HAL
open science

Transferts de masse et d'énergie aux interfaces liquide / vapeur avec changement de phase : proposition de modélisation aux grandes échelles des interfaces

Guillaume Bois

▶ **To cite this version:**

Guillaume Bois. Transferts de masse et d'énergie aux interfaces liquide / vapeur avec changement de phase : proposition de modélisation aux grandes échelles des interfaces. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENI040 . tel-00627370

HAL Id: tel-00627370

https://theses.hal.science/tel-00627370v1

Submitted on 28 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mécanique des fluides, Énergétique, Procédés**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Guillaume BOIS

Thèse dirigée par **Olivier LEBAIGUE**

préparée au sein du laboratoire :
Commissariat à l'Énergie Atomique
Direction de l'Énergie Nucléaire
Département d'Études des Réacteurs
Service de Simulation en ThermoHydraulique
Laboratoire de Développement et d'Applications à l'échelle Locale

dans **l'École Doctorale Ingénierie - Matériaux Mécanique Énergétique Environnement Procédés Production**

Transferts de masse et d'énergie aux interfaces liquide/vapeur avec changement de phase : proposition de modélisation aux grandes échelles des interfaces

Thèse soutenue publiquement le **4 février 2011**,
devant le jury composé de :

Pr. Catherine COLIN	IMFT, Président du jury et rapporteur
Dr. François-Xavier DEMOULIN	CORIA, Rapporteur
Pr. Emmanuel MAITRE	UJF, Examinateur
Dr. Olivier LEBAIGUE	CEA Grenoble, Directeur de thèse
Dr. Didier JAMET	CEA Grenoble, Encadrant
Dr. Adrien TOUTANT	PROMES-CNRS, Examinateur
Dr. Pierre RUYER	IRSN, Examinateur

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE
INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque
|___|___|___|___|___|___|___|___|___|___|

Mémoire de THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Grenoble
délivré par l'Institut polytechnique de Grenoble

spécialité : Mécanique des fluides, Énergétique, Procédés

préparée au laboratoire : Commissariat à l'Énergie Atomique
Direction de l'Énergie Nucléaire
Département d'Études des Réacteurs
Service de Simulation en ThermoHydraulique
Laboratoire de Développement et d'Applications à l'échelle Locale

dans le cadre de l'École Doctorale : Ingénierie - Matériaux Mécanique Énergétique
Environnement Procédés Production

Présentée et soutenue publiquement

par

Guillaume BOIS

le 4 février 2011

Directeur de thèse : Olivier Lebaigue

Transferts de masse et d'énergie aux interfaces liquide/vapeur avec changement de phase : proposition de modélisation aux grandes échelles des interfaces

JURY

Pr.	Catherine Colin	IMFT	Rapporteur
Dr.	François-Xavier Demoulin	CORIA	Rapporteur
Pr.	Emmanuel Maitre	UJF	Président du jury
Dr.	Olivier Lebaigue	CEA Grenoble	Directeur de thèse
Dr.	Didier Jamet	CEA Grenoble	Encadrant
Dr.	Adrien Toutant	PROMES-CNRS	Examinateur
Dr.	Pierre Ruyer	IRSN	Examinateur

Résumé

La modélisation des transferts thermiques en écoulements diphasiques est l'une des pierres angulaires de l'étude de la sûreté des réacteurs nucléaires. À l'échelle du réacteur, elle repose sur des corrélations expérimentales. L'utilisation croissante de la mécanique des fluides numérique pour les études de sûreté renforce la demande d'expertise dans les outils de simulation, en particulier du point de vue de la modélisation.

En soutien aux modèles moyennés à deux fluides, nous souhaitons apporter des informations de fermetures locales pour considérer la physique des transferts interfaciaux et les effets 3D. Pour cela, comme la résolution directe des équations de bilan locales par SND est trop coûteuse, nous souhaitons développer un outil de SGE diphasique pour modéliser les petites échelles turbulentes et les petites déformations interfaciales. Comme le changement de phase est à l'origine de l'écoulement diphasique pour les applications visées, nous étendons dans ce mémoire le modèle *Interfaces and Subgrid-Scales* (ISS, Toutant *et al.*, 2009a) aux interfaces avec changement de phase, pour lesquelles l'hypothèse de continuité de la vitesse à l'interface n'est plus valable. Le suivi explicite des interfaces permet d'évaluer précisément les transferts comme le taux de transfert de masse.

Dans un premier temps, nous établissons une description mésoscopique du problème où l'interface est diffuse en filtrant les équations locales instantanées et en modélisant les transferts sous-filtres aux interfaces. Les principales difficultés de modélisations proviennent (i) de la détermination de la vitesse de l'interface, (ii) de l'effet de la discontinuité des vitesses sur les modèles sous-maille, (iii) de la discontinuité du flux et (iv) de la condition de saturation de l'interface. Les modèles proposés sont qualifiés *a priori* en observant leur prédiction par filtrage explicite de solutions de SND.

Dans un deuxième temps, nous établissons un système macroscopique discontinu équivalent au problème diffus pour bénéficier de l'expertise acquise pour les méthodes numériques de SND. Aux interfaces, les modèles sous-maille sont concentrés pour modifier les conditions de raccord entre les phases. Les conditions de saut ainsi déterminées montrent que la vitesse de l'interface est affectée par la courbure et par le saut de vitesse. Un saut de vitesse tangentielle est introduit pour modéliser la couche limite dynamique. Sur le plan thermique, nous retrouvons la condition de saturation caractéristique du changement de phase ; le taux de changement de phase ne dépend plus uniquement du saut de flux conductif mais, pour pallier la sous-résolution de la couche limite thermique au voisinage de l'interface, nous proposons de lui ajouter la contribution sous-maille des corrélations vitesse/température.

Comme en SGE monophasique, le gain apporté par la modélisation ISS permet d'envisager l'utilisation de simulations fines pour des problèmes appliqués. C'est la première étape d'une démarche multi-échelle pour fournir des fermetures aux modèles moyennés à deux fluides. Nous illustrons son potentiel sur une SND multi-bulles complexe.

Mots clés : Écoulement diphasique, Front-Tracking, changement de phase, conditions de saut, SND, SGE, similarité d'échelles, pseudo-turbulence, condensation, corrélation, nombre de Nusselt, tests *a priori*.

Abstract

Modeling heat and mass transfer in two-phase flows with phase-change is crucial in many industrial studies including nuclear safety. Only averaged two-phase flow models can simulate such complex flows. Their accuracy depends in particular on closure laws for interfacial mass, momentum, and energy transfers that often rely on experimental correlations. Supporting averaged models, the goal of this thesis is to bring local closure information from finer simulations to consider 3D-effects and interfacial transfers more accurately. In this prospect, as direct resolution of the local balance equations is too expensive, we seek for a two-phase equivalent of Large Eddy Simulation (LES) in order to tackle simulations with enough bubbles to extract statistics needed in averaged models. Applying a spatial filter, we aim at modeling subgrid turbulence and interfacial transfers. The largest turbulent scales and interface deformations are captured because the filter size is chosen in-between the Kolmogorov scale and the bubble size.

Because of the importance of the phase-change phenomena, this thesis extend the *Interfaces and Subgrid Scales* (ISS) model proposed by Toutant *et al.* (2009a) to non-material interfaces, *i. e.,* with phase-change. Explicit interface tracking is valuable to accurately estimate interfacial transfers such as the phase-change rate.

In the first part of this document, we establish a smeared-interface description of two-phase flows. Sub-grid transfers and interfacial deformations are modeled using the modified Bardina *et al.* (1983) scale-similarity hypothesis. Main modeling issues comes from (i) the specific interfacial velocity, (ii) the velocity and the temperature gradient discontinuities at the interface and (iii) the saturation condition of the interface. Models are validated using reference data from DNS.

In the second up-scaling step, we transform interfacial subgrid models into source terms in the jump conditions in order to establish an equivalent discontinuous model thus benefitting from the knowledge acquired in DNS numerical methods. Transfers between phases are modified and the interfacial velocity is redefined considering the time evolution of curvature and the velocity jump at the interface. As a result, the normal momentum jump is modified. A tangential velocity jump is also introduced to cancel out the sub-resolution of the boundary layer. From a thermal point of view, the classical saturation condition is recovered ; the phase-change rate not only depends on the conduction heat flux but a contribution from the subgrid velocity and temperature correlations must be added to account for the poor resolution of the thermal boundary layer.

As for single-phase LES, ISS modeling enables local-scale simulations of industrial configurations. It is the first step of a multi-scale approach towards turbulent bubbly flows. In this thesis, we illustrates how to bridge the gap between DNS and averaged descriptions from reference results obtained on condensing bubbles in a pseudo-turbulent subcooled liquid. Averaged quantities are compared with correlations for the condensation sink term used in the two-fluid model. We are able to underline the phase-change enhancement with increasing void fraction. It shows that this path could be used to improve the understanding of the strong two-way coupling between flow dynamics and interfacial heat transfers.

Keywords : Two-phase flow, Front-Tracking, phase-change, jump conditions, DNS, LES, scale similarity, pseudo-turbulence, condensation sink term, Nusselt correlation, *a priori* test.

Table des matières

Résumé **i**

Abstract **i**

Table des matières **iii**

Nomenclature **vii**

Introduction **1**
Contexte . . . 1
Démarche multi-échelle . . . 2
Méthodologie de changement d'échelle . . . 4
Plan du mémoire . . . 6

1 Échelle microscopique **7**
1.1 Description locale et instantanée . . . 7
1.1.1 Liste d'hypothèses . . . 7
1.1.2 Équations monofluides locales et instantanées . . . 8
1.1.3 Équations monofluides adimensionnelles . . . 12
1.2 Méthode numérique de simulation numérique directe . . . 13
1.2.1 Discrétisation spatiale . . . 14
1.2.2 Intégration temporelle : méthode de résolution . . . 15
1.2.3 Convection de l'interface : transport des marqueurs lagrangiens . . . 16
1.2.4 La méthode *Ghost Fluid* . . . 18
1.3 Simulations numériques directes . . . 20
1.3.1 Préambule . . . 20
1.3.2 Estimation de la convergence en maillage – Méthodologie . . . 21
1.3.3 Condensation et croissance sans gravité . . . 21
1.3.4 Ascension d'une bulle dans du liquide sous-refroidi . . . 23
1.3.5 Tourbillons contra-rotatifs . . . 28
1.3.6 Interaction entre une bulle et de la Turbulence Homogène Isotrope . . . 29
1.3.7 Pseudo-turbulence diphasique . . . 36
1.4 Changement d'échelle de la SND vers le 3D moyenné . . . 43
1.4.1 Grandeurs moyennées : critères de comparaison . . . 43
1.4.2 Bulle unique . . . 44
1.4.3 Multibulles . . . 45
1.4.4 Conclusion . . . 48

2 Échelle mésoscopique **51**
2.1 Filtrage . . . 51
2.2 Construction des termes sous-maille . . . 54
2.2.1 Modélisation et fermeture par l'hypothèse de similarité d'échelles . . . 55
2.2.2 Illustration du modèle de similarité d'échelles . . . 57
2.2.3 Limitations – Dysfonctionnement . . . 58
2.2.4 Construction d'une vitesse intermédiaire . . . 60

2.2.5 Fermeture des termes convectifs . . . 64
2.2.6 Fermeture de l'équation de transport de l'interface . . . 66
2.2.7 Fermeture de l'équation de bilan d'énergie . . . 68
2.3 Fermeture de la condition de saturation mésoscopique . . . 68
2.3.1 Interface plane . . . 70
2.3.2 Interface sphérique . . . 71
2.3.3 Conclusion & méthodologie . . . 72
2.4 Fermeture du terme de tension interfaciale . . . 73
2.5 Fermeture de l'aire interfaciale . . . 74
2.6 Synthèse : description mésoscopique et hypothèses . . . 76
Annexes . . . 78
2.A Reformulation de la diffusion . . . 78
2.B Approximation de la partie continue de la vitesse . . . 79
2.C Modélisation sous-maille . . . 79
2.D Divergence de la vitesse interfaciale étendue . . . 80
2.E Validation . . . 81
2.E.1 Cas 1D : évaporation à une interface plane . . . 81
2.E.2 Illustration dans un cas pseudo-2D : évaporation à une interface plane en présence d'un écoulement perturbateur à divergence nulle . . . 83

3 Tests *a priori* 85
3.1 Principe . . . 85
3.2 Mise en œuvre . . . 86
3.2.1 Filtrage . . . 86
3.2.2 Définitions des critères de comparaison . . . 87
3.2.3 Précautions numériques pour l'évaluation des termes sous-maille . . . 89
3.3 Limitations . . . 91
3.4 Évaluation des termes sous-maille . . . 91
3.4.1 Présentation détaillée de la configuration pseudo-turbulente multi-bulles . . . 92
3.4.2 Synthèse . . . 96
3.5 Conclusion . . . 99
3.A Annexes . . . 100
3.A.1 Tourbillons contra-rotatifs . . . 100
3.A.2 Bulle unique indéformable (configuration 2D) . . . 108
3.A.3 Bulle unique ellipsoïdale (configuration 3D) . . . 116
3.A.4 Configuration multi-bulles . . . 123
3.A.5 Interaction d'une bulle avec une Turbulence Homogène Isotrope (sous-refroidissement fluctuant) . . . 130
3.A.6 Interaction d'une bulle avec une Turbulence Homogène Isotrope (sous-refroidissement uniforme) . . . 137

4 Échelle macroscopique 145
4.1 Présentation du problème de changement d'échelle . . . 145
4.1.1 Forme des relations de fermeture recherchées . . . 147
4.1.2 Analyse générique des processus interfaciaux . . . 151
4.1.3 Principe de la méthode des Développements Asymptotiques Raccordés . . . 157
4.2 Un exemple simple . . . 157
4.2.1 Problèmes extérieurs . . . 158
4.2.2 Problème intérieur . . . 159
4.2.3 Conditions de raccord . . . 160
4.3 Description mésoscopique dans le repère mobile . . . 164
4.3.1 Repère mobile associé à l'indicatrice mésoscopique . . . 164
4.3.2 Rappel de la description mésoscopique dans le repère fixe . . . 167
4.3.3 Description mésoscopique dans le repère mobile . . . 168
4.4 Développements Asymptotiques Raccordés . . . 169

4.4.1 Postulat sur le profil de l'indicatrice mésoscopique dans la direction normale à l'interface . . . 170
4.4.2 Définitions des variables interfaciales macroscopiques . . . 174
4.4.3 Définition de la vitesse de l'interface macroscopique . . . 175
4.4.4 Problème extérieur . . . 184
4.4.5 Problème intérieur . . . 186
4.4.6 Équivalence entre les modélisations sous-maille . . . 195
4.5 Synthèse du modèle macroscopique . . . 195
4.5.1 Description macroscopique d'un problème diphasique . . . 195
4.5.2 Interprétation et discussion des résultats . . . 197
4.6 Conclusion . . . 201
Annexes . . . 202
4.A Système de coordonnées associées à l'interface . . . 202
4.A.1 Base naturelle associée à l'interface et base physique . . . 202
4.A.2 Notations tensorielles et opérateurs différentiels . . . 203
4.A.3 Expression des opérateurs différentiels dans la base physique . . . 203
4.A.4 Limite asymptotique au voisinage de l'interface ($\xi_3 \to 0$) . . . 204
4.A.5 Développement limité des opérateurs différentiels dans la région intérieure . 205
4.A.6 Propriétés de la vitesse des coordonnées . . . 208
4.A.7 Dérivée lagrangienne . . . 211
4.A.8 Évolution temporelle de la courbure moyenne . . . 211
4.B Conditions de raccord . . . 213
4.C Développement limité des grandeurs surfaciques . . . 214
4.D Développements Asymptotiques Raccordés . . . 215
4.D.1 Problème extérieur . . . 215
4.D.2 Problème intérieur . . . 219
4.E Saut de quantité de mouvement d'ordre 1 . . . 236
4.E.1 Préambule/Lemme . . . 236
4.E.2 Excès d'ordre 0 du terme sous-maille de convection . . . 237
4.E.3 Directions tangentielles . . . 239
4.E.4 Direction normale . . . 246
4.F Développements limités et variables filtrées . . . 255
4.F.1 Filtre . . . 255
4.F.2 Ordre des développements . . . 256
4.F.3 Termes sous-maille . . . 257
4.F.4 Quelques propriétés . . . 258

5 Tests *a posteriori* 261
5.1 Protocole de détermination des constantes du modèle . . . 261
5.2 Mise en œuvre du modèle ISS . . . 262
5.2.1 Filtrage . . . 262
5.2.2 Implémentation du modèle ISS . . . 263
5.3 Simulations ISS . . . 266
5.3.1 Condensation et croissance sans gravité . . . 266
5.3.2 Ascension d'une bulle . . . 269
5.3.3 Pseudo-turbulence diphasique . . . 271

Conclusions & perspectives 275
Conclusions . . . 277
Perspectives . . . 279

Annexes 281

A Équations monofluides locales et instantanées **283**
A.1 Équations primaires d'évolution dans les phases 284
A.2 Relations primaires de saut 284
A.3 Équation secondaire d'évolution de l'entropie dans les phases 285
A.4 Relation secondaire de saut d'entropie 286
A.5 À propos de l'entropie 287
A.6 Équations monofluides locales et instantanées 288
A.6.1 Bilan de masse 288
A.6.2 Bilan de quantité de mouvement 289
A.6.3 Bilan d'entropie 289
A.6.4 Bilan d'enthalpie 290
A.6.5 Bilan d'énergie formulé en température 291
A.7 Synthèse 292

B Choix des variables principales **293**
B.1 Choix entre les formulations monofluide et phasique 293
B.1.1 Préambule : nécessité de l'extension 294
B.1.2 Conservation de l'énergie lors du changement d'échelle 295
B.1.3 Similarité d'échelles et variables discontinues 295
B.1.4 Traitement de la condition de saturation à l'interface 295
B.1.5 Physique des fluctuations 296
B.1.6 Équation d'évolution 296
B.1.7 Conclusion sur le choix de la variable et les difficultés associées 296
B.2 Remplacement de la condition de saturation 296

C Propriétés d'un champ quasi statique **299**

D Détails sur la méthode numérique **303**
D.1 Opérateurs de convection et de diffusion à l'interface 303
D.2 Convection de l'interface 303
D.2.1 Idée principale : cas d'une interface plane 303
D.2.2 Cas d'une interface quelconque 304
D.3 La méthode *Ghost Fluid* 306
D.3.1 Convection de la température 306
D.3.2 Gradient de température à l'interface et taux de transfert de masse 307

E Évaluation analytique de champs filtrés **309**

Bibliographie **317**

Nomenclature

Lettres latines

a	pente de la corrélation entre le terme sous-maille et son modèle	$[-]$
$\mathcal{A}$	aire	$[\mathrm{m}^2]$
$\boldsymbol{B}$	tenseur de courbure	$[\mathrm{m}^{-1}]$
C	paramètre du modèle caractéristique de la forme du noyau du filtre	$[-]$
c_p	capacité calorifique à pression constante	$[\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}]$
$\mathcal{C}$	terme croisé	$[-]$
$\mathcal{D}$	tenseur des contraintes visqueuses	$[\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}]$
D	diamètre	$[\mathrm{m}]$
d	distance signée à l'interface	$[\mathrm{m}]$
$\boldsymbol{g}$	accélération de la gravité	$[\mathrm{m.s^{-2}}]$
G	noyau du filtre	$[-]$
$\boldsymbol{g}_i$	base physique (orthonormée) associée à l'interface	$[-]$
H	courbure gaussienne de l'interface	$[\mathrm{m}^{-2}]$
H	distribution de Heaviside ($H(x) = 1$ si $x \geq 0$)	$[-]$
h	enthalpie	$[\mathrm{J.kg^{-1}}]$
h_i	facteurs d'échelle dans les coordonnées généralisées	$[-]$
$\boldsymbol{I}$	tenseur identité	$[-]$
$\boldsymbol{j}$	flux convecto-diffusif	
k	conductivité thermique	$[\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}]$
κ_α	courbures principales	$[\mathrm{m}^{-1}]$
$\mathcal{L}$	terme de Leonard	$[-]$
$\mathbb{L}$	norme	$[-]$
$\mathcal{L}^{vap}$	chaleur latente de vaporisation	$[\mathrm{J.kg^{-1}}]$
$\mathcal{L}^0$	chaleur latente de référence (en adimensionnel, $\mathcal{L}^0 = 1$)	$[-]$
$\dot{m}$	taux de transfert de masse (positif en condensation)	$[\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}]$
M^n	moment d'ordre n du noyau de convolution	$[-]$
$\boldsymbol{n}_k$	normale sortante de la phase k	$[-]$
p	pression	$[\mathrm{N.m^{-2}}]$
$\mathcal{P}_m$	production de quantité de mouvement par le saut de vitesse	
$\mathcal{P}_\mu$	production de quantité de mouvement par la viscosité	
$\boldsymbol{q}$	flux de chaleur	$[\mathrm{W.m^{-2}}]$
r	coefficient de corrélation entre le terme sous-maille et son modèle	$[-]$
$\mathcal{R}$	terme de Reynolds	$[-]$
s	entropie	$[\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}]$
t	temps	$[\mathrm{s}]$
$\boldsymbol{t}_\alpha$	vecteur tangent dans la direction principale de courbure α	
$t_c = D_b/V$	temps caractéristique	$[\mathrm{s}]$
T	température	$[\mathrm{K}]$
T^*	température intermédiaire	$[\mathrm{K}]$

T^{sat}	température de saturation	$[\mathrm{K}]$
$\boldsymbol{v}$	vitesse	$[\mathrm{m.s^{-1}}]$
$v = 1/\rho$	volume massique	$[\mathrm{m^3.kg^{-1}}]$
V	vitesse de référence	$[\mathrm{m.s^{-1}}]$
$\boldsymbol{v}^*$	vitesse intermédiaire	$[\mathrm{m.s^{-1}}]$
$\mathcal{V}$	volume	$[\mathrm{m^3}]$
$\boldsymbol{x}$	position	$[\mathrm{m}]$
$A = \tau^{mf}_{\mathrm{interf}}$	terme sous-maille interfacial, *cf.* Éq. (4.90a)	$[\mathrm{s^{-1}}]$
$F = \tau^{mf}_{\mathrm{convT}}$	terme sous-maille convectif en température, *cf.* Éq. (4.90f)	$[\mathrm{J.m^{-2}.s^{-1}}]$
$E = \tau^{mf}_{\mathrm{T}}$	terme sous-maille, *cf.* Éq. (4.90e)	$[\mathrm{J.kg^{-1}}]$
$D = \tau^{mf}_{\mathrm{tempT}}$	terme sous-maille temporel en température, *cf.* Éq. (4.90d)	$[\mathrm{J.m^{-3}}]$
$C = \tau^{mf}_{\mathrm{conv}}$	terme sous-maille convectif en vitesse, *cf.* Éq. (4.90c)	$[\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}]$
$B = \tau^{mf}_{\mathrm{temp}}$	terme sous-maille temporel en vitesse, *cf.* Éq. (4.90b)	$[\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}]$

Lettres grecques

$\beta = \rho c_p/k$	inverse de la diffusivité thermique	$[\mathrm{s.m^{-2}}]$
χ	indicatrice de phase	$[-]$
Δ	largeur de coupure du filtre	$[\mathrm{m}]$
δ	distribution de Dirac	$[\mathrm{m^{-1}}]$
ΔT	sous-refroidissement du liquide	$[\mathrm{K}]$
$\delta\boldsymbol{v}$	champ de vitesse discontinu pour construire $\boldsymbol{v}_i$	$[\mathrm{m.s^{-1}}]$
$\delta\boldsymbol{v}_l$	champ de vitesse discontinu pour convecter la température liquide	$[\mathrm{m.s^{-1}}]$
$\delta\boldsymbol{v}_i$	correction de la vitesse macroscopique de l'interface	$[\mathrm{m.s^{-1}}]$
ϵ	petit paramètre ou fréquence de coupure adimensionnelle du filtre	$[-]$
$\gamma = c_p/k$	rapport entre la capacité calorifique et la conductivité thermique	$[\mathrm{m.s.kg^{-1}}]$
Γ^k_{ij}	coefficients de Christoffel	$[-]$
κ	courbure moyenne de l'interface (positive pour une bulle)	$[\mathrm{m^{-1}}]$
μ	viscosité dynamique	$[\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}]$
ω	jacobienne associée au changement de coordonnées	$[-]$
ρ	masse volumique	$[\mathrm{kg.m^{-3}}]$
σ	tension de surface	$[\mathrm{N.m^{-1}}]$
σ^0	tension de surface de référence (en adimensionnel, $\sigma^0 = 1$)	$[-]$
τ	terme sous-maille	$[-]$
$\boldsymbol{\tau}_k$	tenseur des contraintes de la phase k	$[\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}]$
$\widetilde{\tau}_i$	tenseur des contraintes visqueuses macroscopiques à l'interface	
$\Theta = kT$	produit de la conductivité thermique et de la température	$[\mathrm{W.m^{-1}}]$
Ω	volume	$[\mathrm{m^3}]$
ξ	coordonnée normale à l'interface	$[\mathrm{m}]$ ou $[-]$

Opérateurs

$\mathrm{con}\,(\cdot)$	contraction tensorielle (deuxième invariant)
$:$	contraction double
$*$	produit de convolution
$\hat{=}$	définition
$\partial/\partial t$	dérivée partielle par rapport au temps
d/dt ou D/Dt	dérivée lagrangienne
$_{,i}$	dérivée partielle par rapport à la composante i
$\det\,(\cdot)$	déterminant (troisième invariant)
$\underline{\cdot}$	discrétisation

$\bar{\cdot}$	filtre	
$\langle\cdot\rangle$	second filtre (explicite)	
∇	gradient ou divergence	$\left[\mathrm{m}^{-1}\right]$
∇_s	gradient ou divergence surfacique	$\left[\mathrm{m}^{-1}\right]$
$\hat{\cdot}$	interpolation	
$\tilde{\cdot}$	grandeur macroscopique (limite asymptotique)	
$\breve{\cdot}$	variable exprimée dans le repère local après dilatation de la coordonnée normale	
$\lVert\cdot\rVert$	norme	
$\cdot$	produit scalaire	
$\otimes$	produit vectoriel	
$\boldsymbol{P}$	tenseur de projection	
$[\![\cdot]\!]$	saut (du liquide vers la vapeur)	
$\mathrm{tr}\,(\cdot)$	trace (premier invariant)	
T	transposé	
$\lVert\cdot\rVert^{ex}$	grandeur en excès	

Indices

b	bulle
bk	*bulk*, moyenne sur la phase liquide
gh	*ghost*, extension du champ liquide dans la phase vapeur
i	indice de la maille
k	phase quelconque (liquide ou vapeur)
l	liquide
s	surfacique
σ	restriction à l'interface d'un opérateur ou d'un champ
T	transposé
v	vapeur

Exposants

$'$	fluctuations
$*$	extension
$+$	grandeur adimensionnelle
c	critique
ev	expression validée
i	interfacial
m	modélisation (Bardina standard)
nm	nouvelle modélisation (revisitée par Toutant)
n	numéro du pas de temps
s	surfacique
sat	saturation
cond	conduction
conv	convection de la quantité de mouvement
convT	convection de l'énergie
diff	diffusion
interf	interfacial
superf	forces de tension de surface
temp	évolution temporelle de la quantité de mouvement
tempT	évolution temporelle de l'énergie
σ	approximation d'un champ surfacique mésoscopique
vap	vaporisation

Nombres adimensionnels

At ou At*	nombre d'Atwood	[−]
Fo	nombre de Fourier	[−]
Fr	nombre de Froude	[−]
Ja ou Ja*	nombre de Jacob	[−]
Nu	nombre de Nusselt	[−]
Pe	nombre de Péclet	[−]
Pr	nombre de Prandtl	[−]
Re	nombre de Reynolds	[−]
We	nombre de Weber	[−]

Abréviations

AGPI	Analyse Générique des Processus Interfaciaux
CHF	*Critical Heat Flux*
DAR	Développements Asymptotiques Raccordés
DDNS	*Detached Direct Numerical Simulations*
FT	*Front-Tracking*
GFM	*Ghost Fluid Method*
ISS	*Interfaces and Subgrid-Scales*
MAC	*Marker-and-Cell*
QUICK	*Quadratic Upstream Interpolation for Convection Kinematics*
RANS	*Reynolds Averaged Navier-Stokes*
SGE	Simulation des Grandes Échelles, *Large Eddy Simulation* en anglais
SND	Simulations Numériques Directes, *Direct Numerical Simulation* en anglais
VDF	Volume Différences Finies
VOF	*Volume Of Fluid*

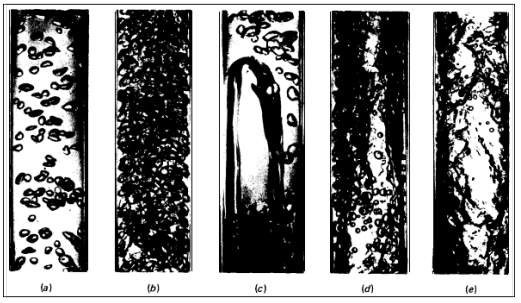
Introduction

Contexte

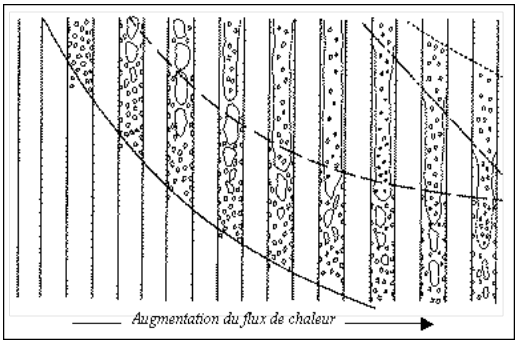
De nombreuses installations industrielles sont dimensionnées par les transferts thermiques. Un exemple particulièrement répandu est celui des échangeurs thermiques dont l'essence même est de transférer l'énergie d'une source solide vers un fluide ou d'un fluide à un autre. Ces organes sont parfois extrêmement volumineux, *e. g.,* dans le domaine du génie nucléaire, chimique ou pétrolier. Pour l'industrie nucléaire, ces transferts sont particulièrement importants dans le cœur du réacteur et dans les générateurs de vapeur puisque le rendement de la centrale dépend de leur efficacité. L'utilisation d'un fluide caloporteur pour convecter l'énergie est nettement plus efficace que la conduction. Les instabilités de la mécanique des fluides sont responsables d'une augmentation des transferts thermiques induite par la forte agitation du fluide appelée *turbulence*. Léonard de Vinci fut l'un des précurseur de l'étude de la turbulence – *turbolenza* en Italien (Fig. 1). En raison de son fort intérêt industriel et après de nombreuses études, ces phénomènes de turbulence sont à présent compris pour la plupart des applications industrielles et des outils de prédiction existent.

Lorsque le flux pariétal devient suffisant, l'ébullition nucléée se déclenche en paroi. En raison

FIGURE 1 – Observation de la turbulence par Léonard de Vinci.



(a) Reproduction de Roumy (1969).



(b) Influence du flux de chaleur (Delhaye *et al.*, 1981a).

FIGURE 2 – Régimes d'écoulements diphasiques en conduite verticale.

de la forte chaleur latente de vaporisation de nombreux fluides, l'ébullition permet d'augmenter la compacité des systèmes de refroidissement (*e. g.,* caloduc, réfrigérateur, générateur de vapeur...). L'ébullition améliore l'efficacité des transferts thermiques mais elle conduit en contrepartie à des écoulements diphasiques très complexes. Au phénomène de turbulence s'ajoute une topologie de l'écoulement qui dépend de l'orientation de l'écoulement (horizontal, vertical...), du débit et du taux de présence de chaque phase (Fig. 2). L'augmentation du flux pariétal transmis est limitée physiquement par l'asséchement de la paroi si la vapeur produite n'est pas évacuée rapidement. Au-delà d'un flux critique (CHF, *Critical Heat Flux* en anglais), la paroi est soudainement isolée du liquide par un film de vapeur et une élévation brusque de la température de paroi peut conduire à la destruction de la surface d'échange. Pour des raisons de sécurité, les installations thermiques industrielles fonctionnent en deçà de ce flux, dans le régime d'ébullition nucléée caractérisé par des valeurs élevées du flux thermique surfacique pour des températures modérées de surface.

La prédiction des transferts thermiques des écoulements diphasiques est aussi délicate qu'essentielle. En effet, la complexité provient du couplage entre l'hydrodynamique et les transferts thermiques et de la forte rétro-action des transferts thermiques sur la topologie hydrodynamique de l'écoulement *via* le taux de changement de phase. Les singularités aux lignes triples (entre la paroi, le liquide et la vapeur), la fragmentation et la coalescence de bulles sont autant de phénomènes locaux qui influencent fortement les caractéristiques globales de l'écoulement. L'importance de la prédiction est justifiée à la fois par des contraintes économiques liées au dimensionnement et à l'efficacité des installations et par la sûreté.

Pour déterminer au mieux le compromis entre efficacité et sûreté, des moyens expérimentaux importants sont mis en place. En parallèle, des outils de simulation sont développés afin de prédire et de quantifier les transferts thermiques pour des configurations très variées. L'utilisation croissante de la mécanique des fluides numérique pour les études de sûreté nucléaire et les exigences en termes de quantification du degré de confiance des simulations renforcent la demande d'expertise technique et de maîtrise des outils de simulation, en particulier du point de vue de la modélisation.

Démarche multi-échelle

Les outils de simulation sont développés et validés sur des données expérimentales. Leurs modèles corrèlent des grandeurs moyennées caractéristiques de l'écoulement à partir d'observations expérimentales représentatives. Seuls les codes dits *système* (*e. g.,* CATHARE, TRACE, RELAP) sont à même de simuler des échelles compatibles avec la prédiction du cycle thermodynamique complet d'une installation industrielle (*e. g.,* une tranche de réacteur nucléaire). Pour étudier plus précisément le comportement d'un élément du cycle, des modèles moyennés à deux fluides de type RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) ont été développés plus récemment pour résoudre l'écoulement à l'échelle dite *3D-locale*. À cette échelle, les inclusions de vapeur ne sont pas décrites précisément. Elles sont considérées en moyenne par le *taux de vide* qui représente la fraction volumique de vapeur. La prise de moyenne des bilans locaux permet d'aboutir à une description de l'écoulement où les interfaces ne sont plus considérées (Ishii et Hibiki, 2006). Cette formulation est reconnue comme étant la formulation la plus précise permettant de traiter des configurations industrielles. Néanmoins, elle repose sur des informations de fermetures locales pour considérer la physique des transferts interfaciaux et les effets 3D. En raison des échelles mises en jeu, ces fermetures sont de plus en plus difficiles à déterminer et à valider par des mesures expérimentales. Des limites technologiques apparaissent en raison de l'échelle des transferts interfaciaux.

À une échelle encore plus fine, les simulations numériques directes (SND) résolvent directement les équations de bilan. Elles sont basées sur les équations locales instantanées qui permettent d'accéder à une description précise de toutes les structures de l'écoulement. Hormis les singularités des lignes de contact, de la nucléation homogène, de la coalescence et de la fragmentation, ces équations permettent, dans l'absolu, d'accéder à toute la complexité de l'écoulement à condition de savoir les résoudre. En effet, les SND doivent considérer un nombre de degré de liberté proportionnel au cube du nombre de Reynolds. Par conséquent, la diminution des incertitudes dépend du coût de calcul acceptable. La difficulté de modélisation des modèles moyennés est déplacée à la résolution des équations locales. Les limitations ne sont plus expérimentales, mais le coût de calcul est limité par les moyens informatiques actuels. Pendant longtemps, le coût élevé des SND

a restreint leur application aux configurations simples à faibles nombres de Reynolds ($\mathrm{Re}_b \sim 10$). Néanmoins, l'augmentation récente des moyens de calcul et la maturité des méthodes numériques rendent envisageable leur application à plus grande échelle, par exemple pour réaliser des *expériences numériques* et fournir des informations détaillées sur des écoulements complexes. C'est dans cette perspective que nous souhaitons utiliser la SND pour répondre aux nouveaux besoins des modèles moyennés 3D-locaux (Fig. 3). La complémentarité de ces approches devrait permettre d'améliorer la compréhension des écoulements diphasiques et par conséquent leur modélisation et leur prédiction.

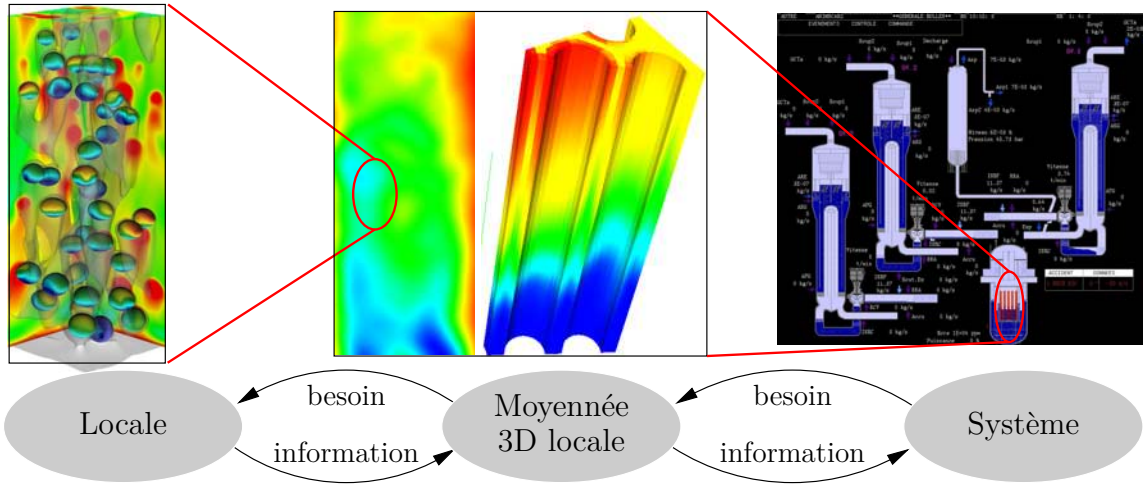


FIGURE 3 – Des codes de simulation adaptés aux besoins – démarche multi-échelle : des informations fines pour répondre à un besoin à grande échelle.

Malgré l'accroissement important des moyens de calcul, les écoulements industriels restent hors de portée des SND. Le développement des techniques de Simulation des Grandes Échelles (SGE, *Large Eddy Simulation* en anglais) pour les écoulements monophasiques a permis de réduire considérablement les coûts de calculs et d'élargir la gamme des simulations aux écoulements industriels. De même, il est intéressant de développer un équivalent diphasique à la SGE. Celui-ci doit permettre d'élargir la gamme d'applicabilité des méthodes de simulations diphasiques fines à des configurations traitant d'un nombre de bulles suffisant pour extraire des statistiques intéressantes (Fig. 4). L'analyse de ces statistiques permettra ensuite de renseigner les modèles moyennés 3D-locaux en modélisant les inclusions. L'objectif principal du travail présenté ici est de participer au développement de ce modèle intermédiaire permettant de réduire l'écart entre l'échelle microscopique et l'échelle 3D-locale.

Plusieurs démarches peuvent être adoptées pour procéder à ce changement d'échelle dans le cadre des écoulements polyphasiques :

(i) Tryggvason *et al.* (2010) proposent des modèles locaux basés sur la résolution d'équations simplifiées. Ces modèles doivent permettre de résoudre plus précisément et à moindre frais le drainage du film liquide précédant la coalescence et les couches limites qui se développent au voisinage des interfaces.

(ii) Plus proche du concept de la SGE, de nombreux auteurs développent des modèles sous-maille pour représenter l'effet des petites échelles. Les approches sont variées et se distinguent par les caractéristiques de la turbulence considérée et le choix de conserver ou non un suivi explicite des interfaces. À titre d'exemple, on peut citer les travaux de Bolotnov *et al.* (2010) qui concentrent leurs efforts de modélisation sous-maille à la turbulence aux parois (Detached Direct Numerical Simulations, DDNS). Dans le contexte des lits fluidisés de particules solides, Ozel *et al.* (2010) développent un modèle sous-maille de vitesse de dérive pour traduire l'effet des petites échelles sur le glissement entre les particules et le fluide. La problèmatique de l'atomisation d'un spray conduit à une large gamme d'échelles. Chesnel *et al.* (2010), Luret *et al.* (2010) et Tomar *et al.* (2010) s'intéressent alors au passage du suivi explicite d'interfaces

à une modélisation sous-maille des plus petites inclusions.

Les modélisations RANS s'appuient sur un formalisme de prise de moyenne bien établi. Le développement des modélisations SGE diphasiques est difficile. La recherche sur ce projet à long terme est moins avancée et de nombreuses pistes restent à explorer.

Dans ce mémoire, on s'affranchit des problèmes de nucléation, de coalescence, de fragmentation et de ligne triple pour se placer dans un cadre où les équations locales instantanées fournissent des solutions validées peuvent être obtenues. Ce travail de thèse se concentre sur les écoulements diphasiques dispersés où les inclusions de vapeur sont sous forme de bulles. Cette contrainte limite le taux de présence de la phase vapeur à $5 - 10\%$ environ. Le nombre de Reynolds de bulle est limité pour permettre une bonne résolution des couches limites autour des bulles ($\mathrm{Re}_b \sim 100$).

Méthodologie de changement d'échelle

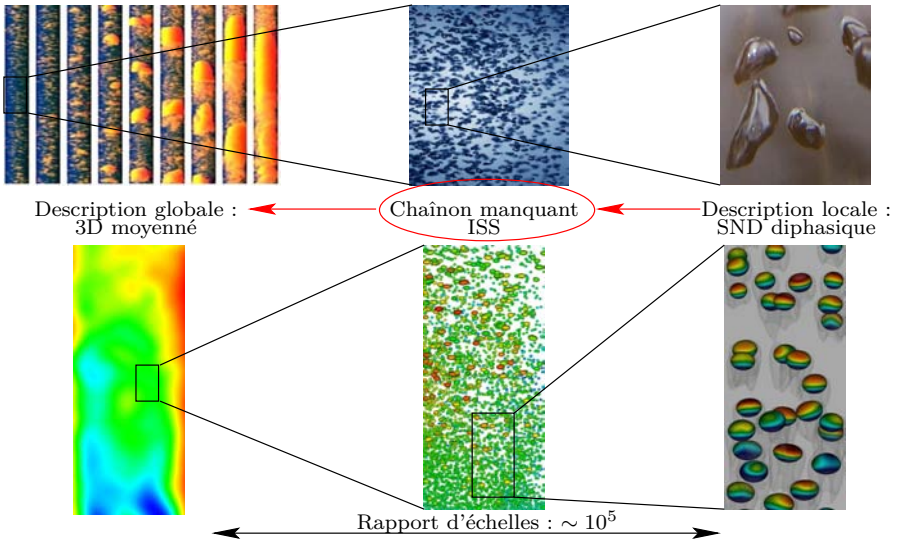


FIGURE 4 – Le modèle ISS : un intermédiaire indispensable.

Les applications industrielles visées à grande échelle sont dominées par les transferts interfaciaux. Dans des conditions typiques d'un cœur de réacteur nucléaire, les plus petites échelles de la turbulence (échelle de Kolmogorov) sont bien plus petites que la taille des bulles de vapeur. Le modèle développé doit permettre (i) de réduire le coût de la simulation et (ii) d'obtenir une solution précise de laquelle des informations à plus grande échelle peuvent être extraites (*e. g.,* par prise de moyenne). En raison de l'importance des phénomènes de changement de phase pour les installations industrielles (*e. g.,* échangeurs thermiques, sûreté nucléaire...), il est capital que le modèle développé permette de réduire et de quantifier les incertitudes sur les termes sources associés au transfert de masse. Pour cela, un suivi explicite des interfaces est un atout important. À l'échelle considérée pour la modélisation, les plus grandes structures de la turbulence sont capturées. En revanche, l'effet des plus petites échelles de la turbulence et des petites déformations interfaciales est modélisé. Toutant *et al.* (2009a) développent le modèle *Interfaces and Subgrid-Scales* (ISS) pour décrire des interfaces sous-résolues non-réactives, c'est-à-dire en l'absence de changement de phase. Après des travaux de validation par comparaison avec des SND (Labourasse *et al.*, 2007, Toutant, 2006, Toutant *et al.*, 2009b, 2006), les premiers résultats de Magdeleine (2009) sont prometteurs ; une moyenne spatio-temporelle permet d'évaluer les fermetures de l'équation moyennée 1D de bilan d'aire interfaciale sur un écoulement comprenant environ 5000 bulles. La difficulté principale de l'approche ISS réside dans la modélisation sous-filtre des interactions interface-turbulence. En effet, conformément à l'approche de la SGE, les équations sont obtenues par filtrage spatial et les transferts sous-filtres aux interfaces doivent être modélisés.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'influence du changement de phase sur les transferts turbulents de masse, de quantité de mouvement et d'énergie à l'interface. Le but est d'étudier l'interaction

entre la turbulence et l'interface en présence de changement de phase afin de modéliser les effets des plus petites structures de la turbulence et des plus petites déformations de l'interface. En suivant la voie de Toutant *et al.* (2009a), nous souhaitons étendre le modèle ISS aux écoulements diphasiques avec changement de phase. Dans cette perspective, nous adoptons une procédure de changement d'échelle en deux étapes :

- Dans un premier temps, un filtre inconditionnel est appliqué indépendamment de la phase en présence. Un étalement de l'interface en résulte (Fig. 5). Le choix d'un filtre indépendant de l'espace et du temps est essentiel pour simplifier les développements analytiques car il permet de faire commuter les opérateurs de filtrage et de dérivation. Contrairement au filtrage conditionnel, les termes sous-maille combinent une partie turbulente à une fraction liée aux déformations sous-maille de l'interface. La fermeture de ces termes permet d'obtenir une description continue de SGE, où les transferts turbulents et interfaciaux sont partiellement modélisés. On appelle cette échelle l'échelle *mésoscopique*.
- Dans un deuxième temps, les modèles sous-maille interfaciaux sont concentrés sur des interfaces *macroscopiques* équivalentes afin de recouvrer une formulation discontinue (Fig. 5). Ils prennent alors la forme de termes sources dans l'expression des conditions de saut à l'interface (vitesse, quantité de mouvement, flux...). Cette étape repose sur la méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) : la solution des champs est approchée au voisinage de l'interface et est comparée à une solution discontinue.

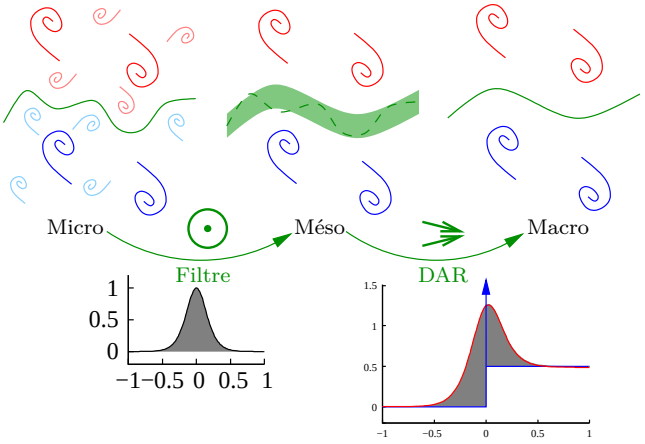


FIGURE 5 – Schéma de principe de la méthodologie de changement d'échelle en deux étapes : filtrage inconditionnel et développements asymptotiques raccordés (DAR).

Pour prendre en compte le changement de phase lors de ces deux étapes, les modèles doivent être en mesure de traiter les sauts de vitesse et de flux thermique avec précision. La condition de saturation de l'interface est aussi une condition délicate à considérer à l'échelle mésoscopique.

Afin de valider ces développements, il est nécessaire de disposer de solutions de référence pour des configurations variées, représentatives des écoulements industriels. Les fluctuations turbulentes de vitesse et de température ne peuvent pas être étudiées analytiquement. Nous avons donc défini quelques configurations types et des SND fournissent des *solutions de référence*. Le choix de ces configurations est un compromis entre simplicité et représentativité. Pour que le coût de calcul reste accessible, nous avons pris le parti de décomposer les origines des fluctuations : (i) une origine turbulente classique (qui peut provenir de la phase liquide uniquement) et (ii) une origine diphasique pure liée au sillage d'autres bulles. En supposant que ces deux types de fluctuations se superposent, nous espérons étudier les modèles dans un cadre encore plus général.

La première étape de changement d'échelle (*i. e.,* le filtrage) est validée par des tests *a priori*, comme le propose Toutant (2006). Les échanges de masse et de chaleur aux interfaces sont analysés par filtrage spatial à l'aide d'un filtre dont la taille est plus petite que celle des bulles. Un filtre explicite discret est appliqué aux solutions microscopiques des SND. Il permet d'évaluer les termes sous-maille réels et les fermetures proposées pour la modélisation SGE continue. La comparaison fait l'objet du chapitre 3.

La deuxième étape de changement d'échelle étant analytique, elle ne peut pas être évaluée simplement par des tests. Le modèle ISS complet (englobant les deux étapes) doit donc être validé. Pour cela, le modèle développé est implémenté dans le code de calcul Trio_U puis utilisé sur les configurations de référence simulées par SND. Les résultats de ces tests, dits *a posteriori* par opposition, sont présentés au chapitre 5.

Plan du mémoire

Ce mémoire s'articule autour des trois échelles de la figure 5. Après la description des bilans microscopiques régissant l'écoulement, le chapitre 1 présente la méthode numérique implémentée dans Trio_U pour les résoudre puis décrit les configurations simulées pour obtenir des solutions d'écoulements diphasiques complexes et représentatifs. Ce chapitre se termine par une analyse poussée de la solution obtenue pour la condensation de bulles dans un liquide agité (section 1.4). Dans la perspective de renseigner les modèles moyennés à deux fluides, on estime le puits d'énergie et le nombre de Reynolds des bulles sur quelques sections d'un écoulement de bulles en condensation. Les données de SND sont comparées aux corrélations de la littérature et l'influence du taux de vide sur le taux de condensation est démontrée. L'exemple présenté est concluant mais le coût rédhibitoire empêche d'envisager une étude paramétrique plus complète. Dans le même temps, cette application met en exergue le coût rédhibitoire des SND pour des applications industrielles et conforte la démarche adoptée.

Ensuite, le chapitre 2 décrit le processus de filtrage qui permet d'aboutir au système mésoscopique (étape 1, Fig. 5). La construction des termes sous-maille est présentée avant d'expliquer les développements permettant de les modéliser. Cette étape permet d'aboutir à une description mésoscopique fermée et de décrire un problème avec une interface diffuse. L'accent est mis sur les hypothèses de fermeture nécessaires et par conséquent les limitations du modèle développé. Au chapitre 3, le modèle de SGE continue est validé par des tests *a priori*. Après avoir présenté les critères de comparaison et le concept de ces tests, on exploite les SND du chapitre 1.

Ce problème à interface diffuse est transformé dans le chapitre 4 en une description macroscopique équivalente, reposant sur une interface discontinue. La méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) est appliquée aux écoulements diphasiques avec changement de phase puis les résultats obtenus sont discutés en termes de pertinence, généricité, limitations et applicabilité.

Enfin, pour conclure ce travail, le chapitre 5 décrit l'implémentation du modèle ISS dans le code Trio_U. On présente ensuite la méthodologie adoptée pour déterminer les constantes du modèle ISS et les premiers tests réalisés. En choisissant les mêmes configurations que celles étudiées par SND au chapitre 1, on est en mesure de déterminer le gain en termes de coût de calcul et la perte de finesse de la solution. Cette dernière étape constitue l'évaluation du modèle ISS avec changement de phase.

Chapitre 1

Échelle microscopique

Ce chapitre a pour objectif d'englober toute la description de l'échelle microscopique. Il débute par la description des équations locales et instantanées régissant le système (section 1.1). Le formalisme monofluide sur lequel reposent les développements numériques et les développements des chapitres suivant est alors introduit. Ensuite, la section 1.2 présente la méthode de simulation numérique directe implémentée dans le code Trio_U, en insistant sur les spécificités liées au traitement du changement de phase. Cette méthode est utilisée pour étudier quelques configurations représentatives des écoulements à bulles liquide/vapeur (section 1.3). Pour conclure ce chapitre, une application du changement d'échelle de la SND vers le 3D moyenné est présentée à la section 1.4. Cette application à la condensation de bulles apporte des informations sur l'influence du taux de vide et l'effet d'essaim sur les transferts de masse et de chaleur moyens. Ces informations sont intéressantes pour évaluer les fermetures employées dans une description moyennée pour estimer le terme source de condensation. Bien que prometteuse, cette application révèle aussi les limitations de coût d'un transfert direct de la simulation fine au moyenné.

1.1 Description locale et instantanée

Dans un premier temps, nous présentons les hypothèses générales utilisées pour établir la description locale qui constitue le point de départ de notre travail (section 1.1.1). Ensuite, nous introduisons les équations monofluides locales et instantanées qui régissent les transferts dans les phases et à l'interface (section 1.1.2). Elles sont établies à l'annexe A à partir des bilans locaux formulés sur des particules fluides et des relations de saut aux surfaces de discontinuités. Ces relations traduisent les principes de conservation et l'équilibre thermodynamique local. Enfin, les équations monofluides sont adimensionnalisées (section 1.1.3).

1.1.1 Liste d'hypothèses

Dans ce mémoire, nous utilisons les hypothèses classiques suivantes (Delhaye *et al.*, 1981b) :

H1. Équilibre thermodynamique local ;

H2. Transferts réversibles aux interfaces ;

H3. L'interface est une surface de discontinuité séparant deux phases ;

H4. L'interface ne porte pas de masse et les seules énergies interfaciales sont la tension de surface et la chaleur latente ;

H5. Les fluides sont newtoniens ;

H6. Le flux de chaleur et la température sont reliés par la loi de Fourier ;

H7. La dissipation visqueuse et les termes d'accélération sont négligeables devant le flux de chaleur à l'interface (nombre de Mach faible, $\mathrm{Ma} < 0.3$) ;

H8. Les seules forces volumiques à distance agissant sur le fluide sont les forces gravitaires.

À ces hypothèses, on ajoute quelques hypothèses un peu plus restrictives, spécifiques à ce travail :

H9. Les variations de pression sont faibles ;

H10. L'effet de la courbure de l'interface sur la température est négligé. La température de saturation $T^{\text{sat}}(P)$ est uniforme et constante pour un corps pur à une pression donnée ; les variations de pression étant supposées relativement faibles (**H9**), on suppose la température de saturation constante ;

H11. La tension de surface est fonction de la température uniquement (*i. e.,* absence de surfactant) ; associée à l'hypothèse **H10**, cette hypothèse implique que la tension superficielle est constante ;

H12. Les propriétés physiques (ρ_k, μ_k, c_{pk} et k_k) sont constantes par phase. En particulier, chaque phase est incompressible ;

H13. La vapeur est supposée à saturation (pas de surchauffe) car nous ne considérons pas les problèmes pariétaux.

On s'intéresse aux régimes de croissance et de condensation contrôlés par la thermique (*cf.* Theofanous *et al.*, 1969a,b). L'étude de la nucléation en paroi et des lignes de contact sont exclues du cadre de ce travail. Ces hypothèses sont relativement classiques. Elles permettent de décrire de manière réaliste le changement d'état d'un corps pur loin du point critique car la zone de transition entre les phases est alors extrêmement fine. L'hypothèse d'équilibre thermodynamique local est acceptable tant que le changement de phase est modéré. En négligeant les variations de la température de saturation, on suppose la tension de surface constante ce qui nous amène à négliger les effets Marangoni. L'hypothèse d'incompressibilité, tout à fait justifiée pour le liquide, est acceptable pour la phase vapeur tant que les fluctuations de pression restent relativement faibles.

À présent, nous allons présenter le formalisme monofluide introduit par Kataoka (1986) pour disposer d'une description unique du système valide dans tout l'espace au sens des distributions, y compris à l'interface. Cette description est indispensable pour filtrer les équations locales sans introduire explicitement des conditions aux discontinuités.

1.1.2 Équations monofluides locales et instantanées

Pour toute grandeur ϕ_k définie uniquement dans la phase k, on introduit la grandeur monofluide

$$\phi \hat{=} \sum_{k=1}^{2} \chi_k \phi_k \tag{1.1}$$

à l'aide de la fonction indicatrice de phase χ_k qui vaut 1 si la phase k est présente et 0 ailleurs (fonction Heaviside). Par la suite, nous utiliserons les conventions de sommation d'Einstein sur les indices répétés en notant $\phi = \chi_k \phi_k$. Les indices l et v sont utilisés pour identifier les phases liquide et vapeur respectivement. Dans ce cas, même lorsque l'indice est répété, il n'y a pas de sommation.

Définissons le lieu de la discontinuité, δ^i, la normale sortante de la phase k, $\boldsymbol{n}_k$, et la vitesse de déplacement de l'interface, $\boldsymbol{v}_i$, par :

$$\nabla \chi_k = -\boldsymbol{n}_k \delta^i \tag{1.2a}$$

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_k \delta^i \tag{1.2b}$$

Ces définitions permettent de décrire le déplacement de l'interface par l'équation de transport :

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla \chi_k = 0 \tag{1.3}$$

L'écriture des lois de conservation sur un volume infinitésimal diphasique conduit aux bilans (A.1) dans les phases et aux relations de saut (A.2) à l'interface (représentant les bilans aux interfaces). Pour établir une équation monofluide définie dans tout le domaine au sens des distributions, chaque équation phasique (A.1) est multipliée par la fonction indicatrice de phase χ_k correspondante. En sommant les deux équations ainsi obtenues et en considérant les relations de

saut à l'interface (A.2), on obtient les équations suivantes d'évolution des grandeurs monofluides (χ_v, $\boldsymbol{v}$, p, T, $\dot{m}$)

$$\frac{\partial \chi_v}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla \chi_v = 0 \tag{1.4a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\dot{m}_v \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) \delta^i \tag{1.4b}$$

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{I} - \mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}) - \rho \boldsymbol{g} = \kappa \sigma \boldsymbol{n}_v \delta^i \tag{1.4c}$$

$$\frac{\partial \left[\rho c_p (T - T^{\text{sat}})\right]}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{v} c_p (T - T^{\text{sat}}) \right) = \nabla \cdot \left(k \nabla (T - T^{\text{sat}}) \right) + \dot{m}_v \delta^i \mathcal{L}^{vap} \tag{1.4d}$$

$$T \, \delta^i = T^{\text{sat}} \, \delta^i \tag{1.4e}$$

où χ_v est l'indicatrice de présence de la phase vapeur, $\boldsymbol{v}$ la vitesse du fluide et $\boldsymbol{v}_i$ celle de transport de l'interface, δ^i la distribution de Dirac associée à l'interface, p la pression, T la température, $\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}$ le tenseur des contraintes visqueuses monofluide, $\boldsymbol{g}$ l'accélération de la gravité, σ la tension de surface, κ la courbure de l'interface (positive pour une bulle), $\boldsymbol{n}_v$ la normale unitaire à l'interface orientée vers l'extérieur de la phase vapeur, ρ la masse volumique monofluide, c_p la capacité calorifique monofluide à pression constante, k la conductivité thermique monofluide, T^{sat} la température de saturation (à la pression considérée), $\mathcal{L}^{vap}$ la chaleur latente de vaporisation et $\dot{m}_k$ le taux de transfert de masse à l'interface défini par :

$$\dot{m}_k \hat{=} \rho_k (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_i) \cdot \boldsymbol{n}_k \tag{1.5}$$

$\dot{m}_v$ est le taux de condensation (*i. e.,* positif en condensation). Pour simplifier les notations, on omet par la suite l'indice $_v$ pour les variables χ, $\boldsymbol{n}$ et $\dot{m}$.

Le système (1.4) est composé de trois relations volumiques et deux relations surfaciques. Il est fermé car les grandeurs secondaires sont définies à partir des variables principales (χ, $\boldsymbol{v}$, p, T, $\dot{m}$) par

$$\phi \hat{=} \phi_v \chi + (1 - \chi) \phi_l \quad \text{pour } \phi = \rho,\, c_p,\, k,\, \mu \tag{1.6a}$$

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} \hat{=} \mu \left[\nabla \boldsymbol{v} + \nabla^T \boldsymbol{v} - 2\dot{m} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \delta^i \right] \tag{1.6b}$$

où μ est la viscosité dynamique monofluide. L'origine du dernier terme de l'équation (1.6b) est discutée à la fin de ce paragraphe. Pour les grandeurs surfaciques, on a

$$\boldsymbol{v}_i \hat{=} \boldsymbol{v} - \frac{\dot{m}}{\rho} \boldsymbol{n} \tag{1.6c}$$

$$\delta^i \hat{=} ||\nabla \chi|| \tag{1.6d}$$

$$\boldsymbol{n} \hat{=} - \frac{\nabla \chi}{||\nabla \chi||} \tag{1.6e}$$

$$\kappa \hat{=} - \nabla_s \cdot \boldsymbol{n} \tag{1.6f}$$

où ∇_s est l'opérateur de divergence surfacique défini par l'équation (4.225c). D'après la définition (1.5) du taux de condensation, on montre aisément la relation monofluide

$$\dot{m} \hat{=} \rho (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_i) \cdot \boldsymbol{n} \tag{1.7}$$

qui est à l'origine de la définition (1.6c) *choisie* pour la vitesse de transport de l'interface. On dispose en effet d'un degré de liberté sur le choix de la définition de la vitesse $\boldsymbol{v}_i$ dans les directions tangentielles car seule la composante normale à l'interface a une réelle signification physique. Avec la définition (1.6c), l'interface est convectée tangentiellement à la vitesse du fluide.

Complétée par des conditions limites et des conditions initiales, l'association des systèmes (1.4) et (1.6) est fermée. Elle décrit le système complet, à l'échelle locale instantanée. Afin de clore

cette synthèse, rappelons simplement que le système (1.4) contient les relations suivantes de saut à l'interface

$$\dot{m}_1\delta^i + \dot{m}_2\delta^i = 0 \tag{1.8a}$$

$$(\dot{m}_k\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{I}p_k - \boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k) \cdot \nabla\chi_k = -\kappa\sigma\boldsymbol{n} \tag{1.8b}$$

$$k_k\nabla T_k \cdot \nabla\chi_k = \dot{m}\mathcal{L}^{vap}\delta^i \tag{1.8c}$$

$$T_1^i = T_2^i = T^{\text{sat}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_1^t = \boldsymbol{v}_2^t \tag{1.8d}$$

où $\boldsymbol{\tau}_k = \mu_k\left(\nabla\boldsymbol{v}_k + \nabla^T\boldsymbol{v}_k\right)$ est le tenseur des contraintes phasiques. En négligeant les termes d'accélération et les termes visqueux devant la chaleur latente de vaporisation (**H7**), la réversibilité des transferts interfaciaux (**H2**) implique les relations (1.8c) et (1.8d). Ces conditions expriment (i) une condition d'adhérence, (ii) la continuité des températures à l'interface et (iii) une relation de saut de flux qui conduit à la détermination du taux de transfert de masse.

Bilan de masse La construction de l'équation monofluide conduit naturellement à l'équation (A.31). Le bilan de masse à l'interface permet d'exprimer le saut de vitesse (A.22) :

$$\boldsymbol{v}_v - \boldsymbol{v}_l = \dot{m}_v\left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l}\right)\boldsymbol{n}_v \tag{1.9}$$

Associé à la relation $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_v - \boldsymbol{v}_l) \cdot \nabla\chi_v$, ce saut de vitesse permet d'aboutir à la formulation (1.4b). Les formulations (A.31) et (1.4b) sont équivalentes mais on préfère utiliser la forme (1.4b) par cohérence avec les travaux de Toutant *et al.* (2009a). La relation (1.4b) exprime l'incompressibilité du fluide dans les phases $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_k = 0$. À l'interface, la distribution de Dirac conduit au saut de vitesse caractéristique des écoulements diphasiques avec changement de phase.

Bilan de quantité de mouvement L'établissement de l'équation monofluide de bilan de quantité de mouvement requiert la reformulation des tenseurs des contraintes phasiques en fonction des grandeurs monofluides :

$$\chi_k\,\boldsymbol{\tau}_k = \chi_k\,\mu_k\left(\nabla\boldsymbol{v}_k + \nabla^T\boldsymbol{v}_k\right)$$

Pour simplifier l'écriture, on raisonne uniquement sur $\mu_k\nabla\boldsymbol{v}_k$, son transposé se traitant de la même manière. On a la décomposition suivante :

$$\nabla\boldsymbol{v} = \chi_v\nabla\boldsymbol{v}_v + \chi_l\nabla\boldsymbol{v}_l - (\boldsymbol{v}_v - \boldsymbol{v}_l) \otimes \boldsymbol{n}_v\delta^i \tag{1.10}$$

D'après le saut de vitesse (1.9) provenant du bilan de masse à l'interface, on en déduit que :

$$\nabla\boldsymbol{v} = \chi_v\nabla\boldsymbol{v}_v + \chi_l\nabla\boldsymbol{v}_l - \dot{m}_v\left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l}\right)\boldsymbol{n}_v \otimes \boldsymbol{n}_v\delta^i \tag{1.11}$$

En présence de changement de phase, cette écriture montre clairement que $\nabla\boldsymbol{v}$ contient une distribution de Dirac. Par conséquent, sa multiplication par un Heaviside n'a pas de sens mathématique. On ne peut donc pas introduire le tenseur $\mu\nabla\boldsymbol{v}$. D'ailleurs, on a : $\chi_k\,\boldsymbol{\tau}_k \neq \mu\left(\nabla\boldsymbol{v} + \nabla^T\boldsymbol{v}\right)$.

Pour traiter la diffusion et aboutir à l'équation (1.4c), on introduit donc le tenseur

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} \hat{=} \mu\Big[\nabla\boldsymbol{v} + \nabla^T\boldsymbol{v} + \underbrace{2\dot{m}_v\left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l}\right)\boldsymbol{n}_v \otimes \boldsymbol{n}_v\delta^i}_{\textbf{(I)}}\Big] \text{ tel que } \nabla \cdot \mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} \quad = \nabla \cdot \left[\chi_k\mu_k\left(\nabla\boldsymbol{v}_k + \nabla^T\boldsymbol{v}_k\right)\right]$$

Ce tenseur $\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}$ définit le produit de la viscosité dynamique et du gradient de vitesse dans chaque phase. La formulation à partir de variables monofluides est responsable de l'apparition du terme **(I)** pour éliminer le saut de vitesse à l'interface qui aurait conduit à une tension visqueuse infinie.

Bilan d'énergie formulé en température L'équation (1.4d) suppose que la capacité calorifique massique à pression constante de la phase k, c_{pk}, est constante. La formulation non-conservative suivante est plus classique :

$$\rho\, c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{m}_v \delta^i \mathcal{L}^{vap} \tag{1.12}$$

En utilisant la relation (1.4e), on montre que les équations (1.4d) et (1.12) sont équivalentes. Elles contiennent la condition (1.8c) reliant le saut de flux au taux de changement de phase mais elles n'assurent pas la condition de saturation (1.4e) qui doit être imposée par ailleurs.

Condition de saturation Dans les écoulements diphasiques sans changement de phase, l'étude de l'entropie du système conduit à la continuité de la température à l'interface. La température de l'interface varie en temps et en espace. Elle est déterminée par l'égalité des flux à l'interface. Pour les écoulements liquide-vapeur, le taux de transfert de masse à l'interface est une inconnue supplémentaire, mais l'équation (1.4e) imposant la condition de saturation à l'interface est ajoutée au système classique pour traduire l'équilibre thermodynamique local. Pour un corps pur, la température de saturation est constante. La détermination du taux de changement de phase n'est que le résultat de cette condition. La variable surfacique $\dot{m}$ est associée à la condition à la limite de saturation de l'interface (1.4e). Elle n'est donc pas régie par une équation aux dérivées partielles comme c'est le cas pour les autres variables, mais elle se déduit de la solution du champ de température.

Choix des variables principales Le système (1.4) accompagné des relations (1.6) est décrit en fonction des variables principales suivantes : χ_v, $\boldsymbol{v}$, p, T et $\dot{m}_v$. Ceci correspond à un choix. En effet, χ_v peut être remplacée indifféremment par χ_l car ces variables sont reliées par la relation $\chi_v + \chi_l = 1$. De même, $\dot{m}_v$ peut être remplacée par le produit $\dot{m}_v\, \delta^i$ car une relation $\dot{m}_v\, \delta^i = f(\chi_v, \dot{m}_v)$ existe. Ainsi, toute variable peut être remplacée par une combinaison convenablement choisie tant que le système comporte au moins 5 variables principales indépendantes dont une seule est surfacique. L'évolution des variables volumiques est décrite par l'équation de transport de l'interface et par les équations de bilan de masse (ou la relation d'incompressibilité puisqu'elles sont intimement liées), de quantité de mouvement et d'énergie (formulée en température, en enthalpie ou en entropie). La variable surfacique $\dot{m}_v$ est quant à elle reliée à la condition de saturation de l'interface : $T^i = T^{\text{sat}}$.

À l'échelle microscopique, l'état du système peut être décrit par les équations phasiques (A.1) dans les phases auxquelles sont associées les relations de saut (A.2) à l'interface. Nous avons choisi, grâce au formalisme monofluide (Kataoka, 1986), de condenser la description du problème en un seul système d'équations valide dans tout l'espace au sens des distributions. Le problème est alors décrit par les variables principales (χ, $\boldsymbol{v}$, p, T, $\dot{m}$). Si le choix de la vitesse monofluide $\boldsymbol{v}$ semble naturel pour que le modèle développé dégénère naturellement vers la proposition de Toutant *et al.* (2009a) en l'absence de changement de phase, l'utilisation de la température monofluide T n'est pas aussi évidente. En SGE monophasique, la moyenne de Favre est couramment utilisée. Elle repose sur la variable principale $\rho c_p T$. Pour les écoulements avec changement de phase, cette proposition ne nous semble pas appropriée car la variable $\rho c_p T$ est discontinue à l'interface. Cela peut conduire à des difficultés pour traiter la condition de saturation.

Une autre possibilité s'appuie sur la décomposition de la température monofluide T en deux champs phasiques de température T_l et T_v. Cette solution semble *a priori* attrayante car elle repose sur des champs plus réguliers au voisinage de l'interface (*cf.* annexe B.1). Néanmoins, le concept nous paraît plus incertain et plus éloigné de la philosophie ISS. En particulier, il nécessite que les champs phasiques de température soient étendus dans l'autre phase sur des critères de régularité des fonctions. Ces champs ne répondent alors plus à une équation d'évolution traduisant un concept physique (*e. g.,* bilan...). C'est principalement pour cette raison que nous n'avons pas utilisé une formulation à deux températures.

Enfin, l'entropie est utilisée pour fermer le système. Dans les phases, elle conduit aux fermetures du flux de chaleur $\boldsymbol{q}_k$ et du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}_k$. À l'interface, elle conduit aux relations de saut (A.19). Une fois le système local convenablement fermé par des lois de comportement, elle

devient redondante et n'est donc plus utilisée. On montre à l'annexe B.2 que l'équation d'entropie monofluide s pourrait être conservée pour remplacer la condition de saturation (1.4e). Il est alors possible de fermer le système monofluide par une relation $s = s(T)$. Cette solution semble intéressante car la condition à la limite (1.4e) est alors remplacée par une équation aux dérivées partielles dont le traitement est plus commun en SGE. Néanmoins, elle n'est pas adoptée car l'ajout d'une équation augmente la complexité du système à résoudre. De plus, elle s'éloigne des méthodes implémentées classiquement dans les outils de simulation numérique.

1.1.3 Équations monofluides adimensionnelles

Afin de conclure cette section, exprimons les équations d'évolution à l'aide de grandeurs adimensionnelles. Cette écriture permet de donner un caractère plus général à la hiérarchisation des termes sous-maille et d'établir une gamme de validité des modèles en termes de nombres sans dimension. Soient D_b le diamètre d'une bulle et V la norme d'une vitesse caractéristique (par exemple une vitesse de glissement entre le liquide et la vapeur). À partir de ces deux grandeurs, on construit un temps caractéristique $t_c = D_b/V$. Pour la température, on utilise la température de saturation à la pression considérée T^{sat} et le sous-refroidissement du liquide $\Delta T = T_b - T^{\text{sat}}$, où T_b est la température caractéristique de la phase liquide. Pour les propriétés physiques, on prend comme grandeurs de référence celles de la phase liquide afin de se conformer à la littérature. En notant par l'exposant $^+$ les grandeurs adimensionnelles, on a :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v} = V\boldsymbol{v}^+ && \nabla = \frac{1}{D_b}\nabla^+ && t = t_c t^+ \\
&p = \rho_l V^2 p^+ && \kappa = \frac{1}{D_b}\kappa^+ && \phi = \phi_l \phi^+ \quad \text{pour } \phi = \rho,\, \mu,\, k,\, c_p \\
&\delta^i = \frac{1}{D_b}\delta^{i+} && \dot{m} = \rho_l V \dot{m}^+ && T - T^{\text{sat}} = T^+\,\Delta T
\end{aligned} \tag{1.13}$$

En introduisant ces grandeurs adimensionnelles dans les équations (1.4), on obtient le système suivant

$$\frac{\partial \chi}{\partial t^+} + \boldsymbol{v}_i^+ \cdot \nabla^+ \chi = 0 \tag{1.14a}$$

$$\nabla^+ \cdot \boldsymbol{v}^+ = \dot{m}^+ \delta^{i+} \mathrm{At}^* \tag{1.14b}$$

$$\frac{\partial \rho^+ \boldsymbol{v}^+}{\partial t^+} + \nabla^+ \cdot \left(\rho^+ \boldsymbol{v}^+ \otimes \boldsymbol{v}^+\right) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^+ \cdot \mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}^+ - \nabla^+ p^+ + \frac{1}{\mathrm{We}}\kappa^+ \boldsymbol{n}\delta^{i+} + \frac{1}{\mathrm{Fr}}\rho^+ \tag{1.14c}$$

$$\frac{\partial \rho^+ c_p^+ T^+}{\partial t^+} + \nabla^+ \cdot \left(\rho^+ \boldsymbol{v}^+ c_p^+ T^+\right) = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\nabla^+ \cdot \left(k^+ \nabla^+ T^+\right) + \frac{1}{\mathrm{Ja}^*}\dot{m}^+ \delta^{i+} \tag{1.14d}$$

$$T^+ \delta^{i+} = 0 \tag{1.14e}$$

où les nombres de Reynolds, Weber, Froude, Péclet, Jacob et Atwood apparaissent naturellement :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_l V D_b}{\mu_l} \tag{1.15a}$$

$$\mathrm{We} = \frac{\rho_l V^2 D_b}{\sigma} \tag{1.15b}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{V^2}{g D_b} \tag{1.15c}$$

$$\mathrm{Pe} = \frac{\rho_l c_{pl} V D_b}{k_l} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} = \mathrm{Re}\frac{\mu_l c_{pl}}{k_l} \tag{1.15d}$$

$$\mathrm{Ja}^* = \frac{c_{pl}\left(T_b - T^{\text{sat}}\right)}{\mathcal{L}^{vap}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ja} = \frac{\rho_l}{\rho_v}\frac{c_{pl}\left(T_b - T^{\text{sat}}\right)}{\mathcal{L}^{vap}} \tag{1.15e}$$

$$\mathrm{At}^* = -\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] = \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_v} \quad \text{et} \quad \mathrm{At} = \left[\!\left[\rho\right]\!\right] = \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l} \tag{1.15f}$$

On adimensionnalise $\dot{m}$ à l'aide de ρ_l pour être cohérent avec les autres grandeurs et exprimer simplement le saut de vitesse à partir du saut de masse volumique dans l'équation (1.14b). La

définition du nombre de Jacob Ja^* qui apparaît alors dans l'équation (1.14d) est différente de celle utilisée classiquement dans la littérature Ja : $\mathrm{Ja}^* = \mathrm{Ja}\,\rho_l/\rho_v$.

Afin d'alléger les notations, on omet par la suite l'exposant $^+$ lorsque l'on utilise les équations adimensionnelles. Pour caractériser les écoulements étudiés, nous donnerons les définitions des grandeurs V, D_b et T_b, accompagnées des nombres de Reynolds, Weber, Froude et Jacob. On ne précisera pas les nombres de Péclet et d'Atwood car toutes les simulations sont conduites pour de l'eau à saturation sous une pression de 15.5 MPa. D'après les propriétés données par le tableau 1.1, on a :

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu_l c_{pl}}{k_l} = 1.474 \tag{1.16a}$$

$$\mathrm{At} = \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l} = 0.8022 \tag{1.16b}$$

1.2 Méthode numérique de simulation numérique directe

Dans les problèmes d'ébullition et de condensation cohabitent deux phases séparées par une interface non matérielle. Pour simuler ces écoulements, la méthode numérique doit permettre de décrire précisément chaque phase et de prédire le taux de transfert de masse à l'interface. Les méthodes de SND diphasiques peuvent être classifiées comme suit (Lebaigue *et al.*, 1998) :

(i) Les méthodes à maillage mobile reposent sur un maillage lagrangien dont les déformations épousent la forme des interfaces à chaque instant. Le traitement des conditions aux limites (A.2) est alors naturel et précis mais les changements de topologie des interfaces (*e. g.,* coalescence) sont difficiles à appréhender. Le coût de la reconstruction du maillage peut devenir important.

(ii) Les méthodes à maillage fixe ou eulériennes discrétisent tous les champs sur un maillage fixe. Parmi elles, la méthode *Volume Of Fluid* (VOF) est la plus courante (Hirt et Nichols, 1981). Elle repose sur une reconstruction des interfaces à partir du champ de masse volumique. Plus simple sur le principe, la reconstruction peut s'avérer complexe et moins précise que pour les autres méthodes. Les méthodes *level-set* transportent une fonction s'annulant à l'interface (*e. g.,* distance signée à cette interface). La position de l'interface est capturée plus facilement car ces fonctions sont régulières. Enfin on peut citer la méthode proposée par Jamet *et al.* (2001) qui repose sur les équations du second-gradient et qui traite des propriétés physiques interfaciales de manière intrinsèque. Ces méthodes à maillage fixe permettent naturellement la rupture et la coalescence d'interfaces à condition d'utiliser une résolution suffisante.

(iii) Les méthodes à maillage mixte eulérien/lagrangien, dites *Front-Tracking* (FT), utilisent un maillage surfacique mobile pour représenter les interfaces alors que les grandeurs volumiques comme la vitesse, la pression et la température sont discrétisées sur un maillage fixe (Tauber *et al.*, 2002, Tryggvason *et al.*, 2001, 2005, 2006, Unverdi et Tryggvason, 1992). Les bilans de conservation sont complexes à satisfaire. Ces méthodes se révèlent moins précises que les méthodes à maillage mobile mais plus efficaces pour résoudre l'écoulement dans les phases. Elles présentent l'avantage sur les méthodes eulériennes de permettre une description plus précise des propriétés interfaciales (*e. g.,* tension de surface, température imposée).

Présentons succinctement la méthode mixte FT/VOF de Trio_U (Fig. 1.1). Pour plus de précisions, le lecteur intéressé est renvoyé à la thèse de Mathieu (2003, chap. 3) et à l'article Mathieu (2004). Mathieu (2003) a implémenté une méthode mixte permettant d'allier à la précision des méthodes FT les propriétés de conservation de la masse des méthodes VOF. Les courants parasites résultant d'erreurs de discrétisation de la tension de surface ont été fortement réduits voire annulés. Le flux de chaleur et la condition de saturation de l'interface sont considérés avec précision grâce à une méthode *Ghost Fluid*. Ces améliorations sont capitales pour simuler précisément la couche limite thermique et prédire correctement le taux de croissance ou de condensation des bulles. Après avoir brièvement rappelé quelques éléments de base sur la discrétisation spatiale (section 1.2.1), sur l'avancement temporel de la solution (section 1.2.2) et sur la méthode de transport de l'interface (section 1.2.3), nous insistons sur la méthode *Ghost Fluid* (section 1.2.4) implémentée pour la température car ce développement, essentiel à la précision de la prédiction du taux de changement de phase, est postérieur à Mathieu (2003).

1.2.1 Discrétisation spatiale

Dans le code Trio_U, le système d'équations (1.14) est discrétisé par une méthode Volume Différences Finies (VDF) associée à une discrétisation à base d'éléments parallélépipédiques. La discrétisation a lieu sur un maillage décalé *Marker-and-Cell* (MAC) illustré sur la figure 1.2. Même si l'algorithme utilisé supporte des maillages plus élaborés (comme les maillages à base de tétraèdres), nos travaux se limitent à un maillage régulier pour faciliter l'évaluation du filtrage. Les scalaires comme l'indicatrice de phase, la pression et la température sont représentés au centre des cellules (symboles $\circ$), alors que les composantes du vecteur vitesse sont définies au milieu des faces des cellules (symboles $\triangleright$ et $\triangle$).

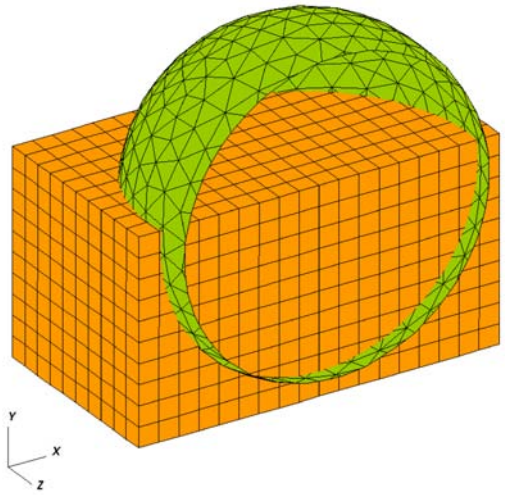


FIGURE 1.1 – Illustration de la méthode mixte FT/VOF de Trio_U (cubes oranges pour le maillage eulérien et triangles verts pour le maillage lagrangien).

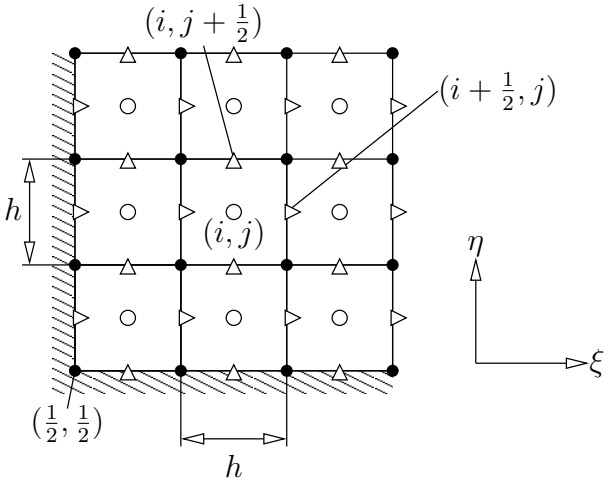


FIGURE 1.2 – Maillage décalé en deux dimensions.

Le système est résolu en vitesse $\boldsymbol{v}$, pression p et température T. Les dérivées spatiales sont discrétisées par un schéma centré du second ordre. Les gradients sont donc évalués sur des nœuds décalés dans la direction de différenciation. Des interpolations peuvent alors s'avérer nécessaires. Elles sont généralement évaluées par une interpolation centrée du second ordre sauf pour le terme de convection de l'équation d'énergie. Dans ce cas, la température est interpolée aux nœuds de la vitesse pour évaluer la divergence $\nabla \cdot \left(\boldsymbol{v}\hat{T}\right)$ par un schéma décentré du troisième ordre *QUICK* :

$$\hat{T}_{i+1/2} = -\frac{1}{8}T_{i-1} + \frac{3}{4}T_i + \frac{3}{8}T_{i+1} + \mathcal{O}(h^3) \quad \text{pour } v_{i+1/2} > 0 \tag{1.17}$$

où $\hat{T}$ désigne la température interpolée et v la vitesse dans la direction ξ. Si $v_{i+1/2} < 0$, les coefficients du schéma *QUICK* sont inversés par rapport à la coordonnée $\xi_{i+\frac{1}{2}}$. Un limiteur de pente est ajouté pour augmenter la stabilité du schéma et conserver des variables bornées.

Courants parasites Les méthodes de suivi d'interfaces sont fréquemment victimes de courants parasites qui résultent d'erreurs de discrétisation du terme de tension de surface. Ces courants augmentent avec la tension de surface et diminuent lorsque la viscosité augmente. Ils perturbent le champ de vitesse au voisinage de l'interface et peuvent détruire la couche limite thermique qui s'y développe. Ils peuvent rendre l'étude des problèmes avec changement de phase impossible. Pour les éliminer, Mathieu (2003) a établi une discrétisation des termes sources gravitaires et de tension de surface qui permet d'atteindre l'équilibre énergétique pour un problème discret au repos. Cette

discrétisation repose sur la définition d'une énergie potentielle regroupant l'énergie de surface et l'énergie de pesanteur. Elle conduit au terme source de quantité de mouvement suivant :

$$\mathcal{S} = -\Big(\phi\left(\rho_v - \rho_l\right) + \kappa\sigma\Big)\nabla\chi_v \quad \text{où } \phi \text{ est tel que :} \quad \boldsymbol{g} = -\nabla\phi \tag{1.18}$$

Ainsi, la méthode FT utilisée fournit une description précise des interfaces et donc des forces de tension superficielles et du taux de changement de phase.

Parallélisme Le code de calcul Trio_U permet de répartir le calcul sur un grand nombre de processeurs par découpage du domaine de simulation. Le maillage eulérien est découpé en sous-domaines. L'intégration temporelle du système est réalisée en simultané sur chacun des sous-domaines. Des mailles virtuelles sont ajoutées aux bords de chaque sous-domaine pour permettre la communication entre les processeurs et la discrétisation des opérateurs de dérivation.

Le maillage lagrangien est découpé dynamiquement et chaque élément ou sommet est alloué au processeur qui gère la maille eulérienne sous-jacente. Aux frontières entre les processeurs, des mailles lagrangiennes virtuelles sont introduites pour permettre les interpolations et la communication entre les processeurs.

Ainsi, à titre d'exemple, le domaine de 41.5 10^6 mailles nécessaire à la SND présentée à la section 1.3.7 a été réparti sur 1 536 processeurs. Un total cumulé de 700 000hCPU a été nécessaire pour réaliser cette simulation massivement parallèle.

1.2.2 Intégration temporelle : méthode de résolution

Pour intégrer le système d'équations, un schéma temporel hybride est utilisé pour les problèmes diphasiques. L'équation de quantité de mouvement et le bilan d'énergie sont résolus avec un schéma explicite « Runge-Kutta » du 3e ordre (Spalart *et al.*, 1991) alors que l'interface est simplement convectée avec un schéma « Euler explicite ». Une méthode de projection permet de respecter la contrainte (1.14b) sur la divergence de la vitesse. La méthode de résolution est présentée uniquement pour la vitesse et la pression mais l'avancement temporel de l'équation de température est très similaire. Les termes sources dus aux forces de tension de surface sont traités explicitement à partir de la courbure au pas de temps n ; ces forces sont supposées constantes au cours du pas de temps dt. À l'issue de ce pas de temps, le nouveau champ de vitesse fluide est utilisé pour transporter les nœuds de l'interface par un algorithme de transport présenté à la section 1.2.3 et ainsi mettre à jour l'indicatrice et les grandeurs qui en découlent.

Chaque étape du schéma de Runge-Kutta est résolue par un pas de temps fractionnel où le bilan de quantité de mouvement (sous forme non-conservative) couplé à la contrainte sur la divergence de la vitesse est résolu par une méthode de projection-correction de pression. Cette méthode comprend deux étapes que nous allons présenter pour un schéma explicite. L'algorithme se transpose aisément à un sous-pas de temps de Runge-Kutta.

Résolution de Navier-Stokes Dans un premier temps, une vitesse intermédiaire $\boldsymbol{v}^*$ (dont la divergence est quelconque) est obtenue en incrémentant le bilan de quantité de mouvement en temps à l'aide du champ de pression précédent :

$$\partial_t \boldsymbol{v}^* = -\nabla\cdot\left(\boldsymbol{v}^n \otimes \boldsymbol{v}^n\right) + \frac{1}{\rho^n}\nabla\cdot\Big(\mu^n\left(\nabla\boldsymbol{v}^n + \nabla^T\boldsymbol{v}^n\right)\Big) - \frac{1}{\rho^n}\Big(\phi\left(\rho_v - \rho_l\right) + \kappa^n\sigma\Big)\nabla\chi_v^n \tag{1.19}$$

Solveur en pression Dans un deuxième temps, appelé étape de projection ou correction de pression, le champ de vitesse intermédiaire $\boldsymbol{v}^*$ est projeté en corrigeant le champ de pression pour satisfaire la contrainte sur la divergence de la vitesse. Le champ de pression à l'instant t^{n+1} permettant de satisfaire cette contrainte est obtenu en résolvant l'équation de Poisson :

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho^n}\nabla p^{n+1}\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{v}^* - \nabla\cdot\boldsymbol{v}^n \tag{1.20}$$

La pression ainsi calculée est en fait une pression étoilée $p^* \hat{=} p + \rho\phi$. L'inversion de ce système peut être accomplie à l'aide d'un solveur direct ou de la méthode du Gradient Conjugué Préconditionné (GCP). Cette résolution du champ de pression permet de considérer le transfert de masse à l'interface car le terme source pour la divergence de la vitesse $\nabla \cdot \boldsymbol{v}^n$ est donné par

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}^n = \nabla \cdot \delta \boldsymbol{v}^n \tag{1.21}$$

où le champ $\delta \boldsymbol{v}^n$ est construit suivant la procédure présentée à la section 1.2.3. Il est discontinu à l'interface et le saut de $\delta \boldsymbol{v}^n$ est donné par le taux de transfert de masse. Cette étape de projection permet d'imposer l'égalité entre la discontinuité du champ de vitesse $\boldsymbol{v}^{n+1}$ et celle du champ $\delta \boldsymbol{v}^n$. Même pour les sous-pas de temps du schéma de Runge-Kutta, cette divergence est évaluée à l'instant n car les termes interfaciaux sont traités par un schéma Euler explicite.

Enfin, le champ de vitesse à l'instant $n+1$ ($\boldsymbol{v}^{n+1}$) s'obtient en sommant les deux contributions précédentes :

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{v}^n + \Delta t \left(\partial_t \boldsymbol{v}^* - \frac{1}{\rho^n} \nabla p^{n+1} \right) \tag{1.22}$$

Ce champ de vitesse $\boldsymbol{v}^{n+1}$ permet finalement de mettre à jour la position des marqueurs lagrangiens, puis l'indicatrice χ_v^{n+1} et les propriétés physiques (masse volumique, viscosité, conductivité thermique et capacité calorifique massique) en suivant l'algorithme présenté à la section 1.2.3.

1.2.3 Convection de l'interface : transport des marqueurs lagrangiens

Lorsqu'une interface sépare deux phases non-miscibles, elle est transportée à la vitesse du fluide $\boldsymbol{v}$. La vitesse de l'interface $\boldsymbol{v}_i$ est alors simplement déterminée par interpolation du champ de vitesse eulérien $\boldsymbol{v}$ aux positions des marqueurs lagrangiens. Dans le cas d'un écoulement diphasique avec changement de phase, la vitesse fluide $\boldsymbol{v}$ est discontinue à l'interface. À partir de ce champ, on souhaite construire un champ de vitesse continu pour déterminer la vitesse de déplacement des marqueurs lagrangiens $\boldsymbol{v}_i$ par interpolation. Pour cela, il faut construire un champ de vitesse eulérien discontinu $\delta \boldsymbol{v}$ tel que le champ $(\boldsymbol{v} - \delta \boldsymbol{v})$ soit le plus régulier possible et que son interpolation au niveau des marqueurs lagrangiens donne la vitesse de l'interface $\boldsymbol{v}_i$.

Dans ce qui suit, on détaille la méthode qui permet de déterminer le champ de vitesse $\delta \boldsymbol{v}$. L'algorithme de transport des interfaces doit être stable vis-à-vis de l'énergie mécanique (énergie d'interface plus énergie cinétique du fluide). Il doit aussi permettre de respecter le bilan de masse des phases en imposant localement les conditions (1.6c) et (1.9) sur la vitesse des interfaces et sur le saut de vitesse.

Détermination du champ de vitesse à l'interface Le champ de vitesse monofluide $\boldsymbol{v}$ est discontinu à l'interface. La vitesse de déplacement de l'interface $\boldsymbol{v}_i$ est différente des valeurs des vitesses dans les phases $\boldsymbol{v}_l$ et $\boldsymbol{v}_v$. Pour déterminer cette vitesse, on souhaite construire un champ de vitesse volumique $(\boldsymbol{v} - \delta \boldsymbol{v})$ le plus régulier possible au voisinage de l'interface dont l'interpolation à la position des marqueurs lagrangiens interfaciaux conduit à la vitesse de déplacement de l'interface $\boldsymbol{v}_i$. La détermination du champ de vitesse $\delta \boldsymbol{v}$ qui vérifie la contrainte $\nabla \cdot (\boldsymbol{v} - \delta \boldsymbol{v}) = 0$ est complexe. Elle est présentée en détail à l'annexe D.2.2 et conduit à la définition

$$\delta \boldsymbol{v} = \begin{cases} \nabla \left[\dfrac{\dot{m}}{\rho_l} d \left(1 - \dfrac{\kappa\, d}{2} \right) \right] & \text{pour d<0} \\ \nabla \left[\dfrac{\dot{m}}{\rho_v} d \left(1 - \dfrac{\kappa\, d}{2} \right) \right] & \text{pour d>0} \end{cases} \tag{1.23}$$

où d représente la distance signée à l'interface évaluée au centre des mailles eulériennes. Le taux de transfert de masse est lui-aussi évalué au centre des mailles eulériennes par un algorithme présenté à la section 1.2.4.

Pour une interface de géométrie quelconque, le champ $\boldsymbol{v}$ varie dans la direction normale à l'interface pour vérifier la contrainte d'incompressibilité dans les phases (Fig. 1.4). Pour imposer la régularité du champ de vitesse $(\boldsymbol{v} - \delta \boldsymbol{v})$ à l'interface, il faut donc que le champ $\delta \boldsymbol{v}$ soit également à divergence nulle dans chaque phase, de sorte que ses variations dans la direction normale

à l'interface compensent celles du champ de vitesse fluide $\boldsymbol{v}$. Pour une interface courbe, le facteur $d(1-\kappa\, d/2)$ permet de satisfaire cette contrainte au voisinage de l'interface (au premier ordre) en construisant un champ dont la divergence décroît linéairement avec la distance à l'interface. Il provient du développement limité de l'expression générale pour un champ à symétrie sphérique (D.9) tronqué à l'ordre 1. Pour l'exemple de l'évaporation d'une bulle sphérique, il conduit au champ $\delta\boldsymbol{v}^1$ illustré sur la figure 1.3. Ainsi, le champ $\boldsymbol{v}-\delta\boldsymbol{v}^1$ est continu et de dérivée continue à l'interface. L'interpolation de ce champ au niveau des marqueurs se fait avec une précision d'ordre 2. Si on conserve seulement le terme dominant du développement limité, l'équation (1.23) est plus simple. Elle conduit au champ $\delta\boldsymbol{v}^0$ constant par morceaux (Fig. 1.3). La dérivée du champ $\boldsymbol{v}-\delta\boldsymbol{v}^0$ est alors discontinue à l'interface et la précision du champ interpolé n'est plus que d'ordre 1.

Si l'on suppose que les variations du taux de transfert de masse $\dot{m}$ sont faibles, le champ $\delta\boldsymbol{v}$ déterminé par la relation (1.23) est tel que (i) sa composante tangentielle est nulle, (ii) sa divergence est nulle au voisinage de l'interface (et décroît linéairement avec la distance à l'interface) et (iii) la composante normale à l'interface du champ $(\boldsymbol{v}-\delta\boldsymbol{v})$ est égale à la vitesse de déplacement de l'interface d'après la définition (1.9) du saut de vitesse :

$$\boldsymbol{v}_l - \boldsymbol{v}_v = \dot{m}\,\boldsymbol{n}\left(\frac{1}{\rho_l}-\frac{1}{\rho_v}\right)$$

Le champ de vitesse $\delta\boldsymbol{v}$ dépend uniquement de $\dot{m}$ et de la position de l'interface. Il tend vers 0 lorsque le changement de phase tend vers 0. Cette propriété garantit que le schéma avec changement de phase dégénère bien vers le schéma sans changement de phase pour lequel la vitesse de déplacement de l'interface est déterminée à partir du seul champ de vitesse fluide $\boldsymbol{v}$. Ainsi, on construit le champ de vitesse $(\boldsymbol{v}-\delta\boldsymbol{v})$ continu à l'interface et égal à la vitesse de déplacement de l'interface $\boldsymbol{v}_i$ au voisinage de l'interface.

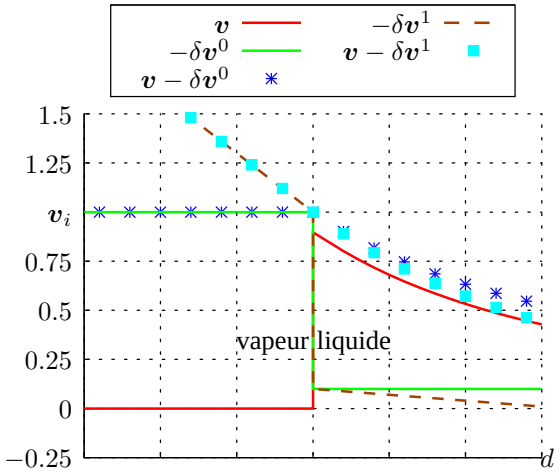


FIGURE 1.3 – Illustration du champ $\delta\boldsymbol{v}$ dans le cas d'une interface sphérique.

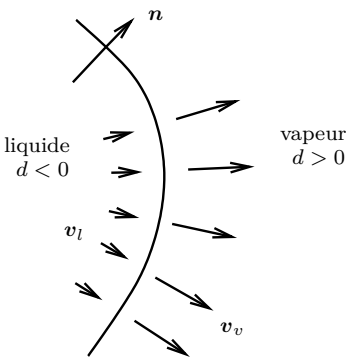


FIGURE 1.4 – Champ de vitesse lors du changement de phase à une interface courbe.

Advection des marqueurs Les marqueurs $\boldsymbol{x}_i$ discrétisant l'interface sont déplacés à la vitesse de l'interface $\boldsymbol{v}_i$ par un schéma Euler explicite :

$$\boldsymbol{x}_i^* = \boldsymbol{x}_i^n + \Delta t\,\boldsymbol{v}_i \tag{1.24}$$

Pour cela, la vitesse $\boldsymbol{v}_i$ est évaluée au niveau des marqueurs lagrangiens par interpolation du champ eulérien $(\boldsymbol{v}-\delta\boldsymbol{v})$. Ce déplacement engendre une variation de volume $\partial\mathcal{V}$ qui ne correspond pas exactement à l'intégrale du taux de changement de phase sur l'interface discrétisée.

Correction du bilan de masse – conservation du volume La position $\boldsymbol{x}_i^*$ est alors corrigée pour recouvrer le bilan de masse. Pour évaluer cette correction, la masse volumique ρ est convectée

par un schéma conservatif au voisinage de l'interface. La variation temporelle de masse volumique permet d'évaluer celle de l'indicatrice de phase χ afin d'assurer que la variation de volume d'une inclusion corresponde exactement à l'intégrale discrète du taux de changement de phase sur cette inclusion. La variation temporelle de l'indicatrice χ ainsi évaluée sur les mailles eulériennes est comparée à la variation de volume $\partial\mathcal{V}$ engendrée par le déplacement des marqueurs de la position $\boldsymbol{x}_i^n$ à la position $\boldsymbol{x}_i^*$. La correction ainsi déterminée est ensuite interpolée aux nœuds du maillage lagrangien de manière conservative. Elle induit un second déplacement des marqueurs $\boldsymbol{x}_i^*$ vers la position $\boldsymbol{x}_i^{n+1}$ qui permet de vérifier localement le bilan de masse. Cette correction consiste à déplacer les nœuds dans la direction normale à l'interface pour que la variation totale de volume de vapeur au cours d'un pas de temps dt corresponde à l'intégrale du taux de changement de phase sur l'interface. Cette correction est imposée le plus localement possible. Des algorithmes de barycentrage et de remaillage permettent enfin d'obtenir un maillage de bonne qualité. L'espacement moyen imposé entre les marqueurs est plus grand que les mailles eulériennes (*cf.* Magdeleine, 2009, Mathieu, 2003, pour plus de détails).

1.2.4 La méthode *Ghost Fluid*

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la discrétisation du terme de convection de l'équation d'évolution de la température au voisinage de l'interface, c'est-à-dire au terme $\boldsymbol{v}\cdot\nabla T$ dans les mailles diphasiques. L'opérateur de convection de l'équation de température peut introduire d'importantes erreurs s'il n'est pas traité correctement. Dans Trio_U, le terme de convection est classiquement écrit sous forme conservative $\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\,T)$ afin d'assurer la conservation du flux d'énergie $\rho c_p T$ entre les mailles eulériennes. La transformation du terme $\boldsymbol{v}\cdot\nabla T$ (de l'équation (1.12)) en $\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\,T)$ est directe *pour un champ* $\boldsymbol{v}$ *à divergence nulle*. Dans le cas d'un écoulement avec changement de phase, le champ $\boldsymbol{v}$ n'est pas à divergence nulle dans les mailles eulériennes voisines de l'interface mais présente une discontinuité à l'interface ; la discrétisation de ce terme par un schéma classique de type différences finies conduit à une erreur importante si elle repose sur le champ de vitesse discontinu $\boldsymbol{v}$. Pour y remédier, un schéma de discrétisation inspiré de la méthode « Ghost Fluid » (Fedkiw *et al.*, 1999) a été développé dans Trio_U. Il repose sur le prolongement continu du champ de vitesse d'une phase.

Par ailleurs, le changement de phase rend le respect du bilan d'énergie discrétisé difficile en raison de la discontinuité du flux à l'interface. Un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ du champ de température liquide dans la phase vapeur permet d'améliorer l'évaluation du gradient à l'interface et ainsi d'augmenter la précision du taux de changement de phase.

Pour les problèmes considérés dans ce mémoire, la vapeur est toujours supposée à saturation (**H13**) car nous n'avons pas considéré les problèmes pariétaux pour lesquels cette hypothèse est particulièrement fausse. Par conséquent, l'équation de température n'est pas résolue dans cette phase. La présentation suivante est donnée pour la phase liquide, la phase vapeur se traitant de manière similaire si besoin.

Convection de la température

Pour le terme de convection de la température liquide, le but est de *prolonger le champ de vitesse liquide dans la phase vapeur* pour résoudre le problème de discrétisation exposé ci-dessus. Ce problème est similaire à la détermination du champ de vitesse $\delta\boldsymbol{v}$ présentée à la section 1.2.3 et détaillée à l'annexe D.2. Pour déterminer le champ de vitesse de déplacement de l'interface, on a construit un champ de vitesse discontinu $\delta\boldsymbol{v}$ pour que le champ $(\boldsymbol{v}-\delta\boldsymbol{v})$ soit égal au champ de vitesse de déplacement de l'interface. Pour le terme de convection de la température liquide, nous souhaitons construire le champ $\delta\boldsymbol{v}_l$ tel que le champ $(\boldsymbol{v}-\delta\boldsymbol{v}_l)$ soit égal au champ $\boldsymbol{v}_l$ dans la phase liquide et dans la phase vapeur. En appliquant la même démarche que pour la vitesse de déplacement de l'interface, le raisonnement présenté à l'annexe D.3.1 permet de construire le champ $\delta\boldsymbol{v}_l$:

$$\delta\boldsymbol{v}_l = \begin{cases} 0 & \text{pour d<0} \\ \nabla\left[\dot{m}\left(\dfrac{1}{\rho_v}-\dfrac{1}{\rho_l}\right)d\left(1-\dfrac{\kappa\,d}{2}\right)\right] & \text{pour d>0} \end{cases} \tag{1.25}$$

D'après la définition (A.3) du taux de transfert de masse à l'interface, la composante normale à l'interface du champ $(\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{v}_l)$ est continue à la traversée de l'interface et égale au champ de vitesse liquide. Le champ $(\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{v}_l)$ est alors utilisé pour convecter la température de la phase liquide au voisinage de l'interface (côté liquide).

Gradient de température à l'interface et taux de transfert de masse

Intéressons-nous à présent à la détermination du taux de transfert de masse. Le bilan d'énergie à l'interface fait intervenir la différence des flux conductifs des phases à l'interface. [1] Il est donc important de bien évaluer ces flux conductifs et donc le gradient de température à l'interface. La méthode utilisée se base encore sur la méthode « Ghost Fluid » pour traiter correctement la discontinuité : le champ de gradient de température calculé est issu d'un prolongement continu du champ calculé aux centres des éléments eulériens dans la phase liquide. Le calcul se déroule en deux étapes principales (détaillées à l'annexe D.3.2) :

1. l'évaluation du gradient de température normal à l'interface aux centres des éléments eulériens liquide et son prolongement dans les mailles de vapeur ; ce champ permet de déterminer le champ de taux de transfert de masse aux centres des éléments eulériens.
2. le calcul du champ de température liquide *ghost* au centre des éléments eulériens diphasique et vapeur. La construction d'un champ "miroir" dans la phase vapeur permet d'imposer la condition de saturation à l'interface.

1. Détermination du gradient de température normal à l'interface. Le champ de température le long de l'interface est constant et uniforme égal à la température de saturation T^{sat}. En supposant que le champ de température liquide est quasi statique au voisinage de l'interface, on évalue le gradient de température liquide normal à l'interface (que l'on stocke au centre des mailles eulériennes liquide) par le développement limité suivant

$$(\boldsymbol{n} \cdot \nabla T)_i \simeq \frac{(T_l)_i - T^{\text{sat}}}{d_i} \left(1 + \kappa\,(d_i/2) + \frac{\kappa^2\,(d_i/2)^2}{2} + \mathcal{O}(d_i^3)\right)$$

où i est l'indice de la maille eulérienne liquide considérée et d_i la distance signée à l'interface.

Le flux normal ainsi calculé dans les mailles eulériennes liquide est bien représentatif du flux normal *à l'interface*. Afin de limiter les erreurs d'interpolation, on souhaite rendre ce flux régulier sur toutes les mailles, y compris les mailles diphasiques et vapeur. Pour cela, une méthode de prise de moyenne sur les mailles eulériennes voisines a été adoptée. Cette moyenne est calculée plusieurs fois pour diffuser l'information et ainsi résoudre une équation de type diffusion (lissage numérique).

À partir de ce gradient de température liquide à l'interface, on détermine le taux de transfert de masse $\dot{m}_i$ (stocké aux centres des mailles eulériennes) par :

$$\dot{m}_i = \frac{k_l\,(\boldsymbol{n} \cdot \nabla T)_i}{\mathcal{L}^{vap}}$$

La formule précédente suppose que le gradient de température à l'interface de la phase vapeur est nul. Pour prendre en compte les deux phases, il suffirait à l'avenir de sommer la formule précédente sur les deux phases.

Ce champ volumique de taux de transfert de masse $\dot{m}_i$ est régulier au voisinage de l'interface. Il permet de construire le champ $\delta\boldsymbol{v}$ à partir de la relation (1.23). Il est donc indispensable pour la construction de la vitesse de déplacement de l'interface présentée à la section 1.2.3.

2. Détermination du champ de température *Ghost Fluid*. Pour permettre la résolution de l'équation de bilan de température monofluide (1.14d) de manière standard, le champ calculé par la méthode d'avancement temporelle (section 1.2.2) n'est conservé que dans les mailles eulériennes liquide. Un champ de température liquide *ghost* est déterminé par prolongement par continuité dans les mailles eulériennes diphasiques et vapeur voisines de l'interface à partir du champ de gradient à l'interface déterminé à l'étape précédente. En supposant que ce champ est à divergence

1. Le flux conductif est nul dans la vapeur d'après l'hypothèse **H13**.

nulle (pour un problème quasi statique au voisinage de l'interface), le champ de température *ghost* à une distance d de l'interface est donné par le développement limité suivant :

$$T_i \simeq T^{\text{sat}} + (\boldsymbol{n} \cdot \nabla T)_i \; d_i \left(1 - \frac{\kappa \, d_i}{2} + \frac{\kappa^2 \, d_i^2}{6}\right)$$

Ce prolongement du champ de température dans les mailles diphasiques et vapeur est continu et de dérivée continue à l'interface. Il permet donc d'imposer la condition de saturation (1.14e) à l'interface et de résoudre une équation de la chaleur standard, sans considérer explicitement le terme source de l'équation (1.14d).

1.3 Simulations numériques directes

Dans cette section, nous présentons les configurations que nous avons choisi de simuler par simulations numériques directes pour constituer un ensemble de données de référence. Dans un premier temps, elles seront utiles aux développements de modèles et à leur validation *a priori* (chapitre 3). Par la suite, elles constitueront des données de référence permettant de qualifier l'efficacité réelle du modèle ISS (chapitre 5). Pour établir des modèles assez généraux, il faut donc que les configurations soient représentatives de l'essentiel des interactions interface-turbulence rencontrées dans les écoulements diphasiques avec changement de phase.

Avant cela, nous nous intéressons aux problèmes simples de la croissance et de la condensation d'une bulle sans gravité. Ces simulations permettent avant tout de valider l'outil numérique de simulation en comparant les résultats obtenus aux solutions analytiques de référence. En complément, cette configuration simple permet de comprendre et d'analyser le comportement des termes sous-maille et de leur modèle.

Ensuite, nous introduisons la convection en étudiant l'influence de la gravité sur une bulle sphérique. Dans ce cas, il est à nouveau possible de valider les résultats par comparaison avec les solutions analytiques de la littérature. Ces configurations contribuent à la validation du module "*changement de phase*" de Trio_U. Afin d'étudier l'effet des déformations interfaciales sur les transferts, on présente dans la section 1.3.5 l'étude bidimensionnelle de l'interaction d'une bulle avec deux tourbillons contra-rotatifs. Cette configuration similaire à Toutant (2006) permet de développer les outils de post-traitement et fournit quelques éléments de compréhension.

Les deux dernières configurations ont un degré de complexité nettement plus important. Dans la section 1.3.6, la configuration (inspirée par Toutant, 2006) permet d'évaluer la pertinence de la modélisation pour simuler l'interaction d'une bulle avec de la turbulence de type monophasique dans du liquide sous-refroidi. Enfin, la dernière simulation (section 1.3.7) s'intéresse à un écoulement multi-bulles par l'étude de la condensation de bulles dans une colonne de liquide. Elle permet d'évaluer la réaction des modèles à une stimulation pseudo-turbulente d'origine diphasique. Étant donné l'intérêt particulier de cette configuration, nous en profitons dans la section 1.4 pour illustrer les potentialités de l'approche multi-échelle en extrayant quelques informations pour renseigner des modèles diphasiques moyennés.

L'ensemble de ces configurations constitue une base de donnée variée et représentative des configurations d'écoulements turbulents à bulles. Elle permet la compréhension physique des transferts interfaciaux à petite échelle et la qualification des modèles proposés. Cette configuration décrit les configurations et présente la validation des résultats obtenus. L'analyse des résultats vis-à-vis de la modélisation constitue le chapitre 3.

1.3.1 Préambule

La majeure partie des applications visées par le laboratoire d'accueil concerne les réacteurs nucléaires à eau pressurisée (REP) et leur sûreté. Dans des configurations accidentelles ou incidentelles, l'eau, sous une pression de 15.5 MPa, atteint la saturation et se vaporise au niveau des parois fortement surchauffées. Les bulles de vapeur ainsi produites migrent ensuite au cœur de l'écoulement avant de disparaître en se condensant car le centre de la conduite est encore sous-refroidi. Dans ce travail, nous nous sommes affranchis des phénomènes pariétaux suffisamment complexes pour justifier des travaux indépendants, pour se concentrer sur le changement de phase

au cœur d'un écoulement diphasique. Nous avons choisi d'étudier essentiellement la condensation pour rester proches des configurations d'intérêt industriel. Cependant, on estime que les résultats obtenus sont suffisamment généraux pour s'appliquer aussi aux phénomènes d'évaporation car la physique des transferts est similaire. Pour les différentes configurations présentées dans ce chapitre, les propriétés thermophysiques de l'eau pressurisée sont utilisées (Tab. 1.1). Dans certaines configurations, il est nécessaire de changer la valeur de certaines propriétés pour rendre la simulation numérique accessible à un coût raisonnable. Dans ce cas, nous signalons les propriétés modifiées. Il s'agit généralement soit d'une diminution de la tension de surface ($\sigma = 6\ 10^{-6}$ J.m^{-2}) pour permettre plus de déformations, soit d'une diminution de la gravité ($g = 5\ 10^{-3}$ m.s^{-2}) pour limiter les nombres de Reynolds et de Péclet et élargir les couches limites.

		Liquide	Vapeur
ρ	[kg.m^{-3}]	574.3	113.6
μ	[Pa.s]	65.16 10^{-6}	23.73 10^{-6}
c_p	[J.kg^{-1}.K^{-1}]	10.11 10^3	17.15 10^3
k	[J.s^{-1}.m^{-1}.K^{-1}]	44.7 10^{-2}	13.8 10^{-2}

Autres propriétés		
σ	[J.m^{-2}]	3.79 10^{-3}
$\mathcal{L}^{vap}$	[J.kg^{-1}]	$-895.7\ 10^3$
g	[m.s^{-2}]	9.81

TABLE 1.1 – Propriétés thermophysiques de l'eau à saturation ($T^{\text{sat}} = 618$ K, $p^{\text{sat}} = 15.5$ MPa).

1.3.2 Estimation de la convergence en maillage – Méthodologie

Pour déterminer la précision des solutions de référence obtenues par SND, chaque configuration est simulée sur des maillages de plus en plus fins afin d'évaluer la convergence de la solution et l'influence de la résolution spatiale. Nous proposons une méthode inspirée de Richardson (1911) pour évaluer une solution de référence et l'ordre de convergence de la solution.

Soit $\mathcal{E}_\phi$ l'erreur commise sur une grandeur ϕ entre deux maillages N et fN ($f > 1$ est le facteur de raffinement) :

$$\mathcal{E}_\phi(N, f) = |\phi(N) - \phi(fN)| \tag{1.26}$$

Postulons une décroissance logarithmique de l'erreur pour traduire la convergence du schéma numérique de discrétisation

$$\mathcal{E}_\phi(N, f) = \mathrm{e}^b N^{-a} \tag{1.27}$$

où a et b sont deux paramètres ajustables. a est l'ordre de convergence de la méthode numérique. Cette loi permet d'estimer la grandeur ϕ pour un maillage infiniment fin en évaluant la série :

$$\phi(\infty) = \phi(N) + \sum_{p=0}^{\infty} \mathcal{E}_\phi(f^p N, f) = \phi(N) + \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{e}^b \left(f^p N\right)^{-a} \tag{1.28}$$

Sous ces hypothèses, on peut évaluer l'erreur relative E_ϕ commise pour un maillage donné en prenant comme valeur de référence celle estimée pour un maillage infiniment fin :

$$E_\phi = \frac{|\phi(\infty) - \phi(N)|}{\phi(\infty)} \tag{1.29}$$

En qualifiant de SND les simulations ayant une précision acceptable (*e. g.*, $E_\phi \leq 5\%$), on est alors capable de déterminer le maillage minimum requis pour établir une solution dite *de référence*. Au chapitre 3, cette solution de référence permet d'évaluer les termes sous-maille et leur modèle par l'application d'un filtre explicite.

1.3.3 Condensation et croissance sans gravité

Ces premières simulations ont un double objectif : (i) valider le module *Front-Tracking* avec changement de phase du code Trio_U en comparant les résultats aux données de référence de la littérature (Legendre *et al.*, 1998, Okhotsimskii, 1988, Scriven, 1959) et (ii) comprendre les transferts aux interfaces lorsque la convection est faible.

Croissance

Scriven (1959) propose une expression analytique pour déterminer l'évolution temporelle du rayon d'une bulle dans du liquide uniformément surchauffé :

$$\frac{dR^3}{dt} = 12\beta^3\alpha_l\sqrt{\alpha_l t} \tag{1.30}$$

où $R(t)$ est le rayon de la bulle, α_l est la diffusivité thermique du liquide et β est un facteur de croissance tabulé en fonction du nombre de Jacob (Scriven, 1959) comme le montre la figure 1.5. Le critère de comparaison choisi est le taux de croissance de la bulle β défini par Scriven (1959) par :

$$\beta \hat{=} \left(\frac{1}{12\alpha_l\sqrt{\alpha_l t}}\frac{dR^3}{dt}\right)^{1/3} \tag{1.31}$$

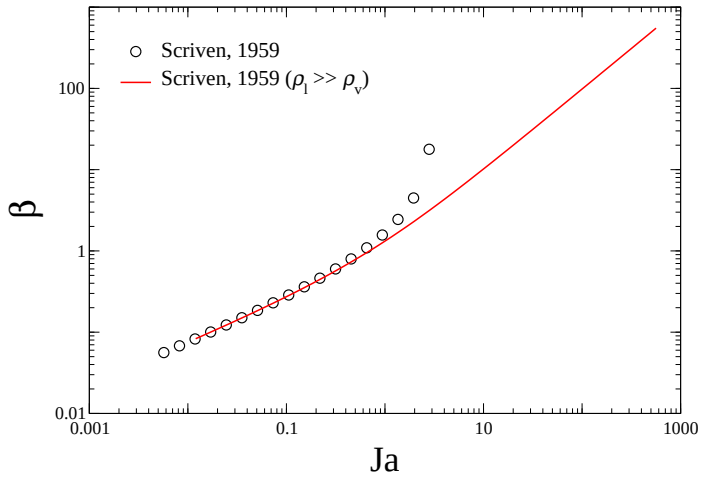


FIGURE 1.5 – Valeurs de β en fonction de Ja d'après Scriven (1959) (expression complète et solution simplifiée pour $\rho_l \gg \rho_v$).

La simulation est réalisée pour une surchauffe $T_\infty - T^{\text{sat}} = 5K$. Les propriétés physiques de l'eau sous forme liquide et gazeuse sont données dans le tableau 1.1. La tension superficielle est réduite à $\sigma = 10^{-6}\,\text{N.m}^{-1}$ pour éviter l'apparition de courants parasites qui pourraient déstabiliser la bulle. Cette modification n'affecte pas la physique du problème puisque la symétrie rend la tension superficielle inopérante. Le nombre de Jacob correspondant à ce cas test est égal à Ja $= 0.2853$. D'après l'expression complète de Scriven (1959), le facteur de croissance théorique est $\beta = 0.5575$. La comparaison avec les résultats numériques est donnée à la figure 1.6a.

Condensation

En ce qui concerne la condensation, Okhotsimskii (1988) obtient numériquement l'évolution temporelle du diamètre d'une bulle initialement dans du liquide sous-refroidi stagnant en supposant que $\rho_l \gg \rho_v$. Pour faciliter la comparaison, nous respecterons sa normalisation des variables, soit

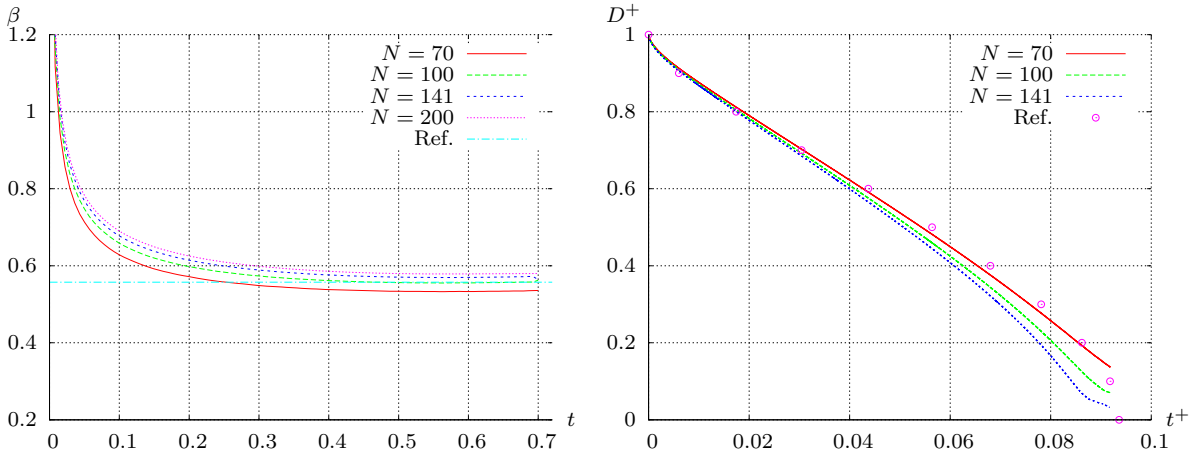
$$D^+ = \frac{D}{D_0} \quad \text{et} \quad t^+ = \frac{16\,\text{Ja}^2\,\alpha_l}{\pi\,D_0^2}\,t \tag{1.32}$$

avec $D(t)$ le diamètre de la bulle et $D_0 \equiv D(0)$.

La simulation est réalisée avec un sous-refroidissement $T_\infty - T^{\text{sat}} = -0.177K$. Les propriétés physiques sont identiques à celles du cas précédent. Toutefois, afin de respecter l'hypothèse $\rho_l \gg \rho_v$, nous avons fixé $\rho_l = 1000\,\text{kg.m}^{-3}$ et $\rho_v = 10\,\text{kg.m}^{-3}$. La tension superficielle est réduite

à $\sigma = 10^{-6}\,\mathrm{N.m^{-1}}$. Le nombre de Jacob $\mathrm{Ja} = -0.2$ permet de comparer l'évolution temporelle du diamètre D^+ en fonction de t^+ obtenu pour différents maillages à celle donnée par Okhotsimskii (1988) (Fig. 1.6b).

Résultats



(a) Croissance : facteur de croissance (Solution de référence pour $\mathrm{Ja} = 0.2853$, d'après Scriven (1959)).

(b) Condensation : évolution temporelle du diamètre (Solution de référence pour $\mathrm{Ja} = -0.2$ d'après Okhotsimskii (1988))

FIGURE 1.6 – Résultats de l'étude de convergence pour la condensation et la croissance d'une bulle sans gravité.

Les résultats de l'étude de convergence sont donnés par la figure 1.6. On constate que la méthode numérique converge, mais que la limite asymptotique atteinte diffère légèrement des données de la littérature (environ 5%). Pour les deux configurations, le changement de phase est surestimé. Plusieurs origines peuvent expliquer ces différences :

- Pour la croissance, le diamètre initial de la bulle ne peut pas être nul avec notre outil de simulation numérique. Par conséquent, le champ de température initial ne correspond pas à la solution analytique de (Scriven, 1959). Cette différence est notable au début de la simulation. Elle induit peut-être une légère dérive de la solution.
- Le rapport du diamètre de la bulle à la taille caractéristique du domaine de simulation ($\eta = D/L$) est grand devant les valeurs adoptées par Legendre *et al.* (1998) car le maillage n'est pas adaptatif (η est compris entre 3.33 à 7.14 pour la croissance et il est supérieur à 2.86 pour la croissance).
- La formulation des opérateurs de diffusion et de convection dans les cellules de l'interface nécessite peut-être certaines améliorations, de même que l'évaluation du saut de vitesse $\delta\boldsymbol{v}$. Mais cela dépasse le cadre de ce travail et nous jugeons nos résultats suffisamment satisfaisant pour les applications visées.

Néanmoins, les écarts constatés sont suffisamment faibles pour considérer la solution sur le maillage fin convergée et validée.

1.3.4 Ascension d'une bulle dans du liquide sous-refroidi

Dans cette simulation, on s'intéresse à l'effet de la gravité sur une inclusion de vapeur dans du liquide sous-refroidi. Afin de limiter le coût numérique, la gravité est artificiellement réduite pour restreindre le nombre de Reynolds maximum atteint. La simulation est menée dans un référentiel galiléen mobile dont la vitesse est ajustée pour limiter le déplacement effectif de l'interface et par suite le domaine de calcul nécessaire. Dans un premier temps, nous étudions une bulle 2D circulaire indéformable. Ensuite, la tension de surface est artificiellement diminuée et l'interface se

déforme. Cette bulle ellipsoïdale est simulée en 3 dimensions pour se rapprocher progressivement de la configuration multi-bulles.

Même pour une bulle isolée dans du liquide stagnant, la dépendance du nombre de Nusselt aux paramètres du problème est complexe. Elle a été étudiée par de nombreux auteurs. L'analyse menée par Legendre *et al.* (1998) montre qu'il y a essentiellement deux régimes. À faible nombre de Péclet, le nombre de Nusselt Nu_b est approximativement indépendant du nombre de Péclet. La relation fonctionnelle $\mathrm{Nu}_{b,0}(\mathrm{Ja})$ peut se mettre sous la forme (Legendre *et al.*, 1998) :

$$\mathrm{Nu}_{b,0} = \frac{16}{\pi}\mathrm{Ja} f(\mathrm{Ja}) \tag{1.33}$$

Cette relation traduit le régime thermique de croissance de bulle pour lequel l'évolution du diamètre est contrôlée par la diffusion thermique. La solution analytique $f(\mathrm{Ja})$ établie par Scriven (1959) pour une bulle sphérique indéformable (Fig. 1.6a) est bien retrouvée numériquement par l'étude de Legendre *et al.* (1998).

Pour les grands nombres de Péclet, les transferts thermiques sont dominés par la convection et on a :

$$\mathrm{Nu}_{b,\infty} = 2\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}}{\pi}} \tag{1.34}$$

Oresta *et al.* (2009) proposent d'interpoler continûment entre les deux comportements asymptotiques

$$\mathrm{Nu}_b = \mathrm{Nu}_{b,0}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Pe}_c}\right)^{n/2}\right]^{1/n} \tag{1.35}$$

où $\mathrm{Pe}_c = \pi \mathrm{Nu}_{b,0}^2/4$ et l'exposant $n \approx 2.65$ est déterminé par ajustement avec les résultats de Legendre *et al.* (1998) et Ruckenstein (1959). Cette proposition fournit une description précise des résultats numériques de Legendre *et al.* (1998) sur une plus large gamme de nombres de Péclet que la solution analytique de Scriven (1959).

Isenberg et Sideman (1970) proposent une corrélation basée sur la relation semi-empirique de Froessling (Levich, 1962) établie pour un transfert thermique stationnaire dans un écoulement laminaire autour d'une sphère indéformable

$$\mathrm{Nu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(0.25\mathrm{Pr}^{-1/3}\mathrm{Pe}\right)^{1/2} \tag{1.36}$$

qu'ils interprètent comme une "transformation" (par un facteur de vitesse $k_v = 0.25\,\mathrm{Pr}^{-1/3} = 0.22$ dans notre cas) de la solution de l'écoulement potentiel discutée par Ruckenstein (1959)

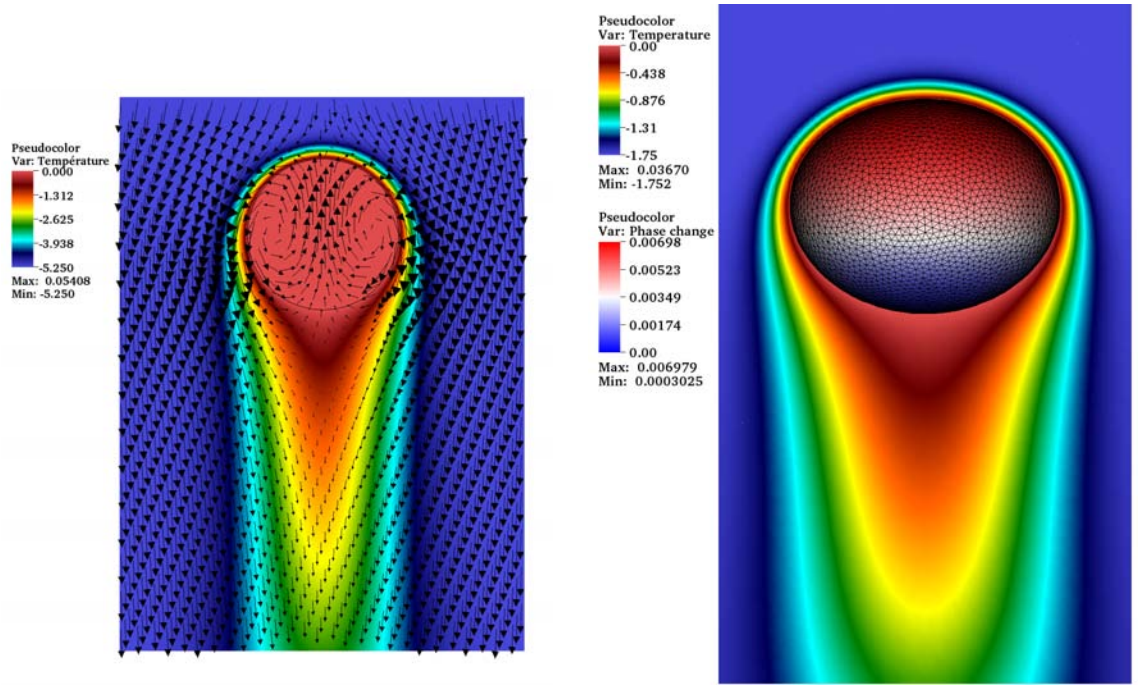
$$\mathrm{Nu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Pe}^{1/2} \tag{1.37}$$

vers un écoulement laminaire.

Description de la configuration

Dans un premier temps, la bulle accélère sous l'effet de la gravité puis son diamètre diminue à cause de la condensation ; la poussée d'Archimède est alors moins forte et la bulle ralentit. Contrairement au cas adiabatique, il n'existe pas de vitesse terminale pour laquelle la trainée équilibre les forces d'Archimède car l'accélération de la bulle déséquilibre le bilan des forces. Il est impossible de simuler précisément la condensation complète d'une bulle (*i. e.,* jusqu'à sa disparition) par une méthode de SND à maillage fixe puisque le nombre de mailles par diamètre de bulle ne cesse de diminuer. Pour cette configuration, l'objectif de l'étude de convergence est de déterminer le temps physique de simulation réalisable pour un maillage et une précision donnés. Autrement dit, on souhaite déterminer le nombre de mailles par diamètre nécessaire pour atteindre une certaine précision de la solution, pour le nombre de Reynolds considéré. La taille du domaine de simulation ($L_x = 3D_0$ et $L_z = 4D_0$) est suffisante pour s'affranchir des effets de confinement dus au changement de phase. Legendre *et al.* (1998) montrent que le critère à vérifier est

$$\frac{\dot{\gamma}}{V_\infty} \ll \left(\frac{L_x}{R_0}\right)^2 \tag{1.38}$$



(a) Bulle sphérique (configuration 2D) – Champs de température et de vitesse.

(b) Écoulement laminaire autour d'une bulle ellipsoïdale (configuration 3D) – Coupe médiane du champ de température, distribution du taux de changement de phase à l'interface et maillage lagrangien.

FIGURE 1.7 – Illustration de l'ascension d'une bulle dans du liquide sous-refroidi.

avec $\dot{\gamma} = dR/dt$. Pour notre cas, on obtient $0.014 \ll 1$. Cette situation est parfaitement acceptable car l'objectif ici n'est pas de déterminer précisément la vitesse de montée d'une bulle unique dans une colonne de liquide infiniment large. Les propriétés de l'eau pressurisée utilisées pour ces simulations sont données au tableau 1.1. La gravité est réduite à $g = 5\ 10^{-3}\,\mathrm{m.s^{-2}}$ pour limiter la vitesse et la finesse de la couche limite. En 2D la tension de surface réelle $\sigma = 3.79\ 10^{-3}\,\mathrm{J.m^{-2}}$ conduit à une bulle indéformable car le nombre de Weber est très faible (Fig. 1.7). Pour le calcul 3D, la tension de surface est réduite à $\sigma = 6\ 10^{-6}\,\mathrm{J.m^{-2}}$ ce qui augmente les déformations. La bulle prend alors une forme proche d'un ellipsoïde. Le rapport des diamètres principaux est 1.7. Le sous-refroidissement est aussi réduit d'un facteur 3. Les nombres sans dimension du problème, définis à partir du diamètre initial de la bulle D_0, de la vitesse maximale observée V_m et de la température liquide à l'infini T_b, sont les suivants :

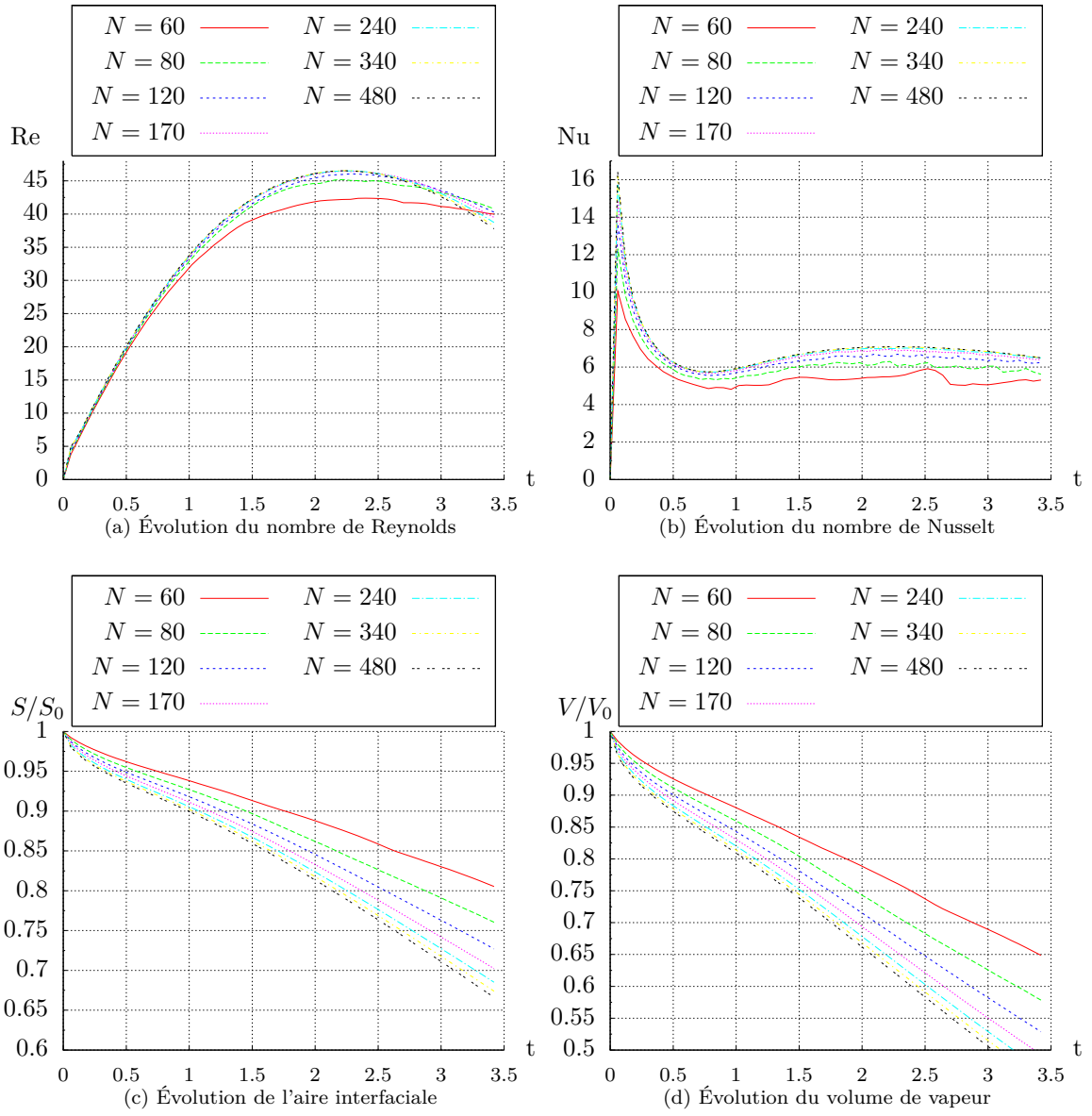
$$\textbf{Cas 2D isotrope :}\quad \mathrm{Re} = 46.5,\quad \mathrm{We} = 2.67\ 10^{-3},\quad \mathrm{Fr} = 1.43\quad \text{et}\quad \mathrm{Ja} = -0.3 \tag{1.39a}$$

$$\textbf{Cas 3D ellipsoïdale :}\quad \mathrm{Re} = 52.3,\quad \mathrm{We} = 1.84,\quad \mathrm{Fr} = 1.14\quad \text{et}\quad \mathrm{Ja} = -0.1 \tag{1.39b}$$

Étude de convergence

Les figures 1.8 et 1.9 représentent l'évolution des grandeurs moyennes (aire interfaciale, volume de vapeur, nombres de Nusselt et de Reynolds) en fonction de la finesse du maillage pour les configurations sphérique et ellipsoïdale respectivement. En appliquant la méthodologie présentée dans la section 1.3.2 au volume de vapeur et aux nombres de Reynolds et de Nusselt à l'instant $t = 1.68\,\mathrm{s}$ (qui correspond à une diminution du diamètre d'un facteur 2 sur le maillage le plus fin), on évalue la décroissance logarithmique de l'erreur représentée sur la figure 1.10 par $\mathcal{E}_{\mathrm{Re}} = 1.43\ 10^3 N^{-2.45}$ et $\mathcal{E}_{\mathrm{Nu}} = 245 N^{-1.87}$ (resp. $\mathcal{E}_{\mathrm{Re}} = 110 N^{-2.00}$ et $\mathcal{E}_{\mathrm{Nu}} = 62.8 N^{-1.48}$ en 3D). L'ordre 2 caractéristique des schémas numériques centrés est bien retrouvé. Pour l'évolution du volume, on attribue la moins bonne convergence de la solution à l'aspect intégral de cette grandeur : l'erreur sur le volume de vapeur à un instant donné résulte globalement de l'intégration des erreurs à chaque

instant depuis le début de la simulation. Les lois de convergence des nombres de Reynolds et de Nusselt permettent d'évaluer pour un maillage extrêmement fin en 2D : $\mathrm{Re}_\infty(t = 1.68\,\mathrm{s}) = 38.58$ et $\mathrm{Nu}_\infty(t = 1.68\,\mathrm{s}) = 6.579$. Sur le maillage le plus fin, l'erreur commise sur les nombres de Reynolds et de Nusselt est donc de 0.7‰ et 5‰ respectivement. On en déduit qu'un maillage comprenant plus de 150 mailles dans la direction horizontale est nécessaire pour atteindre une précision de 5% sur ces grandeurs. Ce résultat corrobore le critère établi précédemment puisqu'il conduit à 30 mailles/diamètre de bulle moyen. Le critère $D/\Delta \gtrsim 30$ semble être un indicateur relativement universel de la convergence pour la méthode *Front-Tracking* de Trio_U. Pour les tests *a priori*, les filtrages explicites de la solution seront conduits sur des maillages comprenant 170 à 480 mailles dans la direction horizontale.

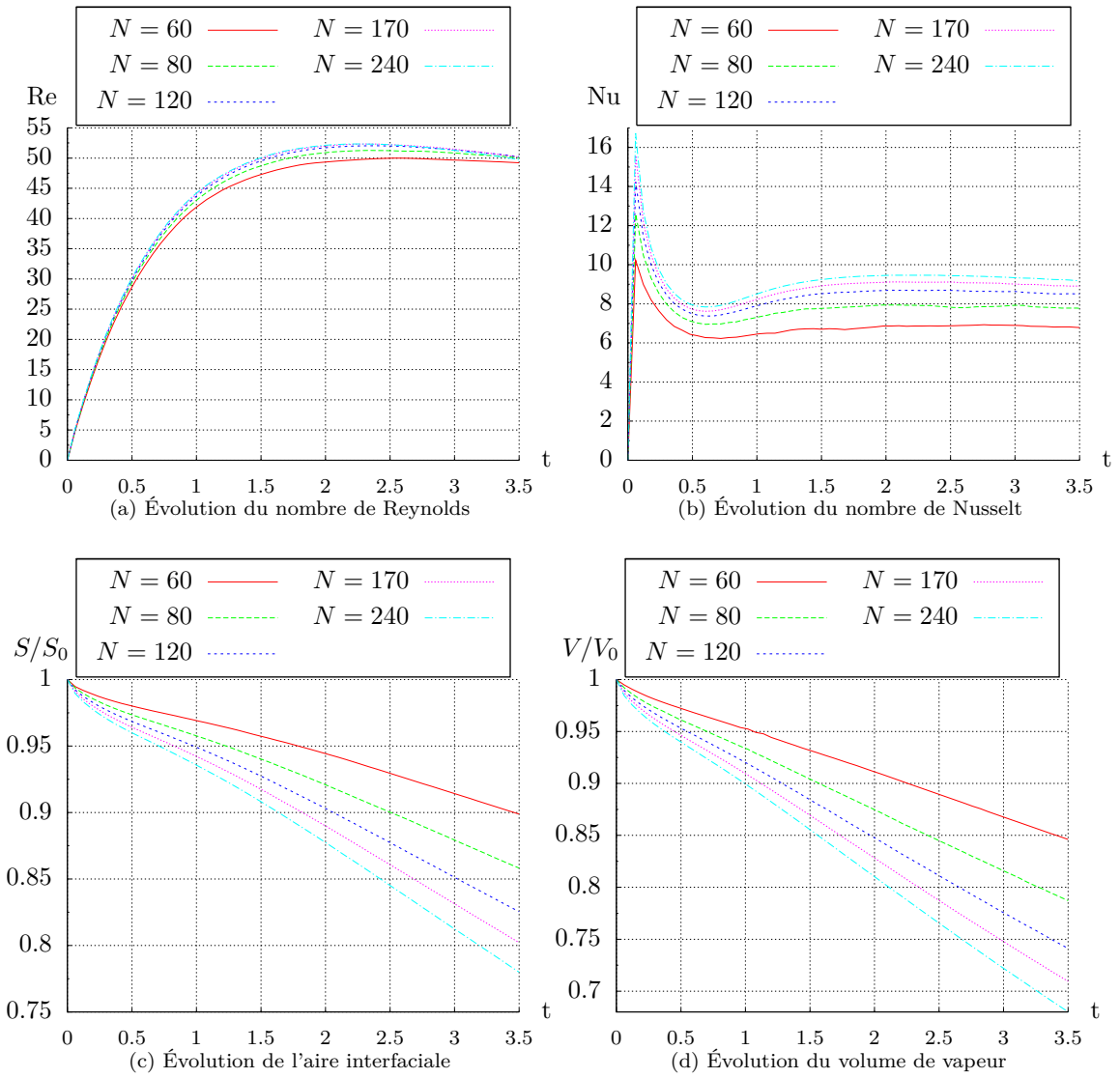


(a) Évolution du nombre de Reynolds (b) Évolution du nombre de Nusselt

(c) Évolution de l'aire interfaciale (d) Évolution du volume de vapeur

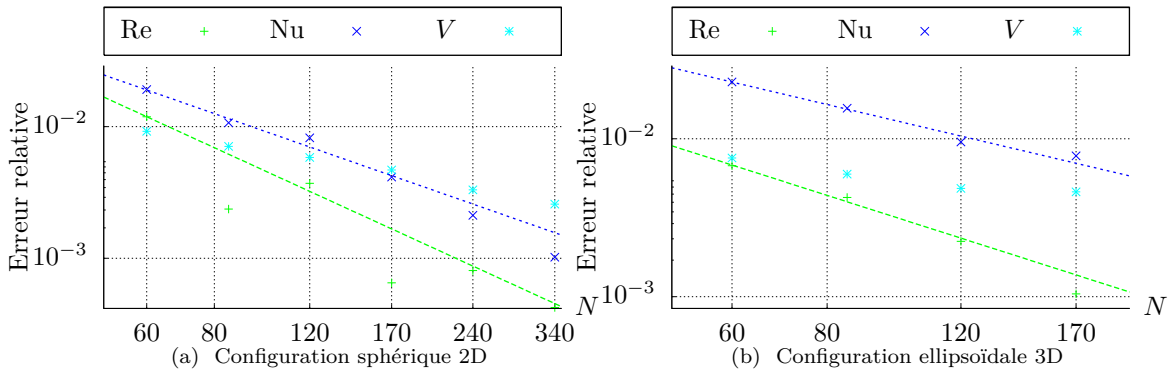
FIGURE 1.8 – Étude de convergence : évolution temporelle des nombres adimensionnels sur la bulle unique soumise à la gravité (configuration sphérique 2D).

De même pour le calcul 3D, on évalue $\mathrm{Re}_\infty(t = 1.68\,\mathrm{s}) = 53.55$ et $\mathrm{Nu}_\infty(t = 1.68\,\mathrm{s}) = 9.392$. Sur le maillage le plus fin, l'erreur commise sur les nombres de Reynolds et de Nusselt est donc de 4.7% et 3.8‰ respectivement. Un maillage comprenant plus de 240 mailles dans la direction horizontale est nécessaire pour atteindre une précision de 5% sur ces grandeurs. Ce sera donc le seul maillage utilisé pour le filtrage lors des tests *a priori*.



(a) Évolution du nombre de Reynolds
(b) Évolution du nombre de Nusselt
(c) Évolution de l'aire interfaciale
(d) Évolution du volume de vapeur

FIGURE 1.9 – Étude de convergence : évolution temporelle des nombres adimensionnels sur la bulle unique soumise à la gravité (configuration ellipsoïdale 3D).



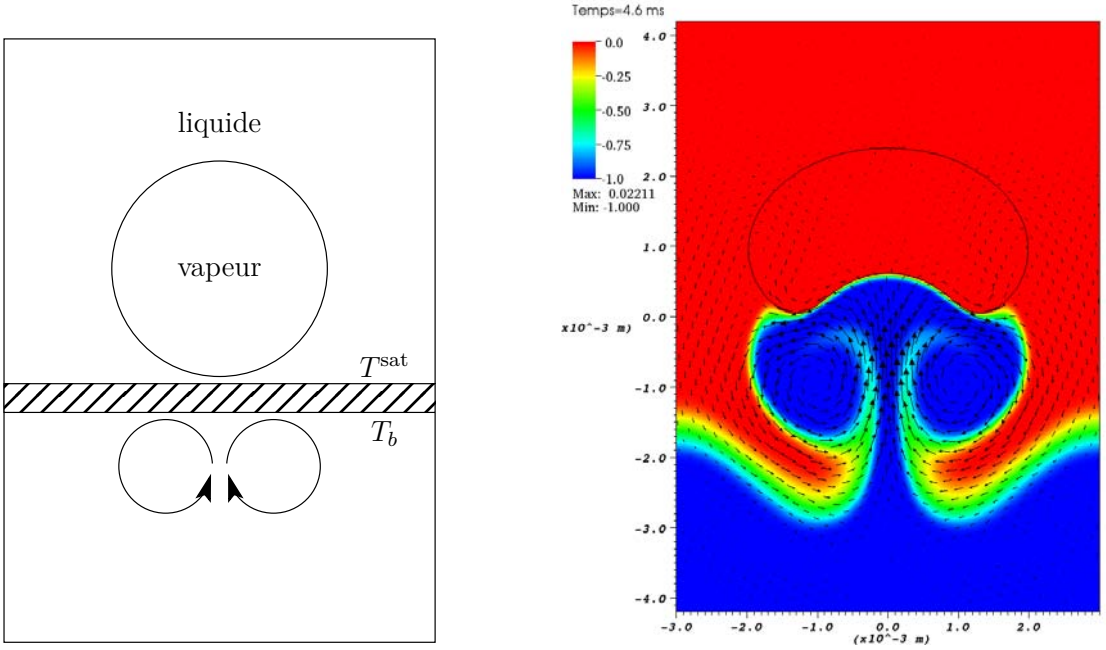
(a) Configuration sphérique 2D
(b) Configuration ellipsoïdale 3D

FIGURE 1.10 – Convergence en maillage.

1.3.5 Tourbillons contra-rotatifs

Cette configuration bidimensionnelle permet d'étudier le comportement des termes sous-maille et de leurs modèles lorsque l'interface se déforme sous l'action de deux tourbillons contra-rotatifs. La gravité n'est pas considérée. Une couche de liquide sous-refroidi est initialement au repos sous la bulle. Les tourbillons provoquent un jet de liquide sous-refroidi et la condensation d'une partie de la vapeur au contact de ce jet. Bien que peu réaliste, cette configuration est intéressante car elle permet de localiser clairement les termes sous-maille puisque les variations des champs locaux sont brusques. Le schéma de la configuration est donné par la figure 1.11. Pour caractériser cette configuration, on construit les nombres sans dimension à l'aide de la vitesse maximale initiale V_T d'un tourbillon, du diamètre initial de la bulle D_0 et de la température du liquide sous-refroidi T_b :

$$\mathrm{Re} = 300 \quad \mathrm{We} = 15 \quad \mathrm{Fr} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ja} = -1 \tag{1.40}$$

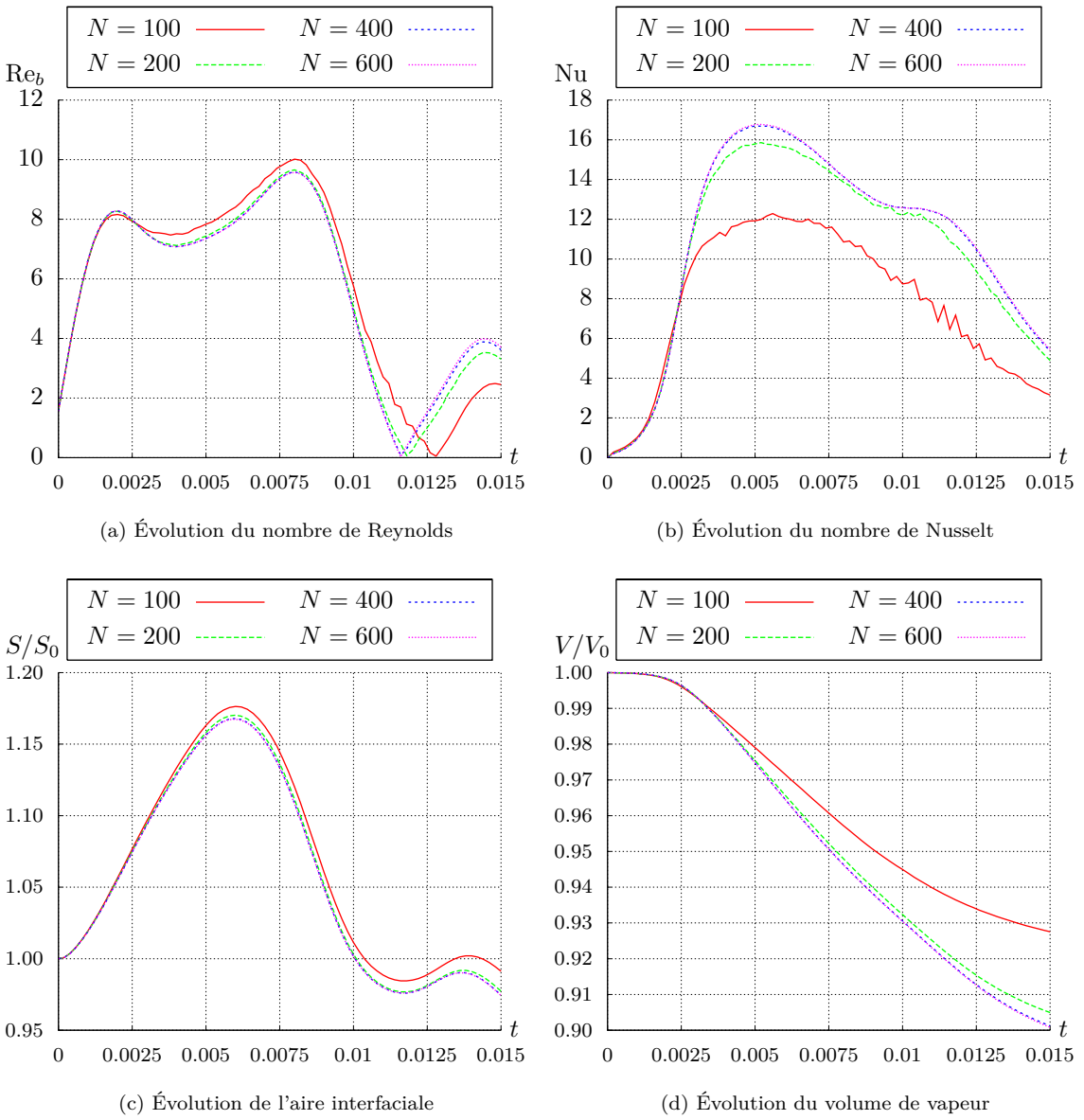


(a) Schéma des tourbillons contra-rotatifs.

(b) Illustration ($N_x = 282$)

FIGURE 1.11 – Description de la configuration d'interaction de tourbillons contra-rotatifs.

La convergence de la solution est évaluée par des simulations de plus en plus fines. La figure 1.12 présente l'influence de la résolution spatiale sur la solution pour les grandeurs globales caractéristiques que sont le nombre de Reynolds de bulle, le nombre de Nusselt, l'aire interfaciale et le volume de la phase vapeur. En appliquant la méthodologie présentée dans la section 1.3.2 au nombre de Reynolds à l'instant $t = 8\ 10^{-3}$ s, on obtient une décroissance logarithmique de l'erreur (Fig. 1.13) bien corrélée à l'expression : $\mathcal{E}_{\mathrm{Re}} = 1.14\ 10^4 N^{-2.33}$. Cette loi permet d'évaluer le nombre de Reynolds pour un maillage convergé à $\mathrm{Re}(\infty) = 9.568$. Un maillage comprenant 282 mailles dans la direction horizontale permet donc d'atteindre une précision de 5%. La solution correspondante est représentée sur la figure 1.11b. Pour cette configuration où la courbure locale peut être assez importante, cela correspond à 140 mailles/diamètre de bulle moyen. Rapporté au maximum de courbure locale ($R_{\min} = 0.35mm$) plutôt qu'au diamètre de bulle moyen, cela correspond à 33 mailles/diamètre. Ce dernier critère semble être un indicateur de convergence plus universel que le diamètre moyen car il prend en compte les déformations locales de l'interface. Pour les tests *a priori*, les filtrages explicites de la solution sont conduits sur des maillages comprenant plus de 282 mailles dans la direction horizontale.



(a) Évolution du nombre de Reynolds

(b) Évolution du nombre de Nusselt

(c) Évolution de l'aire interfaciale

(d) Évolution du volume de vapeur

FIGURE 1.12 – Étude de convergence : tourbillons contra-rotatifs – Évolution temporelle des nombres adimensionnels.

1.3.6 Interaction entre une bulle et de la Turbulence Homogène Isotrope

Dans les écoulements diphasiques industriels, les fluctuations de vitesse et de température résultent de la combinaison de deux phénomènes : (i) la turbulence du liquide d'une part qui serait aussi présente dans un écoulement monophasique et (ii) l'agitation diphasique induite par le sillage des bulles appelée par opposition *pseudo-turbulence*. Dans cette première approche, on s'intéresse uniquement à la première origine afin de limiter le coût de la simulation. Nous allons simuler la condensation d'une bulle de vapeur dans un écoulement turbulent homogène et isotrope (THI) ; à titre d'exemple, la THI peut être générée en pratique par un écoulement traversant une grille. Cette configuration doit permettre de tester nos modèles sous-maille dans une configuration où la turbulence monophasique est forte. Malheureusement, les moyens de calculs actuels ne permettent pas encore d'accéder à des simulations numériques directes d'écoulements multi-bulles totalement turbulents.

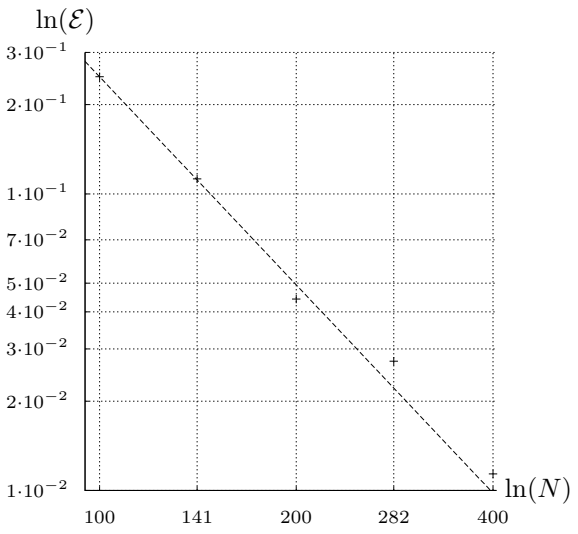


FIGURE 1.13 – Convergence en maillage : $\mathcal{E} = 1.14\ 10^4 N^{-2.33}$

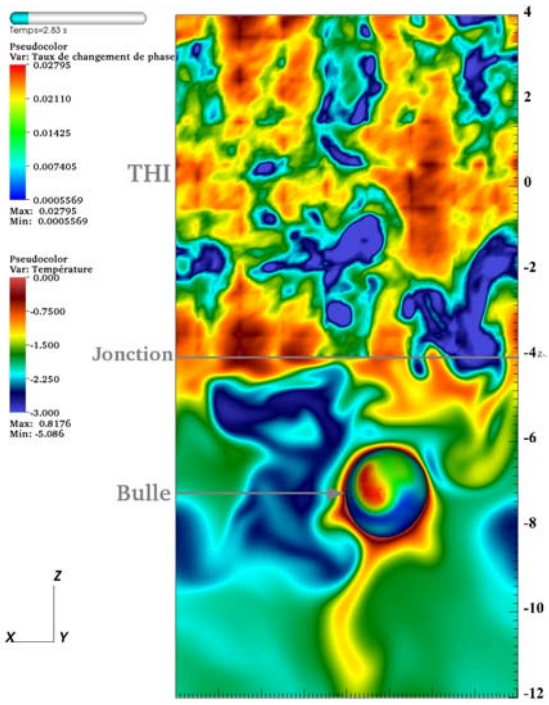
Description de la configuration

On considère deux domaines de simulation couplés. Dans le premier domaine s_1, nous laissons mûrir une Turbulence Homogène et Isotrope (THI). Pour développer des fluctuations de vitesse, un terme source permet de forcer le bilan de quantité de mouvement pour conserver une énergie cinétique totale constante. Cette méthode d'entretien, développée et validée par Toutant (2006), est rappelée au paragraphe suivant.

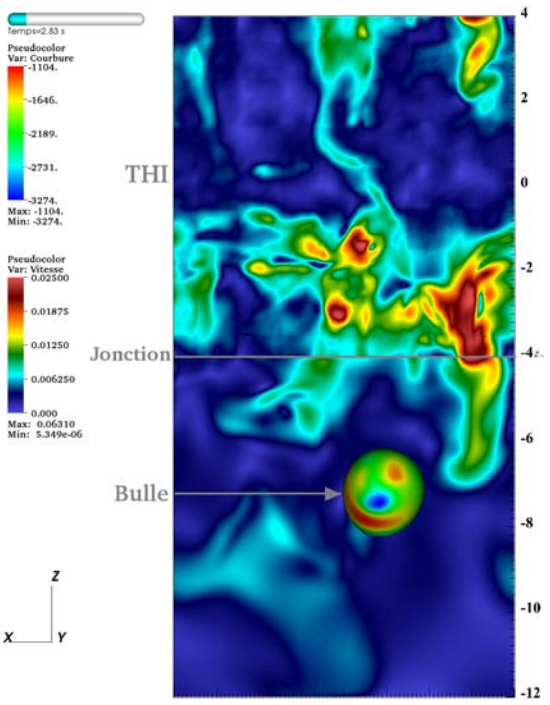
Le domaine s_1 est utilisé comme condition d'entrée du liquide dans le second domaine s_2. Une vitesse de translation est alors ajoutée à la jonction des deux domaines. Dans ce domaine s_2, une bulle de vapeur entame son ascension sous l'effet de la gravité et entre alors en contact avec le liquide turbulent sous-refroidi. Des déformations interfaciales et de la condensation s'ensuivent (Fig. 1.14).

En ce qui concerne la température, l'objectif est de se rapprocher des fluctuations de température réelles rencontrées dans un écoulement diphasique. Dans un écoulement typique de canal, celles-ci sont créées à la fois par le flux pariétal et par la condition de saturation aux interfaces avoisinantes. Néanmoins, sous l'effet de la diffusion, la température du domaine s_1 (représentant l'écoulement au cœur d'une canalisation) tend à s'uniformiser vers une valeur moyenne constante ΔT_{sub} que l'on choisit sous-refroidie. Pour enrichir cette simulation et se rapprocher d'un champ réaliste, il nous semble intéressant de forcer la présence de fluctuations de température et ainsi mimer les fluctuations engendrées par le sillage d'autres bulles. Cependant on ne connaît ni leurs caractéristiques, ni leur cohérence avec les fluctuations de vitesse. Cette problématique est, à notre connaissance, nouvelle. Plusieurs scénarii sont envisageables :

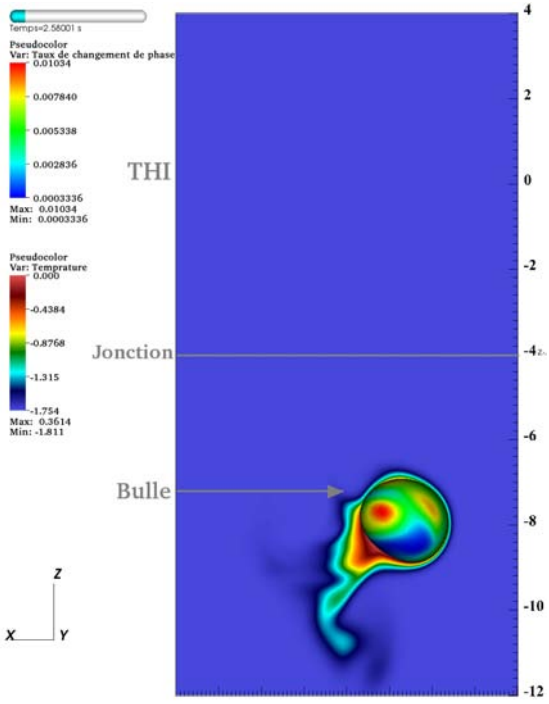
- Un forçage artificiel des fluctuations de température identique à la méthode utilisée pour les fluctuations de vitesse peut être envisagé. Cette correction anti-diffusive est attrayante *a priori* puisqu'elle permet de conserver l'analogie vitesse/température. Il est difficile d'interpréter physiquement les fluctuations ainsi obtenues.
- Un autre scénario consiste à imposer à l'entrée du second domaine une température proche de la température de saturation dans certaines zones visant à représenter le sillage de bulles précédentes et une température beaucoup plus faible dans les autres régions. Dans ce cas, la faible distance séparant le haut du domaine de la bulle ne laisse que peu de temps aux structures turbulentes pour venir casser ces sillages à saturation. Le nombre de Prandtl de l'eau pressurisée étant voisin de l'unité, cette approximation peut être assez réaliste si le taux de vide est important et que la turbulence est faible. Ce cas sera donc plutôt envisagé à la section 1.3.7.
- Le dernier scénario envisageable consiste à positionner initialement de fortes différences de



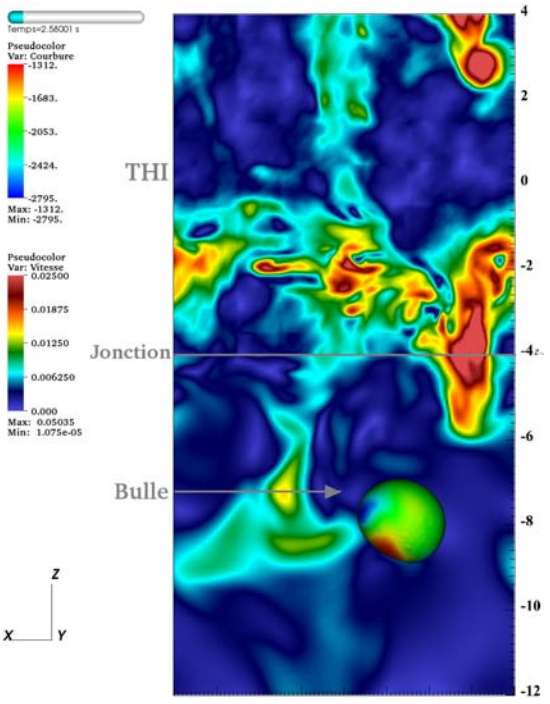
(a) Champ de température et taux de changement de phase (fluctuations de température entretenues).



(b) Champ de vitesse et courbure de l'interface (fluctuations de température entretenues).



(c) Champ de température et taux de changement de phase (température uniforme à l'entrée de s_2).



(d) Champ de vitesse et courbure de l'interface (température uniforme à l'entrée de s_2).

FIGURE 1.14 – Illustration de l'interaction bulle/turbulence de grille.

température dans la boîte de recirculation et à les laisser diffuser librement. Cette solution est voisine de la première proposition. Elle n'est pas beaucoup plus proche de la réalité puisque la condition initiale (choisie au hasard) a une grande influence. L'inconvénient de cette méthode est de ne pas permettre de choisir facilement l'écart-type imposé à la température liquide car les fluctuations décroissent dans le temps.

Finalement, pour disposer d'un critère de choix, il faudrait connaître la distance moyenne séparant les bulles. Dans un cas, on suppose les bulles suffisamment proches les unes des autres pour que la diffusion de la température soit négligeable. Dans l'autre cas, on suppose les fluctuations de température plutôt monophasiques, en supposant que leurs origines diverses ont été effacées par l'agitation de l'écoulement. En l'absence de données, nous avons choisi de réaliser deux simulations : une première avec un forçage artificiel des fluctuations par une méthode anti-diffusive et une seconde avec une température initialement uniforme ; les fluctuations de température sont alors uniquement liées au champ de vitesse turbulent qui perturbe la couche limite autour de la bulle.

Dimensionnement

Afin de bénéficier de l'expertise acquise jusqu'à présent et de pouvoir comparer aisément les différentes simulations, nous avons décidé de conserver le même diamètre de bulle initial $D_0 = 2\,\mathrm{mm}$ et la même constante gravitationnelle $g = 5\ 10^{-3}\,\mathrm{m.s^{-2}}$ que dans les études précédentes. La turbulence du liquide donne à la bulle un mouvement brownien non prédictible. Pour la conserver dans le domaine de simulation suffisamment longtemps, prenons un domaine 4 fois plus grand que la bulle, *i. e.*, $l_0 = 8\,\mathrm{mm}$. Cette contrainte permet de conserver une distance raisonnable entre la bulle et les conditions d'entrée/sortie du domaine. Les moyens de calcul actuels permettent d'envisager une résolution de $N = 256$ mailles par direction spatiale. À partir de ces données, on détermine le pas du maillage eulérien $\Delta = l_0/N = 3.125\ 10^{-5}\,\mathrm{m}$ et l'échelle de Batchelor $\eta_B = 2\Delta = 6.25\ 10^{-5}\,\mathrm{m}$ correspondant à la plus petite échelle thermique pouvant être capturée par ce maillage. Cette échelle est reliée à l'échelle de Kolmogorov par la relation : $\eta = \mathrm{Pr}^{1/2}\,\eta_B = 7.588\ 10^{-5}\,\mathrm{m}$.

En supposant l'isotropie et l'équilibre entre les petites et les grandes échelles, l'échelle de Kolmogorov η est donnée par

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{1.41}$$

où ϵ est le taux de dissipation visqueuse par unité de masse. Il est relié à la longueur caractéristique des grandes échelles l_0 et à la vitesse caractéristique $V = \sqrt{e_{c0}}$ par une analyse dimensionnelle :

$$\epsilon = \frac{V^3}{l_0} = \frac{e_{c0}^{3/2}}{l_0} \tag{1.42}$$

L'énergie cinétique injectée et la vitesse caractéristique des fluctuations sont alors données par :

$$e_{c0} = \nu^2 \left(\frac{l_0}{\eta^4}\right)^{2/3} = 5\ 10^{-5} m^2.s^{-2} \text{ et } u_0 = \sqrt{e_{c0}} = 7\ 10^{-3} m.s^{-1} \tag{1.43}$$

Le spectre de densité massique d'énergie cinétique moyenne est défini par :

$$E(k,t) = \frac{1}{2}\int_{\|\boldsymbol{k}\|=k} \left\langle u_i(\boldsymbol{k}^0,t) u_i(\boldsymbol{k}^0+\boldsymbol{k},t)\right\rangle dS(\boldsymbol{k}) \quad \text{(somme sur } i\text{)} \tag{1.44}$$

Pour une turbulence homogène isotrope, ce spectre présente une zone inertielle définie par :

$$E(k,t) = K_0 \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \tag{1.45}$$

où $K_0 = 1.5$ est la constante de Kolmogorov (Sagaut, 2003, p. 262). En raison du forçage de l'énergie cinétique, le spectre $E(k,t)$ est indépendant du temps. La figure 1.15 montre un bon accord de ce spectre avec la théorie.

Enfin, d'après l'étude de convergence menée pour une bulle unique, nous avons établi à 38 le nombre de mailles minimum par diamètre. Par conséquent, le maillage permet de résoudre précisément les courbures inférieures à $\kappa_{max} = 4/D_{min} = 3368\,\mathrm{m^{-1}}$. Cette dernière relation fournit

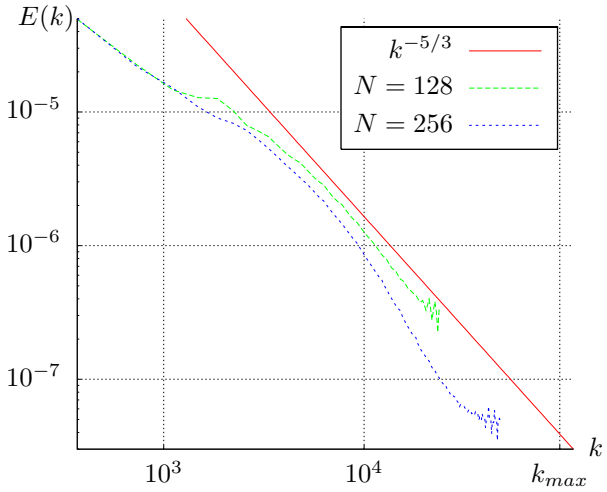


FIGURE 1.15 – Spectres d'énergie de la THI entretenue.

un critère local permettant de vérifier la validité de la simulation. Pour exploiter au maximum les potentialités du calcul, nous avons déterminé la valeur de la tension de surface $\sigma = 3.79\ 10^{-5} J.m^{-2}$ permettant de se rapprocher de ce critère (*i. e.,* 100 fois inférieure à la tension de surface réelle).

Cette configuration permet d'observer l'interaction d'une bulle avec de petites structures turbulentes. La taille des plus grandes structures, appelée *échelle intégrale* est limitée par la taille du domaine de simulation. Cela ne constitue pas une réelle limitation dans ce cas puisque les structures nettement plus grandes que la bulle ont un effet de convection global ; elles n'affectent pas les termes sous-maille que l'on souhaite ici mesurer et modéliser puisque ceux-ci traduisent par nature l'effet des échelles plus petites que le filtre.

La simulation comporte 3 étapes :

(i) La transition de la THI vers un état turbulent homogène et isotrope. Le temps caractéristique de cette étape est le temps de retournement des gros tourbillons défini par $t_r = l_0/u_0$; pour atteindre une cascade énergétique établie en $k^{-5/3}$, il faut attendre 15 à 20 t_r ; en pratique, la transition est détectée grâce à la chute brutale du pas de temps (en réponse à l'augmentation des fluctuations de vitesse) puis elle est vérifiée sur le spectre d'énergie (Fig 1.15).

(ii) Ensuite, cette THI entretenue est couplée avec le domaine s_2 dans lequel se trouve une bulle, initialement au repos. D'après l'expertise des simulations précédentes, la mise en régime thermique et dynamique pendant laquelle la bulle accélère est d'environ $t_{acc} = 1.75\,\mathrm{s}$. Cette durée est à comparer au temps de traversée du domaine $t_{tr} = l_0/V_t$ où V_t est la vitesse de translation du repère correspondant à la vitesse "terminale" de la bulle estimée à partir des simulations précédentes à $V_t = 3.3\,\mathrm{mm.s^{-1}}$. En raison des déformations engendrées par les structures tourbillonnaires, nous avons constaté qu'un repère mobile se déplaçant à $V_t = 2\,\mathrm{mm.s^{-1}}$ est optimal pour conserver la bulle dans le domaine de simulation. La différence entre ces deux vitesses s'explique par la présence d'une grosse structure turbulente à l'instant choisi qui ralentit la montée de la bulle. Le facteur limitant est donc la durée de la traversée du domaine : $t_{tr} = 4\,\mathrm{s}$. Un régime exploitable est atteint dès 2.75 s car la bulle se situe à mi-hauteur du domaine.

(iii) Enfin, la dernière période de simulation (entre 2.75 et 3.5 s) permet de mesurer les termes sous-maille et d'évaluer les modèles.

Cette simulation est délicate car après une phase d'accélération, la bulle ralentit suite à la condensation. La turbulence étant en décroissance libre dans le second domaine, elle ne provoque des déformations intéressantes que dans une zone (plus ou moins) limitée. Dans les directions orthogonales à l'écoulement moyen, la bulle suit un mouvement brownien ce qui signifie que la moyenne quadratique de son centre de gravité évolue comme la racine carré du temps : $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{6 D_t t}$ où D_t est un coefficient de diffusion turbulente. Les paramètres de la simulation sont synthétisés dans le tableau 1.2.

Nombre de mailles	N	256
Fréquence de coupure	$k_{max} = \sqrt{2}N2\pi/(3l_0)$	95 10^3 m^{-1}
Longueur de coupure	$1/k_{max}$	1.055 10^{-5} m
Échelle de Kolmogorov	η	7.588 10^{-5} m
Échelle de Batchelor	η_B	6.25 10^{-5} m
Nombre de Reynolds turbulent	$\mathrm{Re}_t = u_0 l_0/\nu$	494
Nombre de Reynolds de bulle	$\mathrm{Re}_b = V_t D_b/\nu$	≈ 53
Nombre de Weber	$\mathrm{We} = \rho_l e_c D_b/\sigma$	$\mathrm{We} = 1.52$

TABLE 1.2 – Paramètres de la simulation THI.

Description du forçage

Soit $\langle\cdot\rangle$ l'opérateur de moyenne sur le volume $\mathcal{V}$ du domaine de calcul s_1.

Les fluctuations de vitesse sont entretenues artificiellement par un terme source évalué dans l'espace physique. À la fin de chaque pas de temps, la vitesse $\boldsymbol{u}^*$ évaluée par la résolution des équations de Navier-Stokes est transformée en fluctuations :

$$\boldsymbol{u}' \hat{=} \boldsymbol{u}^* - \langle \boldsymbol{u}^* \rangle \tag{1.46}$$

Ces fluctuations de vitesse sont ensuite corrigées pour obtenir la vitesse à l'instant t_{n+1}

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}' \sqrt{\frac{e_c^0}{e_c}} \quad \text{avec} \quad e_c = \int_{\mathcal{V}} \| \boldsymbol{u}' \|^2 \, d\nu \tag{1.47}$$

où e_c^0 est la valeur de l'énergie cinétique à maintenir. Dans l'espace spectral, ce forçage modifie les plus basses fréquences. Il est responsable de la forme constatée sur la figure (1.15) pour le début du spectre.

De même pour la température, la solution T^* obtenue par la résolution du bilan d'énergie tend naturellement vers un champ uniforme égal à $\Delta T_{sub} = \langle T^* \rangle$ sous l'effet de la diffusion. Pour entretenir les fluctuations, le forçage suivant est utilisé

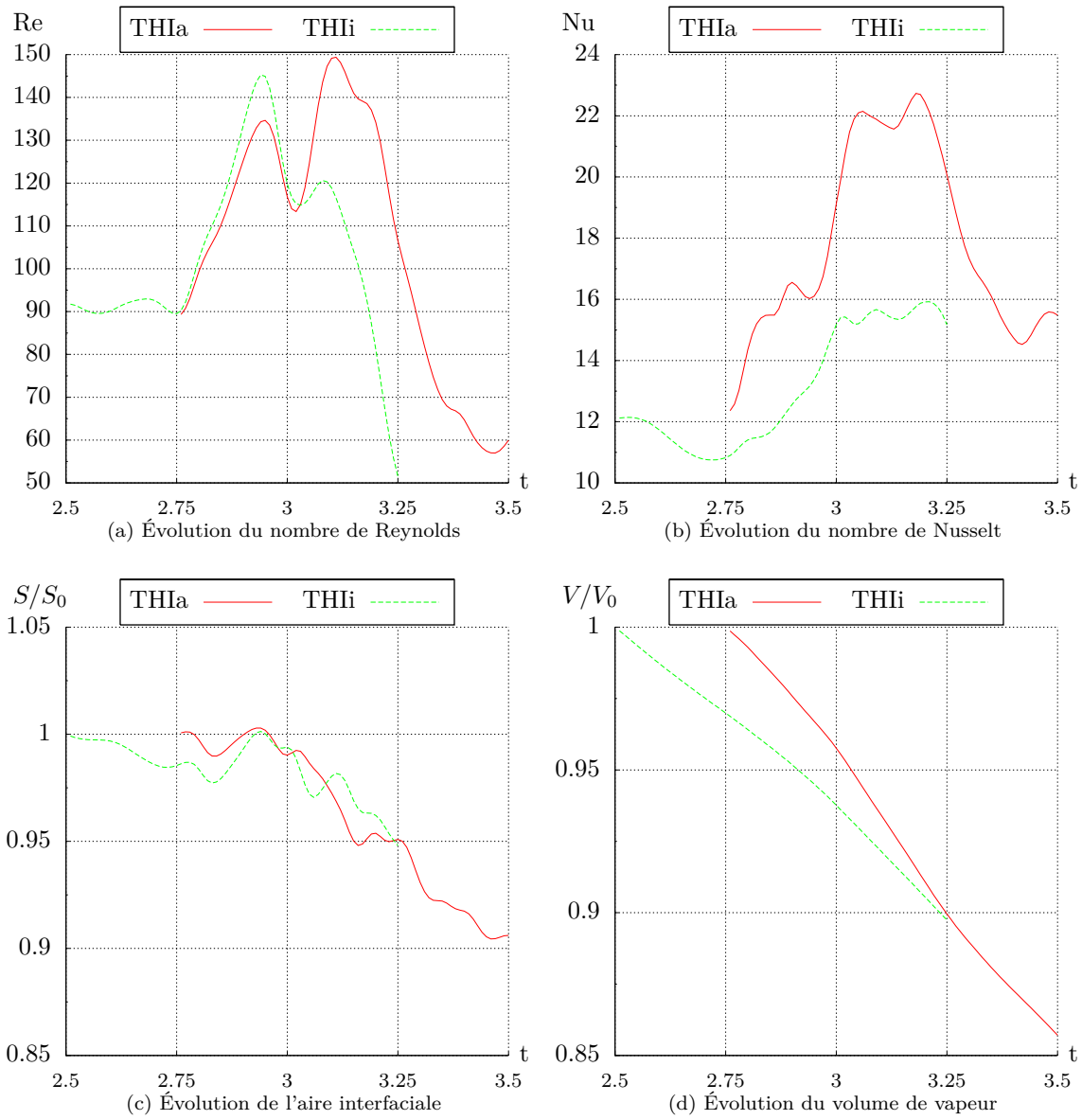
$$T^{n+1} = \Delta T_{sub} + T'^* \frac{\sigma_T^0}{\sigma_T^*} \quad \text{avec} \quad \sigma_T^* = \sqrt{\int_{\mathcal{V}} \| T'^* \|^2 \, d\nu} \tag{1.48}$$

où $T'^* = T^* - \langle T^* \rangle$ est la fluctuation de température et σ_T^0 est l'écart-type imposé à la température.

Ce forçage n'affecte pas la condition de saturation des interfaces car il est basé sur le sous-refroidissement. La conductivité apparente est quant à elle légèrement modifiée.

Résultats

La figure 1.16 permet d'observer les fluctuations caractéristiques d'un écoulement turbulent. Les propriétés de l'eau pressurisée utilisées sont données au tableau 1.1. La gravité est réduite à $g = 5\ 10^{-3}$ m.s^{-2} pour limiter la vitesse de montée de bulle. La tension de surface est réduite à $\sigma = 3.79\ 10^{-5}$ J.m^{-2} pour favoriser les déformations. Cette valeur est plus faible que celle utilisée pour l'ascension de la bulle ellipsoïdale ($\sigma = 6\ 10^{-6}$ J.m^{-2}) car les fluctuations de vitesse induisent de plus grandes déformations. Le sous-refroidissement moyen imposé est $\Delta T_{sub} = -1.75$ K. Ces paramètres permettent une comparaison aisée avec l'ascension de la bulle ellipsoïdale dans un écoulement laminaire. Les différences constatées entre les figures 1.16 et 1.9 peuvent être attribuées à la turbulence. En raison des fortes fluctuations de vitesse, le nombre de Reynolds de bulle ($\mathrm{Re} = \mathcal{O}(100)$) est plus important que celui estimé à partir de la vitesse de translation "moyenne" de la bulle V_t (Tab. 1.2). Ces fluctuations de vitesse réduisent la couche limite thermique, en particulier en aval de la bulle. En effet, les figures 1.14a et 1.14c montrent que le sillage de la bulle



(a) Évolution du nombre de Reynolds

(b) Évolution du nombre de Nusselt

(c) Évolution de l'aire interfaciale

(d) Évolution du volume de vapeur

FIGURE 1.16 – Interaction bulle/turbulence de grille : comparaison des résultats pour les deux stimulations thermiques : fluctuations de température entretenues (THIa) et température uniforme à l'entrée de s_2 (THIi).

est rapidement détruit alors que, pour l'écoulement laminaire, un sillage important se développe en aval de la bulle (Fig. 1.7b). Il en résulte une augmentation des transferts thermiques comme le montrent les valeurs du nombre de Nusselt importantes obtenues à la figure 1.16b comparées à celles de la figure 1.9b pour la configuration laminaire. Pour la configuration anisotherme à l'entrée du domaine s_2, les transferts sont encore plus importants car la température minimale est plus faible pour un même sous-refroidissement moyen ΔT_{sub}.

À la réduction de la couche limite s'ajoute des déformations interfaciales importantes sous l'effet de l'agitation du liquide (Fig. 1.16c). L'aire interfaciale est augmentée par rapport à la configuration laminaire ce qui augmente le taux de transfert de masse total. Ces deux effets combinés provoquent une diminution rapide du volume de vapeur. Elle est encore plus rapide pour la configuration où les fluctuations de température sont entretenues car le nombre de Nusselt est alors plus élevé.

1.3.7 Pseudo-turbulence diphasique : interactions de bulles dans une colonne de liquide sous-refroidi

Cette configuration a été imaginée et spécifiée avec pour objectif principal d'évaluer, sur un écoulement complexe, les termes sous-maille et les modèles proposés au chapitre 2 par filtrage explicite de la solution locale (fournie par la SND). Par conséquent, le choix de la configuration résulte d'un équilibre entre complexité et faisabilité. En outre, cette application est valorisée à la section 1.4 par une démonstration de la démarche multi-échelle appliquée au passage de simulations locales vers des études moyennées, en dépassant ainsi le cadre de la modélisation ISS.

En complément de l'étude précédente, l'objectif est d'étudier l'interaction pseudo-turbulente entre des bulles de vapeur déformables sous l'effet de la gravité. Le liquide environnant, initialement au repos, est sous-refroidi. La turbulence monophasique n'est pas considérée pour limiter le coût de calcul. Elle fait l'objet de l'étude présentée à la section 1.3.6.

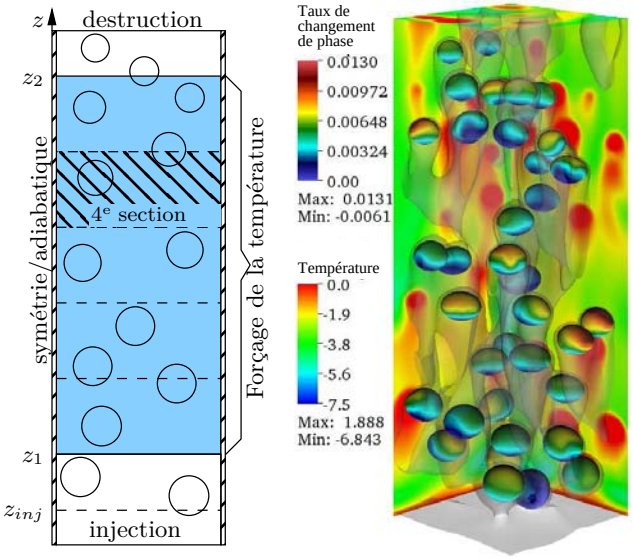


FIGURE 1.17 – SND de la condensation de bulles dans un écoulement pseudo-turbulent.

Description de la configuration

Des bulles monodisperses, de diamètre initial $D_{bo} = 2.3\,\mathrm{mm}$, sont injectées au bas d'une colonne de section carrée dans du liquide initialement au repos. Elles se mettent en mouvement sous l'effet de la gravité et sont détruites lorsqu'elles atteignent le haut du domaine de simulation (Fig. 1.17). La position horizontale de l'injection est arbitraire et la fréquence d'injection (38.5kHz.m^{-2}) est adaptée pour maintenir un taux de vide relativement faible $4\% \leq \alpha \leq 7.5\%$, ce qui permet de limiter les phénomènes de coalescence.

La taille de la colonne est limitée par le coût de calcul à une largeur de $5D_b$ et à une hauteur de $15D_b$ ($10 \times 10 \times 30\,\mathrm{mm}^3$). Des conditions adiabatiques et de symétrie sont appliquées aux frontières latérales du domaine pour représenter la condensation au cœur d'un écoulement. La température de saturation est imposée en bas de la colonne. Au sommet de la colonne, une condition de sortie libre permet les recirculations. La température du fluide entrant est alors supposée égale à la température moyenne du liquide sur la portion centrale de la colonne $T - T^{\mathrm{sat}} = -1.7524\,\mathrm{K}$. On vérifie *a posteriori* que cette température de réentrée du liquide ainsi que l'injection et la destruction de bulles sont suffisamment éloignées de la zone centrale de la colonne (domaine bleu, Fig. 1.17) pour ne pas influencer les caractéristiques de l'écoulement analysées par la suite.

Le nombre de Reynolds de bulle est limité à $\mathrm{Re} \approx 50$ en réduisant l'intensité de la gravité à $g = 5\ 10^{-3}\,\mathrm{m.s}^{-2}$, afin de faciliter la résolution des couches limites thermique et dynamique aux interfaces. La tension de surface est aussi réduite comparativement aux données standard pour

l'eau pressurisée à saturation ($p = 15.5$ MPa) afin de compenser le faible glissement entre le liquide et la vapeur : $\sigma = 6\ 10^{-6}\,\mathrm{N.m^{-1}}$.

Du fait de l'injection d'un nombre de bulles limité, le taux de vide (ainsi que tous les autres signaux) fluctue légèrement à la fréquence de l'intermittence diphasique (*i. e.,* fréquence d'injection des bulles au bas de la colonne). Cette fréquence détermine la vitesse de convergence des signaux moyens et donc le temps physique à simuler. Un paramètre important est le produit de la fréquence d'injection par l'aire de la section formant la base de la colonne. L'aire de la section est un compromis entre :

(i) Une aire importante qui permet de réduire l'intermittence ; les signaux convergent alors rapidement et un effet d'essaim important conduit à de nombreuses structures pseudo-turbulentes.

(ii) Des limitations techniques associées au nombre de processeurs ; plus l'aire de la section est importante, plus le calcul doit être réparti sur un nombre de processeurs important.

En outre, pour une taille de bulle donnée (déterminée à partir de la résolution du maillage), la fréquence d'injection évolue comme le taux de vide. Le choix du taux de vide constitue alors un optimum entre les deux contraintes suivantes :

(i) Le taux de vide doit être élevé pour minimiser la durée nécessaire à la convergence des signaux et par conséquent la durée de la simulation ;

(ii) Le taux de vide doit rester suffisamment faible pour minimiser les phénomènes de coalescence difficiles à prédire avec les modèles actuels.

En pratique, des tests préliminaires ont conduit à un compromis convenable pour une période d'injection $T_{inj} = 0.26\,\mathrm{s}$ (pour une section carrée de côté 10 mm) et un taux de vide $\alpha \approx 7\%$. Le taux de coalescence moyen (défini comme le rapport entre le nombre de coalescences et le nombre de bulles injectées) estimé *a posteriori* est alors inférieur à 5%.

Les propriétés physiques de l'eau utilisées pour cette simulation sont celles du tableau 1.1. Les nombres de Reynolds, Weber, Froude, Prandtl et Jacob sont :

$$\mathrm{Re} = 50, \quad \mathrm{We} = 1.6, \quad \mathrm{Fr} = 0.92 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ja} = -0.1 \tag{1.49}$$

Détermination du terme source permettant d'atteindre un régime statistiquement stationnaire

Le coût de calcul limite la taille du domaine et par conséquent, le nombre de bulles à l'intérieur du domaine de simulation est restreint à 40. Des statistiques convergées ne peuvent pas être obtenues par une simple moyenne spatiale sur un échantillon aussi réduit et une moyenne spatio-temporelle doit donc être utilisée. Pour cela, un régime statistiquement stationnaire est recherché. Or, l'énergie libérée par la condensation réchauffe inexorablement le liquide et sa température moyenne tend vers la température de saturation. Le taux de changement de phase tend alors naturellement vers 0. Ainsi, le régime stationnaire atteint par ce système physique ne peut plus avoir de changement de phase. Or, un des objectifs finaux de la simulation est d'étudier la corrélation entre le taux de changement de phase et la vitesse de montée des bulles. Pour atteindre un régime stationnaire avec changement de phase, il est indispensable de maintenir artificiellement la température moyenne du liquide T_{bk} (pour *bulk*) constante en ajoutant un terme source artificiel à l'équation de bilan d'énergie. Nous avons choisi de répartir cette source (égale à la chaleur latente libérée par le changement de phase) proportionnellement au sous-refroidissement local du liquide. La détermination de cette source fait l'objet du paragraphe ci-dessous. Le sous-refroidissement moyen du liquide $T - T^{\mathrm{sat}} = -1.7524\,\mathrm{K}$ est déterminé pour conduire à une réduction du diamètre acceptable pour le maillage choisi. Le nombre de Jacob qui en découle appartient à la gamme réaliste des expériences.

Pour déterminer ce terme source, il est nécessaire de caractériser l'écoulement moyen. Pour simplifier l'analyse, on suppose que :

H1. le taux de changement de phase est uniforme ;

H2. la vitesse de la vapeur moyennée sur une section $\langle \boldsymbol{v}_v \rangle$ est uniforme suivant la direction axiale de l'écoulement.

Soit z la coordonnée axiale de la colonne. Les opérateurs $\langle\cdot\rangle$ et $\langle\cdot\rangle_k$ représentent respectivement la moyenne standard et la moyenne phasique sur la section de base de la colonne. Le taux de vide α est donné par : $\alpha \hat{=} \langle\chi_v\rangle$. Définissons la masse volumique, la vitesse moyenne et les enthalpies volumiques et massiques du mélange par :

$$\rho_m \hat{=} \alpha \langle\rho_v\rangle_v + (1-\alpha)\langle\rho_l\rangle_l \tag{1.50a}$$
$$\boldsymbol{G}_m \hat{=} \alpha \langle\rho_v \boldsymbol{v}_v\rangle_v + (1-\alpha)\langle\rho_l \boldsymbol{v}_l\rangle_l \tag{1.50b}$$
$$\rho_m h_m \hat{=} \alpha \langle\rho_v h_v\rangle_v + (1-\alpha)\langle\rho_l h_l\rangle_l \tag{1.50c}$$
$$\boldsymbol{G}_m h_m^+ \hat{=} \alpha \langle\rho_v \boldsymbol{v}_v h_v\rangle_v + (1-\alpha)\langle\rho_l \boldsymbol{v}_l h_l\rangle_l \tag{1.50d}$$

Les bilans de masse et d'énergie pour un écoulement moyenné dans une canalisation de section constante sont (Chabard, 2009)

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{G}_m}{\partial z} = 0 \tag{1.51a}$$
$$\frac{\partial \rho_m h_m}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{G}_m h_m^+}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} + q_{wall} + \frac{1}{A}\int_A \left(\dot{m}\mathcal{L}^{vap}\delta^i + S\right) da \tag{1.51b}$$

où A est l'aire de la section, q_{wall} le flux de chaleur surfacique dégagé par les parois et S la source volumique de puissance que l'on souhaite déterminer.

Afin de simuler l'écoulement au cœur d'une conduite, des conditions de symétrie et le caractère adiabatique sont imposées aux bords latéraux du domaine : $q_{wall} = 0$. La recherche d'une solution stationnaire pour l'écoulement conduit, d'après l'équation (1.51a) à une vitesse moyenne du mélange $\boldsymbol{G}_m$ uniforme dans la direction axiale. Puisque la condition à la limite basse est une paroi, ce débit moyen doit être nul : $\boldsymbol{G}_m = 0$. Sur le plan thermique, le problème se réduit à la détermination de la source volumique S (J.m^{-3}.s^{-1}) solution de l'équation (1.51b). Après simplification, on a pour un écoulement statistiquement stationnaire, de débit moyen nul :

$$\int_A \left(\dot{m}\mathcal{L}^{vap}\delta^i + S\right) da = 0 \tag{1.52}$$

En notant $a_i(z) \hat{=} \langle\delta^i\rangle$ l'aire interfaciale volumique et en supposant en première approximation un taux de changement de phase $\dot{m}$ uniforme [2], l'équation (1.52) devient :

$$\dot{m}\mathcal{L}^{vap} a_i(z) A + \int_A S da = 0 \tag{1.53}$$

La source S est appliquée uniquement à la phase liquide afin de maintenir l'énergie du liquide constante sur une portion comprise entre les coordonnées z_1 et z_2 (Fig. 1.17). On choisit de répartir l'énergie créée par la source (pendant un laps de temps dt) sur toute la phase liquide, proportionnellement à la variation de la température locale

$$S(z) \hat{=} \rho_l c_{pl} \frac{d\left(\chi_l (T_l(z) - T^{\text{sat}})\right)}{dt}(f-1) \tag{1.54}$$

où f est le coefficient de maintien du sous-refroidissement à déterminer.

En notant $\langle\cdot\rangle^h$ la moyenne entre les ordonnées z_1 et z_2 délimitant le domaine bleu de hauteur $h = z_2 - z_1$ (Fig. 1.17), l'équation (1.53) s'intègre pour donner :

$$\dot{m}\mathcal{L}^{vap}\langle a_i\rangle^h A(z_2 - z_1) + A(z_2 - z_1)\rho_l c_{pl}\left(\frac{d\langle\chi_l T_l\rangle^h}{dt} - T^{\text{sat}}\frac{d\langle\chi_l\rangle^h}{dt}\right)(f-1) = 0 \tag{1.55}$$

L'objectif de la source est de maintenir la température moyenne du liquide T_{bk} constante :

$$\langle\chi_l T_l\rangle^h = T_{bk}\langle\chi_l\rangle^h = T_{bk}\left(1 - \langle\alpha\rangle^h\right) \tag{1.56}$$

2. Il serait plus précis de le considérer proportionnel au sous-refroidissement local. Ce dernier évolue en fonction de la coordonnée axiale. En première approximation, un taux de changement de phase uniforme donne des résultats satisfaisants en vue de l'objectif de ce paragraphe.

Par conséquent, le facteur f est donné par la relation suivante :

$$f = 1 - \frac{\dot{m}\mathcal{L}^{vap}\left\langle a_i \right\rangle^h}{\rho_l c_{pl}\left(T_{bk} - T^{\text{sat}}\right)\dfrac{d\left\langle \alpha \right\rangle^h}{dt}} = 1 - \frac{\dot{m}\left\langle a_i \right\rangle^h}{\rho_l \dfrac{d\left\langle \alpha \right\rangle^h}{dt}}\frac{1}{\text{Ja}^*} \tag{1.57}$$

Cette expression traduit l'équilibre entre le taux de changement de phase et la variation temporelle du taux de vide. Si ces deux termes s'équilibrent, alors le facteur f est nul et il n'y a pas de source dans l'écoulement. Sinon, ce facteur permet de déterminer une source pour compenser ce déséquilibre et conserver la température moyenne du liquide T_{bk} constante. En pratique, la résolution classique du bilan d'énergie conduit à une température intermédiaire T^* qui est ensuite corrigée pour obtenir le champ de température à l'instant $n+1$:

$$T^{n+1} - T^{\text{sat}} = \left(T^* - T^{\text{sat}}\right)\frac{\Delta T_{sub}}{\left\langle T \right\rangle_l^h - T^{\text{sat}}} \tag{1.58}$$

où $\Delta T_{sub} = -1.7524\,\text{K}$ est le sous-refroidissement moyen imposé.

Évolution axiale théorique des grandeurs moyennes : Pour conclure cette analyse, les profils axiaux des grandeurs moyennes (r, a_i, α, T_{bk}) peuvent être déterminés. Pour cela, l'évolution temporelle du rayon r s'obtient par un bilan de masse à l'interface :

$$dV = -S(t)\frac{\dot{m}}{\rho_v}dt \tag{1.59}$$

En approchant les bulles par des sphères, on obtient

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\dot{m}}{\rho_v} \tag{1.60}$$

puis, par intégration :

$$r(t) = r_0 - \frac{\dot{m}}{\rho_v}t \tag{1.61}$$

En supposant la vitesse de la vapeur uniforme $z(t) = v_v t + z_0$, l'évolution du rayon en fonction de l'altitude est donnée par :

$$r(z) = r_0 - \frac{\dot{m}}{\rho_v}\frac{z - z_0}{v_v} \tag{1.62}$$

De cette relation, on déduit aisément le taux de vide et l'aire interfaciale à une altitude z donnée puisque le nombre volumique de bulles n est imposé et constant [3] :

$$a_i(z) = 4\pi n r^2(z) \tag{1.63a}$$

$$\alpha(z) = \frac{4}{3}\pi n r^3(z) \tag{1.63b}$$

On a en particulier :

$$\left\langle a_i \right\rangle = \frac{1}{z_2 - z_1}\int_{z_1}^{z_2} a_i(z)dz = \frac{4\pi n \rho_v v_v}{3\dot{m}(z_2 - z_1)}\left[\left(r_0 - \frac{\dot{m}}{\rho_v}\frac{z - z_0}{v_v}\right)^3\right]_{z_1}^{z_2} \tag{1.64a}$$

$$\alpha(z) = \frac{4}{3}\pi n\left(r_0 - \frac{\dot{m}}{\rho_v}\frac{z - z_0}{v_v}\right)^3 \tag{1.64b}$$

Application numérique : À partir du nombre de Reynolds extrait d'une simulation sous-résolue ou d'une corrélation (*e. g.,* à partir de la corrélation de Ranz et Marshall, 1952), on estime la vitesse et le nombre de Nusselt :

$$\text{Nu} = 2 + 0.6\text{Re}^{1/2}\text{Pr}^{1/3} \tag{1.65a}$$

$$\text{Nu} = \frac{\nabla T D}{(T_b - T^{\text{sat}})} = \frac{\dot{m}\mathcal{L}^{vap} D}{k_l(T_b - T^{\text{sat}})} \quad \Rightarrow \quad T_b = T^{\text{sat}} + f(\dot{m}, \text{Nu}) \tag{1.65b}$$

3. Le taux de vide de l'écoulement étant faible, la coalescence est faible et peut *a priori* être négligée en moyenne.

Ranz et Marshall (1952) obtiennent la relation (1.65a) pour une sphère solide. Le coefficient 0.6 est compris entre 0.55 et 0.7 d'après les données expérimentales.

D'après les tests de convergence menés sur l'ascension d'une bulle unique, on souhaite que le volume de la bulle reste supérieur à $0.5V_0$ pour que la résolution de la bulle reste raisonnable avec le maillage choisi. En prenant $r_0 = 1.15\,mm$ [4], le rayon en sortie de zone d'intérêt (*i. e.,* à l'altitude z_2) ne doit pas être inférieur à $r(z_2) = 0.91\,mm$ ce qui conduit, d'après la relation (1.62), à une valeur moyenne du taux de changement de phase :

$$\dot{m} = \frac{(r_0 - r)\rho_v v_v}{(z - z_0)} = 2.78\ 10^{-3}\,\mathrm{kg.m^2.s^{-1}} \tag{1.66}$$

Enfin, on en déduit le sous-refroidissement nécessaire et le nombre de Jacob de la simulation :

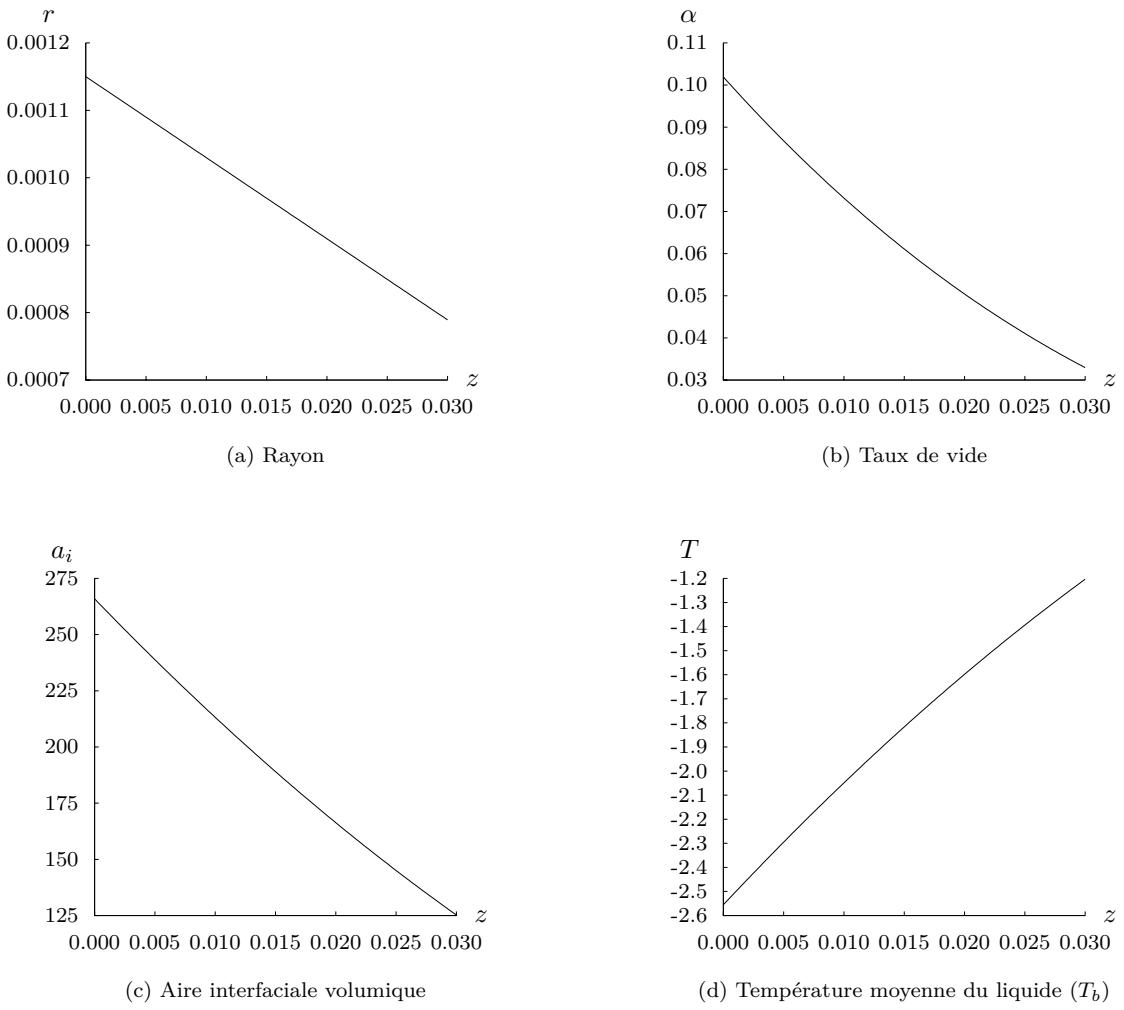
$$T_b - T^{\mathrm{sat}} = \frac{\dot{m}\mathcal{L}^{vap}D}{k_l \mathrm{Nu}} = -1.7524 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ja} = -0.1 \tag{1.67}$$

L'évolution théorique moyennée des différentes grandeurs en fonction de la coordonnée axiale est donnée sur la figure 1.18.

Quelques remarques

- À titre indicatif, sur l'expérience DEBORA (Manon, 2000), le nombre de Jacob moyen de la phase liquide est $\mathrm{Ja} = -0.52$. Le gradient de température au voisinage des interfaces est donc cinq fois plus important.
- Étant donné le signe du changement de phase, le sous-refroidissement est toujours corrigé par un facteur $f > 1$. Comme aucune bulle n'est injectée tout en bas de la colonne, il existe une zone pour laquelle le liquide n'est pas réchauffé par la condensation car la convection de la bulle domine la diffusion de la température. Les bulles ne perturbent donc pas le champ de température en dessous de $z_{inj} - R_b$. Par conséquent, le sous-refroidissement suit une loi du type $T^n - T^{\mathrm{sat}} = \left(T^0 - T^{\mathrm{sat}}\right) f^n$ où n est l'indice du pas de temps considéré. Ainsi, si la condition à la limite inférieure est adiabatique, alors la température dans le bas de la colonne diverge. Une zone froide va se répandre progressivement par conduction jusqu'à atteindre la zone d'injection. Les bulles injectées vont alors décroître très rapidement au moment de leur mise en mouvement. Le taux de vide ne peut pas se stabiliser plus haut dans la colonne et un régime stationnaire ne peut pas être atteint. Pour pallier ce problème, la condition à la limite en bas de colonne doit être une condition de température imposée. Pour qu'une telle condition ne pose pas de problème lors des corrections du champ de température et que le liquide reste légèrement sous-refroidi, il faut imposer la température de saturation à la paroi inférieure.
- Le haut de la colonne est une frontière ouverte par laquelle le fluide peut entrer et sortir librement. Nous avons vérifié sur les simulations qu'une température d'entrée sous-refroidie à $-1.7524K$ était tout à fait acceptable. L'effet sur le reste de la colonne n'est pas visible car il n'y a pas de convection moyenne. Les fluctuations engendrées restent localisées au haut de la colonne.
- D'après le test sur une bulle unique, une vitesse voisine de la vitesse maximale et une couche limite thermique établie sont atteintes après avoir parcouru $2.2mm$ en 1.2 s. Cela permet de déterminer la limite inférieure de la zone de moyenne en deçà de laquelle les données ne sont pas conservées/utilisées. En haut de la colonne, la destruction des bulles perturbe les champs de vitesse et de température. Le haut de la simulation n'est donc pas conservé pour l'analyse et seule la zone centrale représentée en bleu sur la figure 1.17 est conservée.
- L'analyse des moyennes glissantes permet de déterminer le temps de mise en régime de l'écoulement. Une durée de 100 s de calcul, correspondant à 10 fois le temps de traversée d'une bulle, est nécessaire à l'initialisation du calcul. Après ce régime transitoire, un écoulement statistiquement stationnaire est établi. La dynamique de l'écoulement s'établit très

4. On est limité pour la valeur supérieure du rayon initial pour ne pas avoir une période d'intermittence trop élevée, mais aussi pour être capables de créer un taux de vide sans qu'il y ait trop de coalescence. En effet, pour un taux de vide donné, la distance moyenne entre deux bulles décroit lorsque la taille des bulles augmente.



(a) Rayon

(b) Taux de vide

(c) Aire interfaciale volumique

(d) Température moyenne du liquide (T_b)

FIGURE 1.18 – Variations axiales théoriques pour la configuration multi-bulles.

rapidement (environ 10 s) alors que la température et par conséquent le nombre de Nusselt, atteignent leur équilibre plus lentement (après 50 s environ). L'utilisation d'un maillage grossier pour accélérer l'établissement du régime établi et ainsi optimiser le coût de calcul n'a pas donné des résultats satisfaisants. Les champs de température et de vitesse plus proches pour l'initialisation n'accélèrent pas la convergence vers le régime établi.

- Quelques bulles se font piéger dans des poches de liquide descendantes et mettent plus de temps pour traverser le domaine de simulation. La condensation est alors responsable d'une forte diminution du diamètre qui devient légèrement inférieur au critère de convergence choisi. Néanmoins, cette faible sous-résolution n'influence pas significativement les grandeurs moyennes étudiées.
- Les coalescences influencent légèrement le calcul alors qu'elles ne sont pas modélisées avec précision. Néanmoins, pour les réduire davantage, il faudrait diminuer le taux de vide, ce qui augmenterait le temps nécessaire à la convergence des moyennes. Le compromis choisi nous parait raisonnable.
- Comme a_i, le facteur f fluctue légèrement au cours du temps (Fig. 1.19). Ce facteur est très proche de l'unité. Des pics apparaissent lors des coalescences en raison d'erreurs de discrétisation de la température liquide $\chi_l T$ dans les mailles diphasiques. On estime la période moyenne entre ces coalescences à 5.8 s, ce qui correspond à 4.5% des bulles injectées. Ces événements isolés n'influencent pas significativement l'écoulement moyen.

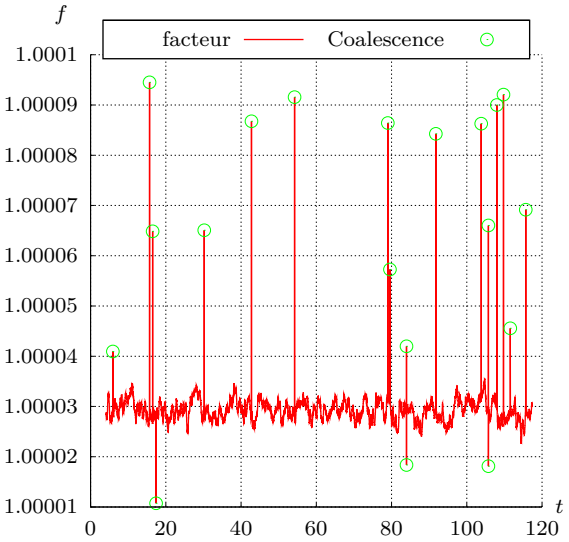


FIGURE 1.19 – Évolution temporelle du facteur de maintien de la température.

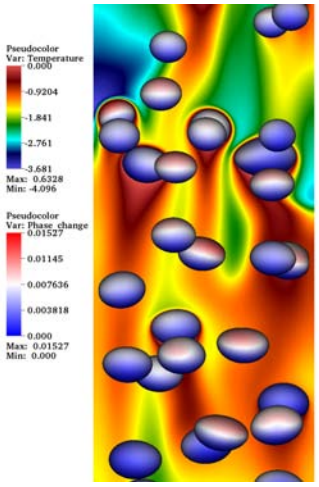


FIGURE 1.20 – Écoulement à bulles pseudo-turbulent : effet du sillage des bulles sur le champ de température et le taux de changement de phase.

Étude de la convergence en maillage

L'étude de convergence en maillage présentée pour une bulle unique ellipsoïdale à la section 1.3.4 est réalisée avec les mêmes données physiques que cette simulation. Pour cette bulle unique, nous avons déterminé un minimum de 38 nœuds par diamètre de bulle pour obtenir des données convergées sur une simulation de 1.68 s qui conduit à une diminution du diamètre d'un facteur 2. Ce résultat est extrapolé à la configuration multi-bulles en choisissant un maillage suffisamment fin pour assurer que le rayon de courbure local n'excède pas ce critère. Étant donné la complexité plus importante de cette configuration, ce maillage n'est *a priori* qu'une estimation. La convergence en maillage de la solution est donc aussi vérifiée *a posteriori* en comparant les grandeurs moyennées extraites de la SND (nombres de Reynolds et de Nusselt, taux de vide, aire interfaciale volumique...) avec les résultats obtenus pour deux maillages de résolution 2 et 4 fois inférieure respectivement (Fig. 1.24). La convergence est raisonnable. En évaluant le taux de convergence à partir des trois maillages considérés et de la procédure présentée à la section 1.3.2, l'incertitude sur le nombre de Nusselt est estimée à 3%. La figure 1.20 donne la solution instantanée obtenue sur le maillage le plus fin. La coupe du champ de température représentée illustre l'agitation pseudo-turbulente induite par les sillages de bulles. Ces sillages influencent à la fois le taux de changement de phase et l'aire interfaciale volumique *via* la forme des bulles. Cette simulation sur un maillage fin a été menée dans le cadre du projet GENCI (Grand Équipement National de Calcul Intensif), projet 2009-c2009026200. 700 000 hCPU réparties sur 1 536 processeurs ont permis d'obtenir la solution sur 41.5 10^6 nœuds. Chaque bulle est alors initialement discrétisée avec 48 nœuds par direction. Avec les paramètres choisis, une bulle traverse le domaine simulé en 10 s environ. 4 Go de données sont générées à chaque pas de temps post-traité.

Convergence temporelle des grandeurs moyennes

La période de moyenne T_m est déterminée *a posteriori*. La moyenne flottante au temps t du champ ϕ, notée $\langle\phi\rangle(t)$, est évaluée par différence des moyennes cumulées aux temps $t + T_m/2$ et $t - T_m/2$. Seule la moyenne cumulée doit donc être post-traitée lors du calcul. Cette méthodologie permet de comparer aisément différentes périodes pour trouver la période minimale donnant des résultats suffisamment convergés (à la précision souhaitée) comme l'illustre la figure 1.23.

Une période de 40 s est nécessaire et suffisante pour éliminer les fluctuations d'amplitude supérieure à 2%. La température moyenne présente des oscillations à plus basse fréquence qui semblent attribuables à un phénomène physique plus lent que l'intermittence diphasique : la mise en mouvement de grosses poches de liquide froid pour compenser l'entrainement de liquide plus chaud autour des bulles.

1.4 Changement d'échelle de la SND vers le 3D moyenné : une application coûteuse à la condensation de bulles

Dans une approche multi-échelle et dans la perspective de renseigner les modèles moyennés à deux fluides, l'objectif de cette section est d'évaluer la validité des corrélations entre le nombre de Reynolds et le nombre de Nusselt (*e. g.,* Ranz et Marshall, 1952) utilisées dans les modèles moyennés 3D, *e. g.,* Mimouni *et al.* (2009), Morel *et al.* (2010). Ces corrélations sont un fondement essentiel des codes composants comme Neptune_CFD. L'objectif est de démontrer le potentiel de la méthode pour transférer des informations d'une SND résolue d'un écoulement complexe vers l'échelle macroscopique et les simulations moyennées. L'évolution des quelques dizaines de bulles de la SND précédente génère des fluctuations de vitesse et de température réalistes. Dans la perspective d'évaluer les prédictions du terme puits de condensation dans les écoulements à bulles dans les codes moyennés, l'écoulement local est observé à plus grande échelle grâce à la prise d'une moyenne spatio-temporelle. Nous présentons tout d'abord quelques corrélations de référence issues de données expérimentales. Dans un deuxième temps, leur prédiction est comparée aux données des SND pour une bulle unique (section 1.4.2) et pour l'écoulement à bulles (section 1.4.3). En complément des données expérimentales, l'objectif est d'aider à la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents en éclaircissant l'influence d'autres paramètres (comme le taux de vide ou le sous-refroidissement). À plus long terme, cela devrait permettre de réduire les incertitudes et les écarts entre ces corrélations et d'optimiser la définition des expériences nécessaires.

1.4.1 Grandeurs moyennées : critères de comparaison

Pour ce premier exemple d'application de la méthodologie multi-échelle entre l'échelle locale instantanée et l'échelle moyennée 3D-locale (Fig. 3), nous avons décidé de nous intéresser au terme puits de condensation des modèles à deux fluides. Cette fermeture est essentielle puisqu'elle conditionne l'évolution du taux de vide et la vitesse de collapse des bulles dans du liquide sous-refroidi au cœur d'un écoulement en canal.

Chen et Mayinger (1992) montrent que pour une bulle unique, la condensation est entièrement contrôlée par les transferts thermiques pour les nombres de Jacob Ja < 80, ce qui est déjà bien au-delà des conditions réalistes pour l'eau pressurisée. Par conséquent, nous nous limitons au régime de condensation contrôlé par les transferts thermiques.

Notons $\langle\cdot\rangle$ l'opérateur de moyenne spatiale. Le taux de condensation moyen $\langle\dot{m}\rangle$ est représenté en termes de variables adimensionnelles par le nombre de Nusselt :

$$\mathrm{Nu} \hat{=} \frac{\langle\nabla T\rangle\, D_{32}}{(T_b - T^{\mathrm{sat}})} = \frac{\langle\dot{m}\rangle\, \mathcal{L}^{vap} D_{32}}{k_l (T_b - T^{\mathrm{sat}})} \tag{1.68}$$

où $T_b = \langle\chi_l T\rangle$ est la température moyenne conditionnelle de la phase liquide et $D_{32} \hat{=} 6\alpha/a_i$ est le diamètre moyen de Sauter défini par le rapport du taux de vide $\alpha = \langle\chi_v\rangle$ et de l'aire interfaciale volumique $a_i = \langle\delta^i\rangle$. Dans l'expression (1.68), nous supposons que la vapeur a atteint l'équilibre thermique depuis sa génération en paroi, c'est-à-dire une température de vapeur uniforme : $T_v = T^{\mathrm{sat}}$.

Les modèles à deux fluides reposent sur l'hypothèse que le taux de condensation moyen $\langle\dot{m}\rangle$ (représenté par le nombre de Nusselt) est corrélé à d'autres grandeurs moyennes, comme les nombres de Reynolds et de Jacob. Le taux de vide est parfois ajouté comme paramètre pour considérer l'effet collectif et l'influence d'un sillage sur les bulles qui le traversent. Dans la littérature, deux voies sont suivies (parfois conjointement) pour déterminer ces corrélations : Warrier *et al.* (2002) ou Park *et al.* (2007) développent des modèles mécaniques à partir d'observations expérimentales de phénomènes alors que Ruckenstein (1959) ou Dimić (1977) fondent leur analyse sur des considérations théoriques uniquement, en recherchant les caractéristiques de l'écoulement sous certaines hypothèses. Ils considèrent par exemple un écoulement potentiel ou laminaire autour d'un obstacle sphérique indéformable se déplaçant dans du liquide stagnant uniformément sous-refroidi. Les limitations de la première catégorie de travaux sont induites par la précision des données expérimentales et les limitations techniques pour mesurer des grandeurs interfaciales de manière non-intrusive, alors que les solutions analytiques ne fournissent qu'une représentation limitée de la réalité. Avec la SND, il

est possible d'accéder à la représentation locale et complète de l'écoulement dans des configurations relativement complexes.

Tout d'abord, présentons quelques références bibliographiques valides dans notre gamme d'application. Ces corrélations serviront de référence pour qualifier nos SND. Beaucoup d'investigations théoriques (*e. g.,* Ruckenstein, 1959) ont été conduites pour étudier la couche limite autour d'une sphère solide dans un écoulement irrotationnel ou sur des bulles isolées (Chen et Mayinger, 1992). Les modèles et les corrélations proposés sont en désaccord sur l'effet du nombre de Jacob sur le coefficient d'échange thermique en condensation. Alors que les premiers résultats de Isenberg et Sideman (1970), Ruckenstein (1959) et Akiyama (1973) montrent une indépendance du nombre de Nusselt au sous-refroidissement, Dimić (1977) trouve une augmentation du nombre de Nusselt avec le sous-refroidissement du liquide. Au contraire, le modèle de Chen et Mayinger (1992), Zeitoun *et al.* (1995) montre une tendance inverse.

Ruckenstein (1959) fut l'un des premiers à recommander de considérer l'effet multi-bulles. Zeitoun *et al.* (1995) proposent d'inclure l'effet du taux de vide sur le nombre de Nusselt alors que Warrier *et al.* (2002) concluent que le taux de vide a une influence négligeable (pour les faibles taux de vide $\alpha < 5\%$) devant l'effet du temps de résidence (considéré par l'intermédiaire du nombre de Fourier $\mathrm{Fo} = \alpha_l t / D_{bo}^2$ où D_{bo} est le diamètre initial des bulles ou diamètre de détachement). Une liste des modèles et corrélations considérés est donnée au tableau 1.3.

Table 1.3 – Modèles de condensation pour la détermination du nombre de Nusselt.

Auteur	Nombre de Nusselt
Ranz et Marshall	$\mathrm{Nu} = 2 + 0.6\,\mathrm{Re}^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}$
Ruckenstein	$\mathrm{Nu} = 2/\sqrt{\pi}\,(\mathrm{RePr})^{1/2}$
Isenberg et Sideman	$\mathrm{Nu} = 1/\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}$
Akiyama	$\mathrm{Nu} = 0.37\,\mathrm{Re}^{0.6}\mathrm{Pr}^{1/3}$
Dimić	$\mathrm{Nu} = 2/\sqrt{\pi}\,(\mathrm{RePr})^{1/2}\,\beta^{-1/2}$
	avec $\beta = [1 - 6/\sqrt{\pi}\mathrm{JaRe}_o^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/2}\,\mathrm{Fo}_o]^{2/3}$
Chen et Mayinger	$\mathrm{Nu} = 0.185\,\mathrm{Re}^{0.7}\mathrm{Pr}^{1/2}$
Zeitoun *et al.*	$\mathrm{Nu} = 2.04\,\mathrm{Re}^{0.61}\alpha^{0.328}\mathrm{Ja}^{-0.308}$
Warrier *et al.*	$\mathrm{Nu} = 0.6\mathrm{Re}^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}[1 - 1.2\mathrm{Ja}^{0.9}\mathrm{Fo}_o]^{2/3}$

En résumé, les expérimentateurs sont freinés par de nombreuses difficultés techniques pour comprendre les mécanismes interfaciaux dominants la condensation. La plupart des résultats sont donnés avec une incertitude de $\pm 20\%$ alors que les méthodes numériques permettent d'analyser l'écoulement sans le perturber.

1.4.2 Bulle unique

Dans un premier temps, on propose d'analyser le cas d'une bulle unique en ascension libre dans du liquide uniformément sous-refroidi (Fig. 1.7b). La figure 1.21 compare l'évolution temporelle effective du nombre de Nusselt déterminée sur la SND aux prédictions du tableau 1.3. Ces prédictions sont évaluées à partir des nombres de Reynolds, Jacob et Fourier mesurés sur la simulation numérique. Le début de la simulation ne doit pas être considéré puisqu'il correspond à l'établissement du régime de translation de la bulle et à l'établissement de la couche limite thermique. La corrélation de Zeitoun *et al.* (1995) n'est pas représentée sur la figure 1.21 car le taux de vide tend vers zéro pour une bulle unique. Il nous semble que la formulation choisie par Zeitoun *et al.* (1995) pour exprimer la dépendance du nombre de Nusselt au taux de vide n'est pas consistante puisqu'elle ne dégénère pas vers les corrélations standards établies pour une bulle unique quand le taux de vide tend vers zéro.

La simulation numérique est en bon accord avec les prédictions de Ruckenstein (1959) et Dimić (1977) alors que pour les autres corrélations nos résultats ne sont pas dans la gamme d'incertitude de $\pm 20\%$ donnée par la plupart des auteurs ; celles-ci sous-estiment le transfert de chaleur. La proximité de notre solution aux prédictions de Ruckenstein (1959) et Dimić (1977) permet de

confirmer la validité de notre méthode numérique car la configuration choisie est très proche de celle étudiée analytiquement par ces auteurs. Les légères différences peuvent être attribuées à la forme de la bulle.

Enfin, sur cette bulle unique, il est possible de corréler l'évolution des nombres de Nusselt et de Reynolds comme suit :

$$\mathrm{Nu}_u = 0.824\,\mathrm{Re}^{0.617} \tag{1.69}$$

où l'indice u (unique) indique que cette corrélation est valide pour une bulle isolée uniquement.

Dans cette première étape, nous avons établi la corrélation (1.69) pour prédire précisément l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds pour une bulle isolée. Dans l'étroite gamme de validité de cette relation, l'influence du nombre de Fourier (représentant le temps adimensionnel écoulé depuis le détachement de la bulle) ne semble pas significative. Nos résultats semblent indiquer que la décroissance des transferts thermiques induite par l'épaississement de la couche limite thermique comme le suggère Warrier *et al.* (2002) ne semble pas être un processus dominant. En effet, la figure 1.22 montre que les transferts thermiques sont identiques à la fin de la phase d'accélération (de Re $\approx$ 48 à Re $\approx$ 52) et pendant la décroissance qui suit (de Re $\approx$ 52 à Re $\approx$ 48). Puisque cette corrélation (1.69) est déterminée dans des conditions très proches de l'écoulement multi-bulles, elle sert comme référence pour quantifier l'influence des sillages et du taux de vide.

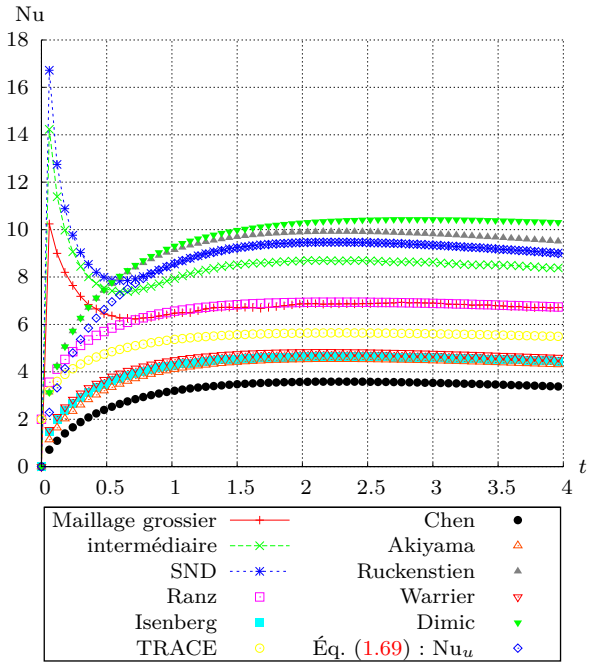


FIGURE 1.21 – Écoulement laminaire autour d'une bulle ellipsoïdale – Corrélation entre les nombres de Reynolds et de Nusselt. Convergence en maillage et comparaison aux corrélations expérimentales issues de la littérature.

1.4.3 Multibulles

Le grand avantage de la simulation numérique sur l'expérience est la reproductibilité des paramètres extérieurs et physiques. De plus, il est aisé d'augmenter le nombre de bulles pour obtenir un écoulement complexe. Seul le coût de la simulation est affecté. Les paramètres extérieurs peuvent aisément être conservés. La SND présentée ci-dessus en est l'illustration. L'écoulement est statistiquement stationnaire et on suppose l'invariance des grandeurs moyennes dans les directions orthogonales à l'écoulement principal d'après les conditions de symétrie aux bords latéraux du domaine. Les moyennes convergées sont obtenues par prise de moyenne du champ local issu de la

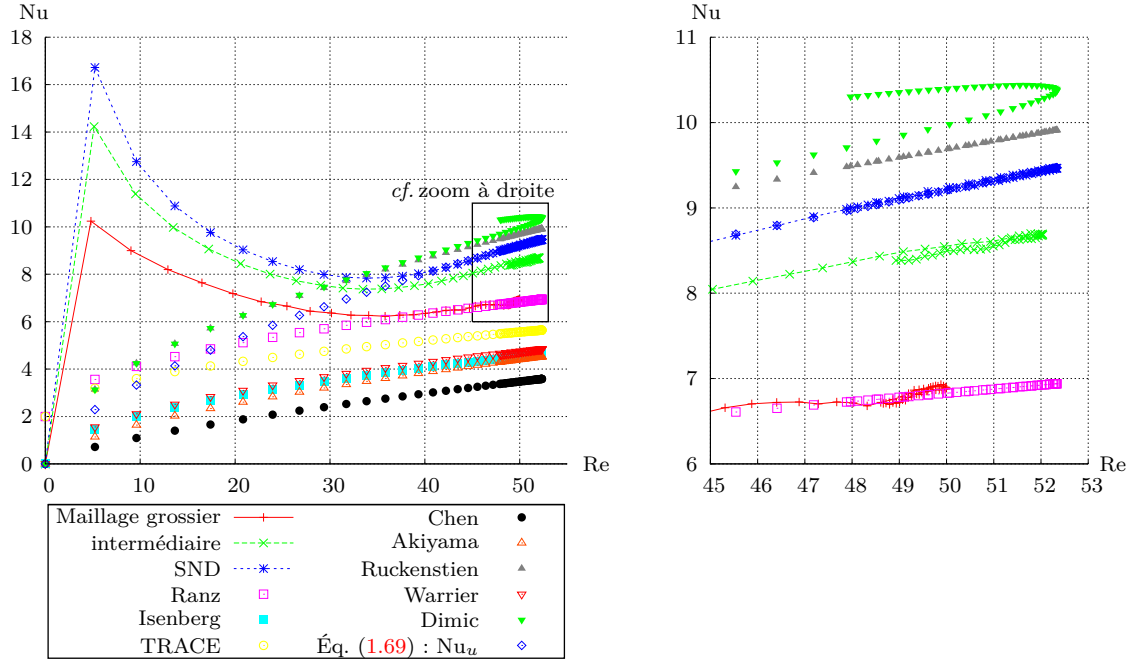
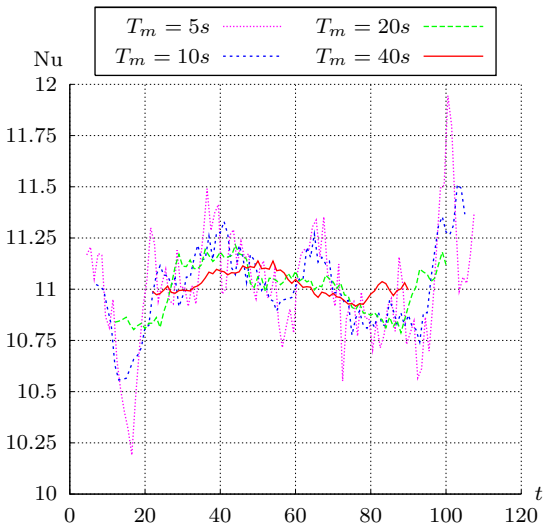


FIGURE 1.22 – Écoulement laminaire autour d'une bulle unique – Corrélation entre le nombre de Nusselt et le nombre de Reynolds. Convergence en maillage et corrélations du tableau 1.3.

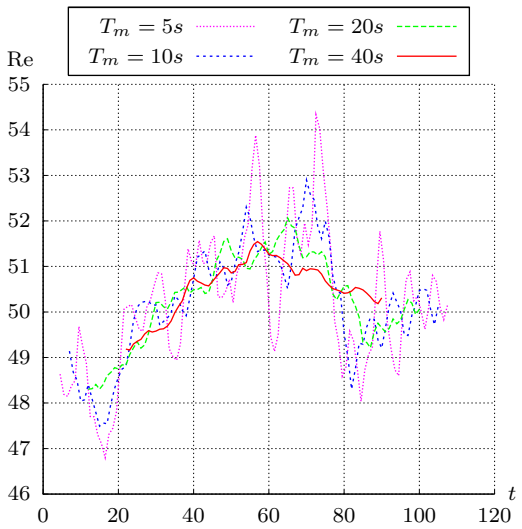
SND sur une période de 40 s pour cinq sections horizontales de l'écoulement d'épaisseur $2D_b$ environ (Fig. 1.17). La période de moyenne est 150 fois supérieure à la période d'injection des bulles. Les moyennes glissantes des valeurs du nombre de Nusselt (resp. Reynolds) sur la 3e tranche sont données à la figure 1.23a (resp. Fig. 1.23b) en fonction de la période T_m. Ces figures permettent de déterminer la période minimale de 40 s nécessaire à la convergence des moyennes avec une précision de $\pm 2\%$. La convergence est vérifiée sur les autres sections par la figure 1.23c (resp. Fig. 1.23d).

Les valeurs du nombre de Nusselt de condensation évaluées en fonction du nombre de Reynolds de bulle sont données à la figure 1.24. La simulation numérique est ainsi comparée aux corrélations du tableau 1.3 et à la corrélation pour une bulle unique (1.69) établie à partir de la simulation numérique (section 1.3.4). Les nombres de Jacob, Fourier et Reynolds et le taux de vide sont évalués pour chaque tranche de l'écoulement. Le temps utilisé pour l'estimation du nombre de Fourier est une estimation du temps de résidence des bulles depuis leur injection. La forte dispersion constatée sur la figure 1.24 illustre les difficultés rencontrées par les expérimentateurs lors de l'obtention des mesures expérimentales. De manière rassurante, les résultats de SND montrent une augmentation du nombre de Nusselt lorsque le nombre de Reynolds augmente, en accord avec les corrélations expérimentales. La corrélation de Zeitoun *et al.* (1995) surestime assez largement les transferts thermiques aux interfaces alors que les autres corrélations ont tendance à les sous-estimer. Nos travaux présentent un bon accord avec les travaux théoriques de Ruckenstein (1959) et Dimić (1977). Le taux de vide α et le diamètre de Sauter décroissent des tranches s_1 à s_5 alors que le temps de résidence augmente. Il est donc difficile de distinguer les effets du taux de vide α de ceux du nombre de Fourier Fo sur ce seul exemple. Dans la région d'intérêt, le nombre de Reynolds décroit avec le temps de résidence sous l'effet de la diminution du diamètre des bulles. Dans le même temps, la couche limite thermique s'épaissit. Ces deux effets sont particulièrement bien considérés par la corrélation de Dimić (1977) comme le montre la figure 1.24 pour laquelle les prédictions évoluent de la solution de Ruckenstein (1959) pour les nombres de Reynolds élevés (*i. e.,* faibles temps de résidence) vers nos résultats de SND pour les nombres de Reynolds les plus faibles (*i. e.,* pour des temps de résidence plus longs).

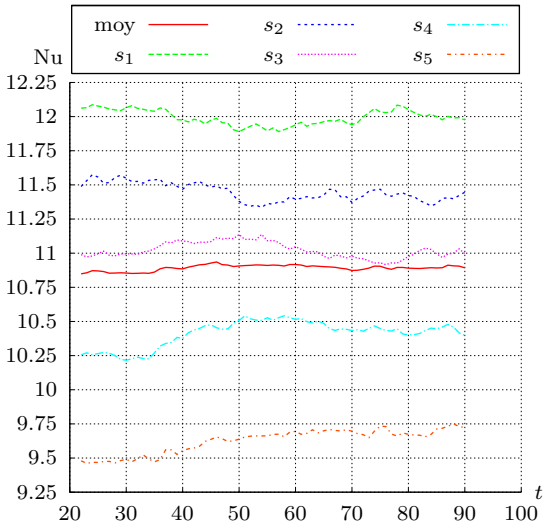
La corrélation (1.69) pour une bulle unique est établie dans une configuration très similaire, à l'exception des effets collectifs et de la pseudo-turbulence induite. Par conséquent, la différence entre le nombre de Nusselt prédit par la corrélation (1.69) et les mesures effectives sur la SND



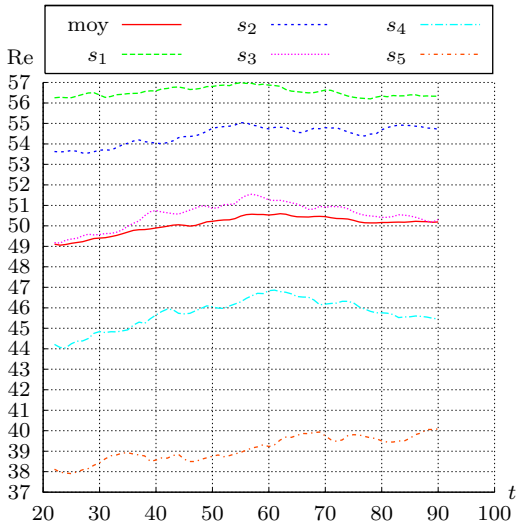
(a) Nombre de Nusselt pour la 3e tranche et pour différentes périodes T_m.



(b) Nombre de Reynolds pour la 3e tranche et pour différentes périodes T_m.



(c) Nombre de Nusselt (Tranches numérotées de bas (s_1) en haut (s_5)).



(d) Nombre de Reynolds (Tranches numérotées de bas (s_1) en haut (s_5)).

FIGURE 1.23 – Convergence des moyennes glissantes pour différentes périodes T_m et pour différentes tranches.

multi-bulles doivent être attribués directement à la pseudo-turbulence. En suivant la suggestion de Zeitoun *et al.* (1995), la tendance peut être estimée. Du fait de la pseudo-turbulence, le nombre de Nusselt croît avec le taux de vide sous l'effet combiné de l'agitation turbulente et de l'augmentation des gradients de température. En effet, on constate sur la figure 1.20, que le confinement des inclusions de vapeur (dont la température est imposée à la température de saturation) augmente la surface à température imposée. Pour atteindre un même sous-refroidissement moyen dans le liquide, la température minimale doit alors être plus faible. De plus, la distance entre ces minima et les interfaces est réduite. Ces deux effets se combinent pour conduire à des gradients thermiques nettement plus importants. Pour corriger les problèmes de la corrélation de Zeitoun *et al.* (1995) identifiés pour les faibles taux de vide, nous proposons une corrélation Nu_m pour un écoulement à bulles de la forme suivante :

$$\mathrm{Nu}_m = \mathrm{Nu}_u \left(1 + f(\alpha)\right) \tag{1.70}$$

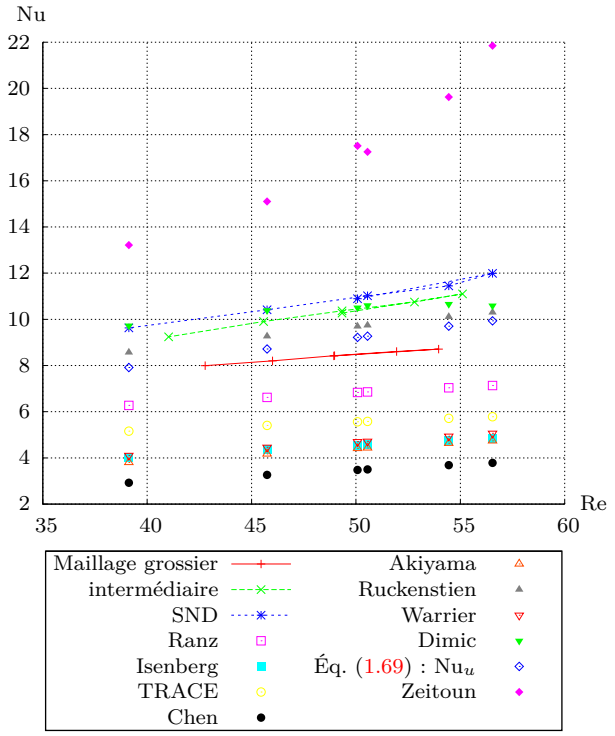


FIGURE 1.24 – Écoulement à bulles pseudo-turbulent – Corrélation entre les nombres de Reynolds et de Nusselt. Convergence en maillage et comparaison aux corrélations expérimentales issues de la littérature.

où l'indice m signifie multi-bulles. Malheureusement, du fait du faible échantillon utilisé ici, il est impossible d'exprimer la dépendance vis-à-vis du taux de vide f. Pour la gamme $4\% \leq \alpha \leq 7.5\%$, le facteur d'intensification f est quasiment constant et égal à $0.2 \pm 2\%$ ce qui signifie que l'essaim de bulles est responsable d'une augmentation du taux de transfert de masse de l'ordre de 20%. Évidemment, un travail complémentaire est nécessaire pour confirmer ces travaux et élargir leur gamme de validité et pour différencier l'influence du taux de vide (α) de celle du temps de résidence (Fo).

1.4.4 Conclusion

L'illustration précédente donne un avant goût des applications envisagées et de la contribution potentielle de la SND à la fermeture des modèles moyennés à deux fluides. Après avoir qualifié notre SND sur une configuration analytique, nous avons démontré l'intensification des transferts thermiques aux interfaces liée à l'agitation et au sillage des bulles. Nous sommes en mesure d'attribuer l'augmentation de 20% du taux de changement de phase aux effets d'essaim. En donnant un aperçu sur les phénomènes locaux, ce travail est utile pour la fermeture des modèles 3D moyennés puisqu'il permet de comprendre et de proposer de nouvelles modélisations physiques.

L'analyse des statistiques issues de la simulation locale complète les modèles moyennés et permet d'éclaircir en partie les dépendances du nombre de Nusselt. La précision de la simulation numérique et la convergence des grandeurs moyennées dépend du coût de calcul et du cube du nombre de Reynolds. Malgré la rapide augmentation de la puissance de calcul, les écoulements industriels restent inaccessibles par SND. Pour réduire les coûts et ainsi rendre réalisables des études paramétriques à plus fort nombre de Reynolds, nous allons développer dans les chapitres suivants un modèle ISS avec changement de phase, pour étendre les travaux de Magdeleine (2009) (Fig. 1.25). Le modèle ISS permet à Magdeleine (2009) de considérer beaucoup plus de bulles pour obtenir des statistiques sur un écoulement de plus grandes dimensions. Comme l'illustre la fermeture que nous avons choisie d'étudier ici, la considération du changement de phase par le modèle développé est capitale pour les applications industrielles.

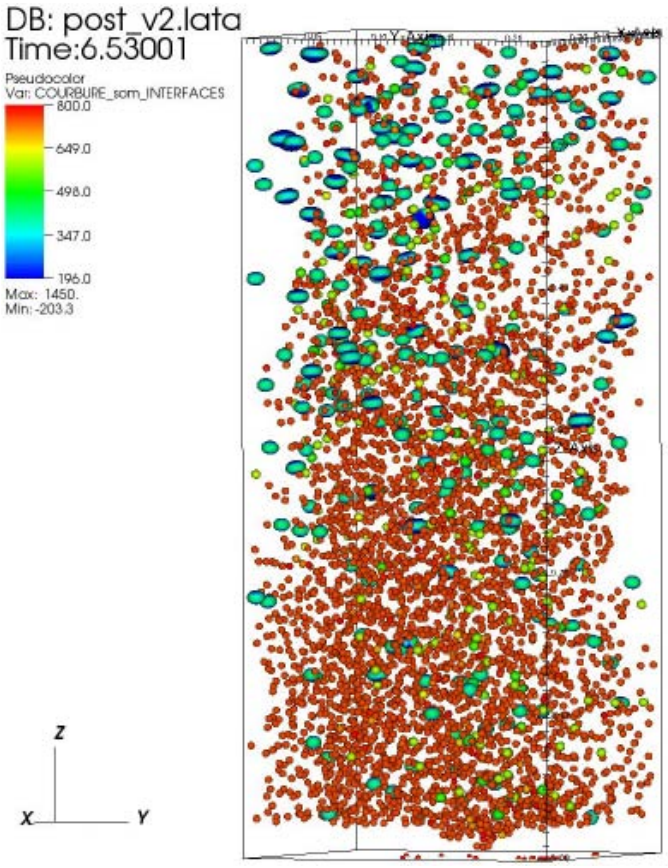


FIGURE 1.25 – ISS d'un écoulement intermittent à bulle (reproduction de Magdeleine, 2009).

Chapitre 2

Échelle mésoscopique

Dans le concept de simulation des grandes échelles, l'objectif n'est pas de résoudre directement les équations locales instantanées sur un maillage fin : une résolution directe des équations de bilan est par nature très coûteuse car les échelles spatio-temporelles mises en jeu sont très petites. Le nombre de mailles doit être proportionnel au cube du nombre de Reynolds pour capturer toutes les échelles de la turbulence. La résolution des déformations interfaciales peut conduire à des contraintes encore plus fortes. La méthode présentée en introduction (Fig. 5) permet de ne conserver que les fluctuations les plus énergétiques en appliquant un filtre spatial aux équations locales instantanées établies au chapitre 1 afin d'obtenir une description des plus grandes échelles uniquement. C'est cette première étape de la figure 5 que nous allons présenter.

Dans ce chapitre, le filtrage des équations monofluides locales conduit à une description du système diphasique avec changement de phase à l'échelle mésoscopique (Fig. 5). Notre objectif est de modéliser la turbulence et les transferts interfaciaux à petite échelle (*i. e.,* sous-maille) en traduisant l'effet des petites échelles sur les grandes. Pour cela, nous allons suivre la voie ouverte par Toutant (2006) et Toutant *et al.* (2009a) qui proposent un modèle ISS pour les écoulements adiabatiques. L'objectif de ce travail est d'établir un modèle plus général capable de prédire des écoulements avec changement de phase et qui dégénère vers la proposition de Toutant *et al.* (2009a) pour les écoulements adiabatiques. Nous proposons de fermer ce système en modélisant les termes dominants à l'aide de l'hypothèse de similarité d'échelles proposée par Bardina *et al.* (1983). Une des difficultés principales liées au changement de phase est la discontinuité de la vitesse et du gradient de température aux interfaces. Pour considérer ces sauts correctement, nous proposons quelques aménagements des termes de Bardina *et al.* (1983). La condition de saturation de l'interface ainsi que la détermination de l'aire interfaciale font l'objet de traitements particuliers qui sont présentés aux sections 2.3 et 2.5. Une déconvolution de la température mésoscopique en fonction de variables mésoscopiques est utilisée.

Enfin, dans la dernière partie (section 2.6), on synthétise les fermetures proposées dans un modèle de simulation des grandes échelles continu permettant de remplacer les systèmes d'équations (1.4) et (1.6).

2.1 Filtrage

À l'échelle microscopique, l'évolution des variables principales (χ_v, $\boldsymbol{v}$, p, T et $\dot{m}$) d'un problème diphasique avec changement de phase est décrite par l'ensemble des bilans de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, par l'équation de transport de l'interface et par la condition de saturation donnés par le système (1.14). Cette formulation monofluide fournit une description du système à l'échelle locale instantanée valide dans tout le domaine au sens des distributions (Kataoka, 1986). Elle est compacte et permet d'appliquer efficacement un filtre inconditionnel.

Soit $\overline{\cdot}$ l'opération de filtrage volumique définie par

$$\overline{\phi}(\boldsymbol{x}^0) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \tag{2.1}$$

où G est le noyau de convolution de l'opérateur caractéristique du filtre choisi. Ce noyau est isotrope et normé par propriété. Il est lui-même caractérisé par sa largeur de coupure Δ qui correspond à la largeur de la bande-passante pour un filtre à support compact. Par extension, pour un filtre à support non-compact, on définit la largeur de coupure à partir d'une valeur du noyau (*e. g.*, $G_g(\Delta/2) = 0.05$) au-delà de laquelle les valeurs du noyau sont inférieures à quelques pourcents. La largeur Δ est associée à la fréquence de coupure du filtre k_c par la relation $k_c = \pi/(2\Delta)$. Voici quelques exemples de noyaux (Fig. 2.1) correspondant aux filtres boîte, gaussien et polynômial de degré 4 respectivement :

$$G_b(x) = \frac{1}{\Delta}\left(H(x+\frac{\Delta}{2}) - H(x-\frac{\Delta}{2})\right) \tag{2.2a}$$

$$G_g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{avec } \sigma = 0.182\Delta \tag{2.2b}$$

$$G_p(x) = \left(H(x+\frac{\Delta}{2}) - H(x-\frac{\Delta}{2})\right)\frac{15}{8\Delta}\left(\left(\frac{x}{\Delta}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + 1\right) \tag{2.2c}$$

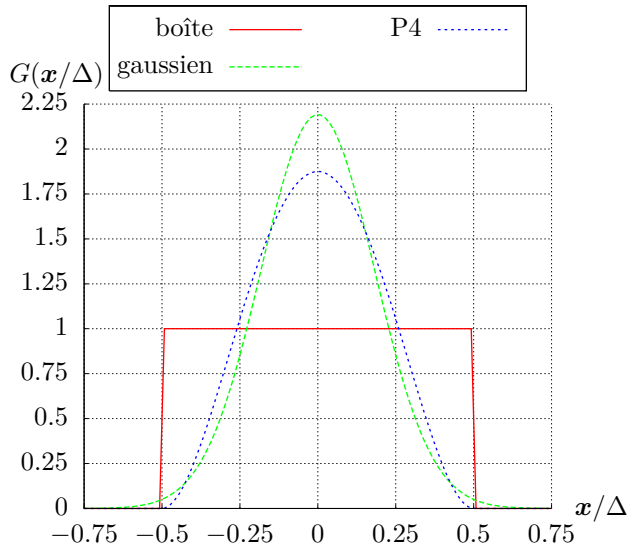


FIGURE 2.1 – Quelques noyaux de convolution.

On introduit également un filtrage surfacique (pour les variables définies uniquement à l'interface) :

$$\overline{\phi}^s(\boldsymbol{x}^0) = \begin{cases} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\delta^i(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}}{\int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{x})\delta^i(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}} & \text{si } \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{x})\delta^i(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{2.3}$$

Le résultat de cet opérateur $\overline{\phi}^s$ est défini en tout point de l'espace et pas seulement à l'interface. Par définition, on a alors :

$$\forall\phi, \quad \overline{\phi}^s(\boldsymbol{x}^0)\,\overline{\delta^i}(\boldsymbol{x}^0) = \overline{\phi\delta^i}(\boldsymbol{x}^0) \tag{2.4}$$

Cette dernière relation donne la moyenne d'une variable ϕ quelconque pondérée par l'aire interfaciale. Par conséquent, le champ volumique qui en résulte $\overline{\phi}^s$ est quasiment constant dans la direction normale à l'interface.

Dans ce travail, on se limite aux filtres spatiaux dits *inconditionnels* (contrairement à ce que proposent Sagaut et Germano, 2005), dont le noyau de convolution ne dépend ni du temps, ni des coordonnées spatiales. Par conséquent, l'opérateur de filtrage commute avec les opérations de dérivées temporelles et spatiales. Un filtre inconditionnel permet d'inclure dans les termes sous-maille les plus petites échelles de déformation de l'interface au lieu de considérer les fluctuations

turbulentes seulement. Cela est essentiel pour ne pas devoir résoudre complètement l'interface mais pouvoir modéliser les petites déformations. Le terme *mésoscopique* qualifie les variables filtrées. Le produit de convolution augmente la régularité des fonctions qui deviennent continues à la traversée de l'interface.

D'après les propriétés de commutation entre l'opérateur de filtrage et les opérateurs de différentiation spatio-temporelle, l'application du filtre (2.1) à la formulation monofluide (1.14) conduit au système suivant :

$$\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla \chi} = 0 \tag{2.5a}$$

$$\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\dot{m}\delta^i}\,[\![1/\rho]\!] \tag{2.5b}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho\,\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho\,\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}}) = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla \cdot \overline{\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}} - \nabla \overline{p} - \frac{1}{\mathrm{We}} \overline{\kappa \nabla \chi_v} + \frac{1}{\mathrm{Fr}}\,\overline{\rho}\boldsymbol{e}_z \tag{2.5c}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho\, c_p\, T}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho \boldsymbol{v} c_p\, T}\right) = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \nabla \cdot \left(\overline{k \nabla T}\right) + \frac{1}{\mathrm{Ja}^*} \overline{\dot{m}\delta^i} \tag{2.5d}$$

$$\overline{T\,\delta^i} = 0 \tag{2.5e}$$

Le système (2.5) est dit *ouvert* car il ne peut pas être résolu directement. Premièrement, il est nécessaire de définir les variables mésoscopiques. Ce choix n'est pas anodin puisqu'il affecte directement la forme des termes de fermeture à modéliser. Pour les écoulements monophasiques, cette étape est triviale et ne présente plus de réelle difficulté. En revanche pour les écoulements diphasiques avec changement de phase, la forme de ces fermetures dépend à la fois du choix des variables principales mésoscopiques et du choix de la forme des équations lors du filtrage. Nous avons choisi de travailler avec les variables suivantes : $\overline{\chi}_v$, $\overline{\boldsymbol{v}}$, $\overline{p}$, $\overline{m}^s$ et $\overline{\Theta}$, où la variable Θ définie par [1]

$$\Theta \hat{=} kT \tag{2.6}$$

est introduite pour remplacer la température T au rang des variables principales. La justification du choix de ces variables viendra naturellement par la suite. En particulier, les raisons justifiant le choix de $\overline{\Theta}$ sont présentées aux paragraphes 2.2.7 et 2.3. Mentionnons simplement que ce choix est licite puisque la conductivité k est non nulle sur tout le domaine et qu'elle est définie à partir de la variable principale χ_v. Au vu de la condition de saturation adimensionnelle (1.14e), la variable microscopique Θ est nulle à l'interface, comme la température monofluide T. **Elle est donc continue à l'interface** et, comme T, son gradient $\nabla\Theta$ est discontinu en présence de changement de phase. L'intérêt de la variable Θ est l'existence d'un lien direct entre le saut $[\![\nabla\Theta]\!]$ et le taux de changement de phase. En effet, le saut de gradient est relié au taux de changement de phase microscopique par le bilan d'énergie microscopique à l'interface

$$[\![\nabla\Theta]\!] \cdot \boldsymbol{n} = [\![k\nabla T]\!] \cdot \boldsymbol{n} = \dot{m}\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}} \tag{2.7}$$

car la conductivité thermique est constante par phase et la température de l'interface est nulle au vu de la condition de saturation (1.14e). Contrairement au saut de gradient de température $[\![\nabla T]\!]$, **le saut $[\![\nabla\Theta]\!]$ s'exprime en fonction de la variable $\dot{m}$ uniquement.** La relation (2.7) fait intervenir le saut $[\![k\nabla T]\!]$ qui ne peut pas être relié aisément au saut $[\![\nabla T]\!]$ en termes de variables monofluides.

Par ailleurs, nous avons aussi choisi de filtrer les équations monofluides plutôt que les équations phasiques car de bons résultats sont obtenus de cette manière par Toutant *et al.* (2009a). L'application de cette démarche au bilan d'énergie n'est pas triviale. L'objectif est alors de savoir s'il est plus approprié de filtrer l'équation monofluide (1.4d), ou chacune des équations phasiques (B.1) séparément et de trouver une relation liant les deux domaines, dans l'esprit d'une relation de saut.

1. Lorsque la conductivité du fluide est indépendante de la température, cette variable correspond à la transformée de Kirchhoff de la température (Crank, 1984, Voller, 2001) définie dans le cas général par :

$$\Theta_{\mathrm{Kir}} \hat{=} \frac{1}{k_0} \int_{T^{\mathrm{sat}}}^{T} k(\phi) d\phi \quad \text{avec : } k\nabla T = \nabla\Theta_{\mathrm{Kir}}$$

La question de fond sous-jacente est le choix de la variable principale mésoscopique associée à la température. Nous discutons à l'annexe B.1 de quelques attraits de la formulation phasique. Néanmoins, cette formulation est abandonnée car elle ne gère pas naturellement le saut de flux à l'interface.

Pour *fermer* le système (2.5), il est nécessaire de formuler des modèles pour exprimer les termes ouverts à partir de grandeurs filtrées. Afin de réduire l'influence des termes à modéliser, on introduit explicitement les variables principales afin de ne modéliser que les corrélations, dites *sous-maille*, entre les variables principales. De nouveaux choix accompagnent cette étape. Ils sont présentés à la section 2.2.

Remarque : Il est important de signaler qu'à l'échelle mésoscopique, l'information contenue dans les petites échelles a été éliminée lors de l'opération de filtrage. En particulier, le système (2.5) ne vérifie plus intrinsèquement la relation de saut liée au bilan de masse. L'information

$$\left(\boldsymbol{v}_l \cdot \boldsymbol{n} - \frac{\dot{m}}{\rho_l}\right)\delta^i = \left(\boldsymbol{v}_v \cdot \boldsymbol{n} - \frac{\dot{m}}{\rho_v}\right)\delta^i \tag{2.8}$$

est nécessaire pour assurer la conservation de la masse à l'échelle mésoscopique :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{\rho \boldsymbol{v}} = 0 \tag{2.9}$$

Il faut être prudent dans le choix des modèles afin de s'assurer que le bilan de masse au niveau de l'interface soit bien vérifié par le système fermé. Une discussion relative à ce problème est donnée à la fin de la section 2.2.6.

2.2 Construction des termes sous-maille

Soient a une propriété (physique) constante par phase (donc reliée à χ) et ϕ une variable quelconque du problème. Le produit $\overline{a\phi}$ est ouvert à l'échelle mésoscopique. Pour chaque produit, on définit le terme sous-maille τ par :

$$\tau \hat{=} \overline{a\phi} - \overline{a}\,\overline{\phi} \tag{2.10}$$

Ce terme traduit la non-linéarité du filtre sur le produit. Il est plus intéressant de rechercher une modélisation pour le terme sous-maille τ que pour le produit $\overline{a}\,\overline{\phi}$ car son amplitude et par conséquent son influence sur les équations de bilan, est *a priori* plus faible. Cela revient à supposer que $\overline{a}\,\overline{\phi}$ est une bonne approximation de $\overline{a\phi}$.

Dans la formulation monofluide, le filtrage des interfaces et des discontinuités est transparent. Toutant *et al.* (2009a) montrent que l'hypothèse de similarité d'échelles est à même de prédire précisément les corrélations entre deux variables mésoscopiques (*e. g.,* la masse volumique et la vitesse) même lorsqu'une de ces variables est discontinue à l'interface (*e. g.,* la masse volumique). On rappelle à la section 2.2.1 le principe et les fondements de cette modélisation puis on donne à la section 2.2.2 une illustration assez basique de son fonctionnement.

Le problème des interfaces non matérielles est plus complexe que celui des écoulements adiabatiques étudiés par Toutant *et al.* (2009a) car les propriétés physiques et la vitesse sont discontinues à l'interface. On montre dans la section 2.2.3 comment les discontinuités influencent les termes sous-maille et les dysfonctionnements qu'elles peuvent engendrer sur une modélisation de Bardina *et al.* (1983). Pour pallier ce problème, on est amené à introduire une vitesse intermédiaire qui repose sur l'extension des champs interfaciaux au voisinage de l'interface (section 2.2.4). Cette vitesse est utilisée pour définir les termes sous-maille convectifs à la section 2.2.5.

Le transfert de masse aux interfaces introduit trois autres problèmes de modélisation spécifiques en plus de ceux rencontrés par Toutant *et al.* (2009a) dans leur étude adiabatique : (i) la vitesse de transport de l'interface $\boldsymbol{v}_i$ n'est pas naturellement définie en volume ; (ii) le flux thermique est discontinu à la traversée de l'interface et (iii) le taux de changement de phase $\dot{m}$ est une variable additionnelle qui doit être reliée à la condition de saturation de l'interface (1.14e) ; ces problèmes sont traités dans les sections 2.2.6, 2.2.7 et 2.3.

2.2.1 Modélisation et fermeture par l'hypothèse de similarité d'échelles

Pour modéliser les termes sous-maille τ définis par l'équation (2.10), nous avons adopté la proposition de Toutant (2006) puisqu'elle conduit à de bons résultats sur les écoulements adiabatiques. Rappelons-en brièvement le principe. Cette approche se classe dans les modélisations structurelles par opposition aux modélisations fonctionnelles. En effet, elle vise à reproduire les petites structures de l'écoulement pour estimer leur impact sur les grandes échelles et s'oppose en ce sens aux modèles à viscosité turbulente qui ne traduisent que l'effet diffusif des petites échelles. Bien que ces deux approches soient généralement couplées, nous nous limitons dans ce travail à la modélisation par similarité d'échelles. Elle peut être interprétée de deux manières dont chacune fait l'objectif d'un paragraphe.

1. Décomposition de Leonard Le principe de similarité d'échelles repose sur l'hypothèse que les plus petites échelles résolues ont la même structure que les plus grandes échelles sous-maille puisqu'elles sont gouvernées par les mêmes équations (Fig. 2.2). Le filtre utilisé n'étant pas idempotent, l'utilisation successive du même filtre apporte de nouvelles informations.

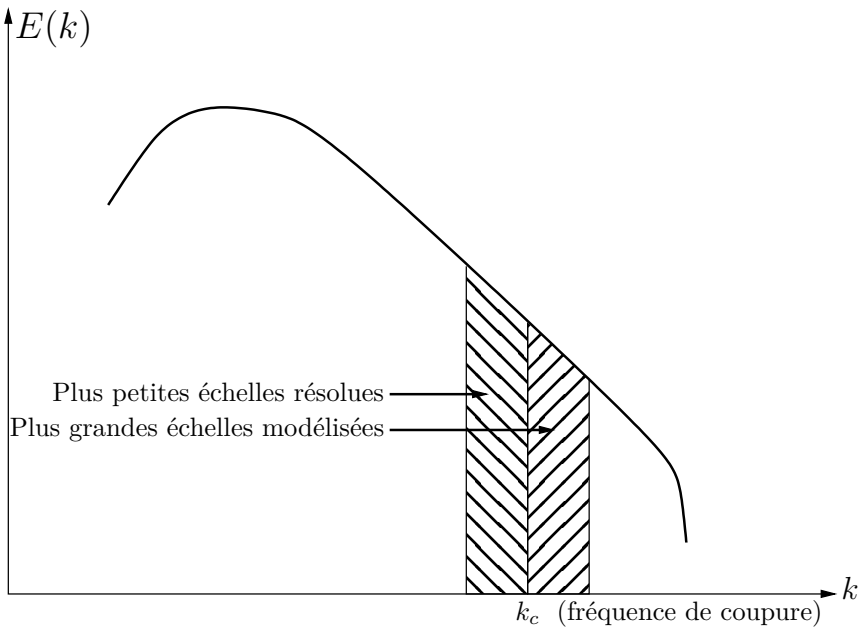


FIGURE 2.2 – Cascade énergétique – Principe de similarité d'échelles (typiquement pour un écoulement monophasique turbulent homogène et isotrope, THI).

Toute grandeur ϕ peut se décomposer en la somme d'une partie filtrée et d'une partie fluctuante :

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \quad \text{et} \quad \overline{\phi} = \overline{\overline{\phi}} + \overline{\phi'} \tag{2.11}$$

Cette relation appliquée à la définition (2.10) du terme sous-maille τ permet d'obtenir la décomposition de Germano (1986) et Leonard (1975) en trois termes :

$$\tau = \mathcal{L} + \mathcal{C} + \mathcal{R} \tag{2.12}$$

$$\text{avec} \qquad \mathcal{L} = \overline{\overline{a}\,\overline{\phi}} - \overline{\overline{a}}\,\overline{\overline{\phi}} \tag{2.13a}$$

$$\mathcal{C} = \overline{\overline{a}\,\phi'} - \overline{\overline{a}}\,\overline{\phi'} + \underbrace{\overline{a'\overline{\phi}} - \overline{a'}\,\overline{\overline{\phi}}}_{\mathcal{C}^x} \tag{2.13b}$$

$$\mathcal{R} = \overline{a'\phi'} - \overline{a'}\,\overline{\phi'} \tag{2.13c}$$

Le terme de Leonard $\mathcal{L}$ est constitué de produits de grandeurs moyennes, le terme croisé $\mathcal{C}$ contient uniquement des produits de grandeurs moyennes avec des grandeurs fluctuantes alors que le terme

de Reynolds $\mathcal{R}$ est formé de produits de grandeurs fluctuantes. Ils sont ici exprimés de manière générale.

Classiquement, en simulation monophasique, la décomposition (2.12) est utilisée pour modéliser les corrélations vitesse-vitesse (Bardina *et al.*, 1983). Dans leurs travaux, Toutant *et al.* (2009a) constatent que l'intensité des corrélations vitesse-interface est bien représentée par le terme $\mathcal{L}$ seul. Autrement dit, la somme du terme croisé $\mathcal{C}$ et du terme de Reynolds $\mathcal{R}$ a une contribution négligeable devant le terme de Leonard $\mathcal{L}$. Comme ce dernier est défini uniquement à partir de grandeurs mésoscopiques, il est possible de modéliser le terme sous-maille τ par :

$$\tau^m \hat{=} \mathcal{L} = \overline{\overline{a}\,\overline{\phi}} - \overline{\overline{a}}\,\overline{\overline{\phi}} \tag{2.14}$$

Le fait de négliger $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ devant le terme de Leonard $\mathcal{L}$ suppose que la structure du terme de Leonard $\mathcal{L}$ (basé uniquement sur les échelles sous-maille) est similaire à la structure de τ.

Cependant, lors de leur étude de la simulation d'écoulements diphasiques sans changement de phase, Toutant *et al.* (2009a) montrent que ces modèles (construits à partir de $\overline{\chi}$) étalent trop l'information liée à la discontinuité de la variable a par rapport au terme τ. L'objectif de nos approches étant de développer un modèle discontinu capable de transporter une discontinuité équivalente, Toutant *et al.* (2009a) proposent une nouvelle décomposition consistante basée sur l'hypothèse que *l'indicatrice de l'interface microscopique est accessible.* En effet, la méthode de résolution que l'on souhaite utiliser est de type *Front-Tracking.* Elle repose sur un maillage lagrangien permettant de suivre explicitement et avec précision la position de l'interface. Toutant *et al.* (2009a) présentent une méthode du point fixe pour déterminer la position de l'interface microscopique à partir de l'indicatrice mésoscopique. Cette hypothèse permet d'envisager la modélisation de τ en ajoutant au modèle précédent les contributions microscopiques des déformations interfaciales. Nous verrons ultérieurement comment cette modélisation est reliée aux variables mésoscopiques. En notant $\mathcal{C}^\chi$ la partie de $\mathcal{C}$ liée aux déformations microscopiques de l'interface (par l'intermédiaire de a, *cf.* Éq. (2.13b) pour la définition), Toutant *et al.* (2009a) proposent la nouvelle décomposition suivante

$$\begin{aligned} \tau &= \mathcal{L}^n + \mathcal{C}^n + \mathcal{R}^n \\ \mathcal{L}^n &= \mathcal{L} + \mathcal{C}^\chi \\ \mathcal{C}^n &= \mathcal{C} - \mathcal{C}^\chi \\ \mathcal{R}^n &= \mathcal{R} \end{aligned} \tag{2.15}$$

et par suite, le nouveau modèle :

$$\tau^{nm} = \mathcal{L}^n = \mathcal{L} + \mathcal{C}^\chi \tag{2.16}$$

L'illustration de cette modélisation est donnée à la section 2.2.2.

2. Développement limité L'interprétation physique donnée ci-dessus ne s'appuie pas uniquement sur la nature des interactions entre les différentes échelles. Pour se détacher des mécanismes de cascade énergétique et mieux comprendre la signification de ces modèles dans le cadre de corrélations vitesse-interface par exemple, nous présentons une seconde explication dont le fondement mathématique est basé sur l'interprétation différentielle des filtres et les modèles de gradient de Clark *et al.* (1979). Par commodité, on restreint cette présentation à une dimension. La variable d'espace ξ est bornée par la largeur de bande du filtre Δ.

Sagaut (2003, chap. 6) propose une interprétation à partir des techniques de *déconvolution* basée sur une décomposition des variables par un développement en série de Taylor au voisinage de ξ^0 :

$$\psi(\xi) = \psi(\xi^0) + \xi \left.\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right|_{\xi^0} + \frac{\xi^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^0} + \mathcal{O}(\xi^3) \tag{2.17}$$

En introduisant ce développement dans la définition du filtre (2.1), il vient d'après les propriétés de symétrie et de conservation du noyau G :

$$\overline{\psi}(\xi^0) = \psi(\xi^0) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^0} M^2 + \mathcal{O}(\Delta^4) \tag{2.18}$$

car $|\xi| \leq \Delta$. M^n désigne le moment d'ordre n du noyau de convolution :

$$M^n \hat{=} \int \xi^n G(\xi) d\xi = \mathcal{O}(\Delta^n) \tag{2.19}$$

Une fermeture peut être proposée en ne conservant que l'ordre dominant de la relation (2.18) : $\overline{\psi}(\xi^0) = \psi(\xi^0) + \mathcal{O}(\Delta^2)$. En appliquant cette expression aux différentes quantités de l'équation (2.10), le terme sous-maille τ s'évalue par :

$$\tau = \overline{\overline{a}\,\overline{\phi}} - \overline{\overline{a}}\,\overline{\overline{\phi}} + \mathcal{O}(\Delta^4) \tag{2.20}$$

Pour compléter ce résultat, le développement (2.18) est utilisé pour la reconstruction des fluctuations $\psi' = \psi - \overline{\psi}$:

$$\psi'(\xi^0) = \psi(\xi^0) - \overline{\psi}(\xi^0) = -\frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^0} M^n + \mathcal{O}(\Delta^4) \tag{2.21}$$

En appliquant cette expression aux différentes quantités de l'équation (2.10), on obtient :

$$\begin{aligned}\tau(\xi^0) = M^2 \left.\frac{\partial a}{\partial \xi}\right|_{\xi^0} \left.\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right|_{\xi^0} + \frac{M^4}{4!} \left(4 \left.\frac{\partial^3 a}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^0} \left.\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right|_{\xi^0} + 6 \left.\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^0} \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^0} + 4 \left.\frac{\partial a}{\partial \xi}\right|_{\xi^0} \left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^0} \right) \\ + \left(\frac{M^2}{2}\right)^2 \left.\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^0} \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^0} + \mathcal{O}(\Delta^6)\end{aligned} \tag{2.22}$$

Le terme sous-maille τ est d'ordre 2 en Δ ($\mathcal{O}(\Delta^2)$) ce qui démontre l'intuition précédente : l'influence du terme sous-maille est plus faible que celle du terme qui apparaît directement dans les équations (2.5) (terme d'ordre 0 en Δ, $\mathcal{O}(1)$). La conservation du terme de Leonard $\mathcal{L}$ seul pour modéliser le terme sous-maille τ est justifiée par une analyse d'ordre de grandeurs. En évaluant de la même manière le terme de Leonard défini par la relation (2.14), on montre que le terme $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ est d'ordre 4 ($\mathcal{O}(\Delta^4)$) :

$$\mathcal{C} + \mathcal{R} = -2 \left(\frac{M^2}{2}\right)^2 \left(\left.\frac{\partial^3 a}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^0} \left.\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right|_{\xi^0} + \left.\frac{\partial a}{\partial \xi}\right|_{\xi^0} \left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^0} \right) + \mathcal{O}(\Delta^6) \tag{2.23}$$

2.2.2 Illustration du modèle de similarité d'échelles : exemple d'une interface plane sans changement de phase

La configuration illustrée ici est présentée à l'annexe 2.E.2. Pour ne pas considérer un cas trop dégénéré, on suppose le champ de vitesse perturbé par un champ à divergence nulle très simple donné par l'équation (2.141) à l'annexe 2.E.2. Le problème est étudié dans la direction normale à l'interface. Prenons l'exemple de la quantité de mouvement à l'échelle mésoscopique $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}$. D'après nos choix de variables principales, les variables accessibles à l'échelle mésoscopique sont $\overline{\rho}$ et $\overline{\boldsymbol{v}}$. Il vient alors naturellement l'idée d'introduire le terme de fluctuations sous-maille :

$$\tau_{\text{temp}} \hat{=} \overline{\rho\,\boldsymbol{v}} - \overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}} \tag{2.24}$$

Les solutions analytiques des champs de vitesse et de masse volumique sont filtrées et permettent d'évaluer le terme sous-maille τ_{temp}. La décomposition de Leonard, revisitée ou non par Toutant (2006), conduit à l'un des deux modèles suivants :

$$\tau^m_{\text{temp}} \hat{=} \overline{\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}} - \overline{\overline{\rho}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}} \tag{2.25a}$$

$$\tau^{nm}_{\text{temp}} \hat{=} \overline{\rho\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}} - \overline{\rho}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}} \tag{2.25b}$$

En l'absence de changement de phase, la vitesse microscopique est continue à la traversée de l'interface. Le terme sous-maille τ_{temp} est alors en parfait accord avec la modélisation τ^{nm}_{temp} proposée (Fig. 2.3).

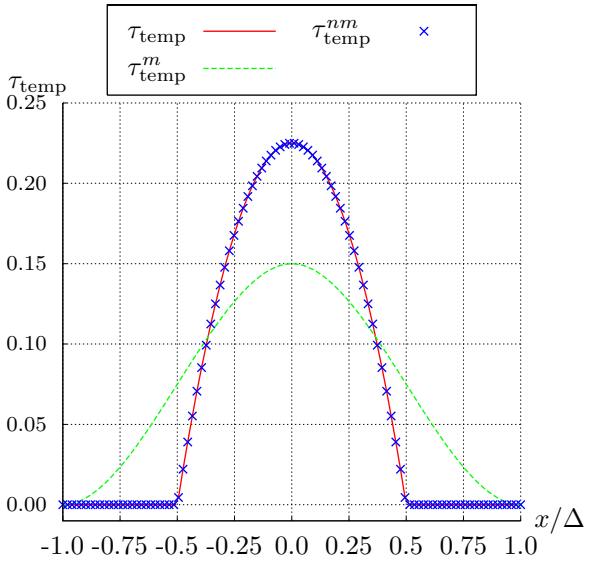


FIGURE 2.3 – Modèles de reconstruction de la quantité de mouvement mésoscopique (sans changement de phase).

2.2.3 Limitations – Dysfonctionnement : fermeture de la quantité de mouvement mésoscopique à une interface plane

Le bon fonctionnement de la modélisation précédente est conditionné à la continuité de la vitesse à la traversée de l'interface. Or, en présence de changement de phase, plusieurs variables, dont la vitesse, sont discontinues à l'interface et la modélisation τ^{nm}_{temp} proposée ci-dessus est mise en défaut. Pour illustrer cette mise en défaut de la modélisation par similarité d'échelles lorsque les deux variables (a et ϕ) sont discontinues, reprenons l'exemple de la quantité de mouvement $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}$ et du terme sous-maille τ_{temp} construit à partir de la vitesse et de la masse volumique mésoscopique.

Afin d'appuyer notre propos, considérons pour simplifier la configuration monodimensionnelle décrite à l'annexe 2.E.1, en notant que $\chi^2 = \chi$ et que ρ_l, ρ_v, $\boldsymbol{v}_l$ et $\boldsymbol{v}_v$ sont des constantes. En utilisant la relation (1.9) pour exprimer le saut de vitesse, on a :

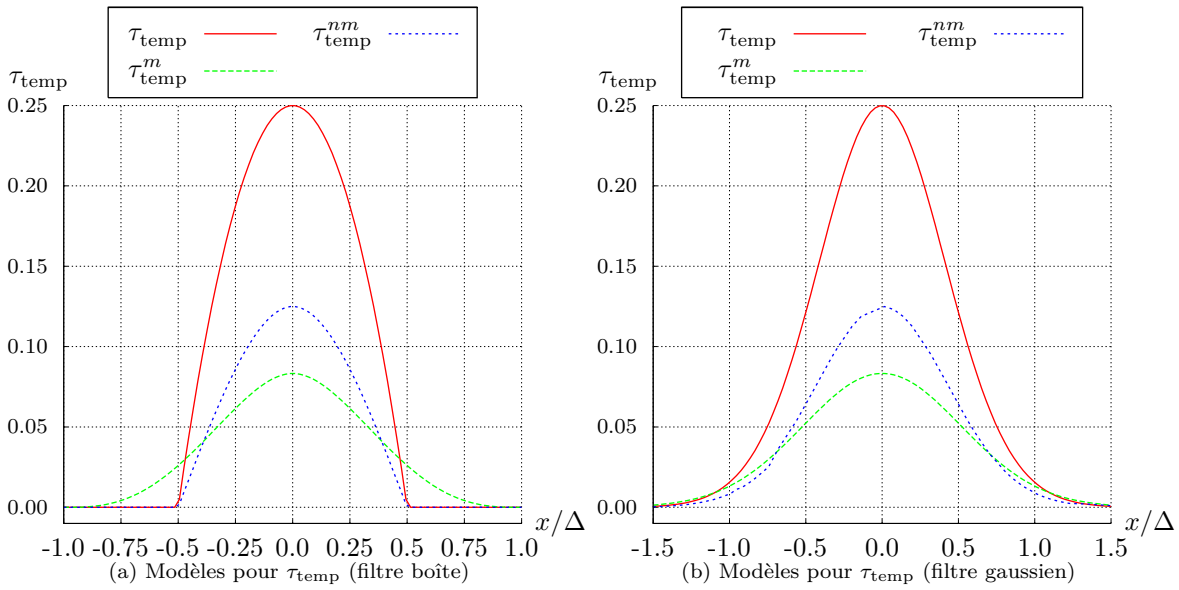
$$\tau_{\text{temp}} = (\rho_v - \rho_l)(\boldsymbol{v}_v - \boldsymbol{v}_l)\,(\overline{\chi} - \overline{\chi}\,\overline{\chi}) = [\![\rho]\!]\,[\![1/\rho]\!]\,\dot{m}\boldsymbol{n}\overline{\chi}\,(1-\overline{\chi}) \tag{2.26}$$

D'après les décompositions proposées à la section 2.2.2, on propose de comparer les termes suivants :

$$\tau_{\text{temp}} \propto \overline{\chi} - \overline{\chi}\,\overline{\chi} \tag{2.27a}$$
$$\tau^{m}_{\text{temp}} \propto \overline{\overline{\chi}\,\overline{\chi}} - \overline{\overline{\chi}}\,\overline{\overline{\chi}} \tag{2.27b}$$
$$\tau^{nm}_{\text{temp}} \propto \overline{\chi\,\overline{\chi}} - \overline{\chi}\,\overline{\overline{\chi}} \tag{2.27c}$$

Les illustrations basées sur les études analytiques menées sur un front plan (annexes 2.E.1 et 2.E.2) sont données sur la figure 2.4. Les figures 2.4a et 2.4b montrent que ni $\left(\overline{\overline{\chi}\,\overline{\chi}} - \overline{\overline{\chi}}\,\overline{\overline{\chi}}\right)$, ni $\left(\overline{\chi\,\overline{\chi}} - \overline{\chi}\,\overline{\overline{\chi}}\right)$ ne sont de bonnes approximations de $(\overline{\chi} - \overline{\chi}\,\overline{\chi})$. Aucun des modèles τ^{m}_{temp} et τ^{nm}_{temp} n'estime τ_{temp} correctement, que ce soit en local, ou en valeur intégrée sur la zone de transition. Les modèles de similarité d'échelles sous-estiment les fluctuations sous-maille ce qui se traduit par une modification du profil de $\overline{\rho\boldsymbol{v}}$ prédit par τ^{nm}_{temp} sur la figure 2.5b. D'après l'équation (2.26), l'écart entre les deux courbes est proportionnel au saut de masse volumique $[\![\rho]\!]$, au saut de volume massique $[\![1/\rho]\!]$ et au taux de changement de phase $\dot{m}$. En modélisant $\overline{\rho\boldsymbol{v}}$ par $\left(\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho\boldsymbol{v}} - \overline{\rho}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}\right)$, l'erreur introduite est d'autant plus grande que le taux de changement de phase $\dot{m}$ et le saut de masse volumique $[\![\rho]\!]$ sont grands (Fig. 2.5b).

Cet exemple monodimensionnel montre que l'incapacité des modèles τ^{m}_{temp} et τ^{nm}_{temp} à reproduire le comportement de τ_{temp} provient du produit de deux fonctions discontinues ρ et $\boldsymbol{v}$ ce qui se traduit par l'apparition du terme $(\overline{\chi} - \overline{\chi}\,\overline{\chi})$. **Les modèles de similarité d'échelles fonctionnent bien**



(a) Modèles pour τ_{temp} (filtre boîte)

(b) Modèles pour τ_{temp} (filtre gaussien)

FIGURE 2.4 – Modèles de reconstruction de la quantité de mouvement mésoscopique.

pour évaluer des termes sous-maille issus de corrélations entre deux grandeurs dont une seulement est discontinue (*e. g.,* écoulements adiabatiques de Toutant, 2006). En revanche, **ils ne sont pas capables d'estimer le produit de deux grandeurs discontinues**. Il faut alors être vigilant quant aux choix faits lors de la formulation d'un terme sous-maille. Si l'on souhaite utiliser une décomposition de Leonard, il faut faire en sorte qu'un seul terme soit discontinu.

Pour contourner cette faiblesse, la solution envisagée repose sur la construction d'un champ de vitesse à partir de la vitesse fluide $\overline{\boldsymbol{v}}$ qui contient les mêmes fluctuations que $\overline{\boldsymbol{v}}$ sauf la discontinuité. Cette idée illustrée par la figure 2.6b est présentée dans le cas général au paragraphe suivant. La suite de ce paragraphe illustre la construction du terme sous-maille de quantité de mouvement à partir d'un champ $\boldsymbol{v}_i^*$ continu à la traversée de l'interface. L'exposant * dénote les champs étendus afin de les différencier des champs physiques.

Soient $\boldsymbol{v}_i^*$, $\dot{m}^*$ et $\boldsymbol{n}^*$ trois champs volumiques continus à l'interface reliés par :

$$\rho \boldsymbol{v}_i^* = \rho \boldsymbol{v} - \dot{m}^* \boldsymbol{n}^* \tag{2.28}$$

En filtrant cette relation, on a :

$$\overline{\rho \boldsymbol{v}} = \overline{\rho \boldsymbol{v}_i^*} + \overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*} \tag{2.29}$$

Cette relation est particulièrement intéressante car $\boldsymbol{v}_i^*$ est, par définition, continue à la traversée de l'interface, contrairement à $\boldsymbol{v}$. Fort de ce constat, il semble plus aisé de modéliser $\overline{\rho \boldsymbol{v}_i^*}$ que $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$ directement. Introduisons les grandeurs suivantes :

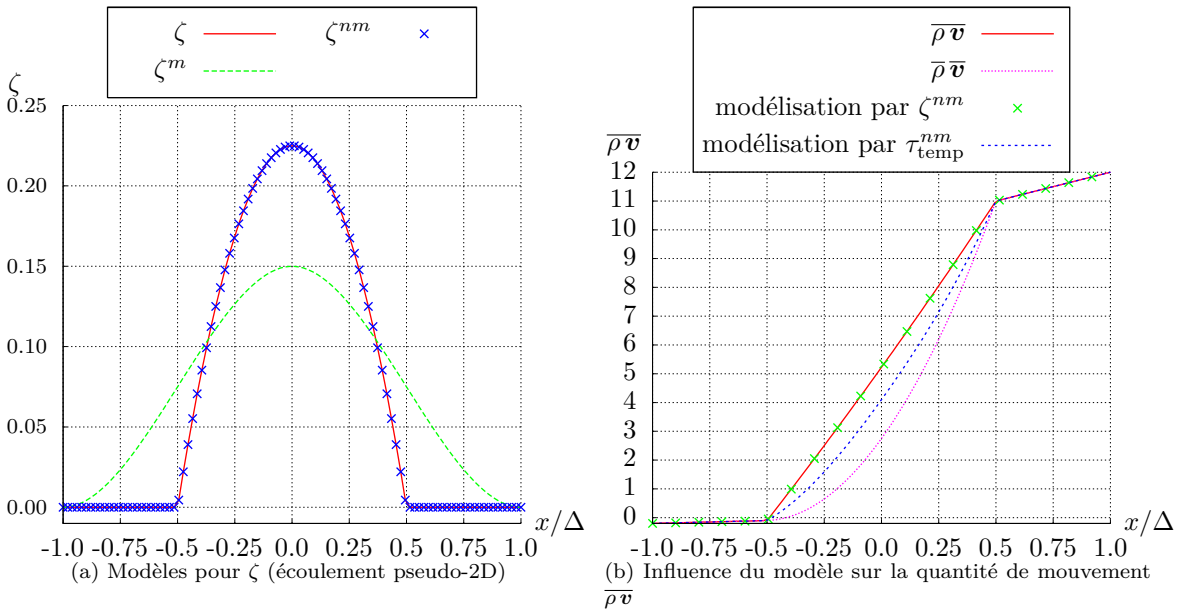
$$\zeta \hat{=} \overline{\rho \boldsymbol{v}_i^*} - \overline{\rho}\, \overline{\boldsymbol{v}_i^*} \tag{2.30a}$$

$$\zeta^m \hat{=} \overline{\overline{\rho}\, \overline{\boldsymbol{v}_i^*}} - \overline{\overline{\rho}}\, \overline{\overline{\boldsymbol{v}_i^*}} \tag{2.30b}$$

$$\zeta^{nm} \hat{=} \overline{\rho\, \overline{\boldsymbol{v}_i^*}} - \overline{\rho}\, \overline{\overline{\boldsymbol{v}_i^*}} \tag{2.30c}$$

La figure 2.5a montre que ces modèles sont aptes à reproduire le comportement de ζ, en moyenne seulement pour ζ^m et en comparaison point par point pour ζ^{nm}. Par conséquent, on propose une formulation conditionnelle pour modéliser $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$ (illustrée sur la figure 2.5b) telle que :

$$\overline{\rho \boldsymbol{v}} = \begin{cases} \overline{\rho}\, \overline{\boldsymbol{v}_i^*} + \overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*} + \zeta^{nm} & \text{si } \overline{\delta^i} \neq 0 \\ \overline{\rho}\, \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho\, \overline{\boldsymbol{v}}} - \overline{\rho}\, \overline{\overline{\boldsymbol{v}}} = \overline{\rho}\, \overline{\boldsymbol{v}} & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.31}$$



(a) Modèles pour ζ (écoulement pseudo-2D)

(b) Influence du modèle sur la quantité de mouvement $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}$

FIGURE 2.5 – Modèles de reconstruction de la quantité de mouvement mésoscopique.

Cette formulation dégénère naturellement vers le modèle de Toutant (2006) lorsqu'il n'y a pas de changement de phase. Elle ne requiert une extension des champs $\dot{m}$ et $\boldsymbol{n}$ que dans le voisinage de l'interface. La figure 2.5b permet de constater que ce modèle représente parfaitement $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}$ dans le cas simple de l'écoulement pseudo-2D décrit en annexe 2.E.2. Il est bien continu à la limite du voisinage (en $x/\Delta = \pm 1/2$).

À ce stade, le problème n'est pas fermé puisque les variables $\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$ et $\overline{\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*}$ ne sont pas des variables principales. Le paragraphe 2.2.4 présente l'approche que nous proposons pour y remédier.

2.2.4 Construction d'une vitesse intermédiaire

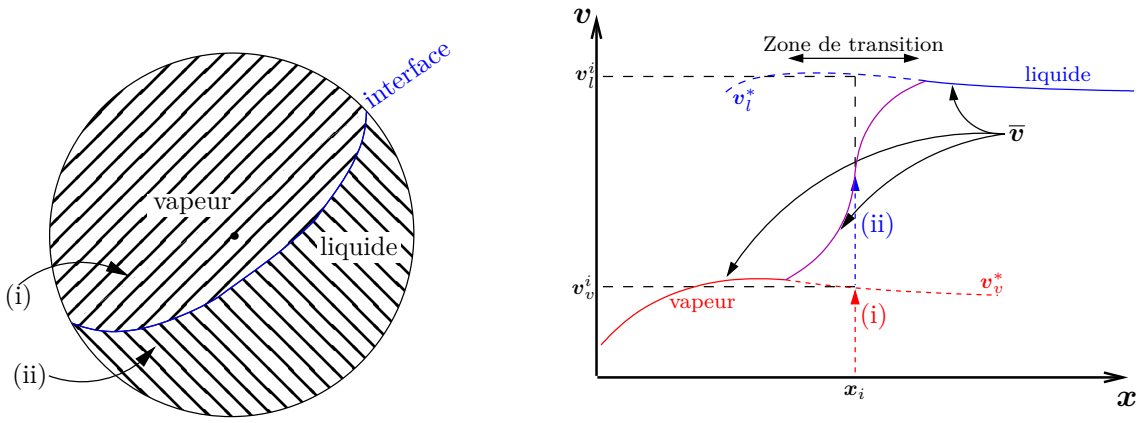
Puisque la vitesse $\boldsymbol{v}$ est discontinue à la traversée de l'interface, nous souhaitons construire une variable continue $\boldsymbol{v}_i^*$ permettant de la remplacer dans la définition et la modélisation des termes sous-maille convectifs, et ce, afin d'adresser le problème de fermeture des termes $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}$, $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}}$, $\overline{\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}}$ et $\overline{\rho c_p \boldsymbol{v} T}$ du système (2.5).

L'objectif de notre démarche est d'appliquer un filtre volumique uniforme aux grandeurs locales instantanées, sans avoir à se soucier de la présence d'interface. Pour cela, nous avons introduit des grandeurs monofluides et nous avons défini un système d'équations permettant de les régir dans tout l'espace. L'interface et les discontinuités éventuelles se traitent donc de manière transparente. Néanmoins, au voisinage de l'interface, la vitesse filtrée a deux origines qui proviennent du caractère non local du filtre (Fig. 2.6) :

(i) Une première partie traduit effectivement assez bien la vitesse locale moyennée sur la phase considérée. Cette partie constitue la convection classique dans les phases (Fig. 2.6b).

(ii) L'autre partie, évaluée sur l'autre phase, est notablement différente de la première en raison de la discontinuité de la vitesse à l'interface introduite par le changement de phase. En effet, la dilatation (resp. compression) provoquée par l'évaporation (resp. condensation) du liquide vient s'ajouter à la vitesse que l'on aurait eu sans changement de phase (Fig. 2.6b).

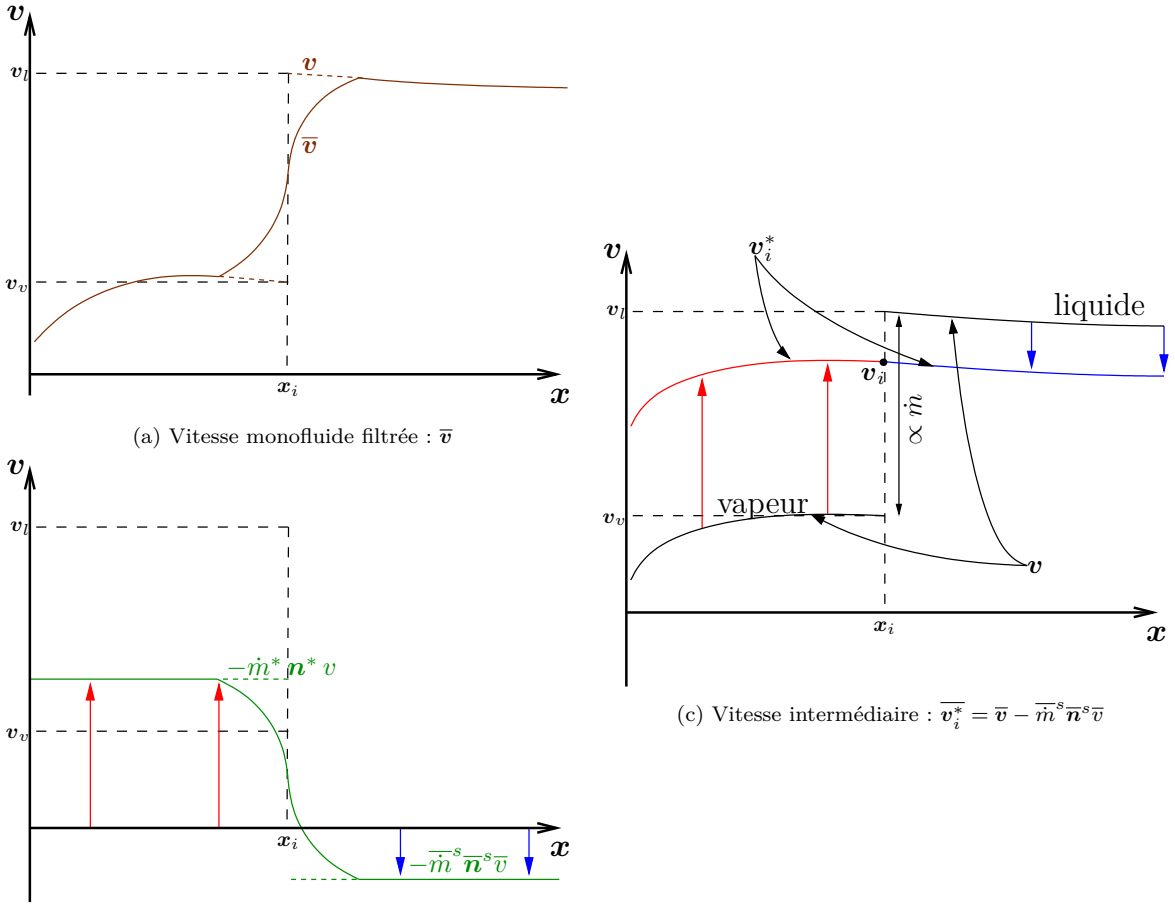
Dans une description microscopique, l'effet du changement de phase sur la vitesse n'apparaît que localement sur la surface de discontinuité. Il se traduit alors par un saut de vitesse normal à l'interface. Lors du filtrage, cet effet se trouve étalé sur le voisinage de l'interface et le saut de vitesse vient se mêler aux fluctuations (Fig. 2.7a). Afin de se rapprocher d'un champ "classique", il est commode d'étendre les variables interfaciales microscopiques $\dot{m}$ et $\boldsymbol{n}$ au voisinage de l'interface pour construire le champ volumique $\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*\,v$ (Fig. 2.7b), où $v = 1/\rho$ est le volume massique monofluide.



(a) Représentation du support du filtre

(b) Décomposition des deux composantes de la vitesse filtrée $\overline{\boldsymbol{v}}$: $\overline{\boldsymbol{v}_i^*} = \overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s \overline{v}$

FIGURE 2.6 – Filtrage inconditionnel.



(a) Vitesse monofluide filtrée : $\overline{\boldsymbol{v}}$

(b) Vitesse mésoscopique associée au changement de phase : $-\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s \overline{v}$

(c) Vitesse intermédiaire : $\overline{\boldsymbol{v}_i^*} = \overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s \overline{v}$

FIGURE 2.7 – Principe de construction de la vitesse intermédiaire $\boldsymbol{v}_i^* = \overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s \overline{v}$ à partir des deux composantes $\overline{\boldsymbol{v}}$ et $\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s \overline{v}$.

Ce champ peut alors être retranché à la vitesse monofluide pour conduire au champ de vitesse $\boldsymbol{v}_i^*$ représentant le prolongement continu de la vitesse interfaciale dans les phases (Fig. 2.7c). Dans la suite de ce paragraphe, on définit tout d'abord les champs étendus $\dot{m}^*$, $\boldsymbol{n}^*$ et $\boldsymbol{v}_i^*$ puis on les relie aux variables mésoscopiques pour ouvrir la voie à de nouvelles modélisations.

Soit un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$. L'écoulement peut être décomposé en plusieurs sous-domaines simplement connexes Ω^i, représentant la phase continue $(i = 0)$ et les inclusions de la phase dispersée $(i = 1 \dots p$, où p est le nombre d'inclusions). Considérons le champ vectoriel $\dot{m}\,\boldsymbol{n}$ défini sur les interfaces séparant les phases $(\partial\Omega^i)$. D'après le théorème de Helmholtz (Arfken, 1985), dans chaque sous-domaine, il existe un unique champ vectoriel $\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*$ tel que

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega^i, \qquad \nabla \cdot (\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*) = K \tag{2.32a}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega^i, \qquad \nabla \times (\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*) = 0 \tag{2.32b}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega^i, \qquad \dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^* = \dot{m}\,\boldsymbol{n} \tag{2.32c}$$

où K est un champ scalaire volumique *a priori* quelconque. Choisissons le champ suivant

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad K = \dot{m}\,(\boldsymbol{x}_i)\,\kappa\,(\boldsymbol{x}_i) \tag{2.33}$$

où $\boldsymbol{x}_i$ est le point de $\partial\Omega^i$ minimisant la distance à $\boldsymbol{x}$ (*i. e.,* projection sur l'interface la plus proche). Pour les points équidistants de plusieurs portions d'interfaces, K n'est pas défini. K n'est défini dans tout l'espace qu'au sens des distributions. Cependant, si les inclusions sont suffisamment éloignées et si la courbure est faible devant la taille du filtre, ce champ est régulier dans un voisinage de l'interface suffisant pour notre étude.

Le choix d'un champ irrotationnel permet d'affirmer que le champ vectoriel dérive d'un potentiel ϕ solution de :

$$\nabla^2\phi = K \quad \text{et} \quad \dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^* = \nabla\phi \tag{2.34}$$

Le champ étendu $\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*$ est continu et dérivable au sens des distributions dans chaque sous-domaine Ω^i. Par construction, il est continu à l'interface.

Cette définition unique du vecteur $\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*$ est utilisée pour construire l'extension du champ de vitesse de l'interface $\boldsymbol{v}_i^*$ sur l'ensemble du domaine Ω (Fig. 2.7b) par :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \boldsymbol{v}_i^* \hat{=} \boldsymbol{v} - \dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*\,v \tag{2.35}$$

où $v = 1/\rho$ est le volume massique monofluide. Le champ $\boldsymbol{v}$ est la vitesse du fluide et le champ $\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*\,v$ représente la vitesse induite par le changement de phase. Cette décomposition du champ de vitesse correspond à celle présentée en début de section (Fig. 2.7). Le champ $\boldsymbol{v}_i^*$ que l'on construit n'est pas à divergence nulle mais l'absence de saut rend cette divergence faible (*cf.* annexe 2.D). Malgré la discontinuité de la vitesse et du volume massique, **cette définition est continue à l'interface** où elle vaut la vitesse de déplacement de l'interface :

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_i^+} \boldsymbol{v}_i^* = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_i^-} \boldsymbol{v}_i^* = \boldsymbol{v}_i \tag{2.36}$$

Ces précautions permettent de définir sur $\mathbb{R}^n$ **un champ de vitesse continu à la traversée des interfaces**, dont les fluctuations sont, pour le reste, identiques à celles de la vitesse monofluide.

Grâce à l'extension (2.35), l'application du filtre (2.1) au champ volumique $\boldsymbol{v}_i^*$ permet d'obtenir la relation suivante :

$$\overline{\boldsymbol{v}_i^*} \hat{=} \overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*\,v} \tag{2.37}$$

Comme la définition (2.35) fait intervenir le produit de grandeurs microscopiques $\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*\,v$, le champ $\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$ ne peut pas être utilisé directement pour fermer le système à l'échelle mésoscopique car il n'est pas défini à partir des variables principales mésoscopiques que nous avons choisies pour décrire le système (2.5). Nous proposons de l'approcher par un champ mésoscopique $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ à définir uniquement à partir des variables principales mésoscopiques.

Dans le but de fermer la relation (2.37), on suppose qu'au premier ordre les fluctuations sous-maille du taux de changement de phase et de la normale sont négligeables dans le processus de reconstruction du champ $\overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^* v}$ si la topologie de l'interface est relativement bien capturée à l'échelle mésoscopique. L'hypothèse sous-jacente est la suivante : si la taille du filtre est suffisamment petite pour que les variations de courbure et de taux de changement de phase puissent être négligées à cette échelle, alors $K = cste + \mathcal{O}(\epsilon)$ et on montre à l'annexe 2.B que la déconvolution du champ $\overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*}$ à l'ordre dominant est simplement donnée par l'une des relations suivantes :

$$\overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*} = \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.38a}$$

$$\overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*} = \dot{m}^* \boldsymbol{n}^* + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.38b}$$

On montre aussi à l'annexe 2.B que :

$$\overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^* \chi} = \overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*}\, \overline{\chi} + \mathcal{O}(\epsilon) = \dot{m}^* \boldsymbol{n}^* \overline{\chi} + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.38c}$$

Par conséquent, au voisinage de l'interface, la relation (2.37) est fermée en ne conservant que les termes dominants par

$$\overline{\boldsymbol{v}_i^*} \approx \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \hat{=} \overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s \overline{v} \tag{2.39}$$

où l'opérateur $\bar{\cdot}^s$ est défini par l'équation (2.4) : $\overline{\phi}^s = \overline{\phi\delta^i}/\overline{\delta^i}$ si $\overline{\delta^i} \neq 0$. La variable $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ introduite dans la définition précédente n'est pas une quantité filtrée. L'abus de notation $\bar{\cdot}$ indique simplement la présence d'une grandeur mésoscopique. Le détail des approximations nécessaires est donné dans l'annexe 2.B basée sur l'étude de changement de phase uniforme à une interface sphérique. Cette approximation n'est valide qu'au voisinage des interfaces car le champ $\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s$ s'annule hors de ce voisinage. Elle introduit une nouvelle discontinuité au bord de la zone de transition interfaciale. Néanmoins, ce voisinage est suffisant pour l'application présentée par la suite car les modèles sous-maille diphasiques ne sont non nuls qu'au voisinage des interfaces.

En définitive, la définition (2.35) de $\boldsymbol{v}_i^*$ permet de construire un champ microscopique continu à la traversée de l'interface. Ce champ est utilisé à la section 2.2.5 pour définir des termes sous-mailles convectifs ayant une forme satisfaisante (conformément à la discussion du paragraphe 2.2.3). Comme le champ $\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$ n'est pas défini uniquement à partir des variables mésoscopiques, il est remplacé dans la définition des termes sous-maille convectifs par l'approximation $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ donnée par la relation (2.39).

Remarque : La fermeture de l'expression (2.37) définissant le champ $\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$ repose sur l'hypothèse que l'erreur $\boldsymbol{\tau} = \overline{\dot{m} v \boldsymbol{n}} - \overline{\dot{m}}^s \overline{v}\, \overline{\boldsymbol{n}}^s$ est très faible : $\boldsymbol{\tau} \ll \overline{\dot{m}}^s \overline{v}\, \overline{\boldsymbol{n}}^s$. Cette hypothèse est vérifiée si $\overline{\dot{m}}^s$ et $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ constituent une bonne approximation des champs microscopiques $\dot{m}^*$ et $\boldsymbol{n}^*$. Pour que cette identification soit précise, il faut que les champs microscopiques $\dot{m}$ et $\boldsymbol{n}$ varient peu à l'échelle du filtre. L'approximation (2.39) implique donc deux hypothèses contraignant la validité du modèle :

(i) Pour que le lien entre $\boldsymbol{n}$ et $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ soit direct, il faut que la sous-résolution de l'interface soit faible, *i. e.,* que la courbure locale de l'interface varie peu à l'échelle du filtre car $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire égal au gradient de la distance à l'interface microscopique. Cette hypothèse de faible sous-résolution de l'interface est aussi présente dans le modèle de Toutant *et al.* (2009a).

(ii) Pour que la déconvolution de $\overline{\dot{m}}^s$ soit directe, il faut que le gradient de température au voisinage de l'interface soit suffisamment régulier, c'est-à-dire que le champ de température soit quasi statique. Autrement dit, il faut que la conduction domine la convection (*i. e.,* $\mathrm{Pe} \ll 1$) dans le voisinage de l'interface. Cette condition est satisfaite si le voisinage de l'interface est à l'intérieur de la couche limite thermique. Pour l'eau pressurisée à 15.5MPa à saturation, le nombre de Prandlt est de $\mathrm{Pr} = 1.474$. Par conséquent, les couches limites thermique et dynamique sont du même ordre de grandeur et la contrainte que l'on introduit ici est similaire à celle déjà existante dans le modèle de Toutant *et al.* (2009a), *i. e.,* être capable de résoudre la couche limite.

Pour une modélisation plus précise, ou pour repousser les limites du modèle, il faudrait proposer une fermeture au terme sous-maille $\boldsymbol{\tau} = \overline{\dot{m} v \boldsymbol{n}} - \overline{\dot{m}}^s \, \overline{v} \, \overline{\boldsymbol{n}}^s$.

Par ailleurs, l'extension des champs adoptée résulte d'un choix guidé par la volonté de trouver une expression fermée (*i. e.,* reliée aux variables mésoscopiques du problème). Pour les développements du chapitre 4 et pour l'analyse de la conservation de la masse (section 2.2.6), il est utile de remarquer que l'extension choisie n'est ni constante ni à divergence nulle car ces contraintes sont difficiles à réaliser en utilisant directement les variables principales du système. Il faudrait disposer de la distance à l'interface pour pouvoir approcher un champ à divergence nulle. La divergence des vitesses $\boldsymbol{v}_i^*$ ou $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ a l'avantage de ne pas contenir de distribution de Dirac à l'interface contrairement à la vitesse monofluide mais elle est non nulle pour une interface courbe sujette à du changement de phase (*cf.* annexe 2.D).

2.2.5 Fermeture des termes convectifs

Nous disposons à présent d'un champ microscopique volumique $\boldsymbol{v}_i^*$ défini par la relation (2.35), continu à la traversée de l'interface et qui contient les fluctuations de la vitesse $\boldsymbol{v}$ dans les phases. Au lieu d'utiliser la vitesse discontinue $\boldsymbol{v}$, nous souhaitons utiliser la vitesse continue $\boldsymbol{v}_i^*$ pour construire les termes sous-maille associés à $\overline{\rho \, \boldsymbol{v}}$, $\overline{\rho \, \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}}$, $\overline{\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}}$ et à $\overline{\rho c_p \boldsymbol{v} T}$ du système (2.5) afin d'atteindre une bonne précision lors de la reconstruction de Bardina *et al.* (1983).

En utilisant les champs volumiques $\boldsymbol{v}_i^*$, $\dot{m}^*$ et $\boldsymbol{n}^*$, la vitesse $\boldsymbol{v}$ peut être remplacée pour obtenir les relations suivantes (*cf.* annexe 2.A) :

$$\rho \, \boldsymbol{v} = \rho \, \boldsymbol{v}_i^* + \dot{m}^* \, \boldsymbol{n}^* \tag{2.40a}$$

$$\rho \, \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} = \rho \, \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_i^* + \boldsymbol{v} \otimes \dot{m}^* \, \boldsymbol{n}^* \tag{2.40b}$$

$$\nabla \cdot \mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} = \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \boldsymbol{v}_i^* + \nabla^T \boldsymbol{v}_i^* \right) \right] + \nabla \cdot \left[\mu v \left(\nabla \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^* \right) + \nabla^T \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^* \right) \right) \right] \tag{2.40c}$$

$$\rho c_p \, \boldsymbol{v} T = \rho c_p \, T \, \boldsymbol{v}_i^* + c_p \, T \, \dot{m}^* \, \boldsymbol{n}^* \tag{2.40d}$$

Les expressions (2.40) étant définies dans tout l'espace, elles peuvent être filtrées. En négligeant dans un premier temps l'erreur de commutation entre l'opérateur de filtrage et le produit, on obtient :

$$\overline{\rho \, \boldsymbol{v}} \approx \overline{\rho} \, \overline{\boldsymbol{v}_i^*} + \overline{\dot{m}^* \, \boldsymbol{n}^*} \tag{2.41a}$$

$$\overline{\rho \, \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}} \approx \overline{\rho \, \boldsymbol{v}} \otimes \overline{\boldsymbol{v}_i^*} + \boldsymbol{v} \otimes \overline{\dot{m}^* \, \boldsymbol{n}^*} \tag{2.41b}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}} \approx \nabla \cdot \left[\overline{\mu} \left(\nabla \overline{\boldsymbol{v}_i^*} + \nabla^T \overline{\boldsymbol{v}_i^*} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\overline{\mu v} \left(\nabla \left(\overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*} \right) + \nabla^T \left(\overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*} \right) \right) \right] \tag{2.41c}$$

$$\overline{\rho c_p \, \boldsymbol{v} T} \approx \overline{\rho c_p \, T} \, \overline{\boldsymbol{v}_i^*} + \overline{c_p \, T} \, \overline{\dot{m}^* \, \boldsymbol{n}^*} \tag{2.41d}$$

Les champs $\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$ et $\overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*}$ ne sont pas accessibles à l'échelle mésoscopique. Par conséquent, ils ne peuvent pas constituer une base pour définir les termes sous-maille. On suppose que le champ $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$, défini uniquement à partir des variables principales mésoscopiques par la relation (2.39), constitue une bonne approximation du champ $\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$. De même, on approche le champ $\overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*}$ par le produit $\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s$ dans le cadre des hypothèses du paragraphe 2.2.4. Ainsi, on introduit les termes sous-maille convectifs τ suivants :

$$\overline{\rho \, \boldsymbol{v}} = \overline{\rho} \, \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\dot{m}}^s \, \overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau_{\text{temp}} \tag{2.42a}$$

$$\overline{\rho \, \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}} = \overline{\rho \, \boldsymbol{v}} \otimes \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\boldsymbol{v}} \otimes \overline{\dot{m}}^s \, \overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau_{\text{conv}} \tag{2.42b}$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}} = \nabla \cdot \left[\overline{\mu} \left(\nabla \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \nabla^T \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \right) + \tau_{\text{diff}} \right] + \nabla \cdot \left[\overline{\mu v} \left(\nabla \left(\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s \right) + \nabla^T \left(\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s \right) \right) \right] \tag{2.42c}$$

$$\overline{\rho c_p \, \boldsymbol{v} T} = \overline{\rho c_p \, T} \, \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{c_p \, T} \, \overline{\dot{m}}^s \, \overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau_{\text{conv}}^T \tag{2.42d}$$

Dans les expressions ci-dessus, le problème de fermeture qui concernait initialement les termes des membres de gauche est déplacé vers les termes sous-maille τ. L'intensité de ces termes τ est *a priori* plus faible. Les autres termes des membres de droite sont fermés à l'échelle mésoscopique, à l'exception de $\overline{\beta \, \Theta}$ et de $\overline{v \beta \, \Theta}$ qui font l'objet d'un traitement particulier à la section 2.2.7 et de

la normale mésoscopique $\overline{\boldsymbol{n}}^s$. D'après la définition (2.4) de l'opérateur $\overline{\cdot}^s$, il faut déterminer une expression mésoscopique fermée de $\overline{\delta^i}$ pour que le champ $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ soit accessible à l'échelle mésoscopique :

$$\overline{\boldsymbol{n}}^s = \frac{\overline{\boldsymbol{n}\delta^i}}{\overline{\delta^i}} = -\frac{\nabla\overline{\chi}}{\overline{\delta^i}} \text{ si } \overline{\delta^i} \neq 0 \tag{2.43}$$

Cette fermeture est traitée à la section 2.5.

Les définitions (2.42) sont adéquates pour permettre une modélisation par similarité d'échelles car la vitesse monofluide mésoscopique $\overline{\boldsymbol{v}}$ a été remplacée par

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\,\overline{v} \tag{2.44}$$

d'après la relation (2.39). On propose une modélisation de ces termes sous-maille par l'hypothèse de similarité d'échelles basée sur la vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$:

$$\tau^{nm}_{\text{temp}} \hat{=} \overline{\rho\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{2.45a}$$

$$\tau^{nm}_{\text{conv}} \hat{=} \overline{\rho\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \otimes \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} \otimes \overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{2.45b}$$

$$\tau^{nm}_{\text{diff}} \hat{=} \overline{\mu\left(\nabla\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \nabla^T\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\right)} - \overline{\mu}\left(\nabla\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma + \nabla^T\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\right) \tag{2.45c}$$

$$\tau^{Tnm}_{\text{conv}} \hat{=} \overline{\rho c_p\,T\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho c_p\,T}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{2.45d}$$

Les détails permettant d'aboutir à ces formulations compactes des termes sous-maille sont donnés dans l'annexe 2.C. Les fermetures (2.45) reposent sur l'hypothèse $\overline{\dot{m}^*\boldsymbol{n}^*} \approx \overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s$, formulée pour $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ à l'équation (2.39). Par conséquent, les modèles proposés ici supposent que les corrélations sous-maille entre le taux de changement de phase et la normale à l'interface sont négligeables. Cette hypothèse indique que les déformations de l'interface doivent être limitées pour que la topologie de l'interface reste résolue et que le taux de changement de phase varie linéairement à l'échelle du filtre. La reconstruction des champs sous-maille est alors limitée à la contribution de $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$. Il faut souligner l'importance de cette vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ qui assure la qualité de la prédiction des termes sous-maille contrairement à la vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}$.

Le terme sous-maille de diffusion est supposé négligeable en accord avec les travaux de Toutant *et al.* (2009a). Par conséquent, on propose de remplacer la relation de fermeture (2.45c) par la relation simple suivante :

$$\tau^{nm}_{\text{diff}} = 0 \tag{2.46}$$

Cette hypothèse est confirmée par les tests *a priori* conduits au chapitre 3.

Remarques : Grâce à la décomposition présentée ici, on propose une modélisation consistante des différents termes sous-maille qui dégénère naturellement vers le modèle de Toutant *et al.* (2009a) pour les écoulements sans changement de phase. Notre démarche permet de construire une variable qui évolue lentement dans la direction normale à l'interface, contrairement à la vitesse monofluide. En pratique pour de nombreux cas et en particulier pour les simulations présentées au chapitre 3, la fraction de $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ due au changement de phase est négligeable devant contribution de la vitesse monofluide :

$$\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s\overline{v} \ll \overline{\boldsymbol{v}} \tag{2.47}$$

La conséquence directe de ce constat est que les modèles proposés par Toutant *et al.* (2009a) semblent valides et plus simples que ceux proposés ici. Néanmoins, on préfère cette formulation pour plusieurs raisons capitales.

- Formellement, notre formulation est plus générique et elle reste valide indépendamment du saut de masse volumique et de l'intensité du taux de changement de phase ;
- La contribution liée au changement de phase est essentielle même lorsqu'elle parait négligeable car un simple changement de repère peut annuler la composante de convection $\overline{\boldsymbol{v}}$ et ainsi rendre la contribution du changement de phase $\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s\overline{v}$ prédominante. Or, le changement de repère n'a aucun impact physique d'après l'invariance galiléenne des équations. Par conséquent, la contribution du changement de phase ne peut pas être négligée.

- Enfin, cette contribution doit être prise en compte car elle traduit un phénomène physique différent de la convection. Pour un écoulement sous-refroidi (resp. surchauffé), elle est toujours orientée vers la phase liquide (resp. vapeur). Par conséquent, sa prise en compte est essentielle pour reproduire correctement des grandeurs moyennées comme le taux de vide. La physique modélisée par cette contribution est spécifique et ne peut donc pas être négligée. Le traitement du changement de phase doit être cohérent entre le bilan de masse, l'équation de transport de l'interface et les autres bilans.

En conclusion, les relations (2.42), (2.44) et (2.45) ferment les termes $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}$, $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}}$ et $\overline{\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}}$ du bilan de quantité de mouvement (2.5c). L'introduction de la variable $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ dans ces relations requiert la fermeture de $\overline{\delta^i}$ comme le montre la relation (2.43). Cette fermeture, qui est par ailleurs nécessaire pour fermer le bilan de masse (2.5b) et le bilan d'énergie (2.5d), fait l'objet de la section 2.5. La fermeture du terme de tension de surface $\overline{\kappa\nabla\chi_v}$ est traitée à la section 2.4 pour compléter la fermeture du bilan de quantité de mouvement (2.5c).

Les relations (2.42d) et (2.45d) permettent de simplifier le problème de fermeture du terme $\overline{\rho c_p \boldsymbol{v} T}$ en s'intéressant à l'influence de la vitesse. Elles permettent de passer d'une corrélation triple vitesse/interface/température à deux corrélations doubles interface/température $\overline{\beta\,\Theta}$ et $\overline{v\beta\,\Theta}$. Leur fermeture est présentée à la section 2.2.7 consacrée au bilan d'énergie (2.5d).

Enfin, la fermeture de l'équation de transport de l'interface (2.5a) par l'intermédiaire du terme $\overline{\boldsymbol{v}_i\cdot\nabla\chi}$ fait l'objet de la section suivante.

2.2.6 Fermeture de l'équation de transport de l'interface

Dans l'équation de transport de l'interface (2.5a), la vitesse $\boldsymbol{v}_i$ n'est définie qu'à l'interface. Par conséquent, il n'existe pas de définition naturelle pour le terme sous-maille associé à $\overline{\boldsymbol{v}_i\cdot\nabla\chi}$ puisque la vitesse $\boldsymbol{v}_i$ ne peut pas être filtrée en volume. Pour rendre ce filtrage possible, il faut définir une extension du champ surfacique de vitesse de déplacement de l'interface $\boldsymbol{v}_i$ au voisinage de l'interface. D'après la section 2.2.4, nous disposons du champ microscopique $\boldsymbol{v}_i^*$ défini dans tout l'espace par la relation (2.35), continu à la traversée de l'interface et dont la valeur à l'interface est la vitesse de déplacement de l'interface microscopique $\boldsymbol{v}_i$. Cette extension permet de filtrer $\boldsymbol{v}_i^*$ et d'utiliser $\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$ pour fermer le terme $\overline{\boldsymbol{v}_i\cdot\nabla\chi}$. Même si d'autres extensions semblent *a priori* possibles, nous utilisons à nouveau l'extension présentée à la section 2.2.4. Le champ $\boldsymbol{v}_i^*$ est continu à la traversée de l'interface ce qui permettra de fermer le terme sous-maille construit par similarité d'échelles.

Le champ volumique $\boldsymbol{v}_i^*$ conduit à l'identification suivante :

$$\boldsymbol{v}_i\cdot\nabla\chi=\boldsymbol{v}_i^*\cdot\nabla\chi \tag{2.48}$$

Cette expression étant définie dans tout l'espace, elle peut être filtrée. En négligeant dans un premier temps l'erreur de commutation entre l'opérateur de filtrage et le produit, on obtient :

$$\overline{\boldsymbol{v}_i\cdot\nabla\chi}\approx\overline{\boldsymbol{v}_i^*}\cdot\nabla\overline{\chi} \tag{2.49}$$

Le champ $\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$ n'est pas accessible à l'échelle mésoscopique ; par conséquent, il ne peut pas être utilisé pour définir un terme sous-maille. En suivant le même raisonnement qu'à la section 2.2.5, le champ $\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$ est approché par le champ $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$, défini uniquement à partir des variables principales mésoscopiques par la relation (2.39) et on construit le terme sous-maille interfacial τ_{interf} suivant :

$$\overline{\boldsymbol{v}_i\cdot\nabla\chi}=\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\cdot\nabla\overline{\chi}+\tau_{\text{interf}} \tag{2.50}$$

Cette définition permet de reporter le problème de fermeture sur le terme sous-maille τ_{interf} *a priori* plus faible. La définition (2.50) permet une modélisation par similarité d'échelles car la vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\approx\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$ ne provient pas d'un champ discontinu à l'échelle microscopique. On propose la modélisation suivante :

$$\tau_{\text{interf}}^{nm}\hat{=}\overline{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\cdot\nabla\chi}-\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\cdot\nabla\overline{\chi} \tag{2.51}$$

Cette fermeture (2.51) de l'équation de transport de l'interface (2.5a) repose à nouveau sur l'hypothèse $\overline{\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*} \approx \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s$, formulée pour $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ à l'équation (2.39). Par conséquent, ce modèle, comme les modèles proposés à la section 2.2.5, suppose que les corrélations sous-maille entre le taux de changement de phase et la normale à l'interface sont négligeables pour que la reconstruction des champs sous-maille soit limitée à la contribution de $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$. Insistons une dernière fois sur l'importance de la vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ qui assure la qualité de la prédiction des termes sous-maille.

Conséquence de la fermeture du transport de l'interface sur la conservation de la masse

Nous avons signalé précédemment que la conservation de la masse à l'échelle mésoscopique (2.9) n'est pas assurée de manière intrinsèque par les équations mésoscopiques ouvertes, et cela en raison de la forme du système choisie lors du filtrage. Par conséquent, il est indispensable d'étudier les propriétés des équations mésoscopiques fermées envers la conservation de la masse. On s'intéresse au système réduit suivant (fermé par le modèle $\tau^{nm}_{\text{interf}}$, Éq. (2.51)) :

$$\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \nabla \overline{\chi} + \overline{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \nabla \chi} - \overline{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} \cdot \nabla \overline{\chi} = 0 \tag{2.52a}$$

$$\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\dot{m}}^s \overline{\delta^i} \, [\![1/\rho]\!] \tag{2.52b}$$

En utilisant la définition de la masse volumique monofluide $\rho = -[\![\rho]\!]\,\chi + 1$, l'équation (2.52a) multipliée par $-[\![\rho]\!]$ conduit à :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \left(\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \nabla \overline{\rho} + \overline{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \nabla \rho} - \overline{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} \cdot \nabla \overline{\rho}\right) = 0 \tag{2.53}$$

Cette relation peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s + \overline{\rho\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}\right) - \left(\nabla \cdot \left(\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s\right) + \overline{\rho} \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\rho \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho}\,\overline{\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}\right) = 0 \tag{2.54}$$

D'après les définitions (2.42a) de τ_{temp} et (2.45a) de τ^{nm}_{temp}, l'hypothèse $\tau_{\text{temp}} \approx \tau^{nm}_{\text{temp}}$ (utilisée pour fermer la quantité de mouvement) conduit à $\overline{\rho \boldsymbol{v}} \approx \overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s + \overline{\rho\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}$. Par conséquent, on a :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho \boldsymbol{v}}) = \nabla \cdot \left(\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s\right) + \overline{\rho} \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\rho \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho}\,\overline{\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} \tag{2.55}$$

Ainsi, le modèle pour $\tau^{nm}_{\text{interf}}$ joue un double rôle. Il doit non seulement approcher convenablement τ_{interf} pour permettre de déplacer correctement l'interface ; mais il joue aussi un rôle dans la conservation de la masse à l'échelle mésoscopique (2.9). Ces deux contraintes s'expriment :

$$\tau^{m}_{\text{interf}} \approx \tau_{\text{interf}} \tag{2.56a}$$

$$\nabla \cdot \left(\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s\right) + \overline{\rho} \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\rho \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho}\,\overline{\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} \approx 0 \tag{2.56b}$$

La première contrainte concerne le transport de l'interface et la seconde la conservation de la masse. Cette dernière se réduit dans le cas d'écoulements sans changement de phase à $\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} = 0$ puisque $\overline{\dot{m}}^s = 0$ et $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma = \overline{\boldsymbol{v}}$. Elle est alors satisfaite exactement d'après la contrainte de divergence nulle imposée par ailleurs. Ainsi, pour être globalement cohérent, le choix d'un modèle de transport de l'interface ne laisse pas de liberté sur le modèle pour la quantité de mouvement $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$. L'utilisation de la même approximation (2.39) pour ces deux modélisations assure la cohérence de notre modélisation.

En présence de changement de phase, l'équation (2.56b) fait intervenir la divergence de la vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$. En combinant la définition (2.39) de $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ à la contrainte (2.52b) sur la divergence de la vitesse, on montre que la divergence de la vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ est reliée à la divergence du champ $\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s$ par la relation :

$$\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma = -\overline{v} \nabla \cdot \left(\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s\right) \tag{2.57}$$

Cette divergence est *a priori* non nulle. Elle est reliée à la courbure de l'interface et au taux de changement de phase (*cf.* annexe 2.B). L'approximation (2.56b) s'écrit alors :

$$(1 - \overline{\rho}\,\overline{v}) \nabla \cdot \left(\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s\right) \approx \overline{\rho \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho}\,\overline{\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} \tag{2.58}$$

La qualité de cette approximation est difficile à déterminer. Elle serait garantie si le champ étendu $\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s$ était à divergence nulle. Malheureusement, comme nous l'avons mentionné à la section 2.2.4, il est difficile de construire un champ à divergence nulle uniquement à partir des variables mésoscopiques. La conservation de la masse est contrôlée par l'approximation (2.58). Elle n'est donc qu'approchée *a priori*.

2.2.7 Fermeture de l'équation de bilan d'énergie

Intéressons-nous à présent à la fermeture du bilan d'énergie (2.5d). À la section 2.2.5, nous avons discuté de la fermeture du terme $\overline{\rho c_p \boldsymbol{v} T}$ en se focalisant sur l'influence de la vitesse. À l'aide des relations (2.42d) et (2.45d), nous avons simplifié le problème de fermeture de ce terme en transformant la corrélation triple vitesse/interface/température en deux corrélations doubles interface/température $\overline{\rho c_p T}$ et $\overline{c_p T}$:

$$\overline{\rho c_p \boldsymbol{v} T} = \overline{\rho c_p T}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{c_p T}\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau_{\text{conv}}^{Tnm} \quad \text{avec} \quad \tau_{\text{conv}}^{Tnm} = \overline{\rho c_p T\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{c_p T}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{2.59}$$

À ce stade, le bilan d'énergie est le suivant

$$\frac{\partial \overline{\rho\, c_p\, T}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho c_p T}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{c_p T}\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \overline{\rho c_p T\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{c_p T}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \right) = \frac{1}{\text{Pe}} \nabla \cdot \left(\overline{k \nabla T} \right) + \frac{\mathcal{L}^0}{\text{Ja}^*} \overline{\dot{m}}^s \overline{\delta^i} \tag{2.60}$$

où $\mathcal{L}^0$ est la chaleur latente de référence (en adimensionnel, $\mathcal{L}^0 = 1$). Cette équation peut devenir dimensionnelle pour $\text{Pe} = \text{Ja} = 1$ et $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}^{vap}$. Des fermetures sont requises pour les termes $\overline{\rho c_p T}$, $\overline{c_p T}$, $\overline{k \nabla T}$ et $\overline{\delta^i}$. Sous cette forme, la fermeture du terme de conduction $\overline{k \nabla T}$ est délicate car les variables k et ∇T sont discontinues à l'interface. Or, d'après le paragraphe 2.2.3, le terme sous-maille $\overline{k \nabla T} - \overline{k} \nabla \overline{T}$ n'est pas prédit précisément par une décomposition de Bardina *et al.* (1983). Pour pallier ce problème, nous avons choisi d'utiliser la variable $\overline{\Theta}$ comme variable principale car le terme de conduction formulé en Θ est fermé de manière intrinsèque. En effet, le gradient $\nabla \overline{\Theta}$ correspond au flux filtré à l'interface. Une deuxième justification pour le choix de cette variable est présentée lors du traitement de la condition de saturation à la section 2.3.

Le bilan d'énergie (2.60) est reformulé en fonction de la variable Θ

$$\frac{\partial \overline{\beta\, \Theta}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\beta\, \Theta}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{v \beta\, \Theta}\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \overline{\beta\, \Theta\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\beta\, \Theta}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \right) = \frac{1}{\text{Pe}} \nabla^2 \overline{\Theta} + \frac{\mathcal{L}^0}{\text{Ja}} \overline{\dot{m}}^s \overline{\delta^i} \tag{2.61}$$

car la conductivité est constante par phase et la température adimensionnelle est nulle à l'interface. $\beta = \rho C_p / k$ est l'inverse de la diffusivité thermique. Le terme de conduction de l'équation (2.61) est défini à partir de la variable principale $\overline{\Theta}$ uniquement et ne nécessite pas de modélisation particulière. Seuls les termes sous-maille de dérivée temporelle $\overline{\beta\, \Theta}$ et de convection $\overline{v \beta\, \Theta}$ doivent être modélisés (termes du membre de droite de l'équation (2.61)). Comme la variable Θ est continue à la traversée de l'interface, ils peuvent être modélisés par l'hypothèse de similarité d'échelles proposée par Toutant *et al.* (2009a) pour fermer l'équation (2.61) :

$$\overline{\beta \Theta} = \overline{\beta}\,\overline{\Theta} + \tau_{\text{temp}}^{T} \quad \text{et} \quad \tau_{\text{temp}}^{Tnm} = \overline{\beta \overline{\Theta}} - \overline{\beta}\,\overline{\overline{\Theta}} \tag{2.62a}$$

$$\overline{v \beta \Theta} = \overline{v \beta}\,\overline{\Theta} + \tau_{\text{temp}}^{T} \quad \text{et} \quad \tau_{\text{temp}}^{Tnm} = \overline{v \beta \overline{\Theta}} - \overline{v \beta}\,\overline{\overline{\Theta}} \tag{2.62b}$$

Ces relations complètent la fermeture du bilan d'énergie.

2.3 Fermeture de la condition de saturation mésoscopique

Pour poursuivre la fermeture du système (2.5) et prendre en considération la condition d'équilibre thermodynamique local (1.14e) à l'échelle mésoscopique, la relation (2.5e)

$$\overline{T \delta^i} = 0 \tag{2.63}$$

doit être reformulée à partir de grandeurs accessibles à l'échelle mésoscopique, formellement : $\mathcal{F}\left(\overline{\chi}_v, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{p}, \overline{T}, \overline{\dot{m}}^s\right) = 0$. Toutes les équations du système (2.5) sont obtenues par la même démarche, *i. e.*, l'application du filtre aux équations microscopiques (1.14). Cependant, la relation

microscopique (1.14e) $T\delta^i = 0$ a un statut particulier ; c'est une condition à la limite imposée à l'interface. Pour cette raison, elle est localisée à l'interface microscopique et l'application du filtre volumique n'élargit pas son domaine d'application. Contrairement aux apparences, la relation (2.63) ne traduit pas une condition sur le champ de température au voisinage de l'interface ; elle ne fait intervenir les valeurs du champ de température monofluide microscopique qu'aux positions de l'interface microscopique. La relation (2.63) n'apporte pas d'information complémentaire à la relation microscopique (1.14e) $T\delta^i = 0$ car, par définition de la distribution de Dirac, seule la température à l'interface est prise en compte dans la relation (2.63), bien que le filtre soit volumique. Autrement dit, les relations $\overline{T\delta^i} = 0$ et $T\delta^i = 0$ sont équivalentes et il faut choisir celle que l'on désire fermer. Nous avons choisi de fermer la relation :

$$T\delta^i = 0 \tag{2.64}$$

Bien qu'en certains points similaire aux problèmes de fermeture précédents (déconvolution d'un produit), la fermeture de la condition de saturation est particulière car la déconvolution ne concerne pas un produit classique mais une condition à la limite : la distribution de Dirac restreint le champ volumique à l'interface.

Pour fermer cette condition (2.64) à l'échelle mésoscopique, il faut déterminer (i) la position de l'interface microscopique et (ii) la valeur du champ microscopique T à cette position en fonction des variables mésoscopiques par un processus de *déconvolution*.

(i) À l'échelle mésoscopique, la position de l'interface microscopique δ^i est approchée par l'isosurface solution de l'équation implicite $\overline{\chi}_v = 1/2 + 3/16\epsilon\overline{\kappa}_\sigma$ en utilisant la méthodologie proposée par Toutant *et al.* (2009a). La détermination de cette position est discutée au paragraphe 4.4.3.3. On note δ_σ la position approchée de l'interface microscopique.

(ii) En étudiant analytiquement quelques configurations, nous allons montrer que les valeurs mésoscopiques de la température monofluide peuvent être reliées à la température de saturation, à la courbure locale de l'interface et au taux de changement de phase mésoscopique.

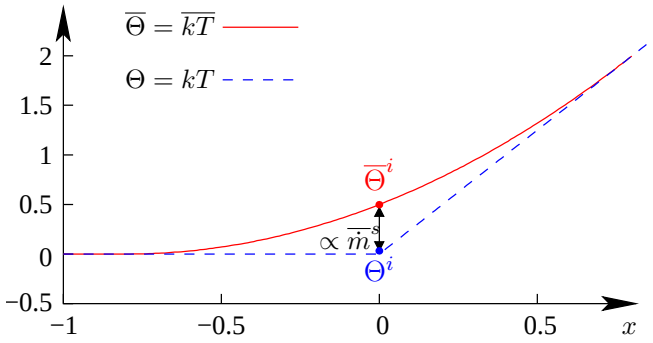


FIGURE 2.8 – Profil schématique de Θ au voisinage d'une interface non matérielle.

Remarque : À l'échelle mésoscopique, le taux de changement de phase est une variable permettant d'imposer la valeur de la température à l'interface. Inversement, la condition de saturation (2.64) régit l'évolution de la variable principale $\overline{\dot{m}}^s$. D'après la définition (2.3) du filtre surfacique $\overline{\cdot}^s$, le champ $\overline{\dot{m}}^s$ est non nul dans le voisinage de l'interface alors que la relation (2.64) n'est définie que pour une isosurface particulière de l'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi}_v$.

À première vue, ce constat est surprenant puisque la relation (2.64) n'est pas suffisante pour déterminer le taux de changement de phase mésoscopique $\overline{\dot{m}}^s$ au voisinage de l'interface. Cette relation permet de déterminer l'intensité du changement de phase au niveau de l'interface uniquement. Pour déterminer le taux de changement de phase $\overline{\dot{m}}^s$ dans le voisinage de l'interface ($\overline{\delta^i} \neq 0$), il faut connaître le profil de $\overline{\dot{m}}^s$ selon la direction normale à l'interface. On montre au paragraphe 4.C que les variables surfaciques filtrées comme $\overline{\dot{m}}^s$, ne varient pas dans la direction normale à l'interface à l'ordre dominant. Une contrainte pour déterminer la valeur sur l'interface est donc suffisante

pour fermer le problème. Autrement dit, on traduit cette invariance dans la direction normale par l'ajout de la relation de fermeture

$$\forall \boldsymbol{x} \text{ tel que } \overline{\delta^i}(\boldsymbol{x}) \neq 0 : \quad \overline{\dot{m}}^s(\boldsymbol{x}) = \overline{\dot{m}}^\sigma(\boldsymbol{x}_i) \tag{2.65}$$

où $\boldsymbol{x}_i$ est la projection de $\boldsymbol{x}$ sur l'interface et l'opérateur $\overline{\cdot}^\sigma$ est la restriction à une surface de l'opération de filtrage volumique $\overline{\cdot}^s$. Ainsi, la nouvelle variable $\overline{\dot{m}}^\sigma$ est définie uniquement à l'interface par la restriction à une surface de l'opération de filtrage volumique.

Revenons à présent sur la fermeture, à l'échelle mésoscopique, de la condition de saturation de l'interface (2.64). Cette relation se démarque des autres relations de fermeture puisqu'il s'agit d'évaluer localement la variable microscopique T à partir de la connaissance des champs mésoscopiques. Cette problématique, appelée *déconvolution*, peut être approchée par des développements en séries de Taylor des variables lorsque celles-ci sont suffisamment continues. Au lieu de déconvoluer la température T, nous avons choisi de travailler avec la variable $\Theta \hat{=} kT$ définie par l'équation (2.6). Nous verrons à la fin de ce paragraphe une des raisons justifiant ce choix.

La figure 2.8 donne le profil de cette variable microscopique Θ et le profil lissé de la variable mésoscopique correspondante $\overline{\Theta}$ pour une configuration simple. La condition de saturation n'est plus satisfaite par la variable mésoscopique $\overline{\Theta}$ à l'interface. Nous souhaitons donc déterminer la différence représentée par la double flèche sur la figure 2.8. Pour ce faire, nous considérons tout d'abord deux approches analytiques (sections 2.3.1 et 2.3.2). La section 2.3.3 synthétise les différents enseignements.

2.3.1 Interface plane

Dans un premier temps, on considère un problème monodimensionnel et une interface plane. Soit ξ_3 la coordonnée représentant la distance signée à cette interface. On introduit la variable $\xi = \xi_3/\epsilon$, où ϵ est un petit paramètre caractérisant la largeur de coupure du filtre. On note H la fonction Heaviside permettant de distinguer les phases en présence. On suppose sans perte de généralité que la phase vapeur v se situe aux ordonnées positives $\xi_3 > 0$. Le gradient de la variable microscopique Θ étant discontinu à l'interface, le développement limité de Θ ne peut pas être mené à l'ordre 2. Néanmoins, comme les équations d'évolution sont des équations différentielles régulières d'ordre 2 dans chaque phase, les variables phasiques Θ_k sont suffisamment régulières pour être développées à l'ordre 3 au voisinage de l'interface. Le développement limité de Θ s'écrit dans chaque phase Θ_l et Θ_v :

$$\Theta = \chi\Theta^+ + (1-\chi)\Theta^- \tag{2.66a}$$

$$\forall \xi_3 > 0 \,:\, \Theta^+ = \Theta^+(0^+) + \xi_3 \left.\frac{\partial \Theta^+}{\partial \xi_3}\right|_{0^+} + \frac{\xi_3^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 \Theta^+}{\partial \xi_3^2}\right|_{0^+} + \mathcal{O}(\xi_3^3) \tag{2.66b}$$

$$\forall \xi_3 < 0 \,:\, \Theta^- = \Theta^-(0^-) + \xi_3 \left.\frac{\partial \Theta^-}{\partial \xi_3}\right|_{0^-} + \frac{\xi_3^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 \Theta^-}{\partial \xi_3^2}\right|_{0^-} + \mathcal{O}(\xi_3^3) \tag{2.66c}$$

En décomposant le produit de convolution sur chaque sous-domaine correspondant à une phase et en remplaçant la variable Θ par son développement limité en séries de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overline{\Theta} &= \overline{\chi\Theta^+} + \overline{(1-\chi)\Theta^-} \\
&= \Theta(0) + \epsilon\left(\overline{\xi H}(0)\left.\frac{\partial \Theta^+}{\partial \xi_3}\right|_{0^+} + \overline{\xi(1-H)}(0)\left.\frac{\partial \Theta^-}{\partial \xi_3}\right|_{0^-}\right) \\
&\quad + \frac{\epsilon^2}{2!}\left(\overline{\xi^2 H}(0)\left.\frac{\partial^2 \Theta^+}{\partial \xi_3^2}\right|_{0^+} + \overline{\xi^2(1-H)}(0)\left.\frac{\partial^2 \Theta^-}{\partial \xi_3^2}\right|_{0^-}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
&= \Theta(0) + \epsilon\overline{\xi H}(0)\left(\left.\frac{\partial \Theta^+}{\partial \xi_3}\right|_{0^+} - \left.\frac{\partial \Theta^-}{\partial \xi_3}\right|_{0^-}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Le bilan d'énergie à l'échelle microscopique relie le taux de changement de phase microscopique au saut de flux à l'interface :

$$\dot{m}\mathcal{L}^0\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}} = \left.\frac{\partial \Theta^+}{\partial \xi_3}\right|_{0^+} - \left.\frac{\partial \Theta^-}{\partial \xi_3}\right|_{0^-}$$

Cette relation permet de comprendre l'intérêt de la variable Θ puisque l'on a

$$\overline{\Theta} = \Theta(0) + \epsilon C_1 \dot{m} \mathcal{L}^0 \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{2.68}$$

en posant $C_1 \hat{=} \overline{\xi H}(0)$. En approchant le taux de changement de phase microscopique par la variable mésoscopique $\overline{\dot{m}}^s$ à l'ordre dominant et sachant que $\Theta(0) = 0$ d'après la condition de saturation microscopique (1.14e), on obtient une fermeture à l'échelle mésoscopique pour une interface plane

$$\overline{\Theta}\delta_\sigma = \epsilon C_1 \overline{\dot{m}}^s \mathcal{L}^0 \delta_\sigma \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{2.69}$$

où la distribution de Dirac δ_σ correspond à l'interface mésoscopique définie par une isosurface de $\overline{\chi}_v$.

La précision du développement en $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ suppose que la i^{e} dérivée de Θ est au plus $\mathcal{O}(1)$. Formellement, une dérivée d'ordre $\mathcal{O}(1/\epsilon)$ correspond à une distribution de Dirac filtrée. La régularité de Θ donnée par son équation différentielle définie au sens des distributions montre la continuité de Θ et la discontinuité de sa dérivée. La précision du développement est donc bien $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Pour compléter cette approche, l'étude du changement de phase isotrope d'une bulle sphérique permet de montrer que la courbure de l'interface apporte une correction au second ordre (section 2.3.2).

Étude analytique du paramètre C_1 Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la détermination du paramètre C_1 pour différents noyaux de filtre. La configuration étudiée est présentée à l'annexe 2.E.1. La solution pour le champ de température microscopique est donnée par

$$T(\xi) = \dot{m}\frac{\mathcal{L}^{vap}}{k_l}\xi H(\xi) + T^{\mathrm{sat}} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\xi) = \dot{m}\mathcal{L}^0 \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}} \xi H(\xi) \tag{2.70}$$

où ξ est la distance signée à l'interface et H la fonction Heaviside. À l'annexe 2.E.1, l'application d'un filtre boîte continu ou discret permet d'établir les relations suivantes (*cf.* Éqs. (2.135) et (2.140)) :

$$\textbf{Filtre boîte continu :} \quad \overline{\Theta}(\xi^i) = \overline{\dot{m}}^s(\xi^i)\frac{\Delta}{8}\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\mathcal{L}^0 \tag{2.71a}$$

$$\textbf{Filtre boîte discret :} \quad \overline{\Theta}(\xi^i) = \overline{\dot{m}}^s(\xi^i)\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\mathcal{L}^0 \frac{\Delta}{(2M+1)^2}\left[\frac{2M+1}{8} + \frac{M(M+1)}{2}\right] \tag{2.71b}$$

où $\xi^i = 0$ représente la position microscopique de l'interface et M le nombre de points du support discret. Nous avons déjà signalé que, pour une courbure nulle, la position $\xi^i = 0$ est approchée, à l'échelle mésoscopique, par l'isosurface $\overline{\chi}(\xi^i) = 1/2$.

Ainsi, on obtient pour chaque cas le paramètre C_1 :

$$\textbf{Filtre boîte continu :} \quad C_1 = \frac{\Delta}{8} \tag{2.72a}$$

$$\textbf{Filtre boîte discret :} \quad C_1 = \frac{1}{(2M+1)^2}\left[\frac{2M+1}{8} + \frac{M(M+1)}{2}\right] \tag{2.72b}$$

La limite asymptotique de la relation (2.72b) pour un filtre boîte continu ($M \to \infty$) est $C_1 = 1/8$, ce qui est cohérent avec le résultat (2.72a). Le réalisme de cette approche a été vérifié par un test *a priori*. L'application d'un filtre explicite au profil de température résolu au voisinage d'une interface plane montre que la relation (2.71b) est bien vérifiée.

2.3.2 Interface sphérique

Pour comprendre l'influence de la courbure sur les corrélations entre la variable $\overline{\Theta}$ et le taux de changement de phase mésoscopique $\overline{\dot{m}}^s$, l'étude analytique de la condensation ou de l'évaporation d'une inclusion sphérique est présentée dans l'annexe E. Le problème considéré est à symétrie sphérique. Comme le problème considéré est plus complexe en raison de la courbure, nous partons d'un exemple de filtre particulier pour analyser l'impact de la courbure sur la valeur du champ $\overline{\Theta}$ à l'interface. Dans un deuxième temps, les observations sont extrapolées à un filtre quelconque.

Filtre boîte sphérique continu À partir de la température mésoscopique donnée en tout point du voisinage de l'interface par la relation (E.43f), on a :

$$\overline{T}(\xi^i) = T^{\text{sat}} + \dot{m}\frac{\mathcal{L}^{vap}}{k_l}\Delta\left(\frac{1}{16} - \frac{3}{10}\frac{\Delta}{R_b}\right) + \mathcal{O}(\Delta^2) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\Theta}(\xi^i) = \dot{m}\mathcal{L}^0\frac{\text{Pe}}{\text{Ja}}\Delta\left(\frac{1}{16} - \frac{3}{10}\frac{\Delta}{R_b}\right) + \mathcal{O}(\Delta^2)$$

En appliquant la relation (E.43c) au niveau de l'interface et en supposant $\dot{m}$ uniforme le long de l'interface, on a :

$$\overline{\dot{m}\,\delta^i}(\xi^i) = \dot{m}\frac{3}{4\Delta} \tag{2.73}$$

Puisque par symétrie $\dot{m}$ est uniforme, on retrouve la relation (2.134). On en déduit que :

$$\overline{\Theta}(\xi^i) = \overline{\dot{m}}^s(\xi^i)\Delta\frac{\text{Pe}}{\text{Ja}}\mathcal{L}^0\left(\frac{1}{16} - \frac{3}{10}\frac{\Delta}{R_b}\right) + \mathcal{O}(\Delta^2) \tag{2.74}$$

Ainsi, lorsque l'interface est courbe, la relation (2.69) doit être complétée par un terme du second ordre précédé d'une autre constante que l'on note C_2. Pour cet exemple particulier, on obtient $C_1 = 1/16$ et $C_2 = 3/10$. La position de l'interface s'obtient en appliquant la relation (E.43a) en $\xi = 0$:

$$\overline{\chi}(\xi^i) = \frac{1}{2} + \frac{3}{16}\frac{\Delta}{R_b} \tag{2.75}$$

Généralisation à un filtre quelconque Dans le paragraphe ci-dessus, le noyau du filtre a été particularisé pour permettre le traitement analytique d'une configuration courbe. L'influence de la courbure sur la déconvolution du champ $\overline{\Theta}$ est observée à un ordre plus élevé que l'effet de la discontinuité du gradient présenté à la section 2.3.1. On propose de généraliser la tendance observée pour un filtre quelconque par l'introduction des paramètres C_1 et C_2 :

$$\overline{\Theta}(\xi^i) = \overline{\dot{m}}^s(\xi^i)\Delta\frac{\text{Pe}}{\text{Ja}}\mathcal{L}^0\left(C_1 - C_2\frac{\Delta}{R_b}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{2.76}$$

Ces paramètres ne dépendent *a priori* que des caractéristiques du noyau du filtre.

2.3.3 Conclusion & méthodologie

En définitive, on propose de fermer la condition de saturation de l'interface à l'échelle mésoscopique (2.5e) par la relation :

$$\overline{\Theta}\delta_\sigma = \epsilon\left(C_1 + C_2\epsilon\kappa\right)\overline{\dot{m}}^s\mathcal{L}^0\delta_\sigma\frac{\text{Pe}}{\text{Ja}} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad \text{avec } \epsilon \hat{=} \frac{\Delta}{R_b} \tag{2.77}$$

Les paramètres du modèle C_1 et C_2 doivent être ajustés sur des simulations numériques *a posteriori*. Ils traduisent les propriétés intrinsèques du filtre micro/méso. Ils peuvent être déterminés en fonction de la méthode numérique utilisée par des tests simples. Par exemple, une simulation d'un front plan doit permettre de trouver C_1. Puis la comparaison de la simulation d'une condensation d'une bulle statique par rapport à la solution analytique permet d'avoir la valeur de C_2.

Il est avantageux de décrire le problème avec la variable Θ en remplacement de la température T car le saut $[\![\nabla\Theta]\!]$ est directement relié au taux de changement de phase par la condition de flux (2.7). La relation (2.77) fournit une fermeture à la dernière équation du système (2.5) dont la précision sera évaluée par des tests *a priori* au chapitre 3.

L'établissement de cette relation est fondé sur l'hypothèse que le taux de changement de phase ne varie pas sur le support du filtre. Cette hypothèse est justifiée à l'ordre 2 au chapitre 4. On postule que les variations spatiales de $\dot{m}$ sous le filtre ont une influence négligeable devant l'effet de la discontinuité du gradient de température. La courbure de l'interface a peut-être aussi un effet négligeable, mais on essaye *a priori* de le prendre en compte.

2.4 Fermeture du terme de tension interfaciale

Dans cette section, on présente le raisonnement conduisant à la fermeture du terme $\overline{\kappa\nabla\chi_v} = -\overline{\kappa\boldsymbol{n}\delta^i}$ de l'équation de bilan de quantité de mouvement (2.5c). En premier lieu, il est important de noter que ce terme traduit les corrélations interface-interface. Il dépend uniquement de l'interface microscopique χ car

$$\kappa = -\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{P} : \nabla\boldsymbol{n} \tag{2.78a}$$

$$\boldsymbol{n}\delta^i = -\nabla\chi \tag{2.78b}$$

$$\delta^i = \| \nabla\chi \| \tag{2.78c}$$

où $\boldsymbol{P}$ est l'opérateur de projection surfacique à l'échelle microscopique défini par :

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \tag{2.79}$$

Ainsi, la courbure κ dépend, par une relation complexe, de l'indicatrice microscopique χ. Pour fermer le terme $\overline{\kappa\boldsymbol{n}\delta^i}$, la difficulté principale repose sur la construction d'un champ de "courbure" $\overline{\kappa}_\sigma^m$ à partir de l'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi}$. Pour évaluer la "courbure" mésoscopique en volume, nous utilisons le champ de vecteurs unitaires, normal aux isosurfaces $\overline{\chi}$ défini par :

$$\overline{\boldsymbol{n}}^s\,\overline{\delta^i} = -\nabla\overline{\chi} \tag{2.80}$$

À partir de ce champ vectoriel C^1 au voisinage de l'interface, une courbure peut être définie par

$$\overline{\kappa}_\sigma^m \hat{=} -\left(\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{n}}^s \otimes \overline{\boldsymbol{n}}^s\right) : \nabla\overline{\boldsymbol{n}}^s = -\boldsymbol{P_s} : \nabla\overline{\boldsymbol{n}}^s \tag{2.81}$$

où $\boldsymbol{P_s}$ est l'opérateur de projection surfacique associé à la surface filtrée :

$$\boldsymbol{P_s} = \boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{n}}^s \otimes \overline{\boldsymbol{n}}^s \tag{2.82}$$

La variable $\overline{\kappa}_\sigma^m$ n'est pas une quantité filtrée. La notation $\overline{\cdot}^m$ indique simplement la présence d'une grandeur mésoscopique. Par la suite, on omet l'exposant ^{m} et on indique le caractère mésoscopique de cette quantité $\overline{\kappa}_\sigma$ par l'utilisation abusive de la notation $\overline{\cdot}$. La relation (2.81) permet de définir un champ de courbure volumique à partir de l'indicatrice mésoscopique. La qualité de ce champ est discutée dans la remarque ci-dessous. Le champ $\overline{\kappa}_\sigma$ est ensuite utilisé pour construire le terme sous-maille τ_{superf} représentant les forces de tension de surface :

$$\tau_{\text{superf}} = \overline{\kappa\boldsymbol{n}\delta^i} - \overline{\kappa}_\sigma\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\,\overline{\delta^i} \tag{2.83}$$

Sous l'hypothèse que la topologie de l'interface est correctement capturée, on propose, en accord avec les travaux de Toutant *et al.* (2009a), de fermer le terme de tension interfaciale de l'équation (2.5c) en négligeant ce terme sous-maille :

$$\tau_{\text{superf}} \ll \overline{\kappa\boldsymbol{n}\delta^i} \tag{2.84}$$

L'hypothèse (2.84) est vérifiée lors les tests *a priori* conduits au chapitre 3. Elle permet d'affirmer que l'on se place bien dans les conditions d'applicabilité du modèle.

Remarque sur la définition du champ de "courbure" mésoscopique $\overline{\kappa}_\sigma$: Le champ $\overline{\kappa}_\sigma$ est la seule approximation de la courbure microscopique qui puisse être définie en volume à partir de l'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi}$. La définition (2.81) reconstruit un champ de courbure qui évolue linéairement avec la distance à l'interface comme le montre l'exemple d'un filtre boîte sphérique à l'annexe E (Éq. (E.28)). Par conséquent, même pour une interface sphérique, le terme sous-maille τ_{superf} est non nul (Fig. E.3).

Cet inconvénient nuit aux tests *a priori* pour lesquels on constate que l'écart mesuré entre $\overline{\kappa\boldsymbol{n}\delta^i}$ et $\overline{\kappa}_\sigma\overline{\boldsymbol{n}}^s\,\overline{\delta^i}$ a pour principale origine les choix faits pour les équations (2.80) et (2.81). L'amplitude de τ_{superf} ne traduit pas l'intensité des fluctuations sous-maille. Néanmoins, cette faiblesse de la formulation (2.81) ne constitue pas un verrou interdisant les tests *a priori*. En effet, on constate au chapitre 3 que le terme

sous-maille τ_{superf} défini à l'équation (2.83) est négligeable malgré l'évolution linéaire de $\overline{\kappa}_\sigma$.

Pour conclure cette remarque, on peut remarquer que c'est la contrainte de normalisation utilisée à l'équation (2.80) qui est responsable des variations de $\overline{\kappa}_\sigma$ dans la direction normale à l'interface. Cependant, il semble difficile de formuler une contrainte permettant de construire un champ $\overline{\kappa}_\sigma$ constant dans la direction normale à l'interface, sans utiliser la distance à l'interface microscopique. Ainsi, le problème de fermeture revient à trouver une fonction h telle que :

$$\nabla^2 \left(h(\overline{\chi})\right) = \kappa \tag{2.85}$$

Dans l'approximation d'une interface localement sphérique (courbure microscopique constante à l'échelle du filtre), il est possible de trouver une définition implicite pour la courbure

$$g \,:\, d \mapsto \frac{1}{6}\kappa \left(\frac{2}{\kappa} + d\right)^2 \Rightarrow \nabla^2 \left(g(d)\right) = \kappa \,,\, \forall d \tag{2.86}$$

où d est la distance signée à l'interface. Sous cette approximation, la distance est alors accessible en inversant la bijection $d \mapsto \overline{\chi}(d)$. Ce système couplé semble soluble mais il ne présente pas d'intérêt car il repose sur l'évaluation de la distance à l'interface microscopique et il nécessite donc l'évaluation de la position microscopique de l'interface χ. Or, s'il est possible d'évaluer l'interface microscopique χ, la courbure κ peut être évaluée simplement et directement par une divergence surfacique. L'évaluation d'une fonction h pour l'équation (2.85) ne présente aucun intérêt si elle fait intervenir la distance à l'interface d.

2.5 Fermeture de l'aire interfaciale

Dans la quête d'une fermeture pour le système (2.5), nous avons discuté dans les sections précédentes du traitement des principaux termes à fermer, *i. e.*, $\overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla\chi}$, $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}$, $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}}$, $\overline{\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}}$, $\overline{\kappa\nabla\chi_v}$, $\overline{\rho\,c_pT}$, $\overline{\rho c_p\boldsymbol{v}T}$, $\overline{k\nabla T}$ et $\overline{T\,\delta^i}$. Ces travaux ont fait apparaître la normale mésoscopique $\overline{\boldsymbol{n}}^s = -\nabla\overline{\chi}/\overline{\delta^i}$ définie par l'équation (2.43). La fermeture de l'aire interfaciale à l'échelle mésoscopique $\overline{\delta^i}$ est nécessaire pour fermer le terme $\overline{\dot{m}\delta^i} = \overline{\dot{m}}^s\overline{\delta^i}$ dans les équations (2.5b) et (2.5d) et pour fermer la définition de la normale mésoscopique $\overline{\boldsymbol{n}}^s$. C'est le dernier élément manquant pour fermer le système (2.5).

À l'échelle microscopique, l'aire interfaciale volumique est donnée par une distribution de Dirac δ^i définie par :

$$\delta^i = \| \nabla\chi_v \| \tag{2.87}$$

En filtrant cette équation, on obtient la définition ouverte de l'aire interfaciale volumique mésoscopique :

$$\overline{\delta^i} = \overline{\| \nabla\chi_v \|} \tag{2.88}$$

Au niveau mésoscopique, définissons à partir de l'indicatrice de phase mésoscopique la variable fermée δ^m par :

$$\delta^m \hat{=} \| \nabla\overline{\chi}_v \| \tag{2.89}$$

Cette estimation mésoscopique de l'aire interfaciale ne prend pas en compte la courbure moyenne de l'interface, ni les fluctuations sous-maille qui se manifestent par des variations locales de courbure. Les plis de l'interface ainsi que sa courbure conduisent à une aire interfaciale supérieure à celle donnée par l'estimation mésoscopique (Fig. 2.9) :

$$\overline{\delta^i} \geq \delta^m \tag{2.90}$$

L'égalité se produit pour une interface plane. En approchant l'interface par une calotte sphérique et en étudiant analytiquement l'impact d'un filtre boîte sphérique (*cf.* annexe E, Éq. (E.43b)), on montre que l'erreur commise est d'ordre 2 en $\epsilon = \Delta/R_b$:

$$\frac{\overline{\delta^i}}{\delta^m} = 1 + c\,\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad \text{avec } c = \frac{1}{2} \tag{2.91}$$

La valeur du facteur c dépend du filtre micro/méso. La correction liée à la courbure moyenne de l'interface n'apparaît qu'à l'ordre 2.

Le deuxième élément expliquant la sous-estimation de l'aire interfaciale est la présence de fluctuations sous-maille. Pour étudier l'impact de cette approximation, étudions une interface de courbure moyenne $\kappa = 4/D_b$ grande devant la taille du filtre (*i. e.*, $\epsilon = \Delta/D_b \ll 1$). Cette courbure moyenne n'ayant qu'une influence au second ordre, elle est négligée dans un premier temps. Pour simplifier les calculs, supposons que les perturbations de courbure suivent la forme donnée par la figure 2.9. L'indicatrice filtrée est assimilée aux cordes des petits cercles par une approximation d'ordre 2. Ces perturbations simples disparaissent lors du filtrage si la taille du filtre est un multiple de la longueur des cordes. L'hypothèse de faibles variations de la normale sous le filtre s'explicite par $\kappa'/\kappa = \mathcal{O}(1)$, où $\kappa' = 2/r$ est la courbure locale. Dans ces conditions, on montre que les aires interfaciales mésoscopique $\overline{\delta^i}$ et approchée δ^m sont reliées par la relation

$$\frac{\overline{\delta^i}}{\delta^m} = \frac{2r\sin^{-1}\left(\frac{\Delta/2}{2r}\right)}{\Delta/2} \tag{2.92}$$

dont le développement limité en ϵ est :

$$\frac{\overline{\delta^i}}{\delta^m} = 1 + \frac{1}{96}\epsilon^2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \tag{2.93}$$

L'intensité des déformations interfaciales κ' dépend du rapport entre l'énergie de surface et l'énergie cinétique (turbulente), mesuré par le nombre de Weber. Pour fermer précisément l'aire interfaciale à l'échelle mésoscopique, une expression entre le rapport κ'/κ et le nombre de Weber doit être proposée. À notre connaissance, ce type de relation n'existe pas dans la littérature ; un travail dédié doit être accompli pour établir une relation fiable. Pour notre approche préliminaire, on propose de corréler ces fluctuations au nombre de Weber de la maille de la manière suivante :

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = a\mathrm{We}_\Delta^b, \quad \text{avec } \mathrm{We}_\Delta = \frac{\rho_l V^2 \Delta}{\sigma} \tag{2.94}$$

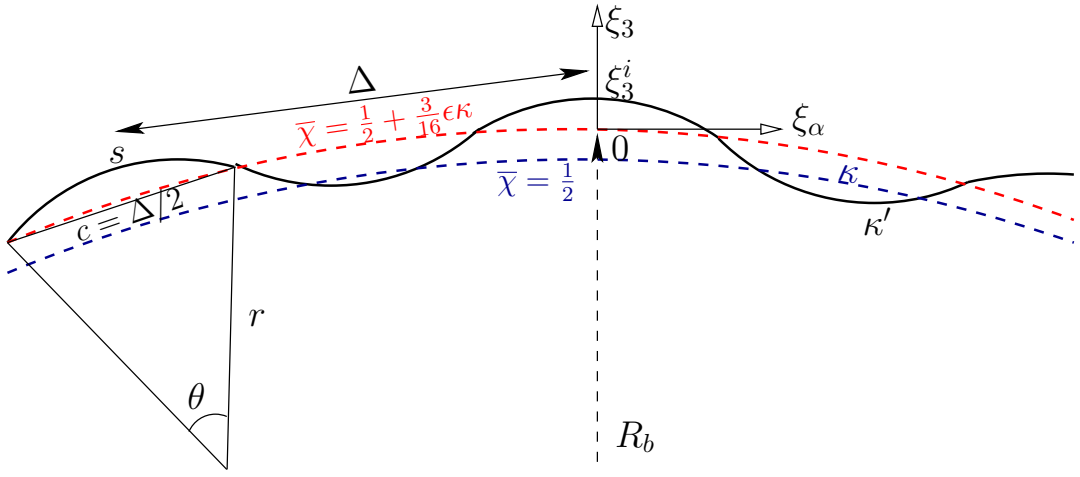


FIGURE 2.9 – Effet des fluctuations locales de courbure sur l'aire interfaciale.

Ces deux exemples indiquent la même tendance que l'on résume par la fermeture suivante

$$\overline{\delta^i} \approx \overline{\delta}_\sigma \hat{=} \delta^m\left(1 + \epsilon^2 C_3\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad \text{avec } C_3 = a\mathrm{We}_\Delta^b + c \tag{2.95}$$

où $\overline{\delta}_\sigma$ est l'approximation proposée du champ mésoscopique $\overline{\delta^i}$. La variable $\overline{\delta}_\sigma$ n'est pas une quantité filtrée. L'abus de notation $\bar{\cdot}$ indique simplement la présence d'une grandeur mésoscopique. Les constantes a, b et c doivent être déterminées. Dans un premier temps, on suppose les fluctuations sous-maille faibles en considérant a nul, bien conscients des limitations que cela engendre.

Pour être cohérent avec cette fermeture, le champ $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ doit être fermé par :

$$\overline{\boldsymbol{n}}^s\overline{\delta}_\sigma = -\nabla\overline{\chi} \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{n}}^s = -\frac{\nabla\overline{\chi}}{\|\nabla\overline{\chi}\|}\left(1-\epsilon^2 C_3\right) \tag{2.96}$$

Cette section clot la fermeture du système (2.5) en proposant les fermetures (2.95) et (2.96) pour $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ et $\overline{\delta^i}$. Dans la section suivante, on synthétise les fermetures établies au cours de ce chapitre.

2.6 Synthèse : description mésoscopique et hypothèses

En résumé des fermetures établies par les relations (2.39), (2.45), (2.59), (2.62), (2.77) et (2.84), on propose la description SGE continue suivante (échelle mésoscopique, Fig. 5) :

$$\frac{\partial\overline{\chi}_v}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\cdot\nabla\overline{\chi}_v + \tau^{ve}_{\text{interf}} = 0 \tag{2.97a}$$

$$\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\dot{m}}^s\,\overline{\delta}_\sigma\,[\![1/\rho]\!] \tag{2.97b}$$

$$\frac{\partial\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}^m}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}^m\otimes\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\boldsymbol{v}}\otimes\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau^{ve}_{\text{conv}}\right) = -\nabla\overline{p} + \frac{1}{\text{Re}}\nabla\cdot\left[\mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} + \tau^{ve}_{\text{diff}} + \mathcal{T}\right] - \frac{\sigma^0}{\text{We}}\left(\overline{\kappa}_\sigma\nabla\overline{\chi} + \tau^{ve}_{\text{superf}}\right) \tag{2.97c}$$

$$\frac{\partial\overline{\rho\,c_pT}^m}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\overline{\rho c_pT}^m\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{c_pT}^m\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau^{Tve}_{\text{conv}}\right) = \frac{1}{\text{Pe}}\nabla^2\overline{\Theta} + \frac{\mathcal{L}^0}{\text{Ja}}\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\delta}_\sigma \tag{2.97d}$$

$$\overline{\Theta}\delta_\sigma = \overline{\dot{m}}^s\delta_\sigma\mathcal{L}^0\frac{\text{Pe}}{\text{Ja}}C^i \tag{2.97e}$$

avec $\mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}\hat{=}\overline{\mu}\left(\nabla\overline{\boldsymbol{v}}^m_\sigma + \nabla^T\overline{\boldsymbol{v}}^m_\sigma\right)$, $\mathcal{T}\hat{=}\overline{\mu v}\left(\nabla\left(\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s\right) + \nabla^T\left(\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s\right)\right)$ et :

$$\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}^m\hat{=}\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau^{ve}_{\text{temp}} \tag{2.98a}$$

$$\overline{\rho c_pT}^m\hat{=}\overline{\beta}\,\overline{\Theta} + \tau^{Tve}_{\text{temp}} \tag{2.98b}$$

$$\overline{c_pT}^m\hat{=}\overline{v\beta}\,\overline{\Theta} + \tau^{Tve} \tag{2.98c}$$

$$\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\hat{=}\overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\,\overline{v} \tag{2.98d}$$

$$C^i\hat{=}\epsilon\left(C_1 + C_2\epsilon\overline{\kappa}_\sigma\right) \tag{2.98e}$$

$$\tau^{ve}_{\text{interf}}\hat{=}\overline{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\cdot\nabla\chi} - \overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\cdot\nabla\overline{\chi} \tag{2.98f}$$

$$\tau^{ve}_{\text{temp}}\hat{=}\overline{\rho\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{2.98g}$$

$$\tau^{ve}_{\text{conv}}\hat{=}\overline{\rho\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\otimes\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{2.98h}$$

$$\tau^{ve}_{\text{diff}}\hat{=}0 \tag{2.98i}$$

$$\tau^{ve}_{\text{superf}}\hat{=}0 \tag{2.98j}$$

$$\tau^{Tve}_{\text{temp}}\hat{=}\overline{\beta\overline{\Theta}} - \overline{\beta}\,\overline{\overline{\Theta}} \tag{2.98k}$$

$$\tau^{Tve}_{\text{conv}}\hat{=}\overline{\beta\,\Theta\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\beta\,\Theta}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{2.98l}$$

À partir des relations (2.81), (2.95) et (2.96), tous les termes présents dans ces équations sont définis à partir des variables principales, à l'aide des relations suivantes :

$$\overline{\phi}\;\hat{=}\;\phi_v\overline{\chi} + (1-\overline{\chi})\phi_l \quad \text{pour } \overline{\phi}\equiv\overline{\rho},\,\overline{v},\,\overline{c_p},\,\overline{k},\,\overline{\mu},\,\overline{\beta} \text{ et } \overline{v\beta} \tag{2.99a}$$

$$\overline{\delta}_\sigma\hat{=}\|\nabla\overline{\chi}\|\left(1+\epsilon^2C_3\right), \quad \text{avec } C_3 = a\text{We}^b_\Delta + c \tag{2.99b}$$

$$\overline{\boldsymbol{n}}^s\hat{=}-\frac{\nabla\overline{\chi}}{\|\nabla\overline{\chi}\|}\left(1-\epsilon^2C_3\right) \tag{2.99c}$$

$$\overline{\kappa}_\sigma\hat{=}-\boldsymbol{P_s}:\nabla\overline{\boldsymbol{n}}^s, \quad \text{avec } \boldsymbol{P_s} = \boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{n}}^s\otimes\overline{\boldsymbol{n}}^s \tag{2.99d}$$

Les positions $\boldsymbol{x}_i$ de l'interface reconstruite δ_σ sont évaluées à partir de l'isosurface :

$$\overline{\chi}(\boldsymbol{x}_i) = \frac{1}{2} + \frac{3}{16}\epsilon\overline{\kappa}_\sigma \tag{2.100}$$

Le système (2.97) termine la première étape de notre procédure de changement d'échelle (Fig. 5). Nous sommes en mesure de décrire entièrement l'évolution des variables mésoscopiques $\left(\overline{\chi}_v, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{p}, \overline{\dot{m}}^s \text{ et } \overline{\Theta}\right)$. Les discontinuités de vitesse et de gradient de température à l'interface sont considérées avec précision car elles sont reliées au taux de changement de phase mésoscopique. L'hypothèse de similarité d'échelles reste valide pour prédire les corrélations vitesse/interface et interface/température dans les écoulements avec changement de phase à condition que la vitesse utilisée au voisinage de l'interface soit continue et basée sur la vitesse interfaciale. Un équivalent à la condition d'équilibre thermodynamique local est obtenu à l'échelle mésoscopique grâce à une déconvolution du profil $\overline{\Theta}$. L'aire interfaciale volumique et la normale à l'interface sont reconstruites à partir du gradient de l'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi}_v$ et une courbure $\overline{\kappa}_\sigma$ est définie pour traiter les forces de tension de surface. Le système (2.97) est fermé à l'échelle mésoscopique.

Les hypothèses de fermeture utilisées (similarité d'échelles, déconvolutions, raisonnements analytiques) sont toutes fondées sur le même principe de linéarisation de la solution au voisinage de l'interface. L'utilisation de développements limités en séries de Taylor est d'autant plus précise que le paramètre ϵ (associé à la longueur de coupure du filtre) est petit. De manière assez générale, cette contrainte se traduit par une résolution minimale de la couche limite se développant à une interface. À titre indicatif, nous pensons que les limites du modèle développé ici s'expriment à partir de nombres sans dimension construits sur la maille Δ de calcul :

$$\mathrm{Re}_\Delta = \mathcal{O}(1),\ \mathrm{Pe}_\Delta = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{We}_\Delta = \mathcal{O}(1) \tag{2.101}$$

Une autre hypothèse fortement ancrée dans cette modélisation est associée à l'utilisation de la vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$. Elle suppose les corrélations entre la normale et le taux de changement de phase négligeables. Au cœur d'un écoulement, cette hypothèse ne nous semble pas contraignante car la contrainte précédente sur les couches limites implique de faibles variations du taux de changement de phase à l'échelle de la maille. Des précautions doivent être envisagées si l'on s'intéresse aux phénomènes pariétaux pour lesquels le taux de changement de phase est fortement non linéaire mais cela dépasse largement le cadre de ce travail.

Au chapitre 3, nous filtrons explicitement les résultats des SND présentées au chapitre 1 pour évaluer les termes sous-maille et les modèles correspondants afin de les classer en fonction de leur importance. Cette méthodologie, appelée tests *a priori*, n'évalue pas la capacité effective des modèles. En fait, nous ne disposons pas d'une méthode numérique appropriée pour évaluer entièrement le modèle SGE à l'échelle continue.

Annexes

2.A Reformulation de la diffusion

D'après la définition (2.35), le gradient vectoriel du champ $\boldsymbol{v}_i^*$ est donné par

$$\begin{aligned}\nabla \boldsymbol{v}_i^* + \nabla^T \boldsymbol{v}_i^* &= \nabla \boldsymbol{v} + \nabla^T \boldsymbol{v} - \dot{m}^* \boldsymbol{n}^* \otimes \nabla v - \nabla v \otimes \dot{m}^* \boldsymbol{n}^* - v \left[\nabla \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right) + \nabla^T \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right)\right] \\ &= \nabla \boldsymbol{v} + \nabla^T \boldsymbol{v} + 2 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \dot{m} \delta^i \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} - v \left[\nabla \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right) + \nabla^T \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right)\right] \end{aligned} \tag{2.102}$$

car $\nabla v = \mathrm{At} \nabla \chi / (1 - \mathrm{At}) = \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \nabla \chi$ et les champs $\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*$ et $\dot{m} \boldsymbol{n}$ sont identiques sur l'interface. Par conséquent, on en déduit :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla^T \boldsymbol{v} + 2 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \dot{m} \delta^i \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}\right)\right] &= \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \boldsymbol{v}_i^* + \nabla^T \boldsymbol{v}_i^*\right)\right] \\ &\quad + \nabla \cdot \left[\mu v \left(\nabla \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right) + \nabla^T \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{2.103}$$

Concentrons-nous sur le dernier terme de l'équation précédente. On décompose le dernier terme en deux parties :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left[\mu v \left(\nabla \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right) + \nabla^T \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right)\right)\right] &= \mu v \underbrace{\nabla \cdot \left[\left(\nabla \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right) + \nabla^T \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right)\right)\right]}_{\mathbf{I}} \\ &\quad + \left[\!\left[\mu v\right]\!\right] \underbrace{\left[\nabla \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right) + \nabla^T \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right)\right] \dot{\nabla} \chi}_{\mathbf{J}} \end{aligned} \tag{2.104}$$

Cette décomposition est licite car le champ $\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*$ est continu à la traversée de l'interface. En notant que, pour un taux de changement de phase non nul, on a :

$$\nabla \chi = -\boldsymbol{n} \delta^i = -\boldsymbol{n}^* \dot{m}^* \frac{\delta^i}{\dot{m}^*} = -\frac{\delta^i}{\dot{m}^*} \nabla \phi \tag{2.105}$$

En appliquant à $\nabla \phi = \dot{m}^* \boldsymbol{n}^*$ la propriété $\left(\nabla + \nabla^T\right) (\nabla \phi) \cdot \nabla \phi = \nabla \left\| \nabla \phi \right\|$, on peut montrer que J est reliée au gradient surfacique du taux de changement de phase $\dot{m}$ par :

$$\begin{aligned} J &= -\frac{\delta^i}{\dot{m}^*} \left(\nabla + \nabla^T\right) (\nabla \phi) \cdot \nabla \phi \\ &= -\frac{\delta^i}{\dot{m}^*} \nabla \left\| \nabla \phi \right\| = -\frac{\delta^i}{\dot{m}^*} \nabla \left(\left|\dot{m}^*\right| \left\| \boldsymbol{n}^* \right\|\right) = -\frac{\delta^i}{\dot{m}} \nabla \left(\left|\dot{m}\right| \left\| \boldsymbol{n} \right\|\right) = -\frac{\delta^i}{\dot{m}} \nabla \left(\left|\dot{m}\right|\right) \end{aligned} \tag{2.106}$$

Par ailleurs, en utilisant la propriété $\nabla \cdot \left[\left(\nabla + \nabla^T\right) (\nabla \phi)\right] = 2 \nabla (\Delta \phi)$, l'intégrale I est reliée au gradient surfacique du produit $\dot{m} \kappa$ par

$$\begin{aligned} I &= \nabla \cdot \left[\left(\nabla + \nabla^T\right) \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right)\right] \\ &= \nabla \cdot \left[\left(\nabla + \nabla^T\right) (\nabla \phi)\right] = 2 \nabla (\Delta \phi) = 2 \nabla \left(\mathcal{P}^{-1} (\dot{m} \kappa)\right) = 2 \mathcal{P}^{-1} \left(\nabla_s (\dot{m} \kappa)\right) \end{aligned} \tag{2.107}$$

où l'opérateur $\mathcal{P}$ est l'opérateur de projection sur la surface. Par propriété, le champ résultant de $\mathcal{P}^{-1}$ est constant dans la direction normale à l'interface. Son gradient est donc en fait surfacique.

Par conséquent, nous avons montré que

$$\nabla \cdot \left[\mu v \left(\nabla \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right) + \nabla^T \left(\dot{m}^* \boldsymbol{n}^*\right)\right)\right] = \mu v I + \left[\!\left[\mu v\right]\!\right] J = 2 \mu v \mathcal{P}^{-1} \left(\nabla_s (\dot{m} \kappa)\right) - \left[\!\left[\mu v\right]\!\right] \frac{\delta^i}{\dot{m}} \nabla \left(\left|\dot{m}\right|\right) \tag{2.108}$$

et par suite que :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla^T \boldsymbol{v} + 2 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \dot{m} \delta^i \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}\right)\right] &= \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \boldsymbol{v}_i^* + \nabla^T \boldsymbol{v}_i^*\right)\right] \\ &\quad - \left[\!\left[\mu v\right]\!\right] \frac{\delta^i}{\dot{m}} \nabla \left(\left|\dot{m}\right|\right) + 2 \mu v \mathcal{P}^{-1} \left(\nabla_s (\dot{m} \kappa)\right) \end{aligned} \tag{2.109}$$

2.B Approximation de la partie continue de la vitesse

On suppose un filtre dont la taille caractéristique Δ est suffisamment petite pour que les variations du taux de changement de phase et des rayons de courbure puissent être négligées. Ce problème est résolu analytiquement dans l'annexe E dans un repère sphérique lié à l'interface. On montre alors que $\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s = \dot{m}\boldsymbol{e}_r$, où $\boldsymbol{e}_r$ est le vecteur radial des coordonnées sphériques. Au voisinage de l'interface (*i. e.*, $\forall\xi \in [-1;1]$), on a alors :

$$\nabla\cdot\left(\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\right) = \frac{2\dot{m}}{r} = \kappa\dot{m}\frac{1}{1+\xi\epsilon} = \kappa\dot{m}\left(1-\xi\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon)\right) \tag{2.110a}$$

$$\nabla\times\left(\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\right) = \dot{m}\nabla\times\boldsymbol{e}_r = 0 \tag{2.110b}$$

$$\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s = \dot{m}\,\boldsymbol{n} \quad \text{à l'interface} \tag{2.110c}$$

À l'ordre dominant, le champ $\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s$, défini à partir de grandeurs mésoscopiques, satisfait les contraintes (2.32). Comme le théorème d'Helmholtz (Arfken, 1985) affirme l'unicité de la solution, on en déduit que ce champ mésoscopique correspond à l'extension recherchée à l'ordre dominant, c'est-à-dire :

$$\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s = \dot{m}^*\boldsymbol{n}^* + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.111}$$

La définition (2.37) de $\overline{\boldsymbol{v}_i^*}$ devient :

$$\overline{\boldsymbol{v}_i^*} \hat{=} \overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\,v} + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.112}$$

Enfin, le calcul des termes sous-maille pour une interface sphérique permet de constater que

$$\overline{\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\,v} = \overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\,\overline{v} + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.113}$$

ce qui conduit à :

$$\overline{\boldsymbol{v}_i^*} = \overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\,\overline{v} + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.114}$$

Remarque : Au premier abord, on peut être surpris par le double filtrage apparaissant dans l'équation (2.112). Cette formulation reste cohérente car le champ $\dot{m}^*\boldsymbol{n}^*$ dérive d'un potentiel ϕ particulier tel que :

$$\Delta\phi = K = cste + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.115}$$

On peut alors généraliser la démonstration donnée pour un laplacien nul (*cf.* annexe C) à un champ à laplacien constant, ce qui implique

$$\overline{\phi} = \phi \tag{2.116}$$

et par suite, comme $\dot{m}^*\boldsymbol{n}^* = \nabla\phi$,

$$\overline{\dot{m}^*\boldsymbol{n}^*} = \dot{m}^*\boldsymbol{n}^* \tag{2.117}$$

2.C Modélisation sous-maille

L'hypothèse de similarité d'échelles de Bardina *et al.* (1983), associée à l'approximation (2.37), conduit naturellement au modèle de transport de l'indicatrice suivant :

$$\tau^m_{\text{interf}} \hat{=} \overline{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\cdot\nabla\overline{\chi}} - \overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\cdot\nabla\overline{\overline{\chi}} \tag{2.118}$$

En utilisant l'équation (2.42c) et en négligeant les fluctuations de normale et du taux de changement de phase, l'hypothèse de Bardina conduit à la fermeture du terme de diffusion suivante :

$$\tau^m_{\text{diff}} \hat{=} \overline{\overline{\mu}\left(\nabla\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \nabla^T\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\right)} - \overline{\overline{\mu}}\left(\nabla\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma + \nabla^T\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\right) \tag{2.119}$$

La modélisation des termes sous-maille τ_{temp} et τ_{conv} du système (2.42) est moins intuitive. D'après les équations (2.42a) et (2.42b), ces termes sous-maille traduisent les corrélations interface-vitesse $(\rho, \boldsymbol{v})$ par l'intermédiaire de la masse volumique. En utilisant la décomposition du champ de vitesse, la formulation

$$\tau_{\text{temp}} = \left(\overline{\rho\,\boldsymbol{v}_i^*} - \overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\right) + \left(\overline{\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*} - \overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\right) \tag{2.120a}$$

$$\tau_{\text{conv}} = \left(\overline{\rho\,\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}_i^*} - \overline{\rho\,\boldsymbol{v}}\otimes\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\right) + \left(\overline{\boldsymbol{v}\otimes\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*} - \overline{\boldsymbol{v}}\otimes\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\right) \tag{2.120b}$$

met en évidence deux parties dans chacun de ces modèles : la première est liée au transport par la vitesse $\boldsymbol{v}_i^*$ ou $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$, alors que la seconde est créée par le changement de phase. Pour la convection, en décomposant à nouveau $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}$, on obtient :

$$\tau_{\text{conv}} = \left(\overline{\rho\,\boldsymbol{v}_i^* \otimes \boldsymbol{v}_i^*} - \overline{\rho\,\boldsymbol{v}_i^*} \otimes \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\right) + \left(\overline{\boldsymbol{v} \otimes \dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*} - \overline{\boldsymbol{v}} \otimes \overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\right) + \left(\overline{\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^* \otimes \boldsymbol{v}_i^*} - \overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s \otimes \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\right) \tag{2.121}$$

En supposant la résolution de la géométrie de l'interface suffisante, on propose de négliger les fluctuations sous-maille de normale et de taux de changement de phase. Formellement, cela revient à considérer les équations (2.38) en suivant la justification donnée pour une interface sphérique à l'annexe 2.B. Par conséquent, on considère que ces termes sous-maille ne traduisent que les corrélations entre la topologie des interfaces et la vitesse continue $\boldsymbol{v}_i^*$:

$$\tau_{\text{temp}} \approx \overline{\rho\,\boldsymbol{v}_i^*} - \overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \tag{2.122a}$$

$$\tau_{\text{conv}} \approx \overline{\rho\,\boldsymbol{v}_i^* \otimes \boldsymbol{v}_i^*} - \overline{\rho\,\boldsymbol{v}_i^*} \otimes \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \tag{2.122b}$$

L'hypothèse de similarité d'échelles de Bardina, associée à l'approximation (2.37), conduit alors naturellement aux modèles suivants :

$$\tau_{\text{temp}}^m \hat{=} \overline{\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\overline{\rho}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{2.123a}$$

$$\tau_{\text{conv}}^m \hat{=} \overline{\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \otimes \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} \otimes \overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{2.123b}$$

Enfin, d'après l'équation (2.42d), le terme sous-maille de convection d'énergie traduit les corrélations triples interface/vitesse/température. En utilisant la décomposition du champ de vitesse, la formulation

$$\tau_{\text{conv}} = \left(\overline{\rho c_p T\,\boldsymbol{v}_i^*} - \overline{\rho c_p T}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\right) + \left(\overline{c_p T\,\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*} - \overline{c_p T}\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\right) \tag{2.124}$$

met en évidence les deux parties dues à la convection d'une part et au changement de phase d'autre part. D'après les relations (2.38), la seconde parenthèse du membre de droite est négligeable et l'approximation

$$\tau_{\text{conv}} \approx \overline{\rho c_p T\,\boldsymbol{v}_i^*} - \overline{\rho c_p T}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \tag{2.125}$$

associée à l'approximation (2.37), permet d'exprimer l'hypothèse de similarité d'échelles de Bardina de la façon suivante :

$$\tau_{\text{conv}}^m \hat{=} \overline{\overline{\rho c_p T}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\overline{\rho c_p T}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{2.126}$$

2.D Divergence de la vitesse interfaciale étendue

D'après la définition (2.35), la divergence du champ $\boldsymbol{v}_i^*$ est donnée par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^* = \nabla \cdot \boldsymbol{v} - \dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^* \cdot \nabla v - v \nabla \cdot (\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*) \tag{2.127}$$

Sachant que le gradient du volume massique s'exprime $\nabla v = [\![1/\rho]\!]\,\nabla\chi$, le bilan de masse (1.14b) peut s'écrire :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} - \dot{m}\boldsymbol{n} \cdot \nabla v = 0$$

La relation (2.127) se simplifie alors :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^* = -v \nabla \cdot (\dot{m}^*\,\boldsymbol{n}^*) = -vK = -v\dot{m}\kappa \tag{2.128}$$

Cette relation indique que la divergence de la vitesse interfaciale est proportionnelle à la courbure au taux de changement de phase et au volume massique. Cette divergence prend la forme d'un Heaviside, contrairement à la divergence de la vitesse monofluide qui est une distribution de Dirac à l'interface. Elle est donc plus régulière.

Remarque : L'exemple d'une inclusion sphérique de vapeur en croissance dans du liquide uniformément surchauffé est étudié en coordonnées sphériques à l'annexe E. Par symétrie, on

suppose que le taux de changement de phase est donné par : $\dot{m}^* \boldsymbol{n}^* = \dot{m}\boldsymbol{e}_r$. La solution (E.1b) obtenue pour la vitesse $\boldsymbol{v}$ permet d'aboutir aux relations suivantes :

$$\boldsymbol{v}(r) = [\![1/\rho]\!]\, \dot{m} \frac{R_b^2}{r^2} \chi(r) \boldsymbol{e}_r \tag{2.129a}$$

$$\boldsymbol{v}_i^*(r) = [\![1/\rho]\!]\, \dot{m} \left(1 - \frac{R_b^2}{r^2}\right) \chi(r) \boldsymbol{e}_r = -\, [\![1/\rho]\!]\, \dot{m} \left(2\xi\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \chi(r) \boldsymbol{e}_r \tag{2.129b}$$

En prenant la divergence de l'équation (2.129b), on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^*(r) = \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right) \boldsymbol{v}_i^*(r) &= -\, [\![1/\rho]\!]\, \dot{m} \left(\frac{2}{r}\chi(r) + \left(1 - \frac{R_b^2}{r^2}\right) \delta^i(r)\right) \\ &= -\, [\![1/\rho]\!]\, \dot{m} \left(\frac{2}{R_b} \left(1 - \xi\epsilon + \xi^2\epsilon^2\right) \chi(r) + 2\xi\epsilon\delta^i(r) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right) \\ &= -\, [\![1/\rho]\!]\, \dot{m} \frac{2}{R_b} \chi(r) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \tag{2.130}$$

2.E Validation

2.E.1 Cas 1D : évaporation à une interface plane

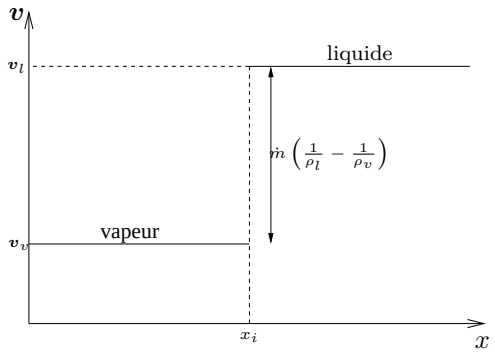


FIGURE 2.10 – Description de la configuration.

Pour commencer, on considère le phénomène de changement de phase à une interface plane (Fig. 2.10). Le problème est supposé monodimensionnel. La condition d'incompressibilité impose des vitesses $\boldsymbol{v}_v$ et $\boldsymbol{v}_l$ uniformes. De même, comme le taux de changement de phase est uniforme sur l'interface et comme la normale à l'interface ne dépend pas de la position considérée, le champ $\boldsymbol{v}_i$ est uniforme. Pour l'étude des termes sous-maille, un filtre boîte et un filtre gaussien sont envisagés pour illustrer la généricité des résultats.

Par ailleurs, on suppose que le champ de taux de changement de phase $\dot{m}$ est uniforme le long de l'interface, que la vapeur est à saturation et que la conductivité thermique est suffisamment élevée pour que la configuration étudiée soit quasi statique. La solution pour le champ de température microscopique est alors donnée par

$$T(\xi) = \dot{m} \frac{\mathcal{L}^{vap}}{k_l} \xi H(\xi) + T^{\text{sat}} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\xi) = \dot{m}\mathcal{L}^0 \frac{\text{Pe}}{\text{Ja}} \xi H(\xi) \tag{2.131}$$

où ξ est la distance signée à l'interface et H la fonction Heaviside. Ce profil est illustré à la figure 2.8.

Pour le paragraphe 2.3.1, on souhaite évaluer la valeur du champ mésoscopique $\overline{\Theta}$ à la position $\xi^i = 0$ de l'interface. Pour cela, plusieurs noyaux de convolution sont envisagés.

Filtre boîte continu L'application d'un filtre boîte continu de largeur de coupure Δ au champ Θ

$$\overline{\Theta}(\xi^0) = \frac{1}{\Delta} \int_{\xi^0 - \Delta/2}^{\xi^0 + \Delta/2} \Theta(\xi) d\xi \tag{2.132}$$

permet d'évaluer la valeur interfaciale du champ mésoscopique $\overline{\Theta}$ par :

$$\overline{\Theta}(\xi^0) = \dot{m}\mathcal{L}^0 \frac{\Delta}{8}\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}} \tag{2.133}$$

Cette différence entre les champs micro- et mésoscopique s'interprète par l'existence d'une énergie interfaciale en excès liée à l'observation "grossière" du champ. Par ailleurs, sachant que par hypothèse $\dot{m}$ est uniforme, on a :

$$\dot{m} = \overline{\dot{m}}^s \tag{2.134}$$

La combinaison de ces deux équations permet de proposer la relation suivante pour fermer la condition de saturation à l'échelle mésoscopique :

$$\overline{\Theta}(\xi^i) = \overline{\dot{m}}^s(\xi^i)\frac{\Delta}{8}\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\mathcal{L}^0 \tag{2.135}$$

où ξ^i représente la position microscopique de l'interface. Nous avons déjà signalé que, pour une courbure nulle, cette position est approchée, à l'échelle mésoscopique, par l'isosurface $\overline{\chi}(\xi^i) = 1/2$.

Filtre boîte discret Envisageons à présent un filtre boîte discret, de largeur de coupure Δ (*i. e.,* représentant la taille de la maille LES), dont le noyau est la moyenne du champ sur M positions équidistantes. Le champ filtré $\overline{\Theta}$ est alors donné par :

$$\overline{\Theta}(\xi^i) \hat{=} \frac{1}{2M+1}\sum_{m=-M}^{M}\Theta\left(\xi^i + m\frac{\Delta}{2M+1}\right) \tag{2.136}$$

D'après la solution (2.131), on obtient le champ mésoscopique

$$\overline{\Theta}(\xi^i) = \frac{1}{2M+1}\dot{m}\mathcal{L}^0\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\left[\xi^i H(\xi^i) + \left(\sum_{m=-M}^{-1} + \sum_{m=1}^{M}\right)\left((\xi^i + m\frac{\Delta}{2M+1})H\left(\xi^i + m\frac{\Delta}{2M+1}\right)\right)\right]$$

où ξ^i représente la position de l'interface par rapport au centre de la maille diphasique. Par conséquent, on a $|\xi^i| \leq \Delta/(4M+2)$. D'après la définition de la distribution de Heaviside, on a :

$$H(\xi^i + m\frac{\Delta}{2M+1}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } m \geq 1 \\ 0 \text{ pour } m \leq -1 \end{cases} \tag{2.137a}$$

On en déduit ainsi les valeurs de $\overline{\Theta}$ dans les mailles diphasiques :

$$\begin{aligned}
\overline{\Theta}(\xi^i) &= \frac{1}{2M+1}\dot{m}\mathcal{L}^0\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\left[\xi^i H(\xi^i) + \sum_{m=1}^{M}\left(\xi^i + m\frac{\Delta}{2M+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2M+1}\dot{m}\mathcal{L}^0\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\left[\xi^i H(\xi^i) + M\,\xi^i + \frac{\Delta}{2M+1}\sum_{m=1}^{M} m\right] \\
&= \frac{1}{2M+1}\dot{m}\mathcal{L}^0\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\left[\xi^i H(\xi^i) + M\,\xi^i + \frac{\Delta}{2M+1}M(M+1)/2\right]
\end{aligned} \tag{2.138a}$$

Puisque par hypothèse $\dot{m}$ est uniforme, on retrouve la relation (2.134). On trouve donc avec ce filtre :

$$\overline{\Theta}(\xi^i) = \overline{\dot{m}}^s(\xi^i)\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\mathcal{L}^0\frac{1}{2M+1}\left[\xi^i H(\xi^i) + \xi^i M + \frac{\Delta}{2M+1}M(M+1)/2\right] \tag{2.139}$$

En prenant les valeurs moyennes statistiques, on a :

$$\begin{aligned}
&< \xi^i M > = 0 \\
&< \xi^i H(\xi^i) > = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} xH(x)dx = \frac{\Delta}{8}
\end{aligned}$$

Finalement, on aboutit à :

$$\overline{\Theta}(\xi^i) = \overline{\dot{m}}^s(\xi^i)\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\mathcal{L}^0\frac{\Delta}{(2M+1)^2}\left[\frac{2M+1}{8} + \frac{M(M+1)}{2}\right] \tag{2.140}$$

2.E.2 Illustration dans un cas pseudo-2D : évaporation à une interface plane en présence d'un écoulement perturbateur à divergence nulle

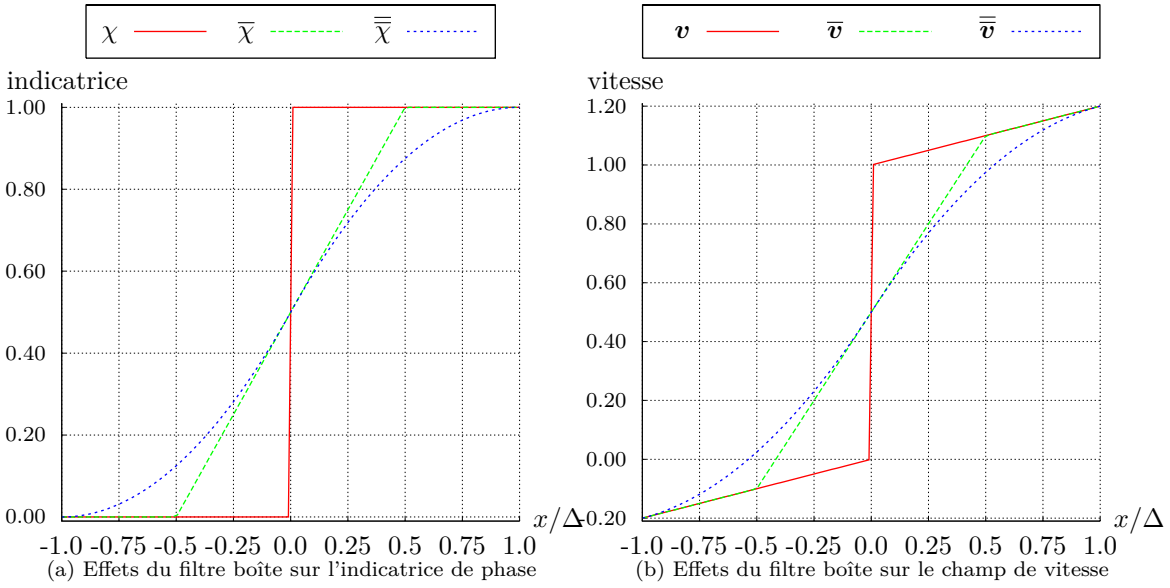
L'hypothèse d'une vitesse constante par phase s'est avérée trop restrictive. Fort de ce constat, on considère une configuration pour laquelle la vitesse est variable dans les phases. Superposons au cas monodimensionnel présenté précédemment un champ de vitesse bidimensionnel à divergence nulle (envisagé dans Toutant, 2006), donné par :

$$u = x/K \tag{2.141a}$$
$$v = -y/K \tag{2.141b}$$

Le principe de superposition permet d'obtenir toutes les informations analytiquement, tout en ayant un champ de vitesse non uniforme par phase et un filtre commutant. On considère donc l'écoulement défini par (Fig. 2.11)

$$\chi = \chi_l = H(x) \tag{2.142a}$$
$$v_x = H(x)v_l + (1 - H(x))v_v + x/K \tag{2.142b}$$
$$v_y = -y/K \tag{2.142c}$$

où v_l et v_v sont des constantes reliées par la relation de saut : $v_v = v_l + \dot{m}(1/\rho_l - 1/\rho_v)$. Pour se placer dans le référentiel lié à l'interface, il suffit de choisir $v_l = \dot{m}/\rho_l$ et $v_v = \dot{m}/\rho_v$. Le champ de vitesse ainsi défini vérifie bien la relation (1.4b). Les propriétés physiques se déduisent directement de χ.



(a) Effets du filtre boîte sur l'indicatrice de phase (b) Effets du filtre boîte sur le champ de vitesse

FIGURE 2.11 – Profils de l'indicatrice et de la vitesse à une interface plane en présence d'un écoulement perturbateur. Évaporation du liquide ($\dot{m} < 0$).

Chapitre 3

Tests *a priori*

Les SND présentées à la section 1.3 fournissent des données de référence à l'échelle microscopique (Fig. 5) sur les transferts de masse et de chaleur aux interfaces dans des configurations variées. La définition d'un filtre explicite permet d'évaluer les interactions sous-maille turbulence/interface pour établir une hiérarchie des termes sous-maille à modéliser. En affinant l'analyse, la comparaison des termes sous-maille avec les modèles proposés permet d'évaluer la qualité de la modélisation.

Dans les sections suivantes, après une brève description du principe (section 3.1), nous présentons la mise en œuvre pratique de ces tests *a priori* en définissant les critères de comparaison et les précautions nécessaires à une bonne évaluation (section 3.2). Les principales limitations inhérentes aux tests *a priori* sont ensuite discutées (section 3.3). La section 3.4 détaille les résultats sur la configuration multi-bulles puis se termine par une synthèse des coefficients permettant d'ajuster les modèles de similarité d'échelles sur l'ensemble des configurations étudiées.

3.1 Principe

À plusieurs reprises au cours du chapitre 2, nous avons modélisé la quantité mésoscopique $\overline{a\phi}$ (où a désigne de manière générique une propriété thermodynamique et ϕ représente une vitesse ou la température) en introduisant les termes sous-maille et les modèles suivants

$$\tau = \overline{a\phi} - \overline{a}\,\overline{\phi} \tag{3.1a}$$

$$\tau^{mf} = \overline{\overline{a}\overline{\phi}} - \overline{\overline{a}}\,\overline{\overline{\phi}} \tag{3.1b}$$

$$\tau^{nm} = \overline{\overline{a\phi}} - \overline{a}\,\overline{\overline{\phi}} \tag{3.1c}$$

où les exposants mf et nm signifient "modèle mésoscopique fermé" et "nouvelle modélisation". La modélisation τ^{nm} n'est que partiellement fermée puisqu'elle requiert la connaissance de la propriété microscopique a. Elle a été introduite pour construire un terme ayant le même stencil [1] que le terme sous-maille τ et ainsi permettre une comparaison locale. En pratique, le filtre $\bar{\cdot}$ est implicite ; il traduit le résultat de la convolution des équations microscopiques. Par conséquent, il ne peut pas être évalué numériquement et les modèles τ^{mf} et τ^{nm} ne peuvent pas être évalués sous la forme (3.1b) et (3.1c). En SGE, un second filtre $\langle\cdot\rangle$ est alors introduit pour estimer ces modèles. Il est explicite et sa largeur de coupure $\langle\Delta\rangle$ doit être un multiple de la taille de la maille SGE : $\langle\Delta\rangle = n\overline{\Delta}$, avec n entier impair. Ce second filtre $\langle\cdot\rangle$ conduit à la définition des modèles suivants :

$$\tau^{mf} = \left\langle\overline{a}\overline{\phi}\right\rangle - \langle\overline{a}\rangle\,\left\langle\overline{\phi}\right\rangle \tag{3.2a}$$

$$\tau^{nm} = \left\langle a\overline{\phi}\right\rangle - \langle a\rangle\,\left\langle\overline{\phi}\right\rangle \tag{3.2b}$$

Comme les filtres $\bar{\cdot}$ et $\langle\cdot\rangle$ n'ont pas la même échelle de coupure, les stencils de τ et τ^{nm} sont différents et une comparaison locale est impossible. Pour pallier ce problème, on est contraint de

1. Pour évaluer un terme sous-maille en un point $\boldsymbol{x}$ donné, il est nécessaire de connaître les champs microscopiques dans un voisinage de ce point $\boldsymbol{x}$ (à cause du filtre) que l'on appelle, par définition, *stencil*, ou support en français.

supposer pour les tests *a priori* que les filtres $\bar{\cdot}$ et $\langle\cdot\rangle$ sont identiques et on introduit le champ

$$\tau^{ev} = \overline{a\phi} - \bar{a}\,\bar{\phi} \tag{3.3}$$

où l'exposant *ev* signifie "expression validée". C'est ce champ τ^{ev} que l'on souhaite comparer au terme sous-maille τ de l'équation (3.1a). Il repose sur l'utilisation d'un filtre unique $\bar{\cdot}$ que l'on assimile par commodité à un filtre boîte cubique dont la largeur de coupure $\overline{\Delta}$ est un multiple de la taille de la maille SND Δ, *i. e.*, $\overline{\Delta} = p\Delta$, avec p entier impair. Ainsi, on approche la solution des équations mésoscopiques (obtenue sur un maillage de SGE de taille $\overline{\Delta}$) par la moyenne du champ de la SND (champ local et instantané solution des équations microscopiques) sur p mailles dans toutes les directions.

À partir des champs locaux et instantanés obtenus par SND pour chacune des configurations présentées à la section 1.3, une validation point par point de l'approximation $\tau \approx \tau^{ev}$ est établie sur la base de différents critères de comparaison présentés par la suite. Pour cela, un filtre spatial permet d'évaluer simultanément les termes sous-maille τ et leur approximation τ^{ev} en tout point de l'écoulement et pour chaque pas de temps post-traité.

3.2 Mise en œuvre

3.2.1 Filtrage

Pour les tests *a priori*, le premier filtre $\bar{\cdot}$ est assimilé à un filtre boîte, appliqué explicitement aux résultats discrets des simulations (c'est-à-dire à la solution des équations microscopiques discrètes). Ce filtre est évalué discrètement par une moyenne du champ sur p mailles de la SND dans chaque direction : $\overline{\Delta} = p\Delta$, p entier impair (Fig. 3.1). Sa taille correspond au maillage de discrétisation utilisé en SGE. Il traduit une diminution du nombre de maille d'un facteur p par direction spatiale.

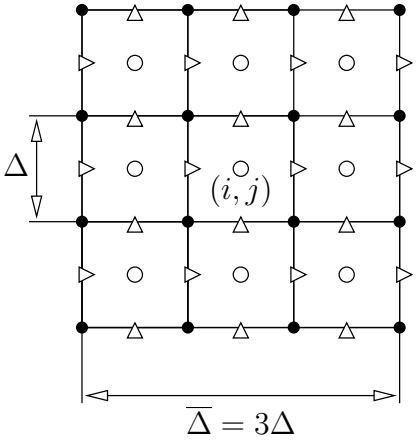


FIGURE 3.1 – Illustration 2D du filtre utilisé pour les tests *a priori*.

Choix de la largeur de coupure du filtre $\overline{\Delta}$ La taille du filtre explicite est essentielle. Elle traduit la sous-résolution envisagée pour la simulation des grandes échelles et conditionne l'échelle de coupure et l'intensité des fluctuations sous-maille. L'approche présentée ici doit aboutir à un modèle permettant de conserver un suivi explicite des interfaces. Le filtre doit donc être plus petit que les inclusions. Par ailleurs, le retour d'expérience sur le modèle similaire développé par Toutant (2006) indique qu'une forte sous-résolution n'est pas envisageable car la couche limite doit rester résolue. Par conséquent, nous avons décidé de restreindre la taille du filtre explicite à $p \in \{3, 5, 7, 9\}$. Rappelons que ce facteur p est le facteur de gain en maillage par direction spatiale par rapport au maillage de la SND de référence. Pour un calcul tridimensionnel, cela correspond potentiellement à un gain allant de 150 à 20 000 en termes de coût numérique, en considérant une réduction du pas de temps avec une pente de 1.5 pour satisfaire le critère de stabilité des interfaces introduit par Mathieu (2003).

Isotropie Le filtre et les opérateurs discrets de différentiation ne sont pas isotropes comme le montre l'observation spatiale des champs. Une légère différence de forme est observable entre les deux parties du terme sous-maille de tension de surface ; elle a pour conséquence une plus faible intensité du terme sous-maille au voisinage de l'interface lorsque la normale à l'interface est dans une direction principale du maillage (Fig. 3.2).

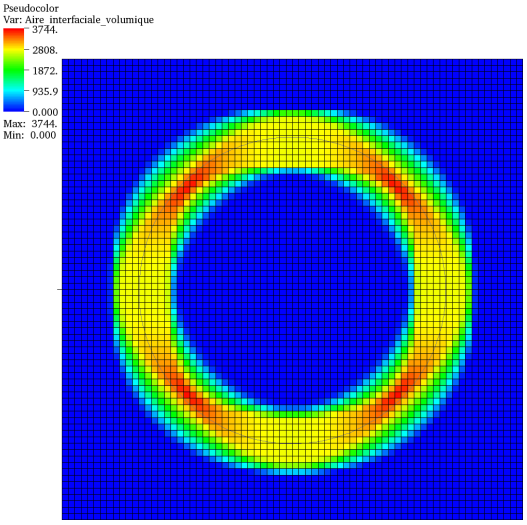


FIGURE 3.2 – Effet de l'anisotropie du filtre sur l'aire interfaciale volumique évaluée à l'échelle mésoscopique. Coupe de la bulle 3D ellipsoïdale (vue de dessus, maillage $N = 240$, filtre $p = 9$).

3.2.2 Définitions des critères de comparaison

La hiérarchie des termes sous-maille est grandement conditionnée par les nombres sans dimension associés à une configuration donnée. Or, leur choix dépend directement de la configuration étudiée et ne peut en aucun cas être considéré comme une généralité. L'évaluation des modèles par des tests *a priori* doit être valide sur un ensemble de cas représentatifs de la gamme d'application du modèle. Pour s'affranchir de l'influence des nombres sans dimension du problème et valider la modélisation du terme sous-maille τ, nous avons choisi d'observer les deux critères suivants :

$$\tau \ll \tau^0 \hat{=} \overline{a\phi} \tag{3.4a}$$

$$\tau^{ev} \approx \tau \tag{3.4b}$$

Le premier critère permet de s'assurer que la variable mésoscopique $\overline{a}\,\overline{\phi}$ choisie constitue une bonne approximation du terme à fermer $\overline{a\phi}$. Le second critère évalue la qualité du modèle. L'étude des contributions de chaque terme dans l'équation d'évolution n'est donnée qu'en complément de ces deux critères car son interprétation est délicate. En effet, la hiérarchie des contributions des termes sous-maille aux équations d'évolution est directement affectée par les nombres sans dimension considérés pour l'étude. Par conséquent, elle est particulière et n'est valide que pour la configuration considérée.

Dans l'absolu, ce travail peut être mené en tout point de l'espace x_i et à chaque instant de simulation ; pour synthétiser ces informations, il faut définir des critères simples, représentatifs du comportement des champs $\tau(x_i)$ et $\tau^{ev}(x_i)$. Notre choix s'est porté sur les critères suivants.

(i) Le maximum spatial des champs instantanés τ^0, τ et $\tau^{ev}(x_i)$ permet de qualifier l'intensité des termes sous-maille et de leur modèle ; cette comparaison de la norme $\mathbb{L}^\infty$ des champs a un coût de calcul faible. Elle permet de réduire un champ multidimensionnel à une valeur unique, le maximum, utilisé comme critère de comparaison et de juger si un terme sous-maille est négligeable. S'il ne l'est pas, l'intensité maximale mesurée pour le modèle donne une première estimation sur la qualité du modèle mais ce critère local est trop restrictif pour être représentatif du comportement global des champs.

(ii) La norme euclidienne $\mathbb{L}^2$, définie pour l'erreur e par $e = \sqrt{\sum_{x_i} \left(\tau(x_i) - \tau^{ev}(x_i)\right)^2}$, permet de quantifier les écarts entre le terme sous-maille et son évaluation de manière globale. Le carré évite la compensation des erreurs. Cet indicateur peut être relié au coefficient de corrélation de la régression linéaire entre les champs τ et τ^{ev} (noté r) qui indique la qualité de la modélisation sur une base plus générale que la simple étude des maxima. Plus le coefficient r est proche de 1, plus le nuage de points obtenu est resserré autour d'une droite. S'il s'éloigne de l'unité, cela signifie que le modèle de similarité d'échelles a des difficultés à prédire la répartition des transferts sous-maille et la redistribution de l'énergie au voisinage de l'interface. Ce coefficient évalue la qualité de la modélisation structurelle puisqu'il traduit la capacité du modèle à reproduire la structure du tenseur ou du vecteur des corrélations.

(iii) Enfin, la pente a de la corrélation $\tau^{ev} = a\tau$ indique la qualité de la modélisation fonctionnelle en évaluant l'intensité du modèle par rapport aux termes sous-maille. Théoriquement, cette pente doit être proche de l'unité. Si elle s'en éloigne, cela signifie que le modèle de similarité d'échelles n'est pas capable de prédire l'intensité des transferts sous-maille avec précision.

Nous jugeons ces critères représentatifs ; cette hypothèse est vérifiée par l'observation des champs spatiaux et le tracé des corrélations point par point à un instant donné. Ces informations complémentaires permettent d'évaluer les modèles dans leur globalité. L'aspect instationnaire de l'écoulement est conservé lors des comparaisons car aucun filtre temporel n'est utilisé. Autrement dit, les résultats obtenus sont étudiés en fonction du temps ce qui permet éventuellement d'observer des différences pour certaines topologies particulières.

L'évaluation d'une régression linéaire et d'un coefficient de corrélation a un coût de post-traitement plus élevé que la simple évaluation d'un extremum, mais l'information apportée est aussi plus riche. Outre une information sur la qualité du modèle, elle permet de déterminer empiriquement (sur l'ensemble des cas étudiés) un coefficient correctif qui peut être ajouté aux modèles, sans fondement théorique. Cette démarche se rapproche des modèles dynamiques développés en SGE monophasique pour remédier à la sous-estimation des termes sous-maille par les modèles de similarité d'échelles (Sarghini *et al.*, 1999).

> **Remarque :** Le coefficient de corrélation r est construit sur une somme d'erreurs au carré. D'après le principe des développements asymptotiques raccordés, l'objectif final est de concentrer à l'interface la quantité en excès associée au terme sous-maille. Ce processus d'intégration dans la direction normale à l'interface permet les compensations. Par conséquent, il est possible de construire un critère moins restrictif que celui choisi pour qualifier les modèles sous-maille, en se basant sur une intégration des termes sous-maille dans la direction normale à l'interface. Ce critère est intéressant car il n'est pas local. Pour poursuivre la validation du modèle mésoscopique, il serait intéressant d'évaluer le terme τ^{mf}. Les stencils de τ et τ^{mf} étant différents, il n'est plus possible d'envisager une comparaison point par point, ni une comparaison des maxima. un critère non local est alors indispensable. Par ailleurs, ce critère ajoute un degré de liberté n donné par le ratio des tailles de filtre $n = \langle\Delta\rangle / \overline{\Delta}$ que l'on élimine en fixant $n = 3$, d'après les habitudes de SGE monophasique. Pour obtenir l'équivalence au sens des DAR, il est nécessaire d'intégrer la contribution de ces termes dans la direction normale à l'interface. Techniquement, cette comparaison est difficile car elle nécessite en chaque point de l'interface la détermination de la direction normale et l'évaluation d'une intégrale. Cette possibilité est écartée par des considérations techniques. En effet, la définition d'une intégration suivant une droite est complexe, coûteuse et difficile à automatiser. Nous nous sommes donc contentés d'évaluer localement l'approximation $\tau \approx \tau^{ev}$. Nous verrons sur les exemples présentés que le critère choisi, bien que plus restrictif, permet d'aboutir à de bons résultats. Il est donc très satisfaisant. En complément, l'étude analytique menée à la section 4.4.6, permet de valider *a posteriori* et de manière théorique l'équivalence entre τ^{nm} et τ^{mf} sur la zone de transition, au sens intégral nécessaire pour les DAR.

Comparaison de vecteurs Lorsque le terme sous-maille est vectoriel, nous comparons uniquement les normes qui traduisent l'intensité de la grandeur. L'alignement du modèle et du terme

sous-maille n'est pas évalué directement. Il est néanmoins prise en compte lors de l'évaluation des contributions des termes sous-maille.

Comparaison de tenseurs Les champs tensoriels $\boldsymbol{T}_{ij}$ sont caractérisés par leurs trois invariants :

- $\boldsymbol{I} = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}_{kk}$: la trace du tenseur caractérise la compression ou la dilatation du champ.
- $\boldsymbol{II} = \mathrm{con}\,(\boldsymbol{T}) = \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{T}))^2 - \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{TT})\right)$: la contraction est une norme.
- $\boldsymbol{III} = \det\,(\boldsymbol{T})$: le déterminant.

Pour rendre ces trois composantes homogènes, elles sont adimensionnées par le maximum de la trace $m = \max_{x_i}(\boldsymbol{I})$, son carré m^2 et son cube m^3 respectivement. L'interprétation physique de chacun de ces invariants est assez complexe. Le tenseur de convection semble principalement sphérique car la trace domine les autres invariants. À l'inverse, le tenseur de diffusion a une composante déviatorique dominante.

Les invariants sont reliés aux valeurs propres du tenseur $\boldsymbol{T}$. De même que la comparaison des normes pour des vecteurs ne donne pas d'indication sur la cohérence entre les directions, l'étude des invariants des tenseurs ne donne pas d'indications sur les directions principales (vecteurs propres) de ces tenseurs. Cependant, ces directions nous semblent assez proches.

3.2.3 Précautions numériques pour l'évaluation des termes sous-maille

L'évaluation des termes sous-maille et des propositions de fermeture requiert une précision importante. En effet, ces termes évaluent les erreurs de commutation. Leurs amplitudes sont faibles devant les grandeurs de base. Dans cette section, nous présentons quelques précautions qui nous ont permis d'évaluer précisément les termes sous-maille.

Les opérateurs différentiels sont évalués par des différences centrées d'ordre 2. Des interpolations bilinéaires permettent de transférer des champs du maillage eulérien vers le maillage lagrangien et inversement. Les champs filtrés ne sont pas évalués aux bords du domaine de calcul. Les propriétés physiques sont évaluées à partir de l'indicatrice de phase χ.

Construction de $\nabla\chi$ par l'intermédiaire des champs $\boldsymbol{n}$ et δ^i L'utilisation d'une fonction discrète χ ne permet pas de reconstruire précisément le champ $\boldsymbol{n}$ par des différences finies centrées car le champ représenté est discontinu. Une erreur systématique existe, indépendamment de la résolution utilisée, même pour une interface plane. En effet, on observe sur la figure 3.3 que l'évaluation du gradient de l'indicatrice discrète conduit au vecteur $\underline{\boldsymbol{n}}$ qui n'est pas orthogonal à l'interface. Pour construire le vecteur $\boldsymbol{n}$, il est important d'utiliser la distance signée à l'interface d (évaluée au centre des mailles eulériennes). On construit alors précisément un champ de normale volumique en évaluant le gradient suivant par différences finies centrées :

$$\boldsymbol{n} = \nabla d \tag{3.5}$$

Par ailleurs, on évalue l'aire interfaciale volumique δ^i lors de la simulation par le calcul local de la portion d'interface contenue dans chaque maille eulérienne. Ces deux champs discrets $\boldsymbol{n}$ et δ^i permettent de reconstruire avec précision le gradient de l'indicatrice de phase :

$$\nabla\chi = -\boldsymbol{n}\delta^i \tag{3.6}$$

En filtrant ce champ, on évalue $\nabla\overline{\chi}$.

Construction de Θ et des produits $a\Theta$ Dans cette étude, on s'est limité au cas où seul le champ de température liquide varie, la vapeur étant supposée à saturation. Pour minimiser l'étalement des champs microscopiques, la variable Θ est construite à partir de la distance signée à l'interface par

$$\Theta = kT = \begin{cases} k_l T_l & \text{si } d \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.7}$$

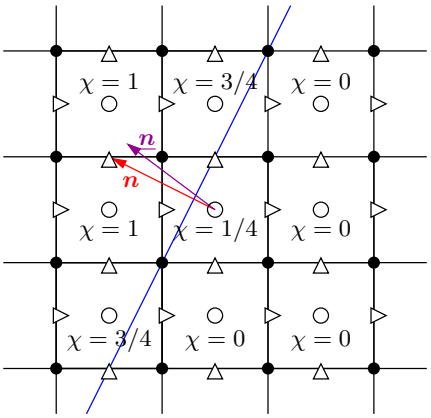


FIGURE 3.3 – Illustration 2D de l'évaluation de la normale par différence centrée : comparaison de la normale $\boldsymbol{n} \propto (-2, 1)$ à une interface plane et de son approximation par différence finie $\underline{\boldsymbol{n}} \propto (-2, 3/2)$).

où T_l est la solution du champ de température microscopique. Ce champ est ensuite filtré pour évaluer $\overline{\Theta}$. La même procédure est utilisée pour évaluer les champs $\overline{\beta\,\Theta}$ et $\overline{v\beta\,\Theta}$. L'évaluation (3.7) du champ kT est plus précise que l'estimation du produit de k par T car la relation $\chi^2 = \chi$ n'est plus vérifiée dans les mailles diphasiques pour un champ discret. Sans cette précaution, nous avons constaté une erreur de 30% sur l'estimation du flux $k\nabla T$. Cette méthode ne peut pas être transposée au champ de vitesse pour lequel la discrétisation du champ microscopique a donc nécessairement une influence.

Extension des champs $\overline{\dot{m}}^s$ et $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ L'approximation des extensions par un filtrage surfacique n'est valide que dans le voisinage "immédiat" de l'interface c'est-à-dire

$$\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s = \dot{m}^* \boldsymbol{n}^* + \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{si } \overline{\delta^i} \neq 0 \tag{3.8}$$

avec l'opérateur $\overline{\cdot}^s$ défini par : $\overline{\phi}^s = \overline{\phi\delta^i}/\overline{\delta^i}$.

Par conséquent, avec l'approximation mésoscopique (3.8) de l'extension du champ microscopique, on introduit une discontinuité à une distance $\overline{\Delta}/2$ de l'interface (si $\overline{\Delta}$ est la taille du filtre borné). Or, c'est précisément pour éviter ce genre de désagrément que l'on s'est efforcé dans la première partie de construire des champs continus. Pour créer les champs mésoscopiques utilisés dans l'évaluation des termes sous-maille, cette largeur d'extension $\overline{\Delta}$ est suffisante. En revanche, pour la modélisation, une extension plus large est nécessaire du fait de l'utilisation d'un double filtrage (*cf.* Éq. (3.3)). Pour évaluer les modèles sur une largeur $\overline{\Delta}$, il est donc nécessaire de définir des extensions sur une largeur $2\overline{\Delta}$. Une telle extension est suffisante pour comparer point par point les modèles modifiés *ev* mais il manque une maille pour évaluer les opérateurs de dérivation discrets. Pour évaluer les modèles τ^{ev} (non nuls sur une largeur $2\overline{\Delta}$) sur une largeur suffisante pour permettre le calcul de contributions aux équations de bilan, on propose de redéfinir $\overline{\dot{m}}^s$:

$$\overline{\dot{m}}^s = \begin{cases} \dfrac{\overline{\overline{\overline{\dot{m}\delta^i}}}}{\overline{\overline{\overline{\delta^i}}}} & \text{si } \overline{\overline{\overline{\delta^i}}} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette définition est continue sur une largeur $3\overline{\Delta}$ et donc *a fortiori* sur $2\overline{\Delta} + 1$ maille, ce qui était l'objectif poursuivi. Nous avons vérifié que, sur les mailles voisines de l'interface ($\overline{\delta^i} \neq 0$), cette définition est bien équivalente à $\overline{\dot{m}\delta^i}/\overline{\delta^i}$ et que l'hypothèse *constant dans la direction normale* est bien vérifiée.

Évalutation de la courbure et du terme de tension interfaciale Comme le gradient de l'indicatrice $\nabla\chi$ et le filtre $\overline{\cdot}$ sont évalués sur le maillage eulérien, il est nécessaire d'évaluer la

courbure de l'interface microscopique κ sur ce maillage. Pour cela, la courbure κ est calculée à partir du champ volumique de normale $\boldsymbol{n}$:

$$\kappa = (\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} - \boldsymbol{I}) : \nabla \boldsymbol{n} \tag{3.9}$$

À l'échelle mésoscopique, on évalue le champ $\overline{\kappa}_\sigma$ à partir du champ filtré $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ de la même manière :

$$\overline{\kappa}_\sigma = (\overline{\boldsymbol{n}}^s \otimes \overline{\boldsymbol{n}}^s - \boldsymbol{I}) : \nabla \overline{\boldsymbol{n}}^s \tag{3.10}$$

Ces deux champs permettent de construire le terme sous-maille représentant les forces superficielles :

$$\tau_{\text{superf}} = \overline{\kappa \boldsymbol{n} \delta^i} - \overline{\kappa}_\sigma \overline{\boldsymbol{n}}^s \overline{\delta^i} \tag{3.11}$$

Évaluation de la diffusion L'évaluation du terme de diffusion est délicate à cause des gradients du champ $(\boldsymbol{v} - \dot{m} v \boldsymbol{n})$ (*cf.* Éqs. (2.39) et (2.40c)). Les estimations sont très sensibles à l'étalement du saut de vitesse inhérent à la discrétisation. Pour avoir le même étalement de la discontinuité sur les deux parties $\boldsymbol{v}$ et $\dot{m} v \boldsymbol{n}$ du champ $(\boldsymbol{v} - \dot{m} v \boldsymbol{n})$, nous avons utilisé le champ de vitesse $\delta \boldsymbol{v}$ déterminé lors de l'algorithme (*cf.* section 1.2.3 et la définition (1.23)) sachant qu'au niveau continu $\delta \boldsymbol{v} = \dot{m} v \boldsymbol{n}$. Ainsi, le terme sous-maille de diffusion est évalué par :

$$\tau_{\text{diff}} = \overline{\mu \left(\nabla \left(\boldsymbol{v} - \delta \boldsymbol{v} \right) + \nabla^T \left(\boldsymbol{v} - \delta \boldsymbol{v} \right) \right)} - \overline{\mu} \left(\nabla \left(\overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\delta \boldsymbol{v}} \right) + \nabla^T \left(\overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\delta \boldsymbol{v}} \right) \right) \tag{3.12}$$

3.3 Limitations

On procède par étape en se rapprochant autant que possible de la SGE continue. Néanmoins, certaines limitations inhérentes aux tests *a priori* restent inévitables :

- Les champs mésoscopiques sont évalués par filtrage de la solution des équations microscopiques discrétisées alors qu'en SGE, le filtre implicite traduit la solution des équations mésoscopiques fermées ;
- Le filtre explicite de la SGE est en pratique différent du filtre implicite (à la fois par la taille et par la forme du noyau) ; pour la modélisation ISS, il existe deux filtres explicites : un filtre surfacique et un filtre volumique.
- Lors des tests *a priori*, on s'efforce de quantifier au mieux l'erreur introduite par la modélisation mais il est difficile d'évaluer l'impact de cette erreur sur la solution. Les mesures instantanées ne permettent pas de connaitre la déviation à long terme (sur plusieurs milliers de pas de temps) résultant d'un écart sur un pas de temps. À titre d'exemple, pour le transport de l'interface, la contribution prédominante du modèle provient du champ de vitesse car le taux de changement de phase est modéré. On est incapable de juger l'impact de la fraction du modèle due au changement de phase sur l'évolution temporelle du taux de vide même si ce modèle a un effet macroscopique important. Malheureusement au stade des tests *a priori*, il est difficile d'évaluer la qualité de la modélisation vis-à-vis de grandeurs macroscopiques.
- Lors des tests *a priori*, les champs utilisés sont des données discrètes représentant des champs plus ou moins réguliers. Comme l'opération de discrétisation est assimilable à une opération de filtrage, on ne dispose pas des champs microscopiques réels, ce qui explique que la propriété $\chi = \chi^2$ ne soit plus vérifiée par exemple. Si on peut pallier ce problème pour l'indicatrice de phase, c'est parce que c'est une fonction simple. En revanche, ces approximations persistent inéluctablement pour des produits comme $\rho \boldsymbol{v}$ ou $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}$. L'erreur associée à l'approximation d'un champ microscopique par son équivalent discret peut devenir plus importante que les erreurs de commutation parfois assez faibles. Pour réduire cet effet, il faudrait augmenter le nombre de point de discrétisation dans la taille du filtre, autrement dit, augmenter la résolution spatiale de la SND. On essaie de limiter cet effet en ayant une résolution suffisamment fine mais cela devient très coûteux en 3D.

3.4 Évaluation des termes sous-maille

Maintenant que nous avons présenté la méthodologie des tests *a priori*, nous allons détailler l'étude de la configuration pseudo-turbulente multi-bulles (section 3.4.1). Cette configuration est

l'une des plus riches que nous ayons simulées car les fluctuations de vitesse et de température sont fortement stimulées par le confinement des bulles. C'est aussi la configuration qui se rapproche le plus des écoulements diphasiques réels. Une seule taille de filtre est présentée en détail ($p = 9$) ; les résultats pour d'autres tailles de filtre sont commentés plus succinctement à la fin de la section 3.4.1. Les résultats obtenus sur les autres configurations sont présentés à l'annexe 3.A. Seule leur synthèse est présentée à la section 3.4.2.

3.4.1 Présentation détaillée de la configuration pseudo-turbulente multi-bulles

Un échantillon de 25 pas de temps est extrait de la simulation pour couvrir toute la durée de la simulation. Les termes sous-maille et les modèles sont évalués en chaque point du maillage par un filtre spatial dont le support compact correspond à 9x9x9 cubes. Les amplitudes données aux tableaux 3.1 et 3.2 correspondent à la moyenne temporelle de la norme $\mathbb{L}^\infty$ des champs spatiaux.

Dans le tableau 3.1, les pourcentages sont évalués avec le terme $\overline{a\phi}$ pour référence (*e. g.,* le pourcentage pour le terme sous-maille de quantité de mouvement est donné par $100 \times \tau_{\text{temp}}/\overline{\rho \boldsymbol{v}}$). Ce pourcentage informe sur la pertinence de la définition du terme sous-maille en évaluant l'inégalité (3.4a). En remarquant que le filtre considéré ici est relativement large, le tableau 3.1 démontre la pertinence des termes sous-maille que nous avons construits car l'intensité ne dépasse pas un tiers. La figure 3.4a permet de vérifier que le maximum spatial du terme sous-maille de quantité de mouvement τ_{temp} et celui du modèle correspondant τ^{ev}_{temp} fluctuent faiblement au cours du temps. Elle permet aussi de confirmer que ces termes sont d'un ordre inférieur à $\tau^0_{\text{temp}} = \overline{\rho \boldsymbol{v}}$. L'ordonnée de droite de la figure 3.4a est utilisée pour représenter l'évolution de la pente a de la régression linéaire $\tau^{ev}_{\text{temp}} = a\tau_{\text{temp}}$ et le coefficient de corrélation r associé. Les figures équivalentes pour les autres termes sous-maille sont données à l'annexe 3.A.4, colonne de gauche. La très faible amplitude des termes sous-maille de diffusion τ_{diff} et de tension interfaciale τ_{superf} observée dans le tableau 3.1 permet de les négliger [2]. Ce résultat, en accord avec les travaux précédents de Toutant *et al.* (2008) pour des écoulements adiabatiques, indique que la solution sous-résolue est assez précise pour décrire la couche limite à l'interface et la géométrie de l'interface à l'ordre dominant. L'amplitude des autres termes sous-maille est suffisante pour justifier leur modélisation.

TABLE 3.1 – Résultats des tests *a priori* pour la configuration multi-bulles. L'amplitude compare la moyenne temporelle de la norme $\mathbb{L}^\infty$ de chaque terme sous-maille ou modèle par rapport au terme $\tau^0 \hat{=} \overline{a\phi}$ correspondant. La pente de la régression a et le coefficient de corrélation linéaire r caractérisent la qualité des modèles.

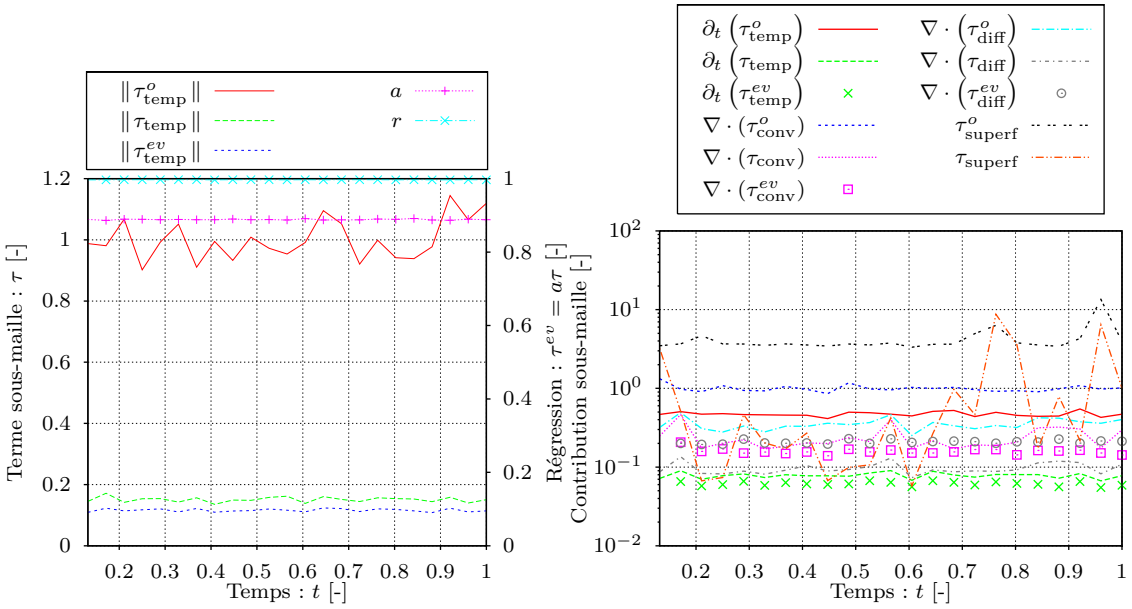
Équation	Terme	Amplitude (%) τ	Amplitude (%) τ^{ev}	Pente a	Coeff. de corrélation. (r)
Interface Éq. (2.97a)	τ_{interf}	33.10	25.66	0.898	0.997
Quantité de mouvement Éq. (2.97c)	$\lVert \tau_{\text{temp}} \rVert$	16.93	12.72	0.848	0.995
	tr (τ_{conv})	23.53	13.51	0.696	0.977
	con (τ_{conv})	4.30	1.41	0.411	0.966
	det (τ_{conv})	0.00	0.00	0.279	0.742
	tr (τ_{diff})	0.89	N/A	N/A	N/A
	con (τ_{diff})	3.04	N/A	N/A	N/A
	det (τ_{diff})	0.04	N/A	N/A	N/A
	τ_{superf}	8.89	N/A	N/A	N/A
Énergie Éq. (2.97d)	τ^T_{temp}	9.43	7.06	0.771	0.984
	$\lVert \tau^T_{\text{conv}} \rVert$	15.44	11.32	0.827	0.984
Saturation Éq. (2.97e)	C^i	N/A	N/A	0.155	0.995

2. Comme les termes sous-maille τ_{diff} et τ_{superf} sont négligés, on n'étudie pas les modèles associés τ^{ev}_{diff} et $\tau^{ev}_{\text{superf}}$. On retrouve alors la mention N/A, pour non applicable, dans les cases concernées des tableaux 3.1 et 3.2.

TABLE 3.2 – Résultats des tests *a priori* pour la configuration multi-bulles. L'amplitude compare la moyenne temporelle de la norme $\mathbb{L}^\infty$ des *contributions aux équations de bilan* de chaque terme sous-maille ou modèle par rapport à la contribution du terme $\tau^0 \hat{=} \overline{a\phi}$ correspondant. La pente de la régression a et le coefficient de corrélation linéaire r caractérisent la qualité des modèles.

Équation	Contribution	Amplitude (%) τ	Amplitude (%) τ^{ev}	Pente a	Coeff. de Corrélation (r)
Interface Éq. (2.97a)	τ_{interf}	33.10	25.66	0.898	0.997
Quantité de mouvement Éq. (2.97c)	$\lVert \partial_t \tau_{\text{temp}} \rVert$	10.82	8.14	0.841	0.996
	$\lVert \nabla \cdot \tau_{\text{conv}} \rVert$	25.71	17.33	0.806	0.980
	$\lVert \nabla \cdot \tau_{\text{diff}} \rVert/\text{Re}$	9.16	N/A	N/A	N/A
	$\tau_{\text{superf}}/\text{We}$	33.89	N/A	N/A	N/A
Énergie Éq. (2.97d)	$\text{Pe}\, \partial_t \tau^T_{\text{temp}}$	40.31	30.16	0.759	0.986
	$\text{Pe}\, \nabla \cdot \tau^T_{\text{conv}}$	103.25	55.48	0.784	0.954

Dans le tableau 3.2, la qualification des modèles est approchée sous un autre angle. Une unique référence est considérée pour chaque équation, à savoir $\overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla \chi_v}$, $\nabla \cdot \overline{\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}}$ et $\nabla^2 \overline{\Theta}$ respectivement pour les équations de transport de l'interface, de bilan de quantité de mouvement et de bilan d'énergie. La contribution de chaque terme sous-maille est évaluée par des dérivées spatiales ou temporelles avant d'être comparée à cette référence. La figure 3.4b permet de vérifier que les moyennes temporelles sont bien représentatives du champ instantané. Le tableau 3.2 présente l'intérêt de mesurer l'effet réel d'un modèle sur l'équation de conservation. Le principal inconvénient est que les nombres sans dimension particuliers considérés pour l'étude en question influencent fortement la hiérarchie ainsi établie. Cette hiérarchie manque de généricité. En outre, elle dépend du référentiel dans lequel l'étude est conduite car les termes τ_{temp} et τ_{conv} sont considérés séparément alors qu'ils contribuent tous deux à la convection.



(a) Terme sous-maille τ_{temp} (b) Contributions des termes sous-maille.

FIGURE 3.4 – Évolution temporelle du terme sous-maille τ_{temp} et des contributions sous-mailles à l'équation de bilan de quantité de mouvement ($\epsilon_c = 0.14$).

Maintenant que l'utilité des modèles est avérée, évaluons les fermetures données par les équations (2.45), (2.62a) et (2.77) sur cet écoulement particulier. En comparant les structures turbulentes et les déformations interfaciales observées sur la figure 1.20 à l'écoulement visqueux autour d'une bulle unique (Fig. 1.7b), la configuration pseudo-turbulente s'avère suffisamment complexe pour juger de la qualité de la modélisation. Tout d'abord, l'accord entre les termes sous-maille et les modèles est vérifié qualitativement sur des coupes de l'écoulement. Ce bon accord est illustré sur la figure 3.6 pour le cas du terme sous-maille τ_{temp} du bilan de quantité de mouvement (*cf.* Éqs. (2.42a) et (2.45a)). Sur cette figure, on remarque que le modèle prédit un terme sous-maille important dans les régions à fort frottement, conformément à la théorie. En effet, nous avons montré à la section 2.2.1 que le terme sous-maille est proportionnel aux gradients des champs qui le composent. Pour une comparaison quantitative, on estime la dispersion du modèle par rapport au terme sous-maille correspondant (*e. g.,* Fig. 3.5 pour le terme τ_{temp} de l'équation de bilan de quantité de mouvement). La corrélation idéale est représentée par la droite $\tau^{ev} = \tau$. La droite $\tau^{ev} = a\tau$ minimisant les écarts des points à la courbe traduit le comportement moyen du modèle. Le coefficient de corrélation r évalue la dispersion. Plus il se rapproche de l'unité, plus cette dispersion est faible. Les tableaux 3.1 et 3.2 regroupent les pentes a et les coefficients de corrélation r de la régression linéaire $\tau^{ev} = a\tau$. La pente obtenue est légèrement inférieure à l'unité pour tous les modèles ce qui correspond à une sous-estimation du modèle (de 10 à 30%) en accord avec les comptes rendus de Toutant *et al.* (2008) et Magdeleine (2009) pour les écoulements adiabatiques. En fait, la sous-estimation des modèles de similarité d'échelles est bien documentée dans la littérature de la turbulence monophasique (Sarghini *et al.*, 1999). Ces modèles permettent le "backscatter" et prédisent des tensions sous-maille bien corrélées avec le tenseur de Reynolds réel mais ils ne sont pas suffisamment dissipatifs. Une solution classiquement adoptée en turbulence monophasique consiste à ajouter une modélisation *fonctionnelle* par l'intermédiaire d'une viscosité turbulente pour compléter la contribution *structurelle* des modèles de similarité d'échelles et/ou à déterminer de manière dynamique une constante d'ajustement du modèle. Dans ce premier pas vers la SGE pour écoulements diphasiques, nous suggérons de calibrer une constante (notée a dans les tableaux 3.1 et 3.2) à partir de ces tests *a priori*. Les fortes corrélations entre les termes sous-maille et les modèles correspondants (*cf.* Fig. 3.5 et tableaux 3.1 et 3.2) démontrent la qualité de la modélisation.

Globalement, le tableau 3.2 confirme l'analyse précédente. Il présente l'intérêt de déterminer une pente unique pour chaque terme sous-maille (contre 3 pour les tenseurs). Dans une approche fonctionnelle, le coefficient a ainsi déterminé peut être directement utilisé pour améliorer les capacités prédictives du modèle proposé au chapitre 2.

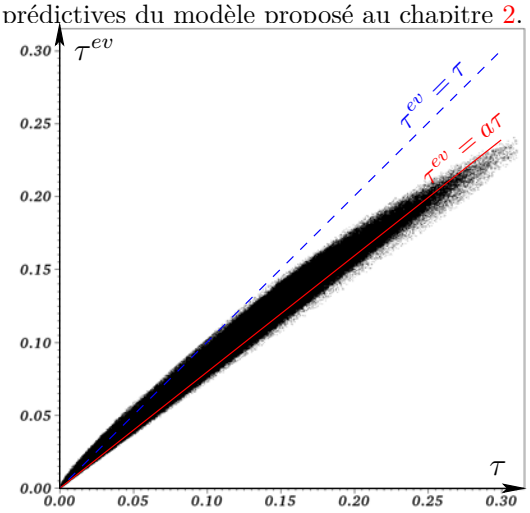


FIGURE 3.5 – Validation de l'hypothèse de similarité d'échelles : dispersion du modèle τ^{ev}_{temp} par rapport au terme sous-maille τ_{temp}. Corrélation idéale (- - -) et régression linéaire (——).

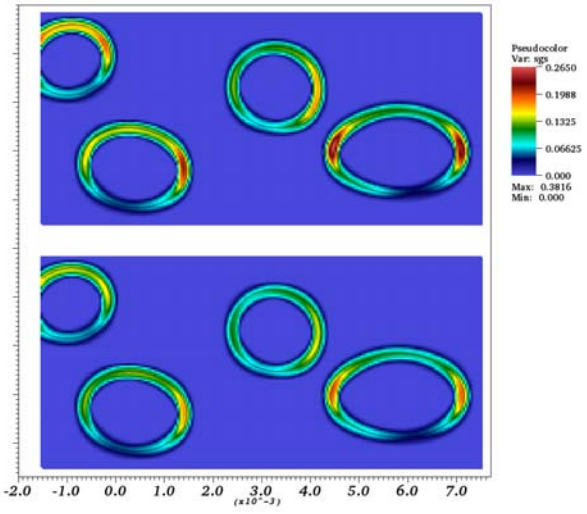


FIGURE 3.6 – Validation de l'hypothèse de similarité d'échelles : comparaison qualitative entre le terme sous-maille τ_{temp} à modéliser (coupe supérieure) et son modèle τ^{ev}_{temp} (coupe inférieure, même échelle de couleur)

Enfin, la qualité de la relation de fermeture (2.77) concernant la condition de saturation de l'interface est estimée en observant la corrélation entre le taux de changement de phase mésoscopique et la variable mésoscopique $\overline{\Theta}$ sur les différentes positions de l'interface. Contrairement aux autres relations de fermeture, la condition de saturation (2.77) doit être qualifiée à l'interface uniquement. La figure 3.7 montre une fois de plus une bonne corrélation. La figure 3.8a permet de vérifier que les caractéristiques de cette corrélation n'évoluent pas au cours du temps. La pente de cette régression linéaire est reliée à la constante correspondant au filtre explicite utilisé ici : $C_1 = 0.155$. Cette valeur est très satisfaisante car elle concorde assez bien avec les prédictions de la relation (2.72b) ($C_1 \approx 1/8$). Elle conforte la confiance attribuée à la relation (2.77). Néanmoins, il faut remarquer que cette valeur est inutile pour les tests *a posteriori* et pour les utilisations futures du modèle ISS car elle est associée à la forme particulière du filtre choisie ici. Il n'y a aucune évidence pour que le filtre implicite de la SGE soit effectivement assimilable à un filtre boîte.

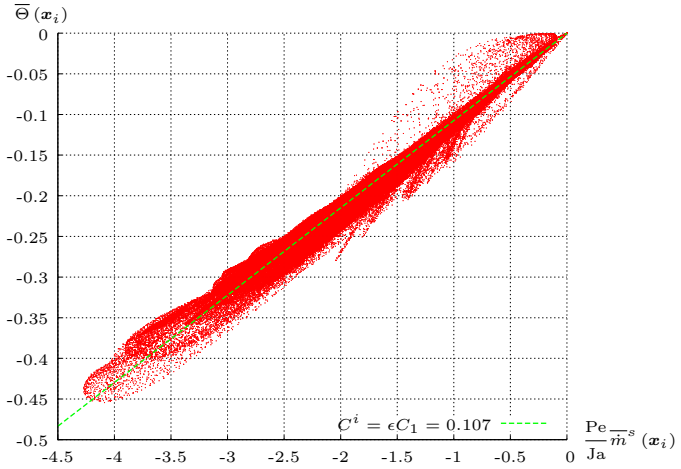
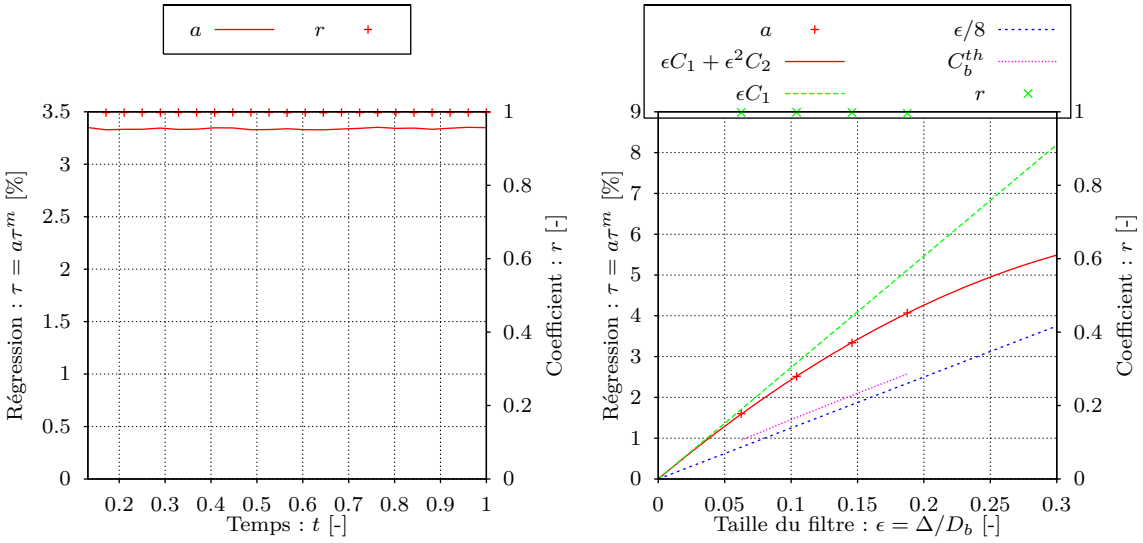


FIGURE 3.7 – Modélisation de la condition de saturation à l'interface : dispersion de $\overline{\Theta}$ par rapport au taux de changement de phase mésoscopique $\overline{\dot{m}}^s$.



(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

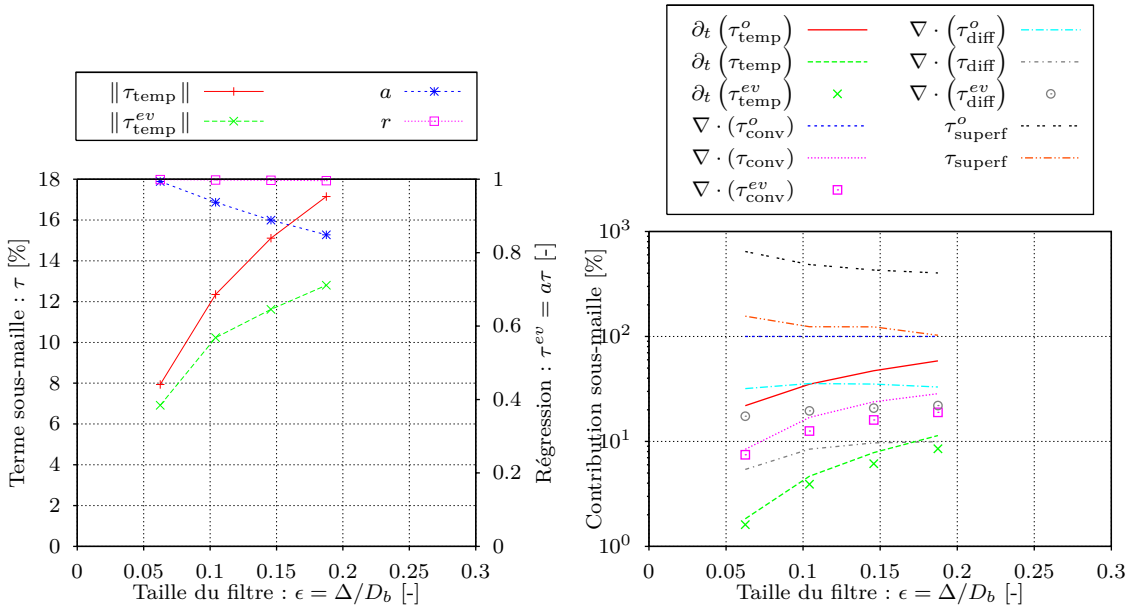
(b) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.8 – Corrélation entre la température interfaciale et le taux de changement de phase.

Dans ce paragraphe, nous avons discuté largement de la qualité des fermetures (2.97) proposées pour le système mésoscopique, en appuyant notre raisonnement sur la solution microscopique de

l'écoulement multi-bulles. Jusqu'à présent, la discussion était limitée à une taille de filtre unique ($p = 9$ ou $\epsilon_c = 0.14$). La figure 3.9 représente l'évolution des données des tableaux 3.1 et 3.2 en fonction de la taille du filtre ϵ_c, pour le terme sous-maille de quantité de mouvement τ_{temp} et pour le modèle correspondant τ^{ev}_{temp}. Les figures équivalentes pour les autres termes sous-maille sont données à l'annexe 3.A.4, colonne de droite. On constate que l'intensité du terme sous-maille augmente avec largeur de coupure du filtre. Ce résultat est attendu car cette intensité représente l'aire sous la courbe entre la taille du filtre et l'échelle de Kolmogorov sur la figure 2.2. Elle est donc bien reliée à la différence entre ces échelles.

Sur la figure 3.9a, l'ordonnée de droite est utilisée pour représenter l'évolution de la pente a de la régression linéaire $\tau^{ev}_{\text{temp}} = a\tau_{\text{temp}}$ et le coefficient de corrélation r associé. Cette évolution est discutée dans la synthèse suivante (section 3.4.2). La figure 3.9b permet de confirmer que les termes sous-maille sont d'un ordre inférieur au terme $\tau^0 = \overline{a\phi}$.



(a) Terme sous-maille τ_{temp} (b) Contributions des termes sous-maille.

FIGURE 3.9 – Influence de la taille du filtre sur le terme sous-maille τ_{temp} et sur les contributions sous-mailles à l'équation de bilan de quantité de mouvement.

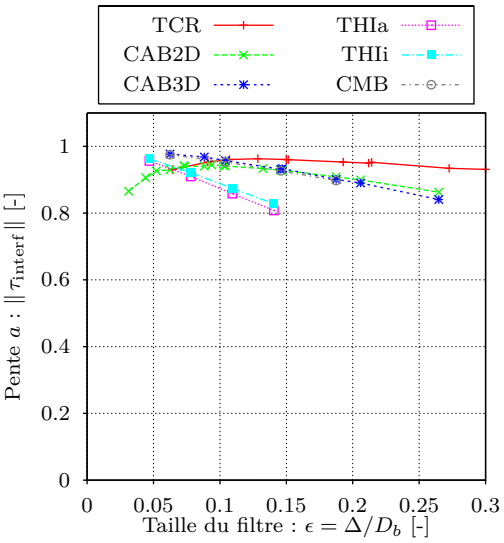
En définitive, la solution complexe de cet écoulement multi-bulles illustrée sur la figure 1.20 permet de qualifier les modèles proposés dans ce travail. Les bonnes propriétés obtenues sur ces tests *a priori* sont très encourageantes. Ces conclusions obtenues suite à l'analyse d'une configuration d'écoulement particulière sont générales. Elles peuvent être vérifiées sur les figures de l'annexe 3.A. Comme les configurations d'écoulement et les tailles de filtre considérées sont représentatives des applications envisagées, on estime que l'étude conduite ici valide la fermeture du système mésoscopique (2.97).

3.4.2 Synthèse

Des tests *a priori* ont été conduits sur des configurations variées permettant, entre autres, d'observer les modèles dans des configurations où la turbulence est soit de type monophasique (THI) soit pseudo-turbulente (les fluctuations sont engendrées par l'interaction des sillages de plusieurs bulles). L'annexe 3.A regroupe pour chaque configuration les figures pour chacun des termes sous-maille.

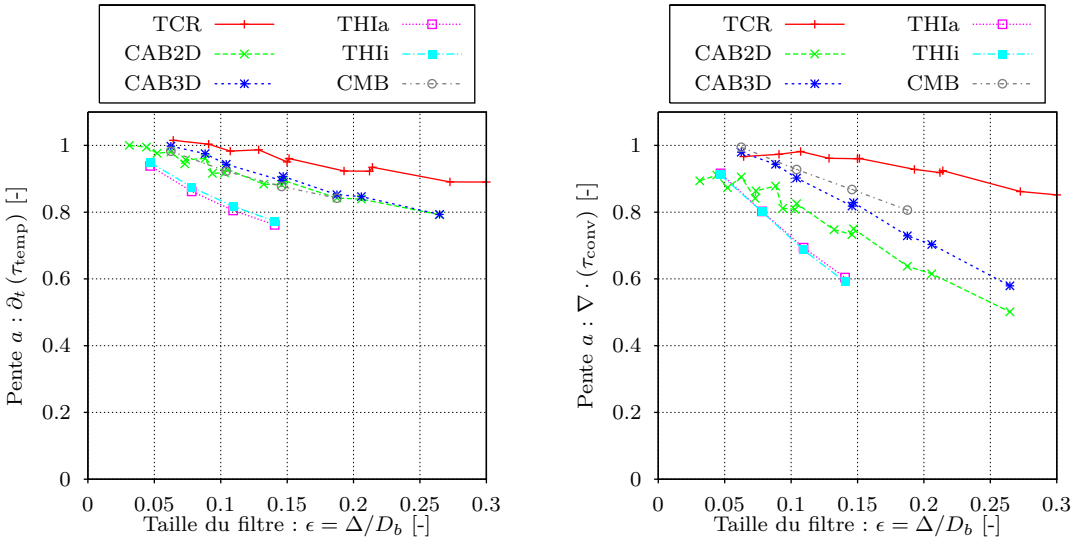
L'objectif de ce paragraphe est de synthétiser l'ensemble des tests conduits dans ce chapitre (Fig. 3.10 à 3.12) : tourbillons contra-rotatifs (TCR), ascension d'une bulle unique indéformable (CAB2D) et ellipsoïdale (CAB3D), turbulence homogène isotrope isotherme (THIi) et anisotherme

(THIa) et configuration multi-bulles (CMB). Pour l'ensemble des cas étudiés, les figures 3.10 à 3.12 représentent l'évolution du coefficient d'ajustement du modèle de similarité d'échelles en fonction de la largeur de coupure du filtre. On constate une décroissance linéaire de ce coefficient avec la taille du filtre plus ou moins marquée ; elle traduit la difficulté d'autant plus forte à reconstruire les termes sous-maille lorsque la séparation d'échelle devient grande. Néanmoins, la faible pente observée montre que les modèles restent de très bonne qualité même pour une taille de filtre importante.



(a) Influence de la taille du filtre sur τ_{interf}

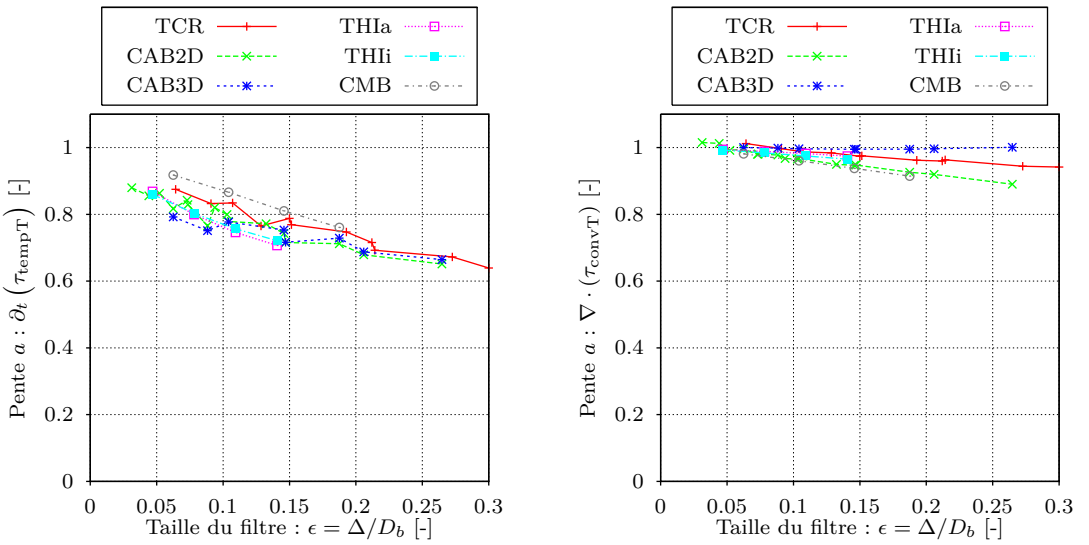
FIGURE 3.10 – Comparaison des coefficients pour les modèles sous-maille de l'équation de transport de l'interface.



(a) Influence de la taille du filtre sur τ_{temp} (b) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}

FIGURE 3.11 – Comparaison des coefficients pour la contribution des modèles sous-maille de l'équation de quantité de mouvement.

La figure 3.10 montre qu'un coefficient pour τ_{interf} compris entre 0.8 et 1 est très satisfaisant pour l'ensemble des cas considérés (configurations de l'écoulement et tailles de filtre). Pour la fermeture du bilan de quantité de mouvement, la figure 3.11a montre qu'un coefficient pour τ_{temp}

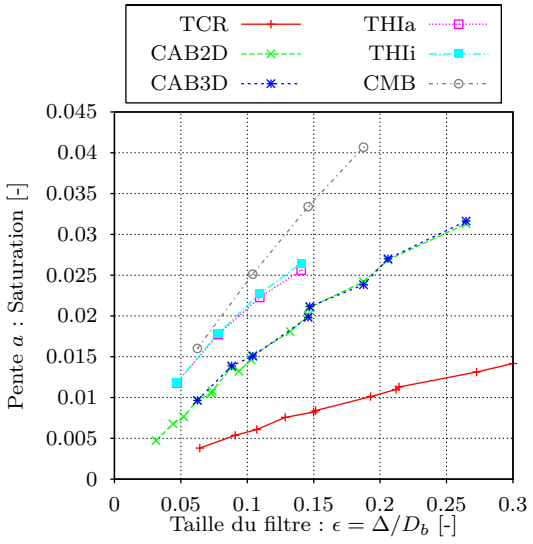


(a) Influence de la taille du filtre sur τ_{tempT}

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{convT}

FIGURE 3.12 – Comparaison des coefficients pour la contribution des modèles sous-maille de l'équation d'énergie.

compris entre 0.8 et 1 est là-aussi très satisfaisant. Les disparités sont un peu plus marquées sur la figure 3.11b représentant l'évolution du coefficient pour τ_{conv}. Une valeur de 0.8 semble être un bon compromis. Pour le bilan d'énergie, la figure 3.12a conduit au choix d'un coefficient pour τ_{tempT} de 0.8 avec une faible dépendance à la configuration étudiée. Un coefficient unitaire est satisfaisant pour le modèle de τ_{convT} (Fig. 3.12b).



(a) Influence de la taille du filtre sur la corrélation pour la saturation

FIGURE 3.13 – Corrélation entre la température interfaciale et le taux de changement de phase.

Enfin, la figure 3.13 regroupe les différentes évaluations pour le coefficient de proportionnalité reliant le taux de changement de phase mésoscopique à la variable $\overline{\Theta}^i$. L'évolution de ce coefficient est linéaire en fonction de la taille du filtre ϵ à l'ordre dominant conformément à la théorie du chapitre 2. L'influence du terme du second ordre est faible et peut être négligée dans un premier temps. Le coefficient de proportionnalité entre le taux de changement de phase et la température

de l'interface dépend assez fortement du cas considéré ; nous pensons que ces variations peuvent être attribuées à des problèmes d'adimensionnalisation. En effet, le diamètre moyen de la bulle D_{bo} à l'instant initial sert de longueur de référence et la vitesse de référence V est soit la vitesse du débit liquide imposée au bord du domaine, soit une vitesse de fluctuations. Il semblerait plus raisonnable d'utiliser la courbure locale et une vitesse en rapport avec le changement de phase puisque la fermeture (2.77) est une relation thermique qui ne fait pas intervenir la dynamique du problème. De plus, la construction de l'abscisse ϵ de la figure 3.13 à partir du diamètre initial D_{bo} ne nous semble pas très représentative : pour les tourbillons contra-rotatifs par exemple, la courbure maximale de l'interface varie fortement au cours du temps. L'adimensionnalisation par l'un des extrêmes n'est donc pas représentative de la valeur médiane.

Le manque de généralité de la représentation 3.13 doit être approfondi. Ce point nécessite un travail complémentaire.

3.5 Conclusion

Ces premiers résultats valident la fermeture du modèle SGE continu en démontrant la bonne prédictivité des transferts sous-maille et du transport de l'interface. La fermeture de la condition de saturation à l'échelle mésoscopique s'est aussi révélée précise sur les configurations étudiées avec une forte corrélation entre le taux de changement de phase mésoscopique et la variable $\overline{\Theta}^i$. Ce chapitre valide donc la fermeture de l'échelle mésoscopique. Par l'intermédiaire de configurations variées, l'étude se veut représentative des écoulements diphasiques auxquels le modèle ISS sera appliqué. Une certaine universalité de la modélisation a pu être observée en dégageant des tendances générales pour l'évolution du coefficient de proportionnalité a. Seule la fermeture de la condition de saturation nécessiterait une investigation plus poussée pour comprendre les variations observées entre les différentes configurations. Bien que ces résultats requièrent de plus amples investigations, ils sont très prometteurs.

Ce système pourrait être résolu directement par des méthodes numériques appropriées mais, pour des raisons numériques, nous souhaitons re-raidir l'interface. Pour transformer cette formulation en un problème discontinu équivalent, nous allons appliquer la méthode des développements asymptotiques raccordés au chapitre 4 pour déterminer les quantités en excès issues de la modélisation sous-maille qui doivent être prises en considération à l'échelle macroscopique sous la forme de relations de saut (*cf.* 2e étape, Fig. 5).

L'information fournie par les tests *a priori* est limitée mais nous ne disposons pas d'autre moyen pour accéder à la solution du problème mésoscopique. En effet, l'étape suivante est analytique. Une fois le modèle macroscopique établi, des tests *a posteriori* permettront d'évaluer simultanément les deux étapes de modélisation représentées sur la figure 5.

3.A Annexes

Sur les figures de gauche, on considère une taille de filtre particulière ($\epsilon_c \approx 0.15$) correspondant à $6-7$ mailles/diamètre permettant de représenter les résolutions envisagées pour les applications du modèle ISS. L'évolution temporelle de la norme $\mathbb{L}^\infty$ du terme $\tau^0 = \overline{a\,\phi}$, du terme sous-maille τ et du modèle $\tau^m = \tau^{ev}$ est donnée sur l'axe de gauche. Elle est adimensionnalisée par la valeur moyenne de τ^0. La pente a de la régression $\tau = a\tau^m$ et le coefficient de corrélation sont donnés sur l'axe de droite.

Les figures de droite représentent la moyenne temporelle du terme sous-maille τ et du modèle $\tau^m = \tau^{ev}$ en fonction de la taille du filtre sur l'axe de gauche. L'ordonnée de droite permet de représenter l'évolution de la pente a et du coefficient de régression r.

À la fin de chaque section, deux figures présentées suivant le même principe que précédemment donnent les contributions des termes sous-maille aux équations de bilan. Un dernier couple de figures caractérise le comportement de la corrélation entre le taux de changement de phase mésoscopique $\overline{m}^s$ et la valeur interfaciale de $\overline{\Theta}$. Une loi de comportement d'ordre 2 est déterminée ($\epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2$). Elle est comparée à la loi du premier ordre ϵC_1 et aux comportements théoriques attendus pour un filtre boîte, discret ou continu. Un bon accord est obtenu pour l'ascension d'une bulle unique (2D ou 3D).

Pour rester général, tous les résultats sont représentés, y compris un modèle de similarité d'échelles pour le terme de diffusion alors que celui-ci est négligé. Ce modèle sous-estime fortement le terme sous-maille associé car il est construit sur le produit de la viscosité et du gradient de vitesse qui sont tous deux discontinus à l'interface. Pour les tenseurs, les trois invariants sont représentés alors que l'un d'eux est très faible. Dans ce cas, la mesure est imprécise et ne doit pas être analysée (*e. g.*, $\det(\tau_{\text{conv}})$ et $\operatorname{tr}(\tau_{\text{diff}})$).

3.A.1 Tourbillons contra-rotatifs

Cette configuration bidimensionnelle permet d'observer les comportements des termes sous-maille à une interface fortement déformée. Les fluctuations temporelles des termes τ^0 sont importantes ; elles sont beaucoup plus marquées que celles des termes sous-maille τ et de leur modèle τ^{ev}. Puisque la configuration est bidimensionnelle, des maillages très fins peuvent être employés ; cela permet d'observer l'influence de la sous-résolution pour une large gamme du paramètre ϵ. L'amplitude des termes sous-maille croît linéairement avec la taille du maillage. Sur cette configuration, plusieurs maillages de SND peuvent conduire à une même valeur de ϵ car il est possible de conduire des simulations très raffinées. Cela permet de constater que le maillage de SND (utilisé pour évaluer les champs microscopiques) n'a qu'une faible influence sur l'amplitude des termes sous-maille. Cette information est importante car elle ne peut pas être vérifiée sur les simulations 3D (où un maillage beaucoup plus fin que la SND est trop coûteux).

Le déterminant du tenseur sous-maille de convection et la trace du tenseur diffusif sont négligeables. Le modèle sous-maille de diffusion n'est pas utilisé ; il n'est donné qu'à titre indicatif.

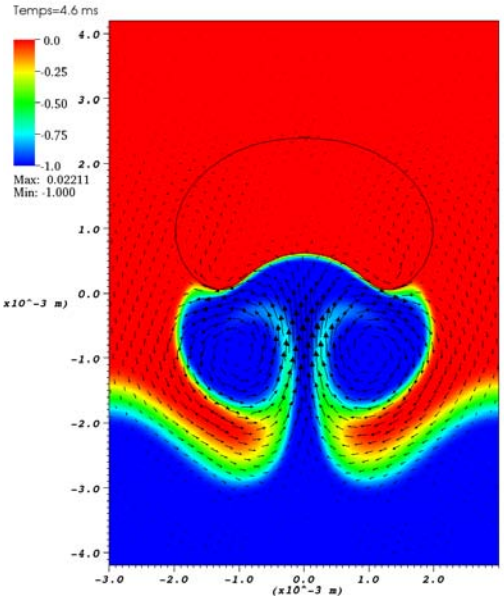
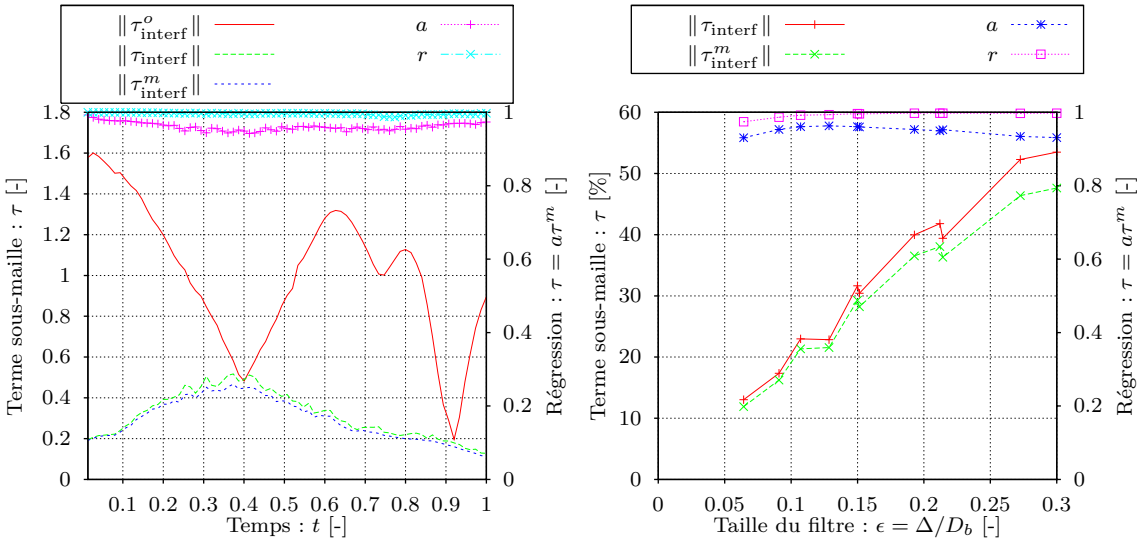


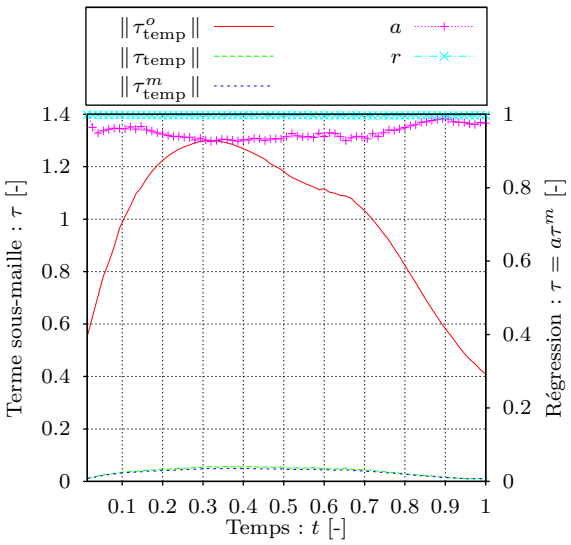
FIGURE 3.14 – Description de la configuration d'interaction de tourbillons contra-rotatifs ($N_x = 282$).



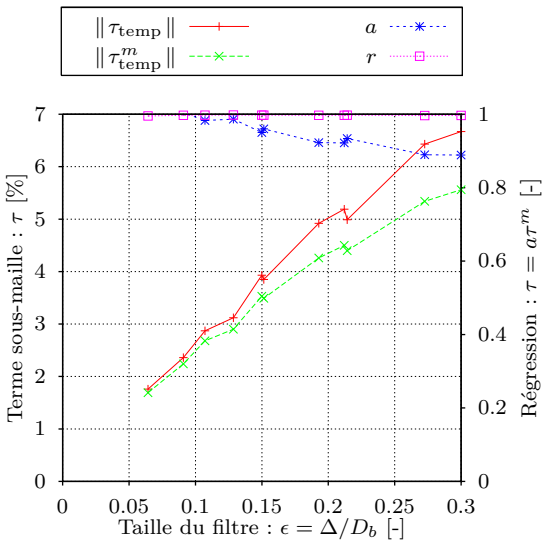
(a) Évolution temporelle de τ_{interf} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{interf}

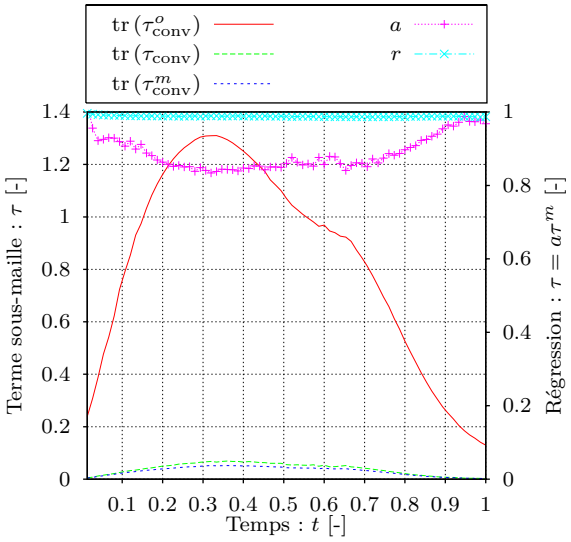
FIGURE 3.15 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de transport de l'interface.



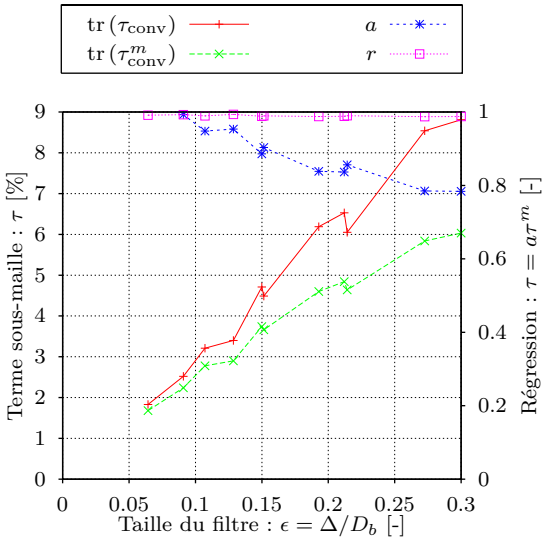
(a) Évolution temporelle de τ_{temp} ($\epsilon_c = 0.14$)



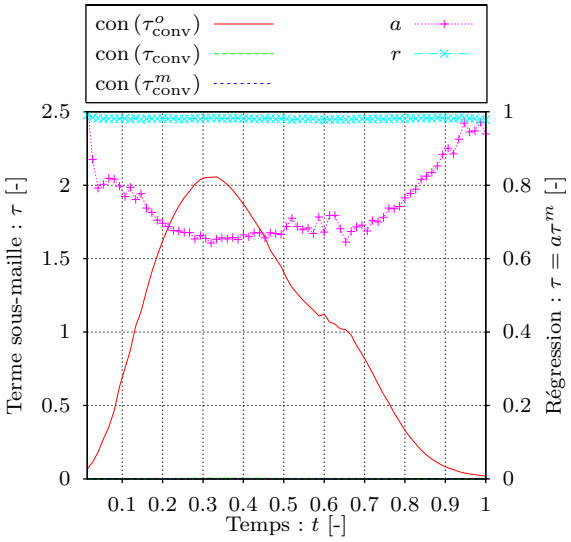
(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{temp}



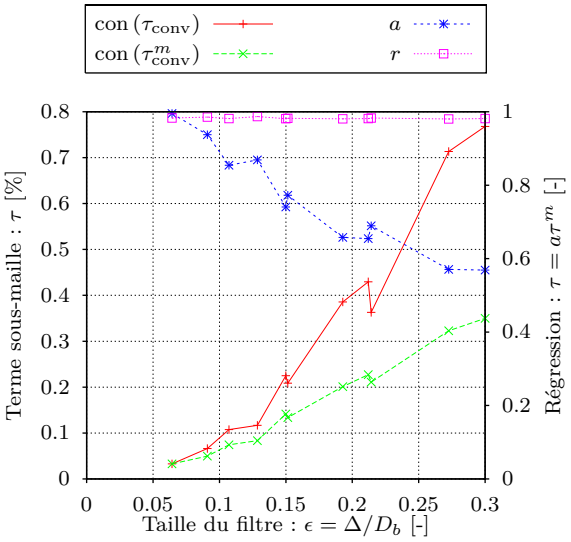
(c) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



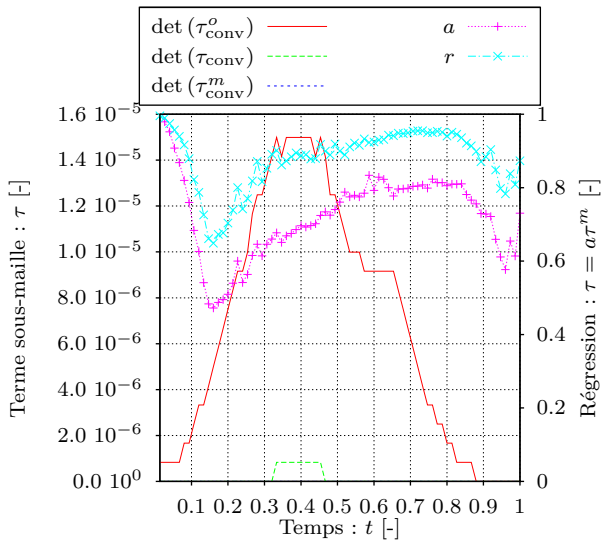
(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



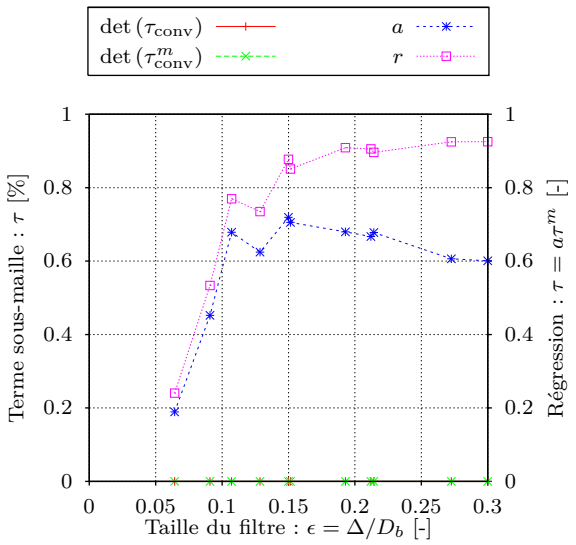
(e) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



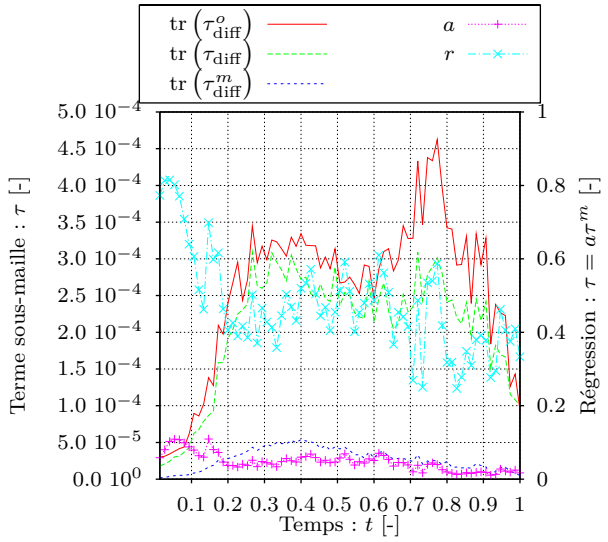
(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



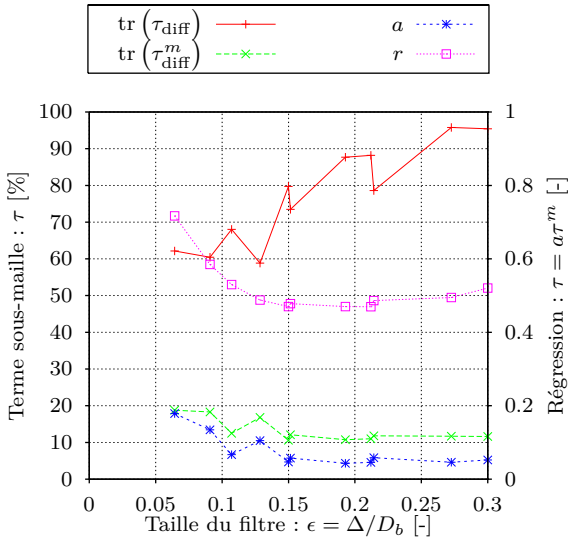
(h) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



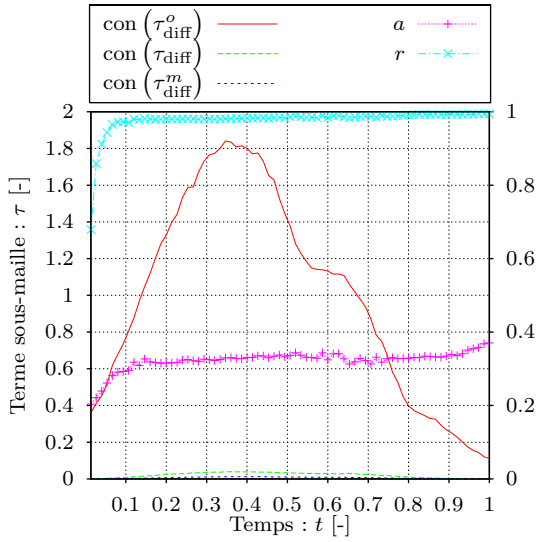
(i) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



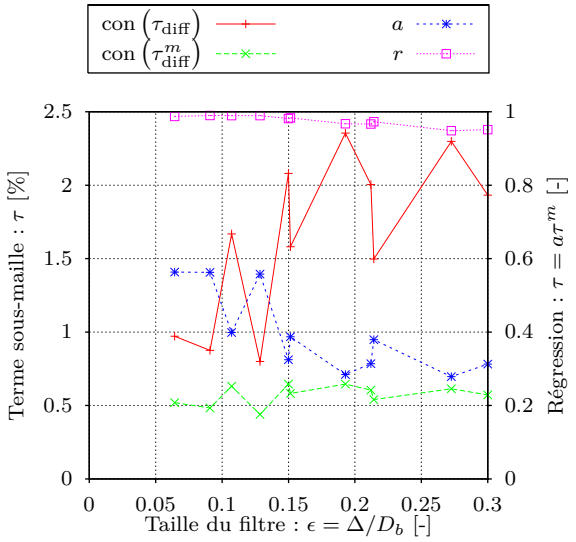
(j) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



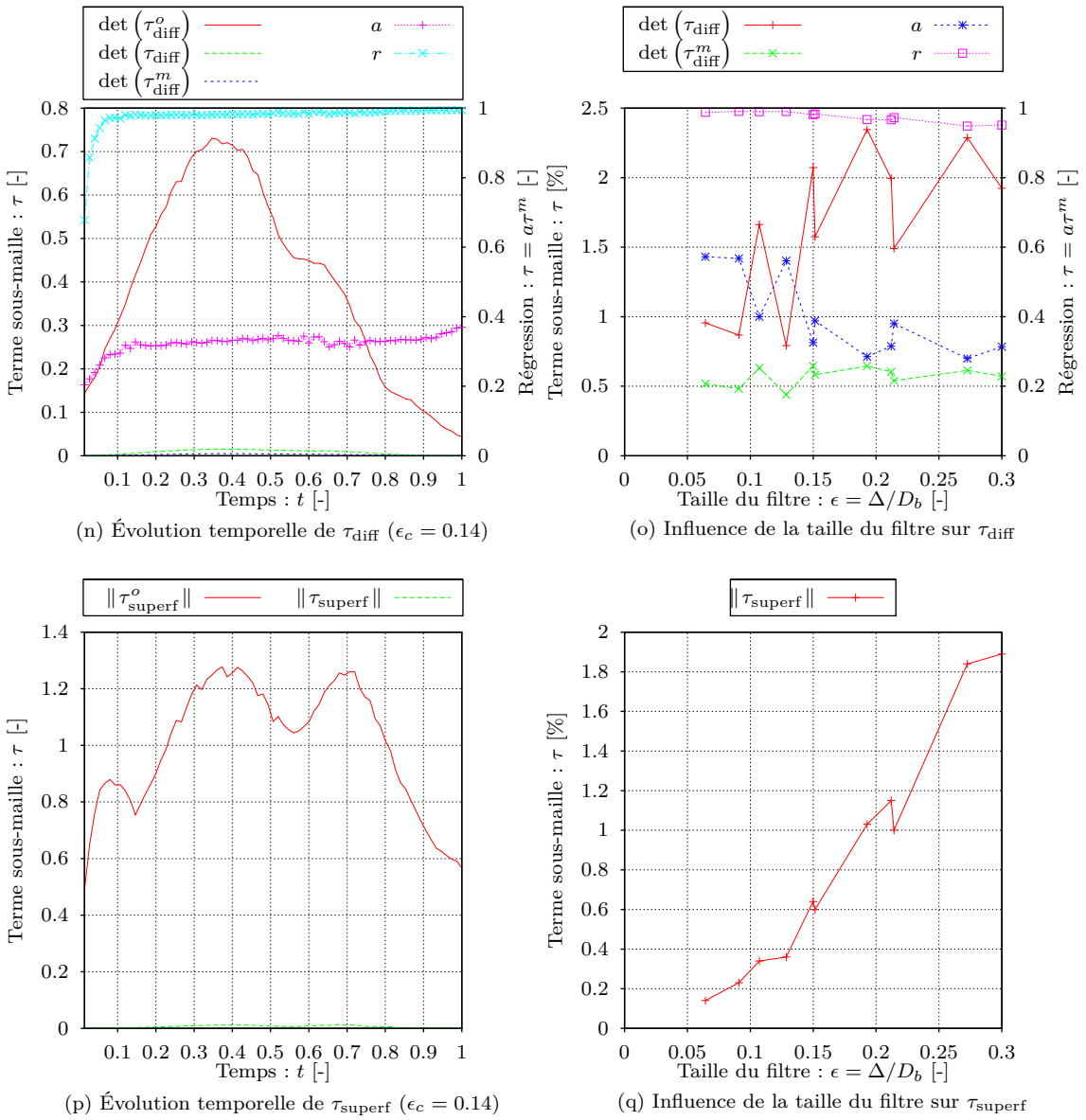
(k) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



(l) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



(m) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



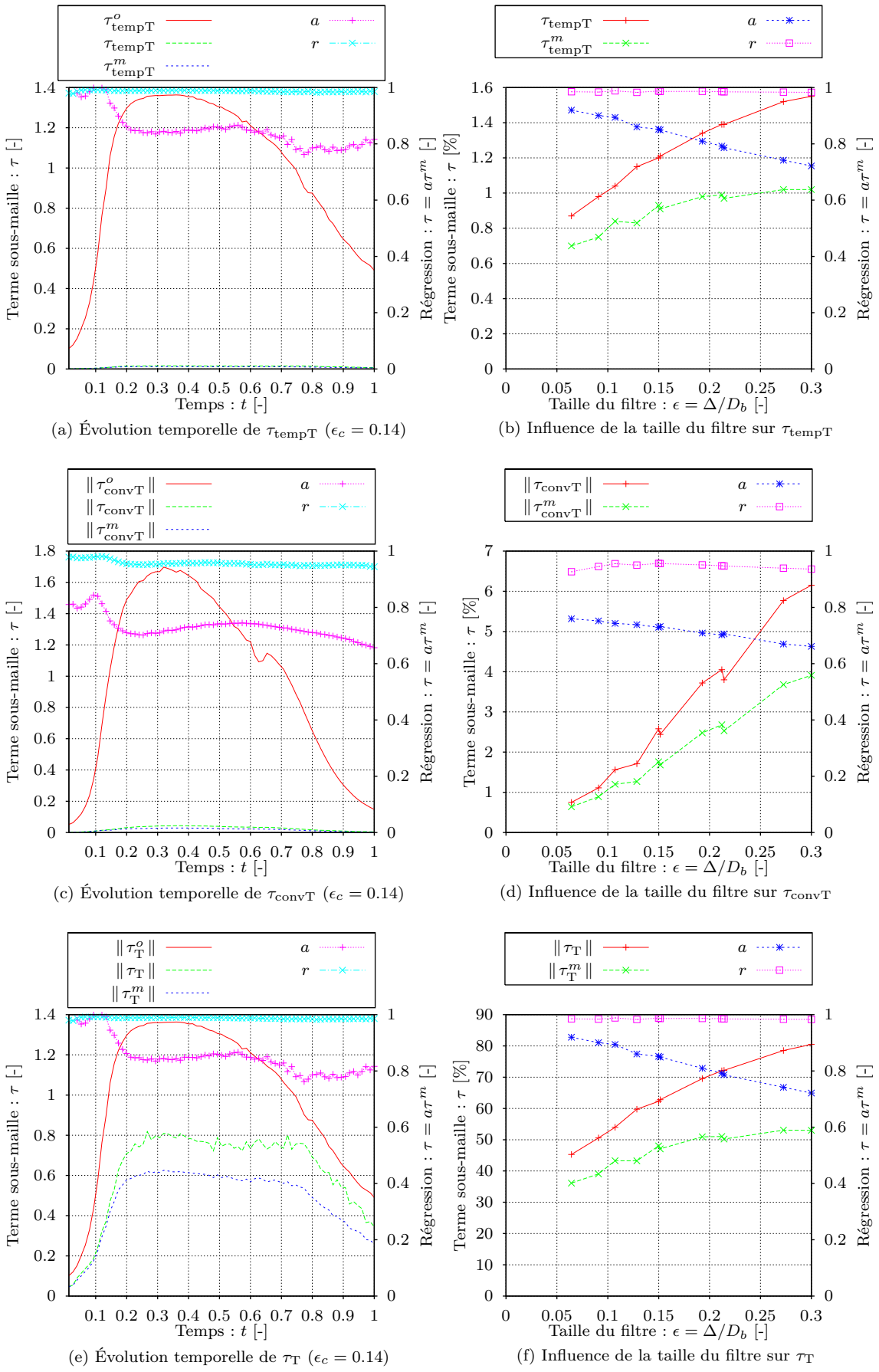
(n) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)

(o) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}

(p) Évolution temporelle de τ_{superf} ($\epsilon_c = 0.14$)

(q) Influence de la taille du filtre sur τ_{superf}

FIGURE 3.16 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de quantité de mouvement.



(a) Évolution temporelle de τ_{tempT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{tempT}

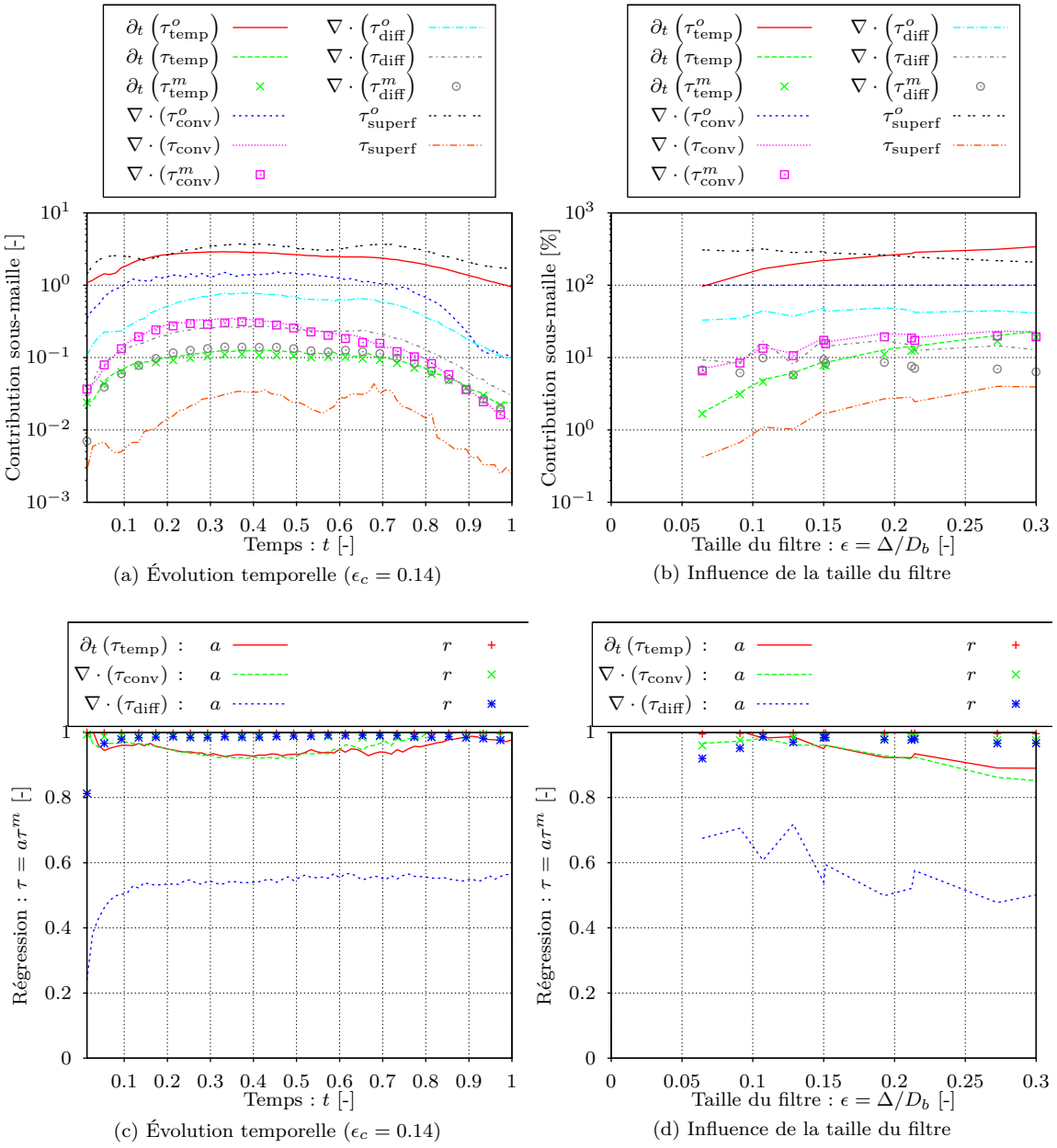
(c) Évolution temporelle de τ_{convT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{convT}

(e) Évolution temporelle de τ_{T} ($\epsilon_c = 0.14$)

(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{T}

FIGURE 3.17 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation d'énergie.



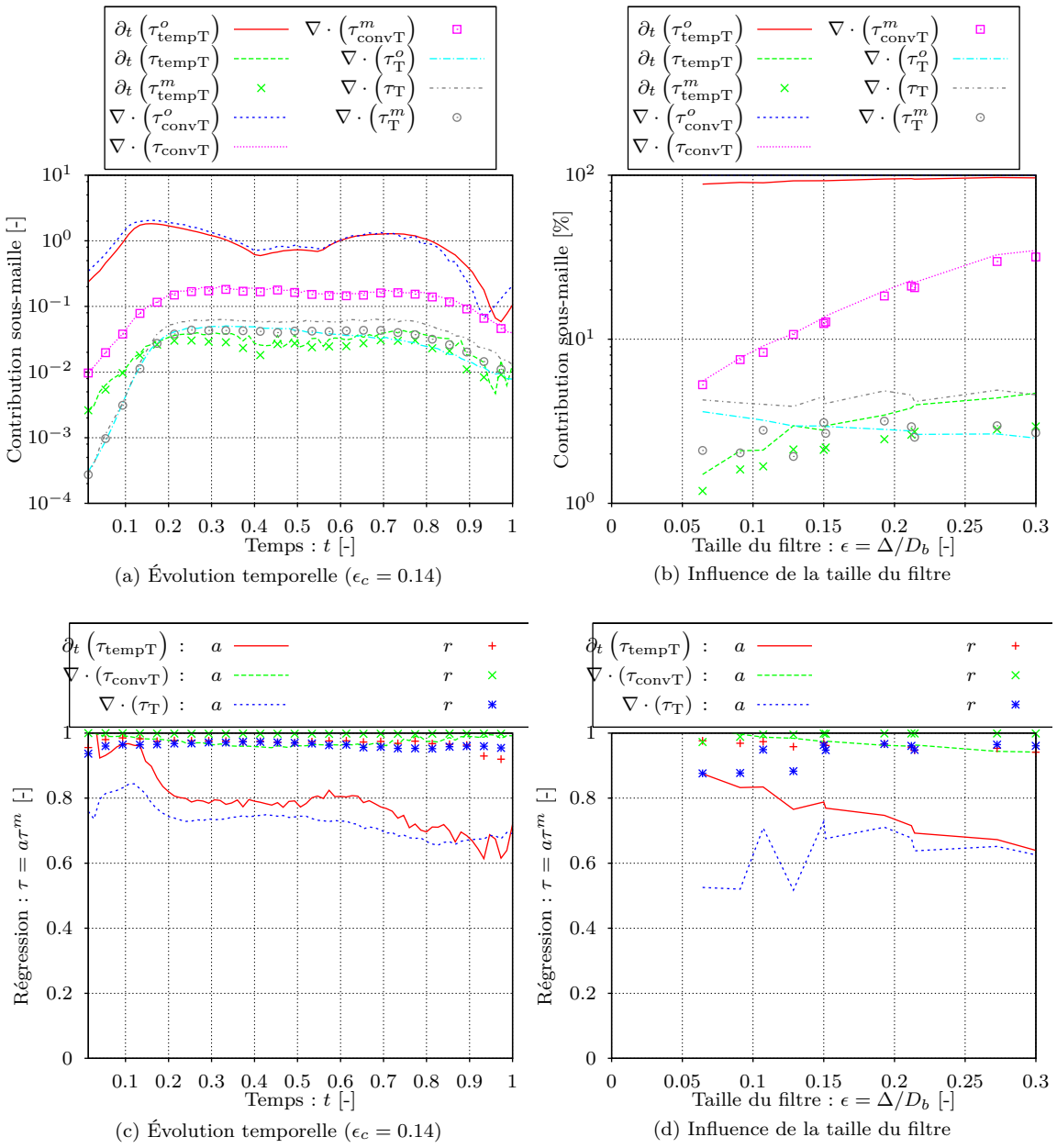
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.18 – Contributions sous-maille à l'équation de transport de quantité de mouvement.



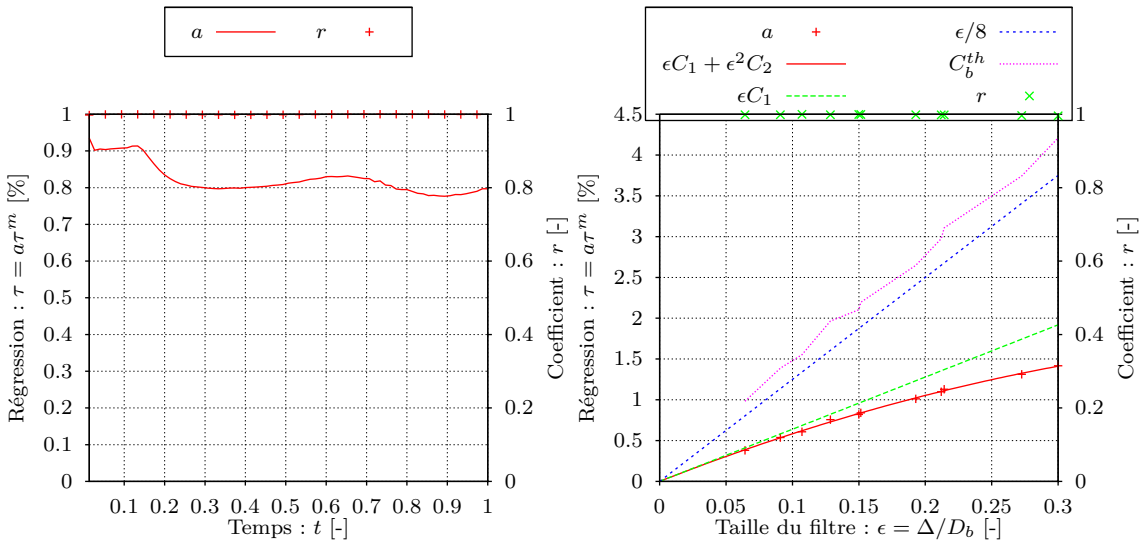
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.19 – Contributions sous-maille à l'équation d'énergie.



(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.20 – Corrélation entre la température interfaciale et le taux de changement de phase.

3.A.2 Bulle unique indéformable (configuration 2D)

Sur cette configuration académique, l'interface n'est pas déformée car la tension de surface est élevée, ce qui se traduit par la prédominance du terme τ^0_{superf} dans le bilan de quantité de mouvement (Fig. 3.25). L'utilisation d'un repère en translation uniforme explique le minimum observé sur la figure 3.22a pour le terme τ^0_{interf} ; le temps $t = 0.4\,\text{s}$ correspond à l'inversion de la vitesse relative de l'inclusion. Le terme sous-maille τ_{interf} et son modèle augmentent au cours de la simulation ; ils ne dépendent pas du repère d'observation mais ils sont uniquement influencés par l'écoulement qui se développe en proche interface lorsque la bulle accélère. Sur la figure 3.22b, le coefficient de corrélation a ne semble pas tendre vers l'unité lorsque le paramètre ϵ diminue ; ce comportement particulier nous semble anormal mais nous n'avons pas d'explication à proposer.

Hormis le début de la simulation où les couches limites s'établissent, les termes sous-maille évoluent faiblement au cours du temps dans cette configuration ; un régime quasi établi est obtenu très rapidement.

Enfin, l'évolution de la pente de la corrélation entre la température interfaciale et le taux de changement de phase en fonction du paramètre ϵ est particulièrement proche des valeurs théoriques obtenues à la section 2.3 (Fig. 3.27).

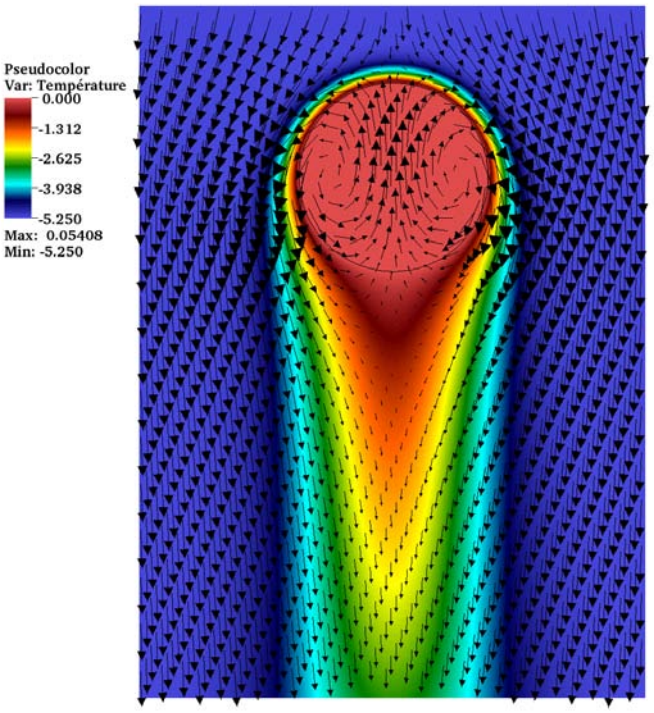
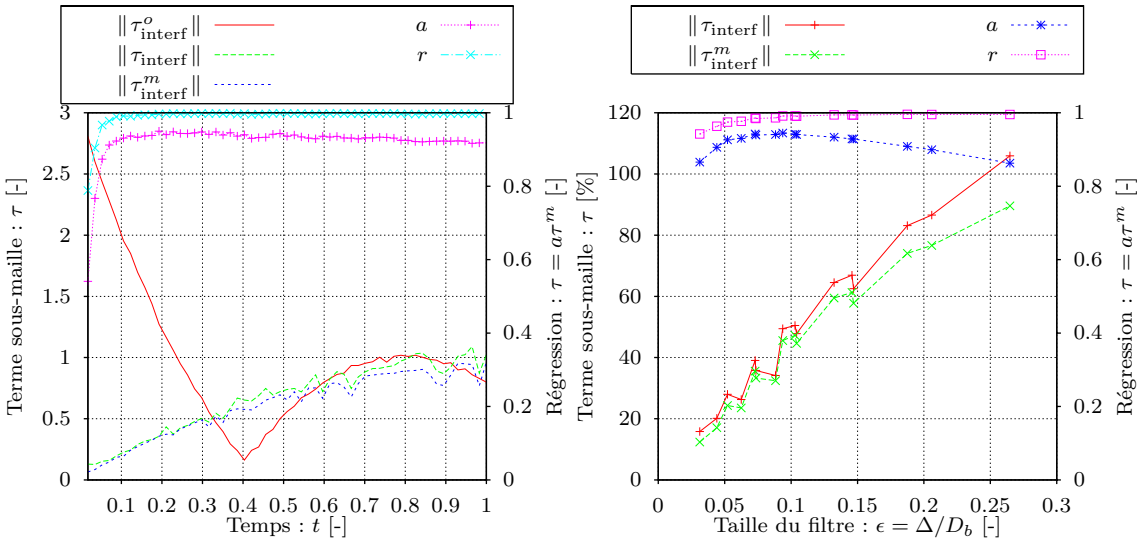


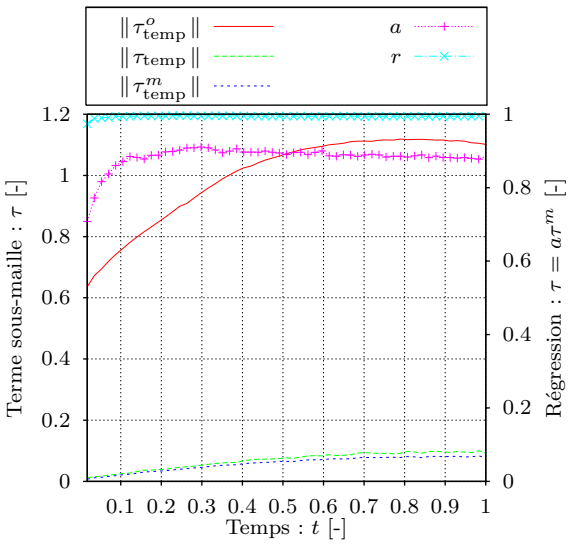
FIGURE 3.21 – Illustration de l'ascension d'une bulle sphérique (configuration 2D) dans du liquide sous-refroidi– Champs de température et de vitesse.



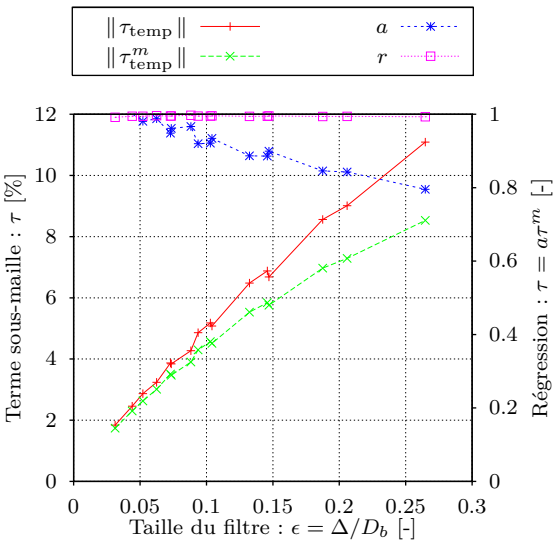
(a) Évolution temporelle de τ_{interf} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{interf}

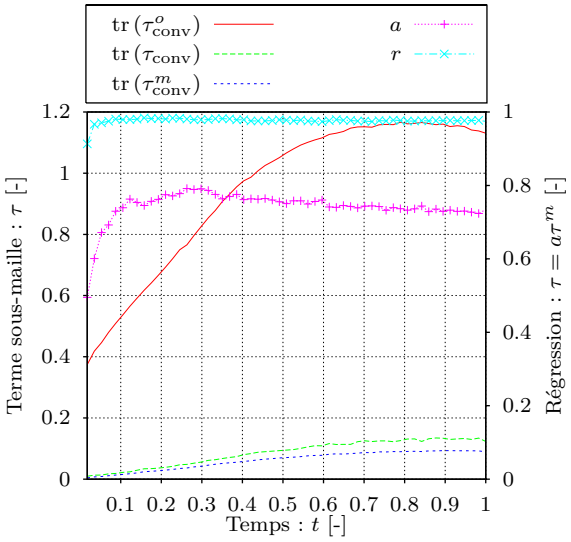
FIGURE 3.22 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de transport de l'interface.



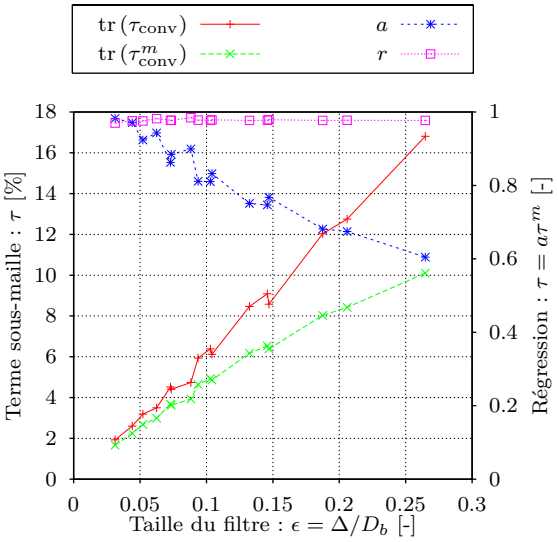
(a) Évolution temporelle de τ_{temp} ($\epsilon_c = 0.14$)



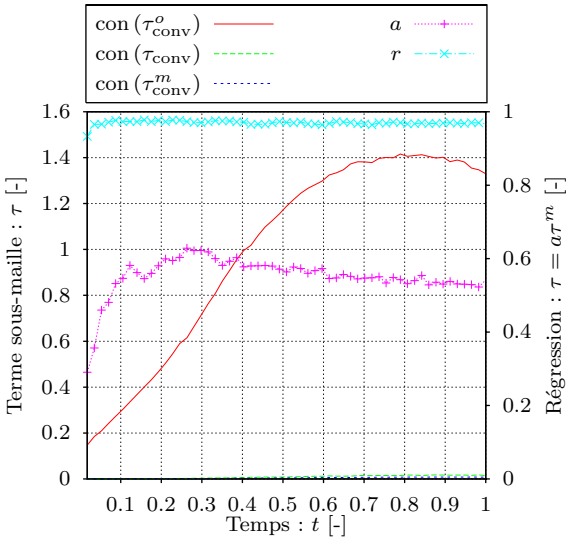
(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{temp}



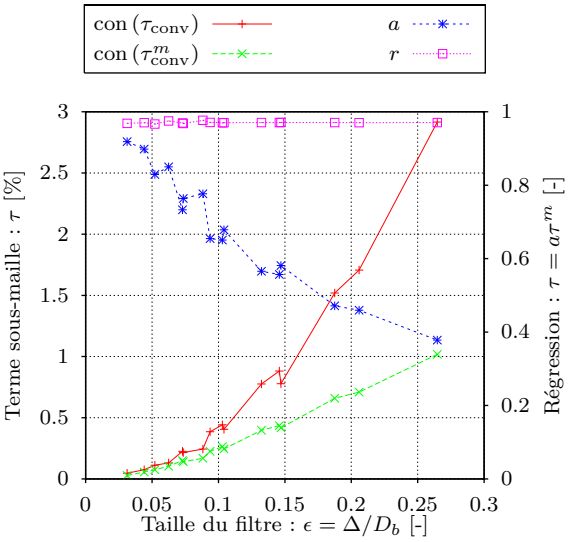
(c) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



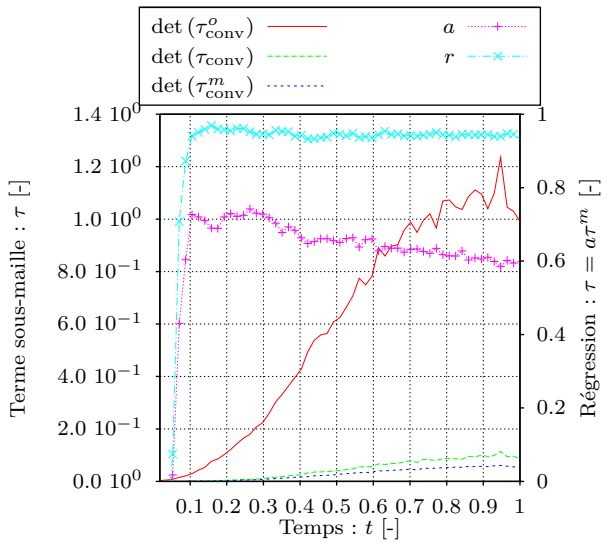
(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



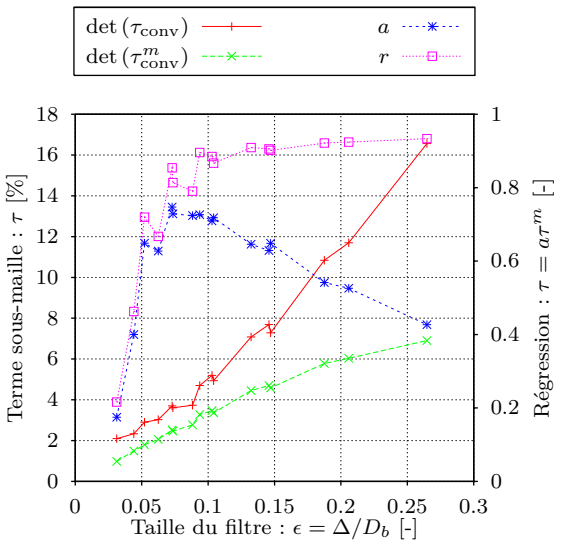
(e) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



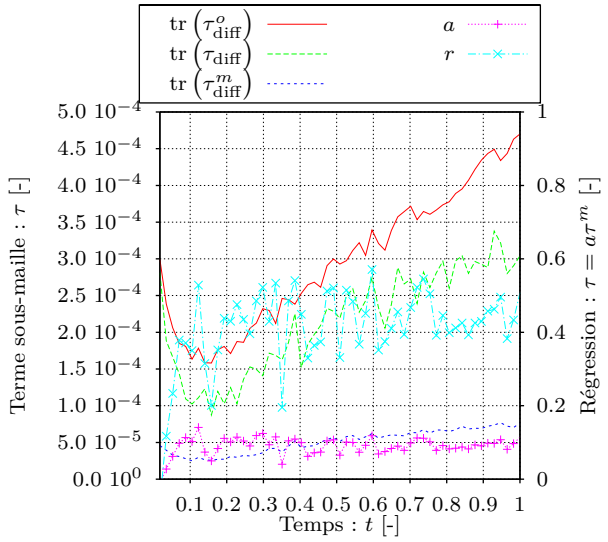
(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



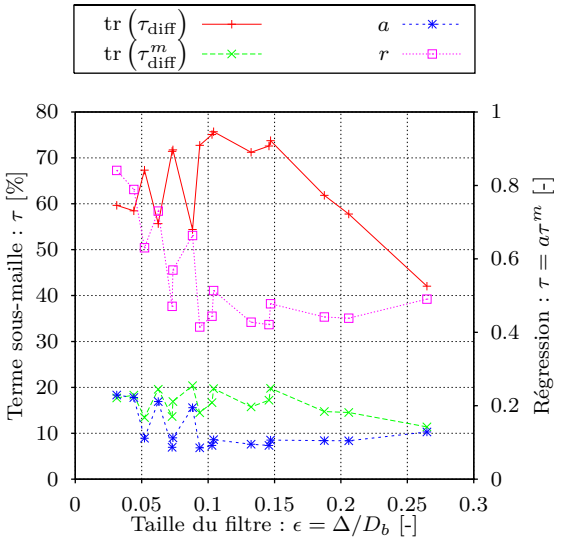
(h) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



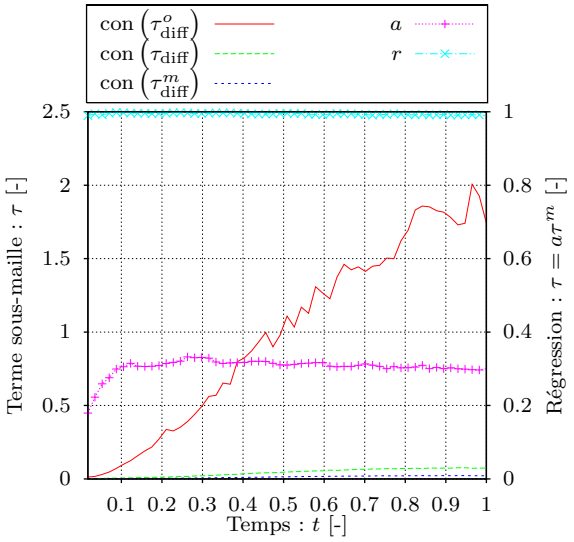
(i) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



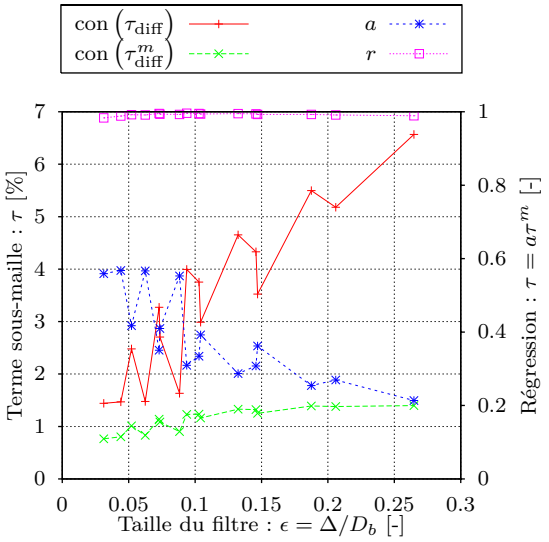
(j) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



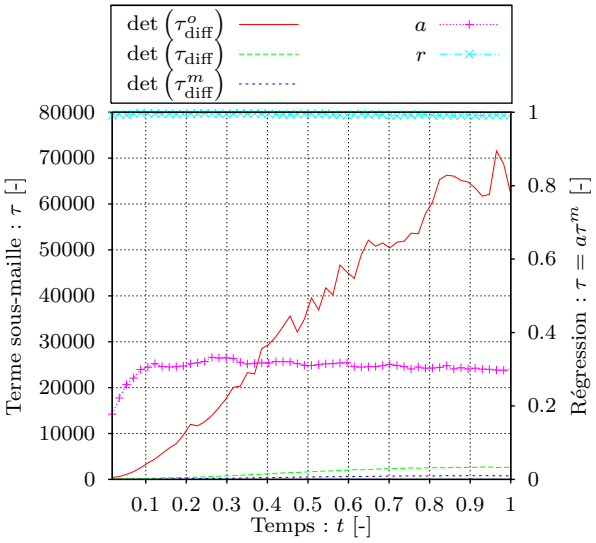
(k) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



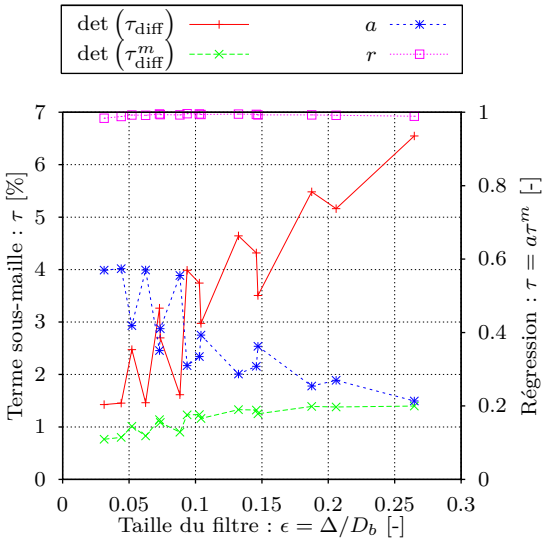
(l) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



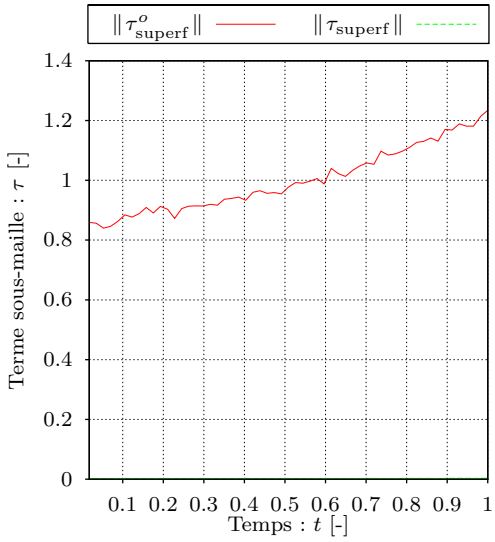
(m) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



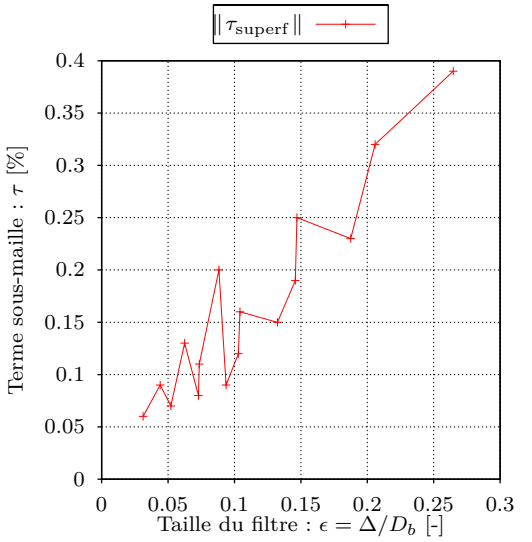
(n) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



(o) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}

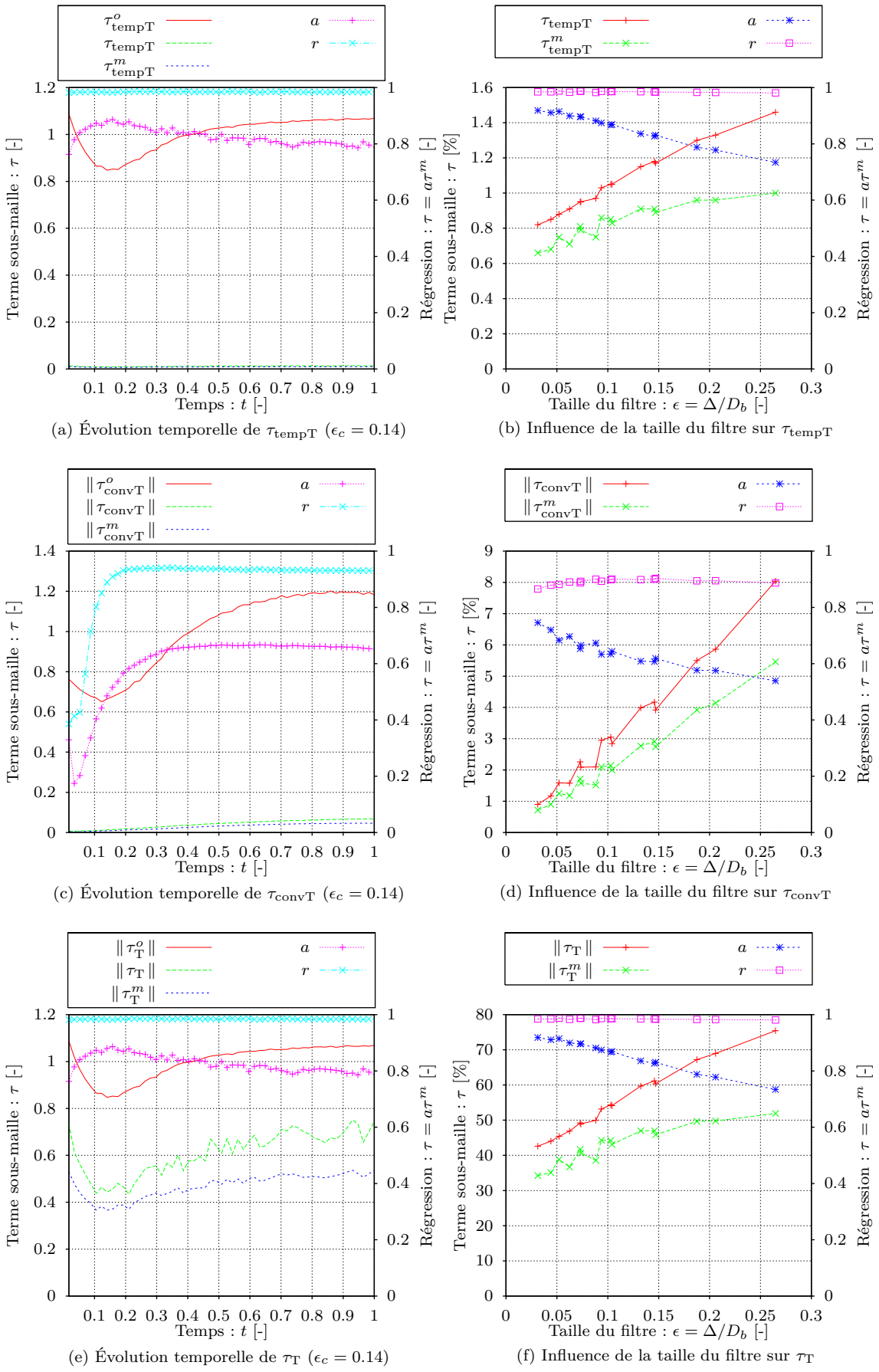


(p) Évolution temporelle de τ_{superf} ($\epsilon_c = 0.14$)



(q) Influence de la taille du filtre sur τ_{superf}

FIGURE 3.23 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de quantité de mouvement.



(a) Évolution temporelle de τ_{tempT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{tempT}

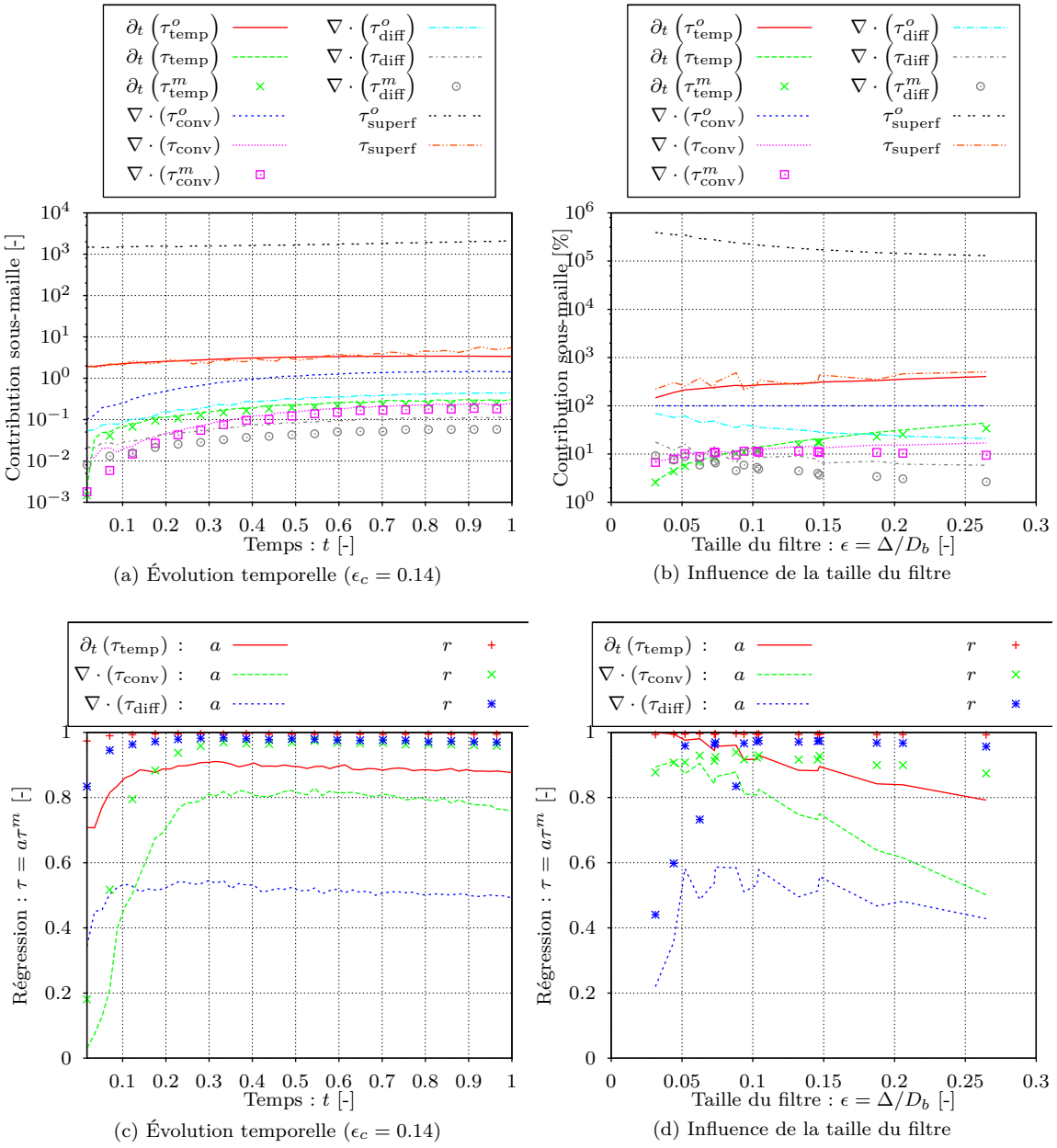
(c) Évolution temporelle de τ_{convT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{convT}

(e) Évolution temporelle de τ_{T} ($\epsilon_c = 0.14$)

(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{T}

FIGURE 3.24 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation d'énergie.



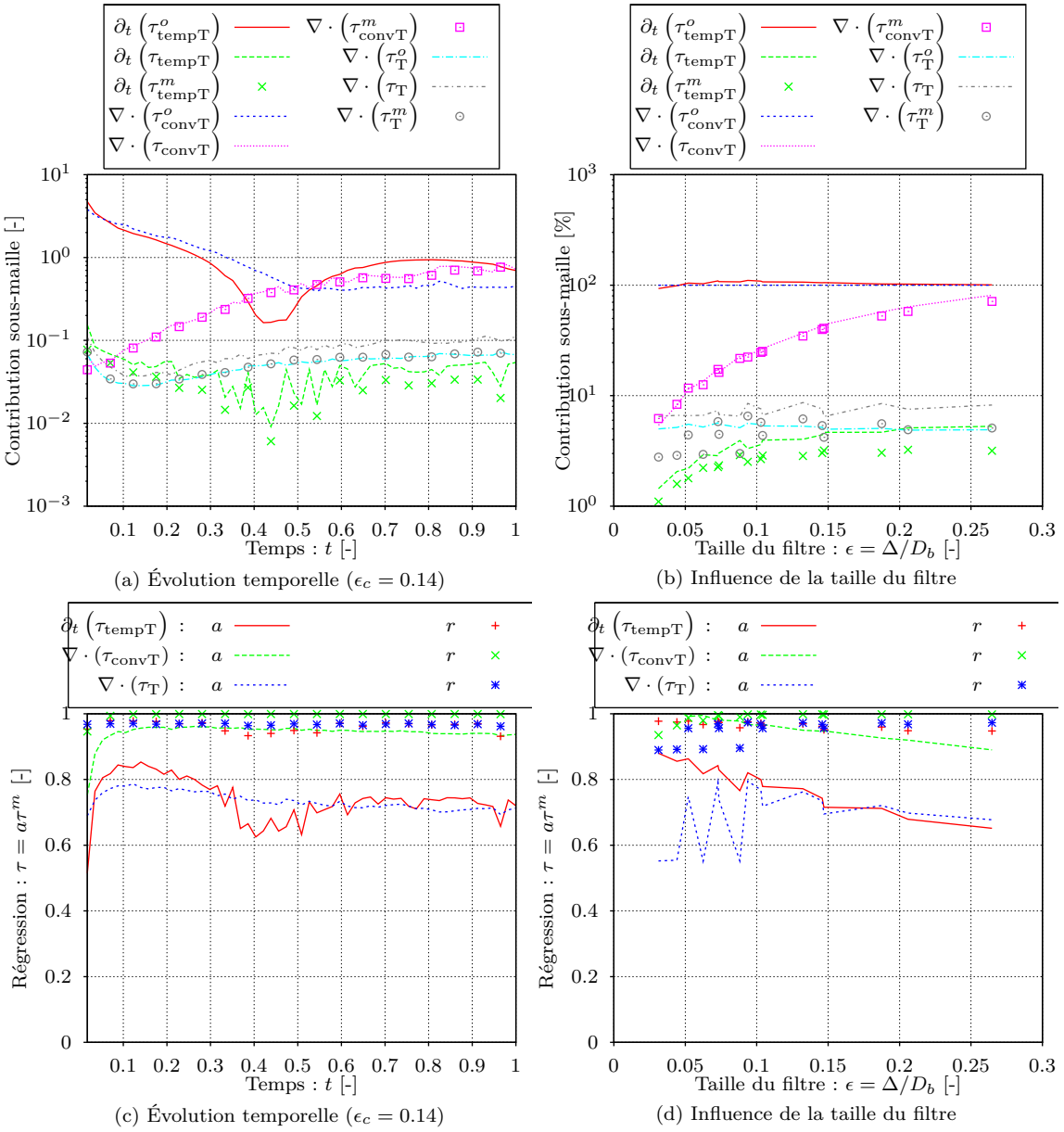
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.25 – Contributions sous-maille à l'équation de transport de quantité de mouvement.



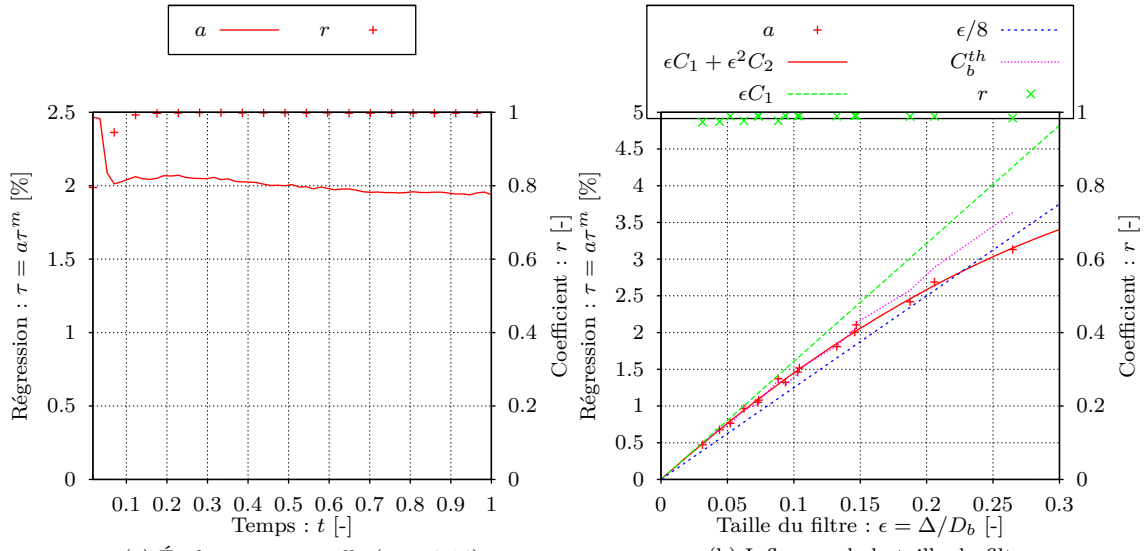
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.26 – Contributions sous-maille à l'équation d'énergie.



(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.27 – Corrélation entre la température interfaciale et le taux de changement de phase.

3.A.3 Bulle unique ellipsoïdale (configuration 3D)

Cette simulation 3D confirme les tendances observées à la section précédente bien que le coût de calcul plus élevé ne permette pas d'atteindre des valeurs de ϵ aussi faibles. Même si la tension superficielle a été réduite (par rapport à la configuration bidimensionnelle) dans cette simulation pour que l'inclusion devienne légèrement ellipsoïdale, le terme τ^0_{superf} reste prédominant dans le bilan de quantité de mouvement (Fig. 3.32).

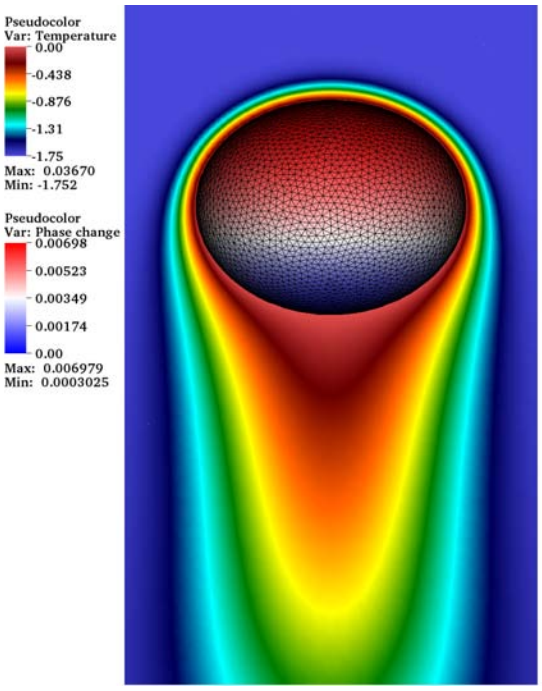
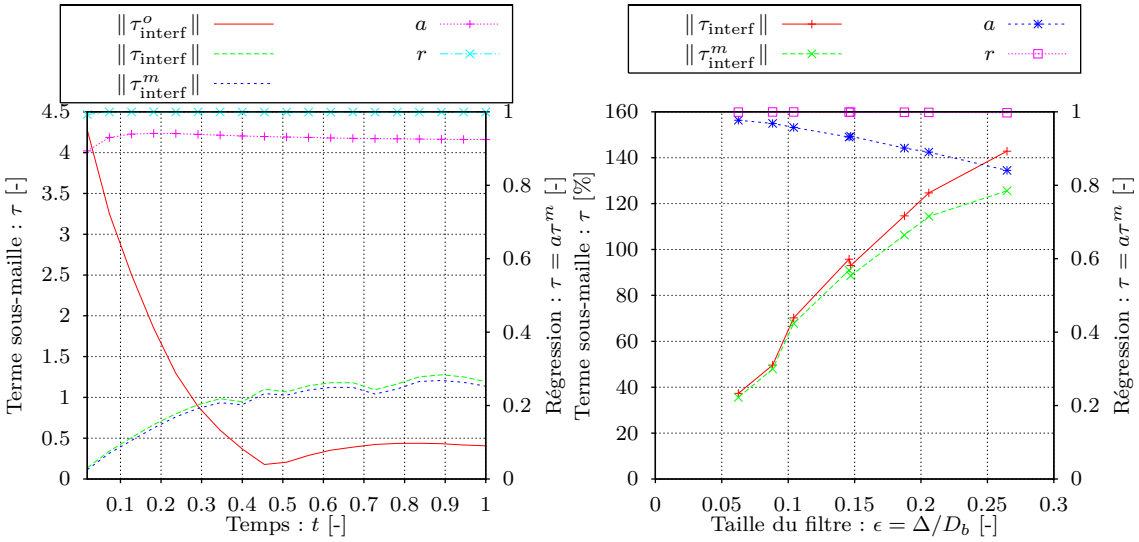


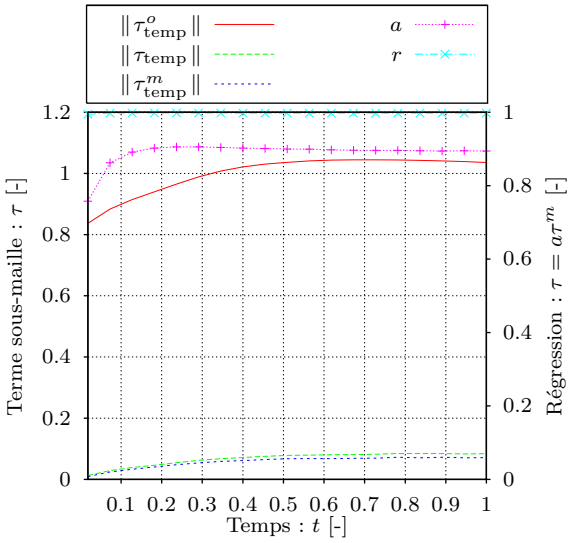
FIGURE 3.28 – Écoulement laminaire autour d'une bulle ellipsoïdale (configuration 3D) – Coupe médiane du champ de température, distribution du taux de changement de phase à l'interface et maillage lagrangien.



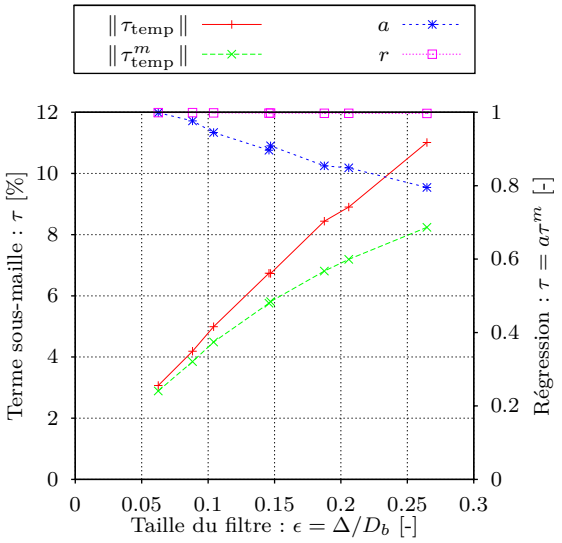
(a) Évolution temporelle de τ_{interf} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{interf}

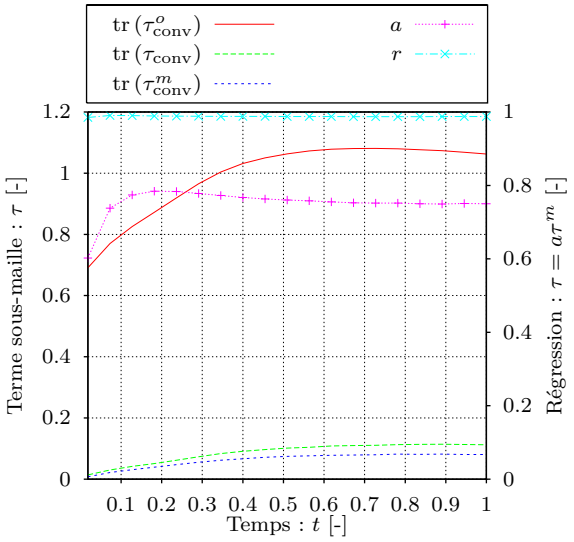
FIGURE 3.29 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de transport de l'interface.



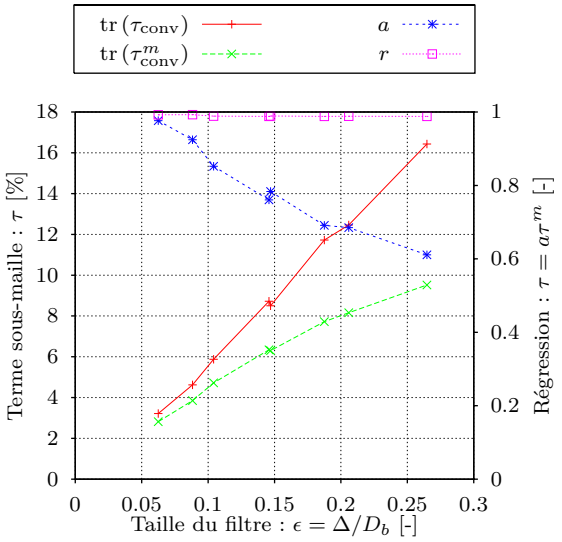
(a) Évolution temporelle de τ_{temp} ($\epsilon_c = 0.14$)



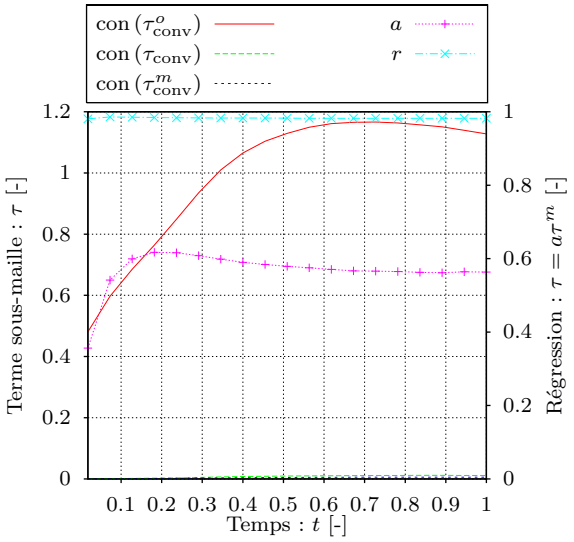
(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{temp}



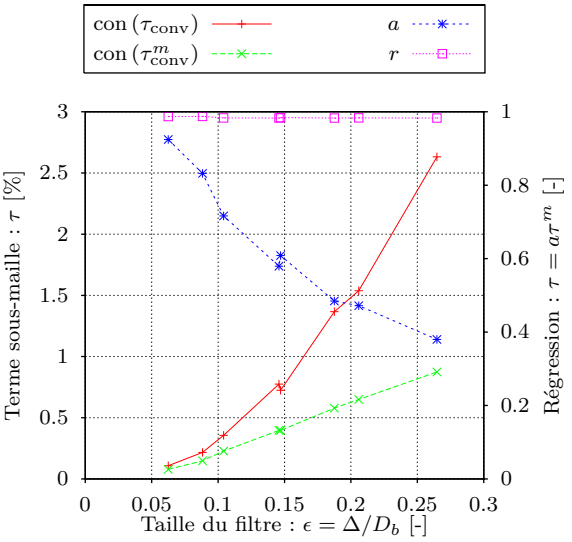
(c) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



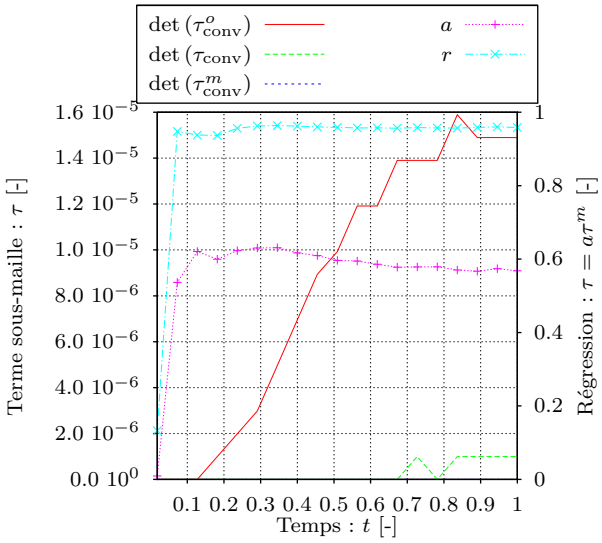
(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



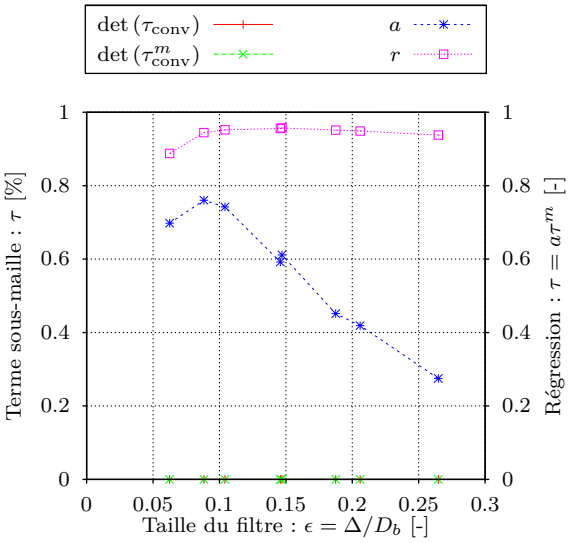
(e) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



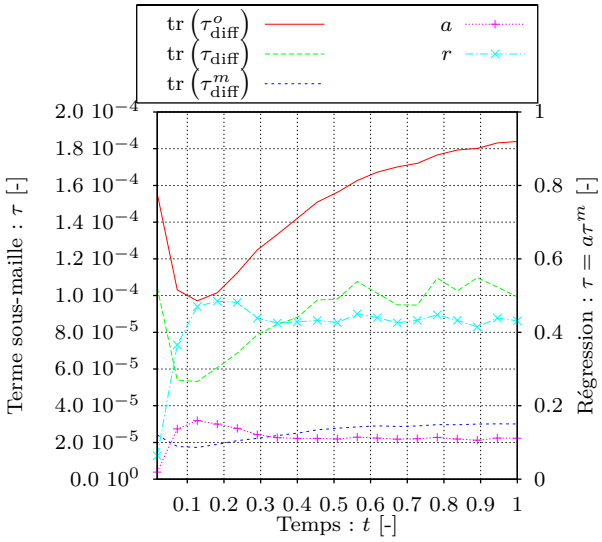
(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



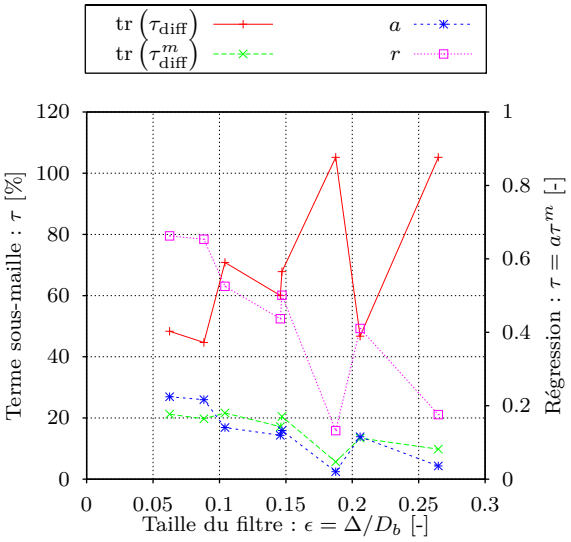
(h) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



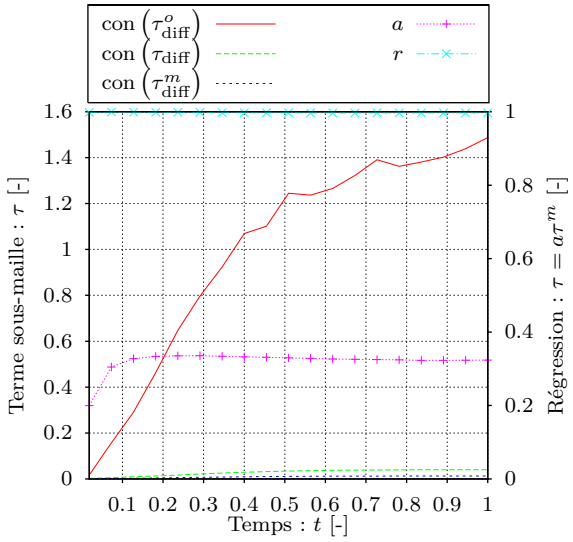
(i) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



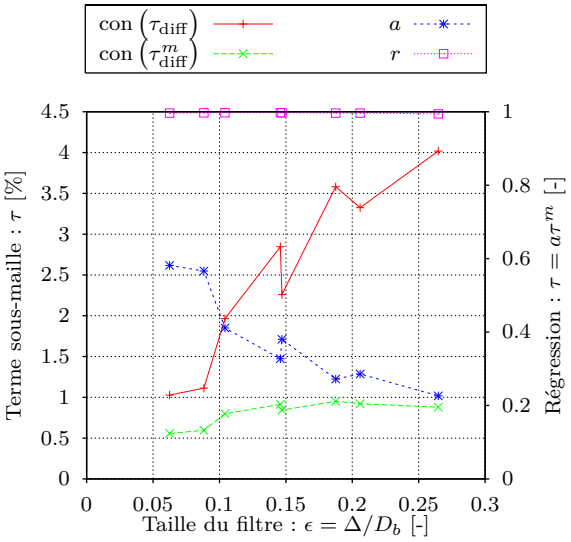
(j) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



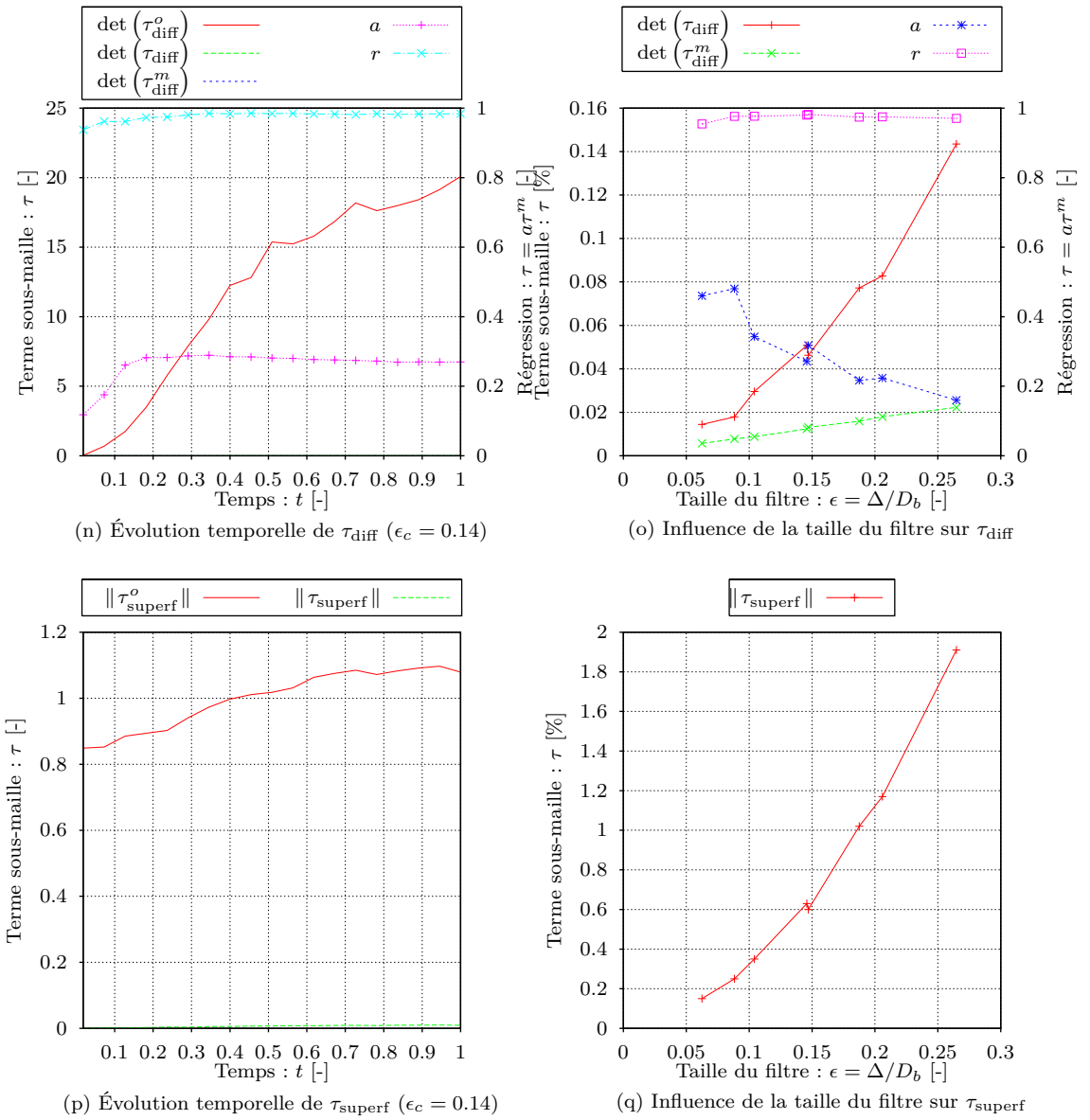
(k) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



(l) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



(m) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



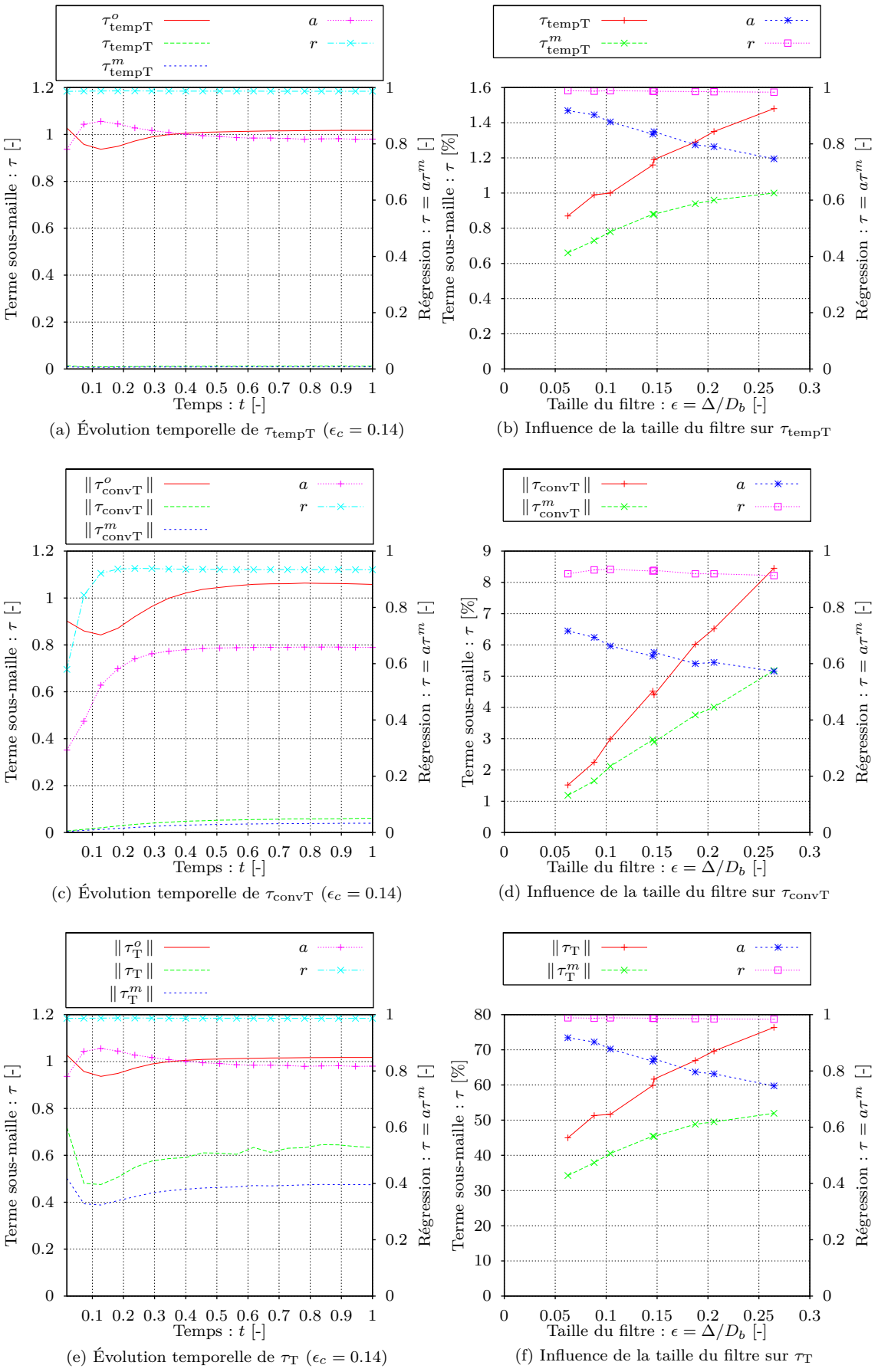
(n) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)

(o) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}

(p) Évolution temporelle de τ_{superf} ($\epsilon_c = 0.14$)

(q) Influence de la taille du filtre sur τ_{superf}

FIGURE 3.30 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de quantité de mouvement.



(a) Évolution temporelle de τ_{tempT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{tempT}

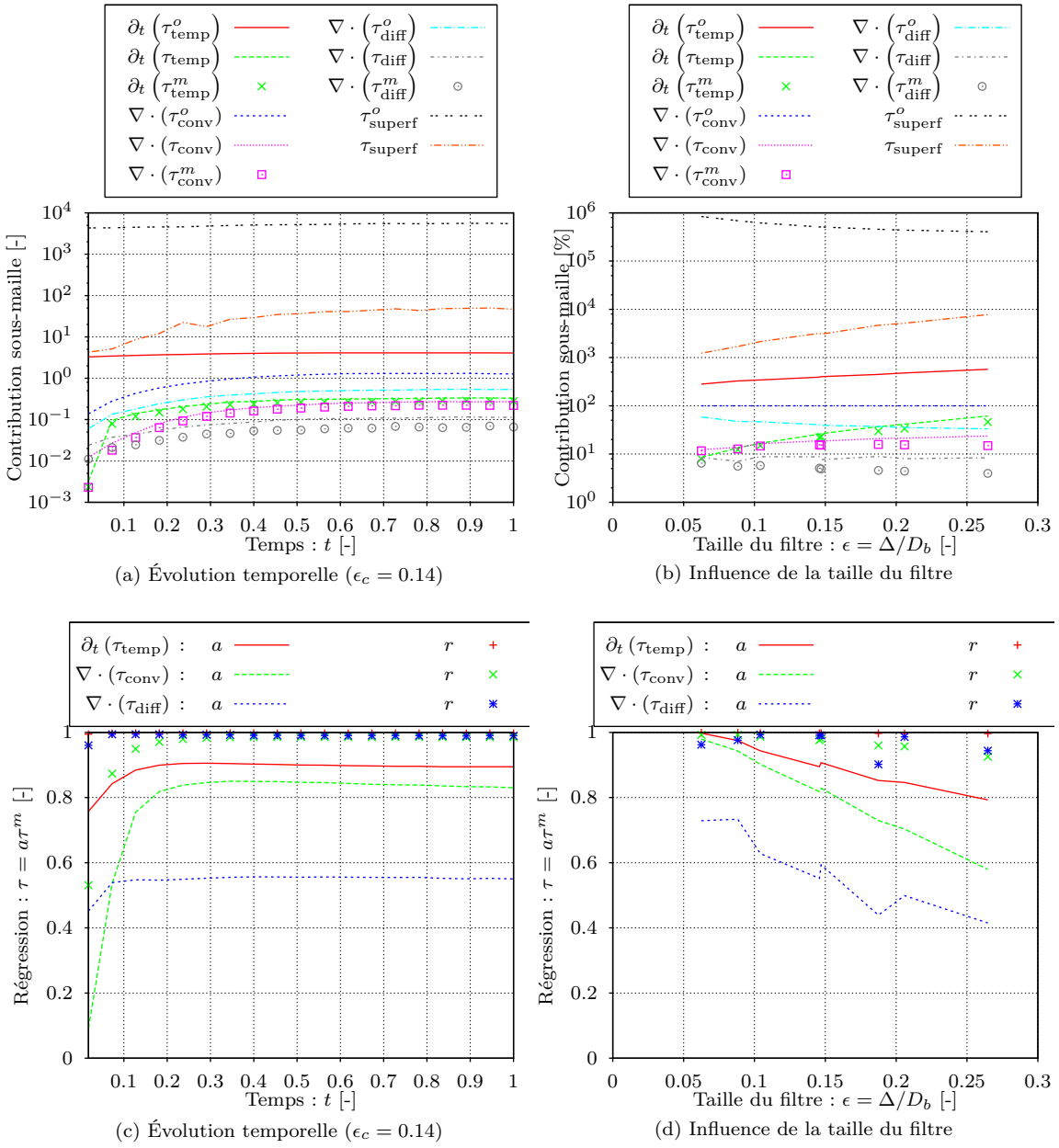
(c) Évolution temporelle de τ_{convT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{convT}

(e) Évolution temporelle de τ_{T} ($\epsilon_c = 0.14$)

(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{T}

FIGURE 3.31 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation d'énergie.



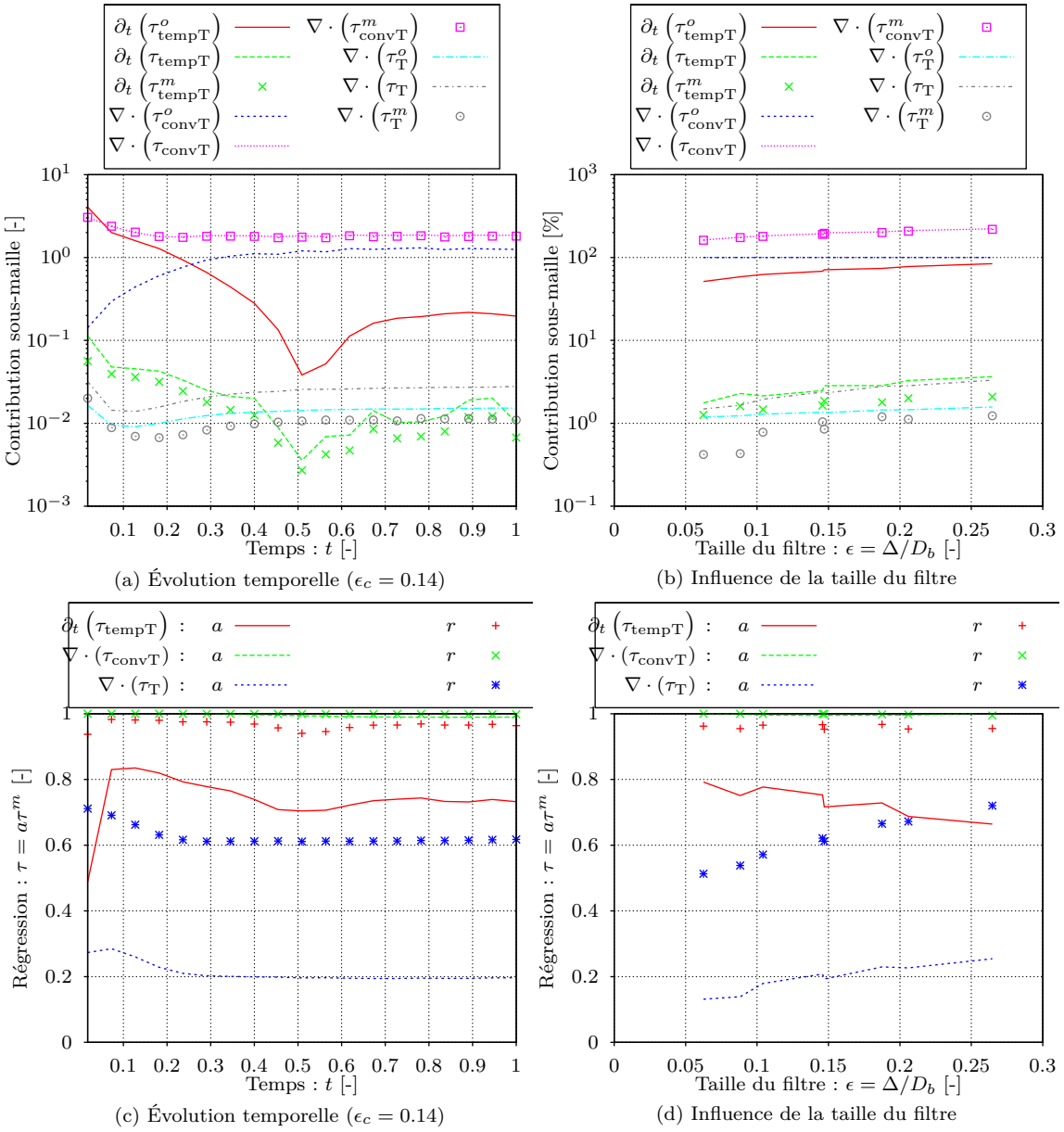
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.32 – Contributions sous-maille à l'équation de transport de quantité de mouvement.



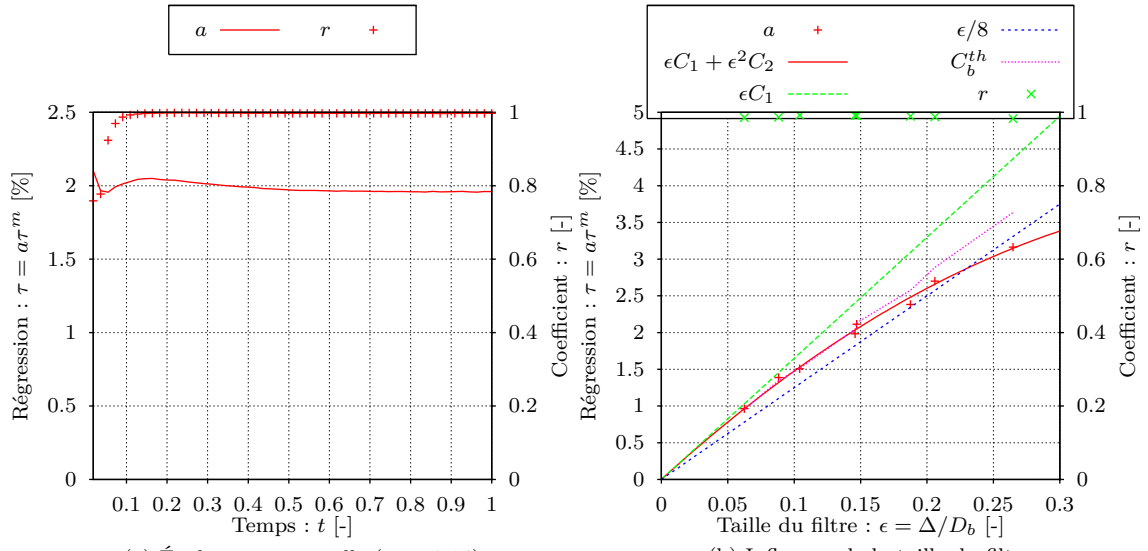
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.33 – Contributions sous-maille à l'équation d'énergie.



(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.34 – Corrélation entre la température interfaciale et le taux de changement de phase.

3.A.4 Configuration multi-bulles

Cette configuration agitée permet d'évaluer les modèles sous-maille sur un grand nombre de topologies d'interface et d'écoulement. Avec cette configuration complexe, les quelques pas de temps choisis permettent d'observer les modèles sous-maille pour des réalisations aléatoires quasiment indépendantes les unes des autres. Les fluctuations observées renseignent sur l'amplitude des variations des termes sous-maille. En général, on constate que le terme τ^0 fluctue beaucoup plus fortement que le terme sous-maille τ ou que le modèle τ^m correspondant. L'origine des deux pics de la figure 3.37p a été identifiée. Ces pics proviennent d'une mauvaise évaluation de la courbure lorsque deux interfaces sont plus proches que la taille du filtre (*i. e.,* instant précédant un rebond ou une coalescence) ; la normale calculée par l'algorithme n'est alors pas correcte et ces valeurs sont aberrantes. Le déterminant du tenseur sous-maille de convection et la trace du tenseur diffusif sont à nouveau négligeables. On rappelle que le modèle sous-maille de diffusion n'est pas utilisé.

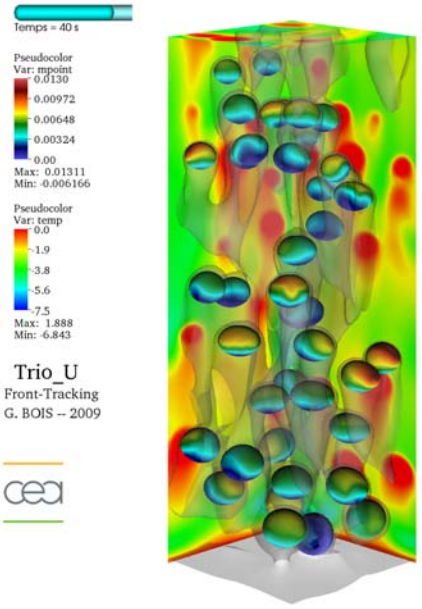
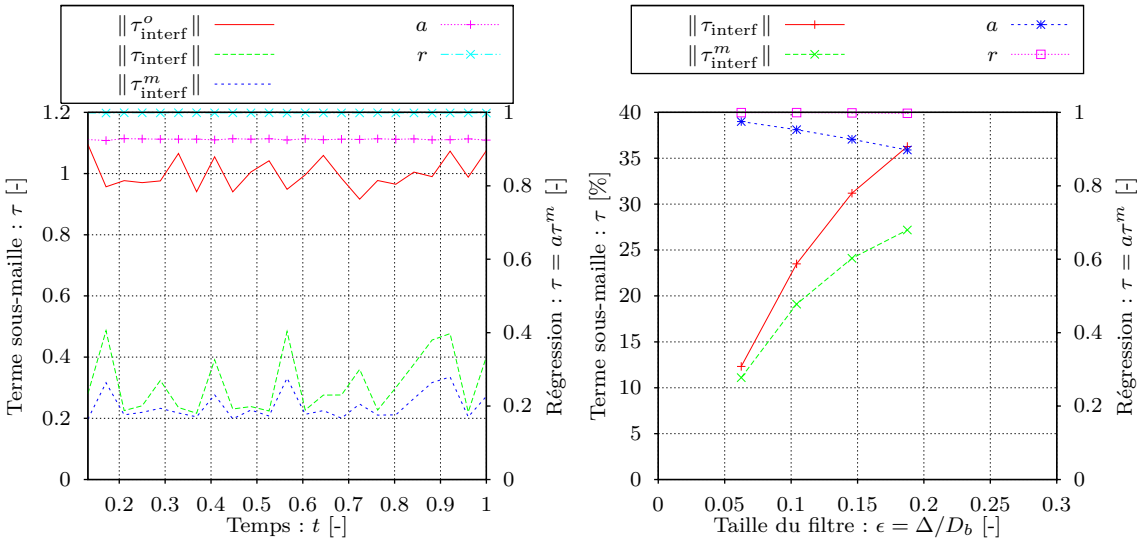


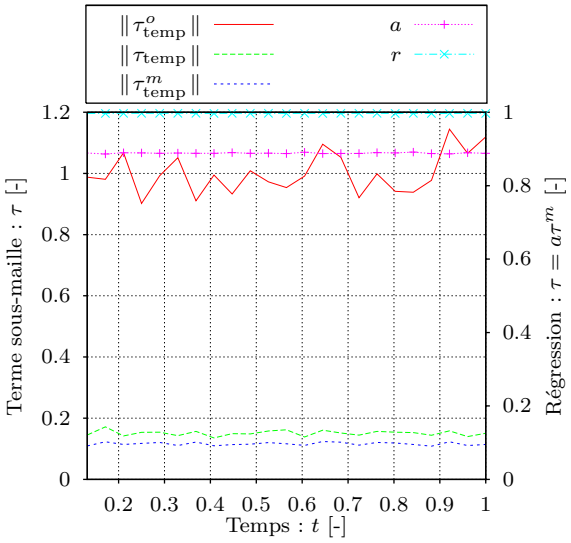
FIGURE 3.35 – Condensation de bulles dans un écoulement pseudo-turbulent.



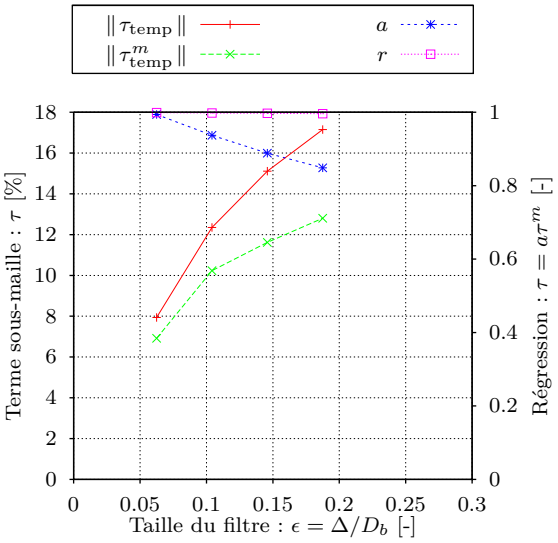
(a) Évolution temporelle de τ_{interf} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{interf}

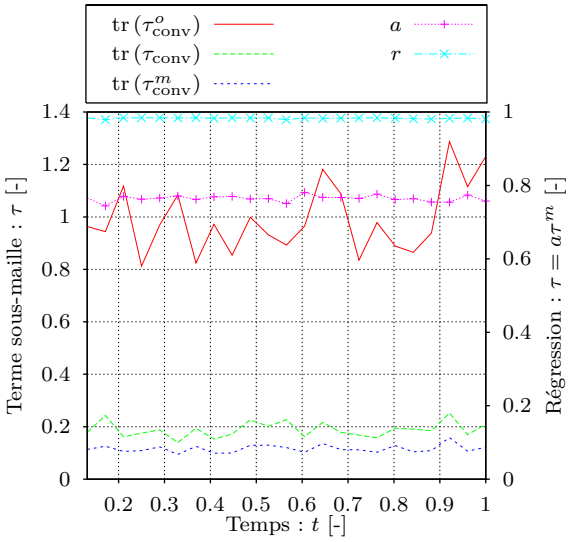
FIGURE 3.36 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de transport de l'interface.



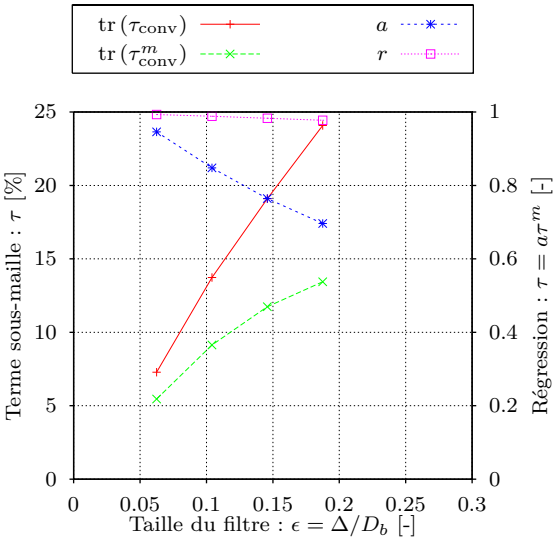
(a) Évolution temporelle de τ_{temp} ($\epsilon_c = 0.14$)



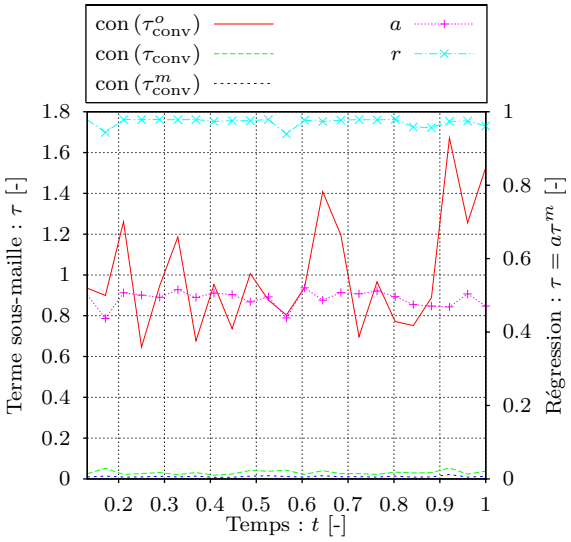
(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{temp}



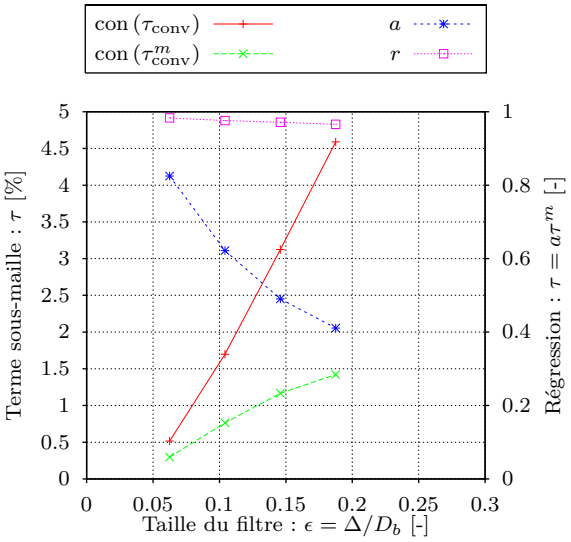
(c) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



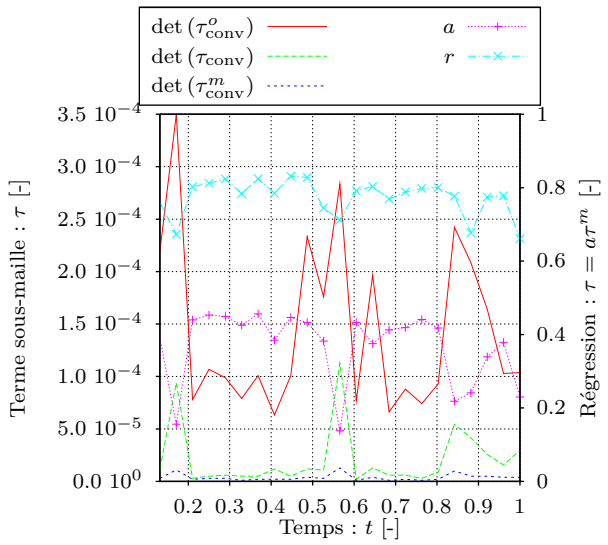
(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



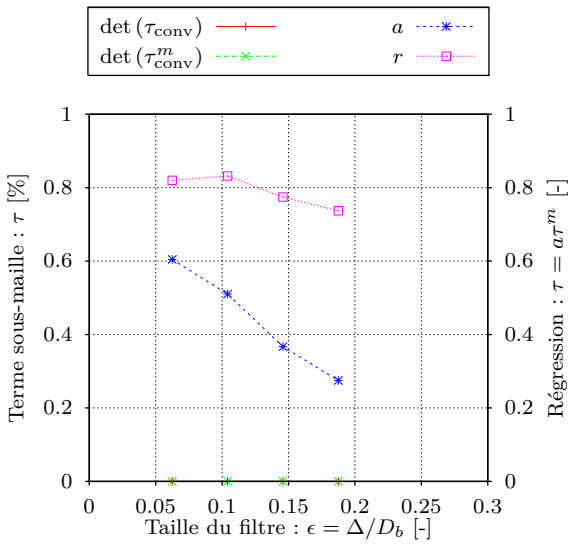
(e) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



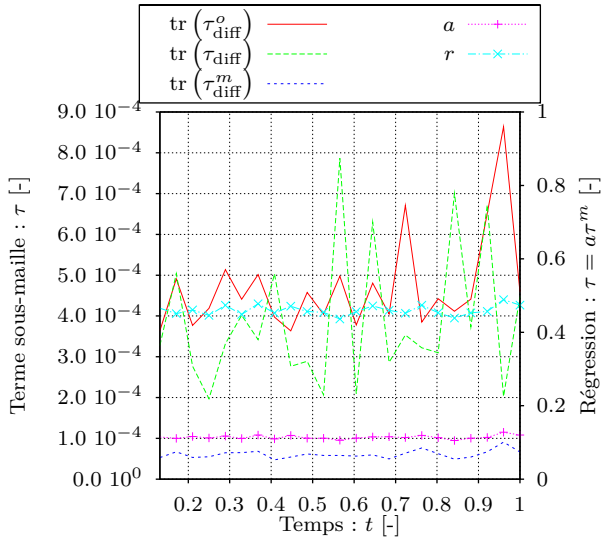
(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



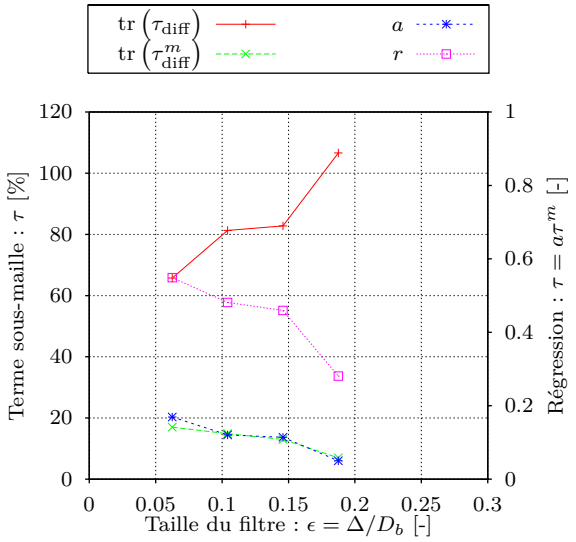
(h) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



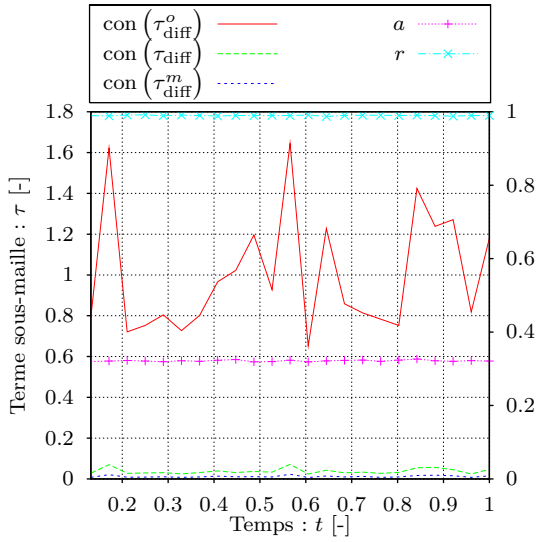
(i) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



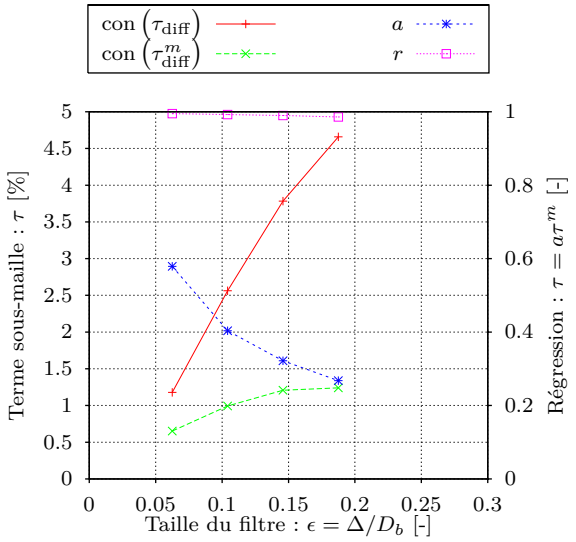
(j) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



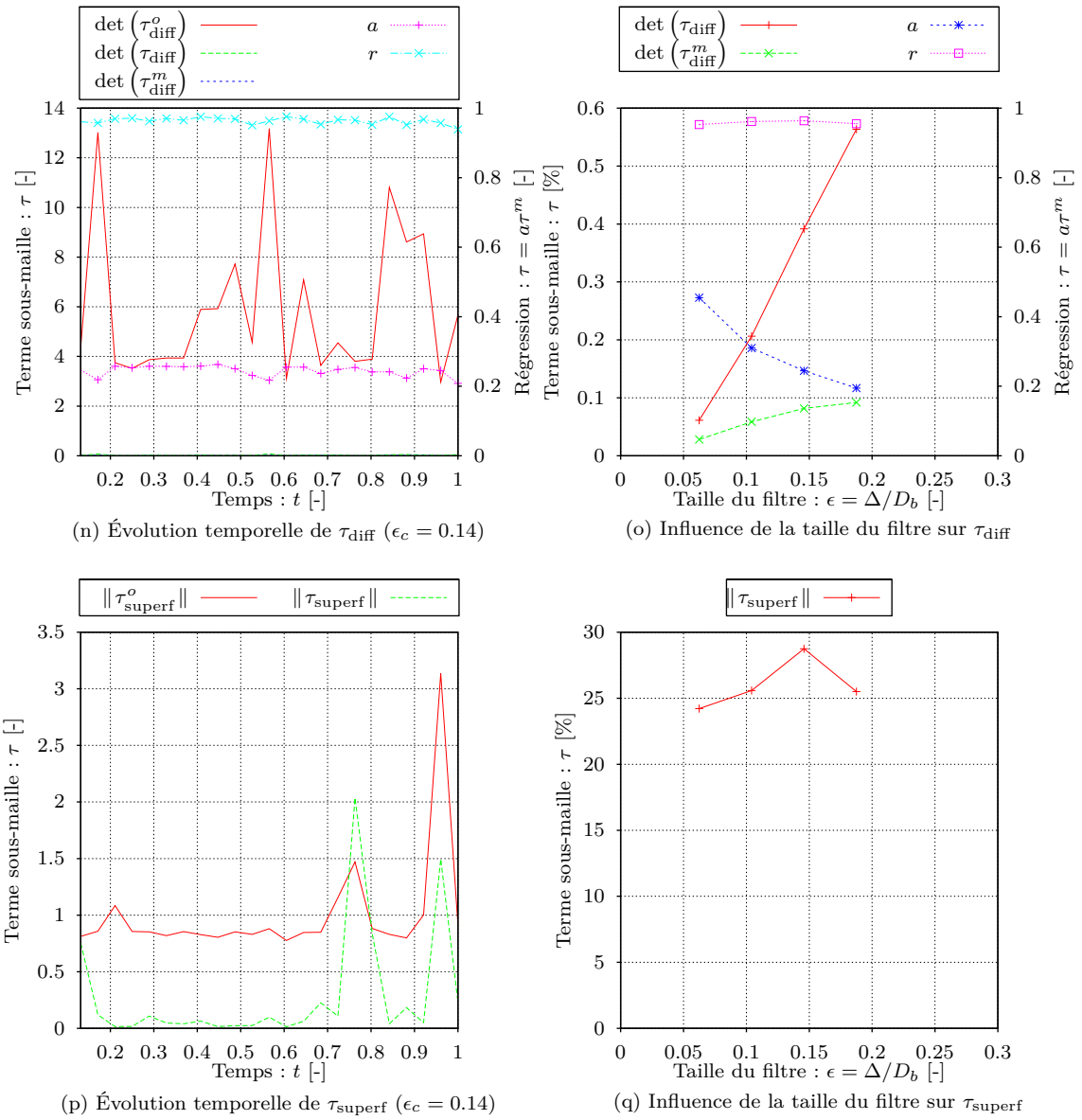
(k) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



(l) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



(m) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



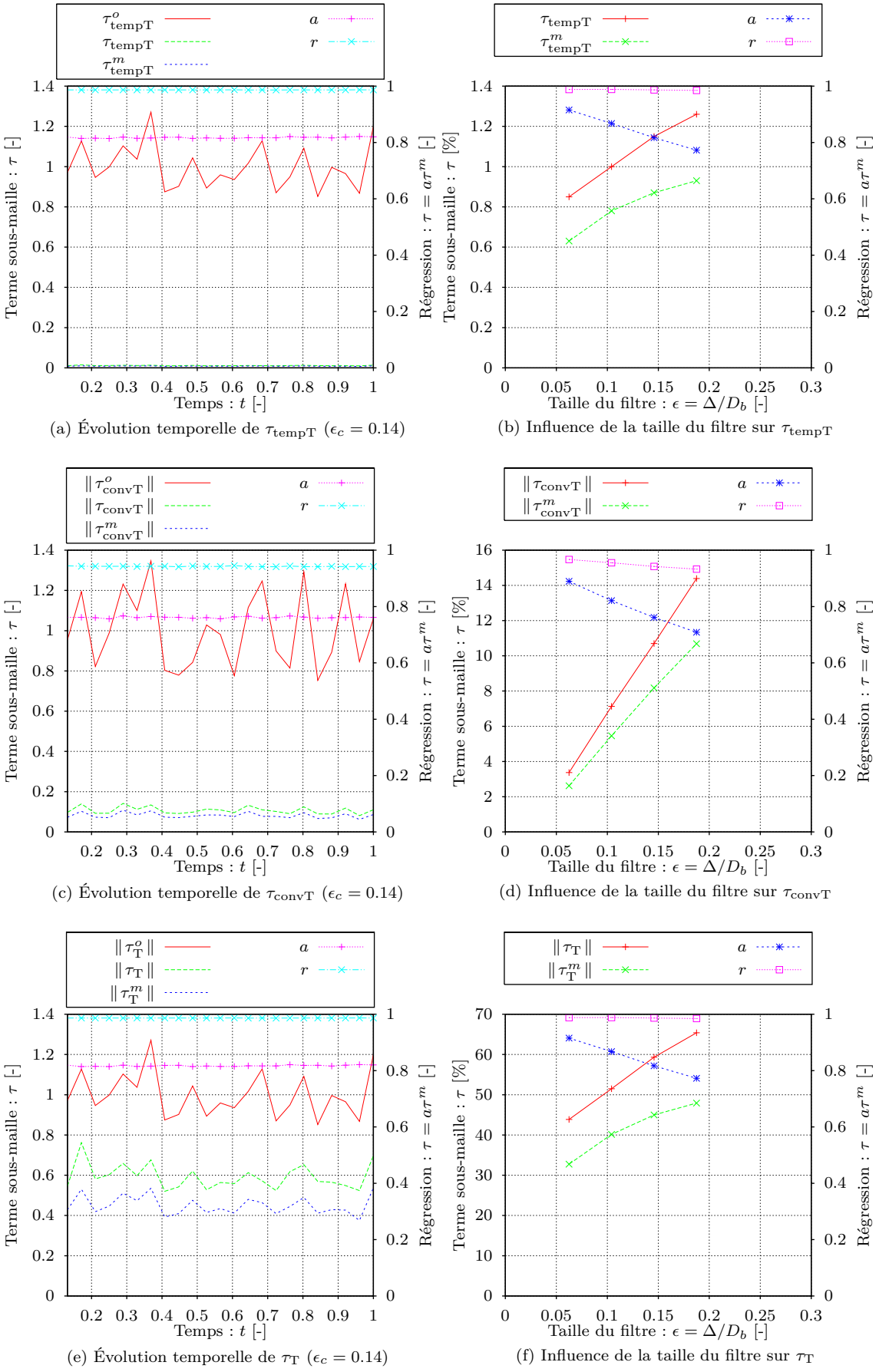
(n) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)

(o) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}

(p) Évolution temporelle de τ_{superf} ($\epsilon_c = 0.14$)

(q) Influence de la taille du filtre sur τ_{superf}

FIGURE 3.37 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de quantité de mouvement.



(a) Évolution temporelle de τ_{tempT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{tempT}

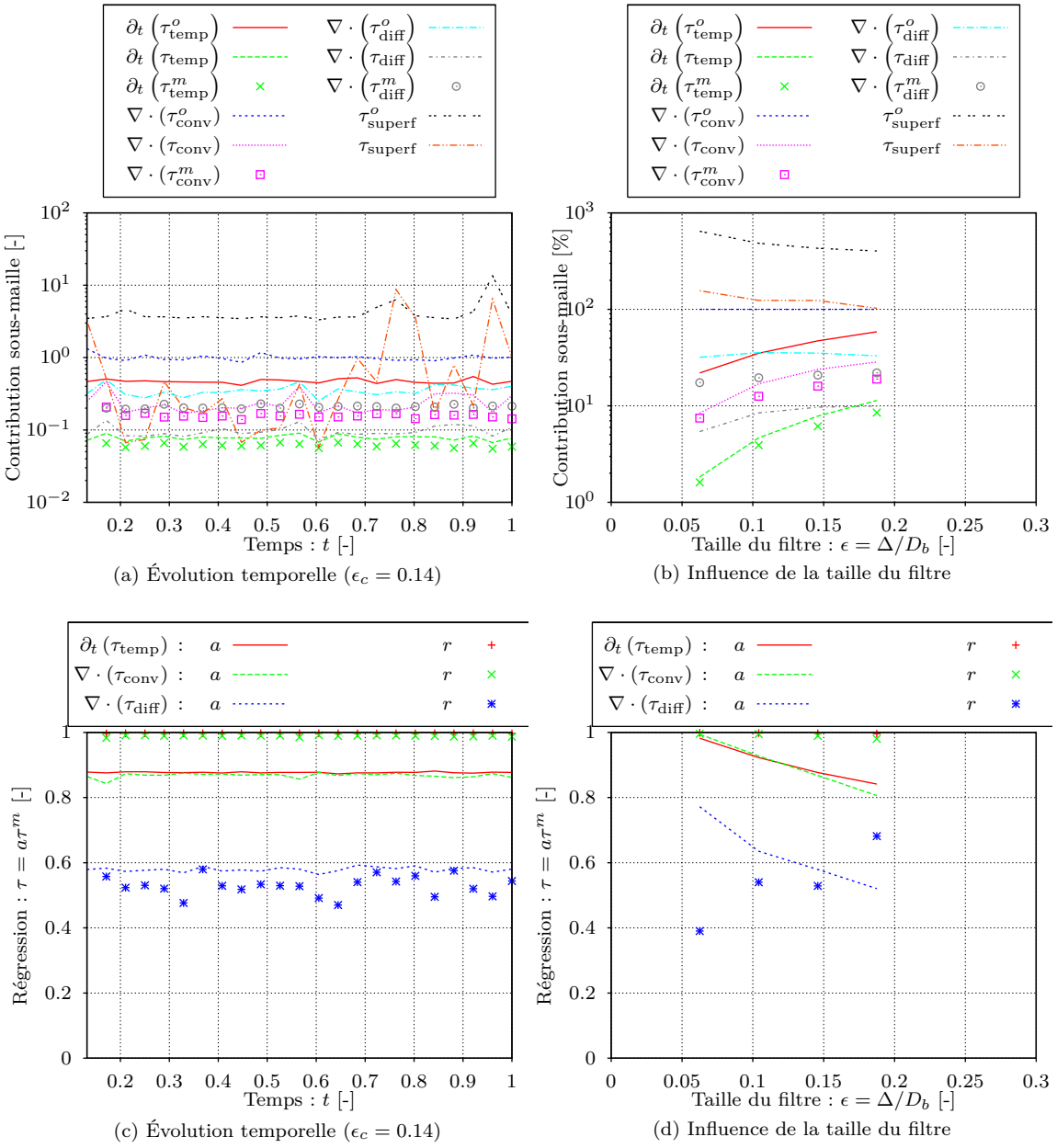
(c) Évolution temporelle de τ_{convT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{convT}

(e) Évolution temporelle de τ_{T} ($\epsilon_c = 0.14$)

(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{T}

FIGURE 3.38 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation d'énergie.



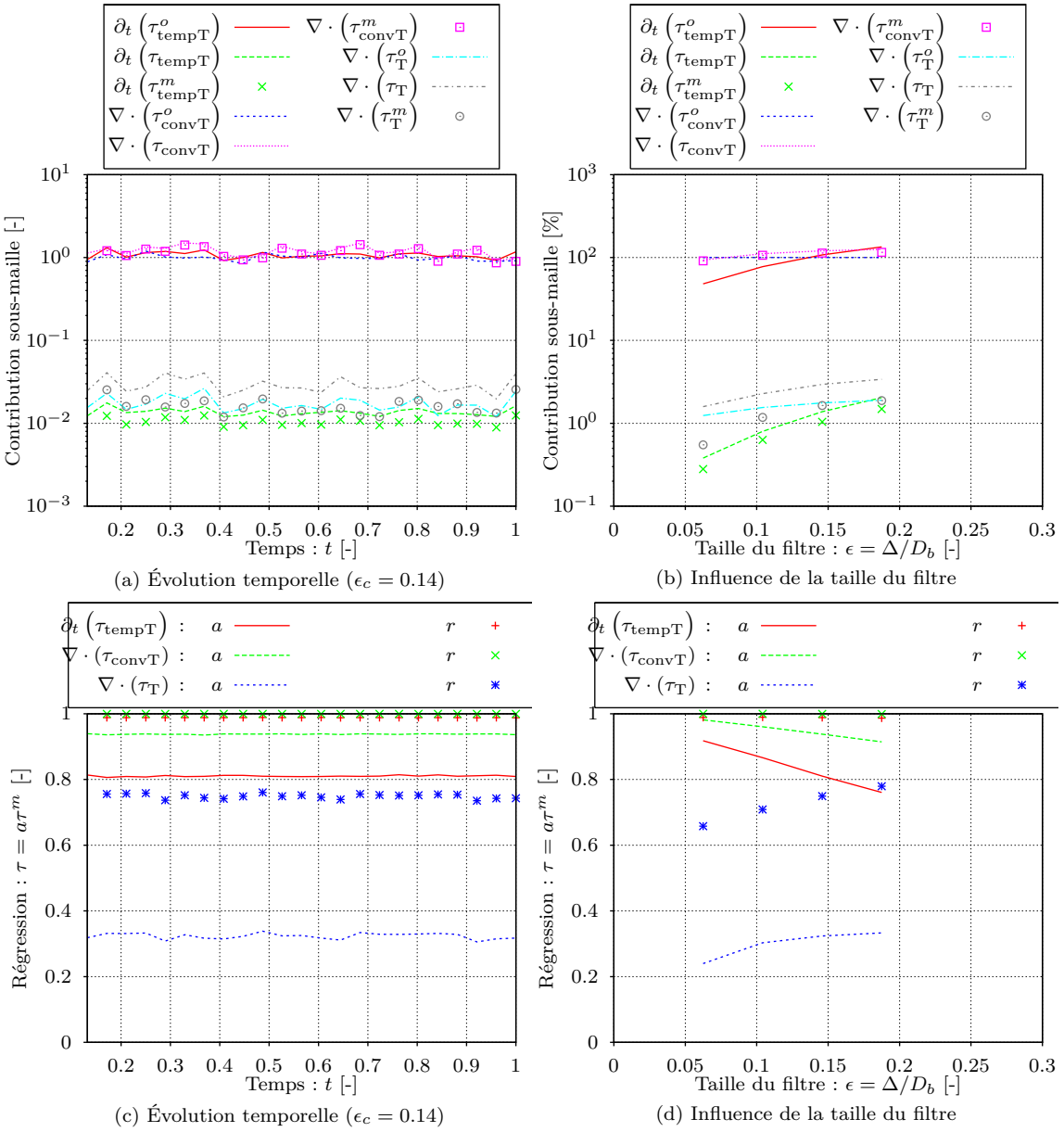
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.39 – Contributions sous-maille à l'équation de transport de quantité de mouvement.



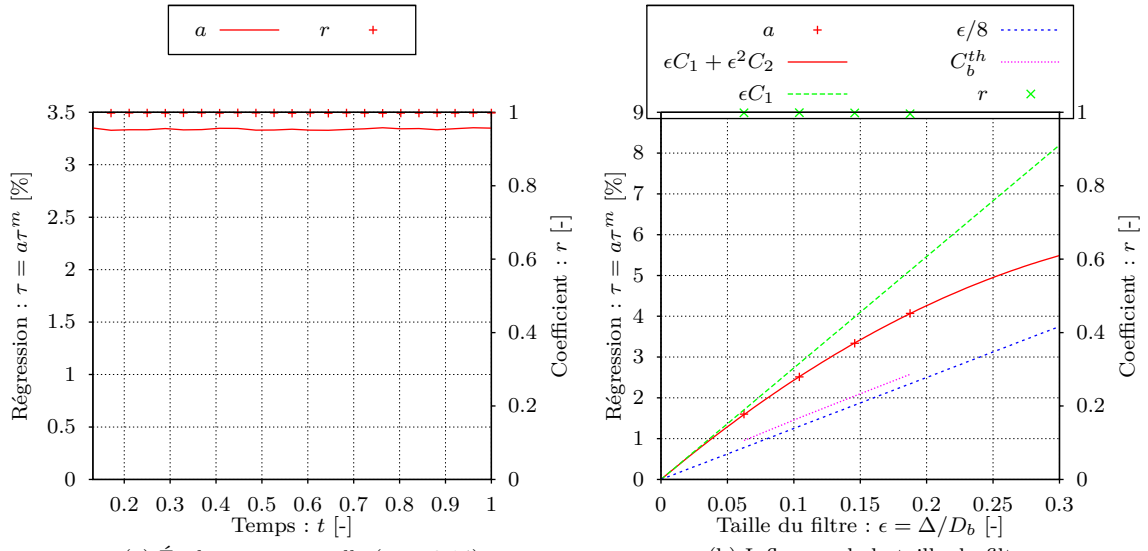
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.40 – Contributions sous-maille à l'équation d'énergie.



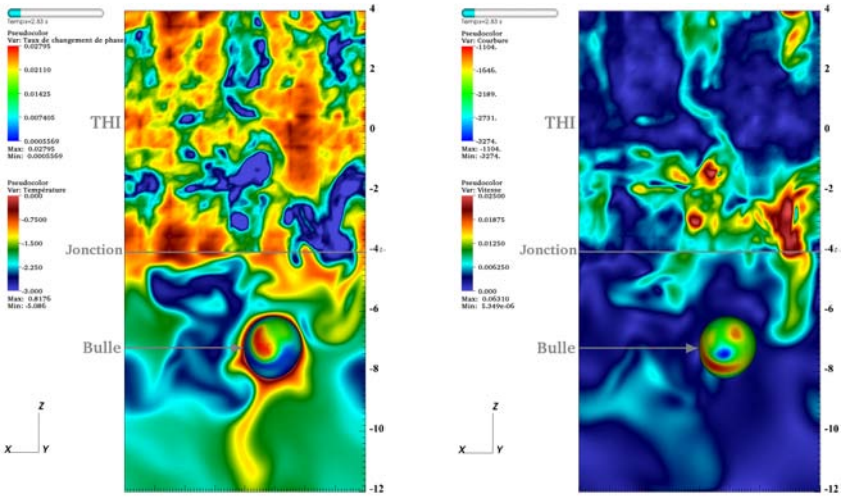
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.41 – Corrélation entre la température interfaciale et le taux de changement de phase.

3.A.5 Interaction d'une bulle avec une Turbulence Homogène Isotrope (sous-refroidissement fluctuant)

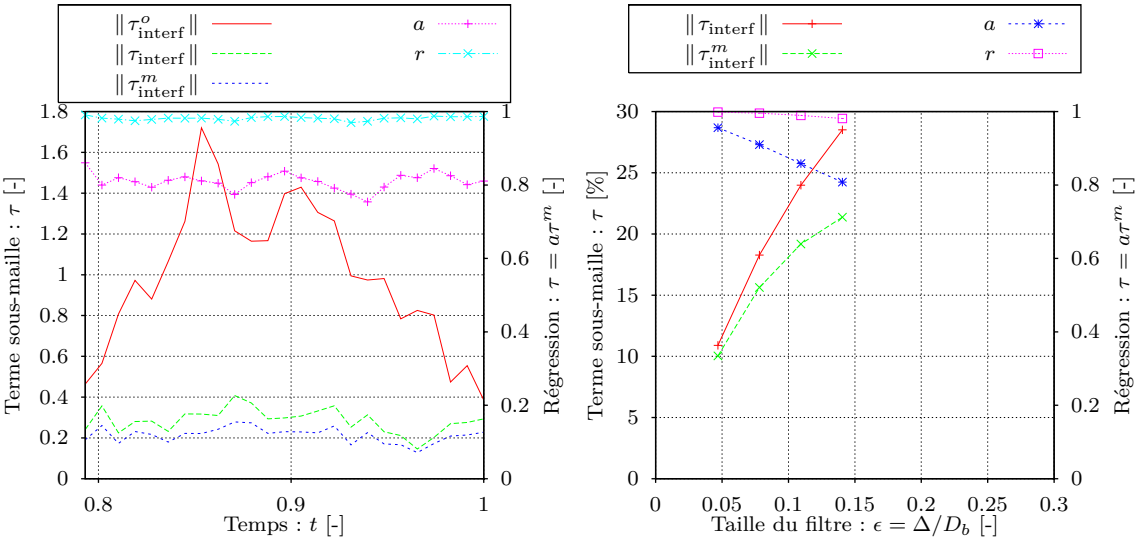
Grâce à cette configuration turbulente, les modèles sous-maille sont évalués en présence d'importantes fluctuations à petite échelle. Les topologies d'interface et d'écoulement observées sont très variées ; cette configuration est donc très intéressante car la richesse de l'écoulement valide les modèles sous-maille de manière plus générale. On constate à nouveau que le terme τ^0 fluctue beaucoup plus fortement que le terme sous-maille τ et le modèle τ^m correspondant. En raison du coût élevé de la simulation, seules 4 valeurs du paramètre ϵ sont observables et la gamme couverte est relativement étroite.



(a) Champ de température et taux de changement de phase

(b) Champ de vitesse et courbure de l'interface.

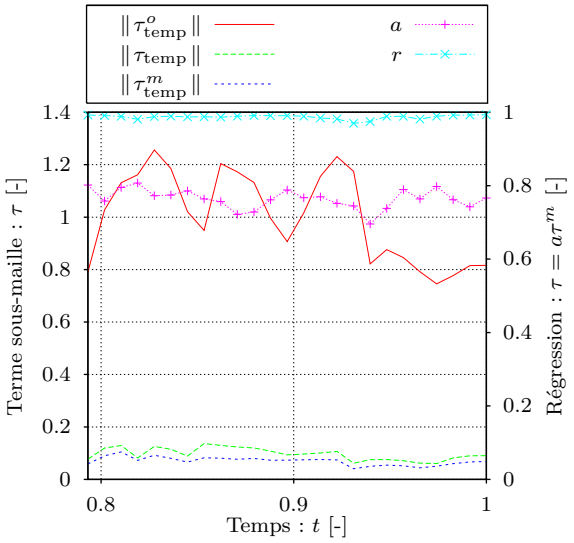
FIGURE 3.42 – Illustration de l'interaction bulle/turbulence de grille (fluctuations de température entretenues).



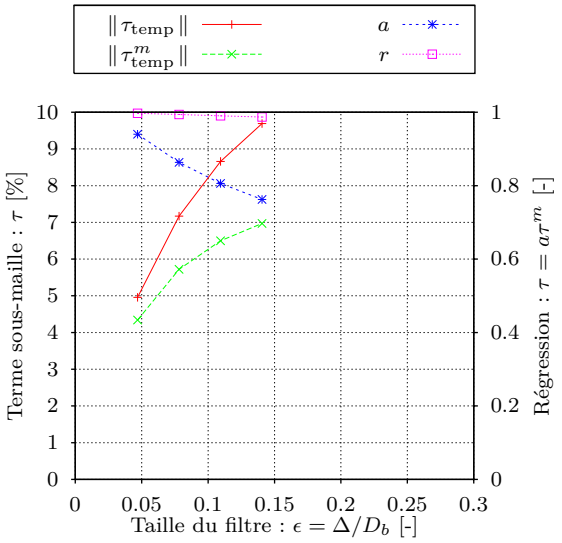
(a) Évolution temporelle de τ_{interf} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{interf}

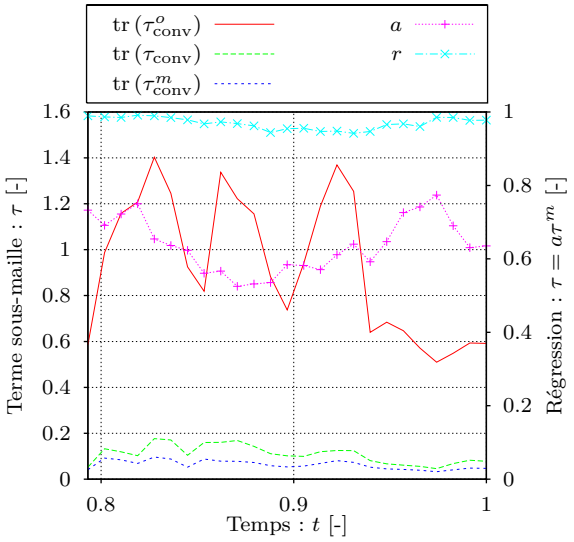
FIGURE 3.43 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de transport de l'interface.



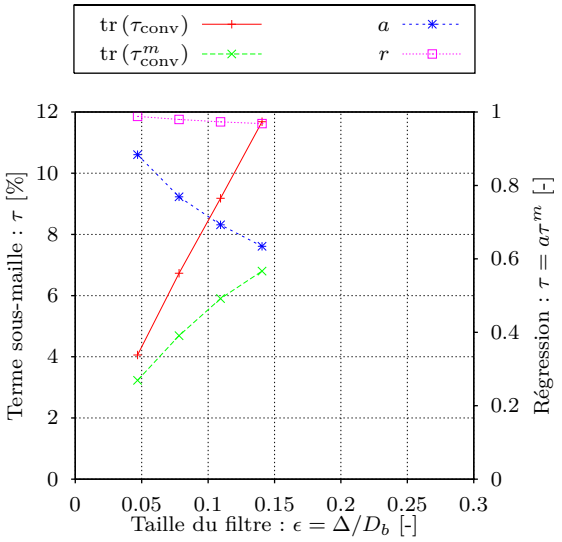
(a) Évolution temporelle de τ_{temp} ($\epsilon_c = 0.14$)



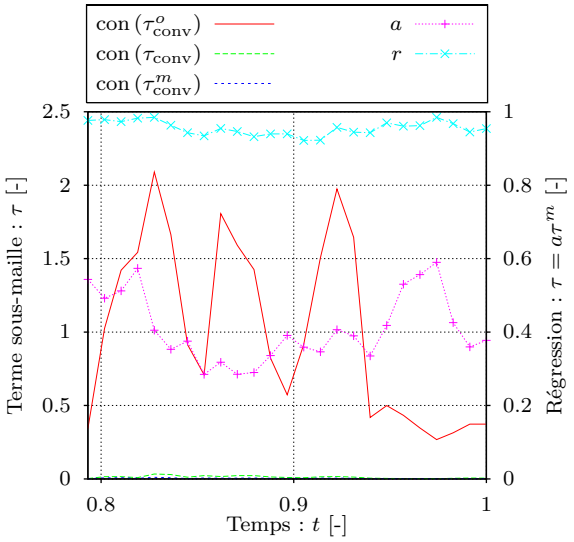
(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{temp}



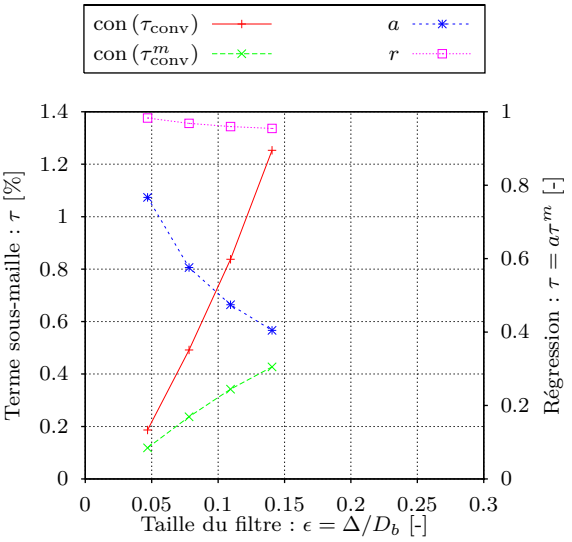
(c) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



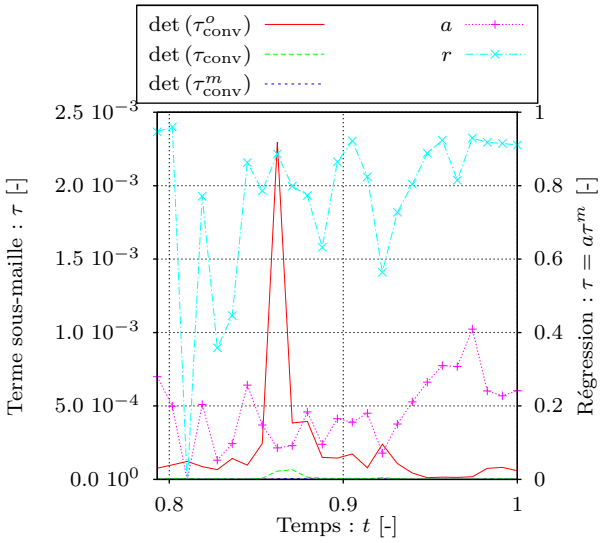
(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



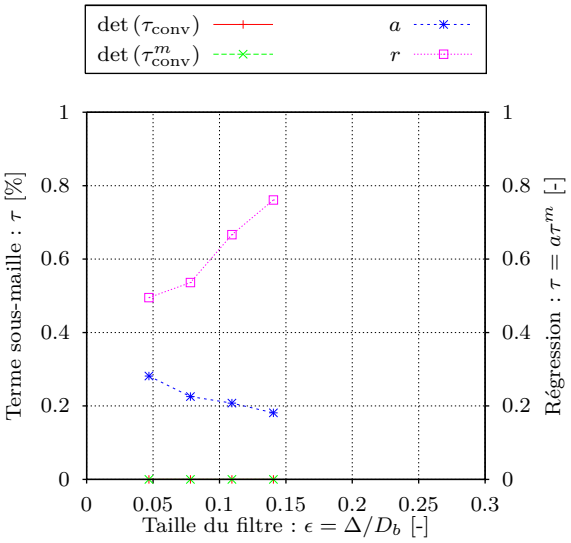
(e) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



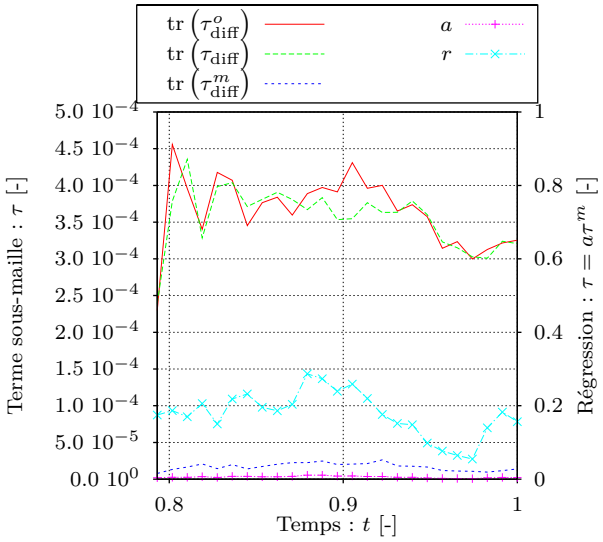
(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



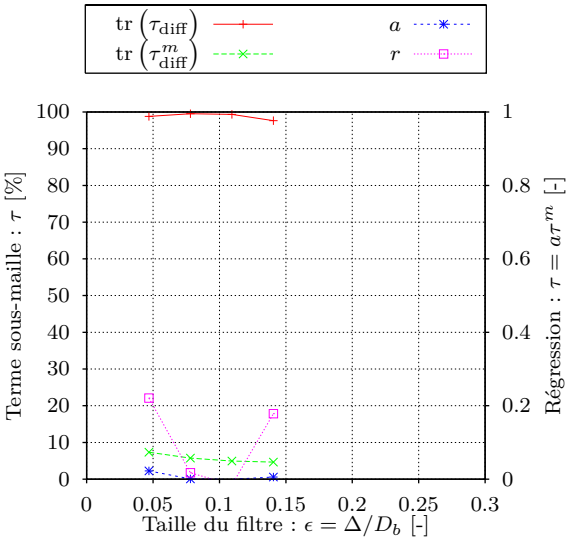
(h) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



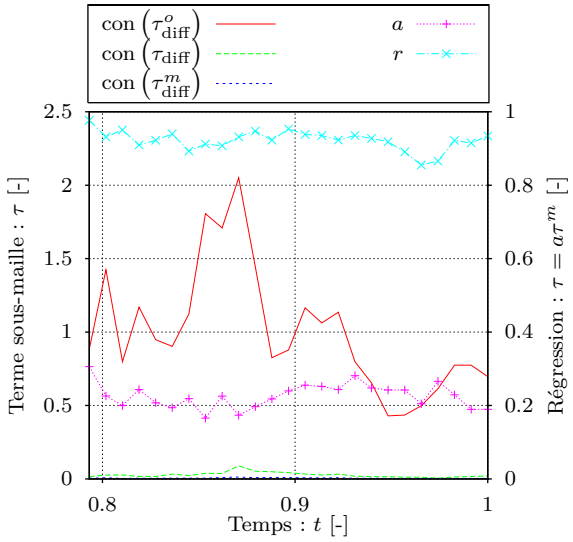
(i) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



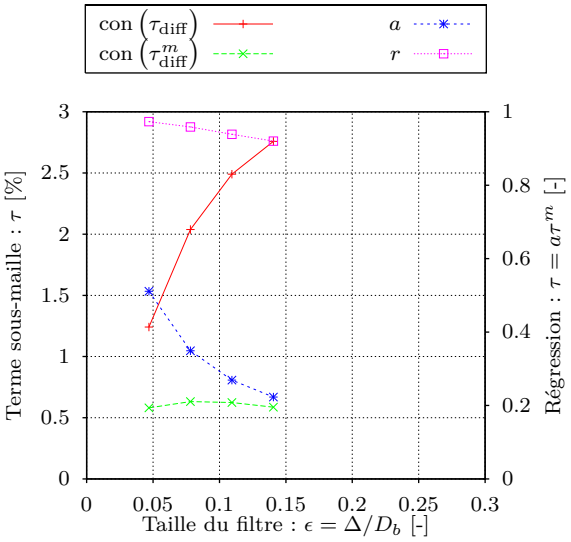
(j) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



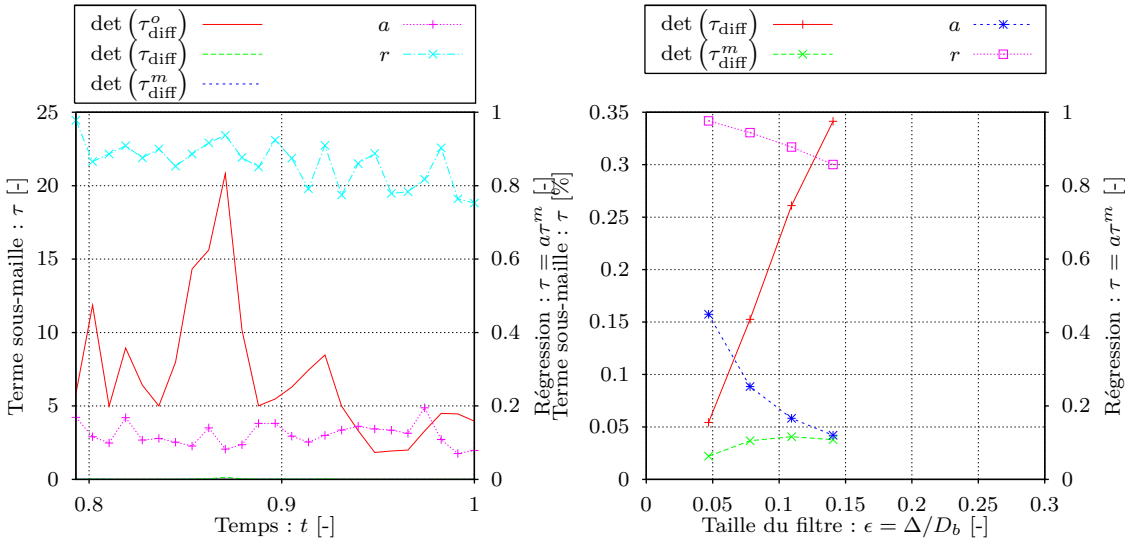
(k) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



(l) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)

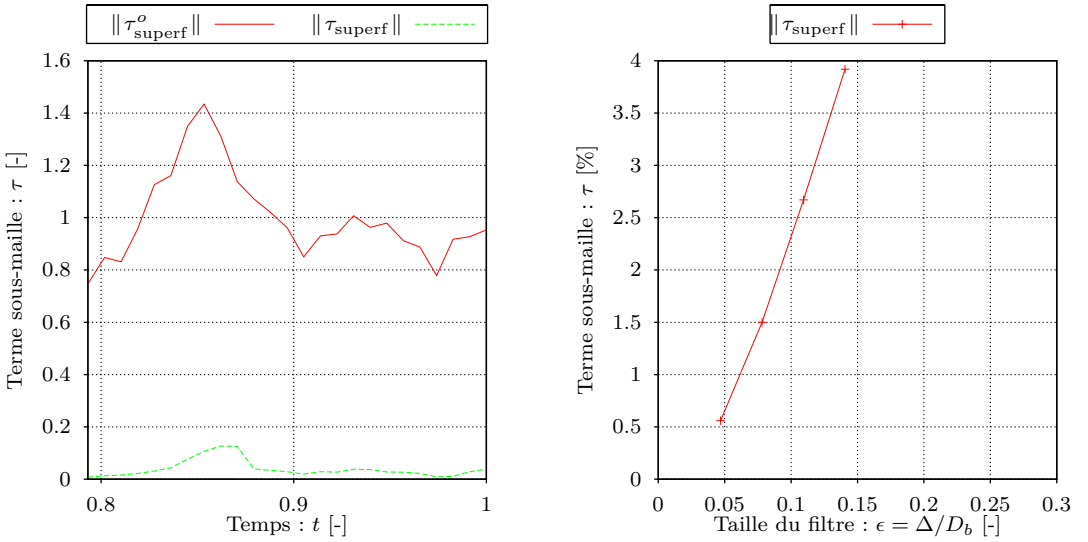


(m) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



(n) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)

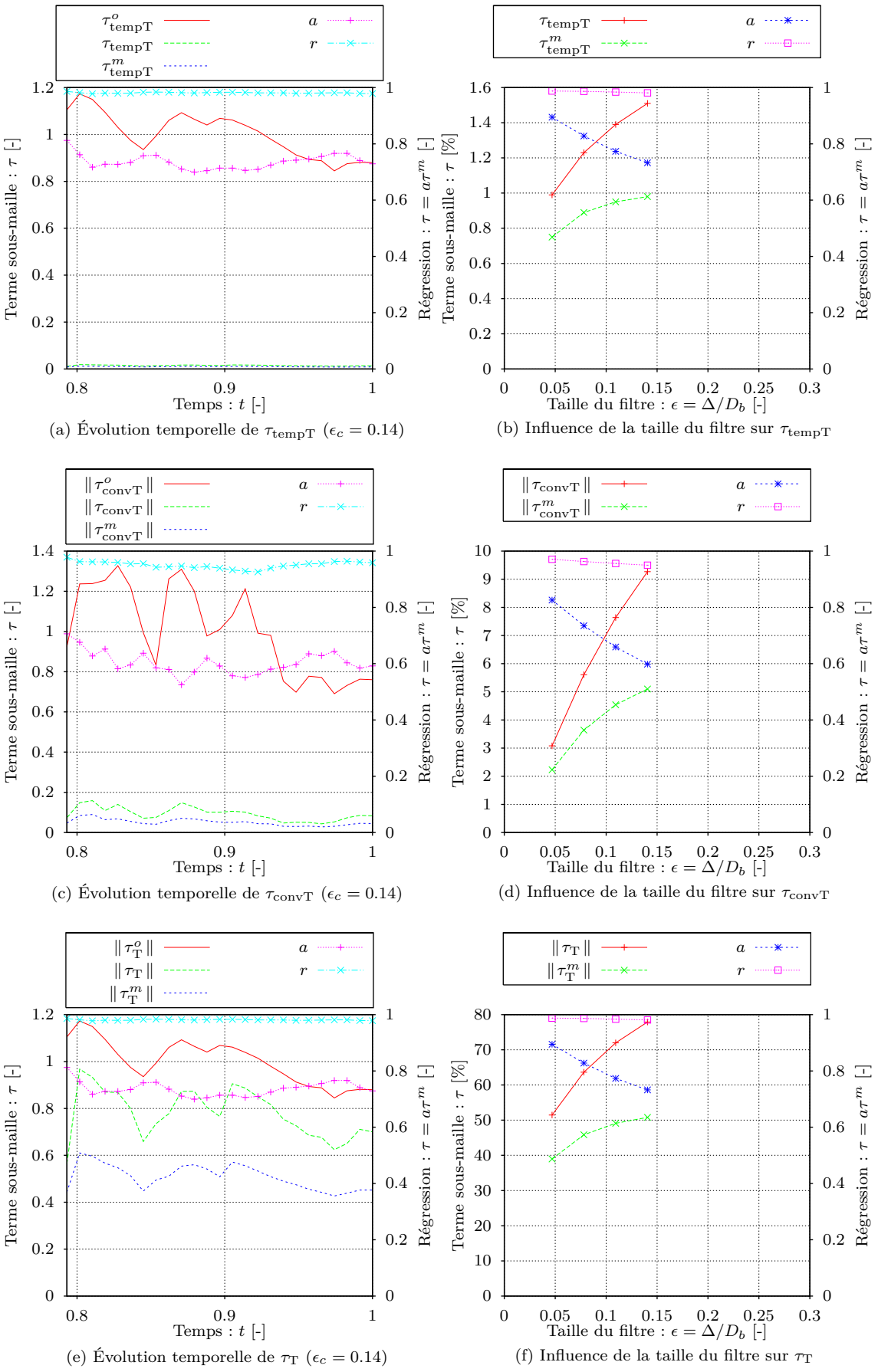
(o) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



(p) Évolution temporelle de τ_{superf} ($\epsilon_c = 0.14$)

(q) Influence de la taille du filtre sur τ_{superf}

FIGURE 3.44 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de quantité de mouvement.



(a) Évolution temporelle de τ_{tempT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{tempT}

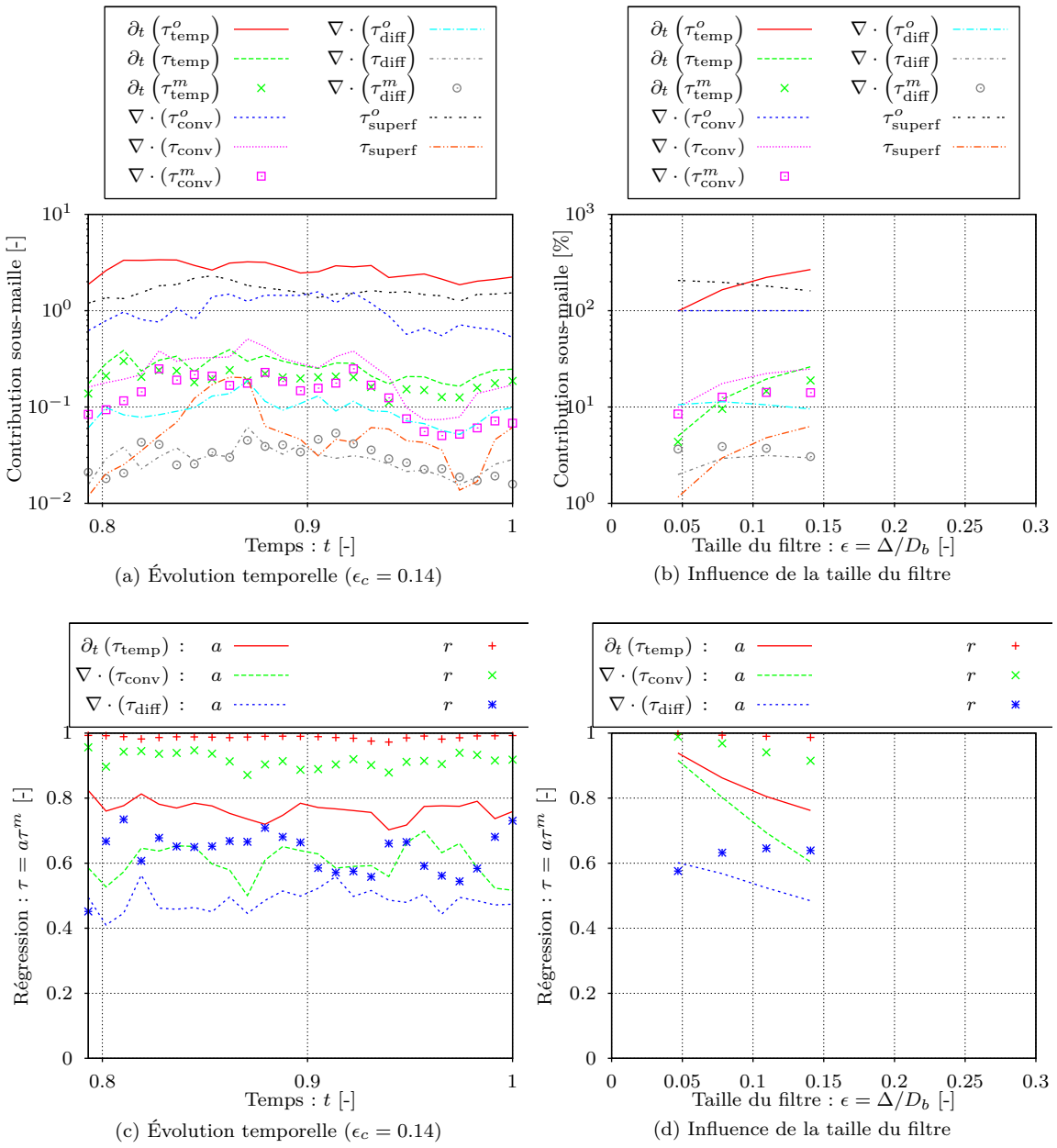
(c) Évolution temporelle de τ_{convT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{convT}

(e) Évolution temporelle de τ_{T} ($\epsilon_c = 0.14$)

(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{T}

FIGURE 3.45 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation d'énergie.



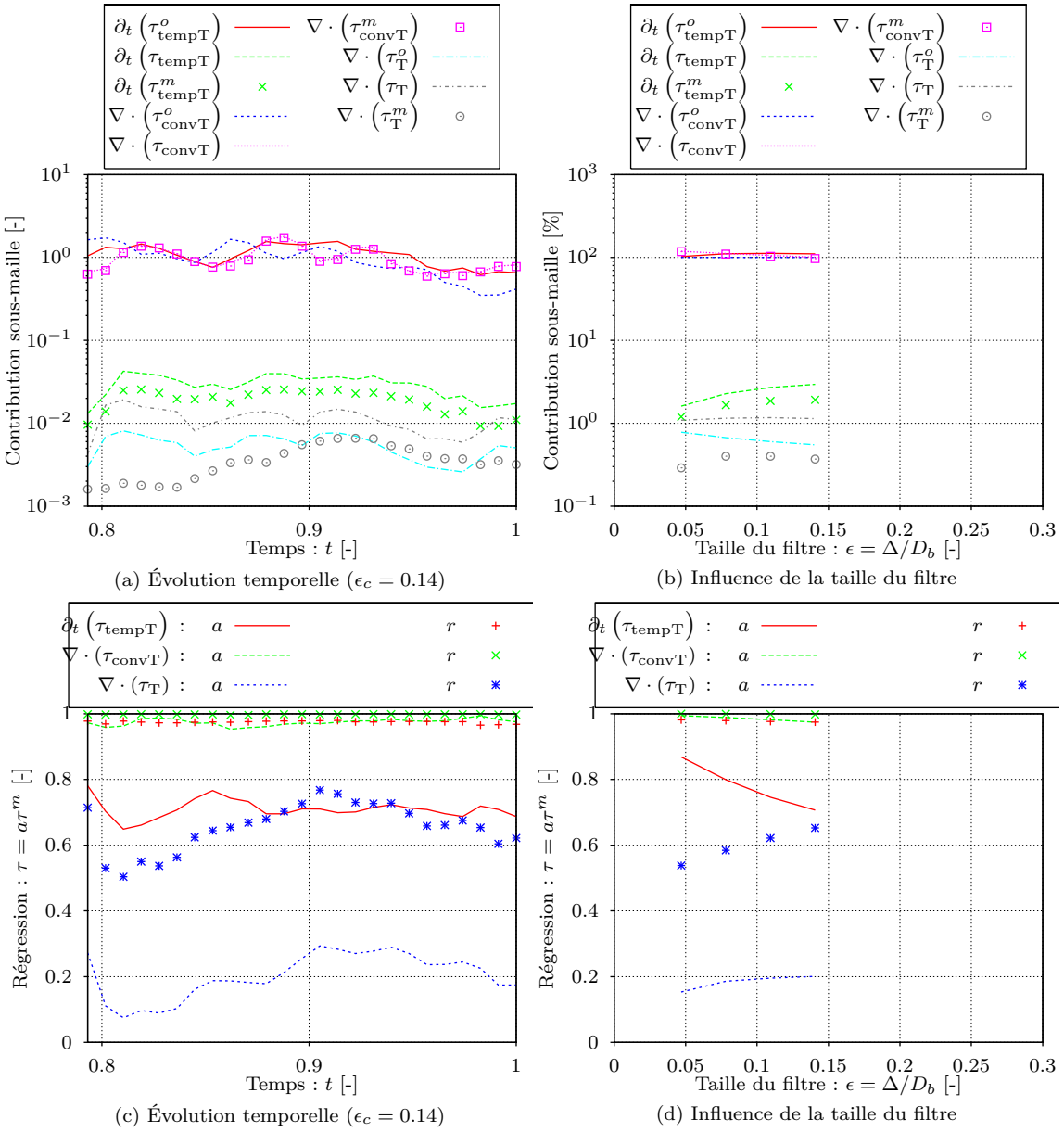
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.46 – Contributions sous-maille à l'équation de transport de quantité de mouvement.



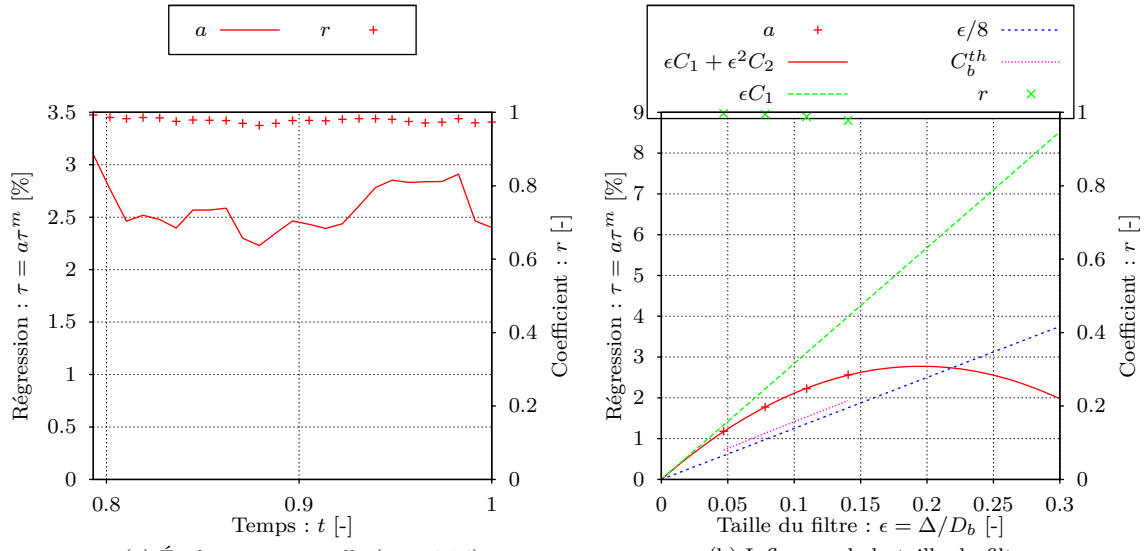
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.47 – Contributions sous-maille à l'équation d'énergie.



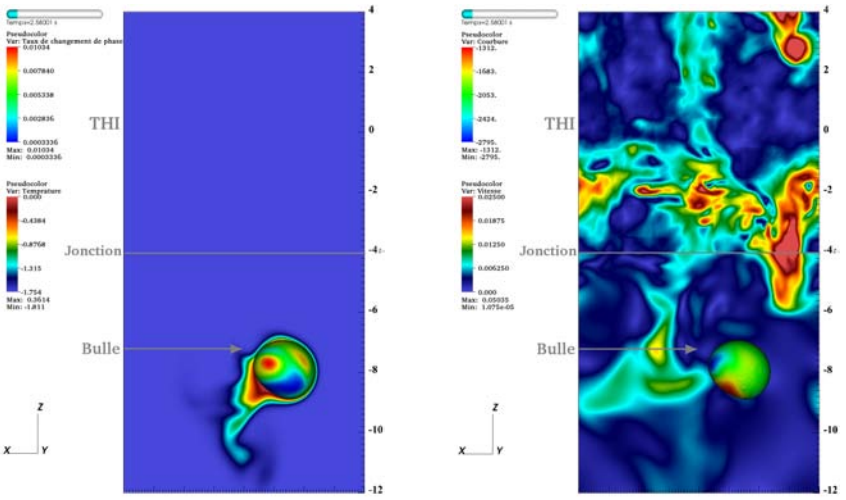
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.48 – Corrélation entre la température interfaciale et le taux de changement de phase.

3.A.6 Interaction d'une bulle avec une Turbulence Homogène Isotrope (sous-refroidissement uniforme)

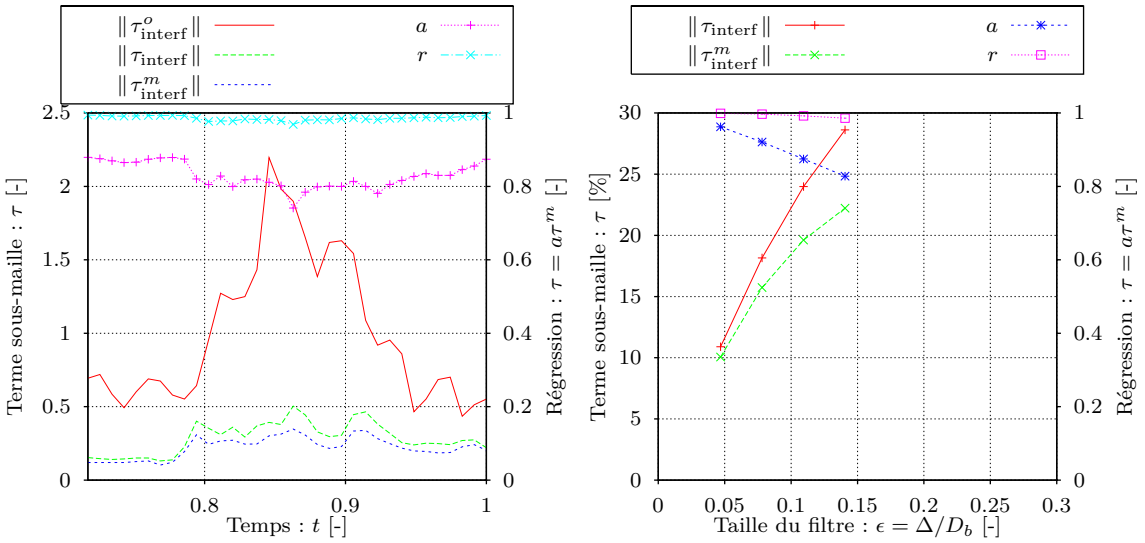
Cette dernière configuration est très proche de la précédente. Le sous-refroidissement uniforme imposé à l'entrée du domaine n'affecte que très faiblement les fluctuations et leur amplitude car le champ de température au voisinage de l'interface conserve la même structure ; celle-ci est plus fortement liée à la répartition du taux de changement de phase le long de l'interface et aux déformations de l'interface qu'aux conditions à l'entrée du domaine.



(a) Champ de température et taux de changement de phase.

(b) Champ de vitesse et courbure de l'interface.

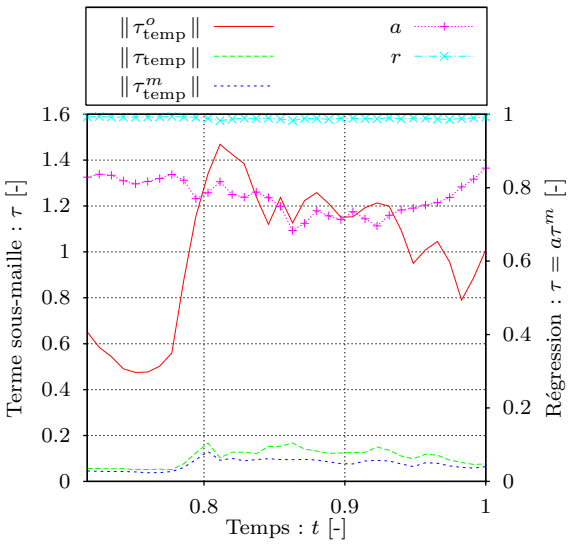
FIGURE 3.49 – Illustration de l'interaction bulle/turbulence de grille (température uniforme à l'entrée de s_2).



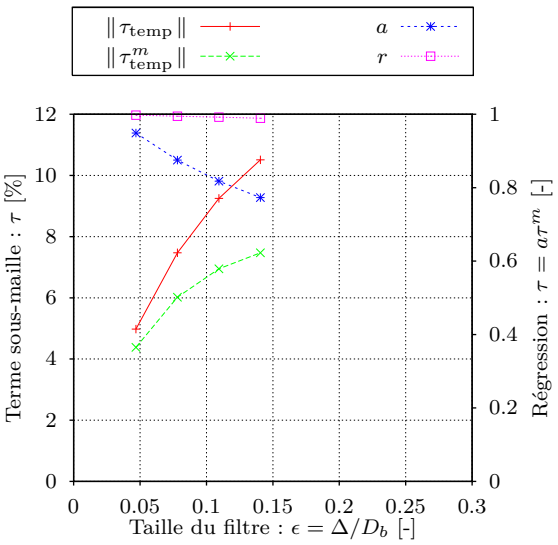
(a) Évolution temporelle de τ_{interf} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{interf}

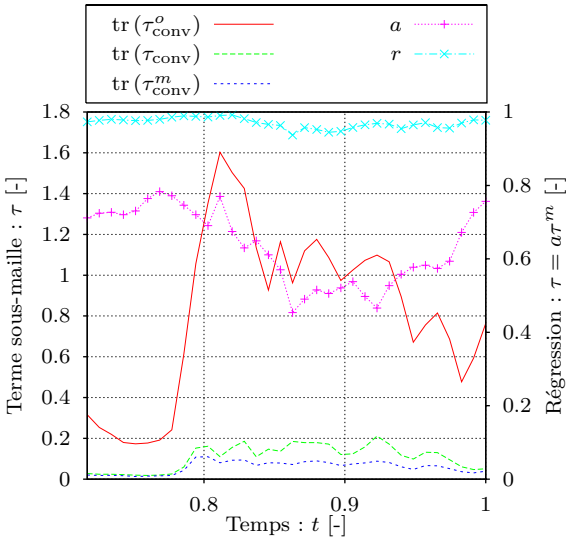
FIGURE 3.50 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de transport de l'interface.



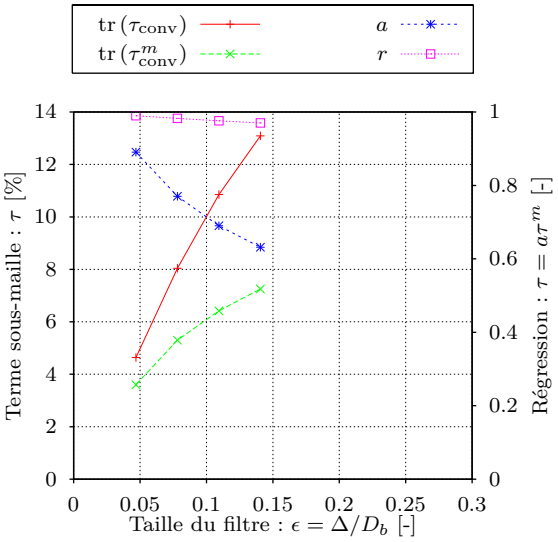
(a) Évolution temporelle de τ_{temp} ($\epsilon_c = 0.14$)



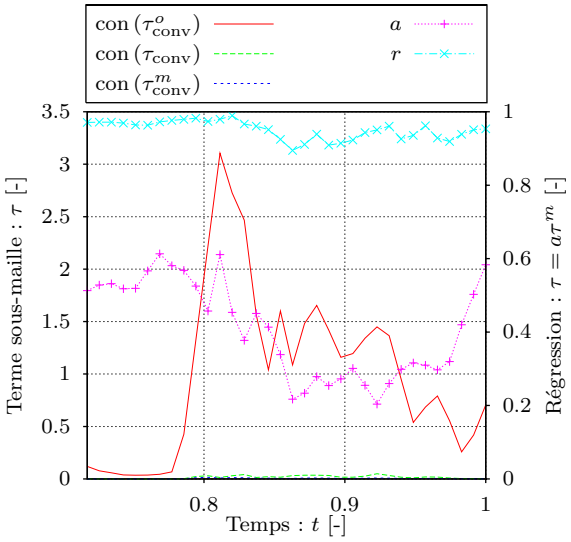
(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{temp}



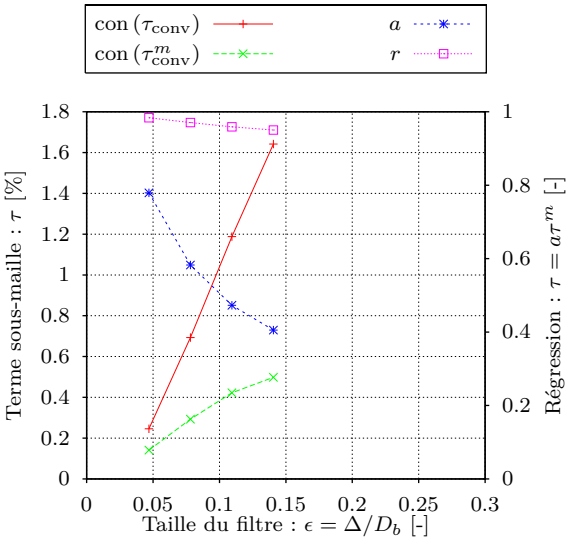
(c) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



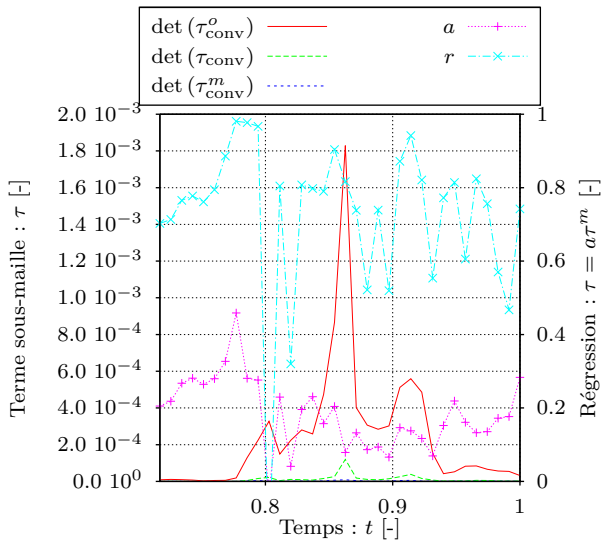
(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



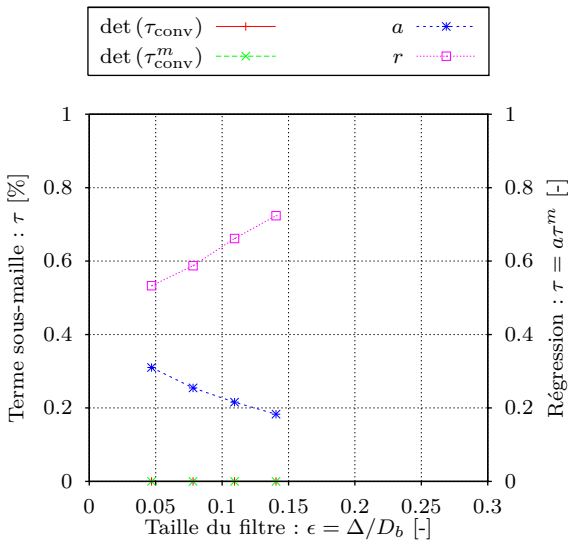
(e) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



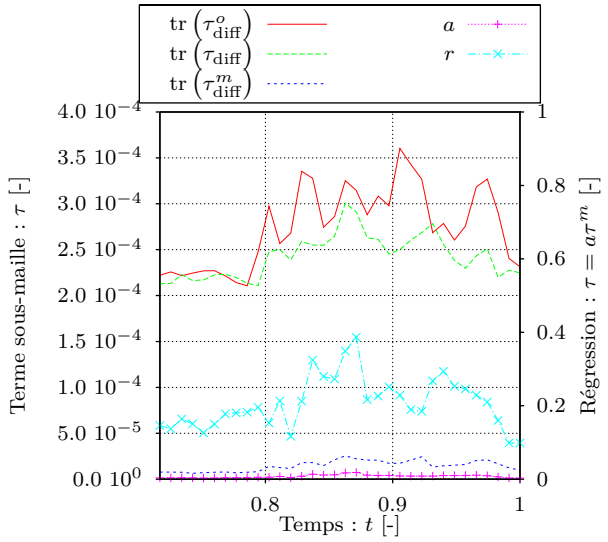
(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



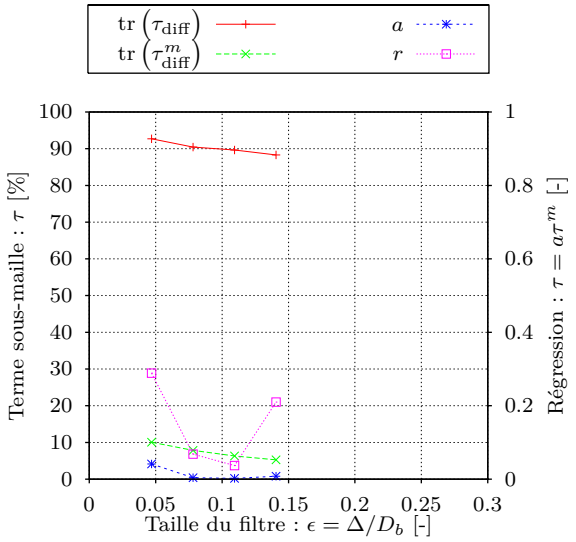
(h) Évolution temporelle de τ_{conv} ($\epsilon_c = 0.14$)



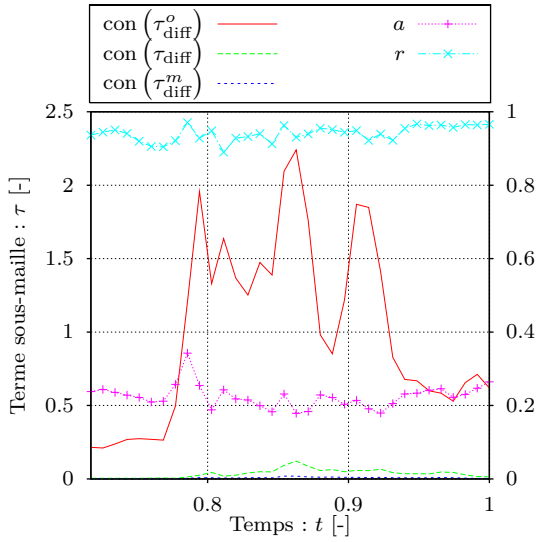
(i) Influence de la taille du filtre sur τ_{conv}



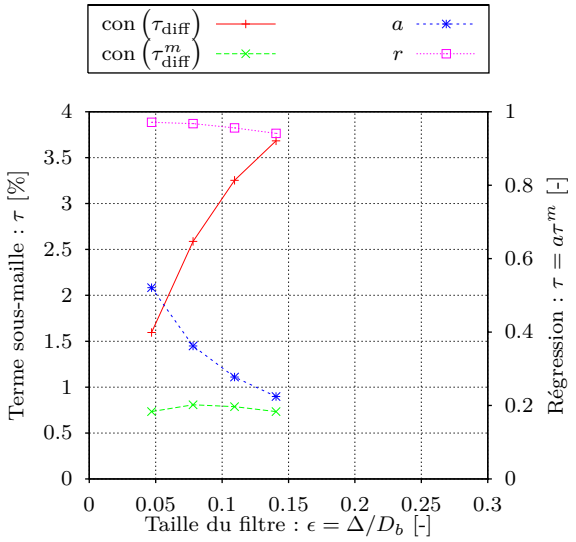
(j) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)



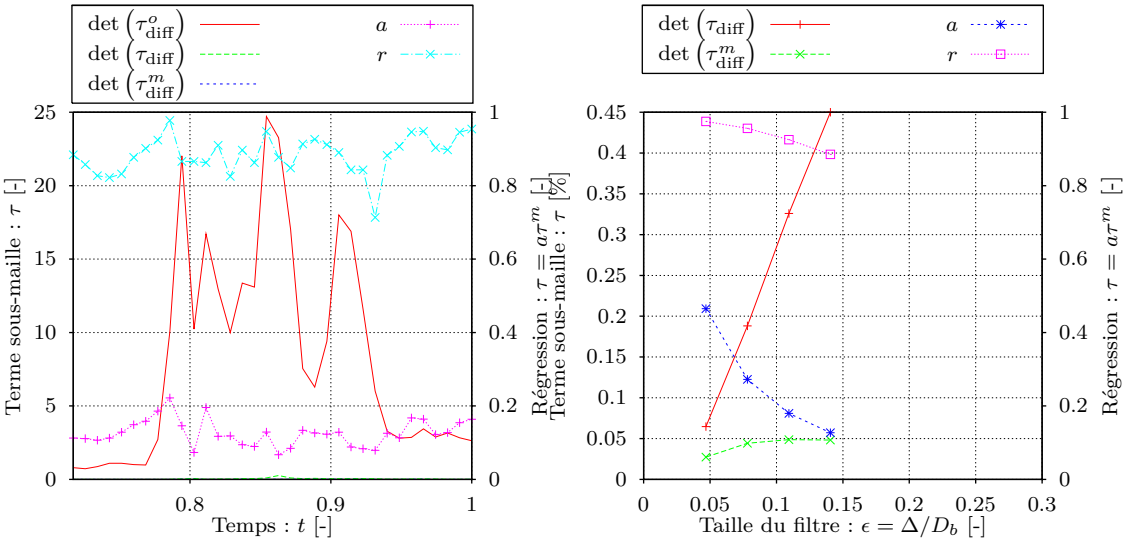
(k) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}



(l) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)

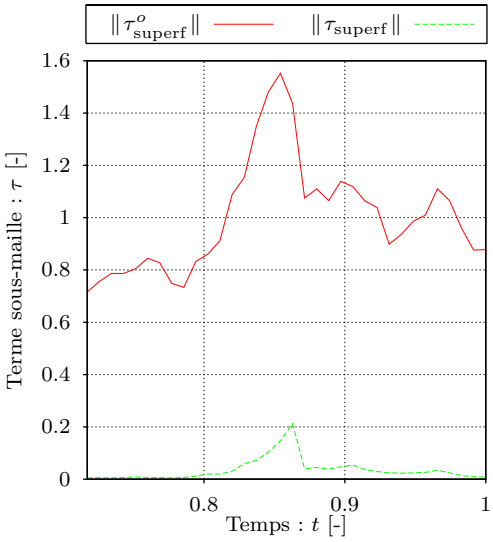


(m) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}

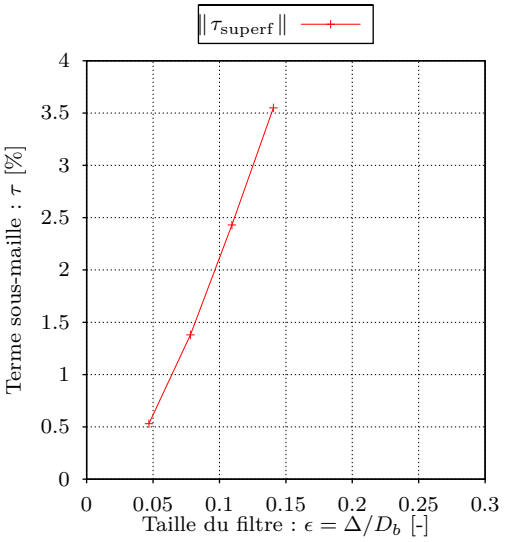


(n) Évolution temporelle de τ_{diff} ($\epsilon_c = 0.14$)

(o) Influence de la taille du filtre sur τ_{diff}

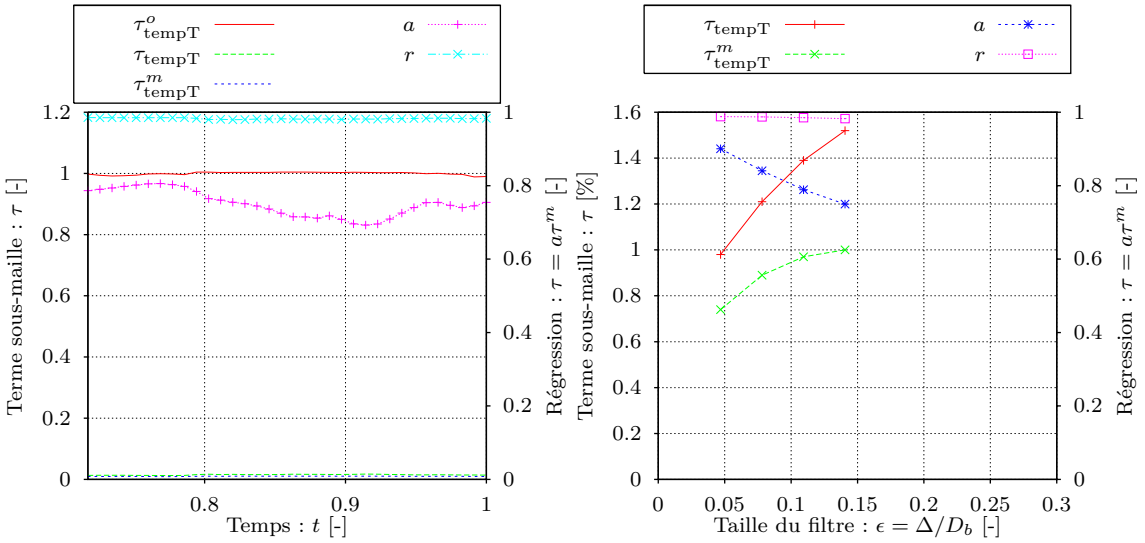


(p) Évolution temporelle de τ_{superf} ($\epsilon_c = 0.14$)



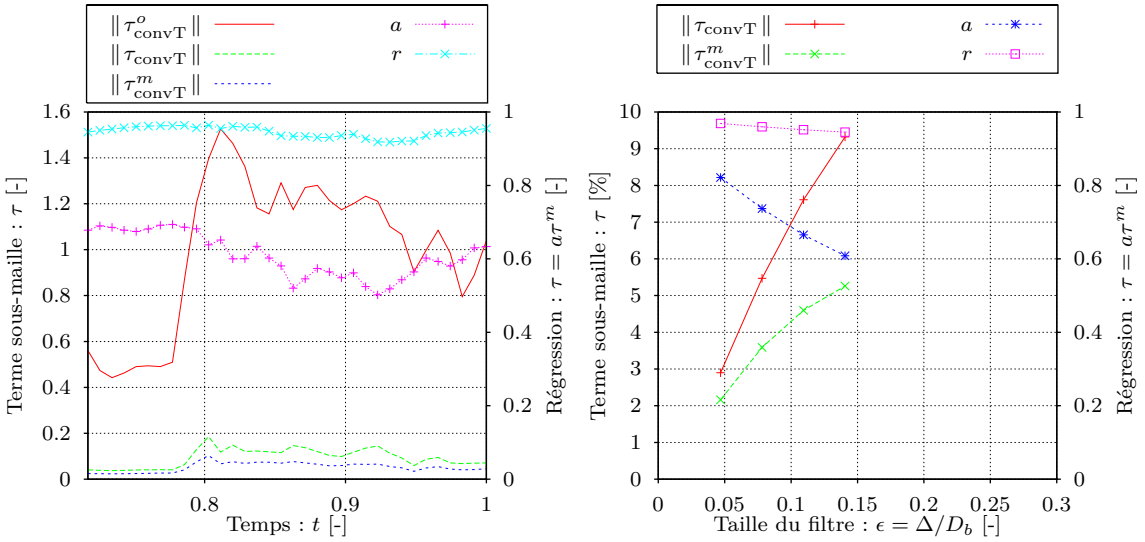
(q) Influence de la taille du filtre sur τ_{superf}

FIGURE 3.51 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation de quantité de mouvement.



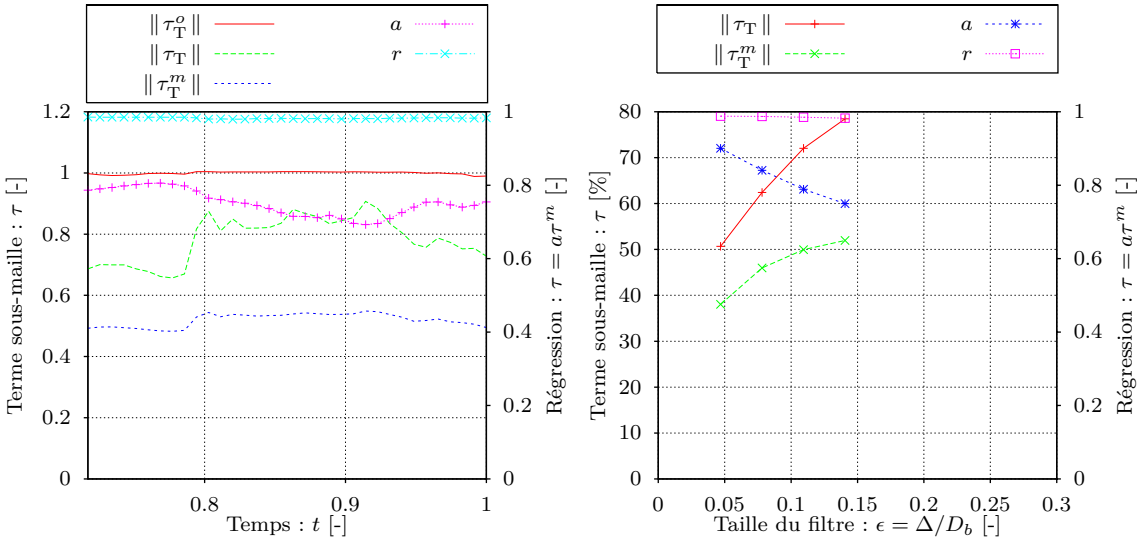
(a) Évolution temporelle de τ_{tempT} ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre sur τ_{tempT}



(c) Évolution temporelle de τ_{convT} ($\epsilon_c = 0.14$)

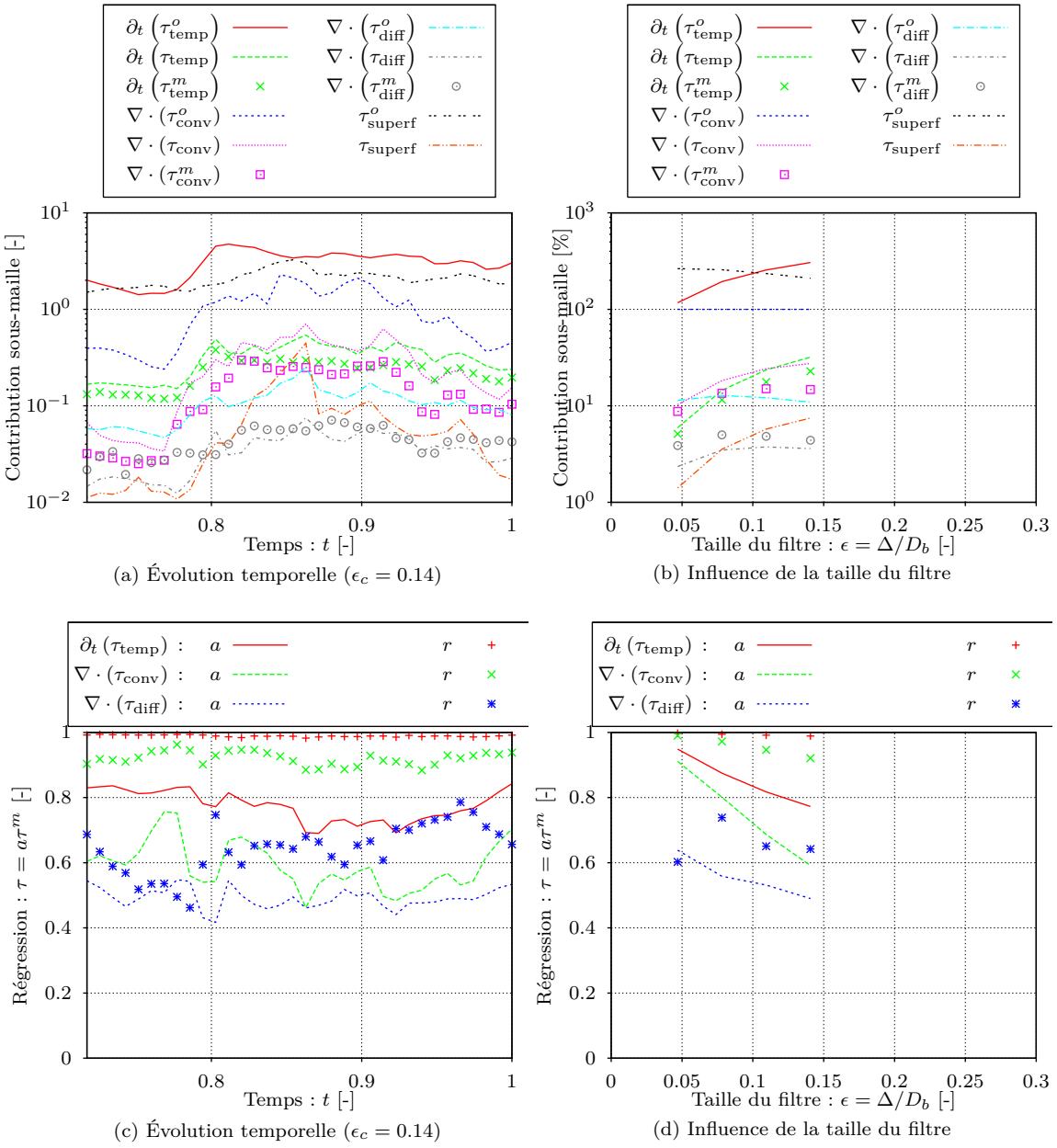
(d) Influence de la taille du filtre sur τ_{convT}



(e) Évolution temporelle de τ_{T} ($\epsilon_c = 0.14$)

(f) Influence de la taille du filtre sur τ_{T}

FIGURE 3.52 – Comparaison des termes sous-maille de l'équation d'énergie.



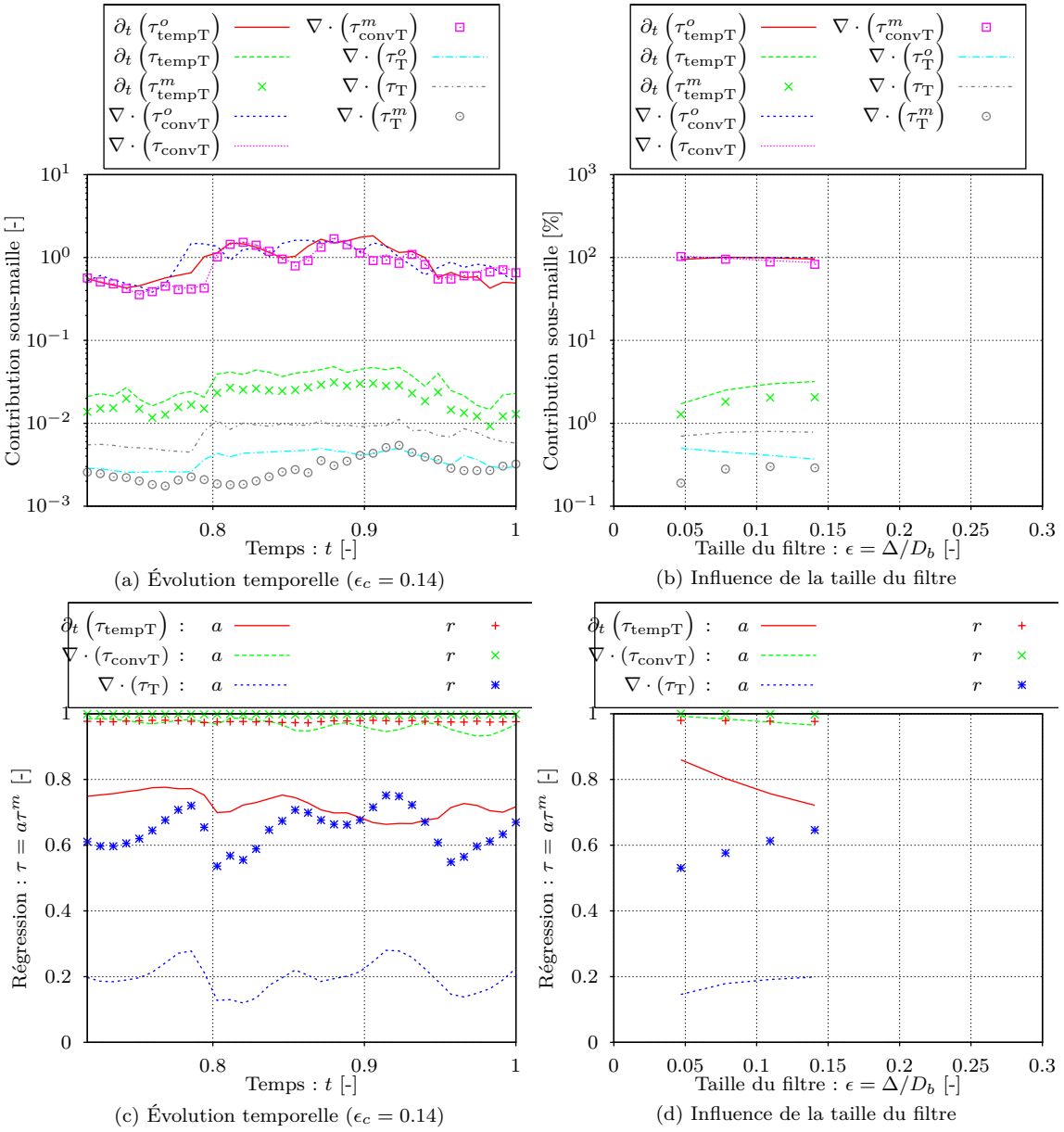
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.53 – Contributions sous-maille à l'équation de transport de quantité de mouvement.



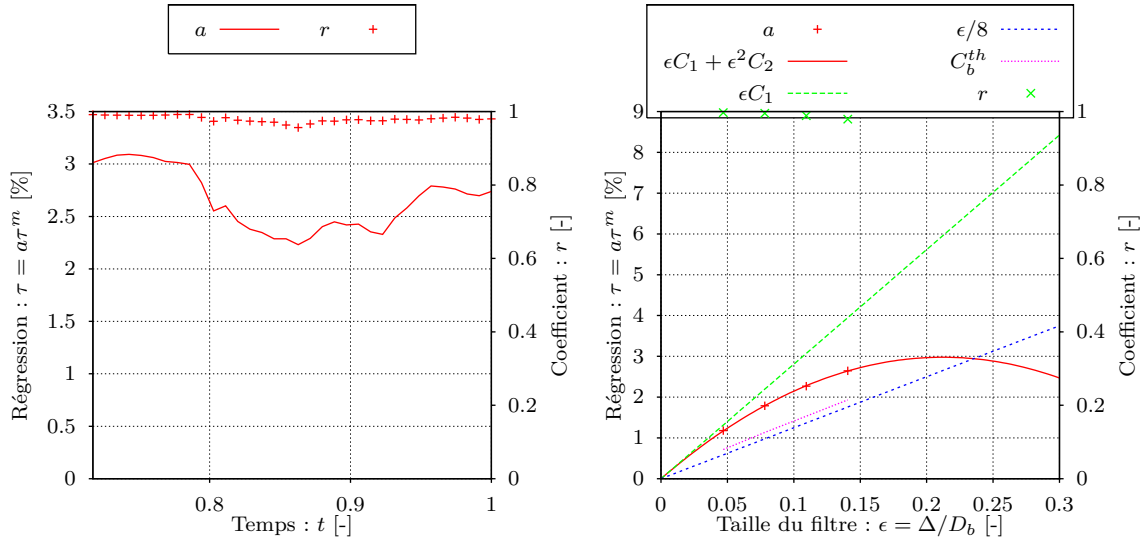
(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

(c) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(d) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.54 – Contributions sous-maille à l'équation d'énergie.



(a) Évolution temporelle ($\epsilon_c = 0.14$)

(b) Influence de la taille du filtre

FIGURE 3.55 – Corrélation entre la température interfaciale et le taux de changement de phase.

Chapitre 4

Échelle macroscopique

Au chapitre 2, nous avons proposé le système d'équations (2.97) pour régir l'évolution des variables mésoscopiques décrivant un système diphasique avec changement de phase. Le chapitre 3 apporte de premiers résultats validant cette étape. Ainsi, nous avons complété la première étape de changement d'échelle présentée en introduction (Fig. 5, p. 5). Afin de bénéficier des méthodes de résolution développées pour traiter des problèmes diphasiques à l'échelle locale instantanée, il est nécessaire de trouver une formulation discontinue du problème, équivalente au système (2.97). Pour cela, les modèles sous-maille interfaciaux doivent être concentrés sur des interfaces *macroscopiques* équivalentes sous la forme de termes sources. La description du problème macroscopique nécessite de déterminer la position de l'interface macroscopique équivalente, sa vitesse de déplacement et d'exprimer des conditions de saut à cette interface (vitesse, quantité de mouvement, flux...).

Pour déterminer ces éléments à partir de la description mésoscopique d'une zone de transition, deux méthodes peuvent être utilisées : (i) l'analyse générique des processus interfaciaux (AGPI) et (ii) la méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR). Après avoir décrit la forme des relations de fermeture recherchées, ces deux méthodes complémentaires sont présentées à la section 4.1. La première est aisée à mettre en œuvre et elle fournit une interprétation physique aux relations interfaciales qui apparaissent. Cependant, elle ne permet pas d'aboutir à des expressions fermées à l'échelle macroscopique pour déterminer les conditions de saut à l'interface. Il est donc nécessaire de mettre en œuvre la méthode des DAR pour établir les fermetures nécessaires à une description macroscopique de l'interface. Comme cette méthode est complexe, elle est d'abord introduite sur un exemple monodimensionnel réduit au bilan d'énergie (section 4.2).

Pour étudier le système mésoscopique (2.97) par la méthode des DAR, nous verrons qu'il est nécessaire de le décrire dans un repère local associé à l'interface afin de discerner la région intérieure (où les grandeurs interfaciales varient fortement) des régions extérieures (loin des interfaces). Cette description et le repère mobile associé sont présentés à la section 4.3. Nous serons alors en mesure d'effectuer les DAR sur le système diphasique complet. Seuls les principaux résultats sont présentés et discutés à la section 4.4, le détail des calculs étant donné à l'annexe 4.D.

Enfin, les résultats de l'application de la méthode des DAR sont synthétisés dans un modèle macroscopique à la section 4.5. La fermeture macroscopique proposée pour le système est alors interprétée. La pertinence et les limitations de certaines fermetures sont discutées sur la base de considérations physiques. Pour rendre le modèle plus généralement applicable, nous proposons finalement quelques modifications en regard des travaux précédents conduits sans changement de phase (Magdeleine, 2009, Toutant *et al.*, 2009a).

4.1 Présentation du problème de changement d'échelle

La description microscopique du système présentée au chapitre 1 peut être établie à partir d'une description du système beaucoup plus fine, à l'échelle de quelques dizaines de nanomètres. L'interface est alors observée si finement qu'elle apparaît comme une zone de transition où les variables varient continûment. Lorsque la limite asymptotique de ce système est étudiée, l'interface devient une surface de discontinuité. Elle se trouve alors dotée de propriétés propres comme la

tension interfaciale. Ces propriétés sont introduites pour modéliser des phénomènes à très petite échelle qui ne sont plus considérés explicitement dans la description locale instantanée présentée au chapitre 1. L'étude de la limite asymptotique d'une description à plus petite échelle permet de comprendre les phénomènes physiques sous-jacents et d'interpréter les propriétés physiques introduites. Par exemple, Anderson *et al.* (2001), Fouillet (2003) et Ruyer (2006) proposent d'étudier la limite asymptotique d'une description d'interface diffuse pour valider leur démarche et interpréter physiquement leurs résultats en les comparant à des résultats hydrodynamiques classiques.

Ici, le problème posé est similaire. Le système mésoscopique régi par les équations (2.97) présente une **zone de transition** (Fig. 4.2 et 4.1) sur laquelle les grandeurs mésoscopiques $\overline{\phi}$ varient fortement mais continûment. Dans une description macroscopique, on ne souhaite pas résoudre la variable mésoscopique $\overline{\phi}$ dans cette zone de transition. La variable mésoscopique $\overline{\phi}$ est alors remplacée par une variable macroscopique $\widetilde{\phi}$ dont l'évolution est régie par des équations de bilan classiques, identiques à celles des phases. Ce faisant, la variable macroscopique $\widetilde{\phi}$ devient discontinue à l'interface. Le saut de cette variable $\left[\!\left[\widetilde{\phi}\right]\!\right] \hat{=} \widetilde{\phi}_l^i - \widetilde{\phi}_v^i$ est *a priori* inconnu. Pour fermer le problème macroscopique, il faut le déterminer sachant que l'on souhaite que les problèmes mésoscopique et macroscopique soient équivalents, *i. e.,* que leurs solutions dans les phases loin de la zone interfaciale soient identiques. Pour caractériser la différence entre les deux échelles (représentée par l'aire hachurée sur la figure 4.1), on introduit la **grandeur en excès** définie par :

$$\|\phi\|^{ex} \hat{=} \lim_{\mathcal{A}\to 0} \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{V}} \left(\overline{\phi} - \widetilde{\phi}\right) d\nu \tag{4.1}$$

La définition (4.1) est explicitée plus précisément à la section 4.4.3.2 ; elle est alors décrite à partir des variables du repère local introduit à la section 4.3.1. La figure 4.1 montre que la quantité totale de la grandeur $\overline{\phi}$ à l'échelle mésoscopique (aire sous la courbe continue rouge) est différente de celle de la grandeur macroscopique $\widetilde{\phi}$ (aire sous la courbe pointillée verte). La différence (aire hachurée) est introduite et est assignée à l'interface discontinue de l'échelle macroscopique pour que la quantité totale de la grandeur ϕ soit conservée entre les deux échelles de description et pour que les variables de l'échelle macroscopique suivent la même évolution que celles de l'échelle mésoscopique dans les phases (*i. e.,* en dehors de la zone de transition). Ainsi, les deux descriptions seront équivalentes si on est capable de déterminer l'effet de cette grandeur en excès sur les conditions aux limites à imposer à l'interface (*e. g.,* modification de la valeur du saut $\left[\!\left[\widetilde{\phi}\right]\!\right]$ ou concentration de l'excès dans un terme source localisé à l'interface, Fig. 4.1).

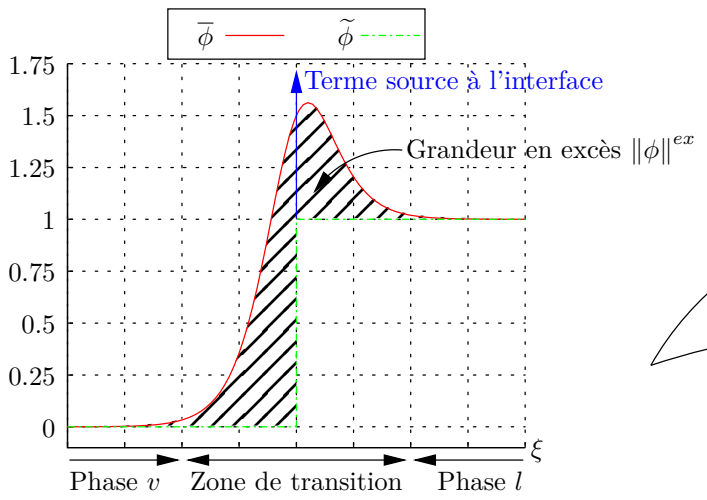


FIGURE 4.1 – Définition d'une grandeur en excès.

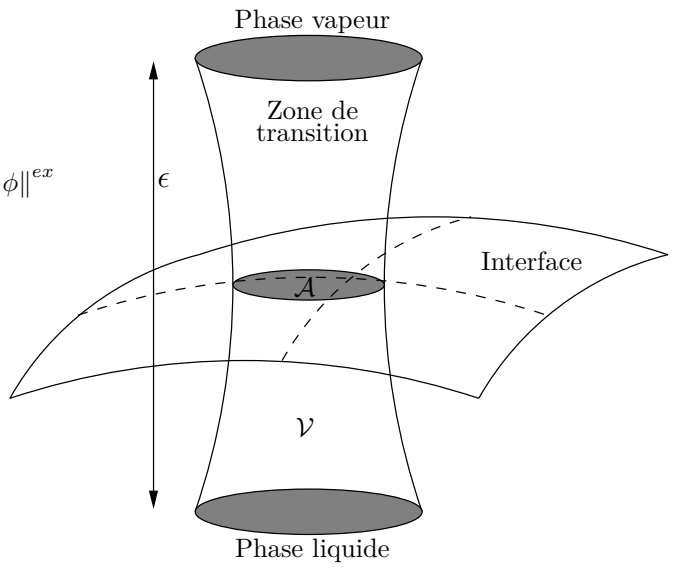


FIGURE 4.2 – Description de la zone de transition.

En guise de préambule, nous débutons cette section par la présentation du système macroscopique régissant l'évolution des variables macroscopiques $\widetilde{\phi}$ dans les phases afin de mettre en évidence la forme des relations de fermeture recherchées (section 4.1.1). Ensuite, nous présentons deux méthodes de changement d'échelle. Dans un premier temps, l'analyse générique des processus interfaciaux (AGPI) est appliquée au système mésoscopique (2.97) pour interpréter les grandeurs en excès qui apparaissent dans les fermetures (section 4.1.2). Dans un deuxième temps, on présente la méthode des DAR qui permet de déterminer ces fermetures (section 4.1.3).

4.1.1 Forme des relations de fermeture recherchées

Pour présenter le problème plus concrètement, cette section préliminaire décrit le problème macroscopique ouvert que l'on obtient en construisant un système monofluide par la même démarche qu'à l'échelle microscopique. Cette description se compose d'équations d'évolution dans les phases et de relations de saut à l'interface ; ces deux ensembles doivent être déterminés comme nous allons le voir dans cette section. La description dans les phases paraît assez naturelle loin des interfaces. En étendant sa validité jusqu'aux "interfaces", nous allons mettre en exergue la forme des relations de sauts requises pour décrire complètement le système à l'échelle macroscopique, sans pour autant être capable de déterminer explicitement ces sauts. À la fin de cette section, nous insistons sur l'analogie entre le système macroscopique que nous souhaitons établir et la description classique d'un système diphasique à l'échelle microscopique.

Loin dans les phases, la description mésoscopique du système (2.97) dégénère naturellement vers les équations classiques de simulation des grandes échelles monophasique

$$\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_k = 0 \tag{4.2a}$$

$$\frac{\partial \left(\widetilde{\rho}_k \, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho}_k \, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}_k + \widetilde{C}_k\right) = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla \cdot \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} - \nabla \widetilde{p}_k \tag{4.2b}$$

$$\frac{\partial \left(\widetilde{\rho c_p}_k \, \widetilde{T}_k\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho c_p}_k \, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \widetilde{T}_k + \widetilde{F}_k\right) = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \nabla \cdot \left(\widetilde{k}_k \, \nabla \widetilde{T}_k\right) \tag{4.2c}$$

avec $\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} \hat{=} \widetilde{\mu}_k \left(\nabla \widetilde{\boldsymbol{v}}_k + \nabla^T \widetilde{\boldsymbol{v}}_k\right)$. Les modèles sous-maille convectifs $\widetilde{C}_k = \widetilde{\rho}_k \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}_k} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}_k \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}_k\right)$ et $\widetilde{F}_k = \widetilde{\rho c_p}_k \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k \widetilde{T}_k} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}_k \, \overline{\widetilde{T}}_k\right)$ ne s'annulent pas dans les phases puisqu'ils traduisent respectivement les corrélations vitesse/vitesse et vitesse/température. **Ces équations sont celles de la SGE monophasique lorsque l'hypothèse de similarité d'échelles est utilisée.** Cependant, elles doivent être résolues jusqu'à l'interface et pas seulement loin de la discontinuité. **En proche interface**, le système macroscopique n'est pas défini de manière univoque et **les équations d'évolution doivent être déterminées**. Pour étendre ce système jusqu'à l'interface macroscopique équivalente et ainsi définir les équations macroscopiques décrivant l'écoulement dans chaque phase, il est nécessaire de trouver une définition alternative plus générale aux termes $\widetilde{C}_k$ et $\widetilde{F}_k$. En effet, l'opérateur filtre $\bar{\cdot}$ n'étant pas local, il ne peut pas être appliqué à des variables phasiques au voisinage de l'interface. Une multitude de choix s'offrent à nous, la seule contrainte étant que $\widetilde{C}_k$ et $\widetilde{F}_k$ dégénèrent vers les définitions données ci-dessus dans les phases. Citons par exemple les 3 possibilités suivantes :

(i) Le filtre explicite peut être remplacé par un filtre phasique : $\overline{\phi}^k = \overline{\chi_k \, \phi_k} / \overline{\chi_k}$ (*cf.* approche conditionnelle proposée par Sagaut et Germano, 2005) ;

(ii) La variable filtrée peut être prolongée par 0 dans l'autre phase ;

(iii) La variable filtrée peut être prolongée par la valeur de son homologue dans l'autre phase, créant ainsi une variable monofluide : $\widetilde{C}_k = \widetilde{\rho}_k \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\right)$ et $\widetilde{F}_k = \widetilde{\rho c_p}_k \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \widetilde{T}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \, \overline{\widetilde{T}}\right)$.

Parmi ces choix, seule la dernière proposition conduit aux relations simples suivantes :

$$\widetilde{C} \hat{=} \widetilde{\chi}_k \widetilde{C}_k = \widetilde{\rho} \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\right) \quad \text{et} \quad \widetilde{F} \hat{=} \widetilde{\chi}_k \widetilde{F}_k = \widetilde{\rho c_p} \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \widetilde{T}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \, \overline{\widetilde{T}}\right) \tag{4.3}$$

Nous adoptons le prolongement (iii) dans la suite de ce raisonnement car il permet **d'isoler la modélisation de la turbulence monophasique** (*i. e.,* dans les phases) des corrélations diphasiques (à l'interface).

Pour construire le système macroscopique, on adopte la même méthodologie qu'à l'échelle microscopique (*cf.* annexe A). Il y a néanmoins une différence importante avec l'échelle microscopique. On cherche à présent à déterminer les relations de saut à imposer à l'interface alors qu'à l'échelle microscopique ces conditions sont connues et rappelées au système (4.15) en fin de section. En multipliant le système (4.2) par l'indicatrice de phase macroscopique $\widetilde{\chi}_k$, en utilisant les conventions de sommation d'Einstein et en définissant les variables macroscopiques monofluides par $\widetilde{\phi} \hat{=} \widetilde{\chi}_k \, \widetilde{\phi}_k$, on obtient

$$\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}} = \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \tag{4.4a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\widetilde{\rho}\, \widetilde{\boldsymbol{v}}\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho}\, \widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}} + \widetilde{C}\right) - \widetilde{\rho}_k \, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \left(\frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial t} + \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k\right) - \widetilde{C}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \\ = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla \cdot \left(\widetilde{\chi}_k \, \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k}\right) - \frac{1}{\mathrm{Re}} \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k - \nabla \widetilde{p} + \widetilde{p}_k \nabla \widetilde{\chi}_k \end{aligned} \tag{4.4b}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\widetilde{\rho c_p}\, \widetilde{T}\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho c_p}\, \widetilde{\boldsymbol{v}} \widetilde{T} + \widetilde{F}\right) - \widetilde{\rho c_p}_k \, \widetilde{T}_k \left(\frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial t} + \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k\right) - \widetilde{F}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \\ = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \nabla \cdot \left(\widetilde{\chi}_k \, \widetilde{k}_k \nabla \widetilde{T}_k\right) - \frac{1}{\mathrm{Pe}} \widetilde{k}_k \nabla \widetilde{T}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \end{aligned} \tag{4.4c}$$

où $\widetilde{C}$ et $\widetilde{F}$ sont définis à partir des variables monofluides par : $\widetilde{C} = \widetilde{\rho} \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\right)$ et $\widetilde{F} = \widetilde{\rho c_p} \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \widetilde{T}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\, \overline{\widetilde{T}}\right)$. $\widetilde{C}_k$ et $\widetilde{F}_k$ sont définis de manière mixte, en couplant l'utilisation de variables phasiques pour les propriétés thermophysiques et de variables monofluides : $\widetilde{C}_k = \widetilde{\rho}_k \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\right)$ et $\widetilde{F}_k = \widetilde{\rho c_p}_k \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \widetilde{T}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\, \overline{\widetilde{T}}\right)$. Bien qu'elle puisse paraître étrange, cette définition est nécessaire pour établir une formulation classique des modèles sous-maille dans le terme de convection. Elle conduit aux sauts suivants :

$$\widetilde{C}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = \left[\!\left[\widetilde{C}\right]\!\right] \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\, \widetilde{\delta}^i = \left(\widetilde{C}_l - \widetilde{C}_v\right) \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\, \widetilde{\delta}^i = [\![\widetilde{\rho}]\!] \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\right) \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\, \widetilde{\delta}^i \tag{4.5a}$$

$$\widetilde{F}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = \left[\!\left[\widetilde{F}\right]\!\right] \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\, \widetilde{\delta}^i = \left(\widetilde{F}_l - \widetilde{F}_v\right) \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\, \widetilde{\delta}^i = [\![\widetilde{\rho c_p}]\!] \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \widetilde{T}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\, \overline{\widetilde{T}}\right) \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\, \widetilde{\delta}^i \tag{4.5b}$$

Traitement de la diffusion On souhaite transformer le terme de diffusion pour l'exprimer à partir de variables monofluides, en suivant le même raisonnement qu'à l'échelle microscopique (*cf.* bilan de quantité de mouvement, section 1.1.2). Pour simplifier l'écriture, on raisonne uniquement sur $\widetilde{\mu} \nabla \widetilde{\boldsymbol{v}}$, le transposé se traitant de la même manière. L'application de la décomposition (1.10) aux variables macroscopiques conduit à :

$$\nabla \widetilde{\boldsymbol{v}} = \widetilde{\chi}_k \nabla \widetilde{\boldsymbol{v}}_k + \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes \nabla \widetilde{\chi}_k \tag{4.6}$$

Cette écriture montre que $\nabla \widetilde{\boldsymbol{v}}$ contient une distribution de Dirac dès lors que la vitesse est discontinue à l'interface. Par conséquent, sa multiplication par une fonction Heaviside (la viscosité) n'a pas de sens mathématique. On ne peut donc pas formellement introduire le tenseur $\widetilde{\mu} \nabla \widetilde{\boldsymbol{v}}$. On introduit donc le tenseur de diffusion :

$$\mathcal{S}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \hat{=} \widetilde{\mu} \left[\nabla \widetilde{\boldsymbol{v}} + \nabla^T \widetilde{\boldsymbol{v}} - \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes \nabla \widetilde{\chi}_k - \nabla \widetilde{\chi}_k \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}_k\right] \quad \text{tel que} \quad \mathcal{S}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}} = \widetilde{\chi}_k \, \widetilde{\mu}_k \left(\nabla \widetilde{\boldsymbol{v}}_k + \nabla^T \widetilde{\boldsymbol{v}}_k\right) = \widetilde{\chi}_k \, \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} \tag{4.7}$$

À l'échelle microscopique, l'homologue de $\mathcal{S}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}}$ est $\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}$. La relation de saut microscopique (1.9) permet d'exprimer le saut de vitesse à l'interface en fonction du taux de changement de phase microscopique (variable principale du système monofluide). **À l'échelle macroscopique, une fermeture est requise pour le saut de vitesse à l'interface** :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes \nabla \widetilde{\chi}_k = [\![\widetilde{\boldsymbol{v}}]\!] \otimes \widetilde{\boldsymbol{n}}\, \widetilde{\delta}^i \tag{4.8}$$

On s'attend naturellement à ce qu'elle soit exprimée en fonction du taux de changement de phase macroscopique $\widetilde{m}$ et éventuellement d'autres variables.

Traitement de la conduction Par analogie entre vitesse et température, on constate aussi que le terme de conduction nécessite un traitement particulier. En effet, dans le cas général, la température macroscopique peut être discontinue à la traversée de l'interface (*e. g.,* en présence d'une résistance d'interface) et le terme de conduction monofluide $\widetilde{k}\nabla\widetilde{T}$ n'est pas défini. Un raisonnement similaire au précédent permet d'introduire le vecteur de conduction :

$$\mathcal{Q}_{\widetilde{T}} \hat{=} \widetilde{k}\left[\nabla\widetilde{T} - \widetilde{T}_k\nabla\widetilde{\chi}_k\right] \quad \text{tel que} \quad \mathcal{Q}_{\widetilde{T}} = \widetilde{\chi}_k\,\widetilde{k}_k\nabla\widetilde{T}_k = \widetilde{\chi}_k\,\mathcal{Q}_{\widetilde{T}_k} \tag{4.9}$$

À l'échelle microscopique, l'homologue de $\mathcal{Q}_{\widetilde{T}}$ est $-\boldsymbol{q}$. La condition microscopique d'équilibre thermodynamique local à l'interface indique que le saut de température à l'interface est nul, indépendamment du taux de changement de phase microscopique (dans les limites admises pour notre étude). **À l'échelle macroscopique, une fermeture est requise pour le saut de température à l'interface** $\widetilde{T}_l^i - \widetilde{T}_v^i$. Dans le cas général, ce saut peut exister et s'exprimer en fonction du taux de changement de phase macroscopique $\widetilde{m}$ et éventuellement d'autres variables.

Les fermetures recherchées En utilisant les remarques des deux paragraphes précédents, transformons le système (4.4) pour mettre en avant les termes de fermeture recherchés

$$\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boxed{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k\cdot\nabla\widetilde{\chi}_k} \tag{4.10a}$$

$$\frac{\partial\left(\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\right)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\otimes\widetilde{\boldsymbol{v}} + \widetilde{C}\right) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla\cdot\mathcal{S}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}} - \nabla\widetilde{p} + \boxed{\left[\widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i\right) - \widetilde{C}_k - \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} + \widetilde{p}_k\boldsymbol{I}\right]\cdot\nabla\widetilde{\chi}_k} \tag{4.10b}$$

$$\frac{\partial\left(\widetilde{\rho c_p}\,\widetilde{T}\right)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\widetilde{\rho c_p}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\widetilde{T} + \widetilde{F}\right) = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\nabla\cdot\mathcal{Q}_{\widetilde{T}} + \boxed{\left[\widetilde{\rho c_p}_k\,\widetilde{T}_k\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i\right) - \widetilde{F}_k - \frac{1}{\mathrm{Pe}}\widetilde{k}_k\nabla\widetilde{T}_k\right]\cdot\nabla\widetilde{\chi}_k} \tag{4.10c}$$

avec :

$$\mathcal{S}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \hat{=} \widetilde{\mu}\left(\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}} + \nabla^T\widetilde{\boldsymbol{v}} - \left(\boxed{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k\otimes\nabla\widetilde{\chi}_k + \nabla\widetilde{\chi}_k\otimes\widetilde{\boldsymbol{v}}_k}\right)\right) \tag{4.11a}$$

$$\mathcal{Q}_{\widetilde{T}} \hat{=} \widetilde{k}\left(\nabla\widetilde{T} - \boxed{\widetilde{T}_k\nabla\widetilde{\chi}_k}\right) \tag{4.11b}$$

La vitesse de déplacement $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ de l'interface discontinue sous-résolue $\widetilde{\chi}_v$ est formellement définie par l'équation de transport de l'indicatrice vapeur :

$$\frac{\partial\widetilde{\chi}_v}{\partial t} + \boxed{\widetilde{\boldsymbol{v}}_i}\cdot\nabla\widetilde{\chi}_v = 0 \tag{4.12}$$

La normale à cette interface est définie par :

$$\nabla\widetilde{\chi}_v = -\widetilde{\boldsymbol{n}}\,\widetilde{\delta}^i$$

Par ailleurs, pour que la description du système soit complète, une équation caractérisant l'équilibre thermodynamique local d'une interface liquide/vapeur doit être ajoutée :

$$\boxed{f\left(\widetilde{T},\,\widetilde{m},\,\ldots\right)} = 0 \tag{4.13}$$

Pour fermer le système, il faut localiser l'interface macroscopique à tout instant (*i. e.,* être capable de définir sa vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$), déterminer une condition sur $\widetilde{T}_i$ analogue à la condition de saturation

de l'interface et trouver une expression pour les sources à l'interface macroscopique définies par :

$$\textbf{Masse} \qquad \widetilde{S}_m = \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \tag{4.14a}$$

$$\textbf{QdM} \qquad \widetilde{\boldsymbol{S}}_q = \left[\widetilde{\rho}_k \, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i \right) - \widetilde{C}_k - \frac{1}{\mathrm{Re}} \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} + \widetilde{p}_k \boldsymbol{I} \right] \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \tag{4.14b}$$

$$\textbf{Énergie} \qquad \widetilde{S}_e = \left[\widetilde{\rho c_p}_k \, \widetilde{T}_k \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i \right) - \widetilde{F}_k - \frac{1}{\mathrm{Pe}} \widetilde{k}_k \nabla \widetilde{T}_k \right] \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \tag{4.14c}$$

$$\textbf{Diffusion} \qquad \widetilde{\boldsymbol{S}}_d = \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes \nabla \widetilde{\chi}_k + \nabla \widetilde{\chi}_k \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \tag{4.14d}$$

$$\textbf{Flux} \qquad \widetilde{S}_f = \widetilde{T}_k \nabla \widetilde{\chi}_k \tag{4.14e}$$

Les trois premières relations à fermer du système (4.14) traduisent respectivement les transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie permettant de respecter les bilans aux interfaces. Les deux dernières seront fermées dès que l'on sera capable de déterminer les sauts de vitesse et de température à l'interface.

Tous les termes encadrés doivent être définis à partir de variables macroscopiques. Dans les sections suivantes, nous présentons deux méthodes de changement d'échelle complémentaires pour mieux comprendre, puis pour fermer ces termes. Avant cela, rappelons brièvement les fermetures microscopiques d'un système diphasique liquide/vapeur pour montrer qu'à l'échelle microscopique, des propriétés physiques spécifiques (*e. g.,* tension de surface) et des relations particulières (*e. g.,* condition de saturation) existent pour fermer le système (4.10-4.13).

Rappel des fermetures microscopiques d'un système diphasique liquide/vapeur

Bilan de masse À l'échelle microscopique, la relation (1.7) permet de définir :

- Le saut de vitesse normale à l'interface : $\boldsymbol{v}_k \cdot \nabla \chi_k = -\dot{m}_v \left(\dfrac{1}{\rho_v} - \dfrac{1}{\rho_l} \right) \delta^i$ (4.15a)
- La vitesse de déplacement de l'interface : $(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_i) \cdot \nabla \chi_k = -\dfrac{\dot{m}_k}{\rho_k} \delta^i$ (pas de sommation sur k) (4.15b)

Bilan de quantité de mouvement L'équation (1.9) définit le saut de vitesse microscopique à partir du taux de changement de phase :

$$\boldsymbol{v}_v - \boldsymbol{v}_l = \dot{m}_v \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) \boldsymbol{n}_v \tag{4.15c}$$

Par ailleurs, le saut de quantité de mouvement (1.8b) est donné par :

$$-\boldsymbol{v}_k \dot{m}_k \delta^i - p_k \boldsymbol{n}_k \delta^i + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \boldsymbol{n}_k \delta^i = \left(\nabla_s \sigma \right) \delta^i - \left(\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} \right) \sigma \boldsymbol{n} \delta^i \tag{4.15d}$$

Bilan d'entropie Le bilan d'entropie à l'interface conduit à la relation (1.8d) qui exprime à la fois la condition de continuité des températures à l'interface

$$T_k \nabla \chi_k = 0 \tag{4.15e}$$

et l'égalité des enthalpies libres massiques à une interface liquide/vapeur qui se traduit sur le plan thermique par :

$$T_k^i = 0 \tag{4.15f}$$

Bilan d'énergie L'équation de saut d'enthalpie (1.8c) est la suivante :

$$\rho_k \, h_k \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \boldsymbol{v}_k \cdot \nabla \chi_k \right) - k_k \nabla T_k \cdot \nabla \chi_k = -\dot{m}_l \mathcal{L}^{vap} \delta^i \tag{4.15g}$$

Les sept équations du système (4.15) constituent les fermetures microscopiques d'un système diphasique liquide/vapeur.

4.1.2 Analyse générique des processus interfaciaux

Cette méthode de changement d'échelle est présentée en détail dans Edwards *et al.* (1991). Elle repose sur une description du système à deux échelles différentes : (i) une échelle mésoscopique, associée à un observateur mésoscopique, pour laquelle les champs sont continus et (ii) une échelle macroscopique, associée à un observateur macroscopique pour qui les champs sont discontinus. Le lieu de cette discontinuité définit l'interface. Elle se situe *a priori* à une position quelconque à l'intérieur de la zone de transition car l'observateur macroscopique n'est pas en mesure de distinguer l'épaisseur de cette zone. Pour l'observateur mésoscopique, il n'y a pas d'interface mais simplement une zone de transition où les variables évoluent rapidement. À chacune de ces échelles d'observation est associée une longueur caractéristique : (i) l'épaisseur de la zone de transition (traduisant la taille Δ du filtre permettant le passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique) pour la région interfaciale inhomogène et (ii) l'échelle caractéristique du problème (*e. g.,* le diamètre moyen d'une inclusion D_b) pour les phases homogènes.

La différence entre ces deux observations des champs est limitée spatialement à la zone de transition. Elle se traduit de manière intégrale par la grandeur en excès définie par l'équation (4.1) et représentée par l'aire hachurée sur la figure 4.1, p. 146. L'objectif de l'AGPI est d'étudier les équations d'évolution qui gouvernent ces grandeurs en excès en évaluant la différence entre les deux descriptions (mésoscopique et macroscopique) pour mettre en évidence les relations de saut à l'interface. Comme le mentionnent Edwards *et al.* (1991), cette méthode est simple à mettre en œuvre et elle permet d'approcher un problème de manière très générique. **L'interprétation des résultats est donc plus aisée** qu'avec une méthode de résolution plus lourde (*e. g.,* la méthode des DAR). Cependant, l'AGPI ne propose pas d'expression fermée à l'échelle macroscopique pour déterminer les conditions de saut à l'interface. Les grandeurs qui interviennent sont des grandeurs en excès définies à partir du champ mésoscopique, inaccessibles dans le problème macroscopique. Pour pallier ce problème, une étape supplémentaire de modélisation est nécessaire.

Nous allons présenter des équations de conservation génériques pour une grandeur $\mathcal{P}$ quelconque (masse, quantité de mouvement, énergie...). Le détail du raisonnement permettant d'établir ces équations génériques est donné dans Edwards *et al.* (1991). Nous rappelons simplement le principe de la démarche avant de l'appliquer aux bilans de l'échelle mésoscopique.

Équation mésoscopique Soient $\psi(\boldsymbol{x},t)$ la densité volumique de $\mathcal{P}$, $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t)$ le flux diffusif (sortant) de $\mathcal{P}$, $\pi(\boldsymbol{x},t)$ et $\zeta(\boldsymbol{x},t)$ les taux de production de $\mathcal{P}$ d'origine interne (*e. g.,* réaction chimique) et externe respectivement. L'application d'un bilan classique à un volume élémentaire conduit à :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\psi + \boldsymbol{\phi}) - \pi - \zeta = 0 \tag{4.16}$$

En introduisant le flux convecto-diffusif relatif aux coordonnées locales associées à l'interface (ξ_1, ξ_2, ξ_3) (*cf.* section 4.3.1 pour la définition précise de ces coordonnées)

$$\boldsymbol{j} \hat{=} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_i^m)\,\psi + \boldsymbol{\phi} \tag{4.17}$$

on obtient l'équation mésoscopique valable dans les régions extérieures et dans la région intérieure

$$\frac{D\psi}{Dt} + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m)\,\psi + \nabla \cdot \boldsymbol{j} - \pi - \zeta = 0 \tag{4.18}$$

où $\boldsymbol{v}_i^m$ est la vitesse des coordonnées locales (ξ_1, ξ_2, ξ_3) et D/Dt est la dérivée lagrangienne associée :

$$\frac{D\psi}{Dt} \hat{=} \left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{\xi_1,\xi_2,\xi_3} = \left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla \psi \tag{4.19}$$

L'identification des termes génériques ψ, $\boldsymbol{\phi}$, $\pi + \zeta$ et $\boldsymbol{j}$ avec les équations du système mésoscopique (2.97) est synthétisée dans le tableau 4.1, p. 156. Elle permet d'interpréter les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie à l'échelle mésoscopique. Les termes sous-maille contribuent au flux diffusif $\boldsymbol{\phi}$ pour annihiler l'étalement du saut de vitesse par le filtre et ainsi reconstruire la quantité mésoscopique ψ. En ce qui concerne le bilan de masse, la divergence non

nulle du champ $\overline{m}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s$ produit de la masse. C'est une difficulté de notre modèle qui nécessite une analyse plus poussée, conformément au paragraphe 2.2.6.

Les productions de quantité de mouvement et d'énergie respectivement par les forces de tension de surface et par le taux de changement de phase correspondent aux relations microscopiques classiques (Delhaye *et al.*, 1981b).

Équation macroscopique dans les phases Dans chaque phase, l'équation (4.18) dégénère pour donner :

$$\frac{D\widetilde{\psi}}{Dt} + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m)\,\widetilde{\psi} + \nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{j}} - \widetilde{\pi} - \widetilde{\zeta} = 0 \tag{4.20}$$

En retranchant à l'équation (4.18) l'analogue à l'échelle macroscopique (4.20) puis en intégrant sur un volume $\mathcal{V}(t)$ contenant l'interface (*cf.* p. 146, Fig. 4.2 pour la définition), le passage à la limite lorsque l'épaisseur ϵ de la zone de transition (*cf.* p. 146, Fig. 4.2 pour la définition) tend vers 0 permet d'obtenir (Edwards *et al.*, 1991, chap. 15)

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{A}(t)} \|\psi\|^{ex}(\boldsymbol{x}_s)da + \int_{\partial\mathcal{A}(t)} \|\boldsymbol{j}\|^{ex}(\boldsymbol{x}_s)d\boldsymbol{l} + \int_{\mathcal{A}(t)} \boldsymbol{n}\cdot[\![\boldsymbol{j}]\!]\,da - \int_{\mathcal{A}(t)} \left[\|\pi\|^{ex}(\boldsymbol{x}_s) + \|\zeta\|^{ex}(\boldsymbol{x}_s)\right] da = 0 \tag{4.21}$$

en introduisant la définition des grandeurs en excès :

$$\int_{\mathcal{A}(t)} \|\lambda\|^{ex}(\boldsymbol{x}_s)da = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathcal{V}(t)} \Big(\lambda(\boldsymbol{x}_s,n) - \widetilde{\lambda}(\boldsymbol{x}_s,n)\Big)\,d\nu \tag{4.22}$$

En utilisant l'analogue du théorème de transport de Reynolds pour une surface et en notant que l'aire $\mathcal{A}$ est choisie arbitrairement, on obtient l'équation locale décrivant l'évolution des grandeurs en excès

$$\frac{D_s\|\psi\|^{ex}}{Dt} - 2\kappa v_n\|\psi\|^{ex} + \nabla_s\cdot(\boldsymbol{I}_s\cdot\|\boldsymbol{j}\|^{ex}) - \|\pi\|^{ex} - \|\zeta\|^{ex} = -\boldsymbol{n}\cdot\left[\!\!\left[\widetilde{\boldsymbol{j}}\right]\!\!\right] \tag{4.23}$$

où κ est la courbure moyenne, $\boldsymbol{I}_s = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$ le tenseur de projection sur la surface, $\nabla_s \hat{=} \boldsymbol{I}_s\cdot\nabla$ l'opérateur de gradient surfacique, $v_n = \boldsymbol{v}_i^m(3)(\xi_3 = \xi_3^i)$ la restriction à l'interface de la vitesse normale du repère de coordonnées (et donc celle de l'interface mésoscopique) et D_s/Dt la dérivée lagrangienne surfacique définie par :

$$\frac{D_s\psi}{Dt} \hat{=} \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\xi_1,\xi_2,\xi_3^i} \tag{4.24}$$

En utilisant la définition $\widetilde{\boldsymbol{j}} \hat{=} (\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}_i^m)\,\widetilde{\psi} + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}$, la relation $\boldsymbol{I}_s\cdot\|\boldsymbol{j}\|^{ex} = \|\boldsymbol{I}_s\cdot\boldsymbol{v}\psi\|^{ex} + \boldsymbol{I}_s\cdot\|\boldsymbol{\phi}\|^{ex}$ permet d'établir la forme canonique de l'équation générique de conservation gouvernant les phénomènes de transport pour des interfaces non matérielles (Edwards *et al.*, 1991, Éq. (15.7-20)) :

$$\frac{D_s\|\psi\|^{ex}}{Dt} - 2\kappa v_n\|\psi\|^{ex} + \nabla_s\cdot\|\boldsymbol{I}_s\cdot\boldsymbol{v}\psi\|^{ex} + \nabla_s\cdot(\boldsymbol{I}_s\cdot\|\boldsymbol{\phi}\|^{ex}) - \|\pi+\zeta\|^{ex} = -\boldsymbol{n}\cdot\left[\!\!\left[(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}_i^m)\,\widetilde{\psi} + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right]\!\!\right] \tag{4.25}$$

La relation (4.25) relie le saut des grandeurs macroscopiques (membre de droite) à l'évolution des grandeurs en excès. Or, ces dernières sont définies à partir de grandeurs mésoscopiques. Cette analyse générique des processus interfaciaux permet de **mettre en évidence la forme des fermetures** recherchées pour les sauts dans les équations de bilan (donnés par les relations (4.10)), **sans pour autant fournir de fermeture**. Il faut avoir recours à la méthode des DAR pour trouver une formulation à ces fermetures. Cette analyse contribue à donner un sens physique à chacun des termes qui vont apparaître.

Bilan de masse À l'échelle mésoscopique, le bilan de masse peut être obtenu à partir de l'équation de transport de l'interface en suivant la démarche présentée à la section 2.2.6 (*cf.* Éq. (2.54)) :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}} + (1-\overline{\rho}\,\overline{v})\,\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau^{nm}_{\text{temp}}\right) - \left(\nabla \cdot \left(\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s\right) + \overline{\rho}\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\rho\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho}\,\overline{\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}\right) = 0 \quad (4.26)$$

Le terme sous-maille τ^{nm}_{temp} est localisé dans la région intérieure et nul dans les phases. Par conséquent, la grandeur macroscopique associée est nulle dans chaque phase et ne présente pas de saut : $\left[\!\left[\widetilde{\tau^{nm}_{\text{temp}}}\right]\!\right] = 0$. À l'échelle macroscopique, les termes sous-maille τ spécifiques à l'interface ainsi que la corrélation $(\overline{\rho v} - \overline{\rho}\,\overline{v}) = (1-\overline{\rho}\,\overline{v})$ disparaissent. Le flux de masse macroscopique à l'interface est alors donné par : $\widetilde{\boldsymbol{j}}_\rho = \widetilde{\rho}(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}^m_i)$. Cette relation est à rapprocher de la définition du taux de changement de phase à l'échelle microscopique (1.7), qui amène par analogie à la proposition suivante pour définir le taux de changement de phase macroscopique : $\widetilde{m} \hat{=} \widetilde{\rho}(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i)\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}$, où $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ est une inconnue du problème représentant la vitesse de l'interface macroscopique. En première approximation, on peut considérer que la vitesse du repère $\boldsymbol{v}^m_i$ et la vitesse de l'interface macroscopique sont confondues.[1] Dans ce cas, le flux de masse macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{j}}_\rho$ décrit par l'AGPI est relié au taux de transfert de masse macroscopique par la relation :

$$\widetilde{m} \hat{=} \widetilde{\rho}(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i)\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}} \approx \widetilde{\boldsymbol{j}}_\rho\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}} \hat{=} \widetilde{\rho}(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}^m_i)\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}} \quad (4.27)$$

L'équation générique macroscopique (4.25) traduisant la conservation à l'interface devient pour la masse volumique $\psi \equiv \overline{\rho}$:

$$(D_s - 2\kappa v_n)\,\|\overline{\rho}\|^{ex} + \underbrace{\nabla_s\cdot\|\boldsymbol{I}_s\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,\overline{\rho}\|^{ex} + \nabla_s\cdot\left(\boldsymbol{I}_s\cdot\left\|\tau^{nm}_{\text{temp}} + (1-\overline{\rho}\,\overline{v})\,\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s\right\|^{ex}\right)}_{\textbf{(I)}} \quad (4.28)$$

$$\underbrace{-\left\|-\left(\nabla\cdot\left(\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s\right) + \overline{\rho}\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\rho\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\rho}\,\overline{\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}\right)\right\|^{ex}}_{\|\pi_\rho\|^{ex}} = -\widetilde{\boldsymbol{n}}\cdot[\![(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}^m_i)\,\widetilde{\rho}]\!]$$

Les deux éléments de **(I)** se combinent pour approcher $\nabla_s\cdot\|\boldsymbol{I}_s\cdot\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}\|^{ex}$. Ils représentent la divergence de l'excès de flux de matière. Le terme π_ρ tend vers 0 si le modèle mésoscopique est satisfaisant et conserve correctement la masse ; rappelons qu'à la figure 2.4b, p. 59, nous avons discuté de la différence de profil entre $\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}$ et $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}$ et de l'intérêt du modèle sous-maille dans le processus de reconstruction.

Nous avons déjà signalé que la position de l'interface macroscopique à l'intérieur de la zone de transition est arbitraire. Pour simplifier les formulations des bilans aux interfaces, on choisit d'annuler l'excès de masse volumique :

$$\|\rho\|^{ex} = 0 \quad (4.29)$$

Cette contrainte positionne l'interface de manière univoque dès que les masses volumiques des phases sont différentes (Jamet et Chandesris, 2009). Ainsi, on obtient la première forme des conditions de saut recherchées qui relie le flux de masse à l'interface aux grandeurs en excès :

$$\nabla_s\cdot\|\boldsymbol{I}_s\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,\overline{\rho}\|^{ex} + \nabla_s\cdot\left(\boldsymbol{I}_s\cdot\left\|\tau^{nm}_{\text{temp}} + (1-\overline{\rho}\,\overline{v})\,\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s\right\|^{ex}\right) \approx -\widetilde{\boldsymbol{n}}\cdot[\![(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}^m_i)\,\widetilde{\rho}]\!] = -\widetilde{\boldsymbol{n}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{j}}_\rho \quad (4.30)$$

Le bilan de masse permet d'expliquer l'origine mésoscopique du saut de débit massique $[\![(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}^m_i)\,\widetilde{\rho}]\!]$ comme étant le résultat de la divergence surfacique du flux de masse en excès $\|\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}\|^{ex}$ traduisant la convection de la masse le long de l'interface. Ce bilan est synthétisé dans le tableau 4.2, p. 156. **L'équation** (4.30) **n'est pas fermée à l'échelle macroscopique** car elle exprime le saut de débit massique à partir de variables mésoscopiques (*e. g.*, $\overline{\rho}$, $\overline{\boldsymbol{v}}$ et $\overline{\dot{m}}^s$). La méthode des DAR (section 4.4) permet de donner une approximation à ces conditions de raccord entre les deux fluides à partir de variables macroscopiques uniquement.

1. Ce résultat est donné par l'ordre 0 de la méthode des DAR à la section 4.4.5.1. Il est difficile d'être plus précis dans cette analyse générique car le repère n'est pas clairement défini et le lien entre la vitesse du repère mésoscopique $\boldsymbol{v}^m_i$ et la vitesse de déplacement de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ est inconnu. Sans cette approximation, le taux de transfert de masse, naturellement défini dans cette analyse par $\widetilde{\boldsymbol{j}}_\rho\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}} \hat{=} \widetilde{\rho}\left(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}^m_i\right)\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}$, est construit à partir de la vitesse mésoscopique du repère $\boldsymbol{v}^m_i$ et l'AGPI ne fournit pas de définition rigoureuse fermée pour le taux transfert de masse macroscopique $\widetilde{m}$. En effet, le flux de masse macroscopique est ici exprimé en fonction du saut entre la vitesse du fluide et celle de l'interface mésoscopique $\boldsymbol{v}^m_i$ alors que la grandeur intéressante à l'échelle macroscopique est reliée au saut entre la vitesse du fluide et celle de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$.

Bilan de quantité de mouvement En suivant le même raisonnement, l'évolution de la quantité de mouvement le long de l'interface peut être décrite à partir de l'équation de bilan mésoscopique (2.97c) :

$$\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}^m}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}^m \otimes \overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}} - \overline{v}\,\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}})\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau^{mf}_{\text{conv}}\right) = -\nabla\overline{p} + \frac{1}{\text{Re}}\nabla\cdot\left(\mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} + \mathcal{T}\right) - \frac{\sigma^0}{\text{We}}\,\overline{\kappa}_\sigma\cdot\nabla\overline{\chi} \tag{4.31}$$

Les modèles pour les termes sous-mailles τ_{diff} et τ_{superf} ont été négligés dans la relation précédente, conformément aux conclusions du chapitre 2. Le terme sous-maille τ^{mf}_{temp} spécifique à la région interfaciale n'intervient pas dans les termes de saut. L'équation générique macroscopique (4.25) devient pour la quantité de mouvement $\psi \equiv \overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}^m \hat{=} \overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}} + \tau^{mf}_{\text{temp}}$:

$$\begin{aligned}(D_s - 2\kappa v_n)\,\|\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}^m\|^{ex} + \nabla_s\cdot\|\boldsymbol{I}_s\cdot\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}^m\otimes\overline{\boldsymbol{v}}\|^{ex} + \nabla_s\cdot\left[\boldsymbol{I}_s\cdot\left\|(\overline{\boldsymbol{v}} - \overline{v}\,\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}})\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau^{mf}_{\text{conv}} - \frac{1}{\text{Re}}\left(\mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} + \mathcal{T}\right)\right\|^{ex}\right]\\ - \nabla\,\|\overline{p}\|^{ex} - \frac{\sigma^0}{\text{We}}\,\|\overline{\kappa}_\sigma\cdot\nabla\overline{\chi}\|^{ex}\\ = -\boldsymbol{n}\cdot\left[\!\left[\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\otimes(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}^m_i) + \widetilde{\tau^{mf}_{\text{conv}}} + \widetilde{p}\boldsymbol{I} - \frac{1}{\text{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\right]\!\right]\end{aligned} \tag{4.32}$$

Cette relation traduit le bilan de quantité de mouvement au niveau de l'interface. Le saut de contrainte totale (membre de droite) résulte de la combinaison de (i) l'évolution temporelle de la quantité de mouvement sur l'interface, (ii) de la convection et de la diffusion le long de la surface, (iii) du gradient de pression en excès et (iv) de l'énergie interfaciale due à la tension de surface. Ce bilan est synthétisé dans le tableau 4.2, p. 156.

Bilan d'énergie En suivant à nouveau le même raisonnement, l'évolution de l'énergie sur l'interface peut être obtenue à partir de l'équation de bilan mésoscopique (2.97d) :

$$\frac{\partial\overline{\rho c_p\,T}^m}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\overline{\rho c_p\,T}^m\,\overline{\boldsymbol{v}} + \left(\overline{c_p\,T}^m - \overline{v}\,\overline{\rho c_p\,T}^m\right)\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau^{Tmf}_{\text{conv}}\right) = \frac{1}{\text{Pe}}\nabla^2\overline{\Theta} + \frac{\mathcal{L}^0}{\text{Ja}}\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\delta}_\sigma \tag{4.33}$$

Le terme sous-maille τ^{mf}_{tempT} spécifique à la région interfaciale n'intervient pas dans les termes de saut. L'équation générique macroscopique (4.25) traduisant les bilans à l'interface devient pour l'énergie $\psi \equiv \overline{\rho c_p\,T}^m \hat{=} \overline{\rho c_p}\,\overline{T} + \tau^m_{\text{tempT}}$:

$$\begin{aligned}(D_s - 2\kappa v_n)\left\|\overline{\rho c_p\,T}^m\right\|^{ex} + \nabla_s\cdot\left\|\boldsymbol{I}_s\cdot\overline{\rho c_p\,T}^m\overline{\boldsymbol{v}}\right\|^{ex}\\ + \nabla_s\cdot\left[\boldsymbol{I}_s\cdot\left\|\left(\overline{c_p\,T}^m - \overline{v}\,\overline{\rho c_p\,T}^m\right)\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau^{Tmf}_{\text{conv}} - \frac{1}{\text{Pe}}\nabla\overline{\Theta}\right\|^{ex}\right] - \frac{\mathcal{L}^0}{\text{Ja}}\left\|\overline{\dot{m}}^s\overline{\delta}_\sigma\right\|^{ex}\\ = -\boldsymbol{n}\cdot\left[\!\left[\widetilde{\rho c_p}\widetilde{T}\,(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}^m_i) + \widetilde{\tau^m_{\text{convT}}} - \frac{1}{\text{Pe}}\widetilde{k}\nabla\widetilde{T}\right]\!\right]\end{aligned} \tag{4.34}$$

Cette relation traduit le bilan d'énergie au niveau de l'interface. Le saut de flux d'énergie thermique à l'interface (membre de droite) résulte de la combinaison de (i) l'évolution temporelle de l'énergie thermique surfacique sur l'interface, (ii) de la convection et de la conduction le long de la surface et (iii) de la source d'énergie thermique libérée lors du changement de phase. Ce bilan est synthétisé dans le tableau 4.2, p. 156.

La grandeur en excès $\left\|\overline{\dot{m}}^s\overline{\delta}_\sigma\right\|^{ex}$ qui apparaît dans l'équation (4.34) permet de définir le taux de changement de phase macroscopique $\widetilde{\dot{m}}$ en le reliant aux transferts d'énergie. Par analogie avec le problème microscopique discontinu, on sait que la variable $\widetilde{\dot{m}}$ apparaît à la fois dans le bilan d'énergie (par la discontinuité du flux thermique à l'interface) et dans le bilan de masse (par la discontinuité de la vitesse à l'interface), reliant ainsi le transfert d'énergie (taux de changement de phase) au transfert de matière (taux de transfert de masse). Le lien avec les aspects énergétiques est clairement établit ici par la grandeur en excès $\left\|\overline{\dot{m}}^s\overline{\delta}_\sigma\right\|^{ex}$; le lien entre le taux de changement de phase macroscopique $\widetilde{\dot{m}}$ et la vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ est donné (en première approximation) par l'étude du bilan de masse précédente.

Synthèse L'identification des termes génériques liant les sauts aux interfaces aux grandeurs en excès est synthétisée dans le tableau 4.2. Le bilan de masse permet d'expliquer l'origine mésoscopique du saut de masse par la convection le long de l'interface uniquement. Il n'y a pas d'accumulation de masse sur l'interface macroscopique car nous avons choisi de la définir ainsi (comme une interface non matérielle ne portant pas de masse). Le bilan de quantité de mouvement montre que le saut de contrainte totale à l'interface macroscopique est le résultat :

(i) d'une accumulation temporelle de quantité de mouvement sur l'interface ;

(ii) de pertes par convection ou diffusion sur l'interface ;

(iii) du gradient de pression en excès ;

(iv) et des forces de tension de surface.

Enfin, le bilan d'énergie présente le saut de flux d'énergie comme la combinaison :

(i) d'une accumulation temporelle d'énergie sur l'interface ;

(ii) de pertes par convection ou conduction le long de la surface ;

(iii) et d'une source d'énergie thermique correspondant au changement de phase.

En première approximation, on peut considérer que la vitesse du repère $\boldsymbol{v}_i^m$ et la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ sont confondues. [2] Dans ce cas, **cette analyse générique** des équations de bilan de masse, d'énergie et de quantité de mouvement du système mésoscopique (2.97) **donne une interprétation aux sauts de masse, d'énergie et de quantité de mouvement** intervenant dans les fermetures du système macroscopique (*cf.* section 4.1.1). Ces sauts sont décrits aux relations (4.30), (4.32) et (4.34) par l'évolution temporelle et spatiale (le long de l'interface) des grandeurs en excès. Ces relations permettent ainsi de comprendre l'origine physique de ces sauts **sans pour autant apporter de fermetures à l'échelle macroscopique** qui les relieraient aux variables principales.

Pour que la description mésoscopique soit complète, **l'équation de transport de l'interface et la condition de saturation de l'interface** complètent le système mésoscopique (2.97) en déterminant l'évolution du taux de présence et le taux de changement de phase. Ce sont des relations spécifiques (de type condition à la limite) qui **ne peuvent pas être décrites de manière *générique*** par la relation (4.25) puisqu'elles ne s'appliquent qu'à la zone de transition. Par conséquent, l'AGPI ne fournit pas d'interprétation pour ces relations. De manière semblable, **cette analyse ne couvre pas non plus le saut de vitesse dans les directions tangentielles et le saut de température à l'interface** qui sont pourtant aussi requis pour fermer le système macroscopique (*cf.* section 4.1.1). Ainsi, dans cette analyse, seuls les sauts provenant de bilans peuvent être interprétés. C'est une autre limite de l'AGPI qui est exhibée ici.

2. Sans cette approximation, les sauts de masse, d'énergie et de quantité de mouvement exprimés par les relations (4.30), (4.32) et (4.34) ne sont pas définis rigoureusement à l'échelle macroscopique.

Propriété extensive $\mathcal{P}$	Densité volumique ψ	Flux diffusif $\boldsymbol{\phi}$	Taux de production interne et externe $\pi+\zeta$	Flux total $\boldsymbol{j}=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i^m)\,\psi+\boldsymbol{\phi}$
Masse	$\overline{\rho}$	$(1-\overline{\rho}\,\overline{v})\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\tau_{\text{temp}}^{nm}$	$\nabla\cdot\left(\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s\right)+\overline{\rho}\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ $+\overline{\rho\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}-\overline{\rho}\,\overline{\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}$	$\overline{\rho}\,(\overline{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}_i^m)+(1-\overline{\rho}\,\overline{v})\,\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s+\tau_{\text{temp}}^{nm}$
QdM	$\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}^m$	$(\overline{\boldsymbol{v}}-\overline{v}\,\overline{\rho\,\boldsymbol{v}})\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\tau_{\text{conv}}^{mf}$ $+\overline{p}\boldsymbol{I}-\frac{1}{\text{Re}}\left(\mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}+\mathcal{T}\right)$	$\dfrac{\sigma^0}{\text{We}}\overline{\kappa}_\sigma\cdot\nabla\overline{\chi}$	$\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}^m\otimes(\overline{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}_i^m)+(\overline{\boldsymbol{v}}-\overline{v}\,\overline{\rho\,\boldsymbol{v}})\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s$ $+\tau_{\text{conv}}^{mf}+\overline{p}\boldsymbol{I}-\frac{1}{\text{Re}}\left(\mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}+\mathcal{T}\right)$
Énergie	$\overline{\rho c_p\,T}^m$	$\left(\overline{c_p\,T}^m-\overline{v}\,\overline{\rho c_p\,T}^m\right)\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s$ $+\tau_{\text{conv}}^{Tmf}-\frac{1}{\text{Pe}}\nabla\overline{\Theta}$	$\dfrac{\mathcal{L}^0}{\text{Ja}}\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\delta}_\sigma$	$\overline{\rho c_p\,T}^m\,(\overline{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}_i^m)+\tau_{\text{conv}}^{Tmf}-\frac{1}{\text{Pe}}\nabla\overline{\Theta}$ $+\left(\overline{c_p\,T}^m-\overline{v}\,\overline{\rho c_p\,T}^m\right)\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s$

TABLE 4.1 – Identification des termes de l'équation mésoscopique générique à partir du système (2.97) et des fermetures (2.98).

Propriété extensive $\mathcal{P}$	Densité volumique $\lVert\psi\rVert^{ex}$	Flux diffusif $\lVert\boldsymbol{\phi}\rVert^{ex}$	Taux de production interne et externe $\lVert\pi\rVert^{ex}+\lVert\zeta\rVert^{ex}$	Flux total $\widetilde{\boldsymbol{j}}=(\widetilde{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}_i^m)\,\widetilde{\psi}+\widetilde{\boldsymbol{\phi}}$
Masse	$\lVert\overline{\rho}\rVert^{ex}$	$\left\lVert\tau_{\text{temp}}^{nm}+(1-\overline{\rho}\,\overline{v})\,\overline{\dot{m}}^s\overline{\boldsymbol{n}}^s\right\rVert^{ex}$	≈ 0	$\widetilde{\boldsymbol{j}}_\rho\hat{=}\widetilde{\rho}\,(\widetilde{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}_i^m)$
QdM	$\lVert\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}^m\rVert^{ex}$	$\left\lVert(\overline{\boldsymbol{v}}-\overline{v}\,\overline{\rho\,\boldsymbol{v}})\,\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\tau_{\text{conv}}^{mf}+\overline{p}\boldsymbol{I}-\dfrac{1}{\text{Re}}\left(\mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}+\mathcal{T}\right)\right\rVert^{ex}$	$\dfrac{\sigma^0}{\text{We}}\lVert\overline{\kappa}_\sigma\cdot\nabla\overline{\chi}\rVert^{ex}$	$\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\otimes(\widetilde{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}_i^m)+\widetilde{\tau_{\text{conv}}^{mf}}+\widetilde{p}\boldsymbol{I}-\dfrac{1}{\text{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}}$
Énergie	$\left\lVert\overline{\rho c_p\,T}^m\right\rVert^{ex}$	$\left\lVert\left(\overline{c_p\,T}^m-\overline{v}\,\overline{\rho c_p\,T}^m\right)\overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\tau_{\text{conv}}^{Tmf}-\dfrac{1}{\text{Pe}}\nabla\overline{\Theta}\right\rVert^{ex}$	$\dfrac{\mathcal{L}^0}{\text{Ja}}\lVert\overline{\dot{m}}^s\overline{\delta}_\sigma\rVert^{ex}$	$\widetilde{\rho c_p}\widetilde{T}\,(\widetilde{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}_i^m)+\widetilde{\tau_{\text{convT}}^m}-\dfrac{1}{\text{Pe}}\widetilde{k}\nabla\widetilde{T}$

TABLE 4.2 – Identification des termes génériques liant les sauts aux interfaces aux grandeurs en excès.

4.1.3 Principe de la méthode des Développements Asymptotiques Raccordés

À présent, présentons brièvement la méthode des Développements Asymptotiques Raccordés (DAR). Elle permet de résoudre de manière approchée des équations différentielles dans lesquelles un petit paramètre $\epsilon = \Delta/D_b$ est présent. Cette méthode de changement d'échelle est présentée en détail dans Zwillinger (1989). Dans notre cas, ce petit paramètre ϵ représente le rapport entre la largeur de coupure Δ du filtre utilisé pour le passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique et l'échelle caractéristique des inclusions, *e. g.,* le diamètre moyen D_b. Pour résoudre ces équations, le système est divisé en régions (Fig. 4.1, p. 146) :

(i) La région **intérieure** correspond à la zone de transition introduite précédemment (Fig. 4.2, p. 146). Les grandeurs physiques y varient fortement.

(ii) Les régions **extérieures** correspondent aux phases liquide et vapeur. Dans ces régions, les grandeurs physiques du problème varient faiblement.

Un changement de variable est effectué uniquement dans la région intérieure pour tenir compte des fortes variations qui s'y produisent. Il dilate la direction normale pour lui donner une importance prédominante par rapport aux directions tangentielles. Cela permet de réduire la dimension du problème comme c'est fréquemment le cas dans les approches de type théorie des couches limites.

Ensuite, les variables extérieures sont développées asymptotiquement en fonction du paramètre ϵ puis les équations différentielles obtenues sont résolues séparément dans chaque région. Des solutions indépendantes sont obtenues. Leur précision dépend de l'ordre auquel est conduit le développement limité. Comme le problème est résolu indépendamment dans chaque région, ces solutions ne sont pas entièrement déterminées. Elles doivent être raccordées en se basant sur les principes de raccord établis dans Zwillinger (1989) pour $\epsilon \to 0$ et présentés à l'annexe 4.B.

Pour cela, un développement limité du problème dans la zone de transition permet d'approcher l'évolution des variables dans la région intérieure. Puis, les bilans sont intégrés sur cette région pour exprimer les conditions aux limites à l'interface en fonction des variables macroscopiques uniquement. Ces conditions de raccord permettent de déterminer entièrement les solutions approchées des régions extérieures qui deviennent **la solution du problème discontinu équivalent**. Cette solution ne diffère de la solution mésoscopique que dans la zone de transition. Ainsi, le problème est fermé à l'échelle macroscopique. **Cette fermeture est fournie par la résolution approchée du système d'équations différentielles au voisinage de l'interface**. La méthode des DAR repose sur l'hypothèse qu'une solution analytique approchée est accessible. Elle est présentée sur un exemple simple à la section 4.2 avant d'être appliquée au système complet (2.97) (section 4.4).

4.2 Un exemple simple

L'application de la méthode des DAR à une interface tridimensionnelle est complexe car elle nécessite l'écriture du problème dans un repère local associé à l'interface. Pour présenter la démarche que nous allons suivre à la section 4.4, nous avons choisi de présenter les étapes principales de méthode des DAR en l'appliquant à un problème simple de thermique stationnaire, sans convection, à une interface plane. Pour simplifier, on suppose que les températures au bord du domaine sont imposées. On note ξ_3 la coordonnée normale à l'interface orientée vers la vapeur. À l'échelle microscopique, une source d'énergie associée au changement de phase est localisée à l'interface δ^i. Le problème est alors décrit par le système suivant :

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi_3^2} = \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\dot{m}\mathcal{L}^0\delta^i(\xi_3) \tag{4.35a}$$

$$\Theta(-1) = 1 \tag{4.35b}$$

$$\Theta(+1) = 0 \tag{4.35c}$$

Dans cet exemple, on ne s'intéresse pas à la manière dont le taux de changement de phase est déterminé. On le suppose donné.

Un filtre hyperbolique de largeur ϵ permet de passer de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique en transformant l'interface en une zone de transition. Le noyau de convolution de ce

filtre G est dans ce cas identique à la distribution de Dirac filtrée (Fig. 4.3) :

$$G(\xi_3) = \overline{\delta^i}(\xi_3) = \frac{1}{2\epsilon}\left[1 - \mathrm{th}^2\left(\frac{\xi_3}{\epsilon}\right)\right] \tag{4.36}$$

À l'échelle mésoscopique, le problème est alors décrit par

$$\frac{d^2\overline{\Theta}}{d\xi_3^2} - S(\xi_3) = 0, \quad S(\xi_3) = S_0\overline{\delta^i}(\xi_3) = \frac{S_0}{2\epsilon}\left[1 - \mathrm{th}^2\left(\frac{\xi_3}{\epsilon}\right)\right] \tag{4.37a}$$

$$\overline{\Theta}(-1) = 1 \tag{4.37b}$$

$$\overline{\Theta}(+1) = 0 \tag{4.37c}$$

avec $\forall\epsilon$:

$$S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi_3)d\xi_3 = \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\dot{m}\mathcal{L}^0 \tag{4.38}$$

La solution analytique du système (4.37) est (Fig. 4.4) :

$$\overline{\Theta}(\xi_3) = \frac{1-\xi_3}{2} + \frac{\epsilon S_0}{2}\ln\left[\frac{\mathrm{ch}\,(\xi_3/\epsilon)}{\mathrm{ch}\,(1/\epsilon)}\right] \tag{4.39}$$

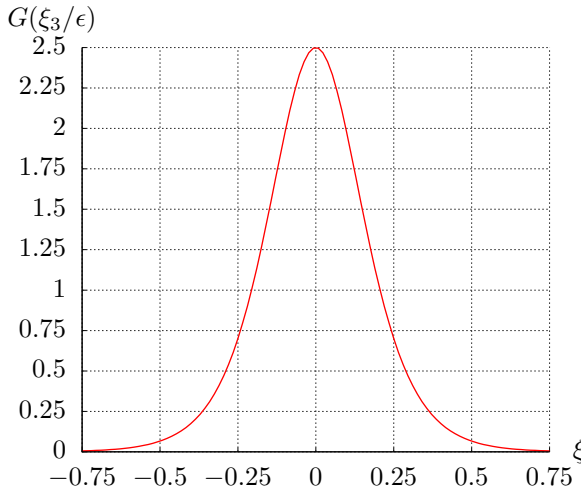


FIGURE 4.3 – Noyau du filtre hyperbolique G, distribution de Dirac filtrée $\overline{\delta}^i$ et profil du terme source à l'interface S/S_0.

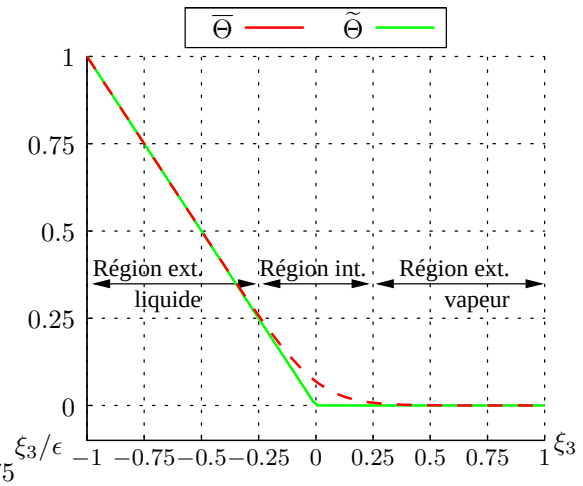


FIGURE 4.4 – Comparaison des solutions mésoscopique et macroscopique.

À l'aide des DAR, si ϵ est un petit paramètre, l'objectif est de trouver un problème discontinu équivalent et de **déterminer les conditions de saut à imposer à l'interface équivalente** ainsi créée. Pour cela, le problème est décomposé en trois régions : deux régions **extérieures** correspondant aux phases, pour lesquelles le terme source est quasiment nul et une région **intérieure** représentant l'interface mésoscopique associée à un terme source S important. La position de l'interface macroscopique équivalente est arbitraire à l'intérieur de la zone de transition. Elle est discutée dans un cadre plus général à la section 4.4.3.3. Ici, nous avons naturellement choisi de la placer en $\xi = \xi_3/\epsilon = 0$.

4.2.1 Problèmes extérieurs

On note $\widetilde{\Theta}$ la solution du problème extérieur, *i. e.,* loin de la région où la source S est notablement non nulle. Dans chaque région où ce terme source est faible, l'équation (4.37a) régissant le problème dégénère vers

$$\frac{d^2\widetilde{\Theta}_k}{d\xi_3^2} = 0 \tag{4.40}$$

où l'indice k désigne soit la phase liquide l, soit la phase vapeur v. Dans chaque région, cette équation est associée à l'une des conditions aux limites (4.37b) ou (4.37c) pour obtenir les solutions

$$\widetilde{\Theta}_l(\xi_3) = (c_l - 1)\,\xi_3 + c_l \quad \text{et} \quad \widetilde{\Theta}_v(\xi_3) = c_v\,(1 - \xi_3) \tag{4.41}$$

où c_l et c_v sont deux constantes d'intégration indéterminées. En effet, chaque région ne comprend qu'une condition à la limite "extérieure" (au bord du domaine). La seconde condition, au voisinage de la région intérieure est déterminée par des conditions de raccord avec la solution du problème intérieur à la section 4.2.3.

Ensuite, les variables extérieures $\widetilde{\Theta}_k$ sont développées en séries de Taylor du paramètre ϵ :

$$\widetilde{\Theta}_k(\xi_3, \epsilon) = \widetilde{\Theta}^0(\xi_3) + \epsilon\widetilde{\Theta}^1(\xi_3) + \cdots + \epsilon^i\widetilde{\Theta}^i(\xi_3) + \mathcal{O}(\epsilon^{i+1}) \tag{4.42}$$

Sur cet exemple, la description extérieure (4.40) ne fait plus intervenir le paramètre ϵ. Pour tout ordre i, on a donc la même équation d'évolution :

$$\forall i \geq 0 \ : \quad \frac{d^2\widetilde{\Theta}^i_k}{d\xi_3^2} = 0 \tag{4.43}$$

Dans chaque région, l'une des conditions aux limites (4.37b) ou (4.37c) permet d'obtenir les solutions :

$$\widetilde{\Theta}^0_l(\xi_3) = \left(c^0_l - 1\right)\xi_3 + c^0_l \quad \text{et} \quad \widetilde{\Theta}^0_v(\xi_3) = c^0_v\,(1 - \xi_3) \tag{4.44a}$$

$$\forall i \geq 1 \ : \quad \widetilde{\Theta}^i_l(\xi_3) = c^i_l\,(1 + \xi_3) \quad \text{et} \quad \widetilde{\Theta}^i_v(\xi_3) = c^i_v\,(1 - \xi_3) \tag{4.44b}$$

L'étude du problème extérieur détermine l'évolution de la variable macroscopique $\widetilde{\Theta}$ dans chaque phase, à différents ordres. Pour que la solution (4.44) soit entièrement déterminée, il faut trouver la valeur des constantes c^i_l et c^i_v, autrement dit, établir les conditions de saut à l'interface. Pour ce faire, l'étude du système intérieur est nécessaire pour pouvoir appliquer les conditions de raccord.

Par ailleurs, nous verrons à la section 4.2.3 que la limite asymptotique (au voisinage de l'interface, *i. e.,* pour $\xi_3 \to 0$) de la solution extérieure $\widetilde{\Theta}$ intervient aussi dans la détermination des conditions de raccord sur le flux à l'ordre 1 (*i. e.,* ordre 2 intérieur).

4.2.2 Problème intérieur

La région intérieure est caractérisée par de fortes variations du terme source S. Pour résoudre le problème dans cette région, **la coordonnée normale à l'interface est dilatée** par le changement de variable $\xi \hat{=} \xi_3/\epsilon$. La nouvelle variable du problème intérieur, notée $\overline{\Theta}(\xi)$, est reliée à la variable $\overline{\Theta}(\xi_3)$ par :

$$\overline{\Theta}(\xi_3, \epsilon) = \breve{\overline{\Theta}}(\xi, \epsilon) \tag{4.45}$$

Ce changement de variable permet d'obtenir une nouvelle équation pour décrire le problème :

$$\frac{1}{\epsilon^2}\frac{d^2\breve{\overline{\Theta}}}{d\xi^2} - \frac{S_0}{2\,\epsilon}\left(1 - \mathrm{th}^2(\xi)\right) = 0 \tag{4.46}$$

Cette équation n'est pas résolue de manière exacte. Comme le paramètre ϵ est petit devant 1, la variable $\breve{\overline{\Theta}}$ est développée en série de Taylor [3] :

$$\breve{\overline{\Theta}}(\xi, \epsilon) = \breve{\overline{\Theta}}^0(\xi) + \epsilon\breve{\overline{\Theta}}^1(\xi) + \epsilon^2\breve{\overline{\Theta}}^2(\xi) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.47}$$

Ce développement est ensuite injecté dans l'équation d'évolution (4.46) pour obtenir :

$$\frac{d^2\breve{\overline{\Theta}}^0}{d\xi^2} + \epsilon\left[\frac{d^2\breve{\overline{\Theta}}^1}{d\xi^2} + \frac{S_0}{2}\left(1 - \mathrm{th}^2(\xi)\right)\right] + \epsilon^2\frac{d^2\breve{\overline{\Theta}}^2}{d\xi^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) = 0 \tag{4.48}$$

3. Pour simplifier le raisonnement, nous supposons ici que seule la variable $\breve{\overline{\Theta}}$ dépend de ϵ. Dans un cadre plus général, on peut imaginer que la source S_0 en dépende aussi. Dans ce cas, il serait aussi nécessaire de la développer en série de Taylor.

L'équation précédente peut être décomposée pour chaque ordre de ϵ. Sa résolution conduit à la détermination des fonctions $\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^0$, $\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1$ ... **Les conditions aux limites de ce problème intérieur sont données par le raccord de la solution intérieure avec les solutions extérieures.**

Ordre 0 À l'ordre dominant, l'équation (4.48) se réduit à :

$$\frac{d^2\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^0}{d\xi^2} = 0 \tag{4.49}$$

La résolution de cette équation conduit à

$$\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^0(\xi) = c_1\xi + c_2 \tag{4.50}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes d'intégration à déterminer. Elles sont fixées par les conditions de raccord à la section suivante.

Ordre 1 À l'ordre 1, l'équation (4.48) se réduit à :

$$\frac{d^2\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1}{d\xi^2} + \frac{S_0}{2}\left(1 - \mathrm{th}^2(\xi)\right) = 0 \tag{4.51}$$

Une première intégration conduit à

$$\frac{d\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1}{d\xi} = \frac{S_0}{2}\mathrm{th}(\xi) + c_3 \tag{4.52}$$

puis en intégrant une seconde fois, on a :

$$\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1 = \frac{S_0}{2}\ln\left(\mathrm{ch}(\xi)\right) + c_3\xi + c_4 \tag{4.53}$$

où c_3 et c_4 sont deux constantes d'intégration à déterminer.

Ordre 2 À l'ordre 2, l'équation (4.48) se réduit à :

$$\frac{d^2\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^2}{d\xi^2} = 0 \tag{4.54}$$

4.2.3 Conditions de raccord

Les développements limités des régions extérieures et de la région intérieure doivent ensuite être raccordés pour obtenir la solution macroscopique approchée du problème. La théorie fournissant ces conditions de raccord est présentée à l'annexe 4.B. La démarche générale est la suivante : l'intégrale du bilan mésoscopique est évaluée sur l'épaisseur de la zone de transition. Éventuellement (en fonction de l'ordre considéré et des conditions de raccord), la limite asymptotique (au voisinage de l'interface) de l'équation de bilan macroscopique doit être retranchée pour que la formulation obtenue fasse clairement apparaître le saut recherché. [4] On obtient ainsi une équation reliant le saut de grandeurs macroscopiques à des intégrales sur la zone de transition. Ces dernières correspondent à des grandeurs en excès similaires à celles rencontrées lors de l'AGPI. Néanmoins, nous sommes en mesure d'aller plus loin que l'analyse générique puisque ces grandeurs en excès peuvent être évaluées à partir de la solution analytique approchée du problème dans la région intérieure ; cette solution est obtenue grâce à un développement limité. Ainsi, les sauts à l'interface peuvent être reliés aux valeurs à l'interface de champs macroscopiques (*i. e.,* les variables principales du problème macroscopique). Nous allons à présent appliquer cette démarche au bilan d'énergie en explicitant les différentes étapes du raisonnement.

4. Nous verrons que cette précaution n'est nécessaire qu'à l'ordre i pour une équation différentielle d'ordre i car le raccord des dérivées est décalé entre le problème intérieur et les problèmes extérieurs. Par conséquent, aucun bilan macroscopique ne correspond aux premiers ordres dans la région intérieure et l'intégrale du bilan mésoscopique peut être évaluée directement.

Ordre 0 La condition de raccord (4.277a) appliquée à la variable $\overset{\smile}{\overline{\Theta}}$ indique que la dérivée de l'ordre 0 est nulle :

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{d\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^0}{d\xi} = 0 \tag{4.55}$$

Elle permet de déterminer la constante c_1 intervenant dans le profil intérieur d'ordre 0 (*cf.* Éq. (4.50)) : $c_1 = 0$. Ce résultat indique que la variable $\overset{\smile}{\overline{\Theta}}$ est uniforme dans la région intérieure à l'ordre dominant : $\overset{\smile}{\overline{\Theta}}(\xi) = c_2$. En explicitant la condition de raccord (4.276a) qui relie cette variable intérieure aux variables extérieures d'ordre 0

$$\widetilde{\Theta}^0(0^\pm) = \lim_{\xi\to\pm\infty} \overset{\smile}{\overline{\Theta}}^0(\xi) \tag{4.56}$$

on relie les constantes c_l^0 et c_v^0 à la constante intérieure c_2 :

$$c_l^0 = c_2 \quad \text{et} \quad c_v^0 = c_2 \tag{4.57}$$

D'après le profil de $\widetilde{\Theta}$ dans la région extérieure à l'ordre dominant (donné par la relation (4.44a)), cette relation implique la continuité de la température à l'interface à l'ordre 0 :

$$\widetilde{\Theta}_l^0(0) = \widetilde{\Theta}_v^0(0) = c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\!\left[\widetilde{\Theta}^0\right]\!\right] = 0 \tag{4.58}$$

À l'ordre dominant, **la condition d'équilibre thermodynamique local est retrouvée**. La continuité de la température traduit une conduction thermique efficace. [5]

Ainsi, la condition de raccord (4.55) associée à **l'étude du problème à l'ordre dominant dans la région intérieure et dans les régions extérieures** permet d'établir **le saut de température à l'interface à l'ordre 0**. En raison du changement de variable, l'ordre dominant de la condition de raccord sur le flux est obtenu par l'étude de l'ordre 1 dans la région intérieure.

Ordre 1 Nous allons voir qu'à cause du changement de variable, le raccord des dérivées entre le problème intérieur et les problèmes extérieurs ne relie pas les mêmes ordres (d'après la condition de raccord (4.61) ci-dessous). Par conséquent, pour déterminer la condition de raccord sur le flux à l'ordre 0, il faut intégrer l'équation de bilan (4.51) d'ordre 1 sur la région intérieure :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1}{d\xi^2} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0}{2}\left(1 - \mathrm{th}^2(\xi)\right) d\xi = 0 \tag{4.59}$$

La première intégrale conduit à la différence des flux aux bords de la région intérieure et l'intégrale du terme source vaut S_0 d'après la relation (4.38) caractérisant le noyau du filtre :

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{d\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1}{d\xi} - \lim_{\xi\to-\infty} \frac{d\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1}{d\xi} = -S_0 \tag{4.60}$$

En regard de la relation (4.52), l'équation précédente permet de déterminer la constante $c_3 = 0$. De plus, la condition de raccord (4.277b) relie la dérivée intérieure d'ordre 1 à la dérivée extérieure d'ordre 0 :

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{d\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1}{d\xi} = \left.\frac{d\widetilde{\Theta}^0}{d\xi}\right|_{\xi_3=0^\pm} \tag{4.61}$$

Cette condition permet de transformer la relation (4.60) pour faire apparaître le saut de flux :

$$\lim_{\xi_3\to 0^-} \frac{d\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3} - \lim_{\xi_3\to 0^+} \frac{d\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3} = S_0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\!\left[\frac{d\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3}\right]\!\right] = S_0 \tag{4.62}$$

5. Dans cet exemple, la valeur de la température à l'interface $\widetilde{\Theta}^0 = c_2$ est donnée par la solution du problème car le taux de changement de phase est supposé connu. Dans le système physique réel, le problème est inversé. La contrainte physique de saturation de l'interface à l'échelle mésoscopique permet de déterminer la valeur $\widetilde{\Theta}^0 = c_2$; le taux de changement de phase est alors un résultat associé à la température de l'interface par un système couplé.

où l'opérateur $[\![\phi]\!] = \phi_l - \phi_v$ désigne le saut d'une grandeur (du liquide vers la vapeur par définition).

Ainsi, la condition de raccord (4.61) associée à **l'étude du problème à l'ordre 1 dans la région intérieure** permet d'établir **le saut de flux macroscopique à l'interface à l'ordre 0** $\left[\!\!\left[d\widetilde{\Theta}^0/d\xi_3 \right]\!\!\right]$. La relation (4.62) traduit **le bilan d'énergie à l'interface** en reliant la différence entre le flux transmis d'une phase à l'autre à l'intégrale du terme source.

L'étude du raccord entre les solutions extérieures et la solution intérieure à l'ordre 1 n'est pas terminée. En effet, nous n'avons analysé que les flux en intégrant une seule fois le bilan d'énergie (4.51). Une seconde intégration permet à présent de déterminer une condition de raccord sur la température à l'ordre 1. [6] Après une seconde intégration de l'ordre 1 du bilan d'énergie (4.51), on obtient la relation (4.53) pour décrire l'évolution de $\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1$ dans la région intérieure. Or, puisque la condition de raccord (4.276b) relie les limites à l'infini de cette variable aux limites asymptotiques de la variable extérieure $\widetilde{\Theta}^1$ **et aux limites asymptotiques de la dérivée extérieure d'ordre 0** $(d\widetilde{\Theta}^0/d\xi_3)$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1(\xi) = \widetilde{\Theta}^1(0^\pm) + \xi \left.\frac{d\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0^\pm} \tag{4.63}$$

le saut de $\widetilde{\Theta}$ d'ordre 1 à l'interface est donné par :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\Theta}^1\right]\!\!\right] \sim \lim_{\xi\to-\infty} \overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1 - \lim_{\xi\to\infty} \overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1 - \xi \left(\lim_{\xi_3\to 0^-} \frac{d\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3} - \lim_{\xi_3\to 0^+} \frac{d\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3} \right) \sim \lim_{\xi\to-\infty} \overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1 - \lim_{\xi\to\infty} \overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1 - \xi \left[\!\!\left[\frac{d\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3} \right]\!\!\right] \tag{4.64}$$

En utilisant la solution intérieure (4.53) pour la variable $\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1$ (avec $c_3 = 0$ d'après l'étude ci-dessus) et le saut de flux macroscopique d'ordre 0 donné par la relation (4.62), on obtient un saut de $\widetilde{\Theta}$ nul à l'ordre 1 :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\Theta}^1\right]\!\!\right] = 0 \tag{4.65}$$

Autrement dit, **la variable $\widetilde{\Theta}$ reste continue à l'ordre 1** et on a : $\widetilde{\Theta}^1(0) = c_4$. [7] Ainsi, **l'étude complète de l'ordre 1 permet de déterminer à la fois une condition de raccord sur le flux à l'ordre 0 et une condition de raccord sur la variable $\widetilde{\Theta}$ à l'ordre 1**.

Ordre 2 Pour être cohérent sur la description macroscopique, il faut que la condition de raccord sur la variable $\widetilde{\Theta}$ et celle sur le flux $d\widetilde{\Theta}/d\xi_3$ soient déterminées avec la même précision. En choisissant par exemple de les déterminer à l'ordre 1 (*i. e.,* avec une précision $\mathcal{O}(\epsilon^2)$), on constate que les relations (4.58), (4.62) et (4.65) ne sont pas suffisantes car il manque une fermeture pour le saut de flux d'ordre 1. Pour déterminer celui-ci, il faut intégrer l'ordre 2 du bilan d'énergie (4.54) sur la région intérieure. Néanmoins, contrairement aux ordres précédents, **l'intégration directe de ce bilan est impossible car les limites asymptotiques qui apparaîtraient divergent** dans le cas général. [8] Cette caractéristique de l'ordre 2 s'explique par la condition de raccord (4.277c) qui relie la dérivée intérieure d'ordre 2 à la dérivée extérieure d'ordre 1 **et à la dérivée seconde extérieure d'ordre 0** $(d^2\widetilde{\Theta}^0/d\xi_3^2)$:

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{d\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^2}{d\xi} = \left.\frac{d\widetilde{\Theta}^1}{d\xi}\right|_{\xi_3=0^\pm} + \xi \left.\frac{d^2\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3^2}\right|_{\xi_3=0^\pm} \tag{4.66}$$

C'est la première fois qu'une dérivée seconde extérieure apparaît dans les conditions de raccord. Comme l'équation de bilan d'énergie est une équation différentielle d'ordre 2, cette dérivée seconde

6. Lorsque le bilan d'énergie (4.51) d'ordre 1 est intégré 2 fois, il décrit directement l'évolution de la variable $\overset{\smile}{\overline{\Theta}}^1$ et non plus celle de ses dérivées. Il est donc normal d'après les conditions de raccord d'obtenir ainsi des informations sur le saut de température à l'ordre 1.

7. La valeur interfaciale $\widetilde{\Theta}^1(0) = c_4$ est donnée par la solution du problème car le taux de changement de phase est supposé connu dans cet exemple.

8. En fait, sur cet exemple relativement simple, comme la solution extérieure est linéaire, sa dérivée seconde est nulle et les limites asymptotiques existent et sont finies. Ce résultat provient du caractère plan de l'exemple et ne serait plus valide pour une interface sphérique par exemple car les solutions analytiques seraient alors plus complexes ; on souhaite ne pas considérer cette particularité pour présenter la démarche générale.

est directement régie par le bilan d'énergie extérieur (4.43) d'ordre 0. Pour établir le saut de $d\widetilde{\Theta}^1/d\xi_3$ par une intégration sur la région intérieure, il faut intégrer la différence entre le bilan intérieur d'ordre 2 et la limite asymptotique du bilan extérieur d'ordre 0 au voisinage de l'interface (*i. e.,* lorsque $\xi_3 \to 0$). Cette précaution évite que l'intégrale ne diverge. Par conséquent, le saut de flux recherché apparaît lorsque la condition de raccord (4.66) est utilisée.

Tout d'abord, d'après l'équation (4.48), le bilan d'énergie intérieur se réduit à l'ordre 2 à :

$$\frac{d^2\breve{\overline{\Theta}}^2}{d\xi^2} = 0 \tag{4.67}$$

De plus, la limite asymptotique du bilan extérieur (4.43) s'écrit à l'ordre 0

$$\left.\frac{d^2\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3^2}\right|_{\xi_3=0^\pm} = 0 \tag{4.68}$$

où l'exposant $\pm$ indique la phase considérée. Ainsi, en prenant la différence entre ces deux équations, on a :

$$\left.\frac{d^2\breve{\overline{\Theta}}^2}{d\xi^2} - \frac{d^2\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3^2}\right|_{\xi_3=0^\pm} = 0 \tag{4.69}$$

En intégrant cette relation sur la région intérieure (entre $-\infty$ et 0^- pour la phase liquide et entre 0^+ et $+\infty$ pour l'autre phase), on a, en sommant les deux relations ainsi obtenues :

$$\int_{-\infty}^{0^-} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\breve{\overline{\Theta}}^2}{d\xi} - \xi\left.\frac{d^2\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3^2}\right|_{\xi_3=0^-}\right) d\xi + \int_{0^+}^{\infty} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\breve{\overline{\Theta}}^2}{d\xi} - \xi\left.\frac{d^2\widetilde{\Theta}^0}{d\xi_3^2}\right|_{\xi_3=0^+}\right) d\xi = 0 \tag{4.70}$$

La condition de raccord (4.66) permet d'évaluer les limites à l'infini nécessaires pour obtenir :

$$\left.\frac{d\breve{\overline{\Theta}}^2}{d\xi}\right|_{\xi=0^-} - \left.\frac{d\widetilde{\Theta}^1}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0^-} + \left.\frac{d\widetilde{\Theta}^1}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0^+} - \left.\frac{d\breve{\overline{\Theta}}^2}{d\xi}\right|_{\xi=0^+} = 0 \tag{4.71}$$

Sachant que la variable intérieure est de dérivée continue en 0 (d'après sa régularité donnée par l'équation (4.46) qui régit son évolution), on déduit de la relation précédente le saut de flux d'ordre 1 :

$$\left[\!\left[\frac{d\widetilde{\Theta}^1}{d\xi_3}\right]\!\right] = \left.\frac{d\widetilde{\Theta}^1}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0^-} - \left.\frac{d\widetilde{\Theta}^1}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0^+} = 0 \tag{4.72}$$

Ainsi, à l'ordre 1, **le saut de flux est nul**. Ce résultat est cohérent avec le fait que l'on ait uniquement considéré une source S d'ordre 0. Par ailleurs, il n'est pas nécessaire d'intégrer une seconde fois l'ordre 2 du bilan d'énergie (4.54) car nous ne souhaitons pas connaître les conditions de raccord sur la température à l'ordre 2. Cette étude est suffisante pour établir les fermetures du système macroscopique à l'ordre recherché.

Bilan En définitive, la figure 4.4 illustre la solution macroscopique $\widetilde{\Theta}$ à l'ordre 1 obtenue par combinaison des ordres précédents. La solution macroscopique ne diffère de la solution mésoscopique que dans la zone de transition. Sur cet exemple, comme la source interfaciale est supposée entièrement capturée par l'ordre 0, la fermeture du problème à l'ordre 1 est identique à celle obtenue à l'ordre 0. Dans un cas complexe, nous verrons que le saut de flux est estimé avec plus de précision au fur et à mesure que l'analyse progresse dans les ordres du développement limité.

Cet exemple nous a permis de présenter l'état d'esprit dans lequel sont utilisées les conditions de raccord à la section 4.4 ou à l'annexe 4.D correspondante. Comme nous avons pu le constater, il est indispensable de repérer la direction normale à l'interface pour dilater la coordonnée associée. Dans un contexte général, il est donc nécessaire (i) d'utiliser un repère de coordonnées généralisées avant d'appliquer la méthode des DAR et (ii) d'identifier l'ordonnée à laquelle placer l'interface macroscopique. Ces deux points sont présentés à la section 4.3 et au début de la section 4.4 respectivement. L'étude du problème intérieur par des développements asymptotiques et l'application des conditions de raccord ne sont présentées qu'en seconde partie de la section 4.4.

4.3 Description mésoscopique dans le repère mobile

Le changement de variable qui permet de dilater la coordonnée normale à la zone de transition est une étape essentielle de la méthode des DAR. Il permet en effet de différencier les directions et de rendre prédominante la coordonnée normale à l'"interface" ce qui est capital pour la résolution (analytique) approchée du système. Pour que ce changement de variable soit possible, il faut relier la zone de transition aux coordonnées et décrire le problème mésoscopique dans ces coordonnées. C'est l'objectif des sections 4.3.1 et 4.3.3 qui présentent respectivement le repère mobile associé à l'indicatrice mésoscopique et la description dans ce repère du système mésoscopique fermé (2.97) établi à la fin du chapitre 2. Entre les deux, la section 4.3.2 rappelle de manière synthétique les fermetures du système mésoscopique.

Cette étape de transformation du système mésoscopique (2.97) est indispensable pour appliquer la méthode des DAR dans un cadre général.

4.3.1 Repère mobile associé à l'indicatrice mésoscopique

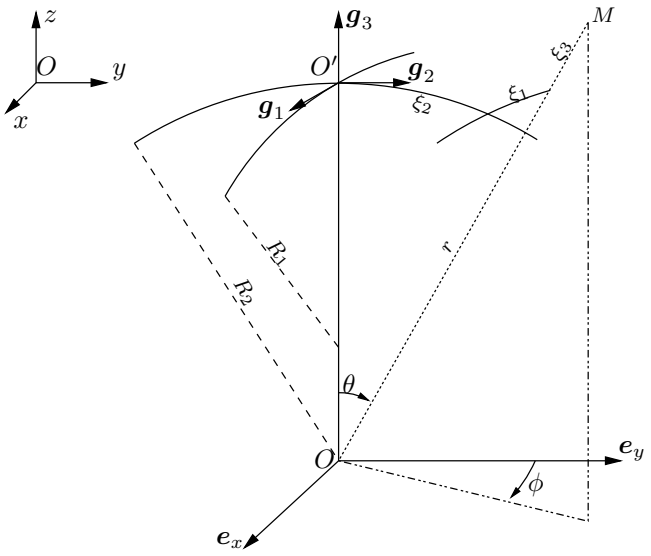


FIGURE 4.5 – Définition du repère mobile.

Dans un premier temps, il est nécessaire de définir le repère de coordonnées généralisées à partir de l'indicatrice mésoscopique. À la fin de ce paragraphe, nous énonçons quelques propriétés intrinsèques à ce repère (*e. g.,* vitesse de déplacement, courbure...) qui permettent dans la suite du manuscrit d'établir la description mésoscopique du problème dans le repère mobile et de définir la vitesse macroscopique de déplacement de l'interface.

Soient (O, x, y, z) le repère fixe permettant de décrire le problème et $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ le repère de coordonnées lié à l'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi}$. L'ordonnée $\xi_3 = 0$ est définie par l'isovaleur de l'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi} = 1/2 + \epsilon C \overline{\kappa}_\sigma$, où la constante C caractérise le filtre utilisé pour établir la description mésoscopique. Les raisons du choix de cette isovaleur ainsi que la définition de la constante C sont données à la section 4.4.3.3 ; elles proviennent d'une contrainte de conservation moyenne de la masse que nous introduisons lors du passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique. Cette ordonnée $\xi_3 = 0$ définit **l'interface mésoscopique**. On suppose que cette interface peut être approchée localement par une surface dont la courbure κ_ϕ varie linéairement entre les deux rayons de courbure principaux κ_1 et κ_2 en fonction de l'angle ϕ autour de l'axe z (Fig. 4.5) :

$$\kappa_\phi = \frac{2}{\pi}\left(\kappa_2 - \kappa_1\right)\phi + \kappa_1 \qquad \text{pour } \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

On construit κ_ϕ sur $[\pi/2, 2\pi]$ par symétrie. On note $\kappa \hat{=} \kappa_1 + \kappa_2$ la courbure moyenne de l'interface et $H \hat{=} \kappa_1 \kappa_2$ la courbure gaussienne.

Les coordonnées ξ_1 et ξ_2 mesurent la distance dans les directions tangentielles suivant les axes principaux de courbure. On note $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$ la base orthonormée (dite physique) associée à ce repère. Ces caractéristiques et l'expression des opérateurs différentiels dans cette base sont données à l'annexe 4.A. La propriété de normalité assure l'équidistance des coordonnées (iso-ξ) ; la 3e coordonnée représente alors la distance à l'interface. $\boldsymbol{g}_1$ et $\boldsymbol{g}_2$ sont les vecteurs associés aux directions principales de courbure. Par définition, le vecteur $\boldsymbol{g}_3$ est orthogonal aux isosurfaces de l'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi}_v$ et colinéaire au gradient $\nabla\overline{\chi}_v$. Par suite, il est colinéaire au vecteur $\overline{\boldsymbol{n}}^s$. De plus, le vecteur $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ est en première approximation unitaire d'après la relation (2.96) établie à la section 2.5 traitant de la fermeture de l'aire interfaciale à l'échelle mésoscopique. En choisissant d'orienter le vecteur $\boldsymbol{g}_3$ vers le liquide comme $\overline{\boldsymbol{n}}^s$, on a alors $\boldsymbol{g}_3 = \overline{\boldsymbol{n}}^s + \mathcal{O}(\epsilon^2) = (0, 0, 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2))$. Les directions principales de courbure sont indicées correctement pour que la base $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$ soit directe. Enfin, on note $\boldsymbol{t}_\alpha \hat{=} \boldsymbol{g}_\alpha$ les vecteurs tangents et $\boldsymbol{n} \hat{=} \boldsymbol{g}_3$ la normale à la surface porteuse des coordonnées. Par convention, l'indice α est réservé à l'une des directions tangentielles. Lorsque l'indice β est utilisé, il représente l'autre coordonnée tangentielle, *i. e.,* $\beta = 3 - \alpha$. Les indices grecs ne peuvent prendre que les valeurs 1 et 2. Pour représenter une direction quelconque, on utilise l'indice i ou j.

La définition du repère mobile associée à la régularité de l'interface mésoscopique permet alors de supposer l'indépendance de $\overline{\chi}$ aux coordonnées tangentielles, *i. e.,* $\overline{\chi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \overline{\chi}(\xi_3)$. Cette propriété est essentielle pour établir la vitesse de l'interface macroscopique à la section 4.4.3. La propriété de normalité est une autre caractéristique importante de ce repère. **Elle permet de transformer la coordonnée ξ_3 en une mesure de la distance à *l'interface mésoscopique*** ; en particulier, la coordonnée ne se dilate pas au cours du temps et nous verrons que les points d'ordonnée ξ_3 fixée sont convectés à la même vitesse.

Pour conclure ce paragraphe, on introduit quelques notions et notations indispensables à la manipulation de ces coordonnées généralisées (*e. g.,* vitesse de déplacement, courbure...). Ces propriétés intrinsèques au repère sont utilisées aux sections 4.3.3 et 4.4.3 pour décrire le problème mésoscopique dans ces nouvelles coordonnées et pour définir la vitesse de l'interface macroscopique. Elles sont établies à l'annexe 4.A lors de l'étude complète de ce système de coordonnées ; seuls les principaux résultats sont repris ci-dessous.

Élément de volume Dans ces coordonnées généralisées, l'élément de volume $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ est relié au volume élémentaire $dxdydz$ du repère cartésien par la jacobienne ω définie par

$$\omega \hat{=} \det\left(\nabla\Phi^{-1}_{\kappa_1,\kappa_2}\right) = h_1 h_2 h_3 = 1 - \xi_3\left(\kappa_1 + \kappa_2\right) + \xi_3^2 \kappa_1 \kappa_2 = 1 - \xi_3 \kappa + \xi_3^2 H \tag{4.73}$$

où les facteurs d'échelles h_i sont définis par $h_\alpha = 1 - \xi_3\kappa_\alpha = 1 - \epsilon\xi\kappa_\alpha$ et $h_3 = 1$ et où Φ_{κ_1,κ_2} est la fonction permettant de passer du repère fixe au repère mobile et $\Phi^{-1}_{\kappa_1,\kappa_2}$ la bijection inverse. Cette relation est démontrée à l'annexe 4.A.1, Éq. (4.222). Cette jacobienne est nécessaire pour évaluer les intégrales dans les nouvelles coordonnées. Elle dépend de la coordonnée normale à l'interface. On introduit la notation $\widetilde{\omega}_i \hat{=} \omega(\widetilde{\xi}_i)$ associée à l'ordonnée de l'interface macroscopique équivalente $\widetilde{\xi}_i$. Cette position est déterminée à la section 4.4.3.3 pour assurer la conservation du volume entre les échelles microscopique et macroscopique.

Vitesse de déplacement des coordonnées généralisées par rapport au référentiel fixe L'interface mésoscopique est définie par la fonction vectorielle $\boldsymbol{x}_i$

$$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{x}_i : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\xi_1, \xi_2, t) & \mapsto & \boldsymbol{x}_i(\xi_1, \xi_2, 0, t) \end{array} \tag{4.74}$$

où (ξ_1, ξ_2) sont les coordonnées de surface et t le temps. La vitesse de l'interface mésoscopique est définie par :

$$\boldsymbol{v}_i(\xi_1, \xi_2, 0, t) = \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial t} \tag{4.75}$$

Cette définition n'est donnée que pour l'ordonnée $\xi_3 = 0$ représentant l'interface mésoscopique. On propose de l'étendre à tout l'espace en l'assimilant à la vitesse des coordonnées. Pour cela, en décomposant les coordonnées fixes (ξ_1, ξ_2, ξ_3) d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ quelconque, on définit la vitesse des

coordonnées $\boldsymbol{v}_i^m$:

$$\boldsymbol{v}_i^m \hat{=} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \xi_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} + \xi_3 \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} \quad \text{(somme sur } \alpha) \tag{4.76}$$

Propriétés de la vitesse des coordonnées Dans l'annexe 4.A, on définit plus complètement ce système de coordonnées en énonçant quelques propriétés utiles pour la suite de notre raisonnement. Parmi elles, on montre que **la composante normale de la vitesse $\boldsymbol{v}_i^m(3)$ ne varie pas dans la direction normale à l'interface pour un repère orthonormé** car ξ_3 représente la distance (*cf.* Éq. (4.252)) :

$$\boldsymbol{v}_i^m(3)_{,3} = 0 \tag{4.77}$$

Pour évaluer la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$, le raisonnement mené dans les coordonnées généralisées à la section 4.4.3.4 requiert l'évaluation de la divergence de la vitesse $\boldsymbol{v}_i^m$. Celle-ci est donnée dans le repère local par (*cf.* Éq. (4.253)) :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m = -\xi_3 \frac{\kappa_{\alpha,\alpha}}{h_\alpha h_\alpha} \boldsymbol{v}_i^m(\alpha) \quad \text{(somme sur } \alpha) \tag{4.78}$$

Cette divergence est proportionnelle à la composante tangentielle de la vitesse des coordonnées donnée en $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ par (*cf.* Éq. (4.256a)) :

$$\boldsymbol{v}_i^m(0,0,\xi_3) = -\xi_3 C_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha \quad \text{avec} \quad C_\alpha \hat{=} \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,\alpha} + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\kappa_\alpha \quad \text{(somme sur } \alpha) \tag{4.79}$$

Ces trois relations sont utilisées à la section 4.4.3.4 pour fermer partiellement la définition de la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$.

Dérivée lagrangienne Pour écrire le système mésoscopique dans les coordonnées généralisées, il est nécessaire de définir la dérivée **lagrangienne** associée à ces coordonnées. D'après la définition de la vitesse $\boldsymbol{v}_i^m$ de déplacement du repère mobile $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, la dérivée lagrangienne (d/dt) du scalaire ϕ ou du vecteur $\boldsymbol{u}$ est reliée à la dérivée temporelle par rapport à un repère fixe $(\partial/\partial t)$ par les relations :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} = \frac{d\phi}{dt} - \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\phi = \frac{d\phi}{dt} - \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_i^m \phi) + \phi\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m) \tag{4.80a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - (\boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla)\,\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_i^m \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m) \tag{4.80b}$$

La démonstration de ces relations est donnée à l'annexe 4.A.7.

Tenseur de courbure Le tenseur de courbure est défini par :

$$\boldsymbol{B} \hat{=} -\nabla_s \boldsymbol{n} \tag{4.81}$$

La courbure moyenne κ et la courbure gaussienne H sont alors données par :

$$\kappa = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) = -\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B} : \boldsymbol{B} = \left(\kappa^2 - 2H\right) \tag{4.82}$$

De plus, pour un vecteur $\boldsymbol{u}$ quelconque, on a par définition :

$$-\boldsymbol{u} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \kappa_{\alpha,\alpha} \boldsymbol{u}(\alpha) \tag{4.83}$$

Cette relation est utilisée à la section 4.4.3.4 pour reformuler l'expression de la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$.

Évolution temporelle de la courbure moyenne D'après le préambule 4.4.3.1, la vitesse de l'interface macroscopique est influencée par la courbure moyenne. Pour expliciter cette influence, il est nécessaire de déterminer l'évolution temporelle de la courbure. On montre à l'annexe 4.A.8 que celle-ci est reliée à la vitesse des coordonnées $\boldsymbol{v}_i^m$ par la relation (*cf.* Éq. (4.266)) :

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla \kappa = \Delta_s \left(\boldsymbol{v}_i^m(3)\right) + 2\boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla \kappa + \boldsymbol{v}_i^m(3)\left(\kappa^2 - 2H\right) \tag{4.84}$$

De plus, on montre que

$$\Delta_s \left(\boldsymbol{v}_i^m(3)\right) + \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla \kappa = 0 \tag{4.85}$$

ce qui permet de simplifier la relation (4.84) en l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla \kappa = \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla \kappa + \boldsymbol{v}_i^m(3)\left(\kappa^2 - 2H\right) \tag{4.86a}$$

$$= -\Delta_s \boldsymbol{v}_i^m(3) + \boldsymbol{v}_i^m(3)\left(\kappa^2 - 2H\right) = \Delta_s \left(\boldsymbol{v}_i^m \cdot \boldsymbol{n}\right) + \boldsymbol{v}_i^m(3)\left(\kappa^2 - 2H\right) \tag{4.86b}$$

Cette dernière équation est identique aux équations (D.19a) de Toutant (2006) et (D.16) de Toutant *et al.* (2009a). Elle permet, à la section 4.4.3.4, Éq. (4.152), de fermer une partie de la définition de la vitesse macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$.

4.3.2 Rappel de la description mésoscopique dans le repère fixe

À la fin du chapitre 2, nous avons proposé une description fermée du problème à l'échelle mésoscopique. La fermeture de ce système repose sur des termes sous-maille τ^{ev} validés par les tests *a priori* du chapitre 3. Cette fermeture n'est que partielle afin de permettre une validation locale par des tests *a priori* au chapitre 3. À présent, pour appliquer la méthode des DAR au système (4.88), les modèles sous-maille doivent être entièrement fermés et la formulation mf (signifiant "modèle mésoscopique fermé") doit remplacer les modèles ev (pour "expression validée") du chapitre 2. La différence entre ces deux modélisations concerne le stencil du modèle sous-maille. Elle est discutée à la section 2.2.2 (*e. g.*, Fig. 2.3). L'équivalence entre ces deux modélisations (au sens intégral nécessaire pour la méthode des DAR) est vérifiée *a posteriori* (section 4.4.6) en montrant que les solutions analytiques obtenues pour la vitesse et la température dans la région intérieure sont telles que :

$$\int \left(\tau^{mf} - \tau^{ev}\right) d\xi_3 = 0 \tag{4.87}$$

Ainsi, dans un repère fixe, la fermeture complète du système (2.97) conduit à :

$$\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \nabla \overline{\chi} + \tau_{\text{interf}}^{mf} = 0 \tag{4.88a}$$

$$\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\dot{m}}^s \overline{\delta}_\sigma \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \tag{4.88b}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho \boldsymbol{v}}^m}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\boldsymbol{v}} \otimes \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s + \overline{\rho \boldsymbol{v}}^m \otimes \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \tau_{\text{conv}}^{mf}\right) = -\nabla \overline{p} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \left(\mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma^m} + \mathcal{T}\right) - \frac{\sigma^0}{\text{We}} \overline{\kappa}_\sigma \nabla \overline{\chi} \tag{4.88c}$$

$$\frac{\partial \left(\overline{\rho\, c_p\, T}^m\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho\, c_p\, T}^m \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{c_p\, T}^m \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau_{\text{convT}}^{mf}\right) = \frac{1}{\text{Pe}} \nabla^2 \overline{\Theta} - \frac{\mathcal{L}^0}{\text{Ja}} \overline{\dot{m}}^s \overline{\delta}_\sigma \tag{4.88d}$$

$$\overline{\Theta}(\boldsymbol{x}_i) = \overline{\dot{m}}^\sigma(\boldsymbol{x}_i) \mathcal{L}^0 \frac{\text{Pe}}{\text{Ja}} \left(\epsilon C_1 + C_2 \epsilon^2 \overline{\kappa}_\sigma\right) \tag{4.88e}$$

$$\overline{\dot{m}}^s(\boldsymbol{x}) = \overline{\dot{m}}^\sigma(\boldsymbol{x}_i) \tag{4.88f}$$

avec $\boldsymbol{S} \hat{=} \mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} = \overline{\mu}\left(\nabla \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \nabla^T \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma\right)$, $\mathcal{T} \hat{=} \overline{\mu v}\left(\nabla\left(\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s\right) + \nabla^T\left(\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s\right)\right)$ et où $\overline{\kappa}_\sigma$, $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$, $\overline{\delta}_\sigma$ et $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ sont fermés par

$$\overline{\kappa}_\sigma \hat{=} -\left(\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{n}}^s \otimes \overline{\boldsymbol{n}}^s\right) : \nabla \overline{\boldsymbol{n}}^s \tag{4.89a}$$

$$\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \hat{=} \overline{\boldsymbol{v}} - \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s \overline{v} \tag{4.89b}$$

$$\overline{\delta}_\sigma \hat{=} \left\| \nabla \overline{\chi}_v \right\| \left(1 + \epsilon^2 C_3\right) \tag{4.89c}$$

$$\overline{\boldsymbol{n}}^s \hat{=} \frac{-\nabla \overline{\chi}_v}{\overline{\delta}_\sigma} = \frac{-\nabla \overline{\chi}_v}{\left\| \nabla \overline{\chi}_v \right\|} \left(1 - \epsilon^2 C_3\right) \tag{4.89d}$$

avec $\overline{v} = -[\![1/\rho]\!]\,\overline{\chi} + 1$. On rappelle que le petit paramètre ϵ représente la taille adimensionnelle caractérisant le filtre et les paramètres C_1, C_2 et C_3 caractérisent sa forme (autrement dit en pratique, la méthode numérique). Ils sont supposés connus. Les grandeurs mésoscopiques $\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}^m$, $\overline{c_p\,T}^m$ et $\overline{\rho\,c_p\,T}^m$ sont définies par

$$\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}^m \hat{=} \overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \overline{\dot{m}}^s\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \tau^{mf}_{\text{temp}} \tag{4.89e}$$

$$\overline{c_p\,T}^m \hat{=} \overline{\gamma}\,\overline{\Theta} + \tau^{mf}_{\text{T}} \tag{4.89f}$$

$$\overline{\rho\,c_p\,T}^m \hat{=} \overline{\rho\,\gamma}\,\overline{\Theta} + \tau^{mf}_{\text{tempT}} \tag{4.89g}$$

où $\gamma = c_p/k$ et $\overline{\Theta} \hat{=} \overline{k\,T}$. La notation $\overline{\cdot}^m$ permet d'insister sur le fait que ces expressions sont des modélisations mésoscopiques approchant les grandeurs correspondantes (définies à partir de l'échelle microscopique). Pour alléger les notations, l'exposant ^{m} indiquant l'approximation est omis par la suite. Les modèles sous-maille sont définis par :

$$A = \tau^{mf}_{\text{interf}} \hat{=} \overline{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \nabla\overline{\chi}} - \overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \cdot \nabla\overline{\overline{\chi}} \tag{4.90a}$$

$$B = \tau^{mf}_{\text{temp}} \hat{=} \overline{\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\overline{\rho}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{4.90b}$$

$$C = \tau^{mf}_{\text{conv}} \hat{=} \overline{\overline{\rho}\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \otimes \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\overline{\rho}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \otimes \overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{4.90c}$$

$$D = \tau^{mf}_{\text{tempT}} \hat{=} \overline{\overline{\rho\gamma}\,\overline{\Theta}} - \overline{\overline{\rho\,\gamma}}\,\overline{\overline{\Theta}} \tag{4.90d}$$

$$E = \tau^{mf}_{\text{T}} \hat{=} \overline{\overline{\gamma}\,\overline{\Theta}} - \overline{\overline{\gamma}}\,\overline{\overline{\Theta}} \tag{4.90e}$$

$$F = \tau^{mf}_{\text{convT}} \hat{=} \overline{\overline{\rho c_p\,T}^m\,\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} - \overline{\overline{\rho\gamma}\,\overline{\Theta}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{4.90f}$$

Dans le système (4.88), on rappelle que les termes sous-maille modélisant la diffusion et les forces de tension de surface sont négligés [9] conformément aux conclusions des chapitres précédents.

La condition de saturation traduite par l'équation (4.88e) est basée sur un raisonnement semi-empirique présenté à la fin du paragraphe 2.3. Elle résulte de la combinaison d'un développement limité de la solution dans chacune des phases et d'une étude analytique sur une configuration particulière traduisant l'influence de la courbure. L'équation (4.88f) exprime l'invariance de $\overline{\dot{m}}^s$ dans la direction normale à l'interface, obtenue par un raisonnement présenté au paragraphe 4.4.2, basé sur le développement limité des variables surfaciques à l'interface. On montre alors que l'approximation (4.88f) est valide à l'ordre 2 en ϵ (*cf.* Éq. (4.120)). La relation de fermeture de l'aire interfaciale (4.89c) est justifiée au paragraphe 2.5 par une étude qui démontre que la courbure moyenne de l'interface et les fluctuations locales n'influencent pas l'aire interfaciale avant l'ordre 2, dans la mesure où la courbure locale n'excède pas la courbure moyenne d'un ordre de grandeur. Le paramètre C_3 peut présenter une dépendance au nombre de Weber afin de traduire l'effet des fluctuations sous-maille de l'interface, que l'on néglige dans ce travail. La fermeture (4.89d) découle directement de la relation (4.89c) et permet de corriger le champ de normale pour vérifier la relation :

$$\nabla\overline{\chi} = -\overline{\boldsymbol{n}}^s\overline{\delta}_\sigma \tag{4.91}$$

4.3.3 Description mésoscopique dans le repère mobile

Nous souhaitons à présent décrire le problème mésoscopique dans le repère mobile introduit à la section 4.3.1. D'après la définition (4.80) de la dérivée lagrangienne, la transposition de la

9. Pour les sous-résolutions envisagées, l'hypothèse τ^{mf}_{diff} négligeable est bien vérifiée sur les tests *a priori* réalisés. Une modélisation plus fine $\tau^{mf}_{\text{diff}} = \overline{\overline{\mu}\,(\nabla\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma + \nabla^T\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma)} - \overline{\overline{\mu}}\left(\nabla\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma + \nabla^T\overline{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\right)$ semble aussi valide pour fermer le système mésoscopique. Cependant, lors du passage à l'échelle macroscopique par la méthode des DAR, cette modélisation fait apparaître des termes sous-maille à l'ordre dominant du bilan de quantité de mouvement qui ne peut plus être intégré analytiquement sans approximation. Nous pensons que des modes propres associés au filtre peuvent alors se développer sur le champ de vitesse à l'ordre dominant et le déstabiliser. Pour cette raison, l'hypothèse τ^{mf}_{diff} négligeable nous semble difficile à lever et la généralisation du modèle proposé dans le cadre de notre étude à des modèles visqueux plus fins nécessitera des précautions importantes.

description mésoscopique (4.88) au repère mobile $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est donnée par :

$$\frac{d\overline{\chi}}{dt} + (\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma - \boldsymbol{v}_i^m) \cdot \nabla\overline{\chi} + \tau_{\text{interf}}^{mf} = 0 \tag{4.92a}$$

$$\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\dot{m}}^s \overline{\delta}_\sigma \, [\![1/\rho]\!] \tag{4.92b}$$

$$\frac{d\,(\overline{\rho\,\boldsymbol{v}})}{dt} + \nabla \cdot \left(\overline{\boldsymbol{v}} \otimes \overline{\dot{m}}^s \, \overline{\boldsymbol{n}}^s + \overline{\rho\,\boldsymbol{v}} \otimes (\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma - \boldsymbol{v}_i^m) + \tau_{\text{conv}}^{mf}\right) + \overline{\rho\,\boldsymbol{v}}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot (\mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma} + \mathcal{T}) - \nabla\overline{p} - \frac{\sigma^0}{\text{We}} \overline{\kappa}_\sigma \nabla\overline{\chi} \tag{4.92c}$$

$$\frac{d\,(\overline{\rho c_p\, T})}{dt} + \nabla \cdot \left(\overline{c_p\, T}\, \overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s + \overline{\rho c_p\, T}\,(\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma - \boldsymbol{v}_i^m) + \tau_{\text{convT}}^{mf}\right) + \overline{\rho c_p\, T}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m) = \frac{1}{\text{Pe}} \nabla^2 \cdot \overline{\Theta} - \frac{\mathcal{L}^0}{\text{Ja}} \overline{\dot{m}}^s \overline{\delta}_\sigma \tag{4.92d}$$

$$\overline{\Theta}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) = \overline{\dot{m}}^\sigma(\xi_1, \xi_2) \mathcal{L}^0 \frac{\text{Pe}}{\text{Ja}} \left(\epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 \overline{\kappa}_\sigma\right) \tag{4.92e}$$

$$\overline{\dot{m}}^s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \overline{\dot{m}}^\sigma(\xi_1, \xi_2) \tag{4.92f}$$

En première approximation, l'étude du problème intérieur menée à la section 4.4.5 permet de montrer que la vitesse du repère mésoscopique $\boldsymbol{v}_i^m$ et la vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma$ introduite pour la modélisation sont égales (à l'ordre 0) : $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma = \boldsymbol{v}_i^m$. Cette particularité provient du repère mobile que nous avons choisi d'associer à l'isovaleur de l'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi} = 1/2 + C\epsilon\overline{\kappa}_\sigma$. Par conséquent, le terme $(d\overline{\chi}/dt)$ de l'équation (4.92a), qui traduit l'évolution temporelle de $\overline{\chi}$ dans le repère mobile $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, ne représente que les déformations du profil de $\overline{\chi}$ dans la direction normale à l'interface ; à l'ordre dominant, il n'y a pas de mouvement de convection moyen de l'interface mésoscopique par rapport au référentiel attaché à $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ **par propriété du repère choisi**. De plus, comme le filtre permettant le passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique est uniforme en temps et en espace (filtre inconditionnel uniforme), nous verrons à la section 4.4.1 que ces déformations résultent uniquement des variations temporelles de la courbure.

En outre, l'égalité $\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma = \boldsymbol{v}_i^m$ à l'ordre dominant conduit à d'autres simplifications importantes dans les bilans d'énergie et de quantité de mouvement. **Elle permet de reléguer l'effet de la convection par le mouvement moyen du fluide** $(\overline{\boldsymbol{v}})$ **aux ordres plus élevés**.

De plus, la divergence de la vitesse des coordonnées $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m$ (donnée par la relation (4.78)) est proportionnelle à la coordonnée normale à l'interface. Lorsque cette coordonnée est dilatée dans la région intérieure, **cette divergence se trouve aussi reléguée à un ordre plus élevé**.

En définitive, les précautions associées au choix du repère mobile sont essentielles ; elles permettent de simplifier fortement les bilans en établissant une hiérarchie dans laquelle les variations temporelles, la convection par la vitesse moyenne $\overline{\boldsymbol{v}}$ et la divergence de $\boldsymbol{v}_i^m$ sont d'un ordre supérieur aux membres de droite des équations de bilan et à la convection par la vitesse spécifique associée au changement de phase (proportionnelle à $\overline{\dot{m}}^s \overline{\boldsymbol{n}}^s$).

Le système (4.92) constitue la base de notre raisonnement. Il est analysé par la méthode des DAR à la section suivante afin d'en obtenir une solution approchée dans le voisinage de l'interface et ainsi évaluer les relations de saut nécessaires à la fermeture du système macroscopique.

4.4 Développements Asymptotiques Raccordés

Avant d'étudier le système (4.92) par la méthode des DAR, il est important d'éclaircir certaines hypothèses et définitions. Pour cela, on introduit à la section 4.4.1 un postulat sur le profil de l'indicatrice mésoscopique à partir de constats sur des exemples simples. On présente ensuite la définition des variables interfaciales macroscopiques à la section 4.4.2. Puisque la vitesse macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ ne rentre pas dans ce cadre général, elle est définie séparément à la section 4.4.3 à partir de l'étude de l'excès de masse à l'interface. On montre que la vitesse de l'interface macroscopique découle de la dérivée en temps de la contrainte imposée à la masse en excès à l'interface.

Ensuite, la méthode des DAR est appliquée au système mésoscopique fermé (4.92) formulé dans le repère mobile. Les principaux résultats de l'étude des régions extérieures et de la région intérieure sont présentés aux sections 4.4.4 et 4.4.5 respectivement. Le détail des calculs est donné à

l'annexe 4.D. Les fermetures obtenues sont synthétisées dans une description du problème macroscopique à la section 4.5. Enfin, la validité de l'hypothèse d'équivalence entre le modèle sous-maille de Bardina *et al.* (1983) classique τ^{mf} et la version modifiée proposée par Toutant *et al.* (2009a) sans étalement τ^{ev} est vérifiée *a posteriori* à la section 4.4.6.

4.4.1 Postulat sur le profil de l'indicatrice mésoscopique dans la direction normale à l'interface

Pour réaliser le développement complet du système, il faut exhiber l'influence de la méthode numérique **en caractérisant le filtre implicite** utilisé pour établir le système mésoscopique. Il est aussi nécessaire de comprendre l'impact du filtre sur l'indicatrice de phase mésoscopique. Pour éclaircir ces deux éléments, étant donné la simplicité de la fonction indicatrice de phase microscopique (fonction Heaviside), nous allons **spécifier les variations de l'indicatrice de phase mésoscopique** dans la région intérieure en identifiant et en analysant deux origines : (i) le noyau du filtre et (ii) la courbure de l'interface microscopique.

De cette analyse du profil de l'indicatrice découle ensuite naturellement le développement en séries de Taylor des variables liées à l'indicatrice de phase (*e. g.,* les propriétés thermophysiques, la distribution de Dirac associée à l'interface, le champ de normale...). L'expression du profil de $\overline{\chi}$ permet aussi de déterminer la dérivée temporelle dans un repère mobile $d\overline{\chi}/dt$ nécessaire à la détermination de la vitesse macroscopique de l'interface, comme nous le verrons à la section 4.4.3.

Pour comprendre et exprimer les dépendances de $\overline{\chi}$ aux variables du problème, on considère dans un premier temps une interface plane. Ensuite, l'impact de la courbure est étudié sur un exemple sphérique. Un dernier exemple permet d'introduire l'anisotropie pour étudier l'effet des deux rayons de courbure principaux κ_1 et κ_2 sur le profil de la variable mésoscopique $\overline{\chi}$. Nous verrons qu'en raison du caractère non local du filtre, la courbure de l'interface microscopique influence le développement limité de l'indicatrice mésoscopique. Celui-ci dépend alors de la courbure et pas seulement du noyau du filtre. Nous tentons finalement de généraliser cette tendance empiriquement en exprimant un postulat sur le profil de $\overline{\chi}$. À la fin de cette section, nous synthétisons les caractéristiques identifiées en définissant quelques paramètres spécifiques pour représenter le filtre. Ceux-ci sont utilisés dans la suite de l'analyse pour fermer la description macroscopique.

Configuration 1D. Exemple plan – Filtre boîte ou hyperbolique. Pour simplifier le propos, on considère dans un premier temps une interface plane. En l'absence de courbure, comme les variations de $\overline{\chi}_k$ se limitent à la zone de transition, on peut supposer que l'indicatrice de phase mésoscopique est fonction d'une seule variable $\xi = \xi_3/\epsilon$ dans la direction normale à l'interface :

$$\overline{\chi}_k(\xi_3, \epsilon) = \overline{\chi}_k(\xi_3/\epsilon) = \breve{\overline{\chi}}_k(\xi) \tag{4.93}$$

Le développement limité en ϵ est alors réduit à l'ordre 0 puisque $\breve{\overline{\chi}}_k$ ne dépend du paramètre ϵ que par l'intermédiaire de la variable ξ :

$$\breve{\overline{\chi}}_k(\xi) = \breve{\overline{\chi}}_k^0(\xi) \tag{4.94}$$

Cette forme reste très générale. Elle signifie simplement que les variations de l'indicatrice mésoscopique $\breve{\overline{\chi}}$ dans la direction normale à l'interface sont indépendantes du facteur de dilatation lorsqu'elles sont exprimées avec la coordonnée ξ. Par exemple, un filtre boîte et un filtre hyperbolique conduisent respectivement aux profils :

$$\overline{\chi}_k(\xi_3) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \xi_3 < -\frac{\epsilon}{2} \\ \frac{\xi_3}{\epsilon} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad -\frac{\epsilon}{2} \leq \xi_3 \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \xi_3 > \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \breve{\overline{\chi}}_k(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \xi < -\frac{1}{2} \\ \xi + \frac{1}{2} & \text{si} \quad -\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \xi > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.95a}$$

$$\overline{\chi}_k(\xi_3) = \text{th}\left(\frac{\xi_3}{\epsilon}\right) \quad \text{et} \quad \breve{\overline{\chi}}_k(\xi) = \text{th}\,(\xi) \tag{4.95b}$$

Toutant *et al.* (2009a) utilisent le postulat (4.93) dans un cadre général (*i. e.,* pour une interface de courbure quelconque) pour l'appliquer à leur étude. Nous allons montrer sur les exemples ci-dessous que cette hypothèse n'est plus valide lorsque l'interface est courbe ; des termes d'ordre supérieur doivent être pris en considération. Nous les introduisons sous la forme d'un postulat à la

fin de cette section. Ils permettent en particulier d'obtenir le terme d'évolution de courbure dans la définition de la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ (section 4.4.3) à un ordre différent de celui proposé par Toutant *et al.* (2009a). Cette démarche nous semble plus cohérente.

Configuration isotrope. Exemple sphérique – Filtre boîte sphérique. En supposant un filtre boîte sphérique et en approchant localement l'interface par une sphère, on montre que le profil de l'indicatrice mésoscopique dépend de la courbure (*cf.* annexe E, Éq. (E.43a)) :

$$\overline{\chi}(\xi,\kappa) = \frac{-(\xi+1)^2(\xi^2\epsilon\kappa/2+4\xi-2\xi\epsilon\kappa/2-3\epsilon-8)}{16(1+\xi\epsilon\kappa/2)} \text{ pour } \xi\in[-1;1] \tag{4.96}$$

En développant cette expression pour $\epsilon \to 0$, la courbure affecte l'ordre 1 du développement

$$\overline{\chi}(\xi,\kappa) = (\xi+1)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\xi\right)+\frac{\epsilon\kappa}{2}\frac{3}{16}(\xi+1)^2(\xi-1)^2+\mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.97}$$

puis en dérivant par rapport au temps (sachant que seule la courbure κ dépend du temps), on obtient :

$$\frac{d\overline{\chi}}{dt}(\xi,\kappa) = \epsilon\frac{d\kappa}{dt}\frac{3}{32}(\xi+1)^2(\xi-1)^2+\mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.98}$$

Enfin, en intégrant sur la zone de transition (*i. e.*, $\xi\in[-1;1]$), on retrouve le résultat de Toutant *et al.* (2009a) :

$$\int_{\xi=-1}^{\xi=1}\frac{d\overline{\chi}}{dt}(\xi,\kappa)d\xi = \epsilon\frac{1}{10}\frac{d\kappa}{dt} \tag{4.99}$$

La constante 1/10 présente dans l'expression précédente résulte du choix d'un noyau de filtre particulier.

Configuration anisotrope. Exemple ellipsoïdal – Filtre boîte sphérique. La formule (5.89) de la thèse de Toutant (2006) s'écrit avec les notations actuelles ($\xi = zr$, $r=\epsilon, R_1 = 1/\kappa_1$ et $R_2 = 1/\kappa_2$)

$$\breve{\overline{\chi}}(\xi,\kappa_1,\kappa_2,\epsilon) = \frac{1}{16}(1+\xi)^2\left[2-\xi-\frac{3\epsilon}{\xi}\left((1-\xi)^2\frac{\ln(1-\kappa_2\epsilon\xi)-\ln(1-\kappa_1\epsilon\xi)}{\epsilon\xi(\kappa_1-\kappa_2)}-1\right)\right] \tag{4.100}$$

où κ_1 et κ_2 sont les deux rayons de courbure principaux de l'ellipsoïde. En réalisant un développement limité en ordres de ϵ, on obtient :

$$\begin{aligned}\breve{\overline{\chi}}(\xi,\kappa_1,\kappa_2,\epsilon) &= (\xi+1)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\xi\right)-\frac{3}{32}(\kappa_1+\kappa_2)(\xi+1)^2(\xi-1)^2\epsilon\\ &-\frac{1}{16}\left((\kappa_1+\kappa_2)^2-\kappa_1\kappa_2\right)(\xi+1)^2(\xi-1)^2\xi\epsilon^2+\mathcal{O}(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{4.101}$$

En exprimant cette relation en fonction de la courbure moyenne $\kappa\hat{=}\kappa_1+\kappa_2$ et de la courbure gaussienne $H\hat{=}\kappa_1\kappa_2$, on obtient un développement similaire à celui de la configuration isotrope :

$$\begin{aligned}\breve{\overline{\chi}}(\xi,\kappa,H,\epsilon) &= (\xi+1)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\xi\right)-\frac{3}{32}\kappa(\xi+1)^2(\xi-1)^2\epsilon\\ &-\frac{1}{16}\left(\kappa^2-H\right)(\xi+1)^2(\xi-1)^2\xi\epsilon^2+\mathcal{O}(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{4.102}$$

Cette relation généralise bien l'exemple sphérique précédent et l'anisotropie n'impacte que les ordres supérieurs ou égaux à 2. En dérivant par rapport au temps,

$$\begin{aligned}\frac{d\breve{\overline{\chi}}}{dt}(\xi,\kappa,H,\epsilon) &= (\xi+1)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\xi\right)-\frac{3}{32}\frac{d\kappa}{dt}(\xi+1)^2(\xi-1)^2\epsilon\\ &-\frac{1}{16}\frac{d}{dt}\left(\kappa^2-H\right)(\xi+1)^2(\xi-1)^2\xi\epsilon^2+\mathcal{O}(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{4.103}$$

puis en intégrant sur la zone de transition (*i. e.*, $\xi \in [-1;1]$), on obtient :

$$\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{d\overline{\chi}}{dt}(\xi,\kappa,H,\epsilon)\,d\xi = \epsilon\frac{1}{10}\frac{d\kappa}{dt} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.104}$$

On retrouve le même résultat que sur l'exemple sphérique (valide un ordre plus loin) car le terme d'ordre 2 en ϵ est une fonction impaire de ξ. Même pour une interface ellipsoïdale, seule la courbure moyenne intervient dans l'expression de la dérivée temporelle de l'intégrale de l'indicatrice mésoscopique à l'ordre 2.

Postulat. Les deux constats précédents nous conduisent à postuler la forme suivante pour le développement limité de l'indicatrice $\breve{\overline{\chi}}$ dans le cas général

$$\breve{\overline{\chi}}(\xi_1,\xi_2,\xi,\epsilon) = f^0(\xi) + \epsilon\kappa^0(\xi_1,\xi_2)f^1(\xi) + \epsilon^2(\kappa^2-2H)f^2(\xi) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.105}$$

où les fonctions f^0, f^1 et f^2 caractérisent le noyau du filtre implicite. Le postulat (4.105) est illustré sur la figure 4.8, p. 178, pour l'exemple d'un filtre boîte sphérique, appliqué à une interface sphérique. Il exprime une déformation du profil de l'indicatrice mésoscopique $\breve{\overline{\chi}}$ dans la direction normale à l'interface. Cette déformation n'apparaît qu'aux ordres supérieurs à 1 et provient de la courbure de l'interface microscopique. Elle traduit l'effet non local du filtre et est présentée de manière intuitive sur un exemple simple à la section 4.4.3.1 (Fig. 4.6, p. 176).

Par le postulat (4.105), on suppose qu'à l'ordre 0, l'indicatrice mésoscopique ne dépend que de la coordonnée normale à l'interface :

$$\breve{\overline{\chi}}^0(\xi_1,\xi_2,\xi) = \breve{\overline{\chi}}^0(\xi) \tag{4.106}$$

Notre étude diffère des travaux de Toutant *et al.* (2009a) ou plutôt les complète. En effet, Toutant *et al.* (2009a) se limitent à l'étude du système à l'ordre dominant. Ils considèrent donc que $\breve{\overline{\chi}}(\epsilon,\xi) = f^0(\xi) + \mathcal{O}(\epsilon)$. Néanmoins, nous avons démontré que les termes sous-maille sont d'ordre 2 en ϵ (section 2.2.1) et que leur modélisation est nécessaire pour fermer précisément le problème à l'échelle mésoscopique (chapitre 3). Puisque notre adimensionnalisation est différente de celle de Toutant *et al.* (2009a), il nous semble nécessaire d'étudier le système à un ordre plus élevé. Pour être cohérent, il faut alors prendre en compte les variations du profil de $\breve{\overline{\chi}}$ provoquées par la courbure de l'interface.

Définition des propriétés intrinsèques du filtre. Afin de compléter le postulat précédent, nous allons définir quelques propriétés caractéristiques des fonctions f^i. Elles sont introduites à partir des exemples ci-dessus sans être démontrées dans le cas d'un filtre quelconque. Ces propriétés servent de fermeture au problème macroscopique lors de l'étude asymptotique en particularisant l'étalement des profils à l'échelle mésoscopique.

La fonction f^0 est supposée symétrique par rapport à l'origine pour traduire la propriété de symétrie du noyau de convolution du filtre dans un cadre général. C'est une propriété classique des filtres. Par conséquent, la dérivée de cette fonction $f^0_{,3}$ est paire. Elle représente la distribution de Dirac filtrée ; pour cette raison, elle peut être interprétée comme l'image du noyau du filtre. L'intégrale sur la zone de transition de la fonction $f^0_{,3}$ est unitaire pour traduire la normalisation du noyau du filtre et ainsi conduire à un saut de $\breve{\overline{\chi}}^0$ unitaire. Par conséquent, on a :

$$\int \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} d\xi = 1, \quad \int \breve{\overline{\chi}}^0_{,3}\xi d\xi = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \geq 1 : \quad \int \breve{\overline{\chi}}^j_{,3} d\xi = 0 \tag{4.107}$$

La fonction f^1 est supposée paire d'après les exemples ci-dessus. Ses limites à l'infini sont nulles. Sa dérivée, impaire, rend le profil de $\breve{\overline{\chi}}^1$ dissymétrique et est responsable du décalage de l'interface macroscopique présenté à la section 4.4.3.3.

Afin de caractériser la largeur de coupure du filtre, nous avons défini le petit paramètre adimensionnel ϵ. Pour caractériser la forme du noyau du filtre, on introduit les paramètres suivants :

$$C_1 = \overline{\xi\chi}(0) = \int_{-\infty}^{0} \left(\widetilde{\chi} - \breve{\widetilde{\chi}}\right) d\xi = -\int_{0}^{\infty} \left(\widetilde{\chi} - \breve{\widetilde{\chi}}\right) d\xi \tag{4.108a}$$

$$C_4 = \int f^1(\xi) d\xi \tag{4.108b}$$

$$C_5 = C_5' + C_5'' \tag{4.108c}$$

$$C_5' \hat{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi'=\infty}^{\xi} \left(\breve{\widetilde{\chi}}^0(\xi') - \widetilde{\chi}^0(\xi')\right) d\xi' \breve{\widetilde{\chi}}_{,3} d\xi = -\int \breve{\widetilde{\chi}}^0 \left(\breve{\widetilde{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) d\xi \tag{4.108d}$$

$$C_5'' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\xi} \left(\breve{\widetilde{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) d\xi \left(\breve{\widetilde{\chi}}_{,3} - \overline{\breve{\widetilde{\chi}}_{,3}}^n\right) d\xi \tag{4.108e}$$

$$C_6 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\widetilde{\chi} - \breve{\widetilde{\chi}}\right)^2 d\xi \tag{4.108f}$$

$$C_7 = \frac{C_1}{C_5} \tag{4.108g}$$

L'expression (4.108b) n'est pas la seule définition du paramètre C_4. En regard des exemples précédents, nous avons constaté que les fonctions f^0 et f^1 sont telles que les expressions

$$C_4 = -\int f^1_{,3} \xi d\xi = \frac{1}{2} \int_{\xi} \breve{\widetilde{\chi}}^0_{,3} \xi^2 d\xi = \int \left(H(\xi) - f^0(\xi)\right) \xi d\xi = \int \left(\widetilde{\chi}^0(\xi) - \breve{\widetilde{\chi}}^0(\xi)\right) \xi d\xi \tag{4.109}$$

sont équivalentes et conduisent en particulier à $C_4 = 1/10$ sur les exemples précédents. L'équivalence entre les différentes formes proposées à la relation (4.109) n'est pas démontrée dans le cas général. La troisième égalité se démontre à l'aide d'une intégration par partie sachant que les limites à l'infini de la fonction $(H - f^0)$ sont nulles.

Par ailleurs, une intégration par partie permet de montrer l'équivalence des deux formulations proposées pour le paramètre C_5' en notant que

$$\lim_{\xi \to -\infty} \int_{\xi'=\infty}^{\xi} \left(\breve{\widetilde{\chi}}^0(\xi') - \widetilde{\chi}^0(\xi')\right) d\xi' = \lim_{\xi \to \infty} \int_{\xi'=\infty}^{\xi} \left(\breve{\widetilde{\chi}}^0(\xi') - \widetilde{\chi}^0(\xi')\right) d\xi' = 0$$

d'après la position de l'interface macroscopique (telle que l'excès $\|\rho\|^{ex}$ soit nul).

De plus, en développant le produit C_6, on montre aussi la relation :

$$C_5' = C_1 + C_6 \tag{4.110}$$

Enfin, d'après les propriétés (4.107) et les définitions (4.108b) et (4.109), on montre que :

$$\begin{aligned} \int \breve{\widetilde{\chi}}_{,3} \omega d\widetilde{\xi} &= \int \breve{\widetilde{\chi}}^0_{,3} d\widetilde{\xi} + \epsilon \int \breve{\widetilde{\chi}}^1_{,3} d\widetilde{\xi} + \epsilon^2 \int \breve{\widetilde{\chi}}^2_{,3} d\widetilde{\xi} - \epsilon\kappa \int \breve{\widetilde{\chi}}^0_{,3} \widetilde{\xi} d\widetilde{\xi} - \epsilon^2 \kappa \int \breve{\widetilde{\chi}}^1_{,3} \widetilde{\xi} d\widetilde{\xi} + \epsilon^2 H \int \breve{\widetilde{\chi}}^0_{,3} \widetilde{\xi}^2 d\widetilde{\xi} \\ &= 1 - \epsilon^2 \kappa \int \breve{\widetilde{\chi}}^1_{,3} \widetilde{\xi} d\widetilde{\xi} + \epsilon^2 H \int \breve{\widetilde{\chi}}^0_{,3} \widetilde{\xi}^2 d\widetilde{\xi} = 1 - \epsilon^2 \left(\kappa^2 - 2H\right) C_4 \end{aligned} \tag{4.111}$$

Conclusion. Dans cette section, nous avons introduit des propriétés pour caractériser la première étape du changement d'échelle (*cf.* Fig. 5, p. 5). Lors de l'étude asymptotique du problème, nous allons utiliser ces paramètres pour spécifier l'étalement des profils à l'échelle mésoscopique. En les considérant connus et caractéristiques de la méthode numérique employée, ils permettent de fermer le problème à l'échelle macroscopique à la section 4.4.5.

Nous avons aussi identifié deux origines aux variations de l'indicatrice de phase mésoscopique dans la région intérieure : (i) une contribution principale (à l'ordre dominant) caractérisée par le noyau du filtre et (ii) une contribution secondaire (à partir de l'ordre 1) associée à la courbure de l'interface microscopique.

Parfois, nous n'avons pas été en mesure de démontrer la généricité de nos définitions ce qui nous a contraints à adopter une démarche plus empirique qui repose sur l'analyse de quelques exemples simples.

Ces remarques préliminaires aux DAR sont nécessaires pour fermer (i) la définition de la vitesse macroscopique de l'interface à la section 4.4.3 et (ii) les relations de saut macroscopiques à la section 4.4.5. On retrouve d'ailleurs certains de ces paramètres dans le modèle ISS final à la section 4.5.

4.4.2 Définitions des variables interfaciales macroscopiques

Dans un problème avec changement de phase, il existe, à l'échelle microscopique, des variables surfaciques définies uniquement à l'interface. Parmi elles, deux grandeurs jouent un rôle essentiel : la vitesse de déplacement de l'interface et le taux de changement de phase. Ces grandeurs ne sont pas indépendantes, bien au contraire. À l'échelle microscopique, le taux de changement de phase intervient à la fois dans le saut de vitesse et dans celui de flux thermique (Éqs. (1.9) et (1.8c)).

Lors du passage à l'échelle mésoscopique, l'opération de filtrage étale l'effet de ces grandeurs sur toute la largeur de la zone de transition et les grandeurs mésoscopiques associées sont volumiques (définies non nulles sur la zone de transition $\overline{\delta^i} \neq 0$). Pour trouver une formulation macroscopique discontinue équivalente du problème, il faut introduire des variables interfaciales macroscopiques qui jouent le même rôle que les variables microscopiques $\dot{m}$ et $\boldsymbol{v}_i$. Il est important de clarifier leur définition macroscopique et de la comparer à celle de l'échelle microscopique.

À l'échelle macroscopique, comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre (section 4.1), les variables volumiques sont définies à partir des limites asymptotiques auxquelles sont ajoutées des grandeurs en excès pour rétablir l'équivalence entre le problème mésoscopique et le problème macroscopique (Fig. 4.1, p. 146) :

$$\widetilde{\phi} \hat{=} \overline{\phi} + \widetilde{\delta^i} \left\| \phi \right\|^{ex}, \quad \text{avec} \quad \left\| \phi \right\|^{ex} \hat{=} \frac{1}{\widetilde{\omega}_i} \int \left(\breve{\overline{\phi}} - \overline{\phi} \right) \omega d\xi \tag{4.112}$$

Une variable interfaciale ϕ_i (intrinsèquement définie sur la surface microscopique uniquement) peut être étendue à l'espace à l'aide de la distribution de Dirac représentant l'interface δ^i, en créant ainsi une variable volumique : $\phi \equiv \phi_i \, \delta^i = \phi_i \, \chi_{,3}$. [10] En procédant de même à l'échelle macroscopique, on étend la variable interfaciale macroscopique $\widetilde{\phi}_i$ (à définir) en une variable volumique à l'aide de l'indicatrice macroscopique :

$$\widetilde{\phi} \equiv \widetilde{\phi}_i \, \widetilde{\delta^i} = \widetilde{\phi}_i \, \widetilde{\chi}_{,3} \tag{4.113}$$

De plus, par définition de l'indicatrice macroscopique, celle-ci est constante dans les phases et on a donc à l'échelle macroscopique :

$$\overline{\phi} \equiv \overline{\phi_i \, \chi_{,3}} = 0 \tag{4.114}$$

Par ailleurs, à l'échelle mésoscopique, d'après la définition (2.4) de l'opérateur $\overline{\cdot}^s$, on a :

$$\breve{\overline{\phi}} \equiv \overline{\breve{\phi}_i \, \breve{\chi}_{,3}} = \breve{\overline{\phi}}_i^s \breve{\overline{\chi}}_{,3} \tag{4.115}$$

En injectant ces trois relations dans l'équation (4.112), il vient :

$$\widetilde{\phi}_i \, \widetilde{\delta^i} \hat{=} \widetilde{\delta^i} \left\| \phi_i \, \delta^i \right\|^{ex}, \quad \text{avec} \quad \left\| \phi_i \, \delta^i \right\|^{ex} \hat{=} \frac{1}{\widetilde{\omega}_i} \int \breve{\overline{\phi}}_i^s \breve{\overline{\chi}}_{,3} \omega d\xi \tag{4.116}$$

Autrement dit, la définition naturelle pour une variable interfaciale macroscopique $\widetilde{\phi}_i$ est la suivante :

$$\widetilde{\phi}_i \hat{=} \left\| \phi_i \, \delta^i \right\|^{ex} = \frac{1}{\widetilde{\omega}_i} \int_{-\infty}^{\infty} \breve{\overline{\phi}}_i^s \breve{\overline{\chi}}_{,3} \omega d\xi \tag{4.117}$$

Ainsi, les variables surfaciques macroscopiques $\widetilde{\phi}_i$ (non nulles uniquement à l'interface) traduisent la différence entre les descriptions mésoscopique et macroscopique ; leur définition est associée à la quantité en excès suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\breve{\overline{\phi}}_i \, \breve{\overline{\chi}}_{v,3} - \widetilde{\phi}_i \, \widetilde{\chi}_{v,3} \right) \omega d\xi = 0 \tag{4.118}$$

10. L'indice $_{,3}$ désigne la dérivée dans la direction normale à l'interface de l'indicatrice de phase $\delta^i = \chi_{,3}$.

Ces deux relations permettent de définir et de comprendre le rôle d'une variable macroscopique interfaciale. Voyons à présent à quoi elles conduisent lorsqu'elles sont appliquées au taux de changement de phase et à la vitesse de l'interface.

Taux de changement de phase macroscopique Le taux de changement de phase mésoscopique est porté par la distribution de Dirac filtrée $\overline{\delta}_\sigma$. Pour le concentrer à l'interface macroscopique, il semble naturel d'après l'équation (4.117) de définir le taux de changement de phase macroscopique par :

$$\widetilde{\dot{m}} \hat{=} \left\| \overline{\dot{m}}^s \overline{\delta}_\sigma \right\|^{ex} = \frac{1}{\widetilde{\omega}_i} \int \left(\breve{\overline{m}} \, \breve{\overline{\delta}}_\sigma \right) \omega d\xi \tag{4.119}$$

Pour affiner cette définition, on s'intéresse à l'évolution des variables surfaciques $\overline{\psi}^s$ au voisinage de l'interface. À l'annexe 4.C, un développement limité de la variable surfacique microscopique $\psi(\xi_1, \xi_2)$ permet de montrer que l'application du filtre surfacique $\overline{\cdot}^s$ à cette variable conduit à (*cf.* Éq. (4.284)) :

$$\overline{\psi}^s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \psi^0(\xi_1, \xi_2) + \epsilon \psi^1(\xi_1, \xi_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.120}$$

Cette relation exprime une variable mésoscopique à partir du champ microscopique ; c'est une déconvolution. Elle démontre **l'indépendance des variables surfaciques mésoscopiques à la coordonnée normale à l'interface aux ordres 0 et 1**. Cette propriété est utilisée pour l'étude analytique du système dans la région intérieure (section 4.4.5).

En appliquant la relation (4.120) au taux de changement de phase mésoscopique ($\overline{\psi}^s \equiv \overline{\dot{m}}^s$), on montre que le taux de changement de phase mésoscopique est indépendant de la coordonnée normale aux ordres 0 et 1. Par conséquent, il peut être sorti de l'intégrale à l'équation (4.119) et d'après la définition (4.141) de $\widetilde{\omega}_i$ qui traduit la position particulière choisie pour l'interface macroscopique, on a :

$$\widetilde{\dot{m}} \hat{=} \breve{\overline{m}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.121}$$

Vitesse interfaciale macroscopique Pour la vitesse interfaciale macroscopique, la définition n'est pas aussi directe car le positionnement de l'interface macroscopique à l'intérieur de la zone de transition est arbitraire (Edwards *et al.*, 1991) ; **la vitesse de déplacement de l'interface macroscopique ne s'évalue pas aisément à partir de la vitesse de déplacement de l'interface mésoscopique**. Pour simplifier le système macroscopique, on choisit de supprimer le degré de liberté sur la position de l'interface macroscopique en imposant $\|\rho\|^{ex} = 0$ à chaque instant. Au paragraphe 4.4.3, ce choix permet de placer précisément l'interface macroscopique et de déterminer sa vitesse.

4.4.3 Définition de la vitesse de l'interface macroscopique

Dans cette section, on présente le cheminement qui conduit à la définition de la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$. Pour cela, un constat sur un exemple simple permet à la section 4.4.3.1 d'appréhender le lien entre la conservation de la masse, la position de l'interface macroscopique et la vitesse macroscopique de l'interface $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$. Ensuite, la contrainte imposée à l'excès de masse est explicitée dans un cadre général à la section 4.4.3.2. La position de l'interface macroscopique obtenue sous cette contrainte est présentée à la section 4.4.3.3. Elle permet finalement de définir la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ à partir de variables mésoscopiques (section 4.4.3.4).

4.4.3.1 Préliminaire : influence de la courbure sur la vitesse de l'interface macroscopique

Pour comprendre l'influence de la courbure de l'interface microscopique κ sur la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$, on envisage une interface initialement plane qui se courbe progressivement autour d'un point particulier O fixe (qui représente l'origine du repère). Deux représentations de l'interface microscopique Γ_i à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant $t_1 > t_0$ sont représentées sur la figure 4.6. La coordonnée ξ_3 mesure la distance à l'interface microscopique. Sur l'axe $(O\xi_3)$, la position de cette interface microscopique $\xi^i = 0$ n'évolue pas au cours du temps (par définition).

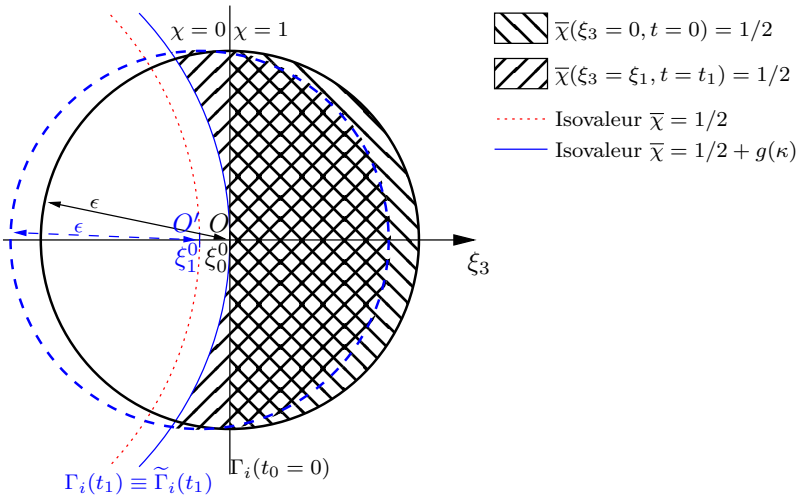


FIGURE 4.6 – Variation des grandeurs surfaciques en fonction de la coordonnée normale.

Pourtant, l'ordonnée $\xi^0(t)$ telle que $\overline{\chi}(\xi^0(t), t) = 1/2$ évolue : plus la courbure de l'interface est importante, plus elle se déplace vers les ξ_3 négatifs (de O vers O' sur la figure 4.6).

On s'intéresse à la conservation de la masse de chaque phase entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Sur cet exemple simple, la courbure de l'interface est uniforme. Par conséquent, **pour ne pas modifier la masse de chaque phase,** la position de l'interface macroscopique $\widetilde{\Gamma}_i$ (notée $\widetilde{\xi}^i$) doit être identique à celle de l'interface microscopique Γ_i, *i. e.*, $\widetilde{\xi}^i = 0$. La valeur de l'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi}$ qui permet d'identifier cette ordonnée $\widetilde{\xi}^i$ est alors supérieure à 1/2 comme le montre la figure 4.6 : cette valeur est en effet donnée par le rapport de l'ensemble des aires hachurées à l'aire du support du filtre. L'ordonnée $\widetilde{\xi}^i$, qui identifie l'interface macroscopique conservant la masse, dépend donc de la courbure de l'interface microscopique. Formellement, on exprime cette dépendance par la relation :

$$\overline{\chi}(\widetilde{\xi}^i) = 1/2 + g(\kappa) \tag{4.122}$$

La fonction g est exprimée dans un cadre général à la section suivante. **Elle représente la dépendance de la valeur de l'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi}$ qui identifie l'interface macroscopique à la courbure (microscopique) ; elle provient du caractère non local du filtre.**

En différenciant cette expression par rapport au temps, on en déduit que l'interface macroscopique se déplace à une vitesse qui dépend de l'évolution temporelle de la courbure :

$$\| \widetilde{\boldsymbol{v}}_i \| = \frac{d\overline{\chi}(\widetilde{\xi}^i)}{dt} = \frac{dg}{dt} = \frac{dg}{d\kappa}\frac{d\kappa}{dt} \tag{4.123}$$

La vitesse macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ a évidemment d'autres origines dans une configuration plus complexe où l'interface microscopique est transportée par un fluide. La définition donnée ici représente uniquement la vitesse dans le repère lié à l'interface microscopique. C'est pour cela que les dérivées temporelles de l'expression précédente sont lagrangiennes. Cet exemple a pour vocation de justifier pourquoi la vitesse de l'interface macroscopique ne résulte pas uniquement de la convection de l'interface mésoscopique par la vitesse fluide $\overline{\boldsymbol{v}}$. Il permet aussi de montrer qu'une contrainte de conservation des phases permet de positionner l'interface macroscopique. Dans la section 4.4.3.3, on étudie cette relation de cause à effet dans un cadre général.

4.4.3.2 Définition d'une grandeur en excès

Avant d'étudier la contrainte de conservation de la masse à une interface quelconque, revenons tout d'abord sur la définition d'une grandeur en excès pour l'exprimer précisément dans le repère local introduit à la section 4.3.1. Nous avons vu au début de la section 4.1 que les solutions mésoscopique $\breve{\overline{\phi}}$ et macroscopique $\widetilde{\phi}$ diffèrent sur une zone englobant l'interface appelée *zone de*

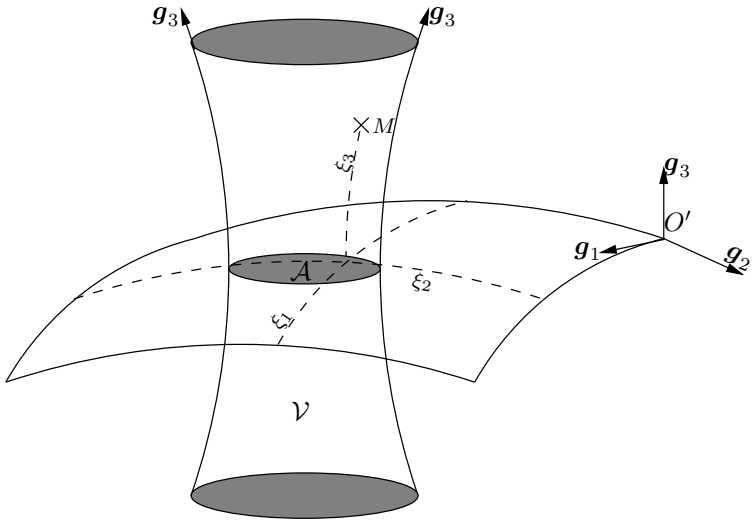


FIGURE 4.7 – Description de la zone de transition $\mathcal{V}$ reposant sur la portion d'interface $\mathcal{A}$.

transition. Pour rétablir l'équivalence (au sens intégral) entre les descriptions mésoscopique et macroscopique du problème, il faut introduire des grandeurs en excès $\|\phi\|^{ex}$ définies par

$$\iint_{\mathcal{A}} \|\phi\|^{ex} \, da = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\breve{\overline{\phi}} - \widetilde{\phi} \right) dv \tag{4.124}$$

où $\mathcal{V}$ est un volume reposant sur la surface $\mathcal{A}$ délimitée par une fonction $f_{\mathcal{A}}(\xi_1, \xi_2)$ (Fig. 4.7). Les bords latéraux du volume $\mathcal{V}$ suivent les lignes de coordonnées ξ_3 alors que les bords inférieurs et supérieurs correspondent à des isovaleurs de ξ_3 délimitées par la fonction $f_{\mathcal{A}}$. Ces bords se situent en dehors de la zone de transition. Les variables mésoscopique $\breve{\overline{\phi}}$ et macroscopique $\widetilde{\phi}$ y sont donc identiques. La relation précédente s'écrit donc dans le repère de coordonnées curvilignes $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$:

$$\iint_{\xi_1,\xi_2} \|\phi\|^{ex} (\xi_1, \xi_2) \widetilde{\omega}_i d\xi_1 d\xi_2 = \iiint_{\xi_1,\xi_2,\xi_3} \left(\overline{\phi} - \widetilde{\phi} \right) \omega(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \tag{4.125}$$

La jacobienne ω du changement de coordonnées est définie par la relation (4.73). La relation (4.125) est vérifiée pour toute surface $\mathcal{A}$. En prenant une surface élémentaire, on obtient la définition locale des grandeurs en excès

$$\|\phi\|^{ex} = \frac{1}{\widetilde{\omega}_i} \int_{\xi} \left(\breve{\overline{\phi}}(\xi) - \widetilde{\phi}(\xi) \right) \omega(\xi) \epsilon d\xi \tag{4.126}$$

où le changement de variable $\xi = \xi_3/\epsilon$ permet de dilater la coordonnée normale à l'interface. Cette relation est une alternative à la définition générale (4.1). La méthode des DAR permet d'approcher progressivement la valeur de la grandeur en excès par un développement limité en ϵ :

$$\|\phi\|^{ex} = \|\phi\|^{ex(0)} + \epsilon \|\phi\|^{ex(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.127}$$

En identifiant les ordres de ϵ entre les deux équations précédentes et en utilisant la définition (4.73) de la jacobienne ω, on a :

$$\textbf{Ordre 0 :} \quad \|\phi\|^{ex(0)} = \int_{\xi} \left(\breve{\overline{\phi}}^0(\xi) - \widetilde{\phi}^0(\xi) \right) \epsilon d\xi \tag{4.128a}$$

$$\textbf{Ordre 1 :} \quad \|\phi\|^{ex(1)} = \int_{\xi} \left(\breve{\overline{\phi}}^1(\xi) - \widetilde{\phi}^1(\xi) \right) \epsilon d\xi + \kappa^0 \int_{\xi} \left(\widetilde{\xi}_i^0 - \xi \right) \left(\breve{\overline{\phi}}^0(\xi) - \widetilde{\phi}^0(\xi) \right) \epsilon d\xi \tag{4.128b}$$

Le facteur ϵ qui apparaît dans les relations précédentes provient du changement de variable dans la région intérieure et s'explique par un changement d'ordre associé aux opérateurs de différentiation

et d'intégration. Ces deux relations explicitent la définition d'une grandeur en excès dans le repère local. Elles sont appliquées à la masse volumique à la section suivante afin de définir la position de l'interface macroscopique.

4.4.3.3 Relation entre la masse en excès et la position de l'interface macroscopique

D'après Edwards *et al.* (1991), l'interface macroscopique se situe à une position arbitraire de la zone de transition. Néanmoins, pour les grandeurs présentant un saut à l'interface, Jamet et Chandesris (2009) montrent que la grandeur en excès évolue linéairement avec la position choisie pour l'interface macroscopique. Afin de simplifier les bilans, on *choisit* de fixer la position de l'interface macroscopique équivalente **en imposant une masse en excès nulle à l'interface**. Cela se traduit par la contrainte

$$\|\rho\|^{ex} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|\chi\|^{ex}\,\widetilde{\omega}_i = \int_\xi \left(\breve{\overline{\chi}}(\xi) - \widetilde{\chi}(\xi)\right)\omega(\xi)\epsilon d\xi = 0 \tag{4.129}$$

où l'indicatrice macroscopique $\widetilde{\chi}$ est une fonction Heaviside H située en $\widetilde{\xi}_i = \widetilde{\xi}_i^0 + \epsilon\widetilde{\xi}_i^1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$:

$$\widetilde{\chi}(\xi) = H(\xi - \widetilde{\xi}_i) = \underbrace{H(\xi - \widetilde{\xi}_i^0)}_{\widetilde{\chi}^0(\xi)} + \underbrace{H\left(\xi - (\widetilde{\xi}_i^0 + \epsilon\widetilde{\xi}_i^1)\right) - H(\xi - \widetilde{\xi}_i^0)}_{\epsilon\widetilde{\chi}^1(\xi)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.130}$$

En termes d'ordre, le développement de l'indicatrice macroscopique [11] produit un déplacement de la discontinuité qui s'exprime par : $\widetilde{\chi}^0(\xi) = H(\xi - \widetilde{\xi}_i^0)$ et $\epsilon\widetilde{\chi}^1(\xi) = H\left(\xi - (\widetilde{\xi}_i^0 + \epsilon\widetilde{\xi}_i^1)\right) - H(\xi - \widetilde{\xi}_i^0)$.

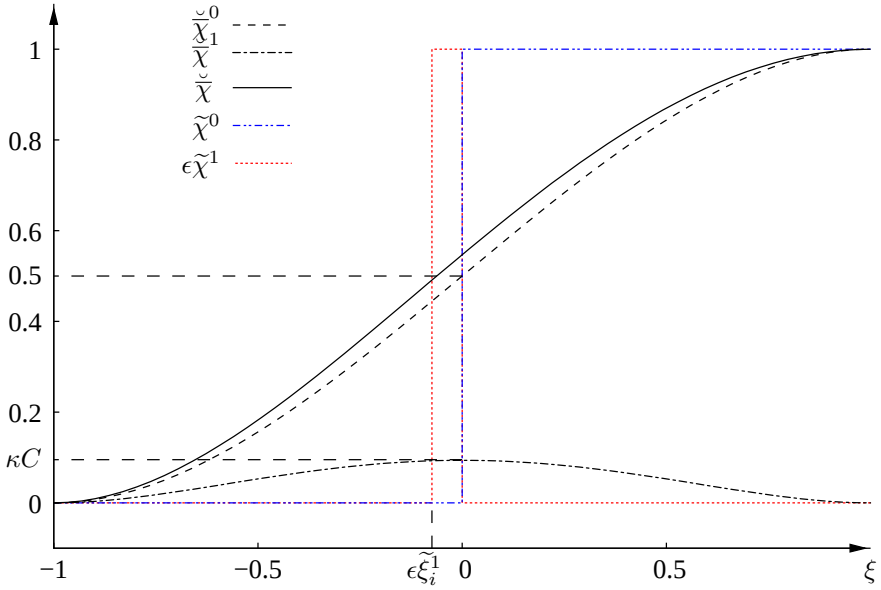


FIGURE 4.8 – Reconstruction de l'indicatrice macroscopique aux ordres 0 et 1 (Exemple de profils obtenus avec un filtre boîte sphérique appliqué à une interface sphérique, *cf.* annexe E).

À l'ordre 0, d'après la relation (4.128a), la contrainte (4.129) conduit à :

$$\int_\xi \left(\breve{\overline{\chi}}^0(\xi) - \widetilde{\chi}^0(\xi)\right) d\xi = 0 \tag{4.131}$$

D'après la symétrie du noyau du filtre, l'intégrale s'évalue directement à partir de la position de l'interface et de la valeur du saut unitaire de l'indicatrice

$$\int_\xi \left(\breve{\overline{\chi}}^0(\xi) - \widetilde{\chi}^0(\xi)\right) d\xi = \widetilde{\xi}_i^0 - \breve{\overline{\xi}}_i^0 \tag{4.132}$$

11. L'ordre 1 de l'indicatrice macroscopique $\widetilde{\chi}^1$ est très particulier. Ces seules variations sont dans la zone de transition car l'ordre 0 $\widetilde{\chi}^0$ correspond exactement à la valeur de la variable $\widetilde{\chi}$ dans les phases (Fig. 4.8).

où la position $\overset{\smile}{\xi}{}_i^0 = 0$ est le centre de gravité du profil $\overset{\smile}{\chi}{}^0 \equiv f^0$, définie de manière unique par $\overset{\smile}{\chi}{}^0(\overset{\smile}{\xi}{}_i^0) = 1/2$ car $\overset{\smile}{\chi}{}^0$ est bijective. En associant les relations (4.131) et (4.132), on obtient la position de l'interface macroscopique à l'ordre dominant : $\widetilde{\xi}_i^0 = \overset{\smile}{\xi}{}_i^0 = 0$. Elle se situe au centre de gravité du profil mésoscopique d'ordre 0.

À l'ordre 1, l'absence de masse en excès à l'interface se traduit d'après la relation (4.128b) par :

$$\int_\xi \left(\overset{\smile}{\chi}{}^1(\xi) - \widetilde{\chi}^1(\xi)\right) d\xi + \kappa^0 \int_\xi \left(\widetilde{\xi}_i^0 - \xi\right) \left(\overset{\smile}{\chi}{}^0(\xi) - \widetilde{\chi}^0(\xi)\right) d\xi = 0 \tag{4.133}$$

Cette relation se simplifie en utilisant l'expression (4.131) de la contrainte sur l'excès de masse à l'ordre 0 :

$$\int_\xi \left(\overset{\smile}{\chi}{}^1(\xi) - \widetilde{\chi}^1(\xi)\right) d\xi - \kappa^0 \int_\xi \xi \left(\overset{\smile}{\chi}{}^0(\xi) - \widetilde{\chi}^0(\xi)\right) d\xi = 0 \tag{4.134}$$

En utilisant le postulat (4.105) et la propriété intrinsèque C_4 définie par la relation (4.108b), la première intégrale s'évalue par

$$\int_\xi \overset{\smile}{\chi}{}^1(\xi) d\xi = \kappa^0 C_4 \quad \text{et} \quad \int_\xi \widetilde{\chi}^1(\xi) d\xi = -\widetilde{\xi}_i^1 \tag{4.135}$$

et la seconde par :

$$C_4 \hat{=} \int_\xi \xi \left(\overset{\smile}{\chi}{}^0(\xi) - \widetilde{\chi}^0(\xi)\right) d\xi \tag{4.136}$$

Par conséquent, on a :

$$\widetilde{\xi}_i^1 = 0 \tag{4.137}$$

À l'ordre 1, l'interface macroscopique n'est donc pas déplacée par rapport à l'ordre 0.

Conclusion L'interface macroscopique doit donc être positionnée en $\xi = 0$ à l'ordre 0 comme à l'ordre 1 :

$$\widetilde{\xi}^i = 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.138}$$

Ce résultat indique que l'interface macroscopique doit être positionnée au même endroit que l'interface microscopique en l'absence de fluctuations. En effet, dans ce cas, il semble indispensable de positionner les interfaces microscopique et macroscopique au même endroit pour ne pas introduire de masse en excès.

Afin d'identifier l'ordonnée $\xi = 0$ à l'échelle mésoscopique, on l'associe à une isosurface de la variable mésoscopique $\overset{\smile}{\chi}$ puisque cette fonction bijective est une variable principale du problème. La progression dans les ordres permet d'affiner la valeur de cette isosurface. En effet, alors qu'à l'ordre 0 l'interface macroscopique est positionnée à l'isovaleur $\overset{\smile}{\chi} = 1/2 + \mathcal{O}(\epsilon)$, elle est placée plus précisément à l'ordre 1 en ajustant l'isovaleur à $\overset{\smile}{\chi} = 1/2 + C\epsilon\overline{\kappa}_\sigma + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Pour un filtre boîte sphérique, on obtient $C = 3/16$. Ce résultat correspond alors à celui proposé par Toutant (2006). La définition que l'on propose est plus générale puisqu'elle peut s'évaluer pour n'importe quel filtre.

Cette section établit le lien entre l'interface mésoscopique et l'interface macroscopique équivalente permettant de conserver le volume de chaque phase. Elle permettrait, dans une modélisation SGE continue (*i. e.,* résolution directe des équations du système (2.97)), de déterminer la position de l'interface en recherchant la surface solution de l'équation $\overset{\smile}{\chi} = 1/2 + C\epsilon\overline{\kappa}_\sigma + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Bien qu'elle soit utile à la compréhension du problème, cette section ne ferme pas le problème de transport de l'interface à l'échelle macroscopique car elle ne définit pas la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ qui intervient dans l'équation de transport (4.12). Pour établir une définition à partir des variables mésoscopiques, nous allons, à la section suivante, dériver en temps la contrainte imposée à l'excès de masse. Cette définition (ouverte à l'échelle macroscopique) est un premier pas vers la fermeture de l'équation de transport de l'interface macroscopique (4.12). La fermeture à proprement parler résulte de l'étude analytique du système intérieur conduite à la section 4.4.5.

Quelques propriétés Pour terminer ce paragraphe, nous souhaitons énoncer quelques résultats importants pour définir la vitesse de l'interface macroscopique à la section 4.4.3.4. Tout d'abord, comme l'indicatrice macroscopique est un Heaviside dont la position est donnée par la relation (4.138), elle dépend uniquement de la coordonnée normale à l'interface aux premiers ordres :

$$\widetilde{\chi}(\xi_1, \xi_2, \xi) = \widetilde{\chi}(\xi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.139}$$

Par conséquent, le vecteur normal à l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{n}}$ est colinéaire au vecteur $\boldsymbol{g}_3$ aux ordres 0 et 1. Comme ils sont tous deux unitaires par définition, on a d'après leurs orientations respectives :

$$\widetilde{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{g}_3 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.140}$$

Par ailleurs, la position $\widetilde{\xi}_i$ n'a pas de raison, *a priori*, de conserver la surface car ce n'est pas la contrainte que nous avons imposée. Néanmoins, la section 2.5 permet de montrer que, dans le cadre de nos hypothèses (fluctuations de courbure de l'ordre de la courbure moyenne) et aux premiers ordres (ordres 0 et 1), les fluctuations de courbure n'affectent pas l'aire interfaciale qui est donc conservée lors du passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique. Puisque la contrainte de conservation du volume positionne l'interface macroscopique au niveau de l'interface microscopique en l'absence de fluctuations, la conservation de l'aire interfaciale est aussi satisfaite par cette contrainte aux premiers ordres et on a :

$$\int \left(\overline{\breve{\delta}_\sigma} - \widetilde{\delta}^i\right) \omega d\xi = \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\omega}_i = \int \overline{\breve{\delta}_\sigma} \omega d\xi + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.141}$$

4.4.3.4 Vitesse de l'interface macroscopique

Le système intérieur n'est pas seulement résolu pour déterminer les conditions de raccord pour le problème extérieur mais aussi pour localiser la discontinuité macroscopique équivalente à laquelle elles doivent être appliquées (à chaque instant). Un degré de liberté existe pour localiser cette discontinuité. Pour simplifier l'expression des relations de saut, nous avons **choisi** d'ajouter la contrainte suivante : **l'interface macroscopique équivalente est définie telle que l'excès de masse $\|\rho\|^{ex}$ (et par conséquent $\|\chi\|^{ex}$) soit nul à chaque instant.** Cette contrainte a permis à la section 4.4.3.3 de définir précisément la position de l'interface macroscopique à partir de son homologue à l'échelle mésoscopique. Intéressons-nous à présent aux conséquences de cette contrainte au cours du temps. Nous allons voir qu'elle permet de définir la vitesse de l'interface macroscopique. Nous avons pris le parti d'observer l'interface dans un repère fixe. Les dérivées temporelles sont alors des dérivées classiques (vision eulérienne).

En explicitant la contrainte sur l'excès de masse pour un volume $\mathcal{V}(t)$ (défini sur la figure 4.7) associé aux coordonnées du repère mobile (*i. e.,* les coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) des points $M \in \mathcal{V}(t)$ n'évoluent pas au cours du temps), on a :

$$\iiint_{\mathcal{V}(t)} \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) d\nu = 0 \tag{4.142}$$

La règle de Leibniz et le théorème de Gauss (Delhaye, 2008, p. 147) permettent de dériver la relation (4.142) par rapport au temps en énonçant le théorème de transport de Reynolds :

$$\iiint_{\mathcal{V}(t)} \left(\left.\frac{\partial \widetilde{\chi}_v}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} - \left.\frac{\partial \overline{\chi}_v}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{v}_i^m \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right)\right) \right) d\nu = 0 \tag{4.143}$$

La vitesse des coordonnées (ou vitesse du repère) $\boldsymbol{v}_i^m$ est définie par la relation (4.76). Elle correspond effectivement à la vitesse des bords du volume $\mathcal{V}(t)$ par définition de celui-ci. Cette contrainte doit être vérifiée pour tout volume s'appuyant sur une surface $\mathcal{A}$. En prenant une surface élémentaire, le problème se réduit dans les coordonnées locales à une intégrale simple suivant la direction normale :

$$\int_{\xi_3} \left(\left.\frac{\partial \widetilde{\chi}_v}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} - \left.\frac{\partial \overline{\chi}_v}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} + \nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) + \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) \right) \omega d\xi_3 = 0 \tag{4.144}$$

Rappelons que $\omega = 1-\xi_3\kappa+\xi_3^2 H$ est la jacobienne des coordonnées curvilignes et que les courbures κ et H sont des grandeurs associées à la surface $\xi_3 = 0$ indépendantes de la coordonnée normale à l'interface. Les dérivées temporelles des indicatrices mésoscopique et macroscopique sont évaluées dans un repère fixe. Évaluons chaque partie de l'intégrale séparément.

- L'indicatrice macroscopique $\widetilde{\chi}_v$ est une fonction de Heaviside dont le déplacement est donné par l'équation de transport (4.12) définissant la vitesse macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$:

$$\left.\frac{\partial \widetilde{\chi}_v}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} = -\widetilde{\boldsymbol{v}}_i \cdot \nabla \widetilde{\chi}_v = \widetilde{\boldsymbol{v}}_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} \widetilde{\delta}^i \tag{4.145a}$$

  La distribution de Dirac $\widetilde{\delta}^i$ permet de positionner l'interface macroscopique à l'ordonnée $\widetilde{\xi}^i$.
- L'indicatrice mésoscopique $\overline{\chi}_v$ évolue suivant l'équation de transport (4.88a)

$$\left.\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} + \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \nabla \overline{\chi} + A = 0 \tag{4.145b}$$

  où $A = \tau^{mf}_{\text{interf}}$ est le modèle sous-maille interfacial défini par la relation (4.90a).
- La divergence de $\boldsymbol{v}_i^m$ est donnée par la relation (4.78). La 3e partie de l'intégrale (4.144) s'exprime donc :

$$\int_{\xi_3} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) \omega d\xi_3 = -\int_{\xi_3} \xi_3 \frac{\kappa_{\alpha,\alpha}}{h_\alpha h_\alpha} \boldsymbol{v}_i^m(\alpha) \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) \omega d\xi_3 \quad \text{(somme sur } \alpha) \tag{4.145c}$$

- Puisque le repère est orthonormé, la composante normale $\boldsymbol{v}_i^m(3)$ ne dépend pas de la distance à l'interface ξ (*cf.* Éq. (4.77)). Les composantes tangentielles $\boldsymbol{v}_i^m(\alpha)$ sont données en $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ par la relation (4.79). D'après la définition (4.73) de la jacobienne ω, la 4e partie de l'intégrale (4.144) s'évalue par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_3} \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) \omega d\xi_3 &= \boldsymbol{v}_i^m(3) \int_{\xi_3} \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right)_{,3} \omega d\xi_3 + \int_{\xi_3} \boldsymbol{v}_i^m(\alpha) \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right)_{,\alpha} \omega d\xi_3 \quad \text{(somme sur } \alpha) \\
&= \boldsymbol{v}_i^m(3) \left[\!\left[\left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) \omega\right]\!\right] - \boldsymbol{v}_i^m(3) \int_{\xi_3} \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) \omega_{,3} d\xi_3 - \int_{\xi_3} \xi_3 C_\alpha \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right)_{,\alpha} \omega d\xi_3 \\
&= -\boldsymbol{v}_i^m(3) \int_{\xi_3} \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) (\kappa - 2\xi_3 H) \, d\xi_3 - \int_{\xi_3} \xi_3 C_\alpha \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right)_{,\alpha} \omega d\xi_3
\end{aligned} \tag{4.145d}$$

En combinant les 4 équations du système (4.145), la contrainte (4.144) s'écrit dans le repère mobile (avec la convention de sommation pour l'indice répété α) :

$$\begin{aligned}
\int \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} \widetilde{\delta}^i + \overline{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \nabla \overline{\chi} + A\right) \omega d\xi_3 - \int_{\xi_3} \xi_3 \frac{\kappa_{\alpha,\alpha}}{h_\alpha h_\alpha} \boldsymbol{v}_i^m(\alpha) \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) \omega d\xi_3 \\
-\boldsymbol{v}_i^m(3) \int_{\xi_3} \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right) (\kappa - 2\xi_3 H) \, d\xi_3 - \int_{\xi_3} \xi_3 C_\alpha \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right)_{,\alpha} \omega d\xi_3 = 0
\end{aligned}$$

Le premier terme s'évalue simplement. La coordonnée normale est dilatée à l'aide du changement de variable $\xi \hat{=} \xi_3/\epsilon$. La condition précédente s'évalue alors à l'ordre 2

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{v}}_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} \, \widetilde{\omega}_i = &-\int \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}} + A\right) \omega \epsilon d\xi - \epsilon^2 \int \xi \frac{\kappa_{\alpha,\alpha}}{h_\alpha h_\alpha} \boldsymbol{v}_i^m(\alpha) \left(\widetilde{\chi}_v - \breve{\overline{\chi}}_v\right) \omega d\xi \\
&- \epsilon\kappa \boldsymbol{v}_i^m(3) \boxed{\int \left(\widetilde{\chi}_v - \breve{\overline{\chi}}_v\right) d\xi} + 2H\epsilon^2 \boldsymbol{v}_i^m(3) \boxed{\int \left(\widetilde{\chi}_v - \breve{\overline{\chi}}_v\right) \xi d\xi} - \epsilon^2 \int \xi C_\alpha \left(\widetilde{\chi}_v - \overline{\chi}_v\right)_{,\alpha} \omega d\xi + \mathcal{O}(\epsilon^3)
\end{aligned} \tag{4.146}$$

où $\widetilde{\omega}_i$ représente $\omega(\widetilde{\xi}^i)$. Les deux intégrales encadrées sont évaluées à l'aide de la contrainte de conservation de la masse exprimée aux ordres 0 et 1 (Éqs. (4.131) et (4.134)) et de la définition (4.109) du paramètre C_4 :

$$\int \left(\widetilde{\chi}_v - \breve{\overline{\chi}}_v\right) d\xi = \epsilon\kappa C_4 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{et} \quad \int \left(\widetilde{\chi}_v - \breve{\overline{\chi}}_v\right) \xi d\xi = C_4 + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.147}$$

D'après le postulat (4.106) et d'après la relation (4.139), les indicatrices mésoscopique et macroscopique ne dépendent que de la coordonnée normale à l'interface : $\breve{\overline{\chi}}^0(\xi_1,\xi_2,\xi) = \breve{\overline{\chi}}^0(\xi)$ et $\widetilde{\chi}^0(\xi_1,\xi_2,\xi) = \widetilde{\chi}^0(\xi)$. Par conséquent, la dernière intégrale est nulle à l'ordre considéré. En développant aussi vitesse des coordonnées $\boldsymbol{v}_i^m$ en ordres du paramètre ϵ et d'après les définitions $h_\alpha \hat{=} 1-\epsilon\xi\kappa_\alpha$, on poursuit les simplifications :

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{v}}_i\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}\,\widetilde{\omega}_i = &-\int\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\cdot\nabla\breve{\overline{\chi}}+A\right)\omega\epsilon d\xi \\ &-\epsilon^2\left[\kappa_{\alpha,\alpha}\int\boldsymbol{v}_i^{m0}(\alpha)\left(\widetilde{\chi}_v-\breve{\overline{\chi}}_v\right)\xi\omega d\xi-\left(\kappa^2-2H\right)C_4\boldsymbol{v}_i^{m0}(3)\right]+\mathcal{O}(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{4.148}$$

Pour poursuivre notre analyse et simplifier cette définition de la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$, nous souhaitons retravailler le terme d'ordre 2 à l'intérieur des crochets de cette équation. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser des résultats de l'étude du système intérieur à l'ordre 0 menée au paragraphe 4.4.5.1. [12] Au paragraphe 4.4.5.1, on montre que $\boldsymbol{v}_i^{m0}(j) = \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0(j)$ (Éq. (4.170)) et que la composante $\boldsymbol{v}_i^{m0}(\alpha) = \boldsymbol{v}^0(\alpha)$ ne dépend pas de la coordonnée normale à l'interface (Éq. (4.171)). Par conséquent, on a

$$\int\boldsymbol{v}_i^{m0}(\alpha)\left(\widetilde{\chi}_v-\breve{\overline{\chi}}_v\right)\xi\omega d\xi = \boldsymbol{v}_i^{m0}(\alpha)\int\left(\widetilde{\chi}_v^0-\breve{\overline{\chi}}_v^0\right)\xi d\xi+\mathcal{O}(\epsilon) = \boldsymbol{v}_i^{m0}(\alpha)C_4+\mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.149}$$

et la vitesse de l'interface macroscopique est donnée par :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}\,\widetilde{\omega}_i = -\int\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\cdot\nabla\breve{\overline{\chi}}+A\right)\omega\epsilon d\xi-\epsilon^2\left[\kappa_{\alpha,\alpha}\widetilde{\boldsymbol{v}}_i(\alpha)C_4-\left(\kappa^2-2H\right)C_4\widetilde{\boldsymbol{v}}_i(3)\right]+\mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.150}$$

L'interface n'étant pas matérielle, seule la composante normale de la vitesse est significative. Sachant que $\widetilde{\xi}^i = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ (*cf.* Éq. (4.138)) et que $\widetilde{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{g}_3+\mathcal{O}(\epsilon^2)$ (*cf.* Éq. (4.140)) d'après les propriétés données à la fin du paragraphe 4.4.3.3, le jacobien $\widetilde{\omega}_i$ est unitaire et la vitesse de l'interface macroscopique est donnée par :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{g}_3\left(\int\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\cdot\nabla\breve{\overline{\chi}}+A\right)\omega\epsilon d\xi+\epsilon^2C_4\left(\kappa_{\alpha,\alpha}\widetilde{\boldsymbol{v}}_i(\alpha)+\left(\kappa^2-2H\right)\widetilde{\boldsymbol{v}}_i(3)\right)\right)+\mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.151}$$

Enfin, la relation (4.86a) issue de l'étude des propriétés du repère mobile permet de montrer que le terme proportionnel à C_4 dans l'équation précédente exprime l'évolution lagrangienne de la courbure moyenne $(d\kappa/dt)$:

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{g}_3\left(\int\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\cdot\nabla\breve{\overline{\chi}}+A\right)\omega\epsilon d\xi+\epsilon^2C_4\frac{d\kappa}{dt}\right)+\mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.152}$$

Conclusion La relation (4.152) définit la vitesse de l'interface macroscopique à partir de l'évolution des champs mésoscopiques sur la zone de transition ; une correction d'ordre 2 permet de considérer l'impact de l'évolution temporelle de la courbure moyenne de l'interface sur la position de l'interface macroscopique. Dans le cas d'une interface non matérielle (dont seul le déplacement normal compte), la relation (4.86a) entre l'évolution temporelle de la courbure moyenne et la vitesse de déplacement de l'interface devient

$$\frac{d\kappa}{dt} = \boldsymbol{v}_i^m(3)\left(\kappa^2-2H\right) = \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0\cdot\boldsymbol{g}_3\left(\kappa^2-2H\right)+\mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.153}$$

ce qui rend la définition (4.152) de la vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ implicite :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{g}_3\left(\int\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma\cdot\nabla\breve{\overline{\chi}}+A\right)\omega\epsilon d\xi+\epsilon^2C_4\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0\cdot\boldsymbol{g}_3\left(\kappa^2-2H\right)\right)+\mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.154}$$

12. À partir d'ici, nous n'allons modifier que l'expression du terme d'ordre 2 de la vitesse de l'interface macroscopique. Par conséquent, ces manipulations sont sans effet sur les résultats obtenus à l'ordre 0 au paragraphe 4.4.5.1.

Néanmoins, les deux occurrences de $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ interviennent avec deux ordres d'écart. L'ordre 0 de la vitesse de l'interface $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0$ peut donc être déterminé sans connaître l'évolution temporelle de la courbure. Il peut ensuite être utilisé pour fermer la relation (4.153) à l'ordre dominant en définissant l'évolution temporelle de la courbure à partir de variables principales macroscopiques. Finalement, cette fermeture à l'ordre dominant de la relation (4.153) est suffisante pour définir l'ordre 2 de la vitesse macroscopique de l'interface $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$. Ainsi, grâce au développement limité, la définition (4.152) de la vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ devient explicite.

On est donc à présent capable de relier la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ aux profils mésoscopiques par la relation (4.152). Ces profils mésoscopiques sont déterminés à la section 4.4.5 par l'étude de la région intérieure. La vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ ainsi définie permet de vérifier intrinsèquement la conservation de la masse.

Développement limité La définition (4.152) de la vitesse de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ à partir de la contrainte sur la masse en excès à l'interface est utilisée lors de l'étude la région intérieure (section 4.4.5) où elle doit être développée afin de définir chaque ordre de la vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$:

$$\textbf{Ordre 0 :} \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0 \cdot \boldsymbol{g}_3 = \int \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}^0 + A^0 \right) \epsilon d\xi \tag{4.155a}$$

$$\textbf{Ordre 1 :} \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^1 \cdot \boldsymbol{g}_3 = \int \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}^1 + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1 \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}^0 + A^1 \right) \epsilon d\xi - \kappa \int \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}^0 + A^0 \right) \epsilon \xi d\xi \tag{4.155b}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Ordre 2 :} \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^2 \cdot \boldsymbol{g}_3 = & \int \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}^2 + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1 \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}^1 + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^2 \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}^0 + A^2 \right) \epsilon d\xi \\ & - \kappa \int \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}^1 + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1 \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}^0 + A^1 \right) \epsilon \xi d\xi \\ & + H \int \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}^0 + A^0 \right) \epsilon^2 \xi^2 d\xi + \epsilon^2 C_4 \frac{d\kappa}{dt} \end{aligned} \tag{4.155c}$$

Ce développement limité à l'ordre 2 de la vitesse macroscopique de l'interface complète les travaux de Toutant (2006) en démontrant que l'évolution temporelle du profil de $\overline{\chi}$ dans le repère mobile due aux variations temporelles de courbure n'affecte la vitesse macroscopique qu'à l'ordre 2. Ce résultat est cohérent avec les travaux de Toutant *et al.* (2009a) puisque le terme correctif qu'ils obtiennent est proportionnel à la taille du filtre au carré. Sur leurs premiers tests, Toutant *et al.* (2009b) montrent que ce terme est du même ordre de grandeur que le terme de « Bardina de surface », ce qui n'est pas surprenant car nous montrons à la section 4.D.2.1 que ce terme est aussi d'ordre 2.

Remarque sur la cohérence de nos résultats avec les travaux précédents (Toutant *et al.*, 2009a) Le terme proportionnel à C_4 dans la relation (4.151) est bien cohérent avec le terme d'évolution de courbure obtenu par Toutant *et al.* (2009a, Éq. (D.19)) qu'ils expriment par la dérivée lagrangienne suivante :

$$\frac{d\kappa}{dt} = \Delta_s \boldsymbol{v}_{\widetilde{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n} - 2 \nabla_s \boldsymbol{v}_{\widetilde{\sigma}} : \boldsymbol{B} \tag{4.156}$$

En effet, ils définissent la vitesse $\boldsymbol{v}_{\widetilde{\sigma}}$ comme une grandeur surfacique vectorielle dont la seule composante non nulle est portée par la normale $\boldsymbol{n}$. D'après l'équation (4.120) établie pour une variable surfacique quelconque à la section 4.4.2, sa composante normale, notée $v_{\widetilde{\sigma}}$, est uniforme à l'ordre dominant et l'équation (4.156) devient :

$$\frac{d\kappa}{dt} = v_{\widetilde{\sigma}}^0 \left(\Delta_s \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} - 2 \nabla_s \boldsymbol{n} : \boldsymbol{B} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.157}$$

Sachant que le tenseur de courbure $\boldsymbol{B}$ est défini par $\boldsymbol{B} \hat{=} - \nabla_s \boldsymbol{n}$, on a :

$$\frac{d\kappa}{dt} = -v_{\widetilde{\sigma}}^0 \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{B}) + 2 v_{\widetilde{\sigma}}^0 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} \, (\boldsymbol{B} : \boldsymbol{B}) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.158}$$

Par définition du tenseur de courbure $\boldsymbol{B}$, on rappelle les relations (4.83) et (4.82)

$$\boldsymbol{B} : \boldsymbol{B} = \left(\kappa^2 - 2H \right) \quad \text{et} \quad - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \kappa_{\alpha,\alpha} \boldsymbol{u}(\alpha)$$

qui permettent finalement de montrer que :

$$\frac{d\kappa}{dt} = 2v_{\widetilde{\sigma}}^{0}\left(\kappa^2 - 2H\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.159}$$

Le facteur $\left(\kappa^2 - 2H\right)$ traduit l'anisotropie de la surface. Cette relation permet d'interpréter le terme d'évolution de courbure proposé par Toutant *et al.* (2009a) et de le relier à la caractéristique C_4 dans la relation (4.152).

Néanmoins, comme le montre le terme intégral de la relation (4.152), d'autres contributions doivent *a priori* être considérées à l'ordre 2, pour traduire les variations dans la direction normale à l'interface (i) de la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma$ et (ii) de la jacobienne $\omega(\xi)$. Pour un problème sans changement de phase ($\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}$), **en supposant que la vitesse intérieure soit indépendante de la coordonnée normale à l'interface jusqu'à l'ordre 2** [13], l'équation (4.152) devient d'après le postulat (4.105) sur le profil de l'indicatrice mésoscopique

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma(3) + \epsilon^2 \left[\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0 \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma - C_4\left(\frac{d\kappa}{dt} + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)\left(\kappa^2 - 2H\right)\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.160}$$

ou encore, d'après la relation (4.159) qui approche l'évolution temporelle de la courbure :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma(3) + \epsilon^2 \left[\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0 \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma - \frac{3}{2}C_4\frac{d\kappa}{dt}\right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.161}$$

Cette hypothèse sur le profil de vitesse dans la région intérieure permet de comparer nos développements à ceux de Toutant *et al.* (2009a) puisqu'ils utilisent l'hypothèse de profils indépendants de la coordonnée normale à l'interface qu'ils obtiennent à l'ordre 0. Sous cette hypothèse, on montre que les modélisations restantes sont d'ordre 2 ce qui est conforme aux résultats de Toutant *et al.* (2009a). Toutant *et al.* (2009a) supposent que le filtre permettant le passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique est un filtre boîte sphérique. Dans ce cas, le paramètre C_4 prend la valeur particulière 1/10. Le facteur 3/2 de la relation (4.161) provient de l'intégration de la jacobienne ω dans l'équation (4.152) alors que Toutant *et al.* (2009a) la considèrent unitaire puisqu'ils se limitent à l'expression de l'ordre 0. Cette différence n'est que théorique ; en pratique, le paramètre C_4 doit être déterminé en fonction de la méthode numérique (*e. g.,* Toutant *et al.*, 2009b) et le facteur 3/2 n'a alors plus d'importance.

Nous avons donc montré que l'équation de transport de l'interface proposée par Toutant *et al.* (2009a) est correcte à l'ordre 2 **sous l'hypothèse que les profils de vitesse soient indépendants de la coordonnée normale à l'interface à l'ordre 2** (pour les écoulements sans changement de phase). De plus, ce raisonnement permet de montrer que le laplacien de la vitesse $\Delta_s \boldsymbol{v}_{\widetilde{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}$ de l'équation (4.156) est négligeable devant l'autre terme $2\nabla_s \boldsymbol{v}_{\widetilde{\sigma}} : \boldsymbol{B}$.

4.4.4 Problème extérieur

L'étude extérieure vise à décrire les caractéristiques du problème (vitesse, température...) séparément dans chaque phase. Pour parvenir à cette description macroscopique des phases, nous avons énoncé à la section 4.1.1 les équations de bilan macroscopiques régissant l'évolution de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans les phases, y compris au voisinage de l'interface. Ce travail a permis d'exhiber les fermetures nécessaires pour établir une description macroscopique. À présent, l'objectif de ce paragraphe est d'étudier la dégénérescence de ces équations de bilan au voisinage de l'interface et à l'ordre dominant, lorsque les variables macroscopiques sont développées en séries de Taylor du petit paramètre ϵ :

$$\widetilde{\phi}(\xi, \epsilon) = \widetilde{\phi}^0(\xi) + \epsilon\widetilde{\phi}^1(\xi) + \cdots + \epsilon^i\widetilde{\phi}^i(\xi) + \mathcal{O}(\epsilon^{i+1}) \tag{4.162}$$

Comme nous avons pu le constater sur l'exemple d'application de la méthode des DAR présenté à la section 4.2, ce travail est nécessaire pour que les conditions de raccord apparaissent lors de

13. L'étude du système intérieur permet effectivement de justifier cette hypothèse en l'absence de changement de phase.

l'étude du problème dans la région intérieure aux ordres élevés. Les développements des calculs sont présentés à l'annexe 4.D.1, seuls les principaux résultats sont repris dans ce paragraphe.

Le système (4.92) décrit le problème à l'échelle mésoscopique dans le repère mobile $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ introduit à la section 4.3.1. En le simplifiant pour l'écrire dans la région extérieure, l'évolution des variables macroscopiques $\widetilde{\boldsymbol{v}}_k$, $\widetilde{p}_k$ et $\widetilde{T}_k$ est donnée par :

$$\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_k = 0 \tag{4.163a}$$

$$\frac{d\widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k}{dt} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \boldsymbol{v}_i^m) + \widetilde{C}_k\right) - \widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla \cdot \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} - \nabla\widetilde{p}_k \tag{4.163b}$$

$$\frac{d\widetilde{\rho c_p}_k\,\widetilde{T}_k}{dt} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho c_p}_k\,(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \boldsymbol{v}_i^m)\,\widetilde{T}_k + \widetilde{F}_k\right) - \widetilde{\rho c_p}_k\,\widetilde{T}_k\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m) = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\nabla \cdot \left(\widetilde{k}_k\,\nabla\widetilde{T}_k\right) \tag{4.163c}$$

Les conditions permettant de raccorder ces systèmes phasiques ($k = l$ ou v) sont déterminées par l'étude du système intérieur. En développant les variables extérieures en séries de Taylor et en exprimant les opérateurs différentiels dans les coordonnées généralisées $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, on obtient à l'ordre dominant le système ci-dessous pour décrire l'évolution des variables macroscopiques au voisinage de l'interface (*cf.* système (4.290)).

Bilan de masse

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(1)_{,1} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(2)_{,2} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3} - (\kappa_1 + \kappa_2)\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3) = 0 \tag{4.164a}$$

Bilan de quantité de mouvement

$$\begin{aligned}
&\frac{d\widetilde{\rho}^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)}{dt} + \widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} + \widetilde{\kappa}_\alpha\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) + \sum_i \widetilde{C}^0_{i\alpha,i} - \widetilde{\kappa}\widetilde{C}^0_{3\alpha} + \widetilde{p}^0_{,\alpha} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Re}}\Bigg[\left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}\right)_{,3} + \left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,\alpha}\right)_{,3} + \left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\kappa_\alpha\right)_{,3} \\
&\quad + \widetilde{\mu}^0\Bigg(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,1,1} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,2,2} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(1)_{,1,\alpha} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(2)_{,2,\alpha} - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}\,(\kappa_1 + \kappa_2) \\
&\quad - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,\alpha}\,(\kappa_1 + \kappa_2) - \kappa_\alpha\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} - 2\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} - (\kappa_1 + \kappa_2)\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\kappa_\alpha\Bigg)\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.164b}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\widetilde{\rho}^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)}{dt} + \widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3} + \sum_i \widetilde{C}^0_{i3,i} - \widetilde{\kappa}\widetilde{C}^0_{33} + \widetilde{p}^0_{,3} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Re}}\Bigg[2\left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}\right)_{,3} + \widetilde{\mu}^0\Bigg(-2\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}\,(\kappa_1 + \kappa_2) + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,\alpha,3} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,\alpha,\alpha} \\
&\quad + \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} + 2\kappa_\alpha\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,\alpha} - 2\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)\Bigg)\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.164c}$$

Bilan d'énergie

$$\begin{aligned}
&\frac{d\widetilde{\rho c_p}^0\widetilde{T}^0}{dt} + \widetilde{c_p}^0\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{T}^0_{,3} + \sum_i \widetilde{F}^0(i)_{,i} - \widetilde{F}^0(3)\,(\kappa_1 + \kappa_2) = \\
&\quad \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\widetilde{k}^0\left(\widetilde{T}^0_{,1,1} + \widetilde{T}^0_{,2,2} + \widetilde{T}^0_{,3,3} - \widetilde{T}^0_{,3}\,(\kappa_1 + \kappa_2)\right) + \widetilde{T}^0\left(\widetilde{k}^0_{,3} - \widetilde{k}^0\,(\kappa_1 + \kappa_2)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.164d}$$

Le système (4.164) traduit le comportement asymptotique (au voisinage de l'interface), à l'ordre dominant, du problème extérieur dans le repère de coordonnées curvilignes. Il est utilisé à la section suivante pour faire apparaître les conditions de raccord aux ordres élevés.

4.4.5 Problème intérieur

L'étude du système intérieur consiste en la résolution du système (4.92) dans la région interfaciale dans l'objectif de déterminer les valeurs limites des variables du système lorsque la coordonnée intérieure $\xi \to \pm\infty$. Ces limites asymptotiques du système intérieur sont ensuite raccordées aux solutions extérieures en $\xi_3 = 0^{\pm}$ pour déterminer la valeur des sauts à l'interface. Ces sauts constituent les fermetures de la description macroscopique équivalente présentées à la section 4.1.1. À nouveau, les détails des calculs sont présentés à l'annexe 4.D.2, seuls les principaux résultats sont repris et commentés dans cette partie.

Dans la région intérieure, on introduit la variable $\xi \hat{=} \xi_3/\epsilon$ afin de dilater la direction normale à l'interface. On note $\breve{\overline{\phi}}(\xi) = \overline{\phi}(\xi_3)$. Les variables intérieures sont développées en séries de Taylor :

$$\breve{\overline{\phi}} = \breve{\overline{\phi}}^0 + \epsilon \breve{\overline{\phi}}^1 + \epsilon^2 \breve{\overline{\phi}}^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.165}$$

L'étude du système intérieur à l'ordre 0 fournit les conditions aux limites sur la température $\widetilde{T}^0$, la vitesse monofluide $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0$ et celle de l'interface $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0$. Comme nous avons pu le constater sur l'exemple présenté à la section 4.2, il faut résoudre le système intérieur à l'ordre 1 pour obtenir les conditions de saut relatives aux gradients, *i. e.,* saut de pression et saut de flux thermique, à l'ordre dominant. L'étude du système intérieur est partiellement conduite jusqu'à l'ordre 2 dans la région intérieure pour fermer entièrement le problème macroscopique à l'ordre 1 car nous verrons que l'ordre 0 n'est pas suffisant (il ne contient aucune modélisation).

Quelques notations Afin d'alléger les expressions, on note les développements limités des termes sous-maille comme suit (notations cohérentes avec le système (4.90)) :

$$\breve{A}^i = \sum_{j+k=i} \tau^{mf}_{\text{interf}} \left(\breve{\overline{\chi}}^j, \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^k_\sigma \right), \ \breve{B}^i = \sum_{j+k=i} \tau^{mf}_{\text{temp}} \left(\breve{\overline{\rho}}^j, \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^k_\sigma \right), \ \breve{C}^i = \sum_{j+k+l=i} \tau^{mf}_{\text{conv}} \left(\breve{\overline{\rho}}^j, \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^k_\sigma, \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^l_\sigma \right),$$
$$\breve{D}^i = \sum_{j+k=i} \tau^{mf}_{\text{tempT}} \left(\breve{\overline{\rho\gamma}}^j, \breve{\overline{\Theta}}^k \right), \ \breve{E}^i = \sum_{j+k=i} \tau^{mf}_{\text{T}} \left(\breve{\overline{\gamma}}^j, \breve{\overline{\Theta}}^k \right), \ \breve{F}^i = \sum_{j+k+l=i} \tau^{mf}_{\text{convT}} \left(\breve{\overline{\rho\gamma}}^j, \breve{\overline{\Theta}}^k, \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^l_\sigma \right)$$

Comme les termes sous-maille sont composés de produits de variables principales, chaque ordre de leur développement est constitué d'une somme. Ces expressions enlèvent l'ambiguïté possible sur la signification de leur développement.

De plus, pour alléger les notations, on pose : $\breve{\overline{m}} = \breve{\overline{m}}^s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \breve{\overline{m}}^\sigma(\xi_1, \xi_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ d'après l'équation (4.120). Il est important de noter que la variable $\breve{\overline{m}}^\sigma$ dépend de ϵ même si elle ne dépend pas de la coordonnée ξ. En effet, la méthode des DAR permet d'approcher le système **dans sa globalité** par un développement limité à différents ordres. Autrement dit, les variables du problème sont elles aussi approchées à différents ordres et le taux de changement de phase mésoscopique n'échappe pas à cette règle. Il est défini sur la zone de transition mais il est indépendant de ξ aux ordres 0 et 1 d'après la section 4.4.2. Par contre, il dépend *a priori* de ϵ car sa valeur est fortement couplée à celle de la température. Il est par conséquent nécessaire de développer cette variable à différents ordres : $\breve{\overline{m}} = \breve{\overline{m}}^0 + \epsilon \breve{\overline{m}}^1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

4.4.5.1 Ordre 0

La démarche présentée à la section 4.2 est à présent appliquée au système mésoscopique complet (4.92) écrit dans le repère mobile. Les équations sont développées en séries puis l'ordre dominant est intégré pour que les relations de saut apparaissent à travers les relations de saut.

Conservation de la masse : À l'ordre dominant, l'intégration du bilan de masse (4.92b) sur la zone de transition permet d'obtenir la relation macroscopique de saut de vitesse normale à l'interface (*cf.* Éq. (4.294))

$$\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3) \right]\!\right] = \widetilde{\boldsymbol{v}}_l^0(3) - \widetilde{\boldsymbol{v}}_v^0(3) = -\left[\!\left[1/\rho \right]\!\right] \widetilde{\dot{m}}^0 \tag{4.166}$$

où le taux de condensation macroscopique $\widetilde{\dot{m}}^0$ est défini par la relation (4.121) pour représenter l'énergie en excès à l'interface associée au terme source de changement de phase. Ce saut est analogue à la relation microscopique (1.9). En présence de changement de phase, la vitesse n'est pas constante dans la zone de transition. Elle évolue très rapidement entre les deux bornes que constituent $\widetilde{\boldsymbol{v}}_l^0$ et $\widetilde{\boldsymbol{v}}_v^0$. Le profil de vitesse dans la zone de transition est déterminé par le noyau du filtre utilisé pour le passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique. Il peut s'exprimer en intégrant le bilan de masse (4.92b) à partir de la différence entre les indicatrices mésoscopique et macroscopique :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3) = [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{\dot{m}}^0 \left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) \tag{4.167}$$

Cette relation permet de montrer que la composante normale de la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma$ est indépendante de ξ à l'ordre 0 (*cf.* Éq. (4.297)). Par conséquent, la vitesse macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0$ est continue et définie comme à l'échelle microscopique :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\sigma+}^0 = \lim_{\xi\to+\infty} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}_+^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}_+^0 \tag{4.168a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\sigma-}^0 = \lim_{\xi\to-\infty} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}_-^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}_-^0 \tag{4.168b}$$

Transport de l'interface : L'information de fermeture sur l'équation de transport de l'interface fournie par l'équation (4.92a) est couplée à la contrainte sur l'excès de masse à la section 4.4.3.4. L'équation (4.155) qui en résulte permet de définir la vitesse macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ pour ne pas introduire de masse en excès à l'interface. Seulement cette définition est ouverte à l'échelle macroscopique car elle est établie à partir de variables mésoscopiques (la vitesse normale $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)$ et l'indicatrice $\breve{\overline{\chi}}^0$). Grâce aux profils donnés par l'étude du bilan de masse ci-dessus, on ferme la définition (4.155) à l'échelle macroscopique en montrant qu'à l'ordre dominant, la composante normale de la vitesse interfaciale macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0$ peut être confondue avec la vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0$ utilisée pour construire les modèles sous-maille (*cf.* Éq. (4.302)) :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0(3) = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3) \tag{4.169}$$

Comme $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)$ est indépendante de ξ, on montre qu'à l'ordre dominant les interfaces mésoscopique et macroscopique se déplacent à la même vitesse et que cette vitesse correspond à celle du repère mobile (O, ξ_1, ξ_2, ξ_3) (*cf.* Éq. (4.303)) :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0(3) = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3) = \breve{\boldsymbol{v}}_i^{m0}(3) \tag{4.170}$$

Bilan de quantité de mouvement : En intégrant l'équation de bilan de quantité de mouvement (4.92c) à l'ordre dominant et en utilisant la condition de raccord (4.277a), on montre que (*cf.* Éq. (4.310))

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(i) = g_i^0(\xi_1, \xi_2) \tag{4.171}$$

où g_i^0 sont des fonctions d'intégration à déterminer par l'étude du problème extérieur. On rappelle que par convention, l'indice i est utilisé pour représenter une direction quelconque (*i. e.*, $i = 1, 2, 3$) alors que les indices grecs α et β dénotent une des directions tangentes (*i. e.*, $\alpha = 1, 2$ et $\beta = 3 - \alpha$). Cette relation fournit les 3 composantes de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ à une constante près. Elles sont indépendantes de la coordonnée normale à l'interface ξ. Dans les directions tangentielles, comme $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha) = \breve{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)$, cette relation indique la continuité des vitesses tangentielles à la traversée de l'interface :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\right]\!\!\right] = 0 \tag{4.172}$$

Dans la direction normale à l'interface, cette relation n'apporte pas d'information complémentaire puisqu'elle conduit d'après la définition de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ au saut de vitesse normale établi par l'ordre dominant du bilan de masse (4.166). Cette redondance entre le bilan de masse et celui de quantité de mouvement s'explique par l'absence de pression pour régir le système à l'ordre dominant.

Aspects thermiques : Le bilan d'énergie et la condition de saturation sont traités simultanément. En suivant toujours la même démarche, l'équation de bilan d'énergie (4.92d) est intégrée à l'ordre dominant en utilisant la condition de raccord (4.277a) pour obtenir **la continuité de $\widetilde{\Theta}$ à l'ordre dominant** $\left[\!\left[\widetilde{\Theta}^0\right]\!\right] = 0$. La variable mésoscopique $\breve{\widetilde{\Theta}}$ est uniforme sur l'épaisseur de la zone de transition interfaciale. La particularité des écoulements avec changement de phase, exprimée par la condition de saturation (4.92e), permet en outre de déterminer la valeur de $\widetilde{\Theta}$ à l'interface et pas uniquement sa continuité. Grâce à la condition de saturation (4.92e), on détermine entièrement la température macroscopique à l'interface (*cf.* Éq. (4.315)) :

$$\widetilde{T}^0(\xi_1, \xi_2, 0) = 0 \tag{4.173}$$

En première approximation, **l'interface est donc à saturation.** La condition de saturation (4.92e) joue un rôle essentiel et constitue une différence notable avec les études menées précédemment sur la vitesse dans le cas sans changement de phase (Toutant, 2006). Elle implique **l'uniformité de la température dans toute la région interfaciale. Cette particularité rompt l'analogie vitesse/température.** De ce fait, l'ordre 0 des modèles sous-maille de l'équation d'énergie $\breve{D}^0$, $\breve{E}^0$ et $\breve{F}^0$ sont nuls dans le cas d'écoulements avec changement de phase.

Conclusion : À l'ordre 0, on obtient **des conditions identiques à celle d'un problème microscopique** :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_l^0 - \widetilde{\boldsymbol{v}}_v^0 = -\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{m}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}} \tag{4.174a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{m}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0 \tag{4.174b}$$

$$\widetilde{T}_l^0 = \widetilde{T}_v^0 = 0 \tag{4.174c}$$

À l'ordre dominant, le changement de variable effectué dans la direction normale à l'interface conduit à une description monodimensionnelle du problème, comme c'est fréquemment le cas pour les approches de type théories des couches limites. Les développements asymptotiques provoquent un découplage des directions. Cela signifie que les discontinuités des variables prédominent devant les variations tangentielles. Dans le repère mobile, le problème est stationnaire à l'ordre dominant. La vitesse de déplacement de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ est définie à partir de la vitesse monofluide $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ et du taux de changement de phase macroscopique $\widetilde{m}$. Les variations rapides de la vitesse mésoscopique dans la région intérieure $\breve{\widetilde{\boldsymbol{v}}}^0$ conduisent à un saut de vitesse normale à l'interface. Ce saut est déterminé par le taux de changement de phase macroscopique $\widetilde{m}$, comme pour la description microscopique. Il est aussi proportionnel au saut de volume massique. La pression n'apparaît pas à cet ordre puisque seul son gradient a un sens physique. La température (adimensionnelle) de l'interface $\widetilde{T}^0$ est constante et nulle (*i. e.,* température de saturation) ; la condition de saturation est là aussi identique à la relation microscopique. Le modèle est tel qu'à l'ordre dominant l'interface est à **l'équilibre thermodynamique** même si le flux de masse est non nul. Ce résultat est cohérent puisqu'il assure que **le modèle dégénère vers les équations microscopiques lorsque la taille du filtre ϵ tend vers 0.** À ce stade, nous disposons de cinq relations sur les sept recherchées pour fermer le système (4.10-4.13). Les deux dernières sont issues de l'étude à l'ordre 1 car elles concernent les flux ; lors du raccord, il y a un ordre d'écart entre les dérivées premières intérieures et extérieures.

4.4.5.2 Ordre 1

Conservation de la masse : Comme le bilan de masse est une équation aux dérivées partielles d'ordre 1, il ne doit pas être intégré directement sur la zone de transition. Les conditions de raccord présentées à la section 4.B indiquent que pour faire apparaître le saut de vitesse, il faut au préalable lui retrancher la limite asymptotique (au voisinage de l'interface) du bilan de masse extérieur écrit à l'ordre 0 en ϵ. Ce dernier est donné au voisinage de l'interface par la relation (4.164a) :

$$\lim_{\xi_3 \to 0} \nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(1)_{,1} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(2)_{,2} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3} - (\kappa_1 + \kappa_2)\, \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3) = 0 \tag{4.175}$$

En intégrant sur la zone de transition la différence entre la relation précédente et le bilan de masse (4.92b) à l'ordre 1 dans la région intérieure, la condition de raccord (4.276b) apparaît et on obtient le saut de vitesse normale à l'ordre 1 (*cf.* Éq. (4.321))

$$\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^1(3)\right]\!\right] = [\![1/\rho]\!]\,\widetilde{m}^1 \tag{4.176}$$

en positionnant l'interface macroscopique à l'aide de la contrainte sur la masse en excès et en utilisant les résultats de l'étude du problème intérieur à l'ordre 0.

À l'ordre 1, le saut de vitesse normale est donc proportionnel au taux de changement de phase macroscopique d'ordre 1 $\widetilde{m}^1$; il complète le saut obtenu précédemment à l'ordre 0. Ce résultat, identique à une condition microscopique, signifie que les modélisations mésoscopiques n'interviennent pas encore dans cette fermeture.

Après quelques manipulations, on montre que le saut de $\breve{\widetilde{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)$ est nul bien que cette vitesse ne soit pas uniforme dans la zone de transition :

$$\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_\sigma(3)\right]\!\right] = 0 \tag{4.177}$$

Transport de l'interface : Dans la définition (4.155) de la vitesse macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ permettant de ne pas introduire de masse en excès à l'interface, les intégrales peuvent être évaluée à partir des profils de vitesse mésoscopiques obtenus aux ordres 0 et 1. Ainsi, on définit l'ordre 1 de la vitesse de l'interface macroscopique à partir des variables macroscopiques du problème (*cf.* Éq. (4.332))

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_i(3) = \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_\sigma(3) + \widetilde{\kappa}\widetilde{m}^0\,[\![1/\rho]\!]\,C_5 \tag{4.178}$$

où C_5 est un paramètre caractéristique du filtre défini par la relation (4.108c). Pour arriver à ce résultat, les fluctuations sous-maille de courbure et de taux de changement de phase sont négligées et on suppose que le filtre volumique se décompose en la succession d'un filtre surfacique $\bar{\cdot}^\sigma$ et d'un filtre normal $\bar{\cdot}^n$ (*cf.* annexe 4.F pour les notations), *i. e.* :

$$\overline{\phi} = \overline{\overline{\phi}^\sigma}^n = \overline{\overline{\phi}^n}^\sigma \tag{4.179}$$

La relation (4.178) ferme la définition de la vitesse de l'interface macroscopique à l'ordre 1. **Elle se différencie d'une formulation microscopique par l'apparition du second terme du membre de droite qui traduit l'effet du re-raidissement du profil de vitesse**. Cette correction est donc spécifique aux écoulements avec changement de phase (comme l'illustre la présence du taux de changement de phase macroscopique $\widetilde{m}^0$). Elle est aussi proportionnelle à la courbure de l'interface $\widetilde{\kappa}$ qui affecte le profil de l'indicatrice mésoscopique à l'ordre 1 (*cf.* section 4.4.1).

La fermeture (4.178) de la vitesse interfaciale associée à celle du bilan de masse (4.176) permet de montrer que

$$\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma\right) = -\epsilon\widetilde{\kappa}\widetilde{m}^0\,[\![\rho]\!]\,[\![1/\rho]\!]\,C_5\widetilde{\delta}^i + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{4.180}$$

en suivant le même raisonnement qu'à la section 2.2.6. Cette relation indique que la vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma$ n'est pas satisfaisante pour convecter l'interface en conservant la masse ce qui explique la présence du terme correctif dans l'équation (4.178) de définition de la vitesse interfaciale macroscopique. Ce terme correctif est donc capital à la conservation du bilan de masse.

Bilan de quantité de mouvement : L'équation de bilan de quantité de mouvement (4.92c) est développée à l'ordre 1 dans les coordonnées généralisées associées à l'interface puis intégrée sur la zone de transition pour obtenir les conditions de saut suivantes (*cf.* Éqs. (4.343) et (4.345) pour les directions tangentielles et la direction normale respectivement) :

$$\left[\!\left[\frac{\widetilde{\mu}^0}{\mathrm{Re}}\left(\left(\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma\right)_{\alpha3} + \left(\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma\right)_{3\alpha}\right) - C^0_{\alpha3}\right]\!\right] = 0 \tag{4.181a}$$

$$\left[\!\left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(2\widetilde{\mu}^0\,\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma - \widetilde{p}^0\boldsymbol{I} - C^0\right)_{33}\right]\!\right] = \frac{\sigma^0\,\widetilde{\kappa}}{\mathrm{We}} + [\![1/\rho]\!]\left(\widetilde{m}^0\right)^2 \tag{4.181b}$$

Ces deux relations scalaires sont regroupées pour former la relation de saut classique à l'ordre dominant (*cf.* Éq. (4.347)) :

$$\left[\widetilde{\rho}_k^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0 \otimes \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0 - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0\right) - \widetilde{C}_k^0 - \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0} + \widetilde{p}_k^0\boldsymbol{I}\right] \cdot \nabla\widetilde{\chi}_k^0 = \frac{\sigma^0}{\mathrm{We}}\widetilde{\kappa}\nabla\widetilde{\chi}_v^0 \tag{4.182}$$

La relation de saut ainsi obtenue ferme le saut de quantité de mouvement macroscopique dans les trois directions (i) en exprimant la continuité de la contrainte tangentielle (*cf.* Éq. (4.181a)) et (ii) en reliant le saut de quantité de mouvement dans la direction normale à la force de tension de surface. La relation (4.182) fournit des fermetures à l'ordre 0 même si elle provient de l'étude du problème intérieur à l'ordre 1. Ce décalage provient du changement de variable dans la région intérieure et des conditions de raccord. En comparant ce résultat à l'analyse générique du bilan de quantité de mouvement (4.32), on constate qu'à l'ordre dominant, la seule contribution au saut d'énergie mécanique est l'énergie interfaciale associée à la grandeur en excès $\|\overline{\kappa}_\sigma \cdot \nabla\overline{\chi}\|^{ex}$. **Cette relation de saut à l'ordre dominant est identique aux relations microscopiques traditionnelles.**

Contrainte tangentielle La continuité des contraintes tangentielles à la traversée de l'interface permet de définir la contrainte interfaciale dans la direction tangentielle $\widetilde{\tau}_i^0(\alpha)$ (*cf.* Éq. (4.352)) :

$$\widetilde{\tau}_i^0(\alpha) \hat{=} \mu_\pm \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}|_\pm + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)_{,\alpha}|_\pm + \kappa_\alpha \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)|_\pm\right) \tag{4.183}$$

Sachant que les vitesses $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)$ et $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)$ ne présentent pas de saut à l'interface, la différence de ces deux limites permet d'obtenir le saut de gradient de vitesse tangentielle macroscopique (*cf.* Éq. (4.353)) :

$$\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}\right]\!\right] = [\![1/\mu]\!]\,\widetilde{\tau}_i^0(\alpha) \tag{4.184}$$

Quelques manipulations et une deuxième intégration du bilan de quantité de mouvement permettent de relier le saut de vitesse tangentielle d'ordre 1 au produit de la contrainte interfaciale par l'excès de l'inverse de la viscosité (*cf.* Éq. (4.359)) :

$$\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\alpha)\right]\!\right] = \widetilde{\tau}_i^0(\alpha)\left\|\frac{1}{\breve{\overline{\mu}}^0}\right\|^{ex} \tag{4.185}$$

Ce résultat nouveau indique que **la vitesse tangentielle n'est pas continue à l'ordre 1.** L'ordre 1 du saut de vitesse tangentielle est proportionnel aux contraintes de cisaillement interfacial. Ce terme n'est pas considéré par Toutant (2006) puisque son étude se limite à l'ordre 0. Pourtant, **ce terme existe même pour les écoulements adiabatiques.** Il provient de la viscosité du fluide. Il pourrait améliorer significativement les problèmes identifiés par Magdeleine (2009) concernant la diffusion. Magdeleine (2009) a en effet constaté que la sous-résolution admissible par le modèle de Toutant (2006) est limitée à la capture (explicite) de la couche limite. Nous pensons que ce saut de vitesse pourrait permettre d'augmenter la vitesse de glissement entre les deux phases et ainsi prédire plus précisément la vitesse de montée des inclusions sur des maillages fortement sous-résolus.

Pour que la fermeture (4.185) soit effective, il faut être en mesure d'estimer la grandeur en excès $\left\|1/\mu^0\right\|^{ex}$. Contrairement aux paramètres C_j introduits à la section 4.4.1, celle-ci ne dépend pas seulement du filtre utilisé pour obtenir le système mésoscopique mais aussi du saut de viscosité $[\![1/\mu]\!]$; en particulier, cet excès est nul s'il n'y a pas de saut de viscosité. En pratique, la détermination de la relation

$$\left\|\frac{1}{\breve{\overline{\mu}}^0}\right\|^{ex} = \mathcal{F}\left([\![1/\mu]\!], G\right)$$

demande un travail préliminaire associé à la méthode numérique similaire à celui effectué à la section 5.3 pour déterminer les paramètres C_j mais plus important (à cause de la dépendance au saut de viscosité $[\![1/\mu]\!]$).

Contrainte normale De même, la limite asymptotique de la relation (4.338b) permet d'introduire la définition de la contrainte macroscopique normale $\widetilde{\tau}_i^0(3)$ suivante :

$$\mathrm{Re}\left[\widetilde{p}^0 + \widetilde{\chi}^0\left(\frac{\sigma^0\,\widetilde{\kappa}}{\mathrm{We}} + [\![1/\rho]\!]\left(\widetilde{\dot{m}}^0\right)^2\right) + g_3^1(\xi_1,\xi_2)\right] = \widetilde{\tau}_i^0(3) \hat{=} 2\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3} \tag{4.186}$$

Cette contrainte est définie de manière unique si le saut de pression d'ordre 0 est donné par :

$$[\![\widetilde{p}^0]\!] = \frac{\sigma^0\,\widetilde{\kappa}}{\mathrm{We}} + [\![1/\rho]\!]\left(\widetilde{\dot{m}}^0\right)^2$$

Dans ce cas, on peut exprimer le saut de gradient de vitesse normale macroscopique par :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}\right]\!\!\right] = \frac{1}{2}\,[\![1/\mu]\!]\,\widetilde{\tau}_i^0(3) \tag{4.187}$$

La fermeture de ce saut s'avère nécessaire pour l'étude du bilan de quantité de mouvement à l'ordre 2.

Aspects thermiques : Le bilan d'énergie et la condition de saturation sont traités simultanément. En suivant la même démarche que pour les autres bilans, l'équation de bilan d'énergie (4.92d) est intégrée à l'ordre 1 pour obtenir **la relation de saut de flux à l'interface caractéristique des écoulements avec changement de phase** (*cf.* Éq. (4.367)) :

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\!\!\left[\widetilde{k}^0\,\widetilde{T}^0_{,3}\right]\!\!\right] = \frac{\mathcal{L}^0}{\mathrm{Ja}}\widetilde{\dot{m}}^0 \tag{4.188}$$

Il est normal d'obtenir une fermeture du saut de flux à l'ordre 0 même si cette relation provient de l'étude du problème intérieur à l'ordre 1 en raison du décalage dans les conditions de raccord provoqué par le changement de variable. En comparant ce résultat à l'analyse générique du bilan d'énergie (4.34), on constate qu'à l'ordre dominant, la seule contribution au saut d'énergie thermique est l'énergie interfaciale associée au taux de changement de phase macroscopique $\widetilde{\dot{m}}$ défini d'après la relation (4.119) par la grandeur en excès $\widetilde{\dot{m}} = \left\|\overline{\dot{m}}^s\overline{\delta}_\sigma\right\|^{ex}$. À l'ordre dominant, **le taux de changement de phase macroscopique $\widetilde{\dot{m}}^0$ est proportionnel au saut de flux à l'interface.** Cette relation de saut est la condition à la limite classiquement utilisée dans les modèles à interface discontinue (Delhaye *et al.*, 1981b) pour une description microscopique. Associée à la fermeture (4.176) du saut de vitesse, elle traduit bien à l'ordre dominant le double rôle de la variable macroscopique $\widetilde{\dot{m}}^0$: (i) taux de changement de phase (associé au bilan d'énergie) et (ii) taux de transfert de matière (associé au bilan de masse).

En intégrant une seconde fois le bilan d'énergie mésoscopique puis en retranchant les limites asymptotiques de $\widetilde{\Theta}^0_{,3}$ (différentes dans chacune des phases), l'ordre 1 de la condition de saturation (*cf.* Éq. (4.317e)) et les conditions de raccord permettent de déterminer entièrement la valeur de $\widetilde{\Theta}^1 = \widetilde{k}^0\widetilde{T}^1$ à l'interface (*cf.* Éq. (4.374)) :

$$\lim_{\xi_3\to 0^\pm}\widetilde{k}^0(\xi_3)\widetilde{T}^1(\xi_3) = 0 \tag{4.189}$$

Sachant que $\widetilde{k}$ est non nulle, on en déduit **la continuité de la température et la saturation de l'interface à l'ordre 1** (*cf.* Éqs. (4.190a) et (4.190b)) :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{k}^0\,\widetilde{T}^1\right]\!\!\right] = 0 \tag{4.190a}$$

$$\left[\!\!\left[\widetilde{T}^1\right]\!\!\right] = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{T}^1(\xi_1,\xi_2,0) = 0 \tag{4.190b}$$

À l'ordre 1, la température de l'interface est égale à la température de saturation et ne présente toujours pas de saut. La conduction reste "efficace". Ce résultat est loin d'être évident. Il fait l'objet d'une discussion à la fin de la section 4.D.2.2. Il peut paraître surprenant au vu des résultats obtenus par Fouillet (2003, annexe C, Éq. (C.24)) et Jamet et Chandesris (2009) qui appliquent

la méthode des DAR pour traiter des problèmes d'interfaces diffuses. Dans ce cas, ils obtiennent un saut de température à l'interface non nul à l'ordre 1 (*cf.* Éq. (4.383)) qu'ils interprètent comme une résistance thermique d'interface (Carey, 1992) engendrée par la dissipation thermique au sein de la zone de transition.

Pour notre système mésoscopique, ce résultat est bien obtenu dans un premier temps où l'on montre qu'un saut existe *a priori* (*cf.* Éq. (4.386)). **La particularité de notre étude apparaît avec la fermeture particulière de la condition de saturation de l'interface** (4.92e)**.** C'est cette condition qui est à l'origine de la continuité de la température à l'interface à l'ordre 1. L'interface macroscopique équivalente présente une résistance thermique nulle ce qui signifie que la zone de transition mésoscopique n'est pas dissipative. Pour étayer cet argument, on constate en effet que la condition de saut de vitesse tangentielle d'ordre 1 fait apparaître une grandeur en excès associée à l'inverse de la viscosité.

La différence entre notre approche et les méthodes à interfaces diffuses ou les méthodes d'homogénéisation des milieux poreux se situe au niveau de la description mésoscopique : ici, le terme sous-maille corrige le champ de température mésoscopique alors que dans les autres approches, ce champ est solution d'une équation différentielle où le terme source interfacial est quelconque. Dans notre cas, ce terme source (sous-maille) est très particulier et il permet de donner au produit des champs mésoscopiques $\breve{\overline{k}}$ et $\breve{\overline{T}}$ le profil d'un champ filtré. Pour étayer cette discussion, nous avons illustré sur les figures 4.12 et 4.13, p. 233, la différence entre les deux approches.

Conclusion : Tout d'abord, l'étude du système intérieur à l'ordre 1 permet d'établir les relations de saut de quantité de mouvement et de flux pour fermer complètement le système à l'ordre dominant :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\rho}^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma\right) - \widetilde{C}^0 - \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma} + \widetilde{p}^0\boldsymbol{I}\right]\!\!\right] \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}^0 = \frac{\sigma^0}{\mathrm{We}}\widetilde{\kappa}^0\widetilde{\boldsymbol{n}}^0 \tag{4.191a}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\!\!\left[\widetilde{k}^0\,\widetilde{T}^0_{,3}\right]\!\!\right] = \frac{\mathcal{L}^0}{\mathrm{Ja}}\widetilde{m}^0 \tag{4.191b}$$

Afin d'assurer la dégénérescence du modèle macroscopique vers la description microscopique lorsque $\epsilon \to 0$, on constate que ces conditions sont identiques aux fermetures classiques d'un système diphasique (Delhaye *et al.*, 1981b).

Par ailleurs, cette étude permet aussi d'obtenir des relations sur le saut de vitesse, la vitesse interfaciale macroscopique et la température de l'interface macroscopique à l'ordre 1 :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_l - \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_v = -\left[\!\!\left[1/\rho\right]\!\!\right]\widetilde{m}^1\widetilde{\boldsymbol{n}} + \boxed{\left\|\frac{1}{\breve{\overline{\mu}}^0}\right\|^{ex}\widetilde{\tau}^0_i(\alpha)\widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha} \tag{4.192a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_i = \widetilde{\boldsymbol{v}}^1 - \widetilde{m}^1\widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0 + \boxed{(\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{m}^0\left[\!\!\left[1/\rho\right]\!\!\right]C_5\widetilde{\boldsymbol{n}}} \tag{4.192b}$$

$$\widetilde{T}^1_l = \widetilde{T}^1_v = 0 \tag{4.192c}$$

À l'ordre 1, ces conditions de raccord entre les deux phases font intervenir **la courbure de l'interface pour traduire l'effet non local du filtre.** Combinée à la discontinuité de la vitesse, la courbure fait apparaître **une correction pour déterminer la vitesse de déplacement de l'interface macroscopique** $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ qui est proportionnelle au taux de changement de phase et à la courbure de l'interface. De plus, les variations rapides de la vitesse mésoscopique dans la région intérieure $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0$ conduisent à un saut de vitesse normale à l'interface. Le taux de changement de phase macroscopique $\widetilde{m}^1$ détermine toujours ce saut pour assurer la conservation de la masse, comme dans les conditions microscopiques. À l'ordre 1, il ne diffère pas de la description microscopique du problème. En revanche, **un saut de vitesse tangentielle apparaît.** Il est proportionnel à la contrainte tangentielle $\widetilde{\tau}^0_i(\alpha)$ et à l'excès de l'inverse de la viscosité $\left\|1/\breve{\overline{\mu}}^0\right\|^{ex}$. Enfin, le modèle est tel qu'à l'ordre 1 l'interface demeure à **l'équilibre thermodynamique** même si le flux de masse est non nul. **La température de l'interface** $\widetilde{T}^1$ **est continue et égale à la température de saturation ;** la condition de saturation est là-aussi identique à la relation microscopique. Ce

résultat indique que les modèles mésoscopiques relatifs à la thermique du problème n'apparaissent pas encore à cet ordre.

À ce stade, nous disposons des sept relations permettant de fermer le système (4.10-4.13) à l'ordre 0 et de cinq relations sur les sept recherchées pour le fermer à l'ordre 1. Les deux dernières sont issues de l'étude à l'ordre 2 car elles concernent les flux ; lors du raccord, il y a un ordre d'écart entre les dérivées premières intérieures et extérieures. Pour fermer le système à l'ordre 1, il faut établir les relations de saut de quantité de mouvement et de flux à l'interface à partir de l'étude du second ordre des bilans de quantité de mouvement et d'énergie. Cette étude fait l'objet de l'annexe 4.D.2.3. Les principaux résultats sont présentés et discutés dans la section suivante.

4.4.5.3 Ordre 2

À l'ordre 2, on s'intéresse uniquement aux bilans de quantité de mouvement et d'énergie pour terminer la fermeture du système macroscopique à l'ordre 1.

Bilan de quantité de mouvement : Nous souhaitons déterminer la condition de raccord sur le flux de quantité de mouvement à l'interface à l'ordre 1. Pour cela, il faut développer, dans le repère interfacial, le bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 2 puis lui retrancher le bilan de quantité de mouvement de la région extérieure à l'ordre 0. En intégrant ensuite la relation obtenue sur la zone de transition, on obtient les relations de sauts permettant de fermer le bilan de quantité de mouvement macroscopique à l'ordre 1. Le détail des calculs est donné dans l'annexe 4.E. Le saut de quantité de mouvement dans les directions tangentes et dans la direction normale obtenu à l'ordre 1 est donné par (*cf.* Éqs. (4.443) et (4.469)) :

$$\widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \left[\widetilde{\rho}_k\, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i) - \widetilde{C}_k - \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} + \widetilde{p}_k \boldsymbol{I}\right]^1 \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = \tag{4.193a}$$
$$\mathrm{At}\, [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{\kappa}\widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) C_1 + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\widetilde{\kappa}^0 \left[\!\left[\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(\alpha)\right]\!\right] + C_1\, [\![\mu]\!]\, [\![1/\mu]\!]\, \widetilde{\tau}_{i,\alpha}^0(3) - 2C_5'\, [\![1/\rho]\!] \left(\widetilde{\kappa}\widetilde{\dot{m}}^0\right)_{,\alpha} [\![\mu]\!]\right]$$

$$\widetilde{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\widetilde{\rho}_k\, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i) - \widetilde{C}_k - \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} + \widetilde{p}_k \boldsymbol{I}\right]^1 \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = \mathrm{At}\, [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\kappa} \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3) C_1 \tag{4.193b}$$
$$+ (2C_1 + C_6)\, \frac{[\![\mu]\!]}{\mathrm{Re}} \left([\![1/\mu]\!]\, \nabla_s \cdot \widetilde{\tau}_i^0 - 2\, [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{\mathcal{N}}\right)$$

À l'ordre 1, le saut de quantité de mouvement présente essentiellement deux contributions :

(i) **Un terme proportionnel au taux de changement de phase** exprime la modification de la quantité de mouvement lors du re-raidissement du profil de vitesse pour rétablir le saut ; on introduit la correction $\mathcal{P}_m^1$ liée au saut de vitesse d'ordre 1 pour le caractériser :

$$\mathcal{P}_m^1 \hat{=} \mathrm{At}\, [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{\kappa}\widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0 C_1 \tag{4.194}$$

En analysant les développements de l'annexe 4.E, on observe que ce terme provient de l'intégration de la partie convective du bilan de quantité de mouvement (*cf.* Éq. (4.468b)). D'après l'analyse générique, il traduit l'excès associé au terme convectif de l'équation (4.32).

(ii) **Un terme proportionnel au saut de viscosité** traduit l'effet de la viscosité dans la couche limite qui se développe au voisinage de l'interface ; pour le caractériser, on introduit le terme source de saut de quantité de mouvement par la viscosité $\mathcal{P}_\mu^1$ défini par

$$\mathcal{P}_\mu^1 \hat{=} \frac{[\![\mu]\!]}{\mathrm{Re}} \left[C_1\, [\![1/\mu]\!] \begin{pmatrix} \widetilde{\tau}_{i,\alpha}^0(3) \\ \nabla_s \cdot \widetilde{\tau}_i^0 \end{pmatrix} - 2C_5'\, [\![1/\rho]\!] \begin{pmatrix} \left(\widetilde{\kappa}\widetilde{\dot{m}}^0\right)_{,\alpha} \\ \widetilde{\mathcal{N}} \end{pmatrix}\right]$$
$$+ \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} \widetilde{\kappa} \left[\!\left[\widetilde{\mu}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\alpha)\right]\!\right] \\ [\![\mu]\!] \left(-2C_1\, [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{\mathcal{N}} + C_5'\, [\![1/\mu]\!]\, \nabla_s \cdot \widetilde{\tau}_i^0\right) \end{pmatrix} \tag{4.195}$$

avec $\widetilde{\mathcal{N}} = \widetilde{\dot{m}}^0_{,\alpha,\alpha} - 2\kappa_\alpha \kappa_\alpha \widetilde{\dot{m}}^0$. Le premier terme de l'équation (4.195) traduit l'effet de l'évolution tangentielle de la contrainte visqueuse à l'interface. Le second exprime l'évolution du taux

de changement de phase et correspond au saut de vitesse à l'interface. L'interprétation du troisième terme est très délicate. L'AGPI apporte des compléments d'information pour interpréter ce terme source. Dans les directions tangentielles, il exprime à la fois l'excès du gradient de pression (premier terme) et la diffusion le long de l'interface par le terme $\widetilde{\kappa}\left[\!\left[\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\alpha)\right]\!\right]$. Dans la direction normale, il provient intégralement de l'excès associé à la diffusion dans l'équation (4.32) :

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla_s\cdot\left[\boldsymbol{I}_s\cdot\|\mathcal{D}_{\overline{\boldsymbol{v}}_\sigma}+\mathcal{T}\|^{ex}\right]$$

En comparant les développements de l'annexe 4.E avec l'analyse du bilan de quantité de mouvement à l'interface donné par la relation (4.32), on constate que les quantités en excès $\|\overline{\rho\,\boldsymbol{v}}^m\|^{ex}$ et $\|\overline{\kappa}_\sigma\cdot\nabla\overline{\chi}\|^{ex}$ sont nulles à l'ordre 1. Aucun terme relatif aux forces de tension de surface n'apparaît dans les relations de saut (4.193), ce qui signifie qu'elles sont capturées correctement à l'ordre 0.

Bilan d'énergie : L'équation de bilan d'énergie (4.92d) est développée à l'ordre 2 dans les coordonnées généralisées associées à l'interface. La limite asymptotique de l'ordre 0 du bilan d'énergie au voisinage de l'interface lui est ensuite retranchée pour que les flux apparaissent lors du raccord entre les deux régions du problème. D'après les solutions des ordres précédents (en particulier $\left[\!\left[\widetilde{k}^0\widetilde{T}^1\right]\!\right]=0$, $\overline{\overset{\smile}{\Theta}}^0=0$ et $\overline{\overset{\smile}{m}}^0$ indépendante de ξ), on obtient la relation de saut (*cf.* Éq. (4.397))

$$\left[\!\left[\widetilde{\dot{m}}^0\,\widetilde{c_p}^0\,\widetilde{T}^1+\widetilde{F}^1(3)-\frac{1}{\mathrm{Pe}}\widetilde{k}^0\widetilde{T}^1_{,3}\right]\!\right]=-\frac{\mathcal{L}^0}{\mathrm{Ja}}\widetilde{\dot{m}}^1 \tag{4.196}$$

qui associe le déséquilibre des flux conductifs de part et d'autre de l'interface au taux de changement de phase. En rapprochant ce résultat au bilan d'énergie (4.34) obtenu lors de l'analyse générique, on remarque que l'excès associé au changement de phase $\left\|\overline{\dot{m}}^s\overline{\delta}_\sigma\right\|^{ex}=\widetilde{\dot{m}}$ est le seul responsable du saut d'énergie thermique à l'interface à l'ordre 1. À cause de l'uniformité de la température à l'ordre 0 dans la région intérieure, **les modèles sous-maille n'interviennent pas dans cette condition de raccord** qui est, à nouveau, identique aux conditions microscopiques. Néanmoins, la variable intérieure $\overline{\overset{\smile}{\Theta}}^1$ varie rapidement dans la région intérieure (Fig. 4.9) car le filtre introduit de l'énergie en excès à l'interface, à un ordre plus élevé que celui étudié ici. Il faudrait continuer l'analyse à l'ordre 3 du problème intérieur pour voir l'effet de cet excès sur les conditions de raccord.

Conclusion : L'étude d'une partie du système mésoscopique à l'ordre 2 dans la région intérieure permet d'établir les relations de saut de quantité de mouvement et de flux d'énergie à l'ordre 1

$$\left[\!\left[\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\otimes(\widetilde{\boldsymbol{v}}-\widetilde{\boldsymbol{v}}_i)-\widetilde{C}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma}+\widetilde{p}\boldsymbol{I}\right]\!\right]^1\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}=\mathcal{P}^1_m+\mathcal{P}^1_\mu \tag{4.197a}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\!\left[\widetilde{k}\,\nabla\widetilde{T}^1\right]\!\right]\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}=\frac{\mathcal{L}^0}{\mathrm{Ja}}\widetilde{\dot{m}}^1 \tag{4.197b}$$

où les termes sources de saut de quantité de mouvement par le saut de vitesse $\mathcal{P}^1_m$ (induit par le changement de phase) et par la viscosité $\mathcal{P}^1_\mu$ sont définis par les relations (4.194) et (4.195). Ces relations montrent que le saut de quantité de mouvement doit être corrigé pour traduire les fortes variations des champs dans la zone de transition. Le saut de flux thermique suit quant à lui une formulation classique. Aucune source particulière n'apparaît car la condition de saturation impose l'uniformité de la solution sur la zone de transition à l'ordre 0.

Ces résultats sont suffisants pour raccorder le système à l'ordre 1. Ce paragraphe conclut l'étude du système intérieur puisqu'il permet d'appliquer des relations de saut à l'interface avec une précision d'ordre 1. Les équations fermées macroscopiques sont présentées à la section 4.5.1. Avant cela, vérifions brièvement que l'équivalence supposée du modèle sous-maille de Bardina *et al.* (1983) classique avec la version modifiée proposée par Toutant *et al.* (2009a) est bien vérifiée pour les profils rencontrés dans la région intérieure.

4.4.6 Équivalence entre les modélisations sous-maille

Dans cette section, on justifie *a posteriori* l'équivalence (au sens intégral) entre le modèle sous-maille de Bardina *et al.* (1983) classique τ^{mf} et la version modifiée proposée par Toutant *et al.* (2009a) sans étalement τ^{ev}

$$\tau^{mf} = \overline{\breve{\overline{a}}\,\breve{\overline{\phi}}} - \breve{\overline{a}}\,\breve{\overline{\phi}} \quad \text{et} \quad \tau^{ev} = \overline{\breve{a}\,\breve{\overline{\phi}}} - \breve{\overline{a}}\,\breve{\overline{\phi}} \tag{4.198}$$

où a désigne une propriété thermophysique reliée à χ et ϕ est une variable du système ($\boldsymbol{v}_\sigma$, $T\dots$). La propriété a est reliée à l'indicatrice χ par la relation $\left(\breve{a} - \breve{\overline{a}}\right) = [\![a]\!]\left(\breve{\chi} - \breve{\overline{\chi}}\right)$. On rappelle que l'équivalence entre ces deux propositions de fermeture est nécessaire pour établir la description servant de base aux DAR à la section 4.3. Toutant *et al.* (2009a) démontrent et utilisent cette équivalence à l'ordre 0 seulement. Pour assurer la cohérence de nos travaux, nous devons vérifier qu'elle est aussi valide à l'ordre 1.

On se restreint aux ordres 0 et 1 où, en raison du changement de variable dans la direction normale, le filtre peut être restreint à un filtre normal G_3. Pour alléger les notations, on omet l'exposant $\bar{\cdot}^n$ et on conserve la notation $\bar{\cdot}$. La notion d'équivalence entre les deux modélisations s'exprime au sens intégral sur la zone de transition par l'étude de :

$$E = \int \left(\tau^{ev} - \tau^{mf}\right)\left(1 - \epsilon\xi\kappa + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) d\xi \tag{4.199}$$

En injectant les définitions (4.198), on obtient :

$$E = \int \left(\overline{\left(\breve{a} - \breve{\overline{a}}\right)\breve{\overline{\phi}}} - \overline{\left(\breve{a} - \breve{\overline{a}}\right)}\,\breve{\overline{\phi}}\right)(1 - \epsilon\xi\kappa)\, d\xi + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.200}$$

Ordre 0. On constate qu'à l'ordre 0 les variables internes sont constantes sur la zone de transition. On montre à l'annexe 4.F.4.4 que $E^0 = 0$ si $\breve{\overline{\phi}}^0$ est une fonction paire. Par conséquent, il y a équivalence, au sens défini par l'équation (4.199), entre le modèle sous-maille de Bardina classique τ^{mf} et la version modifiée proposée par Toutant *et al.* (2009a) τ^{ev} à l'ordre 0.

Ordre 1. On montre en annexe que les solutions obtenues pour les profils de vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma$ et de température $\breve{\overline{T}}^1$ se mettent sous la forme

$$\breve{\overline{\phi}}^1(3) = \xi\left(aH(\xi) + b\right) + cf_p(\xi) + d \tag{4.201}$$

où $f_p(\xi) = \int_\infty^\xi \left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) d\xi$ est une fonction paire. On montre alors à l'annexe 4.F.4.4 que l'intégrale E^1 se réduit à 0 dans ce cas. Par conséquent, les modèles sous-maille de Bardina sont équivalents à la version modifiée proposée par Toutant *et al.* (2009a) jusqu'à l'ordre 1.

En définitive, d'après les profils rencontrés dans la région intérieure, le modèle sous-maille de Bardina *et al.* (1983) peut effectivement être utilisé pour remplacer le modèle partiellement fermé de Toutant *et al.* (2009a) car les intégrales de ces deux modèles sur la zone de transition sont identiques à l'ordre 1. Ce résultat généralise celui de Toutant *et al.* (2009a) en étendant la validité de la fermeture par similarité d'échelles à l'ordre 1. À la section suivante, nous discutons de la fermeture macroscopique du problème.

4.5 Synthèse du modèle macroscopique

4.5.1 Description macroscopique d'un problème diphasique

La résolution du système intérieur à l'ordre 1 permet (i) de fermer les termes de sauts encadrés dans le système (4.10), (ii) de définir la vitesse de déplacement de l'interface macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ introduite à la relation (4.12) et (iii) d'établir une condition de saturation pour l'interface macroscopique (4.13) avec une précision $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Les fermetures macroscopiques suivantes sont obtenues

Masse $$\widetilde{S}_m \hat{=} \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = -\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}} \widetilde{\delta^i} \tag{4.202a}$$

QdM $$\widetilde{\boldsymbol{S}}_q \hat{=} \left[\widetilde{\rho}_k \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i\right) - \widetilde{C}_k - \frac{1}{\mathrm{Re}} \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} + \widetilde{p}_k \boldsymbol{I}\right] \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = \frac{\sigma^0}{\mathrm{We}} \widetilde{\kappa} \nabla \widetilde{\chi}_v + \boxed{\epsilon \left(\mathcal{P}_m^1 + \mathcal{P}_\mu^1\right) \widetilde{\delta^i}} \tag{4.202b}$$

Énergie $$\widetilde{S}_e \hat{=} \left[\widetilde{\rho c_{p_k}} \widetilde{T}_k \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i\right) - \widetilde{F}_k - \frac{1}{\mathrm{Pe}} \widetilde{k}_k \nabla \widetilde{T}_k\right] \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = \frac{\mathcal{L}^0}{\mathrm{Ja}} \widetilde{\dot{m}} \widetilde{\delta^i} \tag{4.202c}$$

Diffusion $$\widetilde{\boldsymbol{S}}_d \hat{=} \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes \nabla \widetilde{\chi}_k + \nabla \widetilde{\chi}_k \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}_k = -2 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}} \widetilde{\delta^i} \widetilde{\boldsymbol{n}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{n}} + \boxed{\epsilon \widetilde{\tau}_i^0(\alpha) \left\|1/\mu\right\|^{ex} \left(\widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha \otimes \widetilde{\boldsymbol{n}} + \widetilde{\boldsymbol{n}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha\right)} \tag{4.202d}$$

Flux $$\widetilde{S}_f \hat{=} \widetilde{T}_k \nabla \widetilde{\chi}_k = 0 \tag{4.202e}$$

Vitesse $$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma + \boxed{\epsilon \delta \boldsymbol{v}_i^1} \tag{4.202f}$$

Saturation $$\widetilde{T} \widetilde{\delta^i} = 0 \tag{4.202g}$$

où l'ordre 1 de la production de quantité de mouvement par le saut de vitesse $\mathcal{P}_m^1$ et par la viscosité $\mathcal{P}_\mu^1$ sont donnés par les relations (4.194) et (4.195). La vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma$, la correction de vitesse $\delta \boldsymbol{v}_i^1$, la contrainte interfaciale $\widetilde{\tau}_i^0$ et l'excès de l'inverse de la viscosité $\left\|1/\mu\right\|^{ex}$ sont respectivement définis par :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma = \widetilde{\boldsymbol{v}} - \widetilde{\dot{m}} \widetilde{\boldsymbol{n}} / \widetilde{\rho} \tag{4.203a}$$

$$\delta \boldsymbol{v}_i^1 = \widetilde{\dot{m}} \widetilde{\kappa} \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] C_5 \widetilde{\boldsymbol{n}} \tag{4.203b}$$

$$\widetilde{\tau}_i^0 = \widetilde{\mu} \left(\nabla \widetilde{\boldsymbol{v}} + \nabla^T \widetilde{\boldsymbol{v}} - 2 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}} \widetilde{\boldsymbol{n}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{n}} \widetilde{\delta^i}\right) \tag{4.203c}$$

$$\left\|\frac{1}{\breve{\widetilde{\mu}}^0}\right\|^{ex} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\breve{\widetilde{\mu}}^0} - \frac{1}{\widetilde{\mu}^0}\right) d\xi = \mathcal{F}\left(\left[\!\left[1/\mu\right]\!\right], G\right) \tag{4.203d}$$

Nous verrons à l'équation (4.207) que le terme source de transport de l'interface $\delta \boldsymbol{v}_i^1$ doit être complété par un terme d'ordre 2 pour dégénérer vers le modèle de Toutant *et al.* (2009a) pour un écoulement sans changement de phase. Les différences par rapport aux fermetures interfaciales du système microscopique sont encadrées pour mettre en avant les modélisations apportées par la démarche ISS. Le système macroscopique que nous proposons de résoudre est le suivant :

$$\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}} = -\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}} \widetilde{\delta^i} \tag{4.204a}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\rho} \widetilde{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho} \widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}} + \widetilde{C}\right) = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla \cdot \mathcal{S}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}} - \nabla \widetilde{p} + \frac{\sigma^0}{\mathrm{We}} \widetilde{\kappa} \nabla \widetilde{\chi}_v + \boxed{\epsilon \left(\mathcal{P}_m^1 + \mathcal{P}_\mu^1\right) \widetilde{\delta^i}} \tag{4.204b}$$

$$\frac{\partial \left(\widetilde{\rho c_p} \widetilde{T}\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho c_p} \widetilde{\boldsymbol{v}} \widetilde{T} + \widetilde{F}\right) = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \nabla \cdot \mathcal{Q}_{\widetilde{T}} + \frac{\mathcal{L}^0}{\mathrm{Ja}} \widetilde{\dot{m}} \widetilde{\delta^i} \tag{4.204c}$$

$$\mathcal{S}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \hat{=} \widetilde{\mu} \left(\nabla \widetilde{\boldsymbol{v}} + \nabla^T \widetilde{\boldsymbol{v}} + 2 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}} \widetilde{\delta^i} \widetilde{\boldsymbol{n}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{n}} \boxed{-2\epsilon \widetilde{\tau}_i^0(\alpha) \left\|1/\mu\right\|^{ex} \left(\widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha \otimes \widetilde{\boldsymbol{n}} + \widetilde{\boldsymbol{n}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha\right)}\right) \tag{4.204d}$$

$$\mathcal{Q}_{\widetilde{T}} \hat{=} \widetilde{k} \left(\nabla \widetilde{T}\right) \tag{4.204e}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\chi}}{\partial t} + \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma + \boxed{\epsilon \delta \boldsymbol{v}_i^1}\right) \cdot \nabla \widetilde{\chi} = 0 \tag{4.204f}$$

$$\widetilde{T}(\widetilde{\boldsymbol{x}}_i) = 0 \tag{4.204g}$$

Dans un repère mobile associé à l'interface, la description du problème aux différents ordres permet de découpler les niveaux de complexité.

Ordre 0 extérieur : problème 1D/stationnaire. À l'ordre dominant, la description intérieure est stationnaire et monodimensionnelle tout comme les relations d'ordre 1 permettant d'établir le raccord des flux à l'ordre dominant. Par conséquent, les relations de saut classiques de l'échelle microscopique (4.15) sont retrouvées à l'ordre dominant de l'échelle macroscopique.

Ordre 1 extérieur : problème Multi-D/stationnaire. À l'ordre suivant, la description intérieure devient multidimensionnelle ; elle permet alors de considérer des corrections dues à la courbure de l'interface. Le problème intérieur devient partiellement instationnaire (pour l'étude des bilans de quantité de mouvement et d'énergie à l'ordre 2 dans la région intérieure) mais les relations de saut établies à cet ordre sont encore locales et instantanées ; elles prennent uniquement en compte l'influence de la courbure de l'interface.

Ordre 2 extérieur : problème Multi-D/instationnaire. Ensuite, le problème intérieur et les relations de saut d'ordre 2 deviendraient non locaux et instationnaires ; la modélisation qui en découlerait permettrait alors de considérer (i) un effet non local par l'apparition de termes sous-maille traduisant les fluctuations spatiales et (ii) un effet mémoire avec des termes liés à l'évolution temporelle. Malheureusement, devant la complexité des développements nécessaires, cet ordre n'a pas été étudié en intégralité. Seuls quelques éléments de modélisation associés à cet ordre sont proposés à la section 4.5.2.4.

La méthode des DAR se couple particulièrement bien avec un problème multidimensionnel. En particulier, on constate que pour bien appréhender le caractère multidimensionnel d'un phénomène, il faut conduire l'étude jusqu'à l'ordre 1. Les instationnarités sont sans effet jusqu'à l'ordre 2. Les modèles sous-maille n'apparaissent pas à l'ordre 1 mais les conditions microscopiques de saut sont néanmoins modifiées pour prendre en compte l'influence de la courbure de l'interface et du taux de changement de phase. L'étalement artificiel de la discontinuité de la vitesse conduit à une modification de la quantité de mouvement et de la vitesse de déplacement de l'interface qui doivent être corrigées.

4.5.2 Interprétation et discussion des résultats

Dans cette section, nous récapitulons l'ensemble des hypothèses sur lesquelles repose ce modèle ISS macroscopique. Puis la pertinence des fermetures obtenues est discutée afin d'établir une gamme d'application du modèle. Enfin, au vu des limitations constatées, nous proposons quelques améliorations pour rendre ce modèle cohérent avec le modèle ISS sans changement de phase (Toutant *et al.*, 2009a).

4.5.2.1 Liste d'hypothèses

Rappelons l'ensemble des approximations utilisées soit pour la fermeture du système mésoscopique, soit pour la fermeture du système macroscopique :

H1. Les fluctuations locales de courbure sont faibles devant la courbure moyenne, *i. e.,* la courbure locale et la courbure moyenne sont du même ordre de grandeur ;

H2. Les grandeurs mésoscopiques "surfaciques" (*e. g.,* $\overline{\boldsymbol{n}}^s$, $\overline{m}^s$ ...) ne varient pas dans la direction normale à l'interface.

H3. L'interface peut être localement (au sens de la taille du filtre) approchée par une surface dont la courbure varie linéairement entre les deux rayons de courbure principaux ; cette condition est moins restrictive que l'isotropie, mais elle suppose néanmoins le respect d'une symétrie centrale avec en outre l'invariance de la courbure dans les directions tangentielles, *i. e.,* $\kappa_{\alpha,\alpha} = 0$ (localement et à l'ordre dominant). Cette hypothèse est cohérente avec l'ordre des développements asymptotiques considérés.

H4. Les corrélations sous-maille entre le taux de changement de phase et la normale sont négligeables ; dans le cadre des développements limités, cette condition nous semble être la conséquence naturelle des hypothèses précédentes.

H5. Les normales mésoscopique $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ et macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{n}}$ sont confondues ; ce résultat découle du respect de la symétrie.

H6. Le filtre permettant le passage à l'échelle mésoscopique est homogène et isotrope, il peut être décomposé en un filtre surfacique et un filtre normal dans le repère associé à l'interface ;

H7. Le filtre explicite de la SGE est lui-aussi homogène et isotrope et peut être décomposé en un filtre surfacique et un filtre normal ;

H8. Le terme sous-maille de diffusion est négligeable ;

H9. Le terme sous-maille de forces superficielles est négligeable.

À l'exception des deux dernières, ces hypothèses traduisent une forme d'« isotropie tangentielle » assimilable aux hypothèses classiques de turbulence isotrope à petite échelle. Les échanges dans la direction normale sont nettement différents. L'interface atténue l'évolution de la quantité de mouvement dans la direction normale et la redistribue équitablement dans les directions tangentielles. Tant que le taux de changement de phase reste modéré, il nous semble cohérent de négliger la contribution des fluctuations de normale et de taux de changement de phase aux termes sous-maille.

4.5.2.2 Pertinence et applicabilité

La méthode des DAR repose sur un développement limité des variables au voisinage de l'interface. Elle suppose la régularité des fonctions au voisinage de l'interface. Celle-ci est assurée par la structure des équations régissant l'écoulement dans les phases : des équations aux dérivées partielles d'ordre 2. L'approximation consistant à confondre le profil réel avec son développement limité à un certain ordre est d'autant plus précise que le paramètre ϵ représentant la taille du filtre est petit devant 1. Par conséquent, une limite intrinsèque sur la taille du filtre existe.

La consistance de la modélisation est assurée par l'absence de modèles à l'ordre 0 ; les modèles proposés sont proportionnels à ϵ^p, avec $p \geq 1$. Ce constat assure la dégénérescence de la modélisation proposée vers la SND lorsque la taille de la maille diminue.

À l'ordre 1, les contributions mésoscopiques ont deux origines. **Une première partie** est due au changement de phase et à l'étalement du saut de vitesse sur la zone de transition à l'échelle mésoscopique. Elle intervient dans l'expression de la vitesse de déplacement de l'interface macroscopique ainsi que dans le bilan de quantité de mouvement. Elle est responsable d'une augmentation de la vitesse interfaciale qui se répercute sur le bilan de quantité de mouvement. En termes de grandeurs moyennes, elle impacte directement le taux de vide. **La seconde partie** provient du saut de viscosité $[\![\mu]\!]$ et est proportionnelle à l'inverse du nombre de Reynolds. Elle traduit l'influence de la contrainte interfaciale. Elle intervient naturellement dans l'expression des contraintes visqueuses, mais aussi dans le saut de quantité de mouvement. Elle est responsable d'un saut de vitesse tangentielle qui influence la vitesse moyenne de montée des inclusions.

Enfin, le bilan d'énergie standard et la condition de saturation de l'interface sont retrouvés à l'ordre 1. Sur le plan thermique, aucune correction n'est apportée par l'étude du système mésoscopique. Cette particularité des écoulements diphasiques avec changement de phase provient de la condition de saturation. Elle est illustrée par la figure 4.9.

4.5.2.3 Limitations

Cette fermeture avec une précision $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ du système macroscopique met en exergue un certain nombre de termes spécifiques au changement de phase et une influence du saut de viscosité pour modéliser correctement la contrainte à l'interface. À cet ordre, les termes sous-maille et les fermetures proposées à l'échelle mésoscopique (chapitre 2) sont absents. Or, les tests *a priori* ont permis de conclure que pour les quelques configurations représentatives choisies, les modèles sous-maille n'étaient pas négligeables pour les tailles de filtre envisagées. L'absence de ces termes sous-maille montre que la modélisation proposée n'est pas suffisante. Cela signifie que les termes d'ordre 2 doivent être pris en compte. Une fois de plus, on retrouve un résultat classique de la SGE monophasique pour laquelle les termes sous-maille modélisés sont d'ordre 2. En effet, pour appuyer ce commentaire, comme rappelé à la section 2.2.1, Sagaut (2003) montre que les modèles classiques de SGE monophasique sont d'ordre 2. Pour modéliser un écoulement diphasique turbulent par SGE, il semble nécessaire et suffisant de fermer les conditions de raccord avec une précision d'ordre 2 (*i. e.*, $\mathcal{O}(\epsilon^3)$).

Les premières applications du modèle ISS par Toutant *et al.* (2009b) et Magdeleine (2009) corroborent ce constat puisque les modèles considérés par ces auteurs sont en fait d'ordre 2. L'étude du transport de l'interface à l'échelle macroscopique conduite par Toutant *et al.* (2009b) confirme le besoin de modélisation pour représenter ces termes d'ordre 2. Notre analyse a permis de mettre en évidence l'existence de termes d'ordre 1 pour les écoulements adiabatiques. Ces termes visqueux peuvent potentiellement améliorer le modèle ISS lorsque la couche limite n'est pas entièrement

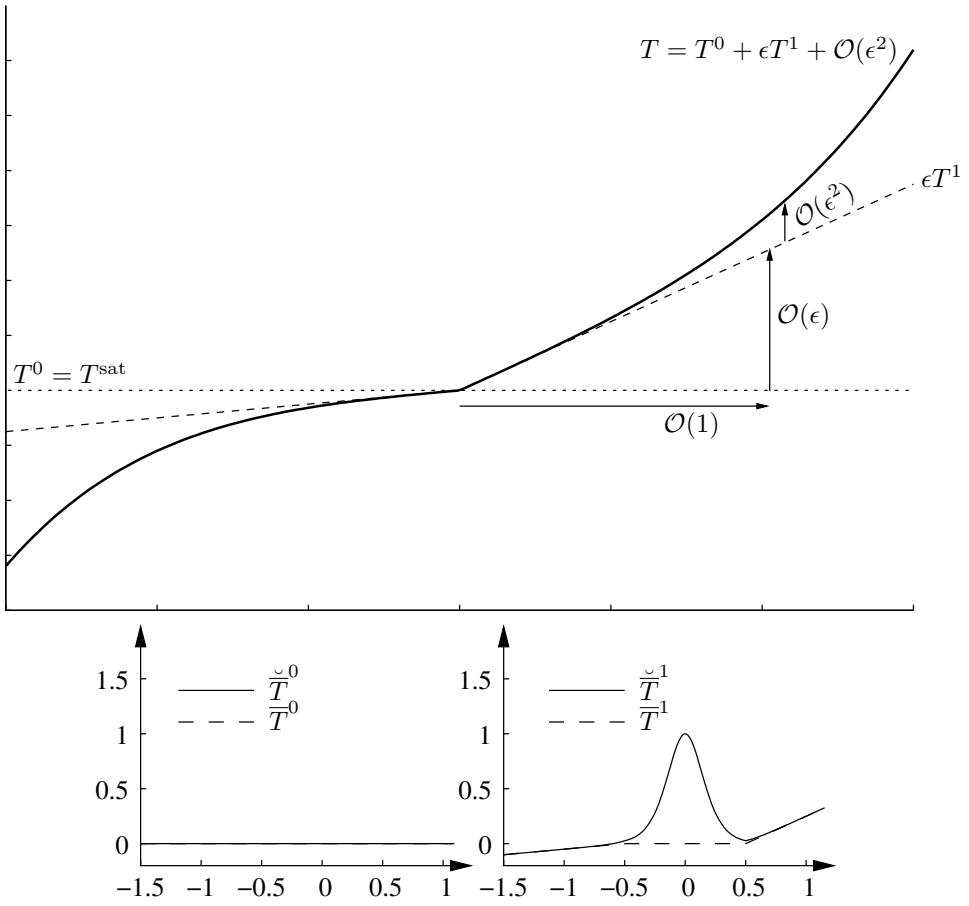


FIGURE 4.9 – Solutions intérieures et extérieures de la température à différents ordres.

résolue. Néanmoins, il est possible que le saut de viscosité $[\![\mu]\!]$ considéré par ces auteurs soit suffisamment faible (devant le paramètre ϵ en particulier) pour justifier la suppression de ces termes.

4.5.2.4 Améliorations

Devant la lourdeur des développements et par manque de temps, nous avons été contraints d'aborder le problème de manière pragmatique. Au lieu de conduire rigoureusement des développements limités supplémentaires pour établir des fermetures plus précises en $\mathcal{O}(\epsilon^3)$, nous avons décidé de récupérer les termes sous-maille rencontrés aux étapes précédentes et qui ont été négligés jusqu'à présent. L'étude complète de l'ordre 3 pourrait conduire à des termes de sauts complémentaires que nous négligeons *a priori*. Cette hypothèse est confrontée à des tests *a posteriori* au chapitre suivant, en même temps que les autres fermetures sont validées.

Transport de l'interface Pour la fermeture du transport de l'interface à l'ordre 0, nous avons négligé l'intégrale du terme sous-maille interfacial $\breve{A}$ en justifiant par l'équation (4.304) qu'elle se réduisait à :

$$\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma = \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.205}$$

De plus, pour imposer une masse en excès nulle à l'interface macroscopique équivalente, on montre à la section 4.4.3.2 qu'à l'ordre 2 (Éq. (4.155c)), la vitesse de déplacement de l'interface doit être corrigée par un terme traduisant l'évolution temporelle de la courbure (4.157) :

$$\epsilon^2 C_4 \left(\left(\kappa^2 - 2H\right) \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_i \cdot \boldsymbol{g}_3 - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_i \cdot \nabla\kappa \right) \tag{4.206}$$

Ces deux termes nous amènent à compléter le modèle proposé à l'équation (4.203b) par un terme du second ordre pour obtenir une modélisation qui dégénère bien vers le modèle de Toutant *et al.* (2009a) pour les écoulements adiabatiques :

$$\epsilon^2 \delta \boldsymbol{v}_i^2(3) = a_1 \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma \right) + \epsilon^2 C_4 \left(\left(\kappa^2 - 2H \right) \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \nabla \kappa \right) \tag{4.207}$$

Le paramètre de modélisation a_1 est introduit dans la relation précédente pour pallier la faiblesse des modèles de similarité d'échelles à reproduire l'intensité des échelles sous-maille, conformément à la discussion du chapitre 3. Il doit être déterminé par des tests *a posteriori*. On s'attend à obtenir une valeur proche de l'unité d'après la section 3.4.2.

Bilan de quantité de mouvement Les gradients présents dans les conditions de saut de la quantité de mouvement conduisent à l'étude de la solution à un ordre supérieur d'après les conditions de raccord. À l'ordre 1 dans la région intérieure, le bilan de quantité de mouvement (4.317c) ne contient pas de dérivée temporelle. Par conséquent, le terme sous-maille $\breve{B} = \tau_{\text{temp}}$ n'influence pas les conditions de saut macroscopique contrairement à ce que proposent Toutant *et al.* (2009a). Cette différence provient de l'adimensionnalisation du système. Nous n'avons pas considéré explicitement la prédominance des termes interfaciaux dans le terme de dérivée temporelle. C'est pour cette raison que le modèle proposé ne contient pas le terme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\overline{\breve{\rho}\, \widetilde{\boldsymbol{v}}} - \overline{\breve{\rho}}\, \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \right)}{\partial t} d\xi = [\![\rho]\!] \left(\overline{v_3^0\, \widetilde{\boldsymbol{v}}}^\sigma - \overline{v_3^0}^\sigma\, \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}^\sigma \right) \tag{4.208}$$

avec $v_3^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0 \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}$. Dans notre étude, le second terme de saut considéré par Toutant *et al.* (2009a) et Magdeleine (2009) est nul à l'ordre dominant car la correction sur la vitesse interfaciale ne débute qu'à l'ordre 1 :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}\, [\![\rho]\!] \left(\widetilde{v}_i - \widetilde{\boldsymbol{v}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} \right) = \widetilde{\boldsymbol{v}}\, [\![\rho]\!]\, \delta \boldsymbol{v}_i(3) = \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.209}$$

À l'ordre 1, il s'exprime uniquement à partir du taux de changement de phase et constitue le terme $\delta \boldsymbol{v}_i^1$ défini par l'équation (4.203b). À l'ordre 2, on propose de compléter la fermeture du bilan de quantité de mouvement en ajoutant le terme d'ordre 2 de l'expression (4.207) :

$$\mathcal{P}_m^2 = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma\, [\![\rho]\!]\, \delta \boldsymbol{v}_i^2(3) C_7 \quad \text{avec } C_7 = \frac{C_1}{C_5} \tag{4.210}$$

Seule la fraction C_1/C_5 de ce saut de vitesse doit être considérée car l'autre partie est déjà incluse dans le saut de quantité de mouvement.

Enfin, d'après la définition du tenseur $\widetilde{C} = \widetilde{\rho} \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \right)$, on a la décomposition

$$\nabla \cdot \widetilde{C} = \widetilde{\rho} \nabla \cdot \widetilde{L} + \widetilde{L} \cdot \nabla \widetilde{\rho} \tag{4.211}$$

où le tenseur de Leonard macroscopique $\widetilde{L}$ est défini par :

$$\widetilde{L} = \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}} \tag{4.212}$$

Comme Toutant *et al.* (2009a) et Magdeleine (2009), nous adoptons la décomposition (4.211) car elle permet de séparer les contributions interfaciales $\widetilde{L} \cdot \nabla \widetilde{\rho}$ des contributions phasiques $\widetilde{\rho} \nabla \cdot \widetilde{L}$.

Bilan d'énergie La condition de saturation de l'interface impose une régularité forte au champ de température au voisinage de l'interface. Par conséquent, dans un premier temps et en l'absence d'étude complémentaire, nous avons choisi de ne pas modifier le bilan d'énergie précédent. Seul le terme sous-maille de convection $\widetilde{F}$ est considéré. Comme le modèle $\widetilde{C}$, il se décompose en contributions interfaciales et phasiques :

$$\widetilde{F} = \widetilde{\rho c_p} \widetilde{L}_T \quad \text{avec} \quad \widetilde{L}_T = \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \widetilde{T}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\, \overline{\widetilde{T}} \tag{4.213}$$

Aire interfaciale Pour compléter le système (4.204), nous suggérons d'augmenter l'évaluation de l'aire interfaciale volumique en multipliant les termes $\widetilde{m}\widetilde{\delta}^i$ par $\left(1+\epsilon^2 C_3\right)$ d'après la relation de fermeture mésoscopique (2.95).

Conclusion À présent, l'extension proposée au modèle ISS dégénère vers une solution proche de celle de Toutant *et al.* (2009a) pour les écoulements adiabatiques. Devant l'ampleur des travaux de validation nécessaires, on suppose dans un premier temps que les termes proportionnels au saut $[\![\mu]\!]$ ou à l'excès $\left\|1/\breve{\overline{\mu}}^0\right\|^{ex}$ sont négligeables. On propose donc de résoudre le système macroscopique suivant

$$\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}} = -\left[\![1/\rho]\!\right]\widetilde{m}\widetilde{\delta}^i\left(1+\epsilon^2 C_3\right) \tag{4.214a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\otimes\widetilde{\boldsymbol{v}}+a_2\widetilde{\rho}\widetilde{L}\right) &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla\cdot\left[\widetilde{\mu}\left(\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}}+\nabla^T\widetilde{\boldsymbol{v}}+2\left[\![1/\rho]\!\right]\widetilde{m}\widetilde{\delta}^i\left(1+\epsilon^2 C_3\right)\widetilde{\boldsymbol{n}}\otimes\widetilde{\boldsymbol{n}}\right)\right]\\ &\quad -\nabla\widetilde{p}+\frac{\sigma^0}{\mathrm{We}}\widetilde{\kappa}\nabla\widetilde{\chi}_v+\widetilde{\delta}^i\mathcal{P}_m\end{aligned} \tag{4.214b}$$

$$\frac{\partial\left(\widetilde{\rho c_p}\,\widetilde{T}\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\widetilde{\rho c_p}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\widetilde{T}+a_3\widetilde{\rho c_p}\widetilde{L}_T\right)=\frac{1}{\mathrm{Pe}}\nabla\cdot\left[\widetilde{k}\left(\nabla\widetilde{T}\right)\right]+\frac{\mathcal{L}^0}{\mathrm{Ja}}\widetilde{m}\widetilde{\delta}^i\left(1+\epsilon^2 C_3\right) \tag{4.214c}$$

$$\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial t}+\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma+\delta\boldsymbol{v}_i(3)\widetilde{\boldsymbol{n}}\right)\cdot\nabla\widetilde{\chi}_k=0 \tag{4.214d}$$

$$\widetilde{T}(\widetilde{\boldsymbol{x}}_i)=0 \tag{4.214e}$$

avec

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma=\widetilde{\boldsymbol{v}}-\widetilde{m}\left(1+\epsilon^2 C_3\right)\widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho} \tag{4.215a}$$

$$\mathcal{P}_m=\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma\left[\![\rho]\!\right]\delta\boldsymbol{v}_i(3)C_7 \tag{4.215b}$$

$$\delta\boldsymbol{v}_i(3)=\underbrace{\epsilon C_5\widetilde{m}\widetilde{\kappa}\left[\![1/\rho]\!\right]}_{\textbf{(I)}}+\underbrace{a_1\left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma-\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma}^\sigma\cdot\overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma\right)}_{\textbf{(II)}}+\underbrace{\epsilon^2 C_4\left(\left(\kappa^2-2H\right)\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}+\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma\cdot\nabla\kappa\right)}_{\textbf{(III)}} \tag{4.215c}$$

Les paramètres a_i du modèle dépendent de l'efficacité de la reconstruction par similarité d'échelles, alors que les paramètres C_i sont fonctions de la forme du noyau du filtre implicite. Ils doivent tous être déterminés par des tests *a posteriori*. C'est l'objet du prochain chapitre ; les SND du chapitre 1 sont alors utilisées comme référence pour déterminer ces paramètres sur un maillage grossier.

4.6 Conclusion

En définitive, ce chapitre permet de transformer la description mésoscopique (2.97) établie au chapitre 2 en un problème macroscopique en réintroduisant la notion d'interface de discontinuité. Pour ce faire, la méthode des DAR nous a permis de concentrer les modèles sous-maille interfaciaux du système (2.97) afin de déterminer les conditions de raccord macroscopiques à l'interface et d'aboutir à un problème fermé à l'échelle macroscopique. Cela correspond à la seconde étape de changement d'échelle présentée en introduction (Fig. 5). Lors de cette étape, des termes sources spécifiques apparaissent dans l'expression des conditions de saut à l'interface ; ils peuvent être interprétés physiquement grâce à l'étude analytique approchée du problème. Ils constituent la modélisation ISS donnée par le système (4.214). Devant la complexité des développements et en regard des travaux précédents conduits sans changement de phase, nous avons introduit quelques corrections de manière pragmatique. Le chapitre suivant présente les premiers résultats obtenus avec cette description macroscopique d'un écoulement diphasique.

Annexes

4.A Système de coordonnées associées à l'interface

À l'échelle mésoscopique, les caractéristiques du système diphasique (vitesse, taux de présence...) sont fortement anisotropes : les variables du système varient très fortement dans la direction normale à cette zone de transition. Pour approcher la solution de l'écoulement dans cette région, la méthode des DAR repose sur un principe simple : différencier la direction normale des autres directions pour pouvoir y effectuer un changement de variable. Elle nécessite donc au préalable la description du système dans un système de coordonnées curvilignes associées à l'interface. Pour définir un repère de coordonnées généralisées à l'échelle mésoscopique, la première difficulté est de définir la surface sur laquelle il s'appuie car le problème mésoscopique ne présente pas de surface de discontinuité. Ce problème est adressé dans le corps du mémoire à la section 4.3.1. L'objectif de cette annexe est de définir la base et les coordonnées généralisées associées à l'interface (section 4.A.1). Après avoir introduit quelques notations (section 4.A.2), la section 4.A.3) décrit les opérateurs de dérivation en coordonnées généralisées à l'aide des facteurs d'échelles. Un développement limité de ces opérateurs est donné au voisinage de l'interface pour chaque région : extérieure (section 4.A.4) et intérieure (section 4.A.5).

Ensuite, on démontre à la section 4.A.6 certaines propriétés de la vitesse $\boldsymbol{v}_i^m$ du repère de coordonnées généralisées. La divergence de cette vitesse $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m$ est en particulier exprimée. Enfin, pour conclure cette annexe, la vitesse $\boldsymbol{v}_i^m$ permet de définir la dérivée lagrangienne à la section 4.A.7 et d'établir l'évolution temporelle de la courbure moyenne de l'interface à la section 4.A.8.

4.A.1 Base naturelle associée à l'interface et base physique

On suppose qu'une surface régulière est clairement identifiée au point O'. On note κ_α les directions principales de courbure auxquelles on associe les vecteurs tangents unitaires $\boldsymbol{t}_\alpha$. Les indices grecs sont réservés aux directions tangentielles ; les indices i et j sont utilisés pour représenter une direction quelconque. Les directions principales de courbure sont orthogonales (Garrigues, 1999) ; on définit le vecteur $\boldsymbol{n}$ pour que la base physique $\{\boldsymbol{g}_i\} = (\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{n})$ soit orthonormée directe. Les coordonnées généralisées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) du point M sont données par :

$$\boldsymbol{OM} = \xi_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha + \xi_3 \boldsymbol{n} \quad \text{(somme sur } \alpha\text{)}$$

Les coordonnées ξ_α mesurent la distance suivant les directions principales de courbure $\boldsymbol{t}_\alpha$ et la coordonnée ξ_3 mesure la distance dans la direction normale à l'interface $\boldsymbol{n}$. Par définition, on a alors :

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_\alpha} = \boldsymbol{t}_\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_3} = \boldsymbol{n} \tag{4.216}$$

En dérivant le vecteur position par rapport aux coordonnées, on peut définir une base non-normée $\{\widetilde{\boldsymbol{g}}_i\}$, dite naturelle, par :

$$\widetilde{\boldsymbol{g}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial \xi_i} \tag{4.217}$$

On introduit les facteurs d'échelles h_i définis par

$$h_i \hat{=} \| \widetilde{\boldsymbol{g}}_i \| \tag{4.218}$$

et on a par définition des rayons de courbure principaux :

$$h_1 = |1 - \xi_3 \kappa_1| \,,\, h_2 = |1 - \xi_3 \kappa_2| \quad \text{et} \quad h_3 = 1 \tag{4.219}$$

Les dérivées des vecteurs de la base naturelle par rapport aux coordonnées définissent les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k par :

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{g}}_i}{\partial \xi_j} = \Gamma_{ij}^k \widetilde{\boldsymbol{g}}_k \tag{4.220}$$

Enfin, le tenseur de courbure $\boldsymbol{B}$ défini par $\boldsymbol{B} \hat{=} -\nabla_s \boldsymbol{n}$ (l'opérateur gradient surfacique ∇_s est défini à la section suivante) admet pour valeurs propres les deux courbures principales κ_1 et κ_2. Ces invariants sont la courbure moyenne κ et la courbure gaussienne définies par :

$$\kappa = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{B}) = -\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{et} \quad H = \det\,(\boldsymbol{B}) \tag{4.221}$$

Garrigues (1999) montre que la jacobienne $\omega \hat{=} \sqrt{\widetilde{\boldsymbol{g}}_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{g}}_i}$ associée au passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées généralisées est donnée par :

$$\omega = h_1 h_2 h_3 = 1 - \xi_3 \kappa + \xi_3^2 H \tag{4.222}$$

4.A.2 Notations tensorielles et opérateurs différentiels

Soient $\boldsymbol{T}$ un tenseur, $\boldsymbol{u}$ un vecteur et ϕ un scalaire quelconques. Avec les notations tensorielles, les opérateurs de dérivations volumiques sont donnés par les relations suivantes :

$$\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \tag{4.223a}$$

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{ij} = \boldsymbol{u}_{j,i} \tag{4.223b}$$

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v})_j = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_{j,i} \tag{4.223c}$$

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})_{ij} = \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_j \tag{4.223d}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \tag{4.223e}$$

$$(\nabla \boldsymbol{T})_{ijk} = \boldsymbol{T}_{jk,i} \quad \text{avec} \quad \nabla \boldsymbol{T} \hat{=} \nabla \otimes \boldsymbol{T} \tag{4.223f}$$

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{T})_j = \boldsymbol{T}_{ji,i} \tag{4.223g}$$

Pour relier ces opérateurs différentiels volumiques aux opérateurs surfaciques, on introduit le tenseur de projection $\boldsymbol{P}$ défini par

$$\boldsymbol{P} \hat{=} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \tag{4.224}$$

où $\boldsymbol{I}$ est l'opérateur identité. La projection, le gradient et la divergence surfaciques sont alors définis par :

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}) \tag{4.225a}$$

$$(\nabla_s \boldsymbol{T})_{ij} = \boldsymbol{T}_{j,i} - \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_k \boldsymbol{T}_{j,k} = \boldsymbol{T}_{j,i} - \delta_{ik3} \boldsymbol{T}_{j,3} \quad \text{avec} \quad \nabla_s \boldsymbol{T} \hat{=} \boldsymbol{P} \cdot \nabla \boldsymbol{T} \tag{4.225b}$$

$$(\nabla_s \cdot \boldsymbol{T})_i = \boldsymbol{T}_{ji,j} - \boldsymbol{n}_j \boldsymbol{n}_k \boldsymbol{T}_{ji,k} = \boldsymbol{T}_{ji,j} - \delta_{j3} \boldsymbol{T}_{3i,3} \quad \text{avec} \quad \nabla_s \cdot \boldsymbol{T} \hat{=} \boldsymbol{P} : \nabla \boldsymbol{T} \tag{4.225c}$$

4.A.3 Expression des opérateurs différentiels dans la base physique

Dans le repère de coordonnées généralisées $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, le gradient et la divergence s'expriment par (Toutant, 2006, Éqs. (C.31), (C.40) et (C.43))

$$\nabla \phi \cdot \boldsymbol{g}_i = \frac{1}{h_i} \phi_{,i} \tag{4.226a}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{u} = {} & \frac{1}{h_1} u(1)_{,1} + \frac{1}{h_2} u(2)_{,2} + u(3)_{,3} - u(3) \left(\frac{\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2} \right) \\ & - \frac{\xi_3}{h_1 h_2} \left[u(1) \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial, 1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial, 1} \right) + u(2) \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial, 2} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial, 2} \right) \right] \end{aligned} \tag{4.226b}$$

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{S})_i = (\nabla \boldsymbol{S})_{ikk} = S_{ik,k} - S_{mk} \Gamma_{ki}^m - S_{im} \Gamma_{kk}^m \tag{4.226c}$$

où les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k sont définis par la relation (4.220). En combinant la définition du gradient et de la divergence, on obtient la formulation du laplacien suivante :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = {} & \frac{1}{h_1^2} \phi_{,1,1} + \frac{1}{h_2^2} \phi_{,2,2} + \phi_{,3,3} - \phi_{,3} \left(\frac{\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2} \right) \\ & - \frac{\xi_3}{h_1 h_2} \left[\frac{1}{h_1} \phi_{,1} \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_1} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{h_2} \phi_{,2} \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_2} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_2} \right) \right] \end{aligned} \tag{4.226d}$$

En utilisant les coefficients de Christoffel (4.220), la divergence tensorielle se développe comme suit

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{S})_3 = S_{33,3} + S_{3\alpha,\alpha} + \frac{\xi_3}{h_\alpha} S_{3\alpha} \left(\kappa_{\alpha,\alpha} - \frac{h_\beta}{h_\alpha} \kappa_{\beta,\beta} \right) - \kappa_\alpha h_\alpha S_{33} + \frac{\kappa_\alpha}{h_\alpha} S_{\alpha\alpha} \tag{4.227a}$$

avec $\beta = 3 - \alpha$ et la convention de sommation sur l'indice $\alpha = \{1, 2\}$; dans les directions tangentielles ($\alpha = \{1 \text{ ou } 2\}$), on a

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \boldsymbol{S})_\alpha &= S_{\alpha\alpha,\alpha} + S_{\alpha\beta,\beta} + S_{\alpha 3,3} - \kappa_\alpha \left(S_{3\alpha} h_\alpha - S_{\alpha 3} \frac{1}{h_\alpha} \right) - S_{\alpha 3} \left(\kappa_\alpha h_\alpha + \kappa_\beta h_\beta \right) \\ &+ \xi_3 \left[2 S_{\alpha\alpha} \frac{\kappa_{\alpha,\alpha}}{h_\alpha} - \left(S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} \right) \frac{h_\alpha}{h_\beta^2} \kappa_{\alpha,\alpha} + S_{\alpha\beta} \left(\frac{\kappa_{\alpha,\beta}}{h_\alpha} + \frac{\kappa_{\beta,\beta}}{h_\beta} \right) + S_{\beta\beta} \frac{\kappa_{\beta,\alpha}}{h_\beta} - S_{\alpha\alpha} \frac{h_\beta}{h_\alpha^2} \kappa_{\beta,\beta} \right]\end{aligned} \tag{4.227b}$$

avec $\beta = 3 - \alpha$ et pas de sommation sur l'indice α. L'expression du gradient vectoriel est donnée en fonction des facteurs d'échelles par :

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{\alpha\alpha} = h_\alpha u(\alpha)_{,\alpha} - u(\beta) \xi_3 \frac{h_\alpha}{h_\beta} \kappa_{\alpha,\alpha} - u(3) h_\alpha \kappa_\alpha \tag{4.228a}$$

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{\alpha\beta} = h_\alpha u(\alpha)_{,\beta} - u(\beta) \xi_3 \kappa_{\beta,\alpha} \tag{4.228b}$$

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{\alpha 3} = h_\alpha u(\alpha)_{,3} \tag{4.228c}$$

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{3\alpha} = u(3)_{,\alpha} + u(\alpha) \kappa_\alpha \tag{4.228d}$$

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{33} = u(3)_{,3} \tag{4.228e}$$

Par conséquent, les composantes du tenseur symétrique $\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u} \right)$ sont données par :

$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u} \right)_{\alpha 3} = \left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u} \right)_{3\alpha} = h_\alpha u(\alpha)_{,3} + u(3)_{,\alpha} + u(\alpha) \kappa_\alpha \tag{4.229a}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u} \right)_{\alpha\alpha} = 2 \left(h_\alpha u(\alpha)_{,\alpha} - u(\beta) \xi_3 \frac{h_\alpha}{h_\beta} \kappa_{\alpha,\alpha} - u(3) h_\alpha \kappa_\alpha \right) \tag{4.229b}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u} \right)_{\alpha\beta} = h_\alpha u(\alpha)_{,\beta} + h_\beta u(\beta)_{,\alpha} - \xi_3 \left(u(\beta) \kappa_{\beta,\alpha} + u(\alpha) \kappa_{\alpha,\beta} \right) \tag{4.229c}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u} \right)_{33} = 2 u(3)_{,3} \tag{4.229d}$$

Remarquons que pour un vecteur normal à l'interface $\boldsymbol{N} = (0, 0, N)$, le gradient, la divergence et le tenseur $\left(\nabla \boldsymbol{N} + \nabla^T \boldsymbol{N} \right)$ se simplifient :

$$\nabla \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} -N h_1 \kappa_1 & 0 & N_{,1} \\ 0 & -N h_2 \kappa_2 & N_{,2} \\ 0 & 0 & N_{,3} \end{pmatrix} \tag{4.230a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{N} = \frac{\partial N}{\partial \xi_3} - N \left(\frac{\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2} \right) \tag{4.230b}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{N} + \nabla^T \boldsymbol{N} \right) = \begin{pmatrix} -2 N h_1 \kappa_1 & 0 & N_{,1} \\ 0 & -2 N h_2 \kappa_2 & N_{,2} \\ N_{,1} & N_{,2} & 2 N_{,3} \end{pmatrix} \tag{4.230c}$$

4.A.4 Limite asymptotique au voisinage de l'interface ($\xi_3 \to 0$)

Pour l'étude du système extérieur, il est intéressant de rechercher la limite asymptotique de ces opérateurs différentiels à l'interface, *i. e.,* lorsque $\xi_3 \to 0$. Comme en $\xi_3 = 0$ on a $h_\alpha = 1$, les

expressions du gradient et de la divergence dégénèrent et on a les relations suivantes :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = u(1)_{,1} + u(2)_{,2} + u(3)_{,3} - u(3)\left(\kappa_1 + \kappa_2\right) \tag{4.231a}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{N} = N_{,3} - N\left(\kappa_1 + \kappa_2\right) \tag{4.231b}$$
$$\nabla^2 \phi = \phi_{,1,1} + \phi_{,2,2} + \phi_{,3,3} - \phi_{,3}\left(\kappa_1 + \kappa_2\right) \tag{4.231c}$$
$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)_{3\alpha} = u(\alpha)_{,3} + u(3)_{,\alpha} + u(\alpha)\kappa_\alpha \tag{4.231d}$$
$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)_{\alpha\alpha} = 2\left(u(\alpha)_{,\alpha} - u(3)\kappa_\alpha\right) \tag{4.231e}$$
$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)_{\alpha\beta} = u(\alpha)_{,\beta} + u(\beta)_{,\alpha} \tag{4.231f}$$
$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)_{33} = 2u(3)_{,3} \tag{4.231g}$$

Les coefficients de Christoffel non nuls en $\xi_3 = 0$ sont :

$$\Gamma^\alpha_{\alpha 3} = \Gamma^\alpha_{3\alpha} = -\kappa_\alpha \quad \text{et} \quad \Gamma^3_{\alpha\alpha} = \kappa_\alpha \tag{4.232}$$

Par conséquent, la divergence d'un tenseur $\boldsymbol{S}$ est donnée au voisinage de $\xi_3 = 0$ par (pour $\alpha = \{1, 2\}$) :

$$\left(\nabla \cdot \boldsymbol{S}\right)_\alpha = S_{\alpha 1,1} + S_{\alpha 2,2} + S_{\alpha 3,3} - \left(\kappa_1 + \kappa_2\right) S_{\alpha 3} + \boxed{\kappa_\alpha \left(S_{\alpha 3} - S_{3\alpha}\right)} \tag{4.233a}$$

Le terme encadré est nul pour un tenseur symétrique. Dans la direction normale, on a :

$$\left(\nabla \cdot \boldsymbol{S}\right)_3 = S_{31,1} + S_{32,2} + S_{33,3} - \left(\kappa_1 + \kappa_2\right) S_{33} + \boxed{\kappa_1 S_{11} + \kappa_2 S_{22}} \tag{4.233b}$$

Les termes encadrés montrent les différences entre la direction normale et les directions tangentielles. En utilisant l'écriture de $\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)$ au voisinage de $\xi_3 = 0$, on a dans la direction tangentielle α

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_k}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{S}_k\right)_\alpha = {} & \boldsymbol{u}(\alpha)_{,1,1} + \boldsymbol{u}(\alpha)_{,2,2} + \boldsymbol{u}(\alpha)_{,3,3} - \boldsymbol{u}(\alpha)_{,3}\left(\kappa_1 + \kappa_2\right) + \boldsymbol{u}(1)_{,1,\alpha} + \boldsymbol{u}(2)_{,2,\alpha} \\ & + \boldsymbol{u}(3)_{,3,\alpha} - \boldsymbol{u}(3)_{,\alpha}\left(\kappa_1 + \kappa_2\right) \boxed{-\kappa_\alpha \boldsymbol{u}(\alpha)_{,3}} - 2\left(\boldsymbol{u}(3)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} + \boxed{\left(\boldsymbol{u}(\alpha)\kappa_\alpha\right)_{,3}} \\ & - \left(\kappa_1 + \kappa_2\right) \boldsymbol{u}(\alpha)\kappa_\alpha\end{aligned} \tag{4.234a}$$

et dans la direction normale

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_k}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{S}_k\right)_3 = {} & 2u(3)_{,3,3} - 2u(3)_{,3}\left(\kappa_1 + \kappa_2\right) + u(\alpha)_{,\alpha,3} + u(3)_{,\alpha,\alpha} + \left(u(\alpha)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} + 2\kappa_\alpha u(\alpha)_{,\alpha} \\ & - 2u(3)\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)\end{aligned} \tag{4.234b}$$

avec la convention de sommation sur l'indice répété ($\alpha = \{1, 2\}$) pour la direction normale. Les termes encadrés de l'équation (4.234a) se simplifient, mais on conserve cette forme car elle permet de mettre en évidence les conditions de raccord lors de l'étude du bilan de la quantité de mouvement d'ordre 2 dans la direction tangentielle dans la région intérieure. Cette relation est en accord avec les relations (C.43a) et (C.43b) de Toutant (2006).

On peut noter que la relation (4.234a), utilisée pour l'étude de l'ordre 2 du bilan de la quantité de mouvement dans la direction normale, est différente de la relation (C.43c) de Toutant (2006). Aux ordres élevés (que Toutant (2006) n'utilise pas), nous obtenons les termes supplémentaires suivants : $2\kappa_\alpha u(\alpha)_{,\alpha} + 1u(3)\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right) + u(\alpha)\kappa_{\alpha,\alpha}$.

4.A.5 Développement limité des opérateurs différentiels dans la région intérieure

Dans la région intérieure, la coordonnée normale du repère associé à l'interface est dilatée par le changement de variable $\xi = \xi_3/\epsilon$ pour rendre cette direction prépondérante. Par abus de notation, on conserve la notation $\phi_{,3} = \partial\phi/\partial\xi$ après ce changement de variable. Dans cette section, on

présente le développement limité des opérateurs différentiels dans ce nouveau repère $(0', \xi_1, \xi_2, \xi)$. Les relations (4.226a) et (4.226b) conduisent aux développements limités du gradient

$$\nabla\breve{\overline{\phi}} = \frac{1}{\epsilon}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \breve{\overline{\phi}}^0_{,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \breve{\overline{\phi}}^0_{,1} \\ \breve{\overline{\phi}}^0_{,2} \\ \breve{\overline{\phi}}^1_{,3} \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \breve{\overline{\phi}}^1_{,1} + \xi\kappa_1\breve{\overline{\phi}}^0_{,1} \\ \breve{\overline{\phi}}^1_{,2} + \xi\kappa_2\breve{\overline{\phi}}^0_{,2} \\ \breve{\overline{\phi}}^2_{,3} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.235}$$

et de la divergence :

$$\nabla \cdot \breve{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\epsilon}\breve{\overline{u}}^0(3)_{,3} \tag{4.236a}$$

$$+ \breve{\overline{u}}^1(3)_{,3} + \breve{\overline{u}}^0(1)_{,1} + \breve{\overline{u}}^0(2)_{,2} - \breve{\overline{u}}^0(3)(\kappa_1 + \kappa_2) \tag{4.236b}$$

$$+ \epsilon\Big[\breve{\overline{u}}^2(3)_{,3} + \breve{\overline{u}}^1(1)_{,1} + \breve{\overline{u}}^1(2)_{,2} - \breve{\overline{u}}^1(3)(\kappa_1 + \kappa_2)$$

$$+ \xi\left(\kappa_1\breve{\overline{u}}^0(1)_{,1} + \kappa_2\breve{\overline{u}}^0(2)_{,2} - \left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)\breve{\overline{u}}^0(3) + \breve{\overline{u}}^0(1)\frac{\partial(\kappa_1 + \kappa_2)}{\partial\xi_1} + \breve{\overline{u}}^0(2)\frac{\partial(\kappa_1 + \kappa_2)}{\partial\xi_2}\right)\Big] \tag{4.236c}$$

$$+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.236d}$$

En combinant l'expression du gradient à celle de la divergence, on obtient le développement suivant pour le laplacien d'un scalaire :

$$\nabla^2\breve{\overline{\phi}} = \frac{1}{\epsilon^2}\breve{\overline{\phi}}^0_{,3,3} \tag{4.237a}$$

$$+ \frac{1}{\epsilon}\left(\breve{\overline{\phi}}^1_{,3,3} - \breve{\overline{\phi}}^0_{,3}(\kappa_1 + \kappa_2)\right) \tag{4.237b}$$

$$+ \breve{\overline{\phi}}^2_{,3,3} + \breve{\overline{\phi}}^0_{,1,1} + \breve{\overline{\phi}}^0_{,2,2} - \breve{\overline{\phi}}^1_{,3}(\kappa_1 + \kappa_2) - \xi\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)\breve{\overline{\phi}}^0_{,3} \tag{4.237c}$$

$$+ \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.237d}$$

Pour un vecteur $\boldsymbol{N}$ normal à l'interface, la divergence *surfacique* est donnée par :

$$\nabla_s \cdot \breve{\overline{\boldsymbol{N}}} = \breve{\overline{\boldsymbol{N}}}^0(3)(\kappa_1 + \kappa_2) \tag{4.238a}$$

$$+ \epsilon\left[-\breve{\overline{\boldsymbol{N}}}^1(3)(\kappa_1 + \kappa_2) - \xi\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)\breve{\overline{\boldsymbol{N}}}^0(3)\right] \tag{4.238b}$$

$$+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.238c}$$

En supposant que le tenseur $\boldsymbol{S}$ se développe sous la forme $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^0 + \epsilon\boldsymbol{S}^1 + \epsilon^2\boldsymbol{S}^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$, on développe la divergence tensorielle (4.226c) dans les directions tangentes (*i. e.*, $\alpha = \{1 \text{ ou } 2\}$ et $\beta = 3 - \alpha$, sans sommation sur α)

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{S})_\alpha = \frac{1}{\epsilon}S^0_{\alpha 3,3} \tag{4.239a}$$

$$+ S^1_{\alpha 3,3} + \boxed{S^0_{\alpha\alpha,\alpha} + S^0_{\alpha\beta,\beta} - \kappa_\alpha\left(S^0_{3\alpha} - S^0_{\alpha 3}\right)} - (\kappa_\alpha + \kappa_\beta)S^0_{\alpha 3} \tag{4.239b}$$

$$+ \epsilon\Big[S^2_{\alpha 3,3} + S^1_{\alpha\alpha,\alpha} + S^1_{\alpha\beta,\beta} - \boxed{\kappa_\alpha\left(S^1_{3\alpha} - S^1_{\alpha 3}\right)} - (\kappa_\alpha + \kappa_\beta)S^1_{\alpha 3} \tag{4.239c}$$

$$+ \xi\left(\kappa_\alpha^2\left(S^0_{3\alpha} + S^0_{\alpha 3}\right) + \left(\kappa_\alpha^2 + \kappa_\beta^2\right)S^0_{\alpha 3}\right.$$

$$\left. + \boxed{\left(2S^0_{\alpha\alpha} - S^0_{\alpha\beta} - S^0_{\beta\alpha}\right)\kappa_{\alpha,\alpha} + S^0_{\alpha\beta}(\kappa_{\alpha,\beta} + \kappa_{\beta,\beta}) + S^0_{\beta\beta}\kappa_{\beta,\alpha} + S^0_{\alpha\alpha}\kappa_{\beta,\beta}}\right)\Big]$$

$$+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.239d}$$

et dans la direction normale (avec la convention de sommation sur l'indice $\alpha = \{1, 2\}$ dans cette

direction uniquement) :

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{S})_3 = \frac{1}{\epsilon} S^0_{33,3} \tag{4.239e}$$

$$+ S^1_{33,3} + S^0_{3\alpha,\alpha} - \kappa_\alpha S^0_{33} + \boxed{\kappa_\alpha S^0_{\alpha\alpha}} \tag{4.239f}$$

$$+ \epsilon \left[S^2_{33,3} + S^1_{3\alpha,\alpha} - \kappa_\alpha S^1_{33} + \kappa_\alpha S^1_{\alpha\alpha} + \xi \left(\kappa_\alpha^2 S^0_{33} + (\kappa_{\alpha,\alpha} - \kappa_{\beta,\beta}) S^0_{3\alpha} + \boxed{\kappa_\alpha^2 S^0_{\alpha\alpha}} \right) \right] \tag{4.239g}$$

$$+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.239h}$$

Les termes encadrés sont nuls si $\boldsymbol{S}$ représente le tenseur de diffusion $\boldsymbol{S} = \epsilon\mu \left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)$ car ce tenseur est symétrique ($S_{\alpha 3} = S_{3\alpha}$) et à l'ordre 0, seules les composantes suivant la direction 3 sont non nulles *i. e.*, $S^0_{\alpha\alpha} = S^0_{\alpha\beta} = S^0_{\beta\alpha} = S^0_{\beta\beta} = 0$.

Par ailleurs, le développement limité du gradient vectoriel est donné par

$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)_{\alpha 3} = \left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)_{3\alpha} = \frac{1}{\epsilon} \boldsymbol{u}^0(\alpha)_{,3} \tag{4.240a}$$

$$+ \boldsymbol{u}^1(\alpha)_{,3} - \xi\kappa_\alpha \boldsymbol{u}^0(\alpha)_{,3} + \boldsymbol{u}^0(3)_{,\alpha} + \boldsymbol{u}^0(\alpha)\kappa_\alpha \tag{4.240b}$$

$$+ \epsilon \left(\boldsymbol{u}^2(\alpha)_{,3} - \xi\kappa_\alpha \boldsymbol{u}^1(\alpha)_{,3} + \boldsymbol{u}^1(3)_{,\alpha} + \boldsymbol{u}^1(\alpha)\kappa_\alpha \right) \tag{4.240c}$$

$$+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.240d}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)_{33} = \frac{2}{\epsilon} \boldsymbol{u}^0(3)_{,3} \tag{4.240e}$$

$$+ 2\boldsymbol{u}^1(3)_{,3} \tag{4.240f}$$

$$+ \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.240g}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)_{\alpha\alpha} = 2 \left(\boldsymbol{u}^0(\alpha)_{,\alpha} - \boldsymbol{u}^0(3)\kappa_\alpha \right) \tag{4.240h}$$

$$+ 2\epsilon \left[\left(\boldsymbol{u}^1(\alpha)_{,\alpha} - \boldsymbol{u}^1(3)\kappa_\alpha \right) + \xi \left(\boldsymbol{u}^0(3)\kappa_\alpha^2 - \boldsymbol{u}^0(\alpha)_{,\alpha}\kappa_\alpha - \boldsymbol{u}^0(\beta)\kappa_{\alpha,\alpha} \right) \right] \tag{4.240i}$$

$$+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.240j}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)_{\alpha\beta} = \boldsymbol{u}^0(\alpha)_{,\beta} + \boldsymbol{u}^0(\beta)_{,\alpha} \tag{4.240k}$$

$$+ 2\epsilon \left[\boldsymbol{u}^1(\alpha)_{,\beta} + \boldsymbol{u}^1(\beta)_{,\alpha} - \xi \left(\kappa_\alpha \boldsymbol{u}^0(\alpha)_{,\beta} + \kappa_\beta \boldsymbol{u}^0(\beta)_{,\alpha} + \boldsymbol{u}^0(\alpha)\kappa_{\beta,\alpha} + \boldsymbol{u}^0(\beta)\kappa_{\alpha,\beta} \right) \right] \tag{4.240l}$$

$$+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.240m}$$

et pour un vecteur $\boldsymbol{N}$ normal à l'interface :

$$\left(\nabla \boldsymbol{N} + \nabla^T \boldsymbol{N}\right)_{\alpha 3} = \left(\nabla \boldsymbol{N} + \nabla^T \boldsymbol{N}\right)_{3\alpha} = N_{,\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.241a}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{N} + \nabla^T \boldsymbol{N}\right)_{33} = 2N_{,3} + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.241b}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{N} + \nabla^T \boldsymbol{N}\right)_{\alpha\alpha} = -2N\kappa_\alpha + 2N\epsilon\xi\kappa_\alpha^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.241c}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{N} + \nabla^T \boldsymbol{N}\right)_{\alpha\beta} = 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.241d}$$

Les relations (4.240) permettent de développer la divergence tensorielle de la diffusion $\boldsymbol{S}$ aux ordres -2, -1 et 0 dans les directions tangentes (pour $\alpha = \{1 \text{ ou } 2\}$ et $\beta = 3 - \alpha$, sans sommation sur α)

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{S})^0_\alpha = \left(\mu \boldsymbol{u}^2(\alpha)_{,3}\right)_{,3} - \left(\xi\mu\kappa_\alpha \boldsymbol{u}^1(\alpha)_{,3}\right)_{,3} + \left(\mu \boldsymbol{u}^1(3)_{,\alpha}\right)_{,3} \tag{4.242a}$$

$$+ \left(\mu \boldsymbol{u}^1(\alpha)\right)_{,3} \kappa_\alpha + 2\mu \boldsymbol{u}^0(\alpha)_{,\alpha,\alpha} - 2\mu \left(\boldsymbol{u}^0(3)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} + \mu \boldsymbol{u}^0(\alpha)_{,\beta,\beta} + \mu \boldsymbol{u}^0(\beta)_{,\alpha,\beta}$$

$$- (\kappa_\alpha + \kappa_\beta) \left(\mu \boldsymbol{u}^1(\alpha)_{,3} - \xi\kappa_\beta\mu \boldsymbol{u}^0(\alpha)_{,3} + \mu \boldsymbol{u}^0(3)_{,\alpha} + \mu \boldsymbol{u}^0(\alpha)\kappa_\alpha \right) + 4\kappa_\alpha^2 \xi\mu \boldsymbol{u}^0(\alpha)_{,3}$$

et dans la direction normale (sommation sur $\alpha = \{1, 2\}$) :

$$
\begin{aligned}
(\nabla \cdot \boldsymbol{S})_3^0 = {} & 2\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{u}}}^2(3)_{,3}\right)_{,3} - (\kappa_1 + \kappa_2)\, 2\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{u}}}^1(3)_{,3} + \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{u}}}^1(\alpha)_{,3,\alpha} - \breve{\overline{\mu}}^0 \xi \left(\kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{u}}}^0(\alpha)_{,3}\right)_{,\alpha} \\
& + \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{u}}}^0(3)_{,\alpha,\alpha} + \breve{\overline{\mu}}^0 \left(\kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{u}}}^0(\alpha)\right)_{,\alpha} + 2\breve{\overline{\mu}}^0 \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{u}}}^0(\alpha)_{,\alpha} - 2\breve{\overline{\mu}}^0 \kappa_\alpha^2 \breve{\overline{\boldsymbol{u}}}^0(3) \\
& + \xi \left(2\kappa_\alpha^2 \breve{\overline{\mu}} \breve{\overline{\boldsymbol{u}}}^0(3)_{,3} + (\kappa_{\alpha,\alpha} - \kappa_{\beta,\beta})\, \breve{\overline{\mu}} \breve{\overline{\boldsymbol{u}}}^0(\alpha)_{,3}\right)
\end{aligned}
\tag{4.242b}
$$

On peut remarquer que l'expression (4.242a) est en accord avec les relations (C.43a) et (C.43b) de Toutant (2006). En revanche, la relation (4.242b) diffère de l'expression (C.43c) de Toutant (2006), dont le dernier terme $2\mu\xi_3 u(3)_{,3}\,(\kappa_1 + \kappa_2)$ n'est pas correct dimensionnellement. La relation (4.242b) contient en outre des termes de variation tangentielle de courbure qui ont été négligés par Toutant (2006). Les différences constatées sont sans impact sur le raisonnement de Toutant (2006) car il se limite à l'étude de l'ordre 0. Nous préférons utiliser la relation (4.242b) dans ce manuscrit car elle nous semble plus cohérente. Ces deux relations sont utilisées pour l'étude du bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure, à l'ordre 2.

Enfin, d'après la définition du tenseur $\mathcal{T}$, on a :

$$
\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathcal{T})_\alpha^0 = {} & \frac{1}{\epsilon} \breve{\overline{m}}^0_{,\alpha,3} && \text{(4.243a)} \\
& + \breve{\overline{m}}^1_{,\alpha,3} - 2\left(\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha} \kappa_\alpha\right)_{,\alpha} - (\kappa_1 + \kappa_2)\, \breve{\overline{m}}^0_{,\alpha} && \text{(4.243b)} \\
& + \epsilon \left[\breve{\overline{m}}^2_{,\alpha,3} - 2\left(\breve{\overline{m}}^1_{,\alpha} \kappa_\alpha\right)_{,\alpha} - (\kappa_1 + \kappa_2)\, \breve{\overline{m}}^1_{,\alpha} + \xi \left(2\left(\breve{\overline{m}}^0 \kappa_\alpha^2\right)_{,\alpha} + 2\breve{\overline{m}}^0 \kappa_\alpha^2 + \left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right) \breve{\overline{m}}^0\right)\right] && \text{(4.243c)} \\
& + \mathcal{O}(\epsilon^2) && \text{(4.243d)} \\
(\nabla \cdot \mathcal{T})_3^0 = {} & \frac{1}{\epsilon} 2\breve{\overline{m}}^0_{,3,3} && \text{(4.243e)} \\
& + 2\breve{\overline{m}}^1_{,3,3} + \breve{\overline{m}}^0_{,\alpha,\alpha} - 2\kappa_\alpha^2 \breve{\overline{m}}^0 - \kappa_\alpha \breve{\overline{m}}^0_{,3} + \mathcal{O}(\epsilon) && \text{(4.243f)}
\end{aligned}
$$

4.A.6 Propriétés de la vitesse des coordonnées

Nous souhaitons relier la vitesse $\boldsymbol{v}_i^m$ du repère associé à l'interface à la base physique $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{n})$ introduite à la section 4.A.1 et aux coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) afin d'établir l'expression de la divergence $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m$ dans ce repère. Dans cette section, on montre aussi certaines propriétés vérifiées par les composantes de la vitesse $\boldsymbol{v}_i^m$ qui seront utilisées à la section 4.A.8 pour déterminer l'évolution temporelle de la courbure moyenne.

En décomposant les coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ associé aux coordonnées locales, on définit la vitesse des coordonnées $\boldsymbol{v}_i^m$:

$$
\boldsymbol{v}_i^m \hat{=} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \xi_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} + \xi_3 \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} \quad \text{(somme sur } \alpha\text{)} \tag{4.244}
$$

Les coordonnées du point $\boldsymbol{x}$ n'évoluent pas au cours du temps et la dérivée évaluée est une dérivée partielle (par opposition à la dérivée lagrangienne).

Par définition des vecteurs tangents et des coefficients de Christoffel, on a

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_\alpha} = \boldsymbol{t}_\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_3} = \boldsymbol{n} \tag{4.245a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \xi_\alpha} = \Gamma^k_{3\alpha}\widetilde{\boldsymbol{g}}_k = \Gamma^\alpha_{3\alpha}\widetilde{\boldsymbol{g}}_\alpha = -\kappa_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha \tag{4.245b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha}\left(-\boldsymbol{t}_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \xi_\alpha} + \Gamma^k_{\alpha\alpha}\widetilde{\boldsymbol{g}}_k\right) = \frac{1}{h_\alpha}\left(\xi_3 \boldsymbol{t}_\alpha \kappa_{\alpha,\alpha} + \left(-\frac{\xi_3}{h_\alpha}\kappa_{\alpha,\alpha}\widetilde{\boldsymbol{g}}_\alpha + \frac{\xi_3 h_\alpha}{h_\beta^2}\kappa_{\alpha,\alpha}\widetilde{\boldsymbol{g}}_\beta + \kappa_\alpha h_\alpha \widetilde{\boldsymbol{g}}_3\right)\right) \\ &= \frac{1}{h_\alpha}\xi_3 \boldsymbol{t}_\alpha \kappa_{\alpha,\alpha} - \xi_3 \frac{1}{h_\alpha}\kappa_{\alpha,\alpha}\boldsymbol{t}_\alpha + \frac{\xi_3}{h_\beta}\kappa_{\alpha,\alpha}\boldsymbol{t}_\beta + \kappa_\alpha \boldsymbol{n} \\ &= \frac{\xi_3}{h_\beta}\kappa_{\alpha,\alpha}\boldsymbol{t}_\beta + \kappa_\alpha \boldsymbol{n}\end{aligned} \tag{4.245c}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{t}_\beta}{\partial \xi_\alpha} &= \frac{1}{h_\beta}\left(-\boldsymbol{t}_\beta \frac{\partial h_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \Gamma^k_{\beta\alpha}\widetilde{\boldsymbol{g}}_k\right) = \frac{1}{h_\beta}\left(\xi_3 \boldsymbol{t}_\beta \kappa_{\beta,\alpha} - \xi_3\left(\frac{1}{h_\alpha}\kappa_{\alpha,\beta}\widetilde{\boldsymbol{g}}_\alpha + \frac{1}{h_\beta}\kappa_{\beta,\alpha}\widetilde{\boldsymbol{g}}_\beta\right)\right) \\ &= \frac{1}{h_\beta}\xi_3 \boldsymbol{t}_\beta \kappa_{\beta,\alpha} - \xi_3 \frac{1}{h_\beta}\kappa_{\alpha,\beta}\boldsymbol{t}_\alpha - \xi_3 \frac{1}{h_\beta}\kappa_{\beta,\alpha}\boldsymbol{t}_\beta \\ &= -\xi_3 \frac{1}{h_\beta}\kappa_{\alpha,\beta}\boldsymbol{t}_\alpha\end{aligned} \tag{4.245d}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial \xi_3} &= \frac{1}{h_\alpha}\left(-\boldsymbol{t}_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \xi_3} + \Gamma^k_{\alpha 3}\widetilde{\boldsymbol{g}}_k\right) = \frac{1}{h_\alpha}\left(\boldsymbol{t}_\alpha \kappa_\alpha - \frac{\kappa_\alpha}{h_\alpha}\widetilde{\boldsymbol{g}}_\alpha\right) \\ &= \frac{1}{h_\alpha}\left(\boldsymbol{t}_\alpha \kappa_\alpha - \kappa_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.245e}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \xi_3} = \Gamma^k_{33}\widetilde{\boldsymbol{g}}_k = 0 \tag{4.245f}$$

car $\widetilde{\boldsymbol{g}}_\alpha = h_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha$, $h_\alpha = 1 - \xi_3\kappa_\alpha$ et $\widetilde{\boldsymbol{g}}_3 = \boldsymbol{n}$. Seul k est sommé dans les expressions précédentes. $\boldsymbol{t}_\beta$ désigne le vecteur tangent orthogonal à $\boldsymbol{t}_\alpha$. Notons que les relations $\boldsymbol{t}_\alpha \cdot \boldsymbol{t}_\alpha = 1$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = 1$, $\boldsymbol{t}_\alpha \cdot \boldsymbol{t}_\beta = 0$ et $\boldsymbol{t}_\alpha \cdot \boldsymbol{n} = 0$ impliquent que :

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{4.246a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \boldsymbol{t}_\alpha = 0 \tag{4.246b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{4.246c}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{t}_\alpha = -\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} \tag{4.246d}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}_\beta}{\partial t} \cdot \boldsymbol{t}_\alpha = -\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \boldsymbol{t}_\beta \tag{4.246e}$$

La combinaison des quatre dernières équations conduit à :

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{t}_\alpha \quad \text{(somme sur } \alpha\text{)} \tag{4.247a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}_\beta}{\partial t} \cdot \boldsymbol{t}_\alpha\right)\boldsymbol{t}_\beta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} \quad \text{(pas de somme)} \tag{4.247b}$$

En injectant ces relations dans la décomposition (4.244), on obtient :

$$\boldsymbol{v}_i^m = -\left(\xi_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{t}_\beta}{\partial t} \cdot \boldsymbol{t}_\alpha\right)\boldsymbol{t}_\beta + \left(\xi_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} - \left(\xi_3 \frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{t}_\alpha \quad \text{(somme sur } \alpha\text{)} \tag{4.248}$$

Par ailleurs, en dérivant l'équation (4.244) suivant la direction normale $\boldsymbol{n}$ et suivant les directions

tangentielles α et β, on obtient en commutant les dérivations :

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \xi_\alpha \partial t} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t \partial \xi_\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} \tag{4.249a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \xi_\beta \partial t} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t \partial \xi_\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{t}_\beta}{\partial t} \tag{4.249b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial \xi_3} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \xi_3 \partial t} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t \partial \xi_3} = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} \tag{4.249c}$$

En décomposant la vitesse dans la base locale puis en dérivant suivant la direction tangentielle α, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial \xi_\alpha} &= \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(3)\boldsymbol{n}}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\boldsymbol{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(\beta)\boldsymbol{t}_\beta}{\partial \xi_\alpha} \\
&= \boldsymbol{v}_i^m(3)\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(3)}{\partial \xi_\alpha}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)}{\partial \xi_\alpha}\boldsymbol{t}_\alpha + \boldsymbol{v}_i^m(\beta)\frac{\partial \boldsymbol{t}_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(\beta)}{\partial \xi_\alpha}\boldsymbol{t}_\beta \\
&= -\boldsymbol{v}_i^m(3)\kappa_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha + \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,\alpha}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\left(\frac{\xi_3}{h_\beta}\kappa_{\alpha,\alpha}\boldsymbol{t}_\beta + \kappa_\alpha \boldsymbol{n}\right) + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)_{,\alpha}\boldsymbol{t}_\alpha - \frac{\xi_3}{h_\beta}\boldsymbol{v}_i^m(\beta)\kappa_{\alpha,\beta}\boldsymbol{t}_\alpha + \boldsymbol{v}_i^m(\beta)_{,\alpha}\boldsymbol{t}_\beta \\
&= -\boldsymbol{v}_i^m(3)\kappa_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha + \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,\alpha}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\frac{\xi_3}{h_\beta}\kappa_{\alpha,\alpha}\boldsymbol{t}_\beta + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\kappa_\alpha \boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)_{,\alpha}\boldsymbol{t}_\alpha - \frac{\xi_3}{h_\beta}\boldsymbol{v}_i^m(\beta)\kappa_{\alpha,\beta}\boldsymbol{t}_\alpha + \boldsymbol{v}_i^m(\beta)_{,\alpha}\boldsymbol{t}_\beta \\
&= A_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{t}_\alpha + B_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{t}_\beta + C_\alpha\,\boldsymbol{n}
\end{aligned} \tag{4.250}$$

avec $\beta = 3 - \alpha$ (pas de sommation sur ces indices), d'après les équations (4.245b), (4.245c) et (4.245d). Pour alléger l'écriture, on a posé :

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta} &= -\boldsymbol{v}_i^m(3)\kappa_\alpha + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)_{,\alpha} - \frac{\xi_3}{h_\beta}\boldsymbol{v}_i^m(\beta)\kappa_{\alpha,\beta} \\
B_{\alpha\beta} &= \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\frac{\xi_3}{h_\beta}\kappa_{\alpha,\alpha} + \boldsymbol{v}_i^m(\beta)_{,\alpha} \\
C_\alpha &= \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,\alpha} + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\kappa_\alpha
\end{aligned}$$

En procédant de même dans la direction normale, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial \xi_3} &= \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(3)\boldsymbol{n}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\boldsymbol{t}_\alpha}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(\beta)\boldsymbol{t}_\beta}{\partial \xi_3} \\
&= \boldsymbol{v}_i^m(3)\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(3)}{\partial \xi_3}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)}{\partial \xi_3}\boldsymbol{t}_\alpha + \boldsymbol{v}_i^m(\beta)\frac{\partial \boldsymbol{t}_\beta}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(\beta)}{\partial \xi_3}\boldsymbol{t}_\beta \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(3)}{\partial \xi_3}\boldsymbol{n} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)}{\partial \xi_3}\boldsymbol{t}_\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m(\beta)}{\partial \xi_3}\boldsymbol{t}_\beta \quad \text{d'après les Éqs. (4.245e) et (4.245f)} \\
&= \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,3}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)_{,3}\boldsymbol{t}_\alpha + \boldsymbol{v}_i^m(\beta)_{,3}\boldsymbol{t}_\beta
\end{aligned} \tag{4.251}$$

D'après les égalités (4.249a) et (4.249c), les relations (4.246b) et (4.246c) permettent de simplifier les relations (4.250) et (4.251) :

$$A_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,3} = 0 \tag{4.252}$$

Notons que l'on retrouve le fait que la vitesse normale ne varie pas dans la direction normale à l'interface pour un repère orthonormé car l'ordonnée ξ_3 représente une distance. La divergence de la vitesse $\boldsymbol{v}_i^m$ est donnée dans le repère local par la relation (4.226b). Elle peut s'exprimer à l'aide de $A_{\alpha\beta}$ par :

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m &= \frac{1}{h_\alpha}A_{\alpha\beta} + \frac{1}{h_\beta}A_{\beta\alpha} + \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,3} - \xi_3\left(\frac{\kappa_{\alpha,\alpha}}{h_\alpha h_\alpha}\boldsymbol{v}_i^m(\alpha) + \frac{\kappa_{\beta,\beta}}{h_\beta h_\beta}\boldsymbol{v}_i^m(\beta)\right) \quad \text{(pas de somme)} \\
&= -\xi_3\frac{\kappa_{\alpha,\alpha}}{h_\alpha h_\alpha}\boldsymbol{v}_i^m(\alpha) \quad \text{d'après l'Éq. (4.252)} \quad \text{(somme sur } \alpha\text{)}
\end{aligned} \tag{4.253}$$

En projetant la relation (4.250) sur la direction normale $\boldsymbol{n}$ et sur les directions α et β, on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial \xi_\alpha} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,\alpha} + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\kappa_\alpha = C_\alpha \tag{4.254a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}_\beta}{\partial t} \cdot \boldsymbol{t}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial \xi_\beta} \cdot \boldsymbol{t}_\alpha = \boldsymbol{v}_i^m(\beta)\frac{\xi_3}{h_\alpha}\kappa_{\beta,\beta} + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)_{,\beta} = B_{\beta\alpha} \tag{4.254b}$$

Enfin, ces relations sont injectées dans la décomposition (4.248) pour obtenir la définition de $\boldsymbol{v}_i^m$

$$\boldsymbol{v}_i^m = \xi_\alpha\left(-B_{\beta\alpha}\boldsymbol{t}_\beta + C_\alpha \boldsymbol{n}\right) - \xi_3 C_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha = -\left(\xi_\beta B_{\alpha\beta} + \xi_3 C_\alpha\right)\boldsymbol{t}_\alpha + \xi_\alpha C_\alpha \boldsymbol{n} \quad \text{(somme sur } \alpha) \tag{4.255}$$

avec $\beta = 3 - \alpha$. En $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$, on a en particulier :

$$\boldsymbol{v}_i^m(0, 0, \xi_3) = -\xi_3 C_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha \quad \text{(somme sur } \alpha) \tag{4.256a}$$

4.A.7 Dérivée lagrangienne

On note Φ_{κ_1,κ_2} la bijection permettant de passer des coordonnées fixes aux coordonnées locales à chaque instant et $\Phi^{-1}_{\kappa_1,\kappa_2}$ la bijection inverse :

$$\Phi_{\kappa_1,\kappa_2} : \quad (x, y, z, t) \quad \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \tag{4.257}$$

$$\Phi^{-1}_{\kappa_1,\kappa_2} : \quad (\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad \mapsto (x, y, z, t) \tag{4.258}$$

Soit une fonction ϕ, exprimée dans le repère fixe, qui dépend des coordonnées spatiales x, y, z, du temps t et de deux paramètres $\kappa_1(t)$ et $\kappa_2(t)$: $\phi(x, y, z, \kappa_1, \kappa_2, t)$. On introduit la fonction $\check{\phi}$ dans le repère mobile telle que :

$$\check{\phi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \phi \circ \Phi^{-1}_{\kappa_1,\kappa_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad \text{et} \quad \phi(x, y, z, t) = \check{\phi} \circ \Phi_{\kappa_1,\kappa_2}(x, y, z, t)$$

D'après la règle de dérivation composée, la dérivée temporelle par rapport à un repère fixe $(\partial/\partial t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} = \left.\frac{\partial \check{\phi} \circ \Phi_{\kappa_1,\kappa_2}}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \xi_j}\frac{\partial \Phi_{\kappa_1,\kappa_2}(j)}{\partial t}\right) + \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \kappa_1}\frac{\partial \kappa_1}{\partial t} + \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \kappa_2}\frac{\partial \kappa_2}{\partial t}$$

Par définition du gradient et de la vitesse des coordonnées $\boldsymbol{v}_i^m$, on obtient

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \check{\phi}}{\partial t} - \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\check{\phi} + \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \kappa_1}\frac{\partial \kappa_1}{\partial t} + \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \kappa_2}\frac{\partial \kappa_2}{\partial t} = \frac{d\check{\phi}}{dt} - \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\check{\phi} \tag{4.259}$$

où d/dt représente la dérivée lagrangienne de la fonction $\check{\phi}$ dans le repère mobile $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Par la suite, on omet le symbole $\check{}$ pour alléger les notations. La dérivée temporelle par rapport à un repère fixe $(\partial/\partial t)$ se décompose donc dans le repère mobile $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} = \frac{d\phi}{dt} - \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\phi = \frac{d\phi}{dt} - \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_i^m \phi) + \phi\left(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m\right) \tag{4.260a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|_{x,y,z=cte} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - \left(\boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_i^m \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m\right) \tag{4.260b}$$

où d/dt est la dérivée lagrangienne et $\boldsymbol{v}_i^m$ est la vitesse de déplacement du repère $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

4.A.8 Évolution temporelle de la courbure moyenne

On note $\boldsymbol{B} = -\nabla_s \boldsymbol{n}$ le tenseur de courbure. La courbure moyenne κ est alors donnée par :

$$\kappa = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{B}\right) = -\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} \tag{4.261}$$

En $\xi_3 = 0$, $\nabla \cdot \boldsymbol{n} = \nabla_s \cdot \boldsymbol{n}$ d'après le développement (4.226b) de la divergence dans le repère local et la dérivée temporelle de la relation précédente conduit à

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = -\frac{\partial \left(\nabla_s \cdot \boldsymbol{n}\right)}{\partial t} = -\frac{\partial \left(\nabla \cdot \boldsymbol{n}\right)}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} \tag{4.262}$$

en considérant les propriétés de commutation et la définition de la dérivée lagrangienne. La combinaison des équations (4.247a), (4.249a) et (4.250) conduit à :

$$-\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\right) \boldsymbol{t}_\alpha\right] = \nabla \cdot \left(C_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha\right) \quad \text{(somme sur } \alpha) \tag{4.263}$$

D'après le développement (4.226b) de la divergence et l'expression (4.230a) donnant le gradient d'un vecteur normal à l'interface dans le repère local, il vient à l'interface ($\xi_3 = 0$ et $h_\alpha = 1$) :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = C_{\alpha,\alpha} = \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,\alpha,\alpha} + \left(\kappa_\alpha \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\right)_{,\alpha} \quad \text{(somme sur } \alpha) \tag{4.264}$$

En développant la relation (4.252) $A_{\alpha\beta} = 0$ en $\xi_3 = 0$, on montre qu'à l'interface $\boldsymbol{v}_i^m(\alpha)_{,\alpha} = \kappa_\alpha \boldsymbol{v}_i^m(3)$ et il vient :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,\alpha,\alpha} + \boldsymbol{v}_i^m(3)\kappa_\alpha\kappa_\alpha + \boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\kappa_{\alpha,\alpha} \quad \text{(somme sur } \alpha) \tag{4.265}$$

Sachant que $\boldsymbol{v}_i^m(3)_{,3} = 0$ (*cf.* Éq. (4.252)), le développement du laplacien (4.231c) en $\xi_3 = 0$ appliqué à $\phi \equiv \boldsymbol{v}_i^m(3)$ conduit à $\Delta \boldsymbol{v}_i^m(3) = \boldsymbol{v}_i^m(3)_{,\alpha,\alpha}$. Le laplacien peut être indifféremment surfacique ou volumique puisque $\boldsymbol{v}_i^m(3)_{,3} = 0$. De plus, en notant que $\kappa_\alpha\kappa_\alpha = \kappa^2 - 2H$ et $\boldsymbol{v}_i^m(\alpha)\kappa_{\alpha,\alpha} = \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\kappa_\alpha$, on obtient l'expression suivante de la dérivée lagrangienne de la courbure :

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\kappa = \Delta_s\left(\boldsymbol{v}_i^m(3)\right) + 2\boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\kappa + \boldsymbol{v}_i^m(3)\left(\kappa^2 - 2H\right) \tag{4.266}$$

D'après la relation (4.271) démontrée ci-dessous, la relation précédente se simplifie en l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\kappa = \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\kappa + \boldsymbol{v}_i^m(3)\left(\kappa^2 - 2H\right) \tag{4.267}$$

$$= -\Delta_s \boldsymbol{v}_i^m(3) + \boldsymbol{v}_i^m(3)\left(\kappa^2 - 2H\right) = \Delta_s\left(\boldsymbol{v}_i^m \cdot \boldsymbol{n}\right) + \boldsymbol{v}_i^m(3)\left(\kappa^2 - 2H\right) \tag{4.268}$$

Cette dernière équation est conforme aux résultats de Toutant (2006, Éq. (D.19a)) et Toutant *et al.* (2009a, Éq. (D.16)).

Preuve : Pour la composante normale de vitesse, le laplacien peut être indifféremment estimé en surface ou en volume puisque $\boldsymbol{v}_i^m(3)_{,3} = 0$. Par définition de l'opérateur laplacien, on a :

$$\Delta_s\left(\boldsymbol{v}_i^m(3)\right) = \Delta\left(\boldsymbol{v}_i^m(3)\right) = \nabla \cdot \nabla\left(\boldsymbol{v}_i^m \cdot \boldsymbol{n}\right) = \nabla \cdot \left(\nabla \boldsymbol{v}_i^m \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla \boldsymbol{n}\right) \tag{4.269}$$

Sachant que $\nabla \boldsymbol{v}_i^m \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en $\xi_3 = 0$ d'après la définition du gradient vectoriel (4.228) et d'après la relation (4.252), on a en développant à nouveau :

$$\Delta_s\left(\boldsymbol{v}_i^m(3)\right) = \left(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m\right)\left(\nabla \cdot \boldsymbol{n}\right) + \boldsymbol{v}_i^m \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{n}\right) \tag{4.270}$$

Comme en $\xi_3 = 0$, $\nabla \cdot \boldsymbol{n} = -\kappa$ d'après la définition (4.261) et $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m = 0$ d'après la relation (4.253), on obtient :

$$\Delta_s\left(\boldsymbol{v}_i^m(3)\right) + \boldsymbol{v}_i^m \cdot \nabla\kappa = 0 \tag{4.271}$$

4.B Conditions de raccord

Dans cette annexe, les conditions de raccord nécessaires à la méthode des DAR sont établies dans le cadre de notre étude. Le lecteur intéressé par une description plus complète et rigoureuse pourra se reporter aux ouvrages Cousteix et Mauss (2006), Dyke (1975), Eckhaus et Moet (1978), Zeytounian (1994). La présentation ci-dessous est une application particulière de la méthode présentée par Zeytounian (1994, chap. 5).

Soit une fonction $\phi(\xi_3, \epsilon)$ représentant une variable quelconque du problème. On suppose pour simplifier qu'elle ne dépend que de deux paramètres : une coordonnée spatiale ξ_3 et un petit paramètre ϵ (avec $\epsilon \ll 1$). Cette fonction est singulière au voisinage de $\xi_3 = 0$. On introduit la variable locale $\xi = \xi_3/\epsilon$. La variable ϕ peut alors être représentée par deux développements asymptotiques : (i) un développement asymptotique *principal* (dit *extérieur*), à ξ_3 fixé, valable partout sauf au voisinage de $\xi_3 = 0$

$$\phi(\xi_3, \epsilon) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^i \widetilde{\phi}^i(\xi_3) + \mathcal{O}(\epsilon^{i+1}) \tag{4.272}$$

et (ii) un développement asymptotique *local* (dit *intérieur*), à ξ fixé, valable uniquement au voisinage de $\xi_3 = 0$:

$$\phi(\xi_3, \epsilon) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^i \breve{\phi}^i \left(\frac{\xi_3}{\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^{i+1}) \tag{4.273}$$

Le développement extérieur (4.272) est supposé valable au voisinage de $\xi_3 = 0$ et on a le développement en séries de Taylor suivant :

$$\begin{aligned}\phi(\xi_3, \epsilon) = \widetilde{\phi}^0(0) + \xi_3 \left.\frac{d\widetilde{\phi}^0}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0} + \frac{\xi_3^2}{2} \left.\frac{d^2\widetilde{\phi}^0}{d\xi_3^2}\right|_{\xi_3=0} + \cdots \\ + \epsilon^1 \widetilde{\phi}^1(0) + \epsilon\xi_3 \left.\frac{d\widetilde{\phi}^1}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0} + \cdots \\ + \epsilon^2 \widetilde{\phi}^2(0) + \cdots\end{aligned} \tag{4.274}$$

Les développements (4.273) et (4.274) sont dits *raccordés* si la limite en $\xi_3 = 0$ du développement (4.274) est égale, à un ordre donné, à la limite à l'infini du développement (4.273). À l'ordre 3, cette condition de raccord s'exprime en fonction de ξ par l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}&\lim_{\xi\to\infty} \left(\breve{\phi}^0(\xi) + \epsilon\breve{\phi}^1(\xi) + \epsilon^2\breve{\phi}^2(\xi)\right) = \\ &\widetilde{\phi}^0(0) + \epsilon \left(\widetilde{\phi}^1(0) + \xi \left.\frac{d\widetilde{\phi}^0}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0}\right) + \epsilon^2 \left(\widetilde{\phi}^2(0) + \xi \left.\frac{d\widetilde{\phi}^1}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0} + \frac{\xi^2}{2} \left.\frac{d^2\widetilde{\phi}^0}{d\xi_3^2}\right|_{\xi_3=0}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{4.275}$$

En identifiant chaque ordre de la relation précédente, on obtient une hiérarchie de conditions de raccord pour la variable ϕ :

$$\widetilde{\phi}^0(0^\pm) = \lim_{\xi\to\pm\infty} \breve{\phi}^0(\xi) \tag{4.276a}$$

$$\widetilde{\phi}^1(0^\pm) + \xi \left.\frac{d\widetilde{\phi}^0}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0^\pm} = \lim_{\xi\to\pm\infty} \breve{\phi}^1(\xi) \tag{4.276b}$$

$$\widetilde{\phi}^2(0^\pm) + \xi \left.\frac{d\widetilde{\phi}^1}{d\xi_3}\right|_{\xi_3=0^\pm} + \frac{\xi^2}{2} \left.\frac{d^2\widetilde{\phi}^0}{d\xi_3^2}\right|_{\xi_3=0^\pm} = \lim_{\xi\to\pm\infty} \breve{\phi}^2(\xi) \tag{4.276c}$$

Pour établir les conditions de raccord sur les dérivées de ϕ, il suffit de dériver les développements (4.273) et (4.274) par rapport à ξ_3 et ξ puis de raccorder les deux développements pour obtenir

par identification :

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{d\breve{\phi}^0}{d\xi} = 0 \tag{4.277a}$$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{d\breve{\phi}^1}{d\xi} = \left.\frac{d\widetilde{\phi}^0}{d\xi}\right|_{\xi_3=0^\pm} \tag{4.277b}$$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{d\breve{\phi}^2}{d\xi} = \left.\frac{d\widetilde{\phi}^1}{d\xi}\right|_{\xi_3=0^\pm} + \xi \left.\frac{d^2\widetilde{\phi}^0}{d\xi_3^2}\right|_{\xi_3=0^\pm} \tag{4.277c}$$

De même, en dérivant deux fois, on obtient les conditions de raccord suivantes :

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{d^2\breve{\phi}^0}{d\xi^2} = 0 \tag{4.278a}$$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{d^2\breve{\phi}^1}{d\xi^2} = 0 \tag{4.278b}$$

4.C Développement limité des grandeurs surfaciques

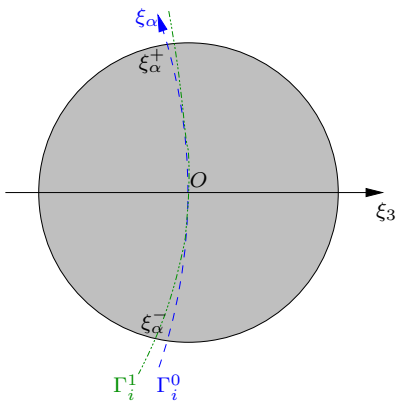


FIGURE 4.10 – Approximation de l'interface et de sa courbure à différents ordres.

Soit $\psi(\xi_1, \xi_2)$ une variable surfacique microscopique (*e. g.,* les courbures principales κ_α, le taux de changement de phase $\dot{m}$). Un développement limité au voisinage du point de la surface de coordonnées $(0, 0)$ conduit à

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(0, 0) + \xi_\alpha \psi_{,\alpha}(0, 0) + \mathcal{O}(\xi_1^2, \xi_2^2) \tag{4.279}$$

avec la convention de sommation sur l'indice grec représentant les directions tangentielles $\alpha = \{1, 2\}$. En appliquant le développement (4.279) à $\psi \equiv \kappa_\beta$ dans le voisinage de l'interface (*i. e.,* pour $|\xi_\alpha| \leq \epsilon$), on obtient des informations sur le développement limité de la courbure :

$$\kappa_\beta(\xi_1, \xi_2) = \kappa_\beta(0, 0) + \epsilon \frac{\xi_\alpha}{\epsilon} \kappa_{\beta,\alpha}(0, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.280}$$

Comme $\xi_\alpha/\epsilon = \mathcal{O}(1)$ et $\kappa_{\beta,\alpha} = \mathcal{O}(1)$ (car $\kappa_{\beta,\alpha}$ est indépendant de ϵ), on identifie les ordres du développement pour constater que l'ordre 0 des courbures principales κ_β^0 est une constante et que l'ordre 1 κ_β^1 varie linéairement avec l'abscisse curviligne. La figure 4.10 illustre ce résultat en représentant une ellipsoïde de révolution à l'ordre 0 (Γ_i^0) et une surface à courbure variable à l'ordre 1 (Γ_i^1).

Comme l'illustre la figure 4.11, le noyau du filtre surfacique G_s défini par l'équation (4.470) dépend de la coordonnée normale à l'interface ξ_3. En utilisant le développement (4.279) de ψ dans le voisinage de l'interface (*i. e.,* pour $|\xi_\alpha| \leq \epsilon$), la grandeur surfacique filtrée est approchée par :

$$\overline{\psi}^s(0, 0, \xi_3) = \left(G_{s,\xi_3} * \psi_{(0,0)}\right)(0, 0) + \left(G_{s,\xi_3} * \xi_\alpha \left.\psi_{,\alpha}\right|_{(0,0)}\right)(0, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.281}$$

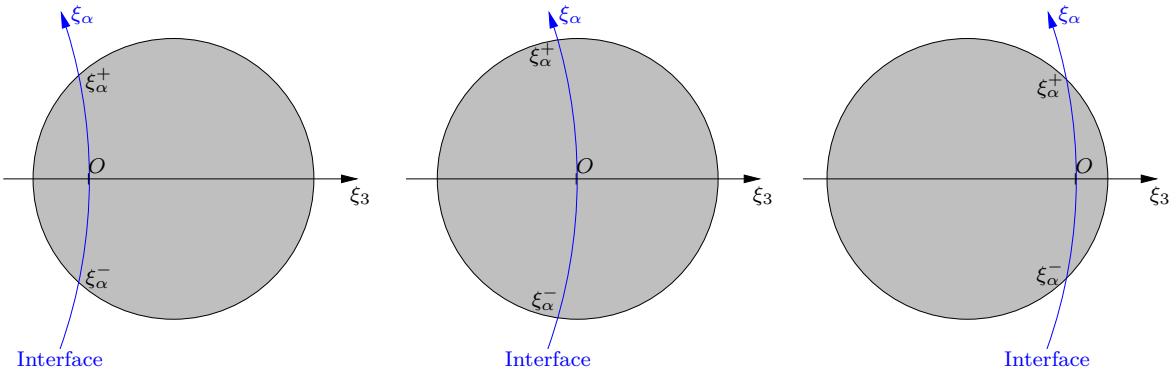


FIGURE 4.11 – Variation des grandeurs surfaciques en fonction de la coordonnée normale.

Par propriété, ce noyau G_s conserve les constantes ce qui conduit à :

$$\overline{\psi}^s(0,0,\xi_3) = \psi(0,0) + \epsilon\psi_{,\alpha}(0,0)\left(G_{s,\xi_3} * \frac{\xi_\alpha}{\epsilon}\right)(0,0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.282}$$

Le noyau G_s est symétrique (*i. e.,* impaire) si l'interface est une ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire si les courbures principales n'évoluent pas dans les directions principales (à l'échelle du filtre). D'après l'équation (4.280), c'est donc l'ordre 0 du noyau G_s qui est symétrique. En développant la variable ψ comme nous l'avons fait pour κ à l'équation (4.280) et en décomposant le noyau en deux ordres (dont le premier est symétrique), on obtient le développement d'une variable surfacique à l'ordre 2 suivant :

$$\overline{\psi}^s(0,0,\xi_3) = \psi^0(0,0) + \epsilon\psi^1(0,0) + \epsilon\psi^0_{,\alpha}(0,0)\left(G^0_{s,\xi_3} * \frac{\xi_\alpha}{\epsilon}\right)(0,0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.283}$$

Le 3e terme de la somme est nul car le noyau G^{s0} est symétrique en ξ_α. Il conserve donc les fonctions affines et en particulier, le filtre de la fonction $\xi_\alpha \mapsto \xi_\alpha$ vaut 0 en 0. Le développement en séries d'une variable surfacique à l'ordre 2 se réduit donc, en tout point de la surface (ξ_1, ξ_2), à :

$$\overline{\psi}^s(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \psi^0(\xi_1,\xi_2) + \epsilon\psi^1(\xi_1,\xi_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.284}$$

Grâce à cette déconvolution, nous venons donc de démontrer **l'indépendance des variables surfaciques aux coordonnées normales à l'interface aux ordres 0 et 1**. De plus, nous avons obtenu des informations sur les variations surfaciques :

$$\psi^1(\xi_1,\xi_2) = \frac{\xi_\alpha}{\epsilon}\psi_{,\alpha}(0,0)$$

4.D Développements Asymptotiques Raccordés

Dans cette annexe, nous appliquons la méthode des DAR pour étudier le système mésoscopique (4.92). L'étude de chaque région du problème est présentée dans les sections suivantes. Les résultats de ces calculs sont repris et analysés à la section 4.4. Les fermetures obtenues sont synthétisées dans la description macroscopique fermée du problème proposée à la section 4.5.

4.D.1 Problème extérieur

Dans chaque phase, les propriétés thermodynamiques sont supposées constantes. Dans la description extérieure du problème, les termes liés à l'interface comme le taux de changement de phase $\overline{m}^s$, l'aire interfaciale $\overline{\delta}_\sigma$ et les modèles sous-maille traduisant les corrélations entre l'interface et la vitesse ou la température *via* les propriétés physiques disparaissent. En simplifiant le système (4.92)

pour l'écrire dans la région extérieure, on décrit l'évolution des variables macroscopiques $\widetilde{\boldsymbol{v}}_k$, $\widetilde{p}_k$ et $\widetilde{T}_k$ dans le repère mobile $(O', \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ introduit à la section 4.3.1 par :

$$\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_k = 0 \tag{4.285a}$$

$$\frac{d\widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k}{dt} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \boldsymbol{v}_i^m) + \widetilde{C}_k\right) - \widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla \cdot \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} - \nabla \widetilde{p}_k \tag{4.285b}$$

$$\frac{d\widetilde{\rho c_{p_k}}\,\widetilde{T}_k}{dt} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho c_{p_k}}\,(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \boldsymbol{v}_i^m)\,\widetilde{T}_k + \widetilde{F}_k\right) - \widetilde{\rho c_{p_k}}\,\widetilde{T}_k\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m) = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\nabla \cdot \left(\widetilde{k}_k\,\nabla \widetilde{T}_k\right) \tag{4.285c}$$

À partir de l'étude du système intérieur et des conditions de raccord, l'objectif de notre approche est de déterminer les conditions aux limites à imposer à la frontière entre les deux phases ($k = l$ ou v). La forme des relations recherchées est donnée dans la section 4.1.1. On constate que ces relations font intervenir les variables $\widetilde{p}_k$, $\widetilde{T}_k$, $\widetilde{\boldsymbol{v}}_k$ mais aussi les gradients $\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}}_k$ et $\nabla\widetilde{T}_k$. Il est important d'identifier les dérivées requises car le changement de variable dans la région intérieure dilate la coordonnée normale et introduit un décalage entre les dérivées intérieures et extérieures d'ordre 1 par l'intermédiaire des conditions de raccord. Par conséquent, pour connaître les gradients de température et de vitesse extérieurs à l'ordre i, il faut conduire l'étude du système intérieur jusqu'à l'ordre $i+1$. La description complète des conditions aux limites à l'ordre i est donc possible si l'on connait $\breve{\overline{p}}_k^{\,i}$, $\breve{\overline{T}}_k^{\,i+1}$, $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_k^{\,i+1}$.

En utilisant des grandeurs macroscopiques monofluides, on souhaite prolonger la validité du système (4.285) jusqu'à une interface macroscopique. Les termes de diffusion et de conduction posent problème car ils ne sont pas définis à l'interface (*cf.* discussions du paragraphe 4.1.1). Pour obtenir un système monofluide valide et équivalent dans chaque phase au système (4.285), ces termes doivent être respectivement remplacés par $\nabla \cdot \widetilde{\mathcal{S}}$ et $\nabla \cdot \widetilde{Q}$

$$\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}} = \widetilde{S}_m \tag{4.286a}$$

$$\frac{d\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}}{dt} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}_i^m) + \widetilde{C}\right) - \widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla \cdot \widetilde{\mathcal{S}} - \nabla \widetilde{p} + \widetilde{\boldsymbol{S}}_q \tag{4.286b}$$

$$\frac{d\widetilde{\rho c_p}\,\widetilde{T}}{dt} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho c_p}\,(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}_i^m)\,\widetilde{T} + \widetilde{F}\right) - \widetilde{\rho c_p}\,\widetilde{T}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i^m) = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\nabla \cdot \widetilde{Q} + \widetilde{S}_e \tag{4.286c}$$

avec $\widetilde{\mathcal{S}} \hat{=} \widetilde{\mu}\left[\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}} + \nabla^T\widetilde{\boldsymbol{v}} - \widetilde{\boldsymbol{S}}_d\right]$ et $\widetilde{Q} \hat{=} \widetilde{k}\left[\nabla\widetilde{T} - \widetilde{S}_f\right]$.

$\widetilde{\boldsymbol{S}}_d$, $\widetilde{S}_f$, $\widetilde{S}_m$, $\widetilde{\boldsymbol{S}}_q$, et $\widetilde{S}_e$ sont des inconnues du système macroscopique uniquement localisées à l'interface macroscopique équivalente dont l'expression est reliée aux sauts de grandeurs macroscopiques à l'interface par le système (4.14). Elles représentent les sources à déterminer pour définir le système macroscopique et le rendre équivalent au système mésoscopique. C'est là l'objectif de la méthode des DAR. Les conditions de raccord à imposer à cette interface macroscopique sont déterminées par l'étude du système intérieur. L'apparition de termes sources traduit les différences entre les solutions extérieures et intérieures dans la région de transition. Pour mettre en évidence les conditions de raccord aux ordres élevés, il faut connaître les équations régissant la solution extérieure au voisinage de l'interface. Pour cela, étudions le comportement du système (4.286) au voisinage de l'interface, *i. e.,* lorsque ξ_3 tend vers 0. Les sources introduites dans le système (4.286) sont nulles au voisinage de l'interface (*i. e.,* $\xi_3 \neq 0$).

Les variables extérieures sont développées en séries de Taylor du petit paramètre ϵ :

$$\widetilde{\phi}(\xi, \epsilon) = \widetilde{\phi}^0(\xi) + \epsilon\widetilde{\phi}^1(\xi) + \cdots + \epsilon^i\widetilde{\phi}^i(\xi) + \mathcal{O}(\epsilon^{i+1}) \tag{4.287}$$

Le développement limité des propriétés thermodynamiques se restreint à l'ordre 0 dans la région extérieure car ces propriétés sont supposées constantes dans les phases (*cf.* preuve ci-dessous). Pour décrire l'évolution des variables d'ordre i ($\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^i$, $\widetilde{p}_k^i$ et $\widetilde{T}_k^i$), les opérateurs différentiels doivent être exprimés dans le repère mobile à l'aide d'un développement limité au voisinage de l'interface. En $\xi_3 = 0$, la métrique du repère mobile est unitaire : $h_1 = 1$, $h_2 = 1$ et $h_3 = 1$. La vitesse des coordonnées $\boldsymbol{v}_i^m$ associée au repère mésoscopique est définie dans tout l'espace. L'étude du système intérieur permet de montrer qu'elle tend au voisinage de l'interface et à l'ordre dominant vers la vitesse de l'interface macroscopique équivalente $\widetilde{\chi}$ (notée $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$) d'après l'équation (4.303) : $\boldsymbol{v}_i^{m0} = \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0$.

À l'ordre dominant, la fermeture macroscopique de $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ donnée par la relation (4.316b) résultant de l'étude intérieure est : $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0$. Sa divergence est reliée à la courbure macroscopique $\widetilde{\kappa} = -\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} = \kappa_1 + \kappa_2$ et au taux de changement de phase $\widetilde{\dot{m}}^0$. D'après l'incompressibilité de phases (4.286a), on a au voisinage de $\xi_3 = 0$:

$$\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0 = \nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \left(\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\right)/\widetilde{\rho}^0 - \widetilde{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla \left(\widetilde{\dot{m}}^0/\widetilde{\rho}^0\right) = \widetilde{\kappa}\widetilde{\dot{m}}^0/\widetilde{\rho}^0 \tag{4.288}$$

Remarque : Dans chaque phase, la description des variables donnée par le système (4.286) est indépendante de ϵ. On pourrait alors s'attendre à ce que le système extérieur soit décrit de manière exacte par l'ordre 0 du développement limité en ϵ. Ce n'est pas le cas car les conditions de sauts reliant les deux domaines sont données à différents ordres. Autrement dit, ces conditions de saut sont responsables de l'introduction de différents ordres pour le problème extérieur.

Preuve : Le développement limité des propriétés thermodynamiques $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\rho c_p}$ et $\widetilde{k}$ se restreint à l'ordre 0 dans la région extérieure. En effet, prenons à titre d'exemple un filtre hyperbolique (dont le noyau n'est pas à support compact). Le profil hyperbolique obtenu pour l'indicatrice mésoscopique, conduit aux relations suivantes :

$$\overline{\chi}(\xi_3) = \mathrm{th}(\xi_3/\epsilon) \tag{4.289a}$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0^+ \\ \xi_3 > 0}} \frac{\mathrm{th}(\xi_3/\epsilon) - 1}{-2e^{-2\xi_3/\epsilon}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\epsilon \to 0^+ \\ \xi_3 > 0}} \frac{\mathrm{th}(\xi_3/\epsilon)}{2e^{-2\xi_3/\epsilon}} = 1 \tag{4.289b}$$

$$\forall i, \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(1/\epsilon)^i}{e^{-2|\xi_3/\epsilon|}} = 0 \tag{4.289c}$$

$$\forall i, \quad \overline{\chi}(\xi_3 > 0, \epsilon) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{i+1}) \quad \text{et} \quad \overline{\chi}(\xi_3 < 0, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^{i+1}) \tag{4.289d}$$

Bien que le noyau du filtre ait un support infini, ces relations indiquent qu'à tout ordre, l'indicatrice de phase est uniforme dans la région extérieure.

Bilan de masse En utilisant l'expression de la divergence (4.231a) près de l'interface ($\xi_3 \to 0$), l'équation (4.286a) devient :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(1)_{,1} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(2)_{,2} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3} - (\kappa_1 + \kappa_2)\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3) = 0 \tag{4.290a}$$

Bilan de quantité de mouvement L'équation (4.286b) se projette sur la direction j :

$$\frac{d\widetilde{\rho}^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(j)}{dt} + \left(\nabla \cdot \left(\widetilde{\rho}\left(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}_i^m\right) + \widetilde{C}\right)\right)_j^0 + \widetilde{\rho}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(j)\left(\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_i\right)^0 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\nabla \cdot \widetilde{\mathcal{S}}\right)_j^0 - \widetilde{p}_{,j}^0$$

En utilisant la fermeture (4.316b) $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0$ et l'expression de la divergence tensorielle (4.231b) près de l'interface, le terme de convection s'exprime

$$\left(\nabla \cdot \left(\widetilde{\rho}\left(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}_i^m\right) + \widetilde{C}\right)\right)_j^0 = \widetilde{\dot{m}}^0\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_{,3}^0(j) - \widetilde{\kappa}\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(j) + \widetilde{\kappa}_\alpha\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(j)\delta_{\alpha j}\right) + \sum_i \widetilde{C}_{ij,i}^0 - \widetilde{\kappa}\widetilde{C}_{3j}^0$$

où $\delta_{\alpha j}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{\alpha j} = 1$ si $\alpha = j$, $\delta_{\alpha j} = 0$ sinon) et avec la convention de sommation sur l'indice répété $\alpha = \{1, 2\}$. La divergence de la vitesse de l'interface macroscopique est donnée par la relation (4.288). La définition $\mathcal{S} = \widetilde{\mu}\left[\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}} + \nabla^T\widetilde{\boldsymbol{v}} - [\![\widetilde{\boldsymbol{v}}]\!] \otimes \widetilde{\boldsymbol{n}}\widetilde{\delta}^i - \widetilde{\boldsymbol{n}}\widetilde{\delta}^i \otimes [\![\widetilde{\boldsymbol{v}}]\!]\right]$ permet d'exprimer le terme de diffusion par l'Éq. (4.234) en exprimant les opérateurs de différenciation au

voisinage de l'interface ($\xi_3 \neq 0$) :

$$
\begin{aligned}
(\nabla\cdot\mathcal{S})_\alpha &= \left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}\right)_{,3} + \left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,\alpha}\right)_{,3} + \left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\kappa_\alpha\right)_{,3} \\
&\quad + \widetilde{\mu}^0\Big[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,1,1} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,2,2} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(1)_{,1,\alpha} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(2)_{,2,\alpha} - \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}\right)(\kappa_1+\kappa_2) \\
&\qquad -\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,\alpha}(\kappa_1+\kappa_2) - \kappa_\alpha\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} - 2\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\kappa_\alpha\Big] \\
(\nabla\cdot\mathcal{S})_3 &= 2\left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}\right)_{,3} + \widetilde{\mu}^0\Big[-2\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}(\kappa_1+\kappa_2) + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,\alpha,3} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,\alpha,\alpha} \\
&\qquad + \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} + 2\kappa_\alpha\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,\alpha} - 2\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)\left(\kappa_1^2+\kappa_2^2\right)\Big]
\end{aligned}
$$

avec la convention de sommation sur l'indice répété $\alpha = \{1,\,2\}$ pour l'expression de $\nabla\cdot\mathcal{S}$ dans la direction normale.

Le bilan de quantité de mouvement s'énonce donc dans le repère curviligne :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\widetilde{\rho}^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)}{dt} + \widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} + \widetilde{\kappa}_\alpha\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) + \sum_i \widetilde{C}^0_{i\alpha,i} - \widetilde{\kappa}\widetilde{C}^0_{3\alpha} + \widetilde{p}^0_{,\alpha} \qquad (4.290b)\\
&= \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big[\left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}\right)_{,3} + \left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,\alpha}\right)_{,3} + \left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\kappa_\alpha\right)_{,3} \\
&\qquad + \widetilde{\mu}^0\Big(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,1,1} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,2,2} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(1)_{,1,\alpha} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(2)_{,2,\alpha} - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}(\kappa_1+\kappa_2) \\
&\qquad\quad -\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,\alpha}(\kappa_1+\kappa_2) - \kappa_\alpha\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} - 2\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\kappa_\alpha\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\widetilde{\rho}^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)}{dt} + \widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3} + \sum_i \widetilde{C}^0_{i3,i} - \widetilde{\kappa}\widetilde{C}^0_{33} + \widetilde{p}^0_{,3} \qquad (4.290c)\\
&= \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big[2\left(\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}\right)_{,3} + \widetilde{\mu}^0\Big(-2\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}(\kappa_1+\kappa_2) + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,\alpha,3} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,\alpha,\alpha} \\
&\qquad\qquad + \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} + 2\kappa_\alpha\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,\alpha} - 2\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)\left(\kappa_1^2+\kappa_2^2\right)\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

Bilan d'énergie Pour le bilan d'énergie, on obtient :

$$
\frac{d\widetilde{\rho}\widetilde{c_p}^0\widetilde{T}^0}{dt} + \nabla\cdot\left(\widetilde{c_p}^0\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{n}}\widetilde{T}^0 + \widetilde{F}^0\right) - \widetilde{\rho}\widetilde{c_p}^0\,\widetilde{T}^0\left(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_i\right) = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\nabla\cdot\widetilde{Q}^0
$$

En exprimant la divergence et le laplacien au voisinage de $\xi_3 = 0$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\widetilde{\rho}\widetilde{c_p}^0\widetilde{T}^0}{dt} + \widetilde{c_p}^0\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{T}^0_{,3} + \sum_i \widetilde{F}^0(i)_{,i} - \widetilde{F}^0(3)(\kappa_1+\kappa_2) = \qquad (4.290d)\\
&\qquad \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\widetilde{k}^0\left(\widetilde{T}^0_{,1,1} + \widetilde{T}^0_{,2,2} + \widetilde{T}^0_{,3,3} - \widetilde{T}^0_{,3}(\kappa_1+\kappa_2)\right) + \widetilde{T}^0\left(\widetilde{k}^0_{,3} - \widetilde{k}^0(\kappa_1+\kappa_2)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Le système (4.290) traduit le comportement asymptotique du problème extérieur dans le repère de coordonnées curvilignes. Il est utilisé pour faire apparaître les conditions de raccord aux ordres élevés. L'ordre auquel les équations du système (4.290) sont utilisées dans la région intérieure dépend de l'ordre de l'équation différentielle. Le bilan de masse (4.290a) est donc utilisé pour l'étude de l'ordre 1 de la région intérieure alors que les bilans de quantité de mouvement (4.290b) et (4.290c) et d'énergie (4.290d) ne sont nécessaires qu'à l'ordre 2.

4.D.2 Problème intérieur

Dans la région intérieure, la direction normale à l'interface est dilatée par le changement de variable $\xi = \xi_3/\epsilon$, puis les variables $\breve{\overline{\phi}}(\xi) \hat{=} \overline{\phi}(\xi_3)$ sont développées en séries de Taylor :

$$\breve{\overline{\phi}} = \breve{\overline{\phi}}^0 + \epsilon \breve{\overline{\phi}}^1 + \epsilon^2 \breve{\overline{\phi}}^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.291}$$

Le système (4.92) énoncé dans le repère mobile décrit l'évolution des variables mésoscopiques. Grâce au changement de variable précédent, une solution approchée est recherchée dans la région intérieure pour être ensuite intégrée sur l'épaisseur de la zone de transition et conduire à une formulation macroscopique fermée des relations de saut à l'interface. Dans les sections suivantes, nous détaillons la résolution de ce système aux ordres nécessaires pour approcher les relations de saut à l'ordre 1.

L'étude du système intérieur à l'ordre 0 (section 4.D.2.1) permet de raccorder la température, la pression, la vitesse et son gradient normal à l'interface à l'ordre 0. En étudiant l'ordre 1 (section 4.D.2.2), nous obtenons ces mêmes conditions à l'ordre 1 mais nous obtenons aussi des fermetures à l'ordre 0 : les conditions de saut des composantes tangentielles de la vitesse et de la contrainte visqueuse, ainsi que le saut de pression et le saut de flux thermique. Enfin, l'étude du bilan de quantité de mouvement et d'énergie à l'ordre 2 à la section 4.D.2.3 permet de fermer entièrement le système à l'ordre 2.

4.D.2.1 Ordre 0

Le système intérieur (4.92) s'écrit à l'ordre dominant :

$$\left(\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right) \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}}\right)^{-1} + \breve{A}^{-1} = 0 \tag{4.292a}$$

$$\left(\nabla \cdot \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\right)^{-1} = [\![1/\rho]\!]\, \breve{\overline{m}}^{\,0} \overline{\delta}_\sigma^{-1} \tag{4.292b}$$

$$\left(\nabla \cdot \breve{\boldsymbol{S}}\right)^{-2} = 0 \tag{4.292c}$$

$$\left(\nabla \cdot \breve{\boldsymbol{Q}}\right)^{-2} = 0 \tag{4.292d}$$

$$\breve{\overline{\Theta}}^0 (\xi_1, \xi_2, 0) = 0 \tag{4.292e}$$

Conservation de la masse : À l'ordre dominant, le bilan de masse se réduit à :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)_{,3} = [\![1/\rho]\!]\, \breve{\overline{m}}^{\,0} \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} \tag{4.293}$$

Sachant que $\breve{\overline{m}}^{\,0}$ ne dépend pas de ξ, cette relation s'intègre aisément sur la zone de transition et on obtient la relation macroscopique de saut de vitesse normale à l'interface :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)\right]\!\!\right] = \widetilde{\boldsymbol{v}}_l^0(3) - \widetilde{\boldsymbol{v}}_v^0(3) = -\,[\![1/\rho]\!]\, \widetilde{m}^{\,0} \tag{4.294}$$

où le taux de condensation macroscopique $\widetilde{m}^{\,0}$ est défini classiquement pour ne pas introduire de valeur en excès par la relation (4.121). Ce saut est en accord avec la relation microscopique. En présence de changement de phase, la vitesse n'est pas constante dans la zone de transition. Elle évolue très rapidement entre les deux bornes que constituent $\widetilde{\boldsymbol{v}}_l^0$ et $\widetilde{\boldsymbol{v}}_v^0$. Cette évolution est déterminée par le filtre utilisé pour le passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique. Alternativement, ce profil de vitesse dans la zone de transition peut s'exprimer à partir de la différence entre les indicatrices mésoscopique et macroscopique :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3) = [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{m}^{\,0} \left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) \tag{4.295}$$

Le positionnement de l'interface macroscopique (tel qu'il n'y ait pas de masse en excès à l'interface) permet d'affirmer que la fonction $\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0$ est impaire. La définition (2.39) de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma$ et du volume massique $\breve{\overline{v}} = -\,[\![1/\rho]\!]\, \breve{\overline{\chi}} + 1$ conduisent à :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}} + [\![1/\rho]\!]\, \breve{\overline{m}}\, \overline{\boldsymbol{n}}^s \breve{\overline{\chi}} - \breve{\overline{m}}\, \overline{\boldsymbol{n}}^s \tag{4.296}$$

En utilisant le bilan de masse à l'ordre dominant et sachant que $\overline{\breve{m}}^0$ ne dépend pas de ξ, on montre que la composante normale de la vitesse $\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}_\sigma$ est indépendante de ξ à l'ordre 0 :

$$\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,3} = 0 \tag{4.297}$$

À l'ordre 0, la vitesse macroscopique $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma$ est continue et définie comme à l'échelle microscopique :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_{\sigma+} = \lim_{\xi\to+\infty} \overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_+ - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0_+ \tag{4.298a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_{\sigma-} = \lim_{\xi\to-\infty} \overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_- - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0_- \tag{4.298b}$$

Transport de l'interface : Par définition, la vitesse de déplacement de l'interface macroscopique est construite pour ne pas introduire de masse en excès à l'interface (*cf.* Éq. (4.155)). À l'ordre 0, cette relation devient :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} = \int_\xi \left(\left(\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}_\sigma \cdot \nabla \overline{\breve{\chi}} \right)^{-1} + \breve{A}^{-1} \right) \epsilon d\xi = \int_\xi \left(\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) \overline{\breve{\chi}}^0_{,3} + \overline{\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) \overline{\breve{\chi}}^0_{,3}} - \overline{\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{n}^s \overline{\breve{\chi}}^0_{,3}} \right) d\xi \tag{4.299}$$

L'information de fermeture sur l'équation de transport de l'interface fournie par l'équation (4.292a) est déjà incluse dans la relation (4.155a). Comme $\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)$ est constante, le premier terme s'intègre aisément pour donner $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)$ car le saut de $\overline{\breve{\chi}}^0$ est unitaire. Cette équation indique que la vitesse de déplacement de l'interface macroscopique comprend une correction liée à l'intégrale du modèle sous-maille $\breve{A}$:

$$\epsilon \breve{A}^{-1} = \overline{\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) \overline{\breve{\chi}}^0_{,3}} - \overline{\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{n}^s \overline{\breve{\chi}}^0_{,3}} \tag{4.300}$$

Ce modèle traduit les corrélations sous-maille entre l'interface et la vitesse $\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}_\sigma$ provenant des variations spatiales de $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ sur la largeur du filtre. Cette correction est d'ordre 2 (*cf.* preuve ci-dessous) :

$$\int_\xi \epsilon \breve{A}^{-1} d\xi = \overline{\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) \overline{\breve{\chi}}^0_{,3}}^\sigma - \overline{\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma}^\sigma \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{n}}^s \overline{\breve{\chi}}^0_{,3}}^\sigma = \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.301}$$

À l'ordre dominant, la composante normale de la vitesse interfaciale macroscopique peut donc être confondue avec la vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma$ utilisée pour construire les modèles sous-maille :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_i(3) = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3) \tag{4.302}$$

Sachant que la contribution associée à $\breve{A}^{-1}$ est en fait d'ordre 2, l'ordre dominant de l'équation de transport de l'interface (4.292a) conduit à l'égalité $\breve{\boldsymbol{v}}^{m0}_i = \overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma$ sur la zone de transition. Comme $\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)$ est indépendante de ξ (*cf.* Éq. (4.297)), les interfaces mésoscopique et macroscopique se déplacent à la même vitesse à l'ordre dominant et cette vitesse correspond à celle du repère mobile (O, ξ_1, ξ_2, ξ_3) :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_i(3) = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3) = \breve{\boldsymbol{v}}^{m0}_i(3) \tag{4.303}$$

Preuve : En décomposant le noyau du filtre $G = G_s G_3$ et en introduisant la notion de filtre surfacique (4.470), le terme sous-maille s'écrit :

$$\int_\xi \epsilon \breve{A}^{-1} d\xi = \int_\xi \overline{\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) \overline{\breve{\chi}}^0_{,3}}^{\sigma n} d\xi - \int_\xi \overline{\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma}^{\sigma n} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{n}}^s}^\sigma \overline{\breve{\chi}}^0_{,3}{}^n d\xi$$

D'après la propriété (4.497), on a

$$\int_\xi \epsilon \breve{A}^{-1} d\xi = \int_\xi \overline{\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) \overline{\breve{\chi}}^0_{,3}}^\sigma d\xi - \int_\xi \overline{\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma}^{\sigma n} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{n}}^s}^\sigma \overline{\breve{\chi}}^0_{,3}{}^n d\xi$$

et sachant que $\overline{\breve{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma$ et $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ sont indépendants de ξ alors que $\overline{\breve{\chi}}^0_{,3}$ est indépendant des coordonnées tangentielles, on a :

$$\int_\xi \epsilon \breve{A}^{-1} d\xi = \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)}^\sigma \int_\xi \overline{\breve{\chi}}^0_{,3} d\xi - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma \int_\xi \overline{\breve{\chi}}^0_{,3} d\xi$$

Enfin, on obtient en intégrant :

$$\int_{\xi} \epsilon \breve{A}^{-1} d\xi = \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)}^\sigma - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma = \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma \tag{4.304}$$

Comme dans les travaux de Toutant (2006), ce terme correspond à une sorte de similarité d'échelles de surface. Un développement limité permet d'approcher l'opération de filtrage. On montre alors que ce terme de similarité est d'ordre 2 (*cf.* lemme ci-dessous).

Lemme : Cette démonstration est inspirée de Sagaut (2003, p. 147) qui montre à partir d'un développement limité que les termes sous-maille de similarité d'échelles sont d'ordre 2. On montre ici que ce raisonnement est applicable au filtre surfacique $\overline{\cdot}^\sigma$ défini par la relation (4.481), même si le noyau n'est pas symétrique. Prenons une dénomination générique d'un modèle sous-maille macroscopique $\widetilde{\tau}$

$$\widetilde{\tau} \hat{=} \overline{\widetilde{a}\,\widetilde{\phi}}^\sigma - \overline{\widetilde{a}}^\sigma\,\overline{\widetilde{\phi}}^\sigma \tag{4.305}$$

Un développement limité des variables au voisinage du point $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ conduit à :

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(0,0) + \xi_1 \left.\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}\right|_{(0,0)} + \xi_2 \left.\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}\right|_{(0,0)} + \mathcal{O}(\xi_1^2, \xi_2^2) \tag{4.306}$$

En introduisant ce développement dans la définition du filtre surfacique, il vient :

$$\overline{\psi}^\sigma(0,0) = \psi(0,0) + \left.\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}\right|_{(0,0)} \iint \xi_1 G_s d\xi_1 d\xi_2 + \left.\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}\right|_{(0,0)} \iint \xi_2 G_s d\xi_1 d\xi_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.307}$$

car $|\xi_1| \leq \epsilon$ et $|\xi_2| \leq \epsilon$. Le filtre surfacique n'étant pas nécessairement symétrique, les moments d'ordre 1 dans les directions α $\left(\text{définis par } \epsilon M^1_\alpha = \iint \xi_\alpha G_s ds\right)$ peuvent être non nuls. En appliquant l'expression (4.307) aux différentes quantités de l'équation (4.305), on montre que le terme sous-maille correspondant est d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}(0,0) &= \widetilde{a}(0,0)\widetilde{\phi}(0,0) + \epsilon M^1_1 \left.\frac{\partial \widetilde{a}\,\widetilde{\phi}}{\partial \xi_1}\right|_{(0,0)} + \epsilon M^1_2 \left.\frac{\partial \widetilde{a}\,\widetilde{\phi}}{\partial \xi_2}\right|_{(0,0)} \\
&\quad - \left(\widetilde{a}(0,0) + \epsilon M^1_1 \left.\frac{\partial \widetilde{a}}{\partial \xi_1}\right|_{(0,0)} + \epsilon M^1_2 \left.\frac{\partial \widetilde{a}}{\partial \xi_2}\right|_{(0,0)}\right) \left(\widetilde{\phi}(0,0) + \epsilon M^1_1 \left.\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial \xi_1}\right|_{(0,0)} + \epsilon M^1_2 \left.\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial \xi_2}\right|_{(0,0)}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{4.308}$$

Le terme sous-maille n'apparaît qu'à l'ordre 2. Ce résultat est cohérent avec l'ordre des variations temporelles de courbure obtenu par Toutant (2006) comme le montre la section 4.4.3.4.

Aspects dynamiques : Par convention, l'indice i est utilisé pour représenter une direction quelconque (*i. e.*, $i = 1, 2, 3$) alors que les indices grecs α et β dénotent une des directions tangentes (*i. e.*, $\alpha = 1, 2$ et $\beta = 3 - \alpha$). L'ordre dominant de l'équation de quantité de mouvement (4.292c) se développe à partir de la divergence tensorielle (4.239)

$$\breve{\boldsymbol{S}}^{-1}_{i3,3} = 0$$

et s'intègre :

$$\breve{\boldsymbol{S}}^{-1}_{\alpha 3} = f^0_\alpha(\xi_1, \xi_2) \quad \text{et} \quad \breve{\boldsymbol{S}}^{-1}_{33} = f^0_3(\xi_1, \xi_2)/2$$

En explicitant la définition de $\breve{\boldsymbol{S}}$ à l'ordre dominant (Éqs. (4.240a) et (4.240e)), on obtient (en négligeant le terme sous-maille de diffusion) :

$$\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(i)_{,3} = f^0_i(\xi_1, \xi_2) \tag{4.309}$$

D'après la condition de raccord (4.277a), $f_i^0(\xi_1,\xi_2) = 0$ et comme la viscosité est non nulle dans chaque phase, la relation précédente s'intègre :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(i) = g_i^0(\xi_1,\xi_2) \tag{4.310}$$

Cette relation fournit les 3 composantes de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ à une constante près. Dans les directions tangentielles, comme $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)$, cette relation indique la continuité des vitesses tangentielles à la traversée de l'interface :

$$\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\right]\!\right] = 0 \tag{4.311}$$

Dans la direction normale à l'interface, cette relation n'apporte pas d'information complémentaire puisqu'elle conduit d'après la définition de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ au saut de vitesse normale établi par l'ordre dominant du bilan de masse (Éq. (4.294)). Cette redondance entre le bilan de masse et celui de quantité de mouvement s'explique par l'absence de pression pour régir le système à l'ordre dominant.

Remarque : Bien qu'il soit constitué de 5 équations décrivant l'évolution de seulement 4 variables, le système (4.292) est bien posé car les équations (4.292b) et (4.292c) sont redondantes. En effet, en injectant la définition de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ puis la relation (4.292b) dans l'équation (4.292c), on obtient trivialement 0 à l'ordre dominant. Ce degré de liberté s'explique en observant le développement limité de la pression. Il indique simplement qu'il n'est pas nécessaire d'introduire d'ordre négatif. En considérant que la variable physique intéressante est le gradient de pression, son ordre 0 est associé à l'ordre -1 de la pression suite au changement de variable. En injectant la définition de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ puis la relation (4.292b) dans l'équation (4.292c), on obtient en conservant l'ordre -1 de la pression :

$$\breve{\overline{p}}_{,3}^{-1} = 0$$

Par conséquent, la pression intérieure à l'ordre -1 est uniforme et d'après la condition de raccord (4.276a), il n'y a pas de saut de pression à l'ordre -1. L'ordre 0 du gradient de pression est donc nul. En pratique, il n'est pas nécessaire de débuter le développement limité en pression à un ordre négatif. Un ordre négatif non nul aurait correspondu à une distribution de Dirac pour la pression microscopique. Ce résultat est donc bien cohérent avec les relations microscopiques classiques (Delhaye *et al.*, 1981b).

Aspects thermiques : L'ordre dominant de l'équation d'énergie (4.292d) s'exprime à partir du développement de la divergence (4.236)

$$\breve{\boldsymbol{Q}}^{-1}(3)_{,3} = 0$$

et s'intègre en explicitant la définition de $\breve{\boldsymbol{Q}}$ à l'ordre dominant

$$\breve{\boldsymbol{Q}}^{-1}(3) = \breve{\Theta}_{,3}^0 = f_T^0(\xi_1,\xi_2) = 0$$

où la fonction f_T^0 est déterminée à partir de la condition de raccord (4.277a) : $\lim\limits_{\xi\to\infty} \breve{\overline{\Theta}}_{,3}^0 = 0$. En intégrant à nouveau et en utilisant l'ordre 0 de la condition de saturation (4.292e) pour déterminer la constante d'intégration g_T^0, on a :

$$\breve{\Theta}^0 = g_T^0(\xi_1,\xi_2) = 0 \tag{4.312}$$

D'après la condition de raccord (4.276a), la limite de cette relation aux bords de la région intérieure est donnée par :

$$\lim_{\xi\to\infty} \breve{\overline{\Theta}}^0 = \widetilde{\Theta}_\pm^0 = 0 \tag{4.313}$$

Sachant que $\widetilde{k}$ est non nulle, la définition macroscopique $\widetilde{\Theta} = \widetilde{k}\,\widetilde{T}$ permet de conclure qu'à l'ordre 0, la température est continue, uniforme et nulle dans la zone de transition :

$$\left[\!\left[\widetilde{T}^0\right]\!\right] = \widetilde{T}_+^0 - \widetilde{T}_-^0 = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{T}_i^0 = 0 \tag{4.314}$$

Grâce à la condition de saturation, la température macroscopique à l'interface est donc entièrement déterminée :

$$\forall \xi_3, \quad \widetilde{T}^0(\xi_1, \xi_2, 0) = 0 \tag{4.315}$$

Remarque : La seconde constante d'intégration $g_T^0(\xi_1, \xi_2)$ est *a priori* fonction des coordonnées tangentielles. Cependant, la condition de saturation (4.292e) joue un rôle essentiel et constitue une différence notable avec les études menées sur la vitesse dans le cas sans changement de phase (Toutant, 2006). Elle implique l'uniformité de la température dans toute la région interfaciale. *Cette particularité rompt l'analogie vitesse/température.* De ce fait, les modèles $\breve{E}^0$ et $\breve{F}^0$ sont nuls dans le cas d'écoulements avec changement de phase.

Conclusion – Ordre 0 : À l'ordre dominant, le changement de variable effectué dans la direction normale à l'interface conduit à une description monodimensionnelle du problème, comme c'est fréquemment le cas pour les approches de type théories des couches limites. Les développements asymptotiques provoquent un découplage des directions. Cela signifie que les discontinuités des variables prédominent. Dans le repère mobile, le problème est stationnaire à l'ordre dominant. La vitesse de déplacement de l'interface macroscopique est définie à partir de la vitesse monofluide et du taux de changement de phase macroscopique. Les variations rapides de la vitesse monofluide dans la région intérieure $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0$ conduisent à un saut de vitesse normale à l'interface. La pression n'apparaît pas à cet ordre puisque seul son gradient a un sens physique. La température de l'interface $\widetilde{T}^0$ est constante et nulle ; la condition de saturation est là aussi identique à la relation microscopique. À ce stade, nous disposons de cinq relations sur les sept recherchées pour le système (4.10-4.13). Les deux dernières sont issues de l'étude à l'ordre 1 car elles concernent les flux ; lors du raccord, il y a un ordre d'écart entre les dérivées premières intérieures et extérieures.

À l'ordre 0, on obtient les mêmes résultats que pour le problème microscopique :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_l^0 - \widetilde{\boldsymbol{v}}_v^0 = -\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{m}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}} \tag{4.316a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{m}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0 \tag{4.316b}$$

$$\widetilde{T}_l^0 = \widetilde{T}_v^0 = 0 \tag{4.316c}$$

4.D.2.2 Ordre 1

À l'ordre suivant, le système régissant l'écoulement est :

$$\frac{d\breve{\overline{\chi}}^0}{dt} + \left(\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right) \cdot \nabla \breve{\overline{\chi}} \right)^0 + \breve{A}^0 = 0 \tag{4.317a}$$

$$\left(\nabla \cdot \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\right)^0 = \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \left(\breve{\overline{m}}\, \overline{\delta}_\sigma\right)^0 \tag{4.317b}$$

$$\left[\nabla \cdot \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}} \otimes \breve{\overline{m}}\, \overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{\overline{\rho \boldsymbol{v}}} \otimes \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right) + \breve{C}\right)\right]^{-1} + \left(\breve{\overline{\rho \boldsymbol{v}}} \nabla \cdot \breve{\boldsymbol{v}}_m^i\right)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\nabla \cdot \breve{\boldsymbol{S}}\right)^{-1} - (\nabla p)^{-1} - \frac{1}{\mathrm{We}} \left(\breve{\overline{\kappa}}_\sigma \nabla \breve{\overline{\chi}}\right)^{-1} \tag{4.317c}$$

$$\left[\nabla \cdot \left(\breve{\overline{c_p T}}\, \breve{\overline{m}}\, \overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{\overline{\rho c_p T}} \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right) + \breve{F}\right)\right]^{-1} + \left(\breve{\overline{\rho c_p T}} \nabla \cdot \breve{\boldsymbol{v}}_m^i\right)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \left(\nabla \cdot \breve{\boldsymbol{Q}}\right)^{-1} + \frac{1}{\mathrm{Ja}} \left(\breve{\overline{m}}\, \overline{\delta}_\sigma\right)^{-1} \tag{4.317d}$$

$$\breve{\overline{\Theta}}^1 (\xi_1, \xi_2, 0) = \breve{\overline{m}}^0 (\xi_1, \xi_2) \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}} C_1 \tag{4.317e}$$

Conservation de la masse : Développons la relation (4.317b) dans le repère local :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(1)_{,1} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(2)_{,2} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3)_{,3} - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)\left(\kappa_1 + \kappa_2\right) = \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \left(\breve{\overline{m}}^1 \breve{\overline{\chi}}_{,3}^0 + \breve{\overline{m}}^0 \breve{\overline{\chi}}_{,3}^1\right) \tag{4.318}$$

Dans le repère associé à l'interface, la relation (4.164a) donne pour la région extérieure :

$$\lim_{\xi \to 0} \nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(1)_{,1} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(2)_{,2} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3} - \left(\kappa_1 + \kappa_2\right) \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3) \tag{4.319}$$

En retranchant la limite au voisinage de l'interface de la relation d'incompressibilité dans les phases $\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}^0 = 0$ au bilan de masse de la région intérieure (4.318), on a :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(1)_{,1} - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(1)_{,1} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(2)_{,2} - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(2)_{,2} + \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3) - \xi \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}\right)_{,3} - \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)\right)(\kappa_1 + \kappa_2) = [\![1/\rho]\!] \left(\breve{\overline{m}}^1 \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} + \breve{\overline{m}}^0 \breve{\overline{\chi}}^1_{,3}\right)$$

Comme $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(1)$ et $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(2)$ sont indépendants de ξ et en utilisant le profil de vitesse normale à l'ordre 0 donné par l'équation (4.295), la relation précédente se simplifie :

$$\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3) - \xi \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}\right)_{,3} = [\![1/\rho]\!] \left(\breve{\overline{m}}^1 \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} + \breve{\overline{m}}^0 \breve{\overline{\chi}}^1_{,3} + (\kappa_1 + \kappa_2)\, \widetilde{m}^0 \left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right)\right) \tag{4.320}$$

En intégrant l'équation (4.320) et en utilisant la condition de raccord (4.276b), on obtient le saut de vitesse à l'ordre 1

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^1(3)\right]\!\!\right] = [\![1/\rho]\!] \left(\left[\!\!\left[\breve{\overline{m}}^1 \breve{\overline{\chi}}^0 + \breve{\overline{m}}^0 \breve{\overline{\chi}}^1\right]\!\!\right] + (\kappa_1 + \kappa_2)\, \widetilde{m}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) d\xi\right) = [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{m}^1 \tag{4.321}$$

car l'indicatrice d'ordre 1 est nulle dans les phases $\lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \left(\breve{\overline{\chi}}^1 - \xi \breve{\overline{\chi}}^0_{,3}\right) = \lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \widetilde{\chi}^1 = 0$ et le positionnement de l'interface macroscopique est tel que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) d\xi = 0$.

Remarque : Après quelques manipulations utilisant la définition (4.296) de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma$ et l'indépendance du taux de changement de phase à la coordonnée normale à l'ordre 0 (ce qui implique en particulier que $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3} = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,3}$), l'équation (4.320) s'écrit :

$$\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3) - \xi \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,3}\right)_{,3} = (\kappa_1 + \kappa_2)\, [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{m}^0 \left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) \tag{4.322}$$

En intégrant et en utilisant la condition de raccord (4.276b) pour déterminer la constante d'intégration en $+\infty$, on obtient le profil de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)$:

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3) - \xi \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,3} = (\kappa_1 + \kappa_2)\, [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{m}^0 \int_{\infty}^{\xi} \left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) d\xi + \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_{\sigma+}(3) \tag{4.323}$$

En prenant la limite en $-\infty$ de la relation précédente (ce qui équivaut à intégrer la relation (4.322) sur toute la zone de transition) et en utilisant le positionnement particulier choisi pour l'interface, on montre que le saut de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)$ est nul bien que cette vitesse ne soit pas uniforme dans la zone de transition :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_\sigma(3)\right]\!\!\right] = 0 \tag{4.324}$$

Transport de l'interface : Par définition, la vitesse de déplacement de l'interface macroscopique est construite pour ne pas introduire de masse en excès à l'interface (*cf.* Éq. (4.155)). La relation (4.155)) qui traduit cette condition s'écrit à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} &= \int_\xi \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3) \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) \breve{\overline{\chi}}^1_{,3} + \epsilon \breve{A}^0\right) d\xi \\ &= \int_\xi \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3) \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} d\xi + \int_\xi \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) \breve{\overline{\chi}}^1_{,3} d\xi + \int_\xi \left(\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3) \breve{\overline{\chi}}^0_{,3}} - \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{n}^s \breve{\overline{\chi}}^0_{,3}}\right) d\xi + \int_\xi \left(\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) \breve{\overline{\chi}}^1_{,3}} - \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{n}^s \breve{\overline{\chi}}^1_{,3}}\right) d\xi\end{aligned} \tag{4.325}$$

L'information de fermeture sur l'équation de transport de l'interface fournie par l'équation (4.317a) est déjà inclue dans la relation (4.155b). **La première intégrale** de l'équation (4.325) est évaluée en injectant le profil de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)$ donné par la relation (4.323) :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3) \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} d\xi &= \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,3} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} d\xi + (\kappa_1 + \kappa_2)\, [\![1/\rho]\!]\, \widetilde{m}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi'=\infty}^{\xi} \left(\breve{\overline{\chi}}^0(\xi') - \widetilde{\chi}^0(\xi')\right) d\xi' \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} d\xi \\ &\quad + \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_{\sigma+}(3) \int_{-\infty}^{\infty} \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} d\xi\end{aligned} \tag{4.326}$$

Comme l'intégrande de la première intégrale est impaire, cette intégrale est nulle. L'intégrale double dépend uniquement du filtre utilisé pour le passage à l'échelle mésoscopique ; on note C_5' cette propriété d'après la définition (4.108d). Sachant que le saut de $\overset{\smile}{\chi}^0$ est unitaire, la dernière intégrale vaut 1. Par conséquent, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^1_\sigma(3)\overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3} d\xi = (\kappa_1+\kappa_2)\,[\![1/\rho]\!]\,\widetilde{m}^0 C_5' + \widetilde{\boldsymbol{v}}{}^1_\sigma(3) \tag{4.327}$$

La seconde intégrale de l'équation (4.325) est nulle car $\overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^0_\sigma(3)$ est indépendante de ξ et le saut de $\overset{\smile}{\chi}{}^1$ est nul. **La troisième intégrale** de l'équation (4.325) traduit l'influence du modèle sous-maille de l'équation de transport de l'interface. En négligeant les fluctuations locales de normale puisqu'elles sont d'ordre élevé (comme nous l'avons fait à l'ordre précédent), cette intégrale s'évalue en appliquant la relation (4.500) à $a \equiv \overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3}$ et $\phi \equiv \overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^1_\sigma(3)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \breve{A}^0 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^1_\sigma(3)}^\sigma \left(\overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3} - \overline{\overline{\overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3}}^n}^n\right) d\xi \tag{4.328}$$

On rappelle que la relation (4.500) repose sur l'hypothèse que le filtre se décompose en un filtre normal et un filtre surfacique. La fonction entre parenthèses est paire et son intégrale est nulle. Par conséquent, la constante $\widetilde{\boldsymbol{v}}{}^1_\sigma(3)$ et la partie impaire du profil de $\overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^1_\sigma(3)$ donnée par $\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}{}^0_\sigma(3)_{,3}$ (*cf.* Éq. (4.323)) n'apportent pas de contribution à la vitesse interfaciale macroscopique. On en déduit que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \breve{A}^0 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(\kappa_1+\kappa_2)\,[\![1/\rho]\!]\,\widetilde{m}^0 \int_{\infty}^{\xi} \left(\overset{\smile}{\chi}{}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) d\xi}^\sigma \left(\overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3} - \overline{\overline{\overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3}}^n}^n\right) d\xi \tag{4.329}$$

En séparant les contributions normales et tangentielles, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \breve{A}^0 d\xi = \overline{(\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{m}^0}^\sigma\,[\![1/\rho]\!] \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\xi} \left(\overset{\smile}{\chi}{}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) d\xi \left(\overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3} - \overline{\overline{\overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3}}^n}^n\right) d\xi \tag{4.330}$$

L'intégrale obtenue dépend uniquement du filtre et on la note C_5'' d'après la définition (4.108e). En négligeant les fluctuations sous-maille de courbure et de taux de changement de phase, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \breve{A}^0 d\xi = \overline{(\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{m}^0}^\sigma\,[\![1/\rho]\!]\,C_5'' \approx (\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{m}^0\,[\![1/\rho]\!]\,C_5'' \tag{4.331}$$

Enfin, **la dernière intégrale** de l'équation (4.325) est nulle (*cf.* preuve ci-dessous). Par suite, il vient :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}{}^1_i(3) = \widetilde{\boldsymbol{v}}{}^1_\sigma(3) + (\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{m}^0\,[\![1/\rho]\!]\,C_5 \tag{4.332}$$

où le paramètre $C_5 \hat{=} C_5' + C_5''$ est défini par la relation (4.108c) ; il caractérise le filtre. En approchant la courbure moyenne $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ de la surface définissant le repère mobile par la courbure de l'interface macroscopique $\widetilde{\kappa}$, **cette relation permet de définir la vitesse de l'interface macroscopique à l'ordre 1 à partir des variables principales macroscopiques.**

Comme $\overset{\smile}{\chi}{}^0$ est indépendant du temps (*cf.* postulat (4.105)) et comme l'ordre dominant de la vitesse de l'interface mésoscopique est égal à la vitesse de modélisation $\breve{\boldsymbol{v}}{}^{m0}_i - \overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^0_\sigma = 0$, l'équation de transport de l'interface (4.317a) se réduit à :

$$\left(\overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}{}^m_i(3)\right)^1 \overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3} + \left(\overline{\overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^1_\sigma(3)\overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3}} - \overline{\overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^1_\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{n}^s \overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3}}\right) + \left(\overline{\overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^0_\sigma(3)\overset{\smile}{\chi}{}^1_{,3}} - \overline{\overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^0_\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{n}^s \overset{\smile}{\chi}{}^1_{,3}}\right) = 0 \tag{4.333}$$

Dans la zone de transition, $\overset{\smile}{\chi}{}^0_{,3}$ est non nulle. Cette relation permet d'exprimer le profil de $\breve{\boldsymbol{v}}{}^{m1}_i(3)$ en la combinant au profil de $\overset{\smile}{\boldsymbol{v}}{}^1_\sigma(3)$ donné par la relation (4.323). Ce résultat est utile pour l'étude du bilan de quantité de mouvement à l'ordre 2.

Preuve : En décomposant le filtre à l'aide de la relation (4.470), la seconde partie du terme sous-maille s'écrit :

$$\int_\xi \left(\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)\breve{\overline{\chi}}^1_{,3}} - \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{n}^s \breve{\overline{\chi}}^1_{,3}} \right) d\xi = \int_\xi \overline{\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)\breve{\overline{\chi}}^1_{,3}}^\sigma}^n d\xi - \int_\xi \overline{\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma}^\sigma}^n \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{n}^s}^\sigma \overline{\breve{\overline{\chi}}^1_{,3}}}^n d\xi$$

D'après la propriété (4.497), on a

$$\int_\xi \left(\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)\breve{\overline{\chi}}^1_{,3}} - \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{n}^s \breve{\overline{\chi}}^1_{,3}} \right) d\xi = \int_\xi \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)\breve{\overline{\chi}}^1_{,3}}^\sigma d\xi - \int_\xi \overline{\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma}^\sigma}^n \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{n}^s}^\sigma \overline{\breve{\overline{\chi}}^1_{,3}}}^n d\xi$$

et sachant que $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma$ et $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ sont indépendants de ξ alors que $\breve{\overline{\chi}}^1_{,3}$ est indépendant des coordonnées tangentielles, on a :

$$\int_\xi \left(\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)\breve{\overline{\chi}}^1_{,3}} - \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{n}^s \breve{\overline{\chi}}^1_{,3}} \right) d\xi = \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)}^\sigma \int_\xi \breve{\overline{\chi}}^1_{,3} d\xi - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma \int_\xi \breve{\overline{\chi}}^1_{,3} d\xi$$

Enfin, comme la fonction $\breve{\overline{\chi}}^1_{,3}$ est impaire d'après le postulat (4.105), on obtient :

$$\int_\xi \left(\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)\breve{\overline{\chi}}^1_{,3}} - \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{n}^s \breve{\overline{\chi}}^1_{,3}} \right) d\xi = 0$$

Aspects dynamiques : D'après la solution obtenue à l'ordre dominant, on a : $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}^m_i\right)^0 = 0$ et $\breve{\boldsymbol{v}}^{m0}_{i,3} = 0$. L'équation de bilan de quantité de mouvement (4.317c) se développe à partir des expressions de la divergence tensorielle (4.239) et du gradient (4.235) dans le repère local :

$$\begin{aligned}\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}} \otimes \breve{\overline{m}}\, \overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{C}\right)^0_{\alpha 3,3} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Big(& S^0_{\alpha 1,1} + S^0_{\alpha 2,2} + S^1_{\alpha 3,3} - (\kappa_1 + \kappa_2)\, S^0_{\alpha 3} + \boxed{\kappa_\alpha \left(S^0_{\alpha 3} - S^0_{3\alpha}\right)} \\ & + \mathcal{T}^0_{\alpha 1,1} + \mathcal{T}^0_{\alpha 2,2} + \mathcal{T}^1_{\alpha 3,3} - (\kappa_1 + \kappa_2)\, \mathcal{T}^0_{\alpha 3} + \boxed{\kappa_\alpha \left(\mathcal{T}^0_{\alpha 3} - \mathcal{T}^0_{3\alpha}\right)} \Big)\end{aligned} \tag{4.334a}$$

$$\begin{aligned}\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}} \otimes \breve{\overline{m}}\, \overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{C}\right)^0_{33,3} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Big(& S^0_{31,1} + S^0_{32,2} + S^1_{33,3} - (\kappa_1 + \kappa_2)\, S^0_{33} + \kappa_1 S^0_{11} + \kappa_2 S^0_{22} \\ & + \mathcal{T}^0_{31,1} + \mathcal{T}^0_{32,2} + \mathcal{T}^1_{33,3} - (\kappa_1 + \kappa_2)\, \mathcal{T}^0_{33} + \kappa_1 \mathcal{T}^0_{11} + \kappa_2 \mathcal{T}^0_{22} \Big) - \breve{\overline{p}}^0_{,3} - \frac{1}{\mathrm{We}} \breve{\overline{\kappa}}^0_\sigma \breve{\overline{\chi}}^0_{,3}\end{aligned} \tag{4.334b}$$

Les termes encadrés sont nuls car les tenseurs de diffusion S et $\mathcal{T}$ sont symétriques.

D'après l'équation (4.310), l'ordre 0 de la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma$ est indépendant de la coordonnée normale à l'interface. Par conséquent, l'ordre 0 du tenseur de diffusion est nul : $\breve{\boldsymbol{S}}^0 = \mathbf{0}$. L'équation (4.310) implique aussi : $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) = g^0_\alpha(\xi_1, \xi_2)$ et $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)_{,3} = \breve{\overline{m}}^0 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \breve{\overline{\chi}}^0_{,3}$. Par définition du produit vectoriel, on a, sachant que $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ est unitaire à l'ordre 0 : $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}} \otimes \overline{\boldsymbol{n}}^s\right)^0_{i3} = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(i)$. De plus, l'ordre 0 du tenseur $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ est nul par construction : $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0 = 0$.

Comme $\breve{\overline{m}}^0$ ne dépend pas de la coordonnée normale à l'interface, on peut l'assimiler à sa valeur asymptotique et l'ordre 1 du tenseur $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ est nul : $\boldsymbol{\mathcal{T}}^1 = 0$. Le système précédent se simplifie fortement

$$C^0_{\alpha 3,3} = \frac{1}{\mathrm{Re}} S^1_{\alpha 3,3} \tag{4.335a}$$

$$\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \left(\breve{\overline{m}}^0\right)^2 \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} + C^0_{33,3} = \frac{1}{\mathrm{Re}} S^1_{33,3} - \breve{\overline{p}}^0_{,3} - \frac{1}{\mathrm{We}} \breve{\overline{\kappa}}^0_\sigma \breve{\overline{\chi}}^0_{,3} \tag{4.335b}$$

et s'intègre dans la direction normale à l'interface (sachant que $\breve{\overline{\kappa}}^0_\sigma$ ne dépend pas de ξ) :

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} S^1_{\alpha 3} = g^1_\alpha(\xi_1, \xi_2) + C^0_{\alpha 3} \tag{4.336a}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} S^1_{33} - \breve{\overline{p}}^0 - \frac{1}{\mathrm{We}} \breve{\overline{\kappa}}^0_\sigma \breve{\overline{\chi}}^0 = \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \left(\breve{\overline{m}}^0\right)^2 \breve{\overline{\chi}}^0 + g^1_3(\xi_1, \xi_2) + C^0_{33} \tag{4.336b}$$

L'ordre 1 du tenseur de diffusion s'exprime à l'aide des relations (4.240b) et (4.240f) :

$$S^1_{\alpha 3} = \breve{\overline{\mu}}^0 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha) - \boxed{\xi \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3}} \right) + \boxed{\breve{\overline{\mu}}^1 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3}} \tag{4.337a}$$

$$S^1_{33} = 2\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)_{,3} + \boxed{2\breve{\overline{\mu}}^1 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,3}} \tag{4.337b}$$

Les termes encadrés sont nuls car l'ordre 0 de la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)$ ne varie pas dans la direction normale à l'interface. Par suite, on obtient :

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} \breve{\overline{\mu}}^0 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha) \right) = g^1_\alpha(\xi_1, \xi_2) + C^0_{\alpha 3} \tag{4.338a}$$

$$\frac{2}{\mathrm{Re}} \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)_{,3} - \breve{\overline{p}}^0 - \frac{1}{\mathrm{We}} \breve{\overline{\kappa}}^0_\sigma \breve{\overline{\chi}}^0 = [\![1/\rho]\!] \left(\breve{\overline{m}}^0 \right)^2 \breve{\overline{\chi}}^0 + g^1_3(\xi_1, \xi_2) + C^0_{33} \tag{4.338b}$$

Directions tangentielles : Rappelons que $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(\alpha) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}(\alpha)$. D'après les conditions de raccord (4.276a) et (4.277b),

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} = \lim_{\xi_3 \to 0^\pm} \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} \tag{4.339a}$$

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) = \lim_{\xi_3 \to 0^\pm} \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) \tag{4.339b}$$

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3} = \lim_{\xi \to \pm\infty} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)_{,3} = \lim_{\xi_3 \to 0^\pm} \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} \tag{4.339c}$$

on a :

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} S^1_{\alpha 3} = \mu_\pm \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}|_\pm + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,\alpha}|_\pm + \kappa_\alpha \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)|_\pm \right) = \mathrm{Re} \left(g^1_\alpha(\xi_1, \xi_2) + \lim_{\xi \to \pm\infty} C^0_{\alpha 3} \right) \tag{4.340}$$

La condition de saut dans la direction tangentielle s'obtient en prenant la différence des 2 limites

$$[\![S^1_{\alpha 3}]\!] = \left[\!\!\left[\widetilde{\mu}^0 \, \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} \right]\!\!\right] + [\![\widetilde{\mu}^0]\!] \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) \right) = \mathrm{Re} \, [\![C^0_{\alpha 3}]\!] \tag{4.341}$$

car $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,\alpha}$ et $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)$ sont constantes sur la zone de transition. Pour aboutir à ce résultat, on rappelle que nous avons négligé le terme sous-maille de diffusion. Dans les directions tangentes, le saut de quantité de mouvement est donc donné par :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\mu}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} - \mathrm{Re} \, C^0_{\alpha 3} \right]\!\!\right] = - [\![\widetilde{\mu}^0]\!] \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) \right) \tag{4.342}$$

Autrement dit :

$$\left[\!\!\left[\frac{\widetilde{\mu}^0}{\mathrm{Re}} \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} + \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} - \kappa_\alpha \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) \right) - C^0_{\alpha 3} \right]\!\!\right] = 0$$

D'après la définition (4.231d) du gradient en coordonnées généralisées, le saut de quantité de mouvement caractéristique des écoulements diphasiques est retrouvé dans la direction tangente :

$$\left[\!\!\left[\frac{\widetilde{\mu}^0}{\mathrm{Re}} \left(\left(\nabla \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma \right)_{\alpha 3} + \left(\nabla \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma \right)_{3\alpha} \right) - C^0_{\alpha 3} \right]\!\!\right] = 0 \tag{4.343}$$

Direction normale : La même démarche appliquée à la relation (4.338b) permet d'aboutir à :

$$\left[\!\!\left[\frac{2}{\mathrm{Re}} \widetilde{\mu}^0 \, \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,3} - \widetilde{p}^0 \right]\!\!\right] = \left(\frac{\widetilde{\kappa}}{\mathrm{We}} + [\![1/\rho]\!] \left(\widetilde{m}^0 \right)^2 \right) [\![\widetilde{\chi}^0]\!] + [\![C^0_{33}]\!] \tag{4.344}$$

On a donc, dans la direction normale, la relation scalaire suivante :

$$\left[\!\!\left[\frac{1}{\mathrm{Re}} \left(2\widetilde{\mu}^0 \, \nabla \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma - \widetilde{p}^0 \boldsymbol{I} - C^0 \right)_{33} \right]\!\!\right] = \frac{\widetilde{\kappa}}{\mathrm{We}} + [\![1/\rho]\!] \left(\widetilde{m}^0 \right)^2 \tag{4.345}$$

Synthèse : D'après les relations de saut de vitesse (4.316) obtenues à l'ordre 0, $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}_k^0$ et $\widetilde{\boldsymbol{v}}_l^0 - \widetilde{\boldsymbol{v}}_v^0 = -[\![1/\rho]\!]\, \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}$, on en déduit que :

$$\widetilde{\rho}_k^0\, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0 \otimes \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0 - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0\right) \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k^0 = [\![1/\rho]\!] \left(\widetilde{\dot{m}}^0\right)^2 \widetilde{\delta}^i \tag{4.346}$$

De plus, indépendamment de l'extension choisie pour le terme sous-maille de convection, son saut est donné par : $[\![C^0]\!] = \left[\!\left[\widetilde{C}_k^0\right]\!\right]$. Ainsi, on obtient la relation de saut classique à l'ordre dominant :

$$\left[\widetilde{\rho}_k^0\, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0 \otimes \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0 - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0\right) - \widetilde{C}_k^0 - \frac{1}{\mathrm{Re}} \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0} + \widetilde{p}_k^0 \boldsymbol{I}\right] \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k^0 = \frac{1}{\mathrm{We}} \widetilde{\kappa} \nabla \widetilde{\chi}_v^0 \tag{4.347}$$

La relation de saut obtenue est identique aux relations microscopiques traditionnelles.

Contrainte tangentielle et relation de saut. En manipulant l'équation (4.338a), on obtient pour la vitesse tangentielle d'ordre 1 :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(\alpha)_{,3} = -\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)\right) + \frac{\mathrm{Re}}{\breve{\overline{\mu}}^0} \left(g_\alpha^1(\xi_1, \xi_2) + C_{\alpha 3}^0\right) \tag{4.348}$$

Le tenseur C^0 défini par l'équation (4.90c) s'écrit :

$$C^0 = \overline{\breve{\overline{\rho}}^0\, \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0} - \overline{\breve{\overline{\rho}}^0}\, \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0} \otimes \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0} \tag{4.349}$$

On suppose que le filtre se décompose en la succession d'un filtre surfacique $\bar{\cdot}^\sigma$ et d'un filtre normal $\bar{\cdot}^n$ (*cf.* annexe 4.F). La propriété $\breve{\overline{\rho}}^0$ ne dépend que de la direction normale alors que $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ n'en dépend pas. Par conséquent, l'ordre 0 du terme sous-maille de convection s'écrit :

$$C^0 = \overline{\breve{\overline{\rho}}^0}^n \left(\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0}^\sigma - \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0}^\sigma \otimes \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0}^\sigma\right) \tag{4.350}$$

On montre à l'annexe 4.E.2 que la corrélation entre parenthèses est d'ordre 2

$$C^0 = \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.351}$$

ce qui permet de négliger ce terme dans l'équation (4.348). Par ailleurs, la fonction $g_\alpha^1(\xi_1, \xi_2)$ est déterminée en prenant la limite à l'infini de la relation (4.338a). La relation (4.340) ainsi obtenue se simplifie sachant que le terme sous-maille de convection est en fait d'ordre 2 et la fonction g_α^1 est reliée à la contrainte interfaciale dans la direction tangentielle $\widetilde{\tau}_i^0(\alpha)$ (continue à la traversée de l'interface) par :

$$\mathrm{Re}\, g_\alpha^1(\xi_1, \xi_2) = \widetilde{\tau}_i^0(\alpha) \hat{=} \mu_\pm \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}|_\pm + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)_{,\alpha}|_\pm + \kappa_\alpha \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)|_\pm\right) \tag{4.352}$$

Remarquons que la différence de ces deux limites permet d'obtenir le saut de gradient de vitesse tangentielle macroscopique

$$[\![1/\mu]\!]\, \widetilde{\tau}_i^0(\alpha) = \left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}\right]\!\right] + \left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)_{,\alpha}\right]\!\right] + \kappa_\alpha \left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\right]\!\right] = \left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}\right]\!\right] \tag{4.353}$$

sachant que les vitesses $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)$ et $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)$ ne présentent pas de saut à l'interface. Par conséquent, l'équation (4.348) s'écrit :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(\alpha)_{,3} = -\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)\right) + \frac{\widetilde{\tau}_i^0(\alpha)}{\breve{\overline{\mu}}^0} \tag{4.354}$$

Enfin, sachant que la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ ne dépend pas de la coordonnée normale à l'interface, elle peut être remplacée par sa limite asymptotique unique $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0$ et l'équation (4.354) s'intègre alors :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(\alpha) = -\xi \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(\alpha)\right) + \int_0^\xi \frac{\widetilde{\tau}_i^0(\alpha)}{\breve{\overline{\mu}}^0} d\xi' + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(\alpha)(0) \tag{4.355}$$

Retranchons $\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}$ donné par l'équation (4.352) pour faire apparaître la condition de raccord (4.276b) :

$$\breve{\widetilde{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha) - \xi\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} = \int_0^\xi \frac{\widetilde{\tau}_i^0(\alpha)}{\breve{\widetilde{\mu}}^0} d\xi' + \breve{\widetilde{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)(0) - \xi\frac{\widetilde{\tau}_i^0(\alpha)}{\widetilde{\mu}^0} \tag{4.356}$$

Comme la contrainte tangentielle est continue à l'interface, sortons-la de l'intégrale. En exprimant le rapport $\xi/\widetilde{\mu}^0$ sous la forme d'une intégrale, on obtient :

$$\breve{\widetilde{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha) - \xi\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3} = \widetilde{\tau}_i^0(\alpha)\int_0^\xi \left(\frac{1}{\breve{\widetilde{\mu}}^0} - \frac{1}{\widetilde{\mu}^0}\right) d\xi' + \breve{\widetilde{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)(0) \tag{4.357}$$

Enfin, en prenant la différence des limites de cette relation à l'infini, on obtient grâce à la condition de raccord (4.276b) :

$$\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_\sigma(\alpha)\right]\!\right] = \widetilde{\tau}_i^0(\alpha)\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{\breve{\widetilde{\mu}}^0} - \frac{1}{\widetilde{\mu}^0}\right) d\xi' \tag{4.358}$$

Autrement dit, le saut de vitesse tangentielle d'ordre 1 est donné par le produit de la contrainte interfaciale et de l'excès de l'inverse de la viscosité :

$$\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\alpha)\right]\!\right] = \widetilde{\tau}_i^0(\alpha)\left\|\frac{1}{\mu^0}\right\|^{ex} \tag{4.359}$$

Ce résultat nouveau indique que l'ordre 1 du saut de vitesse tangentielle est proportionnel aux contraintes de cisaillement interfacial. Ce terme n'est pas considéré par Toutant (2006) puisque son étude se limite à l'ordre 0. Il pourrait améliorer significativement les problèmes identifiés par Magdeleine (2009) concernant la diffusion. Magdeleine (2009) a en effet constaté que la sous-résolution admissible par le modèle de Toutant (2006) est limitée à la capture (explicite) de la couche limite dynamique au voisinage de l'interface.

L'équation (4.359) détermine l'ordre 1 du saut de vitesse à l'échelle macroscopique. Elle est fermée si l'excès $\left\|1/\mu^0\right\|^{ex}$ est déterminé. Comme les paramètres introduits à la section 4.4.1, cet excès dépend du filtre utilisé pour obtenir le système mésoscopique. Il dépend en outre de la valeur du saut de viscosité $[\![\mu]\!]$: en particulier, cet excès est nul s'il n'y a pas de saut de viscosité.

Contrainte normale. De même, la limite asymptotique de la relation (4.338b) permet d'introduire la définition de la contrainte macroscopique normale suivante :

$$\mathrm{Re}\left[\widetilde{p}^0 + \widetilde{\chi}^0\left(\frac{\widetilde{\kappa}}{\mathrm{We}} + [\![1/\rho]\!]\left(\widetilde{\dot{m}}^0\right)^2\right) g_3^1(\xi_1,\xi_2)\right] = \widetilde{\tau}_i^0(3) \hat{=} 2\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3} \tag{4.360}$$

Cette contrainte est définie de manière unique si le saut de pression d'ordre 0 est donné par :

$$[\![\widetilde{p}^0]\!] = \frac{\widetilde{\kappa}}{\mathrm{We}} + [\![1/\rho]\!]\left(\widetilde{\dot{m}}^0\right)^2$$

Ce saut de pression à l'ordre 0 est caractéristique des relations de saut microscopiques classiques (Delhaye *et al.*, 1981b). Le saut de gradient de vitesse macroscopique normale est alors donné par :

$$\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}\right]\!\right] = \frac{1}{2}[\![1/\mu]\!]\,\widetilde{\tau}_i^0(3) \tag{4.361}$$

Aspects thermiques : En utilisant le développement (4.239) de la divergence tensorielle aux ordres 0 et 1, le bilan d'énergie (4.317d) conduit à :

$$\left(\breve{\overline{c_pT}}\,\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{\overline{\rho c_pT}}\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right) + \breve{F}\right)^0(3)_{,3} + \left(\breve{\overline{\rho c_pT}}\breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)^0_{,3} = \tag{4.362}$$
$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(\breve{\overline{Q}}^{-1}(1)_{,1} + \breve{\overline{Q}}^{-1}(2)_{,2} + \breve{\overline{Q}}^0(3)_{,3} - \breve{\overline{Q}}^{-1}(3)\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\right) + \frac{1}{\mathrm{Ja}}\left(\breve{\overline{m}}\,\breve{\overline{\delta}}^i\right)^{-1}$$

D'après la solution obtenue à l'ordre dominant $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)^0 = 0$, $\breve{\boldsymbol{v}}_{i,3}^{m0} = 0$, $\breve{\overline{T}}^0 = 0$ et $\breve{\boldsymbol{Q}}^{-1} = \mathbf{0}$, cette équation se simplifie de manière drastique

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\breve{\overline{Q}}^0(3)_{,3} = -\frac{1}{\mathrm{Ja}}\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\chi}}^0_{,3} \tag{4.363}$$

et s'intègre (sachant que le taux de changement de phase $\breve{\overline{m}}^0$ est indépendant de ξ) :

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\breve{\overline{Q}}^0(3) = -\frac{1}{\mathrm{Ja}}\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\chi}}^0 + \frac{1}{\mathrm{Pe}}f_T^1(\xi_1,\xi_2) \tag{4.364}$$

En développant l'ordre 0 de $\breve{\overline{Q}}^0$ dans la direction normale, on obtient :

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\breve{\overline{\Theta}}^1_{,3} = -\frac{1}{\mathrm{Ja}}\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\chi}}^0 + \frac{1}{\mathrm{Pe}}f_T^1(\xi_1,\xi_2) \tag{4.365}$$

En utilisant la condition de raccord (4.277b) pour exprimer le gradient de la variable $\breve{\overline{\Theta}}$, on a :

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\breve{\overline{\Theta}}^1_{,3} = \lim_{\xi_3\to 0^\pm}\widetilde{k}^0\widetilde{T}^0_{,3} \quad \text{et} \quad \widetilde{k}^0_\pm\widetilde{T}^0_{,3}|_\pm + \widetilde{m}^0\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\widetilde{\chi}^0|_\pm = f_T^1(\xi_1,\xi_2) \tag{4.366}$$

En prenant la différence des limites à l'infini, **on obtient la relation classique de saut de flux à l'interface** :

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\!\left[\widetilde{k}^0\,\widetilde{T}^0_{,3}\right]\!\right] = -\frac{1}{\mathrm{Ja}}\widetilde{m}^0\left[\!\left[\widetilde{\chi}^0_v\right]\!\right] = \frac{1}{\mathrm{Ja}}\widetilde{m}^0 \tag{4.367}$$

En intégrant à nouveau l'équation (4.365), on a :

$$\breve{\overline{\Theta}}^1(\xi_1,\xi_2,\xi) = -\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\int_0^\xi \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\chi}}^0_v(\xi')d\xi' + \xi f_T^1(\xi_1,\xi_2) + g_T^1(\xi_1,\xi_2) \tag{4.368}$$

où g_T^1 est déterminée en $\xi = 0$ à l'aide de la condition de saturation à l'ordre 1 (Éq. (4.317e)) :

$$g_T^1(\xi_1,\xi_2) = \breve{\overline{\Theta}}^1(\xi_1,\xi_2,0) = \breve{\overline{m}}^0 C_1\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}} \tag{4.369}$$

La condition de raccord

$$\breve{\overline{T}}^1(\xi) \underset{\substack{\xi\to\pm\infty\\ \xi_3\to 0^\pm}}{\sim} \xi\widetilde{T}^0_{,3}(\xi_3) + \widetilde{T}^1(\xi_3) \tag{4.370}$$

indique que la solution intérieure de la température à l'ordre 1 admet deux asymptotes obliques de pentes différentes en $\pm\infty$. Injectons la solution (4.366) obtenue pour f_T^1 dans l'équation (4.368) :

$$\breve{\overline{\Theta}}^1(\xi_1,\xi_2,\xi) - \xi\widetilde{k}^0\,\widetilde{T}^0_{,3} = -\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\int_0^\xi \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\chi}}^0_v(\xi')d\xi' + \xi\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\widetilde{m}^0\widetilde{\chi}^0_v + g_T^1(\xi_1,\xi_2) \tag{4.371}$$

Sachant que $\breve{\overline{m}}^0$ ne dépend pas de la coordonnée normale à l'interface, une formulation équivalente du profil de température à l'ordre 1 est :

$$\breve{\overline{\Theta}}^1(\xi_1,\xi_2,\xi) - \xi\widetilde{k}^0\,\widetilde{T}^0_{,3} = -\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\widetilde{m}^0\int_0^\xi\left(\breve{\overline{\chi}}^0_v(\xi') - \widetilde{\chi}^0_v(\xi')\right)d\xi' + g_T^1(\xi_1,\xi_2) \tag{4.372}$$

Le profil obtenu pour la température à l'ordre 1 permet d'étudier le comportement asymptotique à l'aide de la condition de raccord (4.370) :

$$\widetilde{k}^0(\xi_3)\widetilde{T}^1(\xi_3) \underset{\xi_3\to 0^\pm}{\sim} -\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\widetilde{m}^0\int_0^{\pm\infty}\left(\breve{\overline{\chi}}^0_v(\xi') - \widetilde{\chi}^0_v(\xi')\right)d\xi' + g_T^1(\xi_1,\xi_2) \tag{4.373}$$

L'intégrale dépend uniquement du filtre utilisé pour le passage à l'échelle mésoscopique. Dans le cas de la température, **la constante d'intégration g_T^1 peut être complètement déterminée grâce à la fermeture de la condition de saturation.** Il faut noter que ce n'est pas le cas pour

la vitesse. Cette caractéristique essentielle des écoulements avec changement de phase permet de montrer que le second membre de l'équation précédente s'annule (*cf.* preuve ci-dessous)

$$\lim_{\xi_3 \to 0^\pm} \widetilde{k}^0(\xi_3)\widetilde{T}^1(\xi_3) = 0 \tag{4.374}$$

et on en déduit (sachant que $\widetilde{k}$ est non nulle) **la continuité de la température à l'ordre 1** :

$$\lim_{\xi_3 \to 0^\pm} \widetilde{T}^1(\xi_3) = 0 \tag{4.375}$$

En prenant la différence entre les limites asymptotiques pour chacune des phases, on obtient les relations de sauts :

$$\left[\!\left[\widetilde{k}^0\,\widetilde{T}^1\right]\!\right] = 0 \tag{4.376a}$$

$$\left[\!\left[\widetilde{T}^1\right]\!\right] = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{T}^1(\xi_1, \xi_2, 0) = 0 \tag{4.376b}$$

À l'ordre 1, la température de l'interface reste égale à la température de saturation et ne présente pas de saut. Nous allons discuter ce résultat important plus en détail.

Preuve : En utilisant la symétrie du filtre et la relation $\breve{\overline{\chi}}_l + \breve{\overline{\chi}}_v = 1$, on a $\breve{\overline{\chi}}_v(\xi') = 1 - \breve{\overline{\chi}}_v(-\xi')$. Un changement de variable permet de montrer que :

$$I \hat{=} \int_0^\infty \left(\widetilde{\chi}_v(\xi') - \breve{\overline{\chi}}_v(\xi')\right) d\xi' = \int_0^{-\infty} \left(\widetilde{\chi}_v(\xi') - \breve{\overline{\chi}}_v(\xi')\right) d\xi' \tag{4.377}$$

La valeur de cette intégrale dépend uniquement du filtre utilisé pour passer de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique. En effet, en supposant que le noyau du filtre se décompose $G = G_s G_3$, on a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \left(\widetilde{\chi}_v(\xi) - \breve{\overline{\chi}}_v(\xi)\right) d\xi \\
&= \int_0^\infty \left(\widetilde{\chi}_v(\xi) - \int_{-\infty}^\infty \epsilon \breve{G}_3(\xi')\breve{\chi}_v(\xi - \xi') d\xi'\right) d\xi \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \epsilon \breve{G}_3(\xi')\left(1 - \breve{\chi}_v(\xi - \xi')\right) d\xi' d\xi \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \epsilon \breve{G}_3(\xi')\breve{\chi}_v(\xi' - \xi) d\xi' d\xi \\
&= \int_{-\infty}^\infty \epsilon \breve{G}_3(\xi') \int_0^\infty \breve{\chi}_v(\xi' - \xi) d\xi d\xi' \\
&= \int_{-\infty}^\infty \epsilon \breve{G}_3(\xi') \left[(\xi' - \xi)\breve{\chi}_v(\xi' - \xi)\right]_{\xi=0}^{\xi=\infty} d\xi' \\
&= -\int_{-\infty}^\infty \epsilon \breve{G}_3(\xi')(\xi')\breve{\chi}_v(\xi') d\xi' \hat{=} -\overline{\xi\breve{\chi}_v(\xi)}(0) = -C_1 \\
&= -\int_0^\infty \epsilon \breve{G}_3(\xi')\xi' d\xi'
\end{aligned} \tag{4.378}$$

Cette démonstration suppose que la vapeur se situe aux ξ positifs sans perte de généralité. Elle utilise la normalité du noyau $\epsilon\breve{G}_3$, la propriété $1 - \chi_v(\xi) = \chi_v(-\xi)$ et le fait qu'à ξ' fixé on ait :

$$\lim_{\xi \to \infty} \chi_v(\xi' - \xi) = 0$$

Discussion : Arrêtons-nous un instant sur ce résultat qui peut paraître surprenant au vu des résultats obtenus par Fouillet (2003, annexe C, Éq. (C.24)) et Jamet et Chandesris (2009). Ces travaux appliquent la méthode des DAR à un problème de thermique assez similaire décrit à l'échelle mésoscopique par l'équation suivante :

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(\overline{k}\,\overline{T}_{,3}\right)_{,3} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\epsilon s \tag{4.379}$$

où s représente un terme source interfacial (*i. e.,* non nul uniquement au voisinage de l'interface). À l'ordre 1 dans la région intérieure, cette relation s'intègre

$$\breve{\overline{k}}^0\,\breve{\overline{T}}^1_{,3} = \mathrm{Pe}\breve{S}^1 - \mathrm{Pe}\,\phi \quad \Rightarrow \quad \breve{\overline{T}}^1_{,3} = \frac{1}{\breve{\overline{k}}^0}\mathrm{Pe}\left(\breve{S}^1 - \phi\right) \tag{4.380}$$

où $\breve{S}$ est la primitive de la source s et ϕ désigne le flux d'énergie à travers l'interface. Ce flux peut être déterminé par passage à la limite et en utilisant la condition de raccord (4.277b) :

$$-\,\mathrm{Pe}\,\phi = \widetilde{k}^0\,\widetilde{T}^0_{,3} - \mathrm{Pe}\widetilde{S}^1 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{T}^0_{,3} = \mathrm{Pe}\left(-\phi + \widetilde{S}^1\right)\frac{1}{\widetilde{k}^0} \tag{4.381}$$

En soustrayant les relations (4.380) et (4.381), on a

$$\breve{\overline{T}}^1_{,3} - \widetilde{T}^0_{,3} = \mathrm{Pe}\left(\frac{\breve{S}^1}{\breve{\overline{k}}^0} - \frac{\widetilde{S}^1}{\widetilde{k}^0}\right) - \phi\mathrm{Pe}\left(\frac{1}{\breve{\overline{k}}^0} - \frac{1}{\widetilde{k}^0}\right) \tag{4.382}$$

puis, en intégrant cette relation sur toute la zone de transition, on obtient le saut de température d'ordre 1 à l'interface :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\breve{\overline{T}}^1_{,3} - \left(\xi\widetilde{T}^0_{,3}\right)_{,3}\right)d\xi = \mathrm{Pe}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\breve{S}^1}{\breve{\overline{k}}^0} - \frac{\widetilde{S}^1}{\widetilde{k}^0}\right)d\xi - \phi\mathrm{Pe}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\breve{\overline{k}}^0} - \frac{1}{\widetilde{k}^0}\right)d\xi$$

D'après la condition de raccord (4.276b) et la définition d'une grandeur en excès, on obtient :

$$\left[\!\left[\widetilde{T}^1\right]\!\right] = \mathrm{Pe}\left(\left\|\frac{S^1}{\breve{\overline{k}}^0}\right\|^{ex} - \phi\left\|\frac{1}{\breve{\overline{k}}^0}\right\|^{ex}\right) \tag{4.383}$$

Cette relation montre bien que **dans le cas général le saut de température à l'interface n'est pas nul à l'ordre 1**. Revenons à présent à notre problème. Avec les variables classiques $\breve{\overline{k}}$ et $\breve{\overline{T}}$ reliées à $\breve{\overline{\Theta}}$ par $\breve{\overline{\Theta}} = \breve{\overline{k}}\,\breve{\overline{T}} + \tau_{\mathrm{cond}}$, $\tau_{\mathrm{cond}} \hat{=} \overline{k\breve{T}} - \breve{\overline{k}}\,\breve{\overline{T}}$, le bilan d'énergie à l'ordre 1 (*cf.* Éq. (4.363)) s'écrit :

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(\left(\breve{\overline{k}}^0\,\breve{\overline{T}}^1 + \tau^1_{\mathrm{cond}}\right)_{,3}\right)_{,3} = -\frac{1}{\mathrm{Ja}}\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\chi}}^0_{,3} \tag{4.384}$$

Cette relation correspond bien à la forme générique (4.379) avec les identifications

$$s = -\frac{1}{\epsilon}\left(\breve{\overline{k}}^0_{,3}\,\breve{\overline{T}}^1 + \tau^1_{\mathrm{cond},3}\right)_{,3} - \frac{\mathrm{Pe}}{\epsilon\mathrm{Ja}}\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\chi}}^0_{,3} \tag{4.385a}$$

$$S^1 = -\left(\breve{\overline{k}}^0_{,3}\,\breve{\overline{T}}^1 + \tau^1_{\mathrm{cond},3}\right) - \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\chi}}^0 \tag{4.385b}$$

$$-\phi = f^1_T(\xi_1,\xi_2) = \widetilde{k}^0\widetilde{T}^0_{,3} + \widetilde{m}^0\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\widetilde{\chi}^0 \tag{4.385c}$$

d'après l'équation (4.366). En injectant ces formulations dans l'équation (4.383), on obtient :

$$\left[\!\left[\widetilde{T}^1\right]\!\right] = -\mathrm{Pe}\left(\left\|\frac{\left(\breve{\overline{k}}^0_{,3}\,\breve{\overline{T}}^1 + \tau^1_{\mathrm{cond},3}\right) + \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\chi}}^0}{\breve{\overline{k}}^0}\right\|^{ex} + \left(\widetilde{k}^0\widetilde{T}^0_{,3} + \widetilde{m}^0\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\widetilde{\chi}^0\right)\left\|\frac{1}{\breve{\overline{k}}^0}\right\|^{ex}\right) \tag{4.386}$$

***A priori*, le saut de température d'ordre 1 est non nul à l'interface.** La particularité de notre cas apparaît dans l'équation (4.374) qui repose fortement sur la condition

de saturation de l'interface. Le saut nul à l'ordre 1 obtenu dans la relation (4.376b) traduit **la rupture de l'analogie entre la vitesse et la température. La condition de saturation joue un rôle prépondérant.** On constate en effet que la condition de saut de vitesse tangentielle d'ordre 1 fait apparaître une grandeur en excès associée à l'inverse de la viscosité.

La différence entre notre approche et les méthodes à interfaces diffuses ou les méthodes d'homogénéisation des milieux poreux se situe au niveau de la description mésoscopique. Ici, **le terme sous-maille corrige le champ de température mésoscopique** pour qu'il soit l'image filtrée du champ microscopique alors que dans les autres approches, le champ mésoscopique est solution d'une équation du type :

$$\breve{\overline{T}} = \mathrm{Pe} \int_0^{\xi} \frac{1}{\breve{\overline{k}}^0} \left(S^1 - \phi\right) d\xi' \tag{4.387}$$

Pour étayer cette discussion, nous avons illustré sur les figures 4.12-4.13 la différence entre les deux approches. Le choix de la variable Θ permet d'obtenir un champ symétrique par rapport à l'interface macroscopique correspondant à un excès de masse nul.

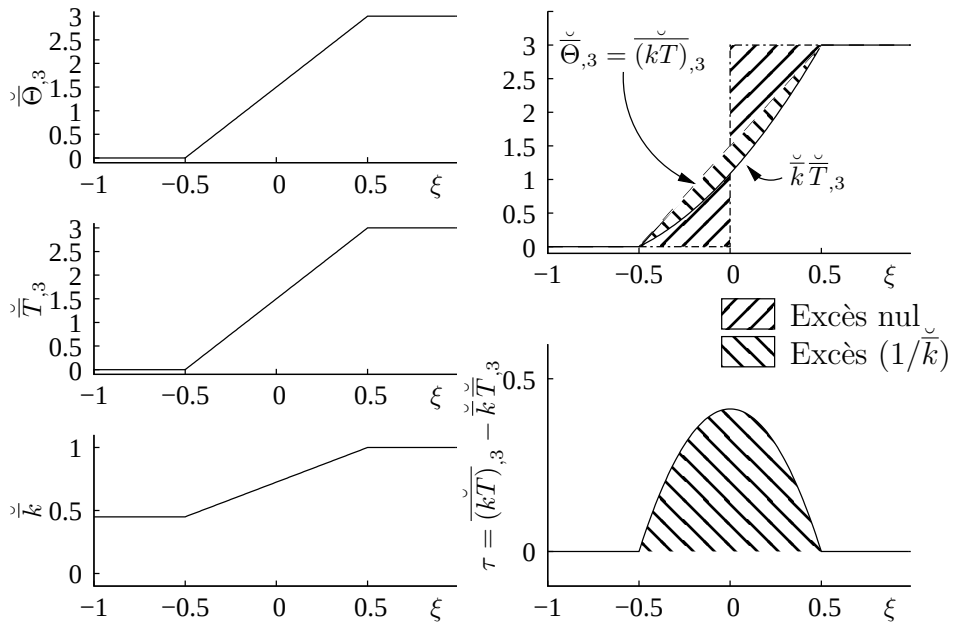


FIGURE 4.12 – Profils de flux thermiques.

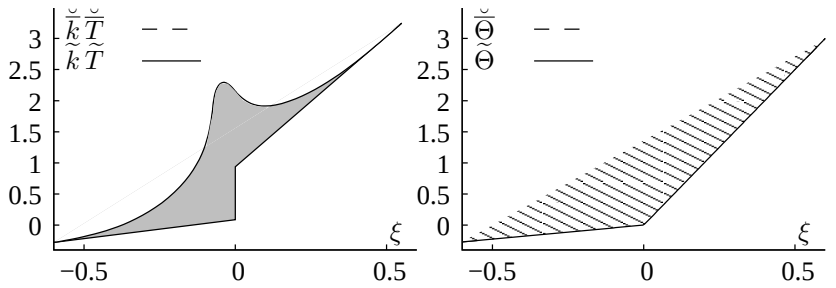


FIGURE 4.13 – Profils de température : source quelconque (à gauche) et source particulière conduisant à un saut de température nul (à droite).

Conclusion – Ordre 1 : L'étude du système intérieur à l'ordre 1 permet d'établir les relations de saut de quantité de mouvement et de flux pour fermer complètement le système à l'ordre dominant :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\rho}^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0\otimes\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0-\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma\right)-\widetilde{C}^0-\frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma}+\widetilde{p}^0\boldsymbol{I}\right]\!\!\right]\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}^0=\frac{1}{\mathrm{We}}\widetilde{\kappa}^0\widetilde{\boldsymbol{n}}^0 \tag{4.388a}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\!\!\left[\widetilde{k}^0\,\widetilde{T}^0_{,3}\right]\!\!\right]=\frac{1}{\mathrm{Ja}}\widetilde{\dot{m}}^0 \tag{4.388b}$$

Cette étude permet aussi d'obtenir des relations sur le saut de vitesse, la vitesse interfaciale macroscopique et la température de l'interface macroscopique à l'ordre 1 :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_l-\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_v=-\left[\!\!\left[1/\rho\right]\!\!\right]\widetilde{\dot{m}}^1\widetilde{\boldsymbol{n}}+\boxed{\left\|\frac{1}{\breve{\overline{\mu}}^0}\right\|^{ex}\widetilde{\tau}^0_i(\alpha)\widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha} \tag{4.389a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_i=\widetilde{\boldsymbol{v}}^1-\widetilde{\dot{m}}^1\widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0+\boxed{(\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{\dot{m}}^0\left[\!\!\left[1/\rho\right]\!\!\right]C_5\widetilde{\boldsymbol{n}}} \tag{4.389b}$$

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}\right]\!\!\right]=\frac{1}{2}\left[\!\!\left[1/\mu\right]\!\!\right]\widetilde{\tau}^0_i(3) \tag{4.389c}$$

$$\widetilde{T}^1_l=\widetilde{T}^1_v=0 \tag{4.389d}$$

Pour fermer le système à l'ordre 1, il faut établir les relations de saut de quantité de mouvement et de flux à l'interface à partir de l'étude du second ordre des bilans de quantité de mouvement et d'énergie. Cette étude est présentée à la section suivante.

4.D.2.3 Ordre 2

À l'ordre 2, on s'intéresse uniquement aux bilans de quantité de mouvement et d'énergie (pour fermer les conditions de raccord sur les flux à l'ordre 1) :

$$\left(\frac{d\left(\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}\right)}{dt}\right)^0+\left[\nabla\cdot\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}\otimes\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma-\breve{\boldsymbol{v}}^m_i\right)+\breve{C}\right)\right]^0+\left(\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}\nabla\cdot\breve{\boldsymbol{v}}^i_m\right)^0=$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\nabla\cdot\breve{\boldsymbol{S}}\right)^0-(\nabla p)^0-\frac{1}{\mathrm{We}}\left(\breve{\overline{\kappa}}_\sigma\nabla\breve{\overline{\chi}}\right)^0 \tag{4.390a}$$

$$\left(\frac{d\left(\breve{\overline{\rho c_pT}}\right)}{dt}\right)^0+\left[\nabla\cdot\left(\breve{\overline{c_pT}}\,\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\breve{\overline{\rho c_pT}}\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma-\breve{\boldsymbol{v}}^m_i\right)+\breve{F}\right)\right]^0+\left(\breve{\overline{\rho c_pT}}\nabla\cdot\breve{\boldsymbol{v}}^i_m\right)^0=$$
$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(\nabla\cdot\breve{\boldsymbol{Q}}\right)^0+\frac{1}{\mathrm{Ja}}\left(\breve{\overline{m}}\,\overline{\delta}_\sigma\right)^0 \tag{4.390b}$$

Aspects dynamiques : Nous souhaitons déterminer la condition de raccord sur le flux de quantité de mouvement à l'interface à l'ordre 1. Pour cela, il faut développer, dans le repère interfacial, le bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 2 et lui retrancher le bilan de quantité de mouvement de la région extérieure à l'ordre 0. En intégrant ensuite sur la zone de transition, on obtient les relations de saut permettant de fermer le bilan de quantité de mouvement macroscopique à l'ordre 1. Le détail des calculs est donné dans l'annexe 4.E. Ils permettent d'établir les relations (4.443) et (4.469) :

$$\widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha\cdot\left[\widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k\otimes(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k-\widetilde{\boldsymbol{v}}_i)-\widetilde{C}_k-\frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k}+\widetilde{p}_k\boldsymbol{I}\right]^1\cdot\nabla\widetilde{\chi}_k= \tag{4.391a}$$
$$\mathrm{At}\left[\!\!\left[1/\rho\right]\!\!\right]\widetilde{\kappa}\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)C_1+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\widetilde{\kappa}\left[\!\!\left[\widetilde{\mu}^0_k\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_k(\alpha)\right]\!\!\right]+C_1\left[\!\!\left[\mu\right]\!\!\right]\left[\!\!\left[1/\mu\right]\!\!\right]\widetilde{\tau}^0_{i,\alpha}(3)-2C'_5\left[\!\!\left[1/\rho\right]\!\!\right]\left(\widetilde{\kappa}\widetilde{\dot{m}}^0\right)_{,\alpha}\left[\!\!\left[\mu\right]\!\!\right]\right]$$

$$\widetilde{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k\otimes(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k-\widetilde{\boldsymbol{v}}_i)-\widetilde{C}_k-\frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k}+\widetilde{p}_k\boldsymbol{I}\right]^1\cdot\nabla\widetilde{\chi}_k=\mathrm{At}\left[\!\!\left[1/\rho\right]\!\!\right]\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\kappa}\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)C_1 \tag{4.391b}$$
$$+(2C_1+C_6)\frac{\left[\!\!\left[\mu\right]\!\!\right]}{\mathrm{Re}}\left(\left[\!\!\left[1/\mu\right]\!\!\right]\nabla_s\cdot\widetilde{\tau}^0_i-2\left[\!\!\left[1/\rho\right]\!\!\right]\widetilde{\mathcal{N}}\right)$$

Aspects thermiques : Cherchons à présent une condition de raccord pour le problème extérieur sur le flux d'énergie à l'interface à l'ordre 1. La présence de gradient requiert la résolution du système intérieur à l'ordre 2. En utilisant les développements du gradient (4.235), de la divergence (4.237) et du laplacien (4.236) dans le repère local ainsi que les solutions obtenues aux ordres précédents $\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^0 = 0$, $\overset{\smile}{\overline{\boldsymbol{v}}}{}^0_\sigma(3)_{,3} = 0$ et $\overset{\smile}{\overline{\boldsymbol{v}}}{}^0_\sigma = (\breve{\boldsymbol{v}}^m_i)^0$, la conservation de l'énergie à l'ordre 0 donnée par la relation (4.390b) devient :

$$\left(\left(\overline{v\beta}^{\,0}\,\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^1 + \breve{E}^1\right)\overset{\smile}{\overline{m}}{}^0 + \breve{F}^1(3)\right)_{,3} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^2_{,3,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^1_{,3}\right] + \frac{1}{\mathrm{Ja}}\overset{\smile}{\overline{m}}{}^1\overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^0_{v,3} + \frac{1}{\mathrm{Ja}}\overset{\smile}{\overline{m}}{}^0\overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^1_{v,3} \tag{4.392}$$

D'après les conditions de raccord (4.276b) et (4.277c)

$$\overset{\smile}{\overline{T}}{}^1(\xi) - \xi\widetilde{T}^0_{,3}(\xi_3) \underset{\pm\infty}{\sim} \widetilde{T}^1(\xi_3) \quad \text{et} \quad \overset{\smile}{\overline{T}}{}^2_{,3}(\xi) - \xi\widetilde{T}^0_{,3,3}(\xi_3) \underset{\pm\infty}{\sim} \widetilde{T}^1_{,3}(\xi_3)$$

il faut transformer l'équation (4.392) pour que $\widetilde{T}^1$ et $\widetilde{T}^1_{,3}$ apparaissent lors de l'intégration. Cette manipulation pragmatique des équations s'explique plus physiquement comme suit. L'équation différentielle (4.392) établit une égalité entre les dérivées des variables intérieures. Son analogue pour le problème extérieur est l'équation différentielle régissant la température extérieure à l'ordre 0. Pour voir apparaître les grandeurs en excès, il faut retrancher l'équation (4.164d) (ordre 0 extérieur) à l'équation (4.392) (ordre 2 intérieur). Sachant qu'à l'interface, on a $\widetilde{T}^0 = 0$, on obtient après manipulation :

$$\begin{aligned}\overset{\smile}{\overline{m}}{}^0\left(\overline{v\beta}^{\,0}\,\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^1 - \xi\,\widetilde{c_p}^{\,0}\widetilde{T}^0_{,3}\Big|_\pm + \breve{E}^1\right)_{,3} + \breve{F}^1(3)_{,3} = \\ \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\left(\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^2_{,3} - \xi\,\widetilde{k}^0\widetilde{T}^0_{,3,3}\Big|_\pm\right)_{,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\left(\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^1 - \xi\,\widetilde{k}^0\widetilde{T}^0_{,3}\Big|_\pm\right)_{,3}\right] + \frac{1}{\mathrm{Ja}}\overset{\smile}{\overline{m}}{}^1\overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^0_{v,3} + \frac{1}{\mathrm{Ja}}\overset{\smile}{\overline{m}}{}^0\overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^1_{v,3}\end{aligned} \tag{4.393}$$

Cette équation est intégrée entre 0 et $\pm\infty$

$$\begin{aligned}\overset{\smile}{\overline{m}}{}^0\left[\overline{v\beta}^{\,0}\,\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^1 - \xi\,\widetilde{c_p}^{\,0}\widetilde{T}^0_{,3}\Big|_\pm + \breve{E}^1\right]_0^{\pm\infty} + \left[\breve{F}^1(3)\right]_0^{\pm\infty} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\Bigg(\left[\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^2_{,3} - \xi\,\widetilde{k}^0\widetilde{T}^0_{,3,3}\Big|_\pm\right]_0^{\pm\infty} \\ - (\kappa_1+\kappa_2)\left[\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^1 - \xi\,\widetilde{k}^0\widetilde{T}^0_{,3}\Big|_\pm\right]_0^{\pm\infty}\Bigg) + \overset{\smile}{\overline{m}}{}^1\frac{1}{\mathrm{Ja}}\left[\overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^0_v\right]_0^{\pm\infty} + \overset{\smile}{\overline{m}}{}^0\frac{1}{\mathrm{Ja}}\left[\overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^1_v\right]_0^{\pm\infty}\end{aligned} \tag{4.394}$$

(car $\overset{\smile}{\overline{m}}{}^0$ ne dépend pas de ξ, donc $\overset{\smile}{\overline{m}}{}^0_{,3} = 0$) pour donner en utilisant les 2 conditions de raccord énoncées précédemment :

$$\begin{aligned}\mathrm{Pe}\,\overset{\smile}{\overline{m}}{}^0\left(\widetilde{c_p}^{\,0}_\pm\widetilde{T}^1_\pm - \overline{v\beta}^{\,0}(0)\overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^1(0) - \breve{E}^1(0) + \breve{F}^1_\pm(3) - \breve{F}^1(3)(0)\right) = \widetilde{k}^0_\pm\widetilde{T}^1_{\pm,3} - \overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^2_{,3}(0) \\ - (\kappa_1+\kappa_2)\left(\widetilde{k}^0_\pm\widetilde{T}^1_\pm - \overset{\smile}{\overline{\Theta}}{}^1(0)\right) + \frac{1}{\mathrm{Ja}}\overset{\smile}{\overline{m}}{}^1\left(\overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^0_{v\pm} - \overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^0_v(0)\right) + \frac{1}{\mathrm{Ja}}\overset{\smile}{\overline{m}}{}^0\left(\overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^1_{v\pm} - \overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^1_v(0)\right)\end{aligned} \tag{4.395}$$

Le modèle $\breve{E}$ s'annule dans les phases. L'ordre 1 de l'indicatrice s'annule dans les phases : $\overset{\smile}{\overline{\chi}}{}^1_{v\pm} = 0$. Les variables intérieures étant continues, les limites à droite et à gauche en 0 s'annulent en prenant la différence des deux équations précédentes et on obtient la relation de saut d'ordre 1 :

$$\mathrm{Pe}\,\widetilde{m}^0\left[\!\left[\widetilde{c_p}^{\,0}\,\widetilde{T}^1\right]\!\right] + \left[\!\left[F^1(3)\right]\!\right] = \left[\!\left[\widetilde{k}^0\widetilde{T}^1_{,3}\right]\!\right] - (\kappa_1+\kappa_2)\left[\!\left[\widetilde{k}^0\widetilde{T}^1\right]\!\right] - \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Ja}}\widetilde{m}^1 \tag{4.396}$$

en utilisant à nouveau le fait que $\overset{\smile}{\overline{m}}{}^0$ soit constante selon ξ. D'après les résultats obtenus pour le saut $\left[\!\left[\widetilde{k}^0\widetilde{T}^1\right]\!\right] = 0$, on obtient le saut recherché :

$$\left[\!\left[\widetilde{m}^0\,\widetilde{c_p}^{\,0}\,\widetilde{T}^1 + F^1(3) - \frac{1}{\mathrm{Pe}}\widetilde{k}^0\widetilde{T}^1_{,3}\right]\!\right] = -\frac{1}{\mathrm{Ja}}\widetilde{m}^1 \tag{4.397}$$

À cause de l'uniformité de la température à l'ordre 0 dans la région intérieure, les modèles sous-maille n'interviennent pas dans ces conditions de raccord et les conditions de raccord sont à nouveau identiques aux conditions microscopiques. Néanmoins, la variable intérieure $\overset{\breve{}}{\Theta}^1$ varie rapidement dans la région intérieure (Fig. 4.9) ce qui se traduit par un excès d'énergie à l'interface introduit par l'opérateur de filtrage. L'ordre de cet excès est supérieur à 1. Pour être plus précis, il faudrait continuer l'analyse et établir les conditions de raccord à l'ordre 2.

Conclusion – Ordre 2 : Les résultats obtenus sont suffisants pour raccorder les descriptions macroscopiques des phases à l'ordre 1. Cette étude d'une partie système intérieur à l'ordre 2 permet d'établir les relations de saut de quantité de mouvement et de flux à l'ordre 1 :

$$\left[\!\!\left[\widetilde{\rho}\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}\otimes\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}-\widetilde{\boldsymbol{v}}_i\right)\right)^1-\widetilde{C}^1-\frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^1}+\widetilde{p}^1\boldsymbol{I}\right]\!\!\right]\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}=\mathrm{At}\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\widetilde{\kappa}\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0C_1+\mathcal{P}_\mu \tag{4.398a}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\!\!\left[\widetilde{k}\,\widetilde{T}^1_{,3}\right]\!\!\right]=\frac{1}{\mathrm{Ja}}\widetilde{\dot{m}}^1 \tag{4.398b}$$

Sachant que $2C_1+C_6=C_1+C_5'$, le terme source de saut de quantité de mouvement par la viscosité $\mathcal{P}_\mu^1$ est donné par :

$$\mathcal{P}_\mu^1\hat{=}\frac{[\![\mu]\!]}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}C_1\left[\!\left[1/\mu\right]\!\right]\widetilde{\tau}^0_{i,\alpha}(3)-2C_5'\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\left(\widetilde{\kappa}\widetilde{\dot{m}}^0\right)_{,\alpha}\\ C_1\left[\!\left[1/\mu\right]\!\right]\nabla_s\cdot\widetilde{\tau}_i^0-2C_5'\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\widetilde{\mathcal{N}}\end{pmatrix}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}\widetilde{\kappa}\left[\!\!\left[\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\alpha)\right]\!\!\right]\\ [\![\mu]\!]\left(-2C_1\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\widetilde{\mathcal{N}}+C_5'\left[\!\left[1/\mu\right]\!\right]\nabla_s\cdot\widetilde{\tau}_i^0\right)\end{pmatrix} \tag{4.399}$$

Ce paragraphe conclut l'étude du système intérieur puisqu'il permet d'appliquer des relations de saut à l'interface avec une précision d'ordre 1. L'interprétation et l'analyse des fermetures obtenues sont données dans le corps du mémoire.

4.E Saut de quantité de mouvement d'ordre 1

L'objectif de cette annexe est de déterminer l'ordre 1 du saut de quantité de mouvement par l'étude du bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 2. Après un bref préambule et une analyse du terme sous-maille de convection (sections 4.E.1 et 4.E.2), nous étudions ce bilan dans chaque direction. Pour décomposer l'analyse, les différences terme à terme de chacun des éléments du bilan de quantité de mouvement (*e. g.,* dérivée temporelle, convection, diffusion, gradient de pression et terme source) sont présentées successivement avant d'être regroupées en une relation de saut à la fin des sections 4.E.3 et 4.E.4.

4.E.1 Préambule/Lemme

Dans la suite de cette section, nous allons avoir besoin de calculer plusieurs intégrales de type $I=\int\left(\overset{\breve{}}{\widetilde{a}}\,\overset{\breve{}}{\widetilde{\phi}}-\widetilde{a}\,\widetilde{\phi}\right)d\xi$, où a est une propriété physique et ϕ une composante de vitesse. On sait que les profils mésoscopiques et macroscopiques de ces quantités sont reliés par les relations

$$\overset{\breve{}}{\widetilde{a}}=\widetilde{a}+s\left(\overset{\breve{}}{\widetilde{\chi}}-\widetilde{\chi}\right) \tag{4.400a}$$

$$\overset{\breve{}}{\widetilde{\phi}}=\widetilde{\phi}+\sigma\left(\overset{\breve{}}{\widetilde{\chi}}-\widetilde{\chi}\right) \tag{4.400b}$$

où $s=[\![a]\!]$ et $\sigma=[\![\phi]\!]$ sont les sauts de chaque quantité. En injectant ces expressions dans l'intégrale I et en développant, on obtient :

$$I=\int\left(s\left(\overset{\breve{}}{\widetilde{\chi}}-\widetilde{\chi}\right)\widetilde{\phi}+\widetilde{a}\sigma\left(\overset{\breve{}}{\widetilde{\chi}}-\widetilde{\chi}\right)+s\sigma\left(\overset{\breve{}}{\widetilde{\chi}}-\widetilde{\chi}\right)^2\right)d\xi \tag{4.401}$$

Sachant que $\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{a}$ sont constantes par morceaux, la relation précédente se simplifie en utilisant les définitions (4.108a) et (4.108f) des paramètres caractéristiques du filtre C_1 et C_6 :

$$I=s\left(\widetilde{\phi}_+-\widetilde{\phi}_-\right)C_1+\sigma\left(\widetilde{a}_+-\widetilde{a}_-\right)C_1+s\sigma C_6=[\![a]\!]\,[\![\phi]\!]\left(2C_1+C_6\right) \tag{4.402}$$

De plus, évaluons l'intégrale $J = \int \left(\breve{\overline{a}} - \widetilde{a}\right) \widetilde{\phi} d\xi$. En injectant la définition (4.400a) dans l'intégrale J, on obtient :

$$J = \int s \left(\breve{\overline{\chi}} - \widetilde{\chi}\right) \widetilde{\phi} d\xi = s \left(\widetilde{\phi}_+ - \widetilde{\phi}_-\right) C_1 = [\![a]\!] [\![\phi]\!] C_1 \tag{4.403}$$

4.E.2 Excès d'ordre 0 du terme sous-maille de convection

4.E.2.1 Sans changement de phase

Si le changement de phase est nul, les vitesses $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}$ et $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma$ sont identiques. En utilisant les définitions de $\breve{C}$ (Éq. (4.90c)) et de $\widetilde{C}$ (Éq. (4.3)), on a :

$$\breve{C} = \overline{\breve{\overline{\rho}} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}} \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}} - \breve{\overline{\rho}} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}} \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}} \tag{4.404a}$$

$$\widetilde{C} = \widetilde{\rho} \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}} - \widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}} \otimes \widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}}\right) \tag{4.404b}$$

À l'ordre dominant, puisque l'opération de filtrage conserve l'ordre dominant (4.475), on a :

$$\breve{C}^0 = \overline{\breve{\overline{\rho}} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}} \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}}^0 - \breve{\overline{\rho}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 = \overline{\breve{\overline{\rho}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0} - \breve{\overline{\rho}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \tag{4.405a}$$

$$\widetilde{C}^0 = \widetilde{\rho}^0 \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}}^0 - \widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}}^0\right) = \widetilde{\rho}^0 \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0}\right) \tag{4.405b}$$

On suppose que le noyau du filtre explicite macroscopique utilisé pour la SGE se décompose en deux parties de la même manière que le filtre implicite : $G^M = G_s^M G_3^M$. Sachant que dans le repère local, la masse volumique $\breve{\overline{\rho}}$ ne dépend que de la coordonnée normale à l'interface alors que la vitesse n'en dépend pas (à l'ordre 0), le découplage de la direction normale et des directions tangentielles se traduit par :

$$\begin{aligned}
\overline{\breve{\overline{\rho}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0}(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi^*) &= \iiint \breve{\overline{\rho}}^0(\xi) G_3^M(\xi^* - \xi) G_s^M(\xi_1^* - \xi_1, \xi_2^* - \xi_2) \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi \\
&= \int \breve{\overline{\rho}}^0(\xi) G_3^M(\xi^* - \xi) d\xi \iint G_s^M(\xi_1^* - \xi_1, \xi_2^* - \xi_2) \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int \breve{\overline{\rho}}^0(\xi) G_3^M(\xi^* - \xi) d\xi \iiint G_3^M(\xi^* - \xi) G_s^M(\xi_1^* - \xi_1, \xi_2^* - \xi_2) \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi \\
&= \breve{\overline{\rho}}^{0\,N}(\xi^*) \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0}(\xi_1^*, \xi_2^*)
\end{aligned}$$

où l'opérateur $\bar{\cdot}^N$ désigne l'opération de filtrage explicite dans la direction normale associée au noyau G_3^M. Par conséquent, l'ordre 0 du terme sous-maille de convection peut être formulé

$$\begin{aligned}
\breve{C}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) &= \breve{\overline{\rho}}^{0\,N}(\xi) \left(\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0}(\xi_1, \xi_2) - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\xi_1, \xi_2)\right) \\
&= \breve{\overline{\rho}}^{0\,N}(\xi) \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0}(\xi_1, \xi_2) - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0}(\xi_1, \xi_2)\right)
\end{aligned} \tag{4.406}$$

en remplaçant la vitesse mésoscopique par sa valeur asymptotique $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0$ (d'après les conditions de raccord) puisque l'ordre 0 de la vitesse ne dépend pas de la distance à l'interface.

Par propriété du produit de convolution, la fonction $\left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0}\right)$ est régulière au voisinage de l'interface. Ses limites à droite et à gauche sont donc identiques. Au voisinage de l'interface, le tenseur $\widetilde{C}^0$ ne dépend de ξ que par l'intermédiaire de la densité. Par conséquent, on a :

$$\int \left(\breve{C}^0 - \widetilde{C}^0\right) d\xi = \int \left(\breve{\overline{\rho}}^{0\,N} - \widetilde{\rho}^0\right) d\xi \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0}\right) \tag{4.407}$$

La propriété (4.497) et l'absence de masse en excès à l'interface impliquent :

$$\int \breve{\overline{\rho}}^{0\,N} d\xi = \int \breve{\overline{\rho}}^0 d\xi = \int \widetilde{\rho}^0 d\xi$$

Par conséquent, à l'ordre 0, l'excès associé au terme sous-maille de convection est nul :

$$\int \left(\breve{C}^0 - \widetilde{C}^0\right) d\xi = 0 \tag{4.408}$$

4.E.2.2 Avec changement de phase

En utilisant les définitions de $\breve{C}$ (Éq. (4.90c)) et de $\widetilde{C}$ (Éq. (4.3)), on a :

$$\breve{C} = \overline{\breve{\overline{\rho}}\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma} - \breve{\overline{\rho}}\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \tag{4.409a}$$

$$\widetilde{C} = \widetilde{\rho}\left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}} - \widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}} \otimes \widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}}\right) \tag{4.409b}$$

À l'ordre dominant, puisque l'opération de filtrage conserve l'ordre dominant (4.475), on a :

$$\breve{C}^0 = \overline{\breve{\overline{\rho}}\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma}^0 - \breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 = \overline{\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0} - \breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \tag{4.410a}$$

$$\widetilde{C}^0 = \widetilde{\rho}^0\left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}}^0 - \widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}}^0\right) = \widetilde{\rho}^0\left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0} - \widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 \otimes \widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}}^0\right) \tag{4.410b}$$

On suppose que le noyau du filtre macroscopique utilisé pour la SGE se décompose $G^M = G_s^M G_3^M$. Sachant que dans le repère local, la masse volumique $\breve{\overline{\rho}}$ ne dépend que de la coordonnée normale à l'interface alors que la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ n'en dépend pas (à l'ordre 0), le découplage de la direction normale et des directions tangentielles se traduit par :

$$\begin{aligned}
\overline{\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0}(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi^*) &= \iiint \breve{\overline{\rho}}^0(\xi) G_3^M(\xi^* - \xi) G_s^M(\xi_1^* - \xi_1, \xi_2^* - \xi_2)\, \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi \\
&= \int \breve{\overline{\rho}}^0(\xi) G_3^M(\xi^* - \xi) d\xi \iint G_s^M(\xi_1^* - \xi_1, \xi_2^* - \xi_2)\, \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int \breve{\overline{\rho}}^0(\xi) G_3^M(\xi^* - \xi) d\xi \iiint G_3^M(\xi^* - \xi) G_s^M(\xi_1^* - \xi_1, \xi_2^* - \xi_2)\, \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi \\
&= \breve{\overline{\rho}}^{0\,N}(\xi^*)\, \overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0}(\xi_1^*, \xi_2^*)
\end{aligned}$$

où l'opérateur $\bar{\cdot}^N$ désigne l'opération de filtrage explicite dans la direction normale associée au noyau G_3^M. Par conséquent, l'ordre 0 du terme sous-maille de convection peut être formulé :

$$\breve{C}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) = \breve{\overline{\rho}}_\sigma^{0\,N}(\xi)\left(\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0}(\xi_1, \xi_2) - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\xi_1, \xi_2)\right)$$

La vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ ne dépend pas de la coordonnée normale à l'interface. Elle peut être remplacée par sa valeur asymptotique en utilisant les conditions de raccord :

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 = \lim_{\xi \to \pm\infty} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0 - \lim_{\xi \to \pm\infty} \breve{\overline{m}}^0 \overline{\boldsymbol{n}}^s \breve{\overline{v}}^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\pm^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}} \widetilde{v}_\pm^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\pm^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}_\pm^0 \tag{4.411}$$

De la même manière que nous avons négligé les corrélations sous-maille entre le taux de changement de phase et la normale, on propose de les négliger à l'échelle macroscopique :

$$\begin{aligned}
\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0} - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 \otimes \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 &= \overline{\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0\right) \otimes \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0\right)} - \overline{\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0\right)} \otimes \overline{\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0\right)} \\
&= \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} - \left(\overline{\widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0} - \overline{\widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} + \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} \otimes \overline{\widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0}\right) \\
&\quad + \overline{\widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0 \otimes \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0} - \overline{\widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0} \otimes \overline{\widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0} \\
&\approx \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0}
\end{aligned} \tag{4.412}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\breve{C}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) = \overline{\breve{\rho}}^{0\,N}(\xi)\left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0}(\xi_1, \xi_2) - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0}(\xi_1, \xi_2)\right) \tag{4.413}$$

Par propriété du produit de convolution, la fonction $\left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0}\right)$ est régulière au voisinage de l'interface même si le champ $\widetilde{\boldsymbol{v}}^0$ est discontinu. Ses limites à droite et à gauche sont donc

identiques. Au voisinage de l'interface, le tenseur $\widetilde{C}^0$ ne dépend donc de ξ que par l'intermédiaire de la masse volumique qui est discontinue. Par conséquent, on a :

$$\int \left(\breve{C}^0 - \widetilde{C}^0\right) d\xi = \int \left(\overline{\breve{\rho}^0}^N - \widetilde{\rho}^0\right) d\xi \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^0} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0} \otimes \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0}\right) \tag{4.414}$$

La propriété (4.497) et l'absence de masse en excès à l'interface impliquent :

$$\int \overline{\breve{\rho}^0}^N d\xi = \int \breve{\rho}^0 d\xi = \int \widetilde{\rho}^0 d\xi$$

Par conséquent, à l'ordre 0, l'excès associé au terme sous-maille de convection est nul :

$$\int \left(\breve{C}^0 - \widetilde{C}^0\right) d\xi = 0 \tag{4.415}$$

4.E.3 Directions tangentielles

Nous souhaitons déterminer la condition de raccord sur le flux de quantité de mouvement à l'interface à l'ordre 1, dans une direction tangentielle. Pour cela, il faut être capable d'exprimer à partir des variables monofluides macroscopiques la quantité suivante

$$\widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \left[\widetilde{\rho}_k \, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i) - \widetilde{C}_k - \frac{1}{\mathrm{Re}} \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} + \widetilde{p}_k \boldsymbol{I}\right]^1 \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \quad \text{(somme sur } k\text{)} \tag{4.416}$$

D'après les relations (4.316) et (4.192) donnant respectivement le saut de vitesse et la vitesse interfaciale aux ordres 0 et 1,

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0 \quad \text{et} \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}_l^0 - \widetilde{\boldsymbol{v}}_v^0 = -\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^1 = \widetilde{\boldsymbol{v}}^1 - \widetilde{\dot{m}}^1 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0 + \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\kappa}^0 \widetilde{\dot{m}}^0 C_5 \widetilde{\boldsymbol{n}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}_l^1 - \widetilde{\boldsymbol{v}}_v^1 = -\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}}^1 \widetilde{\boldsymbol{n}} + \left\| \frac{1}{\breve{\overline{\mu}}^0} \right\|^{ex} \widetilde{\tau}_i^0(\alpha) \widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha$$

on montre que :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \left(\widetilde{\rho}_k \, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i)\right)^1 \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k &= -\left(\widetilde{\rho}_k \, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k(\alpha) \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k(3) - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i(3)\right)\right)^1 \widetilde{\delta}^i \\
&= \left(\left[\!\left[\widetilde{\rho}_k^0 \, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(\alpha) \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3) - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0(3)\right)\right]\!\right] + \left[\!\left[\widetilde{\rho}_k^0 \, \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha) \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(3) - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^1(3)\right)\right]\!\right]\right) \widetilde{\delta}^i \\
&= \left(\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(\alpha)\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}}^0 + \left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}}^1 - \left[\!\left[\widetilde{\rho}_k \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)\right]\!\right] \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\kappa}^0 \widetilde{\dot{m}}^0 C_5\right) \widetilde{\delta}^i \\
&= \widetilde{\dot{m}}^0 \left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\alpha)\right]\!\right] \widetilde{\delta}^i - \left[\!\left[\rho\right]\!\right] \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\kappa}^0 \widetilde{\dot{m}}^0 C_5 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) \qquad (4.417) \\
&= \left\| \frac{1}{\breve{\overline{\mu}}^0} \right\|^{ex} \widetilde{\tau}_i^0(\alpha) \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\delta}^i - \left[\!\left[\rho\right]\!\right] \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\kappa}^0 \widetilde{\dot{m}}^0 C_5 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on cherche à fermer le terme suivant :

$$-\left[\!\left[\rho\right]\!\right] \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\kappa}^0 \widetilde{\dot{m}}^0 C_5 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) + \left[\!\left[\widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\alpha) - \widetilde{C}_{\alpha 3}^1 - \frac{\widetilde{\mu}^0}{\mathrm{Re}} \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\alpha)_{,3} + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^1(3)_{,\alpha} - \kappa_\alpha \widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\alpha)\right)\right]\!\right] \widetilde{\delta}^i \tag{4.418}$$

d'après la définition (4.231d) du gradient en coordonnées généralisées et la relation (4.192) de saut de vitesse à l'ordre 1 : $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^j(\alpha) = \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^j(\alpha)$, $j = 0$ ou 1.

Pour déterminer cette condition de raccord, il faut intégrer le bilan (4.390a) de quantité de mouvement d'ordre 2 (projeté suivant chaque direction tangente) dans la région intérieure après lui avoir retranché l'ordre 0 de la région extérieure. Ces calculs permettent d'aboutir à la relation de saut macroscopique (4.443).

L'équation de quantité de mouvement se projette sur une direction tangente α comme suit :

$$\left(\frac{d\breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}(\alpha)}{dt}\right)^0 + \left[\nabla\cdot\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}\otimes\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right) + \breve{C}\right)\right]^0(\alpha) + \left(\breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}(\alpha)\nabla\cdot\breve{\boldsymbol{v}}_m^i\right)^0 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\nabla\cdot\breve{\boldsymbol{S}}\right)^0(\alpha) - \breve{\overline{p}}^0_{,\alpha} \tag{4.419}$$

D'après la solution obtenue à l'ordre dominant $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)^0 = 0$ et en explicitant chaque terme de l'équation (4.419) dans les directions tangentes, on a :

$$\mathbf{I} = \frac{d\breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) + \breve{B}^0(\alpha)\right) \tag{4.420a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{II} = &\left(C^0_{\alpha1,1} + C^0_{\alpha2,2} + C^1_{\alpha3,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,C^0_{\alpha3} + \kappa_\alpha\boxed{\left(C^0_{\alpha3} - C^0_{3\alpha}\right)}\right)\\ &+\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}\otimes\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)\right)^0_{\alpha1,1}\\ &+\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}\otimes\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)\right)^0_{\alpha2,2}\\ &+\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}\otimes\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)\right)^1_{\alpha3,3}\\ &-(\kappa_1+\kappa_2)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}\otimes\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)\right)^0_{\alpha3}\\ &+\kappa_\alpha\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}\otimes\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)\right)^0_{\alpha3}\\ &-\kappa_\alpha\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s + \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}\otimes\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)\right)^0_{3\alpha}\end{aligned} \tag{4.420b}$$

$$\mathbf{III} = \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\left[\left(\breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)^1(3)_{,3} + \left(\breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)^0(1)_{,1} + \left(\breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)^0(2)_{,2} - \left(\breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)^0(3)\,(\kappa_1+\kappa_2)\right] \tag{4.420c}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{IV} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(&S^1_{\alpha1,1} + S^1_{\alpha2,2} + S^2_{\alpha3,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,S^1_{\alpha3} + \boxed{\kappa_\alpha\left(S^1_{\alpha3} - S^1_{3\alpha}\right)} + \mathcal{F}_\alpha(S^0)\\ &+\mathcal{T}^1_{\alpha1,1} + \mathcal{T}^1_{\alpha2,2} + \mathcal{T}^2_{\alpha3,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\mathcal{T}^1_{\alpha3} + \boxed{\kappa_\alpha\left(\mathcal{T}^1_{\alpha3} - \mathcal{T}^1_{3\alpha}\right)} + \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{T}^0)\Big)\end{aligned} \tag{4.420d}$$

$$\mathbf{V} = \breve{\overline{p}}^1_{,\alpha} \tag{4.420e}$$

où $\mathcal{F}_\alpha$ est une fonction linéaire telle que $\mathcal{F}_\alpha(0) = 0$. Les termes encadrés sont nuls car les tenseurs S^1 et C^0 sont symétriques. D'après l'équation (4.310), l'ordre 0 de la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma$ est indépendant de la coordonnée normale à l'interface. Par conséquent, l'ordre 0 du tenseur de diffusion est nul : $\breve{\boldsymbol{S}}^0 = \mathbf{0}$. Par définition, on a aussi : $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\overline{\boldsymbol{n}}^s\right)^1_{i3} = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(i)$ et $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\overline{\boldsymbol{n}}^s\right)^i_{3\alpha} = 0$.
De plus, l'ordre 0 du tenseur $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ est nul par construction. Enfin, on a : $\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m0}(\alpha) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)$ et $\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m0}(3) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{v}}^0$.

En considérant ces différents éléments, les termes **II** à **IV** se simplifient :

$$\begin{aligned}\mathbf{II} = &\,C^0_{\alpha1,1} + C^0_{\alpha2,2} + C^1_{\alpha3,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,C^0_{\alpha3}\\ &+\left[\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}(\alpha)\breve{\overline{m}} + \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}(\alpha)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m(3)\right)\right]^1_{,3}\\ &-(\kappa_1+\kappa_2)\left[\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}(\alpha)\breve{\overline{m}} + \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}(\alpha)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m(3)\right)\right]^0\\ &+\kappa_\alpha\left[\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}(\alpha)\breve{\overline{m}} + \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}(\alpha)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m(3)\right)\right]^0\end{aligned} \tag{4.421a}$$

$$\mathbf{III} = \breve{\overline{\rho}}\breve{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)\left[\left(\breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)^1(3)_{,3} - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)_{,3} + \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{v}}^0\,(\kappa_1+\kappa_2)\right] \tag{4.421b}$$

$$\mathbf{IV} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(S^1_{\alpha\alpha,\alpha} + S^1_{\alpha\beta,\beta} + S^2_{\alpha3,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,S^1_{\alpha3} + \mathcal{T}^2_{\alpha3,3} + \mathcal{T}^1_{\alpha\alpha,\alpha} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\mathcal{T}^1_{\alpha3}\right) \tag{4.421c}$$

Le terme **III** a été transformé en utilisant l'équation (4.318).

Réécrivons **II** sachant que $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m(3)\right)^0 = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{II} = &\,C^0_{\alpha1,1} + C^0_{\alpha2,2} + C^1_{\alpha3,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,C^0_{\alpha3} - (\kappa_1+\kappa_2-\kappa_\alpha)\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\breve{\overline{m}}^0\\ &+\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\breve{\overline{m}}^1 + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)\breve{\overline{m}}^0\right)_{,3} + \left(\breve{\overline{\rho}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m(3)\right)^1\right)_{,3}\end{aligned} \tag{4.422a}$$

En écrivant chaque composante du tenseur de diffusion dans le repère associé à l'interface, on a :

$$
\begin{aligned}
S^2_{\alpha 3} &= \breve{\overline{\mu}}^0 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^2_\sigma(\alpha)_{,3} - \xi\kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha) \right) \\
&\quad + \breve{\overline{\mu}}^1 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3} - \xi\kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha) \right) + \breve{\overline{\mu}}^2 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3} \\
S^1_{\alpha 3} &= \breve{\overline{\mu}}^0 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3} - \xi\kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha) \right) + \breve{\overline{\mu}}^1 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3} \\
S^1_{\alpha\alpha,\alpha} &= 2\breve{\overline{\mu}}^0 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,\alpha} - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)\kappa_\alpha \right)_{,\alpha} \\
S^1_{\alpha\beta,\beta} &= \breve{\overline{\mu}}^0 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,\beta} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\beta)_{,\alpha} \right)_{,\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{T}^2_{\alpha 3,3} + \mathcal{T}^1_{\alpha\alpha,\alpha} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\mathcal{T}^1_{\alpha 3} = \breve{\overline{\mu}}\breve{v}^0_{,3}\breve{\overline{m}}^1_{,\alpha} + \breve{\overline{\mu}}\breve{v}^0 \left(\breve{\overline{m}}^1_{,\alpha,3} - 2\left(\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha}\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha} \right) + \breve{\overline{\mu}}\breve{v}^1\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha,3} + \breve{\overline{\mu}}\breve{v}^1_{,3}\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha}
$$

Par conséquent, le terme **IV** se développe :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{IV} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Bigg[& \Bigg(\breve{\overline{\mu}}^0 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^2_\sigma(\alpha)_{,3} - \xi\kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha) \right) \\
& + \breve{\overline{\mu}}^1 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3} \boxed{-\xi\kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3}} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha) \right) \boxed{+\breve{\overline{\mu}}^2 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3}} \Bigg)_{,3} \\
& \breve{\overline{\mu}}\breve{v}^0_{,3}\breve{\overline{m}}^1_{,\alpha} + \breve{\overline{\mu}}\breve{v}^0 \left(\breve{\overline{m}}^1_{,\alpha,3} - 2\left(\breve{\overline{m}}^0\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha} \right) + \breve{\overline{\mu}}\breve{v}^1\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha,3} + \breve{\overline{\mu}}\breve{v}^1_{,3}\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha} \\
& - (\kappa_1+\kappa_2)\,\breve{\overline{\mu}}^0 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3} \boxed{-\xi\kappa_\beta \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3}} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha) \right) \boxed{-(\kappa_1+\kappa_2)\,\breve{\overline{\mu}}^1 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3}} \\
& \boxed{+4\xi\kappa_\alpha^2 \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3}} + \breve{\overline{\mu}}^0 \left(2\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,\alpha,\alpha} - 2\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)\kappa_\alpha \right)_{,\alpha} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,\beta,\beta} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\beta)_{,\alpha,\beta} \right) \Bigg]
\end{aligned}
\tag{4.423}
$$

sans la convention de sommation sur l'indice α. Nous avons montré précédemment que la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)$ est indépendante de la coordonnée ξ ce qui implique que : $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,3} = 0$. Par conséquent, les termes encadrés disparaissent. Par souci de clarté, on introduit les fonctions :

$$
\mathcal{H} \hat{=} \breve{\overline{\mu}}^1 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \hat{=} 2\left(\breve{\overline{m}}^0\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} + (\kappa_1+\kappa_2)\,\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha} \tag{4.424}
$$

À chacun des termes **I** à **V** de l'équation (4.419) correspond un équivalent asymptotique de la région extérieure donné par l'équation (4.164b). Les quantités en excès sont le résultat de l'intégration de la différence de ces deux équations. Prenons chaque terme séparément.

Terme I : évolution temporelle. La différence entre la solution intérieure et la solution extérieure est donnée par :

$$
\breve{\mathbf{I}} - \widetilde{\mathbf{I}} = \frac{d}{dt}\left(\breve{\overline{\rho}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) + \breve{B}^0(\alpha) \right) - \frac{d}{dt}\left(\widetilde{\rho}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) \right) \tag{4.425}
$$

L'intégrale sur la zone de transition de l'évolution temporelle de la quantité de mouvement se réduit à 0 en découplant les directions normales et tangentielles :

$$
\int \left(\breve{\mathbf{I}} - \widetilde{\mathbf{I}} \right) d\xi = \frac{d}{dt}\left(\int \left(\breve{\overline{\rho}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) - \widetilde{\rho}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) \right) d\xi + \int \breve{B}^0(\alpha) d\xi \right) = 0 \tag{4.426}
$$

En effet, **la première intégrale** est évaluée à l'aide du profil uniforme de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)$ obtenu à l'équation (4.310) et du choix $\|\rho\|^{ex} = 0$:

$$
\int \left(\breve{\overline{\rho}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) - \widetilde{\rho}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) \right) d\xi = \int \left(\breve{\overline{\rho}}^0 - \widetilde{\rho}^0 \right) d\xi \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) = 0
$$

De plus, en décomposant le noyau du filtre $G = G_s G_3$ pour distinguer la direction normale des directions tangentielles et en introduisant la notion de filtre surfacique, **la 2e intégrale**

représentant l'excès du terme sous-maille $\breve{B}^0(\alpha)$ se réduit à 0

$$\left\|\breve{B}^0\right\|^{ex} = \int \breve{B}^0 d\xi = \int \left(\overline{\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma} - \overline{\breve{\overline{\rho}}^0}\,\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma}\right) d\xi = \int \left(\overline{\overline{\breve{\overline{\rho}}^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma}^{n}}^{\sigma} - \overline{\overline{\breve{\overline{\rho}}^0}^{n}}^{\sigma}\,\overline{\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma}^{n}}^{\sigma}\right) d\xi$$
$$= \int \left(\overline{\breve{\overline{\rho}}^0}^{n}\,\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma}^{\sigma} - \overline{\breve{\overline{\rho}}^0}^{n}\,\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma}^{\sigma}\right) d\xi = 0$$

car $\breve{\overline{\rho}}^0$ ne dépend pas des coordonnées tangentielles et l'ordre 0 de la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma$ est indépendant de ξ (Éq. (4.297)) : $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma$. **Ce résultat traduit le découplage entre les directions tangentielles et la direction normale.** L'ordre 0 du terme sous-maille $\breve{B}$ est *in fine* nul en tout point, ce qui est indispensable pour assurer la convergence de la solution vers la solution microscopique lorsque la taille du filtre ϵ tend vers 0.

Termes II et III : convection. La différence entre la solution intérieure et la solution extérieure est donnée par :

$$\begin{aligned}\breve{\mathbf{I}}\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{I}}\mathbf{I} + \breve{\mathbf{I}}\mathbf{I}\mathbf{I} = {} & C^0_{\alpha1,1} + C^0_{\alpha2,2} + C^1_{\alpha3,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,C^0_{\alpha3} - \left(\widetilde{C}^0_k\right)_{\alpha1,1} - \left(\widetilde{C}^0_k\right)_{\alpha2,2} - \left(\widetilde{C}^0_k\right)_{\alpha3,3} + \widetilde{\kappa}\left(\widetilde{C}^0_k\right)_{3\alpha} \\ & + \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\breve{\overline{m}}^1 + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)\breve{\overline{m}}^0\right)_{,3} + \left(\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}^m_i(3)\right)^1\right)_{,3} \\ & + \breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\left[\left(\breve{\boldsymbol{v}}^m_i\right)^1(3)_{,3} - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)_{,3} + \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{v}}^0\,(\kappa_1+\kappa_2)\right] \\ & - (\kappa_1+\kappa_2-\kappa_\alpha)\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\breve{\overline{m}}^0 - \widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_{k,3}(\alpha) - \widetilde{\kappa}_\alpha\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(\alpha)\end{aligned}$$

Après manipulation pour faire apparaître les conditions de raccord

$$\begin{aligned}\breve{\mathbf{I}}\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{I}}\mathbf{I} + \breve{\mathbf{I}}\mathbf{I}\mathbf{I} = {} & \left(\breve{\overline{m}}^1\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) + \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha) - \xi\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_{k,3}(\alpha)\right)_{,3} \\ & + \breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0_{,3}(\alpha)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}^m_i(3)\right)^1 + \breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{v}}^0\,(\kappa_1+\kappa_2) \\ & + \left(\breve{C}^0_{\alpha1} - \widetilde{C}^0_{\alpha1}\right)_{,1} + \left(\breve{C}^0_{\alpha2} - \widetilde{C}^0_{\alpha2}\right)_{,2} + \left(\breve{C}^1_{\alpha3} - \xi\widetilde{C}^0_{\alpha3,3}\right)_{,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\left(\breve{C}^0_{\alpha3} - \widetilde{C}^0_{3\alpha}\right) \\ & - (\kappa_1+\kappa_2)\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\breve{\overline{m}}^0 + \kappa_\alpha\left(\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) - \widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(\alpha)\right)\end{aligned}$$

on obtient en intégrant :

$$\begin{aligned}\int\left(\breve{\mathbf{I}}\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{I}}\mathbf{I} + \breve{\mathbf{I}}\mathbf{I}\mathbf{I}\right)d\xi = {} & \left(\widetilde{\dot{m}}^1\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(\alpha)\right]\!\right] + \widetilde{\dot{m}}^0\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_k(\alpha)\right]\!\right]\right) + \int\left(\left(\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\right)_{,3}\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}^m_i(3)\right)^1\right)d\xi \\ & + \left[\!\left[\widetilde{C}^1_{\alpha3}\right]\!\right] + \int\left(\breve{C}^0_{\alpha1} - \widetilde{C}^0_{\alpha1}\right)_{,1}d\xi + \int\left(\breve{C}^0_{\alpha2} - \widetilde{C}^0_{\alpha2}\right)_{,2}d\xi - (\kappa_1+\kappa_2)\int\left(\breve{C}^0_{\alpha3} - \widetilde{C}^0_{3\alpha}\right)d\xi \\ & + (\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{\dot{m}}^0\int\left(\breve{\overline{v}}^0\,\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)\right)d\xi + \kappa_\alpha\int\left(\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) - \widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(\alpha)\right)d\xi\end{aligned}$$

Notons que : $\left[\!\left[\widetilde{\dot{m}}\widetilde{\boldsymbol{v}}_k(\alpha)\right]\!\right]^1 = \widetilde{\dot{m}}^1\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(\alpha)\right]\!\right] + \widetilde{\dot{m}}^0\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_k(\alpha)\right]\!\right]$.

Rappelons que la quantité de mouvement mésoscopique d'ordre 0 ($\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)$) est donnée par :

$$\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) \hat{=} \breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) + \breve{B}^0(\alpha) \tag{4.427}$$

Comme $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)$ et $\breve{\overline{m}}^0$ sont indépendants de ξ et comme $\breve{B}^0(\alpha)$ est nul, les relations

$$\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)_{,3} = \breve{\overline{\rho}}^0_{,3}\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) = -\mathrm{At}\breve{\overline{\chi}}^0_{,3}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)$$
$$\breve{\overline{v}}^0\,\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) = -\left(1 - \breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{v}}^0\right)\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)$$

permettent d'évaluer les intégrales

$$\int \left(\left(\overline{\rho \breve{\boldsymbol{v}}}^{0}(\alpha) \right)_{,3} \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}(3) - \breve{\boldsymbol{v}}_{i}^{m}(3) \right)^{1} \right) d\xi = -\mathrm{At} \widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}(\alpha) \int \breve{\overline{\chi}}_{,3}^{0} \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}(3) - \breve{\boldsymbol{v}}_{i}^{m}(3) \right)^{1} d\xi$$

$$= \mathrm{At} \widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}(\alpha) \int \breve{A}^{0} d\xi \text{ d'après l'Éq. (4.333)} \tag{4.428a}$$

$$\text{et} \quad \int \left(\breve{\overline{v}}^{0} \, \overline{\rho \breve{\boldsymbol{v}}}^{0}(\alpha) - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(\alpha) \right) d\xi = -\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}(\alpha) \int \left(1 - \breve{\overline{\rho}}^{0} \, \breve{\overline{v}}^{0} \right) d\xi$$

$$= \widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}(\alpha) \left(2C_1 + C_6 \right) \mathrm{At} \left[\!\left[1/\rho \right]\!\right] \text{ d'après l'Éq. (4.453)}$$

$$= -\left(\kappa_1 + \kappa_2 \right) \widetilde{\dot{m}}^{0} \left[\!\left[1/\rho \right]\!\right] C_5'' \text{ d'après l'Éq. (4.331)} \tag{4.428b}$$

En utilisant les définitions de $\breve{C}$ (Éq. (4.90c)) et de $\widetilde{C}$ (Éq. (4.3)), ainsi que l'indépendance de $\breve{\overline{\rho}}$ aux coordonnées tangentielles et l'indépendance de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}^{0} = \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\sigma}^{0}$ à la coordonnée normale, on montre à l'annexe 4.E.2 que la décomposition du filtre en la succession d'un filtre surfacique et d'un filtre normal permet d'aboutir à (*cf.* Éq. (4.415)) :

$$\int \left(\breve{C}^{0} - \widetilde{C}^{0} \right) d\xi = \mathcal{O}(\epsilon^{2}) \tag{4.429}$$

Par conséquent, la contribution de l'ordre 0 du terme sous-maille de convection est négligeable à l'ordre considéré ici. Enfin, la dernière intégrale est nulle car le taux de changement de phase et les composantes tangentielles de la vitesse sont indépendantes de ξ à l'ordre 0 :

$$\int \left(\breve{\overline{m}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(\alpha) - \widetilde{\dot{m}}^{0} \widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}(\alpha) \right) d\xi = 0 \tag{4.430}$$

Finalement, on obtient :

$$\int \left(\breve{\mathbf{I}} - \widetilde{\mathbf{I}} + \breve{\mathbf{III}} \right) d\xi = \left[\!\left[\widetilde{\dot{m}}^{0} \widetilde{\boldsymbol{v}}^{1}(\alpha) + \widetilde{C}_{\alpha 3}^{1} \right]\!\right] + \mathrm{At} \left[\!\left[1/\rho \right]\!\right] \left(\kappa_1 + \kappa_2 \right) \widetilde{\dot{m}}^{0} \widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}(\alpha) \left(2C_1 + C_6 + C_5'' \right)$$

Terme IV : diffusion. Sachant que $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}^{0}(\alpha)_{,3} = 0$ et $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}^{i}(\alpha) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{i}(\alpha)$, le terme **IV** se développe :

$$\begin{aligned}
\mathbf{IV} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Bigg[& \left(\breve{\overline{\mu}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{2}(\alpha)_{,3} - \xi \kappa_{\alpha} \breve{\overline{\mu}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}(\alpha)_{,3} + \breve{\overline{\mu}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}^{1}(3)_{,\alpha} + \kappa_{\alpha} \breve{\overline{\mu}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}(\alpha) \right)_{,3} + \mathcal{H}_{,3} \\
& \breve{\overline{\mu v}}_{,3}^{0} \breve{\overline{m}}_{,\alpha}^{1} + \breve{\overline{\mu v}}^{0} \left(\breve{\overline{m}}_{,\alpha,3}^{1} - \mathcal{M} \right) + \left(\breve{\overline{\mu v}}^{1} \breve{\overline{m}}_{,\alpha}^{0} \right)_{,3} \\
& - \left(\kappa_1 + \kappa_2 \right) \breve{\overline{\mu}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}(\alpha)_{,3} - \left(\kappa_1 + \kappa_2 \right) \breve{\overline{\mu}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}^{0}(3)_{,\alpha} - \left(\kappa_1 + \kappa_2 \right) \kappa_{\alpha} \breve{\overline{\mu}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(\alpha) \\
& + 2 \breve{\overline{\mu}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}^{0}(\alpha)_{,\alpha,\alpha} - 2 \breve{\overline{\mu}}^{0} \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}^{0}(3) \kappa_{\alpha} \right)_{,\alpha} + \breve{\overline{\mu}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}^{0}(\alpha)_{,\beta,\beta} + \breve{\overline{\mu}}^{0} \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}^{0}(\beta)_{,\alpha,\beta} \Bigg]
\end{aligned} \tag{4.431}$$

La différence entre la solution intérieure et la solution extérieure est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\mathbf{I}\breve{\mathbf{V}} - \widetilde{\mathbf{IV}}\right) = & \left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^2(\alpha)_{,3}\right)_{,3} - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3,3} + \mathcal{H}_{,3} \\
& - \left(\xi\kappa_\alpha \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)_{,3}\right)_{,3} + \kappa_\alpha \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3} \\
& + \left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(3)_{,\alpha}\right)_{,3} - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)_{,3,\alpha} \\
& + \left(\kappa_\alpha \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)\right)_{,3} - \widetilde{\mu}_k^0 \left(\kappa_\alpha \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)\right)_{,3} \\
& - (\kappa_1 + \kappa_2)\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)_{,3} - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3}\right) \\
& - (\kappa_1 + \kappa_2)\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)_{,\alpha} - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)_{,\alpha}\right) \\
& - (\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_\alpha\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)\right) \\
& + 2\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)_{,\alpha,\alpha} - 2\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,\alpha,\alpha} \\
& - 2\breve{\overline{\mu}}^0 \left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} + 2\widetilde{\mu}_k^0 \left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} \\
& + \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)_{,\beta,\beta} - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,\beta,\beta} \\
& + \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\beta)_{,\alpha,\beta} - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\beta)_{,\alpha,\beta} \\
& \left(\breve{\overline{\mu v}}^0 \breve{\overline{m}}^1_{,\alpha}\right)_{,3} - \breve{\overline{\mu v}}^0 \mathcal{M} + \left(\breve{\overline{\mu v}}^1 \breve{\overline{m}}^0_{,\alpha}\right)_{,3}
\end{aligned}
\tag{4.432}
$$

Sachant que $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}} - \breve{\overline{m}}\, \overline{\boldsymbol{n}}^s \breve{\overline{v}}$, on a :

$$
\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma,\alpha}^1(3) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{,\alpha}^1(3) - \left(\breve{\overline{m}}^1_{,\alpha} \breve{\overline{v}}^0 + \breve{\overline{m}}^0_{,\alpha} \breve{\overline{v}}^1\right) \tag{4.433a}
$$

$$
\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma,\alpha}^0(3) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{,\alpha}^0(3) - \breve{\overline{m}}^0_{,\alpha} \breve{\overline{v}}^0 \tag{4.433b}
$$

Après manipulation pour faire apparaître les conditions de raccord (sachant que la viscosité est indépendante des coordonnées tangentes), on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\mathbf{I}\breve{\mathbf{V}} - \widetilde{\mathbf{IV}}\right) = & \left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^2(\alpha)_{,3} - \xi\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3,3}\right)_{,3} + \mathcal{H}_{,3} \\
& - \kappa_\alpha \left(\xi\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)_{,3} - \xi\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3}\right)_{,3} \\
& + \left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3)_{,\alpha} - \xi\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)_{,3,\alpha}\right)_{,3} \\
& + \kappa_\alpha \left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha) - \xi\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3}\right)_{,3} \\
& - (\kappa_1 + \kappa_2)\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha) - \xi\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3}\right)_{,3} \\
& - (\kappa_1 + \kappa_2)\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\right)_{,\alpha} \\
& - (\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_\alpha\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)\right) \\
& + 2\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)\right)_{,\alpha,\alpha} \\
& - 2\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)\kappa_\alpha - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} \\
& + \left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)\right)_{,\beta,\beta} \\
& + \left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\beta) - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\beta)\right)_{,\alpha,\beta} \\
+ \left(\breve{\overline{m}}^1_{,\alpha}\left(\breve{\overline{\mu v}}^0 - \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{v}}^0\right)\right)_{,3} & - \left(\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha} \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{v}}^1\right)_{,3} - \mathcal{M}\left(\breve{\overline{\mu v}}^0 - \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{v}}^0\right)
\end{aligned}
\tag{4.434}
$$

Sachant que $\breve{\overline{m}}^0$ et la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)$ ne dépendent pas de ξ (Éq. (4.311)) on obtient en intégrant

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Re}\left(\breve{\mathbf{IV}} - \widetilde{\mathbf{IV}}\right) d\xi = &\left[\!\!\left[\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(\alpha)_{,3} + \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(\alpha)\right]\!\!\right] - (\kappa_1+\kappa_2)\left[\!\!\left[\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(\alpha)\right]\!\!\right] + [\![\mathcal{H}]\!] \\ &- (\kappa_1+\kappa_2)\int \left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\right)_{,\alpha} d\xi \\ &- 2\int \left(\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\right)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} d\xi \\ &\boxed{+\int \left(\breve{\overline{\mu}}^0 - \widetilde{\mu}_k^0\right) d\xi \left(2\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,\alpha,\alpha} + \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\beta)_{,\beta,\beta} + \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\beta)_{,\alpha,\beta} - (\kappa_1+\kappa_2)\kappa_\alpha \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)\right)} \\ &+ \left[\!\!\left[\breve{\overline{m}}^1_{,\alpha}\left(\breve{\overline{\mu v}}^0 - \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{v}}^0\right)\right]\!\!\right] - \dot{\widetilde{m}}^0_{,\alpha}\left[\!\!\left[\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{v}_k^1\right]\!\!\right] - \mathcal{M}\int \left(\breve{\overline{\mu v}}^0 - \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{v}}^0\right) d\xi\end{aligned}$$

d'après les conditions de raccord : $\xi \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)_{,3} \sim \xi \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3}$. Les sauts $[\![\mathcal{H}]\!]$ et $\left[\!\!\left[\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{v}}^1\right]\!\!\right]$ sont nuls car l'ordre 1 de la viscosité et du volume massique est nul dans les phases. Le saut $\left[\!\!\left[\breve{\overline{m}}^1_{,\alpha}\left(\breve{\overline{\mu v}}^0 - \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{v}}^0\right)\right]\!\!\right]$ est aussi nul. Sachant que l'excès de masse à l'interface est nul, le terme encadré disparait. Les deux premières intégrales s'évaluent en utilisant le profil de vitesse (4.295) obtenu à l'ordre 0 et la propriété (4.402) :

$$\int \left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\right) d\xi = -[\![\mu]\!][\![1/\rho]\!]\,\dot{\widetilde{m}}^0\,(2C_1 + C_6) \tag{4.435}$$

Sachant que l'excès de masse à l'interface est nul, on a : $\int \left(\breve{\overline{\mu v}}^0 - \widetilde{\mu}^0 \widetilde{v}^0\right) d\xi = 0$. Enfin, la dernière intégrale s'évalue en combinant ce résultat à la propriété (4.402) :

$$\int \left(\breve{\overline{\mu v}}^0 - \breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{v}}^0\right) d\xi = -\int \left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{v}}^0 - \widetilde{\mu}^0 \widetilde{v}^0\right) d\xi = -[\![\mu]\!][\![1/\rho]\!]\,(2C_1 + C_6) \tag{4.436}$$

En synthétisant ces différents résultats, on a :

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Re}\left(\breve{\mathbf{IV}} - \widetilde{\mathbf{IV}}\right) d\xi = &\left[\!\!\left[\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(\alpha)_{,3} + \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(\alpha)\right]\!\!\right] - (\kappa_1+\kappa_2)\left[\!\!\left[\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(\alpha)\right]\!\!\right] \\ &\boxed{+[\![\mu]\!][\![1/\rho]\!]\,(2C_1 + C_6)\,\widetilde{\mathcal{M}} - [\![\mu]\!][\![1/\rho]\!]\,(2C_1 + C_6)\,\widetilde{\mathcal{M}}}\end{aligned}$$

où $\widetilde{\mathcal{M}} = 2\left(\kappa_\alpha \dot{\widetilde{m}}^0\right)_{,\alpha} + (\kappa_1+\kappa_2)\,\dot{\widetilde{m}}^0_{,\alpha}$ est la limite asymptotique de $\mathcal{M}$ car l'ordre 0 du taux de changement de phase est indépendant de la direction normale à l'interface. Le terme encadré est nul.

Terme V : gradient de pression. La différence entre la solution intérieure et la solution extérieure est donnée par :

$$\breve{\mathbf{V}} - \widetilde{\mathbf{V}} = \breve{\overline{p}}^0_{,\alpha} - \widetilde{p}^0_{,\alpha} \tag{4.437}$$

Retranchons au profil de pression dans la région intérieure donné par l'équation (4.338b) sa limite asymptotique (4.342) :

$$\breve{\overline{p}}^0 - \widetilde{p}^0 = \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\breve{\overline{\mu}}^0 \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)_{,3} - \widetilde{\mu}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,3}\right) - \left(\frac{1}{\mathrm{We}}\breve{\overline{\kappa}}^0_\sigma + [\![1/\rho]\!]\left(\breve{\overline{m}}^0\right)^2\right)\left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) - \left(C^0_{33} - \widetilde{C}^0_{33}\right)$$

En injectant le profil de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)_{,3}$ donné par la relation (4.322), on obtient :

$$\begin{aligned}\breve{\overline{p}}^0 - \widetilde{p}^0 = &\frac{2}{\mathrm{Re}}\left[\left(\breve{\overline{\mu}}^0 - \widetilde{\mu}^0\right)\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,3} + \breve{\overline{\mu}}^0\,(\kappa_1+\kappa_2)\,[\![1/\rho]\!]\,\dot{\widetilde{m}}^0\left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right)\right] \\ &- \left(\frac{1}{\mathrm{We}}\breve{\overline{\kappa}}^0_\sigma + [\![1/\rho]\!]\left(\breve{\overline{m}}^0\right)^2\right)\left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) - \left(C^0_{33} - \widetilde{C}^0_{33}\right)\end{aligned} \tag{4.438}$$

En intégrant sur la zone de transition et en utilisant l'excès de masse nul à l'interface, on a finalement d'après la propriété (4.403) :

$$\int \left(\breve{\widetilde{p}}^0 - \widetilde{p}^0\right) d\xi = \frac{2}{\mathrm{Re}} \left[C_1 \left[\!\left[\mu\right]\!\right] \left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,3}\right]\!\right] + (\kappa_1+\kappa_2) \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}}^0 \int \left(\breve{\widetilde{\mu}}^0 \left(\breve{\widetilde{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right)\right) d\xi \right] - \int \left(C^0_{33} - \widetilde{C}^0_{33}\right) d\xi \tag{4.439}$$

La dernière intégrale de l'équation précédente est nulle d'après l'équation (4.415). Par définition (4.108d du paramètre C'_5 et d'après la définition (4.187) du saut de gradient de vitesse, on obtient :

$$\int \left(\breve{\widetilde{p}}^0 - \widetilde{p}^0\right) d\xi = \frac{2}{\mathrm{Re}} \left[2C_1 \left[\!\left[\mu\right]\!\right] \left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)_{,3}\right]\!\right] - (\kappa_1+\kappa_2) \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}}^0 \left[\!\left[\mu\right]\!\right] C'_5 \right] \tag{4.440}$$

Finalement, le terme en excès relatif à la pression est donné par :

$$\int \left(\breve{\mathbf{V}} - \widetilde{\mathbf{V}}\right) d\xi = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[C_1 \left[\!\left[\mu\right]\!\right] \left[\!\left[1/\mu\right]\!\right] \widetilde{\tau}^0_{i,\alpha}(3) - 2 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \left((\kappa_1+\kappa_2) \widetilde{\dot{m}}^0\right)_{,\alpha} \left[\!\left[\mu\right]\!\right] C'_5 \right] \tag{4.441}$$

Synthèse : En sommant les intégrales des 5 termes précédents, on reconstruit la relation de saut d'ordre 1 de l'équation de bilan de quantité de mouvement dans une direction tangente :

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left[\!\left[\widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\alpha) + \widetilde{C}^1_{\alpha 3}\right]\!\right] + \mathrm{At} \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] (\kappa_1+\kappa_2) \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) \left(2C_1 + C_6 + C''_5\right) \\ & + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[\!\left[\widetilde{\mu}^0_k \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_k(\alpha)_{,3} + \widetilde{\mu}^0_k \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_k(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha \widetilde{\mu}^0_k \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_k(\alpha)\right]\!\right] - (\kappa_1+\kappa_2) \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[\!\left[\widetilde{\mu}^0_k \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_k(\alpha)\right]\!\right] \\ & + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[C_1 \left[\!\left[\mu\right]\!\right] \left[\!\left[1/\mu\right]\!\right] \widetilde{\tau}^0_{i,\alpha}(3) - 2 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \left((\kappa_1+\kappa_2) \widetilde{\dot{m}}^0\right)_{,\alpha} \left[\!\left[\mu\right]\!\right] C'_5 \right] \end{aligned}$$

D'après la relation (4.110), on a : $C''_5 + 2C_1 + C_6 = C_5 + C_1$. Sachant que les termes (4.416) et (4.418) sont équivalents, on reformule l'équation précédente :

$$\begin{aligned} & \widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \left[\widetilde{\rho}_k \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i) - \widetilde{C}_k - \frac{1}{\mathrm{Re}} \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} + \widetilde{p}_k \boldsymbol{I} \right]^1 \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = \mathrm{At} \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] (\kappa_1+\kappa_2) \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) C_1 \\ & - (\kappa_1+\kappa_2) \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[\!\left[\widetilde{\mu}^0_k \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_k(\alpha)\right]\!\right] + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[C_1 \left[\!\left[\mu\right]\!\right] \left[\!\left[1/\mu\right]\!\right] \widetilde{\tau}^0_{i,\alpha}(3) - 2 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \left((\kappa_1+\kappa_2) \widetilde{\dot{m}}^0\right)_{,\alpha} \left[\!\left[\mu\right]\!\right] C'_5 \right] \end{aligned} \tag{4.442}$$

En définitive, en supposant que la courbure moyenne du système de coordonnées est bien approchée à l'ordre dominant par la courbure de l'interface macroscopique (*i. e.*, $\widetilde{\kappa}^0 \approx \kappa_1 + \kappa_2$), on a :

$$\begin{aligned} & \widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \left[\widetilde{\rho}_k \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i) - \widetilde{C}_k - \frac{1}{\mathrm{Re}} \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} + \widetilde{p}_k \boldsymbol{I} \right]^1 \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = \\ & \mathrm{At} \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\kappa} \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha) C_1 + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[\widetilde{\kappa}^0 \left[\!\left[\widetilde{\mu}^0_k \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_k(\alpha)\right]\!\right] + C_1 \left[\!\left[\mu\right]\!\right] \left[\!\left[1/\mu\right]\!\right] \widetilde{\tau}^0_{i,\alpha}(3) - 2C'_5 \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \left(\widetilde{\kappa} \widetilde{\dot{m}}^0\right)_{,\alpha} \left[\!\left[\mu\right]\!\right] \right] \end{aligned} \tag{4.443}$$

4.E.4 Direction normale

À présent, nous souhaitons déterminer la condition de raccord sur le flux de quantité de mouvement à l'interface à l'ordre 1, dans la direction normale à l'interface. Pour cela, il faut être capable d'exprimer, à partir des variables monofluides macroscopiques, la quantité suivante :

$$\widetilde{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\widetilde{\rho}_k \widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i) - \widetilde{C}_k - \frac{1}{\mathrm{Re}} \mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} + \widetilde{p}_k \boldsymbol{I} \right]^1 \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \quad \text{(somme sur } k\text{)} \tag{4.444}$$

D'après les relations (4.316) et (4.192) donnant le saut de vitesse et la vitesse interfaciale aux ordres 0 et 1,

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_i = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0 - \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0 \quad \text{et} \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_l - \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_v = - \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}}^0 \widetilde{\boldsymbol{n}}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^1_i = \widetilde{\boldsymbol{v}}^1 - \widetilde{\dot{m}}^1 \widetilde{\boldsymbol{n}}/\widetilde{\rho}^0 + \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\kappa}^0 \widetilde{\dot{m}}^0 C_5 \widetilde{\boldsymbol{n}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_l - \widetilde{\boldsymbol{v}}^1_v = - \left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \widetilde{\dot{m}}^1 \widetilde{\boldsymbol{n}} + \left\| \frac{1}{\breve{\widetilde{\mu}}^0} \right\|^{ex} \widetilde{\tau}^0_i(\alpha) \widetilde{\boldsymbol{t}}_\alpha$$

on montre que :

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k\otimes(\widetilde{\boldsymbol{v}}_k-\widetilde{\boldsymbol{v}}_i)\right)^1\cdot\nabla\widetilde{\chi}_k &= \widetilde{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\widetilde{m}^1\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0\otimes\widetilde{\boldsymbol{n}}+\widetilde{m}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1\otimes\widetilde{\boldsymbol{n}}-\widetilde{\rho}_k^0\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0\otimes\widetilde{\boldsymbol{n}}\widetilde{\kappa}^0\widetilde{m}^0\,[\![1/\rho]\!]\,C_5\right)\cdot\nabla\widetilde{\chi}_k\\ &= -\,[\![1/\rho]\!]\,2\widetilde{m}^0\widetilde{m}^1\widetilde{\delta}^i-[\![1/\rho]\!]\left[\!\!\left[\widetilde{\rho}_k^0\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\right]\!\!\right]\widetilde{\kappa}^0\widetilde{m}^0C_5\widetilde{\delta}^i\\ &= -\,[\![1/\rho]\!]\,2\widetilde{m}^0\widetilde{m}^1\widetilde{\delta}^i-[\![1/\rho]\!]\,\mathrm{At}\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0(3)\widetilde{\kappa}^0\widetilde{m}^0C_5\widetilde{\delta}^i \qquad (4.445)\end{aligned}$$

En effet, le saut de quantité de mouvement est donné par : $\left[\!\!\left[\widetilde{\rho}_k^0\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\right]\!\!\right]=(\rho_l-\rho_v)\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0(3)$. Par conséquent, on cherche à fermer le terme suivant :

$$-\,[\![1/\rho]\!]\,\mathrm{At}\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^0(3)\widetilde{\kappa}\widetilde{m}^0C_5\widetilde{\delta}^i+\left[\!\!\left[-\widetilde{m}\widetilde{\boldsymbol{v}}(3)-\widetilde{C}_{33}^1-\frac{1}{\mathrm{Re}}2\widetilde{\mu}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(3)_{,3}+\widetilde{p}_k^1\right]\!\!\right]\widetilde{\delta}^i \qquad (4.446)$$

Pour déterminer cette relation de saut, il faut intégrer le bilan (4.390a) de quantité de mouvement d'ordre 2 (dans la direction normale) dans la région intérieure après lui avoir retranché l'ordre 0 de la région extérieure. Ces calculs permettent d'aboutir à la relation de saut macroscopique (4.469).

L'équation de quantité de mouvement se projette sur la direction normale à l'interface comme suit :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\breve{\overline{\rho}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}(3)}{dt}\right)^0+\left[\nabla\cdot\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\breve{\overline{\rho}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma-\breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)+\breve{C}\right)\right]^0(3)+\left(\breve{\overline{\rho}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}(3)\nabla\cdot\breve{\boldsymbol{v}}_m^i\right)^0 &= \qquad (4.447)\\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\nabla\cdot\breve{\boldsymbol{S}}\right)^0(3)-\breve{\overline{p}}_{,3}^0-\frac{1}{\mathrm{We}}\left(\breve{\overline{\kappa}}_\sigma\nabla\breve{\overline{\chi}}\right)^0\end{aligned}$$

La solution obtenue pour l'ordre dominant indique que $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma-\breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)^0=0$. En explicitant chaque terme de l'équation (4.447) dans la direction normale, on a :

$$\mathbf{I}=\frac{d\breve{\overline{\rho}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)+\breve{\overline{m}}^0+\breve{B}^0(3)\right)=\frac{d}{dt}\left(\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)+\breve{\overline{m}}^0\left(1-\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{v}}^0\right)+\breve{B}^0(3)\right) \qquad (4.448a)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{II}=&\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\breve{\overline{\rho}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma-\breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)+\breve{C}\right)_{33,3}^1+\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\breve{C}\right)_{31,1}^0\\ &+\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\breve{C}\right)_{32,2}^0-(\kappa_1+\kappa_2)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s+\breve{C}\right)_{33}^0 \qquad (4.448b)\end{aligned}$$

$$\mathbf{III}=\breve{\overline{\rho}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)\left[\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m1}(3)_{,3}+\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m0}(1)_{,1}+\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m0}(2)_{,2}-\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m0}(3)\,(\kappa_1+\kappa_2)\right] \qquad (4.448c)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{IV}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(&S_{31,1}^1+S_{32,2}^1+S_{33,3}^2-(\kappa_1+\kappa_2)\,S_{33}^1+\kappa_1S_{11}^1+\kappa_2S_{22}^1+\mathcal{F}_3(S^0) \qquad (4.448d)\\ &\mathcal{T}_{31,1}^1+\mathcal{T}_{32,2}^1+\mathcal{T}_{33,3}^2-(\kappa_1+\kappa_2)\,\mathcal{T}_{33}^1+\kappa_1\mathcal{T}_{11}^1+\kappa_2\mathcal{T}_{22}^1+\mathcal{F}_3(\mathcal{T}^0)\Big)\end{aligned}$$

$$\mathbf{V}=\breve{\overline{p}}_{,3}^1 \qquad (4.448e)$$

$$\mathbf{VI}=\frac{1}{\mathrm{We}}\left(\breve{\overline{\kappa}}^1\breve{\overline{\chi}}_{,3}^0+\breve{\overline{\kappa}}^0\breve{\overline{\chi}}_{,3}^1\right) \qquad (4.448f)$$

où $\mathcal{F}_3(S^0)$ est une fonction linéaire telle que $\mathcal{F}_3(0)=0$. D'après l'équation (4.310), l'ordre 0 de la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ est indépendant de la coordonnée normale à l'interface. Par conséquent, l'ordre 0 du tenseur de diffusion est nul : $\breve{\boldsymbol{S}}^0=\mathbf{0}$. De plus, l'ordre 0 du tenseur $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ est nul par construction. Par définition, on a aussi : $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\overline{\boldsymbol{n}}^s\right)_{i3}^1=\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(i)$ et $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}\otimes\overline{\boldsymbol{n}}^s\right)_{3\alpha}^j=0$. Enfin, on a les relations :

$\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m0}(\alpha) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)$ et $\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m0}(3) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{v}}^0$. Ces résultats permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{II} &= \left(\breve{\overline{m}}^1\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)_{,3} + \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3)_{,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)\right) + \left[\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(3)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m(3)\right)^1\right]_{,3} \\
&\quad \boxed{+\left[\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^1(3)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m(3)\right)^0\right]_{,3}} + \breve{C}^1_{33,3} + \breve{C}^0_{31,1} + \breve{C}^0_{32,2} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\breve{C}^0_{33} \qquad (4.449a)\\
\mathbf{III} &= \breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(3)\left[\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m1}(3)_{,3} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(1)_{,1} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(2)_{,2} - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)\,(\kappa_1+\kappa_2) + \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{v}}^0\,(\kappa_1+\kappa_2)\right] \\
&= \breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^0(3)\left[\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m1}(3)_{,3} - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(3)_{,3} + \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{v}}^0\,(\kappa_1+\kappa_2)\right] \text{ d'après l'Éq. (4.318)} \\
\mathbf{IV} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(S^2_{33,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,S^1_{33} + S^1_{31,1} + S^1_{32,2} + \kappa_1 S^1_{11} + \kappa_2 S^1_{22} \qquad (4.449b)\\
&\qquad \mathcal{T}^2_{33,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\mathcal{T}^1_{33} + \mathcal{T}^1_{31,1} + \mathcal{T}^1_{32,2} + \kappa_1\mathcal{T}^1_{11} + \kappa_2\mathcal{T}^1_{22}\Big)
\end{aligned}$$

Le terme encadré est nul d'après la solution obtenue à l'ordre dominant $\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m\right)^0 = 0$.

Sachant que l'ordre 0 de la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0$ ne varie pas dans la direction normale à l'interface, l'ordre 1 du tenseur de diffusion s'exprime à l'aide de la relation (4.240f) :

$$\begin{aligned}
S^2_{33} &= 2\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^2(3)_{,3} + 2\breve{\overline{\mu}}^1\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(3)_{,3} \\
S^1_{33} &= 2\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(3)_{,3} \\
S^1_{\alpha 3} &= \breve{\overline{\mu}}^0\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(\alpha)_{,3} - \xi\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)_{,3} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)_{,\alpha} + \kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)\right) \\
S^1_{\alpha 3,\alpha} &= \breve{\overline{\mu}}^0\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(\alpha)_{,3,\alpha} - \xi\left(\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)_{,3}\right)_{,\alpha} + \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)_{,\alpha,\alpha} + \left(\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)\right)_{,\alpha}\right) \text{ car } \breve{\overline{\mu}}^0 \text{ est invariant en tangentiel} \\
\kappa_\alpha S^1_{\alpha\alpha} &= 2\breve{\overline{\mu}}^0\kappa_\alpha\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)_{,\alpha} - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)\kappa_\alpha\right)
\end{aligned}$$

Dans le repère local, l'ordre 1 de la divergence du tenseur $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ s'exprime (avec la sommation sur l'indice α même lorsqu'il n'est pas répété) :

$$\mathcal{T}^1_{3\alpha,\alpha} + \mathcal{T}^2_{33,3} - \kappa_\alpha\mathcal{T}^1_{33} + \kappa_\alpha\mathcal{T}^1_{\alpha\alpha} = 2\left(\breve{\overline{\mu v}}^0\,\breve{\overline{m}}^1_{,3}\right)_{,3} \boxed{+2\left(\breve{\overline{\mu v}}^1\,\breve{\overline{m}}^0_{,3}\right)_{,3} - 2\kappa_\alpha\breve{\overline{\mu v}}^0\,\breve{\overline{m}}^0_{,3}} + \breve{\overline{\mu v}}^0\,\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha,\alpha} - 2\kappa_\alpha^2\breve{\overline{\mu v}}^0\,\breve{\overline{m}}^0$$

Le terme encadré est nul car l'ordre 0 du taux de changement de phase $\breve{\overline{m}}^0$ ne dépend pas de la coordonnée normale à l'interface. Par conséquent, le terme **IV** se développe

$$\begin{aligned}
\mathbf{IV} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Bigg[&2\left(\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^2(3)_{,3} + \breve{\overline{\mu}}^1\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(3)_{,3}\right)_{,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,2\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(3)_{,3} + \breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(\alpha)_{,3,\alpha} - \boxed{\breve{\overline{\mu}}^0\xi\left(\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)_{,3}\right)_{,\alpha}} \\
&+\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)_{,\alpha,\alpha} + \breve{\overline{\mu}}^0\left(\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)\right)_{,\alpha} + 2\breve{\overline{\mu}}^0\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)_{,\alpha} - 2\breve{\overline{\mu}}^0\kappa_\alpha^2\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3) \\
&+\boxed{\xi\left(2\kappa_\alpha^2\breve{\overline{\mu}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)_{,3} + (\kappa_{\alpha,\alpha} - \kappa_{\beta,\beta})\,\breve{\overline{\mu}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)_{,3}\right)} + 2\left(\breve{\overline{\mu v}}^0\,\breve{\overline{m}}^1_{,3}\right)_{,3} + \breve{\overline{\mu v}}^0\left(\breve{\overline{m}}^0_{,\alpha,\alpha} - 2\kappa_\alpha\kappa_\alpha\breve{\overline{m}}^0\right)\Bigg]
\end{aligned} \qquad (4.449c)$$

avec la convention de sommation sur l'indice répété $\alpha = \{1,2\}$. Nous avons montré précédemment que $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha)$ est indépendant de la coordonnée ξ ce qui implique que : $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(\alpha)_{,3} = 0$. Par conséquent, les termes encadrés sont nuls. Par souci de clarté, on introduit la fonction :

$$\mathcal{N} = \breve{\overline{m}}^0_{,\alpha,\alpha} - 2\kappa_\alpha\kappa_\alpha\breve{\overline{m}}^0 \qquad (4.450)$$

À chacun des termes **I** à **VI** de l'équation (4.447) correspond un équivalent asymptotique de la région extérieure donné par l'équation (4.164c). Les quantités en excès sont le résultat de l'intégration de la différence entre ces 2 équations. Prenons chaque terme séparément.

Terme I : évolution temporelle. La différence entre la solution intérieure et la solution extérieure est donnée par :

$$\breve{\mathbf{I}} - \widetilde{\mathbf{I}} = \frac{d}{dt}\left(\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) + \breve{\overline{m}}^0\left(1 - \breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{v}}^0\right) + \breve{B}^0(3)\right) - \frac{d}{dt}\left(\widetilde{\rho}_k^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\right) \tag{4.451}$$

En l'intégrant sur la zone de transition, on obtient une quantité en excès nulle :

$$\begin{aligned}\int\left(\breve{\mathbf{I}} - \widetilde{\mathbf{I}}\right)d\xi &= \frac{d}{dt}\left(\int\left(\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \widetilde{\rho}_k^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\right)d\xi + \widetilde{\dot{m}}^0\int\left(1 - \breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{v}}^0\right)d\xi + \int\breve{B}^0(3)d\xi\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left((2C_1 + C_6)\left(\mathrm{At}\,[\![1/\rho]\!]\,\widetilde{\dot{m}}^0 - \mathrm{At}\,[\![1/\rho]\!]\,\widetilde{\dot{m}}^0\right) + \left\|\breve{B}^0(3)\right\|^{ex}\right) = 0\end{aligned} \tag{4.452}$$

En effet, la première intégrale est évaluée à l'aide de la solution (4.295) obtenue pour $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)$, de la propriété (4.402) et de l'équation (4.294) :

$$\int\left(\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \widetilde{\rho}_k^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)\right)d\xi = (2C_1 + C_6)\,[\![\rho]\!]\,[\![\boldsymbol{v}^0(3)]\!] = (2C_1 + C_6)\,\mathrm{At}\,[\![1/\rho]\!]\,\widetilde{\dot{m}}^0$$

En notant que $\widetilde{\rho}^0\widetilde{v}^0 = 1$, la propriété (4.402) permet d'évaluer la seconde intégrale :

$$\int\left(1 - \breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{v}}^0\right)d\xi = (2C_1 + C_6)\,[\![\rho]\!]\,[\![v]\!] = -\,(2C_1 + C_6)\,\mathrm{At}\,[\![1/\rho]\!] \tag{4.453}$$

Enfin, en décomposant le noyau du filtre G suivant les directions normale et tangentielles comme proposé à l'annexe 4.F $G = G_sG_3$, la 3e intégrale représentant l'excès du terme sous-maille $\breve{B}^0(3)$ se réduit à 0

$$\begin{aligned}\int\breve{B}^0(3)d\xi &= \int\left(\overline{\breve{\overline{\rho}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)} - \overline{\breve{\overline{\rho}}^0}\,\overline{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0(3)}\right)d\xi\\ &= \int\left(\overline{\breve{\overline{\rho}}^0\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)}^{n\,\sigma} - \overline{\breve{\overline{\rho}}^0}^{n\,\sigma}\,\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)}^{n\,\sigma}\right)d\xi\\ &= \int\left(\overline{\breve{\overline{\rho}}^0}^{n}\,\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)}^{\sigma} - \overline{\breve{\overline{\rho}}^0}^{n}\,\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)}^{\sigma}\right)d\xi = 0\end{aligned}$$

car $\breve{\overline{\rho}}$ ne dépend pas des coordonnées tangentielles et la composante normale de la vitesse $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma$ est indépendante de ξ à l'ordre 0 (*cf.* Éq. (4.297)) : $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^0 = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0$. Ainsi, on démontre que la composante normale $\breve{B}^0(3)$ est nulle partout. Ce résultat peut paraitre *a priori* surprenant. En l'analysant, on constate qu'il découle de l'hypothèse de découplage des directions tangentielles et normale. Comme l'ordre 0 correspond à une vision monodimensionnelle, les termes sous-maille sont nuls partout par construction. Ceci est en accord avec la proposition affirmant que les modèles sous-maille tendent vers 0 quand la taille du filtre ϵ tend vers 0. La quantité en excès associée à l'évolution temporelle (terme **I**) est donnée par :

$$\int\left(\breve{\mathbf{I}} - \widetilde{\mathbf{I}}\right)d\xi = 0 \tag{4.454}$$

Termes II et III : convection. La différence entre la solution intérieure et la solution extérieure est donnée par :

$$\begin{aligned}\breve{\mathbf{II}} - \widetilde{\mathbf{II}} + \breve{\mathbf{III}} = &\left(\breve{\overline{m}}^1\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)_{,3} + \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3)_{,3} - \widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\boldsymbol{v}}_{k,3}^0(3) - (\kappa_1 + \kappa_2)\,\breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)\right)\\ &+ \left[\breve{\overline{\rho}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma(3) - \breve{\boldsymbol{v}}_i^m(3)\right)^1\right]_{,3}\\ &+ \breve{C}_{33,3}^1 - \widetilde{C}_{33,3}^0 + \breve{C}_{3\alpha,\alpha}^0 - \widetilde{C}_{\alpha3,\alpha}^0 - (\kappa_1 + \kappa_2)\left(\breve{C}_{33}^0 - \widetilde{C}_{33}^0\right)\\ &+ \breve{\overline{\rho}}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3)\left[\breve{\boldsymbol{v}}_i^{m1}(3)_{,3} - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma^1(3)_{,3} + \breve{\overline{m}}^0\breve{\overline{v}}^0\,(\kappa_1 + \kappa_2)\right]\end{aligned}$$

Après manipulation pour faire apparaître les conditions de raccord

$$\begin{aligned}\breve{\mathbf{II}} - \widetilde{\mathbf{II}} + \mathbf{I}\breve{\mathbf{I}}\mathbf{I} = &\left(\breve{\overline{m}}^{1}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3)_{,3} + \breve{\overline{m}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}(3)_{,3} - \left(\xi\widetilde{\dot{m}}^{0}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k,3}(3)\right)_{,3} - (\kappa_1+\kappa_2)\,\breve{\overline{m}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3)\right)\\
&+\left[\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}(3)-\breve{\boldsymbol{v}}^{m}_{i}(3)\right)^{1}\right]_{,3} - \breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)\left[\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}_{\sigma}(3)-(\breve{\boldsymbol{v}}^{m}_{i})^{1}(3)\right]_{,3}\\
&+\breve{C}^{1}_{33,3} - \left(\xi\widetilde{C}^{0}_{33,3}\right)_{,3} + \breve{C}^{0}_{3\alpha,\alpha} - \widetilde{C}^{0}_{\alpha3,\alpha} - (\kappa_1+\kappa_2)\left(\breve{C}^{0}_{33}-\widetilde{C}^{0}_{33}\right)\\
&+\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)\breve{\overline{m}}^{0}\breve{\overline{v}}^{0}\,(\kappa_1+\kappa_2)\end{aligned}$$

on obtient en intégrant et en remplaçant $\breve{\overline{m}}^{0}$ et $\breve{\overline{m}}^{1}$ par leur limite asymptotique car ces variables sont indépendantes de la coordonnée normale à l'interface :

$$\begin{aligned}\int\left(\breve{\mathbf{II}} - \widetilde{\mathbf{II}} + \mathbf{I}\breve{\mathbf{I}}\mathbf{I}\right)d\xi = &\left(\widetilde{\dot{m}}^{1}\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(3)\right]\!\right] + \widetilde{\dot{m}}^{0}\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^{1}_{k}(3)\right]\!\right] - (\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{\dot{m}}^{0}\int\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3)d\xi\right)\\
&+\int\left(\left(\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)\right)_{,3}\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}(3)-\breve{\boldsymbol{v}}^{m}_{i}(3)\right)^{1}\right)d\xi\\
&+\left[\!\left[\widetilde{C}^{1}_{33}\right]\!\right] + \int\left(\breve{C}^{0}_{3\alpha}-\widetilde{C}^{0}_{\alpha3}\right)_{,\alpha}d\xi - (\kappa_1+\kappa_2)\int\left(\breve{C}^{0}_{33}-\widetilde{C}^{0}_{33}\right)d\xi\\
&+(\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{\dot{m}}^{0}\int\breve{\overline{v}}^{0}\,\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)d\xi\end{aligned}$$

En réordonnant les termes, on a :

$$\begin{aligned}\int\left(\breve{\mathbf{II}} - \widetilde{\mathbf{II}} + \mathbf{I}\breve{\mathbf{I}}\mathbf{I}\right)d\xi = &\left[\!\left[\widetilde{\dot{m}}\widetilde{\boldsymbol{v}}_{k}(3)+\widetilde{C}_{33}\right]\!\right]^{1} + \int\left(\left(\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)\right)_{,3}\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}(3)-\breve{\boldsymbol{v}}^{m}_{i}(3)\right)^{1}\right)d\xi\\
&+\int\left(\breve{C}^{0}_{3\alpha}-\widetilde{C}^{0}_{\alpha3}\right)_{,\alpha}d\xi - (\kappa_1+\kappa_2)\int\left(\breve{C}^{0}_{33}-\widetilde{C}^{0}_{33}\right)d\xi\\
&+(\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{\dot{m}}^{0}\int\left(\breve{\overline{v}}^{0}\,\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)-\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3)\right)d\xi\end{aligned}$$

Rappelons que la quantité de mouvement mésoscopique d'ordre 0 ($\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)$) est donnée par :

$$\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3) = \breve{\overline{\rho}}^{0}\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}_{\sigma}(3) + \breve{\overline{m}}^{0} + \breve{B}^{0}(3) = \breve{\overline{\rho}}^{0}\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3) + \breve{\overline{m}}^{0}\left(1-\breve{\overline{\rho}}^{0}\,\breve{\overline{v}}^{0}\right) + \breve{B}^{0}(3)$$

Comme $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}_{\sigma}(3)$ et $\breve{\overline{m}}^{0}$ sont indépendants de ξ et comme le modèle $\breve{B}^{0}(3)$ est nul, les relations

$$\begin{aligned}\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)_{,3} &= \breve{\overline{\rho}}^{0}_{,3}\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}_{\sigma}(3) = -\mathrm{At}\breve{\overline{\chi}}^{0}_{,3}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{\sigma}(3)\\
\breve{\overline{v}}^{0}\,\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3) - \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3) &= -\left(1-\breve{\overline{\rho}}^{0}\,\breve{\overline{v}}^{0}\right)\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}_{\sigma}(3) \text{ d'après l'Éq. (4.296)}\\
&= -\left(1-\breve{\overline{\rho}}^{0}\,\breve{\overline{v}}^{0}\right)\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{\sigma}(3)\end{aligned}$$

permettent d'évaluer les intégrales

$$\begin{aligned}\int\left(\left(\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)\right)_{,3}\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}(3)-\breve{\boldsymbol{v}}^{m}_{i}(3)\right)^{1}\right)d\xi &= -\mathrm{At}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{\sigma}(3)\int\breve{\overline{\chi}}^{0}_{,3}\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_{\sigma}(3)-\breve{\boldsymbol{v}}^{m}_{i}(3)\right)^{1}d\xi\\
&= \mathrm{At}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{\sigma}(3)\int\breve{A}^{0}d\xi \text{ d'après l'Éq. (4.333)}\\
&\approx \mathrm{At}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{\sigma}(3)\,(\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{\dot{m}}^{0}\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]C''_{5} \text{ d'après l'Éq. (4.331)}\end{aligned} \tag{4.455a}$$

et

$$\begin{aligned}\int\left(\breve{\overline{v}}^{0}\,\breve{\overline{\rho\boldsymbol{v}}}^{0}(3)-\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3)\right)d\xi &= -\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{\sigma}(3)\int\left(1-\breve{\overline{\rho}}^{0}\,\breve{\overline{v}}^{0}\right)d\xi\\
&= \widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{\sigma}(3)\,(2C_1+C_6)\,\mathrm{At}\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right] \text{ d'après l'Éq. (4.453)}\end{aligned} \tag{4.455b}$$

Enfin, les deux intégrales restantes sont la définition de propriétés en excès :

$$\int \left(\breve{C}^0_{3\alpha} - \widetilde{C}^0_{3\alpha}\right)_{,\alpha} d\xi - (\kappa_1+\kappa_2)\int \left(\breve{C}^0_{33} - \widetilde{C}^0_{33}\right) d\xi = \left\|C^0_{3\alpha}\right\|^{ex}_{,\alpha} - (\kappa_1+\kappa_2)\left\|C^0_{33}\right\|^{ex} \quad (4.456)$$

En utilisant les définitions de $\breve{C}$ (Éq. (4.90c)) et de $\widetilde{C}$ (Éq. (4.3)), ainsi que l'indépendance de $\breve{\overline{\rho}}$ aux coordonnées tangentielles et l'indépendance de $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma = \widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma$ à la coordonnée normale, on montre à l'annexe 4.E.2 que la décomposition du filtre en la succession d'un filtre surfacique et d'un filtre normal conduit à :

$$\int \left(\breve{C}^0 - \widetilde{C}^0\right) d\xi = \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4.457)$$

Par conséquent, la contribution de l'ordre 0 du terme sous-maille de convection est négligeable à l'ordre considéré ici. Finalement, en utilisant la relation (4.110), la quantité en excès associée à la convection (termes **II** et **III**) est donnée par :

$$\int \left(\breve{\mathbf{II}} - \widetilde{\mathbf{II}} + \breve{\mathbf{III}}\right) d\xi \approx \left[\!\left[\widetilde{m}\widetilde{\boldsymbol{v}}_k(3) + \widetilde{C}_{33}\right]\!\right]^1 + \mathrm{At}\,[\![1/\rho]\!]\,\widetilde{m}^0\,(\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_\sigma(3)\,(C_5+C_1)$$

Terme IV : diffusion. La différence entre la solution intérieure et la solution extérieure est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\breve{\mathbf{IV}} - \widetilde{\mathbf{IV}}\right) = {} & 2\left(\breve{\overline{\mu}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^2_\sigma(3)_{,3}\right)_{,3} - 2\widetilde{\mu}^0_k\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(3)_{,3,3} + 2\left(\breve{\overline{\mu}}^1\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)_{,3}\right)_{,3} \\
& - (\kappa_1+\kappa_2)\,2\breve{\overline{\mu}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(3)_{,3} + 2\widetilde{\mu}^0_k\,(\kappa_1+\kappa_2)\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(3)_{,3} \\
& + \breve{\overline{\mu}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha)_{,3,\alpha} - \widetilde{\mu}^0_k\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(\alpha)_{,\alpha,3} \\
& + \breve{\overline{\mu}}^0\,\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3)_{,\alpha,\alpha} - \widetilde{\mu}^0_k\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(3)_{,\alpha,\alpha} \\
& + \breve{\overline{\mu}}^0\left(\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)\right)_{,\alpha} - \widetilde{\mu}^0_k\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(\alpha)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} \\
& + 2\breve{\overline{\mu}}^0\,\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha)_{,\alpha} - 2\widetilde{\mu}^0_k\kappa_\alpha\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(\alpha)_{,\alpha} \\
& - 2\breve{\overline{\mu}}^0\,\kappa_\alpha\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) + 2\widetilde{\mu}^0_k\widetilde{\boldsymbol{v}}^0_k(3)\kappa_\alpha\kappa_\alpha \\
& + 2\left(\breve{\overline{\mu}}\breve{\overline{v}}^0\,\breve{\overline{m}}^1_{,3}\right)_{,3} + \breve{\overline{\mu}}\breve{\overline{v}}^0\mathcal{N}
\end{aligned}$$

Sachant que $\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}_\sigma = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}} - \breve{\overline{m}}\,\overline{\boldsymbol{n}}^s\breve{\overline{v}}$ (*cf.* Éq. (4.296)), on a :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^2_{\sigma,3}(3) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^2_{,3}(3) - \breve{\overline{m}}^2\,\breve{\overline{v}}^0_{,3} - \breve{\overline{m}}^1\,\breve{\overline{v}}^1_{,3} - \breve{\overline{m}}^0\,\breve{\overline{v}}^2_{,3} \quad (4.458a)$$

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_{\sigma,3}(3) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_{,3}(3) - \breve{\overline{m}}^1\,\breve{\overline{v}}^0_{,3} - \breve{\overline{m}}^0\,\breve{\overline{v}}^1_{,3} \quad (4.458b)$$

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1_\sigma(\alpha) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha) \quad (4.458c)$$

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(\alpha) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\alpha) \qquad \text{(indépendant de } \xi) \quad (4.458d)$$

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0_\sigma(3) = \breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(3) - \breve{\overline{m}}^0\,\breve{\overline{v}}^0 \qquad \text{(indépendant de } \xi) \quad (4.458e)$$

Après manipulation pour faire apparaître les conditions de raccord

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\breve{\mathbf{IV}}-\widetilde{\mathbf{IV}}\right) = -2\left(\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{m}}^{2}\breve{\overline{v}}^{0}_{,3}+\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{m}}^{1}\breve{\overline{v}}^{1}_{,3}+\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{m}}^{0}\breve{\overline{v}}^{2}_{,3}\right)_{,3} \\
+2\left(\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{2}(3)_{,3}\right)_{,3}-2\left(\xi\widetilde{\mu}^{0}_{k}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(3)_{,3,3}\right)_{,3}+2\left(\breve{\overline{\mu}}^{1}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}_{\sigma}(3)_{,3}\right)_{,3} \\
+(\kappa_1+\kappa_2)\,2\breve{\overline{\mu}}^{0}\left(\breve{\overline{m}}^{1}\breve{\overline{v}}^{0}_{,3}+\breve{\overline{m}}^{0}\breve{\overline{v}}^{1}_{,3}\right)-(\kappa_1+\kappa_2)\,2\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}(3)_{,3}+2\widetilde{\mu}^{0}_{k}(\kappa_1+\kappa_2)\left(\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(3)_{,3}\right)_{,3} \\
+\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}(\alpha)_{,\alpha,3}-\widetilde{\mu}^{0}_{k}\left(\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(\alpha)_{,\alpha,3}\right)_{,3} \\
-\breve{\overline{\mu}}^{0}\left(\breve{\overline{m}}^{0}\breve{\overline{v}}^{0}\right)_{,\alpha,\alpha}+\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3)_{,\alpha,\alpha}-\widetilde{\mu}^{0}_{k}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(3)_{,\alpha,\alpha} \\
+\breve{\overline{\mu}}^{0}\left(\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(\alpha)\right)_{,\alpha}-\widetilde{\mu}^{0}_{k}\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(\alpha)\kappa_\alpha\right)_{,\alpha} \\
+2\breve{\overline{\mu}}^{0}\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(\alpha)_{,\alpha}-2\widetilde{\mu}^{0}_{k}\kappa_\alpha\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(\alpha)_{,\alpha} \\
+2\breve{\overline{\mu}}^{0}\kappa_\alpha\kappa_\alpha\left(\breve{\overline{m}}^{0}\breve{\overline{v}}^{0}\right)-2\breve{\overline{\mu}}^{0}\kappa_\alpha\kappa_\alpha\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3)+2\widetilde{\mu}^{0}_{k}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(3)\kappa_\alpha\kappa_\alpha \\
+2\left(\breve{\overline{\mu v}}^{0}\breve{\overline{m}}^{1}_{,3}\right)_{,3}+\breve{\overline{\mu v}}^{0}\mathcal{N}
\end{aligned}
$$

puis en simplifiant sachant que le taux de changement de phase est indépendant de la coordonnée normale à l'interface aux ordres 0 et 1 et en réordonnant les termes, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\breve{\mathbf{IV}}-\widetilde{\mathbf{IV}}\right) =& 2\left(\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{2}(3)_{,3}-\xi\widetilde{\mu}^{0}_{k}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(3)_{,3,3}\right)_{,3}+2\left(\breve{\overline{\mu}}^{1}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}_{\sigma}(3)_{,3}\right)_{,3} \\
&-2(\kappa_1+\kappa_2)\left(\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}(3)_{,3}-\widetilde{\mu}^{0}_{k}\left(\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(3)_{,3}\right)_{,3}\right) \\
&+\left(\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{1}(\alpha)_{,3}-\widetilde{\mu}^{0}_{k}\left(\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(\alpha)_{,3}\right)_{,3}\right)_{,\alpha} \\
&+\left(\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3)-\widetilde{\mu}^{0}_{k}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(3)\right)_{,\alpha,\alpha} \\
&+\left(\kappa_\alpha\left(\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(\alpha)-\widetilde{\mu}^{0}_{k}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(\alpha)\right)\right)_{,\alpha} \\
&+2\kappa_\alpha\left(\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(\alpha)-\widetilde{\mu}^{0}_{k}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(\alpha)\right)_{,\alpha} \\
&-2\kappa_\alpha\kappa_\alpha\left(\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^{0}(3)-\widetilde{\mu}^{0}_{k}\widetilde{\boldsymbol{v}}^{0}_{k}(3)\right) \\
&-2\left(\breve{\overline{m}}^{2}\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{v}}^{0}_{,3}+\breve{\overline{m}}^{1}\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{v}}^{1}_{,3}+\breve{\overline{m}}^{0}\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{v}}^{2}_{,3}\right)_{,3}+2(\kappa_1+\kappa_2)\left(\breve{\overline{m}}^{1}\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{v}}^{0}_{,3}+\breve{\overline{m}}^{0}\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{v}}^{1}_{,3}\right) \\
&+\left(\breve{\overline{\mu v}}^{0}-\breve{\overline{\mu}}^{0}\breve{\overline{v}}^{0}\right)\mathcal{N}
\end{aligned}
$$

D'après la propriété (4.402), le saut de vitesse à l'ordre 0 donné par l'équation (4.316a), la

conservation de la masse et les conditions de raccord, on obtient en intégrant :

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Re}\left(\breve{\mathbf{IV}}-\widetilde{\mathbf{IV}}\right)d\xi = &\left[\!\left[2\widetilde{\mu}_k^0\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(3)_{,3}\right]\!\right] + \left[\!\left[2\widetilde{\mu}_k^1\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)_{,3}\right]\!\right] \\ &-2\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\int\left(\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3)_{,3}-\widetilde{\mu}_k^0\left(\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)_{,3}\right)_{,3}\right)d\xi \\ &+\int\left(\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)_{,3}-\widetilde{\mu}_k^0\left(\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3}\right)_{,3}\right)_{,\alpha}d\xi \\ &+\left(-\left[\!\left[\mu\right]\!\right]\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\widetilde{\dot{m}}^0\left(2C_1+C_6\right)\right)_{,\alpha,\alpha} \\ &-2\kappa_\alpha\kappa_\alpha\left(-\left[\!\left[\mu\right]\!\right]\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\widetilde{\dot{m}}^0\left(2C_1+C_6\right)\right) \\ &-2\left[\!\left[\breve{\overline{m}}^2\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{v}}^0_{,3}\right]\!\right]-2\left[\!\left[\breve{\overline{m}}^1\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{v}}^1_{,3}\right]\!\right]-2\widetilde{\dot{m}}^0\left[\!\left[\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{v}}^2_{,3}\right]\!\right] \\ &+2\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\left(\widetilde{\dot{m}}^1\int\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{v}}^0_{,3}d\xi+\widetilde{\dot{m}}^0\int\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{v}}^1_{,3}d\xi\right) \\ &+\int\left(\breve{\overline{\mu v}}^0-\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{v}}^0\right)\mathcal{N}d\xi\end{aligned} \tag{4.459}$$

D'après la relation (4.320), l'ordre 1 de la vitesse normale s'exprime par :

$$\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3)_{,3}-\widetilde{\dot{m}}^1\breve{\overline{v}}^0_{,3}-\widetilde{\dot{m}}^0\breve{\overline{v}}^1_{,3}\right)=\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}+\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\widetilde{\dot{m}}^0\left(\breve{\overline{\chi}}^0-\widetilde{\chi}^0\right) \tag{4.460}$$

Par conséquent en appliquant la propriété (4.402) à $a\equiv\breve{\overline{\mu}}^0$ et $\breve{\overline{\phi}}\equiv\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3)_{,3}-\widetilde{\dot{m}}^1\breve{\overline{v}}^0_{,3}-\widetilde{\dot{m}}^0\breve{\overline{v}}^1_{,3}$, on évalue l'intégrale suivante :

$$\int\left(\breve{\overline{\mu}}^0\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3)_{,3}-\breve{\overline{m}}^1\breve{\overline{v}}^0_{,3}-\widetilde{\dot{m}}^0\breve{\overline{v}}^1_{,3}\right)-\widetilde{\mu}_k^0\left(\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)_{,3}\right)_{,3}\right)d\xi=\left[\!\left[\mu\right]\!\right]\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(3)_{,3}\right]\!\right]\left(2C_1+C_6\right)$$

En utilisant le saut de gradient de vitesse normale macroscopique donné par la relation (4.187), on obtient :

$$\int\left(\breve{\overline{\mu}}^0\left(\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(3)_{,3}-\breve{\overline{m}}^1\breve{\overline{v}}^0_{,3}-\widetilde{\dot{m}}^0\breve{\overline{v}}^1_{,3}\right)-\widetilde{\mu}_k^0\left(\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(3)_{,3}\right)_{,3}\right)d\xi=\left[\!\left[\mu\right]\!\right]\left(2C_1+C_6\right)\frac{1}{2}\left[\!\left[1/\mu\right]\!\right]\widetilde{\tau}_i^0(3)$$

Ensuite en appliquant la propriété (4.402) à $a\equiv\breve{\overline{\mu}}^0$ et $\breve{\overline{\phi}}\equiv\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)_{,3}$, on évalue l'intégrale :

$$\int\left(\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)_{,3}-\widetilde{\mu}_k^0\left(\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3}\right)_{,3}\right)_{,\alpha}d\xi=\left[\!\left[\mu\right]\!\right]\left[\!\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\alpha)_{,3}\right]\!\right]_{,\alpha}\left(2C_1+C_6\right)$$

En utilisant le saut de gradient de vitesse tangentielle macroscopique donné par la relation (4.184), on obtient :

$$\int\left(\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\alpha)_{,3}-\widetilde{\mu}_k^0\left(\xi\widetilde{\boldsymbol{v}}_k^0(\alpha)_{,3}\right)_{,3}\right)_{,\alpha}d\xi=\left[\!\left[\mu\right]\!\right]\left[\!\left[1/\mu\right]\!\right]\widetilde{\tau}_{i,\alpha}^0(\alpha)\left(2C_1+C_6\right)$$

Enfin, sachant que l'excès de masse à l'interface est nul, on a :

$$\int\left(\breve{\overline{\mu v}}^0-\widetilde{\mu}^0\widetilde{v}^0\right)d\xi=0 \tag{4.461}$$

Comme l'ordre 0 du taux de changement de phase est indépendant de la coordonnée normale à l'interface, la fonction $\mathcal{N}$ ne dépend pas de ξ. En la remplaçant par sa valeur asymptotique $\widetilde{\mathcal{N}}\hat{=}\widetilde{\dot{m}}^0_{,\alpha,\alpha}-2\kappa_\alpha\kappa_\alpha\widetilde{\dot{m}}^0$, la dernière intégrale de l'équation (4.459) s'évalue en combinant l'équation (4.461) à la propriété (4.402) :

$$\int\left(\breve{\overline{\mu v}}^0-\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{v}}^0\right)d\xi=-\int\left(\breve{\overline{\mu}}^0\breve{\overline{v}}^0-\widetilde{\mu}^0\widetilde{v}^0\right)d\xi=-\left[\!\left[\mu\right]\!\right]\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\left(2C_1+C_6\right) \tag{4.462}$$

L'ordre 1 et les dérivées des propriétés physiques sont nuls dans les phases. En synthétisant ces différents résultats et sachant que l'ordre 1 des propriétés physiques est nul dans les phases, on obtient finalement :

$$\int \mathrm{Re}\left(\mathbf{I}\breve{\mathbf{V}} - \widetilde{\mathbf{I}\mathbf{V}}\right) d\xi = \left[\!\left[2\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(3)_{,3}\right]\!\right] + [\![\mu]\!]\,[\![1/\mu]\!]\,(2C_1 + C_6)\left(\widetilde{\tau}_{i,\alpha}^0(\alpha) - (\kappa_1 + \kappa_2)\,\widetilde{\tau}_i^0(3)\right)$$
$$-2\,[\![\mu]\!]\,[\![1/\rho]\!]\,(2C_1 + C_6)\,\widetilde{\mathcal{N}}$$

Terme V : gradient de pression. La différence entre la solution intérieure et la solution extérieure est donnée par :

$$\breve{\mathbf{V}} - \widetilde{\mathbf{V}} = \breve{\overline{p}}_{,3}^1 - \widetilde{p}_{k,3}^0 = \breve{\overline{p}}_{,3}^1 - \left(\xi \widetilde{p}_{k,3}^0\right)_{,3} \tag{4.463}$$

En utilisant les conditions de raccord, ce terme s'intègre sur la zone de transition pour donner :

$$\int \left(\breve{\mathbf{V}} - \widetilde{\mathbf{V}}\right) d\xi = [\![\widetilde{p}_k^1]\!] \tag{4.464}$$

Terme VI : tension superficielle. Le terme de tension superficielle n'a pas d'équivalent dans les régions extérieures puisqu'il est par définition restreint à l'interface. La courbure s'évalue en appliquant la relation (4.238) au vecteur $\overline{\boldsymbol{n}}^s$:

$$\breve{\overline{\kappa}} = -\nabla_s \cdot \overline{\boldsymbol{n}}^s = (\kappa_1 + \kappa_2) + \epsilon\xi\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right) \tag{4.465}$$

Le terme de tension superficielle est donc donné à l'ordre 1 par :

$$\breve{\mathbf{V}}\mathbf{I} = \frac{1}{\mathrm{We}}\xi\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)\breve{\overline{\chi}}_{,3}^0 + \frac{1}{\mathrm{We}}\breve{\overline{\kappa}}^0\breve{\overline{\chi}}_{,3}^1 \tag{4.466}$$

L'intégrale sur la zone de transition est nulle d'après les propriétés (4.107) :

$$\int \breve{\mathbf{V}}\mathbf{I} d\xi = \frac{1}{\mathrm{We}}\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)\int \xi\breve{\overline{\chi}}_{,3}^0 d\xi + \frac{1}{\mathrm{We}}\widetilde{\kappa}^0 \int \breve{\overline{\chi}}_{,3}^1 d\xi = 0 \tag{4.467}$$

Cette relation indique que les termes de tension de surface sont correctement capturés à l'ordre 0 puisqu'aucune correction n'est apportée par l'ordre 1.

Synthèse : En sommant les intégrales des 6 termes précédents, on reconstruit la relation de saut d'ordre 1 de l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la direction normale :

$$\int \left(\breve{\mathbf{I}} - \widetilde{\mathbf{I}}\right) d\xi = 0 \tag{4.468a}$$

$$\int \left(\breve{\mathbf{I}}\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{I}}\mathbf{I} + \mathbf{I}\breve{\mathbf{I}}\mathbf{I}\right) d\xi \approx \left[\!\left[\widetilde{\dot{m}}\widetilde{\boldsymbol{v}}_k(3) + \widetilde{C}_{33}\right]\!\right]^1 + \mathrm{At}\,[\![1/\rho]\!]\,\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\kappa}\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)\,(C_5 + C_1) \tag{4.468b}$$

$$\int \mathrm{Re}\left(\mathbf{I}\breve{\mathbf{V}} - \widetilde{\mathbf{I}\mathbf{V}}\right) d\xi = \left[\!\left[2\widetilde{\mu}_k^0 \widetilde{\boldsymbol{v}}_k^1(3)_{,3}\right]\!\right] + [\![\mu]\!]\,[\![1/\mu]\!]\,(2C_1 + C_6)\left(\widetilde{\tau}_{i,\alpha}^0(\alpha) - \widetilde{\kappa}\widetilde{\tau}_i^0(3)\right)$$
$$-\,2\,[\![\mu]\!]\,[\![1/\rho]\!]\,(2C_1 + C_6)\,\widetilde{\mathcal{N}} \tag{4.468c}$$

$$\int \left(\breve{\mathbf{V}} - \widetilde{\mathbf{V}}\right) d\xi = [\![\widetilde{p}_k^1]\!] \tag{4.468d}$$

$$\int \left(\breve{\mathbf{V}}\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{V}\mathbf{I}}\right) d\xi = 0 \tag{4.468e}$$

Le terme $\left(\widetilde{\tau}_{i,\alpha}^0(\alpha) - \widetilde{\kappa}\widetilde{\tau}_i^0(3)\right)$ correspond à la divergence surfacique de la contrainte tangentielle à l'interface à l'ordre dominant $\nabla_s \cdot \widetilde{\tau}_i^0$. Sachant que les termes (4.444) et (4.446) sont équivalents, la somme des équations du système (4.468) conduit à :

$$\widetilde{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\widetilde{\rho}_k\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k \otimes (\widetilde{\boldsymbol{v}}_k - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i) - \widetilde{C}_k - \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}_k} + \widetilde{p}_k\boldsymbol{I}\right]^1 \cdot \nabla\widetilde{\chi}_k = \mathrm{At}\,[\![1/\rho]\!]\,\widetilde{\dot{m}}^0\widetilde{\kappa}\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma^0(3)C_1 \tag{4.469}$$
$$+\,(2C_1 + C_6)\,\frac{[\![\mu]\!]}{\mathrm{Re}}\left([\![1/\mu]\!]\,\nabla_s \cdot \widetilde{\tau}_i^0 - 2\,[\![1/\rho]\!]\,\widetilde{\mathcal{N}}\right)$$

4.F Développements limités et variables filtrées

4.F.1 Filtre

Décomposition du filtre Le voisinage de l'interface est décrit dans un repère de coordonnées locales (ξ_1, ξ_2, ξ_3). La direction normale à l'interface est dilatée par le changement de variable $\xi = \xi_3/\epsilon$. On suppose que le noyau du filtre G se décompose en un produit de deux noyaux : un noyau unidirectionnel G_3 qui ne dépend que de la coordonnée normale à l'interface et un noyau surfacique G_{s,ξ_3} dans les directions tangentielles. Cela revient à supposer que le filtre volumique se décompose en la succession d'un filtre surfacique $\overline{\cdot}^{\sigma}$ et d'un filtre normal $\overline{\cdot}^{n}$:

$$G(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_3(\xi_3) G_{s,\xi_3}(\xi_1, \xi_2) \quad \text{et} \quad \overline{\phi} = \overline{\overline{\phi}^{\sigma}}^{n} = \overline{\overline{\phi}^{n}}^{\sigma} \tag{4.470}$$

Le noyau du filtre surfacique n'est pas indépendant des coordonnées spatiales. En effet, la figure 4.11 montre que son support dépend de l'ordonnée ξ_3. C'est pour insister sur cette caractéristique que l'indice ξ_3 est attribué au noyau G_s. Cet indice est omis dans le reste de ce mémoire.

De plus, en suivant les mêmes considérations qu'à la section 4.4.1, le développement limité suivant est postulé pour le noyau du filtre

$$G(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_3^0(\xi_3) + \epsilon G_s^1(\xi_1, \xi_2) G_3^1(\xi_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.471}$$

pour traduire le fait que le noyau du filtre est indépendant des coordonnées tangentielles à l'ordre dominant.

Configuration monodimensionnelle Pour un problème monodimensionnel, les variables filtrées s'expriment par

$$\overline{\phi}(\xi_3) = \int_{\xi_3^0=-\infty}^{\infty} G_3(\xi_3 - \xi_3^0)\phi(\xi_3^0) d\xi_3^0 \quad \text{et} \quad \overline{\breve{\phi}}(\xi) = \int_{\xi^0=-\infty}^{\infty} \breve{G}_3(\xi - \xi^0)\breve{\phi}(\xi^0)\epsilon d\xi^0 \tag{4.472}$$

Le passage d'une relation à l'autre s'effectue par le changement de variable $\xi_3^0 = \epsilon\xi^0$ en utilisant les relations $\breve{\phi}(\xi) = \phi(\xi_3)$ et $\breve{G}_3(\xi) = G_3(\xi_3)$. Dans la seconde intégrale, le noyau $\epsilon\breve{G}_3$ est bien normé. Cette propriété permet de s'assurer que l'opération de filtrage conserve les ordres (dans les régions intérieures comme extérieures), autrement dit

$$\overline{\phi^i}(\xi_3) = \overline{\phi}^i(\xi_3) \quad \text{et} \quad \overline{\breve{\phi}^i}(\xi) = \overline{\breve{\phi}}^i(\xi) \tag{4.473}$$

où i désigne un ordre quelconque. Cette propriété découle de la normalisation des filtres G_3 et $\epsilon\breve{G}_3$:

$$\int_{\xi_3^0=-\infty}^{\infty} G_3(\xi_3 - \xi_3^0) d\xi_3^0 = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\xi^0=-\infty}^{\infty} \breve{G}_3(\xi - \xi^0)\epsilon d\xi^0 = 1 \tag{4.474}$$

La propriété (4.473) n'est démontrée que pour un problème à une seule dimension. Néanmoins, comme le noyau du filtre est monodimensionnel à l'ordre dominant d'après le postulat (4.471), cette relation reste vraie à l'ordre dominant pour des champs tridimensionnels :

$$\overline{\phi^0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \overline{\phi}^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad \text{et} \quad \overline{\breve{\phi}^0}(\xi_1, \xi_2, \xi) = \overline{\breve{\phi}}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) \tag{4.475}$$

Exemple : À titre d'illustration, supposons un filtre boîte de largeur adimensionnelle ϵ. En utilisant les notations précédentes, le noyau s'écrit :

$$G_3(\xi_3) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\xi_3| > \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{si} \quad |\xi_3| \leq \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \breve{G}_3(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\xi| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{si} \quad |\xi| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.476}$$

On constate que le noyau $\breve{G}_3(\xi)$ n'est pas normé ; c'est le produit $\epsilon\breve{G}_3(\xi)$ qui est normé.

Comportement à l'infini Nous souhaitons étudier le comportement à l'infini d'une grandeur $\overline{\breve{a}\,\breve{\phi}}$, où $\breve{\phi}(\xi,\epsilon)$ et $\breve{a}(\xi)$ sont des fonctions continues, représentants respectivement un champ monofluide et une propriété thermodynamique constante dans les phases telle que :

$$\lim_{\xi\to\infty}\breve{a}(\xi)=a_+ \Leftrightarrow \left(\forall\eta>0,\ \exists\xi^1 \text{ tq. } \forall\xi\geq\xi^1\ :\ |\breve{a}\,(\xi)-a_+|\leq\eta\right) \tag{4.477a}$$

$$\lim_{\xi\to-\infty}\breve{a}(\xi)=a_- \Leftrightarrow \left(\forall\eta>0,\ \exists\xi^1 \text{ tq. } \forall\xi\leq\xi^1\ :\ |\breve{a}\,(\xi)-a_-|\leq\eta\right) \tag{4.477b}$$

Sans perte de généralité, on se restreint à l'étude en $+\infty$. Reprenons l'exemple du filtre boîte. Le support est compact. Après le changement de variable, on a

$$\overline{\breve{a}\,\breve{\phi}}(\xi)=\int_{\xi^0=-\infty}^{\infty}\breve{G}_3(\xi-\xi^0)\breve{a}(\xi^0)\,\breve{\phi}(\xi^0)\epsilon d\xi^0 \tag{4.478}$$

où $\breve{G}_3(\xi-\xi^0)\neq 0\Leftrightarrow\left|\xi-\xi^0\right|\leq 1/2\Leftrightarrow\xi-1/2\leq\xi^0\leq\xi+1/2$.
Soit $\xi\geq\xi^2=\xi^1+1/2$. La compacité du support implique que $\xi^0\geq\xi^1$ et par conséquent :

$$\left(\forall\eta>0,\ \exists\xi^2 \text{ tq. } \forall\xi\geq\xi^2\ :\ \left|\overline{\breve{a}\,\breve{\phi}}(\xi)-a_+\overline{\breve{\phi}}(\xi)\right|\leq\eta\right)\Leftrightarrow\lim_{\xi\to\infty}\overline{\breve{a}\,\breve{\phi}}(\xi)=a_+\lim_{\xi\to\infty}\overline{\breve{\phi}}(\xi) \tag{4.479}$$

Par conséquent, on a les relations :

$$\lim_{\xi\to\infty}\overline{\breve{a}}(\xi)=a_+ \tag{4.480a}$$

$$\lim_{\xi\to\infty}\overline{\breve{a}\,\breve{\phi}}(\xi)-\overline{\breve{a}}(\xi)\,\overline{\breve{\phi}}(\xi)=0 \tag{4.480b}$$

Restriction à l'interface : filtre $\overline{\phi}^{\sigma}$ Introduisons un nouvel opérateur de filtrage surfacique défini sur l'isosurface $\xi_3=0$ par :

$$\overline{\phi}^{\sigma}(\xi_1^0,\xi_2^0)=\iint_{\xi_1,\xi_2}G_s(\xi_1-\xi_1^0,\xi_2-\xi_2^0)\phi(\xi_1^0,\xi_2^0,0)d\xi_1^0d\xi_2^0 \tag{4.481}$$

Autrement dit, d'après les propriétés de la distribution de Dirac, une formulation équivalente est

$$\overline{\phi}^{\sigma}(\xi_1^0,\xi_2^0)=\iint_{\xi_1,\xi_2}G_s(\xi_1-\xi_1^0,\xi_2-\xi_2^0)\left(\int_{\xi_3}\phi(\xi_1^0,\xi_2^0,\xi_3^0)\delta^i(\xi_1^0,\xi_2^0,\xi_3^0)d\xi_3^0\right)d\xi_1^0d\xi_2^0 \tag{4.482}$$

ou encore :

$$\overline{\phi}^{\sigma}(\xi_1^0,\xi_2^0)=\frac{1}{G_3(0)}\iint_{\xi_1,\xi_2}G_s(\xi_1-\xi_1^0,\xi_2-\xi_2^0)\left(\int_{\xi_3}G_3(-\xi_3^0)\phi(\xi_1^0,\xi_2^0,\xi_3^0)\delta^i(\xi_1^0,\xi_2^0,\xi_3^0)d\xi_3^0\right)d\xi_1^0d\xi_2^0 \tag{4.483}$$

Ce raisonnement permet de montrer que l'opérateur surfacique $\overline{\cdot}^{\sigma}$ est la restriction à l'isosurface $\xi_3=0$ de l'opérateur $\overline{\cdot}^{s}$:

$$\overline{\phi}^{\sigma}(\xi_1^0,\xi_2^0)=\frac{1}{G_3(0)}\overline{\phi\delta^i}(\xi_1^0,\xi_2^0,0)=\frac{\overline{\phi\delta^i}(\xi_1^0,\xi_2^0,0)}{\overline{\delta^i}(\xi_1^0,\xi_2^0,0)}=\overline{\phi}^{s}(\xi_1^0,\xi_2^0,0) \tag{4.484}$$

4.F.2 Ordre des développements

La solution exacte du problème est approchée au voisinage de l'interface par une troncature d'un développement limité. Le dernier ordre détermine la précision de la solution.

Ordre 0 Dans le paragraphe précédent, nous avons illustré la construction d'une variable constante dans les phases $\breve{\chi}$ à partir d'un terme d'ordre 0 en ϵ dont les variations dans la région intérieure sont de l'ordre de 1 :

$$f(\xi_3)=a\text{th}\left(\frac{\xi_3}{\epsilon}\right)+b \quad\text{et}\quad \breve{f}(\xi)=a\text{th}(\xi)+b \tag{4.485}$$

La fonction f est bornée par les valeurs limites aux bords de la région intérieure ; mais il est possible de construire une variable d'ordre 0 dont les variations dans la zone de transition sortent de ces limites :

$$f(\xi_3,\epsilon) = a\mathrm{th}\left(\frac{\xi_3}{\epsilon}\right) + b\left[1-\mathrm{th}^2\left(\frac{\xi_3}{\epsilon}\right)\right] \quad \text{et} \quad \breve{f}(\xi) = a\mathrm{th}(\xi) + b\left(1-\mathrm{th}^2(\xi)\right) \tag{4.486}$$

Ordres positifs Il est nécessaire d'utiliser des ordres positifs de développements limités lorsque la variable représentée évolue dans chacune des phases. Par exemple, l'ordre 1 permet de traduire une évolution linéaire des variables dans les phases :

$$f(\xi_3) = a\xi_3 \quad \text{et} \quad \breve{f}(\xi,\epsilon) = a\epsilon\xi \tag{4.487}$$

Ordres négatifs L'ordre -1 d'un développement limité est nécessaire lorsque l'on souhaite représenter une variable qui s'écrit :

$$f(\xi_3,\epsilon) = \frac{a}{\epsilon} + \dots \tag{4.488}$$

Si $\epsilon \to 0$, la fonction f tend alors vers une distribution de Dirac. Cet ordre n'est pas anodin ; le développement limité d'une variable ne peut débuter à un ordre négatif que si on sait qu'à l'échelle microscopique cette variable est une distribution de Dirac (*e. g.,* $\overline{\delta}_\sigma$).

4.F.3 Termes sous-maille

L'écriture générique d'un terme sous-maille est la suivante :

$$\tau = \overline{\breve{a}\,\breve{\phi}} - \overline{\breve{a}}\,\overline{\breve{\phi}} \tag{4.489}$$

Par définition, le noyau du filtre étant normé, lorsque $\epsilon \to 0$, le noyau du filtre tend vers une distribution de Dirac. Par conséquent, la solution filtrée tend vers la solution microscopique, *i. e.,*

$$\overline{\breve{a}\,\breve{\phi}}(\xi,\epsilon) \underset{\epsilon\to 0}{\sim} \breve{a}(\xi)\,\breve{\phi}(\xi) \tag{4.490a}$$

$$\overline{\breve{\phi}}(\xi,\epsilon) \underset{\epsilon\to 0}{\sim} \breve{\phi}(\xi) \tag{4.490b}$$

$$\overline{\breve{a}}(\xi,\epsilon) \underset{\epsilon\to 0}{\sim} \breve{a}(\xi) \tag{4.490c}$$

Par conséquent, il existe deux fonctions ϵ_1 et ϵ_2 qui tendent vers 0 lorsque $\epsilon \to 0$ telles que $\forall\xi$:

$$\overline{\breve{a}\,\breve{\phi}}(\xi,\epsilon) = \breve{a}(\xi)\,\breve{\phi}(\xi)\left(1+\epsilon_1(\epsilon)\right) \tag{4.491a}$$

$$\overline{\breve{a}}(\xi,\epsilon)\overline{\breve{\phi}}(\xi,\epsilon) = \breve{a}(\xi)\breve{\phi}(\xi)\left(1+\epsilon_2(\epsilon)\right) \tag{4.491b}$$

En prenant la différence de ces deux relations, on obtient

$$\tau(\xi,\epsilon) = \left(\overline{\breve{a}\,\breve{\phi}} - \overline{\breve{a}}\overline{\breve{\phi}}\right)(\xi,\epsilon) = \breve{a}(\xi)\,\breve{\phi}(\xi)\left(\epsilon_1(\epsilon)-\epsilon_2(\epsilon)\right) \tag{4.492}$$

ce qui permet de montrer que le terme sous-maille tend vers 0 lorsque la taille du filtre tend vers zéro :

$$\forall\xi,\ \lim_{\epsilon\to 0}\tau(\xi,\epsilon) = 0 \tag{4.493}$$

Par conséquent, le développement limité en ϵ d'un terme sous-maille ne débute qu'à l'ordre 1 :

$$\tau(\xi,\epsilon) = \epsilon\tau^1(\xi) + \epsilon^2\tau^2(\xi) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.494a}$$

$$\tau(\breve{a},\breve{\phi}) = \left(\overline{\breve{a}^0\breve{\phi}^0} - \overline{\breve{a}^0}\,\overline{\breve{\phi}^0}\right) + \epsilon\left(\overline{\breve{a}^0\breve{\phi}^1} - \overline{\breve{a}^0}\,\overline{\breve{\phi}^1} + \overline{\breve{a}^1\breve{\phi}^0} - \overline{\breve{a}^1}\,\overline{\breve{\phi}^0}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.494b}$$

Par définition du développement limité, les variables $\breve{a}^i$ et $\breve{\phi}^i$ ne dépendent pas de ϵ. En supposant qu'à l'ordre dominant $\overline{\phi^0} = \overline{\phi}^0$, le premier terme entre parenthèses est indépendant de ϵ et l'identification des deux relations précédentes conduit à :

$$\overline{\breve{a}^0\breve{\phi}^0} - \overline{\breve{a}^0}\,\overline{\breve{\phi}^0} = \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.495}$$

Cette relation montre que la construction du terme sous-maille à partir des variables d'ordre 0 n'est pas d'ordre 0 mais est au moins d'ordre 1. On montre même à la section 2.2.1 que le terme sous-maille est en réalité d'ordre 2 (*cf.* Éq. (2.22)).

4.F.4 Quelques propriétés

4.F.4.1 Linéarité et conservation des fonctions affines

Par propriété du noyau, l'opération de filtrage est un opérateur linéaire qui conserve les fonctions affines :

$$\overline{a\phi_1 + b\phi_2} = a\overline{\phi_1} + b\overline{\phi_2} \tag{4.496a}$$

$$\overline{a\xi + b} = a\overline{\xi} + b = a\xi + b \tag{4.496b}$$

4.F.4.2 Propriété 1

D'après les propriétés du filtre (commutativité filtre/intégrale, filtre symétrique $G(\xi - \xi') = G(\xi' - \xi)$), on montre aisément en explicitant la définition d'une variable filtrée que pour toute fonction ϕ et ψ, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi\overline{\psi}d\xi' = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi}\psi d\xi' \tag{4.497}$$

L'application de cette dernière relation à $\phi \equiv 1$, $\breve{\overline{\chi}}^0$, $\overline{\breve{\overline{\chi}}^0}$, $\overline{\xi}$ conduit à de nombreux résultats intéressants utilisés dans le reste de ce mémoire.

4.F.4.3 Propriété 2

Par ailleurs, en utilisant la décomposition (4.470) du noyau du filtre introduite à la section 4.F.1, l'écriture générique d'un modèle sous-maille est la suivante

$$\tau = \overline{\breve{a}\,\breve{\phi}} - \overline{\breve{a}}\,\overline{\breve{\phi}} = \overline{\overline{\breve{a}\,\breve{\phi}}^{\sigma}}^{n} - \overline{\overline{\breve{a}}^{\sigma}}^{n}\,\overline{\overline{\breve{\phi}}^{\sigma}}^{n} = \overline{\overline{\breve{a}\,\breve{\phi}}^{n}}^{\sigma} - \overline{\overline{\breve{a}}^{n}}^{\sigma}\,\overline{\overline{\breve{\phi}}^{n}}^{\sigma} \tag{4.498}$$

où $\breve{a}$ est une propriété liée à l'interface (*e. g.*, $\breve{a} \equiv \breve{\overline{\chi}}_{,3}$) indépendante des coordonnées tangentielles : $\overline{\breve{a}}^{\sigma} = \breve{a}$. Par suite, le terme sous-maille s'écrit :

$$\tau = \overline{\breve{a}\,\overline{\breve{\phi}}^{\sigma}}^{n} - \overline{\breve{a}}^{n}\,\overline{\overline{\breve{\phi}}^{\sigma}}^{n} \tag{4.499}$$

Cette relation met en évidence un terme sous-maille identiquement nul si $\breve{\phi}$ est indépendante de ξ.

Enfin, en utilisant la propriété (4.497), on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\breve{\phi}}^{\sigma}\left(\breve{a} - \overline{\overline{\breve{a}}^{n}}\right) d\xi \tag{4.500}$$

La fonction entre parenthèses est paire (d'après la symétrie du noyau du filtre) et son intégrale est nulle (*cf.* propriété (4.497)). Par conséquent, seule la partie paire du profil de $\breve{\phi}$ doit être conservée dans l'intégrale précédente.

4.F.4.4 Propriété 3

Nous souhaitons à présent caractériser l'intégrale suivante :

$$E = \int \left(\tau^{ve} - \tau^{mf}\right)\left(1 - \epsilon\xi\kappa + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) d\xi \tag{4.501}$$

En injectant les définitions (4.198), on obtient :

$$E = \int \left(\overline{\left(\breve{a} - \breve{\overline{a}}\right)\breve{\overline{\phi}}} - \overline{\left(\breve{a} - \breve{\overline{a}}\right)}\breve{\overline{\phi}}\right)\left(1 - \epsilon\xi\kappa\right) d\xi + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4.502}$$

où la propriété a est reliée à l'indicatrice χ par la relation $\left(\breve{a} - \breve{\overline{a}}\right) = [\![a]\!]\left(\breve{\chi} - \breve{\overline{\chi}}\right)$. En développant et en explicitant les ordres de ϵ, on obtient :

$$E^0 = \int \left(\overline{\left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)\breve{\overline{\phi}}^0} - \overline{\left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)}\breve{\overline{\phi}}^0\right) d\xi \tag{4.503a}$$

$$E^1 = \int \left(\overline{\left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)\breve{\overline{\phi}}^1} - \overline{\left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)}\breve{\overline{\phi}}^1\right) d\xi + \int \left(\overline{\left(\breve{\chi}^1 - \breve{\overline{\chi}}^1\right)\breve{\overline{\phi}}^0} - \overline{\left(\breve{\chi}^1 - \breve{\overline{\chi}}^1\right)}\breve{\overline{\phi}}^0\right) d\xi$$
$$- \kappa \int \left(\overline{\left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)\breve{\overline{\phi}}^0} - \overline{\left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)}\breve{\overline{\phi}}^0\right) \xi d\xi \tag{4.503b}$$

Par souci de clarté on introduit les fonctions $\mathcal{F}^i$ et $\mathcal{G}^i$:

$$\mathcal{F}^i \triangleq \left(\breve{\chi}^i - \breve{\overline{\chi}}^i\right) - \overline{\overline{\left(\breve{\chi}^i - \breve{\overline{\chi}}^i\right)}} \tag{4.504a}$$

$$\mathcal{G}^i \triangleq \overline{\left(\breve{\chi}^i - \breve{\overline{\chi}}^i\right)\xi} - \overline{\overline{\overline{\left(\breve{\chi}^i - \breve{\overline{\chi}}^i\right)}}}\xi \tag{4.504b}$$

La fonction $\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0$ est impaire. D'après les propriétés du filtre (conservation de la parité), on en déduit que $\mathcal{G}^0$ est paire alors que $\mathcal{F}^0$ est impaire.

Ordre 0. L'intégrale E^0 se transforme d'après la propriété (4.497) :

$$E^0 = \int \left(\left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)\breve{\overline{\phi}}^0 - \overline{\overline{\left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)}}\breve{\overline{\phi}}^0\right) d\xi = \int \mathcal{F}^0 \breve{\overline{\phi}}^0 d\xi \tag{4.505}$$

Si $\breve{\overline{\phi}}^0$ est une fonction paire, alors $E^0 = 0$ comme $\mathcal{F}^0$ est une fonction impaire.

Ordre 1. L'intégrale E^1 se transforme d'après la propriété (4.497) et les définitions (4.504a) et (4.504b) :

$$E^1 = \int \mathcal{F}^0 \breve{\overline{\phi}}^1 d\xi + \int \mathcal{F}^1 \breve{\overline{\phi}}^0 d\xi - \kappa \int \mathcal{G}^0 \breve{\overline{\phi}}^0 d\xi \tag{4.506}$$

(i) Si $\breve{\overline{\phi}}^0$ est constante, on montre aisément que la 2e et la 3e intégrale sont nulles à l'aide de la propriété (4.497) et de la conservation des fonctions affines par le filtre (4.496b).

(ii) Si $\breve{\overline{\phi}}^1$ est paire, le produit $\mathcal{F}^0 \breve{\overline{\phi}}^1$ est impair et son intégrale est nulle.

(iii) Si $\breve{\overline{\phi}}^1$ est une fonction affine, la propriété (4.497) permet de montrer que la première intégrale s'annule.

(iv) Si $\breve{\overline{\phi}}^1$ est une rampe $\xi H(\xi)$, on décompose le volume d'intégration en deux domaines. La parité de la fonction $\mathcal{F}^0$ permet de montrer que la première intégrale est à nouveau nulle.

En fin de compte, cette palette de cas associée à la linéarité de l'intégrale et du filtre (4.496a) permettent de montrer que l'intégrale E^1 est nulle si $\breve{\overline{\phi}}^1$ peut se mettre sous la forme :

$$\breve{\overline{\phi}}^1(3) = \xi\left(aH(\xi) + b\right) + cf_p(\xi) + d \tag{4.507}$$

où $f_p(\xi) = \int_\infty^\xi \left(\breve{\overline{\chi}}^0 - \widetilde{\chi}^0\right) d\xi$ est une fonction paire.

Preuve 1 : $\displaystyle\int \mathcal{F}^0(\xi)\xi d\xi = 0$**.**

En explicitant la fonction $\mathcal{F}^0$ à l'aide de la définition (4.504a), on a :

$$\int \mathcal{F}^0(\xi)\xi d\xi = \int \left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)\xi d\xi - \int \overline{\overline{\left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)}}\,\xi d\xi$$

En appliquant deux fois la propriété (4.497) à la seconde intégrale, on obtient la relation recherchée d'après la propriété de conservation des fonctions affines (4.496b) :

$$\begin{aligned}\int \mathcal{F}^0(\xi)\xi d\xi &= \int \left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)\xi d\xi - \int \left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)\overline{\overline{\xi}} d\xi = \int \left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)\xi d\xi - \int \left(\breve{\chi}^0 - \breve{\overline{\chi}}^0\right)\xi d\xi \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.508}$$

Preuve 2 : $\displaystyle\int \mathcal{F}^0(\xi)\xi H(\xi) d\xi = 0$**.**

En notant que $H(\xi) + H(-\xi) = 1$, la relation (4.508) s'écrit :

$$\int \mathcal{F}^0(\xi)\xi \left(H(\xi) + H(-\xi)\right) d\xi = 0$$

En séparant les intégrales, le changement de variable $\xi' = -\xi$ dans la 2e intégrale conduit à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^0(\xi)\xi H(\xi) d\xi + \int_{\infty}^{-\infty} \mathcal{F}^0(-\xi')\left(-\xi'\right) H(\xi')\left(-d\xi'\right) = 0$$

Comme la fonction $\mathcal{F}^0$ est impaire, on obtient la relation recherchée en inversant les bornes de la seconde intégrale :

$$2\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^0(\xi)\xi H(\xi) d\xi = 0 \tag{4.509}$$

Chapitre 5

Tests *a posteriori*

Afin de conclure ce manuscrit, un travail de validation est nécessaire pour évaluer les capacités du modèle. Devant l'ampleur des travaux et face aux contraintes de temps, nous nous sommes limités à l'étude d'une partie du modèle sur quelques configurations spécifiques. Comme mentionné à la fin du chapitre précédent, les termes de saut associés à la viscosité du fluide sont négligés dans ce chapitre afin de rester concentré sur l'objectif principal de ce mémoire : le changement de phase.

Ce chapitre est divisé en trois parties. Dans un premier temps, nous présentons un protocole permettant de caractériser la méthode numérique en déterminant les constantes a_i et C_i du modèle ISS donné par le système (4.214) (section 5.1). À la section 5.2, nous donnons ensuite quelques informations sur l'implémentation du modèle ISS et sur le filtre explicite utilisé. Enfin, dans la dernière section, le modèle ISS est mis en œuvre sur trois configurations parmi celles étudiées par SND au chapitre 1 : les deux premières permettent de déterminer les paramètres du modèle ISS alors que la dernière a pour objectif d'évaluer le modèle ISS dans des conditions d'application plus complexes.

5.1 Protocole de détermination des constantes du modèle

Avant d'utiliser le modèle ISS, il faut déterminer les paramètres a_i et C_i du système (4.214). L'origine de ces paramètres est connue : les coefficients a_i sont introduits pour améliorer la reconstruction par similarité d'échelles, conformément aux propositions classiques de SGE monophasique (*e. g.,* Sarghini *et al.*, 1999), alors que les coefficients C_i traduisent la forme du noyau implicite et apparaissent lorsque l'interface macroscopique est introduite. Étant donné le nombre de paramètres à déterminer, il nous semble important à ce stade de choisir des configurations particulières pour lesquelles des propriétés comme la symétrie du problème ou l'absence de saut de viscosité permettent de réduire le nombre de paramètres influents. Une démarche progressive doit permettre de déterminer chaque paramètre avec plus de précision en évitant de confondre les influences.

Pour déterminer les paramètres a_i et C_i, nous proposons d'utiliser l'algorithme du Simplexe de Nelder et Mead (1965) en suivant la démarche présentée ci-dessous :

(i) Choisir une configuration simple pour laquelle un minimum de paramètres a une influence (*e. g.,* p paramètres) ;

(ii) Définir la grandeur ϕ pertinente qui caractérise l'évolution du système à l'échelle macroscopique et que l'on souhaite retrouver avec le modèle ISS (*e. g.,* vitesse de montée de bulle, taux de vide, nombre de Nusselt...) ; [1]

(iii) Évaluer la valeur convergée ϕ_{ref} de cette grandeur par SND sur un maillage de pas Δ ;

(iv) Pour une sous-résolution donnée (définie à partir des objectifs et des contraintes du modèle ISS, *e. g.,* $\overline{\Delta} = 3\Delta$), réaliser $p+1$ simulations ISS en faisant varier les paramètres du modèle pour définir un Simplexe [2] initial ;

1. Cette grandeur sert aussi de critère de comparaison avec les modèles moyennés.

2. Dans l'espace des paramètres a_i et C_i à p dimensions, un Simplexe est l'enveloppe convexe la plus simple. Il comprend $p+1$ sommets. C'est la généralisation du triangle pour un plan (espace à 2 dimensions). Chaque sommet du Simplexe constitue un jeu de paramètres.

(v) Évaluer en ces points la fonction erreur définie par :

$$\mathcal{E}_\phi = |\phi_{\text{ref}} - \phi| \tag{5.1}$$

(vi) Déterminer un nouvel ensemble de paramètres pour entourer plus précisément le minimum de l'erreur $\mathcal{E}_\phi$ à l'aide de l'algorithme du Simplexe (réduction de l'hypervolume) ;

(vii) En répétant les étapes (iv) à (vi), des simulations ISS permettent d'évaluer la fonction $\mathcal{E}_\phi$ pour chaque point du nouveau Simplexe et de déterminer un Simplexe de plus en plus petit qui conduit aux valeurs des paramètres recherchées.

Ainsi, l'algorithme du Simplexe permet de minimiser l'erreur $\mathcal{E}_\phi$ en faisant évoluer de manière optimale les paramètres du modèle ISS. Il est très efficace pour trouver le minimum de la fonction erreur mais le nombre de simulations requises augmente rapidement avec la taille du Simplexe (*i. e.,* le nombre de paramètres influents). Il est essentiel que les configurations étudiées soient simples pour que les simulations soient rapides et pour que la dimension p du Simplexe soit petite.

Le choix de la grandeur ϕ pour construire la fonction erreur $\mathcal{E}_\phi$ est capital. Il permet d'une part d'évaluer les compétences du modèle ISS en termes de grandeurs macroscopiques et ainsi d'établir un lien avec les approches moyennées. Par ailleurs, si la grandeur ϕ n'est pas influencée par un paramètre C_i, alors celui-ci ne peut pas être déterminé par l'algorithme de Nelder et Mead (1965). S'il est conservé dans la dimension du Simplexe, les résultats obtenus dans cette direction n'ont aucune signification et ce paramètre peut être mal déterminé.

Pour gagner du temps, nous nous sommes limités aux configurations académiques étudiées au chapitre 1 : la condensation ou la croissance d'une bulle de vapeur avec et sans gravité. Pour confirmer les valeurs des paramètres que nous allons déterminer, la définition de configurations spécifiques où un seul paramètre influence tour à tour le critère de convergence est une perspective importante. Pour cela, une interface plane, un problème à symétrie sphérique, l'absence de saut de viscosité, de masse volumique ou encore de vitesse seraient autant de variables à faire évoluer.

5.2 Mise en œuvre du modèle ISS

Cette section présente brièvement l'implémentation du modèle ISS dans la méthode numérique présentée à la section 1.2. Le choix des filtres explicites est exposé, puis on présente l'implémentation des termes du modèle ISS.

5.2.1 Filtrage

Pour le modèle ISS, comme en SGE, les équations régissant le problème sont résolues sur une grille trop grossière pour capturer toutes les fréquences (turbulentes) qui se développent dans l'écoulement. Cela permet de réduire le nombre de degré de liberté et donc le coût de calcul, mais en contrepartie, l'effet des petites échelles doit être modélisé. Formellement, la discrétisation des équations de bilan est une opération de filtrage dite implicite car le noyau ne peut pas être exprimé. Son support est classiquement assimilé à la taille de la maille de calcul $\overline{\Delta}$. Pour évaluer les modèles sous-maille, un second filtre est nécessaire. Ce filtre est dit explicite par opposition au premier car son noyau est connu. Son support est un multiple de la taille de la maille de calcul.

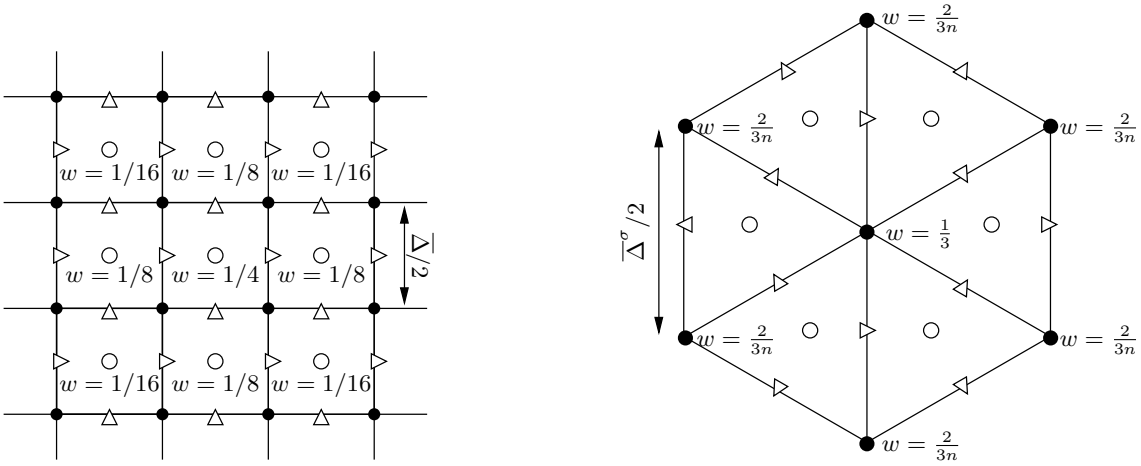
Filtre implicite Dans l'approche ISS, le petit paramètre adimensionnel ϵ caractérise la fréquence de coupure du filtre implicite correspondant à la discrétisation des équations sur le maillage eulérien. Lors de l'établissement des DAR, nous avons constaté qu'il exprime aussi l'épaisseur de la zone de transition. Il permet alors d'adimensionner les paramètres C_i qui apparaissent lors du raidissement des champs. Par conséquent, il est relié à la taille de la maille SGE $\overline{\Delta}$ et il semble naturel de l'adimensionner à partir de la courbure locale κ en définissant $\epsilon = \overline{\Delta}\kappa$.

Filtre explicite La taille et le noyau du filtre explicite sont à déterminer par l'utilisateur. En pratique, cette opération de filtrage est réalisée par une double interpolation (des éléments vers les sommets puis des sommets vers les éléments pour un scalaire ou inversement pour un vecteur). Ce filtre présente l'avantage d'être évalué rapidement et d'être simple à implémenter à la fois sur un

maillage structuré (eulérien) et non structuré (lagrangien). L'expression des poids de chaque voisin est donnée en 2D sur la figure 5.1. Deux filtres sont définis en fonction des variables traitées :

(i) Le maillage eulérien permet de construire un filtre volumique, noté $\bar{\cdot}$ dans le système (4.214), qui est utilisé pour construire les termes sous-maille convectifs $\widetilde{L}$ et $\widetilde{L}_T$ définis aux équations (4.212) et (4.213).

(ii) Un filtre surfacique $\bar{\cdot}^{\sigma}$, défini sur le maillage lagrangien, permet d'évaluer le terme de « Bardina de surface » dans la correction de vitesse interfaciale (4.215c).



(a) Maillage eulérien.

(b) Maillage lagrangien (n est le nombre de voisins).

FIGURE 5.1 – Filtres discrets volumique $\bar{\cdot}$ (a) et surfacique $\bar{\cdot}^{\sigma}$ (b).

Les fréquences de coupure de ces deux filtres (illustrées sur les figures 5.1a et 5.1b) ne sont pas décorrélées car on utilise un facteur de longueur idéal $\overline{\Delta}^{\sigma}/\overline{\Delta} \approx 1.4$ pour entretenir la qualité du maillage (Mathieu, 2003). La figure 5.1a montre que le noyau du filtre volumique n'est pas isotrope (comme les opérateurs de différenciation d'ailleurs) bien qu'il soit indépendant de la position considérée. Si le maillage surfacique est régulier, le filtre associé est quasiment isotrope (Fig. 5.1b) mais il peut dépendre de la position considérée (nombre de voisins, taille des arêtes...).

5.2.2 Implémentation du modèle ISS

L'algorithme de SND décrit à la section 1.2 sert de base au modèle ISS. Tous les termes sont évalués de manière explicite, c'est-à-dire à partir des champs au pas de temps précédent.

Transport de l'interface L'équation de transport de l'interface est résolue sur un maillage lagrangien. Il faut donc évaluer le terme $\delta \boldsymbol{v}_i$ sur la surface de discontinuité. Pour construire le terme **(I)** de l'équation (4.215c), le taux de transfert de masse (évalué en volume d'après l'algorithme présenté à la section 1.2.4) est interpolé aux éléments lagrangiens. La courbure et la normale à l'interface sont évaluées sur le maillage lagrangien à partir de la position des marqueurs. Le terme **(II)** est évalué à l'aide du filtre surfacique $\bar{\cdot}^{\sigma}$ décrit au paragraphe précédent. Le terme **(III)** de l'équation (4.215c) est évalué sur le maillage lagrangien à partir d'opérateurs différentiels surfaciques centrés. Il représente l'évolution temporelle de la courbure. La forme exacte sous laquelle ce terme est implémenté est donnée par la relation (4.156) même si nos développements ont permis de montrer que le laplacien surfacique est négligeable devant l'autre contribution. [3] L'algorithme du point fixe initialement proposé par Toutant *et al.* (2006) n'est plus nécessaire en raison du décalage dans les ordres que nous avons démontré.

Même sans changement de phase, le modèle ISS ne conserve pas **localement** la masse en raison de la correction de la vitesse interfaciale $\delta \boldsymbol{v}_i$ dans la direction normale à l'interface. En revanche,

3. Ce résultat est retrouvé en pratique sur les tests *a posteriori*.

hormis le terme d'ordre 1 spécifique au changement de phase (noté **(I)** à l'équation (4.215c)), il conserve **globalement** la masse sur une interface fermée (*i. e.,* une inclusion). Par conséquent, les contributions **(II)** et **(III)** à la correction de vitesse interfaciale $\delta \boldsymbol{v}_i$ doivent être appliquées entre l'algorithme de conservation locale de la masse et celui de conservation globale. Le terme **(I)** doit quant à lui être appliqué après ces deux conservations car il modifie le volume des inclusions. En résumé, l'algorithme de transport des marqueurs interfaciaux (présenté à la section 1.2.3) est modifié de la manière suivante pour intégrer la modélisation ISS :

(i) Déplacement des marqueurs à la vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}$ qui correspond au champ utilisé en SND (*cf.* paragraphe sur l'advection des marqueurs, section 1.2.3) ;

(ii) Correction du déplacement pour assurer la conservation locale de la masse ;

(iii) Déplacement correctif des marqueurs par les modèles sous-maille **(II)** et **(III)** ;

(iv) Correction du déplacement afin d'assurer la conservation globale de la masse (*i. e.,* par inclusion) pour que la variation totale de volume de vapeur au cours d'un pas de temps dt corresponde à l'intégrale du taux de changement de phase sur l'interface ;

(v) Déplacement correctif des marqueurs par le modèle sous-maille **(I)** (qui modifie le volume de l'inclusion).

Bilan de quantité de mouvement Lors de l'intégration temporelle du bilan de quantité de mouvement, le terme source $\mathcal{P}_m$ donné par l'équation (4.215b) doit être évalué sur le maillage eulérien. Pour cela, le modèle $\delta \boldsymbol{v}_i$ est interpolé du maillage lagrangien vers le maillage eulérien de manière conservative. Par ailleurs, l'implémentation du terme de Leonard $\widetilde{L}$ sur le maillage eulérien repose sur le filtre volumique $\bar{\cdot}$ introduit précédemment.

Enfin, le terme proportionnel au taux de changement de phase dans le terme de diffusion est négligé conformément à la version actuelle de l'algorithme (*cf.* annexe D.1).

Bilan d'énergie Le traitement du terme $\widetilde{L}_T$ est *a priori* similaire à celui de $\widetilde{L}$, mais à cause des particularités de la méthode « Ghost Fluid » nous avons dû prendre quelques précautions exposées ci-dessous. Pour traiter précisément la condition de saturation de l'interface et le saut de flux engendré par le changement de phase, le bilan d'énergie n'est pas formulé avec la température monofluide $\widetilde{T}$ mais avec le champ $\widetilde{T}_l^{gh}$, où l'exposant gh indique une extension du champ physique de la phase liquide par régularité dans la phase vapeur. Pour les problèmes considérés, la vapeur est supposée à saturation et on rappelle que ces deux variables sont alors reliées par : $\widetilde{T} = \widetilde{\chi}_l \widetilde{T}_l$.

À l'échelle macroscopique, l'objectif est d'intégrer temporellement l'équation

$$\frac{\partial \left(\widetilde{\rho c_p}\, \widetilde{T}\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho c_p}\, \widetilde{\boldsymbol{v}} \widetilde{T}\right) + a_3 \widetilde{\rho c_p} \nabla \cdot \widetilde{L}_T - \frac{1}{\mathrm{Pe}} \nabla \cdot \left[\widetilde{k}\left(\nabla \widetilde{T}\right)\right] = -a_3 \left[\!\left[\rho c_p\right]\!\right] \widetilde{L}_T \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} \widetilde{\delta}^i + \frac{\mathcal{L}^0}{\mathrm{Ja}} \widetilde{\dot{m}} \widetilde{\delta}^i \left(1 + \epsilon^2 C_3\right) \tag{5.2}$$

en considérant de plus la condition de saturation (adimensionnelle) de l'interface $\widetilde{T}^i = 0$. Cette équation monofluide se traduit à l'interface par l'expression de trois contributions pour le taux de changement de phase d'après les relations (4.188) et (4.196) :

$$\left(1 + \epsilon^2 C_3\right) \widetilde{\dot{m}} = -\frac{\mathrm{Ja}}{\mathcal{L}^0} \left[\!\left[\widetilde{\rho c_p}\, \widetilde{T} \left(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i\right) + \widetilde{F} - \frac{1}{\mathrm{Pe}} \widetilde{k} \nabla \widetilde{T} \right]\!\right] \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}} \tag{5.3}$$

La première contribution représente la convection de l'énergie macroscopique $\widetilde{\rho c_p}\, \widetilde{T}$. Comme à l'échelle microscopique, elle est nulle en considérant la condition de saturation. Le troisième terme est déjà présent à l'échelle microscopique où il traduit le saut de flux à l'interface. À cette échelle, c'est la seule contribution au taux de changement de phase $\dot{m}$ car le terme sous-maille $\widetilde{F}$ n'existe pas. Enfin, le saut du terme sous-maille convectif $\left[\!\left[\widetilde{F}\right]\!\right]$ s'exprime d'après la relation (4.5b) par

$$\widetilde{F}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = \left[\!\left[\widetilde{\rho c_p}\right]\!\right] \left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}\, \widetilde{T}} - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}}\, \overline{\widetilde{T}}\right) \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\, \widetilde{\delta}^i = \left[\!\left[\widetilde{\rho c_p}\right]\!\right] \widetilde{L}_T \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\, \widetilde{\delta}^i \tag{5.4}$$

car, à cause du filtre, le terme $\widetilde{L}_T$ est régulier à l'interface malgré le saut de vitesse. **La particularité de la détermination du taux de changement de phase à l'échelle macroscopique**

$\widetilde{\dot{m}}$ est de devoir ajouter à la contribution classique de conduction le terme sous-maille convectif $\widetilde{L}_T$ pondéré par le saut $[\![\widetilde{\rho c_p}]\!]$.

Sur le plan algorithmique, on rappelle que le taux de transfert de masse est évalué au centre des mailles eulériennes par un algorithme présenté pour la SND à la section 1.2.4. À l'échelle microscopique, il est déterminé à partir du gradient de température ∇T_l^{gh} uniquement. À l'échelle macroscopique, le terme source donné par la relation (5.4) doit être ajouté à la contribution classique du saut de gradient $\left[\!\!\left[\nabla \widetilde{T}_l^{gh}\right]\!\!\right]$. Comme l'illustre la figure 5.2, pour que l'énergie soit conservée, il faut aussi que l'énergie transférée par conduction depuis la phase liquide vers la maille diphasique (à travers la frontière gauche du carré) soit augmentée du terme donné par la relation (5.4). En effet, cette énergie est absorbée par le changement de phase de la matière dans la zone hachurée horizontalement. De plus, partout où le taux de changement de phase est nécessaire au modèle ISS, la correction $\left(1+\epsilon^2 C_3\right)$ doit aussi être appliquée. Pour cette correction, puisque le paramètre adimensionnel ϵ est donné par $\epsilon = \overline{\Delta}\kappa$, la courbure doit être évaluée en volume ; pour cela, on utilise le champ volumique de normale $\widetilde{\boldsymbol{n}}$ et la définition $\widetilde{\kappa} = -\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}$. En définitive, on propose d'évaluer le taux de changement de phase macroscopique par la relation :

$$\widetilde{\dot{m}} = -\frac{\mathrm{Ja}}{\mathcal{L}^0}\left(1-\epsilon^2 C_3\right)\left(a_3\,[\![\widetilde{\rho c_p}]\!]\,\widetilde{L}_T\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}} - \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\!\!\left[\widetilde{k}\nabla\widetilde{T}\right]\!\!\right]\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}\right) \tag{5.5}$$

Pour satisfaire le bilan d'énergie tout en évaluant correctement ce taux de changement de phase, ces corrections sont intégrées à l'algorithme « Ghost Fluid » lors de l'extension du gradient de température. Le gradient de température normal à l'interface est tout d'abord déterminé dans les mailles liquides voisines de l'interface par la méthode présentée pour la SND à la section 1.2.4. Avant d'étendre ce champ pour créer $\nabla\widetilde{T}_l^{gh}$, on lui ajoute la source $[\![\widetilde{\rho c_p}]\!]\,\widetilde{L}_T\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}$ évaluée sur le maillage eulérien et on le corrige par le facteur $\left(1-\epsilon^2 C_3\right)$

$$(\boldsymbol{n}\cdot\nabla T)_i \simeq \left(1-\epsilon^2 C_3\right)\left[\frac{(T_l)_i - T^{\mathrm{sat}}}{d_i}\left(1+\frac{\kappa d_i}{2}+\frac{\kappa^2 d_i^2}{8}\right) + \frac{1}{k_l}a_3\,[\![\widetilde{\rho c_p}]\!]\,\widetilde{L}_T\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}\right] \tag{5.6}$$

où i est l'indice de la maille eulérienne liquide considérée et d_i la distance signée à l'interface.[4] Des interpolations sommet-élément sont nécessaires pour évaluer les produits vecteur-scalaire qui forment le terme $\widetilde{L}_T$. Ensuite, le gradient évalué dans les mailles liquide par la relation (5.6) est prolongé dans les mailles diphasique et vapeur par une technique de diffusion itérative pour assurer sa régularité. Il sert finalement à la construction du champ $\widetilde{T}_l^{gh}$ dans les mailles diphasiques et vapeur ainsi qu'à l'évaluation eulérienne du taux de transfert de masse en le multipliant par $k_l/\mathcal{L}^{vap}$.

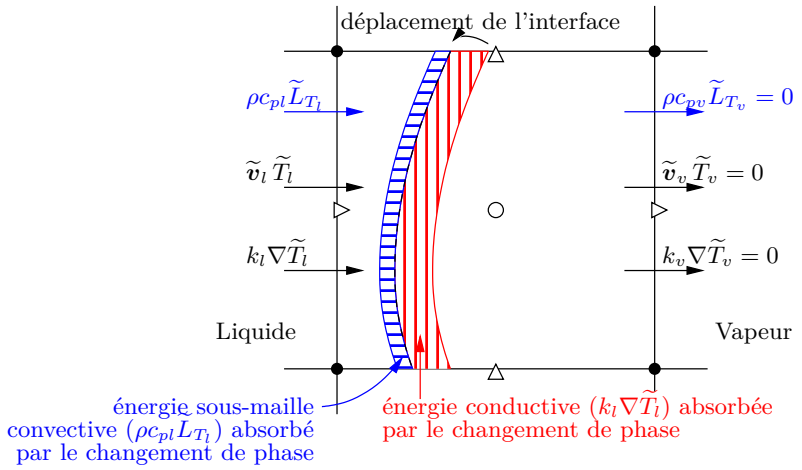


FIGURE 5.2 – Bilan d'énergie macroscopique sur une maille eulérienne diphasique avec la méthode « Ghost Fluid ».

4. Le développement limité de $\mathrm{e}^{-\kappa d_i}$ permet d'évaluer le champ à l'interface tout en le stockant sur les mailles eulériennes, conformément à la discussion du paragraphe 1.2.4.

5.3 Simulations ISS

Lors de ces premiers tests du modèle ISS avec changement de phase, notre objectif est de démontrer la **prédictivité** du modèle en lançant une simulation *en aveugle*, c'est-à-dire sans ajustement spécifique du modèle. Au préalable, il est nécessaire de déterminer les paramètres du modèle. Nous les ajustons sur deux configurations complémentaires (sections 5.3.1 et 5.3.2). Nos travaux se différencient en ce sens de l'approche de Magdeleine (2009) qui ajuste tous les coefficients du modèle ISS simultanément. L'intérêt d'une détermination progressive est discuté dans la suite de ce chapitre. Dans la seconde partie de son mémoire, Magdeleine (2009) propose d'ajuster les coefficients du modèle ISS à partir d'informations empiriques spécifiques associées à la configuration qu'il étudie ; son objectif est alors de démontrer les **capacités** du modèle avec plus de pragmatisme en exploitant tout le potentiel du réceptacle créé par la méthode des DAR. Cette deuxième étape poursuit d'autres objectifs, en aval de la validation recherchée ici.

Pour évaluer la prédictivité du modèle ISS sur une configuration réaliste pour laquelle nous disposons de données de référence, nous avons choisi de reprendre la configuration multi-bulles présentée à la section 1.3.7 (pseudo-turbulence). La configuration turbulente présentée à la section 1.3.6 (Turbulence Homogène Isotrope) est une autre perspective intéressante ; nous l'avons temporairement écartée car avant toute comparaison du modèle ISS, cette configuration nécessite au préalable de valider la modélisation sous-maille de la turbulence monophasique ce qui aurait requis plus de temps.

Avant d'étudier la configuration multi-bulles, nous présentons la détermination des paramètres du modèle ISS sur deux configurations : (i) la condensation et croissance d'une bulle sans gravité et (ii) l'ascension d'une bulle unique dans du liquide sous-refroidi.

5.3.1 Condensation et croissance sans gravité

Dans un premier temps, reprenons la configuration simple de l'évaporation (resp. condensation) d'une bulle unique dans du liquide uniformément surchauffé (resp. sous-refroidi) sans gravité. Ce problème à symétrie sphérique peut être étudié analytiquement pour prédire le comportement du modèle. En supposant un saut de viscosité faible, plusieurs modèles macroscopiques s'annulent et il est alors plus aisé de déterminer les paramètres restant.

Analyse Pour cette première configuration, on suppose :

H1. Le saut de viscosité négligeable : $[\![\mu]\!] \to 0$;

H2. Un problème à symétrie sphérique : $\forall \phi, \quad \phi_{,\alpha} = 0$;

H3. L'absence de vitesse tangentielle : $\boldsymbol{v}(\alpha) = 0$.

Dans ces conditions, on montre aisément que :

$$\mathcal{S}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}} = 0, \quad \widetilde{\tau}_i^0(\alpha) = 0, \quad \mathcal{P}_\mu = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_m(3) = \widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma \, [\![\rho]\!] \, \delta \boldsymbol{v}_i(3) C_7 \tag{5.7}$$

Par ailleurs, en l'absence de convection de la bulle, la vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma$ se réduit à $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma = -\widetilde{m}\widetilde{\boldsymbol{n}}/\rho_v$. L'inclusion étant sphérique, les courbures moyenne κ et gaussienne H sont reliées par la relation $\kappa^2 = 4H$ et le gradient tangent de courbure $\nabla\kappa$ est nul. De plus, l'étude analytique menée à l'annexe E permet de montrer que $\overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma = 1 - 2\epsilon^2 + \mathcal{O}\left(\epsilon^4\right)$ dans le cas d'une inclusion sphérique (*cf.* Éq. (E.24)). En supposant que la courbure moyenne de l'inclusion $\kappa_b = 2/R_b$ soit différente de la valeur $\kappa = 2/R$ observée localement à l'échelle du filtre, cette relation s'écrit

$$\overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma = 1 - 2\left(\epsilon\kappa^+/2\right)^2 \tag{5.8}$$

où $\kappa^+ = 2R_b/R$ est la courbure moyenne locale adimensionnelle (l'exposant $^+$ est omis par la suite). Il vient alors :

$$a_1\left(\overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma - \overline{\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma\right) = a_1\frac{\widetilde{m}}{\rho_v}\left(1 - \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^\sigma\right) = a_1\frac{\widetilde{m}}{\rho_v}\left(1 - 1 + \epsilon^2\frac{\kappa^2}{2}\right) = \epsilon^2 a_1\frac{\widetilde{m}}{\rho_v}\frac{\kappa^2}{2} \tag{5.9a}$$

$$\epsilon^2 C_4\left(\left(\kappa^2 - 2H\right)\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\right) = \epsilon^2 C_4\frac{\kappa^2}{2}\frac{\widetilde{m}}{\rho_v} \tag{5.9b}$$

Par conséquent, la définition (4.215c) de $\delta \boldsymbol{v}_i$ se réduit à :

$$\delta \boldsymbol{v}_i(3) = \epsilon \widetilde{\kappa} \widetilde{\dot{m}} \, [\![1/\rho]\!] \, C_5 + \epsilon^2 \kappa^2 \frac{\widetilde{\dot{m}}}{2\rho_v} \, (a_1 + C_4) \tag{5.10}$$

Cette relation montre que les constantes a_1 et C_4 agissent conjointement et ne peuvent pas être dissociées sur cet exemple.

À présent, pour pouvoir utiliser l'algorithme du Simplexe de Nelder et Mead (1965), il faut au préalable définir la fonction erreur à minimiser et les paramètres dont elle dépend. Pour la croissance, nous avons choisi l'évolution temporelle du taux de croissance de l'inclusion β. Pour la condensation, l'évolution temporelle du diamètre D est observée. On souhaite ajuster certains paramètres du modèle pour minimiser les fonctions $\mathcal{E}_\beta$ et $\mathcal{E}_D$ définies par

$$\mathcal{E}_\beta = \frac{1}{T} \int_T (\beta - \beta_{\text{ref}})^2 \, dt \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_D = \frac{1}{T} \int_T (D - D_{\text{ref}})^2 \, dt \tag{5.11}$$

où T est la durée de la simulation et l'indice ref correspond au résultat de la SND. L'algorithme du Simplexe de Nelder et Mead (1965) permet de déterminer comment faire varier les paramètres ISS pour que les erreurs $\mathcal{E}_\beta$ et $\mathcal{E}_D$ tendent rapidement vers 0. Le p-uplet de paramètres pour lequel ces erreurs sont nulles est la solution recherchée pour le modèle ISS.

Pour la croissance comme pour la condensation, la variable $\delta \boldsymbol{v}_i(3)$ est déterminante pour établir une vitesse de déplacement de l'interface correcte. En revanche, sur cette configuration simple, le bilan de quantité de mouvement à l'interface permet seulement de déterminer le saut de pression à l'interface en prenant en compte la pression de recul. Par conséquent, les paramètres a_2 et C_7 nécessaires pour déterminer le terme de Leonard $\widetilde{L}$ et la source de quantité de mouvement $\mathcal{P}_m$ n'ont *a priori* pas d'effet sur les critères choisis : il nous semble raisonnable de supposer que ces paramètres n'influencent pas l'erreur $\mathcal{E}_\beta$ ou $\mathcal{E}_D$. Nous avons vérifié *a posteriori* cette hypothèse. Le paramètre C_3 permet quant à lui d'augmenter le taux de changement de phase ; il influence le taux de croissance par l'expression (4.215a) de $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\sigma$ et son impact sur l'erreur doit donc être étudié. Enfin, le coefficient a_3 devant le terme de Leonard du bilan d'énergie $\widetilde{L}_T$ influence la solution pour le champ de température et en particulier le saut d'énergie à l'interface. De ce fait, il impacte l'évaluation du saut de gradient de température et doit aussi être considéré comme un paramètre influent. Finalement, l'algorithme du Simplexe de Nelder et Mead (1965) permet de déterminer le minimum des fonctions $\mathcal{E}_\beta$ et $\mathcal{E}_D$ dans un espace à 4 dimensions :

$$\mathcal{E}_\beta = \mathcal{E}_\beta \left(C_5, a_1 + C_4, a_3, C_3\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_D = \mathcal{E}_D \left(C_5, a_1 + C_4, a_3, C_3\right) \tag{5.12}$$

La détermination individuelle de a_1 et de C_4 est ici impossible. La distinction entre ces deux paramètres est réalisée sur la configuration suivante.

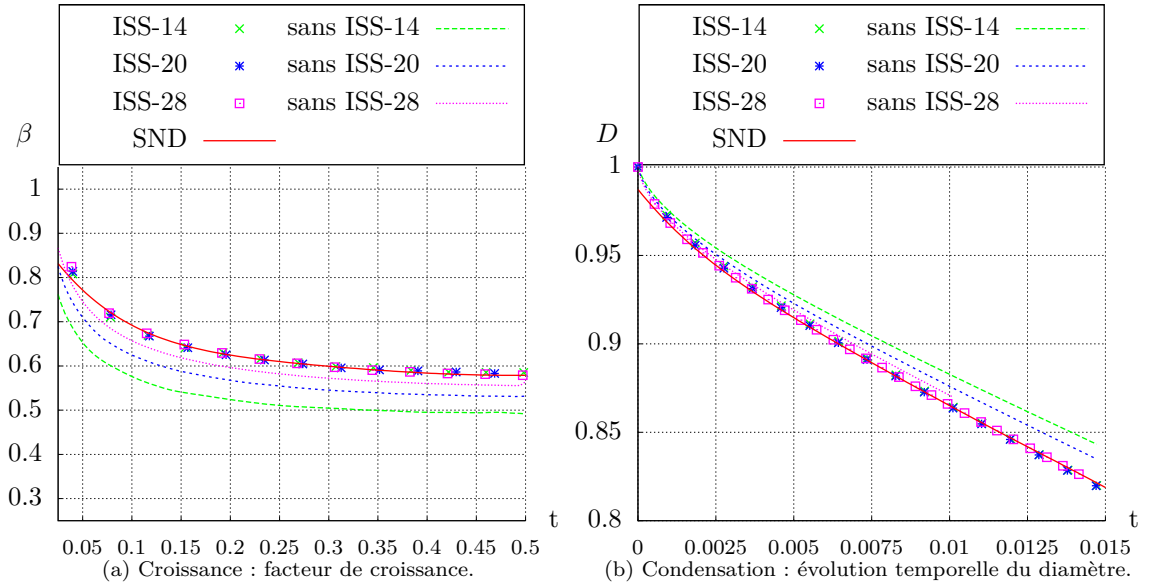
Résultats Nous avons conduit des simulations ISS pour différentes sous-résolutions ($\epsilon_f = 3.6\ 10^{-2}$ à $7.2\ 10^{-2}$) [5] par rapport au maillage de la SND ($\epsilon_{f,\text{SND}} \approx 0.018 \approx 1/56$). La sous-résolution peut aussi être caractérisée par le rapport $\Delta_{\text{SGE}}/\Delta_{\text{SND}}$ (compris entre 2 et 4) qui mesure la dégradation de la résolution du maillage. Les valeurs des paramètres obtenues par l'algorithme du Simplexe sont synthétisées dans le tableau 5.1. L'utilisation de plusieurs sous-résolutions permet de vérifier l'indépendance des paramètres du modèle à la taille de la maille SGE. Le maillage le plus grossier conduit à des valeurs légèrement différentes pour les paramètres C_3 et C_5 ; nous pensons que ces différences correspondent à une limite de sous-résolution pour le modèle ISS car le paramètre ϵ n'est plus assez petit pour que les ordres élevés (2 et 3) soient totalement négligeables. Par ailleurs, l'étude de la condensation et de la croissance permet de vérifier que le sens du transfert de masse n'affecte pas ces coefficients. Les paramètres C_i sont déterminés sans *a priori* car il ne leur existe pas d'équivalent monophasique. La théorie et les résultats du chapitre 3 indiquent que a_1 doit être proche de l'unité ce qui impliquerait que C_4 le soit aussi puisque $a_1 + C_4 \approx 2$ (*cf.* Tab. 5.1). La valeur déterminée pour le paramètre a_3 est relativement faible ce qui est surprenant au vu des tests *a priori* du chapitre 3. Pour la suite, nous conservons les paramètres déterminés par l'étude de la

	Croissance			Condensation		
$N_{D_f} = 1/\epsilon_f$	14	20	28	14	20	28
$\epsilon_f = \dfrac{\overline{\Delta}}{D_f} = \dfrac{\Delta}{R_b}$	7.2 10^{-2}	5.1 10^{-2}	3.6 10^{-2}	7.2 10^{-2}	5.1 10^{-2}	3.6 10^{-2}
$\Delta_{\mathrm{SGE}}/\Delta_{\mathrm{SND}}$	4	2.86	2	4	2.86	2
C_5	0.82	0.52	0.50	0.56	0.52	0.50
$a_1 + C_4$	2.00	2.04	2.00	2.10	2.03	2.00
a_3	0.26	0.33	0.35	0.31	0.32	0.30
C_3	0.17	0.05	0.07	0.15	0.07	0.07

TABLE 5.1 – Évaluation des paramètres du modèle ISS sur la condensation et la croissance d'une bulle sans gravité.

croissance sur le maillage le plus grossier car ce maillage correspond à la sous-résolution envisagée pour la configuration multi-bulles.

En complément, la figure 5.3 illustre le potentiel de l'algorithme du Simplexe qui permet de retrouver très précisément les résultats de la SND. Cette figure illustre aussi l'intérêt du modèle ISS puisque l'étude de la croissance sur le maillage le plus grossier conduit à une sous-estimation de 15% du facteur de croissance. On rappelle que le facteur de croissance β correspond à une dérivée temporelle ; par conséquent, 15% d'erreur conduisent très rapidement à une sous-estimation importante du diamètre.



(a) Croissance : facteur de croissance. (b) Condensation : évolution temporelle du diamètre.

FIGURE 5.3 – Détermination des paramètres du modèle ISS sur une bulle unique sans gravité (légende : ISS-N_{D_f}, où $N_{D_f} = 1/\epsilon_f$ est le nombre de mailles par rayon à la fin de la simulation).

5. L'indice f indique la valeur finale de $\epsilon = \Delta/R_b$ puisque celui-ci varie fortement au cours de ces simulations.

5.3.2 Ascension d'une bulle

À présent, une configuration où le bilan de quantité de mouvement est important et où les paramètres a_1 et C_4 peuvent être différenciés est nécessaire pour compléter la détermination du modèle ISS. Pour cela, revenons sur l'étude de l'ascension d'une bulle unique dans une colonne de liquide (initialement stagnant et uniformément sous-refroidi). Dans le référentiel de la bulle, les forces de flottaison induisent un mouvement tangentiel du liquide à l'interface qui brise la symétrie sphérique. Le problème est moins dégénéré qu'à la section précédente et de nouveaux paramètres peuvent être déterminés. Pour isoler l'influence du changement de phase, nous considérons deux configurations : la première est isotherme alors que dans la seconde, le liquide est sous-refroidi ce qui provoque la condensation de la bulle. La configuration isotherme permet de déterminer les valeurs des paramètres manquant au modèle ISS puis la configuration anisotherme apporte une première validation à l'ensemble des paramètres.

Configuration isotherme

L'étude d'un écoulement isotherme est complémentaire avec l'étude précédente. Elle permet de s'affranchir des paramètres directement proportionnels au taux de changement de phase (a_3, C_3 et C_5) pour se concentrer sur les paramètres qu'il nous reste à déterminer. De plus, comme l'écoulement est laminaire, la courbure de l'interface n'évolue pas au cours du temps. Puisque le paramètre C_4 est proportionnel à l'évolution temporelle de la courbure, il serait erroné de vouloir le déterminer sur cette configuration.[6] Sur une bulle sphérique, le terme **(III)** de l'équation (4.215c) est clairement nul et nous ne voyons pas quelle interprétation donner au coefficient C_4 que Magdeleine (2009) détermine dans ce cas. Pour la configuration anisotherme, on propose de s'affranchir du paramètre C_4 (*e. g.,* en prenant $C_4 = 1$) pour ne déterminer que la valeur des paramètres a_1, a_2 et C_7 en minimisant l'erreur sur le nombre de Reynolds de bulle :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Re}} = \mathcal{E}_{\mathrm{Re}}\left(a_1, a_2, C_7\right) \tag{5.13}$$

Le choix du nombre de Reynolds comme critère de convergence nous semble pertinent car il permet de mesurer la précision avec laquelle nous résolvons le bilan de quantité de mouvement et l'équation de transport de l'interface. Sans changement de phase, le diamètre est constant et ce critère traduit seulement l'évolution de la vitesse de montée de bulle. Un régime permanent est d'ailleurs atteint.

Bulle unique isotherme

Sous-résolution	ϵ	a_1	a_2	C_7
4	1/6	0.96	2.60	1.45

TABLE 5.2 – Évaluation des paramètres du modèle ISS sur une bulle unique ellipsoïdale en ascension dans du liquide à saturation (régime laminaire, sans changement de phase).

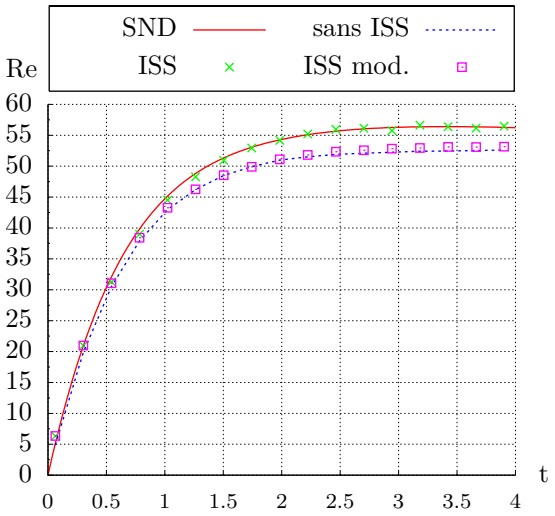


FIGURE 5.4 – Détermination des paramètres du modèle ISS sur la bulle unique soumise à la gravité (sans changement de phase).

6. L'invariance temporelle de la courbure n'est qu'une approximation lors de la mise en régime du calcul. La bulle, initialement sphérique, devient légèrement ellipsoïdale lorsqu'elle se met en mouvement d'après les valeurs des nombres sans dimension choisis et d'après la carte de Clift *et al.* (1978). Nous avons vérifié que cette hypothèse est tout à fait acceptable et que le paramètre C_4 n'a effectivement pas d'influence détectable sur ces simulations.

Résultats L'algorithme du Simplexe est utilisé pour une sous-résolution unique $\Delta_{\mathrm{SGE}} = 4\Delta_{\mathrm{SND}}$ ($\epsilon = 1/6$). Les valeurs des paramètres obtenues sont synthétisées dans le tableau 5.2. La détermination d'une valeur unitaire pour le paramètre a_1 est en parfait accord avec les conclusions des tests *a priori* du chapitre 3 où nous montrons que la reconstruction sous-maille du terme de transport de l'interface est de très bonne qualité (y compris en termes d'intensité). En revanche, l'algorithme du Simplexe détermine une valeur trop élevée pour le paramètre a_2 par rapport aux tests *a priori* et aux résultats classiques de SGE monophasique. (Magdeleine, 2009) obtient aussi une valeur très élevée pour ce paramètre ($a_2 = 2.4$). Au premier abord, on pourrait penser que le critère $\mathcal{E}_{\mathrm{Re}}$ n'est pas assez influencé par ce paramètre pour permettre de le déterminer, mais la figure 5.4 montre que ce n'est pas le cas (*cf.* courbe "ISS mod.", pour $a_1 = 0.96$, $a_2 = 0$ et $C_7 = 1.45$). Au contraire, cette figure montre que le paramètre a_2 est le plus influent. Nous proposons deux hypothèses pour expliquer cette valeur élevée : (i) soit le terme de Leonard compense des lacunes du modèle par ailleurs, *e. g.,* le saut de vitesse tangentielle que nous avons négligé ou des termes d'ordre 2 non évalués, (ii) soit il ne représente pas efficacement le terme sous-maille qu'il modélise et une reconstruction dynamique ou un modèle mixte doit être mis en place. Des travaux complémentaires sont nécessaires pour éclaircir ce résultat surprenant. Pour la suite, malgré les doutes, nous utilisons la valeur $a_2 = 2.6$. Enfin, nous n'avons pas de référence pour juger la valeur du paramètre C_7.

Configuration anisotherme avec changement de phase (liquide sous-refroidi)

Afin de valider l'ensemble des paramètres du modèle ISS que nous avons déterminé, reprenons la configuration présentée à la section 1.3.4. Le sous-refroidissement et la gravité permettent d'observer le modèle ISS dans sa globalité. Les évolutions temporelles du volume de vapeur et du nombre de Reynolds de bulle caractérisent la solution à l'échelle macroscopique.

Dans un premier temps, les paramètres déterminés aux sections précédentes sont utilisés pour conduire une simulation ISS sur un maillage sous-résolu ($\Delta_{\mathrm{SGE}} = 4\Delta_{\mathrm{SND}}$ ou $\epsilon = 1/6$). Les résultats sont donnés par la courbe "ISS J_1" sur la figure 5.5 où J_1 est le jeu de paramètres suivant :

$$\bullet\ J_1 : a_1 = 0.96,\ a_2 = 2.6,\ a_3 = 0.26,\ C_3 = 0.17,\ C_4 = 1,\ C_5 = 0.82 \quad \text{et} \quad C_7 = 1.45 \tag{5.14a}$$

Pour compléter cette analyse, la détermination directe et brutale de tous les paramètres du modèle ISS sur cette configuration est aussi possible bien qu'elle soit plus complexe et plus difficile à analyser. La convergence de l'algorithme du Simplexe est plus délicate et des compensations entre les erreurs sont alors possibles.[7] C'est pour cela que nous ne recommandons pas la détermination directe de tous les paramètres sur une unique configuration. Néanmoins, **on utilise cette démarche ici pour trouver un second jeu de paramètres afin d'observer, dans la prochaine étape, la sensibilité du modèle ISS aux paramètres.** Pour considérer simultanément les aspects thermique et dynamique, nous avons construit le critère[8] $\mathcal{E}_{\mathrm{Re}} + \mathcal{E}_{\mathcal{V}}$ et l'algorithme du Simplexe conduit au jeu de paramètres J_2 suivant :

$$\bullet\ J_2 : a_1 = 0.98,\ a_2 = 2.6,\ a_3 = 0.32,\ C_3 = 0.17,\ C_4 = 1.35,\ C_5 = 1.52 \quad \text{et} \quad C_7 = 1.48 \tag{5.14b}$$

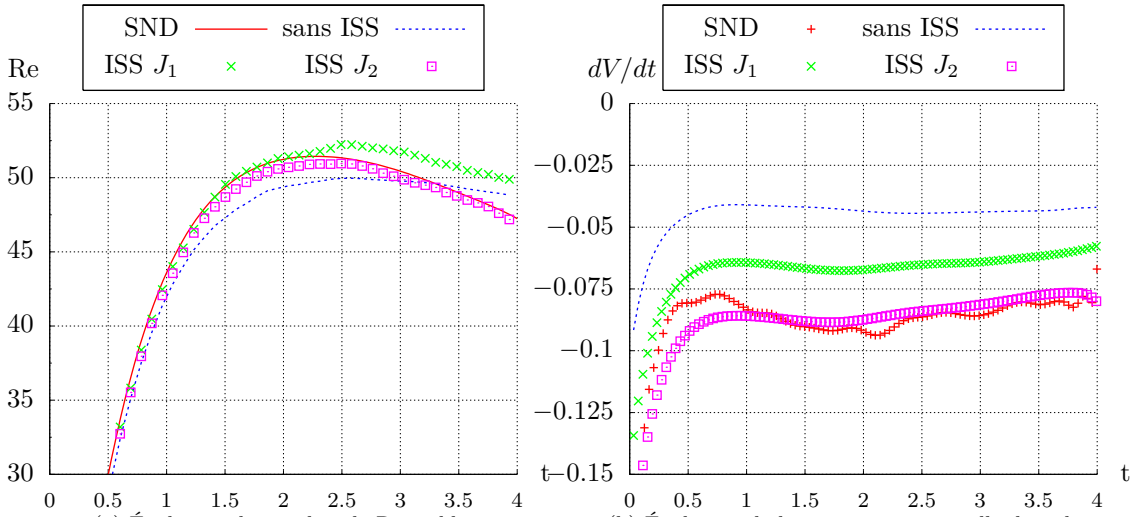
On constate qu'à l'exception des paramètres C_4 et C_5, les caractéristiques du modèle ISS n'ont pas évolué par rapport aux valeurs déterminées précédemment. Ce résultat préliminaire est rassurant, même si d'autres tests sont bien sûr indispensables pour affirmer la généricité des paramètres que nous proposons. Une étude plus approfondie doit être envisagée pour déterminer l'origine des variations des paramètres C_4 et C_5.

Sur la figure 5.5, le volume de vapeur et le nombre de Reynolds de bulle se comparent bien aux données de la SND pour le jeu de paramètre J_2 (grâce à l'algorithme du Simplexe) alors que le jeu de paramètre J_1 ne corrige pas entièrement le taux de changement de phase (Fig. 5.5b) et ne rattrape que la moitié de l'écart à la SND. La nouvelle valeur $C_5 = 1.52$ modélise plus précisément les transferts au point d'arrêt (sommet de la bulle) où la couche limite est très amincie,

7. À titre d'exemple, le nombre de Reynolds Re est influencé simultanément par la vitesse de montée de bulle et par le diamètre. Ces deux variables ont une influence contradictoire. L'ajustement de tous les paramètres simultanément peut donc être biaisé.

8. Pour que les deux erreurs $\mathcal{E}_{\mathrm{Re}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}$ soient du même ordre de grandeur, nous les avons normalisées par l'intégrale temporelle du champ Re et $\mathcal{V}$ respectivement.

ce qui pourrait signifier que cette singularité n'est pas capturée précisément à l'ordre considéré. Par ailleurs, la diminution du nombre de Reynolds aux temps longs est due à la diminution du diamètre sous l'effet de la condensation (Fig. 5.5a). Elle est donc logiquement mieux capturée avec le second jeu de paramètres.



(a) Évolution du nombre de Reynolds (b) Évolution de la variation temporelle du volume

FIGURE 5.5 – Détermination des paramètres du modèle ISS sur la bulle unique soumise à la gravité (anisotherme, avec changement de phase).

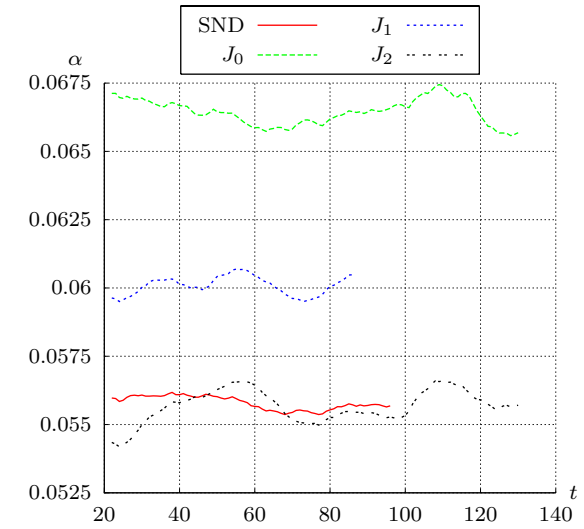
5.3.3 Pseudo-turbulence diphasique

À présent, nous souhaitons évaluer les prédictions du modèle ISS sur une configuration complexe pour comparer l'évolution de variables statistiques macroscopiques (*e. g.,* taux de vide, diamètre moyen, nombres de Nusselt et de Reynolds...) à des données de référence. La configuration multi-bulles présentée à la section 1.3.7 est simulée par le modèle ISS sur un maillage sous-résolu ($\Delta_{\text{SGE}} = 4\Delta_{\text{SND}}$ ou $\epsilon = 1/6$). Trois jeux de paramètres sont étudiés : J_0, J_1 et J_2. Dans le premier cas (J_0), tous les paramètres sont nuls afin de quantifier l'effet de la sous-résolution sur les grandeurs observées. Pour les deux autres cas (J_1 et J_2), les jeux de paramètres utilisés sont donnés par le système (5.14). Les données de la SND constituent les valeurs cibles que l'on souhaite retrouver. Une simulation requiert environ 22 h de calcul sur 192 processeurs, soit un total cumulé de 4 200hCPU contre environ 700 000hCPU pour la simulation fine ; autrement dit, le modèle ISS permet un gain d'un facteur 170 en termes de coût de calcul [9] et les graphes de la figure 5.6 illustrent la qualité de la solution obtenue.

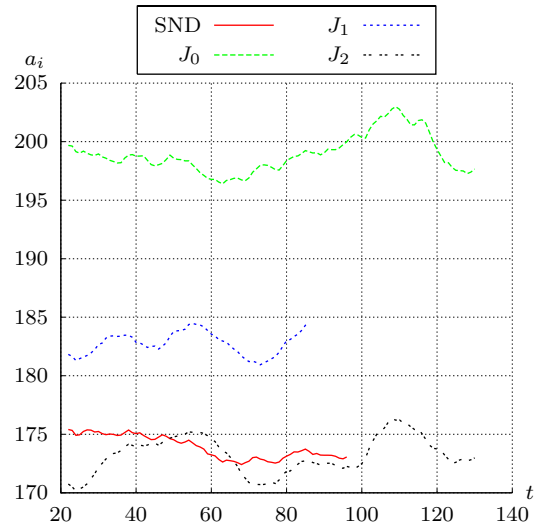
Les évolutions temporelles du taux de vide α, de l'aire interfaciale volumique a_i, du diamètre moyen de Sauter $D_{32} = 6\alpha/a_i$, de la vitesse moyenne de la vapeur v_v et des nombres de Reynolds Re et de Nusselt Nu sont données à la figure 5.6. Les champs locaux instantanés sont moyennés en espace puis en temps comme indiqué à la section 1.3.7 pour obtenir une bonne convergence (à $\pm 2\%$).

Intérêt du modèle ISS Cette première mise en pratique du modèle ISS avec changement de phase montre son efficacité. En effet, malgré les incertitudes liées à la détermination des paramètres, le modèle ISS permet d'obtenir des résultats nettement plus proches de la SND que ne le permet un calcul sous-résolu (Fig. 5.6), à l'exception des grandeurs globales comme les nombres de Reynolds et de Nusselt qui sont discutés à la fin de cette section. Concernant le taux de vide α et l'aire interfaciale volumique a_i, plus de 50% de l'erreur est rattrapée par les différents modèles avec le jeu

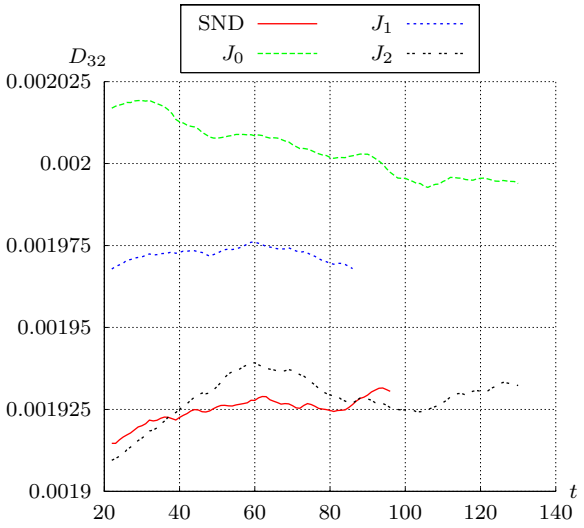
9. Ce facteur n'est qu'un indicateur. Comme l'implémentation du modèle ISS n'a pas été optimisée, on peut s'attendre à des performances encore meilleures.



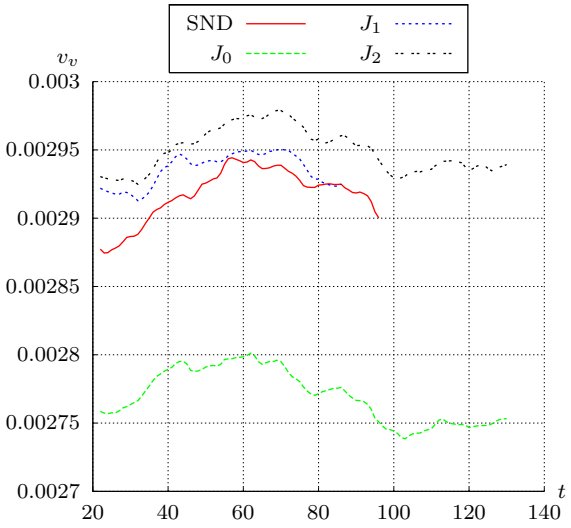
(a) Évolution du taux de vide



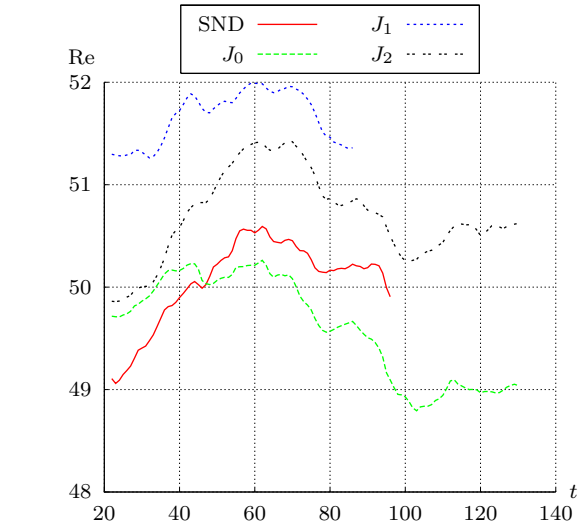
(b) Évolution de l'aire interfaciale volumique



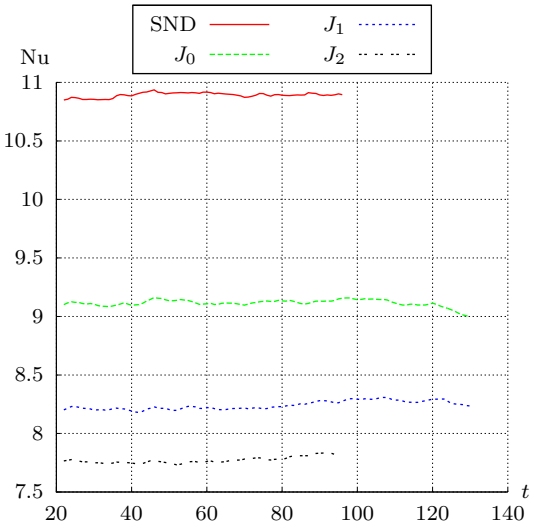
(c) Évolution du diamètre de Sauter (D_{32})



(d) Évolution de la vitesse moyenne de la vapeur



(e) Évolution du nombre de Reynolds



(f) Évolution du nombre de Nusselt

FIGURE 5.6 – Étude du modèle ISS sur la configuration pseudo-turbulente (moyenne spatiale sur les 5 tranches et temporelle sur 40 s).

de paramètre J_1 alors que les résultats de la SND sont parfaitement retrouvés (à la précision de la convergence) avec le jeu de paramètre J_2. Il en résulte une bonne prédiction du diamètre de Sauter. Il ne faut pas oublier que ces grandeurs moyennées intègrent fortement l'histoire des inclusions de vapeur. L'erreur mesurée peut rapidement devenir très importante car elle traduit l'intégrale en temps de l'erreur sur le taux de changement de phase aux interfaces depuis l'injection des bulles dans le domaine de calcul. La précision de la prédiction du taux de vide est primordiale pour déterminer les autres grandeurs (*e. g.,* vitesse de montée...). Ces résultats traduisent **la qualité de la modélisation associée au changement de phase dans l'équation de transport de l'interface** ; en particulier, le paramètre C_5 joue un rôle capital dans la détermination du taux de vide (*cf.* Fig. 5.5b) car c'est le seul paramètre dont la valeur varie significativement entre les jeux de paramètres J_1 et J_2. Ce test confirme la sensibilité plus marquée du modèle au terme proportionnel au paramètre C_5, ce qui est tout à fait cohérent avec l'ordre 1 qui lui est associé. Dans un premier temps, la validation du modèle ISS avec changement de phase pourra donc se focaliser sur ce terme.

Sur le plan dynamique, la vitesse de montée de bulle est prédite par le modèle ISS avec **une étonnante précision** pour les deux jeux de paramètres. Nous pensons que ce très bon résultat est lié à une meilleure résolution de la couche limite dynamique que la couche limite thermique (en raison du nombre de Prandtl Pr = 1.474). Dans le cas J_1, il y a aussi un effet caché lié au changement de phase : comme la diminution du diamètre est sous-estimée avec ce jeu de paramètres (*cf.* ascension d'une bulle unique, Fig. 5.5b), les bulles sont globalement plus grosses qu'en SND et leur ascension est plus rapide. Cet effet est probablement compensé par l'ajustement de la valeur du paramètre C_4 (qui intervient dans la correction de la vitesse de montée) pour obtenir la vitesse de montée déterminée en SND. En effet, le nombre de Reynolds est l'un des critères d'ajustement que nous avons choisi. Cette remarque démontre une fois de plus l'intérêt d'une méthodologie permettant de déterminer progressivement chaque paramètre du modèle ISS.

Sur le plan énergétique, nous constatons que, pour les deux jeux de paramètres considérés, **le modèle n'évalue pas correctement les gradients de température à l'interface** (Fig. 5.7). La tendance n'est pas bonne et l'erreur est plus importante que pour un calcul sous-résolu, sans modèle. Les propriétés du modèle vis-à-vis de la conservation de la masse et de l'énergie doivent être analysées plus précisément afin de savoir si la modélisation du transport de l'interface est cohérente avec les bilans de masse et d'énergie. Nous allons donner brièvement quelques indications sur ce point.

En appliquant un raisonnement similaire à celui développé à la fin de la section 2.2.6 au système macroscopique (4.214), on montre que le modèle ISS ne conserve pas la masse localement :

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}) = [\![\rho]\!]\,\delta \boldsymbol{v}_i(3)\widetilde{\delta}^i \tag{5.15}$$

La perte de la propriété de conservation est due aux modèles de déplacement de l'interface donnés par l'équation (4.215c). Parmi eux, les termes **(II)** et **(III)** existent dans le modèle ISS adiabatique proposé par Toutant *et al.* (2009a). Pour être cohérents, ces modèles doivent conserver le volume d'une inclusion. Autrement dit, leur contribution doit être globalement nulle sans changement de phase. En présence de changement de phase, cette propriété n'est, *a priori*, plus vérifiée.

Or, pour ajuster les paramètres du modèle ISS, nous avons choisi une contrainte sur la variation temporelle du volume de vapeur. Avec le peu de recul que nous avons, ce critère ne semble pas satisfaisant pour garantir une bonne évaluation du gradient de température ; [10] il est envisageable que plusieurs jeux de paramètres permettent de satisfaire la contrainte choisie sans pour autant évaluer correctement le gradient de température à l'interface. Pour améliorer la détermination des paramètres du modèle ISS, il faudrait ajouter une contrainte de conservation de la masse par inclusion

$$\forall i \ : \qquad \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\widetilde{\rho}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}) \right) d\nu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Gamma_i} \delta \boldsymbol{v}_i(3) da = 0 \tag{5.16}$$

10. En effet, si aucune précaution n'est prise, la variation du volume de vapeur n'est plus simplement proportionnelle au taux de changement de phase moyen avec le modèle ISS ; elle dépend aussi de la contribution intégrale des modèles de déplacement de l'interface donnés par l'équation (4.215c) :

$$[\![\rho]\!]\,\frac{dV}{dt} = \int \widetilde{\dot{m}} da + [\![\rho]\!] \int \delta \boldsymbol{v}_i(3) da$$

où l'indice i représente une inclusion, Γ_i sa surface et Ω_i son volume. Malheureusement, cette contrainte est difficile à mettre en œuvre et nous n'avons pas eu le temps d'analyser ce problème plus en détail. Les incertitudes qui l'entourent confirment la remarque sur la méthodologie mentionnée à la fin de la section 5.1 selon laquelle la manière de déterminer les paramètres est capitale.

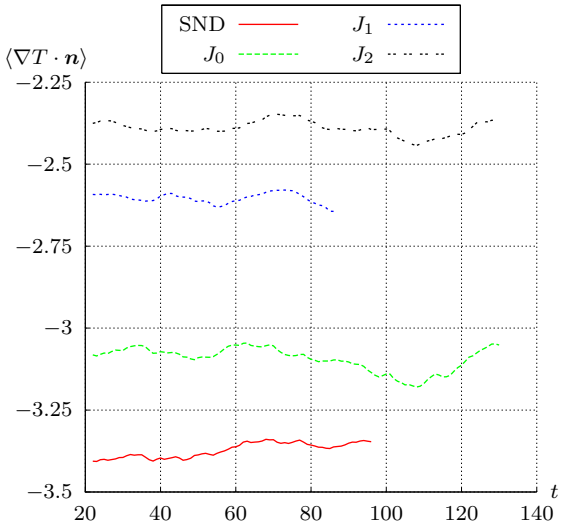


FIGURE 5.7 – Évolution du gradient de température moyen ($\langle \nabla T \cdot \boldsymbol{n} \rangle$) pour différents jeux de paramètres du modèle ISS.

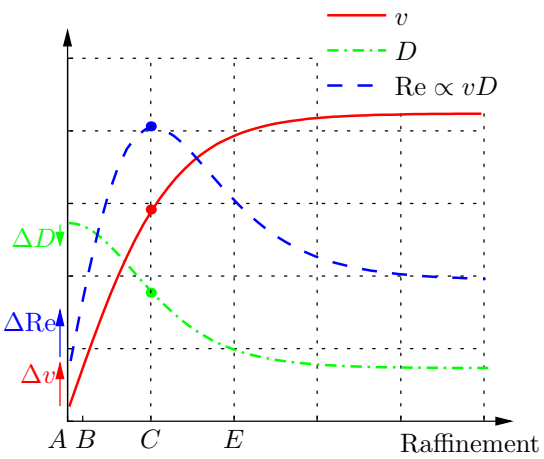


FIGURE 5.8 – Schématisation de la convergence non-monotone des nombres sans dimension.

Difficultés relatives aux grandeurs globales Il est difficile de comparer directement les nombres sans dimension du problème car ils intègrent des phénomènes physiques parfois contradictoires. Prenons l'exemple des nombres de Reynolds et de Nusselt respectivement définis par :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_l \, \| \boldsymbol{v}_l - \boldsymbol{v}_v \| \, D_{32}}{\mu_l} \quad \text{et} \quad \mathrm{Nu} = \frac{\langle \nabla T \cdot \boldsymbol{n} \rangle \, D_{32}}{T_{bk} - T^{\mathrm{sat}}} \tag{5.17}$$

Intéressons-nous tout d'abord au nombre de Reynolds. Tout comme le raffinement du maillage, le modèle ISS conduit à une augmentation de la vitesse de montée des inclusions v grâce à une meilleure résolution de la couche limite dynamique (Fig. 5.8). Dans le même temps, le diamètre des inclusions D diminue en raison d'un taux de changement de phase plus important. La variation correspondante du nombre de Reynolds est alors donnée par

$$\Delta \mathrm{Re} \propto D \Delta v - v \Delta D - \Delta v \, \Delta D \tag{5.18}$$

où v, D, Δv et ΔD sont positifs par convention. Le dernier terme de l'expression précédente peut être négligé en première approximation car il est du deuxième ordre. Le signe de la variation $\Delta \mathrm{Re}$ est *a priori* quelconque comme l'illustre la figure 5.8 (*e. g.,* positif de A à B et négatif de C à E). Il dépend des taux de convergence du diamètre et de la vitesse.

Dans un premier temps, supposons que le modèle ISS ait le même effet que le raffinement du maillage de A à B (Fig. 5.8), *i. e.,* une diminution $-\Delta D$ du diamètre et une augmentation Δv de la vitesse de montée. Dans ce cas, le nombre de Reynolds prédit au point B est plus près de la solution convergée que celui prédit au point A et le modèle ISS permet d'améliorer l'ensemble des prédictions. Ce résultat est assez intuitif.

En revanche, si on suppose à présent que le modèle ISS a le même effet que le raffinement du maillage de A à C (Fig. 5.8), le diamètre et la vitesse de montée des inclusions sont alors estimés avec plus de précision que dans le cas précédent. Cependant, si ces grandeurs n'ont pas le même taux de convergence (comme c'est le cas sur la figure 5.8), la valeur du nombre de Reynolds prédite en C peut surestimer la valeur convergée et, dans certains cas, être plus éloignée de la solution de

référence que dans le cas B. Autrement dit, la convergence du produit de deux fonctions monotones, l'une croissante et l'autre décroissante, n'est pas nécessairement monotone comme l'illustre la figure 5.8.

La figure 5.6e semble indiquer que nous nous trouvons dans ce cas car on constate que le modèle ISS conduit à de moins bons résultats qu'un calcul sous-résolu en termes de nombre de Reynolds alors que les évaluations séparées des grandeurs qui le composent sont meilleures (Fig. 5.6c et 5.6d). Cette remarque doit être modérée par l'amplitude très faible des erreurs observées dans ce cas, de l'ordre de grandeur de la convergence de la moyenne ($\pm 2\%$).

Pour le nombre de Nusselt, le problème de l'évaluation du flux à l'interface identifié au paragraphe précédent interdit une analyse aussi fine et nous ne pensons pas qu'un raisonnement similaire soit suffisant pour justifier l'amplitude de l'écart constaté. Un travail complémentaire semble nécessaire pour déterminer la pertinence, avec le modèle ISS, d'un nombre de Nusselt construit uniquement à partir du flux conductif et du terme de Leonard.

Sur cette configuration où le couplage entre dynamique et thermique est important, des effets antagonistes rendent difficile l'interprétation des nombres sans dimension. Même si la simulation ISS est de meilleure qualité que la SND sous-résolue, cela n'est pas nécessairement observable sur des grandeurs aussi globales que les nombres de Reynolds et de Nusselt. *A contrario*, d'autres critères importants comme le taux de vide sont améliorés car les modèles ont tous la même influence sur ce paramètre.

Conclusions En définitive, ces premiers tests *a posteriori* du modèle ISS donnent des résultats très encourageants. Nous avons été capables de déterminer correctement les paramètres du modèle à partir de deux configurations seulement et de les confirmer sur l'ascension d'une bulle unique (à l'exception de C_5). Ensuite, la première application montre que ces paramètres restent raisonnablement applicables à un écoulement pseudo-turbulent et permettent d'améliorer significativement la qualité de la solution. Néanmoins, les contraintes utilisées lors de l'ajustement des paramètres du modèle ISS se sont révélées insuffisantes car elles ne permettent pas d'estimer le flux d'énergie transmis aux interfaces avec précision ; lors de la détermination des paramètres, une contrainte supplémentaire est nécessaire pour assurer la cohérence entre le transfert de masse et celui d'énergie.

On peut donc en conclure que ce premier exemple est concluant et que le modèle ISS développé remplit ses fonctions. Plusieurs axes de validations sont à poursuivre parmi lesquels on peut citer :

(i) l'étude de la généricité des paramètres déterminés (indépendance au maillage et à la configuration) ;

(ii) l'étude des bilans globaux de masse et d'énergie ;

(iii) la validation des prédictions sur d'autres configurations ;

(iv) l'influence des termes visqueux négligés ici (en particulier du saut de vitesse tangentielle).

Conclusions & perspectives

Conclusions

Ce travail de thèse s'inscrit dans une approche multi-échelle de la modélisation des écoulements diphasiques caractéristiques de ceux rencontrés dans les études de sûreté des réacteurs nucléaires.

Les objectifs à long terme sont de disposer d'outils de simulation adaptés pour couvrir la large gamme d'échelles mise en jeu dans les écoulements diphasiques et d'établir des connexions entre ces échelles. Nous nous sommes focalisés sur l'étude d'une échelle intermédiaire entre la SND et les modèles moyennés à l'échelle 3D locale (*e. g.,* modèles à deux fluides) avec deux objectifs : (i) **établir un modèle de SGE diphasique discontinu** capable de traiter des interactions entre interfaces et turbulence tout en conservant un suivi explicite des inclusions et (ii) **relier les résultats de ce modèle aux échelles qui l'entourent** (l'échelle locale instantanée et l'échelle moyennée). Une des caractéristiques originales de nos travaux est de traiter le phénomène de changement de phase, qui est à l'origine de l'écoulement diphasique pour les applications visées. Dans le prolongement des travaux de Toutant (2006) et Toutant *et al.* (2009a,b), nous avons étendu le modèle ISS aux écoulements avec changement de phase, pour lesquels l'hypothèse de continuité de la vitesse aux interfaces n'est plus valable.

Pour cela, en filtrant spatialement la description locale et instantanée des bilans de masse et d'énergie, nous obtenons dans un premier temps une description continue de l'écoulement où les interfaces sont diffuses. Les transferts sous-filtres aux interfaces doivent être modélisés. Des travaux analytiques complétés par l'étude de configurations réalistes permettent de fermer cette description de l'écoulement à l'échelle mésoscopique. Ils montrent qu'en présence de changement de phase, une extension continue de la vitesse interfaciale peut être construite et utilisée pour transporter l'indicatrice mésoscopique et pour évaluer les termes sous-maille convectifs. Avec cette précaution, nous montrons que l'hypothèse de similarité d'échelles, développée par Bardina *et al.* (1983) pour traiter le tenseur de Reynolds dans les SGE monophasiques, peut être généralisée et appliquée aux autres termes sous-maille (*cf.* Éq. (2.45)). Sur le plan thermique, une condition à l'interface analogue à la condition de saturation est établie (*cf.* Éq. (2.77)). Elle met en exergue une déviation de la température mésoscopique à l'interface proportionnelle au taux de changement de phase. Enfin, pour traiter avec précision le saut de flux d'énergie à l'interface, nous montrons que la variable mésoscopique définie par le filtrage du produit de la température par la conductivité thermique est plus appropriée pour résoudre le bilan d'énergie que la température filtrée seule (*cf.* Éq. (2.62b)). Des tests *a priori* permettent de valider les fermetures de ce système en se basant sur les solutions de SND pour quelques configurations plus riches que les configurations analytiques classiques. Ces tests consistent à filtrer spatialement ces simulations fines pour déterminer les termes de fermeture, puis à comparer ces termes « mesurés » aux relations de fermeture proposées pour les modéliser.

Dans un deuxième temps, nous proposons un équivalent discontinu, dit macroscopique, à la modélisation SGE continue pour bénéficier de l'expertise acquise sur les méthodes numériques de SND. La méthode des DAR permet de concentrer les modèles sous-maille aux interfaces pour modifier les conditions de raccord entre les phases. Elle repose sur un développement limité qui ne fournit qu'une approximation des relations exactes. Même si nous avons établi des fermetures plus précises que celles proposées par Toutant *et al.* (2009a), nous n'avons pas fermé l'ensemble du système macroscopique à l'ordre 2 bien que cela nous semble nécessaire. Néanmoins, plusieurs conditions de saut macroscopiques spécifiques ont pu être déterminées :

(i) Pour rendre compte du transport de l'interface, trois modèles macroscopiques doivent être

considérés. Les deux premiers traduisent l'effet de l'évolution temporelle de la courbure de l'interface et une contribution non locale du champ de vitesse sur l'interface. Ils ont déjà été considérés et validés par Toutant *et al.* (2009b) pour les écoulements sans changement de phase. Le dernier terme source est spécifique aux écoulements liquide/vapeur ; il est proportionnel à la courbure de l'interface et au saut de vitesse à l'interface dû au changement de phase.

(ii) Le bilan de quantité de mouvement dans la direction normale à l'interface est modifié par la nouvelle vitesse macroscopique de l'interface ce qui se traduit par un terme source de quantité de mouvement proportionnel au saut de masse volumique et à la correction de vitesse interfaciale. Dans les directions tangentes, nous montrons qu'un saut de vitesse proportionnel au saut de viscosité existe pour modéliser la couche limite.

(iii) Sur le plan thermique, nous retrouvons la condition de saturation classique, qui caractérise des écoulements avec changement de phase, mais le taux de changement de phase ne dépend plus uniquement du saut de flux conductif comme c'est le cas à l'échelle microscopique. Pour pallier la sous-résolution de la couche limite thermique au voisinage de l'interface, nous proposons de mieux calculer le taux de changement de phase en ajoutant au saut de flux conductif un terme sous-maille de Leonard convectif. Celui-ci exprime les corrélations sous-maille entre la vitesse et la température au voisinage de l'interface. Le saut de capacité calorifique volumique entre le liquide et la vapeur intervient aussi dans cette relation.

(iv) Enfin, nous proposons de corriger l'évaluation de l'aire interfaciale pour considérer l'influence de la courbure. En modifiant ainsi la surface d'échange entre les phases, le taux de croissance ou de condensation moyen est modifié.

Grâce à des tests *a posteriori* préliminaires, nous montrons dans le dernier chapitre qu'il est nécessaire de considérer ces contributions pour améliorer les prédictions de la vitesse des interfaces et du taux de changement de phase et ainsi obtenir des valeurs plus précises des grandeurs macroscopiques significatives (*e. g.,* nombre de Nusselt, nombre de Reynolds, taux de vide...).

Ainsi, nous avons rempli le premier objectif de ce projet en développant un outil de SGE diphasique pour les écoulements avec changement de phase qui permet de modéliser les petites échelles turbulentes, y compris au voisinage de l'interface. L'effet des petites déformations interfaciales a été identifié à la section 2.5 ; dans une brève discussion, nous avons suggéré une méthode pour les modéliser mais nous les avons finalement négligées dans cette première approche car un travail important sera nécessaire pour proposer une fermeture plus précise.

La conservation d'un suivi explicite des interfaces est un atout pour évaluer avec plus de précision les transferts entre les phases, en particulier le taux de transfert de masse.

Dans la quête du deuxième objectif énoncé au début de cette conclusion, à savoir relier les résultats du modèle ISS aux échelles qui l'entourent, nous souhaitons, en soutien aux modèles moyennés à l'échelle 3D locale (*e. g.,* modèles à deux fluides), apporter des informations de fermeture locales en considérant la physique des transferts interfaciaux et les effets tridimensionels. Le transfert d'informations de la SND vers une description moyennée est possible, bien que la résolution directe des équations de bilan locales soit très coûteuse. En guise d'illustration, nous avons montré le potentiel de l'approche multi-échelle à la section 1.4 en estimant à partir des résultats de la SND multi-bulles les fermetures classiques des modèles à l'échelle 3D locale (*e. g.,* modèles à deux fluides) pour évaluer le terme puits de condensation. La prise de moyenne de la solution locale de l'écoulement permet de qualifier les corrélations de la littérature, mais la gamme de paramètres étudiée demeure très limitée. Comme en SGE monophasique, le gain apporté par la modélisation ISS permet d'envisager l'utilisation de simulations fines non plus uniquement pour des études fondamentales mais également pour des problèmes appliqués, à un coût raisonnable. Cette étape vers les écoulements turbulents à bulles constitue la première étape d'une démarche multi-échelle visant à quantifier le degré de confiance des simulations moyennées de type RANS.

Perspectives

À l'issue de cette thèse, de nombreuses perspectives restent ouvertes ou ont été ouvertes.

Tout d'abord, dans le prolongement de nos travaux, il nous semble nécessaire de compléter la fermeture du système macroscopique à l'ordre 2 pour être cohérent avec la modélisation de la turbulence au sein des phases. Au-delà de ces travaux théoriques, la validation du modèle ISS doit être poursuivie en implémentant les termes visqueux d'une part et en évaluant le modèle sur un plus grand nombre de configurations d'autre part. L'indépendance des paramètres du modèle ISS à la taille du maillage et aux propriétés des phases et de l'écoulement doit être vérifiée par des tests *a posteriori* avant de pouvoir effectivement utiliser le modèle ISS pour qualifier les modèles moyennés. Un des objectifs de ces tests sera de déterminer la capacité du modèle ISS à se rapprocher des résultats de SND (à moindre coût), mais aussi d'établir ses limites en termes de sous-résolution de l'interface et des couches limites (caractérisées par les nombres de Weber, de Reynolds et de Péclet). L'analyse du choix des contraintes lors de la détermination des valeurs des paramètres du modèle ISS doit être poursuivie pour assurer la conservation effective, à l'échelle macroscopique, de la masse et de l'énergie du système dans sa globalité.

À plus long terme, il semble indispensable de retravailler certains modèles sous-maille pour les rendre plus adaptés au traitement des couches limites qui se développent en proche interface, tout comme ce fut le cas en SGE monophasique pour traiter correctement des parois. En effet, les premières applications du modèle ISS aux écoulements adiabatiques montrent que les hypothèses fondatrices du modèle limitent fortement les sous-résolutions admissibles car les modèles sous-maille utilisés n'ont pas un très bon comportement dans les couches limites. De plus, pour atteindre des configurations industrielles, une forte sous-résolution des interfaces est nécessaire. À l'heure actuelle, celle-ci n'est pas acceptable pour le modèle ISS ; mais nous avons montré lors de la fermeture de l'aire interfaciale qu'il est possible d'inclure assez facilement des modèles plus élaborés. C'est là l'une des grandes forces de la démarche en deux étapes que nous avons adoptée : nous croyons qu'une fois la forme des sources macroscopiques établie par la méthode des DAR, il n'est pas difficile de modifier le modèle sous-maille qui ferme le problème à l'échelle mésoscopique.

Enfin, dans ces travaux précurseurs, nous sommes restés concentrés sur l'écoulement à cœur, en nous affranchissant des problématiques aux parois. Une perspective délicate et ambitieuse serait d'étudier le comportement du modèle ISS au voisinage de la paroi et à plus fort taux de vide. La résolution du champ de température dans la vapeur ne semble pas difficile. En revanche, la prise en compte des phénomènes de fragmentation et de coalescence ainsi que les phénomènes pariétaux (nucléation, détachement, ligne triple) est une tâche très ardue pour laquelle très peu de pistes de réflexions existent à notre connaissance. Elle n'en demeure pas moins une étape clé vers l'étude de la crise d'ébullition. Les bulles sous toutes leurs formes sont loin d'avoir dévoilé tous leurs secrets (*cf.* Prosperetti, 2004).

Annexes

Annexe A

Équations monofluides locales et instantanées

Les équations monofluides qui permettent de décrire le système régissant les transferts dans les phases et à l'interface. C'est aussi l'occasion de présenter une partie des symboles utilisés dans le reste de ce manuscrit. Le raisonnement présenté ici est donné dans un cadre plus général dans Delhaye (1974) et Delhaye *et al.* (1981b). Le lecteur intéressé pourra se reporter à ces documents pour plus de détails.

La notion de particule fluide est fondamentale en mécanique des milieux continus et plus particulièrement en mécanique des fluides. Elle correspond en thermodynamique à un volume :

(i) suffisamment grand pour contenir un nombre de particules permettant de le considérer comme un milieu continu (dans lequel s'appliquent les lois de la mécanique classique) ;

(ii) et suffisamment petit pour considérer qu'il est en équilibre thermodynamique local et que les grandeurs physiques macroscopiques sont définies et constantes sur ce volume.

L'application des principes de conservation à des volumes quelconques contenant une ou deux phases conduisent à 2 types de relations :

(i) des équations aux dérivées partielles pour décrire le mouvement des particules fluides monophasiques d'une part ;

(ii) des relations de saut aux interfaces traduisant les bilans locaux et l'équilibre thermodynamique local.

On rappelle dans un premier temps les résultats de l'application de ces principes à la masse, la quantité de mouvement, l'énergie et l'entropie pour obtenir les équations d'évolution dans les phases et les relations de saut. Dans un deuxième temps, on montre qu'il est possible d'établir une équation d'évolution de l'entropie (dite *secondaire*) dans les phases et à l'interface par combinaison des bilans primaires. Enfin, ces dernières relations apportent des fermetures au système. Les relations de fermeture dans les phases sont très classiques en mécanique des fluides, on s'attarde un peu plus sur les conclusions à l'interface. En particulier, l'hypothèse de transferts réversibles aux interfaces implique :

(i) une condition d'adhérence ;

(ii) la continuité des températures à l'interface ;

(iii) une relation de saut d'enthalpie libre massique (potentiel chimique) à l'interface.

Enfin, à partir de ces relations de base, on introduit le formalisme monofluide pour établir des équations d'évolution définies au sens des distributions dans tout le domaine. Cette annexe démontre progressivement les équations décrivant le système complet, de manière locale et instantanée.

A.1 Équations primaires d'évolution dans les phases

L'écriture des lois de conservation sur un volume monophasique quelconque (*e. g.*, Ω_l ou Ω_v, Fig. A.1) pour les variables primaires (masse, quantité de mouvement, énergie et entropie) permet d'obtenir, dans chacune des phases, notées $_k$, les lois d'évolution suivantes

Masse $$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \, \boldsymbol{v}_k) = 0 \tag{A.1a}$$

QdM $$\frac{\partial \rho_k \, \boldsymbol{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \, \boldsymbol{v}_k \otimes \boldsymbol{v}_k) - \rho_k \, \boldsymbol{F} - \nabla \cdot \boldsymbol{T}_k = 0 \tag{A.1b}$$

Énergie $$\frac{\partial \rho_k \left(u_k + \boldsymbol{v}_k^2/2\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho_k \, \boldsymbol{v}_k \, \left(u_k + \boldsymbol{v}_k^2/2\right)\right] - \rho_k \, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}_k - \nabla \cdot (\boldsymbol{T}_k \cdot \boldsymbol{v}_k) + \nabla \cdot \boldsymbol{q}_k = 0 \tag{A.1c}$$

Entropie $$\frac{\partial \rho_k \, s_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \, s_k \, \boldsymbol{v}_k) + \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{q}_k}{T_k} = \Delta_k \tag{A.1d}$$

où ρ_k est la masse volumique, $\boldsymbol{v}_k$ la vitesse, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}$ la force extérieure volumique (limitée à la gravité, *cf.* **H8**), $\boldsymbol{T}_k = -p_k \, \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}_k$ le tenseur des contraintes et $\boldsymbol{\tau}_k$ sa partie déviatorique, p_k la pression, u_k l'énergie interne, $\boldsymbol{q}_k$ le flux thermique, s_k l'entropie et Δ_k la source d'entropie.

Pour le détail de la dérivation de ces équations locales instantanées via l'application de la règle de Leibniz et du théorème de Gauss, le lecteur intéressé pourra se reporter au chapitre 5 de Delhaye *et al.* (1981b).

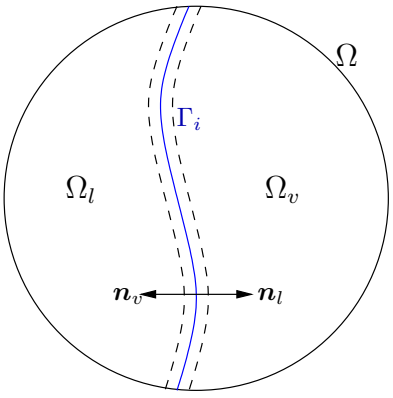


FIGURE A.1 – Définitions des volumes fluides.

A.2 Relations primaires de saut

En appliquant la notion de bilan aux grandeurs primaires sur un volume quelconque entourant une interface (*e. g.*, Ω, Fig. A.1), on obtient aussi les relations de saut primaires suivantes (Delhaye, 1974)

Masse $$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0 \tag{A.2a}$$

QdM $$\dot{m}_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) - \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{T}_2 + \nabla_s \sigma - (\nabla_s \cdot \boldsymbol{n})\sigma \boldsymbol{n} = 0 \tag{A.2b}$$

Énergie $$\begin{aligned} &\dot{m}_1 \left(u_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1^2\right) + \dot{m}_2 \left(u_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2^2\right) + \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{q}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 \\ &\quad - (\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{T}_1) \cdot \boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{T}_2) \cdot \boldsymbol{v}_2 + \nabla_s \cdot (\sigma \boldsymbol{v}^t) = 0 \end{aligned} \tag{A.2c}$$

Entropie $$\Delta_i = -\dot{m}_1 s_1 - \dot{m}_2 s_2 - \frac{1}{T_1}\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 - \frac{1}{T_2}\boldsymbol{q}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 \tag{A.2d}$$

où $\boldsymbol{n}_k$ est la normale sortante de la phase k, σ la tension superficielle, Δ_i la source d'entropie interfaciale et $\dot{m}_k$ le taux de transfert de masse à l'interface défini par

$$\dot{m}_k \hat{=} \rho_k(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_i) \cdot \boldsymbol{n}_k \tag{A.3}$$

avec $\boldsymbol{v}_i$ la vitesse de déplacement de l'interface.

Pour obtenir ces relations (A.2), on fait l'hypothèse que l'interface ne porte ni masse, ni flux (**H4**). La tension de surface est supposée être fonction de la température uniquement (**H11**).

A.3 Équation secondaire d'évolution de l'entropie dans les phases

Rappelons l'équation fondamentale en thermodynamique de définition d'une énergie interne u_k fonction de l'entropie s_k et de la masse volumique ρ_k

$$u_k = u_k(s_k, \rho_k) \tag{A.4}$$

et les définitions de la pression p_k et de la température T_k :

$$p_k \hat{=} \rho_k^2 \left.\frac{\partial u_k}{\partial \rho_k}\right|_{s_k} \tag{A.5}$$

$$T_k \hat{=} \left.\frac{\partial u_k}{\partial s_k}\right|_{\rho_k} \tag{A.6}$$

En utilisant l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local (**H1**), ces relations permettent d'obtenir l'équation de Gibbs :

$$\frac{du_k}{dt} = T_k \frac{ds_k}{dt} + \frac{p_k}{\rho_k^2}\frac{d\rho_k}{dt} \tag{A.7}$$

En utilisant le bilan de masse (A.1a) et la définition de la dérivée lagrangienne

$$\frac{d}{dt} \hat{=} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_k \cdot \nabla \tag{A.8}$$

on réécrit l'équation de Gibbs sous la forme suivante :

$$\frac{du_k}{dt} = T_k \frac{ds_k}{dt} - \frac{p_k}{\rho_k} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_k \tag{A.9}$$

On obtient par ailleurs l'équation d'énergie interne u_k en soustrayant le bilan de quantité de mouvement (A.1b) multiplié scalairement par la vitesse $\boldsymbol{v}_k$ à l'équation d'énergie totale (A.1c) :

$$\rho_k \frac{du_k}{dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{q}_k + p_k \nabla \cdot \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{\tau}_k : \nabla \boldsymbol{v}_k = 0 \tag{A.10}$$

En combinant ces 2 dernières équations, on obtient l'équation de bilan d'entropie :

$$\rho_k \frac{ds_k}{dt} + \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{q}_k}{T_k} - \boldsymbol{q}_k \cdot \nabla \left(\frac{1}{T_k}\right) - \frac{1}{T_k} \boldsymbol{\tau}_k : \nabla \boldsymbol{v}_k = 0 \tag{A.11}$$

Cette équation est dite *secondaire* car elle est obtenue par combinaison des équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale (dites *primaires* par opposition). Enfin, en utilisant l'équation primaire de bilan d'entropie (A.1d) obtenue par application directe du principe de conservation à l'entropie, on en déduit par analogie la formulation de la source d'entropie dans les phases :

$$\Delta_k = \boldsymbol{q}_k \cdot \nabla \frac{1}{T_k} + \frac{1}{T_k} \boldsymbol{\tau}_k : \nabla \boldsymbol{v}_k \tag{A.12}$$

Le second principe de la thermodynamique s'énonce comme suit :

> *La variation temporelle d'entropie est égale à la somme du flux d'entropie créé par le flux d'énergie et de la source volumique d'entropie, cette dernière étant positive ou nulle :*

$$\Delta_k \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{v}_k, \forall \boldsymbol{q}_k \tag{A.13}$$

Pour que cette inégalité soit vérifiée quel que soit le mouvement et quels que soient les transferts thermiques, il faut que :

$$\boldsymbol{q}_k \cdot \nabla \frac{1}{T_k} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{T_k} \boldsymbol{\tau}_k : \nabla \boldsymbol{v}_k \geq 0 \tag{A.14}$$

Ces deux inégalités sont fondamentales pour assurer la compatibilité des fermetures microscopiques du flux $\boldsymbol{q}_k$ et du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}_k$ avec le second principe de la thermodynamique. En supposant la réversibilité des transferts aux interfaces (**H2**), la loi de Fourier et la loi de comportement des fluides newtoniens proposent les fermetures suivantes :

$$\boldsymbol{q}_k = -k_k \nabla T_k \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}_k = \mu_k (\nabla \boldsymbol{v}_k + \nabla^T \boldsymbol{v}_k) \tag{A.15}$$

Ces deux formes linéaires sont intrinsèquement compatibles avec le second principe de la thermodynamique car elles vérifient les inégalités (A.14). L'entropie est donc utilisée dans les phases pour apporter une fermeture au système. Voyons à présent ce qu'il en est au niveau de la surface de discontinuité.

A.4 Relation secondaire de saut d'entropie

Introduisons une vitesse $\boldsymbol{v}_p$ (dite vitesse interfaciale) dont la composante normale est la vitesse de déplacement de l'interface et dont la composante tangentielle $\boldsymbol{v}^t$ est choisie arbitrairement :

$$\boldsymbol{v}_p = (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_k) \cdot \boldsymbol{n}_k + \boldsymbol{v}^t \tag{A.16}$$

En suivant le même principe que celui présenté précédemment, par un jeu de combinaisons (dont le détail est présenté dans Delhaye, 1974) et en introduisant la température interfaciale T^i, on obtient la formulation de la source d'entropie suivante

$$\begin{aligned}\Delta_i = \sum_{k=1,2} \Bigg\{ & \frac{\dot{m}_k}{T^i} \left[g_k + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_p)^2 - \frac{1}{\rho_k}(\boldsymbol{\tau}_k \cdot \boldsymbol{n}_k) \cdot \boldsymbol{n}_k \right] \\ & + (\boldsymbol{q}_k \cdot \boldsymbol{n}_k + \dot{m}_k s_k T_k) \left(\frac{1}{T^i} - \frac{1}{T_k} \right) - \frac{1}{T^i} (\boldsymbol{\tau}_k \cdot \boldsymbol{n}_k) \cdot \left(\boldsymbol{v}_k^t - \boldsymbol{v}^t \right) \Bigg\} \geq 0\end{aligned} \tag{A.17}$$

où $g = h - Ts$ est l'énergie libre massique aussi appellée enthalpie libre massique (ou potentiel chimique).

De manière analogue à ce qui a été présenté dans les phases, l'équation secondaire de saut d'entropie permet de donner une formulation à la source interfaciale d'entropie Δ_i. En supposant la réversibilité des transferts interfaciaux (**H2**) quels que soient le mouvement, le transfert de masse et les transferts thermiques, on a :

$$\forall \dot{m}_k,\ \boldsymbol{\tau}_k,\ \boldsymbol{q}_k, \quad \Delta_i = 0 \tag{A.18}$$

Cette hypothèse implique les trois conditions limites suivantes :

CL thermique $\quad T_1^i = T_2^i = T^i$ (A.19a)

CL mécanique $\quad \boldsymbol{v}_1^t = \boldsymbol{v}_2^t = \boldsymbol{v}^t$ (A.19b)

CL diphasique $\quad g_1 - g_2 = \left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_p)^2 - \frac{1}{2} (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_p)^2 \right] - \left[\frac{1}{\rho_2} (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2) \cdot \boldsymbol{n}_2 - \frac{1}{\rho_1} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1) \cdot \boldsymbol{n}_1 \right]$ (A.19c)

Or, en combinant la définition de la vitesse interfaciale (A.16) à celle du taux de transfert de masse (A.3), on obtient l'équation

$$\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_p = \frac{\dot{m}_k}{\rho_k} \boldsymbol{n}_k + \boldsymbol{v}_k^t - \boldsymbol{v}^t \tag{A.20}$$

qui se réduit d'après la condition à la limite (A.19b) à :

$$\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_p = \frac{\dot{m}_k}{\rho_k}\boldsymbol{n}_k \tag{A.21}$$

En remarquant que les vitesses de part et d'autre de l'interface sont liées par la relation

$$\boldsymbol{v}_v - \boldsymbol{v}_l = \dot{m}_v \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l}\right)\boldsymbol{n}_v \tag{A.22}$$

on peut réécrire l'équation (A.19c) comme suit :

$$g_1 - g_2 = \frac{1}{2}\dot{m}_k^2\left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2}\right) - \left[\frac{1}{\rho_2}\left(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2\right)\cdot \boldsymbol{n}_2 - \frac{1}{\rho_1}\left(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1\right)\cdot \boldsymbol{n}_1\right] \tag{A.23}$$

Les conditions (A.19) expriment la continuité des températures et des vitesses tangentielles au niveau de l'interface et une relation entre les enthalpies libres. Le saut d'entropie permet donc de fermer les sauts de température, de vitesse tangentielle et d'enthalpie libre à l'interface.

Remarque : À l'interface, l'association de l'hypothèse de réversibilité des transferts interfaciaux (**H2**) à la relation primaire de saut d'entropie (Éq. (A.2d)) s'écrit :

$$\dot{m}_1(s_1 - s_2) = -\frac{1}{T^i}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)\cdot \boldsymbol{n}_1$$

En utilisant la définition de l'enthalpie massique $h \hat{=} Ts + g$, on a :

$$\dot{m}_1(h_1^i - h_2^i - g_1^i + g_2^i) = -(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)\cdot \boldsymbol{n}_1$$

L'interface étant supposée à saturation (**H10**), en indiçant $_1$ la phase liquide et $_2$ la phase vapeur, la chaleur latente d'évaporation est définie par :

$$\mathcal{L}^{vap} \hat{=} h_2^{sat} - h_1^{sat} = h_2^i - h_1^i$$

En outre, en utilisant la relation de saut (A.23), on obtient :

$$\dot{m}_1\left[\mathcal{L}^{vap} + \frac{1}{2}\dot{m}_1^2\left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2}\right) - \left(\frac{1}{\rho_2}\left(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2\right)\cdot \boldsymbol{n}_2 - \frac{1}{\rho_1}\left(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1\right)\cdot \boldsymbol{n}_1\right)\right] = (\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)\cdot \boldsymbol{n}_1$$

Enfin, en négligeant les termes d'accélération et les termes visqueux devant la chaleur latente de vaporisation (**H7**), on obtient la relation approchée de saut d'enthalpie suivante :

$$\dot{m}_1 \mathcal{L}^{vap} = (\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)\cdot \boldsymbol{n}_1 \tag{A.24}$$

A.5 À propos de l'entropie

L'entropie est utilisée pour fermer le système. Dans les phases, elle contraint les fermetures du flux $\boldsymbol{q}_k$ et du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}_k$ pour assurer la compatibilité avec le second principe de la thermodynamique. À l'interface, elle conduit aux relations de saut (A.19). Une fois le système local convenablement fermé par des lois de comportement par exemple, elle devient redondante et n'est donc plus utilisée. À l'échelle microscopique, l'état du système est décrit par les équations (A.1) dans les phases auxquelles sont associées les relations de saut (A.2) et (A.19) ainsi que les lois de fermeture du flux thermique et du tenseur des contraintes (A.15). Le taux de transfert de masse et la vitesse de déplacement de l'interface sont respectivement définis par les équations (A.3) et (A.16).

À présent, nous présentons le formalisme monofluide introduit par Kataoka (1986) pour disposer d'une description unique du système valide dans tout l'espace au sens des distributions, y compris à l'interface. Cette description est indispensable pour filtrer les équations locales sans introduire de conditions aux discontinuités.

A.6 Équations monofluides locales et instantanées

Soit χ_k la fonction Heaviside représentant l'indicatrice de la phase k : χ_k vaut 1 si la phase k est présente et 0 sinon. Elle permet d'introduire pour toute grandeur phasique ϕ_k définie uniquement dans la phase k, la grandeur monofluide ϕ définie dans tout l'espace par :

$$\phi \hat{=} \sum_{k=1}^{2} \chi_k \phi_k \tag{A.25}$$

Par la suite, les conventions de sommation d'Einstein sur les indices répétés permettent d'alléger les expressions en notant $\phi = \chi_k \phi_k$. Les indices l et v sont utilisés pour identifier les phases liquide et vapeur respectivement. Dans ce cas, même lorsque l'indice est répété, il n'y a pas de sommation.

L'évolution de l'indicatrice de la phase χ_k est régie par l'équation de transport

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla \chi_k = 0 \tag{A.26}$$

où la vitesse de déplacement de l'interface $\boldsymbol{v}_i$ est donnée par

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_k \delta^i \tag{A.27}$$

La distribution de Dirac représentant la discontinuité δ^i et la normale $\boldsymbol{n}_k$ sortante de la phase k sont reliées au gradient de l'indicatrice par la relation :

$$\nabla \chi_k = -\boldsymbol{n}_k \delta^i \tag{A.28}$$

On montre aisément le lien avec le taux de changement de phase $\dot{m}_k$:

$$-\dot{m}_k \delta^i = \rho_k \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \boldsymbol{v}_k \cdot \nabla \chi_k \right) = \rho_k \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \boldsymbol{v}_k) \right) \tag{A.29}$$

Le principe permettant d'établir une équation monofluide est très général. Il faut tout d'abord multiplier chaque équation phasique (A.1) par sa fonction indicatrice de phase χ_k. Ensuite, en sommant les deux équations ainsi obtenues et en prenant en compte les relations de saut à l'interface (A.2), on obtient les équations d'évolution des grandeurs monofluides. Nous allons détailler ce raisonnement pour chacune des grandeurs suivantes : masse, quantité de mouvement, entropie, enthalpie et température.

A.6.1 Bilan de masse

En multipliant par χ_k l'équation (A.1a) et en sommant sur k, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \rho_k \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \boldsymbol{v}_k \cdot \nabla \chi_k \right) \tag{A.30}$$

D'après les relations (A.2a) et (A.29), on obtient l'équation de bilan de masse monofluide :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{A.31}$$

En remarquant que $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_v - \boldsymbol{v}_l) \cdot \nabla \chi_v$ et en explicitant le lien entre $\boldsymbol{v}_v$ et $\boldsymbol{v}_l$ donné par la relation (A.22), on obtient :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\dot{m}_v \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) \delta^i \tag{A.32}$$

Cette équation traduit le bilan de masse. Elle est tout à fait équivalente à la relation (A.31) mais on préfère utiliser cette forme par cohérence avec les travaux de Toutant *et al.* (2009a) menés sans changement de phase. Pour un écoulement adiabatique, l'application d'un filtre à la relation (A.32) conduit à une relation fermée. Elle est définie uniquement à partir de la variable $\overline{\boldsymbol{v}}$ que l'on choisit comme variable principale à la section 2.1.

A.6.2 Bilan de quantité de mouvement

De la même manière, pour la quantité de mouvement, on obtient dans un premier temps :

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{I}) - \rho \boldsymbol{g} = \rho_k \boldsymbol{v}_k \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \boldsymbol{v}_k \cdot \nabla \chi_k \right) + \chi_k \nabla \cdot \left[\mu_k \left(\nabla \boldsymbol{v}_k + \nabla^T \boldsymbol{v}_k \right) \right] \quad \text{(A.33)}$$

Puis, en considérant les relations (A.2a), (A.2b) et (A.29), cette relation se réduit à

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{I}) - \rho \boldsymbol{g} = -\boldsymbol{v}_k \dot{m}_k \delta^i - p_k \boldsymbol{n}_k \delta^i + \chi_k \nabla \cdot \left[\mu_k \left(\nabla \boldsymbol{v}_k + \nabla^T \boldsymbol{v}_k \right) \right] \quad \text{(A.34)}$$

On souhaite transformer le dernier terme de l'équation précédente. Pour simplifier l'écriture, on raisonne uniquement sur $\mu_k \nabla \boldsymbol{v}_k$, son transposé se traitant de manière identique. On a la décomposition suivante :

$$\nabla \boldsymbol{v} = \chi_v \nabla \boldsymbol{v}_v + \chi_l \nabla \boldsymbol{v}_l - (\boldsymbol{v}_v - \boldsymbol{v}_l) \otimes \boldsymbol{n}_v \delta^i \quad \text{(A.35)}$$

D'après le saut de vitesse donné par la relation (A.22), on en déduit que :

$$\nabla \boldsymbol{v} = \chi_v \nabla \boldsymbol{v}_v + \chi_l \nabla \boldsymbol{v}_l - \dot{m}_v \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) \boldsymbol{n}_v \otimes \boldsymbol{n}_v \delta^i \quad \text{(A.36)}$$

En présence de changement de phase, $\nabla \boldsymbol{v}$ comprend une distribution de Dirac ; il ne peut donc pas être multiplié par un Heaviside. Le tenseur $\mu \nabla \boldsymbol{v}$ n'a pas de sens. Le tenseur de diffusion monofluide $\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}$ doit donc être défini à partir des grandeurs monofluides comme suit

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} \hat{=} \mu \left[\nabla \boldsymbol{v} + \nabla^T \boldsymbol{v} + 2 \dot{m}_v \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) \boldsymbol{n}_v \otimes \boldsymbol{n}_v \delta^i \right] \text{ tel que } \nabla \cdot \mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} \quad = \nabla \cdot \left[\chi_k \mu_k \left(\nabla \boldsymbol{v}_k + \nabla^T \boldsymbol{v}_k \right) \right]$$

pour avoir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{I} - \mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}) - \rho \boldsymbol{g} &= -\boldsymbol{v}_k \dot{m}_k \delta^i - p_k \boldsymbol{n}_k \delta^i - \mu_k \left(\nabla \boldsymbol{v}_k + \nabla^T \boldsymbol{v}_k \right) \cdot \nabla \chi_k \\ &= -\boldsymbol{v}_k \dot{m}_k \delta^i - p_k \boldsymbol{n}_k \delta^i + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \boldsymbol{n}_k \delta^i \end{aligned} \quad \text{(A.37)}$$

De plus, sachant que $\boldsymbol{T}_k = -p_k \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}_k$ avec $\boldsymbol{\tau}_k = \mu_k \left(\nabla \boldsymbol{v}_k + \nabla^T \boldsymbol{v}_k \right)$, la relation (A.2b) devient :

$$\dot{m}_k \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k + p_k \boldsymbol{n}_k = -\nabla_s \sigma + (\nabla_s \cdot \boldsymbol{n}) \sigma \boldsymbol{n} \quad \text{(A.38)}$$

On obtient l'équation monofluide de transport de quantité de mouvement suivante :

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{I} - \mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}) - \rho \boldsymbol{g} = (\nabla_s \sigma) \delta^i - (\nabla_s \cdot \boldsymbol{n}) \sigma \boldsymbol{n} \delta^i \quad \text{(A.39)}$$

A.6.3 Bilan d'entropie

En multipliant l'équation d'entropie (A.1d) valable dans chaque phase par l'indicatrice de phase, en utilisant la définition de la source d'entropie (A.12) et en sommant pour chaque phase, on obtient :

$$\chi_k \frac{\partial (\rho_k s_k)}{\partial t} + \chi_k \nabla \cdot (\rho_k \boldsymbol{v}_k s_k) + \chi_k \frac{1}{T_k} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{q}_k - \boldsymbol{\tau}_k : \nabla \boldsymbol{v}_k \right) = 0 \quad \text{(A.40)}$$

Généralement, dans les écoulements diphasiques avec changement de phase, la dissipation visqueuse est négligeable devant les transferts thermiques. En introduisant les grandeurs monofluides $\phi = \chi_k \phi_k$ et en négligeant la dissipation visqueuse (**H7**), on obtient :

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} s) = \rho_k s_k \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \boldsymbol{v}_k \cdot \nabla \chi_k \right) - \frac{\chi_k}{T_k} \nabla \cdot \boldsymbol{q}_k \quad \text{(A.41)}$$

Quelques manipulations permettent d'exprimer le dernier terme en fonction de variables monofluides et d'un saut :

$$\begin{aligned}
\frac{\chi_k}{T_k}\nabla\cdot\boldsymbol{q}_k &= \frac{\chi_v}{T_v}\nabla\cdot\boldsymbol{q}_v + \frac{\chi_l}{T_l}\nabla\cdot\boldsymbol{q}_l \\
&= \frac{(\chi_v T_v + \chi_l T_l)\left(\frac{\chi_v}{T_v}\nabla\cdot\boldsymbol{q}_v + \frac{\chi_l}{T_l}\nabla\cdot\boldsymbol{q}_l\right)}{\chi_v T_v + \chi_l T_l} \\
&= \frac{1}{T}\left(\chi_v\nabla\cdot\boldsymbol{q}_v + \chi_l\nabla\cdot\boldsymbol{q}_l\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\nabla\cdot(\chi_v\boldsymbol{q}_v + \chi_l\boldsymbol{q}_l) - (\boldsymbol{q}_v - \boldsymbol{q}_l)\cdot\nabla\chi_v\right) \\
&= \frac{1}{T}\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \frac{1}{T}(\boldsymbol{q}_v - \boldsymbol{q}_l)\cdot\boldsymbol{n}_v\delta^i
\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{q} = \chi_k\boldsymbol{q}_k$. Cette égalité a un sens mathématique car, d'après la relation (A.19a), il y a continuité des températures à l'interface : $\frac{1}{T}\delta^i = \frac{1}{T^i}\delta^i$.

Par conséquent, en considérant aussi les relations (A.3) et (A.29), l'équation (A.41) devient :

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}s) + \frac{1}{T}\nabla\cdot\boldsymbol{q} = -s_k\dot{m}_k\delta^i - \frac{1}{T^i}(\boldsymbol{q}_v - \boldsymbol{q}_l)\cdot\boldsymbol{n}_v\delta^i \tag{A.42}$$

D'après les conditions aux limites thermiques (A.19a), la source d'entropie à l'interface (A.2d) peut se mettre sous la forme

$$\Delta_i = -\dot{m}_k s_k - \frac{1}{T^i}\boldsymbol{q}_k\cdot\boldsymbol{n}_k \tag{A.43}$$

et, en supposant la réversibilité des transferts aux interfaces (**H2**), $\Delta_i = 0$, on obtient l'équation d'entropie monofluide suivante :

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}s) + \frac{1}{T}\nabla\cdot\boldsymbol{q} = 0 \tag{A.44}$$

Remarque : L'équation précédente est donnée en fonction du flux thermique monofluide $\boldsymbol{q}$. En supposant que les transferts thermiques suivent la loi de Fourier dans chaque phase (**H6**), on établit aisément le lien avec la température monofluide

$$\begin{aligned}
k\nabla T &= (\chi_1 k_1 + \chi_2 k_2)\nabla(\chi_1 T_1 + \chi_2 T_2) \\
&= \chi_1 k_1\nabla T_1 + \chi_2 k_2\nabla T_2 + (\chi_1 k_1 + \chi_2 k_2)(T_1 - T_2)\nabla\chi_1 \\
&= -\chi_1\boldsymbol{q}_1 - \chi_2\boldsymbol{q}_2 \\
&= -\boldsymbol{q}
\end{aligned}$$

car il y a continuité des températures à l'interface (Éq. (A.19a)). On peut noter que cette hypothèse permet de donner un sens mathématique au produit $k\nabla T$.

A.6.4 Bilan d'enthalpie

Par définition de l'enthalpie, on a :

$$dh_k = du_k + \frac{dp_k}{\rho_k} - \frac{p_k}{\rho_k^2}d\rho_k \tag{A.45}$$

En négligeant les variations de pression (**H9**), en supposant l'équilibre thermodynamique local (**H1**) et en utilisant le bilan de masse dans les phases (A.1a), cette relation devient :

$$\frac{dh_k}{dt} = \frac{du_k}{dt} + \frac{p_k}{\rho_k}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_k \tag{A.46}$$

En négligeant la dissipation visqueuse (**H7**) et en introduisant la relation précédente dans l'équation phasique d'énergie interne (A.10), on obtient :

$$\rho_k \frac{dh_k}{dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{q}_k = 0 \tag{A.47}$$

Enfin, en utilisant à nouveau le bilan de masse (A.1a), l'équation de bilan d'enthalpie phasique s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_k\, h_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k\, h_k\, \boldsymbol{v}_k) + \nabla \cdot \boldsymbol{q}_k = 0 \tag{A.48}$$

En multipliant par χ_k l'équation (A.48) et en sommant sur k, on obtient :

$$\frac{\partial \rho\, h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{v}\, h) + \nabla \cdot \boldsymbol{q} = \rho_k\, h_k \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \boldsymbol{v}_k \cdot \nabla \chi_k \right) + \boldsymbol{q}_k \cdot \nabla \chi_k \tag{A.49}$$

En tenant compte de la définition (A.28) et de la relation de saut (A.2a), cette équation se réduit à :

$$\frac{\partial \rho\, h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{v}\, h) + \nabla \cdot \boldsymbol{q} = -h_k \dot{m}_k \delta^i - \boldsymbol{q}_k \cdot \boldsymbol{n}_k \delta^i \tag{A.50}$$

Finalement, en utilisant la relation de saut d'enthalpie (A.24) et la loi de Fourier (A.15), on obtient :

$$\frac{\partial \rho\, h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{v}\, h) = \nabla \cdot (k \nabla T) \tag{A.51}$$

A.6.5 Bilan d'énergie formulé en température

Nous souhaitons à présent établir une équation d'évolution de la température monofluide T à partir de l'équation précédente donnant l'évolution de l'enthalpie monofluide h. Pour cela, il faut établir une relation entre ces deux grandeurs. Or, il existe une relation entre les différentielles des grandeurs phasiques $dh_k = c_{pk}\, dT_k$ où c_{pk} est la capacité calorifique massique à pression constante de la phase k, supposée constante. Puisque l'enthalpie phasique est définie à une constante près et comme c_{pk} est supposée indépendante de la température (**H12**), prenons par définition dans chacune des phases :

$$h_k \hat{=} h_k^{sat} + c_{pk}(T_k - T^{\text{sat}}) \tag{A.52}$$

En utilisant la définition de l'enthalpie monofluide $h \hat{=} \chi_k h_k$, on obtient

$$h = c_p \left(T - T^{\text{sat}}\right) + h_l^{sat} + \chi_v \mathcal{L}^{vap} \tag{A.53}$$

où $c_p = \chi_l c_{pl} + \chi_v c_{pv} = c_{pl} + \chi_v \left(c_{pv} - c_{pl}\right)$ est la capacité calorifique massique monofluide à pression constante et $\mathcal{L}^{vap} = h_l^{sat} - h_v^{sat}$ la chaleur latente de vaporisation.
Dans l'équation (A.51), substituons à h la définition (A.53) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\rho\, c_p \left(T - T^{\text{sat}}\right)\right]}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{v} c_p \left(T - T^{\text{sat}}\right)\right) + \frac{\partial \rho\, h_l^{sat}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} h_l^{sat}) \\ + \frac{\partial \rho\, \chi_v \mathcal{L}^{vap}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \chi_v \mathcal{L}^{vap}) = \nabla \cdot (k \nabla T) \end{aligned} \tag{A.54}$$

Par ailleurs, en décomposant les grandeurs monofluides en grandeurs phasiques, la relation (A.29) et le bilan de masse de la phase vapeur (A.1a) permettent de montrer que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho\, \chi_v \mathcal{L}^{vap}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \chi_v \mathcal{L}^{vap}) &= \mathcal{L}^{vap} \left[\frac{\partial \rho_v\, \chi_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \boldsymbol{v}_v \chi_v) \right] \\ &= \mathcal{L}^{vap} \left[\chi_v \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \boldsymbol{v}_v) \right) + \rho_v \left(\frac{\partial \chi_v}{\partial t} + \boldsymbol{v}_v \cdot \nabla \chi_v \right) \right] \\ &= \mathcal{L}^{vap} \rho_v \left(\frac{\partial \chi_v}{\partial t} + \boldsymbol{v}_v \cdot \nabla \chi_v \right) = -\dot{m}_v \delta^i \mathcal{L}^{vap} \end{aligned} \tag{A.55a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho\, c_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_p \boldsymbol{v}) &= \frac{\partial \rho_k\, c_{pk} \chi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k c_{pk} \boldsymbol{v}_k \chi_k) \\ &= \rho_k\, c_{pk} \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \boldsymbol{v}_k) \right) \quad \text{car } \rho_k\, c_{pk} = \text{cste} \\ &= -\dot{m}_k c_{pk} \delta^i = \left(c_{pl} - c_{pv}\right) \dot{m}_v \delta^i \end{aligned} \tag{A.55b}$$

où $\dot{m}_v$ est le taux de condensation (*i. e.,* positif en condensation). En utilisant l'hypothèse $h_l^{sat} = cste$ (**H10**), la conservation de la masse monofluide (A.31) ainsi que la relation (A.55a), l'équation (A.54) s'écrit :

$$\frac{\partial \left[\rho c_p \left(T - T^{\text{sat}}\right)\right]}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{v} c_p \left(T - T^{\text{sat}}\right)\right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{m}_v \delta^i \mathcal{L}^{vap} \tag{A.56}$$

Enfin, en utilisant l'hypothèse $T^{\text{sat}} = cste$ et l'équation (A.55b), l'équation d'évolution de la température devient

$$\frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} c_p T) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{m}_v \delta^i \left(\mathcal{L}^{vap} + T^{\text{sat}} \left(c_{pl} - c_{pv}\right)\right) \tag{A.57}$$

et peut être mise sous forme non conservative [1] en remarquant que :

$$\frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} c_p T) = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T\right) + T \left(\frac{\partial \rho\, c_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_p \boldsymbol{v})\right) \tag{A.58}$$

On déduit de la saturation de l'interface (**H10**) que :

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T\right) &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{m}_v \delta^i \mathcal{L}^{vap} + \left(c_{pl} - c_{pv}\right) \left(T^{\text{sat}} - T\right) \dot{m}_v \delta^i \\ &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{m}_v \delta^i \mathcal{L}^{vap} \end{aligned}$$

En définitive, en supposant les capacités calorifiques phasiques c_{pk} indépendantes de la température (**H12**), les formulations conservative et non conservative du bilan de température monofluide sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T\right) &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{m}_v \delta^i \mathcal{L}^{vap} \\ \frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} c_p T) &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{m}_v \delta^i \left[\mathcal{L}^{vap} + T^{\text{sat}} \left(c_{pl} - c_{pv}\right)\right] \end{aligned}$$

Soulignons que pour démontrer ces résultats, nous avons utilisé l'hypothèse $T^i - T^{\text{sat}} = 0$. Par contre, les termes interfaciaux contenus dans ces relations sont ceux de la relation de saut (A.24). Par conséquent, cette équation n'est pas suffisante pour imposer la température de saturation à l'interface. Cette condition doit apparaître par ailleurs.

On a choisi d'établir l'équation monofluide d'évolution de la température à partir de l'équation d'enthalpie monofluide et de la définition (A.53). On aurait pu établir l'équation de température phasique pour en déduire l'équation monofluide. On aurait obtenu un résultat équivalent en voyant explicitement apparaître l'utilisation du saut (A.24).

A.7 Synthèse

Les équations (A.26), (A.32), (A.39) et (A.56) et la condition de saturation de l'interface $T^i = T^{\text{sat}}$ sont regroupées dans le système (1.4) à la section 1.1.2 pour former le système d'équations monofluides locales et instantanées. Ce système contient tous les bilans nécessaires à la description d'un système liquide/vapeur. Il permet de décrire le comportement de la vitesse $\boldsymbol{v}$, de la pression p et de la température T et de connaître localement la phase k en présence (par $\chi_k = 1$) et le taux de transfert de masse $\dot{m}$ en tout point de l'espace grâce au formalisme monofluide.

1. Formellement, les formulations conservative (A.57) et non conservative (A.58) sont équivalentes. L'équation (A.57) est utilisée pour établir le système mésoscopique alors que la formulation (A.58) est plus proche de l'équation discrète utilisée par l'algorithme de résolution.

Annexe B

Choix des variables principales

Dans cette annexe, nous présentons deux propositions pour modifier la formulation du système monofluide (1.4). Dans la section B.1, nous discutons de l'intérêt potentiel de l'utilisation des températures phasiques T_l et T_v lors du filtrage du problème en remplacement de la température monofluide T. Cette approche est *a priori* intéressante car elle permet d'éliminer la discontinuité du gradient de température en choisissant une extension convenable des variables. Néanmoins, la difficulté d'interprétation physique de ce champ prolongé nous a conduit à abandonner cette approche.

Par ailleurs, la condition de saturation (1.4e) du système monofluide (1.4) est une condition à la limite imposée aux interfaces microscopiques. Pour cette raison, son équivalent à l'échelle mésoscopique est difficile à établir et les modèles de SGE monofluides classiques n'apportent aucune réponse à ce problème. Dans la section B.2, on montre qu'il est envisageable de remplacer la condition de saturation par l'équation de transport de l'entropie monofluide. Le traitement de cette relation de bilan volumique est alors plus classique. Néanmoins, cette approche n'est pas envisagée dans la suite de ce travail car sa mise en œuvre, en particulier algorithmique, semble difficile.

B.1 Formulation de la thermique du problème en variable monofluide ou phasique

Dans cette section, nous nous intéressons au traitement du bilan d'énergie à l'échelle mésoscopique. L'équation (1.4d) décrivant l'évolution de la température monofluide peut être décomposée en équations d'évolution de températures phasiques associées à une relation de saut à l'interface :

$$\frac{\partial \rho_l\, c_{pl}\, T_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \boldsymbol{v}_l c_{pl}\, T_l) = \nabla \cdot (k_l \nabla T_l) \qquad \text{sur } \Omega_l \tag{B.1a}$$

$$\frac{\partial \rho_v\, c_{pv}\, T_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \boldsymbol{v}_v c_{pv}\, T_v) = \nabla \cdot (k_v \nabla T_v) \qquad \text{sur } \Omega_v \tag{B.1b}$$

$$(k_v \nabla T_v - k_l \nabla T_l) \cdot \boldsymbol{n} = -\dot{m} \mathcal{L}^{vap} \qquad \text{sur } \Gamma^i \tag{B.1c}$$

Cette écriture, bien qu'équivalente à la formulation monofluide (1.4d) au niveau local instantané, peut conduire à des fermetures différentes et éventuellement à une modélisation plus aisée à l'échelle mésoscopique.

À l'échelle mésoscopique, le choix entre ces deux formulations conduit à des termes de fermeture différents. Dans ce mémoire, nous avons préféré utiliser la variable monofluide $\overline{T}$ plutôt que les variables mésoscopiques phasiques $\overline{T_l}$ et $\overline{T_v}$ par similitude avec les autres variables du problème et pour dégénérer aisément vers l'étude de Toutant *et al.* (2009a) pour les écoulements sans changement de phase. Dans cette section, nous souhaitons tout de même signaler quelques différences qui nous paraissent importantes. Dans un souci de simplicité, on se limite dans le cadre de ce travail à l'étude de cas sans surchauffe de la vapeur. Par conséquent, nous considérerons que $T_v = T^{\text{sat}} = cste$, même si nous croyons que le raisonnement appliqué à la variable $\overline{T_l}$ serait aussi valable pour la température vapeur $\overline{T_v}$ dans un cas plus général.

B.1.1 Préambule : nécessité de l'extension

Dans la philosophie ISS, l'objectif est d'utiliser des filtres spatiaux indépendants de l'espace et donc commutant avec les opérateurs de dérivation. Pour que cela soit possible, il faut que les variables utilisées soient définies sur tout le domaine de calcul, indépendamment de la phase présente. Si nous nous orientons vers l'utilisation des grandeurs phasiques T_l et T_v, ce pré-requis n'est plus respecté. Pour pallier ce défaut, deux solutions semblent *a priori* réalisables :

- La première consiste à utiliser un filtre phasique conditionnel défini par :

$$\overline{T_l}^l = \begin{cases} \frac{\overline{\chi T_l}}{\overline{\chi}} & \text{si } \overline{\chi} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{B.2}$$

- La seconde consiste à construire une extension au champ T_l qui puisse ensuite être filtrée classiquement pour donner $\overline{T_l^{ext}}$. Différents critères peuvent alors être imposés. Citons-en simplement deux, à titre d'exemple : (i) imposer la continuité du champ T_l^{ext} et de sa dérivée première dans la direction normale en résolvant l'équation $\dfrac{\partial \nabla T_l^{ext} \cdot \boldsymbol{n}}{\partial n} = 0$ ou (ii) rechercher un champ à laplacien nul par résolution de l'équation $\nabla^2 T_l^{ext} = 0$.

Afin d'illustrer notre propos, nous envisageons une interface plane séparant la vapeur à saturation du liquide. Le liquide se situe aux $\xi > 0$, où ξ est la coordonnée normale à l'interface. La conductivité du liquide est supposée infinie pour que le problème soit quasi statique. Côté vapeur, la température de saturation est imposée et côté liquide, on impose un flux positif responsable de l'évaporation. On utilise un filtre boîte de taille Δ. Les champs de température sont illustrés sur la figure B.1. Ce cas en apparence très simplifié, donne une bonne approximation du champ réel au voisinage de l'interface pour des cas plus complexes, tant que la courbure et le nombre de Péclet restent faibles.

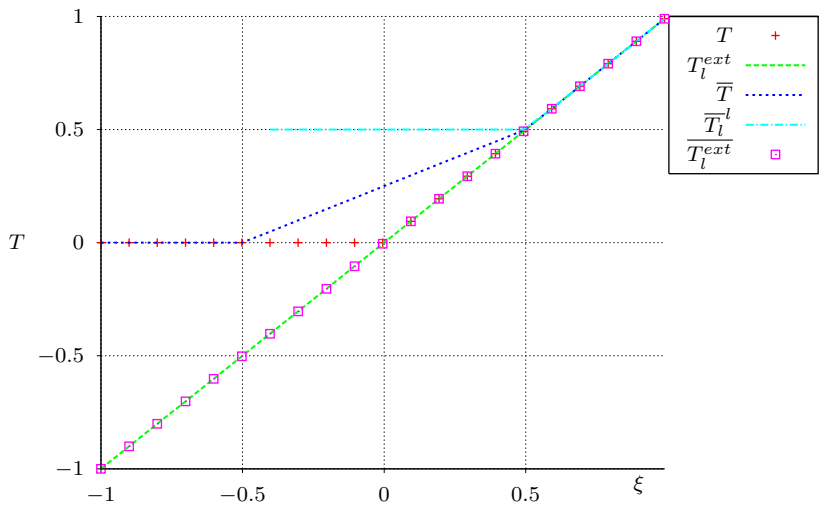


FIGURE B.1 – Thermique du front plan.

Rappelons que l'objectif de cette démarche est d'obtenir des variables plus régulières pour faciliter la modélisation sous-maille à l'échelle mésoscopique. Par conséquent, le filtre phasique est éliminé car la variable associée $\overline{T_l}^l$ n'a ni la bonne valeur, ni le bon gradient à l'interface. Elle est plus éloignée du champ microscopique que la variable monofluide T. Comme la variable monofluide $\overline{T}$ se rapproche plus du champ microscopique que $\overline{T_l}^l$ et qu'elle utilise le même formalisme que celui utilisé pour les autres variables ($\overline{\boldsymbol{v}}$, etc.), on ne voit pas l'intérêt de la variable $\overline{T_l}^l$. Par conséquent, la suite de la discussion se limite à comparer l'intérêt du champ phasique $\overline{T_l^{ext}}$ par rapport au champ monofluide $\overline{T}$. Cela ne signifie pas que l'utilisation d'un filtre phasique ne serait pas intéressante, mais simplement que nous n'avons pas trouvé de filtre phasique adéquat.

B.1.2 Conservation de l'énergie lors du changement d'échelle

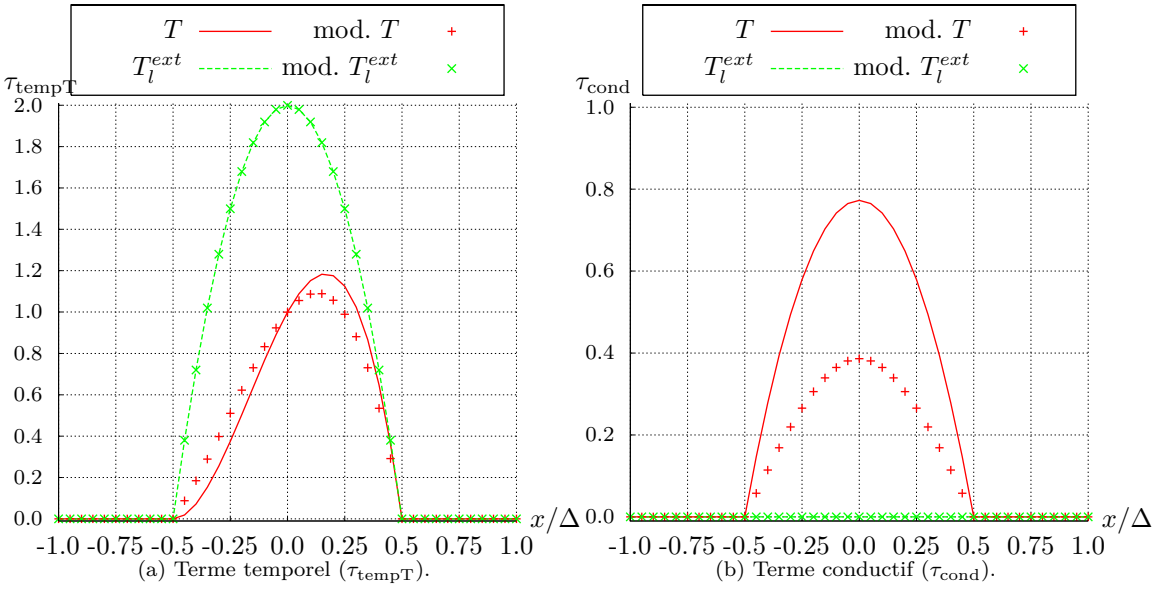
Le principe de conservation de l'énergie est fondamental pour les écoulements diphasiques avec changement de phase. Pour simplifier notre propos, supposons que $\rho_l c_{pl} = \rho_v c_{pv}$. Pour l'exemple monodimensionnel illustré sur la figure B.1, l'énergie volumique microscopique $\rho c_p T_l^{ext}$ est donc identique à l'énergie volumique mésoscopique $\overline{\rho c_p T_l^{ext}}$. Avec l'approche monofluide, la différence entre T et $\overline{T}$ fait apparaître une énergie en excès à l'interface :

$$E^{ex} \hat{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{\rho c_p T} - \rho c_p T\right) dx = \frac{1}{6}\Delta^2 \frac{\dot{m}\mathcal{L}^{vap}\rho c_p}{k_l} \tag{B.3}$$

Le filtrage de la température monofluide T introduit un excès d'énergie au voisinage de l'interface qui s'explique par la discontinuité du gradient de température. Pour la variable phasique, comme la dérivée est continue, il n'y a pas d'excès.

B.1.3 Similarité d'échelles et variables discontinues

Comme nous l'avons signalé au paragraphe 2.2.3, le terme sous-maille engendré par le produit de deux grandeurs discontinues (k et ∇T par exemple) n'est pas modélisé avec la bonne amplitude par un modèle de similarité d'échelles (Fig. B.2a). En revanche, la fermeture de $\overline{\rho c_p T}$ par un modèle de similarité d'échelles est en moyenne correcte sur la zone de transition, même si le modèle s'écarte localement du terme sous-maille (Fig. B.2b) car la température monofluide est continue à l'interface. Le terme construit à partir de la variable phasique étendue est plus simple à modéliser car pour un champ quasi statique, le laplacien de la température est nul ($\Delta T_l^{ext} = 0$) et les champs microscopiques et mésoscopiques sont alors identiques : $\overline{T_l^{ext}} = T_l^{ext}$ (*cf.* annexe C). Ces différences peuvent provenir de l'excès d'énergie sous-maille discuté précédemment qui n'a pas de raison, *a priori*, d'être modélisable par similarité d'échelles.



(a) Terme temporel (τ_{tempT}). (b) Terme conductif (τ_{cond}).

FIGURE B.2 – Comparaison des termes sous-maille (lignes) aux modèles (points) pour la température monofluide (en rouge) et pour l'extension de la température liquide (en vert).

B.1.4 Traitement de la condition de saturation à l'interface

Le traitement de la condition de saturation de l'interface (1.4e) à l'échelle mésoscopique conduit à un problème nouveau pour lequel il est nécessaire de déconvoluer la température (phasique ou monofluide selon la variable principale choisie) pour estimer la valeur du champ microscopique à

l'interface (*cf.* section 2.3). L'utilisation de séries de Taylor tronquées pour déconvoluer un champ mésoscopique conduit à de meilleurs résultats pour des variables plus régulières. La convergence de la série pour la température monofluide $\overline{T}$ peut s'avérer plus médiocre si on ne prend pas les précautions présentées à la section 2.3. Pour la température phasique, le champ est suffisamment régulier pour permettre une déconvolution précise. Il est même possible de montrer que pour un champ de température quasi statique, l'application d'un filtre boîte sphérique à une interface sphérique conduit à une déconvolution exacte à l'ordre 0 : $\overline{T_l^{ext}} = T_l^{ext}$ (*cf.* annexe C).

Sur l'exemple d'une interface plane (Fig. B.1), la déconvolution de chacune des variables conduit à l'ordre dominant à :

$$\overline{T} - T^{\text{sat}} = \frac{\Delta \dot{m} \mathcal{L}^{vap}}{4k_l} \tag{B.4a}$$

$$\overline{T_l^{ext}} - T^{\text{sat}} = 0 \tag{B.4b}$$

La condition mésoscopique de saturation à l'interface est plus difficile à fermer lorsque l'on utilise la température monofluide car l'écart à la saturation est proportionnel au taux de changement de phase microscopique. Celui-ci n'est pas directement accessible à l'échelle mésoscopique. On peut alors s'attendre à commettre une erreur plus importante sur la contrainte de saturation avec la variable monofluide ce qui a une conséquence directe sur la précision avec laquelle on évalue le taux de changement de phase à l'échelle mésoscopique.

B.1.5 Physique des fluctuations

L'extension requise pour le champ phasique T_l n'a pas de fondement physique. En particulier, les fluctuations du champ étendu sont quelconques. Elles ne répondent pas à une équation d'évolution basée sur les bilans physiques. Comme cette extension se situe dans la couche limite avoisinant l'interface, il est probable que la conduction domine et lisse les fluctuations. Il est difficile d'interpréter ou de prédire l'influence de l'extension sur les termes sous-maille au voisinage de l'interface.

B.1.6 Équation d'évolution

L'équation d'évolution de la variable monofluide intègre de manière intrinsèque la relation de saut de flux à l'interface. L'équation d'évolution de la température phasique T_l^{ext} ne la contient pas. L'ajout de cette condition à l'échelle mésoscopique est complexe car elle nécessite la détermination de la position microscopique de l'interface et de la normale. Ce verrou nous semble assez bloquant. Il met en exergue le potentiel de la description monofluide qui permet de travailler avec des interfaces sous-résolues.

B.1.7 Conclusion sur le choix de la variable et les difficultés associées

L'utilisation d'une nouvelle variable phasique étendue $\overline{T_l^{ext}}$ comporte certains atouts. Cependant, l'interprétation physique de l'extension, l'impact éventuel sur les termes sous-maille et la prise en compte du saut de flux à l'interface sont trois éléments clés pour lesquels nous n'avons pas de solution. Cette possibilité est donc écartée.

B.2 Remplacement de la condition de saturation par l'équation de transport de l'entropie monofluide

L'équation (1.4e) a un statut particulier car ce n'est pas une équation aux dérivées partielles. Cette relation surfacique spécifique aux écoulements avec changement de phase traduit la condition de saturation de l'interface et permet de déterminer le taux de transfert de masse à l'interface. Ce statut particulier est ennuyeux pour la modélisation à l'échelle mésoscopique car il ne conduit pas à des problématiques de fermeture classiques. Il peut alors être intéressant de chercher une équation aux dérivées partielles incluant cette condition de saturation.

À la section A.6.5, l'équation de température monofluide est obtenue à partir de l'équation d'enthalpie monofluide. Lors de cette démonstration, nous n'avons pas eu besoin d'utiliser explicitement la condition (1.4e). Par conséquent, les équations d'enthalpie et de température sont équivalentes *à elles seules* et ce, indépendamment de la relation (1.4e). Cela signifie qu'ajouter la relation d'enthalpie monofluide au système précédent n'apporte rien. Elle ne permet pas d'éliminer l'équation (1.4e) qui est nécessaire pour fixer le taux de transfert de masse à l'interface.

En revanche, l'équation de température monofluide n'a pas été établie à partir de l'équation d'entropie monofluide bien que cela eût été possible. Afin de démontrer que ces deux équations ne sont pas équivalentes indépendamment de la relation (1.4e), on envisage une transition de phase entre deux états solides, de même masse volumique $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Le champ de vitesse étant alors nul partout, $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, la pression ne présente plus d'intérêt et la description du problème se réduit au transport de l'interface et à la résolution du champ de température :

$$\frac{\partial \chi_v}{\partial t} = -\frac{\dot{m}_v}{\rho}\delta^i \tag{B.5a}$$

$$\frac{\partial\left[\rho\, c_p(T - T^{\text{sat}})\right]}{\partial t} = \nabla\cdot\Big(k\nabla(T - T^{\text{sat}})\Big) + \dot{m}_v\delta^i\mathcal{L}^{vap} \tag{B.5b}$$

$$T\,\delta^i = T^{\text{sat}}\,\delta^i \tag{B.5c}$$

On souhaite savoir s'il est possible de remplacer l'équation (B.5c) par les équations :

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} - \frac{1}{T}\nabla\cdot(k\nabla T) = 0 \tag{B.6a}$$

$$s = s(T) \tag{B.6b}$$

Pour cela, il faut déterminer la relation liant l'entropie monofluide à la température monofluide. On peut se contenter de la rattacher à l'enthalpie monofluide car la relation (A.53) lie déjà les grandeurs monofluides h et T. En définissant l'enthalpie à partir des grandeurs thermodynamiques s_k et p_k, en négligeant les variations de pression du système et en supposant l'équilibre thermodynamique local (**H1**), on a en l'absence de convection ($\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$) :

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} = T_k\frac{\partial s_k}{\partial t} \tag{B.7}$$

En multipliant par χ_k et en sommant, on obtient :

$$\frac{\partial \chi_k h_k}{\partial t} - h_k\frac{\partial \chi_k}{\partial t} = \chi_k T_k\frac{\partial s_k}{\partial t}$$

Le second membre peut être manipulé comme suit :

$$\chi_k T_k\frac{\partial s_k}{\partial t} = \chi_k^2 T_k\frac{\partial s_k}{\partial t} = \left(\chi_k T_k + \sum_{j\neq k}\chi_j T_j\right)\chi_k\frac{\partial s_k}{\partial t} = T\left(\frac{\partial \chi_k s_k}{\partial t} - s_k\frac{\partial \chi_k}{\partial t}\right)$$

Ainsi, on relie l'entropie à l'enthalpie et à la température par la relation différentielle suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = T\frac{\partial s}{\partial t} + (h_k - T s_k)\frac{\partial \chi_k}{\partial t}$$

D'après la continuité des températures à l'interface $T_1^i = T_2^i = T^i$ (*cf.* Éq. (A.19a)), l'énergie libre à l'interface g^i est donnée par $h_k^i - T^i s_k^i = h_k^i - T_k^i s_k^i = g_k^i$ et on a :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = T\frac{\partial s}{\partial t} - (g_l - g_v)\frac{\partial \chi_v}{\partial t} \tag{B.8}$$

Dans ce cas, la masse volumique étant supposée identique pour les deux phases, on obtient en remplaçant l'équation (B.5b) par le bilan d'enthalpie (A.51) pour $\boldsymbol{v} = 0$ (qui lui est équivalent

indépendamment de la relation (1.4e)) :

$$\frac{\partial \chi_v}{\partial t} = -\frac{\dot{m}_v}{\rho}\delta^i \tag{B.9a}$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \tag{B.9b}$$

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} - \frac{1}{T}\nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \tag{B.9c}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = T\frac{\partial s}{\partial t} - (g_l - g_v)\frac{\partial \chi_v}{\partial t} \tag{B.9d}$$

Par combinaison des 3 dernières équations, comme ρ est constant, on obtient :

$$(g_l - g_v)\frac{\partial \chi_v}{\partial t} = 0 \tag{B.10}$$

L'égalité des potentiels chimiques à l'interface impose la température de saturation à l'interface. Ainsi, on montre que le système d'équations (B.9) est équivalent au système (B.5). Le système (B.9) contient donc intrinsèquement la condition de saturation (B.5c). Il est donc possible de remplacer la condition de saturation de l'interface (1.4e) par les deux relations (B.6) définissant l'entropie à partir de la température et décrivant son évolution par une équation différentielle.

Formellement, la condition de saturation de l'interface peut donc être remplacée par l'équation d'évolution de l'entropie monofluide. Cette équation d'évolution volumique augmente la complexité du système à résoudre et un lien entre les variables monofluides h, T et s doit être ajouté. Cette approche, lourde, inhabituelle et éloignée des solutions implémentées classiquement n'est pas investiguée plus précisément.

Annexe C

Propriétés d'un champ quasi statique

Afin de mieux comprendre l'influence de l'opérateur de filtrage sur les relations entre la température et le taux de changement de phase, on se propose d'étudier analytiquement une configuration simplifiée. Pour cela, on se place dans le cadre suivant :

H1. On suppose un champ de température quasi statique au voisinage de l'interface (*i. e.,* $\Delta T_l = 0$ au voisinage de x_i) ;

H2. On suppose que le problème est localement à symétrie sphérique (*i. e.,* les courbures principales de l'interface sont proches l'une de l'autre) ; elles varient peu sur le support du filtre : $\kappa_1 \approx \kappa_2 \approx 1/R_b$;

H3. Le filtre utilisé est un filtre boîte sphérique de rayon Δ. Le support du filtre n'est pas nécessairement très petit devant le rayon de la bulle. En pratique, il doit être suffisamment petit pour que la courbure ne varie pas.

L'hypothèse **(H1)** signifie que le nombre de Péclet est faible. En effet, lorsque la conduction prédomine, le champ de température réagit instantanément aux conditions limites. Un tel champ est dit quasi statique. Son laplacien est nul. Cette hypothèse est vérifiée en particulier à l'intérieur des couches limites. Autrement dit, il faut que le filtre soit plus petit que la couche limite et par conséquent que les gradients de température à l'interface soient bien capturés par le maillage. Dans ce mémoire, on se restreint aux liquides classiques (comme l'eau à saturation sous une pression de 15.5MPa par exemple) dont le nombre de Prandtl est voisin de l'unité (de l'ordre de 1.4 pour l'eau pressurisée). Par conséquent, cette restriction est à peine plus contraignante que celle relative à la dynamique proposée par Toutant (2006). Le gain espéré par rapport à la SND est donc du même ordre de grandeur que celui du modèle ISS adiabatique. Les hypothèses **H2** et **H3** restreignent la validité de ce raisonnement à une interface faiblement anisotrope et à un filtre de petite taille devant les fluctuations de courbure.

En termes de critère, cela signifie que :

$$Pe \ll 1 \tag{C.1a}$$

$$\kappa_1 \approx \kappa_2 \approx 1/R_b \tag{C.1b}$$

$$\Delta \ll R_b \tag{C.1c}$$

Remarque : Pour avoir un champ à laplacien nul dans le voisinage de l'interface, il faut un champ continu et de dérivée continue. Il est important de noter que la température monofluide T ne vérifie pas cette propriété. En revanche, une extension de la température liquide T_l^{ext} convenablement choisie (*i. e.,* en imposant suffisamment de régularité) la vérifie.

Soit un champ de température T de laplacien nul au voisinage d'une interface sphérique. Soient les deux repères cylindriques $(O, r, \vartheta, \varphi)$ et (O', ρ, θ, ϕ) associés respectivement au centre de la bulle O, et au point où l'on souhaite calculer le champ filtré O' (Fig. C.1). En appliquant le théorème

d'Al-Kashi au triangle OPO' et en exprimant les longueurs PM et PH, on obtient les relations liant ces deux repères de coordonnées

$$r^2 = \rho^2 + d^2 + 2d\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \tag{C.2a}$$

$$r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) = \rho\sin(\phi)\sin(\theta) \tag{C.2b}$$

$$r\cos(\vartheta) = \rho\cos(\theta) \tag{C.2c}$$

où d est la distance OO' séparant les deux centres.

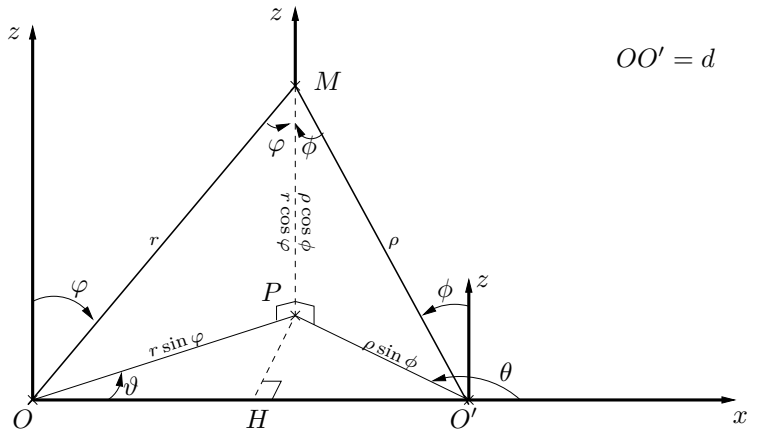


FIGURE C.1 – Lien entre les deux systèmes de coordonnées cylindriques.

Le problème est supposé à symétrie sphérique. L'écriture de la condition de laplacien nul dans le premier repère se réduit à :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T(r)}{\partial r}\right) = 0 \tag{C.3}$$

Associée à la condition de température imposée à l'interface $T(R_b) = T^{\text{sat}}$, elle conduit à l'expression du champ de température au voisinage de l'interface en fonction de r :

$$T(r) = T^{\text{sat}}\frac{R_b}{r} = T^{\text{sat}}\frac{R_b}{\sqrt{\rho^2 + d^2 + 2d\rho\sin(\phi)\sin(\theta)}} \tag{C.4}$$

Soit un filtre boîte sphérique $\bar{\cdot}$ de noyau de convolution

$$G(\rho,\theta,\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{V} & \text{si } \rho \leq \Delta \\ 0 & \text{si } \rho > \Delta \end{cases} \tag{C.5}$$

où $V = 4/3\pi\Delta^3$ est le volume du support du filtre. Le champ de température filtré est défini par :

$$\overline{T}(d) = \frac{1}{V}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Delta} T(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi \tag{C.6}$$

Après deux intégrations par parties, on obtient :

$$\int_0^{\Delta} T(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho = \left[T(\rho,\theta,\phi)\frac{\rho^3}{3}\sin\phi - \frac{\rho^4}{6}\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\rho}\right]_{\rho=0}^{\rho=\Delta} + \int_0^{\Delta}\frac{\rho^2}{6}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\rho}\rho^2\sin\phi\right)d\rho \tag{C.7}$$

La condition sur le laplacien s'exprime dans les coordonnées sphériques associées à O' par :

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\rho}\rho^2\sin\phi\right] = -\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial^2 T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\theta^2} - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right) \tag{C.8}$$

En l'injectant dans l'équation (C.7), on a :

$$\int_0^\Delta T(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2\sin\phi d\rho = T(\Delta,\theta,\phi)\frac{\Delta^3}{3}\sin\phi - \frac{\Delta^4}{6}\left.\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\rho}\right|_\Delta - \int_0^\Delta \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial^2 T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\theta^2}d\rho$$
$$- \int_0^\Delta \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)d\rho \tag{C.9}$$

En permutant les intégrations sur les différentes variables, on obtient :

$$\overline{T}(d) = \frac{1}{4\pi\Delta^2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} T(\Delta,\theta,\phi)\,\Delta^2\sin\phi\,d\theta\,d\phi - \frac{1}{V}\underbrace{\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\Delta^2}{6}\left.\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\rho}\right|_\Delta \Delta^2\sin\phi\,d\theta\,d\phi}_{\mathbf{I}}$$
$$+\frac{1}{V}\underbrace{\int_0^\Delta\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\left(-\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial^2 T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\theta^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)\right)\frac{\rho^2}{6}d\phi}_{\mathbf{J}}\,d\theta\,d\rho \tag{C.10}$$

En remarquant que $\left.\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\rho}\right|_\Delta$ est la composante normale du vecteur gradient de température dans le repère sphérique centré en O' et en notant $\partial\Omega$ la frontière du domaine d'intégration, l'intégrale I se réduit à

$$I = \frac{\Delta^2}{6}\iint_{\partial\Omega}\nabla T\cdot\boldsymbol{e}_\rho\Big|_\Delta ds \tag{C.11}$$

où $\boldsymbol{e}_\rho$ est la normale sortante de la sphère d'intégration. En transformant cette intégrale de surface sur un contour fermé en une intégrale de volume par le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient :

$$I = \frac{\Delta^2}{6}\iiint_\Omega \nabla\cdot(\nabla T\cdot\boldsymbol{e}_\rho)\Big|_\Delta dv = \frac{\Delta^2}{6}\iiint_\Omega \Delta T dv \tag{C.12}$$

Comme le laplacien du champ T est nul, l'intégrale I est nulle. Par ailleurs, J s'intègre :

$$J = -\int_0^\Delta\left(\int_0^\pi\frac{1}{\sin\phi}\left[\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\phi + \int_0^{2\pi}\left[\sin\phi\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi}d\theta\right)\frac{\rho^2}{6}d\rho \tag{C.13}$$

Or, d'après l'expression de $T(\rho,\theta,\phi)$ donnée par l'équation (C.6), la fonction

$$\frac{\partial T(\rho,\theta,\phi)}{\partial\theta} = \frac{\rho\,d\,\sin\phi\sin\theta}{(d^2+\rho^2+2\rho d\sin\phi\sin\theta)^{3/2}} \tag{C.14}$$

est 2π périodique. Comme $\sin\phi$ s'annule en 0 et en π, on en conclue que l'intégrale J est aussi nulle. Par conséquent, pour un champ à laplacien nul, le filtre boîte sphérique se réduit à la moyenne du champ sur la sphère d'intégration :

$$\overline{T}(d) = \frac{1}{4\pi\Delta^2}\iint_{\partial\Omega}T(\Delta,\theta,\phi)\,ds = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}T(\Delta,\theta,\phi)\,\sin\phi\,d\theta\,d\phi \tag{C.15}$$

Enfin, en évaluant l'expression (C.8) en $\rho=\Delta$ puis en intégrant sur θ et ϕ, on obtient en permutant les intégrales et les dérivées des coordonnées spatiales indépendantes :

$$\frac{\partial}{\partial\Delta}\left[\Delta^2\frac{\partial}{\partial\Delta}\left(\int_0^\pi\int_0^{2\pi}T(\Delta,\theta,\phi)\sin\phi\,d\theta\,d\phi\right)\right] = -\int_0^\pi\left[\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial T(\Delta,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\phi$$
$$-\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial T(\Delta,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi}d\theta \tag{C.16}$$

Nous avons justifié pour le calcul de J que les intégrales du membre de droite étaient nulles pour toutes les valeurs de ρ et donc en particulier pour $\rho\equiv\Delta$. En remarquant que l'intégrale dans le membre de gauche est égale à $4\pi\overline{T}$, on en déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial\Delta}\left[\Delta^2\frac{\partial}{\partial\Delta}\left(4\pi\overline{T}\right)\right] = 0 \tag{C.17}$$

Par intégration, on obtient

$$\overline{T}(d,\Delta) = -\frac{C_1}{4\pi\Delta} + C_2 \tag{C.18}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration déterminées en $\Delta = 0$. Lorsque la taille du filtre boîte tend vers zéro, le champ filtré tend vers le champ local. On en déduit que $C_1 = 0$ et $C_2 = T(d)$.

En conclusion, l'application d'un filtre boîte à un champ à laplacien nul conduit à

$$\overline{T}(d,\Delta) = T(d),\ \forall\Delta,\ \forall d \geq \Delta \tag{C.19}$$

tant que l'on ne se rapproche pas trop du centre de l'inclusion.

Annexe D

Détails sur la méthode numérique

D.1 Opérateurs de convection et de diffusion à l'interface

La discrétisation des équations est formulée à partir de la vitesse $\boldsymbol{v}$. Pour évaluer l'incrément en temps de l'équation de bilan de la quantité de mouvement (1.4c), la masse volumique doit être sortie des opérateurs de différenciation. En utilisant le bilan de masse (A.31), on obtient :

$$\partial_t \boldsymbol{v}^* = -\boxed{\boldsymbol{v}^n \nabla \cdot \boldsymbol{v}^n} - \nabla \cdot (\boldsymbol{v}^n \otimes \boldsymbol{v}^n) + \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \left(\mu^n \left(\nabla \boldsymbol{v}^n + \nabla^T \boldsymbol{v}^n - \boxed{2\boldsymbol{n}^n \otimes \boldsymbol{n}^n \nabla \cdot \boldsymbol{v}^n} \right) \right) - \frac{1}{\rho^n} \left(\phi \left(\rho_v - \rho_l \right) + \kappa^n \sigma \right) \nabla \chi_v^n \tag{D.1}$$

En présence de changement de phase, la divergence de la vitesse est non nulle à l'interface et les deux termes encadrés apparaissent. Les opérateurs de convection et de diffusion prennent alors une forme particulière dans les cellules de l'interface. Le premier montre qu'un terme doit être ajouté à l'opérateur de convection mais Mathieu (2003) a constaté qu'il est alors difficile d'obtenir un état stationnaire satisfaisant.

Le second terme encadré de l'équation (D.1) montre que le saut de vitesse à l'interface ne doit pas contribuer à la divergence. Le terme de dissipation visqueuse donné par l'équation (1.6b) doit être évalué avec précaution pour ne pas donner lieu à des pressions non physiques aux interfaces. Dans Trio_U, ce terme est négligé pour obtenir l'équation :

$$\partial_t \boldsymbol{v}^* = -\nabla \cdot (\boldsymbol{v}^n \otimes \boldsymbol{v}^n) + \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \left(\mu^n \left(\nabla \boldsymbol{v}^n + \nabla^T \boldsymbol{v}^n \right) \right) - \frac{1}{\rho^n} \left(\phi \left(\rho_v - \rho_l \right) + \kappa^n \sigma \right) \nabla \chi_v^n \tag{D.2}$$

Les erreurs induites sur le champ de pression local à l'interface sont supposées impacter faiblement le reste de l'écoulement. Lors de l'avancement temporel du bilan de quantité de mouvement, le champ de vitesse intermédiaire $\boldsymbol{v}^*$ est calculé à partir de la relation (1.19).

D.2 Convection de l'interface

Dans le cas d'un écoulement diphasique avec changement de phase, la vitesse de déplacement de l'interface est déterminée à partir d'un champ de vitesse discontinu $\delta\boldsymbol{v}$ construit sur le maillage eulérien. Additionné au champ de vitesse du fluide $\boldsymbol{v}$ (lui-même discontinu), le champ $\delta\boldsymbol{v}$ permet d'obtenir sur le maillage lagrangien un champ *continu* égal à la vitesse de déplacement de l'interface $\boldsymbol{v}^i$. Ainsi, la vitesse de déplacement de l'interface est obtenue par interpolation du champ eulérien *continu* sur les marqueurs lagrangiens, ce qui améliore *a priori* la précision de l'interpolation.

Dans ce qui suit, on détaille la manière de déterminer le champ de vitesse $\delta\boldsymbol{v}$.

D.2.1 Idée principale : cas d'une interface plane

Pour simplifier, considérons tout d'abord le cas d'une interface plane. Soit x la coordonnée normale à l'interface orientée (arbitrairement) de la phase liquide vers la phase vapeur (Fig. D.1).

Pour fixer les idées (sans perte de généralité), on considère le cas où le liquide s'évapore. Le champ de vitesse v normal à l'interface est alors celui représenté sur la figure D.1.

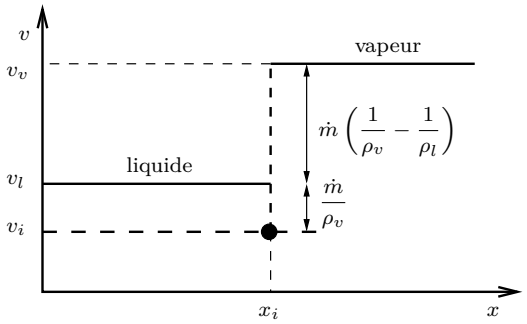


FIGURE D.1 – Profil du champ de vitesse normal à l'interface lors du changement de phase à une interface plane.

La définition (A.3) du taux de transfert de masse à l'interface $\dot{m}$ combinée au bilan de masse à l'interface (A.1a) conduit à la définition (A.22) du saut de vitesse. Pour une interface plane, on a alors :

$$v_v - v_l = \dot{m}\left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l}\right) \tag{D.3}$$

Soit δv le champ de vitesse discontinu défini par :

$$\delta v \hat{=} \begin{cases} \dfrac{\dot{m}}{\rho_l} & \text{dans le liquide} \\ \dfrac{\dot{m}}{\rho_v} & \text{dans la vapeur} \end{cases} \tag{D.4}$$

Le champ de vitesse $(v - \delta v)$ est alors continu à l'interface et égal à la vitesse de déplacement de l'interface v_i dans tout le domaine. En effet, d'après la définition (A.3) du taux de transfert de masse à l'interface, on a :

$$v - \delta v = \begin{cases} v_l - \dfrac{\dot{m}}{\rho_l} = v_i & \text{dans le liquide} \\ v_v - \dfrac{\dot{m}}{\rho_v} = v_i & \text{dans la vapeur} \end{cases} \tag{D.5}$$

Le champ de vitesse δv dépend uniquement de $\dot{m}$ et de la position de l'interface d'après la définition (D.4). En outre, ce champ de vitesse tend vers 0 lorsque le changement de phase tend vers 0. Cette propriété garantit que le schéma avec changement de phase dégénère bien vers le schéma sans changement de phase pour lequel la vitesse de déplacement de l'interface est déterminée à partir du seul champ de vitesse fluide v.

D.2.2 Cas d'une interface quelconque

Dans le cas d'une interface de géométrie quelconque, la détermination du champ de vitesse *vectoriel* $\delta\boldsymbol{v}$ est plus complexe. La raison principale tient au fait que le champ de vitesse n'est plus uniforme dans chaque phase et qu'il est à divergence nulle (Fig. D.2). Cette dernière propriété implique une variation du champ de vitesse des phases dans la direction normale à l'interface. Pour imposer l'uniformité du champ de vitesse $(\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{v})$ dans chaque phase, il faut donc que le champ $\delta\boldsymbol{v}$ soit également à divergence nulle dans chaque phase, de sorte que ses variations dans la direction normale à l'interface compensent celles du champ de vitesse fluide $\boldsymbol{v}$.

En outre, le saut de vitesse existant uniquement dans la direction *normale* à l'interface, on cherche à ce que $\delta\boldsymbol{v}$ soit normal à l'interface.

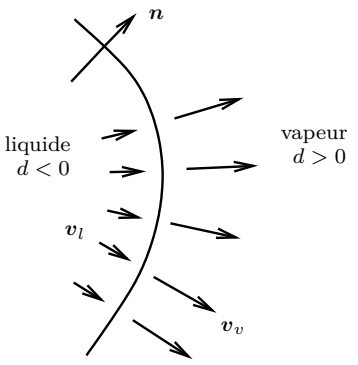


FIGURE D.2 – Champ de vitesse lors du changement de phase à une interface courbe.

Détermination d'un champ de vitesse à divergence nul dans chaque phase et normal à l'interface. Dans ce paragraphe, on cherche un champ qui soit normal à l'interface et à divergence nul dans un voisinage à l'interface. Considérons pour commencer un champ de vitesse $\boldsymbol{v}_n$ normal à l'interface et dont la norme v_0 est égale à 1 m.s^{-1} à l'interface. Un tel champ de vitesse peut être défini par

$$\boldsymbol{v}_n = v_0 \nabla d \tag{D.6}$$

où d est la *distance signée à l'interface* telle que

$$\boldsymbol{n} = \nabla d \tag{D.7}$$

Il est facile de montrer que le champ $\boldsymbol{v}_n$ ainsi défini n'est pas à divergence nulle

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_n = v_0 \nabla \cdot (\nabla d) = v_0 \nabla \cdot \boldsymbol{n} = v_0\, \kappa \tag{D.8}$$

où κ est la courbure moyenne de l'interface.

Pour retirer cette contribution, on peut chercher un champ $\boldsymbol{v}_n$ sous la forme $\boldsymbol{v}_n = v_0 \nabla f(d)$. Si on suppose que *la courbure κ de l'interface est constante*, on montre facilement que si l'on prend [1]

$$f(d) = -\frac{1}{\kappa}\, e^{-\kappa\, d} \tag{D.9}$$

alors $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_n = 0$. Remarquons que la fonction $f(d)$ est définie à une constante près car seul son gradient est utile pour déterminer $\boldsymbol{v}_n$.

L'inconvénient de cette solution provient essentiellement de la division par κ qui pose problème lorsque l'interface est plane ($\kappa \to 0$). C'est pourquoi on préfère utiliser un développement limité au voisinage de $d = 0$ de la formule précédente :

$$f(d) = -\frac{1}{\kappa} + d - \kappa\, \frac{d^2}{2} + \kappa^2\, \frac{d^3}{6} + \mathcal{O}(d^4) \tag{D.10}$$

Dans la pratique, on utilise uniquement le développement limité à l'ordre 2, de sorte que l'on définit le champ de vitesse $\boldsymbol{v}_n$ par

$$\boldsymbol{v}_n \hat{=} v_0 \nabla \left[d \left(1 - \frac{\kappa\, d}{2} \right) \right] = v_0 (1 - \kappa\, d)\, \boldsymbol{n} \tag{D.11}$$

On montre alors facilement que la divergence de ce champ de vitesse décroît linéairement avec la distance à l'interface :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_n = -v_0\, \kappa^2\, d \tag{D.12}$$

1. La fonction $f(d)$ est solution de l'équation différentielle $f'' + \kappa\, f' = 0$ qui exprime la nullité de la divergence de $\boldsymbol{v}_n = v_0\, \nabla f(d)$.

Détermination du champ de vitesse à l'interface. Ayant déterminé un champ de vitesse normal à l'interface dont la divergence décroît linéairement avec la distance à l'interface, il suffit d'appliquer ce champ dans chaque phase et d'imposer la discontinuité à l'interface due au changement de phase.

On définit donc le champ de vitesse $\delta\boldsymbol{v}$ comme suit :

$$\delta\boldsymbol{v} \hat{=} \begin{cases} \dfrac{\dot{m}}{\rho_l} \nabla \left[d \left(1 - \dfrac{\kappa\, d}{2} \right) \right] & \text{pour d<0} \\ \dfrac{\dot{m}}{\rho_v} \nabla \left[d \left(1 - \dfrac{\kappa\, d}{2} \right) \right] & \text{pour d>0} \end{cases} \tag{D.13}$$

On rappelle que pour obtenir à un champ à divergence nulle dans chaque phase, il suffit de remplacer le terme $(d(1-\kappa d/2))$ dans la formule précédente par $(-e^{-\kappa d}/\kappa)$.

Le champ $\delta\boldsymbol{v}$ ainsi déterminé est tel que (i) sa divergence est nulle à l'interface (et décroît linéairement avec la distance à l'interface) et (ii) la composante normale à l'interface du champ $(\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{v})$ est égale à la vitesse de déplacement de l'interface.

Si l'on suppose que le taux de transfert de masse $\dot{m}$ est constant, on peut alors déterminer le champ $\delta\boldsymbol{v}$ par :

$$\delta\boldsymbol{v} = \begin{cases} \nabla \left[\dfrac{\dot{m}}{\rho_l} d \left(1 - \dfrac{\kappa\, d}{2} \right) \right] & \text{pour d<0} \\ \nabla \left[\dfrac{\dot{m}}{\rho_v} d \left(1 - \dfrac{\kappa\, d}{2} \right) \right] & \text{pour d>0} \end{cases} \tag{D.14}$$

Cette formule présente l'avantage d'être un peu plus simple à programmer car, comme on le verra dans la section 1.2.4, le taux de transfert de masse est calculé numériquement au centre des mailles eulériennes.

D.3 La méthode *Ghost Fluid*

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la discrétisation du terme de convection de l'équation d'évolution de la température, c'est-à-dire au terme $\boldsymbol{v} \cdot \nabla T$. On décompose le raisonnement en deux temps. Dans un premier temps, un champ de vitesse continu à l'interface est construit pour transporter la température. Dans un deuxième temps, le gradient de température liquide à l'interface est prolongé dans la phase vapeur pour construire un champ continu.

D.3.1 Convection de la température

L'idée principale consiste à *prolonger le champ de vitesse d'une des phases dans l'autre phase.* Pour résoudre le problème de discrétisation exposé ci-dessus, il est nécessaire que le champ de vitesse prolongé soit à divergence nulle (au moins au voisinage de l'interface). Ce problème est exactement celui que l'on s'est posé dans le cas de la détermination du champ de vitesse $\delta\boldsymbol{v}$ à la section D.2. Une différence importante existe néanmoins entre les deux cas. Pour déterminer le champ de vitesse de déplacement de l'interface, on a construit un champ de vitesse discontinu $\delta\boldsymbol{v}$ devant vérifier les contraintes (D.4) dans le cas d'une interface plane pour que le champ $(\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{v})$ soit égal au champ de vitesse de déplacement de l'interface (*cf.* Éq. (D.5) dans le cas d'une interface plane). Cette contrainte diffère dans le cas présent.

Considérons par exemple le cas de la phase liquide, la phase vapeur se traitant de manière similaire. À une interface plane, pour le terme de convection de la température liquide, le but est que le champ $(\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{v}_l)$ soit égal au champ $\boldsymbol{v}_l$ dans la phase liquide et dans la phase vapeur. Le champ $\delta\boldsymbol{v}_l$ doit donc être tel que

$$\delta\boldsymbol{v}_l \cdot \boldsymbol{n} = \begin{cases} 0 & \text{dans la phase liquide} \\ \dot{m} \left(\dfrac{1}{\rho_v} - \dfrac{1}{\rho_l} \right) & \text{dans la phase vapeur} \end{cases} \tag{D.15}$$

de sorte que, d'après la définition (A.3) du taux de transfert de masse à l'interface, on ait

$$(\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{v}_l)\cdot\boldsymbol{n} = \begin{cases} \boldsymbol{v}_l\cdot\boldsymbol{n} & \text{dans la phase liquide} \\ \boldsymbol{v}_v\cdot\boldsymbol{n} - \dot{m}\left(\dfrac{1}{\rho_v} - \dfrac{1}{\rho_l}\right) = \boldsymbol{v}_l\cdot\boldsymbol{n} & \text{dans la phase vapeur} \end{cases} \tag{D.16}$$

Le champ ainsi construit est donc bien continu à la traversée de l'interface et égal au champ de vitesse liquide. Comme dans le cas de la vitesse de déplacement de l'interface, quand l'interface est courbe, le champ ainsi construit n'est pas à divergence nulle. On utilise donc la même méthode et on définit le champ :

$$\delta\boldsymbol{v}_l = \begin{cases} 0 & \text{pour d<0} \\ \nabla\left[\dot{m}\left(\dfrac{1}{\rho_v} - \dfrac{1}{\rho_l}\right) d\left(1 - \dfrac{\kappa\, d}{2}\right)\right] & \text{pour d>0} \end{cases} \tag{D.17}$$

Le champ $(\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{v}_l)$ est alors utilisé pour convecter la température de la phase liquide.

De même, pour la convection de la température vapeur, le champ $(\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{v}_v)$ est utilisé, où $\delta\boldsymbol{v}_v$ est défini par :

$$\delta\boldsymbol{v}_v = \begin{cases} \nabla\left[\dot{m}\left(\dfrac{1}{\rho_l} - \dfrac{1}{\rho_v}\right) d\left(1 - \dfrac{\kappa\, d}{2}\right)\right] & \text{pour d<0} \\ 0 & \text{pour d>0} \end{cases} \tag{D.18}$$

Pour les problèmes considérés dans ce mémoire, la vapeur est toujours supposée à saturation car nous nous sommes affranchis des problèmes pariétaux. Par conséquent, l'équation de température n'est pas résolue dans cette phase.

En utilisant la définition (A.3) du taux de transfert de masse à l'interface, on vérifie alors facilement que la composante normale à l'interface du champ $(\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{v}_v)$ est continue à la traversée de l'interface et égale à la vitesse de la phase vapeur.

D.3.2 Gradient de température à l'interface et taux de transfert de masse

1. Détermination du gradient de température normal à l'interface. Le champ de température le long de l'interface est constant et uniforme égal à la température de saturation T^{sat} (la pression thermodynamique étant supposée constante). Le gradient de température normal à l'interface sur les mailles eulériennes est alors évalué par la formule suivante

$$(\boldsymbol{n}\cdot\nabla T)_i = \frac{T^i - T^{\text{sat}}}{d_i} \tag{D.19}$$

où i est l'indice de la maille eulérienne considérée et d_i la distance signée à l'interface. Ce gradient ainsi calculé par différence finie centrée représente en fait le gradient normal à l'interface à une distance $d_i/2$ de l'interface et non pas à l'interface, lieu où le bilan d'énergie s'applique et où $(\boldsymbol{n}\cdot\nabla T)$ doit donc être évalué. Pour tenir compte de cette différence, on suppose que, localement, le gradient du champ de température est normal à l'interface et de divergence nulle. Cette hypothèse revient à supposer que le champ de température est quasi statique au voisinage de l'interface. On utilise alors la même méthode que celle utilisée pour déterminer le champ de vitesse normal à l'interface :

$$(\boldsymbol{n}\cdot\nabla T)_i = \frac{T_i - T^{\text{sat}}}{d_i}\, e^{\kappa\, d_i/2} \simeq \frac{T_i - T^{\text{sat}}}{d_i}\left(1 + \kappa\,(d_i/2) + \frac{\kappa^2\,(d_i/2)^2}{2} + \mathcal{O}(d_i^3)\right) \tag{D.20}$$

Il est important de remarquer que le signe + de la formule ci-dessus est bien cohérent avec le signe de la formule (D.9). En effet, dans la détermination de la formule (D.9), le but est de déterminer le champ à une distance d_i alors que l'on connaît le champ à l'interface. Ici, le but est inverse : on cherche la valeur à l'interface en connaissant la valeur à une distance $d_i/2$ de l'interface. Il se

trouve que cette valeur à l'interface est en fait stockée au centre des mailles eulériennes.

Il est important de noter que le calcul précédent n'est pas fait pour toutes les mailles eulériennes voisines de l'interface. En effet, le but est de déterminer le flux conductif à l'interface dans l'une des phases, par exemple dans le liquide. Par conséquent, le calcul précédent est effectué uniquement pour les mailles eulériennes liquide et non pas pour les mailles diphasiques ou vapeur. Il faut cependant remarquer que le flux normal ainsi calculé dans les mailles eulériennes liquide est bien représentatif du flux normal *à l'interface*. On cherche cependant à ce que ce flux soit régulier sur toutes les mailles, y compris les mailles diphasiques et vapeur pour que le champ de taux de transfert de masse $\dot{m}$ à l'interface le soit également. En effet, il sert à déterminer la vitesse de déplacement de l'interface. Il est donc nécessaire de *prolonger* le flux normal calculé dans les mailles liquide sur les mailles diphasiques et vapeur. Plusieurs solutions sont possibles pour effectuer ce prolongement et une méthode très simple de prise de moyenne a été adoptée : pour les mailles diphasiques et vapeur proches de l'interface, $(\boldsymbol{n} \cdot \nabla T)_i$ est calculé comme la moyenne des valeurs des mailles eulériennes voisines, cette moyenne étant calculée plusieurs fois de sorte à diffuser l'information. Cette procédure revient à résoudre une équation de type diffusion. [2]

2. Détermination du taux de transfert de masse. Indiquons en préambule que l'on cherche à déterminer la valeur du taux de transfert de masse sur les mailles eulériennes et non pas sur les mailles lagrangiennes comme on pourrait le penser au premier abord. En effet, comme on l'a vu dans la section D.2, la détermination du champ de vitesse de déplacement de l'interface s'effectue en supposant connu le champ de taux de transfert de masse sur les mailles eulériennes.

Connaissant le gradient de température à l'interface calculé comme décrit ci-dessus, on détermine simplement le taux de transfert de masse à l'interface $\dot{m}$ aux centres des mailles eulériennes par :

$$\dot{m}_i = \frac{k_l \, (\boldsymbol{n} \cdot \nabla T)_i}{\mathcal{L}^{vap}} \tag{D.21}$$

Il faut remarquer que la formule précédente suppose que le gradient de température à l'interface de la deuxième phase en présence est nul. Pour prendre en compte les deux phases, il suffirait de sommer la formule précédente sur les deux phases.

3. Détermination du champ de température *Ghost Fluid*. Dans cette étape, on cherche à déterminer le champ de température liquide dans les mailles eulériennes (liquide, diphasiques et vapeur) voisines de l'interface. Pour cela, on suppose que le gradient du champ à l'interface est connu (et déterminé à l'étape précédente). Ce champ est supposé être à divergence nul puisqu'on suppose le problème de conduction thermique quasi statique au voisinage de l'interface. Le champ de température à une distance d de l'interface est donné par :

$$T(d) = T^{\text{sat}} + (\boldsymbol{n} \cdot \nabla T)^s \, \frac{1}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa \, d}\right) \simeq T^{\text{sat}} + (\boldsymbol{n} \cdot \nabla T)^s \, d \left(1 - \frac{\kappa \, d}{2} + \frac{\kappa^2 \, d^2}{6}\right) \tag{D.22}$$

où l'exposant s est relatif à la surface. D'un point de vue discret, on utilise la valeur du gradient de température à l'interface déterminée à l'étape précédente et on obtient :

$$T^i = T^{\text{sat}} + (\boldsymbol{n} \cdot \nabla T)_i \, \frac{1}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa \, d_i}\right) \simeq T^{\text{sat}} + (\boldsymbol{n} \cdot \nabla T)_i \, d_i \left(1 - \frac{\kappa \, d_i}{2} + \frac{\kappa^2 \, d_i^2}{6}\right) \tag{D.23}$$

2. Cette même procédure de prise de moyenne locale successive est utilisée pour déterminer la courbure de l'interface dans les mailles eulériennes monophasiques voisines des mailles diphasiques. D'autres méthodes peut-être plus précises telles que celles mises en oeuvre dans les méthodes Level Set peuvent être envisagées.

Annexe E

Évaluation analytique des champs filtrés sur une configuration sphérique

Soit une inclusion supposée localement sphérique à laquelle on associe le repère sphérique $(O, r, \vartheta, \varphi)$. On note R_b le rayon de l'inclusion défini localement à partir de la courbure. Le problème est supposé sphérique, en l'absence de forces gravitaires. On suppose que le champ de température est purement radial, tel que $\dot{m}$ soit uniforme. La résolution du système (1.4) dans ce système de coordonnées conduit aux champs microscopiques suivants

$$\chi(r) = H(r - R_b) \tag{E.1a}$$

$$\boldsymbol{v}(r) = \dot{m}\left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v}\right)\frac{R_b^2}{r^2}\chi(r)\boldsymbol{e}_r \tag{E.1b}$$

$$T(r) = T^{\text{sat}} + \dot{m}R_b\frac{\mathcal{L}^{vap}}{k_l}\left(1 - \frac{R_b}{r}\right)\chi(r) \tag{E.1c}$$

où H et δ sont les fonctions de Heaviside et Dirac respectivement. Soit un filtre boîte sphérique de largeur de coupure 2Δ défini pour toute grandeur ϕ par :

$$\overline{\phi} = \frac{1}{4/3\pi\Delta^3}\oint_{\Omega}\phi dv \tag{E.2}$$

À tout point de l'espace O' situé à une distance de l'interface inférieure à Δ, on associe un repère cylindrique (O', ρ, θ, z). La direction de l'axe (Oz) est choisie colinéaire avec la droite (OO'). La distance séparant les deux repères est notée d. Les coordonnées des points dans le repère cylindrique sont notées en rouge sur la figure E.1. Le changement de coordonnées entre les deux repères se fait par l'intermédiaire des relations suivantes

$$\left\{\begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{(d+z)^2+\rho^2} \\ \vartheta & = & \theta \\ \varphi & = & \operatorname{atan}\frac{\rho}{d+z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \rho & = & r\sin\varphi \\ \theta & = & \vartheta \\ z & = & r\cos\varphi - d \end{array}\right. \tag{E.3}$$

et le vecteur $\boldsymbol{e}_r$ se décompose sur la nouvelle base par :

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\varphi\boldsymbol{e}_z + \sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho = \frac{z+d}{\sqrt{(d+z)^2+\rho^2}}\boldsymbol{e}_z + \frac{\rho}{\sqrt{(d+z)^2+\rho^2}}\boldsymbol{e}_\rho \tag{E.4}$$

Soient ϵ et ξ définis par :

$$\epsilon = \frac{\Delta}{R_b} \tag{E.5a}$$

$$d = R_b(1 + \xi\epsilon) \tag{E.5b}$$

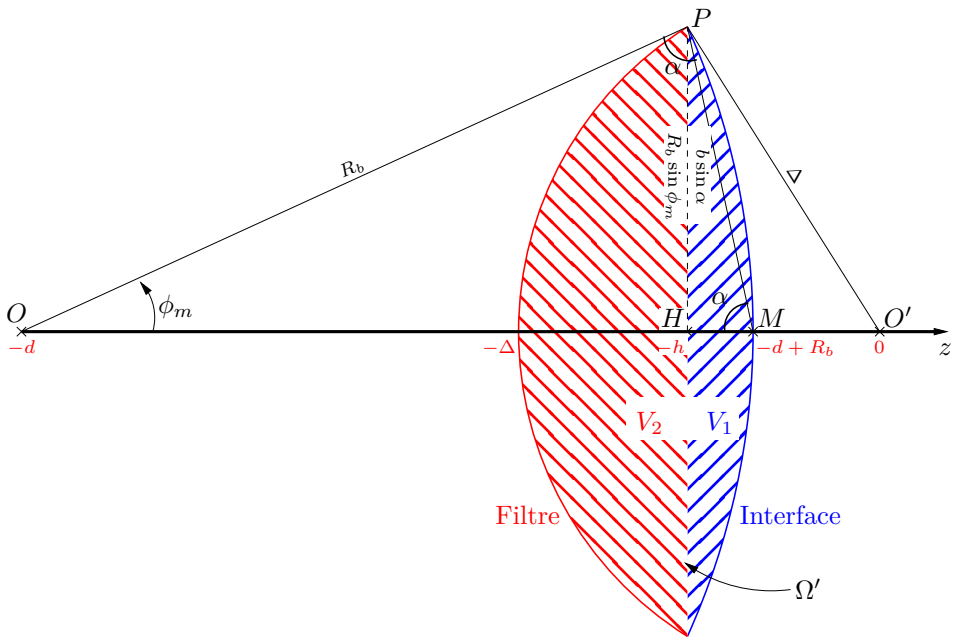


FIGURE E.1 – Lien entre les deux systèmes de coordonnées.

La zone de transition (sur laquelle $\overline{\chi}$ varie) est alors donnée par $\xi \in [-1;1]$. De simples considérations géométriques conduisent aux relations (*cf.* Fig. E.1 pour les notations) :

$$\Delta^2 = R_b^2 \sin^2\phi_m + h^2 \tag{E.6a}$$

$$\cos\phi_m = \frac{d-h}{R_b} \tag{E.6b}$$

En combinant ces deux relations, on obtient

$$h = \frac{1}{2d}\left(\Delta^2 + d^2 - R_b^2\right) \tag{E.7}$$

ou encore, en utilisant les grandeurs adimensionnelles ξ et ϵ :

$$\frac{h}{R_b} = \frac{1}{2}\frac{(\xi^2+1)\epsilon^2 + 2\xi\epsilon}{1+\xi\epsilon} \tag{E.8}$$

En utilisant ces nouvelles variables, le système (E.1) devient :

$$\chi(\xi) = H(\xi) \tag{E.9a}$$

$$\boldsymbol{v}(\xi) = \dot{m}\left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v}\right)\frac{1}{(1+\xi\epsilon)^2}\chi(\xi)\boldsymbol{e}_r \tag{E.9b}$$

$$T(\xi) = T^{\text{sat}} + \dot{m}R_b\frac{\mathcal{L}^{vap}}{k_l}\frac{\xi\epsilon}{1+\xi\epsilon}\chi(\xi) \tag{E.9c}$$

Pour toute variable microscopique ϕ pouvant se mettre sous la forme $\phi = f\chi$, on a

$$\overline{\phi} = \frac{1}{4/3\pi\Delta^3}\oint_{\Omega'} f dv = \frac{1}{4/3\pi\Delta^3}\left(\oint_{V_2} f dv - \oint_{V_1} f dv\right) \tag{E.10}$$

où Ω' est la lunule située entre les sphères représentant l'interface et le filtre (espace hachuré, Fig. E.1). Pour intégrer simplement les variables sur ce domaine, on décompose algébriquement le domaine Ω' en deux parties V_1 et V_2 comme présenté sur la figure E.1 : $\Omega' = V_1 U V_2$. Les domaines

d'intégrations V_1 et V_2 sont définis dans le repère cylindrique par :

$$V_2 : \forall M'(\rho,\theta,z) \text{ tel que } \begin{cases} \rho & \in & \left[0; R_2(z) = \sqrt{\Delta^2 - z^2}\right] \\ \theta & \in & [0; 2\pi] \\ z & \in & [-h; \Delta] \end{cases} \tag{E.11a}$$

$$V_1 : \forall M'(\rho,\theta,z) \text{ tel que } \begin{cases} \rho & \in & \left[0; R_1(z) = \sqrt{R_b^2 - (d+z)^2}\right] \\ \theta & \in & [0; 2\pi] \\ z & \in & [-h; R_b - d] \end{cases} \tag{E.11b}$$

D'après la symétrie sphérique du problème, les variables ne dépendent pas de la coordonnée azimutale θ autour de l'axe $(O'z)$. Pour $\phi(\rho,z) = f(\rho,z)\chi(\rho,z)$, on a alors :

$$\overline{\phi}(\rho,z) = \frac{3}{2\Delta^3}\left(\int_{-h}^{\Delta}\int_0^{R_2(z)} f(\rho,z)d\rho dz - \int_{-h}^{R_b-d}\int_0^{R_1(z)} f(\rho,z)d\rho dz\right) \tag{E.12}$$

Afin d'adimensionnaliser le problème, introduisons les variables $z^+ = z/R_b$ et $\rho^+ = \rho/R_b$. On peut montrer que l'on a alors :

$$\begin{aligned}\overline{\phi}(\xi,\epsilon) = \frac{3}{2\epsilon^3}\Bigg(&\int_{-\frac{1}{2}\frac{(\xi^2+1)\epsilon^2+2\xi\epsilon}{1+\xi\epsilon}}^{\epsilon}\int_0^{\sqrt{\epsilon^2-z^{+2}}} f(\rho^+,z^+)d\rho^+dz^+ \\ &-\int_{-\frac{1}{2}\frac{(\xi^2+1)\epsilon^2+2\xi\epsilon}{1+\xi\epsilon}}^{-\xi\epsilon}\int_0^{\sqrt{1-(1+\xi\epsilon+z^+)^2}} f(\rho^+,z^+)d\rho^+dz^+\Bigg)\end{aligned} \tag{E.13}$$

Dans certains cas, il peut être commode d'effectuer le changement $z^+ = y - 1 - \xi\epsilon$ qui conduit à :

$$\begin{aligned}\overline{\phi}(\xi,\epsilon) = \frac{3}{2\epsilon^3}\Bigg(&\int_{1+\frac{\epsilon^2(\xi^2-1)}{2(1+\xi\epsilon)}}^{\epsilon+1+\xi\epsilon}\int_0^{\sqrt{\epsilon^2-(y-1-\xi\epsilon)^2}} f(\rho^+,y)d\rho^+dy \\ &-\int_{1+\frac{\epsilon^2(\xi^2-1)}{2(1+\xi\epsilon)}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(\rho^+,y)d\rho^+dy\Bigg)\end{aligned} \tag{E.14}$$

Ce changement de variable peut bien sûr selon les cas n'être appliqué qu'à l'une des deux intégrales.

En notant F la primitive de f par rapport à la variable ρ, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{\phi}(\xi,\epsilon) = \frac{3}{2\epsilon^3}\Bigg(&\int_{1+\frac{\epsilon^2(\xi^2-1)}{2(1+\xi\epsilon)}}^{\epsilon+1+\xi\epsilon} F(\sqrt{\epsilon^2-(y-1-\xi\epsilon)^2},y)dy + \int_1^{1+\frac{\epsilon^2(\xi^2-1)}{2(1+\xi\epsilon)}} F(\sqrt{1-y^2},y)dy \\ &-\int_{1+\frac{\epsilon^2(\xi^2-1)}{2(1+\xi\epsilon)}}^{\epsilon+1+\xi\epsilon} F(0,y)dy + \int_1^{1+\frac{\epsilon^2(\xi^2-1)}{2(1+\xi\epsilon)}} F(0,y)dy\Bigg)\end{aligned} \tag{E.15}$$

puis après simplification :

$$\begin{aligned}\overline{\phi}(\xi,\epsilon) = \frac{3}{2\epsilon^3}\Bigg(&\int_{1+\frac{\epsilon^2(\xi^2-1)}{2(1+\xi\epsilon)}}^{1+\epsilon+\xi\epsilon} F(\sqrt{\epsilon^2-(y-1-\xi\epsilon)^2},y)dy \\ &+\int_1^{1+\frac{\epsilon^2(\xi^2-1)}{2(1+\xi\epsilon)}} F(\sqrt{1-y^2},y)dy - \int_1^{1+\epsilon+\xi\epsilon} F(0,y)dy\Bigg)\end{aligned} \tag{E.16}$$

Dans les paragraphes suivants, on exprime, en fonction de R_b, ϵ et ξ, quelques quantités filtrées. La figure (E.2) illustre les champs obtenus.

Calcul de $\overline{\chi}$ Pour calculer $\overline{\chi}$, il suffit d'appliquer la définition (E.12) à $\phi \equiv \chi$ et $f(\rho,z) = 1$ pour obtenir après adimensionnalisation :

$$\overline{\chi}(\xi) = \frac{-(\xi+1)^2(\xi^2\epsilon + 4\xi - 2\xi\epsilon - 3\epsilon - 8)}{16(1+\xi\epsilon)} \tag{E.17}$$

Calcul de $\nabla\overline{\chi}$ D'après le changement de variable $d\xi = dr/(\epsilon R_b)$, l'opérateur gradient est donné par :

$$\boldsymbol{e}_r \cdot \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r) = \frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\xi)\frac{\partial\xi}{\partial r} = \frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\xi)\frac{1}{\epsilon R_b} \tag{E.18}$$

En appliquant cette relation au profil de $\overline{\chi}$ donné par la relation (E.17), on obtient :

$$\nabla\overline{\chi}(\xi) = \frac{1}{\epsilon R_b}\frac{\partial\overline{\chi}}{\partial\xi}(\xi)\boldsymbol{e}_r = \frac{3(1-\xi^2)\left((2+\xi\epsilon)^2-\epsilon^2\right)}{16\epsilon R_b(1+\xi\epsilon)^2}\boldsymbol{e}_r \tag{E.19}$$

Calcul de $\overline{\delta^i}$ À partir de considérations géométriques, l'aire interfaciale volumique $\overline{\delta^i}$ s'interprète comme l'aire de la portion de sphère sous-tendue par l'angle ϕ_m (contenue dans le volume Ω) divisée par le volume du support du filtre :

$$\overline{\delta^i}(\xi) = \frac{3}{4\epsilon R_b}\frac{1-\xi^2}{1+\xi\epsilon} \tag{E.20}$$

Calcul de $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ Le gradient $\nabla\overline{\chi}$ est relié à la normale $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ et à l'aire interfaciale volumique $\overline{\delta^i}$ par la relation :

$$\nabla\overline{\chi}(\xi) = \overline{\nabla\chi}(\xi) = -\overline{\boldsymbol{n}}^s\overline{\delta^i}(\xi) \tag{E.21}$$

En combinant les relations (E.19) et (E.20), on obtient :

$$\nabla\overline{\chi}(\xi) = \overline{\delta^i}(\xi)\boldsymbol{e}_r\left(1+\epsilon^2\frac{\xi^2-1}{1+\xi\epsilon}\right) \tag{E.22}$$

On en déduit le profil de $\overline{\boldsymbol{n}}^s$ suivant :

$$\overline{\boldsymbol{n}}^s = -\boldsymbol{e}_r\left(1+\epsilon^2\frac{\xi^2-1}{1+\xi\epsilon}\right) \tag{E.23}$$

On note n_r la composante radiale de ce vecteur. En $\xi = 0$, on a en particulier : $\overline{\boldsymbol{n}}^s = -\boldsymbol{e}_r\left(1-\epsilon^2\right)$. Par conséquent, le produit scalaire $\overline{\boldsymbol{n}}^s \cdot \overline{\boldsymbol{n}}^s$ est donné, en $\xi = 0$, par :

$$\overline{\boldsymbol{n}}^s \cdot \overline{\boldsymbol{n}}^s = 1 - 2\epsilon^2 + \epsilon^4 \tag{E.24}$$

Cette relation est utilisée au chapitre 5, pour établir la relation (5.9a).

Calcul de $\tau_{\mathbf{superf}}$ Le champ τ_{superf} défini par l'équation (2.83) devient dans le cas d'une interface sphérique

$$\tau_{\text{superf}} = \left(\overline{\kappa}_\sigma - \kappa\right)\nabla\overline{\chi} \tag{E.25}$$

où $\overline{\kappa}_\sigma \hat{=} -\left(\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{n}}^s \otimes \overline{\boldsymbol{n}}^s\right) : \nabla\overline{\boldsymbol{n}}^s$ est défini uniquement à partir du champ de normale $\overline{\boldsymbol{n}}^s$. D'après la définition du gradient en coordonnées sphériques, on a

$$-\overline{\kappa}_\sigma = \left(1-n_r^2\right)\frac{\partial n_r}{\partial r} + 2\frac{n_r}{r} \tag{E.26}$$

où r est la coordonnée radiale du repère sphérique reliée à ξ et à la courbure κ par : $r = (1+\xi\epsilon)\,2/\kappa$ et $dr = 2\epsilon d\xi/\kappa$. Sachant que

$$\frac{\partial n_r}{\partial\xi} = -\epsilon^2\frac{2\xi\left(1+\epsilon\xi\right) - \epsilon\left(\xi^1-1\right)}{\left(1+\xi\epsilon\right)^2} \tag{E.27}$$

on obtient le développement limité suivant :

$$\overline{\kappa}_\sigma = \kappa\left(1 + 2\xi\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \tag{E.28}$$

L'écart $\overline{\kappa}_\sigma - \kappa$ augmente linéairement avec la distance à l'interface à l'ordre dominant. Par conséquent, même pour une interface sphérique, le terme sous-maille τ_{superf} est non nul :

$$\tau_{\text{superf}} = 2\xi\epsilon\nabla\overline{\chi} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{E.29}$$

Calcul de $\overline{\boldsymbol{v}}$ D'après la relation (E.4), la vitesse s'exprime suivant les directions ρ et z dans le repère cylindrique. D'après les symétries du problème et du domaine d'intégration, la composante filtrée de la vitesse suivant $\boldsymbol{e}_\rho$ est nulle. Comme le vecteur $\boldsymbol{e}_z$ est invariant, il peut être sorti de l'intégrale. Le problème revient à filtrer la composante de la vitesse suivant z :

$$v_z(\rho, z) = \dot{m}\left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v}\right)\chi(\rho, z)R_b^2\frac{z+d}{\left[(d+z)^2+\rho^2\right]^{3/2}} \tag{E.30}$$

Notons f la fonction définie par $f(\rho, z) = R_b^2\dfrac{z+d}{\left[(d+z)^2+\rho^2\right]^{3/2}}$. Après les deux changements de variables présentés précédemment, cette expression devient :

$$f(\rho^+, z^+) = \frac{z^+ + 1 + \xi\epsilon}{\left[(z^+ + 1 + \xi\epsilon)^2 + \rho^{+2}\right]^{3/2}} \tag{E.31a}$$

$$f(\rho^+, y) = \frac{y}{\left[y^2 + \rho^{+2}\right]^{3/2}} \tag{E.31b}$$

Sa primitive est :

$$F(\rho^+, y) = \frac{\rho^+}{y\sqrt{y^2 + {\rho^+}^2}} \tag{E.32}$$

La relation (E.16) conduit donc à :

$$\overline{v_z}(\xi, \epsilon) = \dot{m}\left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v}\right)\frac{3}{2\epsilon^3}\left(\int_{1+\frac{\epsilon^2(\xi^2-1)}{2(1+\xi\epsilon)}}^{1+\epsilon+\xi\epsilon}\frac{\sqrt{\epsilon^2-(y-1-\xi\epsilon)^2}}{y\sqrt{y^2+\epsilon^2-(y-1-\xi\epsilon)^2}}dy + \int_1^{1+\frac{\epsilon^2(\xi^2-1)}{2(1+\xi\epsilon)}}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}dy\right) \tag{E.33}$$

Des calculs longs et fastidieux nous ont permis (avec l'aide de maple) d'en arriver à :

$$\overline{\boldsymbol{v}}(\xi) = \dot{m}\left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v}\right)\frac{1}{(1+\xi\epsilon)^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\epsilon + \frac{3}{4}\xi + \frac{3}{8}\xi^2\epsilon - \frac{1}{4}\xi^3 - \frac{3}{16}\xi^4\epsilon\right)\boldsymbol{e}_r \tag{E.34}$$

Le vecteur $\boldsymbol{e}_z$ du repère local a été remplacé par $\boldsymbol{e}_r$ pour donner une expression valable dans le repère sphérique $(O, r, \vartheta, \varphi)$ associé à l'inclusion. Cette solution peut aussi être établie à partir la divergence de la vitesse donnée par la condition d'incompressibilité. Cette divergence ayant la forme d'une distribution de Dirac, elle peut être filtrée puis intégrée pour obtenir le profil de $\overline{\boldsymbol{v}}$. La relation (E.34) peut être développée en ordres de ϵ :

$$\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}(\xi, \epsilon) = \dot{m}\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\left[\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3}_{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^0(\xi)} + \underbrace{\left(-\frac{3}{16} - \xi + \frac{15}{8}\xi^2 - \frac{5}{16}\xi^4\right)}_{\breve{\overline{\boldsymbol{v}}}^1(\xi)}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]\boldsymbol{e}_r \tag{E.35}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}(\xi, \epsilon) = \dot{m}\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\frac{1}{(1+\xi\epsilon)^2}\chi(\xi)\,\boldsymbol{e}_r = \dot{m}\left[\!\left[1/\rho\right]\!\right]\left[\underbrace{1}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}^0(\xi)}\underbrace{-2\xi}_{\widetilde{\boldsymbol{v}}^1(\xi)}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]\chi(\xi)\,\boldsymbol{e}_r \tag{E.36}$$

Calcul de $\overline{T}$ Par analogie entre le gradient de température et la vitesse monofluide, on déduit de la relation (E.34) le profil du gradient de température filtré :

$$\nabla\overline{T}(\xi) = \dot{m}\frac{\mathcal{L}^{vap}}{k_l}\frac{1}{(1+\xi\epsilon)^2}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3\right) + \left(-\frac{3}{16} + \frac{3}{8}\xi^2 - \frac{3}{16}\xi^4\right)\epsilon\right]\boldsymbol{e}_r \tag{E.37}$$

Plutôt que d'intégrer exactement cette expression, on préfère intégrer son développement en série de Taylor en ϵ tronqué à l'ordre 2 :

$$\nabla\overline{T}(\xi) = \dot{m}\frac{\mathcal{L}^{vap}}{k_l}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3\right) + \left(-\frac{3}{16} + \frac{3}{8}\xi^2 - \frac{3}{16}\xi^4\right)\epsilon\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{E.38}$$

L'opérateur gradient est donné dans les nouvelles variables par la relation (E.18) et on a :

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \xi}(\xi) = \epsilon R_b \nabla \overline{T} \cdot \boldsymbol{e}_r \tag{E.39}$$

Par conséquent, l'intégration conduit à :

$$\overline{T}(\xi) = \dot{m}\frac{\mathcal{L}^{vap}}{k_l}\epsilon R_b \left[\left(\frac{1}{2}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 - \frac{1}{16}\xi^4\right) + \left(-\frac{3}{16}\xi + \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{3}{80}\xi^5\right)\epsilon + C\right] + T^{\text{sat}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{E.40}$$

La condition $\overline{T}(-1) = T^{\text{sat}}$ permet de trouver la valeur de la constante

$$C = \frac{3}{16} - \frac{1}{10}\epsilon \tag{E.41}$$

et par suite on obtient le profil de température filtré :

$$\overline{T}(\xi) = \dot{m}\frac{\mathcal{L}^{vap}}{k_l}\epsilon R_b \left[\left(\frac{3}{16} + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 - \frac{1}{16}\xi^4\right) + \left(-\frac{1}{10} - \frac{3}{16}\xi + \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{3}{80}\xi^5\right)\epsilon\right] + T^{\text{sat}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{E.42}$$

Synthèse Dans la zone de transition (*i. e.*, $\forall \xi \in [-1;1]$), on montre que les champs filtrés sont approchés par :

$$\overline{\chi}(\xi) = \frac{-(\xi+1)^2(\xi^2\epsilon + 4\xi - 2\xi\epsilon - 3\epsilon - 8)}{16(1+\xi\epsilon)} \tag{E.43a}$$

$$\nabla\overline{\chi}(\xi) = \frac{3(1-\xi^2)\left((2+\xi\epsilon)^2 - \epsilon^2\right)}{16\epsilon R_b(1+\xi\epsilon)^2}\boldsymbol{e}_r \tag{E.43b}$$

$$\overline{\delta^i}(\xi) = \frac{3}{4\epsilon R_b}\frac{1-\xi^2}{1+\xi\epsilon} \tag{E.43c}$$

$$\overline{\boldsymbol{n}}^s = -\boldsymbol{e}_r\left(1 + \epsilon^2\frac{\xi^2-1}{1+\xi\epsilon}\right) \tag{E.43d}$$

$$\overline{\boldsymbol{v}}(\xi) = \dot{m}\left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v}\right)\frac{1}{(1+\xi\epsilon)^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\epsilon + \frac{3}{4}\xi + \frac{3}{8}\xi^2\epsilon - \frac{1}{4}\xi^3 - \frac{3}{16}\xi^4\epsilon\right)\boldsymbol{e}_r \tag{E.43e}$$

$$\overline{T}(\xi) = \dot{m}\frac{\mathcal{L}^{vap}}{k_l}\epsilon R_b \left[\left(\frac{3}{16} + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 - \frac{1}{16}\xi^4\right) + \left(-\frac{1}{10} - \frac{3}{16}\xi + \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{3}{80}\xi^5\right)\epsilon\right] + T^{\text{sat}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{E.43f}$$

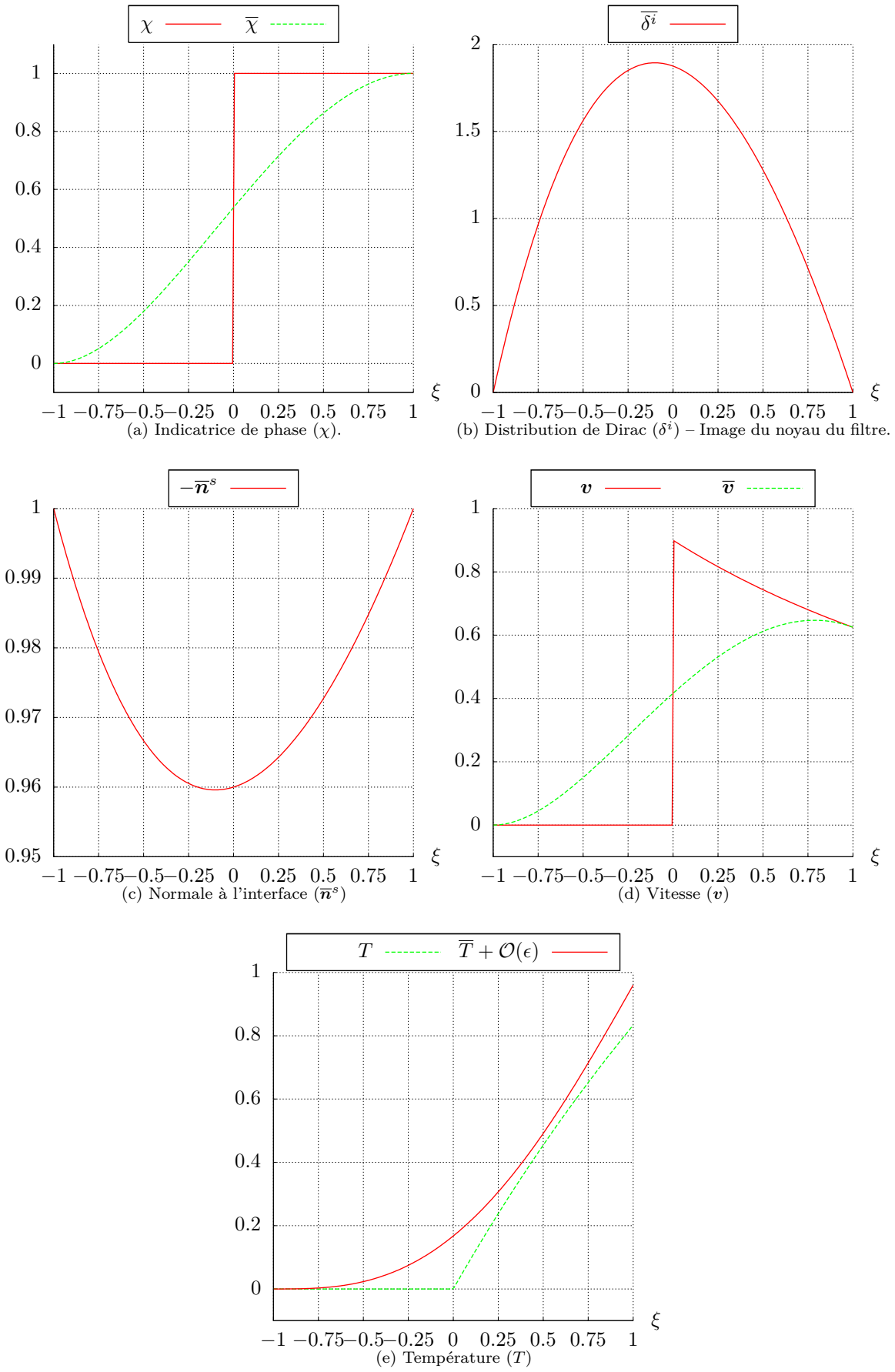


FIGURE E.2 – Analyse des champs filtrés autour d'une inclusion sphérique.

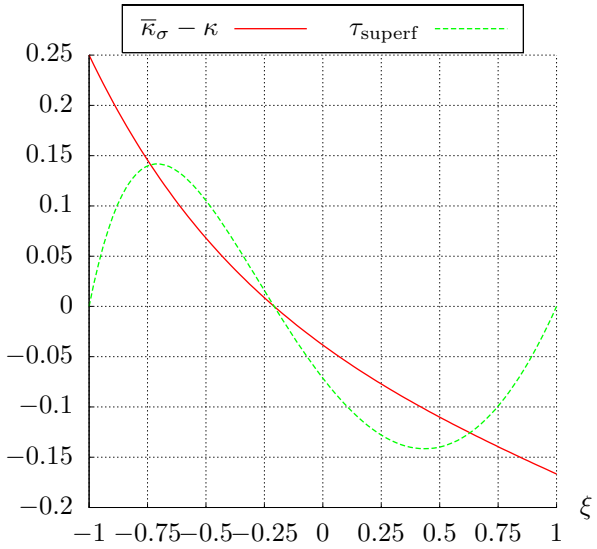


FIGURE E.3 – Illustration du champ de courbure mésoscopique $\overline{\kappa}_\sigma$ dans le cas d'une interface sphérique et de son effet sur τ_{superf}.

Bibliographie

M. Akiyama : Bubble collapse in subcooled boiling. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 16(93):570–575, 1973.

D. M. Anderson, G. B. McFadden et A. A. Wheeler : A phase-field model with convection : sharp-interface asymptotics. *Physica D*, 151:305–331, 2001.

G. Arfken : *Mathematical Methods for Physicists.* Academic Press, 3e éd., 1985. §1.15 Helmholtz's theorem.

J. Bardina, J. H. Ferziger et W. C. Reynolds : Improved turbulence models for Large Eddy Simulation. *AIAA Paper*, 83:1357, 1983.

I. Bolotnov, K. Jansen, D. Drew, A. Oberai, R. L. Jr. et M. Podowski : Direct Numerical Simulation of turbulent two-phase bubbly channel flow. *In 7th International Conference on Multiphase Flows, ICMF'10,Tampa, Florida, May 30-June 4*, 2010.

V. P. Carey : *Liquid-vapor phase-change phenomena : An introduction to the thermophysics of vaporisation and condensation processes in heat transfer equipment.* Hemisphere Publishing Corporation, 1992.

J.-P. Chabard : Transferts thermiques dans les processus énergétiques. Partie V : écoulements diphasiques. wwwdfr.ensta.fr/Cours/docs/A3-1/A3-Theorique-2-CoursChabard-113-137-080113-2.pdf, 2009.

Y. Chen et F. Mayinger : Measurement of heat transfer at the phase interface of condensing bubbles. *International Journal of Multiphase Flow*, 18(6):877 – 890, 1992.

J. Chesnel, F. Demoulin, J. Réveillon et T. Ménard : Large Eddy Simulation of liquid atomization : From the resolved scales to subgrid spray. *In 7th International Conference on Multiphase Flows, ICMF'10,Tampa, Florida, May 30-June 4*, 2010.

R. A. Clark, J. H. Ferziger et W. C. Reynolds : Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow. *J. Fluid Mech*, 91(Pt 1):1–16, 1979.

R. Clift, J. Grace et M. E. Weber : Bubbles, drops and particles. *Academic Press*, 1978.

J. Cousteix et J. Mauss : *Analyse asymptotique et couche limite*, vol. 56. Springer, 2006. Mathématiques et Applications.

J. Crank : *Free and Moving Boundary Problems.* Clarendon Press, 1984.

J.-M. Delhaye : Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation. *International Journal of Multiphase Flow*, 1:395–409, 1974.

J.-M. Delhaye : *Thermohydraulique des réacteurs.* EDP Sciences, 2008.

J.-M. Delhaye, J.-G. Collier, G. Hewitt et A. E. Bergles : *Two-phase flow and heat transfer in the process and power industries.* Hemisphere Publishing Corporation, 1981a.

J.-M. Delhaye, M. Giot et M. L. Riethmuller : *Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering.* Hemisphere Publishing Corporation, 1981b.

M. Dimić : Collapse of one-component vapor bubble with translatory motion. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 20(12):1325 – 1332, 1977.

M. V. Dyke : *Perturbation Methods in Fluid Mechanics.* 1975.

W. Eckhaus et H. Moet : Asymptotic solutions in free boundary problems of singularly perturbed elliptic variational inequalities. *In* W. Eckhaus et E. M. de Jager, éds. : *Differential Equations and Applications, Proceedings of the Third Scheveningen Conference on Differential Equations*, vol. 31 de *North-Holland Mathematics Studies*, pp. 59 – 73. North-Holland, 1978.

D. Edwards, H. Brenner et D. Wasan : *Interfacial Transport Processes and Rheology.* Butterworth-Heinemann, 1991.

R. P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman et S. Osher : A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the Ghost Fluid Method). *Journal of Computational Physics*, 152(2):457 – 492, 1999.

C. Fouillet : Généralisation à des mélanges binaires de la méthode du second gradient et application à la Simulation Numérique Directe de l'ébullition nucléée. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2003.

J. Garrigues : Statique des coques élastiques. http ://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/coques.html, 1999.

M. Germano : Differential filters of elliptic type. *Physics of Fluids*, 29(6):1757–1758, 1986.

C. W. Hirt et B. D. Nichols : Volume of fluid (VOF) methods for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.*, 39:201–255, 1981.

J. Isenberg et S. Sideman : Direct contact heat transfer with change of phase : Bubble condensation in immiscible liquids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 13(6):997 – 1011, 1970.

M. Ishii et T. Hibiki : *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow.* Springer, 2006.

D. Jamet et M. Chandesris : On the intrinsic nature of jump coefficients at the interface between a porous medium and a free fluid region. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52 (1-2):289 – 300, 2009.

D. Jamet, O. Lebaigue, N. Coutris et J.-M. Delhaye : The second gradient method for the Direct Numerical Simulation of liquid-vapor flows with phase-change. *J. Comp. Phys.*, 169 (2):624–651, 2001.

I. Kataoka : Local instant formulation of two-phase flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 12(5):745–758, 1986.

E. Labourasse, D. Lacanette, A. Toutant, P. Lubin, S. Vincent, O. Lebaigue, J.-P. Caltagirone et P. Sagaut : Towards Large Eddy Simulation of isothermal two-phase flows : Governing equations and *a priori* tests. *Int. J. Multiphase Flow*, 33(1):1–39, 2007.

O. Lebaigue, D. Jamet, C. Duquennoy et N. Coutris : Review of existing methods for Direct Numerical Simulation of liquid-vapor two-phase flows. *In 6th International Conference on Nuclear Engineering*, 1998.

D. Legendre, J. Borée et J. Magnaudet : Thermal and dynamic evolution of a spherical bubble moving steadily in a superheated or subcooled liquid. *Phys. Fluids*, 10(6):1256–1272, 1998.

A. Leonard : Energy cascade in Large-Eddy Simulations of turbulent fluid flows. *In* F. Frenkiel et R. Munn, éds. : *Turbulent Diffusion in Environmental Pollution, Proceedings of a Symposium held at Charlottesville*, vol. 18, Part 1 de *Advances in Geophysics*, pp. 237 – 248. Elsevier, 1975.

V. G. Levich : *Physico-chemical Hydrodynamics.* Prentice-Hall, 1962.

G. Luret, T. Ménard, A. Berlemont et F. Demoulin : A DNS study ranging from dense to dilute turbulent two-phase flows. *In 7th International Conference on Multiphase Flows, ICMF'10,Tampa, Florida, May 30-June 4*, 2010.

S. Magdeleine : *Démonstration de la potentialité des méthodes de SND diphasique à renseigner les modèles moyennés : Application à la colonne à bulles.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2009.

E. Manon : *Contribution à l'analyse et à la modélisation locale des écoulements bouillants sous-saturés dans les conditions des réacteurs à eau sous pression.* Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2000.

B. Mathieu : *Etudes physique, expérimentale et numérique des mécanismes de base intervenant dans les écoulements diphasiques.* Thèse de doctorat, Université de Provence, 2003.

B. Mathieu : A 3D parallel implementation of the Front-Tracking method for two-phase flows and moving bodies. *In 177ème Session du comité scientifique et technique de la Société Hydrotechnique de France, Advances in the modelling methodologies of two-phase flows, Lyon, France, November 24-26*, 2004. Paper # 24.

S. Mimouni, J. Laviéville, N. Seiler et P. Ruyer : Combined evaluation of second order turbulence model and polydispersion model for two-phase boiling flow and application to fuel assembly analysis. *In 13th International Topis Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics, NURETH-13, Kanazawa, Japan, September 27-October 2*, 2009.

C. Morel, P. Ruyer, N. Seiler et J. M. Laviéville : Comparison of several models for multi-size bubbly flows on an adiabatic experiment. *International Journal of Multiphase Flow*, 36(1):25 – 39, 2010.

J. A. Nelder et R. Mead : A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7:308 – 313, 1965.

A. D. Okhotsimskii : The thermal regime of vapour bubble collapse at different Jacob numbers. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 31(8):1569–1575, 1988.

P. Oresta, R. Verzicco, D. Lohse et A. Prosperetti : Heat transfer mechanisms in bubbly Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E*, 80(2):026304, Aug 2009.

A. Ozel, J. Parmentier, O. Simonin et P. Fede : A priori test of effective drag modeling for filtered two-fluid model simulation of circulating and dense gas-solid fluidized beds. *In 7th International Conference on Multiphase Flows, ICMF'10,Tampa, Florida, May 30-June 4*, 2010.

H.-S. Park, T.-H. Lee, T. Hibiki, W.-P. Baek et M. Ishii : Modeling of the condensation sink term in an interfacial area transport equation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(25-26):5041 – 5053, 2007.

A. Prosperetti : Bubbles. *Physics of Fluids*, 16(6):1852–1865, 2004.

W. E. Ranz et W. R. Marshall : Evaporation from drops. *Chem. Eng. Prog.*, 48 (141):173–180, 1952.

L. F. Richardson : The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems including differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 210:307–357, 1911.

R. Roumy : Structure des écoulememts diphasiques eau-air. Étude de la fraction de vide moyenne et des configurations d'écoulement. Rap. tech., Commissariat à l'Énergie Atomique, France. CEA-R-3892, 1969.

E. Ruckenstein : On heat transfer between vapour bubbles in motion and the boiling liquid from which they are generated. *Chemical Engineering Science*, 10(1-2):22 – 30, 1959.

P. Ruyer : *Modèle de champ de phase pour l'étude de l'ébullition.* Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2006.

P. Sagaut : *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows.* Springer Verlag, second éd., 2003.

P. Sagaut et M. Germano : On the filtering paradigm for LES flow with discontinuities. *J. of Turbulence*, 6(23):1–9, 2005.

F. Sarghini, U. Piomelli et E. Balaras : Scale-similar models for Large-Eddy Simulations. *Physics of Fluids*, 11(6):1596–1607, 1999.

L. E. Scriven : On the dynamics of phase growth. *Chem. Eng. Sci.*, 10:1–13, 1959.

P. Spalart, R. Moser et M. Rogers : Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and two periodic directions. *J. Comput. Phys.*, 96(2):297–324, 1991.

W. Tauber, S. O. Unverdi et G. Tryggvason : The nonlinear behavior of a sheared immiscible fluid interface. *Phys. Fluids*, 14(8):2871–2885, 2002.

T. Theofanous, L. Biasi, H. Isbin et H. Fauske : Nonequilibrium bubble collapse : A theoretical study. vol. 66, pp. 37 – 47, 1969a.

T. Theofanous, L. Biasi, H. Isbin et H. Fauske : A theoretical study on bubble growth in constant and time-dependent pressure fields. *Chemical Engineering Science*, 24(5):885 – 897, 1969b.

G. Tomar, D. Fuster, S. Zaleski et S. Popinet : Multiscale simulations of gas assisted liquid jet break up. *In 7th International Conference on Multiphase Flows, ICMF'10,Tampa, Florida, May 30-June 4*, 2010.

A. Toutant : *Modélisation physique des interactions entre interfaces et turbulence.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006.

A. Toutant, M. Chandesris, D. Jamet et O. Lebaigue : Jump conditions for filtered quantities at an under-resolved discontinuous interface. Part 1 : Theoretical development. *International Journal of Multiphase Flow*, 35(12):1100 – 1118, 2009a.

A. Toutant, M. Chandesris, D. Jamet et O. Lebaigue : Jump conditions for filtered quantities at an under-resolved discontinuous interface. Part 2 : A priori tests. *International Journal of Multiphase Flow*, 35(12):1119 – 1129, 2009b.

A. Toutant, E. Labourasse, O. Lebaigue et O. Simonin : DNS of the interaction between a deformable buoyant bubble and a spatially decaying turbulence : A priori tests for LES two-phase flow modelling. *Computers & Fluids*, 37(7):877 – 886, 2008. Special Issue of the Conference.

A. Toutant, O. Lebaigue, E. Labourasse, S. Vincent, P. Lubin et D. Lacanette : Effects of turbulence on interfacial heat transfer : A priori test and filters evaluation. *In 13th International Heat Transfer Conference, IHTC-13, Sydney, Australia, 13-18 August*, 2006.

G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeeli, D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas et Y.-H. Jan : A Front-Tracking method for the computations of multiphase flow. *J. Comp. Phys.*, 204:708–759, 2001.

G. Tryggvason, A. Esmaeeli et N. Al-Rawahi : Direct Numerical Simulations of flows with phase change. *Comput. Struct.*, 83:445–453, 2005.

G. Tryggvason, A. Esmaeeli, J. Lu et S. Biswas : Direct numerical simulations of gas/liquid multiphase flows. *Fluid Dyn. Res.*, 38:660–681, 2006.

G. Tryggvason, S. Thomas, J. Lu, B. Aboulhasanzadeh et V. Tsengué : Multiscale computations of multiphase flows. *In 7th International Conference on Multiphase Flows, ICMF'10,Tampa, Florida, May 30-June 4*, 2010.

S. O. Unverdi et G. Tryggvason : A front-tracking method for viscous incompressible multi-fluid flows. *J. Comp. Phys.*, 100:25–37, 1992.

V. R. Voller : Numerical treatment of rapidly changing and discontinuous conductivities. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(23):4553 – 4556, 2001.

G. R. Warrier, N. Basu et V. K. Dhir : Interfacial heat transfer during subcooled flow boiling. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(19):3947 – 3959, 2002.

O. Zeitoun, M. Shoukri et V. Chatoorgoon : Interfacial heat-transfer between steam bubbles and subcooled water in vertical upward flow. *Journal of Heat Transfer-Transactions of the ASME*, 117:402–407, 1995.

R. K. Zeytounian : *Modélisation asymptotique en mécanique des fluides newtoniens.* Springer-Verlag, 1994. Mathématiques et Applications.

D. Zwillinger : *Handbook of differential equations.* Academic Press, Boston, 1989.