, comme c'est le cas pour Dominique, cet ostensif ne correspond pas aux tâches proposées aux élèves, ou aux explications fournies par l'enseignant, les CMS de l'enseignant apparaissent comme déficientes. De fait, la capacité à varier les points de vues, registres ou cadres est souvent considérée comme la compétence d'un expert. Ce que dit Robert (2008c, p. 34) à propos des élèves peut être étendu à l'enseignant : « Un des enjeux de l'apprentissage est d'accéder à une certaine diversité des "représentations" des objets étudiés [...], ainsi qu'à une certaine organisation des concepts entre eux permettant d'en acquérir une certaine disponibilité [...] ».

Ce point rejoint encore deux des tâches d'enseignement liée aux CMS par Ball et al. : « Recognizing what is involved in using a particular representation ; linking representations to underlying ideas and to other representations »¹⁵² (Ball *et al.*, 2008, p. 400). Cette CMS fait défaut à propos de la multiplication chez Dominique, Camille et Andrea. L'observation n'a pas permis de savoir si sa manifestation chez Sacha était liée ou non à l'utilisation de Cap Maths.

15.5 Analyse globale par enseignant

Les connaissances mathématiques pour l'enseignement et la pertinence mathématiques ont été décrites finement pour l'épisode concernant l'explication de l'algorithme lui-même.

¹⁵² « Etre conscient des implications de l'utilisation d'une représentation particulière ; faire les liens entre une représentation et le concept, entre plusieurs représentations d'un concept. »

L'ensemble des leçons de chaque enseignant a également été analysé à l'aide de ces éléments. Cette section 15.5 est plus globale. Elle porte sur l'analyse des proportions de connaissances correctes et de pertinence manifestée, et ce pour l'ensemble des données de chaque enseignant.

Dans le Tableau 31, les clips contenant des CME déterminées comme correctes et ceux contenant des CME codées comme incorrectes ont été distingués pour l'ensemble des leçons et des entretiens avec chaque enseignant. Les CME de type pédagogique ont été regroupées, les connaissances mathématiques communes (CMC) d'une part et spécifiques (CMS) d'autre part ont été traitées séparément. Les connaissances de l'horizon mathématique (CHM) ne représentant que 24 occurrences dont 22 correctes, elles ne figurent pas dans ce tableau. La proportion de clips contenant des connaissances correctes d'un certain type par rapport au nombre de clips contenant ce type de connaissances a ainsi été déterminée.

De la même manière, en regroupant les quatre critères C_1 à C_4 , les clips contenant des manifestations de pertinence ont été comptés séparément de ceux contenant une manifestation de l'absence de pertinence et le rapport a été calculé.

	TOT CMEp/c	TOT CMEp/f	% de c en cas de CMEp déterminé	TOT CMC/c	TOT CMC/f	% de c en cas de CMC déterminé	TOT CMS/c	TOT CMS/f ou s	% de c en cas de CMS déterminé	TOT CME/c	TOT CME/f ou s	% de c en cas de CME déterminé	TOT Pertinence +	TOT pertinence -	% de + en cas de pertinence ou d'absence de pertinence
Dominique classe	5	28	15.2	101	4	96.2	28	77	26.7	131	81	61.8	64	90	41.6
Dominique entretien	27	8	77.1	6	1	85.7	12	20	37.5	26	21	55.3	28	27	50.9
Dominique total	32	36	47.1	107	5	95.5	40	97	29.2	157	102	60.6	92	117	44.0
Sacha classe	18	3	85.7	48	0	100.0	36	2	94.7	86	2	97.7	69	22	75.8
Sacha entretien	27	4	87.1	8	0	100.0	29	5	85.3	39	6	86.7	33	13	71.7
Sacha total	45	7	86.5	56	0	100.0	65	7	90.3	125	8	94.0	102	35	74.5
Camille classe	16	16	50.0	60	1	98.4	16	31	34.0	78	33	70.3	26	51	33.8
Camille entretien	7	6	53.8	8	1	88.9	8	12	40.0	19	13	59.4	6	19	24.0
Camille total	23	22	51.1	68	2	97.1	24	43	35.8	97	46	67.8	32	70	31.4
Andrea classe	22	68	24.4	57	6	90.5	33	80	29.2	90	86	51.1	50	102	32.9
Andrea entretien	15	5	75.0	7	0	100.0	4	18	18.2	14	18	43.8	18	17	51.4
Andrea total	37	73	33.6	64	6	91.4	37	98	27.4	104	104	50.0	68	119	36.4
Total classe	61	115	34.7	266	11	96.0	113	190	37.3	385	202	65.6	209	265	44.1
Total entretien	76	23	76.8	29	2	93.5	53	55	49.1	98	58	62.8	85	76	52.8
TOTAL	137	138	49.8	295	13	95.8	166	245	40.4	483	260	65.0	294	341	46.3

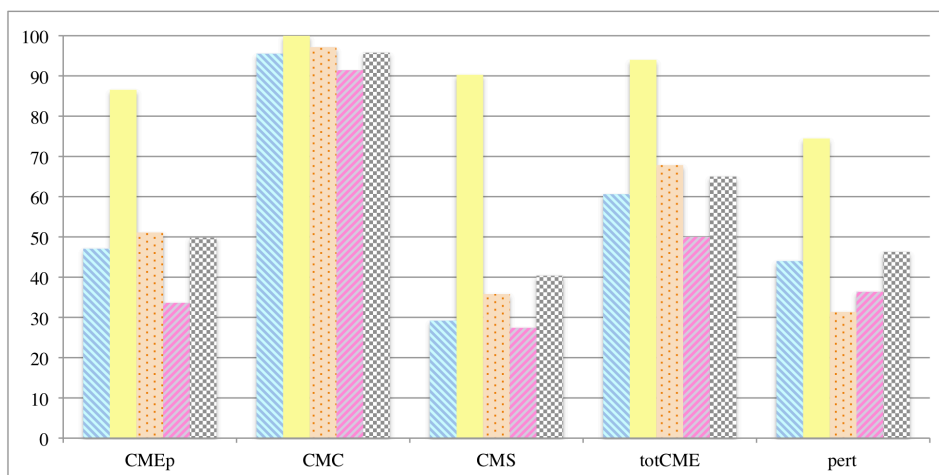


Tableau 31 : Répartition des CME correctes et des manifestations de la pertinence par enseignant et par type de données.

Le profil esquissé par les proportions des séquences de Dominique et d'Andrea sont relativement semblables. Tous deux manifestent des CME de type pédagogique majoritairement correctes en entretien mais très souvent incorrectes en classe. Cette différence se marque, chez l'un comme chez l'autre par un écart important entre ce qu'ils déclarent vouloir faire et ce qu'ils font en réalité. On peut signaler par exemple le fait que Dominique affirme vouloir laisser le choix entre l'algorithme en tableau et l'algorithme en colonnes alors qu'en fait il va très rapidement imposer ce dernier, ou encore le fait que Andrea prévoit de faire découvrir l'algorithme à ses élèves en se basant sur leur connaissance de la multiplication alors qu'en fait elle fait appel à leurs *idées* de façon très générale et écarte celles qui sont fausses par seule comparaison avec le résultat obtenu par la calculatrice.

La proportion de clips contenant des CME de type pédagogique correctes est plus uniforme chez Camille, mais celle-ci reste relativement faible (environ 50%). Ces connaissances relèvent surtout de sa présentation aux élèves des mathématiques comme un recueil « de trucs, de moyens » et à une utilisation à contre-emploi des moyens COROME.

Ce programme de maths est vraiment extra, il est fait de telle manière que en fait, ils découvrent beaucoup par eux-mêmes, les stratégies de travail, les trucs, les... Je dis toujours, "les trucs, les moyens..." Il y en a une qui est venue me dire "ça on a pas appris à faire. -Ok, on n'a pas appris, alors, qu'est-ce qu'on fait? - Je sais pas. - Ben on cherche, une combine. Moi j'ai jamais appris à changer une roue, mais le jour où je crève en pleine forêt, il faudra quand même que je trouve une combine. Je peux téléphoner à quelqu'un qui m'explique comment on fait, une combine serait de partir à pied à la recherche du garage le plus proche, enfin on cherche un truc. On peut pas s'asseoir et pleurer au bord de la route. Donc, on cherche une stratégie." (Camille, entretien *ante*)

Ces trois enseignants font en classe des erreurs mathématiques relevant des connaissances mathématiques communes. Pour Dominique, il s'agit d'une erreur en effectuant l'algorithme et d'affirmations erronées à son sujet (la deuxième ligne est toujours plus grande que la première ; dans un algorithme de multiplication à deux chiffres, il y a toujours une addition à la fin). Pour Andrea, il s'agit d'erreurs faites au tableau (dans l'algorithme, dans l'estimation d'un résultat) ou dans son corrigé, ou encore d'une affirmation erronée (deux calculs différents donnent un résultat différent, les deux calculs faits ici le prouvent). Quant à Camille, elle fait une seule erreur de ce type, mais une erreur importante, quand elle affirme aux élèves qu'une multiplication agrandit toujours le résultat, alors qu'une division le rend plus petit. Lors de l'entretien *post* l'enregistrement vidéo de ce moment a été montré à Camille qui n'a remarqué aucun problème. Interrogée plus précisément, elle dit que c'est vrai, « jusqu'en fin de quatrième » et que ça n'est faux que « quand il y a des virgules ». Elle continue d'ailleurs de penser qu'il faut dire aux élèves que multiplier, c'est agrandir et qu'on leur expliquera un jour qu'il y a des cas où cela n'est pas vrai. Là encore, comme montré en 13.1, cette erreur peut être liée à une représentation purement additive de la multiplication. Cette hypothèse est confirmée par la réaction de Camille lors de l'entretien *post* lorsque la représentation de la multiplication comme aire lui est présentée : « J'ai jamais fait le lien! J'y ai jamais pensé ». Il faut d'ailleurs signaler qu'ensuite, Camille se souvient avoir fait des exercices liant aire et multiplication (La chasse aux rectangles, (Danalet *et al.*, 1998, p. 164)), mais en modifiant la donnée de telle sorte que l'exercice serve uniquement à noter les livrets. Cette erreur sur « la multiplication qui agrandit et la division qui rend plus petit » et son lien avec les représentations additives de la multiplication et partitive de la division a d'ailleurs été relevée par Tirosh et Graeber chez 11% (pour la multiplication) et 52% (pour la division) d'une population de 136 futurs enseignants primaires étatsuniens (1989). La CMS des différentes représentations de la multiplication est donc absente chez Camille et c'est cette absence qui rend possible une erreur mathématique ayant trait aux CMC.

Pour ce qui est de la pertinence, les trois enseignants ont des taux variant entre 31% et 44%. Cette proportion est globalement proche de celle des CMS, toutefois Dominique se distingue en ayant une pertinence relative plus élevée, à l'inverse de Camille dont la pertinence est faible. Cette constatation, renforce l'impression que Dominique essaye d'interagir au plan mathématique avec ses élèves alors que Camille se situe presque toujours sur le plan procédural.

Sacha se distingue des ses trois collègues pour toutes les catégories concernées. Elle ne commet aucune erreur de l'ordre des CMC, et de manière générale, les connaissances mathématiques pour l'enseignement manifestées, tant pédagogiques que spécifiques, sont correctes dans environ 90% des cas. Comme déjà mentionné, il n'est pas possible de savoir si le fait d'utiliser un manuel très structuré est déterminant pour expliquer cette différence. En revanche, l'exception que constitue Sacha renforce l'hypothèse d'une corrélation entre des CME correctes et une pertinence mathématique de l'enseignant. Nous reviendrons sur cette hypothèse en 15.6.3.

15.6 Analyse de certaines combinaisons

Après l'exploration précise des connaissances mathématiques des enseignants observés, ce chapitre propose un regard plus global sur le lien entre ces connaissances elles-mêmes (15.6.1) et sur le lien entre ces connaissances et la pertinence mathématique de l'enseignant (15.6.3). Pour ce faire, les apparitions dans un même clip de deux catégories ont été répertoriées sur l'ensemble des données.

15.6.1 Les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement et les autres connaissances mathématiques pour l'enseignement

Nous commencerons par observer comment les divers types de CME se combinent entre elles, indépendamment du fait qu'elles soient correctes ou non, puis nous décrirons plus en détail les combinaisons entre CMC et CMS.

15.6.1.1 Combinaisons entre CME

Le Tableau 32 et le Tableau 33 donnent les nombres et les proportions de clips comportant une combinaison des CME deux à deux entre elles.

	CC	CE	CP	CHM	CMC	CMS	Nombre total
CC	35	32	21	3	39	59	143
CE		33	3	3	46	54	130
CP			20	11	6	20	65
CHM				8	4	4	24
CMC					135	121	312
CMS						222	438

Tableau 32 : Combinaisons des CME deux à deux entre elles. Les cases grisées représentent le nombre de clips où un seul type de CME est présent.

	CC	CE	CP	CHM	CMC	CMS	Nombre total
CC	24.5	22.4	14.7	2.1	27.3	41.3	100
CE		25.4	2.3	2.3	35.4	41.5	100
CP			30.8	16.9	9.2	30.8	100
CHM				33.3	16.7	16.7	100
CMC					43.3	38.8	100
CMS						50.7	100

Tableau 33 : Valeurs relatives des combinaisons par rapport au nombre de clips comportant chaque type de CME

Ces nombres ne donnent que peu d'indications et il est nécessaire d'observer plus précisément les interactions à la fois les plus nombreuses et le plus intéressantes, celles entre CMC et CMS.

15.6.1.2 Combinaison entre CMS et CMC

Le Tableau 34 donne le nombre de clips comportant des CMS et des CMC.

	CMC correctes	CMC erronées	CMC indéterminées	Pas de CMC	Nombre total
CMS correctes	18	0	0	148	166
CMS incorrectes ou superficielles	95	0	2	148	253
CMS indéterminées	6	0	0	13	19
Pas de CMS	176	13	2		
Nombre total	295	13	4		

Tableau 34 : combinaison entre CMS et CMC

Afin d'affiner encore la distinction et les liens entre CMS et CMC, nous examinerons principalement les cas où les unes sont correctes alors que les autres sont incorrectes.

CMS incorrectes ou superficielles et CMC correctes

Ce croisement concerne des connaissances mathématiques que l'enseignant ne parvient pas à utiliser, en classe ou en entretien, ou qui sont erronées, mais dont l'emploi ne poserait pas de difficulté dans un contexte autre que celui de l'enseignement.

C'est le cas par exemple des justifications données à l'existence de deux lignes dans l'algorithme de la multiplication en colonnes par un nombre à deux chiffres, à la présence du zéro à la deuxième ligne ou à la *règle du zéro* (voir 15.3). Ces justifications sont le plus souvent de caractère non mathématique (on additionne les deux lignes parce que « après, tous ces petits calculs, il faut les mettre ensemble »), voire imagée (on prend le zéro qui est dans 17×10 et on le met dans la réponse 170), ou alors obtenue de manière inductive par l'observation de plusieurs exemples (après plusieurs exemples, on voit qu'à chaque fois qu'on multiplie par un nombre se terminant par 0, la réponse se termine par 0. Donc notre réponse doit se terminer par 0).

Malgré des questions réitérées des élèves demandant des justifications supplémentaires, malgré souvent des questions plus précises lors des entretiens *post*, les enseignants ayant fourni ces justifications s'y sont tenus. Pourtant, du point de vue des connaissances mathématiques communes, il n'y a pas vraiment d'erreur ici. On peut même considérer, dans les termes de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), que si la partie technique de l'organisation mathématique est correcte, c'est la partie technologique qui est déficiente. Cette analyse rejoint alors celle de Huillet (2009) qui considère les CMS comme relevant simplement des technologies permettant de justifier les techniques (voir 3.3.6).

Un certain nombre de passages concernent des liens que l'enseignant ne fait pas (par exemple absence de lien entre les retenues et le système décimal de position). Lorsque l'enseignant a été interrogé sur ce lien lors de l'entretien *post* et que ce lien n'est pas apparu, il s'agit d'une CMS incorrecte. Si la connaissance de ce lien n'a pas pu être vérifiée, la CMS a été considérée comme superficielle. Il s'agit là encore d'une connaissance mathématique qui n'est pas commune, dans la mesure où ces liens-là ne sont guère fait qu'en situation d'enseignement. Là encore le concept de technologie recouvrirait ces CMS.

D'autres CMS concernent l'usage du vocabulaire courant, par exemple « ajouter un zéro », de notations correctes mais inadéquates dans ce contexte (par exemple les séparateurs

des milliers dans l'algorithme) ou encore de formulations mêlant plusieurs points de vue (chiffre 2 des dizaines considéré parfois comme 2 et parfois comme 20) au sens de Robert (2008d, p. 53). Ces usages relèvent d'abord des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement, et pas seulement des connaissances du contenu et de l'enseignement (CC), car elles ont d'abord des implications au niveau des connaissances mathématiques présentées avant d'avoir des effets sur leur diffusion aux élèves. Il en va de même des connaissances mises en jeu lors du choix des exemples (citons le choix de 12 comme second terme de la multiplication alors que le but de l'enseignant est d'éviter que les élèves ne décomposent le premier terme comme ils l'avaient fait avec une multiplication en colonnes par 10, voir 15.4.2.4) où c'est le manque de conscience des propriétés mathématiques qui ne permet pas à l'enseignant d'effectuer des choix adéquats du point de vue de l'enseignement. Ce cas de figure ne semble pas relever d'éléments technologiques au sens de la TAD.

Il en va de même du dernier groupe de CMS incorrectes liées à des CMC correctes. Il s'agit des passages dans lesquels l'enseignant ne comprend pas une déclaration d'élève, une erreur ou une procédure non canonique, alors même qu'il fait montre dans le même temps de la connaissance de la procédure commune.

CMC incorrectes

En présence d'une CMC incorrecte, il n'y a pas de CMS. En effet ces « erreurs mathématiques » (par exemple des erreurs de calcul en effectuant un algorithme au tableau noir ou des propriétés mathématiques incorrectes qui sont énoncées), ne permettent d'une part pas à des CMS correctes d'être présentes et d'autres part aucun épisode avec une CMC incorrecte n'a donné lieu à une explication scolaire elle aussi inadéquate.

CMC correctes et CMS correctes

En présence d'une CMC correcte (par exemple lorsque l'enseignant effectue correctement un calcul), celle-ci est le plus souvent présente seule. Par contre elle est parfois accompagnée d'une justification de type scolaire. Lorsque ces deux éléments sont entremêlés, ils sont compris dans le même clip, ce qui arrive 18 fois.

15.6.2 CME et niveau d'activité du professeur

Comme mentionné en 15.1.2.2 les catégories de connaissances mathématiques ont été attribuées à la quasi totalité des clips déterminés en classe et en entretien. Seuls 7% des épisodes n'ont pas pu se voir déterminer une catégorie de connaissance mathématique. Il s'agit essentiellement de moments d'observation, de moments de gestion de classe avec interactions didactiques (lecture de consigne par exemple) ou de déclarations relativement générales durant les entretiens pour lesquels il n'était pas possible de déterminer, même en questionnant l'enseignant, quel type de connaissance ces déclarations mettaient en jeu. Selon les niveaux d'activités de l'enseignant, les types de connaissances mathématiques sont assez uniformément répartis (Tableau 35). On note tout au plus que les CME de type pédagogique (CC, CE, CP) sont plus présentes au niveaux +3 et +2 alors que les connaissances mathématiques communes (CMC) y sont rares. Les connaissances mathématiques spécifiques (CMS) ne se distinguent en revanche pas des autres types de CME du point de vue de leur manifestation aux divers niveaux d'activité du professeur.

	+3	+2	+1	0	-1
...% des CMEp sont dans les clips de niveau ...	12.2	22.3	9.4	51.4	4.7
...% des CMC sont dans les clips de niveau ...	3.5	4.5	6.1	82.7	3.2
...% des CMS sont dans les clips de niveau ...	3.8	13.9	5.2	75.3	1.9
...% des CMEs sont dans les clips de niveau ...	4.6	11.1	5.7	76.1	2.5
...% des CMEtout sont dans les clips de niveau ...	6.6	13.3	6.3	70.6	3.2
...% des pertinence sont dans les clips de niveau ...	5.9	13.4	4.7	72.8	3.1

Tableau 35: Répartition des types de CME selon le niveau d'activité du professeur

15.6.3 CMS et pertinence

De la même manière que pour l'analyse globale par enseignant (15.5), les clips contenant des CME déterminées comme correctes et ceux contenant des CME codées comme incorrectes ont été séparés pour l'ensemble des leçons, des entretiens et des enseignants. Les CME de type pédagogique ont été regroupées, les connaissances mathématiques communes (CMC) d'une part et spécifiques (CMS) d'autre part ont été traitées séparément. La présence de ces CME est croisée avec la manifestation de la pertinence et la manifestation de son absence, tous critères regroupés. Le croisement d'une CME avec une manifestation de pertinence ne signifie pas à chaque fois qu'il y ait causalité, ni même lien direct. En effet, il y a parfois dans une même intervention plusieurs types de CME et une manifestation de pertinence ou d'absence de pertinence et les outils d'analyse employés ne permettent pas de déterminer s'il y a un lien direct entre une des CME et la pertinence décelée. En revanche, étant donné le nombre de clips considérés (797), une analyse statistique a pu être effectuée au moyen du logiciel SPSS. Les résultats sont donnés dans les tableaux ci-dessous. Les résultats attendus (CME correcte et pertinence, CME erronée et non pertinence) sont notés en vert, les résultats non attendus (CME correcte et non pertinence, CME erronée et pertinence) sont notés en orange. Ces corrélations seront analysées ensuite.

CMEp x Pertinence Khi-deux de Pearson : .000

			Pertinence				Total
			pert/nonper	pertinence	nonpertinence	pasdepertin	
CME de type pédagogique	corr/err	Effectif	0	1	6	3	10
		% compris dans CMEp	.0%	10.0%	60.0%	30.0%	100.0%
	correcte	Effectif	2	76	18	29	125
		% compris dans CMEp	1.6%	60.8%	14.4%	23.2%	100.0%
	erronée	Effectif	3	6	92	27	128
		% compris dans CMEp	2.3%	4.7%	71.9%	21.1%	100.0%
	absence	Effectif	10	196	211	117	534
		% compris dans CMEp	1.9%	36.7%	39.5%	21.9%	100.0%
Total	Effectif	15	279	327	176	797	
	% compris dans CMEp	1.9%	35.0%	41.0%	22.1%	100.0%	

Tableau 36 : Corrélation entre les CME de type pédagogique et la pertinence, en valeurs absolues et relatives.

CMC x Pertinence Khi-deux de Pearson : .011

			Pertinence				Total
			pert/nonper	pertinence	nonpertinence	pasdepertin	
CMC	correcte	Effectif	4	110	131	50	295
		% compris dans CMC	1.4%	37.3%	44.4%	16.9%	100.0%
	erronee	Effectif	1	1	9	2	13
		% compris dans CMC	7.7%	7.7%	69.2%	15.4%	100.0%
	absence	Effectif	10	168	187	124	489
		% compris dans CMC	2.0%	34.4%	38.2%	25.4%	100.0%
Total		Effectif	15	279	327	176	797
		% compris dans CMC	1.9%	35.0%	41.0%	22.1%	100.0%

Tableau 37 : Corrélation entre les CMC et la pertinence, en valeurs absolues et relatives.

CMS x Pertinence Khi-deux de Pearson : .000

			Pertinence				Total
			pert/nonper	pertinence	nonpertinence	pasdepertin	
CMS	corr/err	Effectif	1	1	2	0	4
		% compris dans CMS	25.0%	25.0%	50.0%	.0%	100.0%
	correcte	Effectif	6	117	23	16	162
		% compris dans CMS	3.7%	72.2%	14.2%	9.9%	100.0%
	erronee	Effectif	5	14	190	32	241
		% compris dans CMS	2.1%	5.8%	78.8%	13.3%	100.0%
	absence	Effectif	3	147	112	128	390
		% compris dans CMS	.8%	37.7%	28.7%	32.8%	100.0%
Total		Effectif	15	279	327	176	797
		% compris dans CMS	1.9%	35.0%	41.0%	22.1%	100.0%

Tableau 38 : Corrélation entre les CMS et la pertinence, en valeurs absolues et relatives.

CME x Pertinence Khi-deux de Pearson : .000

			Pertinence				Total
			pert/nonper	pertinence	nonpertinence	pasdepertin	
CME	corr/err	Effectif	6	10	115	28	159
		% compris dans CME	3.8%	6.3%	72.3%	17.6%	100.0%
	correcte	Effectif	5	251	57	64	377
		% compris dans CME	1.3%	66.6%	15.1%	17.0%	100.0%
	erronee	Effectif	4	12	145	26	187
		% compris dans CME	2.1%	6.4%	77.5%	13.9%	100.0%
	absence	Effectif	0	6	10	58	74
		% compris dans CME	.0%	8.1%	13.5%	78.4%	100.0%
Total		Effectif	15	279	327	176	797
		% compris dans CME	1.9%	35.0%	41.0%	22.1%	100.0%

Tableau 39 : Corrélation entre les CME et la pertinence, en valeurs absolues et relatives.

La significativité de la corrélation a été testée à l'aide d'un test Khi-deux de Pearson. Dans tous les cas, la valeur est inférieure à .05, considérée comme borne supérieure de significativité. Elle est de .011 pour la corrélation entre CMC et pertinence et de .000 pour tous les autres cas. Les proportions données dans les tableaux croisés ne sont donc statistiquement pas dues au hasard et peuvent être analysées. Nous considérerons d'abord l'influence de l'absence de manifestation de CME sur la pertinence de l'enseignant, puis celle de la présence de CME incorrectes et enfin celle de CME correctes sur cette pertinence.

15.6.3.1 Absence de CME

L'absence d'un des types de CME considérés ici ne permet pas d'anticiper une manifestation de pertinence ou de non pertinence. En revanche l'absence complète de CME dans un clip, relevée seulement dans 74 clips, signifie l'absence de manifestation de pertinence dans 78.4% des cas. Ce résultat est peu surprenant dans la mesure où, lorsque l'enseignant agit sur les éléments mathématiques de la situation (pertinence), il manifeste des CME.

15.6.3.2 Présence de CME erronées

Quel que soit le type de CME, la présence d'une connaissance mathématique erronée signifie une manifestation d'absence de pertinence dans environ 70% des cas, avec la proportion la plus élevée (78.8%) pour les CMS. Lorsqu'un même clip contient la manifestation d'une CME erronée et d'une CME correcte (le plus souvent une CME de type pédagogique et une connaissance du sujet), ce taux demeure de 72.3% et l'influence du caractère erroné l'emporte sur celle du caractère correct. Là encore, ce résultat est conforme à ce qui pouvait être anticipé.

15.6.3.3 Présence de CME correctes

Si globalement la présence d'une CME correcte favorise la pertinence dans 66.6% des clips analysés, cette influence est très variable selon le type de CME. Une CME de type pédagogique correcte n'est associée à une manifestation de pertinence que dans 60.8% des cas alors que pour une CMS, cette association est relevée pour 72.2% des clips contenant une CMS correcte. En revanche la situation est inversée avec les CMC où une CMC correcte n'est associée à une manifestation de pertinence que dans 37.3% des cas alors qu'elle est associée à une manifestation de non-pertinence dans 44,4% des cas. Autrement dit, pour les quatre enseignants observés, une connaissance mathématique commune correcte semble provoquer plus souvent une intervention mathématique non-pertinente de l'enseignant qu'elle n'en provoque une pertinente !

Cette situation paradoxale pourrait être expliquée par la présence d'autres CME incorrectes dans le même clip, particulièrement de CMS. Il est donc nécessaire d'examiner ce qu'il advient d'une part en présence d'autres CMS et d'autre part plus généralement en présence de CME.

Comme déjà évoqué en 15.6.1.2, CMC et CMS sont souvent simultanément présentes et les premières peuvent être correctes alors que les secondes sont erronées. En ce qui concerne le lien avec la pertinence, les valeurs sont données dans le Tableau 40.

CMC/c et CMS x Pertinence Khi-deux de Pearson : .000

		Pertinence				Total
		pert/nonper	pertinence	nonpertiner	pasdepertin	
CMC correcte et CMS correcte	Effectif %	1 5.6%	12 66.7%	4 22.2%	1 5.6%	18 100.0%
CMC correcte et CMS erronees	Effectif %	2 2.1%	3 3.2%	74 77.9%	16 16.8%	95 100.0%
CMC correcte et pas de CMS	Effectif %	1 .5%	95 52.2%	53 29.1%	33 18.1%	182 100.0%
pas de CMC correcte	Effectif %	11 2.2%	169 33.7%	196 39.0%	126 25.1%	502 100.0%
Total	Effectif %	15 1.9%	279 35.0%	327 41.0%	176 22.1%	797 100.0%

Tableau 40 : Corrélation entre les CMC correctes liées aux CMS et la pertinence, en valeurs absolues et relatives.

Les corrélations sont significatives (.000) et une CMC correcte est liée à une manifestation de pertinence quand elle est liée à une CMS correcte (66.7%). En revanche le lien est beaucoup plus ténu lorsque cette CMC correcte n'est pas liée à une CMS, puisque dans ce cas la pertinence n'est manifestée que dans 52.2% des cas. Plus encore, lorsqu'une CMC correcte est liée à une CMS erronée, elle est liée à une manifestation de l'absence de pertinence dans 77.9% des cas et à une manifestation de pertinence que dans 3.2% des cas. Ainsi, en présence d'une autre CMS incorrecte, une CMC correcte n'influence statistiquement pas la pertinence.

Pour ce qui est du lien entre les CMC correctes et la pertinence en présence d'une autre CME, les valeurs sont données dans le Tableau 41.

CMC/c et CME x Pertinence Khi-deux de Pearson : .000

		Pertinence				Total
		pert/nonper	pertinence	nonpertiner	pasdepertin	
CMC correcte et autres CME uniquement correctes	Effectif %	1 3.0%	22 66.7%	6 18.2%	4 12.1%	33 100.0%
CMC correcte et autres CME uniquement erronees	Effectif %	2 1.7%	4 3.4%	91 76.5%	22 18.5%	119 100.0%
CMC correcte sans autre CME	Effectif %	1 .7%	84 61.3%	28 20.4%	24 17.5%	137 100.0%
pas de CMC correcte ou CME avec corr/err	Effectif %	11 2.2%	169 33.3%	202 39.8%	126 24.8%	508 100.0%
Total	Effectif %	15 1.9%	279 35.0%	327 41.0%	176 22.1%	797 100.0%

Tableau 41 : Corrélation entre les CMC correctes liées aux autre CME et la pertinence, en valeurs absolues et relatives.

Les résultats sont proches des précédents, ce qui est dû en partie au fait qu'une partie des CME sont justement des CMS. Les corrélations sont significatives (.000) et une CMC correcte est liée à une manifestation de pertinence quand elle est liée à des CME correctes (66.7%) ou lorsqu'elle est isolée (61.3% des cas). En revanche, lorsqu'une CMC correcte est liée à une ou plusieurs CME erronées, elle est liée à une manifestation de l'absence de pertinence dans 76.5% des cas et à une manifestation de pertinence que dans 3.4% des cas. Ces proportions sont proches de celles du lien entre une CME erronée et la pertinence. Ainsi, là encore, en présence d'une autre CME incorrecte, une CMC correcte n'influence statistiquement pas la pertinence.

D'un point de vue statistique, les CMC correctes ne sont donc liées à une manifestation de pertinence que quand elles sont présentes conjointement à d'autres CME correctes ou, dans une moindre mesure, quand elles sont seules présentes. En revanche une CMC correcte présente en même temps qu'une autre CME erronée, particulièrement d'une CMS erronée, est liée le plus souvent à la non-pertinence mathématique des interventions de l'enseignant.

Ces considérations globales, tant sur le lien entre types de connaissances que sur celui entre CME et pertinence, ont permis une prise de distance par rapport aux enseignants observés et par rapport au sujet d'enseignement observé. Ce point 15.6 a notamment mis en évidence le lien particulier entre CMC et CMS et le fait que, pour un moment observé, les premières pouvaient être correctes alors que les secondes étaient erronées. Il a également permis de préciser les liens statistiques entre le caractère correct ou non des CME, particulièrement des CMS, et la manifestation de la pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Il a en revanche montré qu'un tel lien n'existe pas en ce qui concerne les CMC.

Chapitre 16 Conclusion de la partie C

Pour conclure cette Partie C, consacrée à l'observation de l'enseignement de la multiplication en colonnes par un nombre à deux chiffres, il s'agit de mettre en lien les différents niveaux d'analyse, qu'ils soient *a priori* ou *a posteriori*, que nous rappelons dans le Tableau 42.

	Présentation	Analyse <i>a priori</i>	Analyse <i>a posteriori</i> Analyse, comparaison
Micro (intervention), épisode isolé		15.3.1 Analyse descendante du point de vue de l'enseignant 15.3.2 Analyse ascendante du point de vue de l'élève	15.3 Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations de situation, analyse d'un épisode
Épisode, comparaison entre les enseignants		Chapitre 12 : L'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres :	15.4 Le moment d'explication de l'algorithme
Séquence (groupée par enseignant)	15.2 Les quatre séquences	Chapitre 12 : L'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres :	15.5 Analyse globale par enseignant
Ensemble des données (ensemble des enseignants)	15.1 Catégorisation des données	14.2 Les quatre enseignants et leur classe	15.6 Analyse de certaines combinaisons

Tableau 42 : Classification des niveaux d'analyse.

En partant d'un épisode singulier, l'analyse en terme de structuration du milieu et de bifurcations didactiques a permis de donner une illustration de l'influence des connaissances mathématiques pour l'enseignement (CME) et de la pertinence mathématique de l'enseignant sur sa gestion didactique. Certaines causes possibles des bifurcations didactiques observées ont ainsi pu être identifiées comme des connaissances mathématiques spécifiques (CMS) erronées ou comme un manque de pertinence de CMS correctes. D'autres cas d'influence des CME et de la pertinence mathématique sur les choix didactiques ont pu être exhibés en élargissant l'analyse au moment d'explication de l'algorithme et à l'ensemble de la séquence chez les quatre enseignants et en comparant ces choix à l'ensemble des possibles *a priori*. En particulier la CMS permettant de travailler sur les ostensifs de la multiplication semble être une cause première de la pertinence mathématique de l'enseignant. Si ces cas ponctuels illustrent une influence des CME et plus particulièrement des CMS sur la pertinence et sur les choix didactiques, l'analyse statistique de l'ensemble des données a permis de confirmer cette influence des CMS. En revanche cette analyse statistique montre que, dans nos conditions d'observation et d'analyse, les autres CME et particulièrement les connaissances mathématiques communes (CMC) ont une influence moins importante, sur la pertinence mathématique.

Partie D
Conclusion

Chapitre 17 Synthèse des résultats et de leur discussion

Pour répondre à notre interrogation initiale (1.1), nous avons parcouru les résultats existants et avons choisi des éléments de cadrage théoriques (Partie A). Au travers de ces cadres, nous avons formulé trois questions de recherches (8.1) et avons mis en place un dispositif de recherche en deux parties pour y répondre (8.2). Les résultats de ces deux parties ont été énoncés au Chapitre 11 pour la partie B et au Chapitre 16 pour la partie C. Il reste à les réunir afin de répondre aux trois questions de recherche, mais aussi, par là-même, à notre interrogation initiale (17.1 et 17.2). Cette synthèse nous amènera également à dresser un bilan de l'utilisation des modèles que nous avons convoqués (17.3) et nous permettra enfin d'ouvrir quelques pistes et quelques nouvelles questions que ce travail nous aura permis de mettre à jour (Chapitre 18).

17.1 Des connaissances prédictives aux connaissances opératoires : l'algorithme de la multiplication

Les deux parties de notre dispositif ont interrogé les connaissances mathématiques des enseignants à deux niveaux. Ces connaissances ont d'abord été analysées sous leur forme prédictive (Vergnaud, 2005, p. 134), par le moyen d'entretiens permettant une comparaison avec les connaissances d'enseignants chinois et étatsuniens, en utilisant le concept de *Compréhension Profonde des Mathématiques Fondamentales* (CPMF) développé par Ma (1999). Elles ont ensuite été étudiées sous leur forme opératoire (Vergnaud, 2005, p. 134) par le moyen d'observation de classe en utilisant les catégories de *Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement* (CME) de Ball et son équipe (Ball *et al.*, 2008), mais aussi la *structuration du milieu* (Margolinas, 2002b) et la *pertinence mathématique de l'enseignant* (Bloch, 2009). Si les enseignants n'étaient pas les mêmes, un sujet mathématique était commun à ces deux parties, celui de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Ce premier chapitre de notre conclusion se propose de faire le lien entre des deux analyses des connaissances mathématiques des enseignants au sujet de cet algorithme et de son enseignement. Il reprend les éléments relevés lors des entretiens et examine de quelle manière ceux-ci se sont trouvés confortés ou au contraire infirmés dans les observations de classe.

Les observations de classes ont révélé, chez deux des quatre enseignants surtout, un écart important entre ce qu'ils annonçaient vouloir faire quant à une explication conceptuelle de l'algorithme et ce qu'ils ont effectivement fait, restant essentiellement au niveau d'une explication procédurale s'appuyant sur des analogies. Cette distance entre les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement de type pédagogique de ces enseignants telles qu'énoncées en entretien et celles réellement mises en œuvre en situation de classe, ou encore la distance entre les connaissances exprimée dans les niveaux surdidactiques et les connaissances exprimées au niveau de la situation didactique, nous obligent à relativiser les résultats obtenus uniquement en entretien avec les questions de Ma. C'est en particulier le cas pour les trois quarts des enseignants vaudois que nous avons interrogés et qui ont dit et développé une stratégie d'enseignement visant à expliquer les raisons mathématiques du fonctionnement de l'algorithme plutôt que de montrer à nouveau chacune de ses étapes. Cet écart n'existant en revanche pas pour les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement de type mathématique, les résultats des entretiens concernant ces connaissances sont plus assurés.

Plusieurs caractéristiques relevant de ce dernier type de connaissances, relevées lors des entretiens de Ma, se sont retrouvées chez les enseignants vaudois observés. L'utilisation d'images ou d'analogies en lieu et place d'arguments mathématiques, le plus souvent sans en avoir conscience, est marquante de ce point de vue. Notre analyse des observations effectuées en classe et des entretiens suivant ces observations nous permettent de penser qu'il s'agit bien d'un manque de Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement (CMS) et non d'un choix délibéré d'ordre didactique ou pédagogique. Les analogies non mathématiques occupent le vide laissé par l'absence de Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement et rendent ce vide imperceptible pour l'enseignant. Pourtant les Connaissances Mathématiques Communes (CMC) au sujet de l'algorithme de la multiplication sont généralement présentes, et c'est bien la « version spécifique » de ces connaissances qui est absente. Dans les termes de Ma, on pourrait dire que c'est la compréhension profonde des mathématiques qui fait défaut. Dans les termes de la théorie anthropologique du didactique ceci pourrait être énoncé comme un défaut dans le bloc technologico-théorique (Huillet, 2009, p. 9). La mise en évidence de ce manque a ainsi permis de proposer une cause à l'absence de pertinence mathématique de certaines interventions de l'enseignant.

L'autre point saillant de ces deux regards sur l'algorithme de la multiplication est la représentation quasi exclusive de la multiplication comme addition itérée, alors que la représentation comme produit cartésien ou comme aire est quasi totalement absente. Il ne s'agit plus là simplement de l'absence de la version spécifique d'une connaissance mathématique commune, mais bien de l'absence d'une Connaissance Mathématique Spécifique à l'enseignement. Cette absence, dans le cadre de la multiplication, est à l'origine de plusieurs difficultés, que ce soit dans la compréhension de l'algorithme, dans la vision « agrandissement » de la multiplication... mais c'est aussi probablement l'origine d'une confusion entre les propriétés de l'addition et de la multiplication. Nous reviendrons au Chapitre 18 sur les conséquences de ce résultat en matière de formation.

Ces deux manques ont été constatés dans d'autres études, mais ils sont peut-être d'autant plus marquants chez les enseignants vaudois que les moyens d'enseignement qu'ils doivent utiliser n'offrent quasiment aucune aide à ce sujet. Il est d'ailleurs frappant que la seule enseignante ayant présenté une explication mathématiquement fondée de l'algorithme l'aie faite à partir d'un autre manuel, Cap Maths (Charnay *et al.*, 2007a). Les résultats obtenus à l'aide des autres questions de Ma attestent également de certains manques dans les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement qui ne sont absolument pas compensés par les moyens d'enseignement de la collection COROME (Danalet *et al.*, 1998, 1999).

17.2 Des réponses à nos questions de recherche

Les questions de recherche formulées en 8.1 étaient :

1. Quelles sont les connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants vaudois ?
2. En mathématiques et pour des enseignants généralistes, à quels niveaux d'activité du professeur les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement se manifestent-ils ?
3. Quels effets les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants ont-ils sur la pertinence mathématique de leurs interventions et sur l'organisation didactique de leurs cours de mathématiques à l'école primaire ?

A la première question nous avons pu apporter une réponse qui se situe dans un entre deux par rapport aux deux situations observées et analysées par Ma. En effet, les connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants vaudois que nous avons interrogés ont des caractéristiques semblables par certains aspects à celles des enseignants étatsuniens et par d'autres aspects à celles des enseignants chinois interrogés par Ma (1999). Ces connaissances ont des qualités proches de celles des enseignants chinois en ce qui concerne les liens entre notions mathématiques, même si ces liens sont moins structurés, la résolution de problème ou l'argumentation, même si elle est moins riche et rigoureuse. Mais ces connaissances ont aussi des manques proches de celles des enseignants étatsuniens : le discours mathématique est souvent remplacé par des arguments pédagogiques, ce discours est peu structuré et les notions mathématiques contenues dans les tâches ne sont pas perçues. Notre « échantillon », comme ceux de Ma d'ailleurs, ne pouvait viser à une représentativité. Nous n'avons de plus pas pu prendre les précautions méthodologiques nécessaires à une comparaison internationale rigoureuse. Nous ne pouvons donc prétendre à une validité générale de ces résultats. D'un point de vue quantitatif, ils nécessiteraient au minimum la participation de la Suisse, et particulièrement de la Suisse romande, à d'autres études internationales, comme celle de MT21 (Schmidt *et al.*, 2007) ou de COACTIV (Krauss *et al.*, 2008). D'un point de vue compréhensif en revanche, nos résultats nous permettent de mettre en évidence les caractéristiques des connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants vaudois que nous venons de mentionner. Ces caractéristiques ont ensuite été questionnées lors de nos observations en classe qui relèvent de l'étude de cas.

Ces observations ont permis de relever des manifestations des divers types de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement à tous les niveaux d'activité du professeur. Comme relevé en 15.6.2, nous avons constaté que les manifestations de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement de type pédagogique étaient particulièrement présentes aux niveaux surdidactiques, alors que les Connaissances Mathématiques Communes y étaient rarement relevées. Les Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement ne se distinguent en revanche pas des autres types de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement quant à leur manifestation à chaque niveau d'activité de l'enseignant. De manière plus globale dans nos observations, les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement ont surtout été relevées au niveau 0 et au niveau +2. Cela est toutefois fortement lié aux types de données recueillies, dans la mesure où nous avons essentiellement pu observer les enseignants en position didactique et les avons surtout interrogés au niveau de la préparation du thème.

La question de l'effet, sur la pertinence et sur l'organisation didactique, des connaissances mathématiques pour l'enseignement constituait l'interrogation essentielle de cette thèse. Sur le cas de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication pour un nombre à deux chiffres, nous avons pu mettre en évidence, à un grain d'analyse fin, l'influence des Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement, et plus particulièrement des Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement, des enseignants sur leur choix didactiques. Cette influence a pu être mise en évidence, aux niveaux surdidactiques, sur le choix du type de présentation de l'algorithme à donner ou sur le choix des tâches proposées aux élèves. Elle a aussi été illustrée au niveau de la situation didactique par les réponses apportées aux questions des élèves ou par le choix des exemples permettant d'illustrer les réponses à ces questions. Toujours sur l'observation de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication, nous avons pu relever une corrélation entre la manifestation de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement correctes et la manifestation de pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Cette corrélation est forte en ce qui concerne les Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement, elle est moins forte pour les autres types de Connaissances

sances Mathématiques pour l'Enseignement, particulièrement pour les Connaissances Mathématiques Communes.

De manière plus globale, tant dans les entretiens à partir des questions de Ma (1999) que dans les observations de l'enseignement de l'algorithme ou lors des entretiens encadrant ces observations, nous avons décrit comment les choix, envisagés (mais pas forcément mis en œuvre) ou effectifs, des enseignants sont conditionnés par leur compréhension des mathématiques fondamentales (pour utiliser le vocabulaire de Ma) ou par leurs connaissances mathématiques pour l'enseignement (pour utiliser les catégories de Ball). D'autres variables influencent certainement ces choix : moyens d'enseignement, conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement, conceptions des mathématiques, contexte scolaire... Pourtant les connaissances mathématiques jouent un rôle premier dans le sens où elles rendent possibles ou impossibles des choix en fonction des autres variables. L'absence de certaines Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement relatives à un objet d'enseignement ne permet pas à l'enseignant d'effectuer ses choix en disharmonie avec ses conceptions de l'apprentissage, de l'enseignement ou des mathématiques. Nous avons par ailleurs des preuves tangibles qu'au contraire la présence de telles Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement rend les enseignants à même de faire ces choix en harmonie. Comme l'affirmait Ma (p. 36), il est possible pour un enseignant de choisir de donner une explication procédurale s'il possède une compréhension profonde des mathématiques. Il lui est en revanche impossible de donner une explication conceptuelle s'il ne possède qu'une compréhension procédurale d'un sujet. Ce cas de figure, celui d'un enseignant souhaitant donner une explication de type conceptuel alors qu'il ne dispose pas des Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement permettant de décortiquer le fonctionnement d'une procédure mathématique comme un algorithme, peut le conduire à donner des raisons mathématiquement infondées ou à défaut des recettes mnémotechniques, en étant persuadé qu'il interagit avec ses élèves au plan mathématique. Ce phénomène, observé lors des deux parties de notre recherche, est une illustration de l'importance des Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement de l'enseignant dans la pertinence mathématique de ses interventions.

La question de l'influence relative des manuels utilisés et des Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement semble différente. Cette question ne figurait pas dans nos préoccupations initiales, c'est pourquoi nous n'avons donc pas mis en place d'éléments pour recueillir des informations à ce sujet. Nos résultats indiquent néanmoins que les difficultés rencontrées par les enseignants quant à leurs Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement et les caractéristiques des moyens d'enseignement de la collection COROME (Danalet *et al.*, 1998, 1999) tendent à s'accroître les unes les autres. Il serait ainsi intéressant de développer et d'éprouver cette hypothèse et, le cas échéant, de travailler à la promotion de moyens d'enseignement prenant en compte les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement des enseignants et contribuant à les développer en lien avec les tâches proposées aux élèves, même si cette recherche nous a laissé entrevoir que la réalisation de tels ouvrages n'est pas chose aussi aisée et que leur « bonne » utilisation serait loin d'être assurée.

Les éléments de réponse à ces trois questions de recherche nous ont permis d'alimenter notre question naïve initiale : qu'est-ce que ça change de savoir les maths quand on les enseigne ? Les éléments de réponse, que nous sommes en mesure d'apporter à l'issue de cette recherche, retrouvent un caractère un peu naïf. *Savoir* les mathématiques qu'on enseigne permet de choisir comment on les enseigne. *Savoir* les mathématiques qu'on enseigne donne une liberté pédagogique à l'enseignant. On retrouve ici la conclusion de l'ouvrage collectif *Mathematical Knowledge in Teaching* (Rowland & Ruthven, 2011) qui met en évidence la nécessité de connaissances mathématiques élaborées pour un enseignement centré sur la pensée mathématique des élèves.

[...] there are important variations in the range and depth of mathematical knowledge required by different types of teaching approach. For example, forms of practice in which classroom interaction focuses on students' mathematical thinking depend on teachers being proficient in supporting, eliciting, analysing and responding to such thinking. Moreover, the intelligent use of such forms of practice calls for teachers to understand (and identify with) the models of mathematical activity and thought, teaching and learning, that lie behind them.¹⁵³ (Ruthven & Rowland, 2011, p. 289)

Nous n'avons, en aval, fait qu'effleurer le sujet de l'effet des connaissances mathématiques des enseignants sur l'apprentissage des élèves. Nos résultats montrent qu'une composante de ces connaissances est la capacité à faire des liens. Certaines études, par exemple celle d'Askew et ses collègues (Askew, 2003, p. 2), montrent l'*efficacité* des enseignants qualifiés de *connexionnistes*¹⁵⁴. Toutefois le pas permettant de conclure à un effet des connaissances mathématiques des enseignants sur l'apprentissage des élèves demeure difficile à franchir. Il nous semble néanmoins que la piste d'une description compréhensive des effets sur l'enseignement puis des effets de l'enseignement sur l'apprentissage pourrait être productive en parallèle aux études quantitatives tentant de mesurer plus directement l'effet des connaissances des enseignants sur les résultats de leurs élèves.

En amont, nous n'avons pas non plus traité de l'acquisition par les enseignants de ces connaissances mathématiques. Nous y reviendrons au Chapitre 18.

17.3 Les modèles utilisés

Le bilan de cette recherche se situe également au niveau de l'apport des modèles utilisés et de leurs interactions. Les cadres théoriques utilisés durant cette recherche avaient deux origines. La première, issue de la notion de PCK (Shulman, 1986) et des recherches de Ball et son équipe, tournait autour des Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement (Ball, Thames & Phelps, 2007), mais aussi, dans une version antérieure moins élaborée chez Ma (1999), de la Compréhension Profonde des Mathématiques Fondamentales. La seconde, issue de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986), s'appuie sur la structuration du milieu et les niveaux d'activité du professeur (Margolinas, 2002b) ainsi que la pertinence mathématique des interventions de l'enseignant (Bloch, 2009).

La notion de Compréhension Profonde des Mathématiques Fondamentales s'est avérée floue et difficile d'utilisation pour dépasser le stade de la comparaison entre les résultats des entretiens donnés par Ma et les entretiens que nous avons menés. Le tableau que cette partie B nous a permis de dresser souffre ainsi d'un certain manque de précision, à la fois de par la rigueur méthodologique que nous n'avons pas pu donner à cette comparaison, mais aussi de par l'insuffisance de spécification de la notion de Compréhension Profonde des Mathématiques Fondamentales. La catégorisation développée ultérieurement par l'équipe de Ball nous a permis d'affiner notre approche. Le concept de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement ainsi que le découpage des types de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement ont été fructueux dans nos analyses, en permettant d'objectiver la mise en

¹⁵³ [...] il y a d'importantes variations dans l'étendue et la profondeur des connaissances mathématiques requises par différents types d'approche d'enseignement. Par exemple, les pratiques d'enseignement dans lesquelles les interactions en classe se concentrent sur la pensée mathématique des élèves dépendent du fait que les enseignants soient suffisamment expérimentés pour soutenir, susciter, analyser et répondre à cette pensée mathématique. Plus encore, l'utilisation intelligente de telles pratiques appelle les enseignants à comprendre les modèles de l'activité et de la pensée mathématique ainsi que de l'enseignement / apprentissage qui est en arrière plan (et à s'identifier à eux).

¹⁵⁴ Les enseignants *connexionnistes* ont pour principale caractéristique de « connected different areas of mathematics and different ideas in the same area of mathematics » (Askew, 2003, p. 2).

évidence de certaines connaissances relevant bien du contenu mathématique, non liée à son enseignement, mais toutefois spécifique de l'enseignement. Le point de vue consistant à considérer ces connaissances mathématiques comme étant d'un type séparé, voire comme un « *autonomous body of knowledge*¹⁵⁵ » (Gellert *et al.*, 2009, p. 36) est différent de celui adopté par la didactique française des mathématiques, en particulier de la catégorisation en termes de praxéologie. Nous avons mis en évidence quelques cas où les deux catégorisations se recoupent et d'autres où elles diffèrent. Les évolutions annoncées par Ball et son équipe, en particulier quant à la définition des Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement et quant à l'influence des Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement sur la qualité mathématique de l'instruction (Hill, 2010), pourraient permettre un dialogue international intéressant entre ces deux approches.

L'utilisation de la structuration du milieu nous a permis de réaliser des analyses *a priori*, tant du point de vue du professeur que du point de vue de l'élève, de mettre en évidence les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement à l'œuvre dans chacun de ces niveaux et de confronter ces analyses avec une analyse *a posteriori*. Le croisement de ces deux cadres théoriques au niveau micro nous semble ainsi avoir été fructueux. En revanche, le fait de catégoriser le niveau d'activité du professeur sur l'ensemble des séquences et de croiser ces niveaux avec les types de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement n'a donné que peu de résultats. A ce niveau macro, c'est le croisement des types de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement avec la pertinence mathématique des interventions de l'enseignant qui s'est révélé intéressant à l'analyse, permettant de distinguer, selon leur type, l'influence des Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement sur l'enseignement.

Si nous avons utilisé le concept de pertinence pour analyser des séances ordinaires, celui-ci avait été initialement développé par Bloch (2009) pour traiter de la formation des enseignants. Cette question de la formation, initiale et continue, figurait en bonne place parmi nos motivations initiales. Nous l'avons un peu laissée de côté, mais nous y revenons finalement au moment d'achever cette recherche et d'envisager les développements futurs.

¹⁵⁵ « un corps autonome de connaissances ».

Chapitre 18 Ouverture en guise de conclusion : l'évolution des connaissances mathématiques pour l'enseignement chez les enseignants

[...] how theories of mathematical knowledge may be used as tools in mathematics teacher education¹⁵⁶. (Tirosh *et al.*, 2011, p. 231)

La question du développement chez les enseignants des connaissances mathématiques pour l'enseignement, et donc de la formation à ces connaissances, occupe une partie des articles traitant de ces connaissances. Etant donné notre travail de formateur d'enseignants, elle a été à l'origine de notre intérêt pour le sujet et elle constituera très probablement notre axe de recherche futur dans le prolongement de cette thèse. Ce chapitre propose donc une série de piste quant aux liens entre les recherches sur les connaissances mathématiques et la formation des enseignants ainsi que sur le développement de ces connaissances hors des structures de formation.

Pour la plupart des auteurs, le développement des Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement est lié à la pratique de l'enseignement. Bednarz et Proulx vont même jusqu'à affirmer que « tout développement de "connaissances mathématiques pour l'enseignement" est nécessairement enraciné dans une situation d'enseignement/apprentissage des mathématiques donnée, en lien avec les tâches effectives de l'enseignant » (2009, pp. OSV5-6). Les chercheurs de l'équipe genevoise DiMaGe ont eux aussi fait le constat que « la culture mathématique des enseignants n'évolue qu'à l'aune du contexte scolaire qu'ils fréquentent dans une rupture avec leur formation universitaire (qu'elle soit disciplinaire ou didactique) » (Cherix *et al.*, à paraître). Toutefois, si la formation doit être ancrée dans la pratique, il faut construire des dispositifs permettant de ne pas réduire cette pratique à une série de méthodes d'enseignement et donc permettre d'analyser sa pratique et, en particulier, de comprendre la place qu'y occupe les connaissances mathématiques (Ball & Forzani, 2009, pp. 504-505). Les recherches sur les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement ouvrent ainsi la voie à de nouvelles façons de penser la formation mathématique des enseignants (Bednarz & Proulx, 2009, p. OSV1) en tenant compte du fait que les aspects didactiques, mathématiques, pédagogiques et institutionnels de l'enseignement sont indissociables dans la pratique tout en devant être distingués dans l'analyse (p. OSV5).

Certaines pistes sont décrites par des auteurs quant à la formation initiale en mathématiques des enseignants primaires, en vue en particulier de permettre l'évolution des conceptions des étudiants à propos des mathématiques (voir par exemple Cooney, 1999; Szydlik, Szydlik & Benson, 2003) ou leur rapport au savoir hérité de leur passé d'élève (par exemple Goos *et al.*, 2009, pp. 86-87; Morselli, 2005). Toutefois le bilan de l'efficacité des cours de mathématiques en formation initiale est le plus souvent très mitigé (Arsenault & Voyer, 2003, p. 7; Morin, 2008, p. 562), même si des évolutions sont parfois constatées sur des sujets particuliers, comme celui de l'algorithme de la multiplication (Menon, 2003).

C'est toutefois le développement des connaissances mathématiques des enseignants en exercice qui suscite les recherches les plus nombreuses. Des expériences en formation continues sont analysées et étudient plus particulièrement le rôle de certains dispositifs de forma-

¹⁵⁶ [...] de quelle manière les théories à propos des connaissances mathématiques peuvent être utilisées comme outils dans la formation à l'enseignement des mathématiques.

tion sur le développement de ces connaissances. Schifter (1998) ou Cooney (1999) analysent le développement mathématique de l'enseignant lorsqu'il pratique les mêmes activités mathématiques que les élèves ; Chapman (2007) décrit l'effet de la création de tâches par les enseignants, et Steinbring (1998) analyse le rôle des interactions mathématiques avec les élèves. D'autres études, comme celle de Stevens et ses collègues (Stevens, Harris, Aguirre-Munoz & Cobbs, 2009), sont axées sur la manière d'évaluer le développement des connaissances et les effets sur l'enseignement. La question de l'effet de la formation mathématique des enseignants est d'ailleurs celle qui avait conduit Bloch (2009) à développer le concept de pertinence. Nous avons utilisé ce concept pour décrire l'effet des Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement sur l'enseignement. Il sera intéressant d'essayer de l'utiliser pour décrire les effets de la formation en mathématiques sur l'enseignement.

Une des modalités de développement professionnel souvent mise en avant pour son efficacité (Cooney, 2001, p. 464 ; Goulding, 2003) est celle des recherches de type collaboratif permettant de former les enseignants par la participation à des recherches. En particulier, le processus de *lesson study* ou de *learning study* (Fernandez, 2002), originaire d'Asie, en cours de développement aux USA et en Europe du Nord (Corcoran & Pepperell, 2011; Hart, Alston & Murata, 2011) et présenté par Miyakawa et Winsløw (2009a, 2009b) à la communauté de didactique des mathématiques francophone, nous semble particulièrement prometteur et intéressant.

Ceci nous ramène à certains éléments de comparaison mis à jour par Ma, entre le développement des connaissances mathématiques chez les enseignants chinois et chez les enseignants américains. La question de la formation étant hors du champs de cette thèse, nous n'avons pas développé ces éléments de comparaison, mais quelques caractéristiques, mises en évidence par cette comparaison et par d'autres, nous semblent constituer d'intéressantes pistes de réflexion. Selon Ma en effet, les compétences mathématiques des enseignants chinois se développent tout au long de leur carrière, dans un cercle vertueux.

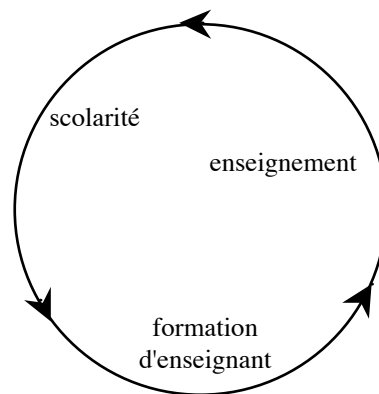


Figure 64 : Les trois périodes du développement des connaissances mathématiques des enseignants chinois (Ma, 1999, p. 145)

Par comparaison ce cercle vertueux devient vicieux aux USA où la mauvaise qualité de l'enseignement des mathématiques élémentaires et les connaissances déficientes des enseignants se renforcent l'une l'autre (p. 145). Le développement continu des connaissances mathématiques des enseignants chinois est également relevé par plusieurs auteurs (par exemple Li & Huang, 2008). Ma signale par ailleurs que les mathématiques élémentaires sont valorisées en Chine alors qu'aux USA on les considère comme de la « *shopkeeper arithmetic*¹⁵⁷ », comme simples et comme comprises par tout un chacun (p. 146). Des pistes pour un changement sont

¹⁵⁷ de "l'arithmétique d'épicier".

mentionnées par Ma sur la base de son expérience et de ses recherches biculturelles, à la fois dans son ouvrage de 1999, dans son article de 2001 (Kessel & Ma, 2001), mais aussi par exemple lors de sa participation en 2010 au colloque *The teacher development continuum in the United States and China* (Ferrerias *et al.*, 2010). Ces suggestions rejoignent principalement la piste, esquissée ci-dessus, des interactions nécessaires entre les connaissances mathématiques et la pratique de l'enseignement. Il serait donc nécessaire de développer une culture enseignante de la discussion à propos des leçons, dans l'esprit de *lesson study*.

In China, teachers often sit in on lessons given by other teachers and provide the teachers with comments after the class. Master teachers also give demonstration lessons to all of the mathematics teachers in a school. Every week there is time for mathematics teachers to discuss teaching, either in a whole group or divided by grades. Common topics for discussion are reflections about lessons, getting help with trouble spots, making connections between content areas, getting across difficult points, analyzing student errors and solution methods, and sharing successful experiences. Sometimes, teachers also discuss mathematics education with mathematics teachers from other schools, education experts in universities, or master teachers from other cities¹⁵⁸. (Ferrerias *et al.*, 2010, p. 7)

Ce changement de culture nécessite toutefois également plus de temps pour que les enseignants puissent préparer leurs leçons et les discuter (Ma, 1999, pp. 147-148), voire la spécialisation en mathématiques de certains enseignants du primaire. Mooney et ses collègues relèvent d'ailleurs que, tant que cette spécialisation n'existera pas, on devra probablement se contenter de viser une *Sufficient Understanding of Fundamental Mathematics* plutôt que la *Profound Understanding of Fundamental Mathematics* de Ma pour les enseignants du primaire (Mooney, Fletcher & Jones, 2003, p. 81).

Ce changement de culture professionnelle devrait aussi s'accompagner d'un changement dans la vision des mathématiques d'école, permettant de dépasser la *math war*, avatar étatsunien de la vaste querelle entre tenants de la primauté de la maîtrise technique des mathématiques à l'école et promoteurs de la construction de la compréhension mathématique. Or selon Ma (pp. 151-153), cette opposition n'existe pas. L'acquisition par les enseignants de connaissances mathématiques n'est pas opposée au développement de la compréhension des élèves, elle en est la condition nécessaire.

If a teacher's own knowledge of the mathematics taught in elementary school is limited to procedures, how could we expect his or her classroom to have a tradition of inquiry mathematics? The change that we are expecting can occur only if we work on changing teachers' knowledge of mathematics¹⁵⁹. (Ma, 1999, p. 153)

Pour les didacticiens des mathématiques, ce point est probablement une évidence. Elle ne l'est pas pour beaucoup d'enseignants de mathématiques, du secondaire ou de l'université. Pour faire évoluer cette vision des mathématiques d'école, il serait ainsi nécessaire que les mathé-

¹⁵⁸ En Chine, les enseignants assistent souvent à des cours donnés par d'autres enseignants et proposent des commentaires à leurs collègues après la leçon. Des enseignants expérimentés donnent aussi des leçons de démonstration à l'ensemble des professeurs de mathématiques d'une école. Chaque semaine, du temps est donné aux professeurs de mathématiques pour discuter de l'enseignement, soit dans un groupe hétérogène ou constitué par degré d'enseignement. Les sujets habituels de discussion sont les réflexions sur les leçons, l'obtention d'aide sur des points délicats, la création de liens entre les sujets mathématiques, le parcours des points difficiles, l'analyse des erreurs des élèves et de leur stratégies de résolution, et le partage d'expériences concluantes. Parfois, les enseignants discutent aussi de l'enseignement des mathématiques avec des enseignants de mathématiques d'autres écoles, avec des spécialistes de l'éducation des universités, ou des enseignants experts d'autres villes.

¹⁵⁹ Si la propre connaissance de l'enseignant à propos des mathématiques enseignées à l'école primaire est limitée aux procédures, comment peut-on attendre de sa classe qu'elle ait une tradition mathématiques tournée vers la résolution de problèmes ? Le changement que nous attendons ne peut se produire que si nous travaillons à l'évolution des connaissances des enseignants en mathématiques.

maticiens « should see the mathematical education of primary school teachers as part of their responsibilities¹⁶⁰ », comme suggéré par Hodgson (2001, p. 510).

Un dernier point, relevé par Ma dans sa comparaison, signalé par Ball et remarqué dans nos observations, a trait aux manuels et à leur usage. Ma (p. 150) relève que les enseignants chinois, contrairement à leurs collègues étatsuniens, font un usage à la fois fidèle et critique de leurs manuels et que ces derniers sont aussi écrits en vue de développer les connaissances des enseignants. Ma cite d'ailleurs Ball qui plaide pour des manuels dont le but serait aussi d'instruire les enseignants. Ce plaidoyer rejoint la constatation faite par Ruthven et Rowland de l'importance des ressources pédagogiques et des réseaux professionnels dans le développement des connaissances mathématiques des enseignants (Ruthven & Rowland, 2011, p. 289) ou le rôle du manuel comme élément de développement professionnel esquissé par Margolinas et Wozniak (2009, pp. 74-77). Nous ne pouvons bien entendu qu'entrouvrir ici ce chapitre, mais nos observations nous incitent à plaider pour la conception et l'usage de moyens d'enseignements romands véritablement destinés aux élèves mais prenant en compte également l'ergonomie d'utilisation par les enseignants et la nécessité de contribuer à leur formation –mathématique, didactique et pédagogique– à l'intérieur de leur pratique quotidienne de l'enseignement des mathématiques.

¹⁶⁰ [...] devraient voir la formation mathématique des enseignants primaires comme étant une part de leur responsabilité.

Références bibliographiques

- Adler, J. (2008). *Empirical and theoretical reflections on researching mathematics for teaching in mathematics teacher education*. Texte présenté au Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI, Rome. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/ADLER.pdf>
- Ahn, S. & Choi, J. (2004). Teachers' subject matter knowledge as a teacher qualification: A synthesis of the quantitative literature on students' mathematics achievement, *American Educational Research Association*. San Diego, CA: AERA. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.msu.edu/user/mkennedy/TQQT/Reports/AhnChoi04SMKSL.pdf>
- Altet, M. (2001). Les compétences de l'enseignant-professionnel. In L. Paquay, M. Altet, E. Charlier & P. Perrenoud (Eds.), *Former des enseignants professionnels : quelles stratégies? Quelles compétences?* (pp. 27-62). Bruxelles: De Boeck Université.
- Amato, S. (2004). Improving student teachers mathematical knowledge, *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*. Copenhagen. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.icme-organisers.dk/taA/>
- Amato, S. (2005). *Improving student teachers' understanding of multiplication*. Texte présenté au Conference of the 15th ICMI Study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, Águas de Lindóia, Brésil. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/SolangeAmato_ICMI15.doc
- Andrews, P. (2007). Conditions for learning: a footnote on pedagogy and didactics. *Mathematics teaching incorporation micromath*, 204, 22.
- Andrews, P. (2011). The cultural location of teachers' mathematical knowledge: another hidden variable in mathematics education research? In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 99-118): Springer Netherlands. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_7
- Anghileri, J. (1999). Issues in teaching multiplication and division. *Issues in teaching numeracy in primary schools*, 184-194.
- Antonietti, J. P. (Ed.). (2005). *Évaluation des compétences en mathématiques en fin de 4e année primaire: résultats de la seconde phase de l'enquête MATHEVAL*. Neuchâtel IRDP. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://www.irdp.ch/documentation/listes_annuelles_publications_articles/2005.html
- Arsenault, C. & Voyer, D. (2003). Une démarche d'auto-évaluation au service de l'actualisation des savoirs mathématiques dans le cadre de la formation à l'enseignement. In Association francophone internationale de recherche scientifique en éducation (AFIRSE) et Ministère de l'Éducation Nationale (Ed.), *Actes du colloque de l'AFIRSE: Former les enseignants et les éducateurs- une priorité pour l'enseignement supérieur*.

- Artigue, M. & Winsløw, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 30(1)
- Askew, M. (1999). It ain't (just) what you do: Effective teachers of numeracy. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools* Buckingham: Open University Press.
- Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Johnson, D. & Wiliam, D. (2003). Effective Teachers of Numeracy. *Research of the month*. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.gtce.org.uk/tla/rft/numeracy0403/>
- Badreddine, Z. & Buty, C. (2011). Discursive Reconstruction of the Scientific Story in a Teaching Sequence. *International Journal of Science Education*, 33(6), 773-795.
- Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*. Thèse non publiée. Michigan State University, East Lansing, MI
- Ball, D. L. (2008). *Research Projects* Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www-personal.umich.edu/~dball/projects/index.html>
- Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://publish.edu.uwo.ca/cmescg/pdf/CMESG2002.pdf>
- Ball, D. L. & Forzani, F. M. (2009). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education*, 60(5), 497(415). Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://find.galegroup.com/gtx/infomark.do?&contentSet=IAC-Documents&type=retrieve&tabID=T002&prodId=EAIM&docId=A211554786&source=gale&srcprod=EAIM&userGroupName=hei&version=1.0>
- Ball, D. L. & Hill, H. C. (2008). Measuring teacher quality in practice. In D. H. Gitomer (Ed.), *Measurement issues and assessment for teaching quality* (pp. 80-98). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Ball, D. L., Hill, H. C. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching, who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*(Fall 2005), 14-22, 43-46. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/65072/4/Ball_F05.pdf
- Ball, D. L. & Rowan, B. (2004). Introduction: Measuring Instruction. *The Elementary School Journal*, 105(1), 3-10. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.jstor.org/stable/3202886>
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2007). *Content knowledge for teaching: What makes it special?*
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389>
- Bednarz, N. & Mary, C. (Eds.). (2009). *Actes du colloque EMF 2006, L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. Sherbrooke

- Bednarz, N. & Proulx, J. (2009). Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants. *For the learning of mathematics*, 29(3), 11-17. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://flm.educ.ualberta.ca/BednarzProulx.pdf>
- Begle, E. G. (1979). *Critical Variables in Mathematics Education: Findings from a Survey of the Empirical Literature*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1993-1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39-56.
- Bessot, A. (2003). *Une introduction à la théorie des situations didactiques*. Grenoble: Laboratoire Leibniz-IMAG. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/2003/Cahier91/ResumCahier91.html>
- Biza, I., Nardi, E. & Zachariades, T. (2007). Using Tasks to Explore Teacher Knowledge in Situation-Specific Contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4), 301-309. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-007-9043-y>
- Bloch, I. (1997). Les connaissances mathématiques-de l'enseignant-pour l'enseignement. *Petit x*, 45, 5-24.
- Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu – connaissances et savoirs. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-194.
- Bloch, I. (2005). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur : contribution à l'étude et à l'évolution de quelques concepts issus de la théorie des situations didactiques en didactique des mathématiques*. HDR. Paris 7, Paris
- Bloch, I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ere nouvelle*, 41(1)
- Bloch, I. (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x*, 81, 25-52.
- Blömeke, S., Kaiser, G., Lehmann, R. & Schmidt, W. (2008). Introduction to the issue on Empirical research on mathematics teachers and their education. *ZDM*, 40(5), 715-717. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0154-4>
- Bouvier, A., George, M. & Le Lionnais, F. (Eds.). (2009). *Dictionnaire des mathématiques* (3e éd. mise à jour ed.). Paris: Presses universitaires de France
- Brêchet, M., Calame, J.-A. & Chastellain, M. (2003). Aide Mémoire. *Mathématiques 7-8-9*
- Brousseau, G. (1973). Peut-on améliorer le calcul des produits des nombres naturels ? *Cahier de l'enseignement élémentaire*, 13, 195-237.
- Brousseau, G. (1976). Peut-on améliorer le calcul des produits des nombres naturels ? In *Actes du Congrès International des Sciences de l'Education EPI 1* (pp. 364-378).
- Brousseau, G. (1982). Les objets de la didactique des mathématiques, *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*. Olivet

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques *Recherche en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. Texte présenté au Université de Montréal à l'occasion de la remise du doctorat honoris causa. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf
- Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://perso.orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf
- Brousseau, G. (2010). Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N*, 85, 13-41.
- Brousseau, G. & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherche en didactique des mathématiques*, 11(2.3), 167-210.
- Brun, J. (1994). Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnigot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France, hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 67-83). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Cai, J. (2004). Why do US and Chinese students think differently in mathematical problem solving?: Impact of early algebra learning and teachers' beliefs. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(2), 135. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6W5B-4C827XH-1/2/3f563e3ca27a566e1d4215425558f375>
- Cai, J. (2006). US and Chinese teachers' cultural values of representations in mathematics education. In F. K. S. Leung, K.-D. Graf & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West, The 13th ICMI Study* (pp. 465-481): Springer.
- Cai, J., Lin, F.-L. & Fan, L. (2004). How Do Chinese Learn Mathematics? Some Evidence-Based Insights and Needed Directions. In L. Fan, N.-Y. Wong, J. Cai & S. Li (Eds.), *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives From Insiders* (pp. 535-554). Singapore: World Scientific.
- Cai, J. & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM*, 39(5), 459-473.
- Carrillo, J. (2011). Building Mathematical Knowledge in Teaching by Means of Theorised Tools. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 273-287): Springer Netherlands. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_16
- CDIP. (1999/2005). Règlement concernant la reconnaissance des diplômes de hautes écoles pour les enseignantes et enseignants des degrés préscolaire et primaire. Consulté le 18 juillet 2011, dans www.edudoc.ch/record/29976/files/Regl_AK_VS_PS_f.pdf
- Chapman, O. (2007). Facilitating preservice teachers' development of mathematics knowledge for teaching arithmetic operations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4), 341-349. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-007-9046-8>

- Charnay, R., Comnier, G., Dussuc, M.-P., Madier, D. & Madier, P. (2007a). *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant*. Paris: Hatier.
- Charnay, R., Comnier, G., Dussuc, M.-P., Madier, D. & Madier, P. (2007b). *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant, manuel de l'élève et matériel photocopiable*. Paris: Hatier.
- Charnay, R., Comnier, G., Dussuc, M.-P., Madier, D. & Madier, P. (2007c). *Cap Maths CE2, Manuel de l'élève*. Paris: Hatier.
- Chastellain, M. & Jaquet, F. (2001). *Mathématiques Cinquième année*. Neuchâtel: Corome.
- Cherix, P.-A., Conne, F., Daina, A., Dorier, J.-L. & Fluckiger, A. (à paraître). Quand un prof rencontre un autre prof... pour faire des mathématiques. *Recherches en didactique*, 12
- Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 225-265.
- Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude: Ecologie et régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude: Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2007). Readjusting Didactics to a Changing Epistemology. *European Educational Research Journal*, 6(2), 131-134.
- Cochran-Smith, M. & Zeichner, K. M. (2005). *Studying teacher education: The report of the AERA panel on research and teacher education*: Lawrence Erlbaum.
- Comiti, C. & Ball, D. L. (1996). Preparing Teachers to Teach Mathematics: A Comparative Perspective. In A. J. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 1123-1154). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Comiti, C., Grenier, D. & Margolinas, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier & A. Tiberghien (Eds.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 91-127). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Comte, M.-L., Ferrari, A., Wetzler, J. & Ferrario, M. (1980). *Mathématique. Deuxième année*: Office romand des éditions et du matériel scolaire.
- Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 12(2.3), 221-270.
- Cooney, T. (1999). Conceptualizing Teachers' Ways of Knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1), 163-187. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1023/A:1003504816467>
- Cooney, T. J. (2001). Using research to inform pre-service teacher education programmes In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and learning of Mathematics at University Level: an ICMI study* (pp. 455-466). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Coppé, S. (2007). Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2006* (pp. 139-168). Paris: IREM Paris 7.
- Corcoran, D. & Pepperell, S. (2011). Learning to Teach Mathematics Using Lesson Study. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 213-230): Springer Netherlands. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_13
- Cornell, C. (1999). "I hate math! I couldn't learn it, and I can't teach it!". *Childhood Education*, 75(4), 225-230. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://find.galegroup.com/gtx/infomark.do?&contentSet=IAC- Documents&type=retrieve&tabID=T002&prodId=EAIM&docId=A54482223&source=gale&srcprod=EAIM&userGroupName=hei&version=1.0>
- Coulange, L. (2000). *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique : Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier-Grenoble I, Grenoble
- Coulange, L. (2001). Enseigner les systèmes d'équations en Troisième. Une étude économique et écologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 305-353.
- Crahay, M. (Ed.). (2006). *Un bilan des recherches processus-produit : l'enseignement peut-il contribuer à l'apprentissage des élèves et, si oui, comment ?* Genève: Univ. de Genève Fac. de psychologie et des sciences de l'éducation
- Cuoco, A. A. (Ed.). (2001). *The Roles of Representation in School Mathematics (2001 Yearbook)*. Reston, VA: NCTM
- da Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://math.unipa.it/~grim/YESS-5/06%20Ponte-Chapman-PME%20Handbook.pdf>
- Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998). *Mathématiques 3ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.
- Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1999). *Mathématiques 4ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.
- Darling-Hammond, L. (1999). *Teacher quality and student achievement: A review of state policy evidence*: Center for the Study of Teaching and Policy, University of Washington.
- Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-Teaching: an ongoing investigation of the Mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293-319. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-2372-4>
- Deledicq, A. (1993). *La magie du calcul*. Paris: ACL-Editions.

- DFJ. (2006). Plan d'études vaudois. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.vd.ch/fr/themes/formation/scolarité-obligatoire/plan-detude-vaudois/>
- Dolz, J. & Toulou, S. (2008). De la macrostructure de la séquence d'enseignement du texte d'opinion à l'analyse des interactions didactiques. *Travail et formation en éducation*, (1). Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://tfe.revues.org/index596.html>
- Dorier, J.-L. (à paraître). La démarche d'investigation en classe de mathématiques : quel renouveau pour le questionnement didactique ? In B. Calmettes (Ed.), *Démarches d'investigation. Références, représentations, pratiques et formation*. Paris: L'Harmattan.
- Dorier, J.-L. & Maréchal, C. (2008). Analyse didactique d'une activité sous forme de jeu en lien avec l'addition. *Grand N*, 82, 69-89.
- ERMEL. (1995). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes : cours élémentaire (deuxième année)*. Paris: Hatier.
- Ernest, P. (1989a). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of the art* (pp. 249-254). London: Falmer Press. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://webdoc.sub.gwdg.de/edoc/e/pome/impact.htm>
- Ernest, P. (1989b). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, 15(1), 13-33.
- Fan, L., Wong, N.-Y., Cai, J. & Li, S. (Eds.). (2004). *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives From Insiders*. Singapore: World Scientific
- Fassnacht, C. & Woods, D. K. (2002-2011). Transana (Version 2.42) [Mac]. Madison: University of Wisconsin. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.transana.org/>
- Felbrich, A., Müller, C. & Blömeke, S. (2008). Epistemological beliefs concerning the nature of mathematics among teacher educators and teacher education students in mathematics. *ZDM*, 40(5), 763-776. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0153-5>
- Fenichel, M. & Pauvert, M. (2001). *L'épreuve de mathématiques au concours de professeur des écoles*. Paris: Bordas.
- Fennema, E. & Franke, M. L. (1992). Teachers' Knowledge and its Impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*.
- Fernandez, M. L. (2002). Learning from Japanese approaches to professional development: The case of lesson study. *Journal of Teacher Education*, 53(5), 393-405.
- Ferrari, A., Wetzler, J., Ferrario, M., Jatton, M. & Queroub, M. (1991). *Mathématique. Quatrième année*. (2e éd.): Office romand des éditions et du matériel scolaire.
- Ferreras, A., Olson, S. & Sztein, E. (Eds.). (2010). *The teacher development continuum in the United States and China: Summary of a workshop*. Washington, D.C.: U.S. National Commission on Mathematics Instruction; National Research Council. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.nap.edu/catalog/12874.html>

- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*: Springer.
- Flückiger, A. (2000). *Genèse expérimentale d'une notion mathématique: la notion de division comme modèle de connaissances numériques*. Thèse de doctorat en sciences de l'éducation. Université de Genève. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.unige.ch/cyberdocuments/theses2000/FluckigerA/meta.html>
- Fregona, D. (1994). *Les figures planes comme «milieu» dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux 1, Talence
- Gagnebin, A., Guignard, N. & Jaquet, F. (1998). *Apprentissage et enseignement des mathématiques, commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Neuchâtel: COROME.
- Gellert, U., Amato, S., Bairral, M., Zanette, L., Bloch, I., Gadanidis, G. et al. (2009). Practising mathematics teacher education: expanding the realm of possibilities. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study* (pp. 35-55). New York: Springer.
- Gianferrari, F. (2000). *Parcours d'obstacles en mathématiques : description, typologie et analyse des erreurs dans la multiplication en colonnes*. Mémoire de licence en sciences de l'éducation. Université de Genève,
- Goos, M., Arvola, B., Berdnaz, N., DeBlois, L., Haheux, J., Morselli, F. et al. (2009). School experience during pre-service teacher education from the students' perspective. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study* (pp. 83-91). New York: Springer.
- Goulding, M. (2003). An investigation into the mathematical knowledge of primary teacher trainees. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 23(3), 73-78. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://bsrlm.org.uk/IPs/ip23-3/BSRLM-IP-23-3-13.pdf>
- Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*: McGraw-Hill, New York.
- Grugeon, B. (2008). Quelle évolution des pratiques d'un professeur stagiaire de mathématiques pendant son année de formation à l'IUFM. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 383-419). Toulouse: Octarès.
- Guinet, R. (1978). Histoire des techniques opératoires, la multiplication. *Grand N*, 15, 27-41.
- Gurtner, J.-L. & Jaquet, F. (Eds.). (1997). *L'approche des algorithmes dans la nouvelle collection de moyens d'enseignement de mathématiques*. Neuchâtel: Institut de recherche et de documentation pédagogique
- Hamilton, D. (1999). The pedagogic paradox (or why no didactics in England?). *Pedagogy, Culture & Society*, 7(1), 135 - 152. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.informaworld.com/10.1080/14681369900200048>
- Handal, B. (2003). Teachers' mathematical beliefs: A review. *The Mathematics Educator*, 13(2), 47-57.

- Hart, L. C., Alston, A. S. & Murata, A. (Eds.). (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*: Springer
- Henry, M. & Cornu, B. (2001). Mathematics teachers' education in France: from academic training to professionalization. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and learning of Mathematics at University Level: an ICMI study* (pp. 481-499). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- HEP-Vaud. (2004). Formation des enseignants, Référentiel de compétences professionnelles. Consulté le 18 juillet 2011, dans https://extranet.hepl.ch/hep2/officiel/hep_ref_de_compétences_fil.gen.001_light.pdf
- Hill, H. C. (2007). Mathematical knowledge of middle school teachers: Implications for the No Child Left Behind policy Initiative. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 29(2), 95-114. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.jstor.org/stable/30128035>
- Hill, H. C. (2010). The nature and predictors of elementary teachers' Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(5), 513-542.
- Hill, H. C., Ball, D. L., Blunk, M., Goffney, I. & Rowan, B. (2007). Validating the ecological assumption: The relationship of measure scores to classroom teaching and student learning. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 5(2), 107-118.
- Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. (2008a). Unpacking “pedagogical content knowledge”: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. et al. (2008b). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.
- Hill, H. C., Dean, C. & Goffney, I. (2007). Assessing Elemental and Structural Validity: Data from teachers, non-teachers and mathematicians. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 5(2), 81-92.
- Hill, H. C. & LMT. (2010). Mathematical Quality of Instruction (MQI) coding tool. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://lmt.mspnet.org/index.cfm/20926>
- Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers’ Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Hill, H. C., Schilling, S. G. & Ball, D. L. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *The Elementary School Journal*, 105(1), 11-30. dans <http://www.jstor.org/stable/3202887>
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. & Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. What knowledge matters and what evidence counts? *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1, 111-155.
- Hodgson, B. (2001). The mathematical education of school teachers: role and responsibilities of university mathematicians In D. Holton, M. Artigue, U.

- Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and learning of Mathematics at University Level: an ICMI study* (pp. 501-518). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Huillet, D. (2009, Février). *Mathématiques pour l'enseignement: une approche anthropologique*. Texte présenté au EMF 2009, Dakar
- Jaquet, F. (2003). "Cap Maths", comparaison avec les ouvrages romands "Mathématiques 1P-4P". *Math-Ecole*, 209, 39-47.
- Kahan, J. A., Cooper, D. A. & Bethea, K. A. (2003). The Role of Mathematics Teachers' Content Knowledge in their Teaching: A Framework for Research applied to a Study of Student Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(3), 223-252.
- Kahane, J. P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques: commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*. Paris: Odile Jacob.
- Kennedy, M. M., Ahn, S. & Choi, J. (2008). The value added by teacher education. In M. Cochran-Smith, S. Feiman-Nemser & D. J. McIntyre (Eds.), *Handbook of Research on Teacher Education: Enduring Issues in Changing Contexts*. (pp. 1247-1272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Consulté le 18 juillet 2011, dans <https://www.msu.edu/~mkennedy/TQQT/Reports/KennedyAhnChoiInPressVA TE.pdf>
- Kessel, C. & Ma, L. (2001). Mathematicians and the preparation of elementary teachers. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and learning of Mathematics at University Level: an ICMI study* (pp. 467-480). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Krainer, K., Goffree, F. & Berger, P. (Eds.). (1999). *On Research in Mathematics Teacher Education. Proceedings of the first conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 3). Osnabrück. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-group3.pdf>
- Krauss, S., Baumert, J. & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM*, 40(5), 873-892. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0141-9>
- Kuhs, T. M. & Ball, D. L. (1986). Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions. *East Lansing, MI: Michigan State University, Center on Teacher Education*
- Kuzniak, A. & Sokhana, M. (Eds.). (2010). *Revue Internationale Francophone. Numéro spécial 2010. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone. Enseignement des mathématiques et développement: enjeux de société et de formation*. Dakar: Université Cheikh Anta Diop de Dakar
- Lampert, M. (1986). Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and Instruction*, 3(4), 305-342. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.jstor.org/stable/3233589>

- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29.
- Leatham, K. R. (2006). Viewing Mathematics Teachers' Beliefs as Sensible Systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 91-102.
- Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 349-371. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-9071-z>
- Leung, F. & Park, K. (2002). Competent students, competent teachers? *International Journal of Educational Research*, 37(2), 113-129. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VDF-47P8309-3/2/2e2297af6258e8b01fef9d99d340be55>
- Leung, F. K. S. (2006). Mathematics Education in East Asia and the West: Does Culture Matter? In F. K. S. Leung, K.-D. Graf & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West, The 13th ICMI Study* (pp. 21-46): Springer.
- Leung, F. K. S., Graf, K. D. & Lopez-Real, F. J. (Eds.). (2006). *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West, The 13th ICMI Study*: Springer Verlag
- Li, J. (2004). Thorough Understanding of the Textbook-A Significant Feature of Chinese Teacher Manuals. In L. Fan, N.-Y. Wong, J. Cai & S. Li (Eds.), *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives From Insiders* (pp. 262-281). Singapore: World Scientific.
- Li, Y. & Huang, R. (2008). Chinese elementary mathematics teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching: the case of fraction division. *ZDM*, 40(5), 845-859. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0134-8>
- Li, Y. & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction division. *ZDM*, 40(5), 833-843. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0148-2>
- Li, Y., Ma, Y. & Pang, J. (2008). Mathematical preparation of prospective elementary teachers. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Vol. 1, pp. 37-62). Rotterdam: Sense Publishers.
- Liljedahl, P. (2008). *Teachers' beliefs as teachers' knowledge*. Texte présenté au Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI, Rome. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ALL/Papers/LILJED.pdf>
- Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T. et al. (2009). Components of mathematics teacher training. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study* (pp. 25-33). New York: Springer.

- LMT. (2010). Measuring the mathematical quality of instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(1), 25-47. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-010-9140-1>
- Loi scolaire*, (Loi du Canton de Vaud, Art. 73, 12 juin 1984).
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Margolinas, C. (1994). Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe. In *Séminaire de didactique et technologies cognitives en mathématiques* (pp. 27-83). Grenoble: LSDD-IMAG. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00418716/en/>
- Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques : actes du Séminaire national 1993-1994*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (1998). Etude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. In M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz & M.-H. Salin (Eds.), *Actes de la 9e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 35-43). Paris: ARDM. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00418850/en/>
- Margolinas, C. (1999). Une étude de la transmission des situations didactiques, *Actes du 2ème colloque international "Recherche(s) et formation des enseignants"* (pp. 41-54): I.U.F.M. de Grenoble. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00421846/en/>
- Margolinas, C. (2002a). Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* [CD-ROM]. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (2002b). Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-155). Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=m2hj19vrm34e7osqkidopu67k7&view_this_doc=halshs-00421848&version=1
- Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. HDR. Université de Provence - Aix-Marseille I. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/en/>
- Margolinas, C., Coulanges, L. & Bessot, A. (2005). What Can the Teacher Learn in the Classroom? *Educational Studies in Mathematics*, 59, 205-234.
- Margolinas, C. & Wozniak, F. (2009). Usage des manuels dans le travail du professeur: L'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 35(2), 59-82. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://id.erudit.org/iderudit/038729ar>

- Menghini, M., F. Furinghetti, L. Giacardi & Arzarello, F. (Eds.). (2008). *The first century of the international commission on mathematical instruction (1908-2008): Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Rome: Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani
- Menon, R. (2003). Exploring preservice teachers' understanding of two-digit multiplication. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ramakrishnanmenon.pdf>
- Menon, R. (2009). Preservice Teachers' Subject Matter Knowledge of Mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/menon.pdf>
- MindJet. (1999-2006). MindManager (Version 6.0.548) [Mac]. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.mindjet.com/mindmanager-mac>
- Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2009a). Etude collective d'une leçon : Un dispositif japonais pour la recherche en didactique des mathématiques. In I. Bloch & F. Conne (Eds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2009b). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants: Etude collective d'une leçon. *Education et Didactique*, 3(1), 77-90.
- Mooney, C., Fletcher, M. & Jones, K. (2003). Minding your Ps and Cs: subjecting knowledge to the practicalities of teaching geometry and probability. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 23(3), 79-84. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://eprints.soton.ac.uk/12653/>
- Morin, M.-P. (2008). Les connaissances mathématiques et didactiques chez les futurs maîtres du primaire : quatre cas à l'étude. *Canadian Journal of Education*, 31(3), 537-566.
- Morselli, F. (2005). *Reflections on pre-service primary teachers' need and difficulties: Their "relation to mathematics"*. Texte présenté au Conference of the 15th ICMI Study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, Águas de Lindóia, Brésil. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/francesca_morselli_ICMI15_prop.doc
- Muijs, D. & Reynolds, D. (2002). Teachers' Beliefs and Behaviors: What Really Matters? *Journal of classroom interaction*, 37(2), 3-15.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989/2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://standards.nctm.org/>
- National Mathematics Advisory Panel. (2008a). *Foundation for Success: Report of the Task Group on Teachers and Teacher Education* Washington, DC: U.S. Department of Education. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/teachers.pdf>
- National Mathematics Advisory Panel. (2008b). *Foundation for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel* Washington, DC: U.S. Department of

- Education. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf>
- NCTM. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics : a quest for coherence*. Reston, VA: NCTM.
- Nillas, L. A. (2010). Characterizing preservice teachers' mathematical understanding of algebraic relationships. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/nillas.pdf>
- Noirfalise, A. & Matheron, Y. (2009). *Enseigner les mathématiques à l'école primaire : les 4 opérations sur les nombres entiers*. Paris: Vuibert.
- Osana, H. P., Lacroix, G. L., Tucker, B. J. & Desrosiers, C. (2006). The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary mathematics tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(4), 347-380.
- Paquay, L. & Wagner, M.-C. (2001). Compétences professionnelles privilégiées dans les stages et en vidéo-formation. In L. Paquay, M. Altet, E. Charlier & P. Perrenoud (Eds.), *Former des enseignants professionnels : quelles stratégies? Quelles compétences?* (pp. 153-179). Bruxelles: De Boeck Université.
- Perrenoud, O. (2005). *Les cycles d'apprentissage: une nouvelle organisation au service des élèves*: Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation.
- Perrin, D. (2005). *Mathématiques d'école*. Paris: Cassini.
- Perrin-Glorian, M.-J. (1998). Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu. Structuration du milieu pour l'élève et pour le maître. In R. Noirfalise (Ed.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'université d'été de La Rochelle* (pp. 17-37): I.R.E.M. de Clermont-Ferrand. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00421845/en/>
- Perrin-Glorian, M.-J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques: L'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(3), 279-321.
- Perrin-Glorian, M.-J. (2008). Un aperçu des recherches en didactique des mathématiques menées dans l'équipe DIDIREM, exemples et nouvelles questions: Les savoirs pour enseigner les mathématiques. In C. Ouvrier-Bufferet & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes du colloque DIDIREM. Approches plurielles en didactique des mathématiques*. (pp. 20-29). Paris.
- Perrin-Glorian, M.-J. & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 217-276.
- Petrou, M. & Goulding, M. (2011). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 9-25): Springer Netherlands. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_2

- Pian, J. (1999). *Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels*. Paris: IREM Paris 7.
- Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It? *Educational Studies in Mathematics*, 26(2/3), 165-190. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.jstor.org/stable/3482783>
- Ratsimba-Rajohn, H. (1977). *Etude de l'introduction ostensive d'un objet mathématique*. mémoire de DEA. Université Bordeaux I, Bordeaux
- Researchware. (1992-2007). Hyperresearch (Version 2.8) [Mac]. Randolph, MA: Researchware Inc. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.researchware.com/products/hyperresearch.html>
- Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1-2), 57-79.
- Robert, A. (2005). Recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants du second degré en mathématiques – L'exemple d'une formation de formateur. In C. Castela & C. Houdement (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2005* (pp. 137-176). Paris: ARDM et IREM de Paris 7.
- Robert, A. (2008a). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 59-68). Toulouse: Octarès.
- Robert, A. (2008b). Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 11-22). Toulouse: Octarès.
- Robert, A. (2008c). Sur les apprentissages des élèves: une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 33-43). Toulouse: Octarès.
- Robert, A. (2008d). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45-57). Toulouse: Octarès.
- Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 149-163. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9148-y>
- Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>
- Rowland, T. & Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50): Springer Netherlands

- Ruthven, K. (2011). Conceptualising Mathematical Knowledge in Teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 83-96): Springer Netherlands. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_6
- Ruthven, K. & Rowland, T. (2011). Conclusion. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 289-291): Springer Netherlands.
- Salin, M.-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants. In F. Conne (Ed.), *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal: Presses univ. de Montréal.
- Schifter, D. (1998). Learning Mathematics for Teaching: From a Teachers' Seminar to the Classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 55-87. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1023/A:1009911200478>
- Schilling, S. & Hill, H. C. (2007a). Assessing measures of mathematical knowledge for teaching: A validity argument approach. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 5(2), 70-80.
- Schilling, S. & Hill, H. C. (2007b). Test Validation and the MKT Measures: Generalizations and Conclusions. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 5(2), 118-128.
- Schmidt, W. H., Tauo, M. T., Bankov, K., Bömeke, S., Cedillo, T., Cogan, L. et al. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries: Mathematics Teaching in the 21st Century*, Center for Research in Mathematics and Science Education, Michigan State University. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.educ.msu.edu/CONTENT/SITES/USTEDS/DOCUMENTS/MT21REPORT.PDF>
- Schneuwly, B., Dolz, J. & Ronveaux, C. (2006). Le synopsis: un outil pour analyser les objets enseignés. In M.-J. Perrin-Glorian & Y. Reuter (Eds.), *Les méthodes de recherche en didactiques : actes du premier séminaire international sur les méthodes de recherches en didactiques de juin 2005* (pp. 175-189). Villeneuve d'Ascq: Presses univ. du Septentrion.
- Schneuwly, B., Jacquin, M., Haller, S. & Toulou, S. (2007, octobre). *La question de l'unité d'analyse et les pratiques d'enseignement – séquence didactique et objet enseigné*. Texte présenté au colloque REF 2007, Apprendre et former entre l'individuel et le collectif, Sherbrooke
- Schneuwly, B., Sales, G. & Dolz, J. (2005). A la recherche de l'objet enseigné: une démarche multifocale. *Les dossiers des sciences de l'éducation*, 14, 77-93.
- Seck, M. & Tiberghien, A. (2009, janvier). *Utilisation du logiciel Transana pour analyser les temporalités des pratiques d'enseignement dans deux classes de physique appartenant à deux pays de cultures différentes*. Texte présenté au 1er colloque international de l'ARCD: Où va la didactique comparée, Université de Genève
- Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M. L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(3), 263-304.

- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://edr.sagepub.com/cgi/reprint/15/2/4>
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching : foundations of the new reform. *Harvard Educational Revue*, 57(1), 1-22. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://edr.sagepub.com/cgi/reprint/15/2/4>
- Shulman, L. S. (2007). Ceux qui comprennent. Le développement de la connaissance dans l'enseignement (G. Sensevy & C. Amade-Escot, trad.). *Education et didactique*, 1(1), 97-114. (Original publié 1986). Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://educationdidactique.revues.org/121>
- SII. (2000, 25.01.2007). Study of Instructional Improvement. Consulté le 18 juillet 2011, 2008, dans <http://www.sii.soe.umich.edu/>
- Spagnolo, F. & Di Paola, B. (2010). *European and Chinese cognitive styles and their impact on teaching mathematics*. Berlin: Springer Verlag.
- Stein, M. K., Baxter, J. A. & Leinhardt, G. (1990). Subject-Matter Knowledge and Elementary Instruction: A Case from Functions and Graphing. *American Educational Research Journal*, 27(4), 639-663. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://links.jstor.org/sici?sici=0002-8312%28199024%2927%3A4%3C639%3ASKAEIA%3E2.0.CO%3B2-7>
- Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(2), 157-189. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1023/A:1009984621792>
- Stevens, T., Harris, G., Aguirre-Munoz, Z. & Cobbs, L. (2009). A case study approach to increasing teachers' mathematics knowledge for teaching and strategies for building students' maths self-efficacy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 903 - 914. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.informaworld.com/10.1080/00207390903199269>
- Stevenson, H. W. & Stigler, J. W. (1992). *The learning gap: why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education*: Summit Books.
- Stigler, J. & James, H. (1999). *The teaching gap. Best ideas from the worlds teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.
- Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M. & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education*, 17(2), 213-226. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VD8-4280YVN-7/2/db9be7102c39eadc2307b311f712be4a>
- Stylianides, A. J. & Delaney, S. (2011). The Cultural Dimension of Teachers' Mathematical Knowledge. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 179-191): Springer Netherlands. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_11
- Szydlik, J. E., Szydlik, S. D. & Benson, S. R. (2003). Exploring Changes in Pre-service Elementary Teachers' Mathematical Beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(3), 253-279.

- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.jstor.org/stable/3482362>
- Tatto, M., Lerman, S. & Novotna, J. (2010). The organization of the mathematics preparation and development of teachers: a report from the ICMI Study 15. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 313-324. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-009-9139-7>
- TELT. (1991). *Findings from the Teacher Education and Learning To Teach Study* (Rapport de recherche). East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Learning, Michigan State University. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://ncrtl.msu.edu/http/sreports/sr691.pdf>
- Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, 86, 59-90.
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In A. D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146).
- Tièche Christinat, C. & Delémont, M. (2005). *Pratiques et discours: le nouvel enseignement des mathématiques 1P-4P sous la loupe*. Neuchâtel: IRDP.
- Tirosh, D. & Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, 20(1), 79-96. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/BF00356042>
- Tirosh, D., Tsamir, P. & Levenson, E. (2011). Using theories to build kindergarten teachers' mathematical knowledge for teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 231-250): Springer Netherlands. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_14
- Tsamir, P. & Tirosh, D. (2008). Combining theories in research in mathematics teacher education. *ZDM*, 40(5), 861-872. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0142-8>
- Turner, F. & Rowland, T. (2011). The Knowledge Quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 195-212): Springer Netherlands. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_12
- Vergnaud, G. (1994). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire* (5e éd.). Bern: P. Lang.
- Vergnaud, G. (2005). Repères pour une théorie psychologique de la connaissance. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 123-136). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Vermersch, P. (Ed.). (1997). *Pratiques de l'entretien d'explicitation*. Paris: ESF
- Vermersch, P., Martinez, C., Marty, C., Maurel, M. & Faingold, N. (2003). Étude de l'effet des relances en situation d'entretien. *Expliciter*, 49, 1-30. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://www.expliciter.fr/IMG/pdf/49_mars_2003.pdf

- Wang, T. & Cai, J. (2007). Chinese (Mainland) teachers' views of effective mathematics teaching and learning. *ZDM*, 39(4), 287-300.
- Wang, T. & Murphy, J. (2004). An Examination of Coherence in a Chinese Mathematics Classroom. In L. Fan, N.-Y. Wong, J. Cai & S. Li (Eds.), *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives From Insiders* (pp. 107-122). Singapore: World Scientific.
- Weber, L. (2005). *Le plan de travail comme outil organisateur*. Haute Ecole Pédagogique, Lausanne

Table des illustrations

Figures

Figure 1 : Modèle théorique des relations entre les caractéristiques de l'enseignant et l'apprentissage de l'élève (Muijs & Reynolds, 2002, p. 7).	21
Figure 2 : Facteurs influençant la réussite de l'élève (Muijs & Reynolds, 2002, p. 11).....	21
Figure 3 : Connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball <i>et al.</i> , 2008, p. 403)	28
Figure 4 : Les connaissances des enseignants : Développement en contexte (Fennema & Franke, 1992, p. 162)	34
Figure 5 : Niveaux de compréhension mathématique (Pirie & Kieren, 1994, p. 167) et carte des niveaux de compréhension mathématique de Rachel (Nillas, 2010, p. 14).....	36
Figure 6 : Cadre théorique de l'étude MT21 (Schmidt <i>et al.</i> , 2007, p. 11).....	44
Figure 7 : Le milieu du professeur (Brousseau, 1986, p. 88)	53
Figure 8 : Emboîtement des milieux -1 à +1	55
Figure 9 : Situation didactique S_0 , détermination par l'analyse ascendante, d'après Margolinas (2002b, p. 146)	56
Figure 10 : Situation didactique S_0 , détermination par l'analyse descendante, d'après Margolinas (2002b, p. 147).....	56
Figure 11 : Les milieux de la situation didactique S_0	57
Figure 12 : Modèle de la situation du professeur (Coulange, 2000, p. 6)	60
Figure 13 : Un réseau de connaissance pour la soustraction avec retenue (Ma, 1999, p. 19)..	87
Figure 14 : Compréhension de la soustraction avec retenues.	88
Figure 15 : Soustraction écrit par Kate.....	89
Figure 16 : Blocs base dix.	90
Figure 17 : Réseau de connaissance des enseignants vaudois pour la soustraction avec retenue.	92
Figure 18 : Réseau de connaissance des enseignants chinois à propos de la situation de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffre (Ma, 1999, p. 47)	94
Figure 19 : Connaissance de l'algorithme des enseignants	95
Figure 20 : Stratégies d'enseignement des enseignants	96
Figure 21 : Ecriture de la distributivité, Bénédicte	100
Figure 22 : Ecriture de la distributivité, Patricia	101
Figure 23 : Réseau de connaissance des enseignants chinois à propos de la division par une fraction (Ma, 1999, p. 77).	103
Figure 24 : Comparaison des connaissances des enseignants US et chinois sur la division par une fraction (Ma, 1999, p. 73)	104
Figure 25 : Comparaison des réactions des enseignants à l'affirmation de l'élève	107

Figure 26 : Décomposition du produit $a \cdot b$ dans le cadre géométrique	123
Figure 27 : Algorithme en tableau.....	124
Figure 28 : Algorithme en rectangle	124
Figure 29 : Algorithme en colonnes complet. Par commodité de la représentation, on a considéré $n > m$. Les flèches vers la gauche indiquent la notation du chiffre des dizaines du produit $a_k b_l$ dans la colonne située immédiatement à gauche.	125
Figure 30 : Algorithme en colonnes condensé. Par commodité de la représentation, on a considéré $n > m$. Les flèches vers la gauche indiquent la notation du chiffre des dizaines du produit $a_k b_l$ dans la colonne située immédiatement à gauche ET son addition avec le produit qui occupera cette case.	126
Figure 31 : Algorithme <i>per gelosia</i> . Les flèches fines gris clair signifient que le chiffre des dizaines est écrit dans la case désignée, les flèches épaisses foncées que la somme est effectuée en diagonale.....	127
Figure 32 : Quintuplet de l'analyse <i>a priori</i> des variables didactiques de l'explication de l'algorithme. Le rappel de la signification des notations figure en Annexe 1.2.	136
Figure 33 : Multiplication en <i>colonnes strictes</i>	144
Figure 34 : L'écran et les quatre fenêtres de Transana	146
Figure 35 : Visualisation des différentes collections regroupant les différents clips.....	150
Figure 36 : Longueurs des clips pour les séquences de classe et pour les entretiens.....	157
Figure 37 : <i>Sous pli</i> , première grille (Danalet <i>et al.</i> , 1999, LE 70-71).....	163
Figure 38 : Macrostructure de la séquence de Dominique.....	165
Figure 39 : <i>Chercher 1-2-3</i> (Charnay, Combiér, Dussuc, Madier & Madier, 2007c, p. 107) 167	167
Figure 40 : Macrostructure de la séquence de Sacha	168
Figure 41 : Problème noté par Camille au tableau noir.....	170
Figure 42 : Macrostructure de la séquence de Camille	171
Figure 43 : Points à retenir pour l'algorithme, notés au tableau après un exemple lors de la leçon 6.....	173
Figure 44 : Mode d'emploi rédigé lors de la leçon 9	174
Figure 45 : Macrostructure de la séquence de Andrea (en deux parties)	176
Figure 46 : Multiplication en tableau et multiplication en colonnes écrites par Dominique lors de l'entretien <i>ante</i>	183
Figure 47 : Sujet de la leçon 4 écrit par Dominique sur sa feuille de préparation rédigée avant l'entretien <i>ante</i>	184
Figure 48 : Connaissances mathématiques pour l'enseignement relevées lors de l'analyse descendante de l'épisode 1-4 et influence sur la détermination de la situation S_0	186
Figure 49 : Multiplication en tableau 14x5 effectuée sur affiche lors de la leçon 2.	188
Figure 50 : Multiplication en colonnes 14x5 effectuée sur affiche lors de la leçon 2. Les flèches et les colonnes sont tracées par l'enseignant sur les affiches, mais jamais par les élèves dans leur cahier ou sur leurs fiches.	188

Figure 51 : Multiplication en tableau 12x17 effectuée sur affiche lors de la leçon 4	188
Figure 52 : Multiplication en colonnes 12x17 effectuées sur affiche lors de la leçon 4	189
Figure 53 : Lien entre les deux façons d’effectuer la multiplication 12x17, effectuées sur affiche lors de la leçon 4	189
Figure 54 : Détermination des situations successives par analyse descendante et analyse ascendante.	193
Figure 55 : Multiplication en tableau et multiplication en colonnes réalisées sur affiche par Dominique.....	194
Figure 56 : Dominique, affiche de la multiplication en tableau	206
Figure 57 : Enoncé du problème du phare (Charnay <i>et al.</i> , 2007c, p. 106)	207
Figure 58 : Exercice effectué lors de la première leçon observée (Charnay <i>et al.</i> , 2007c, p. 107)	207
Figure 59 : Sacha, explication de l’algorithme au tableau noir	208
Figure 60 : Camille, écriture de $35=30+5$ et traçage des flèches avant le passage à la seconde ligne.....	210
Figure 61 : Camille, explication du fait qu’il faut additionner les deux lignes de la multiplication 583×35	210
Figure 62 : Andrea, explication de l’algorithme au tableau noir	212
Figure 63 : Camille, explication de l’algorithme sur affiche	214
Figure 64 : Les trois périodes du développement des connaissances mathématiques des enseignants chinois (Ma, 1999, p. 145)	242

Tableaux

Tableau 1 : Le cadre théorique Shulman-Fischbein (Tsamir & Tirosh, 2008, p. 863)	33
Tableau 2 : Le <i>Knowledge Quartet</i> , adapté et traduit de (Rowland <i>et al.</i> , 2005, pp. 265-266) et (Turner & Rowland, 2011, pp. 200-202)	35
Tableau 3 : Différences dans la profession d’enseignant de mathématiques entre la Chine et les USA, adapté et traduit de (Ferrerias, Olson & Sztein, 2010)	49
Tableau 4 : Niveaux d’activité du professeur, d’après (Margolinas, 2002b, p. 142)	54
Tableau 5 : Structuration du milieu (Margolinas, 2002b, p. 145)	54
Tableau 6 : Situation didactique S_0 , détermination par l’analyse descendante (Margolinas, 2002b, p. 147)	57
Tableau 7 : Composantes des milieux d’après (Margolinas, 2002a). Les milieux surlignés correspondent à la version « simple » de la structuration présentée dans le Tableau 4 ...	58
Tableau 8 : Caractéristiques des enseignants vaudois interrogés.....	71
Tableau 9 : Synthèse de l’analyse <i>a priori</i> des quatre situations.	83
Tableau 10 : Caractéristiques des trois groupes d’enseignants.	110

Tableau 11 : Classification des erreurs et pourcentage par type d'erreurs, résumé de (Gianferrari, 2000, pp. 52-58), seuls les proportions par catégorie d'erreurs sont données ici.....	131
Tableau 12 : Désignation des connaissances mathématiques pour l'enseignement par des mots-clés	148
Tableau 13 : Désignation de la pertinence des connaissances mathématiques par des mots-clés	149
Tableau 14 : Désignation des niveaux d'activité de l'enseignant par des mots-clés.	149
Tableau 15 : Nombre et durée des séances en classe, des entretiens et de clips des quatre séquences	156
Tableau 16 : Répartition de la longueurs des clips pour les séquences de classe et pour les entretiens	157
Tableau 17 : Nombre de clips contenant chaque niveau d'activité du professeur en valeurs absolues et relatives (pourcentage de clips contenant le mot-clé par rapport au nombre total de clips). Les sommes des totaux relatifs peuvent être supérieures à 100 (propos relevant de plusieurs niveaux).	158
Tableau 18 : Nombre de clips contenant des connaissances mathématiques pour l'enseignement en valeur absolues et relatives (pourcentage de clips contenant le mot-clé par rapport au nombre total de clips)	159
Tableau 19 : Nombre de clips contenant une évaluation de la pertinence mathématique, en valeurs absolues et relatives (pourcentage de clips contenant le mot-clé par rapport au nombre total de clips).....	162
Tableau 20 : Succession des tâches de la séquence de Dominique.....	167
Tableau 21 : Succession des tâches de la séquence de Sacha	169
Tableau 22 : Succession des tâches de la séquence de Camille	172
Tableau 23 : Succession des tâches de la séquence de Andrea	178
Tableau 24 : CME de Dominique manifestées au niveau +3	180
Tableau 25 : CME de Dominique manifestées au niveau +2	183
Tableau 26 : CME de Dominique manifestées au niveau +1	184
Tableau 27 : CME de Dominique manifestées au niveau 0	185
Tableau 28 : CME de Dominique manifestées au niveau -1	185
Tableau 29 : Situations S_2 possibles.	191
Tableau 30 : Principales caractéristiques du moment d'explication de l'algorithme par les quatre enseignants. Les codes pour les variables didactiques sont donnés en 13.4 et rappelés en Annexe 1.2.	205
Tableau 31 : Répartition des CME correctes et des manifestations de la pertinence par enseignant et par type de données.....	220
Tableau 32 : Combinaisons des CME deux à deux entre elles. Les cases grisées représentent le nombre de clips ou un seul type de CME est présent.	222
Tableau 33 : Valeurs relatives des combinaisons par rapport au nombre de clips comportant chaque type de CME	222

Tableau 34 : combinaison entre CMS et CMC	223
Tableau 35: Répartition des types de CME selon le niveau d'activité du professeur.....	225
Tableau 36 : Corrélation entre les CME de type pédagogique et la pertinence, en valeurs absolues et relatives.	225
Tableau 37 : Corrélation entre les CMC et la pertinence, en valeurs absolues et relatives. ..	226
Tableau 38 : Corrélation entre les CMS et la pertinence, en valeurs absolues et relatives....	226
Tableau 39 : Corrélation entre les CME et la pertinence, en valeurs absolues et relatives....	226
Tableau 40 : Corrélation entre les CMC correctes liées aux CMS et la pertinence, en valeurs absolues et relatives.	228
Tableau 41 : Corrélation entre les CMC correctes liées aux autre CME et la pertinence, en valeurs absolues et relatives.....	228
Tableau 42 : Classification des niveaux d'analyse.....	231

Table des matières

Préambule	5
Sommaire	9
Partie A Cadre de la recherche	11
Chapitre 1 Introduction	13
1.1 Origines de la recherche.....	13
1.2 Plan de la thèse.....	14
Chapitre 2 Influence des connaissances mathématiques des enseignants sur les performances des élèves	15
2.1 Portée de la question	15
2.2 Mesures de l'influence, quelques revues d'études et quelques chemins d'influence	16
2.2.1 Les études processus-produit.....	17
2.2.2 Quelques études spécifiques aux mathématiques.....	17
2.2.2.1 La revue du National Mathematics Advisory Panel	18
2.2.2.2 Les revues de Kennedy et al.	19
2.2.2.3 Quelques chemins d'influence possibles	20
Chapitre 3 Découpages des connaissances mathématiques des enseignants	23
3.1 Les catégories de Shulman.....	23
3.1.1 Those who understand	23
3.1.2 Catégories de connaissances	24
3.1.3 La connaissance du contenu	26
3.2 Les catégories de Ball	26
3.2.1 Une catégorisation des connaissances mathématiques pour l'enseignement	26
3.2.1.1 Les connaissances pédagogiques	28
3.2.1.2 Les connaissances du sujet	28
3.2.2 Effets des CMS sur les résultats des élèves.....	29
3.2.3 Effets des CME sur l'enseignement-apprentissage	30
3.3 D'autres adaptations du PCK aux connaissances mathématiques des enseignants	32
3.3.1 Le cadre Shulman-Fischbein	32
3.3.2 Les catégories de l'étude COACTIV	33
3.3.3 La catégorisation de Fennema et Franke	34
3.3.4 Le Knowledge Quartet	35
3.3.5 Pirie et Kieren.....	36
3.3.6 Notre choix de la catégorisation de Ball	37
3.4 Connaissances mathématiques et conception des mathématiques.....	38
3.5 Connaissance et savoir	41
Chapitre 4 Liping Ma : les connaissances mathématiques des enseignants sous l'éclairage de comparaisons internationales	43

4.1	Les comparaisons internationales au sujet des connaissances mathématiques des enseignants	43
4.2	La connaissance et l'enseignement des mathématiques élémentaires en Chine et aux USA : l'étude de Liping Ma.....	44
4.3	D'autres comparaisons des connaissances mathématiques des enseignants entre la Chine et les USA	46
Chapitre 5 La place de l'enseignant dans les modélisations proposées par la didactique des mathématiques francophone		51
Chapitre 6 Le milieu et sa structuration		53
6.1	Niveaux d'activité et structuration du milieu.....	53
6.2	Analyse ascendante et analyse descendante	55
6.2.1	Analyse descendante	58
6.2.2	Analyse ascendante	58
6.2.3	Bifurcations didactiques	59
6.3	Structuration du milieu et étude cognitive	59
Chapitre 7 La pertinence mathématique du professeur.....		61
7.1	Origines et définition du concept de pertinence chez Bloch.....	61
7.2	Critères de la pertinence mathématique	62
7.3	Adaptation des critères de pertinence	62
7.3.1	Primaire	62
7.3.2	Ostension	63
Chapitre 8 Questions de recherche et éléments méthodologiques.....		65
8.1	Questions de recherche	65
8.2	Éléments méthodologiques	65
Partie B Les connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants vaudois : une comparaison internationale		67
Chapitre 9 Le dispositif		69
9.1	L'étude de Ma : recueil des données.....	69
9.1.1	Les enseignants US	69
9.1.2	Les enseignants chinois	69
9.1.3	Le questionnaire de Ma	69
9.2	Notre dispositif de recueil des données	70
9.2.1	Les enseignants vaudois	70
9.2.2	Analyse <i>a priori</i> des tâches proposées aux enseignants.....	72
9.2.2.1	Première question : soustractions avec retenues	72
9.2.2.2	Deuxième question : multiplication de nombres à plusieurs chiffres	75
9.2.2.3	Troisième question : division par une fraction	78
9.2.2.4	Quatrième situation : la relation entre périmètre et aire	80
9.2.2.5	Le canevas d'entretien et les conditions de passation.....	82
9.2.2.6	Résumé des questions traitées par chaque situation	83

9.3	Différence des populations et effet des adaptations réalisées	83
9.4	Traitement et analyse des données	84
Chapitre 10 Comparaison des résultats		85
10.1	Les réponses des enseignants aux quatre questions	85
10.1.1	Première question : soustractions avec retenues	85
10.1.1.1	L'approche des enseignants US : emprunt plutôt que regroupement (Ma, 1999, pp. 2-7) ...	86
10.1.1.2	L'approche des enseignants chinois : décomposition de l'entité supérieure (Ma, 1999, pp. 7-21)	86
10.1.1.3	L'approche des enseignants vaudois : emprunt contre décomposition	87
10.1.2	Deuxième question : multiplication de nombres à plusieurs chiffres	93
10.1.2.1	L'approche des enseignants US : alignement ou séparation en trois problèmes (Ma, 1999, pp. 28-38)	93
10.1.2.2	L'approche des enseignants chinois : élaboration du concept de valeur positionnelle (Ma, 1999, pp. 38-51)	94
10.1.2.3	L'approche des enseignants vaudois : distributivité implicite et <i>règle du zéro</i>	95
10.1.3	Troisième question : division par une fraction	102
10.1.3.1	La performance de calcul et les représentations des enseignants US et chinois	102
10.1.3.2	Les enseignants vaudois	104
10.1.4	Quatrième question : la relation entre périmètre et aire	105
10.1.4.1	Comment les enseignants US explorent cette nouvelle idée	105
10.1.4.2	Comment les enseignants chinois explorent cette nouvelle idée	106
10.1.4.3	Comment les enseignants vaudois explorent cette nouvelle idée	106
10.2	Résultats globaux	109
10.2.1	Les liens entre les connaissances	110
10.2.2	Manipulations, usage des écritures mathématiques et des représentations	111
10.2.3	Attitude par rapport aux mathématiques	112
10.2.4	Le discours	112
Chapitre 11 Conclusion de la Partie B		115
Partie C Les connaissances mathématiques des enseignants dans leur pratique ordinaire de classe		117
Chapitre 12 L'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres : le choix de ce sujet d'enseignement		119
Chapitre 13 L'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres : éléments d'analyse épistémologique		121
13.1	Connaissances en jeu autour de l'algorithme	121
13.1.1	Définitions et représentations de la multiplication	121
13.1.2	Propriétés sous-jacentes aux algorithmes	122
13.1.2.1	Propriétés sous-jacentes aux algorithmes de type 1	122
13.1.2.2	L'algorithme en tableau, l'algorithme en rectangle	124
13.1.2.3	Les algorithmes en colonnes	125
13.1.2.4	Autres algorithmes	127
13.2	La multiplication par 10	128
13.3	Erreurs dans l'algorithme	130
13.4	Des manières d'introduire l'algorithme : quelques variables didactiques	131
13.4.1	Description ou explication de l'algorithme	132
13.4.2	Le zéro de la seconde ligne ou le décalage	133

13.4.3	La gestion des retenues.....	133
13.4.4	Les ajouts graphiques	134
13.4.5	Le choix des nombres.....	135
13.4.6	Le plan d'études et les manuels utilisés	136
13.4.6.1	Le plan d'études.....	136
13.4.6.2	Les moyens COROME	137
13.4.6.3	Les fiches OP.....	140
13.4.6.4	Cap Maths	141
Chapitre 14 Dispositif de recueil et d'analyse des observations		142
14.1	Recueil et traitement des données	142
14.1.1	Une observation naturaliste	142
14.1.2	Le contrat de recherche	142
14.1.3	Entretiens.....	143
14.1.3.1	Entretien <i>ante</i>	143
14.1.3.2	Entretien <i>post</i>	143
14.1.4	La séquence en classe.....	144
14.1.5	Transcription réduite de la séquence : synopsis et macrostructure	144
14.1.6	Traitement des données audio et vidéo	146
14.1.6.1	Présentation du logiciel utilisé.....	146
14.1.6.2	Types de traitement et d'analyse	147
14.2	Les quatre enseignants et leur classe	150
14.2.1	Dominique	151
14.2.2	Sacha	152
14.2.3	Camille	153
14.2.4	Andrea	154
Chapitre 15 Résultats.....		155
15.1	Catégorisation des données.....	155
15.1.1	Quantification des données	155
15.1.2	Occurrences de chaque catégorie	158
15.1.2.1	Les niveaux d'activité du professeur	158
15.1.2.2	Les connaissances mathématiques pour l'enseignement	159
15.1.2.3	La pertinence.....	162
15.2	Les quatre séquences.....	163
15.2.1	Dominique	163
15.2.2	Sacha	167
15.2.3	Camille	169
15.2.4	Andrea	172
15.3	Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations de situation, analyse d'un épisode	178
15.3.1	Analyse descendante du point de vue de l'enseignant	178
15.3.1.1	Niveau +3 : situation noosphérique	178
15.3.1.2	Niveau +2 : situation de construction	180
15.3.1.3	Niveau +1 : situation de projet.....	183
15.3.1.4	Niveau 0 : situation didactique	184
15.3.1.5	Niveau -1 : situation d'apprentissage.....	185
15.3.1.6	Résumé de l'analyse descendante.....	185
15.3.2	Analyse ascendante du point de vue de l'élève	187
15.3.2.1	Niveau -3 : situation objective	187
15.3.2.2	Niveau -2 : situation de référence	189
15.3.2.3	Niveau -1 : situation d'apprentissage.....	192
15.3.2.4	Niveau 0 : situation didactique	192

15.3.3	Démultiplication de la situation S_0	193
15.3.3.1	Analyse <i>a posteriori</i> de l'épisode 1-4	194
15.3.3.2	Situations de niveau 0 effectives et situations déterminées <i>a priori</i>	201
15.3.3.3	Connaissances mathématiques pour l'enseignement, pertinence et bifurcations didactiques	202
15.4	Le moment d'explication de l'algorithme	204
15.4.1	Le moment d'explication	204
15.4.2	La séparation en deux lignes puis l'addition : le lien avec la distributivité	205
15.4.2.1	Dominique	205
15.4.2.2	Sacha	207
15.4.2.3	Camille	209
15.4.2.4	Andrea	210
15.4.3	L'alignement et la gestion des retenues : le lien avec la numération décimale de position	212
15.4.3.1	Dominique	212
15.4.3.2	Sacha	213
15.4.3.3	Camille	213
15.4.3.4	Andrea	214
15.4.4	Et le zéro ?	215
15.4.4.1	Dominique	215
15.4.4.2	Sacha	215
15.4.4.3	Camille	216
15.4.4.4	Andrea	217
15.4.5	Les représentations de la multiplication	218
15.5	Analyse globale par enseignant	218
15.6	Analyse de certaines combinaisons	222
15.6.1	Les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement et les autres connaissances mathématiques pour l'enseignement	222
15.6.1.1	Combinaisons entre CME	222
15.6.1.2	Combinaison entre CMS et CMC	222
15.6.2	CME et niveau d'activité du professeur	224
15.6.3	CMS et pertinence	225
15.6.3.1	Absence de CME	227
15.6.3.2	Présence de CME erronées	227
15.6.3.3	Présence de CME correctes	227
Chapitre 16	Conclusion de la partie C	231
Partie D	Conclusion	233
Chapitre 17	Synthèse des résultats et de leur discussion	235
17.1	Des connaissances prédicatives aux connaissances opératoires : l'algorithme de la multiplication	235
17.2	Des réponses à nos questions de recherche	236
17.3	Les modèles utilisés	239
Chapitre 18	Ouverture en guise de conclusion : l'évolution des connaissances mathématiques pour l'enseignement chez les enseignants	241
Références bibliographiques	247
Table des illustrations	267
Table des matières	273

