

THÈSE

IDENTIFICATION ET PRÉVISION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES ROTORS FEUILLETÉS EN FLEXION

Présentée devant
l'Institut National des sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir
le **GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :
Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par
Guillaume Mogenier
Maître ès Sciences, Université Lyon 1

Thèse soutenue le 1^{er} Avril 2011 devant la Commission d'examen

Jury

PATRICE CARTRAUD	Professeur	EC-Nantes	Rapporteur
EMMANUEL FOLTETE	Professeur	femto-st	Rapporteur
JEAN-JACQUES SINOUE	Professeur	EC-Lyon	Examinateur
LIONEL DURANTAY	Docteur	CONVERTEAM	Examinateur
THOURAYA N. BARANGER	Maître de Conférences (HDR)	UCB Lyon 1	Examinateur
RÉGIS DUFOUR	Professeur	INSA-Lyon	Directeur de Thèse
GUY FERRARIS BESSO	Professeur émérite	INSA-Lyon	Invité

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales
Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ÉCOLE DOCTORALE	NOM et COORDONNÉES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN INSA : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN ✉ Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment CPE 43, Boulevard du 11 Novembre 1918 69622 villeurbanne Cédex ☎ 04 72 43 13 95 ✉ lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS INSA : C. PLOSSU ✉ ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE ☎ A.M. 64 43 ✉ 64 54	M. Alain NICOLAS ✉ École Centrale de Lyon Bâtiment H9 36, Avenue Guy de collongue 69134 Écully ☎ 04 72 18 60 97 ✉ 04 78 43 37 17 ✉ eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS INSA : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS ✉ CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment G. Mendel 69622 villeurbanne Cédex ☎ 04 26 23 59 50 ✉ 04 26 23 59 49 ☎ 06 07 53 89 13 ✉ e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ M. Didier REVEL Secrétariat : S. BOUDJEMA INSA : M. LAGARDE	M. Didier REVEL ✉ Hôpital cardiologique de Lyon Bâtiment central 28, Avenue Doyen Lépine 69500 Bron ☎ 04 72 68 49 09 ✉ 04 72 35 49 16 ✉ didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE	M. Alain MILLE ✉ Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43, Boulevard du 11 Novembre 1918 69622 villeurbanne Cédex ☎ 04 72 44 82 94 ✉ 04 72 43 13 10 ✉ infomaths@bat710.univ-lyon1.fr ✉ alain.mille@liris.cnrs.fr
Matériaux	MATÉRIAU DE LYON M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON ☎ 83 85	M. Jean Marc PELLETIER ✉ INSA DE LYON MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7, Avenue Jean Capelle 69621 villeurbanne Cédex ☎ 04 72 43 83 18 ✉ 04 72 43 85 28 ✉ jean-marc.pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE ☎ P.M. 71 70 ✉ 87 12	M. Jean Louis GUYADER ✉ INSA DE LYON Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de saint Exupéry 25 bis, Avenue Jean Capelle 69621 villeurbanne Cédex ☎ 04 72 18 71 70 ✉ 04 72 43 72 37 ✉ mega@lva.insa-lyon.fr
scso	SCSO* M. Obadia Lionel INSA : J.Y. TOUSSAINT	M. Obadia Lionel ✉ Université Lyon 2 86, rue Pasteur 69365 Lyon Cédex 07 ☎ 04 78 77 23 88 ✉ 04 37 28 04 48 ✉ lionel.obadia@univ-lyon2.fr

*scso : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie.

Remerciements

Les travaux de cette thèse, co-financés par l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie, s'inscrivent dans le cadre d'un partenariat entre le département Recherche & Développement de CONVERTEAM, Champigneulle, France, et la laboratoire LAMCOS de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (LAMCOS, UMR CNRS 5259) dirigé par le Professeur *Alain Combescure* que je remercie pour son accueil.

Mes remerciements iront aussi à mes directeurs de thèse *Régis Dufour*, *Guy Ferraris* ainsi qu'à *Thouraya Baranger* qui a vivement participé à mes travaux de recherche. J'exprime également ma gratitude à l'égard de messieurs *Lionel Durantay* et *Nicolas Barras*, de CONVERTEAM, pour ces quatre années de collaboration.

Je suis très reconnaissant aux professeurs *Patrice Cartraud*, *Emmanuel Foltete* et *Jean-Jacques Sinou* pour le temps qu'ils ont consacré à la relecture de ce manuscrit.

Je tiens également à remercier pour leur sympathie l'ensemble des permanents, doctorants, personnel technique et administratif de mon laboratoire d'accueil.

Résumé

CETTE thèse porte sur la prévision du comportement dynamique des rotors feuilletés à cage d'écureuil appelés Moteur Grande vitesse (MGV, [3 – 30] MW, [6 000 – 20 000] rpm). La difficulté majeure de la modélisation réside dans la complexité relative à l'assemblage de la masse magnétique des MGV, composée, d'une part, d'un empilement de tôles magnétiques (ou feuilletage) maintenues par des tirants excentrés précontraints, et d'autre part, d'une cage d'écureuil composée d'une distribution périphérique de barres de court-circuit connectées à deux anneaux de court-circuit situés aux extrémités du feuilletage.

Un modèle éléments finis de poutres de Timoshenko prenant en compte le caractère monolithique des rotors MGV est développé. Une attention particulière est portée à la modélisation de la masse magnétique en considérant d'une part, les barres de court-circuit, et d'autre part, les tirants indépendamment du feuilletage. Le comportement dynamique latéral des rotors feuilletés est principalement régi par la rigidité de flexion de l'empilement dont les propriétés constitutives sont méconnues et essentiellement liées au procédé de fabrication de la machine électrique ce qui rend délicat la modélisation des rotors MGV. Le modèle établi conduit entre autre aux contraintes dans les éléments finis.

L'identification mixte numérique-expérimentale menée aboutit à l'évolution des propriétés constitutives du feuilletage en fonction de la géométrie et des précontraintes d'assemblage. Pour cela, les quantités modales calculées et mesurées (sur le site de production de Champigneulle, France ou en laboratoire) sont incluses dans une fonctionnelle énergétique basée sur un quotient de Rayleigh hybride et combinée à des méthodes de réduction de Guyan ou de Craig & Bampton, ou d'expansion de Guyan ou SEREP. Toutes les fonctionnelles proposées ont été éprouvées dans diverses applications industrielles dans le but d'identifier des propriétés constitutives de structures réelles : empilement de tôles magnétiques, portions d'arbre ou rotor de palier magnétique. Le développement d'algorithmes de Levenberg-Marquardt et de dérivation des éléments propres ont été nécessaires pour minimiser la fonctionnelle, extraire les propriétés constitutives du feuilletage et prévoir les formes et fréquences propres les plus proches possible des mesures à l'arrêt.

La modélisation des efforts centrifuges, raideur géométrique et contact tirants-feuilletage a montré que l'effet de la rotation a une influence non linéaire qui tend à augmenter les forces longitudinales agissant sur les feuilletage et tirants sans toutefois dépasser leur limite élastique. La conséquence de ce phénomène est l'augmentation de la rigidité de flexion de la masse magnétique lorsque le moteur électrique est en rotation.

La maîtrise de la dynamique des rotors feuilletés et la connaissance des propriétés constitutives équivalentes du feuilletage, assemblage de la cage d'écureuil ou centrifugation des tirants accroissent la fiabilité des prévisions, notamment dans les phases de développement où il s'agit de prédire le comportement dynamique de rotors jamais réalisés auparavant, *e.g.* 30 MW à 6 000 rpm.

Mots clés: Dynamique des rotors, Analyse modale, Corrélation modale, Identification, Condensation, Optimisation paramétrique, Ligne d'arbre, Effet centrifuge, Contact.

Abstract

THIS Ph.D. thesis deals with the prediction of the dynamic behavior of induction motors and especially with the lateral dynamics of squirrel cage laminated rotors known as High Speed Motor (HSM, [3 – 30] MW, [6 000 – 18 000] rpm). The main difficulty of the modeling is due to the complexity of the HSM magnetic mass assembly, composed of a core of laminated steel held by ex-centric prestressed tie rods, and a squirrel cage consisting of a distribution of short-circuit rods also positioned at the periphery of the magnetic mass and connected to two short-circuit rings located at the ends of the laminated core.

A finite element model of Timoshenko beams is developed that takes into account the monolithic nature of the HSM rotors. A particular attention was given to the modeling of the magnetic core by considering either the short-circuit rods and the tie rods, the latter being independently modeled of the lamination stack. The lateral behavior of laminated rotors is mainly governed by the bending rigidity of the stack whose constitutive properties are unknown and directly related to manufacturing process of the electrical machine which makes the modeling of HSM rotors difficult. The stated finite element model provides the stress in the finite elements.

The mixed numerical-experimental procedure provides the evolution of the constitutive properties of the lamination stack depending on the geometry and prestressed assembly. For this, predicted and measured modal quantities (either in the manufacturing site of Champagneulles, France or in laboratory) are included in an energy functional based on a hybrid Rayleigh quotient combined with either Guyan or Craig & Bampton reduction methods, or Guyan or SEREP expansion methods. All the proposed functionals have been tested in various industrial applications in order to identify constitutive properties of real structures : lamination stack, shaft ends or rotor of active magnetic bearing. The development of Levenberg-Marquardt or eigen elements derivation algorithms were necessary to minimize the functional, extract the constitutive properties of the stack and predict mode shapes and natural frequencies as close as possible of the measurements at rest.

The modeling of the centrifugal loads, geometric stiffness and tie rods/stack contact have shown that the rotation effect has a non linear influence that tends to increase the axial forces acting on the stack and the tie rods without exceeding their yield stress. The consequence of this effects is the increase of the bending rigidity of the magnetic core when the electric motor rotates.

The control of the laminated rotor dynamics as well as the knowledge of equivalent constitutive properties of the lamination stack, the squirrel cage assembly or the tie rods centrifugation, increase the reliability of the prediction, especially in the development phases of laminated rotors never built before, *eg* 30 MW 6 000 rpm.

Key words: Rotor dynamics, Modal analysis, Modal correlation, Identification, Condensation methods, Parametric optimization, Shaft line, Centrifugal effect, Contact.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte industriel	2
1.2	Caractéristiques du feuilletage d'un rotor MGV	4
1.3	État de l'art	5
1.4	Identification mixte numérique-expérimentale	8
1.5	Objectif de la thèse et organisation du mémoire	10
2	Modélisation structurelle	11
2.1	Modélisation d'un rotor en flexion et cisaillement	13
2.1.1	Approche énergétique	13
2.1.2	Référentiels et vecteur rotation	13
2.1.3	Énergie cinétique. De l'intérêt des angles d'Euler	15
2.1.3.1	Les disques	15
2.1.3.2	L'arbre	17
2.1.3.3	Le balourd	20
2.1.4	Travail virtuel des paliers	21
2.1.5	Énergie de déformation. Des angles d'Euler à Timoshenko	22
2.1.5.1	L'arbre supporté par des paliers dans le repère tournant	22
2.1.5.2	L'arbre supporté par des paliers dans le repère galiléen	27
2.2	Équations du mouvement d'un rotor	29
2.2.1	Structure dissipative en rotation. Méthode Directe	30
2.2.1.1	Détermination des éléments propres	30
2.2.1.2	Propriété de bi-orthogonalité des vecteurs propres complexes	33
2.2.2	Structure dissipative en rotation. Méthode Pseudo-modale	34
2.2.2.1	Détermination des éléments propres d'une structure à l'arrêt	34
2.2.2.2	Propriété d'orthogonalité des vecteurs propres	35
2.2.2.3	Détermination des éléments propres	36
2.2.3	Diagramme de Campbell ou le problème d'appariement des formes propres complexes	38
2.2.3.1	Critères de corrélation de formes propres	39
2.2.3.2	Un critère original pour le suivi des formes propres complexes en fonction de la vitesse de rotation	41
2.2.3.3	Procédure d'appariement de formes propres complexes d'un rotor	45
2.2.3.4	Détermination des vitesses critiques de rotation	52
2.2.4	Détermination de la réponse forcée d'un rotor par projection modale	54
2.2.4.1	Force synchrone de balourd	54
2.2.4.2	Force asynchrone	55
2.2.4.3	Force harmonique de direction fixe	55
2.3	Conclusion	56

3	Analyses modales expérimentales	57
3.1	Objectifs et motivations	58
3.2	Rotor feuilleté : réponse harmonique forcée	58
3.2.1	Dispositif expérimental	59
3.2.2	Modélisation des conditions aux limites	59
3.2.3	Protocole de mesure	60
3.2.4	Dimensionnement de la liaison structure-pot électrodynamique	60
3.2.5	Influence de la masse d'un accéléromètre	62
3.2.6	Fréquences et formes propres expérimentales	62
3.3	Rotor feuilleté : réponse impulsionnelle	64
3.3.1	Protocole de mesure	64
3.3.2	Positionnement optimal d'un accéléromètre	65
3.3.3	Fréquences et formes propres expérimentales	67
3.4	Rotor de palier magnétique actif : réponse impulsionnelle	68
3.4.1	Dispositif expérimental	68
3.4.2	Discrétisation spatiale du rotor PMA	68
3.4.3	Protocole de mesure	68
3.4.4	Extraction modale	69
4	Identification des propriétés constitutives des éléments d'un rotor feuilleté	71
4.1	Généralités et objectifs	73
4.2	Distributions des propriétés constitutives	74
4.3	Une fonctionnelle multi-objectifs	76
4.3.1	Introduction	76
4.3.2	Normes d'erreur modales	76
4.3.3	Définition d'une fonctionnelle multi-objectifs	77
4.3.4	Dérivation des normes d'erreur modales	78
4.3.4.1	Norme d'erreur modale basée sur les pulsations propres	78
4.3.4.2	Norme d'erreur modale basée sur la matrice MAC	79
4.3.4.3	Norme d'erreur modale basée sur l'écart entre les composantes modales	79
4.3.5	Sensibilité des normes d'erreur modales	80
4.3.6	Robustesse des normes d'erreur modales	81
4.3.7	Coefficients de pondération	84
4.3.8	Stratégie d'optimisation	85
4.3.9	Application industrielle : identification de distributions de propriétés	86
4.3.10	Conclusion	89
4.4	Une fonctionnelle modale condensée selon <i>Guyan</i>	90
4.4.1	Introduction	90
4.4.2	Compatibilité dimensionnelle et condensation	90
4.4.2.1	Définition de la fonctionnelle modale condensée	90
4.4.2.2	Convergence	92
4.4.2.3	Sensibilité, robustesse et précision	95
4.4.3	Stratégie d'optimisation	95
4.4.4	Dérivation de la matrice de transformation de <i>Guyan</i>	97
4.4.5	Application industrielle : identification de propriétés homogénéisées	97
4.4.6	Conclusion	104
4.5	Une fonctionnelle modale condensée selon <i>Craig & Bampton</i>	105
4.5.1	Introduction	105
4.5.2	Intérêt d'une condensation dynamique pour un modèle ramifié	105
4.5.3	Définition de la fonctionnelle modale condensée	107
4.5.4	Stratégie d'Optimisation	109
4.5.5	Dérivation de la matrice de transformation de <i>Craig & Bampton</i>	109

4.5.6	Application industrielle : identification de propriétés homogénéisées et modèle ramifié	110
4.5.7	Conclusion	115
4.6	Modèle prédictif de propriétés constitutives	116
4.6.1	Introduction	116
4.6.2	Analyses modales expérimentales	117
4.6.3	Résultats d'identification	118
4.6.4	Procédure de régression de modèle	119
4.6.4.1	Modèle statistique	121
4.6.4.2	Régression linéaire multiple (MLR)	121
4.6.4.3	Intervalles fréquentiels de confiance et de prédiction	125
4.6.5	Conclusion	126
5	Dynamique des rotors feuilletés en présence d'effets centrifuges	127
5.1	Introduction	129
5.2	Loi de comportement de l'empilement défini à partir des propriétés identifiées à l'arrêt	129
5.3	Modélisation de l'effet centrifuge	132
5.3.1	Mise en équation	132
5.3.1.1	Déformation non-linéaire longitudinale	132
5.3.1.2	Couplage Longitudinal - Transversal	134
5.4	Formulation éléments finis du contact	136
5.4.1	Orientation de la normale de contact \vec{n}	138
5.4.2	Mesure de la distance g_n entre deux domaines	138
5.4.3	Potentiels de contact élémentaires	139
5.4.4	Recherche du point de contact entre un nœud et un élément fini	141
5.4.5	Force et raideur de contact élémentaires	143
5.4.6	Inter-pénétration et méthode de pénalité. Interprétation sur un système élémentaire	149
5.4.7	Résolution non linéaire	152
5.5	Application Industrielle	153
5.5.1	Calcul non linéaire quasi-statique	153
5.5.2	Paliers Hydrodynamiques	157
5.5.3	Équations du mouvement	158
5.5.4	Diagramme de Campbell	159
5.5.5	Réponses aux balourds	163
5.6	Conclusion	168
6	Synthèse et bilan des travaux de recherche	169
	Annexes	175
A	Modélisation structurelle	175
A.1	Rappels et hypothèses	177
A.1.1	Définitions	177
A.1.2	Hypothèses	177
A.2	Poutre de Timoshenko dans le plan $\{yGz\}$	177
A.2.1	Champ de déplacements	177
A.2.2	Champs de déformations et contraintes	178
A.2.3	Efforts résultants	178
A.2.4	Equations d'équilibre	179
A.2.5	Élément fini de poutre	180
A.2.6	Fonctions de forme	182

A.3	Poutre de Timoshenko dans le plan $\{xGy\}$	183
A.3.1	Champ de déplacements	183
A.3.2	Champs de déformations et contraintes	184
A.3.3	Efforts résultants	184
A.3.4	Equations d'équilibre	185
A.3.5	Élément fini de poutre	186
A.3.6	Fonctions de forme	188
A.4	Approximations relative à l'expression de l'énergie de déformation	190
A.4.1	Des angles d'Euler aux angles de Timoshenko	190
A.4.2	Approximation de la <i>rotation propre</i>	192
A.4.3	Relation entre repère galiléen et repère tournant. Projection des angles de rotation de section	194
A.5	Modélisation éléments-finis d'un rotor	196
A.5.1	Discrétisation	196
A.5.2	Le disque	196
A.5.3	L'arbre	197
A.5.3.1	Matrices élémentaires de masse et gyroscopique	199
A.5.3.2	Matrices élémentaires de raideur	203
A.5.4	Les paliers	206
A.5.5	Les balourds	207
A.5.6	Force asynchrone	208
A.5.7	Force harmonique de direction fixe	209
A.5.8	Force et couple répartis dans l'espace	209
A.5.9	Amortissement structural	214
A.5.9.1	Hypothèse de Rayleigh	214
A.5.9.2	Hypothèse de Basile	217
A.5.10	Interprétation physique d'une forme propre complexe	219
A.5.11	Détermination des caractéristiques d'une ellipse	220
A.5.12	Détermination du sens de parcours d'une ellipse	225
A.6	Algorithme d'appariement des formes propres complexes	227
A.7	Algorithme de recherche de vitesses critiques de rotation	228
A.8	Détermination des champs de contraintes dans un rotor	229
A.8.1	Contraintes normales de flexion élémentaires	230
A.8.2	Contraintes de cisaillement élémentaires	232
A.8.3	Détermination des contraintes maximales de flexion	232
A.8.4	Détermination des contraintes maximales de cisaillement dans le plan $\{y, z\}$	239
A.8.5	Détermination des contraintes maximales de cisaillement dans le plan $\{x, y\}$	241
A.8.6	Contraintes de Von Mises	243
B	Démarche de modélisation d'un rotor à cage d'écureuil	245
B.1	Validité du modèle éléments finis et intérêt d'une démarche d'identification	247
B.2	Modélisation statique des tirants	248
B.2.1	De la modélisation tridimensionnelle à la modélisation unidimensionnelle	248
B.2.2	Modèle \mathcal{M}_1 : un modèle ramifié	249
B.2.3	Modèle \mathcal{M}_2 : les tirants modélisés comme des tendeurs externes	253
B.2.4	Modèle \mathcal{M}_3 : un modèle de poutre équivalente	256
B.2.5	Qualification des modèles. Comportement statique	257
B.2.5.1	Variation des longueur et nombre de tirants équirépartis	257
B.2.5.2	Variation de la distribution des tirants	257
B.2.5.3	Variation du module d'Young du cylindre	259
B.2.6	Conclusion	260
B.3	Modélisation dynamique des tirants	260
B.3.1	Définition des matrices de masse élémentaires	260

B.3.1.1	Variation de la longueur du cylindre	261
B.3.2	Qualification des modèles. Comportement dynamique	261
B.3.2.1	Variation du module d'Young du cylindre	261
B.3.2.2	Conclusion	261
B.3.3	Modélisation inertielle des tirants	262
B.3.4	Modèles \mathcal{M}_2' et \mathcal{M}_1'	264
B.3.5	Qualification du comportement inertiel des tirants	267
B.3.6	Conclusion	267
B.4	Modélisation des barres de court circuit	268
B.4.1	Hypothèse cinématique	268
B.4.2	Modélisation éléments finis	268
C	Identification des propriétés constitutives des éléments d'un rotor feuilleté	271
C.1	Algorithmes d'optimisation	271
C.1.1	Méthodes de descente	272
C.1.1.1	Algorithme du gradient à plus forte pente	273
C.1.1.2	Algorithme du gradient à pas optimal	273
C.1.2	Méthodes de type <i>Newton</i>	274
C.1.2.1	Algorithme de <i>Newton</i>	274
C.1.2.2	Fonctionnelle non linéaire de type moindres carrés	277
C.1.2.3	Algorithme de <i>Gauss-Newton</i>	277
C.1.3	Algorithme de <i>Levenberg-Marquardt</i>	280
C.1.3.1	Actualisation du paramètre d'amortissement	281
C.1.3.2	Normalisation des variables d'optimisation	283
C.1.3.3	Encadrement des variables d'optimisation	283
C.2	Dérivation des éléments propres	285
C.2.1	Dérivation des valeurs propres	285
C.2.2	Dérivation des vecteurs propres	286
C.3	Obtention de la matrice de transformation de <i>Guyan</i>	292
C.4	Une fonctionnelle modale expansée	293
C.4.1	Définition	293
C.4.2	Expansion des formes propres expérimentales	293
C.4.2.1	Expansion de <i>Guyan</i>	293
C.4.2.2	Expansion SEREP	294
C.4.3	Stratégie d'optimisation	295
C.4.4	Application industrielle	295
C.4.4.1	Analyse modale expérimentale	295
C.4.4.2	Identification	296
C.4.5	Conclusion	301
C.5	Identification des propriétés constitutives d'un rotor de palier magnétique	302
C.5.1	Influence de la rigidité d'un rotor PMA	302
C.5.2	Modélisation tridimensionnelle d'un rotor PMA	304
C.5.3	Stratégie d'optimisation	306
C.5.4	Identification d'un matériau isotrope	307
C.5.5	Identification d'un matériau isotrope transverse	307
C.5.5.1	Considération des huit premières fréquences propres	307
C.5.5.2	Considération des douze premières fréquences propres	308
C.5.6	Conclusion	308

D	Dynamique des rotors feuilletés en présence d'effets centrifuges	313
D.1	De l'intérêt de la raideur géométrique	313
D.1.1	Réponse quasi-statique d'un oscillateur élémentaire de raideur constante . . .	315
D.1.2	Réponse quasi-statique d'un oscillateur élémentaire possédant une raideur géométrique	316
D.1.3	Conclusion	317
D.2	Algorithme d'appariement des nœuds maîtres et des éléments finis esclaves	318
D.3	Algorithme du point fixe	319
D.4	Caractéristiques des paliers hydrodynamiques	320
E	Modélisation raffinée d'un rotor feuilleté	321
E.1	Introduction	322
E.2	Modélisation élémentaire d'un feuilletage	322
E.3	Stratégie d'optimisation	323
E.4	Identification des propriétés constitutives du vernis	324
E.5	Sensibilité du feuilletage	326
E.6	Invariance ou dépendance	327
E.7	Conclusion	328
	Table des figures	330
	Listes des tableaux	338
	Références bibliographiques	341

Chapitre 1

Introduction

Les travaux de cette thèse, co-financés par l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie, s'inscrivent dans le cadre d'un partenariat entre le département Recherche & Développement de CONVERTEAM Nancy, et la laboratoire LAMCOS de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

Sommaire

1.1	Contexte industriel	2
1.2	Caractéristiques du feuilletage d'un rotor MGv	4
1.3	État de l'art	5
1.4	Identification mixte numérique-expérimentale	8
1.5	Objectif de la thèse et organisation du mémoire	10

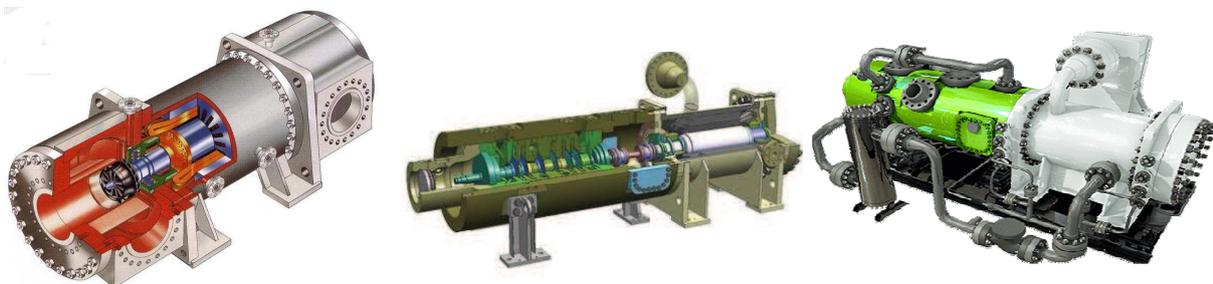
1.1 Contexte industriel

LE marché des moteurs à induction, constitués de rotors feuilletés, est en très forte expansion et le recours à la technologie des moteurs électriques à induction est une solution de plus en plus envisagée dans le domaine des machines tournantes. Les grandes compagnies de distribution de gaz naturel achètent une grande partie de leurs approvisionnements en été, au cours le plus intéressant. Avant leurs ventes d’hiver, elles stockent le gaz dans de vastes cavernes naturelles. Emmagasiner de tels volumes suppose d’être en mesure de pouvoir les réduire, de les comprimer. Cette opération s’effectue au moyen de compresseurs qui peuvent être entraînés par des moteurs électriques. Cet ensemble constitue alors un moto-compresseurs qui une des solutions de conversion de puissance commercialisée par la société CONVERTEAM (Champigneulle, France), partenaire de ces travaux de recherche.

Traditionnellement, la fréquence du courant électrique Européen est de l’ordre de 50 Hz limitant, par conséquent, la vitesse de rotation des moteurs électriques traditionnels, *e.g.* moteurs synchrones, à 3000 rpm (rotation par minute). Parallèlement, pour des raisons de rendement et de productivité, la plage de fonctionnement du compresseur se situe entre 6 000 et 20 000 rpm. Il est lors nécessaire d’intercaler une boîte de vitesses dont les rendement, fiabilité et coûts de maintenance inévitables sont des inconvénients non négligeables.

Ainsi, fut développé, à la fin des années 1980, un nouveau concept de moto-compresseur utilisant un variateur de fréquence, *e.g.* moteurs à induction, les vitesses de rotation requises pouvant alors être atteintes en s’affranchissant de la boîte de vitesses. Dans cette première application destinée au transport des gaz et baptisée MOPICO (Motor for Pipeline Compressor), le compresseur est monté directement sur le rotor du moteur électrique comme l’illustre la FIG. 1.1(a). Par ailleurs, la partie tournante est supportée par des paliers magnétiques, ce qui permet au système de fonctionner sans huile, réduisant ainsi les niveaux de pollution et coûts de maintenance. D’autres générations de moto-compresseurs, *e.g.* HOFIM (High speed Oil Free Intelligent Motocompressor), FIG. 1.1(b), ou encore ICL (Integrated Compressor Line), FIG. 1.1(c), ont ensuite été développées dans ce sens en utilisant toujours des moteurs électriques à induction.

Par ailleurs, les moteurs électriques à induction sont une solution de plus en plus envisagée dans le domaine de la propulsion maritime et notamment celle relative au Bâtiment de Projection et de Commandement (BPC) intègrent des systèmes appelés nacelles orientables ou “POD”, FIG. 1.2(a), dont l’utilisation est assez récente en construction navale. Il peut être cité le POD “pompe-hélice” appelé movelis, FIG. 1.2(b) et FIG. 1.2(c).



(a) Vue éclatée d’un moteur MOPICO. (b) Vue éclatée d’un moteur HOFIM. (c) Représentation d’un moteur ICL.

FIGURE 1.1 – Différentes configurations de moto-compresseurs.



(a) POD conventionnel installé sur les (b) Vue d'un BPC doté de deux PODS (c) POD Inovelis testé au bassin d'es-
 BPC français (© :BAE SYSTEMS). Inovelis. sais des carènes.

FIGURE 1.2 – Différentes configurations de POD.

Cependant, en raison des nombreuses possibilités qu'offrent les moteurs à induction avec un rendement élevé $> 90\%$, le recours à ces solutions dans des applications toujours plus innovantes, nécessitant plus de puissance, et parfois en environnements hostiles comme les applications sous-marines SUBSEA, nécessite un effort de développement car leur gamme de fonctionnement doit être élargie, FIG. 1.3. Ainsi, il s'agit de bien savoir prévoir leur comportement dynamique afin de maîtriser leur conception.

Les rotors des moteurs électriques à induction constituent le sujet de recherche de cette thèse et sont appelés Moteur Grande vitesse (MGV) car leur plage de fonctionnement est comprise entre 6 000 et 20 000 rpm.

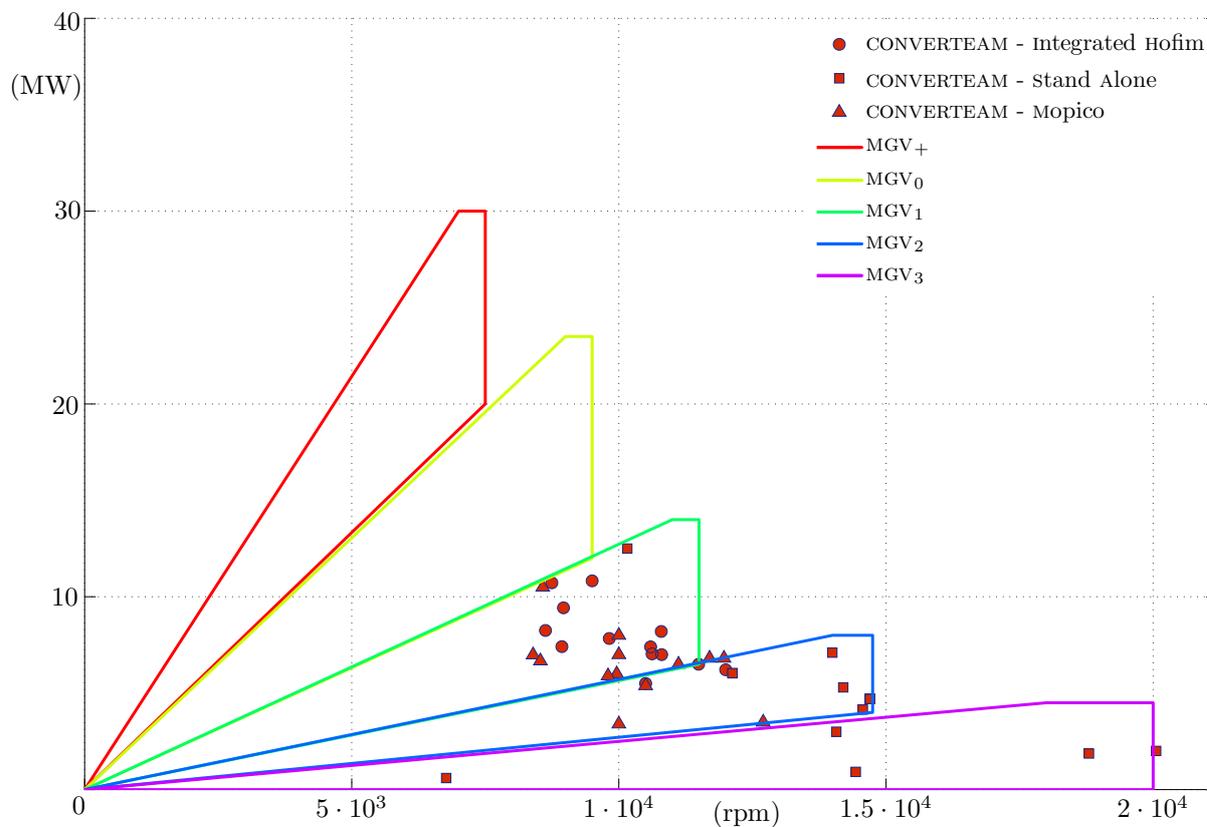


FIGURE 1.3 – Zones de fonctionnement des différentes gammes de rotors MGV produits par CONVERTEAM. MGV₊ (□), MGV₀ (□), MGV₁ (□), MGV₂ (□), MGV₃ (□).

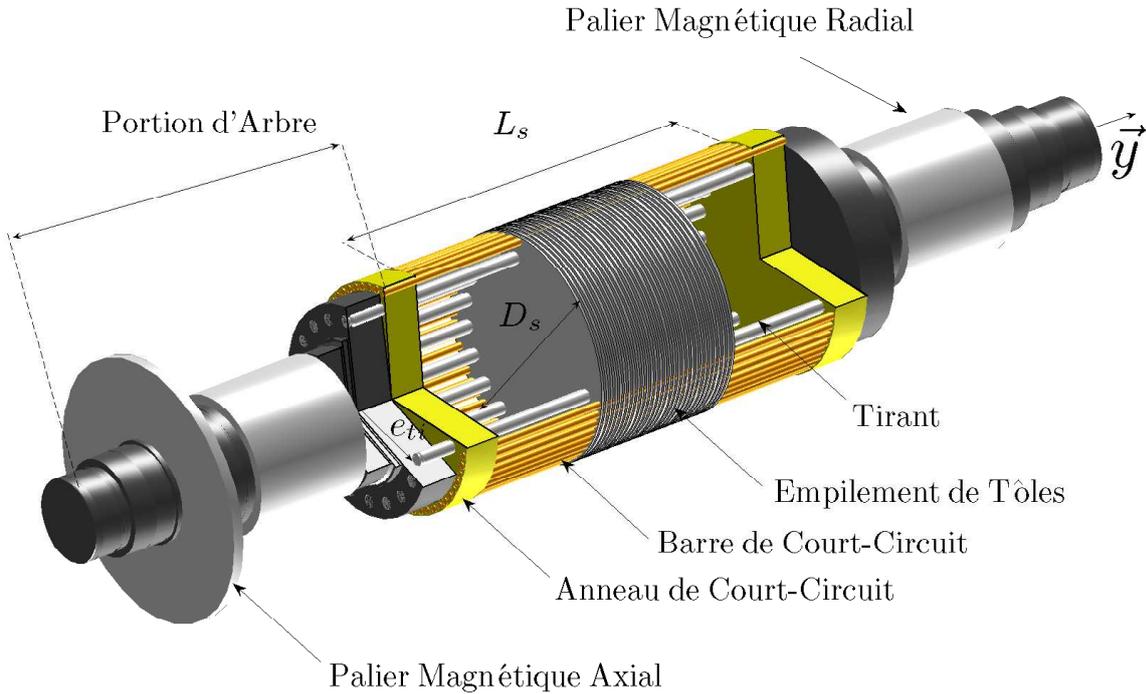


FIGURE 1.4 – Représentation d’un rotor MGv.

1.2 Caractéristiques du feuilletage d’un rotor MGv

Les rotors de moteurs à induction MGv sont des structures assemblées, voir la vue écorchée de la FIG. 1.4, qui se compose principalement de :

- deux portions d’arbre en acier forgé,
- un empilement de tôles magnétiques (ou feuilletage, “*lamination stack*”) dont les propriétés constitutives sont **inconnues**. Une tôle magnétique du feuilletage est composée d’un disque laminé en acier, de diamètre D_s , recouvert, sur chacune de ses faces, d’une fine épaisseur de vernis $e_v \sim 3\mu\text{m}$, de telle sorte que son épaisseur totale soit de l’ordre de $e_t \sim 500\mu\text{m}$, FIG. 1.5. Ainsi, pour un feuilletage de longueur L_s composé de n_t tôles magnétiques d’épaisseur totale e_t , on définit la densité linéique d’interface par la relation suivante :

$$N = \frac{n_t + 1}{L_s} = \frac{1}{e_t} + \frac{1}{L_s}, \quad (1.1)$$

- un ensemble de tirants (“*tie rods*”) **excentrés** et **précontraints** maintenant le feuilletage,
- et une cage d’écureuil consistant en une distribution périphérique de barres de court-circuit (“*short-circuit rods*” en cuivre, $C_u C_r 1Z_r$) connectées à deux anneaux de court-circuit (“*short-circuit rings*” en alliage de bronze-beryllium, $C_u C_o 2B_e$) situés aux extrémités du feuilletage.

Le feuilletage présente la particularité d’être composé de tôles magnétiques circulaires pleines (“*full depth laminations*”) qui réduisent considérablement la circulation des courants de Foucault,

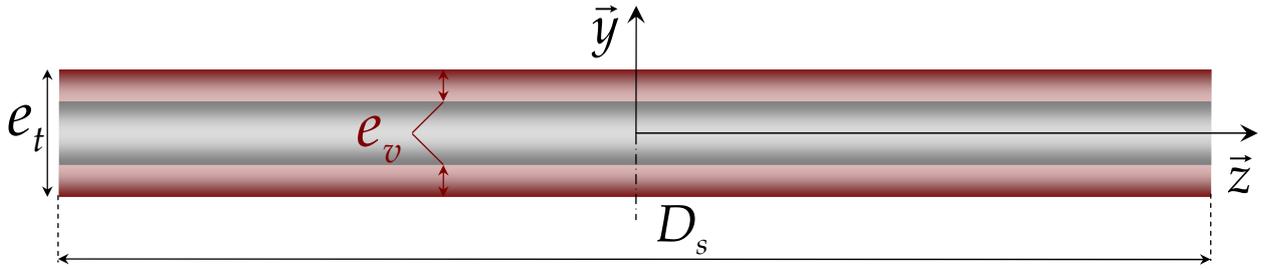


FIGURE 1.5 – Schéma d'une tôle magnétique de diamètre D_s , d'épaisseur e_t et vernie sur ses deux faces pour une couche d'épaisseur e_v .

dans la direction longitudinale de la masse magnétique, et la saturation du flux magnétique. Cette configuration limite également les pertes électriques, la dissipation de chaleur ainsi que la perte d'adhésion entre les tôles magnétiques puisque l'assemblage est précontraint. Par conséquent, les rotors MGV sont plus compacts et plus performants que leurs homologues largement utilisés et constitués d'un arbre central sur lequel un feuilletage annulaire est fretté.

Le feuilletage est un matériau orthotrope qui présente un axe de symétrie selon la direction longitudinale y . Il est donc caractérisé par cinq propriétés constitutives indépendantes, telle que la relation entre les champs de contraintes σ et de déformations ε puisse s'écrire, [1] :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E_a} & -\frac{\nu}{E_a} & -\frac{\nu_a}{E_a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_a}{E_a} & -\frac{\nu}{E_a} & \frac{1}{E_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_a}{2(1+\nu_a)} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de rigidité}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

avec E_a , ν_a respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du disque laminé en acier dans le plan (\vec{x}, \vec{z}) , alors que les propriétés inconnues E , G et ν sont respectivement le module d'Young selon la direction y , le module de Coulomb et le coefficient de Poisson dans un plan perpendiculaire à (\vec{x}, \vec{z}) .

Les valeurs des propriétés constitutives E , G et ν constituent alors un enjeu majeur dans une démarche de modélisation des rotors feuilletés et il convient donc de les déterminer.

1.3 État de l'art

La modélisation mécanique des rotors de moteurs à induction, et en particulier la modélisation d'un feuilletage non-annulaire, est une problématique très peu abordée dans la littérature. Les choix technologiques des constructeurs offrent pourtant une grande diversité de solutions : cage d'écureuil, arbre central rigide, etc..., qui ne manquent pas d'originalité, mais dont la modélisation n'est souvent qu'empirique et nécessiterait des modèles précis.

Dans [4; 5], il est suggéré l'utilisation d'une rigidité de flexion homogénéisée pour l'ensemble de la section droite de la masse magnétique en sommant les rigidités de flexion élémentaires de chaque composant, *e.g.* feuilletage, barres de court-circuit. L'article [6] concerne la modélisation des rotors à cage d'écureuil sans toutefois décrire la rigidité de flexion considérée.

En revanche, un nombre plus important d'auteurs s'intéressent au comportement dynamique de

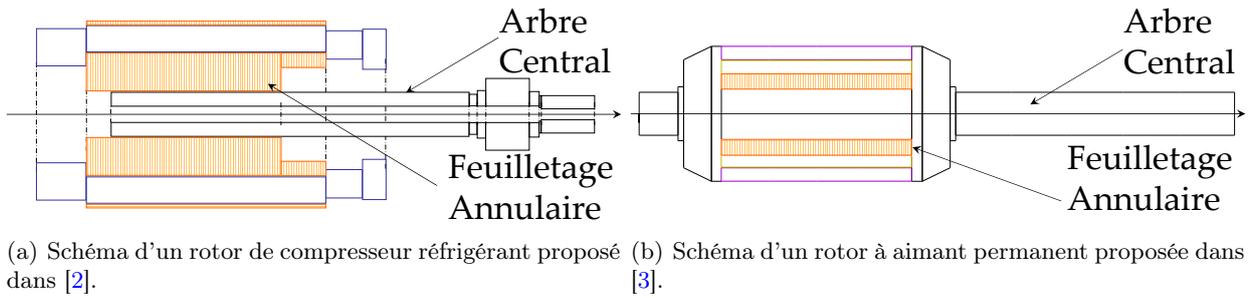


FIGURE 1.6 – Modélisation de rotors feuilletés de machine à aimant permanent.

structures industrielles à feuilletage annulaire fretté, soit sur un arbre central mais aussi dans un alésage dans le cas des stators. Ainsi, dans [7; 8], les auteurs estiment l'influence de la longueur d'un stator sur son comportement dynamique. Par ailleurs, un modèle de feuilletage considérant la respiration des tôles, à la manière d'une fissure, est proposé dans [9] et conduit à un problème non-linéaire.

Un modèle de rotor de compresseurs rotatif et alternatif réfrigérants est proposé dans [2; 10], FIG. 1.6(a), et des propriétés équivalentes du feuilletage sont estimées à partir d'une analyse modale expérimentale. Pour une structure de dimension similaire, les auteurs de [3] évaluent l'influence des différents paramètres, *e.g.* longueur du feuilletage, sur les pulsations propres d'un modèle éléments-finis tridimensionnel d'une machine à aimant permanent, FIG. 1.6.

Le récent article, [11], présente une modélisation d'un rotor de turbine à gaz dont la constitution est proche de celle d'une rotor MGV. En effet, bien que ce rotor ne présente pas de feuilletage, des disques sont précontraints par des tirants équirépartis en périphérie. Ceux-ci sont modélisés par des éléments discrets excentrés, comme dans [12], à la manière des tendons externes utilisé dans [13]. Il est à noter que seul les effets de raideur élastique et/ou géométrique sont considérés, contrairement à l'approche adoptée dans [14], où les auteurs proposent de modéliser l'ensemble des tirants équirépartis par des éléments finis de poutres de Timoshenko à sections droites cylindriques. Outre le fait que l'élasticité des tirants est considérée, ce dernier modèle prend en compte les caractéristiques inertielles de l'ensemble des tirants.

Les auteurs de [15] considèrent le feuilletage comme un matériau isotrope transverse dont la matrice de souplesse, voir l'Eq. (1.2), prend en compte l'hétérogénéité du feuilletage. En effet, les couches de vernis ou de résine appliquées sur chacune des faces des disques laminés permettent d'introduire la notion de flexibilité moyenne de compression C et de cisaillement S par interface qui agissent au niveau de l'interface de deux tôles contigues. Il est alors proposé les expressions suivantes pour les déformations longitudinales ε_{yy} et de cisaillement $2\varepsilon_{yz}$:

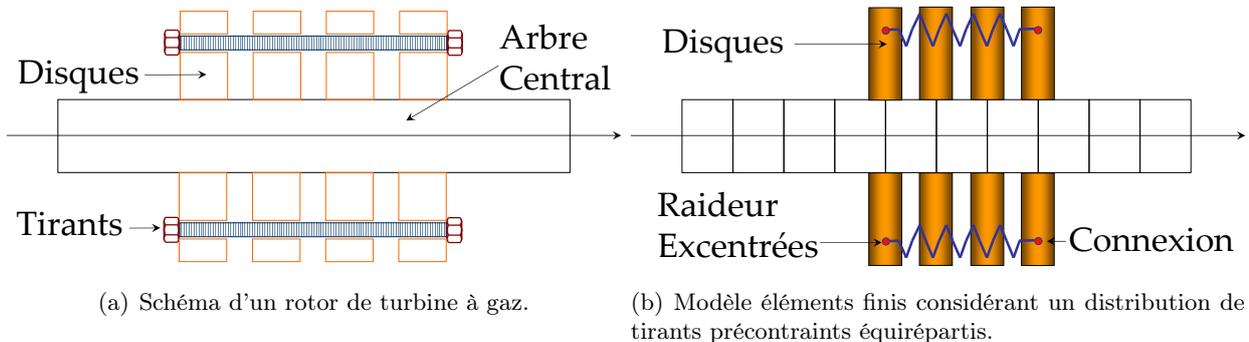


FIGURE 1.7 – Modélisation d'un rotor de turbine à gaz proposée dans [11].

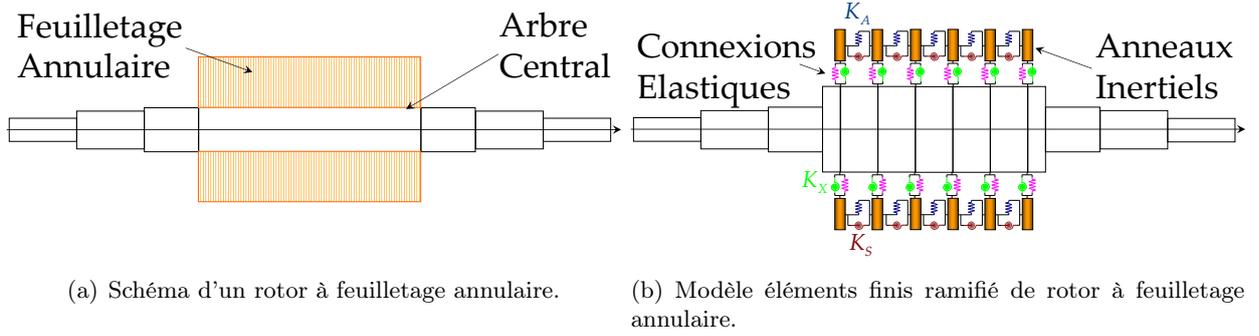


FIGURE 1.8 – Modélisation ramifiée d'un rotor à feuilletage annulaire proposée dans [15].

$$\varepsilon_{yy} = \left[CN + \frac{f}{E_a} \right] \sigma_{yy} - \frac{v_a}{E_a} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}), \quad (1.3a)$$

$$2\varepsilon_{yz} = \left[\frac{2(1+v_a)}{E_a} f + SN \right] \sigma_{yz}, \quad (1.3b)$$

où N (m^{-1}) est définie dans l'Eq. (1.1), E_a et v_a sont présentés dans l'Eq. (1.2) alors que C et S sont exprimées en ($m^3 \cdot N$). L'épaisseur de vernis réduit considérablement le module d'Young du feuilletage [16]. La littérature évoque souvent un coefficient appelé facteur d'empilement, noté f , $f < 1$, (ou “*stacking factor*”), qui permet de prendre en compte les interstices vides de matière entre chaque tôle et ajuste ainsi la valeur de la masse volumique du feuilletage [17; 18].

Par ailleurs, l'Eq. (1.2) donne :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}). \quad (1.4a)$$

$$2\varepsilon_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz}, \quad (1.4b)$$

En identifiant les couples Eq. (1.3a) et Eq. (1.4a) puis les Eq. (1.3b) et Eq. (1.4b), il vient alors les égalités suivantes :

$$\frac{1}{E} = CN + \frac{f}{E_a}, \quad (1.5a)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{2(1+v_a)}{E_a} f + SN, \quad (1.5b)$$

Bien que les hypothèses émises par [15] conduisent à une définition plus précise du feuilletage, le nombre de paramètres associés n'en est pas moins augmenté. En effet, en plus des flexibilités moyennes par interface C et S , les facteurs d'empilement N et densité linéique d'interface f , conduisent à quatre paramètres entrant en jeu dans la définition du matériau feuilleté. Néanmoins, bien que les paramètres N et f puissent sembler être des invariants du feuilletage, ils représentent des mesures supplémentaires source d'erreur, particulièrement en contexte industriel. La démarche d'identification de propriétés constitutives homogénéisées est alors justifiée.

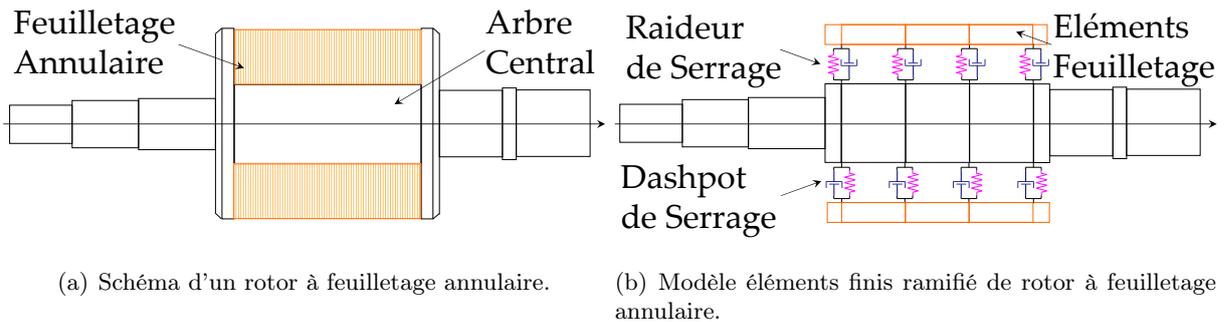


FIGURE 1.9 – Modélisation ramifiée d'un rotor à feuilletage annulaire proposée dans [19].

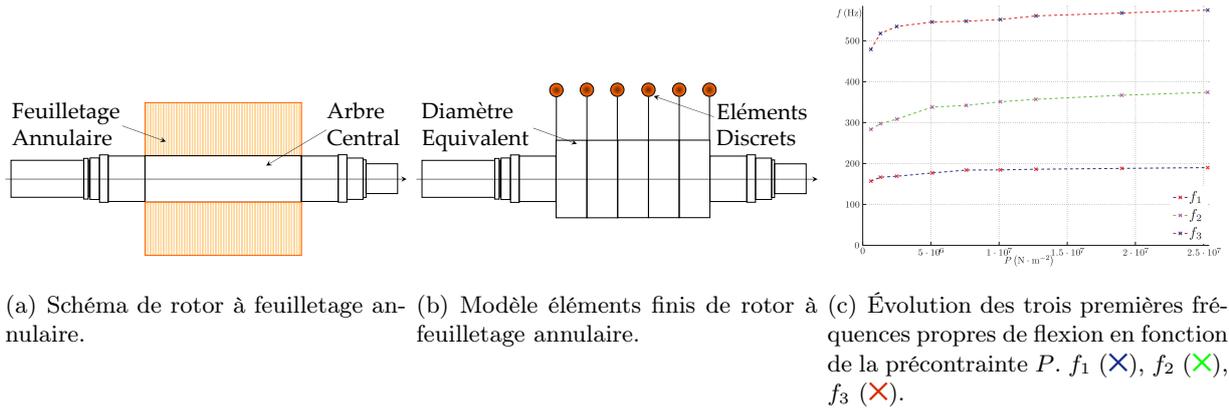


FIGURE 1.10 – Modélisation et mise en évidence de la précontrainte du feuilletage proposées dans [20].

Privilégiant cette hypothèse, les auteurs de [21] estiment les propriétés constitutives équivalentes et facteurs de perte hystérétiques modaux d'un stator comprenant bobines et feuilletage imprégné. De même, les auteurs de [22] identifient des propriétés constitutives équivalentes d'un stator feuilleté pour prédire le comportement dynamique d'un moteur de traction ferroviaire.

Par ailleurs, les auteurs de [15] présentent les avantages d'un modèle ramifié de rotor à feuilletage annulaire, FIG. 1.8(a). Ce dernier est modélisé par une série d'anneaux inertiels connectés deux-à-deux par des éléments par des raideurs de rotation K_S et de translation transversale K_A . De plus, chaque anneau est relié à l'arbre central par une raideur de rotation K_X , ces derniers étant supposés rigidement fixés transversalement, FIG. 1.8(b).

Dans [19], un modèle éléments finis de poutre permet de considérer le feuilletage annulaire indépendamment de l'arbre central, FIG. 1.9(a). Le feuilletage est modélisé par des éléments de poutre, de module d'Young équivalent, reliés à l'arbre central par des éléments discrets de raideur et d'amortissement à deux nœuds modélisant le frottement, FIG. 1.9(b).

Les travaux expérimentaux présentés dans [20] montrent que les fréquences propres d'un rotor feuilleté croissent de manière significative avec la précontrainte de compression du feuilletage, FIG. 1.10(c). Les auteurs modélisent le feuilletage de la masse magnétique par des éléments finis de cylindre équivalent et des masses discrètes, FIG. 1.10(b).

Par conséquent, modéliser le feuilletage est délicat et nécessite une procédure d'identification de manière à caractériser les paramètres intrinsèques des modèles.

1.4 Identification mixte numérique-expérimentale

Contrairement aux méthodes de caractérisation classiques, qui sont souvent limitées par l'utilisation d'une solution mathématique exacte pour la détermination des paramètres physiques recherchés, une nouvelle classe de méthodes basées sur l'identification de modèles par rapport aux données expérimentales a été développée durant les vingt dernières années.

Cette famille de méthodes se base sur une résolution itérative d'un problème inverse, *i.e.* la détermination des paramètres d'entrée d'un modèle, de telle sorte que les résultats simulés soient aussi proches que possible des observations expérimentales. Rendues applicables par l'augmentation de la puissance de calcul disponible, ces méthodes ne consomment pas moins en ressources mémoire, mais compensent largement ce défaut par une facilité d'expérimentation accrue et par la possibi-

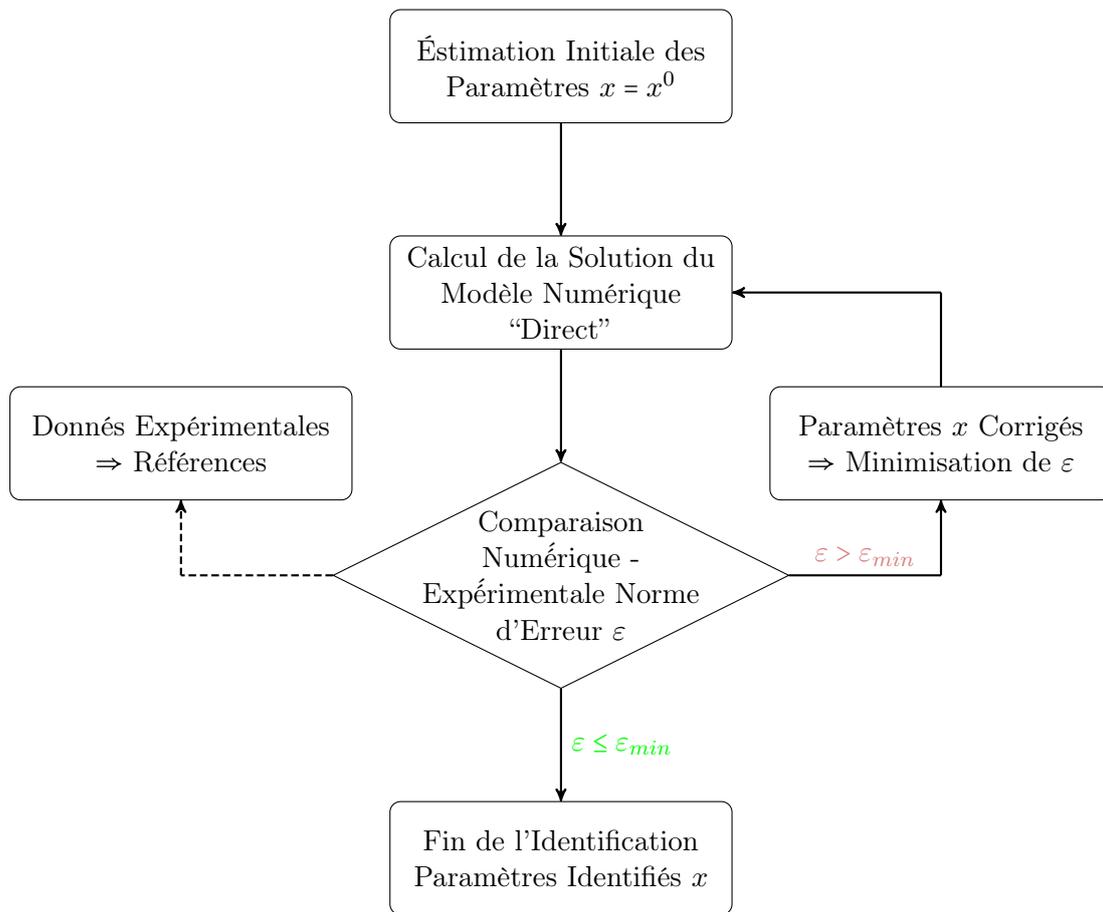


FIGURE 1.11 – Principe de la résolution itérative du problème numérique inverse d’identification mixte numérique-expérimentale.

lité qu’elles offrent d’identifier plusieurs paramètres constitutifs inconnus sur la base d’une mesure unique, réduisant ainsi radicalement les efforts et coûts de mesure.

Dans ce contexte, les méthodes d’identification basée sur les caractéristiques vibratoires d’une structure prennent tout leur sens car elles offrent la possibilité de caractériser les propriétés constitutives de matériaux complexes, comme le feuilletage, en un seul test dynamique non destructif. Ainsi, une très grande partie de la littérature est consacrée aux méthodes basées sur des tests dynamiques. Par ailleurs, contrairement aux propriétés statiques des structures, qui sont souvent dominées par des phénomènes locaux, les propriétés dynamiques telles que les pulsations propres et les formes propres sont généralement représentatives du comportement global des structures mesurée.

En raison de la complexité de la modélisation mécanique des problèmes de dynamique des structures industrielles, peu de solutions analytiques sont disponibles pour effectuer une identification directe de paramètres. De plus, comme très peu de modèles inversibles existent, la recherche s’est tout d’abord tournée vers la résolution de problèmes inverses semi-analytiques, puis plus récemment, purement numériques grâce à la méthode des éléments finis. Ce sont les méthodes dites d’identification mixte numériques-expérimentales dont le principe est présenté FIG. 1.11.

1.5 Objectif de la thèse et organisation du mémoire

L'objectif de ces travaux de recherche consiste à améliorer la prévision du comportement dynamique latéral des rotors feuilletés MGV, dont la difficulté majeure réside dans la modélisation de l'assemblage de la masse magnétique. Les différentes étapes relatives au développement d'un modèle de rotor feuilleté s'est articulée autour des chapitres présentés ci-après.

Le Chapitre A se rapporte à la modélisation des rotors feuilletés dont le caractère monolithique et le comportement isotrope transverse nécessitent de prendre en compte les effets du cisaillement et de rotation de sections droites. Cette section s'attache à mettre en exergue les hypothèses simplificatrices considérées lorsque les effets de Timoshenko et de Rayleigh sont pris en compte dans la dynamique du rotor. Le rotor est ensuite discrétisé grâce à la méthode des éléments finis présentée en annexe. Un critère de corrélation des formes propres complexes d'un rotor, basé sur la notion de vecteurs propres gauches et droits, est proposé. Ce critère original permet de tracer les diagrammes de Campbell illustrant des fréquences propres de rotor parfaitement ordonnées grâce à leurs formes propres complexes associées. La détermination des contraintes dans les éléments finis de rotor, et notamment des contraintes maximales, est l'objet d'une section en annexe.

Le Chapitre 3 présente les analyses modales expérimentales réalisées sur tout ou partie des rotors industriels. La base de données obtenue est précieuse car elle est utilisée lors du processus d'identification numérique-expérimental des propriétés constitutives des composants d'un rotor feuilleté et principalement de l'empilement de tôles magnétiques.

Le Chapitre 4 traite de la démarche d'identification des propriétés constitutives de l'empilement. Dans un premier temps, des normes d'erreur modales sont définies et basées notamment sur les propriétés de la matrice de corrélation MAC (Modal Assurance Criterion) entre formes propres appariées mesurées et calculées. Celles-ci permettent de traduire l'écart entre quantités modales mesurées et calculées, et sont incluses dans une fonctionnelle multi-objectifs. Dans un second temps, il est proposé des fonctionnelles originales basées sur un quotient de Rayleigh hybride issu de méthodes de réduction de Guyan ou de Craig & Bampton, ou bien d'expansion de Guyan ou SEREP présentées en annexe. Finalement, la dernière section de ce chapitre est consacrée à l'analyse des propriétés identifiées sur un échantillon d'environ trente rotors feuilletés. Propriétés géométriques et mécaniques de la masse magnétique permettent d'établir des lois des modules d'Young et de Coulomb de l'empilement de tôles.

Le Chapitre 5 intègre les effets centrifuges lors de la prévision de la dynamique des rotors feuilletés. Les tirants sont sujets aux chargements centrifuges et fléchissent jusqu'à manger le jeu radial à l'intérieur de l'empilement. Leurs déflexions non linéaires tendent à augmenter leurs raideurs géométriques et donc la charge longitudinale agissant sur l'empilement, ce qui a un effet non linéaire sur l'évolution des propriétés homogénéisées de l'empilement. La combinaison d'un algorithme du point fixe et d'une méthode de pénalité permet de tracer réponses aux balourds et diagrammes de Campbell qui prennent donc en compte l'évolution des propriétés de l'empilement due aux charges longitudinales induites par les effets centrifuges. L'application industrielle présentée en fin de section montre l'influence des effets centrifuges sur la dynamique de tels rotors.

Enfin, le Chapitre 6 conclut ce mémoire par une synthèse et un bilan des travaux de recherche réalisés. Des perspectives sont également dressées.

Chapitre 2

Modélisation structurelle

Ce chapitre présente l'approche adoptée dans la démarche de modélisation des rotors feuilletés dont le caractère monolithique et le comportement isotrope transverse du feuilletage supposent l'utilisation de la théorie de Timoshenko. Ce chapitre s'attache donc à développer en détail la théorie de la dynamique des rotors en prenant en compte les effets du cisaillement et de rotation de sections droites. Aussi les approximations relatives à la coïncidence des angles d'Euler et de Timoshenko sont précisées (et établies en annexe) afin d'introduire le repère tournant et calculer l'énergie de déformation. Les différents types de réponses nécessaires à la détermination du comportement dynamique d'un rotor sollicité en flexion (réponses harmonique, balourds, asynchrone, etc...) sont présentés. Un critère de corrélation des formes propres complexes d'un rotor, i.e. basé sur la notion de vecteurs propres gauches et droits, est proposé. Ce critère original permet de tracer des diagrammes de Campbell présentant l'évolution de fréquences propres de rotor parfaitement ordonnées en fonction des formes propres complexes auxquelles elles sont associées. La méthode des éléments finis appliquée aux rotors sollicités en flexion et la détermination des champs de contraintes, notamment des contraintes maximales, sont présentées en annexe.

Sommaire

2.1	Modélisation d'un rotor en flexion et cisaillement	13
2.1.1	Approche énergétique	13
2.1.2	Référentiels et vecteur rotation	13
2.1.3	Énergie cinétique. De l'intérêt des angles d'Euler	15
2.1.3.1	Les disques	15
2.1.3.2	L'arbre	17
2.1.3.3	Le balourd	20
2.1.4	Travail virtuel des paliers	21
2.1.5	Énergie de déformation. Des angles d'Euler à Timoshenko	22

2.1.5.1	L'arbre supporté par des paliers dans le repère tournant	22
2.1.5.2	L'arbre supporté par des paliers dans le repère galiléen	27
2.2	Équations du mouvement d'un rotor	29
2.2.1	Structure dissipative en rotation. Méthode Directe	30
2.2.1.1	Détermination des éléments propres	30
2.2.1.2	Propriété de bi-orthogonalité des vecteurs propres complexes	33
2.2.2	Structure dissipative en rotation. Méthode Pseudo-modale	34
2.2.2.1	Détermination des éléments propres d'une structure à l'arrêt	34
2.2.2.2	Propriété d'orthogonalité des vecteurs propres	35
2.2.2.3	Détermination des éléments propres	36
2.2.3	Diagramme de Campbell ou le problème d'appariement des formes propres complexes	38
2.2.3.1	Critères de corrélation de formes propres	39
2.2.3.2	Un critère original pour le suivi des formes propres complexes en fonction de la vitesse de rotation	41
2.2.3.3	Procédure d'appariement de formes propres complexes d'un rotor	45
2.2.3.4	Détermination des vitesses critiques de rotation	52
2.2.4	Détermination de la réponse forcée d'un rotor par projection modale	54
2.2.4.1	Force synchrone de balourd	54
2.2.4.2	Force asynchrone	55
2.2.4.3	Force harmonique de direction fixe	55
2.3	Conclusion	56

2.1 Modélisation d'un rotor en flexion et cisaillement

DEPUIS les soixante dernières années, le comportement dynamique des machines tournantes a fait l'objet de nombreux travaux de recherche et il peut être cité les ouvrages de référence [23; 24; 25; 26]. Différentes modélisations se sont succédées et les méthodes d'analyses ont évolué avec les moyens de calculs. On distingue actuellement deux approches majeures permettant la description du mouvement d'un rotor : la méthode de *Rayleigh-Ritz* plus appropriée aux études phénoménologiques et la méthode des éléments finis principalement utilisée pour les problématiques industrielles qui est le cadre de cette thèse.

Il est à noter que cette section s'attache à mettre en évidence les hypothèses simplificatrices considérées lorsque les effets de *Timoshenko* et de *Rayleigh* sont pris en compte dans la dynamique du rotor. Ces hypothèses concernent notamment les approximations entrant en jeu lorsqu'il s'agit de faire le lien entre les angles d'*Euler* et les angles utilisés dans la méthode des éléments finis.

2.1.1 Approche énergétique

D'une manière générale, une machine tournante est composée d'un arbre déformable comportant des disques et reposant sur des paliers, FIG. 2.1. La présence inévitable de balourds induit des forces d'excitation lors de la rotation. Les balourds sont des défauts de symétrie qui peuvent être d'origine mécanique (défaut de fabrication) ou thermique. Ils sont inévitables et doivent être pris en compte dans la modélisation. Chacun de ces éléments requiert une modélisation spécifique qui est ensuite intégrée dans la modélisation complète du rotor. L'énergie cinétique est établie pour les disques, l'arbre et les balourds, l'énergie de déformation pour l'arbre, la fonction de dissipation pour l'amortissement. Pour des rotors complexes, une formulation éléments finis est souvent utilisée. Pour chaque élément, des calculs d'énergies cinétiques élémentaires \mathcal{T}_i , de déformation élémentaires \mathcal{U}_i et des fonctions de dissipation de *Rayleigh* \mathcal{R}_i sont effectués. Les énergies totales \mathcal{T} , \mathcal{U} et \mathcal{R} qui sont respectivement les énergies cinétiques, de déformation et les fonctions de dissipation de *Rayleigh* sont définies comme suit :

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^N \mathcal{T}_i, \quad (2.1a) \quad \mathcal{U} = \sum_{i=1}^N \mathcal{U}_i, \quad (2.1b) \quad \mathcal{R} = \sum_{i=1}^N \mathcal{R}_i. \quad (2.1c)$$

Les équations du mouvement sont ensuite obtenues en utilisant les équations de *Lagrange* :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \mathcal{F}_{q_i}, \quad (2.2)$$

avec $i = 1, \dots, n_\delta$, n_δ le nombre de degrés de liberté pris en compte, q_i les coordonnées indépendantes généralisées, (∂) un opérateur différentiel temporel d'ordre un, \mathcal{F}_{q_i} les efforts généralisés. Le travail virtuel $\delta \mathcal{W}$ des forces extérieures permet de déterminer ces efforts généralisés. Les caractéristiques d'amortissement sont déterminées à partir d'une caractérisation des paliers ou de l'amortissement modal de l'arbre. Les matrices d'amortissement modales sont alors introduites dans les équations du mouvement. Ainsi, dans un souci de simplification dans la présentation de la méthode, les fonctions de dissipation de *Rayleigh* sont supposées nulles, *i.e.* $\mathcal{R}_i = 0$.

2.1.2 Référentiels et vecteur rotation

Le mouvement du rotor est décrit grâce à la définition de deux repères :

- le repère **galiléen** (R) d'axes $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- le repère **lié à une section droite** du rotor déformé (R_i) d'axes $(G, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$.

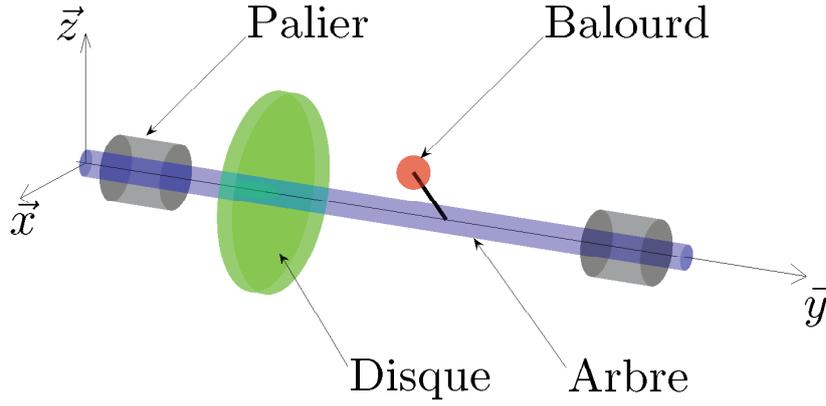


FIGURE 2.1 – Éléments de définition d'un rotor.

Notation 1: Le repère galiléen (R) est indexé par 0 lorsqu'il est fait état de quantités cinématiques.



La rotation du rotor lié à (R_i) , vis-à-vis de (R) , fait appel à un repère intermédiaire (R_2) . Il est caractérisée par le vecteur rotation $\vec{\omega}_{i/0}$ faisant intervenir les trois angles d'Euler ψ , θ et ϕ :

1. la *précession* ψ autour de l'axe (G, \vec{z}) projette le repère (R) sur le repère (R_1) défini par les axes $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$, FIG. 2.2(a), tel que :

$$\begin{cases} \vec{x} = \cos(\psi) \vec{x}_1 - \sin(\psi) \vec{y}_1 \\ \vec{y} = \sin(\psi) \vec{x}_1 + \cos(\psi) \vec{y}_1 \\ \vec{z} = \vec{z}_1 \end{cases}, \quad (2.3)$$

2. la *nutation* θ autour de l'axe (G, \vec{x}_1) projette le repère (R_1) sur le repère (R_2) défini par les axes $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, FIG. 2.2(b), tel que :

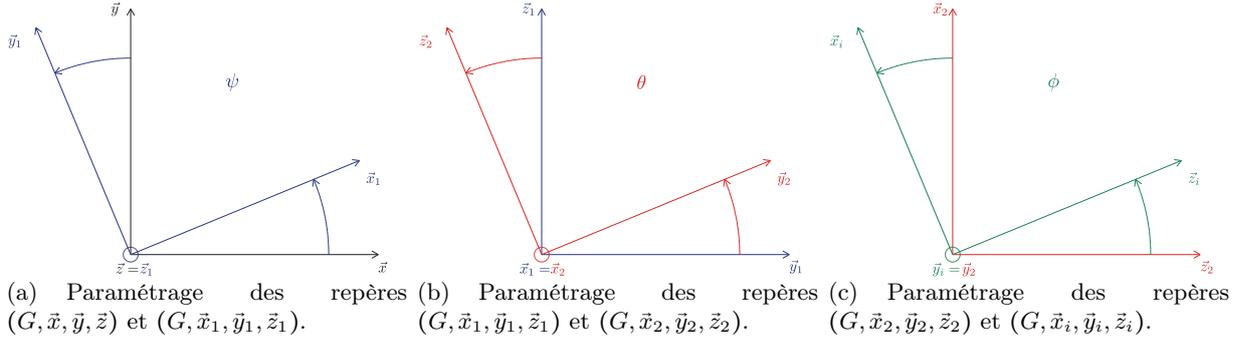
$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \vec{x}_2 \\ \vec{y}_1 = \cos(\theta) \vec{y}_2 - \sin(\theta) \vec{z}_2 \\ \vec{z}_1 = \sin(\theta) \vec{y}_2 + \cos(\theta) \vec{z}_2 \end{cases}, \quad (2.4)$$

3. la *rotation propre* ϕ du rotor autour de l'axe (G, \vec{y}_2) projette le repère (R_2) sur le repère (R_i) défini par les axes $(G, \vec{x}_i, \vec{y}_2, \vec{z}_i)$, FIG. 2.2(c), tel que :

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = \cos(\phi) \vec{x}_i + \sin(\phi) \vec{z}_i \\ \vec{y}_2 = \vec{y}_i \\ \vec{z}_2 = -\sin(\phi) \vec{x}_i + \cos(\phi) \vec{z}_i \end{cases}. \quad (2.5)$$

Le système de coordonnées (x_i, y_i, z_i) est donc relié au système de coordonnées (x, y, z) par l'intermédiaire du vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}_{i/0}$ défini tel que :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{i/0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{(R)} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_i)}, \\ \Leftrightarrow \vec{\omega}_{i/0} &= \dot{\psi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\phi} \vec{y}_i, \end{aligned} \quad (2.6)$$


 FIGURE 2.2 – Passage du système de coordonnées (x_i, y_i, z_i) au système de coordonnées (x, y, z) .

où \bar{z} , \bar{x}_1 et \bar{y}_i sont respectivement les vecteurs unitaires des axes (G, \bar{z}) , (G, \bar{x}_1) et (G, \bar{y}_i) .

En utilisant les figures planes illustrées par la FIG. 2.2, il vient alors les équations :

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \Leftrightarrow \bar{x}_1 = \cos(\phi) \bar{x}_i + \sin(\phi) \bar{z}_i, \quad (2.7)$$

$$\bar{z} = \sin(\theta) \bar{y}_2 + \cos(\theta) \bar{z}_2 \Leftrightarrow \bar{z} = -\cos(\theta) \sin(\phi) \bar{x}_i + \sin(\theta) \bar{y}_i + \cos(\theta) \cos(\phi) \bar{z}_i, \quad (2.8)$$

qui permettent de projeter le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}_{i/0}$ dans le repère (R_i) :

$$\vec{\omega}_{i/0} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{(R_i)} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi) \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin(\theta) \\ \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{\theta} \sin(\phi) \end{bmatrix}_{(R_i)}. \quad (2.9)$$

2.1.3 Énergie cinétique. De l'intérêt des angles d'Euler

2.1.3.1 Les disques

Soit un disque non déformable \mathcal{D} lié au repère (R_i) en son centre d'inertie G , porté par la ligne neutre de l'arbre, FIG. 2.3. On suppose qu'il ne se déplace que dans le plan $\{xGz\}$. La position du point G dans le repère galiléen (R) est donné par :

$$\vec{OG} = \begin{bmatrix} u(y, t) \\ y \\ w(y, t) \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (2.10)$$

Comme les mouvements étudiés concernent seulement la déflexion transversale du rotor, seuls les déplacements $u(y, t)$ et $w(y, t)$ dépendent du temps t .

Notation 2: Par souci de clarté, les champs $u(y, t)$ et $w(y, t)$ sont abrégés respectivement par u et w . La vitesse de rotation propre du rotor $\dot{\phi}$, FIG. 2.3, est considérée **constante**.



L'expression du vecteur vitesse du disque, en G , est alors :

$$\vec{V}_{i/0}(G) = \frac{\partial \vec{OG}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ 0 \\ \dot{w} \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (2.11)$$

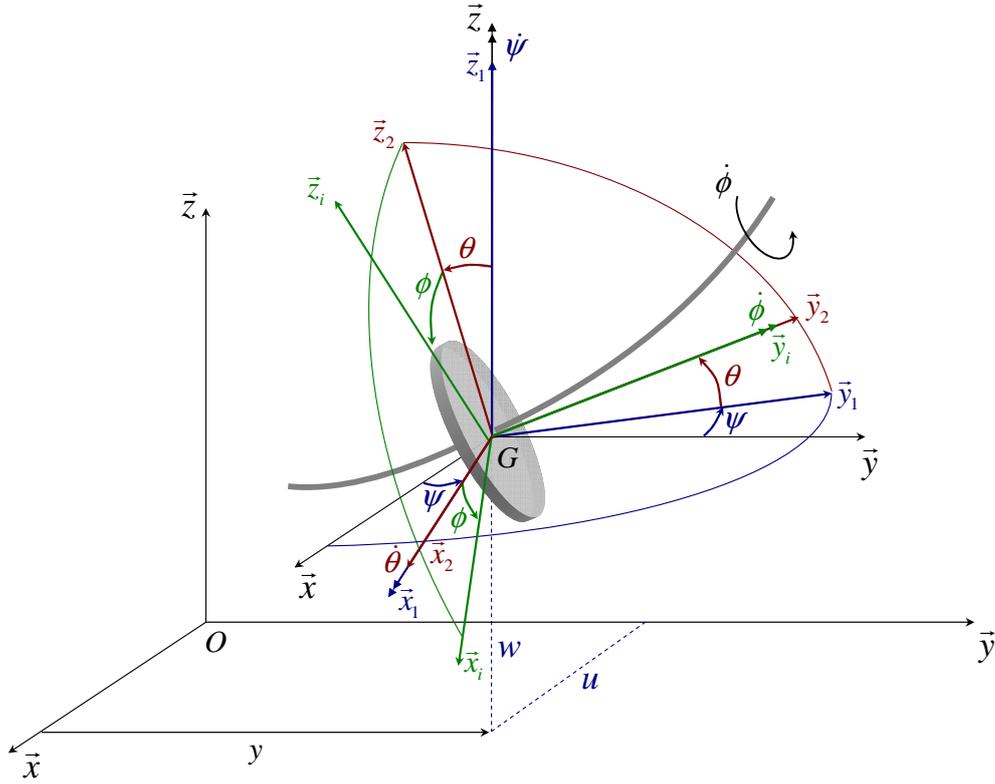


FIGURE 2.3 – Paramétrage d'un disque de rotor.

On note m_d la masse du disque. Son tenseur d'inertie exprimé dans le repère $(G, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ et calculé en G a la forme suivante :

$$\overline{\overline{I}}_{/0}(G) = \begin{bmatrix} I_{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{d_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_z} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

avec :

$$I_{d_x} = \int_{(\mathcal{D})} x^2 dm, \quad (2.13a) \quad I_{d_y} = \int_{(\mathcal{D})} y^2 dm, \quad (2.13b) \quad I_{d_z} = \int_{(\mathcal{D})} z^2 dm, \quad (2.13c)$$

où dm représente la masse élémentaire du disque \mathcal{D} .

L'énergie cinétique du disque \mathcal{T}_d associée à son mouvement autour de son centre de masse G est calculée grâce aux projections du torseur cinématique dans le repère (R_i) tel que :

$$\mathcal{T}_d = \frac{1}{2} m_d \left\| \vec{V}^{i/0}(G) \right\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{i/0} \cdot \overline{\overline{I}}_{/0}(G) \cdot \vec{\omega}_{i/0}, \quad (2.14)$$

où $\| \cdot \|$ est la norme \mathcal{E} uclidienne.

L'Eq. (2.14) se développe ainsi :

$$\mathcal{T}_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{d_x} \omega_x^2 + I_{d_y} \omega_y^2 + I_{d_z} \omega_z^2). \quad (2.15)$$

En substituant les Eq. (2.9) et Eq. (2.11) à l'Eq. (2.15), il vient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_d &= \frac{1}{2}m_d(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \\
 &+ \frac{1}{2}I_{d_x} \underbrace{\left(\dot{\psi}^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) - \dot{\psi}\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(2\phi) + \dot{\theta}^2 \cos^2(\phi) \right)}_{\omega_x^2} \\
 &+ \frac{1}{2}I_{d_y} \underbrace{\left(\dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \sin(\theta) + \dot{\psi}^2 \sin^2(\theta) \right)}_{\omega_y^2} \\
 &+ \frac{1}{2}I_{d_z} \underbrace{\left(\dot{\psi}^2 \cos^2(\theta) \cos^2(\phi) + \dot{\psi}\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(2\phi) + \dot{\theta}^2 \sin^2(\phi) \right)}_{\omega_z^2} .
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

L'Eq. (2.16) peut être simplifiée car un disque présente, par définition, une symétrie de révolution selon l'axe (G, \vec{y}) , *i.e.* $I_{d_x} = I_{d_z}$, les dissymétries résiduelles étant prises en compte dans le balourd :

$$\mathcal{T}_d = \frac{1}{2}m_d(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_{d_x}(\dot{\psi}^2 \cos^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_{d_y}(\dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \sin(\theta) + \dot{\psi}^2 \sin^2(\theta)). \tag{2.17}$$

En considérant de petites variations des angles θ et ψ , il est possible de remplacer les fonctions trigonométriques par leurs développements de \mathcal{T} aylor limité à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \sin(\theta) \sim \theta \\ \cos(\theta) \sim 1 \end{cases}, \tag{2.18a} \quad \begin{cases} \sin(\psi) \sim \psi \\ \cos(\psi) \sim 1 \end{cases}, \tag{2.18b}$$

et en négligeant le dernier terme $\dot{\psi}^2\theta^2$ (d'ordre supérieur à 2), l'expression de l'énergie cinétique du disque devient :

$$\mathcal{T}_d = \underbrace{\frac{1}{2}m_d(\dot{u}^2 + \dot{w}^2)}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{d_x}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)}_{\text{Rotation}} + \underbrace{I_{d_y}\dot{\phi}\dot{\psi}\theta}_{\text{Effet Gyroscopique}} + \frac{1}{2}I_{d_y}\dot{\phi}^2, \tag{2.19}$$

L'utilisation des angles d'Euler fait ainsi apparaître le terme $I_{d_y}\dot{\phi}\dot{\psi}\theta$ représentant l'effet gyroscopique (Coriolis). Le dernier terme $\frac{1}{2}I_{d_y}\dot{\phi}^2$ est constant et n'a par conséquent pas d'influence dans la dynamique du rotor en régime **permanent**.

2.1.3.2 L'arbre

L'arbre est représenté par une poutre droite en flexion dans l'espace, comme présentée dans l'Annexe A, caractérisée par les énergies cinétique et de déformation. Il est considéré que les sections droites (S) de la poutre droite sont circulaires ce qui implique :

$$I_{G_x} = I_{G_z} = I_G, \tag{2.20a} \quad \phi_{xy} = \phi_{yz} = \phi_y, \tag{2.20b} \quad k_{xy} = k_{yz} = k_y. \tag{2.20c}$$

où I_{G_x} , I_{G_z} , ϕ_{xy} , ϕ_{yz} , k_{xy} et k_{yz} sont respectivement définis par les Eq. (A.11), Eq. (A.55), Eq. (A.33) et Eq. (A.77). Le coefficient de réduction de section k_y est défini dans [27; 28] comme suit :

$$k_y = \frac{6(1+\nu)(1+a^2)^2}{(7+6\nu)(1+a^2)^2 + (20+12\nu)a^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{d^{int}}{d^{ext}}, \tag{2.21}$$

où d^{int} , d^{ext} sont respectivement les diamètres intérieurs et extérieurs d'une section droite (S).

L'énergie cinétique de l'arbre en flexion est une extension de celle du disque. Soit un point P d'une section droite (S) située en (x, y, z) (FIG. 2.4), sa position est définie par le vecteur $\overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^3$ dans l'espace engendré par le repère (R) tel que :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{(R)} + \begin{bmatrix} u(x, y, z, t) \\ 0 \\ w(x, y, z, t) \end{bmatrix}_{(R)}, \quad (2.22)$$

où $u(x, y, z, t)$ et $w(x, y, z, t)$ sont respectivement les déplacements selon \vec{x} et \vec{z} . Une relation de transport permet d'obtenir l'expression du vecteur vitesse d'un point P d'une section droite (S) à partir des Eq. (2.9) et Eq. (2.11) :

$$\vec{V}_{i/0}(P) = \vec{V}_{i/0}(G) + \overrightarrow{PG} \wedge \vec{\omega}_{i/0}. \quad (2.23)$$

En développant l'Eq. (2.23) et en utilisant l'Eq. (2.11), il vient :

$$\vec{V}_{i/0}(P) = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ 0 \\ \dot{w} \end{bmatrix}_{(R)} + \begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ -z \end{bmatrix}_{(R_i)} \wedge \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{(R_i)}. \quad (2.24)$$

L'Eq. (2.8) permet de projeter l'expression du vecteur unitaire \vec{z} dans le repère (R_i). Les Eq. (2.3), Eq. (2.4), Eq. (2.5) permettent de projeter l'expression de \vec{x} dans (R_i) tel que :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \cos(\psi) \vec{x}_1 + \sin(\psi) \vec{y}_1, \\ \Leftrightarrow \vec{x} &= [\cos(\psi) \cos(\phi) - \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi)] \vec{x}_i \\ &\quad - [\sin(\psi) \cos(\theta)] \vec{y}_i \\ &\quad + [\sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\psi) \sin(\phi)] \vec{z}_i \end{aligned} \quad (2.25)$$

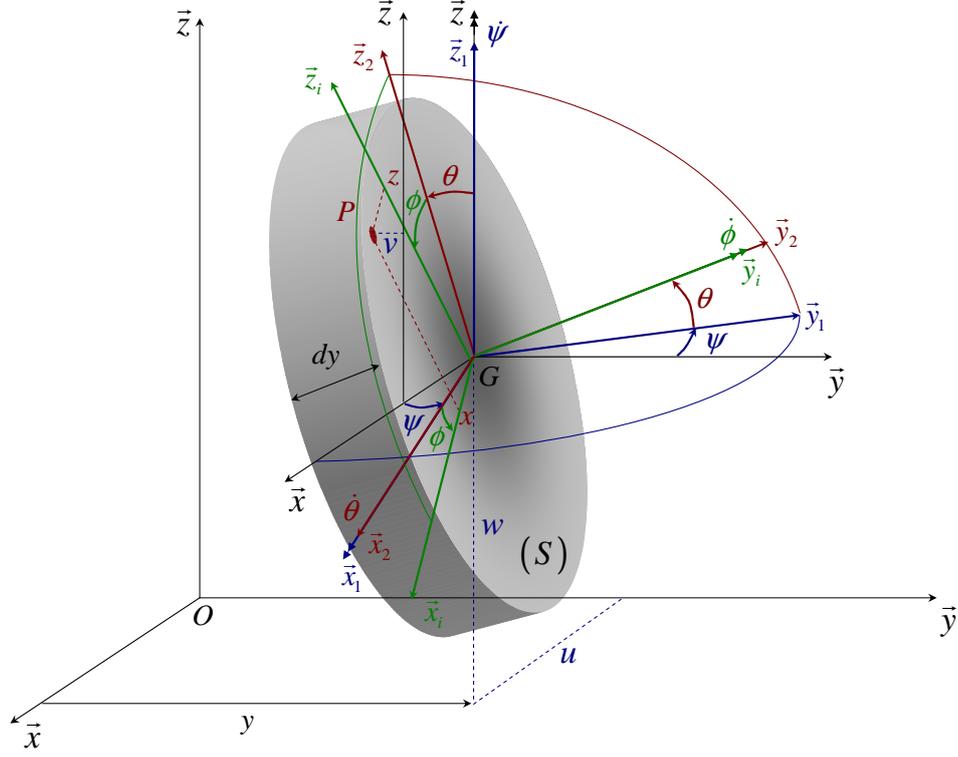
Ainsi, l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}_{i/0}(P)$ dans (R_i) a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{i/0}(P) &= \begin{bmatrix} -\dot{w} \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot{u} \cos(\psi) \cos(\phi) - \dot{u} \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \dot{w} \sin(\theta) - \dot{u} \sin(\psi) \cos(\theta) \\ \dot{w} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{u} \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \dot{u} \cos(\psi) \sin(\phi) \end{bmatrix}_{(R_i)} \\ &\quad + \begin{bmatrix} z \dot{\phi} + z \dot{\psi} \sin(\theta) \\ z \dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) - z \dot{\theta} \cos(\phi) + x \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) + x \dot{\theta} \sin(\phi) \\ -x \dot{\phi} - x \dot{\psi} \sin(\theta) \end{bmatrix}_{(R_i)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pour une poutre de longueur l dont l'aire S de section droite reste constante, l'expression de l'énergie cinétique est alors :

$$\mathcal{Z}_a = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho \left\| \vec{V}_{i/0}(P) \right\|^2 dV = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \int_{(S)} \left\| \vec{V}_{i/0}(P) \right\|^2 dS dy. \quad (2.27)$$

En substituant les Eq. (2.26), Eq. (2.18a) et Eq. (2.18b) dans l'Eq. (2.27), l'énergie cinétique de l'arbre s'écrit :


 FIGURE 2.4 – Visualisation de la configuration déformée d'un élément de poutre de longueur dy .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_a &= \frac{1}{2}\rho \int_0^l \int_{(S)} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + z^2\dot{\psi}^2 + x^2\dot{\theta}^2 + 2z^2\dot{\psi}\dot{\theta}\dot{\phi} + 2x^2\dot{\psi}\dot{\theta}\dot{\phi} + x^2\dot{\phi}^2 + z^2\dot{\phi}^2) dS dy \\
 &+ \rho \int_{(S)} x dS \int_0^l \left[(\dot{w}\dot{\theta}\dot{\theta} - \dot{u}\dot{\psi}\dot{\theta} - \dot{u}\dot{\psi}\dot{\theta} - \dot{u}\dot{\phi}) \sin(\phi) - (\dot{u}\dot{\psi}\dot{\psi} + \dot{w}\dot{\phi}) \cos(\phi) - \dot{u}\dot{\theta}\dot{\phi} \frac{\sin(2\phi)}{2} \right] dy \\
 &+ \rho \int_{(S)} z dS \int_0^l \left[(-\dot{u}\dot{\psi}\dot{\theta}\dot{\phi} - \dot{u}\dot{\psi}\dot{\psi} - \dot{w}\dot{\phi}) \sin(\phi) + (\dot{u}\dot{\psi}\dot{\theta} - \dot{w}\dot{\theta}\dot{\theta} + \dot{u}\dot{\phi} + \dot{u}\dot{\psi}\dot{\theta}) \cos(\phi) \right] dy \quad (2.28) \\
 &+ \frac{1}{2}\rho \int_{(S)} x z dS \int_0^l \left[2\dot{\psi}\dot{\theta} - 4\dot{\psi}\dot{\theta} \cos^2(\phi) + (\dot{\psi}^2 - \dot{\theta}^2) \sin(2\phi) \right] dy \\
 &+ \frac{1}{2}\rho \int_{(S)} x^2 dS \int_0^l \dot{\psi}\dot{\theta} \sin(2\phi) dy - \frac{1}{2}\rho \int_{(S)} z^2 dS \int_0^l \dot{\psi}\dot{\theta} \sin(2\phi) dy.
 \end{aligned}$$

En vertu de la symétrie de révolution de la section de l'arbre, les moments statiques et produits quadratiques s'annulent tels que :

$$\int_{(S)} x dS = 0, \quad (2.29a) \quad \int_{(S)} z dS = 0, \quad (2.29b) \quad \int_{(S)} x z dS = 0. \quad (2.29c)$$

En considérant les Eq. (2.29) et Eq. (2.20a) l'énergie cinétique de l'arbre s'écrit alors :

$$\mathcal{T}_a = \underbrace{\frac{1}{2}\rho S \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy}_{\text{Translation de Section}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho I_G \int_0^l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy}_{\text{Rotation de Section}} + \underbrace{2\rho I_G \dot{\phi} \int_0^l \dot{\psi}\dot{\theta} dy + \rho I_{G_y} l \dot{\phi}^2}_{\text{Effet Gyroscopique}} \quad (2.30)$$

La première intégrale illustre de l'énergie cinétique d'une poutre d'Euler-Bernoulli et la seconde l'effet secondaire due à l'inertie de rotation de section (Timoshenko). Le paramétrage, basé sur les angles d'Euler, laisse apparaître le terme $\dot{\psi}\dot{\theta}$ dans la dernière intégrale qui représente l'effet

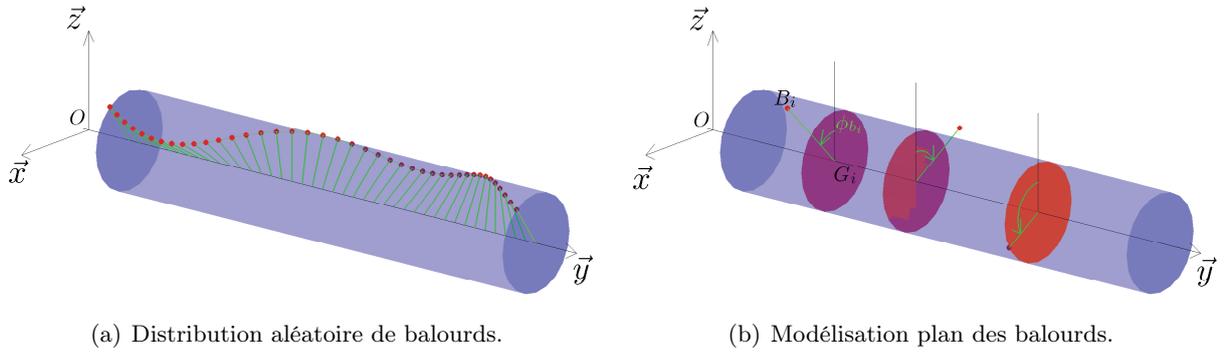


FIGURE 2.5 – Balourds sur le rotor.

gyroscopique. Le dernier terme étant constant en régime **permanent**, sa contribution est nulle dans les équations du mouvement, avec I_{G_y} le moment quadratique de (S) par rapport à l'axe \vec{y} :

$$I_{G_y} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dS. \quad (2.31)$$

2.1.3.3 Le balourd

Les irrégularités sont généralement réparties de façon continue et aléatoire le long du rotor, FIG. 2.5(a). Il peut être modélisé par des masses concentrées situées dans différents plans, FIG. 2.5(b). Le balourd est modélisé par une masse m_{b_i} située à la distance d_{b_i} d'un centre géométrique G_i de l'arbre et dont l'énergie cinétique \mathcal{T}_{b_i} doit être calculée. A l'arrêt, la position B_i de chaque masse équivalente m_{b_i} est définie par :

- son abscisse y (qui est constante),
- la distance $d_{b_i} = \overline{G_i B_i}$ (G_i est le centre de la section droite de l'arbre au plan i),
- l'angle ϕ_{b_i} orientant le vecteur $\overline{G_i B_i}$ par rapport au vecteur \vec{z}_i du repère tournant (top-tour).

Lors de la rotation, chaque masse m_{b_i} est liée à l'arbre en position déformée, FIG. 2.6. Pour chaque balourd m_{b_i} , sa position est définie par la relation :

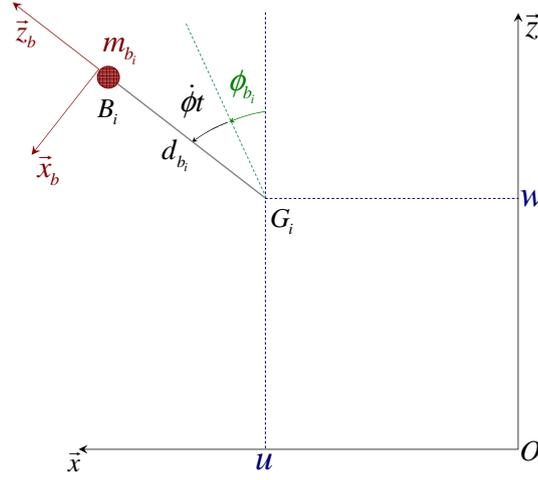
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB_i} &= \overrightarrow{OB_i} + \overrightarrow{G_i B_i}, \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OB_i} &= \begin{bmatrix} u \\ y \\ w \end{bmatrix}_{(R)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{b_i} \end{bmatrix}_{(R_b)}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

où (R_b) est le repère engendré par une rotation du repère (R) autour de l'axe (G_i, \vec{y}) tel que :

$$\vec{z}_b = \sin(\phi + \phi_{b_i}) \vec{x} + \cos(\phi + \phi_{b_i}) \vec{z} \quad (2.33)$$

L'Eq. (2.32) se simplifie sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{OB_i} = \begin{bmatrix} u + d_{b_i} \sin(\phi + \phi_{b_i}) \\ y \\ w + d_{b_i} \cos(\phi + \phi_{b_i}) \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (2.34)$$


 FIGURE 2.6 – Repérage du i^e balourd.

L'expression du vecteur vitesse dérive de la relation suivante :

$$\vec{V}_{i/0}(B_i) = \frac{\partial \overrightarrow{OB_i}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{u} + d_{b_i} \dot{\phi} \cos(\dot{\phi}t + \phi_{b_i}) \\ 0 \\ \dot{w} - d_{b_i} \dot{\phi} \sin(\dot{\phi}t + \phi_{b_i}) \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (2.35)$$

Ainsi, l'énergie cinétique du i^e balourd s'écrit :

$$\mathcal{T}_{b_i} = \frac{1}{2} m_{b_i} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \dot{\phi}^2 d_{b_i}^2 + 2\dot{\phi} \dot{u} d_{b_i} \cos(\dot{\phi}t + \phi_{b_i}) - 2\dot{\phi} \dot{w} d_{b_i} \sin(\dot{\phi}t + \phi_{b_i})). \quad (2.36)$$

Le régime permanent étant considéré, le terme $\frac{m_{b_i} \dot{\phi}^2 d_{b_i}^2}{2}$ est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement. Aussi la masse m_{b_i} du i^e balourd est très inférieure à celle du rotor ou celles d'éventuels disques :

$$\frac{m_{b_i}}{m_d} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_{b_i} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \ll \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2). \quad (2.37)$$

L'énergie cinétique du i^e balourd peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{T}_{b_i} = m_{b_i} \dot{\phi} d_{b_i} (\dot{u} \cos(\dot{\phi}t + \phi_{b_i}) - \dot{w} \sin(\dot{\phi}t + \phi_{b_i})), \quad (2.38)$$

et l'application des équations de \mathcal{L} agrange fournit alors la force tournante due aux balourds.

2.1.4 Travail virtuel des paliers

Les caractéristiques de raideur et amortissement des paliers sont supposées connues. Le travail virtuel $\delta \mathcal{W}_p$ des efforts qu'ils s'exercent sur l'arbre s'écrit sous la forme suivante, FIG. 2.7 :

$$\delta \mathcal{W}_p = - \underbrace{(k_{p_{xx}} u + k_{p_{xz}} w + c_{p_{xx}} \dot{u} + c_{p_{xz}} \dot{w})}_{\mathcal{F}_{p_u}} \delta u - \underbrace{(k_{p_{zz}} w + k_{p_{zx}} u + c_{p_{zz}} \dot{w} - c_{p_{zx}} \dot{u})}_{\mathcal{F}_{p_w}} \delta w, \quad (2.39)$$

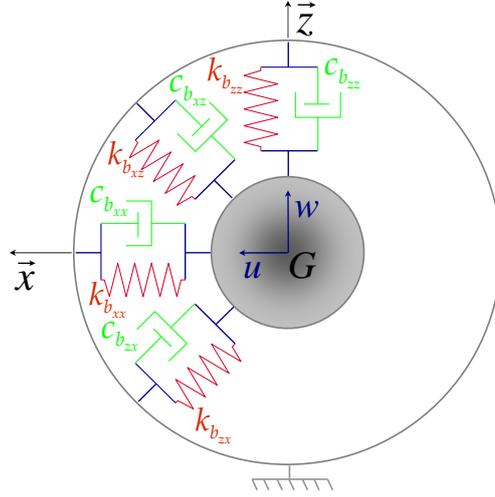


FIGURE 2.7 – Représentation des raideurs et amortissements apportés d'un palier.

avec \mathcal{F}_{p_u} et \mathcal{F}_{p_w} les composantes de la force généralisée. L'Eq. (2.39) permet alors d'écrire la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{p_u} \\ \mathcal{F}_{p_w} \end{bmatrix}_{(R)} = - \begin{bmatrix} k_{p_{xx}} & k_{p_{xz}} \\ k_{p_{zx}} & k_{p_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{(R)} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (2.40)$$

Fréquemment, les termes diagonaux des matrices de raideur et d'amortissement d'un palier ne sont pas similaires, *i.e.* $k_{p_{xx}} \neq k_{p_{zz}}$, $c_{xx} \neq c_{zz}$. Par ailleurs et notamment pour les paliers hydrodynamiques, il est également fréquent que les termes de couplage entre les directions x et z diffèrent tel que $k_{p_{xz}} \neq k_{p_{zx}}$ et $c_{xz} \neq c_{zx}$.

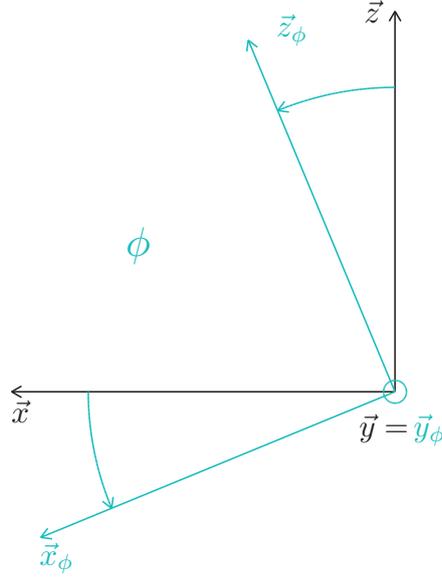
2.1.5 Énergie de déformation. Des angles d'Euler à Timoshenko

L'énergie de déformation requiert les champs de contraintes σ et de déformations ε en un point d'une section droite. On considère alors un élément de poutre de longueur dy de section droite (S) d'abscisse y , de centre géométrique G , portant un point P de coordonnées (x, z) .

Lors du calcul de l'énergie cinétique d'un disque ou d'un arbre, les angles d'Euler ψ , θ et ϕ (paramétrage **relatif**, FIG. 2.3) sont introduits et conduisent aux termes dus à l'effet gyroscopique, Eq. (2.30) et Eq. (2.19). Or, les sections droites d'une poutre de Timoshenko dans l'espace sont orientées grâce aux angles θ et ψ associés aux axes **fixes** \vec{x} et \vec{z} de (R) , Eq. (A.4) et Eq. (A.48) (paramétrage **absolu**, *i.e.* degrés de liberté de rotation utilisés dans la méthode des éléments finis). L'Annexe A.4.1 fait donc état d'une **approximation** qui conduit à la **coïncidence** entre les angles d'Euler ψ et θ et ceux paramétrant les rotations de sections droites d'une poutre de Timoshenko en flexion dans l'espace.

2.1.5.1 L'arbre supporté par des paliers dans le repère tournant

Les coordonnées de $P(x, z)$ étant définies dans le repère local de l'élément, il est convivial d'exprimer les champs σ et ε dans ce même repère. Comme le rotor est défini par une poutre tournant à la vitesse $\dot{\phi}$ autour de \vec{y} , il est naturel d'introduire un repère (R_ϕ) , appelé repère tournant, permettant de relier le repère local de l'élément tournant (et donc x et z) au repère (R) , FIG. 2.8. Le repère (R_ϕ) correspond donc au repère (R) orienté de l'angle ϕ autour de \vec{y} . Or, ϕ est par définition la *rotation propre* définie par Euler autour de \vec{y}_2 , *i.e.* angle orientant le repère (R_i) vis-à-vis de (R_2) , FIG. 2.3. L'orientation de (R_ϕ) est donc issue d'une **approximation** présentée en Annexe A.4.2.


 FIGURE 2.8 – Paramétrage des repères galiléen (R) et tournant (R_ϕ) .

On note alors u_ϕ , θ_ϕ et w_ϕ , ψ_ϕ respectivement les couples de déplacements de G et rotations de (S) selon les axes \vec{x}_ϕ et \vec{z}_ϕ , FIG. 2.9. Les relations entre les composantes des déplacement exprimées dans (R_ϕ) et celles exprimées dans (R) s'obtiennent grâce aux FIG. 2.8 et FIG. 2.9(b) :

$$u_\phi = u \cos(\dot{\phi}t) - w \sin(\dot{\phi}t), \quad (2.41a) \quad w_\phi = u \sin(\dot{\phi}t) + w \cos(\dot{\phi}t). \quad (2.41b)$$

Par ailleurs, les relations entre les rotations d'une section droite autour des axes de (R_ϕ) et celles autour de (R) ne sont pas aisément identifiables à l'aide de la FIG. 2.9(a). On laissera le soin au lecteur de consulter [29] où il est présenté une démarche qui décompose toute rotation autour d'un vecteur arbitraire inclus dans \mathbb{R}^3 en une combinaison de rotations élémentaires autour des trois vecteurs unitaires de (R) . L'Annexe A.4.3 établit les relations entre les rotations autour des axes de (R_ϕ) et celles autour des axes de (R) telles que [30; 31; 32] :

$$\theta_\phi = \theta \cos(\dot{\phi}t) - \psi \sin(\dot{\phi}t), \quad (2.42a) \quad \psi_\phi = \theta \sin(\dot{\phi}t) + \psi \cos(\dot{\phi}t). \quad (2.42b)$$

Ainsi, les champs de contraintes et de déformations évalués au point P s'expriment dans le repère local de l'élément tournant approché par (R_ϕ) tels que :

$$\sigma(P) = \begin{bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_{(R_\phi)}, \quad (2.43a) \quad \varepsilon(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix}_{(R_\phi)}, \quad (2.43b)$$

avec σ_{yy} , ε_{yy} les contraintes et déformations selon \vec{y}_ϕ issues des déflexions transversales dans les plans $\{x_\phi G y_\phi\}$ et $\{y_\phi G z_\phi\}$, σ_{xy} , σ_{yz} les contraintes de cisaillement dans les plans $\{x_\phi G y_\phi\}$ et $\{y_\phi G z_\phi\}$ et $2\varepsilon_{xy}$, $2\varepsilon_{yz}$ les distortions dans les plans $\{x_\phi G y_\phi\}$ et $\{y_\phi G z_\phi\}$. Le champ de déformations exprimé dans (R_ϕ) s'écrit alors, Eq. (A.6) et Eq. (A.50) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix}_{(R_\phi)} = \begin{bmatrix} x \frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} & - z \frac{\partial \theta_\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial y} & + \psi_\phi \\ \frac{\partial w_\phi}{\partial y} & - \theta_\phi \end{bmatrix}_{(R_\phi)}. \quad (2.44)$$

Il est possible de considérer des termes du second ordre dans la définition de la déformation ε_{yy} du point P lorsque la structure présente certaines non-linéarités. En considérant des non-linéarités

géométriques entre les directions y_ϕ et z_ϕ , et x_ϕ et y_ϕ , la déformation ε_{yy} s'écrit :

$$\varepsilon_{yy} = \underbrace{x \frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_\phi}{\partial y}}_{\text{Flexion}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} \right)^2}_{\text{Non-linearité Géométrique}}. \quad (2.45)$$

L'énergie de déformation de l'arbre a comme expression [33; 34; 35] :

$$\mathcal{U}_a = \frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma \cdot \varepsilon dV. \quad (2.46)$$

Les champs de contraintes et de déformations sont reliés par loi matérielle de \mathcal{H} ooke, [1; 36] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_{(R_\phi)} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & Gk_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & Gk_{yz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix}_{(R_\phi)}. \quad (2.47)$$

avec E , G les modules d'Young et de Coulomb, k_{xy} , k_{yz} sont définies dans les Eq. (A.53) et Eq. (A.9), [27; 28]. L'expression de l'énergie de déformation est alors [37; 25; 38; 26] :

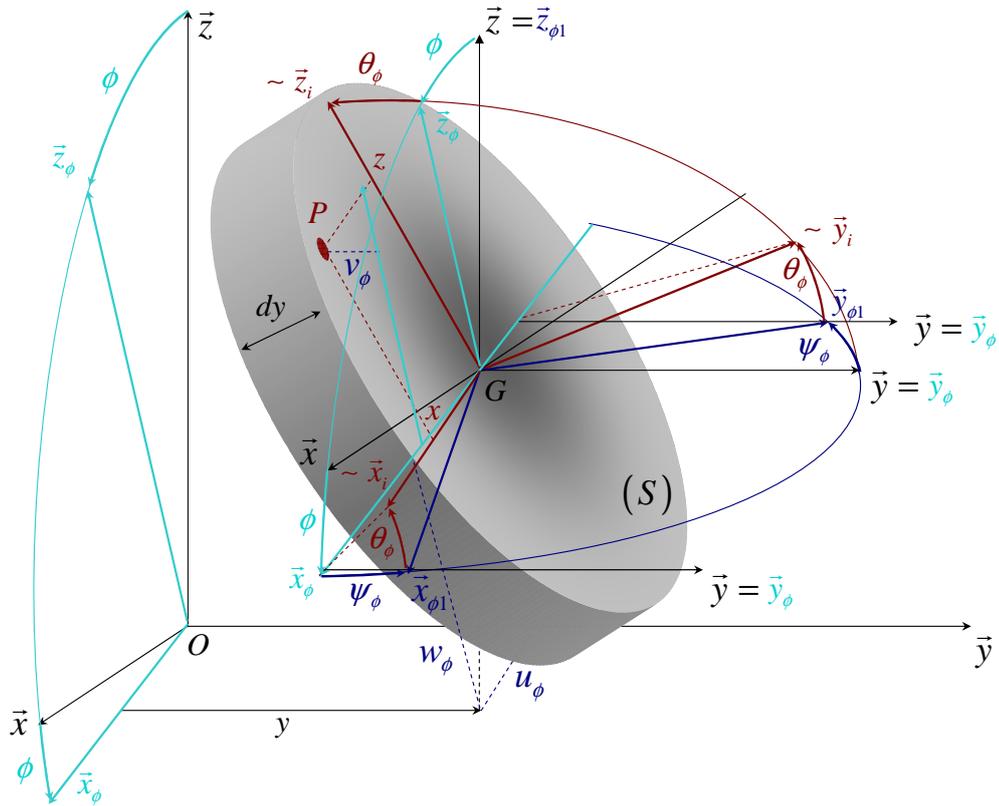
$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a &= \frac{1}{2} \int_{(V)} (\sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}2\varepsilon_{xy} + \sigma_{yz}2\varepsilon_{yz}) dV \\ \Leftrightarrow \mathcal{U}_a &= \frac{1}{2}E \int_{(V)} \varepsilon_{yy}^2 dV + \frac{1}{2}Gk_{xy} \int_{(V)} 4\varepsilon_{xy}^2 dV + \frac{1}{2}Gk_{yz} \int_{(V)} 4\varepsilon_{yz}^2 dV \end{aligned} \quad (2.48)$$

En introduisant les Eq. (2.45), Eq. (A.6b) et Eq. (A.50b) dans l' Eq. (2.48), il vient :

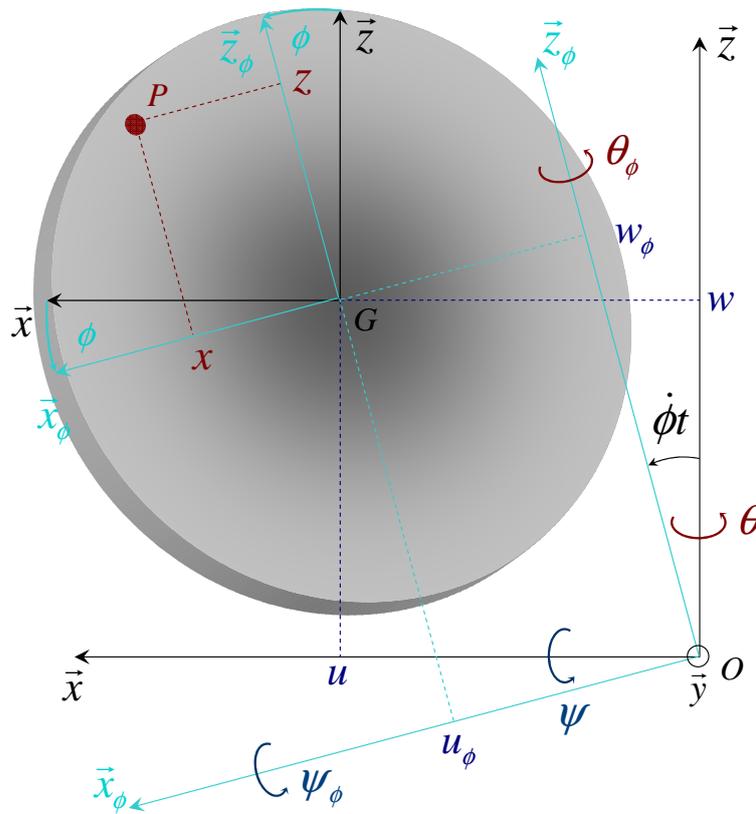
$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a &= \frac{1}{2}E \int_0^l \int_{(S)} \left[x^2 \left(\frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial \theta_\phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} \right)^2 \right]^2 dSdy \\ &+ \frac{1}{2}Gk_{xy} \int_0^l \int_{(S)} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} + \psi_\phi \right)^2 dSdy + \frac{1}{2}Gk_{yz} \int_0^l \int_{(S)} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} - \theta_\phi \right)^2 dSdy \end{aligned} \quad (2.49)$$

L'Eq. (2.49) se développe de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a &= \frac{1}{2}E \int_0^l \int_{(S)} \left[x^2 \left(\frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \theta_\phi}{\partial y} \right)^2 - 2xz \left(\frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_\phi}{\partial y} \right) \right] dSdy \\ &+ \frac{1}{2}E \int_0^l \int_{(S)} \left(x \frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_\phi}{\partial y} \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} \right)^2 \right] dSdy \\ &+ \frac{1}{2}E \int_0^l \int_{(S)} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} \right)^4 \right] dSdy \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Termes d'Ordre 2}} \\ &+ \frac{1}{2}Gk_{xy} \int_0^l \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} + \psi_\phi \right)^2 dy + \frac{1}{2}Gk_{yz} \int_0^l \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} - \theta_\phi \right)^2 dy \end{aligned} \quad (2.50)$$



(a) Visualisation spatiale.



(b) Visualisation dans le plan $\{zGx\}$.

FIGURE 2.9 – Visualisation spatiale des déplacements du centre géométrique G et des rotations de la section droite (S) définis à l'aide des axes du repère tournant (R_ϕ) .

La section de l'arbre présentant une symétrie de révolution, Eq. (2.29), l'intégrale correspondant à la deuxième ligne de l'Eq. (2.50) est nulle. En introduisant les moments quadratiques de la section droite par rapport aux axes \vec{x} et \vec{z} , Eq. (A.11) et Eq. (A.55), et en négligeant les termes d'ordre 2, l'expression de l'énergie de déformation de l'arbre devient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a = & \underbrace{\frac{1}{2}E \int_0^l \left[I_{G_x} \left(\frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} \right)^2 + I_{G_z} \left(\frac{\partial \theta_\phi}{\partial y} \right)^2 \right] dy}_{\text{Flexion}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2}G \int_0^l \left[Sk_{xy} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} + \psi_\phi \right)^2 + Sk_{yz} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} - \theta_\phi \right)^2 \right] dy}_{\text{Cisaillement}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

L'Eq. (2.51) ne présente pas de terme dû à la non-linéarité géométrique de l'Eq. (2.45). En revanche, la considération d'une force longitudinale constante P agissant sur le rotor lors de sa déflexion transversale implique un terme supplémentaire causant une augmentation de l'énergie de déformation, appelé énergie de déformation *géométrique*. Si la force P n'est pas une quantité connue mais une conséquence de la déflexion transversale même du rotor, une procédure itérative est nécessaire pour résoudre ce problème non-linéaire [39] : la force P due à la déflexion transversale du rotor doit être calculée puis cette dernière doit ensuite être utilisée lors du calcul du comportement dynamique du rotor (analyses modales, réponses au balourd, etc...).

Cette force longitudinale P peut également être la conséquence d'une précontrainte longitudinale nécessaire au maintien d'un assemblage [20; 40] dans les moteurs électriques. Cette force longitudinale conduit donc à une précontrainte initiale du rotor σ_{yy0} selon l'axe (G, \vec{y}_ϕ) , telle que :

$$\frac{P}{S} = \sigma_{yy0}. \quad (2.52)$$

L'expression de l'énergie de déformation géométrique est la suivante :

$$\mathcal{U}_g = \int_{(V)} \sigma_{yy0} \varepsilon_{yy} dV. \quad (2.53)$$

En introduisant les Eq. (2.45) et Eq. (2.52) dans l'Eq. (2.53), il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_g &= \frac{P}{S} \int_0^l \int_{(S)} \left[x \frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_\phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS dy \\ \Leftrightarrow \mathcal{U}_g &= \frac{P}{S} \int_0^l \int_{(S)} \left[x \frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_\phi}{\partial y} \right] dS dy + \frac{P}{S} \int_0^l \int_{(S)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS dy \end{aligned} \quad (2.54)$$

La section de l'arbre présentant une symétrie de révolution, Eq. (2.29), le premier terme de l'Eq. (2.54) est nul. L'énergie de déformation géométrique devient alors :

$$\mathcal{U}_g = \frac{1}{2}P \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (2.55)$$

Finalement, l'expression de l'énergie de déformation totale \mathcal{U} de l'arbre dans le repère tournant

est issue de la combinaison des Eq. (2.51) et Eq. (2.55) telle que :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \mathcal{U}_a + \mathcal{U}_g \\
 \Leftrightarrow \mathcal{U} &= \underbrace{\frac{1}{2}E \int_0^l \left[I_{G_x} \left(\frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} \right)^2 + I_{G_z} \left(\frac{\partial \theta_\phi}{\partial y} \right)^2 \right] dy}_{\text{Flexion}} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{2}G \int_0^l \left[S k_{xy} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} + \psi_\phi \right)^2 + S k_{yz} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} - \theta_\phi \right)^2 \right] dy}_{\text{Cisaillement}} . \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{2}P \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial y} \right)^2 \right] dy}_{\text{Couplage Longitudinal - Transversal}} .
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Cette formulation de l'énergie de déformation suppose donc que le travail virtuel des paliers soit également exprimé dans le repère tournant. Ainsi, en considérant d'une part l'Eq. (2.41) et les variations des composantes u_ϕ et w_ϕ définie par :

$$\delta u = \delta u_\phi \cos(\dot{\phi}t) + \delta w_\phi \sin(\dot{\phi}t), \quad (2.57a) \quad \delta w = -\delta u_\phi \sin(\dot{\phi}t) + \delta w_\phi \cos(\dot{\phi}t), \quad (2.57b)$$

et en allégeant, d'autre part, l'Eq. (2.39) en annulant les termes d'amortissement et extra-diagonaux $k_{p_{xz}}$ et $k_{p_{zx}}$, le travail virtuel des forces dues à la raideur du palier devient :

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{W}_p &= - \left[(k_{p_{xx}} \cos^2(\dot{\phi}t) + k_{p_{zz}} \sin^2(\dot{\phi}t)) u_\phi + \frac{\sin(2\dot{\phi}t)}{2} (k_{p_{xx}} - k_{p_{zz}}) w_\phi \right] \delta u_\phi \\
 &- \left[(k_{p_{xx}} \sin^2(\dot{\phi}t) + k_{p_{zz}} \cos^2(\dot{\phi}t)) w_\phi + \frac{\sin(2\dot{\phi}t)}{2} (k_{p_{xx}} - k_{p_{zz}}) u_\phi \right] \delta w_\phi .
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

L'Eq. (2.58) montre que si les termes diagonaux $k_{p_{xx}}$ et $k_{p_{zz}}$ sont différents, il apparaît explicitement des coefficients périodiques dépendant du temps t (équations de Mathieu) dont la résolution peut poser des difficultés. Il est donc d'usage, lorsque l'arbre présente une symétrie de révolution et qu'il repose sur des paliers orthotropes, de projeter les équations du rotor dans le repère galiléen (R) afin d'annuler les coefficients périodiques.

2.1.5.2 L'arbre supporté par des paliers dans le repère galiléen

Grâce aux Eq. (2.41), Eq. (A.104) et à leurs dérivées par rapport à y , l'Eq. (2.56) devient alors :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \frac{1}{2}E \int_0^l \left[I_{G_z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\dot{\phi}t) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(\dot{\phi}t) \right)^2 + I_{G_x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \cos(\dot{\phi}t) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin(\dot{\phi}t) \right)^2 \right] dy \\
 &+ \frac{1}{2}G \int_0^l S k_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos(\dot{\phi}t) - \frac{\partial w}{\partial y} \sin(\dot{\phi}t) + \theta \sin(\dot{\phi}t) + \psi \cos(\dot{\phi}t) \right)^2 dy \\
 &+ \frac{1}{2}G \int_0^l S k_{yz} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \sin(\dot{\phi}t) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(\dot{\phi}t) - \theta \cos(\dot{\phi}t) + \psi \sin(\dot{\phi}t) \right)^2 dy \\
 &+ \frac{1}{2}P \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \sin(\dot{\phi}t) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(\dot{\phi}t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos(\dot{\phi}t) - \frac{\partial w}{\partial y} \sin(\dot{\phi}t) \right)^2 \right] dy
 \end{aligned} . \tag{2.59}$$

En développant l'Eq. (2.59), il vient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} = & \frac{1}{2}E \int_0^l I_{G_z} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \sin^2(\dot{\phi}t) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \cos^2(\dot{\phi}t) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \sin(2\dot{\phi}t) \right] dy \\
 & + \frac{1}{2}E \int_0^l I_{G_x} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \cos^2(\dot{\phi}t) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \sin^2(\dot{\phi}t) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \sin(2\dot{\phi}t) \right] dy \\
 & + \frac{1}{2}G \int_0^l S k_{xy} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cos^2(\dot{\phi}t) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sin^2(\dot{\phi}t) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \sin(2\dot{\phi}t) \right] dy \\
 & + \frac{1}{2}G \int_0^l S k_{xy} [\theta^2 \sin^2(\dot{\phi}t) + \psi^2 \cos^2(\dot{\phi}t) + \theta\psi \sin(2\dot{\phi}t)] dy \\
 & + \frac{1}{2}G \int_0^l S k_{xy} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \theta \sin(2\dot{\phi}t) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \psi \cos^2(\dot{\phi}t) \right] dy \\
 & + \frac{1}{2}G \int_0^l S k_{xy} \left[-2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \theta \sin^2(\dot{\phi}t) - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \psi \sin(2\dot{\phi}t) \right] dy \\
 & + \frac{1}{2}G \int_0^l S k_{yz} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \sin^2(\dot{\phi}t) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \cos^2(\dot{\phi}t) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \sin(2\dot{\phi}t) \right] dy \\
 & + \frac{1}{2}G \int_0^l S k_{yz} [\theta^2 \cos^2(\dot{\phi}t) + \psi^2 \sin^2(\dot{\phi}t) - \theta\psi \sin(2\dot{\phi}t)] dy \\
 & + \frac{1}{2}G \int_0^l S k_{yz} \left[- \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \theta \sin(2\dot{\phi}t) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \psi \sin^2(\dot{\phi}t) \right] dy \\
 & + \frac{1}{2}G \int_0^l S k_{yz} \left[-2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \theta \cos^2(\dot{\phi}t) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \psi \sin(2\dot{\phi}t) \right] dy \\
 & + \frac{1}{2}P \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \sin^2(\dot{\phi}t) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \cos^2(\dot{\phi}t) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \sin(2\dot{\phi}t) \right] dy \\
 & + \frac{1}{2}P \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cos^2(\dot{\phi}t) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sin^2(\dot{\phi}t) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \sin(2\dot{\phi}t) \right] dy
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Finalement, dans le cas le plus courant d'un arbre symétrique, où $I_{G_x} = I_{G_z} = I_G$, Eq. (2.20a), et $k_{xy} = k_{yz} = k_y$, Eq. (2.20c), l'expression de l'énergie de déformation totale de l'arbre se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} = & \frac{1}{2}EI_G \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dy \\
 & + \frac{1}{2}G S k_y \int_0^l \left[\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \psi + \psi^2}_{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right)^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \theta + \theta^2}_{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right)^2} \right] dy , \\
 & + \frac{1}{2}P \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

de telle sorte que les coefficients périodiques s'annulent. La deuxième ligne de l'Eq. (2.61) laisse apparaître les identités remarquables $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi\right)^2$ et $\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta\right)^2$. Ainsi, l'énergie de déformation totale de l'arbre s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \underbrace{\frac{1}{2}EI_G \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 \right] dy}_{\text{Flexion}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2}G S k_y \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta\right)^2 \right] dy}_{\text{Cisaillement}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2}P \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] dy}_{\text{Couplage Longitudinal - Transversal}} \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.2 Équations du mouvement d'un rotor

Les éléments constitutifs d'un rotor présentés dans la Section 2.1 sont modélisés grâce à la méthode des éléments finis dont le développement est présenté dans l'Annexe A.5. L'application des équations de Lagrange, Eq. (2.2), permet d'obtenir le système matriciel des n_δ équations différentielles régissant le mouvement d'un rotor :

$$\underbrace{[M_R + M_T + M_d]}_M \ddot{\delta}(t) + \underbrace{[C_G(\dot{\phi}) + C_{G_d}(\dot{\phi}) + C_p]}_{C(\dot{\phi})} \dot{\delta}(t) + \underbrace{[K_f + K_G + K_p]}_K \delta(t) = \mathcal{F}(t) + \mathcal{F}_v \quad (2.63)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) = & \underbrace{\mathcal{F}_r}_{\text{Charges Réparties}} + \underbrace{\mathcal{F}_b^c \cos(\dot{\phi}t) + \mathcal{F}_b^s \sin(\dot{\phi}t)}_{\text{Balourd}} + \underbrace{\mathcal{F}_{as}^c \cos(s\dot{\phi}t) + \mathcal{F}_{as}^s \sin(s\dot{\phi}t)}_{\text{Force Asynchrone}} \\ & + \underbrace{\mathcal{F}_h^c \cos(\omega_h t) + \mathcal{F}_h^s \sin(\omega_h t)}_{\text{Force Harmonique}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

avec $\delta(t)$ le vecteur des degrés de liberté, M_d , M_R et M_T respectivement les matrices de masse symétriques des disques et de l'arbre dues aux translation et rotation de section, K_f , C_p respectivement les matrices de raideurs élastique et géométrique de l'arbre, C_G , C_{G_d} respectivement les matrices anti-symétriques gyroscopiques de l'arbre et des disques, K_p , C_p respectivement les matrices asymétriques de raideur et amortissement des paliers qui dépendent de $\dot{\phi}$. Le vecteur des forces nodales $\mathcal{F}(t)$ est contient charges réparties \mathcal{F}_r , balourds \mathcal{F}_b^c , \mathcal{F}_b^s , forces asynchrones \mathcal{F}_{as}^c , \mathcal{F}_{as}^s et forces harmoniques \mathcal{F}_h^c , \mathcal{F}_h^s . Le vecteur des forces dissipatives \mathcal{F}_v est dû à l'amortissement visqueux dans la structure dont différentes formes sont présentées dans l'Annexe A.5.9.

L'équation du mouvement Eq. (2.63) permet alors de déterminer : le diagramme de Campbell, les éventuelles zones d'instabilité, les réponses à différents types de forces d'excitation comme les balourds, les forces asynchrones ou harmoniques de direction fixe. Les différents points cités précédemment peuvent être obtenus par une méthode directe dans laquelle la dimension n_δ du système d'équations Eq. (2.63) est conservée.

Il est fréquent qu'un maillage contienne plus d'une centaine de nœuds, *i.e.* $N_e \geq 10^2$, ce qui implique un nombre important de degrés de liberté, *i.e.* $n_\delta \sim 8 \cdot 10^2$. La dimension n_δ des matrices

M , C , K du système Eq. (2.63) est donc régie par le nombre de degrés de liberté du modèle élément fini. En revanche, il est envisageable de réduire le nombre d'équations de l'Eq. (2.63) pour gagner du temps CPU nécessaire au calcul. Une solution consiste à avoir recours à une méthode de réduction du système en projetant ce dernier dans une base appropriée [25].

2.2.1 Structure dissipative en rotation. Méthode Directe

Déterminer les pulsations et formes propres d'une structure dissipative en rotation consiste à résoudre l'Eq. (2.63), à une vitesse de rotation donnée $\dot{\phi}$, en l'absence d'efforts extérieurs, telle que :

$$M\ddot{\delta}(t) + [C_v + C(\dot{\phi})]\dot{\delta}(t) + K\delta(t) = 0. \quad (2.65)$$

où $C_v \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$ est la matrice d'amortissement structurale définie dans l'Annexe A.5.9.

2.2.1.1 Détermination des éléments propres

La solution générale de l'Eq. (2.65) matricielle est une forme exponentielle bien connue :

$$\delta(t) = \Psi_k e^{r_k t}, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2n_\delta, \quad (2.66)$$

où $r_k \in \mathbb{C}$ est la k^e valeur propre associée à la k^e forme propre complexe $\Psi_k \in \mathbb{C}^{n_\delta}$, appelée également forme propre naturelle.

En introduisant l'Eq. (2.66) et ses dérivées temporelles dans l'Eq. (2.65), le problème aux valeurs propres généralisé a la forme :

$$(r_k^2 M + r_k [C_v + C(\dot{\phi})] + K) \Psi_k e^{r_k t} = 0, \quad e^{r_k t} \neq 0, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2n_\delta, \quad (2.67)$$

ou encore :

$$(r_k^2 M + r_k [C_v + C(\dot{\phi})] + K) \Psi_k = 0, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2n_\delta. \quad (2.68)$$

Selon une adaptation de la transformation de \mathcal{Z} uncan pour les systèmes amortis [36], il est possible d'ajouter à l'Eq. (2.65) une identité auxiliaire d'ordre n_δ , afin de ramener le problème aux valeurs propres quadratique, Eq. (2.67), de dimension n_δ en une forme linéaire de dimension $2n_\delta$, par l'adjonction de l'équation matricielle triviale suivante [41] :

$$M\dot{\delta}(t) - M\dot{\delta}(t) = 0. \quad (2.69)$$

Le système matriciel Eq. (2.65) exprimé dans l'espace d'état dont les degrés de liberté sont définis par le vecteur $y(t)$ incluant déplacements et vitesses tel que :

$$y(t) = \begin{pmatrix} \dot{\delta}(t) \\ \delta(t) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{\delta}(t) \\ \dot{\delta}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

a alors une forme augmentée [42; 43; 44; 45] :

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C_v + C(\dot{\phi}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\delta}(t) \\ \dot{\delta}(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\delta}(t) \\ \delta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

ou encore :

$$A\dot{y}(t) - By(t) = 0, \quad (2.72)$$

où les matrices $A, B \in \mathcal{M}_{2n_\delta, 2n_\delta}$, dites matrices augmentées ou composites, sont définies telles que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C_v + C(\dot{\phi}) \end{bmatrix}, \quad (2.73a)$$

$$B = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix}. \quad (2.73b)$$

La solution générale de l'Eq. d'état (2.71) est également une forme exponentielle telle que :

$$y(t) = {}^r\Upsilon_k e^{r_k t}, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2n_\delta. \quad (2.74)$$

où $r_k \in \mathbb{C}$ est définie dans l'Eq. (2.66) et ${}^r\Upsilon_k \in \mathbb{C}^{2n_\delta}$ est le k^e vecteur propre complexe du système d'état, appelé vecteur propre **droit** :

$${}^r\Upsilon_k = \begin{pmatrix} r_k & \Psi_k \\ & \Psi_k \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

En introduisant l'Eq. (2.74) dans l'Eq. (2.72), le système d'état amorti et gyroscopique s'écrit alors sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé tel que :

$$B^r \Upsilon_k = r_k A^r \Upsilon_k, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2n_\delta, \quad (2.76)$$

ou sous une forme plus compacte :

$$B^r \Upsilon = R A^r \Upsilon, \quad (2.77)$$

où les matrices $R \in \mathcal{M}_{2n_\delta, 2n_\delta}(\mathbb{C})$ et ${}^r\Upsilon \in \mathcal{M}_{2n_\delta, 2n_\delta}(\mathbb{C})$ contiennent respectivement les valeurs propres et vecteurs propres complexes **droits** associés du problème Eq. (2.77) tels que :

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & r_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & r_{2n_\delta} \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

et :

$${}^r\Upsilon = \left[\begin{pmatrix} r_1 & \Psi_1 \\ & \Psi_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} r_k & \Psi_k \\ & \Psi_k \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} r_{2n_\delta} & \Psi_{2n_\delta} \\ & \Psi_{2n_\delta} \end{pmatrix} \right]. \quad (2.79)$$

L'Eq. (2.77) devient alors :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_k & \Psi_k \\ & \Psi_k \end{pmatrix} = r_k \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C_v + C(\dot{\phi}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_k & \Psi_k \\ & \Psi_k \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Remarque 1: Les matrices A et B de l'Eq. (2.77) étant définies avec des coefficients réels, les valeurs propres et vecteurs propres associés sont bien évidemment complexes mais apparaissent par paires conjuguées telles que :

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & r_1^* & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & r_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & r_k^* & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & r_{n_\delta} & 0 \\ & & & & \dots & 0 \\ & & & & & r_{n_\delta}^* \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

et :

$${}^r\Upsilon = \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} r_1 & \Psi_1 \\ & \Psi_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} r_1^* & \Psi_1^* \\ & \Psi_1^* \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} r_k & \Psi_k \\ & \Psi_k \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{cc} r_k & \Psi_k^* \\ & \Psi_k^* \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} r_{n_\delta} & \Psi_{n_\delta} \\ & \Psi_{n_\delta} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} r_{n_\delta}^* & \Psi_{n_\delta}^* \\ & \Psi_{n_\delta}^* \end{array} \right) \end{array} \right], \quad (2.82)$$

où $()^*$ représente l'opérateur complexe conjugué.



Les valeurs propres complexes conjuguées de l'Eq. (2.80) sont donc du type, pour $k = 1, \dots, n_\delta$:

$$r_k = -\frac{\xi_k \omega_k}{(1 - \xi_k^2)^{\frac{1}{2}}} + j\omega_k, \quad (2.83a)$$

$$r_k^* = -\frac{\xi_k \omega_k}{(1 - \xi_k^2)^{\frac{1}{2}}} - j\omega_k, \quad (2.83b)$$

où ω_k et ξ_k sont respectivement les k^e pulsation propre et facteur d'amortissement visqueux du système amorti et gyroscopique exprimés à l'aide des Eq. (2.83a) et Eq. (2.83b) :

$$\omega_k = \frac{1}{2}j(r_k^* - r_k), \quad (2.84a) \quad \xi_k = \left[\frac{(r_k^* + r_k)^2}{(r_k^* + r_k)^2 - (r_k^* - r_k)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.84b)$$

Les vecteurs propres complexes conjugués associés à r_k et r_k^* s'écrivent alors :

$${}^r\Upsilon_k = \Re({}^r\Upsilon_k) + j\Im({}^r\Upsilon_k), \quad (2.85a) \quad {}^r\Upsilon_k^* = \Re({}^r\Upsilon_k) - j\Im({}^r\Upsilon_k), \quad (2.85b)$$

où \Re et \Im représentent respectivement les parties réelle et imaginaire. Ainsi, les pulsations propres ω_k et vecteurs propres Ψ_k permettent de tracer le diagramme de Campbell et d'en déduire les valeurs des vitesses critiques de rotation. Le vecteur des degrés de liberté $\delta(t)$ s'obtient finalement par la relation suivante [46; 47] :

$$\delta(t) = \Psi_k e^{r_k t} + \Psi_k^* e^{r_k^* t}, \quad \text{avec } k = 1, \dots, n_\delta. \quad (2.86)$$

Remarque 2: Si l'on a la condition suivante :

$$\Re(r_k) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\xi_k \omega_k}{(1 - \xi_k^2)^{\frac{1}{2}}} > 0, \quad (2.87)$$

alors le système est instable.



Remarque 3: La matrice A de l'Eq. (2.77) n'étant pas symétrique, il est possible d'écrire un second problème aux valeurs propres, appelé problème aux valeurs propres adjoint qui admet des valeurs propres identiques à celles du problème de l'Eq. (2.77), mais des vecteurs propres complexes différents et appelés vecteurs propres *gauches*.



En effet, le problème adjoint de l'Eq. (2.68) s'écrit :

$$\Theta_k^t (r_k^2 M + r_k [C_v + C(\dot{\phi})] + K) = 0, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2n_\delta, \quad (2.88)$$

ou encore :

$$(r_k^2 M^t + r_k [C_v^t + C^t(\dot{\phi})] + K^t) \Theta_k = 0, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2n_\delta. \quad (2.89)$$

En utilisant l'identité auxiliaire triviale suivante :

$$r_k M^t \Theta_k - r_k M^t \Theta_k = 0, \quad (2.90)$$

et l'Eq. (2.89), on obtient un système de $2n_\delta$ équations du premier ordre dans l'espace d'état tel que :

$$\begin{bmatrix} M^t & 0 \\ 0 & -K^t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_k & \Theta_k \\ & \Theta_k \end{pmatrix} = r_k \begin{bmatrix} 0 & M^t \\ M^t & C_v^t + C^t(\dot{\phi}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_k & \Theta_k \\ & \Theta_k \end{pmatrix}, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2n_\delta. \quad (2.91)$$

ou encore :

$$B^{tl} \Upsilon_k = r_k A^{tl} \Upsilon_k, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2n_\delta, \quad (2.92)$$

où ${}^l \Upsilon_k \in \mathbb{C}^{2n_\delta}$ est le k^e vecteur propre complexe *gauche* du système d'état :

$${}^l \Upsilon_k = \begin{pmatrix} r_k & \Theta_k \\ & \Theta_k \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

Le système d'état adjoint amorti et gyroscopique s'écrit donc sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé tel que :

$$B^{tl} \Upsilon = R A^{tl} \Upsilon, \quad (2.94)$$

où la matrice $R \in \mathcal{M}_{2n_\delta, 2n_\delta}(\mathbb{C})$ est définie dans l'Eq. (2.81) et ${}^l \Upsilon \in \mathcal{M}_{2n_\delta, 2n_\delta}(\mathbb{C})$ est la matrice des vecteurs propres complexes *gauches* associés du problème Eq. (2.94) tels que :

$${}^l \Upsilon = \left[\begin{pmatrix} r_1 & \Theta_1 \\ & \Theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1^* & \Theta_1^* \\ & \Theta_1^* \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} r_k & \Theta_k \\ & \Theta_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_k^* & \Theta_k^* \\ & \Theta_k^* \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} r_{n_\delta} & \Theta_{n_\delta} \\ & \Theta_{n_\delta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{n_\delta}^* & \Theta_{n_\delta}^* \\ & \Theta_{n_\delta}^* \end{pmatrix} \right]. \quad (2.95)$$

2.2.1.2 Propriété de bi-orthogonalité des vecteurs propres complexes

En adoptant une démarche proche de celle employée dans la Section 2.2.2.2, et en considérant deux couples distincts d'éléments propres $\{r_k, {}^r \Upsilon_k\}$ et $\{r_q, {}^l \Upsilon_q\}$ respectivement solutions des Eq. (2.77) et Eq. (2.94), on a :

$${}^l \Upsilon_q^t B^r \Upsilon_k = r_k {}^l \Upsilon_q^t A^r \Upsilon_k, \quad (2.96a) \quad {}^r \Upsilon_k^t B^{tl} \Upsilon_q = r_q {}^r \Upsilon_k^t A^{tl} \Upsilon_q. \quad (2.96b)$$

L'Eq. (2.96b) peut s'écrire de la manière suivante :

$$({}^l \Upsilon_q^t B^r \Upsilon_k)^t = r_q ({}^l \Upsilon_q^t A^r \Upsilon_k)^t \Leftrightarrow {}^l \Upsilon_q^t B^r \Upsilon_k = r_q {}^l \Upsilon_q^t A^r \Upsilon_k. \quad (2.97)$$

En soustrayant l'Eq. (2.96a) à l'Eq. (2.97), on obtient l'égalité suivante :

$$(r_q - r_k) {}^l \Upsilon_q^t A^r \Upsilon_k = 0. \quad (2.98)$$

Les valeurs propres r_k et r_q étant considérées comme distinctes, l'Eq. (2.98) conduit à une première propriété d'orthogonalité entre les vecteurs propres complexes *droits* et *gauches*, *i.e.* vis-à-vis de la matrice composite A :

$${}^l \Upsilon_q^t A^r \Upsilon_k = 0, \quad \text{avec } q \neq k. \quad (2.99)$$

En substituant l'Eq. (2.99) dans l'Eq. (2.97), il vient alors une seconde propriété d'orthogonalité entre formes propres complexes, *i.e.* vis-à-vis de la matrice B :

$${}^l\Upsilon_q^t B^r \Upsilon_k = 0, \quad \text{avec} \quad q \neq k. \quad (2.100)$$

Les propriétés de bi-orthogonalité des formes propres complexes s'écrivent alors [48; 41; 49] :

$${}^l\Upsilon_q^t A^r \Upsilon_k = \delta_{qk} a_{q,k}, \quad (2.101a) \quad {}^l\Upsilon_q^t B^r \Upsilon_k = \delta_{qk} b_{q,k}, \quad (2.101b)$$

où $a_{q,k}, b_{q,k} \in \mathbb{C}$ et δ_{qk} représente le symbole de Kronecker.

Finalement, la connaissance des vecteurs propres complexes **droits** et **gauches** et les Eq. (2.101a) et Eq. (2.101b) permettent d'obtenir un nouveau système de $2n_\delta$ équations différentielles découplées, impliquant un gain de temps notable lors du calcul des réponses dynamiques.

2.2.2 Structure dissipative en rotation. Méthode Pseudo-modale

Prédire le comportement dynamique d'un système nécessite de définir le spectre fréquentiel d'intérêt qui correspond à la réponse dynamique du système. La méthode pseudo-modale consiste à projeter l'Eq. (2.63) dans une base modale du système à l'arrêt [50; 51] représentative du spectre d'intérêt. Cette méthode implique une réduction notable du temps de calcul, la précision des résultats dépendant du nombre de modes propres considérés.

2.2.2.1 Détermination des éléments propres d'une structure à l'arrêt

Soit m le nombre de modes propres considérés et suffisamment significatifs de la dynamique du système. Une base modale du système est obtenue en considérant le système conservatif associé de l'Eq. (2.63) en l'absence d'efforts extérieurs tel que :

$$M\ddot{\delta}(t) + K^* \delta(t) = 0 \quad \text{avec} \quad K^* = (K_f + K_G + K_p^*), \quad (2.102)$$

où K_p^* est la matrice de raideur globale des paliers dont les coefficients $k_{p_{xz}}$ et $k_{p_{zx}}$ sont annulés afin de rendre la matrice de raideur globale K^* symétrique et de découpler la dynamique du système dans les plans $\{\bar{y}, \bar{z}\}$ et $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ durant le calcul de la base modale.

La solution de l'Eq. (2.102) est alors de la forme :

$$\delta(t) = \varphi_k p_k(t) \quad \text{avec} \quad p_k(t) = e^{j\omega_k t}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.103)$$

avec j l'unité imaginaire, $\omega_k \in \mathbb{R}$ la k^e pulsation propre et $\varphi_k \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ et $p_k \in \mathbb{R}$ respectivement les k^e forme propre et coordonnée généralisée. En substituant l'Eq. (2.103) dans l'Eq. (2.102), il vient alors :

$$(-\omega_k^2 M \varphi_k + K^* \varphi_k) p_k = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.104)$$

dont la solution non triviale est donnée par le couple $\{\lambda_k, \varphi_k\}$, $k = 1, \dots, m$ tel que :

$$K^* \Phi = M \Phi \Lambda, \quad (2.105)$$

où $\Lambda \in \mathcal{M}_{m,m}$ est une matrice diagonale contenant les m premières valeurs propres λ_k telle que :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda_k = \omega_k^2, \quad (2.106)$$

et $\Phi_\omega \in \mathcal{M}_{n_\delta, m}$ est la matrice contenant les m premières formes propres associées φ_k telle que :

$$\Phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots, \varphi_m]. \quad (2.107)$$

2.2.2.2 Propriété d'orthogonalité des vecteurs propres

Ainsi, en considérant deux couples distincts d'éléments propres $\{\lambda_k, \varphi_k\}$ et $\{\lambda_q, \varphi_q\}$ solutions de l'Eq. (2.104), on a :

$$-\omega_k^2 \varphi_q^t M \varphi_k + \varphi_q^t K^* \varphi_k = 0, \quad (2.108a) \quad -\omega_q^2 \varphi_k^t M \varphi_q + \varphi_k^t K^* \varphi_q = 0. \quad (2.108b)$$

En gardant en mémoire que les matrices de masse et raideur M et K^* sont symétriques, il est possible de permuter les indices k et q de l'Eq. (2.108b) tel que :

$$-\omega_q^2 \varphi_q^t M \varphi_k + \varphi_q^t K^* \varphi_k = 0. \quad (2.109)$$

En soustrayant l'Eq. (2.108a) à l'Eq. (2.109), on obtient l'égalité suivante :

$$(\omega_q^2 - \omega_k^2) \varphi_q^t M \varphi_k = 0, \quad (2.110)$$

qui, en vertu du fait que les pulsations propres ω_k et ω_q sont distinctes, conduit à la première propriété d'orthogonalité des formes propres, *i.e.* vis-à-vis de la matrice de masse M :

$$\varphi_q^t M \varphi_k = 0, \quad \text{avec } q \neq k. \quad (2.111)$$

En substituant l'Eq. (2.111) dans l'Eq. (2.109), il vient alors la seconde propriété d'orthogonalité des formes propres, *i.e.* vis-à-vis de la matrice de raideur K^* :

$$\varphi_q^t K^* \varphi_k = 0, \quad \text{avec } q \neq k. \quad (2.112)$$

Ainsi, les propriétés d'orthogonalité remarquables des formes propres s'écrivent ainsi :

$$\varphi_k^t M \varphi_q = \delta_{kq} \gamma_k, \quad (2.113a) \quad \varphi_i^t K^* \varphi_j = \delta_{kq} \kappa_k, \quad (2.113b)$$

où γ_k et κ_k sont respectivement les k^e masse et raideur associées à la forme propre φ_k , δ_{kq} représente le symbole de Kronecker défini tel que :

$$\delta_{kq} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq q \\ 1 & \text{si } k = q \end{cases}. \quad (2.114)$$

La projection des équations de l'Eq. (2.63) dans la base modale Φ est réalisée en considérant le changement de variable de l'Eq. (2.103). Ainsi, en substituant l'Eq. (2.103) dans les expressions des énergies cinétiques de l'arbre Eq. (A.128), des balourds Eq. (A.179) et des disques Eq. (A.115), de l'énergie de déformation de l'arbre Eq. (A.159), du travail virtuel de efforts des paliers Eq. (A.177) et d'autres excitations extérieures, l'Eq. (2.63) devient un système d'équations dites *normales* telles que :

$$\gamma \ddot{p}(t) + [\Phi^t C (\dot{\phi}) \Phi] \dot{p}(t) + \kappa p(t) = \Phi^t \mathcal{F}(t) + \Phi^t \mathcal{F}_v, \quad (2.115)$$

où apparaissent les matrices de masse $\gamma \in \mathcal{M}_{m, m}$ et de raideur modales $\kappa \in \mathcal{M}_{m, m}$ définies telle que :

$$\gamma = \Phi^t M \Phi, \quad (2.116a) \quad \kappa = \Phi^t K \Phi. \quad (2.116b)$$

Cette méthode est particulièrement adaptée pour l'étude des structure linéaires et lorsque le spectre fréquentiel d'intérêt ne contient que les quelques premiers modes propres de la structure.

2.2.2.3 Détermination des éléments propres

L'Eq. (2.63) projetée dans la base modale de la structure à l'arrêt, Eq. (2.107), et en l'absence d'efforts extérieurs généralisés s'écrit :

$$\gamma \ddot{p}(t) + \eta(\dot{\phi}) \dot{p}(t) + \kappa p(t) = 0. \quad (2.117)$$

La solution de l'Eq. (2.117) est une forme exponentielle :

$$p(t) = \mathcal{P}_k e^{r_k t}, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2m, \quad (2.118)$$

où $r_k \in \mathbb{C}$ est la k^e valeur propre associée à la k^e vecteur propre complexe $\mathcal{P}_k \in \mathbb{C}^m$. En substituant l'Eq. (2.118) dans l'Eq. (2.117), le système amorti et gyroscopique, dans l'espace modal, s'écrit alors sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé tel que :

$$(r_k^2 \gamma + r_k \eta(\dot{\phi}) + \kappa) \mathcal{P}_k e^{r_k t} = 0, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2m, \quad (2.119)$$

ou encore :

$$(r_k^2 \gamma + r_k \eta(\dot{\phi}) + \kappa) \mathcal{P}_k = 0, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2m. \quad (2.120)$$

Le système homogène Eq. (2.119) de m équations linéaires admet donc $2m$ solutions non triviales distinctes définissant les valeurs propres et vecteurs propres de la structure dans l'espace modal. De la même manière que dans la Section 2.2.1.1, en considérant l'équation triviale :

$$\gamma \dot{p}(t) - \gamma \dot{p}(t) = 0, \quad (2.121)$$

permet d'exprimer un système de $2m$ équations différentielles du premier ordre. En écrivant le système matriciel Eq. (2.117) dans l'espace d'état modal dont les degrés de liberté sont définis par le vecteur $u(t)$ incluant coordonnées généralisées et leurs dérivées temporelles tel que :

$$u(t) = \begin{pmatrix} \dot{p}(t) \\ p(t) \end{pmatrix}. \quad (2.122)$$

L'Eq. (2.117) s'écrit donc sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \eta(\dot{\phi}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{p}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.123)$$

ou encore :

$$\mathcal{A} \dot{u}(t) - \mathcal{B} u(t) = 0, \quad (2.124)$$

où les matrices \mathcal{A} , $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{2m, 2m}$, dites matrices augmentées ou composites, sont définies telles que :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \eta(\dot{\phi}) \end{bmatrix}, \quad (2.125a) \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\kappa \end{bmatrix}. \quad (2.125b)$$

La solution générale de l'Eq. (2.123) d'état est également une forme exponentielle telle que :

$$u(t) = {}^r \mathcal{U}_k e^{r_k t}, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2m. \quad (2.126)$$

où $r_k \in \mathbb{C}$ est définie dans l'Eq. (2.118) et ${}^r \mathcal{U}_k \in \mathbb{C}^{2m}$ est le k^e vecteur propre complexe **droit** du système d'état modal :

$${}^r \mathcal{U}_k = \begin{pmatrix} r_k & \mathcal{P}_k \\ & \mathcal{P}_k \end{pmatrix}. \quad (2.127)$$

En substituant l'Eq. (2.126) dans l'Eq. (2.124), le système d'état modal amorti et gyroscopique s'écrit alors sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé tel que :

$$\mathcal{B}^r \mathcal{U}_k = r_k \mathcal{A}^r \mathcal{U}_k, \quad \text{avec} \quad k = 1, \dots, 2m, \quad (2.128)$$

ou sous une forme plus compacte :

$$\mathcal{B}^r \mathcal{U} = R \mathcal{A}^r \mathcal{U}, \quad (2.129)$$

où les matrices $R \in \mathcal{M}_{2m, 2m}(\mathbb{C})$ et ${}^r \mathcal{U} \in \mathcal{M}_{2m, 2m}(\mathbb{C})$ contiennent respectivement, dû à la nature des matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} , les paires conjuguées de valeurs propres et vecteurs propres complexes **droits** associés du problème Eq. (2.129) tels que :

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & r_1^* & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & r_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & r_k^* & \vdots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & r_m & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & r_m^* \end{bmatrix}, \quad (2.130)$$

et :

$${}^r \mathcal{U} = \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} r_1 & \mathcal{P}_1 \\ & \mathcal{P}_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} r_1^* & \mathcal{P}_1^* \\ & \mathcal{P}_1^* \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} r_k & \mathcal{P}_k \\ & \mathcal{P}_k \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{cc} r_k & \mathcal{P}_k^* \\ & \mathcal{P}_k^* \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} r_{n_\delta} & \mathcal{P}_m \\ & \mathcal{P}_m \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} r_{n_\delta}^* & \mathcal{P}_m^* \\ & \mathcal{P}_m^* \end{array} \right) \end{array} \right], \quad (2.131)$$

où $()^*$ représente l'opérateur complexe conjugué.

Les valeurs propres complexes conjuguées r_k et r_k^* sont de la même forme que dans les Eq. (2.83a) et Eq. (2.83b). Les vecteurs propres complexes conjugués associés à r_k et r_k^* s'écrivent alors :

$${}^r \mathcal{U}_k = \Re({}^r \mathcal{U}_k) + j \Im({}^r \mathcal{U}_k), \quad (2.132a) \quad {}^r \mathcal{U}_k^* = \Re({}^r \mathcal{U}_k) - j \Im({}^r \mathcal{U}_k), \quad (2.132b)$$

Ainsi, les pulsations propres ω_k et vecteurs propres \mathcal{P}_k permettent de tracer le diagramme de Campbell et d'en déduire les valeurs des vitesses critiques de rotation. En utilisant les Eq. (2.103) et Eq. (2.118), le vecteur des degrés de liberté $\delta(t)$ s'exprime ainsi :

$$\delta(t) = \Phi \mathcal{P}_k e^{r_k t} + \Phi \mathcal{P}_k^* e^{r_k^* t}, \quad \text{avec} \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.133)$$

Les formes propres complexes Ψ_k et Ψ_k^* de la structure tournante sont alors reliées aux vecteurs propres complexes \mathcal{P}_k et \mathcal{P}_k^* par les relations suivantes, pour $k = 1, \dots, m$:

$$\Psi_k = \Phi \mathcal{P}_k, \quad (2.134a) \quad \Psi_k^* = \Phi \mathcal{P}_k^*. \quad (2.134b)$$

avec Φ la matrice contenant les formes propres de la base modale de la structure à l'arrêt et énergétiquement parfaite. La matrice \mathcal{A} n'étant pas symétrique, le problème adjoint de l'Eq. (2.120) faisant apparaître les vecteurs propres **gauches** s'écrit :

$$\mathcal{O}_k^t (r_k^2 \gamma + r_k \eta(\dot{\phi}) + \kappa) = 0, \quad \text{avec} \quad k = 1, \dots, 2m, \quad (2.135)$$

ou encore :

$$(r_k^2 \gamma^t + r_k \eta^t(\dot{\phi}) + \kappa^t) \mathcal{O}_k = 0, \quad \text{avec} \quad k = 1, \dots, 2m. \quad (2.136)$$

En utilisant l'identité auxiliaire triviale suivante :

$$r_k \gamma^t \mathcal{O}_k - r_k \gamma^t \mathcal{O}_k = 0, \quad (2.137)$$

et l'Eq. (2.136), on obtient un système de $2m$ équations du premier ordre dans l'espace d'état tel que :

$$\begin{bmatrix} \gamma^t & 0 \\ 0 & -\kappa^t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_k & \mathcal{O}_k \\ \mathcal{O}_k & \mathcal{O}_k \end{pmatrix} = r_k \begin{bmatrix} 0 & \gamma^t \\ \gamma^t & \eta^t(\dot{\phi}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_k & \mathcal{O}_k \\ \mathcal{O}_k & \mathcal{O}_k \end{pmatrix}, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2m. \quad (2.138)$$

ou encore :

$$\mathcal{B}^{tl} \mathcal{U}_k = r_k \mathcal{A}^{tl} \mathcal{U}_k, \quad \text{avec } k = 1, \dots, 2m, \quad (2.139)$$

où les matrices composites \mathcal{A} , $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{2m,2m}$ sont définies dans les Eq. (2.125a) et Eq. (2.125b), $r_k \in \mathbb{C}$ est définie dans l'Eq. (2.118) et ${}^l \mathcal{U}_k \in \mathbb{C}^{2m}$ est le k^e vecteur propre complexe *gauche* du système d'état modal :

$${}^l \mathcal{U}_k = \begin{pmatrix} r_k & \mathcal{O}_k \\ \mathcal{O}_k & \mathcal{O}_k \end{pmatrix}. \quad (2.140)$$

Le système d'état modal adjoint amorti et gyroscopique s'écrit donc sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé tel que :

$$\mathcal{B}^{tl} \mathcal{U} = R \mathcal{A}^{tl} \mathcal{U}, \quad (2.141)$$

où les matrices $R \in \mathcal{M}_{2m,2m}(\mathbb{C})$ est définie dans l'Eq. (2.130) et ${}^l \mathcal{U} \in \mathcal{M}_{2m,2m}(\mathbb{C})$ est la matrice des vecteurs propres complexes *gauches* associés du problème Eq. (2.141) tels que :

$${}^l \mathcal{U} = \left[\begin{pmatrix} r_1 & \mathcal{O}_1 \\ \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1^* & \mathcal{O}_1^* \\ \mathcal{O}_1^* & \mathcal{O}_1^* \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} r_k & \mathcal{O}_k \\ \mathcal{O}_k & \mathcal{O}_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_k^* & \mathcal{O}_k^* \\ \mathcal{O}_k^* & \mathcal{O}_k^* \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} r_{n_\delta} & \mathcal{O}_m \\ \mathcal{O}_m & \mathcal{O}_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{n_\delta}^* & \mathcal{O}_m^* \\ \mathcal{O}_m^* & \mathcal{O}_m^* \end{pmatrix} \right] \quad (2.142)$$

Les formes propres complexes *gauches* Θ_k et Θ_k^* de la structure tournante sont alors reliées aux vecteurs propres complexes \mathcal{O}_k et \mathcal{O}_k^* par les relations suivantes, pour $k = 1, \dots, m$:

$$\Theta_k = \Phi \mathcal{O}_k, \quad (2.143a) \quad \Theta_k^* = \Phi \mathcal{O}_k^*. \quad (2.143b)$$

Remarque 4: Les vecteurs propres complexes *droits*, contenus dans la matrice ${}^r \mathcal{U}$, et *gauches*, contenus dans la matrice ${}^l \mathcal{U}$, respectent les mêmes propriétés de bi-orthogonalité vis-à-vis des matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} . Ainsi, ces relations deviennent :

$${}^l \mathcal{U}_q^t \mathcal{A}^r \mathcal{U}_k = \delta_{qk} \alpha_{q,k}, \quad (2.144a) \quad {}^l \mathcal{U}_q^t \mathcal{B}^r \mathcal{U}_k = \delta_{qk} \beta_{q,k}, \quad (2.144b)$$

où $\alpha_{q,k}, \beta_{q,k} \in \mathbb{C}$.



L'interprétation physique des formes propres complexes qui n'est *a priori* pas aisée et l'Annexe A.5.10 s'attache donc à l'expliquer. Celles-ci sont décrites par des orbites elliptiques dont les caractéristiques sont propres à chacun des nœuds du rotor.

2.2.3 Diagramme de Campbell ou le problème d'appariement des formes propres complexes

Un diagramme de Campbell représente les m premières fréquences propres f_k (Hz) :

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.145)$$

d'une structure tournante en fonction de sa vitesse de rotation propre $\dot{\phi}$ ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Si l'on note $\dot{\phi}_r$ la vitesse de rotation du rotor exprimée en ($\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$), la relation entre $\dot{\phi}_r$ et $\dot{\phi}$ est alors :

$$\dot{\phi}_r = \frac{60}{2\pi} \dot{\phi} = \frac{30}{\pi} \dot{\phi}. \quad (2.146)$$

L'Eq. (2.65) est résolue pour différentes vitesses de rotation $\dot{\phi}_i$, $i = 1, \dots, n_{\dot{\phi}}$, telles que :

$$\dot{\phi} = [\dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_i, \dot{\phi}_{i+1}, \dots, \dot{\phi}_{n_{\dot{\phi}}}], \quad (2.147)$$

de manière à obtenir, pour chaque vitesse de rotation $\dot{\phi}_i$, les m premières pulsations propres ω_k^i généralement ordonnées de manière croissante lors du processus de résolution des problèmes aux valeurs propres, Eq. (2.68) ou Eq. (2.120), et contenues dans le vecteur $\omega^i \in \mathbb{R}^m$:

$$\omega^i = [\omega_1^i, \dots, \omega_k^i, \dots, \omega_m^i], \quad (2.148)$$

et formes propres complexes associées $\Psi_k^i \in \mathbb{C}^{n_{\delta}}$ contenues dans la matrice $\Psi^i \in \mathcal{M}_{n_{\delta}, m}$:

$$\Psi^i = [\Psi_1^i, \dots, \Psi_k^i, \dots, \Psi_m^i]. \quad (2.149)$$

La définition ci-dessus d'un diagramme de Campbell est cependant incomplète. En effet, le diagramme de Campbell représente l'évolution des m premières fréquences propres, en fonction de $\dot{\phi}_r$, associées à chaque forme propre complexe Ψ_k . Il est donc nécessaire de pouvoir identifier, à chaque vitesse de rotation $\dot{\phi}_i$, la forme propre complexe Ψ_k^i associée une pulsation propre ω_q^i , $k, q = 1, \dots, m$. En effet, l'inégalité $q \neq k$ est fréquemment vérifiée lorsque le système présente des croisements de modes, c'est-à-dire lorsque la forme propre complexe Ψ_k^i associée à la k^e pulsation ω_k^i , à la vitesse ϕ_i , ne correspond pas à la forme Ψ_k^{i+1} associée à la k^e pulsation ω_k^{i+1} , à la vitesse ϕ_{i+1} .

Notation 3: L'exposant $()^i$ est relatif à la vitesse de rotation $\dot{\phi}_i$. Cette notation pourra être éventuellement appliquée ultérieurement à des quantités sans que ces dernières ne soient définies explicitement comme étant les quantités calculées à la i^e vitesse de rotation $\dot{\phi}_i$.



2.2.3.1 Critères de corrélation de formes propres

Une méthode simple consiste à utiliser un indicateur de corrélation modal qui permet d'estimer le degré de similitude de deux vecteurs (complexes ou non) appartenant à deux bases distinctes. Cet indicateur est souvent utilisé pour vérifier la colinéarité entre les formes propres de bases modales expérimentale ou numérique [52; 53; 54].

Soit deux ensembles de m formes propres (ou bases) notées respectivement $\mathcal{V}^a \in \mathcal{M}_{n_{\delta}, m}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{V}^b \in \mathcal{M}_{n_{\delta}, m}(\mathbb{C})$. Un indicateur de corrélation modale peut alors être défini par la relation suivante :

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}_k^a, \mathcal{V}_q^b) = \mathcal{I}_{k,q} = \frac{|\mathcal{V}_k^{a*} \mathcal{W} \mathcal{V}_q^b|^2}{[\mathcal{V}_k^{a*} \mathcal{W} \mathcal{V}_k^a] \cdot [\mathcal{V}_q^{b*} \mathcal{W} \mathcal{V}_q^b]}, \quad (2.150)$$

où $\mathcal{I} \in \mathcal{M}_{m,m}$ est une matrice de corrélation modale, \mathcal{V}_k^a est la k forme propre de l'ensemble \mathcal{V}^a et \mathcal{V}_q^b est la q forme propre de l'ensemble \mathcal{V}^b . $()^*$ représente l'opérateur complexe conjugué et $||$ représente le module d'un nombre complexe. La matrice de corrélation modale \mathcal{I} contient des

termes tels que :

$$\mathcal{I}_{k,q} \in [0, 1]. \quad (2.151)$$

Dans une situation de corrélation modale parfaite, *i.e.* les deux ensembles sont identiques, la matrice \mathcal{I} sera une matrice identité tel que $\mathcal{I} = I \in \mathcal{M}_{m,m}$. En revanche, dans le cas où les deux ensembles de formes propres sont proches mais pas absolument identiques, la matrice \mathcal{I} contiendra des termes proches de l'unité et d'autres petits devant l'unité. On considère [55] qu'une corrélation est satisfaisante lorsque les termes diagonaux sont supérieurs à 0.8, $\mathcal{I}_{k,k} > 0.8$ et les termes extra-diagonaux sont inférieurs à 0.2, $\mathcal{I}_{k,q} < 0.2$.

Cette situation se rencontre fréquemment dans le cas de la comparaison deux ensembles de formes propres numérique et expérimentale dans une procédure d'optimisation ou d'identification. La matrice $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_{m,m}$ est une matrice de pondération qui peut prendre diverses formes. En effet :

- Si cette dernière est égale à une matrice **identité**, $\mathcal{W} = I \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$, alors la matrice de corrélation \mathcal{I} est appelée matrice MAC (Modal Assurance Criterion) [56; 57] telle que :

$$\text{MAC}(\mathcal{V}_k^a, \mathcal{V}_q^b) = \text{MAC}_{k,q}^{a,b} = \frac{|\mathcal{V}_k^{a*} \mathcal{V}_q^b|^2}{[\mathcal{V}_k^{a*} \mathcal{V}_k^a] \cdot [\mathcal{V}_q^{b*} \mathcal{V}_q^b]}. \quad (2.152)$$

- Si elle est égale à la matrice de **raideur**, $\mathcal{W} = K^* \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$, alors la matrice de corrélation \mathcal{I} est appelée matrice NCO (Normalized Cross Orthogonality) [58] telle que :

$$\text{NCO}_K(\mathcal{V}_k^a, \mathcal{V}_q^b) = \text{NCO}_{K,k,q}^{a,b} = \frac{|\mathcal{V}_k^{a*} K^* \mathcal{V}_q^b|^2}{[\mathcal{V}_k^{a*} K^* \mathcal{V}_k^a] \cdot [\mathcal{V}_q^{b*} K^* \mathcal{V}_q^b]}. \quad (2.153)$$

- De même, si celle-ci est égale à la matrice de **masse**, $\mathcal{W} = M \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$, alors la matrice de corrélation \mathcal{I} est également appelée matrice NCO telle que :

$$\text{NCO}_M(\mathcal{V}_k^a, \mathcal{V}_q^b) = \text{NCO}_{M,k,q}^{a,b} = \frac{|\mathcal{V}_k^{a*} M \mathcal{V}_q^b|^2}{[\mathcal{V}_k^{a*} M \mathcal{V}_k^a] \cdot [\mathcal{V}_q^{b*} M \mathcal{V}_q^b]}. \quad (2.154)$$

Remarque 5: Lorsque l'on souhaite comparer deux ensembles de modes propres **réels**, *i.e.* deux **bases modales** d'une structure libre énergétiquement parfaite, le choix d'utiliser la matrice de corrélation NCO permet alors d'estimer et de vérifier la colinéarité et surtout l'orthogonalité entre les formes propres des ensembles \mathcal{V}^a et \mathcal{V}^b , ce qui n'est pas garanti par la matrice de corrélation MAC présentée dans l'Eq. (2.152) [58]. La matrice de corrélation NCO (Eq. (2.153) et Eq. (2.154)) à l'avantage de faire apparaître clairement la notion d'orthogonalité introduite par la théorie de la superposition modale qui stipule que l'orthogonalité, entre deux formes propres distinctes issues d'une même **base modale**, est toujours définie par rapport aux matrices de raideur et de masse, Eq. (2.113a) et Eq. (2.113b).

Ainsi, selon le choix de la matrice de pondération (matrice de raideur ou de masse) et si l'on considère des formes propres réelles \mathcal{V}_k et \mathcal{V}_q issues de la même base modale, le critère NCO s'exprime de la manière suivante :

$$\text{NCO}_{K,k,q}(\mathcal{V}_k, \mathcal{V}_q) = \delta_{kq} \frac{\kappa_k}{\kappa_q}, \quad (2.155a) \quad \text{NCO}_{M,k,q}(\mathcal{V}_k, \mathcal{V}_q) = \delta_{kq} \frac{\gamma_k}{\gamma_q}. \quad (2.155b)$$



Il est possible de développer d'autres critères de corrélation. Les auteurs de [59] présentent un critère basé sur une combinaison de la matrice MAC et de l'énergie de déformation modale. Dans [60], les auteurs proposent un critère appelé IERI (Indicateur Energétique de Régularité d'Interface) qui est défini ainsi :

$$\text{IERI}(\mathcal{V}_k^a, \mathcal{V}_q^b) = \text{IERI}_{k,q}^{a,b} = \frac{\left| (\mathcal{V}_k^a - \mathcal{V}_q^b)^{*t} \mathcal{W} (\mathcal{V}_k^a - \mathcal{V}_q^b) \right|^2}{\left[\mathcal{V}_k^{a*} \mathcal{W} \mathcal{V}_k^a \right]^2 + \left[\mathcal{V}_q^{b*} \mathcal{W} \mathcal{V}_q^b \right]^2}. \quad (2.156)$$

Comme pour la matrice NCO, la matrice de pondération \mathcal{W} peut être soit la matrice de masse M , soit la matrice de raideur K^* de la structure considérée. Par ailleurs, à l'inverse des critères présentés précédemment dans les Eq. (2.152), Eq. (2.153) et Eq. (2.154), les termes diagonaux de la matrice de corrélation IERI tendent vers zéro si les deux ensembles \mathcal{V}^a et \mathcal{V}^b sont très proches alors que les termes extra-diagonaux sont supérieurs à l'unité.

En effet, si la matrice de pondération est la matrice de raideur et si l'on considère des formes propres réelles \mathcal{V}_k et \mathcal{V}_q issues de la même **base modale**, un terme de la matrice de corrélation IERI aura la forme suivante :

$$\text{IERI}_{k,q}(\mathcal{V}_k, \mathcal{V}_q) = \frac{\left[(\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_q)^{*t} K^* (\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_q) \right]^2}{\left[\mathcal{V}_k^t K^* \mathcal{V}_k \right]^2 + \left[\mathcal{V}_q^t K^* \mathcal{V}_q \right]^2}. \quad (2.157)$$

L'Eq. (2.113b) permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \text{IERI}_{k,q} &= \frac{[\kappa_k + \kappa_q - 2\delta_{kq}\kappa_k]^2}{\kappa_k^2 + \kappa_q^2}, \\ \Leftrightarrow \text{IERI}_{k,q} &= \frac{\kappa_k^2 + \kappa_q^2 + 2\kappa_k\kappa_q(1-2\delta_{kq})}{\kappa_k^2 + \kappa_q^2}. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Finalement, il vient alors :

$$\text{IERI}_{k,q} = 1 + 2(1 - 2\delta_{kq}) \frac{\kappa_k\kappa_q}{\kappa_k^2 + \kappa_q^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = q, \\ 1 + 2\frac{\kappa_k\kappa_q}{\kappa_k^2 + \kappa_q^2} > 1 & \text{si } k \neq q. \end{cases} \quad (2.159)$$

Il est important de rappeler que les critères NCO et IERI sont particulièrement adaptés à la corrélation de formes propres réelles issues de deux **bases modales** distinctes. Par ailleurs, les critères MAC, NCO et IERI peuvent aussi être utilisés pour corréler deux ensembles distincts de formes propres complexes mais aucun d'eux n'assure le contrôle des propriétés d'orthogonalité.

2.2.3.2 Un critère original pour le suivi des formes propres complexes en fonction de la vitesse de rotation

L'avantage de définir un critère traduisant les propriétés d'orthogonalité des formes propres complexes d'une structure est qu'il facilite énormément le processus d'appariement de formes propres complexes appartenant à deux bases distinctes. C'est notamment le cas lors du tracé d'un diagramme de Campbell où il s'agit d'apparier les ensembles de formes propres complexes Ψ^i et Ψ^{i+1} d'une structure en rotation calculées à deux vitesses de rotation successives $\dot{\phi}_i$ et $\dot{\phi}_{i+1}$.

En considérant la seconde propriété de bi-orthogonalité des vecteurs propres complexes **droits** ${}^r\Upsilon$ et **gauches** ${}^l\Upsilon$ du système d'état amorti et gyroscopique, et en tenant compte de leurs définitions

respectives, Eq. (2.75) et Eq. (2.93), l'Eq. (2.101b) devient alors :

$$\begin{aligned} {}^l\Upsilon_q^t B^r \Upsilon_k &= \delta_{qk} b_{q,k}, \\ \Leftrightarrow \left(r_q \Theta_q^t \quad \Theta_q^t \right) \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_k & \Psi_k \\ & \Psi_k \end{pmatrix} &= \delta_{qk} b_{q,k}, \end{aligned} \quad (2.160)$$

où Ψ_k et Θ_q sont respectivement les k^e formes propres complexes *droites* et *gauches* de la structure en rotation, associées aux valeurs propres complexes r_k et r_q définies dans les Eq. (2.83a) et Eq. (2.83b). Bien que les formes propres soient complexes, il est primordial de retenir que le symbole $()^t$ représente l'opérateur transposé et non pas l'opérateur transposé conjugué. L'Eq. (2.160) se développe alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \left(r_q \Theta_q^t \quad \Theta_q^t \right) \begin{pmatrix} r_k M \Psi_k \\ -K \Psi_k \end{pmatrix} &= \delta_{qk} b_{q,k}, \\ \Leftrightarrow \Theta_q^t (r_q r_k M - K) \Psi_k &= \delta_{qk} b_{q,k}. \end{aligned} \quad (2.161)$$

Remarque 6: Si les équations dynamiques de la structure en rotation ont été projetées dans la base modale de la structure à l'arrêt, il est bien sûr possible d'adopter la même démarche. En considérant la première propriété d'orthogonalité des vecteurs propres complexes *droits* ${}^r\mathcal{U}$ et *gauches* ${}^l\mathcal{U}$ du système d'état **modal** amorti et gyroscopique, et en tenant compte de leurs définitions respectives, Eq. (2.127) et Eq. (2.140), l'Eq. (2.144b) devient alors :

$$\begin{aligned} {}^l\mathcal{U}_q^t \mathcal{B}^r \mathcal{U}_k &= \delta_{qk} \beta_{q,k}, \\ \Leftrightarrow \left(r_q \mathcal{O}_q^t \quad \mathcal{O}_q^t \right) \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\kappa \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_k & \mathcal{P}_k \\ & \mathcal{P}_k \end{pmatrix} &= \delta_{qk} \beta_{q,k}, \end{aligned} \quad (2.162)$$

où \mathcal{P}_k et \mathcal{O}_q sont respectivement les k^e vecteurs propres complexes *droits* et *gauches* du système en rotation projeté dans la base modale des formes propres à l'arrêt, et associés aux valeurs propres complexes r_k et r_q . L'Eq. (2.162) développée donne :

$$\Leftrightarrow \mathcal{O}_q^t (r_q r_k \gamma - \kappa) \mathcal{P}_k = \delta_{qk} \beta_{q,k}. \quad (2.163)$$

~~~~~

Le développement d'un tel critère s'inspirant de l'Eq. (2.150) et présentant les propriétés d'orthogonalité des Eq. (2.161) ou Eq. (2.163) est alors envisageable et pourrait alors s'écrire :

$$\mathcal{I} \left( \left\{ \begin{pmatrix} r_k \\ \Theta_k \\ \Psi_k \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} r_q \\ \Theta_q \\ \Psi_q \end{pmatrix} \right\} \right) = \mathcal{I}_{k,q} = \frac{|\Theta_q^t (r_q r_k M - K) \Psi_k|^2}{[\Theta_q^t (r_q^2 M - K) \Psi_q] \cdot [\Theta_k^t (r_k^2 M - K) \Psi_k]}, \quad (2.164)$$

où  $r_q$  est la  $q^e$  valeur propre complexe, associée aux formes propres complexes *gauches*  $\Theta_q$  et  $r_k$  est la  $k^e$  valeur propre complexe, associée aux formes propres complexes *droites*  $\Psi_k$ .

En utilisant la définition de l'Eq. (2.161), il vient alors :

$$\mathcal{I}_{k,q} = \delta_{qk} \frac{|b_{q,k}|^2}{b_{q,q} \cdot b_{k,k}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq q \\ 1 & \text{si } k = q \end{cases}. \quad (2.165)$$

Ce critère de corrélation peut également s'appliquer à la méthode pseudo-modale :

$$\mathcal{I}_{k,q} = \frac{|\mathcal{O}_q^t (r_q r_k \gamma - \kappa) \mathcal{P}_k|^2}{[\mathcal{O}_q^t (r_q^2 \gamma - \kappa) \mathcal{P}_q] \cdot [\mathcal{O}_k^t (r_k^2 \gamma - \kappa) \mathcal{P}_k]}, \quad (2.166)$$

expression qui se simplifie à l'aide l'Eq. (2.163) par l'expression suivante :

$$\mathcal{I}_{k,q} = \delta_{qk} \frac{|\beta_{q,k}|^2}{\beta_{q,q} \cdot \beta_{k,k}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq q \\ 1 & \text{si } k = q \end{cases}. \quad (2.167)$$

Ce critère est particulièrement adapté aux formes propres d'une structure en rotation car elles sont complexes par nature. Ainsi, dans une stratégie d'appariement de formes propres complexes lors du tracé d'un diagramme de  $\mathcal{C}$  ampbell (cf. Section 2.2.3.3), on considère les ensembles de formes propres complexes **droits**  $\Psi^i$ ,  $\Psi^{i+1}$  et **gauches**  $\Theta^i$ ,  $\Theta^{i+1}$  et valeurs propres complexes associées  $R^i$ ,  $R^{i+1}$  obtenus respectivement aux vitesses de rotation  $\phi_i$  et  $\phi_{i+1}$ .

Ce critère développé étant estimé à partir des formes propres complexes **droites** et **gauches**, aux vitesse de rotations  $\phi_i$  et  $\phi_{i+1}$ , nous suggérons de le nommer **NC<sup>2</sup>O**, acronyme de "Normalized Cross Complex Orthogonality" tel que :

$$\text{NC}^2\text{O} \left( \left\{ \begin{pmatrix} r_k^i \\ \Theta_k^i \\ \Psi_k^i \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} r_q^{i+1} \\ \Theta_q^{i+1} \\ \Psi_q^{i+1} \end{pmatrix} \right\} \right) = \text{NC}^2\text{O}_{k,q}^{i,i+1}, \quad (2.168)$$

et a la forme suivante :

$$\text{NC}^2\text{O}_{k,q}^{i,i+1} = \frac{\left| (\Theta_q^{i+1})^t \mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1} \Psi_k^i \right|^2}{\left[ (\Theta_q^{i+1})^t \mathcal{W}_{q,q}^{i+1,i+1} \Psi_q^{i+1} \right] \cdot \left[ (\Theta_k^i)^t \mathcal{W}_{k,k}^{i,i} \Psi_k^i \right]}. \quad (2.169)$$

où  $\mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1}$  est une matrice de pondération définie telle que :

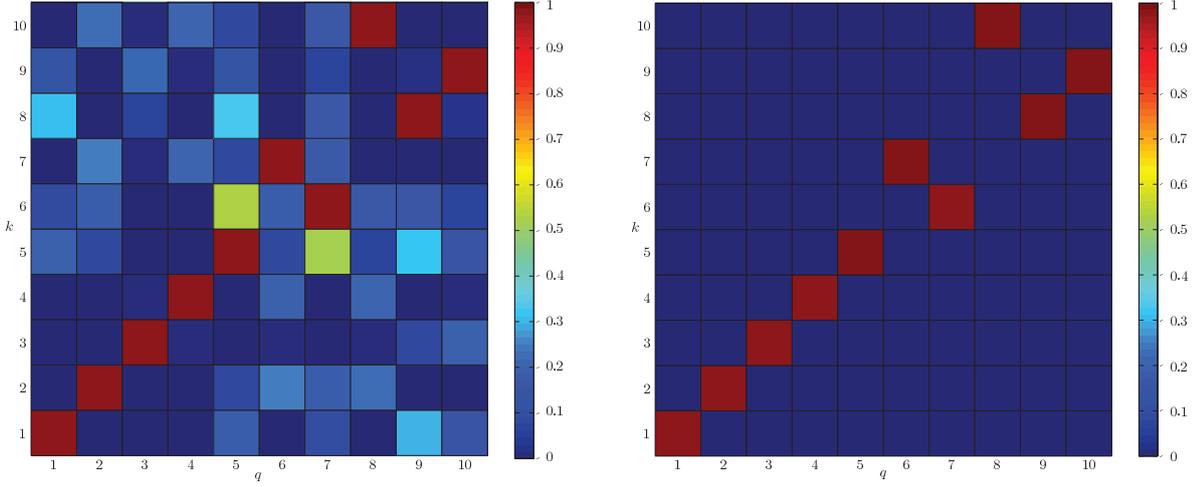
$$\mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1} = r_k^i r_q^{i+1} M - K, \quad (2.170)$$

où  $r_k^i$  est la  $k^e$  valeur propre complexe, associée aux formes propres complexes **droite**  $\Psi_k^i$  et **gauche**  $\Theta_k^i$ , calculée à la vitesse de rotation  $\phi_i$  et  $r_q^{i+1}$  est la  $q^e$  valeur propre complexe, associée aux formes propres complexes **droite**  $\Psi_k^{i+1}$  et **gauche**  $\Theta_k^{i+1}$ , calculée à la vitesse de rotation  $\phi_{i+1}$ .

**Remarque 7:** Il est important de constater que les éléments matriciels sont toujours écrits avec la convention "LICO". Ainsi, la composante  $\text{NC}^2\text{O}_{k,q}$  de la matrice de corrélation  $\text{NC}^2\text{O}$  sera associé à la  $k^e$  ligne et la  $q^e$  colonne. Par conséquent, remarquons qu'une permutation indicielle est effectuée entre les indices  $q$  et  $k$  associés aux coordonnées de la composante  $\text{NC}^2\text{O}_{k,q}$  et ceux associés aux formes propres complexes  $\Theta_q$  et  $\Psi_k$  dans le produit matriciel du numérateur  $(\Theta_q^{i+1})^t \mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1} \Psi_k^i$  de l'Eq. (2.169) : la forme propre complexe **gauche**  $\Theta_q$  est un élément propre du problème adjoint, Eq. (2.89), *i.e.* élément propre associé aux transposées des matrices de masse, amortissement, gyroscopique et raideur.



**Remarque 8:** En privilégiant la méthode de la superposition modale, Eq. (2.143a) et Eq. (2.143b),



(a) Matrice MAC obtenue à l'aide de deux ensembles de formes propres complexes *droits*  $\Psi^i$  et  $\Psi^{i+1}$ .

(b) Matrice  $\text{NC}^2\text{O}$  obtenue à l'aide de deux ensembles d'éléments propres complexes  $\{R^i, \Theta^i, \Psi^i\}$  et  $\{R^{i+1}, \Theta^{i+1}, \Psi^{i+1}\}$ .

FIGURE 2.10 – Visualisation des matrices de corrélation MAC et  $\text{NC}^2\text{O}$ .

l'Eq. (2.169) s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{NC}^2\text{O}_{k,q}^{i,i+1} &= \frac{|(\Phi \mathcal{O}_q^{i+1})^t \mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1} \Phi \mathcal{P}_k^i|^2}{[(\Phi \mathcal{O}_q^{i+1})^t \mathcal{W}_{q,q}^{i+1,i+1} \Phi \mathcal{P}_q^{i+1}] \cdot [(\Phi \mathcal{O}_k^i)^t \mathcal{W}_{k,k}^{i,i} \Phi \mathcal{P}_k^i]}, \\ \Leftrightarrow \text{NC}^2\text{O}_{k,q}^{i,i+1} &= \frac{|(\mathcal{O}_q^{i+1})^t \Phi^t \mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1} \Phi \mathcal{P}_k^i|^2}{[(\mathcal{O}_q^{i+1})^t \Phi^t \mathcal{W}_{q,q}^{i+1,i+1} \Phi \mathcal{P}_q^{i+1}] \cdot [(\mathcal{O}_k^i)^t \Phi^t \mathcal{W}_{k,k}^{i,i} \Phi \mathcal{P}_k^i]}, \end{aligned} \quad (2.171)$$

avec la matrice de pondération modale  $\Phi^t \mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1} \Phi \in \mathcal{M}_{m,m}$  définie telle que :

$$\Phi^t \mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1} \Phi = \Phi^t (r_k^i r_q^{i+1} M - K) \Phi \Leftrightarrow \Phi^t \mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1} \Phi = r_k^i r_q^{i+1} \gamma - \kappa. \quad (2.172)$$

et faisant apparaître les matrices de raideurs modales  $\kappa$  et de masses modales  $\gamma$ . L'équation Eq. (2.171) se simplifie alors sous la forme suivante :

$$\text{NC}^2\text{O}_{k,q}^{i,i+1} = \frac{|(\mathcal{O}_q^{i+1})^t (r_k^i r_q^{i+1} \gamma - \kappa) \mathcal{P}_k^i|^2}{[(\mathcal{O}_q^{i+1})^t (\{r_q^{i+1}\}^2 \gamma - \kappa) \mathcal{P}_q^{i+1}] \cdot [(\mathcal{O}_k^i)^t (\{r_k^i\}^2 \gamma - \kappa) \Phi \mathcal{P}_k^i]}. \quad (2.173)$$

On retrouve bien évidemment la propriété d'orthogonalité présentée dans l'Eq. (2.163).



La FIG. 2.10(a) illustre une matrice de corrélation MAC calculée entre deux bases distinctes de formes propres complexes  $\Psi^i$  et  $\Psi^{i+1}$ , obtenus aux vitesses de rotation successives  $\phi_i$  et  $\phi_{i+1}$ . Alors que la FIG. 2.10(b) représente la matrice de corrélation proposée  $\text{NC}^2\text{O}$  calculée à l'aide des éléments propres  $\{R^i, \Theta^i, \Psi^i\}$  et  $\{R^{i+1}, \Theta^{i+1}, \Psi^{i+1}\}$  obtenus aux mêmes vitesses de rotation.

La notion d'écart d'ordre de grandeur entre les différents termes de la matrice de corrélation  $\text{NC}^2\text{O}$  est alors significativement mis en évidence grâce aux FIG. 2.10(a) et FIG. 2.10(b). Le critère

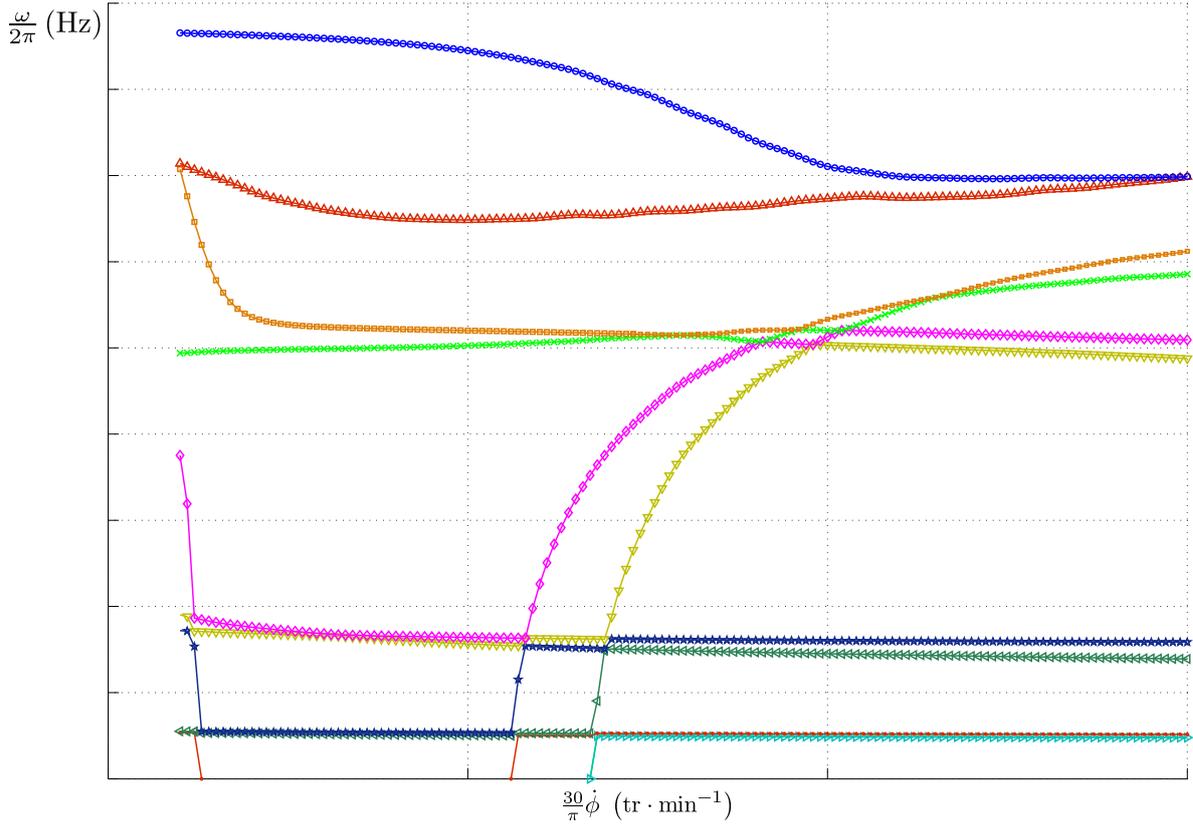


FIGURE 2.11 – Diagramme de Campbell utilisant un algorithme de tri basé sur l'ordonnement croissant des  $m$  premières fréquences propres ( $m = 10$ ) associées à chaque vitesse de rotation  $\dot{\phi}_i$ . Chaque courbe représente l'évolution de la  $k^e$  plus petite fréquence propre  $f_k$  sur l'intervalle  $\left[\frac{30}{\pi}\dot{\phi}_1; \frac{30}{\pi}\dot{\phi}_{n_\dot{\phi}}\right]$ ,  $f_1$  ( $\blacktriangleright$ ),  $f_2$  ( $\bullet$ ),  $f_3$  ( $\blacktriangleleft$ ),  $f_4$  ( $\star$ ),  $f_5$  ( $\blacktriangledown$ ),  $f_6$  ( $\blacklozenge$ ),  $f_7$  ( $\times$ ),  $f_8$  ( $\square$ ),  $f_9$  ( $\triangle$ ),  $f_{10}$  ( $\circ$ ).

de corrélation  $\text{NC}^2\text{O}$  a un comportement typiquement “binaire” très représentatif du symbole de Kronecker utilisé dans l'Eq. (2.169) en ce sens où il assigne des valeurs très proche de zéro lorsque deux ensembles d'éléments propres non-coïncidents  $\{R^i, \Theta^i, \Psi^i\}$  et  $\{R^{i+1}, \Theta^{i+1}, \Psi^{i+1}\}$  sont comparés.

La matrice  $\text{NC}^2\text{O}$  n'est donc pas parasitée par des termes dont les valeurs ne sont pas significativement proche de zéro ou de l'unité comme cela peut être le cas pour la matrice MAC. En effet, les termes de la matrice de corrélation MAC associés à des paires de formes propres complexes non-coïncidentes peuvent être de l'ordre de  $10^{-1}$  (0.5) alors que ceux de la matrice de corrélation proposée  $\text{NC}^2\text{O}$  associés aux mêmes paires (*droites*), mais également aux paires *gauches*, ne sont que de l'ordre de  $10^{-5}$ .

### 2.2.3.3 Procédure d'appariement de formes propres complexes d'un rotor

On appelle procédure d'appariement ou “*mode pairing*” ou bien encore “*mode tracking*” la procédure qui consiste à associer entre elles et par paires les formes propres de deux ensembles distincts. Lors du tracé d'un diagramme de Campbell, ce concept est bien sûr étendu aux formes propres complexes de la structure en rotation et permet de tracer, pour chaque forme propre complexe, l'évolution de sa fréquence (ou pulsation) propre associée, en fonction de la vitesse de rotation.

Lorsqu'une structure possède un comportement relativement dépendant de la vitesse de rotation  $\dot{\phi}$ , comme les structures à comportement fortement gyroscopique ou celle dont les caractéristiques des raideur ou amortissement varient notablement avec la vitesse de rotation (paliers hydrodynamiques),

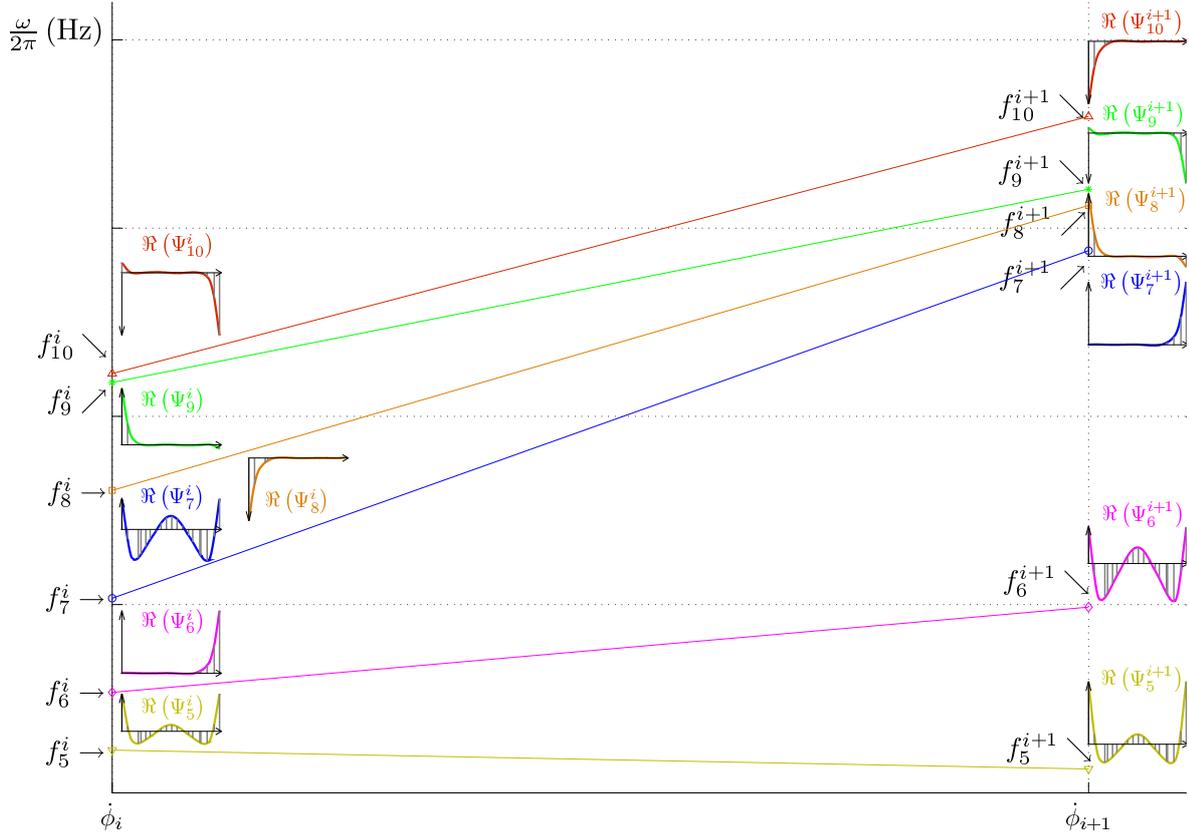


FIGURE 2.12 – Mise en évidence d’un phénomène de croisement de modes entre les vitesses de rotations  $\dot{\phi}_i$  et  $\dot{\phi}_{i+1}$ . Évolutions des fréquences propres de résonance ordonnées de manière croissante,  $f_5$  ( $\nabla$ ),  $f_6$  ( $\diamond$ ),  $f_7$  ( $\circ$ ),  $f_8$  ( $\square$ ),  $f_9$  ( $*$ ),  $f_{10}$  ( $\triangle$ ).

miques, effet centrifuge, etc...), ses fréquences propres présentent, par conséquent, des évolutions fortement dépendantes de  $\dot{\phi}$  et un phénomène appelé “*croisement de modes*” (“*veering*”) apparaît.

Par ailleurs, si l’on s’intéresse à une forme propre complexe particulière, bien que celle-ci,  $\Psi_k^i$ , évolue avec la vitesse de rotation  $\dot{\phi}$ , elle conserve tout de même, sur l’intervalle  $\left[\frac{30}{\pi}\dot{\phi}_1; \frac{30}{\pi}\dot{\phi}_{n_{\dot{\phi}}}\right]$ , une enveloppe similaire. Ainsi, cela permet d’introduire la notion de famille de formes propres, tendances de la structure à se déformer selon une forme caractérisée par le nombre de nœuds de vibration ou de ventres de vibration d’amplitude. C’est cette particularité qui est exploitée lors de la procédure d’appariement des formes propres complexes.

**Notation 4:** Bien qu’une forme propre complexe donnée  $\Psi_k^i$  évolue en fonction des vitesses de rotation  $\dot{\phi}_i$ ,  $i = 1, \dots, n_{\dot{\phi}}$ , elle est notée  $\Psi_k$ , en référence à sa famille. Les pulsations ou fréquences propres associées à la forme propre complexe  $\Psi_k$  sont notées respectivement  $\omega_{\Psi_k}^i$  ou  $f_{\Psi_k}^i$  et contenues respectivement dans les vecteurs  $\omega_{\Psi_k} \in \mathbb{R}^{n_{\dot{\phi}}}$  ou  $f_{\Psi_k} \in \mathbb{R}^{n_{\dot{\phi}}}$ .



Si l’on se contente de tracer les suites de fréquences propres  $f_k^i$ ,  $k = 1, \dots, m$ , pour chaque vitesse de rotation  $\dot{\phi}_i$ ,  $i = 1, \dots, n_{\dot{\phi}}$ , le diagramme de Campbell obtenu est semblable à la celui tracé FIG. 2.11, sur lequel chaque courbe représente l’évolution de la  $k^e$  plus petite fréquence propre  $f_k$  sur l’intervalle  $\left[\frac{30}{\pi}\dot{\phi}_1; \frac{30}{\pi}\dot{\phi}_{n_{\dot{\phi}}}\right]$ . C’est-à-dire qu’il correspond à la représentation graphique des  $m$  premières fréquences propres  $f_k$  de la structure en rotation associées à chaque vitesse  $\dot{\phi}_i$ ,  $i = 1, \dots, n_{\dot{\phi}}$ , ces  $m$  fréquences propres étant ordonnées de manière croissante comme c’est généralement le cas

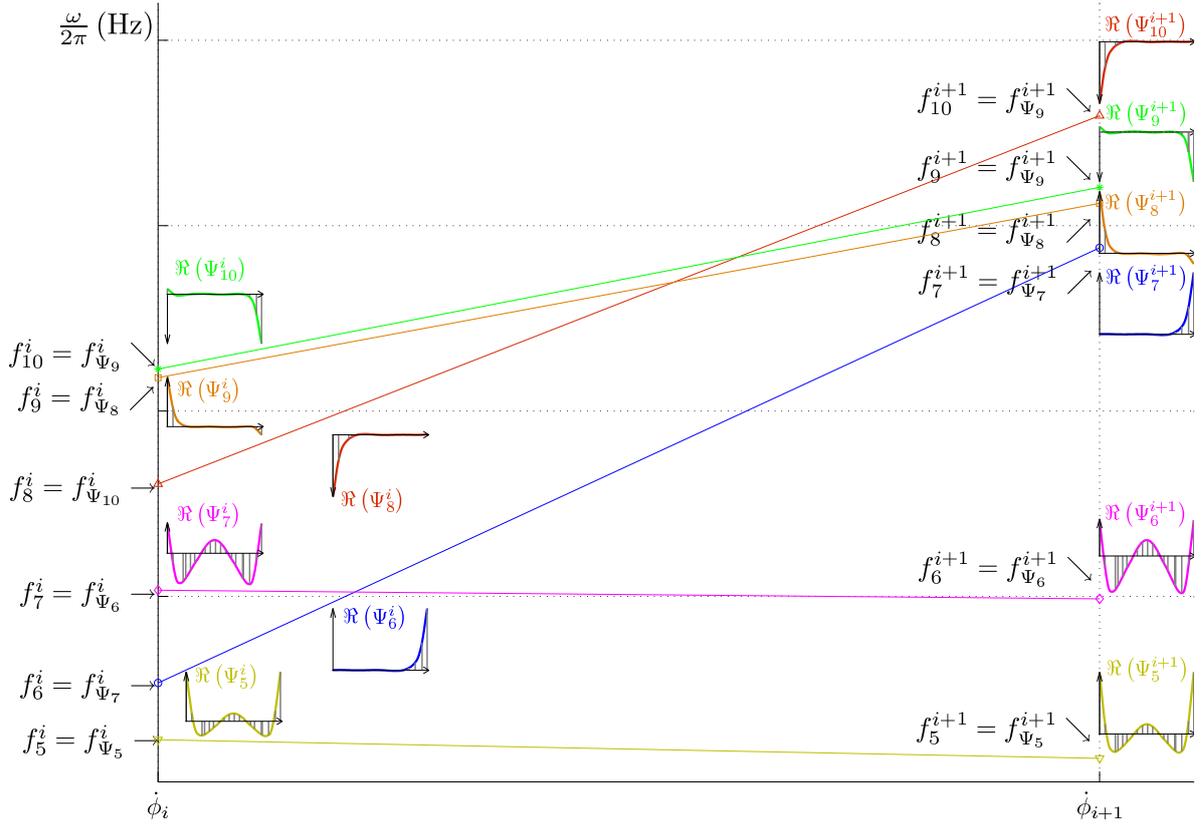


FIGURE 2.13 – Mise en évidence d'un phénomène de croisement de modes entre les vitesses de rotations  $\dot{\phi}_i$  et  $\dot{\phi}_{i+1}$ . Évolutions des fréquences propres de résonance ordonnées selon leurs formes complexes associées,  $f_{\Psi_5}$  ( $\nabla$ ),  $f_{\Psi_6}$  ( $\diamond$ ),  $f_{\Psi_7}$  ( $\circ$ ),  $f_{\Psi_8}$  ( $\square$ ),  $f_{\Psi_9}$  ( $*$ ),  $f_{\Psi_{10}}$  ( $\triangle$ ).

dans les algorithmes de résolution de problème aux valeurs propres.

L'inconvénient de l'ordonnement croissant des  $m$  premières fréquences propres, est qu'il n'est pas possible d'apprécier l'évolution d'une forme propre  $\Psi_k$  associée à la fréquence propre  $f_{\Psi_k}$ , information qui peut s'avérer primordiale lorsque l'on souhaite analyser l'évolution de la déformation dynamique de la structure. En effet, la connaissance de l'évolution d'une fréquence propre de résonance  $f_{\Psi_k}$  associée à une forme propre  $\Psi_k$  (complexe ou non), permet de situer, les zones où les contraintes sont les plus importantes.

Le phénomène de “*veering*” est caractérisé par la situation dans laquelle, à deux vitesses  $\dot{\phi}_i$  et  $\dot{\phi}_{i+1}$ , la forme  $\Psi_k^i$  associée à  $\omega_k^i$  ne correspond pas à la forme  $\Psi_k^{i+1}$  associée à  $\omega_k^{i+1}$ . En effet, soit la vitesse de rotation  $\dot{\phi}_i$  et soit un tri basé sur l'ordonnement croissant des pulsation propre. Si un croisement de mode apparaît, cela signifie alors que les formes  $\Psi_k^i$  et  $\Psi_{k+1}^{i+1}$  appartiennent à la même famille et que par conséquent, les formes  $\Psi_{k+1}^i$  et  $\Psi_k^{i+1}$  appartiennent également à une même autre famille. Ainsi, sur l'intervalle  $[\dot{\phi}_i; \dot{\phi}_{i+1}]$ , les pulsations  $\omega_{\Psi_k}$  et  $\omega_{\Psi_{k+1}}$  associées respectivement aux formes  $\Psi_k$  et  $\Psi_{k+1}$  ont les valeurs suivantes :

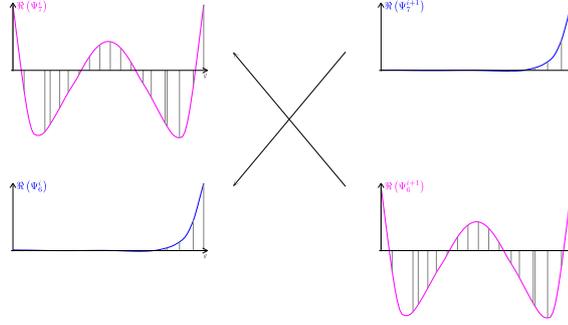
$$\omega_{\Psi_k}^{i,i+1} = [\omega_k^i, \omega_{k+1}^{i+1}] \quad \text{et} \quad \omega_{\Psi_{k+1}}^{i,i+1} = [\omega_{k+1}^i, \omega_k^{i+1}]. \quad (2.174)$$

La FIG. 2.12 met en évidence une situation de croisements de modes localisés entre les vitesses de rotation  $\dot{\phi}_i$  et  $\dot{\phi}_{i+1}$ . Elle représente l'évolution de la 5<sup>e</sup> à la 10<sup>e</sup> fréquences propres d'une structure tournante sur l'intervalle  $[\dot{\phi}_i; \dot{\phi}_{i+1}]$ . Les parties réelles  $\Re(\Psi_k^i)$  et  $\Re(\Psi_k^{i+1})$  des formes propres

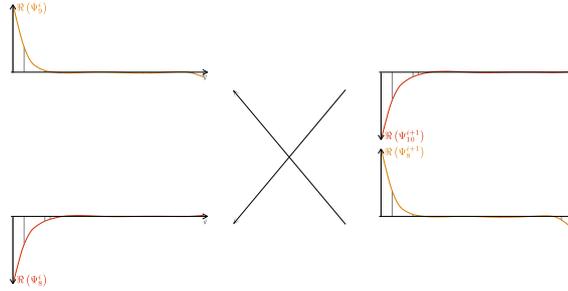
propres complexes associées ont été tracées aux vitesses de rotation  $\dot{\phi}_i$  et  $\dot{\phi}_{i+1}$ .

On distingue clairement les phénomènes de “veering” entre, par exemple :

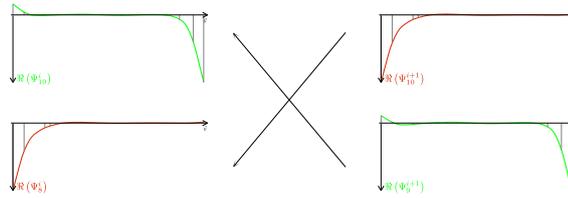
- **les familles associées aux 6<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> modes** : les formes propres complexes  $\Psi_6^{i+1}$  et  $\Psi_7^{i+1}$ , associées aux fréquences propres  $f_6^{i+1}$  et  $f_7^{i+1}$  correspondent aux formes  $\Psi_7^i$  et  $\Psi_6^i$ , associées aux 7<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> fréquences propres  $f_7^i$  et  $f_6^i$  :



- **les familles associées aux 8<sup>e</sup> et 10<sup>e</sup> modes** : les formes propres complexes  $\Psi_8^{i+1}$  et  $\Psi_{10}^{i+1}$ , associées aux fréquences  $f_8^{i+1}$  et  $f_{10}^{i+1}$  correspondent aux formes  $\Psi_9^i$  et  $\Psi_8^i$ , associées aux fréquences propres  $f_9^i$  et  $f_8^i$  :



- **les familles associées aux 9<sup>e</sup> et 10<sup>e</sup> modes** : les formes propres complexes  $\Psi_9^{i+1}$  et  $\Psi_{10}^{i+1}$ , associées aux fréquences  $f_9^{i+1}$  et  $f_{10}^{i+1}$  correspondent aux formes  $\Psi_{10}^i$  et  $\Psi_8^i$ , associées aux fréquences propres  $f_{10}^i$  et  $f_8^i$  :



L’objectif de la procédure d’appariement des formes propres complexes est donc de classifier les pulsations (ou fréquences) propres de résonance en fonction des familles auxquelles elles sont associées. Le choix d’une telle méthode de tri permet d’obtenir les classifications de pulsations propres suivantes :

$$\begin{aligned}
 \omega_{\Psi_5}^{i,i+1} &= [\omega_5^i, \omega_5^{i+1}], & \omega_{\Psi_6}^{i,i+1} &= [\omega_7^i, \omega_6^{i+1}], \\
 \omega_{\Psi_7}^{i,i+1} &= [\omega_6^i, \omega_7^{i+1}], & \omega_{\Psi_8}^{i,i+1} &= [\omega_9^i, \omega_8^{i+1}], \\
 \omega_{\Psi_9}^{i,i+1} &= [\omega_{10}^i, \omega_9^{i+1}], & \omega_{\Psi_{10}}^{i,i+1} &= [\omega_8^i, \omega_{10}^{i+1}],
 \end{aligned} \tag{2.175}$$

dont les représentations sont tracées sur la FIG. 2.13. La procédure d’appariement utilise alors

| Indice        | $q$                                                                                 | $\Psi_1^{i+1}$                                                                    | $\Psi_2^{i+1}$                                                                    | $\Psi_3^{i+1}$                                                                    | $\Psi_4^{i+1}$                                                                    | $\Psi_5^{i+1}$                                                                    | $\Psi_6^{i+1}$                                                                     | $\Psi_7^{i+1}$                                                                      | $\Psi_8^{i+1}$                                                                      | $\Psi_9^{i+1}$                                                                      | $\Psi_{10}^{i+1}$                                                                   |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $k$           |                                                                                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $\Psi_{10}^i$ |    |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     | ✗                                                                                   |                                                                                     |                                                                                     |
| $\Psi_9^i$    |    |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     | ✗                                                                                   |
| $\Psi_8^i$    |    |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     | ✗                                                                                   |                                                                                     |
| $\Psi_7^i$    |    |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   | ✗                                                                                  |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
| $\Psi_6^i$    |  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    | ✗                                                                                   |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
| $\Psi_5^i$    |  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   | ✗                                                                                 |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
| $\Psi_4^i$    |  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   | ✗                                                                                 |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
| $\Psi_3^i$    |  |                                                                                   |                                                                                   | ✗                                                                                 |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
| $\Psi_2^i$    |  |                                                                                   | ✗                                                                                 |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
| $\Psi_1^i$    |  | ✗                                                                                 |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |

TABEAU 2.1 – Tableau représentant une matrice de corrélation calculée entre deux ensembles de dix  $m = 10$  formes propres complexes  $\Psi^i$  et  $\Psi^{i+1}$  aux vitesses de rotation respectives  $\dot{\phi}_i$  et  $\dot{\phi}_{i+1}$ . Les croix (✗) situent les formes propres complexes communes.

les vecteurs d'indices  $\varsigma^p \in \mathbb{N}^m$ ,  $p = [i, i + 1]$  définis par :

$$\varsigma_{5,\dots,10}^i = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}^t \quad \text{et} \quad \varsigma_{5,\dots,10}^{i+1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}^t, \quad (2.176)$$

tels que :

$$\omega_{\Psi_k}^p = \omega_{\varsigma_k^p}^p, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k = 5, \dots, m, \quad \forall p \in \mathbb{N}, p = [i, i + 1]. \quad (2.177)$$

Ainsi, identifier à chaque vitesse de rotation  $\dot{\phi}_i$  la forme  $\Psi_k$  associée une pulsation propre  $\omega_q^i$ ,  $q = 1, \dots, m$  revient à résoudre le problème suivant :

$$\mathcal{T} \text{rouver la matrice d'indices } \varsigma \quad (2.178)$$

$$\text{tel que } \omega_{\Psi_k}^i = \omega_{\varsigma_k^i}^i, \quad \forall i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n_{\dot{\phi}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, m,$$

avec la matrice d'indices  $\varsigma \in \mathcal{M}_{m, n_{\dot{\phi}}}(\mathbb{N})$  permettant de classifier les pulsations propres  $\omega_q^i$  en fonction de leurs formes associées  $\Psi_k$  et dont l'initialisation sera effectuée en la borne supérieure de la plage de vitesse de rotation telle que :

$$\varsigma_k^{n_{\dot{\phi}}} = k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, m. \quad (2.179)$$

D'un point de point de vue purement qualitatif, la matrice d'indices  $\varsigma$  peut être vue comme à un tableau à double entrée, TAB. 2.1, dont les lignes et les colonnes seraient relatives aux formes propres complexes  $\Psi^i$  et  $\Psi^{i+1}$  associées respectivement aux pulsations propres  $\omega^i$  et  $\omega^{i+1}$  ordonnées de manière croissante.

Il serait alors aisé, en comparant les entrées du TAB. 2.1, de distinguer les paires de formes propres complexes coïncidentes en cochant, *e.g.* (✕), les cellules concernées. La connaissance des coordonnées des cellules (convention LICO) permettrait donc d'apparier les familles des formes propres complexes du premier ensemble  $\Psi^i$  à celle du second ensemble  $\Psi^{i+1}$ .

D'un point de point de vue quantitatif, la traduction numérique de ce tableau consisterait à affecter aux cellules de coordonnées  $(k, q)$  des valeurs  $\mathcal{I}_{k,q}$  permettant de différencier distinctement, d'une part, celles relatives aux situations de coïncidence entre les formes propres complexes  $\Psi_k^i$  et  $\Psi_q^{i+1}$  et d'autre part, celles associées aux situations de non-coïncidence.

Une solution simple permettant l'incrémement de la matrice d'indices  $\varsigma$  consiste à utiliser, *e.g.* les indicateurs de corrélation  $\mathcal{I}$  de formes propres définis dans la Section 2.2.3.1. Il est toutefois préférable d'utiliser la matrice de corrélation NC<sup>2</sup>O présentée dans la Section 2.2.3.2 dont les propriétés sont particulièrement adaptées aux formes propres complexes d'une structure tournante.

En effet, selon les couples de formes propres coïncidentes ou non, l'indicateur NC<sup>2</sup>O affecte des valeurs dont les ordres de grandeurs présentent des écarts très importants, Section 2.2.3.2. Ainsi, l'incrémement de la matrice  $\varsigma$  peut s'effectuer de la manière suivante :

$$\varsigma_k^i = q_{\max}, \quad \text{avec} \quad \max_{q_{\max}} \text{NC}^2\text{O}_{k,1,\dots,m}^{i,i+1}, \quad (2.180)$$

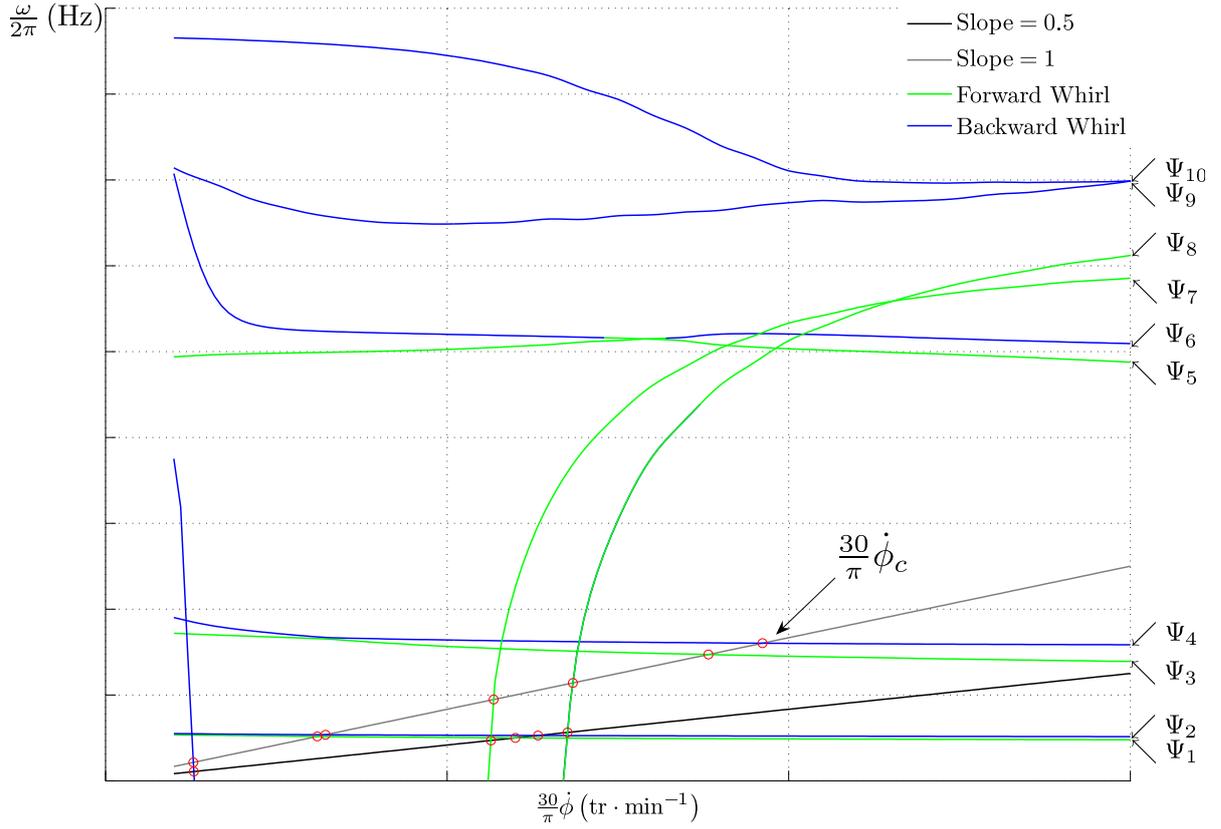


FIGURE 2.14 – Diagramme de  $\mathcal{C}$ ampbell ( $m = 10$ ) utilisant un algorithme de tri de formes propres complexes basé sur la matrice de corrélation  $\text{NC}^2\text{O}$ . Les vitesses critiques  $\frac{30}{\pi} \dot{\phi}_c$  sont représentées par des cercles (○). Sens de précession direct (–), Sens de précession inverse (–).

en associant à la  $k^e$  forme  $\Psi_k^i$ , calculée à la vitesse de rotation  $\dot{\phi}_i$ , la  $q_{\max}^e$  forme propre complexe  $\Psi_{q_{\max}}^{i+1}$ , calculée à la vitesse de rotation  $\dot{\phi}_{i+1}$ , l'indicateur de corrélation  $\text{NC}^2\text{O}_{k,q_{\max}}$  étant affecté d'une valeur dont l'ordre de grandeur est relativement supérieur aux valeurs  $\text{NC}^2\text{O}_{k,q}$ ,  $q \neq q_{\max}$  de la  $k^e$  ligne.

Finalement, l'utilisation de l'Alg. 1, Annexe A.6, permet une classification des pulsations (ou fréquences) propres basée sur l'appariement des formes propres complexes. Cette procédure effectuée, le diagramme de  $\mathcal{C}$ ampbell précédemment tracé FIG. 2.11 devient alors celui présenté FIG. 2.14 dont les sens de précession ont été différenciés (cf. Annexe A.5.12) .

Par ailleurs, la FIG. 2.15 met en évidence l'écart d'ordre de grandeur entre les termes extra-diagonaux des matrices de corrélation MAC et  $\text{NC}^2\text{O}$  évaluées entre les ensembles de formes propres complexes aux vitesses  $\dot{\phi}_i$  et  $\dot{\phi}_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n_{\dot{\phi}}$ , pour le diagramme de  $\mathcal{C}$ ampbell tracé FIG. 2.11. La FIG. 2.15 présente les quantités suivantes :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^m \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^m \frac{\text{NC}^2\text{O}_{k,q}^{i,i+1}}{m(m-1)}, \quad (2.181a)$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^m \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^m \frac{\text{MAC}_{k,q}^{i,i+1}}{m(m-1)}. \quad (2.181b)$$

correspondant respectivement aux moyennes des termes extra-diagonaux des matrices de corrélation  $\text{NC}^2\text{O}$  et MAC. Les termes extra-diagonaux des matrices de corrélation MAC sont de l'ordre de  $10^{-1}$  alors que ceux issus de la matrice de corrélation  $\text{NC}^2\text{O}$  sont majoritairement de l'ordre de  $10^{-6}$  ce qui milite pour utiliser un critère de corrélation basé sur des propriétés d'orthogonalité.

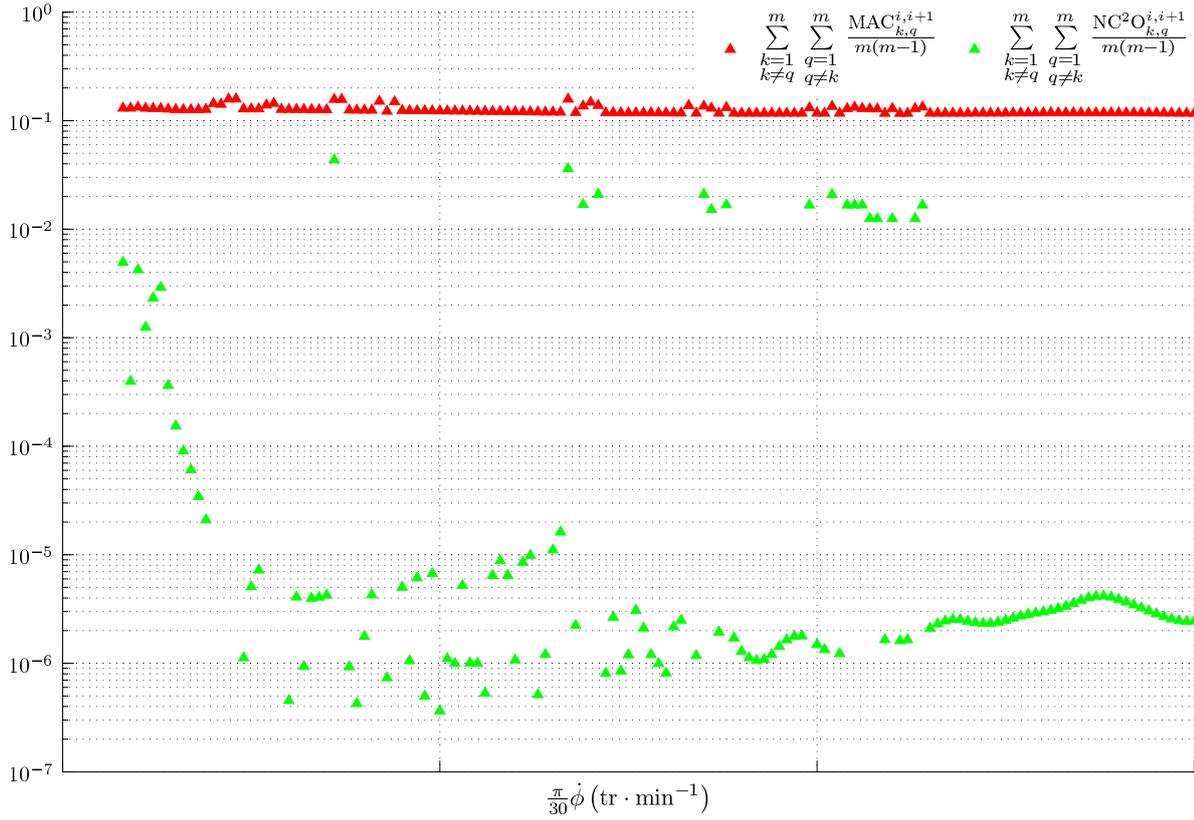


FIGURE 2.15 – Evolution de la moyenne des termes extra-diagonaux des matrices de corrélation MAC (▲) et NC<sup>2</sup>O (▲).

#### 2.2.3.4 Détermination des vitesses critiques de rotation

La détermination des vitesses critiques de rotation consiste à rechercher les valeurs des vitesses de rotation qui coïncident, à un facteur multiplicatif près, avec toutes les fréquences propres de la structure tracées sur le diagramme de Campbell.

D'une manière générale, une excitation asynchrone est une excitation tournante, vis-à-vis du repère ( $R$ ), dont la vitesse est reliée à la vitesse de rotation de la structure par un facteur multiplicatif  $s \in \mathbb{R}$ , Eq. (A.188). Il est alors possible de représenter, sur le diagramme Campbell, l'évolution de la fréquence d'excitation asynchrone en fonction de la vitesse de rotation de la structure (tr · min<sup>-1</sup>) grâce à l'Eq. (2.182) suivante :

$$\omega = s\dot{\phi}. \quad (2.182)$$

Il advient donc  $s = 1$  pour une excitation de type balourd.

Ainsi, la procédure d'appariement ayant été réalisée, et en se rappelant que les pulsations de rotation de la structure sont contenues dans le vecteur  $\dot{\phi} \in \mathbb{R}^{n_{\dot{\phi}}}$ , Eq. (2.147), la procédure de recherche des pulsations critiques de rotation revient donc à déterminer tous les indices  $i$  définis par :

$$i = i_c^{k,q}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (2.183)$$

où  $q$  correspond à l'indice de la  $q^e$  pulsation critique de rotation  $\dot{\phi}_c^{k,q}$  coïncidant avec la  $k^e$  pulsation propre  $\omega_{\Psi_k}^i$  tel que :

$$\dot{\phi}_c^{k,q} = \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}. \quad (2.184)$$

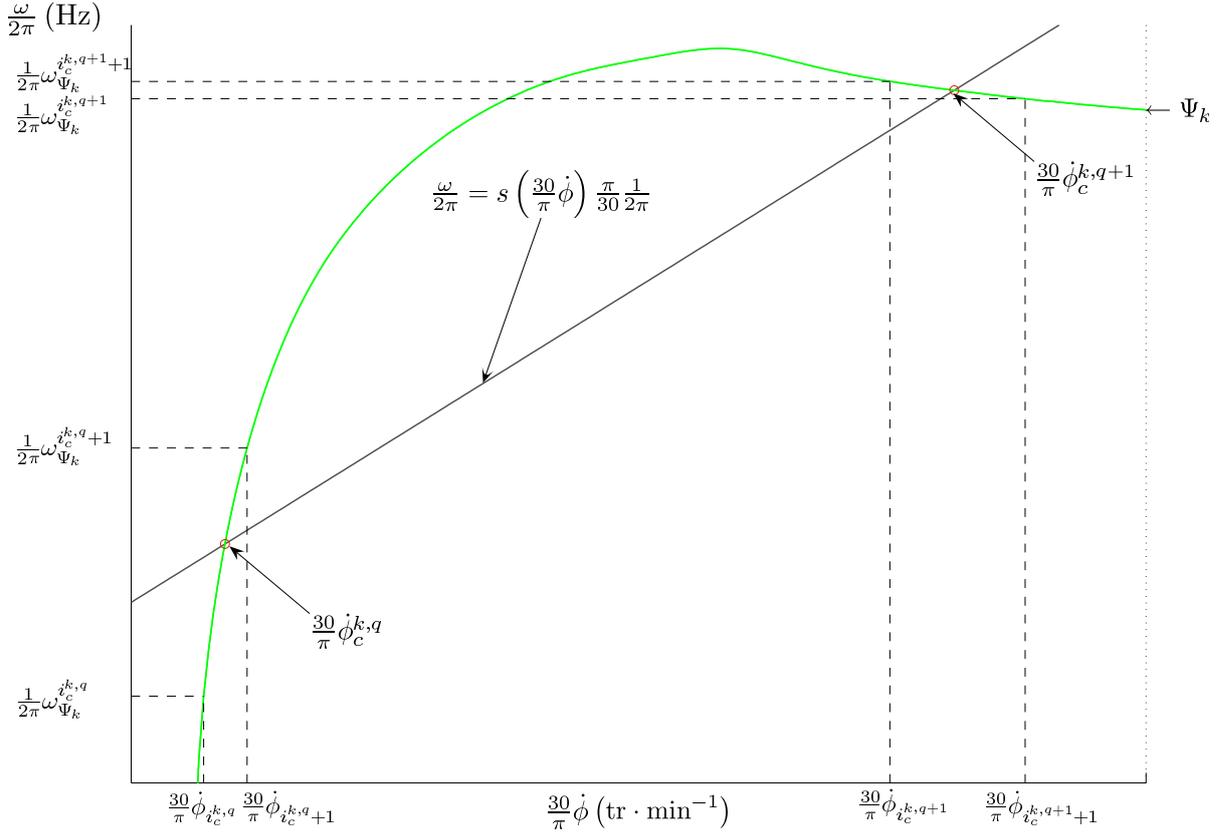


FIGURE 2.16 – Mise en évidence des indices  $i_c^{k,q}$  encadrant une vitesse critique de rotation  $\frac{30}{\pi} \dot{\phi}^{k,q}$  (○). Cas particulier d'une pulsation propre  $\omega_{\Psi_k}$  coïncidant deux fois avec l'excitation asynchrone de facteur  $s$ .

Lors du tracé du diagramme de Campbell, les pulsations multiples  $s\dot{\phi}_c^{k,q}$  ne coïncident *a priori* pas nécessairement avec les pulsations propres  $\omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}}$ , si toutefois la structure présente des pulsations de résonance. Elles sont généralement situées entre deux valeurs consécutives  $\omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}}$  et  $\omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q+1}}$  comme le montre la figure FIG. 2.16. Par conséquent, la connaissance des indices  $i_c^{k,q}$  permet d'encadrer les valeurs  $\dot{\phi}_c^{k,q}$  et  $s\dot{\phi}_c^{k,q}$  telles que :

$$\dot{\phi}_c^{k,q} \in \left[ \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}, \dot{\phi}_{i_c^{k,q+1}} \right], \quad (2.185a)$$

$$s\dot{\phi}_c^{k,q} \in \left[ \omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}}, \omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q+1}} \right]. \quad (2.185b)$$

En effectuant une interpolation linéaire de la courbe  $\omega_{\Psi_k}$  sur l'intervalle  $\left[ \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}, \dot{\phi}_{i_c^{k,q+1}} \right]$  telle que :

$$\omega_{\Psi_k} = \left( \frac{\omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q+1}} - \omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}}}{\dot{\phi}_{i_c^{k,q+1}} - \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}} \right) \dot{\phi} + \omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}} - \left( \frac{\omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q+1}} - \omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}}}{\dot{\phi}_{i_c^{k,q+1}} - \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}} \right) \dot{\phi}_{i_c^{k,q}} \quad \text{avec} \quad \dot{\phi} \in \left[ \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}, \dot{\phi}_{i_c^{k,q+1}} \right]. \quad (2.186)$$

La pulsation critique de rotation  $\dot{\phi}_c^{k,q}$  est alors solution du système Eq. (2.187) :

$$\begin{cases} \omega_{\Psi_k} &= \left( \frac{\omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q+1}} - \omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}}}{\dot{\phi}_{i_c^{k,q+1}} - \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}} \right) \dot{\phi} + \omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}} - \left( \frac{\omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q+1}} - \omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}}}{\dot{\phi}_{i_c^{k,q+1}} - \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}} \right) \dot{\phi}_{i_c^{k,q}} \\ \omega &= s\dot{\phi} \end{cases}. \quad (2.187)$$

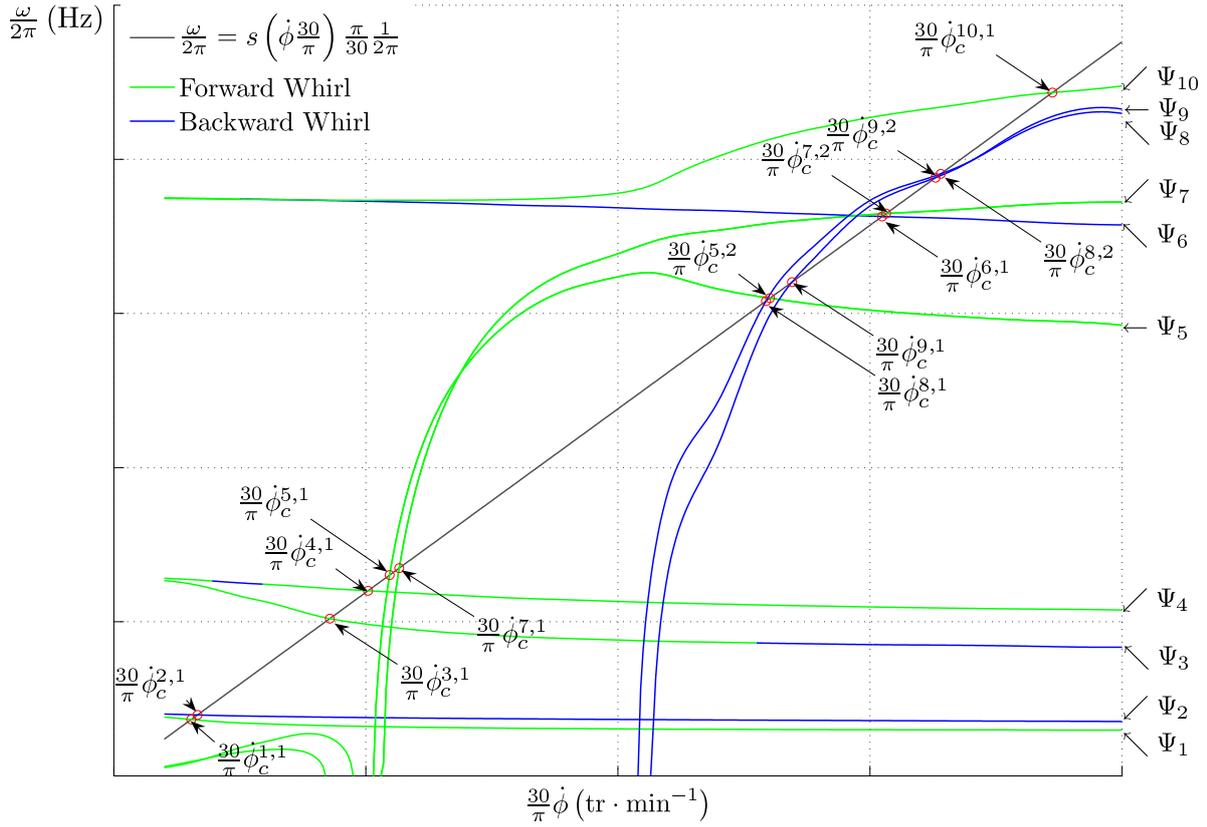


FIGURE 2.17 – Repérage de vitesses critiques de rotation ( $\circ$ ) sur un diagramme de Campbell, induites par une excitation asynchrone de facteur  $s$ .

Il vient alors :

$$\dot{\phi}_c^{k,q} = \frac{\omega_{\Psi_k}^{i_c,k,q} - \left( \frac{\omega_{\Psi_k}^{i_c,k,q+1} - \omega_{\Psi_k}^{i_c,k,q}}{\dot{\phi}_{i_c,k,q+1} - \dot{\phi}_{i_c,k,q}} \right) \dot{\phi}_{i_c,k,q}}{s - \left( \frac{\omega_{\Psi_k}^{i_c,k,q+1} - \omega_{\Psi_k}^{i_c,k,q}}{\dot{\phi}_{i_c,k,q+1} - \dot{\phi}_{i_c,k,q}} \right)}, \quad (2.188a)$$

$$\omega_{\Psi_k}^{i_c,k,q} = s \dot{\phi}_c^{k,q}. \quad (2.188b)$$

Il suffit alors de multiplier la pulsation critique de rotation  $\dot{\phi}_{i_c,k,q}$  par un facteur  $\frac{30}{\pi}$  pour obtenir la vitesse critique de rotation exprimée en  $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ . Une procédure de recherche des vitesses critiques de rotation est proposée dans l'Alg. 2, Annexe A.7, et permet de repérer toutes les vitesses critiques de rotation d'une structure, FIG. 2.17.

## 2.2.4 Détermination de la réponse forcée d'un rotor par projection modale

La détermination d'une réponse forcée d'un rotor consiste à résoudre l'Eq. (A.232). Différents types d'excitation sont considérés ci-après : balourd, force asynchrone et force harmonique.

### 2.2.4.1 Force synchrone de balourd

En considérant les efforts généralisés  $\mathcal{F}_b^s$ ,  $\mathcal{F}_b^c \in \mathbb{R}^{n_s}$  de Eq. (A.186) appliqués à toute la structure, l'Eq. (A.232) devient donc :

$$\gamma \ddot{p}(t) + \eta(\dot{\phi}) \dot{p}(t) + \kappa p(t) = f_b^c \cos(\dot{\phi} t) + f_b^s \sin(\dot{\phi} t), \quad (2.189)$$

avec les vecteurs d'efforts modaux  $f_b^s, f_b^c \in \mathbb{R}^m$  définis tels que :

$$f_b^s = \Phi^t \mathcal{F}_b^s, \quad (2.190a)$$

$$f_b^c = \Phi^t \mathcal{F}_b^c. \quad (2.190b)$$

Les solutions de l'Eq. (2.189) sont de la forme :

$$p(t) = \mathcal{Q}_b^c(\dot{\phi}) \cos(\dot{\phi}t) + \mathcal{Q}_b^s(\dot{\phi}) \sin(\dot{\phi}t), \quad (2.191)$$

avec  $\mathcal{Q}_b^s(\dot{\phi}), \mathcal{Q}_b^c(\dot{\phi}) \in \mathbb{R}^m$ . En substituant l'Eq. (2.191) dans l'Eq. (2.189) et en identifiant les facteurs de  $\cos(\dot{\phi}t)$  et  $\sin(\dot{\phi}t)$ , il vient alors :

$$\begin{bmatrix} \kappa - \gamma\dot{\phi}^2 & -\eta(\dot{\phi})\dot{\phi} \\ \eta(\dot{\phi})\dot{\phi} & \kappa - \gamma\dot{\phi}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_b^s \\ \mathcal{Q}_b^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_b^s \\ f_b^c \end{pmatrix}. \quad (2.192)$$

Le système de l'Eq. (2.192) est résolu pour une vitesse de rotation  $\dot{\phi}$  donnée afin de déterminer les valeurs des  $\mathcal{Q}_b^s(\dot{\phi})$  et  $\mathcal{Q}_b^c(\dot{\phi})$ . Les Eq. (2.191) et Eq. (2.103) permettent d'exprimer le vecteur des degrés de liberté  $\delta(t)$ , tel que :

$$\delta(t) = \Phi \left[ \mathcal{Q}_b^c(\dot{\phi}) \cos(\dot{\phi}t) + \mathcal{Q}_b^s(\dot{\phi}) \sin(\dot{\phi}t) \right]. \quad (2.193)$$

#### 2.2.4.2 Force asynchrone

En considérant les efforts généralisés  $\mathcal{F}_{as}^s, \mathcal{F}_{as}^c \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ , Eq. (A.189), l'Eq. (A.232) s'écrit :

$$\gamma\ddot{p}(t) + \eta(\dot{\phi})\dot{p}(t) + \kappa p(t) = f_{as}^c \cos(s\dot{\phi}t) + f_{as}^s \sin(s\dot{\phi}t), \quad (2.194)$$

avec les vecteurs d'efforts modaux  $f_{as}^s, f_{as}^c \in \mathbb{R}^m$  définis tels que :

$$f_{as}^s = \Phi^t \mathcal{F}_{as}^s, \quad (2.195a)$$

$$f_{as}^c = \Phi^t \mathcal{F}_{as}^c. \quad (2.195b)$$

Les solutions de l'Eq. (2.194) sont de la forme :

$$p(t) = \mathcal{Q}_{as}^c(s\dot{\phi}) \cos(s\dot{\phi}t) + \mathcal{Q}_{as}^s(s\dot{\phi}) \sin(s\dot{\phi}t), \quad (2.196)$$

avec  $\mathcal{Q}_{as}^s(s\dot{\phi}), \mathcal{Q}_{as}^c(s\dot{\phi}) \in \mathbb{R}^m$ . En substituant l'Eq. (2.196) dans l'Eq. (2.194) et en identifiant les facteurs de  $\cos(s\dot{\phi}t)$  et  $\sin(s\dot{\phi}t)$ , il vient alors :

$$\begin{bmatrix} \kappa - \gamma(s\dot{\phi})^2 & -\eta(\dot{\phi})s\dot{\phi} \\ \eta(\dot{\phi})s\dot{\phi} & \kappa - \gamma(s\dot{\phi})^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{as}^s \\ \mathcal{Q}_{as}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{as}^s \\ f_{as}^c \end{pmatrix}. \quad (2.197)$$

Le système de l'Eq. (2.197) est résolu pour une vitesse de rotation  $\dot{\phi}$  donnée afin de déterminer les valeurs des  $\mathcal{Q}_{as}^s(s\dot{\phi})$  et  $\mathcal{Q}_{as}^c(s\dot{\phi})$ . Les Eq. (2.196) et Eq. (2.103) permettent d'exprimer le vecteur des degrés de liberté  $\delta(t)$ , tel que :

$$\delta(t) = \Phi \left[ \mathcal{Q}_{as}^c(s\dot{\phi}) \cos(s\dot{\phi}t) + \mathcal{Q}_{as}^s(s\dot{\phi}) \sin(s\dot{\phi}t) \right]. \quad (2.198)$$

#### 2.2.4.3 Force harmonique de direction fixe

En considérant les efforts généralisés  $\mathcal{F}_h^s, \mathcal{F}_h^c \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ , Eq. (A.192), l'Eq. (A.232) devient :

$$\gamma\ddot{p}(t) + \eta(\dot{\phi})\dot{p}(t) + \kappa p(t) = f_h^c \cos(\omega_h t) + f_h^s \sin(\omega_h t), \quad (2.199)$$

avec les vecteurs d'efforts modaux  $f_h^s, f_h^c \in \mathbb{R}^m$  définis tels que :

$$f_h^s = \Phi^t \mathcal{F}_h^s, \quad (2.200a) \quad f_h^c = \Phi^t \mathcal{F}_h^c. \quad (2.200b)$$

Les solutions de l'Eq. (2.199) sont de la forme :

$$p(t) = \mathcal{Q}_h^c(\omega_h) \cos(\omega_h t) + \mathcal{Q}_h^s(\omega_h) \sin(\omega_h t), \quad (2.201)$$

avec  $\mathcal{Q}_h^s(\omega_h), \mathcal{Q}_h^c(\omega_h) \in \mathbb{R}^m$ . En substituant l'Eq. (2.196) dans l'Eq. (2.194) et en identifiant les facteurs de  $\cos(\omega_h t)$  et  $\sin(\omega_h t)$ , il vient alors :

$$\begin{bmatrix} \kappa - \gamma\omega_h^2 & -\eta(\dot{\phi})\dot{\phi} \\ \eta(\dot{\phi})\dot{\phi} & \kappa - \gamma\omega_h^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_h^s \\ \mathcal{Q}_h^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_h^s \\ f_h^c \end{pmatrix}. \quad (2.202)$$

Le système de l'Eq. (2.202) est résolu pour une de rotation  $\omega_h$  donnée afin de déterminer les valeurs des  $\mathcal{Q}_h^s(\omega_h)$  et  $\mathcal{Q}_h^c(\omega_h)$ . Les Eq. (2.196) et Eq. (2.103) permettent d'exprimer le vecteur des degrés de liberté  $\delta(t)$ , tel que :

$$\delta(t) = \Phi [\mathcal{Q}_h^c(\omega_h) \cos(\omega_h t) + \mathcal{Q}_h^s(\omega_h) \sin(\omega_h t)]. \quad (2.203)$$

## 2.3 Conclusion

Les équations régissant la dynamique d'un rotor en présence de cisaillement ont été présentées grâce aux énergies cinétiques et de déformations auxquelles ont été appliquées les équations de Lagrange.

Les approximations considérées en annexe ont permis d'établir qu'il y avait coïncidence entre les angles d'Euler, utilisés dans l'expression des énergies cinétiques des arbres et disques, et ceux permettant d'orienter les rotations de section droite d'une poutre de Timoshenko dans l'espace. À la lumière de ces approximations, le repère tournant a pu être introduit afin de calculer l'énergie de déformation.

Enfin, un critère de corrélation originale été proposé pour tracer des diagrammes de Campbell. Tenant compte des propriétés de bi-orthogonalité des formes propres gauches et droite d'un système dissipatif en rotation, ce critère facilite grandement l'appariement des formes propres complexes, sur la plage de vitesse de rotation, et plus particulièrement lorsque des phénomènes de croisement de modes apparaissent.

# Chapitre 3

## Analyses modales expérimentales

*Un nombre conséquent d'analyses modales expérimentales ont été réalisées sur des structures à échelle industrielle : une analyse modale de type réponses harmonique forcée réalisée en laboratoire, ou de type réponse impulsionnelle réalisées sur le site industriel du constructeur sur des rotors feuilletés, un rotor de palier magnétique ou bien encore une portion d'arbre. Les résultats expérimentaux constituent une base de données qui sera utilisée pour identifier les propriétés constitutives des composants d'un rotor feuilleté et principalement de l'empilement de tôles.*

### Sommaire

---

|            |                                                                            |           |
|------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Objectifs et motivations</b> . . . . .                                  | <b>58</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Rotor feuilleté : réponse harmonique forcée</b> . . . . .               | <b>58</b> |
| 3.2.1      | Dispositif expérimental . . . . .                                          | 59        |
| 3.2.2      | Modélisation des conditions aux limites . . . . .                          | 59        |
| 3.2.3      | Protocole de mesure . . . . .                                              | 60        |
| 3.2.4      | Dimensionnement de la liaison structure-pot électrodynamique . . . . .     | 60        |
| 3.2.5      | Influence de la masse d'un accéléromètre . . . . .                         | 62        |
| 3.2.6      | Fréquences et formes propres expérimentales . . . . .                      | 62        |
| <b>3.3</b> | <b>Rotor feuilleté : réponse impulsionnelle</b> . . . . .                  | <b>64</b> |
| 3.3.1      | Protocole de mesure . . . . .                                              | 64        |
| 3.3.2      | Positionnement optimal d'un accéléromètre . . . . .                        | 65        |
| 3.3.3      | Fréquences et formes propres expérimentales . . . . .                      | 67        |
| <b>3.4</b> | <b>Rotor de palier magnétique actif : réponse impulsionnelle</b> . . . . . | <b>68</b> |
| 3.4.1      | Dispositif expérimental . . . . .                                          | 68        |
| 3.4.2      | Discrétisation spatiale du rotor PMA . . . . .                             | 68        |
| 3.4.3      | Protocole de mesure . . . . .                                              | 68        |
| 3.4.4      | Extraction modale . . . . .                                                | 69        |

---

### 3.1 Objectifs et motivations

AUJOURD'HUI, il est habituel que les analyses modales expérimentales fassent partie intégrante du processus de fabrication et de qualification d'un produit industriel, car elles sont un moyen rapide, voire économique, pour obtenir les caractéristiques dynamiques de structures. Ainsi, les analyses sont réalisées sur tout ou partie des rotors MGV à l'arrêt montés de telle façon à assurer des conditions aux limites de type *libre-libre*.

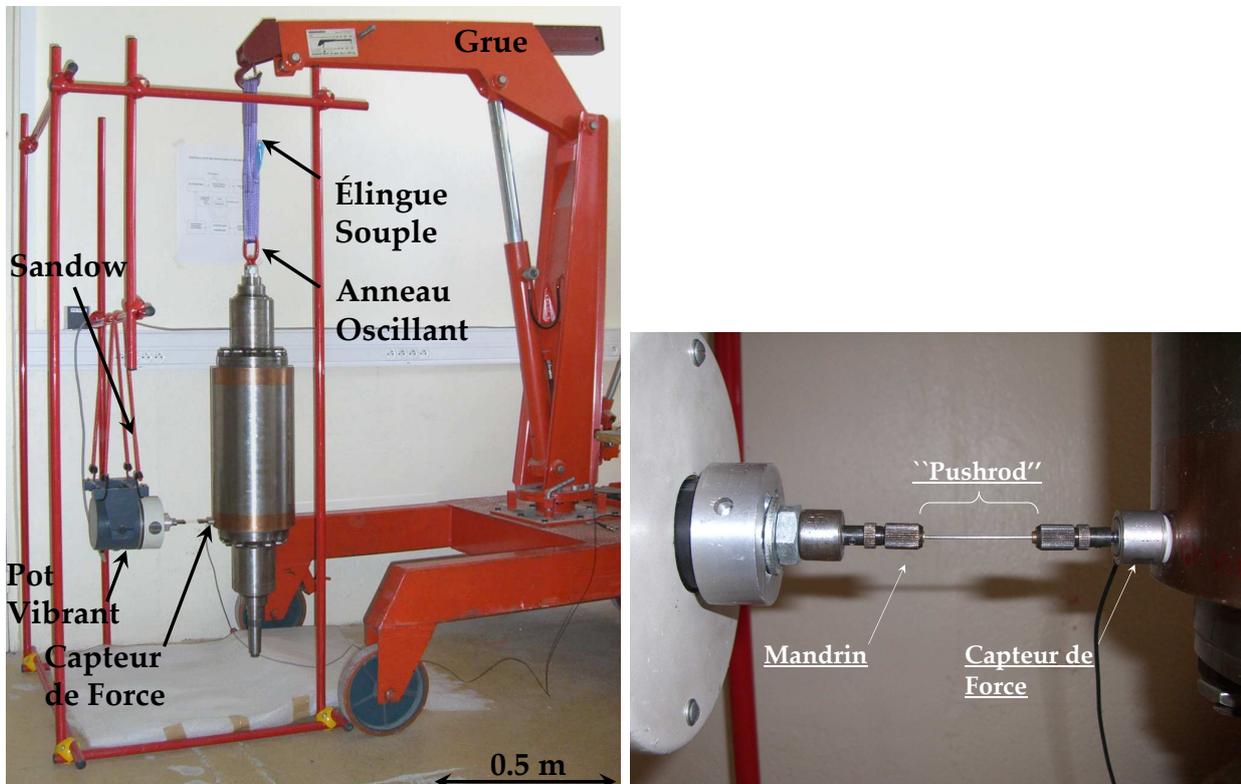
Les données mesurées alimentent une procédure d'identification qui permet la détermination des propriétés constitutives des empilements de tôles et des portions d'arbres.

Différentes gammes de rotors feuilletés de même architecture sont analysées, car l'objectif ciblé et décrit dans le Chapitre 4, est d'établir des lois des propriétés constitutives qui intègrent les variabilités des géométries, du nombre de tôles magnétiques, des pré-charges imposées par les applications industrielles visées. Ces analyses ont été réalisées sur un échantillon d'une trentaine de rotors MGV.

Les essais de type réponse harmonique forcée ont été pratiqués au laboratoire LAMCOs de l'INSA de Lyon alors que ceux de type réponse impulsionnelle sur le site de production de CONVERTEAM, Champigneulle.

### 3.2 Rotor feuilleté : réponse harmonique forcée

L'analyse modale expérimentale porte sur un prototype de rotor MGV feuilleté dont les taille et masse sont respectivement de 1.14 m et 235 kg, TAB. 3.1.



(a) Dispositif de suspension d'un rotor.

(b) Capteur de force.

FIGURE 3.1 – Vue d'ensemble du rotor MGV feuilleté

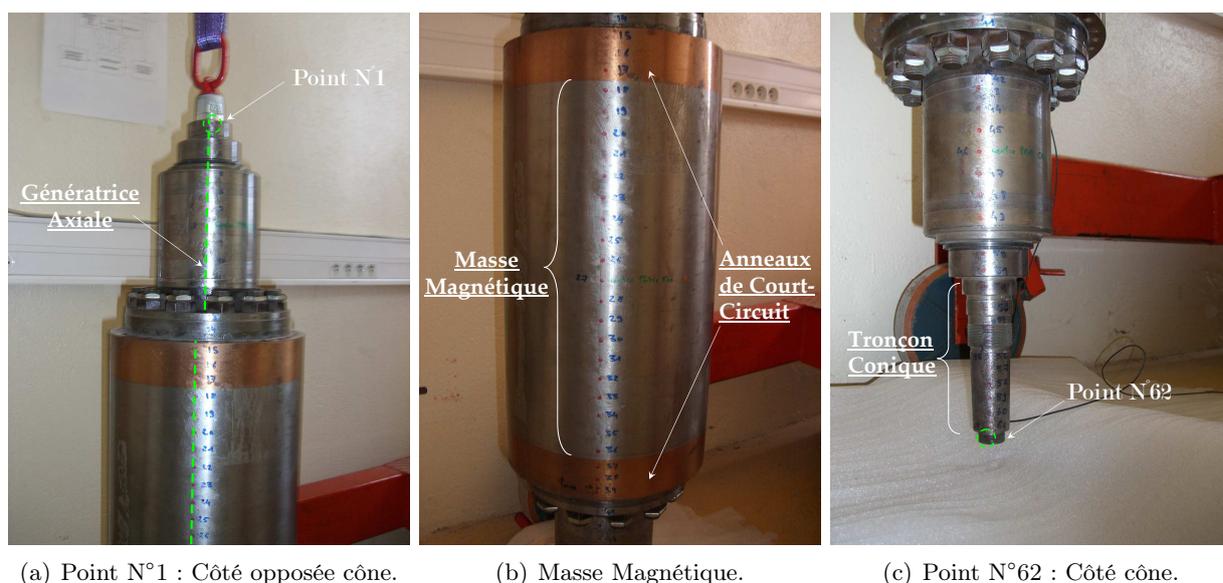


FIGURE 3.2 – Discrétisation spatiale de la structure.

### 3.2.1 Dispositif expérimental

Le rotor est suspendu verticalement à son extrémité par une élingue souple et un anneau oscillant afin d'assurer un découplage maximal entre le rotor et son environnement extérieur, FIG. 3.1(a). Le maillage expérimental est une génératrice axiale discrétisée en 62 points de mesure, FIG. 3.2.

### 3.2.2 Modélisation des conditions aux limites

Les conditions aux limites expérimentales sont proches des conditions aux limites *libre-libre*. Elles sont modélisées en ajoutant des termes de faible raideur transversale appliqués aux nœuds extrêmes du rotor, Eq. (3.1). Ces derniers sont calculés en considérant l'ensemble constitué du rotor massif et de l'élingue souple (de masse négligeable) comme un double pendule, FIG. 3.3. Après application du théorème du déplacement unité [35], les raideurs transversales s'écrivent donc :

$$k_e = \frac{m_r g}{L_e}, \quad (3.1a)$$

$$k_l = \frac{m_r g z_G}{(L_r^2 + z_G L_e)}, \quad (3.1b)$$

avec  $k_l$  la raideur transversale à l'extrémité libre du rotor,  $k_e$  la raideur transversale au niveau de l'élingue souple,  $m_r$  la masse totale du rotor,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $L_r$  la longueur du rotor,  $z_G$  le centre de masse du rotor et  $L_e$  la longueur de l'élingue souple. Les caractéristiques géométriques du rotor feuilleté sont définies dans le TAB. 3.1.

|                             |                      |                                |
|-----------------------------|----------------------|--------------------------------|
| Masse, $m_r$                | 235                  | kg                             |
| Longueur, $L_r$             | 1.14                 | m                              |
| Longueur, $L_e$             | 0.50                 | m                              |
| Centre de masse, $z_G$      | 0.64                 | m                              |
| Raideur transversale, $k_e$ | $9.08 \cdot 10^2$    | $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| Raideur transversale, $k_l$ | $4.62 \cdot 10^{33}$ | $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ |

TABLEAU 3.1 – Caractéristiques géométriques et inertielles du rotor suspendu.

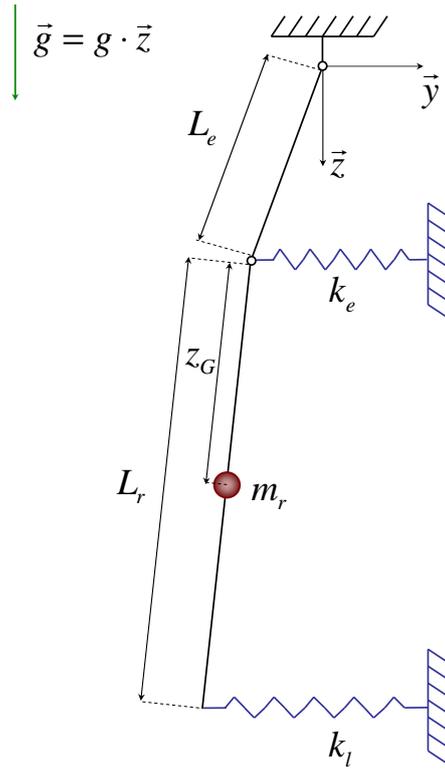


FIGURE 3.3 – Approximation cinématique relative au dispositif de suspension du rotor.

### 3.2.3 Protocole de mesure

Le rotor est préalablement excité latéralement avec un balayage sinusoïdal pas-à-pas sur une bande fréquentielle comprise entre 800 Hz et 3 200 Hz, afin d’obtenir la réponse de la structure et de situer les fréquences que l’on souhaite identifier. Un pot électrodynamique (ou “pot vibrant”) est employé à cet effet (Gearing and Watson - GWV20), FIG. 3.1(a).

L’analyse fréquentielle dépend de la bande passante des capteurs piézoélectriques utilisés et qui est de 3 kHz. La réponse du rotor est fournie par trois accéléromètres équirépartis sur la géométrie du rotor (DYTRAN - 3127A, à électronique incorporée) et un capteur de force dynamique piézoélectrique (DYTRAN - 1051V, à électronique incorporée), FIG. 3.1(b). La chaîne de mesure est classique, FIG. 3.4.

Après avoir repéré les modes de vibration identifiables sur la plage fréquentielle disponible, FIG. 3.5, la structure est excitée sur des plages fréquentielles plus restreintes, *e.g.*  $\sim 50$  Hz, encadrant chaque fréquence de résonance préalablement identifiée.

### 3.2.4 Dimensionnement de la liaison structure-pot électrodynamique

Compte tenu de la gamme étendue de l’analyse modale, une attention doit être portée sur le dimensionnement des éléments de liaison. La liaison entre la structure et le pot électrodynamique, appelée communément “*push-rod*”, est un axe élancé en acier, *e.g.* “corde à piano”, de faible diamètre, *i.e.*  $\sim 1.3$  mm, FIG. 3.1(b). Sa fonction est de restituer le plus exactement possible à la structure la force d’excitation générée par le pot électrodynamique.

En modélisant le “*push-rod*” par une poutre en conditions aux limites *encasté-encasté*, celui-ci doit être conçu de façon à ce que son comportement dynamique ne perturbe pas la mesure, FIG. 3.6.

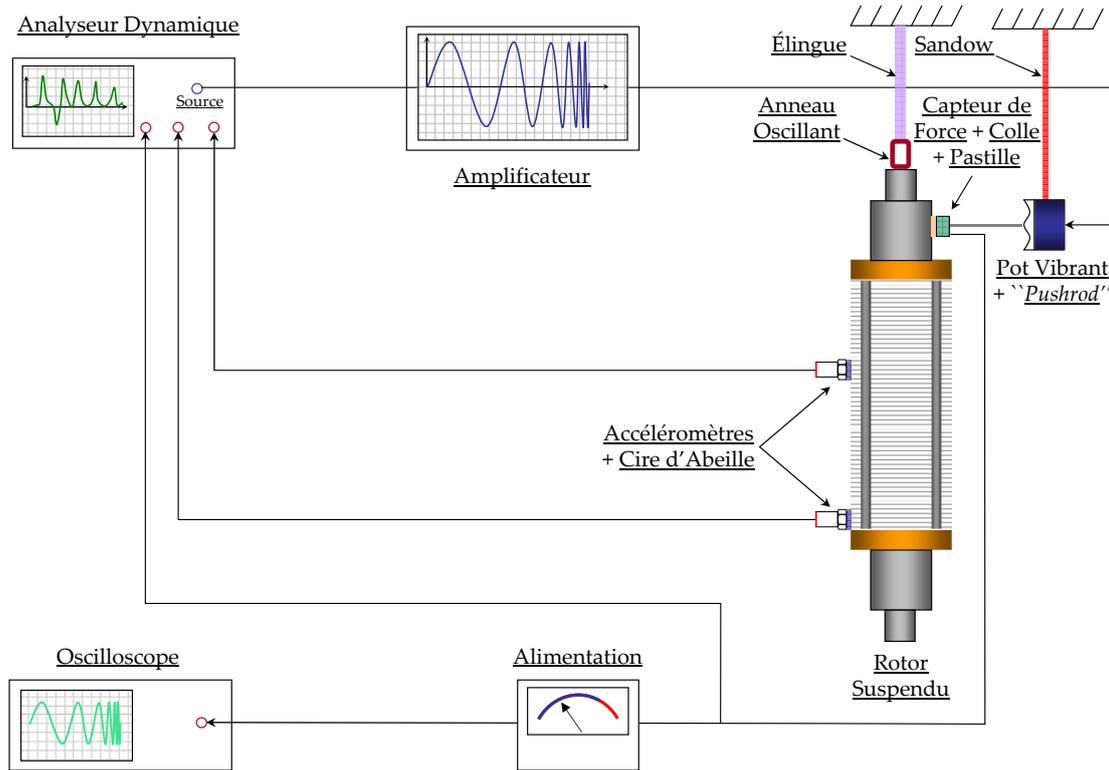


FIGURE 3.4 – Schéma de la chaîne d'acquisition classique employée.

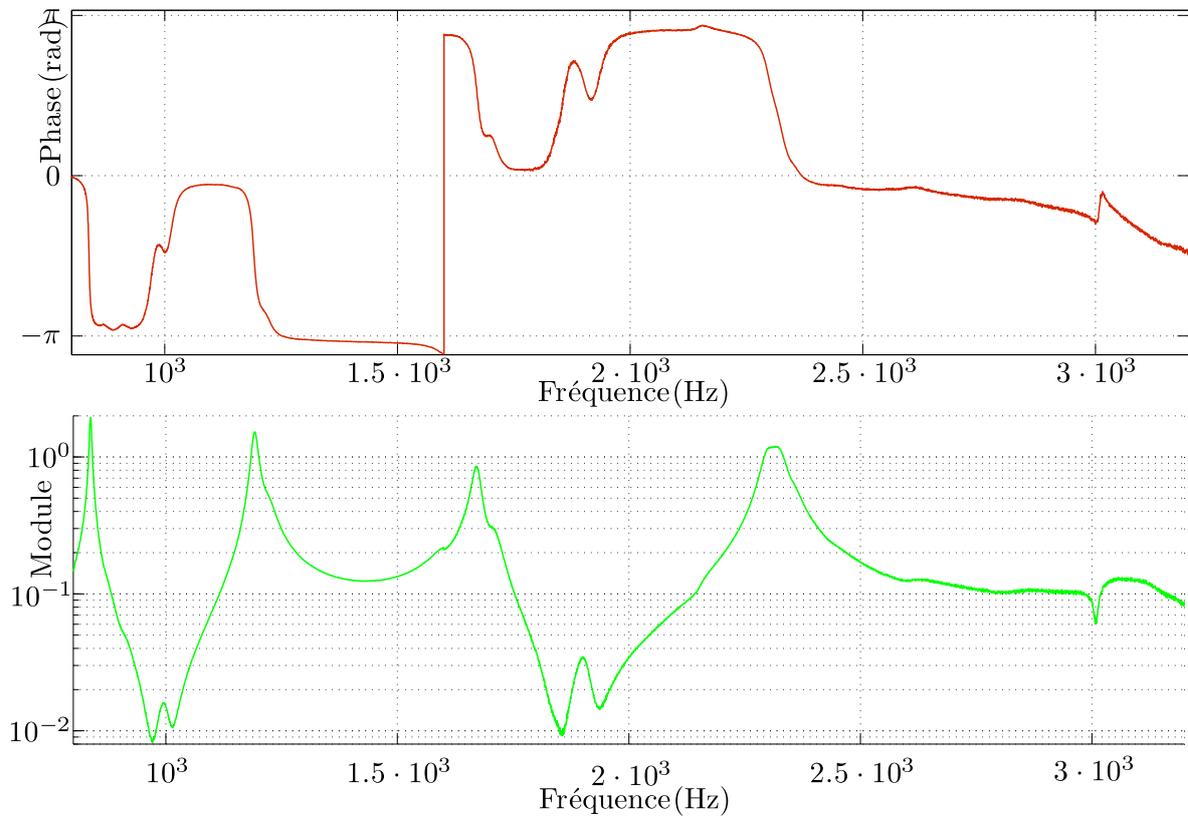


FIGURE 3.5 – Fonction de transfert (mobilité dynamique) mesurée au point N°61.

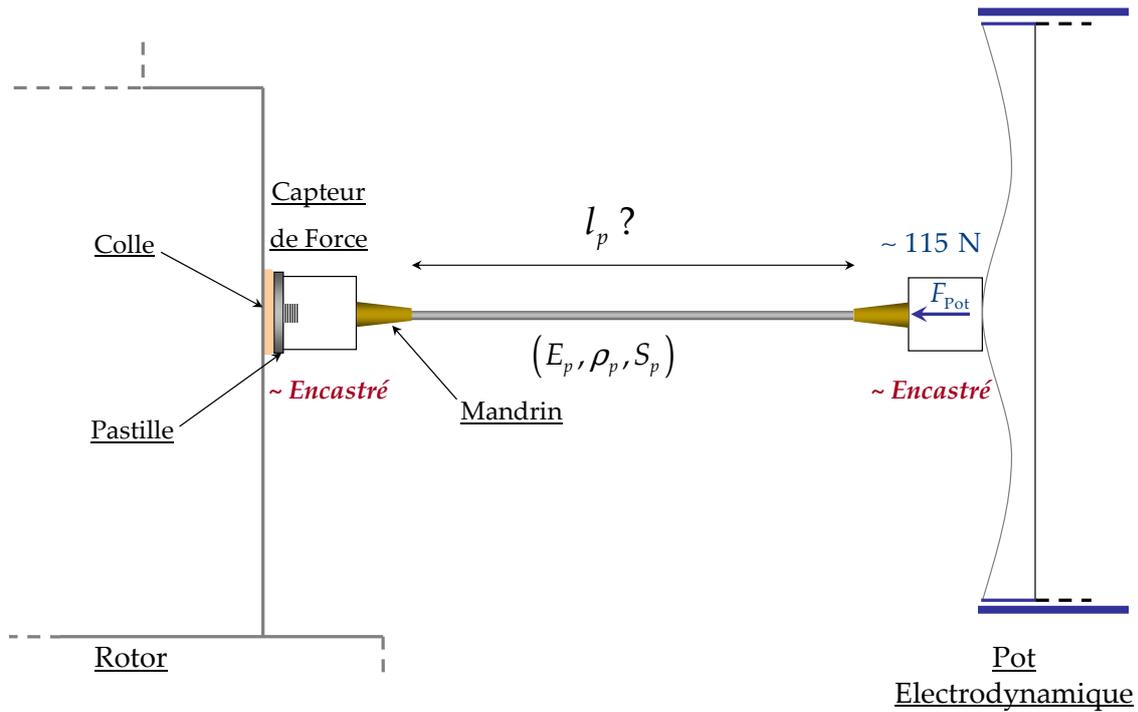


FIGURE 3.6 – Fixation d’un *pushrod* entre la structure et le pot électrodyamique.

Ainsi, prendre en compte les fréquences propres longitudinales et de flexion du “*push-rod*” conduit à une longueur de maximale de 78 mm. Dans cette configuration, la première fréquence de vibration longitudinale est de l’ordre de 30 kHz ce qui est d’ordre très supérieur à la plage fréquentielle de mesure.

### 3.2.5 Influence de la masse d’un accéléromètre

La géométrie de ce rotor présente des variations très importantes, *e.g.* diamètres variant de 20 mm à 246 mm, et la masse d’un seul accéléromètre, *e.g.* ~ 50 g, a modifié localement la structure lorsque celui-ci était placée sur sa partie conique, comme l’illustre la FIG. 3.7. L’influence de la masse additionnelle apportée par l’accéléromètre a, par conséquent, légèrement décalé les pics de résonance des fonctions de transfert mesurées (~ 4%) sur la partie conique de la structure.

### 3.2.6 Fréquences et formes propres expérimentales

L’analyse des fonctions de transfert, mesurées en chacun des points du maillage expérimental, permet d’obtenir les fréquences de résonance ainsi que les amplitudes relatives de chacun des points fournissant ainsi les formes propres expérimentales tracées, FIG. 3.8.

Ainsi, chaque forme propre a été reconstruite en considérant les amplitudes maximales de la partie imaginaire des fonctions de transfert mesurées. Les fréquences propres ont été identifiées à partir des fonctions de transfert qui n’ont pas été mesurées sur la partie conique du rotor.

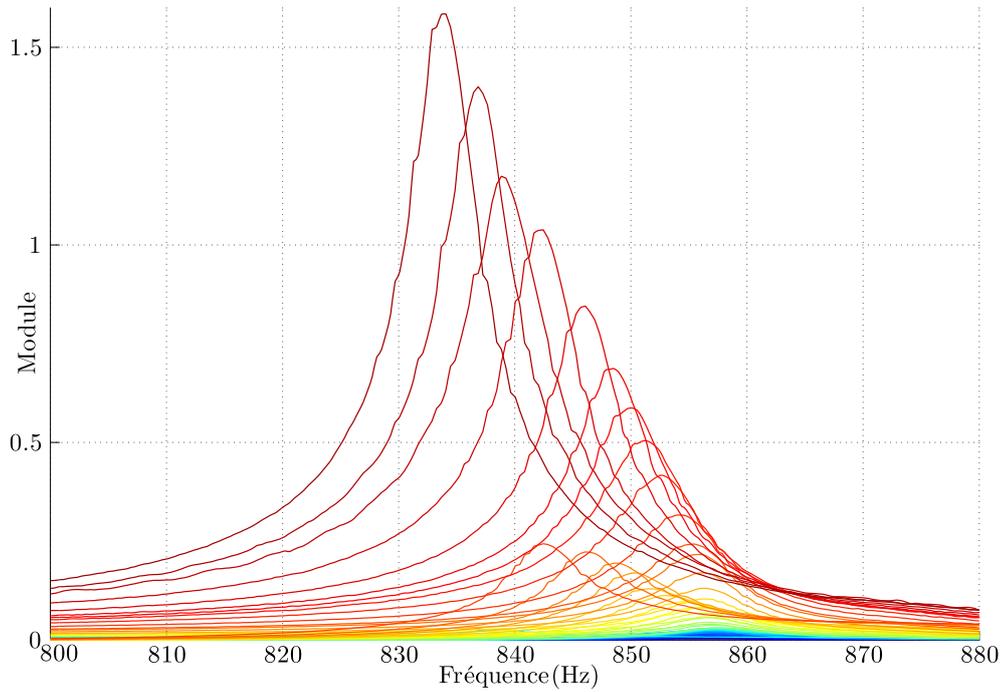


FIGURE 3.7 – Influence du déplacement d'un accéléromètre sur la dynamique du rotor suspendu. Module des 62 fonctions de transfert mesurées autour de  $\frac{\hat{\omega}_1}{2\pi}$ .

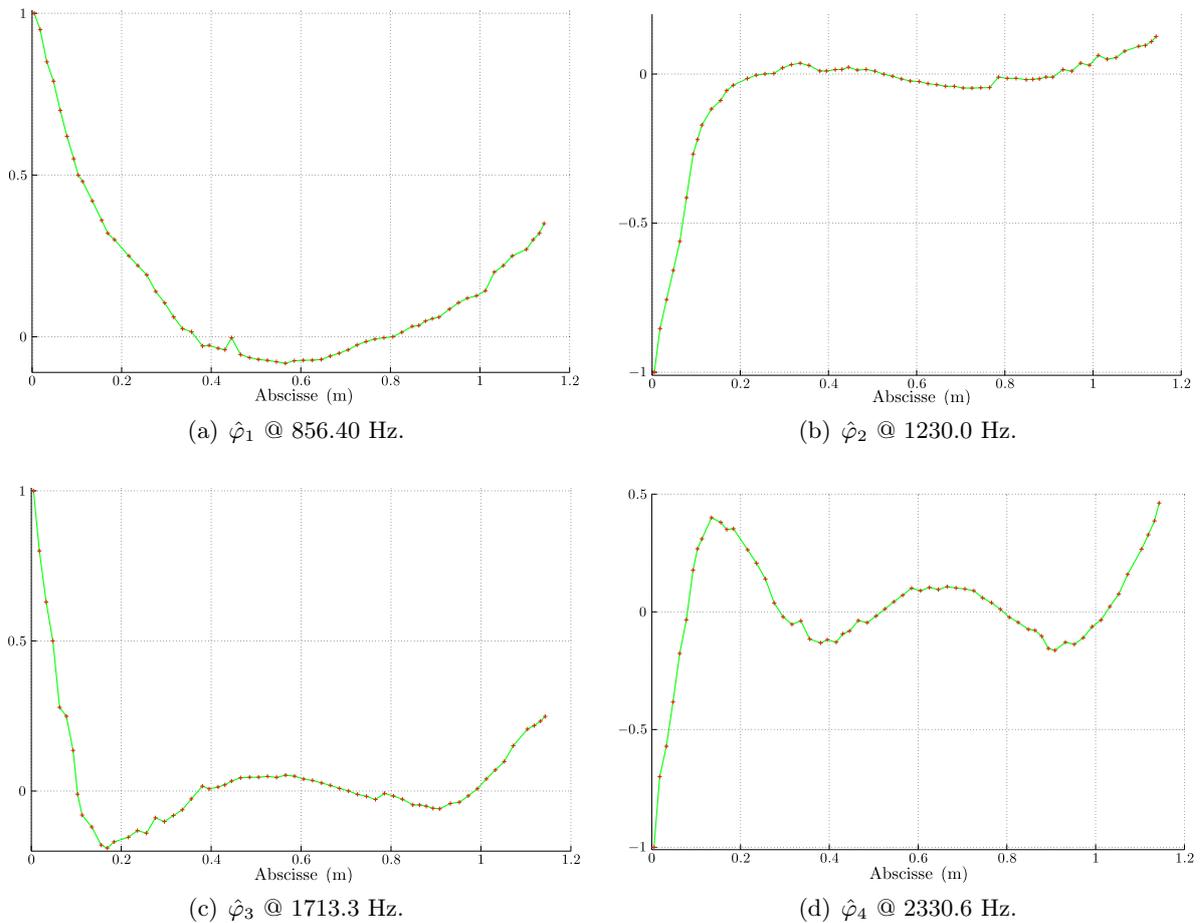


FIGURE 3.8 – Quatre premières formes propres expérimentales  $\hat{\varphi}_1$  à  $\hat{\varphi}_4$ .

### 3.3 Rotor feuilleté : réponse impulsionnelle

L'analyse modale expérimentale, réalisée au marteau de choc, porte sur un rotor MGV feuilleté dont les tailles et masse sont respectivement d'environ 1.98 m et 778 kg et suspendu comme précédemment. Le maillage expérimental comporte 106 points de mesure sur une génératrice axiale, FIG. 3.9, ce qui représente une densité linéique de l'ordre de  $54 \text{ points} \cdot \text{m}^{-1}$ . Il s'agit d'impacter la structure successivement en ces 106 points et de réaliser au fur et à mesure des analyses spectrales.

#### 3.3.1 Protocole de mesure

La structure est excitée à l'aide d'un marteau de choc. La plage fréquentielle de mesure comprise entre 0 Hz et 5 kHz est échantillonnée avec un pas fréquentiel égal à 0.39 Hz. Un capteur de force dynamique, vissé à l'extrémité du marteau, FIG. 3.10(a). Sa réponse est fournie par un accéléromètre piézoélectrique à électronique incorporée placé sur le point N°1 de la génératrice axiale du rotor durant tout le protocole de mesure, FIG. 3.10(c).

Un cycle du protocole de mesure consiste à acquérir les signaux fréquentiels d'accélération et force à l'aide d'un analyseur dynamique qui délivre le rapport de ces deux signaux : *fonction de transfert* ou *mobilité dynamique*.

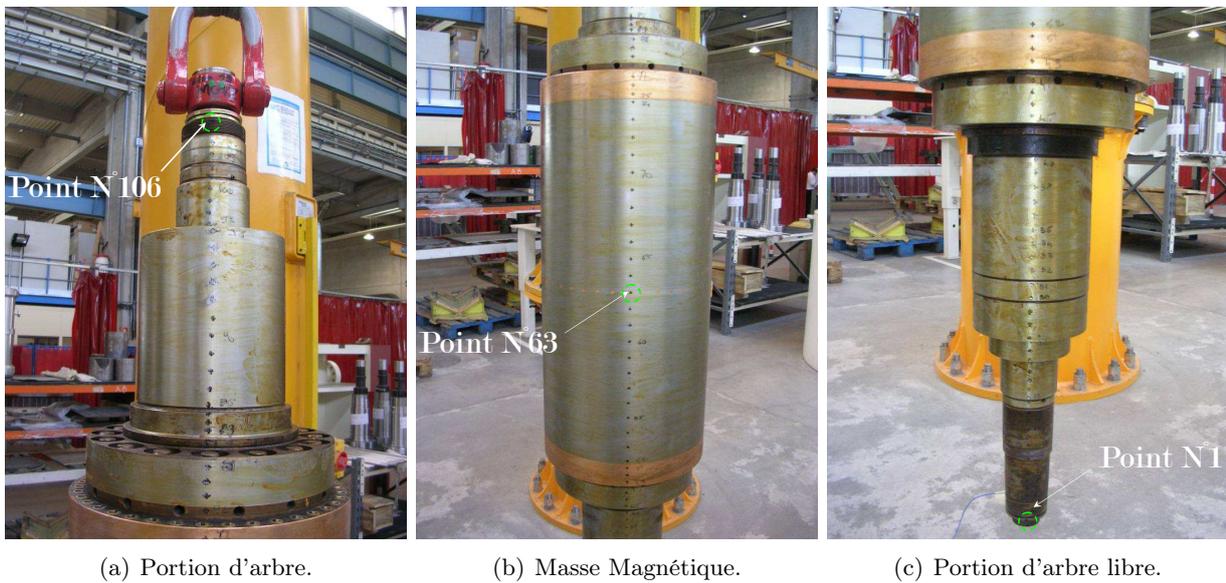


FIGURE 3.9 – Dispositif de suspension et maillage expérimental.

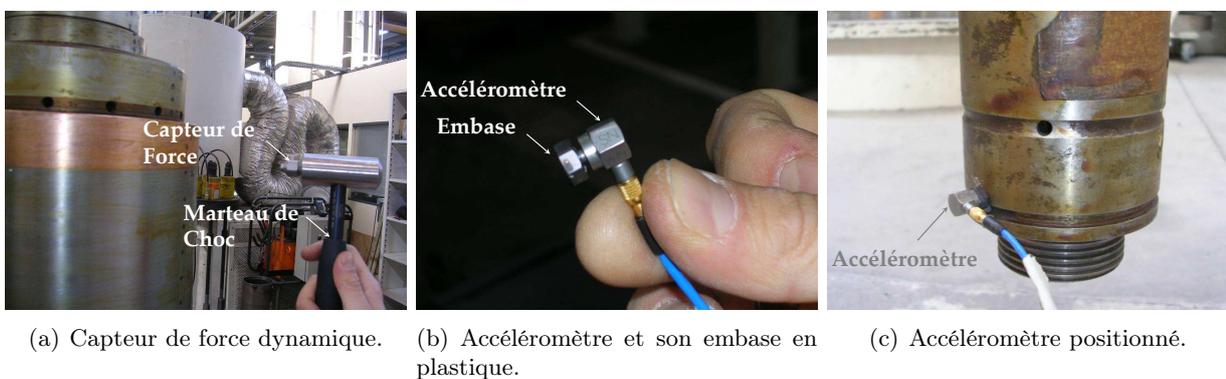


FIGURE 3.10 – Instrumentation.

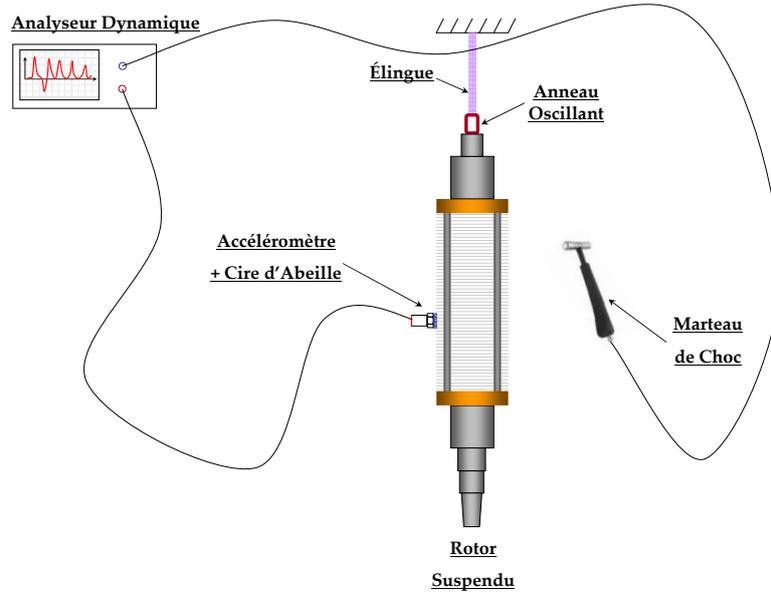


FIGURE 3.11 – Synopsis de la chaîne de mesure.

Le protocole de mesure s'achève alors lorsque les fonctions de transfert de tous les points de la génératrice axiale ont été mesurées, c'est-à-dire lorsqu'un impact aura été effectué successivement sur tous les points de la génératrice axiale. La FIG. 3.11 détaille la boucle de mesure classique utilisée lors de cet essai.

### 3.3.2 Positionnement optimal d'un accéléromètre

La position de l'accéléromètre, le long de la génératrice du rotor, doit être choisie de façon optimale afin que celui-ci soit sensible globalement à tous les modes de vibration que l'on souhaite identifier. Cette position doit correspondre à un point de la structure pour lequel les amplitudes des formes propres (après une quelconque normalisation) que l'on souhaite identifier soient maximales en moyennes, mais dont les valeurs soient les plus proches possibles. Il est donc nécessaire de traduire mathématiquement ce critère.

Soit  $\Phi \in \mathcal{M}_{r,m}$  la matrice des  $m$  formes propres expérimentales  $\varphi_k$  composées chacune de  $r$  points. On définit alors le critère estimé pour chaque point  $r$  tel que :

$$\gamma_r = \frac{\bar{\Phi}_{r,1\dots m}}{\sigma_{\Phi_{r,1\dots m}}^2}, \quad (3.2)$$

comme étant le rapport entre la moyenne  $\bar{\Phi}_{r,1\dots m}$  et la variance  $\sigma_{\Phi_{r,1\dots m}}^2$  des  $m$  amplitudes des formes propres au point  $r$ , définies tels que :

$$\bar{\Phi}_{r,1\dots m} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |(\varphi_k)_r|, \quad (3.3a) \quad \sigma_{\Phi_{r,1\dots m}}^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m ((\varphi_k)_r - \bar{\Phi}_{r,\dots})^2. \quad (3.3b)$$

Cela revient donc à résoudre le problème suivant :

$$\mathcal{T} \text{ trouver l'indice } r^* \quad (3.4)$$

$$\text{tel que } \max_{r^* \in \mathbb{N}} \gamma_r, \quad \forall r \in \mathbb{N},$$

où  $(\varphi_k)_r$  est l'amplitude de la  $k^e$  forme propre  $\varphi_k$  au point  $r$ . Ainsi, il est possible de déterminer une

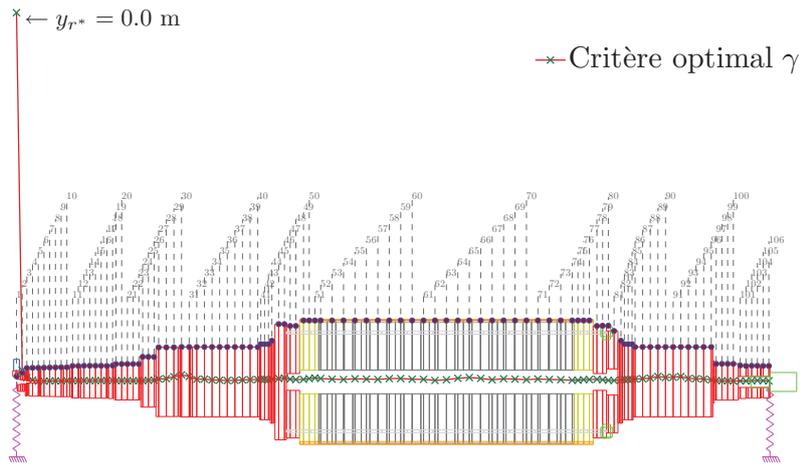


FIGURE 3.12 – Positionnement optimal de l’accéléromètre en  $x_{r^*}$  en fonction du critère  $\gamma$  (x), 106 points de mesures (•).

position axiale optimale  $y_{r^*}$ , telle qu’en ce point, la moyenne des amplitudes modales soit maximale et l’écart type minimal, de sorte que le rapport de ces deux quantités soit maximal en la position optimale. La recherche de cette position a été effectuée à l’aide des dix premières formes propres obtenues lors de cette essai, FIG. 3.14(a) à FIG. 3.14(j). La position optimale obtenue coïncide avec le point N°1. Cette information pourra être utilisée *a posteriori* lors d’analyses modales ultérieures qui seront réalisées sur ce rotor.

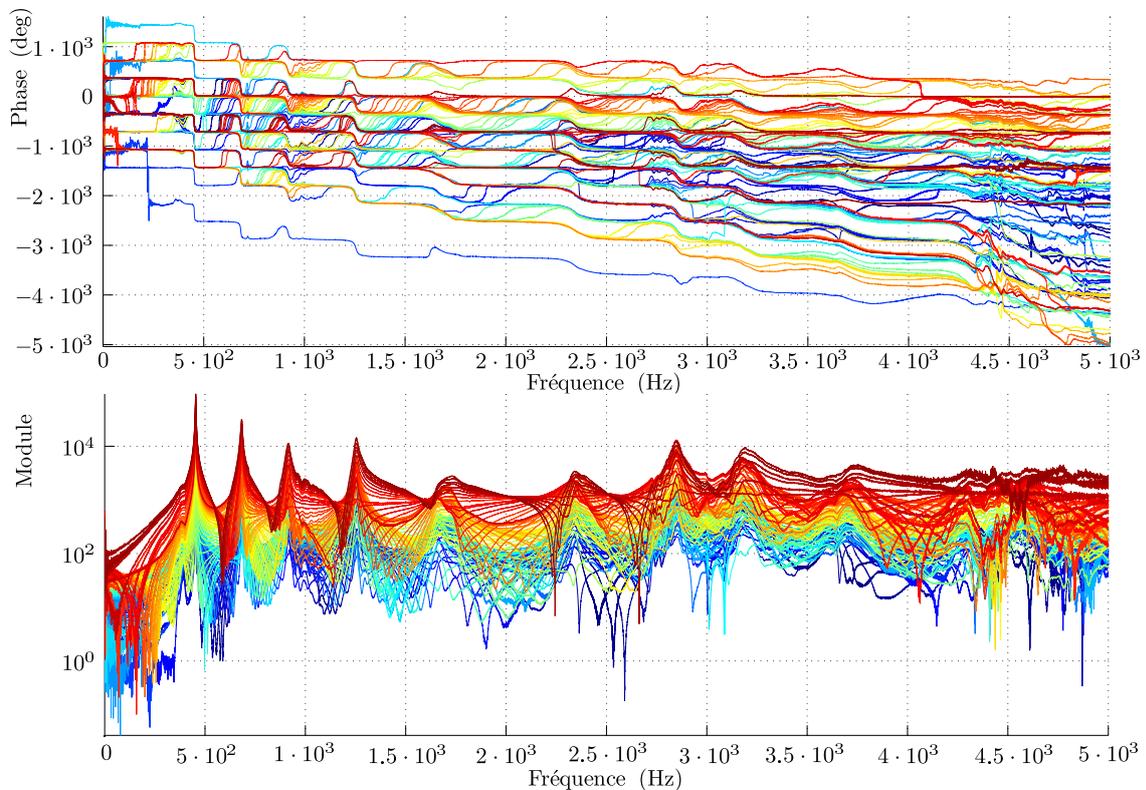


FIGURE 3.13 – Diagrammes de  $\mathcal{B}$ ode établis avec 106 impacts successifs effectuées aux 106 points du maillage expérimental.

### 3.3.3 Fréquences et formes propres expérimentales

Les fonctions de transfert établies avec 106 impacts effectués aux 106 points du maillage expérimental donnent les fréquences et formes propres expérimentales, FIG. 3.13. Les dix premières formes et fréquences propres de flexion du rotor sont extraites et présentées dans les FIG. 3.14(a) à FIG. 3.14(j).

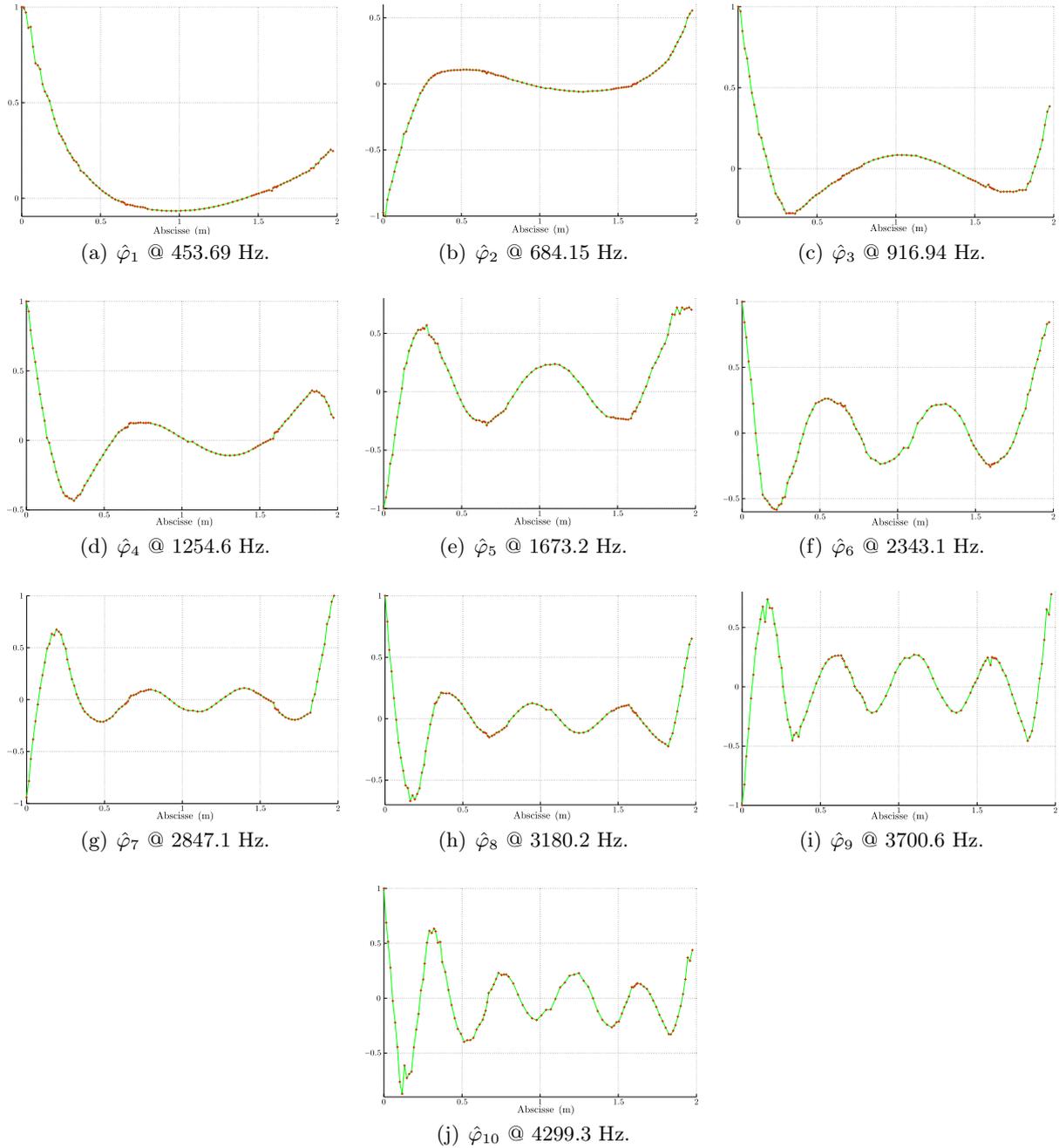


FIGURE 3.14 – Formes propres expérimentales  $\hat{\varphi}_1$  à  $\hat{\varphi}_{10}$ .

### 3.4 Rotor de palier magnétique actif : réponse impulsionnelle

Les rotors de paliers magnétiques actif (rotor PMA) sont les éléments principaux du dispositif de suspension d'un rotor. Ils sont principalement constitués d'un empilement de tôles magnétiques **annulaires** frettées, à chaud, sur les portions d'arbre du rotor feuilleté. En revanche, pour des raisons de transportabilité, l'empilement est maintenu dans un tube aux extrémités duquel fourreau et entretoise le maintiennent légèrement précontraint, FIG. 3.15(a).

Leurs dimensions caractéristiques leur confèrent un rapport diamètre sur longueur de l'ordre de l'unité. Ils ajoutent ainsi une rigidité supplémentaire non négligeable au rotor et ne peuvent être modélisés par des masses et inerties discrètes.

Cette section présente l'analyse modale expérimentale réalisée avec une réponse impulsionnelle pour déterminer les premières formes et fréquences propres du rotor PMA, lesquelles permettront d'identifier les propriétés constitutives de l'empilement de tôles magnétiques annulaires dont il est constitué.

#### 3.4.1 Dispositif expérimental

Pour assurer un découplage maximal entre le rotor PMA et son environnement extérieur, celui-ci est placé sur un tapis en élastomère surmonté d'une épaisseur de mousse, FIG. 3.15(b). Cette base de très faible rigidité, vis-à-vis de sa propre rigidité, assure une condition aux limites *libre-libre*.

#### 3.4.2 Discrétisation spatiale du rotor PMA

Le rotor PMA est discrétisé selon quatorze génératrices axiales et neuf génératrices radiales. Il y a donc  $9 \times 14 = 126$  points de mesure, FIG. 3.15(c).

#### 3.4.3 Protocole de mesure

La structure est excitée à l'aide d'un marteau de choc et la plage fréquentielle de mesure se situe entre 0 Hz et 5 kHz échantillonnée avec un pas fréquentiel égal à 0.39 Hz.

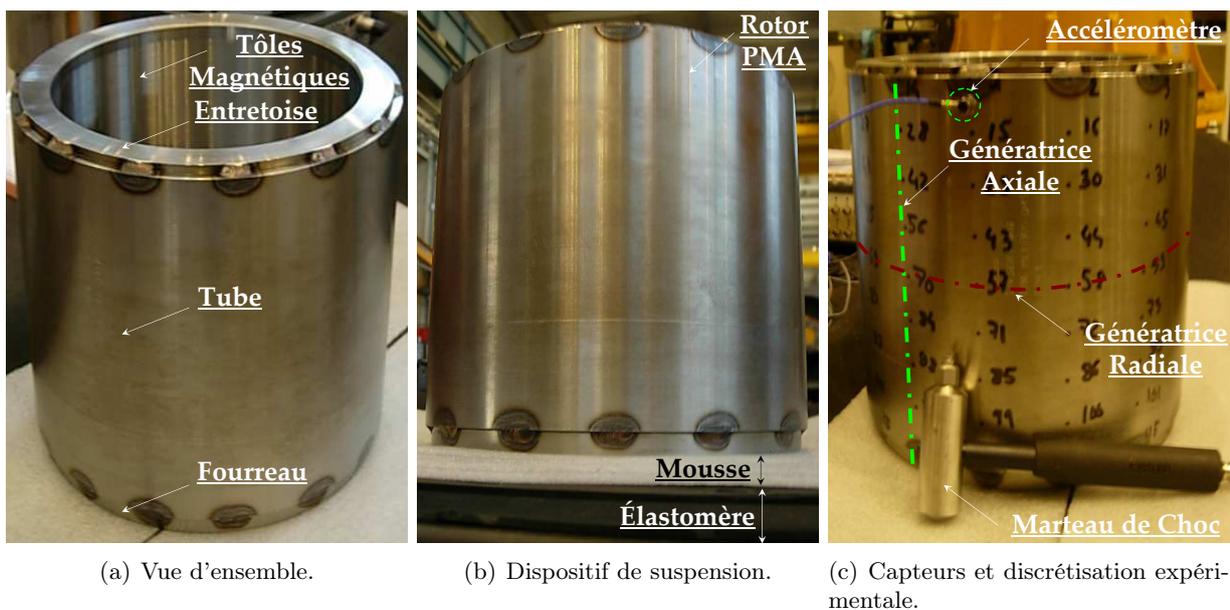


FIGURE 3.15 – Suspension, capteurs et maillage expérimental. Les génératrices axiales sont représentées en vert (---) et radiales en rouge (---).

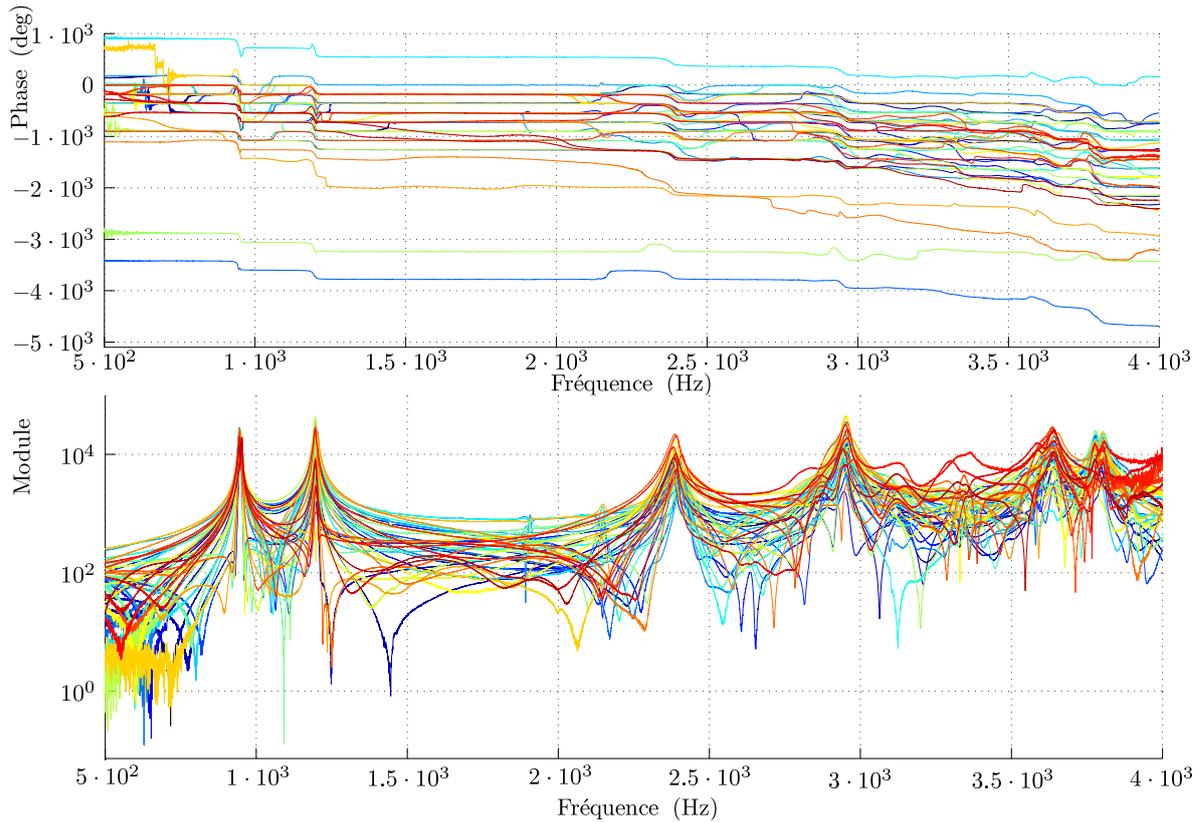


FIGURE 3.16 – Accélérances mesurées en différents points du rotor PMA.

Le protocole de mesure est identique à celui présenté en Section 3.3 et s’achève lorsque les accélérances établies avec les 126 impacts effectués aux 126 points du maillage expérimental ont été mesurées. La FIG. 3.11 détaille la boucle de mesure complète utilisée lors de cet analyse modale.

### 3.4.4 Extraction modale

L’analyse des fonctions de transfert, tracées sur la FIG. 3.16, et mesurées en chacun des points de la structure discrétisée, *i.e.* N°1 à N°126, permet d’obtenir les fréquences et les formes propres expérimentales.

Chaque forme propre expérimentale a été reconstruite en considérant les amplitudes de la partie imaginaire des fonctions de transfert mesurées en chacune des fréquences de résonance. Le TAB. 3.2 présente les douze premiers formes propres expérimentales. Les formes propres mesurées sont assez similaires aux formes propres tridimensionnels d’un cylindre creux à paroi mince. Ainsi, il est possible de les trier en utilisant la classification suivante [61] :

- **A. Les formes propres purement radiales** : Le mouvement est purement radial et le cylindre conserve une géométrie de section droite constante sur sa longueur. Les sections droites restent planes et normales à l’axe de évolution du cylindre.
- **B. Les formes propres de cisaillement radial avec mouvements radiaux** : Le cylindre ne conserve pas une géométrie de section droite constante sur sa longueur comme pour les formes propres précédemment décrites. Les sections droites ne restent pas planes, les génératrices axiales ne restent pas parallèles entre elles et ne restent pas rectilignes.

- **C. Les formes propres globales** : Il y a similarité avec les formes propres de vibration d'une poutre en flexion, torsion ou traction compression. Dans notre cas, seuls les formes propres de flexion transversale ont pu être excités.

Dans le tableau TAB. 3.2,  $p$  représente l'ordre du mode dans la direction circonférentielle, le nombre de rayons nodaux du  $p^e$  mode étant égal à  $2p$ ;  $q$  est l'ordre du mode dans la direction axiale (axe de révolution du rotor PMA), et le nombre de sections droites nodales du  $q^e$  mode est égal à  $q$ .

| Formes Propres |  |  | Catégorie | $p$ | $q$ | Fréquence (Hz), $f$ |
|----------------|--|--|-----------|-----|-----|---------------------|
|                |  |  | A         | 1   | 0   | 945                 |
|                |  |  | A         | 1   | 0   | 951                 |
|                |  |  | B         | 1   | 1   | 1195                |
|                |  |  | B         | 1   | 1   | 1200                |
|                |  |  | A         | 3   | 0   | 2389                |
|                |  |  | A         | 3   | 0   | 2393                |
|                |  |  | B         | 3   | 1   | 2930                |
|                |  |  | B         | 3   | 1   | 2952                |
|                |  |  | B         | 1   | 2   | 3607                |
|                |  |  | B         | 1   | 2   | 3638                |
|                |  |  | C         | 0   | 1   | 3779                |
|                |  |  | C         | 0   | 1   | 3800                |

TAB. 3.2 – Valeurs expérimentales des douze premières fréquences propres et classification des formes propres expérimentales d'un rotor PMA

## Chapitre 4

# Identification des propriétés constitutives des éléments d'un rotor feuilleté

*Dans un premier temps, des normes d'erreur modales sont définies en se basant notamment sur les propriétés de la matrice de corrélation MAC entre des paires de formes propres mesurées et calculées. Celles-ci permettent de traduire l'écart entre quantités modales mesurées et calculées et sont incluses dans une fonctionnelle multi-objectifs. Dans un second temps, des fonctionnelles originales proposées sont basées sur un quotient de Rayleigh hybride issu de méthodes de réduction de Guyan ou de Craig & Bampton. D'autres fonctionnelles basées sur des méthodes d'expansion de Guyan ou SEREP sont présentées en annexe. Toutes les fonctionnelles proposées ont été éprouvées dans diverses applications industrielles dans le but d'identifier des propriétés constitutives de structures réelles : empilement de tôles magnétiques, portions d'arbre, rotor de palier magnétique. Finalement, la dernière section de ce chapitre est consacrée à l'analyse des propriétés constitutives identifiées sur un échantillon d'environ trente rotors feuilletés. Propriétés géométriques et mécaniques de la masse magnétique ont permis d'établir des modèles prédictifs des modules d'Young et de Coulomb de l'empilement de tôles.*

### Sommaire

---

|            |                                                        |           |
|------------|--------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Généralités et objectifs</b>                        | <b>73</b> |
| <b>4.2</b> | <b>Distributions des propriétés constitutives</b>      | <b>74</b> |
| <b>4.3</b> | <b>Une fonctionnelle multi-objectifs</b>               | <b>76</b> |
| 4.3.1      | Introduction                                           | 76        |
| 4.3.2      | Normes d'erreur modales                                | 76        |
| 4.3.3      | Définition d'une fonctionnelle multi-objectifs         | 77        |
| 4.3.4      | Dérivation des normes d'erreur modales                 | 78        |
| 4.3.4.1    | Norme d'erreur modale basée sur les pulsations propres | 78        |
| 4.3.4.2    | Norme d'erreur modale basée sur la matrice MAC         | 79        |

|            |                                                                                                   |            |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.4.3    | Norme d'erreur modale basée sur l'écart entre les composantes modales . . . . .                   | 79         |
| 4.3.5      | Sensibilité des normes d'erreur modales . . . . .                                                 | 80         |
| 4.3.6      | Robustesse des normes d'erreur modales . . . . .                                                  | 81         |
| 4.3.7      | Coefficients de pondération . . . . .                                                             | 84         |
| 4.3.8      | Stratégie d'optimisation . . . . .                                                                | 85         |
| 4.3.9      | Application industrielle : identification de distributions de propriétés . . . . .                | 86         |
| 4.3.10     | Conclusion . . . . .                                                                              | 89         |
| <b>4.4</b> | <b>Une fonctionnelle modale condensée selon Guyan . . . . .</b>                                   | <b>90</b>  |
| 4.4.1      | Introduction . . . . .                                                                            | 90         |
| 4.4.2      | Compatibilité dimensionnelle et condensation . . . . .                                            | 90         |
| 4.4.2.1    | Définition de la fonctionnelle modale condensée . . . . .                                         | 90         |
| 4.4.2.2    | Convergence . . . . .                                                                             | 92         |
| 4.4.2.3    | Sensibilité, robustesse et précision . . . . .                                                    | 95         |
| 4.4.3      | Stratégie d'optimisation . . . . .                                                                | 95         |
| 4.4.4      | Dérivation de la matrice de transformation de Guyan . . . . .                                     | 97         |
| 4.4.5      | Application industrielle : identification de propriétés homogénéisées . . . . .                   | 97         |
| 4.4.6      | Conclusion . . . . .                                                                              | 104        |
| <b>4.5</b> | <b>Une fonctionnelle modale condensée selon Craig &amp; Bampton . . . . .</b>                     | <b>105</b> |
| 4.5.1      | Introduction . . . . .                                                                            | 105        |
| 4.5.2      | Intérêt d'une condensation dynamique pour un modèle ramifié . . . . .                             | 105        |
| 4.5.3      | Définition de la fonctionnelle modale condensée . . . . .                                         | 107        |
| 4.5.4      | Stratégie d'Optimisation . . . . .                                                                | 109        |
| 4.5.5      | Dérivation de la matrice de transformation de Craig & Bampton . . . . .                           | 109        |
| 4.5.6      | Application industrielle : identification de propriétés homogénéisées et modèle ramifié . . . . . | 110        |
| 4.5.7      | Conclusion . . . . .                                                                              | 115        |
| <b>4.6</b> | <b>Modèle prédictif de propriétés constitutives . . . . .</b>                                     | <b>116</b> |
| 4.6.1      | Introduction . . . . .                                                                            | 116        |
| 4.6.2      | Analyses modales expérimentales . . . . .                                                         | 117        |
| 4.6.3      | Résultats d'identification . . . . .                                                              | 118        |
| 4.6.4      | Procédure de régression de modèle . . . . .                                                       | 119        |
| 4.6.4.1    | Modèle statistique . . . . .                                                                      | 121        |
| 4.6.4.2    | Régression linéaire multiple (MLR) . . . . .                                                      | 121        |
| 4.6.4.3    | Intervalles fréquentiels de confiance et de prédiction . . . . .                                  | 125        |
| 4.6.5      | Conclusion . . . . .                                                                              | 126        |

---

## 4.1 Généralités et objectifs

DANS une procédure d'identification mixte numérique-expérimentale, il s'agit d'abord de définir les paramètres à identifier, et les quantités d'intérêt, grandeurs vis-à-vis desquelles on souhaite identifier ces paramètres et qui permettent la définition d'une fonctionnelle.

Il est ensuite nécessaire d'utiliser une méthode d'optimisation afin de faire tendre les paramètres à identifier d'un modèle numérique, "non inversible", vers les valeurs cibles (ou de références) que représentent les données expérimentales. Le terme "non inversible" est employé dans le sens où l'obtention d'une solution optimale ne consiste pas en la simple inversion d'un système matriciel ou la résolution analytique d'une équation. La méthode d'optimisation a donc une importance capitale dans la qualité d'identification des paramètres.

Le processus d'optimisation consiste en la minimisation itérative d'une fonctionnelle définissant l'écart entre les quantités d'intérêt mesurées et calculées provenant d'un modèle. Le choix des quantités d'intérêt s'est porté sur les quantités modales, *i.e.* **pulsations** et **formes propres**. Les fonctionnelles définies dans ce chapitre sont du type moindres carrés, c'est-à-dire qu'elle sont issues d'une somme de termes quadratiques appelés *normes* d'erreur modales ou *estimateurs* d'erreur modal. Pour être les plus efficaces possible, elles doivent satisfaire les conditions suivantes :

- **Sensibilité** : pour garantir une excellente précision d'identification, les fonctionnelles doivent être suffisamment sensibles à l'ensemble des paramètres à identifier.
- **Robustesse** : les normes d'erreur utilisées doivent être convexes et ne posséder qu'un seul et unique minimum local dans une large plage de paramètres. Ceci garantit le bon déroulement de la procédure d'optimisation indépendamment de l'estimation initiale des paramètres à identifier.
- **Précision** : au voisinage des paramètres optimaux, les fonctionnelles doivent converger vers zéro et l'erreur résiduelle ne doit pas provenir d'effets de troncature numérique ou d'approximation dans le calcul de ces fonctions, mais uniquement des incertitudes expérimentales.

En parallèle, l'algorithme de minimisation doit satisfaire autant que possible les critères suivants :

- **Rapidité** : à chaque itération, un problème aux valeurs propres qui peut être coûteux en temps CPU est résolu. Pour des raisons de productivité dans le cadre d'une application industrielle, l'algorithme doit converger rapidement surtout lors des premières itérations pour diriger les paramètres dans la bonne plage mais aussi lors des dernières pour fixer les derniers pourcentages des paramètres.
- **Robustesse** : afin d'assurer une convergence vers la solution optimale quelle que soit l'estimation des paramètres initiaux, l'algorithme d'optimisation doit également être robuste, notamment lors les premières itérations.
- **Précision** : la précision de l'estimation finale des paramètres conditionne l'efficacité de l'identification. Or, l'erreur résiduelle est conditionnée par la précision des mesures et du modèle, mais aussi par la tolérance de convergence spécifiée à l'algorithme. Dans les applications pratiques, celle-ci est souvent fixée de telle manière à obtenir une précision suffisante et un temps CPU acceptable. La rapidité de convergence influence alors la précision de l'identification.

La démarche suivie pour développer les fonctionnelles et mettre au point l'algorithme d'optimisation est caractérisée par les points suivants :

1. Définition d'un ensemble de fonctionnelles possibles se basant sur les normes couramment utilisées en analyse modale.
2. Étude paramétrique par éléments finis sur des rotors de référence afin d'identifier la robustesse et la sensibilité des normes d'erreur proposées.
3. Définition d'une norme d'erreur globale comme combinaison des normes d'erreur modales sélectionnées.
4. Analyse, choix et implantation d'un type d'algorithme d'optimisation correspondant aux besoins.
5. Choix et implantation d'une méthode pour le calcul des gradients de la fonctionnelle à minimiser.

**Remarque 9:** La modélisation des rotors feuilletés suppose, bien entendu, l'utilisation des matrices élémentaires définies dans la section Section 2.1 lorsqu'une quelconque réponse souhaite être déterminée. En revanche, dans les procédures d'identification présentées dans ce chapitre, les rotors feuilletés sont modélisés dans un seul plan, *e.g.*  $\{yGz\}$ , car les analyses modales expérimentales ont été effectuées dans un unique plan.



## 4.2 Distributions des propriétés constitutives

Soit un rotor feuilleté discrétisé en  $N_e$  éléments finis  $\mathcal{K}_e$  comprenant  $n_\delta$  degrés de liberté inclus dans l'ensemble  $\Sigma$ , Chapitre B. L'union de tous les éléments finis  $\mathcal{K}_e$  du maillage est compris dans le domaine  $\Omega$  tel que :

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_e} \mathcal{K}_e. \quad (4.1)$$

L'objectif de la procédure d'identification mixte numérique-expérimentale consiste à déterminer les propriétés constitutives de l'empilement de tôles magnétiques.

On se place dans un cadre général où l'on suppose une distribution de propriétés constitutives, strictement positive, définie par une suite  $\{x_p\}_{p=1\dots n}$ ,  $x_p \in \mathbb{R}^{+*}$  répartie le long de l'empilement sur  $h$  sous-domaines  $\Omega_k$  du modèle éléments finis telle que :

$$\{x\} = \{x_1, \dots, x_p, \dots, x_n\}, \quad n = 3h, \quad \forall h \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Comme illustré FIG. 4.1, l'empilement de tôles magnétiques est donc représenté par le domaine  $\Omega_u$ , union des  $h$  sous-domaines  $\Omega_k$  tel que :

$$\Omega_u = \bigcup_{k=1}^h \Omega_k. \quad (4.3)$$

La suite définie par l'Eq. (4.2) peut également s'écrire sous la forme suivante de manière à faire intervenir les propriétés constitutives :

$$\{x\} = \{E_1, G_1, v_1, \dots, E_k, G_k, v_k, \dots, E_h, G_h, v_h\}, \quad \forall h \in \mathbb{N}, \quad (4.4)$$

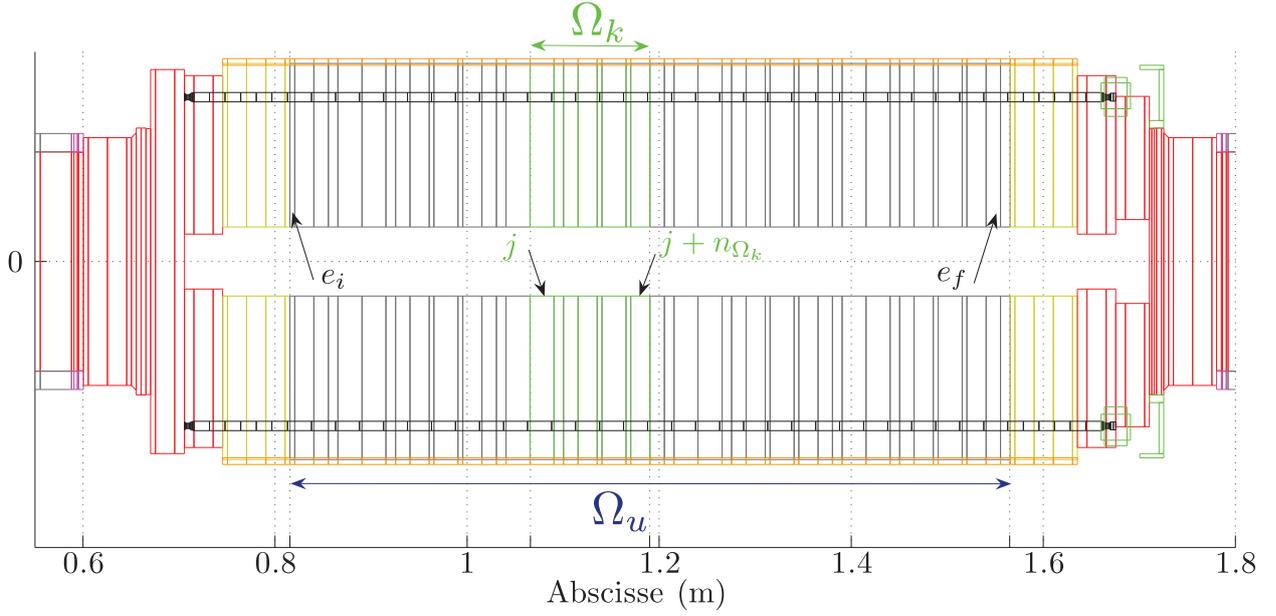


FIGURE 4.1 – Définition d'un sous-domaine sur la masse magnétique discrétisée.

où les variables d'optimisation relatives au  $k^e$  sous-domaine  $\Omega_k$  sont définies par le triplet suivant,  $\forall \in [1, \dots, h]$  :

$$E_k = x_{3k-2}, \quad (4.5a)$$

$$G_k = x_{3k-1}, \quad (4.5b)$$

$$v_k = x_{3k}, \quad (4.5c)$$

avec  $E_k$ ,  $G_k$  et  $v_k$  respectivement les modules d'Young, de Coulomb et coefficient de Poisson du sous-domaine  $\Omega_k$ .

Un sous-domaine  $\Omega_k$  est alors défini comme une suite d'éléments finis contigus du modèle éléments finis de la structure telle que :

$$\Omega_k = \bigcup_{e=1}^{n_{\Omega_k}} \mathcal{H}_{(e_i-1) + \sum_{j=1}^{k-1} n_{\Omega_j} + e} = \bigcup_{j=e_i + \sum_{j=1}^{k-1} n_{\Omega_j}}^{j=(e_i-1) + \sum_{i=1}^k n_{\Omega_i}} \mathcal{H}_j, \quad \forall k = 1, \dots, h, \quad (4.6)$$

où  $e_i$  est l'indice du premier élément-fini du domaine  $\Omega_u$  et  $n_{\Omega_k}$  est le nombre d'éléments finis d'un sous-domaine  $\Omega_k$ , FIG. 4.1. En considérant  $n_{\Omega_k}$  constant pour chaque sous-domaine  $\Omega_k$  tel que  $n_{\Omega_k} = n_{\Omega}$ ,  $\forall k = 1, \dots, h$ , il vient alors :

$$n_{\Omega} h = e_f - e_i + 1, \quad (4.7)$$

où  $e_f$  est l'indice du dernier élément-fini du domaine  $\Omega_u$ , FIG. 4.1.

Le nombre  $h$  de sous-domaines  $\Omega_k$  est *a priori* arbitraire. Ainsi, afin de mettre en évidence une certaine variabilité des distributions identifiées, la Section 4.3.9 présente une procédure d'identification réalisée sur un rotor feuilleté pour lequel l'empilement de tôles magnétiques a été divisé en un nombre variable de sous-domaines  $h$ .

Par ailleurs, une distribution uniforme des propriétés constitutives le long de l'empilement sera définie par  $h = 1$ , *i.e.* un unique sous-domaine (cf. Section 4.4 et Section 4.5).

## 4.3 Une fonctionnelle multi-objectifs

### 4.3.1 Introduction

Les normes (ou estimateur) d'erreur modales doivent être construites non seulement sur les pulsations propres mesurées et calculées, *i.e.*  $\hat{\omega}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^m$ , où  $m$  est le nombre de modes considérés, mais aussi sur les formes propres associées.

Dans [62], il est utilisé une norme d'erreur modale classique basée sur les pulsations propres afin d'identifier les propriétés constitutives d'une plaque composée de composite stratifié. Dans [63; 64], les auteurs minimisent une fonctionnelle utilisant la matrice de sensibilité d'un modèle afin d'identifier les propriétés constitutives d'un matériau feuilleté. Dans [65], les propriétés du matériau utilisé dans la construction d'un barrage sont identifiées à partir d'une norme d'erreur modal basée sur la différence entre les composantes des formes propres mesurées et celles prédites par un modèle. Les auteurs de [66; 67] proposent l'utilisation du critère de corrélation MAC (Modal Assurance Criterion) dans la définition de normes d'erreur modales, *e.g.* une première basée sur les termes diagonaux et une seconde basée sur les termes extra-diagonaux de la matrice MAC, pour identifier les propriétés constitutives de plaques fabriquées en matériau composite. En revanche, cette méthode a l'inconvénient de nécessiter des coefficients de pondération pour chaque norme d'erreur.

Ainsi, se baser sur des normes d'erreur modales ayant fait leurs preuves dans ces domaines assure d'obtenir des fonctions d'erreur de qualité. Aussi certaines possibilités plus originales, [66], sont également présentées ici dans le but d'augmenter encore la sensibilité de la méthode d'identification aux paramètres constitutifs les moins influents, *e.g.* coefficient de Poisson ou module de Coulomb.

Les données modales que l'algorithme d'optimisation aura à sa disposition pour chaque mode  $k$ ,  $k = 1, \dots, m$  à l'itération  $i$  sont les suivantes :

- Les pulsations propres mesurées (référence)  $\hat{\omega}_k \in \mathbb{R}$  et calculées à l'itération  $i$ , *i.e.*  $\omega_k^i = \omega_k^i(x^i) \in \mathbb{R}$  où  $x^i$  représente le vecteur des paramètres d'optimisation à l'itération  $i$ .
- Les formes propres mesurées  $\hat{\varphi}_k$  et calculées à l'itération  $i$ , *i.e.*  $\varphi_k^i = \varphi_k^i(x^i) \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ .

**Remarque 10:** Les maillages numériques et expérimentaux étant rarement identiques, leurs formes propres ne sont pas définies sur les mêmes grilles et impliquent donc  $\dim \hat{\varphi} \neq n_\delta$ . Dans un souci de simplicité, il sera supposé, dans la Section 4.3.2, que les formes propres mesurées et calculées sont déjà projetées sur un même maillage de référence, celui du modèle éléments finis. Seuls les degrés de liberté correspondant aux déplacements transversaux sont retenus. On notera  $n_{\delta_w}$  le nombre de degrés de liberté transversaux du modèle éléments finis. Ainsi, la projection de la  $k^e$  forme propre expérimentale le même maillage du modèle éléments finis impliquera  $\varphi_k \in \mathbb{R}^{n_{\delta_w}} \Rightarrow \hat{\varphi}_k \in \mathbb{R}^{n_{\delta_w}}$ .



### 4.3.2 Normes d'erreur modales

Les formes propres expérimentales et numériques d'indice  $k$  sont supposées correspondre. La norme d'erreur classique basée sur les écarts relatifs des pulsations propres, *i.e.*  $F^\omega \in \mathbb{R}^m$ , peut s'écrire de la manière suivante :

$$F_k^\omega(x^i) = \frac{\omega_k^i}{\hat{\omega}_k} - 1, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.8)$$

En analyse modale, le critère appelé MAC [56; 57] est le plus couramment utilisé pour évaluer la qualité de formes propres mesurées ou la corrélation entre deux séries de formes propres  $\hat{\varphi}$  et

$\varphi$ . Les projections sont calculées à l'aide d'un produit scalaire standard, correspondant en fait à une projection dans la norme d'une matrice identité  $I \in \mathcal{M}_{n_{\delta_w}, n_{\delta_w}}$ , Eq. (2.152), telle qu'une de ses composantes s'écrive :

$$\text{MAC}(\varphi_q, \hat{\varphi}_k) = \text{MAC}_{q,k} = \frac{|\varphi_q^{it} \hat{\varphi}_k|^2}{[\varphi_q^{it} \varphi_q^i] \cdot [\hat{\varphi}_k^t \hat{\varphi}_k]}. \quad (4.9)$$

où  $\text{MAC} \in \mathcal{M}_{m,m}$ .

En utilisant les propriétés de la matrice MAC, une première norme d'erreur modale, *i.e.*  $F^{\varphi D} \in \mathbb{R}^m$ , peut être écrite sous la forme suivante :

$$F_k^{\varphi D}(x^i) = 1 - \text{MAC}(\varphi_k^i, \hat{\varphi}_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.10)$$

Par ailleurs, en vertu de la propriété des formes propres, une corrélation parfaite entre deux ensembles de formes propres implique également que tous les termes extra-diagonaux de la matrice MAC correspondante soient très faibles. Une seconde norme d'erreur modale, *i.e.*  $F^{\varphi ED} \in \mathbb{R}^m$ , basée sur la matrice MAC peut alors être définie par :

$$F_k^{\varphi ED}(x^i) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^m \text{MAC}(\varphi_q^i, \hat{\varphi}_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.11)$$

Parallèlement au principe de projection modale utilisé par la méthode MAC, il est également envisageable de mesurer l'écart entre les formes propres des ensembles  $\hat{\varphi}$  et  $\varphi$  en calculant simplement une somme pondérée des valeurs absolues des différences entre les composantes des formes propres. Il convient alors les ensembles de formes propres soient :

- **normalisés** de manière identique, en fixant par exemple la composante de valeur maximale à l'unité, tel que :

$$\max(\varphi_k^i) = \max(\hat{\varphi}_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.12)$$

- **signés** de la même manière tels que :

$$\text{sg}(\varphi_k^i)_{r_s} = \text{sg}(\hat{\varphi}_k)_{r_s}, \quad \forall r_s \in \mathbb{N}, \quad \forall r_s \in [1, n_{\delta_w}], \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.13)$$

On peut alors définir une norme d'erreur,  $F^{\varphi Ec} \in \mathbb{R}^m$ , basée sur les composantes des formes propres, telle que :

$$F_k^{\varphi Ec}(x^i) = \frac{1}{n_{\delta_w}} \sum_{r=1}^{n_{\delta_w}} \left| \frac{(\varphi_k^i)_r}{\max_{r_{\max}}(\varphi_k^i)_r} \text{sg}(\varphi_k^i)_{r_s} - \frac{(\hat{\varphi}_k)_r}{\max_{r_{\max}}(\hat{\varphi}_k)_r} \text{sg}(\hat{\varphi}_k)_{r_s} \right|, \quad \forall r_s \in [1, n_{\delta_w}], \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.14)$$

avec  $r_{\max}$ ,  $(\ )_r$  et  $n_{\delta_w}$  respectivement l'indice de la plus grande composante, la  $r^e$  composante et le nombre de composantes d'une forme propre.

### 4.3.3 Définition d'une fonctionnelle multi-objectifs

Au sens de la minimisation aux moindres carrés présentée en Annexe C.1.2.2, les normes d'erreur modales, Eq. (4.8), Eq. (4.10), Eq. (4.11) et Eq. (4.14), sont utilisées pour construire la fonctionnelle d'erreur globale  $f$ , définie dans l'Eq. (C.24), telle que :

$$f(x^i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q F_k^2(x^i), \quad (4.15)$$

avec  $F \in \mathbb{R}^q$  définie telle que :

$$F(x^i) = \left[ \alpha_\omega F^\omega(x^i), \alpha_{\varphi_D} F^{\varphi_D}(x^i), \alpha_{\varphi_{ED}} F^{\varphi_{ED}}(x^i), \alpha_{\varphi_{Ec}} F^{\varphi_{Ec}}(x^i) \right]^t, \quad (4.16)$$

avec :

$$F^\omega(x^i) = \begin{bmatrix} F_1^\omega(x^i) \\ \vdots \\ F_m^\omega(x^i) \end{bmatrix}, \quad (4.17a) \quad F^{\varphi_D}(x^i) = \begin{bmatrix} F_1^{\varphi_D}(x^i) \\ \vdots \\ F_m^{\varphi_D}(x^i) \end{bmatrix}, \quad (4.17b)$$

$$F^{\varphi_{ED}}(x^i) = \begin{bmatrix} F_1^{\varphi_{ED}}(x^i) \\ \vdots \\ F_m^{\varphi_{ED}}(x^i) \end{bmatrix}, \quad (4.18a) \quad F^{\varphi_{Ec}}(x^i) = \begin{bmatrix} F_1^{\varphi_{Ec}}(x^i) \\ \vdots \\ F_m^{\varphi_{Ec}}(x^i) \end{bmatrix}. \quad (4.18b)$$

Dans ce cas,  $q = 4m$ , avec  $m$  le nombre de modes expérimentaux considérés.

Les coefficients  $\alpha_\omega, \alpha_{\varphi_D}, \alpha_{\varphi_{ED}}, \alpha_{\varphi_{Ec}} \in \mathbb{R}$  pondèrent l'ordre de grandeur de chacune des normes d'erreur modales et sont utilisés pour incrémenter équitablement le vecteur  $F$ .

Il est possible de considérer  $n$  termes stabilisateurs optionnels qui permettent d'ajouter une composante purement linéaire au vecteur  $F$ , et donc d'imposer une convexité supplémentaire à la fonctionnelle  $f$  tels que :

$$F(x^i) = \left[ F(x^i), \alpha_s (x^i - x^0) \right]^t, \quad (4.19)$$

où  $\alpha_s \in \mathbb{R}$  est un coefficient de pondération des termes de stabilisation et  $F \in \mathbb{R}^{q+n}$  qui restreint la variation des paramètres par rapport à leur estimation initiale  $x^0$ .

Un des avantages direct d'une fonctionnelle de type moindres carrés est de garantir la convexité et le signe de la fonctionnelle d'erreur globale  $f$ , et cela indépendamment des propriétés des composantes du vecteur de normes d'erreur  $F$ , rendant ainsi la méthode d'identification particulièrement stable quand le nombre de composantes  $q$  du vecteur d'erreur est bien plus important que le nombre  $n$  de paramètres  $x_p$  à identifier.

#### 4.3.4 Dérivation des normes d'erreur modales

L'algorithme de *Levenberg-Marquardt*, Alg. 7, Annexe C.1.3, nécessite de calculer à chaque itération  $i$ , en plus du vecteur des normes d'erreur modales  $F$ , Eq. (4.16), sa matrice *J*acobienne  $J \in \mathcal{M}_{q,n}$  par rapport aux  $n$  paramètres d'optimisation  $x_p$ ,  $p = 1, \dots, n$ . Cette dernière requiert de calculer les dérivées partielles des composantes du vecteur  $F$  par rapport aux  $n$  paramètres d'optimisation  $x_p$ , Annexe C.2.

**Remarque 11:** Par souci d'allègement du formalisme relatif à l'écriture des différentes normes d'erreur modales et autres éléments propres, leur dépendance en  $x^i$  n'est plus précisée et l'exposant  $( )^i$  est omis.



##### 4.3.4.1 Norme d'erreur modale basée sur les pulsations propres

En dérivant l'Eq. (4.8) par rapport à un paramètre d'optimisation  $x_p$ , il vient alors :

$$\frac{\partial F_k^\omega}{\partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{\omega_k}{\hat{\omega}_k} - 1 \right) = \left( \frac{1}{\hat{\omega}_k} \right) \frac{\partial \omega_k}{\partial x_p}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.20)$$

avec :

$$\omega_k^2 = \lambda_k, \quad (4.21a) \quad \frac{\partial \omega_k}{\partial x_p} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_k} \right) \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_p}, \quad (4.21b)$$

Finalement, en introduisant l'Eq. (4.21b) dans l'Eq. (4.20), la dérivée partielle de la  $k^e$  composante de la norme d'erreur  $F^\omega$ , par rapport à  $x_p$ , s'écrit :

$$\frac{\partial F_k^\omega}{\partial x_p} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\hat{\omega}_k} \right) \left( \frac{1}{\omega_k} \right) \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_p}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.22)$$

#### 4.3.4.2 Norme d'erreur modale basée sur la matrice MAC

La dérivation partielle de l'Eq. (4.10) conduit à l'expression de la  $k^e$  composante de la norme d'erreur  $\partial F^{\varphi D}$  :

$$\frac{\partial F_k^{\varphi D}}{\partial x_p} = - \frac{\partial \text{MAC}}{\partial x_p} (\varphi_q, \hat{\varphi}_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.23)$$

où la dérivée partielle d'une composante MAC( $\varphi_q, \hat{\varphi}_k$ ) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{MAC}}{\partial x_p} (\varphi_q, \hat{\varphi}_k) &= \frac{1}{[\|\varphi_q\|^2 \|\hat{\varphi}_k\|^2]^2} \left[ 2 |\varphi_q^t \hat{\varphi}_k| \frac{\partial \varphi_q^t}{\partial x_p} \hat{\varphi}_k \|\varphi_q\|^2 \|\hat{\varphi}_k\|^2 - |\varphi_q^t \hat{\varphi}_k|^2 \|\hat{\varphi}_k\|^2 2 \varphi_q^t \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_p} \right], \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \text{MAC}}{\partial x_p} (\varphi_q, \hat{\varphi}_k) &= \frac{2 |\varphi_q^t \hat{\varphi}_k|}{\|\varphi_q\|^4 \|\hat{\varphi}_k\|^4} \left[ \|\varphi_q\|^2 \|\hat{\varphi}_k\|^2 \hat{\varphi}_k^t - |\varphi_q^t \hat{\varphi}_k| \|\hat{\varphi}_k\|^2 \varphi_q^t \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_p} \right] \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_p}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Par ailleurs, la dérivée partielle de la  $k^e$  composante de la norme d'erreur  $F^{\varphi ED}$  s'obtient en introduisant l'Eq. (4.24) dans l'expression de la dérivée partielle de l'Eq. (4.11) par rapport  $x_p$  telle que :

$$\frac{\partial F_k^{\varphi ED}}{\partial x_p} = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^m \frac{\partial \text{MAC}}{\partial x_p} (\varphi_q, \hat{\varphi}_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.25)$$

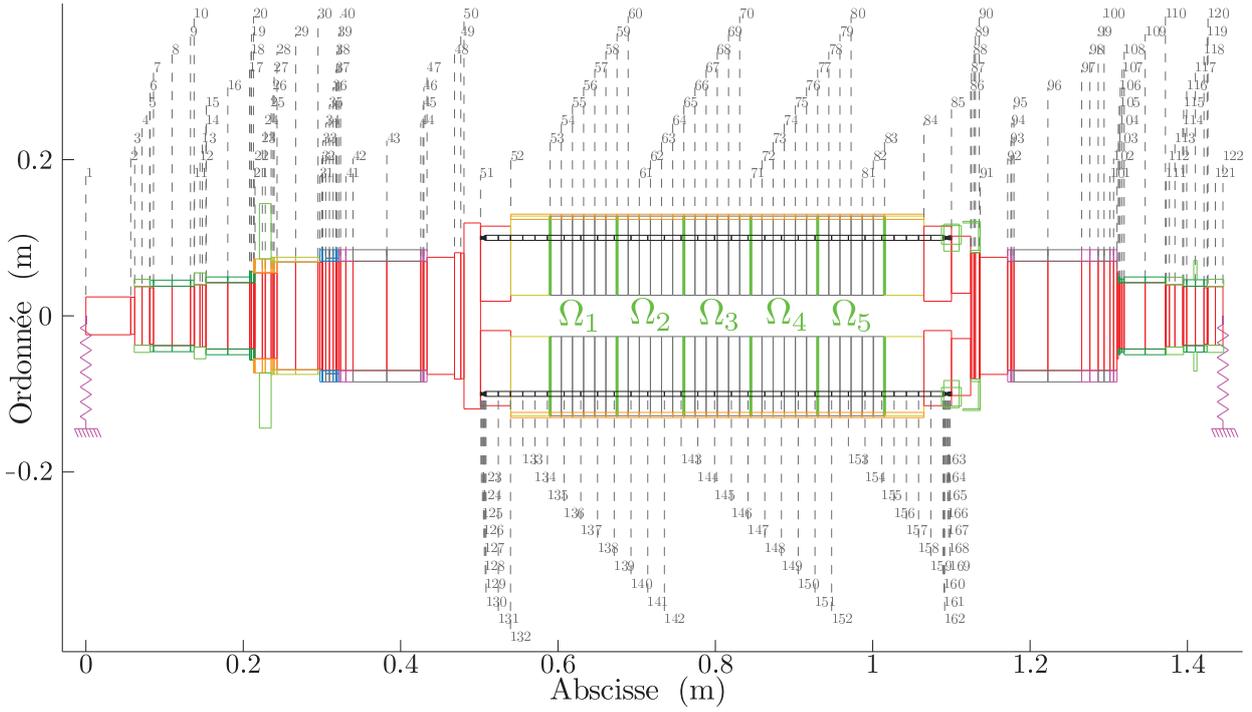
#### 4.3.4.3 Norme d'erreur modale basée sur l'écart entre les composantes modales

A partir de la définition suivante :

$$\frac{\partial |\bullet|}{\partial x_p} = \text{sg}(\bullet) \frac{\partial (\bullet)}{\partial x_p}, \quad (4.26)$$

la dérivée partielle de la  $k^e$  composante de la norme d'erreur  $F^{\varphi Ec}$ , Eq. (4.14), est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k^{\varphi Ec}}{\partial x_p} &= \frac{1}{n_{\delta_w}} \sum_{r=1}^{n_{\delta_w}} \text{sg} \left( \frac{(\varphi_k)_r}{(\varphi_k)_{r_{\max}}} \text{sg}(\varphi_k)_{r_s} - \frac{(\hat{\varphi}_k)_r}{(\hat{\varphi}_k)_{r_{\max}}} \text{sg}(\hat{\varphi}_k)_{r_s} \right) \\ &\quad \left( \frac{\partial (\varphi_k)_r}{\partial x_p} \frac{1}{(\varphi_k^i)_{r_{\max}}} \text{sg}(\varphi_k)_{r_s} - (\varphi_k)_r \frac{\partial (\varphi_k)_{r_{\max}}}{\partial x_p} \frac{1}{(\varphi_k)_{r_{\max}}^2} \text{sg}(\varphi_k)_{r_s} \right), \\ \Leftrightarrow \frac{\partial F_k^{\varphi Ec}}{\partial x_p} &= \frac{1}{n_{\delta_w}} \sum_{r=1}^{n_{\delta_w}} \text{sg} \left( \frac{(\varphi_k)_r}{(\varphi_k)_{r_{\max}}} \text{sg}(\varphi_k)_{r_s} - \frac{(\hat{\varphi}_k)_r}{(\hat{\varphi}_k)_{r_{\max}}} \text{sg}(\hat{\varphi}_k)_{r_s} \right) \\ &\quad \left( \frac{\partial (\varphi_k)_r}{\partial x_p} - \frac{(\varphi_k)_r}{(\varphi_k)_{r_{\max}}} \frac{\partial (\varphi_k)_{r_{\max}}}{\partial x_p} \right) \frac{\text{sg}(\varphi_k)_{r_s}}{(\varphi_k^i)_{r_{\max}}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$


 FIGURE 4.2 – Modèle éléments finis utilisé pour l'étude de sensibilité,  $N_e = 168$ .

où  $r_{\max}$  est l'indice de la composante maximale d'une  $k^e$  forme propre.

#### 4.3.5 Sensibilité des normes d'erreur modales

L'étude de la sensibilité des normes d'erreur modales par rapport aux paramètres d'optimisation  $x_p$ ,  $p = 1, \dots, n$ , permet d'évaluer la pertinence de l'identification. Si la valeur de la sensibilité d'une norme d'erreur modale, par rapport à un paramètre, est faible vis-a-vis des sensibilités des autres normes d'erreurs modales, cela signifie que ce paramètre sera difficile à identifier.

Une analyse de sensibilité a été réalisée sur le modèle éléments finis de rotor feuilleté présenté FIG. 4.2, en envisageant une distribution de propriétés constitutives  $E$ ,  $G$  et  $\nu$  de l'empilement de tôles magnétiques, composée de  $h = 5$  sous-domaines :  $\Omega_1, \dots, \Omega_5$ . L'analyse concerne donc quinze paramètres d'optimisation, *i.e.*  $n = 3h$ . Il est rappelé que les propriétés constitutives considérées sont toutes indépendantes les une des autres afin de rendre compte du caractère orthotrope de l'empilement.

Les sensibilités des différentes normes d'erreur modales sont calculées successivement en fixant une tolérance de variation relative de paramètres à 1%. Les variations relatives  $x_p^r$  sont définies par rapport à une configuration de référence arbitraire telle que :

$$x_p^r = \frac{x_p}{x_{0,p}}, \quad p = 1, \dots, n, \quad (4.28)$$

avec :

$$\begin{cases} x_{0,(3i-2)} &= 2.1 \cdot 10^{11} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-2}) \\ x_{0,(3i-1)} &= \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-2}), \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in [1, h], \\ x_{0,(3i)} &= \frac{1}{3} \end{cases}$$

En considérant les huit premiers modes de flexion, *i.e.*  $m = 8$ , la sensibilité relative des  $k^e$  composantes de chaque norme d'erreur modale est alors calculée par rapport à chaque paramètre

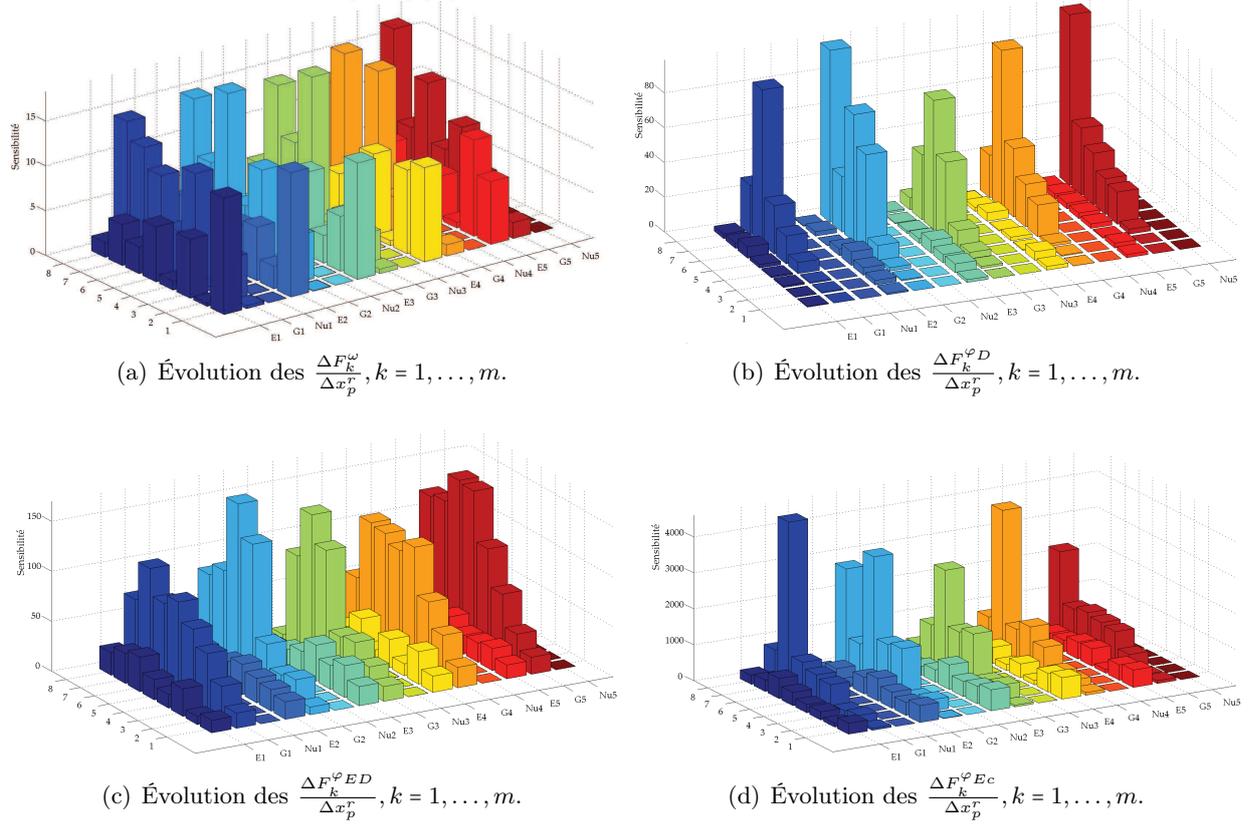


FIGURE 4.3 – Évolution des sensibilités des composantes des normes d'erreur modales basées sur les  $m = 8$  premiers modes et une perturbation relative de 1% des paramètres d'optimisation relatifs  $x_p^r$ ,  $p = 1, \dots, n$ ,  $n = 15$ .

$x_p^r$  en utilisant la relation suivante :

$$\frac{\partial F_k^{(\cdot)}}{\partial x_p^r} \cong \frac{\Delta F_k^{(\cdot)}}{\Delta x_p^r} = \frac{F_k^{(\cdot)}(x_p) - F_k^{(\cdot)}(x_{0p})}{x_p^r - 1}, \quad p = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.29)$$

où  $(\cdot)^{(\cdot)}$  représente successivement les exposants  $\omega$ ,  $\varphi_D$ ,  $\varphi_{ED}$ ,  $\varphi_{Ec}$ .

La FIG. 4.3 représente les sensibilités des quatre normes d'erreur modales par rapport aux paramètres d'optimisation relatifs  $x_p^r$ . On constate que les sensibilités des composantes de toutes les normes d'erreurs modales, par rapport au coefficient de *Poisson*, sont d'ordre très inférieur à celles calculées par rapport au module d'*Young* ou de *Coulomb*, ce qui implique que ces derniers paramètres sont prédominants dans le comportement du rotor feuilleté. La distribution concernant le coefficient de *Poisson* sera probablement difficile à estimer.

On distingue également clairement que la sensibilité des normes d'erreur modales vis-à-vis du modules de *Coulomb* de chaque sous-domaine augmente très distinctement avec l'indice du mode, *i.e.* lorsque la longueur d'onde des formes propres de flexion diminue.

#### 4.3.6 Robustesse des normes d'erreur modales

Une étude paramétrique a été réalisée sur le même modèle éléments finis, FIG. 4.2, en faisant varier les valeurs relatives des paramètres d'optimisation  $x_p^r$ ,  $p = 1, \dots, 3h$  de chaque sous-domaine sur une plage de l'ordre de  $\pm 30\%$  des valeurs de référence, Eq. (4.29). La FIG. 4.4 présente l'évolution

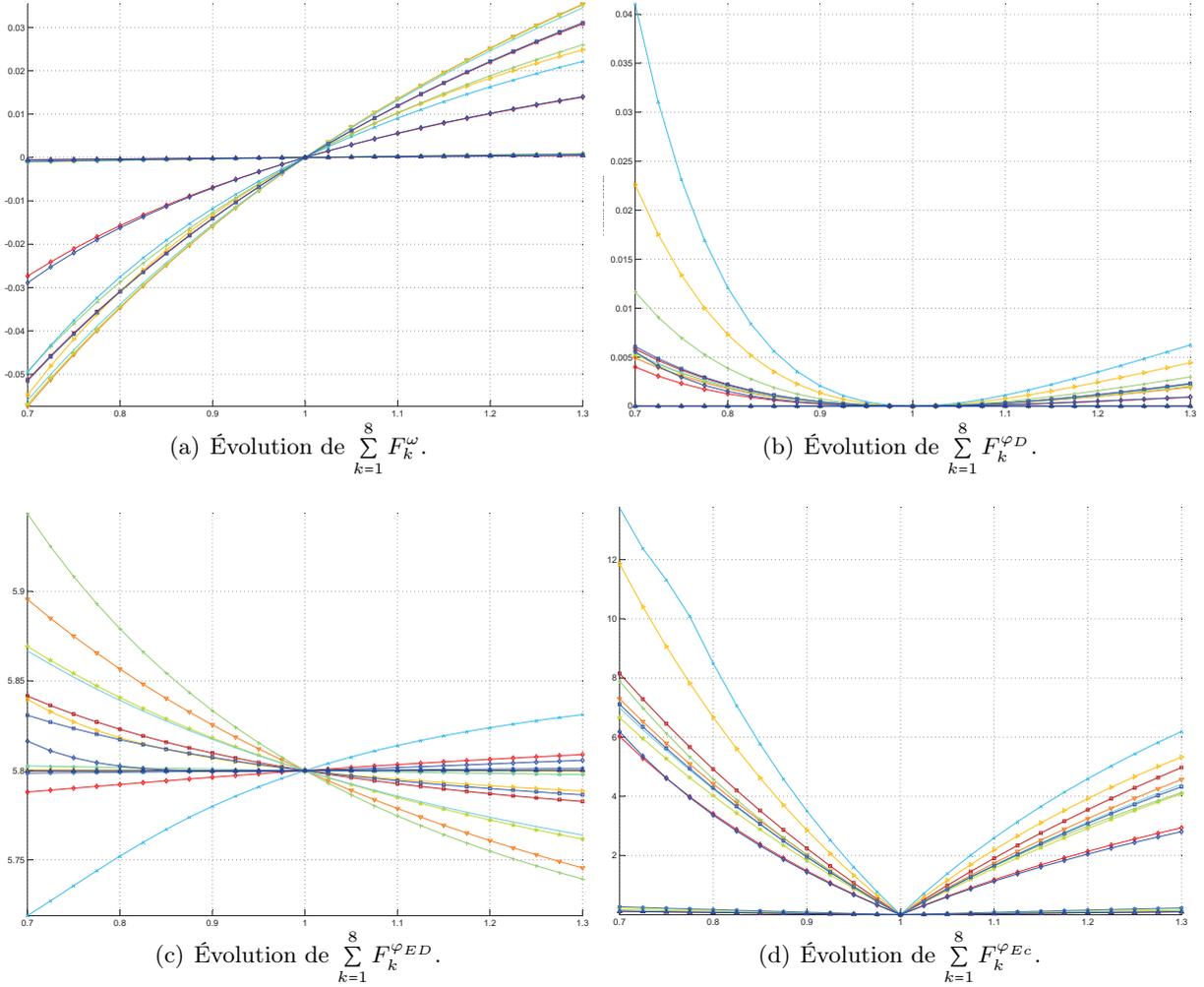


FIGURE 4.4 – Évolution des normes d'erreur modales (somme sur huit modes) pour des variations de paramètres de  $\pm 30\%$  autour d'une valeur de référence.  $E_1$  :  $\square$ ,  $G_1$  :  $\diamond$ ,  $v_1$  :  $\triangle$ ,  $E_2$  :  $\nabla$ ,  $G_2$  :  $\triangleright$ ,  $v_2$  :  $\triangleleft$ ,  $E_3$  :  $\star$ ,  $G_3$  :  $+$ ,  $v_3$  :  $*$ ,  $E_4$  :  $\cdot$ ,  $G_4$  :  $\times$ ,  $v_4$  :  $\odot$ ,  $E_5$  :  $\square$ ,  $G_5$  :  $\diamond$ ,  $v_5$  :  $\triangle$ .

des sommes des composantes de chaque norme d'erreur modale sur une plage de  $\pm 30\%$  des valeurs relatives des paramètres d'optimisation  $x_p^r$ , et en considérant les huit premiers modes.

Celles-ci ne possèdent qu'un seul et unique minimum local sur l'intervalle  $\pm 30\%$  des valeurs  $x_p^r$ , ce qui assure la robustesse de la procédure d'optimisation indépendamment de l'estimation initiale des paramètres à identifier. Aussi, celles-ci convergent toutes vers zéro au voisinage des paramètres de référence  $x_p^r$  assurant ainsi une bonne précision de la méthode d'identification car l'erreur résiduelle d'identification proviendra uniquement des incertitudes expérimentales. Comme constaté précédemment, les variations relatives du coefficient de *Poisson* n'engendrent guère de variations des composantes des normes d'erreur modales, FIG. 4.4.

Cependant, on constate que la norme d'erreur modale  $F_k^{\phi ED}$  ne s'annule pas pour les valeurs de référence des paramètres, ce qui est imputable au critère de corrélation MAC n'assure pas théoriquement la vérification des propriétés d'orthogonalités des formes propres. En effet, les formes propres sont orthogonales entre elles dans la norme des matrices de raideur ou de masse, Eq. (2.113a) et Eq. (2.113b). Ainsi, l'utilisation du critère MAC impliquera toujours des termes extra-diagonaux non nuls. Ce constat est également émis par [66] qui propose de modifier l'expression de cette norme

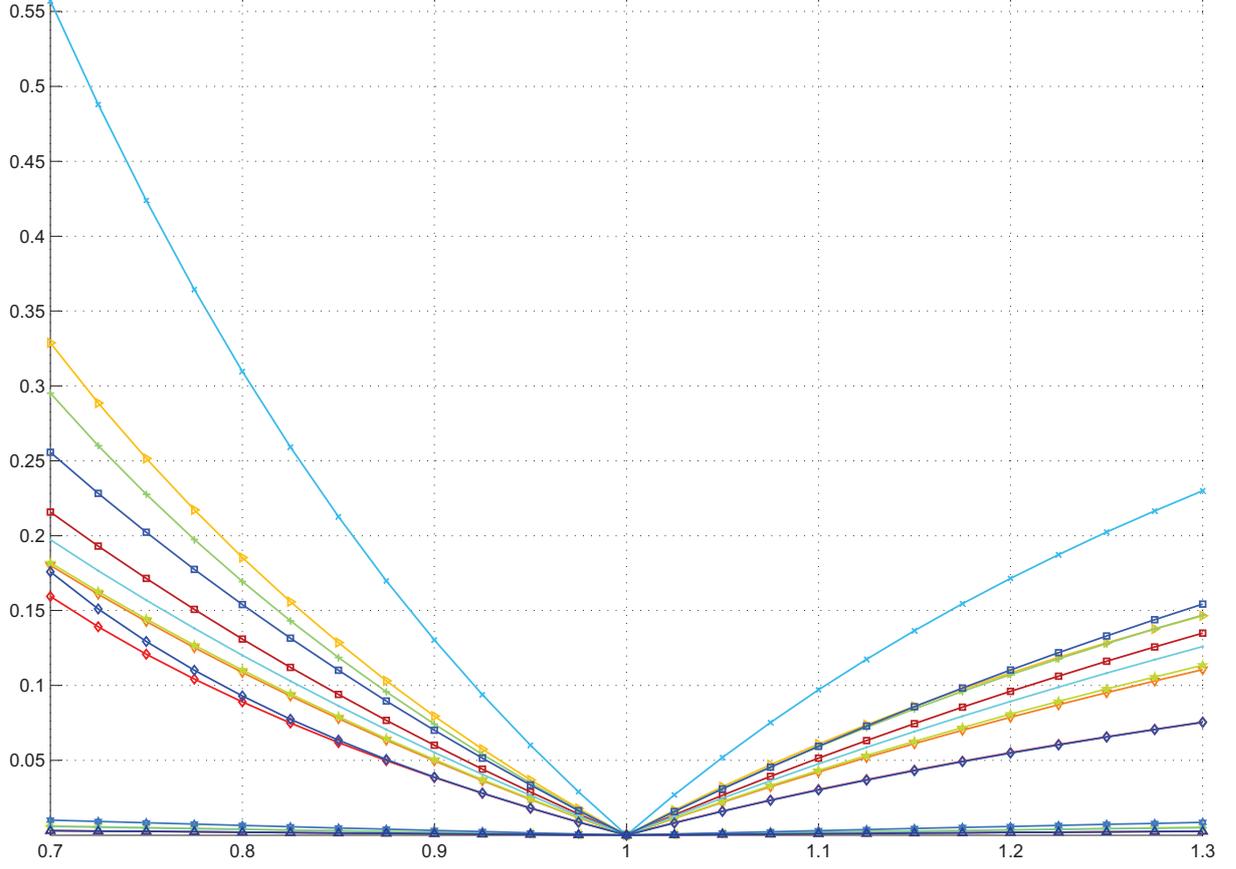


FIGURE 4.5 – Nouvelle norme d’erreur modale basée sur les termes extra-diagonaux de la matrice MAC.  $E_1$  :  $\square$ ,  $G_1$  :  $\diamond$ ,  $v_1$  :  $\triangle$ ,  $E_2$  :  $\nabla$ ,  $G_2$  :  $\triangleright$ ,  $v_2$  :  $\triangleleft$ ,  $E_3$  :  $\star$ ,  $G_3$  :  $+$ ,  $v_3$  :  $*$ ,  $E_4$  :  $\cdot$ ,  $G_4$  :  $\times$ ,  $v_4$  :  $\diamond$ ,  $E_5$  :  $\square$ ,  $G_5$  :  $\diamond$ ,  $v_5$  :  $\triangle$ .

d’erreur modale comme suit :

$$F_k^{\varphi ED}(x^i) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^m |\text{MAC}(\varphi_q^i, \hat{\varphi}_k) - \text{MAC}(\hat{\varphi}_q, \hat{\varphi}_k)|, \quad (4.30)$$

de telle sorte que sa dérivée partielle s’exprime de la manière suivante :

$$\frac{\partial F_k^{\varphi ED}}{\partial x_p} = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^m \text{sg}(\text{MAC}(\varphi_q, \hat{\varphi}_k) - \text{MAC}(\hat{\varphi}_q, \hat{\varphi}_k)) \frac{\partial \text{MAC}}{\partial x_p}(\varphi_q, \hat{\varphi}_k). \quad (4.31)$$

où  $\frac{\partial \text{MAC}}{\partial x_p}$  est défini dans l’Eq. (4.24).

Ainsi, en traçant l’évolution de cette nouvelle norme d’erreur modale, pour des variations relatives de paramètres de l’ordre de  $\pm 30\%$  autour d’une valeur de référence, en constate que cette norme est désormais robuste comme l’illustre la FIG. 4.5, et qu’elle possède un seul minimum qui annule sa valeur.

Les normes d’erreur modales ont des ordres de grandeurs différents, *e.g.*  $F^\omega \sim 10^{-2}$   $F^{\varphi D} \sim 10^{-3}$   $F^{\varphi ED} \sim 10^0$   $F^{\varphi Ec} \sim 10^1$ . Il est possible d’appliquer à chacune d’elles des coefficients de pondération, Eq. (4.16), afin de contrôler leurs ordres de grandeur dans le vecteur  $F$ .

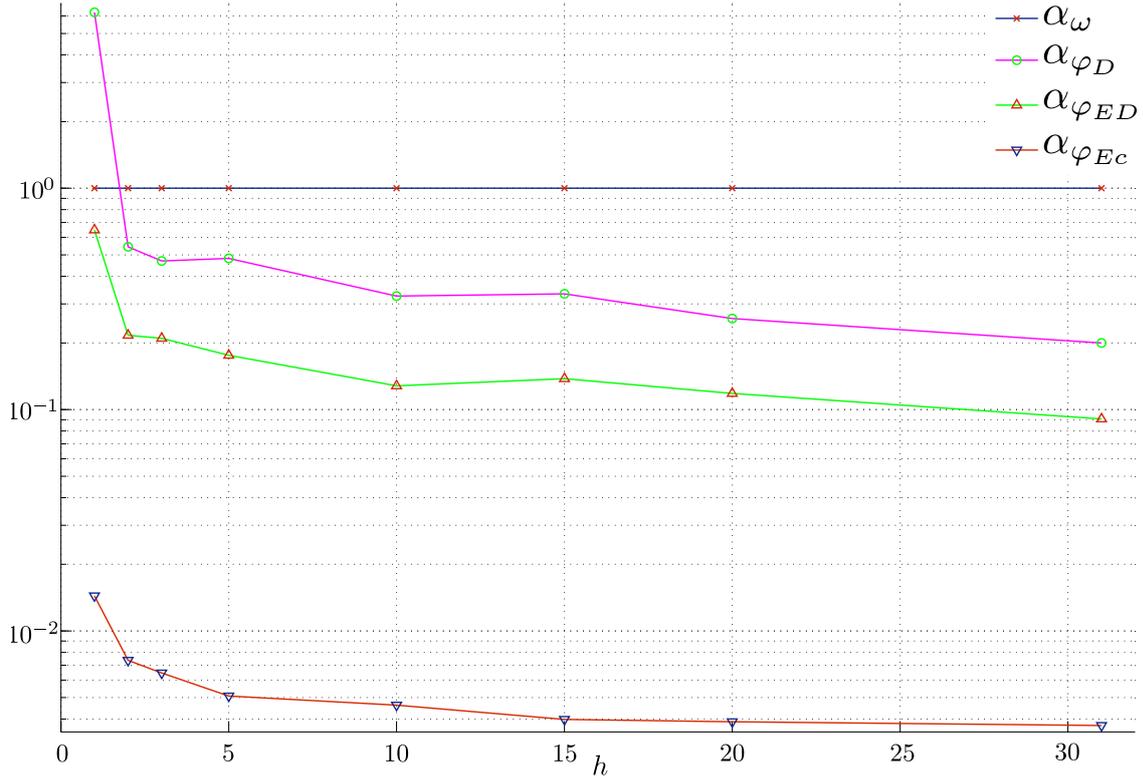


FIGURE 4.6 – Évolution des coefficients de pondération  $\alpha_\omega$  (×),  $\alpha_{\varphi_D}$  (○),  $\alpha_{\varphi_{ED}}$  (△) et  $\alpha_{\varphi_{Ec}}$  (▽) des normes d'erreur modales  $F^\omega$ ,  $F^{\varphi_D}$ ,  $F^{\varphi_{ED}}$ ,  $F^{\varphi_{Ec}}$  en fonction du nombre de sous-domaines.

### 4.3.7 Coefficients de pondération

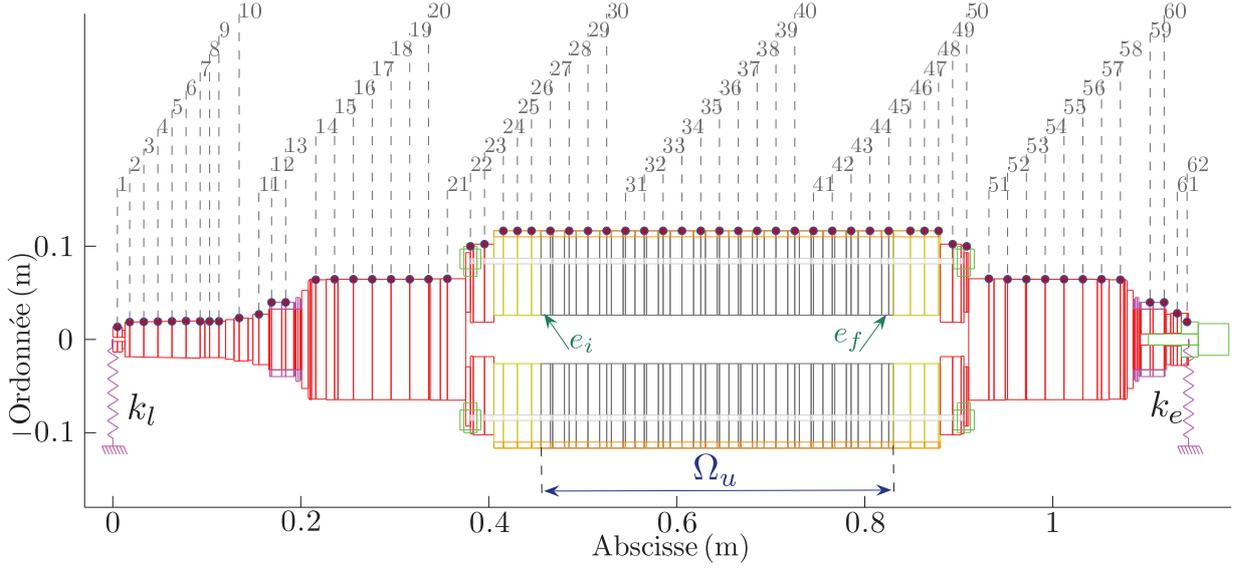
Les coefficients de pondération  $\alpha_\omega$ ,  $\alpha_{\varphi_D}$ ,  $\alpha_{\varphi_{ED}}$  et  $\alpha_{\varphi_{Ec}}$  peuvent être estimés en réalisant une analyse paramétrique, comme celle présentée précédemment, sur un nombre important de modèles différents, en considérant un nombre de sous-domaines variable. Ainsi, en établissant les moyennes des valeurs maximales de chaque norme d'erreur modale  $F^\omega$ ,  $F^{\varphi_D}$ ,  $F^{\varphi_{ED}}$  et  $F^{\varphi_{Ec}}$  calculée pour toutes les configurations, des coefficients de pondération moyens peuvent être estimés pour des distributions de propriétés constitutives réparties sur  $h$  sous-domaines tel que  $h = [1, 20]$ . Ils sont normés par rapport à celle basée sur les pulsations propres et sont représentés sur la FIG. 4.6.

En revanche, le simple fait de supposer la connaissance de ces coefficients de pondération ne s'inscrit pas dans une démarche générale. En effet, ces derniers s'avèrent inutiles s'il s'agit d'identifier des paramètres de nature différente des propriétés constitutives, ou bien des paramètres d'une structure de géométrie totalement différente de celles des spécimens qui ont servi à calculer ces coefficients de pondération.

Il est proposé de définir chaque coefficient de pondération  $\alpha^{(\cdot)}$ , Eq. (4.16), associé à chaque norme d'erreur modale  $F^{(\cdot)}$  comme l'inverse de la valeur moyenne des composantes de la norme d'erreur modale à laquelle il est associé :

$$\alpha^{(\cdot)} = \frac{m}{\sum_{k=1}^m F_k^{(\cdot)}(x^0)}, \quad (4.32)$$

cette dernière étant estimée au point de départ de l'algorithme d'optimisation, *i.e.*  $i = 0$ .

FIGURE 4.7 – Modèle éléments finis de rotor feuilleté avec  $n_\delta = 286$  et 62 points de mesure (●).

### 4.3.8 Stratégie d'optimisation

Les propriétés constitutives de l'empilement sont définies comme une distribution de matériau, *e.g.*  $x \in \mathbb{R}^n$  le long de l'empilement divisé en  $h$  sous-domaines tel que  $\{x\}_{p=1,\dots,n}$ ,  $n = 2h$ ,  $h \in \mathbb{N}$ . L'union des éléments finis  $\mathcal{K}_e$  représentant l'empilement est défini par :

$$\Omega_u = \bigcup_{e=e_i}^{e_f} \mathcal{K}_e, \quad \Omega_u \subset \Omega \quad (4.33)$$

où  $\Omega$  représente l'ensemble de tous les éléments finis du modèle, Eq. (A.105), et  $e_i, e_f$  représentent respectivement les bornes inférieure et supérieure du domaine contenant les éléments finis contigus relatifs aux variables d'optimisation, FIG. 4.7. Ainsi, les matrices élémentaires  ${}^e K_f$ ,  ${}^e M_w$  et  ${}^e M_\theta$  (Eq. (B.4), Eq. (B.33) et Eq. (B.34)) relatives à l'élément  $\mathcal{K}_e$ ,  $e = e_i, \dots, e_f$  dépendent des  $n$  variables d'optimisation  $x_p$ . Les paramètres d'optimisation relatifs au  $p^e$  sous-domaine sont alors définis par :

$$(x_{2p-1}, x_{2p}) = (E_p, G_p)^t, \quad (4.34)$$

où  $E_p$  et  $G_p$  représentent respectivement les modules d'Young et de Coulomb du  $p^e$  sous-domaine, et modélisés indépendamment pour considérer l'orthotropie de l'empilement, comme décrit dans [15]. Le choix d'une distribution de propriétés constitutives, présentée dans la Section 4.2, permet d'identifier des répartitions de rigidité de flexion en n'ayant, *a priori*, formulé aucune hypothèse restrictive relative au comportement mécanique de l'empilement de tôles.

La stratégie d'optimisation consiste à minimiser la fonctionnelle multi-objectifs  $f$  de type moindres carrés, Eq. (4.15), en résolvant le problème suivant :

$$\mathcal{T} \text{rouver } x^* \quad \text{tel que } \min_{x^* \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (4.35)$$

$$\text{avec } f(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q F_k^2(x^i), \quad \text{avec } q = 4m,$$

où  $F \in \mathbb{R}^{4m}$  est défini dans l'Eq. (4.16),  $\|\cdot\|$  représente la norme euclidienne du vecteur d'erreur  $F$

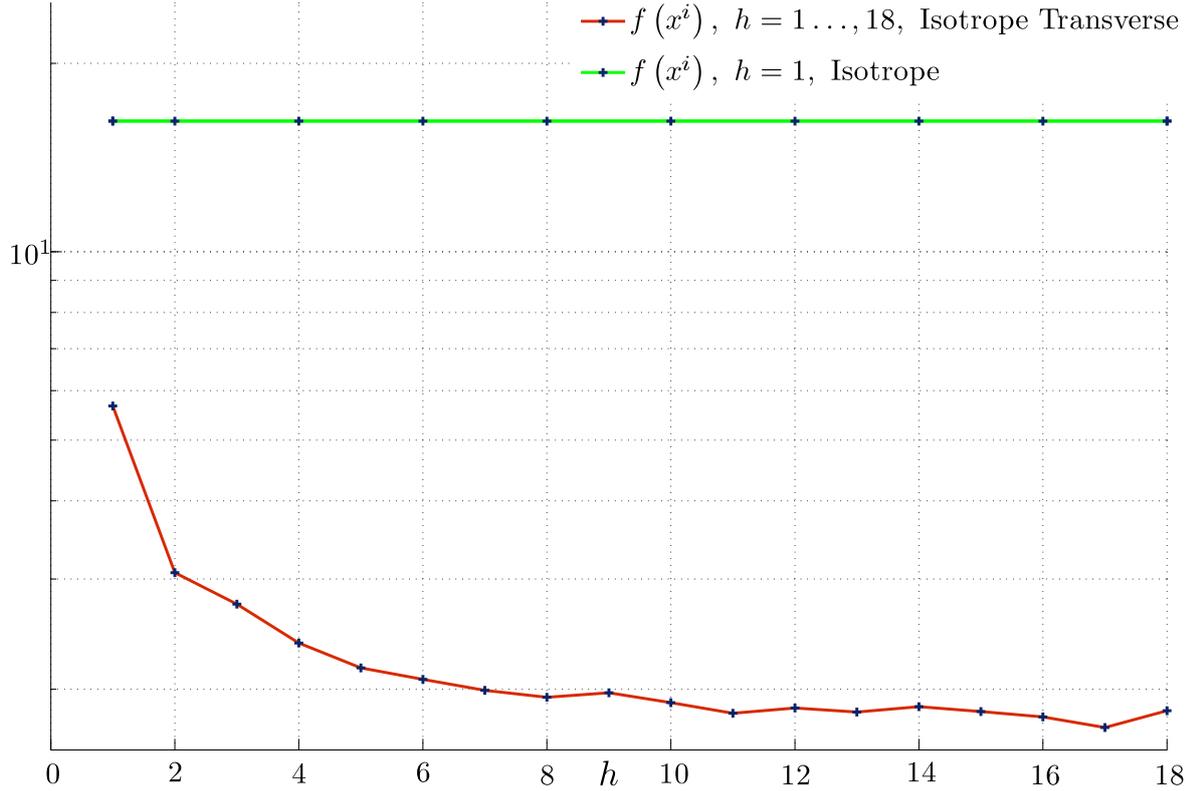


FIGURE 4.8 – Évolution de la fonctionnelle d'erreur globale  $f$  en fonction du nombre de sous-domaines  $h$  pour les hypothèses d'anisotropie (—) et d'isotropie (—) de l'empilement.

et  $m$  le nombre d'éléments propres considérés dans le processus d'optimisation. La fonctionnelle  $f$  sera alors minimisée avec l'algorithme *Levenberg-Marquardt*, Alg. 7 présenté dans l'Annexe C.1.3, par rapport au vecteur des  $n$  paramètres d'optimisation  $x_p$ .

#### 4.3.9 Application industrielle : identification de distributions de propriétés

Cette section présente une application directe la méthode d'identification, présentée dans la Section 4.3.2, sur un prototype de rotor MGV feuilleté. Un modèle éléments finis est proposé à partir d'éléments de poutres de *Timoshenko* dans le plan. Il est à noter que l'assemblage de la masse magnétique est modélisé en considérant le modèle  $\mathcal{M}_2$  de l'Annexe B.3.4.

Une analyse modale de type réponse forcée a été réalisée sur le prototype de rotor MGV, FIG. 3.1, présenté en Section 3.2. Ses caractéristiques géométriques sont définies dans le TAB. 3.1. Le modèle présenté sur la FIG. 4.7 est composé du domaine  $\Omega$  tel que  $N_e = 144$ , Eq. (A.105), et que le nombre de degrés de liberté  $n_\delta$  soit égal à 286. Le domaine  $\Omega_u$  contenant l'empilement de tôles magnétiques est définie par  $e_i = 55$  et  $e_f = 99$ , Eq. (4.33).

Une procédure d'identification a été réalisée en considérant les quatre premiers modes de la structure, *i.e.*  $m = 4$ , et en divisant le domaine  $\Omega_u$ , Eq. (4.33), en  $h$  sous-domaines tel que :

$$h = [1, \dots, 18], \quad (4.36)$$

et en fixant le coefficient de *Poisson* tel que, [19] :

$$v_p = 0.28, \quad \forall p \in [1, h]. \quad (4.37)$$

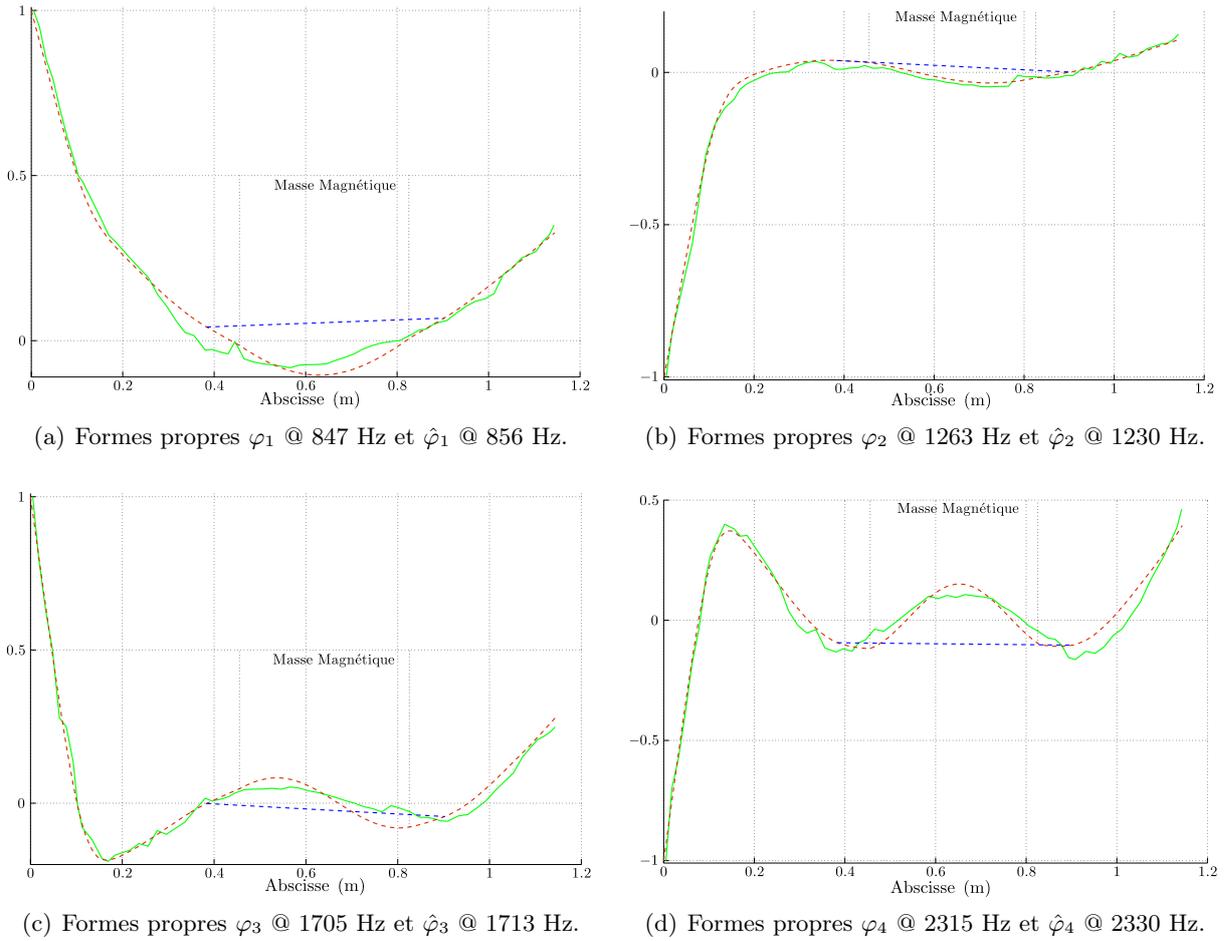


FIGURE 4.9 – Quatre premières formes propres mesurées  $\hat{\varphi}$  (—) et calculées  $\tilde{\varphi}$  (---) en considérant  $h = 7$  sous-domaines.

Le problème d'optimisation contient alors  $2h$  inconnues. Les valeurs initiales des paramètres d'optimisation  $x^0$ , Alg. 7 (Annexe C.1.3) ont alors été fixées comme suit :

$$\left\{ x_{2p-1}^0 = 0.5 \cdot 10^{11}, x_{2p}^0 = \frac{x_{2p-1}^0}{2(1+\nu_p)} \right\} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2}), p = 1, \dots, h. \quad (4.38)$$

Afin d'imposer des variables d'optimisation strictement positives, les bornes inférieures et supérieures des intervalles contenant les variables d'optimisation relatives  $\bar{x}$  (ou normées) ont été définies telles que :

$$\bar{x}_{2p-1} \in [\alpha_1, \beta_1], \bar{x}_{2p} \in [\alpha_2, \beta_2], p = 1, \dots, h,$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{\varepsilon}{x_{2p-1}^0}, \quad \beta_1 = \frac{2.3 \cdot 10^{11}}{x_{2p-1}^0} \\ \alpha_2 = \frac{\varepsilon}{x_{2p}^0}, \quad \beta_2 = \frac{\beta_1}{2x_{2p}^0(1+\nu_p)} \end{array} \right., \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \varepsilon \ll 1, \quad p = 1, \dots, h, \quad (4.39)$$

**Remarque 12:** Si l'on note  ${}^h x^* \in \mathbb{R}^{2h}$  le vecteur des paramètres optimaux obtenus en considérant  $h$  sous-domaines, alors les valeurs initiales des paramètres d'optimisation  ${}^{h+1} x^0 \in \mathbb{R}^{2(h+1)}$ , relatifs à

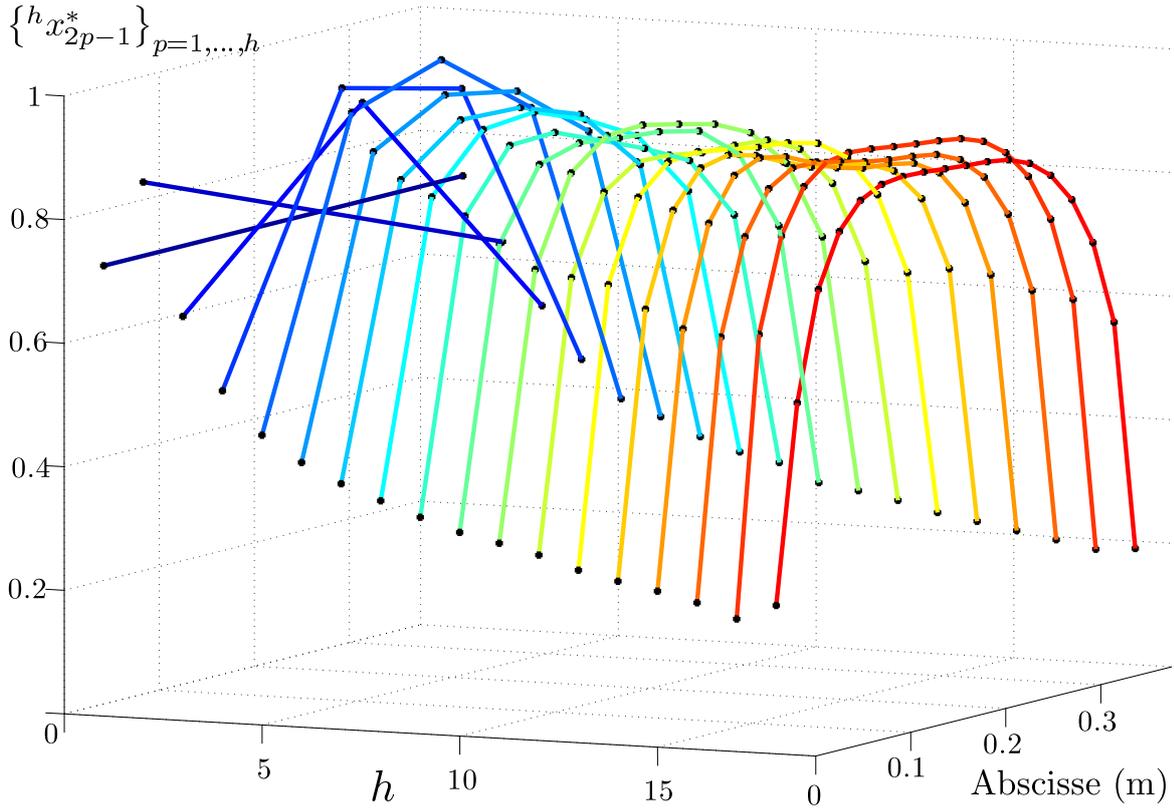


FIGURE 4.10 – Distribution du module d'Young normalisé le long de l'empilement de tôles en fonction du nombre de sous-domaines  $h = [1, \dots, 18]$ .

la procédure d'identification postérieure considérant  $h+1$  sous-domaines, seront définies telles que :

$$P : \mathbb{R}^{2h} \mapsto \mathbb{R}^{2(h+1)}, \text{ avec } P : {}^h x_k^* \mapsto {}^{h+1} x_k^0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k = 2p-1 \text{ ou } 2p, \quad p = 1, \dots, h, \quad (4.40)$$

où  $P$  est une interpolation des  ${}^h x^*$  aux abscisses centraux des  $h+1$  sous-domaines.



La FIG. 4.8 présente l'évolution de la fonctionnelle d'erreur globale  $f$ , Eq. (4.15), à la convergence, en fonction du nombre de sous-domaines  $h$ . La fonctionnelle d'erreur globale décroît en fonction du nombre de sous-domaines et tend à se stabiliser lorsque  $h > 7$ .

La même procédure d'identification a été réalisée en considérant un unique sous-domaine, *i.e.*  $h = 1$  et l'empilement de tôles magnétiques comme un matériau isotrope, *i.e.* les modules d'Young et de Coulomb ne sont plus indépendants. La valeur de la fonctionnelle d'erreur globale  $f$ , à la convergence de l'algorithme d'optimisation est d'environ  $\sim 16.9$ , FIG. 4.8. Par ailleurs, si l'on se réfère aux résultats de la première procédure d'identification et si l'on considère  $h = 7$  sous-domaines, la valeur de  $f(-)$  sur la FIG. 4.8, est de l'ordre de 2, ce qui est environ huit fois plus faible que celle obtenue en considérant un matériau isotrope.

Par conséquent, la méthode d'identification proposée fournit des résultats plus précis que d'autres plus classiques qui considéreraient des hypothèses restrictives quant au comportement mécanique de l'empilement, *e.g.* matériau isotrope. Les quatre premières fréquences propres mesurées et calculées et leurs formes propres associées sont indiquées FIG. 4.9.

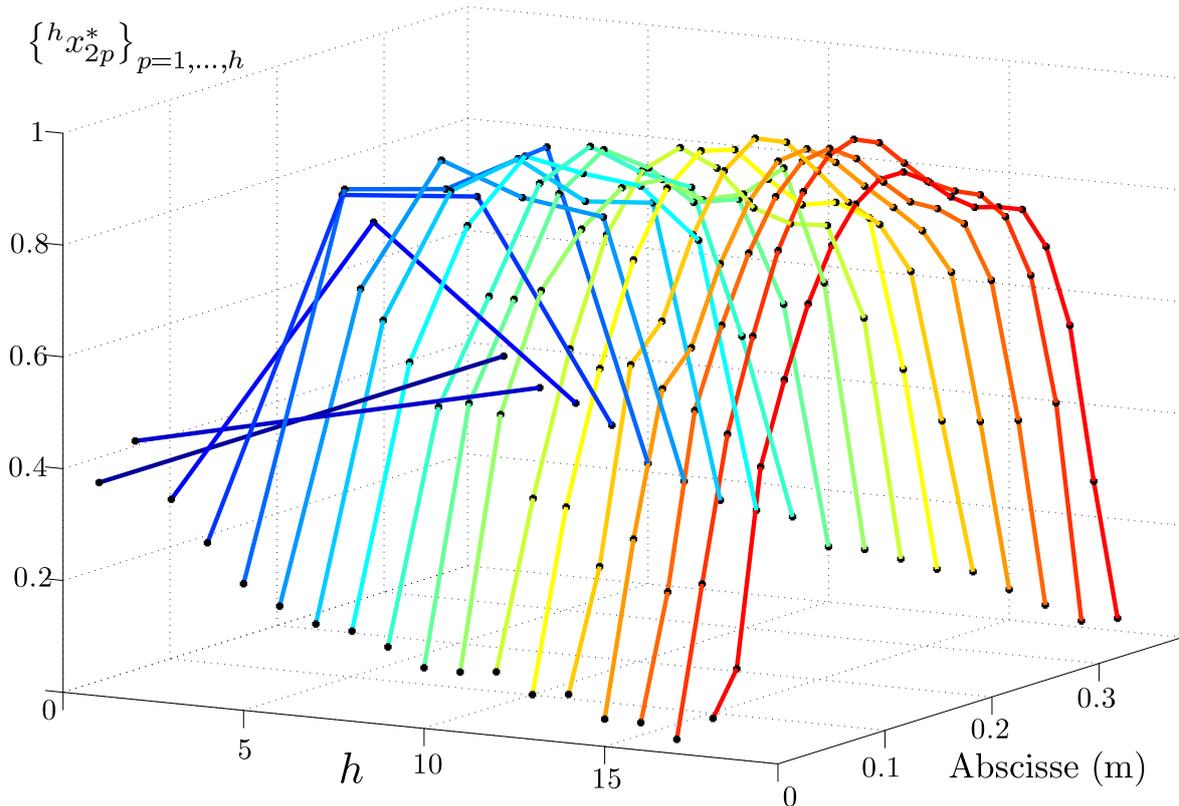


FIGURE 4.11 – Distribution de module de  $\mathcal{C}$ oulomb normalisé le long de l’empilement de tôles en fonction du nombre de sous-domaines  $h = [1, \dots, 18]$ .

Les FIG. 4.10 et FIG. 4.11 illustrent respectivement les distributions optimales de modules d’Young et de  $\mathcal{C}$ oulomb qui tendent vers une distribution concave lorsque le nombre de sous-domaines augmente. Il est probable que la faible valeur des propriétés constitutives de l’empilement à ses extrémités, *i.e.* à l’interface des anneaux de court-circuit, soit due à un effet de cisaillement relativement important.

#### 4.3.10 Conclusion

La procédure d’identification a été testée sur un rotor feuilleté industriel au design complexe. Il a été fait état que la distribution des propriétés constitutives de l’empilement de tôles dépend du nombre de sous-domaines  $h$ . Aussi la pertinence des propriétés identifiées requiert d’appliquer cette méthode à d’autres rotors MGV feuilletés afin d’être en mesure de prévoir, de manière fiable, le comportement dynamique d’autres rotors MGV en développement (30 MW @ 6 000 rpm).

Par ailleurs, la fonctionnelle proposée nécessite des coefficients de pondération, Eq. (4.32), car les normes d’erreur modales sont basées sur des objets mathématiques différents, *i.e.* soit des scalaires lorsqu’elles concernent les pulsations propres, soit des vecteurs lorsqu’il s’agit des formes propres. Afin de s’affranchir des coefficients de pondération, et par conséquent de simplifier la mise en œuvre de la procédure d’identification, la section suivante présente une fonctionnelle dont chaque composante est issue d’un quotient de Rayleigh hybride. Celui-ci permet, *via* les matrices de masse et raideur du modèle, de combiner des objets mathématiques de natures différentes, à la fois pulsation propre mesurée, formes propres mesurée et calculée. Il en résulte alors un terme adimensionnel ne nécessitant pas de coefficients de pondération.

## 4.4 Une fonctionnelle modale condensée selon Guyan

### 4.4.1 Introduction

Une procédure d'identification, basée sur une fonctionnelle énergétique [68], est couplée à la condensation de Guyan [69] afin que les formes propres calculées et mesurées soient homogènes (mêmes dimensions et variables localisées en des nœuds identiques). Ainsi sont obtenus des termes homogènes, entre chaque mode, issus de la combinaison d'une pulsation et de sa forme propre associée, et aucun coefficient de pondération n'est utilisé.

Le choix d'effectuer une condensation plutôt qu'une expansion est présidé par la volonté de ne conserver que les données expérimentales initiales et non leurs approximations synthétisées aux nœuds sur lesquels on ne dispose pas d'information expérimentale, comme c'est le cas pour les méthodes SEREP (System Equivalent Reduction Expansion Process) ou d'expansion de Guyan [70; 71].

Cette procédure permet d'identifier les propriétés constitutives de l'empilement de tôles en minimisant l'écart entre les quantités modales calculées à partir d'un modèle éléments finis de poutres contenant peu de degrés de liberté, et mesurées lors d'une analyse modale non tournante avec conditions aux limites *libre-libre*. Bien qu'un modèle de poutres soit utilisé, le module de Coulomb est défini comme étant indépendant du module d'Young et du coefficient de Poisson afin de considérer le caractère orthotrope de l'empilement [15]. Cette recherche constitue une première étape dans la prévision du comportement dynamique en flexion des rotors à cage d'écureuil en vue d'une modélisation plus complexe considérant une modification des propriétés constitutives de l'empilement lors de la rotation du moteur à induction.

### 4.4.2 Compatibilité dimensionnelle et condensation

On rappelle que le rotor feuilleté considéré dans cette section, FIG. 4.13, est modélisé à l'aide d'éléments finis de poutres de Timoshenko dans le plan  $\{yGz\}$  et que les tirants sont modélisés en considérant le modèle  $\mathcal{M}_{2'}$ , Annexe B.3.4. Supposons que ce modèle dépende de  $n$  paramètres  $\{x_p\}_{p=1\dots n}$  dont l'identification est nécessaire pour assurer une bonne prédictivité du modèle régit par l'équation :

$$\left( \underbrace{M_w + M_\theta}_M \right) \ddot{\delta}(t) + C \dot{\delta}(t) + \left( \underbrace{K_f + K_G}_K \right) \delta(t) = \mathcal{F}(t), \quad (4.41)$$

où  $M, C, K \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  sont respectivement les matrices de masse, de dissipation visqueuse et de raideur globale du modèle élément fini définies dans les Eq. (B.33), Eq. (B.34), Eq. (B.4) et Eq. (B.47).  $\mathcal{F}(t) \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  représente le vecteur global des forces extérieures.

La recherche de ces paramètres s'effectue en minimisant de manière itérative une fonctionnelle qui traduit l'écart entre les quantités modales calculées et mesurées.

#### 4.4.2.1 Définition de la fonctionnelle modale condensée

Soient  $\omega_k, \hat{\omega}_k \in \mathbb{R}$  respectivement les pulsations propres calculées et mesurées et soient  $\varphi_k \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  et  $\hat{\varphi}_k \in \mathbb{R}^{n_{\delta_c}}$  leurs formes propres associées où  $n_{\delta_c} \leq n_\delta$  représente le nombre de points de mesure expérimentaux compris dans l'ensemble  $\Sigma_u$ ,  $\Sigma_u \subset \Sigma$ . Les quantités  $\omega_k$  et  $\varphi_k$  sont obtenues en recherchant la solution harmonique de l'Eq. (4.41) :

$$(K - \lambda_k M) \varphi_k = 0, \text{ avec } \lambda_k = \omega_k^2, \lambda_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, m. \quad (4.42)$$

Le même problème peut être écrit sous une forme plus compacte :

$$\mathcal{R}_k - \omega_k^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_k = \frac{\varphi_k^t K \varphi_k}{\varphi_k^t M \varphi_k}, \quad (4.43)$$

avec  $\mathcal{R}_k \in \mathbb{R}$  le quotient de Rayleigh, rapport des énergies potentielle et cinétique de la  $k^e$  forme propre. Une corrélation parfaite entre grandeurs calculées et mesurées conduit à  $\omega_k^2 = \hat{\omega}_k^2$  et  $\varphi_k = \hat{\varphi}_k$ . Par conséquent, l'Eq. (4.43) peut être écrite sous une forme adimensionnelle :

$$1 - \frac{1}{\hat{\omega}_k^2} \frac{\hat{\varphi}_k^t K \varphi_k}{\hat{\varphi}_k^t M \varphi_k} = 0, \quad (4.44)$$

Comme une corrélation parfaite ne se rencontre jamais dans les cas réels, nous proposons alors de quantifier la différence entre les quantités modales calculées et mesurées à l'aide de l'estimateur  $\mathcal{E}$ , ce qui amène l'Eq. (4.43) à prendre la forme :

$$\mathcal{E}_k = 1 - \frac{1}{\hat{\omega}_k^2} \frac{\hat{\varphi}_k^t K \varphi_k}{\hat{\varphi}_k^t M \varphi_k}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.45)$$

où  $\mathcal{E}_k$  désigne la  $k^e$  composante de l'estimateur d'erreur modale  $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^m$ .

Néanmoins, un problème se pose concernant la dimension des formes propres mesurées  $\hat{\varphi}_k \in \mathbb{R}^{n_{\delta_c}}$  et calculées  $\varphi_k \in \mathbb{R}^{n_{\delta}}$ , *i.e.*  $n_{\delta_c} \neq n_{\delta}$ . En effet, les formes propres calculées sont composées de deux types de degrés de liberté : les déflexions latérales  $w$  (désignés degrés de liberté principaux) et les rotations de sections droites  $\theta$  (désignés ici degrés de liberté secondaires) alors que les formes propres mesurées ne sont composées uniquement des translations latérales. Ainsi, l'utilisation d'une méthode de réduction, comme la condensation de Guyan, peut alors s'avérer efficace afin de rendre les dimensions des formes propres mesurées et calculées compatibles, et faire correspondre les degrés de liberté latéraux  $w$  du modèle éléments finis à ceux mesurés.

En partitionnant le vecteur  $\delta(t) \in \mathbb{R}^{n_{\delta}}$  de tous les degrés de liberté en  $n_{\delta_c}$  degrés de liberté principaux  $n_{\delta_i}$  degrés de liberté secondaires tel que :

$$\delta(t) = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_c \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

où  $\delta_c \in \mathbb{R}^{n_{\delta_c}}$  contient les déflexions transversales  $w$  et  $\delta_i \in \mathbb{R}^{n_{\delta_i}}$  les rotations des sections droites  $\theta$  [69]. La matrice de raideur  $K$ , Eq. (4.42), peut alors être partitionnée de la manière suivante :

$$K = \left[ \begin{array}{c|c} K_{ii} & K_{ic} \\ \hline K_{ci} & K_{cc} \end{array} \right], \quad (4.47)$$

et l'Eq. (4.41) devient alors :

$$\left[ \begin{array}{c|c} K_{ii} & K_{ic} \\ \hline K_{ci} & K_{cc} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{F}_i \\ \mathcal{F}_c \end{pmatrix}}_{\text{Forces Inertielles}} \quad (4.48)$$

où  $\mathcal{F}_i \in \mathbb{R}^{n_{\delta_i}}$  et  $\mathcal{F}_c \in \mathbb{R}^{n_{\delta_c}}$  représentent respectivement les vecteurs des forces d'inertie relatives aux degrés de liberté secondaires et principaux. Dans [69], Guyan propose de ne considérer que les forces inertielles prépondérantes, *i.e.* négliger les forces inertielles des degrés de liberté secondaires

telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i &= 0, \\ \Leftrightarrow K_{ii}\delta_i + K_{ic}\delta_c &= 0, \\ \Leftrightarrow \delta_i &= -K_{ii}^{-1}K_{ic}\delta_c. \end{aligned} \quad (4.49)$$

En introduisant l'Eq. (4.46) dans l'Eq. (4.46), le vecteur des degrés de liberté peut alors s'écrire :

$$\delta(t) = \tilde{\psi}\delta_c, \quad (4.50)$$

où  $\tilde{\psi} \in \mathcal{M}_{n_{\delta}, n_{\delta_c}}$  est la matrice de transformation de Guyan contenant la  $\tilde{\varphi}^c \in \mathcal{M}_{n_{\delta_i}, n_{\delta_c}}$  :

$$\tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}^c \\ I \end{bmatrix}, \quad (4.51a) \quad \tilde{\varphi}^c = -K_{ii}^{-1}K_{ic}, \quad (4.51b)$$

où  $I \in \mathcal{M}_{n_{\delta_c}, n_{\delta_c}}$  est une matrice identité.

**Remarque 13:** La démarche présentée ci-dessus permettant l'obtention de la matrice de transformation  $\tilde{\psi}$  requiert une réorganisation des degrés de liberté  $\delta(t)$  du modèle complet comme le définit l'Eq. (4.46). En revanche, dans le but de réduire le temps nécessaire à l'indexation des degrés de liberté principaux, une alternative peut être employée tel que présentée en Annexe C.3.



Le problème aux valeurs propres du modèle élément fini condensé s'écrit donc :

$$(\tilde{K} - \tilde{\lambda}_k \tilde{M}) \tilde{\varphi}_k = 0, \quad \tilde{\lambda}_k = \tilde{\omega}_k^2, \quad k = 1, \dots, n_{\delta_c}, \quad (4.52)$$

où  $\tilde{\lambda}_k \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\varphi}_k \in \mathbb{R}^{n_{\delta_c}}$  sont respectivement les  $n_{\delta_c}$  valeurs et vecteurs propres du modèle éléments finis condensé et  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{K} \in \mathcal{M}_{n_{\delta_c}, n_{\delta_c}}$  sont les matrices de masse et raideur condensées définies par :

$$\tilde{M} = \tilde{\psi}^t M \tilde{\psi}, \quad (4.53a) \quad \tilde{K} = \tilde{\psi}^t K \tilde{\psi} \quad (4.53b)$$

L'estimateur d'erreur modale  $\mathcal{E}$  est donc issu de la combinaison des formes propres condensées calculées et des formes et pulsations propres mesurées de manière à définir une fonctionnelle modale condensée  $f$ , telle que :

$$f = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k^2, \quad (4.54)$$

avec :

$$\mathcal{E}_k = 1 - \frac{\mathcal{R}_k^*}{\tilde{\omega}_k^2} \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_k^* = \frac{\hat{\varphi}_k^t \tilde{K} \tilde{\varphi}_k}{\hat{\varphi}_k^t \tilde{M} \tilde{\varphi}_k}, \quad (4.55)$$

où  $\mathcal{R}_k^* \in \mathbb{R}$  est le  $k^e$  quotient de Rayleigh hybride issu de la condensation de Guyan. Ainsi, chaque terme  $\mathcal{E}_k$  combine une pulsation propre mesurée et sa forme propre associée en un terme adimensionnel. Les formes propres n'ont pas besoin d'être signées et l'utilisation de coefficients de pondération n'est pas nécessaire car les  $\mathcal{E}_k$  sont de même ordre de grandeur. L'estimateur d'erreur modale condensé  $\mathcal{E}$  est donc principalement basé sur l'écart des formes propres calculées et mesurées afin de faire tendre les quotients  $\mathcal{R}_k^*$  vers les valeurs de références exclusivement expérimentales  $\tilde{\omega}_k^2$ .

#### 4.4.2.2 Convergence

Il eut été envisageable de définir un estimateur  $\mathcal{F}$  encore plus hybride en utilisant les pulsations propres calculées  $\tilde{\omega}_k$ , définies telles que  $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\omega}_k^2$ , afin que ces dernières participassent dans le processus d'identification. Il viendrait alors :

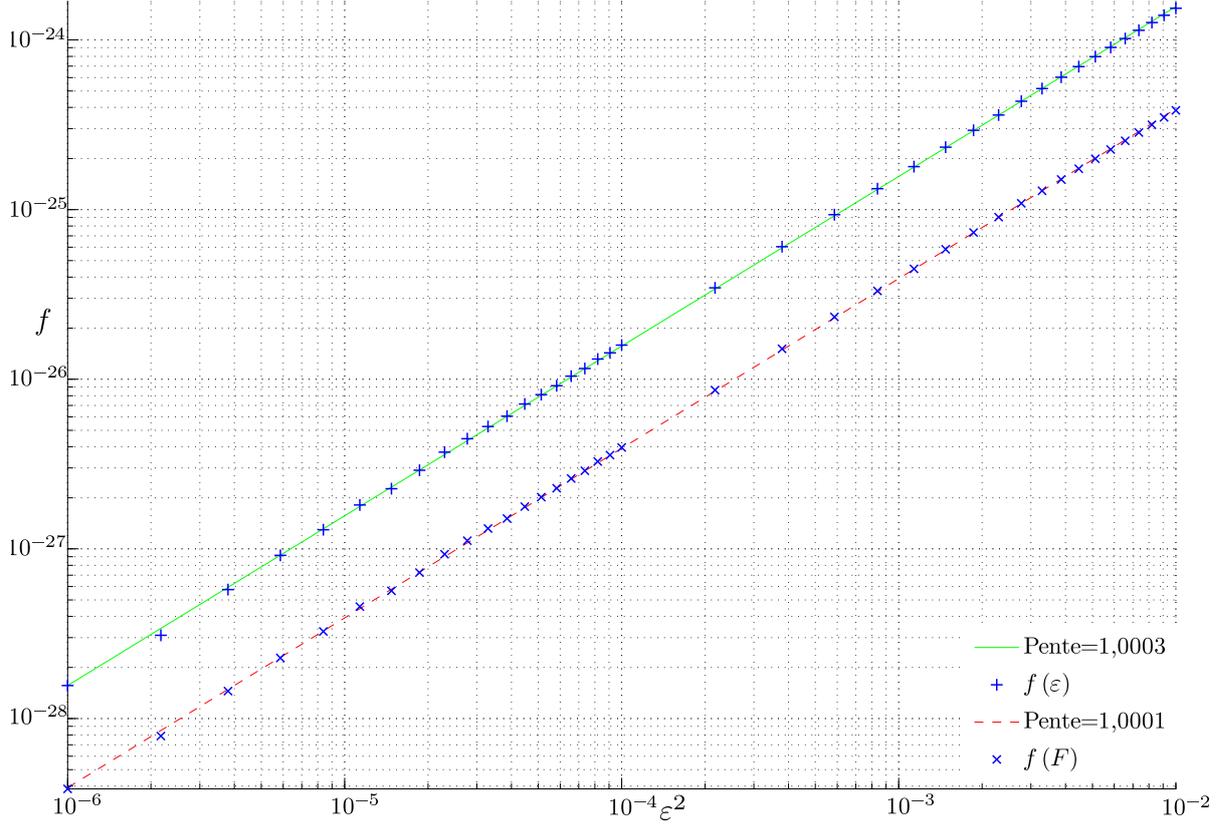


FIGURE 4.12 – Évolution des fonctionnelles modales condensées  $f(\mathcal{E})$  (+) et  $f(\mathcal{F})$  (×) en fonction du carré de la perturbation  $\varepsilon$ . Leurs interpolations linéaires respectives ont pour équation :  $\ln(f(\mathcal{E})) = 1.0003\ln(\varepsilon^2) - 50.2044$  (—) et  $\ln(f(\mathcal{F})) = 1.0001\ln(\varepsilon^2) - 51.5923$  (---).

$$\mathcal{F}_k = 1 - \frac{\mathcal{R}_k^*}{\hat{\omega}_k \tilde{\omega}_k}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.56)$$

En revanche, si l'on se place au voisinage  $\hat{x}$  de l'optimum  $x^*$  :

$$\hat{x} = (1 + \varepsilon)x^*, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varepsilon \ll 1 \quad \text{tel que} \quad f(x^*) = 0, \quad (4.57)$$

où  $\varepsilon$  est une perturbation définie tel qu'au voisinage  $\hat{x}$  de l'optimum  $x^*$  [36], on ait :

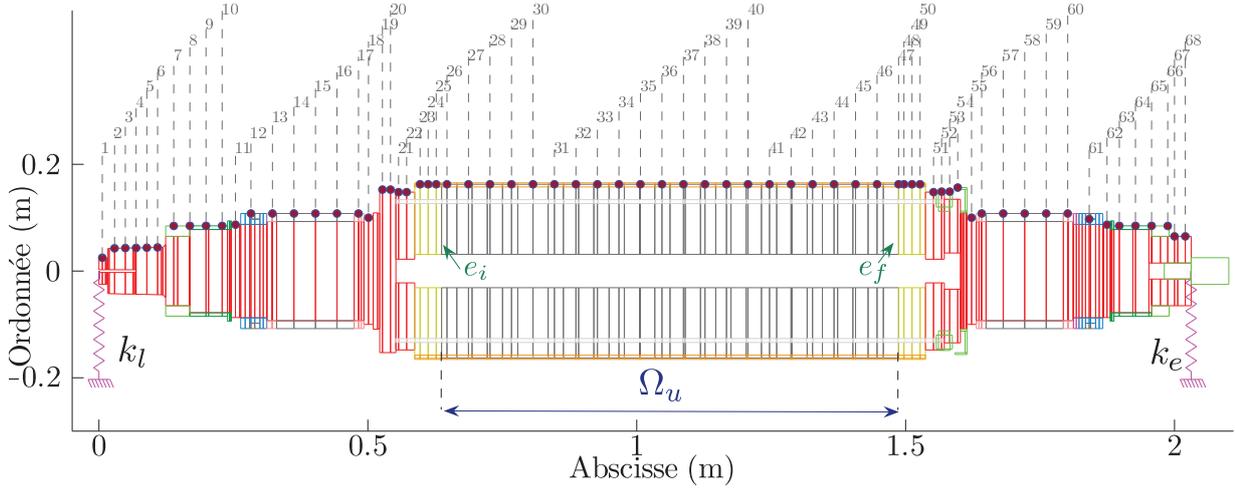
$$\tilde{\varphi}_k(\hat{x}) = \hat{\varphi}_k + \varepsilon \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_{\delta_c}}, \quad \frac{\|\mathcal{Y}\|_2}{\|\hat{\varphi}_k\|_2} \leq 1, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.58)$$

et :

$$\mathcal{R}_k^*(\hat{x}) = \tilde{\omega}_k^2(\hat{x}), \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.59a) \quad \tilde{\omega}_k(\hat{x}) = \hat{\omega}_k(1 + \varepsilon), \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.59b)$$

où  $\mathcal{Y}$  est un vecteur arbitraire et  $\|\cdot\|_2$  symbolise la norme  $\mathcal{E}$ uclidienne, il est possible d'établir les premiers éléments de réflexion relatifs au comportement de la fonctionnelle  $f$  en considérant les estimateurs  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ . En substituant les Eq. (4.59) aux Eq. (4.55) et Eq. (4.56) ainsi qu'à leurs dérivées premières et secondes, on obtient au voisinage de  $x^*$  :

$$f(\mathcal{E})|_{\hat{x}} = 2m\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \quad (4.60a) \quad f(\mathcal{F})|_{\hat{x}} = \frac{1}{2}m\varepsilon^2, \quad (4.60b)$$


 FIGURE 4.13 – Modèle éléments finis contenant  $n_{\delta_c} = 68$  points de mesure (●),  $n_\delta = 352$ .

$$\left. \frac{\partial f(\mathcal{E})}{\partial x_p} \right|_{\hat{x}} = 4 \frac{m}{x_p^*} \varepsilon + o(\varepsilon^2), \quad (4.61a) \quad \left. \frac{\partial f(\mathcal{F})}{\partial x_p} \right|_{\hat{x}} = \frac{m}{x_p^*} \varepsilon, \quad (4.61b)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(\mathcal{E})}{\partial x_p \partial x_q} \right|_{\hat{x}} = 4 \frac{m}{x_p^* x_q^*} + o(\varepsilon), \quad (4.62a) \quad \left. \frac{\partial^2 f(\mathcal{F})}{\partial x_p \partial x_q} \right|_{\hat{x}} = \frac{m}{x_p^* x_q^*}. \quad (4.62b)$$

La FIG. 4.12 présente l'évolution des fonctionnelles  $f(\mathcal{E})$  et  $f(\mathcal{F})$ , pour des valeurs de  $\varepsilon^2$  comprises entre  $10^{-6}$  et  $10^{-2}$  et en considérant un vecteur arbitraire  $\mathcal{Y}$ . Elles ont été calculées autour d'une valeur de référence  $x_p$  arbitraire à l'aide du modèle éléments-finis présenté FIG. 4.13 en considérant les six premiers modes, *i.e.*  $m = 6$ . Leurs interpolations linéaires, tracées sur une échelle logarithmique, ont pour équation :

$$\ln(f(\mathcal{E})) = 1.0003 \ln(\varepsilon^2) - 50.2044, \quad (4.63)$$

$$\ln(f(\mathcal{F})) = 1.0001 \ln(\varepsilon^2) - 51.5923. \quad (4.64)$$

Leurs coefficients directeurs, approchant tous deux l'unité, corroborent la dépendance en  $\varepsilon^2$  des Eq. (4.60). L'expression des rapports entre les valeurs, pentes et courbures des fonctionnelles  $f(\mathcal{E})$  et  $f(\mathcal{F})$  démontre qu'au voisinage  $\hat{x}$  de l'optimum  $x^*$  :

$$\exists r \in \mathbb{R} \text{ tel que } r \geq \frac{f(\mathcal{E})}{f(\mathcal{F})} \Big|_{\hat{x}} \geq \frac{\frac{\partial f(\mathcal{E})}{\partial x_p}}{\frac{\partial f(\mathcal{F})}{\partial x_p}} \Big|_{\hat{x}} \geq \frac{\frac{\partial^2 f(\mathcal{E})}{\partial x_p \partial x_q}}{\frac{\partial^2 f(\mathcal{F})}{\partial x_p \partial x_q}} \Big|_{\hat{x}} \geq 4. \quad (4.65)$$

Ainsi, bien que ces fonctionnelles présentent un ordre de convergence similaire en  $\varepsilon^2$  au voisinage de  $x^*$ , il apparaît clairement que la fonctionnelle définie par l'Eq. (4.54) est plus sensible et plus convexe si l'on préfère l'estimateur  $\mathcal{E}$ , Eq. (4.55), à l'estimateur  $\mathcal{F}$ , Eq. (4.56). Par conséquent, à seuil de convergence fixé, *i.e.* critère d'arrêt sur la fonctionnelle ou son gradient, la fonctionnelle  $f(\mathcal{E})$  convergera plus rapidement dans un voisinage plus proche de l'optimum  $x^*$  que la fonctionnelle  $f(\mathcal{F})$ . Le rapport des ordonnées à l'origine des interpolations linéaires des fonctionnelles  $f(\mathcal{E})$  et

$f(\mathcal{F})$ , tracées sur la FIG. 4.12, démontre numériquement qu'il existe un réel  $r$ , Eq. (4.65), tel que :

$$r \geq \frac{e^{-50.2044}}{e^{-51.5923}} \geq e^{1.3879} \geq 4.0064. \quad (4.66)$$

#### 4.4.2.3 Sensibilité, robustesse et précision

Le choix des variables d'optimisation s'appuie sur une étude de sensibilité du modèle éléments-finis, FIG. 4.13, réalisée sur un unique sous-domaine  $\Omega_u$ , et en calculant successivement les valeurs de la fonctionnelle  $f$  sur des intervalles de variations relatives  $x_p^r$  des propriétés constitutives de l'empilement définies par la théorie de Timoshenko avec  $x_1^r$  ( $E$ ),  $x_2^r$  ( $G$ ) et  $x_3^r$  ( $\nu$ ) :

$$x_p^r = \frac{x_p}{x_{0p}}, \quad p = 1, \dots, 3, \quad (4.67)$$

où la configuration arbitraire de référence  $x_{0p} = \{E = 8 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, G = 3 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \nu = \frac{1}{3}\}$ .

La FIG. 4.14 présente l'évolution des composantes  $\frac{1}{2}\mathcal{E}_k^2$  de la fonctionnelle globale  $f$  sur une plage de  $\pm 50\%$  des valeurs relatives des paramètres d'optimisation  $x_p^r$ , en considérant les six premiers modes, *i.e.*  $k = 1, \dots, 6$ . Les composantes de la fonctionnelle modale  $f$  sont convexes et ne possèdent qu'un seul et unique minimum local dans la plage de  $\pm 50\%$  des valeurs  $x_p^r$  ce qui assure la robustesse de la procédure d'optimisation indépendamment de l'estimation initiale des paramètres à identifier. Aussi, celles-ci convergent toutes vers zéro au voisinage des paramètres de référence  $x_p^r$  assurant ainsi une bonne précision de la méthode d'identification car l'erreur résiduelle d'identification proviendra uniquement des incertitudes expérimentales.

La valeur des composantes  $\frac{1}{2}\mathcal{E}_k^2$  est de l'ordre de  $10^{-1}$  et  $10^{-2}$  pour des variations relatives des modules  $E$  et  $G$  alors qu'elle n'est que de l'ordre de  $10^{-6}$  pour une variation relative du coefficient  $\nu$ . La sensibilité des  $\frac{1}{2}\mathcal{E}_k^2$  au module  $G$  (paramètres  $x_2^r$ ) augmente très distinctement avec l'indice du mode, car conjointement la longueur d'onde des formes propres de flexion diminue. La sensibilité relative d'une composante  $\mathcal{E}_k$  par rapport à un paramètre est alors calculée pour chaque paramètre  $x_p^r$ , et pour chaque mode  $k$  :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial x_p^r} \simeq \frac{\Delta \mathcal{E}_k}{\Delta x_p^r} = \frac{\mathcal{E}_k(x_p) - \mathcal{E}_k(x_{0p})}{x_p^r - 1}, \quad p = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.68)$$

Les valeurs des sensibilités sont présentées dans le TAB. 4.1 et sont de l'ordre de  $10^{-1}$  pour des variations relatives des modules  $E$  et  $G$  alors qu'elle ne sont que de l'ordre de  $10^{-3}$  pour une variation relative du coefficient  $\nu$ . Le modèle est donc peu sensible au coefficient de Poisson de l'empilement de tôles et les modules d'Young et de Coulomb sont des paramètres prépondérants, en précisant aussi que  $G$  est indépendant de  $E$  et  $\nu$  en présence d'orthotropie [15]. Les  $x_p$  sont ainsi définies par le doublet  $\{E, G\}$ .

#### 4.4.3 Stratégie d'optimisation

Les propriétés constitutives de l'empilement sont définies par le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$x = (E, G)^t, \quad \text{avec } n = 2, \quad (4.69)$$

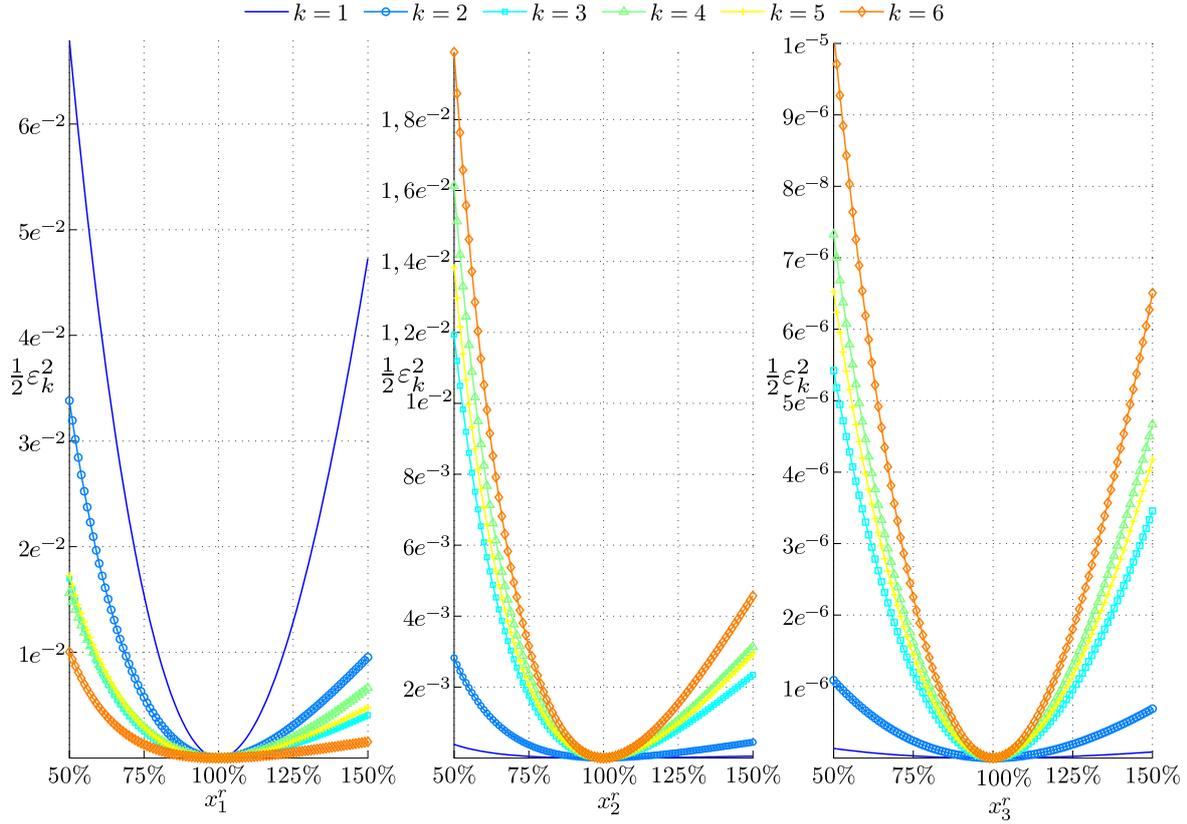


FIGURE 4.14 – Évolution des composantes  $\frac{1}{2}\varepsilon_k^2$  de la fonctionnelle modale condensée  $f$  sur une plage de  $\pm 50\%$  des valeurs relatives des paramètres d'optimisation  $x_p^r$ ,  $p = 1 \dots 3$  : module d'Young ( $x_1^r$ ), module de Coulomb ( $x_2^r$ ) et coefficient de Poisson ( $x_3^r$ ).

Les éléments finis représentant l'empilement de tôles sont contenus dans le domaine  $\Omega_u$ , Eq. (4.33). et la stratégie d'optimisation consiste à minimiser la fonctionnelle  $f$ , Eq. (4.54) tel que :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} \text{rouver } x^* \\ & \text{tel que } \min_{x^* \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (4.70) \\ & \text{avec } f(x) = \frac{1}{2} \|\mathcal{E}(x)\|^2, \end{aligned}$$

avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt, Alg. 7 défini dans l'Annexe C.1.3.

| $k$ | $p = 1$              | $p = 2$              | $p = 3$              |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1   | $6.69 \cdot 10^{-1}$ | $2.97 \cdot 10^{-2}$ | $9.15 \cdot 10^{-4}$ |
| 2   | $3.61 \cdot 10^{-1}$ | $8.47 \cdot 10^{-2}$ | $2.61 \cdot 10^{-3}$ |
| 3   | $2.32 \cdot 10^{-1}$ | $1.89 \cdot 10^{-1}$ | $5.83 \cdot 10^{-3}$ |
| 4   | $2.74 \cdot 10^{-1}$ | $2.20 \cdot 10^{-1}$ | $6.78 \cdot 10^{-3}$ |
| 5   | $2.57 \cdot 10^{-1}$ | $2.08 \cdot 10^{-1}$ | $6.41 \cdot 10^{-3}$ |
| 6   | $1.57 \cdot 10^{-1}$ | $2.60 \cdot 10^{-1}$ | $7.99 \cdot 10^{-3}$ |

TABLEAU 4.1 – Sensibilité des composantes  $\mathcal{E}_k$  en fonction des valeurs relatives  $x_p^r$  égales à 1% des modules d'Young, de Coulomb et du coefficient de Poisson.

#### 4.4.4 Dérivation de la matrice de transformation de Guyan

La minimisation de la fonctionnelle  $f$ , Eq. (4.96), requiert la connaissance de la matrice  $\mathcal{J}$  acobienne  $J$ , Eq. (C.41), et donc les dérivées partielles des éléments propres par rapport à un paramètre d'optimisation  $x_p$ , Eq. (C.64) et Eq. (C.84). L'expression des dérivées des matrices de masse et raideur condensées s'obtient grâce à la dérivée de la matrice  $\tilde{\psi}$ , Eq. (4.53a), telle que :

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_p} = \left[ \frac{\partial \tilde{\varphi}^c}{\partial x_p}, 0 \right]^t, \quad (4.71)$$

où  $\frac{\partial \tilde{\varphi}^c}{\partial x_p}$  est la dérivée de l'Eq. (4.53b). L'Eq. (4.49) permet d'écrire l'égalité :

$$K_{ii} \tilde{\varphi}^c = -K_{ic}, \quad (4.72)$$

En dérivant l'Eq. (4.72) par rapport à un paramètre d'optimisation  $x_p$ , il vient alors :

$$K_{ii} \frac{\partial \tilde{\varphi}^c}{\partial x_p} + \frac{\partial K_{ii}}{\partial x_p} \tilde{\varphi}^c = -\frac{\partial K_{ic}}{\partial x_p} \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{\varphi}^c}{\partial x_p} = -K_{ii}^{-1} \cdot \left( \frac{\partial K_{ic}}{\partial x_p} + \frac{\partial K_{ii}}{\partial x_p} \tilde{\varphi}^c \right). \quad (4.73)$$

Les dérivées des matrices de raideur et de masse condensées s'écrivent alors respectivement :

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial x_p} = \tilde{\psi}^t \frac{\partial K}{\partial x_p} \tilde{\psi} + 2\tilde{\psi}^t K \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_p}, \quad (4.74a) \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial x_p} = \tilde{\psi}^t \frac{\partial M}{\partial x_p} \tilde{\psi} + 2\tilde{\psi}^t M \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_p}, \quad (4.74b)$$

où chaque terme dépend explicitement des composantes des matrices de raideur et de masse élémentaires définies dans les Eq. (B.4), Eq. (A.138) et Eq. (A.142). Finalement, les composantes  $J_{kp}$  de la matrice  $\mathcal{J}$  acobienne, Eq. (C.41), s'écrivent donc :

$$J_{kp} = \frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial x_p}, \quad \text{avec } k = 1, \dots, m \text{ et } p = 1, \dots, n, \quad (4.75)$$

où :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial x_p} = \frac{-1}{\hat{\varphi}_k^t \tilde{M} \tilde{\varphi}_k} \left[ \left( \hat{\varphi}_k^t \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x_p} \tilde{\varphi}_k + \hat{\varphi}_k^t \tilde{K} \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial x_p} \right) - \frac{\hat{\varphi}_k^t \tilde{K} \tilde{\varphi}_k}{\hat{\varphi}_k^t \tilde{M} \tilde{\varphi}_k} \left( \hat{\varphi}_k^t \frac{\partial \tilde{M}}{\partial x_p} \tilde{\varphi}_k + \hat{\varphi}_k^t \tilde{M} \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial x_p} \right) \right] \frac{1}{\hat{\omega}_k^2}. \quad (4.76)$$

#### 4.4.5 Application industrielle : identification de propriétés homogénéisées

Une analyse modale de type réponse impulsionnelle a été réalisée sur un rotor MGVS suspendu, FIG. 4.15, comme présenté en Section 3.3. Ses caractéristiques géométriques sont définies dans le TAB. 4.2. Une génératrice axiale a été discrétisée en 68 points de mesure, FIG. 4.13, et a permis d'obtenir les modules et parties imaginaires des fonctions de transfert, FIG. 4.16.

|                             |                   |                                |
|-----------------------------|-------------------|--------------------------------|
| Masse, $m_r$                | 998               | kg                             |
| Longueur, $L_r$             | 2.03              | m                              |
| Longueur, $L_e$             | 1.00              | m                              |
| Centre de masse, $z_G$      | 1.059             | m                              |
| Raideur transversale, $k_e$ | $9.45 \cdot 10^3$ | $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| Raideur transversale, $k_l$ | $1.93 \cdot 10^3$ | $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ |

TABLEAU 4.2 – Caractéristiques géométriques et inertielles du rotor suspendu.



FIGURE 4.15 – Dispositif expérimental employé lors de l'analyse modale.

Le modèle présenté sur la FIG. 4.13 est composé du domaine  $\Omega$  tel que  $N_e = 175$ , Eq. (4.1), et  $n_\delta = 352$  degrés de liberté condensés sur les  $n_{\delta_c} = 68$  points de mesure. Le domaine  $\Omega_u$  contenant l'empilement de tôles magnétiques est définie par  $e_i = 67$  et  $e_f = 116$ , Eq. (4.33).

La procédure d'identification a été réalisée en faisant varier le nombre  $m$  de modes (pulsations et formes propres associées) dans l'algorithme d'optimisation tel que  $m = 2, \dots, 6$ . Un minimum de deux modes a été retenu pour assurer l'unicité du problème d'optimisation. Le coefficient de Poisson  $\nu$  a été fixé à 0.28, comme dans [19]. Les valeurs initiales des paramètres d'optimisation  $x^0$  ont été fixées arbitrairement comme suit :

$$\{x_1^0 = 0.6 \cdot 10^{11}, x_2^0 = 0.3 \cdot 10^{11}\} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2}). \quad (4.77)$$

Dans [3; 15; 19; 16; 17; 20], les auteurs estiment et considèrent de faibles valeurs des modules d'Young ( $x_1$ ) et de Coulomb ( $x_2$ ) pour l'empilement de tôles qui sont relativement inférieures à celles de l'acier. Afin de satisfaire cette condition et d'imposer, de surcroît, des variables d'optimisation strictement positives, les bornes inférieures et supérieures des intervalles contenant les variables d'optimisation relatives  $\bar{x}$  ont alors été définies telles que :

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{x_1^0} \in [\alpha_1, \beta_1], \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{x_2^0} \in [\alpha_2, \beta_2],$$

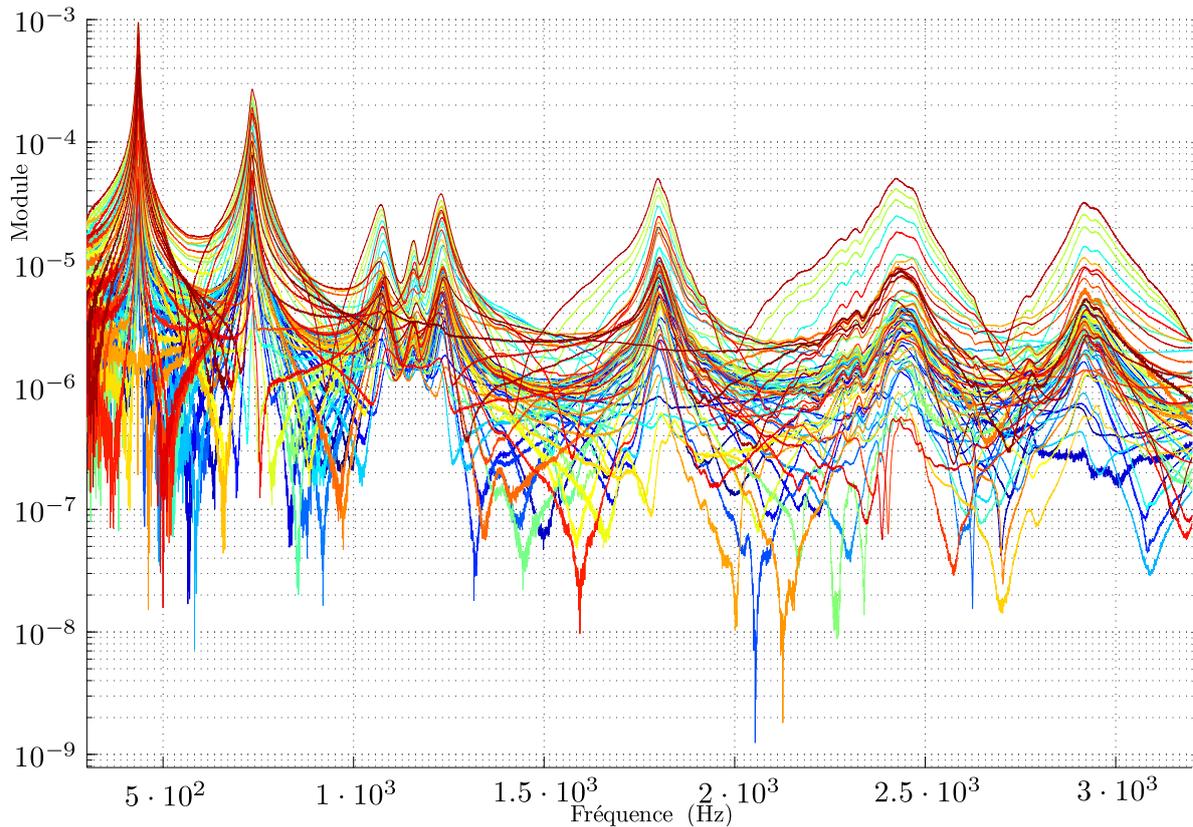


FIGURE 4.16 – Module des 68 fonctions de transfert mesurées aux 68 points de la génératrice axiale.

où :

$$\begin{cases} x_1^0 \alpha_1 = \varepsilon, & x_1^0 \beta_1 = 2.3 \cdot 10^{11} \\ x_2^0 \alpha_2 = \varepsilon, & x_2^0 \beta_2 = \frac{x_1^0 \beta_1}{2(1+\nu)} \end{cases}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (4.78)$$

La FIG. 4.17 présente l'évolution de la fonctionnelle  $f$ , pour  $m = 6$  modes, au cours du processus d'optimisation qui a convergé en  $i = 13$  itérations vers l'optimum  $(x_1^*, x_2^*)$ , comme l'indique la valeur de la norme du gradient qui est de l'ordre de  $10^{-9}$ . L'évolution temporelle des variables d'optimisation, au cours du processus de minimisation, est présentée sur la FIG. 4.18. Le temps de convergence, inférieur à 8 s, témoigne de la rapidité de l'algorithme de *Levenberg-Marquardt* intrinsèquement liée à l'évolution du paramètre d'amortissement  $\mu$  qui présente une décroissance monotone lors du processus de minimisation et qui atteint une valeur égale à  $10^{-8}$ . Ce comportement signifie que la fonctionnelle  $f$  est très proche d'une forme quadratique de  $x$  pour  $x \in [x^0, x^*]$ .

La FIG. 4.19 présente l'évolution des itérés successifs au cours du processus de minimisation ( $m = 6$ ) pour différentes valeurs initiales de paramètres  $x^0$ . La plage de variation de  $x^0$  a été fixée à  $\pm 70\%$  des valeurs optimales  $\{x_1^*, x_2^*\}$ . L'évolution des itérés vers un unique optimum démontre numériquement l'unicité de la solution de l'Eq. (4.96) et la robustesse de l'algorithme d'optimisation.

La FIG. 4.20 présente la valeur de la fonctionnelle globale moyenne en fonction du nombre  $m$  de modes à la convergence de l'algorithme. Cette grandeur est définie par le rapport entre la fonctionnelle quadratique  $f$ , Eq. (4.96), et  $m^2$  de manière à obtenir une quantité qui caractérise l'écart moyen entre les quantités modales calculées et mesurées pour chaque mode. Celle-ci décroît avec le nombre  $m$  de modes considérés ce qui signifie que le modèle éléments finis proposé est représentatif de la dynamique globale du rotor étudié. Le nombre de modes considérés a également une influence sur les valeurs des propriétés constitutives identifiées de l'empilement de tôles comme le

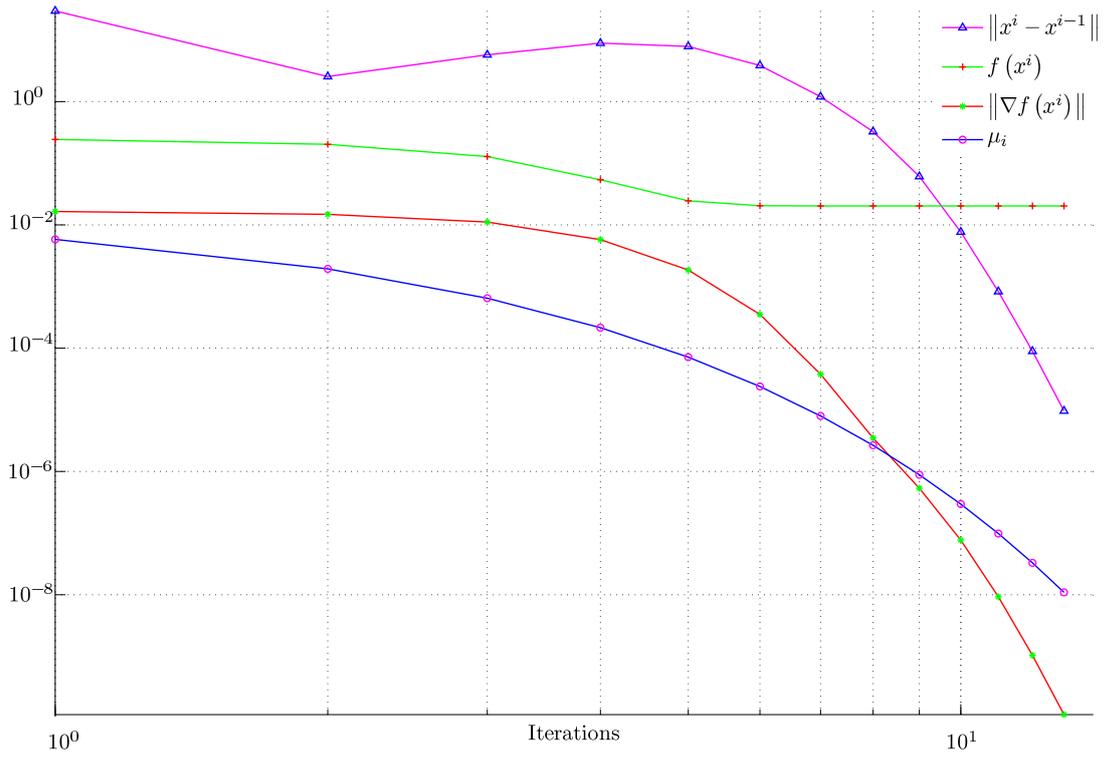


FIGURE 4.17 – Évolution de la norme de la différence des itérés successifs ( $\Delta$ ), fonctionnelle ( $\oplus$ ), norme de gradient ( $\otimes$ ) et paramètre d'amortissement ( $\circ$ ) au cours des itérations.

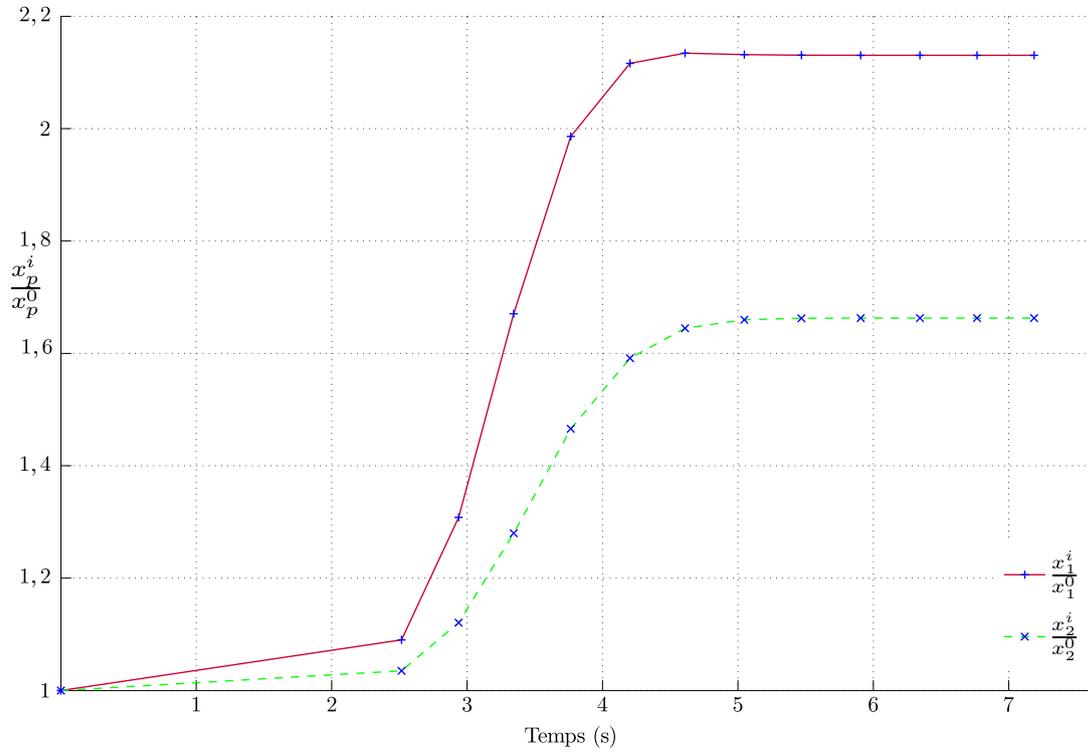


FIGURE 4.18 – Évolution temporelle (s) des valeurs relatives des modules d'Young (+) et de Coulomb (X) lors de la minimisation.

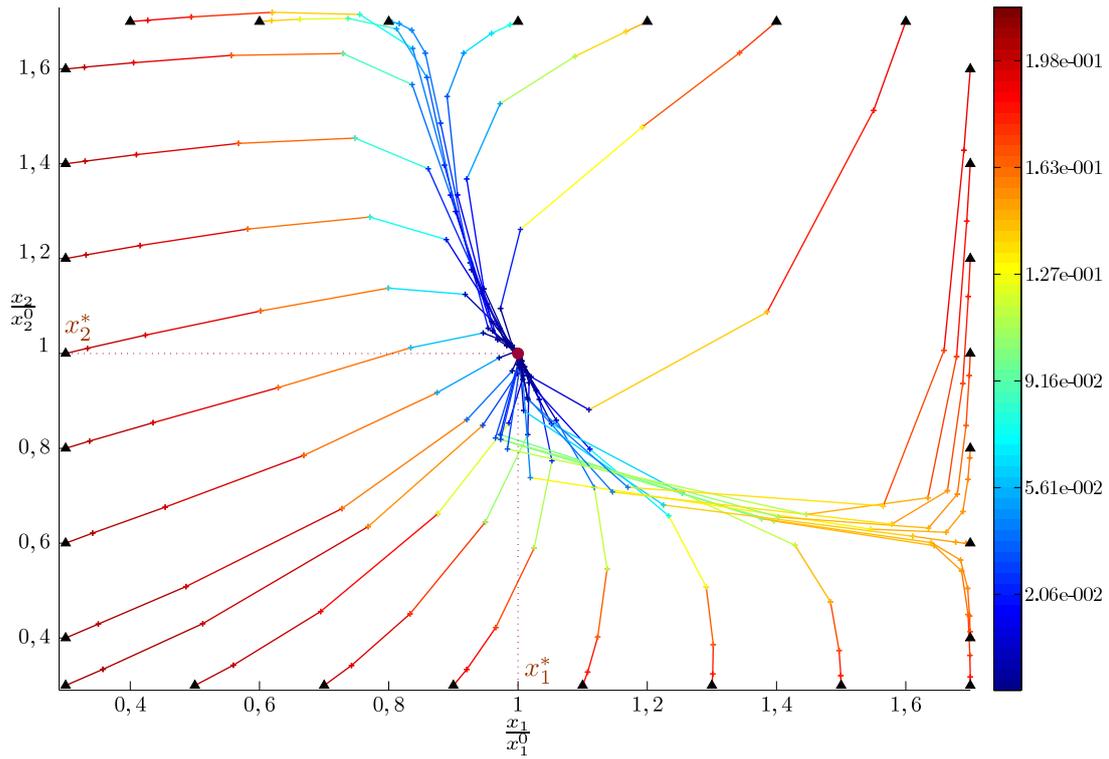


FIGURE 4.19 – Évolution des itérés successifs relatifs (+) au cours du processus de minimisation pour différentes valeurs initiales de paramètres  $x^0$  (▲). La plage de variation des valeurs initiales  $x^0$  est de  $\pm 70\%$  des valeurs optimales de  $E$  et  $G$   $\{x_1^*, x_2^*\}$  (•).

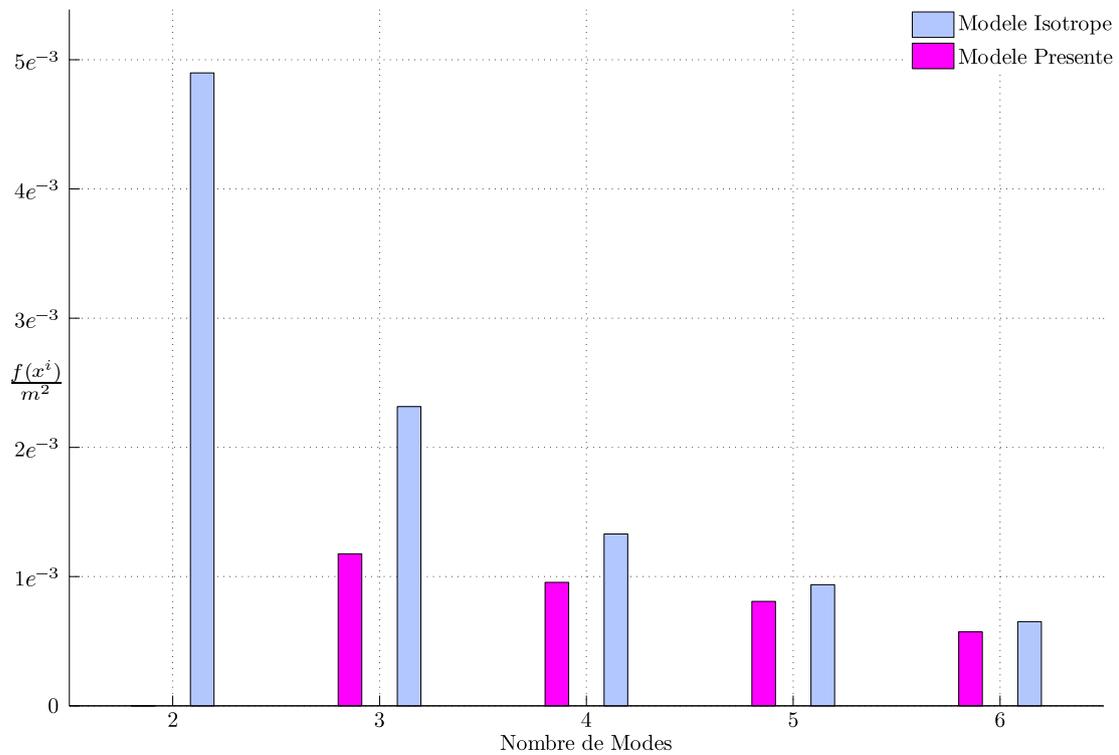


FIGURE 4.20 – Évolution de la fonctionnelle globale moyenne en fonction du nombre de modes.

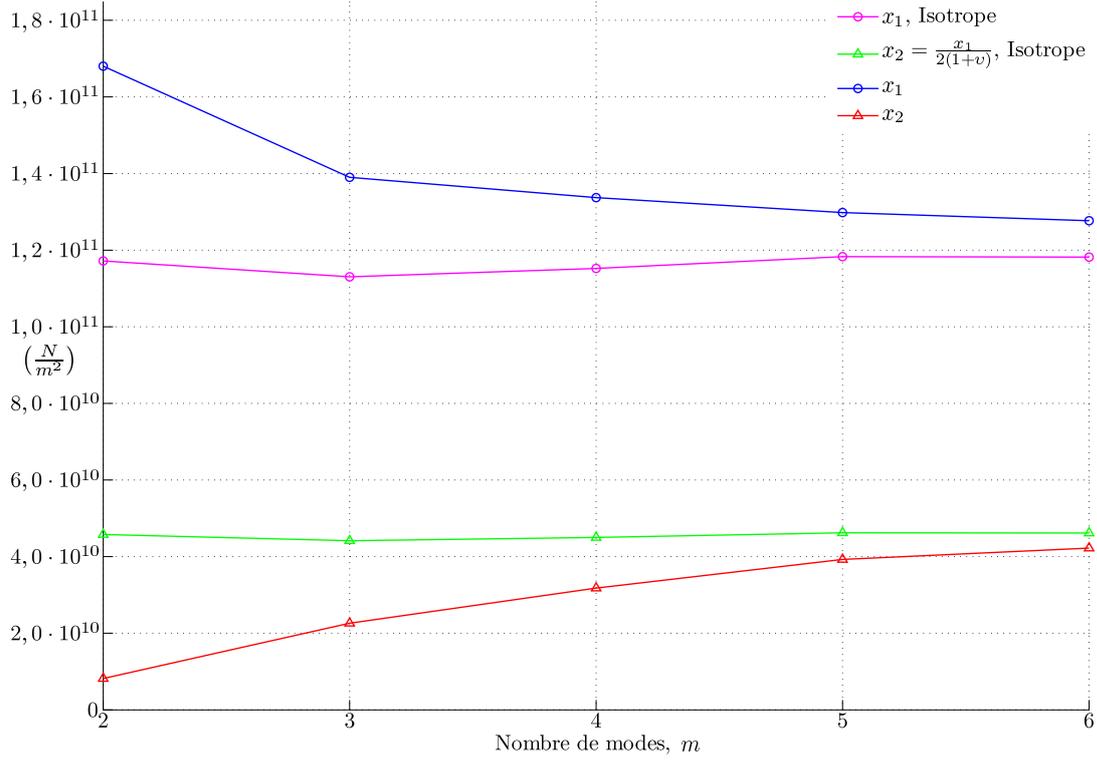


FIGURE 4.21 – Évolution des modules de Young  $E(x_1)$  (○, ○ si isotrope) et de Coulomb  $G(x_2)$  (△, △ si isotrope) en fonction du nombre de modes considérés dans le processus d'identification.

montre la FIG. 4.21. Cependant, pour ce rotor, les paramètres identifiés tendent vers des valeurs asymptotiques à partir de cinq modes. Par conséquent, un nombre minimum de modes, représentatif de la dynamique de la structure étudiée, est nécessaire pour identifier des propriétés constitutives pertinentes. La même procédure d'identification a été réalisée en considérant l'empilement de tôles comme un matériau isotrope, le module de Coulomb étant donc une fonction linéaire du module d'Young. La fonctionnelle énergétique globale moyenne est environ 4.1% à 75% (pour  $m = 3, \dots, 6$ ) supérieure à la valeur de la fonctionnelle énergétique globale moyenne obtenue à la convergence de l'algorithme d'optimisation.

Aussi, la FIG. 4.21 montre que la valeur asymptotique du module de Coulomb de l'empilement de tôles du modèle proposé est inférieure à celle obtenue avec l'hypothèse d'isotropie. Ainsi, la procédure d'identification présentée est plus précise que des méthodes classiques considérant des hypothèses restrictives, telle que l'isotropie, sur le comportement mécanique de l'empilement de tôles.

| Indice           | $\frac{\hat{\omega}}{2\pi}$ (Hz) | $\frac{\tilde{\omega}}{2\pi}$ (Hz) | Erreur (%) | $\xi$ (%)           |
|------------------|----------------------------------|------------------------------------|------------|---------------------|
| 1 <sup>ere</sup> | 435.55                           | 418.86                             | -3.83      | $6.0 \cdot 10^{-3}$ |
| 2 <sup>e</sup>   | 735.16                           | 796.78                             | 8.38       | $9.2 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 <sup>e</sup>   | 1159.4                           | 1188.6                             | 2.52       | $1.6 \cdot 10^{-2}$ |
| 4 <sup>e</sup>   | 1802.0                           | 1781.8                             | -1.12      | $1.0 \cdot 10^{-2}$ |
| 5 <sup>e</sup>   | 2425.8                           | 2335.5                             | -3.72      | $1.9 \cdot 10^{-2}$ |
| 6 <sup>e</sup>   | 2918.4                           | 2889.1                             | -1.00      | $1.8 \cdot 10^{-2}$ |

TABEAU 4.3 – Valeurs des six premières fréquences propres de flexion calculées et mesurées et des six premiers pourcentages d'amortissements critiques mesurés  $\xi$ .

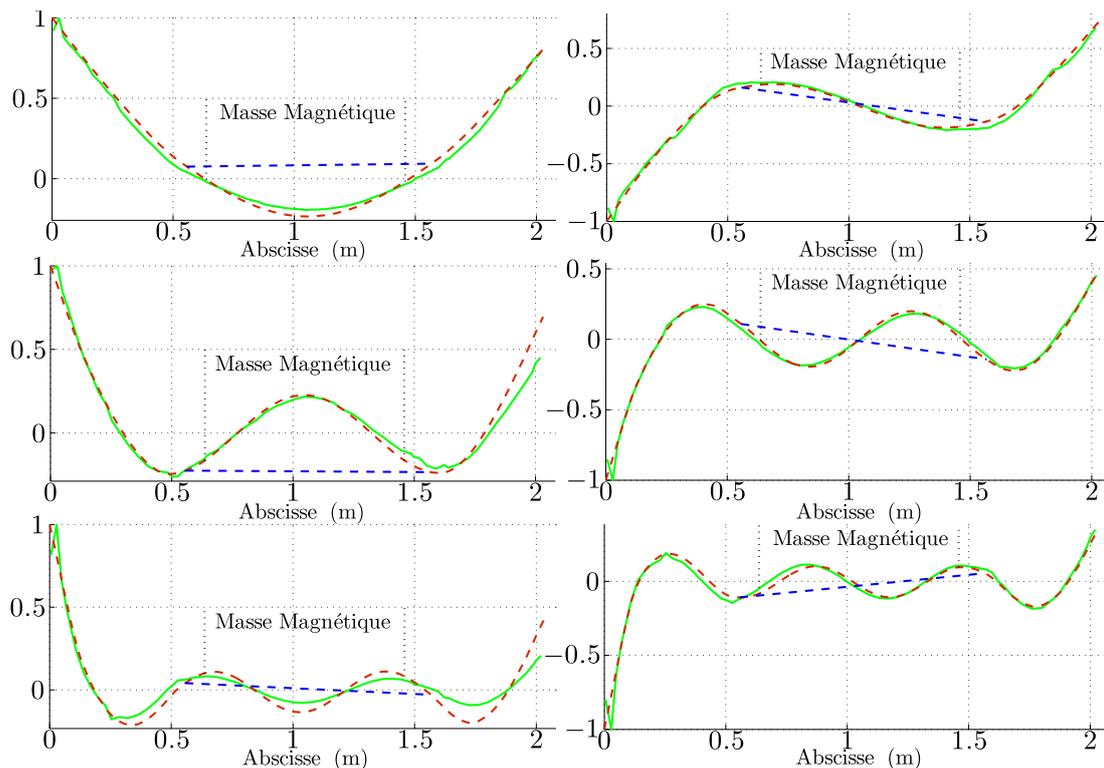


FIGURE 4.22 – Six premières formes propres calculées (--- (rotor), --- (tirant))  $\tilde{\varphi}$  et mesurées  $\hat{\varphi}$  (-).

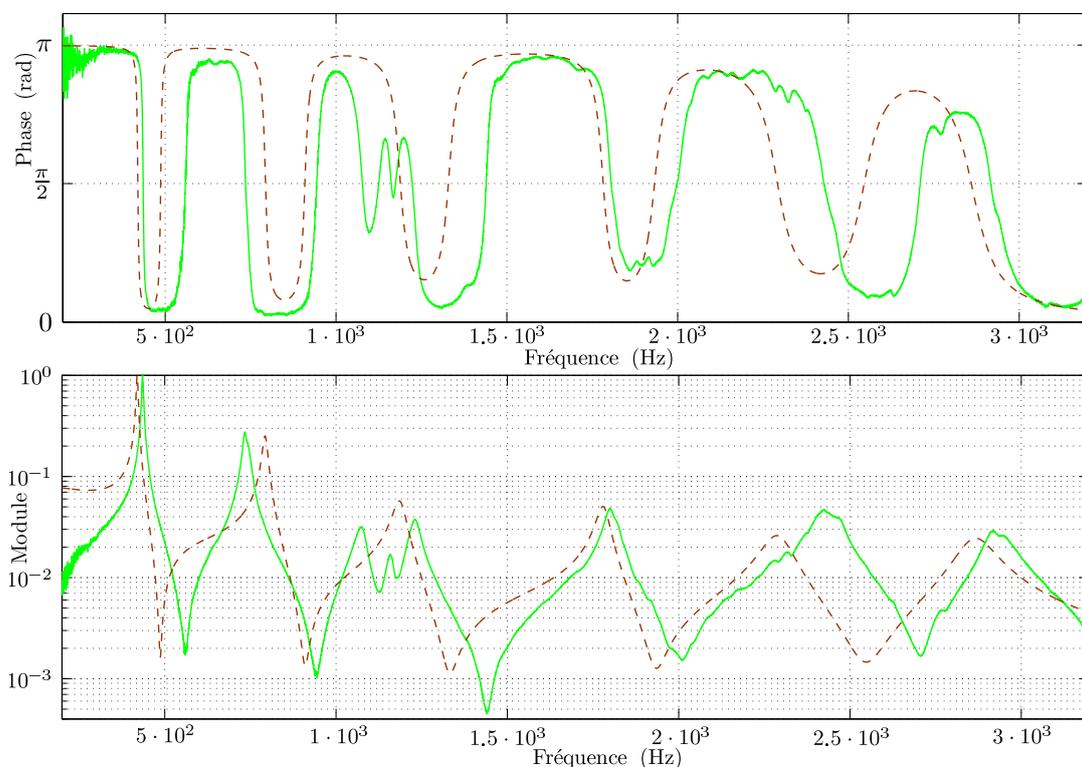


FIGURE 4.23 – Module et phase de la fonction de transfert mesurée (-) avec une excitation au nœud N°19 et une réponse au nœud N°1 et de sa synthèse (---).

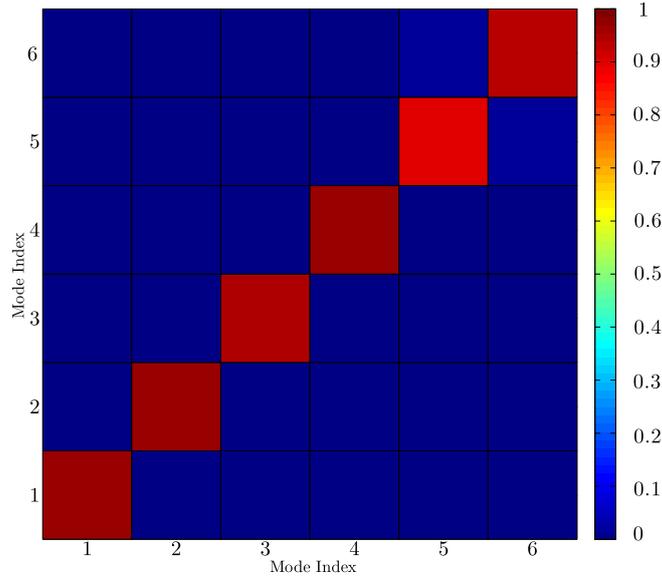


FIGURE 4.24 – Visualisation de la matrice de corrélation NCO.

Les fréquences et formes propres calculées ont été obtenues en considérant six modes dans la procédure d'identification. Le TAB. 4.3 présente les six premières fréquences propres calculées et mesurées ainsi que les six premiers pourcentages d'amortissement critiques mesurés à partir des fonctions de transfert de la FIG. 4.16.

La FIG. 4.22 illustre leurs formes propres associées. L'erreur relative entre fréquences propres calculées et mesurées est comprise entre 1.0% et 8.4% avec une moyenne de 3.6%. Les synthèses des fonctions de transfert sont obtenues à partir des amortissements modaux et des propriétés constitutives identifiées pour  $m = 6$  modes, voir une illustration donnée par la FIG. 4.23. La bonne corrélation entre formes propres calculées et mesurées présentées FIG. 4.22, est quantifiée par la matrice de corrélation NCO (Normalized Cross Orthogonality) :

$$\text{NCO}_M(\hat{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j) = \text{NCO}_{\tilde{M}_{i,j}} = \frac{|\hat{\varphi}_i^t \tilde{M} \tilde{\varphi}_j|^2}{[\hat{\varphi}_i^t \tilde{M} \hat{\varphi}_i] \cdot [\tilde{\varphi}_j^t \tilde{M} \tilde{\varphi}_j]}, \quad \text{avec } i, j = 1, \dots, m, \quad (4.79)$$

représentée par la FIG. 4.24. Les termes diagonaux, supérieurs à 0.9, et extra-diagonaux, inférieurs à 0.1, corroborent une corrélation satisfaisante entre les deux ensembles de formes propres mesurées  $\hat{\varphi}$  et calculées  $\tilde{\varphi}$ . Colinéarité et surtout orthogonalité sont alors estimées et vérifiées, ce qui n'est pas garanti par la matrice de corrélation MAC [58].

#### 4.4.6 Conclusion

La procédure d'identification a été réalisée sur une structure industrielle et a permis d'établir un modèle éléments finis de poutres contenant peu de degrés de liberté ce qui est avantageux pour prévoir la dynamique de rotors à la conception complexe. Les tirants ont été modélisés indépendamment de la masse magnétique à l'aide d'un élément fini unique tout en considérant la charge axiale appliquée. La combinaison d'une fonctionnelle énergétique avec la condensation de Guyan est une solution efficace pour identifier les paramètres d'un modèle éléments finis à partir de données *a priori* non compatibles, *i.e.* pulsations et formes propres. Les propriétés constitutives de l'empilement de tôles d'un rotor à cage d'écureuil ont donc été identifiées avec pertinence dans la mesure où le nombre de modes utilisés est suffisamment représentatif de la dynamique de la structure testée.

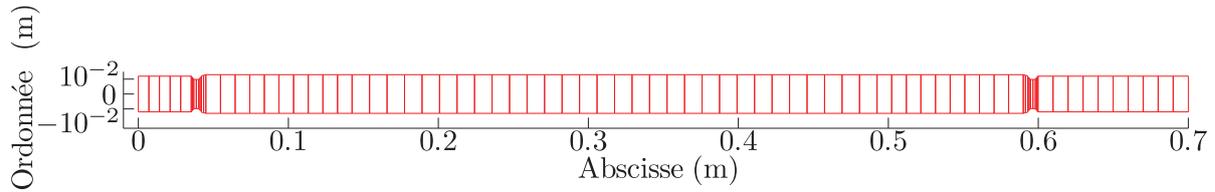


FIGURE 4.25 – Discretisation d'un tirant.

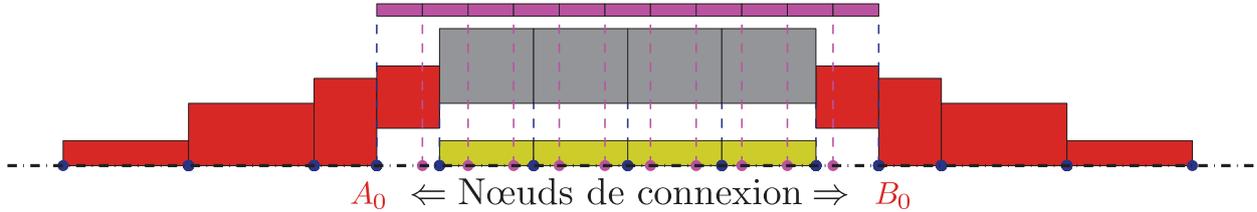


FIGURE 4.26 – Maillage éléments finis : rotor (■), empilement de tôles magnétiques (■), barres de court-circuit FE (■), tirants (■). Nœuds de rotor (●) et de tirants (●).

## 4.5 Une fonctionnelle modale condensée selon Craig & Bampton

### 4.5.1 Introduction

Dans cette section, un modèle élément fini ramifié de rotor à induction est proposé afin de modéliser les tirants indépendamment de l'empilement de tôles magnétiques. Ce dernier est constitué d'éléments finis de poutre de Timoshenko. Bien que le choix se soit porté sur un modèle élément fini de poutres, les propriétés constitutives de l'empilement sont définies telles que le module de Coulomb soit indépendant du module d'Young et du coefficient de Poisson afin de considérer sa nature orthotrope [15].

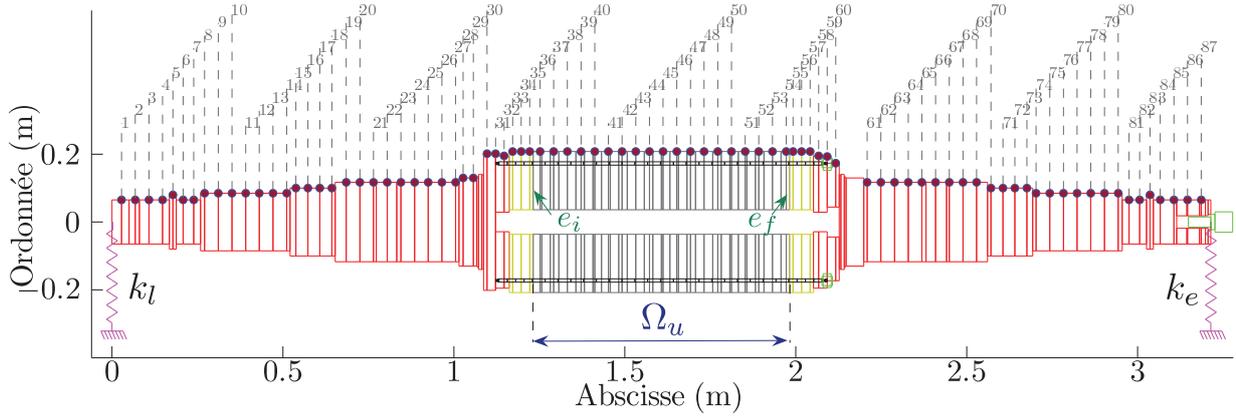
L'écart entre les quantités modales mesurées et calculées est estimé à l'aide d'une fonctionnelle énergétique basée sur un quotient de Rayleigh hybride combiné à une méthode de condensation dynamique de Craig & Bampton [72].

La réduction du modèle éléments finis rend possible la coïncidence entre les formes propres expérimentales et numériques : les degrés de liberté principaux correspondant aux déflexions mesurées aux points expérimentaux. Par ailleurs, le fait d'appliquer la condensation dynamique de Craig & Bampton permet d'obtenir un modèle condensé qui conserve tout de même des modes locaux (de tirants) du modèle éléments finis complet.

### 4.5.2 Intérêt d'une condensation dynamique pour un modèle ramifié

Le procédé de fabrication de la masse magnétique autorise un jeu tirant-tôles, FIG. B.21. un modèle éléments finis dans le plan est développé pour déterminer la déflexion transversale des tirants, FIG. 4.25. Les tirants sont modélisés par un cylindre creux équivalent discrétisé (voir modèle  $\mathcal{M}_1$  présenté Annexe B.3.4) afin de former un modèle ramifié car tirants et masse magnétique constituent deux poutres indépendantes liées entre elles aux deux nœuds  $A_0$  et  $B_0$ , FIG. 4.26. Un modèle éléments finis complet et de référence est établi, FIG. 4.27, en affectant des valeurs arbitraires aux propriétés constitutives de l'empilement telles que :

$$\{E = 0.8 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, G = 0.7 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \nu = 0.28\}. \quad (4.80)$$


 FIGURE 4.27 – Modèle éléments finis ramifié contenant  $n_{\delta_c} = 87$  points de mesure ( $\bullet$ ),  $n_{\delta} = 692$ .

Le modèle complet est ensuite condensé à l'aide de la méthode de réduction statique de *Guyan* [69] en ne conservant que les degrés de liberté transversaux ; puis, en considérant les mêmes degrés de liberté principaux, une condensation dynamique de *Craig & Bampton* [72] est appliquée ( $m_{\delta_i} = 9$ ) afin de mettre en évidence l'erreur d'approximation effectuée selon la méthode de réduction utilisée. Les neuf premières fréquences propres obtenues avec ces trois méthodes sont données dans le TAB. 4.4. La FIG. 4.28 rassemble les formes propres des modèles de référence et celles issues des modèles réduits.

L'approximation engendrée par les deux méthodes de réduction induit une faible erreur relative, comprise en  $10^{-4}\%$  et  $10^{-1}\%$ , sur les quatre premières fréquences propres dont la cohérence des formes propres associées est illustrée FIG. 4.28. En revanche, à partir de la cinquième fréquence propre, l'erreur issue de la condensation statique de *Guyan* augmente fortement pour atteindre une valeur de l'ordre de  $2 \cdot 10^1\%$  alors que celle relative à la condensation dynamique de *Craig & Bampton* reste stable autour d'une valeur de  $2 \cdot 10^{-2}\%$ . Cette erreur, issue de la condensation de *Guyan*, est due à l'apparition de modes locaux du modèle complet, *i.e.* les 5<sup>e</sup> et 9<sup>e</sup> formes propres illustrent des modes de tirants, tracés en bleu (–), dont les amplitudes relatives modales sont nettement supérieures à celles du reste du rotor. Ceci justifie donc l'utilisation d'une condensation dynamique sur le modèle ramifié.

| Indice           | Référence<br>(Hz)  | <i>Guyan</i><br>(Hz) | Erreur<br>(%)       | <i>Craig &amp; Bampton</i><br>(Hz) | Erreur<br>(%)       |
|------------------|--------------------|----------------------|---------------------|------------------------------------|---------------------|
| 1 <sup>ere</sup> | $1.854 \cdot 10^2$ | $1.855 \cdot 10^2$   | $1.8 \cdot 10^{-2}$ | $1.854 \cdot 10^2$                 | $1.7 \cdot 10^{-4}$ |
| 2 <sup>e</sup>   | $3.107 \cdot 10^2$ | $3.108 \cdot 10^2$   | $1.9 \cdot 10^{-2}$ | $3.107 \cdot 10^2$                 | $7.2 \cdot 10^{-4}$ |
| 3 <sup>e</sup>   | $5.657 \cdot 10^2$ | $5.665 \cdot 10^2$   | $1.4 \cdot 10^{-1}$ | $5.657 \cdot 10^2$                 | $2.5 \cdot 10^{-3}$ |
| 4 <sup>e</sup>   | $8.030 \cdot 10^2$ | $8.039 \cdot 10^2$   | $1.1 \cdot 10^{-1}$ | $8.031 \cdot 10^2$                 | $1.1 \cdot 10^{-2}$ |
| 5 <sup>e</sup>   | $1.037 \cdot 10^3$ | $1.088 \cdot 10^3$   | $4.9 \cdot 10^0$    | $1.037 \cdot 10^3$                 | $3.6 \cdot 10^{-3}$ |
| 6 <sup>e</sup>   | $1.096 \cdot 10^3$ | $1.498 \cdot 10^3$   | $3.7 \cdot 10^1$    | $1.096 \cdot 10^3$                 | $2.5 \cdot 10^{-2}$ |
| 7 <sup>e</sup>   | $1.493 \cdot 10^3$ | $1.781 \cdot 10^3$   | $1.9 \cdot 10^1$    | $1.494 \cdot 10^3$                 | $3.1 \cdot 10^{-2}$ |
| 8 <sup>e</sup>   | $1.803 \cdot 10^3$ | $2.160 \cdot 10^3$   | $1.9 \cdot 10^1$    | $1.805 \cdot 10^3$                 | $1.2 \cdot 10^{-1}$ |
| 9 <sup>e</sup>   | $2.037 \cdot 10^3$ | $2.612 \cdot 10^3$   | $2.8 \cdot 10^1$    | $2.038 \cdot 10^3$                 | $1.7 \cdot 10^{-2}$ |

 TABLEAU 4.4 – Les neuf premières fréquences propres de flexion des modèles complet (Référence), et réduits à l'aide des méthode de condensation de *Guyan* et de *Craig & Bampton*.

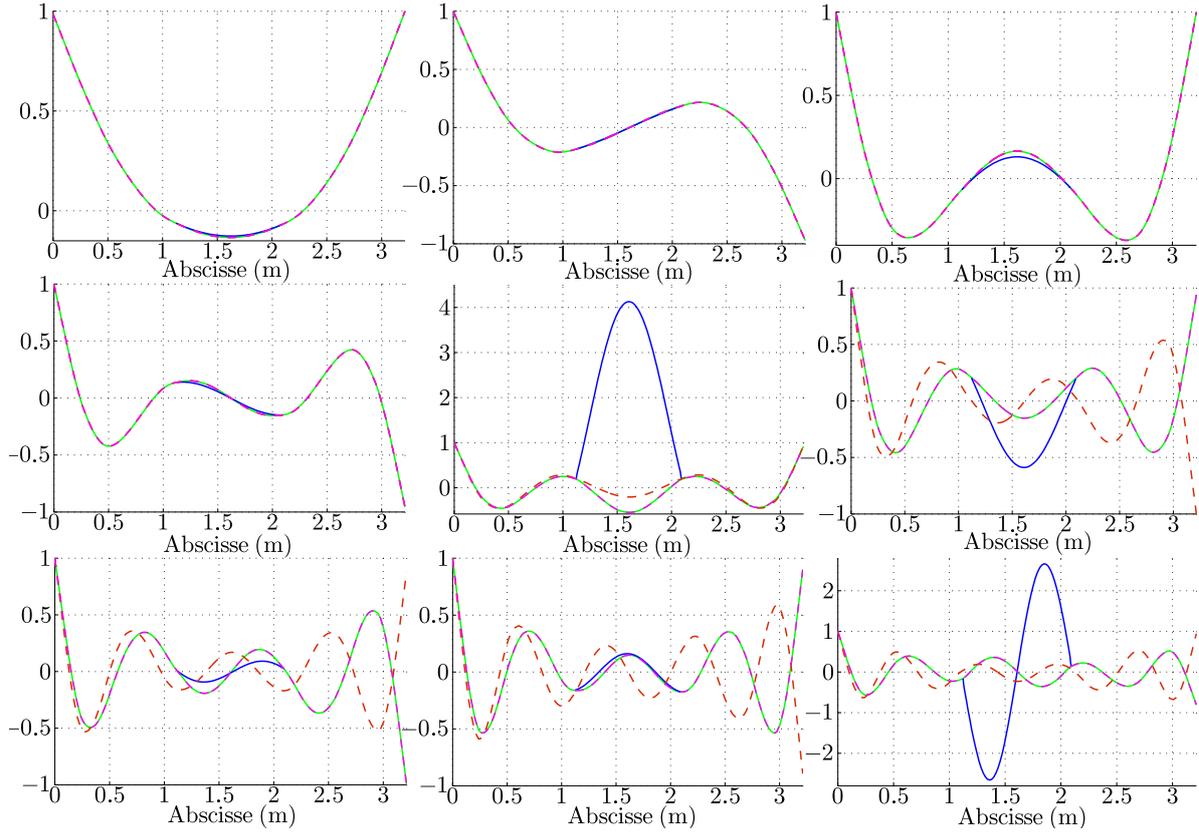


FIGURE 4.28 – Neuf premières formes propres de flexion du modèle complet (rotor, (-), tirants (-)) et condensé : Guyan (---) et Craig & Bampton (- -).

### 4.5.3 Définition de la fonctionnelle modale condensée

En considérant le cylindre équivalent modélisant les tirants (modèle  $\mathcal{M}_{1'}$ , Annexe B.3.4) et le rotor comme deux sous-structures, la condensation dynamique de Craig & Bampton [72] est une méthode appropriée pour réduire le modèle éléments finis complet. De plus, ce choix a été présidé par les raisons évoquées dans la Section 4.5.2.

En définissant les mêmes degrés de liberté principaux  $\delta_c \in \mathbb{R}^{n_{\delta_c}}$  et secondaires  $\delta_i \in \mathbb{R}^{n_{\delta_i}}$  du modèle complet, Eq. (4.46), la matrice de masse globale  $M$  (cf. Section 4.4) peut être partitionnée de la manière suivante :

$$M = \left[ \begin{array}{c|c} M_{ii} & M_{ic} \\ \hline M_{ci} & M_{cc} \end{array} \right], \quad (4.81)$$

de telle sorte que l'équation Eq. (4.41) s'écrive :

$$\left[ \begin{array}{c|c} M_{ii} & M_{ic} \\ \hline M_{ci} & M_{cc} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \ddot{\delta}_i \\ \ddot{\delta}_c \end{pmatrix} + \left[ \begin{array}{c|c} K_{ii} & K_{ic} \\ \hline K_{ci} & K_{cc} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_i \\ \mathcal{F}_c \end{pmatrix}, \quad (4.82)$$

où  $\mathcal{F}_i \in \mathbb{R}^{n_{\delta_i}}$  et  $\mathcal{F}_c \in \mathbb{R}^{n_{\delta_c}}$  représente désormais respectivement les vecteurs des forces extérieures relatives aux degrés de liberté secondaires  $\delta_i$  et principaux  $\delta_c$ .

La condensation dynamique de Craig & Bampton suppose d'exprimer :

- d'une part les degrés de liberté secondaires  $\delta_i$  en fonction des degrés de liberté principaux  $\delta_c$  grâce à une relation cinématique, *e.g.* Eq. (4.49), ce qui aboutit à la matrice  $\tilde{\varphi}^c$ ,

- et d'autre part, les degrés de liberté secondaires en fonction en fonction des variables modales  $\tilde{p}$  de la structure bloquée sur ses degrés de liberté principaux, ce qui abouti à la matrice modale  $\tilde{\varphi}^n \in \mathcal{M}_{n_{\delta_i}, m_{\delta_i}}$ , qui peut être tronquée pour réduire la taille du système.

On a alors :

$$M_{ii}\ddot{\delta}_i + K_{ii}\delta_i = \mathcal{F}_i, \quad (4.83)$$

où  $m_{\delta_i}$  est le nombre de modes normaux obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres :

$$(K_{ii} - \tilde{\lambda}_k^n M_{ii}) \tilde{\varphi}_k^n = 0, \text{ avec } k = 1, \dots, m_{\delta_i}, \quad (4.84)$$

avec  $\tilde{\lambda}_k^n$  la  $k^e$  valeur propre du modèle éléments finis bloqué sur ses degrés de liberté principaux. Cela permet d'établir le changement de variable supplémentaire suivant :

$$\delta_i = \tilde{\varphi}^n \tilde{p}, \quad (4.85)$$

où  $\tilde{p} \in \mathbb{R}^{m_{\delta_i}}$  est le vecteur des coordonnées généralisées du modèle éléments finis complet tel que  $\delta_c = 0$ . La superposition des changements de variables Eq. (4.49) et Eq. (4.85) permet alors d'exprimer les degrés de liberté secondaires  $\delta_i$  en fonction des principaux  $\delta_c$  et des variables modales  $\tilde{p}$  :

$$\delta_i = \tilde{\varphi}^c \delta_c + \tilde{\varphi}^n \tilde{p}. \quad (4.86)$$

La matrice de transformation de Craig & Bampton  $\tilde{\psi} \in \mathcal{M}_{n_{\delta}, n_{\delta_c} + m_{\delta_i}}$  s'écrit alors :

$$\tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}^c & \tilde{\varphi}^n \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

où  $I \in \mathcal{M}_{n_{\delta_c}, n_{\delta_c}}$  est une matrice identité. Le changement de variable peut alors s'écrire :

$$\delta(t) = \tilde{\psi} \begin{pmatrix} \delta_c \\ \tilde{p} \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Le problème aux valeurs propres du modèle élément fini condensé s'écrit finalement :

$$(\tilde{K} - \tilde{\lambda}_k \tilde{M}) \tilde{\varphi}_k = 0, \quad \tilde{\lambda}_k = \tilde{\omega}_k^2, \quad k = 1, \dots, n_{\delta_c}, \quad (4.89)$$

où  $\tilde{\lambda}_k \in \mathbb{R}$  est la  $k^e$  valeur propre du modèle éléments finis condensé et  $\tilde{\varphi}_k \in \mathbb{R}^{n_{\delta_c}}$  le  $k^e$  vecteur propre associé pouvant être partitionné comme suit :

$$\tilde{\varphi}_k = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_k^c \\ \tilde{p} \end{pmatrix}, \quad (4.90)$$

où  $\tilde{\varphi}_k^c$  représente le  $k^e$  vecteur composé des degrés de liberté principaux tandis que  $\tilde{p}$  est le vecteur qui contient les composantes associées aux variables modales. Les matrices  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{K} \in \mathcal{M}_{n_{\delta_c}, n_{\delta_c}}$  sont respectivement les matrices de masse et raideur condensées définies telle que :

$$\tilde{M} = \tilde{\psi}^t M \tilde{\psi}, \quad (4.91a) \quad \tilde{K} = \tilde{\psi}^t K \tilde{\psi} \quad (4.91b)$$

Afin que les formes propres calculées  $\tilde{\varphi}^c$  et mesurées aient une dimension équivalente et dans le but de conserver le contenu spectral des formes propres du modèle condensé, il est proposé d'associer

les coordonnées généralisées  $\tilde{p}$  au vecteur  $\hat{\varphi}_k$  tel que le  $k^e$  vecteur propre mesuré s'écrive :

$$\hat{\varphi}_k^* = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_k \\ \tilde{p} \end{pmatrix}. \quad (4.92)$$

L'estimateur modale  $\mathcal{E}$ , Eq. (4.93), est donc issu de la combinaison des formes propres condensées calculées et des formes et pulsations propres mesurées tel que :

$$\mathcal{E}_k(x^i) = 1 - \frac{\mathcal{R}_k^*}{\omega_k^2}, \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_k^* = \frac{\hat{\varphi}_k^{*t} \tilde{K} \tilde{\varphi}_k}{\hat{\varphi}_k^{*t} \tilde{M} \tilde{\varphi}_k}, \quad (4.93)$$

où  $\mathcal{R}_k^* \in \mathbb{R}$  est le  $k^e$  quotient de Rayleigh hybride issu de la condensation de Craig & Bampton. Cet estimateur possède alors les mêmes propriétés que celle énoncées dans la Section 4.4.2.1 et permet de définir une fonctionnelle modale condensée  $f$ , telle que :

$$f = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k^2. \quad (4.94)$$

#### 4.5.4 Stratégie d'Optimisation

Les propriétés constitutives de l'empilement de tôles considéré isotrope transverse sont définies par le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  avec  $\{x_p\}_{p=1\dots n}$  tel que les paramètres d'optimisation soient définis par le doublet suivant :

$$x = (E, G)^t, \quad \text{avec} \quad n = 2. \quad (4.95)$$

Les éléments finis représentant l'empilement de tôles sont contenus dans le domaine  $\Omega_u$ , Eq. (4.33), et la stratégie d'optimisation consiste à minimiser la fonctionnelle  $f$  en résolvant le problème :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} \text{rouver } x^* \\ & \text{tel que} \quad \min_{x^* \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ & \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{2} \|\mathcal{E}(x)\|^2, \end{aligned} \quad (4.96)$$

avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt, Alg. 7 défini dans l'Annexe C.1.3, afin de déterminer les valeurs optimales des paramètres  $E$  et  $G$  de manière à ce que les quantités modales prédites tendent vers les valeurs cibles, *i.e.* les quantités mesurées.

#### 4.5.5 Dérivation de la matrice de transformation de Craig & Bampton

Comme stipulé dans la Section 4.4.4, la minimisation de la fonctionnelle  $f$ , Eq. (4.94), nécessite la connaissance de l'expression des dérivées partielles, par rapport à un paramètre d'optimisation  $x_p$ , des matrices de masse et raideur condensées qui s'obtiennent grâce à la dérivée partielle de la matrice de transformation  $\tilde{\psi}$ , Eq. (4.87a), telle que :

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\varphi}^c}{\partial x_p} & \frac{\partial \tilde{\varphi}^n}{\partial x_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.97)$$

où  $\frac{\partial \tilde{\varphi}^n}{\partial x_p}$  est obtenu en appliquant la méthode de Nelson [48] à l'Eq. (4.84) ; la dérivée partielle de la matrice des modes  $\tilde{\varphi}^c$  étant définie dans l'Eq. (4.73). Finalement, les dérivées partielles des matrices de masse et raideur condensées s'expriment respectivement en introduisant l'Eq. (4.97) dans les Eq. (4.74) et Eq. (4.74b).



FIGURE 4.29 – Dispositif expérimental.

#### 4.5.6 Application industrielle : identification de propriétés homogénéisées et modèle ramifié

Une analyse modale de type réponse impulsionnelle a été réalisée sur un rotor MG<sub>V</sub> suspendu, FIG. 4.29, en respectant le protocole présenté en Section 3.3. Les caractéristiques géométriques du rotor feuilleté sont définies dans le TAB. 4.5. Une génératrice axiale a été discrétisée en un maillage expérimental fin, *i.e.* 87 points de mesure, FIG. 4.27, pour établir des formes propres expérimentales très précises.

|                             |                   |                                |
|-----------------------------|-------------------|--------------------------------|
| Masse, $m_r$                | 1625              | kg                             |
| Longueur, $L_r$             | 3.21              | m                              |
| Longueur, $L_e$             | 1.00              | m                              |
| Centre de masse, $z_G$      | 1.61              | m                              |
| Raideur transversale, $k_e$ | $1.59 \cdot 10^4$ | $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| Raideur transversale, $k_l$ | $2.14 \cdot 10^3$ | $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ |

TABLEAU 4.5 – Caractéristiques géométriques et inertielles du rotor suspendu.

Le modèle éléments finis ramifié présenté sur la FIG. 4.27 est composé du domaine  $\Omega$  tel que

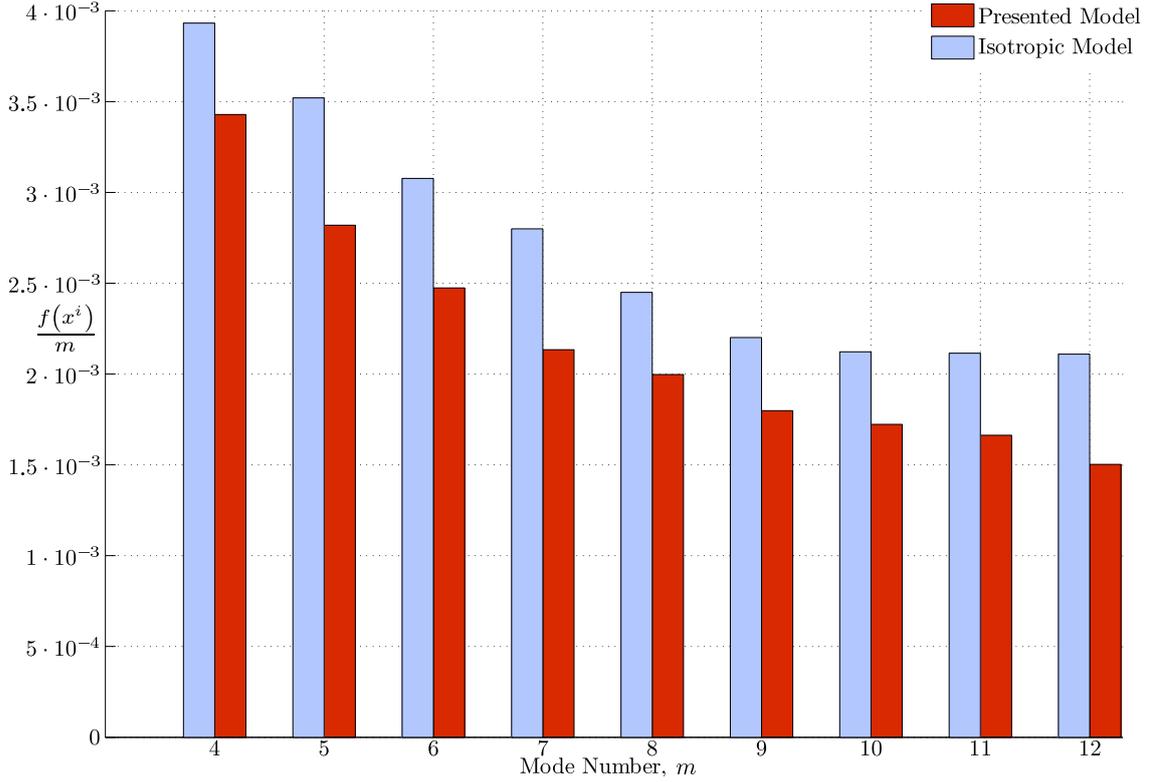


FIGURE 4.30 – Évolution de la fonctionnelle globale moyenne  $f$  en fonction du nombre de modes  $m$  en considérant un modèle soit isotrope ( $\blacksquare$ ), soit isotrope transverse ( $\blacksquare$ ).

$N_e = 195$ , Eq. (4.1), et  $n_\delta = 390$  degrés de liberté condensés sur les  $n_{\delta_c} = 87$  points de mesure. Notons que le modèle prend soin de positionner des nœuds au lieu des points de mesures. Le domaine  $\Omega_u$  contenant l'empilement de tôles magnétiques est défini par  $e_i = 53$  et  $e_f = 97$ , Eq. (4.33).

La procédure d'identification des propriétés constitutives de l'empilement de tôle magnétiques a été réalisée en faisant varier le nombre  $m$  de modes (pulsations et formes propres associées) dans l'algorithme d'optimisation tel que  $m = 4, \dots, 12$ . Le coefficient de Poisson  $\nu$  a été fixé à 0.28 et les valeurs initiales des paramètres d'optimisation  $x^0$  sont :

$$\{x_1^0 = 0.9 \cdot 10^{11}, x_2^0 = 0.3 \cdot 10^{11}\} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2}). \quad (4.98)$$

Les bornes inférieures et supérieures des intervalles contenant les variables d'optimisation  $x$  ont été définies comme dans l'Eq. (4.78).

La FIG. 4.30 présente l'évolution de la valeur de la fonctionnelle globale moyenne, à la convergence de l'algorithme d'optimisation, en fonction du nombre de modes  $m$ . Cette grandeur est définie par le rapport de la fonctionnelle  $f$ , Eq. (4.94), et du nombre de modes  $m$  et caractérise l'écart entre les quantités modales mesurées et calculées, pour chaque mode. La fonctionnelle globale moyenne décroît avec le nombre de mode  $m$  ce qui signifie que le modèle isotrope transverse rend bien compte de la dynamique du rotor étudié. Le nombre de modes a une influence sur l'identification. Néanmoins, les propriétés constitutives tendent vers des valeurs asymptotiques particulières lorsque  $m \geq 8$ , FIG. 4.31.

Par conséquent, il est nécessaire de prendre en compte un nombre suffisant de modes, *e.g.* supérieur à huit, pour identifier, dans ce cas, des paramètres pertinents. La même procédure d'identification a été réalisée en considérant, cette fois-ci, l'empilement de tôles magnétiques comme un

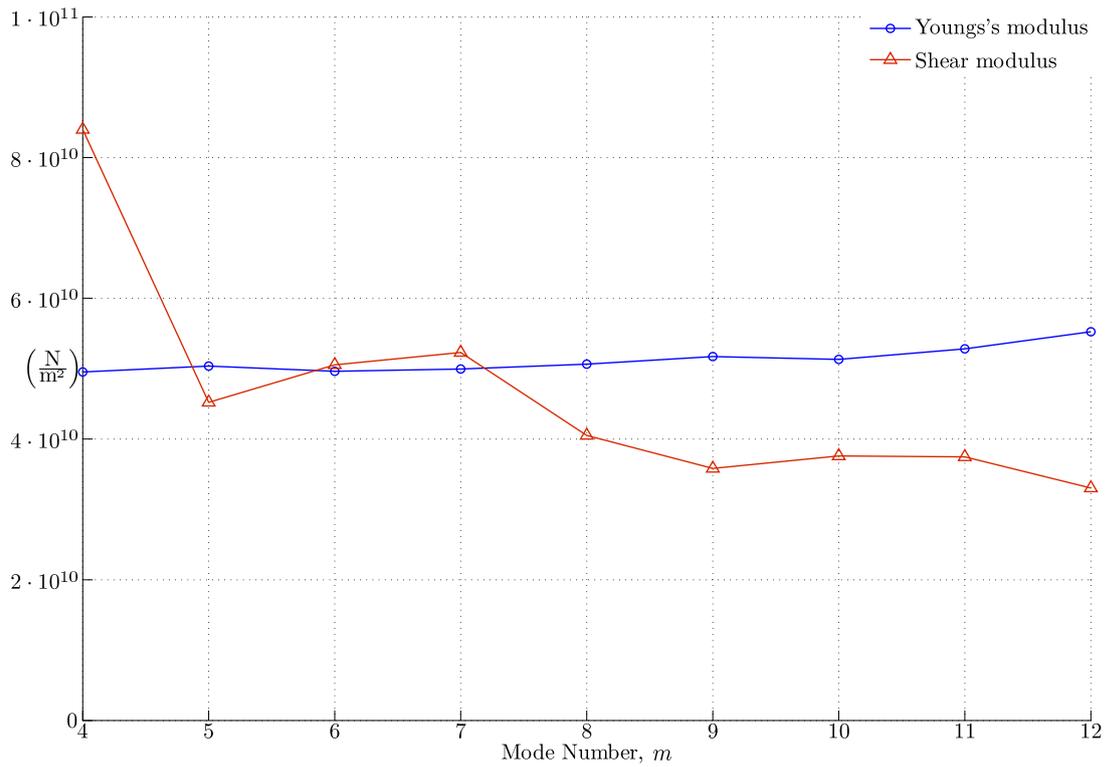


FIGURE 4.31 – Évolution des modules d'Young ( $\circ$ ) et de Coulomb ( $\triangle$ ) en fonction du nombre de modes  $m$  considérés.

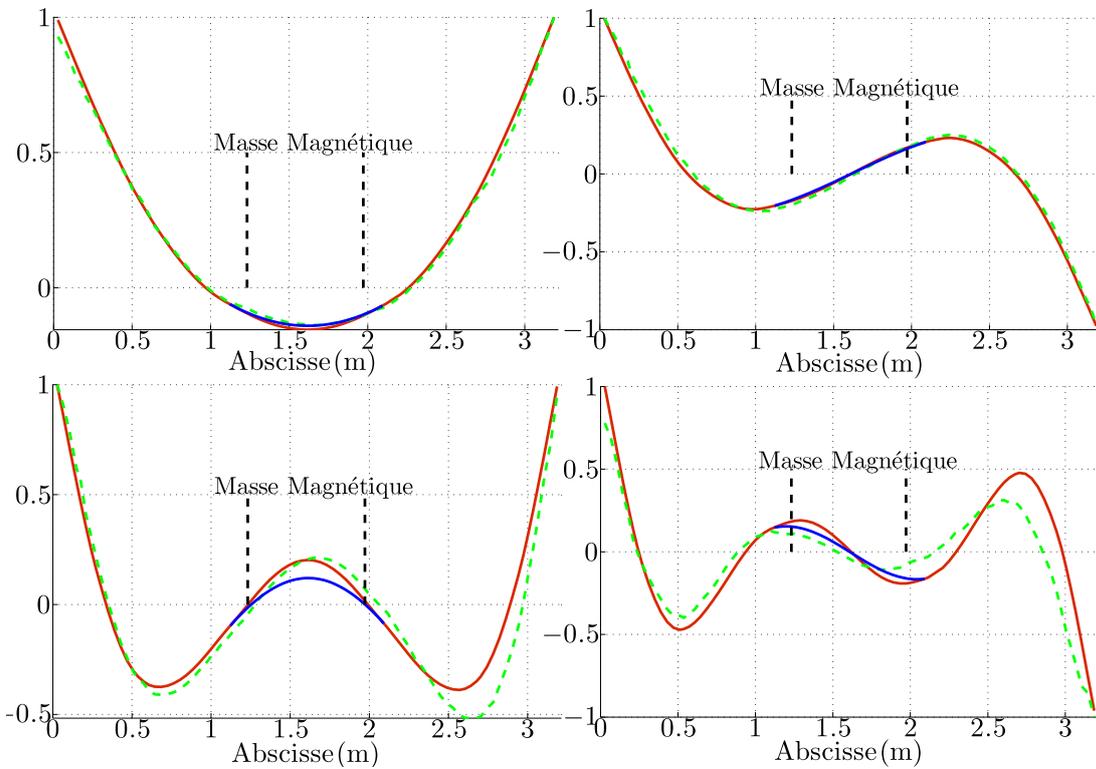


FIGURE 4.32 – Quatre formes propres transversales ( $N^{\circ}1$  to  $N^{\circ}4$ ) calculées  $\tilde{\varphi}$  (lignes continues, - (rotor), - (tirants)) et mesurées  $\hat{\varphi}$  (lignes interrompues, --).

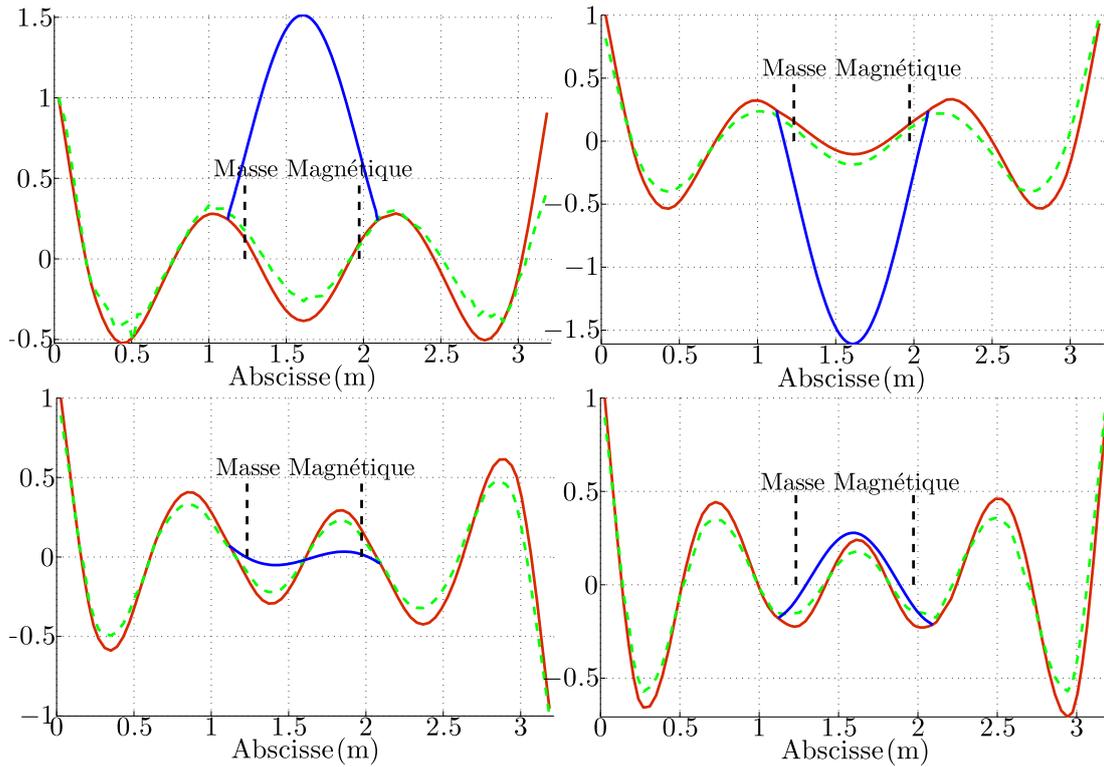


FIGURE 4.33 – Quatre formes propres transversales (N°5 to N°8) calculées  $\tilde{\varphi}$  (lignes continues, – (rotor), – (tirants)) et mesurées  $\hat{\varphi}$  (lignes interrompues, –).

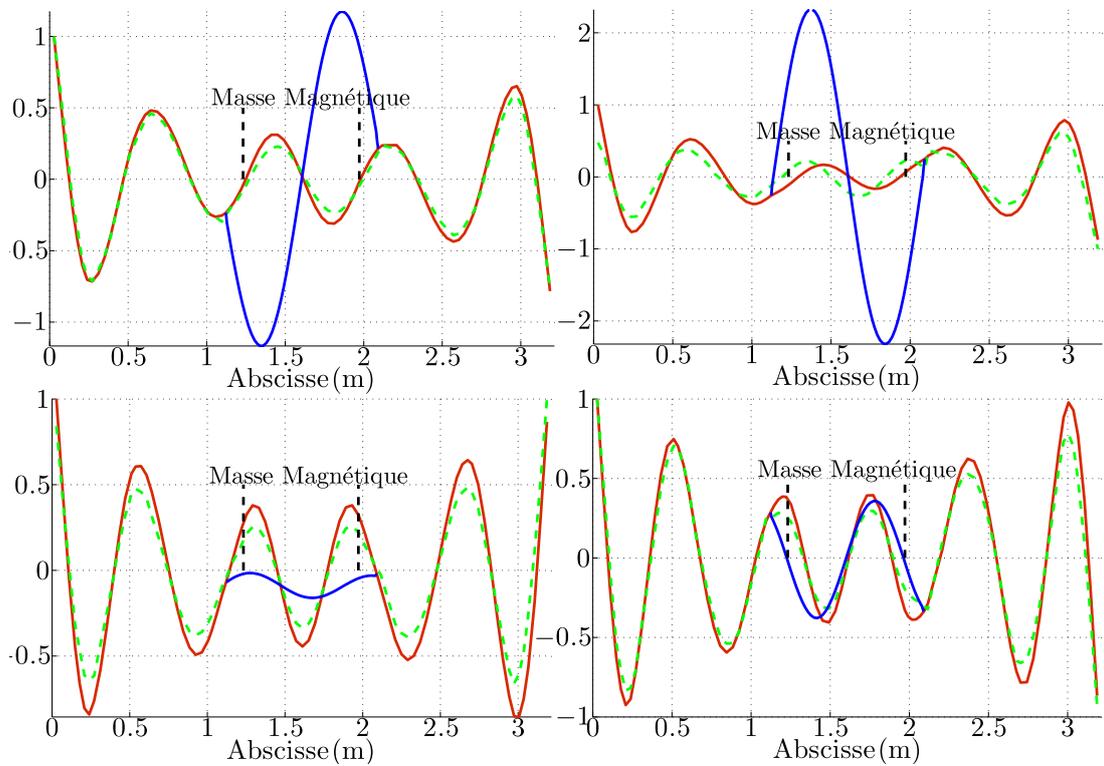


FIGURE 4.34 – Quatre formes propres transversales (N°9 to N°12) calculées  $\tilde{\varphi}$  (lignes continues, – (rotor), – (tirants)) et mesurées  $\hat{\varphi}$  (lignes interrompues, –).

matériau isotrope, *i.e.* le module de  $\mathcal{C}$ oulomb étant défini comme une fonction linéaire du module d' $\mathcal{Y}$ oung.

La fonctionnelle globale moyenne, tracée dans la FIG. 4.30, est environ 14% to 40% supérieure à la fonctionnelle globale moyenne obtenue avec le modèle isotrope transverse proposé. Par ailleurs, la fonctionnelle globale moyenne tend à se stabiliser lorsque le nombre de modes considérés  $m$  est supérieur à huit, *i.e.*  $m \geq 8$ , tandis que celle relative au modèle isotrope transverse continue de décroître. Ainsi, le choix de modéliser l'empilement de tôles magnétiques avec une matériau isotrope transverse, et de surcroît dans un modèle élément finis de poutres, fournit de meilleurs résultats, que ceux obtenus en modélisant l'empilement par un matériau isotrope.

Les douze première formes propres calculées et mesurées sont tracées dans les FIG. 4.32 à FIG. 4.34 alors que leurs fréquences propres associées sont présentées dans le TAB. 4.6. Les quantités modales calculées sont issues de la procédure d'identification sur les douze premiers modes. L'erreur relative entre les fréquences calculées et mesurées varie de 0.6% à 6.5% avec une moyenne égale à 2%. Il doit être précisé que le dispositif expérimental ne rendait pas disponible la déflexion latérale des tirants.

La FIG. 4.35 présente une représentation du critère de corrélation MAC, Eq. (2.152), entre les formes propres calculées et mesurées. Ce dernier étant basé sur les déflexions latérales calculées et mesurées, il n'est pas possible de mettre en exergue la contribution des tirants dans la dynamique globale du rotor. Par conséquent, on constate une corrélation "virtuelle" entre les 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> formes propres propres calculées et mesurées, et aussi entre les 9<sup>e</sup> et 10<sup>e</sup>. Les 6<sup>e</sup> et 10<sup>e</sup> modes sont des modes locaux dus à la dynamique intrinsèques des tirants.

Celle-ci est caractérisée par le fait que l'on retrouve, e.g. pour les 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> formes propres, des déformées de rotor identiques mais dont les déformées de tirants associées sont successivement en opposition de phase. Cet artefact mis à part, les FIG. 4.32 à FIG. 4.35 illustrent, néanmoins, une bonne corrélation entre les formes propres calculées et mesurées, et justifient l'utilisation d'un modèle éléments finis ramifié et de la condensation dynamique de Craig & Bampton.

Les modes principalement dus à la dynamique des tirants n'aurait pas pu être observés, ou plutôt calculés, si :

| Indice           | Mesurées (Hz) | Calculées (Hz) | Erreur (%) |
|------------------|---------------|----------------|------------|
| 1 <sup>ere</sup> | 173.83        | 174.33         | 0.3        |
| 2 <sup>e</sup>   | 291.02        | 305.92         | 5.1        |
| 3 <sup>e</sup>   | 519.14        | 529.48         | 1.9        |
| 4 <sup>e</sup>   | 825.78        | 771.76         | -6.5       |
| 5 <sup>e</sup>   | 996.09        | 992.13         | -0.4       |
| 6 <sup>e</sup>   | 1051.6        | 1071.7         | 1.9        |
| 7 <sup>e</sup>   | 1402.7        | 1384.3         | -1.3       |
| 8 <sup>e</sup>   | 1705.1        | 1732.2         | 1.6        |
| 9 <sup>e</sup>   | 1932.8        | 1949.3         | 0.8        |
| 10 <sup>e</sup>  | 2178.9        | 2127.0         | -2.4       |
| 11 <sup>e</sup>  | 2453.5        | 2432.5         | -0.8       |
| 12 <sup>e</sup>  | 2808.6        | 2854.5         | 1.6        |

TABLEAU 4.6 – Les douze premières fréquences propres calculées et mesurées.

- le rotor feuilleté avait été modélisé avec un modèle éléments finis classiques, *i.e.* éléments finis uniquement contigus,

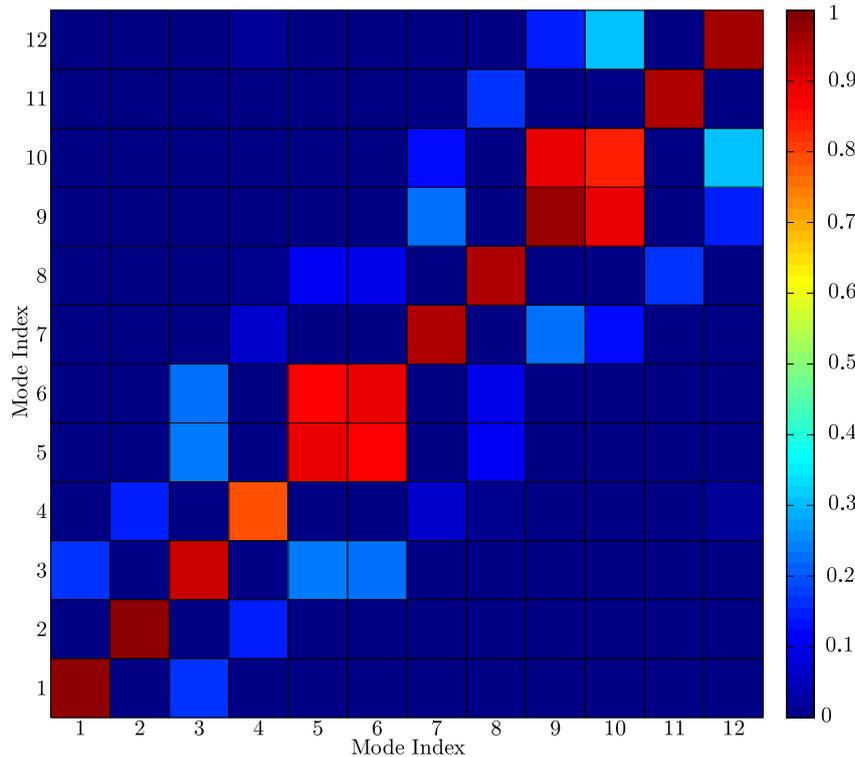


FIGURE 4.35 – Représentation d’une matrice de corrélation MAC entre les formes propres calculées  $\tilde{\varphi}$  et mesurées  $\hat{\varphi}$ .

– ou si une condensation statique avait été utilisée pour réduire le modèle ramifié.

Le modèle éléments finis ramifié est une alternative efficace pour prévoir le comportement dynamique de telles structures assemblées.

#### 4.5.7 Conclusion

Un modèle éléments finis ramifié a été présenté en considérant les différents éléments assemblés des rotors MGV. Aussi, la condensation de Craig & Bampton s’est avérée plus efficace que celle de Guyan pour réduire le modèle ramifié, lequel a été capable de rendre compte de la dynamique locale de l’assemblage.

Il a été montré que les propriétés constitutives identifiées de l’empilement dépendent du nombre de mode considérés dans la procédure d’identification. En revanche, les propriétés identifiées tendent vers des valeurs asymptotiques à partir de huit modes. La procédure d’identification présentée est une alternative intéressante qui permet de construire des modèles éléments finis basés uniquement sur des éléments de poutre de Timoshenko contenant peu de degrés de liberté, ce qui devient un avantage lorsqu’il s’agit de prévoir le comportement dynamique du rotor, *i.e.* réponses aux balourds ou transitoires.

## 4.6 Modèle prédictif de propriétés constitutives

### 4.6.1 Introduction

Cette section concerne l'établissement de modèles prédictifs des propriétés constitutives de l'empilement de tôles magnétiques, *i.e.* modules d'Young  $E$  et de Coulomb  $G$ , afin d'être en mesure de prévoir le comportement dynamique en flexion d'un rotor laminé qui n'aurait jamais été réalisé auparavant.

La modélisation du comportement dynamique des rotors feuilletés en flexion présente une difficulté majeure liée à :

- l'hétérogénéité de l'empilement de tôles recouvertes de vernis,
- la précontrainte initiale appliquée sur l'empilement.

Ces particularités sont un frein au développement théorique d'une méthode d'homogénéisation des propriétés constitutives de l'empilement.

L'approche consistant à identifier des propriétés constitutives de l'empilement de tôles magnétiques à l'aide d'une des méthodes d'identification numérique-expérimentale présentée dans les sections précédentes (cf. Section 4.4 [40], Section 4.5, [14]) est une solution efficace qui permet d'obtenir un modèle éléments finis précis du rotor feuilleté considéré. En revanche, c'est une démarche *a posteriori* qui suppose que le rotor existe physiquement et qui ne permet pas prévoir *a priori* le comportement dynamique de ce rotor.

En effet, il a été fait état que les propriétés constitutives identifiées semblent être corrélées avec les caractéristiques géométriques (diamètre  $D_s$  et longueur  $L_s$ ) et mécanique (précontrainte  $P$ ) de la masse magnétique [12]. Ce qui suppose que la phase de modélisation de la masse magnétique, notamment lorsqu'il s'agit d'associer des propriétés constitutives équivalentes à l'empilement de tôles, est délicate lorsque les dimensions de l'empilement n'ont *a priori* jamais été réalisées.

Par ailleurs, cette démarche a été motivée par l'utilisation accrue des moteurs électriques dans les machines tournantes dont les puissances requises ne cessent d'augmenter. Par conséquent, comme la puissance d'un moteur électrique est intimement lié au volume  $D_s^2 L_s$  de la masse magnétique, la réalisation de tels moteurs électriques supposera la connaissance des propriétés constitutives d'empilement de tôles magnétiques de plus en plus volumineux (augmentation du diamètre  $D_s$  et de la longueur  $L_s$ ).

Finalement, des analyses modales expérimentales et numériques ont été réalisées, à l'arrêt, sur trente-deux rotors présentant dimensions et des précontraintes différentes. L'écart entre les quantités modales mesurées et calculées est estimé à l'aide d'une fonctionnelle énergétique basée sur un quotient de Rayleigh hybride combiné à une méthode de condensation de Guyan (cf. Section 4.4, [69]) ou de Craig & Bampton (cf. Section 4.5, [72]). La réduction du modèle éléments finis rend possible la coïncidence entre les formes propres expérimentales et numériques : les degrés de liberté maîtres correspondant au déflexions mesurées aux nœuds expérimentaux. Cette fonctionnelle est minimisée grâce un algorithme de Levenberg-Marquardt et permet d'obtenir les propriétés constitutives de l'empilement.

Une méthode de régression linéaire multiple a été entreprise sur cet échantillon de trente-deux couples de propriétés identifiées pour établir des modèles en loi de puissance de propriétés constitutives de l'empilement.

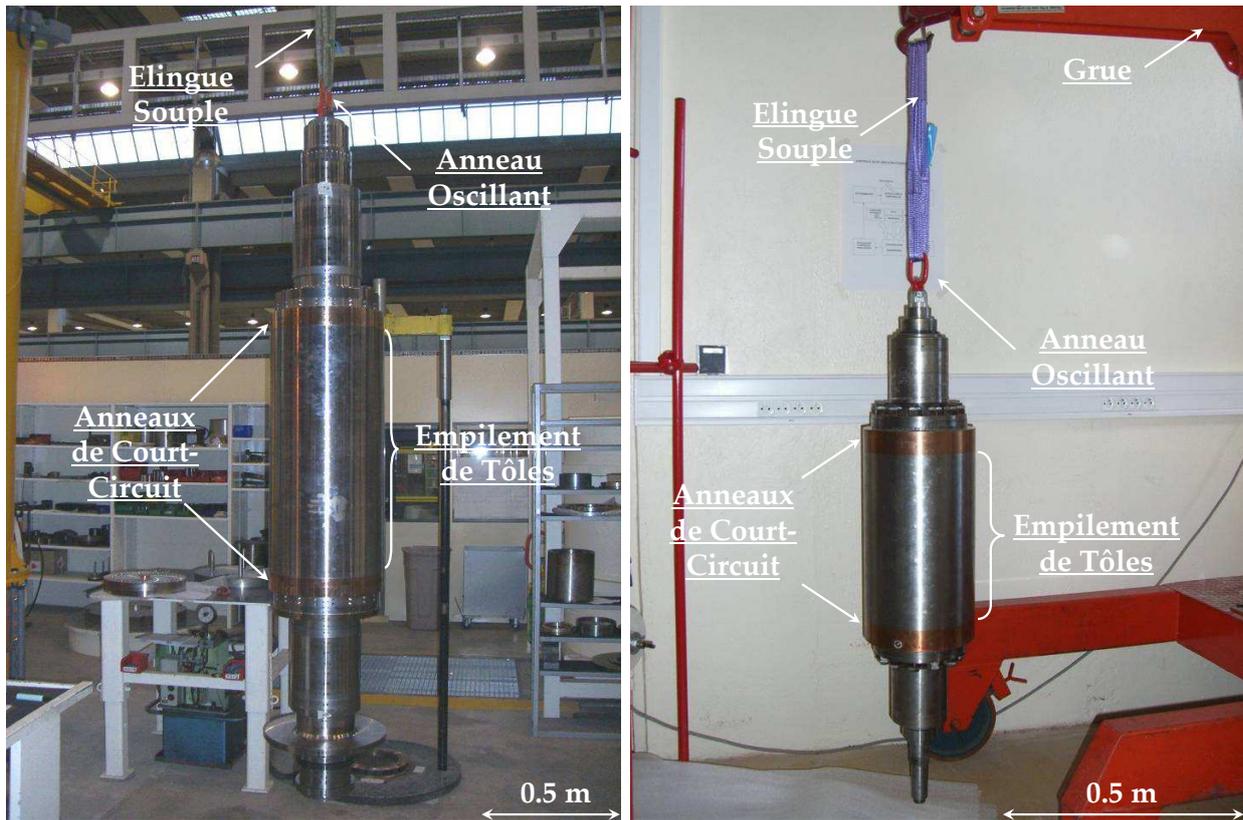
(a) MGV N°2,  $D_s = 0.44\text{m}$ ,  $L_s = 0.91\text{m}$ .(b) MGV N°32,  $D_s = 0.24\text{m}$ ,  $L_s = 0.37\text{m}$ .

FIGURE 4.36 – Dispositifs expérimentaux présentant deux rotors de taille différente.

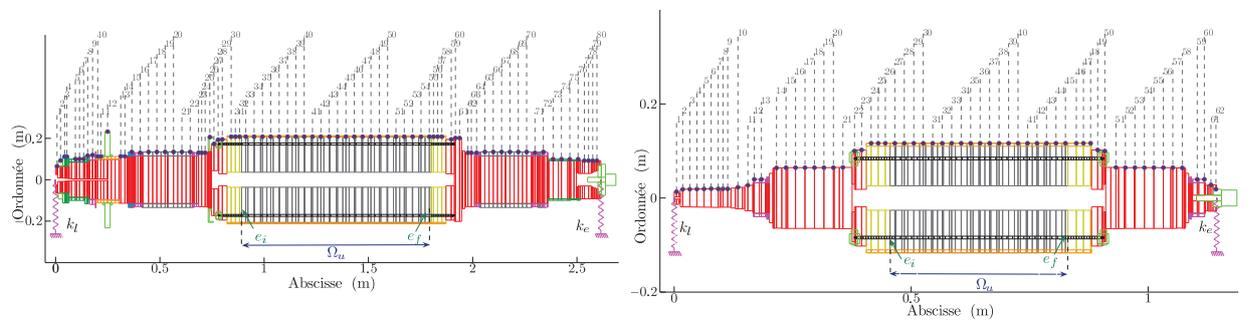
(a) MGV N°2,  $D_s = 0.44\text{m}$ ,  $L_s = 0.91\text{m}$ , 80 points de mesure.(b) MGV N°32,  $D_s = 0.24\text{m}$ ,  $L_s = 0.37\text{m}$ , 62 points de mesure.

FIGURE 4.37 – Modèles éléments finis de rotors de taille différente (● : points de mesure).

Celle-ci sont des fonctions des propriétés géométriques et mécaniques de l'empilement comme la longueur  $L_s$ , le diamètre  $D_s$  ou bien encore de la précontrainte  $P$  qui diffèrent selon les rotors, telles que :

$$\begin{aligned} D_s &= (0.24, 0.27, 0.35, 0.44) \text{ (m)}, \\ L_s &= (0.37, 0.42, 0.61, 0.63, 0.67, 0.75, 0.80, 0.85, 0.91) \text{ (m)}, \\ P &= (1.11, 1.47, 2.35, 2.77, 4.94) \cdot 10^6 \text{ (N)}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

#### 4.6.2 Analyses modales expérimentales

Toutes les analyses modales expérimentales ont été réalisées sur des rotors MGV suspendus, FIG. 4.36(a) et FIG. 4.36(b), et selon les protocoles présentés en Section 3.2 et Section 3.3. Afin

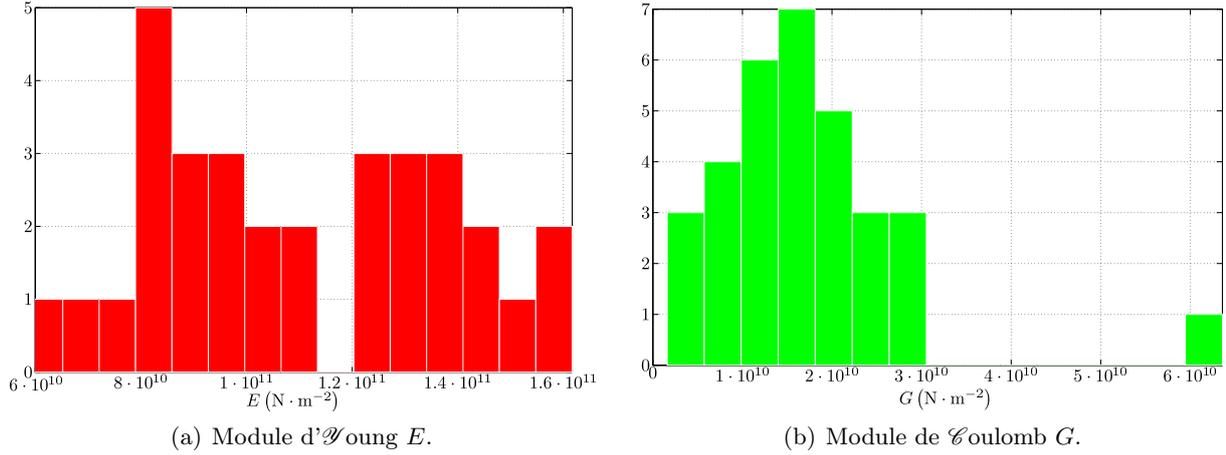
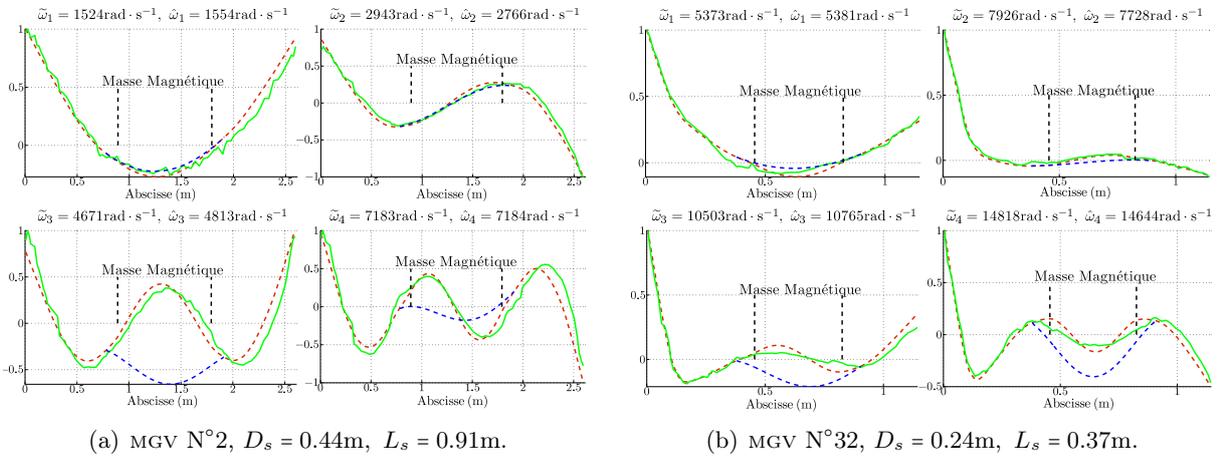


FIGURE 4.38 – Répartition des propriétés constitutives identifiées sur un échantillon de 32 rotors.


 FIGURE 4.39 – Quatre premières formes propres calculées (--- (rotor), --- (tirants))  $\tilde{\varphi}$  et mesurées (—)  $\hat{\varphi}$ .

d'établir des formes propres précises, les génératrices axiales ont été discrétisées avec une moyenne de densité linéique de points de mesure égale à  $55 \text{ nœuds} \cdot \text{m}^{-1}$ , FIG. 4.37(a) et FIG. 4.37(b). La bande fréquentielle considérée est comprise entre 0 et 2 500 Hz et les fonctions de transfert sont obtenues à partir de la moyenne des signaux issus de trois chocs consécutifs.

### 4.6.3 Résultats d'identification

Une procédure d'identification, Section 4.4 et Section 4.5, a été réalisée en considérant les quatre premiers modes, *i.e.*  $m = 4$ , et permet d'obtenir un ensemble de trente-deux doublets  $\{E, G\}$  de propriétés constitutives d'empilement de tôles dont les répartitions sont présentées dans les FIG. 4.38(a) et FIG. 4.38(b). Celles-ci ne semblent pas  $\mathcal{G}$ aussiennes et présentent des étendues relativement importantes d'où la nécessité d'établir des lois en fonction de différents paramètres.

Les FIG. 4.39(a) et FIG. 4.39(b) illustrent un exemple de bonne corrélation entre formes propres mesurées et calculées. Le critère FMAC est calculé pour estimer la corrélation entre les quantités modales des trente-deux modèles éléments finis et mesures associées, [73]. Ceci est réalisé en traçant un cercle dont les coordonnées du centre correspondent à une paire de pulsations propres mesurée et calculée, et dont le rayon est proportionnel à la valeur du critère MAC calculé à partir des formes propres associées de cette paires de pulsations, FIG. 4.40.

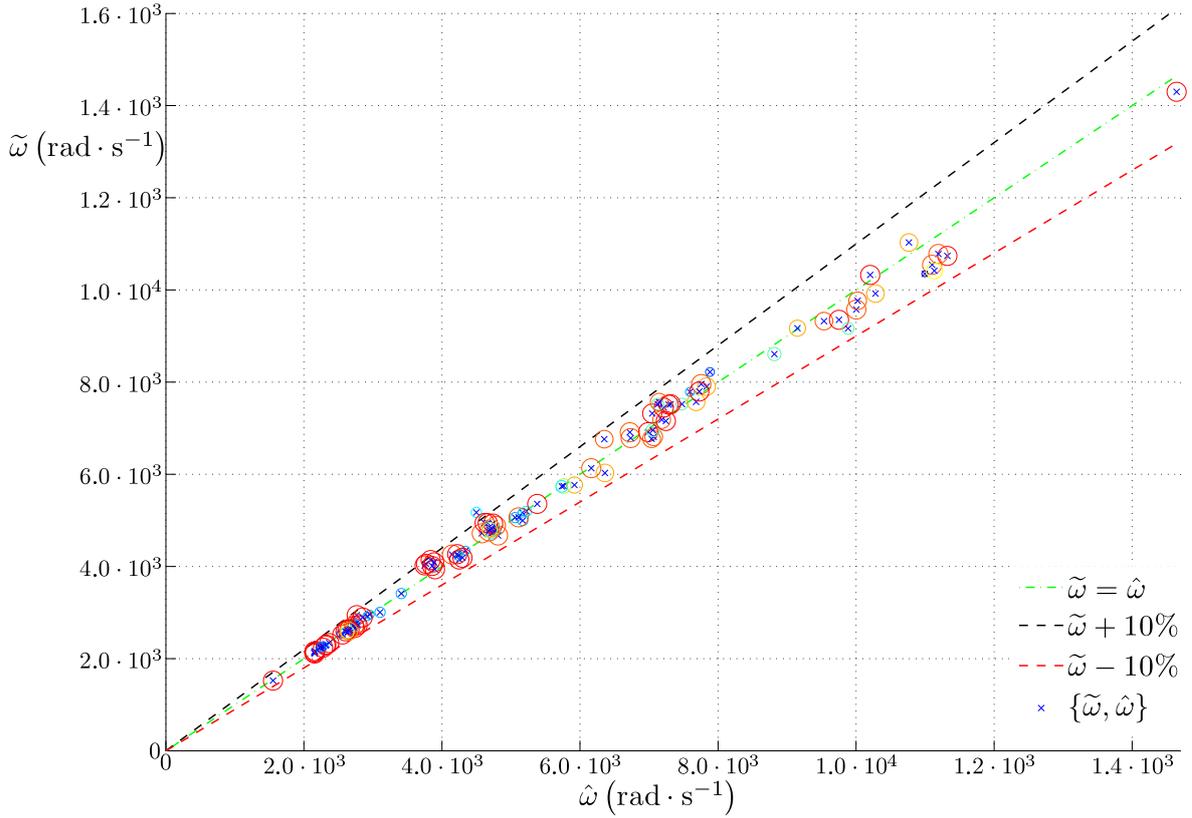


FIGURE 4.40 – FMAC, représentation d'un critère MAC pondéré par les pulsations propres identifiées  $\tilde{\omega}$  en fonction des pulsations propres mesurées  $\hat{\omega}$  (quatre premières pulsations).

Le tracé de lignes de séparation fréquentielle, *e.g.*  $\pm 10\%$ , fournit une échelle visuelle pour estimer la valeur de l'écart fréquentiel entre les modes (pulsation et forme propres) mesurés et calculés. L'erreur relative moyenne entre les pulsations propres mesurées et calculées est de l'ordre de 2.4%. La variation de la taille des cercles indique visuellement une variation de terme diagonal de la matrice MAC définie par la relation suivante :

$$\text{MAC}(\hat{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_i) = \frac{|\hat{\varphi}_i^t \tilde{\varphi}_i|^2}{[\hat{\varphi}_i^t \hat{\varphi}_i] \cdot [\tilde{\varphi}_i^t \tilde{\varphi}_i]}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.100)$$

où  $\hat{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_i \in \mathbb{R}^{n_{\delta c}}$  sont les  $i^e$  formes propres mesurée et calculée et  $m$  est le nombre de mode considérés.

#### 4.6.4 Procédure de régression de modèle

L'objectif de cette section est de corréler les modules  $E$  et  $G$ , issus d'une procédure d'identification, avec des paramètres pertinents intrinsèques au rotor feuilletés testés, *i.e.* les prédicteurs  $\chi$ . La stratégie consiste à appliquer une régression linéaire multiple (MLR) [74] sur l'échantillon de données identifiées qui contient  $n$  observations (rotors). Parmi tous les paramètres géométriques et mécaniques, le choix s'est porté sur ceux relatifs à :

1. l'empilement de tôles :  $L_s, P$ , les section droite  $A_s$  et moment quadratique  $I_{G_s}$ ,
2. les tirants : les excentricité  $e_{ti}$  et moment quadratique  $I_{G_{ti}}$ ,

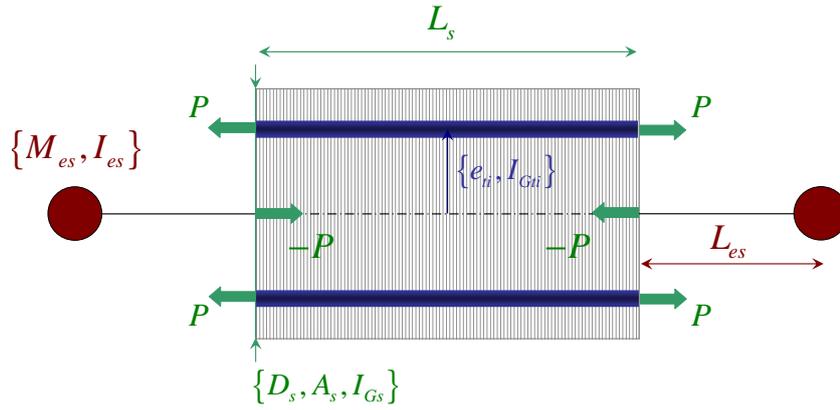


FIGURE 4.41 – Prédicteurs considérés dans la régression linéaire multiple.

3. les portions d'arbre : les valeurs moyennes des masses  $M_{se}$  et moment d'inertie  $I_{se}$ ,

dont les définitions sont données dans le TAB. 4.7. Notons qu'il est envisagé une éventuelle relation entre les modules  $G$  et  $E$ . Les rotors feuilletés de l'échantillon peuvent alors être considérés comme des structures élémentaires définies à partir de l'ensemble des prédicteurs, FIG. 4.41. Il est à noter que le nombre de prédicteurs précédemment proposés n'est pas définitif jusqu'à ce que des tests de significativité aient été réalisés dans la procédure MLR. L'approche statistique basée sur :

- le concept de **studentisations** (“*studentizations*” qui définit alors des variables **studentisées**),
- la notion de test- $t$  de  $\mathcal{S}$ tudent (“*Student's t-tests*”) [75; 76],

dans le but d'estimer les observations et prédicteurs les plus significatifs, conduit aux différentes étapes suivantes :

1. Étape N°1 : Réaliser une première MLR et retirer les observations non-significatives ou aberrantes,
2. Étape N°2 : Réaliser une deuxième MLR et ôter les coefficients de régression non significatifs,
3. Étape N°3 : Réaliser une dernière MLR afin d'obtenir un modèle prédictif.

| Prédicteurs | Expression                                                                             | Unité                          |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| $A_s$       | $\sim \frac{\pi}{4} D_s^2$                                                             | $(\text{m}^2)$                 |
| $I_{Gs}$    | $\sim \frac{\pi}{32} D_s^4$                                                            | $(\text{m}^4)$                 |
| $I_{Gti}$   | $I_{Gti} = \frac{\pi}{8} \left( e_{ti}^2 + \frac{d_{ti}^2}{4} \right) n_{ti} d_{ti}^2$ | $(\text{m}^2)$                 |
| $I_{se}$    | $M_{se} \left( \frac{L_{se}}{2} \right)^2$                                             | $(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$ |

 TABLEAU 4.7 – Relations entre certains  $\chi$  prédicteurs.

#### 4.6.4.1 Modèle statistique

Supposons que les échantillons de modules d'Young  $\{E_i\}_{i=1,\dots,n}$  et de modules de Coulomb  $\{G_i\}_{i=1,\dots,n}$  de l'empilement de tôles magnétiques puissent être modélisés par  $\tilde{E} \in \mathbb{R}^n$  et  $\tilde{G} \in \mathbb{R}^n$  respectivement, et exprimés de manière générale en loi de puissance, telle que :

$$\tilde{E}_i = \alpha_E \prod_{j=1}^{p_E} \chi_{i,j}^{e_j}, \quad e_j \in \mathbb{R}, \quad (4.101a) \quad \tilde{G}_i = \alpha_G \prod_{j=1}^{p_G} \chi_{i,j}^{g_j}, \quad g_j \in \mathbb{R}, \quad (4.101b)$$

où  $\alpha_E, \alpha_G \in \mathbb{R}$  sont constants,  $p_E, p_G \in \mathbb{N}$  sont respectivement les nombres de prédicteurs relatifs à  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$ . Une transformation logarithmique est appliquée aux Eq. (4.101) pour obtenir un modèle statistique et réaliser la procédure MLR. Le modèle de régression linéaire comprend des erreurs  $\varepsilon$  indépendantes et homoscédastiques :

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=0}^p \beta_j x_{i,j} + \varepsilon_i, \quad \text{avec } \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.102)$$

tels que :

$$\tilde{y}_i = \log(\tilde{E}_i) \text{ ou } \log(\tilde{G}_i), \quad (4.103a) \quad x_{i,j} = \log(\chi_{i,j}), \quad (4.103b)$$

avec  $p$  le nombre de prédicteurs incluant l'ordonnée à l'origine et  $\sigma_\varepsilon$  est l'écart type de  $\varepsilon$  considéré constant  $\forall x_{i,j}$  pour des raisons d'homoscédasticité.

L'expression matricielle de l'Eq. (4.102) est la suivante :

$$\tilde{y} = X\beta + \varepsilon, \quad (4.104)$$

où  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$  est appelé **vecteur réponse**,  $\beta \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur contenant les coefficients de la régression linéaire multiple,  $X \in \mathcal{M}_{n,p}$  est appelée **matrice modèle** et dont les colonnes  $x_{1\dots n,0}, x_{1\dots n,1}, \dots, x_{1\dots n,p} \in \mathbb{R}^n$  sont composées des prédicteurs  $\chi$  appelé aussi **variables déterminantes**,  $x_{1\dots n,0}$  est un vecteur unité associé aux termes d'intersection.

#### 4.6.4.2 Régression linéaire multiple (MLR)

La procédure MLR consiste à déterminer le vecteur  $\beta$  qui minimise l'erreur moindres carrés entre les valeurs prédites par le modèle  $\tilde{y}_i$  et celle observées  $y_i = \log(E_i)$  ou  $\log(G_i)$ , tel que le problème s'écrive :

$$\begin{aligned} &\mathcal{T} \text{rouver } \beta^*, \\ &\text{tel que } \min_{\beta^* \in \mathbb{R}^p} (y - X\beta)^t (y - X\beta). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Ainsi, en considérant les conditions du premier ordre, les coefficients de régression sont estimés de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (y - X\beta)^t (y - X\beta) \Big|_{\beta=\beta^*} \Leftrightarrow \beta^* = X^\dagger y, \quad (4.106)$$

où  $( )^\dagger$  représente la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose du modèle  $X$ , telle que :

$$X^\dagger = (X^t X)^{-1} X^t. \quad (4.107)$$

Comme il en fait état dans l'étape précédente N°1, certaines observations peuvent être statistiquement considérées comme aberrantes, *i.e.* éloignées du reste des autres données. Par conséquent,

| Étape | $\{n, p_E\}$ | $ t_i  > 2$                          | $ t_{\beta_j}  < t_\gamma^\mu$ | $t_\gamma^\mu \sigma_{\tilde{E}_i} \left( \frac{\text{GN}}{\text{m}^2} \right)$ |
|-------|--------------|--------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | $\{32, 8\}$  | $i = 9, 11, 15,$<br>$18, 19, 23, 28$ | –                              | –                                                                               |
| 2.    | $\{25, 8\}$  | –                                    | $j = 2, 3$                     | $\epsilon$                                                                      |
| 3.    | $\{25, 6\}$  | –                                    | –                              | $[3.58, 17.53]$                                                                 |

 TABLEAU 4.8 – Procédure MLR appliquée au modèle  $\tilde{E}$ .

une studentisation est réalisée pour chaque résidu  $e_i = y_i - \tilde{y}_i$  et le résidu  $t_i$ , appelé résidu **studentisé**, est alors estimé. Ce dernier correspond au quotient du résidu  $e_i$  et d'une estimation de son écart type  $\sigma_{(i)}$ , tel que :

$$t_i = \frac{e_i}{\sigma_{(i)} \sqrt{1 - h_{i,i}}}, \quad (4.108a) \quad \sigma_{(i)}^2 = \frac{1}{n - p - 1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n e_j^2, \quad (4.108b)$$

où  $h_{i,i}$  est appelé **levier** (“*leverage*”), *i.e.* le  $i^e$  terme diagonal de la matrice  $H = XX^\dagger$ , qui permet de mesurer l'importance du rôle que joue  $y_i$  dans l'estimation  $\tilde{y}_i$ . En pratique, les résidus studentisés  $t_i$  sont comparés aux bornes  $+2$  et  $-2$ , et la  $i^e$  observation n'est pas considérée dans la procédure MLR si  $|t_i| > 2$ .

L'étape N°2 consiste à ôter les coefficients de régression non-significatif  $\beta_j$  en calculant leur loi de distribution et par conséquent de réaliser un test- $t$  de *Student* (“*Student's t-test*”). Ainsi, pour chaque coefficient de régression  $\beta_j$ , une estimation de son écart type  $\sigma_{\beta_j}$  est calculée par la relation :

$$\sigma_{\beta_j}^2 = \sigma_e^2 a_{j,j}, \quad (4.109a) \quad \sigma_e^2 = \frac{1}{n - p - 1} \sum_{i=1}^n e_i^2, \quad (4.109b)$$

où  $\sigma_e$  et une estimation non-biaisée de l'écart type de l'erreur  $\varepsilon$  et  $a_{j,j}$  est le  $j^e$  terme diagonal de la matrice  $(X^t X)^{-1}$ . Étant distribuée comme une distribution- $t$  de *Student* (“*Student's t-distribution*”), la valeur- $t$   $t_{\beta_j}$  est estimée par la relation suivante :

$$t_{\beta_j} = \frac{\beta_j}{\sigma_{\beta_j}} \sim t^{n-p-1}. \quad (4.110)$$

Finalement, pour un niveau de confiance donné  $\alpha$ , *e.g.* 95%, la valeur- $t_{\beta_j}$  est comparée au quantile  $t_\gamma^\mu$  d'ordre  $1 - \gamma$ , tel que :

$$\gamma = (1 - \alpha)/2, \quad (4.111)$$

*i.e.* quantile de la distribution- $t$  de *Student* comprenant  $\mu = (n - p - 1)$  degrés de liberté, classiquement obtenu dans la table- $t$  de *Student* (“*Student's t-table*”). Ainsi, si  $|t_{\beta_j}| > t_\gamma^\mu$ , le coefficient de régression  $\beta_j$  peut être considéré comme significatif et le  $j^e$  prédicteur est conservé pour établir le modèle prédictif.

Après avoir ôté les paramètres non-significatifs, *i.e.* les coefficients de régression  $\beta_j$  des prédicteurs  $x_{i,j}$  et/ou les observations  $y_i$ , l'étape N°3 permet d'obtenir une loi prédictive  $\tilde{y}$ . Par ailleurs, pour quantifier la pertinence de la loi  $\tilde{y}$ , des intervalles de confiance  $I_{C_\alpha}$  sont estimés pour chaque moyenne  $E(\tilde{y}_i)$ , et des intervalles de prédiction  $I_{P_\alpha}$  peuvent être calculés pour des valeurs  $\hat{y}$  associées à  $\hat{x} \in \mathbb{R}^p$ . Cela suppose la définition de niveau de confiance  $\alpha$ , qui sera choisi égal à 95% dans la section suivante. Ainsi, si les données ont une distribution normale, les intervalles de confiance et de prédiction sont respectivement calculés par les relations suivantes, Eq. (4.112) et Eq. (4.113) :

$$I_{C_\alpha}(E(\tilde{y}_i)) = [\tilde{y}_i - t_\gamma^\mu \sigma_{\tilde{y}_i}, \tilde{y}_i + t_\gamma^\mu \sigma_{\tilde{y}_i}], \quad (4.112)$$

$$I_{P_\alpha}(E(\hat{y})) = [\hat{y} - t_\gamma^\mu \sigma_{\hat{e}}, \hat{y} + t_\gamma^\mu \sigma_{\hat{e}}], \quad (4.113)$$

| Étape | $\{n, p_G\}$ | $ t_{\bar{i}}  > 2$              | $ t_{\beta_j}  < t_\gamma^\mu$ | $t_\gamma^\mu \sigma_{\tilde{G}_i} \left( \frac{GN}{m^2} \right)$ |
|-------|--------------|----------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1.    | $\{32, 9\}$  | $i = 3, 13, 14,$<br>$18, 24, 31$ | –                              | –                                                                 |
| 2.    | $\{26, 9\}$  | –                                | $j = 2, 6, 7$                  | $\in$                                                             |
| 3.    | $\{26, 6\}$  | –                                | –                              | $[1.34, 9.15]$                                                    |

 TABLEAU 4.9 – Procédure MLR appliquée au modèle  $\tilde{G}$ .

où les variances  $\sigma_{\tilde{y}_i}^2$  et  $\sigma_{\tilde{e}}^2$ , relatives à l'erreur de prédiction  $\hat{e}$ , sont définies par :

$$\sigma_{\tilde{y}_i}^2 = \sigma_e^2 (X_i^t (X^t X)^{-1} X_i), \quad (4.114)$$

$$\sigma_{\tilde{e}}^2 = \sigma_e^2 (1 + \hat{x}^t (X^t X)^{-1} \hat{x}), \quad (4.115)$$

où  $X_i$  est la  $i^e$  ligne de la matrice modèle  $X$  définie dans l'Eq. (4.104).

Finalement, la probabilité pour que la moyenne  $E(\tilde{y}_i)$  n'appartienne pas à l'intervalle  $I_{C_\alpha}(E(\tilde{y}_i))$  est égale à  $1 - \alpha$  avec un niveau de confiance  $\alpha$ . Les TAB. 4.8 et TAB. 4.9 présentent les trois étapes précédentes successivement appliquées aux échantillons  $E$  et  $G$ , et en considérant les prédicteurs classés de la manière suivante :

$$\chi = \{L_s, A_s, I_{G_s}, P, e_{ti}, I_{G_{ti}}, M_{es}, I_{es}\}. \quad (4.116)$$

Lors de la procédure MLR appliqué à  $G$ , le module d' $\mathcal{Y}$ oung  $E$  est considéré comme un prédicteur et est placé avant  $L_s$ .

**Échantillon de modules d' $\mathcal{Y}$ oung** Les valeurs des coefficients de régression, émanant de la dernière procédure MLR, *i.e.* étape N°3, sont présentées dans le TAB. 4.10. La dernière colonne illustre la valeur- $p$  (“ $p$ -value”) des coefficients de régression estimés en intégrant la fonction de densité de probabilité de la distribution  $t$  de  $\mathcal{S}$ tudent  $t$  (“ $\mathcal{S}$ tudent  $t$ -distribution”) [75] pour leur valeur  $t$  (“ $t$ -value”)  $t_{e_j}$  données. Les valeurs logarithmiques prédites du module d' $\mathcal{Y}$ oung, issues de l'Eq. (4.102), ainsi que leurs intervalles de confiance à 95% associés, sont tracés FIG. 4.42 en fonction des valeurs logarithmiques des modules d' $\mathcal{Y}$ oung identifiés.

Le modèle prédictif du module d' $\mathcal{Y}$ oung peut s'écrire en fonction des prédicteurs  $\chi$  les plus significatifs, tel que :

$$\tilde{E} = \alpha_E L_s^{-0.77} P^{1.64} I_{G_{ti}}^{-12.95} e_{ti}^{48.20} M_{se}^{-1.81} I_{se}^{0.60}. \quad (4.117)$$

En substituant l'expression du moment quadratique des tirants  $I_{G_{ti}}$ , TAB. 4.7, dans l'Eq. (4.117), et en considérant les homothéties de fabrication des rotors feuilletés suivantes, Eq. (4.118) :

$$\left( \frac{d_{ti}}{e_{ti}} \right) \ll 1, \quad (4.118a) \quad e_{ti} \sim \alpha_{e_{ti}} D_s, \quad (4.118b) \quad n_{ti} d_{ti}^2 \sim \alpha_{d_{ti}} D_s^2, \quad (4.118c)$$

où  $\alpha_{d_{ti}}, \alpha_{e_{ti}} D_s \in \mathbb{R}$ , l'Eq. (4.117) peut alors se simplifier de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{E} &\sim \alpha_E (\sqrt{L_s})^{-1.6} P^{1.6} \left( \frac{\pi}{8} \alpha_{e_{ti}}^2 \alpha_{d_{ti}} D_s^4 \right)^{-12.96} (\alpha_{e_{ti}} D_s)^{48.20} M_{se}^{-1.81} \left( M_{se} \left( \frac{L_{se}}{2} \right)^2 \right)^{0.60}, \\ \Leftrightarrow \tilde{E} &\sim \alpha_E^* \left( \frac{P}{\sqrt{L_s}} \right)^{1.6} D_s^{-3.60} (L_{se})^{1.2} (M_{se})^{0.6}, \\ \Leftrightarrow \tilde{E} &\sim \alpha_E^* \left( \frac{P}{\sqrt{D_s^2 L_s}} \right)^{\frac{8}{5}} \left( \frac{1}{D_s} \right) \left( \frac{L_{se}}{\sqrt{M_{se}}} \right)^{\frac{6}{5}}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

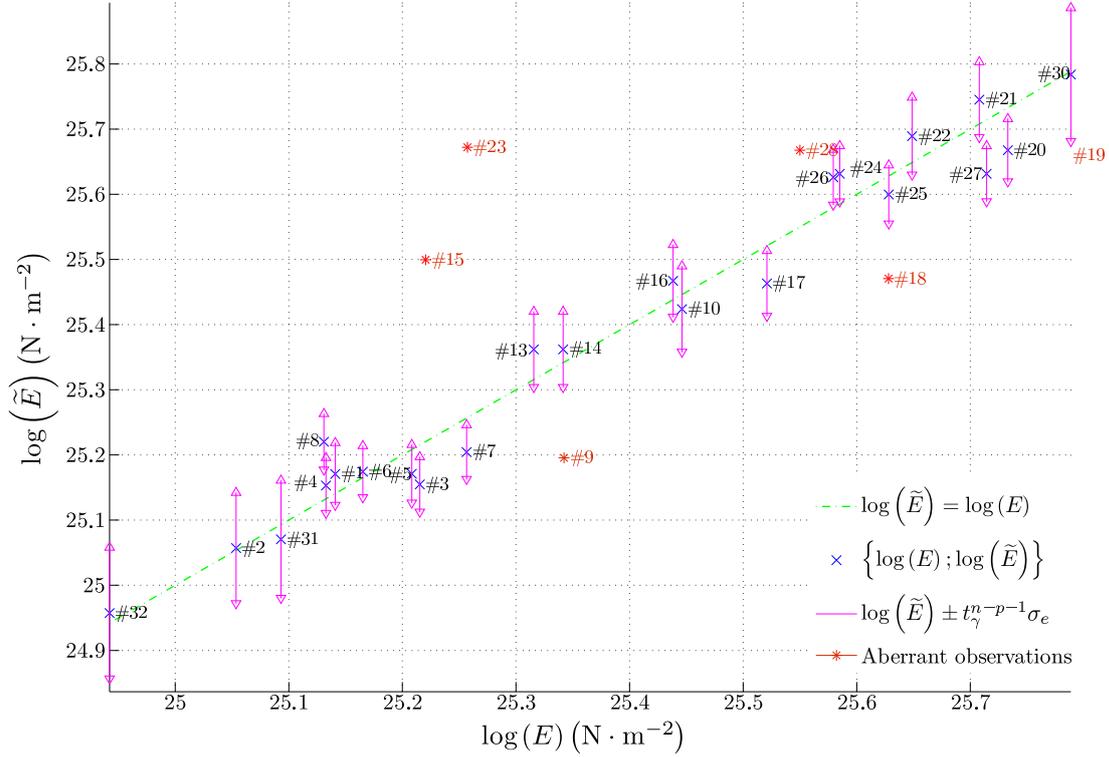


FIGURE 4.42 – Loi logarithmique du module d'Young  $\tilde{E}$  en fonction des modules d'Young identifiés  $E$ .  $R^2 = 0.969075$ ,  $n = 25$ ,  $p = 6$ ,  $\gamma = 0.025$ .

| Prédicteurs $\chi$ | $e_j$  | $\sigma_{e_j}$ | $t_{e_j}$ | $P(> t_{e_j} )$       |
|--------------------|--------|----------------|-----------|-----------------------|
| $L_s$              | 0.778  | 0.15           | -5.142    | $6.83 \cdot 10^{-5}$  |
| $P$                | 1.641  | 0.20           | 8.120     | $1.97 \cdot 10^{-7}$  |
| $e_{ti}$           | 48.23  | 3.38           | -14.26    | $1.76 \cdot 10^{-11}$ |
| $I_{Gti}$          | -12.96 | 0.89           | 14.51     | $2.25 \cdot 10^{-11}$ |
| $M_{se}$           | -1.806 | 0.46           | -3.897    | $1.01 \cdot 10^{-3}$  |
| $I_{se}$           | 0.605  | 0.18           | 3.359     | $3.49 \cdot 10^{-3}$  |

TABEAU 4.10 – Résultats issus de la procédure MLR pour le modèle  $\tilde{E}$ ,  $n = 25$ ,  $p_E = 6$ .

**Échantillon de modules Coulomb** Les valeurs des coefficients de régression, émanant de la dernière procédure MLR, *i.e.* étape N°3, sont présentés dans le TAB. 4.11. Les valeurs logarithmiques prédites du module de Coulomb, issues de l'Eq. (4.102), ainsi que leurs intervalles de confiance à 95% associés, sont tracés FIG. 4.43 en fonction des valeurs logarithmiques des modules de Coulomb identifiés.

Le modèle prédictif du module de Coulomb peut s'écrire en fonction des prédicteurs  $\chi$  les plus significatifs, tel que :

$$\tilde{G} = \alpha_G E^{-1.09} A_s^{-8.02} I_{G_s}^{1.68} P^{2.61} M_{se}^{6.05} I_{se}^{-3.06}. \quad (4.120)$$

En substituant l'Eq. (4.117) ainsi que les expressions  $A_s$ ,  $I_{G_s}$ , TAB. 4.7, dans l'Eq. (4.120), l'expression de  $\tilde{G}$  peut être simplifiée comme suit :

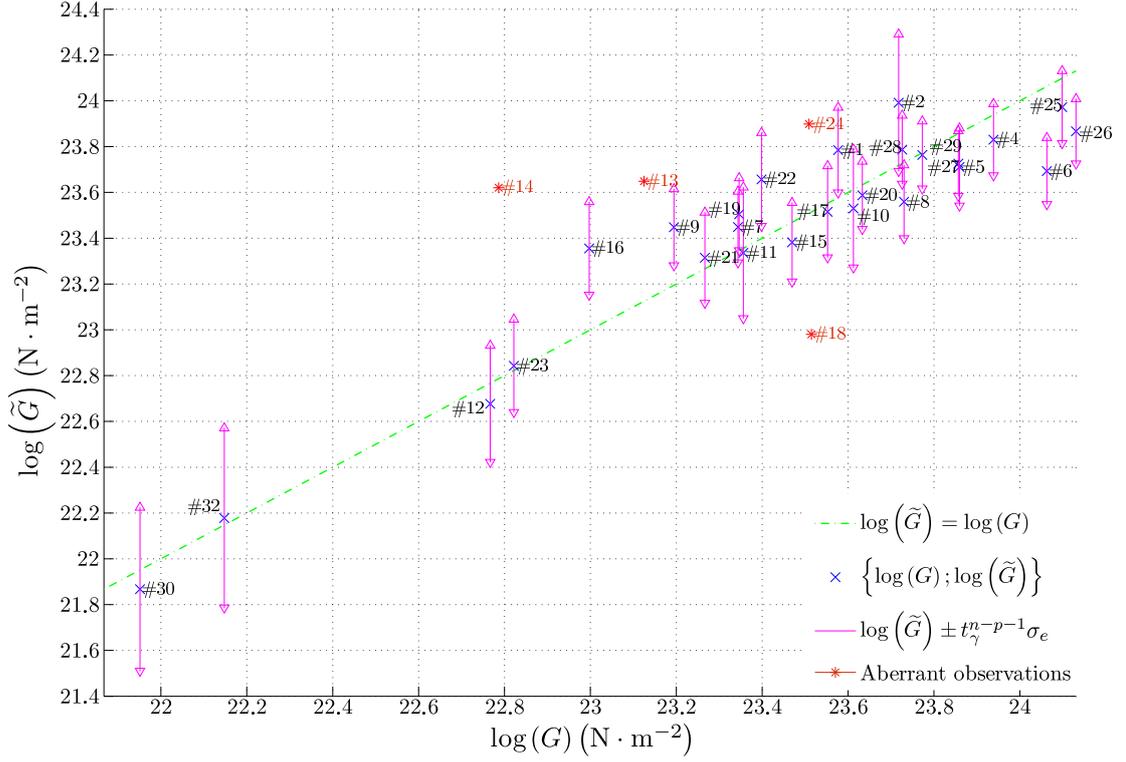


FIGURE 4.43 – Loi logarithmique du module de Coulomb  $\tilde{G}$  en fonction des modules de Coulomb identifiés  $G$ .  $R^2 = 0.897519$ ,  $n = 26$ ,  $p = 6$ ,  $\gamma = 0.025$ .

| Prédicteurs $\chi$ | $g_j$  | $\sigma_{g_j}$ | $t_{g_j}$ | $P(>  t_{g_j} )$     |
|--------------------|--------|----------------|-----------|----------------------|
| $E$                | -1.089 | 0.21           | -5.351    | $6.65 \cdot 10^{-5}$ |
| $A_s$              | -8.025 | 1.30           | -6.167    | $6.31 \cdot 10^{-6}$ |
| $I_{Gs}$           | 1.681  | 0.31           | 5.476     | $2.78 \cdot 10^{-5}$ |
| $P$                | 2.603  | 0.65           | 4.016     | $7.38 \cdot 10^{-4}$ |
| $M_{se}$           | 6.045  | 1.63           | 3.705     | $1.51 \cdot 10^{-3}$ |
| $I_{se}$           | -3.058 | 0.61           | -4.996    | $8.03 \cdot 10^{-5}$ |

TABLEAU 4.11 – Résultats issus de la procédure MLR pour le modèle  $\tilde{G}$ ,  $n = 26$ ,  $p_G = 6$ .

$$\begin{aligned}
 \tilde{G} &= \alpha_G^* D_s^{-5.33} P^{0.72} L_s^{0.93} M_{se}^{4.4} L_{se}^{-7.6}, \\
 \Leftrightarrow \tilde{G} &\sim \alpha_G^* D_s^{-5.33} P^{0.72} L_s^{0.93} \left( \frac{M_{se}^{1.1}}{L_{se}^{1.9}} \right)^4, \\
 \Leftrightarrow \tilde{G} &\sim \alpha_G^* \left( \frac{\sqrt{L_s}}{D_s^2} \right)^2 \left( \frac{P}{D_s^2} \right)^{\frac{7}{10}} \left( \frac{M_{se}}{L_{se}^2} \right)^4.
 \end{aligned} \tag{4.121}$$

#### 4.6.4.3 Intervalles fréquentiels de confiance et de prédiction

La longueur des intervalles de confiance à 95%  $I_{C_{0.95}}(E(\tilde{E}_i))$  et  $I_{C_{0.95}}(E(\tilde{G}_i))$  varient respectivement de 3.58 à 17.53 ( $\text{GN} \cdot \text{m}^{-2}$ ) et de 1.34 à 9.15 ( $\text{GN} \cdot \text{m}^{-2}$ ), TAB. 4.9 et TAB. 4.8. La procédure MLR a été réalisée dans le but d'obtenir des modèles prédictifs de propriétés constitutives de l'empilement de tôles afin de prévoir le comportement dynamique des rotor feuilletés MGv. Ainsi, les intervalles de confiance peuvent être utilisés pour estimer des intervalles de confiance fréquentiels *via* les modèles éléments finis de l'échantillon. En effet, en fonction de la nature de l'observation, soit les

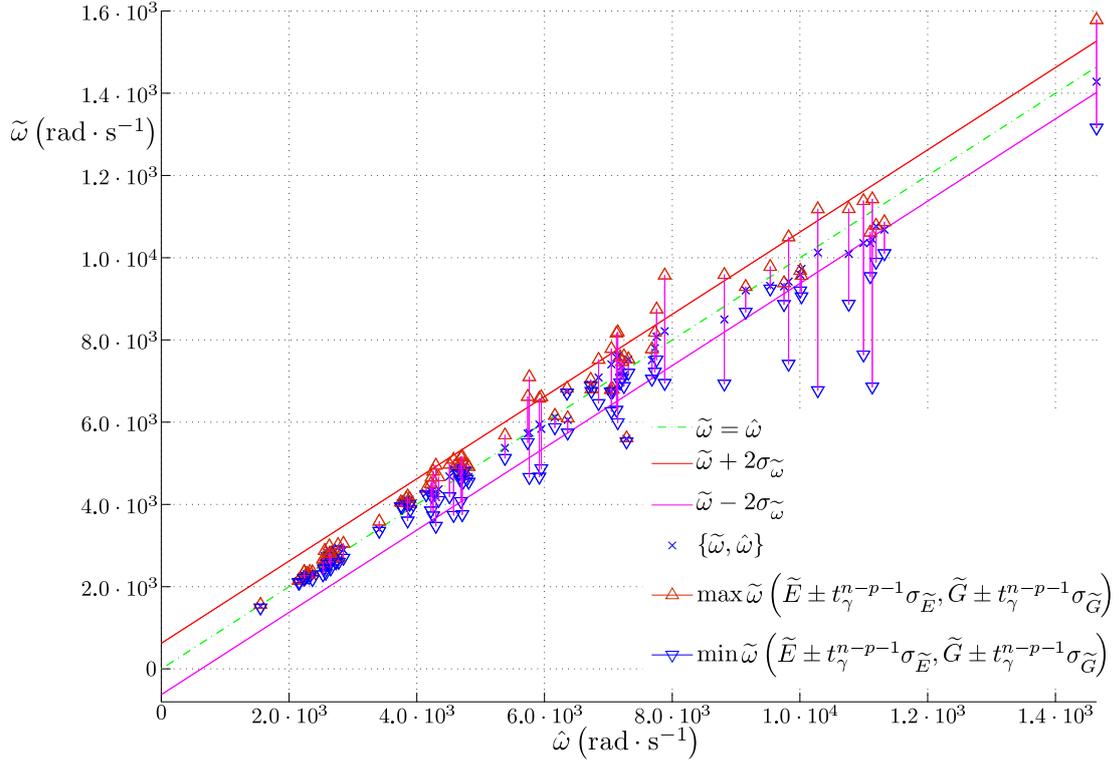


FIGURE 4.44 – Pulsations propres calculées  $\tilde{\omega}$  en fonction des pulsations propres mesurées  $\hat{\omega}$ ,  $\sigma_{\tilde{\omega}} = 3.121 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

intervalles de confiance  $I_{C_\alpha}$ , Eq. (4.113), soit les intervalles de prédiction  $I_{P_\alpha}$ , Eq. (4.112), pourront être considérés. Les intervalles de confiance  $I_{C_{0.95}}$  seront appliqués aux observations significatives alors que les intervalles de prédiction  $I_{P_{0.95}}$  seront appliqués aux observations non-significatives, *i.e.* non utilisées dans la procédure MLR. La FIG. 4.44 représente tous les intervalles de confiance confondus des quatre premières pulsations propres  $\tilde{\omega}$ , calculés pour tous les échantillons de rotor, avec les modèles prédictifs de propriétés constitutives. Leur longueur moyenne est de l'ordre de  $\pm 5.85\%$ .

#### 4.6.5 Conclusion

Une approche MLR a été réalisée sur un échantillon composé de plus de trente rotors feuilletés pour obtenir des modèles prédictifs des modules d'Young et de Coulomb de l'empilement, qui dépendent de la géométrie des portions d'arbre, de l'empilement  $D_s$ ,  $L_s$  et notamment de la précharge  $P$  ce qui est en accord avec les résultats présentés dans [20]. Statistiquement, les deux modèles prédictifs  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$  expliquent plus de 90% des variations totales qui sont apparues pour environ vingt-cinq rotors. Les intervalles de confiance et de prédiction relatifs aux modèles prédictifs permettent d'obtenir une estimation d'un intervalle de prédiction fréquentiel, dont la longueur moyenne est de l'ordre de  $\pm 5.85\%$ .

La réalisation de tels modèles permet d'accroître la fiabilité des calculs de prévision du comportement dynamique des rotors feuilletés MGv, notamment dans les phases de développement où il s'agit de prédire le comportement dynamique de rotors feuilletés jamais réalisés auparavant, *e.g.* 30 MW @ 6 000 rpm. En présentant des résultats obtenus sur la structure à l'arrêt, cette section constitue une première étape dans la démarche de modélisation du comportement dynamique des rotors à cage d'écureuil en flexion. Le prochain challenge à mener est, en particulier lorsque le système est en rotation, de prendre en compte les effets centrifuges appliqués aux tirants qui exerceraient alors une charge axiale supplémentaire en rigidifiant l'empilement de tôles magnétiques.

## Chapitre 5

# Dynamique des rotors feuilletés en présence d'effets centrifuges

*L'empilement de tôles magnétiques, vernis et précontrainte rendent délicate l'obtention théorique des propriétés constitutives homogénéisées de l'empilement, aussi bien à l'arrêt qu'en régime de fonctionnement. Par ailleurs, les tirants sont sujets aux chargements centrifuges et fléchissent jusqu'à consommer le jeu radial à l'intérieur de l'empilement. Leurs déflexions non linéaires tendent à augmenter leurs raideurs géométriques et la charge longitudinale agissant sur l'empilement de tôles. Cette dernière ayant un effet non linéaire sur l'évolution des propriétés constitutives homogénéisées de l'empilement. La combinaison d'un algorithme du point fixe et d'une méthode de pénalité, à chaque vitesse de rotation, permettent de tracer les réponses aux balourds et diagrammes de Campbell. Ces représentations prennent en compte l'évolution des propriétés constitutives de l'empilement due aux charges longitudinales induites par les effets centrifuges. L'application industrielle présentée en fin de section montre que la modélisation des effets centrifuges implique une légère modification de la dynamique de tels rotors.*

**Sommaire**

---

|            |                                                                                                 |            |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Introduction</b>                                                                             | <b>129</b> |
| <b>5.2</b> | <b>Loi de comportement de l'empilement défini à partir des propriétés identifiées à l'arrêt</b> | <b>129</b> |
| <b>5.3</b> | <b>Modélisation de l'effet centrifuge</b>                                                       | <b>132</b> |
| 5.3.1      | Mise en équation                                                                                | 132        |
| 5.3.1.1    | Déformation non-linéaire longitudinale                                                          | 132        |
| 5.3.1.2    | Couplage Longitudinal - Transversal                                                             | 134        |
| <b>5.4</b> | <b>Formulation éléments finis du contact</b>                                                    | <b>136</b> |
| 5.4.1      | Orientation de la normale de contact $\vec{n}$                                                  | 138        |
| 5.4.2      | Mesure de la distance $g_n$ entre deux domaines                                                 | 138        |
| 5.4.3      | Potentiels de contact élémentaires                                                              | 139        |
| 5.4.4      | Recherche du point de contact entre un nœud et un élément fini                                  | 141        |
| 5.4.5      | Force et raideur de contact élémentaires                                                        | 143        |
| 5.4.6      | Inter-pénétration et méthode de pénalité. Interprétation sur un système élémentaire             | 149        |
| 5.4.7      | Résolution non linéaire                                                                         | 152        |
| <b>5.5</b> | <b>Application Industrielle</b>                                                                 | <b>153</b> |
| 5.5.1      | Calcul non linéaire quasi-statique                                                              | 153        |
| 5.5.2      | Paliers Hydrodynamiques                                                                         | 157        |
| 5.5.3      | Équations du mouvement                                                                          | 158        |
| 5.5.4      | Diagramme de Campbell                                                                           | 159        |
| 5.5.5      | Réponses aux balourds                                                                           | 163        |
| <b>5.6</b> | <b>Conclusion</b>                                                                               | <b>168</b> |

---

## 5.1 Introduction

LES tôles magnétiques de l'empilement peuvent être précontraintes longitudinalement soit sur un arbre central [3; 15], par des tirants équirépartis sur une périphérie ou par une combinaison des ces deux technologies [11]. Il est connu qu'une compression axiale diminue la rigidité de flexion des structures élancées alors qu'elle augmente la rigidité de flexion des structure feuilletées axialement [16; 20]. Afin de construire un modèle contenant peu de degrés de liberté, des éléments finis de poutre de Timoshenko sont utilisés, lesquels nécessitent des propriétés constitutives homogénéisées, notamment pour l'empilement [15; 21; 12]. Dans [77], des analyses modales expérimentales réalisées sur un échantillon de vingt-cinq rotors feuilletés ont permis d'établir des lois prédictives pour les modules d'Young et de Coulomb de l'empilement, fonctions de sa précontrainte et de ses caractéristiques géométriques.

L'objectif de cette section est d'accroître le niveau de précision de la modélisation de la masse magnétique, de l'empilement, en prenant en compte les effets induits par un chargement centrifuge agissant sur de telles structures feuilletées/composites. La plupart des articles considèrent l'influence d'une chargement centrifuge longitudinal sur le comportement latéral de poutres rotatives [78; 79] alors qu'un nombre plus restreint évalue l'influence d'un chargement centrifuge transversal sur le comportement latéral d'un rotor. Dans [80], les auteurs comparent l'influence des effets gyroscopique et centrifuge sur un rotor académique contraint longitudinalement.

Les effets centrifuges sont pris en compte en considérant une charge répartie non-linéaire transversale agissant sur chacun des tirants. En raison de la symétrie cyclique de l'assemblage de la masse magnétique, un problème quasi-statique est proposé en considérant un tirant unique et sa portion de section droite d'empilement associée. A chaque vitesse de rotation, la déflexion non-linéaire quasi-statique d'un tirant ainsi que la charge compressive longitudinale agissant sur l'empilement sont calculées *via* un algorithme itératif du point fixe, et une méthode de pénalité permettant de modéliser le potentiel de contact [81; 82] entre le tirant et l'empilement. La déflexion non-linéaire induit une tension supplémentaire au sein du tirant et donc une charge supplémentaire comprimant l'empilement, modifiant par conséquent ces propriétés constitutives [77].

Finalement, diagrammes de Campbell et réponses aux balourds sont tracés en considérant ou non les effets centrifuges.

## 5.2 Loi de comportement de l'empilement défini à partir des propriétés identifiées à l'arrêt

Le Chapitre 4 a permis d'établir les lois  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$  définies telles que [77] :

$$\tilde{E} \sim \left( \frac{1}{D_s^2} \right) \left( \frac{P}{\sqrt{D_s^2 L_s}} \right)^{\frac{8}{5}}, \quad (5.1a) \quad \tilde{G} \sim \left( \frac{\sqrt{L_s}}{D_s^2} \right)^2 \left( \frac{P}{D_s^2} \right)^{\frac{7}{10}}. \quad (5.1b)$$

avec  $L_s$ ,  $D_s$  et  $P$  les longueur, diamètre et charge de l'empilement. La dépendance de  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$  en fonction de la charge  $P$  permet d'établir et de mettre en évidence la nature non-linéaire la loi de comportement de l'empilement autour d'une configuration initiale  $\mathcal{C}_0$  :

$$\mathcal{C}_0 : \{P_0, E_0, G_0\}, \quad (5.2)$$

avec  $P_0$  la pré-charge initiale selon l'axe  $y$  et  $E_0$ ,  $G_0$  les modules d'Young et de Coulomb identifiés :

$$E_0 \sim \left( \frac{1}{D_s^2} \right) \left( \frac{P_0}{\sqrt{D_s^2 L_s}} \right)^{\frac{8}{5}}, \quad (5.3a) \quad G_0 \sim \left( \frac{\sqrt{L_s}}{D_s^2} \right)^2 \left( \frac{P_0}{D_s^2} \right)^{\frac{7}{10}}. \quad (5.3b)$$

On peut donc exprimer l'évolution de  $\tilde{E}$  dans la direction  $y$ , et de  $\tilde{G}$  dans le plan  $\{xGz\}$  de ce rotor feuilleté, au voisinage de cette configuration précontrainte initiale  $\mathcal{C}_0$ , telle que :

$$\frac{\tilde{E}}{E_0} \sim \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{8}{5}}, \quad (5.4a)$$

$$\frac{\tilde{G}}{G_0} \sim \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{7}{10}}. \quad (5.4b)$$

De manière générale, on peut exprimer l'évolution de  $\tilde{E}$ , au voisinage de cette configuration précontrainte initiale  $\mathcal{C}_0$ , telle que :

$$\tilde{E} = \left(\frac{E_0}{\sigma_{yy0}^{\alpha_P}}\right) \sigma_{yy}^{\alpha_P}, \quad (5.5)$$

avec  $\alpha_P \in \mathbb{R}$  la puissance associé à la charge  $P$  dans la loi  $\tilde{E}$ , Eq. (5.1a), et  $\sigma_{yy0}$  la précontrainte.

**Remarque 14:** Bien que la charge axiale  $P$  soit une force de compression, et par conséquent négative par convention, on considère sa valeur absolue dans les modèles Eq. (5.1a) et Eq. (5.1b), *i.e.*  $P \in \mathbb{R}^+$ .



Par définition, le module d'Young est défini par la relation :

$$\tilde{E} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \varepsilon_{yy}}. \quad (5.6)$$

Ainsi, en substituant l'Eq. (5.6) dans l'Eq. (5.5), il vient alors l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \varepsilon_{yy}} \sigma_{yy}^{-\alpha_P} = \left(\frac{E_0}{\sigma_{yy0}^{\alpha_P}}\right). \quad (5.7)$$

En intégrant l'Eq. (5.7) sur  $\varepsilon_{yy}$ , on obtient :

$$\sigma_{yy} = \left[ \left(\frac{E_0}{\sigma_{yy0}^{\alpha_P}}\right) (1 - \alpha_P) \varepsilon_{yy} + C_\sigma \right]^{\left(\frac{1}{1-\alpha_P}\right)}. \quad (5.8)$$

où  $C_\sigma$  est une constante arbitraire, dépendant d'une configuration connue comme  $\mathcal{C}_0$  par exemple, et est déterminée comme suit :

$$\sigma_{yy0} = \left[ \left(\frac{E_0}{\sigma_{yy0}^{\alpha_P}}\right) (1 - \alpha_P) \varepsilon_{yy0} + C_\sigma \right]^{\left(\frac{1}{1-\alpha_P}\right)} \Leftrightarrow C_\sigma = \sigma_{yy0}^{1-\alpha_P} - \left(\frac{E_0}{\sigma_{yy0}^{\alpha_P}}\right) (1 - \alpha_P) \varepsilon_{yy0}. \quad (5.9)$$

La loi de comportement de l'empilement de tôles magnétiques peut donc s'écrire :

$$\sigma_{yy} = \exp \left( \left(\frac{1}{1-\alpha_P}\right) \ln \left[ \left(\frac{E_0}{\sigma_{yy0}^{\alpha_P}}\right) (1-\alpha_P) (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy0}) + \sigma_{yy0}^{1-\alpha_P} \right] \right), \quad (5.10)$$

dont une représentation est proposée FIG. 5.1, en considérant une variation de diamètre  $D_s$ . Ce modèle de loi de comportement est théoriquement valable sur le domaine :

$$\varepsilon_{yy} \in [\varepsilon_{yy}^l, +\infty], \quad (5.11)$$

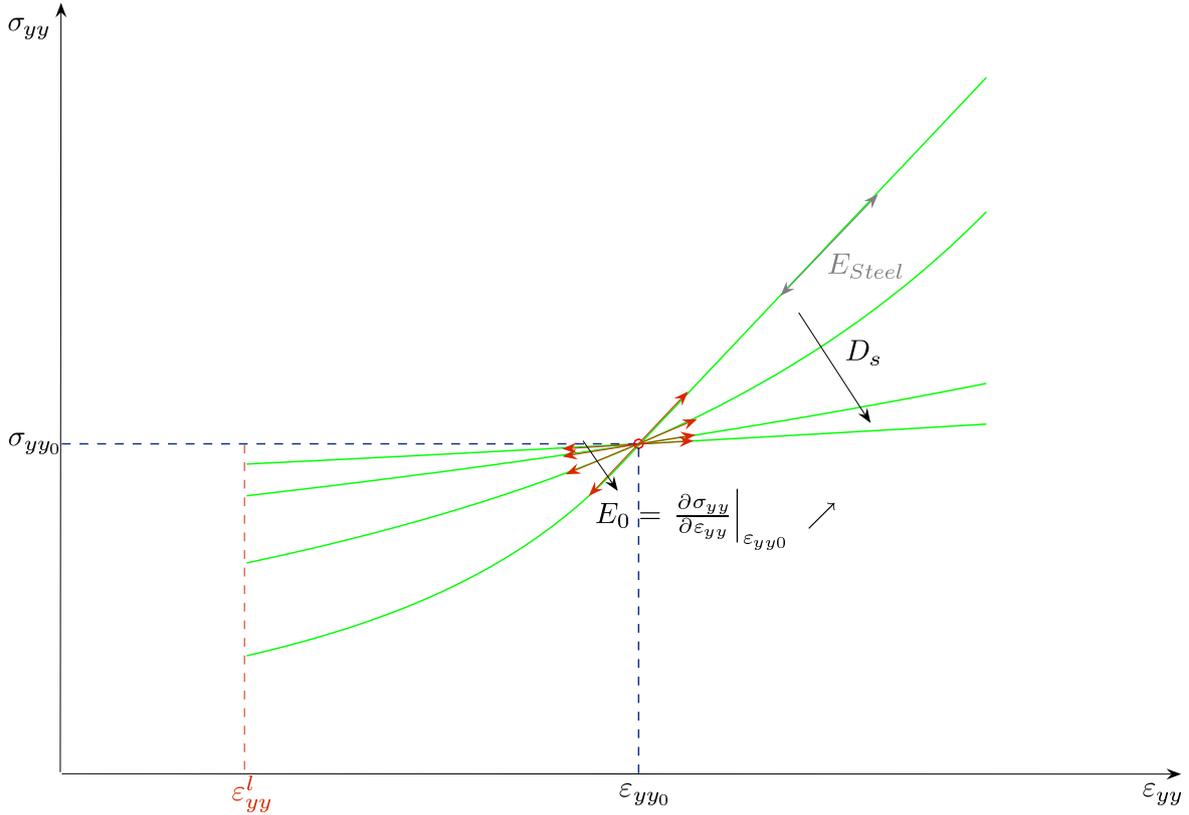


FIGURE 5.1 – Allure de la loi de comportement identifiée de l'empilement de tôles autour d'une configuration précontrainte initiale  $\{\sigma_{yy0}, \varepsilon_{yy0}\}$

telle que l'inégalité suivante soit respectée :

$$\begin{aligned} \left( \frac{E_0}{\sigma_{yy0}^{\alpha_P}} \right) (1 - \alpha) (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy0}) + \sigma_{yy0}^{1-\alpha_P} &> 0, \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{yy} &> \frac{\left( \frac{E_0}{\sigma_{yy0}^{\alpha_P}} \right) (1 - \alpha_P) \varepsilon_{yy0} - \sigma_{yy0}^{1-\alpha_P}}{\left( \frac{E_0}{\sigma_{yy0}^{\alpha_P}} \right) (1 - \alpha_P)}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

La borne inférieure est alors définie par :

$$\varepsilon_{yy}^l = \varepsilon_{yy0} + \frac{\sigma_{yy0}}{E_0 (\alpha_P - 1)}. \quad (5.13)$$

**Remarque 15:** La valeur maximale identifiée  $E_0$  ne peut être supérieure à celle de l'acier, notée  $E_{Steel}$ , ce qui limite donc la pente de l'asymptote oblique de la loi de comportement en  $\varepsilon_{yy} \rightarrow +\infty$ . Par ailleurs, la FIG. 5.1 présente une allure de la loi de comportement d'un empilement afin d'illustrer sa nature non linéaire. Bien qu'étant théoriquement valable sur le domaine présenté dans l'Eq. (5.11), il ne faut pas oublier que cette loi de comportement est elle-même issue de la loi  $\tilde{E}$ , Eq. (5.4a), et dont la validité est forcément associée à des intervalles de confiance et/ou prédiction (voir Section 4.6.4.3).



### 5.3 Modélisation de l'effet centrifuge

Par hypothèse, les effets centrifuges sont estimés pour une vitesse de rotation donnée  $\dot{\phi}$  constante, *i.e.* un problème quasi-statique est alors résolu. Sous l'effet des charges centrifuges, les tirants fléchissent dans le jeu fonctionnel radial jusqu'à entrer en contact avec l'empilement de tôles. La déflexion transversale induit la non linéarité géométrique et le couplage longitudinal et latéral, FIG. 5.2, et implique une charge longitudinale supplémentaire qui agit au sein des tirants et comprime l'empilement de tôles. Le couplage induit donc :

- une extension des tirants, et donc un effet de raidissement en flexion,
- une compression de l'empilement de tôles,
- une évolution des propriétés constitutives de l'empilement, Eq. (5.4a) et Eq. (5.4b), car elles dépendent de la pré-charge.

#### 5.3.1 Mise en équation

En raison de la symétrie cyclique de l'assemblage de la masse magnétique (tirants, empilement de tôles, etc...), il est possible de ne résoudre qu'un problème quasi-statique dans un plan colinéaire à l'axe longitudinal  $y$  en ne considérant qu'un seul secteur de l'assemblage composé :

- d'un unique tirant représenté par le domaine  $\Omega_m$ ,
- de la  $N_{ti}^e$  portion de la section droite de l'empilement de tôles représentée par le domaine  $\Omega_s$ ,

où les indices  $\{ \}_m$  et  $\{ \}_s$  sont respectivement relatifs aux domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$ , appelé également domaine **maître** et domaine **esclave**, afin d'introduire la notion de normale au contact selon laquelle le contact apparaît et les forces normales de contact agissent.

Les frontières respectives de chaque domaines  $\partial\Omega_{(\bullet)}$  sont notées et définies par :

$$\begin{cases} \partial\Omega_{(\bullet)} = \Gamma_{\sigma}^{(\bullet)} \cup \Gamma_{\delta}^{(\bullet)} \\ \Gamma_{\sigma}^{(\bullet)} \cap \Gamma_{\delta}^{(\bullet)} = \emptyset \end{cases} . \quad (5.14)$$

où l'indice  $(\bullet)$  représente les indices  $m$  ou  $s$ ,  $\Gamma_{\delta}^{(\bullet)}$  est la frontière où les déplacements sont imposés et  $\Gamma_{\sigma}^{(\bullet)}$  est la frontière où s'applique les efforts extérieurs.

##### 5.3.1.1 Déformation non-linéaire longitudinale

Soit une longueur infinitésimale  $dy$  d'une poutre illustrée FIG. 5.2. Dans la configuration déformée  $\mathcal{C}_t$ , il vient :

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy, \quad (5.15a) \quad dw = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy, \quad (5.15b)$$

ce qui permet d'exprimer l'allongement  $ds$  de la longueur infinitésimale  $dy$  tel que :

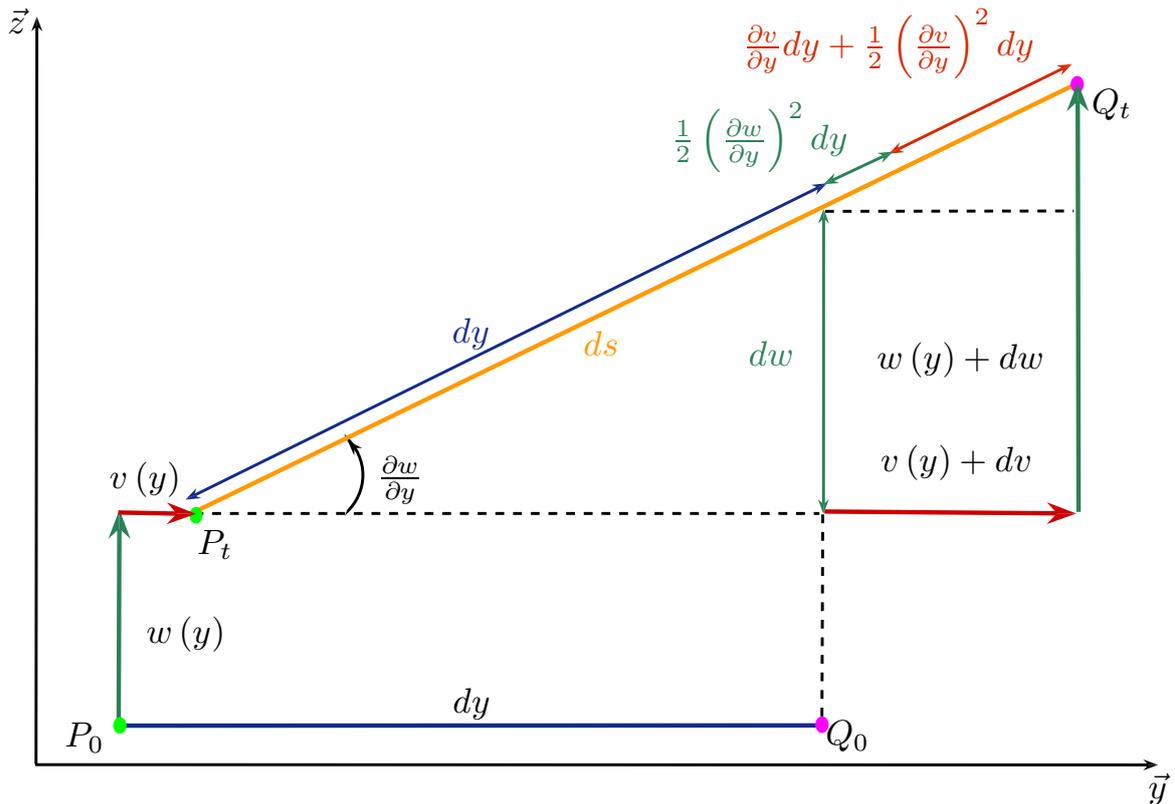


FIGURE 5.2 – Configurations non-déformée  $\mathcal{C}_0$  et déformée  $\mathcal{C}_t$  d'un élément de poutre de longueur infinitésimale.

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= (dy + dv)^2 + dw^2, \\
 \Leftrightarrow ds &= dy \left[ 1 + \underbrace{2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2}_{\varepsilon_{yy} \ll 1} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

A l'aide du développement limité suivant :

$$(1 + \varepsilon_{yy})^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{yy}, \text{ avec } \varepsilon_{yy} \ll 1, \tag{5.17}$$

l'Eq. (5.16) devient alors :

$$ds \approx dy \left[ 1 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]. \tag{5.18}$$

Si l'on considère une poutre de longueur  $l$  dans une configuration déformée, la longueur de sa fibre neutre sera alors définie par l'intégrale de l'Eq. (5.18) le long de son abscisse curviligne telle que :

$$s = \int_0^l dy + \int_0^l \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy + \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy. \tag{5.19}$$

La longueur totale  $s$  de la poutre peut se décomposer de la manière suivante :

$$s = l + dl, \quad (5.20)$$

En gardant en mémoire que la déformation longitudinale linéaire  $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$  est constante, l'Eq. (5.19) devient alors :

$$l + \underbrace{dl}_{l\varepsilon_{yy}} = l + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)l + \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy + \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy, \quad (5.21)$$

et la déformation longitudinale non-linéaire s'écrit finalement :

$$\varepsilon_{yy} = \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\substack{\text{Petite Déformation} \\ \text{Longitudinale}}} + \underbrace{\int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy}_{\substack{\text{Grande Déformation} \\ \text{Longitudinale}}} + \underbrace{\frac{1}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy}_{\substack{\text{Couplage Déformation} \\ \text{Transversale-Longitudinale}}}. \quad (5.22)$$

### 5.3.1.2 Couplage Longitudinal - Transversal

En négligeant le terme dû aux grandes déformations longitudinales, le terme  $\varepsilon_{yy}$  implique lors une charge longitudinale  $P$  pour une poutre [83] de module d'Young  $E$ , de section droite  $S$  et de longueur  $l$  telle que :

$$P = ES \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{ES}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy. \quad (5.23)$$

L'effet centrifuge est estimé en considérant une charge répartie transversale non linéaire  $f_c$  agissant sur le domaine  $\Omega_m$ , telle que :

$$f_c = \rho S \dot{\phi}^2 (e_{ti} + w), \quad (5.24)$$

où  $\rho$  et  $e_{ti}$  représentent respectivement la masse volumique et l'excentricité des tirants, FIG. 5.3.

Il doit être noté que les deux domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$  sont connectés entre eux au niveau de leurs propres limites. Ainsi, en annulant les dérivées temporelles et en considérant une configuration précontrainte initiale, les équations quasi-statiques dans le plan  $\{yGz\}$  s'expriment de la manière suivante, dans  $\Omega_m$  :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( EI_G \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + k_y GS \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) = 0, \quad (5.25)$$

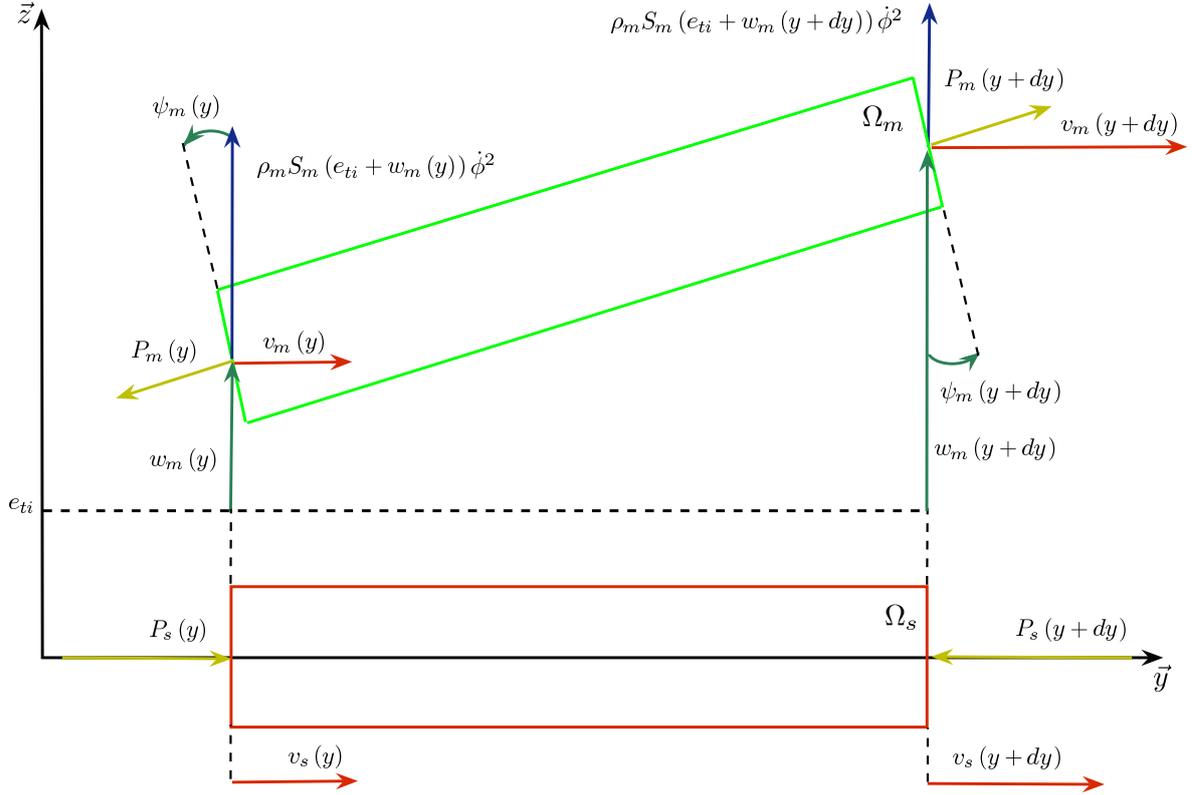
$$\frac{\partial}{\partial y} \left( k_y GS \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) \right) + (P + P_0) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_c = 0, \quad (5.26)$$

$$ES \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (5.27)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

- $\Gamma_\delta^m : y = 0 \Rightarrow v = w = \theta = 0,$
- $\Gamma_\sigma^m : y = l \Rightarrow \sigma_{yy} = E \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{P}{S},$

où  $EI_G$  et  $k_y GS$  sont respectivement les rigidités de flexion et de cisaillement. Le *stiffening effect* classique n'apparaît pas dans le domaine  $\Omega_s$  puisqu'il est feuilleté longitudinalement. En revanche,


 FIGURE 5.3 – Domaines élémentaires associés à  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$ .

l'Eq. (5.4a) doit être considérée dans l'équation du mouvement quasi-statique du domaine  $\Omega_s$  :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( EI_G \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + k_y GS \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) = 0, \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( k_y GS \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) \right) = 0, \quad (5.29)$$

$$E(P) S \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (5.30)$$

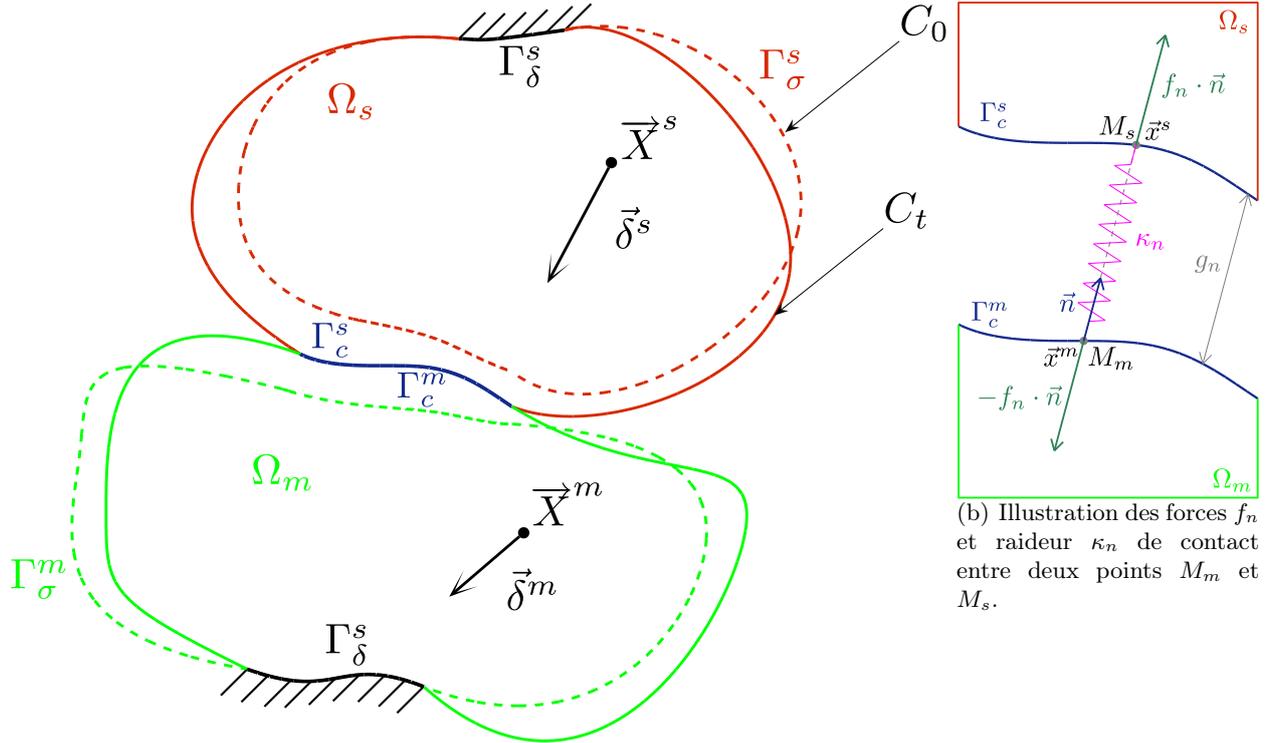
avec les conditions aux limites suivantes :

- $\Gamma_\delta^m : y = 0 \Rightarrow v = w = \theta = 0,$
- $\Gamma_\sigma^m : y = l \Rightarrow w = \theta = 0, \sigma_{yy} = E \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{P}{S}.$

Ces deux systèmes d'équations différentielles sont couplés entre eux puisque l'on a  $\Gamma_\delta^m \cap \Gamma_\delta^s \neq \emptyset$  :

$$y = l \Rightarrow \{v_m, w_m, \theta_m\} = \{v_s, w_s, \theta_s\}.$$

Ainsi, ces systèmes d'équations seront résolus en utilisant la méthode des éléments finis, *i.e.* une approche adaptée dans la résolution de problèmes de contact.



(a) Représentation de deux domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$  dans une configuration initiale  $\mathcal{C}_0$  et une configuration déformée  $\mathcal{C}_t$  lorsque les deux domaines sont en contact.

FIGURE 5.4 – Notations utilisées pour paramétrer les domaines potentiellement en contact.

## 5.4 Formulation éléments finis du contact

Les systèmes d'équations différentielles, Eq. (5.25) à Eq. (5.30), sont discrétisés à l'aide d'éléments finis à deux nœuds grâce aux fonctions de formes associées aux champs  $w$  et  $\theta$  et décrites par les Eq. (A.43) et Eq. (A.44). Le déplacement axial  $v$  dans la direction  $y$  est également considéré et exprimé à l'aide des fonctions de formes linéaires classiques [35], Eq. (A.292).

Soient  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$  les domaines définis respectivement par l'union des éléments  $\mathcal{K}$  du maillage dont les déplacements nodaux sont stockés dans le vecteur  $\delta \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  :

$$\Omega_m = \bigcup_{e=e_{m_i}}^{e_{m_f}} \mathcal{K}_e, \quad (5.31a)$$

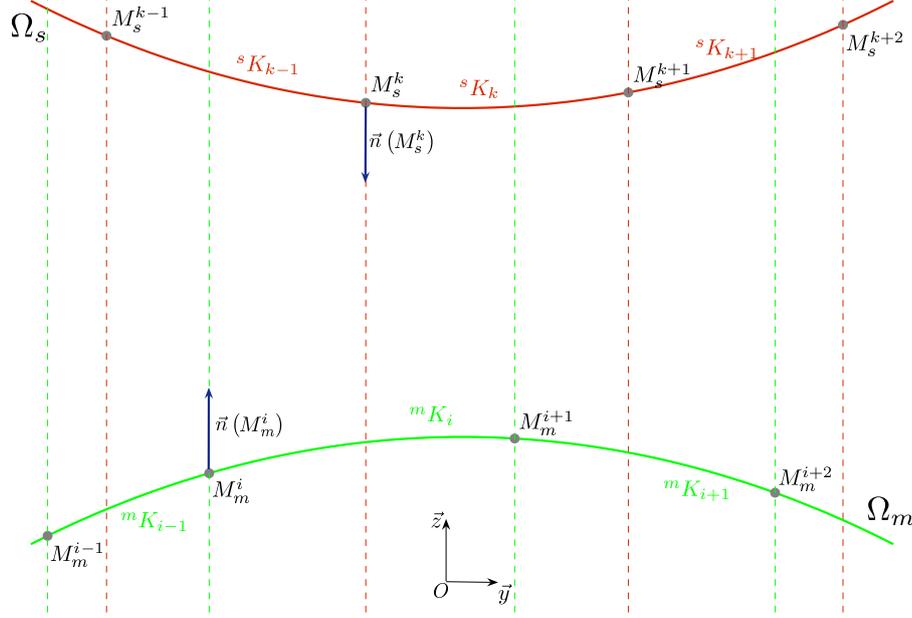
$$\Omega_s = \bigcup_{e=e_{s_i}}^{e_{s_f}} \mathcal{K}_e, \quad (5.31b)$$

où  $e_{m_i}, e_{m_f}$  et  $e_{s_i}, e_{s_f}$  représentent respectivement les bornes inférieures et supérieures des domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$ .

Durant le développement de la formulation du contact par la méthode des éléments finis, on considéra qu'un élément fini  $\mathcal{K}_e$  est associé de manière générale à dix degrés de liberté tel que le vecteur élémentaire des déplacements associé  ${}^e\delta$  s'écrit :

$${}^e\delta = \{v_e, w_e, u_e, \psi_e, \theta_e, v_{e+1}, w_{e+1}, u_{e+1}, \psi_{e+1}, \theta_{e+1}\}. \quad (5.32)$$

On suppose deux corps déformables  $\Omega_{(\bullet)}$ ,  $\bullet = m, s$ , initialement séparés qui ont la possibilité d'entrer en contact, FIG. 5.4(a). La frontière respective de chaque corps  $\partial\Omega_{(\bullet)}$  est partitionnée en trois sous-frontières :  $\Gamma_c^{(\bullet)}$  où se produisent potentiellement les contacts,  $\Gamma_\sigma^{(\bullet)}$  où s'applique les efforts extérieurs et  $\Gamma_\delta^{(\bullet)}$  où les déplacements sont imposés. Ces trois sous-domaines doivent vérifier les propriétés suivantes :


 FIGURE 5.5 – Maillages non-coïncidents des domaines maître  $\Omega_m$  et esclave  $\Omega_s$ .

$$\begin{cases} \partial\Omega_{(\bullet)} = \Gamma_{\sigma}^{(\bullet)} \cup \Gamma_{\delta}^{(\bullet)} \cup \Gamma_c^{(\bullet)} \\ \Gamma_{\sigma}^{(\bullet)} \cap \Gamma_{\delta}^{(\bullet)} = \Gamma_{\sigma}^{(\bullet)} \cap \Gamma_c^{(\bullet)} = \Gamma_c^{(\bullet)} \cap \Gamma_{\delta}^{(\bullet)} = \emptyset \end{cases} \quad (5.33)$$

La modélisation d'un problème en mécanique du contact se décompose en quatre étapes :

- Définition des frontières  $\Gamma_{\sigma}^{(\bullet)}$  potentiellement en contact : le lieu du contact n'est pas toujours connu notamment pour les cas de problèmes évoluant en grands déplacements ou en grandes déformations. À défaut d'information sur les déformées envisageables des structures, on impose généralement  $\Gamma_c^{(\bullet)}$  comme étant la totalité de la frontières  $\partial\Omega_{(\bullet)}$ . Dans le cas contraire, on sélectionne les sous-régions concernées par le contact, ce qui a pour effet de diminuer significativement le nombre de conditions de contact et par conséquent le temps de calcul,
- Définition des normales de contact  $\vec{n}$  : toujours sortantes, elles imposent la direction normale de séparation des deux domaines,
- Évaluation de la distance  $g_n$  entre les structures : cette étape permet de vérifier si la condition d'impénétrabilité est respectée ou pas, *i.e.*  $\Omega_m \cap \Omega_s = \emptyset$ . Son calcul peut s'avérer rapidement coûteux si la géométrie des corps déformés évolue rapidement,
- Détermination des forces  $f_n$  (ou des raideurs  $\kappa_n$ ) de contact, FIG. 5.4(b), dans les directions normale et/ou tangentielle si le frottement est considéré.

Il est à noter que les domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$  présentent des maillages non-coïncidents, FIG. 5.5. De plus, on suppose les hypothèses suivantes :

- le contact entre les domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$  ne peut avoir lieu que dans la direction transversale  $z$ ,
- le frottement n'est pas considéré dans la direction longitudinale  $y$ , *i.e.* les domaines considérés sont capables de se mouvoir relativement l'un par rapport à l'autre.

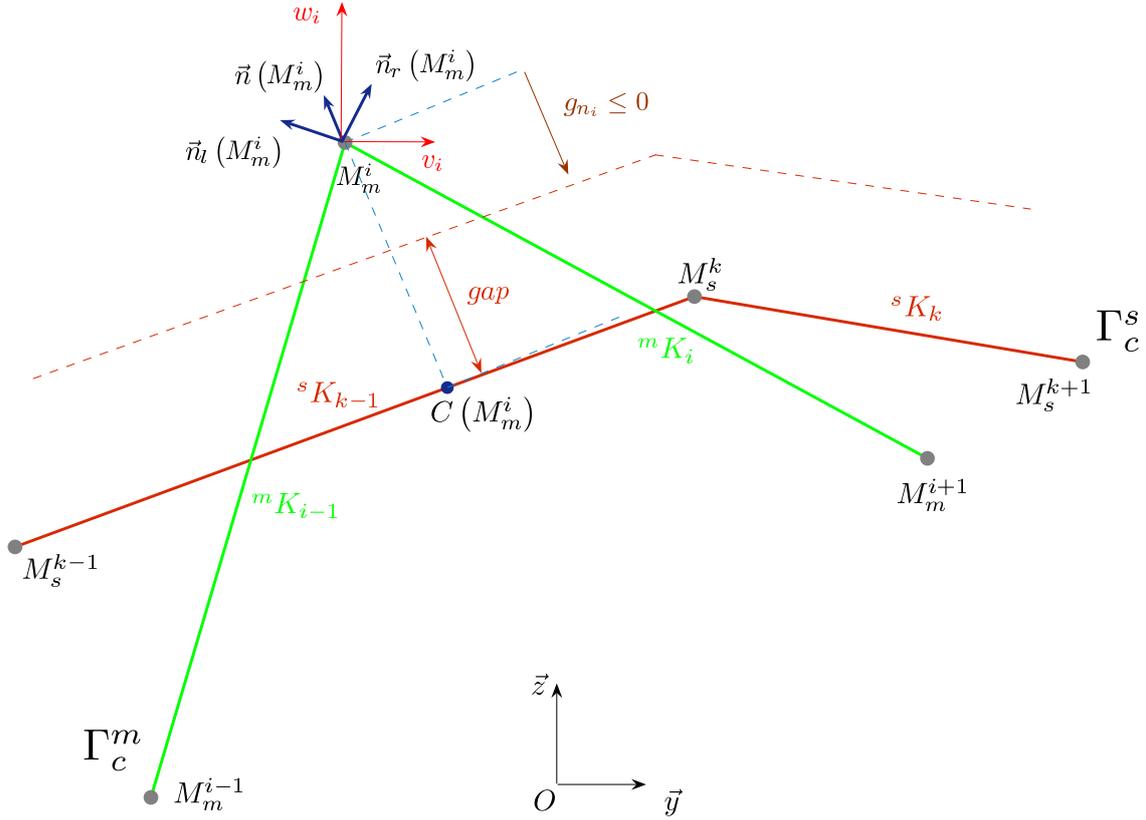


FIGURE 5.6 – Représentation de la normale de contact  $\bar{n}(M_m^i)$  dans une situation d'interpénétration des domaines maître  $\Omega_m$  et esclave  $\Omega_s$ .

#### 5.4.1 Orientation de la normale de contact $\bar{n}$

Parmi les diverses méthodes de détection de contact, l'approche maître-esclave a été retenue [84]. Elle permet de définir la cinématique d'un domaine esclave  $\Omega_s$  vis-à-vis d'un domaine maître  $\Omega_m$ , comme l'illustre la FIG. 5.6. C'est-à-dire que pour chaque nœud du domaine maître  $\Omega_m$ , un vecteur  $\bar{n}$  sera défini tel qu'il soit un vecteur normal sortant à la frontière  $\Gamma_c^m$ .

Appliquée à une structure discrétisée, cette approche ne se limite pas à imposer des forces aux nœuds du maillage ou des raideurs entre les nœuds du maillage, comme c'est le cas avec une méthode d'appariement nodal classique, mais offre aussi la possibilité de modéliser le contact lorsque celui-ci a lieu entre un nœud maître et un élément fini esclave. Ainsi, grâce à ses fonctions de forme, une force de contact équivalente élémentaire est alors répartie aux nœuds des éléments finis maîtres et esclaves.

#### 5.4.2 Mesure de la distance $g_n$ entre deux domaines

Soit un point matériel  $M_m$  du domaine  $\Omega_m$  appartenant à la surface de contact  $\Gamma_c^m$ , la fonction distance normale  $g_n$  (ou jeu) entre les deux domaines est définie comme la norme  $\|\overrightarrow{M_m M_s}\|$  où  $M_s$  est la projection du point  $M_m$  selon la normale  $\bar{n}$  sur la frontière  $\Gamma_c^s$  comme l'illustre la FIG. 5.4(b). En adoptant la formulation Lagrangienne totale où la position  $\vec{x}$  d'un nœud dans la configuration courante  $\mathcal{C}_t$  s'exprime comme la somme de la position initiale  $\vec{X}$  et du déplacement  $\vec{\delta}$ , la norme  $\|\overrightarrow{M_m M_s}\|$  s'écrit alors :

$$\|\overrightarrow{M_m M_s}\| = [\vec{x}(M_s) - \vec{x}(M_m)] \cdot \bar{n}, \quad (5.34)$$

de telle sorte que la fonction  $g_n$  s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g_n &= \left[ \vec{X}^s + \vec{\delta}(M_s) - \vec{X}(M_m) - \vec{\delta}(M_m) \right] \cdot \vec{n}, \\ \Leftrightarrow g_n &= g_{n_0} + \left[ \vec{\delta}(M_s) - \vec{\delta}(M_m) \right] \cdot \vec{n}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

où  $g_{n_0}$  représente la distance minimale  $\left\| \overrightarrow{M_m M_s} \right\|$  dans la configuration initiale  $\mathcal{C}_0$  soit :

$$g_{n_0} = \min_{\vec{X}^s \in \Gamma_c^s} \left( \vec{X}^s - \vec{X}(M_m) \right) \cdot \vec{n}. \quad (5.36)$$

La quantité  $g_{n_0}$ , appelée “**gap**”, caractérise la distance initiale entre les deux domaines, *i.e.* distance pouvant par exemple représenter un jeu fonctionnel. Ainsi, deux situations sont mises évidences pour caractériser le contact :

- Si  $g_n \leq 0$ , il y aura contact voire **inter-pénétration** des deux domaines considérés,
- Si  $g_n > 0$ , il n'y aura **pas de contact** entre les deux domaines.

Pour chaque point situé sur l'interface de contact  $\Gamma_c^s$ , il faut vérifier les conditions de contact : aussi appelées conditions de *Hertz-Signorini-Moreau* [85], elles traduisent entre autres la condition de non-pénétrabilité entre les deux domaines. En notant  $\sigma_n$  l'effort surfacique (ou pression) de contact dans la direction normale  $\vec{n}$ , il vient :

- **Condition Géométrique** : Impénétrabilité de la matière (*Hertz-Signorini*) :

$$g_n \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g > 0 & , \text{ Pas de contact,} \\ g = 0 & , \text{ Contact.} \end{cases} \quad (5.37)$$

- **Condition Mécanique** : Intensilité (*Hertz-Signorini*), aucune attraction n'est exercée entre les domaines :

$$\sigma_n \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_n > 0 & , \text{ Contact (Compression),} \\ \sigma_n = 0 & , \text{ Pas de contact.} \end{cases} \quad (5.38)$$

- **Condition Énergétique** : Complémentarité/Exclusion (*Moreau*), la force de réaction s'annule lorsque les objets ne sont plus en contact  $g_n > 0 \Rightarrow \sigma_n = 0$  :

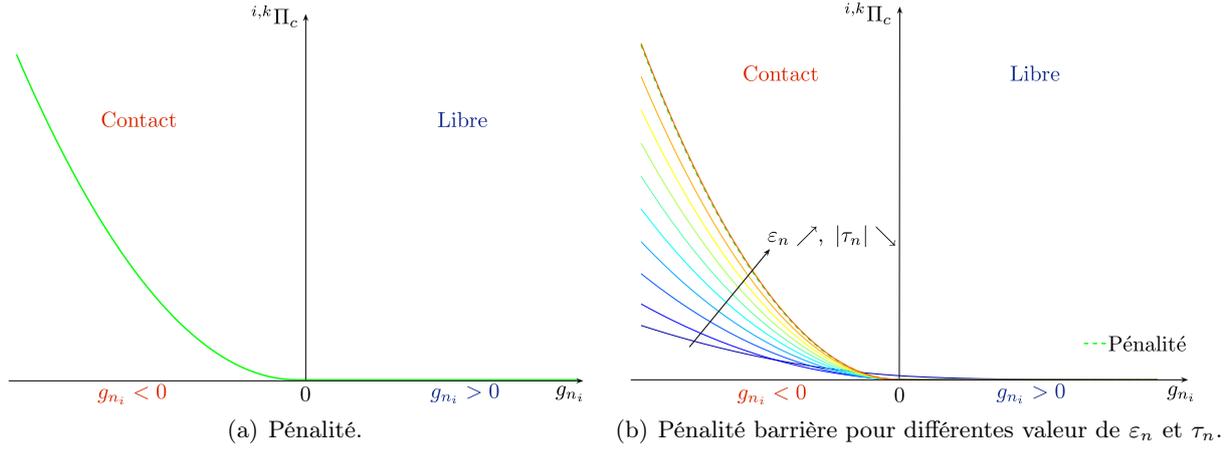
$$\sigma_n g_n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_n = 0 & , \text{ Décollement,} \\ g = 0 & , \text{ Contact.} \end{cases} \quad (5.39)$$

### 5.4.3 Potentiels de contact élémentaires

Soient les domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$  discrétisés par la méthode des éléments finis. Il est possible d'introduire un potentiel de contact telle que l'énergie potentielle totale  $\mathcal{U}$  s'écrive [86; 87] :

$$\mathcal{U} = \underbrace{\Pi_d}_{\text{Énergie de Déformation}} - \underbrace{\mathcal{W}_c}_{\text{Travail des Forces Centrifuges}} + \underbrace{\Pi_c}_{\text{Potentiel de Contact}} + \underbrace{\Pi_{bc}}_{\text{Potentiel des Conditions aux Limites}}, \quad (5.40)$$

où  $\Pi_d$  est l'énergie de déformation des domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$ ,  $\mathcal{W}_c$  est le travail des forces centrifuges appliquées sur la frontière  $\Gamma_\sigma^m$ ,  $\Pi_{bc}$  est le potentiel des conditions aux limites en déplacement im-


 FIGURE 5.7 – Évolution du potentiel élémentaire de contact  ${}^{i,k}\Pi_c$  en fonction de  $g_{n_i}$ .

posées sur les frontières  $\Gamma_\delta^m$  et  $\Gamma_\delta^s$  grâce à une méthode de pénalité et  $\Pi_c$  est le potentiel de contact sur les frontières  $\Gamma_c^m$  et  $\Gamma_c^s$ .

Si l'on considère désormais l'énergie potentielle élémentaire entre le  $i^e$  nœud maître  $M_m^i \in \Gamma_c^m$  et le  $k^e$  nœud esclave  $M_s^k \in \Gamma_c^s$  et que l'on note la normale au contact  $\vec{n}(M_m^i)$ , la fonction distance, Eq. (5.35), s'écrit alors au  $i^e$  nœud maître  $M_m^i$  :

$$g_{n_i} = gap + \vec{\delta}_{ms}^t \cdot \vec{N}_m^i, \quad \begin{cases} g_{n_i} \leq 0, & \text{Contact} \\ g_{n_i} > 0, & \text{Libre} \end{cases}, \quad (5.41)$$

où  $\vec{\delta}_{ms}$ , correspondant à la différence entre les vecteurs déplacement des nœuds esclave et maître, et  $\vec{N}_m^i$  sont définis tels que :

$$\vec{\delta}_{ms} = \begin{bmatrix} \vec{\delta}(M_s^k) \\ \vec{\delta}(M_m^i) \end{bmatrix}, \quad (5.42a) \quad \vec{N}_m^i = \begin{bmatrix} \vec{n}(M_m^i) \\ -\vec{n}(M_m^i) \end{bmatrix}. \quad (5.42b)$$

Le potentiel de contact élémentaire  ${}^{i,k}\Pi_c$  entre  $M_m^i$  et  $M_s^k$  peut être obtenu en considérant différentes méthodes [88], parmi lesquelles on discerne les méthodes de pénalité qui autorisent une légère pénétration entre les domaines et considèrent les forces et raideur de contact comme des propriétés intrinsèques du système : aucune équation supplémentaire n'est ajoutée lors de la résolution et la taille du système n'est donc pas augmentée.

Deux types de méthodes de pénalité peuvent être distinguées :

- *extérieure* [89], aussi appelée couramment “méthode de pénalité” (“*Penalty method*”) dont le potentiel de contact élémentaire  ${}^{i,k}\Pi_c$  associé s'écrit :

$$\begin{cases} {}^{i,k}\Pi_c = \frac{1}{2}\varepsilon_n g_{n_i}^2 & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ {}^{i,k}\Pi_c = 0 & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases}, \quad (5.43)$$

où  $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$  est appelé coefficient de pénalité et est homogène à une raideur, et  $g_{n_i}$  est définie dans l'Eq. (5.41). La FIG. 5.7(a) représente l'allure du potentiel de contact élémentaire en fonction de la distance  $g_{n_i}$ .

- *intérieure* [86; 81; 82], aussi appelée “la méthode de barrière” (“*Barrier method*”) qui régularisent les inégalités de contact ; le potentiel de contact élémentaire  ${}^{i,k}\Pi_c$  associé s’écrit alors :

$$\begin{cases} {}^{i,k}\Pi_c = \left(\frac{\tau_n^2}{\varepsilon_n}\right) + \tau_n g_{n_i} + \frac{1}{2}\varepsilon_n g_{n_i}^2 & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ {}^{i,k}\Pi_c = \left(\frac{\tau_n^2}{\varepsilon_n}\right) e\left(\frac{\varepsilon_n}{\tau_n}\right) g_{n_i} & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases}, \quad (5.44)$$

où  $\tau_n \in \mathbb{R}^{-*}$ . La FIG. 5.7(b) représente l’allure du potentiel de contact élémentaire en fonction de la distance  $g_{n_i}$  pour différentes valeurs des paramètres  $\varepsilon_n$  et  $\tau_n$ .

**Remarque 16:** Lorsque  $\tau_n \rightarrow 0^-$  et  $\varepsilon_n \rightarrow +\infty$ , il vient alors :

$$\begin{cases} {}^{i,k}\Pi_c = \lim_{\substack{\tau_n \rightarrow 0^- \\ \varepsilon_n \rightarrow +\infty}} \left(\frac{\tau_n^2}{\varepsilon_n}\right) + \tau_n g_{n_i} + \frac{1}{2}\varepsilon_n g_{n_i}^2 \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_n g_{n_i}^2 & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ {}^{i,k}\Pi_c = \lim_{\substack{\tau_n \rightarrow 0^- \\ \varepsilon_n \rightarrow +\infty}} \left(\frac{\tau_n^2}{\varepsilon_n}\right) e\left(\frac{\varepsilon_n}{\tau_n}\right) g_{n_i} \rightarrow 0 & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases}. \quad (5.45)$$

On remarque alors que la méthode la pénalité barrière tend vers la méthode de la pénalité (--) comme le montre la FIG. 5.7(b).



#### 5.4.4 Recherche du point de contact entre un nœud et un élément fini

On considère le point  $C(M_m^i)$  comme l’intersection entre les domaines maître et esclave, FIG. 5.6, *i.e.* la projection du nœud maître  $M_m^i$ , dans la direction  $\vec{n}(M_m^i)$ , sur un élément fini esclave  ${}^s\mathcal{K}_k$ , puisque  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$  présentent des maillages non-coïncidents, FIG. 5.5. On suppose que le contact puisse avoir lieu entre le nœud maître  $M_m^i$  et le  $k^e$  élément fini esclave comme l’illustre la FIG. 5.6.

Considérons le cas simplifié d’une poutre dans lequel le nœud maître  $M_m^i$  est représenté par  $M_m^i = {}^m\mathcal{K}_{i-1} \cap {}^m\mathcal{K}_i$ . Il apparaît clairement une discontinuité des normales au nœud maître  $M_m^i$ . La normale de contact  $\vec{n}(M_m^i)$  est alors définie à partir des vecteur normaux aux éléments finis contigus  ${}^m\mathcal{K}_{i-1}$  et  ${}^m\mathcal{K}_i$  telle que :

$$\vec{n}(M_m^i) = \frac{1}{2}(\vec{n}_l(M_m^i) + \vec{n}_r(M_m^i)) \text{ tel que } \|\vec{n}(M_m^i)\| = 1, \quad (5.46)$$

avec  $\vec{n}_l(M_m^i)$  et  $\vec{n}_r(M_m^i)$  les normales au contact gauche et droite par rapport au nœud  $M_m^i$ , FIG. 5.6 :

$$\vec{n}_l(M_m^i) = \left(\overrightarrow{M_m^{i-1}M_m^i} \wedge \overrightarrow{U_i}\right) \wedge \overrightarrow{M_m^{i-1}M_m^i}, \quad (5.47)$$

$$\vec{n}_r(M_m^i) = \left(\overrightarrow{M_m^iM_m^{i+1}} \wedge \overrightarrow{U_i}\right) \wedge \overrightarrow{M_m^iM_m^{i+1}}, \quad (5.48)$$

avec  $\overrightarrow{U_i}$  le vecteur déplacement du nœud  $M_m^i$ . Ainsi, pour chaque nœud maître  $M_m^i$ , il est nécessaire de trouver l’indice  $k$  de l’élément fini esclave sur lequel celui-ci sera projeté tel que  $C(M_m^i) \in {}^s\mathcal{K}_k$ . Les coordonnées du point  $C(M_m^i)$  sont alors les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_s^k C(M_m^i)} = \alpha_s \overrightarrow{M_s^k M_s^{k-1}} \\ \overrightarrow{M_m^i C(M_m^i)} = \alpha_n \vec{n}(M_m^i) \end{cases}. \quad (5.49)$$

Dans la configuration courante  $\mathcal{C}_t$ , les coordonnées du vecteur normal au contact  $\vec{n}(M_m^i)$  et de la projection du  $i^e$  nœud maître  $M_m^i$  sur l’élément fini  ${}^s\mathcal{K}_{k-1}$ ,  $C(M_m^i)$ , s’expriment alors de manière

générale dans le repère  $(R)$  par les relations suivantes :

$$\bar{n}(M_m^i) = \begin{bmatrix} x_{n_m^i} \\ y_{n_m^i} \\ z_{n_m^i} \end{bmatrix}_{(R)}, \quad (5.50a) \quad \bar{x}(C(M_m^i)) = \begin{bmatrix} x_{C_m^i} \\ y_{C_m^i} \\ z_{C_m^i} \end{bmatrix}_{(R)}, \quad (5.50b)$$

et les coordonnées du  $i^e$  nœud maître  $M_m^i$  et du  $k^e$  nœud esclave  $M_s^k$  s'expriment quant à elles dans le repère  $(R)$  par :

$$\bar{x}(M_m^i) = \begin{bmatrix} x_{M_m^i} \\ y_{M_m^i} \\ z_{M_m^i} \end{bmatrix}_{(R)}, \quad (5.51a) \quad \bar{x}(M_s^k) = \begin{bmatrix} x_{M_s^k} \\ y_{M_s^k} \\ z_{M_s^k} \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (5.51b)$$

Ainsi, le système d'équation (5.49) devient :

$$\begin{cases} x_{C_m^i} - x_{M_s^k} - \alpha_s (x_{M_s^{k-1}} - x_{M_s^k}) = 0 & (1) \\ y_{C_m^i} - y_{M_s^k} - \alpha_s (y_{M_s^{k-1}} - y_{M_s^k}) = 0 & (2) \\ z_{C_m^i} - z_{M_s^k} - \alpha_s (z_{M_s^{k-1}} - z_{M_s^k}) = 0 & (3) \\ x_{C_m^i} - x_{M_m^i} - \alpha_n x_{n_m^i} = 0 & (4) \\ y_{C_m^i} - y_{M_m^i} - \alpha_n y_{n_m^i} = 0 & (5) \\ z_{C_m^i} - z_{M_m^i} - \alpha_n z_{n_m^i} = 0 & (6) \end{cases}. \quad (5.52)$$

En substituant respectivement les équations (4), (5) et (6) dans les équations (1), (2) et (3) du système (5.52), il vient :

$$\begin{cases} x_{M_m^i} + \alpha_n x_{n_m^i} - x_{M_s^k} - \alpha_s (x_{M_s^{k-1}} - x_{M_s^k}) = 0 & (7) \\ y_{M_m^i} + \alpha_n y_{n_m^i} - y_{M_s^k} - \alpha_s (y_{M_s^{k-1}} - y_{M_s^k}) = 0 & (8) \\ z_{M_m^i} + \alpha_n z_{n_m^i} - z_{M_s^k} - \alpha_s (z_{M_s^{k-1}} - z_{M_s^k}) = 0 & (9) \end{cases}. \quad (5.53)$$

La combinaison suivante des équations (7), (8) et (9) du système (5.53) :

$$2y_{n_m^i} z_{n_m^i} (7) - x_{n_m^i} z_{n_m^i} (8) - x_{n_m^i} y_{n_m^i} (9), \quad (5.54)$$

permet de déterminer le paramètre  $\alpha_s$  :

$$\begin{aligned} & 2[x_{M_m^i} + \alpha_n x_{n_m^i} - x_{M_s^k} - \alpha_s (x_{M_s^{k-1}} - x_{M_s^k})] y_{n_m^i} z_{n_m^i} - \\ & [y_{M_m^i} + \alpha_n y_{n_m^i} - y_{M_s^k} - \alpha_s (y_{M_s^{k-1}} - y_{M_s^k})] x_{n_m^i} z_{n_m^i} - \\ & [z_{M_m^i} + \alpha_n z_{n_m^i} - z_{M_s^k} - \alpha_s (z_{M_s^{k-1}} - z_{M_s^k})] x_{n_m^i} y_{n_m^i} = 0, \\ \Leftrightarrow & 2(x_{M_m^i} - x_{M_s^k}) y_{n_m^i} z_{n_m^i} - (y_{M_m^i} - y_{M_s^k}) x_{n_m^i} z_{n_m^i} - (z_{M_m^i} - z_{M_s^k}) x_{n_m^i} y_{n_m^i} - \\ & \alpha_s [2(x_{M_s^{k-1}} - x_{M_s^k}) y_{n_m^i} z_{n_m^i} - (y_{M_s^{k-1}} - y_{M_s^k}) x_{n_m^i} z_{n_m^i} - (z_{M_s^{k-1}} - z_{M_s^k}) x_{n_m^i} y_{n_m^i}] = 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

L'expression du paramètre  $\alpha_s$  s'écrit alors :

$$\alpha_s = \frac{2(x_{M_m^i} - x_{M_s^k}) y_{n_m^i} z_{n_m^i} - (y_{M_m^i} - y_{M_s^k}) x_{n_m^i} z_{n_m^i} - (z_{M_m^i} - z_{M_s^k}) x_{n_m^i} y_{n_m^i}}{2(x_{M_s^{k-1}} - x_{M_s^k}) y_{n_m^i} z_{n_m^i} - (y_{M_s^{k-1}} - y_{M_s^k}) x_{n_m^i} z_{n_m^i} - (z_{M_s^{k-1}} - z_{M_s^k}) x_{n_m^i} y_{n_m^i}}, \quad (5.56)$$

et représente la position relative du point  $C(M_m^i)$  sur l'élément fini  ${}^s \mathcal{K}_{k-1}$ .

En introduisant de l'Eq. (5.56) dans les équations (1), (2) et (3) du système (5.52) permet d'exprimer les coordonnées de la projection de  $M_m^i$  sur l'élément fini  ${}^s\mathcal{K}_{k-1}$  :

$$\begin{bmatrix} x_{C_m^i} \\ y_{C_m^i} \\ z_{C_m^i} \end{bmatrix}_{(R)} = \begin{bmatrix} x_{M_s^k} + \alpha_s (x_{M_s^{k-1}} - x_{M_s^k}) \\ y_{M_s^k} + \alpha_s (y_{M_s^{k-1}} - y_{M_s^k}) \\ z_{M_s^k} + \alpha_s (z_{M_s^{k-1}} - z_{M_s^k}) \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (5.57)$$

Finalement, la sommation des équations (4), (5) et (6) du système (5.52) :

$$\begin{aligned} x_{C_m^i} - x_{M_m^i} - \alpha_n x_{n_m^i} + y_{C_m^i} - y_{M_m^i} - \alpha_n y_{n_m^i} + z_{C_m^i} - z_{M_m^i} - \alpha_n z_{n_m^i} &= 0, \\ \Leftrightarrow (x_{C_m^i} - x_{M_m^i}) + (y_{C_m^i} - y_{M_m^i}) + (z_{C_m^i} - z_{M_m^i}) - \alpha_n (x_{n_m^i} + y_{n_m^i} + z_{n_m^i}) &= 0, \end{aligned} \quad (5.58)$$

conduit à l'expression du paramètre  $\alpha_n$  :

$$\alpha_n = \frac{(x_{C_m^i} - x_{M_m^i}) + (y_{C_m^i} - y_{M_m^i}) + (z_{C_m^i} - z_{M_m^i})}{(x_{n_m^i} + y_{n_m^i} + z_{n_m^i})}, \quad (5.59)$$

qui indique selon son signe s'il y a interpénétration ( $\alpha_n < 0$ ) ou pas ( $\alpha_n > 0$ ).

Une procédure d'appariement est alors appliquée pour rechercher le  $k^e$  indice jusqu'à ce que  $\alpha_s \in [0, 1]$ , *i.e.*  $C(M_m^i) \in [M_s^k M_s^{k-1}]$ . En réalisant cette procédure pour la totalité des domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$ , Alg. 9 (Annexe D.2), il est alors possible de déterminer les frontières de contact maître  $\Gamma_c^m$  et esclave  $\Gamma_c^s$ .

**Remarque 17:** Puisqu'il est supposé que les domaines maître et esclave ont la possibilité de glisser sans frottement dans la direction  $y$ , le scalaire  $\vec{n}(M_m^i) \cdot \vec{y}$  doit être nul; le contact apparaît donc uniquement dans la direction  $z$ . De plus, en raison de la symétrie périodique des tirants sur la circonférence de l'empilement  $\Omega_s$ , le domaine esclave n'est sujet qu'à une charge longitudinale. Ainsi, les degrés de liberté latéraux de l'empilement resteront inchangés durant le chargement centrifuge des tirants.



Ces hypothèses considérées, une méthode de pénalité est utilisée pour contraindre uniquement les degrés de liberté latéraux  $w$  du tirant qui est en contact avec l'empilement.

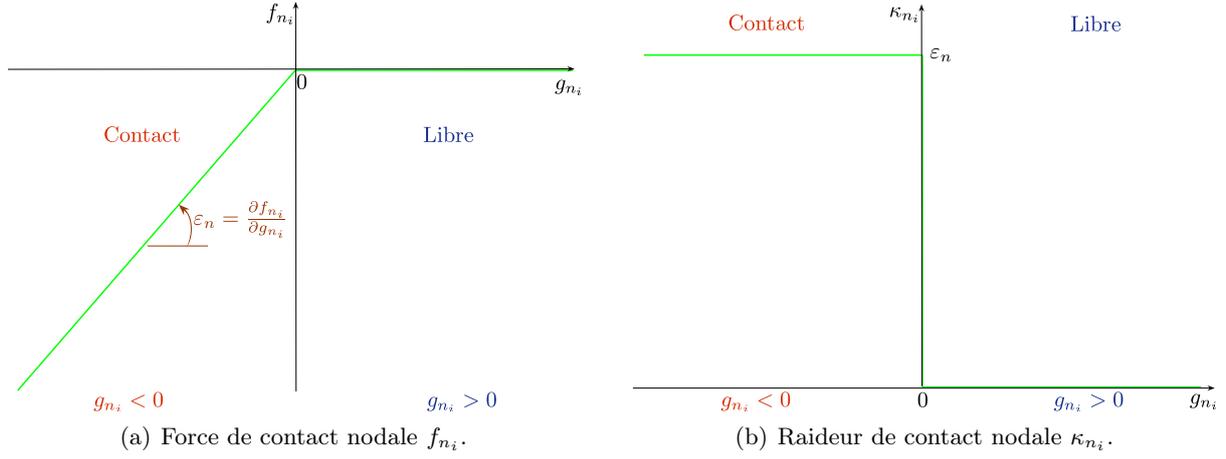
#### 5.4.5 Force et raideur de contact élémentaires

A partir du potentiel de contact élémentaire  ${}^{i,k}\Pi_c$ , il est possible de déterminer l'amplitude des force  $f_{n_i}$  et raideurs  $\kappa_{n_i}$  nodales de contact qui en dérivent telles que :

$$f_{n_i} = \frac{\partial {}^{i,k}\Pi_c}{\partial g_{n_i}}, \quad (5.60a) \quad \kappa_{n_i} = \frac{\partial f_{n_i}}{\partial g_{n_i}}. \quad (5.60b)$$

– **Pénalité** : Dans le cas de la méthode de la pénalité, l'expression de l'amplitude de la force de contact nodale  $f_{n_i}$  dérive de l'Eq. (5.43) :

$$\begin{cases} f_{n_i} = \frac{\partial}{\partial g_{n_i}} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_n g_{n_i}^2 \right) = \varepsilon_n g_{n_i} & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ f_{n_i} = 0 & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases}, \quad (5.61)$$


 FIGURE 5.8 – Évolution des caractéristiques du contact en fonction de  $g_{n_i}$  dans le cas de la pénalité.

dont l'allure est illustrée FIG. 5.8(a). L'amplitude de la raideur de contact nodale  $\kappa_{n_i}$  dérive elle-même de l'Eq. (5.61) telle que, FIG. 5.8(b) :

$$\begin{cases} \kappa_{n_i} = \frac{\partial}{\partial g_{n_i}} (\epsilon_n g_{n_i}) = \epsilon_n & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ \kappa_{n_i} = 0 & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases} . \quad (5.62)$$

- **Pénalité Barrière** : Si la méthode de la pénalité barrière est adoptée, l'expression de l'amplitude de la force de contact nodale  $f_{n_i}$  dérivant de l'Eq. (5.44) s'écrit :

$$\begin{cases} f_{n_i} = \frac{\partial}{\partial g_{n_i}} \left[ \left( \frac{\tau_n^2}{\epsilon_n} \right) + \tau_n g_{n_i} + \frac{1}{2} \epsilon_n g_{n_i}^2 \right] = \tau_n + \epsilon_n g_{n_i} & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ f_{n_i} = \frac{\partial}{\partial g_{n_i}} \left[ \left( \frac{\tau_n^2}{\epsilon_n} \right) e^{\left( \frac{\epsilon_n}{\tau_n} \right) g_{n_i}} \right] = \tau_n e^{\left( \frac{\epsilon_n}{\tau_n} \right) g_{n_i}} & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases} , \quad (5.63)$$

et représentée dans la FIG. 5.8(a) pour différentes valeurs des paramètres  $\epsilon_n$  et  $\tau_n$ . En  $g_{n_i} > 0$ , le terme en exponentiel régularise les inégalités de la force de contact autour de  $g_{n_i} = 0$  afin de lui procurer une allure plus régulière. Ce comportement est bénéfique lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes de dynamique dans lesquels les domaines maître et esclave entrent en contact de manière répétitive ou lorsqu'il s'agit par exemple d'évaluer la dérivée de la force de contact autour de  $g_{n_i} = 0$ , lieu en lequel la dérivée de la force de contact n'est pas définie pour la méthode de la pénalité extérieure. Comme pour la méthode de la pénalité, l'amplitude de la raideur de contact nodale  $\kappa_{n_i}$ , FIG. 5.9(b), dérive elle aussi de l'Eq. (5.63) telle que, FIG. 5.9(b) :

$$\begin{cases} \kappa_{n_i} = \frac{\partial}{\partial g_{n_i}} (\tau_n + \epsilon_n g_{n_i}) = \epsilon_n & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ \kappa_{n_i} = \frac{\partial}{\partial g_{n_i}} \left[ \tau_n e^{\left( \frac{\epsilon_n}{\tau_n} \right) g_{n_i}} \right] = \epsilon_n e^{\left( \frac{\epsilon_n}{\tau_n} \right) g_{n_i}} & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases} . \quad (5.64)$$

Lorsque les domaines maître et esclave sont à l'équilibre quasi-statique, la variation d'énergie potentielle totale s'annule telle que :

$$\delta \mathcal{U} = 0. \quad (5.65)$$

Par conséquent, la variation du potentiel de contact élémentaire  ${}^{i,k}\Pi_c$  s'annule également telle que :

$$\delta {}^{i,k}\Pi_c = \frac{\partial {}^{i,k}\Pi_c}{\partial g_{n_i}} \delta g_{n_i} = 0. \quad (5.66)$$

D'un point de vue pratique, dans le cas de la méthode des éléments finis, il est nécessaire d'exprimer la variation du potentiel de contact élémentaire en fonction de la variation  $\delta(\delta_{ms})$  des

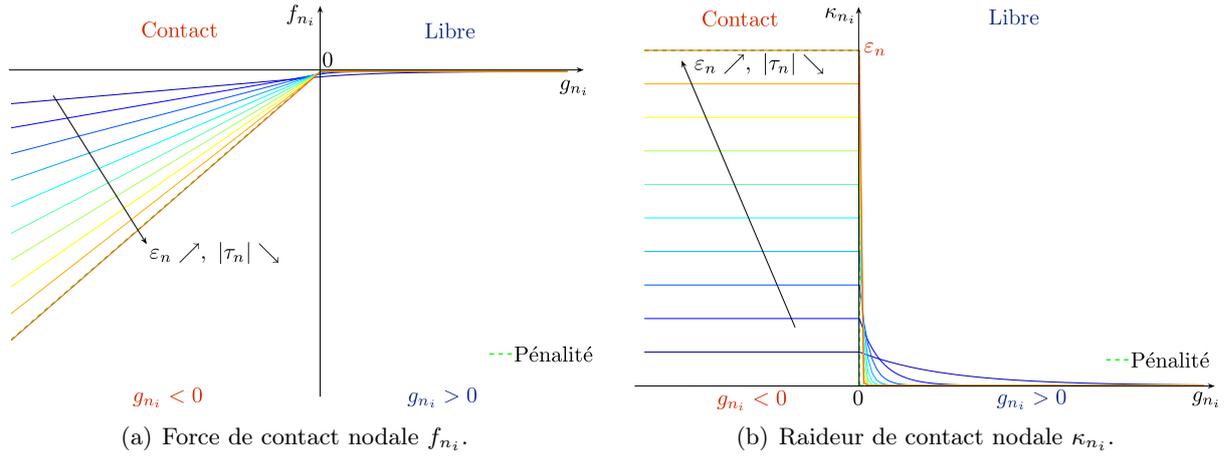


FIGURE 5.9 – Évolution des caractéristiques du contact en fonction de  $g_{n_i}$  dans la cas de la pénalité barrière pour différentes valeur des paramètres  $\epsilon_n$  et  $\tau_n$ .

degrés de liberté de **translation** maîtres  $\delta(M_m^i)$  et esclaves  $\delta(M_s^k)$  concernés par le contact et qui s'expriment de manière générale par les expressions :

$$\delta(M_m^i) = [ v_i \quad w_i \quad u_i ], \quad (5.67a) \quad \delta(M_s^k) = [ v_k \quad w_k \quad u_k ]^t. \quad (5.67b)$$

où  $v(-)$ ,  $w(-)$  et  $u(-)$  correspondent respectivement aux déplacements selon les directions  $y$ ,  $z$  et  $x$  et l'indice  $(-)$  représente soit l'indice du nœud maître  $i$  ou du nœud esclave  $k$ .

Il vient alors :

$$\delta^{i,k} \Pi_c = \frac{\partial^{i,k} \Pi_c}{\partial g_{n_i}} \frac{\partial g_{n_i}}{\partial \delta_{ms}} \delta(\delta_{ms}). \quad (5.68)$$

En se rappelant la définition de la distance  $g_{n_i}$ , l'Eq. (5.41) permet d'écrire :

$$\frac{\partial g_{n_i}}{\partial \delta_{ms}} \delta(\delta_{ms}) = \delta(\delta_{ms})^t \cdot \overrightarrow{N_m^i}, \quad (5.69)$$

où  $\overrightarrow{N_m^i}$  est défini dans l'Eq. 5.42b. La variation du potentiel de contact élémentaire fait apparaître la variation du travail des forces de contact et s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\delta^{i,k} \Pi_c = \delta(\delta_{ms})^t \cdot \underbrace{\frac{\partial^{i,k} \Pi_c}{\partial g_{n_i}} \cdot \overrightarrow{N_m^i}}_{i,k \mathcal{F}_n}, \quad (5.70)$$

où  $\frac{\partial^{i,k} \Pi_c}{\partial g_{n_i}} \cdot \overrightarrow{N_m^i}$  correspond au vecteur de forces de contact nodales  $^{i,k} \mathcal{F}_n$ , agissant entre les degrés de liberté de translation maîtres et esclaves, dont l'expression s'écrit, grâce aux Eq. (5.61) et Eq. (5.63), de la manière suivante pour les méthodes :

– **Pénalité** :

$$\begin{cases} ^{i,k} \mathcal{F}_n = \epsilon_n g_{n_i} \cdot \overrightarrow{N_m^i} & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ ^{i,k} \mathcal{F}_n = 0 & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases}, \quad (5.71)$$

– *Pénalité Barrière* :

$$\begin{cases} {}^{i,k}\mathcal{F}_n = (\tau_n + \varepsilon_n g_{n_i}) \cdot \overrightarrow{N}_m^i & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ {}^{i,k}\mathcal{F}_n = \tau_n e^{\left(\frac{\varepsilon_n}{\tau_n}\right) g_{n_i}} \cdot \overrightarrow{N}_m^i & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases}. \quad (5.72)$$

**Remarque 18:** En considérant les Eq. (5.61) ou Eq. (5.63), le vecteur de force de contact nodal peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} {}^{i,k}\mathcal{F}_n &= f_{n_i} \cdot \overrightarrow{N}_m^i, \\ \Leftrightarrow {}^{i,k}\mathcal{F}_n &= \begin{bmatrix} \underbrace{+f_{n_i} \cdot \vec{n}(M_m^i)}_{\text{Esclave}} \\ -f_{n_i} \cdot \vec{n}(M_m^i) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Maître}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n_{v_k}} \\ \mathcal{F}_{n_{w_k}} \\ \mathcal{F}_{n_{u_k}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n_{v_i}} \\ \mathcal{F}_{n_{w_i}} \\ \mathcal{F}_{n_{u_i}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

et faisant apparaître clairement le principe d'action-réaction agissant au niveau du contact de telle sorte qu'au  $i^e$  nœud maître, les degrés de liberté de translation  $\delta(M_m^i)$  soient associés à un vecteur de force de contact égale à  $-f_{n_i} \cdot \vec{n}(M_m^i)$ , et qu'au  $k^e$  nœud esclave, les degrés de liberté de translation  $\delta(M_s^k)$  soient associés à un vecteur de force de contact de sens opposé  $+f_{n_i} \cdot \vec{n}(M_m^i)$ .

La dimension du vecteur de force de contact nodal  ${}^{i,k}\mathcal{F}_n$  est donc égale à  $2 \times 2 = 4$  dans un problème plan : 2 degrés de liberté de translation par nœud  $(v, u)$  ou  $(u, w)$ .



Dans le cas d'un contact entre un nœud maître et un élément fini esclave, on ne considère plus le nœud esclave  $M_s^k$  dans la définition de la distance  $g_{n_i}$ , mais la projection du nœud maître  $C(M_m^i)$  sur l'élément fini  ${}^s\mathcal{K}_k$  telle que :

$$\begin{aligned} g_{n_i} &= gap + \overrightarrow{M}_m^i C(M_m^i) \cdot \overrightarrow{N}_m^i, \\ \Leftrightarrow g_{n_i} &= gap + \vec{\delta}_{ms}^t \cdot \overrightarrow{N}_m^i, \end{aligned} \quad (5.74)$$

avec :

$$\vec{\delta}_{ms} = \begin{bmatrix} \vec{\delta}(C(M_m^i)) \\ \vec{\delta}(M_m^i) \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

L'expression du vecteur de déplacement d'un point  $M$  situé le long d'un élément fini  $\mathcal{K}_e$  en l'abscisse  $\zeta$  s'écrit :

$$\vec{\delta}(M) = {}^e N(\zeta) {}^e \delta, \quad (5.76)$$

où  ${}^e \delta$  est le vecteur de degrés de liberté de l'élément fini  $\mathcal{K}_e$ , Eq. (5.32), et  ${}^e N(\zeta)$  est une matrice de fonctions de forme définie à l'aide des Eq. (A.118), Eq. (A.119), Eq. (A.121), Eq. (A.122) et Eq. (A.120) telle que :

$${}^e N(\zeta) = \begin{bmatrix} {}^e N_v^{v_e}(\zeta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^e N_w^{w_e}(\zeta) & 0 & 0 & {}^e N_w^{\theta_e}(\zeta) \dots \\ 0 & 0 & {}^e N_u^{u_e}(\zeta) & {}^e N_u^{\psi_e}(\zeta) & 0 \\ {}^e N_v^{v_{e+1}}(\zeta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & {}^e N_w^{w_{e+1}}(\zeta) & 0 & {}^e N_w^{\theta_{e+1}}(\zeta) \\ 0 & 0 & {}^e N_u^{u_{e+1}}(\zeta) & {}^e N_u^{\psi_{e+1}}(\zeta) & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.77)$$

où  ${}^e N_v^{ve}$  et  ${}^e N_v^{ve+1}$  sont définies dans les Eq. (A.293a) et Eq. (A.293b). L'expression des vecteurs déplacement de l'Eq. (5.75) devient alors :

$$\vec{\delta} (M_m^i) = {}^i N (\zeta_m)^i \delta, \quad \text{avec} \quad \zeta_m = 0, \quad (5.78)$$

et :

$$\vec{\delta} (C (M_m^i)) = {}^k N (\zeta_s)^k \delta, \quad \text{avec} \quad \zeta_s = 1 - \alpha_s. \quad (5.79)$$

de telle sorte que l'Eq. (5.75) devienne :

$$\vec{\delta}_{ms} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^k N (\zeta_s) & 0_{3,10} \\ 0_{3,10} & {}^i N (\zeta_m) \end{bmatrix}}_{{}^{i,k} N (\zeta_m, \zeta_s)} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^k \delta \\ {}^i \delta \end{bmatrix}}_{{}^{i,k} \delta}, \quad (5.80)$$

$$\Leftrightarrow \vec{\delta}_{ms} = {}^{i,k} N (\zeta_m, \zeta_s) {}^{i,k} \delta, \quad \text{avec} \quad \zeta_m = 0, \quad \zeta_s = 1 - \alpha_s.$$

Ainsi, en introduisant l'Eq. (5.80) dans l'Eq. (5.74), l'expression de la distance  $g_{n_i}$  devient :

$$g_{n_i} = gap + [{}^{i,k} N (\zeta_m, \zeta_s) {}^{i,k} \delta]^t \cdot \vec{N}_m^i, \quad (5.81)$$

et sa variation s'exprime alors en fonction de la variation  $\delta ({}^{i,k} \delta)$  de tous les degrés de liberté des éléments finis maître et esclave telle que :

$$\frac{\partial g_{n_i}}{\partial {}^{i,k} \delta} \delta ({}^{i,k} \delta) = [{}^{i,k} N (\zeta_m, \zeta_s) \delta ({}^{i,k} \delta)]^t \cdot \vec{N}_m^i. \quad (5.82)$$

La variation du potentiel de contact élémentaire  ${}^{i,k} \Pi_c$  s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \delta {}^{i,k} \Pi_c &= \frac{\partial {}^e \Pi_c}{\partial g_{n_i}} [{}^{i,k} N (\zeta_m, \zeta_s) \delta ({}^{i,k} \delta)]^t \cdot \vec{N}_m^i, \\ \Leftrightarrow \delta {}^{i,k} \Pi_c &= \delta ({}^{i,k} \delta)^t \cdot \underbrace{\frac{\partial {}^e \Pi_c}{\partial g_{n_i}} \cdot {}^{i,k} N^t (\zeta_m, \zeta_s) \vec{N}_m^i}_{{}^{i,k} \mathcal{F}_n}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Le vecteur de force de contact  ${}^{i,k} \mathcal{F}_n$  peut désormais être considéré comme “élémentaire”, en opposition au qualificatif “nodal” utilisé précédemment dans le sens où  ${}^{i,k} \mathcal{F}_n$  est relatif à tous les degrés de liberté (translation et rotation) des éléments finis maître et esclave concernés par le contact. Selon la méthode de pénalité choisie, le vecteur de force de contact élémentaire  ${}^{i,k} \mathcal{F}_n$  s'exprime alors de la manière suivante :

– **Pénalité :**

$$\begin{cases} {}^{i,k} \mathcal{F}_n = \varepsilon_n g_{n_i} \cdot {}^{i,k} N^t (\zeta_m, \zeta_s) \vec{N}_m^i & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ {}^{i,k} \mathcal{F}_n = 0 & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases}, \quad (5.84)$$

– **Pénalité Barrière :**

$$\begin{cases} {}^{i,k} \mathcal{F}_n = (\tau_n + \varepsilon_n g_{n_i}) \cdot {}^{i,k} N^t (\zeta_m, \zeta_s) \vec{N}_m^i & \text{si } g_{n_i} \leq 0 \\ {}^{i,k} \mathcal{F}_n = \tau_n e^{\left(\frac{\varepsilon_n}{\tau_n}\right) g_{n_i}} \cdot {}^{i,k} N^t (\zeta_m, \zeta_s) \vec{N}_m^i & \text{si } g_{n_i} > 0 \end{cases}. \quad (5.85)$$

Les Eq. (5.61) et Eq. (5.63) permettent d'exprimer les Eq. (5.84) et Eq. (5.85) d'une manière plus générale telle que :

$$\begin{aligned}
 {}^{i,k}\mathcal{F}_n &= f_{n_i} \cdot {}^{i,k}N^t(\zeta_m, \zeta_s) \overrightarrow{N}_m^i \\
 \Leftrightarrow {}^{i,k}\mathcal{F}_n &= \begin{bmatrix} \underbrace{+f_{n_i} \cdot {}^kN^t(\zeta_s) \vec{n}(M_m^i)}_{\text{Esclave}} \\ -f_{n_i} \cdot {}^iN^t(\zeta_m) \vec{n}(M_m^i) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Maître}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [{}^k\mathcal{F}_n] \\ [{}^i\mathcal{F}_n] \end{bmatrix}. \quad (5.86)
 \end{aligned}$$

Le vecteur de force de contact élémentaire  ${}^k\mathcal{F}_n$  relatif à l'élément fini esclave  ${}^s\mathcal{K}_k$  correspond à un vecteur de forces nodales équivalentes au vecteur de force de contact  $+f_{n_i} \cdot \vec{n}(M_m^i)$  agissant au nœud  $C(M_m^i)$  et est défini tel que :

$${}^k\mathcal{F}_n = \left[ \mathcal{F}_{n_{v_k}}, \mathcal{F}_{n_{w_k}}, \mathcal{F}_{n_{u_k}}, \mathcal{F}_{n_{\psi_k}}, \mathcal{F}_{n_{\theta_k}}, \mathcal{F}_{n_{v_{k+1}}}, \mathcal{F}_{n_{w_{k+1}}}, \mathcal{F}_{n_{u_{k+1}}}, \mathcal{F}_{n_{\psi_{k+1}}}, \mathcal{F}_{n_{\theta_{k+1}}} \right]^t, \quad (5.87)$$

et dont les composantes ont les formes suivantes :

$$\mathcal{F}_{n_{(\bullet)}} = f_{n_i} \cdot y_{n_m^i} \cdot {}^kN_v^{(\bullet)}(\zeta_s), \quad \text{avec } (\bullet) = (v_k, v_{k+1}), \quad (5.88)$$

$$\mathcal{F}_{n_{(\bullet)}} = f_{n_i} \cdot z_{n_m^i} \cdot {}^kN_w^{(\bullet)}(\zeta_s), \quad \text{avec } (\bullet) = (w_k, \theta_k, w_{k+1}, \theta_{k+1}), \quad (5.89)$$

$$\mathcal{F}_{n_{(\bullet)}} = f_{n_i} \cdot x_{n_m^i} \cdot {}^kN_u^{(\bullet)}(\zeta_s), \quad \text{avec } (\bullet) = (u_k, \psi_k, u_{k+1}, \psi_{k+1}), \quad (5.90)$$

où  $x_{n_m^i}$ ,  $y_{n_m^i}$  et  $z_{n_m^i}$  sont les composantes du vecteur normal au contact  $\vec{n}(M_m^i)$  définies dans l'Eq. (5.50a).

**Remarque 19:** La spécificité des méthodes de pénalité (et barrière) concerne le fait qu'une légère pénétration est autorisée entre les domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$  durant la résolution. Si l'on se focalise sur la méthode de la pénalité, Eq. (5.84), il est possible de mettre en évidence cette possibilité d'inter-pénétration des domaines en explicitant l'expression du vecteur de force de contact élémentaire  ${}^{i,k}\mathcal{F}_n$ . Ainsi, en développant l'Eq. (5.83), dans le cas où  $g_{n_i} \leq 0$  (inter-pénétration), la variation du potentiel élémentaire de contact s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \delta^{i,k}\Pi_c &= \varepsilon_n \left( gap + [{}^{i,k}N(\zeta_m, \zeta_s) \delta^{i,k} \delta]^t \cdot \overrightarrow{N}_m^i \right) [{}^{i,k}N(\zeta_m, \zeta_s) \delta^{i,k} \delta]^t \cdot \overrightarrow{N}_m^i, \\
 \Leftrightarrow \delta^{i,k}\Pi_c &= \varepsilon_n gap \cdot \delta^{i,k} \delta^t \cdot {}^{i,k}N^t(\zeta_m, \zeta_s) \cdot \overrightarrow{N}_m^i \\
 &\quad + \varepsilon_n \cdot {}^{i,k} \delta^t \cdot {}^{i,k}N^t(\zeta_m, \zeta_s) \left[ \overrightarrow{N}_m^i \overrightarrow{N}_m^{i,t} \right] {}^{i,k}N(\zeta_m, \zeta_s) \delta^{i,k} \delta, \quad (5.91) \\
 \Leftrightarrow \delta^{i,k}\Pi_c &= \delta(\delta_{ms})^t \underbrace{\varepsilon_n gap \cdot {}^{i,k}N^t(\zeta_m, \zeta_s) \cdot \overrightarrow{N}_m^i}_{\text{Force}} \\
 &\quad + \underbrace{\delta^{i,k} \delta^t \cdot \varepsilon_n \cdot {}^{i,k}N^t(\zeta_m, \zeta_s) \left[ \overrightarrow{N}_m^i \overrightarrow{N}_m^{i,t} \right] {}^{i,k}N(\zeta_m, \zeta_s) \delta^{i,k} \delta}_{\text{Raideur}},
 \end{aligned}$$

et se décompose en un vecteur de force constant et une matrice de raideur dont l'ordre de grandeur est très élevée (rappelons que le coefficient de pénalité  $\varepsilon_n$  est d'ordre très supérieur à la raideur globale du système) définie par  ${}^{i,k}K_c$  telle que :

$${}^{i,k}K_c = \varepsilon_n \cdot {}^{i,k}N^t(\zeta_m, \zeta_s) \left[ \overrightarrow{N}_m^i \overrightarrow{N}_m^{i,t} \right] {}^{i,k}N(\zeta_m, \zeta_s). \quad (5.92)$$

La matrice  ${}^{i,k}K_c$  sera utilisée ultérieurement pour modéliser le contact permanent entre les domaines maître et esclave durant la détermination de la réponse dynamique d'un rotor. Cette matrice permettra de coupler les degrés de liberté transversaux  $u$  et  $w$  selon que le vecteur normal soit respectivement égal à  $\vec{n}(M_m^i) = [1, 0, 0]^t$  ou  $\vec{n}(M_m^i) = [0, 0, 1]^t$ .

Lorsque les forces extérieures impliquent une inter-pénétration entre les domaines maître et esclave, *i.e.*  $g_{n_i} \leq 0$ , il apparaît alors clairement que la méthode de la pénalité revient à imposer :

- une raideur d'ordre de grandeur très élevé entre les domaines maître et esclave,
- des forces constantes de sens opposé dans la direction normale au contact de manière à maintenir en contact les deux domaines. Par ailleurs, à ces forces de contact viennent s'ajouter les forces extérieures qui ont engendré ce contact et impliquent par conséquent une légère inter-pénétration des domaines.



#### 5.4.6 Inter-pénétration et méthode de pénalité. Interprétation sur un système élémentaire

Grâce à un système à un degré de liberté, on se propose d'illustrer, d'une part, que la méthode de la pénalité peut être appliquée en ajoutant des termes de raideur et force aux nœuds en contact, et qu'elle autorise, d'autre part, une légère inter-pénétration des domaines maîtres et esclave.

Considérons alors un système mécanique constituée d'une raideur  $k_m$  connectée entre les nœuds  $A$  et  $M_m^i$ , FIG. 5.10(a).

Supposons que ce système, à un degré de liberté, puisse se mouvoir dans la direction  $x$ , dans le plan  $\{xOy\}$  muni du repère  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , tel que le déplacement du nœud  $M_m^i$  soit paramétré par le degré de liberté  $x_m$  et s'écrive :

$$\vec{\delta}(M_m^i) = x_m \vec{x}. \quad (5.93)$$

Soit  $\Omega_m$  le domaine maître constitué par ce système mécanique élémentaire et  $\Omega_s$  le domaine esclave supposé fixe et orienté dans la direction  $y$  tel que :

$$\vec{\delta}(M_s^k) = \vec{0}. \quad (5.94)$$

Dans la configuration initiale  $\mathcal{C}_0$ , FIG. 5.10(a), les nœuds maître et esclave sont éloignés d'une distance  $g_{n_0}$  connue notée *gap*, Eq. (5.36). On admet alors qu'un contact est possible entre les domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$ , et plus particulièrement entre les nœuds maître  $M_m^i$  et esclave  $M_s^k$ . Les domaines maître et esclave étant définis, le vecteur normal au contact  $\vec{n}(M_m^i)$  est donc orienté tel que :

$$\vec{n}(M_m^i) = \vec{x}. \quad (5.95)$$

Les Eq. (5.93), Eq. (5.94) et Eq. (5.95) permettent ainsi de définir la fonction distance  $g_{n_i}$ , Eq. (5.41), telle que :

$$g_{n_i} = \text{gap} - x_m. \quad (5.96)$$

Une force extérieure constante  $\vec{F}$  est appliquée au nœud  $M_m^i$  et définie telle que :

$$\vec{F} = F \cdot \vec{x}, \quad (5.97)$$

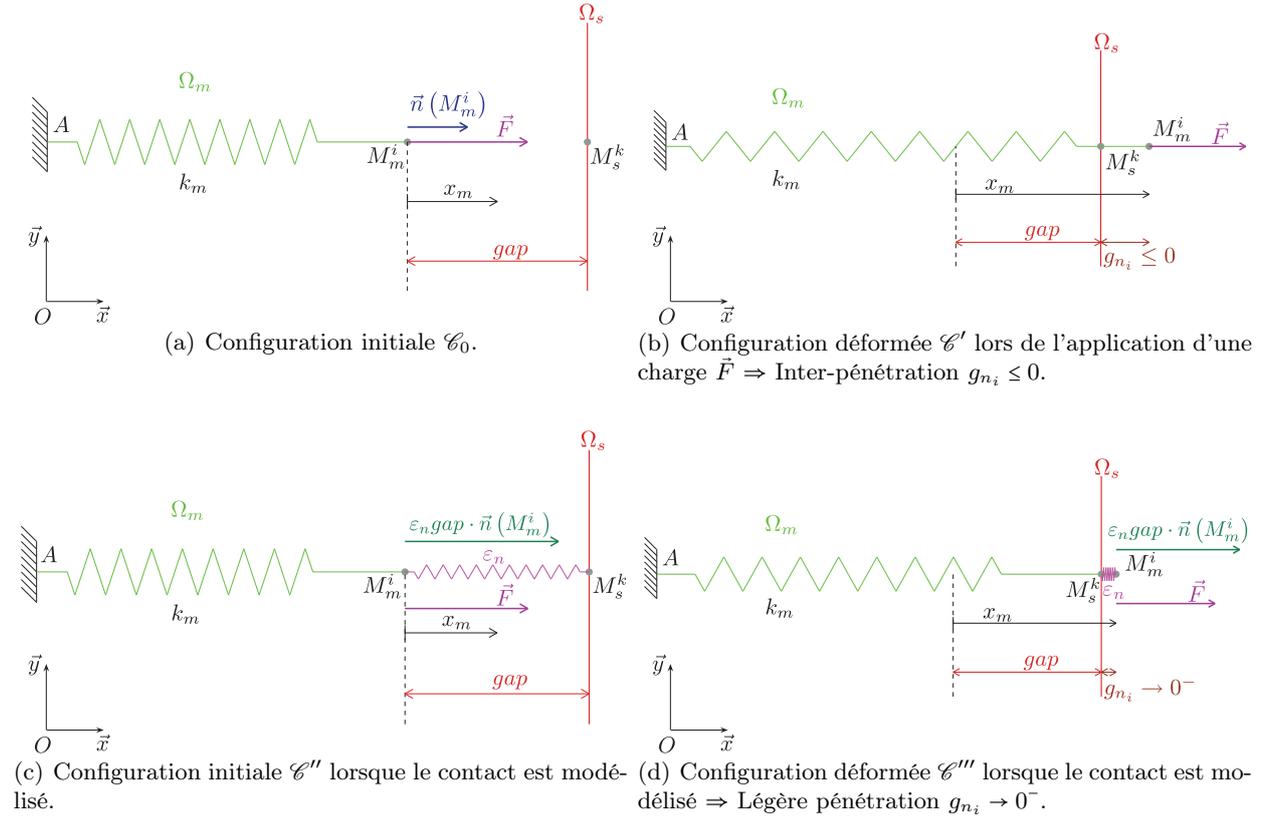


FIGURE 5.10 – Évolution d'un système mécanique élémentaire de raideur  $k_m$  lors de la modélisation du contact.

engendrant une configuration déformée  $\mathcal{C}'$ , FIG. 5.10(b), dont la réponse statique évidente est donnée par :

$$x_m = \frac{F}{k_m}. \quad (5.98)$$

On suppose que cette configuration  $\mathcal{C}'$  est caractérisée par une inter-pénétration des domaines  $\Omega_m$  et  $\Omega_s$ , *i.e.*  $g_{n_i} \leq 0 \Leftrightarrow x_m \geq gap$ , FIG. 5.10(b). Il est clair que la réalité physique de ce système élémentaire conduit à une réponse statique  $x_m$  définie telle que :

$$x_m \in [0, gap] \Leftrightarrow F \in [0, k_m \cdot gap]. \quad (5.99)$$

On applique alors la méthode de la pénalité (extérieure) afin de modéliser le contact entre les nœuds maître  $M_m^i$  et esclave  $M_s^k$ . Le coefficient de pénalité est noté  $\varepsilon_n$ .

L'application de l'Eq. (5.65) conduit à :

$$\delta \mathcal{U} = 0 \Leftrightarrow \delta \Pi_d - \delta \mathcal{W}_{ext} + \delta^{i,k} \Pi_c = 0, \quad (5.100)$$

avec :

$$\Pi_d = \frac{1}{2} k_m x_m^2, \quad (5.101a) \quad \mathcal{W}_{ext} = F x_m, \quad (5.101b) \quad {}^{i,k} \Pi_c = \frac{1}{2} \varepsilon_n g_{n_i}^2, \quad (5.101c)$$

dont les variations, par rapport au degré de liberté  $x_m$ , sont données par les relations suivantes :

$$\delta \Pi_d = k_m x_m \delta x_m, \quad (5.102a) \quad \delta \mathcal{W}_{ext} = F \delta x_m, \quad (5.102b)$$

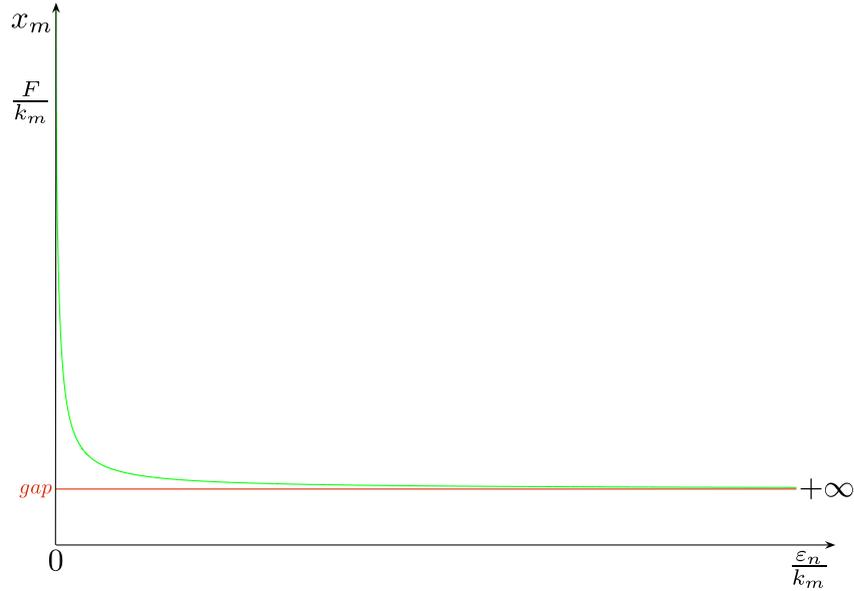


FIGURE 5.11 – Amplitude de la réponse statique du système mécanique élémentaire en fonction du rapport  $\frac{\varepsilon_n}{k_m}$ .

et :

$$\delta^{i,k}\Pi_c = \varepsilon_n (gap - x_m) \delta g_{n_i} \Leftrightarrow \delta^{i,k}\Pi_c = \underbrace{-\varepsilon_n (gap - x_m)}_{i,k \mathcal{F}_n} \delta x_m. \quad (5.103)$$

L'Eq. (5.100) devient alors :

$$\begin{aligned} k_m x_m - F - \varepsilon_n (gap - x_m) &= 0, \\ \Leftrightarrow k_m x_m + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{Raideur}} x_m &= \underbrace{F + \varepsilon_n gap}_{\text{Force}}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

On retrouve donc les termes de raideur et de force constant évoqués précédemment dans l'Eq. (5.91) qui traduisent clairement le principe de la méthode de la pénalité qui consiste à - ajouter une raideur  $\varepsilon_n$  entre les nœuds maître  $M_m^i$  est esclave  $M_s^k$  - et une force constante  $\varepsilon_n \cdot gap$  appliquée au nœud  $M_m^i$  comme illustré FIG. 5.10(c).

Finalement, lorsque la méthode de la pénalité est considérée, la réponse statique du système mécanique élémentaire :

$$x_m = \frac{F}{(k_m + \varepsilon_n)} + \frac{gap}{\left[1 + \left(\frac{k_m}{\varepsilon_n}\right)\right]}. \quad (5.105)$$

**Remarque 20:** La FIG. 5.11 illustre l'évolution de l'amplitude de la réponse statique du système mécanique élémentaire, Eq. (5.105), en fonction du rapport entre coefficient de pénalité  $\varepsilon_n$  et la raideur du système  $k_m$ . L'importance de la valeur du coefficient de pénalité  $\varepsilon_n$  est alors mise en évidence en sens où plus son ordre de grandeur vis-à-vis de la raideur du système est important, plus la réponse statique du système considérant le contact tendra vers la solution physique  $x_m = gap$ .

En revanche, si l'on se place aux limites de la réponse statique  $x_m \left(\frac{\varepsilon_n}{k_m}\right)$ , FIG. 5.11, on obtient :

- Si  $\frac{\varepsilon_n}{k_m} \rightarrow 0$ , alors  $x_m \rightarrow \frac{F}{k_m}$ , la réponse statique obtenue sans considérer la méthode de la pénalité, Eq. (5.98).

- Si  $\frac{\varepsilon_n}{k_m} \rightarrow +\infty$ , alors  $x_m - gap \rightarrow 0^+$ , Eq. (5.105).

Le fait que la réponse statique  $x_m$  tende par valeur supérieure vers la valeur du jeu  $gap$  démontre qu'une légère pénétration est autorisée entre les domaines maître et esclave lorsque la méthode de la pénalité est privilégiée, FIG. 5.10(d).



### 5.4.7 Résolution non linéaire

Les conditions de stationnarité appliquées à l'Eq. (5.40) conduisent à  $\delta \mathcal{U} = 0$  et permettent d'obtenir l'équation satisfaisant l'équilibre quasi-statique du système :

$$K_{nl}(\delta, \omega) \delta = \mathcal{F}_{nl}(\delta, \omega) \quad (5.106)$$

qui est résolue en utilisant un algorithme du point fixe (cf. Alg. 10, Annexe D.3) de telle sorte qu'à l'itération  $j$  il faille résoudre :

$$\delta^{j+1} = K_{nl}^j(\omega, \delta^j)^{-1} \mathcal{F}_{nl}^j(\omega, \delta^j). \quad (5.107)$$

Les matrice  $K_{nl} \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  et vecteur  $\mathcal{F}_{nl} \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  sont respectivement les matrice de raideur et vecteur des force non-linéaires du système définis tels que :

$$K_{nl}(\delta) = K_e(\delta) + K_G(\delta) + K_{bc} \quad (5.108)$$

$$\mathcal{F}_{nl}(\delta, \omega) = \mathcal{F}_c(\omega, \delta) - \mathcal{F}_n(\delta) + P(\delta) + \mathcal{F}_{bc} \quad (5.109)$$

où  $K_{bc} \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  et  $\mathcal{F}_{bc} \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  sont respectivement les matrice et vecteur de pénalité définissant les conditions aux limites tels que :

$$K_{bc} = \varepsilon_{bc} L^t L, \quad (5.110a) \quad \mathcal{F}_{bc} = \varepsilon_{bc} L^t \delta_{bc}, \quad (5.110b)$$

avec :

$$\varepsilon_{bc} = \max(K_e(\delta), K_G(\delta)) \cdot 10^9. \quad (5.111)$$

La matrice de pénalisation  $L \in \mathcal{M}_{n_{bc}, n_\delta}$  traduit les  $n_{bc}$  contraintes cinématiques imposées par les conditions aux limites telle que :

$$L\delta = \delta_{bc}, \quad (5.112)$$

où  $\delta_{bc} \in \mathbb{R}_{n_{bc}}$  représente le vecteur des déplacements imposés.

La matrice de raideur élastique  $K_e$  est non-linéaire puisque les propriétés constitutives de l'empilement sont des fonctions de la charge longitudinales  $P$ , cette dernière impliquant également une matrice de raideur géométrique,  $K_G$ , au sein des tirants.  $\mathcal{F}_n$  est le vecteur global des forces de contact agissant sur les frontières  $\Gamma_c^m$  et  $\Gamma_c^m$ , Eq. (5.71), et  $\mathcal{F}_c$  représente le vecteur global des efforts centrifuges.

**Remarque 21:** Les charges longitudinales élémentaires  ${}^e P$  induites par les déflexion non-linéaire et déformation longitudinale du tirant sont estimées pratiquement à partir de la variation de longueur des éléments finis modélisant ce tirant (cf. Alg. 10).



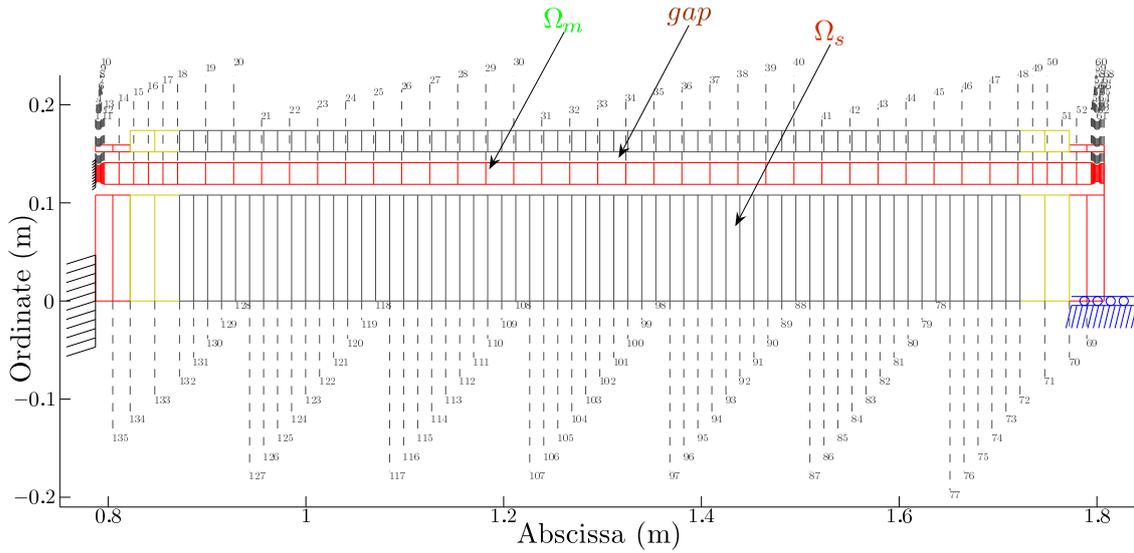


FIGURE 5.12 – Modèle éléments finis des domaines  $\Omega_m$  (tirant) et  $\Omega_s$  (partie du rotor feuilleté).

## 5.5 Application Industrielle

L'illustration porte sur un rotor feuilleté monté sur paliers hydrodynamiques à une vitesse de rotation comprise entre 1 000 à 20 000 rpm, et sujet à d'éventuelles combinaisons de balourds. L'objectif de cette section est d'estimer l'influence de l'effet centrifuge sur les vitesses critiques de rotation. Le TAB. 5.1 présente les propriétés des matériaux relatifs aux différents composants du rotor présentant une masse de 980 kg et une longueur de 2.6 m.

### 5.5.1 Calcul non linéaire quasi-statique

Un problème quasi-statique est donc considéré dans le plan  $\{yGz\}$  (cf. Section 5.3.1) dont le modèle élément fini est présenté FIG. 5.12. Les indices des éléments finis délimitant les domaines maître  $\Omega_m$  et esclave  $\Omega_s$ , FIG. 5.12, sont donnés par :

$$e_{m_i} = 1, \quad e_{m_f} = 67, \quad (5.113a)$$

$$e_{s_i} = 68, \quad e_{s_f} = 135, \quad (5.113b)$$

tels que :

$$\Omega_m = \bigcup_{e=1}^{67} \mathcal{K}_e, \quad (5.114a)$$

$$\Omega_s = \bigcup_{e=68}^{135} \mathcal{K}_e, \quad (5.114b)$$

Il y a un encastrement au nœud N°1 et un guidage axial (dans la direction  $y$ ) au nœud N°68. Le vecteur élémentaire des degrés de liberté associés au problème plan est défini par :

$${}^e\delta = \{v_e, w_e, \theta_e, v_{e+1}, w_{e+1}, \theta_{e+1}\}. \quad (5.115)$$

A partir des Eq. (A.161) et Eq. (A.163) et des fonctions de formes des Eq. (A.293), les matrices élémentaires de raideur élastique  ${}^eK_e$  et géométrique  ${}^eK_G$  des tirants sont définies par :

$${}^eK_e = \underbrace{\frac{{}^eE^e I_G}{(1 + \phi_y) e l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{f_{11}} & -k_{f_{14}} & 0 & k_{f_{15}} & k_{f_{18}} \\ & & k_{f_{33}} & 0 & -k_{f_{18}} & k_{f_{37}} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ S & y & m & & k_{f_{11}} & k_{f_{14}} \\ & & & & & k_{f_{33}} \end{bmatrix}}_{\text{Déflexion Transversale}} + \underbrace{\frac{{}^eE^e S}{e l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ S & y & m & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Traction-Compression}}, \quad (5.116)$$

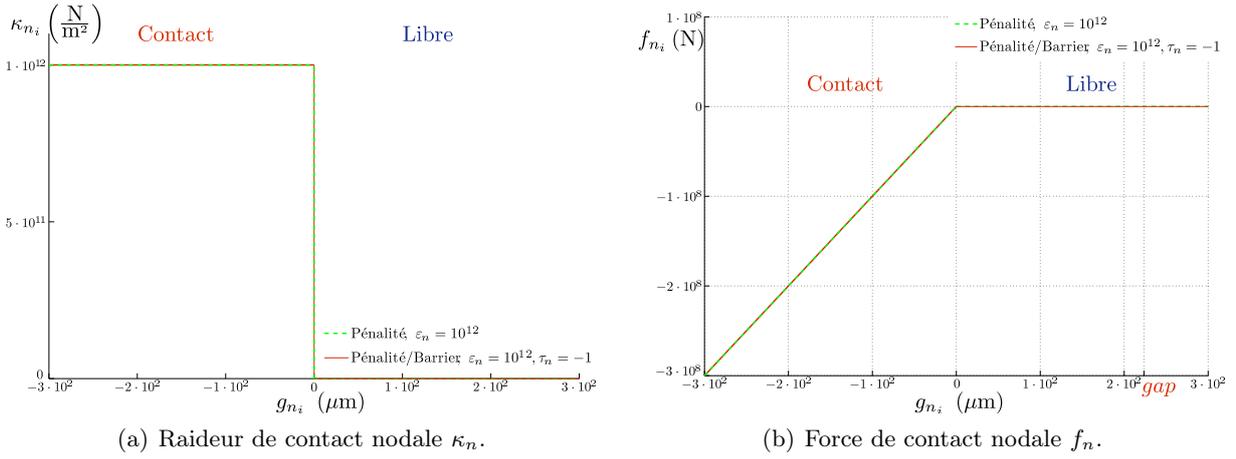


FIGURE 5.13 – Tendence de la méthode de la pénalité barrière ( $\varepsilon_n = 10^{12}$ ,  $\tau_n = -1$ ) vers la méthode de la pénalité,  $gap = 0.2236 \cdot 10^{-3}$  m.

et :

$${}^e K_G = \frac{{}^e P}{(1 + {}^e \phi_y)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{G_{11}} & -k_{G_{14}} & 0 & k_{G_{15}} & k_{G_{18}} \\ & & k_{G_{33}} & 0 & -k_{G_{18}} & k_{G_{37}} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & k_{G_{11}} & k_{G_{14}} \\ & & & & & k_{G_{33}} \end{bmatrix}, \quad (5.117)$$

avec les composantes  $k_{f(\bullet)}$  et  $k_{G(\bullet)}$ ,  $(\bullet) = (11, 14, 15, 18, 33, 37)$ . Le vecteur élémentaire des forces de contact  ${}^{i,k} \mathcal{F}_n$  est défini dans l'Eq. (5.71), et des efforts centrifuges  ${}^e \mathcal{F}_c$  à partir des Eq. (A.199) et Eq. (A.210) :

$${}^e \mathcal{F}_c = \frac{{}^e l}{(1 + {}^e \phi_y)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ {}^e l \left( \frac{7}{20} + \frac{1}{3} {}^e \phi_y \right) & {}^e l \left( \frac{3}{30} + \frac{1}{6} {}^e \phi_y \right) \\ 0 & 0 \\ \frac{3}{20} + \frac{1}{6} {}^e \phi_y & \frac{7}{20} + \frac{1}{3} {}^e \phi_y \\ -{}^e l \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{24} {}^e \phi_y \right) & -{}^e l \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{24} {}^e \phi_y \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_e \\ p_{e+1} \end{pmatrix}, \quad (5.118)$$

avec les forces nodales :

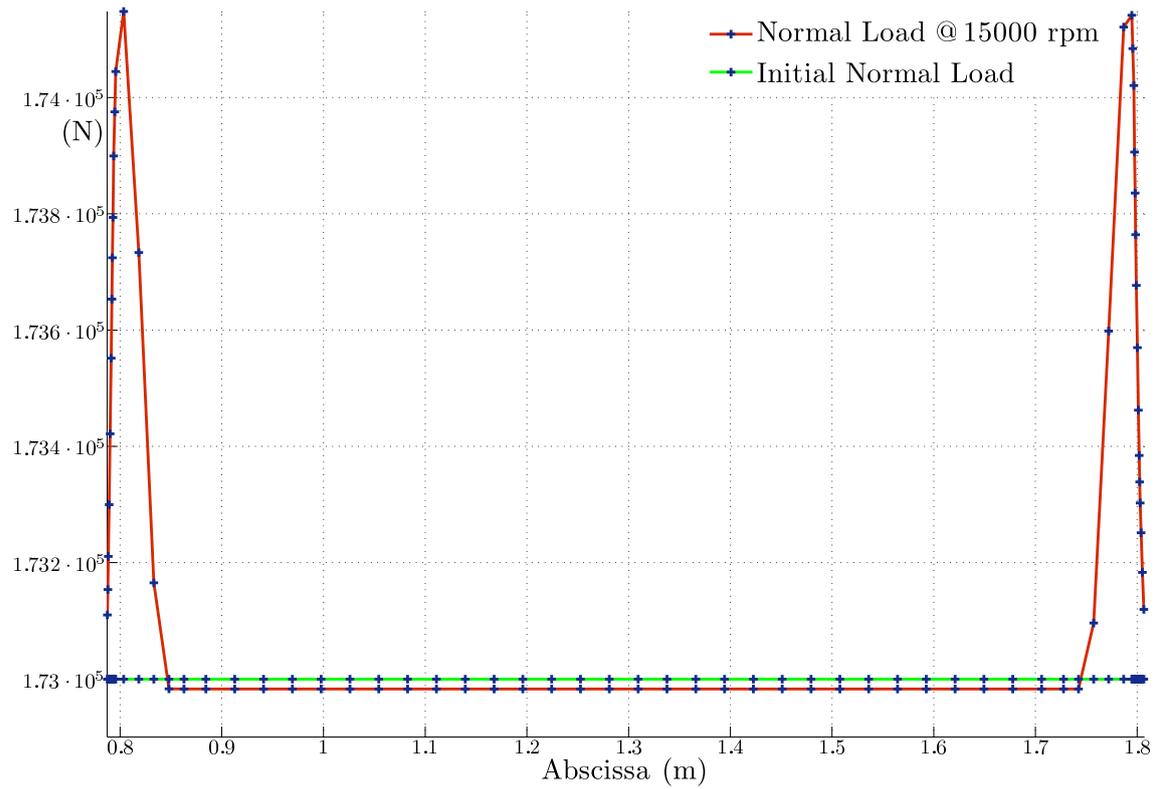
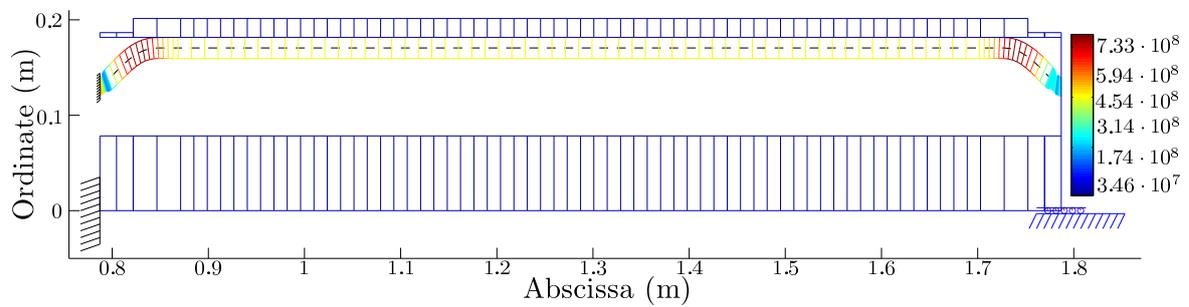
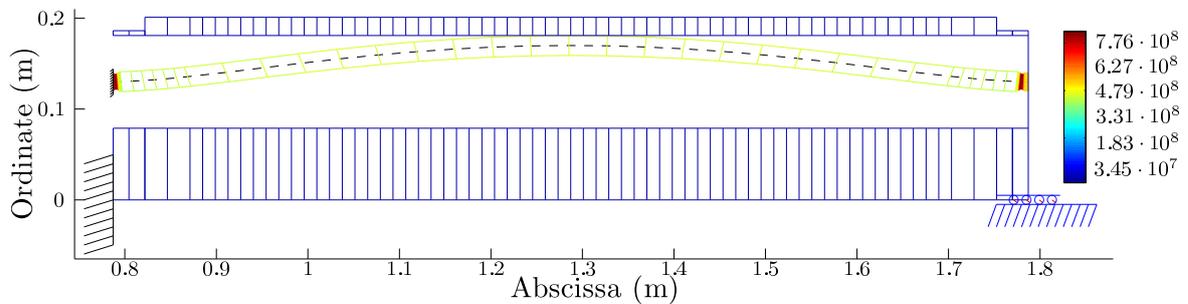
$$\begin{pmatrix} p_e \\ p_{e+1} \end{pmatrix} = {}^e \rho^e S \omega^2 \begin{pmatrix} {}^e w + e_{ti} \\ {}^{e+1} w + e_{ti} \end{pmatrix}. \quad (5.119)$$

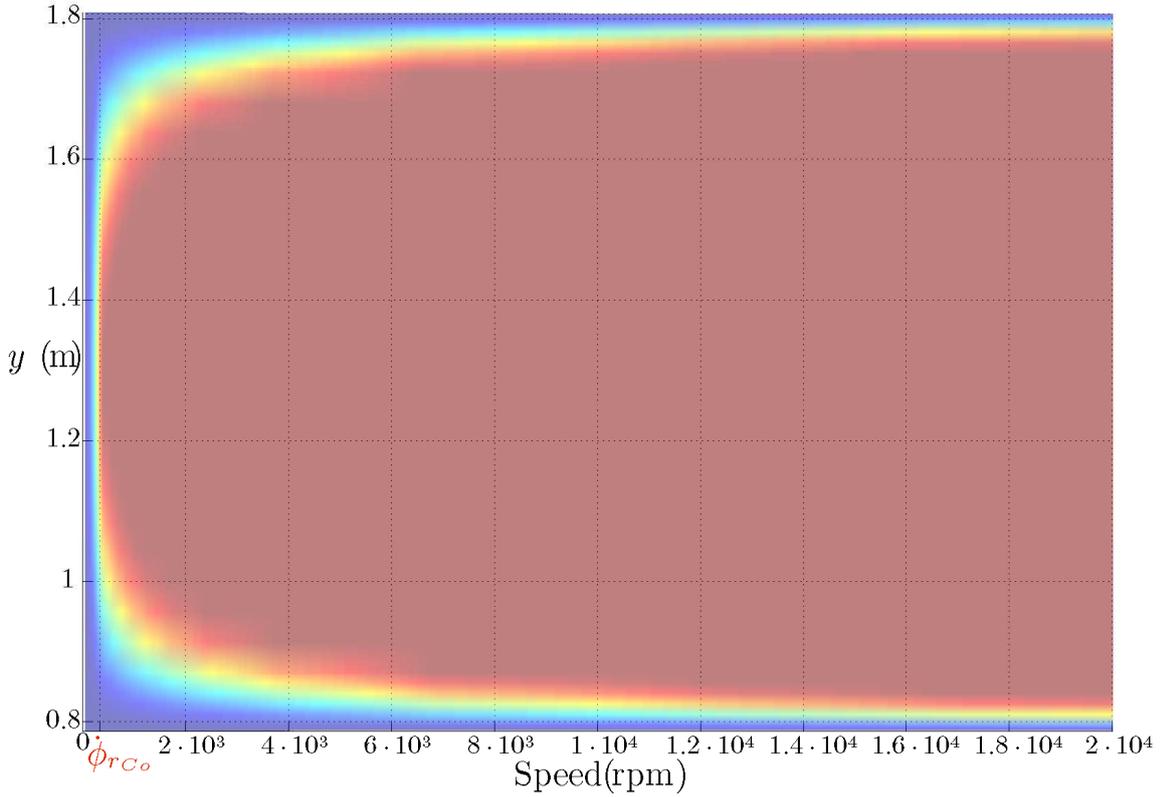
A chaque vitesse de rotation  $\dot{\phi}$ , l'algorithmme itératif de point fixe, Alg. 10 (Annexe D.3), est utilisé pour résoudre le problème non-linéaire quasi-statique, Eq. (5.106), pour un jeu initial (et fonctionnel) défini tel que :

$$gap = 0.2236 \cdot 10^{-3} \text{ m}. \quad (5.120)$$

| Élément                  | $\rho$                              | $E$                                | $G$                                | $\nu$ |
|--------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-------|
| Assemblage               | ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) | ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | ( )   |
| Portion d'arbre          | 7870                                | $2.05 \cdot 10^{11}$               | $7.97 \cdot 10^{10}$               | 0.285 |
| Empilement               | 7497                                | $1.24 \cdot 10^{11}$               | $2.26 \cdot 10^{10}$               | 0.280 |
| Tirants                  | 7830                                | $2.10 \cdot 10^{11}$               | $8.26 \cdot 10^{10}$               | 0.270 |
| Barres de court-circuit  | 8900                                | $1.20 \cdot 10^{11}$               | $4.47 \cdot 10^{10}$               | 0.340 |
| Anneaux de court-circuit | 8750                                | $1.32 \cdot 10^{11}$               | $5.07 \cdot 10^{10}$               | 0.300 |

TABLEAU 5.1 – Propriétés constitutives des composants du rotor feuilleté.

FIGURE 5.14 – Distribution de la charge longitudinale à  $\dot{\phi}_r = 15\,000$  rpm.FIGURE 5.15 – Déflexion d'un tirant à  $\dot{\phi}_r = 15\,000$  rpm.FIGURE 5.16 – Déflexion d'un tirant à  $\dot{\phi}_{rCo} \sim 345$  rpm, *i.e.* le contact est initié.

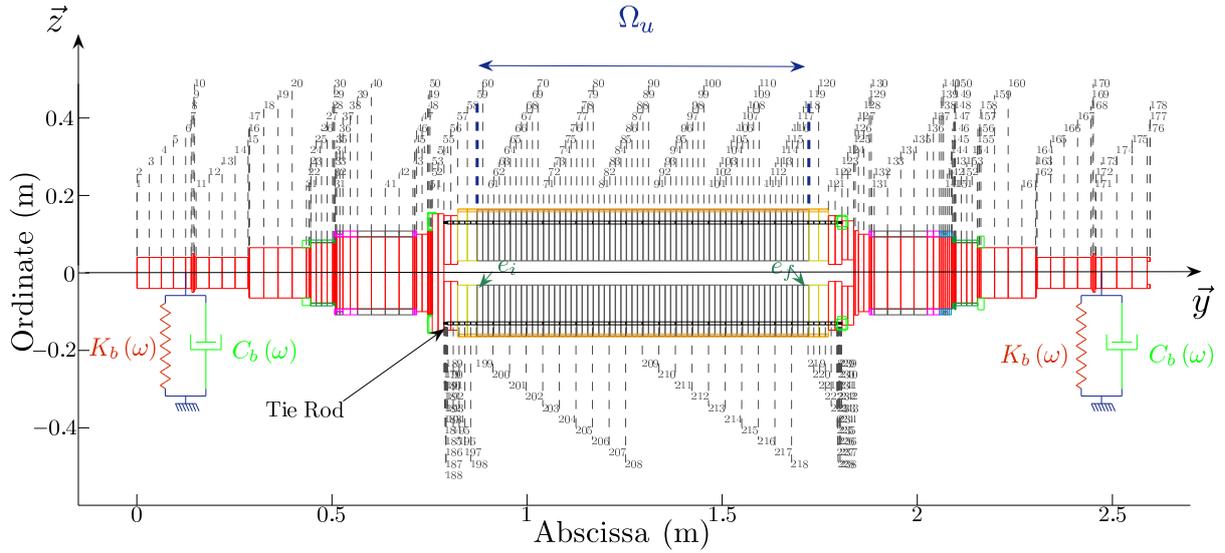

 FIGURE 5.17 – Évolution de la zone de contact  $\Gamma_c^m$  pour  $\dot{\phi}_r = 50$  à 20 000 rpm.

La méthode de la pénalité extérieure est privilégiée en fixant le coefficient de pénalité  $\varepsilon_n$  à  $1 \cdot 10^{12}$   $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$  telle que les force  $f_{n_i}$  et raideur  $\kappa_{n_i}$  de contact en fonction de la distance  $g_{n_i}$  suivent les évolutions illustrées FIG. 5.13(a) et FIG. 5.13(b).

La FIG. 5.14 présente un exemple de distribution de charge longitudinale  $P$ , dans un tirant, calculée à  $\dot{\phi}_r = 15\,000$  rpm. La déflexion associée du tirant est illustrée par la FIG. 5.15. La distribution de charge reste quasiment constante sur la majeure partie du tirant alors qu'elle atteint deux maxima en chacune de ses extrémités. En revanche, le maximum présente un léger accroissement de l'ordre de  $\sim 1\%$  de la charge de précontrainte initiale  $P_0$ .

En effet, l'effet centrifuge induit une déflexion du tirant et implique, par conséquent, principalement des contraintes de flexion jusqu'à ce que le contact apparaisse à  $\dot{\phi}_{r_{Co}} \sim 345$  rpm, comme le montre la FIG. 5.16. En fait, cette charge longitudinale tend à comprimer l'empilement de tôles et donc à détendre le tirant. Puis, lorsque la vitesse de rotation  $\dot{\phi}$  augmente, la longueur de contact augmente également et occupe une zone du domaine  $\Omega_m$  où la valeur de la charge longitudinale est constante; la zone qui n'est pas sujette au contact, *i.e.* extrémités du tirant, présente alors des niveaux de contrainte de cisaillement qui augmentent. Dans cette zone, sa ligne moyenne s'étire de plus en plus ce qui conduit à une augmentation de la charge longitudinale non linéaire qui agit sur le feuilletage en le comprimant. Ainsi, le tirant, solidaire des extrémités du feuilletage, se détend longitudinalement. La FIG. 5.17 illustre l'évolution de la zone de contact  $\Gamma_c^m$  en fonction de la vitesse de rotation; les couleurs dépendent de l'amplitude de la déflexion  $w$  du tirant : le bleu indique sa valeur minimale alors que le rouge indique sa valeur maximale, *i.e.* lorsque ce dernier a consommé la totalité du jeu fonctionnel disponible dans le feuilletage.

Comme indiqué par les échelles de couleur des FIG. 5.16 et FIG. 5.15, les contraintes de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$  ises, Eq. (A.370), augmentent au sein du feuilletage ce qui assure, grâce au comportement par-

FIGURE 5.18 – Modèle éléments finis du rotor feuilleté,  $N_e = 243$ .

ticulier des matériaux feuilletés, une augmentation de la rigidité de flexion du feuilletage. Bien que la charge longitudinale, due à la compression, diminue au sein du tirant, celle due à la non linéarité géométrique augmente impliquant alors une charge longitudinale supplémentaire ainsi qu'un effet de “*stress stiffening*”. À  $\phi_r \sim 15\,000$  rpm, la valeur maximale des contraintes de Von Mises des tirants est inférieure à celle initialement appliquée ( $\sim -6\%$ ), mais assure toujours la précontrainte à l'assemblage.

### 5.5.2 Paliers Hydrodynamiques

Les paliers hydrodynamiques sont constitués de quatre patins oscillants (“*tilting pads*”) et sont situés sur chacune des portion d'arbre. Ils possèdent les mêmes caractéristiques de raideur et amortissement qui dépendent de la vitesse de rotation. Les deux paliers sont modélisés avec des éléments finis discrets à un nœud et deux degrés de liberté de translation, Eq. (A.177), et sont connectés aux nœuds N°6 et N°173 du modèle éléments finis présenté FIG. 5.18. Les coefficients de raideur ( $k_{p_{xx}}, k_{p_{xz}}, k_{p_{zz}}, k_{p_{zx}}$ ) et d'amortissement ( $c_{p_{xx}}, c_{p_{xz}}, c_{p_{zz}}, c_{p_{zx}}$ ) des paliers sont calculés à partir des relations suivantes :

$$k_{p_{ij}} = \tilde{k}_{p_{ij}}(\mathcal{S}) \frac{F_r}{C_r}, \quad (5.121a) \quad c_{p_{ij}} = \tilde{c}_{p_{ij}}(\mathcal{S}) \frac{F_r}{C_r \phi}, \quad (5.121b)$$

où les indices  $i$  et  $j$  représentent successivement les directions  $x$  et  $z$ . Les coefficients adimensionnels  $\tilde{k}_{p_{ij}}$  et  $\tilde{c}_{p_{ij}}$ , [90], dépendent du nombre de Sommerfeld :

$$\mathcal{S} = \frac{\mu_{oil} \phi l_p d_p}{2\pi F_r} \left( \frac{r_p}{C_r} \right)^2, \quad (5.122)$$

avec  $\mu_{oil}$  la viscosité dynamique de l'huile,  $C_r$  le jeu radial,  $F_r$  la charge radiale statique appliquée au palier,  $l_p$ ,  $d_p$  et  $r_p$  respectivement les longueur, diamètre et rayon du palier, TAB. 5.2. Les caractéristiques de l'huile sont définies par les quantités suivantes telle que sa viscosité cinématique  $\nu_{oil}$ , sa masse volumique  $\rho_{oil}$  et sa viscosité dynamique  $\mu_{oil}$ , présentées dans le TAB. 5.3. La valeur du jeu radial moyen des paliers est prise en compte. Le nombre de Sommerfeld est calculé, conduisant alors aux caractéristiques de raideur et amortissement des paliers, pour une vingtaine de vitesses de rotation comprises dans l'intervalle  $[1 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^4]$  (rpm) et illustrées par les FIG. D.4 et FIG. D.5.

| $l_p$ (m)           | $d_p$ (m)           | $\frac{l_p}{d_p}$ ( ) | $F_r$ (N)        | $C_r$ (m)           |
|---------------------|---------------------|-----------------------|------------------|---------------------|
| $4.4 \cdot 10^{-2}$ | $8.0 \cdot 10^{-2}$ | $5.5 \cdot 10^{-1}$   | $2.9 \cdot 10^3$ | $8.2 \cdot 10^{-5}$ |

TABLEAU 5.2 – Caracteristiques géométriques des paliers.

| $\rho_{oil}$ (kg · m <sup>3</sup> ) | $\nu_{oil}$ (m <sup>2</sup> · s <sup>-1</sup> ) | $\mu_{oil}$ (Pa · s) |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------|
| $8.65 \cdot 10^2$                   | $2.2 \cdot 10^{-5}$                             | $1.9 \cdot 10^{-2}$  |

TABLEAU 5.3 – Caractéristiques de l'huile de paliers à 40°C.

### 5.5.3 Équations du mouvement

On rappelle que le rotor feuilleté considéré dans cette section, FIG. 5.18, est modélisé à l'aide d'éléments finis de poutres de Timoshenko et que les tirants sont modélisés en considérant le modèle  $\mathcal{M}_1'$ , Annexe B.3.4. Les effets centrifuges induisent un contact, entre le tirant et l'empilement de tôles magnétiques, intimement lié à la vitesse de rotation du rotor. Ainsi, la dynamique du rotor feuilleté est gouvernée par le système matriciel différentiel suivant :

$$[M + M_d] \ddot{\delta} + [C_p(\dot{\phi}) + C_G + C_d] \dot{\delta} + [K_p(\dot{\phi}) + K(\dot{\phi}) + K_c(\dot{\phi})] \delta = \mathcal{F}(\dot{\phi}), \quad (5.123)$$

avec :

$$M = M_T + M_R, \quad (5.124a) \quad K(\dot{\phi}) = K_f(\dot{\phi}) + K_G(\dot{\phi}), \quad (5.124b)$$

où  $M_T$ ,  $M_R \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  sont respectivement les matrices de masse du rotor dues aux translation et rotation de section droite et dont les formes élémentaires sont définies dans les Eq. (A.138) et Eq. (A.142).  $K_f(\dot{\phi})$ ,  $K_G(\dot{\phi}) \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  sont respectivement les matrices de raideur élastique de flexion et géométrique globales du rotor implicitement fonction de la vitesse rotation  $\dot{\phi}$  et dont les formes élémentaires sont définies dans les Eq. (A.165) et Eq. (A.169).  $C_G \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  est la matrice gyroscopique du rotor dont la forme élémentaire est définie dans l'Eq. (A.146).  $C_p(\dot{\phi})$ ,  $K_p(\dot{\phi}) \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  sont respectivement les matrices d'amortissement et de raideur des paliers hydrodynamiques calculées à partir des Eq. (5.121a), Eq. (5.121b) et dont les formes élémentaires sont définies dans l'Eq. (A.177).  $M_d$ ,  $C_d \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  sont respectivement les matrices de masse et gyroscopique des disques dont les formes élémentaires sont définies dans l'Eq. (A.115).

Le terme  $K_c \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$ , définie dans l'Eq. (5.92), est une matrice de raideur de contact globale qui modélise le contact permanent entre les tirants et l'empilement.  $\mathcal{F}(\dot{\phi}) \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  est le vecteur global des forces extérieures.

Afin de réduire le nombre d'équations du système Eq. (5.123), la méthode pseudo-modale est privilégiée en projetant l'Eq. (5.123) dans une base modale  $\Phi_\dot{\phi}$  [50; 51], cette dernière étant actualisée à chaque vitesse de rotation en résolvant le système suivant :

$$[K_p(\dot{\phi}) + K(\dot{\phi}) + K_c(\dot{\phi})] \Phi_\dot{\phi} = M \Phi_\dot{\phi} \Lambda_\dot{\phi}, \quad (5.125)$$

où  $\Lambda_\dot{\phi} \in \mathcal{M}_{m, m}$  est la matrice diagonale contenant les valeurs propres,  $\Phi_\dot{\phi} \in \mathcal{M}_{n_\delta, m}$  est la matrice contenant les formes propres et  $m$  est le nombre de modes considérés. Il doit être noté que les coefficients extra diagonaux  $k_{b_{xz}}$  et  $k_{b_{zx}}$  ont été égalisés de manière à ce que la matrice de raideur soit symétrique durant le calcul d'une base modales.

Caractéristiques des paliers (FIG. D.4 et FIG. D.5), propriétés constitutives du feuilletage, déflexion latérale des tirants (FIG. 5.16 et FIG. 5.15) et par conséquent le raidissement associé, mais aussi le contact permanent entre tirant et feuilletage présentent une certaine sensibilité aux

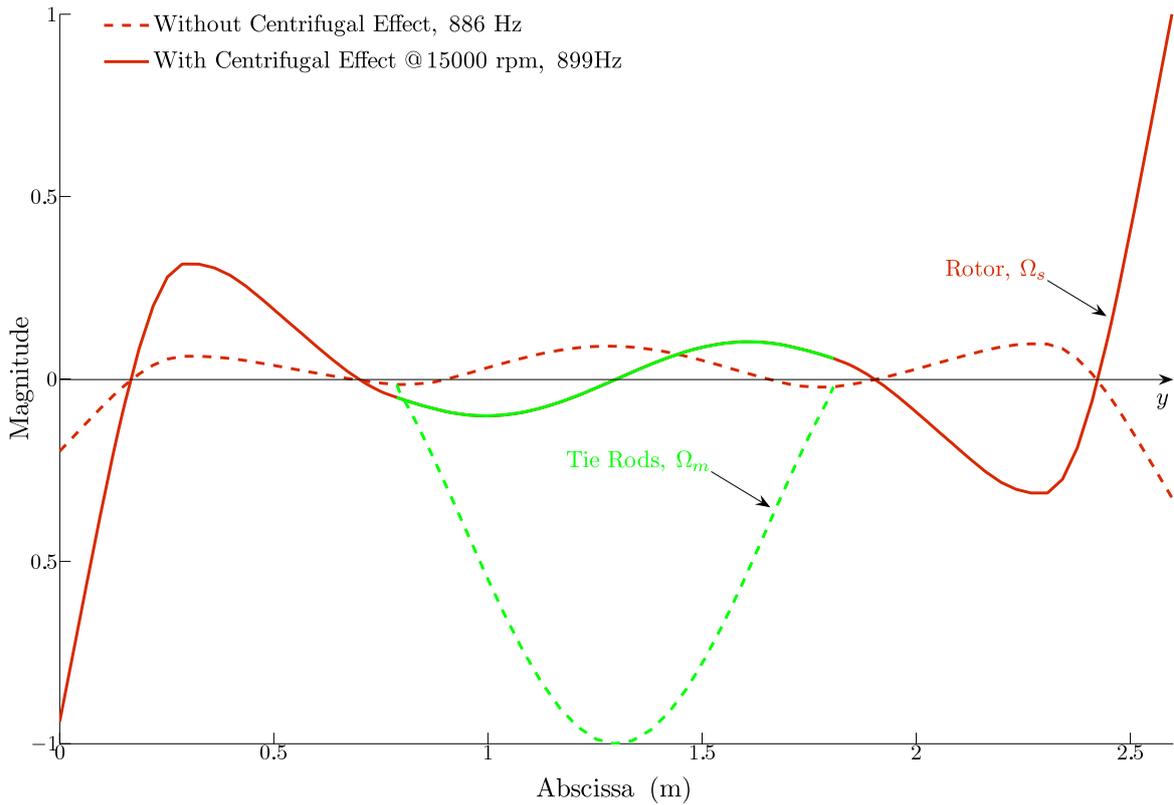


FIGURE 5.19 – Effet du contact permanent sur la 11<sup>e</sup> forme propre. La courbe continue est issue de la prise en compte des effets centrifuges à 15 000 rpm.

variations de vitesse de rotation. Les formes propres sont alors modifiées lorsque la vitesse de rotation évolue. En effet, la FIG. 5.19 illustre la 11<sup>e</sup> forme propre calculée à l'arrêt, *i.e.* sans effet centrifuge, et à 15 000 rpm. Cette différence notable justifie le calcul d'une nouvelle base modale à chaque vitesse de rotation. Ces formes propres, de fréquences élevées, doivent être considérées car elles sont susceptibles d'être sollicitées par les harmoniques de la vitesse de rotation du moteur électrique.

#### 5.5.4 Diagramme de Campbell

Les fréquences de résonances et formes propres associées, qui sont des fonctions de la vitesse rotation  $\dot{\phi}$ , sont obtenues en déterminant la solution de l'Eq. (5.126) sans efforts extérieurs :

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\kappa^{-1}\gamma & -\kappa^{-1}\eta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_k \mathcal{P}_k \\ \mathcal{P}_k \end{pmatrix} = \frac{1}{r_k} \begin{pmatrix} r_k \mathcal{P}_k \\ \mathcal{P}_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (5.126)$$

où  $I \in \mathcal{M}_{m,m}$  est une matrice identité,  $r \in \mathbb{C}^m$  et la matrice contenant les valeur propres complexes et  $\mathcal{P} \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{C})$  et la matrice des vecteurs propres complexes,  $\gamma, \kappa \in \mathcal{M}_{m,m}$  sont respectivement les matrices diagonales de masse et raideur modales. Cette dernière prenant en compte les coefficients de raideur des paliers  $k_{b_{xz}}, k_{b_{zx}}$ , et  $\eta \in \mathcal{M}_{m,m}$  est l'association des matrices d'amortissement et gyroscopique modales, telle que :

$$\gamma = \Phi_{\dot{\phi}}^t M \Phi_{\dot{\phi}}, \quad (5.127)$$

$$\kappa = \Phi_{\dot{\phi}}^t [K_b(\dot{\phi}) + K(\dot{\phi}) + K_c(\dot{\phi})] \Phi_{\dot{\phi}}, \quad (5.128)$$

$$\eta = \Phi_{\dot{\phi}}^t [C_b(\dot{\phi}) + C_G] \Phi_{\dot{\phi}}. \quad (5.129)$$

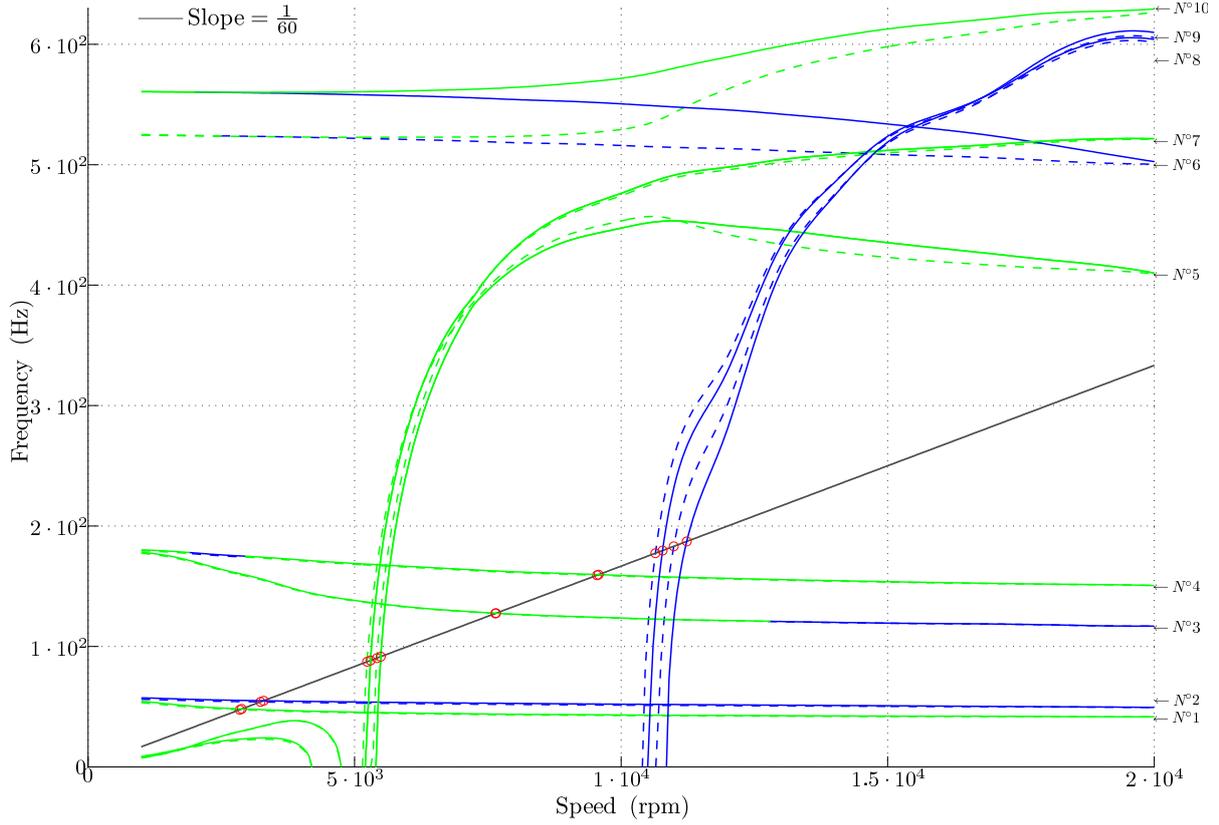


FIGURE 5.20 – Diagramme de  $\mathcal{C}$  ampbell sur la plage  $[1 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^4]$  (rpm). Les cercles ( $\circ$ ) localisent les vitesses critiques. Les précessions directes sont tracées en vert (—) et les inverses en bleu (---)

Les valeurs propres complexes de l'Eq. (5.126) peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$r_k = -\frac{\xi_k \omega_k}{(1 - \xi_k^2)^{\frac{1}{2}}} \pm j \omega_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (5.130)$$

où  $\omega_k$  et  $\xi_k$  sont respectivement les  $k^e$  fréquence propre et facteur d'amortissement et  $j^2 = -1$ .

| Sans effet centrifuge               |           | Avec effet centrifuge               |           |
|-------------------------------------|-----------|-------------------------------------|-----------|
| $\frac{30}{\pi} \dot{\phi}_c$ (rpm) | $\xi$ (%) | $\frac{30}{\pi} \dot{\phi}_c$ (rpm) | $\xi$ (%) |
| 2847                                | 7.82      | 2884                                | 8.12      |
| 3235                                | 3.64      | 3295                                | 3.65      |
| 5234                                | 98.2      | 5299                                | 98.5      |
| 5418                                | 97.7      | 5492                                | 98.3      |
| 7641                                | 16.6      | 7654                                | 16.5      |
| 9547                                | 7.11      | 9577                                | 7.1       |
| 10645                               | 97.4      | 10778                               | 97.2      |
| 10988                               | 97.3      | 11231                               | 97.2      |

TABLEAU 5.4 – Influence de l'effet centrifuge sur les vitesses de rotation et amortissements critiques.

La FIG. 5.20 présente deux diagrammes de  $\mathcal{C}$  ampbell obtenus en considérant (ligne continues) ou non (ligne interrompue) l'effet centrifuge, aucune instabilité n'apparaît. Le critère original proposé dans la Section 2.2.3.2 a permis de tracer distinctement l'évolution des fréquences propres

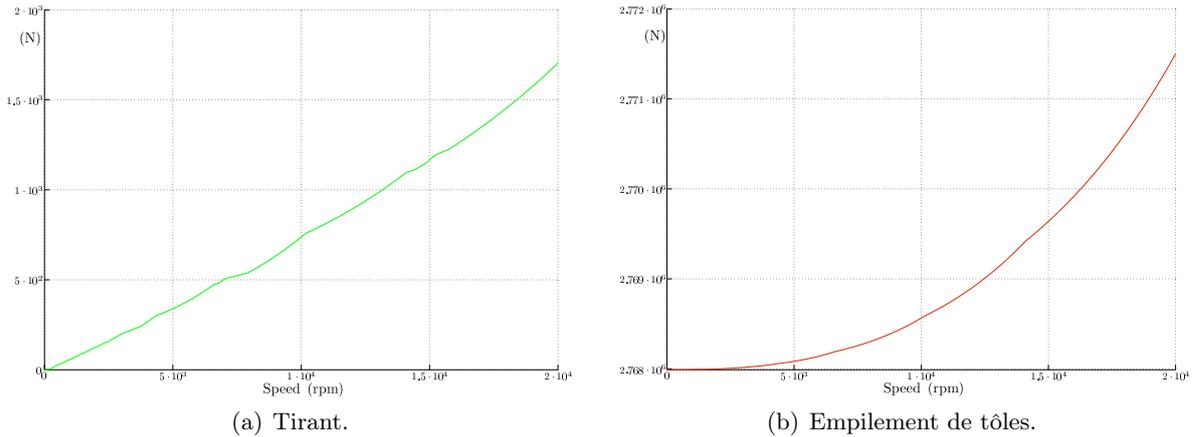


FIGURE 5.21 – Évolution des charges longitudinales maximales en fonction de la vitesse de rotation.

réellement associée à une forme propre complexe. Il doit être noté que la base modale  $\Phi_{\dot{\phi}}$  contient dix-huit formes propres ( $m = 18$ ). Les modes de vibration N°1, 2, 5 et 6 présentent un faible facteur d'amortissement ( $< 20\%$ ) tandis que les modes N°3, 4, 7 et 8 sont fortement amortis ( $> 95\%$ ).

Lorsque le rotor est excité de manière synchrone avec un balourd, les propriétés des paliers étant non symétriques, toutes les intersections des fréquences de résonance avec la fondamentale de la vitesse de rotation, de pente  $\frac{1}{60}$ , donnent les vitesses critiques de rotation. Le TAB. 5.4 présente les valeurs des vitesses critiques de rotation  $\dot{\phi}_c$  ainsi que les facteurs d'amortissement associés  $\xi$ , pour les deux configurations. L'effet centrifuge a un faible effet sur les vitesses critiques (0.2% à 4.91%) mais atteste tout de même d'une augmentation des fréquences propres du rotor. L'effet centrifuge rend le feuilletage toujours plus rigide qu'il ne l'est dans sa configuration initiale. Cela est dû aux différents effets suivants :

1. La valeur maximale de la charge longitudinale non linéaire augmente avec la vitesse de rotation, FIG. 5.21(a), générant alors un raidissement des tirants.
2. Un contact permanent entre tirants et feuilletage induit une modification de l'assemblage de la masse magnétique : les nœuds de contact du feuilletage et des tirants sont reliés par la matrice  $K_c$ , Eq. (5.92).
3. La charge longitudinale appliquée au feuilletage est une fonction croissante de la vitesse de rotation, FIG. 5.21(b). Ainsi, les Eq. (5.4a) et Eq. (5.4b) indiquent que les valeurs des propriétés constitutive du feuilletage augmentent également, comme le montre la FIG. 5.22.

Comme mentionné précédemment dans la Section 5.5.1 et illustré dans les FIG. 5.16 et FIG. 5.15, la FIG. 5.23 montre que les contraintes de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$  ises  $\sigma_{\mathcal{V}, \mathcal{M}}$  des tirants ne sont pas des fonctions monotones de la vitesse de rotation. En effet, ces dernières diminuent jusqu'à atteindre un minimum (ou zone de sécurité) à  $\{\dot{\phi}_{r_s} = 3\,300 \text{ rpm}, \sigma_{\mathcal{V}, \mathcal{M}_s} = 5.2 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}\}$ .

La plage  $\dot{\phi}_r \in [0, \dot{\phi}_{r_s}]$  (rpm) correspond à un intervalle pour lequel les déformations issues de la flexion des tirants sont prépondérantes. Si  $\dot{\phi}_r > \dot{\phi}_{r_s}$ , alors la compression du feuilletage augmente tout en détendant les tirants. De plus, les déformations de cisaillement augmenteront de plus en plus aux extrémités des tirants, FIG. 5.21(a). Les déformations de flexion présentent alors un effet mineur. En étirant la fibre neutre des tirants, les déformations de cisaillement induisent une augmentation de la charge longitudinale non-linéaire, *e.g.* avec un taux d'accroissement de l'ordre de  $8.15 \text{ N} \cdot (10^2 \cdot \text{tr})^{-1}$ , qui s'applique sur le feuilletage, FIG. 5.21(b). À 20 000 rpm, le niveau maximal

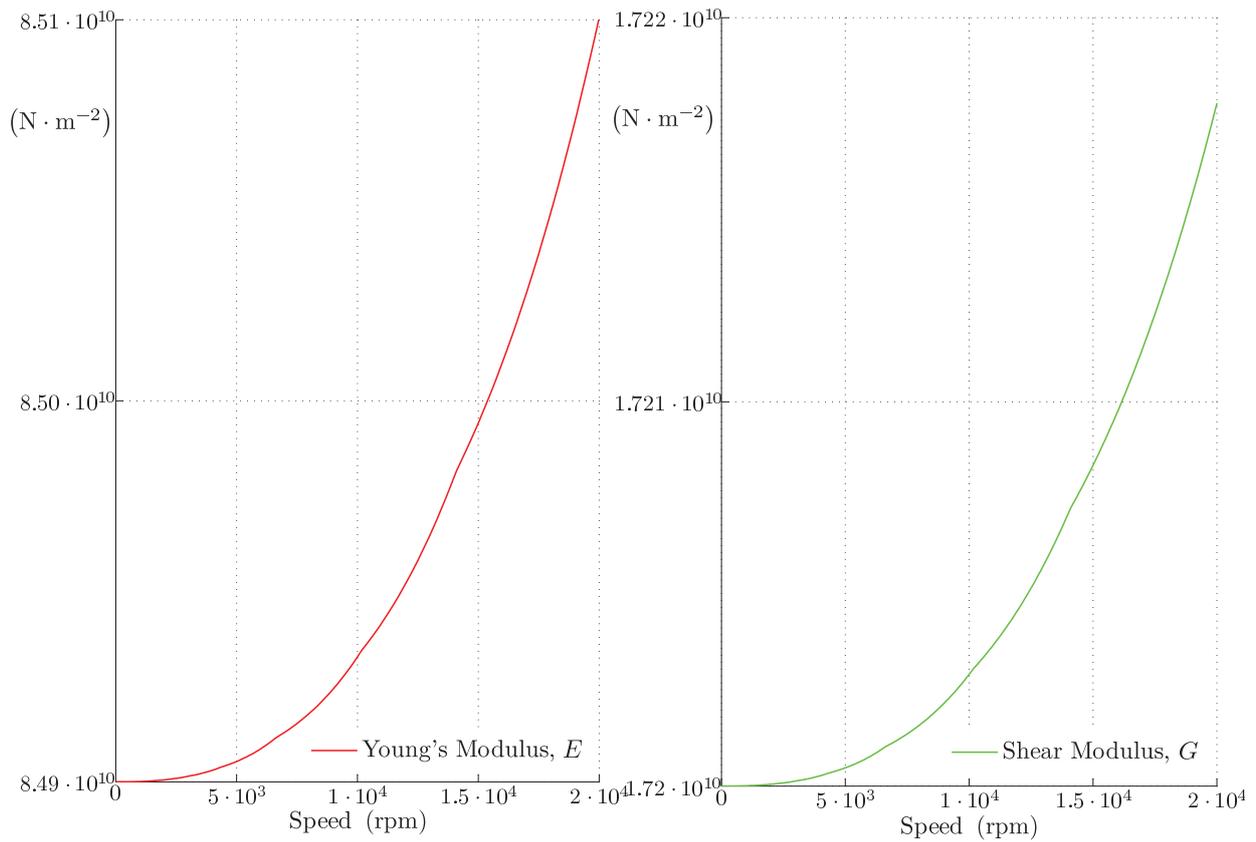


FIGURE 5.22 – Propriétés constitutives  $E$  et  $G$  en fonction de la vitesse de rotation.



FIGURE 5.23 – Contraintes de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$ ises maximales des tirants en fonction de la vitesse de rotation.

des contraintes de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$ ises est du même ordre de grandeur que le niveau qui leur avait été initialement appliqué.

Cela assure l'intégrité de l'assemblage durant le régime de fonctionnement. En effet, la déflexion non linéaire des tirants induit un accroissement, *e.g.* de l'ordre de 1%, de la charge longitudinale initialement appliquées, impliquant alors une légère évolution, *e.g.* inférieure à 1%, des propriétés constitutives du feuilletage durant le régime de fonctionnement.

### 5.5.5 Réponses aux balourds

Afin d'estimer les effets centrifuges sur la prévision du comportement dynamique des rotors feuilletés, cette section présente différentes réponses aux balourds conformément à la norme API de 1995. Soit  $U_{b_i} \in \mathbb{R}$  un balourd localisé au nœud  $i$  dont la position angulaire initiale, à  $t = 0$ , est notée  $\phi_{b_i} \in \mathbb{R}$ , *i.e.* orienté de direction  $z$  à la direction  $x$ . Cette masse excentrée crée une force dont les composantes dans les directions  $x$  et  $z$  sont définies telles que :

$$\begin{bmatrix} F_{u_i} \\ F_{w_i} \end{bmatrix} = U_{b_i} \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \sin(\dot{\phi}t + \phi_{b_i}) \\ \cos(\dot{\phi}t + \phi_{b_i}) \end{bmatrix}. \quad (5.131)$$

En utilisant la méthode pseudo-modale [25], les réponses aux balourds s'obtiennent, pour chaque vitesse de rotation  $\dot{\phi}$ , en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \kappa - \gamma \dot{\phi}^2 & -\dot{\phi} \eta \\ \dot{\phi} \eta & \kappa - \gamma \dot{\phi}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_s \\ \mathcal{Q}_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_s \\ \mathcal{F}_c \end{bmatrix}, \quad (5.132)$$

où  $\kappa$ ,  $\gamma$  et  $\eta$  sont définies par l'Eq. (5.127), Eq. (5.128) et Eq. (5.129) représentent les forces de balourd généralisées  $\mathcal{F}_c$ ,  $\mathcal{F}_s \in \mathbb{R}^m$  et s'écrivent comme suit :

$$\mathcal{F}_s = \Phi_{\dot{\phi}}^t f_s, \quad (5.133a)$$

$$\mathcal{F}_c = \Phi_{\dot{\phi}}^t f_c, \quad (5.133b)$$

tel que, pour le  $i^e$  nœud :

$${}^i f_s = U_{b_i} \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \cos(\phi_{b_i}) \\ \sin(\phi_{b_i}) \end{bmatrix}, \quad (5.134a)$$

$${}^i f_c = U_{b_i} \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \sin(\phi_{b_i}) \\ \cos(\phi_{b_i}) \end{bmatrix}. \quad (5.134b)$$

Les coordonnées généralisées  $\mathcal{Q}_s$ ,  $\mathcal{Q}_c \in \mathbb{R}^m$  conduisent alors la réponse aux balourds :

$$\delta = \delta_s(\dot{\phi}) \sin(\dot{\phi}t) + \delta_c(\dot{\phi}) \cos(\dot{\phi}t), \quad (5.135)$$

avec :

$$\delta_s = \Phi_{\dot{\phi}} \mathcal{Q}_s(\dot{\phi}), \quad (5.136a)$$

$$\delta_c = \Phi_{\dot{\phi}} \mathcal{Q}_c(\dot{\phi}). \quad (5.136b)$$

Les paliers étant orthotropes, les orbites du rotor sont des ellipses dont celle correspondant à l'orbite du  $i^e$  nœud dans le plan  $\{xGz\}$  est décrite par la relation suivante, Annexe A.5.10 :

| Configuration   | Indice de nœud $i$ | $U_{b_i}$ (g · mm) | $\phi_{b_i}$ (rad) |
|-----------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\mathcal{C}_1$ | 88                 | $4.014 \cdot 10^3$ | 0                  |
| $\mathcal{C}_2$ | 1                  | $2.007 \cdot 10^3$ | 0                  |
| $\mathcal{C}_2$ | 177                | $2.007 \cdot 10^3$ | $\pi$              |

TABLEAU 5.5 – Caractéristiques des balourds.

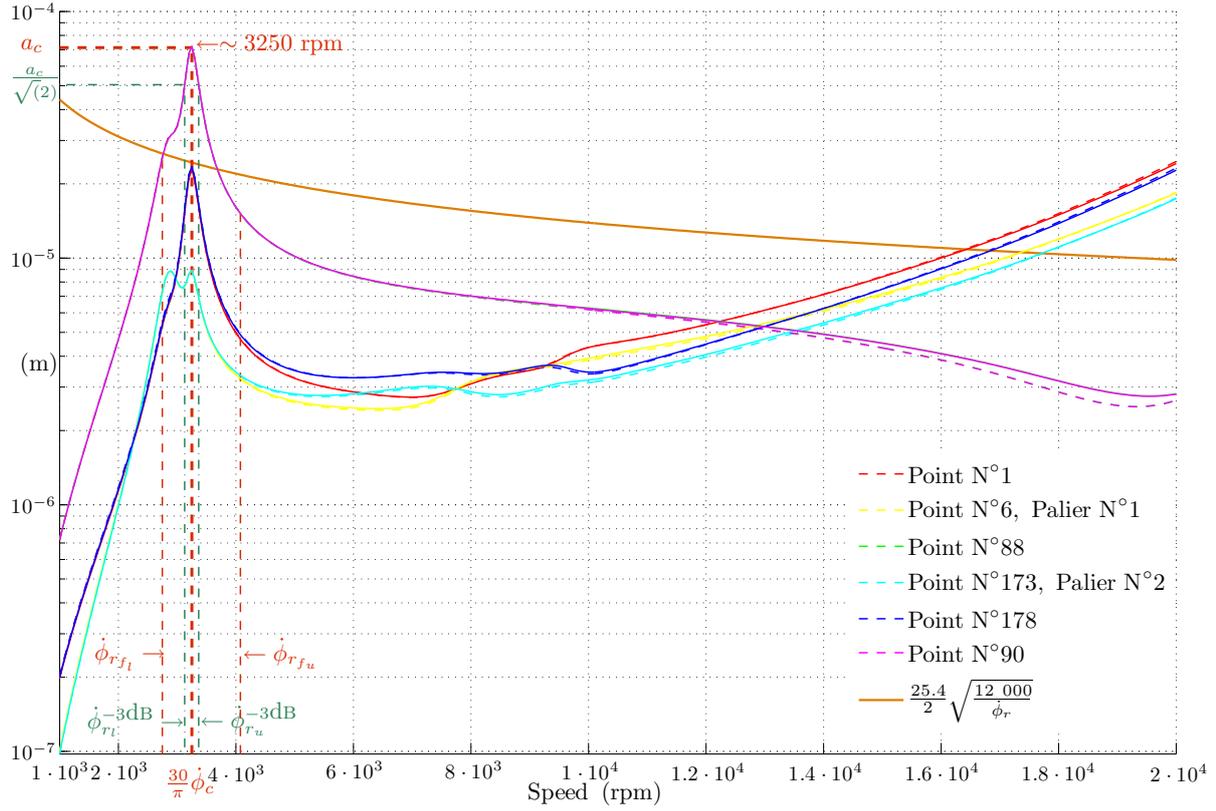


FIGURE 5.24 – Réponses au balourd calculées à différents nœuds, configuration  $\mathcal{C}_1$ . L'amplitude maximale apparaît au nœud N°90.

$$\begin{cases} u_i = \delta_{s_{u_i}} \sin(\dot{\phi}t) + \delta_{c_{u_i}} \cos(\dot{\phi}t) \\ w_i = \delta_{s_{w_i}} \sin(\dot{\phi}t) + \delta_{c_{w_i}} \cos(\dot{\phi}t) \end{cases}, \quad (5.137)$$

où  $\delta_{s_{u_i}}, \delta_{s_{w_i}} \in \mathbb{R}$  et  $\delta_{c_{u_i}}, \delta_{c_{w_i}} \in \mathbb{R}$  sont respectivement les composantes imaginaires et réelles de  $\delta_s$  et  $\delta_c$ , associés au  $i^e$  nœud, Eq. (5.136a) et Eq. (5.136b).

La norme API [25] est utilisée pour estimer les balourds  $U_{b_i}$  ( $\text{g} \cdot \text{mm}$ ) permettant de calculer une réponse dynamique dont l'amplitude maximale ne doit pas excéder la valeur  $\delta_b$  ( $\mu\text{m}$ ) :

$$U_{b_i} = \frac{1}{3} \frac{270\pi m_r}{\dot{\phi}_c}, \quad (5.138a) \quad \delta_b = \frac{25.4}{2} \sqrt{\frac{12\,000}{\dot{\phi}_r}}, \quad (5.138b)$$

avec  $m_r$  la masse du rotor exprimée en (kg), et  $\dot{\phi}_c$  en ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ), qui peut appartenir à un intervalle de vitesse de rotation déconseillé  $[\dot{\phi}_{r_{f_l}}, \dot{\phi}_{r_{f_u}}]$ . Cela nécessite l'utilisation du facteur de qualité  $Q$  :

$$Q = \frac{30}{\pi} \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_{r_u}^{-3\text{dB}} - \dot{\phi}_{r_l}^{-3\text{dB}}}, \quad (5.139)$$

où  $[\dot{\phi}_{r_l}^{-3\text{dB}}, \dot{\phi}_{r_u}^{-3\text{dB}}]$  est un intervalle fréquentiel à  $-3\text{dB}$  de l'amplitude  $a_c$  et situé autour de la vitesse de rotation critique.

Deux configurations  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont envisagées pour déterminer la réponse aux balourds du rotor feuilleté, TAB. 5.5, et estimer l'influence des effets centrifuges. La première configuration  $\mathcal{C}_1$  consiste

en un balourd unique  $U_{b_i}$  placé au centre d’inertie du rotor, *i.e.* au nœud N°90, afin d’obtenir la réponse dite “cylindrique” en excitant le premier mode de flexion.

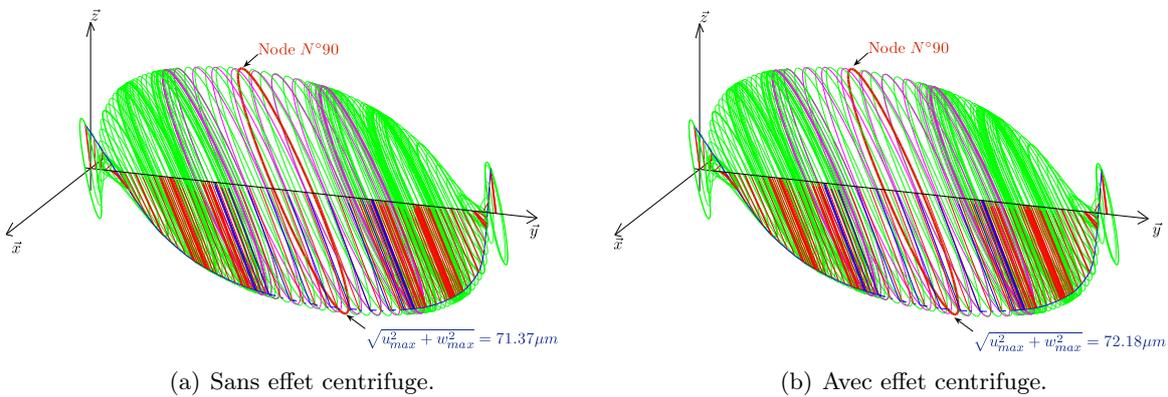
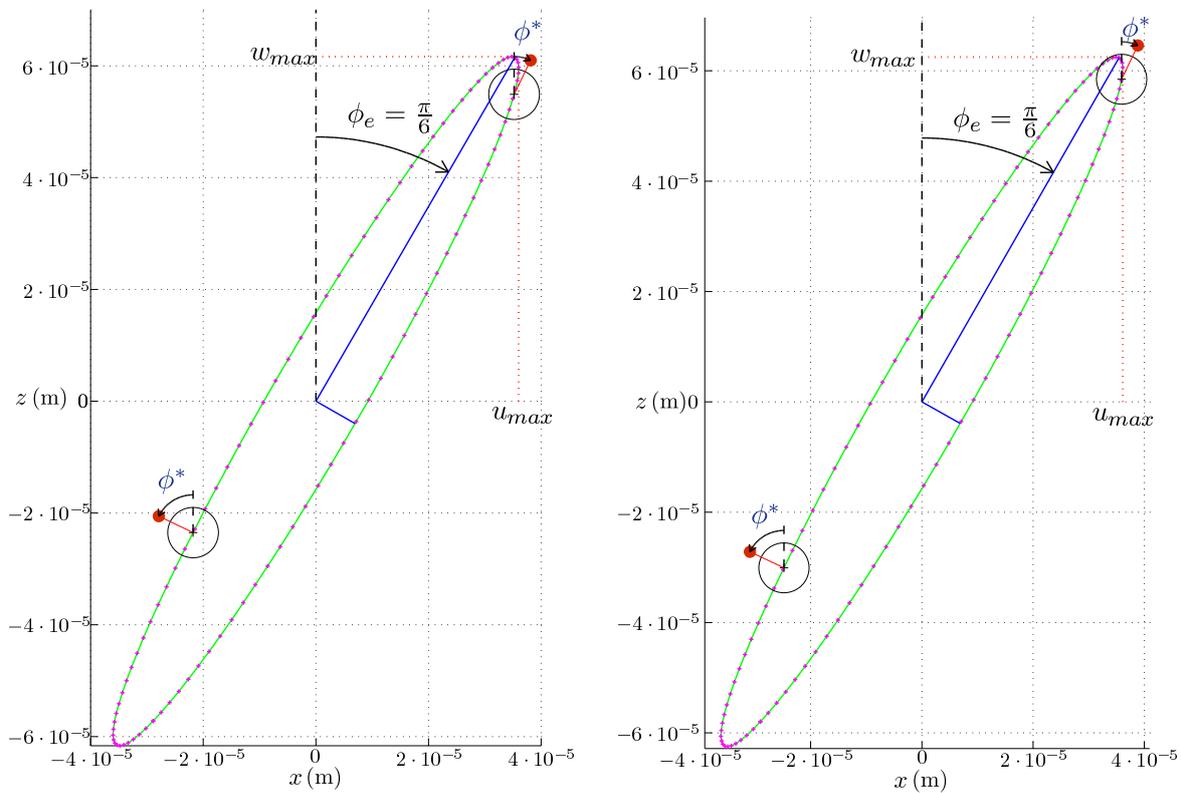


FIGURE 5.25 – Déformée du rotor à  $\dot{\phi}_r = 3\,250$  rpm, configuration  $\mathcal{C}_1$ .



(a) Ellipse sans effet centrifuge,  $u_{max} = 36\mu\text{m}$ ,  $w_{max} = 61.63\mu\text{m}$ .  
 (b) Ellipse avec effet centrifuge,  $u_{max} = 36.13\mu\text{m}$ ,  $w_{max} = 62.49\mu\text{m}$ .

FIGURE 5.26 – Orbites elliptiques au nœud N°90,  $\dot{\phi}_r = 3\,250$  rpm, configuration  $\mathcal{C}_1$ .

La deuxième configuration  $\mathcal{C}_2$  consiste, quant à elle, en deux balourds  $\frac{U_{b_i}}{2}$  placés en opposition de phase sur chacune des extrémités du rotor, *i.e.* au nœuds N°1 et N°177, afin d’obtenir la réponse dite “conique” associée à l’excitation du deuxième mode de flexion.

Comme le montre la FIG. 5.20, les deux premières vitesses critiques de rotation sont très proches l’une de l’autre, le balourd  $U_{b_i}$  a donc été défini en considérant  $\frac{30}{\pi}\dot{\phi}_c = 3\,100$  rpm. Les caractéristiques de ce balourd sont présentées dans le TAB. 5.5 ainsi que leur position angulaire associée  $\phi_{b_i}$ .

Les réponses aux balourds correspondant à la configuration  $\mathcal{C}_1$  sont illustrées dans la FIG. 5.24. Les

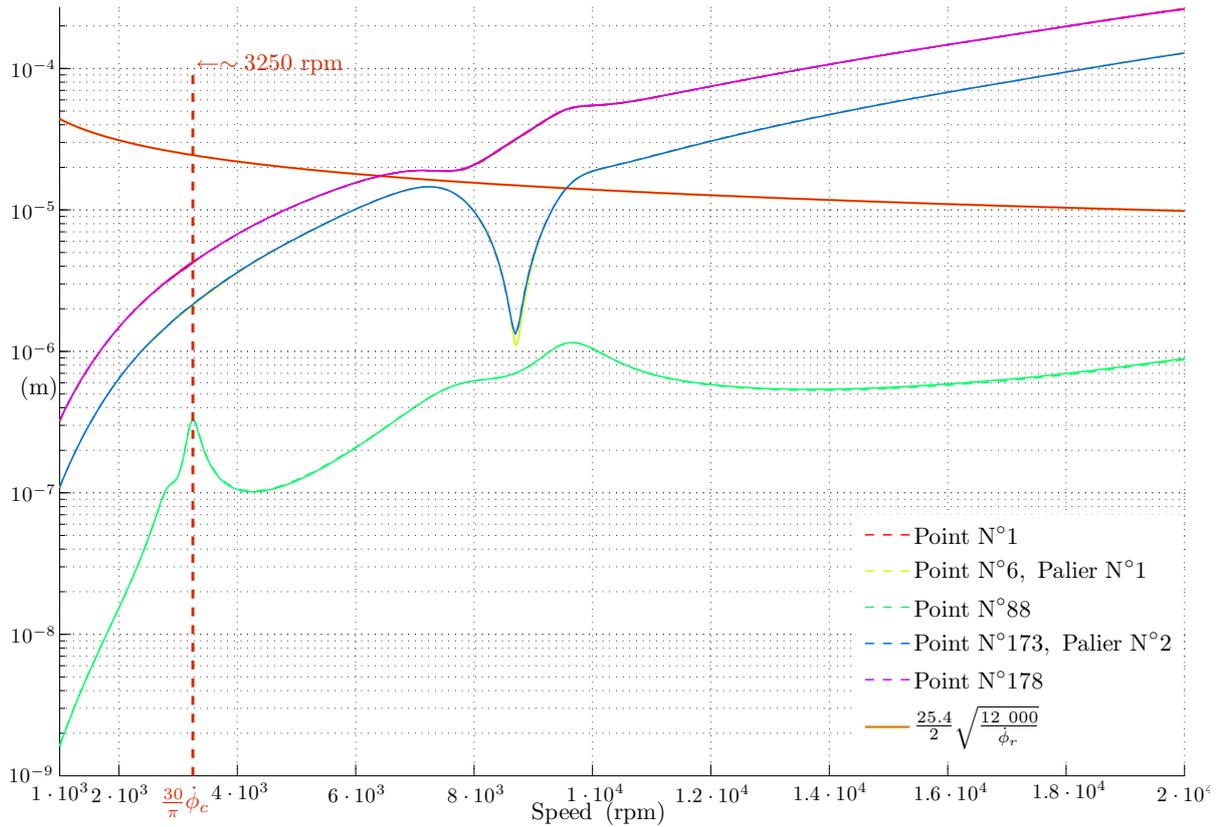


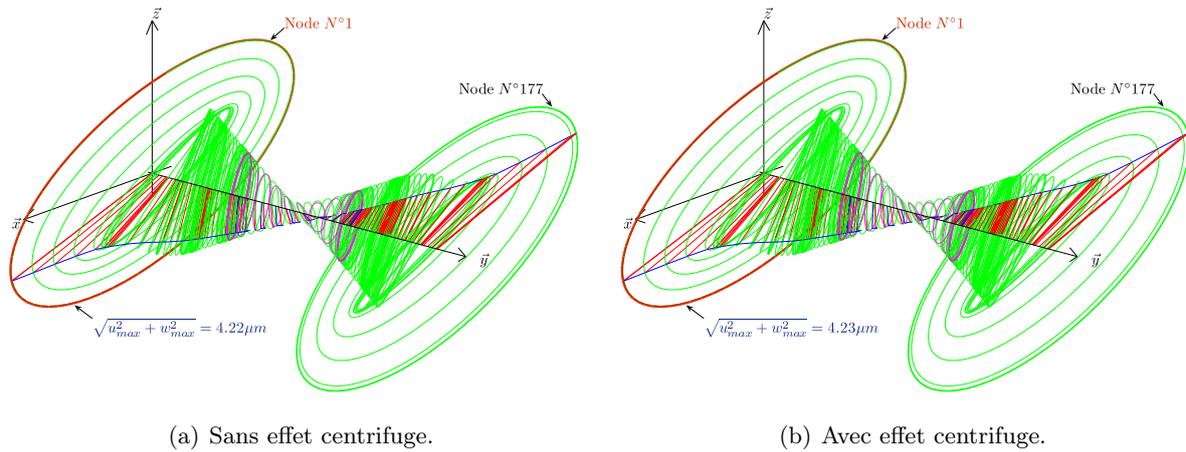
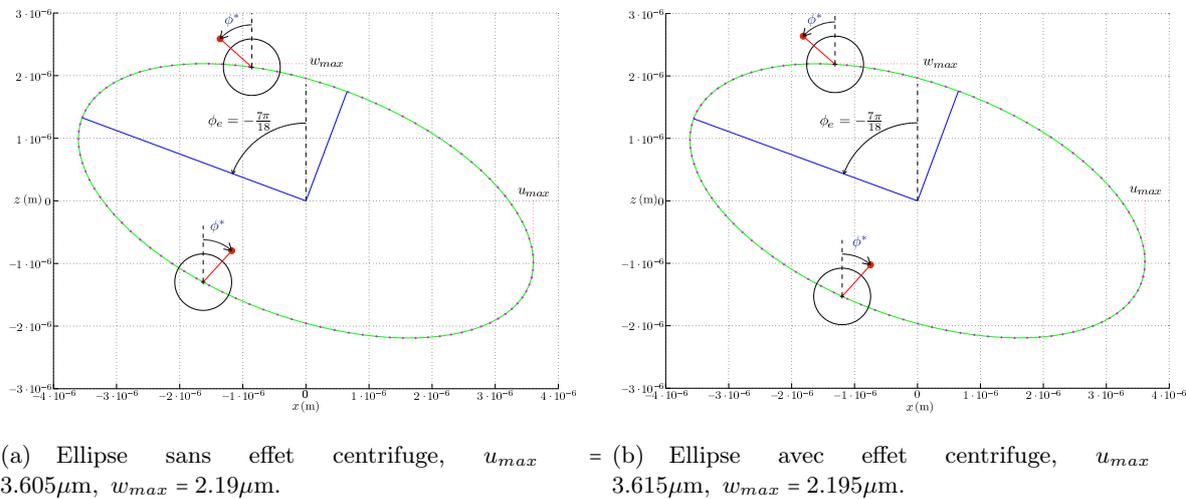
FIGURE 5.27 – Réponses aux balourds calculées à différents nœuds, configuration  $\mathcal{C}_2$ . L'amplitude maximale apparaît au nœud N°1.

courbes discontinues représentent les réponses obtenues sans considérer les effets centrifuges alors que les courbes continues correspondent aux réponses légèrement modifiées prenant en compte les effets centrifuges. Une vitesse critique de rotation apparaît clairement à  $\frac{30}{\pi}\dot{\phi}_c = 3\,250$  rpm et ses déflexions associées sont présentées dans les FIG. 5.25(a) et FIG. 5.25(b).

En considérant les effets centrifuges ou non, les déflexions au nœud N°90 sont respectivement de  $72.18\mu\text{m}$  et  $71.37\mu\text{m}$ . Ces réponses ont été déterminées en calculant la norme des déplacements maximaux dans les directions  $x$  et  $z$ , FIG. 5.26. La position angulaire  $\phi^*$ , associée à  $t^*$  (position sur l'orbite) correspond à la position, sur une section droite de rotor où les contraintes sont maximales. Les vitesses de rotation correspondant à l'intervalle situé à  $-3\text{dB}$  sont  $[\dot{\phi}_{r_l}^{-3\text{dB}}, \dot{\phi}_{r_u}^{-3\text{dB}}] = [3\,128, 3\,366]$  (rpm), puisque le facteur de surtension  $Q = 13.6$ . L'intervalle de vitesses de rotation prohibé est alors de  $[\dot{\phi}_{r_{f_l}}, \dot{\phi}_{r_{f_u}}] = [2\,748, 4\,076]$  (rpm) [25], les déflexions maximales calculées associées sont respectivement de  $25.74\mu\text{m}$  et  $15.16\mu\text{m}$ , sachant que que les amplitudes maximales  $\delta_b$ , Eq. (5.138b), préconisées par la norme API, à ne pas dépasser sont respectivement de  $26.54\mu\text{m}$  et  $21.79\mu\text{m}$ .

La FIG. 5.27 présente la réponse aux balourds associée à la configuration  $\mathcal{C}_2$  dont l'amplitude maximale augmente avec la vitesse de rotation. Elle montre que le chargement centrifuge induit un léger effet sur les modes excités, FIG. 5.29. Cela est dû à l'énergie de déformation de flexion qui est principalement concentrée dans les portions d'arbre comme le montre la FIG. 5.28. En effet, la déflexion montre que l'assemblage feuilletage/tirants, partie sur laquelle agissent les effets centrifuges, ne se déforme pratiquement pas.

Comme un contact permanent a été considéré, la matrice  $K_c(\dot{\phi})$ , Eq. (5.92), est utilisée pour

FIGURE 5.28 – Déformée du rotor à  $\dot{\phi}_r = 3\,250$  rpm, configuration  $\mathcal{C}_2$ .FIGURE 5.29 – Orbites elliptiques au nœud N°1,  $\dot{\phi}_r = 3\,250$  rpm, configuration  $\mathcal{C}_2$ .

connecter les nœuds maîtres des tirants aux nœuds esclaves du feuilletage. Cela rend alors possible l'utilisation de la méthode pseudo-modale lorsqu'il s'agit de déterminer des réponses aux balourds, Eq. (5.132). En revanche, les contraintes de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$ ises des éléments de tirants, dues d'une part, à leurs déflexions non linéaires, Alg. 10 (Annexe D.3), et d'autre part, à leurs déflexions dues aux balourds, ne peuvent être obtenues en utilisant les valeurs des degrés de liberté obtenues lors de la réponse aux balourds. Par conséquent, il peut être supposé, en première approximation, que les contraintes de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$ ises peuvent être déterminées à partir de la somme des fluctuations de contraintes de la réponse aux balourds et des contraintes de la réponse quasi-statique, ces dernières pouvant être considérées comme une configuration de précontrainte initiale, autour de laquelle évoluent les contraintes issues de la réponse aux balourds.

Sous l'hypothèse mentionnée précédemment, la FIG. 5.30 présente l'évolution des valeurs maximales des contraintes  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$ ises des tirants dues aux déflexions de la réponse aux balourds. Ces dernières sont calculées pour chacune des deux configurations  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , et considérant également les effets centrifuges. Quelle que soit la configuration considérée, les fluctuations des contraintes de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$ ises présentent des variations maximales d'environ  $\sim 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , ce qui est vraiment d'un ordre de grandeur inférieur à la précontrainte initiale de l'assemblage, *e.g.*  $\sim 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Dans cette application industrielle, il peut être fait état que les contraintes de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$ ises sont principalement gouvernées par la valeur de la précontrainte initiale. Ainsi, le chargement centrifuge a un effet no-

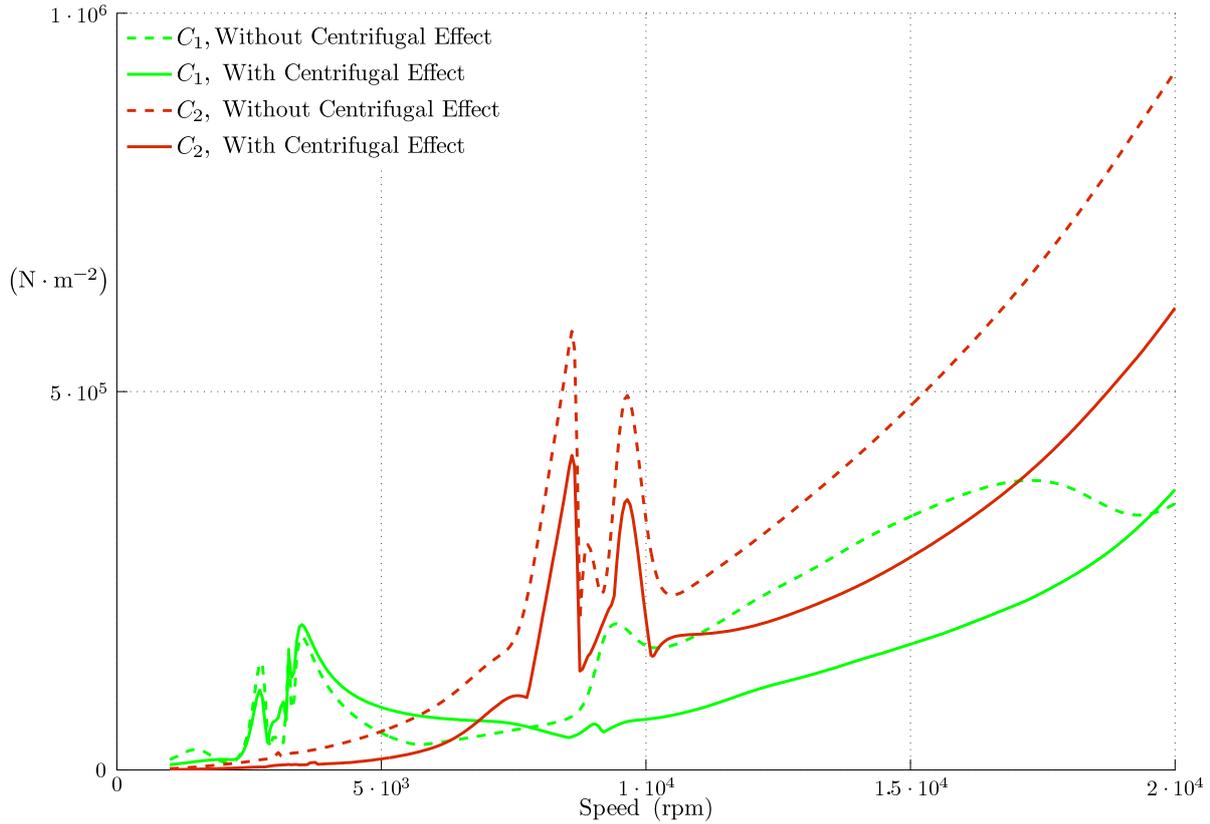


FIGURE 5.30 – Évolution du maximum des contraintes de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$ ises des tirants due uniquement aux balourds, pour les configurations  $\mathcal{C}_1$  (—) et  $\mathcal{C}_2$  (---).

table sur la répartition de contraintes en conservant le niveau de contrainte initiale de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$ ises durant le régime de fonctionnement.

## 5.6 Conclusion

Le modèle éléments finis de rotor feuilleté présenté prend en considération les effets centrifuges agissant au sein des tirants. La procédure de calcul quasi-statique a permis d'évaluer la déflexion non linéaire des tirants à chaque vitesse de rotation  $\dot{\phi}$  et a mis en évidence différents phénomènes  $\dot{\phi}$ -dépendants : un **raidissement géométrique**, une **modification de l'assemblage** dû au **contact permanent** entre tirants et empilement, une légère **évolution des propriétés** constitutives de l'empilement.

Bien que les propriétés constitutives aient été identifiées à partir d'analyses modales à l'arrêt, le modèle éléments finis prévoit le comportement dynamique des rotors feuilletés, *e.g.* le diagramme de Campbell est légèrement modifié, les vitesses critiques présentant un taux d'accroissement maximum inférieur à 5%. Grâce aux déformations longitudinales de l'empilement, il est fait état que les contraintes de  $\mathcal{V}$  on  $\mathcal{M}$ ises des tirants n'excèdent pas le niveau de contrainte initial, ce qui assure l'intégrité mécanique du rotor feuilleté durant les conditions opératoires.

Finalement, il serait intéressant de tirer profit de ces effets non linéaires dans la démarche de développement de telles structures assemblées en déterminant quels paramètres, *e.g.* jeu fonctionnel, répartition, nombre ou encore géométrie des tirants, permettraient d'accroître encore plus la tenue mécanique ou contrôler la rigidité de flexion du feuilletage.

## Chapitre 6

# Synthèse et bilan des travaux de recherche

L'OBJECTIF de ces travaux de recherche consistait à améliorer la prévision du comportement dynamique rotors de moteurs électriques, et plus particulièrement la dynamique en flexion des rotors feuilletés à cage d'écureuil, *i.e.* Moteur Grande vitesse. La difficulté majeure de la modélisation résidait dans la complexité relative à l'assemblage de la masse magnétique des MGV, composée d'un feuilletage maintenu par des tirants excentrés précontraints, et d'une cage d'écureuil qui consiste en une distribution périphérique de barres de court-circuit connectées à deux anneaux de court-circuit situés aux extrémités du feuilletage.

Une démarche de modélisation des structures assemblées a été présentée. Un modèle de rotor feuilleté a alors été proposé et implémenté à partir d'éléments-finis de poutres de Timoshenko. Une attention particulière a été portée quant à la modélisation de chaque élément constituant la masse magnétique. Ainsi, une hypothèse cinématique relative à la déflexion des barres de court-circuit excentrées a permis de modéliser chacune d'elles à l'aide d'éléments de poutres dont les lignes neutres coïncident avec celles des éléments finis du feuilletage. Par ailleurs, l'ensemble des tirants précontraints a été modélisé indépendamment du feuilletage. Ce modèle constitue ainsi un modèle éléments finis ramifié qui a été capable de rendre compte de la dynamique locale de l'assemblage, *e.g.* en fournissant des modes de tirants qui ont été observés.

Aussi, bien que le modèle éléments finis soit constitué d'éléments de poutre, le feuilletage a été considéré comme un matériau isotrope transverse de manière à rendre compte de sa nature orthotrope, et permettre d'envisager une totale indépendance des modules d'Young et de Coulomb du feuilletage. En revanche, le modèle éléments finis étant établi, le comportement dynamique latéral des rotors MGV est principalement régi par la rigidité de flexion du feuilletage dont les propriétés sont méconnues, ce qui rend délicat la modélisation des rotors MGV. La connaissance des modules d'Young et de Coulomb de l'empilement est alors primordiale pour prévoir le comportement dynamique de tels rotors.

Une procédure d'identification mixte numérique-expérimentale a donc été privilégiée pour évaluer ces propriétés. Cette procédure consiste à corrélérer des quantités d'intérêt expérimentales à d'autres issues du modèle éléments finis proposé précédemment. Le choix s'est porté sur les quantités modales car elle fournissent à la fois informations globales, *i.e.* pulsations propres, et locales, *i.e.* formes propres, sur le comportement de la structure. Les données modales calculées sont issues de la résolution d'un problème aux valeurs propres de modèles éléments finis alors que celles mesurées proviennent d'analyses modales expérimentales réalisées sur des rotors feuilletés à l'arrêt. Cette corrélation numérique-expérimentale est quantifiée par des estimateurs (ou normes d'erreurs) qui traduisent l'écart la mesure et le modèle.

Il a donc été présenté et proposé différents estimateurs qui ont permis d'identifier les propriétés constitutives du feuilletage et prévoir les pulsations et formes propres les plus proches possible des mesures. Ces estimateurs permettent de définir une fonctionnelle de moindres carrés dont le minimum est obtenu en actualisant de manière itérative les propriétés constitutives du modèle. L'implémentation d'algorithmes, de *Levenberg-Marquardt* et de dérivation des éléments propres, a donc été nécessaire pour minimiser ces fonctionnelles.

Dans un premier temps, il a été présenté une fonctionnelle multi-objectifs basée, sur l'écart des pulsations propres mesurées et calculées, les composantes d'une matrice de corrélation MAC calculée entre les formes propres mesurées et calculées et des coefficients de pondération. Cette fonctionnelle a été envisagée dans une application industrielle pour identifier des distributions de propriétés constitutives d'un rotor MGVT le long du feuilletage sub-divisé en sous-domaines. Il a été fait état que les distributions des propriétés identifiées évoluaient avec le nombre de sous-domaines pour atteindre une allure particulière caractérisée par une valeur constante au centre du feuilletage et des faibles valeurs aux niveaux des interfaces entre les anneaux de court-circuit et le feuilletage. Une seconde application industrielle est réalisée pour identifier les propriétés constitutives l'empilement de tôles annulaires d'un rotor de palier magnétique modélisé en trois dimensions.

Dans un second temps, l'analyse de l'équation qui fournit les fréquences et formes propres d'une structure énergétiquement parfaite a permis d'établir un estimateur original basé sur un quotient de *Rayleigh* hybride. Pour chaque mode, cet estimateur combine forme propre calculée, pulsation et forme propre mesurées en un terme adimensionnel, *i.e.* l'utilisation de coefficients de pondération n'est donc plus nécessaire dans la définition de la fonctionnelle. Néanmoins, les formes propres calculées sont composées des degrés de libertés transversaux et des degrés de libertés de rotation lesquels ne sont pas mesurés, et même mesurables.

Des fonctionnelles modales condensées ont été proposées grâce à l'utilisation de méthodes de réduction de *Guyan* ou de *Craig & Bampton*, qui se sont avérées efficaces pour faire correspondre les degrés de liberté calculés et mesurés, n'utiliser aucune extrapolation des données expérimentales et identifier les propriétés constitutives des feuilletages de plusieurs rotors MGVT. Il a été établi qu'une condensation dynamique était particulièrement adaptée à la réduction des modèles ramifiés. De manière générale, il a été montré que les propriétés constitutives identifiées du feuilletage dépendaient du nombre de modes considérés dans la procédure d'identification. Néanmoins, ces valeurs étaient pertinentes dans la mesure où le nombre de modes considérés était représentatifs de la dynamique de la structure testée.

A l'inverse, une fonctionnelle modale expansée a été proposée grâce à l'utilisation de méthodes d'expansion de formes propres expérimentales, *e.g.* expansion de *Guyan* ou *SEREP*, qui ont permis d'obtenir des estimations des degrés de libertés non mesurés et identifier les modules d'*Young*, de *Coulomb* et coefficients de *Poisson* d'une autre structure industrielle, *i.e.* une portion d'arbre de rotor feuilleté.

Ainsi, identifier les propriétés constitutives d'un matériau isotrope transverse équivalent modélisant le feuilletage est une alternative intéressante qui permet de construire des modèles éléments finis basés uniquement sur des éléments de poutre de *Timoshenko* contenant peu de degrés de liberté. Ceci est bénéfique lorsqu'il s'agit de prévoir les réponses aux balourds ou transitoires. Par ailleurs, l'identification des propriétés constitutives des composants d'un rotor MGVT s'inscrit dans une démarche de développement de modèle le plus précis possible permettant de prévoir la dynamique de structures complexes telles que les rotors feuilletés.

L'intégration systématique de la procédure d'identification, basée sur les différentes fonction-

---

nelles proposées, a permis d'implémenter une base de données expérimentales composée de plus de trente rotors feuilletés de géométries différentes. Une méthode de régression linéaire multiple a été implémentée et a permis d'établir des modèles prédictifs des modules d'Young et de Coulomb de l'empilement, qui dépendent, de la géométrie de l'empilement et des portions d'arbre, et également de la précontrainte initiale appliquée à l'empilement. Statistiquement, les deux modèles prédictifs proposés ont expliqué plus de 90% des variations de 80% de l'échantillon, et ont permis de définir des intervalles de prédiction de fréquences de l'ordre de  $\pm 5.85\%$ .

Le modèle éléments finis ramifié qui a été proposé a permis de prendre en compte le chargement centrifuge agissant sur les tirants. Différents phénomènes dépendant de la vitesse de rotation ont été mis en évidence : le raidissement sur les tirants, l'évolution de charge longitudinale du feuilletage impliquant une modification de ses propriétés constitutives, modélisées grâce au modèle prédictif précédemment cité, ainsi qu'une modification de l'assemblage de la masse magnétique due à l'apparition d'un contact entre les tirants et le feuilletage. Leurs maillages non-coïncidents ont nécessité dans un premier temps, l'implémentation d'une méthode permettant de modéliser le contact entre nœuds maîtres et éléments finis esclaves, et d'un algorithme de contact basé sur une méthode de pénalité. Dans un second temps, un algorithme du point fixe a été implémenté pour le calcul de la déflexion quasi-statique non linéaire des tirants.

Grâce à cette démarche, des calculs de réponses dynamiques et autres diagrammes de Campbell ont été réalisés. Un critère de corrélation des formes propres complexes d'un rotor, *i.e.* basé sur la notion de vecteurs propres gauches et droits, a été proposé puis implémenté. Ce critère original a permis de tracer des diagrammes de Campbell présentant l'évolution de fréquences propres de rotor parfaitement ordonnées en fonction des formes propres complexes auxquelles elles étaient associées. Ces simulations ont montré que les propriétés constitutives identifiées, à partir d'analyses modales expérimentales à l'arrêt, assuraient une bonne prédictivité du comportement dynamique des rotors feuilletés, *e.g.* les vitesses critiques de rotation présentant un taux d'accroissement maximum inférieur à 5% lorsque les effets centrifuges étaient modélisés. Par ailleurs, il a été fait état que les contraintes de Von Mises des tirants n'excédaient pas le niveau de contrainte initiale, assurant ainsi l'intégrité mécanique du rotor feuilleté durant les conditions opératoires.

En conclusion, la maîtrise de la dynamique des rotors feuilletés et la très bonne connaissance des caractéristiques entrant en jeu, *e.g.* propriétés constitutives équivalentes du feuilletage, assemblage de la cage d'écureuil ou centrifugation des tirants, permettent au constructeur d'accroître la fiabilité des calculs de prévision du comportement dynamique des rotors feuilletés, notamment dans les phases de développement où il s'agit de prévoir le comportement dynamique de rotors jamais réalisés auparavant, *e.g.* 30 MW à 6 000 rpm.

Enfin, à la lumière des investigations réalisées en Section 4.3, il pourrait être envisagé d'établir des lois des modules d'Young et de Coulomb pour chaque tronçons divisant la masse magnétique. Aussi les interactions rotor-stator et rotor-PMA représentent des perspectives de recherche à envisager pour prévoir le comportement du moteur électrique dans son ensemble.



# Annexes



# Annexe A

## Modélisation structurelle

### Sommaire

---

|                                                                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>A.1 Rappels et hypothèses</b> . . . . .                                                                      | <b>177</b> |
| A.1.1 Définitions . . . . .                                                                                     | 177        |
| A.1.2 Hypothèses . . . . .                                                                                      | 177        |
| <b>A.2 Poutre de Timoshenko dans le plan <math>\{yGz\}</math></b> . . . . .                                     | <b>177</b> |
| A.2.1 Champ de déplacements . . . . .                                                                           | 177        |
| A.2.2 Champs de déformations et contraintes . . . . .                                                           | 178        |
| A.2.3 Efforts résultants . . . . .                                                                              | 178        |
| A.2.4 Equations d'équilibre . . . . .                                                                           | 179        |
| A.2.5 Élément fini de poutre . . . . .                                                                          | 180        |
| A.2.6 Fonctions de forme . . . . .                                                                              | 182        |
| <b>A.3 Poutre de Timoshenko dans le plan <math>\{xGy\}</math></b> . . . . .                                     | <b>183</b> |
| A.3.1 Champ de déplacements . . . . .                                                                           | 183        |
| A.3.2 Champs de déformations et contraintes . . . . .                                                           | 184        |
| A.3.3 Efforts résultants . . . . .                                                                              | 184        |
| A.3.4 Equations d'équilibre . . . . .                                                                           | 185        |
| A.3.5 Élément fini de poutre . . . . .                                                                          | 186        |
| A.3.6 Fonctions de forme . . . . .                                                                              | 188        |
| <b>A.4 Approximations relative à l'expression de l'énergie de déformation</b> . .                               | <b>190</b> |
| A.4.1 Des angles d'Euler aux angles de Timoshenko . . . . .                                                     | 190        |
| A.4.2 Approximation de la <i>rotation propre</i> . . . . .                                                      | 192        |
| A.4.3 Relation entre repère galiléen et repère tournant. Projection des angles de rotation de section . . . . . | 194        |
| <b>A.5 Modélisation éléments-finis d'un rotor</b> . . . . .                                                     | <b>196</b> |
| A.5.1 Discrétisation . . . . .                                                                                  | 196        |
| A.5.2 Le disque . . . . .                                                                                       | 196        |
| A.5.3 L'arbre . . . . .                                                                                         | 197        |
| A.5.3.1 Matrices élémentaires de masse et gyroscopique . . . . .                                                | 199        |
| A.5.3.2 Matrices élémentaires de raideur . . . . .                                                              | 203        |
| A.5.4 Les paliers . . . . .                                                                                     | 206        |
| A.5.5 Les balourds . . . . .                                                                                    | 207        |
| A.5.6 Force asynchrone . . . . .                                                                                | 208        |
| A.5.7 Force harmonique de direction fixe . . . . .                                                              | 209        |
| A.5.8 Force et couple répartis dans l'espace . . . . .                                                          | 209        |
| A.5.9 Amortissement structural . . . . .                                                                        | 214        |
| A.5.9.1 Hypothèse de Rayleigh . . . . .                                                                         | 214        |
| A.5.9.2 Hypothèse de Basile . . . . .                                                                           | 217        |
| A.5.10 Interprétation physique d'une forme propre complexe . . . . .                                            | 219        |
| A.5.11 Détermination des caractéristiques d'une ellipse . . . . .                                               | 220        |

|            |                                                                                 |            |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------|------------|
| A.5.12     | Détermination du sens de parcours d'une ellipse . . . . .                       | 225        |
| <b>A.6</b> | <b>Algorithme d'appariement des formes propres complexes . . . . .</b>          | <b>227</b> |
| <b>A.7</b> | <b>Algorithme de recherche de vitesses critiques de rotation . . . . .</b>      | <b>228</b> |
| <b>A.8</b> | <b>Détermination des champs de contraintes dans un rotor . . . . .</b>          | <b>229</b> |
| A.8.1      | Contraintes normales de flexion élémentaires . . . . .                          | 230        |
| A.8.2      | Contraintes de cisaillement élémentaires . . . . .                              | 232        |
| A.8.3      | Détermination des contraintes maximales de flexion . . . . .                    | 232        |
| A.8.4      | Détermination des contraintes maximales de cisaillement dans le plan $\{y, z\}$ | 239        |
| A.8.5      | Détermination des contraintes maximales de cisaillement dans le plan $\{x, y\}$ | 241        |
| A.8.6      | Contraintes de $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{M}$ ises . . . . .                    | 243        |

---

## A.1 Rappels et hypothèses

### A.1.1 Définitions

La déflexion transversale d'un rotor peut être modélisée par celle d'une poutre droite sollicitée en flexion dans deux plans orthogonaux de l'espace. Une poutre droite (FIG. A.1(a)) est un solide engendré par une surface plane ( $S$ ) (FIG. A.1(b)), constante ou non, dont le centre d'inertie  $G$  décrit un axe  $y$  entre les points  $O$  et  $G'$ , le plan contenant ( $S$ ) restant normal à l'axe  $y$ .

Soit l'axe  $y$ , la fibre neutre de la poutre et  $S$  la section droite de la poutre.

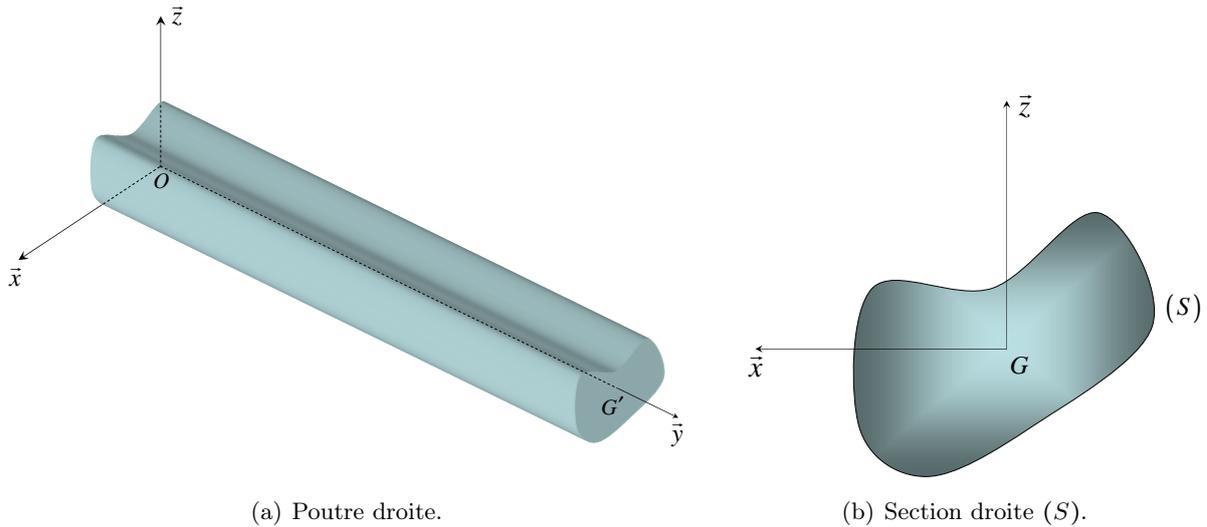


FIGURE A.1 – Éléments de définition d'une poutre droite.

### A.1.2 Hypothèses

Les conventions et hypothèses sont les suivantes :

- Les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  forment un trièdre orthonormé direct porté par les vecteurs unitaires  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . Les axes  $(G, \vec{x})$  et  $(G, \vec{z})$  sont les axes centraux principaux d'inertie de la section droite.
- On note  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère galiléen.
- Les plans  $\{yGz\}$  et  $\{xGy\}$  sont des plans de symétrie de la poutre.
- Le matériau est supposé homogène. Son comportement est linéaire, élastique et défini par les modules d'Young et de Coulomb  $E$  et  $G$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et la masse volumique  $\rho$ .
- Les déplacements et les déformations restent petits.
- Les sections droites ( $S$ ) restent planes durant la mise en charge (FIG. A.2 et FIG. A.5).

## A.2 Poutre de Timoshenko dans le plan $\{yGz\}$

### A.2.1 Champ de déplacements

Si l'on considère un point  $P_0$  d'une section droite ( $S$ ) situé en  $(y, z)$  dans la configuration initiale non déformée  $\mathcal{C}_0$ , son champ de déplacement est défini par le vecteur  $\vec{U}(P) \in \mathbb{R}^2$  dans le plan  $\{yGz\}$

tel que :

$$\vec{U}(P) = \begin{pmatrix} v(y, z) \\ w(y, z) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

où  $v(y, z)$  et  $w(y, z)$  correspondent respectivement aux déplacements, selon  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , du point  $P_0$  de la configuration initiale  $\mathcal{C}_0$  à la configuration déformée  $\mathcal{C}$ . En explicitant vectoriellement le champ de déplacement du point  $P_0$ , il vient :

$$\vec{U}(P) = \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0G_0} + \overrightarrow{G_0G} + \overrightarrow{GP}. \quad (\text{A.2})$$

La projection de l'Eq. (A.2) sur  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  donne :

$$\vec{U}(P) = \begin{pmatrix} v(y, z) \\ w(y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \sin(\theta(y)) \\ z \cos(\theta(y)) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

où  $\theta$  définit la rotation de la section droite ( $S$ ) autour de  $\vec{x}$ . L'angle  $\theta$  est orienté positivement du vecteur unitaire  $\vec{y}$  vers le vecteur unitaire  $\vec{z}$ . L'hypothèse des petits déplacements et petites déformations impose :

$$\begin{cases} \sin(\theta(y)) \sim \theta(y) \\ \cos(\theta(y)) \sim 1 \end{cases}, \quad (\text{A.4})$$

et permet d'obtenir l'expression du champ de déplacements dans le plan  $\{yGz\}$  (FIG. A.2) :

$$\begin{cases} v(y, z) = -z\theta(y) \\ w(y, z) = w(y) \end{cases}. \quad (\text{A.5})$$

### A.2.2 Champs de déformations et contraintes

Les déformations dues à la flexion et au cisaillement ont pour expression :

$$\underbrace{\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta}{\partial y}}_{\text{Flexion}}, \quad (\text{A.6a})$$

$$\underbrace{2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta}_{\text{Cisaillement}}, \quad (\text{A.6b})$$

puis les contraintes associées :

$$\sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy} = -Ez \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\sigma_{yz} = Gk_{yz}2\varepsilon_{yz} = Gk_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right). \quad (\text{A.7b})$$

### A.2.3 Efforts résultants

Il vient alors l'expression de l'effort tranchant :

$$T_z = \int_{(S)} \sigma_{yz} dS = GSk_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right), \quad (\text{A.8})$$

où le coefficient  $k_{yz}$  est le coefficient de réduction de section défini par :

$$\frac{T_z^2}{Sk_{yz}} = \int_{(S)} \sigma_{yz}^2 dS, \quad (\text{A.9})$$

où  $\sigma_{yz}$  est la contrainte de cisaillement parabolique due à l'effort tranchant  $T_z$  déduit de la théorie de l'élasticité [91; 27; 28].  $Sk_{yz}$  est l'aire cisillée ou section réduite.

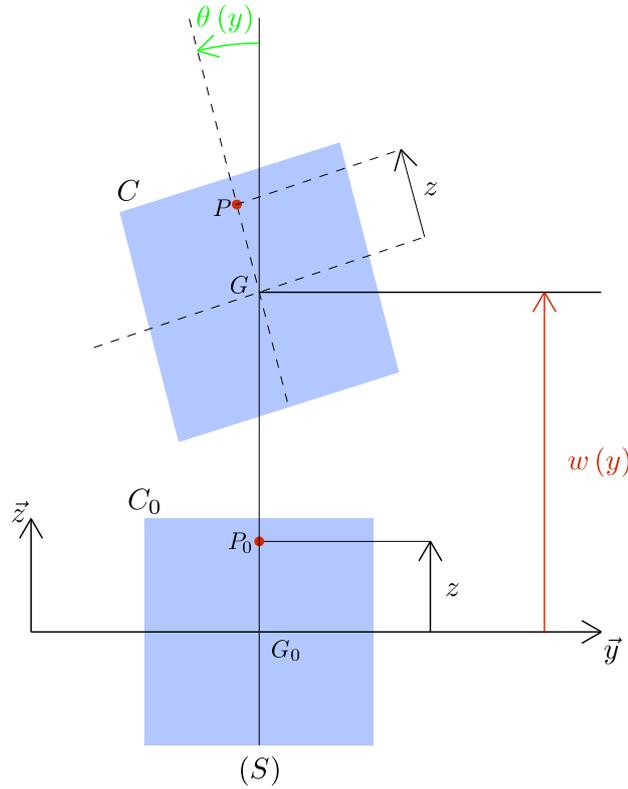


FIGURE A.2 – Déplacement d'une section droite d'abscisse  $y$  dans le plan  $\{yGz\}$ .

Le moment fléchissant dans le plan  $\{y, z\}$  s'écrit :

$$Mf_x \cdot \vec{x} = \int_{(S)} (z \cdot \vec{z}) \wedge (\sigma_{yy} dS \cdot \vec{y}) dS,$$

$$\Leftrightarrow Mf_x = \int_{(S)} -z \sigma_{yy} dS = \int_{(S)} E z^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} dS = EI_{G_x} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (\text{A.10})$$

où  $S$  est l'aire de la section droite  $(S)$  et  $I_{G_x}$  est le moment quadratique de la section droite  $(S)$  autour de l'axe  $(G, x)$  et défini par l'Eq. (A.11) :

$$I_{G_x} = \int_{(S)} z^2 dS. \quad (\text{A.11})$$

#### A.2.4 Equations d'équilibre

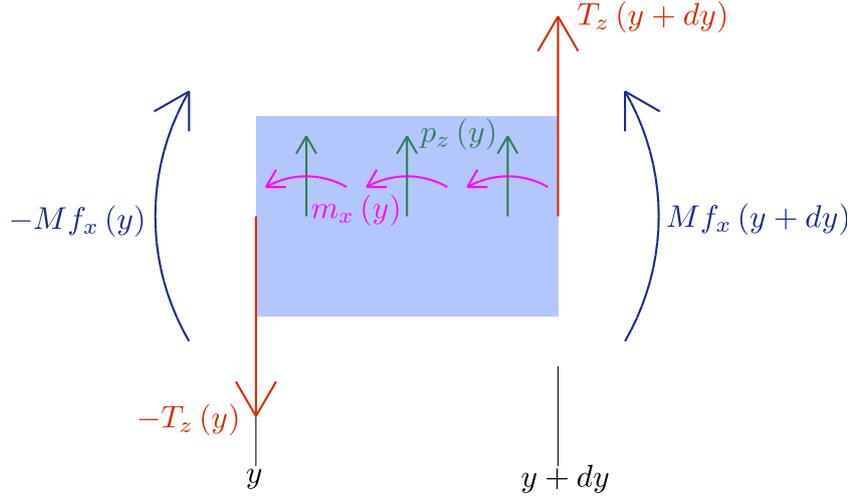
En développant au premier ordre l'expression des effort tranchant et moment fléchissant tel que :

$$T_z(y+dy) = T_z(y) + \frac{\partial T_z}{\partial y} dy, \quad (\text{A.12a}) \quad Mf_x(y+dy) = Mf_x(y) + \frac{\partial Mf_x}{\partial y} dy, \quad (\text{A.12b})$$

l'équilibre dynamique d'un élément de poutre (FIG. A.3) compris entre les sections droites d'abscisses  $y$  et  $y+dy$  s'écrit, selon  $\vec{z}$ , pour les efforts résultants :

$$-T_z + T_z + \frac{\partial T_z}{\partial y} dy + p_z = \left( \int_{(S)} \rho \ddot{w} dS \right) dy = \rho S \ddot{w} dy, \quad (\text{A.13})$$

et pour les moments résultants portés par  $\vec{x}$  :


 FIGURE A.3 – Efforts sur un élément de poutre compris entre  $y$  et  $y + dy$ .

$$-Mf_x + Mf_x + \frac{\partial Mf_x}{\partial y} dy + T_z dy + m_x dy = \left( \int_{(S)} -z\rho\ddot{v}dS \right) dy = \rho I_{G_x} \ddot{\theta} dy, \quad (\text{A.14})$$

où  $(\ddot{\phantom{x}})$  est un opérateur différentiel temporel d'ordre deux tel que :

$$\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \ddot{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \ddot{\theta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (\text{A.15})$$

Après simplification, on obtient les deux équations d'équilibre :

$$\frac{\partial T_z}{\partial y} + p_z = \rho S \ddot{w}, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial Mf_x}{\partial y} + T_z + m_x = \rho I_{G_x} \ddot{\theta}. \quad (\text{A.17})$$

Ces équations s'écrivent en fonction des déplacements à l'aide de Eq. (A.8) et Eq. (A.10) :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( Gk_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) \right) + p_z = \rho S \ddot{w}, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( EI_{G_x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + GS k_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) + m_x = \rho I_{G_x} \ddot{\theta}. \quad (\text{A.19})$$

### A.2.5 Élément fini de poutre

On considère un élément fini de poutre  $\mathcal{K}_e$  compris entre les nœuds  $e$  et  $e + 1$  (FIG. A.4), de longueur  ${}^e l$ . L'exposant  ${}^e (\ )$  s'appliquera à toute variable relative l'élément  $\mathcal{K}_e$ .

Soient  $(T_{z_e}, Mf_{x_e})$  et  $(T_{z_{e+1}}, Mf_{x_{e+1}})$  respectivement les efforts résultants dans les sections des nœuds  $e$  et  $e + 1$ , et  ${}^e p_z$  et  ${}^e m_x$  respectivement les force et couple répartis d'intensité linéique.

On note :

$${}^e\delta_w = [w_e, \theta_e, w_{e+1}, \theta_{e+1}]^t, \quad (\text{A.20})$$

le vecteur des degrés de liberté ou déplacements nodaux. En l'absence de forces d'inertie, les équations d'équilibre Eq. (A.16) et Eq. (A.17) se réduisent à :

$$\frac{\partial T_z}{\partial y} + {}^e p_z = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial M f_x}{\partial x} + T_z + {}^e m_x = 0 \quad (\text{A.22})$$

Les efforts résultants dans la section d'abscisse  $y$  de l'élément fini s'écrivent alors :

$$T_z(y) = T_{z_e} - \int_0^y {}^e p_z(s) ds \quad (\text{A.23})$$

$$M f_x(y) = M f_{x_e} - \int_0^y T_z(s) ds - \int_0^y {}^e m_x(s) ds \quad (\text{A.24})$$

Le déplacement selon  $\vec{z}$  et la rotation des sections droites autour de  $\vec{x}$  sont donnés par les formules de Bresse [92; 93] :

$$\theta(y) = \theta_e + \int_0^y \frac{M f_x(s)}{{}^e E^e I_{G_x}} ds \quad (\text{A.25})$$

$$w(y) = w_e + \theta_e y + \int_0^y \frac{M f_x(s)}{{}^e E^e I_{G_x}} (y-s) ds + \int_0^y \frac{T_z(s)}{{}^e G^e k_{yz} {}^e S} ds \quad (\text{A.26})$$

A l'aide des conditions aux limites suivantes :

$$T_{z_{e+1}} = T_z({}^e l), \quad M f_{x_{e+1}} = M f_x({}^e l), \quad w_{e+1} = w({}^e l), \quad \theta_{e+1} = \theta({}^e l) \quad (\text{A.27})$$

on déduit l'expression des efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux  ${}^e\delta_w$  :

$${}^e F_w^{yz} = [{}^e K_w^{yz}] {}^e\delta_w - {}^e f_w^{yz} \quad (\text{A.28})$$

avec :

$${}^e F_w^{yz} = \begin{Bmatrix} - & T_z(0) \\ - & M f_x(0) \\ & T_z({}^e l) \\ & M f_x({}^e l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - & T_{z_e} \\ - & M f_{x_e} \\ & T_{z_{e+1}} \\ & M f_{x_{e+1}} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

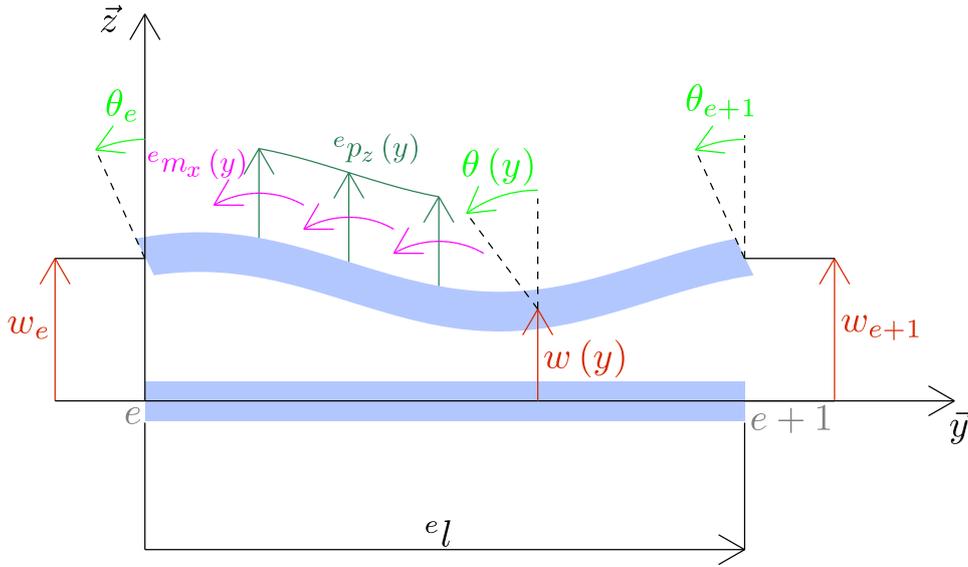
où  ${}^e F_w^{yz}$  est le vecteur élémentaire des forces nodales dans le plan  $\{yGz\}$ ,  ${}^e K_w^{yz}$  est la matrice de raideur élastique élémentaire associée à  ${}^e\delta_w$ ,  ${}^e f_w^{yz}$  est le vecteur élémentaire de force équivalent aux charges réparties.

Pour un élément de poutre de section droite  ${}^e S$  constante, soumis sur toute sa longueur à une force et à un couple d'intensité linéique définis tels que :

$${}^e p_z(y) = p_{z_e} + (p_{z_{e+1}} - p_{z_e}) \frac{y}{e l}, \quad (\text{A.30a}) \quad {}^e m_x(y) = m_{x_e} + (m_{x_{e+1}} - m_{x_e}) \frac{y}{e l}, \quad (\text{A.30b})$$

il vient :

$${}^e K_w^{yz} = \frac{{}^e E^e I_{G_x}}{e l^3 (1 + {}^e \phi_{yz})} \begin{bmatrix} 12 & 6^e l & -12 & 6^e l \\ & e l^2 (4 + {}^e \phi_{yz}) & -6^e l & e l^2 (2 - {}^e \phi_{yz}) \\ \text{Sym.} & & 12 & -6^e l \\ & & & e l^2 (4 + {}^e \phi_{yz}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$


 FIGURE A.4 – Élément de poutre  $\mathcal{H}_e$  dans le plan  $\{yGz\}$ .

$${}^e f_w^{yz} = \frac{{}^e l}{120(1 + {}^e \phi_{yz})} \begin{bmatrix} 42 + 40{}^e \phi_{yz} & 18 + 20{}^e \phi_{yz} \\ {}^e l(6 + 5{}^e \phi_{yz}) & {}^e l(4 + 5{}^e \phi_{yz}) \\ 18 + 20{}^e \phi_{yz} & 42 + 40{}^e \phi_{yz} \\ -{}^e l(4 + 5{}^e \phi_{yz}) & -{}^e l(6 + 5{}^e \phi_{yz}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{z_e} \\ p_{z_{e+1}} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$+ \frac{1}{12(1 + {}^e \phi_{yz})} \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ {}^e l(1 + 4{}^e \phi_{yz}) & {}^e l(-1 + 2{}^e \phi_{yz}) \\ 6 & 6 \\ {}^e l(-1 + 2{}^e \phi_{yz}) & {}^e l(1 + 4{}^e \phi_{yz}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{x_e} \\ m_{x_{e+1}} \end{Bmatrix}$$

où  ${}^e \phi_{yz}$  le coefficient de cisaillement élémentaire dans le plan  $\{yGz\}$  défini par :

$${}^e \phi_{yz} = \frac{12{}^e E {}^e I_{G_x}}{{}^e G {}^e k_{yz} {}^e S {}^e l^2}, \quad (\text{A.33})$$

avec  ${}^e E$  et  ${}^e G$  respectivement les modules d'Young et de Coulomb élémentaires,  ${}^e I_{G_x}$  le moment quadratique de la section droite élémentaire  ${}^e S$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{x})$  et  ${}^e k_{yz}$  le coefficient de réduction de section élémentaire.

### A.2.6 Fonctions de forme

Pour un élément de poutre  $\mathcal{H}_e$  à section constante  ${}^e S$  et non chargé, les deux équations d'équilibre Eq. (A.18) et Eq. (A.19) se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) = 0, \quad (\text{A.34})$$

$${}^e E {}^e I_{G_x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + {}^e G {}^e S {}^e k_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) = 0, \quad (\text{A.35})$$

d'où :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0, \quad (\text{A.36})$$

ce qui implique :

$$w(y) = \sum_{i=0}^3 a_{w_i} y^i, \quad (\text{A.37})$$

où les  $a_{w_i} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, 3$ . De l'Eq. (A.34), on déduit :

$$\theta(y) = \frac{\partial w}{\partial y} + c_w \text{ où } c_w \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.38})$$

et l'Eq. (A.35) devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{12c_w}{e\phi_{yz}e l^2} \text{ avec } \phi_{yz} = \frac{12^e E^e I_{G_x}}{e l^2 e G^e k_{yz}^e S}. \quad (\text{A.39})$$

L'Eq. (A.39) et les quatre conditions aux limites suivantes :

$$w(0) = w_e, \quad w(e l) = w_{e+1}, \quad \theta(0) = \theta_e, \quad \theta(e l) = \theta_{e+1}, \quad (\text{A.40})$$

permettent d'obtenir le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & e l & e l^2 & e l^3 & 0 \\ 0 & 1 & 2^e l & 3^e l^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6^e \phi_{yz} e l^2 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{w_0} \\ a_{w_1} \\ a_{w_2} \\ a_{w_3} \\ c_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_e \\ \theta_e \\ w_{e+1} \\ \theta_{e+1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.41})$$

L'inversion du système Eq. (A.41) permet le calcul des cinq coefficients  $a_{w_i}$ ,  $i = 0, \dots, 3$  et  $c_w$  en fonction des degrés de liberté  $w_e$ ,  $\theta_e$ ,  $w_{e+1}$  et  $\theta_{e+1}$  puis des fonctions de formes  ${}^e N_w^{yz}$ ,  ${}^e N_\theta^{yz} \in \mathbb{R}^4$  définies telles que :

$$w(y) = {}^e N_w^{yz}(y) {}^e \delta_w, \quad (\text{A.42a}) \quad \theta(y) = {}^e N_\theta^{yz}(y) {}^e \delta_w, \quad (\text{A.42b})$$

avec :

$${}^e N_w^{yz}(\zeta) = \frac{1}{1+e\phi_{yz}} \begin{bmatrix} (\zeta-1)(2\zeta^2 - \zeta - e\phi_{yz} - 1) \\ \zeta(\zeta-1)(\zeta-1 - \frac{1}{2}e\phi_{yz})e l \\ \zeta(-2\zeta^2 + 3\zeta + e\phi_{yz}) \\ \zeta(\zeta-1)(\zeta + \frac{1}{2}e\phi_{yz})e l \end{bmatrix}^t, \quad (\text{A.43})$$

et :

$${}^e N_\theta^{yz}(\zeta) = \frac{1}{e l (1+e\phi_{yz})} \begin{bmatrix} -6\zeta(\zeta-1) \\ (\zeta-1)(3\zeta-1 - e\phi_{yz})e l \\ 6\zeta(\zeta-1) \\ \zeta(3\zeta-2 + e\phi_{yz})e l \end{bmatrix}^t, \quad (\text{A.44})$$

avec  $\zeta = \frac{y}{e l}$ .

## A.3 Poutre de Timoshenko dans le plan $\{xGy\}$

### A.3.1 Champ de déplacements

Si l'on considère un point  $P_0$  d'une section droite ( $S$ ) situé en  $(x, y)$  dans la configuration initiale non déformée  $\mathcal{C}_0$ , son champ de déplacement est défini par le vecteur  $\vec{U}(P) \in \mathbb{R}^2$  dans le plan  $\{xGy\}$

tel que :

$$\vec{U}(P) = \begin{pmatrix} v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.45})$$

où  $v(x, y)$  et  $u(x, y)$  correspondent respectivement aux déplacements, selon  $\vec{y}$  et  $\vec{x}$ , du point  $P_0$  de la configuration initiale  $\mathcal{C}_0$  à la configuration déformée  $\mathcal{C}$ . En explicitant vectoriellement le champ de déplacement du point  $P_0$ , il vient :

$$\vec{U}(P) = \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0G_0} + \overrightarrow{G_0G} + \overrightarrow{GP}. \quad (\text{A.46})$$

La projection de l'Eq. (A.46) sur  $\vec{y}$  et  $\vec{x}$  donne :

$$\vec{U}(P) = \begin{pmatrix} v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \sin(\psi(y)) \\ x \cos(\psi(y)) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.47})$$

où  $\psi$  définit la rotation de la section droite ( $S$ ) autour de  $\vec{z}$ . L'angle  $\psi$  est orienté positivement du vecteur unitaire  $\vec{x}$  vers le vecteur unitaire  $\vec{y}$ . L'hypothèse des petits déplacements et petites déformations impose :

$$\begin{cases} \sin(\psi(y)) \sim \psi(y) \\ \cos(\psi(y)) \sim 1 \end{cases}, \quad (\text{A.48})$$

et permet d'obtenir l'expression du champ de déplacements dans le plan  $\{xGy\}$  (FIG. A.5) :

$$\begin{cases} v(x, y) = x\psi(y) \\ u(x, y) = u(y) \end{cases}. \quad (\text{A.49})$$

### A.3.2 Champs de déformations et contraintes

Les déformations dues à la flexion et au cisaillement ont pour expression :

$$\underbrace{\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial \psi}{\partial y}}_{\text{Flexion}}, \quad (\text{A.50a})$$

$$\underbrace{2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \psi}_{\text{Cisaillement}}, \quad (\text{A.50b})$$

puis les contraintes associées :

$$\sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy} = Ex \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (\text{A.51a})$$

$$\sigma_{xy} = Gk_{xy}2\varepsilon_{xy} = Gk_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right). \quad (\text{A.51b})$$

### A.3.3 Efforts résultants

Il vient alors l'expression de l'effort tranchant :

$$T_x = \int_{(S)} \sigma_{xy} dS = GS k_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right), \quad (\text{A.52})$$

où le coefficient  $k_{xy}$  est le coefficient de réduction de section défini par :

$$\frac{T_x^2}{S k_{xy}} = \int_{(S)} \sigma_{xy}^2 dS, \quad (\text{A.53})$$

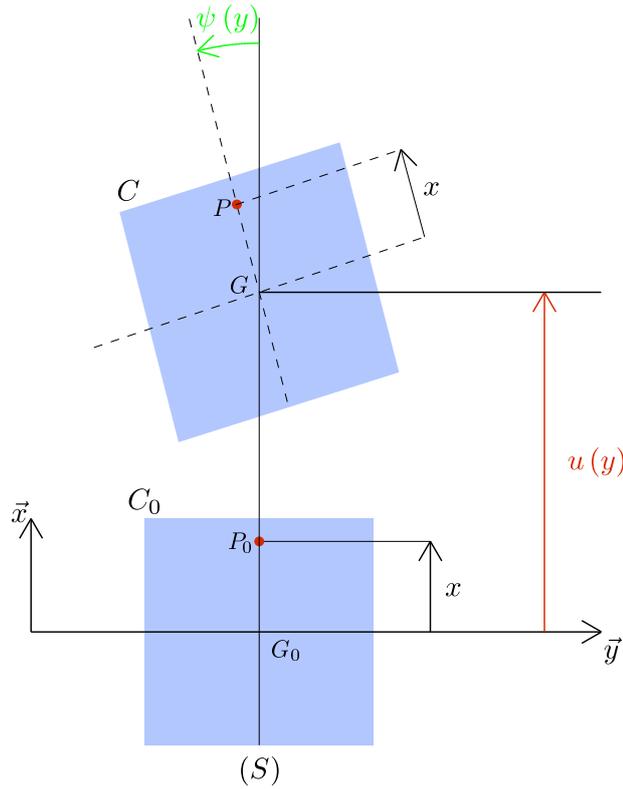


FIGURE A.5 – Déplacement d’une section droite d’abscisse  $y$  dans le plan  $\{xGy\}$ .

où  $\sigma_{xy}$  est la contrainte de cisaillement parabolique due à l’effort tranchant  $T_x$  déduit de la théorie de l’élasticité [91; 27; 28].  $Sk_{xy}$  est l’aire cisillée ou section réduite.

Le moment fléchissant dans le plan  $\{x, y\}$  :

$$Mf_z \cdot \vec{z} = \int_{(S)} (x \cdot \vec{x}) \wedge (\sigma_{yy} dS \cdot \vec{y}) dS,$$

$$\Leftrightarrow Mf_z = \int_{(S)} x \sigma_{yy} dS = \int_{(S)} E x^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} dS = EI_{G_z} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (\text{A.54})$$

où  $I_{G_z}$  est le moment quadratique de la section droite ( $S$ ) autour de l’axe  $(G, z)$  et défini par l’Eq. (A.55) :

$$I_{G_z} = \int_{(S)} x^2 dS. \quad (\text{A.55})$$

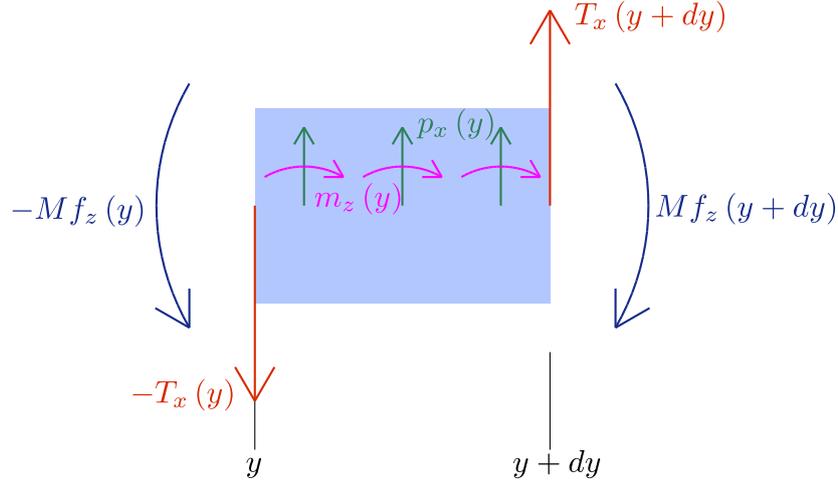
### A.3.4 Equations d’équilibre

En développant au premier ordre l’expression des effort tranchant et moment fléchissant tel que :

$$T_x(y+dy) = T_x(y) + \frac{\partial T_x}{\partial y} dy, \quad (\text{A.56a}) \quad Mf_z(y+dy) = Mf_z(y) + \frac{\partial Mf_z}{\partial y} dy, \quad (\text{A.56b})$$

l’équilibre dynamique d’un élément de poutre (FIG. A.6) compris entre les sections droites d’abscisses  $y$  et  $y+dy$  s’écrit, selon  $\vec{x}$  pour les efforts résultants :

$$-T_x + T_x + \frac{\partial T_x}{\partial y} dy + p_x = \left( \int_{(S)} \rho \ddot{u} dS \right) dy = \rho S \ddot{w} dy, \quad (\text{A.57})$$


 FIGURE A.6 – Efforts sur un élément de poutre compris entre  $y$  et  $y + dy$ .

et les moments résultants portés par  $\vec{z}$  :

$$-Mf_z + Mf_z + \frac{\partial Mf_z}{\partial y} dy - T_x dy + m_z dy = \left( \int_{(S)} x \rho \ddot{u} dS \right) dy = \rho I_{G_z} \ddot{\psi} dy, \quad (\text{A.58})$$

où  $(\ddot{\phantom{x}})$  est un opérateur différentiel temporel d'ordre deux tel que :

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \ddot{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \ddot{\psi} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (\text{A.59})$$

Après simplification, on obtient les deux équations d'équilibre :

$$\frac{\partial T_x}{\partial y} + p_x = \rho S \ddot{u}, \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial y} - T_x + m_z = \rho I_{G_z} \ddot{\psi}. \quad (\text{A.61})$$

Ces équations s'écrivent en fonction des déplacements à l'aide de Eq. (A.52) et Eq. (A.54) :

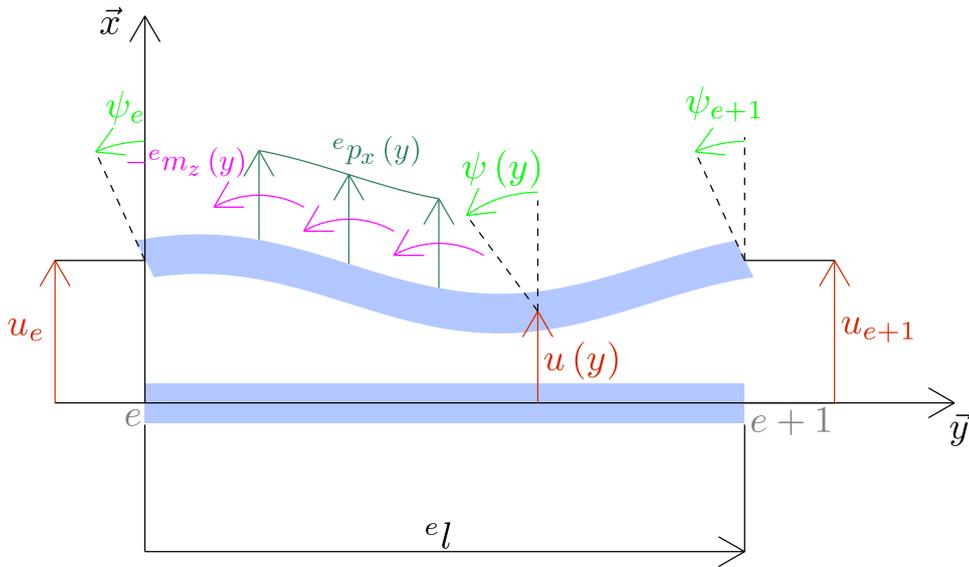
$$\frac{\partial}{\partial y} \left( Gk_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right) \right) + p_x = \rho S \ddot{u}, \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( EI_{G_z} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - GSk_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right) + m_z = \rho I_{G_z} \ddot{\psi}. \quad (\text{A.63})$$

### A.3.5 Élément fini de poutre

On considère un élément fini de poutre  $\mathcal{K}_e$  compris entre les nœuds  $e$  et  $e + 1$  (FIG. A.7), de longueur  ${}^e l$ . L'exposant  ${}^e ( )$  s'appliquera à toute variable relative l'élément  $\mathcal{K}_e$ .

Soient  $(T_{x_e}, Mf_{z_e})$  et  $(T_{x_{e+1}}, Mf_{z_{e+1}})$  respectivement les efforts résultants dans les sections des


FIGURE A.7 – Élément de poutre  $\mathcal{K}_e$  dans le plan  $\{xGy\}$ .

nœuds  $e$  et  $e + 1$ , et  ${}^e p_x$  et  ${}^e m_z$  respectivement les force et couple répartis d'intensité linéique.

On note :

$${}^e \delta_u = [u_e, \psi_e, u_{e+1}, \psi_{e+1}]^t, \quad (\text{A.64})$$

le vecteur des degrés de liberté ou déplacements nodaux. En l'absence de forces d'inertie, les équations d'équilibre Eq. (A.60) et Eq. (A.61) se réduisent à :

$$\frac{\partial T_x}{\partial y} + {}^e p_x = 0 \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{\partial M f_z}{\partial x} - T_x + {}^e m_z = 0 \quad (\text{A.66})$$

Les efforts résultants dans la section d'abscisse  $y$  de l'élément fini s'écrivent alors :

$$T_x(y) = T_{x_e} - \int_0^y {}^e p_x(s) ds \quad (\text{A.67})$$

$$M f_z(y) = M f_{z_e} - \int_0^y T_x(s) ds - \int_0^y {}^e m_x(s) ds \quad (\text{A.68})$$

Le déplacement selon  $\vec{x}$  et la rotation des sections droites autour de  $\vec{z}$  sont donnés par les formules de Bresse [92; 93] :

$$\psi(y) = \psi_e + \int_0^y \frac{M f_z(s)}{{}^e E^e I_{G_z}} ds \quad (\text{A.69})$$

$$u(y) = u_e + \psi_e y + \int_0^y \frac{M f_z(s)}{{}^e E^e I_{G_z}} (y-s) ds + \int_0^y \frac{T_z(s)}{{}^e G^e k_{yz}^e S} ds \quad (\text{A.70})$$

A l'aide des conditions aux limites suivantes :

$$T_{x_{e+1}} = T_x({}^e l), \quad M f_{z_{e+1}} = M f_z({}^e l), \quad u_{e+1} = u({}^e l), \quad \psi_{e+1} = \psi({}^e l) \quad (\text{A.71})$$

on déduit l'expression des efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux  ${}^e\delta_u$  :

$${}^eF_u^{xy} = [{}^eK_u^{xy}] {}^e\delta_u - {}^ef_u^{xy} \quad (\text{A.72})$$

avec :

$${}^eF_u^{xy} = \begin{Bmatrix} -T_x(0) \\ -Mf_z(0) \\ T_x(e) \\ Mf_z(e) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -T_{x_e} \\ -Mf_{z_e} \\ T_{x_{e+1}} \\ Mf_{z_{e+1}} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.73})$$

où  ${}^eF_u^{xy}$  est le vecteur élémentaire des forces nodales dans le plan  $\{xGy\}$ ,  ${}^eK_u^{xy}$  est la matrice de raideur élastique élémentaire associée à  ${}^e\delta_u$ ,  ${}^ef_u^{xy}$  est le vecteur élémentaire de force équivalent aux charges réparties.

Pour un élément de poutre de section droite  ${}^eS$  constante, soumis sur toute sa longueur à une force et à un couple d'intensité linéique définis tels que :

$${}^ep_x(y) = p_{x_e} + (p_{x_{e+1}} - p_{x_e}) \frac{y}{e}, \quad (\text{A.74a}) \quad {}^em_z(y) = m_{z_e} + (m_{z_{e+1}} - m_{z_e}) \frac{y}{e}, \quad (\text{A.74b})$$

il vient :

$${}^eK_u^{xy} = \frac{{}^eE^e I_{G_z}}{e l^3 (1 + {}^e\phi_{xy})} \begin{bmatrix} 12 & -6e & -12 & -6e \\ & e l^2 (4 + {}^e\phi_{xy}) & 6e & e l^2 (2 - {}^e\phi_{xy}) \\ \text{Sym.} & & 12 & 6e \\ & & & e l^2 (4 + {}^e\phi_{xy}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.75})$$

$${}^ef_u^{xy} = \frac{e l}{120 (1 + {}^e\phi_{xy})} \begin{bmatrix} 42 + 40e\phi_{xy} & 18 + 20e\phi_{xy} \\ -e l (6 + 5e\phi_{xy}) & -e l (4 + 5e\phi_{xy}) \\ 18 + 20e\phi_{xy} & 42 + 40e\phi_{xy} \\ e l (4 + 5e\phi_{xy}) & e l (6 + 5e\phi_{xy}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{x_e} \\ p_{x_{e+1}} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.76})$$

$$+ \frac{1}{12 (1 + {}^e\phi_{xy})} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ e l (1 + 4e\phi_{xy}) & e l (-1 + 2e\phi_{xy}) \\ -6 & -6 \\ e l (-1 + 2e\phi_{xy}) & e l (1 + 4e\phi_{xy}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{z_e} \\ m_{z_{e+1}} \end{Bmatrix}$$

où  ${}^e\phi_{xy}$  le coefficient de cisaillement élémentaire dans le plan  $\{xGy\}$  défini par :

$${}^e\phi_{xy} = \frac{12e E^e I_{G_z}}{e G^e k_{xy} e S e l^2}, \quad (\text{A.77})$$

avec  ${}^eI_{G_z}$  le moment quadratique de la section droite élémentaire  ${}^eS$  par rapport à l'axe  $(G, \bar{z})$  et  ${}^ek_{xy}$  le coefficient de réduction de section élémentaire.

### A.3.6 Fonctions de forme

Pour un élément de poutre  $\mathcal{K}_e$  à section constante  ${}^eS$  et non chargé, les deux équations d'équilibre Eq. (A.62) et Eq. (A.63) se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right) = 0, \quad (\text{A.78})$$

$${}^eE^e I_{G_z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - e G^e S^e k_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right) = 0, \quad (\text{A.79})$$

d'où :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \quad (\text{A.80})$$

ce qui implique :

$$u(y) = \sum_{i=0}^3 a_{u_i} y^i, \quad (\text{A.81})$$

où les  $a_{u_i} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, 3$ . De l'Eq. (A.78), on déduit :

$$\psi(y) = -\frac{\partial u}{\partial y} + c_u \text{ où } c_u \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.82})$$

et l'Eq. (A.79) devient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{12c_u}{e\phi_{xy}e l^2} \text{ avec } \phi_{xy} = \frac{12^e E^e I_{G_z}}{e l^2 e G^e k_{xy} e S}. \quad (\text{A.83})$$

L'Eq. (A.83) et les quatre conditions aux limites suivantes :

$$u(0) = u_e, \quad u(e l) = u_{e+1}, \quad \psi(0) = \psi_e, \quad \psi(e l) = \psi_{e+1}, \quad (\text{A.84})$$

permettent d'obtenir le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & e l & e l^2 & e l^3 & 0 \\ 0 & -1 & -2e l & -3e l^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6^e \phi_{xy} e l^2 & -12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{u_0} \\ a_{u_1} \\ a_{u_2} \\ a_{u_3} \\ c_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_e \\ \psi_e \\ u_{e+1} \\ \psi_{e+1} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.85})$$

L'inversion du système Eq. (A.85) permet le calcul des cinq coefficients  $a_{u_i}$ ,  $i = 0, \dots, 3$  et  $c_u$  en fonction des degrés de liberté  $u_e$ ,  $\psi_e$ ,  $u_{e+1}$  et  $\psi_{e+1}$  puis des fonctions de formes  ${}^e N_u^{xy}$ ,  ${}^e N_\psi^{xy} \in \mathbb{R}^4$  définies telles que :

$$u(y) = {}^e N_u^{xy}(y) {}^e \delta_u, \quad (\text{A.86a}) \quad \psi(y) = {}^e N_\psi^{xy}(y) {}^e \delta_u, \quad (\text{A.86b})$$

avec :

$${}^e N_u^{xy}(\zeta) = \frac{1}{1+e\phi_{xy}} \begin{bmatrix} (\zeta-1)(2\zeta^2 - \zeta - e\phi_{xy} - 1) \\ \zeta(\zeta-1)(-\zeta+1 + \frac{1}{2}e\phi_{xy})e l \\ \zeta(-2\zeta^2 + 3\zeta + e\phi_{xy}) \\ -\zeta(\zeta-1)(\zeta + \frac{1}{2}e\phi_{xy})e l \end{bmatrix}^t, \quad (\text{A.87})$$

et :

$${}^e N_\psi^{xy}(\zeta) = \frac{1}{e l (1+e\phi_{xy})} \begin{bmatrix} 6\zeta(\zeta-1) \\ (\zeta-1)(3\zeta-1 - e\phi_{xy})e l \\ -6\zeta(\zeta-1) \\ \zeta(3\zeta-2 + e\phi_{xy})e l \end{bmatrix}^t. \quad (\text{A.88})$$

## A.4 Approximations relative à l'expression de l'énergie de déformation

### A.4.1 Des angles d'Euler aux angles de Timoshenko

Il est essentiel de considérer certaines approximations relatives aux rotations de sections droites lors de l'expression de l'énergie de déformation de l'arbre. En effet, si l'on considère une poutre de Timoshenko dans l'espace, ses sections droites sont orientées grâce aux angles  $\theta$  et  $\psi$ , autour des axes respectifs  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  du repère  $(R)$ , Eq. (A.4) et Eq. (A.48);  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  étant fixes, FIG. A.8(b). Le vecteur rotation instantanée  $\vec{\omega}_{/0}$  du repère local lié à la section s'écrit donc :

$$\vec{\omega}_{/0} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (\text{A.89})$$

Or, lors du calcul de l'énergie cinétique d'un disque ou d'un arbre, les angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  sont utilisés de manière à exprimer le vecteur rotation instantanée du repère  $(R_i)$  et introduire les termes dus à l'effet gyroscopique, Eq. (2.30) et Eq. (2.19). En toute rigueur, si les angles d'Euler  $\psi$  et  $\theta$  étaient utilisés pour orienter les sections droites, FIG. A.8(a), le vecteur  $\vec{\omega}_{/0}$  s'écrirait :

$$\vec{\omega}_{/0} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{(R_1)}. \quad (\text{A.90})$$

La projection du vecteur unitaire  $\vec{x}_1$  dans le repère  $(R)$  donne, FIG. 2.2(a) :

$$\vec{x}_1 = \cos(\psi) \vec{x} + \sin(\psi) \vec{y}, \quad (\text{A.91})$$

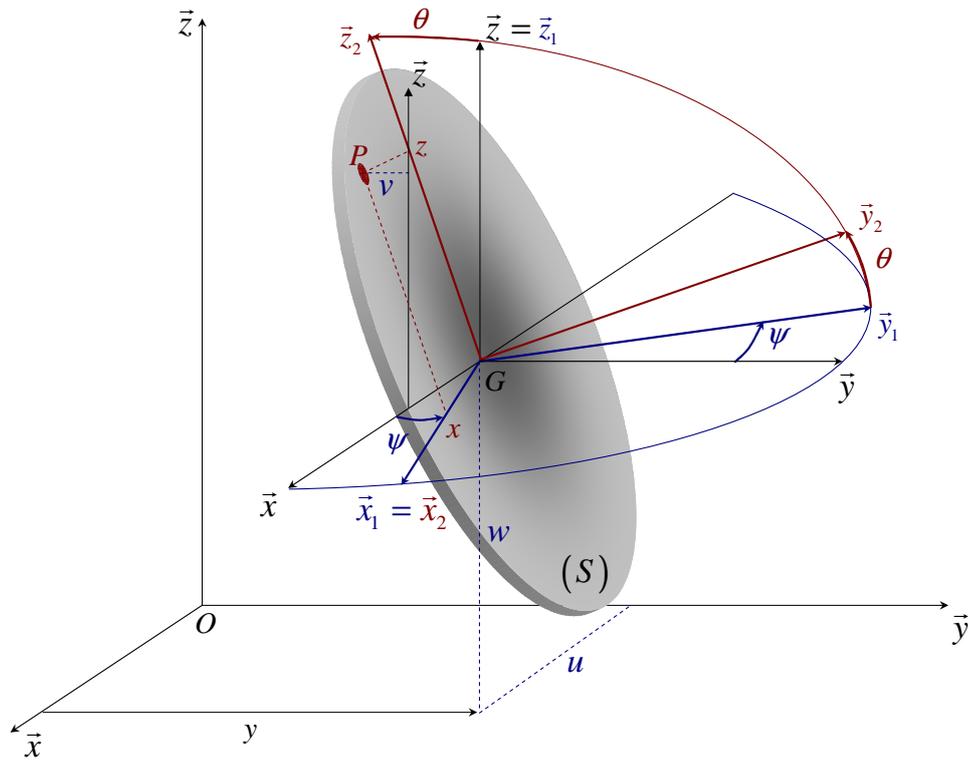
et permet d'exprimer le vecteur rotation instantanée  $\vec{\omega}_{/0}$  dans  $(R)$  tel que :

$$\vec{\omega}_{/0} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos(\psi) \\ \dot{\theta} \sin(\psi) \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (\text{A.92})$$

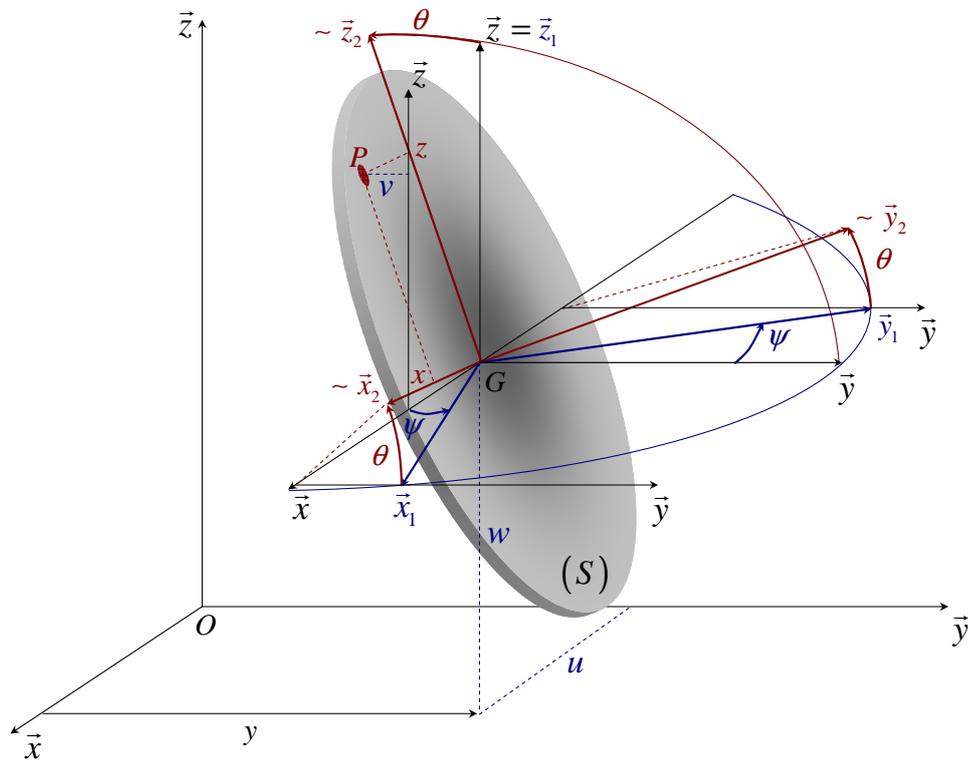
En considérant de petites rotations, Eq. (A.4) et Eq. (A.48), et en négligeant le terme  $\dot{\theta}\psi$ , on retrouve l'expression de l'Eq. (A.89) :

$$\vec{\omega}_{/0} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}\psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{(R)} \approx \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (\text{A.93})$$

Ainsi, lors du calcul de l'énergie de déformation, la **première approximation** à considérer concerne l'approximation du vecteur  $\vec{\omega}_{/0}$  dans  $(R)$  qui est issue de l'hypothèse de petites rotations de sections droites. Cette approximation conduit donc à la **coïncidence** entre les angles d'Euler  $\psi$  et  $\theta$  et ceux utilisés pour paramétrer les rotations de sections droites d'une poutre de Timoshenko en flexion dans l'espace. En d'autres termes, l'orientation du repère  $(R_2)$  est approximée, FIG. A.8.



(a) Configuration déformée d'une section droite  $(S)$ , orientée à l'aide des angles d'Euler, lors d'une flexion de poutre dans l'espace.



(b) Configuration déformée d'une section droite  $(S)$ , orientée à l'aide des angles issus de la théorie de Timoshenko, lors d'une flexion de poutre dans l'espace.

FIGURE A.8 – Approximation conduisant à la coïncidence des angles d'Euler  $\psi$  et  $\theta$  et ceux utilisés dans la théorie de Timoshenko pour orienter une section droite de poutre dans l'espace.

### A.4.2 Approximation de la *rotation propre*

La FIG. A.9(a) rappelle que les repères  $(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et  $(G, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  sont orientés grâce à la rotation propre  $\phi$  autour de l'axe  $(G, \vec{y}_2)$  et non autour de  $(G, \vec{y})$  comme mentionné précédemment lorsque le repère  $(R_\phi)$  a été introduit. La présente approximation montre que l'orientation de  $(R_i)$  est approchée, FIG. A.9(b). Ainsi, l'expression du vecteur rotation instantané du repère  $(R_i)$  vis-à-vis du repère  $(R)$ , en considérant la première **approximation**, Eq. (A.93), s'écrit :

$$\vec{\omega}_{i/0} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{(R)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_i)}. \quad (\text{A.94})$$

La projection du vecteur unitaire  $\vec{y}_i$  dans le repère  $(R)$  est obtenue grâce aux FIG. 2.2 :

$$\vec{y}_i = -\cos(\theta) \sin(\psi) \vec{x} + \cos(\theta) \cos(\psi) \vec{x} + \sin(\theta) \vec{z}, \quad (\text{A.95})$$

et permet d'exprimer le vecteur rotation instantané  $\vec{\omega}_{i/0}$  tel que :

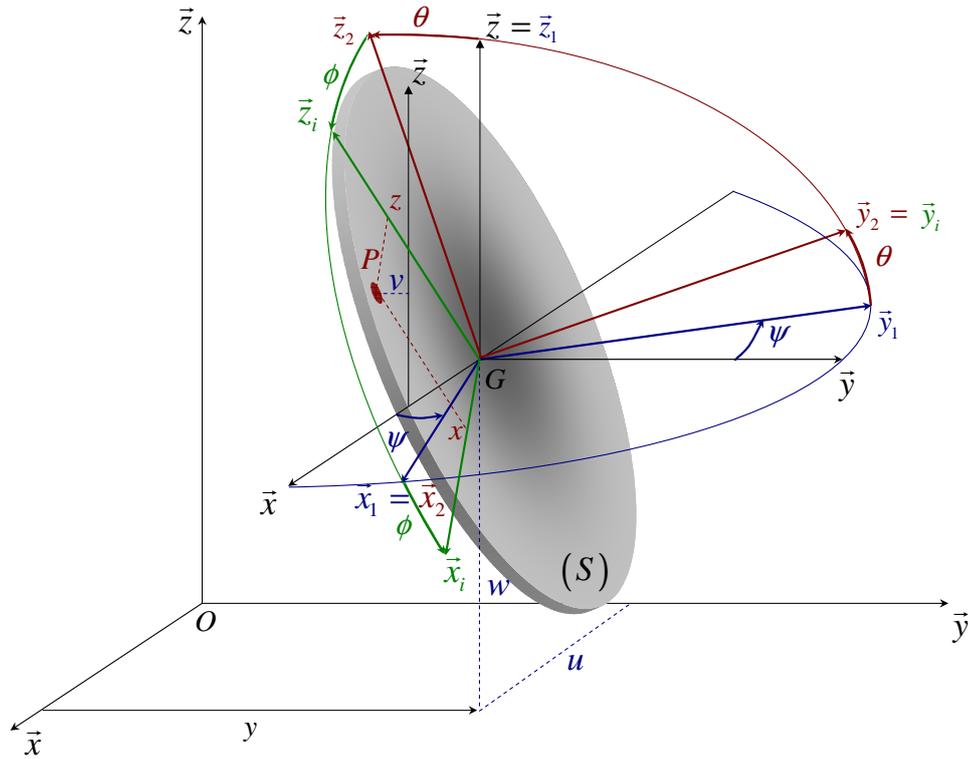
$$\vec{\omega}_{i/0} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} - \dot{\phi} \cos(\theta) \sin(\psi) \\ \dot{\phi} \cos(\theta) \cos(\psi) \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \sin(\theta) \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (\text{A.96})$$

En considérant de petites rotations puis en négligeant les termes  $\dot{\phi}\psi$  et  $\dot{\phi}\theta$ , il vient alors :

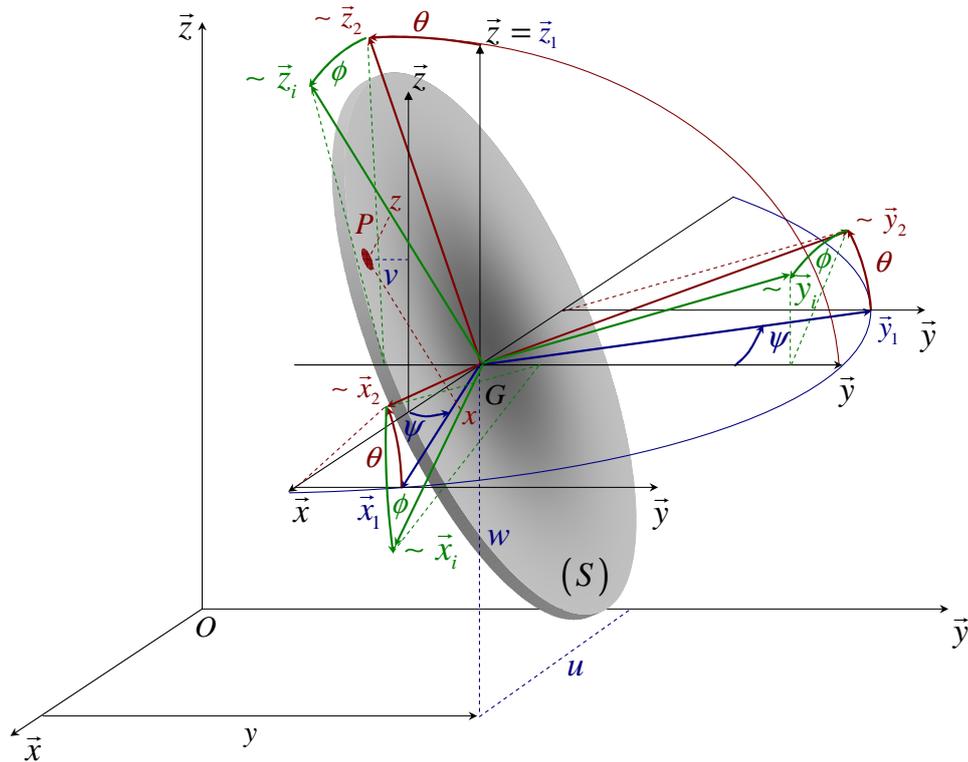
$$\vec{\omega}_{i/0} \approx \begin{bmatrix} \dot{\theta} - \dot{\phi}\psi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} + \dot{\phi}\theta \end{bmatrix}_{(R)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (\text{A.97})$$

Ainsi, l'approximation concernant l'orientation de  $(R_i)$  vis-à-vis de  $(R)$ , Eq. (A.97), permet d'orienter le repère tournant  $(R_\phi)$  vis-à-vis de  $(R)$  par l'angle  $\phi$  (angle d'Euler) autour de l'axe fixe  $(G, \vec{y})$ , FIG. 2.8.

Ces deux approximations ont permis de faire le lien entre les angles d'Euler, orientés de manière relative, et ceux utilisés dans la théorie de Timoshenko, *i.e.* degrés libertés de rotation utilisés dans la théorie des éléments finis et orientés de manière absolue. Elles autorisent alors l'expression de l'énergie de déformation en  $P(x, z)$  dans le repère local de l'élément tournant approché par  $(R_\phi)$ .



(a) Configuration déformée d'une section droite  $(S)$ , orientée à l'aide des angles d'Euler, lors d'une flexion de rotor.



(b) Configuration déformée d'une section droite  $(S)$ , orientée à l'aide des angles définis autour des axes fixes du repère galiléen  $(R)$ , lors d'une flexion de rotor.

FIGURE A.9 – Approximation conduisant à la coïncidence des angles d'Euler  $\psi$  et  $\theta$  et ceux utilisés dans la théorie de Timoshenko pour orienter une section droite de rotor.

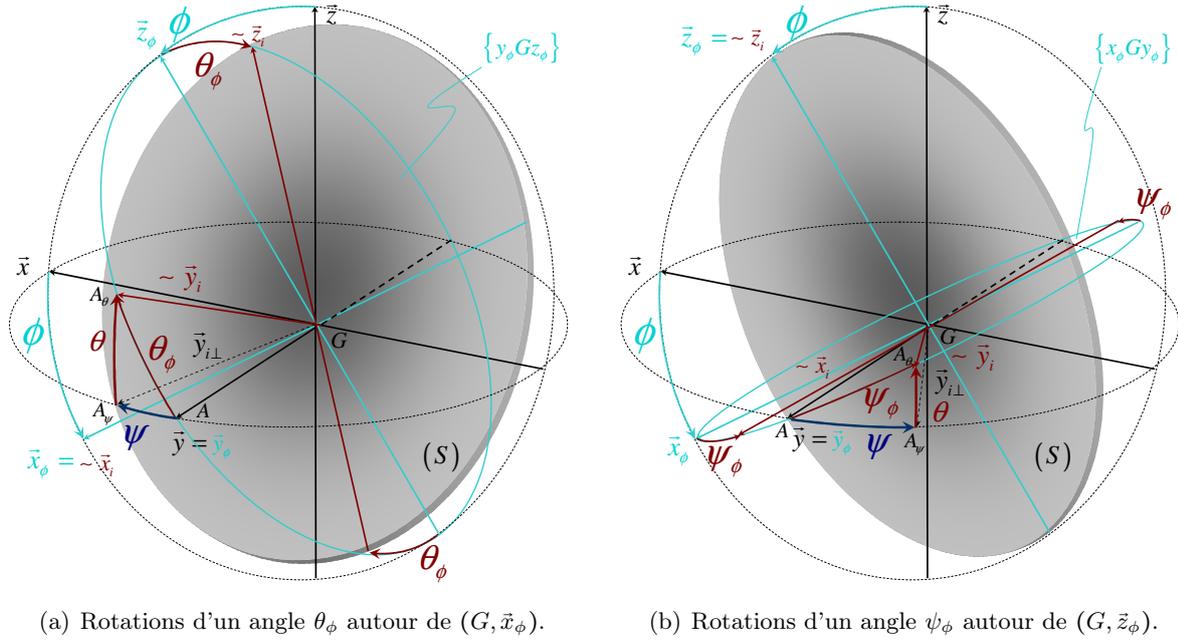


FIGURE A.10 – Visualisations spatiales de rotations élémentaires d'une section droite (S) autour d'axes du repère tournant ( $R_\phi$ ).

#### A.4.3 Relation entre repère galiléen et repère tournant. Projection des angles de rotation de section

Considérons tout d'abord une section droite (S) ayant tournée uniquement d'un angle  $\phi$  autour de l'axe  $(G, \bar{y}_\phi)$  et pour laquelle les déplacements du centre géométrique  $G$ ,  $u_\phi$  et  $w_\phi$  sont nuls. La section droite (S) est alors contenue dans le plan  $\{xGz\}$ , FIG. A.10.

Puis, dans un premier temps, appliquons à cette section une unique rotation d'un angle positif  $\theta_\phi$  autour de  $(G, \bar{x}_\phi)$ , FIG. A.10(a). Le vecteur unitaire orthogonal à la section déformée effectue donc une rotation d'angle  $\theta_\phi$  dans le plan  $\{y_\phi Gz_\phi\}$ . On note  $\bar{y}_{i\perp}$  la projection du vecteur unitaire  $\bar{y}_i$  sur le plan  $\{xGy\}$ . Ainsi, il apparaît clairement qu'il est possible de décomposer la rotation de section d'un angle  $\theta_\phi$  autour de l'axe  $(G, \bar{x}_\phi)$  en utilisant des rotations élémentaires d'angles  $\theta$  et  $\psi$  autour des axes respectifs  $(G, \bar{x})$  et  $(G, \bar{z})$  du repère (R). Il vient alors :

$$\psi = (\bar{y}, \bar{y}_{i\perp}), \quad (\text{A.98a}) \quad \theta = (\bar{y}_{i\perp}, \bar{y}_i). \quad (\text{A.98b})$$

L'approximation concernant les petites rotations, Eq. (A.4) et Eq. (A.48) permet d'estimer la longueur des arcs formés les couples de vecteurs unitaires  $(\bar{y}, \bar{y}_{i\perp})$ ,  $(\bar{y}_{i\perp}, \bar{y}_i)$  et  $(\bar{y}, \bar{y}_i)$  nommés respectivement  $\overline{AA_\psi}$ ,  $\overline{A_\psi A_\theta}$  et  $\overline{AA_\theta}$  tels que :

$$\overline{AA_\psi} \sim -\psi, \quad (\text{A.99a}) \quad \overline{A_\psi A_\theta} \sim \theta, \quad (\text{A.99b}) \quad \overline{AA_\theta} \sim \theta_\phi. \quad (\text{A.99c})$$

Notons que la valeur de l'angle  $\psi$  est négative, Eq. (A.99a), car le sens de parcours débutant du vecteur unitaire  $\bar{y}$  au vecteur  $\bar{y}_{i\perp}$  est anti-trigonométrique. En visualisant le triangle  $(AA_\psi A_\theta)$  dans le plan  $\{xGz\}$ , FIG. A.11(a), une égalité géométrique permet d'exprimer l'angle  $\theta_\phi$  à l'aide des angles  $\theta$  et  $\psi$  définis autour des axes fixes du repère (R). La longueur de l'arc  $\overline{AA_\theta}$  s'écrit alors :

$$\overline{AA_\theta} = \overline{AH} + \overline{HA_\theta}, \quad (\text{A.100})$$

avec :

$$\overline{AH} = -\psi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \dot{\phi}t\right) = -\psi \sin(\dot{\phi}t), \quad (\text{A.101a}) \quad \overline{HA_\theta} = \theta \cos(\dot{\phi}t). \quad (\text{A.101b})$$

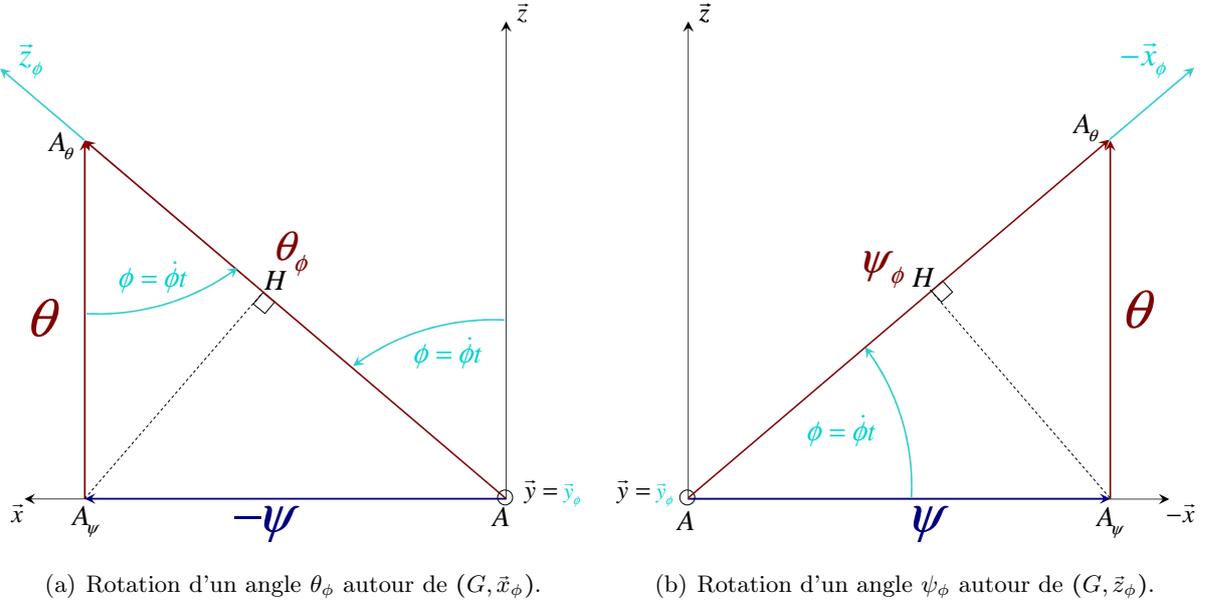


FIGURE A.11 – Visualisation dans le plan  $\{xGz\}$  des arcs engendrés par rotation du vecteur  $\bar{y}_i$ , perpendiculaire à une section droite  $(S)$ .

Dans un second temps, appliquons à cette section droite une unique rotation d'un angle positif  $\psi_\phi$  autour de l'axe  $(G, \bar{z}_\phi)$ , FIG. A.10(b). Le vecteur unitaire orthogonal à la section droite déformée effectue donc une rotation d'angle  $\psi_\phi$  dans le plan  $\{x_\phi G y_\phi\}$ . Les longueurs des arcs s'écrivent alors :

$$\widehat{AA_\psi} \sim \psi, \quad (\text{A.102a}) \quad \widehat{A_\psi A_\theta} \sim \theta, \quad (\text{A.102b}) \quad \widehat{AA_\theta} \sim \psi_\phi, \quad (\text{A.102c})$$

et la FIG. A.11(b) permet d'écrire les relations :

$$\overline{AH} = \psi \cos(\dot{\phi}t), \quad (\text{A.103a}) \quad \overline{HA_\theta} = \psi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \dot{\phi}t\right) = \psi \sin(\dot{\phi}t). \quad (\text{A.103b})$$

En substituant successivement les couples Eq. (A.103), Eq. (A.102c) et Eq. (A.101), Eq. (A.99c) à l'Eq. (A.100), on obtient les relations entre les rotations d'une section droite  $(S)$  autour des axes du repère  $(R_\phi)$  et celles autour des axes du repère  $(R)$  [30; 31; 32] :

$$\theta_\phi = \theta \cos(\dot{\phi}t) - \psi \sin(\dot{\phi}t), \quad (\text{A.104a}) \quad \psi_\phi = \theta \sin(\dot{\phi}t) + \psi \cos(\dot{\phi}t). \quad (\text{A.104b})$$

## A.5 Modélisation éléments-finis d'un rotor

La méthode des éléments finis est très utilisée pour le calcul des structures complexes et donc privilégiée pour l'étude des machines tournantes. Comme dans la Section 2.1, il est nécessaire de définir les modèles éléments finis des éléments constitutifs d'un rotor : disques, arbre, paliers, baulourds, et autres forces extérieures [94].

### A.5.1 Discrétisation

On se propose de modéliser le rotor à l'aide d'éléments finis de poutre circulaires basés sur la théorie de Timoshenko [35] comme présentés dans les Annexe A.2.5 et Annexe A.3.5. Le rotor est donc discrétisé en  $N_e$  éléments finis  $\mathcal{K}_e$  de longueur  ${}^e l$  et comprend  $n_\delta$  degrés de liberté inclus dans l'ensemble  $\Sigma$ . Les effet dus au cisaillement et à l'inertie de rotation de section droite sont alors pris en compte pour chaque élément fini de poutre.

Soit  $\Omega$  l'union de tous les éléments finis  $\mathcal{K}_e$  du maillage :

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_e} \mathcal{K}_e, \quad (\text{A.105})$$

Un élément fini  $\mathcal{K}_e$  est associé à huit degrés de liberté tel que le vecteur des degrés de liberté associés  ${}^e \delta \in \mathbb{R}^8$ , où  ${}^e ( )$  est l'exposant relatif à l'élément  $\mathcal{K}_e$ , s'écrit :

$${}^e \delta = [w_e, u_e, \psi_e, \theta_e, w_{e+1}, u_{e+1}, \psi_{e+1}, \theta_{e+1}]^t, \quad (\text{A.106})$$

qui inclut les vecteurs des degrés de liberté  ${}^e \delta_w$  et  ${}^e \delta_u$  définis dans Eq. (A.64) et Eq. (A.20) correspondant respectivement aux mouvements des nœuds  $e$  et  $e + 1$  dans les plans  $\{yGz\}$  et  $\{xGy\}$  comme le montre la FIG. A.12 .

### A.5.2 Le disque

Un nœud du maillage éléments finis du rotor contient quatre degrés de liberté : deux déplacements latéraux  $u$  et  $w$  respectivement selon  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ , et deux rotations associées  $\theta$  et  $\psi$  respectivement autour de  $\vec{z}$  et  $\vec{x}$ . Ainsi, si un disque est positionné en son centre de masse  $G$  au nœud  $e$  de l'élément fini  $\mathcal{K}_e$ , les vecteurs des déplacements nodaux  ${}^e \delta_d \in \mathbb{R}^4$  et vitesses nodales  ${}^e \dot{\delta}_d \in \mathbb{R}^4$  associés au point  $G$  s'écrivent :

$${}^e \delta_d = [w_e, u_e, \psi_e, \theta_e]^t, \quad (\text{A.107a}) \quad {}^e \dot{\delta}_d = [\dot{w}_e, \dot{u}_e, \dot{\psi}_e, \dot{\theta}_e]^t. \quad (\text{A.107b})$$

L'énergie cinétique du disque Eq. (2.19) s'écrit alors :

$${}^e \mathcal{T}_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}_e^2 + \dot{w}_e^2) + \frac{1}{2} I_{d_x} (\dot{\psi}_e^2 + \dot{\theta}_e^2) + \frac{1}{2} I_{d_y} (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}_e\theta_e). \quad (\text{A.108})$$

L'application des équations de Lagrange, Eq. (2.2), à l'Eq. (A.108) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e \mathcal{T}_d}{\partial {}^e \dot{\delta}_{d_k}} \right) - \frac{\partial {}^e \mathcal{T}_d}{\partial {}^e \delta_{d_k}} \text{ avec } k = 1, \dots, 4, \quad (\text{A.109})$$

avec :

$$k = 1, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e \mathcal{T}_d}{\partial \dot{w}_e} \right) - \frac{\partial {}^e \mathcal{T}_d}{\partial w_e} = m_d \ddot{w}_e, \quad (\text{A.110})$$

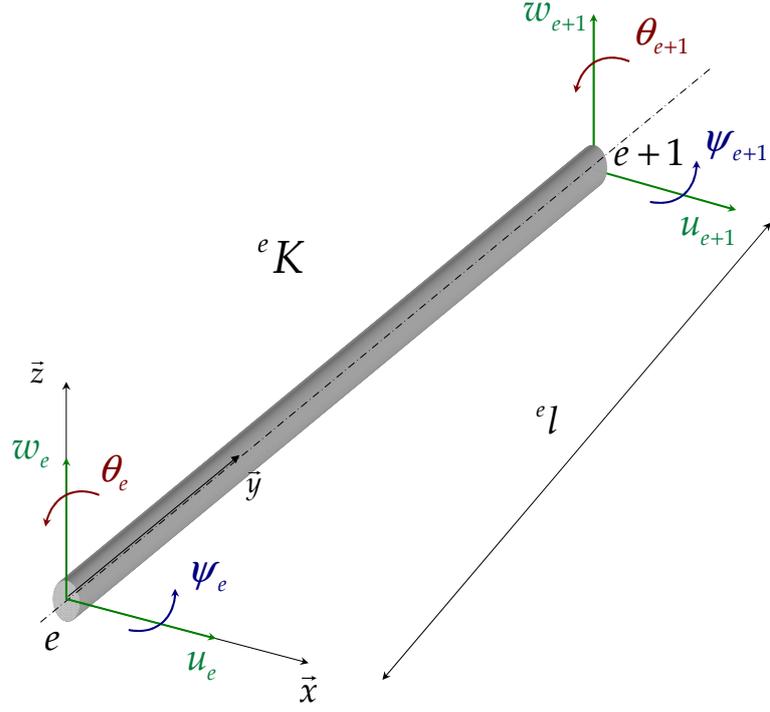


FIGURE A.12 – Visualisation d'un élément fini  $\mathcal{K}_e$  de longueur  ${}^e l$  et de ses degrés de liberté associés aux nœuds  $e$  et  $e + 1$ .

$$k = 2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_d}{\partial \dot{u}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_d}{\partial u_e} = m_d \ddot{u}_e, \quad (\text{A.111})$$

$$k = 3, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_d}{\partial \dot{\psi}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_d}{\partial \psi_e} = \frac{\partial}{\partial t} (I_{d_x} \dot{\psi}_e + I_{d_y} \dot{\theta}_e) = I_{d_x} \ddot{\psi}_e + I_{d_y} \dot{\theta}_e. \quad (\text{A.112})$$

$$k = 4, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_d}{\partial \dot{\theta}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_d}{\partial \theta_e} = \frac{\partial}{\partial t} (I_{d_x} \dot{\theta}_e) - I_{d_y} \dot{\psi}_e = I_{d_x} \ddot{\theta}_e - I_{d_y} \dot{\psi}_e, \quad (\text{A.113})$$

Finalement, l'Eq. (A.109) peut s'écrire sous forme matricielle telle que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e \mathcal{T}_d}{\partial {}^e \dot{\delta}_d} \right) - \frac{\partial {}^e \mathcal{T}_d}{\partial {}^e \delta_d} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{d_x} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de Masse}} \begin{bmatrix} \ddot{w}_e \\ \ddot{u}_e \\ \ddot{\psi}_e \\ \ddot{\theta}_e \end{bmatrix} + \underbrace{\dot{\phi}}_{\text{Matrice Gyroscopique}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{d_y} \\ 0 & 0 & I_{d_y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_e \\ \dot{u}_e \\ \dot{\psi}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix}. \quad (\text{A.114})$$

L'Eq. (A.114) peut également s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e \mathcal{T}_d}{\partial {}^e \dot{\delta}_d} \right) - \frac{\partial {}^e \mathcal{T}_d}{\partial {}^e \delta_d} = {}^e M_d {}^e \ddot{\delta}_p + {}^e C_{G_d} {}^e \dot{\delta}_p. \quad (\text{A.115})$$

### A.5.3 L'arbre

L'arbre est modélisé à l'aide d'éléments finis de poutre de Timoshenko tel que les déflexions transversales  ${}^e u$ ,  ${}^e w$  et rotations de section droite  ${}^e \psi$ ,  ${}^e \theta$  le long de l'élément fini  $\mathcal{K}_e$  d'abscisse  $y$  s'expriment en fonction des degrés de liberté  ${}^e \delta$  des nœuds  $e$  et  $e + 1$  en utilisant les fonctions de forme définies dans les Eq. (A.43), Eq. (A.87), Eq. (A.44) et Eq. (A.88) telles que :

$${}^e w = {}^e N_w(\zeta) {}^e \delta, \quad (\text{A.116a})$$

$${}^e u = {}^e N_u(\zeta) {}^e \delta, \quad (\text{A.116b})$$

$${}^e\theta = {}^eN_\theta(\zeta) {}^e\delta, \quad (\text{A.117a}) \quad {}^e\psi = {}^eN_\psi(\zeta) {}^e\delta, \quad (\text{A.117b})$$

où  ${}^eN_w(\zeta)$ ,  ${}^eN_u(\zeta)$ ,  ${}^eN_\theta(\zeta)$ ,  ${}^eN_\psi(\zeta) \in \mathbb{R}^8$  se décomposent de la manière suivante :

$${}^eN_{(-)}(\zeta) = \begin{bmatrix} {}^eN_{(-)}^{w_e}(\zeta), {}^eN_{(-)}^{u_e}(\zeta), {}^eN_{(-)}^{\psi_e}(\zeta), {}^eN_{(-)}^{\theta_e}(\zeta), \\ {}^eN_{(-)}^{w_{e+1}}(\zeta), {}^eN_{(-)}^{u_{e+1}}(\zeta), {}^eN_{(-)}^{\psi_{e+1}}(\zeta), {}^eN_{(-)}^{\theta_{e+1}}(\zeta) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.118})$$

où l'indice  $(-)$  représente  $w$ ,  $u$ ,  $\psi$  ou  $\theta$  et dont les composantes relatives au champ  $w$  sont représentées sur la FIG. A.13. Les fonctions de forme s'écrivent alors :

$${}^eN_w(\zeta) = \frac{1}{1 + {}^e\phi_y} \begin{bmatrix} (\zeta - 1)(2\zeta^2 - \zeta - {}^e\phi_y - 1) \\ 0 \\ 0 \\ \zeta(\zeta - 1)(\zeta - 1 - \frac{1}{2}{}^e\phi_y) {}^el \\ \zeta(-2\zeta^2 + 3\zeta + {}^e\phi_y) \\ 0 \\ 0 \\ \zeta(\zeta - 1)(\zeta + \frac{1}{2}{}^e\phi_y) {}^el \end{bmatrix}^t, \quad (\text{A.119})$$

$${}^eN_\theta(\zeta) = \frac{1}{{}^el(1 + {}^e\phi_y)} \begin{bmatrix} -6\zeta(\zeta - 1) \\ 0 \\ 0 \\ (\zeta - 1)(3\zeta - 1 - {}^e\phi_y) {}^el \\ 6\zeta(\zeta - 1) \\ 0 \\ 0 \\ \zeta(3\zeta - 2 + {}^e\phi_y) {}^el \end{bmatrix}^t, \quad (\text{A.120})$$

$${}^eN_u(\zeta) = \frac{1}{1 + {}^e\phi_y} \begin{bmatrix} 0 \\ (\zeta - 1)(2\zeta^2 - \zeta - {}^e\phi_y - 1) \\ \zeta(\zeta - 1)(-\zeta + 1 + \frac{1}{2}{}^e\phi_y) {}^el \\ 0 \\ 0 \\ \zeta(-2\zeta^2 + 3\zeta + {}^e\phi_y) \\ -\zeta(\zeta - 1)(\zeta + \frac{1}{2}{}^e\phi_y) {}^el \\ 0 \end{bmatrix}^t, \quad (\text{A.121})$$

et :

$${}^eN_\psi(\zeta) = \frac{1}{{}^el(1 + {}^e\phi_y)} \begin{bmatrix} 0 \\ 6\zeta(\zeta - 1) \\ (\zeta - 1)(3\zeta - 1 - {}^e\phi_y) {}^el \\ 0 \\ 0 \\ -6\zeta(\zeta - 1) \\ \zeta(3\zeta - 2 + {}^e\phi_y) {}^el \\ 0 \end{bmatrix}^t, \quad (\text{A.122})$$

avec  $\zeta = \frac{y}{e_l}$  et  ${}^e\phi_y$  le coefficient de cisaillement élémentaire.

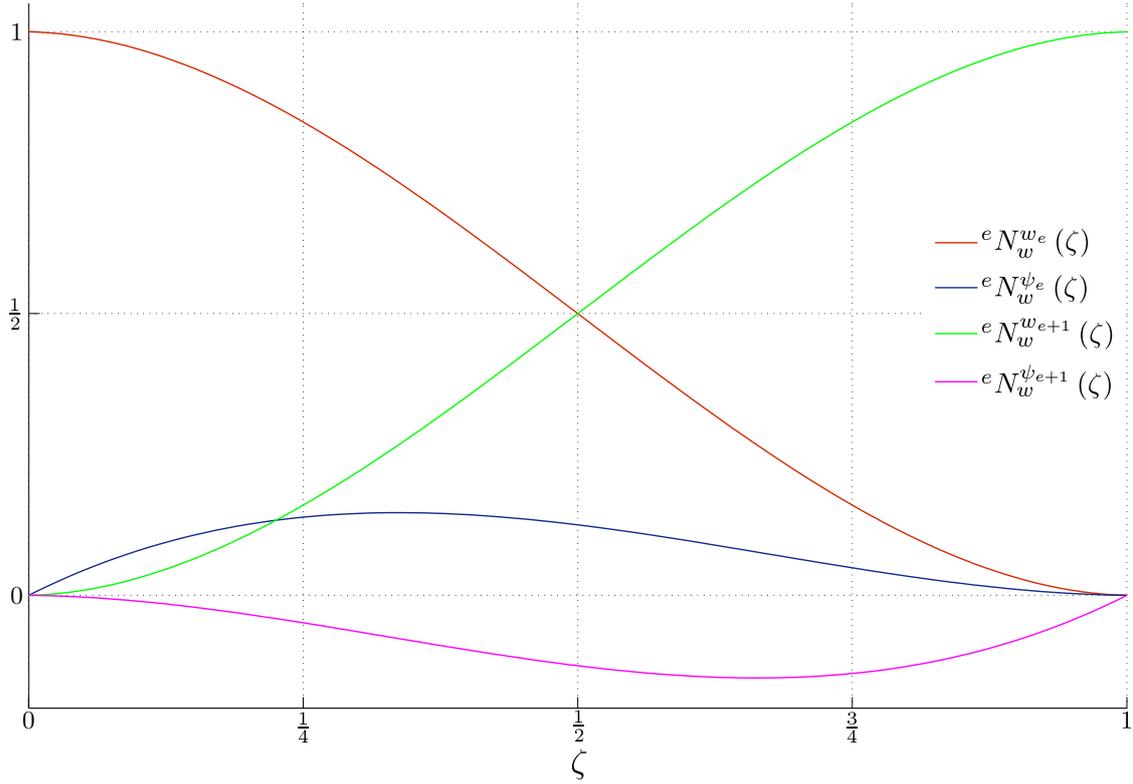


FIGURE A.13 – Tracé des composantes de la fonction de forme  ${}^e N_{(w)}(\zeta)$  sur un élément de référence d'abscisse  $\zeta \in [0, 1]$ ,  $\phi_y = 0.0424$ .

### A.5.3.1 Matrices élémentaires de masse et gyroscopique

La formulation de l'énergie cinétique, Eq. (2.30), d'un élément fini d'arbre  $\mathcal{K}_e$  de longueur  ${}^e l$  est la suivante :

$${}^e \mathcal{T}_a = \frac{1}{2} {}^e \rho {}^e S \int_0^{e l} ({}^e \dot{u}^2 + {}^e \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} {}^e \rho {}^e I_G \int_0^{e l} ({}^e \dot{\psi}^2 + {}^e \dot{\theta}^2) dy + 2 {}^e \rho {}^e I_G \dot{\phi} \int_0^{e l} {}^e \dot{\psi} {}^e \theta dy + {}^e \rho {}^e I_{G_y} {}^e l \dot{\phi}^2. \quad (\text{A.123})$$

Les dérivées temporelles des champs de déplacement définis par les Eq. (A.116a), Eq. (A.116b), Eq. (A.117a) et Eq. (A.117b) s'expriment aisément telles que :

$${}^e \dot{w} = {}^e N_w(\zeta) {}^e \dot{\delta}, \quad (\text{A.124a}) \quad {}^e \dot{u} = {}^e N_u(\zeta) {}^e \dot{\delta}, \quad (\text{A.124b})$$

$${}^e \dot{\theta} = {}^e N_\theta(\zeta) {}^e \dot{\delta}, \quad (\text{A.125a}) \quad {}^e \dot{\psi} = {}^e N_\psi(\zeta) {}^e \dot{\delta}, \quad (\text{A.125b})$$

où  ${}^e \dot{\delta}$  est défini tel que :

$${}^e \dot{\delta} = [\dot{w}_e, \dot{u}_e, \dot{\psi}_e, \dot{\theta}_e, \dot{w}_{e+1}, \dot{u}_{e+1}, \dot{\psi}_{e+1}, \dot{\theta}_{e+1}]^t. \quad (\text{A.126})$$

En substituant les Eq. (A.117a), Eq. (A.124a), Eq. (A.124b), Eq. (A.125a) et Eq. (A.125b) dans

l'Eq. (A.123), il vient alors :

$$\begin{aligned}
 {}^e\mathcal{T}_a &= \frac{1}{2} {}^e\rho^e S \int_0^{e_l} \left[ {}^e\delta^t ({}^eN_u)^t ({}^eN_u) {}^e\delta + {}^e\delta^t ({}^eN_w)^t ({}^eN_w) {}^e\delta \right] dy \\
 &+ \frac{1}{2} {}^e\rho^e I_G \int_0^{e_l} \left[ {}^e\delta^t ({}^eN_\psi)^t ({}^eN_\psi) {}^e\delta + {}^e\delta^t ({}^eN_\theta)^t ({}^eN_\theta) {}^e\delta \right] dy, \\
 &+ 2 {}^e\rho^e I_G \dot{\phi} \int_0^{e_l} \left[ {}^e\delta^t ({}^eN_\psi)^t ({}^eN_\theta) {}^e\delta \right] dy + {}^e\rho^e I_G {}^e l \dot{\phi}^2
 \end{aligned} \tag{A.127}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
 {}^e\mathcal{T}_a &= \frac{1}{2} {}^e\delta^t \left[ \underbrace{{}^e\rho^e S \int_0^{e_l} ({}^eN_u)^t ({}^eN_u) dy}_{{}^eM_u} \right] {}^e\delta + \frac{1}{2} {}^e\delta^t \left[ \underbrace{{}^e\rho^e S \int_0^{e_l} ({}^eN_w)^t ({}^eN_w) dy}_{{}^eM_w} \right] {}^e\delta \\
 &+ \frac{1}{2} {}^e\delta^t \left[ \underbrace{{}^e\rho^e I_G \int_0^{e_l} ({}^eN_\psi)^t ({}^eN_\psi) dy}_{{}^eM_\psi} \right] {}^e\delta + \frac{1}{2} {}^e\delta^t \left[ \underbrace{{}^e\rho^e I_G \int_0^{e_l} ({}^eN_\theta)^t ({}^eN_\theta) dy}_{{}^eM_\theta} \right] {}^e\delta, \\
 &+ \dot{\phi} {}^e\delta^t \left[ \underbrace{2 {}^e\rho^e I_G \int_0^{e_l} ({}^eN_\psi)^t ({}^eN_\theta) dy}_{{}^eC_{\psi\theta}} \right] {}^e\delta + {}^e\rho^e I_{G_y} {}^e l \dot{\phi}^2
 \end{aligned} \tag{A.128}$$

Comme évoqué précédemment dans la Section 2.1.3.2, le dernier terme  ${}^e\rho^e I_{G_y} {}^e l \dot{\phi}^2$  est constant lors du régime permanent, de telle sorte qu'apparaissent les matrices de masse élémentaires  ${}^eM_u$ ,  ${}^eM_w \in \mathcal{M}_{8,8}$  dues aux translations de sections droites dans les plans  $\{xGy\}$  et  $\{yGz\}$  :

$${}^eM_u = \frac{{}^e\rho^e S {}^e l}{(1 + {}^e\phi_y)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_{T_{11}} & m_{T_{14}} & 0 & 0 & m_{T_{15}} & -m_{T_{18}} & 0 \\ & & m_{T_{33}} & 0 & 0 & m_{T_{18}} & m_{T_{37}} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{Sym} & & m_{T_{11}} & -m_{T_{14}} & 0 & 0 \\ & & & & & & m_{T_{33}} & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.129}$$

$${}^eM_w = \frac{{}^e\rho^e S {}^e l}{(1 + {}^e\phi_y)^2} \begin{bmatrix} m_{T_{11}} & 0 & 0 & -m_{T_{14}} & m_{T_{15}} & 0 & 0 & m_{T_{18}} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & m_{T_{33}} & -m_{T_{18}} & 0 & 0 & m_{T_{37}} \\ & & \text{Sym} & & m_{T_{11}} & 0 & 0 & m_{T_{14}} \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & m_{T_{33}} \end{bmatrix}, \tag{A.130}$$

et les matrices élémentaires  ${}^eM_\psi$ ,  ${}^eM_\theta \in \mathcal{M}_{8,8}$  sont dues aux rotations de sections droites (effet de

Rayleigh) respectivement autour de  $\vec{z}$  et  $\vec{x}$ , perpendiculaires plans  $\{xGy\}$  et  $\{yGz\}$  :

$${}^e M_\psi = \frac{{}^e \rho^e I_G}{e l (1 + {}^e \phi_y)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_{R11} & m_{R14} & 0 & 0 & m_{R15} & -m_{R18} & 0 \\ & & m_{R33} & 0 & 0 & m_{R18} & m_{R37} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{Sym} & & m_{R11} & -m_{R14} & 0 & 0 \\ & & & & & m_{R33} & 0 & 0 \\ & & & & & & m_{R33} & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.131})$$

$${}^e M_\theta = \frac{{}^e \rho^e I_G}{e l (1 + {}^e \phi_y)^2} \begin{bmatrix} m_{R11} & 0 & 0 & -m_{R14} & m_{R15} & 0 & 0 & m_{R18} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & m_{R33} & -m_{R18} & 0 & 0 & m_{R37} \\ & & \text{Sym} & & m_{R11} & 0 & 0 & m_{R14} \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & m_{R33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.132})$$

La matrice élémentaire  ${}^e C_{\dot{\psi}\theta} \in \mathcal{M}_{8,8}$  traduit le couplage entre les mouvements dans les plans perpendiculaires plans  $\{xGy\}$  et  $\{yGz\}$ , *i.e.* l'effet gyroscopique :

$${}^e C_{\dot{\psi}\theta} = \frac{{}^e \rho^e I_G}{(1 + {}^e \phi_y)^2} \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & c_{\dot{\psi}\theta_{12}} & c_{\dot{\psi}\theta_{13}} & 0 & 0 & -c_{\dot{\psi}\theta_{12}} & c_{\dot{\psi}\theta_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{\dot{\psi}\theta_{13}} & -c_{\dot{\psi}\theta_{34}} & 0 & 0 & c_{\dot{\psi}\theta_{13}} & -c_{\dot{\psi}\theta_{38}} & 0 \\ 0 & -c_{\dot{\psi}\theta_{12}} & -c_{\dot{\psi}\theta_{13}} & 0 & 0 & c_{\dot{\psi}\theta_{12}} & -c_{\dot{\psi}\theta_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{\dot{\psi}\theta_{13}} & -c_{\dot{\psi}\theta_{38}} & 0 & 0 & c_{\dot{\psi}\theta_{13}} & -c_{\dot{\psi}\theta_{34}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.133})$$

avec :

$$c_{\dot{\psi}\theta_{12}} = -\frac{12}{5} \frac{1}{e l}, \quad c_{\dot{\psi}\theta_{13}} = \left( \frac{1}{5} - {}^e \phi_y \right), \quad (\text{A.134})$$

$$c_{\dot{\psi}\theta_{34}} = -\left( \frac{4}{15} + \frac{1}{3} {}^e \phi_y + \frac{2}{3} {}^e \phi_y^2 \right) e l, \quad c_{\dot{\psi}\theta_{38}} = \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{3} {}^e \phi_y - \frac{1}{3} {}^e \phi_y^2 \right) e l. \quad (\text{A.135})$$

L'application des équations de Lagrange (Eq. (2.2)) permet d'obtenir l'expression du travail des forces inertielles  ${}^e \mathcal{J}_k$  définis par :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e \mathcal{J}_a}{\partial {}^e \dot{\delta}_k} \right) - \frac{\partial {}^e \mathcal{J}_a}{\partial {}^e \delta_k}}_{{}^e \mathcal{J}_k}, \quad k = 1, \dots, 8, \quad (\text{A.136})$$

tel que l'Eq. (A.136) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e \mathcal{J}_a}{\partial {}^e \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial {}^e \mathcal{J}_a}{\partial {}^e \delta} = \left( \underbrace{{}^e M_u + {}^e M_w}_{M_T} + \underbrace{{}^e M_\theta + {}^e M_\psi}_{M_R} \right) e \ddot{\delta} + \underbrace{{}^e C_G}_{{}^e C_{\dot{\psi}\theta} - {}^e C_{\dot{\psi}\theta}^t} e \dot{\delta}, \quad (\text{A.137})$$

où  ${}^e M_T$  et  ${}^e M_R$  sont respectivement les matrices de masses élémentaires dues aux translations et rotations de section droite d'un élément de poutre de  $\mathcal{F}$ imoshenko en flexion dans l'espace telles que :

$${}^e M_T = \frac{{}^e \rho^e S^e l}{(1 + {}^e \phi_y)^2} \begin{bmatrix} m_{T_{11}} & 0 & 0 & -m_{T_{14}} & m_{T_{15}} & 0 & 0 & m_{T_{18}} \\ & m_{T_{11}} & m_{T_{14}} & 0 & 0 & m_{T_{15}} & -m_{T_{18}} & 0 \\ & & m_{T_{33}} & 0 & 0 & m_{T_{18}} & m_{T_{37}} & 0 \\ & & & m_{T_{33}} & -m_{T_{18}} & 0 & 0 & m_{T_{37}} \\ & & & & m_{T_{11}} & 0 & 0 & m_{T_{14}} \\ & & \text{Sym} & & & m_{T_{11}} & -m_{T_{14}} & 0 \\ & & & & & & m_{T_{33}} & 0 \\ & & & & & & & m_{T_{33}} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.138})$$

avec :

$$m_{T_{11}} = \left( \frac{13}{35} + \frac{7}{10} {}^e \phi_y + \frac{1}{3} {}^e \phi_y^2 \right), \quad m_{T_{14}} = - \left( \frac{11}{210} + \frac{11}{120} {}^e \phi_y + \frac{1}{24} {}^e \phi_y^2 \right) {}^e l, \quad (\text{A.139})$$

$$m_{T_{15}} = \left( \frac{9}{70} + \frac{3}{10} {}^e \phi_y + \frac{1}{6} {}^e \phi_y^2 \right), \quad m_{T_{18}} = - \left( \frac{13}{420} + \frac{3}{40} {}^e \phi_y + \frac{1}{24} {}^e \phi_y^2 \right) {}^e l, \quad (\text{A.140})$$

$$m_{T_{33}} = \left( \frac{1}{105} + \frac{1}{60} {}^e \phi_y + \frac{1}{120} {}^e \phi_y^2 \right) {}^e l^2, \quad m_{T_{37}} = - \left( \frac{1}{140} + \frac{1}{60} {}^e \phi_y + \frac{1}{120} {}^e \phi_y^2 \right) {}^e l^2. \quad (\text{A.141})$$

et :

$${}^e M_R = \frac{{}^e \rho^e I_G}{e l (1 + {}^e \phi_y)^2} \begin{bmatrix} m_{R_{11}} & 0 & 0 & -m_{R_{14}} & m_{R_{15}} & 0 & 0 & m_{R_{18}} \\ & m_{R_{11}} & m_{R_{14}} & 0 & 0 & m_{R_{15}} & -m_{R_{18}} & 0 \\ & & m_{R_{33}} & 0 & 0 & m_{R_{18}} & m_{R_{37}} & 0 \\ & & & m_{R_{33}} & -m_{R_{18}} & 0 & 0 & m_{R_{37}} \\ & & & & m_{R_{11}} & 0 & 0 & m_{R_{14}} \\ & & \text{Sym} & & & m_{R_{11}} & -m_{R_{14}} & 0 \\ & & & & & & m_{R_{33}} & 0 \\ & & & & & & & m_{R_{33}} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.142})$$

avec :

$$m_{R_{11}} = \frac{6}{5}, \quad m_{R_{14}} = - \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{2} {}^e \phi_y \right) {}^e l, \quad (\text{A.143})$$

$$m_{R_{15}} = -\frac{6}{5}, \quad m_{R_{18}} = \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{2} {}^e \phi_y \right) {}^e l, \quad (\text{A.144})$$

$$m_{R_{33}} = \left( \frac{2}{15} + \frac{1}{6} {}^e \phi_y + \frac{1}{3} {}^e \phi_y^2 \right) {}^e l^2, \quad m_{R_{37}} = - \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{6} {}^e \phi_y - \frac{1}{6} {}^e \phi_y^2 \right) {}^e l^2. \quad (\text{A.145})$$

Le terme  ${}^e C_G$  correspond à la matrice gyroscopique (anti-symétrique) élémentaire définie telle que :

$${}^e C_G = \frac{{}^e \rho^e I_G}{(1 + {}^e \phi_y)^2} \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & c_{G_{12}} & c_{G_{13}} & 0 & 0 & -c_{G_{12}} & c_{G_{13}} & 0 \\ & 0 & 0 & c_{G_{13}} & c_{G_{12}} & 0 & 0 & c_{G_{13}} \\ & & 0 & c_{G_{34}} & c_{G_{13}} & 0 & 0 & c_{G_{38}} \\ & & & 0 & 0 & c_{G_{13}} & -c_{G_{38}} & 0 \\ & & & & 0 & c_{G_{12}} & -c_{G_{13}} & 0 \\ & & \text{Skew} & & & 0 & 0 & -c_{G_{13}} \\ & & & & & & 0 & c_{G_{34}} \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.146})$$

avec :

$$c_{G12} = -\frac{12}{5} \frac{1}{e l}, \quad c_{G13} = \left( \frac{1}{5} - {}^e \phi_y \right), \quad (\text{A.147})$$

$$c_{G34} = -\left( \frac{4}{15} + \frac{1}{3} {}^e \phi_y + \frac{2}{3} {}^e \phi_y^2 \right) e l, \quad c_{G38} = \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{3} {}^e \phi_y - \frac{1}{3} {}^e \phi_y^2 \right) e l. \quad (\text{A.148})$$

**Détermination de la matrice élémentaire gyroscopique :** La matrice gyroscopique élémentaire est obtenue grâce l'Eq. (A.136), dont les termes de la  $k^e$  ligne sont obtenus grâce la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \left( {}^e \dot{\delta}^{te} C_{\dot{\psi}\theta} {}^e \dot{\delta} \right)}{\partial {}^e \dot{\delta}_k} \right] - \frac{\partial \left( {}^e \dot{\delta}^{te} C_{\dot{\psi}\theta} {}^e \dot{\delta} \right)}{\partial {}^e \dot{\delta}_k} \text{ avec } {}^e \dot{\delta}^{te} C_{\dot{\psi}\theta} {}^e \dot{\delta} = \sum_{q=1}^8 \sum_{p=1}^8 c_{\dot{\psi}\theta_{qp}} {}^e \dot{\delta}_q {}^e \delta_p, \quad (\text{A.149})$$

relative à l'évolution du paramètre  ${}^e \delta_k$ .

En explicitant les termes de l'Eq. (A.149), il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial {}^e \dot{\delta}_k} \left( \sum_{q=1}^8 \sum_{p=1}^8 c_{\dot{\psi}\theta_{qp}} {}^e \dot{\delta}_q {}^e \delta_p \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{p=1}^8 c_{\dot{\psi}\theta_{kp}} {}^e \delta_p \right] = \sum_{p=1}^8 c_{\dot{\psi}\theta_{kp}} {}^e \dot{\delta}_p, \quad (\text{A.150})$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial {}^e \dot{\delta}_k} \left( \sum_{q=1}^8 \sum_{p=1}^8 c_{\dot{\psi}\theta_{qp}} {}^e \dot{\delta}_q {}^e \delta_p \right) = \sum_{q=1}^8 c_{\dot{\psi}\theta_{kq}} {}^e \dot{\delta}_q. \quad (\text{A.151})$$

En substituant les Eq. (A.150) et Eq. (A.151) dans l'Eq. (A.149), il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \left( {}^e \dot{\delta}^{te} C_{\dot{\psi}\theta} {}^e \dot{\delta} \right)}{\partial {}^e \dot{\delta}_k} \right] - \frac{\partial \left( {}^e \dot{\delta}^{te} C_{\dot{\psi}\theta} {}^e \dot{\delta} \right)}{\partial {}^e \dot{\delta}_k} &= \sum_{p=1}^8 c_{\dot{\psi}\theta_{kp}} {}^e \dot{\delta}_p - \sum_{q=1}^8 c_{\dot{\psi}\theta_{kq}} {}^e \dot{\delta}_q, \\ &= \sum_{q=1}^8 c_{\dot{\psi}\theta_{kq}} {}^e \dot{\delta}_q - \sum_{q=1}^8 c_{\dot{\psi}\theta_{qk}} {}^e \dot{\delta}_q, \\ &= \sum_{q=1}^8 \underbrace{\left( c_{\dot{\psi}\theta_{kq}} - c_{\dot{\psi}\theta_{qk}} \right)}_{c_{G_{kq}}} {}^e \dot{\delta}_q. \end{aligned} \quad (\text{A.152})$$

Cela permet d'expliciter aisément l'expression de la matrice gyroscopique élémentaire telle que :

$${}^e C_G = {}^e C_{\dot{\psi}\theta} - {}^e C_{\dot{\psi}\theta}^t. \quad (\text{A.153})$$

Ainsi, un terme  ${}^e C_{G_{qp}}$  de la matrice gyroscopique élémentaire  ${}^e C_G$  est donc obtenu en calculant la différence entre le terme  $c_{\dot{\psi}\theta_{qp}}$  et son antisymétrique associé  $c_{\dot{\psi}\theta_{pq}}$ .

### A.5.3.2 Matrices élémentaires de raideur

L'expression de l'énergie de déformation, Eq. (2.62), d'un élément fini d'arbre  $\mathcal{H}_e$  de longueur  ${}^e l$  se formule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} {}^e \mathcal{W} &= \frac{1}{2} {}^e E {}^e I_G \int_0^{{}^e l} \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dy \\ &+ \frac{1}{2} {}^e G {}^e S {}^e k_y \int_0^{{}^e l} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right)^2 \right] dy, \\ &+ \frac{1}{2} {}^e P \int_0^{{}^e l} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \end{aligned} \quad (\text{A.154})$$

En utilisant les approximations nodales des champs de déplacement  $u$ ,  $w$ ,  $\psi$  et  $\theta$  le long d'un élément fini d'arbre  $\mathcal{K}_e$  d'abscisse  $y$ , Eq. (A.116a), Eq. (A.116b), Eq. (A.117a) et Eq. (A.117b), leurs dérivées spatiales s'écrivent :

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^e N_w(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} e\delta, \quad (\text{A.155a}) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^e N_u(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} e\delta, \quad (\text{A.155b})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^e N_\theta(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} e\delta, \quad (\text{A.156a}) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^e N_\psi(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} e\delta, \quad (\text{A.156b})$$

avec :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{e\ell}. \quad (\text{A.157})$$

L'Eq. (A.154) s'écrit alors [43] :

$$\begin{aligned} {}^e\mathcal{U} &= \frac{1}{2} {}^e E^e I_G \int_0^{e\ell} \left[ e\delta^t \left( \frac{\partial^e N_\theta}{\partial y} \right)^t \left( \frac{\partial^e N_\theta}{\partial y} \right) e\delta + e\delta^t \left( \frac{\partial^e N_\psi}{\partial y} \right)^t \left( \frac{\partial^e N_\psi}{\partial y} \right) e\delta \right] dy \\ &+ \frac{1}{2} {}^e G^e S^e k_y \int_0^{e\ell} \left[ e\delta^t \left( \frac{\partial^e N_u}{\partial y} + N_\psi \right)^t \left( \frac{\partial^e N_u}{\partial y} + N_\psi \right) e\delta \right] dy \\ &+ \frac{1}{2} {}^e G^e S^e k_y \int_0^{e\ell} \left[ e\delta^t \left( \frac{\partial^e N_w}{\partial y} - N_\theta \right)^t \left( \frac{\partial^e N_w}{\partial y} - N_\theta \right) e\delta \right] dy \\ &+ \frac{1}{2} {}^e P \int_0^{e\ell} \left[ e\delta^t \left( \frac{\partial^e N_u}{\partial y} \right)^t \left( \frac{\partial^e N_u}{\partial y} \right) e\delta + e\delta^t \left( \frac{\partial^e N_w}{\partial y} \right)^t \left( \frac{\partial^e N_w}{\partial y} \right) e\delta \right] dy \end{aligned}, \quad (\text{A.158})$$

ou encore :

$$\begin{aligned} {}^e\mathcal{U} &= \frac{1}{2} e\delta^t \left[ \underbrace{{}^e E^e I_G \int_0^{e\ell} \left( \frac{\partial^e N_\psi}{\partial y} \right)^t \left( \frac{\partial^e N_\psi}{\partial y} \right) dy + {}^e G^e S^e k_y \int_0^{e\ell} \left( \frac{\partial^e N_u}{\partial y} + N_\psi \right)^t \left( \frac{\partial^e N_u}{\partial y} + N_\psi \right) dy}_{{}^e K_{f_u}} \right] e\delta \\ &+ \frac{1}{2} e\delta^t \left[ \underbrace{{}^e E^e I_G \int_0^{e\ell} \left( \frac{\partial^e N_\theta}{\partial y} \right)^t \left( \frac{\partial^e N_\theta}{\partial y} \right) dy + {}^e G^e S^e k_y \int_0^{e\ell} \left( \frac{\partial^e N_w}{\partial y} - N_\theta \right)^t \left( \frac{\partial^e N_w}{\partial y} - N_\theta \right) dy}_{{}^e K_{f_u}} \right] e\delta \\ &+ \frac{1}{2} e\delta^t \left[ \underbrace{{}^e P \int_0^{e\ell} \left( \frac{\partial^e N_u}{\partial y} \right)^t \left( \frac{\partial^e N_u}{\partial y} \right) dy}_{{}^e K_{G_u}} \right] e\delta + \frac{1}{2} e\delta^t \left[ \underbrace{{}^e P \int_0^{e\ell} \left( \frac{\partial^e N_w}{\partial y} \right)^t \left( \frac{\partial^e N_w}{\partial y} \right) dy}_{{}^e K_{G_w}} \right] e\delta \end{aligned}. \quad (\text{A.159})$$

Ainsi apparaissent les matrices de raideur élastiques élémentaires  ${}^e K_{f_u}$ ,  ${}^e K_{f_w} \in \mathcal{M}_{8,8}$  dues aux déformations de l'élément  $\mathcal{K}_e$  dans les plans  $\{xGy\}$  et  $\{yGz\}$  :

$${}^e K_{f_u} = \frac{{}^e E^e I_G}{(1 + \phi_y) e\ell^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{f_{11}} & k_{f_{14}} & 0 & 0 & k_{f_{15}} & -k_{f_{18}} & 0 \\ & & k_{f_{33}} & 0 & 0 & k_{f_{18}} & k_{f_{37}} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & k_{f_{11}} & -k_{f_{14}} & 0 \\ & & & & & & k_{f_{33}} & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.160})$$

$${}^e K_{f_w} = \frac{{}^e E^e I_G}{(1 + \phi_y) e l^3} \begin{bmatrix} k_{f_{11}} & 0 & 0 & -k_{f_{14}} & k_{f_{15}} & 0 & 0 & k_{f_{18}} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{f_{33}} & -k_{f_{18}} & 0 & 0 & k_{f_{37}} \\ & \text{Sym} & & k_{f_{11}} & 0 & 0 & k_{f_{14}} & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_{f_{33}} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.161})$$

et les matrices de raideur géométriques élémentaires  ${}^e K_{G_u}$ ,  ${}^e K_{G_w} \in \mathcal{M}_{8,8}$ , dues à une force longitudinale  ${}^e P$  (*Stiffening Effect*) de direction  $y$ , sont associées aux mouvements dans les plans  $\{xGy\}$  et  $\{yGz\}$  :

$${}^e K_{G_u} = \frac{{}^e P}{(1 + {}^e \phi_y)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{G_{11}} & k_{G_{14}} & 0 & 0 & k_{G_{15}} & -k_{G_{18}} & 0 \\ & & k_{G_{33}} & 0 & 0 & k_{G_{18}} & k_{G_{37}} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & k_{G_{11}} & -k_{G_{14}} & 0 & 0 & \\ & & & & k_{G_{33}} & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.162})$$

$${}^e K_{G_w} = \frac{{}^e P}{(1 + {}^e \phi_y)^2} \begin{bmatrix} k_{G_{11}} & 0 & 0 & -k_{G_{14}} & k_{G_{15}} & 0 & 0 & k_{G_{18}} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{G_{33}} & -k_{G_{18}} & 0 & 0 & k_{G_{37}} \\ & \text{Sym} & & k_{G_{11}} & 0 & 0 & k_{G_{14}} & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_{G_{33}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.163})$$

L'application des équations de  $\mathcal{L}$ agrange (Eq. (2.2)) à l'Eq. (A.159) permet d'obtenir l'expression des forces élastiques telles que :

$$\frac{\partial {}^e \mathcal{U}}{\partial {}^e \delta} = \left( \underbrace{{}^e K_{f_u} + {}^e K_{f_w}}_{{}^e K_f} + \underbrace{{}^e K_{G_u} + {}^e K_{G_w}}_{{}^e K_G} \right) {}^e \delta, \quad (\text{A.164})$$

où  ${}^e K_f$  et  ${}^e K_G$  sont respectivement les matrices de raideurs élémentaires élastique et géométrique d'un élément de poutre de  $\mathcal{T}$ imoshenko en flexion dans l'espace telles que :

$${}^e K_f = \frac{{}^e E^e I_G}{(1 + \phi_y) e l^3} \begin{bmatrix} k_{f_{11}} & 0 & 0 & -k_{f_{14}} & k_{f_{15}} & 0 & 0 & k_{f_{18}} \\ & k_{f_{11}} & k_{f_{14}} & 0 & 0 & k_{f_{15}} & -k_{f_{18}} & 0 \\ & & k_{f_{33}} & 0 & 0 & k_{f_{18}} & k_{f_{37}} & 0 \\ & & & k_{f_{33}} & -k_{f_{18}} & 0 & 0 & k_{f_{37}} \\ & \text{Sym} & & k_{f_{11}} & 0 & 0 & k_{f_{14}} & \\ & & & & k_{f_{11}} & -k_{f_{14}} & 0 & \\ & & & & & k_{f_{33}} & 0 & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & k_{f_{33}} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.165})$$

avec :

$$k_{f_{11}} = 12, \quad k_{f_{14}} = -6^e l, \quad (\text{A.166})$$

$$k_{f_{15}} = -12, \quad k_{f_{18}} = 6^e l, \quad (\text{A.167})$$

$$k_{f_{33}} = (4 + \phi_y)^e l^2, \quad k_{f_{37}} = (2 - \phi_y)^e l^2. \quad (\text{A.168})$$

et :

$${}^e K_G = \frac{{}^e P}{(1 + {}^e \phi_y)^2} \begin{bmatrix} k_{G_{11}} & 0 & 0 & -k_{G_{14}} & k_{G_{15}} & 0 & 0 & k_{G_{18}} \\ & k_{G_{11}} & k_{G_{14}} & 0 & 0 & k_{G_{15}} & -k_{G_{18}} & 0 \\ & & k_{G_{33}} & 0 & 0 & k_{G_{18}} & k_{G_{37}} & 0 \\ & & & k_{G_{33}} & -k_{G_{18}} & 0 & 0 & k_{G_{37}} \\ & & & & k_{G_{11}} & 0 & 0 & k_{G_{14}} \\ & & \text{Sym} & & & k_{G_{11}} & -k_{G_{14}} & 0 \\ & & & & & & k_{G_{33}} & 0 \\ & & & & & & & k_{G_{33}} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.169})$$

avec :

$$k_{G_{11}} = \left( \frac{6}{5} + 1^e \phi_y + {}^e \phi_y^2 \right) \frac{1}{e l}, \quad k_{G_{14}} = -\frac{1}{10}, \quad (\text{A.170})$$

$$k_{G_{15}} = -\left( \frac{6}{5} + 1^e \phi_y + {}^e \phi_y^2 \right) \frac{1}{e l}, \quad k_{G_{18}} = \frac{1}{10}, \quad (\text{A.171})$$

$$k_{G_{33}} = \left( \frac{2}{15} + \frac{1}{6} {}^e \phi_y + \frac{1}{12} {}^e \phi_y^2 \right) e l, \quad k_{G_{37}} = -\left( \frac{1}{30} + \frac{1}{6} {}^e \phi_y + \frac{1}{12} {}^e \phi_y^2 \right) e l. \quad (\text{A.172})$$

#### A.5.4 Les paliers

Les paliers sont modélisés par un nœud et quatre degrés de liberté tels que :

$${}^e \delta_p = [w_e, u_e, \psi_e, \theta_e]^t, \quad (\text{A.173a})$$

$${}^e \dot{\delta}_p = [\dot{w}_e, \dot{u}_e, \dot{\psi}_e, \dot{\theta}_e]^t. \quad (\text{A.173b})$$

On suppose que les caractéristiques de raideur et amortissement d'un palier relient les forces qu'il exerce sur le rotor, au nœud  $e$ , aux déplacements et vitesses de translation associés, *i.e.*  $u_e$  et  $w_e$ . Ainsi, les relations possibles qu'il existe entre les rotation de section droite  $\psi_e$  et  $\theta_e$  et les moments associés sont négligées, ce qui implique  $\mathcal{F}_{p_{\psi_e}} = \mathcal{F}_{p_{\theta_e}} = 0$ .

Le travail virtuel  $\delta^e \mathcal{W}_p$  des efforts agissant au niveau des paliers et s'exerçant sur l'arbre au nœud  $e$  s'écrit donc, Eq. (2.40) :

$$\delta^e \mathcal{W}_p = \mathcal{F}_{p_{u_e}} \delta u_e + \mathcal{F}_{p_{w_e}} \delta w_e,$$

tel que :

$$\mathcal{F}_{p_{w_e}} = -k_{p_{zz}} w_e - k_{p_{zx}} u_e - c_{zz} \dot{w}_e - c_{zx} \dot{u}_e, \quad (\text{A.174})$$

$$\mathcal{F}_{p_{u_e}} = -k_{p_{xz}} w_e - k_{p_{xx}} u_e - c_{xz} \dot{w}_e - c_{xx} \dot{u}_e. \quad (\text{A.175})$$

Les caractéristiques de raideur et amortissement reliant les forces aux déplacements et vitesses

s'expriment donc matriciellement de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{pw_e} \\ \mathcal{F}_{pu_e} \\ \mathcal{F}_{p\psi_e} \\ \mathcal{F}_{p\theta_e} \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} k_{pzz} & k_{pzx} & 0 & 0 \\ k_{pzx} & k_{pxx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de Raideur}} \begin{bmatrix} w_e \\ u_e \\ \psi_e \\ \theta_e \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} c_{zz} & c_{zx} & 0 & 0 \\ c_{zx} & c_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice d'Amortissement Visqueux}} \begin{bmatrix} \dot{w}_e \\ \dot{u}_e \\ \dot{\psi}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix}. \quad (\text{A.176})$$

L'Eq. (A.176) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$${}^e\mathcal{F}_p = {}^eK_p {}^e\delta_p + {}^eC_p {}^e\dot{\delta}_p. \quad (\text{A.177})$$

Dans le cas de paliers hydrodynamiques, ces deux matrices sont généralement asymétriques et les termes peuvent varier de manière importante en fonction de la vitesse de rotation telles que  ${}^eK_p = {}^eK_p(\dot{\phi})$  et  ${}^eC_p = {}^eC_p(\dot{\phi})$  (cf. Section 2.1.4).

### A.5.5 Les balourds

On suppose qu'un balourd est positionné au nœud  $e$ . Le vecteur des vitesses nodales  ${}^e\dot{\delta}_b \in \mathbb{R}^4$  associés s'écrit alors :

$${}^e\delta_b = [w_e, u_e, \psi_e, \theta_e]^t. \quad (\text{A.178})$$

L'expression de l'énergie cinétique due à un balourd situé au nœud  $e$  à la forme suivante, Eq. (2.38) :

$${}^e\mathcal{T}_b = m_b \dot{\phi} d_b (\dot{u}_e \cos(\dot{\phi}t + \phi_b) - \dot{w}_e \sin(\dot{\phi}t + \phi_b)). \quad (\text{A.179})$$

L'application des équations de Lagrange (Eq. (2.2)) à l'Eq. (A.179) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e\mathcal{T}_b}{\partial {}^e\dot{\delta}_{b_k}} \right) - \frac{\partial {}^e\mathcal{T}_b}{\partial {}^e\delta_{b_k}} \text{ avec } k = 1, \dots, 4, \quad (\text{A.180})$$

avec :

$$k = 1, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e\mathcal{T}_b}{\partial \dot{w}_e} \right) - \frac{\partial {}^e\mathcal{T}_b}{\partial w_e} = \frac{\partial}{\partial t} (-m_b \dot{\phi} d_b \sin(\dot{\phi}t + \phi_b)) = -m_b \dot{\phi}^2 d_b \cos(\dot{\phi}t + \phi_b), \quad (\text{A.181})$$

$$k = 2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e\mathcal{T}_b}{\partial \dot{u}_e} \right) - \frac{\partial {}^e\mathcal{T}_b}{\partial u_e} = \frac{\partial}{\partial t} (m_b \dot{\phi} d_b \cos(\dot{\phi}t + \phi_b)) = -m_b \dot{\phi}^2 d_b \sin(\dot{\phi}t + \phi_b), \quad (\text{A.182})$$

$$k = 3, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e\mathcal{T}_b}{\partial \dot{\psi}_e} \right) - \frac{\partial {}^e\mathcal{T}_b}{\partial \psi_e} = 0. \quad (\text{A.183})$$

$$k = 4, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial {}^e\mathcal{T}_b}{\partial \dot{\theta}_e} \right) - \frac{\partial {}^e\mathcal{T}_b}{\partial \theta_e} = 0. \quad (\text{A.184})$$

Finalement, l'Eq. (A.180) peut s'écrire sous forme matricielle telle que :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^e \mathcal{F}_b}{\partial^e \dot{\delta}_b} \right) - \frac{\partial^e \mathcal{F}_b}{\partial^e \delta_b} &= -m_b d_b \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \cos(\dot{\phi}t + \phi_b) \\ \sin(\dot{\phi}t + \phi_b) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 &= -m_b d_b \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \cos(\dot{\phi}t) \cos(\phi_b) - \sin(\dot{\phi}t) \sin(\phi_b) \\ \sin(\dot{\phi}t) \cos(\phi_b) + \cos(\dot{\phi}t) \sin(\phi_b) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 &= \underbrace{-m_b d_b \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} -\sin(\phi_b) \\ \cos(\phi_b) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{{}^e \mathcal{F}_b^s} \sin(\dot{\phi}t) - \underbrace{m_b d_b \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \cos(\phi_b) \\ \sin(\phi_b) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{{}^e \mathcal{F}_b^c} \cos(\dot{\phi}t),
 \end{aligned} \tag{A.185}$$

où  ${}^e \mathcal{F}_b^s$  et  ${}^e \mathcal{F}_b^c$  sont respectivement les composantes en *sinus* et *cosinus* des forces généralisées dues au balourd agissant au nœud  $e$  telles que :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{bw_e} \\ \mathcal{F}_{bu_e} \\ \mathcal{F}_{b\psi_e} \\ \mathcal{F}_{b\theta_e} \end{bmatrix} = {}^e \mathcal{F}_b^s \sin(\dot{\phi}t) + {}^e \mathcal{F}_b^c \cos(\dot{\phi}t). \tag{A.186}$$

### A.5.6 Force asynchrone

Une force asynchrone est une excitation tournante (à l'image du balourd) mais d'amplitudes constante  $A_{as}$  qui ne varie pas avec la vitesse de rotation  $\dot{\phi}$  du rotor. A la différence de l'excitation de type balourd, celle-ci « tourne » à une vitesse qui est égale au produit de la vitesse de rotation  $\dot{\phi}$  du rotor par un scalaire  $s \in \mathbb{R}$ , *e.g.* il est fréquent de rencontrer des excitations asynchrones sur les rotors de moteurs électriques.

On suppose qu'une force asynchrone agit au nœud  $e$ . Le vecteur des déplacements nodaux  ${}^e \dot{\delta}_{as} \in \mathbb{R}^4$  associés s'écrit alors :

$${}^e \delta_{as} = [w_e, u_e, \psi_e, \theta_e]^t. \tag{A.187}$$

Les composantes de forces généralisées dues à une force asynchrone d'amplitude  $A_{as}$  et tournant à la vitesse  $s\dot{\phi}$  s'écrivent donc (cf. Eq. (A.186)) :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{asw_e} \\ \mathcal{F}_{asu_e} \\ \mathcal{F}_{as\psi_e} \\ \mathcal{F}_{as\theta_e} \end{bmatrix} = {}^e \mathcal{F}_{as}^s \sin(s\dot{\phi}t) + {}^e \mathcal{F}_{as}^c \cos(s\dot{\phi}t), \tag{A.188}$$

avec :

$${}^e \mathcal{F}_{as}^s = A_{as} \begin{bmatrix} -\sin(\phi_{as}) \\ \cos(\phi_{as}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{A.189a}$$

$${}^e \mathcal{F}_{as}^c = A_{as} \begin{bmatrix} \cos(\phi_{as}) \\ \sin(\phi_{as}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{A.189b}$$

où  $\phi_{as}$  représente la position angulaire, par rapport à  $\vec{z}$ , de la force asynchrone  $\overrightarrow{A_{as}}$  à  $t = 0$  comme le montre la FIG. A.14(a).

### A.5.7 Force harmonique de direction fixe

Soit la force harmonique de direction fixe  $A_h \sin(\omega_h t + \varphi_h)$  où  $A_h, \omega_h \in \mathbb{R}$ . Le déphasage  $\varphi_h$  doit être considéré lorsque plusieurs forces harmoniques agissent sur le rotor ; il permet de prendre en compte un éventuel déphasage entre ces différentes forces. L'orientation de la force  $\vec{A}_h$ , est paramétrée par  $\phi_h$ , la position angulaire à  $t = 0$  par rapport à  $\vec{z}$ , FIG. A.14(b).

Il est à noter que le calcul de la réponse harmonique d'un rotor s'effectue à vitesse de rotation  $\dot{\phi}$  constante.

On suppose qu'une force harmonique agit au nœud  $e$ . Le vecteur des déplacements nodaux  ${}^e \dot{\delta}_h \in \mathbb{R}^4$  associés s'écrit alors :

$${}^e \delta_h = [w_e, u_e, \psi_e, \theta_e]^t. \quad (\text{A.190})$$

Les composantes de forces généralisées dues à une force harmonique d'amplitude  $A_h \sin(\omega_h t + \varphi_h)$  s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{h_{w_e}} \\ \mathcal{F}_{h_{u_e}} \\ \mathcal{F}_{h_{\psi_e}} \\ \mathcal{F}_{h_{\theta_e}} \end{bmatrix} = A_h \underbrace{\sin(\omega_h t + \varphi_h)}_{\sin(\omega_h t) \cos(\varphi_h) + \cos(\omega_h t) \sin(\varphi_h)} \begin{bmatrix} \cos(\phi_h) \\ \sin(\phi_h) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.191})$$

En décomposant l'Eq. (A.191), il vient alors :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{h_{w_e}} \\ \mathcal{F}_{h_{u_e}} \\ \mathcal{F}_{h_{\psi_e}} \\ \mathcal{F}_{h_{\theta_e}} \end{bmatrix} &= A_h \begin{bmatrix} \sin(\omega_h t) \cos(\varphi_h) \cos(\phi_h) + \cos(\omega_h t) \sin(\varphi_h) \cos(\phi_h) \\ \sin(\omega_h t) \cos(\varphi_h) \sin(\phi_h) + \cos(\omega_h t) \sin(\varphi_h) \sin(\phi_h) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{h_{w_e}} \\ \mathcal{F}_{h_{u_e}} \\ \mathcal{F}_{h_{\psi_e}} \\ \mathcal{F}_{h_{\theta_e}} \end{bmatrix} &= \underbrace{A_h \begin{bmatrix} \cos(\varphi_h) \cos(\phi_h) \\ \cos(\varphi_h) \sin(\phi_h) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{{}^e \mathcal{F}_h^s} \sin(\omega_h t) + \underbrace{A_h \begin{bmatrix} \sin(\varphi_h) \cos(\phi_h) \\ \sin(\varphi_h) \sin(\phi_h) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{{}^e \mathcal{F}_h^c} \cos(\omega_h t), \end{aligned} \quad (\text{A.192})$$

où  ${}^e \mathcal{F}_h^s$  et  ${}^e \mathcal{F}_h^c$  sont respectivement les composantes en *sinus* et *cosinus* des forces généralisées dues une force harmonique.

### A.5.8 Force et couple répartis dans l'espace

Il peut être parfois nécessaire de modéliser une charge répartie sur un rotor lorsque, *e.g.* les effets de la pesanteur et/ou les effets centrifuges doivent être pris en compte. De manière générale, on suppose que ces charges réparties agissent dans un plan incliné d'un angle  $\phi_r$  vis-a-vis du plan  $\{\vec{y}, \vec{z}\}$ , comme le montre la FIG. A.15.

Soient une force et un couple répartis d'intensités linéiques respectives  ${}^e p(y)$  et  ${}^e m(y)$  agissant sur l'élément fini  $\mathcal{K}_e$  entre les nœuds  $e$  et  $e + 1$  tels que :

$${}^e p(y) = p_e + (p_{e+1} - p_e) \frac{y}{e_l}, \quad (\text{A.193a}) \quad {}^e m(y) = m_e + (m_{e+1} - m_e) \frac{y}{e_l}, \quad (\text{A.193b})$$

où  $p_e, p_{e+1}$  et  $m_e, m_{e+1}$  sont respectivement les intensités linéiques des charges réparties  ${}^e p(y)$  et  ${}^e m(y)$  aux nœuds  $e$  et  $e + 1$ .

Le vecteur des déplacements nodaux  ${}^e \dot{\delta}_r \in \mathbb{R}^8$  associés s'écrit alors :

$${}^e \delta_r = [w_e, u_e, \psi_e, \theta_e, w_{e+1}, u_{e+1}, \psi_{e+1}, \theta_{e+1}]^t. \quad (\text{A.194})$$

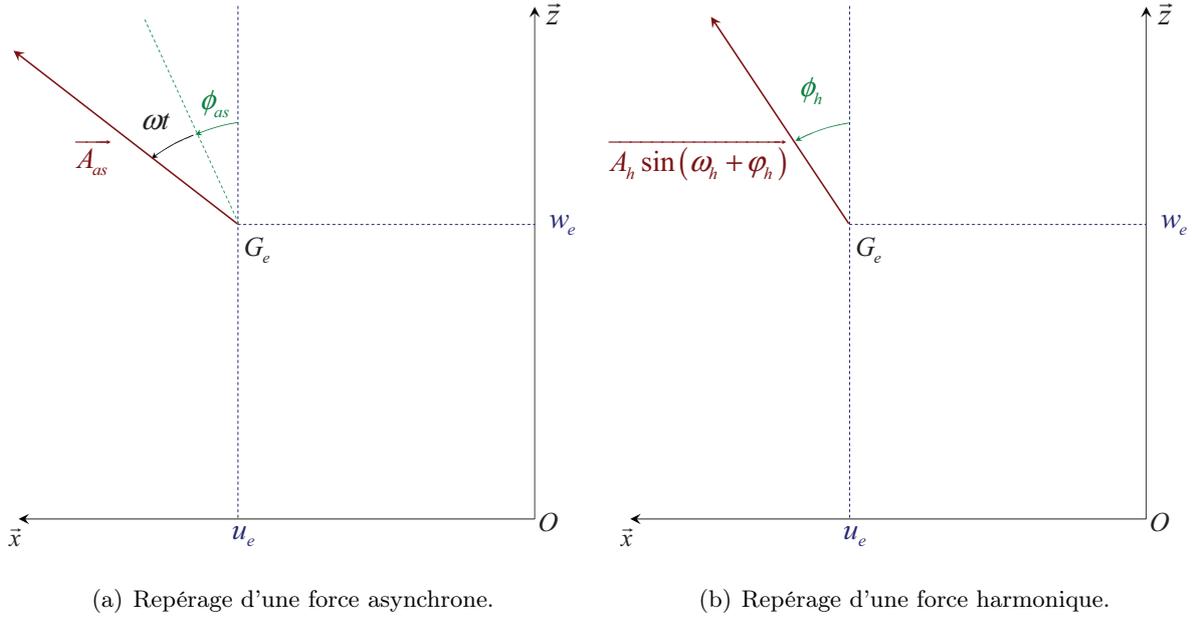


FIGURE A.14 – Repérage de différents types de force d'excitation.

En projetant les charges réparties  ${}^e p(y)$  et  ${}^e m(y)$  selon  $\bar{x}$  et  $\bar{z}$ , il est possible de relier les Eq. (A.30a), Eq. (A.30b), Eq. (A.74a) et Eq. (A.74b) aux Eq. (A.193a) et Eq. (A.193b) telles que :

$${}^e p_x(y) = {}^e p(y) \sin(\phi_r), \quad (\text{A.195a}) \quad {}^e p_z(y) = {}^e p(y) \cos(\phi_r), \quad (\text{A.195b})$$

et :

$${}^e m_x(y) = {}^e m(y) \sin(\phi_r), \quad (\text{A.196a}) \quad {}^e m_z(y) = {}^e m(y) \cos(\phi_r). \quad (\text{A.196b})$$

Ainsi, le vecteur des efforts nodaux équivalents aux charges réparties  ${}^e \mathcal{F}_r$  s'obtient en intégrant ces dernières sur la longueur  ${}^e l$  de l'élément fini  $\mathcal{H}_e$  :

$$\begin{aligned} {}^e \mathcal{F}_r &= \int_0^{{}^e l} {}^e p(y) \sin(\phi_r) {}^e N_u dy + \int_0^{{}^e l} {}^e p(y) \cos(\phi_r) {}^e N_w dy \\ &+ \int_0^{{}^e l} {}^e m(y) \cos(\phi_r) {}^e N_\psi dy + \int_0^{{}^e l} {}^e m(y) \sin(\phi_r) {}^e N_\theta dy. \end{aligned} \quad (\text{A.197})$$

L'Eq. (A.197) peut s'écrire sous une forme plus compacte dans laquelle on retrouve alors l'expression des Eq. (A.77) et Eq. (A.33) telle que :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{rw_e} \\ \mathcal{F}_{ru_e} \\ \mathcal{F}_{r\psi_e} \\ \mathcal{F}_{r\theta_e} \\ \mathcal{F}_{rw_{e+1}} \\ \mathcal{F}_{ru_{e+1}} \\ \mathcal{F}_{r\psi_{e+1}} \\ \mathcal{F}_{r\theta_{e+1}} \end{bmatrix} = {}^e \mathcal{F}_r^u \sin(\phi_r) + {}^e \mathcal{F}_r^w \cos(\phi_r) + {}^e \mathcal{F}_r^\psi \cos(\phi_r) + {}^e \mathcal{F}_r^\theta \sin(\phi_r), \quad (\text{A.198})$$

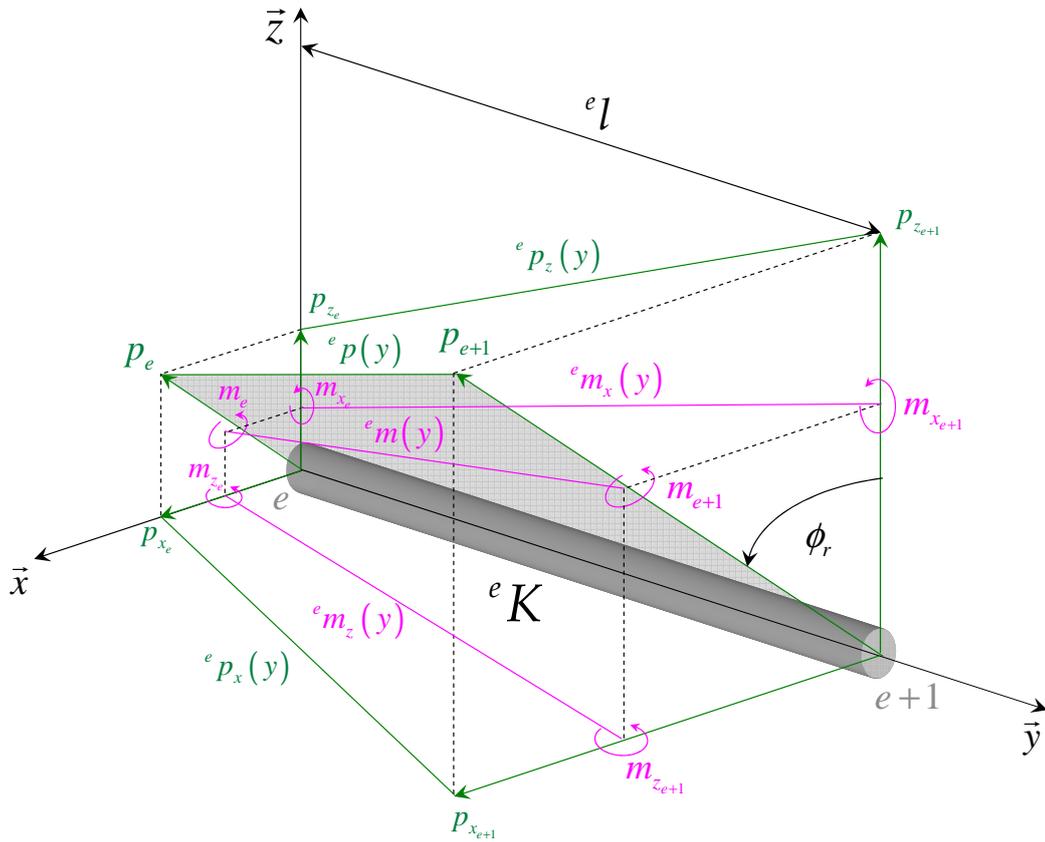


FIGURE A.15 – Visualisation d'un élément fini  $\mathcal{K}_e$  de longueur  ${}^e l$  sollicité avec une charge  ${}^e p(y)$  et un couple  ${}^e m(y)$  réparti entre les nœuds  $e$  et  $e+1$ .

avec :

$${}^e \mathcal{F}_r^w = \frac{{}^e l}{120(1 + {}^e \phi_y)} \begin{bmatrix} 42 + 40{}^e \phi_y & 18 + 20{}^e \phi_y \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ {}^e l(6 + 5{}^e \phi_y) & {}^e l(4 + 5{}^e \phi_y) \\ 18 + 20{}^e \phi_y & 42 + 40{}^e \phi_y \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -{}^e l(4 + 5{}^e \phi_y) & -{}^e l(6 + 5{}^e \phi_y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_e \\ p_{e+1} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.199})$$

$${}^e \mathcal{F}_r^\theta = \frac{1}{12(1 + {}^e \phi_y)} \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ {}^e l(1 + 4{}^e \phi_y) & {}^e l(-1 + 2{}^e \phi_y) \\ 6 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ {}^e l(-1 + 2{}^e \phi_y) & {}^e l(1 + 4{}^e \phi_y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_e \\ m_{e+1} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.200})$$

$${}^e \mathcal{F}_r^u = \frac{{}^e l \sin(\phi_r)}{120(1 + {}^e \phi_y)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 42 + 40{}^e \phi_y & 18 + 20{}^e \phi_y \\ -{}^e l(6 + 5{}^e \phi_y) & -{}^e l(4 + 5{}^e \phi_y) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 18 + 20{}^e \phi_y & 42 + 40{}^e \phi_y \\ {}^e l(4 + 5{}^e \phi_y) & {}^e l(6 + 5{}^e \phi_y) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_e \\ p_{e+1} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.201})$$

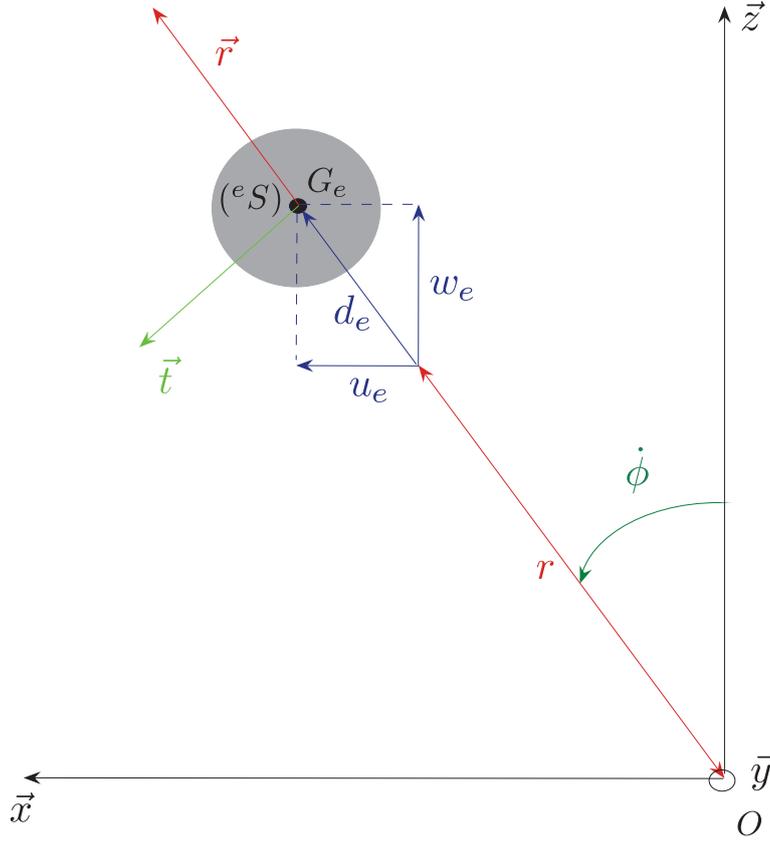


FIGURE A.16 – Visualisation de la section droite  $(^eS)$  de l'élément fini  $\mathcal{H}_e$  mû d'une rotation permanente  $\dot{\phi}$  autour du centre instantané de rotation  $O$ .

et :

$${}^e\mathcal{F}_r^\psi = \frac{\cos(\phi_r)}{12(1+{}^e\phi_y)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 6 \\ {}^el(1+4{}^e\phi_y) & {}^el(-1+2{}^e\phi_y) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & -6 \\ {}^el(-1+2{}^e\phi_y) & {}^el(1+4{}^e\phi_y) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_e \\ m_{e+1} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.202})$$

**Cas de la pesanteur :** L'effet de la force de pesanteur sur un élément fini  $\mathcal{H}_e$  dont l'accélération est définie par :

$$\vec{g} = -g\vec{z}, \quad (\text{A.203})$$

induit les coefficients des intensités linéiques suivants :

$$p_e = {}^e\rho^e Sg, \quad p_{e+1} = {}^e\rho^e Sg, \quad m_e = 0, \quad m_{e+1} = 0, \quad \phi_r = \pi. \quad (\text{A.204})$$

**Cas de l'effet centrifuge :** Une première approximation de l'effet d'une force centrifuge, sur un élément fini  $\mathcal{H}_e$ , consiste à considérer un régime quasi-statique.

Soient les centres géométriques  $G_e$  et  $G_{e+1}$  des sections droites aux nœuds  $e$  et  $e+1$  excentrés initialement d'une distance  $r$  d'un centre instantané de rotation  $O$ . Lors du régime permanent, on suppose que (FIG. A.16) :

– le taux de rotation instantané de  $\mathcal{K}_e$  vis-à-vis du référentiel galiléen ( $R$ ) est défini par :

$$\vec{\omega}_{e|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}_{(R)}, \quad \text{tel que} \quad \ddot{\phi} = 0, \quad (\text{A.205})$$

– l'élément fini  $\mathcal{K}_e$  se meut des déflexions transversales nodales  $u_e$ ,  $w_e$  et  $u_{e+1}$ ,  $w_{e+1}$  tel que :

$$d_e = \sqrt{u_e^2 + w_e^2}, \quad (\text{A.206})$$

– les sollicitation et déflexion de l'élément fini  $\mathcal{K}_e$  sont modélisées dans un plan arbitraire tournant  $\{\vec{y}, \vec{r}\}$ , FIG. A.16.

La position du point  $G_p, p = \{e, e+1\}$  est définie par le vecteur  $\overrightarrow{OG_p}$  tel que :

$$\overrightarrow{OG_p} = (r + d_p) \vec{r}, \quad (\text{A.207})$$

et sa vitesse par le vecteur  $\vec{V}_{e|0}(G_p)$  tel que :

$$\vec{V}_{e|0}(G_p) = \frac{\partial \overrightarrow{OG_p}}{\partial t} = (r + d_p) \dot{\phi} \vec{t} \quad \text{avec} \quad \vec{r} \wedge \vec{t} = \vec{y}. \quad (\text{A.208})$$

Ainsi, l'accélération du point  $G_p$  s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overrightarrow{OG_p}}{\partial t^2} &= -(r + d_p) \dot{\phi}^2 \vec{r} + (r + d_p) \ddot{\phi} \vec{t}, \quad \ddot{\phi} = 0, \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \overrightarrow{OG_p}}{\partial t^2} &= -(r + d_p) \dot{\phi}^2 \vec{r}. \end{aligned} \quad (\text{A.209})$$

Il vient alors :

$$p_e = {}^e \rho^e S \dot{\phi}^2 (r + d_e), \quad p_{e+1} = {}^e \rho^e S \dot{\phi}^2 (r + d_{e+1}), \quad m_e = 0, \quad m_{e+1} = 0. \quad (\text{A.210})$$

### A.5.9 Amortissement structural

Dans le cas de l'*amortissement visqueux*, c'est-à-dire proportionnel à la vitesse, les forces visqueuses s'expriment de la manière suivante et qui est la plus largement utilisée :

$$\mathcal{F}_v = -C_v \dot{\delta}(t), \quad (\text{A.211})$$

où  $C_v \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  est la matrice d'amortissement structurale. En substituant l'Eq. (2.103) dans l'Eq. (A.211), l'Eq. (2.115) s'écrit alors :

$$\gamma \ddot{p}(t) + [\Phi^t C (\dot{\phi}) \Phi + \Phi^t C_v \Phi] \dot{p}(t) + \kappa p(t) = \Phi^t \mathcal{F}(t). \quad (\text{A.212})$$

On introduit les coefficients d'amortissement généralisés  $c_{k,q}$  par la relation :

$$c_{k,q} = \varphi_k^t C_v \varphi_q, \quad k, q = 1, \dots, m. \quad (\text{A.213})$$

Ainsi, on obtient un ensemble d'équations dites *équations normales*, qui en plus d'être couplées *via* l'effet gyroscopique, le sont également par l'amortissement : les équations doivent alors être résolues simultanément.

#### A.5.9.1 Hypothèse de Rayleigh

L'hypothèse de Rayleigh est une hypothèse simplificatrice. En effet, si la matrice d'amortissement  $C_v$  est une combinaison linéaire des matrices de masse  $M$  et raideur  $K$ , *i.e.*  $C_v = \beta_\kappa K + \beta_\gamma M$ , en utilisant les relations d'orthogonalité entre les formes propres, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_k^t C_v \varphi_q &= \varphi_k^t (\beta_\kappa K + \beta_\gamma M) \varphi_q, \\ \Leftrightarrow \varphi_k^t C_v \varphi_q &= \beta_\kappa \varphi_k^t K \varphi_q + \beta_\gamma \varphi_k^t M \varphi_q, \end{aligned} \quad (\text{A.214})$$

où  $\beta_\kappa, \beta_\gamma \in \mathbb{R}$  sont des coefficients de proportionnalité. En substituant les Eq. (2.113a) et Eq. (2.113b) dans l'Eq. (A.214), il vient :

$$c_{k,k} = \beta_\kappa \kappa_k + \beta_\gamma \gamma_k, \quad (\text{A.215})$$

avec  $\kappa_k$  et  $\gamma_k$  les  $k^e$  raideur et masse modales. L'amortissement est alors dit visqueux proportionnel découplé. En définissant le pourcentage (ou facteur) d'amortissement critique du mode  $k$ , noté  $\xi_k$ , par la relation :

$$c_{k,k} = 2\xi_k \gamma_k \omega_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (\text{A.216})$$

et en substituant l'Eq. (A.215) dans l'Eq. (A.216), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \xi_k &= \frac{1}{2} \frac{c_{k,k}}{\gamma_k \omega_k}, \\ \Leftrightarrow \xi_k &= \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_\kappa \kappa_k}{\gamma_k \omega_k} + \frac{\beta_\gamma \gamma_k}{\gamma_k \omega_k} \right) \quad \text{avec} \quad \omega_k^2 = \frac{\kappa_k}{\gamma_k}. \end{aligned} \quad (\text{A.217})$$

Finalement :

$$\xi_k = \frac{1}{2} \left( \beta_\kappa \omega_k + \frac{\beta_\gamma}{\omega_k} \right), \quad k = 1, \dots, m. \quad (\text{A.218})$$

L'hypothèse de Rayleigh suppose donc que le facteur d'amortissement critique  $\xi$  dépend de la pulsation d'excitation  $\omega$ . Cette hypothèse, qui n'a rien de physique, revient à imposer une forme particulière à l'amortissement de la structure : il peut être alors sous-estimé ou sur-estimé selon la

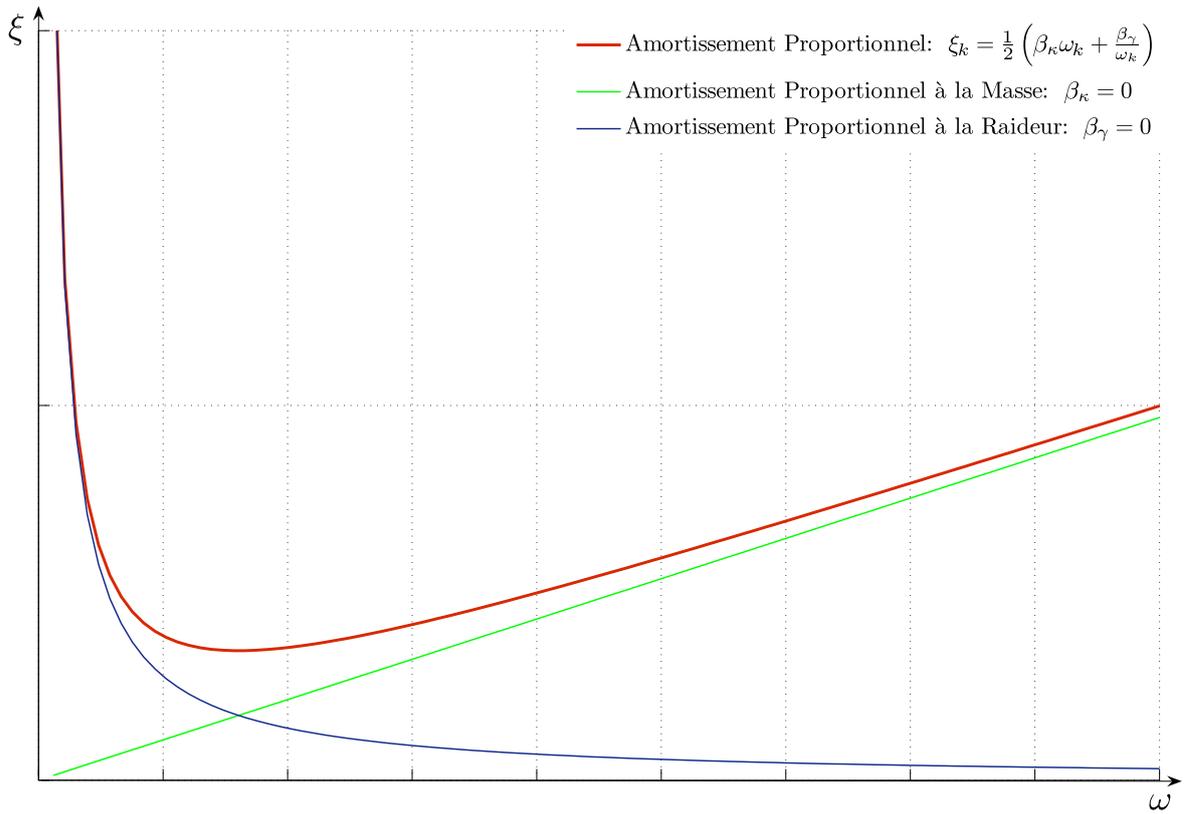


FIGURE A.17 – Evolution du pourcentage d'amortissement critique  $\xi$  selon l'hypothèse de Rayleigh.

pulsation d'excitation du système, FIG. A.17.

La détermination des coefficients  $\beta_\kappa$  et  $\beta_\gamma$  peut être basée sur des valeurs imposées et plus particulièrement sur  $n$  couples :

$$\left( \tilde{\xi}_i, \omega_i \right) \quad \text{avec} \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.219})$$

où les  $\tilde{\xi}_i$  sont des valeurs fixées ou expérimentales aux pulsations  $\omega_i$  associées, FIG. A.18. Afin de conserver un certain sens physique, on suppose que l'entier  $n \in \mathbb{N}$  est défini tel  $\omega_n \leq \omega_m$  de manière à ce que le facteur d'amortissement critique modale  $\tilde{\xi}_n$  fixé soit associé à une pulsation  $\omega_n$  comprise dans le spectre fréquentiel d'intérêt.

En définissant le vecteur d'erreur  $e_\xi \in \mathbb{R}^n$  tel que sa  $i^e$  composante s'écrive :

$$e_{\xi_i}(\beta_\kappa, \beta_\gamma) = (\xi_i - \tilde{\xi}_i), \quad (\text{A.220})$$

il est possible de définir une fonctionnelle de type moindre carrée  $\mathcal{E}_\xi \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\mathcal{E}_\xi(\beta_\kappa, \beta_\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_{\xi_i}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tilde{\xi}_i)^2. \quad (\text{A.221})$$

Ainsi, les coefficients  $\beta_\kappa$  et  $\beta_\gamma$  peuvent être déterminés en résolvant le problème de minimisation

suivant :

$$\min_{\beta_\kappa^*, \beta_\gamma^*} \mathcal{E}_\xi(\beta_\kappa, \beta_\gamma), \quad (\text{A.222})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{T}\text{rouver } (\beta_\kappa^*, \beta_\gamma^*) \text{ tel que } \nabla \mathcal{E}_\xi(\beta_\kappa^*, \beta_\gamma^*) = 0,$$

c'est-à-dire en cherchant les valeurs des coefficients  $\beta_\kappa^*$  et  $\beta_\gamma^*$  tels que l'écart entre les facteurs d'amortissement critiques modaux fixés  $\tilde{\xi}_i$  et ceux modélisés par l'hypothèse de Rayleigh  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (Eq. (A.218)), soit minimal. Le vecteur  $\nabla \mathcal{E}_\xi \in \mathbb{R}^2$  est défini par :

$$\nabla \mathcal{E}_\xi = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_\xi}{\partial \beta_\kappa} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_\xi}{\partial \beta_\gamma} \end{array} \right\}, \quad (\text{A.223})$$

avec :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\xi}{\partial \beta_{(-)}} = \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial e_i}{\partial \beta_{(-)}} = \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tilde{\xi}_i) \frac{\partial e_i}{\partial \beta_{(-)}}, \quad (\text{A.224})$$

où l'indice  $(-)$  représente  $\kappa$  et  $\gamma$ . En substituant l'Eq. (A.218) dans l'Eq. (A.220), la  $i^e$  composante du vecteur d'erreur  $e_\xi$  s'exprime alors :

$$\begin{aligned} e_{\xi_i} &= \frac{1}{2} \left( \beta_\kappa \omega_i + \frac{\beta_\gamma}{\omega_i} \right) - \tilde{\xi}_i, \\ \Leftrightarrow e_{\xi_i} &= \left( \frac{\omega_i}{2} \right) \beta_\kappa + \left( \frac{1}{2\omega_i} \right) \beta_\gamma - \tilde{\xi}_i. \end{aligned} \quad (\text{A.225})$$

Il vient alors :

$$\frac{\partial e_{\xi_i}}{\partial \beta_\kappa} = \frac{\omega_i}{2}, \quad (\text{A.226a}) \quad \frac{\partial e_{\xi_i}}{\partial \beta_\gamma} = \frac{1}{2\omega_i}. \quad (\text{A.226b})$$

En substituant les Eq. (A.225), Eq. (A.226a), Eq. (A.226b) dans l'Eq. (A.223), la condition de l'Eq. (A.222) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tilde{\xi}_i) \frac{\partial e_{\xi_i}}{\partial \beta_\kappa} \\ \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tilde{\xi}_i) \frac{\partial e_{\xi_i}}{\partial \beta_\gamma} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n \left( \left[ \frac{\omega_i}{2} \right] \beta_\kappa + \left[ \frac{1}{2\omega_i} \right] \beta_\gamma - \tilde{\xi}_i \right) \left( \frac{\omega_i}{2} \right) \\ \sum_{i=1}^n \left( \left[ \frac{\omega_i}{2} \right] \beta_\kappa + \left[ \frac{1}{2\omega_i} \right] \beta_\gamma - \tilde{\xi}_i \right) \left( \frac{1}{2\omega_i} \right) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n \left( \left[ \frac{\omega_i^2}{4} \right] \beta_\kappa + \left[ \frac{1}{4} \right] \beta_\gamma - \frac{\tilde{\xi}_i \omega_i}{2} \right) \\ \sum_{i=1}^n \left( \left[ \frac{1}{4} \right] \beta_\kappa + \left[ \frac{1}{4\omega_i^2} \right] \beta_\gamma - \frac{\tilde{\xi}_i}{2\omega_i} \right) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{4} \right) \beta_\kappa + \left( \frac{n}{4} \right) \beta_\gamma \\ \left( \sum_{i=1}^n \frac{n}{4} \right) \beta_\kappa + \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\omega_i^2} \right) \beta_\gamma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\xi}_i \omega_i}{2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\xi}_i}{2\omega_i} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.227})$$

Finalement, la minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{E}_\xi$  revient à résoudre le système suivant :

$$A_\xi \begin{Bmatrix} \beta_\kappa \\ \beta_\gamma \end{Bmatrix} = b_\xi, \quad (\text{A.228})$$

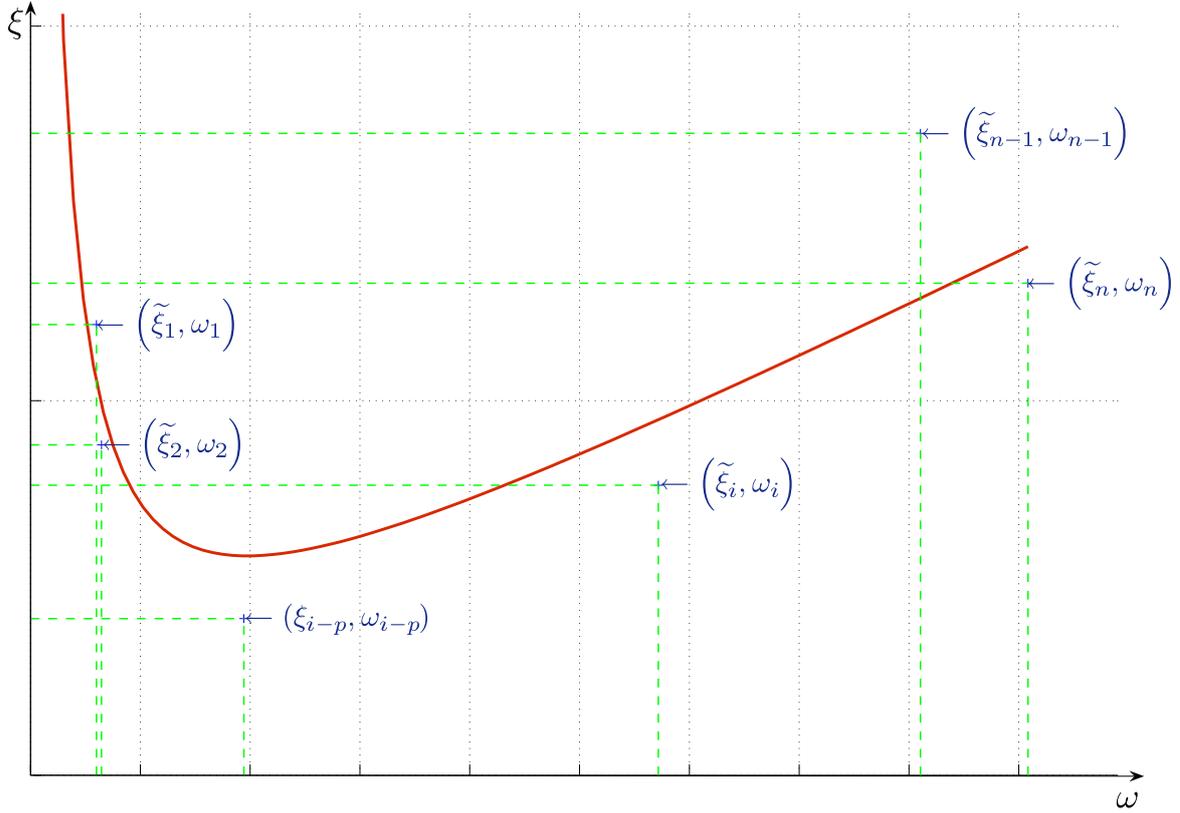


FIGURE A.18 – Evolution du pourcentage d'amortissement critique  $\xi$  estimé à partir des couples  $(\xi_i, \omega_i)$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

où  $A_\xi \in \mathcal{M}_{2,2}$  et  $b_\xi \in \mathbb{R}^2$  sont définis tels que :

$$A_\xi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{4} & \frac{n}{4} \\ \frac{n}{4} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\omega_i^2} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.229a}) \quad b_\xi = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\xi}_i \omega_i}{2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\xi}_i}{2\omega_i} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.229b})$$

Les coefficients  $\beta_\kappa^*$  et  $\beta_\gamma^*$  sont donc déterminés par :

$$\begin{Bmatrix} \beta_\kappa^* \\ \beta_\gamma^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \frac{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \right) \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \omega_i \right) - n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\xi}_i}{\omega_i} \right)}{\left( \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \right) - n^2} \\ 2 \frac{\left( \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\xi}_i}{\omega_i} \right) - n \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \omega_i \right)}{\left( \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \right) - n^2} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.230})$$

### A.5.9.2 Hypothèse de Basile

Par ailleurs, il est possible d'introduire, dans chacune des équations de Eq. (2.63) projetées dans la base modale du système (équations normales), un terme dissipatif appelé *amortissement modal* (hypothèse de Basile) lorsque la structure présente des modes découplés.

Les coefficients d'amortissement modaux  $\xi_k$  peuvent alors être introduits ici par analogie à un

système à un degré de liberté (masse, ressort, dashpot) tels que :

$$c_{k,k} = 2\xi_k \sqrt{\kappa_k \gamma_k} = 2\xi_k \gamma_k \omega_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (\text{A.231})$$

Ce type d'amortissement peut s'introduire de diverses façons, *e.g.* mode par mode, en ayant au préalable réalisé une identification expérimentale des facteurs d'amortissement critiques modaux  $\xi_k$  *via* des essais dynamiques.

Finalement, ces hypothèses permettent d'ajouter les termes  $c_{k,k}$  à la diagonale de la matrice  $\Phi^t C(\dot{\phi}) \Phi$ . Les équations normales s'écrivent alors :

$$\gamma \ddot{p}(t) + \eta(\dot{\phi}) \dot{p}(t) + \kappa p(t) = \Phi^t \mathcal{F}(t), \quad (\text{A.232})$$

avec :

$$\eta(\dot{\phi}) = \Phi^t C(\dot{\phi}) \Phi + c, \quad (\text{A.233})$$

où  $\eta \in \mathcal{M}_{m,m}$  contient la matrice gyroscopique modale et la matrice diagonale d'amortissement modale  $c \in \mathcal{M}_{m,m}$  contenant les  $c_{k,k}$  donnés dans l'Eq. (A.231) :

$$c = \begin{bmatrix} c_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & c_{k,k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_{m,m} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.234})$$

### A.5.10 Interprétation physique d'une forme propre complexe

L'interprétation physique d'une forme propre complexe (forme propre du système en rotation) n'est de prime abord pas évidente. En revanche, elle peut être réalisée en étudiant l'équation du mouvement Eq. (2.117) en ne considérant qu'une paire d'éléments propres complexes conjugués  $(r_k, \mathcal{P}_k)$  et  $(r_k^*, \mathcal{P}_k^*)$ . La solution est alors donnée par les Eq. (2.103) et Eq. (2.66) :

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \Phi p(t), \\ \Leftrightarrow \delta(t) &= \Phi \mathcal{P}_k e^{r_k t} + \Phi \mathcal{P}_k^* e^{r_k^* t}, \\ \Leftrightarrow \delta(t) &= \Phi [\Re(\mathcal{P}_k) + j\Im(\mathcal{P}_k)] e^{\left(-\frac{\xi_k \omega_k}{(1-\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}} + j\omega_k\right)t} \\ &\quad + \Phi [\Re(\mathcal{P}_k) - j\Im(\mathcal{P}_k)] e^{\left(-\frac{\xi_k \omega_k}{(1-\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}} - j\omega_k\right)t}, \end{aligned} \tag{A.235}$$

qui peut s'écrire encore :

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \Phi [\Re(\mathcal{P}_k) + j\Im(\mathcal{P}_k)] e^{\left(-\frac{\xi_k \omega_k}{(1-\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}}\right)t} [\cos(\omega_k t) + j \sin(\omega_k t)] \\ &\quad + \Phi [\Re(\mathcal{P}_k) - j\Im(\mathcal{P}_k)] e^{\left(-\frac{\xi_k \omega_k}{(1-\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}}\right)t} [\cos(\omega_k t) - j \sin(\omega_k t)] \\ \Leftrightarrow \delta(t) &= e^{\left(-\frac{\xi_k \omega_k}{(1-\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}}\right)t} \{ \Phi [\Re(\mathcal{P}_k) \cos(\omega_k t) + j\Re(\mathcal{P}_k) \sin(\omega_k t) \\ &\quad + j\Im(\mathcal{P}_k) \cos(\omega_k t) - \Im(\mathcal{P}_k) \sin(\omega_k t)] \} \\ &\quad + e^{\left(-\frac{\xi_k \omega_k}{(1-\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}}\right)t} \{ \Phi [\Re(\mathcal{P}_k) \cos(\omega_k t) - j\Re(\mathcal{P}_k) \sin(\omega_k t) \\ &\quad - j\Im(\mathcal{P}_k) \cos(\omega_k t) - \Im(\mathcal{P}_k) \sin(\omega_k t)] \} \end{aligned} \tag{A.236}$$

Finalement :

$$\delta(t) = 2e^{\left(-\frac{\xi_k \omega_k}{(1-\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}}\right)t} \Phi [\Re(\mathcal{P}_k) \cos(\omega_k t) - \Im(\mathcal{P}_k) \sin(\omega_k t)]. \tag{A.237}$$

L'Eq. (A.237) ne contient donc pas de termes complexes. Par ailleurs, si la condition de stabilité est respectée, Eq. (2.87), l'exponentielle  $e^{(\dots)t}$  tend vers zéro lorsque  $t$  augmente. Ainsi, la  $k^e$  forme propre complexe est définie par la quantité suivante :

$$\underbrace{\Phi [\Re(\mathcal{P}_k) \cos(\omega_k t) - \Im(\mathcal{P}_k) \sin(\omega_k t)]}_{k^e \text{ Forme Propre Complexe}}, \tag{A.238}$$

que l'on peut écrire plus généralement :

$$\delta_c \cos(\omega_k t) + \delta_s \sin(\omega_k t), \tag{A.239}$$

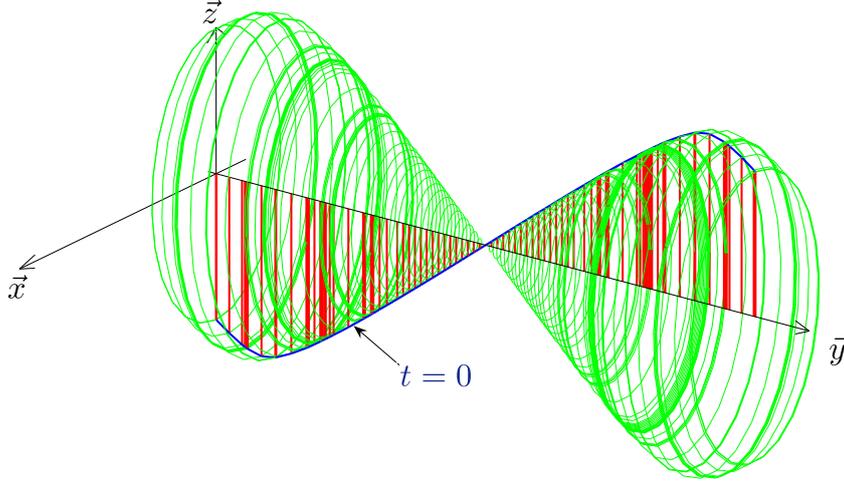


FIGURE A.19 – Tracé d'une forme propre complexe. La forme de l'arbre est tracée, à  $t = 0$ , en trait continu bleu (–).

où  $\delta_c$  et  $\delta_s$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires du vecteur des degrés de liberté. Les déflexions transversales  $u_e$  et  $w_e$  du nœud  $e$  selon  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$u_e = \delta_{c_{u_e}} \cos(\omega_k t) + \delta_{s_{u_e}} \sin(\omega_k t), \quad (\text{A.240a}) \quad w_e = \delta_{c_{w_e}} \cos(\omega_k t) + \delta_{s_{w_e}} \sin(\omega_k t). \quad (\text{A.240b})$$

où  $\delta_{c_{u_e}}$ ,  $\delta_{c_{w_e}}$ ,  $\delta_{s_{u_e}}$  et  $\delta_{s_{w_e}}$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires des déflexions transversales selon  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

Les relations Eq. (A.240a) et Eq. (A.240b) définissent donc une ellipse dans le plan  $\{\vec{x}, \vec{z}\}$ . Quand un rotor soumis à un balourd atteint une pulsation critique  $\omega_k$ , la forme de l'arbre est similaire au mode, FIG. A.19.

On peut appeler mode l'ensemble des ellipses décrites par tous les nœuds de l'arbre à la pulsation  $\omega_k$ . En revanche, cette représentation est incomplète puisqu'elle ne précise pas, à un instant  $t$  donné, la position déformée de l'arbre. On peut donc souhaiter préciser la forme de l'arbre, qui varie en fonction du temps, à un instant arbitraire. A cet effet, il est commode de choisir  $t = 0$  afin d'avoir directement la position de l'axe de l'arbre, *i.e.*  $u_e = \delta_{c_{u_e}}$  et  $w_e = \delta_{c_{w_e}}$ , (cf. FIG. A.19).

### A.5.11 Détermination des caractéristiques d'une ellipse

La trajectoire elliptique d'un nœud  $e$  est caractérisée par : - la longueur de ses axes principaux  $a_e$  et  $b_e$  respectivement porté par les vecteurs unitaires  $\vec{r}_e$  et  $\vec{s}_e$ , - l'orientation  $\phi_e$  du vecteur unitaire  $\vec{r}_e$  par rapport au vecteur unitaire  $\vec{x}$ , FIG. A.20.

Soit un rotor excité à la pulsation  $\omega$ . Les Eq. (A.240a) et Eq. (A.240b) peuvent s'écrire :

$$u_e = \delta_{c_{u_e}} \cos(\omega t) + \delta_{s_{u_e}} \sin(\omega t), \quad (\text{A.241a}) \quad w_e = \delta_{c_{w_e}} \cos(\omega t) + \delta_{s_{w_e}} \sin(\omega t). \quad (\text{A.241b})$$

Les amplitudes maximales des déflexions transversales du nœud  $e$  sont obtenues par les relations suivantes :

$$u_{e\max} = \sqrt{\delta_{s_{u_e}}^2 + \delta_{c_{u_e}}^2}, \quad (\text{A.242a}) \quad w_{e\max} = \sqrt{\delta_{s_{w_e}}^2 + \delta_{c_{w_e}}^2}. \quad (\text{A.242b})$$

D'après la FIG. A.20, la relation entre les composantes des repères  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et  $(O, \vec{r}_e, \vec{y}, \vec{s}_e)$  est la suivante :

$$r_e = u_e \cos(\phi_e) - w_e \sin(\phi_e), \quad (\text{A.243a}) \quad s_e = u_e \sin(\phi_e) + w_e \cos(\phi_e). \quad (\text{A.243b})$$

L'équation d'une ellipse selon ses axes principaux  $a_e$  et  $b_e$  est de la forme :

$$\left(\frac{r_e}{a_e}\right)^2 + \left(\frac{s_e}{b_e}\right)^2 = 1. \quad (\text{A.244})$$

En substituant les Eq. (A.243a) et Eq. (A.243b) dans l'Eq. (A.244), il vient alors :

$$u_e^2 \left[ \frac{\cos^2(\phi_e)}{a_e^2} + \frac{\sin^2(\phi_e)}{b_e^2} \right] + w_e^2 \left[ \frac{\sin^2(\phi_e)}{a_e^2} + \frac{\cos^2(\phi_e)}{b_e^2} \right] + u_e w_e \sin(2\phi_e) \left[ -\frac{1}{a_e^2} + \frac{1}{b_e^2} \right] = 1. \quad (\text{A.245})$$

En prémultipliant l'Eq. (A.241a) par  $\delta_{s_{w_e}}$ , l'Eq. (A.241b) par  $\delta_{s_{u_e}}$  et en soustrayant ces deux quantités, on obtient :

$$\begin{aligned} u_e \delta_{s_{w_e}} - w_e \delta_{s_{u_e}} &= \cos(\omega t) (\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}}), \\ \Leftrightarrow \frac{u_e \delta_{s_{w_e}} - w_e \delta_{s_{u_e}}}{\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}}} &= \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (\text{A.246})$$

De même, en prémultipliant l'Eq. (A.241a) par  $\delta_{c_{w_e}}$ , l'Eq. (A.241b) par  $\delta_{c_{u_e}}$  et en soustrayant ces deux quantités, on obtient également :

$$\begin{aligned} u_e \delta_{c_{w_e}} - w_e \delta_{c_{u_e}} &= \sin(\omega t) (\delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}} - \delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}}), \\ \Leftrightarrow \frac{u_e \delta_{c_{w_e}} - w_e \delta_{c_{u_e}}}{\delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}} - \delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}}} &= \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (\text{A.247})$$

Soit, en additionnant le carré des Eq. (A.246) et Eq. (A.247) :

$$\left( \frac{u_e \delta_{s_{w_e}} - w_e \delta_{s_{u_e}}}{\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}}} \right)^2 + \left( \frac{u_e \delta_{c_{w_e}} - w_e \delta_{c_{u_e}}}{\delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}} - \delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}}} \right)^2 = 1, \quad (\text{A.248})$$

ou encore :

$$u_e^2 \frac{(\delta_{c_{w_e}}^2 + \delta_{s_{w_e}}^2)}{(\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}})^2} + w_e^2 \frac{(\delta_{c_{u_e}}^2 + \delta_{s_{u_e}}^2)}{(\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}})^2} - 2u_e w_e \frac{(\delta_{s_{w_e}} \delta_{s_{u_e}} + \delta_{c_{w_e}} \delta_{c_{u_e}})}{(\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}})^2} = 1. \quad (\text{A.249})$$

En identifiant les facteurs de termes  $u_e$ ,  $w_e$  et  $u_e w_e$  des Eq. (A.245) et Eq. (A.249), il vient :

$$\frac{\cos^2(\phi_e)}{a_e^2} + \frac{\sin^2(\phi_e)}{b_e^2} = \frac{(\delta_{c_{w_e}}^2 + \delta_{s_{w_e}}^2)}{(\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}})^2}, \quad (\text{A.250})$$

$$\frac{\sin^2(\phi_e)}{a_e^2} + \frac{\cos^2(\phi_e)}{b_e^2} = \frac{(\delta_{c_{u_e}}^2 + \delta_{s_{u_e}}^2)}{(\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}})^2}, \quad (\text{A.251})$$

et :

$$\left( \frac{1}{a_e^2} - \frac{1}{b_e^2} \right) \frac{\sin(2\phi_e)}{2} = \frac{(\delta_{s_{we}} \delta_{s_{ue}} + \delta_{c_{we}} \delta_{c_{ue}})}{(\delta_{c_{ue}} \delta_{s_{we}} - \delta_{c_{we}} \delta_{s_{ue}})^2}. \quad (\text{A.252})$$

En soustrayant l'Eq. (A.251) à l'Eq. (A.250), on a :

$$\left( \frac{1}{a_e^2} - \frac{1}{b_e^2} \right) \cos(2\phi_e) = \frac{(\delta_{s_{we}}^2 + \delta_{c_{we}}^2 - \delta_{c_{ue}}^2 - \delta_{s_{ue}}^2)}{(\delta_{c_{ue}} \delta_{s_{we}} - \delta_{c_{we}} \delta_{s_{ue}})^2}. \quad (\text{A.253})$$

Le quotient des Eq. (A.252) et Eq. (A.253) permet d'obtenir une expression de l'angle  $\phi_e$  telle que :

$$\tan(2\phi_e) = \frac{2(\delta_{s_{we}} \delta_{s_{ue}} + \delta_{c_{we}} \delta_{c_{ue}})}{(\delta_{s_{we}}^2 + \delta_{c_{we}}^2 - \delta_{c_{ue}}^2 - \delta_{s_{ue}}^2)}. \quad (\text{A.254})$$

L'Eq. (A.253) permet d'obtenir :

$$\frac{1}{a_e^2} - \frac{1}{b_e^2} = \frac{(\delta_{s_{we}}^2 + \delta_{c_{we}}^2 - \delta_{c_{ue}}^2 - \delta_{s_{ue}}^2)}{(\delta_{c_{ue}} \delta_{s_{we}} - \delta_{c_{we}} \delta_{s_{ue}})^2} \frac{1}{\cos(2\phi_e)} = \mathcal{A}. \quad (\text{A.255})$$

D'autre part, l'addition des Eq. (A.250) et Eq. (A.251), on a :

$$\frac{1}{a_e^2} + \frac{1}{b_e^2} = \frac{(\delta_{c_{we}}^2 + \delta_{s_{we}}^2 + \delta_{c_{ue}}^2 + \delta_{s_{ue}}^2)}{(\delta_{c_{ue}} \delta_{s_{we}} - \delta_{c_{we}} \delta_{s_{ue}})^2} = \mathcal{B}. \quad (\text{A.256})$$

En additionnant les Eq. (A.255) et Eq. (A.256), on obtient l'expression de l'axe principal  $a_e$  :

$$a_e = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{B} + \mathcal{A}}}, \quad (\text{A.257})$$

En soustrayant les Eq. (A.256) et Eq. (A.255), on obtient l'expression du second axe principal  $b_e$  :

$$b_e = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{B} - \mathcal{A}}}. \quad (\text{A.258})$$

**Cas d'une trajectoire circulaire :** Lorsque les caractéristiques des paliers sont identiques selon  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ , *i.e*  $k_{p_{xx}} = k_{p_{zz}}$  et  $c_{p_{xx}} = c_{p_{zz}}$ , et que les termes de couplage éventuels sont également identiques, *i.e*  $k_{p_{xz}} = k_{p_{zx}}$  et  $c_{p_{xz}} = c_{p_{zx}}$ , les trajectoires des nœuds de l'arbre sont circulaires, FIG. A.21.

En effet, l'Eq. (A.249) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_e^2 (\delta_{c_{we}}^2 + \delta_{s_{we}}^2) + w_e^2 (\delta_{c_{ue}}^2 + \delta_{s_{ue}}^2) - 2u_e w_e (\delta_{s_{we}} \delta_{s_{ue}} + \delta_{c_{we}} \delta_{c_{ue}}) = (\delta_{c_{ue}} \delta_{s_{we}} - \delta_{c_{we}} \delta_{s_{ue}})^2. \quad (\text{A.259})$$

Si l'on a les conditions suivantes :

$$(\delta_{c_{we}}^2 + \delta_{s_{we}}^2) - (\delta_{c_{ue}}^2 + \delta_{s_{ue}}^2) = 0, \quad (\text{A.260})$$

$$(\delta_{s_{we}} \delta_{s_{ue}} + \delta_{c_{we}} \delta_{c_{ue}}) = 0, \quad (\text{A.261})$$

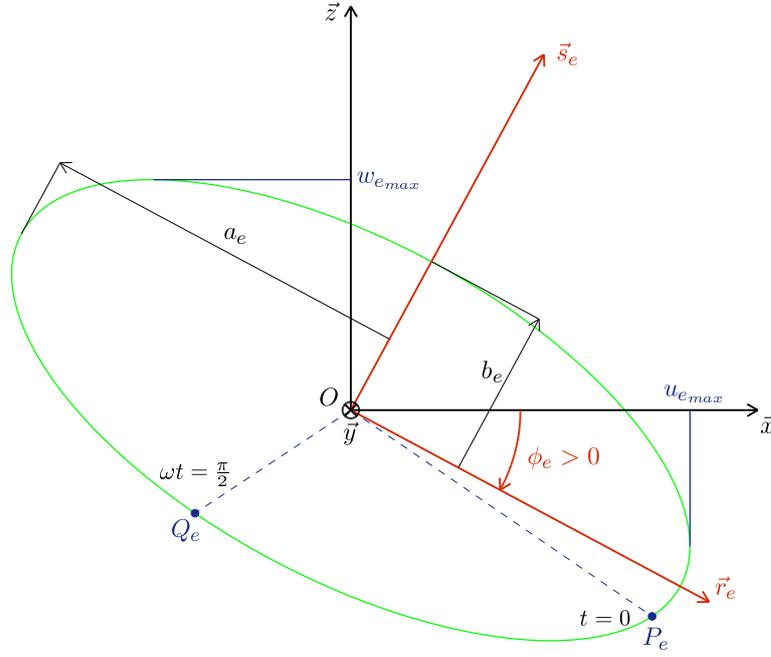


FIGURE A.20 – Tracé d'une ellipse et de ses caractéristiques.

il vient alors l'équation d'un cercle de centre  $O$ , FIG. A.21 :

$$u_e^2 + w_e^2 = \frac{(\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}})^2}{(\delta_{c_{w_e}}^2 + \delta_{s_{w_e}}^2)} = \frac{(\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}})^2}{(\delta_{c_{u_e}}^2 + \delta_{s_{u_e}}^2)} = R_e^2, \quad (\text{A.262})$$

où  $R_e$  est le rayon du cercle. Les caractéristiques de l'ellipse trajectoire deviennent alors :

$$\tan(\phi_e) = [0, 2\pi], \quad (\text{A.263})$$

et :

$$a_e = b_e = \frac{(\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}})}{(\delta_{c_{w_e}}^2 + \delta_{s_{w_e}}^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}})}{(\delta_{c_{u_e}}^2 + \delta_{s_{u_e}}^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.264})$$

**Cas d'une trajectoire rectiligne :** Lorsqu'un rotor est monté sur des paliers dont les caractéristiques diffèrent selon  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  et que celui-ci atteint une vitesse critique, les trajectoires des nœuds de l'arbre sont rectilignes  $\forall \phi_e$  et  $\forall t$ , FIG. A.22.

En effet, si l'on a la condition suivante :

$$(\delta_{c_{u_e}} \delta_{s_{w_e}} - \delta_{c_{w_e}} \delta_{s_{u_e}}) = 0, \quad (\text{A.265})$$

l'Eq. (A.259) devient alors :

$$u_e^2 (\delta_{c_{w_e}}^2 + \delta_{s_{w_e}}^2) + w_e^2 (\delta_{c_{u_e}}^2 + \delta_{s_{u_e}}^2) - 2u_e w_e (\delta_{s_{w_e}} \delta_{s_{u_e}} + \delta_{c_{w_e}} \delta_{c_{u_e}}) = 0. \quad (\text{A.266})$$

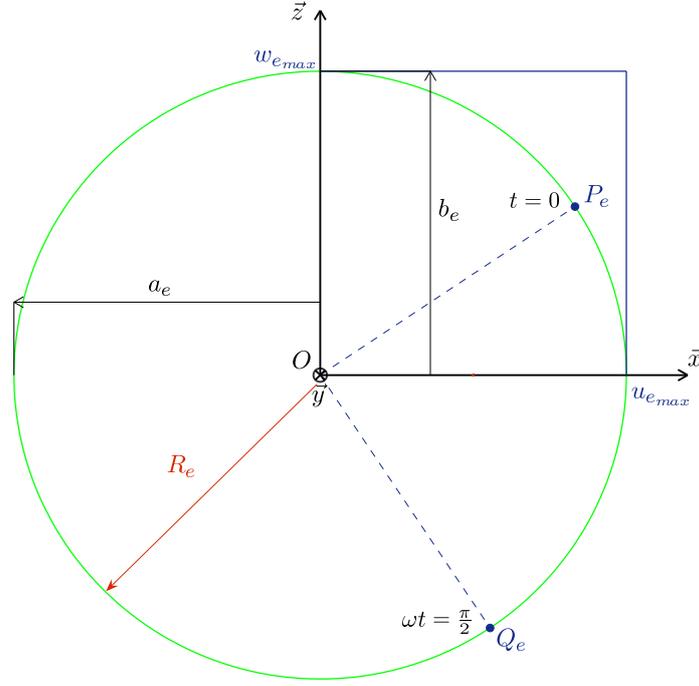


FIGURE A.21 – Tracé d'une trajectoire circulaire et de ses caractéristiques.

En divisant l'Eq. (A.266) par le terme  $u_e^2$ , on obtient l'équation du deuxième degré :

$$\left(\delta_{c_{ue}}^2 + \delta_{s_{ue}}^2\right) \left(\frac{w_e}{u_e}\right)^2 - 2\left(\delta_{s_{we}} \delta_{s_{ue}} + \delta_{c_{we}} \delta_{c_{ue}}\right) \left(\frac{w_e}{u_e}\right) + \left(\delta_{c_{we}}^2 + \delta_{s_{we}}^2\right) = 0, \quad (\text{A.267})$$

dont le discriminant  $\Delta$  est égal à :

$$\Delta = 4\left(\delta_{s_{we}} \delta_{s_{ue}} + \delta_{c_{we}} \delta_{c_{ue}}\right)^2 - 4\left(\delta_{c_{ue}}^2 + \delta_{s_{ue}}^2\right) \left(\delta_{c_{we}}^2 + \delta_{s_{we}}^2\right). \quad (\text{A.268})$$

En développant l'Eq. (A.268) et en substituant l'Eq. (A.265), il vient :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\delta_{s_{we}}^2 \delta_{s_{ue}}^2 - 4\delta_{s_{ue}}^2 \delta_{s_{we}}^2 + 4\delta_{c_{we}}^2 \delta_{c_{ue}}^2 - 4\delta_{c_{ue}}^2 \delta_{c_{we}}^2 + 8\delta_{s_{we}} \delta_{s_{ue}} \delta_{c_{we}} \delta_{c_{ue}} \\ &\quad - 4\delta_{s_{we}} \underbrace{\delta_{c_{ue}} \delta_{s_{we}} \delta_{c_{ue}}}_{\delta_{c_{we}} \delta_{s_{ue}}} - 4\delta_{c_{we}} \delta_{s_{ue}} \underbrace{\delta_{c_{we}} \delta_{s_{ue}}}_{\delta_{c_{ue}} \delta_{s_{we}}}, \end{aligned} \quad (\text{A.269})$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 0.$$

L'Eq. (A.267) possède donc une unique solution double définie par :

$$\left(\frac{w_e}{u_e}\right) = \frac{\left(\delta_{s_{we}} \delta_{s_{ue}} + \delta_{c_{we}} \delta_{c_{ue}}\right)}{\left(\delta_{c_{ue}}^2 + \delta_{s_{ue}}^2\right)}, \quad (\text{A.270})$$

ou encore, en utilisant l'égalité de l'Eq. (A.265) :

$$\delta_{s_{ue}} = \frac{\delta_{c_{ue}} \delta_{s_{we}}}{\delta_{c_{we}}}, \quad (\text{A.271})$$

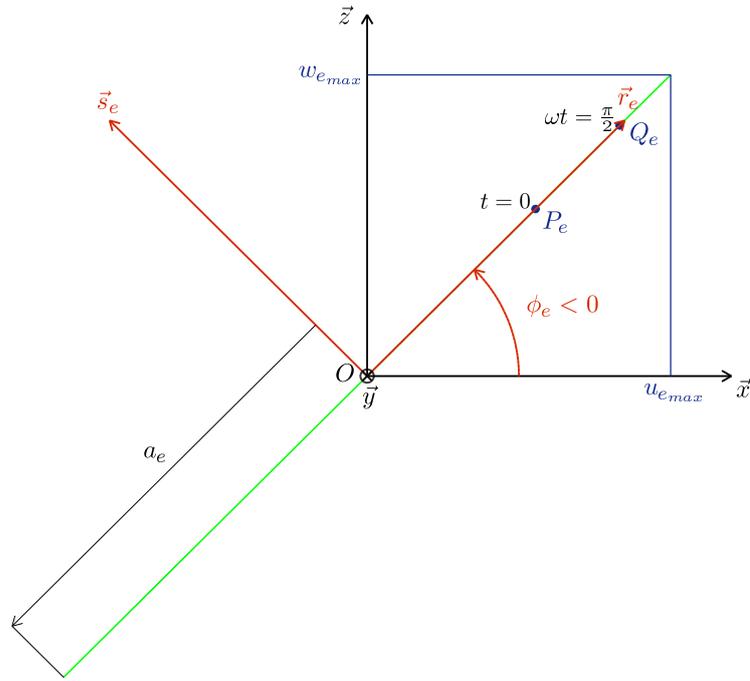


FIGURE A.22 – Tracé d'une trajectoire rectiligne et de ses caractéristiques.

l'Eq. (A.270) se simplifie telle que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{w_e}{u_e}\right) &= \frac{\left[\delta_{swe} \left(\frac{\delta_{c_{ue}} \delta_{swe}}{\delta_{c_{we}}}\right) + \delta_{c_{we}} \delta_{c_{ue}}\right]}{\left[\delta_{c_{ue}}^2 + \left(\frac{\delta_{c_{ue}} \delta_{swe}}{\delta_{c_{we}}}\right)^2\right]} = \frac{\left(\frac{\delta_{c_{ue}} \delta_{swe}^2 + \delta_{c_{ue}} \delta_{c_{we}}^2}{\delta_{c_{we}}}\right)}{\left(\frac{\delta_{c_{ue}}^2 \delta_{c_{we}}^2 + \delta_{c_{ue}}^2 \delta_{swe}^2}{\delta_{c_{we}}^2}\right)} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{w_e}{u_e}\right) &= \left(\frac{\delta_{swe}^2 + \delta_{c_{we}}^2}{\delta_{swe}^2 + \delta_{c_{we}}^2}\right) \left(\frac{\delta_{c_{we}}}{\delta_{c_{ue}}}\right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{w_e}{u_e}\right) &= \left(\frac{\delta_{c_{we}}}{\delta_{c_{ue}}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.272})$$

Le terme  $\left(\frac{w_e}{u_e}\right)$  est donc constant  $\forall t$ . Il correspond, au signe près, à la tangente de l'angle  $\phi_e$  ce qui implique les caractéristiques de l'ellipse trajectoire suivantes :

$$\tan(-\phi_e) = \left(\frac{\delta_{c_{we}}}{\delta_{c_{ue}}}\right), \quad (\text{A.273})$$

et :

$$a_e = \sqrt{u_{e,\max}^2 + w_{e,\max}^2}, \quad (\text{A.274a}) \quad b_e = 0. \quad (\text{A.274b})$$

### A.5.12 Détermination du sens de parcours d'une ellipse

Durant une période de vibration  $\frac{2\pi}{\omega}$ , l'ellipse peut être parcourue dans le sens positif ou négatif (convention trigonométrique) selon le sens de précession du rotor. On suppose qu'à  $\omega t = 0$ , le nœud  $e$  de l'arbre est situé au point  $P_e$  et qu'à  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  le nœud  $e$  de l'arbre est situé au point  $Q_e$ , FIG. A.20.

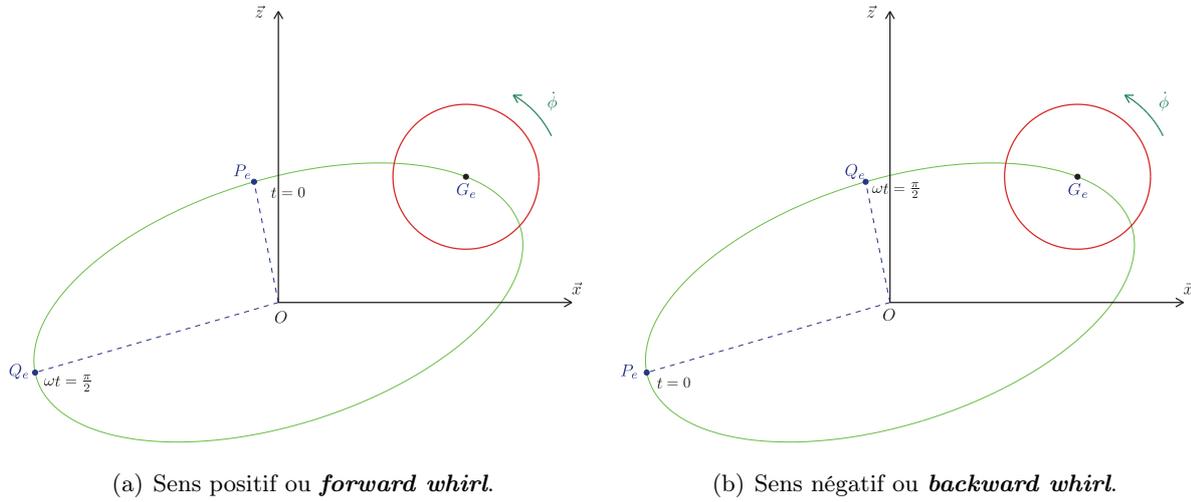


FIGURE A.23 – Visualisation des sens de précession d'un rotor ou sens de parcours d'une ellipse.

Les Eq. (A.241a) et Eq. (A.241b) permettent de calculer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{OP_e}$  et  $\overrightarrow{OQ_e}$ , tels que :

$$\overrightarrow{OP_e} = \begin{bmatrix} \delta_{c_{ue}} \\ 0 \\ \delta_{s_{ue}} \end{bmatrix}_{(R)}, \quad (\text{A.275a}) \quad \overrightarrow{OQ_e} = \begin{bmatrix} \delta_{c_{we}} \\ 0 \\ \delta_{s_{we}} \end{bmatrix}_{(R)}. \quad (\text{A.275b})$$

Ainsi, le signe du produit vectoriel  $\overrightarrow{OP_e} \wedge \overrightarrow{OQ_e}$  indique le sens de parcours du nœud  $e$  tel que :

$$\overrightarrow{OP_e} \wedge \overrightarrow{OQ_e} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{c_{ue}} \delta_{s_{we}} - \delta_{s_{ue}} \delta_{c_{we}} \\ 0 \end{bmatrix}_{(R)} \quad (\text{A.276})$$

Si l'ellipse est parcourue dans le sens positif, la précession du rotor est dite "*directe*" (ou "*forward whirl*"), FIG. A.23(a), alors qu'elle est dite "*inverse*" ou ("*backward whirl*"), FIG. A.23(b), si elle est parcourue dans le sens négatif.

**Remarque 22:** Dans une situation où la structure est supportée par des paliers dont les caractéristiques de raideur et amortissement varient en fonction de la vitesse de rotation propre, le sens de précession du rotor peut évoluer en fonction de la vitesse de rotation. Par ailleurs, pour une vitesse de rotation fixée, il est possible d'obtenir l'inégalité suivante :

$$sg(\overrightarrow{OP_e} \wedge \overrightarrow{OQ_e}) \neq sg(\overrightarrow{OP_{e+k}} \wedge \overrightarrow{OQ_{e+k}}), \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.277})$$

c'est-à-dire qu'il est possible de calculer des sens de précession différents pour les nœuds  $e$  et  $e+k$ .



## A.6 Algorithme d'appariement des formes propres complexes

---

**Algorithm 1** Algorithme d'appariement des formes propres complexes

---

- 1:  $m, n_{\dot{\phi}} \in \mathbb{N}$ ,  $M, B, K \in \mathcal{M}_{n_{\delta}, n_{\delta}}$  donné,  $\varsigma = 0_{m, n_{\dot{\phi}}}$
- 2: Initialisation  $i = n_{\dot{\phi}}$
- 3: Détermination d'une matrice gyroskopique  $C(\dot{\phi}_{n_{\dot{\phi}}}) \in \mathcal{M}_{n_{\delta}, n_{\delta}}$
- 4: Résolution des problèmes aux valeurs propres **droit** et **gauche** :

$$B^r \Upsilon_j^{n_{\dot{\phi}}} = r_j A_j^r \Upsilon_j^{n_{\dot{\phi}}} \text{ et } B^{tl} \Upsilon_j^{n_{\dot{\phi}}} = r_j A_j^{tl} \Upsilon_j^{n_{\dot{\phi}}}, j = 1, \dots, m.$$

- 5: Initialisation de la matrice d'indices  $\varsigma : \varsigma_{1, \dots, m}^{n_{\dot{\phi}}} = [1, \dots, m]^t$ .
- 6: Pour chaque vitesse de rotation  $\dot{\phi}_i$
- 7: **for**  $i = n_{\dot{\phi}} - 1, \dots, 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , **do**
- 8: Détermination d'une matrice gyroskopique  $C(\dot{\phi}_i) \in \mathcal{M}_{n_{\delta}, n_{\delta}}$
- 9: Résolution des problèmes aux valeurs propres **droit** et **gauche** :

$$B^r \Upsilon_j^i = r_j A_j^r \Upsilon_j^i \text{ et } B^{tl} \Upsilon_j^i = r_j A_j^{tl} \Upsilon_j^i, j = 1, \dots, m.$$

- 10: **for**  $k = 1, \dots, m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , **do**
- 11: **for**  $q = 1, \dots, m$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , **do**
- 12: Détermination d'une composante de matrice de corrélation  $\text{NC}^2 O_{k,q}^{i,i+1}$  :

$$\text{NC}^2 O_{k,q}^{i,i+1} = \frac{\left| (\Theta_q^{i+1})^t \mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1} \Psi_k^i \right|^2}{\left[ (\Theta_q^{i+1})^t \mathcal{W}_{q,q}^{i+1,i+1} \Psi_q^{i+1} \right] \cdot \left[ (\Theta_k^i)^t \mathcal{W}_{k,k}^{i,i} \Psi_k^i \right]} \text{ avec } \mathcal{W}_{k,q}^{i,i+1} = r_k^i r_q^{i+1} M - K.$$

- 13: **end for**
- 14: **end for**
- 15: Pour chaque forme propre complexe  $\Psi_k^i \Rightarrow$  Détermination de la  $q^e$  forme propre complexe  $\Psi_q^{i+1}$  correspondante
- 16: **for**  $k = 1, \dots, m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , **do**
- 17: Incrémentation de la matrice d'indices  $\varsigma$  :

$$\varsigma_k^i = q_{\max} \text{ tel que } \max_{q_{\max}} \text{NC}^2 O_{k,q}^{i,i+1}, \quad \forall q = 1, \dots, m.$$

- 18: **end for**
  - 19: **end for**
-

## A.7 Algorithme de recherche de vitesses critiques de rotation

---

**Algorithm 2** Algorithme de recherche de vitesses critiques de rotation  $\dot{\phi}_c^{k,q}$

---

- 1:  $s \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  donné,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q = 0$
  - 2: **for**  $k = 1, \dots, m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , **do**
  - 3:   Pour les pulsations propres  $\omega_{\Psi_k}^i$  associées à la  $k^e$  forme propre complexe  $\Psi_k$
  - 4:   **for**  $i = 1, \dots, n_{\dot{\phi}} - 1$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , **do**
  - 5:     Pour chaque intervalle de vitesse de rotation propre  $[\dot{\phi}_i, \dot{\phi}_{i+1}]$
  - 6:     **if**  $(\omega_{\Psi_k}^i - s\dot{\phi}_i)(\omega_{\Psi_k}^{i+1} - s\dot{\phi}_{i+1}) \leq 0$  **then**
  - 7:       Incrémentation de la  $q^e$  pulsation critique de rotation  $\dot{\phi}_c^{k,q}$  associée à la pulsation propre  $\omega_{\Psi_k}$
  - 8:       Incrémentation indicielle  $q \leftarrow q + 1$ ,  $i_c^{k,q} \leftarrow i$
  - 9:       Détermination d'une vitesse critique de rotation  $\frac{30}{\pi} \dot{\phi}_c^{k,q}$  :
 
$$\frac{30}{\pi} \dot{\phi}_c^{k,q} = \frac{30}{\pi} \frac{\omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}} - \left( \frac{\omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q+1}} - \omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}}}{\dot{\phi}_{i_c^{k,q+1}} - \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}} \right) \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}}{s - \left( \frac{\omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q+1}} - \omega_{\Psi_k}^{i_c^{k,q}}}{\dot{\phi}_{i_c^{k,q+1}} - \dot{\phi}_{i_c^{k,q}}} \right)}$$
  - 10:     **end if**
  - 11:   **end for**
  - 12: **end for**
-

## A.8 Détermination des champs de contraintes dans un rotor

Une fois la réponse d'un rotor déterminée pour une sollicitation donnée, le champs de contraintes  $\bar{\sigma}$ , Eq. (2.43a), requiert la connaissance des champs de déformations  $\bar{\varepsilon}$ , Eq. (2.43b). Si la méthode des éléments finis a été privilégiée, cela revient à déterminer les contraintes élémentaires  ${}^e\bar{\sigma}$  pour chaque élément fini  $\mathcal{K}_e$ ,  $e = 1, \dots, N_e$ , et donc des champs de déformations élémentaires  ${}^e\bar{\varepsilon}$  issus du champ de déplacement  $\delta(t)$ .

Champs de contraintes  ${}^e\bar{\sigma}$  et de déformations  ${}^e\bar{\varepsilon}$  élémentaires se déterminent en un point  $P_e$  d'une section droite ( ${}^eS$ ), de centre géométrique  $G_e$ , d'ordonnées  $(x, z)$  dans le repère  $(R)$  et d'abscisse de référence  $\zeta$  sur l'élément fini  $\mathcal{K}_e$  de longueur  ${}^e\ell$  (FIG. A.24) et sont définis tels que :

$${}^e\bar{\sigma}(P_e, t) = \begin{bmatrix} {}^e\sigma_{yy}(x, z, \zeta, t) \\ {}^e\sigma_{xy}(\zeta, t) \\ {}^e\sigma_{yz}(\zeta, t) \end{bmatrix}_{(R)}, \quad (\text{A.278a}) \quad {}^e\bar{\varepsilon}(P_e, t) = \begin{bmatrix} {}^e\varepsilon_{yy}(x, z, \zeta, t) \\ 2{}^e\varepsilon_{xy}(\zeta, t) \\ 2{}^e\varepsilon_{yz}(\zeta, t) \end{bmatrix}_{(R)}, \quad (\text{A.278b})$$

Le champ de déformations élémentaires exprimé dans le repère galiléen  $(R)$  s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} {}^e\varepsilon_{yy}(x, z, \zeta, t) \\ 2{}^e\varepsilon_{xy}(\zeta, t) \\ 2{}^e\varepsilon_{yz}(\zeta, t) \end{bmatrix}_{(R)} = \begin{bmatrix} x \frac{\partial {}^e\psi}{\partial y}(\zeta, t) - z \frac{\partial {}^e\theta}{\partial y}(\zeta, t) \\ \frac{\partial {}^e u}{\partial y}(\zeta, t) + {}^e\psi(\zeta, t) \\ \frac{\partial {}^e w}{\partial y}(\zeta, t) - {}^e\theta(\zeta, t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.279})$$

et suppose, par conséquent, la connaissance des champs élémentaires de déflexions transversales  ${}^e w(\zeta, t)$ ,  ${}^e u(\zeta, t)$  et de rotations de sections droites  ${}^e \psi(\zeta, t)$ ,  ${}^e \theta(\zeta, t)$  qui se décomposent tels que :

$$\begin{bmatrix} {}^e w(\zeta, t) \\ {}^e u(\zeta, t) \\ {}^e \psi(\zeta, t) \\ {}^e \theta(\zeta, t) \end{bmatrix} = {}^e N(\zeta) {}^e \delta(t) \quad \text{avec} \quad \zeta = \frac{y}{{}^e\ell}, \quad (\text{A.280})$$

où  ${}^e \delta(t)$  est défini dans l'Eq. (A.106) et  ${}^e N(\zeta) \in \mathcal{M}_{4,8}$  est la matrice des fonctions de formes définie à partir des Eq. (A.118), Eq. (A.119), Eq. (A.121), Eq. (A.122) et Eq. (A.120) :

$${}^e N(\zeta) = \begin{bmatrix} {}^e N_w(\zeta) \\ {}^e N_u(\zeta) \\ {}^e N_\psi(\zeta) \\ {}^e N_\theta(\zeta) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.281})$$

ou encore :

$${}^e N(\zeta) = \begin{bmatrix} {}^e N_w^{w_e}(\zeta) & 0 & 0 & {}^e N_w^{\theta_e}(\zeta) \\ 0 & {}^e N_u^{u_e}(\zeta) & {}^e N_u^{u_e}(\zeta) & 0 & \dots \\ 0 & {}^e N_\psi^{u_e}(\zeta) & {}^e N_\psi^{u_e}(\zeta) & 0 & \dots \\ {}^e N_\theta^{w_e}(\zeta) & 0 & 0 & {}^e N_\theta^{\theta_e}(\zeta) \\ {}^e N_w^{w_{e+1}}(\zeta) & 0 & 0 & {}^e N_w^{\theta_{e+1}}(\zeta) \\ \dots & 0 & {}^e N_u^{u_{e+1}}(\zeta) & {}^e N_u^{\psi_{e+1}}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & {}^e N_\psi^{u_{e+1}}(\zeta) & {}^e N_\psi^{\psi_{e+1}}(\zeta) & 0 \\ {}^e N_\theta^{w_{e+1}}(\zeta) & 0 & 0 & {}^e N_\theta^{\theta_{e+1}}(\zeta) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.282})$$

En substituant l'Eq. (A.280) dans l'Eq. (A.279), le champ de déformations élémentaires s'exprime

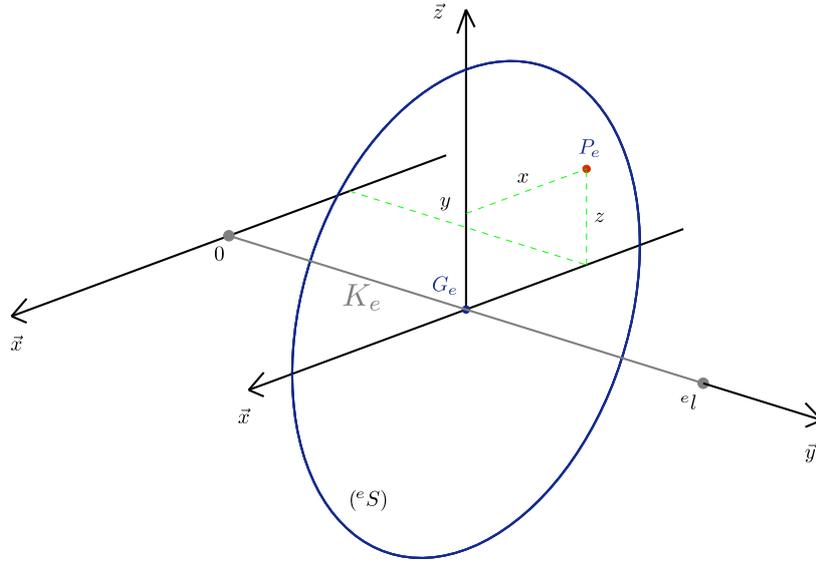


FIGURE A.24 – Repérage d'un point  $P_e \in ({}^eS)$  de coordonnées  $(x, y, z)$  sur un élément fini  $\mathcal{K}_e$  de longueur  ${}^el$ .

donc en fonction des fonctions de formes ou de leurs dérivées spatiales :

$$\begin{bmatrix} {}^e\varepsilon_{yy}(x, z, \zeta, t) \\ 2{}^e\varepsilon_{yx}(\zeta, t) \\ 2{}^e\varepsilon_{yz}(\zeta, t) \end{bmatrix}_{(R)} = \begin{bmatrix} x \frac{\partial}{\partial y} [{}^eN_\psi(\zeta) {}^e\delta(t)] - z \frac{\partial}{\partial y} [{}^eN_\theta(\zeta) \delta(t)] \\ \frac{\partial}{\partial y} [{}^eN_u(\zeta) {}^e\delta(t)] + {}^eN_\psi {}^e\delta(t) \\ \frac{\partial}{\partial y} [{}^eN_w(\zeta) {}^e\delta(t)] - {}^eN_\theta {}^e\delta(t) \end{bmatrix}_{(R)} \quad (\text{A.283})$$

avec :

$$\frac{\partial}{\partial y} ( ) = \frac{\partial ( )}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{{}^el}, \frac{\partial}{\partial \zeta} ( ). \quad (\text{A.284})$$

### A.8.1 Contraintes normales de flexion élémentaires

La contrainte normale de flexion élémentaire selon l'axe  $(G_e, \vec{y})$ , le long d'un élément fini  $\mathcal{K}_e$  d'abscisse de référence  $\zeta$ , est la somme des contraintes normales de flexion dues aux rotations de sections droites  $\theta_e$  et  $\theta_{e+1}$ , et  $\psi_e$  et  $\psi_{e+1}$  respectivement autour des axes  $(G_e, \vec{x})$  et  $(G_e, \vec{z})$ , telle que :

$${}^e\sigma_{yy}(x, z, \zeta, t) = {}^e\sigma_{yy}^\theta(z, \zeta, t) + {}^e\sigma_{yy}^\psi(x, \zeta, t), \quad (\text{A.285})$$

où  ${}^e\sigma_{yy}(x, z, \zeta, t)$  est la contrainte normale de flexion élémentaire totale selon l'axe  $(G_e, \vec{y})$ ,  ${}^e\sigma_{yy}^\theta(z, \zeta, t)$  est la contrainte normale de flexion élémentaire selon l'axe  $(G_e, \vec{y})$  due aux rotations de sections droites autour de l'axe  $(G_e, \vec{x})$  et  ${}^e\sigma_{yy}^\psi(x, \zeta, t)$  est la contrainte normale de flexion élémentaire selon l'axe  $(G_e, \vec{y})$  due aux rotations de sections droites autour de l'axe  $(G_e, \vec{z})$ .

A l'aide des Eq. (A.7a) et Eq. (A.51a), l'Eq. (A.285) devient :

$${}^e\sigma_{yy}(x, z, \zeta, t) = \underbrace{-{}^eEz \frac{\partial \theta}{\partial y}(\zeta, t)}_{{}^e\sigma_{yy}^\theta(z, \zeta, t)} + \underbrace{{}^eEx \frac{\partial \psi}{\partial y}(\zeta, t)}_{{}^e\sigma_{yy}^\psi(x, \zeta, t)}. \quad (\text{A.286})$$

En substituant les Eq. (2.47) et Eq. (A.279) dans l'Eq. (A.286), l'expression de la contrainte

normale de flexion élémentaire s'écrit alors :

$${}^e\sigma_{yy}(x, z, \zeta, t) = {}^eE \frac{1}{e_l} \left( x \frac{\partial^e N_\psi}{\partial \zeta}(\zeta) - z \frac{\partial^e N_\theta}{\partial \zeta}(\zeta) \right) {}^e\delta(t). \quad (\text{A.287})$$

**Remarque 23:** Dans le processus de modélisation, il est fréquent d'être amené à prendre en compte, sur un élément fini  $\mathcal{K}_e$ , une charge axiale élémentaire constante d'intensité  ${}^eP$  selon l'axe  $(G_e, \bar{y})$ . Cette considération a pour corollaire la génération d'un terme de raideur géométrique (*Stiffening effect*) présenté dans la Section 2.1.5.

Ainsi, la charge constante  ${}^eP$  selon l'axe  $(G_e, \bar{y})$  génère une contrainte normale supplémentaire  ${}^e\sigma_{yy}^v$  qui s'additionne aux contraintes normales de flexion élémentaires  ${}^e\sigma_{yy}^\theta(z, \zeta, t)$  et  ${}^e\sigma_{yy}^\psi(z, \zeta, t)$ , Eq. (A.285), telle que :

$${}^e\sigma_{yy}(x, z, \zeta, t) = {}^e\sigma_{yy}^\theta(z, \zeta, t) + {}^e\sigma_{yy}^\psi(x, \zeta, t) + {}^e\sigma_{yy}^v. \quad (\text{A.288})$$

où la contrainte normale due à la charge élémentaire constante  ${}^eP$  s'écrit simplement :

$${}^e\sigma_{yy}^v = \frac{{}^eP}{{}^eS}. \quad (\text{A.289})$$



**Remarque 24:** Par ailleurs, si l'on souhaite évaluer la contrainte normale  ${}^e\sigma_{yy}^v(t)$  due à un champ de déplacement axial  ${}^ev(\zeta, t)$  induit par un phénomène quelconque lors du calcul de la réponse du rotor, les contraintes normales induites satisferont la relation suivante :

$${}^e\sigma_{yy}^v(t) = {}^eE \frac{\partial {}^ev}{\partial y}(\zeta, t). \quad (\text{A.290})$$

Cela suppose bien évidemment de considérer un nouveau vecteur de degrés de liberté élémentaires  ${}^e\delta \in \mathbb{R}^{10}$  :

$${}^e\delta = [v_e, w_e, u_e, \psi_e, \theta_e, v_{e+1}, w_{e+1}, u_{e+1}, \psi_{e+1}, \psi_{e+1}]^t, \quad (\text{A.291})$$

et par conséquent de modifier les matrices élémentaires et autres vecteurs des forces extérieures.

Le champ de déplacement axial  ${}^ev(\zeta, t)$  se projette alors dans la base des fonctions de formes linéaires bien connues et définies par l'Eq. (A.292) :

$${}^eN_v(\zeta) = [{}^eN_v^{v_e}, 0, 0, 0, 0, {}^eN_v^{v_{e+1}}, 0, 0, 0, 0], \quad (\text{A.292})$$

avec :

$${}^eN_v^{v_e} = 1 - \zeta, \quad (\text{A.293a}) \quad {}^eN_v^{v_{e+1}} = \zeta, \quad (\text{A.293b})$$

tel que :

$${}^ev(\zeta, t) = {}^eN_v(\zeta) {}^e\delta(t), \quad (\text{A.294})$$

En substituant l'Eq. (A.294) dans l'Eq. (A.290), l'expression de la contrainte normale devient alors :

$${}^e\sigma_{yy}^v(t) = {}^eE \frac{1}{e_l} \frac{\partial {}^eN_v}{\partial \zeta}(\zeta) {}^e\delta(t). \quad (\text{A.295})$$



### A.8.2 Contraintes de cisaillement élémentaires

Les contraintes de cisaillement, dans un rotor, sont issues des distortions s'exerçant respectivement dans les plans  $\{xG_ey\}$  et  $\{yG_eyz\}$  et s'expriment, le long d'un élément fini  $\mathcal{K}_e$  d'abscisse de référence  $\zeta$ , s'expriment respectivement par :

$${}^e\sigma_{xy}(\zeta, t) = {}^eG^e k_y \left( \frac{\partial^e u}{\partial y}(\zeta, t) + {}^e\psi(\zeta, t) \right), \quad (\text{A.296})$$

et :

$${}^e\sigma_{yz}(\zeta, t) = {}^eG^e k_y \left( \frac{\partial^e w}{\partial y}(\zeta, t) - {}^e\theta(\zeta, t) \right). \quad (\text{A.297})$$

En substituant les Eq. (2.47) et Eq. (A.279) successivement dans les Eq. (A.296) et Eq. (A.297), il advient :

$${}^e\sigma_{xy}(\zeta, t) = {}^eG^e k_y \left( \frac{1}{e_l} \frac{\partial^e N_u}{\partial \zeta}(\zeta) + {}^e N_\psi(\zeta) \right) {}^e\delta(t), \quad (\text{A.298})$$

et :

$${}^e\sigma_{yz}(\zeta, t) = {}^eG^e k_y \left( \frac{1}{e_l} \frac{\partial^e N_w}{\partial \zeta}(\zeta) - {}^e N_\theta(\zeta) \right) {}^e\delta(t), \quad (\text{A.299})$$

ou bien encore sous une forme plus compacte :

$${}^e\bar{\sigma}(P_e, t) = {}^eB(x, \zeta, z) {}^e\delta(t), \quad (\text{A.300})$$

où  ${}^eB(x, \zeta, z) \in \mathcal{M}_{3,8}$  a la forme :

$${}^eB(x, \zeta, z) = \frac{1}{e_l} \begin{bmatrix} {}^eE & \left( x \frac{\partial^e N_\psi}{\partial \zeta}(\zeta) - z \frac{\partial^e N_\theta}{\partial \zeta}(\zeta) \right) \\ {}^eG^e k_y & \left( \frac{\partial^e N_u}{\partial \zeta}(\zeta) + e_l {}^e N_\psi(\zeta) \right) \\ {}^eG^e k_y & \left( \frac{\partial^e N_w}{\partial \zeta}(\zeta) - e_l {}^e N_\theta(\zeta) \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.301})$$

### A.8.3 Détermination des contraintes maximales de flexion

En considérant un point  $P_e$  d'une section droite ( ${}^eS$ ), de centre géométrique  $G_e$ , d'ordonnées  $(x, z)$  dans le repère ( $R$ ) et d'abscisse de référence  $\zeta$  sur l'élément fini  $\mathcal{K}_e$  de longueur  $e_l$ , l'expression de la contrainte normale de flexion, selon l'axe  $(G_e, \bar{y})$ , a la forme suivante :

$${}^e\sigma_{yy}(x, \zeta, z, t) = -{}^eEz \frac{\partial^e \theta}{\partial y}(\zeta, t) + {}^eEx \frac{\partial^e \psi}{\partial y}(\zeta, t) \quad \text{avec} \quad \zeta = \frac{y}{e_l}. \quad (\text{A.302})$$

$$\max_{\substack{x^*, \zeta^*, \\ z^*, t^*}} {}^e\sigma_{yy}(x, \zeta, z, t), \quad \forall e = 1 \dots, N_e, \quad (\text{A.303})$$

ou en d'autres termes, pour chaque élément fini  $\mathcal{K}_e$ ,  $e = 1 \dots, N_e$  :

$$\mathcal{T}\text{rouver} \quad (x^*, \zeta^*, z^*, t^*) \quad (\text{A.304})$$

$$\text{tel que} \quad {}^e\sigma_{yy}(x^*, \zeta^*, z^*, t^*) = \max {}^e\sigma_{yy}(x, \zeta, z, t),$$

où  $(x^*, z^*)$  sont les ordonnées optimales du point  $P_e$  dans la section ( ${}^eS$ ),  $\zeta^*$  est l'abscisse de référence optimale du point  $P_e$  sur l'élément fini  $\mathcal{K}_e$  et  $t^*$  est la valeur optimale du paramètre de l'ellipse trajectoire. Les quatre variables relatives à ce problème d'optimisation rendent la résolution analytique de ce dernier très complexe. En revanche, en considérant certaines simplifications, la dimension de ce problème peut être réduite. En effet, la première simplification consiste à considérer

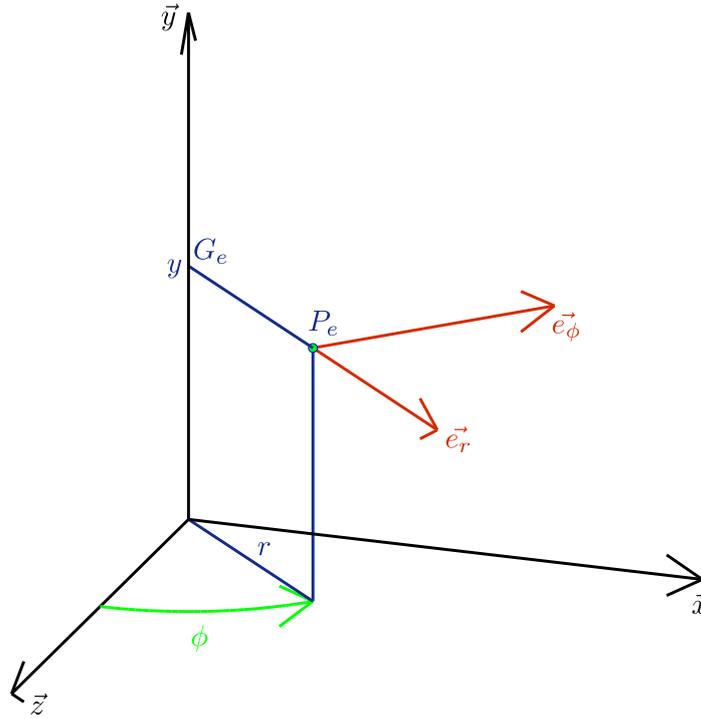


FIGURE A.25 – Paramétrage des coordonnées polaires.

le système de coordonnées polaire  $(r, \phi, y)$  du repère  $(G_e, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{y})$ , FIG. A.25, les coordonnées cartésiennes du repère  $(G_e, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  s'expriment alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = r \sin(\phi) \\ y = y \\ z = r \cos(\phi) \end{cases} . \quad (\text{A.305})$$

où l'on rappelle que l'angle  $\phi$  est orienté positivement de l'axe  $(G_e, \vec{z})$  vers l'axe  $(G_e, \vec{x})$ . L'Eq. (A.302) devient alors :

$${}^e\sigma_{yy}(r, \phi, \zeta, t) = -{}^eEr \cos(\phi) \frac{\partial^e\theta}{\partial y}(\zeta, t) + {}^eEr \sin(\phi) \frac{\partial^e\psi}{\partial y}(\zeta, t), \quad (\text{A.306})$$

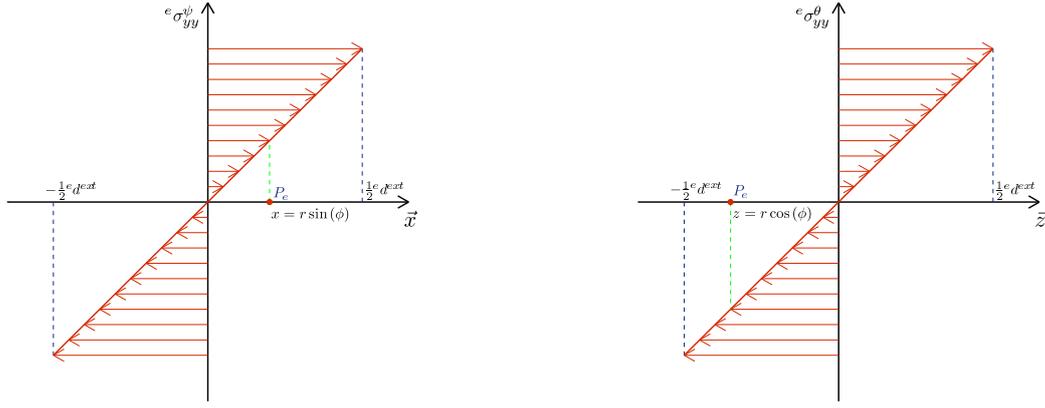
dont le problème de maximisation associé, Eq. (A.304), dépendra alors des variables  $r^*, \phi^*, \zeta^*$  et  $t^*$  tel que :

$$\max_{\substack{r^*, \phi^*, \\ \zeta^*, t^*}} {}^e\sigma_{yy}(r, \phi, \zeta, t), \quad \forall e = 1 \dots, N_e, \quad (\text{A.307})$$

La répartition de la contrainte normale de flexion sur une section droite étant linéairement dépendante du rayon  $r$ , FIG. A.26, cette variable d'optimisation peut être éliminée en se rappelant que cette contrainte est maximale sur la "peau extérieure du rotor" telle que :

$$r^* = \frac{1}{2} {}^e d^{ext}, \quad (\text{A.308})$$

où  ${}^e d^{ext}$  est le diamètre extérieur élémentaire de l'élément fini  $\mathcal{K}_e$ . Le problème de maximisation,


 (a) Répartitions des champs de contraintes  $e_{\sigma_{yy}^{\psi}}$ .

 (b) Répartitions des champs de contraintes  $e_{\sigma_{yy}^{\theta}}$ .

 FIGURE A.26 – Répartitions des champs de contraintes normales de flexion sur une section droite élémentaire circulaire de diamètre  $e d^{ext}$ .

Eq. (A.309), devient alors :

$$\max_{\phi^*, \zeta^*, t^*} e_{\sigma_{yy}}(\phi, \zeta, t), \quad \forall e = 1 \dots, N_e. \quad (\text{A.309})$$

Par ailleurs, bien que le problème de maximisation, Eq. (A.309), ne contienne pas plus que trois variables  $\phi^*$ ,  $\zeta^*$  et  $t^*$ , celui-ci reste cependant toujours analytiquement insoluble.

La seconde simplification concerne le choix de l'abscisse de référence  $\zeta$  dont on se propose de fixer la valeur telle que :

$$\zeta^* = \frac{1}{2}, \quad (\text{A.310})$$

c'est-à-dire au centre de l'élément fini  $\mathcal{K}_e$ . En revanche, toute autre valeur arbitraire peut être choisie sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

**Remarque 25:** Toutes les quantités *e.g.*  $e_{\sigma_{yy}}$ ,  $e_{\theta}$  ou  $e_{\psi}$ , fonctions de la variable  $\zeta$ , sont estimées pour  $\zeta = \frac{1}{2}$ .



Le problème de maximisation ne contient finalement plus que deux variables et s'écrit alors :

$$\max_{\phi^*, t^*} e_{\sigma_{yy}}(\phi, \zeta, t), \quad \forall e = 1 \dots, N_e, \quad \zeta = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.311})$$

Si l'on se place dans le cadre harmonique, *i.e.* lorsque le rotor est sollicité par une force extérieure de pulsation  $\omega$  et que l'on considère un régime établi à la pulsation  $\omega$ , les réponses fréquentielles des champs de déplacement élémentaires  $e_{\delta}$ , Eq. (A.106), ont la forme suivante le long de l'élément finie  $\mathcal{K}_e$  d'abscisse de référence  $\zeta$  :

$$\begin{bmatrix} e_w(\zeta, t) \\ e_u(\zeta, t) \\ e_{\psi}(\zeta, t) \\ e_{\theta}(\zeta, t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e_{w_c}(\zeta) \\ e_{u_c}(\zeta) \\ e_{\psi_c}(\zeta) \\ e_{\theta_c}(\zeta) \end{bmatrix}}_{\text{Partie Réelle}} \cos(\omega t) + \underbrace{\begin{bmatrix} e_{w_s}(\zeta) \\ e_{u_s}(\zeta) \\ e_{\psi_s}(\zeta) \\ e_{\theta_s}(\zeta) \end{bmatrix}}_{\text{Partie Imaginaire}} \sin(\omega t), \quad (\text{A.312})$$

où  $e_{w(-)}$ ,  $e_{u(-)}$ ,  $e_{\psi(-)}$ ,  $e_{\theta(-)}$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire des champs de déplacement élémentaires, selon que leur indice associé  $(-)$  soit assigné des symboles  $( )_c$  ou  $( )_s$ ,

et sont définies telles que :

$$\begin{bmatrix} {}^e w_c(\zeta) \\ {}^e u_c(\zeta) \\ {}^e \psi_c(\zeta) \\ {}^e \theta_c(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^e N_w(\zeta) \\ {}^e N_u(\zeta) \\ {}^e N_\psi(\zeta) \\ {}^e N_\theta(\zeta) \end{bmatrix} {}^e \delta_c, \quad (\text{A.313a}) \quad \begin{bmatrix} {}^e w_s(\zeta) \\ {}^e u_s(\zeta) \\ {}^e \psi_s(\zeta) \\ {}^e \theta_s(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^e N_w(\zeta) \\ {}^e N_u(\zeta) \\ {}^e N_\psi(\zeta) \\ {}^e N_\theta(\zeta) \end{bmatrix} {}^e \delta_s, \quad (\text{A.313b})$$

où les fonctions de formes  ${}^e N_w$ ,  ${}^e N_u$ ,  ${}^e N_\psi$  et  ${}^e N_\theta$ , sont définies dans les Eq. (A.119), Eq. (A.121), Eq. (A.122) et Eq. (A.120) ; les vecteurs  ${}^e \delta_c$ ,  ${}^e \delta_s \in \mathbb{R}^8$  représentent respectivement les parties réelle et imaginaire des degrés de liberté élémentaires telles que :

$${}^e \delta_c = \left[ \delta_{c_{w_e}}, \delta_{c_{u_e}}, \delta_{c_{\psi_e}}, \delta_{c_{\theta_e}}, \delta_{c_{w_{e+1}}}, \delta_{c_{u_{e+1}}}, \delta_{c_{\psi_{e+1}}}, \delta_{c_{\theta_{e+1}}} \right]^t, \quad (\text{A.314})$$

et :

$${}^e \delta_s = \left[ \delta_{s_{w_e}}, \delta_{s_{u_e}}, \delta_{s_{\psi_e}}, \delta_{s_{\theta_e}}, \delta_{s_{w_{e+1}}}, \delta_{s_{u_{e+1}}}, \delta_{s_{\psi_{e+1}}}, \delta_{s_{\theta_{e+1}}} \right]^t. \quad (\text{A.315})$$

Ainsi, en substituant les Eq. (A.312) et Eq. (A.308) dans l'Eq. (A.306), la contrainte normale de flexion peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} {}^e \sigma_{yy}(\phi, \zeta, t) = & - {}^e E \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) \cos(\phi) \left( \frac{\partial {}^e \theta_c}{\partial y}(\zeta) \cos(\omega t) + \frac{\partial {}^e \theta_s}{\partial y}(\zeta) \sin(\omega t) \right) \\ & + {}^e E \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) \sin(\phi) \left( \frac{\partial {}^e \psi_c}{\partial y}(\zeta) \cos(\omega t) + \frac{\partial {}^e \psi_s}{\partial y}(\zeta) \sin(\omega t) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.316})$$

Les dérivées spatiales des champs de déplacement élémentaires se déduisent aisément des Eq. A.313a et Eq. A.313b précédentes :

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} {}^e w_{(-)}(\zeta) \\ {}^e u_{(-)}(\zeta) \\ {}^e \psi_{(-)}(\zeta) \\ {}^e \theta_{(-)}(\zeta) \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \begin{bmatrix} {}^e N_w(\zeta) \\ {}^e N_u(\zeta) \\ {}^e N_\psi(\zeta) \\ {}^e N_\theta(\zeta) \end{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial y} {}^e \delta_{(-)}^t, \quad (\text{A.317})$$

où l'indice  $(-)$  représente les symboles associés aux parties réelle  $( )_c$  et imaginaire  $( )_s$ .

L'Eq. (A.316) devient alors :

$$\begin{aligned} {}^e \sigma_{yy}(\phi, \zeta, t) = & - {}^e E \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) \left[ \cos(\phi) \left( \underbrace{\frac{\partial {}^e N_\theta}{\partial y}(\zeta) {}^e \delta_c}_{C_{\theta'}(\zeta)} \cos(\omega t) + \underbrace{\frac{\partial {}^e N_\theta}{\partial y}(\zeta) {}^e \delta_s}_{S_{\theta'}(\zeta)} \sin(\omega t) \right) \right] \\ & + {}^e E \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) \left[ \sin(\phi) \left( \underbrace{\frac{\partial {}^e N_\psi}{\partial y}(\zeta) {}^e \delta_c}_{C_{\psi'}(\zeta)} \cos(\omega t) + \underbrace{\frac{\partial {}^e N_\psi}{\partial y}(\zeta) {}^e \delta_s}_{S_{\psi'}(\zeta)} \sin(\omega t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.318})$$

En considérant les égalités suivantes :

$$C_{\theta'} = C_{\theta'} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\partial {}^e N_\theta}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \right) {}^e \delta_c, \quad (\text{A.319a}) \quad S_{\theta'} = S_{\theta'} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\partial {}^e N_\theta}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \right) {}^e \delta_s, \quad (\text{A.319b})$$

et

$$C_{\psi'} = C_{\psi'} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\partial {}^e N_\psi}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \right) {}^e \delta_c, \quad (\text{A.320a}) \quad S_{\psi'} = S_{\psi'} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\partial {}^e N_\psi}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \right) {}^e \delta_s, \quad (\text{A.320b})$$

il vient alors :

$$\begin{aligned}
 {}^e\sigma_{yy}(\phi, t) &= {}^eE \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) [C_{\theta'} \cos(\omega t) \cos(\phi) - S_{\theta'} \sin(\omega t) \cos(\phi) + \\
 &\quad C_{\psi'} \cos(\omega t) \sin(\phi) + S_{\psi'} \sin(\omega t) \sin(\phi)], \\
 \Leftrightarrow {}^e\sigma_{yy}(\phi, t) &= {}^eE \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) \left[ \underbrace{\left( -C_{\theta'} \cos(\phi) + C_{\psi'} \sin(\phi) \right)}_{h(\phi)} \cos(\omega t) + \right. \\
 &\quad \left. \underbrace{\left( -S_{\theta'} \cos(\phi) + S_{\psi'} \sin(\phi) \right)}_{g(\phi)} \sin(\omega t) \right]. \tag{A.321}
 \end{aligned}$$

L'abscisse de référence  $\zeta$  ayant été fixée à  $\frac{1}{2}$ , les variables  $C_{\theta'}$ ,  $S_{\theta'}$ ,  $C_{\psi'}$  et  $S_{\psi'}$  sont désormais constantes. Les fonctions  $g$  et  $h$ , dépendant exclusivement de la variable  $\phi$ , sont alors définies telles que :

$$h(\phi) = -C_{\theta'} \cos(\phi) + C_{\psi'} \sin(\phi), \quad \text{(A.322a)} \quad g(\phi) = -S_{\theta'} \cos(\phi) + S_{\psi'} \sin(\phi), \quad \text{(A.322b)}$$

afin d'exprimer la contrainte normale de flexion sous une forme plus conviviale :

$${}^e\sigma_{yy}(\phi, t) = {}^eE \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) [h(\phi) \cos(\omega t) + g(\phi) \sin(\omega t)]. \tag{A.323}$$

La résolution du problème de maximisation, Eq. (A.311), consiste finalement à résoudre le problème de minimisation suivant auquel a été ajoutée une contrainte afin d'assurer la recherche d'un extremum qui soit un maximum :

$$\begin{aligned}
 \min_{\phi^*, t^*} {}^e\sigma_{yy}(\phi, t), \quad \forall e = 1, \dots, N_e, \\
 \Leftrightarrow \mathcal{T} \text{rouver } (\phi^*, t^*) \quad \text{tel que } \nabla^e \sigma_{yy}(\phi^*, t^*) = 0, \tag{A.324} \\
 \text{sous la contrainte} \quad H_{e\sigma_{yy}}(\phi^*, t^*) > 0,
 \end{aligned}$$

où  $\nabla^e \sigma_{yy} \in \mathbb{R}^2$  représente le vecteur gradient de la contrainte normale de flexion élémentaire et défini tel que :

$$\nabla^e \sigma_{yy} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^e \sigma_{yy}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial^e \sigma_{yy}}{\partial t} \end{array} \right\}, \tag{A.325}$$

et  $H_{e\sigma_{yy}} \in \mathcal{M}_{2,2}$  est la matrice hessienne de  ${}^e\sigma_{yy}$  :

$$H_{e\sigma_{yy}} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 {}^e \sigma_{yy}}{\partial \phi^2} & \frac{\partial^2 {}^e \sigma_{yy}}{\partial \phi \partial t} \\ \frac{\partial^2 {}^e \sigma_{yy}}{\partial t \partial \phi} & \frac{\partial^2 {}^e \sigma_{yy}}{\partial t^2} \end{array} \right], \tag{A.326}$$

à laquelle s'applique une contrainte concernant sa positivité afin d'assurer que  ${}^e\sigma_{yy}(\phi^*, t^*)$  soit un maximum.

La nature oscillatoire, et de surcroît périodique, de la contrainte normale de flexion définie dans l'Eq. (A.323) facilite la résolution problème de maximisation, Eq. (A.324). En effet, il est connu

qu'une fonction périodique de pulsation  $\omega$  atteint son amplitude maximale (en valeur absolue) deux fois durant une période comprise dans l'intervalle  $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ . En terme de contrainte, la recherche d'un maximum consiste à déterminer plutôt son amplitude maximale que sa valeur maximale. Ainsi, le fait que l'extremum trouvé soit un maximum ou un minimum devient une condition subsidiaire car en cet extremum, l'amplitude de la contrainte sera alors maximum. Par conséquent, la contrainte  $H^{e\sigma_{yy}}(\phi^*, t^*) > 0$  peut alors être négligée.

Les composantes du gradient de la contrainte normale de flexion élémentaire s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{\partial^e \sigma_{yy}}{\partial t} = {}^e E \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) \omega [-h(\phi) \sin(\omega t) + g(\phi) \cos(\omega t)], \quad (\text{A.327})$$

$$\frac{\partial^e \sigma_{yy}}{\partial \phi} = {}^e E \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) \left[ \frac{\partial h}{\partial \phi}(\phi) \cos(\omega t) + \frac{\partial g}{\partial \phi}(\phi) \sin(\omega t) \right]. \quad (\text{A.328})$$

La première condition d'optimalité devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^e \sigma_{yy}}{\partial t} \Big|_{(t^*, \phi^*)} &= 0, \\ \Leftrightarrow {}^e E \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) \omega [-h(\phi^*) \sin(\omega t^*) + g(\phi^*) \cos(\omega t^*)] &= 0, \quad (\text{A.329}) \\ \Leftrightarrow \frac{g(\phi^*)}{h(\phi^*)} &= \tan(\omega t^*), \end{aligned}$$

ce qui permet d'introduire une première relation entre les paramètres optimaux  $t^*$  et  $\phi^*$  telle que :

$$t^* = \left( \frac{1}{\omega} \right) \tan^{-1} \left( \frac{g(\phi^*)}{h(\phi^*)} \right) \quad [\pi]. \quad (\text{A.330})$$

où  $[\pi]$  signifie *modulo*  $\pi$ . En revanche, il ne faut conserver que la valeur de  $t^* \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$  comprise dans l'intervalle de définition de l'ellipse.

La seconde condition d'optimalité s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^e \sigma_{yy}}{\partial \phi} \Big|_{(t^*, \phi^*)} &= 0, \\ \Leftrightarrow {}^e E \left( \frac{{}^e d^{ext}}{2} \right) \left[ \frac{\partial h}{\partial \phi} \Big|_{(\phi^*)} \cos(\omega t^*) + \frac{\partial g}{\partial \phi} \Big|_{(\phi^*)} \sin(\omega t^*) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[ \frac{\partial h}{\partial \phi} \Big|_{(\phi^*)} \cos(\omega t^*) + \frac{\partial g}{\partial \phi} \Big|_{(\phi^*)} \sin(\omega t^*) \right] &= 0, \quad (\text{A.331}) \\ \Leftrightarrow \frac{\left( \frac{\partial h}{\partial \phi} \right) \Big|_{(\phi^*)}}{\left( \frac{\partial g}{\partial \phi} \right) \Big|_{(\phi^*)}} &= -\tan(\omega t^*). \end{aligned}$$

Une seconde relation entre les paramètres optimaux  $t^*$  et  $\phi^*$  peut alors être définie :

$$t^* = \left( \frac{1}{\omega} \right) \tan^{-1} \left( - \frac{\left( \frac{\partial h}{\partial \phi} \right) \Big|_{(\phi^*)}}{\left( \frac{\partial g}{\partial \phi} \right) \Big|_{(\phi^*)}} \right) \quad [\pi]. \quad (\text{A.332})$$

En substituant l'Eq. (A.329) dans l'Eq. (A.331), il vient alors une relation ne faisant intervenir

que la variable  $\phi$  :

$$\frac{g(\phi^*)}{h(\phi^*)} + \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial \phi}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial \phi}\right)} \Big|_{(\phi^*)} = 0, \quad \forall t. \quad (\text{A.333})$$

qui s'écrit encore :

$$g(\phi^*) \left(\frac{\partial g}{\partial \phi}\right) \Big|_{(\phi^*)} + h(\phi^*) \left(\frac{\partial h}{\partial \phi}\right) \Big|_{(\phi^*)} = 0. \quad (\text{A.334})$$

En utilisant les Eq. A.322a et Eq. A.322b et les dérivées premières par rapport à la variable  $\phi$  :

$$\frac{\partial h}{\partial \phi}(\phi) = C_{\theta'} \sin(\phi) + C_{\psi'} \cos(\phi), \quad (\text{A.335a}) \quad \frac{\partial g}{\partial \phi}(\phi) = S_{\theta'} \sin(\phi) + S_{\psi'} \cos(\phi), \quad (\text{A.335b})$$

d'où l'expression de l'Eq. (A.334) :

$$\begin{aligned} & [-S_{\theta'} \cos(\phi^*) + S_{\psi'} \sin(\phi^*)] [S_{\theta'} \sin(\phi^*) + S_{\psi'} \cos(\phi^*)] + \\ & [-C_{\theta'} \cos(\phi^*) + C_{\psi'} \sin(\phi^*)] [C_{\theta'} \sin(\phi^*) + C_{\psi'} \cos(\phi^*)] = 0, \\ \Leftrightarrow & -S_{\theta'}^2 \sin(\phi^*) \cos(\phi^*) - S_{\theta'} S_{\psi'} \cos^2(\phi^*) + S_{\theta'} S_{\psi'} \sin^2(\phi^*) + S_{\psi'}^2 \sin(\phi^*) \cos(\phi^*) \\ & - C_{\theta'}^2 \sin(\phi^*) \cos(\phi^*) - C_{\theta'} C_{\psi'} \cos^2(\phi^*) + C_{\theta'} C_{\psi'} \sin^2(\phi^*) + C_{\psi'}^2 \sin(\phi^*) \cos(\phi^*) = 0, \\ \Leftrightarrow & (-C_{\theta'}^2 + C_{\psi'}^2 - S_{\theta'}^2 + S_{\psi'}^2) \sin(\phi^*) \cos(\phi^*) - \\ & (C_{\theta'} C_{\psi'} + S_{\theta'} S_{\psi'}) \cos^2(\phi^*) + (C_{\theta'} C_{\psi'} + S_{\theta'} S_{\psi'}) \sin^2(\phi^*) = 0, \\ \Leftrightarrow & \left( \underbrace{C_{\theta'} C_{\psi'} + S_{\theta'} S_{\psi'}}_{a_0} \right) \tan^2(\phi^*) + \left( \underbrace{-C_{\theta'}^2 + C_{\psi'}^2 - S_{\theta'}^2 + S_{\psi'}^2}_{a_1} \right) \tan(\phi^*) - \left( \underbrace{C_{\theta'} C_{\psi'} + S_{\theta'} S_{\psi'}}_{a_0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.336})$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$\Phi^* = \tan(\phi^*), \quad (\text{A.337})$$

et en considérant les égalités ci-dessous :

$$a_0 = (C_{\theta'} C_{\psi'} + S_{\theta'} S_{\psi'}), \quad (\text{A.338a}) \quad a_1 = (-C_{\theta'}^2 + C_{\psi'}^2 - S_{\theta'}^2 + S_{\psi'}^2), \quad (\text{A.338b})$$

il vient une équation du second degré :

$$a_0 \Phi^{*2} + a_1 \Phi^* - a_0 = 0, \quad (\text{A.339})$$

qui est caractéristique de la nature duale de la solution au problème Eq. (A.324) étant donnée la nature périodique des contraintes. Les solutions  $\Phi_1^*$  et  $\Phi_2^*$  de l'Eq. (A.339) sont données par :

$$\Phi_{1,2}^* = \frac{-a_1 \pm \Delta_{\Phi}^{\frac{1}{2}}}{2a_0}, \quad (\text{A.340})$$

avec le discriminant :

$$\Delta_{\Phi} = a_1^2 + 4a_0^2. \quad (\text{A.341})$$

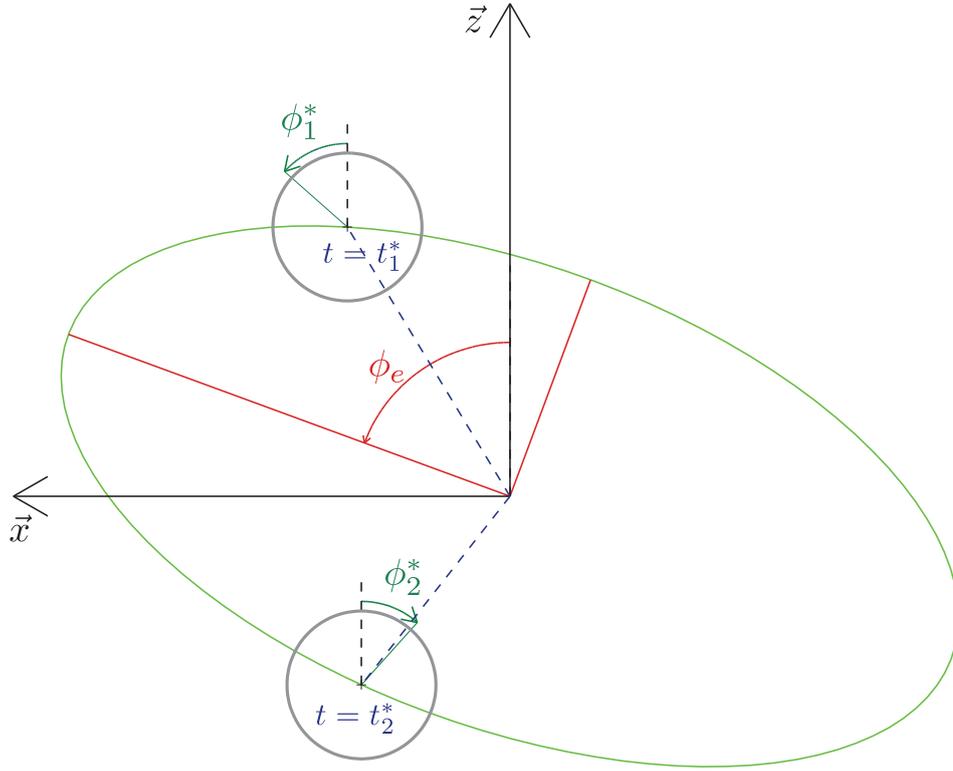


FIGURE A.27 – Représentation d'une trajectoire elliptique sur l'intervalle  $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$  et des couples de paramètres optimaux  $(\phi_1^*, t_1^*)$  et  $(\phi_2^*, t_2^*)$  pour lesquels l'amplitude de la contrainte normale de flexion est maximale.

Les solutions optimales  $\phi_1^*$  et  $\phi_2^*$  sont alors déduites en inversant l'Eq. (A.337) tel que :

$$\phi_1^* = \tan^{-1} \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{a_1}{a_0} \right) + \left( \frac{1}{4} \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (\text{A.342})$$

$$\phi_2^* = \tan^{-1} \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{a_1}{a_0} \right) - \left( \frac{1}{4} \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{A.343})$$

Finalement, *e.g.* en substituant successivement les Eq. (A.342) et Eq. (A.343) dans l'Eq. (A.330), on obtient les valeurs optimales  $t_1^*$  et  $t_2^*$  du paramètre de l'ellipse, FIG. A.27.

#### A.8.4 Détermination des contraintes maximales de cisaillement dans le plan $\{y, z\}$

Si l'on s'intéresse au même point  $P_e$  considéré dans l'Annexe A.8.3, l'expression de la contrainte de cisaillement, dans le plan  $\{y, z\}$ , à la forme suivante :

$${}^e\sigma_{yz}(\zeta, t) = {}^eG^e k_y \left( \frac{\partial^e w}{\partial y}(\zeta, t) - \frac{\partial^e \theta}{\partial y}(\zeta, t) \right), \quad (\text{A.344})$$

dont la répartition est constante sur une section droite ( ${}^eS$ ) d'abscisse de référence  $\zeta$ . La détermination des contraintes de cisaillement maximales, dans le plan  $\{y, z\}$ , consiste à résoudre le problème

de maximisation suivant :

$$\max_{\zeta^*, t^*} {}^e\sigma_{yz}(\zeta, t), \quad \forall e = 1 \dots, N_e, \quad (\text{A.345})$$

c'est-à-dire, pour chaque élément fini  $\mathcal{K}_e$ ,  $e = 1 \dots, N_e$  :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}\text{rouver} \quad (\zeta^*, t^*) \\ & \text{tel que} \quad {}^e\sigma_{yz}(\zeta^*, t^*) = \max {}^e\sigma_{yz}(\zeta t), \end{aligned} \quad (\text{A.346})$$

où  $\zeta^*$  est l'abscisse de référence optimale du point  $P_e$  sur l'élément fini  $\mathcal{K}_e$  et  $t^*$  est la valeur optimale du paramètre de l'ellipse trajectoire.

Bien que ce problème ne contienne que deux variables d'optimisation, sa résolution analytique est délicate dans le sens où une condition d'optimalité conduit à un polynôme appartenant à l'ensemble  $\mathbb{P}_3(\zeta)$ . De plus, dans un souci de cohérence avec l'Annexe A.8.3, il est préférable d'estimer les contraintes de cisaillement à la même abscisse de référence  $\zeta$  qu'en celle où les contraintes normales de flexion maximales ont été évaluées, *i.e.*  $\zeta = \frac{1}{2}$ .

Le problème de maximisation, Eq. (A.346), devient donc :

$$\max_{t^*} {}^e\sigma_{yz}(t), \quad \forall e = 1 \dots, N_e, \quad \zeta = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.347})$$

Ainsi, en substituant les Eq. (A.312) dans l'Eq. (A.344), la contrainte de cisaillement, dans le plan  $\{y, z\}$ , peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} {}^e\sigma_{yz}(\zeta, t) = {}^eG^e k_y & \left( \frac{\partial^e w_c}{\partial y}(\zeta) \cos(\omega t) + \frac{\partial^e w_s}{\partial y}(\zeta) \sin(\omega t) \right. \\ & \left. - {}^e\theta_c(\zeta) \cos(\omega t) - {}^e\theta_s(\zeta) \sin(\omega t) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.348})$$

En substituant l'Eq. (A.348) dans l'Eq. (A.317), il vient alors :

$$\begin{aligned} {}^e\sigma_{yz}(\zeta, t) = {}^eG^e k_y & \left( \underbrace{\frac{\partial^e N_w}{\partial y}(\zeta)}_{C_{w'}(\zeta)} {}^e\delta_c \cos(\omega t) + \underbrace{\frac{\partial^e N_w}{\partial y}(\zeta)}_{S_{w'}(\zeta)} {}^e\delta_s \sin(\omega t) \right. \\ & \left. - \underbrace{{}^e N_\theta(\zeta)}_{C_\theta(\zeta)} {}^e\delta_c \cos(\omega t) - \underbrace{{}^e N_\theta(\zeta)}_{S_\theta(\zeta)} {}^e\delta_s \sin(\omega t) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.349})$$

En considérant les égalités suivantes :

$$C_{w'} = C_{w'}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial^e N_w}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\right) {}^e\delta_c, \quad (\text{A.350a}) \quad S_{w'} = S_{w'}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial^e N_w}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\right) {}^e\delta_s, \quad (\text{A.350b})$$

et

$$C_\theta = C_\theta\left(\frac{1}{2}\right) = {}^e N_\theta\left(\frac{1}{2}\right) {}^e\delta_c, \quad (\text{A.351a}) \quad S_\theta = S_\theta\left(\frac{1}{2}\right) = {}^e N_\theta\left(\frac{1}{2}\right) {}^e\delta_s, \quad (\text{A.351b})$$

il vient alors :

$$\begin{aligned}
{}^e\sigma_{yz}(t) &= {}^eG^e k_y [C_{w'} \cos(\omega t) + S_{w'} \sin(\omega t) - C_\theta \cos(\omega t) - S_\theta \sin(\omega t)], \\
\Leftrightarrow {}^e\sigma_{yz}(t) &= {}^eG^e k_y [(C_{w'} - C_\theta) \cos(\omega t) + (S_{w'} - S_\theta) \sin(\omega t)].
\end{aligned} \tag{A.352}$$

Comme cela a été évoqué dans l'Annexe A.8.3, la résolution du problème de maximisation, Eq. (A.347), consiste à résoudre un problème de minimisation tel que :

$$\begin{aligned}
\min_{t^*} {}^e\sigma_{yz}(t), \quad \forall e = 1, \dots, N_e, \\
\Leftrightarrow \mathcal{T} \text{rouver } t^* \quad \text{tel que} \quad \nabla^e \sigma_{yz}(t^*) = 0,
\end{aligned} \tag{A.353}$$

où  $\nabla^e \sigma_{yz} \in \mathbb{R}$  représente le gradient de la contrainte de cisaillement, dans le plan  $\{y, z\}$ , et défini tel que :

$$\begin{aligned}
\nabla^e \sigma_{yz} &= \left\{ \frac{\partial^e \sigma_{yz}}{\partial t} \right\}. \\
\frac{\partial^e \sigma_{yz}}{\partial t} &= {}^eG^e k_y \omega [-(C_{w'} - C_\theta) \sin(\omega t) + (S_{w'} - S_\theta) \cos(\omega t)].
\end{aligned} \tag{A.354}$$

La condition d'optimalité s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^e \tau}{\partial t} \Big|_{(t^*)} &= 0, \\
\Leftrightarrow {}^eG^e k_y \omega [-(C_{w'} - C_\theta) \sin(\omega t) + (S_{w'} - S_\theta) \cos(\omega t)] &= 0, \\
\Leftrightarrow (C_{w'} - C_\theta) \sin(\omega t^*) &= (S_{w'} - S_\theta) \cos(\omega t^*), \\
\Leftrightarrow \frac{(S_{w'} - S_\theta)}{(C_{w'} - C_\theta)} &= \tan(\omega t^*).
\end{aligned} \tag{A.355}$$

La contrainte de cisaillement, dans le plan  $\{y, z\}$ , atteindra donc son amplitude maximale en  $t^*$  dont la relation est définie par l'Eq. (A.356) :

$$t^* = \left( \frac{1}{\omega} \right) \tan^{-1} \left( \frac{S_{w'} - S_\theta}{C_{w'} - C_\theta} \right). \tag{A.356}$$

### A.8.5 Détermination des contraintes maximales de cisaillement dans le plan $\{x, y\}$

Considérons toujours le même point  $P_e$ , l'expression de la contrainte de cisaillement, dans le plan  $\{x, y\}$ , à la forme suivante :

$${}^e\sigma_{xy}(\zeta, t) = {}^eG^e k_y \left( \frac{\partial^e u}{\partial y}(\zeta, t) + \frac{\partial^e \psi}{\partial y}(\zeta, t) \right), \tag{A.357}$$

dont la répartition est constante sur une section droite ( ${}^eS$ ) d'abscisse de référence  $\zeta$ . Pour les mêmes raisons évoquées dans l'Annexe A.8.4, les contraintes de cisaillement, dans le plan  $\{y, z\}$ , sont exprimées à la même abscisse de référence  $\zeta$  qu'en celle où les contraintes normales de flexion maximales ont été évaluées, *i.e.*  $\zeta = \frac{1}{2}$ . La détermination des contraintes de cisaillement maximales, dans le plan  $\{x, y\}$ , consiste à résoudre un problème de maximisation du même type que l'Eq. (A.345) :

$$\max_{\zeta, t^*} {}^e\sigma_{xy}(\zeta, t), \quad \forall e = 1 \dots, N_e, \quad \zeta = \frac{1}{2}, \tag{A.358}$$

c'est-à-dire, pour chaque élément fini  $\mathcal{K}_e$ ,  $e = 1 \dots, N_e$  :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} \text{rouver } t^* \\ & \text{tel que } {}^e \sigma_{xy}(\zeta, t^*) = \max {}^e \sigma_{xy}(\zeta t), \quad \zeta = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.359})$$

où  $\zeta^*$  est l'abscisse de référence optimale du point  $P_e$  sur l'élément fini  $\mathcal{K}_e$  et  $t^*$  est la valeur optimale du paramètre de l'ellipse trajectoire.

Ainsi, en substituant les Eq. (A.312) dans l'Eq. (A.357), la contrainte de cisaillement, dans le plan  $\{x, y\}$ , peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} {}^e \sigma_{xy}(\zeta, t) = {}^e G^e k_y & \left( \frac{\partial^e u_c}{\partial y}(\zeta) \cos(\omega t) + \frac{\partial^e u_s}{\partial y}(\zeta) \sin(\omega t) \right. \\ & \left. + {}^e \psi_c(\zeta) \cos(\omega t) + {}^e \psi_s(\zeta) \sin(\omega t) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.360})$$

En substituant l'Eq. (A.360) dans l'Eq. (A.317), il vient alors :

$$\begin{aligned} {}^e \sigma_{xy}(\zeta, t) = {}^e G^e k_y & \left( \underbrace{\frac{\partial^e N_w}{\partial y}(\zeta) {}^e \delta_c \cos(\omega t)}_{C_{w'}(\zeta)} + \underbrace{\frac{\partial^e N_w}{\partial y}(\zeta) {}^e \delta_s \sin(\omega t)}_{S_{w'}(\zeta)} \right. \\ & \left. + \underbrace{{}^e N_\psi(\zeta) {}^e \delta_c \cos(\omega t)}_{C_\psi(\zeta)} + \underbrace{{}^e N_\psi(\zeta) {}^e \delta_s \sin(\omega t)}_{S_\psi(\zeta)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.361})$$

En considérant les égalités suivantes :

$$C_{w'} = C_{w'}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial^e N_w}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\right) {}^e \delta_c, \quad (\text{A.362a}) \quad S_{w'} = S_{w'}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial^e N_w}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\right) {}^e \delta_s, \quad (\text{A.362b})$$

et

$$C_\psi = C_\psi\left(\frac{1}{2}\right) = {}^e N_\psi\left(\frac{1}{2}\right) {}^e \delta_c, \quad (\text{A.363a}) \quad S_\psi = S_\psi\left(\frac{1}{2}\right) = {}^e N_\psi\left(\frac{1}{2}\right) {}^e \delta_s, \quad (\text{A.363b})$$

il vient alors :

$$\begin{aligned} {}^e \sigma_{xy}(t) & = {}^e G^e k_y [C_{w'} \cos(\omega t) + S_{w'} \sin(\omega t) + C_\psi \cos(\omega t) + S_\psi \sin(\omega t)], \\ \Leftrightarrow {}^e \sigma_{xy}(t) & = {}^e G^e k_y [(C_{w'} + C_\psi) \cos(\omega t) + (S_{w'} + S_\psi) \sin(\omega t)]. \end{aligned} \quad (\text{A.364})$$

Comme cela a été évoqué dans l'Annexe A.8.3, la résolution du problème de maximisation, Eq. (A.359), consiste à résoudre un problème de minimisation tel que :

$$\begin{aligned} & \min_{t^*} {}^e \sigma_{xy}(t), \quad \forall e = 1, \dots, N_e, \\ \Leftrightarrow & \mathcal{T} \text{rouver } t^* \quad \text{tel que} \quad \nabla^e \sigma_{xy}(t^*) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.365})$$

où  $\nabla^e \sigma_{xy} \in \mathbb{R}$  représente le gradient de la contrainte de cisaillement, dans le plan  $\{x, y\}$ , et défini

tel que :

$$\nabla^e \sigma_{xy} = \left\{ \frac{\partial^e \sigma_{xy}}{\partial t} \right\}. \quad (\text{A.366})$$

$$\frac{\partial^e \sigma_{xy}}{\partial t} = {}^e G^e k_y \omega \left[ - (C_{w'} + C_\psi) \sin(\omega t) + (S_{w'} + S_\psi) \cos(\omega t) \right].$$

La condition d'optimalité s'écrit :

$$\left. \frac{\partial^e \tau}{\partial t} \right|_{(t^*)} = 0,$$

$$\Leftrightarrow {}^e G^e k_y \omega \left[ - (C_{w'} + C_\psi) \sin(\omega t) + (S_{w'} + S_\psi) \cos(\omega t) \right] = 0, \quad (\text{A.367})$$

$$\Leftrightarrow (C_{w'} + C_\psi) \sin(\omega t^*) = (S_{w'} + S_\psi) \cos(\omega t^*),$$

$$\Leftrightarrow \frac{(S_{w'} + S_\psi)}{(C_{w'} + C_\psi)} = \tan(\omega t^*).$$

La contrainte de cisaillement, dans le plan  $\{x, y\}$ , atteindra donc son amplitude maximale en  $t^*$  dont la relation est définie par l'Eq. (A.368) :

$$t^* = \left( \frac{1}{\omega} \right) \tan^{-1} \left( \frac{S_{w'} + S_\psi}{C_{w'} + C_\psi} \right). \quad (\text{A.368})$$

### A.8.6 Contraintes de Von Mises

La contrainte de Von Mises élémentaire est définie par la relation suivante :

$${}^e \sigma_{\mathcal{VM}}(r, \phi, \zeta, t) = \left\{ {}^e \sigma_{yy}^2(r, \phi, \zeta, t) + 3 \left[ {}^e \sigma_{xy}(\zeta, t) + {}^e \sigma_{yz}(\zeta, t) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.369})$$

Ayant déterminé précédemment les valeurs des paramètres optimaux pour lesquels les contraintes normales de flexion et de cisaillement élémentaires atteignent leurs amplitudes maximales, il serait intéressant de déterminer les contraintes de Von Mises élémentaires à l'aide de ces paramètres optimaux. En revanche, rien n'assure que les paramètres d'ellipse optimaux  $t^*$  associés aux contraintes normale de flexion, Eq. (A.330), et de cisaillement, Eq. (A.356) et Eq. (A.368), soient identiques.

La contraintes normale de flexion étant généralement relativement supérieure aux contraintes de cisaillement, il n'est pas aberrant d'évaluer la contrainte de Von Mises en considérant les paramètres optimaux relatifs aux contraintes normales de flexion telle que :

$${}^e \sigma_{\mathcal{VM}} = \left\{ {}^e \sigma_{yy}^2 \left( \frac{{}^e q^{ext}}{2}, \phi_i^*, \frac{1}{2}, t_i^* \right) + 3 \left[ {}^e \sigma_{xy} \left( \frac{1}{2}, t_i^* \right) + {}^e \sigma_{yz} \left( \frac{1}{2}, t_i^* \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } i = 1, 2. \quad (\text{A.370})$$

où  $t_i^*$  est défini dans l'Eq. (A.330) et  $\phi_i^*$  dans les Eq. (A.342) et Eq. (A.343).

**Remarque 26:** Si les contraintes axiales élémentaires  ${}^e \sigma_{yy}^v$  sont considérées, il est alors nécessaire de les prendre en compte dans le terme  ${}^e \sigma_{yy}$ .





## Annexe B

# Démarche de modélisation d'un rotor à cage d'écureuil

*Ce chapitre présente la démarche de modélisation des principaux éléments d'un rotor de moteur à induction, et plus particulièrement celle relative à la masse magnétique. Une attention particulière est apportée à la modélisation unidimensionnelle d'un ensemble de tirants et barres de court-circuit équirépartis. Différents modèles unidimensionnels sont envisagés et leurs réponses statiques et dynamiques sont qualifiées en les comparant à celles d'un modèle tridimensionnel réalisé avec le logiciel COMSOL.*

### Sommaire

---

|            |                                                                                     |            |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>B.1</b> | <b>Validité du modèle éléments finis et intérêt d'une démarche d'identification</b> | <b>247</b> |
| <b>B.2</b> | <b>Modélisation statique des tirants</b>                                            | <b>248</b> |
| B.2.1      | De la modélisation tridimensionnelle à la modélisation unidimensionnelle            | 248        |
| B.2.2      | Modèle $\mathcal{M}_1$ : un modèle ramifié                                          | 249        |
| B.2.3      | Modèle $\mathcal{M}_2$ : les tirants modélisés comme des tendeurs externes          | 253        |
| B.2.4      | Modèle $\mathcal{M}_3$ : un modèle de poutre équivalente                            | 256        |
| B.2.5      | Qualification des modèles. Comportement statique                                    | 257        |
| B.2.5.1    | Variation des longueur et nombre de tirants équirépartis                            | 257        |
| B.2.5.2    | Variation de la distribution des tirants                                            | 257        |
| B.2.5.3    | Variation du module d'Young du cylindre                                             | 259        |
| B.2.6      | Conclusion                                                                          | 260        |
| <b>B.3</b> | <b>Modélisation dynamique des tirants</b>                                           | <b>260</b> |
| B.3.1      | Définition des matrices de masse élémentaires                                       | 260        |
| B.3.1.1    | Variation de la longueur du cylindre                                                | 261        |
| B.3.2      | Qualification des modèles. Comportement dynamique                                   | 261        |
| B.3.2.1    | Variation du module d'Young du cylindre                                             | 261        |
| B.3.2.2    | Conclusion                                                                          | 261        |

|            |                                                              |            |
|------------|--------------------------------------------------------------|------------|
| B.3.3      | Modélisation inertielle des tirants . . . . .                | 262        |
| B.3.4      | Modèles $\mathcal{M}_2'$ et $\mathcal{M}_1'$ . . . . .       | 264        |
| B.3.5      | Qualification du comportement inertiel des tirants . . . . . | 267        |
| B.3.6      | Conclusion . . . . .                                         | 267        |
| <b>B.4</b> | <b>Modélisation des barres de court circuit . . . . .</b>    | <b>268</b> |
| B.4.1      | Hypothèse cinématique . . . . .                              | 268        |
| B.4.2      | Modélisation éléments finis . . . . .                        | 268        |

---

## B.1 Validité du modèle éléments finis et intérêt d'une démarche d'identification

LES rotors feuilletés (MGV) se composent d'un assemblage de deux parties principales :

- Deux bouts d'arbre (terme consacré), ou portions d'arbre, en acier forgé sur lesquels sont frettées les bagues feuilletées (ou rotor) des paliers magnétiques.
- La masse magnétique comprenant tirants, barres de court-circuit, tôles vernies, etc... (voir Section 1.2).

Les matrices de masse et de raideur définies dans l'Annexe A.5 servent à modéliser les portions d'arbre et leurs bagues, dont les propriétés constitutives sont identifiées dans le Chapitre 4.

Les masses additionnelles non frettées (butées axiales, bagues atterrisseuses, top rotor, écrous, etc...) sont modélisées par des éléments finis de disque indéformable à un nœud présentés dans la Section 2.1.3.1.

Tout d'abord, l'empilement de tôles est considéré comme un arbre plein, aux propriétés mécaniques isotropes identiques à celles de l'acier, modélisé avec des éléments finis de poutre soit de  $\mathcal{B}$ ernoulli, soit de  $\mathcal{T}$ imoshenko. La FIG. B.1 présente l'écart relatif moyen entre les deux premières fréquences propres de flexion mesurées et calculées de vingt-neuf rotors MGV, de même conception mais de géométrie différentes, avec ces deux types de modélisation.

L'ordre de grandeur moyen de ces erreurs relatives,  $> 25\%$ , et de surcroît, leur origine sont dus à deux facteurs essentiels :

- une erreur **comportementale** quant à l'hypothèse de poutre considérée et la nature du matériau relatif à l'empilement de tôle,
- une erreur de **modélisation** relative à la masse magnétique et les éléments de la cage d'écu-reuil.

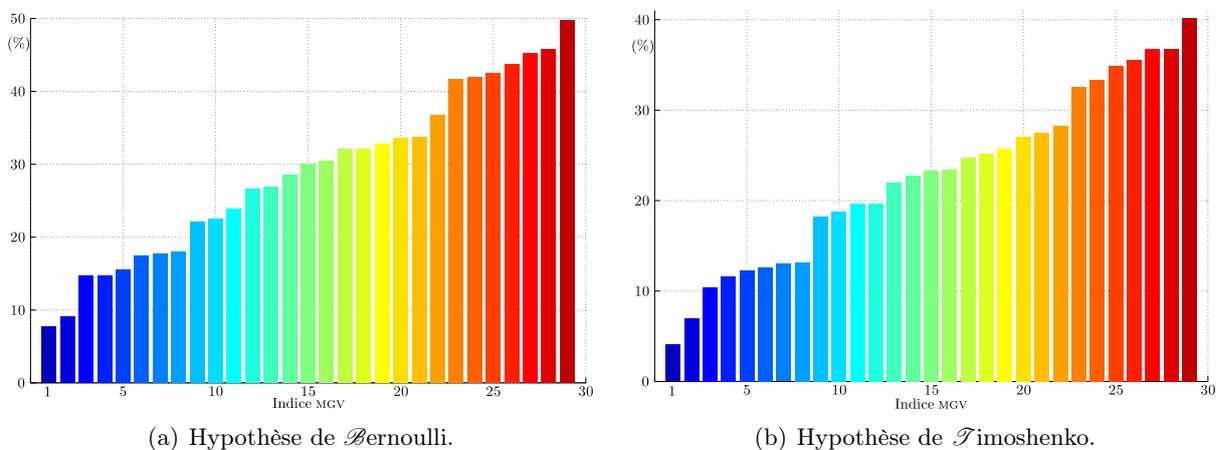
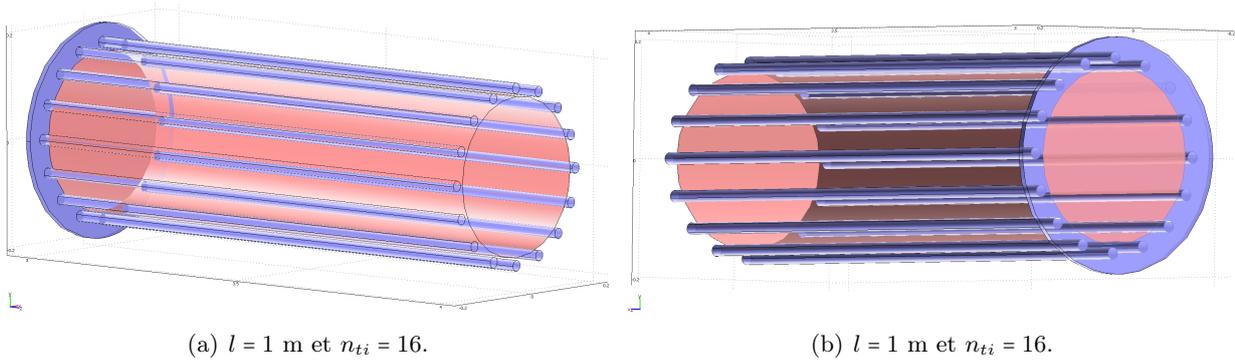


FIGURE B.1 – Distributions des écarts relatifs moyens entre les deux premières fréquences propres de flexion d'une série de vingt-neuf rotors MGV.


 FIGURE B.2 – Modèle éléments-finis réalisé sous COMSOL, 55 107 éléments finis tétraédriques  $P_2$ .

La modélisation et l'identification de la masse magnétique se basent sur des analyses statiques de trois type de modèles  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$ .

La précision du modèle éléments finis joue un rôle capital dans le processus d'identification. En effet, la FIG. B.1 met en évidence que le simple fait de privilégier des éléments finis de poutre de Timoshenko permet de réduire d'environ 10% la valeur de l'erreur relative moyenne. Par ailleurs, dans une démarche d'identification de paramètre, plus le modèle sera capable de rendre compte du comportement de la structure réelle, et plus la valeur du paramètre à identifier est physiquement représentative.

## B.2 Modélisation statique des tirants

Afin de valider la modélisation unidimensionnelle des tirants, développée sous MATLAB, des modèles tridimensionnels d'une structure académique ont été réalisés sous COMSOL à l'aide d'éléments tétraédriques  $P_2$ . Plusieurs modèles unidimensionnels sont proposés et leurs réponses statiques sont comparées à celles des modèles tridimensionnels afin de qualifier leurs pertinences. L'objectif de cette approche est d'estimer l'influence des tirants, en terme de rigidité, sur la structure à laquelle ils sont liés.

### B.2.1 De la modélisation tridimensionnelle à la modélisation unidimensionnelle

Les structures étudiées sont composées d'un cylindre en acier de diamètre égal  $3.3 \cdot 10^{-1}$  m, autour duquel sont équirépartis des tirants, également en acier, à une excentricité  $e_{ti}$  égale à  $1.65 \cdot 10^{-1}$  m. Un disque supposé indéformable et infiniment léger est encastré aux extrémités du cylindre et des tirants, FIG. B.2, les autres extrémités des tirants et du cylindre ont une condition aux limites correspondant à un déplacement nul, à la manière d'une poutre console. Les caractéristiques géométriques et mécaniques des cylindre, disque et tirants sont présentées dans le TAB. B.1.

Les différentes configurations testées statiquement combinent plusieurs longueurs  $l$  de cylindre et tirants : [1, 2, 3, 4] (m), deux nombre  $n_{ti}$  de tirants : [16, 32], et plusieurs module d'Young  $E$  de cylindre : [ $2 \cdot 10^{11}$ ,  $1 \cdot 10^{11}$ ,  $5 \cdot 10^{10}$ ,  $1 \cdot 10^{10}$ ] ( $N \cdot m^{-2}$ ).

Pour le cas où la longueur du système est fixée à quatre mètres, d'autres sections droites ne présentant éventuellement pas de symétrie de révolution ont été considérées, FIG. B.3. Pour cette même longueur et pour un nombre de tirants fixé à seize, une variation du module d'Young du cylindre est aussi envisagée pour vérifier la pertinence des modèles considérés.

Trois modèles éléments finis de type poutre de Timoshenko :  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  ont été développés et leurs comportements statiques en flexion dans un plan ont été qualifiés (cf. FIG. B.4, FIG. B.7 et

| Désignation | Longueur<br>$l$<br>(m) | Diamètre<br>(m)   | Masse<br>Volumique<br>( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) | Module d'Young<br>$E$<br>( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | Coefficient<br>de Poisson<br>( ) |
|-------------|------------------------|-------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Cylindre    | $\sim$                 | $3 \cdot 10^{-1}$ | 7850                                                      | $\sim$                                                      | 0.33                             |
| Tirant      | $\sim$                 | $2 \cdot 10^{-2}$ | 7850                                                      | $2 \cdot 10^{11}$                                           | 0.33                             |
| Disque      | $1 \cdot 10^{-2}$      | $4 \cdot 10^{-1}$ | 1                                                         | $1 \cdot 10^{13}$                                           | 0.33                             |

TABLEAU B.1 – Caractéristiques géométriques et mécaniques des différents éléments constituant les système étudié.

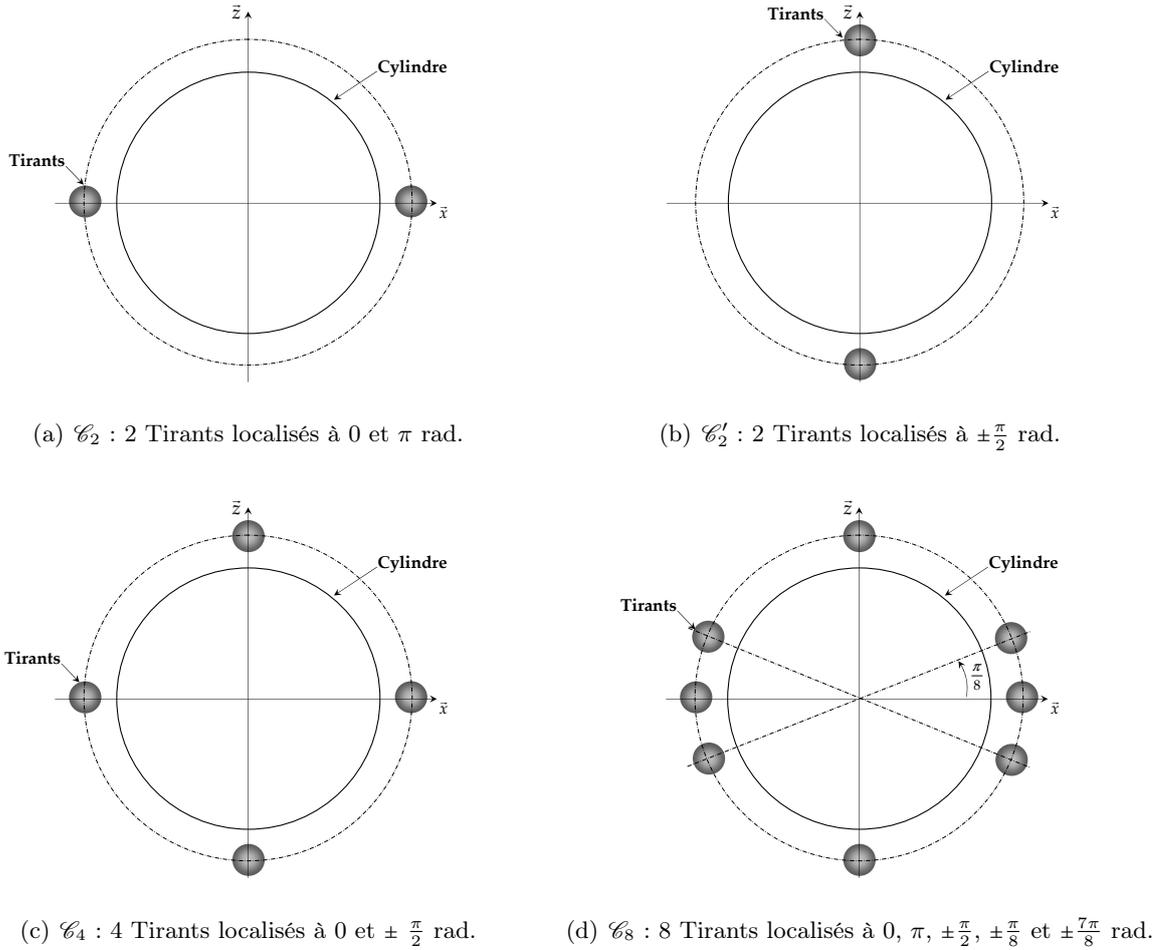

 FIGURE B.3 – Représentation des différentes configurations  $\mathcal{C}$  de tirants envisagés.

FIG. B.9).

### B.2.2 Modèle $\mathcal{M}_1$ : un modèle ramifié

Un modèle ramifié ou “*branched model*” est proposé dans lequel le cylindre et les tirants sont considérés comme deux systèmes indépendants liés par une relation cinématique, FIG. B.4. Les tirants sont modélisés par des éléments finis de flexion-extension [33] alors que le cylindre est modélisé uniquement par des éléments finis de poutre en flexion de Timoshenko. Au nœud  $M^i$  d’un élément fini  $\mathcal{K}_{i-1}$  de cylindre correspond deux degrés de liberté tel que le vecteur déplacement associé  $\delta_i \in \mathbb{R}^2$  s’écrit, FIG. B.4 :

$$\delta_i = [w_i, \theta_i]^t, \quad (\text{B.1})$$

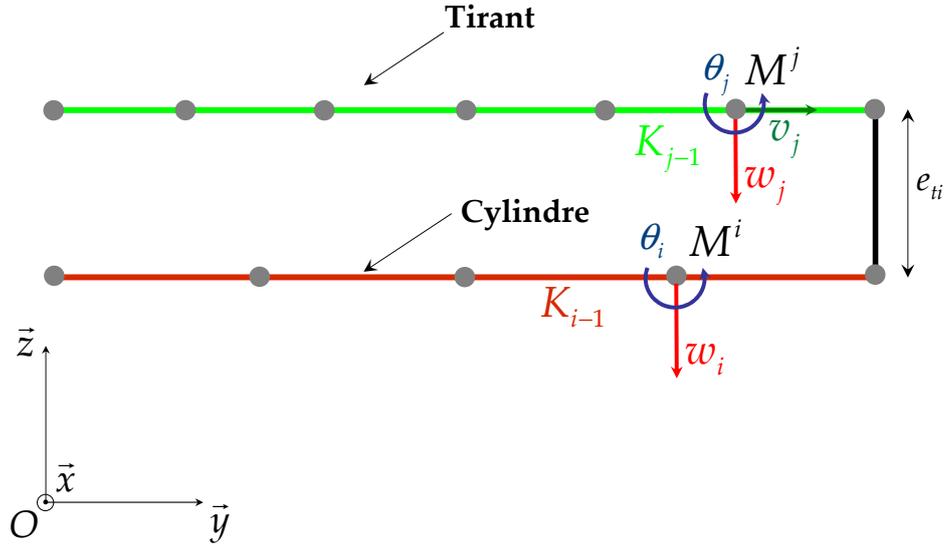


FIGURE B.4 – Modèle éléments finis  $\mathcal{M}_1$ . ■ : Éléments de flexion-extension, ■ : Éléments de flexion, ■ : Élément rigide  $\Rightarrow$  Relation cinématique.

où  $w_i$  et  $\theta_i$  représentent respectivement la déflexion transversale dans la direction  $z$  et la rotation de la section droite portée par l'axe  $x$ . Un degré de liberté supplémentaire est utilisé pour les noeuds des éléments de poutre modélisant les tirants : un déplacement longitudinal dans la direction  $y$  de la ligne moyenne de la poutre tel que le vecteur des degrés de liberté associé  $\delta_j \in \mathbb{R}^3$  au noeud  $M^j$  d'un élément fini  $\mathcal{K}_{j-1}$  prenne la forme suivante :

$$\delta_j = [v_j, w_j, \theta_j]^t, \quad (\text{B.2})$$

où  $v_j$  représente le déplacement longitudinal selon l'axe  $y$ .

La matrice de raideur élémentaire  ${}^j K_{f_{ti}} \in \mathcal{M}_{6,6}$ , associée à l'élément fini de tirant  $\mathcal{K}_j$  (voir FIG. B.4), est définie par l'expression suivante :

$${}^j K_{f_{ti}} = n_{ti} \frac{E_{ti} {}^j I_{G_{x_{ti}}}}{(1 + {}^j \phi) {}^j l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 {}^j l & 0 & -12 & -6 {}^j l \\ 0 & -6 {}^j l & (4 + {}^j \phi) {}^j l^2 & 0 & 6 {}^j l & (2 - {}^j \phi) {}^j l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 {}^j l & 0 & 12 & 6 {}^j l \\ 0 & -6 {}^j l & (2 - {}^j \phi) {}^j l^2 & 0 & 6 {}^j l & (4 + {}^j \phi) {}^j l^2 \end{bmatrix} + \beta \frac{E_{ti} {}^j S_{ti}}{{}^j l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

où  $n_{ti}$  est le nombre de tirants et  $\beta \in \mathbb{R}$  un coefficient déterminé ci-après.

La matrice de raideur élémentaire  ${}^i K_f \in \mathcal{M}_{4,4}$ , associée à l'élément fini de cylindre  $\mathcal{K}_i$  (voir

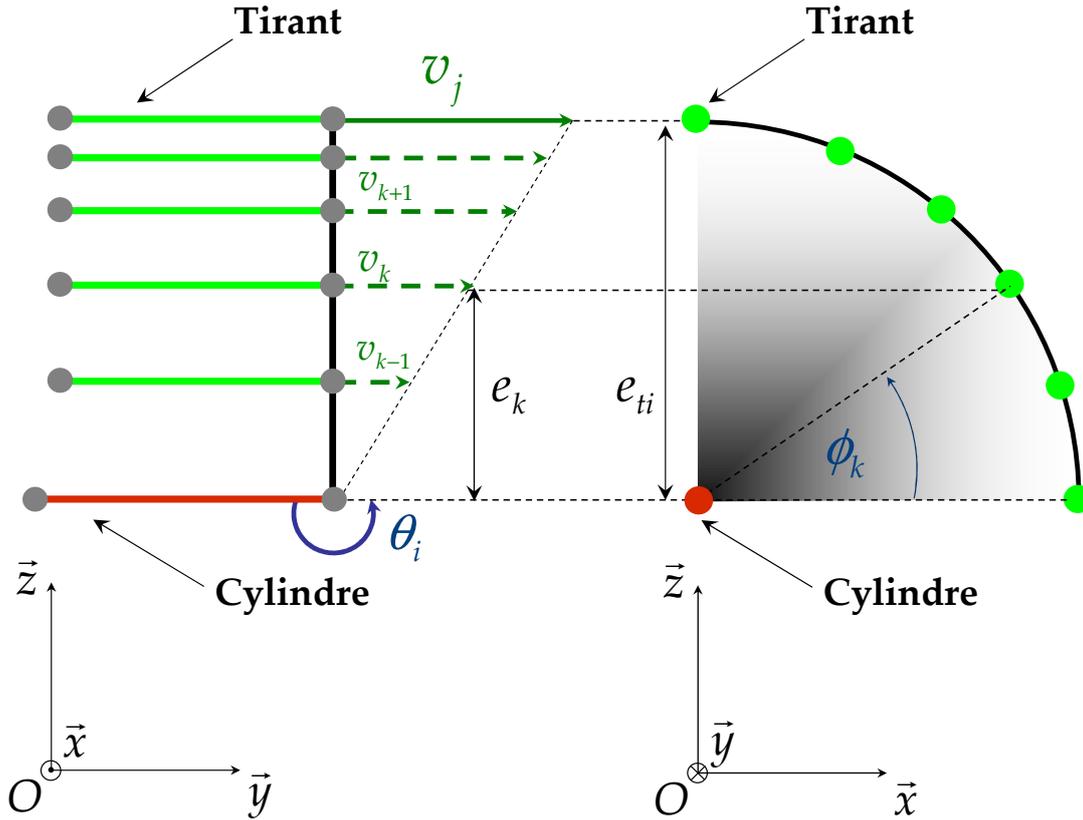


FIGURE B.5 – Modèle éléments finis ramifié  $\mathcal{M}_1$  : vues d'un quart du système lorsque tous les tirants sont modélisés.

FIG. B.4), s'écrit alors :

$${}^i K_f = \frac{{}^i E^i I_{G_x}}{(1 + {}^i \phi)^i l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6^i l & -12 & -6^i l \\ -6^i l & (4 + {}^i \phi)^i l^2 & 6^i l & (2 - {}^i \phi)^i l^2 \\ -12 & 6^i l & 12 & 6^i l \\ -6^i l & (2 - {}^i \phi)^i l^2 & 6^i l & (4 + {}^i \phi)^i l^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

avec  $\phi$  le coefficient de cisaillement défini dans l'Eq. (A.33),  $E$  le module d'Young,  $I_{G_x}$  le moment quadratique de section autour de l'axe  $x$ ,  $S$  la section et  $l$  la longueur. L'exposant  $(\cdot)^i$  représente les exposants élémentaires  $i$  ou  $j$  et l'indice  $(\cdot)_{ti}$  représente les tirants. La matrice de raideur élémentaire  ${}^j K_{f_{ti}}$  de la poutre modélisant la totalité des tirants est une matrice de raideur équivalente issue d'une homogénéisation. En effet, il est possible de modéliser chaque tirant par une poutre mais cela au détriment de la taille du problème. La FIG. B.5 représente le modèle éléments finis avec tous les tirants modélisés.

Ainsi, une alternative attrayante consiste à modéliser l'ensemble des  $n_{ti}$  tirants par une poutre unique aux caractéristiques spécifiques, Eq. (B.3). Le processus d'homogénéisation consiste à sommer dans un premier temps, toutes les matrices de raideur élémentaires de flexion de chaque tirant pour ne former qu'une matrice de raideur élémentaire de flexion homogène. Dans un second temps, une deuxième hypothèse est émise quant au moment  $\mu_i$ , au noeud  $M^i$ , dû à l'extension des tirants, FIG. B.5. L'expression de ce moment est la suivante :

$$\mu_i = \frac{E_{ti}^j S_{ti}}{j l} \sum_{k=0}^{n_{ti}-1} e_k v_k, \quad (\text{B.5})$$

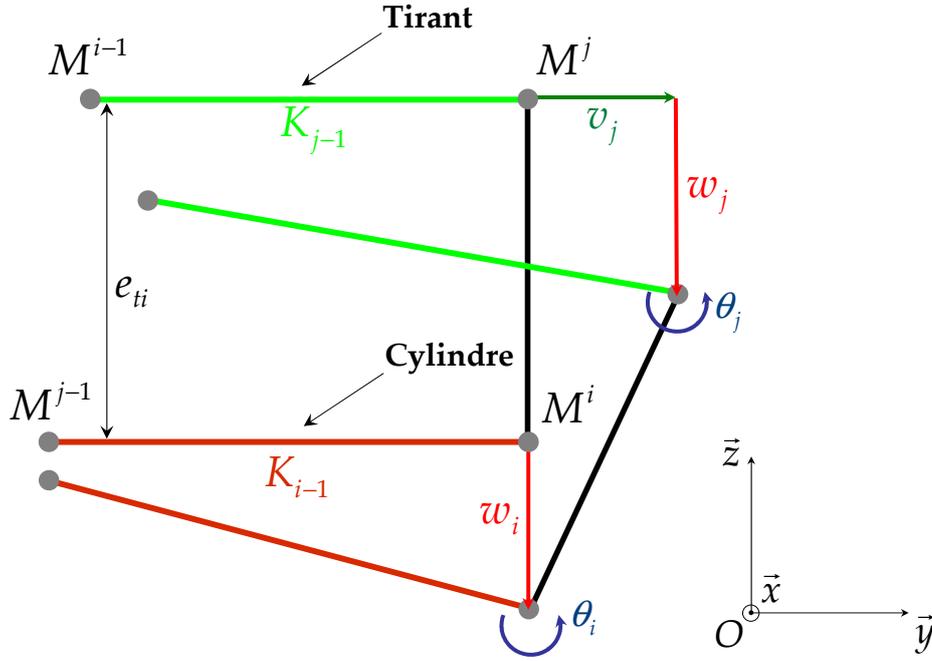


FIGURE B.6 – Configuration déformée du modèle éléments finis  $\mathcal{M}_1$  - Mise en évidence d'une relation de dépendance linéaire.

or, de simples relations géométriques permettent d'écrire les équations suivantes :

$$\frac{e_k}{e_{ti}} = \frac{v_k}{v_j}, \quad (\text{B.6a})$$

$$e_k = e_{ti} \sin(\phi_k), \quad (\text{B.6b})$$

qui une fois substituées dans l'Eq. (B.5), conduisent à :

$$\mu_i = \frac{E_{ti}^j S_{ti}}{j l} e_{ti} v_j \sum_{k=0}^{n_{ti}-1} \sin^2(\phi_k), \quad \text{avec} \quad \phi_k = \left( \frac{2\pi k}{n_{ti}} \right). \quad (\text{B.7})$$

Il vient alors :

$$\beta = \sum_{k=0}^{n_{ti}-1} \sin^2(\phi_k) = \frac{n_{ti}}{2}, \quad \forall n_{ti} \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.8})$$

Ainsi, l'expression de ce moment correspond à celle d'un moment dû à l'extension d'une poutre de section  $\frac{n_{ti} j}{2} S$  et excentrée d'une distance  $e_{ti}$ .

Ces deux sous-systèmes sont reliés par une relation cinématique qui permet de modéliser le lien rigide entre les extrémités des tirants et du cylindre dû au disque supposé indéformable, FIG. B.6. La prise en compte des relations de dépendance linéaires entre degrés de liberté peut s'effectuer en utilisant des multiplicateurs de Lagrange.

Le problème d'analyse global peut se formuler de la façon suivante :

$$\mathcal{T} \text{rouver } \delta \text{ tel que } K\delta = \mathcal{F}, \quad (\text{B.9})$$

$$\text{avec les conditions } A\delta = 0, \quad (\text{B.10})$$

où  $n_\delta$  est le nombre total de degrés de liberté,  $K \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  est la matrice de raideur globale de la structure,  $\delta \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  est le vecteur des degrés de liberté,  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  est le vecteur des forces nodales et  $A \in \mathcal{M}_{n_c, n_\delta}$  est une matrice définissant les  $n_c$  relations de dépendance linéaire qui sont au nombre de trois ( $n_c = 3$ ) :

$$w_i - w_j = 0, \quad (\text{B.11a})$$

$$\theta_i + \theta_j = 0, \quad (\text{B.11b})$$

$$e_{ti}\theta_i + v_j = 0. \quad (\text{B.11c})$$



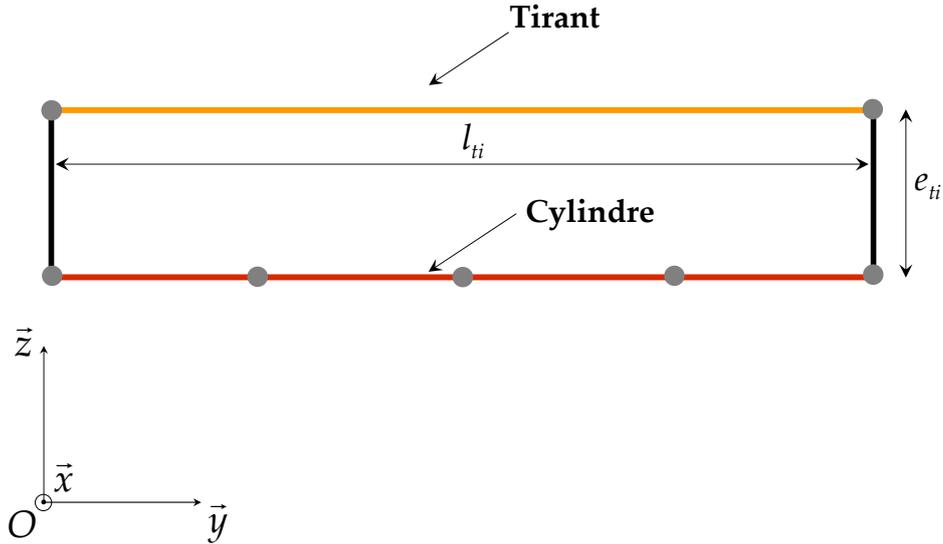


FIGURE B.7 – Modèle éléments finis  $\mathcal{M}_2$ . ■ : Éléments d'extension, ■ : Éléments de flexion, ■ : Éléments rigides.

Un tirant est considéré comme un unique élément de poutre à deux nœuds agissant en traction-compression dont le vecteur des degrés de liberté  $\delta_{i,j} \in \mathbb{R}^2$  associé aux nœuds de cylindre  $M^i$  et  $M^j$  s'écrit :

$$\delta_{i,j} = [v_i, v_j]^t. \quad (\text{B.19})$$

L'expression de la matrice de raideur élémentaire  $[{}^{i,j}K_{ti}]_l \in \mathcal{M}_{2,2}$ , dans le repère local du tirant  $(O, \vec{x}, \vec{y}_{ti}, \vec{z}_{ti})$ , est la suivante :

$$[{}^{i,j}K_{ti}]_l = \frac{E_{ti}S_{ti}}{l_{ti}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.20})$$

où  $l_{ti}$  est la longueur du tirant, FIG. B.7.

Le tirant va apporter une contribution supplémentaire à la rigidité de la poutre équivalente qui peut être évaluée en transformant la matrice de raideur élémentaire locale  $[{}^{i,j}K_{ti}]_l$  dans le repère de la poutre équivalente  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Cette transformation est donnée par les relations géométriques entre les degrés de liberté d'un nœud  $M^k$  de la poutre équivalente (translation  $w_k$  et rotation  $\theta_k$ ) et le déplacement longitudinal  $v_k$  d'un nœud du tirant comme le montre la FIG. B.8. Ainsi, au nœud  $M^k$ , on obtient :

$$v_k = -\sin(\theta_{ti}) w_k - e_k \cos(\theta_{ti}) \theta_k, \quad \text{avec } k = i, j, \quad (\text{B.21})$$

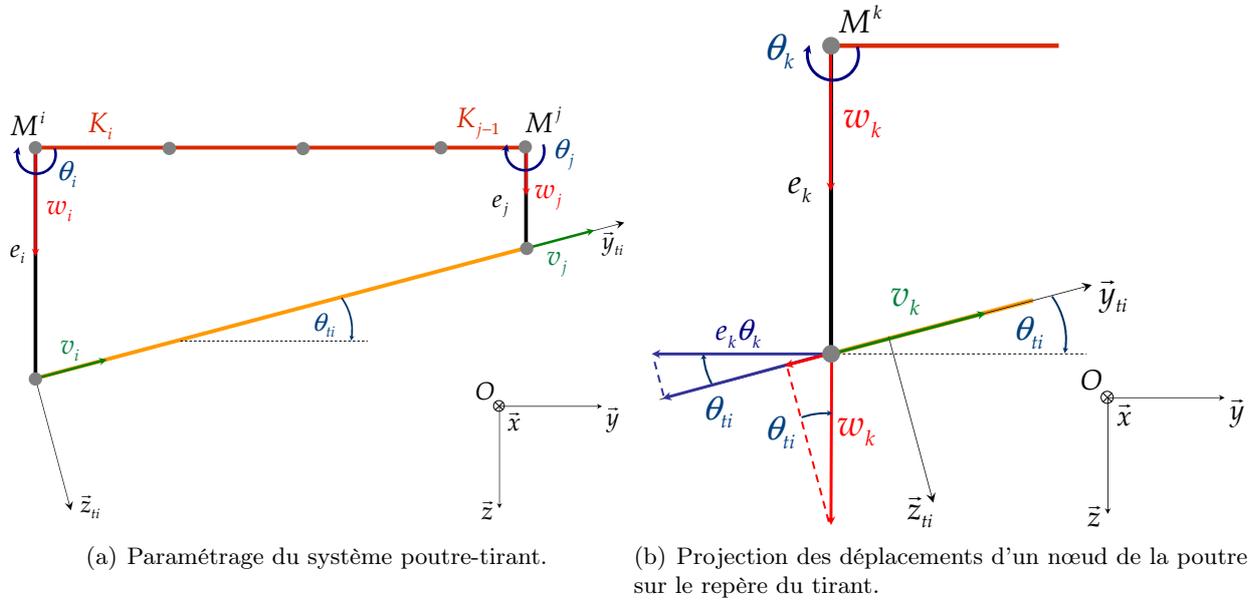
ce qui permet d'exprimer la matrice de raideur du tirant  ${}^{i,j}K_{ti} \in \mathcal{M}_{2,2}$  dans le repère global :

$${}^{i,j}K_{ti} = T^t [{}^{i,j}K_{ti}]_l T, \quad (\text{B.22})$$

avec la matrice de passage  $T \in \mathcal{M}_{4,4}$  définie telle que :

$$T = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_{ti}) & -e_i \cos(\theta_{ti}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\theta_{ti}) & -e_j \cos(\theta_{ti}) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

où  $\theta_{ti}$  est l'angle orienté autour de l'axe  $x$  par les vecteurs unitaires de la poutre équivalente  $\vec{y}$  et du tirant  $\vec{y}_{ti}$ ,  $e_i$  et  $e_j$  sont les excentricités respectives du tirant aux nœuds  $M^i$  et  $M^j$ , FIG. B.8. La


 FIGURE B.8 – Modèle éléments-finis  $\mathcal{M}_2$  : poutres assemblées à un tendeur externe.

matrice de raideur du tendon  ${}^{i,j}K_{ti}$ , projetée dans le repère de la poutre, a donc la forme suivante, [13; 95] :

$${}^{i,j}K_{ti} = \frac{E_{ti}S_{ti}}{2l_{ti}} \begin{bmatrix} 2 \sin^2(\theta_{ti}) & e_{ti} \sin(2\theta_{ti}) & -2 \sin^2(\theta_{ti}) & -e_{ti} \sin(2\theta_{ti}) \\ e_{ti} \sin(2\theta_{ti}) & 2e_{ti}^2 \cos^2(\theta_{ti}) & -e_{ti} \sin(2\theta_{ti}) & -2e_{ti}^2 \cos^2(\theta_{ti}) \\ -2 \sin^2(\theta_{ti}) & -e_{ti} \sin(2\theta_{ti}) & 2 \sin^2(\theta_{ti}) & e_{ti} \sin(2\theta_{ti}) \\ -e_{ti} \sin(2\theta_{ti}) & -2e_{ti}^2 \cos^2(\theta_{ti}) & e_{ti} \sin(2\theta_{ti}) & 2e_{ti}^2 \cos^2(\theta_{ti}) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Dans notre cas, on a  $e_i = e_j = e_{ti}$  et  $\theta_{ti} = 0$ , l'Eq. (B.24) se simplifie alors :

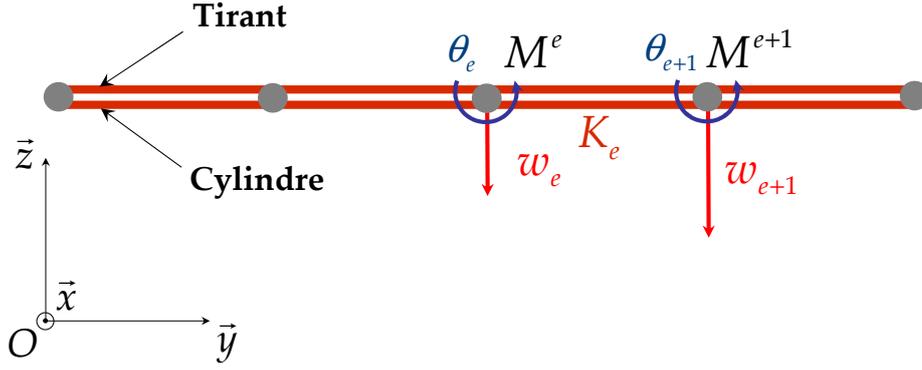
$${}^{i,j}K_{ti} = \frac{E_{ti}S_{ti}}{l_{ti}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{ti}^2 & 0 & -e_{ti}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_{ti}^2 & 0 & e_{ti}^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

En considérant le concept de poutre équivalente pour la totalité des tirants, il est possible de définir une matrice de raideur équivalente projetée due à l'action de l'ensemble des tirants telle que :

$${}^{i,j}K_{ti} = \beta \frac{E_{ti}S_{ti}}{l_{ti}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{ti}^2 & 0 & -e_{ti}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_{ti}^2 & 0 & e_{ti}^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.26})$$

où  $\beta$  est défini dans l'Eq. (B.8).

Dans un cas plus général où le tirant est connecté à deux nœuds de poutre n'appartenant pas


 FIGURE B.9 – Modèle éléments finis  $\mathcal{M}_3$ . ■ : Éléments de flexion.

au même élément, la matrice de raideur globale des tirants  $K_{ti} \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  s'écrit alors :

$$K_{ti} = \beta \frac{E_{ti} S_{ti}}{l_{ti}} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \theta_i & 0 & \dots & 0 & \theta_j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e_{ti} & 0 & \dots & 0 & -e_{ti} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -e_{ti} & 0 & \dots & 0 & e_{ti} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_i \\ \theta_j \end{matrix} \quad (B.27)$$

La matrice de raideur globale du tirant  $K_{ti}$  est alors additionnée à la matrice de raideur globale  $K_f$  de la structure. On retrouve les résultats formulés par [33] lorsqu'il est considéré une matrice de raideur d'un élément de poutre dont la ligne moyenne est excentrée d'une distance  $e_{ti}$  de la ligne neutre de la structure.

#### B.2.4 Modèle $\mathcal{M}_3$ : un modèle de poutre équivalente

Ici, il est proposé un modèle de poutre équivalente dans lequel le cylindre et les tirants sont considérés comme deux poutres coaxiales dont les nœuds coïncident, conduisant alors à la sommation des matrices de raideur élémentaire de chaque élément fini, FIG. B.9.

Chaque nœud d'un élément fini  $\mathcal{K}_e$  comprend deux degrés de liberté : un déplacement  $w$  dans la direction transversale et une rotation de section droite  $\theta$ , tel que son le vecteur des degrés de liberté élémentaire  ${}^e\delta \in \mathbb{R}^4$  soit défini par :

$${}^e\delta = [w_e, \theta_e, w_{e+1}, \theta_{e+1}]^t, \quad (B.28)$$

Les matrices de raideur élémentaires de chacune des poutres s'additionnent et constituent la matrice de raideur élémentaires de la poutre équivalente  ${}^eK_{eq} \in \mathcal{M}_{4,4}$  :

$${}^eK_{eq} = {}^eK_f + {}^eK_{f_{ti}}, \quad (B.29)$$

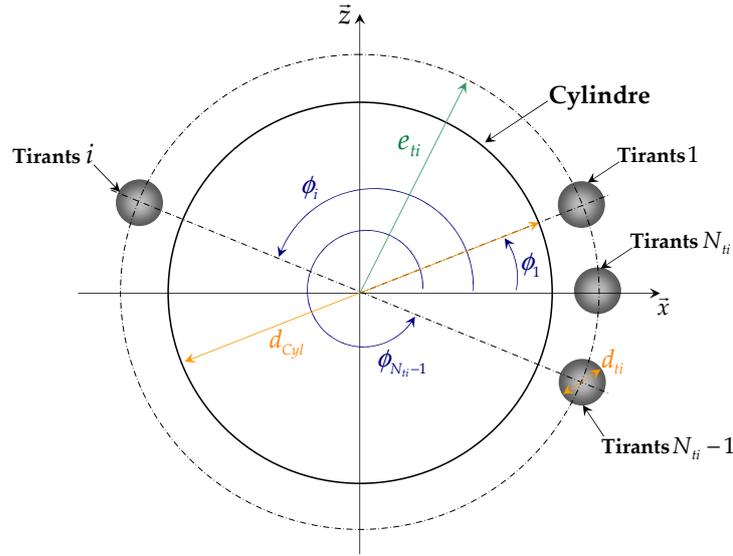


FIGURE B.10 – Paramétrage d'une section droite composée de tirants équirépartis.

où  ${}^e K_f, {}^e K_{f_{ti}} \in \mathcal{M}_{4,4}$  sont définies dans l'Eq. (B.4).

Par ailleurs, la matrice de raideur élémentaire modélisant la rigidité de la totalité des tirants est définie par :

$${}^e K_{f_{ti}} = \sum_{i=1}^{n_{ti}} {}^e K_{f_{ti}} (I_{G_{x_{ti}}}(\phi_i)), \quad (\text{B.30})$$

où l'expression du moment quadratique  $I_{G_{x_{ti}}}(\phi_i)$  du  $i^e$  tirant autour de l'axe  $x$  est donnée par :

$$I_{G_{x_{ti}}}(\phi_i) = \frac{\pi}{4} \left[ \left( \frac{d_{ti}}{4} \right)^2 + (e_{ti} \sin(\phi_i))^2 \right] d_{ti}^2, \quad (\text{B.31})$$

avec  $d_{ti}, e_{ti}$  respectivement les diamètre et excentricité des tirants ;  $\phi_i$  est défini dans l'Eq. (B.7), FIG. B.10.

## B.2.5 Qualification des modèles. Comportement statique

Une force ponctuelle d'intensité  $50 \times 9.81$  N est appliquée au centre du disque, FIG. B.11, dans le plan de l'interface disque-cylindre, dans la direction  $z$ . Les flèches obtenues pour les modèles  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  sont présentées ci-après.

### B.2.5.1 Variation des longueur et nombre de tirants équirépartis

On suppose dans cette section un nombre variable  $n_{ti}$  de tirants équirépartis dont les valeurs sont successivement égales à 16 et 32. Pour chacune de ces configurations, la longueur  $l$  des tirants et du cylindre prend successivement les valeurs présentées dans les TAB. B.2 et TAB. B.3. Le module d'Young du cylindre est considéré constant et égal à  $2.0 \cdot 10^{11}$  N · m<sup>-2</sup>.

### B.2.5.2 Variation de la distribution des tirants

Différents arrangements de tirants sont envisagés parmi lesquels on distingue les configurations  $\mathcal{C}$  définies telles que, FIG. B.3 :  $\mathcal{C}_2$  : 2 Tirants à 0 et  $\pi$  rad,  $\mathcal{C}'_2$  : 2 Tirants à  $\pm \frac{\pi}{2}$  rad,  $\mathcal{C}_4$  : 4 Tirants à 0 et  $\pm \frac{\pi}{2}$  rad et  $\mathcal{C}_8$  : 8 Tirants à 0,  $\pi, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{8}$  et  $\pm \frac{7\pi}{8}$ .

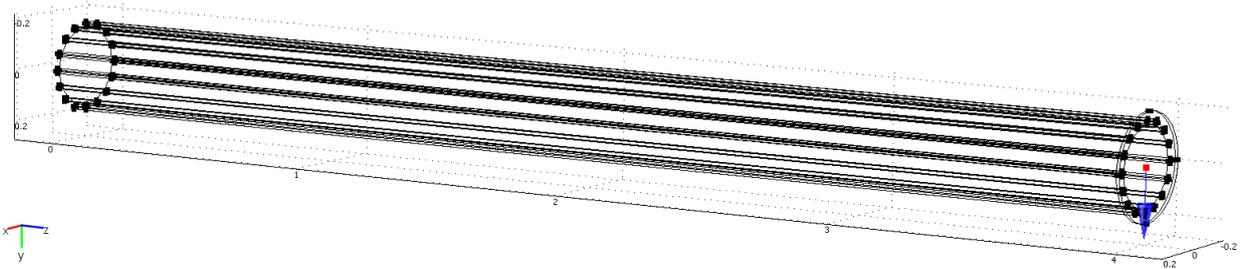


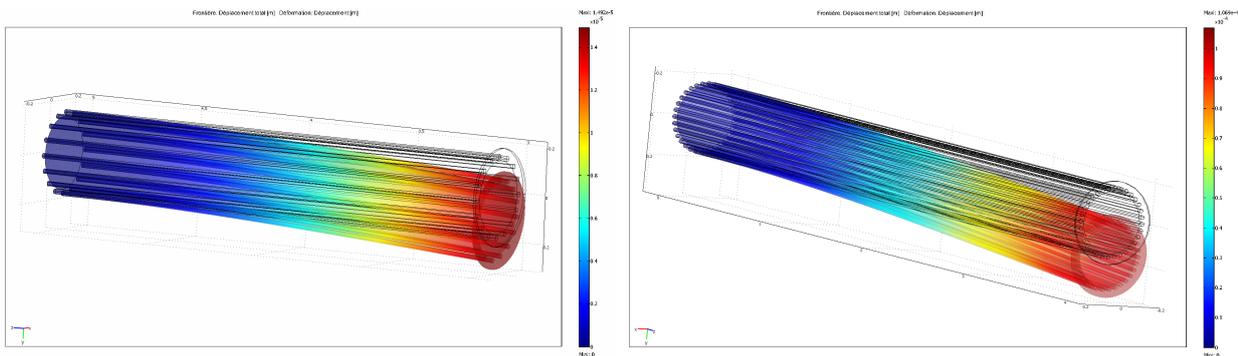
FIGURE B.11 – Modèle éléments-finis réalisé sous COMSOL -  $l = 4$  m et  $n_{ti} = 16$  - Application d'une force ponctuelle.

| $l$<br>(m) | COMSOL<br>(m)         | $\mathcal{M}_1$<br>(m) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_2$<br>(m) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_3$<br>(m) | Erreur<br>(%) |
|------------|-----------------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|
| 4          | $1.169 \cdot 10^{-4}$ | $1.171 \cdot 10^{-4}$  | 0.2           | $1.175 \cdot 10^{-4}$  | 0.5           | $1.126 \cdot 10^{-4}$  | -3.6          |
| 3          | $4.936 \cdot 10^{-5}$ | $4.954 \cdot 10^{-5}$  | 0.3           | $4.969 \cdot 10^{-5}$  | 0.7           | $4.765 \cdot 10^{-5}$  | -3.7          |
| 2          | $1.468 \cdot 10^{-5}$ | $1.479 \cdot 10^{-5}$  | 0.8           | $1.484 \cdot 10^{-5}$  | 1.1           | $1.423 \cdot 10^{-5}$  | -3.1          |
| 1          | $1.894 \cdot 10^{-6}$ | $1.927 \cdot 10^{-6}$  | 1.7           | $1.932 \cdot 10^{-6}$  | 1.9           | $1.852 \cdot 10^{-6}$  | -2.3          |

TABLEAU B.2 – Flèches statiques obtenues avec COMSOL et les modèles  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  -  $n_{ti} = 16$ ,  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  N · m<sup>-2</sup>, FIG. B.12(a).

| $l$<br>(m) | COMSOL<br>(m)         | $\mathcal{M}_1$<br>(m) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_2$<br>(m) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_3$<br>(m) | Erreur<br>(%) |
|------------|-----------------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|
| 4          | $1.063 \cdot 10^{-4}$ | $1.061 \cdot 10^{-4}$  | -0.2          | $1.0670 \cdot 10^{-4}$ | 0.3           | $9.824 \cdot 10^{-5}$  | -7.6          |
| 3          | $4.491 \cdot 10^{-5}$ | $4.489 \cdot 10^{-5}$  | -0.1          | $4.5140 \cdot 10^{-5}$ | 0.5           | $4.157 \cdot 10^{-5}$  | -7.4          |
| 2          | $1.337 \cdot 10^{-5}$ | $1.341 \cdot 10^{-5}$  | 0.3           | $1.3490 \cdot 10^{-5}$ | 0.8           | $1.242 \cdot 10^{-5}$  | -7.1          |
| 1          | $1.733 \cdot 10^{-6}$ | $1.754 \cdot 10^{-6}$  | 1.2           | $1.7630 \cdot 10^{-6}$ | 1.7           | $1.621 \cdot 10^{-6}$  | -6.4          |

TABLEAU B.3 – Flèches statiques obtenues avec COMSOL et les modèles  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  -  $n_{ti} = 32$ ,  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  N · m<sup>-2</sup>, FIG. B.12(b).



(a)  $l = 2$  m,  $n_{ti} = 16$ ,  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  N · m<sup>-2</sup>.

(b)  $l = 4$  m,  $n_{ti} = 32$ ,  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  N · m<sup>-2</sup>.

FIGURE B.12 – Déflexions statiques calculées sous COMSOL.

Pour chacune de ces configurations, le chargement statique est appliqué en considérant une longueur  $l = 4$  m et  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  N · m<sup>-2</sup> de cylindre. Les déflexions statiques sont présentées dans le TAB. B.4.

| $\mathcal{C}$    | COMSOL<br>(m)         | $\mathcal{M}_1$<br>(m) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_2$<br>(m) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_3$<br>(m) | Erreur<br>(%) |
|------------------|-----------------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|
| $\mathcal{C}_2$  | $1.311 \cdot 10^{-4}$ | $1.319 \cdot 10^{-4}$  | 0.6           | $1.319 \cdot 10^{-4}$  | 0.7           | $1.319 \cdot 10^{-4}$  | 0.7           |
| $\mathcal{C}'_2$ | $1.271 \cdot 10^{-4}$ | $1.278 \cdot 10^{-4}$  | 0.6           | $1.279 \cdot 10^{-4}$  | 0.6           | $1.266 \cdot 10^{-4}$  | -0.4          |
| $\mathcal{C}_4$  | $1.271 \cdot 10^{-4}$ | $1.278 \cdot 10^{-4}$  | 0.5           | $1.279 \cdot 10^{-4}$  | 0.6           | $1.267 \cdot 10^{-4}$  | -0.5          |
| $\mathcal{C}_8$  | $1.260 \cdot 10^{-4}$ | $1.265 \cdot 10^{-4}$  | 0.4           | $1.268 \cdot 10^{-4}$  | 0.6           | $1.250 \cdot 10^{-4}$  | -0.8          |

TABLEAU B.4 – Flèches statiques obtenues avec COMSOL et les modèles  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  -  $l = 4$  m,  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  N · m<sup>-2</sup>, FIG. B.13.

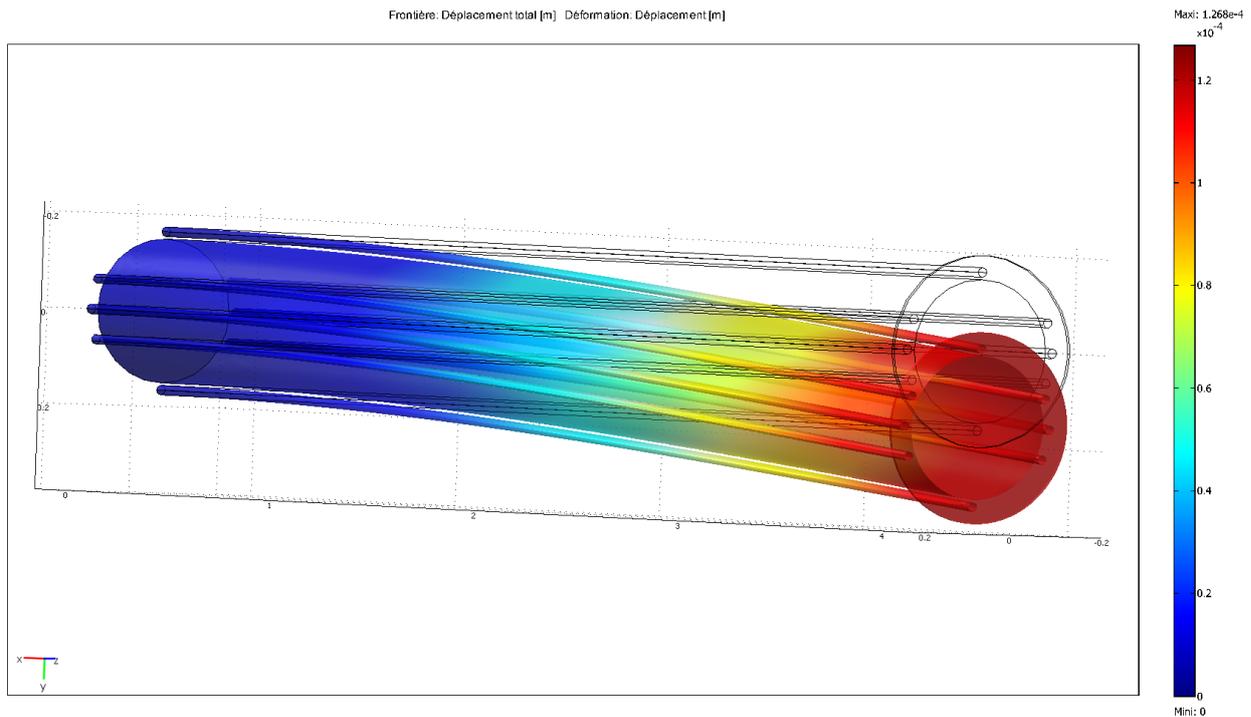


FIGURE B.13 – Déflexion statique calculée sous COMSOL dans la configuration  $\mathcal{C}_8$  -  $l = 4$  m,  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  N · m<sup>-2</sup>.

### B.2.5.3 Variation du module d'Young du cylindre

On suppose ici  $n_{ti} = 16$  tirants et un module d'Young de cylindre  $E$  variable dont les valeurs sont présentées dans le TAB. B.5. Le chargement statique est appliqué en considérant une longueur  $l = 4$  m.

| $E$<br>(N · m <sup>-2</sup> ) | COMSOL<br>(m)         | $\mathcal{M}_1$<br>(m) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_2$<br>(m) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_3$<br>(m) | Erreur<br>(%) |
|-------------------------------|-----------------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|
| $2 \cdot 10^{11}$             | $1.169 \cdot 10^{-4}$ | $1.2 \cdot 10^{-4}$    | 0.5           | $1.175 \cdot 10^{-4}$  | 0.494         | $1.126 \cdot 10^{-4}$  | -3.6          |
| $1 \cdot 10^{11}$             | $2.126 \cdot 10^{-4}$ | $2.1 \cdot 10^{-4}$    | 0.3           | $2.133 \cdot 10^{-4}$  | 0.368         | $1.965 \cdot 10^{-4}$  | -7.7          |
| $5 \cdot 10^{10}$             | $3.659 \cdot 10^{-4}$ | $3.7 \cdot 10^{-4}$    | 0.2           | $3.667 \cdot 10^{-4}$  | 0.215         | $3.129 \cdot 10^{-4}$  | -14.4         |
| $1 \cdot 10^{10}$             | $1.103 \cdot 10^{-3}$ | $1.1 \cdot 10^{-3}$    | 0.3           | $1.105 \cdot 10^{-3}$  | 0.243         | $5.959 \cdot 10^{-4}$  | -45.9         |

TABLEAU B.5 – Flèches statiques obtenues avec COMSOL et les modèles  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  -  $l = 4$  m,  $n_{ti} = 16$ .

### B.2.6 Conclusion

Pour des variations de longueur  $l$  du système, les flèches statiques obtenues à l'aide du modèle  $\mathcal{M}_3$  présentent des erreurs relatives comprises entre 2.2% et 7.6% pour les systèmes comprenant  $n_{ti} = 16$  ou  $n_{ti} = 32$  tirants, TAB. B.3 et TAB. B.2. Cette erreur relative croît énormément lorsque le module d'Young du cylindre diminue, TAB. B.5; elle atteint une valeur de 45.9%. Ceci permet d'affirmer que le modèle  $\mathcal{M}_3$  ne rend absolument pas compte du comportement statique de telle structure car il est trop simple.

Pour les mêmes configurations, le modèle  $\mathcal{M}_1$  présente la meilleure précision avec des erreurs relatives comprises entre 0.05% et 1.6%. Cette précision décroît lorsque la longueur  $l$  du système diminue. Cette évolution est intuitive car le système n'a plus les dimensions d'une poutre mince lorsque la longueur  $l$  diminue, s'écartant ainsi des hypothèses utilisées pour la formulation des éléments finis de poutre. Bien qu'étant plus précis, ce modèle suppose l'utilisation de relations cinématiques, *i.e.* multiplicateurs de Lagrange, entre le cylindre et les tirants, lors de la résolution du problème statique.

Le modèle  $\mathcal{M}_2$  est, quant à lui, une bonne alternative car il n'ajoute pas de degrés de liberté au problème tout en conservant une précision relative comprise entre 0.2% et 1.9%, et ce pour les plages de variation de longueur et de module d'Young réalisées.

Lorsque le système présente une distribution de tirants qui n'est pas de révolution, la précision des trois modèles est anormalement identique et est de l'ordre de 0.6%. Pour les modèles  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , cette précision augmente faiblement lorsque le nombre de tirants augmente. La faible contribution des tirants sur le cylindre et la finesse du maillage réalisé sous COMSOL peuvent expliquer cette anomalie.

Finalement, les modèles de poutre retenus sont les modèles  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  tant pour leur précision que pour leur implémentation numérique. Il reste désormais à valider la précision de ces modèles lors de simulations dynamiques, *i.e.* valider la modélisation de la matrice de masse de ce type de structure.

## B.3 Modélisation dynamique des tirants

Cette section concerne la modélisation dynamique d'un ensemble de tirants en vue de la détermination de la réponse dynamique de systèmes composés de tirants équirépartis. Les modèles précédents  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  sont considérés et leurs caractéristiques modales sont comparées à celle du modèle tridimensionnel présenté en Section B.2. En fixant le nombre  $n_{ti}$  de tirants à seize, des analyses modales ont été réalisées en considérant les mêmes configurations de la Section B.2 :

- Longueur  $l$  de cylindre et tirants variable : [1, 2, 3, 4] (m),
- Module d'Young  $E$  de cylindre variable :  $[2 \cdot 10^{11}, 1 \cdot 10^{11}, 5 \cdot 10^{10}, 1 \cdot 10^{10}]$  ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ).

Seules les premières fréquences propres de flexion sont examinées afin de limiter le temps de calcul CPU qui peut devenir prohibitif pour les modèles tridimensionnels, le modèle étudié contenant  $\sim 121\,000$  degrés de liberté.

### B.3.1 Définition des matrices de masse élémentaires

Quels que soient les modèles unidimensionnels envisagés ultérieurement, l'inertie d'un élément fini de poutre de Timoshenko  $\mathcal{H}_e$ , associé au vecteur des degrés de liberté  ${}^e\delta$ , Eq. (B.28), est

modélisée grâce à la matrice de masse élémentaire  ${}^eM \in \mathcal{M}_{4,4}$  définie telle que, [25] :

$${}^eM = {}^eM_w + {}^eM_\theta, \quad (\text{B.32})$$

composée d'un premier terme  ${}^eM_w \in \mathcal{M}_{4,4}$  représentant l'inertie de translation de la section droite  ${}^eS$  telle que :

$${}^eM_w = \frac{{}^e\rho {}^eS e l}{(1 + {}^e\phi_y)^2} \begin{bmatrix} m_{T_{11}} & -m_{T_{14}} & m_{T_{15}} & m_{T_{18}} \\ & m_{T_{33}} & -m_{T_{18}} & m_{T_{37}} \\ \text{Sym} & & m_{T_{11}} & m_{T_{14}} \\ & & & m_{T_{33}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

dont les composantes  $m_T$  sont définies dans les Eq. (A.139) à Eq. (A.141), et d'un second  ${}^eM_\theta \in \mathcal{M}_{4,4}$  représentant l'inertie de rotation de la section droite  ${}^eS$ , *i.e.* les effets de Rayleigh traduis pas :

$${}^eM_\theta = \frac{{}^e\rho {}^eI_G}{e l (1 + {}^e\phi_y)^2} \begin{bmatrix} m_{R_{11}} & -m_{R_{14}} & m_{R_{15}} & m_{R_{18}} \\ & m_{R_{33}} & -m_{R_{18}} & m_{R_{37}} \\ \text{Sym} & & m_{R_{11}} & m_{R_{14}} \\ & & & m_{R_{33}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.34})$$

dont les composantes  $m_R$  sont définies par les Eq. (A.143), Eq. (A.144) et Eq. (A.145).

### B.3.1.1 Variation de la longueur du cylindre

L'inertie des tirants n'est pas prise en compte dans le modèle éléments finis  $\mathcal{M}_2$  car les tirants y sont considérés uniquement comme des tendeurs externes. En revanche, pour le modèle  $\mathcal{M}_3$ , à la manière de l'Eq. (B.29), les matrices de masse élémentaires des poutres modélisant le cylindre et les tirants s'additionnent afin de constituer la matrice de masse élémentaire équivalente  ${}^eM_{eq} \in \mathcal{M}_{4,4}$  définie comme suit :

$${}^eM_{eq} = {}^eM + {}^eM_{ti}, \quad (\text{B.35})$$

avec :

$${}^eM_{ti} = \sum_{i=1}^{n_{ti}} [{}^eM_{ti_w} ({}^iS_{ti}) + {}^eM_{ti_\theta} (I_{G_{x_{ti}}}(\phi_i))], \quad (\text{B.36})$$

où  $I_{G_{x_{ti}}}(\phi_i)$  est défini dans l'Eq. (B.31) et  ${}^iS_{ti}$  est la section d'un tirant.

## B.3.2 Qualification des modèles. Comportement dynamique

Des analyses modales du modèle tridimensionnel et des modèles de poutres  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  sont réalisées en intégrant des variations de longueur et de module d'Young.

Le nombre  $n_{ti}$  de tirants équirépartis est fixé à 16 et la longueur  $l$  des tirants et du cylindre prend successivement les valeurs présentées dans le TAB. B.6. Le module d'Young du cylindre est considéré constant et égal à  $2.0 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Les premières fréquences propres des modèles  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  sont présentées dans le TAB. B.6.

### B.3.2.1 Variation du module d'Young du cylindre

Pour plusieurs modules d'Young  $E$  de cylindre, les premières fréquences propres des modèles  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  sont calculées et présentées dans le TAB. B.7.

### B.3.2.2 Conclusion

Le modèle  $\mathcal{M}_3$  présente des erreurs relatives comprises entre 1.519% et 53.48% ce qui confirme l'erreur de modélisation commise et constatée dans la Section B.2.6 ; cela permet d'exclure ce type

| $l$<br>(m) | COMSOL<br>(Hz) | $\mathcal{M}_2$<br>(Hz) | Erreur<br>(%) |
|------------|----------------|-------------------------|---------------|
| 4          | 13.47          | 13.37                   | -0.8          |
| 3          | 23.91          | 23.70                   | -0.9          |
| 2          | 53.49          | 52.93                   | -1.1          |
| 1          | 206.9          | 203.9                   | -1.5          |

TABLEAU B.6 – Comparaison des premières fréquences propres de flexion obtenues avec COMSOL et les modèles  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  -  $n_{ti} = 16$ ,  $E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ .

| $E$<br>( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | COMSOL<br>(Hz) | $\mathcal{M}_2$<br>(Hz) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_3$<br>(Hz) | Erreur<br>(%) |
|-------------------------------------------|----------------|-------------------------|---------------|-------------------------|---------------|
| $2 \cdot 10^{11}$                         | 13.47          | 13.36                   | -0.8          |                         |               |
| $1 \cdot 10^{11}$                         | 10.01          | 9.82                    | -1.9          |                         |               |
| $5 \cdot 10^{10}$                         | 7.63           | 7.36                    | -3.6          |                         |               |
| $1 \cdot 10^{10}$                         | 3.91           | 3.92                    | 0.5           |                         |               |

TABLEAU B.7 – Comparaison des premières fréquences propres de flexion obtenues avec COMSOL et les modèles  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  -  $l = 4 \text{ m}$ ,  $n_{ti} = 16$ .

de modélisation. Par ailleurs, bien que le modèle  $\mathcal{M}_2$  présente de faibles erreurs relatives comprises entre 0.466% et -3.563%, celui-ci ne permet pas :

- de prendre en compte la dynamique propre des tirants (cf. Chapitre 4.5),
- de modéliser un quelconque effet sur ces derniers ou une interaction entre les tirants et l'empilement de tôles magnétique, *i.e.* modélisation d'un éventuel contact (cf. Chapitre 5).

Aussi, la section suivante présente deux modèles de poutres  $\mathcal{M}_{1'}$  et  $\mathcal{M}_{2'}$  permettant de modéliser l'inertie des tirants.

### B.3.3 Modélisation inertielle des tirants

La prise en compte de relations cinématiques ou de tout autre couplage entre degrés de liberté d'un système est aisément réalisable lorsque que l'on souhaite obtenir sa réponse statique mais relativement plus complexe lorsqu'il s'agit de déterminer sa réponse dynamique. Afin de faciliter la démarche de modélisation, une solution, somme toute simple, est proposée mais efficace quant à sa mise en œuvre dans un code de calcul éléments finis.

En effet, la modélisation de la totalité des tirants équirépartis, FIG. B.14(a), peut être appréhendée en considérant cet ensemble comme un unique élément de caractéristiques inertielles et de rigidité identiques à cet ensemble.

Si l'on considère une distribution de tirants équirépartis comme l'illustre la FIG. B.14(a), la section totale  $S_{ti}$  de l'ensemble des  $n_{ti}$  tirants de diamètre extérieur  $d_{ti}$  est définie par l'expression suivante :

$$S_{ti} = n_{ti} \frac{\pi}{4} d_{ti}^2, \quad (\text{B.37})$$

alors que leur moment quadratique  $I_{G_{x_{ti}}}$  autour de l'axe  $x$  s'écrit comme suit :

$$I_{G_{x_{ti}}} = n_{ti} \frac{\pi}{64} d_{ti}^4 + S_{ti} e_{ti}^2 \sum_{i=0}^{n_{ti}-1} \sin^2 \left( \frac{2\pi i}{n_{ti}} \right), \quad (\text{B.38})$$

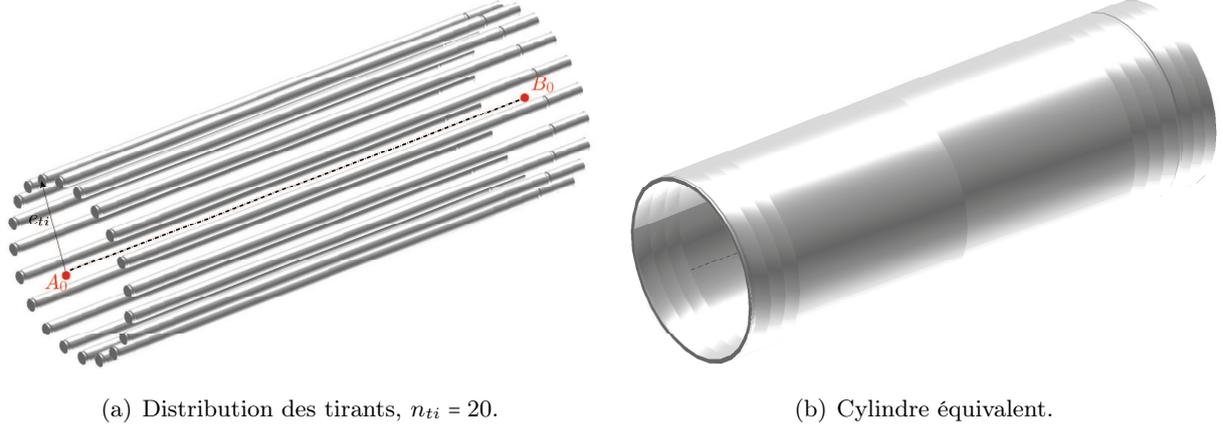


FIGURE B.14 – Modélisation d'un ensemble de tirants équirépartis sur une circonférence.

qui se simplifie en considérant l'identité trigonométrique de l'Eq. (B.8) en l'expression suivante :

$$I_{G_{x_{ti}}} = \frac{\pi}{8} n_{ti} \left( \frac{d_{ti}^2}{8} + n_{ti} e_{ti}^2 \right) d_{ti}^2. \quad (\text{B.39})$$

Afin de considérer l'inertie de la totalité des tirants, tout en conservant leur rigidité, on se propose de modéliser l'ensemble des tirants par un cylindre creux, FIG. B.14(b), dont les caractéristiques inertielles et de raideur correspondent à celle de l'ensemble des tirants. Les extrémités de cet élément équivalent sont connectées aux extrémités du cylindre ce qui engendre un couplage cinématique entre les degrés de liberté de translation et de rotation de sections droites connectées, à la manière du modèle  $\mathcal{M}_1$ , Section B.2.2. On considère donc un cylindre creux conservant les propriétés constitutives et inertielles d'un tirant et caractérisé par ses diamètres intérieur  $d_{ti}^{\text{int}}$  et extérieur  $d_{ti}^{\text{ext}}$  telles que ses section  $S_{ti}$  et moment quadratique  $I_{G_{x_{ti}}}$ , autour de l'axe  $x$  s'expriment :

$$S_{ti} = \frac{\pi}{4} \left[ (d_{ti}^{\text{ext}})^2 - (d_{ti}^{\text{int}})^2 \right], \quad (\text{B.40})$$

et :

$$I_{G_{x_{ti}}} = \frac{\pi}{64} \left[ (d_{ti}^{\text{ext}})^4 - (d_{ti}^{\text{int}})^4 \right] = \frac{\pi}{64} \left[ (d_{ti}^{\text{ext}})^2 - (d_{ti}^{\text{int}})^2 \right] \left[ (d_{ti}^{\text{ext}})^2 + (d_{ti}^{\text{int}})^2 \right]. \quad (\text{B.41})$$

Les couples formés par les Eq. (B.37) et Eq. (B.40), puis Eq. (B.39) et Eq. (B.41), formant respectivement deux égalités, il vient alors :

$$(d_{ti}^{\text{ext}})^2 - (d_{ti}^{\text{int}})^2 = 4 \frac{S_{ti}}{\pi}, \quad (\text{B.42a}) \quad (d_{ti}^{\text{ext}})^2 + (d_{ti}^{\text{int}})^2 = 16 \frac{I_{G_{x_{ti}}}}{S_{ti}}. \quad (\text{B.42b})$$

En additionnant, d'une part, les Eq. (B.42a) et Eq. (B.42b), et soustrayant, d'autre part, les Eq. (B.42b) et Eq. (B.42a), on obtient respectivement les expressions des diamètres extérieur et intérieur du cylindre équivalent tels que :

$$d_{ti}^{\text{ext}} = \left( 8 \frac{I_{G_{x_{ti}}}}{S_{ti}} + \frac{2}{\pi} S_{ti} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.43a}) \quad d_{ti}^{\text{int}} = \left( 8 \frac{I_{G_{x_{ti}}}}{S_{ti}} - \frac{2}{\pi} S_{ti} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.43b})$$

ou encore :

$$d_{ti}^{\text{ext}} = \frac{d_{ti}}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + n_{ti} \left[ 8 \left( \frac{e_{ti}}{d_{ti}} \right)^2 + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.44a}) \quad d_{ti}^{\text{int}} = \frac{d_{ti}}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + n_{ti} \left[ 8 \left( \frac{e_{ti}}{d_{ti}} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.44b})$$

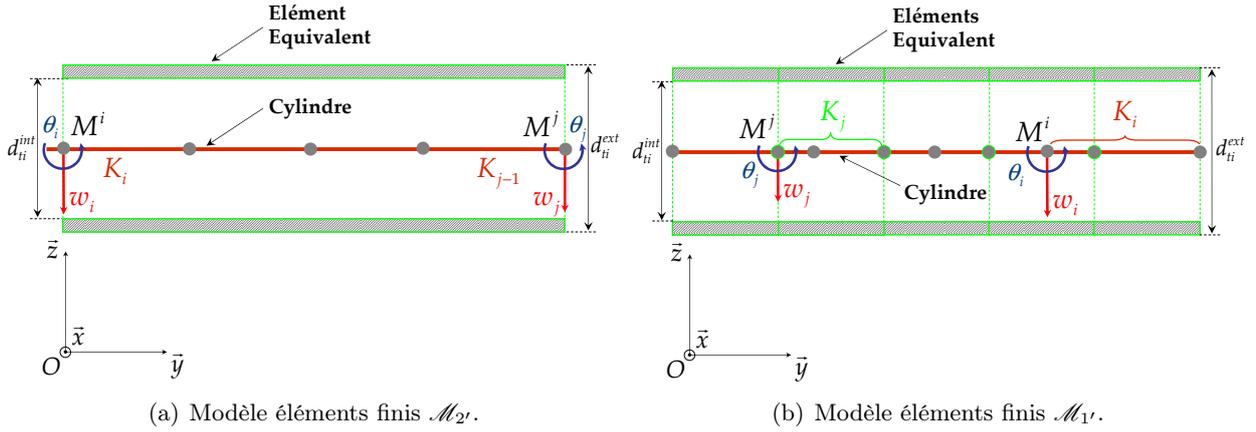


FIGURE B.15 – ■ : Éléments de flexion, ■ : (a) : Élément de flexion unique, (b) : Éléments de flexion.

**Remarque 27:** L'avantage de modéliser l'ensemble des tirants par un cylindre "équivalent" est d'obtenir des matrices de raideur et masse cohérentes. De plus, privilégiant la théorie des poutres de Timoshenko, le coefficient de cisaillement, et de surcroît le coefficient de réduction de section droite, Eq. (2.21), est aisément calculable lorsqu'il s'agit de la section droite d'un cylindre creux [27; 28].



### B.3.4 Modèles $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_1$

Le modèle éléments finis  $\mathcal{M}_2$  est une extension du  $\mathcal{M}_2$  en ce sens où l'ensemble des tirants n'est constitué que d'un élément fini unique, FIG. B.15(a), connecté aux nœuds de cylindre  $M^i$  et  $M^j$  et dont le vecteur des degrés de liberté  ${}^{i,j}\delta \in \mathbb{R}^4$  est défini dans l'Eq. (B.19).

Pour un ensemble de tirants de longueur  $l_{ti}$ , de masse volumique  $\rho_{ti}$  et de module d'Young  $E_{ti}$ , la matrice de raideur élémentaire  ${}^{i,j}K_{f_{ti}} \in \mathcal{M}_{4,4}$  modélisant le cylindre équivalent s'écrit alors :

$${}^{i,j}K_{f_{ti}} = \frac{E_{ti}I_{G_{x_{ti}}}}{(1 + \phi_{ti})l_{ti}^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l_{ti} & -12 & -6l_{ti} \\ -6l_{ti} & (4 + \phi_{ti})l_{ti}^2 & 6l_{ti} & (2 - \phi_{ti})l_{ti}^2 \\ -12 & 6l_{ti} & 12 & 6l_{ti} \\ -6l_{ti} & (2 - \phi_{ti})l_{ti}^2 & 6l_{ti} & (4 + \phi_{ti})l_{ti}^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.45})$$

où  $I_{G_{x_{ti}}}$  est le moment quadratique de l'ensemble des tirants excentrés d'une distance  $e_{ti}$  défini dans l'Eq. (B.41) et  $\phi_{ti}$  est le coefficient de cisaillement d'une section droite de cylindre creux de diamètres intérieurs  $d_{ti}^{int}$  et extérieurs  $d_{ti}^{ext}$ , Eq. (2.21).

La matrice de masse élémentaire à l'expression suivante, Eq. (B.32) :

$${}^{i,j}M_{ti} = \frac{\rho_{ti}S_{ti}l_{ti}}{(1 + \phi_{ti})^2} \begin{bmatrix} m_{T11} & -m_{T14} & m_{T15} & m_{T18} \\ & m_{T33} & -m_{T18} & m_{T37} \\ \text{Sym} & & m_{T11} & m_{T14} \\ & & & m_{T33} \end{bmatrix} + \frac{\rho_{ti}I_{G_{x_{ti}}}}{l_{ti}(1 + \phi_{ti})^2} \begin{bmatrix} m_{R11} & -m_{R14} & m_{R15} & m_{R18} \\ & m_{R33} & -m_{R18} & m_{R37} \\ \text{Sym} & & m_{R11} & m_{R14} \\ & & & m_{R33} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.46})$$

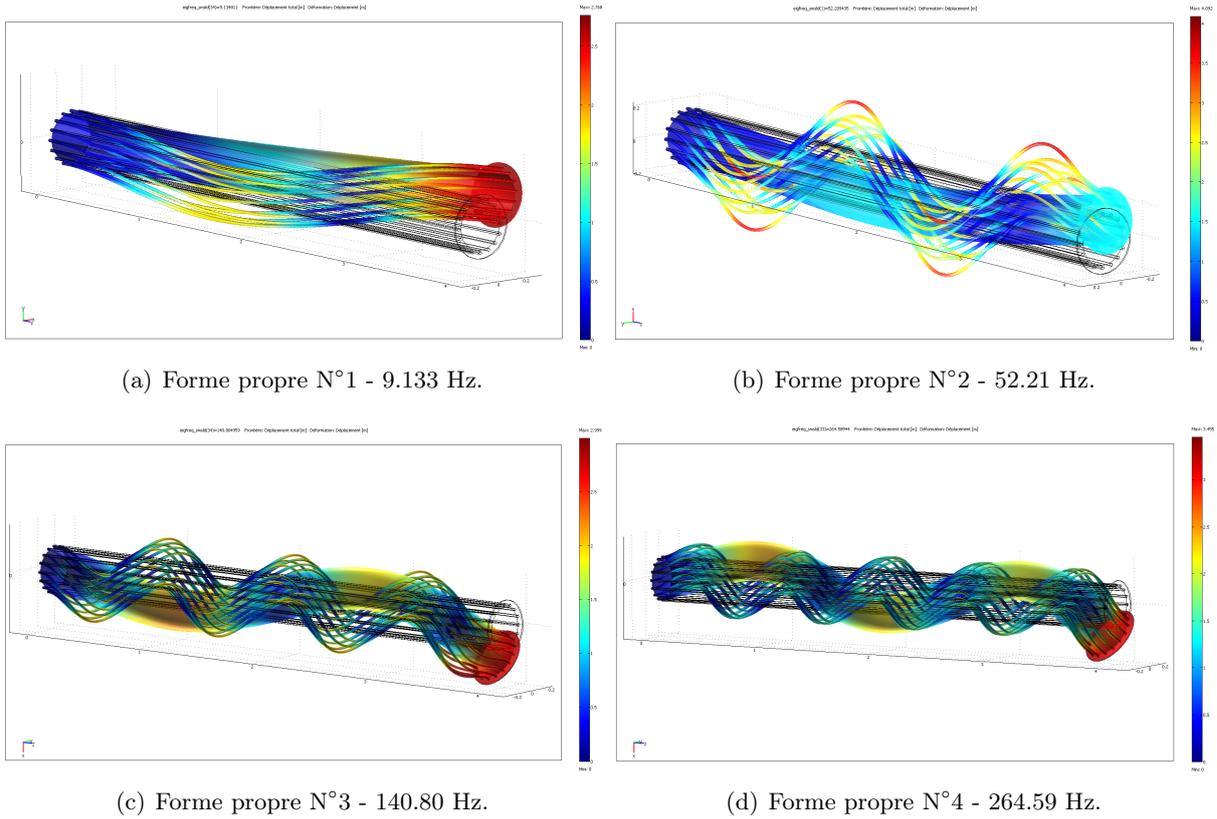


FIGURE B.16 – Quatre premières formes propres de flexion du modèle COMSOL.

où  $S_{ti}$  est la section de l'ensemble des tirants définie dans l'Eq. (B.40).

Le modèle  $\mathcal{M}_1'$ , FIG. B.15(b), est une simple extension du modèle  $\mathcal{M}_2'$  constitué non pas d'un élément fini unique de cylindre équivalent mais d'un nombre supérieur à l'unité et dont les expressions des matrices élémentaires de raideur et masse sont respectivement définies dans les Eq. (B.4) et Eq. (B.32). Cette extension peut paraître futile mais est réellement nécessaire dans une démarche de modélisation précise. En effet, outre le fait de permettre la prise en compte d'un éventuel chargement sur les tirants, elle permet de considérer la géométrie précise des tirants qui n'est pas uniforme (cf. Chapitre 4.5).

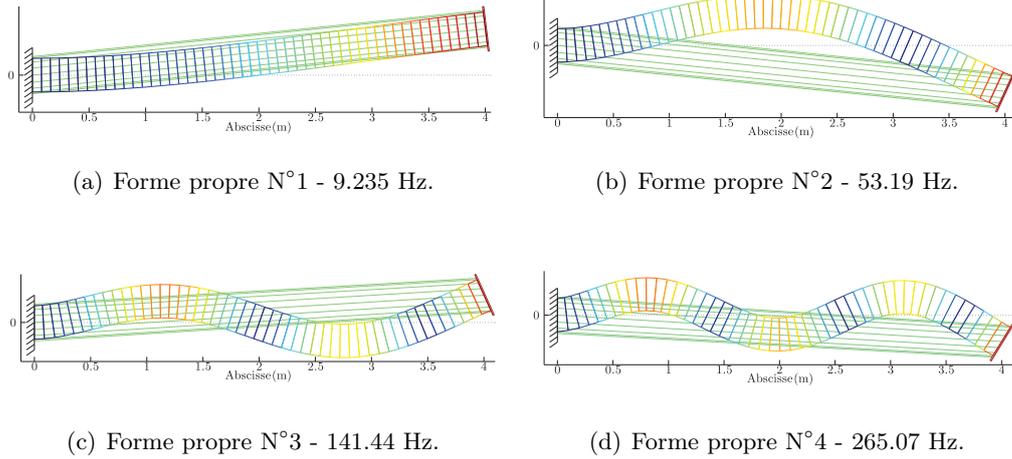


FIGURE B.17 – Quatre premières formes propres de flexion du modèle  $\mathcal{M}_2$ .

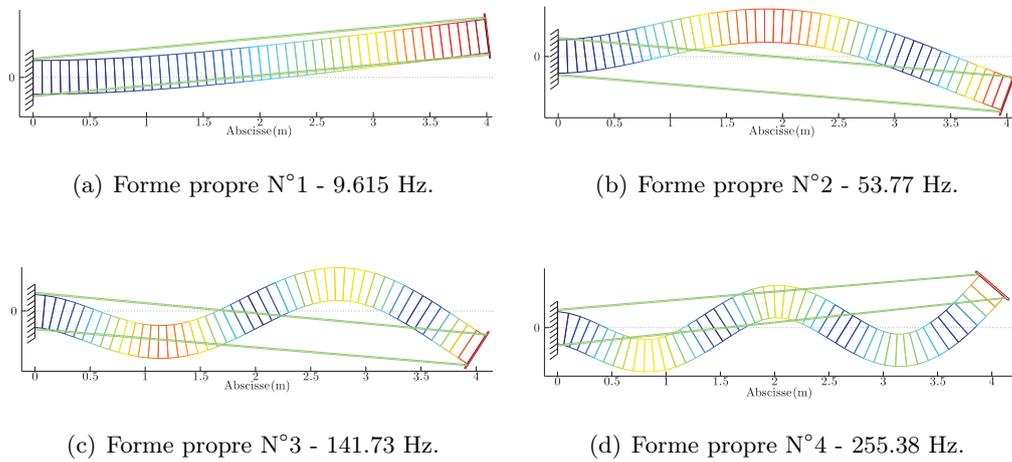


FIGURE B.18 – Quatre premières formes propres de flexion du modèle  $\mathcal{M}_{2'}$ .

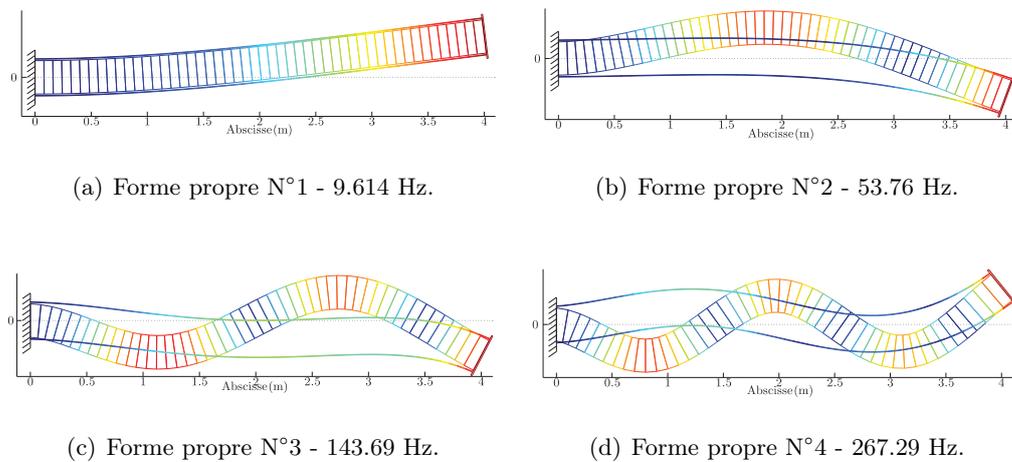


FIGURE B.19 – Quatre premières formes propres de flexion du modèle  $\mathcal{M}_{1'}$ .

### B.3.5 Qualification du comportement inertiel des tirants

Une analyse modale est effectuée sur un système composé de seize tirants équirépartis, d'un cylindre dont le module d'Young  $E$  est fixé à  $8 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  et dont la longueur est fixée à quatre mètres. Les quatre premières fréquences propres de flexion ont été considérées.

| Indice           | COMSOL<br>(Hz) | $\mathcal{M}_2$<br>(Hz) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_{2'}$<br>(Hz) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_{1'}$<br>(Hz) | Erreur<br>(%) | $\mathcal{M}_3$ | Erreur |
|------------------|----------------|-------------------------|---------------|----------------------------|---------------|----------------------------|---------------|-----------------|--------|
| 1 <sup>ère</sup> | 9.133          | 9.235                   | 1.1           | 9.615                      | 5.277         | 9.614                      | 5.3           |                 |        |
| 2 <sup>e</sup>   | 52.21          | 53.19                   | 1.8           | 53.77                      | 2.988         | 53.76                      | 2.9           |                 |        |
| 3 <sup>e</sup>   | 140.80         | 141.44                  | 0.4           | 141.73                     | 0.661         | 143.69                     | 2.1           |                 |        |
| 4 <sup>e</sup>   | 264.59         | 265.07                  | 0.2           | 255.38                     | -3.48         | 267.29                     | 1.1           |                 |        |

TABLEAU B.8 – Comparaison des quatre premières fréquences propres de flexion obtenues avec COMSOL et les modèles  $\mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_{2'}$ ,  $\mathcal{M}_{1'}$  et  $\mathcal{M}_3$  -  $n_{ti} = 16$  -  $l = 4 \text{ m}$  -  $E = 8 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Les fréquences propres des modèles tridimensionnels,  $\mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_{2'}$ ,  $\mathcal{M}_{1'}$  et  $\mathcal{M}_3$  sont présentées et comparées dans le TAB. B.8 alors que les formes propres des modèles précédemment cités (à l'exception du modèle  $\mathcal{M}_3$ ) sont illustrées dans les FIG. B.16, FIG. B.17, FIG. B.18 et FIG. B.19.

### B.3.6 Conclusion

Le modèle  $\mathcal{M}_3$  présente des erreurs relatives comprises entre 5.56% et 13.18% ce qui permet d'exclure totalement ce type de modélisation. A l'exception de ce dernier, tous les modèles présentent une erreur relative qui décroît avec l'indice des fréquences propres. L'effet du cisaillement est modélisé de manière satisfaisante sur cette structure assemblée.

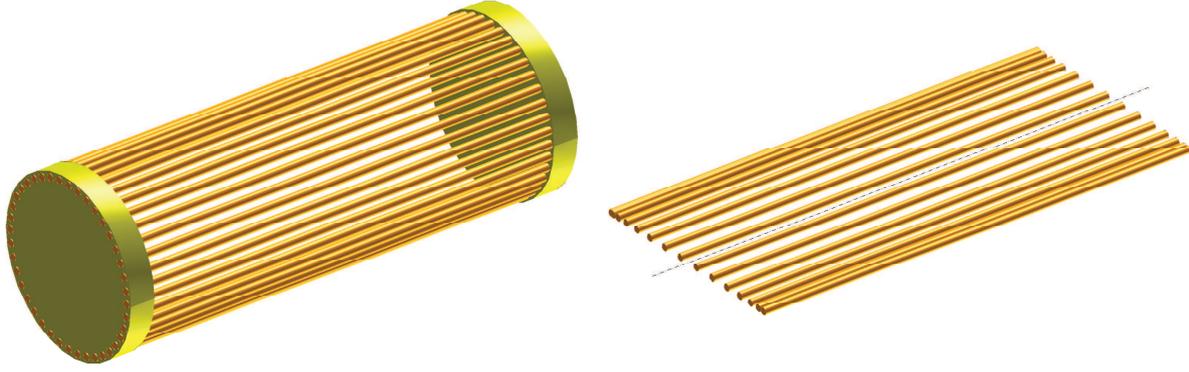
Les formes propres des modèles  $\mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_{2'}$  et  $\mathcal{M}_{1'}$  illustrées respectivement par les FIG. B.17, FIG. B.18 et FIG. B.19 sont globalement en accord avec celle du modèle tridimensionnel, FIG. B.16, si l'on se concentre sur les formes propres du cylindre.

Seul le  $\mathcal{M}_{1'}$  rend compte des formes propres des tirants, ou plutôt de l'ensemble des tirants, c'est-à-dire des formes propres d'ensembles caractérisées par la vibration en phase de tous les tirants. Il est à noter que la périodicité du modèle tridimensionnel induit un nombre très important de fréquences et formes propres associées qui n'ont pas été illustrées.

Ces modèles rendent compte de la dynamique globale du système étudié en présentant des erreurs relatives moyennes égales à 0.91%, 3.10% et 2.82% respectivement pour les modèles  $\mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_{2'}$  et  $\mathcal{M}_{1'}$ . Bien que le modèle  $\mathcal{M}_2$  présente l'erreur relative moyenne la plus faible, les deux autres modèles  $\mathcal{M}_{2'}$  et  $\mathcal{M}_{1'}$  doivent cependant être considérés pour les raisons évoquées dans la Section B.3.4.

Finalement, le choix qui a présidé à la modélisation des tirants est de modéliser l'ensemble des tirants indépendamment de la masse magnétique. Chacun de ces modèles a donc été naturellement implémenté et utilisé dans les différentes procédures d'identification présentées ci-après dans le Chapitre 4.

**Remarque 28:** Les tirants présentent un rôle mécanique primordial en assurant la tenue mécanique de la masse magnétique. En effet, précontraints en traction, ils assurent la compression des tôles magnétiques et donc la rigidité de flexion de l'empilement. L'ensemble des tirants étant précontraint avec une charge longitudinale  $P$ , la raideur géométrique est prise en compte en considérant la matrice élémentaire suivante :



(a) Distribution des barres de court-circuit dans une cage d'écoreuil.

(b) Barres de court-circuit en parallèle.

FIGURE B.20 – Modélisation des barres de court-circuit.

$${}^e K_{G_{ti}} = \frac{{}^e P}{(1 + {}^e \phi_{ti})^2} \begin{bmatrix} k_{G_{11}} & -k_{G_{14}} & k_{G_{15}} & k_{G_{18}} \\ \text{Sym} & k_{G_{33}} & -k_{G_{18}} & k_{G_{37}} \\ & & k_{G_{11}} & k_{G_{14}} \\ & & & k_{G_{33}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.47})$$

dont les composantes  $k_{G_{(\bullet)}}$ ,  $(\bullet) = (11, 14, 15, 18, 33, 37)$  sont définies par les Eq. (A.170), Eq. (A.171) et Eq. (A.172).  ${}^e P$  représente la charge longitudinale élémentaire et  ${}^e \phi_{ti}$  est le coefficient de cisaillement élémentaire d'un élément de cylindre équivalent.



## B.4 Modélisation des barres de court circuit

Les barres et anneaux de court-circuit constituent la cage d'écoreuil d'un rotor de moteur à induction, FIG. B.20(a).

### B.4.1 Hypothèse cinématique

Les  $n_{cc}$  barres de court-circuit de diamètre  $d_{cc}$  sont vissées en leurs milieux dans l'empilement de tôles magnétiques comme le montre la FIG. B.21. Lorsque la masse magnétique fléchit latéralement, les extrémités des barres de court-circuit peuvent se mouvoir dans les anneaux de court-circuit.

Les barres de court-circuit sont modélisées avec des éléments finis de poutres de Timoshenko, dont les lignes neutres coïncident avec celle de la masse magnétique, FIG. B.21. Ce sont donc  $n_{cc}$  poutres en parallèle contenues dans un plan orthogonal au plan de déflexion transversale de la masse magnétique, FIG. B.20(b).

### B.4.2 Modélisation éléments finis

La discrétisation de chacune des barres de court-circuit conduit aux matrices élémentaires de raideur et de masse  ${}^e K_{fcc}$ ,  ${}^e M_{cc} \in \mathcal{M}_{4,4}$  telles que :

$${}^e K_{fcc} = n_{cc} \frac{E_{cc} I_{G_{x_{cc}}}}{(1 + {}^e \phi_{cc})^2 l_{cc}^3} \begin{bmatrix} 12 & -6{}^e l_{cc} & -12 & -6{}^e l_{cc} \\ -6{}^e l_{cc} & (4 + {}^e \phi_{cc}) {}^e l_{cc}^2 & 6{}^e l_{cc} & (2 - {}^e \phi_{cc}) {}^e l_{cc}^2 \\ -12 & 6{}^e l_{cc} & 12 & 6{}^e l_{cc} \\ -6{}^e l_{cc} & (2 - {}^e \phi_{cc}) {}^e l_{cc}^2 & 6{}^e l_{cc} & (4 + {}^e \phi_{cc}) {}^e l_{cc}^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.48})$$

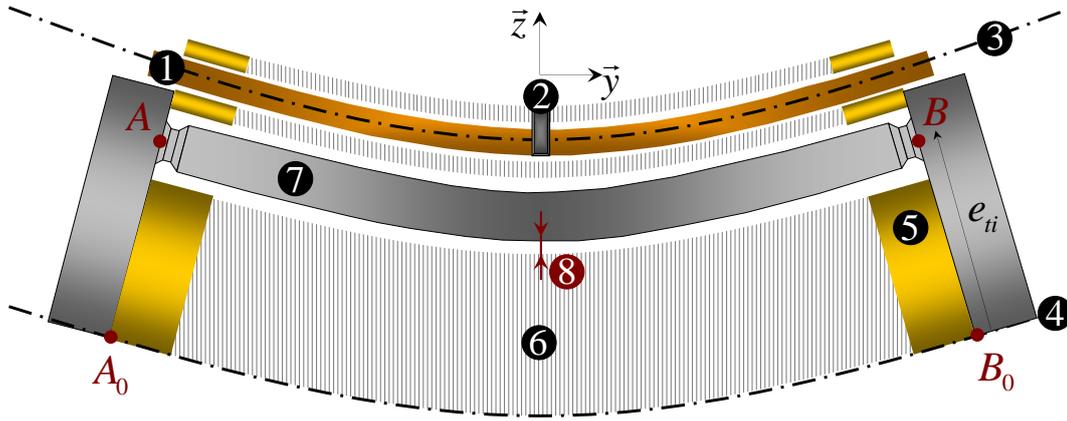


FIGURE B.21 – Hypothèse cinématique. ❶ : Barres de court-circuit, ❷ : Vis, ❸ : Ligne neutre des barres de court-circuit, ❹ : Ligne neutre de la masse magnétique, ❺ : Anneau de court-circuit, ❻ : Empilement de tôles magnétiques, ❼ : Tirant, ❽ : Jeu fonctionnel.

et :

$${}^e M_{cc} = n_{cc} \frac{\rho_{cc} S_{cc} {}^e l_{cc}}{(1 + {}^e \phi_{cc})^2} \begin{bmatrix} m_{T_{11}} & -m_{T_{14}} & m_{T_{15}} & m_{T_{18}} \\ & m_{T_{33}} & -m_{T_{18}} & m_{T_{37}} \\ \text{Sym} & & m_{T_{11}} & m_{T_{14}} \\ & & & m_{T_{33}} \end{bmatrix} + n_{cc} \frac{\rho_{cc} I_{G_{x_{cc}}}}{{}^e l_{cc} (1 + {}^e \phi_{cc})^2} \begin{bmatrix} m_{R_{11}} & -m_{R_{14}} & m_{R_{15}} & m_{R_{18}} \\ & m_{R_{33}} & -m_{R_{18}} & m_{R_{37}} \\ \text{Sym} & & m_{R_{11}} & m_{R_{14}} \\ & & & m_{R_{33}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.49})$$

où  $E_{cc}$ ,  $\rho_{cc}$  sont respectivement le module d'Young et la masse volumique d'une barre de court-circuit,  $I_{G_{x_{cc}}}$  et  $S_{cc}$  représentent respectivement le moment quadratique autour de l'axe  $x$  et la section d'une barre de court-circuit,  ${}^e \phi_{cc}$  est le coefficient de cisaillement élémentaire d'un élément de barre de court-circuit de longueur  ${}^e l_{cc}$ .

**Remarque 29:** Les périphéries des anneaux de court-circuit, FIG. B.22(a), de l'empilement de tôles magnétiques, FIG. B.22(b), ainsi que l'extrémité des portions d'arbre, FIG. B.22(c) sont percées afin de permettre l'insertion des barres de court-circuit et des tirants. En utilisant la même démarche présentée en Section B.3.3, Eq. (B.43a) et Eq. (B.43b), tous les éléments présentant une distribution d'alésage en leur périphérie sont modélisés par des éléments de cylindre équivalent conservant leur propriétés inertielles et de rigidité, FIG. B.23.



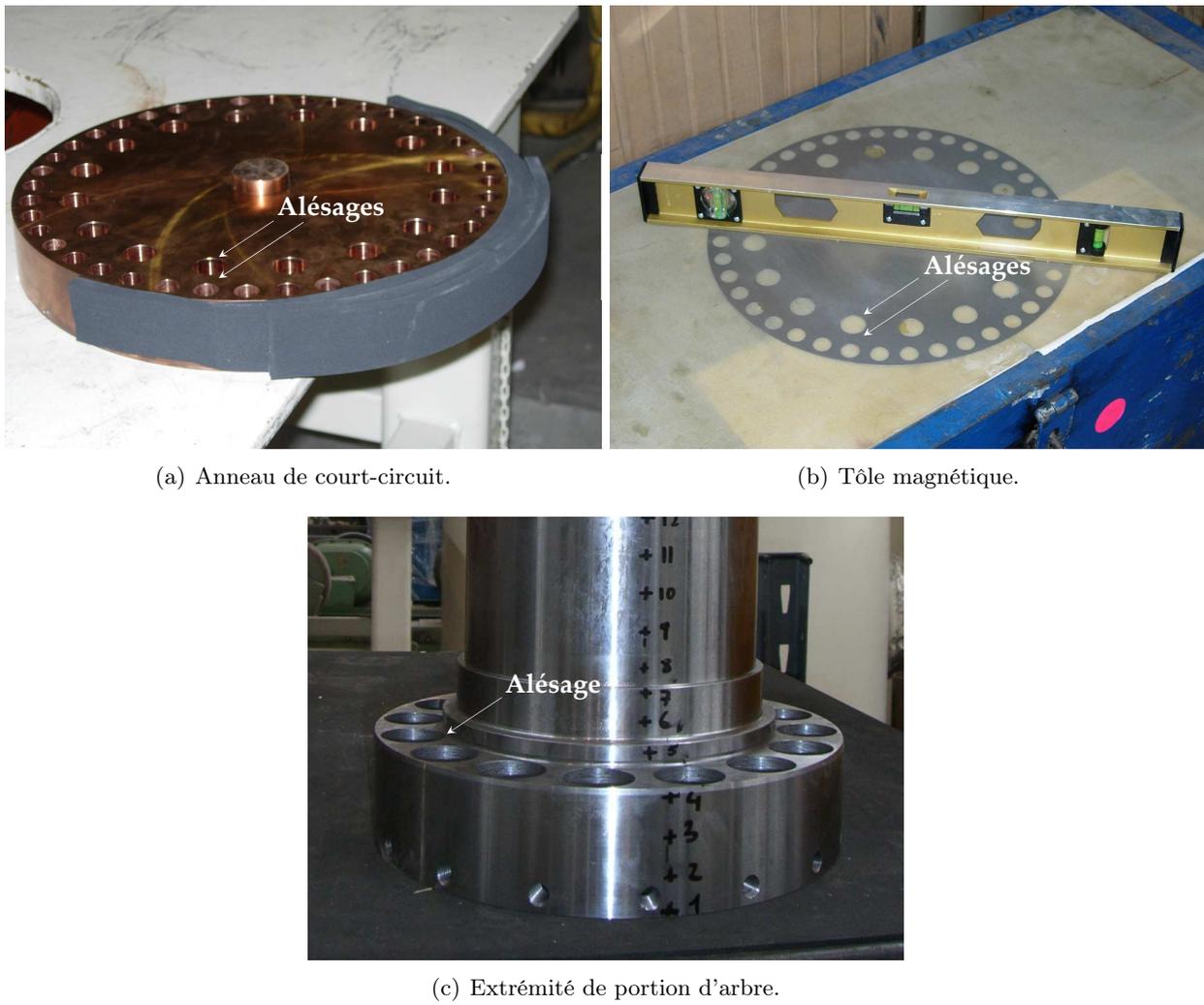


FIGURE B.22 – Mise en évidence des alésages présents sur différents éléments d'un rotor feuilleté.

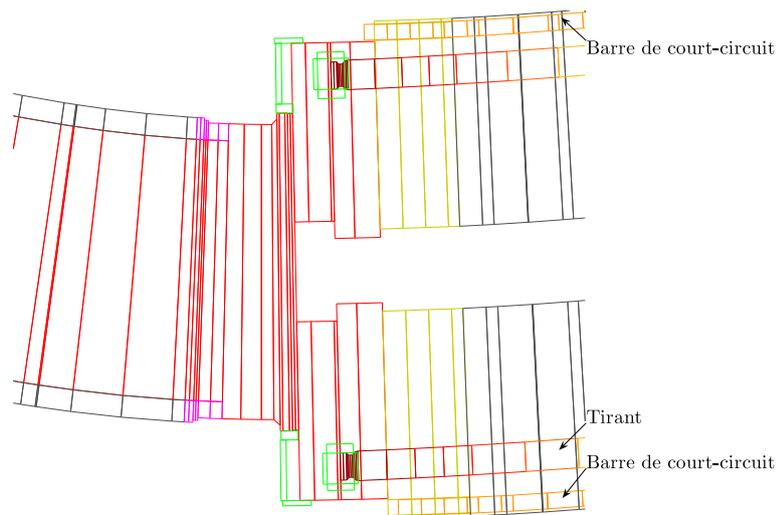


FIGURE B.23 – Mise en évidence des hypothèses de modélisation des barres et anneaux de court-circuit, tôles magnétiques et portion d'arbre sur un modèle éléments finis de rotor feuilleté.

## Annexe C

# Identification des propriétés constitutives des éléments d'un rotor feuilleté

### C.1 Algorithmes d'optimisation

DANS une approche d'identification mixte numérique-expérimentale, la convergence progressive des données modales numériques du modèle éléments finis, dont les paramètres sont inconnus, vers les valeurs cibles que représentent les données expérimentales est généralement réalisée de manière itérative à l'aide d'un algorithme d'optimisation cherchant à réduire autant que possible l'écart global entre ces deux ensembles de données.

Dans le cadre de ce problème d'identification, on se propose donc de minimiser une fonctionnelle  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ , non linéaire, qui traduit l'écart entre les quantités modales mesurées et calculées, en cherchant les valeurs optimales  $x$  des  $n$  propriétés constitutives de l'empilement de tôles  $x \in \mathbb{R}^n$ . La minimisation d'une fonctionnelle  $f$  consiste à résoudre le problème d'optimisation général suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{x^* \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sous les contraintes } & \begin{cases} g_e(x) = 0 \\ g_i(x) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (C.1)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}rouver \ x^* \ \text{tel que} \quad f(x^*) \quad \text{soit minimum} \\ & \text{satisfaisant} \quad \begin{cases} g_e(x^*) = 0 \\ g_i(x^*) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où  $g_e : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n_g}$  et  $g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n_h}$  peuvent être non linéaires et  $n_e, n_i \in \mathbb{N}$  représentant respectivement le nombre de contraintes d'égalité et de d'inégalité. On appelle alors  $x^*$  un **optimum** local de la fonctionnelle  $f$  impliquant alors que l'on ne puisse trouver d'antécédent  $x^* + \gamma, \forall \gamma \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|\gamma\|$  suffisamment petit, dont l'image ait une valeur inférieure à  $f(x^*)$ . Ainsi,  $x^*$  est alors un **point stationnaire** de la fonctionnelle  $f$  satisfaisant la condition suivante :

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (C.2)$$

La difficulté d'un tel problème réside dans la définition mathématique des fonctions  $f, g_e$  et  $g_i$ . Les problèmes d'identification mixte numériques-expérimentaux peuvent cependant se passer de la définition des fonctions traduisant d'éventuelles contraintes. Comme par définition les données expérimentales sont physiquement admissibles (aux erreurs de mesure près), minimiser l'écart

entre quantité calculée et mesurée tend automatiquement à faire respecter les contraintes physiques imposées aux paramètres. Ainsi, il est possible de considérer ce problème d'optimisation général contraints, Eq. (C.1), sans contraintes, celles-ci étant implicitement contenues dans les valeurs expérimentales.

Par ailleurs, s'il est définitivement indispensable d'imposer des contraintes sur les valeurs les paramètres d'optimisation afin que celles-ci satisfassent, non pas une quelconque relation non linéaire entre elles, mais plutôt un encadrement, il est possible de définir une simple bijection permettant à l'algorithme d'optimisation d'itérer sur des paramètres qui satisferont à coup sûr ces encadrements, Annexe C.1.3.3.

La recherche des paramètres optimaux peut être réalisée en utilisant un algorithme d'optimisation qui itérera sur les valeurs des paramètres d'optimisation  $x$  de telle sorte que la condition suivante soit satisfaisante à chaque itération  $i$  :

$$f(x^{i+1}) < f(x^i), \quad (\text{C.3})$$

où l'exposant  $( )^i$  est relatif aux itérations de l'algorithme d'optimisation telles que  $i = 0, \dots, n_{it}$ ,  $n_{it}$  étant le nombre maximal d'itérations. Pour les problèmes sans contrainte, les principaux algorithmes utilisés dans ce domaine sont basés sur des :

- Méthodes de **descente** : gradient à pente maximale, à pas optimal,
- Méthodes de **gradient conjugué**,
- Méthodes de type **Newton** : il peut être cité la méthode de *Davidon*, *Fletcher* et *Powell* (DFP) ou bien celle de *Broyden*, *Fletcher*, *Goldfarb* et *Shanno* (BFGS) [96]. Elles comprennent également les méthodes spécifiques pour les problèmes de type **moindres carrés** : Méthodes de *Gauss-Newton* ou de *Levenberg-Marquardt*.

Pour les problèmes contraints, ceux-ci peuvent être du type programmation quadratique séquentielle (SQP, Sequential Quadratic Programming), [97].

### C.1.1 Méthodes de descente

Les méthodes de descente sont des méthodes du premier ordre basées sur la notion de descente de gradient et qui impliquent, par conséquent, de connaître uniquement que les dérivées partielles du premier ordre de la fonctionnelle à minimiser.

Un vecteur  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  est une direction de descente en  $x$  s'il existe  $\bar{\tau} > 0$  tel que :

$$f(x + \tau\gamma) < f(x), \forall \tau \in ]0, \bar{\tau}]. \quad (\text{C.4})$$

Le principe d'une méthode de descente consiste à faire les itérations suivantes :

$$x^i = x^i + \tau^i \gamma^i \text{ satisfaisant } f(x^{i+1}) < f(x^i). \quad (\text{C.5})$$

Le scalaire  $\tau^i$  est appelé le **pas de descente** à l'itération  $i$  et le vecteur  $\gamma^i \in \mathbb{R}^n$  est la **direction**

**de descente** en  $x^i$  qui respecte la condition suivante :

$$\begin{aligned} f(x^i + \tau^i \gamma^i) &= f(x^i) + \tau^i \nabla^t f(x^i) \gamma^i + \tau^i o(t), \quad \forall t > 0, \\ \Leftrightarrow \frac{f(x^i + \tau^i \gamma^i) - f(x^i)}{\tau^i} &= \nabla^t f(x^i) \gamma^i + o(t). \end{aligned} \tag{C.6}$$

Or si  $\tau^i$  est suffisamment petit, il vient alors :

$$f(x^i + \tau^i \gamma^i) - f(x^i) < 0, \tag{C.7}$$

ce qui implique la condition suivante :

$$\nabla^t f(x^i) \gamma^i < 0. \tag{C.8}$$

Les méthodes du premier ordre présentées ci-après caractérisent les directions de descente en  $x^i$  à l'aide du gradient de la fonctionnelle  $f$  tel que :

$$\gamma^i = -\nabla f(x^i). \tag{C.9}$$

### C.1.1.1 Algorithme du gradient à plus forte pente

La méthode du gradient à plus forte pente (ou “*steepest descent*”) est une méthode d'optimisation du premier ordre qui utilise un pas de descente  $\tau$  constant et le gradient de la fonctionnelle  $f(x^i)$  pour atteindre l'optimum, Alg. 3.

---

**Algorithm 3** Algorithme du gradient de plus grande pente (“*steepest descent*”)

---

- 1:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau$ ,  $\varepsilon_\nabla$ ,  $\varepsilon_\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $n_{it} \in \mathbb{N}$  donnés
  - 2: **while**  $\nabla f(x^i) \leq \varepsilon_\nabla$ ,  $\|\gamma^i\| \leq \varepsilon_\gamma \|x^i\|$ ,  $i \leq n_{it}$  **do**
  - 3: Détermination d'une direction de descente  $\gamma^i \in \mathbb{R}^n$   
 $\gamma^i = -\nabla f(x^i)$
  - 4: Actualisation du vecteur des paramètres d'optimisation  $x^{i+1}$   
 $x^{i+1} = x^i + \tau \gamma^i$
  - 5: **end while**
- 

L'avantage de cette méthode est que sous certaines hypothèses de régularité ( $f$  deux fois différentiable), celle-ci converge si  $\tau$  est choisi assez petit. En revanche, comme le pas de descente est constant et arbitraire, le nombre d'itérations nécessaires à la convergence peut être très important.

### C.1.1.2 Algorithme du gradient à pas optimal

Cet inconvénient peut être contourné en utilisant une méthode de recherche de lignes “*line search*” qui permettra d'adapter le pas de descente  $\tau$ , à chaque itération  $i$ , en fonctionnelle du gradient de la fonctionnelle à minimiser.

Plusieurs méthodes de recherche de lignes sont proposées dans la littérature, [98] : règle d'Armijo, règle de Goldstein ou encore règle de Wolfe qui est la plus performante mais plus coûteuse car elle utilise le gradient de  $f$  alors que les deux précédentes n'utilisent que des valeurs de la fonctionnelle  $f$ . Les auteurs de [99] proposent d'ailleurs un algorithme extrêmement performant assurant la détermination d'un pas de descente  $\tau^i$  qui garantit une décroissance satisfaisante.

On obtient ainsi la méthode du gradient à pas optimal, Alg. 4.

---

**Algorithm 4** Algorithme du gradient à pas optimal
 

---

- 1:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau$ ,  $\varepsilon_\nabla$ ,  $\varepsilon_\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $n_{it} \in \mathbb{N}$  donnés
  - 2: **while**  $\nabla f(x^i) \leq \varepsilon_\nabla$ ,  $\|\gamma^i\| \leq \varepsilon_\gamma \|x^i\|$ ,  $i \leq n_{it}$  **do**
  - 3: Détermination d'une direction de descente  $\gamma^i \in \mathbb{R}^n$   
 $\gamma^i = -\nabla f(x^i)$
  - 4: Détermination d'un pas de descente optimal  $\tau^i$  par "line search" tel que  
 $f(x^i + \tau^i \gamma^i) \leq f(x^i + \tau \gamma^i)$ ,  $\forall \tau > 0$
  - 5: Actualisation du vecteur des paramètres d'optimisation  $x^{i+1}$   
 $x^{i+1} = x^i + \tau^i \gamma^i$
  - 6: **end while**
- 

### C.1.2 Méthodes de type Newton

Les méthodes de type Newton sont des méthodes de descente qui peuvent être du second ordre qui utilisent une information supplémentaire concernant la courbure de la fonctionnelle  $f$  à minimiser.

#### C.1.2.1 Algorithme de Newton

La plus largement utilisée est la méthode de Newton qui est la base de toutes les méthodes de type quasi-Newton. Elle permet la résolution de systèmes d'équations non linéaires et de problèmes d'optimisation sans contraintes. La méthode de Newton est issue d'un développement limité de Taylor à l'ordre de deux de la fonctionnelle  $f(x)$  en l'itéré courant  $x$ , tel que :

$$f(x + \gamma) \simeq f_q(\gamma), \quad (\text{C.10})$$

soit approximée par le modèle quadratique  $f_q(\gamma) \in \mathbb{R}$  au voisinage de l'itéré  $x$  :

$$f_q(\gamma) = f(x) + \gamma^t \nabla f(x) + \frac{1}{2} \gamma^t \nabla^2 f(x) \gamma. \quad (\text{C.11})$$

Au voisinage de  $x$ , le principe consiste alors à minimiser, non plus la fonctionnelle  $f$ , mais son modèle quadratique  $f_q$ . Si  $\nabla^2 f$  est définie positive, alors  $f_q$  aura un unique minimiseur  $\gamma_n$  pour lequel le gradient du modèle quadratique, par rapport au pas de Newton  $\gamma_n$ , s'annulera tel que :

$$\begin{aligned} \nabla f_q(\gamma)|_{\gamma_n} &= 0, \\ \Leftrightarrow \left. \frac{\partial}{\partial \gamma} [f(x) + \gamma^t \nabla f(x) + \gamma^t \nabla^2 f(x) \gamma] \right|_{\gamma_n} &= 0, \\ \Leftrightarrow \nabla^2 f(x) \gamma_n &= -\nabla f(x). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Finalement, dans l'algorithme de Newton, Alg. 5, le minimiseur (ou direction de descente) de Newton  $\gamma_n$  est défini par la solution du système Eq. (C.12) telle que :

$$\gamma_n = -H^{-1}(x) \nabla f(x), \quad \text{avec } H(x) = \nabla^2 f(x), \quad (\text{C.13})$$

où  $H \in \mathcal{M}_{n,n}$  est la matrice Hessienne de la fonctionnelle  $f$ .

La méthode de Newton est parfaitement définie tant que la matrice Hessienne  $\nabla^2 f$  reste non-singulière. De plus, si la matrice Hessienne est définie positive, i.e.  $x^t H x > 0$ ,  $\forall x \text{ in } \mathbb{R}^n$ ,  $x > 0$ , alors  $\gamma_n$  sera une direction de descente. Pour une matrice Jacobiennne  $J(x^*)$  non singulière si la

**Algorithm 5** Algorithme de *N*ewton

- 
- 1:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon_\nabla$ ,  $\varepsilon_\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $n_{it} \in \mathbb{N}$  donnés
  - 2: **while**  $\nabla f(x^i) \leq \varepsilon_\nabla$ ,  $\|\gamma^i\| \leq \varepsilon_\gamma \|x^i\|$ ,  $i \leq n_{it}$  **do**
  - 3: Détermination d'une direction de *N*ewton  $\gamma^i \in \mathbb{R}^n$   
 $\gamma^i = -H^{-1}(x^i) \nabla f(x^i)$  avec  $H(x^i) = \nabla^2 f(x^i)$
  - 4: Actualisation du vecteur des paramètres d'optimisation  $x^{i+1}$   
 $x^{i+1} = x^i + \gamma^i$
  - 5: **end while**
- 

valeur initiale  $x^0$  est suffisamment proche de l'optimum  $x^*$ , cette méthode a une convergence finale quadratique, mais n'est pas robuste. De plus, elle requiert l'implémentation des dérivées partielles secondes de la fonctionnelle  $f$ , ce qui est rarement réalisé en pratique.

**Remarque 30:** La méthode de *N*ewton permet de déterminer l'optimum  $x^*$  d'une fonctionnelle purement quadratique  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  en un seul et unique pas. Le terme "purent" signifie que la fonctionnelle  $f$  est une fonction quadratique des variables d'optimisation  $x$ . En effet, si la fonctionnelle est définie par la relation suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^tAx - b^tx, \quad (\text{C.14})$$

avec  $A \in \mathcal{M}_{n,n}$  définie positive  $A > 0$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ . Il vient alors :

$$\nabla f(x) = Ax - b, \quad (\text{C.15a}) \quad \nabla^2 f(x) = H(x) = A. \quad (\text{C.15b})$$

Vue sa nature purement quadratique, l'optimum  $x^*$  de la fonctionnelle  $f$  peut être défini analytiquement d'une part :

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) &= 0, \\ \Leftrightarrow Ax^* - b &= 0, \\ \Leftrightarrow x^* &= A^{-1}b. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

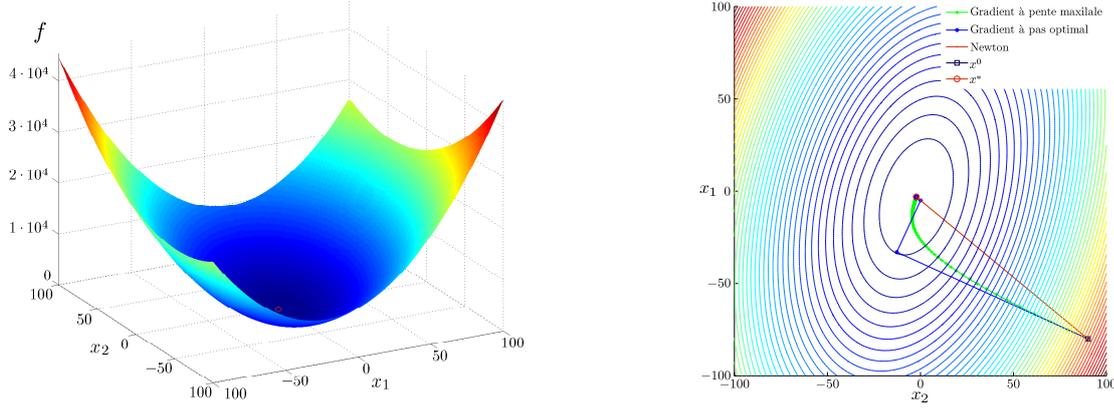
D'autre part, si l'on admet que l'on se place en  $x^0$  et que l'on se réfère à l'Eq. (C.13), le pas (ou minimiseur) de *N*ewton  $\gamma_n$  s'écrira :

$$\begin{aligned} \gamma_n &= -H^{-1}(x^0) \nabla f(x^0), \\ \Leftrightarrow \gamma_n &= -A^{-1}(Ax^0 - b), \\ \Leftrightarrow \gamma_n &= -x^0 + A^{-1}b. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Ainsi, le nouvel itéré  $x^1$  issu de l'algorithme de *N*ewton, Alg. 5, aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} x^1 &= x^0 + \gamma_n, \\ \Leftrightarrow x^1 &= x^0 - x^0 + A^{-1}b, \\ \Leftrightarrow x^1 &= A^{-1}b \quad \equiv x^*, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

qui correspond parfaitement à la valeur optimale  $x^*$  défini dans l'Eq. (C.16) et montre donc que l'algorithme de *N*ewton converge en une seule et unique itération dans le cas d'une fonctionnelle purement quadratique.



(a) Tracé de la fonctionnelle  $f$  à minimiser. L'optimum est tracé en rouge ( $\odot$ ). (b) Tracé des itérés issue des méthodes de gradient à plus forte pente (+), à pas optimal (\*), et méthode de  $\mathcal{N}$ ewton ( $\cdot$ ).

FIGURE C.1 – Illustration de la convergence issue de différentes méthodes d'optimisations élémentaires. Le point de départ  $x^0$  est tracé en bleu ( $\square$ ) alors que l'optimum  $x^*$  est tracé en rouge ( $\odot$ ).



**Remarque 31:** Considérons la fonctionnelle quadratique  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ,  $n = 2$  définie dans l'Eq. (C.14) tel que le vecteur  $x \in \mathbb{R}^2$  s'écrive :

$$x = (x_1, x_2)^t. \quad (\text{C.19})$$

On associe aux matrices  $A \in \mathcal{M}_{2,2}$  et vecteur  $b \in \mathbb{R}^2$  les valeurs arbitraires suivantes, *e.g.* :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.20a}) \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.20b})$$

mais de manière à ce que  $A > 0$ , *i.e.* ses deux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  doivent être positives. En l'occurrence, ces dernières valent :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (7 + \sqrt{13}), \quad (\text{C.21a}) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} (7 - \sqrt{13}). \quad (\text{C.21b})$$

On sait alors que le minimum de la fonctionnelle quadratique  $f$ , tracée FIG. C.1(a), est donné par l'Eq. (C.16) tel que :

$$x^* = \left( -\frac{28}{9}, -\frac{20}{9} \right)^t. \quad (\text{C.22})$$

On se propose alors de minimiser la fonctionnelle  $f$  en utilisant différents algorithmes : la méthode du gradient à plus forte pente, la méthode du gradient à pas optimal et la méthode  $\mathcal{N}$ ewton. Notons que la valeur du pas de descente  $\tau$  utilisé dans la méthode du gradient à plus forte pente a été fixée à  $\tau = 10^{-2}$ . Par ailleurs, la valeur initiale des paramètres d'optimisation a été fixée à  $x^0 = (-80, 90)^t$ . La FIG. C.1(b) présente l'évolution des itérés lors du processus de minimisation réalisés à l'aide des différents algorithmes.

L'optimum  $x^*$  a été atteint par les trois algorithmes tel que :

$$x^* = (x_1^*, x_2^*)^t = (-3.11, -2.22)^t \approx \left( -\frac{28}{9}, -\frac{20}{9} \right)^t \quad (\text{C.23})$$

On constate que la méthode de  $\mathcal{N}$ ewton permet d'atteindre effectivement l'optimum en une seule itération alors que la méthode du gradient à plus forte pente à convergée en 527 itérations.

L'avantage du choix d'un pas optimal, à chaque itération, conduit la méthode du gradient à pas optimal à converger en 15 itérations.



### C.1.2.2 Fonctionnelle non linéaire de type moindres carrés

Soit une fonctionnelle  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$  définie par la relation suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q F_k^2(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2 = \frac{1}{2} F^t(x) F(x), \quad \text{avec } q > n, \quad (\text{C.24})$$

où  $\| \cdot \|$  représente la norme  $\mathcal{E}$ uclidienne et  $F \in \mathbb{R}^q$  représente le vecteur des normes (ou estimateurs) d'erreurs dépendant de  $x \in \mathbb{R}^n$ . La minimisation de cette fonctionnelle de type moindres carrés est réalisée en résolvant le problème Eq. (C.1) afin de déterminer son optimum  $x^*$ .

En revanche, la forme particulière de cette fonctionnelle de type moindres carrés permet de considérer certaines simplifications, et par conséquent, d'adapter des algorithmes particulièrement adaptés à sa nature.

### C.1.2.3 Algorithme de Gauss-Newton

La méthode Gauss-Newton est utilisée pour les problèmes de moindres carrés non linéaires où la fonctionnelle  $f$  à minimiser a la forme définie dans l'Eq. (C.24). L'information concernant la courbure de la fonctionnelle  $f$  est bien sûr obtenue grâce à sa matrice  $\mathcal{H}$ essienne  $H$ , laquelle présentera, dans ce cas, une forme particulière.

En effet, en dérivant l'Eq. (C.24) par rapport aux paramètres d'optimisation  $x$ , il vient :

$$\nabla f(x) = \sum_{k=1}^q \nabla F_k(x) F_k(x) = J^t(x) F(x). \quad (\text{C.25})$$

où le gradient  $\nabla F_k \in \mathbb{R}^n$  des composantes du vecteur des normes d'erreur  $F$  s'écrit :

$$\nabla F_k(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.26})$$

et  $J \in \mathcal{M}_{q,n}$  est la matrice  $\mathcal{J}$ acobienne du vecteur des normes d'erreur  $F$  dont les composantes sont définies par :

$$J_{kp}(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x_p}(x). \quad (\text{C.27})$$

La matrice  $\mathcal{H}$ essienne de  $f$  a donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x) &= \sum_{k=1}^q \nabla F_k(x) \nabla F_k(x) + \sum_{k=1}^q \nabla^2 F_k(x) F_k(x), \\ \Leftrightarrow \nabla^2 f(x) &= J^t(x) J(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^q \nabla^2 F_k(x) F_k(x)}_{\text{Termes négligés}}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

avec  $\nabla^2 F_k \in \mathcal{M}_{n,n}$  est la matrice  $\mathcal{H}$ essienne de la  $k^e$  composante du vecteur des normes d'erreur  $F$  telle que :

$$\nabla^2 F_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.29})$$

La méthode  $\mathcal{G}$ auss- $\mathcal{N}$ ewton est basée sur une approximation du premier ordre des composantes  $F_k$  du vecteur des normes d'erreur. En effet, en approximant ces dernières par un modèle issu d'un développement limité de  $\mathcal{T}$ aylor autour de  $x$ , il vient alors :

$$F(x + \gamma) \simeq \mathcal{L}(\gamma) \equiv F(x) + J^t(x) \gamma. \quad (\text{C.30})$$

où  $\gamma$  est une direction de descente. En substituant l'Eq. (C.30) dans l'Eq. (C.24), on obtient alors l'approximation de la fonctionnelle  $f$  :

$$f(x + \gamma) \simeq l(\gamma) \equiv \frac{1}{2} \mathcal{L}^t(\gamma) \mathcal{L}(\gamma). \quad (\text{C.31})$$

L'Eq. (C.31) se développe alors comme suit :

$$\begin{aligned} l(\gamma) &\equiv \frac{1}{2} (F(x) + J^t(x) \gamma) (F(x) + J^t(x) \gamma), \\ \Leftrightarrow l(\gamma) &\equiv \underbrace{\frac{1}{2} F^t(x) F(x)}_{f(x)} + \gamma^t J^t(x) F(x) + \frac{1}{2} \gamma^t J^t(x) J(x) \gamma, \\ \Leftrightarrow l(\gamma) &\equiv f(x) + \gamma^t J^t(x) F(x) + \frac{1}{2} \gamma^t J^t(x) J(x) \gamma. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Les expressions des vecteur gradient et matrice  $\mathcal{H}$ essienne de l'approximation  $l(\gamma)$ , par rapport à la direction de descente  $\gamma$ , sont donc les suivantes :

$$\nabla l(\gamma) = J^t(x) F(x) + J^t(x) J(x) \gamma, \quad (\text{C.33a}) \quad \nabla^2 l(\gamma) = J^t(x) J(x), \quad (\text{C.33b})$$

Ainsi, l'Eq.(C.33b) fait apparaître clairement l'approximation relative à la matrice  $\mathcal{H}$ essienne si l'on la compare à l'Eq. (C.28). En effet, le second terme de l'Eq. (C.28) est négligé dans la méthode de  $\mathcal{G}$ auss- $\mathcal{N}$ ewton.

Les Eq. (C.25) et Eq.(C.33a) montrent que l'on a l'égalité  $\nabla l(0) = \nabla f(x)$ . De plus, la matrice  $\mathcal{H}$ essienne  $\nabla^2 l(\gamma)$  est indépendante de  $\gamma$ . Cette matrice  $\mathcal{H}$ essienne possède une propriété intéressante : elle est symétrique et semi-définie positive. De plus, si la matrice  $\mathcal{J}$ acobienne  $J(x)$  est "plein rang", *i.e.* si ses colonnes sont linéairement indépendantes, alors  $\nabla^2 l(\gamma)$  est définie positive. Cela implique, par conséquent, que l'approximation  $l(\gamma)$  possède un unique minimiseur  $\gamma_{gn} \in \mathbb{R}^n$ , satisfaisant la condition Eq. (C.8), et qui est solution du système suivant :

$$\begin{aligned} \nabla l(\gamma_{gn}) &= 0, \\ \Leftrightarrow J^t(x) J(x) \gamma_{gn} &= -J^t(x) F(x). \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Le minimiseur de  $\mathcal{G}$ auss- $\mathcal{N}$ ewton s'écrit donc :

$$\gamma_{gn} = -H^{-1}(x) J^t(x) F(x), \quad \text{avec } H(x) \approx J^t(x) J(x). \quad (\text{C.35})$$

En comparant le minimiseur  $\gamma_{gn}$ , Eq. (C.34), et celui de  $\mathcal{N}$ ewton, Eq. (C.13), défini par la

relation suivante dans le cas d'une fonctionnelle de type moindre carré, Eq. (C.28) :

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x) \gamma_n &= -\nabla f(x), \\ \Leftrightarrow \left( J^t(x) J(x) + \sum_{k=1}^q \nabla^2 F_k(x) F_k(x) \right) \gamma_n &= -J^t(x) F(x). \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

On constate que si  $F(x^*) = 0$ , alors  $J^t(x) J(x) \approx \nabla^2 f(x)$  pour  $x$  situé au voisinage de l'optimum  $x^*$ , et dans ce cas, la méthode de Gauss-Newton à également une convergence finale quadratique.

L'approximation de la matrice Hessienne concernant l'abstraction du terme suivant :

$$\sum_{k=1}^q \nabla^2 F_k(x) F_k(x) \approx 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla^2 F_k(x) \approx 0 & (a) \\ F_k(x^*) \approx 0 & (b) \end{cases}, \quad (\text{C.37})$$

est justifiée par les points suivants qui impliquent une convergence finale généralement linéaire (voir super linéaire) :

- (a)  $F_k(x^*) \approx 0$  : si les valeurs des composantes  $F_k$  sont faibles en l'optimum  $x^*$ ,
- (b) Si  $\nabla^2 F_k \approx 0$  : si les courbures des composantes  $F_k$  présentent de faibles courbures.

Il est à noter, cependant, que si les courbures  $\nabla^2 F_k$  varient lentement avec  $k$ , et si les composantes  $F_k$  ont un comportement de type "bruit blanc", comme c'est souvent le cas dans les procédures d'interpolation de données, alors les termes négligés de l'Eq. (C.28) peuvent presque s'annuler entre eux, de sorte qu'il est possible d'obtenir une convergence super-linéaire.

Ainsi, en remplaçant dans la méthode de Newton, la matrice Hessienne  $H$  par l'approximation  $\nabla^2 l(\gamma)$ , Eq.(C.33b), on obtient la méthode de Gauss-Newton, Alg. 6.

---

**Algorithm 6** Algorithme de Gauss-Newton

---

- 1:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon_\nabla$ ,  $\varepsilon_\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $n_{it} \in \mathbb{N}$  donnés
  - 2: **while**  $\nabla f(x^i) \leq \varepsilon_\nabla$ ,  $\|\gamma^i\| \leq \varepsilon_\gamma \|x^i\|$ ,  $i \leq n_{it}$  **do**
  - 3: Détermination d'un gradient de fonctionnelle  $\nabla f \in \mathbb{R}^n$   
 $\nabla f(x^i) = J^t(x^i) F(x^i)$
  - 4: Détermination d'une matrice Hessienne  $H \in \mathcal{M}_{n,n}$   
 $H(x^i) \approx J^t(x^i) J(x^i)$
  - 5: Détermination d'une direction de Gauss-Newton  $\gamma^i \in \mathbb{R}^n$   
 $\gamma^i = -H^{-1}(x^i) \nabla f(x^i)$
  - 6: Actualisation du vecteur des paramètres d'optimisation  $x^{i+1}$   
 $x^{i+1} = x^i + \gamma^i$
  - 7: **end while**
- 

Pour assurer la convergence globale de la méthode de Gauss-Newton, on peut combiner l'algorithme précédent, Alg. 6, avec une méthode de recherche linéaire de manière à déterminer, à chaque itération  $i$ , le pas de descente optimal  $\tau^i \in \mathbb{R}$ , tel que le point 6 devienne :

$$x^{i+1} = x^i - \tau^i \gamma^i. \quad (\text{C.38})$$

Cependant, cette méthode est conditionnellement stable dans la mesure où la matrice Hessienne  $H$  doit être définie positive, ce qui n'est pas garanti. On fait alors appel, en générale, à une méthode modifiée appelée méthode de Levenberg-Marquardt.

### C.1.3 Algorithme de Levenberg- $\mathcal{M}$ arquardt

Le principe consiste à approximer la fonctionnelle  $f$ , Eq. (C.24), par le modèle  $f_\mu(\gamma)$  suivant :

$$\begin{aligned} f_\mu(\gamma) &= f_q(\gamma) + \frac{1}{2}\mu\gamma^t\gamma, \\ \Leftrightarrow f_\mu(\gamma) &= f(x) + \gamma^t\nabla f(x) + \frac{1}{2}\gamma^t(\nabla^2 f(x) + \mu I)\gamma, \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

où  $f_q(\gamma)$  est défini dans l'Eq. (C.11). Le minimiseur de Levenberg- $\mathcal{M}$ arquardt  $\gamma_{lm} \in \mathbb{R}^n$  est donc solution, pour une fonctionnelle de type moindre carrée, du système suivant, Eq. (C.41) :

$$\begin{aligned} \nabla f_\mu(\gamma_{lm}) &= 0, \\ \Leftrightarrow (\nabla^2 f(x) + \mu I)\gamma_{lm} &= -\nabla f(x), \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

et défini par :

$$\gamma_{lm} = -[J^t(x)J(x) + \mu I]^{-1}J^t(x)F(x). \quad (\text{C.41})$$

où  $I \in \mathcal{M}_{n,n}$  est une matrice identité. Cela revient donc à remplacer, dans la méthode de Gauss-Newton, la matrice Hessienne  $H$ , Eq. (C.35), par la matrice  $H + \mu I$  où  $\mu \in \mathbb{R}$  est appelé **paramètre d'amortissement**.

---

#### Algorithm 7 Algorithme de Levenberg- $\mathcal{M}$ arquardt

---

- 1:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon_\nabla$ ,  $\varepsilon_\gamma$ ,  $\varepsilon_\mu \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $n_{it} \in \mathbb{N}$  donnés
  - 2: Initialisation des paramètres d'optimisation bornés  $y^0 \in \mathbb{R}^n$   
 $y^0 = \sigma^{-1}(x^0)$
  - 3: Initialisation du paramètre d'amortissement  $\mu^0$   
 $\mu^0 = \varepsilon_\mu \cdot \max J^t(x^0)J(x^0)$
  - 4: **while**  $\nabla f(x^i) \leq \varepsilon_\nabla$ ,  $\|\gamma^i\| \leq \varepsilon_\gamma \|x^i\|$ ,  $i \leq n_{it}$  **do**
  - 5: Application d'une bijection  $\sigma : y \mapsto x$   
 $x^i = \sigma(y^i)$
  - 6: Détermination d'un gradient de fonctionnelle  $\nabla f \in \mathbb{R}^n$   
 $\nabla f(x^i) = J^t(x^i)F(x^i)$
  - 7: Détermination du facteur de gain  $\rho^i \in \mathbb{R}$   
 $\rho^i = \frac{f(x^i) - f(x^i + \gamma^i)}{l(0) - l(\gamma^i)}$
  - 8: Actualisation du paramètre d'amortissement  $\mu^i \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow$  Alg. 8
  - 9: Détermination d'une matrice Hessienne  $H \in \mathcal{M}_{n,n}$   
 $H(x^i) \approx J^t(x^i)J(x^i) + \mu^i I$
  - 10: Détermination d'une direction de Levenberg- $\mathcal{M}$ arquardt  $\gamma^i \in \mathbb{R}^n$   
 $\gamma^i = -H^{-1}(x^i)\nabla f(x^i)$
  - 11: Actualisation du vecteur des paramètres d'optimisation  $x^{i+1}$   
 $y^{i+1} = y^i + \tau^i \gamma^i$
  - 12: **end while**
- 

L'algorithme de Levenberg- $\mathcal{M}$ arquardt, Alg. 7, est reconnu comme étant très robuste et généralement très performant dans une grande variété de cas, notamment pour les fonctionnelles de type moindres carrés [100]. Aussi, ayant une vitesse de convergence théoriquement moins élevée que celle de la méthode de Gauss-Newton, dans certains cas très spécifiques, ce dernier est plus efficace sur la majorité des cas rencontrés. Par conséquent, l'algorithme de Levenberg- $\mathcal{M}$ arquardt a donc été privilégié pour minimiser la fonctionnelle  $f$  et identifier les propriétés constitutives de l'empilement

de tôles magnétiques.

Le paramètre d'amortissement  $\mu$  a différents effets sur la convergence de l'algorithme :

- $\forall \mu > 0$  suffisamment grand, alors la matrice  $J^t(x)J(x) + \mu I$  est définie positive ce qui assure que  $\gamma_{lm}$  est une direction de descente (un minimiseur de  $f_\mu$ ).
- L'Eq. (C.39) montre que le terme  $\frac{1}{2}\mu\gamma^t\gamma$  pénalise les grands pas de descente. De plus, lorsque  $\mu \rightarrow +\infty$ , l'Eq. (C.41) permet d'écrire que le minimiseur  $\gamma_{lm}$  tend vers l'égalité suivante :

$$\gamma_{lm} \simeq -\frac{1}{\mu}\nabla f(x), \quad (\text{C.42})$$

*i.e.* qui correspond à un pas de descente très petit  $\frac{1}{\mu}$ , dans la direction de descente de plus forte pente  $\nabla f(x)$ . Cet ajustement possible du paramètre d'amortissement est très utile surtout lorsqu'il s'agit de débiter le processus d'itération avec un itéré  $x$  éloigné de l'optimum  $x^*$ .

- Si  $\mu \rightarrow 0$ , l'Eq. (C.41) permet d'écrire :

$$\gamma_{lm} \simeq \gamma_{gn}, \quad (\text{C.43})$$

ce qui correspond à un pas de descente très satisfaisant, surtout dans la mesure où l'on se trouve dans la phase de convergence finale, *i.e.* au voisinage de l'optimum  $x^*$ . Par ailleurs, si  $f(x) \simeq 0$  alors la convergence finale tendra vers une convergence quadratique. Ainsi, un ajustement adapté du paramètre d'amortissement  $\mu$  apporte à cet algorithme la robustesse de la méthode de plus grande pente lors des premières itérations et la convergence d'une méthode de Gauss-Newton lors des itérations finales.

Ainsi, la valeur du paramètre  $\mu$  affecte à la fois la direction et la valeur du pas de descente  $\gamma_{lm}$  sans recourir à un algorithme de recherche linéaire ("*line search*") ce qui permet de se soustraire à d'éventuelles évaluations coûteuses de fonctionnelle ou de gradient.

### C.1.3.1 Actualisation du paramètre d'amortissement

La méthode d'actualisation proposée par [101] consiste alors à poser  $\tau^i = 1$  et à actualiser fréquemment le paramètre  $\mu^i$  à l'aide l'algorithme Alg. 8.

La valeur initiale du paramètre d'amortissement  $\mu$  doit dépendre des valeurs des composantes de la matrice  $J^t(x^0)J(x^0)$ , *e.g.* :

$$\mu^0 = \varepsilon_\mu \cdot \max J^t(x^0)J(x^0), \quad \text{avec } \varepsilon_\mu \in \mathbb{R}. \quad (\text{C.44})$$

L'algorithme est très sensible à la valeur de  $\varepsilon_\mu$ , mais l'on peut définir comme règle générale que lorsque  $x^0$  est une bonne approximation de  $x^*$ , on peut utiliser une faible valeur, *e.g.*  $\varepsilon_\mu = 10^{-6}$ . Sinon, il est préconisé de fixer  $\varepsilon_\mu = 10^{-3}$  voir même  $\varepsilon_\mu = 1$  de manière à tendre vers la méthode de plus grande pente.

Durant les itérations, l'algorithme d'actualisation du paramètre d'amortissement doit être en mesure de diminuer la valeur de  $\mu^i$  lorsque l'itéré  $x^i$  est au voisinage de  $x^*$ , *i.e.* lorsque  $\gamma^i$  devient tellement petit que  $l(\gamma^i)$  devienne une bonne approximation de  $f(x^i + \gamma^i)$ .

L'actualisation du paramètre d'amortissement  $\mu^i$  est effectuée en calculant un "facteur de gain"

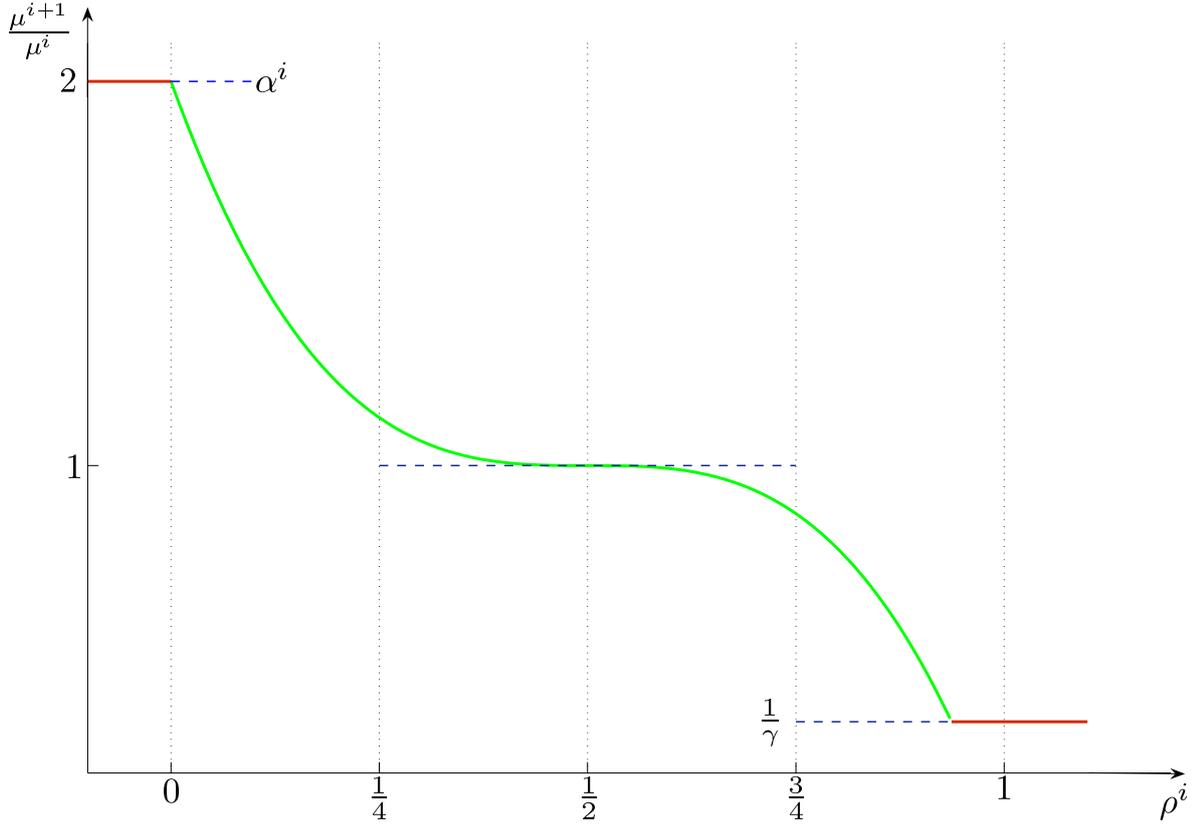


FIGURE C.2 – Visualisation de la méthode d'actualisation du paramètre d'amortissement  $\mu^i$  en fonction du facteur de gain  $\rho^i$ ,  $\alpha^i = \beta = 2$ ,  $\gamma = p = 3$ .

$\rho^i$  (ou “gain factor”), *i.e.* rapport entre les décroissances de la fonctionnelle  $f$  et son approximation obtenue en développant le vecteur  $F$  en une série de  $\mathcal{T}$ aylor limité au premier ordre :

$$\rho^i = \frac{f(x^i) - f(x^i + \gamma^i)}{l(0) - l(\gamma^i)}, \quad (\text{C.45})$$

où le dénominateur est le gain prédit par l'approximation issu du développement de  $\mathcal{F}$  au premier ordre, Eq. (C.31), tel que :

$$\begin{aligned} l(0) - l(\gamma^i) &= f(x^i) - f(x) - \gamma^{it} J^t(x) F(x) - \frac{1}{2} \gamma^{it} J^t(x) J(x) \gamma^i, \\ \Leftrightarrow l(0) - l(\gamma^i) &= -\frac{1}{2} \gamma^{it} (2\nabla f(x) + (J^t(x) J(x) + \mu^i I) \gamma^i - \mu^i I \gamma^i), \\ \Leftrightarrow l(0) - l(\gamma^i) &= \frac{1}{2} \gamma^{it} (\mu^i \gamma^i - \nabla f(x)). \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Il est à noter que les termes  $\mu^i \gamma^{it} \gamma^i$  et  $-\gamma^{it} \nabla f(x)$ , Eq. (C.8), sont positifs, ce qui assure que  $l(0) - l(\gamma^i)$  est positif. Si  $\rho^i$  est grand, alors le paramètre d'amortissement  $\mu^i$  diminuera afin que la méthode tende vers celle de Gauss-Newton à l'itération suivante, Alg. 8.

Si  $\rho^i < 0$ , alors l'itéré  $x^{i+1}$  restera constant jusqu'à l'itération suivante, à l'inverse de  $\mu^i$  qui augmentera de manière à faire tendre la convergence vers celle de plus grande pente avec un pas de descente réduit. En revanche, si  $\rho^i > 0$  mais petit, il sera plus judicieux d'utiliser un paramètre d'amortissement  $\mu^{i+1}$  plus grand à l'itération suivante, Alg. 8.

**Algorithm 8** Algorithme d'actualisation du paramètre d'amortissement [101]

- 
- 1:  $\alpha^i, \beta, \gamma, \mu^i, \rho^i \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}$  donnés à l'itération  $i$
  - 2: **if**  $\rho^i > 0$  **then**
  - 3: Actualisation des paramètres d'optimisation  $y^{i+1}$   
 $y^{i+1} = y^i + \gamma^i$
  - 4: Actualisation du paramètre d'amortissement  $\mu^{i+1}$   
 $\mu^{i+1} = \mu^i \max\left[\frac{1}{\gamma}, 1 - (\beta - 1)(2\rho^i - 1)^p\right]$   
 $\alpha^{i+1} = \beta$
  - 5: **else**
  - 6: Actualisation du paramètre d'amortissement  $\mu^{i+1}$   
 $\mu^{i+1} = \mu^i \alpha^i$   
 $\alpha^{i+1} = 2\alpha^i$
  - 7: **end if**
- 

Cette actualisation induit une convergence plus régulière (“*smoothy*”) et plus rapide, FIG. C.2, que la méthode proposée initialement par Marquardt [102].

**C.1.3.2 Normalisation des variables d'optimisation**

Les paramètres d'optimisation  $x$  sont définis relativement aux paramètres d'optimisation initiaux  $x^0$  afin d'éviter d'éventuels problèmes de conditionnement numérique dans l'algorithme de minimisation, notamment au niveau du calcul de la matrice  $\mathcal{J}$  acobienne  $J$ , Eq. (C.41). Ainsi, les itérations de l'algorithme auront lieu sur le vecteur des variables d'optimisation normalisées  $\bar{x}^i$ , de telle sorte qu'à l'itération  $i$ , on ait :

$$\bar{x}_p^i = \frac{x_p^i}{x_p^0}. \quad (\text{C.47})$$

**C.1.3.3 Encadrement des variables d'optimisation**

L'objectif de la procédure d'identification mixte numérique-expérimentale étant de déterminer les propriétés constitutives d'une structure, *e.g.* il peut s'avérer utile d'encadrer les variables d'optimisation normalisées  $\bar{x}_p$  de manière à obtenir des propriétés constitutives positives ou bornées. On se propose alors d'utiliser la bijection suivante :

$$\sigma : y_p \mapsto \bar{x}_p = \alpha_p + \frac{(\beta_p - \alpha_p)}{1 + e^{\chi y_p}}, \quad y_p, \chi \in \mathbb{R}, \bar{x}_p \in [\alpha_p, \beta_p], \quad p = 1, \dots, n, \quad (\text{C.48})$$

où  $\chi$  est un paramètre intimement lié à la valeur de la dérivée première de la bijection  $\sigma$  :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y_p} = \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial y_p} = (\alpha_p - \beta_p) \frac{\chi e^{\chi y_p}}{(1 + e^{\chi y_p})^2}, \quad (\text{C.49})$$

en  $y_p = 0$  telle que :

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial y_p} \right|_{y_p=0} = (\alpha_p - \beta_p) \chi. \quad (\text{C.50})$$

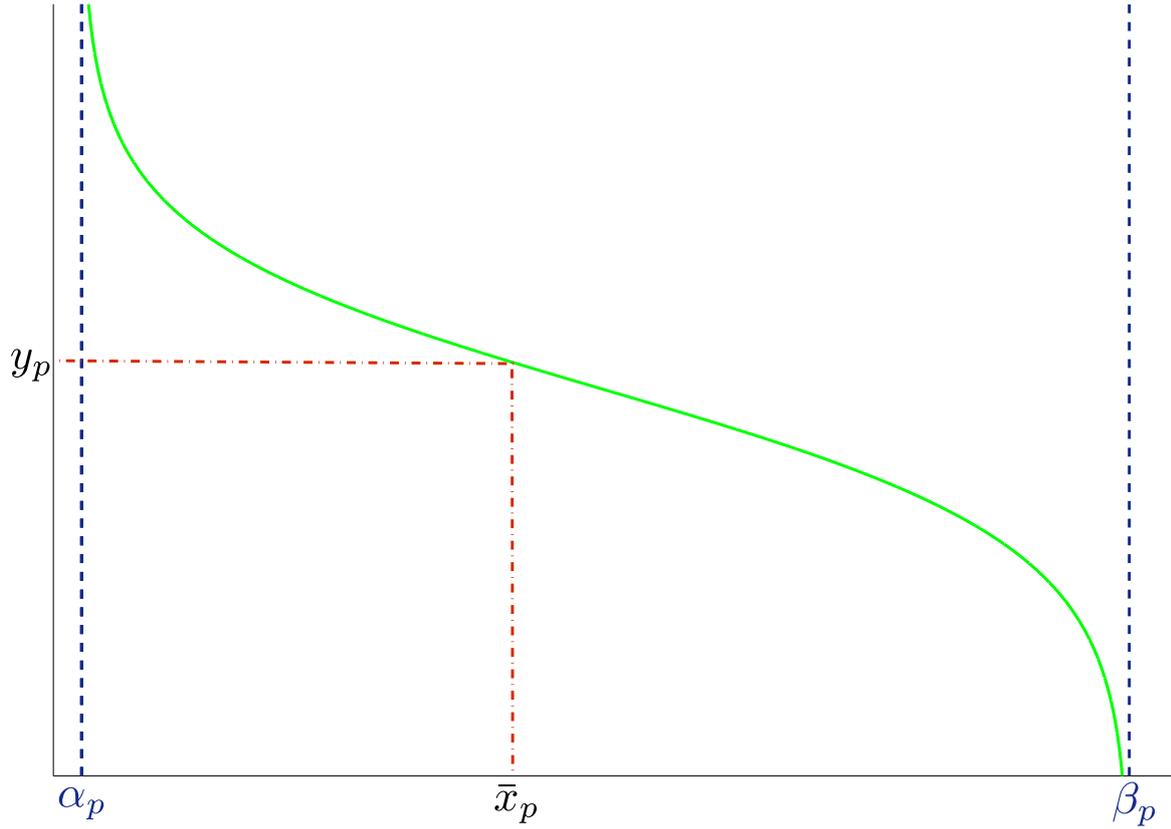


FIGURE C.3 – Visualisation de la bijection  $\sigma$  (Eq. (C.48)) permettant d'encadrer les variables d'optimisation normées  $\bar{x}_p$ . La valeur du paramètre  $\chi$  a été fixée à  $\frac{5}{100}$ .

$\alpha_p$  et  $\beta_p$  sont respectivement les valeurs des bornes inférieures et supérieures des domaines de définition des variables  $x_p$ , tel que :

$$\begin{cases} y_p \rightarrow -\infty & , \bar{x}_p \rightarrow \beta_p \\ y_p \rightarrow 0 & , \bar{x}_p \rightarrow \frac{1}{2}(\alpha_p + \beta_p) \\ y_p \rightarrow +\infty & , \bar{x}_p \rightarrow \alpha_p \end{cases} . \quad (\text{C.51})$$

Employer une telle bijection (voir FIG. C.3) permet de tirer partie des avantages d'un algorithme sous contrainte, généralement plus coûteux en temps de calcul, tout en bénéficiant de la simplicité d'implémentation d'un algorithme sans contraintes. Les itérations n'ont donc plus lieu sur les variables d'optimisation normalisées  $\bar{x}_p$  bornées mais sur les variables bornées  $y_p \in \mathbb{R}$ . Le retour aux paramètres d'optimisation normalisés s'effectuera donc par la bijection inverse définie par :

$$\sigma^{-1} : \bar{x}_p \mapsto y_p = \frac{1}{\chi} \ln \left( \frac{\beta_p - \alpha_p}{x_p - \alpha_p} \right), \quad p = 1, \dots, n. \quad (\text{C.52})$$

**Remarque 32:** Les changements de variables précédemment définis, Eq. (C.47) et Eq. (C.48), permettent d'exprimer les dérivées partielles par rapport aux itérés de l'algorithme d'optimisation tels que :

$$\frac{\partial(\ )}{\partial y_p} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_p} \underbrace{\frac{\partial x_p}{\partial \bar{x}_p}}_{\text{Normalisation}} \underbrace{\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial y_p}}_{\text{Bijection}}, \quad p = 1, \dots, n, \quad (\text{C.53})$$

où  $\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial y_p}$  est défini dans l'Eq. (C.49) et :

$$\frac{\partial x_p}{\partial \bar{x}_p} = x_p^0, \quad p = 1, \dots, n. \quad (\text{C.54})$$



## C.2 Dérivation des éléments propres

La matrice  $\mathcal{J}$  acobienne  $J(x^i)$ , utilisée dans l'algorithme de minimisation, Alg. 7, dépend implicitement des pulsations propres  $\omega_k(x^i)$  et vecteurs propres  $\varphi_k(x^i)$ . Par souci de clarté et de concision, l'exposant  $( )^i$  représentant les itérations de l'algorithme de minimisation est abandonné et l'on supposera que les éléments propres dépendent des paramètres  $x^i$ . Il est donc indispensable d'exprimer les formes analytiques des dérivées des éléments propres par rapport aux variables d'optimisation  $x_p, p = 1, \dots, n$ .

Soient  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  et  $\varphi_k \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  les  $k^e$  valeur et vecteur (ou forme) propre associé d'une structure énergétiquement parfaite constituée des matrices de masse  $M \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  et de raideur  $K \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$ . L'équation qui régit la dynamique de cette structure en régime libre est l'équation homogène suivante :

$$(K - \lambda_k M) \varphi_k = 0, \quad \text{avec } \lambda_k = \omega_k^2, \quad k = 1, \dots, n_\delta, \quad (\text{C.55})$$

où  $\omega_k \in \mathbb{R}$  est la  $k^e$  pulsation propre.

On suppose les vecteurs propres  $\varphi_k$  sont normés unitairement vis-à-vis de la matrice de masse  $M$  tels que :

$$\varphi_q^t M \varphi_k = \delta_{qk}, \quad k, q = 1, \dots, n_\delta, \quad (\text{C.56})$$

où  $\delta_{qk}$  représente le symbole de Kronecker. Cela permet d'ajouter une équation supplémentaire nécessaire au calcul des dérivées des valeurs et vecteurs propres.

### C.2.1 Dérivation des valeurs propres

En dérivant les Eq. (C.55) et Eq. (C.56) par rapport à la variable  $x_p$ , les dérivées des éléments propres sont alors régies par les relations suivantes [103; 104] :

$$A_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} = P_k, \quad (\text{C.57})$$

$$\varphi_k^t M \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} = Q_k, \quad (\text{C.58})$$

avec  $A_k \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  et  $P_k \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  sont définis tels que :

$$A_k = (K - \lambda_k M), \quad (\text{C.59a}) \quad P_k = - \left( \frac{\partial K}{\partial x_p} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_p} M - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial x_p} \right) \varphi_k. \quad (\text{C.59b})$$

et  $Q_k \in \mathbb{R}$  :

$$Q_k = -\frac{1}{2} \varphi_k^t \frac{\partial M}{\partial x_p} \varphi_k. \quad (\text{C.60})$$

En prémultipliant l'Eq. (C.57) par  $\varphi_k^t$ , on obtient l'égalité :

$$\varphi_k^t (K - \lambda_k M) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} = -\varphi_k^t \left( \frac{\partial K}{\partial x_p} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_p} M - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial x_p} \right) \varphi_k. \quad (\text{C.61})$$

La matrice  $A_k$  étant symétrique, on peut donc écrire :

$$\varphi_k^t (K - \lambda_k M) = (K - \lambda_k M) \varphi_k. \quad (\text{C.62})$$

En substituant l'Eq. (C.62) dans l'Eq. (C.61), on obtient :

$$\varphi_k^t \left( \frac{\partial K}{\partial x_p} - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial x_p} \right) \varphi_k - \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_p} \underbrace{\varphi_k^t M \varphi_k}_{\delta_{kk}} = 0. \quad (\text{C.63})$$

En substituant l'Eq. (C.56) dans l'Eq. (C.63), la dérivée de la  $k^e$  valeur propre  $\lambda_k$  par rapport à  $x_p$  est obtenue par la relation suivante [48; 105; 106] :

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_p} = \varphi_k^t \left( \frac{\partial K}{\partial x_p} - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial x_p} \right) \varphi_k. \quad (\text{C.64})$$

## C.2.2 Dérivation des vecteurs propres

Concernant les dérivées des vecteurs propres, on pourrait envisager qu'il suffise d'utiliser l'Eq. (C.57). Cependant, le problème est que cette équation n'est pas inversible. En effet, la matrice  $A_k$  est singulière et de rang  $n_\delta - 1$  car  $\lambda_k$  est une valeur propre, dont la multiplicité est égale à 1, est solution de l'Eq. (C.55). Par conséquent, des méthodes ont été développées afin de calculer les dérivées des vecteurs propres de manière exacte [48] ou approchée [104].

La méthode de la projection modale permet d'obtenir une solution exacte des dérivées des vecteurs propres en projetant les dérivées des vecteurs propres dans la base modale complète du système, Eq. (C.55). Cette méthode suppose que la dérivée du  $k^e$  vecteur propre  $\varphi_k$  par rapport à  $x_p$  peut être exprimée par la série suivante :

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} = \sum_{j=1}^{n_\delta} c_j \varphi_j, \quad (\text{C.65})$$

où  $c_j \in \mathbb{R}$  et les  $\varphi_j$  sont supposés normés par rapport à la matrice de masse  $M$ . La substitution de l'Eq. (C.65) dans l'Eq. (C.57) conduit à :

$$(K - \lambda_k M) \sum_{i=1}^{n_\delta} c_i \varphi_i = \varphi_k^t P_k. \quad (\text{C.66})$$

En prémultipliant l'Eq. (C.66) par  $\varphi_q^t$ ,  $q \in [1, n_\delta]$ , il vient :

$$\begin{aligned} \varphi_q^t (K - \lambda_k M) \sum_{i=1}^{n_\delta} c_i \varphi_i &= \varphi_q^t P_k, \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n_\delta} c_i \varphi_q^t K \varphi_i - \lambda_k \sum_{i=1}^{n_\delta} c_i \varphi_q^t M \varphi_i &= \varphi_q^t P_k. \end{aligned} \quad (\text{C.67})$$

Or la première somme de l'Eq. (C.67) se simplifie grâce à la propriété d'orthogonalité des vecteurs propres vis-a-vis de la matrice de raideur  $K$ , Eq. (2.113b), telle que :

$$\sum_{i=1}^{n_\delta} c_i \varphi_q^t K \varphi_i = c_q \varphi_q^t K \varphi_q. \quad (\text{C.68})$$

Par ailleurs, l'Eq. (C.55) permet d'exprimer l'Eq. (C.68) comme suit :

$$c_q \varphi_q^t K \varphi_q = c_q \lambda_q \varphi_q^t M \varphi_q = c_q \lambda_q \delta_{qq} = \lambda_q c_q. \quad (\text{C.69})$$

Grâce à l'Eq. (C.56), le deuxième terme de l'Eq. (C.67) s'écrit de la manière suivante :

$$\lambda_k \sum_{i=1}^{n_\delta} c_j \varphi_q^t M \varphi_j = \lambda_k c_q \delta_{qj} = \lambda_k c_q. \quad (\text{C.70})$$

Finalement, en substituant les Eq. (C.69) et Eq. (C.70) dans l'Eq. (C.67), on obtient l'expression des  $c_q$  telle que :

$$\begin{aligned} (\lambda_q - \lambda_k) c_q &= \varphi_q^t P_k, \\ \Leftrightarrow c_q &= \frac{\varphi_q^t \cdot P_k}{\lambda_q - \lambda_k}, \text{ avec } q \neq k. \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

L'Eq. (C.71) montre que la dérivée du  $k^e$  vecteur propre  $\varphi_k$  possède une expression unique en tant que combinaison linéaire de tous les vecteurs propres du système, à l'exception du  $k^e$  tel que :

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} = V_k + c_k \varphi_k, \text{ avec } V_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s c_j \varphi_j, V_k \in \mathbb{R}^{n_\delta}. \quad (\text{C.72})$$

En substituant l'Eq. (C.72) dans l'Eq. (C.58), il vient alors :

$$\begin{aligned} \varphi_k^t M (V_k + c_k \varphi_k) &= Q_k, \\ \Leftrightarrow c_k \underbrace{\varphi_k^t M \varphi_k}_{\delta_{kk}} + \varphi_k^t M V_k &= Q_k, \end{aligned} \quad (\text{C.73})$$

qui, en vertu de la normalisation des vecteurs propres vis-à-vis de la matrice de masse  $M$ , Eq. (C.56), permet d'obtenir l'expression de la constant  $c_k$  telle que :

$$c_k = Q_k - \varphi_k^t M V_k. \quad (\text{C.74})$$

Cette méthode, coûteuse en temps de calcul CPU, nécessite la connaissance de tous les vecteurs propres du modèle. Une variante de cette méthode consiste à projeter les dérivées des composantes des modes sur une base modale tronquée mais la précision obtenue est insuffisante si la base de projection est constituée d'un faible nombre de modes. [104] récapitule et compare différents algorithmes existants qui permettent d'obtenir les dérivées des vecteurs propres.

La méthode de Nelson fournit également une solution exacte des dérivées des vecteurs propres. [48] explique clairement cette démarche de résolution qui porte son nom. En effet, à la lumière l'Eq. (C.72) qui peut être décomposée en une solution homogène  $V_k$  et une solution particulière  $c_k \varphi_k$ , l'Eq. (C.57) devient alors :

$$\begin{aligned} A_k (V_k + c_k \varphi_k) &= P_k, \\ \Leftrightarrow A_k V_k + c_k A_k \varphi_k &= P_k, \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

qui se simplifie, grâce à l'Eq. (C.55), comme suit :

$$A_k V_k = P_k. \quad (\text{C.76})$$

$\mathcal{N}$ elson propose alors d'ôter la singularité de la matrice  $A_k$  en supprimant simplement la  $r^e$  équation du système Eq. (C.76). Cependant, le choix de cette équation n'est pas arbitraire et l'indice  $r$  est défini comme suit :

$$\max_{r \in \mathbb{N}} |(\varphi_k)_r|, \quad (\text{C.77})$$

telle que la  $r^e$  composante du  $k^e$  vecteur propre  $\varphi_k$  soit maximale, en valeur absolue.

Concrètement, faire abstraction de la  $r^e$  équation du système Eq. (C.76) revient à annuler une composante du vecteur  $V_k$  :

$$(V_k)_r = 0, \quad (\text{C.78})$$

tel que l'Eq. (C.76) devienne :

$$\tilde{A}_k V_k = \tilde{P}_k, \quad (\text{C.79})$$

où  $\tilde{P}_k \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  est défini par :

$$(\tilde{P}_k)_i = (P_k)_i (1 - \delta_{ri}), \quad \forall i = 1, \dots, n_\delta, \quad (\text{C.80})$$

avec :

$$\tilde{P}_k = \begin{pmatrix} (P_k)_1 \\ \vdots \\ (P_k)_{r-1} \\ 0 \\ (P_k)_{r+1} \\ \vdots \\ (P_k)_{n_\delta} \end{pmatrix} \quad (\text{C.81})$$

où  $\delta_{ri}$  représente le symbole de Kronecker et  $\tilde{A}_k \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  est défini par :

$$(\tilde{A}_k)_{i,j} = (A_k)_{i,j} (1 - \delta_{jr}) (1 - \delta_{ir}) + \delta_{ij} \delta_{ir} \delta_{jr}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n_\delta \quad (\text{C.82})$$

où :

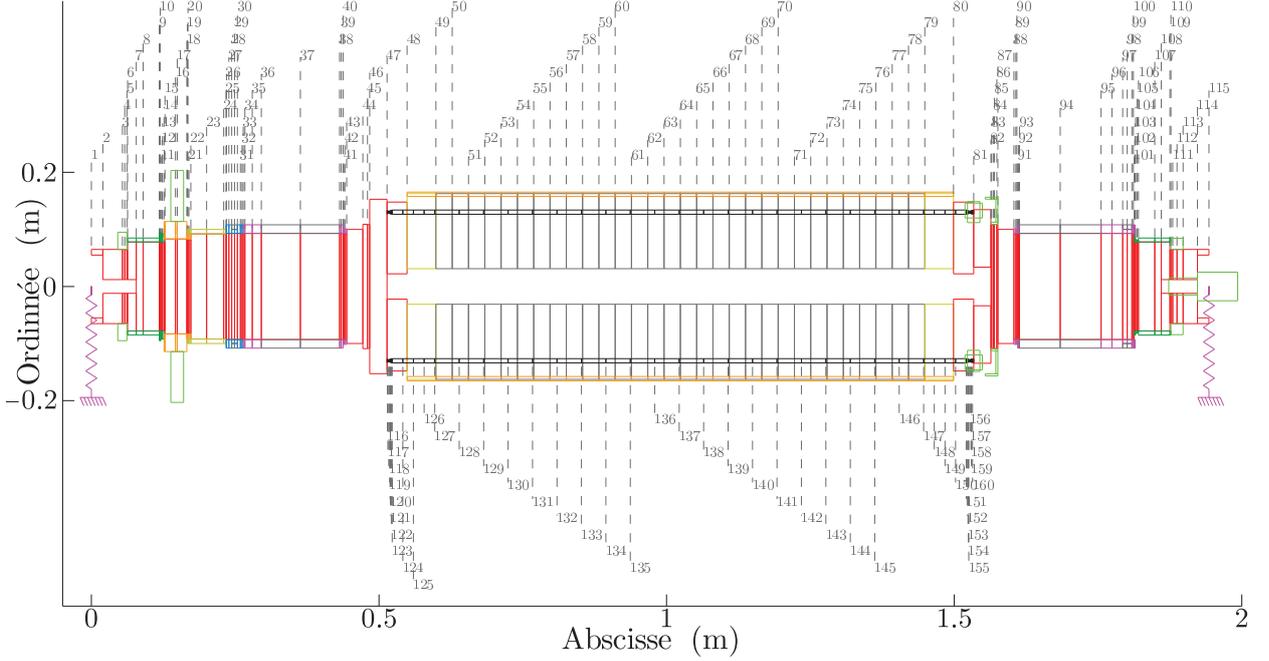
$$\tilde{A}_k = \left[ \begin{array}{ccc|c|ccc} (A_k)_{1,1} & \cdots & (A_k)_{1,r-1} & 0 & (A_k)_{1,r+1} & \cdots & (A_k)_{1,n_\delta} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_k)_{r-1,1} & \cdots & (A_k)_{r-1,r-1} & 0 & (A_k)_{r-1,r+1} & \cdots & (A_k)_{r-1,n_\delta} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline (A_k)_{r+1,1} & \cdots & (A_k)_{r+1,r-1} & 0 & (A_k)_{r+1,r+1} & \cdots & (A_k)_{r+1,n_\delta} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_k)_{n_\delta,1} & \cdots & (A_k)_{n_\delta,r-1} & 0 & (A_k)_{n_\delta,r+1} & \cdots & (A_k)_{n_\delta,n_\delta} \end{array} \right] \quad (\text{C.83})$$

L'Eq. (C.79) devient alors inversible et une solution homogène  $V_k$  est obtenue. Finalement, la solution complète est donnée par la somme de la solution homogène, Eq. (C.79) et de la solution particulière :

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} = \underbrace{V_k}_{\text{Solution Homogène}} + \underbrace{c_k \varphi_k}_{\text{Solution Particulière}}, \quad (\text{C.84})$$

où  $c_k$  est obtenu grâce à l'Eq. (C.74).

La méthode de  $\mathcal{N}$ elson nécessite l'inversion d'autant de matrice  $A_k$  de dimension  $[n_\delta \times n_\delta]$  qu'il y a de vecteurs propres à dériver. Cependant, les systèmes que nous étudions peuvent être considérés comme des systèmes de taille moyenne et l'inversion de telles matrices n'est pas pénalisant en


 FIGURE C.4 – Modèle éléments-finis utilisé pour l'étude paramétrique,  $N_e = 159$ .

terme de coût calculatoire. Cette méthode est générale et permet le calcul des dérivées des éléments propres de matrices complexes et non symétriques. [107] l'utilise pour déterminer la sensibilité des éléments propres de systèmes amortis et [108] pour des systèmes amortis et non symétriques (rotor). [109] utilise la méthode de Nelson pour le calcul des dérivées des éléments propres d'ordre 2 d'un système amorti et non symétriques. Le calcul des dérivées des éléments propres d'un système mécanique peut également être utilisé pour la détection de perturbations [110] ou de dommages dans une structure [111; 112].

D'une manière générale, le calcul de  $q^e$  la dérivée du  $k^e$  vecteur propre  $\frac{\partial^q \varphi_k}{\partial x_p^q}$  nécessite toujours la connaissance des  $q$  premières dérivées des valeurs propres et des  $q - 1$  premières dérivées des vecteur propres. Dans ces conditions, la méthode de Nelson peut bien évidemment être utilisée pour la détermination des dérivées des vecteurs propres d'ordre supérieur.

**Remarque 33:** Les dérivées partielles des valeurs propres, Eq. (C.64), et vecteurs propres, Eq. (C.84), par rapport à un paramètre d'optimisation  $x_p$ , supposent la connaissance des dérivées partielles des matrices de raideur  $\frac{\partial K}{\partial x_p}$  et masse  $\frac{\partial M}{\partial x_p}$  globales. Celles-ci s'obtiennent, dans un premier temps, en dérivant les matrices élémentaires de raideur  ${}^e K_f$ ,  ${}^e M_w$  et  ${}^e M_\theta$  définies respectivement dans les Eq. (B.4), Eq. (B.33) et Eq. (B.34); puis en assemblant, dans un second temps, les dérivées partielles des matrices élémentaires de la même manière que les matrices élémentaires sont assemblées pour construire les matrices globales.



**Remarque 34:** Les méthodes permettant le calcul des dérivées partielles des valeurs et vecteurs propres d'un modèle éléments finis ont été implémentées et une étude paramétrique a été réalisée sur le modèle éléments finis de rotor feuilleté présenté FIG. C.4. Les paramètres considérés sont contenus dans le vecteur  $x \in \mathbb{R}^2$  tels que :

$$x = (x_1, x_2)^t = (E, G)^t. \quad (\text{C.85})$$

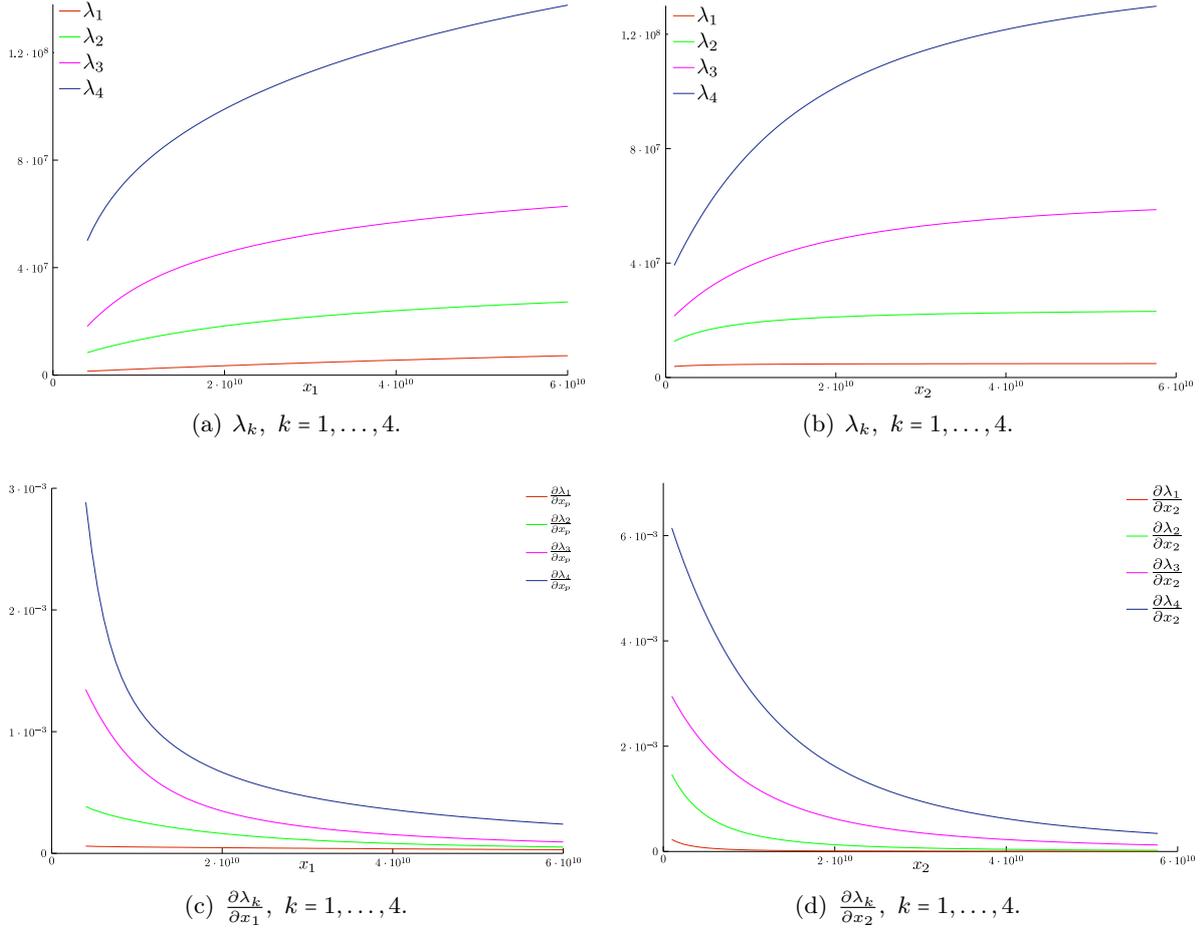


FIGURE C.5 – Évolution des quatre premières valeurs propres  $\lambda_1$  (—),  $\lambda_2$  (—),  $\lambda_3$  (—) et  $\lambda_4$  (—), en  $(\text{rad}^2 \cdot \text{s}^{-2})$ , et de leurs dérivées partielles  $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_p}$  (—),  $\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_p}$  (—),  $\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_p}$  (—),  $\frac{\partial \lambda_4}{\partial x_p}$  (—),  $p = 1, \dots, 2$ , en  $(\text{rad}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{kg})$ , en fonction des paramètres  $x_1$  et  $x_2$  en  $(\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ .

où  $E$ ,  $G$  sont les modules d'Young et de Coulomb de l'empilement de tôles magnétiques, ce dernier étant défini par l'union des éléments finis  $\mathcal{K}_e$ ,  $e = 49, \dots, 78$ .

En considérant un vecteur de paramètres de référence  $x_0$  défini par :

$$x_0 = (x_{01}, x_{02})^t = \left( 7 \cdot 10^{10}, \frac{7 \cdot 10^{10}}{2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)} \right)^t, \quad (\text{C.86})$$

de larges variations sont envisagées, *e.g.*  $\pm 90\%$ , successivement autour de ces valeurs de référence  $x_{01}$  et  $x_{02}$ .

La FIG. C.5 présente, l'évolution des quatre premières valeurs propres du modèle éléments finis en fonction des paramètres  $x_1$  et  $x_2$ , et leurs dérivées partielles respectives par rapport à  $x_1$  et  $x_2$ . Les valeurs propres évoluent naturellement de manière croissante avec  $x_1$  et  $x_2$ . Cette évolution est particulièrement marquée pour les premières valeurs de l'intervalle de variation puis se stabiliser ensuite. Ce constat est corroboré par l'évolution des dérivées partielles des valeurs propres qui décroissent énormément pour les premières valeurs de l'intervalle de variation et se stabilisent nettement dans la deuxième moitié de l'intervalle. Pour le modèle considéré, les quatre premières valeurs propres sont nettement plus sensibles, *i.e.* de l'ordre de deux fois, à une variation du module de Coulomb qu'à une variation du module d'Young.

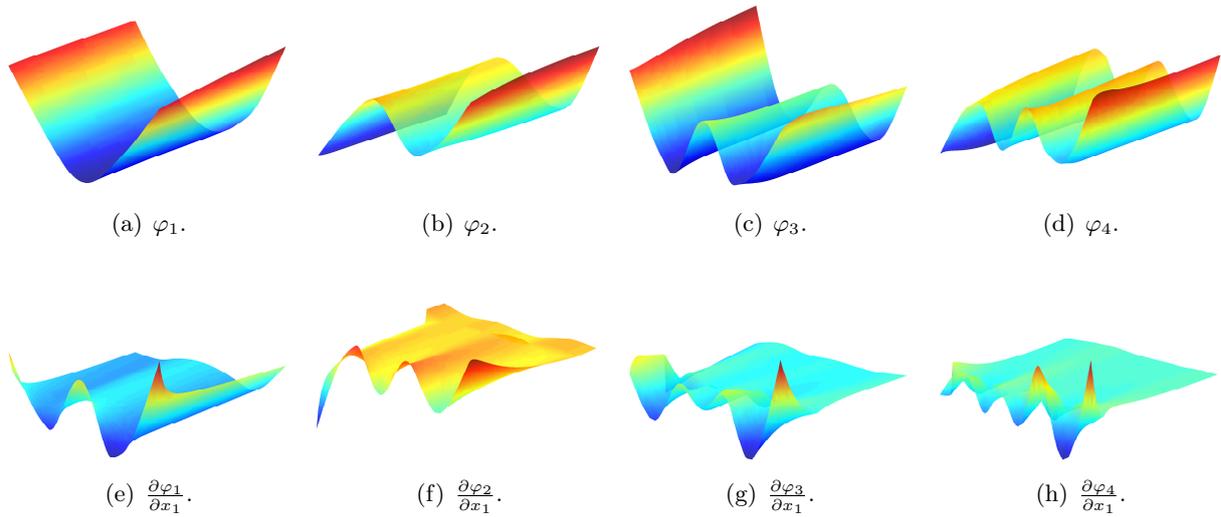


FIGURE C.6 – Évolution des quatre premières formes propres  $\varphi_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  et de leurs dérivées partielles  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}$ ,  $k = 1, \dots, 4$  en fonction de  $x_1$ , en  $(\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ .

Les formes propres, normées vis-à-vis de la matrice de masse du modèle éléments finis, Eq. (C.56), ainsi que leurs dérivées partielles, par rapport aux paramètres  $x_1$  et  $x_2$  sont illustrées dans les FIG. C.6 et FIG. C.7. La sensibilité du modèle éléments finis à une variation du module de  $\mathcal{C}$ oulomb de l'empilement de tôles magnétiques est encore une fois mis en évidence, lorsque l'on observe l'évolution des formes propres au début de l'intervalle. Par ailleurs, sur la seconde moitié de d'intervalle, *i.e.* pour des les valeurs les plus élevées des modules d' $\mathcal{Y}$ oung et de  $\mathcal{C}$ oulomb, les formes propres se stabilisent clairement, notamment pour les formes  $\varphi_3$  et  $\varphi_4$ , dont les dérivées partielles atteignent des valeurs relativement faibles.

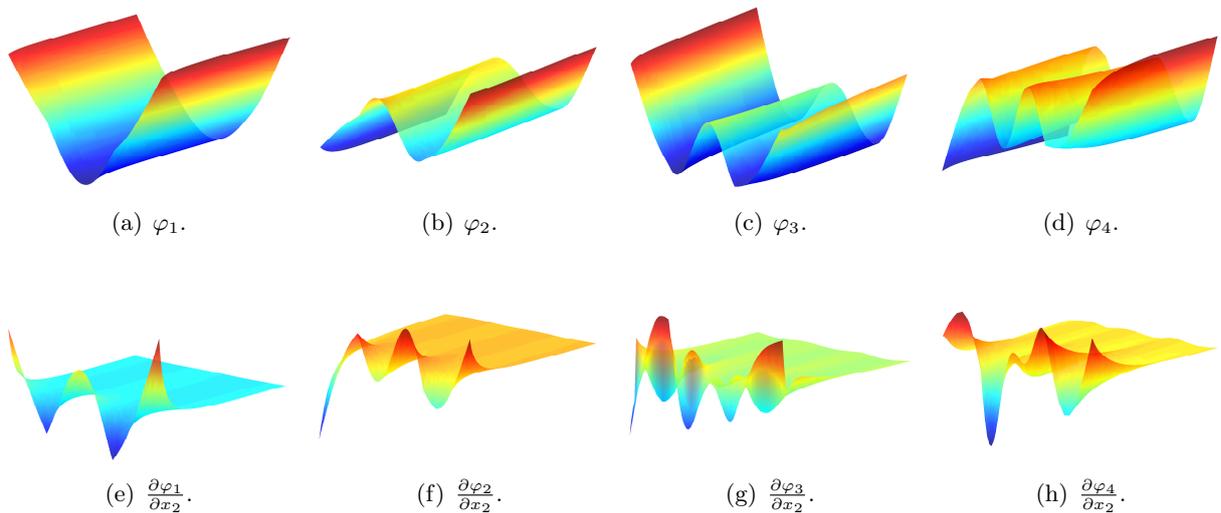


FIGURE C.7 – Évolution des quatre premières formes propres  $\varphi_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  et de leurs dérivées partielles  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}$ ,  $k = 1, \dots, 4$  en fonction de  $x_2$ , en  $(\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ .

### C.3 Obtention de la matrice de transformation de Guyan

Il est possible de reformuler l'Eq. (4.50) telle que :

$$\overline{\overline{K}} \tilde{\psi} \delta_c = \overline{K} \delta_c, \quad (\text{C.87})$$

où  $\overline{\overline{K}} \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$  et  $\overline{K} \in \mathcal{M}_{n_\delta, n_\delta}$ . En définissant les indices des degrés de liberté par le vecteur :

$$\varsigma_{\delta_c} = \left[ \varsigma_{\delta_c}^1, \dots, \varsigma_{\delta_c}^j, \dots, \varsigma_{\delta_c}^{n_\delta} \right]^t, \quad \text{avec } \varsigma_{\delta_c} \in \mathbb{R}^{n_\delta}, \quad (\text{C.88})$$

les matrices précédemment citées  $\overline{\overline{K}}$  et  $\overline{K}$  sont respectivement définies par les relations suivantes :

$$\overline{\overline{K}}_{i,j} = K_{i,j} \prod_{k=1}^{n_\delta} (1 - \delta_{i, \varsigma_{\delta_c}^k}) (1 - \delta_{j, \varsigma_{\delta_c}^k}) + \sum_{k=1}^{n_\delta} \delta_{j, \varsigma_{\delta_c}^k} \delta_{i, \varsigma_{\delta_c}^k}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n_\delta, \quad (\text{C.89})$$

avec :

$$\overline{\overline{K}} = \begin{array}{c} \varsigma_{\delta_c}^k \\ \left[ \begin{array}{ccc|c|ccc} K_{1,1} & \cdots & K_{1, \varsigma_{\delta_c}^k - 1} & 0 & K_{1, \varsigma_{\delta_c}^k + 1} & \cdots & K_{1, n_\delta} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{\varsigma_{\delta_c}^k - 1, 1} & \cdots & K_{\varsigma_{\delta_c}^k - 1, \varsigma_{\delta_c}^k - 1} & 0 & K_{\varsigma_{\delta_c}^k - 1, \varsigma_{\delta_c}^k + 1} & \cdots & K_{\varsigma_{\delta_c}^k - 1, n_\delta} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline K_{\varsigma_{\delta_c}^k + 1, 1} & \cdots & K_{\varsigma_{\delta_c}^k + 1, \varsigma_{\delta_c}^k - 1} & 0 & K_{\varsigma_{\delta_c}^k + 1, \varsigma_{\delta_c}^k + 1} & \cdots & K_{\varsigma_{\delta_c}^k + 1, n_\delta} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n_\delta, 1} & \cdots & K_{n_\delta, \varsigma_{\delta_c}^k - 1} & 0 & K_{n_\delta, \varsigma_{\delta_c}^k + 1} & \cdots & K_{n_\delta, n_\delta} \end{array} \right] \varsigma_{\delta_c}^k, \quad (\text{C.90}) \end{array}$$

$$\overline{K}_{i,j} = -K_{i, \varsigma_{\delta_c}^j} \prod_{k=1}^{n_\delta} (1 - \delta_{i, \varsigma_{\delta_c}^k}) + \sum_{k=1}^{n_\delta} \delta_{\varsigma_{\delta_c}^j, \varsigma_{\delta_c}^k} \delta_{i, \varsigma_{\delta_c}^k}, \quad \forall i = 1, \dots, n_\delta, \quad \forall j = 1, \dots, n_\delta, \quad (\text{C.91})$$

et :

$$\overline{K} = - \begin{array}{c} k \\ \left[ \begin{array}{ccc|c|ccc} K_{1,1} & \cdots & K_{1, \varsigma_{\delta_c}^k - 1} & K_{1, \varsigma_{\delta_c}^k} & K_{1, \varsigma_{\delta_c}^k + 1} & \cdots & K_{1, n_\delta} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{\varsigma_{\delta_c}^k - 1, 1} & \cdots & K_{\varsigma_{\delta_c}^k - 1, \varsigma_{\delta_c}^k - 1} & K_{\varsigma_{\delta_c}^k - 1, \varsigma_{\delta_c}^k} & K_{\varsigma_{\delta_c}^k - 1, \varsigma_{\delta_c}^k + 1} & \cdots & K_{\varsigma_{\delta_c}^k - 1, n_\delta} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline K_{\varsigma_{\delta_c}^k + 1, 1} & \cdots & K_{\varsigma_{\delta_c}^k + 1, \varsigma_{\delta_c}^k - 1} & K_{\varsigma_{\delta_c}^k + 1, \varsigma_{\delta_c}^k} & K_{\varsigma_{\delta_c}^k + 1, \varsigma_{\delta_c}^k + 1} & \cdots & K_{\varsigma_{\delta_c}^k + 1, n_\delta} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n_\delta, 1} & \cdots & K_{n_\delta, \varsigma_{\delta_c}^k - 1} & K_{n_\delta, \varsigma_{\delta_c}^k} & K_{n_\delta, \varsigma_{\delta_c}^k + 1} & \cdots & K_{n_\delta, n_\delta} \end{array} \right] \varsigma_{\delta_c}^k, \quad (\text{C.92}) \end{array}$$

La matrice de transformation de Guyan  $\tilde{\psi}$  s'exprime donc simplement par la relation suivante :

$$\tilde{\psi} = \overline{\overline{K}}^{-1} \overline{K}, \quad (\text{C.93})$$

dont la détermination n'exige alors pas de coût calculatoire prohibitif vue la structure topologique relativement creuse des matrices  $\overline{\overline{K}}$  et  $\overline{K}$ .

## C.4 Une fonctionnelle modale expansée

### C.4.1 Définition

Dans les approches présentées précédemment (Section 4.4 et Section 4.5), les estimateurs d'erreur hybrides (Eq. (4.55) et Eq. (4.93)) sont basés sur les  $m$  premières formes propres calculées  $\varphi_k \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  pour un modèle éléments finis où les nœuds correspondent aux points de mesures des formes propres  $\hat{\varphi}_k \in \mathbb{R}^{n_{\delta_m}}$ ,  $n_{\delta_m} \leq n_\delta$ .

Une solution alternative consiste, en opposition à la condensation de modèle éléments finis, à expander les formes propres mesurées  $\hat{\varphi}$  de manière à obtenir une nouvelle base modale expérimentale "expansée"  $\check{\varphi} \in \mathcal{M}_{n_\delta, m}$ , telle que :

$$\dim \check{\varphi} = \dim \varphi, \quad (\text{C.94})$$

qui soit associée à un vecteur des degrés de liberté expansé  $\check{\delta} \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ , par la relation suivante :

$$\check{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_m \end{pmatrix}, \quad (\text{C.95})$$

où  $\delta_m \in \mathbb{R}^{n_{\delta_m}}$  est le vecteur des degrés de liberté mesurés et  $\delta_i \in \mathbb{R}^{n_\delta - n_{\delta_m}}$  le vecteur de degrés de liberté du modèle éléments finis qui n'ont pas été mesurés, *i.e.* degrés de liberté expérimentaux expansés.

Les méthodes d'expansion sont basées sur des modèles *a priori* de la structure mesurée et impliquent donc une approximation des données expérimentales. Or, dans une optique d'identification de paramètres de modèle, *e.g.* éléments finis, ceci peut paraître paradoxal puisqu'il s'agit justement de corrélérer le modèle aux données expérimentales qui sont elles mêmes approximées à partir de ce modèle. Ceci peut être un désavantage majeur mais ces méthodes fournissent des résultats satisfaisants dans la mesure où le comportement dynamique global du spécimen mesuré n'est pas totalement méconnu et proche de modèles couramment utilisés.

### C.4.2 Expansion des formes propres expérimentales

Cette section présente le comportement de méthodes d'expansion sur des formes propres expérimentales issues de l'analyse modale d'un composant de rotor MGv feuilleté. Deux méthodes d'expansion sont envisagées. L'expansion de Guyan [70], qui est la plus ancienne des méthodes employées pour ce genre d'étude et l'expansion SEREP (System Equivalent Reduction Process) qui est connue pour être plus précise que la première [71; 113].

#### C.4.2.1 Expansion de Guyan

Bien qu'étant employée principalement dans le processus de réduction de modèles éléments finis, la condensation de Guyan peut également être utilisée pour expander des formes propres expérimentales. A partir des notations et terminologies utilisées dans la Section 4.4.2 relative à la condensation de Guyan, les composantes  $\delta_i \in \mathbb{R}^{n_{\delta_i}}$ ,  $n_{\delta_i} = n_\delta - n_{\delta_m}$  non mesurées des formes propres expérimentales sont considérés comme les degrés de liberté secondaires alors que les composantes  $\delta_m$  des formes propres expérimentales  $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}_{n_{\delta_m}, m}$  représentent les degrés de liberté principaux.

En utilisant les Eq. (4.50) et Eq. (4.53), il vient alors l'expression des formes propres expérimentales expansées telles que :

$$\begin{aligned} \check{\varphi} &= \check{\psi} \hat{\varphi}, \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \check{\varphi}_i \\ \check{\varphi}_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -K_{ii}^{-1} K_{ic} \\ I \end{bmatrix} \hat{\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{C.96})$$

avec  $K_{ii} \in \mathcal{M}_{n_{\delta_i}, n_{\delta_i}}$ ,  $K_{ic} \in \mathcal{M}_{n_{\delta_i}, n_{\delta_m}}$  respectivement les partitions de la matrice de raideur  $K$  définies dans l'Eq. (4.47),  $I \in \mathcal{M}_{n_{\delta_m}, n_{\delta_m}}$  une matrice identité et  $\check{\varphi}_i \in \mathbb{M}_{n_{\delta_i}, m}$  les estimations des composantes non mesurées des formes propres expérimentales définies par :

$$\check{\varphi}_i = -K_{ii}^{-1} K_{ic} \hat{\varphi}. \quad (\text{C.97})$$

Toutefois, cette technique étant basée sur la rigidité statique du système, il n'y a aucune garantie que les formes propres expansées  $\check{\varphi}$  soient exactes. En effet, l'expansion de Guyan fournira des résultats satisfaisants si le nombre de degrés de liberté mesurés  $n_{\delta_m}$  soit suffisamment important pour décrire l'inertie du système.

#### C.4.2.2 Expansion SEREP

L'expansion SEREP repose sur le principe selon lequel les formes propres expérimentales expansées  $\check{\varphi}$  peuvent être exprimées par une combinaison linéaire d'autres formes propres théoriques ou analytiques, *e.g.* issues d'un modèle ("*sub-model*") proche du spécimen, telles que :

$$\begin{aligned} \check{\varphi} &= \sum_{q=1}^{m_a} \gamma_q \varphi_q^a, \\ \Leftrightarrow \check{\varphi} &= \Phi^a \gamma, \end{aligned} \quad (\text{C.98})$$

où  $m_a$  est le nombre de formes propres théoriques  $\varphi_q^a$  du sous-modèle de référence comprises dans la matrice  $\Phi^a \in \mathcal{M}_{n_{\delta}, m_a}$ , et  $\gamma_q \in \mathbb{R}$  est le  $q^e$  coefficient de pondération compris dans le vecteur  $\gamma \in \mathbb{R}^{m_a}$ .

Soit la partition de l'Eq. (C.98) :

$$\begin{bmatrix} \check{\varphi}_i \\ \check{\varphi}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_u^a \\ \Phi_m^a \end{bmatrix} \gamma, \quad (\text{C.99})$$

avec  $(\ )_m$  et  $(\ )_u$  respectivement les indices des degrés de liberté mesurés et non mesurés,  $\Phi_u^a \in \mathcal{M}_{n_{\delta_m}, m_a}$  et  $\Phi_m^a \in \mathcal{M}_{n_{\delta_i}, m_a}$  respectivement les partitions de la base modale du sous-modèle selon les degrés mesurés et non mesurés.

La deuxième égalité de l'Eq. (C.99), fonction des composantes des formes propres mesurées  $\check{\varphi}_m$ , conduit à :

$$\begin{aligned} \Phi_m^a \gamma &= \check{\varphi}_m, \\ \Leftrightarrow \Phi_m^{at} \Phi_m^a \gamma &= \Phi_m^{at} \check{\varphi}_m, \\ \Leftrightarrow \gamma &= \Phi_m^{a\dagger} \check{\varphi}_m, \end{aligned} \quad (\text{C.100})$$

où  $\Phi_m^{a\dagger}$  est la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice  $\Phi_m^a$  définie par la relation :

$$\Phi_m^{a\dagger} = [\Phi_m^{at} \Phi_m^a]^{-1} \Phi_m^{at}. \quad (\text{C.101})$$

L'Eq. (C.100) permet donc d'obtenir les coefficients de pondération de la combinaison linéaire de l'Eq. (C.98). En substituant l'Eq. (C.100) dans l'Eq. (C.99), il vient alors :

$$\begin{bmatrix} \check{\varphi}_i \\ \check{\varphi}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_u^a \\ \Phi_m^a \end{bmatrix} \Phi_m^{a\dagger} \hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \Phi_u^a \Phi_m^{a\dagger} \\ \Phi_m^a \Phi_m^{a\dagger} \end{bmatrix} \hat{\varphi}. \quad (\text{C.102})$$

On obtient alors une estimation  $\tilde{\varphi}_i$  des composantes non mesurées des formes propres expérimentales ainsi qu'une approximation  $\tilde{\varphi}_m$  des formes propres réellement mesurées  $\hat{\varphi}$ .

### C.4.3 Stratégie d'optimisation

L'expansion des formes propres expérimentales rend alors possible la détermination de l'estimateur d'erreur modal, Eq. (C.103), tel que :

$$\mathcal{E}_k = 1 - \frac{1}{\tilde{\omega}_k^2} \frac{\tilde{\varphi}_k^t K \varphi_k}{\tilde{\varphi}_k^t M \varphi_k}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (\text{C.103})$$

Les deux méthodes d'expansion sont utilisées dans une procédure d'identification afin de déterminer les propriétés constitutives d'une portion d'arbre de rotor feuilleté, et d'obtenir par conséquent un modèle précis de rotor feuilleté.

Les propriétés constitutives de la portion d'arbre sont définies par le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  avec  $\{x_p\}_{p=1\dots n}$  tel que :

$$x = (E, G, \nu)^t, \quad \text{avec } n = 3. \quad (\text{C.104})$$

Tous les éléments finis du domaine  $\Omega$ , Eq. (4.1), sont concernés par les paramètres d'optimisation  $x$ . La stratégie d'optimisation consiste à minimiser la fonctionnelle modale expansée  $f$  :

$$f(x) = \frac{1}{2} \|\mathcal{E}_k(x)\|^2, \quad (\text{C.105})$$

à l'aide l'algorithme de *Levenberg-Marquardt*, Alg. 7 défini dans l'Annexe C.1.3.

### C.4.4 Application industrielle

#### C.4.4.1 Analyse modale expérimentale

Une analyse modale expérimentale a été réalisée sur une portion d'arbre de rotor MGv. La structure mesurée est suspendue à un treuil par anneau oscillant, *via* à une élingue souple, FIG. C.8, pour obtenir des conditions aux limites quasi *libre-libre*. Des termes de faible raideur transversale sont appliqués aux nœuds extrêmes de la portion d'arbre, Eq. (3.1). Les caractéristiques géométriques de la portion d'arbre, constitué d'acier forgé, sont définies dans le TAB. C.1.

|                             |                   |                      |
|-----------------------------|-------------------|----------------------|
| Masse, $m_p$                | 148.1             | kg                   |
| Masse volumique, $\rho_p$   | 7870              | kg · m <sup>-3</sup> |
| Longueur, $L_p$             | 0.843             | m                    |
| Longueur, $L_e$             | 2.000             | m                    |
| Centre de masse, $z_G$      | 0.280             | m                    |
| Raideur transversale, $k_e$ | $7.26 \cdot 10^2$ | N · m <sup>-1</sup>  |
| Raideur transversale, $k_l$ | $3.20 \cdot 10^2$ | N · m <sup>-1</sup>  |

TABLEAU C.1 – Caractéristiques géométriques et inertielles d'une portion d'arbre suspendue.

La portion d'arbre a été excitée radialement le long d'une génératrice axiale discrétisée en 52 points de mesure, FIG. C.8, avec un marteau de choc, un accéléromètre piézoélectrique étant fixé avec de la cire d'abeille au nœud N°1, FIG. C.9. La bande fréquentielle considérée est comprise entre 0 et 5 kHz. Les fonctions de transfert ont été obtenues en effectuant les moyennes (réalisées sur trois chocs) des rapports des transformées de *Fourier* des signaux temporels des accéléromètre et capteur de force piézoélectriques. Les modules et phases des fonctions de transfert présentées

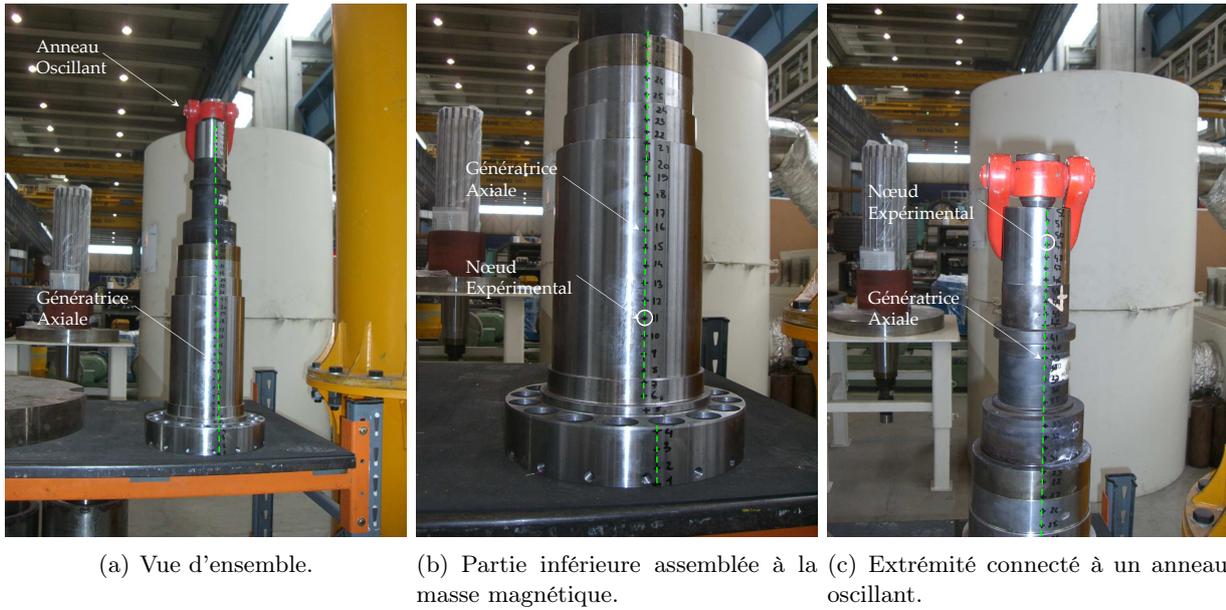


FIGURE C.8 – Dispositif expérimental employé lors de l'analyse modale d'une portion d'arbre en acier forgé.

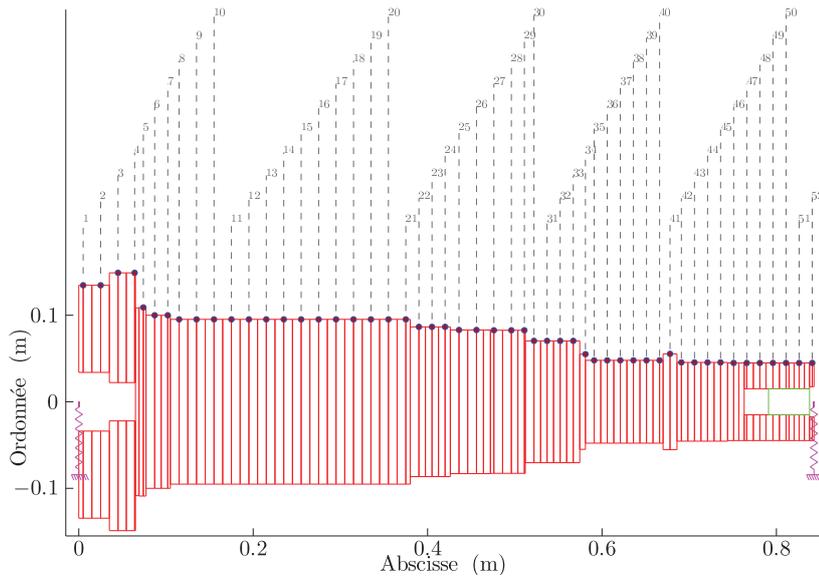


FIGURE C.9 – Modèle éléments-finis d'une portion d'arbre. Les points rouges (●) représentent les points de mesures expérimentaux,  $n_{\delta} = 218$ ,  $n_{\delta_e} = 52$ .

sur la FIG. C.10, sont issues d'un analyseur dynamique, est permettant de déterminer les pulsations propres, présentées dans le TAB. C.3, ainsi que les formes propres mesurées  $\hat{\varphi}$ , tracées sur la FIG. C.11.

#### C.4.4.2 Identification

Le modèle éléments finis de la portion d'arbre est présenté sur la FIG. C.9. Il est composé de  $N_e = 108$  éléments finis et  $n_{\delta} = 218$  degrés de liberté.

La procédure d'identification des propriétés constitutives de la portion d'arbre est réalisée en en-

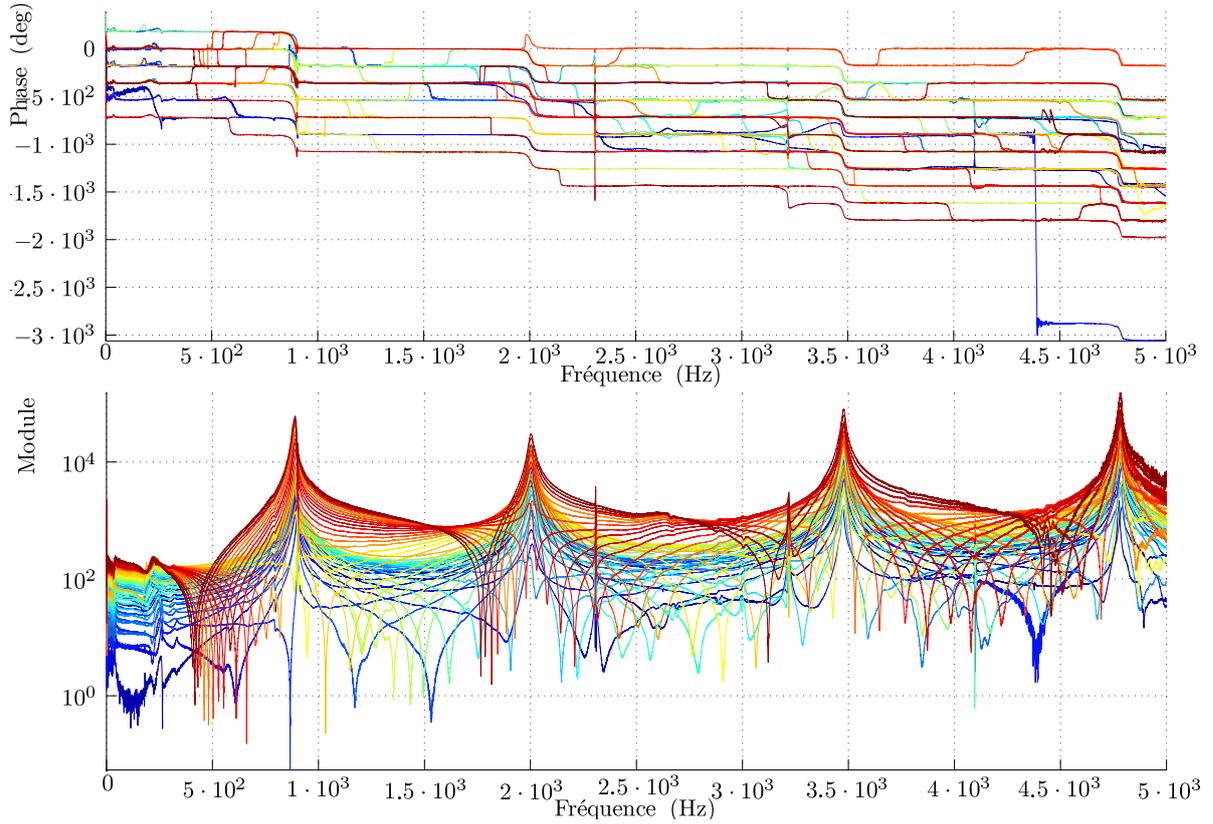


FIGURE C.10 – Module des fonctions de transfert mesurées aux 52 points de la génératrice axiale.

visageant les deux méthodes d’expansion des formes propres expérimentales  $\hat{\varphi}$ . En effet, la FIG. C.11 représente les quatre premières formes propres mesurées  $\hat{\varphi}$  (–) et expansées  $\check{\varphi}$  par les méthodes SEREP (×) et d’expansion de Guyan (○). Le sous-modèle utilisé pour effectuer le procédure d’expansion n’est autre que celui présenté sur la FIG. C.9, en considérant néanmoins des propriétés constitutives arbitraires et  $m_a = 4$  modes.

La FIG. C.11 montre la particularité de la méthode d’expansion de Guyan imposant une égalité entre les composantes des formes propres expansées  $\check{\varphi}_m$  et celles des formes propres mesurées  $\hat{\varphi}$ . En revanche, bien que l’expansion SEREP fournisse des formes propres expansées  $\check{\varphi}$  relativement régulières des formes propres  $\hat{\varphi}$  quelques peu “bruitées”, on constate qu’elle implique une approximation des composantes des formes propres mesurées  $\check{\varphi}_m \approx \hat{\varphi}$ , Eq. (C.102), directement liée au sous-modèle utilisé.

La procédure d’identification considère les quatre premiers modes mesurés ( $m = 4$ ) et les valeurs initiales des trois paramètres d’optimisation indépendants  $x^0$ , Alg. 7, ont alors été fixées comme suit :

$$\left\{ x_1^0 = 0.6 \cdot 10^{11}, x_2^0 = \frac{x_1^0}{2(1 + x_3^0)}, x_3^0 = \frac{1}{3} \right\}, \quad (\text{C.106})$$

où  $x_1^0$  et  $x_2^0$  sont exprimés en ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ). La positivité des variables d’optimisation relatives  $\bar{x}$  est imposée grâce aux intervalles suivants, FIG. C.14 :

$$\bar{x}_p \in [\alpha_p, \beta_p], \quad p = 1, \dots, n,$$

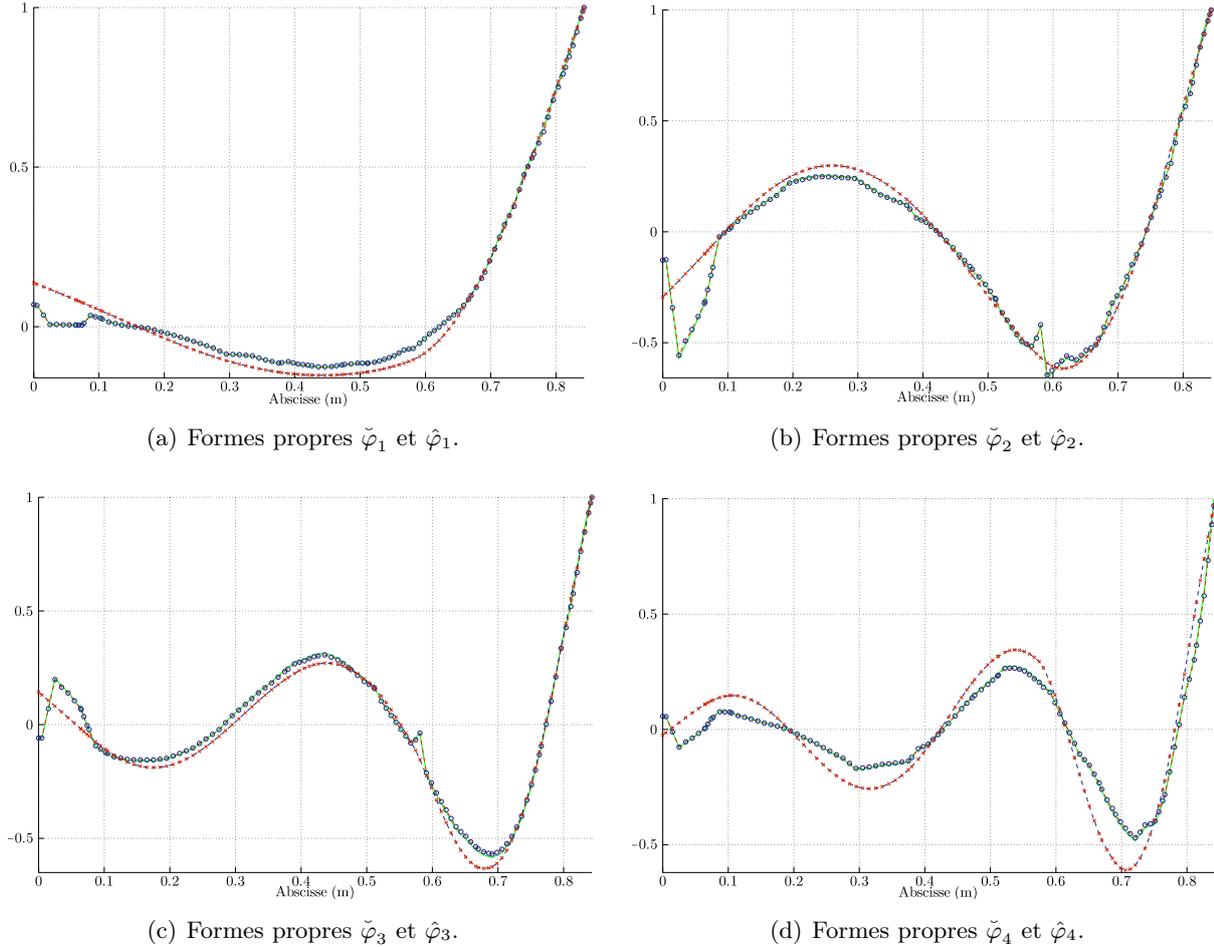


FIGURE C.11 – Quatre premières formes propres mesurées  $\hat{\varphi}$  (–) et expansées  $\tilde{\varphi}$  par les méthodes SEREP (×) et d'expansion de Guyan (○).

où :

$$\begin{cases} x_1^0 \alpha_1 = \varepsilon \\ x_1^0 \beta_1 = 2.3 \cdot 10^{11} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2^0 \alpha_2 = \varepsilon \\ x_2^0 \beta_2 = \frac{x_1^0 \beta_1}{2(1+\nu)} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3^0 \alpha_3 = \varepsilon \\ x_3^0 \beta_3 = \nu_{\max} \end{cases}, \quad (\text{C.107})$$

avec :

$$\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varepsilon \ll 1 \text{ et } \nu_{\max} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \nu_{\max} < \frac{1}{2}.$$

La FIG. C.12 présente l'évolution de la fonctionnelle  $f$  au cours du processus d'optimisation qui a convergé, quelle que soit la méthode d'expansion utilisée, en  $i = 11$  itérations vers l'optimum  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ , comme l'indique la valeur de la norme du gradient qui est de l'ordre de  $10^{-8}$ . L'évolution des variables d'optimisation relatives  $\bar{x}$ , au cours du processus du temps, est présentée sur la FIG. C.13. Le temps de convergence, inférieur à 4 s, témoigne encore une fois de la rapidité de convergence de l'algorithme de *Levenberg-Marquardt*. La FIG. C.14 représente l'évolution des variables d'optimisation relatives  $\bar{x}$  dans l'espace de la bijection  $\sigma$ . Le fait que les variables  $\bar{x}_p$ ,  $p = 1, \dots, n$  n'aient pas tendance à évoluer vers l'une des bornes, *e.g.*  $\alpha_p$  ou  $\beta_p$ , de leurs intervalles associés, Eq. (C.107), illustre le fait que le choix du nombre de variables d'optimisation, *i.e.*  $n = 3$  n'est pas aberrant.

Les propriétés constitutives identifiées sont présentées dans le TAB. C.2. Il apparaît que la minimisation de la fonctionnelle  $f$ , Eq. (C.105), qu'elle soit issue d'une expansion SEREP ou de *Guyan*, conduit à un optimum  $x^*$  identique, impliquant, par conséquent, des fréquences propres

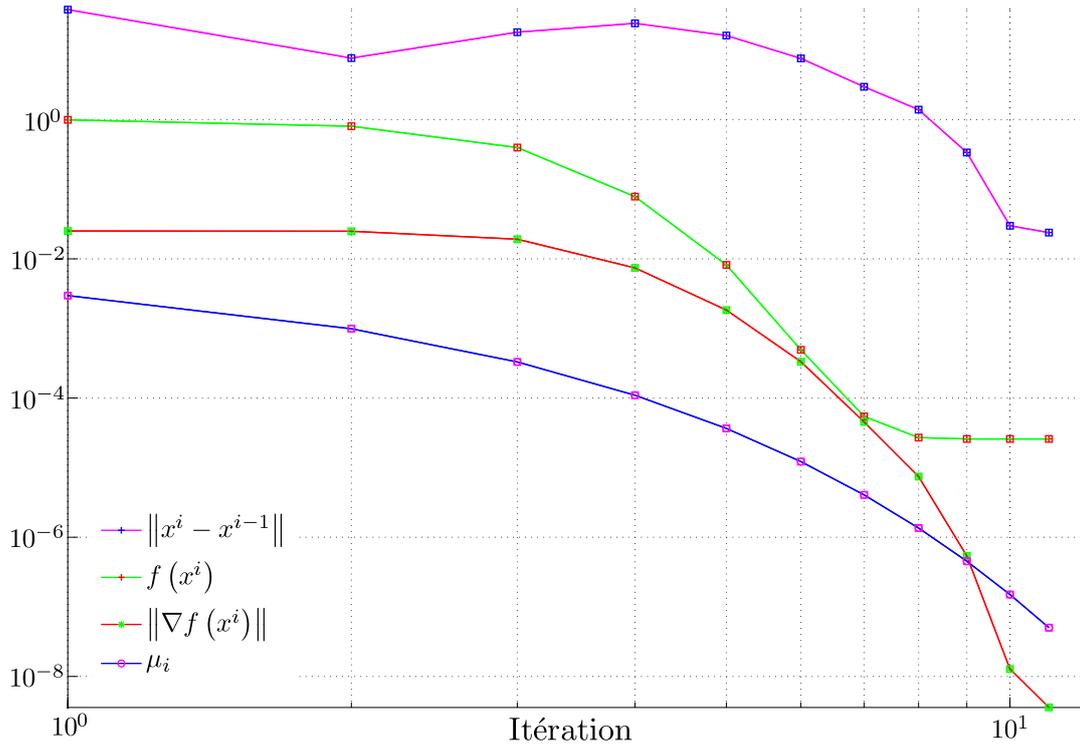


FIGURE C.12 – Évolution de la norme de la différence des itérés successifs  $\|x^i - x^{i-1}\|$  (SEREP : +, Guyan :  $\square$ ), fonctionnelle  $f$  (SEREP : +, Guyan :  $\square$ ), norme de gradient  $\|\nabla f\|$  (SEREP : \*, Guyan :  $\square$ ) et paramètre d'amortissement  $\mu$  (SEREP :  $\circ$ , Guyan :  $\square$ ) au cours des itérations. La convergence est atteinte dans les deux cas en 11 itérations.

également identiques quelle que soit la méthode utilisée. On retrouve des valeurs proches de celles de l'acier ce qui est encourageant, les portions d'arbre étant constituées *a priori* d'acier isotrope. Rappelons que les trois paramètres d'optimisation sélectionnés sont totalement indépendants durant la procédure d'optimisation. Si l'on considère que le matériau constituant la portion d'arbre est purement isotrope et que l'on calcule le module de Coulomb associé aux paramètres optimaux  $x_1^*$  et  $x_3^*$ , matériau isotrope, il vient alors :

$$\frac{1}{2} \frac{x_1^*}{(1 + x_3^*)} \approx 7.8415 \cdot 10^{10} > x_2^* = 6.943707 \cdot 10^{10}. \quad (\text{C.108})$$

La valeur du module de Coulomb identifié  $x_2^*$  est donc inférieur de 11.45% à celle correspondant à un matériau isotrope.

Le TAB. C.3 présente les quatre premières fréquences propres calculées et mesurées et la FIG. C.11 leurs formes propres associées. L'erreur relative entre fréquences propres calculées et mesurées est comprise entre  $8 \cdot 10^{-3}\%$  et  $2.9 \cdot 10^{-1}\%$  lorsque la procédure d'identification est réalisée en utilisant soit l'expansion SEREP, soit celle de Guyan.

La FIG. C.15 présente le critère de corrélation NCO (Normalized Cross Orthogonality), définie dans l'Eq. (4.79), et illustre une bonne corrélation entre formes propres calculées  $\varphi$  et élargies  $\tilde{\varphi}$ . Il est essentiel de noter que les formes propres élargies issues de l'expansion SEREP sont des combinaisons linéaires des formes propres d'un sous-modèle qui, en l'occurrence, est celui que l'on cherche à identifier. Ainsi, bien que le sous-modèle ait été affecté de propriétés constitutives arbitraires, celui-ci n'en conserve pas moins sa dynamique globale. Il en résulte des formes propres

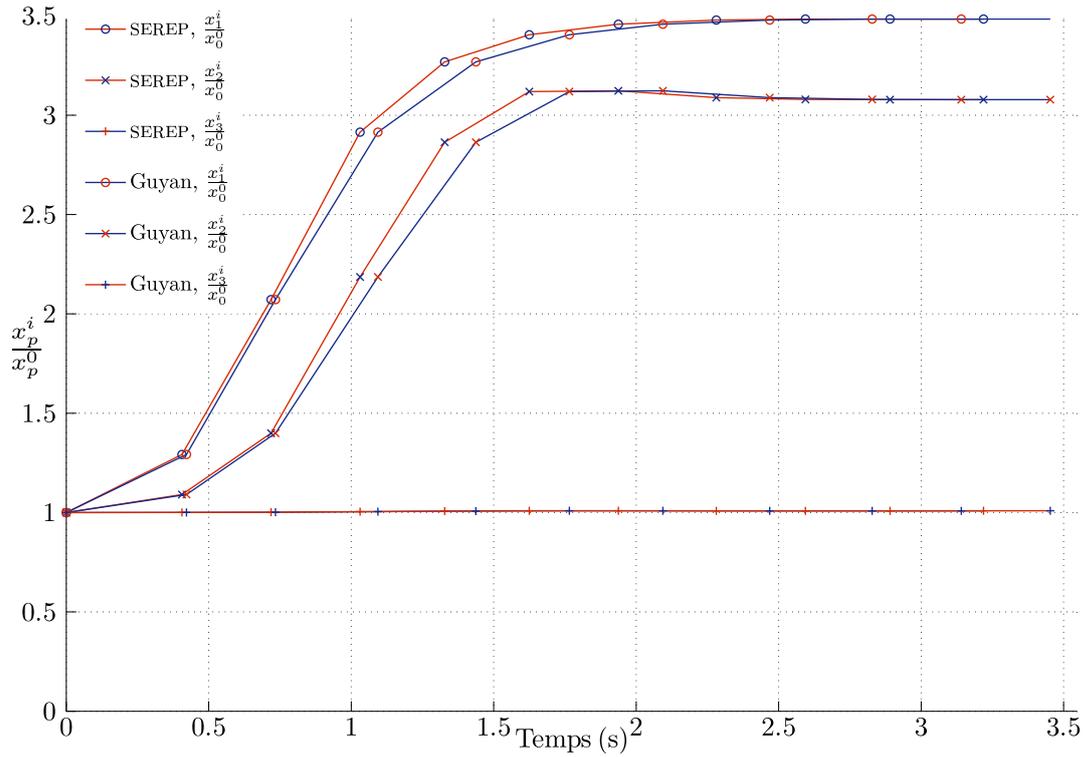


FIGURE C.13 – Évolution des itérés successifs  $\bar{x}_p$ , *i.e.* valeurs relatives des modules d'Young (SEREP :  $\circ$ , Expansion de Guyan :  $\circ$ ), de Coulomb (SEREP :  $\times$ , Expansion de Guyan :  $\times$ ) et de coefficients de Poisson (SEREP :  $+$ , Expansion de Guyan :  $+$ ) au cours du temps.

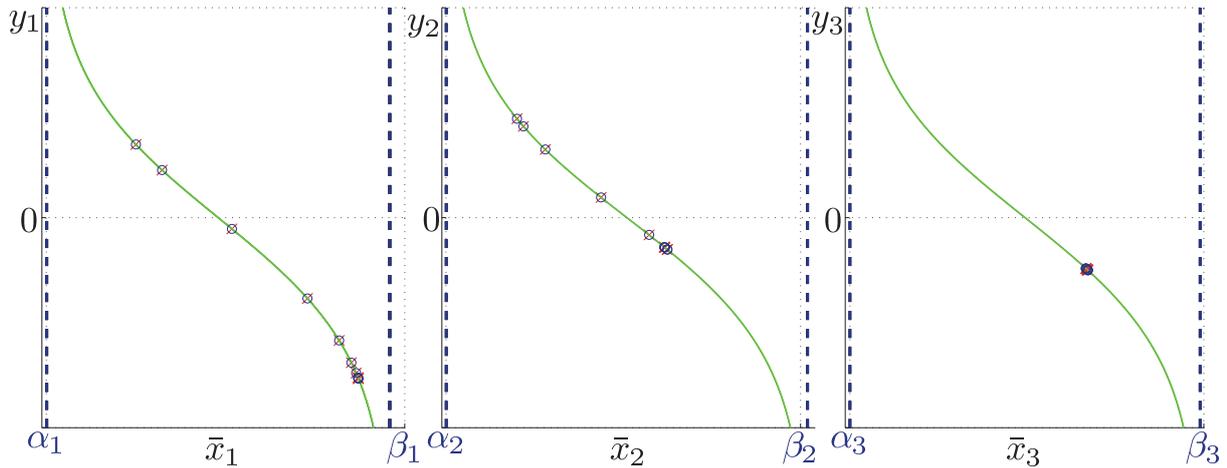


FIGURE C.14 – Évolution des itérés successifs  $y_p$ , *i.e.* antécédents des variables  $\bar{x}_p$  par la bijection  $\sigma$ . (Expansion de Guyan :  $\circ$ , SEREP :  $\times$ ).

expansées plus régulières, et surtout, plus représentatives du modèle à identifier, que celles issues de l'expansion de Guyan. C'est pourquoi les termes diagonaux de la matrice NCO, FIG. C.15(a), sont plus proches de l'unité que ceux de la FIG. C.15(b).

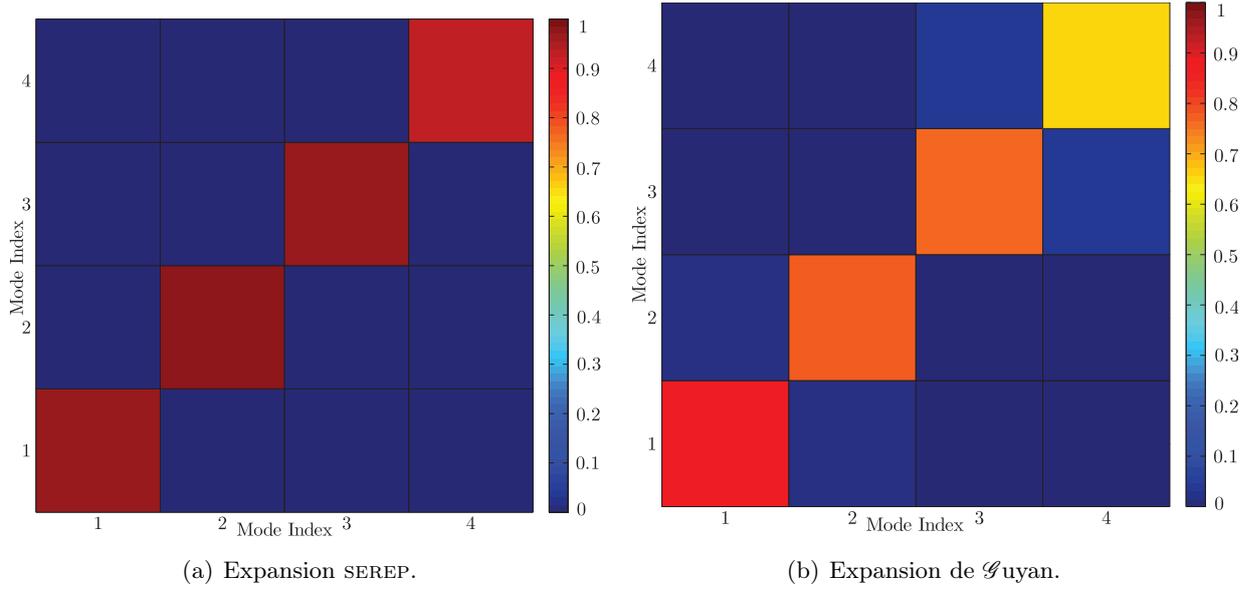


FIGURE C.15 – Visualisation des matrices de corrélation NCO entre les formes propres élargies  $\tilde{\varphi}$  et les formes propres calculées  $\varphi$ .

|       | Modules d'Young $x_1^*$<br>( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | Module de Coulomb $x_2^*$<br>( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | Coefficients de Poisson $x_3^*$ |
|-------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| SEREP | $2.0905 \cdot 10^{11}$                                        | $6.9437 \cdot 10^{10}$                                          | $3.3298 \cdot 10^{-1}$          |
| Guyan | $2.0905 \cdot 10^{11}$                                        | $6.9437 \cdot 10^{10}$                                          | $3.3298 \cdot 10^{-1}$          |

TABLEAU C.2 – Valeurs des propriétés constitutives identifiées d'une portion d'arbre.

| Indice           | Mesurée (Hz) | SEREP (Hz) | Erreur (%)            | Guyan (Hz) | Erreur (%)            |
|------------------|--------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|
| 1 <sup>ère</sup> | 889.80       | 890.75     | $1.07 \cdot 10^{-1}$  | 890.75     | $1.07 \cdot 10^{-1}$  |
| 2 <sup>e</sup>   | 2003.5       | 2003.6     | $7.98 \cdot 10^{-3}$  | 2003.6     | $7.98 \cdot 10^{-3}$  |
| 3 <sup>e</sup>   | 3477.7       | 3467.4     | $-2.94 \cdot 10^{-1}$ | 3467.4     | $-2.94 \cdot 10^{-1}$ |
| 4 <sup>e</sup>   | 4780.5       | 4788.9     | $1.76 \cdot 10^{-1}$  | 4788.9     | $1.76 \cdot 10^{-1}$  |

TABLEAU C.3 – Valeurs des quatre premières fréquences propres de flexion mesurées et calculées à partir des expansions SEREP et de Guyan.

### C.4.5 Conclusion

La procédure d'identification a été réalisée sur une structure industrielle, *i.e.* une portion d'arbre de rotor feuilleté, et a permis d'identifier ses propriétés constitutives, *e.g.* modules d'Young, de Coulomb et coefficients de Poisson. Ces dernières ont été identifiées avec pertinence à l'aide deux méthodes d'expansion de formes propres expérimentales telle que celle de Guyan ou la méthode SEREP.

La combinaison d'une fonctionnelle énergétique, basée sur un quotient de Rayleigh, à des procédures d'expansion est une solution efficace pour identifier les paramètres d'un modèle éléments finis à partir de données *a priori* non compatibles, *i.e.* formes propres calculées et mesurées. L'identification des propriétés constitutives d'un composant de rotor MGV feuilleté s'inscrit dans une démarche de développement de modèle éléments finis de poutres le plus précis possible permettant de prévoir la dynamique de rotors de conception complexe comme le sont les rotors feuilletés.

## C.5 Identification des propriétés constitutives d'un rotor de palier magnétique

Les rotors de paliers magnétiques actifs, appelés rotor PMA, sont les éléments principaux du dispositif de suspension d'un rotor MG. Ils sont essentiellement constitués d'un empilement de tôles magnétiques annulaires frettées à chaud sur les deux portions d'arbre du rotor feuilleté.

Leurs dimensions caractéristiques leur confèrent un rapport diamètre sur longueur de l'ordre de l'unité et ajoutent ainsi une rigidité supplémentaire non négligeable aux portions d'arbre sur lesquelles ils sont placés. Ils ne peuvent donc être modélisés par des masses et inerties discrètes tels les disques, *i.e.* utilisées classiquement lors de la modélisation de masses additionnelles. Ils jouent alors un rôle non négligeable dans la dynamique des structures sur lesquelles ils sont montés et il est donc nécessaire d'être en mesure de les modéliser.

Une solution potentielle consiste à utiliser le même type d'éléments-finis que ceux utilisés pour la modélisation du rotor, *e.g.* éléments de poutre de Timoshenko. Sous cette hypothèse, il est alors indispensable de connaître les propriétés constitutives de l'empilement de tôles magnétiques annulaires.

Cette section présente alors une procédure d'identification des propriétés constitutives de l'empilement de tôles annulaires d'un rotor PMA. Un modèle éléments finis tridimensionnel du rotor PMA est proposé, Annexe C.5.2, puis actualisé de manière à ce que ses pulsations propres coïncident avec celles mesurées lors de l'analyse modale expérimentale présentée dans la Section 3.4.

### C.5.1 Influence de la rigidité d'un rotor PMA

Afin de prouver numériquement que les rotors PMA ont une influence significative sur la dynamique globale d'un rotor MG, une étude paramétrique est présentée ci-après.

L'analyse modale expérimentale, présentée dans la Section 3.4, est réalisée sur un rotor PMA dont les dimensions sont associées à celle d'un rotor feuilleté MG de taille 1. Ainsi, la FIG. C.16 présente un modèle éléments finis de rotor feuilleté de taille 1 (utilisant le modèle de tirants  $\mathcal{M}_{1'}$ , Chapitre B) dont les caractéristiques sont présentées dans le TAB. C.4.

Les rotors PMA, FIG. C.16, sont modélisés avec des éléments finis de poutre de Timoshenko dont les sections droites sont annulaires de manière à respecter leur géométrie. Les rotors PMA frettés et les portions d'arbre ont des matrices élémentaires de masse de raideur qui s'additionnent.

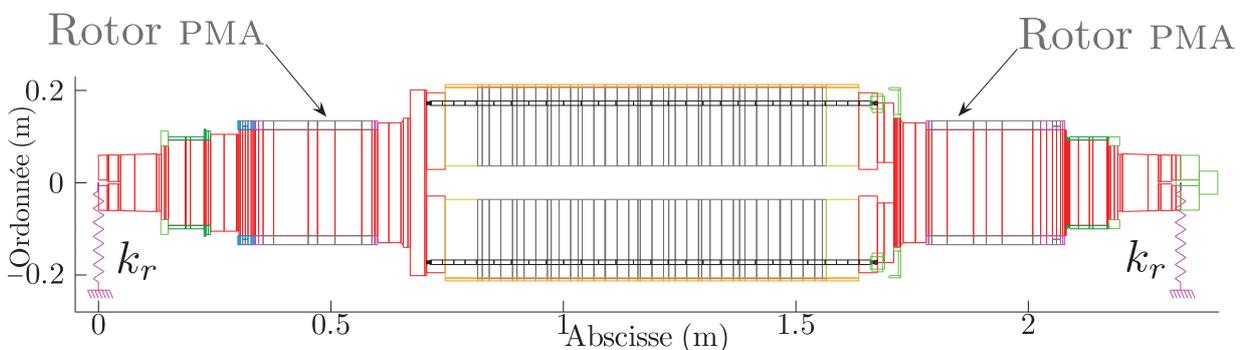


FIGURE C.16 – Modèle éléments-finis du rotor feuilleté.

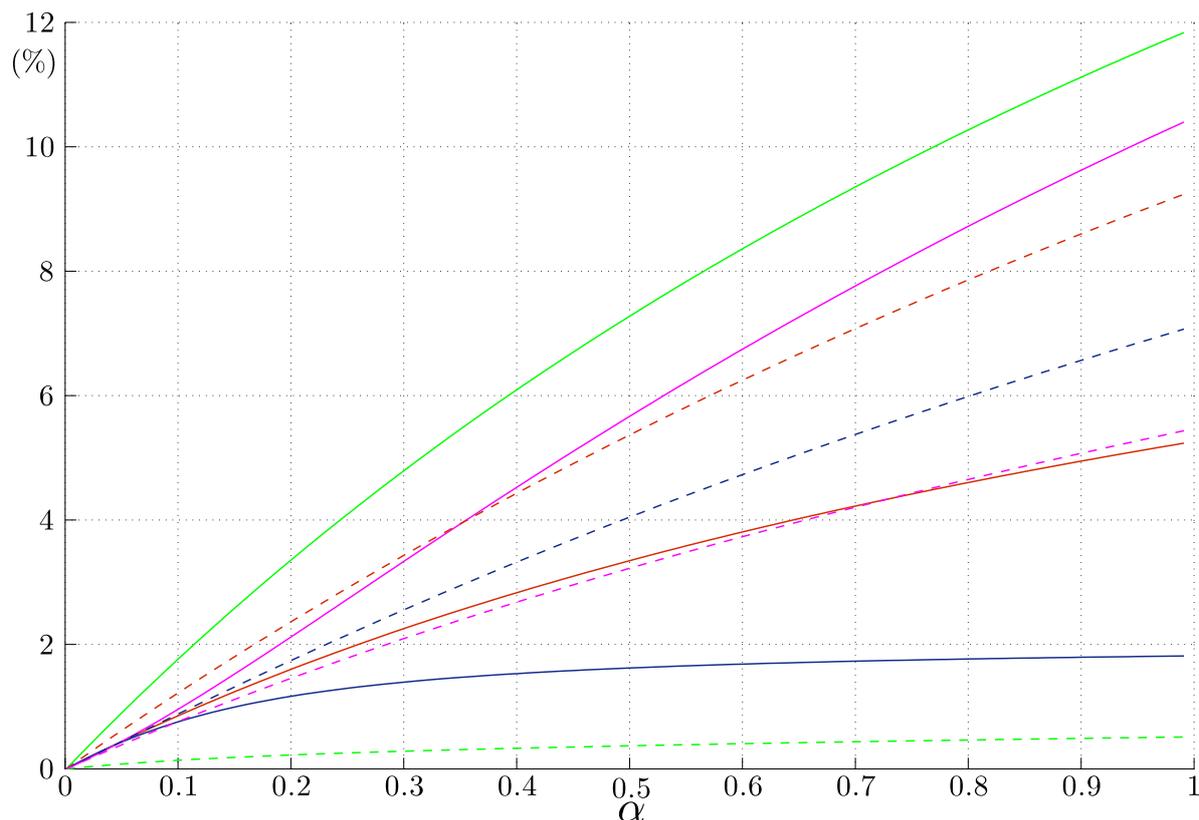


FIGURE C.17 – Évolution des taux d'accroissement des huit premières fréquences propres du rotor feuilleté de taille 1.  $f_1$  (—),  $f_2$  (—),  $f_3$  (—),  $f_4$  (—),  $f_5$  (---),  $f_6$  (---),  $f_7$  (---),  $f_8$  (---).

L'étude paramétrique consiste à analyser le taux d'accroissement des huit premières fréquences propres du modèle de rotor, supporté par des raideurs  $k_r$ , en fonction de la variation des caractéristiques de rigidité des rotors PMA dont le comportement mécanique sera supposé isotrope et caractérisé par :

- le module d'Young  $\alpha E_a$ ,
- le coefficient de Poisson  $\alpha \nu_a$ ,

où l'indice  $( )_a$  est relative aux propriétés de l'acier.

Le paramètre de l'étude, noté  $\alpha$ , est défini par la relation suivante :

$$\alpha \in [\varepsilon, 1], \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \quad \varepsilon \leq 1. \quad (\text{C.109})$$

Ainsi, le coefficient  $\alpha$  gouverne le comportement mécanique du rotor PMA, *i.e.* :

|                             |                |                                |
|-----------------------------|----------------|--------------------------------|
| Masse, $m_r$                | 1643           | kg                             |
| Longueur, $L_r$             | 2.238          | m                              |
| Centre de masse, $z_G$      | 1.128          | m                              |
| Raideur transversale, $k_r$ | $1 \cdot 10^2$ | $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ |

TABLEAU C.4 – Caractéristiques géométriques et inertielles du rotor feuilleté de taille 1.

- si  $\alpha \rightarrow \varepsilon$ , alors la rigidité de flexion des rotors PMA sera négligeable et seul leurs effets inertiels seront pris en compte à la manière des éléments discrets,
- si  $\alpha \rightarrow 1$ , alors la rigidité de flexion des des rotors PMA sera pris en compte plus des leurs effets inertiels.

La FIG. C.17 présente l'évolution des taux d'accroissement des huit premières fréquences propres du modèle. Ces dernières présentent des variations comprises entre 2% et 12%, ce qui n'est pas négligeable et confirme l'intérêt de modéliser la rigidité de flexion des rotor PMA, et de surcroît, l'intérêt de la procédure d'identification proposée dans l'Annexe C.5.3.

### C.5.2 Modélisation tridimensionnelle d'un rotor PMA

Le rotor PMA est composé de quatre éléments, FIG. 3.15 :

- une entretoise en acier 42C<sub>r</sub>M<sub>o</sub>4,
- un fourreau en acier 42C<sub>r</sub>M<sub>o</sub>4,
- un tube en acier 20M<sub>n</sub>V6,
- un empilement de tôles magnétiques annulaires dont on cherche à identifier les propriétés constitutives.

Les propriétés constitutives des matériaux constituant le rotor PMA sont présentées dans le tableau TAB. C.5 et sont considérées comme isotropes.

La masse volumique  $\rho_t$  de l'empilement de tôles magnétiques annulaires a été calculée en mesurant la masse totale  $m_{\text{PMA}}$  du rotor PMA et en supposant les propriétés mécaniques des fourreau, entretoise et tube connues. Les éléments constituant le rotor PMA peuvent être considérés comme des cylindres dont les dimensions et masses volumiques sont présentées dans le tableau TAB. C.6.

L'expression de la masse volumique  $\rho_t$  de l'empilement de tôles annulaire s'exprime de la manière suivante :

$$\rho_t = \frac{4m_t}{\pi \left( d_t^{\text{ext}2} - d_t^{\text{int}2} \right) l_t}, \quad (\text{C.110})$$

| Composant                         | Masse volumique<br>(kg · m <sup>-3</sup> ) | Module d'Young<br>(N · m <sup>-2</sup> ) | Coefficient<br>de Poisson | Module de Coulomb<br>(N · m <sup>-2</sup> ) |
|-----------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------------|
| 42C <sub>r</sub> M <sub>o</sub> 4 | 7.830 · 10 <sup>3</sup>                    | 2.100 · 10 <sup>11</sup>                 | 0.285                     | 8.171 · 10 <sup>10</sup>                    |
| 20M <sub>n</sub> V6               | 7.850 · 10 <sup>3</sup>                    | 2.000 · 10 <sup>11</sup>                 | 0.290                     | 7.752 · 10 <sup>10</sup>                    |

TABLEAU C.5 – Propriétés constitutives des éléments constituant un rotor PMA.

| Composant  | Longueur<br>(m)          | Diamètre<br>Extérieur<br>(m) | Diamètre<br>Intérieur<br>(m) | Masse<br>Volumique<br>(kg · m <sup>-3</sup> ) | Masse<br>(kg)            |
|------------|--------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------|
| Fourreau   | 1.350 · 10 <sup>-2</sup> | 2.800 · 10 <sup>-1</sup>     | 2.296 · 10 <sup>-1</sup>     | 7.830 · 10 <sup>3</sup>                       | 2.134 · 10 <sup>0</sup>  |
| Fourreau   | 6.000 · 10 <sup>-3</sup> | 2.750 · 10 <sup>-1</sup>     | 2.296 · 10 <sup>-1</sup>     | 7.830 · 10 <sup>3</sup>                       | 8.459 · 10 <sup>-1</sup> |
| Empilement | 2.340 · 10 <sup>-1</sup> | 2.750 · 10 <sup>-1</sup>     | 2.296 · 10 <sup>-1</sup>     | <b>7.387 · 10<sup>3</sup></b>                 | 3.112 · 10 <sup>1</sup>  |
| Tube       | 2.460 · 10 <sup>-1</sup> | 2.900 · 10 <sup>-1</sup>     | 2.750 · 10 <sup>-1</sup>     | 7.850 · 10 <sup>3</sup>                       | 1.285 · 10 <sup>1</sup>  |
| Entretoise | 1.200 · 10 <sup>-2</sup> | 2.750 · 10 <sup>-1</sup>     | 2.296 · 10 <sup>-1</sup>     | 7.830 · 10 <sup>3</sup>                       | 1.692 · 10 <sup>0</sup>  |

TABLEAU C.6 – Caractéristiques géométrique et inertielle des éléments constituant un rotor PMA.

où  $m_t$ ,  $l_t$ ,  $d_t^{ext}$  et  $d_t^{int}$  représentent respectivement les masse, longueur, diamètres extérieur et intérieur de l'empilement de tôles annulaires.

La mesure de la masse totale  $m_{PMA}$  du rotor PMA permet d'obtenir la masse  $m_t$  de l'empilement de tôles annulaires telle que :

$$m_{PMA} = 1.692 \cdot 10^1 \text{kg} \Rightarrow m_t = 3.112 \cdot 10^1 \text{kg},$$

et conduit donc, grâce à l'Eq. (C.110), à une masse volumique de l'empilement  $\rho_t$  égale à  $7.387 \cdot 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , TAB. C.6.

Le rotor PMA est modélisé sous COMSOL avec des éléments-finis tétraédriques de type  $\mathcal{L}$ agrange quadratiques  $P_2$ , FIG. C.18, et contient 115 818 degrés de liberté. Les conditions aux limites associées sont de type *libre-libre*, comme lors de l'analyse modale expérimentale présentée dans la Section 3.4.

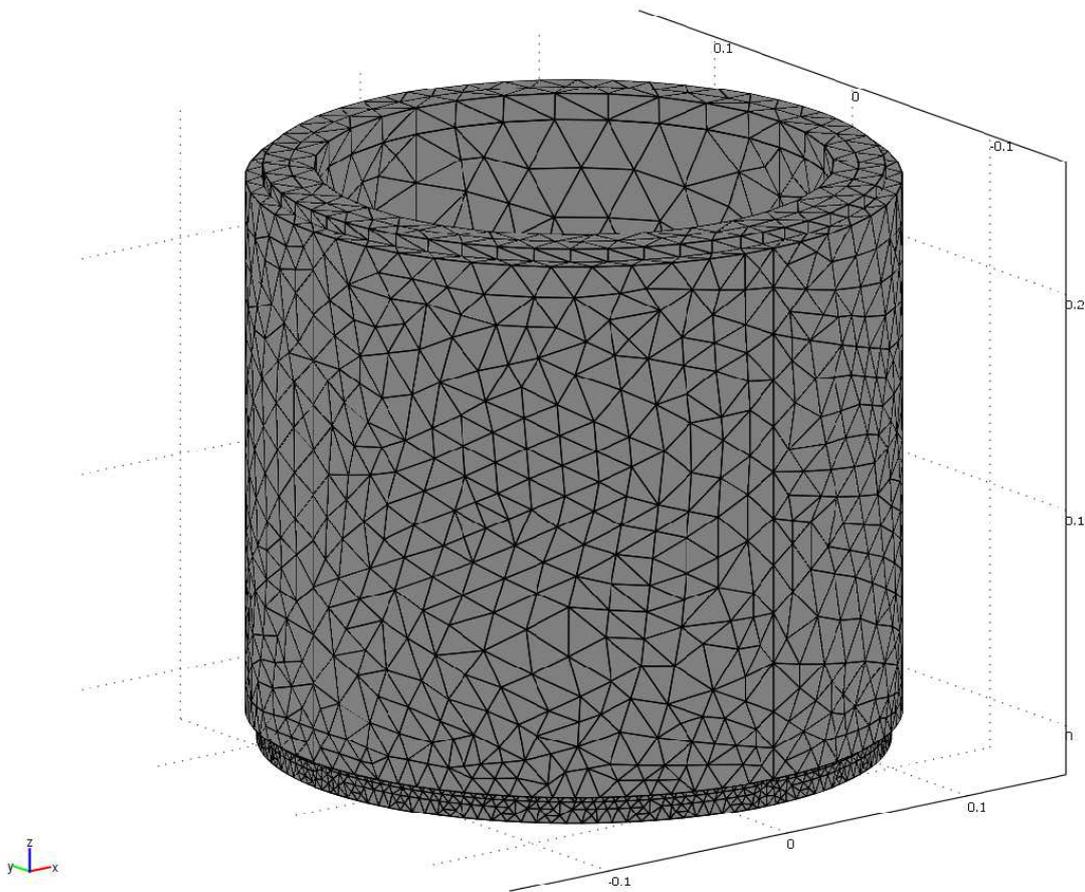


FIGURE C.18 – Modèle éléments-finis tridimensionnel réalisé sous COMSOL contenant 24 294 éléments-finis.

### C.5.3 Stratégie d'optimisation

Les propriétés constitutives de l'empilement de tôles annulaires sont définies par le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  avec  $\{x_p\}_{p=1\dots n}$ . Deux hypothèses ont été émises quant au comportement mécanique de l'empilement :

1. La première consiste à considérer l'empilement comme un matériau **isotrope**, Annexe C.5.4. Celui-ci sera alors caractérisé par trois propriétés constitutives :

$$E_t \quad (\text{C.111a}) \quad G_t \quad (\text{C.111b}) \quad \nu_t \quad (\text{C.111c})$$

où  $E_t$  est le module d'Young,  $\nu_t$  est le coefficient de Poisson et  $G_t$  est le module de Coulomb qui est fonction de  $E_t$  et  $\nu_t$ . Par conséquent, en fixant le coefficient de Poisson, *e.g.* 0.28 [19], le vecteur des paramètres d'optimisation  $x$  s'écrira de la manière suivante :

$$x = E_t, \text{ avec } n = 1. \quad (\text{C.112})$$

2. La seconde consiste à considérer l'empilement comme un matériau **orthotrope** possédant une symétrie de révolution, *i.e.* isotrope transverse, Annexe C.5.5. La direction d'orthotropie considérée est l'axe de révolution  $\bar{z}$  du rotor PMA, relatif au repère défini dans COMSOL, FIG. C.18. De cette façon, l'empilement sera caractérisé par six propriétés constitutives :

$$E_z \quad (\text{C.113a}) \quad E_x = E_y \quad (\text{C.113b}) \quad G_{xz} = G_{yz} \quad (\text{C.113c})$$

$$G_{xy} \quad (\text{C.114a}) \quad \nu_{xz} \quad (\text{C.114b}) \quad \nu_{xy} \quad (\text{C.114c})$$

où  $E_z$  est le module d'Young dans la direction  $\bar{z}$ ,  $E_x$ ,  $E_y$  sont les modules d'Young dans les directions perpendiculaires à la direction  $\bar{z}$ ,  $G_{xz}$ ,  $G_{yz}$  sont les modules de Coulomb dans les plans colinéaires à  $\bar{z}$ ,  $G_{xy}$  est le module de Coulomb dans le plan perpendiculaire à la direction  $\bar{z}$ , dépendant linéairement de  $E_{xy}$ ,  $\nu_{xz}$ ,  $\nu_{yz}$  sont les coefficients de Poisson dans les plans colinéaires à la direction  $\bar{z}$  et  $\nu_{xy}$  est le coefficient de Poisson dans le plan perpendiculaire à la direction  $\bar{z}$ . Notons que les coefficients de Poisson  $\nu_{xz}$ ,  $\nu_{yz}$  et  $\nu_{xy}$  sont également fixés à 0.28, comme dans la première hypothèse.

Dans ce cas, les paramètres d'optimisation sont définis par le triplet suivant :

$$x = (E_z, E_x, G_{xz})^t, \text{ avec } n = 3. \quad (\text{C.115})$$

Afin de déterminer les propriétés constitutives de l'empilement de tôles, une procédure d'identification mixte numérique-expérimentale a été réalisée. Elle consiste à minimiser une fonctionnelle basée sur l'écart relatif entre les pulsations propres mesurées, et calculées qui sont issues du modèle éléments-finis tridimensionnel, tel que :

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m F_k^\omega(x)^2, \quad (\text{C.116})$$

où  $F_k^\omega$  est définie dans l'Eq. (4.8) et  $m$  est le nombre de modes considérés dans la procédure d'optimisation.

La stratégie d'optimisation consiste à minimiser une fonctionnelle  $f$ , Eq. (C.116), en résolvant le problème ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}rouver \ x^* \\ & \text{tel que } \min_{x^* \in \mathbb{R}^n} f(x), \end{aligned} \quad (\text{C.117})$$

avec l'algorithme de *Levenberg-Marquardt* implémenté dans le logiciel MATLAB, *e.g.* appelé avec la fonction *fminunc*. Le fait que MATLAB et COMSOL puissent être couplés simplifie la résolution du problème ; il n'est alors pas nécessaire d'implémenter le modèle élément finis sous MATLAB. Ainsi, à chaque itération de l'algorithme d'optimisation, MATLAB fera appel à COMSOL qui résoudra un problème aux valeurs propres (analyse modale).

### C.5.4 Identification d'un matériau isotrope

La procédure d'identification a été réalisée en considérant les huit premières fréquences propres du rotor PMA, *i.e.*  $m = 8$

La FIG. C.19 présente l'évolution de la fonctionnelle  $f$  au cours du processus d'optimisation qui a convergé vers l'optimum en  $i = 9$  itérations, *i.e.* itérations qui ont engendrées une décroissance de la fonctionnelle  $f$ , soit une durée de 3892 s ( $\sim$  1h 4 min). La valeur optimale de module d'Young  $E_t$  est présentée dans le tableau TAB. C.7.

| $E_t (N \cdot m^{-2})$ | $\nu_t$ | $G_t (N \cdot m^{-2})$ |
|------------------------|---------|------------------------|
| $8.8125 \cdot 10^{10}$ | 0.28    | $3.4424 \cdot 10^{10}$ |

TABLEAU C.7 – Propriétés constitutives optimales obtenues en supposant l'empilement de tôles magnétiques isotrope,  $n = 1$ ,  $m = 8$ .

Les écarts relatifs entre les douze premières fréquences propres mesurées et calculées sont compris entre 0.2% et 14%, TAB. C.8. Les douze premières formes propres calculées, obtenues en considérant les propriétés constitutives optimales du tableau TAB. C.7, sont présentés FIG. C.20.

| Catégorie | $p$ | $q$ | Mesurées (Hz) | Calculées (Hz) | Ecart (%) |
|-----------|-----|-----|---------------|----------------|-----------|
| A         | 1   | 0   | 945           | 905            | -4.2      |
| A         | 1   | 0   | 951           | 905            | -4.9      |
| B         | 1   | 1   | 1195          | 1224           | 2.4       |
| B         | 1   | 1   | 1200          | 1224           | 2.0       |
| A         | 3   | 0   | 2389          | 2457           | 2.8       |
| A         | 3   | 0   | 2393          | 2457           | 2.7       |
| A         | 3   | 1   | 2930          | 2985           | 1.8       |
| A         | 3   | 1   | 2952          | 2987           | 1.1       |
| B         | 1   | 2   | 3607          | 4123           | 14.3      |
| B         | 1   | 2   | 3638          | 4123           | 13.3      |
| C         | 0   | 1   | 3779          | 3795           | 0.4       |
| C         | 0   | 1   | 3800          | 3795           | -0.1      |

TABLEAU C.8 – Comparaison des douze premières fréquences propres mesurées et calculées en supposant l'empilement de tôles magnétiques **isotrope**,  $n = 1$ ,  $m = 8$ .

### C.5.5 Identification d'un matériau isotrope transverse

#### C.5.5.1 Considération des huit premières fréquences propres

Un premier processus d'identification est réalisé en considérant les huit premières fréquences propres du rotor PMA, *i.e.*  $m = 8$ . La convergence de l'algorithme d'optimisation est atteinte pour les valeurs de variables d'optimisation présentées dans le tableau TAB. C.9.

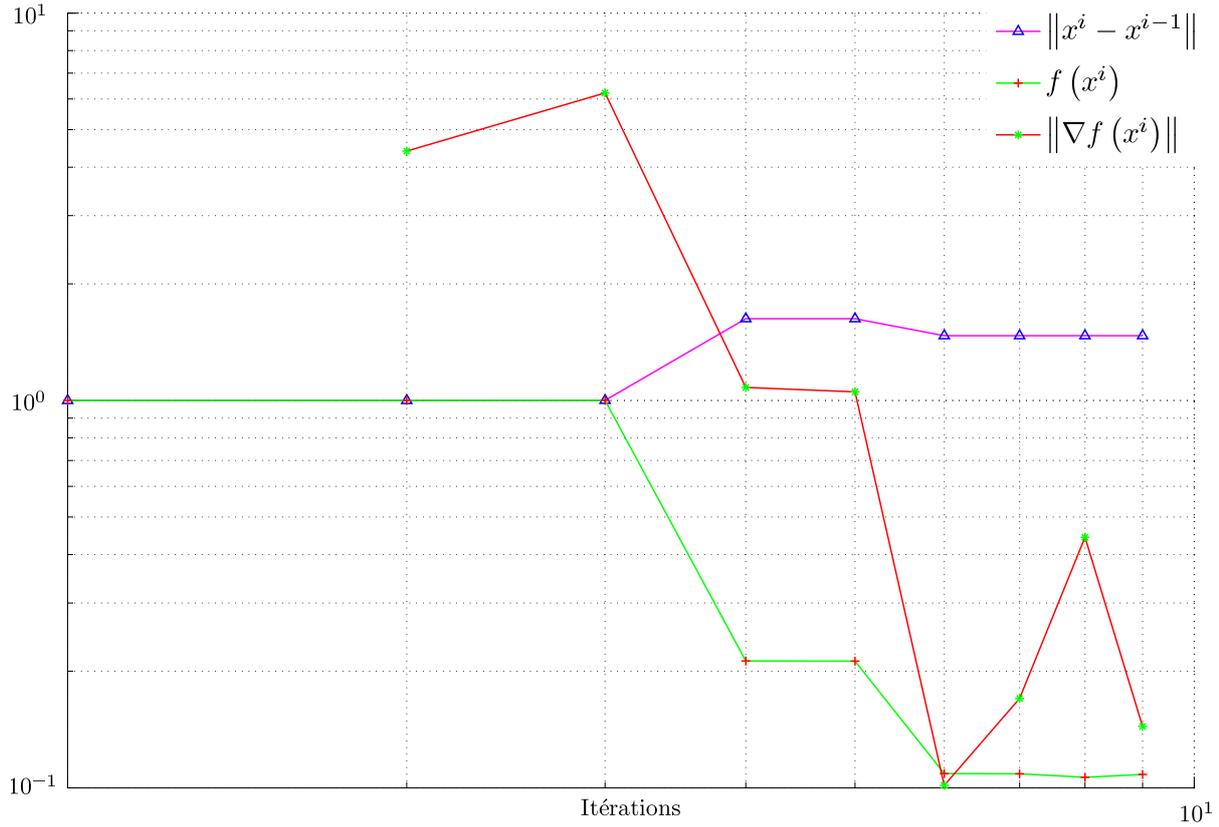


FIGURE C.19 – Évolution de la norme de la différence des itérés successifs ( $\Delta$ ), fonctionnelle (+), norme de gradient (\*) au cours des itérations.

| $E_z$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | $E_{xy}$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | $G_{xz} = G_{yz}$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | $G_{xy}$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | $\nu_{xz} = \nu_{yz}$ | $\nu_{xy}$ |
|------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------|------------|
| $7.673 \cdot 10^{10}$                    | $1.0671 \cdot 10^{11}$                      | $4.1684 \cdot 10^{10}$                               | $1.853 \cdot 10^{10}$                       | 0.28                  | 0.28       |

TABEAU C.9 – Propriétés constitutives optimales obtenues en supposant l'empilement de tôles magnétiques **isotrope transverse**,  $n = 3$ ,  $m = 8$ .

Les écarts relatifs entre les douze premières fréquences propres mesurées et calculées sont compris entre 0.2% et 12%, TAB. C.10. Les douze premières formes propres calculées, obtenues en considérant les propriétés constitutives optimales du tableau TAB. C.9, sont tracées sur la FIG. C.21.

### C.5.5.2 Considération des douze premières fréquences propres

Un second processus d'identification est réalisé en considérant les douze premières fréquences propres du rotor PMA, *i.e.*  $m = 12$ . Les valeurs optimales des propriétés constitutives sont listées dans le tableau TAB. C.11.

Les écarts relatifs entre les douze premières fréquences propres mesurées et calculées sont compris entre 0.6% et 10%, TAB. C.12. Les douze premières formes propres calculées, obtenues en considérant les propriétés constitutives optimales du tableau TAB. C.22, sont illustrées par la FIG. C.21.

### C.5.6 Conclusion

On constate que l'ordre des formes propres calculées ( $p = 1, q = 2$ ) et ( $p = 0, q = 1$ ) est inversé par rapport aux mêmes catégories de formes propres mesurées, pourtant fréquemment très proches. Cette différence est probablement due aux défaut d'assemblage des éléments constituant le rotor

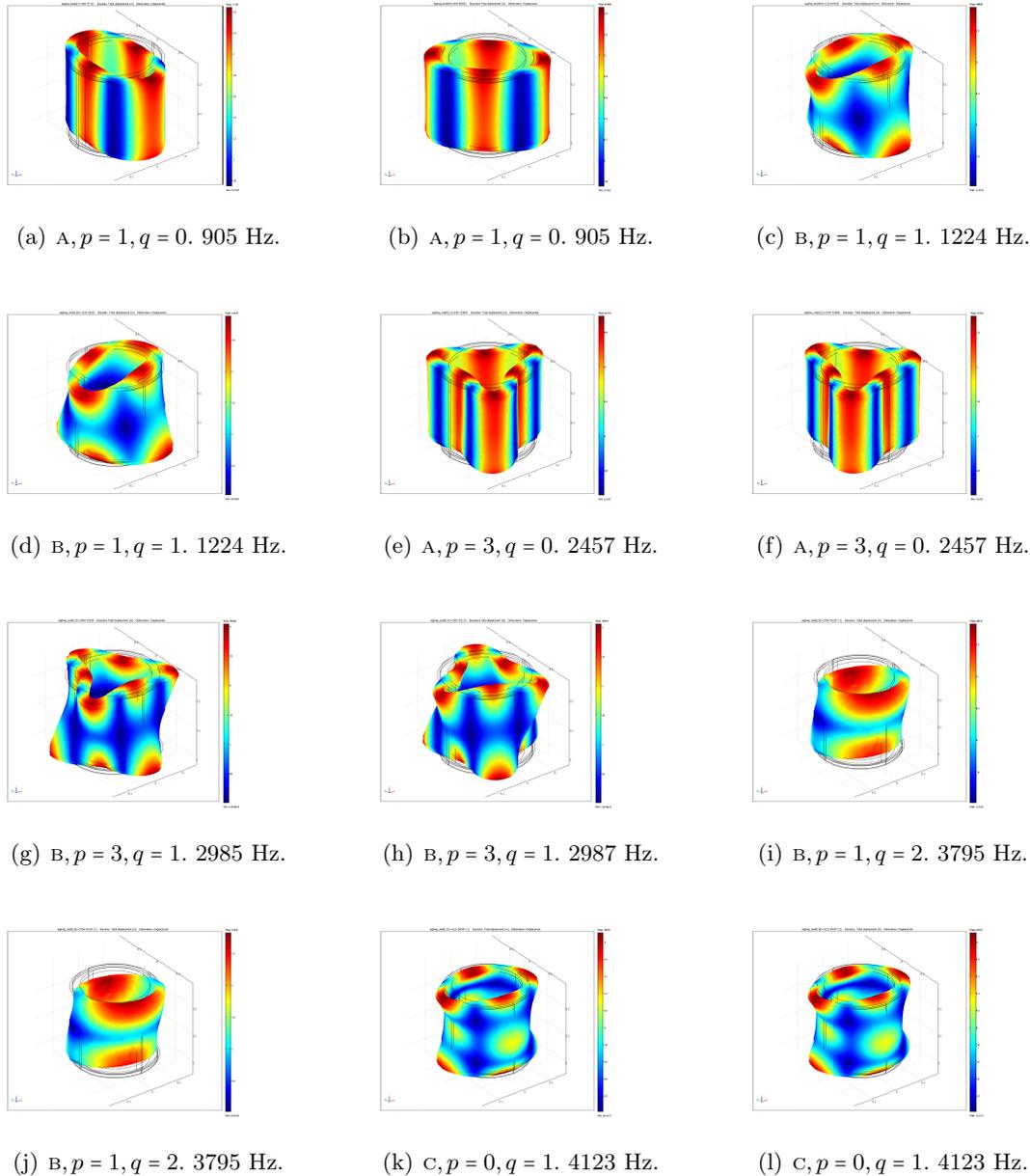


FIGURE C.20 – Tracé des douze premières formes propres calculées en supposant l'empilement de tôles magnétiques **isotrope**,  $n = 1$ ,  $m = 8$ .

PMA, *i.e.* particulièrement au niveau du frottement des tôles magnétiques dans le tube.

La liaison entre ces deux éléments n'est pas réellement un encastrement tandis qu'elle est considérée comme telle dans le modèle éléments-finis tridimensionnel. Cette écart de modélisation se perçoit nettement sur la forme propre calculée ( $p = 3, q = 0$ ) pour laquelle les génératrices axiales sont rectilignes, contrairement aux génératrices axiales de la forme propre expérimentale associée. Expérimentalement, le frottement entre le tube, *i.e.* élément sur lequel les impacts ont été donnés, et l'empilement de tôles magnétiques annulaires semble présenter localement des jeux d'assemblage.

En revanche, l'approximation de la modélisation est plutôt satisfaisante pour la prédiction des dix premières formes propres de catégorie A et B. L'erreur d'approximation relative est globalement de l'ordre de 5% quand l'hypothèse de matériau isotrope est privilégiée. L'hypothèse de matériau isotrope transverse fournit cependant une meilleure approximation dont l'erreur relative est de l'ordre

| Catégorie | $p$ | $q$ | Mesurées (Hz) | Calculées (Hz) | Ecart (%) |
|-----------|-----|-----|---------------|----------------|-----------|
| A         | 1   | 0   | 945           | 947            | 0,2       |
| A         | 1   | 0   | 951           | 947            | -0,4      |
| B         | 1   | 1   | 1195          | 1176           | -1,7      |
| B         | 1   | 1   | 1200          | 1176           | -2,1      |
| A         | 3   | 0   | 2389          | 2580           | 7,9       |
| A         | 3   | 0   | 2393          | 2582           | 7,7       |
| A         | 3   | 1   | 2930          | 2953           | 1,5       |
| A         | 3   | 1   | 2952          | 2961           | 0,7       |
| B         | 1   | 2   | 3607          | 3575           | -1,4      |
| B         | 1   | 2   | 3638          | 3575           | -1,8      |
| C         | 0   | 1   | 3779          | 3324           | -12       |
| C         | 0   | 1   | 3800          | 3335           | -12       |

 TABLEAU C.10 – Comparaison des douze premières fréquences propres mesurées et calculées en supposant l'empilement de tôles magnétiques **isotrope transverse**,  $n = 3$ ,  $m = 8$ .

| $E_z$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | $E_x = E_y$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | $G_{xz} = G_{yz}$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | $G_{xy}$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | $\nu_{xz} = \nu_{yz}$ | $\nu_{xy}$ |
|------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------|------------|
| $8.854 \cdot 10^{10}$                    | $1.1027 \cdot 10^{11}$                         | $4.3075 \cdot 10^{10}$                               | $2.0533 \cdot 10^{10}$                      | 0.28                  | 0.28       |

 TABLEAU C.11 – Propriétés constitutives optimales obtenues en supposant l'empilement de tôles magnétiques **isotrope transverse**,  $n = 3$ ,  $m = 12$ .

| Catégorie | $p$ | $q$ | Mesurées (Hz) | Calculées (Hz) | Ecart (%) |
|-----------|-----|-----|---------------|----------------|-----------|
| A         | 1   | 0   | 945           | 956            | 1.2       |
| A         | 1   | 0   | 951           | 956            | 0.5       |
| B         | 1   | 1   | 1195          | 1192           | -0.3      |
| B         | 1   | 1   | 1200          | 1192           | -0.6      |
| A         | 3   | 0   | 2389          | 2607           | 9.1       |
| A         | 3   | 0   | 2393          | 2609           | 8.3       |
| B         | 3   | 1   | 2930          | 2989           | 2.0       |
| B         | 3   | 1   | 2952          | 2989           | 1.3       |
| B         | 1   | 2   | 3607          | 3664           | 1.6       |
| B         | 1   | 2   | 3638          | 3669           | 0.8       |
| C         | 0   | 1   | 3779          | 3407           | -9.8      |
| C         | 0   | 1   | 3800          | 3422           | -9.9      |

 TABLEAU C.12 – Comparaison des douze premières fréquences propres mesurées et calculées en supposant l'empilement de tôles magnétiques **isotrope transverse**,  $n = 3$ ,  $m = 12$ .

de 2.4% et 2.6% lorsque le nombre de formes propres sélectionnées est respectivement égale à huit et douze.

Si l'on estime l'erreur d'approximation sur les douze premières formes propres de catégorie A, B et C, on constate qu'elle est maximum, *e.g.* 4.2%, lorsque l'hypothèse de matériau isotrope est privilégiée puisque la fonctionnelle était basée sur les huit premières fréquences propres mesurées. Elle vaut ensuite 4% lorsque l'on émet l'hypothèse de matériau isotrope transverse et que l'on recalcule le modèle éléments-finis également sur les huit premières fréquences propres mesurées. Elle atteint finalement 3.8% lorsque le modèle est recalé sur les douze premières fréquences propres mesurées.

Les valeurs des propriétés constitutives de l'empilement de tôles magnétiques annulaires d'un

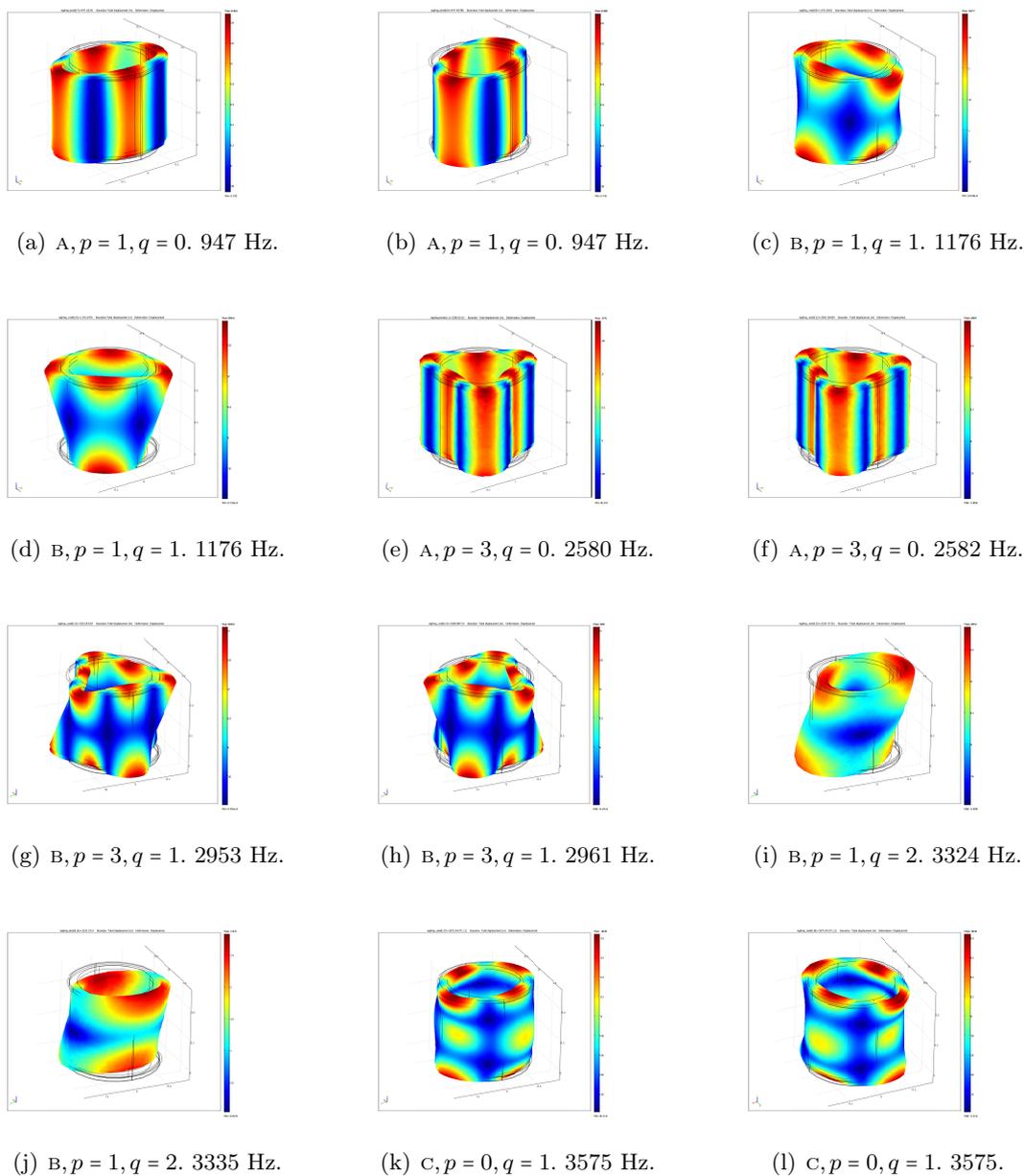


FIGURE C.21 – Tracé des douze premières formes propres calculées en supposant l'empilement de tôles magnétiques **isotrope transverse**,  $n = 3$ ,  $m = 8$ .

rotor PMA peuvent donc être comprises dans les intervalles suivants :

$$7.673 \cdot 10^{10} \leq E_z \leq 8.854 \cdot 10^{10} \text{ (N} \cdot \text{m}^{-2}\text{)}, \quad (\text{C.118})$$

$$1.067 \cdot 10^{11} \leq E_x = E_y \leq 1.103 \cdot 10^{11} \text{ (N} \cdot \text{m}^{-2}\text{)}, \quad (\text{C.119})$$

$$1.853 \cdot 10^{10} \leq G_{xz} = G_{yz} \leq 2.053 \cdot 10^{10} \text{ (N} \cdot \text{m}^{-2}\text{)}. \quad (\text{C.120})$$

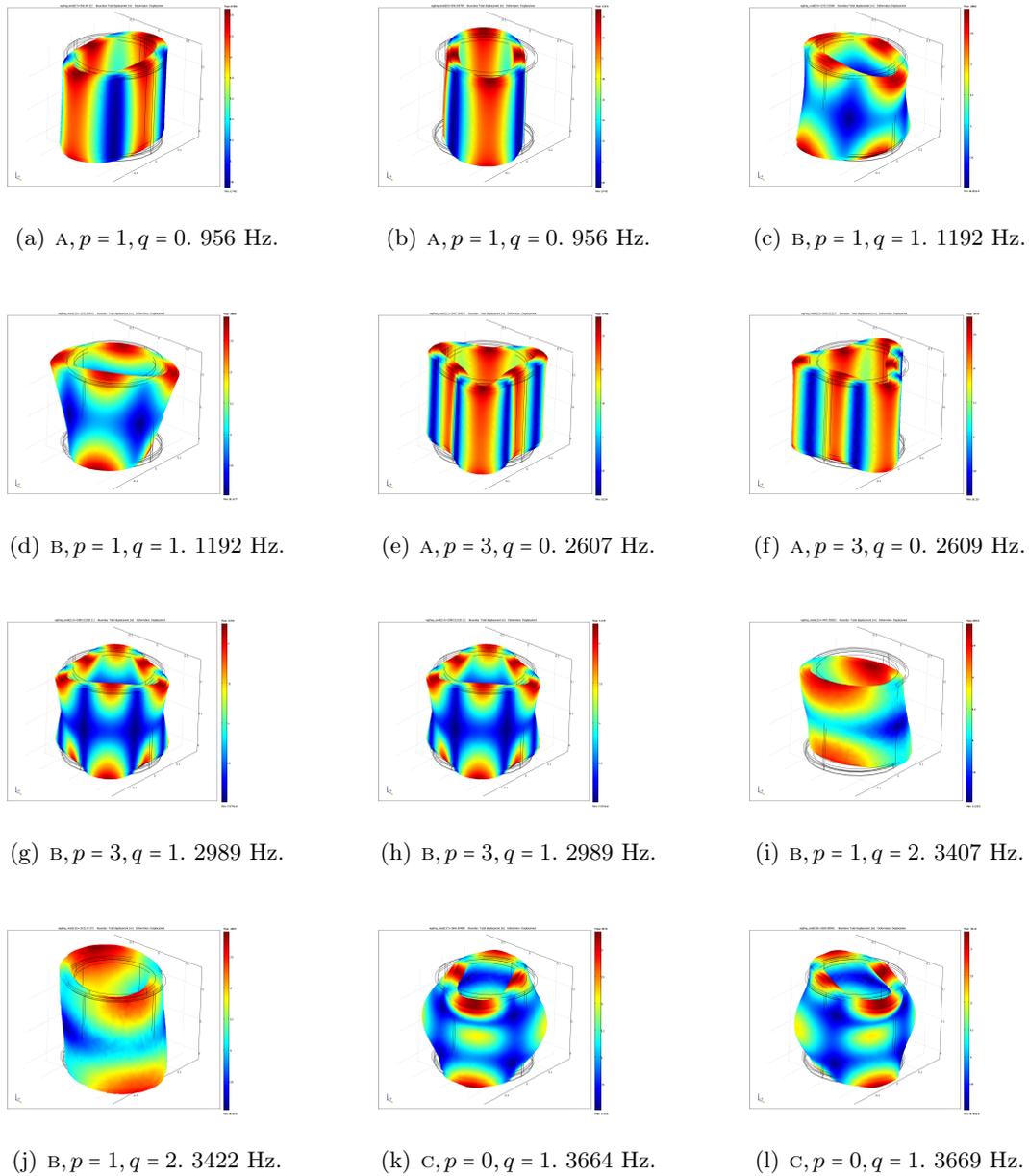


FIGURE C.22 – Tracé des douze premières formes propres calculées en supposant l'empilement de tôles magnétiques **isotrope transverse**,  $n = 3$ ,  $m = 12$ .

## Annexe D

# Dynamique des rotors feuilletés en présence d'effets centrifuges

### D.1 De l'intérêt de la raideur géométrique

La modélisation des rotors feuilletés nécessite de combiner trois types de non-linéarités :

- la non-linéarité de type *matérielle* qui porte sur la loi de comportement du matériau : plasticité, endommagement, etc... ,
- la non-linéarité de type *contact* pour laquelle il faut traiter les phases d'adhérence et de décollement,
- la non-linéarité *géométrique* due à la pré-tension.

Cette dernière a pour effet de modifier la raideur d'un système en fonction des déplacements de ses degrés de liberté. Dans le but d'appréhender ce concept considéré dans la suite de ce chapitre, considérons le système mécanique présenté FIG. D.1. Celui-ci est constitué d'une masse ponctuelle  $m$  situé en  $G$  et connectée au point  $A$  via une raideur  $k_r$ .

Supposons que ce système puisse se mouvoir, dans le plan  $\{xOy\}$  muni du repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(A, \vec{z})$  tel que son vecteur instantané de rotation soit égal à :

$$\vec{\omega}_{/0} = \omega \vec{z}. \quad (\text{D.1})$$

Le repère tournant lié à l'oscillateur est défini par  $(O, \vec{r}, \vec{t}, \vec{z})$  de telle sorte que les vecteurs unitaires soient orientés de la manière suivante :

$$(\vec{x}, \vec{r}) = (\vec{y}, \vec{t}) = \omega t. \quad (\text{D.2})$$

où  $t$  représente le temps. L'Eq. (A.208) permet d'exprimer la vitesse de la masse ponctuelle  $m$  située en  $G$  :

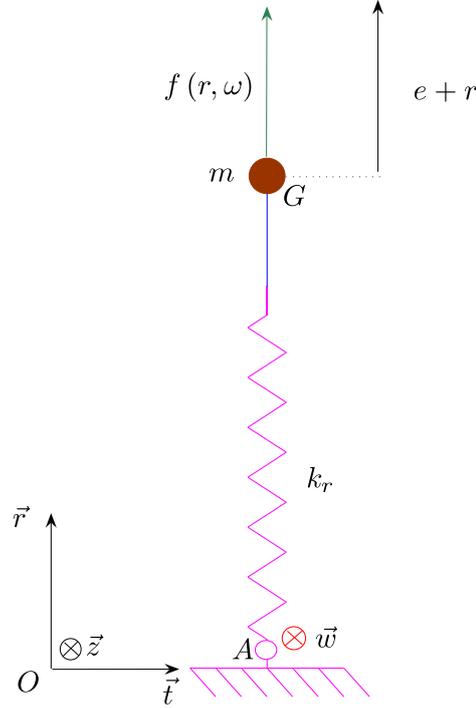
$$\vec{V}_{/0}(G) = \omega(e+r)\vec{t}. \quad (\text{D.3})$$

Précisons que lorsque le système est au repos, *i.e.*  $\omega = 0$ , la masse  $m$  est excentrée d'une distance  $e$  telle que :

$$\|\vec{AG}\| = e. \quad (\text{D.4})$$

On se place alors dans le cadre d'un régime quasi-statique tel que :

$$\frac{\partial}{\partial t} ( ) = 0, \quad (\text{D.5})$$


 FIGURE D.1 – Oscillateur élémentaire de caractéristiques  $(k_r, m)$ .

c'est-à-dire que l'on considère une vitesse de rotation constante,  $\dot{\omega} = 0$ . Ainsi, l'amplitude  $r$  de la réponse du système mécanique sera indépendante de l'orientation du vecteur  $\vec{r}$  dans le plan  $\{xOy\}$ . En d'autres termes, il est possible de s'affranchir de l'angle orienté  $\omega t$  et de ne considérer que la direction  $\vec{r}$ .

Ce système mécanique forme ainsi un oscillateur élémentaire paramétrique, de paramètre  $\omega$ , dont le seul degré de liberté est la variable  $r$ .

Les énergies cinétique  $\mathcal{T}_e$  et de déformation  $\mathcal{U}_e$  de l'oscillateur élémentaire s'expriment donc de la manière suivante :

$$\mathcal{T}_e = \frac{1}{2} m [\omega (e + r)]^2, \quad (\text{D.6})$$

$$\mathcal{U}_e = \frac{1}{2} k_r r^2. \quad (\text{D.7})$$

Le système étant exempté de forces extérieures, l'application des équations de Lagrange, Eq. (2.2), conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial \dot{r}} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial r} \right) + \frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial r} = 0, \quad (\text{D.8})$$

avec :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial r} = k_r r, \quad (\text{D.9a}) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial \dot{r}} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial r} \right) = \underbrace{-\omega^2 m (e + r)}_{f(r, \omega)}. \quad (\text{D.9b})$$

L'Eq. (D.9b) laisse apparaître la force centrifuge  $f(r, \omega)$  due à l'accélération centripète de la masse  $m$ , subsistante malgré le régime quasi-statique.

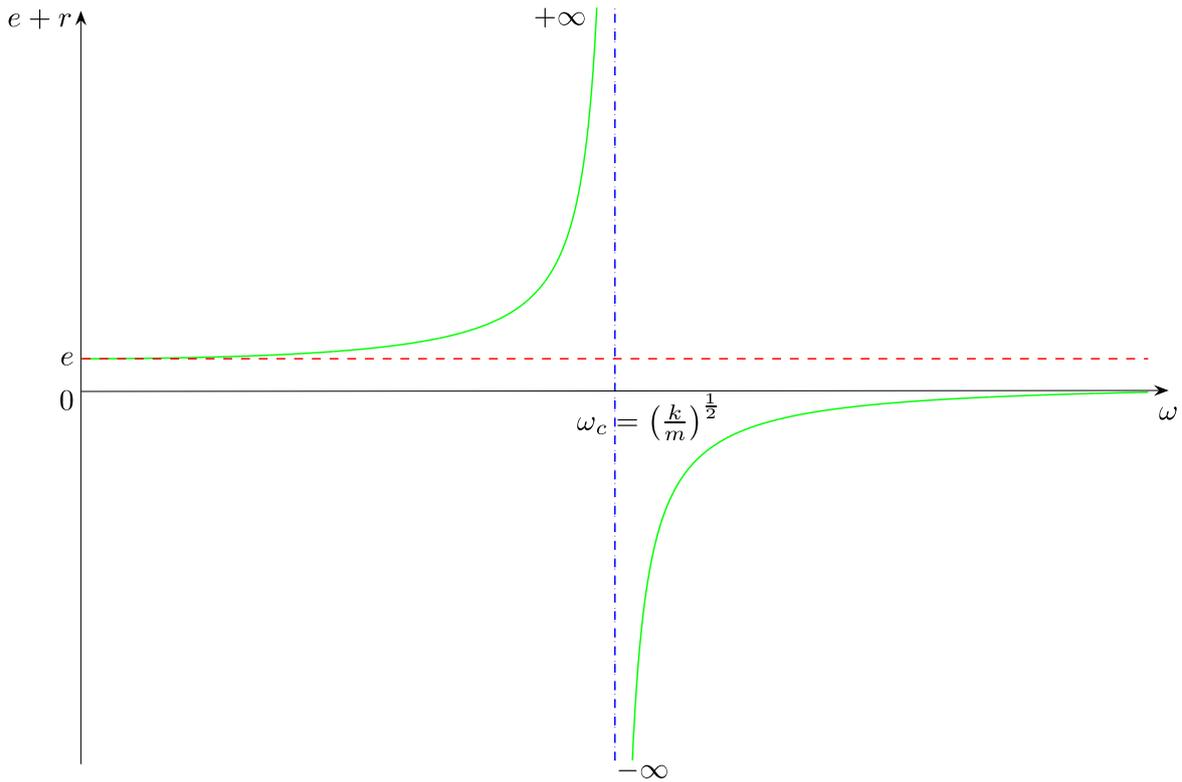


FIGURE D.2 – Amplitude de la réponse quasi-statique d'un oscillateur élémentaire en considérant une raideur constante  $k_r = k$ .

### D.1.1 Réponse quasi-statique d'un oscillateur élémentaire de raideur constante

Considérons une raideur  $k_r$  constante définie par :

$$k_r = k. \quad (\text{D.10})$$

En substituant les Eq. (D.10), Eq. (D.9b) et Eq. (D.9a) dans l'Eq. (D.8), la réponse quasi-statique de l'oscillateur élémentaire est alors régie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} -\omega^2 m (e + r) + k r &= 0, \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\omega^2 m e}{(k - \omega^2 m)}. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

L'expression de la réponse quasi-statique fait apparaître clairement qu'il existe une valeur critique  $\omega_c$  du paramètre  $\omega$  pour laquelle le système est instable, FIG. D.2, telle que :

$$\begin{aligned} k - \omega_c^2 m &= 0, \\ \Leftrightarrow \omega_c &= \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

L'Eq. (D.11) s'écrit alors :

$$r = \frac{e}{\left[\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1\right]}. \quad (\text{D.13})$$

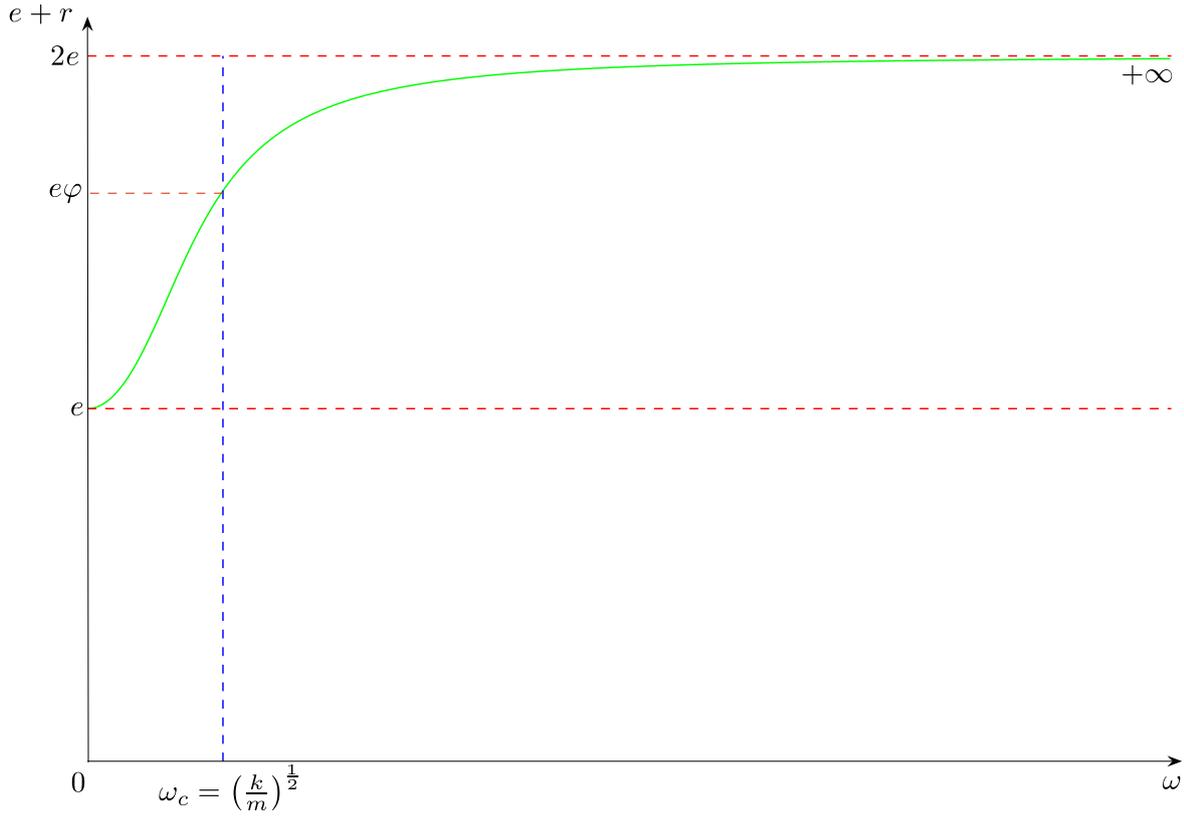


FIGURE D.3 – Amplitude de la réponse quasi-statique d'un oscillateur élémentaire en considérant une raideur paramétrique  $k_r = k + k_G(r, \omega)$ .

Aux passages aux limites, on a donc :

$$\begin{aligned}
 &\bullet \omega = 0, \quad e+r \rightarrow e & \bullet \omega \rightarrow +\infty, \quad e+r \rightarrow 0^-, \\
 &\bullet \omega \rightarrow \omega_c^-, \quad e+r \rightarrow +\infty & \bullet \omega \rightarrow \omega_c^+, \quad e+r \rightarrow -\infty.
 \end{aligned}$$

### D.1.2 Réponse quasi-statique d'un oscillateur élémentaire possédant une raideur géométrique

Considérons désormais une raideur non-linéaire  $k_r$  définie par :

$$k_r = k + k_G(r, \omega), \text{ avec } k_G(r, \omega) = \frac{\omega^2 m}{e} (e+r). \quad (\text{D.14})$$

où  $k_G(r, \omega)$  est directement fonction de l'amplitude  $r$ .

En substituant les Eq. (D.14), Eq. (D.9b) et Eq. (D.9a) dans l'Eq. (D.8), la réponse quasi-statique de l'oscillateur élémentaire est alors régie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 m (e+r) + \frac{\omega^2 m}{e} (e+r)r + kr &= 0, \\
 \Leftrightarrow r^2 + \left(\frac{\omega e}{\omega}\right)^2 er - e^2 &= 0.
 \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Le discriminant de l'Eq. (D.15) du second de degré :

$$\Delta_r = \left[ \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^4 + 4 \right] e^2 > 0, \quad (\text{D.16})$$

fournit les deux solutions définies par :

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} e \left[ \pm \left[ \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^4 + 4 \right]^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right] \text{ avec } r \in R^+, \forall \omega \in R^+, \quad (\text{D.17})$$

dont on ne conserve que celle qui est positive. En posant l'égalité :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_c}, \quad (\text{D.18})$$

l'Eq. (D.17) devient alors :

$$r = \frac{1}{2} e \left[ \left[ \left( \frac{1}{\Omega} \right)^4 + 4 \right]^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{1}{\Omega} \right)^2 \right]. \quad (\text{D.19})$$

Aux passages aux limites, on a finalement :

$$\bullet \Omega = 0, \quad e+r \rightarrow e \quad \bullet \Omega \rightarrow +\infty, \quad e+r \rightarrow 2e,$$

Lorsque  $\Omega = 1$ , on a donc :

$$e+r \rightarrow e + e \left[ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right] = e + e \left[ \underbrace{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}_{\varphi} - 1 \right], \quad (\text{D.20})$$

$$\Leftrightarrow e+r \rightarrow e\varphi,$$

où  $\varphi$  est le nombre d'Or.

### D.1.3 Conclusion

On constate que la prise en compte du terme  $k_G(r, \omega)$ , Eq. (D.14), a pour effet de stabiliser la réponse du système, FIG. D.3. En effet, la non-linéarité géométrique induit une augmentation de la raideur du système directement liée à l'amplitude de la réponse  $r$ . Il est évident que l'asymptote de la réponse en  $r = 2e$  est purement académique et physiquement non acceptable en ce sens où, bien qu'un système réel puisse être sujet au *stiffening effect*, ce dernier possède toutefois des propriétés matérielles qui ne sont pas constantes pour un état de chargement infini, lequel conduirait à la rupture du matériau.

Cet effet est considéré dans le chapitre ci-après dans le but de modéliser la non-linéarité géométrique issue de la déflexion transversale des tirants sous un chargement de type centrifuge.

## D.2 Algorithme d'appariement des nœuds maîtres et des éléments finis esclaves

---

**Algorithm 9** Algorithme d'appariement des nœuds maîtres et des éléments finis esclaves

---

- 1: **for**  $i = e_{m_i}, \dots, e_{m_f}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , **do**
- 2:   Pour les éléments finis maîtres  ${}^m \mathcal{K}_i$
- 3:   Sélection du  $i^e$  nœud maître  $M_m^i$
- 4:   **for**  $k = e_{s_i}, \dots, e_{s_f}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , **do**
- 5:     Pour chaque élément fini esclave  ${}^s \mathcal{K}_k$
- 6:     Sélection des  $k^e$  et  $(k-1)^e$  nœuds esclaves associés  $M_s^k$  et  $M_s^{k-1}$
- 7:     Détermination de la normal au contact  $n(M_m^i)$ , Eq. (5.46), Eq. (5.48) et Eq. (5.47) :

$$\bar{n}(M_m^i) = \frac{1}{2} (\bar{n}_l(M_m^i) + \bar{n}_r(M_m^i)). \quad (\text{D.21})$$

- 8:     Détermination de la position du  $i^e$  point  $C(M_m^i)$  et des paramètres  $\alpha_s$  et  $\alpha_n$ , Eq. (5.56), Eq. (5.59) et Eq. (5.57) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_s^k C(M_m^i)} = \alpha_s \overrightarrow{M_s^k M_s^{k-1}} \\ \overrightarrow{M_m^i C(M_m^i)} = \alpha_n \bar{n}(M_m^i) \end{cases}.$$

- 9:     **if**  $\alpha_s \in [0, 1]$  **then**
- 10:       Incrémentation du  $k^e$  élément fini esclave  ${}^s \mathcal{K}_k$  associée au  $i^e$  nœud maître  $M_m^i$
- 11:       Incrémentation de la frontière de contact du domaine esclave  $\Gamma_c^s$  :

$$\Gamma_c^s = \Gamma_c^s \cup {}^s \mathcal{K}_k.$$

- 12:     Incrémentation de la frontière de contact du domaine maître  $\Gamma_c^m$  :

$$\Gamma_c^m = \Gamma_c^m \cup {}^m \mathcal{K}_i.$$

- 13:     **end if**
  - 14:     **end for**
  - 15: **end for**
-

## D.3 Algorithme du point fixe

---

### Algorithm 10 Algorithme du point fixe

---

1:  $\delta^0 \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ ,  $P_0$ ,  $E_0$ ,  $\omega$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$  donné. Les conditions aux limites sont appliquées en utilisant une méthode de pénalité  $\Rightarrow K_{bc}$ ,  $\mathcal{F}_{bc}$

2: **while**  $\frac{\|\delta^{j+1} - \delta^j\|}{\|\delta^{j+1}\|} < \beta$  **do**

3:   **for**  ${}^m \mathcal{K}_i \in \Omega_m$ ,  $i = e_{m_i} \dots e_{m_f}$  **do**

4:     Trouver le  $k^e$  indice, *i.e.* l'élément fini  ${}^s \mathcal{K}_k$ , sur lequel  $M_m^i$  est projeté, Alg. 9

5:     **if**  ${}^i g_n \leq 0$  **then**

6:       Calculer et assembler le vecteur  ${}^i \mathcal{F}_n^j$

7:       Calculer et assembler la matrice de raideur de contact permanent  $K_c$

8:     **end if**

9:     La charge centrifuge transvrsale  ${}^q \mathcal{F}_c^j$  est alors calculée :

$${}^q \mathcal{F}_c^j = {}^q \rho_m \omega^{2q} S_m (e_{ti} + {}^q w_m^j), \quad q = [i, i + 1]$$

10:    La longueur  ${}^i l_m^j$  de chaque élément fini  $\mathcal{K}_e$  est calculée :

$${}^i l_m^j = \left[ ({}^{i+1} w_m^j - {}^i w_m^j)^2 + ({}^i l_m + {}^{i+1} v_m^j - {}^i v_m^j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

11:    Calcul de la charge longitudinale  ${}^i P$  qui agit sur  ${}^m \mathcal{K}_i$  :

$${}^i P_m^j = {}^i E_m {}^i S_m \frac{{}^i l_m^j}{{}^i l_m} \Rightarrow {}^i K_G^j ({}^i P^j)$$

12:    La condition à la limite  ${}^i P_m^j$  est appliquée à l'empilement :

$${}^{e_{sf}} P_s^j = -{}^{e_{mf}} P_m^j$$

13:    **end for**

14:    **for**  $\mathcal{K}_k \in \Omega_s$ ,  $k = e_i \dots e_f$  **do**

15:     Le module d'Young de l'empilement est évalué :

$$E_s^i = E_0 \left( \frac{{}^{e_{sf}} P^j}{P_0} \right)^{\frac{8}{5}} \Rightarrow {}^k K_f^j (E_s^i)$$

16:    **end for**

17:    Le système suivant est alors résolu :

$$\delta^{j+1} = K_{nl}^j (\omega, \delta^j)^{-1} \mathcal{F}_{nl}^j (\omega, \delta^j)$$

18: **end while**

---

### D.4 Caractéristiques des paliers hydrodynamiques

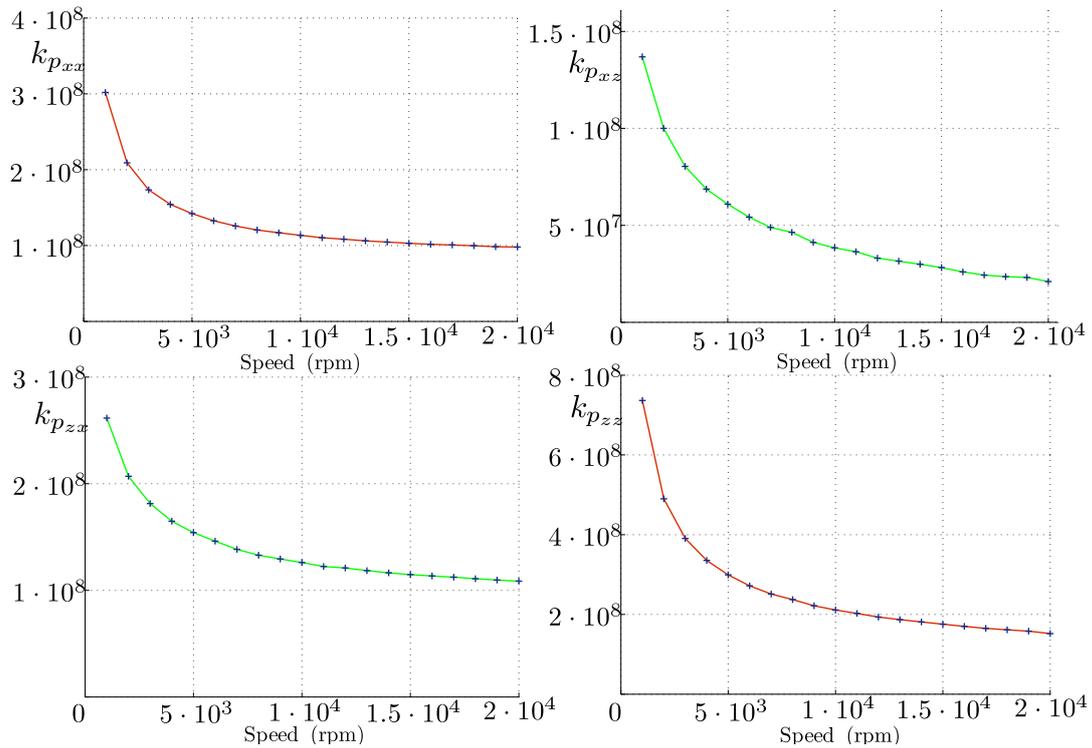


FIGURE D.4 – Raideur des paliers (N·m<sup>-1</sup>) en fonction de la vitesse de rotation.

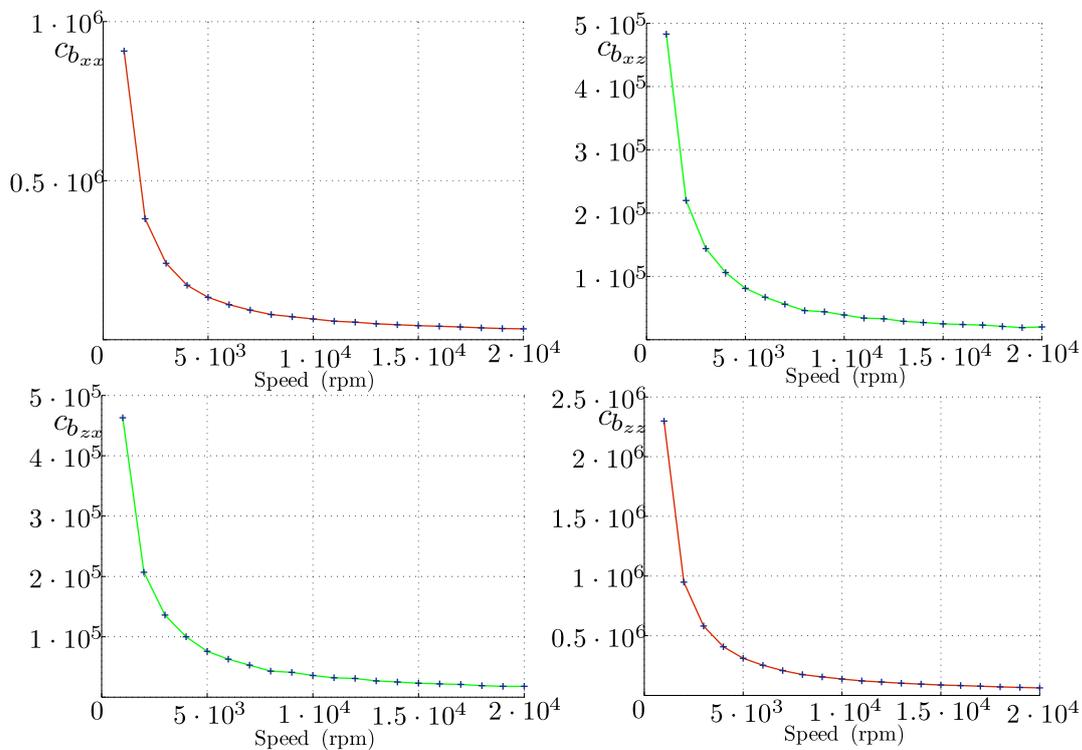


FIGURE D.5 – Amortissement des paliers (N·s·m<sup>-1</sup>) en fonction de la vitesse de rotation.

# Annexe E

## Modélisation raffinée d'un rotor feuilleté

### Sommaire

---

|            |                                                              |            |
|------------|--------------------------------------------------------------|------------|
| <b>E.1</b> | <b>Introduction</b>                                          | <b>322</b> |
| <b>E.2</b> | <b>Modélisation élémentaire d'un feuilletage</b>             | <b>322</b> |
| <b>E.3</b> | <b>Stratégie d'optimisation</b>                              | <b>323</b> |
| <b>E.4</b> | <b>Identification des propriétés constitutives du vernis</b> | <b>324</b> |
| <b>E.5</b> | <b>Sensibilité du feuilletage</b>                            | <b>326</b> |
| <b>E.6</b> | <b>Invariance ou dépendance</b>                              | <b>327</b> |
| <b>E.7</b> | <b>Conclusion</b>                                            | <b>328</b> |

---

## E.1 Introduction

CETTE section présente un modèle éléments finis de rotor MGV feuilleté considérant la structure intrinsèque du feuilletage, *i.e.* une modélisation raffinée prenant en compte tous les composants élémentaires du feuilletage. Une tôle magnétique d'épaisseur  $e_t$  est constituée d'un **disque laminé** en acier dont les faces sont vernies avec une **résine** isolante.

On se propose alors de modéliser indépendamment les disques laminés des couches de vernis, lesquels présentent une épaisseur  $e_v$  pouvant varier de manière relativement importante, *e.g.*  $\pm 30\%$ , telle que :

$$2 \cdot 10^{-6} \text{ m} \leq e_v \leq 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}. \quad (\text{E.1})$$

Ainsi, la connaissance des caractéristiques mécaniques d'un disque laminé, d'une part, et surtout du vernis qui le recouvre, d'autre part, permettrait de prédire le comportement dynamique de tous rotors feuilletés car on pourrait penser que ces constituants élémentaires du feuilletage soient invariantes. Les disques laminés ne présentent pas de difficulté particulière dans la démarche de modélisation puisque ces propriétés sont parfaitement connues, TAB. E.3.

En revanche, outre sa masse volumique présentée dans le TAB. E.3, le vernis est un matériau dont les propriétés constitutives sont difficiles à qualifier. Sa composition est connue, TAB. E.2, mais la détermination analytique de ses propriétés, *e.g.* à partir de loi de mélange, peut être délicate ou conduire à des valeurs aberrantes, *i.e.* module d'Young de l'ordre de  $10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Une procédure d'identification a donc été privilégiée pour déterminer les propriétés constitutives du vernis d'un rotor feuilleté.

| Composant     | Masse volumique<br>( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) | Module d'Young<br>( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | Coefficient<br>de Poisson | Module de Coulomb<br>( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) |
|---------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------------------------|
| Vernis        | 1450                                                   | $1.28 \cdot 10^{11}$                                 | ?                         | ?                                                       |
| Disque laminé | 7650                                                   | $2.05 \cdot 10^{11}$                                 | $\frac{1}{3}$             | $7.68 \cdot 10^{10}$                                    |

TABLEAU E.1 – Propriétés constitutives des éléments constituant une tôle magnétique.

| Composant          | Proportion (%) | Module d'Young ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) |
|--------------------|----------------|---------------------------------------------------|
| Résine synthétique | 25             | $3.16 \cdot 10^9$                                 |
| Charge minérale    | 75             | $1.70 \cdot 10^{11}$                              |

TABLEAU E.2 – Modules d'Young des éléments constituant le vernis.

## E.2 Modélisation élémentaire d'un feuilletage

On considère le rotor MGV sur lequel des mesures ont été réalisées au laboratoire, Chapitre 3, et dont les caractéristiques géométriques du feuilletage sont présentées dans le TAB. E.3. On peut alors définir la densité linéique d'interface du feuilletage grâce l'Eq. (1.1), Chapitre 1, telle que :

$$N = \frac{n_t + 1}{L_s} = \frac{1}{e_t} + \frac{1}{L_s} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-4}} + \frac{1}{3.78 \cdot 10^{-1}} \sim 2.0026 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}, \quad (\text{E.2})$$

ce qui conduit à nombre  $n_t$  tôles magnétiques du feuilletage, tel que :

$$n_t = L_s N - 1 = 756. \quad (\text{E.3})$$

Le modèle éléments-finis considère chaque composant élémentaire comme un élément de poutre de Timoshenko, FIG. E.2. Notons que les tirants et barres de court-circuit ne sont pas modélisés ici car il s'agit avant tout d'appréhender le comportement d'un modèle raffiné de feuilletage.

L'empilement des  $n_t$  tôles magnétiques, *i.e.* présentant  $n_t + 1$  interfaces, sera modélisé par :

- $nt = 756$  éléments-finis de disque laminé de longueur  $e_t - 2e_v$ ,
- 755 éléments-finis de vernis de longueur  $2e_v$ , à l'interface de deux disques laminés contigus, comme l'illustre la FIG. E.1,
- 2 éléments-finis de vernis de longueur  $e_v$ , situés aux extrémités du feuilletage,

ce qui représente 1 513 éléments finis nécessaires à la description raffinée du feuilletage.

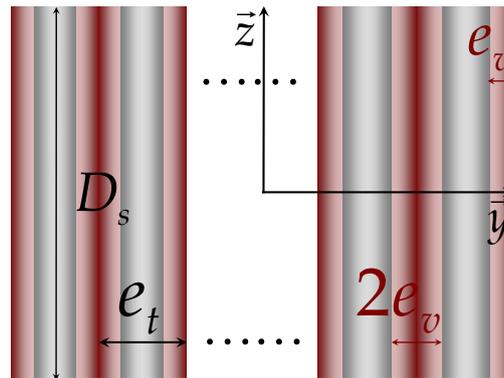


FIGURE E.1 – Disposition des éléments finis de disque laminé (■) et vernis (■).

| Longueur $L_s$ (m)   | Diamètre $D_s$ (m)    | Épaisseur $e_t$ (m) | Épaisseur $e_v$ (m) |
|----------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|
| $3.78 \cdot 10^{-1}$ | $2.463 \cdot 10^{-1}$ | $5 \cdot 10^{-4}$   | $3 \cdot 10^{-6}$   |

TABLEAU E.3 – Caractéristique géométrique du feuilletage.

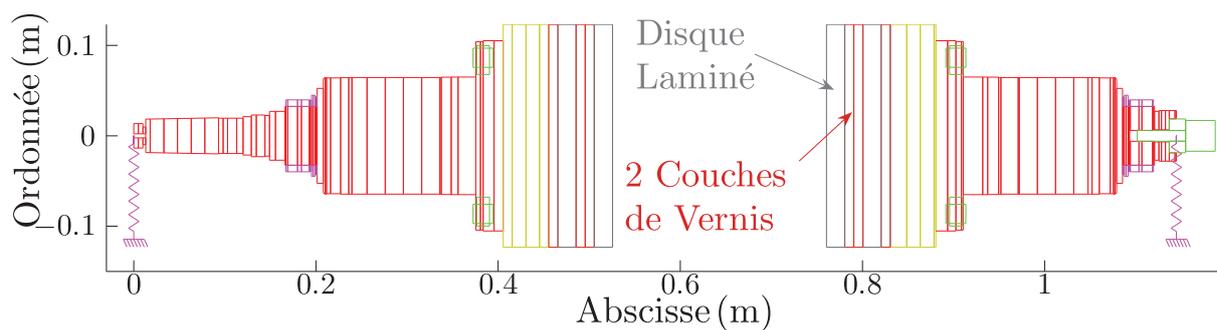


FIGURE E.2 – Modèle éléments finis d'un rotor MGV feuilleté de taille 3,  $N_e = 1\ 559$ .

### E.3 Stratégie d'optimisation

Les propriétés constitutives du vernis sont alors définies par le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  avec  $\{x_p\}_{p=1\dots n}$  tel que :

$$x = (E_v, G_v)^t, \text{ avec } n = 2, \quad (\text{E.4})$$

où  $E_v$  et  $G_v$  représentent respectivement les modules d'Young et de Coulomb du vernis. Le coefficient de Poisson ayant été fixé tel que  $\nu_v = 0.28$ .

Afin de déterminer les propriétés constitutives du vernis, une procédure d'identification a été réalisée en minimisant une fonctionnelle basée sur l'écart relatif entre pulsations propres mesurées et calculées telle que :

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m F_k^\omega(x)^2, \quad (\text{E.5})$$

où  $F_k^\omega$  est définie dans l'Eq. (4.8) et  $m$  est le nombre de modes considérés dans la procédure d'optimisation.

La stratégie d'optimisation consiste à minimiser une fonctionnelle  $f$ , Eq. (E.5), en résolvant le problème ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} \text{rouver } x^* \\ & \text{tel que } \min_{x^* \in \mathbb{R}^n} f(x), \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt, Alg. 7 défini dans l'Annexe C.1.3.

## E.4 Identification des propriétés constitutives du vernis

Le modèle éléments finis ramifié présenté sur la FIG. E.2 est composé du domaine de  $N_e = 1\,573$  éléments finis, *i.e.*  $n_\delta = 3\,148$ . Le domaine d'optimisation est défini par l'union des éléments finis  $\mathcal{K}_e$  modélisant chaque couche de vernis telle que :

$$\bigcup_{e=1}^{n_t} \mathcal{K}_{e_i+2(e-1)}, \quad (\text{E.7})$$

avec  $e_i = 32$  et  $e_f = e_i + 2(n_t - 1) = 1\,544$ .

| Module d'Young ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | Module de Coulomb ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | Coefficient de Poisson |
|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------|
| $E_v$                                             | $G_v$                                                | $\nu_v$                |
| $6.8555 \cdot 10^{10}$                            | $3.4071 \cdot 10^9$                                  | $2.7425 \cdot 10^{-1}$ |

TABLEAU E.4 – Valeurs optimales  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  des propriétés constitutives du vernis,  $e_v = 3\mu\text{m}$ .

La procédure d'identification des propriétés constitutives du vernis a été réalisée en considérant les quatre premières pulsations propres dans l'algorithme d'optimisation, *i.e.*  $m = 4$ .

Les valeurs initiales des paramètres d'optimisation  $x^0$ , Alg. 7, ont été fixées comme suit :

$$x_1^0 = 0.5 \cdot 10^9, \quad (\text{E.8a}) \quad x_2^0 = \frac{x_1^0}{2(1 + \nu_v)}, \quad (\text{E.8b})$$

où  $x_1^0$  et  $x_2^0$  sont exprimés en ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ). Les bornes inférieures et supérieures des intervalles contenant les variables d'optimisation  $x$  ont été définies comme dans l'Eq. (4.78).

Ainsi, pour une épaisseur de vernis fixée à  $e_v = 3\mu\text{m}$ , les propriétés constitutives du vernis ont été identifiées, TAB. E.4, à partir des quatre premières pulsations propres présentées dans le TAB. E.5. La FIG. E.3 présente l'évolution de la fonctionnelle  $f$ , pour  $m = 4$  modes, au cours du processus d'optimisation qui a convergé en  $i = 17$  itérations vers l'optimum  $(x_1^*, x_2^*)$ . L'évolution des variables d'optimisation relative  $\bar{x}$ , au cours du processus de minimisation, est présentée sur la FIG. E.4 et

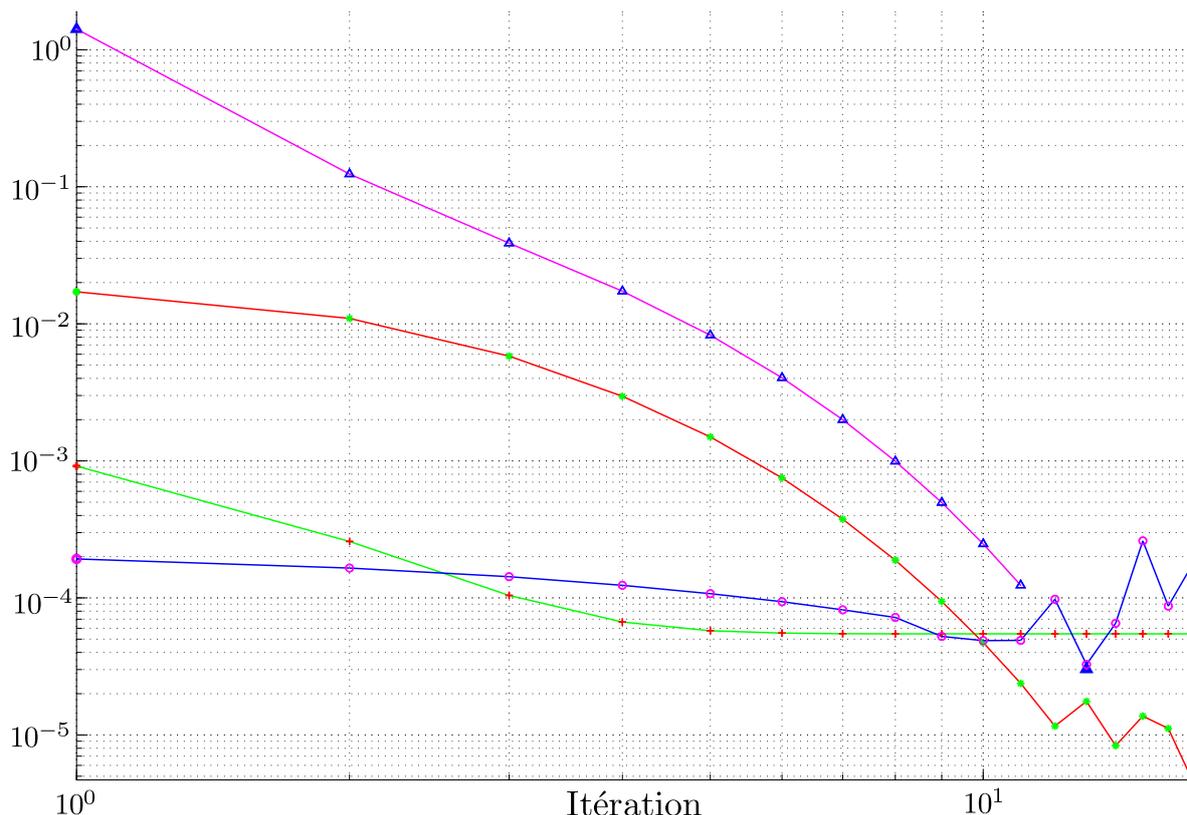


FIGURE E.3 – Évolution de la norme de la différences des itérés successifs ( $\Delta$ ), fonctionnelle (+), norme de gradient (\*) et paramètre d'amortissement ( $\circ$ ) au cours des 17 itérations. La convergence est atteinte en 219 s.

correspond à une durée de convergence égale à 219 s.

Les faibles valeurs des erreurs relatives entre les fréquences propres calculées et mesurées, comprises entre  $-0.048\%$  et  $0.748\%$ , indiquent une qualité satisfaisante d'identification des propriétés constitutives du vernis ainsi qu'une bonne prédictivité du modèle éléments finis.

**Remarque 35:** En se référant à l'article proposé par [15], il est possible de déterminer les flexibilités moyennes par interface qui agissent au niveau de deux disques laminés contigus, Eq. (1.5a) et Eq. (1.5b) telles que :

$$C = \frac{1}{N} \left( \frac{1}{E} - \frac{f}{E_a} \right), \quad (\text{E.9a}) \quad S = \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{G} - \frac{2(1+\nu_a)}{E_a} f \right], \quad (\text{E.9b})$$

où  $E_a$  et  $\nu_a$  sont les modules d'Young et coefficient de Poisson des disques laminés,  $N$  est la densité linéique d'interface définie dans l'Eq. (1.1). Par ailleurs, pour les rotors feuilletés MGv, le facteur d'empilement  $f$  est de l'ordre de 0.97.

Il vient alors :

$$C = 4.8479 \cdot 10^{-015} \text{m}^3 \cdot \text{N}, \quad (\text{E.10a}) \quad S = 1.4048 \cdot 10^{-013} \text{m}^3 \cdot \text{N}. \quad (\text{E.10b})$$

Par ailleurs, la faible valeur du module de Coulomb identifié met en exergue le caractère très cisailant du feuilletage. En effet, celui-ci se comporte localement comme une pluralité de disques

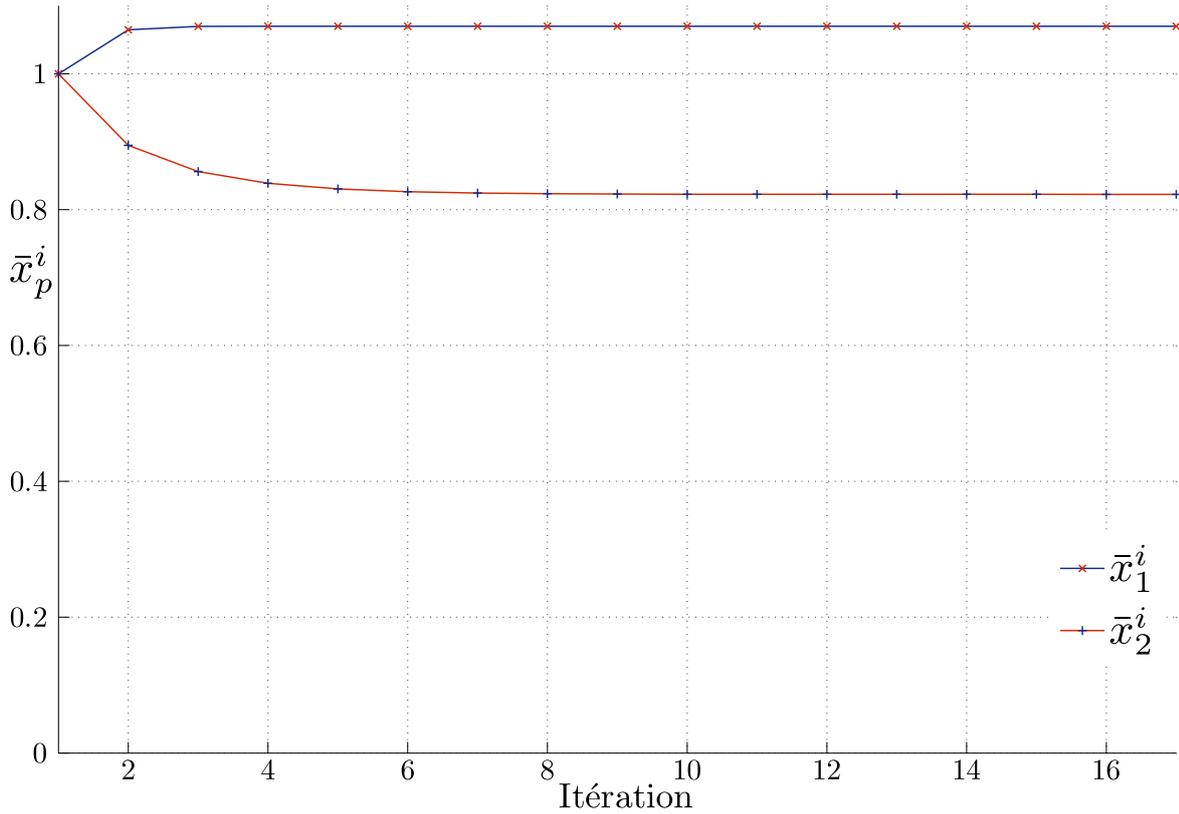


FIGURE E.4 – Évolution des itérés successifs  $\bar{x}_p$ , *i.e.* valeurs relatives des modules d' $\mathcal{V}$ oung (X) et de  $\mathcal{C}$ oulomb (+) au cours des itérations.

indéformables ayant uniquement la possibilité de se mouvoir latéralement dans un mouvement de translation perpendiculaire à leur axe de révolution, FIG. E.5.



| Indice           | Mesurée (Hz) | Calculée (Hz) | Erreur (%) |
|------------------|--------------|---------------|------------|
| 1 <sup>ere</sup> | 856.40       | 854.40        | -0.233     |
| 2 <sup>e</sup>   | 1230.0       | 1237.6        | 0.625      |
| 3 <sup>e</sup>   | 1713.3       | 1761.6        | 2.820      |
| 4 <sup>e</sup>   | 2330.6       | 2286.8        | -1.876     |

TABLEAU E.5 – Valeurs des quatre premières fréquences propres calculées et mesurées. Les fréquences propres calculées ont été obtenues en considérant une épaisseur de vernis  $e_v = 3\mu\text{m}$ .

## E.5 Sensibilité du feuilletage

A partir des valeurs optimales des propriétés constitutives du vernis présentées dans le TAB. E.4, une étude paramétrique a été réalisée sur l'évolution des quatre premières fréquences propres de flexion, FIG. E.6, du rotor feuilleté, de taille 3, en fonction de l'épaisseur de vernis  $e_v$  dont la plage de variation est  $e_v \in [2, 4] (\mu\text{m})$ .

L'accroissement global des quatre premières fréquences propres est compris entre 4 % et 15 % pour des variations d'épaisseurs de vernis comprises entre  $2\mu\text{m}$  et  $4\mu\text{m}$ . L'épaisseur de vernis est

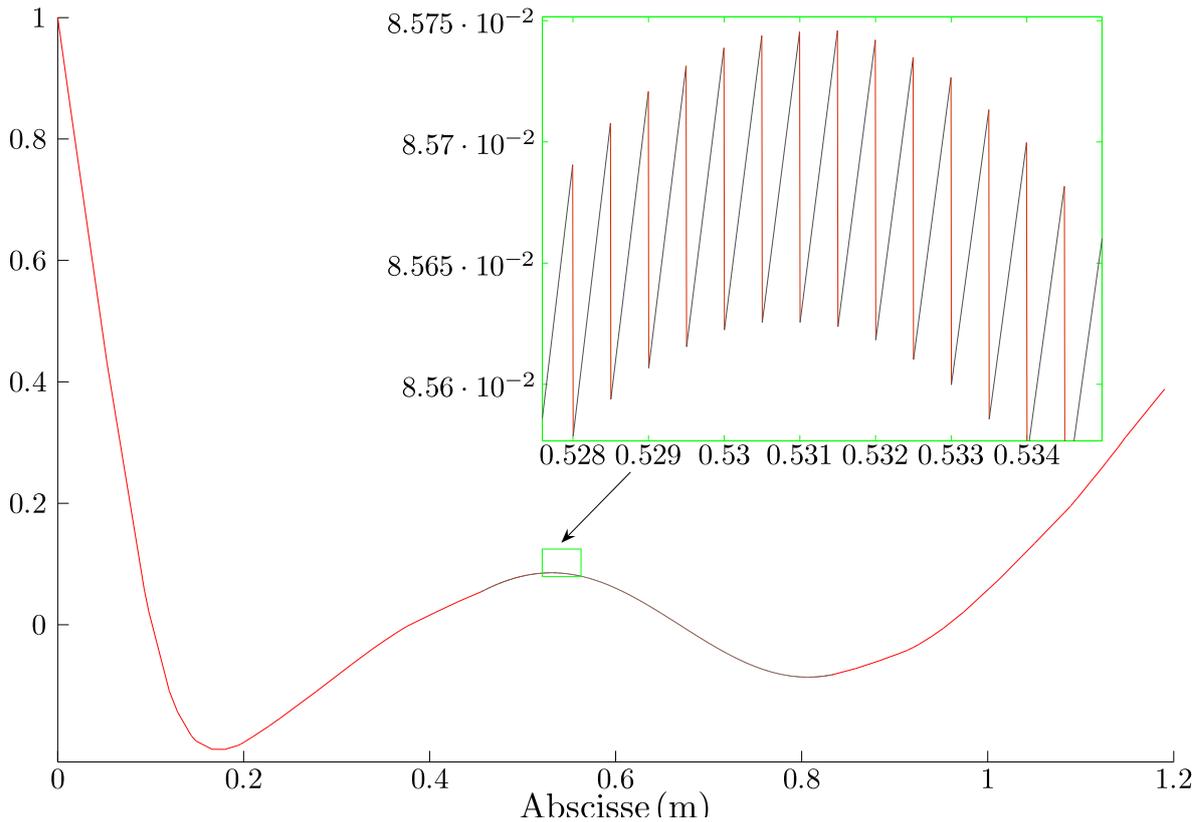


FIGURE E.5 – Mise en évidence d’une flexibilité de cisaillement d’interface sur la troisième forme propre du rotor feuilleté de taille 3.

alors un paramètre auquel le modèle est sensible.

Ainsi, si cette démarche de modélisation du feuilletage est adoptée pour prévoir le comportement dynamique de futurs rotors, il semble alors indispensable de connaître avec précision la valeur de l’épaisseur de vernis isolant les disques laminés.

## E.6 Invariance ou dépendance

Un second rotor MGV de taille 1 (MGV1) dont les fréquences propres ont été mesurées, FIG. E.7, a été modélisé en considérant les propriétés constitutives de vernis identifiées, TAB. E.4. Le modèle éléments-finis est présenté FIG. E.8 et comprend  $n_\delta = 6\,110$  degrés de liberté.

Les quatre premières fréquences propres de flexion calculées sont présentées dans le tableau TAB. E.6. Les fréquences mesurées et calculées présentent des écarts relativement importants. Les rotors MGV de taille 1 ayant une précontrainte d’assemblage plus élevée que celle des rotors MGV de taille 3, il est possible que l’épaisseur de vernis soit plus faible.

Une nouvelle simulation a donc été réalisée en considérant une épaisseur de vernis de  $2\mu\text{m}$ , TAB. E.6. Les résultats montrent une diminution notable des écarts relatifs désormais compris entre 4 % et 9 %.

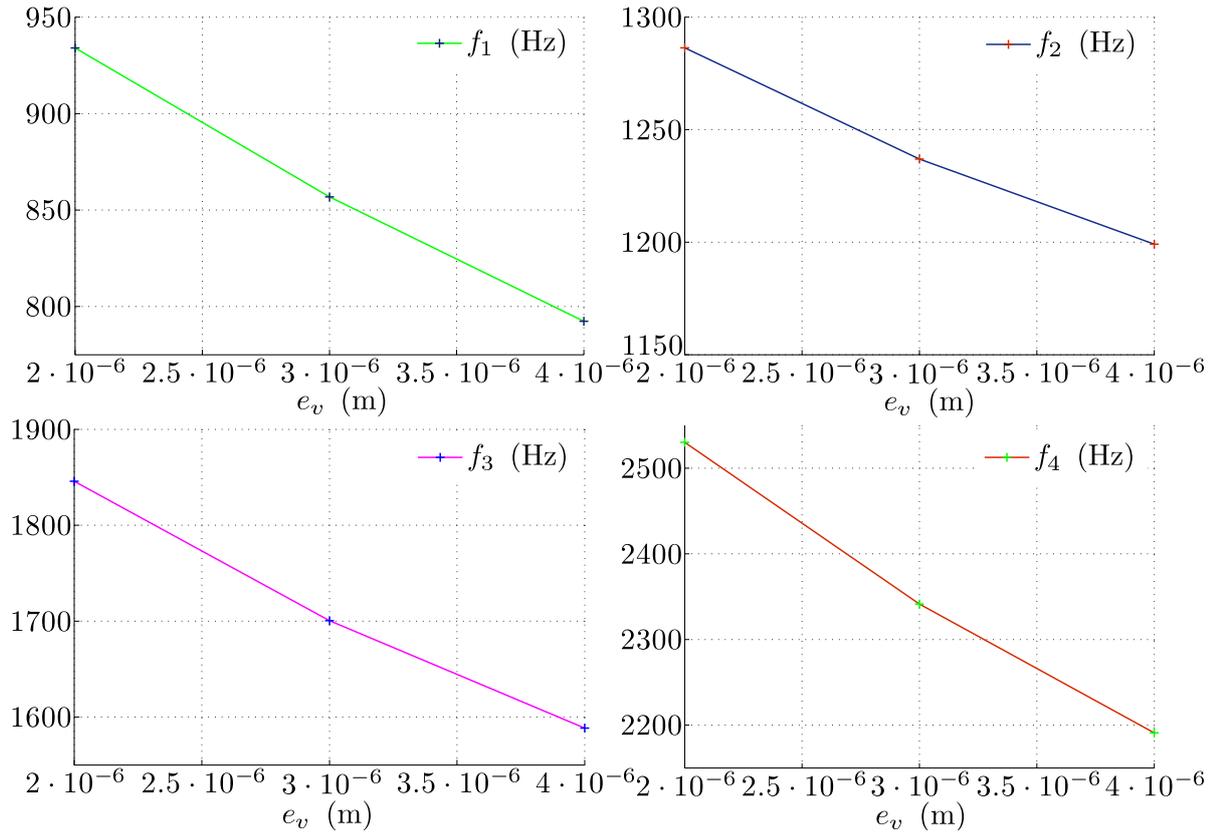


FIGURE E.6 – Évolution des quatre premières fréquences propres de flexion en fonction de l'épaisseur de vernis  $e_v$ .  $f_1$  (+),  $f_2$  (+),  $f_3$  (+),  $f_4$  (+),

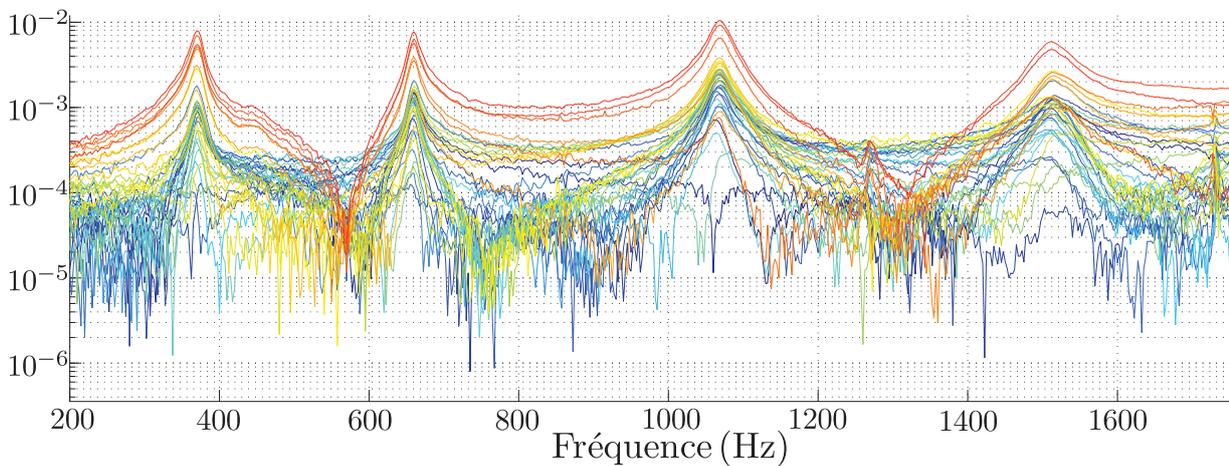
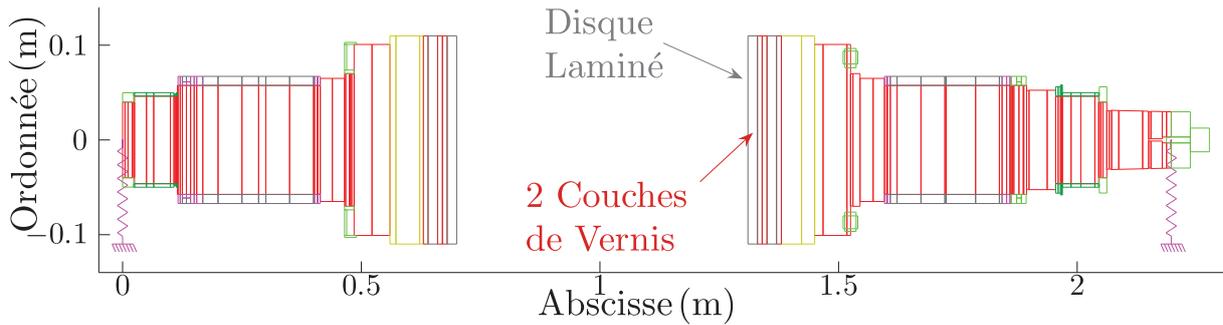


FIGURE E.7 – Fonctions de transfert mesurées sur un rotor feuilleté de taille 1.

## E.7 Conclusion

Il été proposé un modèle raffiné de feuilletage prenant en compte chaque tôle magnétique de l'empilement, mais également chaque couche de vernis isolant. Tous ces composants élémentaires ont été considérés comme des éléments de poutres de Timoshenko afin de développer un modèle éléments finis. En revanche, les propriétés constitutives des couches de vernis n'étaient *a priori* pas connues ou très grossièrement qualifiées, *i.e.* surestimées.

FIGURE E.8 – Modèle éléments finis d'un rotor MGV feuilleté de taille 1,  $N_e = 6\ 110$ .

| Indice           | Mesurée (Hz) | Calculée (Hz)        |                      | Erreur (%) |
|------------------|--------------|----------------------|----------------------|------------|
|                  |              | $e_v = 3\mu\text{m}$ | $e_v = 2\mu\text{m}$ |            |
| 1 <sup>ere</sup> | 370.00       | 331.43               | 355.77               | 10.42      |
| 2 <sup>e</sup>   | 660.00       | 612.31               | 638.24               | 7.226      |
| 3 <sup>e</sup>   | 1070.0       | 929.27               | 981.15               | 13.15      |
| 4 <sup>e</sup>   | 1517.5       | 1308.35              | 1517,5               | 13.78      |

TABLEAU E.6 – Valeurs des quatre premières fréquences propres de flexion calculées et mesurées sur un rotor feuilleté de taille 1. Les fréquences propres calculées ont été obtenues en considérant successivement des épaisseurs de vernis de  $e_v = 3\mu\text{m}$  et  $e_v = 2\mu\text{m}$ .

Une procédure d'identification a alors été réalisée pour déterminer les propriétés constitutives des couches de vernis. Une étude paramétrique consistant à étudier l'évolution des fréquences propres de flexion du rotor en fonction de l'épaisseur de vernis a permis de constater que le modèle était très sensible à ce paramètre qui a pourtant des dimensions microscopiques. Ce paramètre ne doit donc pas être négligé si le choix de tel modèle de feuilletage est privilégié. Par ailleurs, utiliser des propriétés de vernis identifiées sur un rotor donné, pour prévoir le comportement dynamique d'un autre rotor aux dimensions de feuilletage différentes, a permis de mettre évidence le caractère non-invariant des propriétés constitutives ou bien de l'épaisseur de la couche de vernis. En effet, la confrontation des fréquences propres mesurées et calculées sur des rotors MGV de tailles différentes, a montré que l'épaisseur de vernis était susceptible de varier suivant la précontrainte d'assemblage du feuilletage, les rotors MGV1 étant assemblés avec une précontrainte d'assemblage supérieure à celle des rotors de taille inférieure.

Ainsi, ce constat amène à penser que privilégier des propriétés constitutives homogénéisées de l'empilement tôles, *i.e.* englobant celles du disque laminé et du vernis, est solution pertinente qui permettrait de réduire notablement le nombre de degrés de liberté des modèles de rotors feuilletés.



# Table des figures

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Différentes configurations de moto-compresseurs. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2  |
| 1.2  | Différentes configurations de POD. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 3  |
| 1.3  | Zones de fonctionnement des différentes gammes de rotor MGV produits par CONVERTEAM. MGV <sub>+</sub> (◻), MGV <sub>0</sub> (◻), MGV <sub>1</sub> (◻), MGV <sub>2</sub> (◻), MGV <sub>3</sub> (◻). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 3  |
| 1.4  | Représentation d'un rotor MGV. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 4  |
| 1.5  | Schéma d'une tôle magnétique de diamètre $D_s$ , d'épaisseur $e_t$ et vernie sur ses deux faces pour une couche d'épaisseur $e_v$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 5  |
| 1.6  | Modélisation de rotors feuilletés de machine à aimant permanent. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 6  |
| 1.7  | Modélisation d'un rotor de turbine à gaz proposée dans [11]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 6  |
| 1.8  | Modélisation ramifiée d'un rotor à feuilletage annulaire proposée dans [15]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 7  |
| 1.9  | Modélisation ramifiée d'un rotor à feuilletage annulaire proposée dans [19]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 7  |
| 1.10 | Modélisation et mise en évidence de la précontrainte du feuilletage proposées dans [20]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 8  |
| 1.11 | Principe de la résolution itérative du problème numérique inverse d'identification mixte numérique-expérimentale. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 9  |
|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |    |
| 2.1  | Éléments de définition d'un rotor. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 14 |
| 2.2  | Passage du système de coordonnées $(x_i, y_i, z_i)$ au système de coordonnées $(x, y, z)$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 15 |
| 2.3  | Paramétrage d'un disque de rotor. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 16 |
| 2.4  | Visualisation de la configuration déformée d'un élément de poutre de longueur $dy$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 19 |
| 2.5  | Balourds sur le rotor. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 20 |
| 2.6  | Repérage du $i^e$ balourd. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 21 |
| 2.7  | Représentation des raideurs et amortissements apportés d'un palier. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 22 |
| 2.8  | Paramétrage des repères galiléen ( $R$ ) et tournant ( $R_\phi$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 23 |
| 2.9  | Visualisation spatiale des déplacements du centre géométrique $G$ et des rotations de la section droite ( $S$ ) définis à l'aide des axes du repère tournant ( $R_\phi$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 25 |
| 2.10 | Visualisation des matrices de corrélation MAC et NC <sup>2</sup> O. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 44 |
| 2.11 | Diagramme de Campbell utilisant un algorithme de tri basé sur l'ordonnement croissant des $m$ premières fréquences propres ( $m = 10$ ) associées à chaque vitesse de rotation $\dot{\phi}_i$ . Chaque courbe représente l'évolution de la $k^e$ plus petite fréquence propre $f_k$ sur l'intervalle $\left[\frac{30}{\pi}\dot{\phi}_1; \frac{30}{\pi}\dot{\phi}_{n_\phi}\right]$ , $f_1$ (▷), $f_2$ (•), $f_3$ (◁), $f_4$ (★), $f_5$ (▽), $f_6$ (◊), $f_7$ (×), $f_8$ (◻), $f_9$ (△), $f_{10}$ (○). . . . . | 45 |
| 2.12 | Mise en évidence d'un phénomène de croisement de modes entre les vitesses de rotations $\dot{\phi}_i$ et $\dot{\phi}_{i+1}$ . Évolutions des fréquences propres de résonance ordonnées de manière croissante, $f_5$ (▽), $f_6$ (◊), $f_7$ (○), $f_8$ (◻), $f_9$ (*), $f_{10}$ (△). . . . .                                                                                                                                                                                                                   | 46 |
| 2.13 | Mise en évidence d'un phénomène de croisement de modes entre les vitesses de rotations $\dot{\phi}_i$ et $\dot{\phi}_{i+1}$ . Évolutions des fréquences propres de résonance ordonnées selon leurs formes complexes associées, $f_{\Psi_5}$ (▽), $f_{\Psi_6}$ (◊), $f_{\Psi_7}$ (○), $f_{\Psi_8}$ (◻), $f_{\Psi_9}$ (*), $f_{\Psi_{10}}$ (△). . . . .                                                                                                                                                        | 47 |
| 2.14 | Diagramme de Campbell ( $m = 10$ ) utilisant un algorithme de tri de formes propres complexes basé sur la matrice de corrélation NC <sup>2</sup> O. Les vitesses critiques $\frac{30}{\pi}\dot{\phi}_c$ sont représentées par des cercles (○). Sens de précession direct (−), Sens de précession inverse (−). . . . .                                                                                                                                                                                        | 51 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.15 | Evolution de la moyenne des termes extra-diagonaux des matrices de corrélation MAC (▲) et NC <sup>2</sup> O (▲). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 52 |
| 2.16 | Mise en évidence des indices $i_c^{k,q}$ encadrant une vitesse critique de rotation $\frac{30}{\pi}\phi_c^{k,q}$ (○). Cas particulier d'une pulsation propre $\omega_{\Psi_k}$ coïncidant deux fois avec l'excitation asynchrone de facteur $s$ . . . . .                                                                                                                                                                           | 53 |
| 2.17 | Repérage de vitesses critiques de rotation (○) sur un diagramme de Campbell, induites par une excitation asynchrone de facteur $s$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 54 |
| 3.1  | Vue d'ensemble du rotor MGV feuilleté . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 58 |
| 3.2  | Discrétisation spatiale de la structure. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 59 |
| 3.3  | Approximation cinématique relative au dispositif de suspension du rotor. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 60 |
| 3.4  | Schéma de la chaîne d'acquisition classique employée. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 61 |
| 3.5  | Fonction de transfert (mobilité dynamique) mesurée au point N°61. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 61 |
| 3.6  | Fixation d'un <i>pushrod</i> entre la structure et le pot électrodynamique. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 62 |
| 3.7  | Influence du déplacement d'un accéléromètre sur la dynamique du rotor suspendu. Module des 62 fonctions de transfert mesurées autour de $\frac{\hat{\omega}_1}{2\pi}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 63 |
| 3.8  | Quatre premières formes propres expérimentales $\hat{\varphi}_1$ à $\hat{\varphi}_4$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 63 |
| 3.9  | Dispositif de suspension et maillage expérimental. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 64 |
| 3.10 | Instrumentation. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 64 |
| 3.11 | Synopsis de la chaîne de mesure. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 65 |
| 3.12 | Positionnement optimal de l'accéléromètre en $x_{r^*}$ en fonction du critère $\gamma$ (×), 106 points de mesures (●). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 66 |
| 3.13 | Diagrammes de Bode établis avec 106 impacts successifs effectués aux 106 points du maillage expérimental. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 66 |
| 3.14 | Formes propres expérimentales $\hat{\varphi}_1$ à $\hat{\varphi}_{10}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 67 |
| 3.15 | Suspension, capteurs et maillage expérimental. Les génératrices axiales sont représentées en vert (---) et radiales en rouge (---). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 68 |
| 3.16 | Accélérances mesurées en différents points du rotor PMA. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 69 |
| 4.1  | Définition d'un sous-domaine sur la masse magnétique discrétisée. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 75 |
| 4.2  | Modèle éléments finis utilisé pour l'étude de sensibilité, $N_e = 168$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 80 |
| 4.3  | Évolution des sensibilités des composantes des normes d'erreur modales basées sur les $m = 8$ premiers modes et une perturbation relative de 1% des paramètres d'optimisation relatifs $x_p^r$ , $p = 1, \dots, n$ , $n = 15$ . . . . .                                                                                                                                                                                             | 81 |
| 4.4  | Évolution des normes d'erreur modales (somme sur huit modes) pour des variations de paramètres de $\pm 30\%$ autour d'une valeur de référence. $E_1 : \square$ , $G_1 : \diamond$ , $v_1 : \triangle$ , $E_2 : \nabla$ , $G_2 : \triangleright$ , $v_2 : \triangleleft$ , $E_3 : \star$ , $G_3 : +$ , $v_3 : *$ , $E_4 : \cdot$ , $G_4 : \times$ , $v_4 : \odot$ , $E_5 : \square$ , $G_5 : \diamond$ , $v_5 : \triangle$ . . . . . | 82 |
| 4.5  | Nouvelle norme d'erreur modale basée sur les termes extra-diagonaux de la matrice MAC. $E_1 : \square$ , $G_1 : \diamond$ , $v_1 : \triangle$ , $E_2 : \nabla$ , $G_2 : \triangleright$ , $v_2 : \triangleleft$ , $E_3 : \star$ , $G_3 : +$ , $v_3 : *$ , $E_4 : \cdot$ , $G_4 : \times$ , $v_4 : \odot$ , $E_5 : \square$ , $G_5 : \diamond$ , $v_5 : \triangle$ . . . . .                                                         | 83 |
| 4.6  | Évolution des coefficients de pondération $\alpha_\omega$ (×), $\alpha_{\varphi_D}$ (○), $\alpha_{\varphi_{ED}}$ (△) et $\alpha_{\varphi_{Ec}}$ (▽) des normes d'erreur modales $F^\omega$ , $F^{\varphi_D}$ , $F^{\varphi_{ED}}$ , $F^{\varphi_{Ec}}$ en fonction du nombre de sous-domaines. . . . .                                                                                                                              | 84 |
| 4.7  | Modèle éléments finis de rotor feuilleté avec $n_\delta = 286$ et 62 points de mesure (●). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 85 |
| 4.8  | Évolution de la fonctionnelle d'erreur globale $f$ en fonction du nombre de sous-domaines $h$ pour les hypothèses d'anisotropie (−) et d'isotropie (−) de l'empilement. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 86 |
| 4.9  | Quatre premières formes propres mesurées $\hat{\varphi}$ (−) et calculées $\tilde{\varphi}$ (---) en considérant $h = 7$ sous-domaines. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 87 |
| 4.10 | Distribution du module d'Young normalisé le long de l'empilement de tôles en fonction du nombre de sous-domaines $h = [1, \dots, 18]$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 88 |
| 4.11 | Distribution de module de Coulomb normalisé le long de l'empilement de tôles en fonction du nombre de sous-domaines $h = [1, \dots, 18]$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 89 |

4.12 Évolution des fonctionnelles modales condensées  $f(\mathcal{E})$  (+) et  $f(\mathcal{F})$  (X) en fonction du carré de la perturbation  $\varepsilon$ . Leurs interpolations linéaires respectives ont pour équation :  $\ln(f(\mathcal{E})) = 1.0003\ln(\varepsilon^2) - 50.2044$  (-) et  $\ln(f(\mathcal{F})) = 1.0001\ln(\varepsilon^2) - 51.5923$  (---). . . . . 93

4.13 Modèle éléments finis contenant  $n_{\delta_c} = 68$  points de mesure (●),  $n_{\delta} = 352$ . . . . . 94

4.14 Évolution des composantes  $\frac{1}{2}\mathcal{E}_k^2$  de la fonctionnelle modale condensée  $f$  sur une plage de  $\pm 50\%$  des valeurs relatives des paramètres d'optimisation  $x_p^r$ ,  $p = 1 \dots 3$  : module d'Young ( $x_1^r$ ), module de Coulomb ( $x_2^r$ ) et coefficient de Poisson ( $x_3^r$ ). . . . . 96

4.15 Dispositif expérimental employé lors de l'analyse modale. . . . . 98

4.16 Module des 68 fonctions de transfert mesurées aux 68 points de la génératrice axiale. . . . . 99

4.17 Évolution de la norme de la différence des itérés successifs ( $\Delta$ ), fonctionnelle (+), norme de gradient ( $*$ ) et paramètre d'amortissement ( $\circ$ ) au cours des itérations. . . . . 100

4.18 Évolution temporelle ( $s$ ) des valeurs relatives des modules d'Young (+) et de Coulomb (X) lors de la minimisation. . . . . 100

4.19 Évolution des itérés successifs relatifs (+) au cours du processus de minimisation pour différentes valeurs initiales de paramètres  $x^0$  ( $\blacktriangle$ ). La plage de variation des valeurs initiales  $x^0$  est de  $\pm 70\%$  des valeurs optimales de  $E$  et  $G$   $\{x_1^*, x_2^*\}$  (●). . . . . 101

4.20 Évolution de la fonctionnelle globale moyenne en fonction du nombre de modes. . . . . 101

4.21 Évolution des modules de Young  $E(x_1)$  ( $\circ$ ,  $\circ$  si isotrope) et de Coulomb  $G(x_2)$  ( $\Delta$ ,  $\triangle$  si isotrope) en fonction du nombre de modes considérés dans le processus d'identification. . . . . 102

4.22 Six premières formes propres calculées (--- (rotor), -- (tirant))  $\tilde{\varphi}$  et mesurées  $\hat{\varphi}$  (-). . . . . 103

4.23 Module et phase de la fonction de transfert mesurée (-) avec une excitation au nœud N°19 et une réponse au nœud N°1 et de sa synthèse (---). . . . . 103

4.24 Visualisation de la matrice de corrélation NCO. . . . . 104

4.25 Discrétisation d'un tirant. . . . . 105

4.26 Maillage éléments finis : rotor ( $\blacksquare$ ), empilement de tôles magnétiques ( $\blacksquare$ ), barres de court-circuit FE ( $\blacksquare$ ), tirants ( $\blacksquare$ ). Nœuds de rotor (●) et de tirants (●). . . . . 105

4.27 Modèle éléments finis ramifié contenant  $n_{\delta_c} = 87$  points de mesure (●),  $n_{\delta} = 692$ . . . . . 106

4.28 Neuf premières formes propres de flexion du modèle complet (rotor, (-), tirants (-)) et condensé : Guyan (---) et Craig & Bampton (---). . . . . 107

4.29 Dispositif expérimental. . . . . 110

4.30 Évolution de la fonctionnelle globale moyenne  $f$  en fonction du nombre de modes  $m$  en considérant un modèle soit isotrope ( $\blacksquare$ ), soit isotrope transverse ( $\blacksquare$ ). . . . . 111

4.31 Évolution des modules d'Young ( $\circ$ ) et de Coulomb ( $\Delta$ ) en fonction du nombre de modes  $m$  considérés. . . . . 112

4.32 Quatre formes propres transversales (N°1 to N°4) calculées  $\tilde{\varphi}$  (lignes continues, - (rotor), - (tirants)) et mesurées  $\hat{\varphi}$  (lignes interrompues, --). . . . . 112

4.33 Quatre formes propres transversales (N°5 to N°8) calculées  $\tilde{\varphi}$  (lignes continues, - (rotor), - (tirants)) et mesurées  $\hat{\varphi}$  (lignes interrompues, --). . . . . 113

4.34 Quatre formes propres transversales (N°9 to N°12) calculées  $\tilde{\varphi}$  (lignes continues, - (rotor), - (tirants)) et mesurées  $\hat{\varphi}$  (lignes interrompues, --). . . . . 113

4.35 Représentation d'une matrice de corrélation MAC entre les formes propres calculées  $\tilde{\varphi}$  et mesurées  $\hat{\varphi}$ . . . . . 115

4.36 Dispositifs expérimentaux présentant deux rotors de taille différente. . . . . 117

4.37 Modèles éléments finis de rotors de taille différente (● : points de mesure). . . . . 117

4.38 Répartition des propriétés constitutives identifiées sur un échantillon de 32 rotors. . . . . 118

4.39 Quatre premières formes propres calculées (--- (rotor), -- (tirants))  $\tilde{\varphi}$  et mesurées (-)  $\hat{\varphi}$ . . . . . 118

4.40 FMAC, représentation d'un critère MAC pondéré par les pulsations propres identifiées  $\tilde{\omega}$  en fonction des pulsations propres mesurées  $\hat{\omega}$  (quatre premières pulsations). . . . . 119

4.41 Prédicteurs considérés dans la régression linéaire multiple. . . . . 120

|      |                                                                                                                                                                                                                    |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.42 | Loi logarithmique du module d'Young $\tilde{E}$ en fonction des modules d'Young identifiés $E$ . $R^2 = 0.969075$ , $n = 25$ , $p = 6$ , $\gamma = 0.025$ . . . . .                                                | 124 |
| 4.43 | Loi logarithmique du module de Coulomb $\tilde{G}$ en fonction des modules de Coulomb identifiés $G$ . $R^2 = 0.897519$ , $n = 26$ , $p = 6$ , $\gamma = 0.025$ . . . . .                                          | 125 |
| 4.44 | Pulsations propres calculées $\tilde{\omega}$ en fonction des pulsations propres mesurées $\hat{\omega}$ , $\sigma_{\tilde{\omega}} = 3.121 \cdot 10^2 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . . . . .                   | 126 |
| 5.1  | Allure de la loi de comportement identifiée de l'empilement de tôles autour d'une configuration précontrainte initiale $\{\sigma_{yy_0}, \varepsilon_{yy_0}\}$ . . . . .                                           | 131 |
| 5.2  | Configurations non-déformée $\mathcal{C}_0$ et déformée $\mathcal{C}_t$ d'un élément de poutre de longueur infinitésimale. . . . .                                                                                 | 133 |
| 5.3  | Domaines élémentaires associés à $\Omega_m$ et $\Omega_s$ . . . . .                                                                                                                                                | 135 |
| 5.4  | Notations utilisées pour paramétrer les domaines potentiellement en contact. . . . .                                                                                                                               | 136 |
| 5.5  | Maillages non-coïncidents des domaines maître $\Omega_m$ et esclave $\Omega_s$ . . . . .                                                                                                                           | 137 |
| 5.6  | Représentation de la normale de contact $\vec{n}(M_m^i)$ dans une situation d'inter-pénétration des domaines maître $\Omega_m$ et esclave $\Omega_s$ . . . . .                                                     | 138 |
| 5.7  | Évolution du potentiel élémentaire de contact ${}^{i,k}\Pi_c$ en fonction de $g_{n_i}$ . . . . .                                                                                                                   | 140 |
| 5.8  | Évolution des caractéristiques du contact en fonction de $g_{n_i}$ dans le cas de la pénalité. . . . .                                                                                                             | 144 |
| 5.9  | Évolution des caractéristiques du contact en fonction de $g_{n_i}$ dans la cas de la pénalité barrière pour différentes valeur des paramètres $\varepsilon_n$ et $\tau_n$ . . . . .                                | 145 |
| 5.10 | Évolution d'un système mécanique élémentaire de raideur $k_m$ lors de la modélisation du contact. . . . .                                                                                                          | 150 |
| 5.11 | Amplitude de la réponse statique du système mécanique élémentaire en fonction du rapport $\frac{\varepsilon_n}{k_m}$ . . . . .                                                                                     | 151 |
| 5.12 | Modèle éléments finis des domaines $\Omega_m$ (tirant) et $\Omega_s$ (partie du rotor feuilleté). . . . .                                                                                                          | 153 |
| 5.13 | Tendance de la méthode de la pénalité barrière ( $\varepsilon_n = 10^{12}$ , $\tau_n = -1$ ) vers la méthode de la pénalité, $gap = 0.2236 \cdot 10^{-3} \text{m}$ . . . . .                                       | 154 |
| 5.14 | Distribution de la charge longitudinale à $\dot{\phi}_r = 15\ 000$ rpm. . . . .                                                                                                                                    | 155 |
| 5.15 | Déflexion d'un tirant à $\dot{\phi}_r = 15\ 000$ rpm. . . . .                                                                                                                                                      | 155 |
| 5.16 | Déflexion d'un tirant à $\dot{\phi}_{r_{Co}} \sim 345$ rpm, <i>i.e.</i> le contact est initié. . . . .                                                                                                             | 155 |
| 5.17 | Évolution de la zone de contact $\Gamma_c^m$ pour $\dot{\phi}_r = 50$ à $20\ 000$ rpm. . . . .                                                                                                                     | 156 |
| 5.18 | Modèle éléments finis du rotor feuilleté, $N_e = 243$ . . . . .                                                                                                                                                    | 157 |
| 5.19 | Effet du contact permanent sur la 11 <sup>e</sup> forme propre. La courbe continue est issue de la prise en compte des effets centrifuges à $15\ 000$ rpm. . . . .                                                 | 159 |
| 5.20 | Diagramme de Campbell sur la plage $[1 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^4]$ (rpm). Les cercles (○) localisent les vitesses critiques. Les précessions directes sont tracées en vert (−) et les inverses en bleu (−). . . . . | 160 |
| 5.21 | Évolution des charges longitudinales maximales en fonction de la vitesse de rotation. . . . .                                                                                                                      | 161 |
| 5.22 | Propriétés constitutives $E$ et $G$ en fonction de la vitesse de rotation. . . . .                                                                                                                                 | 162 |
| 5.23 | Contraintes de $\mathcal{V}$ on $\mathcal{M}$ ises maximales des tirants en fonction de la vitesse de rotation. . . . .                                                                                            | 162 |
| 5.24 | Réponses au balourd calculées à différents nœuds, configuration $\mathcal{C}_1$ . L'amplitude maximale apparaît au nœud N°90. . . . .                                                                              | 164 |
| 5.25 | Déformée du rotor à $\dot{\phi}_r = 3\ 250$ rpm, configuration $\mathcal{C}_1$ . . . . .                                                                                                                           | 165 |
| 5.26 | Orbites elliptiques au nœud N°90, $\dot{\phi}_r = 3\ 250$ rpm, configuration $\mathcal{C}_1$ . . . . .                                                                                                             | 165 |
| 5.27 | Réponses aux balourds calculées à différents nœuds, configuration $\mathcal{C}_2$ . L'amplitude maximale apparaît au nœud N°1. . . . .                                                                             | 166 |
| 5.28 | Déformée du rotor à $\dot{\phi}_r = 3\ 250$ rpm, configuration $\mathcal{C}_2$ . . . . .                                                                                                                           | 167 |
| 5.29 | Orbites elliptiques au nœud N°1, $\dot{\phi}_r = 3\ 250$ rpm, configuration $\mathcal{C}_2$ . . . . .                                                                                                              | 167 |
| 5.30 | Évolution du maximum des contraintes de $\mathcal{V}$ on $\mathcal{M}$ ises des tirants due uniquement aux balourds, pour les configurations $\mathcal{C}_1$ (−) et $\mathcal{C}_2$ (−). . . . .                   | 168 |
| A.1  | Éléments de définition d'une poutre droite. . . . .                                                                                                                                                                | 177 |
| A.2  | Déplacement d'une section droite d'abscisse $y$ dans le plan $\{yGz\}$ . . . . .                                                                                                                                   | 179 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A.3  | Efforts sur un élément de poutre compris entre $y$ et $y + dy$ . . . . .                                                                                                                                                                                     | 180 |
| A.4  | Élément de poutre $\mathcal{K}_e$ dans le plan $\{yGz\}$ . . . . .                                                                                                                                                                                           | 182 |
| A.5  | Déplacement d'une section droite d'abscisse $y$ dans le plan $\{xGy\}$ . . . . .                                                                                                                                                                             | 185 |
| A.6  | Efforts sur un élément de poutre compris entre $y$ et $y + dy$ . . . . .                                                                                                                                                                                     | 186 |
| A.7  | Élément de poutre $\mathcal{K}_e$ dans le plan $\{xGy\}$ . . . . .                                                                                                                                                                                           | 187 |
| A.8  | Approximation conduisant à la coïncidence des angles d'Euler $\psi$ et $\theta$ et ceux utilisés dans la théorie de Timoshenko pour orienter une section droite de poutre dans l'espace. . . . .                                                             | 191 |
| A.9  | Approximation conduisant à la coïncidence des angles d'Euler $\psi$ et $\theta$ et ceux utilisés dans la théorie de Timoshenko pour orienter une section droite de rotor. . . . .                                                                            | 193 |
| A.10 | Visualisations spatiales de rotations élémentaires d'une section droite ( $S$ ) autour d'axes du repère tournant ( $R_\phi$ ). . . . .                                                                                                                       | 194 |
| A.11 | Visualisation dans le plan $\{xGz\}$ des arcs engendrés par rotation du vecteur $\vec{y}_i$ , perpendiculaire à une section droite ( $S$ ). . . . .                                                                                                          | 195 |
| A.12 | Visualisation d'un élément fini $\mathcal{K}_e$ de longueur ${}^e l$ et de ses degrés de liberté associés aux nœuds $e$ et $e + 1$ . . . . .                                                                                                                 | 197 |
| A.13 | Tracé des composantes de la fonction de forme ${}^e N_{(w)}(\zeta)$ sur un élément de référence d'abscisse $\zeta \in [0, 1]$ , $\phi_y = 0.0424$ . . . . .                                                                                                  | 199 |
| A.14 | Repérage de différents types de force d'excitation. . . . .                                                                                                                                                                                                  | 210 |
| A.15 | Visualisation d'un élément fini $\mathcal{K}_e$ de longueur ${}^e l$ sollicité avec une charge ${}^e p(y)$ et un couplage ${}^e m(y)$ réparti entre les nœuds $e$ et $e + 1$ . . . . .                                                                       | 211 |
| A.16 | Visualisation de la section droite ( ${}^e S$ ) de l'élément fini $\mathcal{K}_e$ mû d'une rotation permanente $\dot{\phi}$ autour du centre instantané de rotation $O$ . . . . .                                                                            | 212 |
| A.17 | Evolution du pourcentage d'amortissement critique $\xi$ selon l'hypothèse de Rayleigh. . . . .                                                                                                                                                               | 215 |
| A.18 | Evolution du pourcentage d'amortissement critique $\xi$ estimé à partir des couples $(\xi_i, \omega_i)$ , $k = 1, \dots, m$ . . . . .                                                                                                                        | 217 |
| A.19 | Tracé d'une forme propre complexe. La forme de l'arbre est tracée, à $t = 0$ , en trait continu bleu (-). . . . .                                                                                                                                            | 220 |
| A.20 | Tracé d'une ellipse et de ses caractéristiques. . . . .                                                                                                                                                                                                      | 223 |
| A.21 | Tracé d'une trajectoire circulaire et de ses caractéristiques. . . . .                                                                                                                                                                                       | 224 |
| A.22 | Tracé d'une trajectoire rectiligne et de ses caractéristiques. . . . .                                                                                                                                                                                       | 225 |
| A.23 | Visualisation des sens de précession d'un rotor ou sens de parcours d'une ellipse. . . . .                                                                                                                                                                   | 226 |
| A.24 | Repérage d'un point $P_e \in ({}^e S)$ de coordonnées $(x, y, z)$ sur un élément fini $\mathcal{K}_e$ de longueur ${}^e l$ . . . . .                                                                                                                         | 230 |
| A.25 | Paramétrage des coordonnées polaires. . . . .                                                                                                                                                                                                                | 233 |
| A.26 | Répartitions des champs de contraintes normales de flexion sur une section droite élémentaire circulaire de diamètre ${}^e d^{ext}$ . . . . .                                                                                                                | 234 |
| A.27 | Représentation d'une trajectoire elliptique sur l'intervalle $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ et des couples de paramètres optimaux $(\phi_1^*, t_1^*)$ et $(\phi_2^*, t_2^*)$ pour lesquels l'amplitude de la contrainte normale de flexion est maximale. . . . . | 239 |
| B.1  | Distributions des écarts relatifs moyens entre les deux premières fréquences propres de flexion d'une série de vingt-neuf rotors MGv. . . . .                                                                                                                | 247 |
| B.2  | Modèle éléments-finis réalisé sous COMSOL, 55 107 éléments finis tétraédriques $P_2$ . . . . .                                                                                                                                                               | 248 |
| B.3  | Représentation des différentes configurations $\mathcal{C}$ de tirants envisagées. . . . .                                                                                                                                                                   | 249 |
| B.4  | Modèle éléments finis $\mathcal{M}_1$ . ■ : Éléments de flexion-extension, ■ : Éléments de flexion, ■ : Élément rigide $\Rightarrow$ Relation cinématique. . . . .                                                                                           | 250 |
| B.5  | Modèle éléments finis ramifié $\mathcal{M}_1$ : vues d'un quart du système lorsque tous les tirants sont modélisés. . . . .                                                                                                                                  | 251 |
| B.6  | Configuration déformée du modèle éléments finis $\mathcal{M}_1$ - Mise en évidence d'une relation de dépendance linéaire. . . . .                                                                                                                            | 252 |
| B.7  | Modèle éléments finis $\mathcal{M}_2$ . ■ : Éléments d'extension, ■ : Éléments de flexion, ■ : Élément rigide. . . . .                                                                                                                                       | 254 |
| B.8  | Modèle éléments-finis $\mathcal{M}_2$ : poutres assemblées à un tendeur externe. . . . .                                                                                                                                                                     | 255 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B.9  | Modèle éléments finis $\mathcal{M}_3$ . ■ : Éléments de flexion. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 256 |
| B.10 | Paramétrage d'une section droite composée de tirants équirépartis. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 257 |
| B.11 | Modèle éléments-finis réalisé sous COMSOL - $l = 4$ m et $n_{ti} = 16$ - Application d'une force ponctuelle. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 258 |
| B.12 | Déflexions statiques calculées sous COMSOL. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 258 |
| B.13 | Déflexion statique calculée sous COMSOL dans la configuration $\mathcal{C}_8$ - $l = 4$ m, $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ N · m <sup>-2</sup> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 259 |
| B.14 | Modélisation d'un ensemble de tirants équirépartis sur une circonférence. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 263 |
| B.15 | ■ : Éléments de flexion, ■ (a) : Éléments de flexion unique, (b) : Éléments de flexion. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 264 |
| B.16 | Quatre premières formes propres de flexion du modèle COMSOL. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 265 |
| B.17 | Quatre premières formes propres de flexion du modèle $\mathcal{M}_2$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 266 |
| B.18 | Quatre premières formes propres de flexion du modèle $\mathcal{M}_{2'}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 266 |
| B.19 | Quatre premières formes propres de flexion du modèle $\mathcal{M}_{1'}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 266 |
| B.20 | Modélisation des barres de court-circuit. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 268 |
| B.21 | Hypothèse cinématique. ❶ : Barres de court-circuit, ❷ : Vis, ❸ : Ligne neutre des barres de court-circuit, ❹ : Ligne neutre de la masse magnétique, ❺ : Anneau de court-circuit, ❻ : Empilement de tôles magnétiques, ❼ : Tirant, ❽ : Jeu fonctionnel. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                              | 269 |
| B.22 | Mise en évidence des alésages présents sur différents éléments d'un rotor feuilleté. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 270 |
| B.23 | Mise en évidence des hypothèses de modélisation des barres et anneaux de court-circuit, tôles magnétiques et portion d'arbre sur un modèle éléments finis de rotor feuilleté. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 270 |
| C.1  | Illustration de la convergence issue de différentes méthodes d'optimisations élémentaires. Le point de départ $x^0$ est tracé en bleu (□) alors que l'optimum $x^*$ est tracé en rouge (○). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 276 |
| C.2  | Visualisation de la méthode d'actualisation du paramètre d'amortissement $\mu^i$ en fonction du facteur de gain $\rho^i$ , $\alpha^i = \beta = 2$ , $\gamma = p = 3$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 282 |
| C.3  | Visualisation de la bijection $\sigma$ (Eq. (C.48)) permettant d'encadrer les variables d'optimisation normées $\bar{x}_p$ . La valeur du paramètre $\chi$ a été fixée à $\frac{5}{100}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 284 |
| C.4  | Modèle éléments-finis utilisé pour l'étude paramétrique, $N_e = 159$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 289 |
| C.5  | Évolution des quatre premières valeurs propres $\lambda_1$ (-), $\lambda_2$ (-), $\lambda_3$ (-) et $\lambda_4$ (-), en (rad <sup>2</sup> · s <sup>-2</sup> ), et de leurs dérivées partielles $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_p}$ (-), $\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_p}$ (-), $\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_p}$ (-), $\frac{\partial \lambda_4}{\partial x_p}$ (-), $p = 1, \dots, 2$ , en (rad <sup>2</sup> · m · kg), en fonction des paramètres $x_1$ et $x_2$ en (N · m <sup>-2</sup> ). . . . . | 290 |
| C.6  | Évolution des quatre premières formes propres $\varphi_k$ , $k = 1, \dots, 4$ et de leurs dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}$ , $k = 1, \dots, 4$ en fonction de $x_1$ , en (N · m <sup>-2</sup> ). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 291 |
| C.7  | Évolution des quatre premières formes propres $\varphi_k$ , $k = 1, \dots, 4$ et de leurs dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}$ , $k = 1, \dots, 4$ en fonction de $x_2$ , en (N · m <sup>-2</sup> ). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 291 |
| C.8  | Dispositif expérimental employé lors de l'analyse modale d'une portion d'arbre en acier forgé. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 296 |
| C.9  | Modèle éléments-finis d'une portion d'arbre. Les points rouges (●) représentent les points de mesures expérimentaux, $n_\delta = 218$ , $n_{\delta_c} = 52$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 296 |
| C.10 | Module des fonctions de transfert mesurées aux 52 points de la génératrice axiale. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 297 |
| C.11 | Quatre premières formes propres mesurées $\hat{\varphi}$ (-) et expansées $\check{\varphi}$ par les méthodes SEREP (×) et d'expansion de Guyan (○). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 298 |
| C.12 | Évolution de la norme de la différence des itérés successifs $\ x^i - x^{i-1}\ $ (SEREP : +, Guyan : □), fonctionnelle $f$ (SEREP : +, Guyan : □), norme de gradient $\ \nabla f\ $ (SEREP : *, Guyan : □) et paramètre d'amortissement $\mu$ (SEREP : ○, Guyan : □) au cours des itérations. La convergence est atteinte dans les deux cas en 11 itérations. . . . .                                                                                                                                                       | 299 |
| C.13 | Évolution des itérés successifs $\bar{x}_p$ , <i>i.e.</i> valeurs relatives des modules d'Young (SEREP : ○, Expansion de Guyan : ○), de Coulomb (SEREP : ×, Expansion de Guyan : ×) et de coefficients de Poisson (SEREP : +, Expansion de Guyan : +) au cours du temps. . . . .                                                                                                                                                                                                                                            | 300 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| C.14 | Évolution des itérés successifs $y_p$ , <i>i.e.</i> antécédents des variables $\bar{x}_p$ par la bijection $\sigma$ .<br>(Expansion de Guyan : $\circ$ , SEREP : $\times$ ). . . . .                                                              | 300 |
| C.15 | Visualisation des matrices de corrélation NCO entre les formes propres expansées $\tilde{\varphi}$<br>et les formes propres calculées $\varphi$ . . . . .                                                                                         | 301 |
| C.16 | Modèle éléments-finis du rotor feuilleté. . . . .                                                                                                                                                                                                 | 302 |
| C.17 | Évolution des taux d'accroissement des huit premières fréquence propres du rotor<br>feuilleté de taille 1. $f_1$ (-), $f_2$ (-), $f_3$ (-), $f_4$ (-), $f_5$ (--), $f_6$ (--), $f_7$ (--), $f_8$ (--). . . . .                                    | 303 |
| C.18 | Modèle éléments-finis tridimensionnel réalisé sous COMSOL contenant 24 294 éléments-<br>finis. . . . .                                                                                                                                            | 305 |
| C.19 | Évolution de la norme de la différence des itérés successifs ( $\Delta$ ), fonctionnelle (+),<br>norme de gradient ( $*$ ) au cours des itérations. . . . .                                                                                       | 308 |
| C.20 | Tracé des douze premières formes propres calculées en supposant l'empilement de<br>tôles magnétiques <b>isotrope</b> , $n = 1$ , $m = 8$ . . . . .                                                                                                | 309 |
| C.21 | Tracé des douze premières formes propres calculées en supposant l'empilement de<br>tôles magnétiques <b>isotrope transverse</b> , $n = 3$ , $m = 8$ . . . . .                                                                                     | 311 |
| C.22 | Tracé des douze premières formes propres calculées en supposant l'empilement de<br>tôles magnétiques <b>isotrope transverse</b> , $n = 3$ , $m = 12$ . . . . .                                                                                    | 312 |
|      |                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
| D.1  | Oscillateur élémentaire de caractéristiques $(k_r, m)$ . . . . .                                                                                                                                                                                  | 314 |
| D.2  | Amplitude de la réponse quasi-statique d'un oscillateur élémentaire en considérant<br>une raideur constante $k_r = k$ . . . . .                                                                                                                   | 315 |
| D.3  | Amplitude de la réponse quasi-statique d'un oscillateur élémentaire en considérant<br>une raideur paramétrique $k_r = k + k_G(r, \omega)$ . . . . .                                                                                               | 316 |
| D.4  | Raideur des paliers ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ) en fonction de la vitesse de rotation. . . . .                                                                                                                                             | 320 |
| D.5  | Amortissement des paliers ( $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ) en fonction de la vitesse de rotation. . . . .                                                                                                                        | 320 |
|      |                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
| E.1  | Disposition des éléments finis de disque laminé ( $\blacksquare$ ) et vernis ( $\blacksquare$ ). . . . .                                                                                                                                          | 323 |
| E.2  | Modèle éléments finis d'un rotor MGV feuilleté de taille 3, $N_e = 1\ 559$ . . . . .                                                                                                                                                              | 323 |
| E.3  | Évolution de la norme de la différences des itérés successifs ( $\Delta$ ), fonctionnelle (+),<br>norme de gradient ( $*$ ) et paramètre d'amortissement ( $\circ$ ) au cours des 17 itérations.<br>La convergence est atteinte en 219 s. . . . . | 325 |
| E.4  | Évolution des itérés successifs $\bar{x}_p$ , <i>i.e.</i> valeurs relatives des modules d'Young ( $\times$ ) et<br>de Coulomb (+) au cours des itérations. . . . .                                                                                | 326 |
| E.5  | Mise en évidence d'une flexibilité de cisaillement d'interface sur la troisième forme<br>propre du rotor feuilleté de taille 3. . . . .                                                                                                           | 327 |
| E.6  | Évolution des quatre premières fréquences propres de flexion en fonction de l'épaisseur<br>de vernis $e_v$ . $f_1$ (+), $f_2$ (+), $f_3$ (+), $f_4$ (+), . . . . .                                                                                | 328 |
| E.7  | Fonctions de transfert mesurées sur un rotor feuilleté de taille 1. . . . .                                                                                                                                                                       | 328 |
| E.8  | Modèle éléments finis d'un rotor MGV feuilleté de taille 1, $N_e = 6\ 110$ . . . . .                                                                                                                                                              | 329 |



# Liste des tableaux

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1  | Tableau représentant une matrice de corrélation calculée entre deux ensembles de dix $m = 10$ formes propres complexes $\Psi^i$ et $\Psi^{i+1}$ aux vitesses de rotation respectives $\dot{\phi}_i$ et $\dot{\phi}_{i+1}$ . Les croix (X) situent les formes propres complexes communes. . . . . | 49  |
| 3.1  | Caractéristiques géométriques et inertielles du rotor suspendu. . . . .                                                                                                                                                                                                                          | 59  |
| 3.2  | Valeurs expérimentales des douze premières fréquences propres et classification des formes propres expérimentales d'un rotor PMA . . . . .                                                                                                                                                       | 70  |
| 4.1  | Sensibilité des composantes $\mathcal{E}_k$ en fonction des valeurs relatives $x_p^r$ égales à 1% des modules d'Young, de Coulomb et du coefficient de Poisson. . . . .                                                                                                                          | 96  |
| 4.2  | Caractéristiques géométriques et inertielles du rotor suspendu. . . . .                                                                                                                                                                                                                          | 97  |
| 4.3  | Valeurs des six premières fréquences propres de flexion calculées et mesurées et des six premiers pourcentages d'amortissements critiques mesurés $\xi$ . . . . .                                                                                                                                | 102 |
| 4.4  | Les neuf premières fréquences propres de flexion des modèles complet (Référence), et réduits à l'aide des méthode de condensation de Guyan et de Craig & Bampton. . .                                                                                                                            | 106 |
| 4.5  | Caractéristiques géométriques et inertielles du rotor suspendu. . . . .                                                                                                                                                                                                                          | 110 |
| 4.6  | Les douze premières fréquences propres calculées et mesurées. . . . .                                                                                                                                                                                                                            | 114 |
| 4.7  | Relations entre certains $\chi$ prédicteurs. . . . .                                                                                                                                                                                                                                             | 120 |
| 4.8  | Procédure MLR appliquée au modèle $\tilde{E}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                          | 122 |
| 4.9  | Procédure MLR appliquée au modèle $\tilde{G}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                          | 123 |
| 4.10 | Résultats issus de la procédure MLR pour le modèle $\tilde{E}$ , $n = 25$ , $p_E = 6$ . . . . .                                                                                                                                                                                                  | 124 |
| 4.11 | Résultats issus de la procédure MLR pour le modèle $\tilde{G}$ , $n = 26$ , $p_G = 6$ . . . . .                                                                                                                                                                                                  | 125 |
| 5.1  | Propriétés constitutives des composants du rotor feuilleté. . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 154 |
| 5.2  | Caractéristiques géométriques des paliers. . . . .                                                                                                                                                                                                                                               | 158 |
| 5.3  | Caractéristiques de l'huile de paliers à 40°C. . . . .                                                                                                                                                                                                                                           | 158 |
| 5.4  | Influence de l'effet centrifuge sur les vitesses de rotation et amortissements critiques. .                                                                                                                                                                                                      | 160 |
| 5.5  | Caractéristiques des balourds. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                           | 163 |
| B.1  | Caractéristiques géométriques et mécaniques des différents éléments constituant les système étudié. . . . .                                                                                                                                                                                      | 249 |
| B.2  | Flèches statiques obtenues avec COMSOL et les modèles $\mathcal{M}_1$ , $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_3$ - $n_{ti} = 16$ , $E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , FIG. B.12(a). . . . .                                                                                       | 258 |
| B.3  | Flèches statiques obtenues avec COMSOL et les modèles $\mathcal{M}_1$ , $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ - $n_{ti} = 32$ , $E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , FIG. B.12(b). . . . .                                                                                       | 258 |
| B.4  | Flèches statiques obtenues avec COMSOL et les modèles $\mathcal{M}_1$ , $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ - $l = 4 \text{ m}$ , $E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , FIG. B.13. . . . .                                                                                      | 259 |
| B.5  | Flèches statiques obtenues avec COMSOL et les modèles $\mathcal{M}_1$ , $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ - $l = 4 \text{ m}$ , $n_{ti} = 16$ . . . . .                                                                                                                                         | 259 |
| B.6  | Comparaison des premières fréquences propres de flexion obtenues avec COMSOL et les modèles $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ - $n_{ti} = 16$ , $E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . . . . .                                                                                 | 262 |
| B.7  | Comparaison des premières fréquences propres de flexion obtenues avec COMSOL et les modèles $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ - $l = 4 \text{ m}$ , $n_{ti} = 16$ . . . . .                                                                                                                     | 262 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B.8  | Comparaison des quatre premières fréquences propres de flexion obtenues avec COM-SOL et les modèles $\mathcal{M}_2$ , $\mathcal{M}_2'$ , $\mathcal{M}_1'$ et $\mathcal{M}_3$ - $n_{ti} = 16$ - $l = 4$ m - $E = 8 \cdot 10^{10}$ N · m <sup>-2</sup> . . . . .                          | 267 |
| C.1  | Caractéristiques géométriques et inertielles d'une portion d'arbre suspendue. . . . .                                                                                                                                                                                                   | 295 |
| C.2  | Valeurs des propriétés constitutives identifiées d'une portion d'arbre. . . . .                                                                                                                                                                                                         | 301 |
| C.3  | Valeurs des quatre premières fréquences propres de flexion mesurées et calculées à partir des expansions SEREP et de $\mathcal{G}_{\text{uyan}}$ . . . . .                                                                                                                              | 301 |
| C.4  | Caractéristiques géométriques et inertielles du rotor feuilleté de taille 1. . . . .                                                                                                                                                                                                    | 303 |
| C.5  | Propriétés constitutives des éléments constituant un rotor PMA. . . . .                                                                                                                                                                                                                 | 304 |
| C.6  | Caractéristiques géométrique et inertielles des éléments constituant un rotor PMA. . . . .                                                                                                                                                                                              | 304 |
| C.7  | Propriétés constitutives optimales obtenues en supposant l'empilement de tôles magnétiques isotrope, $n = 1$ , $m = 8$ . . . . .                                                                                                                                                        | 307 |
| C.8  | Comparaison des douze premières fréquences propres mesurées et calculées en supposant l'empilement de tôles magnétiques <b>isotrope</b> , $n = 1$ , $m = 8$ . . . . .                                                                                                                   | 307 |
| C.9  | Propriétés constitutives optimales obtenues en supposant l'empilement de tôles magnétiques <b>isotrope transverse</b> , $n = 3$ , $m = 8$ . . . . .                                                                                                                                     | 308 |
| C.10 | Comparaison des douze premières fréquences propres mesurées et calculées en supposant l'empilement de tôles magnétiques <b>isotrope transverse</b> , $n = 3$ , $m = 8$ . . . . .                                                                                                        | 310 |
| C.11 | Propriétés constitutives optimales obtenues en supposant l'empilement de tôles magnétiques <b>isotrope transverse</b> , $n = 3$ , $m = 12$ . . . . .                                                                                                                                    | 310 |
| C.12 | Comparaison des douze premières fréquences propres mesurées et calculées en supposant l'empilement de tôles magnétiques <b>isotrope transverse</b> , $n = 3$ , $m = 12$ . . . . .                                                                                                       | 310 |
| E.1  | Propriétés constitutives des éléments constituant une tôle magnétique. . . . .                                                                                                                                                                                                          | 322 |
| E.2  | Modules d'Young des éléments constituant le vernis. . . . .                                                                                                                                                                                                                             | 322 |
| E.3  | Caractéristique géométrique du feuilletage. . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 323 |
| E.4  | Valeurs optimales $x_1^*$ , $x_2^*$ des propriétés constitutives du vernis, $e_v = 3\mu\text{m}$ . . . . .                                                                                                                                                                              | 324 |
| E.5  | Valeurs des quatre premières fréquences propres calculées et mesurées. Les fréquences propres calculées ont été obtenues en considérant une épaisseur de vernis $e_v = 3\mu\text{m}$ . . . . .                                                                                          | 326 |
| E.6  | Valeurs des quatre premières fréquences propres de flexion calculées et mesurées sur un rotor feuilleté de taille 1. Les fréquences propres calculées ont été obtenues en considérant successivement des épaisseurs de vernis de $e_v = 3\mu\text{m}$ et $e_v = 2\mu\text{m}$ . . . . . | 329 |

## Bibliographie

- [1] Gay, D., 1987. *Matériaux composites*. Hermes, Paris.
- [2] Dufour, R., Gerard, M., and Chareyron, M., 1998. “Dynamic analysis of a crankshaft in bending with an electric motor and non-linear fluid film bearings”. Fifth International Conference on Rotor Dynamics, pp. 200–211.
- [3] Ede, J., Howe, D., and Zhu, Z., 2002. “Rotor resonances of high-speed permanent-magnet brushless machines”. *IEEE Transactions on Industry Applications*, **38**(6), pp. 1542–1548.
- [4] Belmans, R., Heylen, W., Vandenput, A., and Geysen, W., 1984. “Influence of rotor-bar stiffness on the critical speed of an induction motor with an aluminium squirrel cage”. *IEE Proceedings B [see also IEE Proceedings-Electric Power Applications] Electric Power Applications*, **131**(5), pp. 203–208.
- [5] Chang, S., and Lee, D., 2002. “Robust design of a composite air spindle”. *Polymer Composites*, **23**(3), pp. 361–371.
- [6] McClurg, J., 1987. “Advantages of stiff shaft design on high speed, high horsepower squirrel cage induction motors and generators”. In 34<sup>th</sup> record of Conference Papers, Annual Petroleum and Chemical Industry Conference, pp. 259–263.
- [7] Verma, S., Williams, K., and Singal, R., 1989. “Vibrations of long and short laminated stators of electrical machines. part i : Theory, experimental models, procedure and set-up”. *Journal of Sound and Vibration*, **129**(1), pp. 1–13.
- [8] Williams, K., Singal, R., and Verma, S., 1989. “Vibrations of long and short laminated stators of electrical machines. part ii : Results for long stators”. *Journal of Sound and Vibration*, **129**(1), pp. 15–29.
- [9] Iwata, Y., Sato, H., and Morioka, Y., 1991. “Natural frequency of rotor with rotor core”. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers - Series C*, **57**(544), pp. 3748–3753.
- [10] Ferraris, G., Andrianoely, M., Berlioz, A., and Dufour, R., 2006. “Influence of cylinder pressure on the balancing of a rotary compressor”. *Journal of Sound and Vibration*, **292**(3-5), pp. 899–910.
- [11] Liu, H., Li, C., Wang, W., Qi, X., and Jing, M., 2010. “Non Linear Dynamic Analysis of a Flexible Rod Fastening Rotor Bearing System”. In Proceedings of ASME Turbo Expo 2010 : Power for Land, Sea and Air (GT2010), ASME, pp. 389–398.
- [12] Mogenier, G., Dufour, R., Ferraris-Besso, G., Durantay, L., and Barras, N., 2010. “Identification of lamination stack properties. application to high speed induction motors”. *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, **57**(1), January, pp. 281–287.
- [13] Bilal, E.-A., 2004. “Stiffness of reinforced concrete beams with external tendons”. *Engineering Structures*, **26**(14), pp. 2047–2051.
- [14] Mogenier, G., Baranger, T., Dufour, R., Durantay, L., and Barras, N., 2011. “Efficient model development for an assembled rotor of an induction motor using a condensed modal functional”. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Article in press, doi : <http://dx.doi.org/10.1115/1.4002381>, **6**(2), April, pp. 1–8.
- [15] Garvey, S., Penny, J., Friswell, M., and Lees, A., 2004. “The stiffening effect of laminated rotor cores on flexible-rotor electrical machines”. *Vibrations in Rotating Machinery*, **1000**, pp. 193–202.

- [16] Garvey, S., 2002. “The vibrational behaviour of laminated components in electrical machines”. In *Electrical Machines and Drives*, 1989. 4<sup>th</sup> International Conference on (Conf. Publ. No. ??), IET, pp. 226–231.
- [17] Long, S., Zhu, Z., and Howe, D., 2001. “Vibration behaviour of stators of switched reluctance motors”. *IEEE Proceedings : Electric Power Applications*, **148**(3), pp. 257–264.
- [18] Tang, Z., Pillay, P., Omekanda, A. M., Li, C., and Cetinkaya, C., 2003. “Effects of material properties on switched reluctance motor vibration determination”. In *Conference Record - IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society)*, Vol. 1, 2003 IEEE Industry Applications Conference, 38<sup>th</sup> IAS Annual Meeting - Crossroads To Innovation, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., pp. 235–241.
- [19] Chen, Y. S., Cheng, Y. D., Liao, J. J., and Chiou, C. C., 2008. “Development of a finite element solution module for the analysis of the dynamic behavior and balancing effects of an induction motor system”. *Finite Elements in Analysis and Design*, **44**(8), pp. 483–492.
- [20] Kim, Y.-C., and K-W, K., 2006. “Influence of lamination pressure upon the stiffness of laminated rotor”. *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, **49**(2), pp. 426–431.
- [21] Roivainen, J., 2009. “Unit-wave response-based modeling of electromechanical noise and vibration of electrical machines”. Ph.d. dissertation n°169, Helsinki University of Technology, Finland, June.
- [22] Chentouf, S., Huang, S., Raynaud, J., Laitem, C., and Bouhaddi, N., 2009. “Dynamique d’une structure feuilletée-soudée d’un stator de moteur de traction ferroviaire : essais et validation de modèle”.
- [23] Dimentberg, F., 1961. *Flexural vibrations of rotating shafts*. Butterworths’.
- [24] Lee, C., 1993. *Vibration analysis of rotors*. Springer.
- [25] Lalanne, M., and Ferraris, G., 1998. *Rotordynamics Prediction in Engineering*, 2<sup>nd</sup> ed. John Wiley & Sons Ltd, New York.
- [26] Genta, G., 2005. *Dynamics of rotating systems*, 1<sup>st</sup> ed. Springer Verlag, New York.
- [27] Cowper, G., 1966. “The shear coefficient in timoshenko’s beam theory”. *Journal of Applied Mechanics*, **33**(2), pp. 335–340.
- [28] Hutchinson, J., 2001. “Shear coefficients for timoshenko beam theory”. *Journal of Applied Mechanics*, **68**(1), pp. 87–92.
- [29] Anand, V., 1993. *Computer graphics and geometric modeling for engineers*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [30] Kang, Y., Shih, Y., and Lee, A., 1992. “Investigation on the steady-state responses of asymmetric rotors”. *Journal of Vibration and Acoustics*, **114**, pp. 194–208.
- [31] Raffa, F., and Vatta, F., 2001. “Equations of Motion of an Asymmetric Timoshenko Shaft”. *Meccanica*, **36**(2), pp. 201–211.
- [32] Oncescu, F., Lakis, A., and Ostiguy, G., 2001. “Investigation of the stability and steady state response of asymmetric rotors, using finite element formulation”. *Journal of Sound and Vibration*, **245**(2), pp. 303–328.
- [33] Imbert, J.-F., 1995. *Analyse des structures pas éléments finis*, 3<sup>rd</sup> ed. Cépaduès-Éditions, Toulouse.

- 
- [34] Craveur, J.-C., 2001. *Modélisation des structures - Calcul par éléments finis avec problèmes corrigés*, 2<sup>nd</sup> ed. 2e Cycle - Ecoles d'Ingénieurs. Dunod, Paris.
- [35] Przemieniecki, J.-S., 1985. *Theory of Matrix Structural Analysis*, 46<sup>th</sup> ed. Dover Publications, INC., New York.
- [36] Gmür, T., 1997. *Dynamique des structures : Analyse modale numérique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [37] Childs, D., 1993. *Turbomachinery rotordynamics : phenomena, modeling, & analysis*. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- [38] Chen, W., and Gunter, E., 2005. *Introduction to dynamics of rotor-bearing systems*. Trafford Publishing, Victoria, British Columbia, Canada.
- [39] Mogenier, G., Baranger, T., Ferraris, G., Dufour, and Durantay, L., 2011. "Nonlinear centrifugal effects on prestressed laminated rotors". *Journal of Mechanism and Machine Theory*, Article in press.
- [40] Mogenier, G., Baranger, T., Dufour, R., Durantay, L., and Barras, N., 2010. "Identification of constitutive properties of a laminated rotor at rest through a condensed modal functional". *Mécanique & Industries*, Article in press, doi : <http://dx.doi.org/10.1051/meca/2010045>, **11**(5), December, pp. 309–326.
- [41] Bavastri, C., Ferreira, E., Espíndola, J., and Lopes, E., 2008. "Modeling of dynamic rotors with flexible bearings due to the use of viscoelastic materials". *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **30**, pp. 22–29.
- [42] Meirovitch, L., 1967. *Analytical methods in vibration*. The Mcmillan Company, New York.
- [43] Khulief, Y., and Mohiuddin, M., 1997. "On the dynamic analysis of rotors using modal reduction". *Finite Elements in Analysis and Design*, **26**(1), pp. 41–55.
- [44] Sawicki, J., and Genta, G., 2001. "Modal uncoupling of damped gyroscopic systems". *Journal of Sound and Vibration*, **244**(3), pp. 431–451.
- [45] Rousillon, P., 2006. "Interaction sol-structure et interaction site-ville : aspects fondamentaux et modélisation". Ph.d. thesis n°2006 ISAL 0008, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [46] Zheng, Z., Ren, G., and Williams, F., 1997. "The eigenvalue problem for damped gyroscopic systems". *International Journal of Mechanical Sciences*, **39**(6), pp. 741–750.
- [47] Bazoune, A., Khulief, Y., Stephen, N., and Mohiuddin, M., 2001. "Dynamic response of spinning tapered Timoshenko beams using modal reduction". *Finite Elements in Analysis and Design*, **37**(3), pp. 199–219.
- [48] Nelson, R., 1976. "Simplified calculation of eigenvector derivatives". *AIAA Journal*, **14**(9), pp. 1201–1205.
- [49] Sui, Y., and Zhong, W., 2006. "Eigenvalue problem of a large scale indefinite gyroscopic dynamic system". *Applied Mathematics and Mechanics*, **27**(1), pp. 15–22.
- [50] Berthier, P., Ferraris, G., and Lalanne, M., 1983. "Prediction of critical speeds, unbalance and nonsynchronous forced response of rotors". *Shock and Vibration Inform. Center The Shock and Vibration Bull., part 4*, pp. 103–111.

- [51] Berthier, P., Ferraris, G., and Lalanne, M., 1987. “Application d’une méthode pseudo-modale à la détermination du comportement dynamique des monorotors et des multirrotors coaxiaux”. *Proceedings of the 7<sup>th</sup> WorldIFTOMM Congress*.
- [52] Heylen, W., and Janter, T., 1990. “Extensions of the modal assurance criterion”. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, **112**(4), pp. 468–472.
- [53] Blaschke, P., and Ewins, D., 1997. “The MAC revisited and updated”. In Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering, Vol. 3089, pp. 147–154.
- [54] Ting, T., Chen, T., and Twomey, W., 1993. “Correlating modes shapes based on the modal assurance criterion”. *Finite Elements in Analysis and Design*, **14**(4), pp. 353–360.
- [55] Ewins, D., 1984. *Modal Testing : Theory and Practice*. Research Studies Press LTD., England.
- [56] Allemang, R., and Brown, D., 1982. “A correlation coefficient for modal vector analysis”. In Proceedings of the International Modal Analysis Conference & Exhibit, pp. 110–116.
- [57] Allemang, R., 2003. “The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse”. *Sound and Vibration*, **37**(8), pp. 14–21.
- [58] Morales, C., 2005. “Comments on the MAC and the NCO, and a linear modal correlation coefficient”. *Journal of Sound and Vibration*, **282**(1-2), pp. 529–537.
- [59] Brehm, M., Zabel, V., and Bucher, C., 2010. “An automatic mode pairing strategy using an enhanced modal assurance criterion based on modal strain energies”. *Journal of Sound and Vibration*, **329**, pp. 5375–5392.
- [60] Bodel, C., 2009. “Opérateur MAC\_MODES”. *Code\_Aster : Fascicule u4.52 : Analyse modale*, **U4.52.15**(1647), pp. 1–5.
- [61] Wang, H., and Williams, K., 1996. “Vibrational modes of thick cylinders of finite length”. *Journal of Sound and Vibration*, **191**(5), pp. 955–971.
- [62] Lee, C., and Kam, T., 2006. “Identification of mechanical properties of elastically restrained laminated composite plates using vibration data”. *Journal of Sound and Vibration*, **295**(3-5), pp. 999–1016.
- [63] Lauwagie, T., 2005. “Vibration-based methods for the identification of the elastic properties of layered materials”. Ph.d. dissertation U.D.C. 539.3 620.179, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven (Heverlee), Belgium, October.
- [64] Lauwagie, T., Lambrinou, K., Patsias, S., Heylen, W., and Vleugels, J., 2008. “Resonant-based identification of the elastic properties of layered materials : application to air-plasma sprayed thermal barrier coatings”. *NDT and E International*, **41**(2), pp. 88–97.
- [65] Feng, X., Zhou, J., and Fan, Y., 2003. “Method for identifying sub-regional material parameters of concrete dams using modal data”. *Acta Mechanica Solida Sinica*, **16**(1), pp. 88–94.
- [66] Cugnoni, J., 2004. “Identification par recalage modal et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites”. Ph.d. dissertation n°3106, School of Engineering, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Swiss, October 6<sup>th</sup>.
- [67] Cugnoni, J., Gmür, T., and Schorderet, A., 2007. “Inverse method based on modal analysis for characterizing the constitutive properties of thick composite plates”. *Computers and Structures*, **85**(17-18), pp. 1310–1320.
- [68] Andrieux, S., and Baranger, T., 2008. “Energy methods for Cauchy problems of evolutions equations”. In *Journal of Physics : Conference Series*, Vol. 135, Institute of Physics Publishing.

- 
- [69] Guyan, R. J., 1965. "Reduction of stiffness and mass matrices". *AIAA Journal*, **3**(2), pp. 380–380.
- [70] Leandro, F. F. M., Ruy, C. R. d. M., and Letícia, F. F. M., 2006. "Mode shape expansion from data-based system identification procedures". *Mecânica Computacional, Dynamics and Vibrations (A)*, **25**(18), pp. 1593–1602.
- [71] Kuratani, F., Shimada, T., Yamano, T., and Ogawa, T., 2006. "Structural modification with mode shape expansion for rib stiffeners". *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, **49**(3), pp. 771–778.
- [72] Craig Jr, R., and Bampton, M., 1968. "Coupling of substructures for dynamic analyses". *AIAA Journal*, **6**(7), pp. 1313–1319.
- [73] Fotsch, D., and Ewins, D., 2001. "Further applications of the FMAC". In Proceedings, International Modal Analysis Conference, pp. 635–639.
- [74] Ziegel, E., 2002. "An Introduction to Generalized Linear Models". *Technometrics*, **44**(4), pp. 406–407.
- [75] Student, G., 1908. "The probable error of a mean". *Biometrika*, **6**, pp. 1–25.
- [76] Aldrich, J., 2008. "Comment on SL Zabell's paper : On Student's 1908 paper "The probable error of a mean"". *Journal of the American Statistical Association*, **103**(481), pp. 8–11.
- [77] Mogenier, G., Baranger, T., Dufour, R., Durantay, L., and Barras, N., 2010. "Models for constitutive properties of lamination stack. application to different sizes laminated rotors". In IFTOMM-Rotordynamics 2010, The 8<sup>th</sup> IFTOMM International Conference on Rotor Dynamics.
- [78] Al-Ansary, M., 1998. "Flexural vibrations of rotating beams considering rotary inertia". *Computers & Structures*, **69**(3), pp. 321–328.
- [79] Berzeri, M., and Shabana, A., 2002. "Study of the centrifugal stiffening effect using the finite element absolute nodal coordinate formulation". *Multibody system dynamics*, **7**(4), pp. 357–387.
- [80] Behzad, M., and Bastami, A., 2004. "Effect of centrifugal force on natural frequency of lateral vibration of rotating shafts". *Journal of Sound and Vibration*, **274**(3-5), pp. 985–995.
- [81] Crisfield, M., 1997. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2 : Advanced Topics*, Vol. 2. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.
- [82] Zavarise, G., Wriggers, P., and Schrefler, B., 1998. "A method for solving contact problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **42**(3), pp. 473–498.
- [83] Michon, G., Manin, L., Parker, R., and Dufour, R., 2008. "Duffing oscillator with parametric excitation : analytical and experimental investigation on a belt-pulley system". *Journal of Computational Nonlinear Dynamics*, **3**(3), pp. 031001–031006.
- [84] Belytschko, T., Liu, W., and Moran, B., 2000. *Nonlinear finite element analysis for continua and structures*. Wiley : New York, Chichester, England.
- [85] Abbas, M., 2010. "Formulation discrète du contact-frottement". *Code\_Aster : Fascicule r5.03 : Mécanique non linéaire*, **R5.03.50**(2023), pp. 1–51.
- [86] Oden, J., and Kim, S., 1982. "Interior penalty methods for finite element approximations of the Signorini problem in elastostatics". *Computers & Mathematics with Applications*, **8**(1), pp. 35–56.

- [87] Kocvara, M., Zibulevsky, M., and Zowe, J., 1998. “Mechanical design problems with unilateral contact”. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, **32**(3), pp. 255–281.
- [88] Roques, S., 2007. “Modélisation du comportement dynamique coupé rotor-stator d’une turbine en situation accidentelle”. Ph.d. dissertation n°0367, École Centrale de Nantes, Nantes, France, December 17<sup>th</sup>.
- [89] Wriggers, P., 2002. *Computational contact mechanics*. Hoboken, NJ :John Wiley & Sons, Chichester, England.
- [90] Someya, T., 1989. *Journal-bearing databook*. Springer Verlag, New York.
- [91] Love, A., 1920. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. at the University Press.
- [92] Courbon, J., 1964. *Résistance des Matériaux*, TOME 1, 2<sup>nd</sup> ed. Dunod, Paris.
- [93] Laroze, S., 1988. *Mécanique des structures*, , TOME 2 : *Théorie des poutres*, 2<sup>nd</sup> ed. Eyrolles Masson, Paris.
- [94] Nelson, H., and McVaugh, J., 1976. “The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements”. *ASME Journal of Engineering for Industry*, **98**(2), pp. 593–600.
- [95] Ariyawardena, N., and Ghali, A., 2002. “Prestressing with unbonded internal or external tendons : Analysis and computer model”. *Journal of Structural Engineering*, **128**(12), pp. 1493–1501.
- [96] Frandsen, P., Jonasson, K., Nielsen, H., and Tingleff, O., 2004. Unconstrained optimization. Tech. Rep. 3<sup>rd</sup> Edition, Technical University of Denmark, March.
- [97] Madsen, K., Nielsen, H., and Tingleff, O., 2004. Optimization with constraints. Tech. Rep. 2<sup>nd</sup> Edition, Technical University of Denmark, March.
- [98] Mottelet, S., 2003. Ro04/ti07 - optimisation non-linéaire. Université de Technologie de Compiègne.
- [99] More, J., and Thuente, D., 1994. “Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease”. *ACM - Transactions on Mathematical Software*, **20**(3), pp. 286–307.
- [100] Madsen, K., Nielsen, H., and Tingleff, O., 2004. Methods for non-linear least squares problems. Tech. Rep. 2<sup>nd</sup> Edition, Technical University of Denmark, April.
- [101] Nielsen, H., 1999. Damping parameter in marquardt’s method. Tech. Rep. IMM-REP-1999-05, Technical University of Denmark, May.
- [102] Marquardt, D., 1963. “An algorithm for least squares estimation on nonlinear parameters”. *SIAM - Journal on Applied Mathematics*, **11**(2), pp. 431–441.
- [103] Ojalvo, I., 1987. “Efficient computation of mode-shape derivatives for large dynamic systems”. *AIAA Journal*, **25**(10), pp. 1386–1390.
- [104] Min, Y., Zhong-Sheng, L., and Da-Jun, W., 1997. “Comparison of several approximate modal methods for computing mode shape derivatives”. *Computers and Structures*, **62**(2), pp. 381–393.
- [105] Lee, I., and Jung, G., 1997. “An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities : Part i, distinct natural frequencies”. *Computers and Structures*, **62**(3), pp. 429–435.
- [106] Duysinx, P., 1996. “Optimisation topologique : Du milieu continu à la structure élastique”. Ph.d. dissertation, Université de Liège - Faculté des sciences appliquées.

- [107] Lee, I.-W., Kim, D.-O., and Jung, G.-H., 1999. “Natural frequency and mode shape sensitivities of damped systems : Part ii, multiple natural frequencies”. *Journal of Sound and Vibration*, **223**(3), pp. 413–424.
- [108] Chouchane, M., Guedria, N., and Smaoui, H., 2007. “Eigensensitivity computation of asymmetric damped systems using an algebraic approach”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **21**(7), pp. 2761–2776.
- [109] Guedria, N., Chouchane, M., , and Smaoui, H., 2007. “Second-order eigensensitivity analysis of asymmetric damped systems using nelson’s method”. *Journal of Sound and Vibration*, **300**(3-5), pp. 974–992.
- [110] Llyod, G., Wang, M., and Satpathi, D., 2000. “The role of eigenparameter gradients in the detection of perturbations in discrete linear systems”. *Journal of Sound and Vibration*, **235**(2), pp. 299–316.
- [111] Jones, K., and Turcotte, J., 2002. “Finite element model updating using antiresonant frequencies”. *Journal of Sound and Vibration*, **252**(4), pp. 717–727.
- [112] Wong, C., Zhu, W., and Xu, G., 2004. “On iterative general-order perturbation method for multiple structural damage detection”. *Journal of Sound and Vibration*, **273**(1-2), pp. 363–386.
- [113] Das, A., and Dutt, J., 2008. “Reduced model of a rotor-shaft system using modified serep”. *Mechanics Research Communications*, **35**(6), pp. 398–407.



NOM : Mogenier DATE DE SOUTENANCE : 1<sup>er</sup> Avril 2011  
 PRÉNOMS : Guillaume  
 TITRE : Identification et prévision du comportement dynamique des rotors feuilletés  
 NATURE : Doctorat NUMÉRO D'ORDRE : 2011-ISAL-0030  
 ÉCOLE DOCTORALE : MEGA  
 SPÉCIALITÉ : mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique  
 Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

## RÉSUMÉ :

CETTE thèse porte sur la prévision du comportement dynamique des moteurs électriques, et plus précisément sur la dynamique en flexion des rotors feuilletés à cage d'écureuil appelés moteur grande vitesse (MGV, [3 – 30] MW, [6 000 – 20 000] rpm) montés sur paliers magnétiques actifs. La difficulté majeure de la modélisation réside dans la complexité relative à l'assemblage de la masse magnétique des MGV, composée, d'une part, d'un empilement de tôles magnétiques (ou feuilletage) maintenues par des tirants excentrés précontraints, et d'autre part, d'une cage d'écureuil composée d'une distribution périphérique de barres de court-circuit connectées à deux anneaux de court-circuit situés aux extrémités du feuilletage.

En premier lieu, un modèle éléments finis de poutres de Timoshenko prenant en compte le caractère monolithique des rotors MGV est développé. Une attention particulière est portée à la modélisation de la masse magnétique en considérant d'une part, les barres de court-circuit, et d'autre part, les tirants indépendamment du feuilletage. Le comportement dynamique latéral des rotors feuilletés est principalement régi par la rigidité de flexion de l'empilement dont les propriétés constitutives sont méconnues et essentiellement liées au procédé de fabrication de la machine électrique ce qui rend délicat la modélisation des rotors MGV. Le modèle établi conduit entre autre aux contraintes dans les éléments finis.

L'identification mixte numérique-expérimentale menée aboutit à l'évolution des propriétés constitutives du feuilletage en fonction de la géométrie et des précontraintes d'assemblage. Pour cela, les quantités modales calculées et mesurées (soit sur le site de production de Champigneulle, France ou en laboratoire) sont incluses dans une fonctionnelle énergétique basée sur un quotient de Rayleigh hybride et combinée à des méthodes de réduction, *e.g.* statique de Guyan ou dynamique de Craig & Bampton, ou d'expansion, *e.g.* expansion de Guyan ou SEREP. Toutes les fonctionnelles proposées ont été éprouvées dans diverses applications industrielles dans le but d'identifier des propriétés constitutives de structures réelles : empilement de tôles magnétiques, portions d'arbre ou rotor de palier magnétique. Le développement d'algorithmes de Levenberg-Marquardt et de dérivation des éléments propres ont été nécessaires pour minimiser la fonctionnelle, extraire les propriétés constitutives du feuilletage et prévoir les formes et fréquences propres les plus proches possible des mesures à l'arrêt. L'intégration de cette approche systématique d'identification fournit une loi des propriétés constitutives de l'empilement de tôles magnétiques en fonction des dimensions et précontraintes d'assemblage de la masse magnétique. Ainsi, les phases critiques entrant en jeu dans l'assemblage d'un rotor MGV sont établies en observant en particulier, (1) une rigidité de flexion dissymétrique du feuilletage issue du process d'empilement des tôles, (2) une augmentation significative de la rigidité de l'empilement lors de la phase de maigrissement, (3) une diminution notable de cette dissymétrie après un essai de survitesse.

La modélisation des efforts centrifuges, de la raideur géométrique et du contact tirants-feuilletage a montré que l'effet de la rotation a une influence non linéaire qui tend à augmenter les forces longitudinales agissant sur le feuilletage et les tirants sans toutefois dépasser la limite élastique des tirants. La conséquence de ce phénomène est l'augmentation de la rigidité de flexion de la masse magnétique lorsque le moteur électrique est en rotation. La maîtrise de la dynamique des rotors feuilletés et la très bonne connaissance des propriétés constitutives équivalentes du feuilletage, assemblage de la cage d'écureuil ou centrifugation des tirants, permettent d'accroître la fiabilité des calculs de prévision du comportement dynamique des rotors feuilletés, notamment dans les phases de développement où il s'agit de prédire le comportement dynamique de rotors jamais réalisés auparavant, *e.g.* 30 MW à 6 000 rpm.

MOTS CLÉS: Dynamique des rotors, Analyse modale, Corrélation modale, Identification, Condensation, Optimisation paramétrique, Ligne d'arbre, Effet centrifuge, Contact.

Laboratoire de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des structures (LamCos)  
 UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
 Bâtiment Jean d'Alembert  
 18-20, rue des sciences  
 F-69621 villeurbanne Cedex, FRANCE

Directeurs de thèse : RÉGIS DUFOUR (Professeur) - GUY FERRARIS BESSO (Professeur Émérite)

Président du jury :

Composition du jury : PATRICE CARTRAUD THOURAYA N. BARANGER  
 EMMANUEL FOLTETE RÉGIS DUFOUR  
 JEAN-JACQUES SINOU GUY FERRARIS BESSO  
 LIONEL DURANTAY