



**HAL**  
open science

# Allocation dynamique de portefeuille avec profil de gain asymétrique : risk management, incitations financières et benchmarking

Guillaume Tergny

## ► To cite this version:

Guillaume Tergny. Allocation dynamique de portefeuille avec profil de gain asymétrique : risk management, incitations financières et benchmarking. Economies et finances. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2011. Français. NNT : 2011CNAM0755 . tel-00629049

**HAL Id: tel-00629049**

**<https://theses.hal.science/tel-00629049>**

Submitted on 4 Oct 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CONSERVATOIRE NATIONAL DES  
ARTS ET MÉTIERS**

Ecole Doctorale de Sciences de Gestion

&

**ESSEC**

Programme Doctoral Finance

**THÈSE** présentée par :

**Guillaume TERGNY**

soutenue le : 31 mai 2011

pour obtenir le grade de : Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers

Discipline : Sciences de Gestion

Spécialité : Expertise et Ingénierie Financière

**Allocation dynamique de portefeuille avec profil de  
gain asymétrique : risk management, incitations  
financières et benchmarking**

COMPOSITION DU JURY :

Patrice PONCET	Professeur, Université Paris I Sorbonne et ESSEC	Rapporteur
Jean-Luc PRIGENT	Professeur, THEMA, Université de Cergy-Pontoise	Rapporteur
Roland PORTAIT	Professeur, ancien titulaire de la chaire de Finance, CNAM	Directeur de Thèse
Alexis COLLOMB	Professeur, titulaire de la chaire de Finance, CNAM	Examineur
Didier MAILLARD	Professeur, titulaire de la chaire de Banque, CNAM	Examineur



# Remerciements

**Remerciements.** Je souhaiterais exprimer toute ma gratitude envers le professeur Roland PORTAIT qui m'a fait l'honneur, après avoir dirigé mon mémoire d'actuariat, d'accepter d'être mon directeur de thèse.

Durant toutes ces années, s'il m'a laissé une grande liberté d'action, il m'a aussi apporté, par ses encouragements permanents et ses suggestions fructueuses, une aide décisive qui m'a permis de mener à terme ce travail de recherche.

C'est aussi en collaborant avec lui et avec le professeur Isabelle BAJEUX-BESNAINOU (notamment dans le cadre d'un papier de recherche) que j'ai pu m'initier à certaines des problématiques analysées dans cette thèse. Je leur en suis fort reconnaissant.

J'exprime également mes vifs remerciements aux professeurs Patrice PONCET et Jean-Luc PRIGENT qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi qu'aux professeurs Alexis COLLOMB et Didier MAILLARD qui ont bien voulu faire partie du jury.

Enfin, je tiens à remercier très chaleureusement ma femme et mes parents pour leur patience à toute épreuve. Ils m'ont apporté un soutien psychologique inestimable, sans lequel ce travail n'aurait probablement pas pu voir le jour.

# Résumé

**Résumé.** Les gérants de portefeuille pour compte de tiers sont souvent jugés par leur performance relative à celle d'un portefeuille benchmark. A ce titre, ils sont amenés très fréquemment à utiliser des modèles internes de "risk management" pour contrôler le risque de sous-performer le benchmark. Par ailleurs, ils sont de plus en plus nombreux à adopter une politique de rémunération incitative, en percevant une commission de sur-performance par rapport au benchmark. En effet, cette composante variable de leur rémunération leur permet d'augmenter leur revenu en cas de sur-performance sans contrepartie en cas de sous-performance. Or de telles pratiques ont fait récemment l'objet de nombreuses polémiques : la période récente de crise financière mondiale a fait apparaître certaines carences de plusieurs acteurs financiers en terme de contrôle de risque ainsi que des niveaux de prise de risque et de rémunération jugés excessifs. Cependant, l'étude des implications de ces pratiques reste un thème encore relativement peu exploré dans le cadre de la théorie classique des choix dynamiques de portefeuille en temps continu. Cette thèse analyse, dans ce cadre théorique, les implications de ces pratiques de "benchmarking" sur le comportement d'investissement de l'asset manager. La première partie étudie les propriétés de la stratégie dynamique optimale pour l'asset manager concerné par l'écart entre la rentabilité de son portefeuille et celle d'un benchmark fixe ou stochastique (sur ou sous-performance). Nous considérons plusieurs types d'asset managers, caractérisés par différentes fonctions d'utilité et qui sont soumis à différentes contraintes de risque de sous-performance. Nous montrons en particulier quel est le lien entre les problèmes d'investissement avec prise en compte de l'aversion à la sous-performance et avec contrainte explicite de "risk management". Dans la seconde partie, on s'intéresse à l'asset manager bénéficiant d'une rémunération incitative (frais de gestion variables, bonus de sur-performance ou commission sur encours additionnelle). On étudie, selon la forme de ses incitations financières et son degré d'aversion à la sous-performance, comment sa stratégie d'investissement s'écarte de celle de l'investisseur (ou celle de l'asset manager sans rémunération incitative). Nous montrons que le changement de comportement de l'asset manager peut se traduire soit par une réduction du risque pris par rapport à la stratégie sans incitation financière soit au contraire par une augmentation de celui-ci. Finalement, nous montrons en quoi la présence de contraintes de risque de sous-performance, imposées au gérant ou traduisant son aversion à la sous-performance, peut être bénéfique à l'investisseur donnant mandat de gestion financière.

**Mots clés :** choix dynamique de portefeuille, aversion à la perte, assurance de portefeuille, Value at Risk, espérance de perte, problème Moyenne-Variance, benchmarking, modèle de taux d'intérêt stochastique, incitation financière.

# Abstract



**Abstract.** It is common practice to judge third-party asset managers by looking at their financial performance relative to a benchmark portfolio. For this reason, they often choose to rely on internal risk-management models to control the downside risk of their portfolio relative to the benchmark. Moreover, an increasing number are adopting an incentive-based scheme, by charging an over-performance commission relative to the benchmark. Indeed, including this variable component in their global remuneration allows them to increase their revenue in case of over-performance without any penalty in the event of underperforming the benchmark. However, such practices have recently been at the heart of several polemics: the recent global financial crisis has uncovered some shortcomings in terms of internal risk control as well as excessive risk-taking and compensation levels of several financial players. Nevertheless, it appears that analysing the impact of these practices remains a relatively new issue in continuous time-dynamic asset allocation theory. This thesis analyses in this theoretical framework the implications of these "benchmarking" practices on the asset manager's investment behaviour. The first part examines the properties of the optimal dynamic strategy for the asset manager who is concerned by the difference of return between their portfolio and a fix or stochastic benchmark (over- or under-performance). Several asset manager types are considered, defined by different utility functions and different downside-risk constraints. In particular, the link between investment problems with aversion to under-performance and risk management constraints is shown. In the second part, the case of the asset manager who benefits from an incentive compensation scheme (variable asset management fees, over-performance bonuses or additional commission on asset under management), is investigated. We study how, depending on the choice of financial incentive structure and loss aversion level, the asset manager's strategy differs from that of the investor (or the strategy of the asset manager receiving no incentive remuneration). This study shows that the change in investment behavior of the asset manager can lead to both a reduction in the risk taken relative to the strategy without financial incentives or conversely an increase thereof. Finally we show that the existence of downside risk constraints, imposed on the asset manager or corresponding to their aversion for under-performance, can be beneficial to the investor mandating financial management.

**Keywords :** dynamic portfolio choice, loss aversion, portfolio insurance, Value-at-Risk, expected loss, Mean-Variance problem, benchmarking, stochastic interest rate model, financial incentive.





# Table des matières

<b>Remerciements</b>	iii
<b>Résumé</b>	v
<b>Abstract</b>	vii
<b>Introduction</b>	1
1. Revue de la littérature	6
2. Plan de la thèse	20
<b>partie 1. Allocation dynamique avec contrainte de "risk management"</b>	25
Chapitre 1. Allocation dynamique avec aversion à la sous-performance	29
1. Problème de l'asset manager averse à la sous-performance	29
2. Investisseur CRRA "loss averse"	36
3. Investisseur "loss averse" et neutre au risque	58
Chapitre 2. Critère moyenne - variance - downside risk	67
1. Stratégie optimale avec contrainte VaR	68
2. Stratégie optimale avec contrainte "Limited Expected Loss"	90
3. Conclusion du chapitre	115
Chapitre 3. Allocation dynamique avec benchmark et taux stochastique	117
1. Modèle d'actifs considéré	119
2. benchmarking sans aversion à la sous-performance	123
3. benchmarking avec aversion à la sous-performance	130
<b>partie 2. Allocation dynamique avec rémunérations variables</b>	135
Chapitre 4. Incitations financières et benchmarking	139
1. Problème de l'asset manager avec rémunération asymétrique	141
2. Asset manager HARA avec frais de gestion variables	155
3. Asset manager CRRA bénéficiant d'un bonus contractuel	180
4. Critère Moyenne Variance avec rémunération minimale	213
5. Benchmark stochastique et plusieurs sources de risque	234
Chapitre 5. Incitation financière et aversion à la sous-performance	241
1. Problème de l'asset manager "Loss Averse"	242
2. Stratégie dynamique de l'asset manager 'CRRA Loss Averse'	250
3. Critère Moyenne Variance avec double contrainte de risque	272
4. Conclusion du chapitre	289
Annexe A. Démonstrations partie 1	291

Annexe B. Démonstrations partie 2	313
Annexe. Bibliographie	343

# Introduction

L'industrie de la gestion financière peut être définie comme l'ensemble des activités ayant pour but d'effectuer des investissements financiers tout en respectant certaines contraintes qui peuvent être réglementaires, contractuelles, ou encore bilancieller.

Cette industrie se divise traditionnellement en deux groupes d'activité (eux mêmes assez hétérogènes) :

- La gestion pour compte propre : dans ce cas, l'investisseur (une banque, une assurance, un fonds de pension, un trésorier d'entreprise) effectue des placements financiers dans le but de réaliser des profits en investissant ses propres fonds ; il peut dans ce cadre décider de confier tout ou partie des sommes à investir à un gérant pour compte de tiers, par exemple dans le cadre d'un mandat de gestion.
- La gestion pour compte de tiers : dans ce cas, l'investisseur est un gestionnaire mandaté par des tiers (mandat de gestion, fonds commun de placement) afin de réaliser, contre rémunération, des placements financiers pour leur compte ; c'est le cas en particulier de toutes les sociétés de gestion de portefeuille (désignées communément sous la désignation anglo-saxonne de sociétés d'"asset management") mais aussi des fonds spéculatifs ("hedge funds") qui gèrent souvent à la fois leur fonds propres et ceux confiés par leurs clients.

Dans le cadre de la gestion pour compte de tiers, l'investissement se fait souvent par référence à un portefeuille "benchmark", le gestionnaire tentant de répliquer ou de sur-performer le benchmark. Celui-ci sert de point de repère pour analyser la performance du gestionnaire et définir son univers d'investissement de référence. Il représente un panier de titres significatifs d'un segment de placement donné.

Les deux types de fonds communs de placements les plus courants sont les suivants :

- Les fonds de gestion indiciaire où l'objectif est de réaliser une performance la plus proche possible de celle du benchmark choisi ; cet objectif nécessite la mise en œuvre d'un processus de réplique rigoureux qui doit intégrer dans ses objectifs la minimisation des coûts de transactions ; c'est le cas de la gestion des "Exchanged Traded Funds" qui, comme leur nom l'indique, permettent d'être échangés en permanence sur les marchés organisés et sont pour la plupart des produits indiciaires.
- Les fonds à gestion benchmarkée où l'objectif est de réaliser une performance supérieure à celle du benchmark choisi. L'objectif de sur-performance est souvent assorti d'un niveau de "tracking error"<sup>1</sup> maximal, ce qui permet de contrôler le risque pris par rapport au benchmark. Ce type de gestion autorise le gérant à plus de marge de manœuvre que dans la gestion indiciaire : il a pour principaux avantages de pouvoir tenter de tirer parti des évolutions des marchés et de pouvoir bénéficier d'une plus grande diversification d'actifs ; en contrepartie, il comporte un risque plus important de sous-performance par rapport au benchmark.

---

1. Définie comme l'écart-type de la rentabilité de l'écart entre le portefeuille et le benchmark sur une période donnée.

De même, dans le cadre de la gestion pour compte propre, la référence à un portefeuille benchmark revêt un caractère fondamental ; si l'investissement se fait par référence à un portefeuille "benchmark", il s'agit ici souvent d'un portefeuille de réplification imparfaite du passif d'une institution financière (une assurance ou un fonds de pension,...), permettant à cet investisseur institutionnel de pouvoir faire face à ses engagements (paiement de primes, pension,...), celui-ci cherchant à maximiser l'écart de richesse entre son portefeuille d'actifs et la valeur de son passif, on parle de gestion actif-passif.

En conséquence, il semble que le thème de la gestion avec contrainte de benchmark soit un élément central de la gestion d'actif qui recouvre un large champs d'applications pratiques allant de la gestion financière de Fonds Commun de Placement à la gestion Actif-Passif ("Asset Liability Management").

Laissant de côté la question du choix du benchmark déjà abondamment discutée dans la littérature, nous nous intéressons à deux autres pratiques courantes dans l'industrie de l'asset management et liées à celle du benchmarking que sont la prise en compte de contraintes de risque de sous-performance et l'existence d'un mode de rémunération variable liée à la sur-performance du gérant.

Bien que ces deux pratiques fassent actuellement l'objet de nombreuses polémiques (la période de crise financière mondiale récente ayant mis à jour certaines carences en termes de prises de risques et de rémunérations parfois jugées excessives de certains acteurs financiers) et d'une attention toute particulière des autorités de tutelle des marchés financiers (par exemple l'AMF en France), il nous apparaît que les modèles d'allocation d'actifs de la théorie financière classique ne répondent pas ou de manière incomplète à ces interrogations des praticiens de la gestion de portefeuille.

Cela pouvant s'expliquer par le fait que les modèles classiques d'allocation d'actifs (modèle de [Markowitz, 1952], de [Merton, 1971] et de [Merton, 1973]), n'aboutissent à des formulations simples que dans le cas d'hypothèses simplificatrices ou restrictives fortes :

- optimisation statique ignorant la nature dynamique des marchés financiers, non adaptée pour un horizon moyen-long terme ou optimisation dynamique non résoluble analytiquement.
- hypothèse sous-jacente d'une dynamique des actifs trop simplificatrice ne correspondant pas à la nature physique des actifs sous-jacents étudiés comme par exemple l'existence d'un taux court constant (remis en cause en pratique par l'existence d'une structure factorielle des taux d'intérêt).
- utilisation d'un critère de maximisation de l'espérance d'utilité trop général et sans prise en compte de contraintes supplémentaires correspondant à des préférences d'investisseur asymétrique : assurance de portefeuille, contrôle de la VaR du portefeuille, gestion "benchmarkée", prise en compte de rémunérations variables.

D'autre part, certains auteurs ( voir par exemple [Canner *et al.*, 1997] et [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2003b]) ont montré que les résultats théoriques de ces modèles aboutissaient à des règles d'investissement entrant en contradiction



avec les règles d'allocation d'actif dites de "bons sens"<sup>2)</sup> car ils ne prennent pas en compte un certain nombre de ces spécificités empiriques (aspect dynamique des marchés financiers, taux stochastique).

Dans le prolongement de ces études, nous nous intéresserons à l'effet de la prise en compte supplémentaire de contraintes de risque asymétriques et/ou de rémunération incitative sur la dynamique des stratégies optimales au regard de ces règles de bon sens.

Notre travail qui s'inscrit dans le cadre des problèmes de choix dynamique de portefeuille tentera de répondre de manière explicite à deux questions pratiques des professionnels de la gestion d'actifs : quelle politique de gestion du risque et de rémunération adopter ?

Nous revisiterons la gestion "benchmarkée" à la lumière de techniques d'optimisation dynamique de portefeuille et de modèles d'actifs issus des hypothèses classiques en finance mathématique :

- Processus stochastiques d'Itô pour décrire les actifs risqués et hypothèse de marché complet.
- Problème d'optimisation dynamique offrant une résolution simplifiée (méthode des martingales) par rapport à la méthode de la programmation dynamique de Bellmann (dans le cadre de l'hypothèse de marché complet).
- Prise en compte des préférences de risque de l'investisseur mais aussi de son aversion à la sous-performance par rapport à un "benchmark" en considérant une classe de fonction d'utilité "HARA loss averse" que nous préciserons.
- Résolution analytique dans le cadre du modèle de Black & Scholes à deux actifs, extension à un modèle à  $N$  sources de risques actions, puis à un modèle à facteur de taux stochastique de type "Vasicek" avec un univers d'investissement comprenant les trois actifs traditionnels (actif monétaire, obligataire et action) ; recherche de l'allocation optimale et analyse de ses propriétés empiriques : sensibilité de l'allocation optimale aux variations de marché, aux changements de paramètres de risque et à la forme de la rémunération.

Cette thèse s'articule en deux parties :

La première partie analyse les stratégies d'un investisseur qui est concerné par l'écart entre la rentabilité de son portefeuille et celle d'un benchmark fixe ou stochastique (sur ou sous-performance). Nous analyserons les stratégies optimales dans

---

2. Ces règles au nombre de deux préconisent un niveau d' "actifs risqués" d'autant plus faible que, d'une part l'aversion au risque de l'investisseur est importante et que, d'autre part l'horizon de placement est proche, s'énoncent de la façon suivante :

- (1) Règle du profil de risque ("Popular Advice") : l'allocation optimale doit attribuer aux actifs les plus risqués une pondération d'autant plus faible que l'aversion de l'investisseur au risque est plus grande.
- (2) Règle de l'allocation temporelle ("Conventional Wisdom") : la formule définissant l'allocation optimale impose une baisse relative du poids des actifs les plus risqués au cours du temps à partir d'une allocation initiale en actifs dits risqués d'autant plus importante que l'horizon est éloigné.

les cas de différents investisseurs caractérisés par différentes fonctions d'utilité et/ou différentes contraintes de risque.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse à l'asset manager bénéficiant d'une rémunération incitative (frais de gestion variables et bonus de sur-performance, commission sur encours additionnelle,...). On étudie comment sa stratégie s'écarte de celle de l'investisseur (ou celle de l'asset manager sans rémunération incitative) selon la forme de ces incitations.

## 1. Revue de la littérature

### 1.1. Modèle de Merton.

Le modèle d'équilibre de Merton ("Intertemporal Capital Asset Pricing Model") est considéré comme la référence de la théorie du choix dynamique de portefeuille en temps continu.

Les travaux de Merton ([Merton, 1971] et [Merton, 1973]) ont posé les premières pierres de cette théorie, en montrant, dans un cadre dynamique et d'investissement en temps continu, que l'allocation optimale pour l'investisseur peut être décomposée comme une somme de positions élémentaires investies dans plusieurs portefeuilles dont la composition est indépendante de ses préférences d'investissement<sup>3</sup>.

Le cadre théorique que Merton considère dans son modèle "ICAPM" est le suivant

- Le marché financier est ouvert en permanence et comprend  $N + 1$  actifs qui se négocient sans coût de transaction :
  - (1) Un actif "sans risque", représentant un titre monétaire dont le rendement instantané, noté  $r(t)$ , désigne le taux de référence unique d'emprunt ou de prêt en vigueur sur le marché financier,
  - (2)  $N$  actifs risqués dont les rendements espérés instantanés sont modélisés par des processus stochastiques continus, des processus d'Itô.
- Le problème de l'investisseur est de maximiser une fonction objectif (spécifique à chacun des investisseurs) à un horizon d'investissement donné. Cette fonction objective s'exprime, quelque soit l'investisseur concerné, comme la somme des deux composantes suivantes : l'utilité<sup>4</sup> espérée du flux de consommation d'une part, celle de la valeur finale du portefeuille d'actifs financiers d'autre part.
- Les paramètres (espérance de rendement instantané et volatilité instantanée) définissant l'équation des processus de prix des  $N$  actifs risqués sont fonction de  $K$  facteurs ou variables d'états qui servent à décrire la déformation de l'état des opportunités d'investissement<sup>5</sup>.

Partant de cette structure générale de marché financier, Merton parvient, en utilisant les outils de résolution de problèmes de contrôle stochastique optimal fournis par la théorie de la programmation dynamique de Bellmann en temps continu, à démontrer son théorème de décomposition en plusieurs fonds : indépendamment de leur aversion au risque respectif, l'allocation optimale pour chacun des investisseurs

---

3. Ces travaux en temps continu s'inscrivent dans le prolongement des résultats de séparation en plusieurs fonds obtenus dans le cadre de modèles financiers statiques à une seule période : voir par exemple Tobin (1958), Black (1973) ou encore Cass et Stiglitz (1970).

4. Au sens classique de fonction d'utilité croissante et strictement concave de Von Neumann Morgenstern.

5. Ces facteurs peuvent prendre de multiples formes selon les modèles considérés ; par exemple, ils peuvent servir à décrire l'évolution stochastique du niveau de prime de risque ou de volatilité d'un actif action ou bien encore correspondre à l'hypothèse d'une structure par terme des taux d'intérêts.

admet la même décomposition en plusieurs positions élémentaires.

En particulier, le nombre de fonds (ou de portefeuilles) de cette décomposition est identique quelque soit l'investisseur considéré et dépend du nombre de facteurs de risques considérés dans le modèle d'actifs : il y a  $K + 2$  portefeuilles pour  $K$  facteurs de risque<sup>6</sup>.

Cependant, malgré la force et la simplicité des résultats théoriques énoncés par Merton dans son modèle "ICAPM", ce nouveau cadre de choix dynamique de portefeuille laisse un certain nombre de questions en suspens et en particulier les deux problématiques suivantes :

- (1) L'analyse des faits stylisés dans le cadre du modèle de Merton :

Merton ne parvient à obtenir une expression explicite de l'allocation optimale qu'au prix d'hypothèses spécifiques très restrictives sur la dynamique des actifs : il s'agit du cas particulier où les  $N$  actifs risqués ont pour rendements instantanés des mouvements browniens géométriques (i.e. l'espace des opportunités est supposé constant avec  $K \equiv 0$ ) et l'actif sans risque offre un rendement instantané constant qui s'identifie au taux d'intérêt en vigueur sur le marché.

Or ces deux hypothèses ne sont pas en phases avec un certain nombre de faits stylisés observés sur les marchés : cycles économiques, effet prédictifs de certaines variables, décomposition factorielle de la courbe des taux d'intérêt en un ou plusieurs facteurs stochastiques, processus de volatilité stochastique des actifs considérés.

La question se pose alors de savoir s'il est possible, dans le cadre d'un modèle de Merton généralisé, d'analyser l'effet de ces faits stylisés sur l'allocation dynamique optimale, ce qui imposerait d'obtenir des formules fermées ou semi-fermées qui puissent être analysables en pratique.

- (2) L'analyse du puzzle des "règles d'allocation de bon sens" ("Conventional Wisdom" et "Popular Advice") :

Cette hypothèse d'état des opportunités d'investissement constant ( $K = 0$ ), qui correspond aussi à la généralisation à  $N$  actifs du modèle à deux actifs de [Black Scholes, 1973], implique en particulier que le portefeuille optimal de l'investisseur, quelque soit son niveau d'aversion au risque, peut être décomposé en deux fonds : un actif de taux sans risque et un fonds composé d'actifs risqués dont la proportion est la même pour tous les investisseurs<sup>7</sup>.

Ce résultat de décomposition qui peut être vu comme une généralisation en temps continu du théorème de Tobin (1958) paraît cependant être en

---

6. [Merton, 1973] analyse successivement le cas  $K \equiv 0$  (le modèle d'actifs considéré étant le modèle de [Black Scholes, 1973] à deux actifs et une source de risque) puis le cas  $K \equiv 1$ .

7. Il s'agit du portefeuille de l'investisseur qualifié souvent dans la littérature d'investisseur "myopique" car la composition de son portefeuille est constante et en ce sens elle ne tient pas compte d'un éventuel changement d'états ni de la considération de son horizon d'investissement.

contradiction avec les règles de "bon sens" suivies en pratique par les investisseurs financiers qui préconisent un ratio d'allocation action - obligation fonction décroissante du niveau d'aversion au risque (comme mentionné par [Canner *et al.*, 1997]) et fonction croissante de l'horizon d'investissement (voir par exemple [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2003b]).

Ainsi, dans le cadre de cette hypothèse restrictive de l'absence de facteurs (espace des opportunités constant), le Modèle de Merton ne peut expliquer ces puzzles.

Comme nous allons le voir dans la suite de la revue de la littérature, c'est la considération de modèles plus généraux, soit en terme de modélisation d'actifs (facteurs stochastiques), soit en terme de préférence de l'investisseur (contrainte d'aversion à la perte) qui permettent de résoudre en partie ces problèmes.

## 1.2. Allocation dynamique d'actifs et modèles à facteurs.

C'est l'avancée récente, d'une part, dans l'étude des modèles factoriels linéaires en temps continu<sup>8</sup> et, d'autre part, dans le développement des techniques de résolution des problèmes d'optimisation stochastiques en temps continu (avec par exemple les travaux de [Karatzas *et al.*, 1987] et de [Cox Huang, 1989]<sup>9</sup>) qui a probablement favorisé l'émergence d'une autre littérature, tout aussi récente, dans le domaine de la théorie du choix dynamique de portefeuille en temps continu avec prise en compte de facteurs stochastiques.

Dans le cadre d'un modèle d'actifs comprenant un facteur de taux stochastique (modèle à un facteur de taux de Vasicek) en complément du traditionnel risque action, et sous l'hypothèse d'un marché financier complet, où l'investisseur cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale à un horizon d'investissement fixé, les auteurs suivants étudient l'impact de l'existence d'un facteur de taux stochastique sur l'allocation dynamique optimale suivie par l'investisseur :

[Sorensen, 1999] analysent le problème de l'investisseur "CRRA" ("Constant Relative Risk Aversion", i.e. agent dont l'aversion relative au risque est constante, et [Bajeux-Besnainou Portait, 1998] étudient les propriétés du problème moyenne variance dynamique (fonction d'utilité quadratique). Dans les deux cas, l'allocation optimale s'obtient comme une simple combinaison du portefeuille solution du problème de Merton (cas de l'investisseur myopique) et de l'obligation Zéro-coupon dont la maturité correspond à l'horizon d'investissement de l'investisseur (qui s'apparente à un portefeuille de couverture contre la variation des taux d'intérêt).

---

8. En particulier dans l'étude des modèles linéaires de déformation de la courbe des taux d'intérêt en temps continu comme par exemple les modèles à un facteur proposés par [Vasicek, 1977] ou encore par [John C. Cox Ross, 1985] et plus récemment la littérature relative aux modèles multi-factoriels affines généralisés de taux d'intérêts (voir par exemple [Dai Singleton, 2000]).

9. [Karatzas *et al.*, 1987] et [Cox Huang, 1989] offrent un nouveau cadre de résolution analytique de problème d'optimisation dynamique en temps continu (méthode martingale) qui consiste à exploiter les propriétés de martingale du prix des actifs financiers sous certaines hypothèses et en particulier celle d'A.O.A (d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage) et de complétude du marché (cas du modèle de Merton où il y a au moins autant d'actifs risqués que de sources de risque à couvrir).

Dans le contexte de la problématique particulière du "Popular Advice" introduite par [Canner *et al.*, 1997] (voir la section précédente), [Brennan Xia, 2000] considèrent le problème de l'agent "CRRA", et [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2001] celui de de l'investisseur CRRA et de l'investisseur "Moyenne Variance" (fonction d'utilité quadratique) au regard du ratio action / obligation optimal. Dans les deux cas, l'analyse de l'expression du ratio optimal fait ressortir un poids relatif action / obligation qui croît avec le niveau de tolérance au risque, ce qui est consistant avec la règle du "Popular Advice".

Enfin, [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2003b] étudient l'allocation temporelle (au regard de la règle du "Conventional Wisdom") issue de la stratégie dynamique optimale suivie par l'investisseur du problème "Moyenne-Variance" et considèrent, à titre de généralisation, un investisseur ayant une fonction d'utilité "HARA" ("Hyperbolic Absolute Risk Aversion"), i.e. dont l'aversion absolue au risque est une fonction hyperbolique décroissante. Ils aboutissent à la conclusion que l'allocation temporelle dépend du type d'aversion considéré; pour un paramètre d'aversion relative au risque croissant (c'est le cas en particulier de la fonction d'utilité quadratique), la stratégie ressemble à la règle d'allocation temporelle de "bon sens" dictant une baisse de l'exposition à l'actif de type action au profit des obligations et de l'actif monétaire (actifs considérés moins risqués) au fur et à mesure que l'horizon d'investissement se rapproche.

En résumé, toutes ces études montrent que la simple prise en compte d'un facteur de risque supplémentaire sur la courbe des taux d'intérêts dans le problème de l'investisseur permet d'aboutir à une expression (explicite) de l'allocation optimale qui, contrairement à celle de l'investisseur logarithmique "myopique", dépend de son horizon d'investissement et de son degré d'aversion au risque; de plus l'analyse de cette expression permet de lever en partie le puzzle des règles de "bon sens".

Considérant également une dynamique de taux stochastique à la Vasicek, dans un cadre de marché incomplet, [Sorensen, 2007] analyse la stratégie dynamique optimale de l'agent-investisseur CRRA qui doit prendre en compte une contrainte de poids alloué sur certains actifs (par exemple de type interdiction de vente à découvert ou restriction sur le niveau de levier total du portefeuille).

Enfin, [Lioui Poncet, 2001], prenant en compte un processus de taux stochastique dans un cadre général, considèrent un investisseur CRRA et, à titre de comparaison, un investisseur ayant une fonction d'utilité logarithmique. Ils montrent que la décomposition en  $K + 2$  portefeuilles de Merton, peut, sous l'hypothèse de marché complet, se réduire à une décomposition en quatre portefeuilles comprenant deux portefeuilles de couverture correspondant l'un aux mouvements de taux et l'autre aux co-mouvements entre le taux court et la prime de risque des actifs risqués.

Prolongeant les études pré-citées, [Omberg, 2000], [Brennan Xia, 2002], [Sangvinatsos Wachter, 2003] et [Menoncin, 2003] ont comme point commun de s'intéresser à l'effet de la prise en compte d'un facteur supplémentaire de

risque inflationniste pour modéliser les variations de la courbe des taux d'intérêt<sup>10</sup>. De plus, ces auteurs considèrent comme variable du problème de l'investisseur, la richesse réelle (richesse nominale déflatée du niveau de l'indice d'inflation) pour tenir compte du risque inflationniste que subit la valeur nominale de sa richesse.

Dans un cadre de marché incomplet, [Kim Omberg, 1996], [Wachter, 2002], [Brennan Xia, 2005] ou encore [Campbell *et al.*, 2002] analysent l'impact sur la stratégie dynamique optimale pour l'investisseur de la prise en compte d'un effet prédictif correspondant à l'hypothèse d'une prime de risque action variable et non parfaitement répliquable par un actif.

L'étude du choix dynamique de portefeuille dans le cadre d'un modèle multifactoriel linéaire gaussien plus large (à la fois prime de risque et taux d'intérêt supposés stochastiques) est abordée par [Cvitanic *et al.*, 2003] qui, se plaçant sous l'hypothèse de marché complet, résolvent numériquement le problème d'investissement de l'investisseur par simulations de Monte-Carlo.

L'analyse du choix dynamique de portefeuille dans le cadre d'un modèle multifactoriel gaussien en présence de risques non parfaitement répliquables (i.e hypothèse de marché incomplet) est étudiée par [Brennan M. R., 1997], [Campbell Viceira, 2001], [Campbell Viceira, 2002], [Campbell Viceira, 2003], [Sorensen Trolle, 2004] et [Munk *et al.*, 2004].

L'effet de la prise en compte d'un facteur de risque de crédit supplémentaire (risque de défaut) sur la politique d'investissement optimale est analysé par [Walder, 2002], [Hou, 2002], [Hou Jin, 2002] et [Basak Shapiro, 2004].

Enfin, [Liu, 2001], [Liu Pan, 2003], [Chacko Viceira, 2005], [Liu, 2007] et [Branger *et al.*, 2008] considèrent des problèmes d'allocation dynamique de portefeuille sous l'hypothèse d'un processus de volatilité action stochastique.

### 1.3. Allocation d'actifs avec contraintes de risque.

1.3.1. *Modèle statique d'allocation de portefeuille avec prise en compte de l'aversion à la sous-performance.*

Si [Markowitz, 1952] considère une mesure de risque symétrique, la variance, non adaptée au cas où les prix des actifs ne sont pas des processus gaussiens, c'est [Roy, 1952] qui est le premier à proposer dans le cadre d'un modèle d'allocation de portefeuille une mesure de risque asymétrique : il s'agit de la "Safety First" qui correspond à la probabilité de ruine de l'investisseur (i.e. probabilité de perdre plus qu'un niveau de seuil pré-défini).

Dans la continuité de ces deux articles, [Markowitz, 1959] propose en guise d'alternative à la variance des rendements, une autre mesure de risque de sous-performance, la semi-variance, écart type des rendements inférieurs à un niveau de seuil donné.

---

10. Il s'agit de modèles linéaires gaussiens à plusieurs facteurs de taux généralisant le modèle de Vasiček à un facteur qui incluent les deux facteurs explicatifs suivants : taux d'intérêt réel instantané et taux de croissance instantanée espérée de l'inflation, i.e. le drift du processus d'Itô décrivant l'évolution du niveau de l'indice d'inflation.

[Bawa, 1975], [Bawa, 1978], [Fishburn, 1977], et [Harlow, 1991] analysent les moments partiels inférieurs d'ordre zéro à deux<sup>11</sup>.

Dans le cadre de sa célèbre théorie des perspectives ("Prospect Theory"), [Kahneman Tversky, 1979] proposent une fonction d'utilité, dissymétrique autour d'un seuil de richesse, dont la forme est celle d'un "S" : celle-ci permet de prendre en compte le fait que l'investisseur a des préférences comportementales qui l'amènent à pénaliser plus ses pertes que ses gains.

[Jarrow Zhao, 2006] proposent une approche unifiée de l'allocation d'actifs sous contrainte d'aversion à la perte, intégrant comme cas particulier à la fois les LPM et la fonction d'utilité loss averse de la "Prospect Theory" : ils considèrent l'expression générale d'une fonction de perte traduisant la dissymétrie des préférences de l'investisseur autour du seuil de richesse cible.

Finalement, [Rockafellar Uryasev, 2000], [Jorion, 2001], ou bien encore [Alexander Baptista, 2001] et [Alexander Baptista, 2003], étudient le problème d'allocation de portefeuille optimale avec prise en compte d'une contrainte de risque de perte de type VaR ou CVaR.

### 1.3.2. Allocation dynamique de portefeuille avec prise en compte de préférences asymétriques de l'investisseur.

Bien que ce type de contraintes de risque ou de préférences d'investissement asymétriques correspondent en pratique à de très nombreux cas de figure (contrainte de passif pour les investisseurs institutionnels, protection du capital retraite pour les particuliers), elles n'ont pourtant été que peu analysées jusqu'à une époque récente dans la littérature traitant des modèles d'allocation dynamique de portefeuilles qui s'est plutôt attaché, dans un cadre dérivé du modèle de Merton, à décrire l'effet de la prise en compte de facteurs de risques non parfaitement répliquables sur la stratégie de l'investisseur.

Or, si l'hypothèse de marché incomplet est en phase avec la réalité des marchés financiers<sup>12</sup>, les techniques de résolutions disponibles dans ce cadre (méthode de programmation dynamique de Bellmann) sont assez lourdes à manipuler ; le plus souvent, elles n'aboutissent à des solutions explicites que dans certains cas particuliers (investisseur CRRA, état des opportunités constant,...) et paraissent donc mal adaptées à la complexité de la prise en compte de préférences d'investissement asymétriques ou de contraintes de risque explicites supplémentaires.

A l'inverse, si l'hypothèse de marché complet ne permet pas de prendre en compte

---

11. Les moments partiels inférieurs désignés couramment par l'abréviation LPM (pour "Lower Partial Moment") se définissent de la manière suivante : le LPM d'ordre 0 correspond à la probabilité de perte, le LPM d'ordre 1 à l'espérance de perte et le LPM d'ordre 2 à la semi-variance.

12. Comme on l'a vu dans la section précédente, cette hypothèse permet de traiter les problèmes de choix dynamique de portefeuille en temps continu en présence de couverture imparfaite ; il s'agit de cas aussi variés que la prise en compte d'un risque inflationniste de long terme, d'une prime de risque ou encore de l'existence d'un facteur de volatilité stochastique. Elle correspond également à d'autres situations particulières comme la prise en compte dans le problème d'investissement de contraintes de poids ou encore de flux de revenu de salaire non parfaitement corrélés au marché.



des problématiques de couverture financière imparfaite<sup>13</sup>, elle a l'avantage d'offrir un cadre simplifié pour la résolution de tels problèmes d'investissement ; cette hypothèse rend possible l'utilisation de la méthode de résolution dite des martingales<sup>14</sup>, mentionnée dans la section précédente, voir [Karatzas *et al.*, 1987], qui est particulièrement adaptée à la prise en compte de contraintes additionnelles de risque de sous-performance à un horizon d'investissement pré-défini.

En effet, dans le cas particulier où le problème d'investissement ne fait intervenir que l'utilité espérée de la richesse terminale de l'investisseur<sup>15</sup>, l'application de la méthode des martingales est particulièrement aisée et permet de d'aboutir à une solution explicite pour n'importe quel type de profil de richesse optionnel ou asymétrique<sup>16</sup>.

Aussi, comme une grande partie de la littérature qui s'est intéressé à l'allocation dynamique de portefeuille en présence d'aversion au risque, c'est cette approche de résolution en marché complet que nous adopterons.

La prise en compte d'une contrainte de protection de capital est abordée par les auteurs suivants :

[Grossman Vila, 1989], [Basak, 1995], [Grossman Zhou, 1996] (contrainte explicite d'assurance de portefeuille et agent CRRA) étudient, dans un cadre de marché complet et de temps continu, des modèles d'équilibre en présence d'assurance de portefeuille.

Considérant un investisseur CARA opérant sur des contrats futures, [Lioui Poncet, 1996] et [Lioui *et al.*, 1996] analysent le problème de choix dynamique de portefeuille en présence d'une contrainte de non-négativité sur la richesse finale et sous hypothèse de couverture imparfaite de l'univers des actifs financiers. [Nguyen Portait, 2002] analysent le problème Moyenne Variance Dynamique (fonction d'utilité quadratique) avec cette même contrainte dans un cadre de marché complet.

Toujours dans un cadre de marché complet, [Bajeux-Besnainou Ogunc, 2006] s'intéressent au cas particulier d'une fondation financière ("Endowment Plan") en

---

13. Elle est cependant adaptée à un grand nombre de cas de figures pratiques qui correspondent le plus souvent à des situations de problèmes purement financiers (i.e. pas de consommations ni de flux de capitaux exogènes) où les actifs sont soumis à des risques financiers (pas de facteurs de risques exogènes non répliquables par des actifs financiers).

14. Pour une comparaison entre la méthode martingale et la programmation dynamique appliquée au problèmes d'investissement en temps continu et une revue de la littérature complète de leur application respective dans un cadre de marché complet ou de marché incomplet on pourra se référer à [Runggaldier, 2003].

15. Il s'agit du cas où l'investisseur place, à une date initiale, l'intégralité de sa richesse dans son portefeuille d'actifs financiers qui s'auto-finance sans sortie (i.e. sans flux de consommation) ni entrée de nouveaux fonds (i.e. pas de considération de revenus de salaire à ré-investir) jusqu'à un horizon d'investissement pré-défini.

16. Sous les hypothèse d'A.O.A. (pas de stratégies d'arbitrages possibles) et de complétude du marché financier, la résolution de ce type de problème dynamique se décompose en deux étapes élémentaires qui sont les suivantes : dans un premier temps, résolution d'un problème d'optimisation statique exprimé sur la richesse terminale (afin d'obtenir l'expression de la richesse terminale optimale) et dans un second temps, obtention de la stratégie dynamique de réplcation atteignant cette richesse finale en utilisant la propriété de martingales des prix (de façon similaire à la réplcation d'actifs contingents en temps continu utilisée pour le pricing et la couverture d'option).

considérant une fonction d'utilité HARA intégrant une contrainte implicite d'assurance de portefeuille (fonction d'utilité puissance avec plancher implicite sur le niveau de richesse)<sup>17</sup> identique à celle considérée par [Basak, 2002] dans son modèle d'équilibre avec agent averse à la sous-performance.

L'analyse de l'effet d'une contrainte de risque de sous-performance sur l'allocation dynamique de l'investisseur est l'objet des études suivantes :

[Basak Shapiro, 2001] considèrent l'effet d'une contrainte explicite de type VaR ("Value at Risk") et LEL ("Limited Expected Loss"<sup>18</sup>) sur le comportement de l'investisseur maximisant l'utilité espérée de sa richesse dans un cadre de marché complet ; ils dérivent l'expression de la stratégie dynamique optimale sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt constant et de rendements des actifs risqués suivant des mouvements browniens géométriques. Dans un cadre similaire, [Cuoco *et al.*, 2008] proposent une contrainte de risque alternative de type VaR court terme.

[Zhao Ziemba, 2000] utilisent une mesure de risque proche de la VaR, l'Earning at Risk et [Li *et al.*, 2007] aboutissent à une expression analytique de l'allocation sous contrainte d'Earning at Risk en supposant de plus que les portefeuilles sont à poids constants ("Constant Rebalanced Portfolio").

[Li Wu, 2008] considèrent, dans un cadre dynamique et en temps continu, le problème dynamique de minimisation de la "Below-Threshold Variance" (semi-variance) et [Berkelaar Kouwenberg, 2000] analysent les problèmes d'optimisation moyenne downside-risque où le risque est mesuré par les LPM d'ordre 0,1 et 2 (respectivement probabilité de perte, espérance de perte et semi-variance) .

[Berkelaar *et al.*, 2002] et [Berkelaar *et al.*, 2004] analysent la stratégie dynamique optimale dans le cas où les préférences de l'investisseur se traduisent par une fonction d'utilité issue de la théorie des perspectives.

Enfin, [Jalal, 2007] résout le problème d'allocation dynamique de portefeuille d'un investisseur averse à la perte (au sens de la théorie des perspectives) en supposant la volatilité de l'actif risqué modélisé par un processus stochastique à saut et, plus récemment, [Hainaut, 2009] considère un univers de taux stochastique dérivé du modèle de Hull and White dans le cadre de l'analyse du choix dynamique de portefeuille avec contrainte VaR et investisseur CRRA.

---

17. Pour ce choix de fonction d'utilité, la stratégie dynamique optimale du problème d'investissement de maximisation de l'utilité espérée de la richesse terminale est similaire à une stratégie "CPPI" ("Constant Protection Portfolio Insurance") ; voir par exemple [Perold Sharpe, 1988] pour une description de ce type de stratégie dynamique d'assurance de portefeuille.

18. mesure de perte de sous-performance, correspondant à la valeur présente de l'espérance de perte, similaire à la CVaR.

## 1.4. Benchmarking et modèles d'allocation dynamique d'actifs.

### 1.4.1. Modèles d'allocation de portefeuille avec benchmark et contrainte de risque.

Dans un cadre statique, [Roll, 1992] montre que si le benchmark considéré n'est pas sur la frontière efficiente, au sens traditionnel du modèle "MV" (Moyenne-Variance) de Markowitz, alors le portefeuille de l'investisseur qui cherche à minimiser la valeur de la "Tracking Error Variance" (définie comme la variance de l'écart de rendement entre le portefeuille et le benchmark), à niveau d'espérance de sur-performance fixé, n'est pas non plus efficient.

[Rudolf *et al.*, 1999], analysent dans un univers relatif (richesse du portefeuille moins benchmark), le problème de l'investisseur qui cherche à minimiser la valeur absolue de l'écart de richesse avec le benchmark (la mesure de risque n'est plus, comme dans le modèle de Roll, la variance de l'écart de richesse mais l'espérance de la valeur absolue de ce même écart).

[Wagner, 2002] étudie un critère mixte d'optimisation avec benchmark qui généralise à la fois le critère "MV" de Markowitz et le critère "MTEV" ("Mean Tracking Error Variance") de Roll. [Wang, 1999] considère le cas d'un investisseur ayant à prendre en compte plusieurs benchmark dans un critère d'optimisation "MV".

Les problèmes de minimisation de la TEV (problème de Roll) avec prise en compte d'une contrainte supplémentaire de risque de perte absolue (sans référence au benchmark), ayant pour effet de limiter l'inefficience au sens "MV" du portefeuille, sont traités par [Jorion, 2003] qui considère une contrainte additionnelle sur le niveau de volatilité du portefeuille et par [Alexander Baptista, 2008], dans le cas d'une contrainte de type VaR.

Dans un cadre de choix dynamique de portefeuille avec benchmarking et contrôle du risque de sous-performance, on peut citer les références suivantes :

[Tepla, 2001] considère le problème de l'investisseur CRRA (problème de Merton) avec prise en compte supplémentaire d'une contrainte sur le niveau de sous-performance par rapport au benchmark (contrainte forte d'assurance de portefeuille) et [Basak *et al.*, 2003] généralisent ce problème en considérant une contrainte sur le niveau de VaR et de "LEL" ("Limited Expected Loss") relativement au benchmark (contrainte faible autorisant des pertes).

[Bajeux-Besnainou *et al.*, 2003a] étudient le problème dynamique de minimisation de la Tracking Error Variance (problème de Roll en temps continu) avec une contrainte additionnelle d'assurance de portefeuille ou de sur-performance maximale par rapport au benchmark tandis que [Zhao, 2007] analyse, pour une forme générale de fonction d'utilité HARA, le problème de maximisation de l'espérance d'utilité de l'écart de richesse du portefeuille par rapport au benchmark.

1.4.2. *Allocation de portefeuille en présence d'incitations financières contractuelles ou implicites.*

Dans le cadre de la littérature sur le lien d'incitation financière implicite qui existe entre les flux de souscription et le niveau de risque pris par les gérants de fonds commun de placement, on peut citer les références suivantes :

[**Chevalier Ellison, 1995**] proposent une forme de relation non linéaire entre croissance des encours (facteur d'incitation financière indirecte) et sur-performance ou sous-performance par rapport au benchmark. Ils montrent que cette relation de lien de cause à effet entre une sur-performance sur l'exercice annuel et des nouveaux flux d'investissement en fin d'exercice se traduit par un niveau accru de risque pris par les gérants<sup>19</sup> au cours des derniers mois de l'année.

Dans le prolongement de cette spécification de relation "flux - performance", [**Basak et al., 2008**] proposent un modèle d'allocation dynamique de portefeuille avec prise en compte d'un effet incitatif de flux d'investissement, qui par nature est asymétrique<sup>20</sup> et [**Basak Makarov, 2009**] analysent un modèle d'équilibre en présence de cette même forme d'incitation de nouveaux flux d'investissement.

Pour une analyse empirique détaillée de l'impact d'un mode de rémunération variable (comme par exemple une commission de sur-performance) sur la performance et sur le niveau de risque relatif au benchmark des gérants de "mutual funds" (mesuré par la variance de la "TE"), on pourra se référer à [**Elton et al., 2003**]. Ceux-ci confirment le niveau de risque supérieur pour les gérants recevant une incitation financière.

Pour une analyse, dans le cadre du choix dynamique de portefeuille, du problème d'investissement de l'asset manager en présence d'un profil de rémunération optionnel et convexe, typique des commissions de sur-performance en gestion de portefeuille, on peut citer [**Carpenter, 2000**].

Les papiers suivants traitent de l'effet de l'existence d'incitations financières, indirectes ou non, sur les performances ou les flux d'investissement des fonds dit de "hedge funds" avec les spécificités propres à cette industrie financière :

[**Agarwal et al., 2004**] valident empiriquement le résultat suivant : plus le niveau d'incitation managériale, dû à l'existence d'un mode de rémunération variable de type optionnel<sup>21</sup>, est élevé, plus les niveaux de flux d'investissement et de performances futures des gérants de "hedge funds" augmentent.

Dans la continuité de cette étude, [**Agarwal et al., 2008**] montrent que les facteurs suivants ont tous un effet positif statistiquement significatif sur les performances futures des gérant de "hedge funds" : effet de delta dû au contrat de

---

19. Le niveau de risque d'un fonds étant mesuré par l'exposition en actions des fonds communs de placement ("mutual funds") du panel considéré.

20. une sur-performance par rapport au benchmark asymétrique

21. défini comme le "delta" exprimé en montant de la rémunération contractuelle du gérant ; le profil de la rémunération est similaire à celui d'une option (dont le strike est le niveau de performance correspondant au seuil de déclenchement du paiement de la commission variable) et dépend de façon linéaire de la valeur du taux de la commission de gestion variable mais aussi de façon non linéaire de la performance des actifs gérés.

rémunération incitative, effet de l'existence d'une période de "lock up" (période durant laquelle le porteur ne peut vendre ses parts), effet du degré d'investissement personnel du gérant dans le fonds spéculatif qu'il gère ("managerial ownership") et enfin, effet de l'inclusion d'un mécanisme de "High Water Mark" dans le calcul des frais de sur-performances.

[**Hodder Jackwerth, 2006**] et [**Kouwenberg Ziemba, 2007**] considèrent le problème de choix dynamique de portefeuille du gérant de "hedge funds" qui cherche à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération finale, laquelle dépend du niveau des frais de sur-performance reçus (le "pay-off" du gérant de fonds spéculatif ayant un profil optionnel dû à la composante asymétrique de la commission de sur-performance).

Sous l'hypothèse d'une forme de compensation affine ou linéaire du gérant, [**Lioui Poncet, 2006**] analysent dans le cadre du problème Principal-Agent de la théorie de l'agence<sup>22</sup>, la stratégie optimale suivie par l'asset manager (agent), celle de l'investisseur final (principal) et la forme du benchmark optimal (les termes financiers du contrats étant supposés pré-définis).

#### 1.4.3. *Choix dynamique de portefeuille en gestion actif-passif.*

Le nombre d'études portant sur l'application de modèles de choix dynamique de portefeuille à la gestion actif-passif (en anglais "Asset-Liabilities Management" ou ALM), et en particulier à la gestion des fonds de pension, a considérablement progressé durant les deux dernières décennies.

Si cette littérature se distingue de celle, plus généraliste, qui a été décrite dans les sections précédentes, par certains aspects qui lui sont propres<sup>23</sup>, on retrouve cependant dans les problèmes d'ALM l'ensemble des problématiques déjà évoquées précédemment.

En effet, la prise en compte d'une contrainte de risque de sous-performance, celle d'un benchmark sous l'hypothèse de couverture incomplète (benchmark représenté par le passif de l'investisseur) ou encore l'hypothèse de l'existence de taux d'intérêt stochastiques comprenant un facteur de risque inflationniste<sup>24</sup> sont autant d'éléments pouvant influencer considérablement la politique d'investissement d'institutions financières telle que les fonds de pension ou les compagnies d'assurance; ils constituent autant de thèmes cruciaux pour une analyse pertinente des choix d'allocation en ALM et en particulier pour la bonne compréhension de la gestion dynamique

---

22. Pour une revue complète de la littérature sur le problème "Principal - Agent" en gestion de portefeuille avec délégation de gestion, benchmarking et mécanisme de compensation financière, on pourra se référer à [**Stracca, 2005**].

23. Par exemple, on peut citer la prise en compte de flux de contribution au fonds de pension en partie assurés par les revenus du salaire stochastique, de prestations de retraite (par exemple annuités d'une pension de retraite) ou encore l'existence de deux périodes distinctes d'investissement, phase d'accumulation antérieure à la date de retraite et de décumulation, qui lui est postérieure.

Ces caractéristiques et d'autres qui sont spécifiques à l'univers des fonds de pension ne sont, à ce titre, pas prises en compte dans la littérature qui s'intéresse au problème d'investissement classique, i.e. celui d'un investisseur cherchant à optimiser la gestion dynamique de son portefeuille d'actifs "auto-financé" à un horizon d'investissement donné.

24. paramètre d'autant plus important que l'horizon de placement considéré en ALM est bien souvent le long terme voir le très long terme.

des fonds de pension.

Ainsi, dans le cadre spécifique de l'ALM, l'aversion à la perte de l'investisseur institutionnel se matérialise typiquement par le risque de sous-performance de ses actifs par rapport à ses engagements de passif (par exemple si le ratio actif sur passif est inférieur à l'unité, on dira que le fonds de pension est sous-capitalisé, en anglais "unfunded"); en ce qui concerne le benchmark, un choix naturel s'impose comme la valeur du passif qui n'est d'ailleurs en général pas entièrement répliquable (hypothèse de marché incomplet). A titre illustratif, on peut citer les deux exemples suivants souvent évoqués dans la littérature financière portant sur les problèmes de fonds de pension :

- Dans le cas d'un fonds de pension de type "DB" à régime de prestations définies ("Defined Benefits Pension Fund"), le benchmark correspond à un portefeuille de réplification imparfaite des flux d'engagements du passif de l'institution.
- Dans le cas du problème d'investissement à horizon ("life cycle") typique de l'investisseur et contributeur d'un fonds de pension de type "DC" ("Defined Contributions Pension Fund"), le benchmark peut s'identifier à un seuil minimum de richesse accumulée correspondant à la contrainte de protection du capital-retraite à la date de départ à la retraite ou de manière identique à la solvabilité du fonds de pension (si cette garantie est donnée formellement).

La gestion actif-passif en présence de contrainte de sous-performance (avec ou sans prise en compte d'un facteur stochastique de taux d'intérêt) fait l'objet des contributions suivantes :

[**Cairns, 1996**] étudie, sous l'hypothèse d'état des opportunités constant, un modèle d'allocation dynamique de fonds de pension de type "DB" qui correspond à une généralisation de la méthode d'assurance de portefeuille "CPPI" ("Constant Protection Portfolio Insurance" <sup>25</sup>).

Toujours sous cette hypothèse d'état des opportunités constant,

[**Lucas Siegmann, 1999**] considèrent le problème de gestion actif-passif d'un fonds de pension de type "DB" où le critère du problème d'investissement considéré est celui de la minimisation de l'espérance d'utilité du niveau de contribution (ou la fonction d'utilité est CRRA, logarithmique ou CARA et représente une fonction de perte qui mesure la dé-utilité associée à un niveau du taux de contribution donnée).

[**Boulier et al., 2001**] analysent le problème d'investissement dynamique d'un fonds de pension de type "DC" dans le cadre d'un modèle de taux stochastique à la Vasicek et en présence d'une contrainte de protection implicite à la fonction d'utilité considérée <sup>26</sup>.

[**Deelstra et al., 2003**] proposent un modèle de fonds de pension de type "DC" sous l'hypothèse d'un modèle affine de taux d'intérêt plus général (qui inclut comme cas particulier à la fois le modèle de Vasicek et le modèle CIR) et considèrent le

---

25. Voir par exemple [**Perold Sharpe, 1988**] pour une description de ce type de stratégie dynamique d'assurance de portefeuille.

26. fonction d'utilité puissance avec un niveau de seuil de richesse minimum appartenant à la famille de fonctions d'utilité HARA. On montre facilement que l'expression de la stratégie optimale du problème d'investissement qui en découle correspond à une stratégie "CPPI" particulière.

même type de fonction d'utilité (fonction d'utilité puissance ou logarithmique incluant une contrainte de garantie de capital implicite).

[**Battocchio et al., 2003**] étudient un modèle de fonds de pension mixte ("DC" et "DB") avec prise en compte du risque de mortalité du contributeur du fonds<sup>27</sup> et sous l'hypothèse d'un état des opportunités d'investissement constant.

Le critère du problème d'investissement considéré est celui de la maximisation de l'espérance d'utilité du "surplus" de richesse du fonds de pension (supposé être un investisseur CRRA); le surplus de richesse étant défini comme l'écart (positif ou négatif) entre la valeur du fonds de pension et ses réserves d'assurances<sup>28</sup>. Tout se passe comme si les réserves constituaient un plancher de richesse<sup>29</sup> que le fonds de pension ne souhaite pas, afin de garantir sa solvabilité, franchir à la baisse.

[**Hainaut, 2005**] (sous l'hypothèse que les paramètres des équations de diffusion des prix des actifs sont constants) et [**Lei, 2008**] (dans un cadre de taux stochastique à la Vasicek) s'intéressent à des modèles de fonds de Pension avec prise en compte d'une contrainte de risque de type VaR, tandis que [**Romaniuk, 2007**] considère (dans le cadre d'un modèle d'actifs de type Black & Scholes à une seule source de risque) un critère d'investissement avec contrainte de protection implicite (stratégie de type "CPPI") ou explicite (stratégie de type optionnelle) qui peut à la fois s'appliquer à la gestion de fonds de pension de type "DC" et de type "DB" .

Une autre branche de cette littérature de la gestion actif-passif s'intéresse aux problèmes de choix dynamique de portefeuille en présence de risques spécifiques liés à des facteurs exogènes (inflation, niveau de salaire,..) et considère comme variable de richesse du problème d'investissement, non plus la valeur nominale de la richesse de l'investisseur, mais la valeur de la richesse déflatée d'un "benchmark numéraire", qui reflète le niveau de risque que le facteur de risque fait courir sur la richesse accumulée par l'investisseur.

[**Cairns et al., 2000**] analysent (dans le cadre d'un modèle à un facteur de taux et N actifs risqués) le problème d'un fond de pension "DC" pour lequel le revenu du salaire de l'investisseur est stochastique et non parfaitement corrélé au marché. Sous l'hypothèse d'un versement final sous forme de rente ils utilisent comme variable du problème d'investissement le "Ratio de Remplacement" défini comme le niveau de la rente achetée en proportion du niveau de salaire final.

[**Cairns et al., 2006**] considèrent comme variable du problème d'investissement le "Ratio de Remplacement" (cas où le montant de la retraite est payée sous la forme d'une rente annuelle) et alternativement, le ratio entre la valeur de la richesse finale accumulée par le fond de pension et le niveau de salaire final (cas où l'investisseur reçoit le montant cumulé de son épargne retraite sous la forme d'un paiement unique).

[**Menoncin Scaillet, 2003**] considèrent un modèle de fonds de pension hybride (qui englobe comme cas particulier les "DB" et "DC") dans un cadre de modèle de taux stochastique avec prise en compte d'un risque inflationniste et où la variable

---

27. Les auteurs considèrent dans leur problème d'investissement que la date de décès du souscripteur du fonds est stochastique et que son temps de vie restant est décrit par la distribution d'une loi de Gompertz-Makeham.

28. définies comme le niveau cumulé des prestations et des flux de contributions

29. Compte tenu de la propriété d'utilité marginale de la fonction d'utilité CRRA égale à  $+\infty$  en 0.

du problème d'investissement considérée est la richesse réelle du fonds de pension (i.e. le ratio de la richesse nominale sur le processus stochastique de l'indice des prix à la consommation).

[**Martellini, 2006**] considère, dans le cadre du modèle d'actifs de Black & Scholes généralisé à  $N$  actifs risqués et un actif de taux sans risque (hypothèse d'état des opportunités constant), que l'investisseur institutionnel (par exemple un fonds de pension "DB" ou une assurance) est un agent CRRA qui cherche à maximiser l'utilité espérée de son "Funding Ratio" défini comme la valeur de son portefeuille d'actifs sur un actif numéraire correspondant à la valeur de son passif non parfaitement répliquable.

Plus récemment, [**Lim Wong, 2010**] offre une approche unifiée du concept de "benchmark numéraire" dans le cadre d'un modèle dynamique de gestion actif-passif.

Dans un cadre dynamique en temps discret, [**Hoevenaars et al., 2008**] considèrent le problème d'une gestion actif-passif sous l'hypothèse d'un modèle dynamique d'actifs avec effet prédictif de type VAR ("Vector AutoRegressif") tandis que [**Van Binsbergen Brandt, 2007**] étudient, toujours sous les hypothèses d'un modèle VAR, l'effet d'une contrainte de risque court terme en utilisant une méthode de résolution numérique.



## 2. Plan de la thèse

### 2.1. Problème du "risk manager" avec contrainte de risque asymétrique.

Dans la première partie, nous analysons, dans le cadre de la théorie du choix dynamique de portefeuille, le problème du "risk manager" que l'on peut définir simplement comme un investisseur averse à la sous-performance<sup>30</sup>.

Nous considérons différents choix implicites de mesure de risque de sous-performance (par exemple la probabilité de perte, l'espérance de perte ou encore la semi-variance) et différentes formes de préférence face au risque<sup>31</sup>.

Nous proposons une approche unifiée de la gestion dynamique avec prise en compte du risque de sous-performance en faisant le lien entre les deux approches principales proposées dans la littérature : problème de l'agent averse à la sous-performance dont la fonction d'utilité intègre une contrainte implicite de risque et problème de l'agent non averse mais devant prendre en compte une contrainte explicite supplémentaire portant sur le niveau de risque à l'horizon d'investissement.

Cette partie s'articule de la façon suivante :

- (1) Dans le premier chapitre, généralisant certains cas particuliers déjà étudiés dans la littérature<sup>32</sup>, nous analysons le problème de l'investisseur HARA averse à la sous-performance. Nous considérons différentes fonctions de perte, continues ou non au niveau du seuil de richesse cible<sup>33</sup>, pour mesurer la dé-utilité de l'investisseur à la sous-performance. A titre de comparaison, nous étudions également le problème de l'investisseur neutre au risque mais averse à la sous-performance<sup>34</sup> :
  - (a) Dans la première section, nous exposons le problème de l'investisseur HARA averse à la perte. Nous définissons l'expression générale de la fonction d'utilité de l'investisseur avec fonction de perte considérée (fonction d'utilité continue par morceaux avec une discontinuité au niveau du seuil de richesse cible), puis nous explicitons l'expression de la richesse terminale optimale du problème d'investissement correspondant.

---

30. On entend par investisseur averse à la sous-performance, un investisseur dont la fonction d'utilité est dissymétrique autour du seuil de richesse cible. Cette forme asymétrique de la fonction d'utilité, relativement à la cible de performance, traduit un niveau d'aversion pour la sous-performance plus important que l'appétit pour le gain (voir [Kahneman Tversky, 1979]).

31. On considèrera les trois cas suivants de préférences au risque : investisseur HARA dont l'aversion relative au risque est constante, qui est CRRA, investisseur HARA dont la fonction d'utilité est quadratique, qui est IRRA, ou encore investisseur neutre au risque.

32. Le cas de l'investisseur CRRA "loss averse" est par exemple considéré dans un cadre de choix dynamique de portefeuille par [Berkelaar *et al.*, 2004] sous l'hypothèse d'une fonction d'utilité continue et asymétrique au niveau du seuil de richesse cible.

33. fonction de perte intégrée à la fonction d'utilité avec saut dans l'utilité de la richesse (utilité discontinue) ou avec saut dans l'utilité marginale au niveau du seuil de richesse.

34. Il s'agit du problème analysé par [Berkelaar Kouwenberg, 2000] qui considèrent un investisseur ayant une fonction d'utilité intégrant plusieurs type de fonction d'aversion à la perte dont l'espérance correspond à la valeur des moments partiels inférieurs d'ordre 0,1 et 2.

- (b) Considérant le cas particulier de l'investisseur "CRRA averse à la sous-performance", nous montrons dans la section suivante que cet investisseur s'identifie, selon la fonction de perte considérée, à un changement de paramètres près, à l'investisseur CRRA avec contrainte explicite de type "VaR" ("Value at Risk") ou "LEL" ("Limited Expected Loss")<sup>35</sup> et analysons certaines propriétés de la stratégie dynamique optimale correspondant à ces problèmes d'investissement.
- (c) Dans la troisième et dernière section de ce chapitre, nous analysons le problème de l'investisseur "loss averse" et neutre au risque. Nous explicitons, pour différentes mesures de perte (probabilité de perte, espérance de perte ou semi-variance), la relation qui lie le niveau du paramètre d'aversion à la perte de cet investisseur avec la valeur de la contrainte implicite de risque de sous-performance correspondante.
- (2) Dans le second chapitre, nous analysons le problème moyenne-variance / downside risk.

Nous supposons que l'investisseur cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale et qu'il a une fonction d'utilité "quadratique loss averse" ; il s'agit d'une forme de fonction d'utilité quadratique généralisée qui prend en compte l'aversion à la perte de l'investisseur.

Nous nous intéresserons au choix implicite de deux mesures d'aversion à la perte que sont la probabilité de perte et l'espérance du coût d'utilité de la perte.

Cette fonction d'utilité "quadratique loss averse" appartient à la classe des fonctions d'utilité HARA "loss averse" dont l'aversion relative au risque croît avec la richesse. Ce qui implique, pour l'investisseur, le choix d'un profil de gain concave avec un plafond de richesse traduisant un niveau de performance finale où l'investisseur atteint la satiété<sup>36</sup>.

Nous étudions les propriétés de la stratégie dynamique optimale pour cet investisseur averse à la perte en supposant qu'il est tenu de respecter une contrainte explicite supplémentaire de protection du capital investi<sup>37</sup>.

Nous montrons qu'il est équivalent de considérer le problème de l'investisseur ayant une fonction d'utilité quadratique non averse et qui doit prendre en compte une double contrainte de risque dans le critère de son problème d'investissement : contrainte d'assurance de portefeuille et, selon la forme de la mesure de perte considérée, contrainte de risque de sous-performance, de type Value at Risk (pénalisation de la perte) ou Limited Expected Loss (pénalisation du coût de la perte).

---

35. Ces deux problèmes d'investissement avec contrainte explicite ont été analysés par [Basak Shapiro, 2001].

36. En ce sens, il s'agit d'un cas complémentaire du profil de richesse convexe avec une contrainte implicite de protection de la richesse qui caractérise l'investisseur CRRA "loss averse" et dont le problème d'investissement est analysé dans le premier chapitre.

37. contrainte stricte de protection qui assure en particulier la non-négativité de la richesse terminale qui n'est pas garantie avec une fonction d'utilité quadratique.

- (3) Dans le troisième et dernier chapitre, nous analyserons l'effet de la prise en compte d'un modèle de taux stochastique (modèle à un facteur de type 'Vasicek') sur la stratégie dynamique optimale suivie par l'investisseur HARA devant prendre en compte une contrainte de benchmark ; en guise de généralisation, nous considérons ensuite le cas de l'investisseur averse à la sous-performance par rapport au benchmark.

## 2.2. Problème de l'"asset manager" avec profil de rémunération asymétrique.

Dans la seconde partie, nous analysons le problème de l'asset manager HARA avec prise en compte d'incitations financières à la performance et généralisons certains modèles déjà proposés dans la littérature.

Cette partie est organisée de la façon suivante :

- (1) Dans le premier chapitre de cette seconde partie (chapitre 4), nous montrons comment l'existence d'une commission liée à la performance de l'asset manager (frais de sur-performance, bonus) peut faire diverger les intérêts de l'asset manager de ceux de l'investisseur de référence (i.e. l'asset manager sans rémunération incitative), tous deux étant supposés chercher à maximiser l'utilité espérée de leur richesse et avoir la même fonction d'utilité.
- (a) Dans la première section, nous explicitons la forme générale du problème d'investissement considéré. Il s'agit du problème de choix dynamique de portefeuille pour l'asset manager HARA maximisant l'utilité espérée de la valeur finale de sa rémunération. L'expression de cette rémunération est une fonction linéaire par morceaux<sup>38</sup> de la richesse totale mais aussi de l'écart de richesse avec la valeur du benchmark (composante incitative de la rémunération).
- (b) Dans la section suivante, nous considérons le cas particulier où le benchmark est fixe et où l'asset manager HARA ne reçoit comme incitation financière que des frais de gestion variables de sur-performance. Nous explicitons ensuite l'expression de la richesse terminale optimale et nous analysons la stratégie dynamique optimale dans le cas particulier où le modèle d'actifs est celui de B&S et l'asset manager HARA a une fonction d'utilité puissance avec seuil implicite de rémunération minimale (profil de gain "convexe").
- (c) Dans la troisième section, nous considérons à nouveau le cas particulier où le benchmark est fixe et l'asset manager HARA a une fonction d'utilité puissance avec seuil implicite de rémunération minimale. De plus, nous supposons que l'asset manager reçoit en cas

---

38. la discontinuité qui a lieu au niveau de la valeur du benchmark traduit l'existence d'une forme de rémunération incitative asymétrique.

de sur-performance, un bonus fixe en plus des frais de gestion variables<sup>39</sup>. Nous explicitons l'expression de richesse terminale optimale puis nous analysons, dans le cadre du modèle de B&S, l'allocation dynamique correspondantes.

- (d) Dans la quatrième section, nous considérons le cas particulier où le benchmark est fixe et l'asset manager a une fonction d'utilité quadratique (profil de richesse concave). De plus, on supposera qu'il ne reçoit comme incitation financière que des frais de gestion variables de sur-performance (même structure de rémunération que dans la seconde section) et qu'il doit prendre en compte une contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille.
  - (e) Dans la cinquième et dernière section, nous explicitons l'expression de la stratégie optimale pour l'asset manager CRRA dans le cas le plus général où le benchmark est stochastique et où on suppose l'existence de plusieurs sources de risque actions.
- (2) Dans le second chapitre de cette partie (chapitre 5), nous examinons en quoi la prise en compte de contraintes de risque telles que celles étudiées dans la première partie, qui correspondent à un choix de fonction d'aversion à la perte continue, peut conduire à une réduction du conflit d'intérêt entre l'asset manager et l'investisseur de référence.
- (a) Dans la première section, généralisant certains des résultats présentés dans les sections précédentes, nous explicitons l'expression de la richesse terminale optimale associée au problème de l'asset manager HARA "averse à la sous-performance" et recevant une commission de sur-performance.
  - (b) Dans la seconde section, nous plaçant dans le cadre du modèle à deux actifs de B&S et dans le cas particulier où l'asset manager est "CRRA loss averse", nous dérivons l'expression de la stratégie dynamique optimale correspondante.
  - (c) Le cas de la stratégie dynamique optimale associée au problème moyenne variance (fonction d'utilité quadratique) en présence d'une double contrainte de risque supplémentaire est traité dans la dernière section ; le critère du problème d'investissement intègre à la fois une contrainte d'aversion à la sous-performance par rapport au seuil de richesse cible<sup>40</sup> et également une contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille<sup>41</sup>.

---

39. Comme nous le verrons, ceci est équivalent à faire l'hypothèse que l'asset manager est CRRA et qu'il reçoit des frais de gestion symétriques incitatifs en plus des deux commissions de gestion incitatives asymétriques déjà mentionnées.

40. Seuil de richesse cible au-dessus duquel l'asset manager reçoit une commission de performance.

41. assurant la non-négativité de la richesse finale de l'investisseur.



Première partie

Allocation dynamique avec  
contrainte de "risk management"

Nous partons du constat que de nombreux investisseurs professionnels ont un double objectif à l'horizon d'investissement : atteindre une sur-performance par rapport à un portefeuille "benchmark" d'une part, maîtriser le niveau de risque de sous-performance d'autre part.

En effet, si cette problématique de gestion sous contrainte de benchmark et de risque de sous-performance est typique de l'industrie de la gestion de fonds communs de placement, on la retrouve aussi, sous des formes moins explicites, dans de nombreux autres activités de gestion financière :

- Dans le cadre de leur activités de gestion pour compte propre, les investisseurs institutionnels se doivent de définir des objectifs de rentabilité de leur portefeuille d'actifs en phase avec un niveau de rémunération minimum. De plus, ils doivent pouvoir démontrer qu'ils ont la maîtrise de l'évaluation du risque de sous-performance de leurs investissements, afin de pouvoir faire face dans n'importe quel scénario de marché à leurs engagements de passif.
- Les produits de gestion de l'épargne retraite proposés ("defined contribution pension plan", PERP (Plan d'Épargne Retraite Populaire) et PERCO (Plan d'Épargne Retraite Collectif) en France, "Variable Annuities" aux États-Unis, etc) cherchent à répondre à un double objectif des épargnants : maximiser la performance des sommes investies successivement jusqu'à l'horizon correspond à la date de départ à la retraite sous contrainte de protection progressive d'une partie du capital accumulé.

Ainsi, nous nous proposons d'étudier, dans cette première partie, le problème d'allocation dynamique de l'asset manager averse à la sous-performance ou, de façon alternative, de l'asset manager qui cherche à implémenter une gestion dynamique de portefeuille sous contrainte d'un niveau pré-défini de risque de sous-performance.

En particulier, nous souhaitons analyser la question du choix d'une mesure de risque asymétrique. Cette question qui revêt une importance toute particulière pour la gestion de portefeuille avec référence à un benchmark, reste, il nous semble, encore relativement inexplorée dans la littérature traitant de problèmes de gestion dynamique de portefeuille.

En effet, bien qu'à première vue, le problème d'optimisation dynamique correspondant paraisse simple à modéliser (maximiser l'espérance de l'utilité de l'excès de richesse par rapport au benchmark pour un niveau de risque de sous-performance

donné<sup>42</sup>), la question fondamentale de savoir comment expliciter ce risque de sous-performance maximale reste à ce jour encore relativement ouverte (voir, par exemple, [Nawrocki, 1999]) et le champs d'analyse des implications de ce choix de mesure de perte sur le comportement des investisseurs, dans un cadre dynamique, demeure encore assez peu exploré.

Nous montrerons comment le choix implicite d'une mesure de risque de perte relative<sup>43</sup> couplée à celui de la forme de la fonction d'utilité, induit de la part des investisseurs, des comportements d'aversion au risque très différents.

En particulier, nous montrerons qu'une contrainte de sous-performance maximale peut être définie de deux manières équivalentes et expliciterons formellement le lien qui existe entre ces deux approches :

(1) Contrainte implicite de sous-performance :

Il s'agit du cas où la contrainte est donnée implicitement à travers le choix d'une forme particulière de fonction d'utilité prenant en compte la dissymétrie souvent observée en pratique entre l'aversion pour le risque et l'appétit pour le gain des investisseurs, relativement à la cible de performance.

Ce type de fonction d'utilité dissymétrique prend en compte l'aversion de l'investisseur à la perte ("loss aversion") par le biais d'un terme additionnel dans son expression correspondant à une fonction de perte; ce qui permet d'introduire implicitement une mesure du risque de sous-performance ("downside risk") dans le problème d'investissement considéré.

Par exemple on peut citer le problème de "minimisation de la semi-variance"; ce problème consiste à minimiser, pour un objectif de rendement fixé, la variance de l'écart négatif de richesse par rapport à la cible de performance.

Ce problème peut aussi s'écrire de manière équivalente comme celui de l'investisseur qui cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse, avec pour définir ses préférences, une fonction d'utilité discontinue au niveau du seuil de richesse cible, et dont l'expression est dérivée de la fonction

---

42. Sans perte de généralité, nous supposons dans les deux premiers chapitres de la thèse que le benchmark s'identifie à une cible fixe de richesse finale (i.e. un objectif de performance pour le gérant). De plus, nous considérerons le niveau absolu de la richesse finale (sans référence à la valeur du benchmark) comme variable du problème d'investissement.

Dans le cas où le benchmark est stochastique, le problème d'investissement considéré, écrit sur l'écart de richesse finale entre le portefeuille géré et le benchmark, est indépendant de la valeur du benchmark. Ainsi, l'expression de la stratégie optimale, dans le cas d'un benchmark stochastique, s'obtient, par un simple changement de variable, de l'expression de la stratégie optimale obtenue sous l'hypothèse d'un benchmark fixe.

Le problème avec contrainte implicite de sous-performance maximale relative au niveau d'un benchmark stochastique (i.e. contrainte non indépendante du choix de la forme du benchmark) sera traité dans la seconde partie de la thèse, où nous considérerons un asset manager averse à la sous-performance et recevant une incitation financière à la sur-performance.

43. A travers le choix de l'expression de la fonction de perte intégrée à la fonction d'utilité de l'investisseur.



d'utilité quadratique.

Seuls les niveaux de richesse inférieurs au niveau cible sont pénalisés par une mesure de perte quadratique qui est intégrée à la fonction d'utilité ; au dessus du niveau cible, la fonction d'utilité est linéaire, ce qui traduit la neutralité face au risque de l'investisseur.

(2) Contrainte explicite :

Il s'agit du cas où l'asset manager doit prendre en compte une contrainte explicite de sous-performance dans le critère de son problème d'optimisation et cela de façon indépendante du choix de sa fonction d'utilité.

A titre d'exemple, il peut s'agir de contraindre la "VaR" (Value At Risk) du portefeuille à l'horizon d'investissement (ce qui revient à imposer une contrainte sur le niveau de probabilité de perte maximum par rapport à la cible de performance). Cette contrainte peut être imposée à l'asset manager par l'investisseur final, ou par un risk manager ou encore par une entité de contrôle externe.

Par ailleurs, la considération de la VaR comme mesure de risque, couramment utilisée par les praticiens de la gestion de portefeuille et des risques (gestion actif-passif, mesure du risque des stratégies dites "alternatives", gestion de mandat pour institutionnels), nous permettra de la comparer à d'autres mesures du risques alternatives dans le cadre de la théorie classique du choix de portefeuille optimal en temps continu.

Cette première partie est organisée de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous mettrons en lumière l'impact de la prise en compte de différentes mesures de perte asymétriques dans le problème d'investissement de l'asset manager HARA ou neutre au risque et qui est, de plus, averse à la sous-performance. Nous établirons la correspondance qui existe entre les pratiques de risk management (contraintes explicites de risque maximal de sous-performance) et le profil de l'asset manager averse à la sous-performance (contraintes implicites de pénalisation de la sous-performance intégrées à la fonction d'utilité).

Dans le second chapitre, en guise d'alternative aux critère "moyenne-downside risk", nous résoudrons le problème "moyenne-variance-downside risk" avec contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille, considérant implicitement deux mesures de perte asymétriques : la probabilité de perte et l'espérance de perte.

Dans le troisième et dernier chapitre, nous analyserons l'effet de la prise en compte d'un modèle de taux stochastique (modèle à un facteur de type 'Vasicek') sur la stratégie dynamique optimale suivie par l'investisseur HARA sous contrainte de benchmark et, le cas échéant, d'aversion à la sous-performance.

## Allocation dynamique avec aversion à la sous-performance

Nous étudions, dans ce chapitre, les propriétés de la solution optimale du problème d'investissement de l'asset manager "HARA loss averse" et de l'asset manager neutre au risque mais averse à la sous-performance.

En particulier nous comparerons l'effet de la prise en compte de plusieurs mesures de perte asymétriques (probabilité de perte, espérance de perte, semi-variance) et différentes formes de contraintes de risque de sous-performance<sup>1</sup> sur le comportement d'investissement de l'asset manager.

### 1. Problème de l'asset manager averse à la sous-performance

Dans cette section, nous présentons les hypothèses sous-jacentes au modèle de marché financier considéré ainsi que la forme du problème d'investissement de l'asset manager "loss averse" que nous cherchons à résoudre<sup>2</sup>.

Nous nous intéressons à deux fonctions d'aversion à la sous-performance : la première pénalisant la sous-performance de manière uniforme et la seconde proportionnelle au coût d'utilité de cette sous-performance.

Nous explicitons ensuite l'expression de la richesse terminale optimale correspondant au problème considéré.

---

1. contrainte explicite supplémentaire ou contrainte implicite intégrée à l'expression de la fonction d'utilité.

2. On supposera que l'asset manager cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale pour une forme générale de fonction d'utilité "HARA loss averse" que nous précisons.

### 1.1. Cadre Général.

#### (1) Economie de marché considérée

Nous considérons un gérant d'actifs opérant entre la date initiale d'investissement 0 et la date  $T$  (son horizon d'investissement) sur un marché financier qui a les propriétés suivantes :

- marché financier ouvert en permanence, dans lequel les portefeuilles sont rebalancés de manière continue sans arbitrages possibles (hypothèses d'AOA) et sans coûts de transaction.
- marché financier complet : n'importe quelle richesse terminale (comme par exemple le "pay-off" d'une option) peut être atteinte par une stratégie dynamique de réplication.

Afin de décrire la structure aléatoire et informationnelle du marché financier, nous supposons qu'il existe  $N$  sources de risques définies par un mouvement brownien, de dimension,  $N$ , noté  $Z = (Z^1, \dots, Z^N)$ , défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  où  $(\Omega, F)$  est un espace mesurable et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $F$ . On suppose de plus que  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  est muni d'une filtration  $(F_t, 0 \leq t \leq T)$  définie comme étant la filtration naturelle engendrée par  $Z = (Z^1, \dots, Z^N)$

#### (2) Dynamique des actifs

Le marché est constitué de  $N+1$  actifs :

L'actif dit 'ASR', 'Actif Sans Risque'; localement sans risque, il s'interprète comme un roll over d'un instrument du marché monétaire, et a pour rendement instantané :

$$dS_t^0/S_t^0 = r(t)dt$$

où  $r(t)$  est un processus qui représente le taux court instantané en vigueur sur le marché monétaire.

Les  $N$  autres actifs sont risqués et ont pour rendements instantanés des processus d'Itô. Plus précisément, on écrit en notation vectorielle :

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dZ_t)$$

où  $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^N)$  représente le vecteur des  $N$  actifs risqués,  $\mu(t) = (\mu_j(t); j = 1 \dots N)$  représente le vecteur des rendements moyens instantanés (taux court plus prime de risque) et où  $\sigma(t) = (\sigma_{jk}(t); j, k = 1 \dots N)$  représente la matrice de co-volatilité des processus de rendements instantanés. Ainsi  $\sigma\sigma'$  représente la matrice de variance-covariance des rendements instantanés. Les processus  $r, \mu, \sigma$  sont supposés adaptés à la

filtration  $F_t$  et satisfont aux conditions d'intégrabilité classiques<sup>3</sup>. De plus,  $\sigma(t)$ , est supposée inversible; ce qui implique que le marché est complet (puisque le nombre d'actifs risqués est égal au nombre de mouvements browniens considérés).

### (3) Ensemble des stratégies considérées

Une stratégie de portefeuille est notée  $(W, w)$ , où  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  représente le processus de prix des portefeuilles et,  $\{w_t\}_{t \geq 0}$ , le vecteur des poids de la richesse investie sur les  $N$  actifs risqués (le poids sur l'A.S.R étant donné par  $1 - w_t' \mathbf{1}$  où  $\mathbf{1}$  représente le vecteur unité de dimension  $N$ ).

On considère l'ensemble des stratégies qui satisfont les propriétés suivantes :

- Autofinancement : pas d'apport de richesse intermédiaire autre que le gain, qui est toujours réinvesti; ce qui s'écrit

$$dW_t = W_t \left\{ (r(t) + w_t'(\mu(t) - r(t)\mathbf{1})dt + w_t'\sigma(t)dZ_t) \right\}$$

- Admissibilité : la stratégie procure une richesse terminale dont le moment d'ordre 2 est fini (on notera cet ensemble  $L^2(P)$ ). Dans la suite, on notera  $A$  l'ensemble des stratégies autofinancantes et admissibles.

### (4) Valorisation

Propriété de martingale des processus de prix sous la probabilité historique : le portefeuille intitulé portefeuille "numéraire" par [Long, 1990]<sup>4</sup>

que l'on note  $(H, h)$  est tel que pour toute stratégie autofinancante et admissible,  $(W, w) \in A$ , la valeur du processus  $\{W_t/H_t\}_{t \geq 0}$  est une martingale sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$ , ce qui implique qu'on a  $W_t/H_t = E_t(W_T/H_T)$ .

---

3.  $\int_0^T |\mu_j(t)| dt < \infty$ , p.s. pour  $j=1, \dots, N$  et  $\int_0^T \left| \text{trace } \sigma(t)\sigma(t)' \right| dt < \infty$ , p.s. voir

[Karatzas et al., 1987]

4. Le portefeuille "numéraire" est aussi appelé portefeuille à "taux de croissance optimale" ("growth optimal") par [Merton, 1990] car il correspond à la stratégie dynamique optimale pour l'investisseur "logarithmique" qui cherche à maximiser l'espérance du taux de croissance logarithmique de sa richesse terminale.

Sous nos hypothèses, on démontre que le portefeuille "numéraire", noté  $(H, h)$ , est donné par les expressions suivantes :

$h_t = \left( \sigma(t)\sigma(t)' \right)^{-1} (\mu(t) - r(t)\mathbf{1})$  et, en notant le vecteur des prix de marché du risque

par  $\lambda(t) = \sigma(t)^{-1} (\mu(t) - r(t)\mathbf{1})$ ,  $H_t = \exp \left\{ \int_0^t (r(s) + \lambda(s)' \lambda(s)/2) ds + \int_0^t \lambda(s)' dZ_s \right\}$

## 1.2. Problème d'optimisation considéré.

### (1) Problème d'optimisation

Le problème considéré est celui de l'asset manager qui, étant donnée la structure de marché décrite ci-dessus, cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse terminale.

L'expression de ce problème dynamique est la suivante :

$$(D) \begin{cases} \max_{(W,w) \in A} E(v(W_T)) \\ \text{s.a. } W_0 = 1 \end{cases}$$

Dans le cadre de l'hypothèse de marché complet, ce problème peut se réduire au problème statique suivant (voir [Karatzas *et al.*, 1987]) :

PROBLÈME 1.

$$(P1) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(v(W_T)) \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1 \end{cases}$$

Où  $v(\cdot)$  désigne la fonction d'utilité de l'investisseur dont nous précisons la forme et les propriétés dans les sections suivantes.

Ainsi la résolution du problème dynamique en est simplifiée et s'effectue en deux temps :

- 1ère phase : obtention de la richesse terminale optimale, solution du problème statique correspondant (P1).
- 2ième phase : détermination de la stratégie financière de réplcation à mettre en place qui permet d'atteindre la richesse terminale optimale dont l'expression a été trouvée précédemment ; durant cette phase qui sera décrite dans les sections ultérieures, nous nous restreindrons, dans un souci de simplicité, au modèle à deux actifs de B&S ( $N = 1$ ).

### (2) Fonction d'utilité avec aversion à la sous-performance

On suppose que la performance de l'asset manager est mesurée par rapport à un niveau de richesse cible de référence qui est ainsi pénalisé en cas de sous-performance.

Comme nous l'avons déjà évoqué, cette contrainte peut se traduire par un coût financier pour le gérant à l'horizon d'investissement qui est fonction de l'écart de richesse entre la valeur finale des actifs du portefeuille et celle du benchmark cible (fonds de pension sous capitalisés ("underfunded") par exemple).

Elle peut encore s'interpréter comme une contrainte de gestion du risque relativement à un benchmark imposé à l'asset manager (pratique courante en gestion de portefeuille pour compte de tiers).

Afin de prendre en compte ce facteur d'aversion à la sous-performance du gérant dans l'expression de sa fonction d'utilité, nous considérons un terme additionnel correspondant, à un facteur près, à l'expression d'une fonction de perte.

Ce qui introduit une dissymétrie dans l'expression de la fonction d'utilité distinguant la zone de sur-performance (richesse supérieure à la richesse cible) de la zone de sous-performance ; plus précisément, l'expression générale du type de fonction d'utilité considérée est la suivante :

$$v(x) = \begin{cases} u(x) - C \times L(x^0, x, \gamma) & \text{si } x < x^0 \\ u(x) & \text{si } x \geq x^0 \end{cases}$$

où

- $u$  désigne la fonction d'utilité de l'asset manager qui est neutre ou averse au risque selon que  $u$  est une fonction linéaire ou une fonction strictement croissante, strictement concave sur son domaine de définition.
- $C$  est une constante positive ou nulle qui désigne le coefficient d'aversion à la sous-performance,
- $L(x^0, x, \gamma)$  désigne la fonction de perte, mesurant l'amplitude de la sous-performance qui dépend de la valeur de la richesse  $x$ , du niveau de richesse cible,  $x^0$ , et de la valeur du paramètre d'aversion au risque  $\gamma$  ; la fonction de perte,  $L(x^0, x, \gamma)$ , est modélisée soit par une fonction constante positive soit par une fonction décroissante de  $x$  qui prend des valeurs positives sur  $0 \leq x \leq x^0$ . Notons que si  $L(x^0, x^0, a) > 0$  alors la fonction de perte est discontinue au voisinage de la richesse cible (c'est le cas en particulier de la fonction de perte constante).

### (3) Fonction d'utilité HARA "loss Averse" (avec aversion à la sous-performance)

Nous nous intéressons maintenant à la classe de fonctions d'utilité HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) car elle inclue la plupart des fonctions d'utilité considérées dans la littérature et en pratique.

Une fonction d'utilité HARA se caractérise par un coefficient d'aversion au risque absolu correspondant à une fonction hyperbolique ; plus précisément, son coefficient d'aversion absolue au risque,

$$R_{Abs}(x) \equiv -u''(x)/u'(x), \text{ vérifie } R_{Abs}(x) = 1/(x/\gamma + a) \text{ avec } x/\gamma + a > 0.$$

Nous nous restreignons aux cas où le paramètre d'aversion au risque  $\gamma$  est non nul et différent de l'unité :  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  ; ce qui inclut en particulier le cas de la fonction d'utilité iso-élastique (ou fonction d'utilité

puissance) dont le coefficient d'aversion relative est constant ('CRRA') ainsi que celui de la fonction d'utilité quadratique; ces deux cas particuliers seront analysés plus en détail dans les sections suivantes.

Dans les deux autres cas restant, correspondant au choix d'une fonction d'utilité logarithmique (pour  $\gamma \equiv 1$ ) et d'une fonction d'utilité exponentielle (pour  $\gamma \rightarrow +\infty$ ), l'expression de la solution du problème (P1) s'obtient de manière totalement similaire.

Remarquons que la valeur de la solution optimale du problème d'investissement, dans ces deux cas particuliers, peut être obtenue numériquement en considérant la limite pour  $\gamma \rightarrow 1$  (utilité logarithmique) et pour  $\gamma \rightarrow +\infty$  (utilité exponentielle) de l'expression de la solution optimale obtenue avec la forme de fonction d'utilité que nous considérons (qui est exposée dans le cadre du théorème 1 ci-dessous).

Pour  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , la résolution de l'équation différentielle ci-dessus fournit l'expression de la fonction d'utilité HARA :

$$u(x) = \frac{C_1}{1-\gamma} \left\{ \frac{x}{\gamma} + a \right\}^{1-\gamma} + C_2 \quad (1.1)$$

avec  $a > 0$ ,  $C_1 \times \gamma > 0$  et  $C_2 \in \mathbb{R}$ .

Enfin, nous considérons deux types de fonctions de perte :

- Une fonction de perte constante indépendante du niveau de sous-performance qui pénalise les pertes de la même façon quelque soit leur niveau :  $L_1(x, x^0, \gamma) \equiv 1$
- Une fonction de perte continue qui est proportionnelle au coût d'utilité de la sous-performance :  $L_2(x, x^0, \gamma) \equiv \{u(x^0) - u(x)\}$

Ce qui revient à considérer les fonctions d'utilité HARA "loss averse" suivantes :

- Fonction d'utilité HARA discontinue au niveau du seuil de richesse cible et avec fonction de perte constante :

$$v_1(W) = u(W) - C \times 1_{\{W < W^0\}} \quad (1.2)$$

- Fonction d'utilité HARA continue (dont l'utilité marginale est discontinue) avec fonction de perte mesurant le coût d'utilité de la sous-performance :

$$v_2(W) = u(W) - C \times \{u(W^0) - u(W)\} \times 1_{\{W < W^0\}} \quad (1.3)$$

où  $u(x)$  est une fonction d'utilité HARA dont l'expression est définie par l'équation (1.1),  $W$  désigne la richesse de l'investisseur et  $W^0$  la richesse cible.

- (4) Expression de la richesse terminale optimale dans le cas d'une fonction d'utilité HARA "loss averse"

THÉOREME 1. *Sous les hypothèses de structure de marché décrites dans la section précédente,*

- (a) *1er cas : si la fonction d'utilité est donnée par l'expression (1.2), alors la richesse terminale du problème (P1) est donnée par l'expression suivante :*

$$W_T^* = \begin{cases} I(k/H_T) & \text{si } H_T > \overline{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \overline{H} \\ I(k/H_T) & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases} \quad (1.4)$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$ , avec  $\overline{H} \equiv k/u'(W^0)$  et  $\underline{H}$  est solution de l'équation suivante :

$$C = u(I(k/\underline{H})) - (k/\underline{H})I(k/\underline{H}) - u(W^0) + (k/\underline{H})W^0$$

où  $\underline{H} < \overline{H}$ .

- (b) *2d cas : si la fonction d'utilité est donnée par l'expression (1.3), alors la richesse terminale du problème (P1) est donnée par l'expression suivante :*

$$W_T^{**} = \begin{cases} I(k/H_T) & \text{si } H_T > \overline{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \overline{H} \\ I(\frac{k}{1+C}/H_T) & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases} \quad (1.5)$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^{**}/H_T) = 1$ , avec  $\overline{H} \equiv k/u'(W^0)$ ,  $\underline{H} \equiv (k/(1+C))/u'(W^0)$ .

Enfin, dans les deux cas,  $I(\cdot)$  désigne l'inverse de la fonction  $u'(\cdot)$ .

Les résultats du théorème 1 montrent clairement ce qui distingue le "pay-off" de chacune des deux expressions ci-dessus : la richesse terminale, dont l'expression est donnée par (1.4), exhibe une discontinuité au niveau du seuil de richesse cible ; ce qui n'est pas le cas de la richesse terminale correspondant à la forme de fonction d'utilité continue dont l'expression est donnée par (1.5).

Nous allons à présent analyser plus en détail les propriétés des stratégies dynamiques correspondant à plusieurs fonctions d'utilité considérées dans la littérature et notamment la fonction d'utilité CRRA (seconde section) et la fonction d'utilité linéaire d'un agent à la fois neutre au risque et averse à la sous-performance (troisième et dernière section) :

Prolongeant cette analyse dans le second chapitre, nous montrerons que le critère moyenne variance (fonction d'utilité quadratique) étendu à la prise en compte de l'aversion à la sous-performance peut remplacer avantageusement les critères



Moyenne - Risque de Perte fondés sur les mesures de risques que sont les Moments Partiels Inférieurs d'ordre 0 à 2.

## 2. Investisseur CRRA "loss averse"

Dans cette section, nous analysons le problème d'investissement de l'agent CRRA (Constant Relative Risk Aversion) cherchant à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale avec prise en compte d'une contrainte explicite ou implicite sur le niveau de risque de sous-performance.

Nous considérons plusieurs problèmes d'optimisation dynamique avec contraintes de risk management proposés dans la littérature et analysons les propriétés des stratégies dynamiques qui en découlent.

Nous montrons que ces problèmes d'investissement avec contraintes de risk management peuvent être vus comme des cas particuliers du problème 1 de l'asset manager HARA "loss averse" défini dans la section précédente.

Nous apportons ainsi une présentation unifiée de la gestion dynamique avec contrainte de risk management et du problème de l'investisseur averse à la perte ; ces deux approches se révélant parfaitement équivalentes à un changement de paramétrisation près.

### 2.1. Contrainte de "Value at Risk".

Cette section est organisée de manière suivante :

Nous rappelons les principales propriétés de la stratégie optimale du problème d'optimisation dynamique de portefeuille pour un investisseur CRRA avec contrainte explicite sur le niveau de probabilité de sous-performance (ou de manière équivalente sur le niveau de la Value at Risk) proposé par [Basak Shapiro, 2001]<sup>5</sup>.

Nous montrons ensuite que ce problème s'identifie à un problème de maximisation de l'utilité espérée de la richesse finale avec, pour traduire les préférences de l'investisseur en terme de risque, mais aussi d'aversion à la sous-performance, une forme de fonction d'utilité plus générale que la fonction d'utilité CRRA ; il s'agit du problème d'optimisation considéré dans la section précédente dans le cas particulier où l'investisseur est "CRRA loss averse" avec une fonction de perte constante (fonction d'utilité discontinue au niveau du seuil de richesse cible).

Ainsi, les deux problèmes sont équivalents. Le choix de la valeur du paramètre d'aversion à la sous-performance intégré à l'expression de cette fonction d'utilité discontinue peut s'interpréter comme le choix d'un seuil de VaR imposé à l'asset manager. Réciproquement, le problème d'allocation dynamique de portefeuille avec

---

5. [Basak Shapiro, 2001] résolvent le problème de l'investisseur maximisant l'espérance d'une fonction d'utilité de sa richesse terminale avec une contrainte supplémentaire explicite de type "VaR" (Value at Risk) à l'horizon d'investissement ; l'interprétation étant la suivante : l'investisseur est tenu d'intégrer dans son programme d'optimisation une contrainte réglementaire de gestion du risque ou encore une contrainte imposée par le "risk manager".

contrainte VaR revient à résoudre celui d'un investisseur CRRA "loss averse" dont la fonction de perte est constante.

### 2.1.1. Stratégie optimale avec contrainte "VaR".

[Basak Shapiro, 2001] considèrent que la fonction d'utilité de l'investisseur est strictement croissante, concave et exhibe une utilité marginale infinie en 0 et une utilité marginale qui converge vers 0 en  $+\infty$ . Le cas de la fonction d'utilité CRRA (Constant Relative Risk Aversion) comme cas particulier est ensuite proposé pour l'obtention de la stratégie dynamique de réplcation ; son expression est la suivante :

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

où  $\gamma$  représente l'aversion relative (constante) au risque de l'investisseur, avec  $\gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\}$

Le problème à résoudre s'écrit :

PROBLÈME 2.

$$(P2) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(u(W_T)) \\ s.a. E(W_T/H_T) = W_0 \text{ et } P(W_T \geq W^0) \geq 1 - \alpha \end{cases}$$

avec  $\alpha$  une constante tel que  $\alpha \in [0; 1]$ ,

avec  $W^0$  la cible de richesse à atteindre, où  $W^0 \equiv K \times W_0$  et  $K \geq 0$ ; dans la suite on supposera sans perte de généralité que  $W_0 = 1$ .

Tout d'abord il est utile de faire quelques commentaires sur la contrainte imposée à l'asset manager :

$$P(W_T \geq W^0) \geq 1 - \alpha \text{ avec } \alpha \text{ fixé}$$

#### (1) Contrainte de sous-performance maximale

Remarquons tout d'abord que cette contrainte de risque peut être vue comme une généralisation à la fois du cas particulier de l'assurance de portefeuille et de celui d'une contrainte de gestion du budget de risque :

Pour  $\alpha \equiv 0$  et  $W^0 \equiv K \leq e^{rT}$ , on se ramène au problème avec contrainte d'assurance de portefeuille : le gérant n'a pas le droit de sous-performer et la contrainte s'écrit :  $W_T \geq K$  p.s.

Pour  $\alpha \in ]0\%; 100\%]$  et  $W^0 \equiv K \leq e^{rT}$ , la contrainte s'apparente à une contrainte de budget de risque de sous-performance ; l'asset manager est autorisé à prendre des risques sous la condition de respecter un seuil de probabilité de sous-performance maximum de niveau  $\alpha$  :

$$P(W_T < K) \leq \alpha \text{ avec } \alpha \text{ fixé.}$$

#### (2) Objectif de rendement cible minimum

Le cas d'une contrainte de sur-performance par rapport à un rendement

cible correspond à  $\alpha \in ]0\%; 100\%]$  et  $W^0 \equiv K > e^{rT}$ .

Par exemple (voir [Basak *et al.*, 2003]), dans le cas où l'objectif de l'asset manager est d'obtenir un rendement excédentaire par rapport au taux monétaire, la contrainte s'écrit :

$$P(W_T \geq W^0) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow P(R_T^W \geq R_T^0) \geq 1 - \alpha$$

Ou encore  $P(R_T^W \geq r + \varepsilon) \geq 1 - \alpha$

où on a posé :  $W^0 \equiv e^{TR_T^0} \equiv e^{(r+\varepsilon)T} \Leftrightarrow R_T^0 \equiv r + \varepsilon \equiv \text{Log}(W^0)/T$ , avec  $\varepsilon > 0$  et avec  $R_T^W \equiv \text{Log}(W_T)/T$ .

### (3) Expression de la contrainte en terme de niveau de VaR maximum

Il est intéressant de noter que cette contrainte peut s'exprimer en terme de niveau maximum de VaR de la façon suivante :

En supposant que  $W^0 < 1$  et en imposant la contrainte suivante sur le niveau de VaR :

$$VaR_T^\alpha \leq 1 - W^0 \Leftrightarrow 1 - VaR_T^\alpha \geq W^0$$

où  $VaR_T^\alpha$  est définie implicitement par l'expression suivante :

$$P(W_T - 1 \geq -VaR_T^\alpha) \equiv 1 - \alpha,$$

on en déduit l'expression de la contrainte du problème considéré :

$$P(W_T \geq W^0) \geq 1 - \alpha.$$

Ainsi cette contrainte de risque peut s'exprimer en terme de limite maximum sur le niveau de VaR.

### (4) Limite de l'interprétation en terme de VaR

Notons que cette comparaison avec la "Value At Risk" doit être relativisée (voir [Cuoco *et al.*, 2008]). En effet nous considérons ici que la contrainte VaR est "évaluée" une seule fois à la date initiale, qu'elle ne s'applique qu'à l'horizon d'investissement entier (moyen ou long terme) et qu'elle est donc insensible à l'évolution du portefeuille aux temps intermédiaires.

Au contraire, comme le notent [Cuoco *et al.*, 2008] qui citent [Jorion, 2001], dans la pratique une contrainte de limite de risque de type "VaR" doit être ré-estimée à pas de temps régulier (quotidiennement pour les banques, proposition du comité de Basle, Avril 1995, voir [Jorion, 2001], p. 64) en se basant sur une période relativement courte qui correspond à un intervalle de temps moyen au cours duquel les poids du portefeuille restent inchangés ; par exemple, on peut considérer que cette période est de l'ordre de un mois pour les "mutuals funds", et de un jour pour la gestion de bilan des banques (voir [Jorion, 2001], p. 117).

Cette contrainte doit donc être comprise non pas comme une mesure de risque à court terme mais plutôt comme une mesure de l'aversion à la sous-performance à moyen/long terme correspondant à celle de l'investisseur à un horizon d'investissement donné.

En effet, nous verrons dans la section suivante que le problème d'investissement avec contrainte explicite sur le seuil de probabilité de sous-performance à l'horizon d'investissement est équivalent à celui de l'investisseur averse à la sous-performance dont l'expression de la fonction d'utilité est asymétrique ; ainsi le gestionnaire cherchera à répliquer la stratégie dynamique solution optimale du problème jusqu'à l'horizon d'investissement sans avoir à effectuer une nouvelle évaluation de son paramètre d'aversion à la sous-performance.

PROPRIÉTÉ 1. *Sous les hypothèses précédentes, la richesse terminale optimale du problème (P2) est donnée par l'expression suivante,*

$$W_T^* = \begin{cases} I(k/H_T) & \text{si } H_T > \overline{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \overline{H} \\ I(k/H_T) & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases}$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$ ,  
avec  $\overline{H} \equiv k/u'(W^0)$  et  $\underline{H}$  solution de l'équation :

$$P(H_T \leq \underline{H}) = \alpha$$

avec  $\underline{H} < \overline{H}$  et où  $I(\cdot)$  désigne l'inverse de la fonction  $u'(\cdot)$ .

Dans le cas d'une fonction d'utilité CRRA, ce résultat s'exprime de la façon suivante :

CONSÉQUENCE 1. *Dans le cas d'une fonction d'utilité CRRA, la richesse terminale optimale du problème (P2) est donnée par l'expression suivante,*

$$W_T^* = \begin{cases} (k/H_T)^{-1/\gamma} & \text{si } H_T > \overline{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \overline{H} \\ (k/H_T)^{-1/\gamma} & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases} ,$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$ , avec  $\overline{H} \equiv k(W^0)^\gamma$  et  $\underline{H}$  solution de l'équation :

$$P(H_T \leq \underline{H}) = \alpha$$

où  $\underline{H} < \overline{H}$ .

On remarque que la contrainte  $P(W_T \geq W^0) \geq 1 - \alpha$  avec  $\alpha$  fixé, se traduit dans l'expression de la solution optimale par l'expression de  $\underline{H}$  donnée par  $P(H_T \leq \underline{H}) = \alpha$ , expression qui ne dépend ni de la valeur de  $W^0$ , le niveau de performance minimum cible, ni de  $\gamma$ , le niveau d'aversion au risque.

Autrement dit pour une valeur de  $\alpha$  donnée, quelque soit la valeur de  $W^0$  et de  $\gamma$ , l'intervalle de valeurs de  $H$  où il se produit une sous-performance reste identique ; nous verrons dans la section suivante qu'il n'en est pas de même si l'on considère une paramétrisation non pas sur le niveau de  $\alpha$  mais sur celui du paramètre d'aversion implicite de l'investisseur.

Nous analysons à présent les propriétés de la stratégie dynamique optimale en considérant le modèle classique à deux actifs de [Black Scholes, 1973] (dans la suite B&S). Dans ce cadre, on fait l'hypothèse de l'existence d'une seule source de risque (i.e. le nombre d'actifs est de deux); de plus, on suppose que tous les paramètres servant à décrire la dynamique du prix des deux actifs financiers (un actif sans risque et un actif risqué) sont constants. L'univers d'investissement se compose donc des deux actifs suivants :

- Un actif dit sans risque ("A.S.R.") représentant l'actif monétaire et dont la valeur à la date  $t$  est notée  $S_t^0$ ; cet actif a un rendement instantané donné par

$$dS_t^0/S_t^0 = r dt$$

où  $r$  désigne le taux monétaire constant.

- Un actif dit risqué ("A.R") représentant le portefeuille de marché ou tout autre actif action dont la dynamique de prix est décrite par un mouvement brownien géométrique; son rendement instantané s'écrit

$$dM_t/M_t = \mu dt + \sigma dZ_t \equiv (r + \pi)dt + \sigma dZ_t$$

où le paramètre  $\mu$  représente son rendement moyen instantané (égal au taux court plus une prime de risque "action" notée  $\pi \equiv \mu - r$ ) et  $\sigma$  désigne sa volatilité constante.

Compte tenu de l'hypothèse de log-normalité du processus de prix de l'actif risqué, qui implique en particulier la log-normalité du prix du portefeuille "numéraire"  $H^6$ , on en déduit que la valeur de la borne basse, notée  $\underline{H}$ , figurant dans l'expression de la richesse terminale optimale, est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{H} = e^{[(r+\lambda^2/2)T - d_0\lambda\sqrt{T}]}$$

Avec  $d_0$ , le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la loi Normale centrée réduite  $N(-d_0) = \alpha$ .

Ainsi la zone de valeurs finales du portefeuille numéraire,  $H$ , où il se produit une sous-performance ne dépend que du niveau du taux sans risque,  $r$ , du prix de marché du risque,  $\lambda \equiv \frac{\mu-r}{\sigma}$ , de l'horizon d'investissement,  $T$ , et du niveau de probabilité de sous-performance maximale,  $\alpha$ .

On démontre facilement que la stratégie dynamique de réplication associée à la richesse terminale optimale est la combinaison de stratégies élémentaires ayant pour sous-jacent la stratégie dynamique atteignant la richesse terminale  $H_T^{1/\gamma}$  qui correspond à la solution optimale du problème de [Merton, 1971] :

---

6. On rappelle que le portefeuille "numéraire" noté  $(H, h)$  est aussi appelé portefeuille "log-optimal" ou encore "à taux de croissance optimal" car il s'agit de la stratégie dynamique solution optimale du problème de maximisation de l'espérance du taux de croissance logarithmique de la richesse terminale.

Dans le cadre du modèle de B&S, le portefeuille "numéraire" s'identifie à une stratégie dynamique investissant un poids constant dans l'actif risqué, noté  $h$ , qui est donné par l'expression suivante  $h = \pi/\sigma^2 \equiv \lambda/\sigma$ .

D'autre part, toujours sous les hypothèses du modèle de B&S, sa dynamique de prix est décrite par un mouvement brownien géométrique dont l'expression est la suivante :

$$dH_t/H_t = (r + \lambda^2)dt + \lambda dZ_t$$

ou de façon équivalente par  $H_t = \exp\{(r + \frac{1}{2}\lambda^2)t + \lambda Z_t\}$ .

Ce qui implique que  $H_t$  suit une loi log normale.

- (1) Une stratégie d'assurance de portefeuille : acheteuse d'une obligation Zéro Coupon et d'une option Call
- (2) Une position vendeuse d'une option Put et d'une option put binaire

Plus précisément, nous avons le résultat suivant,

CONSÉQUENCE 2. Dans le cas d'une fonction d'utilité CRRA, la valeur à la date  $t$ , de la stratégie dynamique atteignant la richesse terminale, solution optimale du problème (P2), que l'on notera,  $W_t^*$ , est donnée par la formule suivante :

$$W_t^* = W_0 ZC(T-t) + C(yH_t^*, W^0, T-t) - P(yH_t^*, W^\alpha, T-t) - (W^0 - W^\alpha) B(yH_t^*, W^\alpha, T-t)$$

où  $C(yH_t^*, W^0, T-t)$  ( resp.  $P(yH_t^*, W^\alpha, T-t)$ , resp.  $B(yH_t^*, W^\alpha, T-t)$ ) désigne la valeur à la date  $t$ , du Call européen (resp. du Put européen, resp. de l'option put binaire) d'échéance,  $T-t$  de strike  $W^0$  (resp.  $W^\alpha$ , resp.  $W^\alpha$ ) sur le sous-jacent  $yH_t^*$  et  $ZC(T-t)$  la valeur de l'obligation "Zéro-Coupon" d'échéance  $T-t$ <sup>7</sup>,

avec  $H_t^*$  désignant la valeur à la date  $t$  du portefeuille solution du problème de Merton qui atteint la richesse finale  $(H_T)^{1/\gamma}$ <sup>8</sup>, et avec  $W^\alpha \equiv y\underline{H}^{1/\gamma}$ ,  $y \equiv k^{-1/\gamma}$  et  $W^\alpha < W^0$ .

Finalement, on notera que dans le cadre du modèle de Black & Scholes, il existe une relation biunivoque entre la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , celle du portefeuille de Merton,  $H_t^*$  et celle de l'actif risqué,  $M_t$  pris deux à deux<sup>9</sup>; ce qui nous permet d'exprimer la valeur du portefeuille optimal en excès de celle du benchmark, notée  $Y_t^*$ , en fonction de  $M_t$ ; propriété que nous utiliserons dans la suite pour l'analyse de la stratégie optimale.

On a représenté sur la figure (Fig.1), le "pay-off" de la stratégie optimale pour l'asset manager cherchant à résoudre le problème (P2)<sup>10</sup>, que l'on notera stratégie

7. L'expression de  $C(Z_t, X, T-t)$  est donnée dans le cadre du modèle Black & Scholes (1973) par la formule suivante :  $C(Z_t, X, T-t) = Z_t N(d_1(X)) + X e^{-r(T-t)} N(d_2(X))$  avec

$$d_1(X) = \frac{\log(\frac{Z_t}{X}) + (r + \frac{(\sigma^*)^2}{2})(T-t)}{(\sigma^*)\sqrt{T-t}} \quad d_2(X) = d_1(X) - \sigma^*\sqrt{T-t} \quad \sigma^*\sqrt{T-t} \equiv \sqrt{\text{Var}(\ln(Z_T/Z_t))}$$

De plus pour  $Z_t \equiv yH_t^*$ , on en déduit de l'expression de  $H_t^*$  que  $\sigma^* = \lambda/\gamma$ . Avec les mêmes notations, on a  $P(Z_t, X, T-t) = X e^{-r(T-t)} N(-d_2(X)) + Z_t N(-d_1(X))$  et  $B(Z_t, X, T-t) = e^{-r(T-t)} N(-d_2(X))$  et  $ZC(T-t) = e^{-r(T-t)}$ .

8. Le portefeuille ( $h^*, H^*$ ) correspond à une stratégie dynamique investissant un poids constant de la richesse dans l'actif risqué qui est donné par l'expression suivante :  $h^* \equiv (1/\gamma)h$ . De plus, son processus de prix suit un mouvement brownien géométrique dont l'expression est la suivante :

$$dH_t^*/H_t^* = (r + \lambda^2/\gamma) dt + (\lambda/\gamma) dZ_t,$$

$$\text{ou de façon équivalente, } H_t^* = H_0^* \exp \left\{ (r + (\gamma - 1/2)(\lambda/\gamma)^2)t + (\lambda/\gamma)Z_t \right\}$$

$$\text{avec } H_0^* = e^{((1-\gamma)/\gamma)(r + \lambda^2/2\gamma)T}$$

9. En effet, dans le cadre du modèle de B&S, les propriétés de transformation suivantes permettent d'exprimer la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , ou du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , en fonction de celle de l'actif risqué  $M_t$  et réciproquement : on a,  $H_t = \Psi(t)(M_t)^h$  avec  $\Psi(t) \equiv e^{(r - \lambda(\frac{h}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} - \frac{\lambda}{2}))t} = e^{(1-h)(r + \frac{\lambda^2}{2h})t} = e^{(1-h)(r + \frac{h\sigma^2}{2})t}$ ,

$$\text{et } H_t^* = \Gamma(t)(M_t)^{h^*} \text{ avec } \Gamma(t) \equiv H_0^* e^{(1-h^*)(r + \frac{(\lambda/\gamma)^2}{2h^*})t} = H_0^* e^{(1-h^*)(r + \frac{h^*\sigma^2}{2})t}.$$

10. On désigne par "pay-off", la courbe de valeur de la richesse terminale exprimée en fonction du niveau de l'actif risqué, noté  $M_T$ .

Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, sous l'hypothèse du modèle d'actifs de B & S, il existe

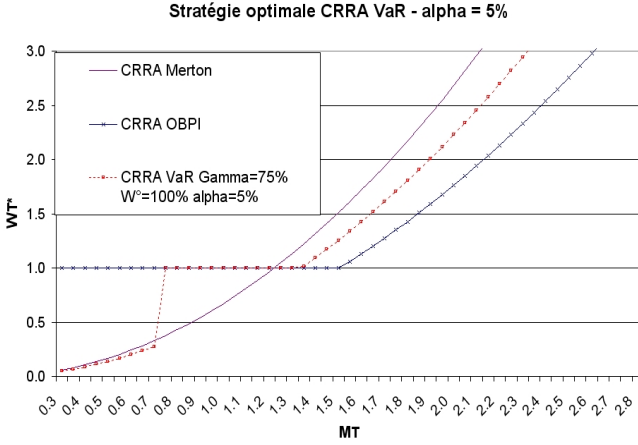


FIGURE 1. Richesse Terminale - Stratégie CRRA VaR - Probabilité de sur-performance = 95% -  $W^0 = 100\%$

Les valeurs numériques des autres paramètres sont les suivantes :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\gamma = 75\%$  et  $T = 5$ ; ce qui donne  $\lambda = 30\%$ ,  $h = 150\%$  et  $h^* = 200\%$ , et pour  $W^0 = 100\%$ , on trouve  $k = 70,31\%$ ,  $\bar{H} = 1,30$  et  $\underline{H} = 0,51$ ,  $M_{max} = 1,34$  et  $M_{VaR} = 0,71$ .

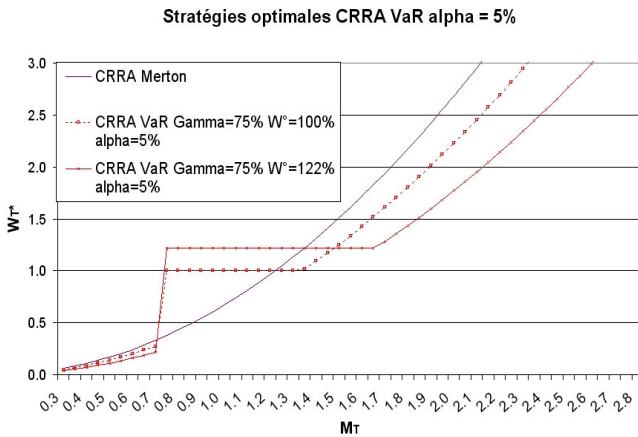


FIGURE 2. Richesse Terminale - Stratégie CRRA VaR - Probabilité de sur-performance = 95% -  $W^0 = 100\%$  et  $W^0 = 122\%$ .

Les valeurs numériques des autres paramètres sont les suivantes :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\gamma = 75\%$  et  $T = 5$ ; ce qui donne  $\lambda = 30\%$ ,  $h = 150\%$  et  $h^* = 200\%$ , et pour  $W^0 = \exp(rT) = 122\%$ , on trouve  $k = 55,81\%$ ,  $\bar{H} = 1,80$  et  $\underline{H} = 0,51$  et  $M_{max} = 1,6$  et  $M_{VaR} = 0,71$ .

”CRRA VaR”, avec un niveau cible de richesse de  $W^0 = 100\%$ .

une correspondance biunivoque entre  $M_t$ , la valeur de l’actif risqué à la date  $t$ , et  $H_t$  celle du portefeuille numéraire ou de croissance optimale, ce qui nous permet de tracer cette courbe. En

On notera l'effet "Casino" ou "Gambling Effect" illustré sur cette figure par le fait que, dans l'intervalle de valeurs de l'actif risqué en dessous du niveau cible (intervalle de sous-performance), la courbe de richesse de la stratégie "CRRA VaR" est située en dessous de celle de la stratégie optimale pour l'investisseur CRRA sans aversion à la perte, solution du problème de Merton (stratégie "CRRA Merton").

Autrement dit, dans le cas d'un scénario de marché défavorable, l'asset manager subit une perte de richesse plus importante en suivant la stratégie CRRA VaR (i.e. avec un contrôle sur le niveau initial de la VaR) qu'en investissant dans le portefeuille de Merton (i.e. stratégie solution du problème de Merton) qui n'intègre pas de contrainte de risque; ce qui plaide clairement en défaveur du choix de la contrainte VaR comme contrainte de gestion du risque.

[Basak Shapiro, 2001] interprètent cet effet par le comportement "Joueur" de l'investisseur "CRRA VaR" : dans un intervalle de valeurs basses de l'actif risqué où l'investisseur "CRRA VaR" garde l'espoir de pouvoir atteindre à nouveau la valeur cible de richesse, il sur-réagit en augmentant son niveau d'exposition à l'actif risqué qui surpasse celui de l'investisseur CRRA sans contrainte.

Cet effet "Casino" s'explique quantitativement par la composante binaire de la stratégie optionnelle qui introduit une discontinuité dans le "pay-off" de cette stratégie.

L'effet du changement de la valeur cible de  $W^0 = 100\%$  à  $W^0 = \exp(rT) = 122\%$  est illustré sur la figure (Fig.2).

Dans la suite du chapitre, nous utiliserons ces mêmes valeurs numériques des paramètres pour les applications numériques.

2.1.2. Critère de maximisation de l'utilité espérée de la richesse finale avec fonction de perte constante.

Nous considérons à présent un investisseur ayant une fonction d'utilité CRRA et qui, de plus, est averse à la sous-performance par rapport à une cible de richesse. On suppose que son aversion à la perte se traduit par la forme asymétrique et discontinue de sa fonction d'utilité; celle-ci exhibe une discontinuité au voisinage de la cible de richesse :

$$v(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} - A & \text{si } x < W^0 \\ \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{si } x \geq W^0 \end{cases}$$

avec  $A > 0$  le paramètre d'aversion à la sous-performance de l'investisseur, et comme précédemment, avec  $\gamma$  le paramètre d'aversion au risque de l'investisseur et  $W^0$  la cible de richesse à atteindre.

Nous avons représenté graphiquement cette fonction d'utilité (que l'on note "CRRA Aversion") et, à titre de comparaison, la fonction d'utilité CRRA standard, sur la figure (Fig.3) ci-dessous.

---

particulier, les valeurs seuils notées  $M_{max}$  et  $M_{VaR}$  correspondent aux valeurs de l'actif risqué qui s'obtiennent de celles de  $\bar{H}$  et de  $\underline{H}$  par cette transformation.



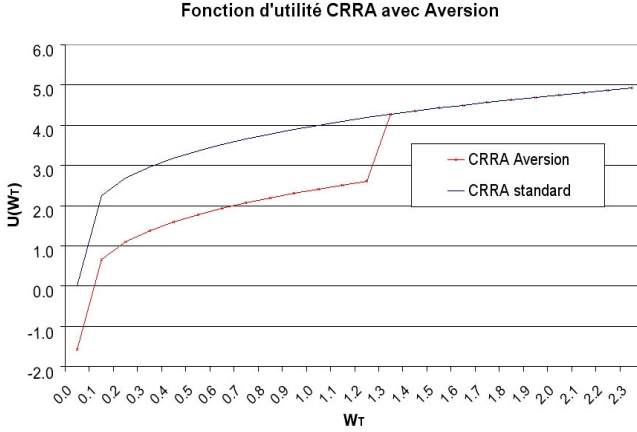


FIGURE 3. Fonction d'utilité CRRA avec ou sans paramètre d'aversion.

Le problème statique à résoudre s'écrit :

PROBLÈME 3.

$$(P3) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(v(W_T)) \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1 \end{cases}$$

avec  $v(W) = u(W) - A \times 1_{\{W < W^0\}}$ <sup>11</sup> où  $x \mapsto u(x)$  désigne une fonction d'utilité CRRA (i.e.  $u(x) \equiv \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  avec  $\gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\}$ ) et où  $W^0$  désigne la cible de richesse à atteindre.

PROPRIÉTÉ 2. Sous les hypothèses précédentes, la richesse terminale optimale du problème (P3) est donnée par l'expression suivante,

$$W_T^* = \begin{cases} (k/H_T)^{-1/\gamma} & \text{si } H_T > \bar{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \bar{H} \\ (k/H_T)^{-1/\gamma} & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases},$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$ , avec  $\bar{H} \equiv k(W^0)^\gamma$  et  $\underline{H}$  solution de l'équation<sup>12</sup> :

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} (k/\underline{H})^{1-1/\gamma} - \frac{(W^0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + (k/\underline{H})W^0 = A$$

avec  $\underline{H} < \bar{H}$ .

11. il s'agit de l'expression donnée dans l'équation (1.2) pour les fonctions d'utilité avec fonction de perte constante considérées dans le problème d'optimisation (P1) de la section 2. Ainsi, ce problème correspond au problème (P1) dans le cas particulier où  $x \mapsto u(x)$  est la fonction d'utilité d'un agent CRRA (non averse à la perte).

12. Il existe une relation biunivoque entre  $\underline{H}$  et  $A > 0$  donnée par l'équation

$$A = u(I(k/\underline{H})) - (k/\underline{H})I(k/\underline{H}) - u(W^0) + (k/\underline{H})W^0$$

Notons maintenant que le problème (P3) peut se ré-écrire de la façon suivante :

$$(P3) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(W_T^\gamma/\gamma) - AP(W_T \leq W^0) \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1 \end{cases}$$

où  $P(W_T \leq W^0)$  s'interprète comme la mesure de risque à minimiser/pénaliser, et correspond au Moment Partiel Inférieur d'ordre 0 :

$$P(W_T \leq W^0) = E \left\{ (Max(W^0 - W_T, 0))^0 \right\} \equiv LPM(0, W^0, W_T)$$

On en déduit que ce problème est équivalent au problème (P2) et, pour un niveau du paramètre  $\alpha$  à définir, admet l'expression suivante :

$$(P2) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(W_T^\gamma/\gamma) \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1 \text{ et } P(W_T \geq W^0) \geq 1 - \alpha(A) \text{ avec } A \text{ fixé} \end{cases}$$

PROPRIÉTÉ 3. Si  $W_T^*$  est la solution du problème (P3)(A) avec A vérifiant

$$A = \frac{\gamma}{1 - \gamma} (k/\underline{H})^{1-1/\gamma} - \frac{(W^0)^{1-\gamma}}{1 - \gamma} + (k/\underline{H})W^0$$

où  $k$  est tel que  $E(W_T^*/H_T) = 1$  et où  $P(H_T \leq \underline{H}) = \alpha$ , alors  $W_T^*$  est aussi la solution du problème (P2)( $\alpha$ ) et réciproquement.

Ainsi le problème avec contrainte explicite "VaR" peut s'interpréter comme celui d'un agent averse à la sous-performance ; i.e. un investisseur cherchant à maximiser une fonction d'utilité qui exhibe une dissymétrie entre gain et perte et un profil discontinu au niveau du seuil de richesse cible.

Réciproquement, on peut interpréter le paramètre d'aversion pour le risque  $A$  en terme financier en lui faisant correspondre une probabilité de perte maximum de niveau  $\alpha$ .

A titre illustratif, on a représenté sur la figure (Fig.4) ci-dessous la correspondance de valeurs entre  $A$  et  $\alpha$  pour les mêmes valeurs numériques des paramètres que celles utilisées dans les figures précédentes.

Finalement, on a représenté sur la figure suivante (Fig.5) la valeur des deux "strikes",  $M_{max}$  et  $M_{VaR}$ , correspondant aux deux bornes séparant les trois intervalles de valeurs de l'actif risqué,  $M$ , pour lesquels la stratégie optimale exhibe un "pay-off" différent<sup>13</sup>, en fonction du niveau de sous-performance maximum,  $\alpha$ .

On observe que pour les valeurs de  $\alpha$  supérieures à une valeur limite d'environ 33%, la valeur des deux "strikes" se rejoint et la zone intermédiaire (de protection) disparaît ; en effet, à partir d'un seuil limite de probabilité ( $\alpha^* = P(H_T \leq \overline{H})$ ), la contrainte de protection ne joue plus dans le problème d'optimisation et la stratégie

13. Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, sous les hypothèses du modèle d'actifs de B & S, il existe une correspondance biunivoque entre  $M_t$ , la valeur de l'actif risqué à la date  $t$ , et  $H_t$  celle du portefeuille numéraire ou de croissance optimale ; en particulier, les valeurs seuils notées  $M_{max}$  et  $M_{VaR}$  correspondent aux valeurs de l'actif risqué qui se déduisent de celles de  $\overline{H}$  et  $\underline{H}$  par cette transformation.

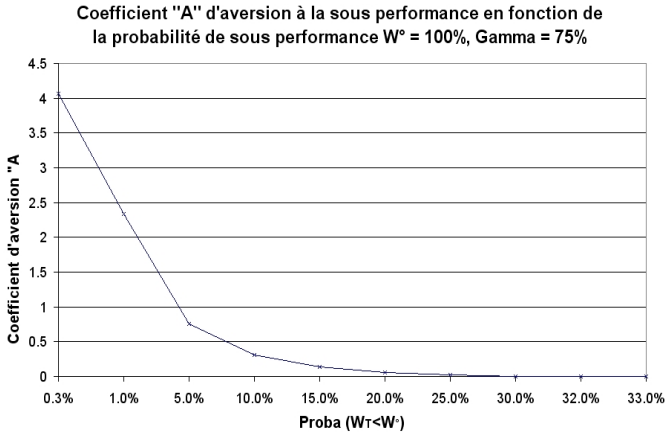


FIGURE 4. Niveau du coefficient d'aversion à la sous-performance ( $A$ ) en fonction de la probabilité de sous-performance ( $\alpha$ ).  $W^0 = 100\%$  et  $\gamma = 75\%$ .

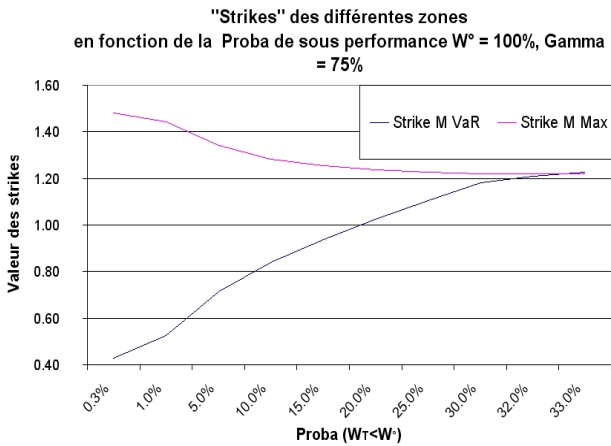


FIGURE 5. Valeurs des "strikes" ( $M_{max}$  et  $M_{VaR}$ ) en fonction de la probabilité de sous-performance ( $\alpha$ ).  $W^0 = 100\%$  et  $\gamma = 75\%$ .

"CRRA VaR" s'identifie avec la stratégie CRRA sans contrainte.

A l'opposé, quand  $\alpha$  converge vers 0% (niveau maximum d'aversion) la stratégie "CRRA VaR" se confond avec la stratégie "CRRA PI" (cas où  $\alpha = 0\%$ ), et la zone intermédiaire de protection est alors maximale.

## 2.2. Contrainte "Limited Expected Loss".

Cette section est organisée de la manière suivante :

Dans la première sous section, nous analysons les résultats de [Berkelaar *et al.*, 2004] qui proposent un critère de maximisation de l'espérance d'une fonction d'utilité CRRA avec prise en compte de l'aversion pour la sous-performance; nous montrons qu'il s'agit du cas particulier du problème d'optimisation considéré dans la section 1 précédente quand la fonction d'utilité est CRRA et la fonction de perte est continue.

Dans la seconde sous-section, après avoir rappelé les principales propriétés de la solution optimale correspondant au critère "LEL RM" ("Limited Expected Loss Risk Management") proposé par [Basak Shapiro, 2001]<sup>14</sup>, nous montrons que ce problème s'identifie au critère proposé par [Berkelaar *et al.*, 2004].

Autrement dit, il existe une relation biunivoque entre le paramètre d'aversion à la sous-performance de l'investisseur "loss averse" (dont le problème d'investissement est celui proposé par [Berkelaar *et al.*, 2004]) et le niveau de perte maximale espérée (niveau de "LEL") imposé par le "risk manager" à l'investisseur du problème d'investissement de [Basak Shapiro, 2001]) puisque ces deux investisseurs n'en font qu'un.

Enfin, dans la troisième sous-section, nous montrons que la mesure de risque considérée implicitement à travers la contrainte "LEL" s'interprète comme la mesure de risque associée au ratio de Sharpe Omega de la stratégie dynamique optimale du problème sans contrainte (problème de [Merton, 1971]).

2.2.1. *critère de maximisation de l'espérance d'utilité avec fonction de perte non constante.*

[Berkelaar *et al.*, 2004] considèrent une fonction d'utilité de type CRRA avec prise en compte de l'aversion à la perte; partant d'une fonction d'utilité CRRA, [Berkelaar *et al.*, 2004] introduisent une discontinuité non pas dans l'expression de la fonction d'utilité mais dans celle de la fonction d'utilité marginale. Ceci leur permet de prendre en compte une dissymétrie entre l'aversion pour la sous-performance et l'appétit pour le gain de l'investisseur tout en conservant une fonction d'utilité continue au niveau du seuil de richesse cible. L'expression de cette fonction d'utilité est la suivante :

$$v(x) = \begin{cases} A \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} + (B - A) \frac{(W^0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{si } x \leq W^0 \\ B \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{si } x > W^0 \end{cases}$$

---

14. [Basak Shapiro, 2001] considèrent le problème de l'investisseur CRRA qui est soumis à une contrainte explicite de risque.

Cette contrainte revient à imposer un seuil maximal sur la valeur présente de l'espérance de sous-performance à l'horizon d'investissement. A noter que cette mesure de risque de type "Expected Loss" est très proche du concept de la "CVaR" (Conditional VaR), autre mesure de risque qui est très utilisée par les professionnels du risk management comme alternative à l'approche de la "VaR".

où  $A > B > 0$  (aversion pour la sous-performance),  $\gamma$  représente l'aversion relative (constante) au risque de l'investisseur et  $W^0$  la cible de richesse à atteindre.

Nous avons représenté graphiquement cette fonction d'utilité sur la figure (Fig.6) ci-dessous.

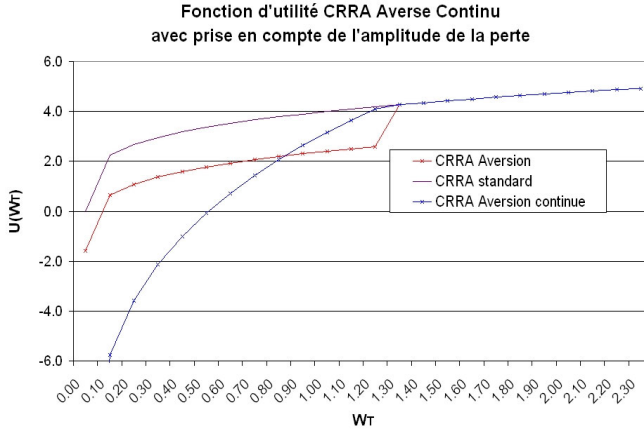


FIGURE 6. Fonction d'utilité CRRA avec fonction de perte continue ("CRRA Aversion Continue"), avec fonction de perte constante ("CRRA Aversion") et sans fonction de perte ("CRRA standard").

"CRRA Aversion" :  $A = 1,59$ ; "CRRA Aversion continue" :  $A = 5,09$ ,  $B = 1$  et  $W^0 = 122\%$ .

Notons tout d'abord que, contrairement au profil discontinu de la fonction d'utilité présentée dans la sous-section précédente, la fonction d'utilité considérée ici est d'une part continue et, d'autre part, elle prend en compte l'amplitude de la sous-performance en pénalisant la sous-performance de manière croissante avec le niveau de perte atteinte.

Il est facile de voir que cette fonction d'utilité est un cas particulier de la famille de fonctions d'utilité HARA "loss averse" introduite dans la section 1 précédente et dont l'expression est donnée par l'équation (1.3). En effet, on peut écrire,

$$v(x)/B = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} - C \times L(x, W^0, \gamma) & \text{si } x \leq W^0 \\ \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{si } x > W^0 \end{cases}$$

où  $C \equiv (A/B-1)$  désigne le coefficient d'aversion à la sous-performance et  $L(x, W^0, \gamma)$  est la fonction de perte mesurant le coût d'utilité de la sous-performance :

$$L(x, W^0, \gamma) \equiv \frac{[(W^0)^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}]}{1-\gamma}$$

Ainsi, le niveau d'aversion à la sous-performance de l'investisseur est une fonction croissante de la sous-performance enregistrée; en effet, son aversion à la sous-performance est proportionnelle au coût d'utilité engendré par cette sous-performance.

Le problème "statique" de maximisation de l'utilité espérée de la richesse finale, peut donc s'écrire, avec ce choix de fonction d'utilité, de la façon suivante :

PROBLÈME 4.

$$(P4) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E\left(\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) - C \times E\{L(W_T, W^0, \gamma)1_{\{W_T < W^0\}}\} \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1 \end{cases}$$

où  $L(x, W^0, \gamma) \equiv \frac{[(W^0)^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}]}{1-\gamma}$  est la fonction de perte mesurant le coût d'utilité de la sous-performance par rapport à la cible de richesse à atteindre notée  $W^0$ .

On a le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 4. *Sous les hypothèses précédentes, la richesse terminale optimale du problème (P4) est donnée par l'expression suivante,*

$$W_T^* = \begin{cases} (\frac{k}{B}/H_T)^{-1/\gamma} & \text{si } H_T > \bar{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \bar{H} \\ (\frac{k}{A}/H_T)^{-1/\gamma} & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases}$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$ , avec  $\bar{H} \equiv (k/B)(W^0)^\gamma$  et avec  $\underline{H} \equiv (k/A)(W^0)^\gamma$

On retrouve, comme pour la stratégie "CRRA VaR" analysée dans la section précédente, les deux cas limites suivants :

- Pour  $A \rightarrow 0$  (maximum d'aversion à la sous-performance), la stratégie solution du problème avec contrainte de protection du capital de niveau  $W^0$ .
- Pour  $A \rightarrow B$ , la stratégie solution optimale du problème de Merton, sans contrainte d'aversion à la sous-performance.

Remarquons que le "pay-off" de la stratégie optimale, est une fonction continue de  $H_T$ . Contrairement à la stratégie "CRRA VaR", la richesse terminale optimale du problème (P4) n'est pas discontinue au niveau du seuil  $\underline{H} \equiv (k/A)(W^0)^\gamma$ <sup>15</sup>.

On démontre facilement que la stratégie dynamique de réplication associée à la richesse terminale optimale est la combinaison de stratégies plus élémentaires ayant pour sous-jacent, le portefeuille, solution optimale du problème de [Merton, 1971], stratégie dynamique atteignant la richesse terminale  $H_T^{1/\gamma}$  :

- (1) Une stratégie d'assurance de portefeuille : acheteuse d'une obligation Zéro Coupon et d'une option Call
- (2) Une position vendeuse d'une option Put

On a le résultat suivant :

---

15. ce seuil correspond à la borne inférieure de l'intervalle de valeurs médianes de  $H_T$  où il est optimal pour l'investisseur de gérer passivement son portefeuille.

CONSÉQUENCE 3. La valeur, à la date  $t$ , de la stratégie dynamique atteignant la richesse terminale, solution optimale du problème  $(P_4)$ , que l'on notera,  $W_t^*$ , est donnée par la formule suivante :

$$W_t^* = W_0 ZC(T-t) + C(y_B H_t^*, W^0, T-t) - P(y_A H_t^*, W^0, T-t)$$

où  $C(Z_t, W^0, T-t)$  (resp.  $P(Z_t, W^0, T-t)$ ) désigne la valeur à la date  $t$ , du Call européen (resp. du Put européen) d'échéance,  $T-t$  de strike  $W^0$  sur le sous-jacent  $Z_t$  et où on a posé  $y_A \equiv 1/(k/A)^{1/\gamma}$ , et  $y_B \equiv 1/(k/B)^{1/\gamma}$ ,

avec  $ZC(T-t)$  la valeur de l'obligation "Zéro-Coupon" d'échéance  $T-t$ ,

et avec  $H_t^*$  la valeur à la date  $t$  du portefeuille solution du problème de Merton qui atteint la richesse finale  $(H_T)^{1/\gamma}$ .

On notera la différence avec l'expression, obtenue dans la section précédente, pour la stratégie dynamique "CRRA VaR" : la stratégie dynamique optimale correspondant au problème  $(P_4)$  ne comporte plus de position investie sur une option binaire qui traduisait la discontinuité du "pay-off" de la stratégie dynamique "CRRA VaR".

Finalement on notera que l'inégalité  $A < B$ , implique par voie de conséquence que cette stratégie dynamique est, comme l'était la stratégie "CRRA VaR", réductrice du niveau de VaR par rapport à la stratégie sans contrainte du problème de Merton.

### 2.2.2. Stratégie optimale avec contrainte "LEL".

[Basak Shapiro, 2001] proposent en guise d'alternative à la contrainte de risque basée sur le seuil de VaR, une contrainte basée sur une autre mesure de risque non symétrique, le moment partiel inférieur d'ordre 1 qu'ils désignent sous le nom de contrainte "Limited Expected Loss" ; en effet, cette mesure enrichit l'analyse du risque en tenant compte non pas seulement de la probabilité de perte mais aussi de son amplitude ; la contrainte considérée s'exprime de la façon suivante :

$$E \left[ (1/H_T)(W^0 - W_T) 1_{\{W_T \leq W^0\}} \right] \leq \varepsilon$$

avec  $\varepsilon \geq 0$  fixé.

Cette contrainte de risque peut s'exprimer ainsi : la valeur présente (sous la probabilité historique) de la sous-performance à l'horizon d'investissement doit être inférieure à un seuil donné, noté  $\varepsilon$ .

Tout d'abord, il paraît intéressant de montrer que cette contrainte est très proche de la mesure de risque appelé "CVaR" (Conditional VaR ou encore Mean Excess Loss) plus connue dans la pratique :

En effet, la CVaR( $\alpha$ ), à un horizon  $T$  donné, peut se définir comme la moyenne de la future sous-performance au-delà de la VaR correspondant à un seuil de probabilité  $\alpha$  donné (par exemple  $\alpha = 5\%$ ) et notée VaR( $\alpha$ ) :

$$CVaR(\alpha) = (1/\alpha) * E \left[ ((1 - W_T) - VaR(\alpha)) 1_{\{(1 - W_T) \geq VaR(\alpha)\}} \right]$$

où la valeur de  $VaR(\alpha)$  est déterminée implicitement par l'équation suivante :

$$P(1 - W_T \leq VaR(\alpha)) = 1 - \alpha \text{ avec } \alpha \in [0, 1]$$

En posant  $VaR(\alpha) = 1 - W_0$ , on obtient l'expression suivante :

$$CVaR(\alpha) = (1/\alpha) * E[(W^0 - W_T)1_{(W^0 \geq W_T)}] \text{ avec } \alpha \text{ fixé}$$

Ainsi la contrainte imposée par ces auteurs est bien similaire à une contrainte de niveau maximum sur la CvaR (au terme d'actualisation  $1/H_T$  près).

De plus, il est intéressant de noter que :

$$E[(1/H_T)(W^0 - W_T)1_{\{W_T \leq W^0\}}] = E[(1/H_T)(W^0 - W_T) | W_T \leq W^0] P(W_T \leq W^0)$$

Ce qui signifie que la contrainte pénalise non seulement la probabilité de sous-performance (comme le critère de type VaR) mais aussi un niveau élevé de sous-performance sachant qu'il y a une sous-performance.

En revanche, ce n'est pas le cas de la CVaR, dont la valeur ne dépend que du niveau de perte conditionnellement à une sous-performance par rapport à la cible; en effet on a :

$$CVaR(\alpha) = (1/\alpha) * E[(W^0 - W_T)1_{(W^0 \geq W_T)}] = E[(W^0 - W_T) | W_T \leq W^0]$$

puisque par construction on a  $P(W_T \leq W^0) = \alpha$

Revenons maintenant au problème d'optimisation proposé par [Basak Shapiro, 2001] :

PROBLÈME 5.

$$(P5) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E\left(\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1 \text{ et } E[(1/H_T)(W^0 - W_T)1_{\{W_T \leq W^0\}}] \leq \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \geq 0 \text{ fixé} \end{cases}$$

Avec  $W^0$  la cible de richesse à atteindre.

PROPRIÉTÉ 5. Sous les hypothèses précédentes, la richesse terminale optimale du problème (P5) est donnée par l'expression suivante,

$$W_T^* = \begin{cases} (k_1/H_T)^{-1/\gamma} & \text{si } H_T > \overline{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \overline{H} \\ ((k_1 - k_2)/H_T)^{-1/\gamma} & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases}$$

où  $\overline{H} \equiv (k_1)(W^0)^\gamma$  et  $\underline{H} \equiv (k_1 - k_2)(W^0)^\gamma$  avec  $k_1 \geq 0$  et  $k_2 \geq 0$  vérifiant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E(W_T^*(k_1, k_2)/H_T) = 1 \text{ (équation de budget)} \\ E[(1/H_T)(W^0 - W_T^*(k_1, k_2))1_{\{W_T^*(k_1, k_2) \leq W^0\}}] = \varepsilon \text{ ou } k_2 = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons le résultat d'équivalence suivant :



PROPRIÉTÉ 6. Si  $W_T^*$  est la solution du problème (P4)(A,B) avec A et B vérifiant  $A = k/(k_1 - k_2)$  et  $B = k/k_1$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E(W_T^*(k_1, k_2)/H_T) = 1 \\ E \left[ (1/H_T)(W^0 - W_T^*(k_1, k_2)) 1_{\{W_T^*(k_1, k_2) \leq W^0\}} \right] = \varepsilon \quad \text{ou } k_2 = 0 \end{cases}$$

Alors  $W_T^*$  est aussi la solution du problème (P5)( $\varepsilon$ ) et réciproquement

Nous nous plaçons à nouveau dans le cadre restreint du modèle de B & S à deux actifs<sup>16</sup>.

Ce qui nous permet en particulier d'exprimer la valeur du portefeuille optimal en excès de celle du benchmark, notée  $Y_t^*$ , en fonction de  $M_t$ ; propriété que nous utiliserons dans la suite pour l'analyse de la stratégie optimale; en effet, comme on l'a déjà mentionné, il existe, dans le cadre du modèle de Black & Scholes, une relation biunivoque entre la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , et celle de l'actif risqué,  $M_t$ , ou encore, entre celle du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ <sup>17</sup>, et  $M_t$ <sup>18</sup>.

On a représenté sur la figure (Fig.7), le "pay-off" de cette stratégie<sup>19</sup> que l'on nommera "CRRA LEL" et à titre de comparaison celui de la stratégie solution optimale du problème avec contrainte VaR (stratégie "CRRA VaR") et du problème

16. L'univers d'investissement se compose des deux actifs suivants :

- Un actif dit sans risque ("A.S.R.") représentant l'actif monétaire et dont la valeur à la date t est notée  $S_t^0$ ; cet actif a un rendement instantané donné par

$$dS_t^0/S_t^0 = rdt$$

où  $r$  désigne le taux monétaire constant.

- Un actif dit risqué ("A.R.") représentant le portefeuille de marché ou tout autre actif action dont la dynamique de prix est décrite par un mouvement brownien géométrique; son rendement instantané s'écrit

$$dM_t/M_t = \mu dt + \sigma dZ_t \equiv (r + \pi)dt + \sigma dZ_t$$

où le paramètre  $\mu$  représente son rendement moyen instantané (égal au taux court plus une prime de risque "action" notée  $\pi \equiv \mu - r$ ) et  $\sigma$  désigne sa volatilité constante.

17. On rappelle que dans le cadre du modèle de B&S, le portefeuille ( $h^*$ ,  $H^*$ ) s'identifie à une stratégie dynamique à poids constant donné par l'expression suivante :  $h^* \equiv (1/\gamma)h$ .

De plus, son processus de prix suit un mouvement brownien géométrique dont l'expression est la suivante :

$$dH_t^*/H_t^* = (r + \lambda^2/\gamma) dt + (\lambda/\gamma)dZ_t,$$

ou de façon équivalente,  $H_t^* = H_0^* \exp \{ (r + (\gamma - 1/2)(\lambda/\gamma)^2)t + (\lambda/\gamma)Z_t \}$  avec  $H_0^* = e^{((1-\gamma)/\gamma)(r+\lambda^2/2\gamma)T}$

18. En effet, dans le cadre du modèle de B&S, les propriétés de transformation suivantes permettent d'exprimer la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , ou du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , en fonction de celle de l'actif risqué  $M_t$  et réciproquement : on a  $H_t = \Psi(t)(M_t)^h$  avec  $\Psi(t) \equiv e^{(r-\lambda(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}-\frac{\lambda}{2}))t} = e^{(1-h)(r+\frac{\lambda^2}{2h})t} = e^{(1-h)(r+\frac{h\sigma^2}{2})t}$ ,

et  $H_t^* = \Gamma(t)(M_t)^{h^*}$  avec  $\Gamma(t) \equiv H_0^* e^{(1-h^*)(r+\frac{(\lambda/\gamma)^2}{2h^*})t} = H_0^* e^{(1-h^*)(r+\frac{h^*\sigma^2}{2})t}$ .

19. On rappelle que nous désignons par "pay-off", la courbe de valeur de la richesse terminale exprimée en fonction du niveau de l'actif risqué, noté  $M_T$ .

Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, sous l'hypothèse du modèle d'actifs de B & S, il existe une correspondance biunivoque entre  $M_t$ , la valeur de l'actif risqué à la date t, et  $H_t$  celle du portefeuille numéraire ou de croissance optimale, ce qui nous permet de tracer cette courbe.

En particulier, les valeurs seuils (notées  $M_{max}$  et  $M_{min}$ ) correspondent aux valeurs de l'actif risqué qui s'obtiennent de celles de  $\bar{H}$  et  $\underline{H}$  par cette transformation.

sans contrainte (stratégie "CRRA Merton").

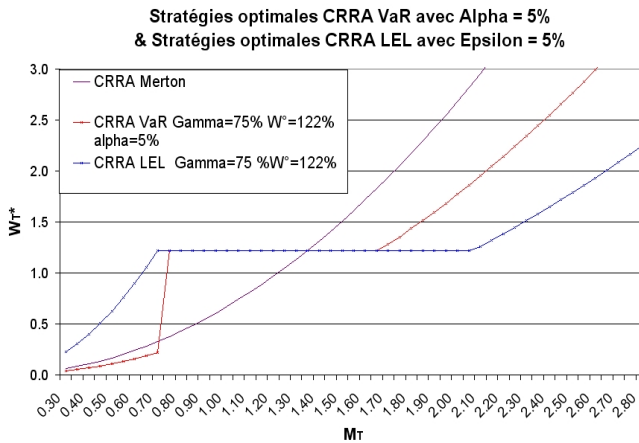


FIGURE 7. stratégies optimales "CRRA LEL" (espérance de sous-performance  $\epsilon = 5\%$ ), "CRRA VaR" (probabilité de sous-performance  $\alpha = 5\%$ ) et "CRRA Merton".

Les valeurs numériques sont les suivantes :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\gamma = 75\%$  et  $T = 5$ ;

"CRRA VaR" (CRRA aversion discontinue) :  $\alpha = 5\% \Leftrightarrow A = 1,59$ ;

"CRRA LEL" (CRRA aversion continue) :  $\epsilon = 5\% \Leftrightarrow A = 5,09$  avec  $B = 1$  et  $W^0 = 122\%$ , et on trouve, avec les valeurs ci-dessus des paramètres :  $k = 214,63\%$ ,  $\overline{H} = 2,49$  et  $\underline{H} = 0,49$ ,  $M_{max} = 2,06$  et  $M_{min} = 0,69$ .

On observe sur la figure (Fig.7) que l'effet "Casino" de la stratégie "CRRA VaR" n'est plus présent ; dans la zone de valeurs "basses" du portefeuille sous-jacent, pour laquelle la richesse terminale est inférieure au niveau de richesse cible, la courbe de la stratégie "CRRA LEL" (en bleue) est au-dessus de celle de la stratégie standard CRRA, solution du problème de Merton (courbe violette).

De plus il n'y a plus non plus, contrairement à la stratégie "CRRA VaR" (courbe rouge) de discontinuité entre l'état intermédiaire de richesse et l'état des valeurs de richesses inférieures au niveau cible.

L'effet du changement de valeur cible de  $W^0 = 100\%$  à  $W^0 = 122\%$  est illustré sur la figure (Fig.8).

On remarque que, dans un intervalle de valeurs basses à médianes du sous-jacent, la courbe des valeurs finales de la stratégie "CRRA LEL" pour  $W^0 = 122,14\%$  est au-dessus de celle correspondant à une cible de richesse plus basse,  $W^0 = 100\%$ .

Ainsi, le comportement de l'investisseur "CRRA LEL" paraît cohérent avec la réalité observée : en cas de scénario défavorable, celui-ci aura un besoin de protection d'autant plus fort que sa cible de richesse finale est élevée ; ce qui n'était pas le cas de l'investisseur "CRRA VaR".

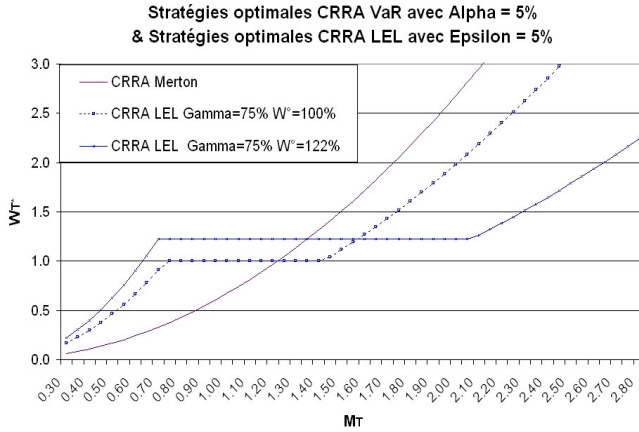


FIGURE 8. Stratégies optimales "CRRA LEL" -  $\epsilon = 5\%$   
 -  $W^0 = 122\%$ ,  $W^0 = 100\%$  et  $W^0 = 0\%$  (stratégie "CRRA Merton").

Les valeurs numériques des autres paramètres sont les suivantes :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\gamma = 75\%$  et  $T = 5$  ;  
 Pour  $W^0 = 100\%$ , on trouve  $k = 142,03\%$ ,  $\bar{H} = 1,42$  et  $\underline{H} = 0,53$ ,  
 $M_{max} = 1,42$  et  $M_{min} = 0,73$  ;  
 Pour  $W^0 = 122\%$ , mêmes valeurs de  $k$ ,  $\bar{H}$ ,  $\underline{H}$ ,  $M_{max}$  et  $M_{min}$   
 que pour la figure (Fig.7).

### 2.2.3. Expression de la mesure de perte "LEL" de la stratégie optimale.

Nous avons vu précédemment que la mesure du risque de sous-performance associée à la stratégie optimale du problème "CRRA VaR" se ramenait au simple calcul de la probabilité de sous-performance de l'actif  $H^*$  en dessous d'un seuil (correspondant implicitement au coût d'acquisition d'une option binaire de couverture).

Nous montrons maintenant un résultat intéressant en terme d'analyse du risque pris par l'investisseur "CRRA LEL" : la valeur de l'expression de la mesure du risque de sous-performance associée au critère "CRRA LEL", notée  $\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T)$ , correspond à la valeur d'une option Put de "couverture" écrite sur le sous-jacent  $H^*$ .

Nous énonçons ce résultat de façon détaillé dans la propriété qui suit :

#### PROPRIÉTÉ 7.

La mesure du risque de sous-performance pour le critère CRRA LEL notée,  $\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T)$ , correspond au coût d'acquisition d'une option "Put" de couverture contre la sous-performance de l'actif  $H^*$  (à une constante multiplicative près  $y_A$ ) et s'identifie à la mesure de risque associée au ratio de "Sharpe Omega" du portefeuille  $H^*$  pour le niveau de richesse cible,  $W^0$ .

## PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 7.

Par définition, on a  $\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T) \equiv E \left[ (1/H_T)(W^0 - W_T^*(k_1, k_2)) 1_{\{W_T^*(k_1, k_2) \leq W^0\}} \right]$ .  
De l'expression de  $W_T^*$  donnée par la propriété (5), on en déduit que :

$$\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T) = W_0 e^{-r(T-t)} + C(y_B H_0^*, W^0, T) - E[(1/H_T)W_T^*(k_1, k_2)]$$

soit encore,  $\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T) = P(y_A H_0^*, W^0, T)$

où  $C(Z_t, W^0, T-t)$  (resp.  $P(Z_t, W^0, T-t)$ ) désigne la valeur, à la date  $t$ , du Call européen (resp. Put européen) d'échéance  $T-t$ , de strike  $W^0$  sur le sous-jacent  $Z_t$ , et où on a posé  $y_A \equiv 1/(k_1 - k_2)^{1/\gamma}$  et  $y_B \equiv 1/k_1^{1/\gamma}$ . □

Ce résultat permet de simplifier l'énoncé de la propriété (6) de la façon suivante :

CONSÉQUENCE 4. Si  $W_T^*$  est la solution du problème  $(P_4)(A)$  avec  $A = k_1/(k_1 - k_2)^{20}$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont solutions du système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} E(W_T^*(k_1, k_2)/H_T) = 1 \\ P(y_A H_0^*, W^0, T) = \varepsilon \text{ où } k_2 = 0 \end{cases}$$

Alors  $W_T^*$  est aussi la solution du problème  $(P_5)(\varepsilon)$  et réciproquement.

Autrement dit, en choisissant une valeur de  $A$  qui corresponde à une valeur de l'option Put égale à  $\varepsilon$  (tel que  $P((A/k)^{1/\gamma} \times H_0^*, W^0, T) = \varepsilon$ ), le problème  $(P_4)(A)$  s'analyse comme celui d'un investisseur CRRA avec une contrainte explicite de type "Limited Expected Loss" (problème  $(P_5)(\varepsilon)$ ).

On a représenté sur le graphique (Fig.9) la correspondance, pour  $\gamma$  et  $W^0$  fixés, et pour différentes valeurs de  $W_T$ , entre le niveau d'aversion à la perte,  $LossAversion(C, W^0, W_T, \gamma) \equiv C \times L(W^0, W_T, \gamma)$ , et la valeur du paramètre  $\varepsilon$ .

On retrouve, pour une valeur de  $\varepsilon$  suffisamment élevée (supérieure à 22% dans l'exemple d'application numérique traité), le cas de la solution du problème de Merton sans contrainte qui correspond à  $A = 1$ .

D'autre part, on remarque que plus la valeur du paramètre,  $\varepsilon$  est basse, plus l'écart du niveau d'aversion à la sous-performance obtenu pour deux valeurs de richesse finales distinctes est élevé.

A titre complémentaire, on a représenté, sur la figure (Fig.10), en fonction du niveau du paramètre de risque maximum  $\varepsilon$ , la valeur prise par chacun des deux "strikes" (noté  $M_{max}$  et  $M_{min}$ ) correspondant aux deux bornes séparant les trois intervalles de valeurs de l'actif risqué,  $M$ , pour lesquels la stratégie optimale exhibe

---

20. On peut supposer, sans perte de généralité, que  $B = 1$  et le problème  $(P_4)(A, B)$  ne dépend plus du paramètre  $B$ .

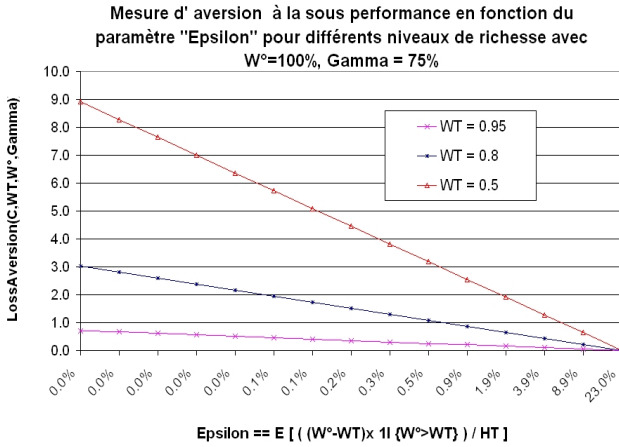


FIGURE 9.  $LossAversion(C, W^0, W_T, \gamma)$  en fonction de  $\epsilon$   $W^0 = 100\%$ ,  $\gamma = 75\%$ , et  $W_T = 50\%$ ,  $80\%$  ou  $95\%$ .

un "pay-off" différent <sup>21</sup>.

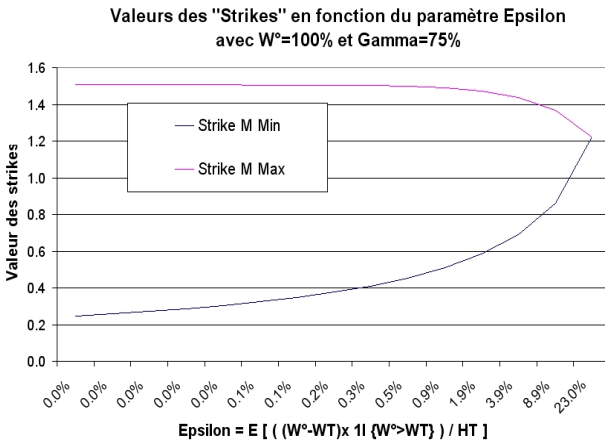


FIGURE 10. Valeurs des "strikes" ( $M_{max}$  et  $M_{min}$ ) en fonction de la probabilité de sous-performance ( $\alpha$ ).  $W^0 = 100\%$  et  $\gamma = 75\%$ .

En conclusion, le problème avec contrainte de risque explicite "LEL" peut aussi s'interpréter comme celui de l'investisseur averse à la perte qui cherche à maximiser une fonction d'utilité continue prenant en compte un coût d'utilité supplémentaire lié à l'amplitude de la sous-performance.

Réciproquement, on peut interpréter le choix du niveau d' aversion à la perte de

21. Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, sous les hypothèses du modèle d'actifs de B & S, il existe une correspondance biunivoque entre  $M_t$ , la valeur de l'actif risqué à la date t, et  $H_t$  celle du portefeuille numéraire ou de croissance optimale; en particulier, les valeurs seuils notées  $M_{max}$  et  $M_{min}$  correspondent aux valeurs de l'actif risqué qui s'obtiennent de celles de  $\bar{H}$  et  $\underline{H}$  par cette transformation.

cet investisseur en terme financier en lui faisant correspondre le choix d'une mesure de risque portant sur la valeur d'une option "Put" de couverture associée au ratio Sharpe Omega.

### 2.3. Conclusion de la section.

Dans cette section, nous avons revisité la littérature portant sur les problèmes de choix d'allocation dynamique de portefeuille avec contrainte de gestion du risque et apporté les contributions suivantes :

Nous avons montré les deux résultats d'équivalence suivants :

Le problème (P3) de l'investisseur "CRRA Loss Averse", avec une fonction d'utilité CRRA généralisée qui pénalise de manière uniforme la perte (forme de fonction d'utilité discontinue), est équivalent au problème (P2) de l'investisseur CRRA ayant une contrainte de risque explicite de type "Value at Risk" à son horizon d'investissement.

Le problème (P4) de l'investisseur "CRRA Loss averse", avec une fonction d'utilité CRRA généralisée qui pénalise la perte en fonction du coût d'utilité engendré par cette perte (forme de fonction d'utilité continue), est équivalent au problème (P5) de l'investisseur CRRA ayant une contrainte explicite de type "Limited Expected Loss" à son horizon d'investissement.

De plus, nous avons mis en lumière le fait que l'expression de la contrainte de perte de la stratégie optimale admet, selon la mesure de perte considérée, des propriétés différentes :

- (1) Cas de l'investisseur averse à la perte avec profil de gain discontinu :

Dans le cas du problème (P2), le niveau de risque de perte de la stratégie optimale, i.e.  $p(W_T^* < W^0)$ , s'identifie à la probabilité de perte du portefeuille de "croissance optimale" en dessous d'un certain seuil noté  $\bar{H}$ .

L'expression du seuil  $\bar{H}$  est fonction des paramètres de marché et du niveau de probabilité de perte considéré; en revanche, il est indépendant du niveau de richesse cible (i.e. paramètre  $W^0$  de notre modèle), et du niveau d'aversion au risque de l'investisseur (i.e. paramètre  $\gamma$ ).

La constante d'aversion à la perte du problème (P3) et la valeur du seuil  $\bar{H}$  sont liés par une correspondance bi-univoque qui dépend des paramètres  $W^0$  et  $\gamma$ .

- (2) Cas de l'investisseur averse à la perte avec profil de gain continu :

Dans le cas du problème (P5), le niveau de risque de perte de la stratégie optimale, i.e.  $e(W_T^*)$ , s'identifie au coût d'acquisition d'une option "Put" de couverture contre la sous-performance relativement à la valeur cible de richesse  $W^0$ , du portefeuille sous-jacent de type "Merton". Il s'agit de la mesure de perte associée au ratio de Sharpe Omega de ce portefeuille pour le niveau de richesse cible  $W^0$ .

Cette mesure de perte dépend de la valeur des paramètres  $W^0$  et  $\gamma$ . De plus, contrairement à l'investisseur avec contrainte explicite de type VaR (i.e. problème (P2)), la probabilité de sous-performance de la stratégie optimale de l'investisseur avec contrainte "LEL" (i.e problème (P5)) dépend implicitement de la valeur de la richesse cible, de la valeur du paramètre d'aversion au risque mais aussi du niveau d'espérance de perte considérée.

### 3. Investisseur "loss averse" et neutre au risque

Nous nous intéresserons, dans cette section, aux mesures de risque "downside risk", i.e. Probabilité de Perte, Espérance de Perte ou Semi-Variance, qui ont été proposées dans la littérature en guise de mesures alternatives à la Variance.

Nous rappellerons les principales propriétés des stratégies solutions des problèmes de maximisation de l'utilité espérée d'un agent loss averse neutre au risque; ces problèmes d'investissement traduisant un arbitrage entre espérance de gain et "downside risk" (Moments Partiels Inférieurs d'ordre 0 à 2) ont été proposés par [Berkelaar Kouwenberg, 2000].

Nous considérons ensuite les problèmes similaires de maximisation de l'espérance de la richesse finale sous contrainte explicite de "downside risk" et montrons quelle relation d'équivalence lie le choix de la valeur du paramètre d'aversion à la perte de l'agent correspondant au problème de [Berkelaar Kouwenberg, 2000] avec celui du niveau de "downside risk" correspondant au problème avec contrainte explicite.

#### 3.1. Cadre général : le critère "Moyenne / Downside Risk".

[Berkelaar Kouwenberg, 2000] étudient le problème de maximisation de l'espérance d'utilité d'un agent averse à la perte cherchant à arbitrer entre espérance de performance et risque de sous-performance.

Ces critères qui consistent, pour un niveau d'espérance donnée, à pénaliser la partie de la distribution des richesses en dessous de la cible, se fondent, d'une part, sur des mesures de risque de perte assez populaires, les mesures "downside risk" (telles que la probabilité de perte, l'espérance de perte, ou la semi-variance) et, d'autre part, sur le choix d'une fonction d'utilité linéaire pour la mesure de l'aversion au risque standard.

Le problème d'investissement correspondant est le suivant :

PROBLÈME 6.

$$(P6) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(W_T) - A \times LPM(\gamma, W^0, W_T) \\ s.a. \quad E(W_T/H_T) = 1 \end{cases}$$

avec  $LPM(\gamma, W^0, W_T) = E \{ (Max(W^0 - W_T, 0))^\gamma \}$  qui désigne le moment partiel inférieur (noté "LPM" pour "Lower Partial Moment"),

avec  $\gamma \geq 0$ , l'ordre du moment représentant l'attitude au risque de l'investisseur,  $A$ , le coefficient d'aversion à la perte de l'investisseur et  $W^0$  la cible de richesse à atteindre.

Remarquons que le problème (P6) peut se traduire en terme de maximisation de l'utilité espérée de l'investisseur ayant une fonction d'utilité intégrant dans son expression une fonction de perte (i.e. mesurant l'aversion à la perte); l'expression de cette fonction d'utilité est la suivante :

$$v(x) = \begin{cases} x - A(W^0 - x)^\gamma & \text{si } x \leq W^0 \\ x & \text{si } x > W^0 \end{cases}$$

Nous avons représenté sur la figure (Fig.11) ci-dessous, les valeurs prises par cette fonction d'utilité pour les trois différentes valeurs du paramètre  $\gamma$  considérées (i.e. 0,1 ou 2).

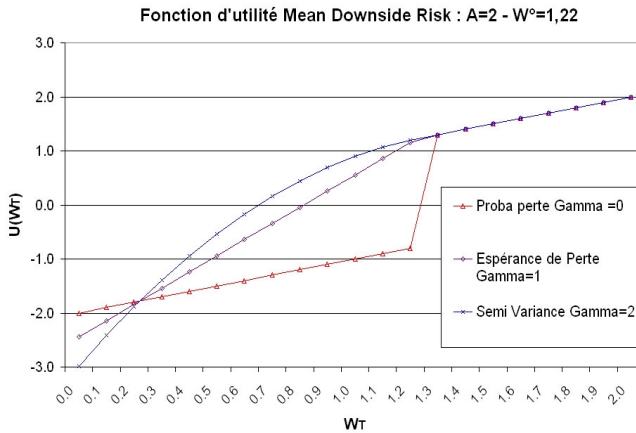


FIGURE 11. Fonctions d'utilité "Moyenne / Downside Risk".  
 $A = 2$ ,  $W^0 = 122\%$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 1$  ou  $\gamma = 2$ .

Comme l'illustre la figure (Fig.11), selon le choix du paramètre  $\gamma$ , la sensibilité au risque de l'investisseur est très différente :

- Pour les deux plus faibles valeurs de  $\gamma$  ( $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 1$ ), l'investisseur est très sensible à de faibles déviations en dessous de la richesse cible, tandis que pour  $\gamma = 2$ , l'investisseur sera d'avantage préoccupé par les variations plus larges (prise en compte de l'amplitude de la sous-performance).



- En dessous du seuil de richesse cible  $W^0$ , l'investisseur sera risque-neutre pour  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 1$  (fonction d'utilité linéaire), ce qui implique un comportement "joueur" pour l'investisseur (c'est l'effet "Casino" déjà décrit pour la stratégie "CRRA VaR") qui est prêt, en cas de sous-performance intermédiaire, à prendre plus de risque, dans l'espoir de pouvoir minimiser sa perte. Au contraire il sera risque averse pour  $\gamma = 2$  mais avec une aversion relative au risque croissante, ce qui génère encore une exposition en actif risqué d'autant plus importante que la sous-performance l'est.
- au-dessus de la richesse cible, la fonction d'utilité est linéaire quelque soit le choix du paramètre  $\gamma$ , ce qui implique que l'investisseur est neutre au risque.

La forme définitive du problème considéré par [Berkelaar Kouwenberg, 2000] est la suivante<sup>22</sup> :

PROBLÈME 7.

$$(P7) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(v(W_T)) \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1; W_T \geq 0 \end{cases}$$

où la fonction d'utilité à maximiser est la suivante :

$$v(x) = \begin{cases} x - A(W^0 - x)^\gamma & \text{si } x \leq W^0 \\ x & \text{si } W^0 < x \leq \bar{W} \\ \bar{W} & \text{si } x > \bar{W} \end{cases}$$

Avec  $\gamma$  le paramètre d'aversion représentant l'attitude au risque de perte de l'investisseur,  $A$  son coefficient d'aversion à la perte,  $W^0$  la cible de richesse à atteindre et  $\bar{W}$  le niveau de richesse maximale (i.e. seuil de "satiété" de l'investisseur).

### 3.2. Probabilité ou espérance de sous-performance comme mesure de risque.

[Berkelaar Kouwenberg, 2000] obtiennent le résultat suivant (avec les mêmes notations que précédemment) :

PROPRIÉTÉ 8. Avec  $\leq \gamma \leq 1$ , la richesse terminale optimale du problème (P7) est donnée par l'expression suivante,

$$W_T^* = \begin{cases} \bar{W} & \text{si } H_T > \bar{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} \leq H_T \leq \bar{H} \\ 0 & \text{si } H_T < \underline{H} \end{cases}$$

où  $\bar{H} \equiv k$  et  $\underline{H} \equiv k/(1 + A(W^0)^{\gamma-1})$  Avec  $k \geq 0$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$

---

22. [Berkelaar Kouwenberg, 2000] proposent cette forme modifiée de fonction d'utilité bornée pour palier au problème de la linéarité au-dessus de la richesse cible (qui rend le problème d'optimisation non borné) ; Cette valeur de richesse seuil,  $\bar{W}$ , s'interprète comme un niveau de satiété au-dessus de laquelle, si atteinte, l'intégralité de la richesse de l'agent est investi dans l'actif non risqué. L'ajout d'une contrainte supplémentaire de non négativité sur la richesse finale dans le problème de maximisation permet d'éviter des niveaux de richesse négative.

Ce résultat implique que la stratégie peut s'interpréter comme un investissement sur deux options call binaires de strike différents : la première, de strike  $\bar{H}$ , payant  $(\bar{W} - W^0)$  ou 0 et la seconde, de strike  $\underline{H}$ , et payant  $W^0$  ou 0.

Nous donnons ci-dessous l'expression de la valeur intermédiaire de la stratégie dynamique obtenue dans le cas du modèle à deux actifs de B&S :

CONSÉQUENCE 5. La valeur à la date,  $t$ , de la stratégie dynamique atteignant la solution optimale du problème (P7), notée  $W_t^*$ , est donnée par la formule :

$$W_t^* = W^0 B_c(H_t, \underline{H}, T - t) + (\bar{W} - W^0) B_c(H_t, \bar{H}, T - t)$$

avec les mêmes notations que précédemment et où  $B_c(H_t, X, T - t)$  désigne la valeur, à la date  $t$ , de l'option call binaire, d'échéance  $T - t$ , de strike  $X$ , sur le sous-jacent  $H_t$ .

Nous plaçant à nouveau dans le cadre restrictif du modèle de B&S, nous avons représenté sur la figure (Fig.12) ci-dessous, le "pay-off"<sup>23</sup>, des stratégies "mean downside risk" (dans la suite notées "MD") pour  $\gamma = 0$  et  $\gamma = 1$ .

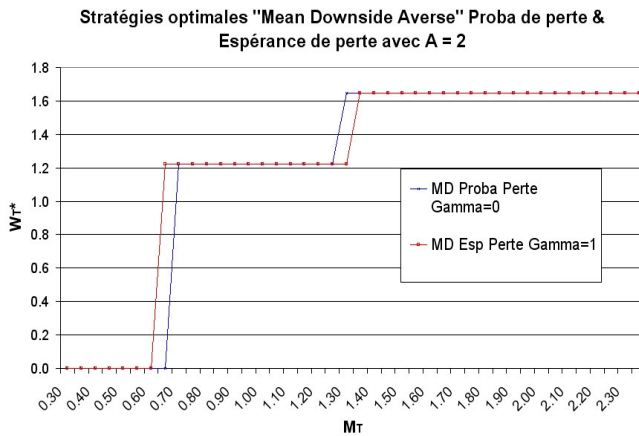


FIGURE 12. Stratégies optimales "Moyenne / Downside Risk" - Probabilité et Espérance de Perte -  $A = 2$ ,  $W^0 = 122\%$ .

Les valeurs numériques des autres paramètres sont les suivantes :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$  et  $T = 5$ .

23. On désigne par "pay-off", la courbe de valeur de la richesse terminale exprimée en fonction du niveau de l'actif risqué, noté  $M_T$ .

Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, sous l'hypothèse du modèle d'actifs de B & S, il existe une correspondance biunivoque entre  $M_t$ , la valeur de l'actif risqué à la date  $t$ , et  $H_t$  celle du portefeuille numéraire ou de croissance optimale, ce qui nous permet de tracer cette courbe.

On observe que la richesse optimale exhibe un double profil "binaire" :

- En dessous du niveau de richesse cible, la richesse optimale tombe de façon discontinue à un niveau de richesse nulle.
- Le passage entre la zone de sur-performance (niveau de satiété) et le niveau intermédiaire (richesse cible) se fait également de manière discontinue.

### 3.3. Choix de la "Downside Variance" comme mesure de risque.

Dans le cas de la semi-variance, [Berkelaar Kouwenberg, 2000] obtiennent le résultat suivant

PROPRIÉTÉ 9. Avec  $\gamma > 1$ , la richesse terminale optimale du problème (P $\gamma$ ) est donnée par l'expression suivante :

$$W_T^* = \begin{cases} \bar{W} & \text{si } H_T > \bar{H} \\ W^0 - \left(\frac{k/H_T - 1}{A\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)} & \text{si } \underline{H} \leq H_T < \bar{H} \\ 0 & \text{si } H_T < \underline{H} \end{cases}$$

où  $\bar{H} \equiv k$  et  $\underline{H} \equiv k/(1 + A\gamma(W^0)^{\gamma-1})$  Avec  $k \geq 0$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$

On en déduit que, pour  $\gamma = 2$ , la stratégie dynamique optimale, notée "Moyenne / Semi-Variance", se décompose comme la somme de trois positions optionnelles élémentaires : une position longue sur une option Put de strike  $\bar{I} \equiv 1/\underline{H} = (2AW^0 + 1)/k$ , une position courte sur une option Put de strike  $\underline{I} \equiv 1/\bar{H}$  et enfin une position longue sur une option put binaire de strike  $\underline{I} = 1/\bar{H}$ , les trois options étant écrites sur le même sous-jacent, le portefeuille atteignant la richesse terminale  $I_T$ <sup>24</sup>.

L'expression de la richesse intermédiaire dans le cas du modèle à deux actifs de B&S en découle :

CONSÉQUENCE 6. La valeur à la date,  $t$ , de la solution optimale "MD" avec  $\gamma = 2, W_t^*$ , est donnée par la formule suivante :

$$W_t^* = (\bar{W} - W^0)B(I_t, \underline{I}, T - t) + ak\{P(I_t, \bar{I}, T - t) - P(I_t, \underline{I}, T - t)\}$$

Avec  $P(I_t, X, T - t)$  (resp.  $B(I_t, X, T - t)$ ) qui désigne la valeur du put européen (resp. de l'option put binaire) de strike  $X$ , d'échéance  $T-t$ , sur le sous-jacent  $I_t$  et où on a posé  $a \equiv 1/2A$

24. Il s'agit du portefeuille solution du problème dynamique de minimisation de la norme de la richesse terminale ; dans le cadre du modèle B&S à deux actifs considérés, ce portefeuille correspond à une stratégie dynamique investissant un poids constant de la richesse dans l'actif risqué, noté  $i$  qui est donné par la formule suivante :  $i \equiv -h \equiv -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \equiv -\frac{\lambda}{\sigma}$ . De plus le processus de prix du portefeuille, noté  $I_t$  est un mouvement brownien géométrique dont l'expression est la suivante :  $dI_t/I_t = (r - \lambda^2) dt - \lambda dZ_t$ , ou encore, de façon équivalente  $I_t = I_0 \exp\{(r - \frac{3}{2}\lambda^2)t - \lambda Z_t\}$  avec  $I_0 = e^{(\lambda^2 - 2r)T}$ .

Dans le cadre des hypothèses restrictives du modèle de B&S, nous avons représenté sur la figure (Fig.13) ci-dessous, le "pay-off" de la stratégie "Moyenne / Semi-Variance" (stratégie "MD" avec  $\gamma = 2$ , notée "MSV" dans la suite de la thèse) et à titre comparatif celui de la stratégie "Moyenne / Variance" ("MV") standard.

On observe que la richesse terminale optimale n'exhibe pas de discontinuité au niveau du seuil de la valeur de l'actif risqué marquant le passage entre la zone intermédiaire de richesse et la zone basse (égale à 0); il n'y a donc pas d'effet casino ("gambling effect") entre l'état intermédiaire et l'état de sous-performance (richesse nulle) contrairement au cas  $\gamma \leq 1$ .

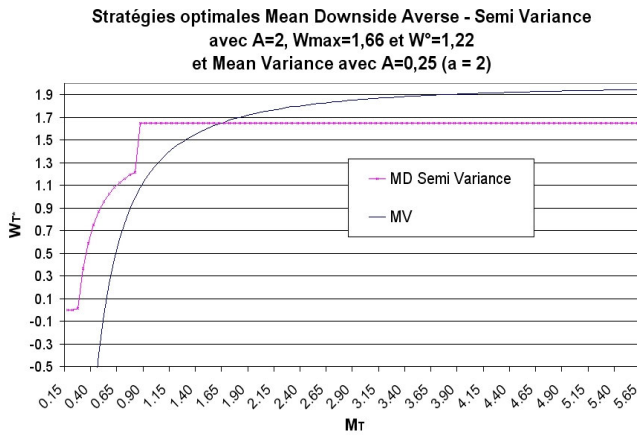


FIGURE 13. Stratégie optimale "Moyenne / Semi-Variance" & "Moyenne / Variance"

Semi-Variance :  $A = 2$ ,  $W^0 = 122\%$  - Variance :  $A = 0,25$ .

Les valeurs numériques des autres paramètres sont les suivantes :  
 $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$  et  $T = 5$ .

Ce qui peut s'interpréter de la manière suivante : l'investisseur est plus préoccupé d'éviter les niveaux de richesses finales très faibles ou nulles que d'atteindre ou non la richesse cible (contrairement au cas précédent, sa richesse terminale est inférieure à la cible dans la zone de intermédiaire).

Cependant, on observe toujours une discontinuité au niveau du passage entre l'état de richesse haute et l'état de richesse intermédiaire du fait de la risque-neutralité de l'investisseur au-dessus de la richesse cible.

### 3.4. Expression du degré d'aversion en fonction du risque de perte toléré.

Nous considérons ici le problème avec contrainte explicite de "downside risk" suivant :

PROBLÈME 8.

$$(P8) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(W_T) \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1; LPM(\gamma, W^0, W_T) \leq \varepsilon; 0 \leq W_T \leq \bar{W} \end{cases}$$

PROPRIÉTÉ 10. *La richesse terminale optimale du problème (P8) est donnée par l'expression suivante,*

(1) *Pour  $\leq \gamma \leq 1$ ,*

$$W_T^* = \begin{cases} \bar{W} & \text{si } H_T > \bar{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} \leq H_T \leq \bar{H} \\ 0 & \text{si } H_T < \underline{H} \end{cases}$$

où  $\bar{H} \equiv k_1$  et  $\underline{H}$  tel que  $P(H_T \leq \underline{H}) = \frac{\varepsilon}{(W^0)^\gamma}$  Avec  $k_1 \geq 0$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$

(2) *Pour  $\gamma > 1$ ,*

$$W_T^* = \begin{cases} \bar{W} & \text{si } H_T > \bar{H} \\ W^0 - \left( \frac{k_1/H_T - 1}{A^\gamma} \right)^{1/(\gamma-1)} & \text{si } \underline{H} \leq H_T < \bar{H} \\ 0 & \text{si } H_T < \underline{H} \end{cases}$$

où  $\bar{H} \equiv k_1$  et  $\underline{H} \equiv k_1/(1 + k_2\gamma(W^0)^{\gamma-1})$  et avec  $(k_1, k_2)$  vérifiant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E(W_T^*(k_1, k_2)/H_T) = 1 \\ LPM(\gamma, W^0, W_T^*(k_1, k_2)) = \varepsilon \end{cases}$$

Nous en déduisons les résultats d'équivalence suivants :

CONSÉQUENCE 7.

(1) *Pour  $\leq \gamma \leq 1$ , si  $W_T^*$  est la solution du problème (P7)(A) avec A vérifiant,*

$$A = \left( \frac{k}{\underline{H}} - 1 \right) \times (W^0)^{1-\gamma}$$

où  $k$  est tel que  $E(W_T^*/H_T) = 1$  et où  $P(H_T \leq \underline{H}) = \frac{\varepsilon}{(W^0)^\gamma}$

alors  $W_T^*$  est aussi la solution du problème (P8)( $\varepsilon$ ) et réciproquement.

- (2) Pour  $\gamma > 1$ , si  $W_T^*$  est la solution du problème (P7)(A) avec  $k = k_1$  et  $A = k_2$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont solutions du système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} E(W_T^*(k_1, k_2)/H_T) = 1 \\ LPM(\gamma, W^0, W_T^*(k_1, k_2)) = \varepsilon \end{cases}$$

alors  $W_T^*$  est aussi la solution du problème (P8)( $\epsilon$ ) et réciproquement.

### 3.5. Conclusion de la section.

Malgré leur intérêt pratique et leur grande simplicité, les critères de type "Moyenne / Downside Risk" paraissent induire un certain nombre de comportements non souhaitables de la part de l'investisseur.

Il apparaît ainsi nécessaire de proposer des critères alternatifs qui puissent répondre aux difficultés majeures qu'induisent les critères examinés dans cette partie et notamment :

- La neutralité au risque au-dessus du seuil de richesse cible.
- La discontinuité des "pay-offs" impliquant un comportement joueur de l'investisseur ("effet casino").



## Critère moyenne - variance - downside risk

Si le critère du problème d'optimisation "Moyenne / Variance" ("MV" dans la suite) est très utilisé en pratique par les praticiens de la gestion (bien plus par exemple que l'approche du critère de maximisation de l'espérance d'utilité de l'investisseur avec une préférence CRRA), il est cependant bien connu que la mesure de risque qu'il utilise, la variance, présente un certain nombre d'inconvénients<sup>1</sup>.

Dans ce chapitre, le défaut qu'il s'agira de palier est son caractère symétrique<sup>2</sup> qui le rend inadapté à la prise en compte d'une forme de préférence asymétrique telle que l'aversion à la sous-performance.

Ainsi nous souhaitons généraliser l'approche du critère "Moyenne / Variance" ("MV" dans la suite) dans un cadre de choix d'allocation dynamique de portefeuille (voir par exemple [Bajeux-Besnainou Portait, 1998] pour l'analyse de ce problème sans contrainte d'aversion et [Nguyen Portait, 2002] pour l'analyse de ce même problème avec une contrainte supplémentaire de non négativité sur la richesse terminale).

Nous proposons pour cela d'étudier un problème d'optimisation plus général répondant à une pré-occupation de contrôle du risque de sous-performance : il s'agit du problème "Moyenne-Variance / Downside Risk" pour lequel nous exposons les principales propriétés des stratégies optimales correspondantes.

Nous résoudrons le problème d'investissement dynamique de l'asset manager qui cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale pour un choix particulier de fonction d'utilité appartenant à la classe HARA "loss averse" introduite dans le chapitre précédent. Il s'agit d'une fonction d'utilité qui généralise la forme standard de fonction d'utilité quadratique à la prise en compte de l'aversion à la sous-performance<sup>3</sup>.

A ce titre, nous considérons implicitement deux mesures de perte introduites dans le chapitre précédent :

- La probabilité de perte (niveau de VaR) pour l'agent averse à la perte cherchant à maximiser une fonction d'utilité quadratique dont l'expression comprend une fonction de perte constante. Ce problème sera traité dans la première section.
- L'espérance de perte (niveau de LEL ("Limited Expected Loss")) similaire à la notion de CVaR) pour l'agent averse à la perte cherchant à maximiser

---

1. En particulier il s'agit d'une mesure de risque incohérente.

2. Les gains extrêmes sont pénalisés autant que les pertes de même amplitude.

3. Cette fonction d'utilité "quadratique loss averse" comprend une fonction de perte qui pénalise la sous-performance par rapport au niveau de richesse cible.



une forme de fonction d'utilité quadratique généralisée qui pénalise le coût d'utilité de la sous-performance. Ce problème sera analysé dans la seconde section.

### 1. Stratégie optimale avec contrainte VaR

Nous considérons dans cette section un investisseur qui cherche à allouer son portefeuille en se fondant sur une approche "MV" dynamique : arbitrage entre espérance de rendement et niveau de risque à l'horizon d'investissement avec rebalancements intermédiaires possibles.

De plus, on suppose qu'il doit tenir compte d'une contrainte supplémentaire de type VaR imposée, par exemple, par l'investisseur final ou le "risk manager".

Ce qui peut s'écrire en terme de maximisation de l'utilité espérée de la richesse finale, pour un choix de fonction d'utilité quadratique, de la façon suivante :

PROBLÈME 9.

$$(P9) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(u(W_T)) \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1; \quad P(W_T \geq W^0) \geq 1 - \alpha \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ fixé;} \\ W_T \geq \underline{W} \end{cases}$$

avec  $u(\cdot)$  la fonction d'utilité quadratique donnée par la formule :  
 $u(x) = x - (1/2a)x^2$  et avec  $W^0 < a$  (sinon la contrainte de sur-performance n'est pas pertinente)

Comme pour les problèmes d'optimisation "moyenne-downside risk" étudiés dans la dernière section du chapitre précédent, nous imposons une contrainte supplémentaire de non négativité sur la richesse terminale (car l'utilité marginale de la fonction d'utilité quadratique n'est pas infinie en '0').

Plus précisément, et pour refléter l'éventuelle aversion supplémentaire de l'investisseur à la sous-performance, nous considérons une contrainte de richesse finale minimale de la forme  $W_T \geq \underline{W}$  avec  $0 \leq \underline{W} \leq W^0$ .

Ce qui implique, par AOA, que la richesse intermédiaire de l'investisseur ne peut être inférieure à la valeur présente de ce seuil de richesse :

$W_t \geq \underline{W} \times ZC(t, T) \geq 0$  où  $ZC(t, T)$  désigne la valeur, à la date  $t$ , de l'obligation "Zéro-Coupon" d'échéance  $T$ <sup>4</sup>.

Pour une valeur du coefficient d'aversion à la sous-performance,  $B \geq 0$ , à définir<sup>5</sup>, le problème est équivalent au problème suivant :

---

4. la valeur, à la date  $t$ , de l'obligation "Zéro-Coupon" d'échéance  $T$  est donnée par  $ZC(t, T) \equiv E\left(\frac{1}{H_T}\right)$

5. voir la propriété 11 d'équivalence dans la sous-section 1.2 qui suit, intitulée "Choix du niveau d'aversion à la sous-performance".

PROBLÈME 10.

$$(P10) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(u(W_T)) - BP(W_T \leq W^0) \\ s.a. \quad E(W_T/H_T) = 1; W_T \geq \underline{W} \end{cases}$$

Ce problème d'investissement est donc celui de l'investisseur averse à la sous-performance qui cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale pour une forme de fonction d'utilité quadratique généralisée qui exhibe une discontinuité au voisinage du seuil de richesse cible et dont l'expression est la suivante :

$$v(W) \equiv u(W) - B \times 1_{\{W \leq W^0\}}$$

Il paraît utile de mentionner les cas limites suivants :

- Pour  $a \rightarrow +\infty$  (pas d'aversion au risque), le problème se ramène au problème "Moyenne / Downside Risk" (noté "MD" dans la suite) avec  $\gamma = 0$  présenté dans la dernière section du précédent chapitre<sup>6</sup>.
- Pour  $B \rightarrow 0$  (pas d'aversion à la sous-performance), le problème s'identifie au problème "MV" avec contrainte explicite de protection de niveau  $\underline{W}$  (noté "MV PI" dans la suite de la section).

### 1.1. Expression de la richesse finale optimale.

THÉOREME 2. La richesse terminale optimale du problème (P10) est donnée par l'expression suivante,

$$(1) \text{ Si } W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB},$$

$$W_T^* = \begin{cases} a(1 - k/H_T) & \text{si } H_T > \overline{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \overline{H} \\ a(1 - k/H_T) & \text{si } H_{\underline{W}} < H_T \leq \underline{H} \\ \underline{W} & \text{si } H_T \leq H_{\underline{W}} \end{cases}$$

$$(2) \text{ Si } W^0 < \underline{W} + \sqrt{2aB}$$

$$W_T^* = \begin{cases} a(1 - k/H_T) & \text{si } H_T > \overline{H} \\ W^0 & \text{si } H_{\underline{W}} < H_T \leq \overline{H} \\ \underline{W} & \text{si } H_T \leq H_{\underline{W}} \end{cases}$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$ ,

avec  $\overline{H} \equiv k/(1 - W^0/a)$ ,  $\underline{H} \equiv k/(1 - (W^0 - \sqrt{2aB})/a)$ ,<sup>7</sup>  $H_{\underline{W}} \equiv k/(1 - \underline{W}/a)$  et où  $\overline{H} > \underline{H}$ .

6. il s'agit du problème "Moyenne / Downside Risk" proposé par [Berkelaar Kouwenberg, 2000] pour un choix de mesure de perte correspondant à la probabilité de sous-performance par rapport au niveau cible, i.e.  $\gamma = 0$ . A noter que [Berkelaar Kouwenberg, 2000], afin de palier à la neutralité au risque de l'investisseur en cas de sur-performance, prennent en compte une contrainte technique supplémentaire de richesse maximum ou seuil de satiété, i.e. " $W_T < \overline{W}$ ".

7.  $\underline{H}$  est solution de

$$u(I(k/\underline{H})) - (k/\underline{H})I(k/\underline{H}) - u(W^0) + (k/\underline{H})W^0 = B \Leftrightarrow (a/2)(1 - k/\underline{H})^2 + W^0(k/\underline{H}) = W^0 - (W^0/2a) + B$$

où  $I : x \rightarrow I(x) \equiv a(1 - x)$  désigne la fonction inverse de  $u'$ , la fonction dérivée première de la fonction d'utilité quadratique  $u$ .

Nous pouvons faire les remarques suivantes sur le profil de gain final de la stratégie optimale du problème MV avec contrainte VaR (désignée dans la suite stratégie "MV VaR") :

- (1) Pour  $a$ ,  $B$ ,  $\underline{W}$  fixés, Si  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$ , (i.e le niveau de richesse cible est suffisamment éloigné du niveau de la contrainte d'assurance de portefeuille), on a  $\underline{H} \geq H_{\underline{W}}$ . Sinon, on a  $\underline{H} < H_{\underline{W}}$  et la stratégie optimale prend la forme d'une stratégie d'assurance de portefeuille à deux niveaux de protection donnée par la seconde expression du théorème (2).
- (2) Pour  $a$ ,  $W^0$ ,  $\underline{W}$  fixés, la contrainte  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$  implique que  $B \leq B_{\max}$  avec  $B_{\max} \equiv A \times (W^0 - \underline{W})^2$  où  $A \equiv 1/2a$  représente le niveau d'aversion au risque et  $B_{\max}$  le seuil d'aversion à la perte au-delà duquel l'asset manager n'est plus en mesure de prendre de risque supplémentaire de perte dans les états intermédiaires de marché<sup>8</sup>. L'expression de ce seuil d'aversion implique que sa valeur est une fonction croissante du niveau d'aversion au risque et de l'écart entre la richesse cible  $W^0$  et la richesse minimale  $\underline{W}$ .
- (3) Le cas limite  $W^0 = \underline{W} + \sqrt{2aB}$  implique  $H_{\underline{W}} = \underline{H}$  et correspond au niveau d'aversion limite (i.e.  $B = B_{\max}$ ) au-delà duquel la stratégie "MV VaR" est indépendante du paramètre d'aversion  $B$  et s'identifie à une stratégie d'assurance de portefeuille à deux niveaux de protection<sup>9</sup> :
  - Un premier état intermédiaire où la richesse finale est maintenue égale au niveau de performance cible,  $W^0$ .
  - Un deuxième état où la richesse finale est égale au niveau de richesse minimale  $\underline{W}$ .
- (4) On retrouve le cas limite  $B = 0$  pour  $W^0 = \underline{W}$  (puisque dans ce cas  $B_{\max} \equiv A \times (W^0 - \underline{W})^2 = 0$ ); de plus, on a aussi  $\underline{H} = \overline{H}$  et la stratégie optimale s'identifie à la stratégie "MV PI" à un seul état de protection sans aversion à la perte par rapport à la cible  $W^0$ .

---

8. Ce qui peut s'interpréter de la manière suivante : pour  $B \geq B_{\max}$ , le niveau de perte tolérée (imposée par exemple par le risk manager) est si faible qu'il contraint l'asset manager à suivre une stratégie d'assurance de portefeuille, en maintenant la richesse finale au-dessus de la richesse cible,  $W^0$ , dans une zone de valeurs médianes du portefeuille sous-jacent  $H$  ( $H_{\underline{W}} < H_T \leq \overline{H}$ )

9. il est facile de montrer que cette stratégie peut s'interpréter comme la combinaison des stratégies élémentaires suivantes :

- Une stratégie d'investissement s'identifiant à la solution du problème "MV" dynamique sans aucune contrainte de risque ni de protection (à la valeur de la constante  $k$  près),
- Un première niveau de couverture comprenant une option put de strike  $\underline{W}$  écrite sur ce même portefeuille,
- Un deuxième niveau de couverture constitué d'une option call spread binaire payant  $W^0 - \underline{W}$  entre les strikes  $\underline{W}$  et  $W^0$  et écrite sur le même sous-jacent.

On notera la similitude de ce "pay-off" avec celui de la stratégie "MD" d'ordre 0 à 1 étudiée dans la section précédente.

On en déduit du théorème (2) que la stratégie optimale peut être décomposée en stratégies élémentaires, résultat qui peut s'énoncer de la manière suivante :

CONSEQUENCE 8. *La stratégie dynamique atteignant la richesse terminale solution du problème (P10) et dont l'expression est donnée dans le théorème(2) est la combinaison des positions élémentaires suivantes :*

(1) Si  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$ ,

- Une stratégie d'assurance de portefeuille consistant à détenir d'une part un portefeuille s'identifiant (à la valeur de la constante  $k$  près) à la solution du problème moyenne variance dynamique sans contraintes et, d'autre part, une position acheteuse d'une option Put de strike  $W^0$  écrite sur le même portefeuille.
- Une stratégie "vendeuse de couverture" sur le même portefeuille sous-jacent et comprenant une position vendeuse d'une option Put de strike  $W^0 - \sqrt{2aB}$  et une position vendeuse d'une option Put binaire de même strike et payant  $\sqrt{2aB}$ .
- Une stratégie "acheteuse de couverture" constituée d'une position acheteuse d'une option Put de strike  $\underline{W}$  sur le même portefeuille sous-jacent.

(2) Si  $W^0 < \underline{W} + \sqrt{2aB}$ ,

- Une stratégie d'assurance de portefeuille consistant à détenir d'une part un portefeuille s'identifiant (à la valeur de la constante  $k$  près) à la solution du problème moyenne variance dynamique sans contraintes et, d'autre part, une position acheteuse d'une option Put de strike  $W^0$  écrite sur ce même portefeuille.
- Une stratégie "vendeuse de couverture" comprenant une position vendeuse d'une option Put binaire de strike  $\underline{W}$  et payant  $W^0 - \underline{W}$  écrite sur le même portefeuille sous-jacent.

Dans la suite de cette section , afin d'analyser les propriétés de la stratégie optimale, nous allons nous placer dans le cadre restreint du modèle à deux actifs de [Black Scholes, 1973] (dans la suite B&S).

On rappelle que dans ce cadre, on fait l'hypothèse de l'existence d'une seule source de risque (i.e. le nombre d'actifs est de deux); de plus, on suppose que tous les paramètres servant à décrire la dynamique du prix des deux actifs financiers (un actif sans risque et un actif risqué) sont constants. L'univers d'investissement se compose donc des deux actifs suivants :

- Un actif dit sans risque ("A.S.R.") représentant l'actif monétaire et dont la valeur à la date  $t$  est notée  $S_t^0$ ; cet actif a un rendement instantané donné

par

$$dS_t^0/S_t^0 = r dt$$

où  $r$  désigne le taux monétaire constant.

- Un actif dit risqué ("A.R") représentant le portefeuille de marché ou tout autre actif action dont la dynamique de prix est décrite par un mouvement brownien géométrique; son rendement instantané s'écrit

$$dM_t/M_t = \mu dt + \sigma dZ_t \equiv (r + \pi)dt + \sigma dZ_t$$

où le paramètre  $\mu$  représente son rendement moyen instantané (égal au taux court plus une prime de risque "action" notée  $\pi \equiv \mu - r$ ) et  $\sigma$  désigne sa volatilité constante.

On remarquera que dans le cadre du modèle de B&S, nous avons les propriétés suivantes :

- (1) Expression du portefeuille "numéraire", noté  $(H, h)$ , atteignant la richesse finale  $H_T$  :

-le portefeuille "numéraire" s'identifie à une stratégie dynamique investissant un poids constant dans l'actif risqué, noté  $h$ , qui est donné par l'expression suivante :  $h = \pi/\sigma^2 \equiv \lambda/\sigma$  .

-sa dynamique de prix est décrite par un mouvement brownien géométrique dont l'expression est la suivante :

$$dH_t/H_t = (r + \lambda^2)dt + \lambda dZ_t$$

ou de façon équivalente,  $H_t = \exp \left\{ (r + \frac{1}{2}\lambda^2)t + \lambda Z_t \right\}$ .

- (2) Expression du portefeuille "de norme minimum"<sup>10</sup>, noté  $(I, i)$ , atteignant la richesse finale  $1/H_T$  :

-le portefeuille "de norme minimum" correspond à une stratégie dynamique investissant un poids constant de la richesse dans l'actif risqué, noté  $i$ , qui est donné par la formule suivante :

$$i \equiv -h \equiv -\frac{\mu-r}{\sigma^2} \equiv -\frac{\lambda}{\sigma}$$

-la valeur de ce portefeuille, noté  $I_t$ , suit un mouvement brownien géométrique dont l'expression est la suivante :

$$dI_t/I_t = (r - \lambda^2) dt - \lambda dZ_t,$$

ou encore, de façon équivalente,  $I_t = I_0 \exp \left\{ (r - \frac{3}{2}\lambda^2)t - \lambda Z_t \right\}$

avec  $I_0 = e^{(\lambda^2-2r)T}$  .

- (3) Expression de la relation de correspondance entre la valeur des deux portefeuilles,  $H_t$  et  $I_t$ , et celle de l'actif risqué notée  $M_t$  :

Il existe une relation biunivoque entre la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , et celle de l'actif risqué,  $M_t$ , ou encore, entre celle du portefeuille de

---

10. Il s'agit du portefeuille solution du problème dynamique de minimisation de la norme de la richesse terminale.

"Norme Minimum",  $I_t$  et  $M_t$ . Ces relations sont données par les expressions suivantes :

$$H_t = \Psi(t)(M_t)^h \text{ avec } \Psi(t) \equiv e^{(r-\lambda(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}-\frac{\lambda}{2}))t} = e^{(1-h)(r+\frac{\lambda^2}{2h})t} = e^{(1-h)(r+\frac{h\sigma^2}{2})t},$$

$$\text{et } I_t = \Gamma(t)(M_t)^i \text{ avec } \Gamma(t) \equiv I_0 e^{(1-i)(r+\frac{\lambda^2}{2i})t} = I_0^* e^{(1-i)(r+\frac{i\sigma^2}{2})t}.$$

Cette dernière propriété nous permettra d'exprimer la valeur du portefeuille optimal en excès de celle du benchmark, notée  $Y_t^*$ , en fonction de  $M_t$ ; résultat qui nous sera utile dans la suite de cette section pour l'analyse des propriétés de la stratégie optimale.

Enfin, notons que dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons pour toutes les applications numériques, et sauf si cela est précisé autrement, les valeurs suivantes des paramètres :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$  et  $T = 5$ .

## 1.2. Choix du niveau d'aversion à la sous-performance.

L'équivalence entre les deux formulations du problème (avec contrainte explicite de VaR ou avec fonction d'utilité prenant en compte l'aversion à la perte) est donnée par la propriété suivante :

**PROPRIÉTÉ 11.** *Si  $W_T^*$  est la solution du problème (P10)(B) avec  $B$  vérifiant  $B = A \times (W^0 - a(1 - k/\underline{H}))^2$  où  $k$  est tel que  $E(W_T^*/H_T) = 1$  et où  $P(H_T \leq \underline{H}) = \alpha$  alors  $W_T^*$  est aussi la solution du problème (P9)( $\alpha$ ) et réciproquement.*

En nous plaçant dans le cadre du modèle à deux actifs de B&S, nous pouvons en déduire l'expression de  $\underline{H}$  en fonction du niveau de probabilité de perte maximum,  $\alpha$ .

Cette expression qui est indépendante du choix de la fonction d'utilité est la même que celle trouvée dans la section précédente où nous avons analysé la stratégie dynamique "CRRA VaR" <sup>11</sup>.

En revanche, la fonction, dont l'expression est donnée dans la propriété (11) et qui donne la correspondance entre les deux paramétrisations  $B$  et  $\alpha$ , n'est plus la même que dans le cas de la fonction d'utilité CRRA.

A titre d'illustration, nous avons représenté sur les figures ci-dessous la correspondance de valeurs entre  $B$  et  $\alpha$  pour  $a = 1,5$  (fig.1) et  $a = 4$  (fig. 2).

En comparant les deux figures ci-dessous, on observe l'effet escompté : la hausse de la valeur du paramètre de tolérance au risque,  $a$  (passant de 1,5 à 4) implique une baisse du seuil du paramètre d'aversion à la perte,  $B_{\max}$  (qui passe de 49,7% à 18%) ou de manière équivalente une hausse du niveau correspondant de probabilité de perte tolérée (qui passe de 0,4% à 14,5%).

---

11. solution du problème de maximisation de l'espérance d'utilité d'un investisseur CRRA ayant une contrainte de VaR identique

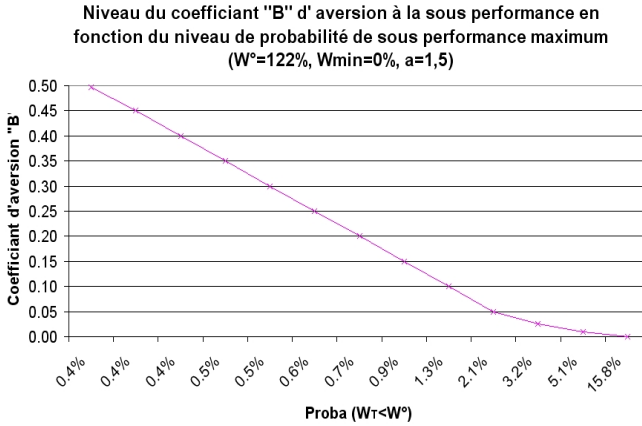


FIGURE 1. Niveau du coefficient d'aversion à la sous-performance, "B", en fonction du niveau de probabilité de sous-performance maximum noté  $\alpha \equiv P(W_T \leq W^0)$   
 $a = 1,5$ ,  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$

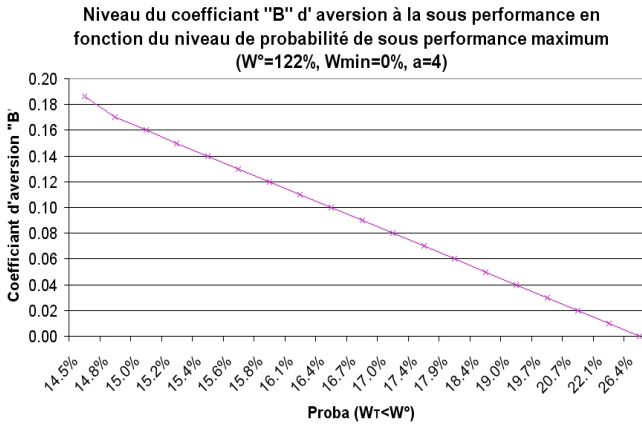


FIGURE 2. Niveau du coefficient d'aversion à la sous-performance, "B", en fonction du niveau de probabilité de sous-performance maximum noté  $\alpha \equiv P(W_T \leq W^0)$   
 $a = 4$ ,  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$

Nous avons représenté sur les figures suivantes, pour  $a = 1,5$  (Fig.3) et pour  $a = 4$  (Fig.4), les valeurs des "strikes" ( $M_{max}$ ,  $M_{VaR}$  et  $M_{W_{min}}$ ) correspondant aux trois bornes séparant les quatre intervalles de valeurs de l'actif risqué,  $M$ , pour lesquels la stratégie optimale exhibe un "pay-off" différent<sup>12</sup>, en fonction du niveau de sous-performance maximum,  $\alpha$ .

12. Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, sous les hypothèses du modèle d'actifs de B & S, il existe une correspondance biunivoque entre  $M_t$ , la valeur de l'actif risqué à la date t, et  $H_t$  celle du portefeuille numéraire ou de croissance optimale; en particulier, les valeurs seuils notées  $M_{max}$ ,  $M_{VaR}$  et  $M_{W_{min}}$  correspondent aux valeurs de l'actif risqué qui s'obtiennent de celles de  $\underline{H}$ ,  $\underline{H}$  et  $\underline{H}_{\underline{W}}$  par cette transformation.

Nous observons les deux cas limites déjà mentionnés :

- La stratégie "MV VaR" s'identifie à la stratégie MV sans contrainte d'aversion ("MV PI") pour un niveau de probabilité de perte supérieur à un certain seuil. Dans notre exemple d'application numérique, pour  $a = 1,5$  (Fig.3), ce seuil est égal à 15,8% et pour  $a = 4$  (Fig.4), il prend la valeur 26,4%. Ce seuil de probabilité de perte correspond implicitement au choix d'une valeur nulle pour le paramètre d'aversion, noté  $B$ . Ainsi, on observe que les courbes de valeurs des deux "strikes",  $M_{max}$  et  $M_{VaR}$ , se rejoignent à ce seuil de probabilité de perte (i.e la zone intermédiaire de protection disparaît).
- A l'opposé, pour les valeurs de  $\alpha$  inférieures à un seuil minimum (correspondant à une valeur du paramètre d'aversion égale à  $B_{max}$ ), la stratégie "MV VaR" s'identifie à la stratégie "MV PI" à deux états de richesses fixes ( $W^0$  et  $\underline{W}$ ) ; on observe que pour cette valeur du paramètre  $\alpha$ , les courbes des deux plus petits strikes,  $M_{VaR}$  et  $M_{W_{min}}$ , se rejoignent.

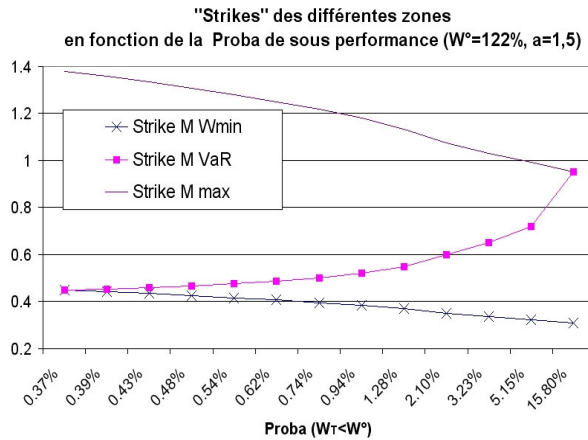


FIGURE 3. Valeurs des "strikes" ( $M_{max}$ ,  $M_{VaR}$  et  $M_{W_{min}}$ ) en fonction de la probabilité de sous-performance ( $\alpha$ )  
 $W^0 = 122\%$  et  $a = 1,5$ .



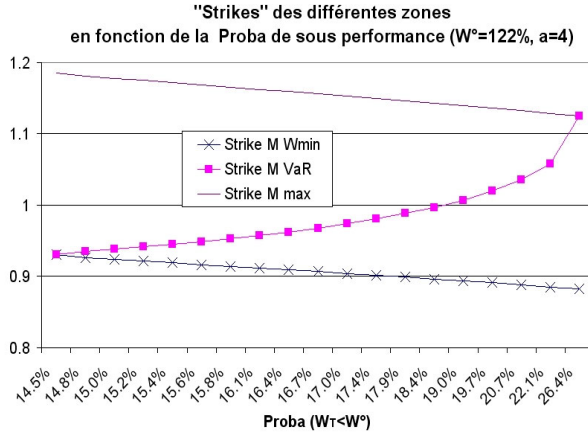


FIGURE 4. Valeurs des "strikes" ( $M_{max}$  et  $M_{VaR}$  et  $M_{Wmin}$ ) en fonction de la probabilité de sous-performance ( $\alpha$ )  
 $W^0 = 122\%$  et  $a = 4$ .

### 1.3. Analyse comparative du "pay-off" de la stratégie optimale.

Dans la suite, on s'intéresse au cas de la solution pour lequel on a  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$ .

Nous souhaitons comparer le profil de richesse finale de la stratégie "MV VaR" à celui de différentes stratégies déjà considérées précédemment.

- (1) Comparaison avec la stratégie optimale du problème MV avec contrainte de protection (stratégie "MV PI") et avec celle du problème MV sans contrainte (désignée dans la suite stratégie "MV").

Sur la figure (Fig.5), nous observons les deux points suivants :

- Dans les états de richesse intermédiaire à élevée (au-dessus du seuil de richesse cible), la stratégie MV VaR s'identifie à une stratégie d'assurance de portefeuille. La valeur de sa performance finale est comprise entre celle de la stratégie MV PI (à un seul niveau de protection  $W^0$  et correspondant au maximum d'aversion à la perte) et celle de la stratégie MV sans assurance de portefeuille (minimum d'aversion à la sous-performance).
- Dans la zone de sous-performance, la courbe de la stratégie MV VaR est en dessous de celle de la stratégie MV sans aucune contrainte de risque (effet "Casino" déjà mentionné dans le chapitre précédent).

- (2) Comparaison avec la stratégie optimale du problème Moyenne / Semi-Variance ("Mean Downside Variance"), notée "MSV".

A première vue, les "pay-offs" de ces deux stratégies ont certaines similitudes comme le montre la figure (Fig.6) ci-dessous; en effet si l'on

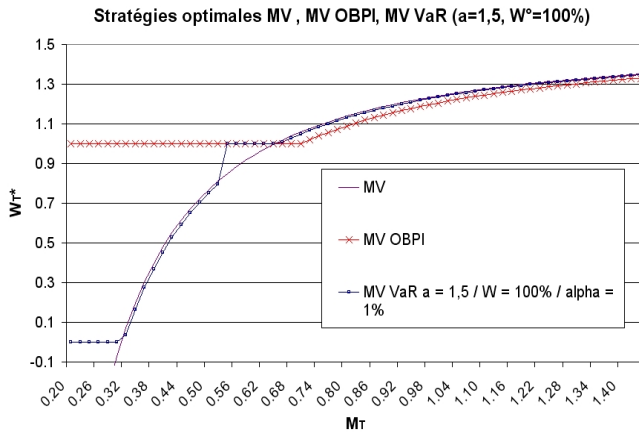


FIGURE 5. stratégies optimales MV, MVPI, MV VaR ( $a = 1,5$ ,  $W^0 = 100\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ ).

exclut la zone de sur-performance de la stratégie MV VaR, les trois autres états de richesse de cette stratégie (état intermédiaire, bas et de richesse nulle) sont similaires aux trois états de la stratégie "MSV" (état de sur-performance, intermédiaire et de richesse nulle).

Cependant en examinant les deux "pay-offs", état par état de richesse équivalente, nous en déduisons que les deux stratégies exhibent des propriétés assez différentes :

- La fonction d'utilité de la stratégie MV VaR n'étant pas linéaire au-dessus du seuil de richesse cible, il n'y a pas de discontinuité entre l'état intermédiaire et l'état de sur-performance; au contraire, la stratégie MSV admet un saut entre ces deux niveaux.
- La forme de la richesse de la stratégie MV VaR correspondant à l'état de sur-performance est similaire à celle de la stratégie MV<sup>13</sup>, alors que celle de la stratégie MSV correspond à une fonction constante égale au niveau de satiété.
- La valeur de la stratégie MV VaR dans l'état intermédiaire de richesse est constante et égale à la richesse cible (la couverture contre la sous-performance est donc totale). A l'opposé, dans un intervalle de valeurs médianes du sous-jacent, la valeur finale de la stratégie MSV est inférieure à la richesse cible (couverture partielle).

Ces trois points semblent plaider en faveur du profil de la stratégie MV VaR. Cependant, celle-ci a le grand inconvénient d'exhiber une discontinuité dans son "pay-off" au niveau du seuil de richesse cible, ce qui n'est pas le cas pour la stratégie MSV.

13. la stratégie "MV" admet un profil concave avec une borne de richesse maximale égale au paramètre de tolérance au risque,  $a$ , qui s'interprète comme le niveau implicite de satiété de l'investisseur

En effet, la stratégie MSV prend en compte, grâce à l'utilisation de la semi-variance comme mesure du risque, l'amplitude des déviations négatives par rapport à la cible, ce qui permet d'éviter l'effet casino de la stratégie MV VaR dans cet état intermédiaire de richesse (provenant de l'utilisation de la probabilité de sous-performance comme mesure de risque).

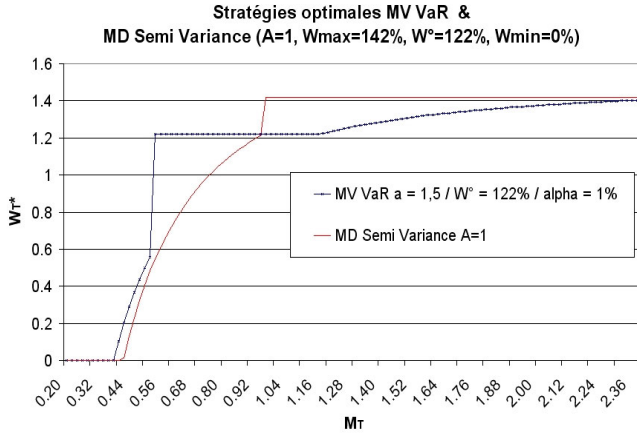


FIGURE 6. stratégies optimales MV VaR et MSV  
Stratégie MV VaR :  $a = 1,5$ ,  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ ,  $\alpha = 1\%$ .  
Stratégie MSV :  $A = 1$ ,  $\overline{W} = 142\%$ ,  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ .

### (3) Comparaison avec la stratégie solution optimale du problème CRRA VaR

L'exercice de comparaison entre les "pay-offs" des stratégies, solutions optimales des problème CRRA VaR et MV VaR, qui correspondent à des choix de fonctions d'utilité ayant des propriétés très différentes, semble difficile.

En partant de l'exemple numérique représenté sur la figure (Fig.7), et en considérant ces deux stratégies pour le même niveau de sous-performance maximale  $\alpha$  et la même valeur de richesse cible, nous pouvons cependant faire les remarques suivantes :

- Le profil de gain concave de la stratégie MV VaR implique une moindre performance que celle de la stratégie CRRA VaR dans la zone des richesses les plus élevées (dans notre exemple pour les valeurs de  $M_T$  supérieures à environ 2,3).  
Tandis que l'asset manager "MV VaR" opère un dé-investissement progressif au fur et à mesure que la richesse se rapproche du seuil de satiété représenté par le niveau du paramètre,  $a$  (dans l'exemple traité  $a = 4$ ), l'asset manager qui suit la stratégie convexe CRRA VaR continue d'augmenter son exposition en actif risqué.
- A l'opposé, à cause de son profil de gain concave, la stratégie MV VaR sur-performe, dans une zone de richesses "intermédiaires -

hautes” (dans notre exemple pour les valeurs de  $M_T$  de 1,2 à 2,3), la stratégie convexe CRRA VaR.

- Une discontinuité entre l’état intermédiaire et l’état de richesse nulle apparait dans le ”pay-off” de la stratégie MV VaR; elle résulte de la contrainte de non-négativité imposée dans le critère d’optimisation<sup>14</sup>.

Cette discontinuité est moins importante dans le cas de la stratégie CRRA VaR qui converge de façon continue vers 0 quand le sous-jacent tend vers 0 dans la zone de richesse basse.

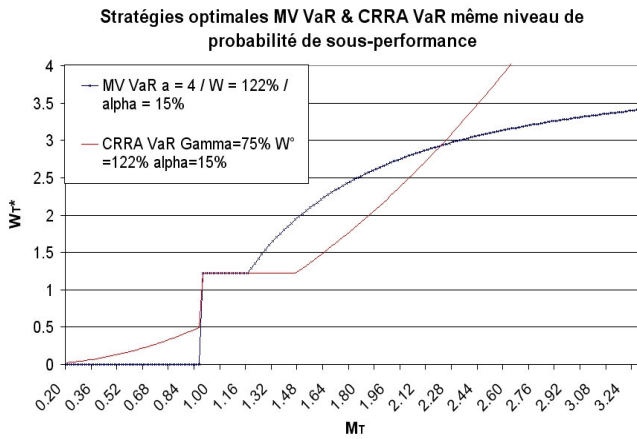


FIGURE 7. stratégies optimales MV VaR et MV CRRA avec le même niveau de probabilité de sous-performnace  
 Stratégie MV VaR :  $a = 4$ ,  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ ,  $\alpha = 15\%$ .  
 Stratégie CRRA VaR :  $\gamma = 75\%$ ,  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ ,  $\alpha = 15\%$ .

14. dans l'exemple traité sur la figure (Fig.7), la stratégie MV VaR prend son profil le plus restrictif de stratégie d'assurance de portefeuille à deux états : il n'y a pas d'état où l'asset manager "MV VaR" est actif et sous-performe; de plus, un seul saut de valeur se produit entre l'état intermédiaire et l'état de richesse nulle

#### 1.4. Sensibilité du "pay-off" optimal au choix des paramètres.

- (1) Effet du changement du seuil de probabilité de sous-performance maximum  $\alpha$

On observe sur la figure (Fig.8) ci-dessous que la hausse de la valeur du paramètre  $\alpha$  de tolérance à la perte entraîne l'élargissement des deux zones de valeurs de l'actif risqué,  $M$ , pour lesquelles l'investissement est actif (zones de sur et de sous-performance) au détriment de la zone intermédiaire de richesse où s'opère une couverture totale du risque (richesse constante égale à la richesse cible) :

- Pour  $\alpha = 1\%$  (courbe bleue), le "pay-off" de la stratégie est proche de celui de la stratégie, discontinue à deux états de protection consécutifs, qui correspond au seuil d'aversion  $B_{\max}$ .
- Pour  $\alpha = 3\%$  (courbe rouge), la stratégie correspond à un niveau d'aversion intermédiaire.
- Pour  $\alpha = 16\%$  (courbe violette), la stratégie optimale s'identifie avec la stratégie "MV PI" qui correspond à un niveau nul d'aversion à la sous-performance (i.e.  $B = 0$ ) et à une contrainte unique de protection contre les niveaux de richesse négative.

On en déduit que plus le niveau de tolérance à la perte  $\alpha$  est élevé, plus la performance de la stratégie MV VaR est élevée dans les scénarios de marché médians, et à l'inverse, plus elle est faible dans les scénarios de marché défavorables et favorables.

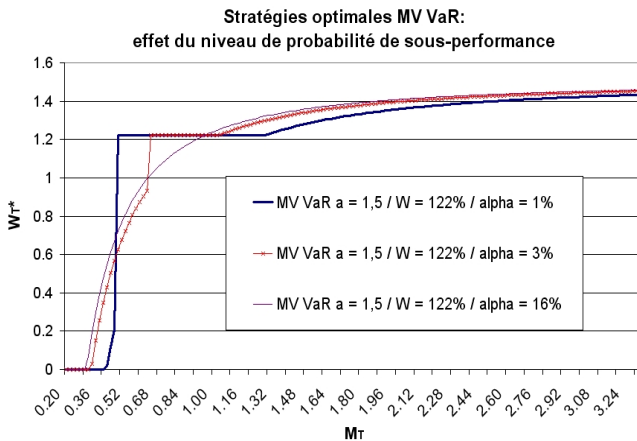


FIGURE 8. Stratégie Optimale MV VaR : effet du niveau de probabilité de sous-performance  
 $\alpha = 1, 5, W^0 = 122\%, \underline{W} = 0\%$ .

(2) Effet du changement du niveau de richesse cible  $W^0$ 

L'analyse de la figure (Fig.9) fait ressortir les deux points suivants : pour un seuil de probabilité de sous-performance fixé,

- La zone intermédiaire de valeurs de l'actif risqué, où le gérant implémente une gestion "passive" avec protection du seuil de richesse cible, est d'autant plus large que le niveau de richesse cible est élevé.
- A l'inverse, la zone de gestion active avec sous-performance est d'autant plus étroite que la cible de richesse finale est élevée. De plus, la hauteur du saut de richesse (discontinuité), qui a lieu entre l'état intermédiaire et la zone de sous-performance, est une fonction croissante de la cible de richesse finale.

Ainsi la stratégie MV VaR sera d'autant plus performante dans les scénarios de marché médians et d'autant moins performante dans les scénarios plus extrêmes que le niveau de richesse cible sera élevé.

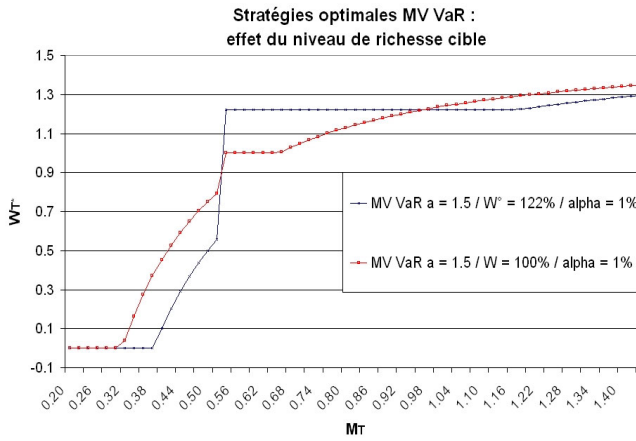


FIGURE 9. Stratégie Optimale MV VaR : effet du niveau de richesse cible  $W^0$   
 $a = 1,5$ ,  $\alpha = 1,5\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ .

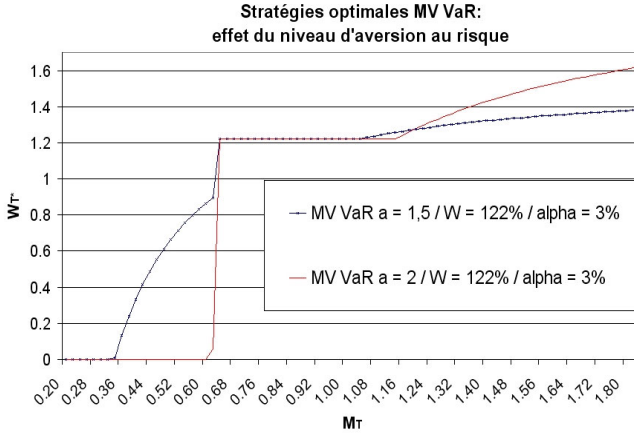


FIGURE 10. Stratégie Optimale MV VaR : effet du niveau de tolérance au risque  $a$   
 $W^0 = 122\%$ ,  $\alpha = 1,5\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ .

(3) Effet du changement du niveau de tolérance au risque  $a$

Comme le montre la figure (Fig.10), à niveau de seuil de sous-performance équivalent,

- La zone intermédiaire de valeur de l'actif risqué, où le gérant implémente une gestion "passive" avec protection du seuil de richesse cible, s'étend quand le niveau de tolérance au risque augmente.
- A l'inverse, la zone de gestion active avec sous-performance est d'autant plus étroite et le saut de valeur (discontinuité), entre l'état intermédiaire et la zone de sous-performance, est d'autant plus grand que le niveau de tolérance au risque est élevé.

Par conséquent, on en déduit que l'augmentation du niveau de tolérance au risque implique une prise de risque plus importante, se traduisant par une perte plus importante, resp. un gain plus important en cas de scénario de marché défavorable, resp. favorable.

### 1.5. Analyse de la stratégie dynamique optimale.

En considérant l'expression de la richesse terminale optimale dans le cas où  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$  qui est donnée dans le théorème (2), on en déduit que la stratégie MV VaR est la combinaison de trois stratégies plus élémentaires écrites sur le même sous-jacent, le portefeuille noté  $I$  atteignant la richesse finale  $1/H_T$ <sup>15</sup> :

15. Il s'agit du portefeuille solution du problème dynamique de minimisation de la norme de la richesse terminale. On rappelle que, dans le cadre du modèle B&S à deux actifs considérés, ce

- Une stratégie d'assurance de portefeuille de type MV PI dont la valeur intermédiaire est notée  $X_t$  comprenant une position investie dans un Zéro-Coupon et une position acheteuse d'une option put de strike  $\underline{I} \equiv 1/\overline{H}$ .
- Une stratégie "vendeuse de couverture" dont la valeur intermédiaire est notée  $Y_t$  et comprenant une position vendeuse d'une option Put et une position acheteuse d'une option Put binaire de même strike  $\overline{I} \equiv 1/\underline{H}$ .
- Une stratégie "acheteuse de couverture" dont la valeur intermédiaire est notée  $Z_t$  constituée d'une position acheteuse d'une option Put de strike  $I_{\underline{W}} = 1/\overline{H}_{\underline{W}}$ .

Plus précisément, on a le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 12. Pour  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$ , la valeur à la date  $t$ , de la solution optimale,  $W_t^*$ , est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} W_t^* &= X_t + Y_t + Z_t \\ \text{avec } X_t &\equiv \underline{W}ZC(t, T) + akP(I_t, \underline{I}, T - t), \\ Y_t &\equiv -ak\{P(I_t, \overline{I}, T - t) - (\overline{I} - \underline{I})B(I_t, \overline{I}, T - t)\}, \\ \text{et } Z_t &\equiv akP(I_t, I_{\underline{W}}, T - t) \end{aligned}$$

avec les mêmes notations que précédemment et où  $ZC(t, T)$  (resp.  $P(I_t, X, T - t)$ , resp.  $B(I_t, X, T - t)$ ) désigne la valeur du Zéro-coupon, (resp. de l'option put européen, resp. de l'option Put binaire de strike  $X$ , d'échéance  $T - t$ , sur le sous-jacent  $I_t$ ).

On en déduit sous les hypothèses du modèle à deux actifs de type B&S les résultats suivants :

PROPRIÉTÉ 13. Pour  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$ , la valeur à la date  $t$  de la solution optimale,  $W_t^*$ , est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} W_t^* &= \underline{W}e^{-r(T-t)} + ak\{P(I_t, \underline{I}, T - t) - P(I_t, \overline{I}, T - t) + P(I_t, I_{\underline{W}}, T - t)\} \\ &\quad + ak(\overline{I} - \underline{I})e^{-r(T-t)}N(-d_2(\overline{I})) \end{aligned}$$

Avec  $P(I_t, X, T - t)$  qui désigne la valeur de l'option put européen de strike  $X$ , d'échéance  $T - t$ , sur le sous-jacent  $I_t$  :

$$P(I_t, X, T - t) = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2(X)) - I_tN(-d_1(X))$$

avec

$$d_2(x) = \frac{\log(\frac{I_t}{x}) + (r - \frac{\lambda^2}{2})(T-t)}{\lambda\sqrt{T-t}} \quad ; \quad d_1(x) = d_2(x) + \lambda\sqrt{T-t}$$

et avec  $\underline{I} = 1/\overline{H}$  ;  $\overline{I} = 1/\underline{H}$  ;  $I_{\underline{W}} = 1/H_{\underline{W}}$

---

portefeuille correspond à une stratégie dynamique investissant un poids constant de la richesse dans l'actif risqué, noté  $i$  qui est donné par la formule suivante :  $i \equiv -h \equiv -\frac{\mu-r}{\sigma^2} \equiv -\frac{\lambda}{\sigma}$ . De plus le processus de prix du portefeuille, noté  $I_t$  est un mouvement brownien géométrique dont l'expression est la suivante :  $dI_t/I_t = (r - \lambda^2)dt - \lambda dZ_t$ , ou encore, de façon équivalente  $I_t = I_0 \exp\{(r - \frac{3}{2}\lambda^2)t - \lambda Z_t\}$  avec  $I_0 = e^{(\lambda^2 - 2r)T}$ .



PROPRIÉTÉ 14. Pour  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$ , l'allocation optimale est la suivante :

$$\begin{cases} w_t^* W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'Actif Risqué } M \\ (1 - w_t^*) W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'A.S.R} \end{cases}$$

$$\text{avec } w_t^* W_t^* = \frac{\partial W_t^*}{\partial I_t} i I_t = (ak)h \{ N(-d_1(\underline{I})) + N(-d_1(I_{\underline{W}})) - N(-d_1(\bar{I})) \} I_t \\ + \frac{(ak)h}{(\lambda\sqrt{T-t})} (\bar{I} - \underline{I}) e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\bar{I}))$$

Nous analysons maintenant la sensibilité de la stratégie MV VaR aux variations de l'actif risqué pour différentes valeurs des paramètres considérés.

(1) Sensibilité à l'actif risqué sous-jacent

Nous considérons la stratégie MV VaR pour  $W^0 = 122,14\%$  et pour un niveau de protection à hauteur de 90% du capital investi ; à titre de comparaison, nous nous intéressons également au profil de gain de la stratégie MV PI avec une protection du capital à 90% (notée "MV PI 0") et avec une protection du capital à 100% (notée "MV PI 1").

Sur la figure (Fig.11), nous avons représenté le "pay-off" de la stratégie MV VaR (courbe rose) et celui de la stratégie "MV PI 0" (courbe violette) et de la stratégie "MV PI 1" (courbe bleue).

On observe que la stratégie MV VaR domine les stratégies d'assurance de portefeuille dans une zone de valeurs médianes du sous-jacent.

A l'inverse, la stratégie MV VaR sous-performe les stratégies d'assurance de portefeuille pour les valeurs correspondant aux zones de sous et de sur-performance de la richesse cible.

Comme on peut l'observer sur la figure (Fig.12), la valeur intermédiaire (au bout de 4,5 ans) de la stratégie MV VaR reste proche de celle de la stratégie MV PI 0 et MV PI 1.

Le graphique de la figure (Fig.13) montre le poids de l'allocation optimale investi dans l'actif risqué pour les trois stratégies considérées.

Nous pouvons faire les commentaires suivants :

- L'investisseur de la stratégie MV VaR (courbe rose) se comporte, dans la zone de sur-performance, de façon similaire à celui de la stratégie MV PI 90% sans contrainte de sous-performance (courbe violette) et a donc un profil concave (le poids de la richesse totale investi dans l'actif risqué augmente quand la valeur de l'actif risqué baisse).
- Dans un intervalle de valeurs de l'actif risqué où la richesse se trouve légèrement inférieure au niveau cible (valeurs de  $M_t$  comprises entre

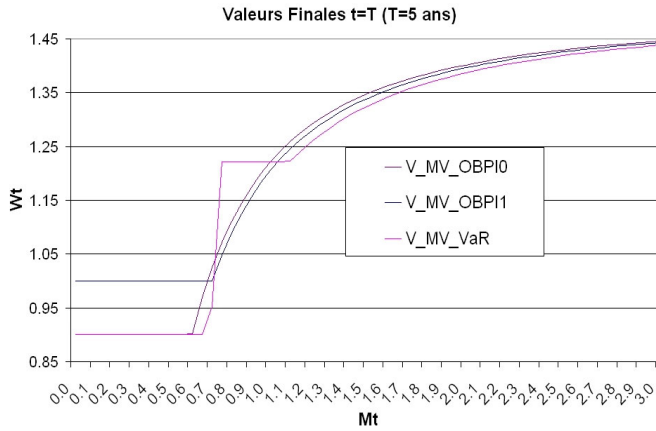


FIGURE 11. Valeurs finales - Stratégie "MV VaR", "MV PI 0", "MV PI 0"

"MV VaR" :  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 90\%$ .

"MV PI 0" :  $\underline{W} = 90\%$ .

"MV PI 1" :  $\underline{W} = 100\%$ .

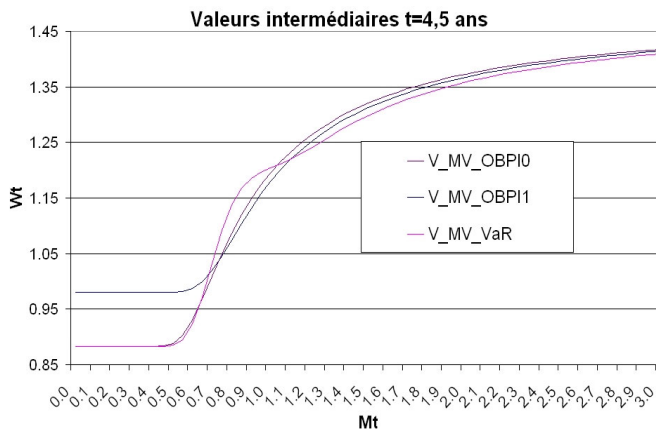


FIGURE 12. Valeurs intermédiaires - Stratégie "MV VaR", "MV PI 0", "MV PI 0"

"MV VaR" :  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 90\%$ .

"MV PI 0" :  $\underline{W} = 90\%$ .

"MV PI 1" :  $\underline{W} = 100\%$ .

1 et 1,5), la stratégie MV VaR ressemble à une stratégie d'assurance de portefeuille convexe (baisse de l'exposition en actif risqué au fur et à mesure de la baisse de la valeur de l'actif risqué) tandis que la stratégie MV PI 0 continue d'exhiber un profil concave.

- Dans un intervalle de valeurs encore plus basses de l'actif risqué (valeurs de  $M_t$  comprises entre 0,7 et 1), l'investisseur "MV VaR"

décide de sur-exposer son portefeuille à l'actif risqué (effet "casino") : le poids de la richesse totale investi dans l'actif risqué dépasse fortement celui du portefeuille de l'investisseur "MV PI 0".

- Dans l'intervalle de valeurs de l'actif risqué les plus basses (valeurs de  $M_t$  inférieures à 0,7 dans notre exemple numérique), la stratégie MV VaR ressemble à nouveau à une stratégie convexe d'assurance de portefeuille : l'exposition à l'actif risqué régresse à nouveau et repasse en dessous de celle de la stratégie MV PI 0, en convergeant vers 0 quand la valeur de l'actif risqué converge vers 0.

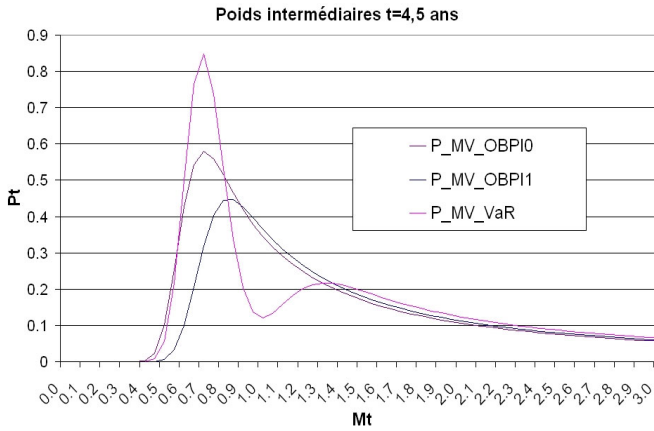


FIGURE 13. Poids intermédiaires - Stratégie "MV VaR", "MV PI 0", "MV PI 0"

"MV VaR" :  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 90\%$ .

"MV PI 0" :  $\underline{W} = 90\%$ .

"MV PI 1" :  $\underline{W} = 100\%$ .

- (2) Sensibilité au temps restant jusqu'à l'horizon d'investissement.

Comme le montre la figure (Fig.14), l'investisseur de la stratégie "MV VaR" se comporte de manière contraire aux règles de "diversification temporelle" du "Conventional Wisdom".

En effet, plus le temps passe et plus la stratégie "MV VaR" est sensible au mouvement du sous-jacent  $M_t$ .

- (3) Sensibilité au seuil de probabilité de sous-performance  $\alpha$ .

Comme le montre la figure (Fig.15) ci-dessous, plus l'aversion à la sous-performance est élevée (i.e. plus la valeur du paramètre  $\alpha$  est faible) et plus l'investisseur de la stratégie MV VaR a tendance à "sur-réagir" par rapport à celui de la stratégie MV PI ; ce dernier s'identifiant à l'investisseur MV VaR avec un niveau minimum d'aversion à la sous-performance (obtenue dans l'exemple numérique considéré pour  $\alpha = 19\%$ ).

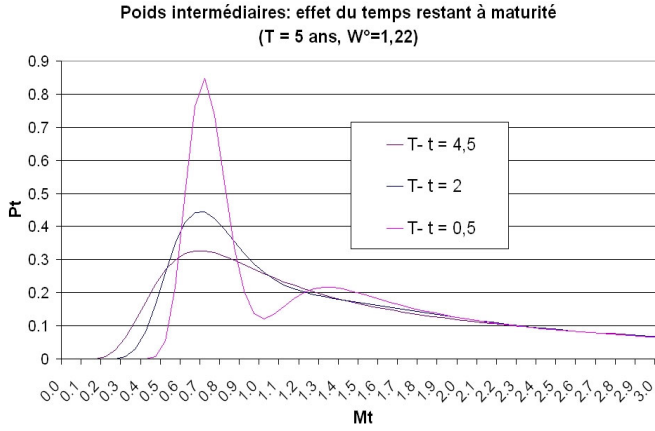


FIGURE 14. Effet du temps restant jusqu'à l'horizon d'investissement  $T - t$  - Poids intermédiaires - Stratégie "MV VaR"

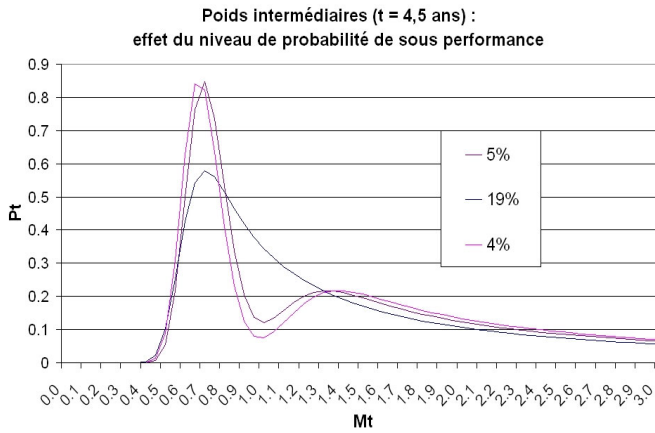


FIGURE 15. Effet du seuil de probabilité de sous-performance  $\alpha$  - Poids intermédiaires - Stratégie "MV VaR"

(4) Sensibilité au niveau de tolérance au risque  $a$ .

Les figures (Fig.16) et (Fig.17) ci-dessous illustrent le fait que, pour un niveau du paramètre d'aversion à la sous-performance  $B$  fixé, plus le degré de tolérance au risque de l'investisseur est élevé et moins la contrainte d'aversion à la sous-performance est restrictive; par exemple dans l'exemple numérique considéré, pour la valeur la plus élevée du paramètre de tolérance au risque, i.e.  $a = 2,5$  (courbe rose), le niveau d'aversion à la sous-performance considéré ne joue presque pas puisque la stratégie exhibe le profil "convexe-concave" typique d'une stratégie d'assurance de portefeuille MV PI.

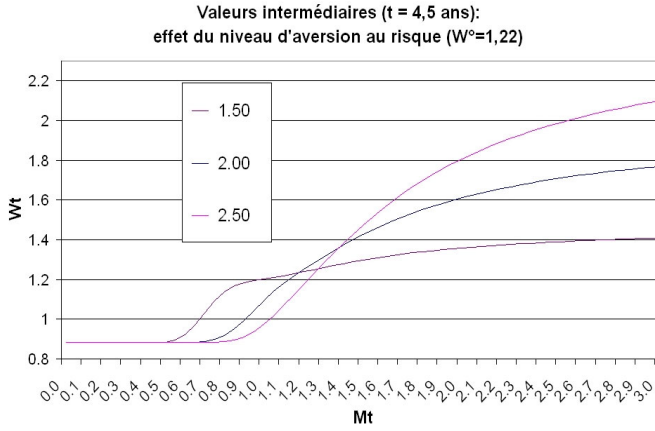


FIGURE 16. Effet du niveau de tolérance au risque  $a$  - Valeurs intermédiaires - Stratégie "MV VaR"

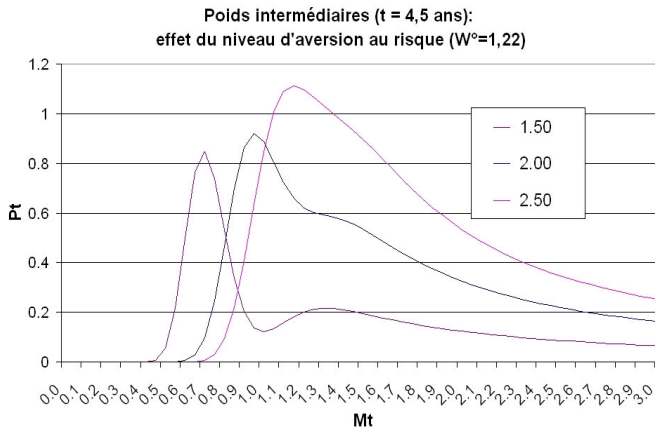


FIGURE 17. Effet du niveau de tolérance au risque  $a$  - Poids intermédiaires - Stratégie "MV VaR"

(5) Sensibilité au niveau de protection du capital  $\underline{W}$ .

Plus le niveau de protection est bas et plus l'effet de "sur-exposition" dans la zone de sous-performance proche de la richesse cible est importante comme illustré sur la figure (Fig.19).

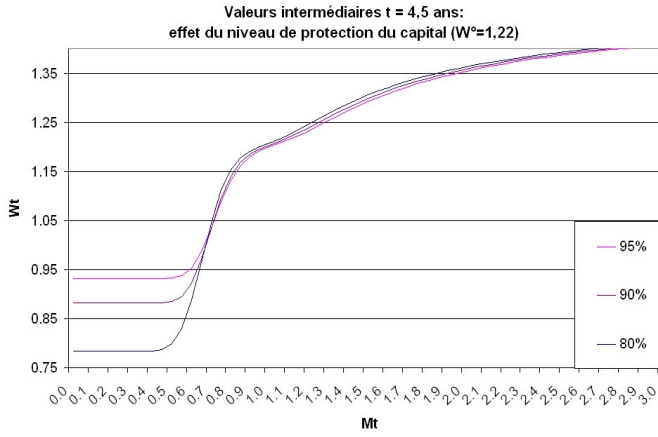


FIGURE 18. Effet du niveau de protection du capital  $\underline{W}$  - Valeurs intermédiaires - Stratégie "MV VaR"

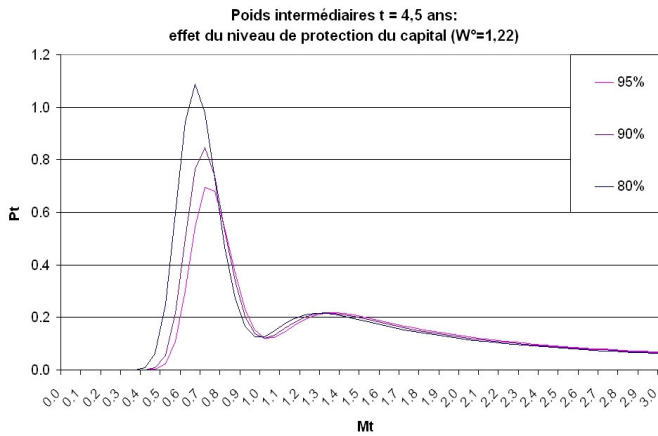


FIGURE 19. Effet du niveau de protection du capital  $\underline{W}$  - Poids intermédiaires - Stratégie "MV VaR"

## 2. Stratégie optimale avec contrainte "Limited Expected Loss"

Comme dans la section précédente, nous nous plaçons dans le cadre de la problématique suivante : nous souhaitons analyser le problème de choix dynamique de portefeuille pour l'investisseur averse à la perte et maximisant l'utilité espérée de sa richesse, avec une forme généralisée de fonction d'utilité quadratique adaptée à la prise en compte de son aversion à la sous-performance.

De plus, nous faisons l'hypothèse que le terme supplémentaire, mesurant l'aversion à la perte de l'investisseur et intégré à l'expression de sa fonction d'utilité, pénalise la sous-performance non plus de manière uniforme (comme c'était le cas de l'investisseur dans la première section), mais en fonction du coût d'utilité engendré par la sous-performance<sup>16</sup>.

Plus précisément, de façon à décrire le profil d'utilité asymétrique mais continue de cet investisseur averse à la sous-performance (i.e. l'aversion à la sous-performance étant supérieure à l'appétit pour le gain), nous considérons une fonction d'utilité de la forme suivante :

$$v(x) = \begin{cases} Au_{MV}(x) + (B - A)u_{MV}(W^0) & \text{si } x < W^0 \\ Bu_{MV}(x) & \text{si } x \geq W^0 \end{cases}$$

avec  $u_{MV}(\cdot)$  qui désigne la fonction d'utilité quadratique donnée par la formule :

$$u_{MV}(x) \equiv x - (1/2a)x^2$$

avec  $A, A > B$ , le niveau d'aversion à la sous-performance de l'investisseur<sup>17</sup>, et avec  $W^0$  la cible de richesse à atteindre, où  $0 < W^0 < a$ .

Autrement dit, nous supposons que la fonction d'aversion à la perte prend en compte l'aversion à la sous-performance en "pénalisant" de manière continue les valeurs de sous-performance en fonction de l'amplitude de la perte<sup>18</sup>, ce qui permet d'éviter le "gambling effect" décrit dans les sections précédentes<sup>19</sup>.

Ainsi, cette formulation implique un saut dans la fonction d'utilité marginale (et non plus dans la fonction d'utilité elle-même comme c'était le cas pour le critère MV VaR), ce qui s'écrit<sup>20</sup> :

$$v'(x) = \begin{cases} A(1 - x/a) & \text{si } x < W^0 \\ B(1 - x/a) & \text{si } x \geq W^0 \end{cases}$$

16. Le coût d'utilité de la sous-performance est défini comme l'écart d'utilité par rapport au niveau cible de richesse pour un investisseur non averse à la sous-performance et ayant une fonction d'utilité quadratique avec le même niveau d'aversion au risque que l'investisseur averse à la perte considéré.

17. on exclut le cas particulier  $A = B$  puisqu'il se réduit au cas de l'investisseur non averse à la sous-performance et ayant la forme standard de fonction d'utilité quadratique.

18. la fonction de perte considérée ne pénalise plus seulement le fait d'être en sous-performance ou non comme cela était le cas pour le problème Moyenne Variance avec contrainte de probabilité de perte maximale (i.e. contrainte de VaR) analysée précédemment : à présent, une forte sous-performance sera beaucoup plus pénalisée qu'un faible niveau de sous-performance

19. l'effet "Casino" se traduit par un saut discontinu dans l'expression de la richesse finale optimale et une sous-performance par rapport à la stratégie solution du problème sans contrainte dans les cas les plus défavorables ; pour plus de détails, voir la section précédente qui traite de l'investisseur avec contrainte de risque de type VaR

20.  $x \rightarrow v'(x)$  désigne la dérivée première de la fonction d'utilité  $v(x)$

Finalement, on montre facilement que cette fonction d'utilité peut s'écrire de la façon suivante :

$$v(x) = B \times [u(x) - C \times \text{Max} \{L(x, W^0, a), 0\}]$$

où  $u(x) \equiv u_{MV}(x)$ ,  $C \equiv (A/B - 1)$  désigne le coefficient d'aversion et  $L(x, W^0, a)$  la fonction de perte mesurant le coût d'utilité de la sous-performance :

$$L(x, W^0, a) \equiv u_{MV}(W^0) - u_{MV}(x) = \frac{(W^0 - x) \times (2a - W^0 - x)}{2a}$$

Il s'agit donc d'un cas particulier de l'expression donnée dans l'équation (1.3) pour les fonctions d'utilité HARA, avec fonction de perte continue. Nous avons considérées cette classe de fonction d'utilité dans le problème d'investissement (P1) analysé dans la section 1 du chapitre précédent.

Notons que cette expression de la fonction d'utilité montre que la fonction de perte considérée pénalise l'amplitude de la sous-performance de façon similaire à la fonction de perte associée à la semi-variance<sup>21</sup>

Le problème "statique" à résoudre s'écrit<sup>22</sup> :

PROBLÈME 11.

$$(P11) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E(v(W_T)) \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1 \quad W_T \geq \underline{W} \text{ p.s.} \end{cases}$$

Ce qui implique en particulier les propriétés suivantes pour les valeurs limites des paramètres :

- Pour  $a \rightarrow \infty$  (niveau d'aversion au risque minimum), le problème se ramène au problème "MD" avec  $\gamma = 1$  analysé dans la dernière section du premier chapitre<sup>23</sup>.
- Pour  $C \rightarrow 0$  (niveau d'aversion à la perte minimum), le problème est équivalent au problème "MV PI", avec contrainte explicite de protection  $\underline{W}$ .

---

21. en effet la mesure de risque associée à la semi-variance est donnée par le moment partiel d'ordre deux,  $LPM(2, W^0, W_T) \equiv E \left\{ (\text{Max}(W^0 - W_T, 0))^2 \right\}$

22. Comme précédemment, nous considérons une contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille dont l'expression est la suivante :  $W_T \geq \underline{W}$  p.s. avec  $0 \leq \underline{W} \leq W^0$ ; cela implique en particulier que la richesse intermédiaire est bornée par la valeur présente de ce seuil de richesse minimale, soit  $\underline{W} \times ZC(t, T) \geq 0$  où  $ZC(t, T) \equiv E_t(1/H_T)$  désigne la valeur à la date,  $t$ , de l'obligation "Zéro-Coupon" d'échéance  $T-t$ .

23. il s'agit du problème "Moyenne / Downside Risk" proposé par [Berkelaar Kouwenberg, 2000] pour un choix de mesure de perte correspondant à l'espérance de sous-performance par rapport au niveau cible, i.e.  $\gamma = 1$ .



### 2.1. Expression de la richesse finale optimale.

THÉOREME 3. *La richesse terminale optimale du problème (P11) est donnée par l'expression suivante :*

$$W_T^* = \begin{cases} a(1 - k/B)/H_T & \text{si } H_T > \overline{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \overline{H} \\ a(1 - k/A)/H_T & \text{si } \underline{\underline{H}} < H_T \leq \underline{H} \\ \underline{W} & \text{si } H_T \leq \underline{\underline{H}} \end{cases}$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$ ,

avec  $\overline{H} \equiv (k/B)/(1 - W^0/a)$ ,  $\underline{H} \equiv (k/A)/(1 - W^0/a)$ ,  $\underline{\underline{H}} \equiv (k/A)/(1 - \underline{W}/a)$

et où  $\overline{H} > \underline{H} > \underline{\underline{H}}$

Dans le cas limite  $W^0 = \underline{W}$  (respectivement  $A = B$ ), on retrouve bien comme cas particulier la stratégie d'assurance de portefeuille "MV PI" de niveau de protection  $\underline{W}$  correspondant au niveau minimum d'aversion à la perte ; en effet on a alors  $\underline{H} = \underline{\underline{H}}$  (respectivement  $\underline{H} = \overline{H}$ ).

On en déduit du théorème (3) que la stratégie optimale peut être décomposée en stratégies élémentaires, résultat qui peut s'énoncer de la manière suivante :

#### CONSÉQUENCE 9.

*La stratégie dynamique atteignant la richesse terminale solution du problème (P11) et dont l'expression est donnée dans le théorème(3) est la combinaison des positions élémentaires suivantes :*

- Une stratégie d'assurance de portefeuille consistant à détenir d'une part, un portefeuille s'identifiant (à la valeur de la constante  $k/B$  près) à la solution du problème moyenne variance dynamique sans contraintes et d'autre part, une position acheteuse d'une option Put de strike  $W^0$  écrite sur ce même portefeuille.
- Une stratégie "vendeuse de couverture" sur le même portefeuille sous-jacent (à la valeur de la constante  $k/A$  près) comprenant une position vendeuse d'une option Put de strike  $W^0$ .
- Une stratégie "acheteuse de couverture" sur le même portefeuille sous-jacent (à la valeur de la constante  $k/A$  près) comprenant une position acheteuse d'une option Put de strike  $\underline{W}$ .

Dans la suite de la seconde section , nous allons étudier les propriétés de la stratégie optimale en considérant le même exemple d'application numérique que celui de la première section, celui-ci faisant référence implicitement au modèle à deux actifs de [Black Scholes, 1973]<sup>24</sup> (dans la suite B&S) :

24. On rappelle que dans ce cadre, on fait l'hypothèse de l'existence d'une seule source de risque (i.e. le nombre d'actifs est de deux) ; de plus, on suppose que tous les paramètres servant

## 2.2. Choix des paramètres d'aversion à la perte.

Considérons le problème suivant (avec contrainte explicite de type "LEL" <sup>25</sup>) :

PROBLÈME 12.

$$(P12) \left\{ \begin{array}{l} \max_{W_T \in L^2(P)} E(u(W_T)) \\ \text{s.a. } E(W_T/H_T) = 1 \text{ et } E \left[ (1/H_T)(W^0 - W_T) 1_{\{W_T \leq W^0\}} \right] \leq \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \geq 0 \text{ fixé} \end{array} \right.$$

avec  $u(\cdot) \equiv u_{MV}(\cdot)$  la fonction d'utilité quadratique et avec  $W^0$  est la cible de richesse à atteindre.

On a le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 15. La richesse terminale optimale du problème (P12) est donnée par l'expression suivante :

$$W_T^* = \begin{cases} a(1 - k_1/H_T) & \text{si } H_T > \overline{H} \\ W^0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \overline{H} \\ \frac{a(1 - (k_1 - k_2)/H_T)}{\underline{W}} & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \underline{H} \\ \underline{W} & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases}$$

avec  $\overline{H} \equiv k_1/(1 - W^0/a)$ ,  $\underline{H} \equiv (k_1 - k_2)/(1 - W^0/a)$ ,  $\underline{W} \equiv (k_1 - k_2)/(1 - \underline{W}/a)$  tels que  $\overline{H} > \underline{H} > \underline{W}$ ,

avec  $k_1 \geq 0$  et  $k_2 \geq 0$  vérifiant le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(W_T^*(k_1, k_2)/H_T) = 1 \\ E \left[ (1/H_T)(W^0 - W_T^*(k_1, k_2)) 1_{\{W_T^*(k_1, k_2) \leq W^0\}} \right] = \varepsilon \text{ où } k_2 = 0 \end{array} \right.$$

à décrire la dynamique du prix des deux actifs financiers (un actif sans risque et un actif risqué) sont constants. L'univers d'investissement se compose donc des deux actifs suivants :

- Un actif dit sans risque ("A.S.R.") représentant l'actif monétaire et dont la valeur à la date  $t$  est notée  $S_t^0$ ; cet actif a un rendement instantané donné par

$$dS_t^0/S_t^0 = r dt$$

où  $r$  désigne le taux monétaire constant.

- Un actif dit risqué ("A.R") représentant le portefeuille de marché ou tout autre actif action dont la dynamique de prix est décrite par un mouvement brownien géométrique; son rendement instantané s'écrit

$$dM_t/M_t = \mu dt + \sigma dZ_t \equiv (r + \pi) dt + \sigma dZ_t$$

où le paramètre  $\mu$  représente son rendement moyen instantané (égal au taux court plus une prime de risque "action" notée  $\pi \equiv \mu - r$ ) et  $\sigma$  désigne sa volatilité constante.

25. mesure introduite par [Basak Shapiro, 2001] dans le cadre d'un problème de maximisation de l'espérance d'utilité d'un agent ayant une fonction d'utilité CRRA et une contrainte de risque explicite se traduisant par un seuil maximum d'espérance de perte ("Limited Expected Loss"); pour plus de détails voir le chapitre précédent qui traite des problèmes de maximisation de l'espérance d'utilité CRRA avec prise en compte de l'aversion à la perte de l'investisseur

On obtient ainsi un résultat d'équivalence entre les deux problèmes (P11) et (P12) que nous formulons dans la conséquence suivante :

CONSÉQUENCE 10. Si  $W_T^*$  est la solution du problème (P11)(A,B) avec  $B = k/k_1$ ,  $A = k/(k_1 - k_2)$ , et avec  $k_1$  et  $k_2$  vérifiant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E(W_T^*(k_1, k_2)/H_T) = 1 \\ E \left[ (1/H_T)(W^0 - W_T^*(k_1, k_2))1_{\{W_T^*(k_1, k_2) \leq W^0\}} \right] = \varepsilon \text{ ou } k_2 = 0 \end{cases}$$

Alors  $W_T^*$  est aussi la solution du problème (P12)( $\varepsilon$ ) et réciproquement.

Sur la figure (Fig.20) (respectivement (Fig.21)) ci-dessous nous avons représenté la fonction de correspondance entre le niveau d'aversion à la perte de l'asset manager, i.e.  $LossAversion(C, W_T, W^0, a) \equiv C \times L(W_T, W^0, a)$ , et la valeur du paramètre  $\varepsilon$ , pour différentes valeurs de  $W_T$ , pour une valeur de richesse cible égale à la performance de l'actif monétaire,  $W^0 = 122\%$  (respectivement supérieure à la performance de l'actif monétaire,  $W^0 = 135\%$ ) et un niveau du paramètre d'aversion au risque de  $a = 1, 5$ .

On notera que plus la valeur de  $\varepsilon$  est basse, plus l'écart entre les courbes de niveau d'aversion à la sous-performance est important ; autrement dit plus le degré d'aversion à la perte est important (i.e. plus la valeur de  $\varepsilon$  est faible) et plus la mesure d'aversion est sensible à l'écart de sous-performance.

Enfin, il est intéressant de souligner la différence suivante entre les deux cas considérés :

- L'aversion maximale dans le cas  $W^0 = 122, 14\%$  paraît correspondre à une valeur de  $\varepsilon$  égale à  $0\%$  ( $\varepsilon$  semble converger rapidement vers la valeur 0 quand A augmente vers  $+\infty$ ).
- Dans le cas  $W^0 = 135\%$ , l'aversion maximale est atteinte pour une valeur de  $\varepsilon$  strictement non nulle, approximativement égale à  $10,54\%$ . Ainsi la stratégie "limite" correspondant au maximum d'aversion semble être différente selon le niveau de richesse cible choisie, ce que nous allons préciser ultérieurement.

Afin d'illustrer graphiquement l'effet du choix du niveau de risque maximum toléré,  $\varepsilon$ , sur le profil de la stratégie optimale, nous avons représenté sur la figure (Fig.22) (respectivement (Fig.23)), pour différentes valeurs de  $\varepsilon$  et dans le cas particulier où  $W^0 = 122, 14\% = e^{rT}$  (resp. dans le cas où  $W^0 = 135\%$ ), les valeurs des "strikes", notées  $M_{max}$ ,  $M_{med}$  et  $M_W$ <sup>26</sup>, correspondant aux trois seuils de valeur de l'actif risqué séparant les quatre états de richesse où l'expression de la richesse finale optimale est différente.

On peut faire les remarques suivantes :

---

26. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section 1 ci-dessus, sous les hypothèses du modèle d'actifs de B & S, il existe une correspondance biunivoque entre  $M_t$ , la valeur de l'actif risqué à la date t, et  $H_t$  celle du portefeuille numéraire ou de croissance optimale ; en particulier, les valeurs seuils notées  $M_{max}$ ,  $M_{med}$  et  $M_W$  correspondent aux valeurs de l'actif risqué qui s'obtiennent de celles de  $\bar{H}$ ,  $\underline{H}$  et  $\underline{\underline{H}}$  par cette transformation.

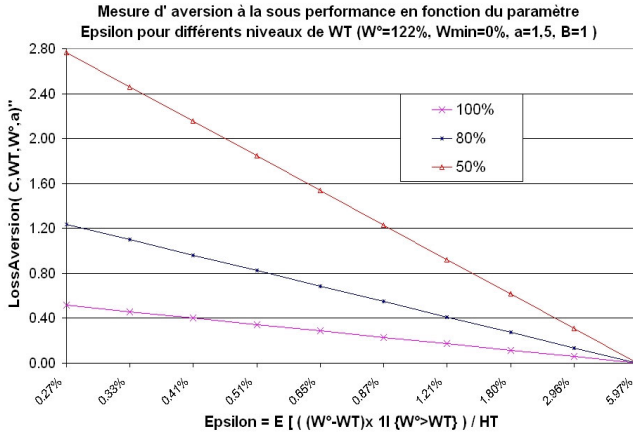


FIGURE 20.  $LossAversion(C, W_T, W^0, a)$  en fonction de  $\epsilon$  pour différentes valeurs de la richesse terminale  $W_T$   
 $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ ,  $a = 1, 5$ ,  $B = 1$

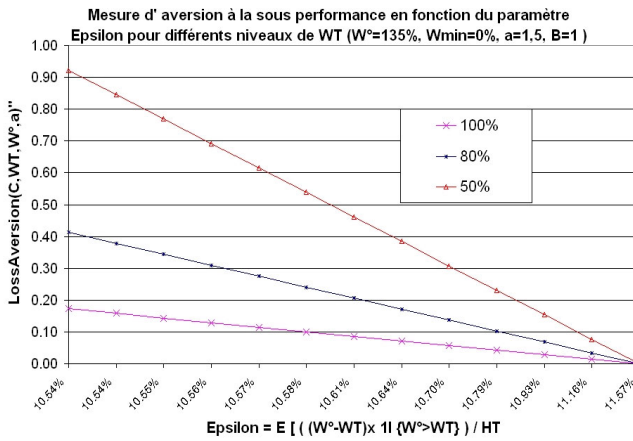


FIGURE 21.  $LossAversion(C, W_T, W^0, a)$  en fonction de  $\epsilon$  pour différentes valeurs de la richesse terminale  $W_T$   
 $W^0 = 135\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ ,  $a = 1, 5$ ,  $B = 1$

A la limite du seuil d'aversion maximum, la stratégie MV LEL semble se comporter de la même façon quelque soit le niveau de richesse cible.

Pour les valeurs de  $\epsilon$  supérieures à un certain seuil correspondant au maximum d'aversion  $C = 0$  (approximativement 5,97% pour  $W^0=122\%$  et 11,6% pour  $W^0=135\%$ ), la stratégie MV LEL s'identifie à la stratégie MV sans contrainte d'aversion à la sous-performance : les courbes de valeur des deux strikes  $M_{max}$  et  $M_{med}$  se rejoignent et la zone intermédiaire de protection disparaît.

A l'opposé, pour les valeurs intermédiaires et élevées du paramètre  $\epsilon$ , la stratégie MV LEL semble se comporter différemment selon que l'on considère le cas  $W^0 = 122, 14\%$  ou le cas  $W^0 = 135\%$ .

- Pour  $W^0 = 135\%$ , quand  $\varepsilon$  diminue, les valeurs de  $M_{med}$  et  $M_{\underline{W}}$  restent quasi constantes et celle de  $M_{max}$  croît fortement ;
- Pour  $W^0 = 122\%$ , les valeurs  $M_{med}$  et  $M_{\underline{W}}$  décroissent en convergent vers 0 et celle de  $M_{max}$  croît avec une vitesse qui diminue au fur et à mesure que  $\varepsilon$  diminue (profil concave de la courbe).

On vérifie que, pour les très grandes valeurs de A, les valeurs "limites" des strikes  $M_{med}$  et  $M_{\underline{W}}$  sont bien nulles dans le cas où  $W^0 = 122\%$  et non nulles pour  $W^0 = 135\%$ ; de plus, dans les deux cas,  $M_{max}$  tend vers l'infini.

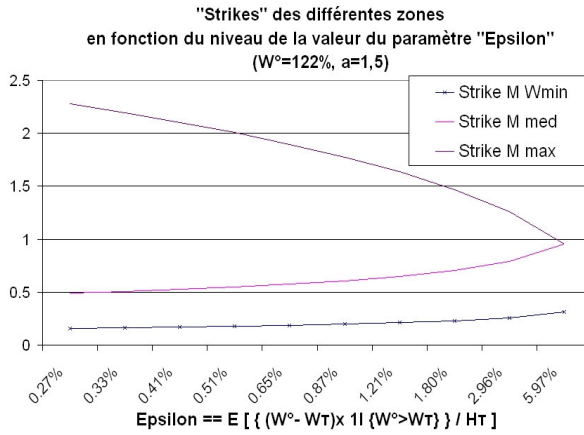


FIGURE 22. Valeurs des "strikes" ( $M_{max}$ ,  $M_{med}$  et  $M_{\underline{W}}$ ) en fonction du niveau d'espérance de sous-performance ( $\varepsilon$ ) -  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$  et  $a = 1, 5$ .

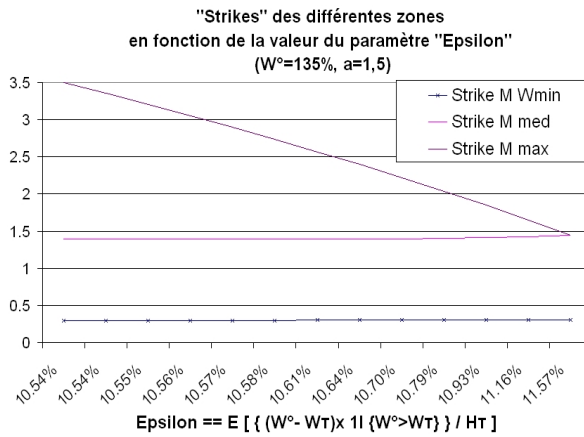


FIGURE 23. Valeurs des "strikes" ( $M_{max}$ ,  $M_{med}$  et  $M_{\underline{W}}$ ) en fonction du niveau d'espérance de sous-performance ( $\varepsilon$ ) -  $W^0 = 135\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$  et  $a = 1, 5$ .

On en déduit une conjoncture importante que l'on énonce sous la forme de la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 16. Pour  $A \rightarrow \infty$ , (cas de l'investisseur avec un degré d'aversion à la sous-performance maximum), la solution du problème (P11) dont l'expression générale est donnée dans le théorème (3) converge vers la stratégie suivante :

(1) Pour  $W^0 = e^{rT}$  et  $\underline{W} = 0$ ,

la stratégie dont la valeur finale est une constante égale au seuil de richesse cible,  $W^0 : W_T^{*\infty} \equiv W^0$ .

(2) Pour  $W^0 > e^{rT}$  et  $\underline{W} = 0$ ,

la stratégie dont la richesse finale est la solution du problème "Moyenne / Semi-Variance"<sup>27</sup> pour laquelle le seuil de richesse maximum imposé est fixé au niveau de la richesse cible  $W^0$  ; son expression est la suivante

$$W_T^{*\infty} = \begin{cases} W^0 & \text{si } H_T > \overline{H} \\ a^*(1 - k/H_T) & \text{si } \underline{H} \leq H_T < \overline{H} \\ 0 & \text{si } H_T < \underline{H} \end{cases}$$

avec  $a^* \equiv W^0 + 1/2A^*$  où  $A^*$  est le coefficient d'aversion du problème "Moyenne / Semi-Variance", avec  $\overline{H} \equiv k/(1 - W^0/a^*)$ ,  $\underline{H} \equiv k$  et avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^{*\infty}/H_T) = 1$ .

(3) Pour  $W^0 < e^{rT}$  et  $\underline{W}=0$ ,

la stratégie MV PI d'assurance de portefeuille de niveau  $W^0$ .

### 2.3. Etude comparative du "pay-off" de la stratégie optimale.

Nous souhaitons comparer le profil de gain final de la stratégie "MV LEL" à celui de plusieurs stratégies déjà analysées précédemment et en particulier à celui de la stratégie "MV VaR" étudiée dans la section précédente.

- (1) Comparaison avec la stratégie optimale du problème MV avec contrainte de protection (stratégie "MV PI") et sans aucune contraintes (strategie "MV").

En observant la figure (Fig.24), nous pouvons faire les deux remarques suivantes :

On peut considérer la stratégie MV LEL comme une stratégie d'assurance de portefeuille intermédiaire entre la stratégie MV PI (correspondant au maximum d'aversion) et la stratégie MV sans contrainte d'aversion ni de protection (minimum d'aversion à la sous-performance).

---

27. il s'agit du problème de maximisation de l'espérance de gain sous contrainte de seuil sur la semi-variance (i.e. variance des richesses en dessous du seuil de richesse cible) avec contraintes supplémentaires de non négativité et plafond de richesse ; ce problème a été analysé dans la dernière section du chapitre précédent

On notera aussi que la valeur finale de la stratégie MV LEL est au-dessus de celle de la stratégie MV dans la zone de sous-performance (il n'y a pas l'effet "casino" observé sur le pay-off de la stratégie solution optimale du problème MV VaR).

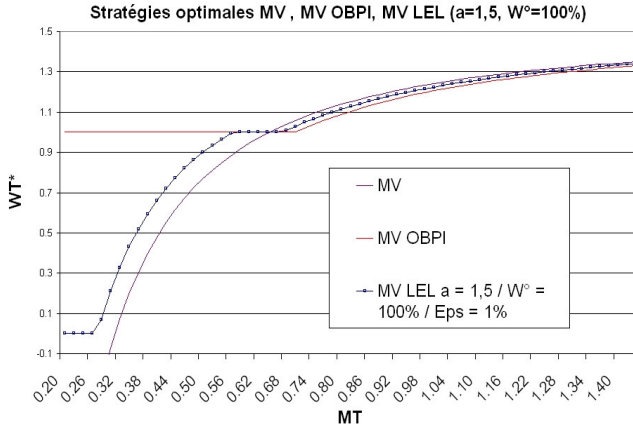


FIGURE 24. stratégies optimales MV, MV PI, MV LEL ( $a = 1, 5$ ,  $W^0 = 100\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ ).

(2) Comparaison avec la stratégie optimale "MV VaR" et "MSV"<sup>28</sup>

L'analyse de la figure (Fig.25) révèle que pour les niveaux de richesse correspondant à une sur-performance, les deux stratégies (MV VaR et MV LEL) possèdent les mêmes caractéristiques qui les distinguent de la stratégie MSV.

En effet, à l'opposé de la stratégie MSV, les pay-offs des stratégies MV LEL et MV VaR ne sont pas constants dans la zone des richesses élevées et n'exhibent pas non plus de discontinuité entre l'état des richesses intermédiaires et l'état des richesses élevées ; de plus, on observe que la couverture dans l'état intermédiaire est parfaite contrairement au cas MSV où il se produit une sous-performance.

En revanche, les deux stratégies MV VaR et MV LEL correspondent à des profils de gain très différents dans les états de sous-performance.

La richesse finale de la stratégie MV LEL a l'avantage, par rapport à celle de la stratégie MV VaR, de ne pas exhiber une discontinuité entre l'état de sous-performance et l'état de richesses intermédiaires induisant un comportement de "joueur" de la part de l'investisseur MV VaR.

28. On rappelle que la stratégie "MSV" ("Moyenne / Semi-Variance") désigne la stratégie solution optimale du problème "MD" avec  $\gamma = 2$  (i.e. problème "Mean Downside Variance") proposé par [Berkelaar Kouwenberg, 2000] et dont nous avons présenté les principales propriétés dans la dernière section du premier chapitre.

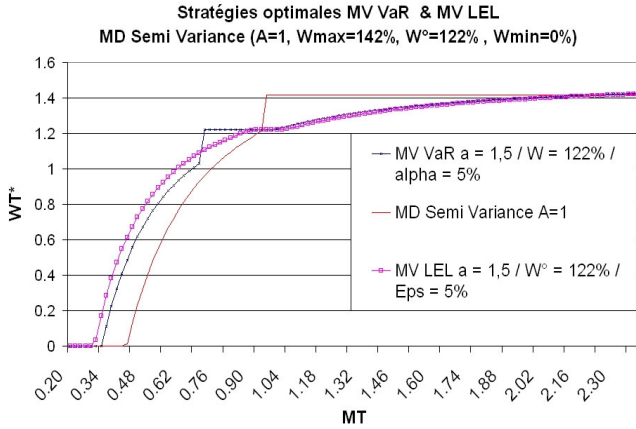


FIGURE 25. stratégies optimales MV VaR, MV LEL, MSV  
Stratégie MV VaR :  $a = 1,5$ ,  $W^0 = 100\%$ .  
Stratégie MV LEL  $a = 1,5$ ,  $W^0 = 100\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ ,  $\varepsilon = 1\%$   
Stratégie MSV :  $A = 1$ ,  $\overline{W} = 142\%$ ,  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ .

Ceci peut s'expliquer de la manière suivante : l'investisseur MV LEL est sensible non seulement à la déviation par rapport à la cible de richesse (tout comme l'investisseur MV VaR) mais aussi à l'amplitude des déviations (comme l'investisseur MSV).

Finalement en terme de performance relative, la stratégie MV LEL surperforme la stratégie MV VaR dans les cas défavorables ; ceci se produisant au détriment d'une zone de couverture parfaite (état intermédiaire) plus restreinte que dans le cas MV VaR. En ce qui concerne le niveau de gain en cas de sur-performance, il est relativement similaire pour les deux stratégies.

- (3) Comparaison avec la valeur finale de la stratégie solution du problème "CRRA LEL"

Bien qu'il soit encore une fois difficile (voir la section précédente) de comparer les deux critères, CRRA LEL et MV LEL, qui sont fondés sur des fonctions d'utilité très différentes, en nous référant à l'exemple numérique illustré sur la figure (Fig.26)<sup>29</sup>, nous pouvons faire les deux remarques suivantes :

29. on considère les deux stratégies CRRA LEL et MV LEL pour le même niveau d'espérance de sous-performance maximum et la même richesse cible



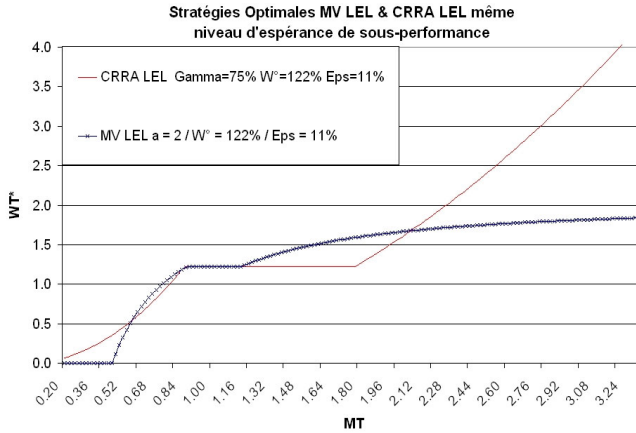


FIGURE 26. stratégies optimales MV LEL et CRRA LEL pour le même niveau d'espérance de sous-performance

Stratégie MV LEL :  $a = 2$ ,  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ ,  $\varepsilon = 11\%$ .

Stratégie CRRA LEL :  $\gamma = 75\%$ ,  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 0\%$ ,  $\varepsilon = 11\%$ .

- Le profil de gain concave de la stratégie MV LEL implique que cette stratégie sur-performe la stratégie convexe CRRA VaR dans une zone de richesse "intermédiaire - haute" (dans notre exemple pour les valeurs de  $M_T$  allant de 1,1 à 2,1).
- On observe une discontinuité dans le "pay-off" de la stratégie MV LEL entre l'état bas et l'état de richesse nulle résultant de la contrainte imposée de non négativité. Ceci n'est pas le cas pour la stratégie CRRA LEL qui, dans la zone des richesses basses, converge de manière continue vers une valeur limite égale à zéro.

#### 2.4. Sensibilité du "pay-off" optimal au choix des paramètres.

- (1) Effet du changement du seuil d'espérance de sous-performance maximale  $\varepsilon$ <sup>30</sup>

Les graphiques ci-dessous illustrent le fait que la sensibilité au changement du paramètre,  $\varepsilon$ , est différente selon que l'écart considéré entre le niveau de richesse cible,  $W^0$  et la performance finale de l'actif sans risque est nulle, positif ou négatif.

Le cas d'une richesse cible égale à celle de l'actif sans risque est illustré avec l'exemple numérique de la figure (Fig.27) ; le choix d'une richesse cible plus élevée que la performance de l'actif "monétaire" est représenté sur la figure (Fig.28) et celui d'une richesse plus basse sur la figure (Fig.29).

<sup>30</sup>. ou de manière équivalente du changement du paramètre d'aversion à la sous-performance A.

- (a) Intéressons nous tout d'abord au cas limite où l'aversion à la perte est minimum  $A = B = 1$  : ce qui correspond à  $\varepsilon = 6\%$  pour  $W^0 = 122\% = e^{rT}$  (Fig.27),  $\varepsilon = 11,57\%$  pour  $W^0 = 135\% > e^{rT}$  (Fig.28),  $\varepsilon = 2,05\%$  pour  $W^0 = 100\% < e^{rT}$  (Fig.29). Dans ce cas, l'investisseur VaR LEL se comporte de la même façon quelque soit le choix du niveau de richesse cible considérée : la stratégie MV LEL s'identifie dans les trois cas à la stratégie MV PI de richesse minimum  $\underline{W}$  (égale à 0 dans l'exemple numérique considéré).
- (b) Dans le cas limite où, au contraire, le niveau d'aversion à la perte de l'investisseur est maximal, i.e.  $A \rightarrow \infty$ , nous retrouvons les propriétés énoncées dans la propriété (16) ci-dessus.

Dans ce cas, l'investisseur VaR LEL se comporte différemment selon le choix de la cible de richesse finale considérée :

- Pour  $W^0 = 122\% = e^{rT}$ , le pay-off de la stratégie MV LEL (cf. cas  $\varepsilon = 0,3\%$  (courbe bleue) de la figure (Fig.27)) converge vers celui de la stratégie "limite" constante  $W^0$ .

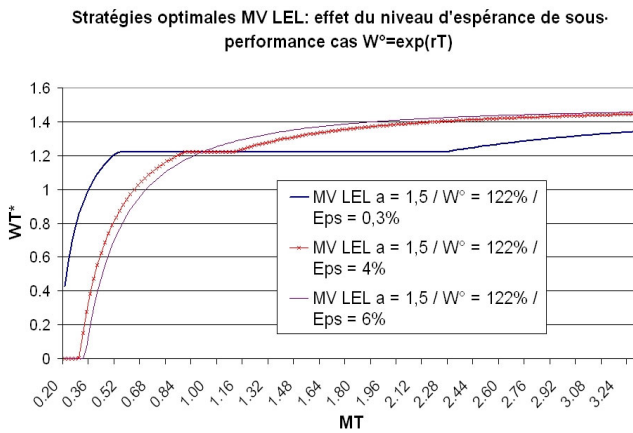


FIGURE 27. stratégies optimales MV LEL : effet du niveau d'espérance de sous-performance - cas  $W^0 = e^{rT}$

- Pour  $W^0 > e^{rT}$ , le pay-off de la stratégie MV LEL (cf. cas  $\varepsilon = 10,54\%$  (courbe bleue) de la figure (Fig.28)) converge vers celui de la stratégie "limite" "MSV" pour laquelle le seuil de richesse maximum est fixé à  $W^0$ .
- Pour  $W^0 < e^{rT}$ , le pay-off de la stratégie MV LEL (cf. cas  $\varepsilon = 0,24\%$  (courbe bleue) de la figure (Fig.29)) converge vers celui de la stratégie limite "MV PI" avec un niveau de protection égal à celui de la richesse cible  $W^0$ .

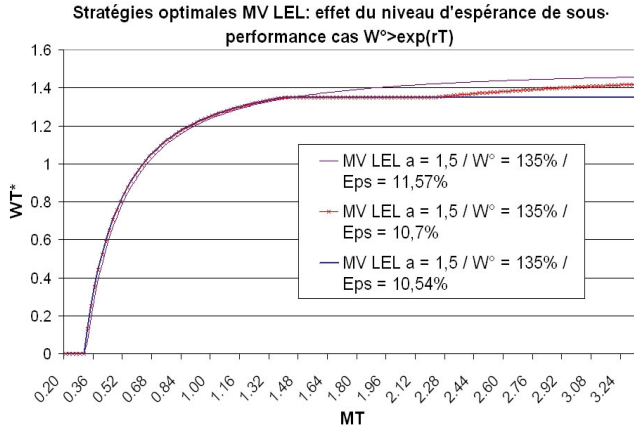


FIGURE 28. stratégies optimales MV LEL : effet du niveau d'espérance de sous-performance - cas  $W^0 > e^{rT}$

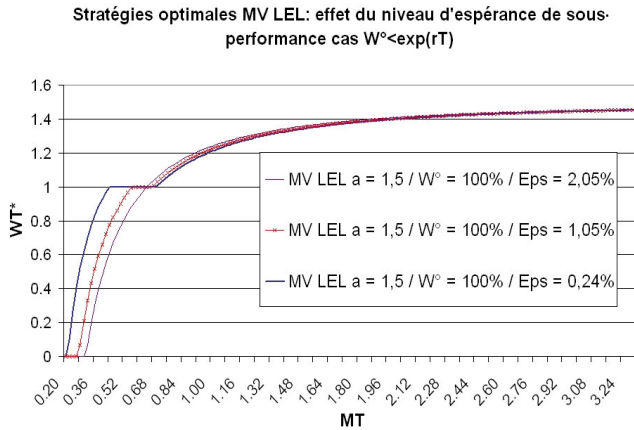


FIGURE 29. stratégies optimales MV LEL : effet du niveau d'espérance de sous-performance - cas  $W^0 < e^{rT}$

(2) Effet du changement du niveau de richesse cible  $W^0$ .

L'analyse de la figure (Fig.30) fait ressortir les deux points suivants :

- Comme pour la stratégie MV VaR, à niveau de seuil de probabilité de sous-performance équivalent, la zone intermédiaire de valeurs de l'actif risqué correspondant à une gestion "passive", avec protection du seuil de richesse cible, est d'autant plus étendue que le niveau de richesse cible est élevé.
- A l'inverse de la stratégie MV VaR, à niveau de seuil de probabilité de sous-performance équivalent, la zone de gestion active où il se produit une sous-performance est d'autant plus étendue que le niveau de richesse cible est élevé (ce qui traduit simplement la forme continue du "pay-off" de la stratégie MV LEL).

Ainsi, le profil de gain de la stratégie MV LEL sera d'autant plus défensif que le niveau de richesse cible sera élevé (i.e. moins de performance dans les scénarios favorables, et plus de protection dans les scénarios de marché médians et défavorables, quand le niveau de richesse cible augmente).

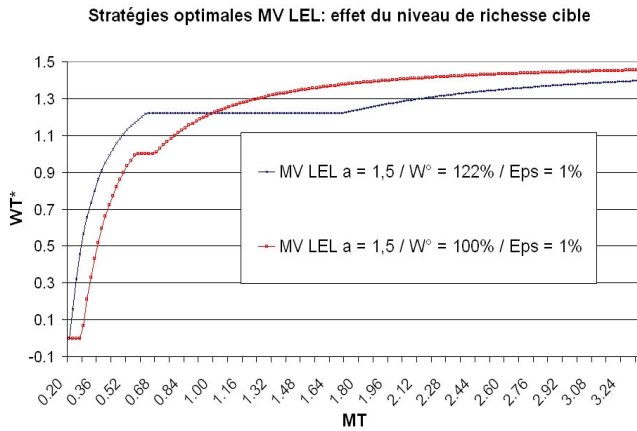


FIGURE 30. stratégies optimales MV LEL : effet du niveau de richesse cible  $W^0$

(3) Effet du changement du niveau d'aversion au risque  $a$ .

Comme le montre la figure (Fig.31), à niveau de seuil de sous-performance équivalent,

- La zone intermédiaire de valeur de l'actif risqué où s'opère une gestion "passive" avec protection du seuil de richesse cible est d'autant plus large que le niveau de tolérance au risque est élevé.
- A l'inverse, la zone de gestion active avec sous-performance est d'autant plus réduite que le niveau de tolérance au risque est élevé.
- Enfin, dans la zone de gestion active avec sur-performance, à partir d'un certain seuil de performance de l'actif risqué, la stratégie est d'autant plus performante que le niveau de tolérance au risque est élevé.

Par conséquent, on en déduit que l'accroissement du niveau de tolérance au risque implique une prise de risque plus importante ; i.e. une perte plus importante, resp. un gain plus important en cas de scénario de marché défavorable, resp. favorable.

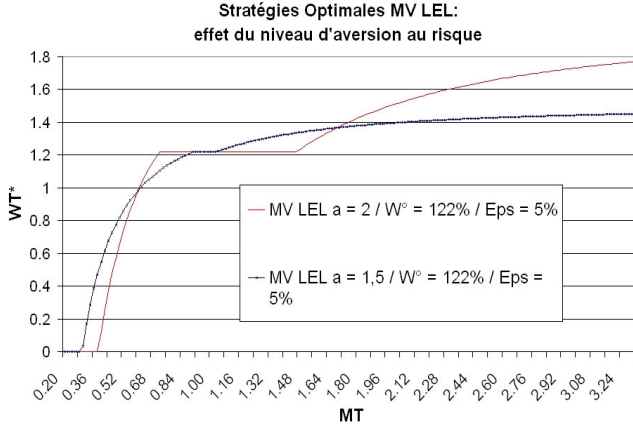


FIGURE 31. stratégies optimales MV LEL : effet du niveau d'aversion au risque  $a$

## 2.5. Analyse de la stratégie dynamique optimale.

En considérant l'expression de la richesse terminale optimale qui est fournie dans le théorème (3), on en déduit que la stratégie MV LEL peut s'interpréter comme la combinaison de trois stratégies plus élémentaires écrites sur le même sous-jacent, le portefeuille noté  $I$  atteignant la richesse finale  $1/H_T$ <sup>31</sup> :

- Une stratégie d'assurance de portefeuille de type MV PI dont la valeur intermédiaire est notée  $X_t$  comprenant une position investie dans un Zéro-Coupon et une position acheteuse d'une option Put de strike  $\underline{I} \equiv 1/\overline{H}$ .
- Une stratégie "vendeuse de couverture" dont la valeur intermédiaire est notée  $Y_t$  constituée d'une position vendeuse d'une option Put de strike  $\overline{I} \equiv 1/\underline{H}$ .
- Une stratégie "acheteuse de couverture" dont la valeur intermédiaire est notée  $Z_t$  constituée d'une position acheteuse d'une option Put de strike  $\overline{\overline{I}} = 1/\underline{\underline{H}}$ .

Plus précisément, on a le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 17. *La valeur à la date  $t$ , de la solution optimale,  $W_t^*$ , est donnée par la formule suivante :*  $W_t^* = X_t + Y_t + Z_t$

avec  $X_t \equiv \underline{W}ZC(t, T) + ak_B P(I_t, \underline{I}, T - t)$ ,  
 $Y_t \equiv -ak_A P(I_t, \overline{I}, T - t)$ ,  
 et  $Z_t \equiv ak_A P(I_t, \overline{\overline{I}}, T - t)$

31. pour une définition précise de ce portefeuille voir la section précédente qui traite de la stratégie MV VaR

avec les mêmes notations que précédemment et où  $ZC(t, T)$  (resp.  $P(I_t, X, T - t)$ , resp.  $B(I_t, X, T - t)$ ) désigne la valeur du Zéro-coupon (resp. de l'option put européen, resp. de l'option Put binaire de strike  $X$ ), d'échéance  $T - t$ , sur le sous-jacent  $I_t$ .

On en déduit sous les hypothèses du modèle à deux actifs de B&S les résultats suivants :

PROPRIÉTÉ 18. La valeur à la date  $t$  de la solution optimale,  $W_t^*$ , est donnée par la formule :

$$W_t^* = \underline{W}e^{-r(T-t)} + ak_B P(I_t, \underline{I}, T - t) - ak_A \{P(I_t, \bar{I}, T - t) - P(I_t, \bar{\bar{I}}, T - t)\}$$

avec  $P(I_t, X, T - t)$  qui désigne la valeur de l'option put européen de strike  $X$ , d'échéance  $T - t$ , sur le sous-jacent  $I_t$  :

$$P(I_t, X, T - t) = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2(X)) - I_tN(-d_1(X))$$

avec

$$d_2(x) = \frac{\log(\frac{I_t}{x}) + (r - \frac{\lambda^2}{2})(T-t)}{\lambda\sqrt{T-t}} \quad ; \quad d_1(x) = d_2(x) + \lambda\sqrt{T-t}$$

et avec  $\underline{I} = 1/\bar{H}$ ,  $\bar{I} = 1/\underline{H}$ ,  $\bar{\bar{I}} = 1/\underline{\underline{H}}$ ,  $k_A = k/A$ ,  $k_B = k/B$ .

Finalement, nous montrons qu'il est possible d'identifier l'expression de la mesure du risque de sous-performance pour la stratégie optimale "MV LEL", qu'on notera  $\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T)$ , à la valeur d'une option Put Spread de "couverture" écrite sur le portefeuille de type "MV",  $a(1 - k_A I_T)$ .

Ce résultat est exposé dans la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 19 (Mesure de risque "LEL").

- (1) La mesure du risque de sous-performance associée à la solution optimale du problème MV LEL, notée  $\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T)$ , correspond au coût d'acquisition d'une stratégie de couverture qui n'est autre qu'une option Put Spread ayant pour strikes  $\underline{W}$  et  $W^0$  avec  $\underline{W} < W^0$  et écrite sur le portefeuille de type MV atteignant la richesse finale  $a(1 - k_A I_T)$
- (2) La mesure de risque  $\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T)$  s'apparente à la mesure de risque associée au ratio de "Sharpe Omega", pour le niveau de richesse cible  $W^0$ , du portefeuille de type MV PI qui atteint la richesse finale  $Max \{a(1 - k_A/H_T); \underline{W}\}$ <sup>32</sup>.

32. En effet, on a

$$\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T) = E_0 \left[ \{W^0 - a(1 - k_A/H_T)\} 1_{\underline{H} < H_T \leq \underline{H}} + (W^0 - \bar{W}) 1_{H_T \leq \underline{H}} \right]$$

ce qui est la valeur présente d'une option Put de strike,  $W^0$ , écrite sur le portefeuille sous-jacent atteignant la richesse finale,  $Max \{a(1 - k_A/H_T); \underline{W}\}$ , stratégie de type "PI MV".

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ (19).

On a :  $\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T) \equiv E \left[ (1/H_T)(W^0 - W_T^*)1_{\{W_T^* \leq W^0\}} \right]$

De l'expression de  $W_T^*$  donnée dans le théorème (3), on en déduit que

$$\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T) = W^0 e^{-r(T-t)} + ak_B P(I_0, \underline{L}, T) - E[(1/H_T)W_T^*]$$

Et en utilisant la Propriété (18), on obtient alors :

$$\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T) = W^0 e^{-rT} + ak_A P(I_0, \bar{I}, T) - (\underline{W} e^{-rT} + ak_A P(I_0, \bar{I}, T))$$

Ainsi le niveau de risque mesuré par le paramètre  $\varepsilon$  est égal à la différence entre la valeur d'une stratégie MV PI de strike  $W^0$  et celle d'une stratégie MV PI de strike  $\underline{W} < W^0$  associée à la même constante  $k_A$ , ce qui s'écrit encore :

$$\varepsilon(H_T, W_T^*, W^0, T) = P^{spread}(a(1 - k_A I_T), \underline{W}, W^0, T)$$

où  $P^{spread}(Z_t, \underline{W}, W^0, T-t)$  désigne la valeur à la date,  $t$ , du Put Spread d'échéance,  $T-t$ , de strikes  $\underline{W}$  et  $W^0$  avec  $\underline{W} < W^0$  sur le sous-jacent  $Z_t$ <sup>33</sup>. On en déduit le résultat cherché.  $\square$

Ainsi le choix du niveau d'aversion pour le risque,  $A$ , considéré par l'investisseur cherchant à résoudre le problème (P11) peut se traduire en terme financier par un choix implicite de niveau de tolérance au risque de sous-performance ; cette mesure de risque étant identifiée comme la mesure de risque associée au ratio de "Sharpe Omega" de seuil  $W^0$  de la stratégie MV PI de richesse minimale  $\underline{W}$  et correspondant à la constante  $k_A$ <sup>34</sup>.

L'expression des poids de la stratégie optimale se déduit aisément de la Propriété (18) :

PROPRIÉTÉ 20. *L'allocation de la stratégie dynamique optimale correspondant au problème (P12) est donnée par l'expression suivante :*

$$\begin{cases} w_t^* W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'actif risqué } M \\ (1 - w_t^*) W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'A.S.R} \end{cases}$$

$$\text{avec } w_t^* W_t^* = \frac{\partial W_t^*}{\partial I_t} i I_t = ah \{k_B N(-d_1(\underline{L})) + k_A N(-d_1(\bar{I})) - k_A N(-d_1(\bar{I}))\} I_t$$

Nous analysons maintenant la sensibilité de la stratégie MV LEL aux variations de l'actif risqué pour différentes valeurs des paramètres considérés.

### (1) Sensibilité à l'actif risqué sous-jacent

Nous considérons la stratégie MV LEL pour  $W^0 = 122, 14\%$  et pour un niveau de protection à hauteur de 90% du capital investi ; à titre de comparaison, nous considérons également la stratégie MV PI avec une protection du capital à 90% (notée "MV PI 0") et à 100% (notée "MV PI 1").

33. Le "pay-off" de cette option Put Spread s'écrit :

$Max\{W^0 - Z_T; 0\} - Max\{\underline{W} - Z_T; 0\}$  avec  $Z_T \equiv a(1 - k_A/H_T)$ .

34.  $k_A \equiv k/A$  avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante  $E(W_T^*/H_T) = 1$  où  $W_T^*$  désigne la stratégie MV LEL (dont l'expression de la richesse terminale est donnée dans le théorème (3)).

Sur la figure (Fig.32), nous avons représenté le "pay-off" de la stratégie MV LEL (courbe rouge), MV VaR (courbe rose) et celui de la stratégie "MV PI 0" (courbe violette) et de la stratégie "MV PI 1" (courbe bleue).

La stratégie MV LEL domine les stratégies d'assurance de portefeuille dans un intervalle de valeurs de l'actif risqué médianes à basses ; à l'opposé, pour les valeurs de l'actif risqué où elle sur-performance la richesse cible, la stratégie MV LEL est dominée par les stratégies d'assurance de portefeuille.

D'autre part, dans la zone de sous-performance par rapport à la richesse cible, la valeur de la stratégie MV LEL est au-dessus de celles des stratégies MV VaR et MV PI 0 ; de plus, le "pay-off" de la stratégie MV LEL ne présente pas de discontinuité comme c'est le cas pour la stratégie MV VaR.

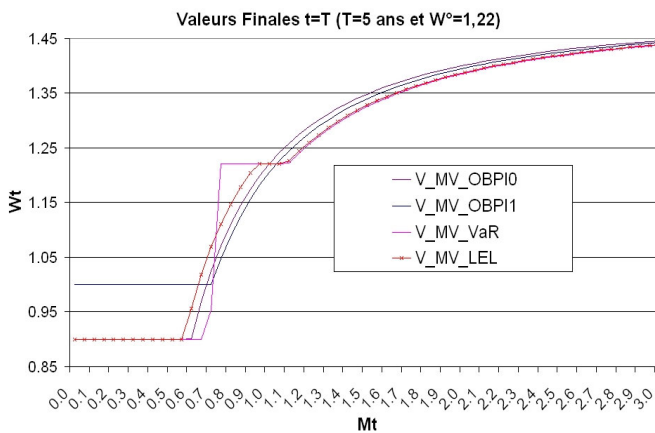


FIGURE 32. Valeurs finales - Stratégie "MV LEL", "MV PI 0", "MV PI 1" "MV VaR" :  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 90\%$ .  
 "MV PI 0" :  $\underline{W} = 90\%$ .  
 "MV PI 1" :  $\underline{W} = 100\%$ .

Comme on peut l'observer sur la figure (Fig.33), la valeur intermédiaire (au bout de 4,5 ans) de la stratégie MV LEL reste proche de celle de la stratégie MV PI 0 et MV PI 1 et les remarques faites sur le "pay-off" de ces stratégies reste valables.

Sur la figure (Fig.34), nous avons représenté, pour les trois stratégies considérées, le poids de la richesse totale investi dans l'actif risqué.

Nous pouvons faire les commentaires suivants :



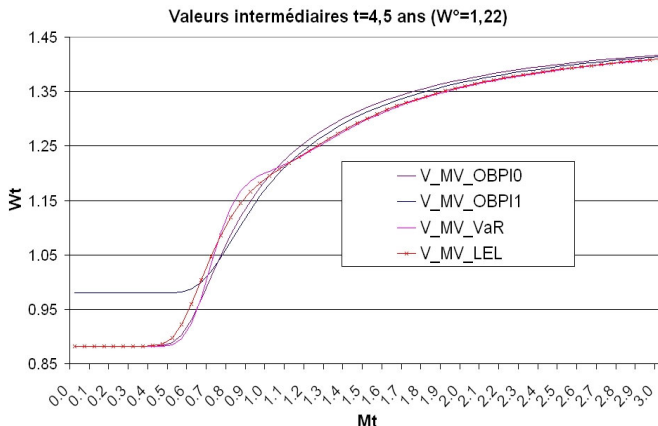


FIGURE 33. Valeurs intermédiaires - Stratégie "MV LEL", "MV VaR", "MV PI 0", "MV PI 1"

"MV LEL" "MV VaR" :  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 90\%$ .

"MV PI 0" :  $\underline{W} = 90\%$ .

"MV PI 1" :  $\underline{W} = 100\%$ .

- L'investisseur de la stratégie MV LEL (courbe rouge) se comporte, dans un intervalle de valeurs élevées de l'actif risqué où se produit une sur-performance (valeurs de  $M_t$  supérieures à 1,5 dans l'exemple numérique considéré), de façon similaire à celui de la stratégie MV PI 0 sans contrainte de sous-performance (courbe violette) et a donc un profil concave (le poids de la richesse total investi en actif risqué augmente quand la valeur de l'actif risqué baisse).
- Dans un intervalle de valeurs intermédiaires de l'actif risqué où la richesse est légèrement inférieure au niveau cible (valeurs de  $M_t$  comprises entre 1 et 1,5), la stratégie MV LEL est similaire à une stratégie d'assurance de portefeuille convexe (baisse de l'exposition en actif risqué au fur et à mesure de la baisse de la valeur de l'actif risqué) tandis que la stratégie MV PI 0 continue d'exhiber un profil concave; à noter que le niveau de désinvestissement en actif risqué de la stratégie MV LEL est plus faible que dans le cas de la stratégie VaR.
- Dans un intervalle de valeurs encore plus basses de l'actif risqué (valeurs de  $M_t$  comprises entre 0,6 et 1), la stratégie MV VaR opère un ré-investissement sans dépasser l'exposition à l'actif risqué de la stratégie MV PI 0; il n'y a donc pas d'effet casino, au contraire de la stratégie MV VaR.
- Pour les valeurs les plus basses de l'actif risqué (valeurs inférieures à 0,6 dans notre exemple numérique), la stratégie MV LEL est à nouveau similaire à une stratégie convexe d'assurance de portefeuille : quand l'actif risqué baisse, le niveau d'exposition à l'actif risqué régresse, en convergeant vers 0, et sans jamais, contrairement à la

stratégie MV VaR, repasser en dessous du niveau d'exposition de la stratégie MV PI 0 (correspondant à une stratégie moins aversive à la sous-performance).

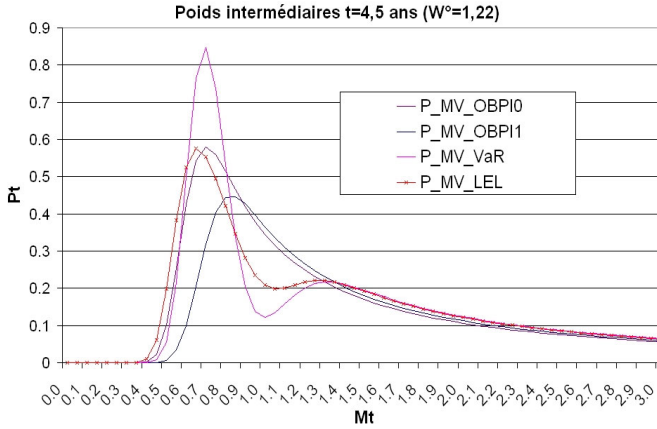


FIGURE 34. Poids intermédiaires - Stratégie "MV LEL", "MV VaR", "MV PI 0", "MV PI 1"  
 "MV VaR" et "MV LEL" :  $W^0 = 122\%$ ,  $\underline{W} = 90\%$ .  
 "MV PI 0" :  $\underline{W} = 90\%$ .  
 "MV PI 1" :  $\underline{W} = 100\%$ .

(2) Sensibilité au temps restant jusqu'à l'horizon d'investissement.

Comme on peut observer sur la figure (Fig.35), l'investisseur "MV LEL" se comporte de manière contraire aux règles de "diversification temporelle" du "Conventional Wisdom" ; en effet plus le temps passe et plus la stratégie est sensible au mouvement du sous-jacent  $M_T$ .

(3) Sensibilité au seuil d'espérance de sous-performance  $\varepsilon$ .

Les figures (Fig.36), (Fig.37),(Fig.38),(Fig.39) montrent que, comme dans le cas de l'investisseur "MV VaR", plus l'aversion à la sous-performance est élevée (i.e. plus la valeur du paramètre  $\varepsilon$  est faible) plus l'investisseur "MV LEL" a tendance à "sur réagir" par rapport à l'investisseur MV PI de référence (investisseur "MV LEL" avec un niveau minimum d'aversion à la sous-performance).

Ainsi, le creux d'exposition à l'actif risqué, qui se produit dans un intervalle de valeurs intermédiaires de l'actif risqué, devient plus prononcé quand la valeur du paramètre de perte,  $\varepsilon$ , diminue.

A l'opposé, contrairement à la stratégie VaR, le pic d'exposition à l'actif risqué qui se produit dans la zone de sous-performance est le même quel que soit le choix du niveau de risque de sous-performance maximale.

(4) Sensibilité au niveau de tolérance au risque  $a$ .

Les figures (Fig.40) et (Fig.41) ci-dessous illustrent le fait que pour une valeur donnée du paramètre d'aversion à la sous-performance  $A$ , plus le niveau de tolérance au risque est élevé, moins la contrainte d'aversion à la sous-performance est restrictive pour l'asset manager MV LEL.

Par exemple, pour le niveau le plus élevé de tolérance au risque considéré dans notre exemple numérique, i.e.  $a = 4$  (courbe rose), le degré d'aversion à la sous-performance ne joue presque pas puisque la stratégie exhibe le profil "convexe-concave" typique d'une stratégie d'assurance de portefeuille MV PI.

(5) Sensibilité au niveau de protection du capital  $W$ .

Plus le niveau de protection est bas et plus l'effet de "sur-exposition" dans la zone de sous-performance proche de la richesse cible est important comme illustré sur les figures (Fig.42) et (Fig.43).

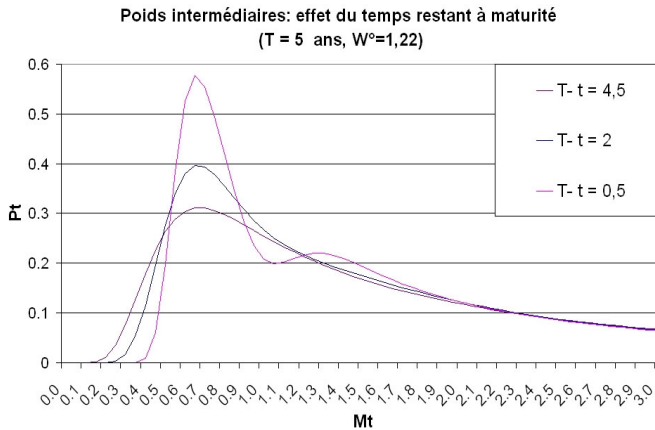


FIGURE 35. Effet du temps restant jusqu'à l'horizon d'investissement  $T - t$  - Poids intermédiaires - Stratégie "MV LEL" -  $W^0 = 122\%$

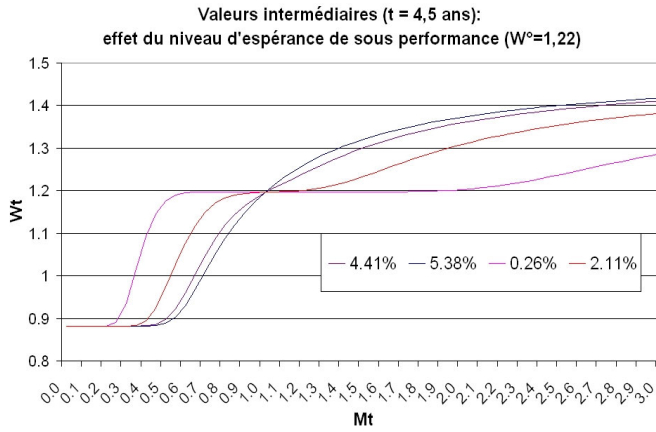


FIGURE 36. Effet du seuil d'espérance de sous-performance  $\varepsilon$  - Valeurs intermédiaires - Stratégie "MV LEL" -  $W^0 = 122\%$

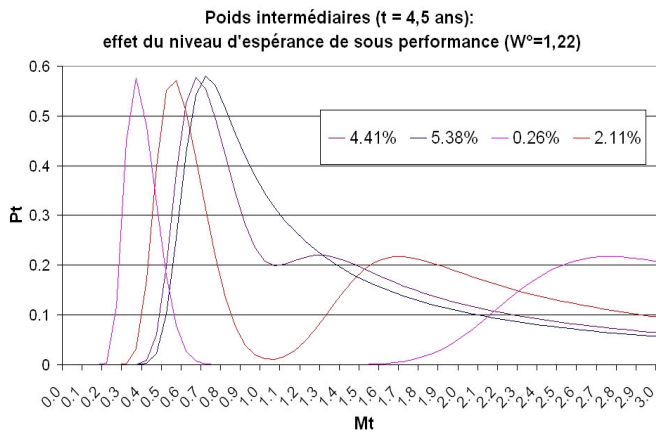


FIGURE 37. Effet du seuil d'espérance de sous-performance  $\varepsilon$  - Poids intermédiaires - Stratégie "MV LEL" -  $W^0 = 122\%$

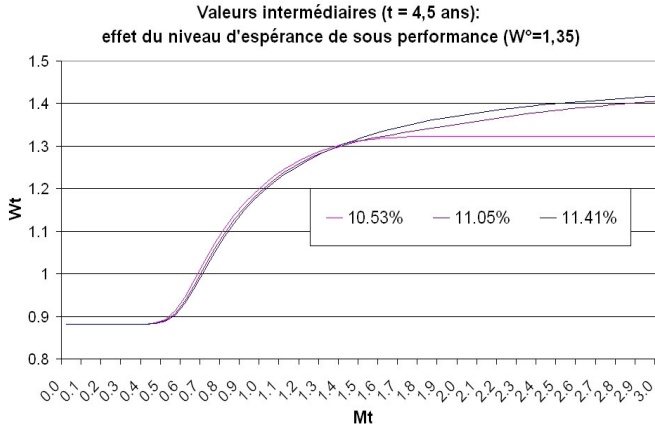


FIGURE 38. Effet du seuil d'espérance de sous-performance  $\varepsilon$  - Valeurs intermédiaires - Stratégie "MV LEL" -  $W^0 = 135\%$

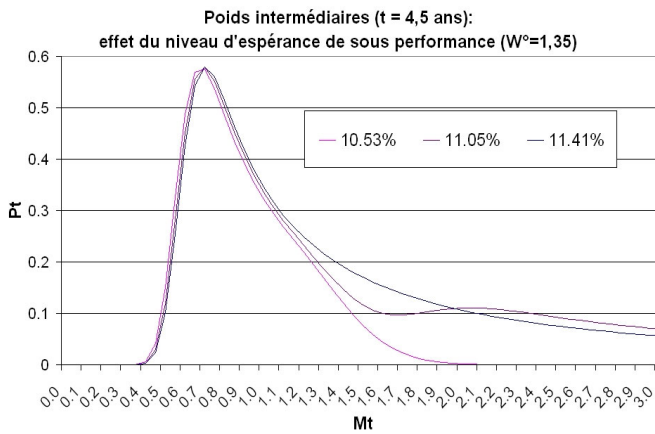


FIGURE 39. Effet du seuil d'espérance de sous-performance  $\varepsilon$  - Poids intermédiaires - Stratégie "MV LEL" -  $W^0 = 135\%$

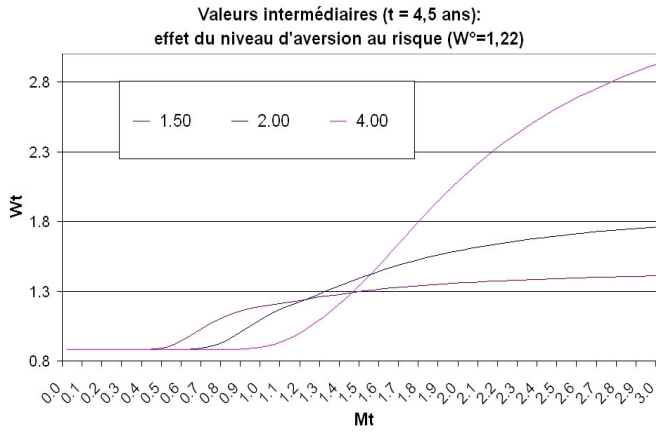


FIGURE 40. Effet du niveau de tolérance au risque  $a$  - Valeurs intermédiaires - Stratégie "MV LEL"  $W^0 = 122\%$

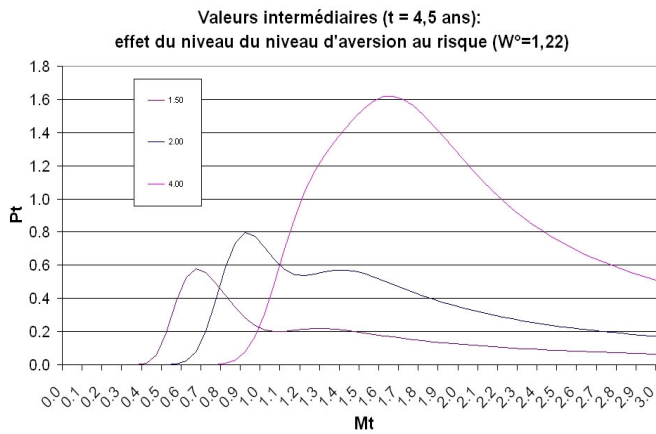


FIGURE 41. Effet du niveau de tolérance au risque  $a$  - Poids intermédiaires - Stratégie "MV LEL"  $W^0 = 122\%$

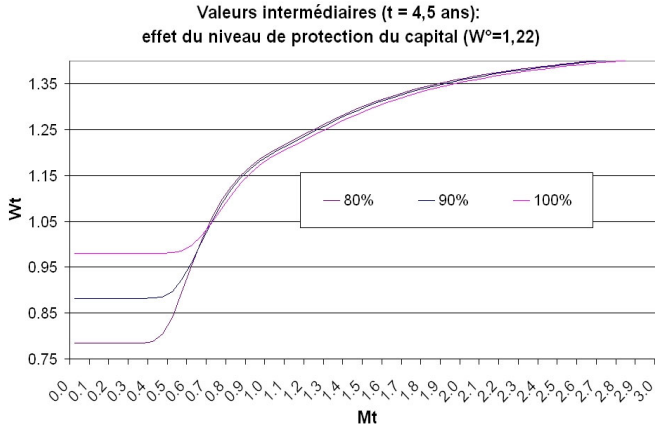


FIGURE 42. Effet du niveau de protection du capital  $\underline{W}$  - Valeurs intermédiaires - Stratégie "MV LEL"  $W^0 = 122\%$

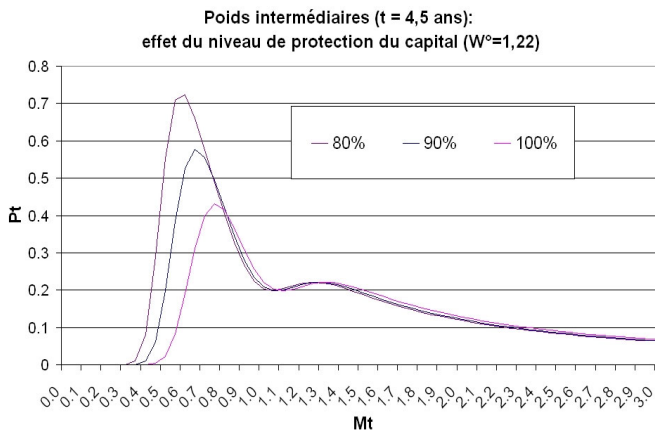


FIGURE 43. Effet du niveau de protection du capital  $\underline{W}$  - Poids intermédiaires - Stratégie "MV LEL"  $W^0 = 122\%$

### 3. Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressé au problème d'allocation dynamique de portefeuille "Moyenne-Variance / Downside Risk", en guise d'alternative aux problèmes "Moyenne / Variance" (non prise en compte de l'aversion à la sous-performance de l'investisseur) et "Moyenne / Downside Risk" (neutralité au risque dans la zone de sur-performance).

Il s'agit du problème d'investissement de l'asset manager qui cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale pour une forme généralisée de fonction d'utilité quadratique adaptée à la prise en compte de son aversion à la sous-performance.

Nous avons considéré implicitement les deux mesures de risque que sont la probabilité de perte et l'espérance du coût d'utilité de cette perte, et nous avons supposé que l'investisseur doit prendre en compte une contrainte explicite supplémentaire d'assurance de portefeuille dans son critère d'investissement.

La forme du problème d'investissement analysé généralise un certain nombre de problèmes d'investissement déjà proposés dans la littérature :

- A la limite, pour un niveau d'aversion à la perte nul, on retrouve la forme du problème "Moyenne-Variance" avec contrainte de protection du capital mais sans aversion à la sous-performance.
- A la limite, pour un niveau de tolérance au risque maximal, on retrouve la forme du problème "Moyenne / Downside Risk" avec contrainte de protection du capital et avec une neutralité face au risque de l'investisseur dans la zone de sur-performance.

Nous avons montré que ce problème d'investissement peut, de manière équivalente, s'exprimer comme celui de l'investisseur non averse à la sous-performance, qui cherche à maximiser l'utilité (quadratique) espérée de sa richesse finale et qui doit prendre en compte une double contrainte explicite de risque ; une contrainte d'assurance de portefeuille ainsi qu'une contrainte de niveau maximal de risque de sous-performance.

Il s'agira d'une contrainte explicite de type "Value at Risk" (si la probabilité de perte est la mesure de risque choisie) ou d'une contrainte de type "Limited Expected Loss" (si le choix de la mesure de risque porte sur l'espérance du coût d'utilité de la perte).

Nous avons montré que, selon la mesure de perte considérée, l'effet de la prise en compte d'une contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille sur le profil de gain optimal est très différent :



- (1) La forme du profil optimal de richesse finale pour le problème d'investissement avec fonction d'utilité discontinue (contrainte implicite sur la probabilité de sous-performance) dépend de l'écart entre la richesse cible et le niveau considéré de protection du capital<sup>35</sup> :

-Si la cible de richesse finale est suffisamment éloignée du niveau de protection (i.e. pour un écart de valeur supérieur à un seuil de référence<sup>36</sup>), le "pay-off" de la stratégie optimale admet quatre états de richesse, dont trois sont similaires à la stratégie optimale de ce même problème sans assurance de portefeuille<sup>37</sup> et un quatrième état de richesse basse qui correspond au niveau de protection du capital.

-Dans le cas contraire, i.e. si la cible de richesse est trop proche du niveau de protection, la stratégie optimale admet une forme "dégradée", à trois états de richesse finale, qui ne dépend pas du degré d'aversion à la sous-performance de l'investisseur.

-Dans les deux cas, le profil de gain de la stratégie optimale est discontinue, ce qui induit une prise de risque supplémentaire similaire à celui d'une stratégie optionnelle binaire (option digitale).

- (2) La stratégie optimale du problème d'investissement avec fonction d'utilité continue (contrainte implicite sur l'espérance du coût d'utilité de la sous-performance) admet au contraire une forme de "pay-off" continue qui est unique quelque soit le niveau considéré de protection du capital.

Le "pay-off" de la stratégie optimale admet quatre états de richesse, dont trois sont similaires à la stratégie optimale de ce même problème sans assurance de portefeuille<sup>38</sup> et un quatrième état de richesse basse qui correspond au niveau de protection du capital. Le passage entre chacun de ces états est continu

Enfin, nous avons explicité, dans le cadre du modèle à deux actifs de Black & Scholes (1973), l'expression de la stratégie dynamique optimale ; celle-ci s'identifie à une combinaison d'options dont le sous-jacent correspond au portefeuille de type "Moyenne Variance", solution du problème dynamique sans contrainte d'aversion ni protection du capital.

---

35. Toute chose restant égale par ailleurs (i.e. à valeur constante des paramètres d'aversion au risque et d'aversion à la perte de l'investisseur).

36. La valeur de ce seuil de protection du capital est une fonction croissante de l'aversion au risque et de l'aversion à la perte de l'investisseur.

37. Il s'agit du problème de l'asset manager "HARA loss averse" (sans contrainte de protection) présenté dans le premier chapitre dans le cas particulier où la fonction d'utilité est une fonction d'utilité quadratique discontinue et comprend une mesure de perte uniforme.

38. Il s'agit du problème de l'asset manager "HARA loss averse" (sans contrainte de protection) présenté dans le premier chapitre dans le cas particulier où la fonction d'utilité est une fonction d'utilité quadratique continue et comprend une mesure de perte non uniforme qui dépend du coût d'utilité de la perte.

## Allocation dynamique avec benchmark et taux stochastique

Nous souhaitons dans ce chapitre étudier le problème de l'allocation dynamique de portefeuille optimale avec benchmark et, le cas échéant, contrainte d'aversion à la sous-performance<sup>1</sup>, dans le cadre d'un modèle d'actifs avec des hypothèses moins restrictives que celles du modèle de Black & Scholes (hypothèse de taux d'intérêt constant et existence d'un seul actif risqué).

Ainsi, nous considérons un marché financier élargi à deux sources de risques (un facteur de risque action et un facteur de risque de taux d'intérêt) et nous nous plaçons sous les hypothèses du modèle de taux stochastique à un facteur de [Vasicek, 1977] pour décrire la déformation de la courbe des taux d'intérêt.

Le choix d'un univers d'investissement comprenant les deux grandes classes d'actifs traditionnelles que sont les actions et les obligations couplé à la prise en compte d'une contrainte de gestion du risque de sous-performance va nous permettre d'analyser le problème d'investissement caractéristique de l'investisseur institutionnel (assureur, fonds de pension), à savoir :

- allouer son portefeuille de manière dynamique entre plusieurs classes d'actifs (action, obligation,...).
- générer, à un horizon d'investissement fixé, une sur-performance par rapport à un benchmark définissant l'allocation "stratégique" de son portefeuille<sup>2</sup>, tout en maîtrisant son risque de sous-performance.

Notons que ce type de problème d'allocation dynamique en temps continu pour lequel la variable de richesse est la valeur du portefeuille en excès du benchmark a déjà été proposé dans la littérature.

[Bajeux-Besnainou *et al.*, 2003a] étudient le critère de minimisation de la "Tracking Error" (définie comme l'écart type de la différence entre valeur finale du portefeuille et du benchmark) pour un niveau fixé d'espérance de sur-performance<sup>3</sup>; ces auteurs considèrent deux types de contraintes explicites supplémentaires (une contrainte portant sur un niveau de richesse minimum fixe et une contrainte de sous-performance maximale par rapport à un benchmark variable) et se placent

---

1. relativement à un portefeuille de référence ou "benchmark"

2. le portefeuille benchmark peut aussi s'interpréter comme un portefeuille "proxy" de couverture des engagements futurs, i.e des flux du passif, de l'investisseur institutionnel.

3. Ce qui revient à considérer comme critère du problème d'investissement la maximisation de l'utilité espérée du surplus de richesse avec un choix de fonction d'utilité quadratique.

dans le cadre d'un modèle à trois actifs (portefeuille de marché, portefeuille benchmark et actif monétaire) sous l'hypothèse de taux d'intérêt constant.

[Zhao, 2007] propose un modèle similaire (comprenant  $N$  actifs qui suivent des Mouvements Browniens Géométriques et un taux court non stochastique) et résout le problème de maximisation de l'utilité espérée du "surplus" de la richesse (écart de richesse finale entre le portefeuille et le benchmark) en se fondant sur une forme générale de fonction d'utilité HARA (avec comme cas particulier la fonction d'utilité quadratique) mais sans prendre en compte une contrainte de risque de sous-performance maximale.

Dans le prolongement de ces articles, nous cherchons à expliciter l'allocation dynamique action / obligation / monétaire optimale en supposant que l'investisseur doit prendre en compte une contrainte supplémentaire sur le niveau du risque de sous-performance de son portefeuille<sup>4</sup> et qu'il est soumis en plus du risque action à une seconde source de risque liée à la variation stochastique des taux d'intérêt.

Notre modèle d'actifs sera celui proposé par [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2001] ou [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2003b]. Il s'agit d'un modèle à deux sources de risques (taux et action) fondé sur la dynamique du taux court pour décrire la courbe des taux. Ce modèle implique en particulier l'existence d'un paramètre de corrélation constant négatif entre le facteur de risque lié à l'actif action et celui provenant de la dynamique des taux d'intérêt.

Dans la première sous-section, nous présentons les principales caractéristiques du modèle à trois actifs considéré.

Dans la seconde sous-section, nous explicitons et analysons les propriétés de la solution du problème de maximisation de l'utilité espérée du "surplus" de richesse par rapport à un benchmark (investisseur HARA non averse à la sous-performance); nous considérons à la fois l'investisseur HARA ayant un profil de gain "concave" (similaire à l'investisseur du problème Moyenne-Variance dynamique) et l'investisseur HARA avec profil "convexe" (similaire à une stratégie d'assurance de portefeuille non optionnelle de type "Constant Proportion Portfolio Insurance"<sup>5</sup>).

Dans la troisième et dernière sous-section, nous expliciterons l'allocation dynamique optimale pour l'investisseur HARA, averse à la sous-performance, devant prendre en compte une contrainte sur le niveau de risque de sous-performance du portefeuille couplée à une contrainte explicite d'assurance de portefeuille.

---

4. portant sur le niveau d'espérance de sous-performance par rapport à un benchmark

5. La stratégie "CPPI" ou encore stratégie du "coussin" est une stratégie dynamique d'assurance de portefeuille consistant à investir, dans un portefeuille d'actifs risqués, une proportion constante de l'excès de richesse par rapport au niveau cible ou benchmark (appelé couramment "coussin"; elle implique un dé-investissement progressif ou dynamique au fur et à mesure que le niveau du sous-jacent baisse, i.e. que la valeur du "Coussin" diminue.

Pour plus de détail, on pourra se référer à [Perold Sharpe, 1988] ou plus récemment, dans un cadre de problème d'allocation dynamique, à [Basak, 2002].

On notera enfin, que la forme de profil concave des stratégies optimales que nous considérons (cas où  $\gamma < 0$ ) peut être vue comme une stratégie "anti-coussin" qui est la stratégie opposée de la stratégie "CPPI"; la stratégie "Anti-Coussin" s'apparente à une stratégie contrariante: elle implique un réinvestissement progressif en actifs risqués au fur et à mesure que le niveau du sous-jacent baisse, i.e. que la valeur de l'"Anti-Coussin" diminue (défini comme la différence entre la richesse du portefeuille et le niveau cible de richesse maximale).

## 1. Modèle d'actifs considéré

### 1.1. Expression de la dynamique des actifs considérés.

Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2001], qui supposent que la courbe des taux est décrite par le modèle de [Vasicek, 1977] et considèrent l'existence de quatre actifs (dont deux actifs obligataires redondants) :

- (1) L'actif monétaire dont la dynamique de prix est décrite par l'équation suivante :

$$dS_t^0/S_t^0 = r(t)dt$$

ou  $r_t$  désigne la valeur du taux d'intérêt à court terme du marché monétaire et suit un processus d'Orstein-Uhlenbeck donné par l'équation suivante :

$$dr_t = a_r(b_r - r_t)dt - \sigma_r dZ_t^r$$

avec  $a_r$  désignant le taux de retour à la moyenne,  $b_r$  le niveau moyen du taux court à l'équilibre et  $\sigma_r$  la volatilité du taux court.

- (2) Deux actifs obligataires redondants <sup>6</sup> :

- Un Zéro-Coupon, qui a pour maturité, à la date 0, l'horizon d'investissement  $T$  (et qui a donc une durée de  $T - t$ , à la date  $t \in [0, T]$ ) ; sa dynamique de prix est la suivante :

$$dB(t, T - t)/B(t, T - t) = (r_t + \lambda_r \sigma_{T-t})dt + \sigma_{T-t} dZ_t^r$$

ou  $\lambda_r$  est le prix du risque, supposé constant.

Sa prime de risque dépend de  $T - t$  et s'écrit :  $\theta_{T-t} = \lambda_r \sigma_{T-t}$  avec  $\sigma_{T-t} = \sigma_r(1 - e^{-a_r(T-t)})/a_r$

- Un fonds obligataire maintenant une durée constante, notée  $K$  (en pratique  $K > T$ ) modélisé par le processus suivant :

$$dB_K/B_K = (r_t + \lambda_r \sigma_K)dt + \sigma_K dZ_t^r$$

Sa prime de risque est constante et s'écrit :  $\theta_K = \lambda_r \sigma_K$  avec

---

6. Notons que le modèle de Vasicek implique que  $\sigma_x = \sigma_r(1 - \exp(-ax))/a$  avec  $x = K$  ou  $T - t$

De plus on remarque qu'on a  $dB_{T-t}/B_{T-t} = (\sigma_{T-t}/\sigma_K)dB_K/B_K + (1 - \sigma_{T-t}/\sigma_K)dS_t^0/S_t^0$ . Ce qui s'interprète de la manière suivante : 1 Euro investi dans  $B_{T-t}$ , entre  $t$  et  $t + dt$ , est équivalent à un portefeuille composé de  $\sigma_{T-t}/\sigma_K$  Euros investis sur  $B_K$  et  $1 - \sigma_{T-t}/\sigma_K$  Euros investis sur  $S_t^0$ .

$$\sigma_K = \sigma_r(1 - e^{-a_r K})/a_r$$

- (3) Un actif de type action ou indice action, dont la dynamique est la suivante<sup>7</sup> :

$$dS/S = (r_t + \theta_S)dt + \sigma_1 dZ_t^S + \sigma_2 dZ_t^r ,$$

avec  $(W_S, W_r)$  un mouvement brownien standard bidimensionnel,

et ou  $\theta_S = \lambda_S \sigma_1 + \lambda_r \sigma_2$  , désigne la prime de risque constante de l'indice action.

On notera que les hypothèses de ce modèle impliquent, d'une part, que les prix des instruments de taux (taux court et instrument obligataire Zéro-Coupon ) sont modélisés par des processus stochastiques dont la volatilité est déterministe, et d'autre part, que la déformation de la courbe des zéro-coupon est décrite entièrement par une seule variable d'état, le taux court, noté  $r_t$ <sup>8</sup>.

---

7. Sous les hypothèses de ce modèle, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

-la volatilité de l'indice action est constante, donnée par  $\sigma_S \equiv \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  .

-le niveau de corrélation entre la valeur de l'actif de type action et le niveau des taux (dr ou  $-d\text{LnB}(t, T-t)$ ), qui provient du terme  $\sigma_2 dW_t^r$ , est négatif et constant .

8. L'expression du prix de l'actif Zéro-Coupon est donnée dans le cadre du modèle de [Vasicek, 1977] par la formule suivante :

$$B(t, T-t) = e^{-m*(T-t) + \frac{\Sigma^2(T-t)}{2}}$$

$$\text{avec } m * (T-t) = b_r^*(T-t) + (r_t - b_r^*)F(T-t), \quad \Sigma^2(T-t) \equiv \int_t^T \sigma_{T-u}^2 du =$$

$$\frac{\sigma_r^2(T-t)}{a_r^2} \left[ 1 - \frac{F(T-t)}{(T-t)} - a_r \frac{F(T-t)^2}{2(T-t)} \right], \text{ où on a posé } F(T-t) \equiv \frac{\sigma_{T-t}}{\sigma_r} \equiv \frac{1 - e^{-a_r(T-t)}}{a_r} \text{ et } b_r^* = b_r + \lambda_r \frac{\sigma_r}{a_r}$$

## 1.2. Expression de la dynamique du portefeuille "growth-optimal" et du portefeuille de Merton.

LEMME 1.

- (1) *Le portefeuille numéraire (ou "growth-optimal" ou encore "log-optimal"), noté  $(H, h)$ , est une stratégie dont les poids, représentant la part de richesse investie dans les différents actifs, sont donnés par les expressions suivantes<sup>9</sup> :*

$$\begin{cases} h_S \equiv \lambda_s / \sigma_1 & \text{sur l'actif de type action } S \\ h_K \equiv (\lambda_r \sigma_1 - \lambda_s \sigma_2) / \sigma_1 \sigma_K & \text{sur l'actif de type obligataire } B_K \\ 1 - h_S - h_K & \text{sur l'actif monétaire } S^0 \end{cases}$$

Ou encore,

$$\begin{cases} h_S & \text{sur l'actif de type action } S \\ h_K \sigma_K / \sigma_{T-t} & \text{sur l'actif Zéro-Coupon } B_{T-t} \\ 1 - h_S - h_K \sigma_K / \sigma_{T-t} & \text{sur l'actif monétaire } S^0 \end{cases}$$

- (2) *De plus le prix de ce portefeuille suit un processus d'Itô multidimensionnel dont l'expression est la suivante :  $dH_t/H_t = (r_t + \|\lambda\|^2) dt + \lambda' dZ_t$*

- (3) *Expression de l'allocation du portefeuille  $H$  en terme de prime de risque*

*Nous pouvons réécrire les poids, correspondant à la part de richesse totale investie dans les actifs action et obligataire, de la façon suivante<sup>10</sup> :*

$$h_S \equiv \theta_{s1} / \sigma_1^2 \text{ et } h_K \equiv (\theta_K / \sigma_K^2) - h_S \times (\theta_{s2} / \theta_K)$$

$$\text{avec } \theta_{s1} = \lambda_S \sigma_1 \text{ et } \theta_{s2} = \lambda_r \sigma_2$$

9. On notera les propriétés suivantes :

-Les poids de la richesse totale investie dans les différents actifs du portefeuille  $H$  sont constants quand on les exprime par rapport aux trois actifs  $S$ ,  $B_K$ , et  $S^0$  mais dépendent du temps restant à courir jusqu'à maturité quand on les exprime par rapport aux trois actifs  $S$ ,  $B_{T-t}$ , et  $S^0$ .

-D'autre part, on note que si  $\lambda_s = \sigma_1$  et  $\lambda_r = \sigma_2$  (ou de manière équivalente si  $\theta_s = \sigma_s^2$  et  $\theta_K = \sigma_2 \times \sigma_K$ ) alors les poids du portefeuille  $H$  sont  $h_S = 1$ ;  $h_K = 0$  et par conséquent le portefeuille  $H$  se réduit à l'actif,  $S$ , de type action.

10. Ce qui s'interprète de la façon suivante

-Plus l'anticipation sur l'évolution de la composante pure action est positive (i.e. plus le ratio de la prime correspondant au risque action pure,  $\theta_{s1}$ , sur la partie de la variance action "pure",  $\sigma_1^2$ , est élevé) et plus  $h_S$ , le poids du portefeuille  $H$  investi sur l'actif  $S$  de type action, est important.

-Plus l'anticipation sur l'évolution de l'actif obligataire est positive (plus le ratio  $(\theta_K / \sigma_K^2)$ , de la prime de l'actif obligataire sur sa variance est grande) et plus  $h_K$ , est élevé.

-Inversement, plus  $h_S$  et  $(\theta_{s2} / \theta_K)$  (rapport entre la partie de la prime de l'actif action provenant de la corrélation action / taux et de la prime de l'actif obligataire) sont élevés et plus,  $h_K$ , le poids du portefeuille  $H$  investi sur l'actif  $B_K$ , est faible. Implicitement, une partie de la prime obligataire est déjà capturée par l'exposition du portefeuille à l'actif action.

LEMME 2.

- (1) *Le portefeuille de Merton qui peut se définir comme la stratégie dynamique atteignant la richesse finale  $(H_T)^{1/\gamma}$ <sup>11</sup>, et que l'on note  $(h^*, H^*)$ , exhibe des poids, correspondant à la part de richesse investie dans les différents actifs, qui sont donnés par les formules suivantes<sup>12</sup> :*

$$\begin{cases} 1/\gamma & \text{sur le portefeuille } H \\ 1 - 1/\gamma & \text{sur l'actif Zéro-Coupon } B_{T-t} \end{cases}$$

Ou

$$\begin{cases} h_S/\gamma & \text{sur l'actif action } S \\ h_K/\gamma & \text{sur l'actif obligataire } B_K \\ (1 - h_S - h_K)/\gamma & \text{sur l'actif monétaire } S^0 \\ (1 - 1/\gamma) & \text{sur l'actif Zéro-Coupon } B_{T-t} \end{cases}$$

Ou encore

$$\begin{cases} h_S/\gamma & \text{sur l'actif de type action } S \\ (h_K/\gamma) + (1 - 1/\gamma)\sigma_{T-t}/\sigma_K & \text{sur l'actif de type obligataire } B_K \\ \text{Le reste sur l'actif monétaire } S^0 \end{cases}$$

- (2) *Le prix du portefeuille  $(h^*, H^*)$  suit un processus d'Itô dont la dynamique est la suivante :*

$$dH_t^*/H_t^* = (r_t + \|\lambda\|^2/\gamma) dt + (\lambda' / \gamma) dZ_t$$

- (3) *La valeur intermédiaire, notée  $Ht^*$ , est donnée par l'expression suivante :*

$$H_t^* = H_t^{1/\gamma} [B(t, T - t)]^{(1-1/\gamma)} e^{\frac{(1-\gamma)}{2}(\sigma_H(T-t)/\gamma)^2}$$

avec  $\sigma_H^2(T-t) = \text{Var}(\text{Ln}(H_T)) = \Sigma^2(T-t) + \|\lambda\|^2(T-t) - 2\rho_H \|\lambda\| \eta(T-t)$   
 où  $\Sigma^2(T-t) \equiv \int_t^T \sigma_{T-u}^2 du$ ;  $\eta(T-t) \equiv (\int_t^T \sigma_{T-u} du)$ ;  $\rho_H = \lambda_r / \|\lambda\|$  et  $\|\lambda\|^2 = \lambda_r^2 + \lambda_S^2$  et où  $B(t, T-t)$  désigne la valeur de l'actif Zéro-Coupon d'échéance  $T-t$  dans le modèle de [Vasicek, 1977].

11. à la constante de budget près

12. On notera que les poids du portefeuille  $H^*$  sont indépendants de  $T-t$  quand ils sont exprimés en fonction du prix des quatre actifs  $S$ ,  $B_K$ , et  $S^0$  et  $B_{T-t}$  mais dépendent de  $T-t$ , quand ils sont exprimés en fonction du prix des trois actifs  $S$ ,  $B_K$ , et  $S^0$ .  
 Quand  $t \rightarrow T$ , le vecteur des poids de  $H^*$  tend vers le vecteur de poids constant,  $(1/\gamma) \bullet h$ .

## 2. benchmarking sans aversion à la sous-performance

### 2.1. Problème d'investissement considéré.

On suppose que l'investisseur cherche à maximiser, à un horizon d'investissement pré-défini, l'utilité espérée de l'écart de sa richesse par rapport à celle d'un benchmark (ou portefeuille de référence), noté  $(O, o)$ .

Nous considérons un investisseur dont la fonction d'utilité est HARA et dont l'expression est la suivante :

$$u(y) \equiv (1/c) \frac{(cy+a)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{où on suppose que } cy + a > 0 \text{ et } c \times \gamma > 0$$

avec

$y$  : l'excès de richesse par rapport au benchmark,

$\gamma$  : le paramètre d'aversion au risque de l'investisseur  $\gamma \in R/\{0; 1\}$ ,

$c$  : un paramètre non nul qui a le même signe que  $\gamma$  et dépend donc du profil de gain de l'investisseur<sup>13</sup>,

$-a/c$  : le seuil de richesse maximum, respectivement de perte maximum, pour  $\gamma$  négatif, respectivement  $\gamma$  positif, où  $a > 0$ .

Notons que pour  $\gamma = -1$ , on retrouve le cas de l'investisseur du problème Moyenne-Variance, dont la fonction d'utilité est une fonction quadratique, dont le profil de richesse est concave<sup>14</sup>, et dont le seuil de richesse maximale est égal à  $a$  (seuil de richesse où l'investisseur atteint la satiété)

Enfin, pour  $\gamma > 0$ , on retrouve le cas de l'investisseur HARA, ayant une fonction d'utilité puissance, un seuil de richesse minimum égal à  $-a$ , et un profil convexe<sup>15</sup> qui généralise le cas de l'investisseur CRRA (obtenu pour  $a \rightarrow 0$ ).

Le problème d'investissement s'écrit de la façon suivante :

13. Sans perte de généralité, on peut supposer que ce paramètre prend la valeur -1 ou +1 en fonction du profil de gain de l'investisseur : -1 pour un profil de richesse concave correspondant à  $\gamma < 0$  et +1 pour un profil convexe correspondant à un choix du paramètre  $\gamma$  positif.

Ce qui revient à supposer que son expression est la suivante :  $c \equiv \frac{\gamma}{|\gamma|}$ .

Cette terminologie de profil convexe, resp. profil concave, fait référence à une stratégie dont l'allocation ou le montant investi dans un portefeuille d'actifs risqué (que l'on précisera dans la suite) est une fonction croissante, resp. décroissante de la valeur du portefeuille d'actifs risqués.

14. ce qui se traduit par une forme concave de la courbe de richesse finale en fonction de la valeur du portefeuille d'actifs risqués.

15. ce qui se traduit, pour  $0 < \gamma < 1$ , par une forme convexe de la courbe de richesse finale en fonction de la valeur du portefeuille d'actifs risqués et un montant alloué dans le portefeuille d'actifs risqués croissant en fonction de sa valeur. Pour  $\gamma > 1$ , la forme de la richesse est concave mais le montant alloué dans le portefeuille d'actifs risqués reste croissant en fonction de sa valeur.



PROBLÈME 13.

$$(P13) \begin{cases} \max_{Y_T \in L^2(P)} E(u(Y_T)) \\ \text{s.a. } E\{Y_T/H_T\} = \Delta_0 \end{cases}$$

avec  $Y_t \equiv W_t - O_t$ , la valeur de l'écart de richesse (ou encore le "surplus") par rapport à celle du benchmark, à l'instant  $t$ ,

et avec  $\Delta_0 \equiv 1 - E\{O_T/H_T\} \leq 1$  et  $E\{O_T/H_T\} \leq 1$ <sup>16</sup>

## 2.2. Expression de la richesse terminale et de l'allocation dynamique optimale.

On obtient le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 21.

- (1) La richesse terminale optimale du problème (P13) est donnée par l'expression suivante :

$$W_T^* = O_T + \left( kH_T^{1/\gamma} - a \right) / c \text{ avec } k = (aB(0, T) + c\Delta_0) / H_0^* \text{ (équation de budget)}$$

- (2) La valeur à la date  $t$ , de la stratégie dynamique optimale, notée  $W_t^*$ , est donnée par la formule suivante<sup>17</sup> :

$$W_t^* = O_t + \{kH_t^* - aB(t, T - t)\} / c$$

avec  $H_t^* = H_t^{1/\gamma} [B(t, T - t)]^{(1-1/\gamma)} e^{\frac{(1-\gamma)}{2}(\sigma_H(T-t)/\gamma)^2}$ ,  
où  $\sigma_H^2(T - t) = \text{Var}(\text{Ln}(H_T))$ <sup>18</sup> et où  $B(t, T - t)$  désigne la valeur d'un Zéro-Coupon dans le modèle de [Vasicek, 1977].

- (3) L'allocation optimale est donnée par le vecteur de poids,  $w_t^*$ , dont l'expression est la suivante :

16. Sinon le portefeuille benchmark n'est pas une stratégie admissible.

17. La non-négativité de la richesse est garantie dans les deux cas suivants :

-le portefeuille benchmark s'identifie à l'actif Zéro-Coupon et  $\gamma > 0$ ; dans ce cas on a  $W_t^* \geq (1 - a/c)B(t, T - t)$  p.s.

-le coefficient  $a$  est proportionnel à la valeur du benchmark, i.e.  $a \equiv aO_t$  (toujours dans l'hypothèse où  $\gamma > 0$ ); dans ce cas, on a  $W_t^* \geq (1 - a/c)O_t$  p.s. et il n'y a plus de position élémentaire "Buy & Hold" investie dans l'actif obligataire Zéro-Coupon qui est remplacé par une position investie dans le portefeuille Benchmark :  $W_t^* = (k/c)H_t^* + (1 - a/c)O_t$ .

18. Sous nos hypothèses, on a  $\sigma_H^2(T - t) = \text{Var}(\text{Ln}(H_T)) = \Sigma^2(T - t) + \|\lambda\|^2(T - t) - 2\rho_H \|\lambda\| \eta(T - t)$  où  $\Sigma^2(T - t) \equiv \int_t^T \sigma_{T-u}^2 du$ ;  $\eta(T - t) \equiv \left( \int_t^T \sigma_{T-u} du \right)$ ;  $\rho_H = \lambda_r / \|\lambda\|$  et  $\|\lambda\|^2 = \lambda_r^2 + \lambda_S^2$ .

$$w_t^* = (O_t/W_t^*)o + ((k/c\gamma)H_t^*/W_t^*)h + ((k/c)(1-1/\gamma)H_t^* - (a/c)B(t, T-t))/W_t^*b$$

ou encore, avec  $y_t^* = w_t^* - (O_t/W_t^*)o$ ,

$$y_t^* = (((W_t^* - O_t)/\gamma + (a/c\gamma)B(t, T-t))/W_t^*)h + [(1-1/\gamma)(W_t^* - O_t) - (a/c\gamma)B(t, T-t)]/W_t^*b$$

où  $o' \equiv (o_S, o_K, o_B, 1 - o_S - o_K - o_B)$ ,  $h' \equiv (h_S, h_K, 0, 1 - h_S - h_K)$ ,  
 $b' \equiv (0, 0, 1, 0)$ .

### CONSÉQUENCE 11.

L'allocation optimale, exprimée en montant, est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} o_S O_t + (h_S/\gamma)(k/c)H_t^* \text{ sur l'actif de type action } S \\ o_K O_t + (h_K/\gamma)(k/c)H_t^* \text{ sur l'actif de type obligataire } B_K \\ o_B O_t + (1-1/\gamma)(k/c)H_t^* - (a/c)B(t, T-t) \text{ sur le Zéro - coupon } B_{T-t} \\ (1 - o_S - o_K - o_B)O_t + ((1 - h_S - h_K)/\gamma)(k/c)H_t^* \text{ sur l'actif monétaire } S^0 \end{array} \right.$$

### 2.3. Propriété de décomposition en plusieurs fonds de la stratégie optimale.

#### CONSÉQUENCE 12.

- (1) *Quelque soit le type d'investisseur considéré et son degré d'aversion au risque, la stratégie optimale peut s'exprimer comme une stratégie de type "Buy & Hold" qui se décompose en trois portefeuilles élémentaires : le portefeuille benchmark  $O$ , le portefeuille de Merton  $H^*$ , et l'actif obligataire Zéro-Coupon.*
- (2) *Alternativement, le portefeuille optimal peut être vu comme la somme des deux stratégies suivantes :*

*-la première qui est intégralement investie sur le portefeuille benchmark représente la partie passive ou stratégique de la stratégie optimale.*

*-la seconde correspond à la partie active du portefeuille optimal et correspond à une stratégie "long-short" qui est indépendante de la valeur du benchmark.*

L'expression de la partie active du portefeuille montre que, pour  $\Delta_0 = 0$ , celle-ci s'identifie à une stratégie Buy & Hold composée d'une position longue investie

initialement dans le portefeuille  $H^*$  financée par une position courte investie initialement dans l'actif obligataire Zéro-Coupon pour  $c = +1$ , i.e. cas de l'investisseur convexe (l'inverse se produisant pour  $c = -1$ ).

Cette stratégie active est similaire à celle correspondant à la solution optimale du problème sans référence au benchmark, à la différence près qu'elle est maintenant de type "long - short" (contrainte de budget initial nul) ou partiellement "long - short" (contrainte de budget initial strictement positif).

De plus, cette composante active de la stratégie optimale s'applique au surplus de la richesse indépendamment du choix du benchmark. Ainsi, mise à part la détermination de la taille de l'investissement initial, la stratégie optimale ne dépend donc pas du choix du benchmark<sup>19</sup>.

On notera aussi que ce résultat de décomposition s'interprète simplement en terme de mesure de performance de la façon suivante (voir [Zhao, 2007]) : toute gestion active peut être comparée en terme de sur-performance à un portefeuille "long - short" de référence, qui tire sa performance de celle du portefeuille "Growth Optimal"  $H$ .

Finalement, on peut faire les remarques suivantes :

-dans le cas de l'investisseur convexe, pour lequel  $\gamma > 0$  et  $c = +1$ , la sous-performance maximale est égale à  $-a$ ; autrement dit, le paramètre  $a$  correspond à une contrainte implicite d'assurance de portefeuille.

-dans le cas de l'investisseur concave pour lequel  $\gamma < 0$  et  $c = -1$ , la sur-performance maximale est égale à  $a$ ; autrement dit, le paramètre  $a$  représente un plafond de richesse correspondant au niveau de satiété de l'investisseur au-dessus duquel son utilité est nulle.

-dans le cas particulier où  $\gamma = -1$ , le portefeuille de la stratégie optimale n'est efficient au sens du critère Moyenne-Variance que si le benchmark l'est aussi, voir [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2003a].

#### 2.4. Analyse de l'allocation dynamique en fonction du niveau de richesse, du benchmark et du prix du Zéro-Coupon.

CONSÉQUENCE 13. *Quelque soit le type d'investisseur considéré, l'expression du vecteur de poids optimal est une combinaison linéaire dynamique de trois portefeuilles, le benchmark, le portefeuille "Growth Optimal", noté  $H$ , et l'actif Zéro-Coupon dont les coefficients dépendent de trois variables d'états : la valeur du benchmark, la valeur du portefeuille optimal et celle du Zéro-Coupon.*

Ce résultat généralise ainsi la propriété de décomposition en deux fonds obtenue

---

19. Ce qui était prévisible, compte tenu du critère d'optimisation du problème considéré qui est défini sur le surplus de la richesse.

par [Zhao, 2007], dans le cadre de la résolution du problème d'investissement similaire à celui considéré ici mais sous l'hypothèse plus restrictive de taux déterministe.

En effet, [Zhao, 2007] obtient, sous cette hypothèse, une décomposition linéaire de l'allocation du portefeuille optimal dépendant de deux portefeuilles (le portefeuille de croissance optimal et le benchmark) et trouve que les poids investis dans ces deux portefeuilles dépendent de deux variables d'état que sont la valeur du portefeuille benchmark et celle du portefeuille optimal.

Dans le cadre du modèle d'actifs que nous considérons, qui prend en compte l'existence de taux d'intérêt stochastiques, s'ajoute une troisième composante correspondant à l'investissement effectué dans l'actif obligataire Zéro-Coupon.

(1) Cas de l'investisseur ayant un profil convexe

Dans ce cas où  $\gamma > 0$ , le poids de la richesse totale investi dans chacun des trois portefeuilles est le suivant :

- (a) Le poids correspondant au benchmark  $O$  (partie passive de la stratégie) est égal au ratio  $O_t/W_t^*$  .

Ainsi, plus la stratégie optimale sur-performe le benchmark et plus le poids de la richesse allouée dans le portefeuille benchmark diminue (composante convexe ou "d'assurance de portefeuille").

- (b) Le poids investi dans le portefeuille "Growth Optimal"  $H$  est proportionnel à deux facteurs :

-L'excédent de richesse relativement au benchmark en % de la richesse totale,  $(W_t^* - O_t)/W_t^*$  pondéré par le coefficient,  $1/\gamma$  , positif qui joue un rôle d'effet de levier si  $\gamma < 1$ .

-la valeur d'une position longue investie sur l'actif Zéro-Coupon égale à  $(a/\gamma)B(t, T - t)$  , exprimée en % de la richesse optimale.

Ainsi, plus la stratégie optimale sur-performe le benchmark, et plus la valeur du montant investi dans le portefeuille "Growth Optimal", i.e.  $((W_t^* - O_t) + aB(t, T - t))/\gamma$  , augmente (composante "convexe" de la stratégie)<sup>20</sup>.

- (c) Le poids investi dans l'actif Zéro-Coupon dont l'expression est également une combinaison linéaire des deux mêmes facteurs :

---

20. Notons que, dans le cas où le coefficient  $a$  est proportionnel à la valeur du benchmark, i.e.  $a \equiv aO_t$  (et en particulier tel est le cas si le benchmark s'identifie à l'actif Zéro-Coupon), alors le poids de la richesse investie dans le portefeuille "Growth Optimal" est une fonction croissante de l'excédent de richesse avec le benchmark puisqu'on a :  $y_t^* = [(W_t^* - O_t)/\gamma + (a/c\gamma)O_t]/W_t^* h + [(1 - 1/\gamma)(W_t^* - O_t) - (a/c\gamma)O_t]/W_t^* \varrho$

-Le rapport  $(W_t^* - O_t)/W_t^*$  pondéré par  $(1 - 1/\gamma)$  correspondant à l'investissement dans l'actif Zéro-Coupon qui compense les positions investies sur les portefeuilles  $O$  et  $H$ , respectivement égale à  $O_t/W_t^*$ , et  $(W_t^* - O_t)/\gamma$  et qui progresse en sens inverse de celles ci.

Sa valeur est une fonction décroissante du surplus de richesse si l'investisseur a un paramètre d'aversion plus faible que l'investisseur logarithmique (i.e.  $\gamma < 1$ ) et une fonction croissante du surplus de richesse dans le cas contraire (pour  $\gamma > 1$ ).

-La valeur d'une position vendeuse investie sur l'actif Zéro-Coupon exprimée en % de la richesse optimale qui est égale à  $(a/\gamma)B(t, T-t)$ . Cette position finance la position acheteuse, de même taille, investie initialement sur le portefeuille  $H$ .

Ainsi, pour  $\gamma < 1$ , une augmentation du surplus de richesse a pour effet de réduire la valeur du montant investi dans l'actif Zéro-Coupon, i.e.  $((1 - 1/\gamma)(W_t^* - O_t) + aB(t, T-t))/\gamma$  (composante convexe de la stratégie); c'est l'inverse qui se produit pour  $\gamma > 1$ .

## (2) Cas de l'investisseur ayant un profil concave

Dans ce cas où  $\gamma < 0$ , l'expression du poids de la richesse totale investie dans chacun des trois portefeuilles est la suivante :

(a) Le poids correspondant à la partie de la stratégie optimale investie dans le benchmark  $O$  (partie passive de la stratégie) est exactement la valeur du ratio  $O_t/W_t^*$  (comme pour l'investisseur ayant un profil convexe).

(b) Le poids correspondant à la partie de la stratégie optimale investie dans le portefeuille "Growth Optimal",  $H$ , est proportionnel aux deux facteurs suivants :

-Le ratio  $(W_t^* - O_t)/W_t^*$  pondéré par le coefficient négatif :  $1/\gamma < 0$ .

-La valeur d'une position longue sur le Zéro-Coupon,  $(-a/\gamma)B(t, T-t)$ , exprimée en % de la richesse optimale .

Ainsi, plus la stratégie optimale sur-performe le benchmark, plus la valeur du montant investi dans le portefeuille "Growth Optimal", i.e.  $(aB(t, T-t) - (W_t^* - O_t))/|\gamma|$ , diminue (composante "concave" de la stratégie); sa valeur converge vers 0 quand l'excédent de richesse atteint sa valeur plafond,  $Y_t^* \equiv W_t^* - O_t = aB(t, T-t)$  .

(c) Le poids correspondant à l'actif Zéro-Coupon qui est une fonction linéaire des deux mêmes facteurs :

-le ratio  $(1-1/\gamma)(W_t^* - O_t)/W_t^*$  avec un coefficient positif :  $(1-1/\gamma) > 0$  ( $\gamma < 0$ ).

-La valeur d'une position courte sur le Zéro-Coupon,  $(a/\gamma)B(t, T-t)$ , exprimée en % de la richesse optimale qui finance la position longue de même taille sur le portefeuille "Growth Optimal"  $H$ .

Ainsi, plus la stratégie optimale sur-performe le benchmark et plus le montant de la richesse investie dans l'actif Zéro-Coupon augmente (composante "concave"); sa valeur converge vers le montant plafond  $aB(t, T-t)$  quand l'excédent de richesse atteint sa valeur plafond  $Y_t^* \equiv W_t^* - O_t = aB(t, T-t)$ .

- (3) Expression de l'allocation dynamique optimale en fonction de l'excès de richesse par rapport au benchmark :

#### CONSÉQUENCE 14.

- (a) *Le vecteur  $yt^*$  des sur/sous pondérations peut se ré-écrire comme une combinaison linéaire dynamique de deux portefeuilles, le portefeuille "Growth Optimal"  $H$  et l'actif Zéro-Coupon dont les coefficients sont fonctions de deux variables d'état, le ratio du surplus sur la richesse  $(W_t^* - O_t)/W_t^*$ , et le ratio  $C_t/W_t^*$  :*

$$y_t^* = (C_t/W_t^*)h + [(W_t^* - O_t) - C_t]/W_t^*b$$

$$\text{avec } C_t \equiv (W_t^* - O_t)/\gamma + (a/c\gamma)B(t, T-t)$$

$$\text{et avec } h' \equiv (h_S, h_K, 0, 1 - h_S - h_K) \text{ et } b' \equiv (0, 0, 1, 0)$$

- (b) *la variable  $C_t$  s'interprète comme un "cousin" de richesse relative au benchmark<sup>21</sup> qui a les propriétés suivantes :*

-dans le cas où  $\gamma > 0$  et  $c \equiv +1$  (cas de l'investisseur convexe), le montant investi dans le portefeuille  $H$ ,  $C_t \equiv ((W_t^* - O_t) + aB(t, T-t))/\gamma$ , est une fonction croissante du surplus de richesse.

-à l'opposé, dans le cas où l'investisseur a un profil concave, i.e.  $\gamma < 0$  et  $c \equiv -1$ ,  $C_t \equiv (aB(t, T-t) - (W_t^* - O_t))/|\gamma|$  est une fonction décroissante du surplus de richesse.

- (c) *Dans le cas où le niveau implicite de richesse minimum (maximum dans le cas  $\gamma < 0$ ) dépend de la valeur du benchmark, i.e.  $a \equiv aO_t$ ,*

21. Par analogie à la stratégie dite du "Cousin" (ou encore "Constant Proportion Portfolio Insurance") (cas  $\gamma > 0$ ) qui consiste à investir dans un portefeuille d'actifs risqués une proportion constante de l'excès de la richesse totale par rapport à un niveau de richesse minimum.

Dans le cas où  $\gamma > 0$ , l'analogie se fait avec la stratégie dite de l'"Anti-Cousin" qui consiste à investir dans un portefeuille d'actifs risqués une proportion constante de l'écart entre un niveau de richesse plancher et la richesse totale du portefeuille.

Pour plus de détails, voir le commentaire ci-dessus dans l'introduction de la présente section.

le poids de la richesse investie dans le portefeuille  $H$ ,  $C_t/W_t^*$ , est proportionnel à l'écart de richesse par rapport à ce niveau cible, exprimée en % de la richesse totale :

-dans le cas où  $\gamma > 0$  et  $c \equiv +1$  (cas de l'investisseur convexe),  $C_t \equiv ((W_t^* - (1-a)O_t)/|\gamma|)$  et  $C_t/W_t^*$  est une fonction croissante de la variable  $(W_t^* - (1-a)O_t)/W_t^*$ .

-dans le cas où l'investisseur a un profil concave, i.e.  $\gamma < 0$  et  $c \equiv -1$ ,  $C_t \equiv ((1+a)O_t - W_t^*)/|\gamma|$  et  $C_t/W_t^*$  est une fonction croissante de la variable  $((1+a)O_t - W_t^*)/W_t^*$ .

### 2.5. Cas particulier de l'utilité quadratique (pour $\gamma = -1$ ).

Dans ce cas, le problème d'investissement considéré peut être exprimé de façon alternative, comme celui de l'investisseur cherchant (pour un objectif de sur-performance donné) à minimiser la "Tracking Error" de son portefeuille par rapport à un portefeuille de référence<sup>22</sup> :

$$(P) \begin{cases} \min_{Y_T \in L^2(P)} STD(Y_T) \\ s.a. \quad E(Y_T) = \bar{Y} \quad ; \quad E\{Y_T/H_T\} = \Delta_0 \end{cases}$$

avec  $STD(Y_T) = \sqrt{VAR(Y_T)}$  la "Tracking Error" qui se définit ici comme l'écart type de  $Y_T \equiv W_T - O_T$ , la différence entre la richesse finale du portefeuille et celle du benchmark.

Notons qu'il existe une relation biunivoque liant le paramètre  $a$  et le niveau cible d'espérance de richesse finale  $\bar{Y}$ .

## 3. benchmarking avec aversion à la sous-performance

Nous proposons à présent d'explicitier le problème de l'investisseur averse à la sous-performance<sup>23</sup> dans le cadre du modèle d'actif intégrant un facteur de taux stochastique décrit dans la section 3.1 ci-dessus.

22. Notons que ce problème peut aussi s'interpréter de façon alternative comme le problème de maximisation du "Ratio d'Information" sous contrainte de rendement cible :

$$(P) \begin{cases} \max_{Y_T \in L^2(P)} I(Y_T) \\ s.a. \quad E(Y_T) = \bar{Y} \quad ; \quad E\{Y_T/H_T\} = \Delta_0 \end{cases}$$

où  $I(Y_T) \equiv E(Y_T)/STD(Y_T)$  est le "Ratio d'Information" (exprimé par rapport au niveau de surplus final de richesse, i.e.  $Y_T \equiv W_T - O_T$ ).

23. ou de façon équivalente, du problème de l'investisseur sous contrainte de risque de sous-performance)

### 3.1. Problème considéré et expression de la richesse terminale optimale.

De façon à prendre en compte la dissymétrie entre l'aversion pour la sous-performance et l'appétit pour le gain de l'investisseur, nous considérons à nouveau une fonction d'utilité "HARA loss averse" et continue de la forme :

$$v(y) = \begin{cases} Au(y) + (B - A)u(0) & \text{si } y < 0 \\ Bu(y) & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

avec  $y$  qui représente l'écart de richesse par rapport à la valeur du portefeuille benchmark,

avec  $D \equiv A/B - 1 \geq 0$  qui désigne le degré d'aversion pour la sous-performance, où  $A \geq B > 0$ ,

et avec  $u(\cdot)$  qui désigne la fonction d'utilité d'un investisseur HARA sans aversion à la sous-performance dont l'expression est celle considérée dans la sous-section précédente :

$$u(y) \equiv (1/c) \frac{(cy+a)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{où on suppose que } cy + a > 0 \text{ et } c \times \gamma > 0$$

avec

$\gamma$ : le paramètre d'aversion au risque de l'investisseur, où  $\gamma \in R/\{0; 1\}$ ,

$c$ : un paramètre non nul qui a le même signe que  $\gamma$ <sup>24</sup>,

$-a/c$ : le paramètre de richesse maximum ou minimum<sup>25</sup>, où  $a > 0$ .

Le problème s'écrit de la façon suivante :

PROBLÈME 14.

$$(P14) \begin{cases} \max_{Y_T \in L^2(P)} E(v(Y_T)) \\ \text{s.a. } E\{Y_T/H_T\} = \Delta_0; Y_T \geq \underline{Y} \end{cases}$$

où  $\Delta_0 \equiv 1 - E\{O_T/H_T\} \leq 1$  et  $E\{O_T/H_T\} \leq 1$ <sup>26</sup> et avec :

$Y_T \equiv W_T - O_T$ : la valeur finale de l'écart de richesse du portefeuille avec le benchmark

24. On pourra supposer sans perte de généralité que l'expression de ce paramètre est  $c \equiv \frac{\gamma}{|\gamma|} = -1_{\gamma < 0} + 1_{\gamma > 0}$

25.  $-a/c \equiv +/ - a$  désigne le seuil de richesse maximum, respectivement de perte maximum, pour  $\gamma$  négatif, respectivement  $\gamma$  positif.

26. Sinon le portefeuille benchmark n'est pas une stratégie admissible



$\underline{Y}$ : le niveau de sous-performance maximale autorisée, avec  $\underline{Y} < 0$

$v$ : une fonction d'utilité "HARA loss averse" dont l'expression est la suivante :  $v(y) = u(y) - D \times (u(0) - u(y)) \times 1_{\{y < 0\}}$

$D = A/B - 1 \geq 0$ : le degré d'aversion pour la sous-performance, avec  $A \geq B > 0$ .

$u(\cdot)$ : la fonction d'utilité d'un investisseur HARA sans aversion à la perte définie plus haut.

Par un raisonnement identique à ceux des sections précédentes, on en déduit les résultats suivants :

PROPRIÉTÉ 22. La richesse terminale optimale du problème (P14) est donnée par l'expression suivante,

(1) Dans le cas sans contrainte explicite de portefeuille :  $\underline{Y} \equiv -\infty$

$$W_T^* = O_T + \begin{cases} \left\{ \left( \frac{k/B}{H_T} \right)^{-1/\gamma} - a \right\} / c & \text{si } H_T > \bar{H} \\ 0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \bar{H} \\ \left\{ \left( \frac{k/A}{H_T} \right)^{-1/\gamma} - a \right\} / c & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases}$$

avec  $\bar{H} \equiv \left(\frac{k}{B}\right) a^\gamma$ ,  $\underline{H} \equiv \left(\frac{k}{A}\right) a^\gamma$  et où on suppose que  $c \times \gamma > 0$

(2) Dans le cas avec contrainte explicite de portefeuille :  $\underline{Y} > -\infty$ <sup>27</sup>

$$W_T^* = O_T + \begin{cases} \left\{ \left( \frac{k/B}{H_T} \right)^{-1/\gamma} - a \right\} / c & \text{si } H_T > \bar{H} \\ 0 & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \bar{H} \\ \left\{ \left( \frac{k/A}{H_T} \right)^{-1/\gamma} - a \right\} / c & \text{si } \underline{H} < H_T \leq \underline{H} \\ \underline{Y} & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases}$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$ ,

et avec  $\bar{H} \equiv \left(\frac{k}{B}\right) a^\gamma$ ,  $\underline{H} \equiv \left(\frac{k}{A}\right) a^\gamma$ , et  $\underline{H} = \left(\frac{k}{A}\right) (a + c\underline{Y})^\gamma$

27. Sans perte de généralité, nous pouvons considérer uniquement le cas de l'investisseur ayant un profil de gain concave pour lequel  $\gamma < 0$ ; en effet dans le cas où  $\gamma > 0$ , correspondant au profil convexe avec contrainte implicite de niveau  $-a/c$ , si on suppose que  $\underline{Y} \leq -a/c$  alors la contrainte explicite ne joue pas.

### 3.2. Expression de l'allocation dynamique optimale.

Les expressions de la valeur intermédiaire et de celle du vecteur des poids de la stratégie de réplication, dans le cadre du modèle avec taux stochastique considéré, sont énoncées dans les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 23. *La valeur à la date  $t$ , notée  $W_t^*$ , de la stratégie, solution optimale du problème (P14), est donnée par l'une des expressions suivantes :*

(1) *Dans le cas du problème sans contrainte explicite de portefeuille :  $\underline{Y} \equiv -\infty$*

*a) Si le profil de gain de l'investisseur est convexe ( $\gamma > 0$ ) :*

$$W_t^* = O_t + (C(y_B H_t^*, a, T-t) - P(y_A H_t^*, a, T-t))/c$$

*b) Si le profil de gain est concave ( $\gamma < 0$ ) :*

$$W_t^* = O_t - (P(y_B H_t^*, a, T-t) - C(y_A H_t^*, a, T-t))/c$$

(2) *Dans le cas du problème avec contrainte explicite de portefeuille :  $\underline{Y} > -\infty$  et  $\gamma < 0$ <sup>28</sup>*

$$W_t^* = O_t + \underline{Y} B(t, T-t) - P(y_B H_t^*, a, T-t)/c$$

$$-P(y_A H_t^*, a, T-t)/c + P(y_A H_t^*, a + c\underline{Y}, T-t)/c$$

$$\text{avec } y_A \equiv \left(\frac{k}{A}\right)^{-1/\gamma} \text{ et } y_B \equiv \left(\frac{k}{B}\right)^{-1/\gamma},$$

$$\text{avec } H_t^* = H_t^{1/\gamma} [B(t, T-t)]^{(1-1/\gamma)} e^{\frac{(1-\gamma)}{2}(\sigma_H(T-t)/\gamma)^2}$$

*où  $\sigma_H^2(T-t) = \text{Var}(\text{Ln}(H_T))$ <sup>29</sup> et où  $B(t, T-t)$  désigne la valeur de l'obligation Zéro-Coupon dans le modèle de [Vasicek, 1977],*

*et avec  $C(H_t^*, X, T-t)$ , respectivement  $P(H_t^*, X, T-t)$ , qui désigne la valeur du call européen, respectivement du put européen de strike  $X$ , d'échéance  $T-t$ , sur le sous-jacent  $H_t^*$ <sup>30</sup>.*

---

28. Nous considérons uniquement le cas de l'investisseur ayant un profil de gain concave pour lequel  $\gamma < 0$ ; dans le cas où  $\gamma > 0$  et  $\underline{Y} \leq -a/c$ , la contrainte explicite ne joue pas et le cas  $\gamma > 0$  et  $\underline{Y} > -a/c$  s'obtient de façon similaire.

29. Sous nos hypothèses, on a  $\sigma_H^2(T-t) = \text{Var}(\text{Ln}(H_T)) = \Sigma^2(T-t) + \|\lambda\|^2(T-t) - 2\rho_H \|\lambda\| \eta(T-t)$

ou  $\Sigma^2(T-t) \equiv \int_t^T \sigma_{T-u}^2 du$ ;  $\eta(T-t) \equiv \left(\int_t^T \sigma_{T-u} du\right)$ ;  $\rho_H = \lambda_r / \|\lambda\|$  et  $\|\lambda\|^2 = \lambda_r^2 + \lambda_S^2$

30. Sous nos hypothèses, on a  $C(H_t^*, X, T-t) = H_t^* N(d_1) - X B(t, T-t) N(d_2)$  et  $P(H_t^*, X, T-t) = X B(t, T-t) N(-d_2) - H_t^* N(-d_1)$  où on a posé  $d_1 \equiv (\ln(H_t^*/X) - \ln(B(t, T-t) + (\sigma_H(T-t)/\gamma)^2/2))/(\sigma_H(T-t)/\gamma)$  et  $d_2 \equiv d_1 - \sigma_H(T-t)/\gamma$  et  $\sigma_H^2(T-t) = \text{Var}(\text{Ln}(H_T))$  définis comme précédemment.

## PROPRIÉTÉ 24.

Le vecteur, noté  $w_t^*$ , des poids de la stratégie, solution optimale du problème (P14), est donné par la formule suivante :

$$w_t^* = (O_t/W_t^*)o + (\Delta_t/W_t^*)h + ((W_t^* - O_t) - \Delta_t)/W_t^*b$$

avec  $\Delta_t$  définie selon les cas par les formules suivantes

(1) Dans le cas du problème sans contrainte explicite de portefeuille :  $\underline{Y} \equiv -\infty$

$$\Delta_t \equiv \left[ \{y_B N\{(c/|c|)d_{a/y_B}\} + y_A N\{-(c/|c|)d_{a/y_A}\}\} / (|c|\gamma) \right] H_t^*$$

(2) Dans le cas du problème avec contrainte explicite de portefeuille :  $\underline{Y} > -\infty$  et avec  $\gamma < 0$

$$\Delta_t \equiv \left[ \{y_B N\{-d_{a/y_B}\}\} - y_A N\{-d_{a/y_A}\} + y_A N\{-d_{(a+c\underline{Y})/y_A}\}\} / (c\gamma) \right] H_t^*$$

où on a posé  $y_A \equiv \left(\frac{k}{A}\right)^{-1/\gamma}$ ,  $y_B \equiv \left(\frac{k}{B}\right)^{-1/\gamma}$

$$\text{et } d_X \equiv \frac{\ln\left(\frac{H_t^*}{X}\right) - \ln(B(t, T-t) + \frac{(\sigma_H(T-t)/\gamma)^2}{2})}{\sigma_H(T-t)/\gamma},$$

où  $\sigma_H^2(T-t)$  et  $H_t^*$  tels que définis dans la propriété 23,

et avec  $o' \equiv (o_S, o_K, o_B, 1 - o_S - o_K - o_B)$ ,  $h' \equiv (h_S, h_K, 0, 1 - h_S - h_K)$  et  $b' \equiv (0, 0, 1, 0)$

Deuxième partie

**Allocation dynamique avec  
rémunérations variables**

Il s'agit d'une pratique courante que les sociétés de gestion d'actifs pour compte de tiers perçoivent non seulement une commission de gestion sur encours fixe (prélèvement d'un pourcentage fixe de la valeur des actifs gérés) mais aussi une commission variable liée à leur performance.

Cette seconde composante incitative de leur rémunération appelée commission de sur-performance s'exprime le plus souvent comme un pourcentage de la sur-performance positive du portefeuille géré par rapport à un portefeuille de référence (le "benchmark").

Ce type de rémunération asymétrique (à caractère optionnel) fait l'objet de critiques, exacerbées depuis la crise de 2007-2008, notamment parce qu'il est susceptible d'inciter l'asset manager à prendre des risques excessifs. D'ailleurs, afin de limiter ces derniers, l'asset manager est souvent soumis à des contraintes portant sur le niveau de risque maximum de sous-performance.

Nous souhaitons dans cette partie analyser l'impact sur le comportement des gérants de portefeuille de l'existence d'un tel mode de rémunération incitative ; en outre, dans le prolongement des chapitres précédents, nous souhaitons savoir si la prise en compte de contraintes de risque de sous-performance supplémentaires imposées au gérant ou traduisant son aversion à la sous-performance peut être bénéfique à l'investisseur donnant mandat de gestion financière.

Au plan théorique, ces questions peuvent s'inscrire dans le cadre des modèles principal-agent<sup>31</sup>. Afin d'éviter une complexité technique inadaptée à notre problématique, l'étude des "distorsions" impliquées par la rémunération incitative et les contraintes de gestion, nous adoptons une approche différente et plus simple et, à l'opposé de la théorie du problème Principal-Agent, nous ne cherchons pas à déterminer les termes du contrat optimal.

Considérant que le contrat de rémunération et toutes les contraintes d'investissement (type de benchmark et contraintes de risque) sont *fixés* de manière exogène avant la date d'investissement initial, nous souhaitons quantifier à posteriori l'effet de cette forme de rémunération et de ces contraintes sur la stratégie dynamique suivie par l'asset manager<sup>32</sup>.

---

31. La théorie du problème Principal - Agent cherche à déterminer la forme de contrat optimal pour les deux parties et s'intéresse en particulier aux questions suivantes dans le cadre d'une délégation de gestion financière : déterminer sous quelles conditions (y compris le choix du benchmark), une forme a priori donnée de structure de frais (par exemple linéaire) est optimale ou encore, partant d'une hypothèse de structure de frais spécifique et d'un choix exogène de benchmark, déterminer quel est le choix optimal des valeurs des paramètres du contrat.

Par exemple, sous l'hypothèse d'une forme de compensation financière affine ou linéaire (les termes financiers du contrat de rémunération étant supposés pré-définies), [Lioui Poncet, 2006] analysent la stratégie optimale suivie par l'asset manager (agent) puis ils explicitent le choix de la forme optimale de benchmark pour l'investisseur (principal).

Pour une revue complète de la littérature sur le problème "Principal - Agent" en gestion de portefeuille avec délégation de gestion, benchmarking et mécanisme de compensation financière ont pourra se référer à [Stracca, 2005].

32. On peut citer deux études qui suivent la même approche que la notre et s'intéressent plus particulièrement à certaines spécificités de l'industrie des hedge funds : [Hodder Jackwerth, 2006] et [Kouwenberg Ziemba, 2007] considèrent le problème de choix dynamique de portefeuille du gérant de Hedge Funds qui cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse (agent CRRA pour [Hodder Jackwerth, 2006] et agent ayant

Plus précisément, nous allons montrer en quoi la stratégie suivie par un asset manager qui bénéficie d'une rémunération incitative et qui est assujéti à des contraintes de sous-performance se différencie de celle que *lui même* suivrait en tant qu'investisseur. Nous comparerons donc la stratégie de l'asset manager (qui dépend de sa rémunération) à la stratégie optimale de l'investisseur ayant la même fonction d'utilité, qui maximise l'espérance de l'utilité de la valeur terminale de son portefeuille (ou de l'écart de cette valeur par rapport à un benchmark).

Par ailleurs, nous ferons valoir qu'en l'absence de rémunération incitative, la stratégie optimale pour l'asset manager l'est aussi pour l'investisseur<sup>33</sup>. Un tel asset manager (sans rémunération incitative) constituera donc l'asset manager de "référence". La comparaison des stratégies effectivement suivies par rapport à celle de l'asset manager de référence permet, de façon simple, d'apprécier simultanément les "distorsions" impliquées par la rémunération incitative et les contraintes de gestion ainsi que les conflits d'intérêt qu'elles impliquent.

Notre analyse portera en particulier sur les deux éléments suivants :

- (1) Impact de la prise en compte de plusieurs formes de rémunération incitative sur le comportement de l'asset manager en terme d'exposition dynamique aux actifs risqués.
- (2) Impact de la mise en place d'un contrôle de risque additionnel (par exemple par le risk manager de la société de gestion) sur le comportement de l'asset manager recevant une incitation financière. Bénéfice retiré par l'investisseur.

Nous supposons que la rémunération de l'asset manager est prélevée sur la valeur du portefeuille de l'investisseur à la date de fin du mandat, date qui correspond à l'horizon d'investissement de l'investisseur<sup>34</sup>.

De plus, nous faisons l'hypothèse que l'asset manager/investisseur est HARA. Dans un contexte de gestion avec benchmark, nous supposerons que l'asset manager doit prendre en compte des contraintes<sup>35</sup> qui peuvent être imposées par l'investisseur

---

une fonction d'utilité asymétrique issue de la théorie perspectives ("Prospects Théory") pour [Kouwenberg Ziemba, 2007].

La richesse du gérant de hedge funds a un profil optionnel du à la composante asymétrique de la commission de sur-performance reçue. Nous généraliserons certaines des caractéristiques de ces modèles en considérant une forme de rémunération du gérant plus générale.

33. Nous verrons dans la suite de ce chapitre que, dans le cas où l'asset manager ne reçoit que des frais de gestion sur encours, i.e. proportionnels à la valeur du portefeuille géré, et si l'on suppose que l'investisseur et l'asset manager cherchent à maximiser l'utilité espérée de leur richesse finale respective et qu'ils ont, de plus, les mêmes préférences d'investissement (i.e. la même fonction d'utilité), alors leurs problèmes d'investissement se confondent.

34. Comme nous le précisons ultérieurement, le modèle que nous considérons peut être interprété comme une généralisation du modèle de flux de fonds ("fund flows") de [Basak et al., 2008]; en effet, notre modèle peut prendre en compte non seulement un effet d'incitation financière mais aussi un effet d'incitation de flux lié à un accroissement de l'encours dépendant de la performance à l'horizon d'investissement; en revanche nous excluons la possibilité de nouveaux flux d'investissements avant l'horizon d'investissement.

35. Nous ferons l'hypothèse que le seuil de richesse maximum ou minimum compris dans l'expression de la fonction d'utilité HARA considérée dépend de la valeur finale du benchmark.

ou encore motivées par des raisons financières.

- Dans le cas où le profil de gain de l’asset manager HARA est convexe (fonction d’utilité avec seuil de richesse minimale), il s’agira de la prise en compte d’une contrainte implicite de protection de la sous-performance par rapport à un benchmark.
- Pour l’asset manager HARA ayant un profil de richesse concave (fonction d’utilité avec seuil de richesse maximale correspondant au niveau où l’asset manager atteint la satiété), la contrainte implicite prendra la forme d’un niveau de sur-performance maximale par rapport au benchmark.
- Nous analyserons également le cas plus général de l’asset manager HARA loss averse qui, sans l’interdire, pénalise la sous-performance par rapport au benchmark.

Finalement, nous considérons une fonction de frais qui généralise les structures de rémunération les plus couramment rencontrées dans l’industrie de la gestion financière pour compte de tiers et qui comprend une ou plusieurs des quatre composantes suivantes :

- des frais de gestion fixes indépendants de la valeur du portefeuille,
- une commission de gestion proportionnelle à la richesse du portefeuille ou à l’écart de richesse par rapport au benchmark,
- une commission de sur-performance par rapport au benchmark (i.e. proportionnelle au surplus (positif) de la richesse par rapport au benchmark).
- un bonus contractuel, montant fixe ou proportionnel à la valeur finale du portefeuille, versé au gérant en cas de sur-performance par rapport au benchmark.

Cette partie est organisée de la façon suivante :

- Dans le chapitre 4, nous montrons comment l’existence d’une commission liée à la performance de l’asset manager peut faire diverger les intérêts de l’asset manager de ceux de l’investisseur final.
- Dans le chapitre 5, nous examinons l’effet de contraintes de gestion supplémentaires portant sur le niveau de risque de sous-performance pris par l’asset manager.

## Incitations financières et benchmarking

Ce chapitre a pour but d'analyser comment l'asset manager est amené à modifier sa stratégie d'investissement en fonction des termes de son contrat de rémunération incitative.

Dans la première section, nous définissons le cadre général que nous considérons dans toute la suite de ce chapitre : délégation de gestion avec structure de rémunération asymétrique par rapport à un benchmark, préférences d'investissement HARA avec contraintes de "benchmark", structure de marché identique à celle de la première partie, et enfin, problème d'investissement de l'asset manager consistant à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération finale. Nous présentons également les différentes formes de restriction du problème considéré que nous nous proposons d'étudier dans les sections suivantes<sup>1</sup>.

Dans la seconde section, nous faisons l'hypothèse que le benchmark est fixe, et nous explicitons l'expression de la richesse terminale optimale du problème de l'asset manager HARA recevant en plus des frais de gestion fixe sur encours, des frais de gestion variables dit de sur-performance<sup>2</sup>. Nous analysons ensuite, dans le cadre restrictif du modèle de *BES*, les propriétés de la stratégie dynamique optimale suivie par l'asset manager HARA qui a une fonction d'utilité puissance avec seuil de rémunération minimale.

Dans la troisième section, prolongeant les résultats de la seconde section et nous plaçant toujours sous l'hypothèse d'un "benchmark fixe", nous nous intéressons au problème d'investissement de l'asset manager CRRA (profil de richesse convexe) recevant en plus des frais de gestion de sur-performance asymétrique, deux composantes supplémentaires d'incitation financière : une rémunération incitative symétrique (gain en cas de sur-performance et perte en cas de sous-performance) et un bonus fixe (incitation asymétrique binaire).

Dans la quatrième section, toujours sous l'hypothèse d'un "benchmark fixe", nous étudions le problème de l'asset manager ayant une fonction d'utilité quadratique (profil de richesse concave avec plafond de richesse) et devant prendre en compte une contrainte explicite d'assurance de portefeuille. L'allocation dynamique optimale sera encore une fois analysée dans le cadre du modèle à deux actifs de *BES*.

---

1. Il s'agit, le cas échéant, d'hypothèses restrictives supplémentaires que nous ferons sur la forme de la rémunération (benchmark fixe, forme particulière de l'incitation financière) et sur le choix de la fonction d'utilité HARA considérée (fonction d'utilité CRRA ou quadratique).

2. Forme de rémunération sans composante d'incitation symétrique ni bonus de sur-performance qui est la plus courante en pratique.



Dans la cinquième et dernière section, nous généralisons les résultats obtenus dans la troisième section, en considérant l'hypothèse plus générale d'un benchmark stochastique. Nous explicitons, pour l'asset manager CRRA, l'expression de la richesse terminale optimale du problème dans sa forme la plus générale (pas de restriction sur la structure de rémunération et benchmark stochastique). L'expression de l'allocation dynamique de portefeuille correspondante est ensuite dérivée dans le cadre du modèle d'actifs de *BES* généralisé à la prise en compte de plusieurs sources de risque actions ( $N + 1$  actifs et  $N \geq 1$  sources de risque).

## 1. Problème de l'asset manager avec rémunération asymétrique

Nous décrivons dans cette section, le cadre général qui est le notre dans toute la suite de ce chapitre.

### 1.1. Fonction de rémunération de l'asset manager.

Dans un contexte de délégation de gestion financière, un investisseur s'engage à verser, à un horizon d'investissement, noté  $T$ , une rémunération au gérant à qui il a donné mandat de gestion ; nous considérons une structure de frais linéaire par morceaux dont l'expression prend la forme générale suivante<sup>3</sup> :

$$F_T(W_T) \equiv a^* W_T + b^* Y_T + \eta^* W_T \times 1_{Y_T \geq 0} + c^* \max(Y_T, 0) \quad (1.1)$$

où  $W_T$  désigne la valeur finale du portefeuille géré,  $B_T$ , celle du portefeuille de référence ou "Benchmark", et  $Y_T \equiv W_T - B_T$  leur différence et avec :

$a^* W_T$  : le montant de la commission de gestion sur encours prélevée sur la période avec  $a^* \equiv \alpha b$  où  $b$  représente le taux de chargement total sur l'actif du fonds hors commissions de sur-performance<sup>4</sup>, avec  $0 < b < 1$  et  $0 \leq \alpha \leq 1$  ;

$b^* Y_T$  : le montant de la commission symétrique d'incitation financière ou un effet symétrique de flux de fonds<sup>5</sup> avec  $b^* \equiv (1 - \alpha) b$  ;

---

3. Notons que la fonction de rémunération,  $F_T(W_T)$  dépend non seulement de  $W_T$  mais aussi de  $B_T$ , la valeur finale du benchmark ; celle-ci correspond à un paramètre exogène fixe ou variable de la rémunération, et non à une variable du problème.

4.  $b$  est égal au taux annuel de gestion multiplié par le nombre d'années sur la période d'investissement considérée (i.e.  $T$  années) ; en pratique, la valeur de  $b$  est fixée en fonction du niveau de rendement attendu du portefeuille et dépend donc du type d'actif considéré dans le portefeuille ; par exemple, en gestion collective, le taux de commission annuel (pour  $T \equiv 1$ ) sera de l'ordre de  $b = 1\%$  à  $b = 2\%$  pour un fonds action et de l'ordre de  $b = 0.5\%$  à  $b = 1\%$  pour un fonds obligataire.

5. Cette composante de la rémunération, qui récompense l'asset manager pour sa sur-performance de la même façon qu'elle le pénalise en cas de sous-performance, représente une alternative à la commission, dite de sur-performance, qui est elle asymétrique et favorise l'asset manager au détriment de l'investisseur final.

Cette notion de pénalisation en cas de sous-performance a d'ailleurs été reprise par certains acteurs de l'industrie financière ; voir par exemple la réglementation de la SEC en vigueur aux Etats-Unis qui impose que les frais variables prélevés par les mutual funds soient symétriques autour du benchmark ("les Fulcrum Fee"), structure de rémunération analysée par [Elton *et al.*, 2003]). Par ailleurs, cette forme de rémunération symétrique a été largement analysée dans la littérature financière portant sur l'application du problème "Principal - Agent" à des modèles de délégation de gestion financière et de forme de contrat optimal (voir par exemple [Stracca, 2005] pour une revue de cette littérature).

Une autre interprétation de cette composante de la rémunération est un effet "symétrique" de flux de fonds traduisant un niveau d'encours proportionnel à l'écart de performance par rapport au benchmark, ce qui semble être empiriquement plus le cas pour les flux de fonds de pension que pour les mutual funds moins pénalisés par une sous-performance que récompensés en cas de sur-performance (voir [Del Guercio Tkac, 2000]).

$\eta^* W_T \times 1_{Y_T \geq 0}$  : le bonus payé à l'asset manager en cas de sur-performance (supposé proportionnel à la valeur finale du portefeuille)<sup>6</sup> ou un effet asymétrique de flux de fonds<sup>7</sup>, avec  $0 \leq \eta^* < 1 - a^*$  ;

$c^* Y_T^+$  : les frais de gestion de sur-performance avec :  $-\eta^* \leq c^* < 1$ <sup>8</sup> et  $0 \leq c < 1 - b$  où  $c \equiv \eta^* + c^*$  désigne le taux des frais de gestion sur actif versés en cas de sur-performance<sup>9</sup>.

Tout d'abord, il paraît utile de mentionner que les contraintes imposées sur la valeur des paramètres impliquent que l'inégalité  $F_T(W_T) < W_T$ , est bien vérifiée. Ce qui permet d'exclure les cas (non désirables) où la rémunération du gérant excéderait la valeur totale des actifs.

En effet,

- (1) pour  $W_T \leq B_T$ , on a :  $F_T(W_T) = a^* B_T + b Y_T \leq b W_T < W_T$  puisque, par construction, on a supposé que  $0 \leq a^* \leq b$ <sup>10</sup> ;
- (2) pour  $W_T > B_T$ , on a :  $F_T(W_T) = (a^* + \eta^*) B_T + (c + b) Y_T < W_T$   
 $\Leftrightarrow W_T/B_T > \frac{(a^* + \eta^*) - (c + b)}{1 - (c + b)}$  ; inégalité vérifiée pour  $W_T > B_T$  avec la double contrainte suivante :  $0 \leq \eta^* < 1 - a^*$  et  $0 < b + c < 1$ .

On notera aussi que la prise en compte d'une contrainte de non négativité de la rémunération de l'asset manager  $F(W_T) > 0$  est équivalente à faire une hypothèse de contrainte de protection portant sur la valeur finale du portefeuille géré puisqu'on a :  $F(W_T) \geq b W_T - b^* B_T$  et  $b W_T - b^* B_T > 0 \Leftrightarrow W_T > (1 - \alpha) \times B_T$  avec  $b^* \equiv (1 - \alpha) b$ .

---

6. Notons que ce terme peut également s'interpréter dans le cadre d'un modèle de frais de gérant de hedge fund de la façon suivante : l'expression des deux termes de la commission dont le paiement est conditionnel à une sur-performance, que l'on note  $G_T(W_T)$  avec :

$$G_T(W_T) \equiv \eta^* W_T \times 1_{W_T \geq W^0} + c^* \max(W_T - W^0, 0)$$

peut se ré-écrire de la façon suivante :

$$G_T(W_T) \equiv c [W_T - W^1] \times 1_{W_T \geq W^0}$$

avec  $W_0$  la valeur initiale du portefeuille géré, et avec  $B_T \equiv W^0 \equiv (1 + \eta^*/c^*) \times W^1$  la valeur du seuil de déclenchement ("hurdle rate") de la commission de sur-performance.

Dans le cas où  $\eta^* = 0 \Leftrightarrow W^1 = W^0$  et  $W^1 = W_0$ , la commission de performance sera versée dès le premier euros de performance.

Dans le cas où  $\eta^* > 0$  et  $W^1 = W_0$ , la commission sera également versée dès le premier euros de performance mais uniquement si la performance est au dessus du seuil déclenchement, que l'on qualifiera de "soft hurdle rate".

Dans le cas où  $\eta^* = 0 \Leftrightarrow W^1 = W^0$  et  $W^1 > W_0$ , l'asset manager recevra une commission supplémentaire uniquement sur la partie de la performance au dessus du seuil de déclenchement, que l'on qualifiera de "hard hurdle rate".

7. Cette composante peut s'interpréter comme un effet de flux de fonds asymétrique (voir par exemple [Basak *et al.*, 2008]) correspondant à une augmentation des encours à un taux de  $\eta^*$  en cas de sur-performance par rapport au benchmark.

8. Remarquons que dans le cas où  $-\eta^* \leq c^* \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq \eta^*$ , la composante asymétrique de la rémunération prend la forme suivante :  $(\eta^{**} B_T + c W_T) \times 1_{Y_T \geq 0}$  avec :  $0 \leq \eta^{**} \equiv (\eta^* - c) \leq \eta^*$ . Par exemple, dans l'hypothèse où le benchmark est fixe, i.e.  $B_T \equiv W^0$ , et le taux de frais de gestion de sur-performance est nul, i.e.  $c = 0$ , on obtient la structure de rémunération, avec bonus de sur-performance fixe, dont l'expression est la suivante :

$$F_T(W_T) \equiv a + b Y_T + \eta \times 1_{Y_T \geq 0} \text{ où on a posé } a \equiv a^* W^0, \eta \equiv \eta^* W^0 \text{ et } Y_T \equiv W_T - W^0.$$

9. On a typiquement  $c \gg b/T$  avec  $c$  de l'ordre de 10% à 30%

10. En effet, sinon cela reviendrait à supposer que le taux de chargement de la commission symétrique d'incitation financière, noté  $b^* \equiv b - a^*$ , est un coefficient négatif.

Nous analyserons plus en détail, dans la sous-section suivante, les interprétations possibles de la prise en compte, de manière explicite ou implicite, d'une telle contrainte de protection dans les préférences d'investissement de l'asset manager.

Finalement, on remarquera que cette forme de rémunération généralise plusieurs modèles de frais de gestion ou de flux de fonds exposés dans la littérature dans un cadre de gestion dynamique de portefeuille :

- (1) Dans le cas particulier où il n'y a pas d'incitation financière de type asymétrique ( $c = 0$ ), on obtient la fonction de frais "linéaire symétrique" du modèle "Principal-Agent" de [Lioui Poncet, 2006]

$$F_T(W_T) \equiv a^* W_T + b^* (W_T - B_T)$$

- (2) Dans le cas particulier où l'asset manager ne reçoit pas de commission sur encours ni de bonus en cas de sur-performance (i.e.  $b \rightarrow 0$  et  $\eta^* \equiv 0$ ), et si nous supposons de plus que le benchmark est fixe (i.e.  $B_T = W^0$ ) et que les paramètres  $a^*$  et  $b$  ne sont pas liés entre eux<sup>11</sup>, on retrouve le modèle de [Carpenter, 2000] :

$$F_T(W_T) \equiv a^* W^0 + c^* (W_T - W^0)^+$$

- (3) Dans le cas particulier, où il n'y pas de rémunération incitative symétrique (i.e.  $b^* \equiv 0$ ) ni de bonus versé en cas de sur-performance ( $\eta^* \equiv 0$ ), on obtient la fonction de frais associée au modèle de comportement de gérant de hedge fund<sup>12</sup> de [Hodder Jackwerth, 2006]<sup>13</sup>, fonction de frais qui peut se ré-écrire avec nos notations de la façon suivante :

$$F_T(W_T) \equiv a^* W_T + c^* (W_T - B_T)^+$$

- (4) Le modèle de flux de fonds de [Basak *et al.*, 2008] correspond à une structure de frais linéaire par morceaux fonction d'une seule variable, la valeur du portefeuille géré ( $b^* \equiv 0$ ,  $c^* \equiv 0$ )<sup>14</sup>. Ce modèle suppose que

11. On considère l'expression suivante de la rémunération du gérant :

$$F_T(W_T) \equiv a^* W^0 + b Y_T + c^* (W_T - W^0)^+.$$

Nous supposons de plus que  $b \rightarrow 0$  indépendamment de la valeur de  $a^*$ , avec  $a^* > 0$ .

12. Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que l'asset manager n'a pas investi une partie de sa richesse dans le portefeuille dont il a obtenu le mandat de gestion ; bien qu'il soit facile d'intégrer une telle contrainte en rajoutant un paramètre supplémentaire à notre modèle, il s'agit d'une pratique qui est plus spécifique à l'univers des hedge funds qu'à celui de la gestion de portefeuille traditionnelle).

13. [Hodder Jackwerth, 2006] considèrent que le gérant de hedge fund est CRRA et font l'hypothèse restrictive d'un benchmark fixe, i.e.  $B_T \equiv W^0$ ; [Kouwenberg Ziemba, 2007] considèrent la même structure de frais que [Hodder Jackwerth, 2006] et font l'hypothèse que le gérant a une fonction d'utilité dont l'expression est celle de la théorie des perspectives ("prospect theory") pour modéliser son aversion à la perte.

14. Ce modèle peut s'interpréter également comme une forme réduite d'une structure de frais de sur-performance avec plafond de commission sur encours. En effet, en supposant que la rémunération prend la forme suivante :

le taux de souscription augmente si une sur-performance est constatée à l'horizon d'investissement entraînant un surcroît de rémunération pour l'asset manager qui est récompensé, le cas échéant, de sa bonne gestion :

$$F_T(W_T) \equiv a^* W_T + \eta^* W_T \times 1_{W_T \geq B_T}$$

## 1.2. Préférence d'investissement de l'asset manager.

On suppose que l'asset manager cherche à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération finale et que ses préférences sont décrites par une fonction d'utilité HARA dont l'expression est la suivante<sup>15</sup> :

$$v(x, x_T^0) \equiv \frac{C_1}{1-\gamma} \left\{ \frac{x - x_T^0}{\gamma} \right\}^{1-\gamma} + C_2 \quad (1.2)$$

avec les notations suivantes :

$\gamma$ : le paramètre d'aversion au risque de l'asset manager, avec  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,

$x \equiv F_T(W_T)$ : la valeur finale de la rémunération de l'asset manager,

$x_T^0$ : la valeur du plancher de rémunération (pour  $\gamma > 0$ ), respectivement du plafond de rémunération (pour  $\gamma < 0$ )<sup>16</sup>,

$C_1, C_2$ : deux constantes quelconques vérifiant  $C_1 \times \gamma > 0$ , et  $C_2 \in \mathbb{R}$ <sup>17</sup>.

On suppose que la contrainte technique suivante est vérifiée : pour  $\gamma > 0$ , on a  $x > x_T^0 \geq 0$ , et pour  $\gamma < 0$ ,  $x_T^0 > x \geq 0$ .

---


$$F_T(W_T) \equiv a^* W_T + \min \{c^* (W_T - W^0), \eta^* W_T\} \times 1_{W_T \geq W^0}$$

Celle-ci peut se ré-écrire :

$$F_T(W_T) \equiv a^* W_T + \eta^* W_T \times 1_{W_T \geq W^1} + c^* (W_T - W^0) \times 1_{W^0 \leq W_T < W^1}$$

avec  $W^1 \equiv W^0 / (1 - \eta^*/c^*) \geq W^0$

Or en général dans la pratique, le ratio "taux des frais de gestion sur encours maximum / taux des frais de sur-performance", i.e.  $\eta^*/c^*$ , est petit (d'autant plus que l'horizon considéré est faible). Ce qui implique que la valeur de l'écart  $W^1 - W^0$  est faible et ce modèle de frais peut alors être approximé par la forme réduite suivante :  $F_T(W_T) \equiv a^* W_T + \eta^* W_T \times 1_{W_T \geq W^0}$

15. Une fonction d'utilité HARA se caractérise par un coefficient d'aversion absolue pour le risque qui s'identifie à une fonction hyperbolique ; en particulier, l'expression considérée se déduit de l'équation différentielle suivante :  $R_{Abs}(x) \equiv -u''(x)/u'(x) = \gamma/(x - x_T^0)$  avec  $(x - x_T^0)/\gamma > 0$  et  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

16. Pour  $\gamma > 0$ , l'asset manager admet un profil de richesse "convexe" : sa fonction d'utilité est DARA ('Diminishing Absolute Risk Aversion') puisque  $R_{Abs}(x)$  est une fonction décroissante de  $x$ , et elle est DRRA ('Diminishing Relative Risk Aversion') puisque son coefficient d'aversion relative pour le risque,  $R_{Re}(x) \equiv x \times R_{Abs}(x)$  est une fonction décroissante de  $x$ .

Pour  $\gamma < 0$ , l'asset manager admet un profil de richesse "concave" : sa fonction d'utilité est IARA ('Increasing Absolute Risk Aversion') puisque  $R_{Abs}(x)$  est une fonction croissante de  $x$ , et elle est également IRRA ('Increasing Relative Risk Aversion') puisque son coefficient d'aversion relative pour le risque,  $R_{Re}(x)$  est une fonction croissante de  $x$ .

17. Notons que la contrainte  $C_1 \times \gamma > 0$  permet de garantir que  $u'(x) > 0$  et  $u''(x) < 0$ . De plus, il est utile de remarquer que si la considération d'un terme additionnel  $C_2$  non nul ne change pas les préférences de l'asset manager HARA, en revanche, cela permet d'obtenir algébriquement certaines formes de fonction d'utilité HARA comme la fonction d'utilité quadratique ; en effet, en posant  $\gamma \equiv -1$ ,  $C_1 \equiv -1/x_T^0$ ,  $C_2 \equiv x_T^0/2$ , l'expression de  $v(x, x_T^0)$  donnée dans l'équation (1.2) devient celle d'une fonction d'utilité quadratique :  $v(x, x_T^0) = x - x^2/2x_T^0$ .

De plus, on fait l'hypothèse ("contrainte de benchmark") que le seuil de richesse minimum ou maximum, noté  $x_T^0$ , est proportionnel au niveau "central" de rémunération,  $F_T(B_T)$ , obtenu dans le cas où la valeur finale du portefeuille est égale à celle du benchmark<sup>18</sup>; ce qui s'écrit :

$$x_T^0 \equiv (1 - \theta) \times F_T(B_T) \equiv (1 - \alpha^0) \times bB_T, \text{ où on a posé } \alpha^0 \equiv 1 - \alpha \times (1 - \theta)^{19}, \text{ avec } 0 \leq \alpha^0 \leq 1 \text{ pour } \gamma > 0 \text{ et } \alpha^0 < 0 \text{ pour } \gamma < 0.$$

Ce choix particulier de niveau de rémunération seuil, noté  $x_T^0$ , revient à faire l'hypothèse que l'asset manager doit prendre en compte, dans ses préférences, une contrainte implicite de sous-performance ( $\gamma > 0$ ) ou de sur-performance ( $\gamma < 0$ ) par rapport à la valeur du benchmark. En effet :

(1) pour  $\gamma > 0$ ,

$$\text{On a } x \equiv F_T(W_T) > x_T^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times bB_T \Leftrightarrow W_T/B_T - 1 > -\alpha^*, \text{ où on a posé } (1 - \alpha^*) \equiv (1 - \alpha^0) + (1 - \alpha) \text{ et où on suppose que } 0 \leq \alpha^* \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \alpha^0 + \alpha \leq 2.$$

(2) pour  $\gamma < 0$ ,

$$\text{On a } x_T^0 > x \geq 0 \Leftrightarrow W_T/B_T < \frac{(1 - \alpha^*) \times b + c^*}{b + c} \Leftrightarrow W_T/B_T - 1 < \frac{-\alpha^* \times b - \eta^*}{b + c}, \text{ avec toujours } (1 - \alpha^*) \equiv (1 - \alpha^0) + (1 - \alpha) \text{ et où on suppose que } \alpha^* < -\eta^*/b \Leftrightarrow \alpha^0 + \alpha < 1 - \eta^*/b$$

Cette hypothèse de seuil de rémunération faisant référence au benchmark correspond à de nombreux cas de figure observés dans la pratique :

(1) Contrainte de sous-performance par rapport au benchmark ( $\gamma > 0$ )

Notons tout d'abord que, dans ce cas ( $\gamma > 0$ ), la prise en compte dans les préférences d'investissement de l'asset manager, d'une telle contrainte de "benchmark" revient à supposer que sa rémunération inclut une composante d'incitation linéaire symétrique.

En effet, le gérant de portefeuille ayant une rémunération (sans composante d'incitation symétrique, i.e. pour  $\alpha = 1$ ) définie par l'expression

---

18. La valeur finale du benchmark, notée  $B_T$ , sert de seuil de richesse de référence (point "central") pour déterminer l'obtention ou non de la commission de sur-performance. De manière similaire, [Kouwenberg Ziemia, 2007] font l'hypothèse d'une rémunération cible égale à ce niveau de référence,  $F_T(B_T)$ , pour l'asset manager averse à la sous-performance et dont la fonction d'utilité correspond à celle de la théorie des perspectives ("prospect theory"); son expression (avec nos notations) est la suivante :

$$v(x, x_T^0) \equiv \begin{cases} -A(x_T^0 - x)^{\gamma_1} & \text{si } x \leq x_T^0 \\ +B(x - x_T^0)^{\gamma_2} & \text{si } x > x_T^0 \end{cases}$$

avec  $x \equiv F_T(W_T)$ ,  $x_T^0 \equiv F_T(B_T)$ ,  $A, B > 0$ , et  $0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$ .

19. La dernière expression de  $x_T^0$  s'obtient en remarquant que  $F_T(W_T) \equiv \alpha^* B_T \equiv \alpha \times bB_T$  et en posant  $(1 - \theta) \equiv (1 - \alpha^0)/\alpha \Leftrightarrow \alpha^0 \equiv 1 - \alpha \times (1 - \theta)$ , avec (comme précédemment)  $0 \leq \alpha \leq 1$ , et où on suppose de plus que  $0 \leq \theta \leq 1$  pour  $\gamma > 0$  et  $\theta < 1 - 1/\alpha < 0$  pour  $\gamma < 0$ .

suivante :

$$F_T(W_T) \equiv bW_T + (c - \eta^*) \max(Y_T, 0) + \eta^* W_T \times 1_{Y_T \geq 0}$$

et dont la fonction d'utilité est donnée par :

$$v(x \equiv F_T(W_T), x_T^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times bB_T)$$

résout le même problème d'investissement que le gérant, bénéficiant d'une incitation financière symétrique, dont la rémunération est donnée par

$$F_T^0(W_T) \equiv \alpha^0 bW_T + (1 - \alpha^0) b Y_T + (c - \eta^*) \max(Y_T, 0)$$

$$+ \eta^* W_T \times 1_{Y_T \geq 0}$$

et la fonction d'utilité prend la forme suivante :  $v(x \equiv F_T^0(W_T), x_T^0 \equiv 0)$ .

Dans le cas particulier où  $\alpha^* = 1 \Leftrightarrow \alpha^0 = \alpha = 1$  (niveau maximal de risque de sous-performance), la contrainte implicite correspond à une contrainte de non négativité de la rémunération du gérant,  $F_T(W_T) > 0$ , ou, de façon équivalente, à une contrainte de non négativité de la valeur du portefeuille géré, i.e.  $W_T > 0$ . En effet, il est facile de voir que pour  $\alpha^0 = \alpha = 1$ , nos hypothèses se ré-écrivent de la façon suivante :

- une rémunération, sans incitation financière symétrique, de la forme suivante :  $F_T(W_T) \equiv bW_T + (c - \eta^*) \max(Y_T, 0) + \eta^* W_T \times 1_{Y_T \geq 0}$
- un seuil de rémunération minimale nul, i.e.  $x_T^0 \equiv 0$  (i.e. contrainte de non négativité)

Dans le cas où  $0 < \alpha^* < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha^0 + \alpha < 2$ , la contrainte implicite de "Benchmark", plus restrictive que la simple non-négativité, peut provenir de la prise en compte par le gérant d'une contrainte de sous-performance maximale qui lui est imposée par l'investisseur (hypothèse de contrainte exogène). Une seconde hypothèse, consiste à supposer que cette contrainte implicite traduit l'aversion (stricte) à la sous-performance du gérant (contrainte endogène) :

- (a) Hypothèse de contrainte exogène de sous-performance : pratique de "benchmarking"

Dans ce cas, on suppose que le risk-manager, ou encore l'investisseur donnant mandat de gestion, impose cette contrainte de sous-performance par rapport au benchmark à l'asset manager. Ce dernier l'intègre de manière implicite dans l'expression de sa fonction d'utilité<sup>20</sup> :

---

20. Nous analyserons plus en détail le cas particulier d'une fonction d'utilité puissance avec plancher de richesse implicite dans les sections suivantes. Voir par exemple [Bajeux-Besnainou Ogunc, 2006] pour l'utilisation de ce type de fonction d'utilité dans le cadre du problème d'investissement d'une fondation financière ("Endowment Plan") ou encore [Basak, 2002] dans le cadre d'un modèle d'équilibre avec agent averse à la sous-performance. Remarquons aussi que le choix de ce type de fonction d'utilité implique que la stratégie dynamique optimale du problème d'investissement est similaire à une stratégie "CPPI" ("Constant Protection Portfolio Insurance"); voir par exemple [Perold Sharpe, 1988] pour une description de cette stratégie dynamique d'assurance de portefeuille.

## (b) Hypothèse de contrainte endogène : aversion à la sous-performance

De manière alternative, on peut considérer que c'est l'asset manager lui-même qui souhaite se prémunir d'une situation de sous-performance importante.

La raison en étant que, au-delà du coût financier (il ne reçoit pas de commission de sur-performance pour  $W_T < B_T$ ), et du coût d'opportunité (perte de temps) qu'il subit, un niveau trop important de sous-performance peut engendrer pour lui un coût réputationnel induisant de façon indirecte une baisse de sa rémunération (une sous-performance importante peut engendrer moins de collecte voir même une décollecte, ce qui au final signifie moins de commission d'encours)<sup>21</sup>.

Finalement, dans le cas limite où  $\alpha^* = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 = 1 - \alpha$ , la contrainte de "benchmark" correspond à un niveau de risque de sous-performance nul ; autrement dit, le gérant est contraint d'implémenter une gestion de portefeuille sans aucun risque de sous-performance par rapport au benchmark : par exemple pour  $\alpha^0 = 0$  et  $\alpha = 1$ , la contrainte implicite de protection s'écrit  $F_T(W_T) \equiv bW_T > F_T(B_T) \equiv bB_T$ , ou de façon équivalente,  $W_T > B_T$ <sup>22</sup>.

(2) Profil de richesse concave ( $\gamma < 0$ ) :

Pour  $\gamma < 0$  (profil concave), il s'agit du cas où l'asset manager doit ou souhaite prendre en compte une contrainte implicite de plafond de sur-performance.

Cette valeur plafond s'identifie à un niveau d'excès de performance par rapport au benchmark que l'asset manager ne souhaite jamais dépasser car, à ce niveau de performance, il atteint la satiété et ne souhaite donc plus être exposé en actif risqué.

Ce seuil de satiété découle du choix du profil de gain concave de l'asset manager ( $\gamma < 0$ ) ; de même que dans le cas  $\gamma > 0$ , on peut supposer que ce profil de gain avec rémunération maximale traduit son propre appétit pour le risque (contrainte endogène) ou lui est imposé par l'investisseur final (contrainte exogène).

A noter que dans ce cas, la richesse du portefeuille n'étant pas bornée à la baisse, il est nécessaire de considérer une contrainte de sous-performance explicite dans le problème de l'asset manager.

C'est ce que nous ferons quand nous analyserons, dans la quatrième section

---

21. Nous considérons ici la forme la plus restrictive d'aversion à la perte (contrainte stricte de sous-performance maximale) ; nous analyserons dans le chapitre suivant une forme moins restreinte d'aversion avec pénalisation de la sous-performance.

22. Notons que cela l'oblige à opérer une gestion totalement passive si  $E\{B_T/H_T\} = 1$ , la gestion restant partiellement active seulement dans le cas où  $E\{B_T/H_T\} < 1$ .



de ce chapitre, le problème moyenne-variance avec contrainte implicite de "Tracking Error"<sup>23</sup> et contrainte explicite de sous-performance.

- (3) Problème de l'asset manager de "référence" ne recevant pas de commission d'incitation financière ( $\alpha = 1$  et  $c = 0$ ) :

Il est facile de voir que dans le cas où  $\alpha = 1$  et  $c = 0$ , l'asset manager résout le même problème d'investissement que l'investisseur HARA lui donnant mandat si l'on suppose que :

- le problème d'investissement considéré par l'investisseur final est de maximiser l'utilité espérée de l'écart entre la valeur finale de son portefeuille et celle du benchmark<sup>24</sup>
- le budget de risque de l'investisseur (seuil de sous-performance ou de sur-performance maximale implicite) est donné par  $-\alpha^0 \times B_T$ .
- la fonction d'utilité de l'investisseur final est la même que celle de l'asset manager

Dans ce cas, les préférences des deux investisseurs sont identiques ; autrement dit en l'absence d'incitation financière il n'y a pas de conflit d'intérêt entre l'asset manager et l'investisseur avec contrainte de "benchmark" :

En effet, pour  $\alpha = 1$  et  $c = 0$ , la fonction d'utilité de l'asset manager est donnée par :

$$v(x \equiv bW_T, x^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times bB_T) \cong v(W_T - B_T, -\alpha^0 \times B_T)$$

Finalement, notons qu'on retrouve, pour  $\alpha^0 \equiv 1$ , le cas particulier de l'asset manager de "référence" sans incitation financière (resp. de l'investisseur sans contrainte de "benchmarking") et avec contrainte de non négativité du niveau de la rémunération finale (resp. de la valeur finale du portefeuille) ; dans ce cas, l'équivalence des préférences s'écrit de la façon suivante :

$$v(x \equiv bW_T, x^0 \equiv 0) \cong v(W_T, 0)$$

### 1.3. Hypothèses de marché et problème d'investissement considéré.

Nous faisons l'hypothèse que la structure du marché financier est la même que celle décrite dans la première partie de la thèse (chapitre 1, section 1.1). Rappelons de manière succincte quelles sont ces hypothèses de marché qui seront les nôtres

23. Nous verrons que le problème d'investissement considéré, dans le cas  $\gamma = -1$  est équivalent au problème "Tracking Error - Moyenne Variance", i.e. problème Moyenne-Variance dont la variable de richesse finale est la "Tracking Error", i.e. l'écart entre la rémunération finale de l'asset manager et la valeur de la rémunération cible.

24. Il s'agit typiquement de la problématique de certains investisseurs institutionnels comme les fonds de pension qui donnent mandat de gestion à un gérant tiers sur un ou plusieurs segments de marché, chacun représenté par un portefeuille benchmark.

dans ce chapitre et le suivant<sup>25</sup> :

- (1) Le marché est supposé ouvert en permanence et les transactions se font sans arbitrages possibles (hypothèse d'AOA) et sans coûts de transaction.
- (2) Le marché est complet et comprend  $N+1$  actifs :

-L'actif dit "Actif Sans Risque" ("ASR"); localement sans risque, il s'interprète comme un "rollover" d'un instrument du marché monétaire, et a pour rendement instantané :

$$dS_t^0/S_t^0 = r(t)dt$$

où  $r(t)$  est un processus qui représente le taux court instantané en vigueur sur le marché monétaire.

-Les  $N$  autres actifs sont risqués et ont pour rendements instantanés des processus d'Itô. Plus précisément, on écrit en notation vectorielle :

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dZ_t)$$

où  $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^N)$  représente le vecteur des  $N$  actifs risqués,

$\mu(t) = (\mu_j(t); j = 1 \dots N)$ , représente le vecteur des rendements moyens instantanés (taux court plus prime de risque),

et où  $\sigma(t) = (\sigma_{jk}(t); j, k = 1 \dots N)$  représente la matrice de co-volatilité des processus de rendements instantanés.

- (3) On considère l'ensemble des stratégies dynamiques autofinancantes et admissibles :

-autofinancantes : pas d'apport de richesse intermédiaire et gain financier entièrement ré-investi,

-admissibles : elles procurent une richesse finale dont le moment d'ordre deux est fini (ensemble noté  $L^2(P)$ ).

Dans ce cadre de marché, le problème d'investissement de l'asset manager (i.e. trouver la stratégie dynamique optimale maximisant l'utilité espérée de la rémunération finale) se ramène à la résolution du problème statique dont l'expression est la suivante :

$$(P0) \begin{cases} \max_{W_T \in L^2(P)} E \{v(x \equiv F_T(W_T), x^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times F_T(B_T))\} \\ s.a. \quad E((W_T - B_T)/H_T) = 1 - E\{B_T/H_T\} \geq 0 \end{cases}$$

avec

$W_T$  : la valeur finale du portefeuille géré,

---

25. Pour plus de détail voir la section 1.1 intitulée "cadre général" dans le premier chapitre de la première partie de la thèse.

$B_T$  : la valeur finale du portefeuille Benchmark,

$F_T(W_T)$  : la fonction de rémunération dont l'expression est fournie par l'équation (1.1) ci-dessus,

$v(x, x^0)$  : l'expression de la fonction d'utilité donnée dans l'équation (1.2) ci-dessus,

$\alpha^0$  : un paramètre de perte maximale avec  $0 \leq \alpha^0 \leq 1$  pour  $\gamma > 0$  (profil de gain convexe) ou un paramètre servant à mesurer une cible de richesse maximale (satiété) avec  $\alpha^0 < 0$  pour  $\gamma < 0$  (profil de gain concave),

$\gamma$  : le niveau d'aversion au risque de l'asset manager, paramètre entrant en jeu dans l'expression de la fonction  $v(x, x^0)$  (voir l'équation (1.2) ci-dessus).

$H_T$  : la valeur finale du portefeuille numéraire<sup>26</sup>

Nous nous intéressons, dans la suite de ce chapitre, à plusieurs cas particuliers de ce problème d'investissement.

Nous considérons la structure de rémunération donnée par l'équation (1.1) de la section 1.1, avec ou sans restrictions supplémentaires sur

- la structure de rémunération incitative : hypothèse de benchmark fixe ou stochastique, commission incitative avec ou sans bonus de sur-performance,
- la fonction d'utilité HARA dont l'expression est donnée par l'équation (1.2) de la section 1.2 : fonction d'utilité CRRA ou quadratique.

### 1.3.1. Hypothèse de benchmark fixe.

Dans les trois sections suivantes, nous ferons l'hypothèse restrictive que la valeur finale du benchmark est fixe<sup>27</sup> et analyserons la stratégie dynamique optimale dans le cadre du modèle à deux actifs de *Black & Scholes*<sup>28</sup>.

---

26. Le portefeuille "numéraire" est aussi appelé portefeuille de "croissance optimale" ("growth optimal") par [Merton, 1990] car il correspond à la stratégie optimale pour l'investisseur logarithmique.

Sous nos hypothèses de marché (les mêmes que dans la première partie de la thèse), ce portefeuille, noté  $(H, h)$ , est donné par les expressions suivantes :

$h_t = \left( \sigma(t)\sigma(t)' \right)^{-1} (\mu(t) - r(t)\mathbf{1})$  et, en désignant le vecteur des prix de marché du risque ("market prices of risk") par  $\lambda(t) = \sigma(t)^{-1} (\mu(t) - r(t)\mathbf{1})$  :

$$H_t = \exp \left\{ \int_0^t (r(s) + \lambda(s)' \lambda(s)/2) ds + \int_0^t \lambda(s)' dZ_s \right.$$

27. il s'agit du cas particulier où le paiement de la commission de sur-performance dépend du franchissement d'une cible de richesse finale qui est fixe.

28. Notons que dans le cadre particulier du modèle de *Black & Scholes* à deux actifs ou sa généralisation à  $N$  actifs où on fait l'hypothèse de l'existence d'un taux d'intérêt constant, cela revient à supposer, à une constante près, que le benchmark s'identifie avec l'actif sans risque.

Nous étudierons successivement, sous cette hypothèse restrictive d'un benchmark fixe, les trois problématiques suivantes :

- (1) Seconde section : problème de l'asset manager HARA avec frais de gestion variables et stratégie dynamique avec contrainte implicite de protection.

Dans cette section, nous expliciterons l'expression de la richesse terminale optimale du problème de l'asset manager HARA avec "benchmarking" dont la rémunération comprend uniquement des frais de gestion sur encours et des frais de gestion variables.

Il s'agit de la forme de rémunération la plus courante en pratique dans l'industrie de la gestion pour compte de tiers.

Elle correspond à l'expression de la fonction de rémunération, donnée par l'équation (1.1) de la section 1.1, dans le cas où le benchmark est fixe, i.e.  $B_T \equiv W^0$ , et l'asset manager ne reçoit ni rémunération incitative symétrique (i.e.  $b^* = 0 \Leftrightarrow a^* = b$ ) ni bonus de sur-performance (i.e.  $\eta^* = 0 \Leftrightarrow c^* = c$ ) :

$$F_T(W_T) \equiv b W_T + c \max(W_T - W^0, 0)$$

avec  $W^0$  qui désigne le seuil de richesse cible (hypothèse de benchmark fixe, i.e.  $B_T \equiv W^0$ ).

De plus, à titre illustratif, nous analysons dans le cadre du modèle de *Black & Scholes*, la stratégie dynamique optimale pour l'asset manager HARA dont le profil de gain est convexe et qui doit prendre en compte une contrainte implicite de protection.

La fonction d'utilité qui est choisie pour décrire les préférences d'investissement de cet asset manager est une fonction d'utilité "puissance" avec seuil de rémunération minimale qui admet la forme suivante<sup>29</sup> :

$$v(x \equiv F_T(W_T), x^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times F_T(W^0)) \equiv u(x - x^0) \equiv \frac{(x - x^0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

avec  $0 \leq \alpha^0 \leq 1$  et avec  $\gamma, \gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\}$ , qui désigne le niveau d'aversion au risque de l'asset manager.

- (2) Troisième section : problème de l'asset manager CRRA avec prise en compte d'un bonus fixe versé en cas de sur-performance

---

29. Notons que le problème considéré est équivalent à celui de l'asset manager CRRA ayant les caractéristiques suivantes :

- la structure de sa rémunération comprend une commission de gestion fixe et une composante symétrique de frais de gestion incitatifs et son expression est la suivante :  
 $F_T(W_T) \equiv a^0 + b (W_T - W^0) + c \max(W_T - W^0, 0)$   
 où on a posé  $a^0 \equiv \alpha^0 b W^0$  avec  $0 \leq a^0 \leq b W^0$ ,
- l'expression de sa fonction d'utilité "puissance" est la suivante (seuil de richesse minimale égal à 0) :  $v(x \equiv F_T(W_T), x^0 \equiv 0) \equiv \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ , avec  $\gamma, \gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\}$ , qui désigne le paramètre d'aversion au risque de l'asset manager.

Dans la troisième section, nous généralisons les résultats de la seconde section dans le cas où l'asset manager est CRRA ; nous nous intéressons en particulier à l'effet du versement d'un bonus fixe en cas de sur-performance (en plus des frais de gestion variables le cas échéant) sur le profil de gain de cet asset manager.

Nous plaçant toujours sous l'hypothèse d'un benchmark fixe ( $B_T \equiv W^0$ ), nous résolvons le problème de l'asset manager CRRA (profil de gain convexe) dont l'expression de la rémunération est la forme générale donnée par l'équation (1.1) de la section 1.1 :

- Sa rémunération comprend donc à la fois une commission de gestion fixe, une composante symétrique de frais de gestion incitatifs, des frais de gestion variables et un bonus fixe en cas de sur-performance :  

$$F_T(W_T) \equiv a^0 + b(W_T - W^0) + \eta^0 \times 1_{W_T \geq W^0} + c \max(W_T - W^0, 0)$$

avec les notations suivantes  $a^0 \equiv a^* W^0$  (composante de frais de gestion fixes),  $b \equiv a^* + b^*$  (frais de gestion symétriques),  $\eta^0 \equiv \eta^* W^0$  (bonus fixe), et  $c \equiv c^* + \eta^*$  (frais de gestion variables).

- sa fonction d'utilité est définie par l'expression suivante :

$$v(x \equiv F_T(W_T), x^0 \equiv 0) \equiv u(x) \equiv \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \text{ avec } \gamma, \gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\},$$

qui désigne le niveau d'aversion au risque de l'asset manager.

- (3) Quatrième section : problème de l'asset manager recevant des frais de gestion variables avec fonction d'utilité quadratique et contrainte explicite d'assurance de portefeuille.

Il s'agit du problème de la seconde section, dans le cas particulier où la fonction d'utilité de l'asset manager est quadratique (profil de gain concave) et où ce dernier doit prendre en compte une contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille.

Le but étant, dans le cas où  $\gamma < 0$ , d'éviter une situation de faillite qui resterait possible sans la prise en compte de cette contrainte explicite dans le problème d'investissement :  $W_T \geq \underline{W} > 0$ .

La structure de la rémunération considérée est celle de la seconde section :

$$F_T(W_T) \equiv b W_T + c \max(W_T - W^0, 0)$$

La fonction d'utilité prend la forme quadratique suivante :

$$v(x \equiv F_T(W_T), x^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times F_T(W^0)) \equiv u^*(x - x^0) \equiv -\frac{(x^0 - x)^2}{2}$$

avec  $\alpha^0 < 0$ .

Finalement, de manière équivalente, nous pouvons considérer, dans le problème d'investissement, la forme de fonction d'utilité quadratique plus connue suivante :

$$u(z) = z - z^2/2a$$

où on a posé :

$z \equiv x - x^0 \equiv F_T(W_T) - F_T(W^0) \equiv b(W_T - W^0) + c \max(W_T - W^0, 0)$   
 qui représente la "Tracking Error" de la rémunération de l'asset manager, définie comme la différence entre sa rémunération finale et le niveau "central" de rémunération correspondant à une gestion passive.

$a^0 = -\alpha^0 \times b W^0 > 0$  qui désigne le paramètre de tolérance au risque de l'asset manager.

1.3.2. *Hypothèse de benchmark stochastique.*

En guise de généralisation, dans la cinquième et dernière section, nous explicitons la solution du problème de l'asset manager CRRA dans sa forme la plus générale : hypothèse de benchmark stochastique et forme de rémunération correspondant à l'expression donnée par l'équation (1.1) de la section 1.1 sans aucune restriction.

De plus, nous considérons  $N$  sources de risque, avec  $N \geq 1$ , pour décrire la stratégie dynamique optimale (généralisation du modèle de de *Black & Scholes* à deux actifs et une seule source de risque).

La table 1 ci-dessous fait la synthèse des différentes caractéristiques des problèmes considérés dans les sections suivantes, tandis que la table 2 offre un aperçu de chacune des problématiques correspondantes.

TABLE 1. Principales caractéristiques des problèmes d'investissement considérés

Section	Benchmark	Rémunération <sup>1</sup>	Utilité	Profil de gain	Modèle d'actifs
Section 2	fixe	spécifique : $b^* \equiv 0$ et $\eta^* \equiv 0$	HARA	quelconque <sup>2</sup>	<i>B&amp;S</i>
Section 3	fixe	forme générale	CRRA	convexe	<i>B&amp;S</i>
Section 4	fixe	spécifique : $b^* \equiv 0$ et $\eta^* \equiv 0$	quadratique <sup>3</sup>	mixte <sup>4</sup>	<i>B&amp;S</i>
Section 5	stochastique	forme générale	CRRA	convexe	<i>B&amp;S</i> multidimensionnel <sup>5</sup>

TABLE 2. Comparaison des différentes problématiques d'investissement considérées

Section	Problématique
Section 2	Étudier l'effet du changement de valeur du taux des frais de gestion variables (paramètre $c^6$ ) sur le comportement d'investissement de l'asset manager HARA dans un cadre simplifié : benchmark fixe, forme de rémunération standard (pas de bonus de sur-performance) et analyse de l'allocation dynamique optimale pour l'asset manager ayant une fonction d'utilité puissance avec seuil de richesse minimale (profil de gain convexe).
Section 3	Généraliser les résultats de la seconde section en considérant la forme générale de rémunération : celle-ci comprend le versement d'un bonus en cas de sur-performance en complément des frais de gestion variables (le cas échéant). Analyser l'impact du montant de bonus considéré (paramètre $\eta^0$ <sup>7</sup> ) sur la stratégie dynamique de l'asset manager CRRA.
Section 4	Résoudre le problème d'investissement (moyenne - variance) de l'asset manager HARA utilisant la "Tracking Error Variance" comme mesure de risque (profil de gain concave). Analyser l'impact de la prise en compte d'une contrainte explicite de protection sur l'effet d'incitation financière.
Section 5	Généraliser les résultats de la troisième section à la prise en compte d'un benchmark stochastique. Expliciter la solution optimale du problème d'investissement (forme générale) de l'asset manager CRRA avec benchmark stochastique : expression de la richesse terminale optimale et de l'allocation dynamique correspondante dans le cadre du modèle de <i>Black &amp; Scholes</i> étendu à $N$ actifs risqués, avec $N \geq 1$ .

---

1. Les paramètres  $b^*$  et  $\eta^*$  mentionnés dans la colonne "rémunération" font référence à l'expression générale de la rémunération fournie par l'équation (1.1) de la section 1.1

2. Dans le cadre de l'obtention de la stratégie dynamique, nous ferons l'hypothèse supplémentaire du choix d'une fonction d'utilité HARA de type puissance avec seuil de richesse minimale (profil convexe).

3. On suppose de plus que l'asset manager doit prendre en compte une contrainte explicite d'assurance de portefeuille dans son problème d'investissement

4. profil de richesse convexe pour les richesses faibles et concave pour les valeurs élevées

5. Généralisation à  $N + 1$  actifs du modèle de *B&S*

6. dans l'expression de la rémunération qui suit :  $F_T(W_T) \equiv b W_T + c \max(W_T - W^0, 0)$ .

7. dans l'expression de la rémunération suivante :

$F_T(W_T) \equiv a^0 + b(W_T - W^0) + \eta^0 \times 1_{W_T \geq W^0} + c \max(W_T - W^0, 0)$ .

## 2. Asset manager HARA avec frais de gestion variables

Nous nous plaçons sous les hypothèses qui sont décrites dans la section précédente et supposons que le benchmark de l'investisseur est fixe (i.e. cible de richesse finale fixe).

Dans la première sous-section, nous explicitons l'expression de la richesse terminale optimale du problème d'investissement de l'asset manager HARA<sup>30</sup>, recevant en sus d'une commission sur encours à taux fixe, des frais de gestion variables fonction de sa sur-performance par rapport à la cible de richesse de l'investisseur<sup>31</sup>.

Dans la seconde sous-section, nous nous plaçons sous les hypothèses du modèle à deux actifs de  $B\mathcal{E}S$ , et nous supposons de plus que l'asset manager a une fonction d'utilité puissance avec seuil de rémunération minimale (profil convexe). Nous analysons l'effet du changement de la valeur du taux des frais de gestion variables, des paramètres de risque du modèle ainsi que de l'horizon d'investissement considérés sur la stratégie dynamique suivie par cet asset manager.

### 2.1. Problème d'investissement et richesse terminale optimale.

Nous reprenons les hypothèses générales décrites dans la première section : nous supposons que l'asset manager est HARA et qu'il cherche à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération finale dont l'expression est fournie par l'équation (1.1) de la section 1.1. et qui peut se ré-écrire de la manière suivante :

$$F_T(W_T) \equiv a^*B_T + bY_T + (\eta^*B_T + cY_T) \times 1_{Y_T \geq 0}$$

avec  $b \equiv a^* + b^*$ ,  $c \equiv \eta^* + c^*$ , et les mêmes contraintes sur tous les coefficients que dans l'équation (1.1),

avec  $Y_T \equiv W_T - B_T$  l'écart de valeur entre le portefeuille géré et le benchmark de l'investisseur final.

Dans cette section, nous considérons la forme restrictive de rémunération la plus courante en pratique : il s'agit du cas particulier où l'asset manager ne perçoit ni de rémunération incitative symétrique (i.e  $b^* = 0 \Leftrightarrow a^* = b$ )<sup>32</sup>, ni de bonus de sur-performance ( $\eta^* = 0 \Leftrightarrow c^* = c$ ); l'expression de cette structure de frais prend donc la forme suivante :

$$F_T(W_T) \equiv b W_T + c \max(Y_T, 0)$$

---

30. Il s'agit du problème d'investissement énoncé dans la section 1.3 sous l'hypothèse supplémentaire d'un benchmark fixe. L'expression de la fonction d'utilité de l'asset manager est fournie par l'équation (1.2) de la section 1.2, sous cette même hypothèse de benchmark fixe.

31. La structure de rémunération considérée est celle fournie par l'équation (1.1) de la section 1.1, avec les restrictions suivantes : le benchmark est fixe (i.e. cible de richesse finale fixe), et de plus l'asset manager ne perçoit ni rémunération symétrique incitative, ni bonus de sur-performance ; il s'agit de la forme de contrat de rémunération incitative qui est, dans la pratique, la plus courante.

32. Hypothèse qui est faite sans perte de généralité, compte tenu de forme de la fonction d'utilité HARA avec contrainte implicite de "Benchmark" considérée, cf. section précédente.



Notons qu'avec cette forme de rémunération, la fonction d'utilité de l'asset manager peut être ré-exprimée de la manière suivante :

$$v(x \equiv F_T(W_T), x_T^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times F_T(B_T)) \equiv u(x - x_T^0 \equiv Z_T + \alpha^0 \times b B_T)$$

avec  $v(x, x_T^0) \equiv u(x - x_T^0)$  la fonction définie par l'expression de l'équation 1.2 de la section précédente,

avec  $Z_T$  l'"excédent de rémunération" du gérant (par rapport au niveau central de rémunération) dont l'expression est la suivante :

$$Z_T \equiv F_T(W_T) - F_T(B_T) \equiv bY_T + c(Y_T)^+$$

Finalement, dans la suite de cette section, on fera l'hypothèse supplémentaire que le benchmark de l'investisseur correspond à une cible fixe de richesse finale<sup>33</sup>, i.e.  $B_T \equiv W^0$  avec  $0 \leq W^0 \leq 1/E \{1/H_T\} \equiv 1/ZC(T)$  où  $ZC(T)$  désigne la valeur de l'obligation Zéro-Coupon d'échéance  $T$ <sup>34</sup>.

Sans perte de généralité<sup>35</sup>, on peut considérer la variable suivante dans le problème d'investissement de l'asset manager :

$$Z_T' \equiv Z_T/b \equiv Y_T + d(Y_T)^+$$

où  $d \equiv c/b$  désigne le taux de commission de sur-performance rapporté au taux de commission sur encours et où  $Y_T \equiv W_T - W^0$ .

Finalement, sous l'hypothèse supplémentaire d'un benchmark fixe, la fonction d'utilité à maximiser prend la forme suivante :

$$u(Z_T + \alpha^0 \times b W^0) \cong w(Z_T')$$

avec  $w(z') \equiv u(z' + A \gamma)$  et  $A \times \gamma \equiv \alpha^0 \times W^0$ .

On en déduit que le problème d'investissement de l'asset manager peut s'énoncer de la manière suivante :

---

33. Nous montrerons, dans la dernière section de ce chapitre, que les résultats obtenus dans cette section et la suivante, sous cette hypothèse restrictive, se généralisent au cas où le benchmark est stochastique.

34. Cette hypothèse d'encadrement de la valeur de  $W^0$  est faite sans perte de généralité et permet de conserver une simplicité d'écriture dans l'énoncé de notre problème.

Faire cette hypothèse revient à ne considérer que les niveaux de richesse finale atteignables par une stratégie admissible dont le montant d'investissement initial est inférieur ou égal à un (i.e. stratégie d'assurance de portefeuille avec contrainte implicite de protection du capital).

Dans le cas contraire (stratégie avec cible de sur-performance par rapport à l'actif obligataire Zéro-Coupon, actif sans risque à l'horizon d'investissement), on peut toujours, par un simple changement de variables, se ramener au cas où la richesse cible est exactement égale à la performance de l'actif obligataire Zéro-Coupon.

35. Les préférences d'investissement (forme de fonction d'utilité) sont invariantes par transformation linéaire.

PROBLÈME 15.

$$(P15) \begin{cases} \max_{Y_T \in L^2(P)} E \left\{ w(Y_T + d(Y_T)^+) \right\} \\ \text{s.a. } E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E \{1/H_T\} \end{cases}$$

avec  $Y_T \equiv W_T - W^0$  l'écart entre la valeur finale du portefeuille,  $W_T$ , et le niveau de richesse cible,  $W^0$ , avec  $0 \leq W^0 \leq 1/E \{1/H_T\}$ ,

avec  $d$  le taux de commission de sur-performance rapporté au taux de commission sur encours<sup>36</sup>,

avec  $w(\cdot)$  la fonction d'utilité HARA donnée par l'expression suivante :

$$w(x) = \frac{C_1}{1-\gamma} \left\{ \frac{x}{\gamma} + A \right\}^{1-\gamma} + C_2 \quad (2.1)$$

avec  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,  $C_1 \times \gamma > 0$ <sup>37</sup>,  $A > 0$ ,  $C_2$  quelconque.

La solution du problème est présentée dans le théorème 4 qui suit :

THÉOREME 4. La richesse terminale optimale du problème (P15) admet l'expression suivante<sup>38</sup> :

$$Y_T^* \equiv W_T^* - W^0 = \begin{cases} \left( \frac{1}{1+d} \right) I \left( \frac{1}{1+d} \frac{k}{H_T} \right) & \text{si } H_T > H^* \\ I(k/H_T) & \text{si } H_T \leq H^* \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $H_T$  désigne la valeur finale du portefeuille numéraire<sup>39</sup>, avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E \{1/H_T\}$ , et  $H^*$ <sup>40</sup> donné par l'expression suivante :

$$H^* \equiv \frac{k}{1+d} \frac{\gamma (Ad)^\gamma}{C_1} \left[ \frac{1 - 1/\gamma}{(1+d)^{1-1/\gamma} - 1} \right]^\gamma$$

avec  $d \equiv c/b$ ,  $d \geq 0$ , le ratio du taux de la commission de sur-performance,  $c$ , sur celui de la commission sur encours,  $b$ ,

avec  $y \rightarrow I(y)$  la fonction inverse de la fonction  $x \rightarrow w'(x)$  et dont l'expression est la suivante :  $I(y) \equiv \gamma \left\{ \left( \frac{C_1}{\gamma y} \right)^{1/\gamma} - A \right\}$ .

36. Ce paramètre s'interprète de façon intuitive comme une mesure du degré d'incitation financière qui est offerte au gérant.

37. Ce qui permet de garantir que  $w'(x) > 0$  et  $w''(x) < 0$ .

38. il s'agit de l'expression de la valeur terminale optimale du portefeuille en excès de celle du benchmark

39. Sous nos hypothèses générales on rappelle que le portefeuille "numéraire", noté  $(H, h)$ , est donné par les expressions suivantes :  $h_t = \left( \sigma(t)\sigma(t)' \right)^{-1} (\mu(t) - r(t)1)$  et, en désignant le vecteur des prix de marché du risque ("market prices of risk") par  $\lambda(t) = \sigma(t)^{-1} (\mu(t) - r(t)1)$ ,

$$H_t = \exp \left\{ \int_0^t \left( r(s) + \left( \lambda(s)' \lambda(s) / 2 \right) ds \right) + \int_0^t \left( \lambda(s)' dZ_s \right) \right\}.$$

40.  $H^*$  est solution de l'équation suivante :  $f \left( \frac{k}{H^*} \frac{1}{1+d} \right) = 0$  avec  $f(x) \equiv g((1+d)x) - g(x)$  et avec  $g(x) \equiv w[I(x)] - x[I(x)]$  où  $I(\cdot)$  désigne l'inverse de la fonction  $w'(\cdot)$ .

Ce qui implique en particulier que l'excédent de rémunération de l'asset manager, défini par  $Z_T^* \equiv F_T(W_T^*) - F_T(W^0) \equiv bY_T^* + c(Y_T^*)^+$ , est donné par l'expression suivante :

$$Z_T^* = \begin{cases} bI(\frac{1}{1+d} \frac{k}{H_T}) & \text{si } H_T > H^* \\ bI(k/H_T) & \text{si } H_T \leq H^* \end{cases} \quad (2.3)$$

Pour  $d = 0$ , on retrouve la stratégie dynamique du problème sans commission de performance et la rémunération de l'asset manager est proportionnel à la valeur finale du portefeuille ; en effet, on a  $Z_T^* = bY_T^*$  soit encore  $F_T(W_T^*) = bW_T^*$ .

Pour  $d > 0$ , le "pay off" de l'asset manager qui peut recevoir, le cas échéant, une commission de sur-performance, n'est plus proportionnel à la valeur en excès du portefeuille total puisqu'on a  $Z_T^* = b\{Y_T^* + d(Y_T^*)^+\}$ .

L'existence d'une commission de sur-performance implique que l'expression de la valeur du portefeuille en excès du benchmark,  $Y_T^*$  (voir l'équation 2.2 ci-dessus), et celle de la rémunération excédentaire de l'asset manager,  $Z_T^*$  (voir l'équation (2.3) ci-dessus), sont toutes deux des fonctions de  $H_T$  discontinue et asymétriques par rapport au seuil  $H^*$ .

En effet, ces deux expressions ressemblent au "pay-off" discontinu typique d'une option binaire. Le saut de richesse qui se produit au niveau du seuil  $H^*$  traduit une volonté de prise de risque supplémentaire de la part de l'asset manager autour de ce seuil de valeur.

De plus, comme nous pouvons le constater, cette asymétrie provient du paramètre  $d$ . En effet, le paramètre  $d$  ne figure pas dans l'expression de  $Y_T^*$  et de  $Z_T^*$  correspondant à l'état des richesses les plus basses<sup>41</sup>. En revanche, il intervient dans l'expression de la partie supérieure des richesses ( $H_T \geq H^*$ ) en créant une asymétrie à deux niveaux :

– Tout d'abord, à travers le terme  $1/(1+d)$  qui agit comme un coefficient réducteur de la valeur finale du portefeuille. Cet effet de levier inversé croît avec le degré d'incitation financière,  $d$ . En revanche, ce terme n'impacte pas la rémunération du gérant (voir l'expression de  $Z_T^*$  donnée par l'équation (2.3)).

– Ensuite, par l'intermédiaire du terme  $(1+d)$  dans l'expression  $I(\frac{1}{1+d} \frac{k}{H_T})$ . Dans ce cas, le terme  $(1+d)$  joue un rôle de coefficient multiplicateur procurant un effet de levier à l'exposition au portefeuille  $H$ . Cet effet de levier croît avec le degré d'incitation financière,  $d$ . De plus, on notera que, toute chose restant égal par ailleurs, ce terme impacte positivement à la fois la valeur finale du portefeuille et le niveau de rémunération du gérant (voir l'expression de  $Z_T^*$  donnée par l'équation (2.3)).

Remarquons enfin que, dans le cas où  $\gamma > 0$  et  $C_1 > 0$  (profil convexe), nous pouvons contraindre les valeurs prises par les paramètres  $A$  et  $\gamma$ , de façon à nous prémunir de la négativité de la richesse finale du portefeuille optimal, notée  $W_T^*$ .

---

41. L'expression dépend cependant implicitement du paramètre  $d$  à travers la valeur de la contrainte de budget près, notée  $k$ .

En effet, il est facile de voir que pour  $A \times \gamma < W^0$ <sup>42</sup>, on a :  $\forall H_T \geq 0, W_T^*(H_T) > 0$ .

Par voie de conséquence, ceci permet également d'éviter que la valeur finale de la rémunération de l'asset manager ne puisse être négative. En effet, on a :

$$W_T^*(H_T) > 0 \Rightarrow F_T(W_T^*(H_T)) \geq bW_T^*(H_T) \geq 0.$$

A l'inverse, dans le cas où  $\gamma < 0$  et  $C_1 < 0$  (profil concave), cela n'est pas possible. Aussi, de façon à éviter des valeurs négatives de richesse, il est nécessaire d'introduire dans le problème considéré une contrainte explicite supplémentaire de non négativité sur la richesse finale du portefeuille,  $W_T \geq 0$ .

C'est d'ailleurs ce que nous ferons dans la quatrième section de ce même chapitre où nous étudierons le problème d'investissement de l'asset manager maximisant l'utilité espérée de sa rémunération pour un choix de fonction d'utilité quadratique et sous une contrainte de protection de la richesse prenant la forme  $W_T \geq \underline{W}$  avec  $\underline{W} \geq 0$ .

## 2.2. Expression de la stratégie dynamique optimale.

Afin d'illustrer les propriétés de la stratégie optimale, nous nous plaçons à présent dans le cas particulier où la fonction d'utilité de l'asset manager est donnée par l'expression suivante<sup>43</sup> :

$$v(x, x^0) \equiv u(x - x^0)$$

avec  $u(z) \equiv \frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  et avec  $\gamma, \gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\}$ , le paramètre d'aversion au risque de l'asset manager et où on utilise, comme dans la sous-section précédente, les notations suivantes :

$$x \equiv F_T(W_T) \equiv b W_T + c (Y_T)^+ \text{ et } x^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times F_T(W^0) \equiv (1 - \alpha^0) \times b W^0$$

avec  $Y_T \equiv W_T - W^0$  et avec  $W^0$  la cible de richesse de l'investisseur où  $0 \leq \alpha^0 \leq 1$ .

Notons tout d'abord que la fonction d'utilité prend la forme équivalente suivante<sup>44</sup> :

$$v(x, x^0) \cong w(z') \equiv u(x - x^0 \equiv z' + a)$$

avec  $z' \equiv Z'_T \equiv Z_T/b \equiv (F_T(W_T) - F_T(W^0))/b \equiv Y_T + d(Y_T)^+$  et  $Y_T \equiv W_T - W^0$ ,

avec  $d \equiv c/b$  le taux de commission de sur-performance rapporté au taux de commission sur encours,

et avec  $-a \equiv -\alpha^0 W^0$ , un paramètre qui représente le niveau de sous-performance,

---

42. cette relation s'interprète de la façon suivante : le niveau de budget de risque,  $A \times \gamma$ , représentant la perte maximale relativement à la cible de richesse finale, ne peut excéder cette dernière valeur.

43. cette forme de fonction d'utilité HARA généralise l'expression de la fonction d'utilité CRRA par la prise en compte d'une contrainte implicite de protection supplémentaire de la rémunération à hauteur de  $x^0 > 0$ .

44. Cette expression est celle de la fonction d'utilité de l'asset manager HARA donnée par l'équation (2.1) dans le cas particulier où  $C_2 = 0$ ,  $C_1 \equiv \gamma^{1-\gamma}$  et  $a \equiv A \gamma$

par rapport à la valeur cible  $W^0$ , que l'investisseur ne souhaite pas dépasser<sup>45</sup>, avec  $0 \leq a \leq W^0$ .

On en déduit que l'expression de la fonction à maximiser dans le problème d'investissement (P15) est la suivante :

$w(Y_T + d(Y_T)^+)$  avec  $w(x) \equiv u(x + a)$ ,  $u$  la fonction d'utilité CRRA et les paramètres  $a$  et  $d$  définis comme ci-dessus.

Remarquons également que nous pouvons de façon alternative considérer les deux hypothèses suivantes :

- (1) L'expression de la rémunération de l'asset manager dérive de l'équation (1.1) de la section 1.1 sous les hypothèses restrictives de benchmark fixe et de montant de bonus nul :

$$F'_T(W_T) \equiv a^0 + b Y_T + c (Y_T)^+$$

avec  $Y_T \equiv W_T - W^0$  et où on a posé  $a^0 \equiv a \times b$ .

$$\text{Soit encore, } F'_T(W_T) \equiv a^* W_T + b^* Y_T + c (Y_T)^+$$

avec  $a^* \equiv a \times b / W^0 \equiv \alpha^0 b < b$  et  $b^* \equiv b - a^* \equiv b(1 - a/W^0)$ .

- (2) L'asset manager est CRRA, i.e. sa fonction d'utilité est donnée par l'expression suivante :

$$v(x, 0) \equiv u(x) \text{ avec } x \equiv F'_T(W_T).$$

Ainsi, on retrouve le résultat d'équivalence déjà énoncé dans la section 1 : l'existence d'un budget de risque de sous-performance ou d'une commission de gestion incitative symétrique sont deux notions équivalentes.

En particulier, l'asset manager CRRA sans incitation financière symétrique ( $a = W^0 \Leftrightarrow a^* = b \Leftrightarrow b^* = 0$ ) dont la rémunération est  $F'_T(W_T) \equiv b W_T + c (Y_T)^+$  s'identifie à l'asset manager HARA considéré plus haut dans le cas où le budget de risque est maximal (contrainte de non négativité de la richesse).

Nous nous plaçons à présent sous les hypothèses du modèle à deux actifs de [Black Scholes, 1973]<sup>46</sup>. L'univers d'investissement se compose donc des deux actifs suivants :

- Un actif dit sans risque ("A.S.R.") représentant l'actif monétaire et dont la valeur à la date  $t$  est notée  $S_t^0$ ; cet actif a un rendement instantané donné par

45. Le paramètre  $a$  s'interprète aussi comme un paramètre de budget de risque. En effet, comme nous le verrons avec la propriété qui suit, la taille du pari "actif" (i.e. le montant investi dans le portefeuille "à risque") dépend de sa valeur.

46. On rappelle que dans ce cadre, on fait l'hypothèse de l'existence d'une seule source de risque (i.e.  $N = 1$ , le nombre d'actifs étant  $N + 1 = 2$ ); de plus, on suppose que tous les paramètres servant à décrire la dynamique du prix des deux actifs financiers (un actif sans risque et un actif risqué) sont supposés constants.

l'expression suivante

$$dS_t^0/S_t^0 = rdt$$

où  $r$  désigne le taux monétaire constant.

– Un actif dit risqué ("A.R") représentant le portefeuille de marché ou tout autre actif action dont la dynamique de prix est décrite par un mouvement brownien géométrique; son rendement instantané s'écrit

$$dM_t/M_t = \mu dt + \sigma dZ_t \equiv (r + \pi)dt + \sigma dZ_t$$

où le paramètre  $\mu$  représente son rendement moyen instantané (égal au taux court plus une prime de risque "action" notée  $\pi \equiv \mu - r$ ) et  $\sigma$  sa volatilité constante.

Dans ce cadre, le ratio de Sharpe de l'actif risqué est défini par  $\lambda \equiv (\mu - r)/\sigma \equiv \pi/\sigma$ , et le poids du portefeuille à croissance optimal, noté  $H$ , est constant et donné par l'expression,  $h = \lambda/\sigma \equiv \pi/\sigma^2$ <sup>47</sup>.

Nous en déduisons les résultats de la propriété suivante :

#### PROPRIÉTÉ 25.

*Sous les deux hypothèses suivantes :*

- (1) *L'asset manager a une rémunération donnée par l'expression suivante :*

$$F'_T(W_T) \equiv b(a + Y_T + d(Y_T)^+), \text{ avec } Y_T \equiv W_T - W^0 \text{ et avec } W^0 \text{ la cible de richesse finale de l'investisseur,}$$

*avec*  $a \equiv a^0/b$ , *le montant de la commission fixe rapporté au taux de la commission sur encours*<sup>48</sup>,

*avec*  $d \equiv c/b$ , *le taux de la commission de sur-performance rapporté au taux de la commission sur encours.*

- (2) *L'asset manager cherche à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération finale et a une fonction d'utilité CRRRA dont l'expression est la suivante :*

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} \text{ avec } \gamma \text{ le paramètre d'aversion au risque de l'asset manager,}$$

*où*  $\gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\}$ ,

*Nous avons les résultats suivants :*

- (1) *Le problème d'investissement considéré par cet asset manager est un cas particulier du problème (P15) et l'expression de la richesse terminale solution du problème*

47. Sous les hypothèses du modèle de B&S, la dynamique de prix du portefeuille  $H$  suit un mouvement brownien géométrique dont l'expression est la suivante :  $dH_t/H_t = (r + \lambda^2) dt + \lambda dZ_t$ , ou de façon équivalente :  $H_t = \exp\{(r + \frac{1}{2}\lambda^2)t + \lambda Z_t\}$ .

48. De façon alternative,  $a$  s'interprète comme le montant de la sous-performance par rapport à la richesse cible,  $W^0$ , que l'investisseur ne souhaite pas franchir à la baisse, avec  $0 \leq a \leq W^0$ .

(P15) prend la forme suivante :

$$Y_T^* \equiv W_T^* - W^0 = \begin{cases} \frac{1}{1+d} \left\{ \left( \frac{1+d}{k} H_T \right)^{1/\gamma} - a \right\} & \text{si } H_T > H^* \\ (H_T/k)^{1/\gamma} - a & \text{si } H_T \leq H^* \end{cases}$$

avec  $H^*$ <sup>49</sup> définie par l'expression suivante :

$$H^* \equiv k \left[ \left\{ \frac{ad}{1+d} \right\} / \left\{ \frac{1 - (1/(1+d))^{1-1/\gamma}}{1 - 1/\gamma} \right\} \right]^\gamma$$

et avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 E\{1/H_T\}$

- (2) La valeur à la date  $t$  de la solution optimale du problème (P15), notée  $Y_t^*$ , est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} Y_t^* &= \frac{y_d}{1+d} C(H_t^*, (H^*)^{1/\gamma}, T-t) - y_0 P(H_t^*, (H^*)^{1/\gamma}, T-t) \\ &\quad + \frac{1}{1+d} \left\{ y_d (H^*)^{1/\gamma} - a \right\} ZC(T-t) \\ &\quad - \left\{ \left( \frac{y_d}{1+d} - y_0 \right) (H^*)^{1/\gamma} + \frac{da}{1+d} \right\} B(H_t^*, (H^*)^{1/\gamma}, T-t) \end{aligned}$$

avec  $H_t^*$  qui désigne la valeur intermédiaire du portefeuille, solution du problème de Merton, atteignant la richesse terminale,  $H_T^{1/\gamma}$ <sup>50</sup>, avec  $y_d \equiv ((1+d)/k)^{1/\gamma}$ ,  $y_0 \equiv (1/k)^{1/\gamma}$ ,

et où  $C(Z_t, X, T-t)$ , (resp.  $P(Z_t, X, T-t)$ , resp.  $B(Z_t, X, T-t)$ ) désigne la valeur de l'option d'achat européenne, (resp. de l'option de vente européenne, resp. de l'option digitale de vente) de strike  $X$ , d'échéance  $T-t$ , sur le sous-jacent  $Z_t$  et  $ZC(T-t)$  la valeur d'une obligation Zéro-Coupon d'échéance  $T-t$  dans le cadre du modèle de Black & Scholes.<sup>51</sup>

- (3) Dans le cadre du modèle de Black & Scholes, l'allocation de la stratégie dynamique optimale correspondant au problème (P15) est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{cases} w_t^* W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'A.R.} \\ (1 - w_t^*) W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'A.S.R} \end{cases}$$

49.  $H^*$  est la solution de  $f(k/H^*) = 0$  avec  $f(x) \equiv g(x) - g(x/(1+d))$  où  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x) - a]$  et  $x \rightarrow I(x) = x^{-1/\gamma}$  désigne la fonction inverse de la fonction  $x \rightarrow u'(x)$ .

50. Le portefeuille  $(h^*, H^*)$  correspond à une stratégie dynamique à investissant un poids constant de la richesse dans l'actif risqué. L'expression de ce poids est donné par l'expression suivante :  $h^* \equiv (1/\gamma)h$  avec  $h \equiv \pi/\sigma^2 \equiv \lambda/\sigma$  qui désigne le poids constant investi dans l'actif risqué du portefeuille numéraire,  $H$ .

De plus son processus de prix suit un mouvement brownien géométrique dont l'expression est la suivante :  $dH_t^*/H_t^* = (r + \lambda^2/\gamma)dt + (\lambda/\gamma)dZ_t$ , ou de façon équivalente,  $H_t^* = H_0^* \exp\{(r + (\gamma - 1/2)(\lambda/\gamma)^2)t + (\lambda/\gamma)Z_t\}$  avec  $H_0^* = e^{((1-\gamma)/\gamma)(r + \lambda^2/2\gamma)T}$ .

51. L'expression de  $C(Z_t, X, T-t)$  est donnée dans le cadre du modèle Black & Scholes par la formule suivante :  $C(Z_t, X, T-t) = Z_t N(d_1(X)) + X e^{-r(T-t)} N(d_2(X))$  avec

$$d_1(X) = \frac{\log\left(\frac{Z_t}{X}\right) + \left(r + \frac{(\sigma^*)^2}{2}\right)(T-t)}{(\sigma^*)\sqrt{T-t}} \quad d_2(X) = d_1(X) - \sigma^* \sqrt{T-t} \quad \sigma^* \sqrt{T-t} \equiv \sqrt{\text{Var}(\ln(Z_T/Z_t))}$$

De plus pour  $Z_t \equiv H_t^*$ , on en déduit de l'expression de  $H_t^*$  que  $\sigma^* = \lambda/\gamma$  avec  $\lambda \equiv \pi/\sigma$ .

Avec les mêmes notations, on a :  $P(Z_t, X, T-t) = X e^{-r(T-t)} N(-d_2(X)) + Z_t N(-d_1(X))$  et  $B(Z_t, X, T-t) = e^{-r(T-t)} N(-d_2(X))$  et  $ZC(T-t) = e^{-r(T-t)}$ . Les formules d'évaluation de ces options dans le cadre d'un modèle à  $N$  actifs risqués,  $N \geq 2$  sont données dans la dernière section du présent chapitre qui généralise les résultats exposés.

avec  $w_t^* W_t^* \equiv w^B B_t + \frac{dW_t^*}{dH_t^*} \left( \frac{h}{\gamma} \right) H_t^*$  qui est donnée par la formule suivante<sup>52</sup> :

$$w_t^* W_t^* = \frac{h}{\gamma} H_t^* \left( \frac{y_d}{1+d} N \left( d_1 \left( H_t^{*1/\gamma} \right) \right) + y_0 N \left( -d_1 \left( H_t^{*1/\gamma} \right) \right) \right) \\ + \left\{ \left( \frac{y_d}{1+d} - y_0 \right) H_t^{*1/\gamma} + \frac{d}{1+d} a \right\} \frac{h e^{-r(T-t)} \Phi \left( d_2 \left( H_t^{*1/\gamma} \right) \right)}{\lambda \sqrt{T-t}}$$

avec  $N(\cdot)$ , resp.  $\Phi(\cdot)$ , la fonction de répartition, resp. la fonction de densité de la loi normale et avec  $d_1(X) \equiv \ln \left( \frac{H_t^*}{X e^{-r(T-t)}} \right) / \sigma^* + \sigma^* / 2$  et

$$d_2(X) \equiv d_1(X) - \sigma^* \text{ où } (\sigma^*)^2 \equiv \text{Var} [\ln(H_T/H_t)/\gamma] = \left( \frac{\lambda}{\gamma} \right)^2 \times (T-t) \text{ et } \lambda \equiv \pi/\sigma.$$

On en déduit de l'expression de  $Y_T^*$ , donnée dans la propriété ci dessus, que le paramètre d'incitation financière,  $d \equiv c/b$  a pour effet d'augmenter la rémunération de l'asset manager,  $Z_T^* \equiv b Y_T^* + c \text{Max}(Y_T^*; 0)$ , dans l'état de sur-performance ( $H_T > H^*$ ) par rapport à l'état de sous-performance (dont l'expression correspond au cas sans incitation financière).

En effet, on peut écrire :

$$Z_T^* \equiv b \times \left\{ (1 + [(1+d)^{1/\gamma} - 1] \times 1_{H_T > H^*}) (H_T/k)^{1/\gamma} - a \right\}$$

Finalement, on notera que, sous les hypothèses du modèle de *Black & Scholes*, il existe une relation bi-univoque entre la valeur de chacun des trois portefeuilles suivants pris deux à deux : la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , celle du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , et enfin, celle de l'actif risqué,  $M_t$ <sup>53</sup>.

Ceci nous permettra, à tout instant  $t$ , d'exprimer la valeur de la richesse optimale en excès de celle du benchmark, notée  $Y_t^*$ , en fonction de  $M_t$ ; expression qui nous sera utile pour analyser les propriétés de cette stratégie optimale.

### 2.3. Analyse de sensibilité du "pay-off" optimal.

En nous fondant sur un exemple d'application numérique dans le cadre du modèle de *Black & Scholes*, nous analysons la sensibilité du profil de gain optimal aux variations des paramètres de rémunération et de risque considérés.

En particulier, nous souhaitons comparer la valeur terminale ("pay-off") de la stratégie avec prise en compte de frais de gestion variables (cas  $c > 0$ ) avec celle de la stratégie correspondant au cas où il n'y a pas d'incitation financière (cas  $c = 0$ );

Les valeurs numériques utilisées dans toute la suite de ce chapitre seront les suivantes :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\gamma = 75\%$ ,  $T = 5$ , et  $W^0 \equiv e^{rT} = 122\%$ ; ce qui

52. Dans notre cas où le benchmark est choisi comme étant l'actif monétaire on a  $w^B \equiv 0$

53. En particulier, dans le cadre du modèle de *BE/S*, on obtient les propriétés de transformation suivantes qui permettent d'exprimer la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , ou du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , en fonction de celle de l'actif risqué  $M_t$  et réciproquement : on a,  $H_t = \Psi(t)(M_t)^h$  avec  $\Psi(t) \equiv e^{(r-\lambda(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}-\frac{\lambda}{2}))t} = e^{(1-h)(r+\frac{\lambda^2}{2h})t} = e^{(1-h)(r+\frac{h\sigma^2}{2})t}$ ,

et  $H_t^* = \Gamma(t)(M_t)^{h^*}$  avec  $\Gamma(t) \equiv H_0^* e^{(1-h^*)(r+\frac{(\lambda/\gamma)^2}{2h^*})t} = H_0^* e^{(1-h^*)(r+\frac{h^*\sigma^2}{2})t}$ .



donne en particulier  $\lambda = 30\%$ ,  $h = 150\%$  et  $h^* = 200\%$ .

### 2.3.1. Sensibilité aux variations du taux des frais de gestion variables $c$ .

Sur la figure (Fig.1), nous avons représenté, pour différentes valeurs du taux de commission de sur-performance, noté  $c$ , la valeur finale du portefeuille géré en excès de celle du benchmark en fonction de la valeur finale de l'actif risqué sous-jacent, notée  $M_T$ .

La figure (Fig.2) montre, toujours pour les mêmes valeurs du taux de commission de sur-performance, noté  $c$ , la valeur finale de la rémunération de l'asset manager (en excès de la rémunération correspondant à une gestion passive) en fonction de la valeur de l'actif risqué sous-jacent, notée  $M_T$ .

Enfin, sur la figure (Fig.3) ci-dessous, on peut observer la courbe de l'excédent de richesse finale obtenue par l'investisseur par rapport à une gestion passive, toujours en fonction de la valeur de l'actif risqué sous-jacent, notée  $M_T$ , et pour différentes valeurs du taux de commission de sur-performance, noté  $c$ .

D'une part, ces figures illustrent la discontinuité du profil optimal de richesse finale du portefeuille (cf. Fig.1) et de l'asset manager (cf. Fig.2) en présence d'incitation financière : profil de gain qui ressemble au "pay-off" d'une option binaire. On remarquera que le saut de valeur diminue en même temps que le niveau du taux des frais de gestion variables,  $c$ , baisse. A la limite, pour  $c = 0$ , on obtient le cas de la stratégie optimale sans incitation financière dont le pay-off est continu.

D'autre part on peut distinguer sur la figure (Fig.1) trois zones où l'incitation financière a un effet différent sur le comportement de l'asset manager :

- pour les valeurs de  $M_T$  en dessous d'un seuil, que l'on notera  $M^*$ <sup>54</sup>, il se produit une sous-performance par rapport à la stratégie sans incitation financière (courbe rouge), qui est d'autant plus importante que le niveau du taux de commission variable,  $c$ , est élevé (profil de moins en moins convexe dans cette zone).
- pour les valeurs de  $M_T$  dans un intervalle de valeurs médianes-hautes du sous-jacent (au-dessus du seuil  $M^*$ ), nous observons une sur-performance par rapport à la stratégie sans incitation financière (courbe rouge), qui est d'autant plus importante que le niveau du taux de commission variable,  $c$ , est élevé. De plus on observe une discontinuité par rapport à la zone de sous-performance ; ceci traduit la prise en compte par l'asset manager d'un niveau de budget de perte plus faible dans la zone de sur-performance que dans la zone de sous-performance.
- pour les valeurs de  $M_T$  les plus élevées (scénarios de marché les plus favorables), on constate une sous-performance par rapport à la stratégie sans incitation financière (courbe rouge). Celle-ci traduit un profil convexe moins fort pour la stratégie avec incitation financière que pour la stratégie de référence sans incitation financière.

---

54. Sous les hypothèses du modèle de *Black & Scholes*, l'expression de  $M^*$  se déduit de celle de  $H^*$  par la fonction de correspondante bi-univoque énoncée ci-dessus qui lie la valeur de  $M_t$  à celle de  $H_t$ .

Finalement, on notera, comme illustré sur la figure (Fig.2), que la rémunération, perçue par l’asset manager avec incitation est, en cas de sur-performance, beaucoup plus importante que celle du gérant sans incitation financière (courbe rouge). De plus, cet excédent de rémunération, perçu en cas de sur-performance, compense largement le manque à gagner dans la zone de sous-performance.

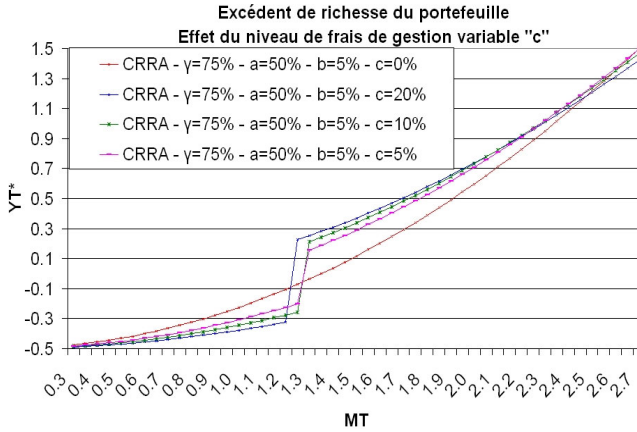


FIGURE 1. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau des frais de gestion variables  $c$

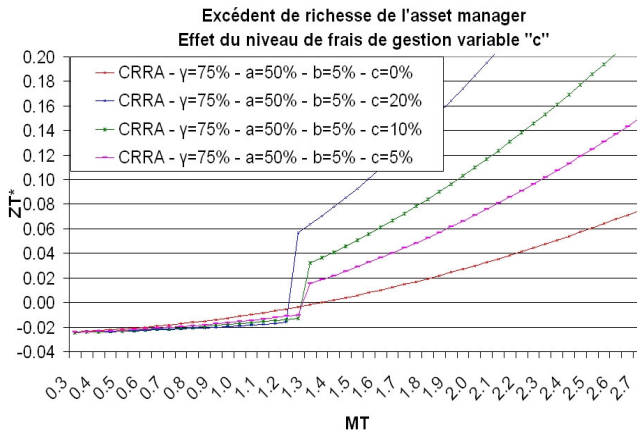


FIGURE 2. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables - excédent de richesse de l’asset manager - effet du niveau de taux des frais de gestion variables  $c$

A titre complémentaire, nous avons analysé la sensibilité de la valeur du "strike", noté  $M^*$ , aux variations du niveau de frais de gestion variables  $c$ . On rappelle que  $M^*$  est défini comme le seuil limite des valeurs du sous-jacent qui sépare l'état de sous-performance par rapport au benchmark de l'état de sur-performance.

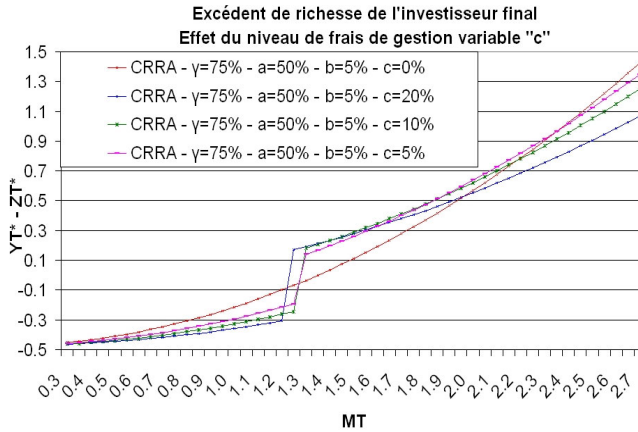


FIGURE 3. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables - excédent de richesse de l'investisseur final - effet du niveau de taux des frais de gestion variables  $c$

Nous avons représenté sur la figure (Fig.4) ci-dessous la courbe de la valeur de  $M^*$  en fonction de celle du taux de commission variable,  $c$ , pour différentes valeurs du paramètre d'aversion au risque  $\gamma$ . On observe sur cette figure que, pour un niveau suffisamment élevé du paramètre d'aversion au risque ( $\gamma > 50\%$  dans notre cas), la valeur du strike  $M^*$  est une fonction décroissante du taux de la commission variable, noté  $c$ .

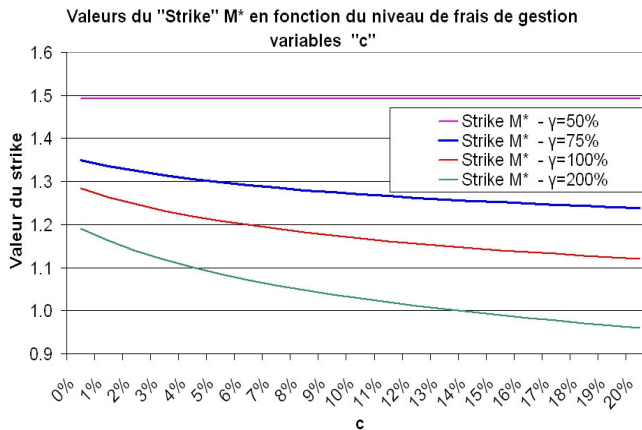


FIGURE 4. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables - valeurs du "Strike"  $M^*$  en fonction du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$  pour différents niveaux du paramètre d'aversion au risque  $\gamma$

Autrement dit, quand le paramètre,  $c$ , augmente, l'intervalle de valeurs les plus élevées de  $M_T$ , où se produit une sur-performance par rapport au benchmark s'étend vers des valeurs plus basses de l'actif risqué, au détriment de la zone de

sous-performance.

Ceci est financièrement positif pour l'asset manager puisque le manque à gagner en cas de sous-performance est beaucoup plus faible que le gain en cas de sur-performance (cf.(Fig.2)). En revanche, ce n'est pas le cas pour le portefeuille de l'investisseur (cf. (Fig.3)).

### 2.3.2. Sensibilité aux variations des autres paramètres : $b$ , $\gamma$ et $a$ .

Sur les figures (Fig.5), (Fig.6) et (Fig.7) ci-dessous, nous avons représenté, pour différentes valeurs des paramètres du modèle,  $b$ ,  $\gamma$  et  $a$ , la valeur finale du portefeuille optimal en fonction de celle de l'actif risqué.

Ces trois figures illustrent l'effet du changement de valeur de chacun de ces trois paramètres sur le profil de gain optimal pour l'asset manager recevant une incitation financière. Le niveau de risque est une fonction croissante de la valeur de chacun de ces paramètres (i.e.  $1/b$ ,  $1/\gamma$  et  $a$ ).

#### (1) Effet du changement de valeur du taux de la commission sur encours $b$ :

Le niveau de risque de la stratégie optimale augmente quand la valeur du taux des frais de gestion sur encours,  $b$ , diminue. En effet, le montant de la perte en cas de scénarios de marché défavorables, le gain pour les valeurs élevées du sous-jacent, et la hauteur du saut de richesse au niveau du seuil  $H^*$ , augmentent quand la valeur du paramètre  $b$  diminue.

#### (2) Effet du changement de valeur du paramètre d'aversion au risque $\gamma$ :

Quand la valeur du paramètre d'aversion au risque,  $\gamma$ , diminue, la zone de sous-performance s'étend à des valeurs élevées du sous-jacent, l'amplitude de la sous-performance augmente, et enfin l'effet de convexité dans la zone de sur-performance est plus marqué.

#### (3) Effet du changement de valeur du niveau de budget de risque $a$ :

Quand la valeur du budget de risque,  $a$ , augmente, l'amplitude de la sous-performance, resp. de la sur-performance, augmente dans la zone de valeurs basses, resp. de valeurs élevées du sous-jacent. Notons également que le niveau du strike  $M^*$  est indépendant du choix de la valeur du paramètre  $a$ .

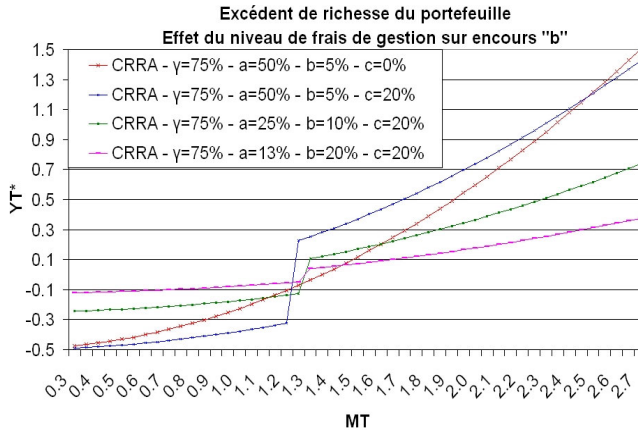


FIGURE 5. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de frais de gestion sur encours  $b$ .

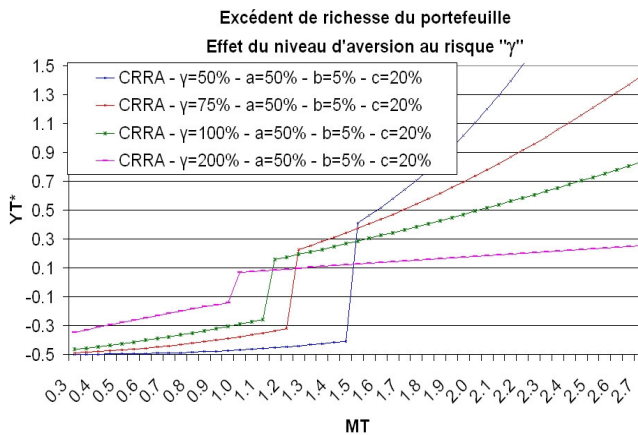


FIGURE 6. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion au risque  $\gamma$ .

#### 2.4. Analyse de la stratégie dynamique optimale.

Nous analysons à présent la sensibilité de l'allocation dynamique optimale aux variations des paramètres de rémunération et de risque du modèle considéré. Nous souhaitons en particulier comparer l'allocation dynamique mise en place par l'asset manager recevant des frais de gestion variables ( $c > 0$ ) avec celle du gérant ne recevant que des frais de gestion fixes sur encours (cas sans incitation financière correspondant à  $c = 0$ ). Nous étudierons également l'effet de l'horizon d'investissement sur la valeur finale du portefeuille optimal.

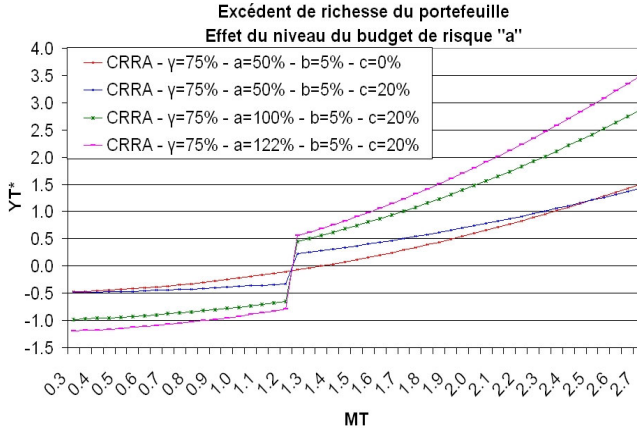


FIGURE 7. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de budget de risque  $a$ .

Nous avons illustré sur les huit figures ci dessous l'effet du changement des paramètres considérés (taux de commission, budget de risque et niveau d'aversion au risque) sur la stratégie dynamique optimale.

Sont représentés, pour plusieurs valeurs de chacun des paramètres considérés, la richesse intermédiaire du portefeuille optimal (notée  $Y_t^*$ ) et l'exposition à l'actif risqué correspondante (notée  $P_t^*$ ), en fonction de la valeur de l'actif risqué.

- (1) Effet du changement de valeur du taux des frais de gestion variables  $c$  :

La figure (Fig.8) illustre l'effet de la hausse du taux des frais de gestion variables,  $c$ , sur la performance intermédiaire de la stratégie optimale :

- dans la zone de valeurs médianes du sous-jacent, cela se traduit par une sur-performance par rapport au cas sans incitation financière (courbe rouge), d'autant plus importante que la valeur de  $c$  est élevée,
- dans les zones de valeurs basses et élevées du sous-jacent, la stratégie avec incitation ( $c > 0$ ) sous-performe la stratégie sans incitation financière (courbe rouge, avec  $c = 0$ ).

En parallèle, on observe une sur-exposition à l'actif risqué, par rapport au cas sans incitation financière, dans une zone de valeurs médianes de l'actif risqué (cf. (Fig.9)).

A l'opposé, il y a sous-exposition relativement à la stratégie sans incitation financière dans les zones de valeurs basses et hautes de l'actif risqué.

Enfin, l'amplitude de ces écarts d'exposition par rapport à la stratégie de référence (cas sans incitation financière) croît avec la valeur des frais de gestion variables,  $c$ .

- (2) Effet du changement de valeur du taux des frais de gestion sur encours,  $b$ , et du paramètre de budget de risque  $a$  :

La baisse de valeur du taux des frais de gestion sur encours,  $b$ , augmente le montant de perte dans l'état de sous-performance et accentue la concavité de la courbe de richesse dans l'état des richesses médianes (cf. (Fig.10)).

D'autre part, le pic d'exposition à l'actif risqué, qui se produit dans une zone de valeurs médianes, augmente en amplitude (en absolu mais aussi par rapport aux cas sans incitation financière<sup>55</sup>), quand le niveau du taux des frais de gestion sur encours,  $b$ , diminue (cf. (Fig.11)).

L'effet d'une hausse du paramètre de budget de risque,  $a$  (voir les figures (Fig.12) et (Fig.13)<sup>56</sup>), est similaire à celui d'une baisse du taux fixe de la commission sur encours,  $b$ .

Dans le cas particulier où  $a = W^0$ , on retrouve la structure de frais analysée par [Hodder Jackwerth, 2006]<sup>57</sup>. Celle-ci correspond, avec notre modèle de frais au choix particulier d'une fonction d'utilité CRRA pour l'asset manager (i.e. contrainte implicite de non-négativité de la rémunération).

Comme le montre la figure (Fig.13), l'allocation dynamique optimale s'identifie, dans une zone de valeurs basses du sous-jacent, à celle du portefeuille de Merton, à poids constant ( $h^* = 200\%$  dans notre exemple d'application numérique).

- (3) Effet du changement de valeur du paramètre d'aversion au risque  $\gamma$  :

La figure (Fig.14) montre que, plus la valeur du paramètre d'aversion au risque,  $\gamma$ , diminue, plus la zone de sous-performance s'étend vers des valeurs élevées du sous-jacent, et plus le niveau de sous-performance augmente.

D'autre part, quand l'aversion au risque de l'asset manager augmente, l'effet de concavité dans la zone des valeurs médianes de l'actif risqué augmente tandis que l'effet de convexité dans la zone des valeurs élevées diminue.

La figure (Fig.15) fait apparaître une zone médiane où se produit un pic de sur-exposition à l'actif risqué. On remarque que la valeur de l'actif risqué où se produit ce pic d'exposition décroît avec la valeur du paramètre  $\gamma$ . De plus, l'amplitude de ce pic est également une fonction décroissante de la valeur du paramètre  $\gamma$ .

55. Par souci de lisibilité du graphique, seul le cas de l'asset manager sans incitation financière avec  $c = 0\%$  et  $b = 5\%$  (courbe rouge) est représenté.

56. Ou, ce qui revient au même, de la commission fixe  $a \times b$  (avec  $b$  fixé).

57. [Hodder Jackwerth, 2006] résolvent numériquement le même problème que celui considéré dans cette section en supposant de plus que l'asset manager est CRRA.

Ainsi, dans un intervalle de valeurs basses à médianes de l'actif risqué, l'allocation dynamique optimale n'est pas conforme à la règle de "bon sens" ("Popular Advice") qui dicte une allocation en actif risqué croissante en fonction du niveau de tolérance au risque.

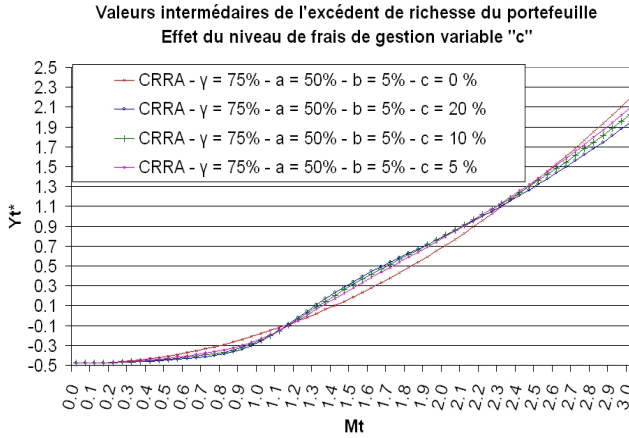


FIGURE 8. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables sans bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de taux des frais de gestion variables  $c$  avec  $t = 4$ .

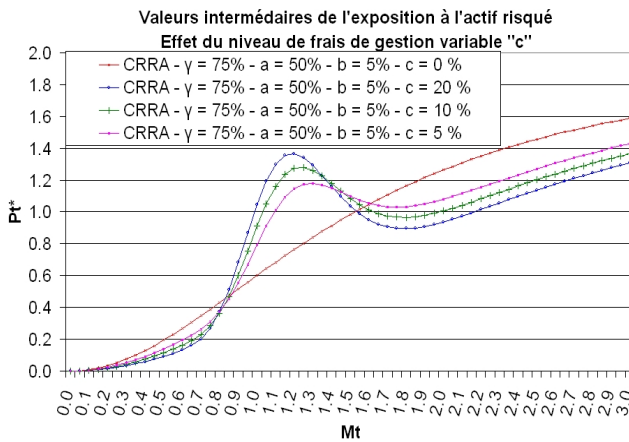


FIGURE 9. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables sans bonus - exposition à l'actif risqué - effet du niveau de taux des frais de gestion variables  $c$  avec  $t = 4$ .



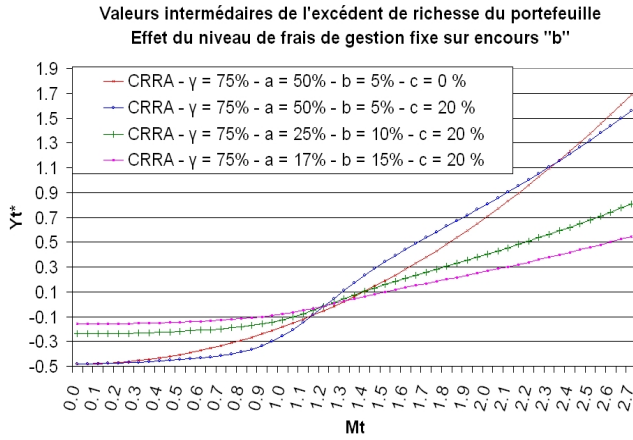


FIGURE 10. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables sans bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de frais de gestion fixe sur encours  $b$  avec  $t = 4$ .

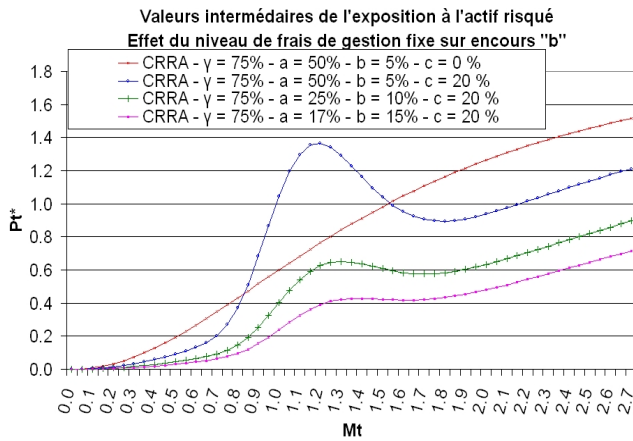


FIGURE 11. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables sans bonus - exposition à l'actif risqué - effet du niveau de frais de gestion fixe sur encours  $b$  avec  $t = 4$ .

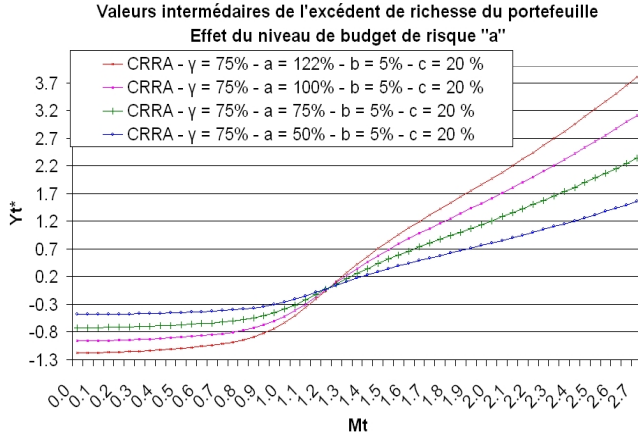


FIGURE 12. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables sans bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du budget de risque  $a$  avec  $t = 4$  .

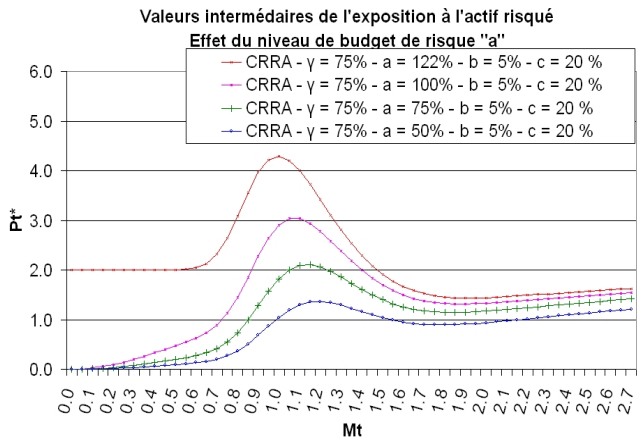


FIGURE 13. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables sans bonus - exposition à l'actif risqué - effet du budget de risque  $a$  avec  $t = 4$  .

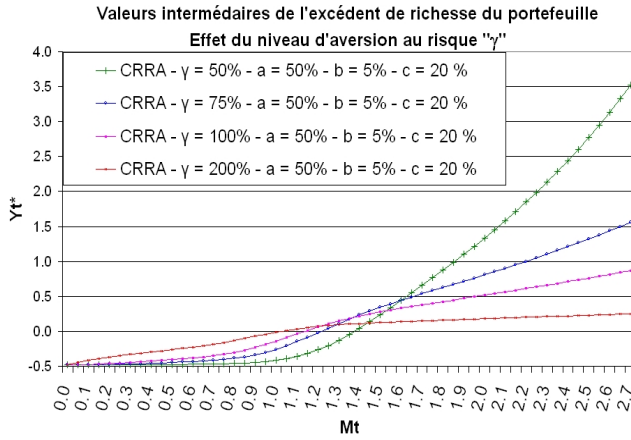


FIGURE 14. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables sans bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion au risque  $\gamma$  avec  $t = 4$ .

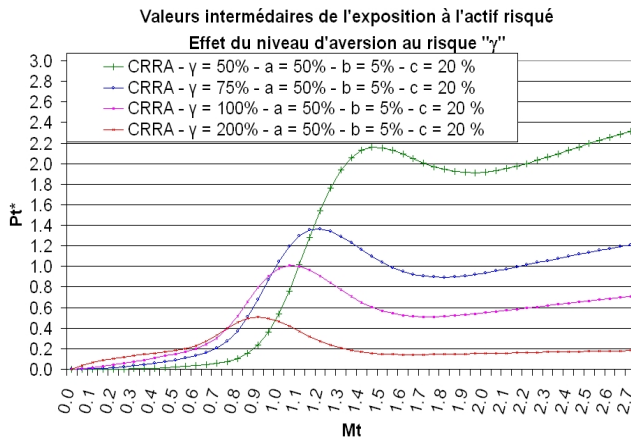


FIGURE 15. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables sans bonus - exposition à l'actif risqué - effet du niveau d'aversion au risque  $\gamma$  avec  $t = 4$ .

L'effet de l'horizon d'investissement,  $T - t$ , sur le profil de gain de l'asset manager recevant une incitation financière est représenté sur la figure (Fig.16) (excédent de richesse) et la figure (Fig.17) (exposition à l'actif risqué).

Comme le montre la figure (Fig.16), l'allocation temporelle est contraire à la règle de "bon sens" ("Conventional Wisdom") d'une allocation en actif risqué croissante en fonction du temps restant à courir. Ceci étant dû au profil optionnel binaire de la stratégie optimale qui traduit la discontinuité de l'expression entre les deux états de sur et de sous-performance par rapport au benchmark.

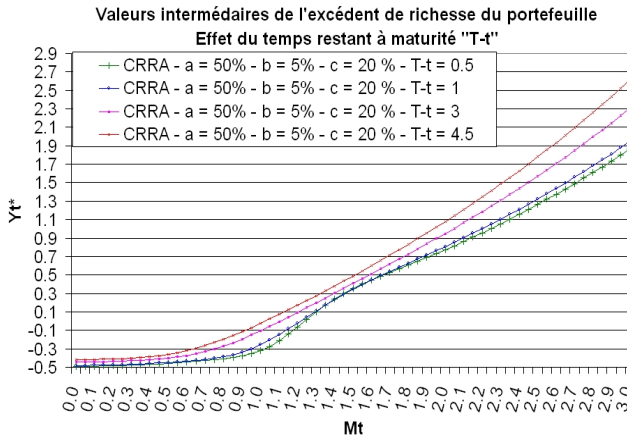


FIGURE 16. Stratégies CRRa avec frais de gestion variables sans bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du temps restant à maturité  $T - t$ .

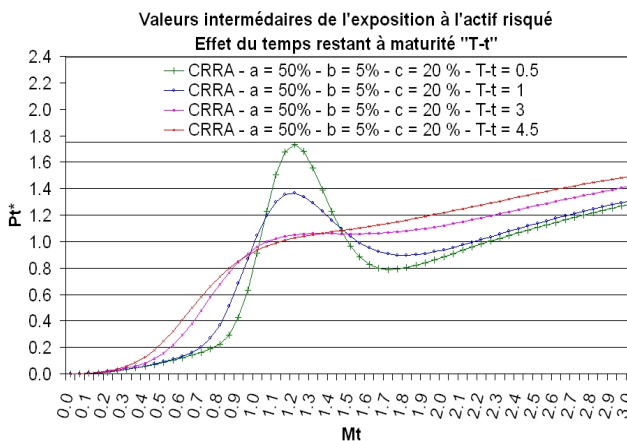


FIGURE 17. Stratégies CRRa avec frais de gestion variables sans bonus - exposition à l'actif risqué - effet du temps restant à maturité  $T - t$ .

## 2.5. Conclusion de la section.

Dans cette seconde section, nous avons résolu le problème d'investissement de l'asset manager HARA, cherchant à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération finale, nous plaçant sous les hypothèses suivantes :

- Hypothèse de "benchmark fixe" : l'asset manager doit prendre en compte une contrainte implicite de sous-performance ou de sur-performance par rapport à une cible fixe de richesse finale ; sa valeur est intégrée à l'expression de la fonction d'utilité HARA considérée.

- Forme de rémunération avec incitation financière, la plus courante en pratique : celle-ci comprend, d'une part, des frais de gestion sur encours et, d'autre part, des frais de gestion variables, récompensant l'asset manager en cas sur-performance par rapport au niveau cible de richesse finale.

### 2.5.1. Analyse de l'expression de la richesse terminale optimale.

Le "pay-off" optimal pour l'asset manager<sup>58</sup> présente les caractéristiques suivantes :

(1) le profil de gain optimal est discontinu et asymétrique

Le "pay-off" de la stratégie optimale ressemble à celui d'une option binaire. L'expression de la richesse finale, qui est fonction de la valeur du portefeuille à croissance optimale ou logarithmique, exhibe un saut de richesse au niveau d'un point "central" de valeur de ce portefeuille sous-jacent.

La stratégie optimale enregistre, pour les valeurs du portefeuille sous-jacent situées en dessous (resp. au-dessus) de ce niveau central, une sous-performance (resp. une sur-performance) par rapport à la cible de richesse finale.

L'expression de la richesse finale optimale est asymétrique autour du point central. La différence d'expression entre la zone de sur-performance et la zone de sous-performance est d'autant plus prononcée que le niveau d'incitation financière, mesuré par le ratio entre le taux des frais de gestion variables et le taux de frais de gestion sur encours, est élevé.

(2) il existe un conflit d'intérêt entre le gérant et l'investisseur

L'analyse de l'expression de la rémunération finale optimale pour l'asset manager montre que l'existence d'une incitation financière l'amène à favoriser sa propre rémunération au détriment de la celle de l'investisseur.

En effet, la comparaison avec le cas sans incitation financière montre que

---

58. dont l'expression est fournie dans le théorème 4

l'asset manager recevant des frais de gestion variables cherche à augmenter son gain en cas de sur-performance (zone où il reçoit une rémunération supplémentaire du fait de sa sur-performance).

L'intensité de ce "conflit d'intérêt" augmente avec le niveau d'incitation financière offerte (i.e. avec le ratio entre le taux des frais de gestion variables et celui des frais de gestion sur encours).

### 2.5.2. *Analyse de la stratégie dynamique optimale.*

Dans un second temps, nous nous sommes placés sous les hypothèses restrictives du modèle de *B&S* et avons considéré le cas particulier de l'asset manager HARA ayant une fonction d'utilité puissance avec contrainte implicite de protection (profil convexe)<sup>59</sup>.

L'analyse du profil de gain optimal et de la stratégie dynamique de réplication a fait ressortir les principaux résultats suivants :

(1) Profil de gain optimal asymétrique favorable à l'asset manager :

Pour l'asset manager recevant des frais de gestion variables, la sous-performance finale subie par rapport au cas sans incitation financière, en cas de scénarios de marché défavorables, est beaucoup plus faible que la sur-performance perçue en cas de scénarios favorables.

Ce n'est pas le cas du profil optimal de richesse du portefeuille géré qui peut subir une sous-performance par rapport au portefeuille de l'asset manager sans incitation financière (dans les états des richesses basses et élevées) qui est de même amplitude que la sous-performance observée dans l'état des richesses médianes.

(2) Courbe d'exposition à l'actif risqué en forme de "cloche" asymétrique :

Quelque soit la valeur considérée des paramètres de rémunération et de risque, le profil d'exposition à l'actif risqué prend la forme d'une "cloche" asymétrique avec un niveau maximal atteint dans un intervalle de valeurs médianes du sous-jacent (intervalle où se produit le saut de richesse).

(3) Sur-exposition à l'actif risqué par rapport à la stratégie sans incitation également en forme de "cloche" asymétrique :

La valeur centrale de l'actif risqué où se produit le pic d'exposition à l'actif risqué est également celle où a lieu le pic de sur-exposition par rapport au cas sans incitation financière.

---

59. On peut considérer de façon équivalente, que l'asset manager est CRRA (seuil de richesse minimale égal à zéro) et que sa rémunération comprend également une commission incitative symétrique ; il s'agit de la forme générale donnée par l'équation 1.1 de la section 1.2 sous l'hypothèse supplémentaire d'un benchmark fixe.

Il y a sur-exposition à l'actif risqué par rapport à la stratégie sans incitation financière dans une zone de valeurs médianes de l'actif risqué (correspondant à la zone où se produit le saut de richesse).

A l'opposé, on observe une sous-exposition par rapport à la la stratégie sans incitation financière pour les niveaux les plus élevés de l'actif risqué<sup>60</sup>.

Enfin, dans un intervalle de valeurs basses du sous-jacent, l'exposition à l'actif risqué est inférieure ou égale à celle observée dans le cas sans incitation financière<sup>61</sup>.

- (4) Niveau de risque global de la stratégie dynamique fonction croissante du degré d'incitation financière :

Toute chose restant égal par ailleurs, le montant de la perte subie en cas de scénario défavorable et le niveau global d'exposition à l'actif risqué augmente avec la valeur du paramètre d'incitation financière (i.e. mesuré par le ratio du taux des frais de gestion variables sur celui des frais de gestion sur encours).

De plus, le risque lié au "conflit d'intérêt" progresse avec le degré d'incitation financière. En particulier, la sur-exposition à l'actif risqué par rapport à la stratégie de référence, de l'asset manager ne recevant pas d'incitation financière, est une fonction croissante de la valeur du paramètre d'incitation financière.

- (5) "Sur-réaction" de l'asset manager fonction croissante du niveau de risque et fonction décroissante de l'horizon d'investissement :

Toute chose restant égal par ailleurs, la "sur-réaction" de l'asset manager, par rapport à la stratégie sans incitation, dans l'état des richesses médianes, augmente quand le niveau de risque considéré augmente et quand l'horizon d'investissement diminue.

En particulier, l'amplitude du pic d'exposition / sur-exposition à l'actif risqué qui se produit dans la zone de valeurs médianes de l'actif risqué,

- est une fonction croissante du niveau de risque considéré : elle sera d'autant plus élevée que le seuil de richesse minimale est bas, et/ou que le coefficient d'aversion au risque est bas,

---

60. correspondant aux niveaux les plus élevés de richesse finale.

61. Dans cette zone correspondant aux niveaux de richesse finale les plus faibles, l'exposition à l'actif risqué :

- est inférieure à celle de la stratégie sans incitation dans le cas où l'asset manager HARA doit prendre en compte une contrainte d'assurance de portefeuille strictement positive,
- est identique à celle de la stratégie sans incitation dans le cas où l'asset manager est CRRA (i.e. contrainte implicite de non négativité de la richesse finale).

- est une fonction décroissante du temps restant jusqu'à maturité : plus l'horizon d'investissement est proche, plus elle sera élevée.



### 3. Asset manager CRRA bénéficiant d'un bonus contractuel

L'objectif de cette section est d'étendre les résultats de la seconde section en considérant une forme de rémunération plus générale. Nous nous plaçons à nouveau sous les hypothèses qui sont décrites dans la première section et supposons que le benchmark de l'investisseur est fixe (i.e. cible de richesse finale fixe).

Dans la section précédente, nous avons étudié les propriétés de la stratégie dynamique optimale pour l'asset manager CRRA (profil de richesse convexe), maximisant l'utilité espérée de sa rémunération, et qui reçoit, en guise d'incitation financière, des frais de gestion de sur-performance.

Nous allons à présent compléter cette analyse en considérant le problème d'investissement de l'asset manager CRRA bénéficiant, en plus de frais de gestion de sur-performance, d'un montant de bonus versé en cas de sur-performance (incitation asymétrique binaire).

Après avoir explicité l'expression de la richesse terminale optimale, nous étudions, sous les hypothèses restrictives du modèle de *B&S*, l'effet du changement de valeur du montant de bonus de sur-performance et des autres paramètres du modèle considéré sur la stratégie dynamique suivie par l'asset manager.

#### 3.1. Expression du problème d'investissement considéré.

Nous nous plaçons toujours sous les hypothèses générales qui sont celles décrites dans la section 1 du présent chapitre :

Dans le cadre d'une délégation de gestion, nous supposons que,

- l'asset manager reçoit une rémunération à un horizon d'investissement fixé en accord avec l'investisseur, noté  $T$ , donnée par l'équation (1.1) de la section 1.1 :

$$F_T(W_T) \equiv a^* W_T + b^* Y_T + \eta^* W_T \times 1_{Y_T \geq 0} + c^* \max(Y_T, 0)$$

avec les mêmes notations et hypothèses que dans la section 1.1

- l'asset manager cherche à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération ; ses préférences d'investissement sont décrites par une fonction d'utilité HARA dont l'expression générale est celle donnée par l'équation (1.2) de la section 1.2 :

$$v(x, x_T^0) \equiv \frac{C_1}{1-\gamma} \left\{ \frac{x-x_T^0}{\gamma} \right\}^{1-\gamma} + C_2$$

avec  $x \equiv F_T(W_T)$  et  $x_T^0 \equiv (1-\theta) \times F_T(W^0)$  la valeur du plancher de rémunération, les autres paramètres étant définis comme dans la section 1.

De plus, nous faisons les deux hypothèses supplémentaires suivantes :

D'une part, nous nous restreignons au cas particulier où le benchmark s'identifie à un objectif de performance fixe<sup>62</sup> :

$B_T \equiv W^0 \leq 1/E\{1/H_T\} \equiv 1/ZC(T)$  où  $ZC(T)$  désigne la valeur de l'obligation Zéro-Coupon d'échéance  $T$ <sup>63</sup>.

Sous cette hypothèse, nous pouvons reformuler l'expression de la rémunération de l'asset manager donnée par l'équation (1.1) de la section 1.1 de la façon suivante :

$$F_T(W_T) \equiv a^0 + bY_T + (\eta^0 + cY_T) \times 1_{Y_T \geq 0} \quad (3.1)$$

avec  $Y_T \equiv W_T - W^0$  qui désigne l'écart entre la valeur finale du portefeuille géré et la richesse finale cible de l'investisseur et avec les notations suivantes :

$b \equiv a^* + b^*$ : le taux des frais de gestion symétriques, avec  $0 < b < 1$ ,

$a^0 \equiv a^* \times W^0$ : le montant d'une commission de gestion fixe, avec  $0 \leq a^* \leq b$ ,

$c \equiv c^* + \eta^*$ : le taux des frais de sur-performance, avec  $0 \leq c < 1 - b$ ,

$\eta^0 \equiv \eta^* \times W^0$ : le montant d'un bonus contractuel qui est versé à l'asset manager en cas de sur-performance, avec  $0 \leq \eta^* < 1 - a^*$ .

D'autre part, nous considérons le cas particulier où la fonction d'utilité de l'asset manager admet la forme suivante :  $v(x, x^0) \equiv u(x - x^0)$

avec  $u(z) \equiv \frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ , où  $\gamma$  désigne le niveau d'aversion au risque de l'asset manager, avec  $\gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\}$ ,

et avec les mêmes notations que celles introduites dans la section 1 du présent chapitre :

$x \equiv F_T(W_T)$  désigne l'expression de la rémunération de l'asset manager,

$x^0 \equiv (1 - \theta) \times F_T(W^0) \equiv (1 - \alpha^0) \times bW^0$ <sup>64</sup> est l'expression du seuil de rémunération minimum avec  $W^0$ , la cible de richesse finale de l'investisseur, où on a posé  $\alpha^0 \equiv 1 - \alpha(1 - \theta)$  avec  $0 \leq \alpha^0 \leq 1$ .

Finalement on suppose, sans perte de généralité, que  $\alpha^0 = 1$  ou de façon équivalente que  $x^0 = 0$  (contrainte de non négativité de la rémunération), ce qui signifie que l'asset manager est CRRA et sa fonction d'utilité donnée par :  $v(x, 0) \equiv u(x)$

62. Le cas d'un benchmark stochastique sera traité dans la dernière section de ce chapitre.

63. Hypothèse faite sans perte de généralité qui permet de conserver une simplicité d'écriture dans l'énoncé de notre problème.

Cette hypothèse revient à ne considérer que les niveaux de richesse finale atteignables par une stratégie admissible de montant d'investissement initial inférieur ou égal à un (i.e. stratégie d'assurance de portefeuille avec cible de protection du capital).

Dans le cas contraire (stratégie avec cible de sur-performance par rapport à l'obligation Zéro-Coupon, actif sans risque à l'horizon d'investissement), on peut toujours, par un simple changement de variables, se ramener au cas où la richesse cible est exactement égale à la performance de l'actif Zéro-Coupon.

64. expression obtenue en remarquant que  $F_T(W^0) = a^0 \equiv a^* \times W^0 \equiv \alpha b W^0$  et en posant  $(1 - \alpha^0) \equiv \alpha(1 - \theta)$ .

On vérifie facilement que sous nos hypothèses, on a  $0 \leq F(W_T) < W_T$  et  $W_T > W^0 - a^0/b > 0$ ; autrement dit, le choix de paramètres respectant les contraintes considérées garantit que :

– le montant de la rémunération du gérant et la valeur du portefeuille géré ne peuvent être négatives; plus précisément la valeur finale du portefeuille ne peut être inférieure au seuil de richesse minimale implicite tolérée par l'investisseur, i.e.  $W_T \geq W^0 - a^0/b > 0$ ,

– le montant final de la rémunération du gérant ne peut excéder la valeur finale du portefeuille.

Remarquons aussi que, dans le cas particulier où  $a^0 - bW^0 = \eta^0 = c = 0$ , l'expression de l'équation (3.1) se réduit à  $F_T(W_T) = bW_T$ ; autrement dit, la rémunération de l'asset manager qui ne reçoit aucune incitation financière à la sur-performance est proportionnelle à la valeur du portefeuille géré et son problème d'optimisation s'identifie au problème d'investissement de Merton.

Compte tenu de l'expression de la rémunération considérée ci-dessus, on en déduit par un simple changement de variable (en posant  $z \equiv x - a^0$ ), que la fonction d'utilité de l'asset manager peut aussi se ré-écrire sous une forme HARA avec seuil de rémunération minimum de niveau  $-a^0$ <sup>65</sup> :

$$w(z) \equiv u(z + a)$$

avec  $z \equiv Z_T \equiv F_T(W_T) - F_T(W^0) \equiv bY_T + (\eta + cY_T) \times 1_{Y_T \geq 0}$  où  $Z_T$  représente l'excédent de rémunération par rapport au niveau central de rémunération et  $Y_T \equiv W_T - W^0$  l'écart de richesse finale entre le portefeuille et le benchmark.

Enfin, il paraît utile de préciser que les hypothèses de rémunération et de préférences d'investissement que nous faisons dans cette section peuvent se reformuler des deux autres manières suivantes :

- (1) Première formulation équivalente : forme de fonction d'utilité HARA identique à celle considérée dans la seconde section

On suppose que l'asset manager ne reçoit pas de commission d'incitation financière symétrique; sa rémunération prend la forme suivante :

$$F'_T(W_T) \equiv bW_T + (\eta^0 + cY_T) \times 1_{Y_T \geq 0}.$$

De plus, on considère que l'asset manager doit prendre en compte dans ses préférences une contrainte implicite de protection : sa fonction d'utilité, de type HARA, est donnée par l'expression suivante<sup>66</sup> :  $v'(x, x^0) \equiv u(x - x^0)$  avec  $x \equiv F'_T(W_T)$  et  $x^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times F'_T(W^0) \equiv bW^0 - a^0 \geq 0$  qui

65. Il s'agit de l'expression de la fonction d'utilité HARA donnée par l'équation (2.1) dans le cas particulier où  $C_2 = 0$ ,  $C_1 \equiv \gamma^{1-\gamma}$  et  $a \equiv A \times \gamma$ ; celle-ci correspond à un profil de gain convexe ( $\gamma > 0$  et  $C_1 > 0$ ) avec contrainte implicite de perte maximum égale à  $-a^0$ .

66. qui est celle de l'exemple de fonction d'utilité HARA considérée dans la seconde section pour l'analyse des propriétés de la stratégie dynamique optimale.

représente le seuil de rémunération minimale<sup>67</sup>.

Il est facile de voir que cet asset manager résout le même problème d'investissement que l'asset manager CRRA recevant une commission d'incitation financière symétrique (i.e dont la rémunération est donnée par  $x \equiv F(W_T)$  et la fonction d'utilité s'écrit  $u(x)$ ) que nous avons considéré ci-dessus<sup>68</sup>.

Ce résultat s'interprète de la façon suivante : il est équivalent de prendre en compte une composante d'incitation symétrique dans l'expression de la rémunération du gérant ou de considérer l'existence d'une contrainte implicite de protection intégrée à l'expression de sa fonction d'utilité.

- (2) Seconde formulation équivalente : hypothèse de rémunération identique à celle de la seconde section :

Une autre alternative, est de considérer que la rémunération de l'asset manager est donnée par l'expression suivante :

$$F'_T(W_T) \equiv bW_T + cY_T \times 1_{Y_T \geq 0} \quad 69,$$

avec  $Y_T \equiv W_T - W^0$  l'écart entre la valeur du portefeuille géré et le seuil de richesse cible.

De plus, on considère que l'asset manager prend en compte dans ses préférences une contrainte implicite de protection ainsi qu'un paramètre de budget de risque asymétrique par rapport à la valeur du seuil de richesse cible, notée  $W^0$ .

Le niveau du budget de risque utilisé par l'asset manager est supposé être plus élevé pour les valeurs finales de richesse supérieures à celle de la cible de l'investisseur, que pour les valeurs de richesse inférieures.

Ainsi, nous supposons que sa fonction d'utilité, notée  $w'(z)$ , est une fonction d'utilité "HARA par morceaux" donnée par l'expression suivante :

$$w'(z) = u \left\{ z + a^0 \times 1_{z < 0} + (a^0 + \eta^0) \times 1_{z \geq 0} \right\}$$

avec  $u(x) \equiv \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  la fonction d'utilité isoélastique, où on suppose que  $\gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\}$ ,

avec  $z \equiv F'_T(W_T) - F'_T(W^0) \equiv bY_T + cY_T \times 1_{Y_T \geq 0}$  l'excédent de rémunération du gérant par rapport au niveau central de rémunération,

67. Il s'agit d'une contrainte implicite de "benchmarking", i.e. hypothèse d'aversion à la sous-performance par rapport à un benchmark fixe. Pour plus de détail sur cette interprétation voir la section 1.

68. En effet, on a  $u(F_T(W_T)) = u \left\{ F'_T(W_T) - (bW^0 - a^0) \right\}$  et par conséquent, on en déduit que  $u(F_T(W_T)) = v' \left( x \equiv F'_T(W_T), x^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times F'_T(W^0) \equiv bW^0 - a^0 \right)$ .

69. Il s'agit de la forme de rémunération considérée dans la seconde section : elle correspond au cas où le gérant ne reçoit ni commission incitative symétrique ni bonus de sur-performance. Son expression est fournie par l'équation 3.1 dans le cas particulier où  $a^0 = bW^0$  et  $\eta^0 \equiv 0$ .

et avec  $a^0$  (respectivement  $a^0 + \eta^0$ ) qui désigne, à la valeur du paramètre  $b$  près, le niveau de budget de risque utilisé par l'asset manager pour définir la taille du "pari actif" dans la zone de sous-performance (respectivement dans la zone de sur-performance)<sup>70</sup>.

Par conséquent, cet asset manager HARA dont le niveau de budget de risque est plus élevée en situation de sur-performance qu'en cas de sous-performance et qui, par ailleurs, ne reçoit ni commission incitative symétrique ni bonus cherche à résoudre le même problème d'investissement que l'asset manager CRRA que nous considérons, qui lui reçoit à la fois une commission symétrique d'incitation financière et un bonus de sur-performance<sup>71</sup>.

En particulier, la prise en compte d'un budget de risque asymétrique ou le paiement d'un bonus en cas de sur-performance sont deux notions équivalentes et interchangeables : plus le montant de bonus, versé en cas de sur-performance, est élevé plus le budget de risque considéré implicitement l'est également, et réciproquement.

Finalement, dans un souci de simplicité d'écriture, et sans perte de généralité<sup>72</sup>, on considère l'expression suivante de la rémunération du gérant :

$$F'(Y_T) \equiv F(W_T)/b \equiv a + Y_T + (\eta + dY_T) \times 1_{Y_T \geq 0}$$

où on a posé  $a \equiv a^0/b \equiv a^* W^0/b$ ,  $\eta \equiv \eta^0/b \equiv \eta^* W^0/b$  et  $d/b$ .

Le problème d'investissement est le suivant :

PROBLÈME 16.

$$(P16) \begin{cases} \max_{Y_T \in L^2(P)} E \{u(a + Y_T + (\eta + dY_T) 1_{Y_T \geq 0})\} \\ \text{s.a. } E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E \{1/H_T\} \end{cases}$$

où

$Y_T \equiv W_T - W^0$ : écart entre la valeur finale du portefeuille,  $W_T$ , et la cible de richesse de l'investisseur,  $W^0$ , avec  $0 \leq W^0 \leq 1/E \{1/H_T\}$ ,

$u(\cdot)$ : fonction d'utilité CRRA de l'asset manager

$a \equiv a^0/b$ : rapport entre le montant de la commission fixe et le taux des frais de gestion sur encours, avec  $0 \leq a \leq W^0$ ,

70. Ce qui revient à supposer que le budget de risque est une fonction binaire de l'écart de valeur du portefeuille avec la cible de richesse finale de l'investisseur ; son expression est la suivante :

$$\tilde{a}(z) \equiv a^0 + (\eta^0) \times 1_{z \geq 0}.$$

Ceci implique en particulier que le budget de risque alloué en cas de sur-performance (i.e  $a^0 + \eta^0$ ) est supérieur de  $\eta$  au budget de risque attribué en cas de sous-performance (i.e  $a^0$ ).

Finalement, on remarquera que, dans la zone de sous-performance, le montant de budget de risque désigne le seuil maximal de perte relativement à la cible "centrale" de rémunération que l'asset manager est prêt à supporter :  $bY_T \geq -a^0$ . Dans la zone de sur-performance la contrainte  $(b + c)Y_T \geq -(a^0 + \eta^0)$  est vérifiée par construction puisque l'excédent de richesse est positif (i.e.  $Y_T \geq 0$ ).

71. En effet, on a  $u(F_T(W_T)) = u \left\{ F'_T(W_T) - bW^0 + a^0 \times 1_{Y_T < 0} + (a^0 + \eta^0) \times 1_{Y_T \geq 0} \right\}$ , ce qui implique que  $u(F_T(W_T)) = w' (F'_T(W_T) - F'_T(W^0))$ .

72. Nous excluons de notre analyse le cas limite  $b = 0$  déjà étudié par [Carpenter, 2000].

$\eta \equiv \eta^0/b$ : rapport entre le montant du bonus payé en cas de sur-performance et le taux des frais de gestion sur encours, avec  $0 \leq \eta \leq W^0/b - a$ ,

$d \equiv c/b$ : rapport entre le taux des frais de gestion variables et le taux des frais de gestion sur encours, avec  $0 < b < 1$  et  $0 \leq c < 1 - b$ .

### 3.2. Expression de la richesse terminale optimale.

THÉOREME 5. La richesse terminale solution du problème (P16) est donnée par l'expression suivante<sup>73</sup> :

(1) Pour  $a \equiv 0$ ,  $d \geq 0$ ,  $\eta \neq 0$ <sup>74</sup>

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{1}{1+d} \left\{ \left( \frac{1+d}{k} H_T \right)^{1/\gamma} - \eta \right\} & \text{si } H_T > \bar{H} \\ 0 & \text{si } H_T \leq \bar{H} \end{cases}$$

avec  $\bar{H} \equiv \frac{k}{1+d} \eta^\gamma$

(2) Pour  $a \neq 0$ ,  $d \equiv 0$  et  $\eta \neq 0$

$$Y_T^* = \begin{cases} (H_T/k)^{1/\gamma} - (a + \eta) & \text{si } H_T > \bar{H} \\ 0 & \text{si } H^{**} < H_T \leq \bar{H} \\ (H_T/k)^{1/\gamma} - a & \text{si } H_T \leq H^{**} \end{cases}$$

avec  $\bar{H} \equiv k(a + \eta)^\gamma$  et avec  $H^{**}$  solution implicite de l'équation :  $h(k/H^{**}) = 0$   
avec  $h(x) \equiv -\frac{x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} - u(a + \eta) + ax$ <sup>75</sup>

(3) Pour  $a \neq 0$  et  $d \neq 0$ , on pose  $\varepsilon \equiv \eta/da$  et pour  $\eta = 0$  et ( $a = 0$  et  $d \neq 0$ ) ou ( $a \neq 0$  et  $d = 0$ ), on pose  $\varepsilon \equiv 0$

(a) cas  $\varepsilon \geq \varepsilon^* \equiv \frac{1}{d} \left\{ \frac{(\gamma-1)(1+d)}{\gamma(1+d)^{1-1/\gamma-1}} - 1 \right\} > 0$ <sup>76</sup>

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{1}{1+d} \left\{ \left( \frac{1+d}{k} H_T \right)^{1/\gamma} - (1 + d\varepsilon)a \right\} & \text{si } H_T > \bar{H} \\ 0 & \text{si } H^{**} < H_T \leq \bar{H} \\ (H_T/k)^{1/\gamma} - a & \text{si } H_T \leq H^{**} \end{cases}$$

avec  $\bar{H} \equiv \frac{k}{(1+d)} \{(1 + \varepsilon d)a\}^\gamma$ , et avec  $H^{**}$  solution implicite de l'équation :  
 $h(k/H^{**}) = 0$  avec  $h(x) \equiv -\frac{x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} - u((1 + d\varepsilon)a) + ax$

73. Dans le cas où l'asset manager ne reçoit pas de frais fixe ni aucunes incitations financières à la performance, i.e. pour  $a = d = \eta \equiv 0$ , la solution optimale du problème de l'asset manager (qui est aussi celle de l'investisseur de référence) s'identifie, à la constante  $W^0$  près, au portefeuille de Merton. En effet dans ce cas, la valeur finale du portefeuille optimal est donnée par :

$W_T^* = W^0 + (H_T/k)^{1/\gamma}$ .

74. Dans le cas limite où  $W^0 = 1/E\{1/H_T\}$ , la contrainte de budget, i.e.  $E(Y_T^*/H_T) = 0$  implique que  $W_T^* = W^0$ .

75. Cette expression s'obtient en posant  $h(x) \equiv g(x) - u(a + \eta)$  avec  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x) - a]$  et avec  $I(x) \equiv \left[ u'(x) \right]^{-1} = x^{-1/\gamma}$

76. On a  $0 < \varepsilon^* < \text{Min}\{\varepsilon^0; 1\}$  où  $\varepsilon^0 \equiv \frac{(1+d)^{1/\gamma-1}}{d}$ . Par ailleurs,  $\varepsilon^*$  est la solution de l'équation  $\bar{H}(\varepsilon) = H^*(\varepsilon)$ . De façon équivalente,  $\varepsilon^*$  est solution implicite de l'équation  $g(k/\bar{H}(\varepsilon)) = 0$ . Par conséquent pour  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , on a  $\bar{H}(\varepsilon) = H^*(\varepsilon) = H^{**}(\varepsilon)$  et la solution  $\mathfrak{Z}(a)$  et  $\mathfrak{Z}(b)$  du théorème 5 se confondent.

(b) cas  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{1}{1+d} \left\{ \left( \frac{1+d}{k} H_T \right)^{1/\gamma} - (1+d\varepsilon)a \right\} & \text{si } H_T > H^* \\ (H_T/k)^{1/\gamma} - a & \text{si } H_T \leq H^* \end{cases}$$

avec  $H^*$ <sup>77</sup> définie par l'expression suivante :

$$H^* \equiv k \left[ \left\{ \frac{ad}{1+d} (\varepsilon - 1) \right\} / \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma} - 1}{1 - 1/\gamma} \right\} \right]^\gamma$$

avec, dans tous les cas,  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :

$$E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E\{1/H_T\}$$

Notons que la contrainte  $a \leq W^0$  implique que :  $\forall H_T \geq 0$ , on a  $W_T^*(H_T) \geq W^0 - a \geq 0$ ; ce qui permet de se prémunir contre la négativité de  $W_T^*$ .

L'inégalité  $F_T(W_T^*) > 0$  est également vérifiée puisqu'on a,  $\forall H_T \geq 0$ ,  $F_T(W_T^*) \geq b(W_T^* - W^0) + ba \geq 0$ .

De plus, il est utile de faire la remarque technique suivante : on peut considérer que l'énoncé du théorème (5) se restreint aux deux seuls cas correspondant aux expressions (3)(a) et (3)(b).

En effet, en partant de l'expression du cas (3)(a), en remplaçant l'expression  $\varepsilon \times d \times a$  par  $\eta$ , puis en considérant le cas limite  $a \rightarrow 0$ <sup>78</sup>, on retrouve l'expression du cas (1) du théorème (5).

L'expression du cas (2) se déduit également de celle du cas (3)(a) par le même changement de variable que précédemment (en remplaçant l'expression  $\varepsilon \times d \times a$  par  $\eta$ ).

Les résultats du théorème (5) peuvent s'interpréter de la manière suivante<sup>79</sup> :

(1) Niveau d'incitation faible (cas (3)(b)) :  $\frac{\eta}{a} \leq d \times \varepsilon^*$

Le rapport entre la valeur du bonus fixe versé en cas de sur-performance,  $\eta^0 \equiv \eta \times b$ , et le niveau de commission fixe,  $a^0 \equiv a \times b$ , est inférieur au seuil  $d \times \varepsilon^*$ <sup>80</sup>

La stratégie optimale admet une forme à deux états similaire à celle de l'asset manager ne recevant pas de bonus de sur-performance qui a été analysée dans la section précédente<sup>81</sup>

77.  $H^*$  est la solution de  $f(k/H^*) = 0$  avec  $f(x) \equiv g(x) - g(x/(1+d)) + \frac{\varepsilon da}{1+d}$  où  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x) - a]$  et  $x \rightarrow I(x) = x^{-1/\gamma}$  désigne la fonction inverse de la fonction  $x \rightarrow u'(x)$ .

78. Dans le cas  $W^0 < E\{1/H_T\}$ , on démontre que  $H^{**} \rightarrow 0$  quand  $a \rightarrow 0$ .

79. Pour la raison évoquée ci dessus, nous nous restreignons aux deux seuls cas correspondant aux expressions (3)(a) et (3)(b) du théorème (5).

80.  $d \times \varepsilon^* \equiv \left\{ \frac{(\gamma-1)(1+d)}{\gamma(1+d)^{1-1/\gamma-1}} - 1 \right\}$ .

81. En effet, l'énoncé du théorème (5) en supposant de plus que  $\eta = 0$  (pas de versement de bonus fixe en cas de sur-performance) se réduit à l'énoncé du théorème (4) dans le cas particulier où l'asset manager est CRRRA. .

- Un état de richesses basses (pour  $H_T \leq H^*$ ) où l'expression de la stratégie optimale est similaire à celle du cas sans incitation financière.
- Un état de richesses élevées (pour  $H_T > H^*$ ) où l'expression de la stratégie se distingue de celle de l'état des richesses basses par les deux termes suivants : le coefficient d'exposition au portefeuille numéraire,  $H$ , (qui passe de 1 à  $(1+d)^{1/\gamma-1}$ ) et le niveau de budget de risque (qui passe de  $a$  à  $[(1+d\varepsilon)/(1+d)] \times a$ ).

(2) Niveau d'incitation élevé ((cas (3)(a)) :  $\frac{a}{a} \geq d \times \epsilon^*$

Le rapport entre la valeur du bonus fixe versé en cas de sur-performance,  $\eta^0 \equiv \eta \times b$ , et le niveau de commission fixe,  $a^0 \equiv a \times b$ , est supérieur au seuil  $d \times \epsilon^*$

Dans ce cas, il s'agit d'une forme de stratégie à trois états : deux états (de richesses "basses" et "hautes") similaires au cas (3)(b) plus un état "intermédiaire" de richesse nulle correspondant à un intervalle de valeurs médianes de  $H_T$  dans lequel il est optimal de gérer passivement le portefeuille.

On remarquera que le seuil  $\frac{a^*}{a} \equiv d \times \epsilon^*$  est une fonction croissante de  $d$  et décroissante de  $\gamma$ .

Enfin, on notera que le modèle de frais exposé ici généralise certaines des formulations déjà analysées dans la littérature traitant de cette même problématique de gestion financière avec incitation à la performance :

- l'expression (3)(b), dans le cas particulier où  $a = W^0$ ,  $\eta = 0 \Leftrightarrow a = W^0$  et  $\epsilon = 0$ , s'identifie à la solution du problème d'investissement de hedge funds étudié par [Hodder Jackwerth, 2006]<sup>82</sup>.

- l'expression (3)(a) dans le cas particulier où  $a = W^0$  et  $\eta = dW^0 \Leftrightarrow a = W^0$  et  $\epsilon = 1$ , s'identifie à l'expression analytique de la stratégie optimale du problème d'investissement avec effet incitatif de flux d'investissement analysé par [Basak *et al.*, 2008]<sup>83</sup>.

On rappelle que, sous les hypothèses du modèle de *Black & Scholes*, il existe une relation bi-univoque entre la valeur de chacun des trois portefeuilles suivants pris

---

82. Remarquons les deux différences suivantes :  
 -[Hodder Jackwerth, 2006] considèrent le cas, plus spécifique à l'industrie des hedge funds, où le gérant investit pour son propre compte dans le fonds qu'il gère et résout numériquement le problème d'investissement considéré.  
 -A l'opposé, nous explicitons la forme analytique de la solution du problème d'investissement mais nous ne traitons pas du cas mentionné ci-dessus.

83. Dans le cas où le benchmark est fixe ; le cas d'un benchmark stochastique sera traité dans la dernière section du chapitre.



deux à deux : la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , celle du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ <sup>84</sup>, et enfin, celle de l'actif risqué,  $M_t$ <sup>85</sup>.

Ceci nous permettra, à tout instant  $t$ , de d'exprimer la valeur de la richesse optimale en excès de celle du benchmark, notée  $Y_t^*$ , en fonction de  $M_t$ ; expression qui nous sera utile pour analyser les propriétés de la stratégie optimale.

### 3.3. Analyse de sensibilité du "pay-off" optimal.

En nous fondant sur le même exemple d'application numérique que dans la section précédente<sup>86</sup>, nous analysons, dans le cadre du modèle de *Black & Scholes*, la sensibilité du profil de gain optimal aux variations des paramètres de rémunération et de risque du modèle considéré.

Nous souhaitons en particulier expliciter l'effet de la prise en compte d'un montant fixe de bonus versé au gérant en cas de sur-performance; pour cela, nous comparerons le profil de gain final ("pay-off") de l'asset manager recevant des frais de gestion variables et un montant de bonus fixe en cas de sur-performance ( $c \neq 0$  et  $\eta \neq 0$ ) avec le profil de l'asset manager percevant des frais de gestion variables mais pas de bonus ( $c \neq 0$  et  $\eta = 0$ ) qui a été analysé dans la section précédente.

#### 3.3.1. Sensibilité aux variations des paramètres de rémunération et de risque.

Afin d'illustrer l'effet du changement du niveau de rémunération et du degré d'aver-sion au risque sur le profil de gain de l'asset manager, nous avons représenté, sur les cinq figures ci-dessous, la valeur finale de la stratégie optimale, en fonction de la valeur finale de l'actif risqué, pour différentes valeurs de chacun des paramètres considérés :

- (1) Sensibilité aux variations du montant de bonus fixe,  $\eta^0 \equiv \eta \times b$  (avec  $b$  fixé), et aux variations du taux des frais de gestion variables,  $c$  :

Une hausse de la valeur du montant de bonus (i.e. hausse de la valeur du paramètre  $\eta$ ) a pour conséquence de faire baisser la richesse du portefeuille dans l'intervalle des valeurs les plus élevées de l'actif risqué (cf. figure (Fig.18)).

De plus, au-dessus d'un certain montant de bonus, et dans un intervalle

84. On rappelle que le portefeuille de Merton, noté  $(h^*, H^*)$ , s'identifie à la stratégie dynamique atteignant la richesse terminale,  $H_T^{1/\gamma}$ . Il s'agit d'une stratégie dynamique dont le poids de l'actif risqué dans le portefeuille est constant et donné par l'expression suivante :  $h^* \equiv (1/\gamma)h$  avec  $h \equiv \pi/\sigma^2 \equiv \lambda/\sigma$  et avec  $\lambda \equiv (\mu - r)/\sigma$  qui désigne le ratio de Sharpe de l'actif risqué.

85. En particulier, dans le cadre du modèle de *BE&S*, on obtient les propriétés de transformation suivantes qui permettent d'exprimer la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , ou du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , en fonction de celle de l'actif risqué  $M_t$  et réciproquement : on a,

$$H_t = \Psi(t)(M_t)^h \text{ avec } \Psi(t) \equiv e^{(r-\lambda(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}-\frac{\lambda}{2}))t} = e^{(1-h)(r+\frac{\lambda^2}{2h})t} = e^{(1-h)(r+\frac{h\sigma^2}{2})t},$$

$$\text{et } H_t^* = \Gamma(t)(M_t)^{h^*} \text{ avec } \Gamma(t) \equiv H_0^* e^{(1-h^*)(r+\frac{\lambda(\gamma)^2}{2h^*})t} = H_0^* e^{(1-h^*)(r+\frac{h^*\sigma^2}{2})t}.$$

86. Sauf si cela est précisé différemment, les valeurs numériques utilisées sont les suivantes :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\gamma = 75\%$ ,  $T = 5$ , et  $W^0 \equiv e^{rT} = 122\%$ ; ce qui donne en particulier  $\lambda = 30\%$ ,  $h = 150\%$  et  $h^* = 200\%$ .

de valeurs intermédiaires de l'actif risqué, on remarque que la stratégie optimale s'identifie à une gestion totalement passive (i.e. la performance relativement à la cible de richesse finale est nulle).

Enfin, l'effet d'une baisse du taux de commission variable,  $c$ , est similaire à celui d'une hausse du bonus versé en cas de sur-performance (cf. (Fig.19)).

- (2) Sensibilité aux variations du taux des frais de gestion sur encours,  $b$ <sup>87</sup>, et aux variations du paramètre de budget de risque,  $a$  :

Comme cela est illustré sur la figure (Fig.20), le montant de la perte, dans la zone de sous-performance, est une fonction décroissante de la valeur du taux des frais de gestion sur encours,  $b$ . De plus, la longueur de l'intervalle où il y a sous-performance et le gain dans la zone de sur-performance sont également fonction décroissante de la valeur du paramètre  $b$ .

De plus, on remarque qu'au-dessus d'une certaine valeur du taux de frais de gestion sur encours,  $b$ , (dans notre exemple d'application numérique, ce seuil est situé entre 5% et 10%) la stratégie optimale devient passive dans un intervalle de valeurs intermédiaires de l'actif risqué. La longueur de cet intervalle est une fonction croissante de la valeur du paramètre  $b$ .

Finalement, l'effet d'une baisse du montant de la commission fixe  $a^0 \equiv a \times b$  (avec  $b$  fixé)<sup>88</sup>, est similaire à celui d'une hausse du taux des frais de gestion sur encours (cf. (Fig.21)).

- (3) Sensibilité aux variations du paramètre d'aversion au risque,  $\gamma$  :

Comme le montre la figure (Fig.22), la baisse de la valeur de l'aversion au risque considérée,  $\gamma$ , implique que la zone de sous-performance s'étend à des valeurs plus élevées de l'actif risqué, que le montant de la perte, en cas de sous-performance, augmente, et enfin que l'effet de convexité de la courbe de richesse, observé dans la zone de sur-performance, s'accroît.

---

87. A niveau fixé des paramètres  $\eta^0$  et  $a^0$ .

88. Ou ce qui revient au même, d'une baisse du paramètre  $a$ , le niveau de budget de risque considéré par l'asset manager.

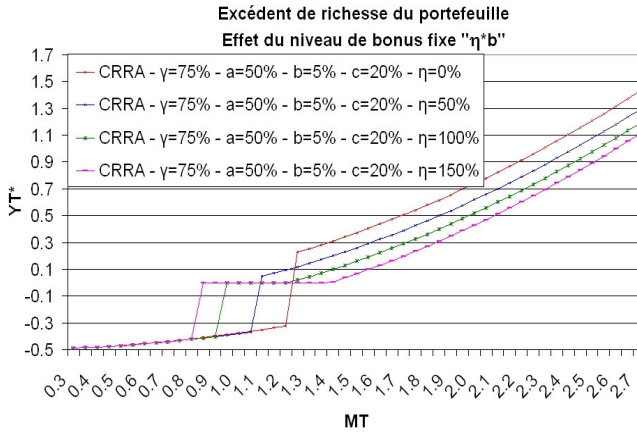


FIGURE 18. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de bonus fixe  $\eta \times b$ .

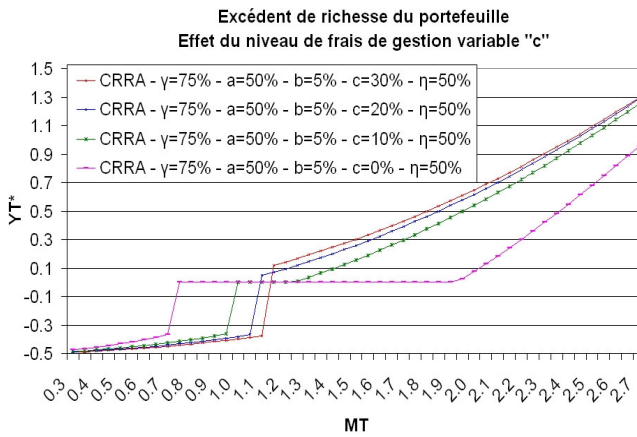


FIGURE 19. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de taux des frais de gestion variables  $c$ .

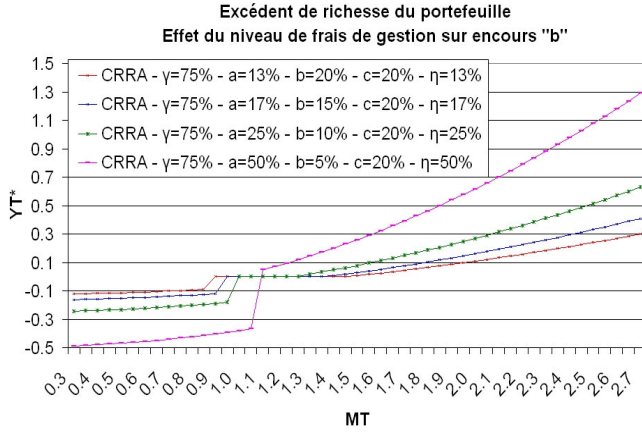


FIGURE 20. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de taux des frais de gestion sur encours  $b$ .

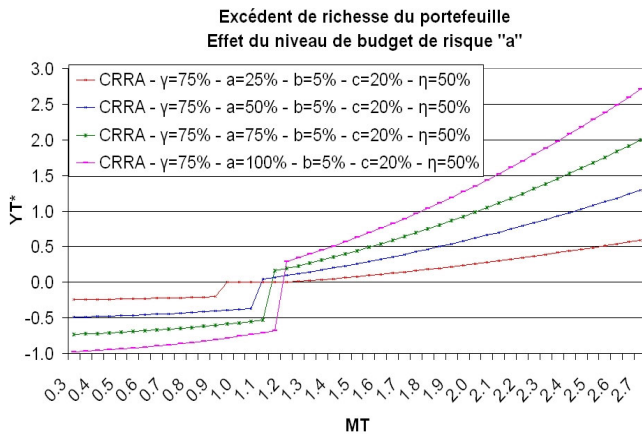


FIGURE 21. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau du taux de commission fixe  $a \times b$  (avec  $b$  fixé).

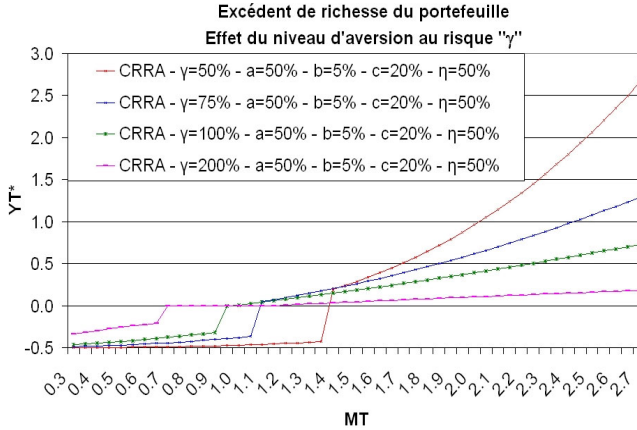


FIGURE 22. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion au risque  $\gamma$ .

### 3.3.2. Sensibilité des strikes aux variations des paramètres de rémunération et de risque.

Nous partons du constat que l'expression de la richesse terminale optimale fournie dans le théorème 5 ressemble au pay-off d'une combinaison d'options<sup>89</sup>.

Nous souhaitons analyser l'effet d'une variation de la valeur des paramètres du modèle sur celle des "strikes" de ces options. A noter que ces "strikes" sont également les bornes des différents intervalles de valeurs de l'actif risqué qui correspondent aux états de richesse où l'expression de la stratégie optimale prend une forme différente.

Nous avons représenté sur la figure (Fig.23), les valeurs prises par ces "strikes", notés  $M^*$ ,  $M^{**}$  et  $Mmax$ <sup>90</sup>, en fonction de la valeur du bonus fixe,  $\eta^0 \equiv \eta \times b$  (avec  $b$  fixé).

Nous pouvons faire les remarques suivantes :

- (1) Pour  $\eta \leq \frac{a \times c \times \epsilon^*}{b}$  (niveau de bonus faible)

Dans ce cas (valeur du bonus en dessous de 3% dans l'exemple d'application numérique considéré), l'expression de la stratégie optimale est celle à deux états de richesse du théorème 5.

De plus, il n'y a qu'un seul strike, noté  $M^*$  et sa valeur est une fonction décroissante du paramètre  $\eta$ .

Ainsi, quand la valeur du paramètre  $\eta$  augmente, l'intervalle de valeurs

89. ce que nous préciserons dans les sections suivantes.

90. On rappelle que, sous les hypothèses du modèle d'actifs de  $B\mathcal{E}S$ , il existe une correspondance bi-univoque entre  $M_t$ , la valeur de l'actif risqué à la date  $t$ , et  $H_t$  celle du portefeuille de croissance optimale. Les valeurs de  $M^*$ ,  $M^{**}$ ,  $Mmax$  se déduisent respectivement de celle de  $H^*$ ,  $H^{**}$ ,  $\bar{H}$  par cette transformation.

élevées de l'actif risqué, dans lequel l'effet de l'incitation financière est positif pour l'asset manager<sup>91</sup>, s'étend au détriment de l'intervalle de valeurs basses de l'actif risqué où l'incitation financière lui est défavorable.

(2) Pour  $\eta \geq \frac{a \times c \times \epsilon^*}{b}$  (niveau de bonus élevé)

Dans ce cas (valeur du bonus au-dessus de 3% dans l'exemple considéré), l'expression de la stratégie optimale est celle à trois états de richesse et deux strikes du théorème 5.

Quand la valeur du paramètre  $\eta$  augmente, nous observons que la valeur de  $M^{**}$  baisse et celle de  $M^{max}$  augmente.

Autrement dit, quand le montant du bonus de sur-performance augmente, l'intervalle des valeurs médianes de l'actif risqué, où la stratégie optimale est passive, s'étend au détriment des deux autres intervalles de valeurs basses et hautes de l'actif risqué où le gérant est actif.

Finalement, remarquons que, toute chose restant égale par ailleurs, les changements suivants de valeur des paramètres ont le même effet sur le profil de gain optimal que la hausse de valeur du montant de bonus de sur-performance (i.e la hausse du paramètre  $\eta$ ) :

- la baisse de la valeur du taux des frais de gestion variables  $c$  (voir la figure (Fig.24)),
- la baisse du montant de la commission fixe (i.e. baisse de la valeur du paramètre  $a$ , voir la figure (Fig.25) ci-dessous),
- ou encore, la hausse du taux de la commission sur encours  $b$  (voir la figure (Fig.26)).

On en déduit que la prise en compte d'un bonus contractuel en plus de frais de sur-performance tend à modifier de façon considérable le comportement de l'asset manager et l'incite à réduire son profil de risque :

- En implémentant, pour les niveaux de bonus faibles, une stratégie dont la zone de sur-performance est d'autant plus longue (et la performance dans cette zone d'autant plus faible) que le montant du bonus de sur-performance est élevé
- En choisissant, pour les niveaux de bonus suffisamment élevés, une gestion passive dans un intervalle de valeurs médianes de l'actif risqué. La longueur de cet intervalle de valeurs médianes de l'actif risqué, est une fonction croissante du montant de bonus versé en cas de sur-performance. A l'inverse, la longueur des intervalles de valeurs de l'actif risqué, où il y a sur-performance, ou sous-performance et où une gestion active est optimale, décroît avec le niveau de bonus.

---

91. puisque dans ce cas, le montant de la rémunération reçu par l'asset manager est supérieur à celui qu'il obtiendrait sans incitation financière.

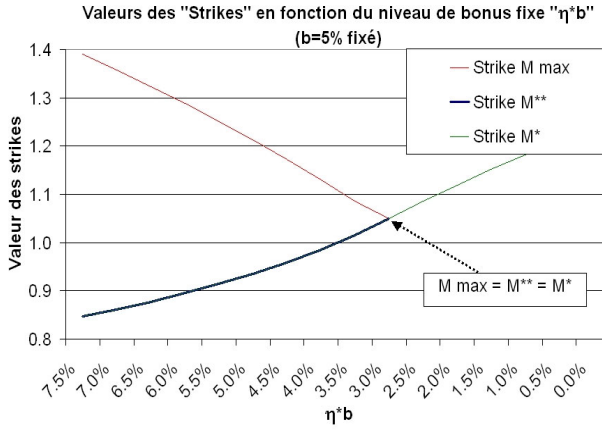


FIGURE 23. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - valeurs des "Strikes" en fonction du niveau de bonus fixe  $\eta \times b$  ( $b=5\%$  fixé).

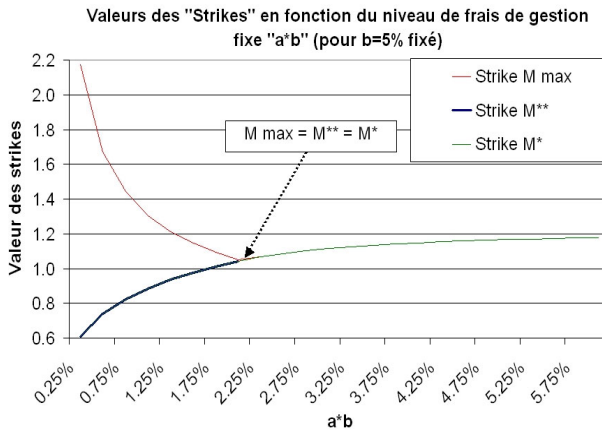


FIGURE 24. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - valeurs des "Strikes" en fonction du niveau de frais de gestion fixe  $a \times b$  (pour  $b=5\%$  fixé).

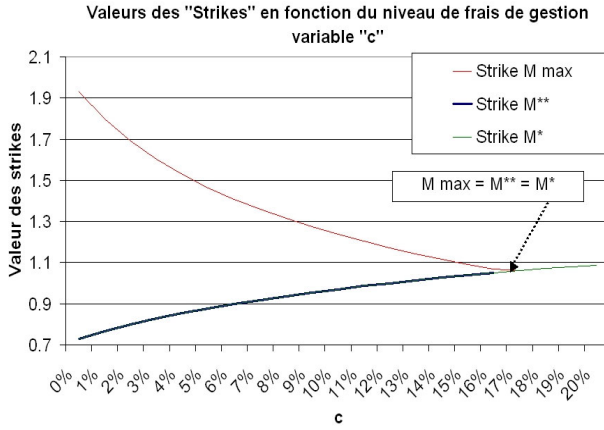


FIGURE 25. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - valeurs des "Strikes" en fonction du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$ .

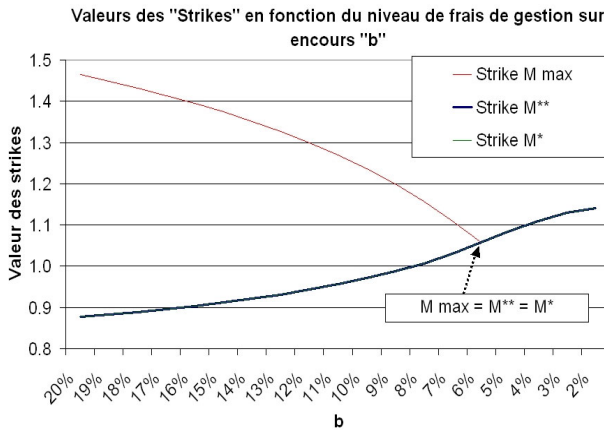


FIGURE 26. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - valeurs des "Strikes" en fonction du niveau du taux des frais de gestion sur encours  $b$ .



### 3.4. Expression de la stratégie dynamique optimale.

Nous explicitons à présent l'expression de la stratégie dynamique optimale en considérant à nouveau le modèle à deux actifs de [Black Scholes, 1973]. On rappelle que dans ce cadre, l'univers d'investissement se compose des deux actifs suivants :

– Un actif dit sans risque ("A.S.R.") représentant l'actif monétaire et dont la valeur à la date  $t$  est notée  $S_t^0$ ; cet actif a un rendement instantané donné par l'expression suivante

$$dS_t^0/S_t^0 = rdt$$

où  $r$  désigne le taux monétaire constant.

– Un actif dit risqué ("A.R") représentant le portefeuille de marché ou tout autre actif action dont la dynamique de prix est décrite par un mouvement brownien géométrique; son rendement instantané s'écrit

$$dM_t/M_t = \mu dt + \sigma dZ_t \equiv (r + \pi)dt + \sigma dZ_t$$

où le paramètre  $\mu$  représente son rendement moyen instantané (égal au taux court plus une prime de risque "action" notée  $\pi \equiv \mu - r$ ) et  $\sigma$  désigne sa volatilité constante.

Nous présentons les expressions obtenues pour la valeur intermédiaire et l'allocation dynamique de la stratégie optimale<sup>92</sup> dans les propriétés 26 et 27 qui suivent.

PROPRIÉTÉ 26. *Pour  $a \neq 0$ ,  $d \neq 0$ , la valeur à la date  $t$  de la solution optimale du problème (P16), notée  $Y_t^*$ , est donnée par la formule suivante :*

(1) *Pour  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$*

$$Y_t^* = \frac{y_d}{1+d} C(H_t^*, (\bar{H})^{1/\gamma}, T-t) - y_0 P(H_t^*, (H^{**})^{1/\gamma}, T-t) - \left\{ a - y_0 (H^{**})^{1/\gamma} \right\} B(H_t^*, (H^{**})^{1/\gamma}, T-t)$$

(2) *Pour  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$*

$$Y_t^* = \frac{y_d}{1+d} C(H_t^*, (H^*)^{1/\gamma}, T-t) - y_0 P(H_t^*, (H^*)^{1/\gamma}, T-t) + \frac{1}{1+d} \left\{ y_d (H^*)^{1/\gamma} - (1+d\varepsilon)a \right\} ZC(T-t) \\ - \left\{ \left( \frac{y_d}{1+d} - y_0 \right) (H^*)^{1/\gamma} + \frac{d(1-\varepsilon)a}{1+d} \right\} B(H_t^*, (H^*)^{1/\gamma}, T-t)$$

avec  $H_t^*$  qui désigne la valeur intermédiaire du portefeuille, solution du problème de Merton, atteignant la richesse terminale,  $H_T^{1/\gamma}$ <sup>93</sup>,

avec  $\varepsilon \equiv \eta/da$ ,  $\varepsilon^* \equiv \frac{1}{d} \left\{ \frac{(\gamma-1)(1+d)}{\gamma(1+d)^{1-1/\gamma}-1} - 1 \right\}$ ,  $y_d \equiv ((1+d)/k)^{1/\gamma}$ ,  $y_0 \equiv (1/k)^{1/\gamma}$ .

92. Par soucis de simplicité d'écriture, nous exposons ici uniquement les résultats obtenus dans les cas ("non dégénérés") 3(a) et 3(b) du théorème 5.

93. On rappelle que le portefeuille  $(h^*, H^*)$  s'identifie à une stratégie dynamique dont le poids de l'actif risqué dans le portefeuille est constant et donné par l'expression suivante :  $h^* \equiv (1/\gamma)h$  avec  $h \equiv \pi/\sigma^2 \equiv \lambda/\sigma$  et avec  $\lambda \equiv (\mu - r)/\sigma$  qui désigne le ratio de Sharpe de l'actif risqué.

avec  $\bar{H} \equiv \frac{k}{(1+d)} [(1+\varepsilon d)a]^\gamma$ ,  $H^* \equiv k \left\{ \frac{ad}{1+d} (\varepsilon - 1) \right\} / \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma} \right\}^\gamma$  et avec  $H^{**}$  qui désigne la solution implicite de l'équation :

$$h(k/H^{**}) = 0 \quad \text{avec} \quad h(x) \equiv \frac{-x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} - u((1+\varepsilon d)a) + ax$$

où  $C(Z_t, X, T-t)$ , (resp.  $P(Z_t, X, T-t)$ , resp.  $B(Z_t, X, T-t)$ ) désigne la valeur de l'option d'achat européenne, (resp. de l'option de vente européenne, resp. de l'option digitale de vente) de strike  $X$ , d'échéance  $T-t$ , sur le sous-jacent  $Z_t$  et  $ZC(T-t)$  la valeur d'une obligation Zéro-Coupon d'échéance  $T-t$  dans le cadre du modèle de Black & Scholes.<sup>94</sup>

PROPRIÉTÉ 27. Dans le cadre du modèle de Black & Scholes, l'allocation de la stratégie dynamique optimale correspondant au problème (P16) est donnée par la formule suivante :

$$\begin{cases} w_t^* W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'A.R.} \\ (1-w_t^*) W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'A.S.R.} \end{cases}$$

avec  $w_t^* W_t^* \equiv w^B B_t + \frac{dW_t^*}{dH_t^*} \left( \frac{h}{\gamma} \right) H_t^*$  qui est donnée par la formule suivante<sup>95</sup> :

- Pour  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$

$$\begin{aligned} w_t^* W_t^* &= \frac{h}{\gamma} H_t^* \left( \frac{y_d}{1+d} N(d_1(\bar{H}^{1/\gamma})) + y_0 N(-d_1(H^{**1/\gamma})) \right) + \\ &\quad \left( a - y_0 H^{**1/\gamma} \right) \frac{he^{-r(T-t)} \Phi(d_2(H^{**1/\gamma}))}{\lambda \sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

- Pour  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$

$$\begin{aligned} w_t^* W_t^* &= \frac{h}{\gamma} H_t^* \left( \frac{y_d}{1+d} N(d_1(H^{*1/\gamma})) + y_0 N(-d_1(H^{*1/\gamma})) \right) \\ &+ \left\{ \left( \frac{y_d}{1+d} - y_0 \right) H^{*1/\gamma} + \frac{d(1-\varepsilon)}{1+d} a \right\} \frac{he^{-r(T-t)} \Phi(d_2(H^{*1/\gamma}))}{\lambda \sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

avec  $N(\cdot)$ , resp.  $\Phi(\cdot)$  la fonction de répartition, resp. la fonction de densité, de la loi normale et avec  $d_1(X) \equiv \ln\left(\frac{H_t^*}{X e^{-r(T-t)}}\right) / \sigma^* + \sigma^*/2$  et  $d_2(X) \equiv d_1(X) - \sigma^*$

où  $(\sigma^*)^2 \equiv \text{Var}[\ln(H_T/H_t)/\gamma] = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^2 \times (T-t)$  et  $\lambda \equiv \pi/\sigma$  et avec le reste des paramètres définis comme dans la propriété 26.

94. L'expression de  $C(Z_t, X, T-t)$  est donnée dans le cadre du modèle Black & Scholes par la formule suivante :  $C(Z_t, X, T-t) = Z_t N(d_1(X)) + X e^{-r(T-t)} N(d_2(X))$  avec

$$d_1(X) = \frac{\log\left(\frac{Z_t}{X}\right) + (r + \frac{(\sigma^*)^2}{2})(T-t)}{(\sigma^*)\sqrt{T-t}}, \quad d_2(X) = d_1(X) - \sigma^* \sqrt{T-t} \text{ et } \sigma^* \sqrt{T-t} \equiv \sqrt{\text{Var}(\ln(Z_T/Z_t))}$$

De plus pour  $Z_t \equiv H_t^*$ , on en déduit de l'expression de  $H_t^*$  que  $\sigma^* = \lambda/\gamma$  avec  $\lambda \equiv \pi/\sigma$ .

Avec les mêmes notations, on a  $P(Z_t, X, T-t) = X e^{-r(T-t)} N(-d_2(X)) + Z_t N(-d_1(X))$  et  $B(Z_t, X, T-t) = e^{-r(T-t)} N(-d_2(X))$  et  $ZC(T-t) = e^{-r(T-t)}$ . Les formules d'évaluation de ces options dans le cadre d'un modèle à  $N$  actifs risqués,  $N \geq 2$  sont données dans la dernière section du présent chapitre qui généralise les résultats exposés dans cette section.

95. Dans notre cas où le benchmark est choisi comme étant l'actif monétaire on a  $w^B \equiv 0$ .

### 3.5. Analyse de l'allocation dynamique optimale.

Nous analysons la sensibilité de l'allocation dynamique optimale (niveau d'exposition à l'actif risqué et performance intermédiaire) aux variations des paramètres du modèle (rémunération, aversion au risque et horizon de placement) en nous appuyant sur le même exemple d'application numérique que précédemment<sup>96</sup>.

En particulier, nous comparerons la stratégie dynamique des trois profils suivants :

- l'asset manager recevant des frais de gestion variables et un bonus fixe en cas de sur-performance ( $c \neq 0$  et  $\eta \neq 0$ ),
- l'asset manager recevant des frais de gestion variables mais pas de bonus fixe ( $c \neq 0$  et  $\eta = 0$ ), qui a été analysé dans la section précédente,
- l'asset manager de référence sans aucune incitation financière ( $c = 0$  et  $\eta = 0$ ).

#### 3.5.1. Sensibilité aux variations des paramètres de rémunération.

Nous avons représenté, pour différentes valeurs de chacun des quatre paramètres de la rémunération, la valeur intermédiaire de la stratégie dynamique optimale (notée  $Y_t^*$ ) ainsi que l'exposition à l'actif risqué correspondante (notée  $P_t^*$ ), en fonction de la valeur de l'actif risqué.

- (1) Sensibilité aux variations du montant de bonus de sur-performance,  $\eta^0 \equiv \eta \times b$  (avec  $b$  fixé) et aux variations du taux des frais de gestion variables  $c$  :

On observe sur la figure (Fig.27) que la hausse de la valeur du bonus (i.e. hausse du niveau du paramètre  $\eta$ ) implique,

- dans une zone de valeurs basses à médianes du sous-jacent : une hausse du niveau de la sur-performance du portefeuille de l'asset manager avec incitation financière relativement au portefeuille sans incitation financière. Ce qui s'accompagne d'une concavité de la courbe de richesse finale plus marquée.
- dans une zone de valeurs hautes du sous-jacent : une hausse du montant de la sous-performance de la stratégie avec incitation financière relativement au portefeuille sans incitation financière.

Les effets d'un changement du montant de bonus de sur-performance sur l'exposition à l'actif risqué sont illustrés sur la figure (Fig.28). On peut faire les remarques suivantes

- premièrement : la valeur de l'actif risqué où a lieu le "pic" de sur-exposition, par rapport au cas de référence sans incitation financière,

---

96. Sauf si cela est précisé différemment, les valeurs numériques utilisées sont les suivantes :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\gamma = 75\%$ ,  $T = 5$ , et  $W^0 \equiv e^{rT} = 122\%$ ; ce qui donne en particulier  $\lambda = 30\%$ ,  $h = 150\%$  et  $h^* = 200\%$ .

est une fonction décroissante du montant de bonus.

- deuxièmement : l'amplitude du "creux" de sous-exposition par rapport au cas sans incitation, qui a lieu dans un intervalle de valeurs médianes du sous-jacent, est une fonction croissante du montant de bonus.
- troisièmement : pour les valeurs du bonus au-dessus d'un seuil<sup>97</sup>, il y a, dans la zone de valeurs élevées du sous-jacent, sur-exposition à l'actif risqué par rapport au cas sans incitation.

L'effet d'une baisse du taux de la commission variable,  $c$ , est similaire à celui d'une hausse du bonus versé en cas de sur-performance (i.e. hausse du paramètre  $\eta$ ) : le niveau globale de risque diminue, voir les figures (Fig.29) et (Fig.30).

- (2) Sensibilité aux variations du taux de frais de gestion sur encours  $b$  et aux variations du montant de la commission fixe  $a^0 \equiv a \times b$  (avec  $b$  fixé) :

La baisse de la valeur du taux des frais de gestion sur encours,  $b$ , augmente le niveau global de risque de la stratégie optimale :

- d'une part, le montant de la perte dans la zone de sous-performance et le niveau de gain dans la zone de sur-performance augmentent (cf. figure (Fig.31)),
- d'autre part, le niveau global d'exposition à l'actif risqué augmente et en particulier la sur-exposition qui s'opère dans une zone de valeurs médianes du sous-jacent (cf. figure (Fig.32)).

L'effet d'une hausse du montant de la commission fixe,  $a^0 \equiv a \times b$  (avec  $b$  fixé), est similaire à celui d'une baisse du taux des frais de gestion sur encours,  $b$  (voir les figures (Fig.33) et (Fig.34)).

---

97. en particulier pour le niveau maximum de bonus  $\eta = d \times W^0$ , cf. courbe violette.

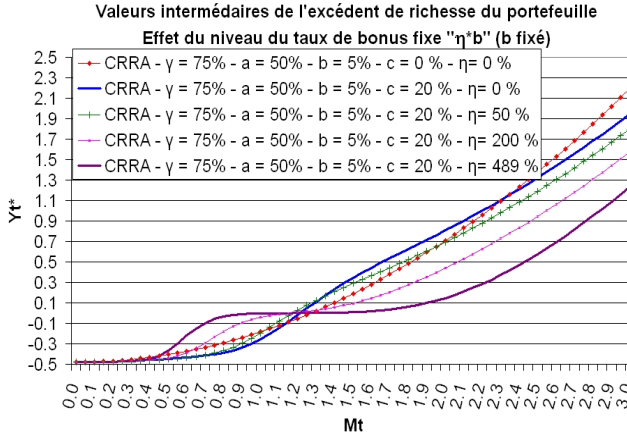


FIGURE 27. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de bonus fixe  $\eta \times b$  (b fixé).

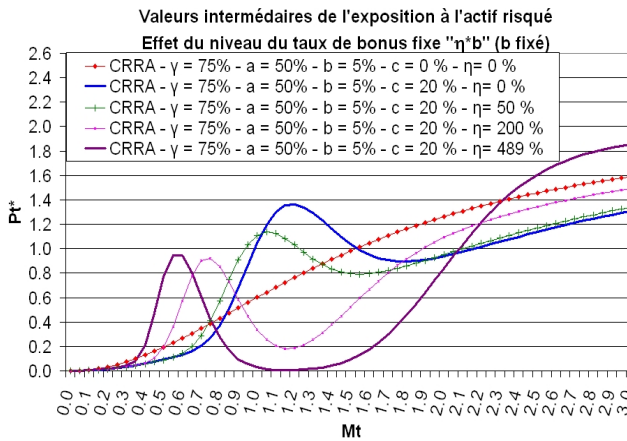


FIGURE 28. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - exposition à l'actif risqué - effet du niveau de bonus fixe  $\eta \times b$  (b fixé).

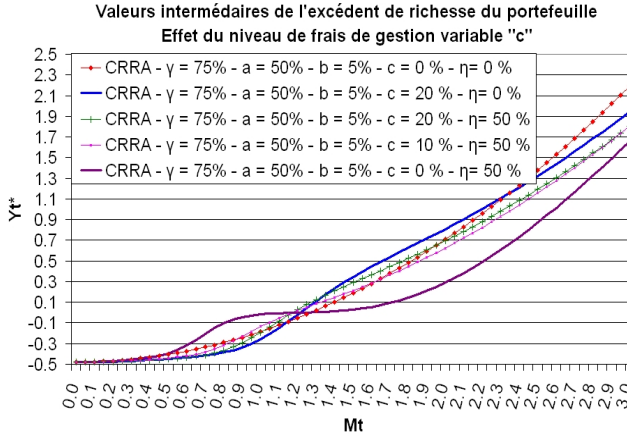


FIGURE 29. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$ .

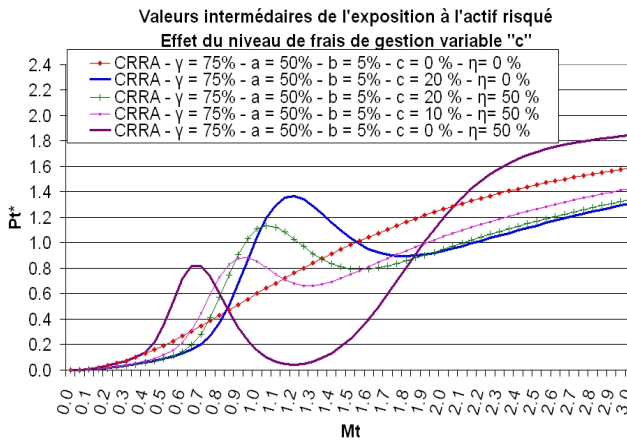


FIGURE 30. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - exposition à l'actif risqué - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$ .

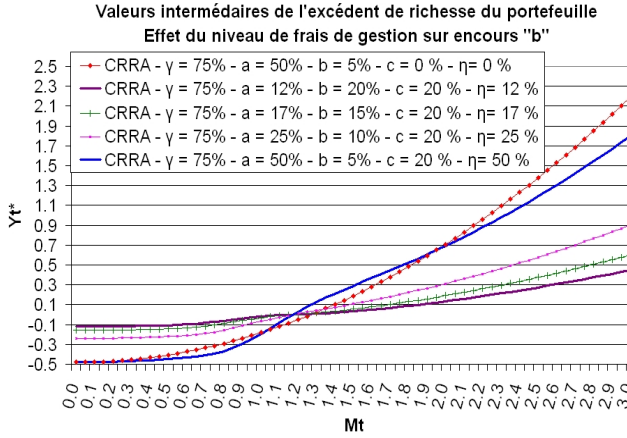


FIGURE 31. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de frais de gestion sur encours  $b$ .

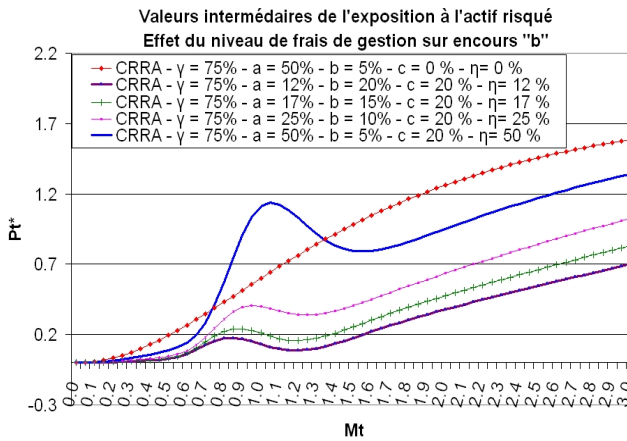


FIGURE 32. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - exposition à l'actif risqué - effet du niveau de frais de gestion sur encours  $b$ .

3.5.2. Sensibilité aux variations du paramètre d'aversion au risque et aux variations de l'horizon d'investissement.

L'effet du changement du niveau d'aversion au risque,  $\gamma$ , est représenté sur la figure (Fig.35) et la figure (Fig.36).

Quand le paramètre d'aversion au risque,  $\gamma$ , baisse, l'allocation dynamique devient plus risquée :

- d'une part, le montant de la perte dans la zone de sous-performance et du gain dans la zone de sur-performance augmentent. De plus, la courbe de richesse

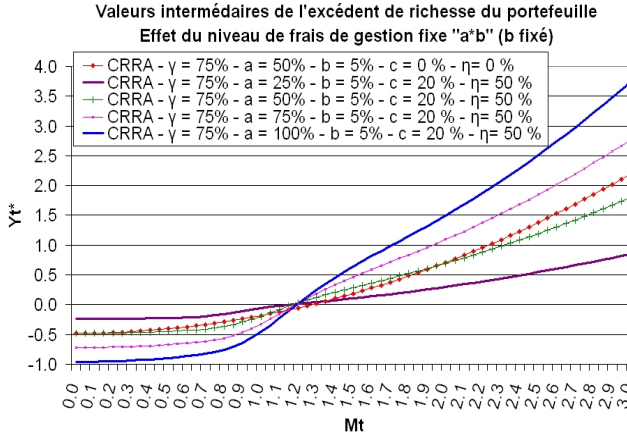


FIGURE 33. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau du taux de commission fixe  $a \times b$  (avec  $b$  fixé).

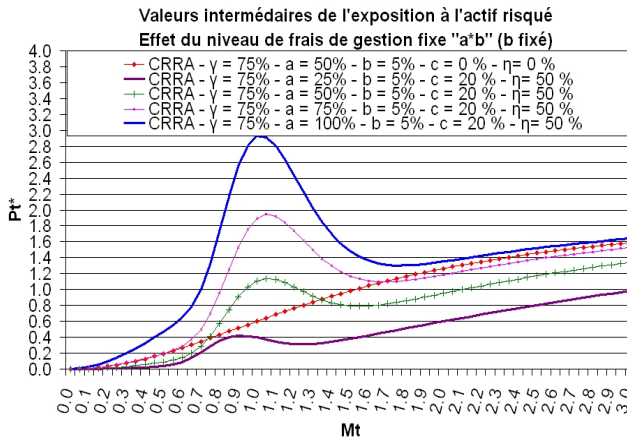


FIGURE 34. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - exposition à l'actif risqué - effet du niveau du taux de commission fixe  $a \times b$  (avec  $b$  fixé).

devient de plus en plus convexe (cf. figure (Fig.35)).

– d'autre part, le niveau global d'exposition à l'actif risqué augmente, et en particulier, la sur-exposition qui s'opère dans un intervalle de valeurs médianes de l'actif risqué. De plus, cet intervalle correspond à des valeurs de l'actif risqué plus élevées (cf. figure (Fig.36)).

Finalement, on remarquera que, dans un intervalle de valeurs basses à médianes de l'actif risqué, l'allocation dynamique optimale est contraire à la règle de "bon sens" ("Popular Advice") qui dicte une allocation en actif risqué croissante en fonction du niveau de tolérance au risque.



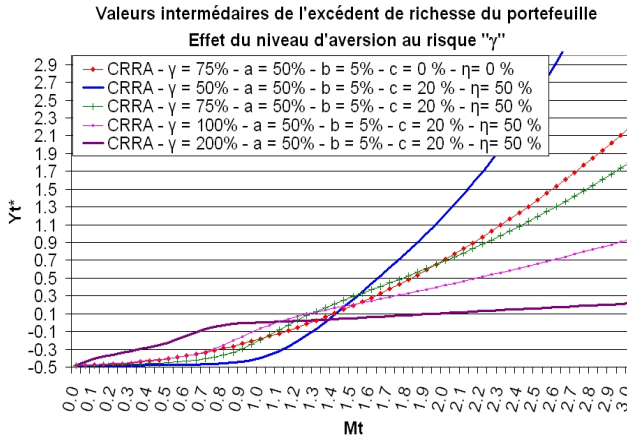


FIGURE 35. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion au risque  $\gamma$ .

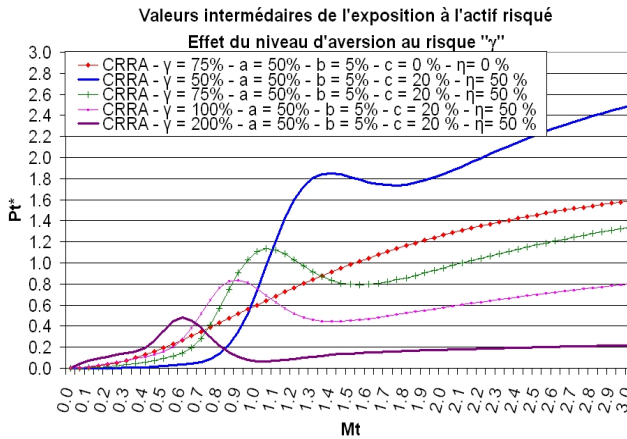


FIGURE 36. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion au risque  $\gamma$ .

L'effet du changement de l'horizon d'investissement,  $T-t$ , sur le profil de risque de l'asset manager avec frais de gestion variables et bonus de sur-performance est illustré sur la figure (Fig.37) (excédent de richesse) et la figure (Fig.38) (exposition à l'actif risqué).

Comme le montre la figure (Fig.38), l'allocation temporelle est contraire à la règle de "bon sens" ("Conventional Wisdom") d'une allocation en actif risqué croissante en fonction du temps restant à courir. Ceci est dû au profil d'option binaire de la stratégie optimale (qui traduit la discontinuité de valeur qui a lieu entre les deux états de richesses hautes et basses).

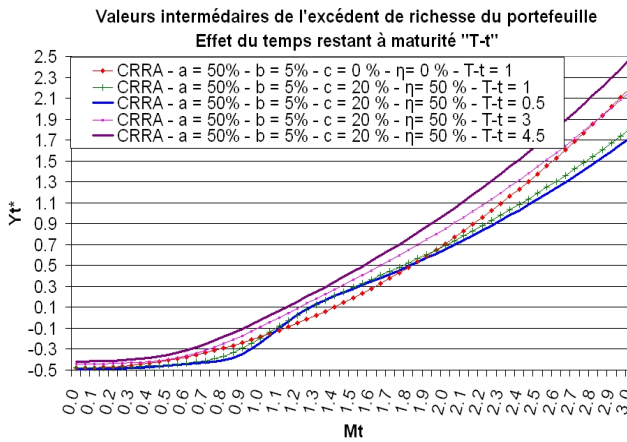


FIGURE 37. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - excédent de richesse du portefeuille - effet du temps restant à maturité  $T-t$ .

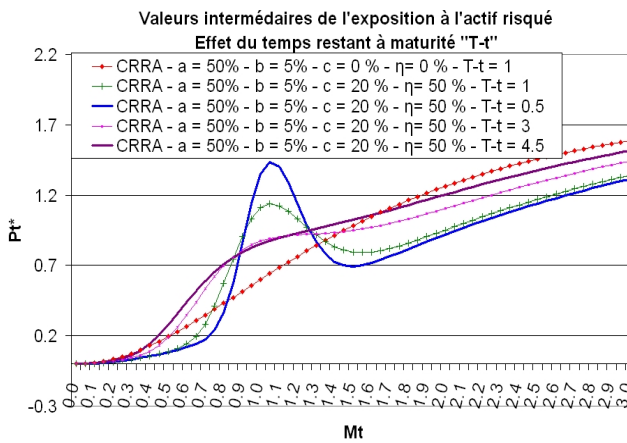


FIGURE 38. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - exposition à l'actif risqué - effet du temps restant à maturité  $T-t$ .

### 3.5.3. Structures de frais particulières.

- (1) Structure de frais sans incitation financière symétrique (i.e.  $a = W^0$ <sup>98</sup>).

La stratégie sans incitation financière s'identifie au portefeuille à poids constant  $h^* \equiv h/\gamma$  et on retrouve comme cas particulier de notre problème d'investissement avec incitation financière, les problèmes étudiés par [Hodder Jackwerth, 2006] ( $a = W^0$  et  $\eta = 0$ ) et par [Basak *et al.*, 2008] ( $a = W^0$  et  $\eta = d \times W^0$ <sup>99</sup>).

Nous avons représenté, pour différentes valeurs de  $\eta$ , la richesse intermédiaire du portefeuille (cf. figure (Fig.39)) et le niveau d'exposition à l'actif risqué (cf. figure (Fig.39)), en fonction de la valeur de l'actif risqué.

Dans un intervalle de valeurs élevés de l'actif risqué, le niveau d'exposition à l'actif risqué de la stratégie du modèle de [Basak *et al.*, 2008] converge vers le poids constant du portefeuille de Merton, noté  $h^*$  (dans notre exemple numérique,  $h^* = 2$ )<sup>100</sup> et cela sans jamais excéder cette valeur (cf. figure (Fig.40)).

Cette propriété n'est plus vérifiée dans le cas où  $a \leq W^0$ . Voir par exemple la figure (Fig.28) : dans l'exemple numérique considéré ( $a = 50\% < W^0 = 122\%$  et  $\eta = d \times W^0$ ), l'exposition à l'actif risqué du portefeuille avec incitation financière commence par excéder l'exposition du portefeuille de référence, sans incitation financière (qui ne s'identifie plus au portefeuille de Merton) avant de converger très lentement vers le poids du portefeuille  $h^*$  (convergence lente qui n'est pas visible sur la figure).

- (2) Structure de frais comprenant sans incitation financière ( $a = W^0$ ) et sans frais de gestion variables (i.e.  $c = 0$ ) :

Nous avons représenté, pour différente valeur de  $\eta$ , la richesse intermédiaire du portefeuille (cf. figure (Fig.41)), et le niveau d'exposition à l'actif risqué (cf. figure (Fig.42)), en fonction de la valeur de l'actif risqué<sup>101</sup>.

On notera, dans un intervalle de valeurs basses et hautes de l'actif risqué, la sur-exposition à l'actif risqué de la stratégie optimale par rapport à la stratégie de référence sans incitation financière (qui s'identifie au portefeuille de Merton) (cf. figure (Fig.42)).

98. ce qui correspond au choix d'un montant maximum de commission fixe, i.e.  $a^0 \equiv b \times a = b \times W^0$ , ou de façon équivalente au choix d'un montant maximum de budget de risque  $a = W^0$ . La structure de frais prend la forme suivante :  $F_T(W_T) = bW_T + \{\eta^0 + c \times (W_T - W^0)\} \times 1_{W_T \geq W^0}$ .

99. nous considérerons ici le cas où le benchmark est fixe ; le cas où le benchmark est stochastique sera analysé dans la dernière section du présent chapitre.

100. En effet, dans le cas particulier où  $a = W^0$ , le portefeuille de Merton s'identifie à la stratégie sans incitation financière.

101. Autrement dit la fonction de rémunération prend la forme suivante :  $F(W_T) = bW_T + b \eta^0 \times 1_{W_T \geq W^0}$ .

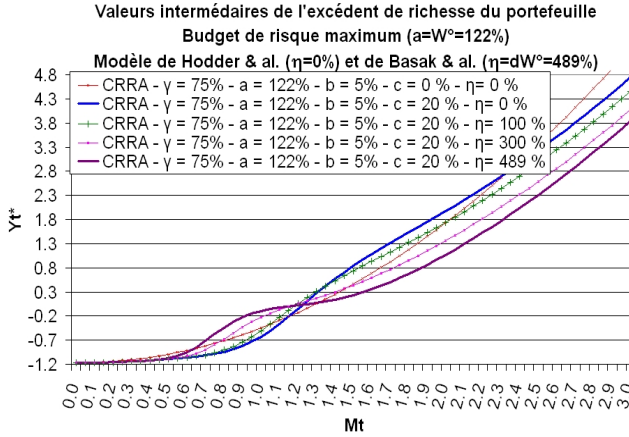


FIGURE 39. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - budget de risque maximum ( $a = W^0$ ) - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de bonus  $\eta \times b$  ( $b$  fixé).

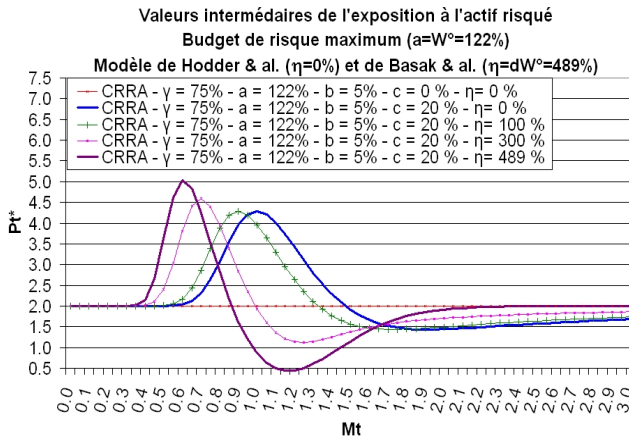


FIGURE 40. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - budget de risque maximum ( $a = W^0$ ) - exposition à l'actif risqué - effet du niveau de bonus  $\eta \times b$  ( $b$  fixé).

On remarquera aussi que, dans un intervalle de valeurs centrales de l'actif risqué, la stratégie optimale tend à devenir passive avec très peu voir plus d'exposition à l'actif risqué.

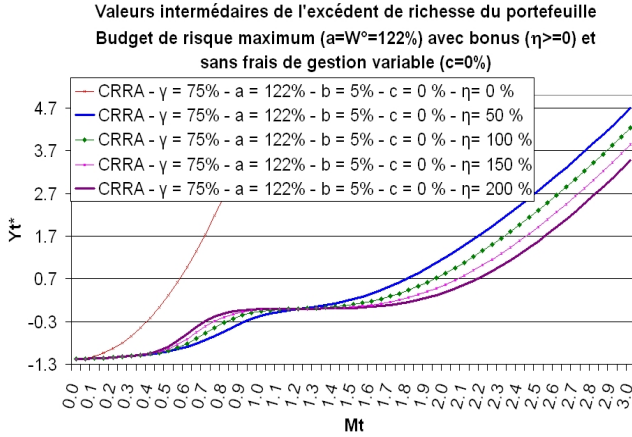


FIGURE 41. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - budget de risque maximum ( $a = W^0$ ) et frais de gestion variables nuls ( $c = 0$ ) - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de bonus  $\eta \times b$  ( $b$  fixé).

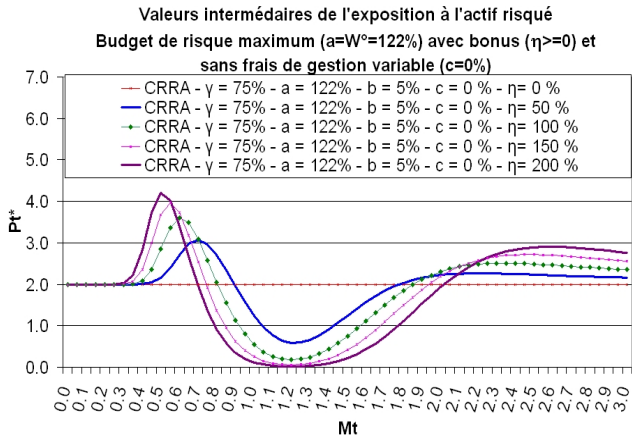


FIGURE 42. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et bonus - budget de risque maximum ( $a = W^0$ ) et frais de gestion variables nuls ( $c = 0$ ) - exposition à l'actif risqué - effet du niveau de bonus  $\eta \times b$  ( $b$  fixé).

### 3.6. Conclusion de la section.

Dans cette troisième section, nous avons étudié le problème d'investissement de l'asset manager CRRA qui cherche à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération finale. La structure de rémunération incitative considérée, plus générale que celle analysée dans la seconde section, comprend non seulement des frais de gestion variables mais également un montant de bonus versé en cas de sur-performance<sup>102</sup>.

#### 3.6.1. Expression de la richesse terminale optimale.

Dans un premier temps, nous avons montré que l'expression de la richesse terminale optimale<sup>103</sup>, fournie dans le théorème 5, prend une forme différente selon que le montant du bonus, versé en cas de sur-performance, est supérieur ou inférieur à un seuil limite fonction des autres paramètres du modèle.

Les principales caractéristiques du profil de gain sont les suivantes :

- (1) Un profil optimal à deux états de richesse si le montant du bonus de sur-performance est "faible" :

Dans le cas où le montant de bonus de sur-performance est inférieur ou égal au seuil limite, l'expression de la solution optimale est similaire à celle du problème étudiée dans la seconde section.

Il s'agit d'une stratégie à deux états avec une discontinuité de valeur entre l'état où se produit une sous-performance<sup>104</sup> et celui correspondant à une sur-performance.

Seule différence avec les résultats de la section précédente : dans la zone de sur-performance, le budget de risque est plus important et comprend un terme supplémentaire qui est proportionnel au montant du bonus de sur-performance.

---

102. Il s'agit de la forme générale donnée par l'équation 1.1 de la section 1.2, sous l'hypothèse supplémentaire d'un benchmark fixe (i.e. la cible de richesse finale de l'investisseur est fixe).

La structure de rémunération de l'asset manager comprend les quatre composantes suivantes : des frais de gestion sur encours, une commission de gestion incitative symétrique, des frais de sur-performance (asymétrique), ainsi qu'une composante incitative "binaire" prenant la forme d'un bonus fixe payé en cas de sur-performance.

103. Expression de la richesse finale optimale en fonction de la valeur du portefeuille d'actif risqué sous-jacent (portefeuille à croissance optimale ou logarithmique).

104. intervalle des valeurs du portefeuille d'actifs risqués sous-jacent, i.e. le portefeuille à croissance optimale, pour lesquelles la richesse terminale est en dessous du niveau cible de richesse finale.

- (2) Un profil à trois états de richesse si le montant du bonus de sur-performance est "élevé" :

Dans le cas où le montant du bonus est supérieur ou égal au seuil limite, l'expression de la solution optimale prend une forme à trois états.

Pour les deux intervalles de valeurs du portefeuille sous-jacent les plus extrêmes, correspondant à une sous-performance ou à une sur-performance par rapport au niveau de richesse cible, on retrouve les mêmes expressions que celles des deux états du cas précédent (i.e. niveau de bonus "faible").

Dans le troisième état de valeurs médianes du sous-jacent, la richesse optimale pour l'asset manager est égale à cible fixe de richesse finale de l'investisseur (gestion passive).

- (3) Un seuil limite qui est fonction du niveau de risque et du degré d'incitation financière

Le seuil limite de bonus, au-dessus duquel il devient optimal pour l'asset manager d'implémenter une gestion passive dans un intervalle de valeurs médianes du sous-jacent (expression à trois états de richesse), est fonction croissante des trois paramètres suivants :

- le montant de la commission de gestion fixe ou, ce qui revient au même, le seuil implicite de sous-performance maximale tolérée ;
- le "degré d'incitation financière" représenté par le ratio entre le taux de frais de sur-performance (commission asymétrique) et le taux de frais de gestion sur encours (commission symétrique) ;
- le paramètre de tolérance au risque de l'asset manager qui se définit comme l'inverse du paramètre d'aversion au risque.

- (4) Un profil de gain qui est discontinu et asymétrique

Le "pay-off" du portefeuille optimal<sup>105</sup>, exhibe un saut de richesse au niveau d'un point "limite" de valeur du portefeuille sous-jacent séparant la zone de sous-performance avec la zone de sur-performance ou de neutralité par rapport à la richesse cible (selon qu'il s'agit de l'expression à deux ou à trois états de richesse).

L'expression de la richesse finale du portefeuille optimal est asymétrique : cette asymétrie traduit la différence entre la forme de la stratégie optimale dans l'état de sur-performance et dans l'état de sous-performance.

L'asymétrie entre ces deux états est d'autant plus importante que le niveau d'incitation financière est élevé : ce dernier étant une fonction croissante, d'une part, du ratio entre taux des frais de gestion variables et taux de frais de gestion sur encours, et d'autre part, du montant de bonus versé

---

105. On rappelle que nous désignons par "pay-off" l'expression de la richesse finale optimale en fonction de la valeur du portefeuille d'actif risqué sous-jacent (portefeuille à croissance optimale ou logarithmique).

en cas de sur-performance.

(5) Une double forme de conflit d'intérêt entre le gérant et l'investisseur

Une première forme de conflit d'intérêt provient, comme dans le cadre de la section précédente, de l'asymétrie de l'expression de la valeur terminale optimale entre la zone de sur-performance et la zone de sous-performance ; celle-ci traduit l'appétit accru de l'asset manager pour le risque dans une zone de valeurs élevées du sous-jacent.

Un deuxième type de conflit d'intérêt concerne plus particulièrement les cas où le montant du bonus est suffisamment élevé pour inciter l'asset manager à mettre en place une stratégie partielle d'assurance de portefeuille ; ce qui, dans ce cas, traduit une forte aversion à la perte de l'asset manager dans un intervalle de valeurs médianes du sous-jacent.

(6) Comparaison avec la littérature existante

Le problème considéré généralise, par certains aspects, deux articles déjà publiés dans la littérature :

- le modèle de frais de [**Hodder Jackwerth, 2006**] : il s'agit du problème considérée dans la seconde section (i.e. rémunération sans bonus de sur-performance) dans le cas particulier où l'asset manager est CRRA. Dans ce cas, la stratégie optimale prend la forme à deux états décrite précédemment.
- le modèle de flux de [**Basak et al., 2008**] : ce modèle de flux correspond analytiquement à notre modèle de frais dans le cas particulier où la structure de rémunération est linéaire par morceaux en fonction de l'encours. Dans ce cas, la stratégie optimale prend la forme à trois états décrite précédemment.

*3.6.2. Sensibilité de la stratégie dynamique optimale aux paramètres de la rémunération incitative.*

Nous plaçant sous les hypothèses restrictives du modèle de  $BES$ , nous avons dans un second temps, étudié la sensibilité du profil de gain optimal et de l'allocation dynamique correspondante au changement de valeur des paramètres de rémunération (et de risque) du modèle.

Les principaux résultats obtenus sont les suivants :

(1) Sensibilité du profil de gain au niveau d'incitation financière :

La sensibilité du profil de gain aux changements de la politique de rémunération incitative dépend de la nature de l'incitation financière considérée :

Une augmentation du montant de bonus, toute chose restant égale par



ailleurs, aura tendance à diminuer le niveau de risque de la stratégie optimale ; le niveau de perte potentielle étant réduit et l'amplitude de l'intervalle correspondant à une gestion passive plus grande (ceci se faisant au détriment des deux autres intervalles où il est optimal de gérer activement le portefeuille).

A l'opposé un niveau de taux de frais de sur-performance plus élevé sera synonyme d'un profil de gain plus risqué.

- (2) Impact sur le niveau d'exposition à l'actif risqué de la valeur du bonus de sur-performance :

Pour les niveaux "faibles" de bonus, on retrouve la courbe en forme de "cloche" asymétrique décrite dans la section précédente (cas particulier où le montant du bonus versé est nul) avec une sur-exposition, par rapport au cas sans incitation financière, dans une zone médiane de valeurs du sous-jacent.

Pour les niveaux de bonus "élevé", il s'agit d'une courbe en forme de "v" avec, à l'opposé du cas précédent, une sur-exposition dans les zones de valeurs basses et hautes de l'actif risqué et une sous exposition dans la zone médiane de valeurs du sous-jacent où il est optimal pour l'asset manager de gérer passivement le portefeuille de l'investisseur.

#### 4. Critère Moyenne Variance avec rémunération minimale

##### 4.1. Problème d'investissement considéré et expression de la richesse terminale optimale.

Nous considérons à nouveau le problème de l'asset manager qui reçoit mandat de gérer un portefeuille pour le compte d'un investisseur en contrepartie d'une rétribution financière.

Le cadre d'analyse est le même que celui décrit dans la première section du présent chapitre :

- (1) Nous faisons les hypothèses suivantes :
  - Toutes les contraintes de gestion (le choix du benchmark et la structure de rémunération intégrant une commission sur encours et, éventuellement, une commission de performance) sont fixées dans le cadre d'un mandat de gestion avant la date d'investissement.
  - L'asset manager cherche à maximiser, à un horizon d'investissement fixé, l'utilité espérée de sa rémunération.
  - Cet horizon d'investissement est choisi en accord avec l'investisseur donnant mandat de gestion ; il correspond à la date de fin de mandat de gestion, date à laquelle le paiement de la commission du gérant de portefeuille est supposé avoir lieu.
- (2) Nous analysons l'expression de la stratégie dynamique optimale suivie par l'asset manager avec incitation financière et la comparons à celle de l'asset manager de "référence" ne recevant pas d'incitation financière<sup>106</sup>.

De plus, nous faisons l'hypothèse que le benchmark considéré est un seuil de richesse fixe ( $B_T \equiv W^0$ ) et nous considérons le cas particulier de la structure de rémunération la plus courante en pratique, donnée par l'expression suivante :

$$F_T(W_T) \equiv b W_T + c (Y_T)^+$$

avec  $b$  qui désigne les frais de gestion sur encours et  $c$  les frais de gestion de sur-performance,

avec  $Y_T \equiv W_T - W^0$  l'écart entre la valeur du portefeuille et la richesse cible et avec  $W^0$  qui désigne la cible de richesse finale de l'investisseur.

Nous nous intéressons dans cette section au cas particulier où la fonction d'utilité HARA de l'asset manager est une fonction quadratique.

---

106. Il s'agit du cas où l'investisseur ne paye pas de commission de sur-performance au gérant et que seule une commission sur encours est perçue ; dans ce cas particulier, la rémunération de l'asset manager est proportionnelle à la valeur total des actifs du portefeuille géré et la stratégie optimale pour les deux investisseurs est la même (i.e. seul cas de figure où il n'y a pas de conflit d'intérêt).

Son expression est la suivante :  $v(x, x^0) \equiv u^*(x^0 - x) \equiv -\frac{(x^0 - x)^2}{2}$

avec les variables et paramètres de cette expression définis comme dans la section 1 du présent chapitre :

$x \equiv F_T(W_T) \equiv b W_T + c (Y_T)^+$  désigne la rémunération de l'asset manager,

$x^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times F_T(W^0) \equiv (1 - \alpha^0) \times b W^0$  le niveau de rémunération maximale cible où on suppose que  $\alpha^0 < 0$ .

Soit encore, en posant  $z' \equiv (F_T(W_T) - F_T(W^0))/b \equiv Y_T + d (Y_T)^+$ , avec  $d \equiv c/b$ , et  $a \equiv -\alpha^0 \times W^0 > 0$  où  $a > 0$  :

$v(x, x^0) \equiv u^*(x^0 - x \equiv b(a - z')) \cong w(z') \equiv u^*(a - z')$ .

Finalement, de manière équivalente, nous considérons la forme de fonction d'utilité quadratique plus connue suivante<sup>107</sup> :

$$u(z') = z' - (z')^2/2a$$

Notre motivation est double :

- (1) D'une part, le choix d'une fonction d'utilité quadratique revient à considérer implicitement que le critère d'investissement est celui du problème moyenne variance, critère très répandu en gestion pour compte de tiers.
- (2) D'autre part, la fonction d'utilité quadratique appartient au sous-ensemble des fonctions d'utilité HARA ayant un profil de richesse "concave"<sup>108</sup> qui est complémentaire du sous-ensemble des fonctions d'utilité HARA avec un profil "convexe"<sup>109</sup> déjà considéré dans les sections précédentes.

Nous partons du constat qu'une incitation financière à la performance induit nécessairement l'asset manager à modifier son comportement d'investissement ; cela pouvant le conduire, dans certains cas décrits dans les sections précédentes, à un déinvestissement en actif risqué ou au contraire à une prise de risque supplémentaire.

Nous cherchons à savoir si la prise en compte d'une contrainte d'assurance de portefeuille supplémentaire peut avoir un effet correctif sur les comportements d'investissement de l'asset manager induits par l'existence d'une incitation financière et non souhaitables du point de vue de l'investisseur final<sup>110</sup>.

107. En effet, on a  $u(z') = u^*(a - z')/a + a/2 \cong w(z') \equiv u^*(a - z')$

108. En effet, l'expression de la fonction d'utilité quadratique correspond à celle donnée par l'équation (2.1) dans le cas particulier où  $\gamma \equiv -1$ ,  $C_1 \equiv -1/A$ ,  $C_2 \equiv A/2$  et  $A \equiv a > 0$ . Ce qui correspond bien à un profil "concave" puisque  $\gamma < 0$  et  $C_1 < 0$ .

109. Il s'agit des fonctions d'utilité HARA dont l'expression est donnée par l'équation (2.1) dans le cas où  $\gamma > 0$  et  $C_1 > 0$ .

110. [Basak *et al.*, 2008] suivent une approche similaire : ils analysent dans le cadre d'un modèle de flux de fonds où la rémunération de l'asset manager est liée au montant de nouvelles souscriptions, l'effet de l'introduction d'une contrainte de protection sur le comportement de l'asset manager "CRRA" (i.e. supposé avoir une aversion pour le risque constante).

Nous faisons donc l'hypothèse supplémentaire que l'asset manager doit prendre en compte une contrainte d'assurance de portefeuille sur la richesse finale ( $W_T \geq \underline{W}$ ).

Nous supposons que la valeur de cette richesse minimale est supérieure à 0, i.e.  $\underline{W} \geq 0$  (cas limite d'aversion minimale correspondant à exclure la possibilité d'un niveau de rémunération négatif pour l'asset manager<sup>111</sup>).

Nous supposons également que cette valeur plancher est inférieure au seuil de richesse au delà duquel une commission de sur-performance est payée à l'asset manager, i.e.  $\underline{W} < W^0$ ; en effet, dans le cas contraire, cela reviendrait à supposer que l'investisseur paye des frais variables en dessous du niveau toléré de richesse minimum.

Ce double objectif (optimisation moyenne variance et contrainte d'assurance de portefeuille) peut s'interpréter de deux manières :

- (1) Première hypothèse : les deux contraintes de gestion sont imposées par l'investisseur dans le cadre du contrat de délégation de gestion qui le lie à l'asset manager<sup>112</sup>.

Dans ce cadre, l'asset manager est tenu d'effectuer les investissements pour lesquels il a le mandat de gestion en suivant un processus de gestion qui intègre ce double objectif :

- Objectif de maximisation de la performance sous contrainte d'un seuil maximum de volatilité (se traduisant par le choix du paramètre de tolérance au risque,  $a$ , de la fonction d'utilité, dont le niveau est imposé par l'investisseur à l'asset manager).
- Contrainte d'assurance de portefeuille; celle-ci aura pour effet de mitiger, le cas échéant, la prise de risque supplémentaire de l'asset manager en cas de sous-performance (risque potentiellement pris afin de "maximiser" ses chances de recevoir une part de commission variable supplémentaire).

- (2) Seconde hypothèse : indépendamment des choix de l'investisseur, ce double objectif correspond aux propres choix de l'asset manager (ou lui est imposé par exemple par son risk manager) qui souhaite s'assurer d'un niveau de rémunération minimum et contrôler l'écart type de sa richesse.

---

111. Cela revient également à exclure la négativité de la valeur finale du portefeuille de l'investisseur; en effet la richesse terminale, qui correspond à la stratégie optimale du problème Moyenne Variance sans contrainte de protection, peut prendre des valeurs négatives, ce qui n'est pas souhaitable en pratique quel que soit le niveau d'aversion de l'asset manager et de l'investisseur donnant mandat de gestion.

112. Par exemple, dans le cas d'un fonds dédié, les termes définissant la gestion sont rédigées dans le cadre d'un document juridique appelé prospectus du fonds; ce document doit inclure non seulement la structure de tarification en vigueur, mais aussi le cas échéant les contraintes de risque que doit respecter le gérant telles qu'un niveau de volatilité maximale ou une contrainte d'assurance de portefeuille.

Par conséquent, nous supposons qu'il y a, selon les cas, une ou deux sources de conflit d'intérêt entre l'investisseur et l'asset manager : la première étant due, comme dans les sections précédentes, à l'existence d'une incitation financière, la seconde provenant, le cas échéant, de l'écart entre le niveau de protection considéré par l'asset manager et celui souhaité par l'investisseur final (seulement sous l'hypothèse (2) ci-dessus).

Quelque soit l'hypothèse faite, il en résulte que l'asset manager a des préférences d'investissement se traduisant par le profil de risque mixte suivant :

- convexe pour les valeurs de richesse faibles (provenant de la contrainte de protection).
- concave pour les valeurs élevées de richesse provenant du choix particulier d'une fonction d'utilité quadratique<sup>113</sup>.

Sous ces hypothèses, le problème de l'asset manager prend la forme suivante :

PROBLÈME 17.

$$(P17) \begin{cases} \max_{Y_T \in L^2(P)} E \left\{ u(Y_T + d(Y_T)^+) \right\} \\ \text{s.a. } E(Y_T/H_T) \equiv 1 - W^0 E \{1/H_T\} \quad ; \quad Y_T \geq Y^0 \end{cases}$$

avec :

$Y_T \equiv W_T - W^0$ : l'écart entre la valeur finale du portefeuille,  $W_T$ , et la cible de richesse de l'investisseur,  $W^0$ , avec  $0 \leq W^0 \leq 1/E \{1/H_T\}$ <sup>114</sup>,

$Y^0 \equiv \underline{W} - W^0$ : le niveau de sous-performance maximale tolérée avec  $-W^0 \leq Y^0 \leq 0$ <sup>115</sup>,

$u(z) = z - z^2/2a$ : la fonction d'utilité quadratique de l'asset manager, avec  $a, a > 0$ , le paramètre de tolérance au risque de l'asset manager,

113. Le choix d'une fonction d'utilité quadratique implique en particulier que les paramètres d'aversion relative et absolue au risque sont des fonctions croissantes du niveau de richesse.

114. Hypothèse faite sans perte de généralité qui permet de conserver une simplicité d'écriture dans l'énoncé de notre problème.

Cette hypothèse revient à ne considérer que les niveaux de richesse finale atteignables par une stratégie admissible de montant d'investissement initial inférieur ou égal à un (i.e. stratégie d'assurance de portefeuille avec cible de protection du capital).

Dans le cas contraire (stratégie avec cible de sur-performance par rapport à l'obligation Zéro-Coupon, actif sans risque à l'horizon d'investissement), on peut toujours, par un simple changement de variables, se ramener au cas où la richesse cible est exactement égale à la performance de l'actif Zéro-Coupon.

Notons enfin que la résolution de ce problème est indépendante, à la contrainte de budget près, du choix du benchmark (fixe ou stochastique) .

115. Remarquons si l'on pose  $\underline{W} \equiv \rho \times W^0$  avec  $0 \leq \rho < 1$ , on a  $Y^0 = (\rho - 1) \times W^0$ , et la contrainte explicite de protection se ré-écrit  $W_T \geq \rho \times W^0$ .

En particulier, on a  $Y^0 = 0$  (contrainte de protection maximum) pour  $\rho = 1$  (et dans ce cas  $W_T^* = W^0$  sauf si  $W^0 < 1/E \{1/H_t\}$ ).

De même, on a  $Y^0 = -W^0$  (contrainte de protection minimum) pour  $\rho = 0$ .

$d \equiv c/b$ : le rapport entre le taux de la commission de sur-performance et le taux de la commission de gestion sur encours, avec  $0 < b < 1$  et  $0 \leq c \leq 1 - b$ .

Le problème (P17) sans contrainte de protection, i.e.  $Y^0 \equiv -\infty$ , s'identifie au problème (P15) dans le cas particulier où la fonction d'utilité est quadratique. L'expression de la solution optimale est donnée dans le théorème 4.

L'introduction d'une contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille (ou, de façon équivalente, de montant minimum de rémunération pour l'asset manager), i.e.  $Y^0 > -\infty$ , rend plus complexe la résolution du problème.

Nous présentons dans le théorème qui suit, l'expression de la solution optimale du problème (P17)

THÉOREME 6. *La richesse terminale solution du problème (P17) est donnée par l'expression suivante :*

(1) Pour  $\zeta \geq \zeta^* \equiv d/(d+2)$ <sup>116</sup>,

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{a}{1+d} \left(1 - \frac{1}{1+d} \frac{k}{H_T}\right) & \text{si } H_T > H^* \\ a \left(1 - \frac{k}{H_T}\right) & \text{si } \underline{H}^* < H_T \leq H^* \\ Y^0 & \text{si } H_T \leq \underline{H}^* \end{cases}$$

(2) Pour  $0 < \zeta \leq \zeta^*$ ,

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{a}{1+d} \left(1 - \frac{1}{1+d} \frac{k}{H_T}\right) & \text{si } H_T > \underline{\underline{H}}^* \\ Y^0 & \text{si } H_T \leq \underline{\underline{H}}^* \end{cases}$$

$$\text{avec } H^* = \frac{k}{1+d/(d+2)}, \underline{H}^* = \frac{k}{1+\zeta}, \underline{\underline{H}}^* \equiv \frac{k}{1+d} \left[1 + \zeta + d\zeta \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2(\zeta+1)}{d\zeta}}\right)\right]^{-1} \quad 117$$

$$\text{avec } \zeta \equiv -Y^0/a$$

L'expression de la richesse terminale optimale donnée dans le théorème (6) prend une forme différente selon le niveau de sous-performance maximale considéré,  $Y^0$  :

(1) Cas  $\zeta \geq \zeta^* \Leftrightarrow Y^0 \leq -\zeta^* \times a < 0$

Dans ce cas, correspondant aux plus faibles niveaux de protection, la stratégie optimale est similaire à la stratégie sans contrainte ; seule différence, elle exhibe trois états de richesse au lieu de deux pour le cas sans contrainte de protection. Dans le troisième état de richesse, la contrainte de protection est active, et la richesse finale du portefeuille en excès du niveau cible de l'investisseur est égale au niveau de perte maximale tolérée (i.e.  $Y^0$ ).

116.  $\zeta^*$  est solution de  $\underline{H}^* = k/(1+\zeta)$ . De façon équivalente,  $\zeta^* \equiv d/(d+2)$  est solution de l'équation suivante :  $f(1+\zeta) = 0$  avec  $f(x) \equiv g(x/(1+d)) - g(1+\zeta) + A\zeta(1+\zeta-x)$  ou encore  $f(1+\zeta) \equiv g((1+\zeta)/(1+d)) - g(1+\zeta) = 0$  avec  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x)] \equiv \frac{A}{2}(1-x)^2$ .

117.  $k/\underline{\underline{H}}^*$  est solution de l'équation suivante :  $f\left(\frac{k}{\underline{\underline{H}}^*}\right) = 0$  avec  $f(x) \equiv g(x/(1+d)) - g(1+\zeta) + A\zeta(1+\zeta-x)$  et avec  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x)] \equiv \frac{A}{2}(1-x)^2$

(2) Cas  $0 < \zeta \leq \zeta^* \Leftrightarrow -\zeta^* \times a \leq Y^0 < 0$

Dans ce cas, correspondant à une contrainte de protection plus forte, seul deux états sur trois subsistent : l'état des richesses élevées, où la stratégie suivie par l'asset manager consiste à augmenter sa rémunération par rapport à celle perçue dans le cas sans incitation financière, et l'état de protection de la richesse dans lequel la richesse finale du portefeuille en excès du niveau cible de l'investisseur est égale à  $Y^0$ .

On remarquera qu'il existe une discontinuité entre ces deux états de richesse puisqu'on a  $\underline{H}^* > \frac{k}{1+d} > H^0 \equiv \frac{k}{(1+d)(1+(1+d)\zeta)}$ <sup>118</sup>.

D'autre part, quand la valeur de  $\zeta$  diminue, le niveau de protection augmente et la longueur de l'intervalle des valeurs basses du sous-jacent  $H_T$ , où la contrainte d'assurance de portefeuille est active, diminue.

A la limite, quand  $\zeta \rightarrow 0$ , on a  $\underline{H}^* \rightarrow k/(1+d)$ , et  $Y^0 \rightarrow 0$ . Autrement dit, la stratégie limite s'identifie à une stratégie d'assurance de portefeuille de niveau de protection  $W^0$  si  $W^0 \times E\{1/H_T\} < 1$ <sup>119</sup>.

On notera que dans le cas central correspondant à  $\zeta = \zeta^*$ , les deux expressions de la stratégie se confondent : en effet, on a :  $\zeta = \zeta^* \Rightarrow H^* = \underline{H}^* = \underline{H}$ .

Finalement, on rappelle que, sous les hypothèses du modèle de *Black & Scholes*, il existe une relation bi-univoque entre la valeur de chacun des trois portefeuilles suivants pris deux à deux : la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , celle du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , et enfin, celle de l'actif risqué,  $M_t$ <sup>120</sup>.

Cette propriété nous permettra, à tout instant  $t$ , d'exprimer la valeur de la richesse optimale en excès de celle du benchmark, notée  $Y_t^*$ , en fonction de  $M_t$  ; cette expression nous sera utile dans la suite pour analyser les propriétés de la stratégie optimale.

## 4.2. Analyse de sensibilité du pay-off optimal.

En nous appuyant sur le même exemple d'application numérique que dans les sections précédentes, dans le cadre particulier du modèle de *Black & Scholes* à deux actifs, nous analysons la sensibilité du profil de gain aux variations des paramètres de rémunération et de risque du modèle considéré.

Nous comparerons le profil de gain final ("pay-off") de l'asset manager recevant des frais de gestion variables ( $c \neq 0$ ) avec celui de l'asset manager sans incitation

118. Ce qui implique que  $Y_T^*(\underline{H}^*) > Y_T^*(H^0) \equiv Y^0$ .

119. pour  $W^0 \times E\{1/H_T\} = 1$ , la stratégie limite s'identifie à la stratégie passive, pour laquelle on a  $Y_T^* = 0$  ou encore  $W_T^* = W^0$ .

120. En particulier, dans le cadre du modèle de *BS*, on obtient les propriétés de transformation suivantes qui permettent d'exprimer la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , ou du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , en fonction de celle de l'actif risqué  $M_t$  et réciproquement : on a,  $H_t = \Psi(t)(M_t)^h$  avec  $\Psi(t) \equiv e^{(r-\lambda)(\frac{t}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} - \frac{\lambda}{2})t} = e^{(1-h)(r+\frac{\lambda^2}{2h})t} = e^{(1-h)(r+\frac{h\sigma^2}{2})t}$ , et  $H_t^* = \Gamma(t)(M_t)^{h^*}$  avec  $\Gamma(t) \equiv H_0^* e^{(1-h^*)(r+\frac{(\lambda/\gamma)^2}{2h^*})t} = H_0^* e^{(1-h^*)(r+\frac{h^*\sigma^2}{2})t}$ .

financière ( $c = 0$ ). Nous nous intéresserons en particulier à l'effet, sur le profil de gain optimal, d'une contrainte de protection explicite,  $Y_T \geq Y^0$  p.s., avec  $Y^0 > -\infty$  couplée à l'existence d'une forme de rémunération incitative.

#### 4.2.1. Sensibilité aux variations du taux des frais de gestion variables $c$ .

Nous avons représenté, pour différentes valeurs du taux des frais de gestion variables, l'excédent de richesse du portefeuille (cf. figure (Fig.43)), de l'asset manager (cf. figure (Fig.44)) et de l'investisseur final (cf. figure (Fig.45)), en fonction de la valeur du sous-jacent,  $M_T$ .

Ces figures illustrent le caractère discontinu du profil de gain optimal pour l'asset manager avec incitation financière. En effet, celui-ci ressemble au "pay-off" d'une option binaire.

La stratégie dynamique suivie par l'asset manager avec incitation financière exhibe les caractéristiques suivantes :

- Dans l'intervalle de valeurs de l'actif risqué les plus basses, où la contrainte de protection joue, la performance de la stratégie avec incitation financière est en ligne avec la stratégie sans incitation financière (courbe rouge).
- Dans un intervalle de valeurs intermédiaires/basses de l'actif risqué et uniquement pour les niveaux de taux de frais de gestion variables inférieur à un seuil (dans notre exemple numérique en dessous de 7%, cf. courbe pour  $c = 1\%$ )<sup>121</sup>, la stratégie avec incitation financière sous-performe la stratégie sans incitation financière (courbe rouge).
- Dans un intervalle de valeurs médianes de l'actif risqué, le portefeuille avec incitation financière sur-performance le portefeuille de référence sans incitation financière (courbe rouge) (voir la figure (Fig.43)). De plus, le montant de la rémunération de l'asset manager par rapport au cas sans incitation financière est considérable et croît avec la valeur du taux des frais de gestion variables (voir la figure (Fig.44)).
- Enfin, dans un intervalle de valeurs élevées de l'actif risqué, le portefeuille avec incitation financière sous-performe très nettement la stratégie sans incitation financière (courbe rouge). L'amplitude de cette sous-performance croît avec la valeur du taux des frais de gestion la commission variable,  $c$  (voir la figure (Fig.45)).

On en déduit que, la considération d'une contrainte explicite de protection de la richesse couplée au choix d'une fonction d'utilité quadratique, limite fortement l'étendue de la zone de sous-performance par rapport à la stratégie sans incitation ainsi que le niveau de cette sous-performance; ce qui n'est pas le cas pour le profil convexe de l'asset manager CRRA, avec contrainte implicite de protection, étudié dans les sections précédentes.

---

121. toute chose restant égale par ailleurs



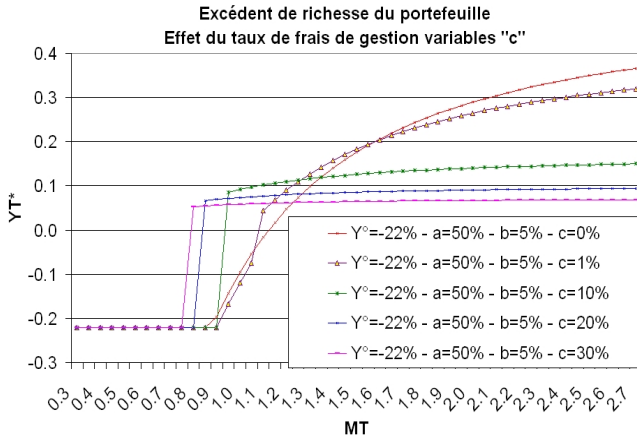


FIGURE 43. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$

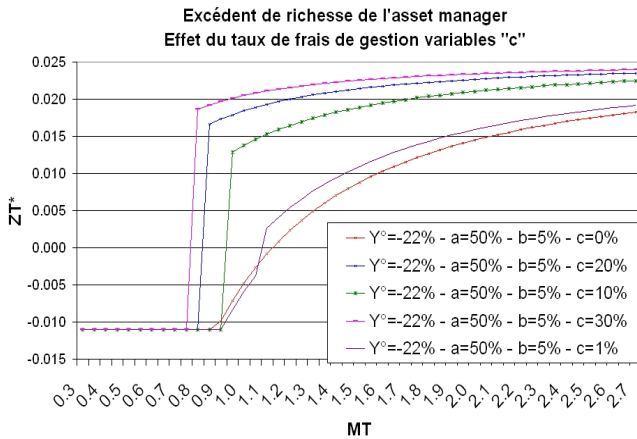


FIGURE 44. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - excédent de richesse de l'asset manager - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$

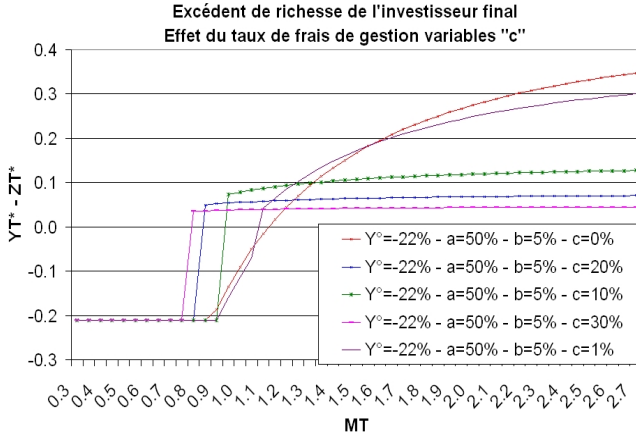


FIGURE 45. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - excédent de richesse de l'investisseur final - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$

A titre d'analyse complémentaire, nous avons représenté sur la figure (Fig.46) ci-dessous les valeurs prises par les "strikes", notés  $M^*$ ,  $M^{**}$  et  $M_0$ ,<sup>122</sup>, en fonction de la valeur du taux des frais de gestion variables.

Nous distinguons le cas avec protection du capital investi (i.e.  $Y^0 = -22\%$ ) et le cas sans protection (i.e.  $Y^0 = -\infty$ ).

- (1) cas sans protection du capital :  $Y^0 = -\infty$

Dans ce cas, on observe que, toute chose restant égale par ailleurs, la hausse du taux des frais de gestion variables,  $c$ , a pour effet de faire baisser le niveau du strike  $M^*$  (courbe violette).

Ainsi, la zone des valeurs de richesse élevées (où il y a sur-performance et pour laquelle le paramètre d'incitation financière,  $d \equiv c/b$ , joue un rôle d'effet de levier multiplicatif dans l'expression de la richesse de l'asset manager) s'étend au détriment de la zone de sous-performance.

- (2) cas avec protection du capital :  $Y^0 = -22\%$

122. Il s'agit des différents seuils de valeurs finales de l'actif risqué,  $M_T$ , qui séparent les états de la richesse finale où l'expression prend une forme différente. Nous utilisons la terminologie "strikes" pour désigner ces valeurs car, comme nous le précisons dans la sous-section suivante, la stratégie optimale peut se décomposer en position élémentaires optionnelles dont les strikes sont justement ces valeurs à une transformation près.

Sous l'hypothèse du modèle d'actifs de *BES*, il existe une fonction de correspondance bi-univoque entre  $M_t$ , la valeur de l'actif risqué à la date  $t$ , et  $H_t$  celle du portefeuille de croissance optimale; ainsi les valeurs de  $M^*$ ,  $M^{**}$ ,  $M^0$  se déduisent respectivement de celle de  $H^*$ ,  $\underline{H}^*$ ,  $\underline{H}^*$  (dont les expressions sont données dans le théorème (6)) par cette formule de correspondance.

Dans le cas où l'asset manager doit tenir compte d'une contrainte de protection, et toute chose restant égale par ailleurs, nous observons que le changement de valeur du taux des frais de gestion variables,  $c$ , modifie la forme de la stratégie de la manière suivante :

- (a) pour les valeurs du taux des frais de gestion variables,  $c$ , en dessous d'un seuil (correspondant dans l'exemple considéré à approximativement 8%) :

L'expression de la richesse optimale est celle à trois états de richesse donnée dans le théorème (6). Cette expression peut être vue comme celle de la richesse optimale du problème sans contrainte de protection à laquelle s'ajoute un troisième état correspondant aux valeurs les plus basses du sous-jacent ( $M \leq M^0$ ) pour lesquelles la protection joue et la stratégie n'est plus investie en actif risqué.

De plus, nous observons que la valeur de  $M^*$  décroît et celle de  $M^0$  croît avec le paramètre  $c$ .

Autrement dit, au fur et à mesure que le niveau considéré du taux des frais de gestion variables,  $c$ , augmente, la zone de valeurs faibles de l'actif risqué (pour laquelle la stratégie du gérant est passive) et la zone de valeurs élevées (pour laquelle l'expression de la richesse favorise la rémunération de l'asset manager relativement à la zone de sous-performance) s'étendent.

Cela se fait au détriment de la zone médiane de valeurs du sous-jacent où l'expression n'est pas favorable à la rémunération du gérant<sup>123</sup>.

- (b) Pour les valeurs du taux des frais de gestion variables,  $c$ , au-dessus de ce même seuil (8% dans notre exemple numérique) :

La stratégie optimale admet l'expression à deux états donnée du théorème (6).

Dans ce cas, il n'y a qu'un seul strike  $M^{**}$ , et nous observons que la valeur de  $M^{**}$  est une fonction décroissante du taux des frais de gestion variables,  $c$ .

De plus, l'intervalle de valeurs élevées de l'actif risqué, où il y a sur-performance (cas favorable à l'asset manager), s'étend au détriment de l'intervalle de valeurs basses de l'actif risqué dans lequel la stratégie optimale consiste à répliquer passivement le benchmark.

---

123. En effet, dans cet intervalle de valeurs de l'actif risqué où il y a sous-performance par rapport au benchmark, l'expression est similaire à celle de la stratégie sans incitation (à la constante de budget près).

Nous en déduisons que, la prise en compte d'une contrainte d'assurance de portefeuille tend à modifier de façon considérable le comportement de l'asset manager recevant des frais de gestion variables en l'incitant à réduire son profil de risque de la façon suivante :

- En augmentant par rapport au cas sans contrainte de protection, le seuil de valeur de  $M_T$  au-dessus duquel la stratégie est le plus impactée par l'incitation financière (état de richesse le plus élevé).
- En arbitrant, en partie ou intégralement (d'autant plus que la valeur du taux des frais de gestion variables,  $c$ , est élevée), l'état où l'asset manager gère activement le portefeuille et où se produit une sous-performance au profit d'un état de gestion passive sans exposition à l'actif risqué.

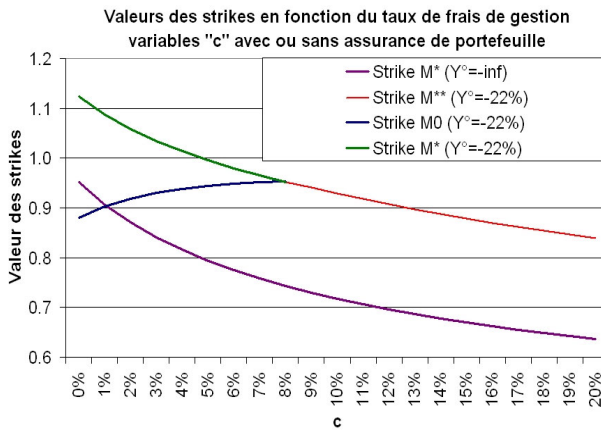


FIGURE 46. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - valeurs des strikes en fonction du taux des frais de gestion variables  $c$  avec ou sans assurance de portefeuille ( $Y^0 = -\infty$  ou  $Y^0 = -22\%$ )

4.2.2. *Sensibilité aux variations du paramètre de tolérance au risque,  $a$ , et aux variations du seuil de protection du capital,  $Y^0$ .*

Nous avons représenté sur les deux figures ci-dessous, pour différentes valeurs de chacun des deux paramètres de risque du modèle, la valeur finale de la stratégie optimale en fonction de celle de l'actif risqué.

- (1) Effet du changement de la valeur du seuil de protection du capital,  $Y^0$  :

Le montant de la perte dans la zone de sous-performance est une fonction décroissante de la valeur du seuil de protection (cf. figure (Fig.47)).

- (2) Effet du changement de valeur du paramètre de tolérance au risque,  $a$  :

Comme illustré sur la figure (Fig.48), quand la valeur du paramètre de tolérance au risque,  $a$ , augmente,

-le niveau de la sur-performance observée par rapport à la cible de richesse augmente,

-l'intervalle de valeurs médianes de l'actif risqué, correspondant à une sur-performance par rapport à la stratégie sans incitation financière, s'étend vers des valeurs plus élevées du sous-jacent,

-l'intervalle de valeurs basses du sous-jacent, où la contrainte de protection joue, et où une perte est enregistrée, s'étend également vers des valeurs plus élevées du sous-jacent.

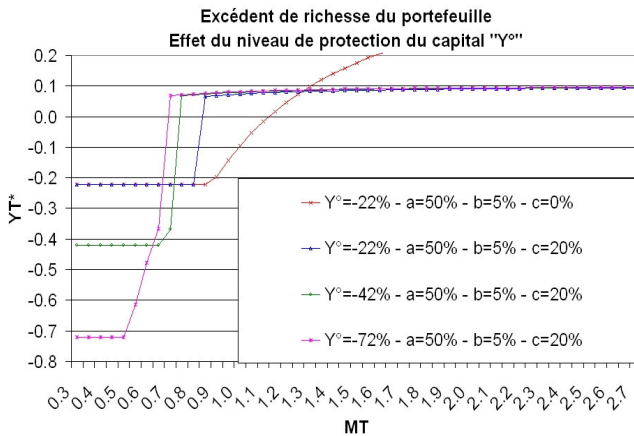


FIGURE 47. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de protection du capital  $Y^0$ .

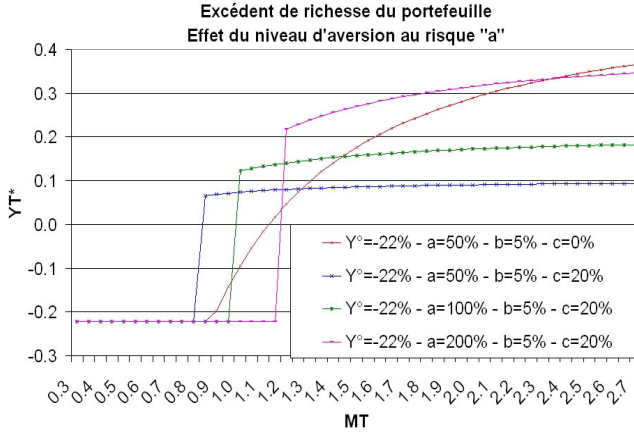


FIGURE 48. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de tolérance au risque  $a$ .

### 4.3. Analyse de la stratégie dynamique optimale.

#### 4.3.1. Expression de l'allocation dynamique optimale.

Nous pouvons en déduire l'expression de la valeur intermédiaire et de l'allocation dynamique correspondant à la stratégie dynamique optimale dans le cadre du modèle de  $B\mathcal{E}S$  à deux actifs (et une seule source de risque).

PROPRIÉTÉ 28. La valeur à la date  $t$  de la solution optimale du problème (P17), notée  $Y_t^*$ , est donnée par la formule suivante :

(1) Pour  $\zeta \geq \zeta^* \equiv d/(d + 2)$ ,

$$Y_t^* = Y^0 ZC(T-t) + ak \left( \frac{1}{(1+d)^2} - 1 \right) P(I_t, I^*, T-t) + ak P(I_t, \bar{I}^*, T-t) + \frac{ad}{1+d} B(I_t, I^*, T-t)$$

(2) Pour  $0 < \zeta \leq \zeta^*$ ,

$$Y_t^* = Y^0 ZC(T-t) + \frac{ak}{(1+d)^2} P(I_t, \bar{I}^*, T-t) + \frac{ad\zeta}{1+d} \left\{ \sqrt{1 + 2(\zeta + 1)/d\zeta} \right\} B(I_t, \bar{I}^*, T-t)$$

avec  $I_t$  qui désigne la valeur intermédiaire du portefeuille, atteignant la richesse terminale,  $I_T \equiv 1/H_T$ <sup>124</sup>,

124. On rappelle qu'il s'agit du portefeuille solution du problème dynamique de minimisation de la norme de la richesse terminale. Dans le cadre du modèle  $B\mathcal{E}S$  à deux actifs considérés, ce portefeuille s'identifie à une stratégie dynamique investissant un poids constant de la richesse

$$\zeta \equiv -Y^0/a, I^* = 1/H^*, \bar{T}^* = 1/\underline{H}^*, \bar{\bar{T}}^* = 1/\underline{\underline{H}}^*,$$

avec  $P(Z_t, X, T-t)$ , (resp.  $B(Z_t, X, T-t)$ ) qui désigne la valeur de l'option put européen, (resp. de l'option Put binaire) de strike  $X$ , d'échéance  $T-t$ , sur le sous-jacent  $Z_t$ , et avec  $ZC(T-t)$  qui est le prix de l'obligation Zéro-Coupon d'échéance  $T-t$  dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

PROPRIÉTÉ 29. Dans le cadre du modèle de Black & Scholes (à une seule source de risque), l'allocation de la stratégie dynamique optimale correspondant au problème (P17) est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{cases} w_t^* W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'actif risqué } M \\ (1 - w_t^*) W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'A.S.R} \end{cases}$$

avec  $w_t^* W_t^* \equiv w^B B_t + \frac{dW_t^*}{dI_t}(-h)I_t$  est donnée par la formule suivante<sup>125</sup> :

- Pour  $\zeta \geq \zeta^* \equiv d/(d+2)$ ,

$$w_t^* W_t^* = akhI_t \left[ \left( \frac{1}{(1+d)^2} - 1 \right) N(-d_1(I^*)) + N(-d_1(\bar{T}^*)) \right] + \frac{ad}{1+d} \frac{e^{-r(T-t)} h \Phi(d_2(I^*))}{\lambda \sqrt{T-t}}$$

- Pour  $0 < \zeta \leq \zeta^*$ ,

$$w_t^* W_t^* = \frac{ak}{(1+d)^2} hI_t N(-d_1(\bar{\bar{T}}^*)) + \frac{ad\zeta}{1+d} \left\{ \sqrt{1 + 2(\zeta+1)/d\zeta} \right\} \frac{e^{-r(T-t)} h \Phi(d_2(\bar{\bar{T}}^*))}{\lambda \sqrt{T-t}}$$

avec  $N(\cdot)$ , resp.  $\Phi(\cdot)$  la fonction de répartition, resp. la fonction de densité, de la loi normale et avec  $d_1(X) \equiv \ln\left(\frac{I_t}{X e^{-r(T-t)}}\right) / (\sigma^* + \sigma^*/2)$

et  $d_2(X) \equiv d_1(X) - \sigma^*$  où  $(\sigma^*)^2 \equiv \text{Var}[\ln(I_T/I_t)] = (\lambda)^2 \times (T-t)$ .

#### 4.3.2. Analyse de la sensibilité de l'allocation dynamique optimale aux variations des différents paramètres.

Nous analysons à présent l'effet, sur la stratégie dynamique optimale, du changement de valeur du taux des frais de gestion variables,  $c$ , du niveau de tolérance au risque,  $a$ , du niveau de protection du capital,  $Y^0$ , ainsi que de la période restant à courir avant l'échéance,  $T-t$ .

Nous avons représenté sur les huit figures ci-dessous, pour différentes valeurs de chacun des paramètres considérés, la valeur, à une date intermédiaire, du portefeuille optimal (notée  $Y_t^*$ ) et celle de l'exposition à l'actif risqué (notée  $P_t^* \equiv w_t^*$ ), en fonction de la valeur de l'actif risqué.

totale dans l'actif risqué, noté  $i$  qui est donné par la formule suivante :  $i \equiv -h \equiv -\frac{\mu-r}{\sigma} \equiv -\frac{\lambda}{\sigma}$ . De plus le processus de prix du portefeuille, noté  $I_t$ , est un mouvement brownien géométrique dont l'expression est la suivante :  $dI_t/I_t = (r - \lambda^2) dt - \lambda dZ_t$ , ou encore, de façon équivalente  $I_t = I_0 \exp\left\{(r - \frac{3}{2}\lambda^2)t - \lambda Z_t\right\}$  avec  $I_0 = e^{(\lambda^2 - 2r)T}$ .

125. avec  $w^B$  qui désigne le poids de l'actif risqué dans le portefeuille benchmark. Sous l'hypothèse qui est la notre de "benchmark fixe", on a  $w^B \equiv 0$  puisque l'hypothèse de "benchmark fixe" revient à choisir l'actif monétaire comme portefeuille benchmark.

(1) Sensibilité aux variations du taux des frais de gestion variables  $c$  :

La hausse de la valeur du taux des frais de gestion variables,  $c$ , a les conséquences suivantes (voir la figure (Fig.49)) :

- dans la zone de valeurs médianes du sous-jacent, la forme concave de la courbe de valeurs est plus marquée, et le montant de la sur-performance par rapport au cas sans incitation financière (courbe rouge) augmente.
- dans la zone de valeurs élevées du sous-jacent, le niveau de sous-performance par rapport au cas sans incitation financière augmente.

En ligne avec la forme de la courbe de valeur du portefeuille de la figure (Fig.49), on observe sur la figure (Fig.50), un pic d'exposition à l'actif risqué qui se produit dans une zone de valeurs médianes du sous-jacent. On peut faire les remarques suivantes :

- La valeur de l'actif risqué où se produit le pic d'exposition est une fonction décroissante du taux des frais de gestion variables  $c$ .
- Pour les niveaux les plus faibles du taux des frais de gestion variables (dans notre exemple numérique en dessous de  $c = 10\%$ ), la hauteur du pic d'exposition est légèrement supérieure à celle de la stratégie sans incitation financière.
- Au dessus d'un certain seuil du taux de la commission variable (dans notre exemple numérique, approximativement au dessus de  $c = 10\%$ ), on observe que le niveau du pic d'exposition décroît au fur et à mesure que le paramètre  $c$  augmente. Il devient même, pour les valeurs élevés du taux des frais de gestion variables  $c$ , légèrement inférieur au pic d'exposition de la stratégie sans incitation financière.

Finalement, on remarquera que l'écart d'exposition à l'actif risqué relativement au cas sans incitation financière prend la forme d'une courbe en "cloche" inversée et asymétrique<sup>126</sup> :

- l'existence de frais de gestion variables dans le contrat de rémunération implique une sur-exposition par rapport au cas sans incitation financière dans une zone de valeurs faibles à médianes du sous-jacent.
- il se produit une sous-exposition importante relativement au cas sans incitations, dans un intervalle de valeurs médianes à élevées de l'actif risqué. Ce "creux" de sous-exposition traduit la forte aversion au risque de l'asset manager dans la zone de sur-performance par rapport au benchmark.

---

<sup>126</sup>. Ce qui est exactement l'inverse de ce qui se passe pour l'asset manager CRRA : pour ce dernier, le niveau de sur-exposition par rapport au cas sans incitation financière, exprimé en fonction de la valeur de l'actif risqué, est une courbe en forme de "cloche".



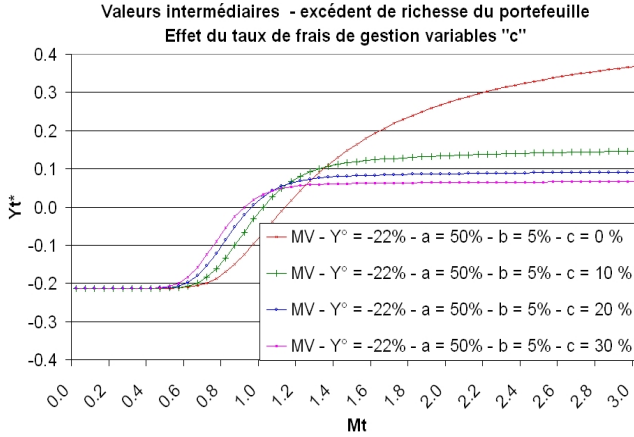


FIGURE 49. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - valeurs intermédiaires de l'excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$  avec  $t = 4$ .

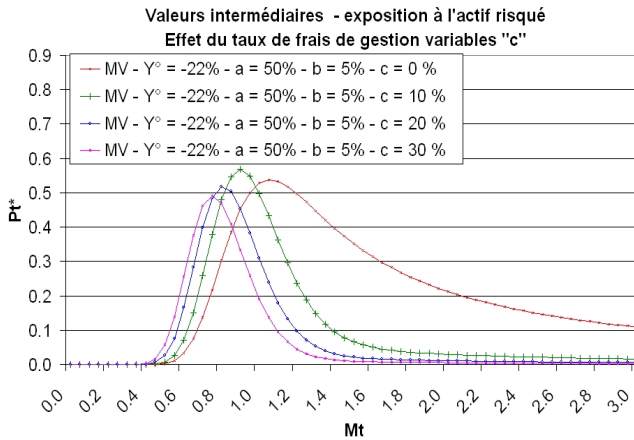


FIGURE 50. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - valeurs intermédiaires de l'exposition à l'actif risqué - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$  avec  $t = 4$ .

(2) Sensibilité aux variations du seuil de protection du capital  $Y^0$  :

Quand la valeur du seuil de protection du capital,  $Y^0$ , baisse, la perte dans la zone de sous-performance augmente. En parallèle, dans la zone de valeur médiane de l'actif risqué où se produit une sur-performance par rapport à la stratégie sans incitation financière, la concavité de la courbe de richesse est plus marquée (cf. figure (Fig.51)).

En ce qui concerne l'allocation dynamique (cf. figure (Fig.52)), il se produit un pic d'exposition à l'actif risqué dans un intervalle de valeurs médianes de l'actif risqué. De plus son amplitude est une fonction décroissante du seuil de protection du capital. Enfin, la valeur de l'actif risqué où a lieu ce pic d'exposition est une fonction décroissante du seuil de protection du capital.

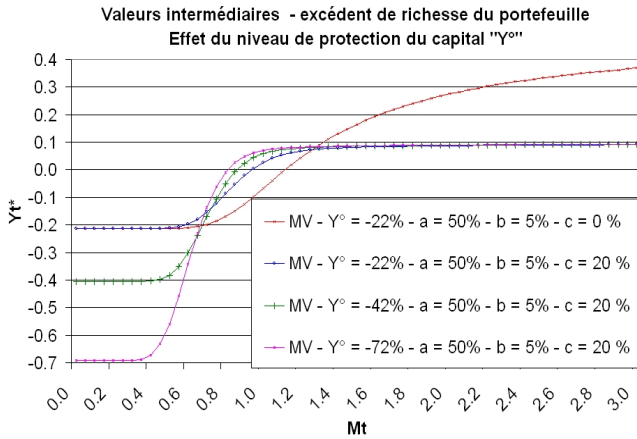


FIGURE 51. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - valeurs intermédiaires de l'excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de protection du capital  $Y^0$  avec  $t = 4$ .

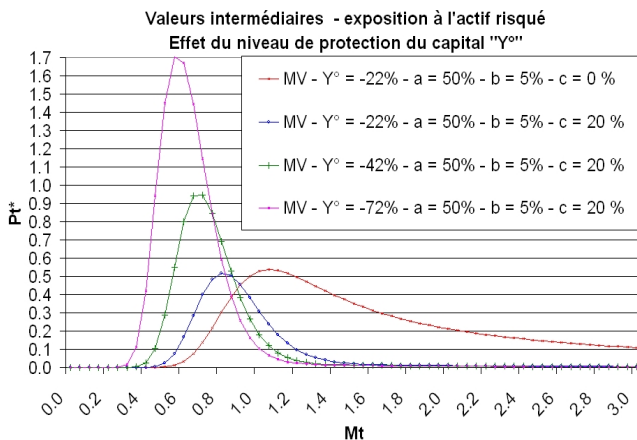


FIGURE 52. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - valeurs intermédiaires de l'exposition à l'actif risqué - effet du niveau de protection du capital  $Y^0$  avec  $t = 4$ .

(3) Sensibilité aux variations du paramètre de tolérance au risque  $a$  :

Quand la valeur du paramètre de tolérance au risque,  $a$ , augmente (cf. figure (Fig.53),

-dans une zone de valeurs médianes du sous-jacent : la convexité de la courbe devient plus marquée et la stratégie optimale est moins performante,

-dans la zone des valeurs du sous-jacent les plus élevées : en même temps que la concavité de la courbe de richesse s'accroît, le gain de la stratégie augmente.

Quelle que soit la valeur considérée du paramètre de tolérance au risque,  $a$ , un pic d'exposition à l'actif risqué se produit dans une zone de valeurs médianes du sous-jacent (cf. figure (Fig.54)). Le niveau d'exposition maximum est une fonction croissante de la valeur du paramètre de tolérance au risque,  $a$ . Enfin, la valeur "centrale" du sous-jacent où le pic d'exposition a lieu, croît avec la valeur du paramètre de tolérance au risque.

A titre de comparaison avec la stratégie de référence sans incitation financière, on peut faire les remarques suivantes :

-Pour un niveau identique de tolérance au risque,  $a$  : la valeur de l'actif risqué où a lieu le pic d'exposition est plus basse en présence d'incitation financière (courbe bleue,  $a = 50\%$  et  $c = 20\%$ ) que dans le cas de référence sans incitation financière (courbe rouge,  $a = 50\%$  et  $c = 0\%$ ).

-Pour un niveau de tolérance au risque plus élevé : la valeur de l'actif risqué où a lieu le pic d'exposition en présence d'incitation financière (courbe rose,  $a = 200\%$  et  $c = 20\%$ ) est plus aligné par rapport au cas sans incitation financière<sup>127</sup>. De plus, la sur-exposition par rapport au cas sans incitation financière ressemble à la courbe en "cloche" obtenue pour l'asset manager CRRA (voir la seconde section).

Finalement, on peut en conclure que la hausse du niveau de tolérance au risque de l'asset manager a un coût pour l'investisseur final. Il se traduit par un risque accru dû à une sur-exposition à l'actif risqué dans un intervalle de valeurs médianes du sous-jacent. En revanche cela a également un effet positif : compenser l'aversion au risque élevée de l'asset manager avec incitation financière dans la zone de sur-performance.

(4) L'effet du changement de valeur de l'horizon d'investissement,  $T - t$ , sur l'allocation dynamique de l'asset manager avec incitation financière est représenté sur la figure (Fig.55) (excédent de richesse) et la figure (Fig.56) (exposition à l'actif risqué).

Comme le montre la figure (Fig.56), dans un intervalle de valeurs médianes de l'actif risqué, l'allocation temporelle est contraire à la règle dite de "bon

---

127. Ce qui a pour effet de "corriger" l'effet incitatif de la rémunération en augmentant l'aversion au risque de l'asset manager dans la zone de sur-performance ainsi que la valeur du plafond de richesse finale.

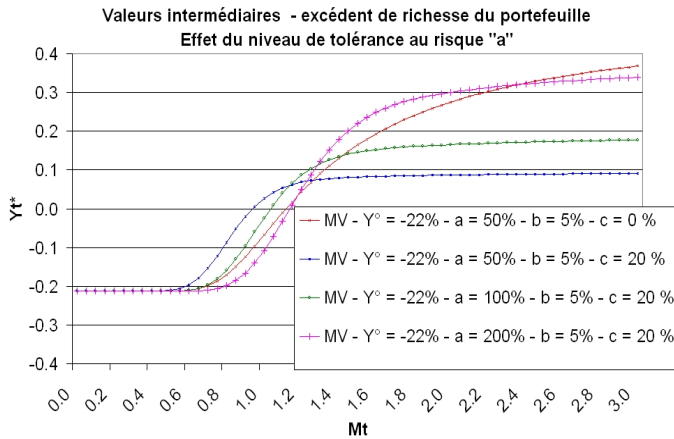


FIGURE 53. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - valeurs intermédiaires de l'excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de tolérance au risque  $a$  avec  $t = 4$ .

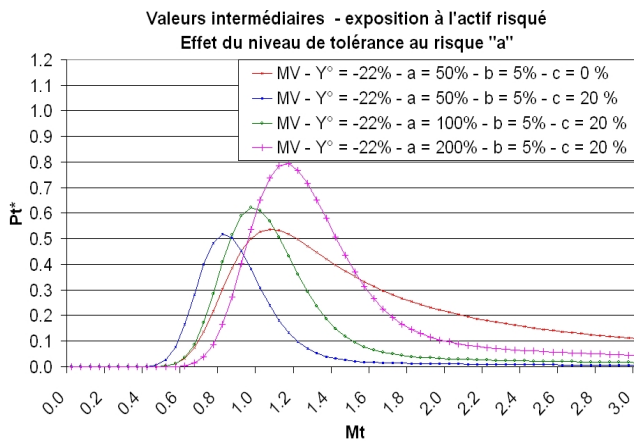


FIGURE 54. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - valeurs intermédiaires de l'exposition à l'actif risqué - effet du niveau de tolérance au risque  $a$  avec  $t = 4$ .

sens" ("Popular Advice") qui dicte une allocation en actif risqué croissante en fonction du temps restant à courir. Ceci est dû au profil de gain optimal de type option digitale (qui traduit la discontinuité entre les deux états de richesses hautes et basses).

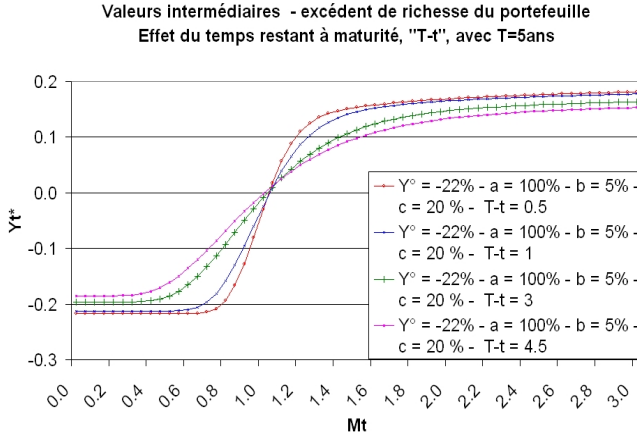


FIGURE 55. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - excédent de richesse du portefeuille - effet du temps restant à maturité  $T - t$ .

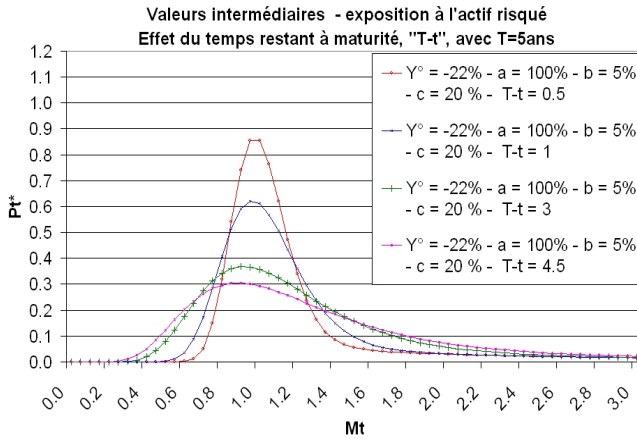


FIGURE 56. Stratégie Moyenne-Variance avec incitation financière et contrainte d'assurance de portefeuille - exposition à l'actif risqué - effet du temps restant à maturité  $T - t$ .

**4.4. Conclusion de la section.**

Nous avons montré que pour une valeur suffisamment élevée du taux des frais de gestion variables<sup>128</sup>, le profil de gain optimal pour l'asset manager, ayant une fonction d'utilité quadratique et une contrainte de protection, ressemble à celui

128. Il s'agit du paramètre  $c$  de notre modèle et toute chose restant égale par ailleurs : pour un choix donné des autres paramètres  $Y^0$  (seuil maximal de perte autorisée),  $a$  (tolérance au risque) et  $b$  (frais de gestion sur encours).

d'une stratégie optionnelle binaire :

- gestion passive en cas de scénario de marché défavorable : richesse finale égale à la valeur plancher de la contrainte de protection,
- gestion active faiblement investie en actif risqué, en cas de scénario favorable : richesse finale convergeant très rapidement, quand la valeur de l'actif risqué augmente, vers la valeur du seuil de rémunération maximale (niveau de satiété).

Le niveau d'exposition à l'actif risqué relativement à la stratégie sans incitation financière, exprimée en fonction de la valeur de l'actif risqué, ressemble à une courbe en forme de "cloche" inversée et asymétrique :

- exposition nulle, identique à la stratégie sans incitation financière, pour les valeurs basses de l'actif risqué,
- légère sur-exposition par rapport à la stratégie sans incitation dans un intervalle de valeurs basses à médianes du sous-jacent.
- sous exposition par rapport à la stratégie sans incitation dans l'intervalle des valeurs les plus élevées du sous-jacent ; après avoir atteint rapidement un niveau maximal, la sous-exposition diminue à nouveau en convergeant lentement vers 0, quand la valeur de l'actif risqué continue de progresser.

Ainsi, la prise en compte d'une contrainte de protection de la richesse permet à l'investisseur final de se prémunir, dans les scénarios de marché les plus défavorables, d'une situation de sous-performance par rapport au cas sans incitation financière. En revanche, elle ne lui permet pas, dans les scénarios de marché favorables, d'éviter le comportement fortement averse au risque de l'asset manager.

En effet, dès que la valeur du portefeuille se situe dans la zone de sur-performance par rapport au benchmark, l'asset manager va avoir tendance à diminuer très rapidement son exposition à l'actif risqué pour la porter à zéro. Ce qui se traduit, dans un intervalle de valeurs médianes de l'actif risqué, par une forte sous-exposition relativement au cas sans incitation financière.

La prise en compte d'une contrainte de risque plus agressive (i.e. choix d'une valeur plus élevée du paramètre de tolérance au risque) a pour effet positif de limiter un désinvestissement trop important de la part de l'asset manager très averse au risque en cas de sur-performance avec le benchmark. En revanche, cela implique également une prise de risque supplémentaire de la part de l'asset manager : on observe une sur-exposition à l'actif risqué par rapport au cas sans incitation financière, dans un intervalle de valeurs médianes de l'actif risqué.

## 5. Benchmark stochastique et plusieurs sources de risque

Dans la troisième section, nous avons résolu le problème d'investissement de l'asset manager CRRA recevant frais de gestion variables et bonus de sur-performance, sous l'hypothèse de "benchmark fixe" (i.e. cible de richesse finale fixe).

Nous avons ensuite étudié les propriétés de la stratégie dynamique optimale dans le cadre restrictif du modèle de *BES* à deux actifs.

Dans cette section, nous généralisons les résultats obtenus dans la troisième section de la façon suivante :

- (1) Tout d'abord, nous considérons que le benchmark est stochastique. Ce qui implique que la structure de rémunération financière considérée ici est plus générale que celle de la troisième section. Il s'agit d'une structure de frais linéaire par morceaux qui dépend à la fois de la valeur du portefeuille et de celle du benchmark de manière indépendante.
- (2) De plus, dans le cadre de l'obtention de la stratégie dynamique optimale, nous nous plaçons sous l'hypothèse supplémentaire du modèle de *BES* généralisé à  $N$  actifs risqués : le marché financier étant composé de  $N + 1$  actifs,  $N$  sources de risque actions et un actif monétaire sans risque avec  $N \geq 1$ . Cela permet en particulier de traiter le cas où le benchmark n'est pas parfaitement corrélé au portefeuille de marché<sup>129</sup>.

Comme dans les sections précédentes, nous nous plaçons dans le cadre général défini dans la section 1 ci-dessus :

- (1) Structure de rémunération :

Nous faisons l'hypothèse que, dans le cadre d'un contrat de délégation de gestion financière, l'asset manager reçoit, à un horizon d'investissement fixé en accord avec l'investisseur, noté  $T$ , une rémunération globale qui intègre d'une part une commission symétrique (i.e. indépendante de ses objectifs de performance) et d'autre part une commission non symétrique liée à sa performance.

L'expression de cette rémunération est celle de l'équation (1.1) de la section 1.1 :

$$F_T(W_T) \equiv a^* W_T + b^* Y_T + \eta^* W_T \times 1_{Y_T \geq 0} + c^* \max(Y_T, 0)$$

avec les mêmes notations et hypothèses que dans la section 1.1.

Expression qui peut se ré-écrire de la façon suivante :

---

<sup>129</sup>. Ce qui n'était pas possible sous les hypothèses du modèle de *BES* qui ne compte qu'une seule source de risque, i.e.  $N = 1$ .

$$F_T(W_T) \equiv a^* B_T + bY_T + (\eta^* B_T + c Y_T) \times 1_{Y_T \geq 0} \quad (5.1)$$

avec les notations  $b \equiv a^* + b^*$  et  $c \equiv \eta^* + c^*$

(2) Préférences d'investissement :

Nous considérons que le problème d'investissement de l'asset manager est de maximiser l'utilité espérée de sa rémunération finale, et nous supposons, comme dans la troisième section, que l'asset manager a une aversion relative au risque constante (préférences "CRRA")<sup>130</sup>.

Sa fonction d'utilité est de type iso-élastique et son expression est la suivante :  $u(x) \equiv \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  où  $\gamma \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

avec  $x = F_T(W_T)$  qui désigne l'expression de la rémunération de l'asset manager définie par l'équation 5.1.

Sans perte de généralité, on considère dans la suite l'écriture suivante de la fonction de rémunération :

$$F'(Y_T) \equiv F_T(W_T)/b \equiv a B_T + Y_T + (\eta B_T + dY_T) \times 1_{Y_T \geq 0} \quad (5.2)$$

où on a posé  $a \equiv a^*/b$ ,  $\eta \equiv \eta^*/b$ ,  $d \equiv c/b$ .

Le problème de l'asset manager est le suivant :

PROBLÈME 18.

$$(P18) \begin{cases} \max_{Y_T \in L^2(P)} E \{u(aB_T + Y_T + (\eta B_T + dY_T) 1_{Y_T \geq 0})\} \\ \text{s.a. } E(Y_T/H_T) = 0 \end{cases}$$

avec  $u(\cdot)$ , la fonction d'utilité CRRA de l'asset manager et avec  $d \equiv (c/b)$  le ratio du taux de la commission de sur-performance sur celui de la commission de gestion sur encours et avec les mêmes hypothèses que dans la section 1.

On en déduit le résultat suivant qui généralise le théorème (5) (cf. troisième section ci-dessus) à la prise en compte d'un benchmark stochastique.

---

130. On généralise facilement les résultats qui vont suivre au cas où l'aversion au risque de l'asset manager HARA n'est plus constante mais dépend de la valeur du benchmark et où sa fonction d'utilité est donnée par l'expression plus générale suivante :  $u(x) = \frac{C_1}{1-\gamma} \left\{ \frac{x}{\gamma} + A \times B_T \right\}^{1-\gamma} + C_2$  avec  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,  $C_1 > 0$  et  $\gamma > 0$ ,  $A > 0$ ,  $C_2 \geq 0$ .



THÉOREME 7. *La richesse terminale solution du problème (P18) est donnée par l'expression suivante*<sup>131</sup> :

(1) *Pour*  $a \neq 0$  *et*  $d \neq 0$ , *on pose*  $\varepsilon \equiv \eta/da$  *et pour*  $a \equiv 0$  *ou*  $d \equiv 0$  *et*  $\eta = 0$ , *on pose*  $\varepsilon \equiv 0$

(a) *cas*  $\varepsilon \geq \varepsilon^* \equiv \frac{1}{d} \left\{ \frac{(\gamma-1)(1+d)}{\gamma(1+d)^{1-1/\gamma-1}} - 1 \right\} > 0$ <sup>132</sup>

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{1}{1+d} \left\{ \left( \frac{1+d}{k} H_T \right)^{1/\gamma} - (1+d\varepsilon) a B_T \right\} & \text{si } H_T > \bar{\Pi} B_T^\gamma \\ 0 & \text{si } \Pi^{**} B_T^\gamma < H_T \leq \bar{\Pi} B_T^\gamma \\ (H_T/k)^{1/\gamma} - a B_T & \text{si } H_T \leq \Pi^{**} B_T^\gamma \end{cases}$$

avec  $\bar{\Pi} \equiv \frac{k}{(1+d)} \{(1+\varepsilon d)a\}^\gamma$ , et avec  $\Pi^{**}$  solution implicite de l'équation :

$$h(k/\Pi^{**}) = 0 \quad \text{avec} \quad h(x) \equiv -\frac{x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} - u((1+\varepsilon d)a) + ax$$

(b) *cas*  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{1}{1+d} \left\{ \left( \frac{1+d}{k} H_T \right)^{1/\gamma} - (1+d\varepsilon) a B_T \right\} & \text{si } H_T > \Pi^* B_T^\gamma \\ (H_T/k)^{1/\gamma} - a B_T & \text{si } H_T \leq \Pi^* B_T^\gamma \end{cases}$$

avec  $\Pi^*$ <sup>133</sup> définie par l'expression suivante :

$$\Pi^* \equiv k \left[ \left\{ \frac{ad}{1+d} (\varepsilon - 1) \right\} / \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma} \right\} \right]^\gamma$$

De plus, afin d'obtenir la stratégie dynamique optimale, nous faisons l'hypothèse que le marché comprend les  $N + 1$  actif suivants :

L'actif dit "Actif Sans Risque" ("ASR"); localement sans risque, il s'interprète comme un "rollover" d'un instrument du marché monétaire, et a pour rendement instantané :

$$dS_t^0/S_t^0 = r dt$$

ou  $r$  est le taux court instantané en vigueur sur le marché monétaire supposé constant.

Les  $N$  autres actifs risqués (titres de société cotés sur le marché action par exemple)

131. Les cas particuliers correspondant au choix des paramètres suivants :  $a \equiv 0$ ;  $\eta \neq 0$ , et  $a \neq 0$ ;  $d \equiv 0$ ;  $\eta \neq 0$  s'obtiennent de la même façon que ceux exposés ici : ils font référence directe aux expressions de la stratégie données dans le théorème (5) ci-dessus pour les mêmes valeurs des paramètres et en considérant la variable  $H_T/B_T^\gamma$  à la place de  $H_T$  et  $Y_T^*/B_T$  en remplacement de  $Y_T^*$ .

132.  $\varepsilon^*$  est la solution de l'équation  $\bar{\Pi}(\varepsilon) = \Pi^*(\varepsilon)$  avec  $\Pi^*$  défini implicitement par  $f(k/\Pi^*) = 0$  avec  $f(x) \equiv g(x) - g(x/(1+d)) + \frac{\varepsilon da}{1+d}$  où  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x) - a]$  et où  $I(x) \equiv \frac{1}{x^{1/\gamma}} - a$ ; après calcul, on obtient pour  $\Pi^*$  l'expression suivante :

$$\Pi^* \equiv k \left[ \left\{ \frac{ad}{1+d} (\varepsilon - 1) \right\} / \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma} \right\} \right]^\gamma$$

De façon équivalente,  $\varepsilon^*$  est solution implicite de l'équation  $h(k/\bar{\Pi}(\varepsilon)) = 0$ .

Par conséquent pour  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , on a  $\bar{\Pi}(\varepsilon) = \Pi^*(\varepsilon) = \Pi^{**}(\varepsilon)$  et les solutions 3 (a) et 3 (b) du théorème 5 se confondent.

133.  $\Pi^*$  est la solution de  $f(k/\Pi^*) = 0$  avec  $f(x) \equiv g(x) - g(x/(1+d)) + \frac{\varepsilon da}{1+d}$  où  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x) - a]$  et  $x \rightarrow I(x) \equiv \frac{1}{x^{1/\gamma}} - a$  désigne la fonction inverse de la fonction  $x \rightarrow u'(x)$

ont des rendements instantanés stochastiques qui suivent des mouvements browniens géométriques; ce qui s'écrit en notation vectorielle :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dZ_t)$$

avec  $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^N)$  le vecteur des  $N$  actifs risqués,

avec  $\mu = (\mu_j(t); j = 1 \dots N)$ , le vecteur des rendements moyens instantanés,

avec  $\sigma = (\sigma_{jk}(t); j, k = 1 \dots N)$  la matrice de co-volatilité des processus de rendements instantanés.

La propriété (30) ci-dessous fournit l'expression de la valeur intermédiaire de la stratégie dynamique optimale sous les hypothèses du modèle de  $B\mathcal{E}S$  généralisé à  $N$  actifs risqués :

PROPRIÉTÉ 30. *Pour  $a \neq 0$  et  $d \neq 0$ , la valeur à la date  $t$  de la solution optimale du problème (P18), notée  $Y_t^*$ , est donnée par la formule suivante :*

(1) *Pour  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$*

$$Y_t^* = B_t \left\{ \frac{y_d}{1+d} C^0(\Pi_t^*, (\bar{\Pi})^{1/\gamma}, T-t) - y_0 P^0(\Pi_t^*, (\Pi^{**})^{1/\gamma}, T-t) \right\} \\ - B_t \left\{ \left\{ a - y_0 (\Pi^{**})^{1/\gamma} \right\} B^0(\Pi_t^*, (\Pi^{**})^{1/\gamma}, T-t) \right\}$$

(2) *Pour  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$*

$$Y_t^* = B_t \left\{ \frac{y_d}{1+d} C^0(\Pi_t^*, (\Pi^*)^{1/\gamma}, T-t) - y_0 P^0(\Pi_t^*, (\Pi^*)^{1/\gamma}, T-t) + \frac{1}{1+d} \left\{ y_d (\Pi^*)^{1/\gamma} - (1+d\varepsilon)a \right\} \right\} \\ - B_t \left\{ \left\{ \left( \frac{y_d}{1+d} - y_0 \right) (\Pi^*)^{1/\gamma} + \frac{d(1-\varepsilon)a}{1+d} \right\} B^0(\Pi_t^*, (\Pi^*)^{1/\gamma}, T-t) \right\}$$

avec  $\Pi_t^* \equiv H_t^*/B_t$ <sup>134</sup> où  $H_t^*$  désigne la valeur intermédiaire du portefeuille, solution du problème de Merton, atteignant la richesse terminale,  $H_T^{1/\gamma}$ <sup>135</sup>,

avec  $\varepsilon \equiv \eta/da$ ,  $\varepsilon^* \equiv \frac{1}{d} \left\{ \frac{(\gamma-1)(1+d)}{\gamma(1+d)^{1-1/\gamma-1}} - 1 \right\}$ ,  $y_d \equiv ((1+d)/k)^{1/\gamma}$ ,  $y_0 \equiv (1/k)^{1/\gamma}$ ,

avec  $\bar{\Pi} \equiv \frac{k}{(1+d)} \left\{ (1+\varepsilon d)a \right\}^\gamma$ ,  $\Pi^* \equiv k \left[ \left\{ \frac{ad}{1+d} (\varepsilon - 1) \right\} / \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma-1}}{1-1/\gamma} \right\} \right]^\gamma$ ,

134.  $\Pi_t^*$  est donnée par  $E_t^{Q^B} \left\{ \frac{H_T^{1/\gamma}}{B_T} \right\}$  où l'espérance est calculée par rapport à la mesure martingale équivalente notée  $Q^B$  associée au numéraire,  $B$ , le portefeuille Benchmark.

Après calcul, on trouve l'expression explicite suivante :  $\Pi_t^* = e^{\{f(T-t) + \sigma^{*2}/2\}} \frac{H_t^{1/\gamma}}{B_t}$

avec  $f(T-t) \equiv \left\{ \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right) r + \frac{\kappa^T \sigma^T b}{\gamma} - \frac{\|b^T \sigma\|^2}{2} - \frac{\|\kappa\|^2}{2\gamma} \right\} \times (T-t)$ , où  $b' \equiv (b_1, \dots, b_N)$  désigne le transposé du vecteur de poids des  $N$  actifs risqués investis dans le portefeuille benchmark,  $B$ , et avec  $\sigma^{*2} \equiv Var \{ \ln(H_T/H_t)/\gamma - \ln(B_T/B_t) \} = \|\kappa^T/\gamma - b^T \sigma\|^2 \times (T-t)$  avec  $\kappa \equiv \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$ .

135. Le portefeuille  $H^*$  est défini entièrement par la donnée du vecteur de poids des  $N$  actifs risqués investis dans ce portefeuille, noté  $h^* \equiv (h_1^*, \dots, h_N^*)^T$ , dont l'expression est la suivante :

$h^* \equiv \frac{(\sigma^{-1})^T \kappa}{\gamma}$  où  $\kappa \equiv \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$

et avec  $\Pi^{**}$  qui désigne la solution implicite de l'équation :

$$h(k/\Pi^{**}) = 0 \quad \text{avec} \quad h(x) \equiv -\frac{x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} - u((1+\varepsilon d)a) + ax$$

avec  $C^0(Z_t, X, T-t)$ , (resp.  $P^0(Z_t, X, T-t)$ , resp.  $B^0(Z_t, X, T-t)$ ) qui désigne la formule de Black & Scholes donnant la valeur de l'option call européen, (resp. de l'option put européen, resp. de l'option Put binaire) de strike  $X$ , d'échéance  $T-t$ , sur le sous-jacent  $Z_t$  où le taux sans risque est supposé nul<sup>136</sup>.

Notons que  $C^E(H_t^*, X \times B_t, T-t) \equiv B_t \times C^0(H_t^*/B_t, X, T-t)$  est la valeur présente du pay off d'une option call européenne d'échange entre deux actifs ; le détenteur de cette option reçoit à la date de maturité de l'option, notée  $T$ , l'écart si celui-ci est positif entre la valeur du premier sous-jacent,  $H_T^{1/\gamma}$ , et  $X$  fois celle du second sous-jacent, i.e. le benchmark, soit  $X \times B_T$ <sup>137</sup>.

Il en va de même pour  $P^E(H_t^*, X \times B_t, T-t) \equiv B_t \times P^0(H_t^*/B_t, X, T-t)$ , resp.  $B^E(H_t^*, X \times B_t, T-t) \equiv B_t \times B^0(H_t^*/B_t, X, T-t)$  qui correspond à la valeur d'une option put européenne d'échange, resp. d'une option put binaire d'échange, écrite sur les mêmes deux sous-jacents que l'option call décrite précédemment.

Ainsi la stratégie optimale associée au problème (P18) est définie par une combinaison de positions Buy & Hold investies sur plusieurs options d'échanges écrites sur les mêmes deux sous-jacents : le portefeuille du problème de Merton,  $H^*$ , et le portefeuille benchmark.

Notons que dans le cas où  $N = 1$  (existence de deux actifs risqués), l'expression des options d'échanges se réduit à la formulation de [Margrabe, 1978].

Enfin, remarquons que l'on retrouve comme cas particulier le modèle de [Basak et al., 2008] dans le cas où  $a = 1$  et  $\varepsilon \equiv 1 \Leftrightarrow a = 1$  et  $\eta \equiv d$ .

La propriété (31) suivante donne l'expression de l'allocation dynamique optimale.

**PROPRIÉTÉ 31.** *Expression du vecteur des fractions de la richesse optimale investis dans les  $N$  actifs risqués, propriété de décomposition en deux fonds et expression du "Delta" de la stratégie optimale*

- (1) *L'allocation de la stratégie dynamique optimale correspondant au problème (P18) est donnée par l'expression suivante :*

136.  $C^0(Z_t, X, T-t)$  est donnée par l'expression suivante :  $Z_t N(d_1(X)) - X N(d_2(X))$  avec  $d_1(X) \equiv \ln(Z_t/X)/\sigma^* + \sigma^*/2$ ,  $d_2(X) \equiv d_1(X) - \sigma^*/2$  et  $(\sigma^*)^2 \equiv \text{Var}(\ln(Z_T))$ .

De plus avec  $Z_T \equiv \Pi_T^* \equiv H_T^{1/\gamma}/B_T$ , on a :

$(\sigma^*)^2 \equiv \text{Var}[\ln(H_T)/\gamma - \ln(B_T)] = \|\kappa^T/\gamma - b^T \sigma\|^2 \times (T-t)$  avec  $\kappa \equiv \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$ .

Avec les mêmes notations, on a également :

$P^0(Z_t, X, T-t) \equiv X N(-d_2(X)) - Z_t N(-d_1(X))$  et  $B^0(Z_t, X, T-t) \equiv N(-d_2(X))$ .

137.  $C^E(H_t^*, X \times B_t, T-t) = H_t^* N(d_1(X)) - X \times B_t N(d_2(X))$  avec  $d_1(X) \equiv \ln(\frac{H_t^*}{X B_t})/\sigma^* + \sigma^*/2$  où  $(\sigma^*)^2 \equiv \text{Var}[\ln(H_T)/\gamma - \ln(B_T)] = \|\kappa^T/\gamma - b^T \sigma\|^2 \times (T-t)$  avec  $\kappa \equiv \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$ .

$$\begin{cases} w_t^* W_t^* \equiv (\Delta_t H_t^*) h^* + (W_t^* - \Delta_t H_t^*) b & \text{investi (en cash) dans les } N \text{ Actifs Risqués} \\ (1 - (w_t^*)^T \bullet \mathbf{1}) W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'A.S.R} \end{cases}$$

avec  $h^* \equiv (h_1^*, \dots, h_N^*)^T$  : le vecteur de poids des  $N$  actifs risqués investis dans le portefeuille  $H^*$  et dont l'expression est la suivante :

$$h^* \equiv \frac{(\sigma^{-1})^T \kappa}{\gamma} \text{ où } \kappa \equiv \sigma^{-1}(\mu - r \bullet \mathbf{1}),$$

avec  $b \equiv (b_1, \dots, b_N)^T$  : le vecteur de poids des  $N$  actifs risqués investis dans le portefeuille benchmark, noté  $B$ ,

avec  $\mathbf{1} \equiv (1, \dots, 1)^T$  : le vecteur unité, et avec  $\Delta_t \equiv \frac{dW_t^*}{dH_t^*}$ .

- (2) De manière équivalente, l'allocation de la stratégie dynamique optimale correspondant au problème (P18) est entièrement définie par la fraction de la richesse optimale investie, d'une part, dans le portefeuille de Merton, noté  $H^*$ <sup>138</sup>, et d'autre part, dans le portefeuille Benchmark, noté  $B$  :

$$\begin{cases} \Delta_t H_t^* / W_t^* & \text{investi (en \% de la richesse totale) dans le portefeuille } (H^*, h^*) \\ 1 - \Delta_t H_t^* / W_t^* & \text{investi (en \% de la richesse totale) dans le portefeuille benchmark } (B, b) \end{cases}$$

avec  $h^*, b$  et  $\Delta_t$  définie comme précédemment.

- (3) Expression de  $\Delta_t \equiv \frac{dW_t^*}{dH_t^*}$  :

- Pour  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$ ,

$$\Delta_t = \frac{y_d}{1+d} N(d_1(\bar{\Pi}^{1/\gamma})) + y_0 N(-d_1(\Pi^{**1/\gamma})) - \left\{ a\Pi^{**1/\gamma} - y_0 \right\} \frac{\Phi \left\{ d_1(\Pi^{**1/\gamma}) \right\}}{\sigma^*}$$

- Pour  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$ ,

$$\Delta_t = \frac{y_d}{1+d} N(d_1(\Pi^{*1/\gamma})) + y_0 N(-d_1(\Pi^{*1/\gamma})) - \left\{ \left( \frac{y_d}{1+d} - y_0 \right) + \frac{d(1-\varepsilon)a\Pi^{*1/\gamma}}{1+d} \right\} \frac{\Phi \left\{ d_1(\Pi^{*1/\gamma}) \right\}}{\sigma^*}$$

avec  $N(\cdot)$ , resp.  $\Phi(\cdot)$ , la fonction de répartition, resp. la fonction de densité, de la loi normale,

$$\begin{aligned} \text{avec } d_1(X) &\equiv \ln\left(\frac{H_t^*}{XB_t}\right) / \sigma^* + \sigma^* / 2 \text{ où } (\sigma^*)^2 \equiv \text{Var} [\ln(H_T/H_t) / \gamma - \ln(B_T/B_t)] \\ &= \|\kappa^T / \gamma - b^T \sigma\|^2 \times (T-t) \text{ avec } \kappa \equiv \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}). \end{aligned}$$

138.  $H^*$  désigne le portefeuille, solution du problème de Merton, qui atteint la richesse terminale,  $H_T^{1/\gamma}$ . Le vecteur des poids (constants) des  $N$  actifs risqués investis dans ce portefeuille est donné par l'expression suivante :

$h^* = h/\gamma$  avec  $h = (\sigma^{-1})^T \kappa$  et  $\kappa \equiv \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$ .



## Incitation financière et aversion à la sous-performance

Nous prolongeons l'analyse du chapitre précédent en considérant le problème d'investissement de l'asset manager recevant une incitation financière à la sur-performance et qui, de plus, est aversive à la sous-performance<sup>1</sup>.

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent<sup>2</sup>, la prise en compte d'une contrainte explicite d'assurance de portefeuille n'a pas seulement pour effet de rendre l'asset manager (recevant une incitation financière ou non) totalement aversive à la sous-performance dans les scénarios de marché défavorables.

En effet, l'existence d'une contrainte stricte de protection de la richesse a également comme conséquence (positive) pour l'investisseur de réduire fortement, dans les scénarios de marché les plus défavorables, le risque de sous-performance par rapport à la stratégie de référence suivie par l'asset manager sans incitation financière.

Cependant, quel que soit le niveau de protection considéré, l'asset manager continue de gérer le portefeuille en se démarquant fortement de la stratégie optimale pour l'investisseur (i.e. celle de l'asset manager de référence ne recevant pas de commission de sur-performance). Le profil de gain du portefeuille optimal demeure discontinu et asymétrique et la stratégie d'investissement suivie par l'asset manager le favorise financièrement.

En guise d'alternative, nous supposons dans ce chapitre que l'investisseur final ou le risk manager impose une contrainte à l'asset manager qui prend la forme d'un montant de budget de risque de sous-performance maximum.

Nous cherchons à savoir si une telle contrainte de gestion du risque de perte, très courante en pratique, est plus à même qu'une contrainte stricte d'assurance de portefeuille de "rectifier" les comportements d'investissement de l'asset manager non souhaités par l'investisseur<sup>3</sup>.

Partant des résultats exposés dans le second chapitre (première partie de la thèse), portant sur l'analyse de l'allocation dynamique de portefeuille en présence de contrainte de "risk management", nous faisons l'hypothèse que la fonction d'utilité de l'asset manager intègre une mesure de perte continue qui pénalise la sous-performance par

---

1. autrement dit, il doit prendre en compte une contrainte implicite de gestion du risque de sous-performance dans ses préférences d'investissement. Pour plus de détails voir le chapitre 1 et le chapitre 2 (première partie de la thèse)

2. voir la quatrième section du chapitre précédent qui traite du problème d'investissement de l'asset manager maximisant l'utilité espérée de sa rémunération finale pour un choix de fonction d'utilité quadratique et sous contrainte explicite d'assurance de portefeuille.

3. comportements se traduisant, par exemple, par une prise de risque trop importante ou au contraire un niveau d'exposition en actif risqué trop faible.

rapport à une cible de richesse<sup>4</sup>.

Nous montrons que la prise en compte d'une telle forme d'aversion à la perte permet de réduire certains effets négatifs de l'incitation financière sur le profil de gain du portefeuille et en particulier la discontinuité de la courbe de valeur finale du portefeuille géré ainsi que la dissymétrie du profil de rémunération de l'asset manager.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante :

- Dans la première section, généralisant certains des résultats présentés dans les sections précédentes, nous explicitons l'expression de la richesse terminale optimale associée au problème de l'asset manager 'averse à la sous-performance' et recevant une commission de sur-performance.
- Dans la seconde section, nous analysons l'expression de la stratégie dynamique optimale obtenue dans le cadre du modèle à deux actifs de B&S et dans le cas particulier où l'asset manager est 'CRRA loss averse'.
- Finalement, nous étudions la stratégie dynamique optimale associée au problème moyenne variance (fonction d'utilité de l'asset manager supposée quadratique) en présence d'une double contrainte de risque : contrainte d'assurance de portefeuille et contrainte supplémentaire d'aversion à la sous-performance par rapport au seuil de richesse cible.

## 1. Problème de l'asset manager "Loss Averse"

Nous considérons le problème d'investissement d'un asset manager averse à la sous-performance qui cherche à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération à un horizon d'investissement pré-défini. –

Faisant l'hypothèse que la structure de marché est celle introduite dans la première partie de la thèse (section 1.1 du chapitre 1), nous explicitons l'expression de la richesse terminale, solution optimale du problème considéré.

---

4. Il s'agit de la fonction d'utilité "HARA loss Averse" dont l'expression comprend une mesure de perte équivalente à une contrainte explicite de risque de type "Limited Expected Loss" (cf. second chapitre). Ceci revient à supposer que l'asset manager, en plus d'être averse au risque, est averse à la sous-performance. Pour plus de précision sur l'équivalence entre les deux problèmes (contrainte explicite de risque et fonction d'utilité "loss averse"), on se reportera au second chapitre.

### 1.1. Structure de rémunération et préférences d'investissement.

Dans le cadre d'un contrat de délégation de gestion financière, un investisseur s'engage à verser au gérant de portefeuille recevant mandat de gestion, une rémunération à un horizon d'investissement déterminé à l'avance, noté  $T$  (i.e. date de fin du contrat de délégation).

La structure de rémunération considérée comprend, d'une part, une commission de gestion sur encours et, d'autre part, une commission liée à sa performance. Son expression est la suivante :

$$F_T(W_T) \equiv b W_T + c \max(W_T - W^0, 0)$$

avec

$W_T$ : la valeur finale du portefeuille sous gestion,

$W^0$ : la richesse finale cible de l'investisseur <sup>5</sup>,

$b$ : le taux de commission de gestion sur encours avec  $0 < b < 1$ ,

$c$ : le taux des frais de gestion variables dit de sur-performance avec  $0 \leq c < 1 - b$ .

De plus, nous supposons, d'une part, que l'asset manager cherche à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération à l'horizon d'investissement pré-défini, noté  $T$ , et d'autre part, qu'il est averse à la perte : sa fonction d'utilité 'HARA Loss averse' admet la forme suivante <sup>6</sup> :

$$v^*(x, x^0, x^*) \equiv u^*(x, x^0) - (D - 1) \times L^*(x, x^0, x^*) \times 1_{\{x \leq x^*\}} \quad (1.1)$$

avec les notations suivantes :

$$u^*(x, x^0) \equiv \frac{C_1}{1-\gamma} \left\{ \frac{x-x^0}{\gamma} \right\}^{1-\gamma} + C_2 : \text{l'expression d'une fonction d'utilité HARA,}$$

$\gamma$  : le paramètre d'aversion au risque de l'asset manager, avec  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,

$x \equiv F_T(W_T)$  : la valeur finale de la rémunération de l'asset manager,

$x^*$  : la rémunération cible,

$x^0$ : le seuil de rémunération minimale ( $\gamma > 0$ ) ou maximale ( $\gamma < 0$ ) de l'asset manager,

---

5. Nous faisons l'hypothèse que le portefeuille "benchmark" de l'investisseur s'identifie, à une constante près, au portefeuille composé uniquement de l'actif sans risque; ce benchmark "fixe" traduit un objectif implicite de performance finale pré-déterminée qui est intégrée à l'expression de la rémunération de l'asset manager comme seuil déclencheur du paiement d'une commission supplémentaire.

Le problème d'investissement de l'asset manager dans le cas plus général où l'expression de la rémunération intègre un portefeuille benchmark comprenant une ou plusieurs sources de risque, i.e. une richesse cible variable, se généralise de la même manière que dans le chapitre précédent. Il suffit de considérer un changement de la variable de référence du problème afin que celle-ci intègre la valeur du portefeuille benchmark comme numéraire (pour plus de détails voir la dernière section du chapitre quatre). L'expression de la richesse terminale, solution optimale du problème avec benchmark stochastique, est, à ce changement de variable près, identique à celle du problème avec hypothèse de "benchmark fixe".

6. L'expression de la fonction d'utilité HARA "Loss Averse" peut être vue comme une fonction d'utilité HARA standard à laquelle on retranche un terme de pénalisation de la sous-performance par rapport à la richesse cible. Ce terme asymétrique, qui prend une valeur non nulle pour les valeurs inférieures à la cible de richesse, s'identifie à une mesure du coût de la perte, qui est une fonction croissante de l'amplitude de la perte.



$D$  : le coefficient d'aversion à la sous-performance de l'asset manager, avec  $D \geq 1$ ,

$C_1, C_2$ : deux constantes quelconques vérifiant  $C_1 \times \gamma > 0$ , et  $C_2 \in \mathbb{R}$ .

$x \rightarrow L^*(x, x^0, x^*)$ : la fonction d'aversion à la perte qui est continue et proportionnelle au coût d'utilité de la sous-performance et dont l'expression est la suivante<sup>7</sup> :  $L^*(x, x^0, x^*) \equiv u^*(x^*, x^0) - u^*(x, x^0)$ .

Nous supposons que la contrainte technique suivante est vérifiée :

pour  $\gamma > 0$ , on a  $x > x^0 \geq 0$ , et pour  $\gamma < 0$ ,  $x^0 > x \geq 0$ .

Nous faisons les deux hypothèses supplémentaires suivantes (contraintes de "benchmarking") :

$$(1) \quad x^* \equiv F_T(W^0) \equiv b W^0 :$$

la rémunération cible de l'asset manager est égale au niveau "central" de sa rémunération,  $F_T(W^0)$ , obtenu dans le cas où la valeur finale du portefeuille est égale à  $W^0$ , la cible de richesse choisie par l'investisseur<sup>8</sup>,

$$(2) \quad x^0 \equiv (1 - \alpha^0) \times x^* \equiv (1 - \alpha^0) \times F_T(W^0) \equiv (1 - \alpha^0) \times b W^0 :$$

le seuil de richesse minimum ( $\gamma > 0$ ) ou maximum ( $\gamma < 0$ ), noté  $x^0$ , est proportionnel au niveau de la cible de rémunération de l'asset manager, i.e. le point "central" de sa rémunération,  $x^* \equiv F_T(W^0)$  avec  $0 \leq \alpha^0 \leq 1$  pour  $\gamma > 0$  et  $\alpha^0 < 0$  pour  $\gamma < 0$ .

Ces deux hypothèses couplées à la contrainte technique de seuil énoncée ci-dessus (i.e.  $x > x^0$  ou  $x < x^0$ ) et à la prise en compte du terme de pénalisation de la perte (i.e.  $L^*(x, x^0, x^*)$ ) dans l'expression de la fonction d'utilité, s'interprètent comme des contraintes liées à une pratique de "benchmarking", et correspondent à de nombreux cas de figure rencontrés en pratique.

Une première situation très courante est celle où des contraintes de "Tracking Error" (i.e. contrainte de risque portant sur l'écart entre la valeur (finale) du portefeuille et la valeur cible, notée  $W^0$ ) sont imposées par l'investisseur ou le risk manager

---

7. La forme de la fonction de perte considérée ici a déjà été analysée dans la première partie. Elle correspond à une fonction de perte linéaire qui mesure le coût d'utilité de la perte. Cette fonction de perte se définit comme l'écart entre l'utilité du niveau cible et l'utilité de la richesse finale atteinte.

Remarquons que, l'utilité étant une fonction croissante de la richesse, ce terme de coût devient positif (et pénalise l'asset manager) si le niveau de richesse atteint est inférieur à la cible finale.

8. La cible de richesse de l'investisseur, notée  $W^0$ , sert de seuil de richesse de référence (point "central") pour déterminer l'obtention ou non de la commission de sur-performance. De manière similaire, [Kouwenberg Ziemba, 2007] font l'hypothèse d'une rémunération cible égale à ce niveau de référence,  $F_T(W^0)$ , pour l'asset manager averse à la sous-performance et dont la fonction d'utilité correspond à celle de la théorie des perspectives ("prospect theory"); son expression (avec nos notations) est la suivante :

$$v^*(x, x^*) \equiv \begin{cases} -A(x^* - x)^{\gamma_1} & \text{si } x \leq x^* \\ +B(x - x^*)^{\gamma_2} & \text{si } x > x^* \end{cases}$$

avec  $x \equiv F_T(W_T)$ ,  $x^* \equiv F_T(W^0)$ ,  $A, B > 0$ , et  $0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$ .

à l'asset manager, ce dernier devant les intégrer dans ses préférences d'investissement. Il s'agira par exemple de contrainte de seuil maximum imposé sur le montant de la sous-performance, ou sur un indicateur de risque comme la "Tracking Error volatility" ou encore la "Tracking Error Value-at-Risk"<sup>9</sup>.

Une autre interprétation est de considérer que, indépendamment des préférences de l'investisseur, ces contraintes implicites de seuil traduisent l'aversion à la sous-performance ou encore un profil de gain spécifique qui est propre à l'asset manager (convexe dans le cas  $\gamma > 0$  et concave dans le cas  $\gamma < 0$ ).

Dans ce cas, on supposera que ces préférences de l'asset manager sont liées au coût financier que représente, pour lui, une situation de sous-performance : pénalisation de la sous-performance (aversion à la sous-performance), prise de risque supplémentaire considérée comme prohibitive au delà d'un certain niveau de sous-performance (seuil de rémunération minimale dans le cas  $\gamma > 0$ ) ou au delà d'un certain niveau de sur-performance (seuil de rémunération maximale pour  $\gamma < 0$ ).

Par exemple, une sous-performance trop importante par rapport à la valeur cible de l'investisseur,  $W^0$ , peut entraîner, au delà du non paiement de la commission de sur-performance, une baisse des nouveaux flux d'investissement, ce qui indirectement implique un niveau de rémunération finale plus faible.

Nous considérons à présent la variable  $z \equiv x - x^*$ , qui représente la "richesse excédentaire" de l'asset manager par rapport à la rémunération cible. De même, on pose  $z^0 \equiv x^0 - x^*$ .

Sous nos hypothèses, on peut écrire  $z \equiv Z_T = F_T(W_T) - F_T(W^0)$ ; la "richesse excédentaire" de l'asset manager s'identifie à la rémunération de l'asset manager en excès du niveau central de rémunération. On a également  $z^0 = -\alpha^0 \times F_T(W^0)$

Nous pouvons ré-exprimer la fonction d'utilité de l'asset manager en fonction des variables  $z$  et  $z^0$  sous la forme suivante :

$$v^*(x, x^0, x^*) = v^*(z, z^0, 0)$$

avec :  $v^*(z, z^0, 0) = u^*(z, z^0) - (D - 1) \times [u^*(0, z^0) - u^*(z, z^0)] \times 1_{\{z \leq 0\}}$

Finalement en posant  $z' \equiv z/b \equiv Z_T/b$ , on obtient :

$$z' \equiv Z'_T \equiv (F_T(W_T) - F_T(W^0))/b = Y_T + (c/b) (Y_T)^+$$

On en déduit l'expression équivalente suivante de la fonction d'utilité de l'asset manager<sup>10</sup> :

$$v^*(z, z^0, 0) \cong v(z') \equiv \begin{cases} u(z') - (D - 1) \times [u(0) - u(z')] & \text{si } z' < 0 \\ u(z') & \text{si } z' \geq 0 \end{cases}$$

avec  $z' \equiv Z'_T = Y_T + d (Y_T)^+$  qui représente, à la constante  $b$  près, la "rémunération excédentaire" de l'asset manager relativement au niveau central de rémunération,

9. On entend par "Tracking Error volatility", la volatilité de la Tracking Error, cette dernière variable étant définie comme précédemment. De même la "Tracking Error Value-at-Risk" représente la VaR par rapport à la cible de richesse.

10. En effet, les préférences de l'investisseur sont invariantes par transformation linéaire.

avec  $x \rightarrow u(x)$  qui désigne la fonction d'utilité HARA donnée par l'expression suivante :

$$u(x) \equiv u^*(x + A \gamma, 0) = \frac{C_1}{1-\gamma} \left\{ \frac{x}{\gamma} + A \right\}^{1-\gamma} + C_2,$$

avec  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,  $C_1 \times \gamma > 0$ ,  $A \equiv \alpha^0 \times W^0 / \gamma > 0$ ,  $C_2$  quelconque,

et avec  $d \equiv c/b$ , le rapport entre le taux de frais des gestion variables, noté  $c$ , et le taux des frais de gestion sur encours, noté  $b$ , avec  $0 \leq c < 1 - b$  et  $0 < b < 1$ .

## 1.2. Expression du problème d'investissement et de la richesse terminale optimale.

Rappelons tout d'abord succinctement les principales hypothèses de marché qui sont les nôtres dans tous ce chapitre<sup>11</sup> :

- (1) Le marché est supposé ouvert en permanence et les transactions se font sans arbitrages possibles (hypothèse d'AOA) ni coûts de transaction.
- (2) Le marché est complet et comprend  $N+1$  actifs :

L'actif dit "Actif Sans Risque" ("ASR"); localement sans risque, il s'interprète comme un "rollover" d'un instrument du marché monétaire, et a pour rendement instantané :

$$dS_t^0 / S_t^0 = r(t)dt$$

où  $r(t)$  est un processus qui représente le taux court instantané en vigueur sur le marché monétaire.

Les  $N$  autres actifs sont risqués et ont pour rendements instantanés des processus d'Itô. Plus précisément, on écrit en notation vectorielle :

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dZ_t)$$

où  $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^N)$  représente le vecteur des  $N$  actifs risqués,

où  $\mu(t) = (\mu_j(t); j = 1 \dots N)$ , représente le vecteur des rendements moyens instantanés (taux court plus prime de risque),

et où  $\sigma(t) = (\sigma_{jk}(t); j, k = 1 \dots N)$  représente la matrice de co-volatilité des processus de rendements instantanés.

- (3) On considère l'ensemble des stratégies dynamiques autofinancantes et admissibles :

-autofinancantes : pas d'apport de richesse intermédiaire et gain entièrement ré-investi,

---

11. Pour plus de détail voir la section 1.1 intitulée "cadre général" dans le premier chapitre (première partie de la thèse).

-admissibles : elles procurent une richesse finale dont le moment d'ordre deux est fini (ensemble noté  $L^2(P)$ ).

Sous ces hypothèses de marché, le problème d'investissement de l'asset manager (i.e. trouver la stratégie dynamique optimale qui maximise l'utilité espérée de la rémunération finale) se ramène à la résolution du problème statique dont l'expression est la suivante :

PROBLÈME 19.

$$(P19) \begin{cases} \max_{Y_T \in L^2(P)} E \left\{ v(Y_T + d(Y_T)^+) \right\} \\ \text{s.a. } E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E \{1/H_T\} \end{cases}$$

avec  $Y_T \equiv W_T - W^0$  l'écart de la valeur finale du portefeuille par rapport au niveau de richesse cible,

avec  $x \rightarrow v(x)$  la fonction d'utilité HARA "Loss Averse" dont l'expression est la suivante<sup>12</sup> :

$$v(x) = u(x) - (D - 1) \times (u(0) - u(x))^+ \quad (1.2)$$

avec  $D$ ,  $D \geq 1$ , le paramètre d'aversion à la sous-performance de l'asset manager,

avec  $d \equiv c/b$ , le rapport entre le taux des frais de gestion variables, noté  $c$ , et le taux des frais de gestion sur encours, noté  $b$ , avec  $0 \leq c < 1 - b$  et  $0 < b < 1$ ,

avec  $x \rightarrow u(x)$  qui désigne l'expression de la fonction d'utilité HARA :

$$u(x) = \frac{C_1}{1 - \gamma} \left\{ \frac{x}{\gamma} + A \right\}^{1 - \gamma} + C_2$$

où  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,  $C_1 \times \gamma > 0$ ,  $A \equiv \alpha^0 W^0 / \gamma > 0$ ,  $C_2$  quelconque et où on a  $0 \leq \alpha^0 \leq 1$  pour  $\gamma > 0$  et  $\alpha^0 < 0$  pour  $\gamma < 0$ .

---

12. Après avoir remarquer que  $Z'_T = Y_T + d(Y_T)^+ = Y_T \times 1_{\{Y_T < 0\}} + \theta Y_T \times 1_{\{Y_T \geq 0\}}$  où on a posé  $\theta \equiv 1 + d$ , nous pouvons ré-écrire l'expression de la fonction à maximiser de la manière suivante :

$$v(z'(y)) \cong w(y) \equiv v(z'(y))/D = \begin{cases} u(y) + \frac{(1-D)}{D} u(0) & \text{si } y < 0 \\ u(\theta y)/D & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

avec, comme précédemment,  $D$ ,  $D \geq 1$ , le paramètre d'aversion à la sous-performance de l'asset manager et où on posé :  $z'(y) \equiv Z'_T$  et  $y \equiv Y_T$

et avec  $H_T$  qui désigne la valeur finale du portefeuille numéraire<sup>13</sup>.

Pour  $D = 1$ , on retrouve l'expression de la fonction d'utilité de l'asset manager HARA non averse au risque. L'expression de la solution du problème (19) est donnée dans le théorème suivant :

THÉOREME 8. *La richesse terminale optimale du problème (P19) est donnée par l'expression suivante :*

(1) Pour  $D \geq \theta \geq 1$ ,

$$Y_T^* = \begin{cases} I(\frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T})/\theta & \text{si } H_T \geq \overline{H} \\ 0 & \text{si } \underline{H} < H_T < \overline{H} \\ I(k/H_T) & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases}$$

(2) Pour  $\theta \geq D \geq 1$ ,

$$Y_T^* = \begin{cases} I(\frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T})/\theta & \text{si } H_T > H^* \\ I(k/H_T) & \text{si } H_T \leq H^* \end{cases}$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E\{1/H_T\}$ ,

avec  $\underline{H} \equiv k/u'(0) = k \frac{\gamma A^\gamma}{C_1}$ ,  $\overline{H} \equiv k \frac{D}{\theta} / u'(0) = k \frac{D}{\theta} \frac{\gamma A^\gamma}{C_1}$  et avec  $H^*$  solution implicite de l'équation suivante :  $f(\frac{k}{H^*} \frac{D}{\theta}) = 0$  avec  $f(x) \equiv g(\frac{\theta}{D}x) - \frac{1}{D}g(x) - (1 - 1/D)g(\frac{C_1}{\gamma}A^{-\gamma})$  où  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x)]$  et où  $x \rightarrow I(x)$  désigne l'inverse de la fonction  $x \rightarrow u'(x)$  et a pour expression :  $I(x) \equiv \gamma \left\{ \left( \frac{C_1}{\gamma} \frac{1}{x} \right)^{1/\gamma} - A \right\}$ .

avec  $D$ ,  $D \geq 1$ , qui désigne le paramètre d'aversion à la sous-performance,

avec  $d \equiv c/b$ , le rapport entre le taux des frais de gestion variables, noté  $c$ , et le taux des frais de gestion sur encours, noté  $b$ , avec  $0 \leq c < 1 - b$  et  $0 < b < 1$ .

et où on a posé  $\theta \equiv 1 + d$ .

Pour  $D = 1$ , on retrouve le problème correspond à celui de l'asset manager HARA non averse au risque recevant une commission de performance, analysé dans le chapitre précédent.

Pour  $D > 1$  et  $d = 0$ , il s'agit du problème de l'asset manager HARA averse à la sous-performance ne touchant qu'une commission de gestion sur encours. Ce problème est celui qui a été analysé dans le second chapitre. Ainsi, dans ce cas, la stratégie optimale de l'asset manager s'identifie à celle d'un investisseur averse à la sous-performance maximisant l'utilité espéré de la richesse finale de son portefeuille.

Pour  $D > 1$  ou  $d > 0$ , l'expression de la richesse terminale de la stratégie optimale est fournie dans le théorème ci-dessus.

13. Le portefeuille "numéraire", qui est aussi appelé portefeuille de croissance optimale ("growth optimal") par [Merton, 1990] car il correspond à la stratégie optimale de l'investisseur logarithmique, noté  $(H, h)$ , est donné par les expressions suivantes :

$$h_t = \left( \sigma(t)\sigma(t)' \right)^{-1} (\mu(t) - r(t)\mathbf{1}) \text{ et, en notant le vecteur des prix de marché du risque ("market prices of risk") par } \lambda(t) = \sigma(t)^{-1} (\mu(t) - r(t)\mathbf{1}),$$

$$H_t = \exp \left\{ \int_0^t (r(s) + \lambda(s)' \lambda(s)/2) ds + \int_0^t \lambda(s)' dZ_s \right\}$$

En particulier, on a le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 32. Pour  $D = \theta > 1$ ,

- (1) La richesse terminale, solution optimale du problème (P19) est donnée par l'expression suivante :

$$Y_T^* = \begin{cases} I(k/H_T)/\theta & \text{si } H_T \geq \frac{k\gamma A^\gamma}{C_1} \\ I(k/H_T) & \text{si } H_T \leq \frac{k\gamma A^\gamma}{C_1} \end{cases}$$

- (2) La fonction de rémunération "excédentaire" de l'asset manager "loss averse" correspondant au problème (P19) est donnée par l'expression suivante :  $Z_T^* = bY_T^{**}$  avec  $Y_T^{**} \equiv I(k/H_T)$ .

Il s'agit, à la constante  $k$  près, de l'expression de la rémunération de l'asset manager de référence<sup>14</sup>.

Autrement dit, à la contrainte de budget près, l'asset manager recevant des frais de gestion variables a le même profil de gain (symétrique et continu) que l'asset manager sans incitation financière ni aversion à la perte.

---

14. il s'agit de l'asset manager sans aversion à la sous-performance et sans commission de sur-performance.

## 2. Stratégie dynamique de l'asset manager 'CRRA Loss Averse'

### 2.1. Problème d'investissement considéré et expression de la stratégie optimale.

Nous analysons dans cette section les propriétés de la stratégie dynamique optimale dans le cas où l'asset manager a une fonction d'utilité 'HARA Loss Averse' dont l'expression est la suivante<sup>15</sup> :

$$v(z') \equiv \begin{cases} u(z') + \frac{(1-D)}{D}u(0) & \text{si } z' < 0 \\ u(z')/D & \text{si } z' \geq 0 \end{cases}$$

avec

$z' \equiv (F_T(W_T) - F_T(W^0))/b \equiv Y_T + d \times \text{Max}(Y_T, 0)$ : l'excédent de rémunération par rapport au niveau "central" de rémunération (à la constante  $b$  près),

$d \equiv c/b$ : le paramètre d'incitation financière<sup>16</sup>,

$Y_T \equiv W_T - W^0$ : l'écart de valeur finale entre le portefeuille géré et la cible de richesse de l'investisseur,

$u(x)$ :  $\frac{(x+a)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  avec  $\gamma \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$

$-a \equiv -\alpha^0 \times W^0 < 0$ : le seuil de perte maximale autorisée, avec  $0 < \alpha^0 < 1$

$D$ : le niveau d'aversion à la sous-performance de l'asset manager, avec  $D \geq 1$ .

Considérons à présent la variable  $y \equiv z' + a \equiv a + Y_T + d(Y_T)^+$ . L'expression à maximiser,  $v(z' \equiv y - a)$ , prend la forme d'une fonction d'utilité "CRRA Loss Averse"<sup>17</sup> :

$$v^0(y) \equiv v(y - a) \equiv \begin{cases} u^0(y) + \frac{(1-D)}{D}u^0(a) & \text{si } y < a \\ u^0(y)/D & \text{si } y \geq a \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $u^0(y) \equiv u(y - a) = \frac{(y)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ ,  $\gamma \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$ , et où on suppose que  $a > 0$ , et  $D \geq 1$ .

Finalement, remarquons que les hypothèses faites sur la structure de rémunérations et les préférences de l'asset manager peuvent se reformuler des deux manières équivalentes suivantes :

- (1) Première formulation : rémunération avec commission fixe et incitation financière symétrique

15. il s'agit du cas particulier de l'expression de la fonction d'utilité de l'asset manager HARA 'loss averse' donnée par l'équation (1.2) dans le cas où  $C_2 = 0$ ,  $C_1 \equiv \gamma^{1-\gamma}$  et  $A \equiv a/\gamma$ .

16. On rappelle que le paramètre  $d$  est défini comme le rapport entre le taux des frais de gestion variables, noté  $c$ , et le taux des frais de gestion sur encours, noté  $b$  où on suppose que  $0 < b < 1$  et  $0 \leq c < 1 - b$ .

- L'expression de la fonction de rémunération est la suivante :  
 $x/b \equiv F(W_T)/b \equiv a + Y_T + d(Y_T)^+$   
avec  $b \times d(Y_T)^+$  le montant des frais de sur-performance,  $b \times a$  le montant de la commission fixe, et  $b \times Y_T$  le montant de la commission d'incitation financière symétrique.
  - la rémunération cible est donnée par l'expression suivante :  
 $x^*/b \equiv F(W^0)/b \equiv a$  et la rémunération minimale par  
 $x^0/b \equiv (1 - \alpha) \times x^*/b \equiv 0$  avec  $\alpha \equiv 1$ .
  - La fonction d'utilité est donnée par l'expression suivante<sup>17</sup> :  
 $v^*(x, x^0, x^*) \cong v^*((x - x^*)/b \equiv x/b - a, (x^0 - x^*)/b \equiv -a, 0)$   
 $= v(x/b - a) = v^0(x/b \equiv a + Y_T + d(Y_T)^+)$   
avec la fonction  $v^0$  donnée par l'expression (2.1) ci dessus.
- (2) Seconde formulation : rémunération avec commission fixe et assurance de portefeuille

- L'expression de la fonction de rémunération est la suivante :  
 $x/b \equiv F(W_T)/b \equiv a + W_T + d(Y_T)^+$   
avec  $b \times d(Y_T)^+$  le montant des frais de sur-performance,  $b \times a$  le montant de la commission fixe et  $b \times W_T$  le montant des frais de gestion sur encours.
- la rémunération cible est donnée par l'expression suivante :  
 $x^*/b \equiv F(W^0)/b \equiv a + W^0$  et la rémunération minimale par  $x^0/b \equiv (1 - \alpha) \times x^*/b \equiv W^0$  avec  $(1 - \alpha) \equiv 1/(1 + \alpha^0)$ .
- La fonction d'utilité est donnée par l'expression suivante<sup>18</sup> :  
 $v^*(x, x^0, x^*) \cong v^*((x - x^*)/b, (x^0 - x^*)/b, 0)$   
 $= v^*(x/b - (a + W^0), -a, 0) = v(x/b - (a + W^0))$   
 $= v^0(x/b - W^0 \equiv a + Y_T + d(Y_T)^+)$   
avec la fonction  $v^0$  donnée par l'expression (2.1) ci dessus.

Le problème (P20) peut donc s'écrire comme suit :

PROBLÈME 20.

$$(P20) \left\{ \begin{array}{l} \max_{Y_T \in L^2(P)} E \left\{ v^0(a + Y_T + d(Y_T)^+) \right\} \\ s.a. \quad E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E \{1/H_T\} \end{array} \right.$$

avec

$x \rightarrow v^0(x)$  : la fonction d'utilité "CRRA Loss Averse" donnée par l'équation (2.1) ci-dessus,

17. Nous supposons que l'expression de  $v^*(x, x^0, x^*)$  est celle de l'équation 1.1 ci-dessus avec l'hypothèse supplémentaire suivante :  $u^*(x, x^0) \equiv u^0(x - x^0)$  avec  $x \rightarrow u^0(x)$  définie comme précédemment (fonction d'utilité isoélastique).

18. Même hypothèse faite sur la forme de la fonction d'utilité  $v^*(x, x^0, x^*)$  (cf. équation 1.1 ci-dessus) que dans la première formulation.



$a$  : le rapport entre le montant de la commission fixe et le taux de frais de gestion sur encours<sup>19</sup>, où  $a > 0$ ,

$d$  : le rapport entre le taux des frais de gestion variables et le taux fixe des frais de gestion sur encours.

Le problème (P20) étant un cas particulier du problème (P19), on en déduit le résultat suivant :

CONSÉQUENCE 15. La richesse terminale optimale du problème (P20) est donnée par l'expression suivante :

(1) Pour  $D \geq \theta \geq 1$ ,

$$Y_T^* = \begin{cases} ((\frac{\theta}{D} \frac{H_T}{k})^{1/\gamma} - a) / \theta & \text{si } H_T \geq \overline{H} \\ 0 & \text{si } \underline{H} < H_T < \overline{H} \\ (\frac{H_T}{k})^{1/\gamma} - a & \text{si } H_T \leq \underline{H} \end{cases}$$

(2) Pour  $\theta \geq D \geq 1$ ,

$$Y_T^* = \begin{cases} ((\frac{\theta}{D} \frac{H_T}{k})^{1/\gamma} - a) / \theta & \text{si } H_T > H^* \\ (\frac{H_T}{k})^{1/\gamma} - a & \text{si } H_T \leq H^* \end{cases}$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E\{1/H_T\}$ ,

avec  $\underline{H} \equiv ka^\gamma$ ,  $\overline{H} \equiv \frac{kD}{\theta} a^\gamma$  et avec  $H^*$  la solution implicite de l'équation :

$$f\left(\frac{k}{H^*} \frac{D}{\theta}\right) = 0 \text{ avec } f(x) \equiv g\left(\frac{\theta}{D}x\right) - \frac{1}{D}g(x) - (1 - 1/D)g(a^{-\gamma})$$

où on a posé  $g(x) \equiv -\frac{x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} + ax$ .

avec  $D$ ,  $D \geq 1$ , le paramètre d'aversion à la sous-performance,

avec  $d$ ,  $d \geq 0$ , le rapport entre le taux des frais de gestion variables et le taux fixe de frais de gestion sur encours,

avec  $a$ ,  $a > 0$ , le montant de la commission fixe rapporté au taux des frais de gestion sur encours,

et où on a posé  $\theta \equiv 1 + d$ .

Par voie de conséquence, on en déduit les résultats suivants :

CONSÉQUENCE 16. Pour  $\theta = D > 1$ ,

(1) La richesse terminale optimale correspondant au problème (P20) est donnée par l'expression suivante :

$$Y_T^* = \begin{cases} ((\frac{H_T}{k})^{1/\gamma} - a) / \theta & \text{si } H_T \geq k a^\gamma \\ (\frac{H_T}{k})^{1/\gamma} - a & \text{si } H_T \leq k a^\gamma \end{cases}$$

(2) La fonction de rémunération "excédentaire" de l'asset manager "loss averse" correspondant au problème (P20) est donnée par l'expression suivante :  $Z_T^* = bY_T^{**}$

avec  $Y_T^{**} \equiv (\frac{H_T}{k})^{1/\gamma} - a$ .

19. Ou de manière équivalente avec  $-a$  qui désigne le seuil de perte maximale autorisée par l'investisseur ou le risk manager.

Il s'agit, à la constante  $k$  près, de l'expression de la rémunération de l'asset manager de référence<sup>20</sup>.

Autrement dit, à la contrainte de budget près, l'asset manager recevant des frais de gestion variables a le même profil de gain optimal que l'asset manager sans incitation financière ni aversion à la perte.

Les expressions de la valeur intermédiaire et de l'allocation de la stratégie dynamique optimale sont fournies dans les propriétés (33) et (34) ci-dessous :

PROPRIÉTÉ 33. La valeur à la date  $t$  de la solution optimale du problème (P20), notée  $Y_t^*$ , est donnée par l'une des formules suivantes :

(1) Pour  $D \geq \theta \geq 1$ ,

$$Y_t^* = \frac{\bar{y}}{\theta} C(H_t^*, (\bar{H})^{1/\gamma}, T-t) - \underline{y} P(H_t^*, (\underline{H})^{1/\gamma}, T-t)$$

(2) Pour  $\theta \geq D \geq 1$ ,

$$Y_t^* = \frac{\bar{y}}{\theta} C(H_t^*, (H^*)^{1/\gamma}, T-t) - \underline{y} P(H_t^*, (H^*)^{1/\gamma}, T-t) + \left\{ \frac{\bar{y}(H^*)^{1/\gamma} - a}{\theta} \right\} ZC(T-t) - \left\{ \left( \frac{\bar{y}}{\theta} - \underline{y} \right) (H^*)^{1/\gamma} + \frac{ad}{\theta} \right\} B(H_t^*, (H^*)^{1/\gamma}, T-t)$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E\{1/H_T\}$ ,

avec  $H_t^*$  qui désigne la valeur intermédiaire du portefeuille, solution du problème de Merton, atteignant la richesse terminale,  $H_T^{1/\gamma}$ ,

avec  $\bar{y} \equiv \left(\frac{\theta}{kD}\right)^{1/\gamma}$ ,  $\underline{y} \equiv (1/k)^{1/\gamma}$ ,  $\bar{H} \equiv \frac{kD}{\theta} a^\gamma$ ,  $\underline{H} \equiv ka^\gamma$ ,  
avec  $H^*$  qui désigne la solution implicite de l'équation :

$$f\left(\frac{k}{H^*} \frac{D}{\theta}\right) = 0 \text{ avec } f(x) \equiv g\left(\frac{\theta}{D}x\right) - \frac{1}{D}g(x) - (1 - 1/D)g(a^{-\gamma})$$

où  $g(x) \equiv -\frac{x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} + ax$ .

et enfin, avec  $C(Z_t, X, T-t)$ , (resp.  $P(Z_t, X, T-t)$ , resp.  $B(Z_t, X, T-t)$ ) qui désigne la valeur de l'option call européen, (resp. de l'option put européen, resp. de l'option Put binaire "Cash or Nothing") de strike  $X$ , d'échéance  $T-t$ , sur le sous-jacent  $Z_t$  et  $ZC(T-t)$  le prix de l'obligation Zéro-Coupon d'échéance  $T-t$  dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

PROPRIÉTÉ 34. Dans le cadre du modèle de Black & Scholes (à une seule source de risque), l'allocation de la stratégie dynamique optimale correspondant au problème (P20) est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{cases} w_t^* W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'actif risqué } M \\ (1 - w_t^*) W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'A.S.R} \end{cases}$$

Où  $w_t^* W_t^* \equiv \frac{dW_t^*}{dH_t^*} \left(\frac{h}{\gamma}\right) H_t^*$  est donnée par la formule suivante :

---

20. expression de la richesse terminale solution du problème de l'asset manager non averse à la sous-performance et ne recevant pas de commission de sur-performance.

- Pour  $D \geq \theta \geq 1$ ,

$$w_t^* W_t^* = \frac{h}{\gamma} H_t^* \left( \frac{\bar{y}}{\theta} N \left( d_1 \left( (\bar{H})^{1/\gamma} \right) \right) + \underline{y} N \left( -d_1 \left( (\underline{H})^{1/\gamma} \right) \right) \right)$$

- Pour  $\theta \geq D \geq 1$ ,

$$w_t^* W_t^* = \frac{h}{\gamma} H_t^* \left( \frac{\bar{y}}{\theta} N \left( d_1 \left( (H^*)^{1/\gamma} \right) \right) + \underline{y} N \left( -d_1 \left( (H^*)^{1/\gamma} \right) \right) \right) + \left\{ \left( \frac{\bar{y}}{\theta} - \underline{y} \right) (H^*)^{1/\gamma} + \frac{ad}{\theta} \right\} \frac{e^{-r(T-t)} h \Phi \left( d_2 \left( (H^*)^{1/\gamma} \right) \right)}{\lambda \sqrt{T-t}}$$

avec  $N(\cdot)$ , resp.  $\Phi(\cdot)$  la fonction de répartition, resp. la fonction de densité, de la loi normale,

et avec  $d_1(X) \equiv \ln\left(\frac{H_t^*}{e^{-r(T-t)} X}\right) / \sigma^* + \sigma^* / 2$  et  $d_2(X) \equiv d_1(X) - \sigma^*$

où on a posé  $\sigma^{*2} \equiv \text{Var} \left[ \ln\left(\frac{H_T}{H_t}\right) / \gamma \right] = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^2 \times (T-t)$ .

Finalement, on rappelle que, sous les hypothèses du modèle de Black & Scholes, il existe une relation bi-univoque entre la valeur de chacun des trois portefeuilles suivants pris deux à deux : la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , celle du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , et enfin, celle de l'actif risqué,  $M_t$ <sup>21</sup>.

Cette propriété nous permet en particulier, à tout instant  $t$ , d'exprimer la valeur de la richesse optimale en excès du celle du benchmark, notée  $Y_t^*$ , en fonction de  $M_t$ ; expression qui nous sera utile pour analyser les propriétés de la stratégie optimale.

## 2.2. Analyse de sensibilité du "pay-off" optimal.

En nous appuyant sur un exemple d'application numérique, nous analysons la sensibilité du profil de gain optimal aux variations des paramètres de rémunération et de risque du modèle, ainsi que de l'horizon d'investissement considéré.

En particulier, nous comparerons le profil de gain final ("pay-off") de l'asset manager recevant des frais de sur-performance et qui est averse à la sous-performance (i.e.  $c > 0$  et  $D > 1$ ) avec :

-d'une part, le profil de gain de l'asset manager qui n'est pas averse à la sous-performance mais qui reçoit une incitation financière (i.e.  $c > 0$  et  $D = 1$ ),

-et, d'autre part, le profil de gain de l'asset manager averse à la sous-performance mais qui ne reçoit pas d'incitation financière (i.e.  $c = 0$  et  $D > 1$ ).

Les valeurs numériques utilisées dans toute la suite de ce chapitre seront les suivantes :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\gamma = 75\%$ ,  $T = 5$ , et  $W^0 \equiv e^{rT} = 122\%$ ; ce qui donne en particulier  $\lambda = 30\%$ ,  $h = 150\%$  et  $h^* = 200\%$ .

21. En particulier, dans le cadre du modèle de B&S, on obtient les propriétés de transformation suivantes qui permettent d'exprimer la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , ou du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , en fonction de celle de l'actif risqué  $M_t$  et réciproquement :

on a  $H_t = \Psi(t)(M_t)^h$  avec  $\Psi(t) \equiv e^{(r-\lambda(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}-\frac{\lambda}{2}))t} = e^{(1-h)(r+\frac{\lambda^2}{2h})t} = e^{(1-h)(r+\frac{h\sigma^2}{2})t}$ ,

et  $H_t^* = \Gamma(t)(M_t)^{h^*}$  avec  $\Gamma(t) \equiv H_0^* e^{(1-h^*)(r+\frac{(\lambda/\gamma)^2}{2h^*})t} = H_0^* e^{(1-h^*)(r+\frac{h^*\sigma^2}{2})t}$ .

2.2.1. *Sensibilité aux variations du paramètre d'incitation financière - cas de l'asset manager non averse à la sous-performance.*

Nous avons représenté, pour différentes valeurs du taux des frais de gestion variables,  $c$ , l'excédent de richesse finale du portefeuille (cf. figure (Fig.1)), de l'asset manager (cf. figure (Fig.2)) et de l'investisseur (cf. figure (Fig.3)) en fonction de la valeur de l'actif risqué.

Il s'agit du cas analysé dans la seconde section du chapitre précédent. Ces figures montrent que le profil de gain optimal pour l'asset manager, avec incitation financière et sans aversion à la sous-performance (i.e.  $c > 0$  et  $D = 1$ ), admet les caractéristiques suivantes (cf. figure (Fig.1)) :

- le pay-off de la stratégie optimale est discontinu (contrairement à la stratégie de référence sans incitation financière, cf. courbe rouge). De plus, l'amplitude de cette discontinuité est une fonction croissante du niveau du taux des frais de gestion variables, noté  $c$ . A la limite inférieure, i.e. pour  $c = 0$ , on retrouve la forme continue du pay-off de la stratégie sans incitation financière.
- Le profil de gain de l'asset manager est d'autant plus risqué que la valeur du taux des frais de gestion variables est élevée.  
En dessous d'un certain seuil d'actif risqué (zone de sous-performance de la stratégie relativement au benchmark), la stratégie avec incitation financière sous-performe la stratégie sans rémunération incitative. Le niveau de la sous-performance est une fonction croissante du taux des frais de gestion variables. En contrepartie, pour les niveaux du sous-jacent les plus élevés (scénarios de marché les plus favorables), il y a sur-performance par rapport à la stratégie sans incitation financière. Le niveau de la sur-performance est une fonction croissante du taux des frais de gestion variables.

Finalement, on remarquera que l'existence d'une incitation financière a pour effet d'augmenter de manière conséquente la richesse de l'asset manager en cas de sur-performance alors que le manque à gagner (par rapport au cas sans incitation financière) en cas de sous-performance est minimale (cf. figure (Fig.2)).

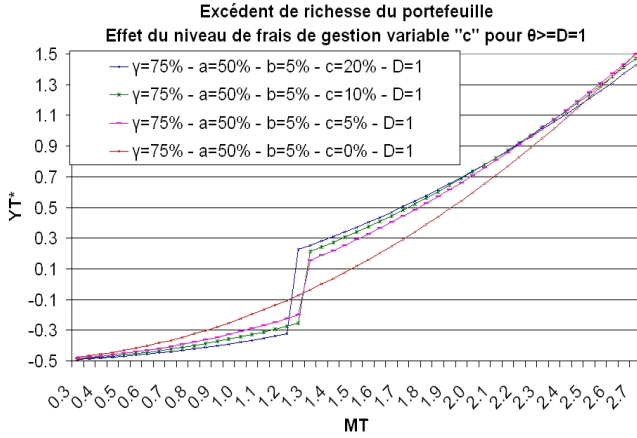


FIGURE 1. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et sans aversion à la sous-performance - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de frais de gestion variables  $c$  pour  $\theta \geq 1$  et  $D = 1$ .

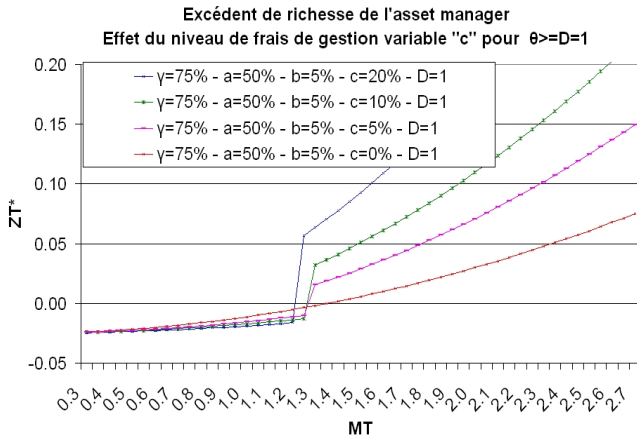


FIGURE 2. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et sans aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'asset manager - effet du niveau de frais de gestion variables  $c$  pour  $\theta \geq 1$  et  $D = 1$ .

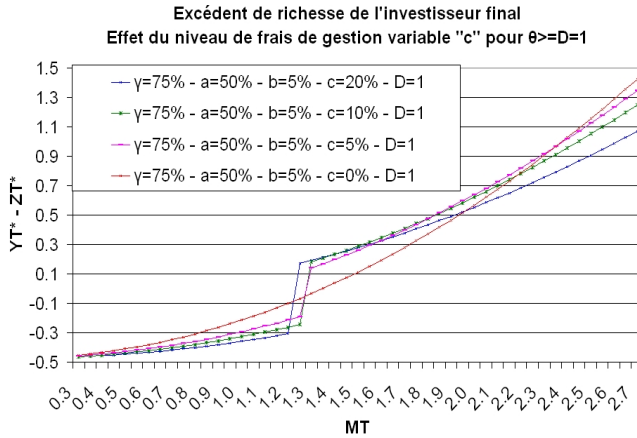


FIGURE 3. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et sans aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'investisseur final - effet du niveau de frais de gestion variables  $c$  pour  $\theta \geq 1$  et  $D = 1$ .

2.2.2. *Sensibilité aux variations du paramètre d'aversion à la sous-performance - cas de l'asset manager bénéficiant d'un niveau élevé d'incitation financière.*

Nous nous intéressons au cas où la valeur du paramètre d'incitation financière,  $\theta \equiv 1 + c/b$ , est plus élevée que celle du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D : \theta/D \geq 1$ .

Nous avons représenté, pour différentes valeurs du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ <sup>22</sup>, l'excédent de richesse finale du portefeuille (cf. figure (Fig.4)), de l'asset manager (cf. figure (Fig.5)) et de l'investisseur (cf. figure (Fig.6)) en fonction de la valeur de l'actif risqué.

Ces trois figures montrent que le niveau de risque de la stratégie suivie par l'asset manager, averse à la sous-performance et recevant une incitation financière, est une fonction décroissante du degré d'aversion à la sous-performance. En particulier, on peut faire les commentaires suivants :

- le pay-off est discontinu (ce qui n'est pas le cas du pay-off de la stratégie sans incitation financière, cf. courbe rouge) et l'amplitude de cette discontinuité diminue en même temps que la valeur du paramètre d'aversion,  $D$ , augmente ; à la valeur limite,  $D = \theta$ , cette discontinuité disparaît.
- le profil de gain de la stratégie optimale pour l'asset manager, recevant des frais de gestion variables, est d'autant moins risqué que le niveau d'aversion à la sous-performance est élevé (moins de perte dans les scénarios de marché défavorables et moins de gain dans les scénarios favorables).

22. pour un niveau du taux des frais de gestion variables  $c$  fixé, avec  $\theta/D \geq 1$ .

- au-dessus d'un certain niveau d'aversion à la sous-performance (c'est le cas en particulier pour  $D = \theta$ ), la stratégie optimale avec aversion à la perte subit moins de perte que la stratégie sans aversion et sans incitation financière dans la zone de valeurs basses du sous-jacent.
- Quand l'aversion à la perte augmente, l'intervalle de valeurs de l'actif risqué, où la stratégie avec incitation financière sur-performe la cible de richesse finale, s'étend vers des valeurs plus basses de l'actif risqué (assurance de portefeuille).  
D'autre part, dans l'intervalle où se produit une sous-performance, la convexité de la courbe de richesse s'accroît quand le niveau d'aversion à la perte augmente. Le contraire se produit dans l'intervalle où la valeur de la stratégie est au dessus de la cible de richesse.

Finalement, on remarquera que l'aversion à la sous-performance a pour effet de fortement diminuer l'excès de rémunération de l'asset manager avec incitation financière par rapport au cas sans incitation et sans aversion (cf. figure (Fig.5)). Ce qui est bénéfique pour l'investisseur final.

On comparera la figure (Fig.2) (cas sans aversion) avec la figure (Fig.5) (cas avec aversion). Mentionnons aussi le cas limite  $D = \theta$  (courbe rose) où le profil de rémunération de l'asset manager devient continu.

On en déduit que la prise en compte d'un contrôle de risque tel que celui considéré ici implique,

- pour l'investisseur final : un profil de gain moins risqué
- pour l'asset manager : un profil de rémunération moins asymétrique (le cas limite  $D = \theta$  correspondant même a un profil de rémunération symétrique).

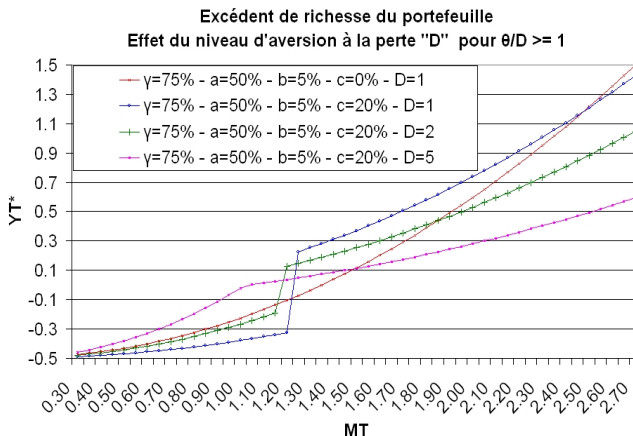


FIGURE 4. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$ ,  $c$  fixé, pour  $\theta/D \geq 1$ .

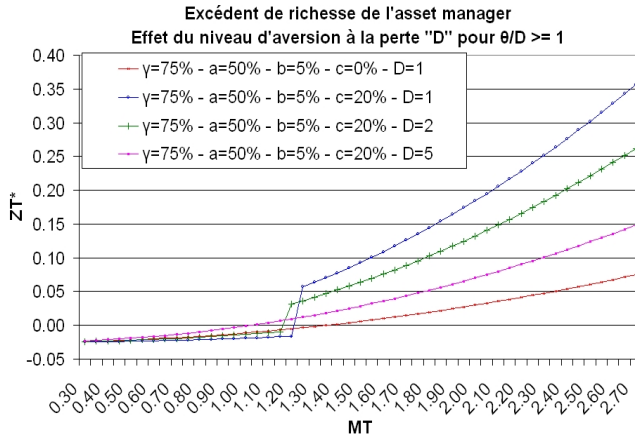


FIGURE 5. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'asset manager - effet du niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$ ,  $c$  fixé, pour  $\theta/D \geq 1$ .

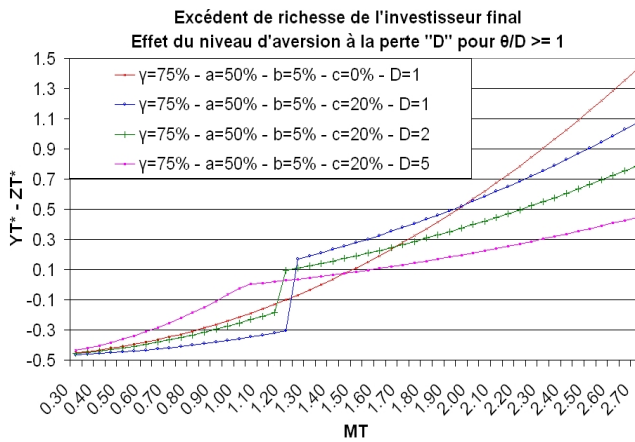


FIGURE 6. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'investisseur final - effet du niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$ ,  $c$  fixé, pour  $\theta/D \geq 1$ .



2.2.3. *Sensibilité aux variations du paramètre d'incitation financière - cas "central" où le paramètre d'aversion à la sous-performance est égal au niveau d'incitation financière.*

Nous nous intéressons au cas où la valeur du paramètre d'incitation financière est égale à celle du paramètre d'aversion à la sous-performance :  $\theta \equiv D \geq 1$  avec  $\theta \equiv 1 + c/b$ .

Nous avons représenté, pour différentes valeurs du taux des frais de gestion variables,  $c$ <sup>23</sup>, l'excédent de richesse finale du portefeuille (cf. figure (Fig.7)), de l'asset manager (cf. figure (Fig.8)) et de l'investisseur (cf. figure (Fig.9)) en fonction de la valeur de l'actif risqué.

Ces trois figures montrent que le profil de gain optimal pour l'asset manager, à niveau d'incitation financière et d'aversion à la sous-performance équivalent (i.e.  $D = \theta$ ), reste inchangé quelque soit les valeurs considérées pour le taux des frais de gestion variables et le niveau "équivalent" du paramètre d'aversion à la perte. En particulier, on observe les points suivants :

- le pay-off de la stratégie optimale correspondant à  $\theta = D$  est continu (cf. figure (Fig.7)).
- le niveau de risque de la stratégie optimale baisse quand le niveau d'incitation financière,  $\theta$ , augmente (à ratio  $D/\theta$  constant égal à un). Ce qui se traduit par plus de gain dans les scénarios de marché défavorables et moins de plus-value dans les cas favorables (cf. figure (Fig.7)).
- Dans la zone de valeurs basses du sous-jacent, la stratégie optimale correspondant à  $\theta = D > 1$  sur-performe la stratégie de référence, obtenue pour  $\theta = D = 1$  (courbe rouge) (cf. (Fig.7)).
- Le niveau de la sur-performance augmente avec le degré d'incitation financière,  $\theta$  (à ratio  $D/\theta$  constant égal à un). En revanche, l'intervalle de valeurs de l'actif risqué où se produit cette sur-performance par rapport à la stratégie sans aversion ni incitation (valeurs les plus basses de l'actif risqué) reste quasiment identique (cf. figure (Fig.7)).
- le profil de rémunération de l'asset manager est symétrique et continu comme c'est le cas pour l'asset manager sans incitation et sans aversion (cf. figure (Fig.8)).

2.2.4. *Sensibilité aux variations du paramètre d'incitation financière - cas de l'asset manager fortement averse à la sous-performance.*

Nous nous intéressons au cas où le niveau d'incitation financière est inférieur à celui de l'aversion à la sous-performance :  $\theta/D \leq 1$  avec  $\theta \equiv 1 + c/b$ .

---

23. pour chaque valeur considérée du paramètre  $c$ , la valeur du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ , est choisie de telle sorte qu'elle vérifie :  $D = \theta \equiv 1 + c/b \geq 1$  avec  $b$  fixé.

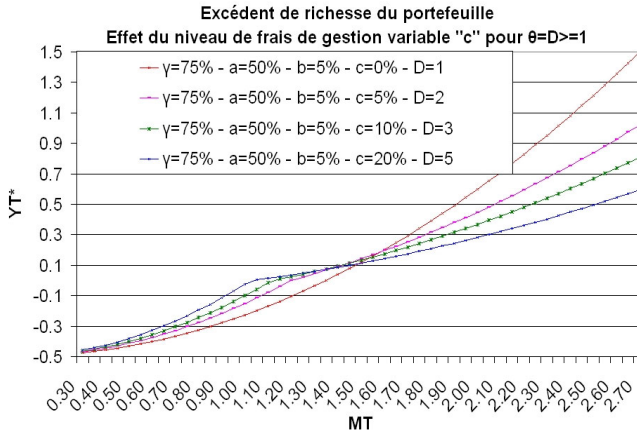


FIGURE 7. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de frais de gestion variables  $c$  pour  $D = \theta$ .

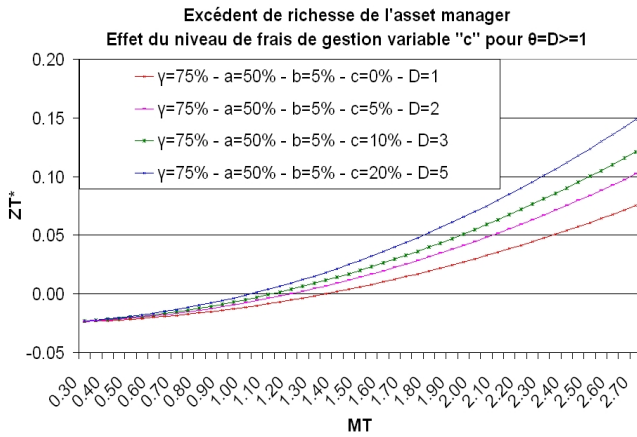


FIGURE 8. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'asset manager - effet du niveau de frais de gestion variables  $c$  pour  $D = \theta$ .

Nous avons représenté, pour différentes valeurs du taux des frais de gestion variables,  $c$ <sup>24</sup>, l'excédent de richesse finale du portefeuille en fonction de la valeur de l'actif risqué (cf. figure (Fig.10)).

Cette figure nous montre que le profil de gain optimal pour l'asset manager averse à la perte, et dont le niveau d'incitation financière est plus faible que son aversion à la sous-performance (i.e.  $D \geq \theta > 1$ ), est semblable à celui d'un asset manager averse à la sous-performance et qui ne bénéficie pas d'incitation financière (i.e.  $D \geq \theta = 1$ , cf. première partie de la thèse).

24. pour un niveau fixé du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ .

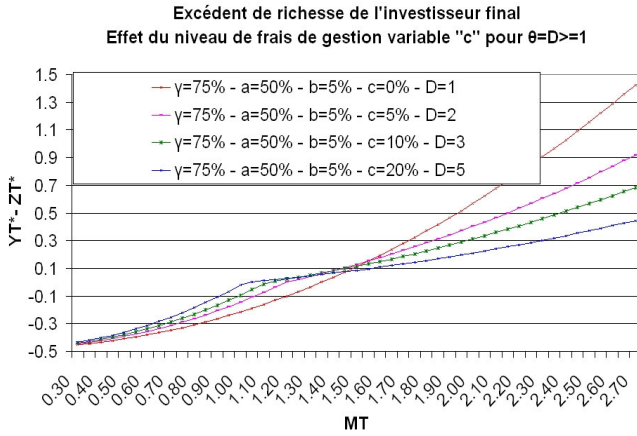


FIGURE 9. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'investisseur final - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$ , pour  $D = \theta$ .

Quand le degré d'incitation financière baisse, la courbe de richesse exhibe un profil de gain dont l'aversion à la sous-performance, par rapport à la cible de richesse, augmente : quand la valeur du taux des frais de gestion variables diminue (toute chose restant égale par ailleurs), l'amplitude de l'intervalle des valeurs médianes de l'actif risqué où il est optimal de gérer passivement le portefeuille augmente.

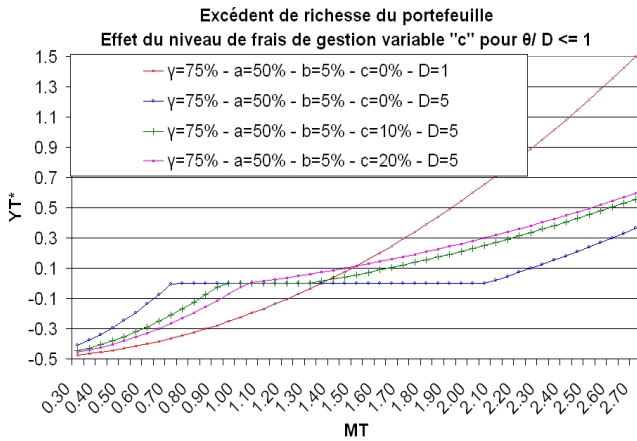


FIGURE 10. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'investisseur final - effet du niveau du taux des frais de gestion variables,  $c$ , pour  $\theta/D \leq 1$ .

2.2.5. *Sensibilité de la valeur des strikes aux variations du paramètre d'aversion à la sous-performance.*

Nous analysons l'effet du changement de valeur du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ , sur les "strikes" (prix d'exercice) des options comprises dans l'expression de la stratégie optimale (cf. propriété 33 ci dessus).

Ces strikes s'identifient aux bornes des intervalles de valeurs de l'actif risqué où l'expression de la stratégie optimale reste la même (états de richesse). Il y a deux strikes et trois états de richesse dans le cas où le paramètre d'aversion à la sous-performance est plus élevé que le niveau d'incitation financière; un seul strike et deux états de richesse dans le cas contraire (voir la conséquence 15 ci-dessus).

Nous avons représenté le niveau de ces "strikes", notés  $M^*$ ,  $M_{min}$  et  $M_{max}$ <sup>25</sup>, en fonction de la valeur de l'aversion à la sous-performance,  $D$ , pour  $\theta = 2$  (cf. figure (Fig.11)), et pour  $\theta = 5$  (cf. figure (Fig.12)).

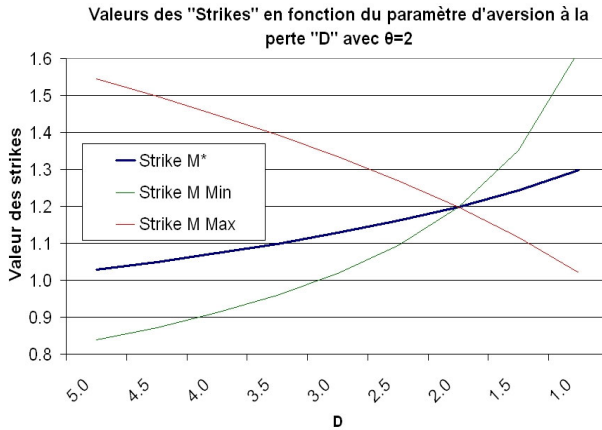


FIGURE 11. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs des "Strikes" en fonction du niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$  pour  $\theta = 2$

En-dessous d'un certain seuil du paramètre d'aversion à la perte, (i.e. pour  $D \leq D^0 \equiv \theta$ ) et toute chose restant égale par ailleurs, la stratégie optimale correspond à l'expression à deux états donnée dans la conséquence 15<sup>26</sup>, et la valeur du strike  $M^*$  est une fonction décroissante du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ , de l'asset manager.

Autrement dit, quand l'aversion diminue, la longueur de la zone de sous-performance

25. l'expression de  $M^*$ , respectivement  $M_{min}$ , respectivement  $M_{max}$ , s'obtient à partir de celle de  $H^*$ , respectivement  $\underline{H}$ , respectivement  $\bar{H}$ , (dont les expressions sont données dans la conséquence (16)) par la transformation donnant  $M_t$  en fonction de celle de  $H_t$  dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

26. expression similaire à celle de la stratégie optimale, pour l'asset manager non averse à la sous-performance et recevant des frais de gestion variables, qui a été étudiée dans le chapitre précédent.

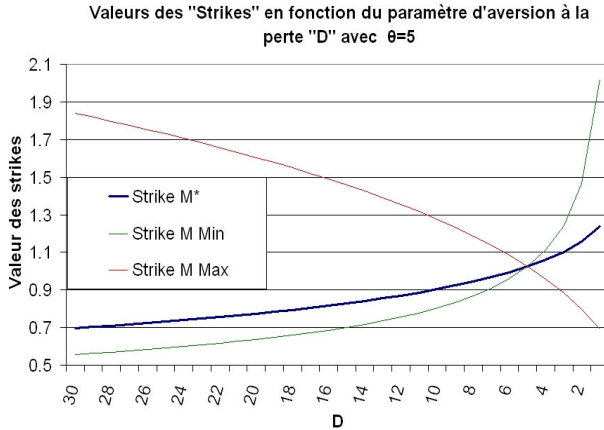


FIGURE 12. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs des "Strikes" en fonction du niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$  pour  $\theta = 5$

(valeurs basses du sous-jacent) augmente au détriment de la zone de sur-performance. Ce qui traduit une probabilité de perte accrue.

A l'inverse, au-dessus de ce même seuil du paramètre d'aversion à la perte, (i.e. pour  $D \geq D^0 \equiv \theta$ ), et toute chose restant égale par ailleurs, la stratégie optimale correspond à l'expression à trois états qui est donnée dans la conséquence 15<sup>27</sup>. Dans ce cas, la valeur du strike  $M_{min}$ , respectivement  $M_{max}$ , est une fonction décroissante, respectivement croissante du niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$ .

Ainsi, quand la valeur du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ , augmente, l'intervalle de valeurs médianes du sous-jacent dans lequel la stratégie optimale est une stratégie passive s'étend au détriment des deux autres intervalles de valeurs de l'actif risqué où il est optimal de gérer activement le portefeuille.

Quelque soit la valeur considérée du paramètre d'incitation financière,  $\theta$ , l'effet des variations du niveau d'aversion à la sous-performance sur la valeur des strikes reste le même (comparer la figure (Fig.11) avec la figure (Fig.12)).

#### 2.2.6. Sensibilité aux variations des paramètres de risque.

##### (1) Sensibilité aux variations du paramètre d'aversion au risque, $\gamma$ :

L'effet sur la stratégie optimale du changement de valeur du paramètre d'aversion à la sous-performance, noté  $D$ , reste le même quelque soit le niveau du paramètre,  $\gamma$  considéré (voir les figures (Fig.13) et (Fig.14) ci-dessous).

27. expression similaire à la forme de la stratégie optimale pour l'asset manager averse à la sous-performance et ne recevant pas d'incitation financière, qui a été étudiée dans la partie I.

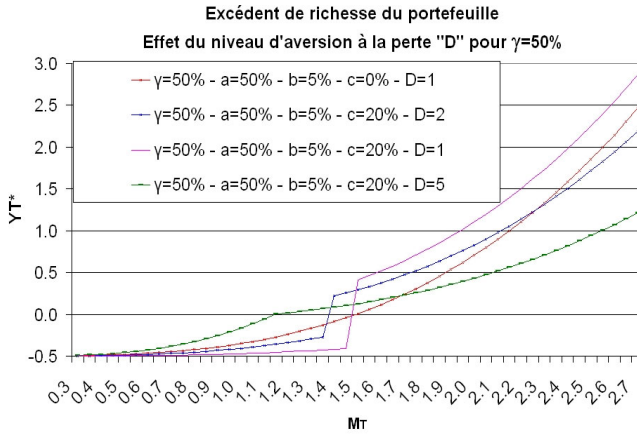


FIGURE 13. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion à la sous-performance, pour  $\gamma \equiv 50\%$ .

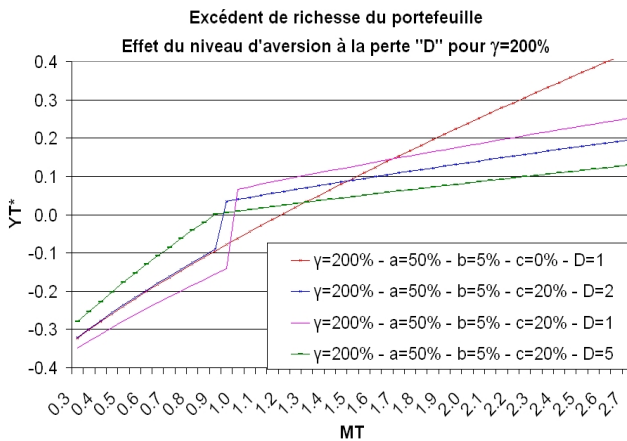


FIGURE 14. Stratégies CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion à la sous-performance, pour  $\gamma \equiv 200\%$ .

La baisse du paramètre,  $\gamma$ , d'aversion au risque, a pour effet d'accroître le profil de risque de la stratégie optimale (cf. figure (Fig.15)). En effet, quand la valeur de l'aversion au risque considérée,  $\gamma$ , baisse :

- La zone de sous-performance s'étend à des valeurs élevées du sous-jacent,
- Le niveau de sous-performance augmente,
- la convexité de la courbe de richesse finale, dans la zone de sur-performance, s'accroît.

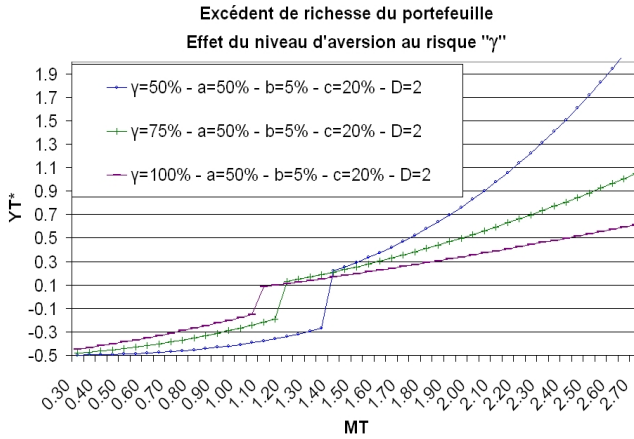


FIGURE 15. Stratégie CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion au risque  $\gamma$ .

(2) Sensibilité aux variations du montant de budget de risque  $a$  :

Quand la valeur du budget de risque,  $a$ , augmente, le niveau de la sous-performance dans la zone de valeurs basses de l'actif risqué, augmente (cf. figure (Fig.16)). Il en va de même du montant de la sur-performance dans la zone de de valeurs élevées de l'actif risqué. Remarquons aussi que la valeur du strike  $M^*$  est indépendante du choix de la valeur du paramètre  $a$ . Comme cela est illustré sur la figure (Fig.16),

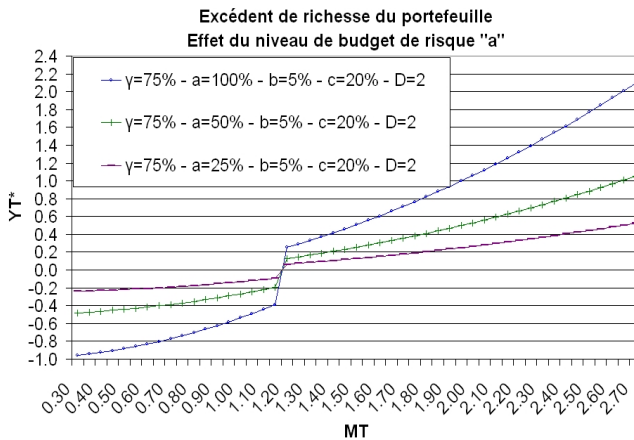


FIGURE 16. Stratégie CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau de budget de risque  $a$ .

### 2.3. Analyse de l'allocation dynamique optimale.

Nous analysons la sensibilité de l'allocation dynamique optimale (niveau d'exposition à l'actif risqué et richesse intermédiaire) aux variations des paramètres du modèle considéré (taux des frais de gestion variables,  $c$ , niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$ , paramètres de risque du modèle considéré,  $a$  et  $\gamma$  et horizon d'investissement,  $T$ ).

Nous souhaitons en particulier comparer l'allocation dynamique mise en place par l'asset manager averse à la sous-performance et recevant des frais de gestion variables ( $D > 1$  et  $\theta > 1$ ) avec celle du gérant non averse à la sous-performance mais recevant des frais de gestion variables ( $D = 1$  et  $\theta \geq 1$ , cf. chapitre précédent) et celle du gérant averse à la sous-performance mais ne bénéficiant pas d'incitation financière ( $D \geq 1$  et  $\theta = 1$ , cf. première partie de la thèse).

Nous commenterons également les résultats de notre modèle dans le cas particulier où le montant de budget de risque est maximal (i.e.  $a = W^0$  et  $D \geq 1$ ). Il s'agit d'une généralisation du modèle analysé par [Hodder Jackwerth, 2006] (i.e.  $a = W^0$  et  $D = 1$ ) à la prise en compte de l'aversion à la sous-performance de l'asset manager (i.e.  $D > 1$ ).

#### 2.3.1. Sensibilité aux variations du paramètre d'aversion à la sous-performance dans le cas d'un niveau élevé d'incitation financière.

Nous considérons le cas particulier où la valeur numérique du paramètre d'incitation financière est supérieure ou égale à celle du paramètre d'aversion à la sous-performance :  $\theta/D \geq 1$ .

Nous avons représenté, pour différents niveaux d'aversion à la sous-performance,  $D$ , la richesse intermédiaire du portefeuille optimal (notée  $Y_t^*$ , cf. figure ((Fig.17)), et le niveau optimal d'exposition à l'actif risqué (noté  $P_t^*$ , cf. figure ((Fig.18)), en fonction de la valeur de l'actif risqué.

On observe (cf. figure (Fig.17)) que, dans un intervalle de valeurs médianes à basses de l'actif risqué, la stratégie optimale pour l'asset manager averse à la sous-performance et bénéficiant d'un niveau élevé d'incitation financière (i.e.  $\theta/D > 1$ ) sur-performe la stratégie de référence de l'asset manager sans incitation et sans aversion à la sous-performance (i.e.  $\theta = D = 1$  cf. courbe rouge).

Cette sur-performance se traduit par une sur-exposition dont l'amplitude est une fonction décroissante du paramètre  $D$  (cf. figure (Fig.18)). De plus, quand le niveau du paramètre  $D$  augmente, la zone de sur-performance est translatée vers un intervalle de valeurs plus basses du sous-jacent.

Enfin, on remarque que, quelque soit le niveau du paramètre d'aversion à la perte, il se produit, dans un intervalle de valeurs élevées de l'actif risqué, une sous-exposition à l'actif risqué relativement au cas sans incitation et sans aversion (cf. figure (Fig.18)).



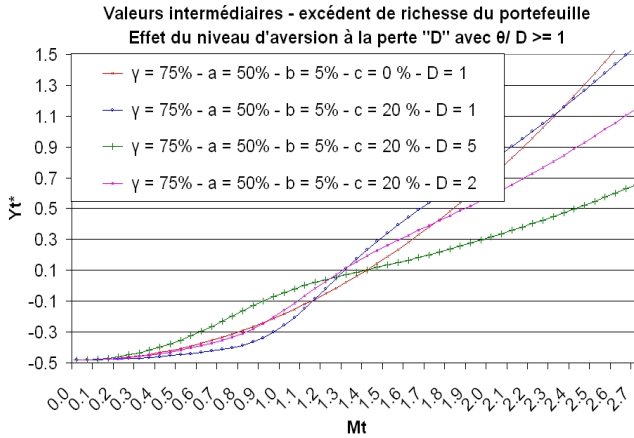


FIGURE 17. Stratégie CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs intermédiaires de l'excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion à la sous-performance pour  $\theta/D \geq 1$  et  $t = 4$ .

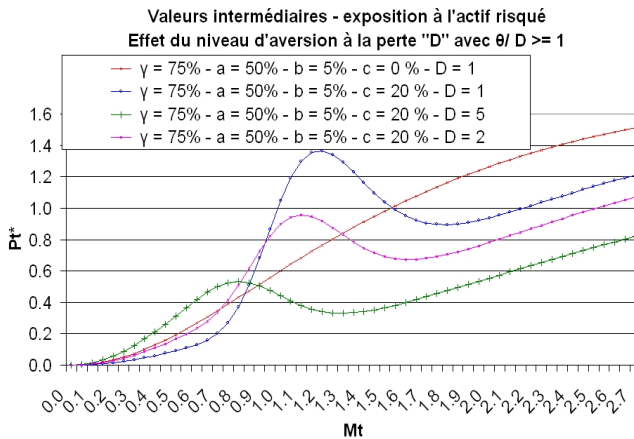


FIGURE 18. Stratégie CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs intermédiaires de l'exposition à l'actif risqué - effet du niveau d'aversion à la sous-performance pour  $\theta/D \geq 1$  et  $t = 4$ .

2.3.2. Sensibilité aux variations du paramètre d'incitation financière - cas de l'asset manager fortement averse à la sous-performance.

Nous nous plaçons à présent dans le cas particulier où la valeur du paramètre d'incitation financière est inférieure à celle de l'aversion à la sous-performance :  $\theta/D \leq 1$ .

Nous avons représenté, pour différents niveaux du taux des frais de gestion variables,  $c$ , la richesse intermédiaire du portefeuille optimal (notée  $Y_t^*$ , cf. figure ((Fig.19))), et le niveau optimal d'exposition à l'actif risqué (noté  $P_t^*$ , cf. figure ((Fig.20))), en fonction de la valeur de l'actif risqué.

Nous pouvons faire les remarques suivantes :

Dans un intervalle de valeurs médianes du sous-jacent, l'asset manager ayant un niveau élevé d'aversion à la sous-performance et recevant une incitation financière (i.e. pour  $\theta/D \leq 1$ ) choisit de diminuer fortement la fraction de son portefeuille investie en actif risqué (cf. figure (Fig.20)).

L'amplitude de ce "creux d'exposition, en absolu mais aussi relativement à la stratégie de référence sans incitation financière ni aversion à la sous-performance (courbe rouge), est une fonction décroissante de  $c$ , le taux des frais de gestion variables.

Dans un intervalle des valeurs basses de l'actif risqué, Il se produit une sur-exposition par rapport à la stratégie de référence sans incitation ni aversion à la sous-performance (cf. figure (Fig.20)).

Cette sur-exposition se traduit par une sur-performance de la stratégie avec aversion à la perte et incitation financière par rapport à la stratégie sans incitation financière ni aversion à la sous-performance (cf. figure Fig.19)) .

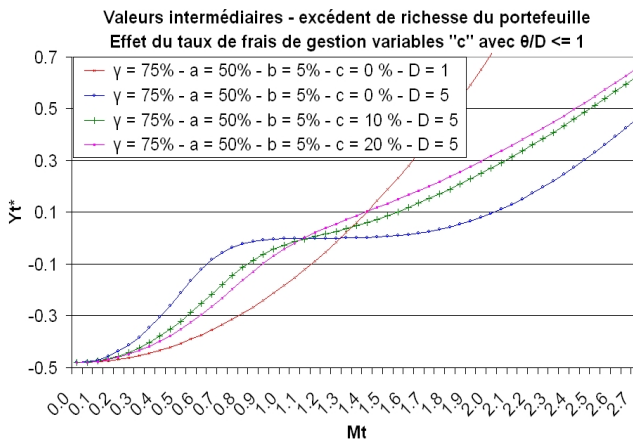


FIGURE 19. Stratégie CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs intermédiaires de l'excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion à la sous-performance pour  $\theta/D \leq 1$  et  $t = 4$ .

### 2.3.3. Sensibilité aux variations des autres paramètres ( $\gamma$ et $a$ ) et aux variations de l'horizon d'investissement considéré.

Pour l'asset manager dont l'incitation financière est plus élevée que le niveau d'aversion à la sous-performance (i.e. avec  $\theta \geq D$ ), les effets, sur l'allocation dynamique optimale, du changement de valeur du paramètre d'aversion au risque,  $\gamma$ , du seuil de perte maximale,  $a$ , ou de l'horizon d'investissement, sont similaires au cas de l'asset manager recevant une incitation financière mais qui n'est pas averse à la sous-performance (i.e.  $\theta > 1$  et  $D = 1$ , cf. chapitre précédent).

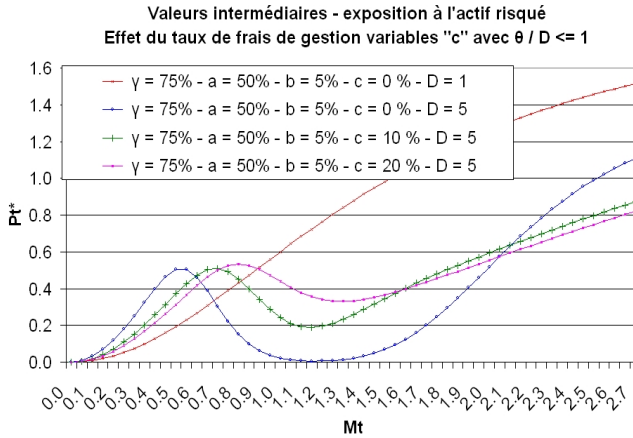


FIGURE 20. Stratégie CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs intermédiaires de l'exposition à l'actif risqué - effet du niveau d'aversion à la sous-performance, pour  $\theta/D \leq 1$  et  $t = 4$ .

De même, pour l'asset manager dont le niveau d'incitation financière est moins élevé que celui de l'aversion à la sous-performance (i.e. avec  $\theta < D$ ), les effets, sur la stratégie dynamique optimale, du changement de valeur des paramètres de risque et de l'horizon d'investissement sont les mêmes que pour l'asset manager averse à la sous-performance mais ne recevant pas d'incitation financière (i.e.  $\theta = 1$  et  $D > 1$ , cf. première partie de la thèse).

#### 2.3.4. Sensibilité aux variations du paramètre d'aversion à la sous-performance, $D$ dans le cas particulier où $a = W^0$ .

Nous analysons à présent le cas particulier où le budget de risque est maximum :  $a = W^0$ .

Dans ce cas, la stratégie de référence, i.e. optimale pour l'asset manager sans incitation financière ni aversion à la sous-performance (i.e.  $\theta = D = 1$ ), s'identifie au portefeuille de Merton. Ce portefeuille, noté  $H^*$ , est caractérisé par une stratégie dynamique à poids constant, noté  $h^*$ .

Nous avons représenté, pour différents niveaux du paramètre d'aversion à la sous-performance, noté  $D$ , la richesse intermédiaire du portefeuille optimal (notée  $Y_t^*$ , cf. figure ((Fig.21)), et le niveau optimal d'exposition à l'actif risqué (noté  $P_t^*$ , cf. figure ((Fig.22)), en fonction de la valeur de l'actif risqué.

Notons tout d'abord que le cas sans aversion (i.e.  $D = 1$ ,  $c \geq 0$ ) correspond au modèle de [Hodder Jackwerth, 2006].

Le niveau d'exposition à l'actif risqué est une fonction décroissante du paramètre d'aversion à la sous-performance.

En dessous d'un certain seuil de valeur du paramètre d'aversion à la perte, il y a sur-exposition par rapport à la stratégie de référence (i.e.  $\theta = D = 1$ ), dans un intervalle de valeurs médianes de l'actif risqué. Le montant de la sur-exposition décroît avec la paramètre  $D$ .

Finalement, au dessus de ce même seuil, la sous-exposition par rapport à la stratégie de référence (i.e.  $\theta = D = 1$ ) devient permanente.

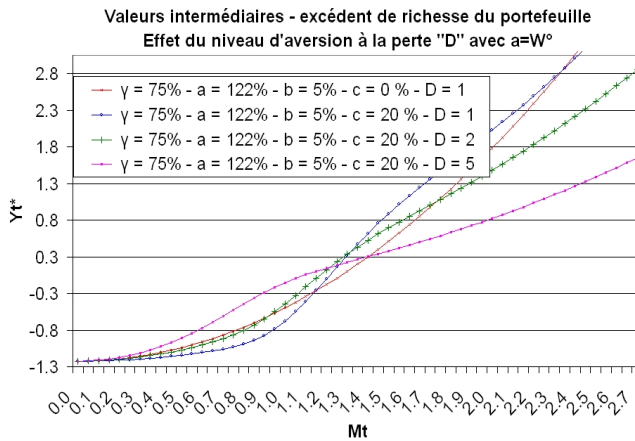


FIGURE 21. Stratégie CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs intermédiaires de l'excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion à la sous-performance pour  $a = W^0$  et  $t = 4$ .

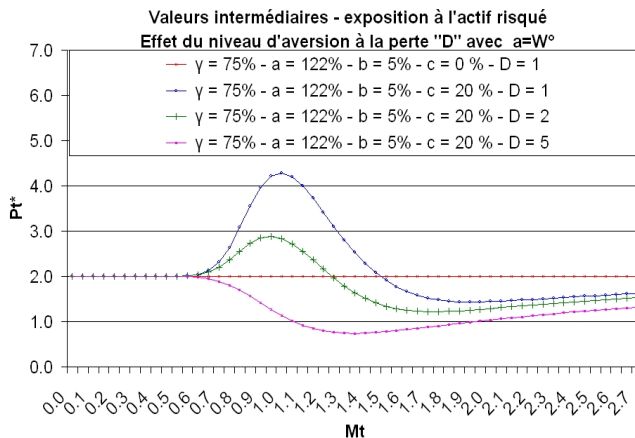


FIGURE 22. Stratégie CRRA avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs intermédiaires de l'exposition à l'actif risqué - effet du niveau d'aversion à la sous-performance pour  $a = W^0$  et  $t = 4$ .

### 3. Critère Moyenne Variance avec double contrainte de risque

#### 3.1. Problème d'investissement considéré et expression de la stratégie optimale.

Nous considérons dans cette section l'asset manager "HARA Loss Averse" dont la fonction d'utilité est suivante<sup>28</sup> :

$$v(z') \equiv \begin{cases} u(z') + \frac{(1-D)}{D}u(0) & \text{si } z' < 0 \\ u(z')/D & \text{si } z' \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$z' \equiv (F_T(W_T) - F_T(W^0))/b \equiv Y_T + d \times \text{Max}(Y_T, 0)$ : l'excédent de rémunération par rapport au niveau central de rémunération (à la constante  $b$  près),

$d \equiv c/b$ : le paramètre d'incitation financière<sup>29</sup>,

$Y_T \equiv W_T - W^0$ : l'écart de valeur finale entre le portefeuille géré et la cible de richesse de l'investisseur,

$u(x)$ :  $x - x^2/2a$ , la fonction d'utilité quadratique,

$a \equiv -\alpha^0 \times W^0$ : le seuil de sur-performance maximale autorisée, avec  $\alpha^0 < 0$ ,

$D$ : le niveau d'aversion à la sous-performance de l'asset manager, avec  $D \geq 1$ .

Ainsi, nous faisons l'hypothèse que l'asset manager a une forme généralisée de fonction d'utilité quadratique adaptée à la prise en compte de son aversion à la sous-performance.

Autrement dit, il cherche à maximiser l'espérance de sa rémunération finale sous la double contrainte implicite de risque suivante : contrainte de "Tracking Error Volatilité" maximale<sup>30</sup> et contrainte d'espérance de sous-performance maximale<sup>31</sup>.

28. il s'agit de la fonction d'utilité "HARA loss averse" donnée par l'équation (1.2) dans le cas particulier où  $\gamma \equiv -1$ ,  $C_1 \equiv -1/A$ ,  $C_2 \equiv A/2$  et  $a \equiv A \equiv -\alpha^0 \times W^0 > 0$ .

29. On rappelle que le paramètre  $d$  est défini comme le rapport entre le taux des frais de gestion variables, noté  $c$ , et le taux des frais de gestion sur encours, noté  $b$  où on suppose que  $0 < b < 1$  et  $0 \leq c < 1 - b$ .

30. contrainte de niveau maximum de risque mesuré par l'écart-type de sa rémunération excédentaire.

31. Il s'agit de la contrainte "Limited Expected Loss" de [Basak *et al.*, 2008] qui est similaire à la CVaR. Pour plus de détails sur l'intégration de cette contrainte de risque dans le cadre d'un problème d'investissement "moyenne variance downside risk" (i.e. asset manager ayant une fonction d'utilité quadratique), voir le chapitre 2 ci-dessus (première partie de la thèse).

De plus, nous supposons que l'asset manager doit prendre en compte une contrainte de richesse finale minimale positive ou nulle<sup>32</sup>.

On peut supposer que ces contraintes sont imposées à l'asset manager par l'investisseur dans le cadre du mandat de gestion ou par le risk manager.

Le problème de l'asset manager s'écrit donc de la façon suivante :

PROBLÈME 21.

$$(P21) \left\{ \begin{array}{l} \max_{Y_T \in L^2(P)} E \left\{ v(Y_T + d(Y_T)^+) \right\} \\ \text{s.a. } E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E \{ 1/H_T \} ; Y_T \geq Y^0 \text{ avec } Y^0 < 0 \end{array} \right.$$

avec  $z \rightarrow v(z) \equiv u(z)1_{\{z < 0\}} + u(z)/D \times 1_{\{z \geq 0\}}$ <sup>33</sup>

avec  $z \rightarrow u(z) \equiv z - z^2/2a$  la fonction d'utilité quadratique,

avec  $a, a \geq 0$ , le paramètre de tolérance au risque de l'asset manager,

avec  $D, D \geq 1$ , le degré d'aversion à la sous-performance de l'asset manager.

Notons que la stratégie optimale du problème (P21) sans la contrainte de protection (i.e.  $Y_T \geq Y^0 \equiv -\infty$ ) est celle du problème (P19) dans le cas particulier où l'expression de la fonction d'utilité HARA de l'asset manager est donnée par l'équation (3.1).

Dans le cas plus général où l'asset manager doit prendre en compte une contrainte d'assurance de portefeuille en plus de son aversion au risque, le théorème suivant donne l'expression de la richesse terminale optimale :

THÉOREME 9. *La richesse terminale solution du problème (P21) est donnée par l'expression suivante :*

(1) Pour  $\theta \leq D$

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{a}{\theta} \left( 1 - \frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T} \right) & \text{si } H_T > k \frac{D}{\theta} \\ 0 & \text{si } k < H_T \leq k \frac{D}{\theta} \\ a \left( 1 - \frac{k}{H_T} \right) & \text{si } \underline{H}^* < H_T \leq k \\ Y^0 & \text{si } H_T \leq \underline{H}^* \end{cases}$$

32. Ce qui implique en particulier l'exclusion des valeurs de richesses négatives qui ne sont pas souhaitables car sinon cela reviendrait à considérer que l'asset manager peut avoir une rémunération négative ou de manière équivalente que la richesse finale de l'investisseur peut être négative.

En effet si cette contrainte de richesse non négative est naturellement vérifiée pour la fonction d'utilité CRRA ou Iso-élastique, car elle exhibe une utilité marginale égale à  $+\infty$  en 0, ce n'est pas le cas de la fonction d'utilité quadratique.

Ainsi la richesse terminale, solution optimale du problème Moyenne Variance sans contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille peut prendre des valeurs négatives.

33. La rémunération excédentaire exprimée en fonction de l'écart de richesse finale,  $Y_T \equiv W_T - W^0$  peut s'écrire de la manière suivante :  $Y_T \rightarrow Z'_T \equiv Y_T \times 1_{\{Y_T < 0\}} + \theta Y_T \times 1_{\{Y_T \geq 0\}}$ , où on a posé  $\theta \equiv 1 + d$ .

En remarquant de plus que  $u(0) = 0$ , on obtient l'expression suivante de la fonction à maximiser dans le problème d'investissement :

$$w(Y_T) \equiv v(Z'_T) = \begin{cases} u(Y_T) & \text{si } Y_T < 0 \\ u(\theta \times Y_T)/D & \text{si } Y_T \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ Pour } \theta \geq D \text{ et } \zeta \geq \zeta^* \equiv \frac{(\theta/D-1)}{(\theta/\sqrt{(D)}+1)} 34,$$

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{a}{\theta} \left(1 - \frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}\right) & \text{si } H_T > H^* \\ a \left(1 - \frac{k}{H_T}\right) & \text{si } \underline{H}^* < H_T \leq H^* \\ Y^0 & \text{si } H_T \leq \underline{H}^* \end{cases}$$

$$(3) \text{ Pour } \theta \geq D \text{ et } 0 < \zeta \leq \zeta^*,$$

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{a}{\theta} \left(1 - \frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}\right) & \text{si } H_T > \underline{H}^* \\ Y^0 & \text{si } H_T \leq \underline{H}^* \end{cases}$$

$$\text{avec } H^* = \frac{k}{1+\zeta^*}, \underline{H}^* = \frac{k}{1+\zeta}, \text{ avec pour } \theta \geq D, \underline{H}^* \equiv \frac{kD}{\theta} \left[1 + \theta\zeta - \sqrt{((\theta^2 - D)\zeta^2 + 2(\theta - D)\zeta)}\right]^{-1}$$

35

avec  $\zeta \equiv -Y^0/a$  où  $\zeta > 0$  et où on a posé  $\theta \equiv 1 + d$ ,

et avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(Y_T/H_T) = 1 - W^0 \times E\{1/H_T\}$ ,

Par voie de conséquence, on en déduit les résultats suivants :

CONSÉQUENCE 17. Pour  $\theta = D$ ,

(1) La richesse terminale optimale correspondant au problème (P21) est donnée par l'expression suivante :

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{a}{\theta} \left(1 - \frac{k}{H_T}\right) & \text{si } H_T > k \\ a \left(1 - \frac{k}{H_T}\right) & \text{si } \frac{k}{1-(Y^0)/a} < H_T \leq k \\ Y^0 & \text{si } H_T \leq \frac{k}{1-Y^0/a} \end{cases}$$

(2) La fonction de rémunération "excédentaire" de l'asset manager "loss averse" correspondant au problème (P21) est donnée par l'expression suivante :  $Z_T^* = bY_T^{**}$  avec  $Y_T^{**}$  :

$$Y_T^{**} \equiv \begin{cases} a \left(1 - \frac{k}{H_T}\right) & \text{si } H_T > \frac{k}{1-Y^0/a} \\ Y^0 & \text{si } H_T \leq \frac{k}{1-Y^0/a} \end{cases}$$

Il s'agit, à la constante  $k$  près, de l'expression de la rémunération de l'asset manager de référence<sup>36</sup>.

Autrement dit, à la contrainte de budget près, l'asset manager recevant des frais de gestion variables a le même profil de gain optimal que l'asset manager sans incitation financière et sans aversion.

Les expressions de la valeur intermédiaire et de l'allocation dynamique de la stratégie optimale sont données dans les propriétés (35) et (36) ci-dessous :

34.  $\zeta^*$  est solution de  $\underline{H}^* = k/(1+\zeta)$ . De façon équivalente,  $\zeta^*$  est solution de l'équation suivante :  $f(1+\zeta) = 0$  avec  $f(x) \equiv g(xD/\theta)/D - g(1+\zeta) + a\zeta(1+\zeta-x)$  ou encore  $f(1+\zeta) \equiv g((1+\zeta)D/\theta) - g(1+\zeta) = 0$  avec  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x)] \equiv \frac{a}{2}(1-x)^2$ .

35.  $k/\underline{H}^*$  est solution de l'équation suivante :  $f\left(\frac{k}{\underline{H}^*}\right) = 0$

avec  $f(x) \equiv g(xD/\theta)/D - g(1+\zeta) + a\zeta(1+\zeta-x)$  et avec  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x)] \equiv \frac{a}{2}(1-x)^2$

36. asset manager sans aversion à la sous-performance et sans commission de sur-performance mais soumis à la même contrainte de protection que celle du problème considéré.

PROPRIÉTÉ 35. La valeur à la date  $t$  de la solution optimale du problème (P21), notée  $Y_t^*$ , est donnée par la formule suivante :

(1) Pour  $\theta \leq D$

$$Y_t^* = Y^0 ZC(T-t) + \frac{akD}{\theta^2} P(I_t, \frac{\theta}{kD}, T-t) + ak \left\{ P(I_t, \frac{1+\zeta}{k}, T-t) - P(I_t, \frac{1}{k}, T-t) \right\}$$

(2) Pour  $\theta \geq D$  et  $\zeta \geq \zeta^* \equiv \frac{(\theta/D-1)}{(\theta/\sqrt{(D)}+1)}$

$$Y_t^* = Y^0 ZC(T-t) + ak \left( \frac{D}{\theta^2} - 1 \right) P(I_t, I^*, T-t) + ak P(I_t, \bar{I}^*, T-t) + \frac{a}{\sqrt{D}} \left( 1 - \frac{D}{\theta} \right) B(I_t, I^*, T-t)$$

(3) Pour  $\theta \geq D$  et  $0 < \zeta \leq \zeta^*$ ,

$$Y_t^* = Y^0 ZC(T-t) + \frac{akD}{\theta^2} P(I_t, \bar{\bar{I}}^*, T-t) + \frac{a}{\theta} \left\{ \sqrt{(\theta^2 - D)\zeta^2 + 2(\theta - D)\zeta} \right\} B(I_t, \bar{\bar{I}}^*, T-t)$$

avec  $I_t$  qui désigne la valeur intermédiaire du portefeuille, atteignant la richesse terminale,  $I_T \equiv 1/H_T$ ,

avec  $\theta \equiv 1 + d$ ,  $\zeta \equiv -Y^0/a$ ,  $I^* = 1/H^*$ ,  $\bar{I}^* = 1/\underline{H}^*$ ,  $\bar{\bar{I}}^* = 1/\underline{\underline{H}}^*$ , où  $H^*$ ,  $\underline{H}^*$ ,  $\underline{\underline{H}}^*$  et  $k$  tels que définis dans le théorème 9,

avec  $P(Z_t, X, T-t)$ , (resp.  $B(Z_t, X, T-t)$ ) qui désigne la valeur de l'option put européen, (resp. de l'option Put binaire "Cash or Nothing") de strike  $X$ , d'échéance  $T-t$ , sur le sous-jacent  $Z_t$  et  $ZC(T-t)$  le prix de l'obligation Zéro-Coupon d'échéance  $T-t$  obtenus dans le cadre du modèle à deux actifs de Black & Scholes.

PROPRIÉTÉ 36. Dans le cadre du modèle de Black & Scholes (à une seule source de risque), l'allocation de la stratégie dynamique optimale correspondant au problème (P21) est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{cases} w_t^* W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'actif risqué } M \\ (1 - w_t^*) W_t^* & \text{investi (en cash) dans l'A.S.R} \end{cases}$$

Où  $w_t^* W_t^* \equiv \frac{dW_t^*}{dI_t} (-h) I_t$  est donnée par la formule suivante :

- Pour  $\theta \leq D$ ,

$$w_t^* W_t^* = akh I_t \left[ \frac{D}{\theta^2} N(-d_1(\frac{\theta}{kD})) + N(-d_1(\frac{1+\xi}{k})) - N(-d_1(\frac{1}{k})) \right]$$

- Pour  $\theta \geq D$  et  $\zeta \geq \zeta^* \equiv \frac{(\theta/D-1)}{(\theta/\sqrt{(D)}+1)}$ ,

$$w_t^* W_t^* = akh I_t \left[ \left( \frac{D}{\theta^2} - 1 \right) N(-d_1(I^*)) + N(-d_1(\bar{I}^*)) \right] + \frac{a}{\sqrt{D}} \left( 1 - \frac{D}{\theta} \right) \frac{e^{-r(T-t)} h \Phi(d_2(I^*))}{\lambda \sqrt{T-t}}$$

- Pour  $\theta \geq D$  et  $0 < \zeta \leq \zeta^*$ ,

$$w_t^* W_t^* = \frac{akD}{\theta^2} h I_t N(-d_1(\bar{\bar{I}}^*)) + \frac{a}{\theta} \left\{ \sqrt{(\theta^2 - D^2)\xi^2 + 2(\theta - D)\zeta} \right\} \frac{e^{-r(T-t)} h \Phi(d_2(\bar{\bar{I}}^*))}{\lambda \sqrt{T-t}}$$

avec  $N(\cdot)$ , resp.  $\Phi(\cdot)$ , la fonction de répartition, resp. la fonction de densité, de la loi normale,

avec  $d_1(X) \equiv \ln\left(\frac{I_t}{e^{(-r(T-t))X/\sigma^* + \sigma^*/2}}\right)$  et  $d_2(X) \equiv d_1(X) - \sigma^*$ ,



$$\text{avec } (\sigma^*)^2 \equiv \text{Var} \left[ \ln\left(\frac{I_T}{I_t}\right) \right] = (\lambda)^2 \times (T - t),$$

et avec les autres paramètres et variables tels que définis dans le théorème 9.

Finalement, on rappelle que, sous les hypothèses du modèle de Black & Scholes, il existe une relation bi-univoque entre la valeur de chacun des trois portefeuilles suivants pris deux à deux : la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , celle du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , et enfin, celle de l'actif risqué,  $M_t$ <sup>37</sup>.

Cette propriété nous permet en particulier, à tout instant  $t$ , d'exprimer la valeur de la richesse optimale en excès du celle du benchmark, notée  $Y_t^*$ , en fonction de  $M_t$  ; expression qui nous sera utile pour analyser les propriétés de la stratégie optimale.

### 3.2. Analyse de sensibilité du "pay-off" optimal.

Nous analysons l'effet sur le profil de gain optimal de l'existence d'une rémunération incitative couplée à une double contrainte d'aversion à la sous-performance et d'assurance de portefeuille.

En particulier, nous voulons comparer le profil de gain optimal pour l'asset manager averse à la sous-performance et recevant des frais de gestion variables avec celui de l'asset manager sans incitation financière et/ou sans aversion à la sous-performance.

En nous appuyant sur le même exemple d'application numérique, dans le cadre du modèle de  $B \& S$  à deux actifs, que celui de la section précédente<sup>38</sup>, nous étudions la sensibilité du profil de gain optimal aux variations des paramètres de rémunération et de risque du modèle considéré.

#### 3.2.1. Sensibilité aux variations du paramètre d'aversion à la sous-performance - cas de l'asset manager bénéficiant d'un niveau élevé d'incitation financière.

Nous considérons le cas particulier où la valeur du paramètre d'incitation financière,  $\theta \equiv 1 + c/b$ , est plus élevée que celle du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D : \theta/D \geq 1$ .

Nous avons représenté, pour différentes valeurs de l'aversion à la sous-performance,  $D$ <sup>39</sup>, l'excédent de richesse finale du portefeuille (cf. figure (Fig.23)), de l'asset manager (cf. figure (Fig.24)) et de l'investisseur (cf. figure (Fig.25)) en fonction de la valeur de l'actif risqué.

Les caractéristiques du profil de gain optimal pour l'asset manager, averse à la sous-performance et bénéficiant d'une incitation financière, changent en fonction

37. En particulier, dans le cadre du modèle de B&S, on obtient les propriétés de transformation suivantes qui permettent d'exprimer la valeur du portefeuille numéraire,  $H_t$ , ou du portefeuille de Merton,  $H_t^*$ , en fonction de celle de l'actif risqué  $M_t$  et réciproquement :

on a  $H_t = \Psi(t)(M_t)^h$  avec  $\Psi(t) \equiv e^{(r - \lambda(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} - \frac{\lambda}{2}))t} = e^{(1-h)(r + \frac{\lambda^2}{2h})t} = e^{(1-h)(r + \frac{h\sigma^2}{2})t}$ ,

et  $H_t^* = \Gamma(t)(M_t)^{h^*}$  avec  $\Gamma(t) \equiv H_0^* e^{(1-h^*)(r + \frac{(\lambda/\gamma)^2}{2h^*})t} = H_0^* e^{(1-h^*)(r + \frac{h^*\sigma^2}{2})t}$ .

38. On rappelle que les valeurs numériques utilisées sont les suivantes :  $r = 4\%$ ,  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\gamma = 75\%$ ,  $T = 5$ , et  $W^0 \equiv e^{rT} = 122\%$  ; ce qui donne en particulier  $\lambda = 30\%$ ,  $h = 150\%$  et  $h^* = 200\%$ .

39. pour une valeur fixée du taux des frais de gestion variables  $c$  vérifiant  $\theta/D \geq 1$ .

du niveau d'aversion à la sous-performance considéré.

(1) Discontinuité de la richesse terminale :

Pour  $D < \theta$ , le pay-off est discontinu (ce qui n'est pas le cas de celui de la stratégie sans incitation financière, cf. courbe rouge) et l'amplitude de cette discontinuité diminue en même temps que le niveau du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ , augmente.

A la valeur seuil,  $D = \theta$ , cas où le paramètre d'aversion à la sous-performance est égal au niveau du paramètre d'incitation financière, le pay-off de la stratégie optimale devient continu (cf. figure (Fig.23)).

(2) Profil de gain du portefeuille :

On peut observer sur la figure (Fig.23) que le niveau de risque du profil de gain de la stratégie optimale est une fonction décroissante du niveau d'aversion à la sous-performance; plus d'aversion à la sous-performance implique moins de perte dans les scénarios de marché défavorables et moins de plus-value dans les cas favorables.

(3) Profil de rémunération de l'asset manager :

Globalement, l'aversion à la sous-performance a pour effet de diminuer de manière conséquente l'excès de rémunération perçu par l'asset manager qui est lié à l'incitation financière (cf. figure (Fig.24)) :

- le profil de l'asset manager avec incitation et sans aversion à la perte (courbe bleue) est discontinu et fortement excédentaire (par rapport au cas sans incitation financière, courbe rouge) dans la zone de sur-performance,
- au contraire, pour une valeur du paramètre d'incitation financière et du paramètre d'aversion à la perte identique (i.e. cas  $D = \theta \equiv 1 + c/b = 5 > 1$ , cf. courbe rose), l'asset manager a un profil de rémunération continu et beaucoup moins excédentaire.

On en déduit que la prise en compte par l'asset manager, recevant une incitation financière, d'une contrainte implicite d'aversion à la perte change son comportement d'investissement de la manière suivante :

- d'une part, le profil de gain pour l'investisseur est plus équilibré que dans le cas sans contrainte d'aversion à la sous-performance. Cela se traduit par plus de gain en cas de sous-performance, un faible coût d'opportunité en cas de sur-performance, et un saut de richesse moins important entre la zone de gain et de perte,
- d'autre part, le profil de rémunération pour l'asset manager est moins asymétrique; le cas  $D = \theta$  correspondant à un profil de rémunération parfaitement symétrique.

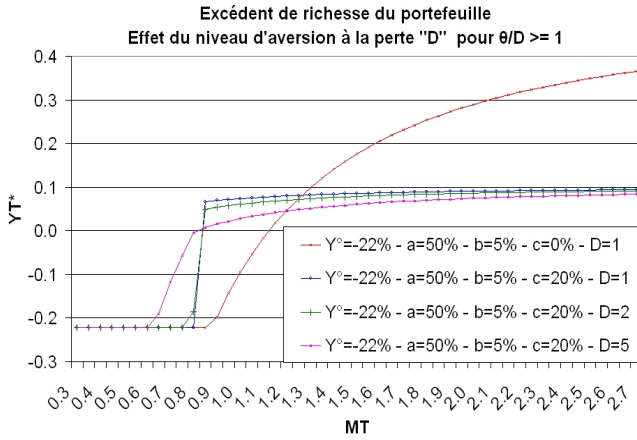


FIGURE 23. Stratégies optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion à la sous-performance  $D$  pour  $c$  fixé et  $\theta/D \geq 1$ .

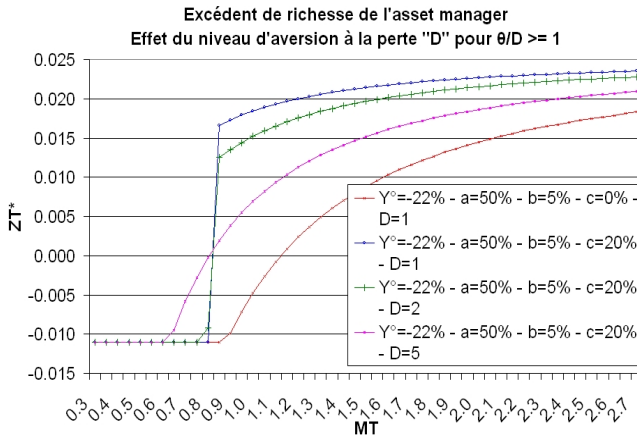


FIGURE 24. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'asset manager - effet du niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$  pour  $c$  fixé et  $\theta/D \geq 1$ .

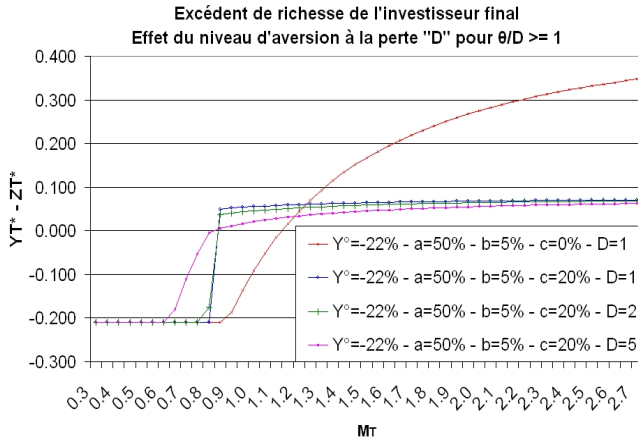


FIGURE 25. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'investisseur final - effet du niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$  pour  $c$  fixé et  $\theta/D \geq 1$ .

3.2.2. *Sensibilité aux variations du paramètre d'incitation financière - cas "central" où le paramètre d'aversion à la sous-performance est égal au niveau d'incitation financière.*

Nous nous plaçons dans le cas où le paramètre d'incitation financière est égal à celui de l'aversion à la sous-performance :  $\theta \equiv D \geq 1$  avec  $\theta \equiv 1 + c/b$ .

Nous avons représenté, pour différentes valeurs du taux des frais de gestion variables  $c$ <sup>40</sup>, l'excédent de richesse finale du portefeuille (cf. figure (Fig.26)), de l'asset manager (cf. figure (Fig.27)) et de l'investisseur (cf. figure (Fig.28)) en fonction de la valeur de l'actif risqué.

Quelque soit la valeur des paramètres  $c$  et  $D$  considérés, vérifiant  $D = \theta \geq 1$ , les caractéristiques du profil de gain optimal pour l'asset manager restent inchangées :

- le pay-off de la stratégie optimale est continu (cf. figure (Fig.26)).
- le niveau de risque global est une fonction décroissante du paramètre d'incitation financière (ou de façon équivalente, une fonction croissante du niveau d'aversion à la sous-performance). Ceci se traduit par plus de gain dans les scénarios de marché défavorables et moins de plus-value dans les scénarios favorables (cf. figure (Fig.26)).
- Le profil de rémunération de l'asset manager est symétrique et continu (cf. figure (Fig.27)).

40. pour une valeur variable du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ , vérifiant  $D = \theta \equiv 1 + c/b$  et avec  $b$  fixé.

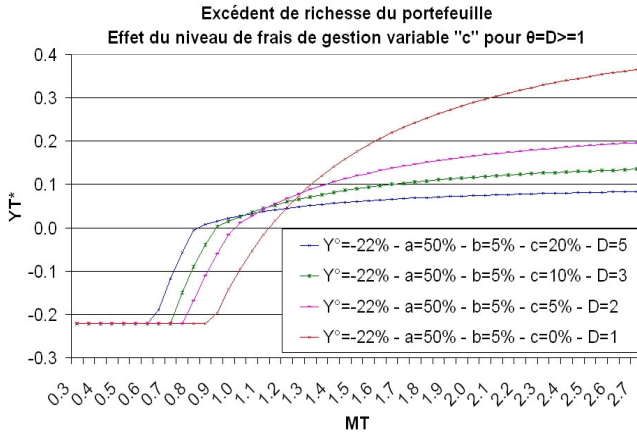


FIGURE 26. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$  pour  $D = \theta$ .

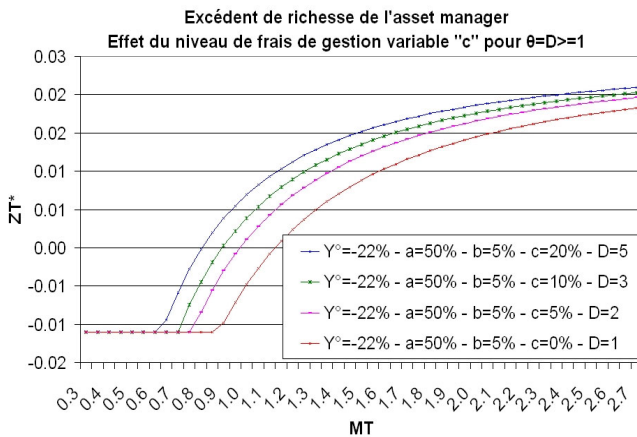


FIGURE 27. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'asset manager - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$  pour  $D = \theta$ .

3.2.3. Sensibilité aux variations du paramètre d'incitation financière - cas de l'asset manager fortement averse à la sous-performance.

Nous nous intéressons au cas où le niveau d'incitation financière est inférieur à celui de l'aversion à la sous-performance :  $\theta/D \leq 1$  avec  $\theta \equiv 1 + c/b$ .

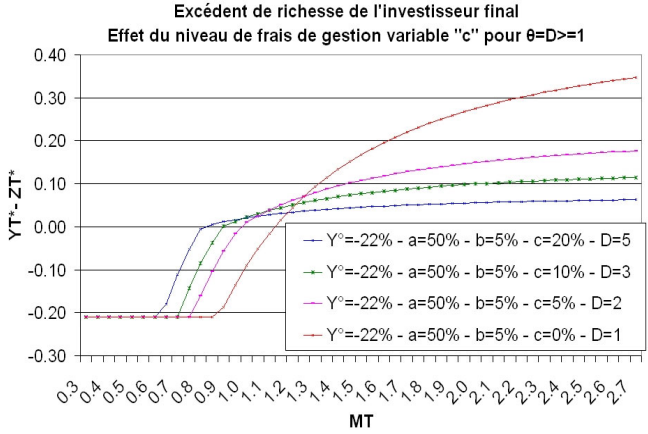


FIGURE 28. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - excédent de richesse de l'investisseur final - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$  pour  $D = \theta$ .

Nous avons représenté, pour différentes valeurs du taux des frais de gestion variables,  $c^{41}$ , l'excédent de richesse finale du portefeuille en fonction de la valeur de l'actif risqué (cf. figure (Fig.29)).

Cette figure nous montre que le profil de gain optimal pour l'asset manager averse à la perte, et dont le niveau d'incitation financière est plus faible que son aversion à la sous-performance (i.e.  $D \geq \theta > 1$ ), est semblable à celui d'un asset manager averse à la sous-performance mais ne bénéficiant pas d'incitation financière (i.e.  $D > \theta = 1$ , cf. première partie de la thèse).

Le niveau de risque du portefeuille optimal croît avec la valeur du taux des frais de gestion variables : en particulier, quand la valeur de  $c$  augmente, l'amplitude de l'intervalle, où il est optimal de gérer passivement le portefeuille, diminue.

41. pour un niveau fixé du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ .

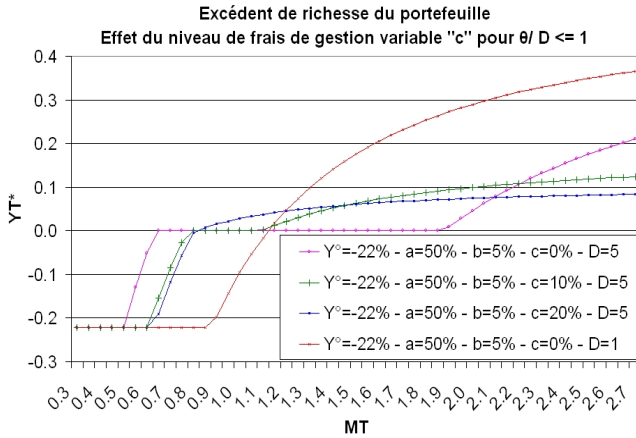


FIGURE 29. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - effet du niveau du taux des frais de gestion variables  $c$  pour  $\theta/D \leq 1$ .

### 3.2.4. Sensibilité de la valeur des strikes aux variations du paramètre d'aversion à la sous-performance.

Nous analysons l'effet du changement de valeur du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ , sur les "strikes" (prix d'exercice) des options comprises dans dans l'expression de la stratégie optimale (cf. propriété 35 ci dessus).

Ces strikes s'identifient également aux bornes des intervalles de valeurs de l'actif risqué où l'expression de la stratégie optimale reste la même (i.e. les différents états de richesse), voir le théorème 9 ci-dessus.

Nous avons représenté le niveau de ces "strikes", notés  $M_0$ ,  $M_{min}$ ,  $M_{max}$  et  $M^{**}$ <sup>42</sup>, en fonction de la valeur de l'aversion à la sous-performance,  $D$ , pour  $Y^0 = -\infty$  (cas sans protection de la richesse finale, cf. figure (Fig.30)), et pour  $Y^0 = -22\%$  (cas avec protection de l'intégralité du capital investi, cf. figure (Fig.31)).

Tout d'abord commentons le cas où il n'y a pas de protection de richesse (voir la figure (Fig.30)) :

- (1) Pour  $D > \theta = 5$ ,

Pour ces valeurs les plus élevées du paramètre d'aversion à la perte,  $D$ , la stratégie optimale prend une forme à trois états similaire à celle de la stratégie optimale pour l'asset manager averse à la perte mais ne recevant

42. l'expression de  $M_0$ , respectivement  $M_{min}$ , respectivement  $M_{max}$ , respectivement  $M^{**}$  s'obtient de celle de  $\underline{H}^*$ , respectivement  $k$ , respectivement  $k \times D/\theta$ , respectivement  $H^*$  par la fonction de transformation donnant la valeur de  $M_t$  en fonction de celle de  $H_t$  dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

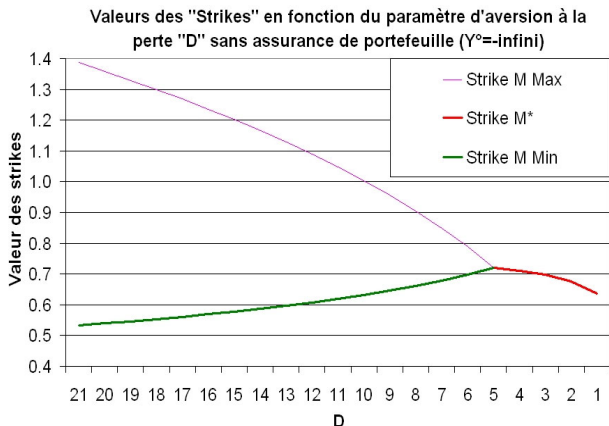


FIGURE 30. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs des "Strikes" en fonction du niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$

Les valeurs numériques utilisées sont les suivantes :  $Y^0 = -\infty$ ,  $a = 50\%$ ,  $b = 5\%$ ,  $c = 20\%$ ; ce qui implique  $\theta = 5$ .

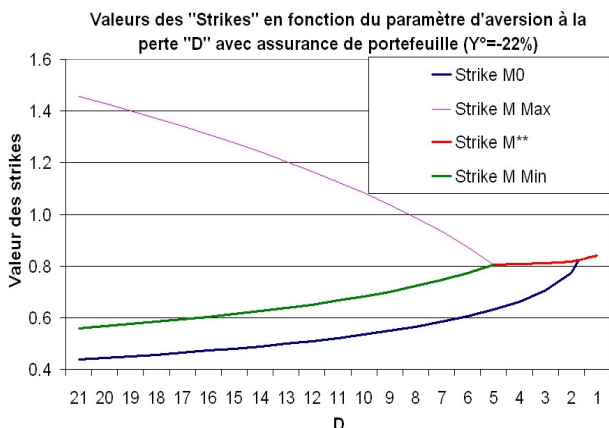


FIGURE 31. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance sans assurance de portefeuille - valeurs des "Strikes" en fonction du niveau d'aversion à la sous-performance,  $D$

Les valeurs numériques utilisées sont les suivantes :  $Y^0 = -22\%$ ,  $a = 50\%$ ,  $b = 5\%$ ,  $c = 20\%$ ; ce qui implique  $\theta = 5$ .

pas d'incitation financière (voir partie I de la thèse).

La largeur de l'intervalle de valeurs du sous-jacent dans lequel il est optimal de gérer passivement le portefeuille est une fonction croissante du paramètre d'aversion à la perte,  $D$ . Ainsi,  $M_{min}$  est une fonction décroissante du paramètre  $D$  tandis que  $M_{max}$  est une fonction croissante de ce même paramètre.



A la valeur limite,  $D = \theta$ , il n'est plus optimal de gérer passivement le portefeuille puisqu'on a  $M_{min} = M_{max}$ .

(2) Pour  $D \leq \theta = 5$ ,

Pour ces valeurs les plus basses du paramètre d'aversion à la sous-performance, la stratégie optimale prend une forme à deux états similaire à l'expression de la stratégie optimale pour l'asset manager non averse à la sous-performance mais bénéficiant d'une incitation financière (analysée dans la quatrième section du précédent chapitre).

Dans le cas où l'asset manager doit tenir compte d'une contrainte de protection (cf. figure (Fig.31), on peut faire les remarques suivantes :

(1) Pour  $D > \theta = 5$ ,

Pour ces valeurs les plus élevées du paramètre d'aversion à la perte,  $D$ , la stratégie optimale prend une forme à quatre états similaire à celle de la stratégie optimale pour l'asset manager averse à la perte, sous contrainte d'assurance de portefeuille, et ne recevant pas d'incitation financière (voir partie I de la thèse).

On observe le même effet que dans le cas sans protection de capital : l'amplitude de la zone où il est optimal pour l'asset manager de gérer passivement le portefeuille est une fonction croissante du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ .

Ainsi, quand le paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ , augmente, la zone de gestion passive s'étend au détriment des autres zones de richesses élevées et basses où il est optimal de gérer activement le portefeuille ou bien d'implémenter une stratégie d'assurance de portefeuille (zone de valeurs de l'actif risqué les plus faibles, i.e. sous-jacent en dessous du seuil  $M_0$ ).

(2) Pour  $D \leq \theta = 5$  et  $D > 1$ ,

La stratégie optimale prend la forme à trois états du théorème 9.

Quand le paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ , diminue, la zone où la contrainte de protection du capital est active (assurance de portefeuille) croît au détriment de la zone de gestion active avec sous-performance.

(3) pour  $D = 1$

La stratégie optimale admet l'expression à deux états du théorème 9. La richesse finale du portefeuille passe directement d'un état de sur-performance où la gestion du portefeuille est active et favorise la rémunération de l'asset manager à un état de protection de la richesse finale (il n'y a plus d'état intermédiaire de gestion active avec sous-performance).

Nous en déduisons que la prise en compte d'une contrainte d'aversion à la sous-performance tend à modifier le comportement de l'asset manager recevant des frais de gestion variables et l'incite naturellement à adopter le comportement typique d'un investisseur averse à la sous-performance.

L'asset manager va ainsi arbitrer, en partie ou intégralement (d'autant plus que son aversion à la sous-performance est grande), l'état de sous-performance et de sur-performance, où l'asset manager suit une gestion active ou d'assurance de portefeuille, au profit d'un état de gestion passive sans exposition à l'actif risqué (zone où la richesse finale est égale à la cible de richesse de l'investisseur).

### 3.3. Analyse de la stratégie dynamique optimale.

Nous étudions la sensibilité de l'allocation dynamique optimale aux variations du paramètre d'aversion à la sous-performance,  $D$ , et du taux des frais de gestion variables  $c$ .

En particulier nous comparerons l'allocation dynamique mise en place par l'asset manager averse à la sous-performance et recevant des frais de gestion variables ( $D > 1$  et  $\theta > 1$ ) à celle du gérant sans aversion à la sous-performance et/ou sans ne bénéficiant pas de frais de gestion variables ( $D = 1$  et/ou  $\theta = 1$ ).

#### 3.3.1. Sensibilité aux variations du paramètre d'aversion à la sous-performance dans le cas d'un niveau élevé d'incitation financière.

Nous considérons le cas particulier où la valeur numérique du paramètre d'incitation financière est supérieure ou égale à celle du paramètre d'aversion à la sous-performance :  $\theta/D \geq 1$ .

Nous avons représenté, pour différents niveaux d'aversion à la sous-performance,  $D$ , la richesse intermédiaire du portefeuille optimal (notée  $Y_t^*$ , cf. figure ((Fig.32)), et le niveau optimal d'exposition à l'actif risqué (noté  $P_t^*$ , cf. figure ((Fig.33)), en fonction de la valeur de l'actif risqué.

Dans une zone de valeurs médianes du sous-jacent, la stratégie avec aversion et niveau d'incitation élevé (i.e.  $\theta/D \geq 1$ ) sur-performe la stratégie de référence sans incitation et sans aversion (courbe rouge) (cf. figure (Fig.32)).

Cette sur-performance se traduit par une sur-exposition relativement à la stratégie de référence sans incitation et sans aversion. L'amplitude de cette sur-exposition est une fonction décroissante du paramètre  $D$ . Finalement, quand le niveau du paramètre  $D$  augmente, la zone de sur-performance est translatée vers des valeurs plus basses du sous-jacent (cf. figure (Fig.33)).

Enfin, on observe une sous-exposition importante par rapport au cas sans incitation et sans aversion dans une zone de valeurs médianes-hautes du sous-jacent (cf. figure (Fig.33)).

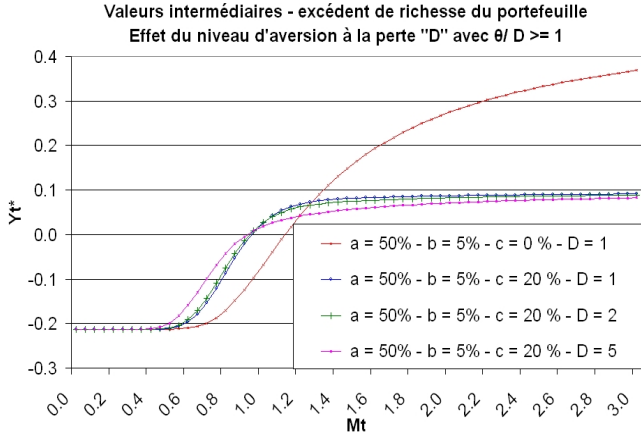


FIGURE 32. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs intermédiaires de l'excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion à la sous-performance pour  $\theta/D \geq 1$  et  $t = 4$ .

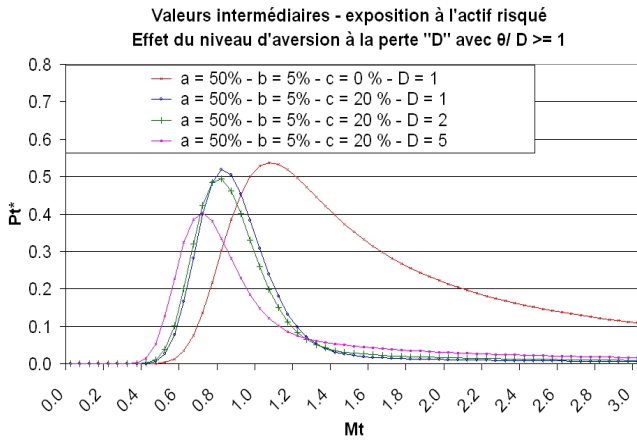


FIGURE 33. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs intermédiaires de l'exposition à l'actif risqué - effet du niveau d'aversion à la sous-performance pour  $\theta/D \geq 1$  et  $t = 4$ .

3.3.2. *Sensibilité aux variations du paramètre d'incitation financière - cas de l'asset manager fortement averse à la sous-performance.*

Nous nous plaçons à présent dans le cas particulier où la valeur du paramètre d'incitation financière est inférieure à celle de l'aversion à la sous-performance :  $\theta/D \leq 1$ .

Nous avons représenté, pour différents niveaux du taux des frais de gestion variables,  $c$ , la richesse intermédiaire du portefeuille optimal (notée  $Y_t^*$ , cf. figure ((Fig.34)), et le niveau optimal d'exposition à l'actif risqué (noté  $P_t^*$ , cf. figure ((Fig.35)), en fonction de la valeur de l'actif risqué.

Dans une zone des valeurs médianes du sous-jacent, l'asset manager avec incitation financière et ayant un niveau élevé d'aversion à la sous-performance (i.e. pour  $\theta/D \leq 1$ ) choisit de dé-investir fortement son portefeuille en actif risqué (cf. figure (Fig.35)). A noter que l'amplitude de cette sous-exposition est une fonction décroissante du taux des frais de gestion variables,  $c$ .

D'autre part, on observe sur la figure (Fig.35) qu'une sur-exposition par rapport à la stratégie de référence, sans incitation financière ni aversion à la sous-performance (courbe rouge), se produit dans la zone de valeurs les plus basses de l'actif risqué.

Dans cet état de sur-exposition à l'actif risqué, la stratégie avec aversion à la sous-performance et incitation financière, sur-performe la stratégie de référence sans incitation financière ni aversion à la sous-performance (courbe rouge, cf. figure Fig.34).

Enfin, on notera que le niveau de risque global du profil de gain de l'asset manager averse à la sous-performance est une fonction croissante du taux des frais de gestion variables  $c$ . En effet, quand la valeur du paramètre  $c$  augmente,

- il y a moins de gain / moins d'exposition risquée dans une zone de valeurs basses de l'actif risqué,
- il y a plus de gain / plus d'exposition risquée dans une zone de valeurs médianes de l'actif risqué,
- il y a moins de gain / moins d'exposition risquée dans une zone de valeurs élevées de l'actif risqué.

On comparera sur la figure (Fig.35), la courbe bleue (cas sans incitation) avec la courbe verte et la courbe rose (cas avec incitation financière correspondant respectivement à  $c = 10\%$  et  $c = 20\%$ ).

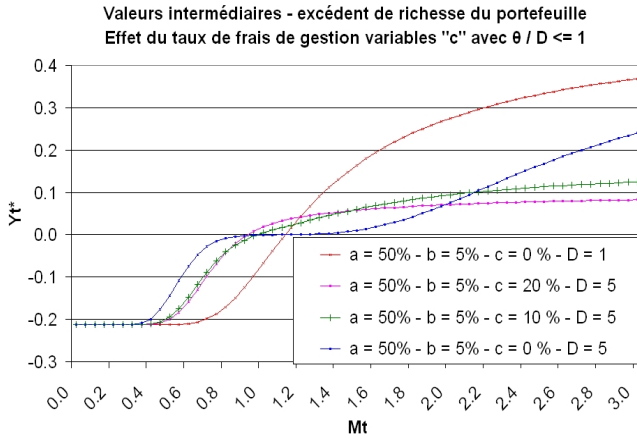


FIGURE 34. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs intermédiaires de l'excédent de richesse du portefeuille - effet du niveau d'aversion à la sous-performance pour  $\theta/D \leq 1$  et  $t = 4$ .

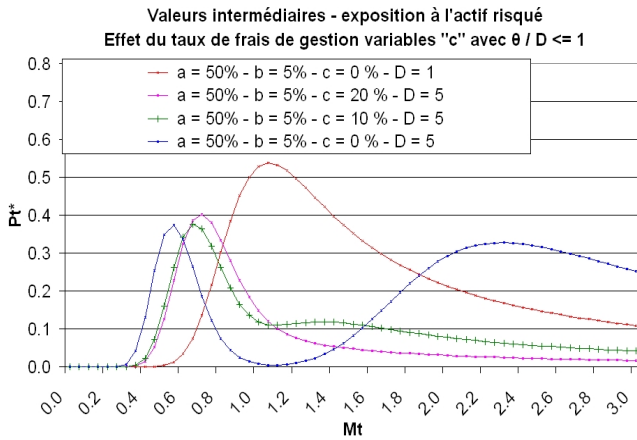


FIGURE 35. Stratégie optimale du problème Moyenne-Variance avec frais de gestion variables et aversion à la sous-performance - valeurs intermédiaires de l'exposition à l'actif risqué - effet du niveau d'aversion à la sous-performance, pour  $\theta/D \leq 1$  et  $t = 4$ .

#### 4. Conclusion du chapitre

Nous avons résolu le problème d'investissement de l'asset manager HARA, bénéficiant d'une incitation financière sous la forme de frais de sur-performance, et qui cherche à maximiser l'utilité espérée de sa rémunération financière, à un horizon d'investissement donné, et sous contrainte d'aversion à la sous-performance.

Nous avons montré que le profil de gain optimal dépend du rapport entre le paramètre d'incitation financière, noté  $\theta$ <sup>43</sup>, et le paramètre d'aversion à la sous-performance, noté  $D$ <sup>44</sup>, de la manière suivante :

- (1) Pour l'asset manager qui est " faiblement " averse à la perte ( $\theta > D > 1$ ), le profil de richesse ressemble à celui de l'asset manager non averse à la perte et recevant une incitation financière ( $\theta > D = 1$ ).
  - Pour l'asset manager CRRA, il s'agit d'un profil asymétrique et discontinu à deux états de richesse plus risqué que celui de l'asset manager de référence sans aversion ni incitation financière (cas  $\theta = D = 1$  où le pay-off est symétrique et continu).
  - Pour l'asset manager ayant une fonction d'utilité quadratique et soumis à une contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille, le profil est asymétrique et discontinu à deux ou trois états de richesse. Pour un niveau suffisamment élevée de la contrainte de protection<sup>45</sup>, la stratégie optimale prendra une forme à deux états moins risquée que la stratégie suivie par l'asset manager de référence sans aversion ni incitation financière. Dans le cas contraire (i.e. niveau de protection faible), la stratégie prendra une forme à trois états de richesse plus risquée que la stratégie de référence.
  - une courbe d'exposition à l'actif risqué en fonction de la valeur de cet actif en forme de cloche asymétrique : il se produit un "pic" d'exposition (qui correspond également au "pic" de sur-exposition par rapport au cas sans incitation financière) dans un intervalle de valeurs basses à médianes du sous-jacent.

---

43. dont l'expression exacte est la suivante :  $1 + c/b$  où  $c$  est la valeur du taux des frais de sur-performance et  $b$  celle du taux des frais de gestion sur encours

44. qui dépend implicitement du niveau maximum tolérée d'espérance de sous-performance ("Limited Expected Loss"), voir la première partie de la thèse.

45. toute chose restant égale par ailleurs

- (2) Pour l'asset manager qui est "fortement" averse à la perte ( $D > \theta > 1$ ), le profil de gain est similaire à celui de l'asset manager averse à la perte et sans incitation financière ( $D > \theta = 1$ ) :
- un profil asymétrique et continu à trois ou quatre états de richesse<sup>46</sup> qui est moins risqué que celui de l'asset manager de référence sans aversion ni incitation financière (cas  $D = \theta = 1$  pour lequel le pay-off est symétrique et continu).
  - un état de richesse supplémentaire, par rapport à la stratégie de référence  $D = \theta = 1$ , qui correspond à un intervalle de valeurs intermédiaires de l'actif risqué dans lequel le gérant implémente une gestion passive.
  - La courbe du poids de l'actif risqué investi dans le portefeuille optimal, exprimé en fonction de la valeur de cet actif, ressemble à une forme de cloche inversée et asymétrique : dans une zone de valeurs médianes de l'actif risqué, l'asset manager diminue fortement l'investissement de son portefeuille dans l'actif risqué. Ce qui se traduit également par une sous-exposition par rapport au portefeuille de l'asset manager de référence, sans incitation financière ni aversion à la sous-performance.
- (3) Pour l'asset manager qui est modérément averse à la perte ( $D = \theta > 1$ ),
- le profil de la rémunération de l'asset manager est continu et symétrique et ressemble à celui de l'asset manager de référence (à la contrainte de budget près).
  - le profil de gain de l'investisseur, également continu, reste asymétrique (profil averse à la sous-performance) et plus défensif que la stratégie de référence (sans aversion à la sous-performance ni incitation financière à la sous-performance, i.e.  $D = \theta = 1$ ).

---

46. trois états pour le profil de gain de l'asset manager CRRA, et quatre états pour l'asset manager quadratique qui doit prendre en compte une contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille.

## Démonstrations partie 1

### PREUVE DU THÉORÈME 1.

(a) **1er cas** : Fonction d'utilité discontinue

La démonstration dans ce cas est similaire à celle de la proposition 1 dans ([Basak Shapiro, 2001]). Ces auteurs utilisent une approche permettant de résoudre des problèmes dynamiques non standards (pour des fonctions non concaves et non différentiables); la démonstration se fait en deux étapes :

- (1) Tout d'abord, on montre que le convexe conjugué (ou transformé de Legendre-Fenchel) du problème (P1), défini par

$$U^*(\varepsilon_T) = \underset{W}{Max} \{U(W) - k\varepsilon_T W\}, \text{ avec } \varepsilon_T \equiv 1/H_T,$$

a pour solution (" point par point ") l'expression  $W_T^*$  telle que définie explicitement dans le théorème 1.

En considérant séparément le maximum local pour la partie supérieure et pour la partie inférieure à  $W^0$ , on peut appliquer les " CPO " (ou conditions de Khun et Tucker) localement et on trouve :

-pour  $W \geq W^0$ , un maximum local égal à  $Max \{W^0, I(k\varepsilon_T)\}$

-pour  $W < W^0$ , un maximum local égal à  $Min \{W^0, I(k\varepsilon_T)\}$

Donc le maximum global est, selon les cas, soit  $W_1^* = I(k\varepsilon_T)$ , soit  $W_2^* = W^0$ ; Si  $U(W_1^*) - k\varepsilon_T W_1^* > U(W_2^*) - k\varepsilon_T W_2^*$ ,  $W_1^*$  est le maximum globale sinon c'est  $W_2^*$

- (a) Pour  $A > 0 \Leftrightarrow \underline{H} < \overline{H}$ ,

les différents sous-cas sont les suivants :

-Pour  $\varepsilon_T < \underline{\varepsilon}$ , avec  $\underline{\varepsilon} \equiv 1/\overline{H} \equiv u'(W^0)/k$ , on trouve que  $I(k\varepsilon_T)$  est le maximum.

-Pour  $\underline{\varepsilon} \leq \varepsilon_T < \overline{\varepsilon}$ , avec  $\overline{\varepsilon} \equiv 1/\underline{H} > \underline{\varepsilon}$ , solution de l'équation  $u(I(k\overline{\varepsilon})) - (k\overline{\varepsilon})u(I(k\overline{\varepsilon})) - u(W^0) + (k\overline{\varepsilon})W^0 = A$ , on trouve pour maximum  $W^0$ .

-Pour  $\varepsilon_T \geq \overline{\varepsilon}$ , on trouve que  $I(k\varepsilon_T)$  est le maximum.



(b) Pour  $A = 0 \Leftrightarrow \underline{H} = \overline{H}^1$ ,

l'expression de  $W_T^*$ , telle que définie explicitement dans le théorème 1, est donnée par  $I(k\varepsilon_T)$ , avec  $\varepsilon_T \equiv 1/H_T$ .

On démontre qu'il s'agit bien de l'expression de la richesse terminale optimale du problème d'investissement considéré pour  $A = 0$  : la résolution est celle du problème de l'asset manager HARA sans contrainte d'aversion sous l'hypothèse d'une fonction d'utilité concave et différentiable.

C.Q.F.D.

(2) Montrons maintenant que  $W^*$  telle que  $U^*(\varepsilon_T) \equiv \underset{W}{Max} \{U(W) - k\varepsilon_T W\} = U(W^*) - k\varepsilon_T W^*$  est solution du problème statique considéré (P1) :

Considérons une stratégie quelconque admissible vérifiant la contrainte de budget et dont la valeur finale est notée  $W_T$ .

On a

$$\begin{aligned} E[U(W_T^*)] - E[U(W_T)] &= \\ E[U(W_T^*)] - E[U(W_T)] - E(k\varepsilon_T W_T^*) + E(k\varepsilon_T W_T) &= \\ E[U^*(\varepsilon_T)] - (E[U(W_T)] - E(k\varepsilon_T W_T)) &\geq 0 \end{aligned}$$

La première égalité se déduit de la contrainte de budget du problème considérée qui est vérifiée à la fois par  $W_T$  et par  $W_T^*$ . L'inégalité est une conséquence directe du résultat démontré dans le premier point.

(3) Conclusion :  $W_T^*$  est solution du problème statique considéré (P1).

### (b) 2d cas: Fonction d'utilité continue

Il s'agit du problème (P19) dans le cas particulier où l'investisseur est averse à la sous-performance mais ne reçoit pas d'incitation financière. La solution de ce problème est donnée dans le théorème 9 (cf. chapitre 5 de la seconde partie de la thèse).

Ainsi, l'expression de la richesse terminale optimale correspond à celle de la solution du problème (P19) pour un choix de la valeur du paramètre d'incitation financière égale à 1 :  $\theta = 1$  (cas où il n'y a pas d'incitations financières).

□

---

1. Ce choix de valeurs seuils du portefeuille  $H$  revient à considérer un paramètre,  $A$ , d'aversion à la perte, égal à 0. Or la valeur 0 est un minorant du paramètre  $A$  (cas du niveau d'aversion à la perte minimal pour lequel la contrainte de pénalisation de la sous-performance ne joue pas), et on peut donc considérer, sans perte de généralité que  $\overline{H}$  est un majorant de  $\underline{H}$ .

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 1 ET DE LA CONSÉQUENCE 1.

Voir [Basak Shapiro, 2001] □

PREUVE DE LA CONSÉQUENCE 2.

La stratégie peut être vue comme la somme des deux stratégies suivantes :

- (1) une stratégie d'assurance de portefeuille :

Cette stratégie a pour sous-jacent le portefeuille de Merton et correspond à niveau de protection égal à  $W^0$  ;

- (2) une stratégie "vendeuse de protection" :

Cette stratégie comprend une position vendeuse d'une option Put et une position vendeuse d'une option binaire versant  $(W^0 - W^\alpha)$ .

Ces deux options ont pour sous-jacent le portefeuille de Merton atteignant la richesse  $H_T^{1/\gamma}$  et pour strike l'expression suivante :

$$W^\alpha \equiv y \underline{H}^{1/\gamma} \text{ avec } y \equiv k^{-1/\gamma} \text{ et avec } \underline{H} \text{ solution de l'équation } P(H_T \leq \underline{H}) = \alpha.$$

On en déduit l'expression cherchée :

$$W_t^* = W_0 e^{-r(T-t)} + C(yH_t^*, W^0, T-t) - P(yH_t^*, W^\alpha, T-t) + (W^\alpha - W^0)B(yH_t^*, W^\alpha, T-t)$$

avec  $C(yH_t^*, W^0, T-t)$  (resp.  $P(yH_t^*, W^\alpha, T-t)$  , resp.  $B(yH_t^*, W^\alpha, T-t)$  ) la valeur, à la date  $t$ , du Call européen (resp. Put européen, resp. option Binaire) d'échéance  $T-t$  , de strike  $W^0$  , ( resp.  $W^\alpha$  , resp.  $W^\alpha$  ) sur le sous-jacent  $yH_t^*$  . □

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 2.

Dans le cas d'un investisseur CRRA, on a  $I(x) \equiv x^{-1/\gamma}$  , et  $u'(x) \equiv x^{-\gamma}$  , et on trouve le résultat cherché par application directe du théorème 1. □

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 3.

Dans le cas où l'investisseur considéré est CRRA, et si  $W_T^*$  est la solution du problème (P3)(A) avec  $A$  vérifiant  $A = u(I(k/\underline{H})) - (k/\underline{H})u(I(k/\underline{H})) - u(W^0) + (k/\underline{H})W^0$  et  $\underline{H}$  vérifiant  $P(H_T \leq \underline{H}) = \alpha$ , alors il est facile de voir que  $W_T^*$  est aussi la solution du problème (P2)( $\alpha$ ) dont l'expression est donnée dans la propriété 1.

La réciproque s'obtient de la même manière en partant de l'expression de  $W_T^*$ , la solution du problème (P2)( $\alpha$ ) donnée dans la propriété 1, et en considérant l'expression de la solution optimale du problème (P3)( $A$ ) donnée dans la propriété 2.  $\square$

#### PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 4.

Cette démonstration se trouve dans [Berkelaar *et al.*, 2004] qui suivent la même méthode de résolution que ([Basak Shapiro, 2001]); on rappelle que celle-ci permet de résoudre des problèmes dynamiques non standard (non concaves et/ou non différentiables).

Elle se fait en deux étapes :

1) Les auteurs montrent dans un premier temps que le convexe conjugué du problème (P4), définie par  $U^*(\varepsilon_T) = \underset{W}{Max} \{U(W) - k\varepsilon_T W\}$ , avec la notation  $\varepsilon_T \equiv 1/H_T$  a pour solution (" point par point ") l'expression  $W_T^*$  telle que définie explicitement dans la propriété 4.

2) Ils montrent ensuite que  $W^* = U^*(\varepsilon_T) \equiv \underset{W}{Max} \{U(W) - k\varepsilon_T W\}$  est solution du problème statique considéré (P4).

Ils en concluent que  $W_T^*$  est solution du problème statique considéré (P4).  $\square$

#### PREUVE DE LA CONSÉQUENCE 3.

On montre que la stratégie optimale peut être vue comme la combinaison de plusieurs positions optionnelles élémentaires comprenant :

-une position acheteuse investie sur une stratégie d'assurance de portefeuille optionnelle (" Option Based Portfolio Insurance ") dont le sous-jacent est, à une constante multiplicative près, le portefeuille de Merton (sa valeur finale est  $y_B H_T^{1/\gamma}$ ) et dont le niveau de protection est égal à  $W^0$ .

-une position vendeuse sur une option Put écrite, au levier près, sur le même sous-jacent (sa valeur finale est  $y_A H_T^{1/\gamma}$ ) et de strike  $W^0$ ,

où on a posé  $y_A \equiv 1/(k/A)^{1/\gamma}$  et  $y_B \equiv 1/(k/B)^{1/\gamma}$ .

On en déduit l'expression cherchée :

$$W_t^* = W_0 e^{-r(T-t)} + C(y_B H_t^*, W^0, T-t) - P(y_A H_t^*, W^0, T-t)$$

Où  $C(Z_t, W^0, T-t)$  (resp.  $P(Z_t, W^0, T-t)$ ) désigne la valeur à la date  $t$ , du Call européen (resp. Put européen) d'échéance  $T-t$ , de strike  $W^0$  et écrite sur le sous-jacent  $Z_t$ .  $\square$

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 5.

Voir [**Basak Shapiro, 2001**] □

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 6.

Si  $W_T^*$  est la solution du problème (P4)( $A, B$ ) avec  $A$  et  $B$  vérifiant  $B = k/k_1$  et  $A = k/(k_1 - k_2)$  ou  $k_1$  et  $k_2$  sont solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E(W_T^*(k_1, k_2)/H_T) = 1 \\ E \left[ (1/H_T)(W^0 - W_T^*(k_1, k_2)) 1_{\{W_T^*(k_1, k_2) \leq W^0\}} \right] = \varepsilon \text{ ou } k_2 = 0 \end{cases}$$

alors, par application directe de la propriété 5, on en déduit que  $W_T^*$  est aussi la solution du problème P5( $\varepsilon$ ).

En utilisant la propriété 4, la réciproque s'en déduit aisément. □

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 8 ET 9 .

Voir [**Berkelaar Kouwenberg, 2000**] □

PREUVE DES CONSÉQUENCES 5 ET 6 .

Ces résultats s'obtiennent par application directe des propriétés 8 et 9. □

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 10.

La démonstration est identique à celle de [**Berkelaar Kouwenberg, 2000**]; il suffit pour cela :

- de supposer que l'investisseur n'est pas averse à la sous-performance,
- de remplacer, dans la fonction objective, le paramètre d'aversion implicite "A" du problème (P7) de [**Berkelaar Kouwenberg, 2000**], par le coefficient de Lagrange correspondant aux contraintes explicites de risque de sous-performance que nous avons introduites dans l'énoncé du problème (P8). □

PREUVE DE LA CONSÉQUENCE 7 .

Le résultat s'obtient par application directe de la propriété 10 et des propriétés 8 et 9. □

## PREUVE DU THÉORÈME 2 .

On suit les mêmes étapes que dans la démonstration du théorème 1 pour déterminer la solution du problème d'investissement (P1) avec fonction d'utilité discontinue (dont l'expression correspond au cas a) du théorème 1, voir aussi [Basak Shapiro, 2001].

Notre démonstration se distingue de celle de [Basak Shapiro, 2001] par le fait que nous considérons une fonction d'utilité spécifique de type quadratique et une contrainte supplémentaire d'assurance de portefeuille dans le problème d'investissement.

- (1) Tout d'abord on montre que le convexe conjugué (ou transformé de Legendre-Fenchel) du problème (P10),  $U^*(\varepsilon_T)$  a pour solution (" point par point ") l'expression  $W_T^*$  telle que définie explicitement dans le théorème 2.

$U^*(\varepsilon_T)$  est définie par l'expression  $U^*(\varepsilon_T) = \underset{W \geq \underline{W}}{\text{Max}} \{U(W) - k\varepsilon_T W\}$

avec  $\varepsilon_T \equiv 1/H_T$ ,

et avec  $U(x) = \begin{cases} u(x) - B & \text{si } x < W^0 \\ u(x) & \text{si } x \geq W^0 \end{cases}$  et où  $u(x) = x - (1/2a)x^2$ .

En considérant séparément le maximum local pour la partie supérieure et pour la partie inférieure à  $W^0$ , on peut appliquer les " CPO " ( ou conditions de Khun et Tucker) localement et on trouve :

-pour  $W \geq W^0$  , un maximum local égal à  $W_1^* = \text{Max} \{W^0, a(1 - k\varepsilon_T)\}$

-pour  $W < W^0$  , un maximum local égal à  $W_2^* = \text{Min} \{W^0, \text{Max} \{\underline{W}; a(1 - k\varepsilon_T)\}\}$

Donc le maximum global est, selon les cas, soit  $W_1^*$  , soit  $W_2^*$  ;

Si  $U(W_1^*) - k\varepsilon_T W_1^* > U(W_2^*) - k\varepsilon_T W_2^*$  ,  $W_1^*$  est le maximum globale sinon c'est  $W_2^*$ .

Pour  $\varepsilon_T < \underline{\varepsilon}$  , avec  $\underline{\varepsilon} \equiv 1/\overline{H} \equiv (1 - W^0/a)/k$  , on a  $a(1 - k\varepsilon_T) > W^0$  donc  $W_1^* = a(1 - k\varepsilon_T)$  et  $W_2^* = W^0$  .

En posant  $g_{\varepsilon_T}(x) \equiv u(x) - (k\varepsilon_T)x \equiv x - (1/2a)x^2 - (k\varepsilon_T)x$  , on obtient :

$$U(W_1^*) - k\varepsilon_T W_1^* = g_{\varepsilon_T}(W_1^*) = g_{\varepsilon_T}(a(1 - k\varepsilon_T)) \text{ et}$$

$$U(W_2^*) - k\varepsilon_T W_2^* = g_{\varepsilon_T}(W_2^*) = g_{\varepsilon_T}(W^0)$$

Or  $g_{\varepsilon_T}(x)$  admet pour maximum global :  $a(1 - k\varepsilon_T)$  , donc  $g_{\varepsilon_T}(a(1 - k\varepsilon_T)) > g_{\varepsilon_T}(W^0)$  et le maximum cherché est  $a(1 - k\varepsilon_T)$ .

Dans la suite de la démonstration, on supposera, sans perte de généralité, que  $B \neq 0^2$  et on distinguera les cas selon que  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$  est vérifiée ou non.

---

2. Dans ce cas le problème est celui de l'investisseur sans aversion et l'expression de la richesse terminale optimale s'obtient en considérant les arguments standards sous l'hypothèse d'une fonction d'utilité concave et différentiable; on obtient  $W_T^* = a(1 - k\varepsilon_T)$ .

**1er cas :**  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$

a) Pour  $\underline{\varepsilon} \leq \varepsilon_T < \varepsilon_{\underline{W}}$ , avec  $\varepsilon_{\underline{W}} \equiv 1/H_{\underline{W}} \equiv (1 - \underline{W}/a)/k > \underline{\varepsilon}$ .

On a  $\underline{W} < a(1 - k\varepsilon_T) \leq W^0$  donc  $W_1^* = W^0$  et  $W_2^* = a(1 - k\varepsilon_T)$ .

et on obtient  $U(W_1^*) - k\varepsilon_T W_1^* = g_{\varepsilon_T}(W_1^*) = g_{\varepsilon_T}(W^0)$  et

$U(W_2^*) - k\varepsilon_T W_2^* = g_{\varepsilon_T}(W_2^*) - B = g_{\varepsilon_T}(a(1 - k\varepsilon_T)) - B$ .

Donc  $W^0$  est le maximum si  $g_{\varepsilon_T}(W^0) + B > g_{\varepsilon_T}(a(1 - k\varepsilon_T))$ .

Soit  $\bar{\varepsilon}$  solution de  $g_{\bar{\varepsilon}}(a(1 - k\bar{\varepsilon})) = g_{\bar{\varepsilon}}(W^0) + B$ ,  
c'est à dire de  $\frac{a}{2}(1 - k\bar{\varepsilon})^2 + W^0(k\bar{\varepsilon}) = W^0 - \frac{(W^0)^2}{2a} + B$ .

On a  $g_{\varepsilon_T}(W^0) + B = g_{\varepsilon_T}(W^0) + g_{\bar{\varepsilon}}(a(1 - k\bar{\varepsilon})) - g_{\bar{\varepsilon}}(W^0)$

soit encore  $g_{\varepsilon_T}(W^0) + B = g_{\bar{\varepsilon}}(a(1 - k\bar{\varepsilon})) + kW^0(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_T)$

Posons  $f_{W^0}(\varepsilon_T) = g_{\varepsilon_T}(a(1 - k\varepsilon_T)) + kW^0\varepsilon_T \equiv \frac{a}{2}(1 - k\varepsilon_T)^2 + kW^0\varepsilon_T$ .

$f_{W^0}(\varepsilon_T)$  est une fonction croissante pour  $\varepsilon_T \geq \underline{\varepsilon} \equiv (1 - W^0/a)/k$ ,

et on en déduit que pour  $\underline{\varepsilon} \leq \varepsilon_T < \bar{\varepsilon}$  on a  $f_{W^0}(\varepsilon_T) < f_{W^0}(\bar{\varepsilon})$ .

et donc aussi que  $g_{\varepsilon_T}(W^0) + B = g_{\bar{\varepsilon}}(a(1 - k\bar{\varepsilon})) + kW^0(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_T) > g_{\varepsilon_T}(a(1 - k\varepsilon_T))$ .

Ce qui montre que  $W^0$  est le maximum pour  $\underline{\varepsilon} \leq \varepsilon_T < \bar{\varepsilon}$ .

De plus, on a par hypothèse  $\bar{\varepsilon} < \varepsilon_{\underline{W}}$  puisque  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$ .

On en déduit donc que  $a(1 - k\varepsilon_T)$  est le maximum pour  $\bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_T < \varepsilon_{\underline{W}}$ .

Finalement on note que  $\underline{H} \equiv 1/\bar{\varepsilon}$  est solution de

$$u(I(k/\underline{H})) - (k/\underline{H})u(I(k/\underline{H})) - u(W^0) + (k/\underline{H})W^0 = B$$

Ou encore de

$$\frac{a}{2}(1 - k/\underline{H})^2 + W^0(k/\underline{H}) = W^0 - \frac{(W^0)^2}{2a} + B \equiv u(k/\bar{H}) + B$$

Ce qui donne  $\underline{H} \equiv k/(1 - (W^0 - \sqrt{2aB})/a)$

b) Pour  $\varepsilon_T \geq \varepsilon_{\underline{W}}$

On a  $a(1 - k\varepsilon_T) \leq \underline{W}$  donc  $W_1^* = W^0$  et  $W_2^* = \underline{W}$ , et on obtient :

$$U(W_1^*) - k\varepsilon_T W_1^* = g_{\varepsilon_T}(W_1^*) = g_{\varepsilon_T}(W^0)$$

$$\text{et } U(W_2^*) - k\varepsilon_T W_2^* = g_{\varepsilon_T}(W_2^*) - B = g_{\varepsilon_T}(\underline{W}) - B$$

Donc  $\underline{W}$  est le maximum si  $g_{\varepsilon_T}(W^0) + B < g_{\varepsilon_T}(\underline{W}) \Leftrightarrow$

$$\varepsilon_T < (1/k) [1 - (W^0 + \underline{W})/2a + B/(W^0 - \underline{W})] \equiv \bar{\varepsilon}$$

Or  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB} \varepsilon_{\underline{W}} > \bar{\varepsilon}$  donc  $\forall \varepsilon_T, \varepsilon_T \geq \underline{\varepsilon}_{\underline{W}} \Rightarrow \varepsilon_T \geq \bar{\varepsilon}_W$ .

Par conséquent le maximum est toujours  $\underline{W}$ .

### 2d cas : $W^0 < \underline{W} + \sqrt{2aB}$

Dans ce cas, on a  $\bar{\varepsilon} > \bar{\varepsilon} > \underline{\varepsilon}_{\underline{W}} > \underline{\varepsilon}$  et on obtient de la même manière que pour le cas précédent :

a) Pour  $\underline{\varepsilon} \leq \varepsilon_T < \underline{\varepsilon}_{\underline{W}}$ ,  $W^0$  est le maximum.

b) Pour  $\varepsilon_T > \underline{\varepsilon}_{\underline{W}}$ ,  $\underline{W}$  est le maximum.

(2) Montrons maintenant que  $W^*$  telle que

$U^*(\varepsilon_T) \equiv \underset{W \geq \underline{W}}{\text{Max}} \{U(W) - k\varepsilon_T W\} = U(W^*) - k\varepsilon_T W^*$  est solution du problème statique considéré (P10).

Considérons une stratégie quelconque admissible dont la richesse finale est notée  $W_T$  et vérifiant la contrainte de budget du problème (P10). On en déduit que :

$$\begin{aligned} E[U(W_T^*)] - E[U(W_T)] &= \\ E[U(W_T^*)] - E[U(W_T)] - E(k\varepsilon_T W_T^*) + E(k\varepsilon_T W_T) &= \\ E[U^*(\varepsilon_T)] - (E[U(W_T)] - E(k\varepsilon_T W_T)) &\geq 0 \end{aligned}$$

La première égalité se déduit de la contrainte de budget du problème considérée qui est vérifiée à la fois par  $W_T$  et par  $W_T^*$ . La relation d'inégalité de la dernière ligne est une conséquence directe du résultat démontré dans le premier point.

□

### PREUVE DE LA CONSÉQUENCE 8 .

Le résultat recherché s'obtient par application directe du théorème 2.

□

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 11 .

LEMME 3.

La richesse terminale optimale du problème (P9) est donnée par l'expression suivante,

$$-Si W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$$

$$W_T^* = \begin{cases} a(1 - k/H_T) \text{ si } H_T > \overline{H} \\ W^0 \text{ si } \underline{H} < H_T \leq \overline{H} \\ a(1 - k/H_T) \text{ si } H_{\underline{W}} < H_T \leq \underline{H} \\ \underline{W} \text{ si } H_T \leq H_{\underline{W}} \end{cases}$$

-Si  $W^0 < \underline{W} + \sqrt{2aB}$ , la solution est dégénérée et est donnée par l'expression suivante :

$$W_T^* = \begin{cases} a(1 - k/H_T) \text{ si } H_T > \overline{H} \\ W^0 \text{ si } H_{\underline{W}} < H_T \leq \overline{H} \\ \underline{W} \text{ si } H_T \leq H_{\underline{W}} \end{cases}$$

avec  $k$  vérifiant l'équation de budget suivante :  $E(W_T^*/H_T) = 1$ ,

avec  $\overline{H} \equiv k/(1 - W^0/a)$ ,  $\underline{H}$  solution de  $P(H_T \leq \underline{H}) = \alpha$ ,

avec  $H_{\underline{W}} \equiv k/(1 - \underline{W}/a)$ , où  $\overline{H} > \underline{H}$ ,

et avec  $B = A \times (W^0 - a(1 - k/\underline{H}))^2$

PREUVE DU LEMME 3.

En partant des définitions de  $\underline{H}$ , solution de  $P(H_T \leq \underline{H}) = \alpha$ , et de  $\overline{H} \equiv k/(1 - W^0/a)$ , dans le cas où la contrainte du problème P9( $\alpha$ ) ne joue pas<sup>3</sup>, alors on a  $\underline{H} > \overline{H}$ , et la solution du problème (P9) est la richesse terminale de la stratégie "Option Based Portfolio Insurance", qui est solution du problème d'investissement avec une unique contrainte de seuil de richesse minimum  $\underline{W}$ .

Dans le cas contraire, on a  $\underline{H} \leq \overline{H}$ , et  $P(W_T^* < W^0) = \alpha$ .

Le reste de la démonstration est similaire à celle du théorème 2 :

1) Tout d'abord on montre que le convexe conjugué (ou transformé de Legendre-Fenchel) du problème (P9),  $U^*(\varepsilon_T)$ , avec un terme additionnel pour tenir compte de la contrainte VaR, a pour solution (" point par point ") l'expression  $W_T^*$  telle que définie explicitement dans le lemme 3 ci-dessus.

---

3. c'est à dire si  $P(W_T^* < W^0) < \alpha$



$U^*(\varepsilon_T)$  est définie par l'expression

$$U^*(\varepsilon_T) = \underset{W \geq \underline{W}}{\text{Max}} \{u(W) - k\varepsilon_T W - B1_{\{W < W^0\}}\}$$

avec  $\varepsilon_T \equiv 1/H_T$  et avec  $B \equiv u(I(k\underline{\varepsilon})) - (k\underline{\varepsilon})u(I(k\underline{\varepsilon})) - u(W^0) + (k\underline{\varepsilon})W^0 \geq 0$

Ce qui donne  $B \equiv \frac{a}{2}(1 - k/\underline{H})^2 + W^0(k/\underline{H}) - W^0 + \frac{(W^0)^2}{2a}$

soit encore  $B = A \times (W^0 - a(1 - k/\underline{H}))^2$ .

Par conséquent  $U^*(\varepsilon_T)$  peut se réécrire de la façon suivante :

$$U^*(\varepsilon_T) = \underset{W \geq \underline{W}}{\text{Max}} \{U(W) - k\varepsilon_T W\}$$

$$\text{avec } U(x) = \begin{cases} u(x) - B & \text{si } x < W^0 \\ u(x) & \text{si } x \geq W^0 \end{cases} \quad \text{où } u(x) = x - (1/2a)x^2$$

Le reste de la démonstration de la partie 1) du lemme est identique à celle de la démonstration de théorème 2.

2) Montrons maintenant que que  $W^*$  telle que

$$U^*(\varepsilon_T) = \underset{W \geq \underline{W}}{\text{Max}} \{u(W) - k\varepsilon_T W - B1_{\{W < W^0\}}\} = u(W^*) - k\varepsilon_T W^* - B1_{\{W^* < W^0\}}$$

est solution du problème statique considéré (P9)

On considère une stratégie quelconque admissible vérifiant la contrainte de budget et la contrainte VaR du problème (P9) et dont la richesse finale est notée  $W_T$ .

On en déduit que :

$$\begin{aligned} E[u(W_T^*)] - E[u(W_T)] &= \\ E[u(W_T^*)] - E[u(W_T)] - E(k\varepsilon_T W_T^*) + E(k\varepsilon_T W_T) + B\alpha - B\alpha &\geq \\ E[U^*(\varepsilon_T)] - (E[u(W_T)] - E(k\varepsilon_T W_T) - E(B1_{W_T < W^0})) &\geq 0 \end{aligned}$$

La relation d'égalité se déduit de la contrainte de budget du problème considéré qui est vérifiée à la fois par  $W_T$  et par  $W_T^*$ .

La première relation d'inégalité se déduit de la contrainte VaR du problème (P9) vérifiée à la fois par  $W_T$  (avec une inégalité) et par  $W_T^*$  (avec une égalité).

La seconde relation d'inégalité est une conséquence directe du résultat démontré dans le premier point.

□

Finalement, le résultat d'équivalence entre le problème (P9) et le problème (P10) donné dans le cadre de la Propriété 11 s'obtient comme une conséquence directe du lemme 3 (i.e. qui fournit l'expression de la solution optimale du problème (P9)) et du théorème 2 (qui fournit la solution optimale du problème (P10)).

□

## PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 12.

On obtient le résultat de la Propriété 12 par une décomposition, en position optionnelle élémentaire, de l'expression de la richesse terminale optimale fournie dans le théorème 2.  $\square$

## PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 13.

On se place dans le cas où  $W^0 \geq \underline{W} + \sqrt{2aB}$ .

Le résultat de la Propriété 13 est une conséquence directe de la propriété 11 en utilisant les hypothèses du modèle à deux actifs de Black & Scholes.

On peut aussi utiliser un calcul direct en partant de l'expression donnée dans le théorème 2 de la richesse finale optimale.

On utilise la probabilité Risque Neutre, notée  $Q$ ; par changement de probabilité de la probabilité historique  $P$  à  $Q$ , on en déduit que le portefeuille de norme minimum  $I$  a une dynamique qui s'écrit

$$dI_t/I_t = r dt - \lambda dZ_t^* \text{ avec } dZ_t^* = \lambda dt + dZ_t$$

Par conséquent, on obtient  $W_t^* = e^{-r(T-t)} \times E_t^Q \{W_T^*\}$

et de façon plus détaillée  $W_t^* = e^{-r(T-t)} \times E_t^Q \{W_T^{*1} + W_T^{*2} + W_T^{*3} + W_T^{*4}\}$

avec  $W_T^{*1} = a(1 - kI_T) 1_{(I_T < 1/\overline{H})}$ ,  $W_T^{*2} = W^0 1_{(1/\overline{H} \leq I_T < 1/\underline{H})}$ ,

$W_T^{*3} = a(1 - k/H_T) 1_{(1/\underline{H} \leq I_T < 1/\overline{H}_{\overline{W}})}$ , et  $W_T^{*4} = \overline{W} 1_{(I_T \geq 1/\overline{H}_{\overline{W}})}$ .

Après calcul, en utilisant la log normalité de  $I_t$ , on trouve l'expression cherchée :

$$\begin{aligned} W_t^* &= ae^{-r(T-t)} \{N(-d_2(\underline{I})) + N(-d_2(\underline{I}_{\overline{W}})) - N(-d_2(\overline{I}))\} \\ &\quad - kI_t \{N(-d_1(\overline{I})) + N(-d_2(\underline{I}_{\overline{W}})) - N(-d_2(\overline{I}))\} \\ &\quad + W^0 e^{-r(T-t)} \{N(-d_2(\overline{I})) + N(-d_2(\underline{I}))\} \\ &\quad + \underline{W} e^{-r(T-t)} N(d_2(\underline{I}_{\overline{W}})) \end{aligned}$$

avec  $\underline{I} = 1/\overline{H}$ ,  $\overline{I} = 1/\underline{H}$ ,  $\underline{I}_{\overline{W}} = 1/\overline{H}_{\overline{W}}$  et avec

$$d_2(x) = \frac{\log(\frac{I_t}{x}) + (r - \frac{\lambda^2}{2})(T-t)}{\lambda\sqrt{T-t}} \quad ; \quad d_1 = d_2 + \sqrt{T-t}$$

$\square$

## PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 14.

Partant de l'expression de  $W_t^*$ , donnée dans la propriété 13, et en utilisant la théorie standard de l'évaluation des options, et le fait que le portefeuille  $I$  est une stratégie de valeur intermédiaire,  $I_t$  et de poids constant, noté  $i$ , on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial W_t^*}{\partial I_t} i I_t \text{ investi (en cash) dans l'indice } (M, m) \\ W_t^* - \frac{\partial W_t^*}{\partial I_t} i I_t \text{ investi (en cash) dans l'A.S.R} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} w_t^* W_t^* &= \frac{\partial W_t^*}{\partial I_t} i I_t = (ak)h \{N(-d_1(\underline{I})) + N(-d_1(I_{\underline{W}})) - N(-d_1(\bar{I}))\} I_t \\ &+ \frac{(ak)h}{(\lambda\sqrt{T-t})} (\bar{I} - \underline{I}) e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\bar{I})) \end{aligned}$$

□

## PREUVE DU THÉORÈME 3.

La démonstration se fait en deux étapes :

- (1) Tout d'abord on montre que le convexe conjugué (ou transformé de Legendre-Fenchel) du problème (P11), noté  $U^*(\varepsilon_T)$ , a pour solution ("point par point") l'expression  $W_T^*$  telle que définie explicitement dans le théorème 3.

$U^*(\varepsilon_T)$  est définie par l'expression  $U^*(\varepsilon_T) = \underset{W \geq \underline{W}}{\text{Max}} \{U(W) - k\varepsilon_T W\}$ , avec  $\varepsilon_T \equiv 1/H_T$ ,

$$\text{et avec } U(x) = \begin{cases} Au(x) + (B-A)u(W^0) & \text{si } x < W^0 \\ Bu(x) & \text{si } x \geq W^0 \end{cases}$$

ou  $u(x) = x - (1/2a)x^2$  désigne la fonction d'utilité quadratique.

En considérant séparément le maximum local pour la partie supérieure et pour la partie inférieure à  $W^0$ , on peut appliquer les "CPO" (ou conditions de Khun et Tucker) localement et on trouve :

-pour  $W \geq W^0$ , un maximum local égal à  $W_1^* = \text{Max} \{W^0, a(1 - (k/B)\varepsilon_T)\}$

-pour  $W < W^0$ , un maximum local égal à  $W_2^* = \text{Min} \{W^0, \text{Max} \{\underline{W}; a(1 - (k/A)\varepsilon_T)\}\}$

Donc le maximum global est, selon les cas, soit  $W_1^*$ , soit  $W_2^*$ .

Si  $U(W_1^*) - k\varepsilon_T W_1^* > U(W_2^*) - k\varepsilon_T W_2^*$ ,  $W_1^*$  est le maximum globale sinon c'est  $W_2^*$

- (a) Pour  $\varepsilon_T < \underline{\varepsilon}$ , avec  $\underline{\varepsilon} \equiv 1/\bar{H} \equiv (1 - W^0/a)/(k/B)$ .

On a  $a(1 - (k/B)\varepsilon_T) > W^0$  donc  $W_1^* = a(1 - (k/B)\varepsilon_T)$  et  $W_2^* = W^0$ .

En posant  $g_{\varepsilon_T}(x) \equiv Bu(x) - (k\varepsilon_T)x \equiv B(x - (1/2a)x^2) - (k\varepsilon_T)x$ ,

on obtient :  $U(W_1^*) - k\varepsilon_T W_1^* = g_{\varepsilon_T}(W_1^*) = g_{\varepsilon_T}(a(1 - k\varepsilon_T))$

et  $U(W_2^*) - k\varepsilon_T W_2^* = g_{\varepsilon_T}(W_2^*) = g_{\varepsilon_T}(W^0)$ .

Or  $g_{\varepsilon_T}(x)$  admet pour maximum global :  $a(1 - (k/B)\varepsilon_T)$ ,

Par conséquent, on a  $g_{\varepsilon_T}(a(1 - (k/B)\varepsilon_T)) > g_{\varepsilon_T}(W^0)$ .

Le maximum cherché est donc  $a(1 - (k/B)\varepsilon_T)$

(b) Pour  $\underline{\varepsilon} \leq \varepsilon_T \leq \bar{\varepsilon}$ , avec  $\bar{\varepsilon} \equiv 1/\underline{H} \equiv (1 - W^0/a)/(k/A) > \underline{\varepsilon}$ .

On a  $a(1 - (k/B)\varepsilon_T) \leq W^0$  et  $a(1 - (k/A)\varepsilon_T) \geq W^0$   
par conséquent, le maximum est  $W_1^* = W_2^* = W^0$ .

(c) Pour  $\bar{\varepsilon} < \varepsilon_T \leq \bar{\bar{\varepsilon}}$ , avec  $\bar{\bar{\varepsilon}} \equiv 1/\underline{H} \equiv (1 - \underline{W}/a)/(k/A) > \underline{\varepsilon}$ .

On a  $\underline{W} \leq a(1 - (k/A)\varepsilon_T) < W^0$  donc  $W_1^* = W^0$

et  $W_2^* = a(1 - (k/A)\varepsilon_T)$ .

En posant  $g_{\varepsilon_T}(x) \equiv Au(x) - (k\varepsilon_T)x \equiv A(x - (1/2a)x^2) - (k\varepsilon_T)x$ ,

on obtient :

$U(W_1^*) - k\varepsilon_T W_1^* = g_{\varepsilon_T}(W_1^*) - C = g_{\varepsilon_T}(W^0) - C$

et  $U(W_2^*) - k\varepsilon_T W_2^* = g_{\varepsilon_T}(W_2^*) - C = g_{\varepsilon_T}(\underline{W}) - C$

avec  $C \equiv (B - A)u(W^0)$ .

Donc  $W^0$  est le maximum si  $g_{\varepsilon_T}(W^0) > g_{\varepsilon_T}(\underline{W})$ .

Or  $g_{\varepsilon_T}(x)$  admet pour maximum global :  $a(1 - (k/A)\varepsilon_T)$ .

Par conséquent, on a  $g_{\varepsilon_T}(a(1 - (k/A)\varepsilon_T)) > g_{\varepsilon_T}(W^0)$ .

On en déduit que le maximum cherché est  $a(1 - (k/A)\varepsilon_T)$ .

(d) Pour  $\varepsilon_T > \bar{\bar{\varepsilon}}$ .

On a  $a(1 - (k/A)\varepsilon_T) > \underline{W}$  donc  $W_1^* = W^0$  et  $W_2^* = \underline{W}$ .

On obtient :

$$U(W_1^*) - k\varepsilon_T W_1^* = g_{\varepsilon_T}(W_1^*) - C = g_{\varepsilon_T}(W^0) - C \text{ et}$$

$$U(W_2^*) - k\varepsilon_T W_2^* = g_{\varepsilon_T}(W_2^*) - C = g_{\varepsilon_T}(\underline{W}) - C$$

Donc  $W^0$  est le maximum si  $g_{\varepsilon_T}(W^0) > g_{\varepsilon_T}(\underline{W})$ .

$$\text{Or on a : } g_{\varepsilon_T}(W^0) > g_{\varepsilon_T}(\underline{W})$$

si et seulement si  $\varepsilon_T < \varepsilon_{\underline{W}} \equiv (A/k) [1 - (W^0 + \underline{W})/2a]$

De plus, on a  $\bar{\varepsilon} \equiv (A/k)(1 - \underline{W}/a) > \varepsilon_{\underline{W}}$ .

On en déduit que  $\forall \varepsilon_T, \varepsilon_T \geq \bar{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon_T \geq \varepsilon_{\underline{W}}$ .

Par conséquent, le maximum est  $\underline{W}$ .

- (2) Montrons maintenant que  $W^*$  telle que  $U^*(\varepsilon_T) \equiv \underset{W \geq \underline{W}}{\text{Max}} \{U(W) - k\varepsilon_T W\} = U(W^*) - k\varepsilon_T W^*$  est solution du problème statique considéré (P11).

On considère une stratégie quelconque admissible vérifiant la contrainte de budget du problème (P11) et dont la valeur finale est notée  $W_T$ .

On en déduit que :

$$\begin{aligned} E[U(W_T^*)] - E[U(W_T)] &= \\ E[U(W_T^*)] - E[U(W_T)] - E(k\varepsilon_T W_T^*) + E(k\varepsilon_T W_T) &= \\ E[U^*(\varepsilon_T)] - (E[U(W_T)] - E(k\varepsilon_T W_T)) &\geq 0 \end{aligned}$$

La première égalité se déduit de la contrainte de budget du problème considérée qui est vérifiée à la fois par  $W_T$  et par  $W_T^*$ . La relation d'inégalité de la dernière ligne est une conséquence directe du résultat démontré dans le premier point.

□

#### PREUVE DE LA CONSÉQUENCE 9.

On obtient le résultat de la Conséquence 9 par une décomposition en positions optionnelles élémentaires de l'expression de la richesse terminale optimale qui est donnée dans le théorème 3. □

#### PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 15.

Si  $E \left[ (1/H_T)(W^0 - W_T^*(k_1, k_2)) 1_{\{W_T^*(k_1, k_2) \leq W^0\}} \right] < \varepsilon$  donc  $k_2 = 0$  et  $\underline{H} = \bar{H}$  et la solution du problème P12( $\varepsilon$ ) est celle de la stratégie " OBPI " , de niveau de protection  $\underline{W}$  , et dont le sous-jacent est le portefeuille solution du problème MV dynamique sans contrainte.

Si on a  $E \left[ (1/H_T)(W^0 - W_T^*(k_1, k_2)) 1_{\{W_T^*(k_1, k_2) \leq W^0\}} \right] = \varepsilon$  et on a  $\underline{H} \leq \bar{H}$  .

- (1) Tout d'abord on montre que le convexe conjugué (ou transformé de Legendre-Fenchel) du problème (P12),  $U^*(\varepsilon_T)$ , avec un terme additionnel pour tenir compte de la contrainte " LEL ", a pour solution (" point par point ") l'expression  $W_T^*$  telle que définie explicitement dans la propriété 15.

$U^*(\varepsilon_T)$  est définie par l'expression

$$U^*(\varepsilon_T) = \underset{W \geq \underline{W}}{\text{Max}} \{u(W) - k_1 \varepsilon_T W - k_2 (W^0 - W) \varepsilon_T \times 1_{\{W < W^0\}}\}$$

avec  $\varepsilon_T \equiv 1/H_T$ .

En considérant séparément le maximum local pour la partie supérieure et pour la partie inférieure à  $W^0$ , on peut appliquer les " CPO " ( ou conditions de Khun et Tucker) localement et on trouve :

-pour  $W \geq W^0$ , un maximum local égal à  $W_1^* = \text{Max} \{W^0, a(1 - k_1 \varepsilon_T)\}$

-pour  $W < W^0$ , un maximum local égal à  $W_2^* = \text{Min} \{W^0, \text{Max} \{\underline{W}; a(1 - (k_1 - k_2)\varepsilon_T)\}\}$

Donc le maximum global est, selon les cas, soit  $W_1^*$ , soit  $W_2^*$ .

En posant  $B \equiv k/k_1$  et  $A \equiv k/(k_1 - k_2)$ , le reste de la démonstration de la partie 1) est identique à la démonstration de la partie 1) du Théorème 3 .

- (2) Montrons maintenant que  $U^*(\varepsilon_T) = \underset{W \geq \underline{W}}{\text{Max}} \{u(W) - k_1 \varepsilon_T W - k_2 (W^0 - W) 1_{\{W < W^0\}}\}$  est solution du problème statique considéré (P12).

On considère une stratégie quelconque admissible vérifiant la contrainte de budget et la contrainte LEL du problème (P12) et dont la richesse finale est notée  $W_T$ .

On a :

$$\begin{aligned} E[u(W_T^*)] - E[u(W_T)] &= \\ E[u(W_T^*)] - E[u(W_T)] - E(k_1 \varepsilon_T W_T^*) + E(k_1 \varepsilon_T W_T) + k_2 \varepsilon - k_2 \varepsilon &\geq \\ E[U^*(\varepsilon_T)] - (E[u(W_T)] - E(k_1 \varepsilon_T W_T) - E(k_2 \varepsilon_T (W^0 - W) 1_{W_T < W^0})) &\geq 0 \end{aligned}$$

La relation d'égalité se déduit de la contrainte de budget du problème (P12) qui est vérifiée à la fois par  $W_T$  et par  $W_T^*$ .

La première relation d'inégalité se déduit de la contrainte LEL du problème (P12) vérifiée à la fois par  $W_T$  (avec une relation d'inégalité) et par  $W_T^*$  (avec une relation d'égalité).

La seconde relation d'inégalité est une conséquence directe du résultat démontré dans le premier point.

□

PREUVE DE LA CONSÉQUENCE 10.

La conséquence 10 est une conséquence directe du théorème 3 et de la propriété 15.

□

PREUVE DES PROPRIÉTÉS 17, 18 ET 20.

Les expressions de la valeur, à la date  $t$ , de la solution optimale,  $W_t^*$ , et de l'allocation optimale s'obtiennent de la même façon que pour le problème avec contrainte de type VaR considéré dans la section précédente (voir les démonstrations des propriétés 13 et 14 ci-dessus).

□

PREUVE DE L'APPENDICE N° 8. Expression du prix de l'obligation Zéro-Coupon dans le cadre du modèle de Vasicèk

En partant de la propriété de martingale des prix sous la probabilité historique :  $B(t, T-t) \equiv H_t E_t(1/H_T)$  et en utilisant la dynamique de  $H_t$ , on en déduit que  $B(t, T-t) = E_t(e^{N_0})$  où  $N_0$  est le processus de loi normale suivant :

$$N_0 \equiv -Ln(H_T/H_t) = -\left(\int_t^T r_u du + \|\lambda\|^2 (T-t)/2 + \lambda' Z_t\right)$$

Ce qui implique que :

$$E_t(N_0) \equiv -m(T-t) \text{ avec } m(T-t) = (b + \|\lambda\|^2/2)(T-t) + (rt - b)\sigma_{T-t}/\sigma_r$$

$$\text{et } Var(N_0) = Var(Ln(H_T)) = \Sigma^2(T-t) + \|\lambda\|^2 (T-t) - 2\rho_H \|\lambda\| \eta(T-t)$$

où on a posé :

$$\Sigma^2(T-t) \equiv \int_t^T \sigma_{T-u}^2 du = \frac{\sigma_r^2(T-t)}{a_r^2} \left[ 1 - \frac{\sigma_{T-t}}{\sigma_r(T-t)} - a_r \frac{\sigma_{T-t}^2}{2\sigma_r^2(T-t)} \right],$$

$$\eta(T-t) \equiv \left(\int_t^T \sigma_{T-u} du\right) = \sigma_r(T-t) \frac{1}{a_r} \left[ 1 - \frac{\sigma_{T-t}}{\sigma_r(T-t)} \right] \text{ et } \rho_H = \lambda_r / \|\lambda\|, \|\lambda\|^2 = \lambda_r^2 + \lambda_S^2$$

$$\text{et } \frac{\sigma_{T-t}}{\sigma_r} = \frac{1 - e^{-a_r(T-t)}}{a_r}$$

Par conséquent, on peut écrire

$$B(t, T-t) = e^{E_t(N_0) + \frac{Var(N_0)}{2}} = e^{-m(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}$$

où on a posé  $\sigma^2(T-t) = Var(Ln(H_T))$ .

Enfin, en notant que :

$$-m(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2} = b(T-t) + (rt-b)\sigma_{T-t}/\sigma_r + \Sigma^2(T-t)/2 - \lambda_r\eta(T-t)$$

$$\text{Ce qui se ré écrit } -m(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2} = -m^*(T-t) + \Sigma^2(T-t)/2$$

avec la notation suivante :  $m^*(T-t) \equiv b^*(T-t) + (rt-b^*)\frac{\sigma_{T-t}}{\sigma_r}$  et  $b^* \equiv b + \lambda\frac{\sigma_r}{a_r}$ .

$$\text{On obtient le résultat cherché : } B(t, T-t) = e^{-m^*(T-t) + \frac{\Sigma^2(T-t)}{2}}$$

□

PREUVE DU LEMME 1. Cf. [**Bajeux-Besnainou et al., 2003b**]

De [**Merton, 1990**], on a  $h = (\underline{\sigma}\sigma')^{-1}\theta = (\underline{\sigma}')^{-1}\lambda$  avec les notations vectorielles suivantes :

$$dS/S = (r_t + \theta)dt + \underline{\sigma}dZ_t$$

$$\text{avec } S \equiv (S, B_K), \quad \theta \equiv (\theta_S, \theta_K), \quad \text{et avec } \underline{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ 0 & \sigma_K \end{pmatrix} \text{ et avec } \lambda \equiv (\underline{\sigma})^{-1}\theta$$

On en déduit l'expression du vecteur  $h$  cherchée.

En utilisant la propriété d'auto-financement du portefeuille  $H$  :

$$dH/H = (r_t + h' \theta)dt + h' \underline{\sigma}dZ_t$$

et l'expression de  $h$ , on en déduit l'expression de la dynamique cherchée.

□

PREUVE DU LEMME 2. Cf. [**Bajeux-Besnainou et al., 2003b**]

(1) En partant de la propriété de martingale des prix sous la probabilité historique :  $H_t^* \equiv H_t E_t(H_T^*/H_T)$ , et en utilisant la dynamique de  $H_t$ , on en déduit que :

$$H_t^* \equiv H_t^c E_t(e^{N_c})$$

où on a posé  $c = 1/\gamma$  et où  $N_c$  est le processus de loi normale suivant :

$$N_c \equiv (c-1)Ln(H_T/H_t) = (c-1)\left(\int_t^T r_u du + \|\lambda\|^2(T-t)/2 + \lambda' Z_t\right)$$

Ce qui implique que :

$$E_t(N_c) \equiv (c-1)m(T-t) \text{ avec } m(T-t) = (b + \|\lambda\|^2/2)(T-t) + (rt-b)\sigma_{T-t}/\sigma_r$$

$$\text{et } Var(N_c) = (c-1)^2 \times Var(Ln(H_T)) = (c-1)^2 \left\{ \Sigma^2(T-t) + \|\lambda\|^2(T-t) - 2\rho_H \|\lambda\| \eta(T-t) \right\}$$

$$\text{ou } \Sigma^2(T-t) \equiv \int_t^T \sigma_{T-u}^2 du = \frac{\sigma_r^2(T-t)}{a_r^2} \left[ 1 - \frac{\sigma_{T-t}}{\sigma_r(T-t)} - a_r \frac{\sigma_{T-t}^2}{2\sigma_r^2(T-t)} \right],$$

$$\eta(T-t) \equiv \int_t^T \sigma_{T-u} du = \sigma_r(T-t) \frac{1}{a_r} \left[ 1 - \frac{\sigma_{T-t}}{\sigma_r(T-t)} \right] \text{ et } \rho_H = \lambda_r / \|\lambda\|, \quad \|\lambda\|^2 = \lambda_r^2 + \lambda_S^2$$



$$\text{et } \frac{\sigma_{T-t}}{\sigma_r} = \frac{1 - e^{-a_r(T-t)}}{a_r} .$$

Ce qui implique que  $H_t^* \equiv H_t^c \times e^{E_t(N_c) + \frac{\text{Var}(N_c)}{2}} = H_t^c e^{(c-1)m(T-t) + (c-1)^2 \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}$

où on a posé  $\sigma^2(T-t) = \text{Var}(\text{Ln}(H_T))$ .

Par conséquent, on a  $H_t^* = H_t^c \varphi(t) e^{(c-1) \frac{\sigma_{T-t}}{\sigma_r} r t}$  où  $\varphi$  est une fonction déterministe du temps, et on en déduit que  $H_t^*$  vérifie l'EDS suivante :

$$dH^*/H^* = c(dH/H) + (c-1) \frac{\sigma_{T-t}}{\sigma_r} r_t + [\cdot] dt \text{ où } [\cdot] \text{ est déterministe localement.}$$

En utilisant la dynamique de  $r_t$  et de  $B$ , on en déduit que  $H^*$  peut être répliqué par la stratégie à poids constant suivante :

$$\begin{cases} c \equiv 1/\gamma \text{ sur le portefeuille } H \\ 1 - c \text{ sur l'actif Zéro coupon } B(t, T-t). \end{cases}$$

(2) En utilisant la propriété d'auto-financement pour le portefeuille  $H^*$  :

$dH^*/H^* = (r_t + h^* \theta) dt + h^* \Sigma dZ_t$  et l'expression de  $h^*$ , on en déduit l'expression de la dynamique cherchée.

(3) Sachant que  $B(t, T-t) = e^{-m(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}$  et que  $H_t^* = H_t^c e^{(c-1)m(T-t) + (c-1)^2 \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}$  avec  $c = 1/\gamma$ , on en déduit que  $H_t^* = H_t^c [B(t, T-t)]^{(1-c)} e^{\frac{c(c-1)}{2} (\sigma(T-t))^2}$

□

#### PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 21 .

(1) L'expression de la richesse terminale solution du problème considéré s'obtient par application du théorème 1 en considérant l'investisseur HARA sans aversion à la sous-performance.

La solution du problème peut aussi s'obtenir par résolution directe du problème statique considéré :

Le Lagrangien du problème s'écrit :  $L(Y_T) = E(u(Y_T)) - k^* E(Y_T/H_T)$  .

Les CPO s'écrivent :  $\forall \omega \in \Omega, \quad \frac{\partial L}{\partial Y_T(\omega)} = 0$

Ce qui donne :  $Y_T^* = W_T^* - O_T = I(k^*/H_T) \equiv \left( (k^*/H)^{-1/\gamma} - a \right) / c$  ,

avec  $y \rightarrow I(y) \equiv (y^{1/\gamma} - a)/c$  qui désigne la fonction inverse de la fonction  $x \rightarrow u'(x) \equiv (cx + a)^{-\gamma}$

En posant  $k \equiv (k^*)^{-1/\gamma}$  , on obtient l'expression cherchée :  $W_T^* = O_T + \left( k H_T^{1/\gamma} - a \right) / c$  avec  $k$  vérifiant l'équation de budget :

$$E\{Y_T^*/H_T\} = \Delta_0 \Leftrightarrow k = (aB(0, T) + c\Delta_0)/H_0^*$$

(2) L'expression de la valeur intermédiaire découle de l'expression de la richesse terminale optimale trouvée en (1) et de l'expression de  $H_t^*$  donnée dans le Lemme 2.

(3) Le formule définissant l'allocation dynamique optimale résulte de l'expression de la valeur intermédiaire de la stratégie optimale trouvée en (2) et de l'expression donnant l'allocation du portefeuille  $H^*$  dans les différents actifs qui est exposée dans le lemme 2.

□

PREUVE DES CONSÉQUENCES 11, 12, 13, 14.

Les résultats énoncés dans les conséquences 11, 12, 13, 14 s'obtiennent par application directe des résultats de la propriété 21.

□

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 22.

(1) L'expression de la richesse terminale optimale du problème sans contrainte résulte d'une application directe du théorème 1.

(2) L'expression de la richesse terminale optimale du problème de l'investisseur ayant un profil concave ( $\gamma < 0$ ), et devant prendre en compte une contrainte de protection, s'obtient de la même façon que l'expression de la solution du problème de l'investisseur ayant une fonction quadratique (qui correspond au cas particulier  $\gamma = -1$ ) donné dans le cadre du théorème 3 ci-dessus; il suffit pour cela de considérer la variable  $\varepsilon_T \equiv (1/H_T)^{-1/\gamma}$  au lieu de  $\varepsilon_T \equiv 1/H_T$  (voir démonstration du théorème 3 ci-dessus).

□

LEMME 4. *Résultat énoncé dans l'appendice n° 30 : expression, dans le cadre du modèle considéré à deux actifs risqués et un facteur de taux de type Vasicek, du prix d'une option call et d'une option Put écrite dont le sous-jacent est le portefeuille de Merton.*

*Dans le cadre des hypothèses du modèle considéré, l'expression de la valeur de l'option call européen, respectivement de l'option put européen de strike  $W^0$ , d'échéance  $T - t$ , écrite sur le sous-jacent  $kH_t^*$ , notée  $C(kH_t^*, W^0, T - t)$ , respectivement  $P(kH_t^*, W^0, T - t)$ , avec  $k > 0$ ,  $W^0 > 0$ , et où  $H_t^*$ , désigne la valeur intermédiaire du portefeuille de Merton<sup>4</sup>, est donnée par la formule suivante (qui généralise celle du modèle de Black & Scholes à un seul actif risqué et avec hypothèse de taux d'intérêt constant) :*

---

4. On rappelle qu'il s'agit, à une constante de budget près du portefeuille atteignant la richesse finale  $(H_T)^{1/\gamma}$

$$C(kH_t^*, W^0, T-t) = kH_t^* N(d_1) - W^0 B(t, T-t) N(d_2)$$

$$\text{et } P(kH_t^*, W^0, T-t) = W^0 B(t, T-t) N(-d_2) - kH_t^* N(-d_1)$$

$$\text{avec } d_1 \equiv (\ln(kH_t^*/W^0) - \ln(B(t, T-t) + (\sigma(T-t)/\gamma)^2/2))/(\sigma(T-t)/\gamma)$$

$$\text{et avec } d_2 \equiv d_1 - \sigma(T-t)/\gamma$$

où les expressions de  $\sigma^2(T-t) \equiv \text{Var}(\text{Ln}(H_T))$  et de  $B(t, T-t)$  sont celles données dans le lemme 2.

PREUVE DU LEMME 4. : expression du prix d'une option call et Put sur le portefeuille  $H_t^*$  dans le cadre du modèle de Vasicèk

En utilisant la propriété de martingale des prix sous la probabilité historique, on peut écrire :  $C(kH_t^*, W^0, T-t) = H_t \times E_t \{ (kH_T^c - W^0)^+ / H_T \}$  avec  $c = 1/\gamma$ , soit encore,

$$C(kH_t^*, W^0, T-t) = H_t \times E_t \left\{ kH_T^{c-1} \times 1_{\{H_T^{c-1} \geq (k/W^0)^{(1-c)/c}\}} \right\} - W^0 H_t \times E_t \left\{ H_T^{-1} \times 1_{\{H_T^{-1} < (k/W^0)^{1/c}\}} \right\}$$

En utilisant la log normalité de  $H_T^{c-1}$  :

$$H_T^{c-1} = H_t^{c-1} e^{N_c} \text{ où } N_c \text{ est le processus de loi normal suivant :}$$

$$N_c \equiv (c-1) \text{Ln}(H_T/H_t) = (c-1) \left( \int_t^T r_u du + \|\lambda\|^2 (T-t)/2 + \lambda' Z_t \right),$$

ce qui implique que :

$$m_c \equiv E_t(N_c) = (c-1)m(T-t) \text{ et } \sigma_c^2 \equiv \text{Var}(N_c) = (c-1)^2 \times \sigma^2(T-t)$$

$$\text{avec } m(T-t) = (b + \|\lambda\|^2/2)(T-t) + (rt - b)\sigma_{T-t}/\sigma_r$$

$$\text{et } \sigma^2(T-t) \equiv \text{Var}(\text{Ln}(H_T)) = \Sigma^2(T-t) + \|\lambda\|^2(T-t) - 2\rho_H \|\lambda\| \eta(T-t)$$

$$\text{on en déduit que } H_t \times E_t \left\{ kH_T^{c-1} \times 1_{\{kH_T^{c-1} \geq W^0\}} \right\} = kH_t^c E_t(e^{N_c} 1_{\{N_c \geq \text{Ln}((k/W^0)^{(1-c)/c}) + \text{Ln}(H_t^{1-c})\}})$$

$$\text{Or } E_t(e^{N_c} 1_{\{N_c \geq y^0\}}) = \int_{u^0}^{+\infty} e^{m_c + \sigma_c u} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du = e^{m_c + \sigma_c^2/2} \int_{z^0}^{+\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

où on a posé,

$$z^0 \equiv u^0 - \sigma_c = ((y^0 - m_c)/\sigma_c) - \sigma_c, \text{ et } y^0 \equiv (1/c - 1) \times \text{Ln}(k/W^0) + \text{Ln}(H_t^{1-c}),$$

$$\text{donc } kH_t^c \times E_t(e^{N_c} 1_{\{N_c \geq y^0\}}) = kH_t^c e^{m_c + \sigma_c^2/2} N(-z^0)$$

$$\text{et en posant } dl \equiv -z^0 = -u^0 + \sigma_c = -((y^0 - m)/\sigma_c) + \sigma_c,$$

$$\text{on obtient : } d_1 = \frac{(1/c) \ln(k/W^0) - \ln(B(t, T-t)) + (c-1/2)\sigma^2(T-t)}{\sigma(T-t)}$$

D'où, en utilisant l'expression  $H_t^* = H_t^c [B(t, T-t)]^{(1-c)} e^{\frac{c(c-1)}{2}(\sigma(T-t))^2}$  donnée dans le lemme 2,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{kH_t^*}{W_0}\right) - \ln(B(t, T-t)) + ((c \times \sigma(T-t))^2 / 2)}{c \times \sigma(T-t)}$$

En procédant de la même façon pour le second terme  $W^0 H_t \times E_t \left\{ H_T^{-1} \times 1_{\{H_T^{-1} < (k/W^0)^{1/c}\}} \right\}$ , on obtient :

$$C(kH_t^*, W^0, T-t) = kH_t^* N(d_1) - B(t, T-t) W^0 N(d_2) \text{ avec } d_2 = d_1 - c\sigma(T-t)$$

L'expression de la valeur de l'option Put se déduit de celle de l'option Call (énoncée ci-dessus) de mêmes caractéristiques en utilisant la parité Call-Put.  $\square$

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 23.

Il est facile de montrer que les expressions de la valeur finale de la stratégie optimale donnée dans la propriété 22 dans les différents cas considérés correspondent à une somme de positions élémentaires investies sur des options Call ou Put européens.

Il ne reste plus ensuite, pour trouver les résultats cherchés, qu'à utiliser l'expression analytique de la valeur de l'option call et put européen dans le modèle considéré qui est donnée dans le cadre du lemme 4.

$\square$

LEMME 5. *Expression, dans le cadre du modèle considéré à deux actifs risqués et à un facteur de taux de type Vasicek, de la stratégie de réplication d'une option call européen écrite sur le portefeuille de Merton*

*Le "pay-off" d'une option call européen dont l'expression est  $W_T = \text{Max}(0, k(H_T)^{1/\gamma} - W^0)$  (call européen d'échéance  $T-t$ , de strike  $W^0$  écrite sur le portefeuille de Merton), peut être atteinte par une stratégie de réplication :*

*-dont la valeur à la date  $t$ , est donnée par  $W_t^* = C(kH_t^*, W^0, T-t)$  où  $C(kH_t^*, W^0, T-t)$  est l'expression donnée dans le cadre du lemme 4 ci-dessus*

*-dont l'expression de l'allocation dynamique est la suivante :*

$$\begin{cases} kN(d_1)H_t^* \text{ investi (en cash) dans le portefeuille } H^* \\ W_t^* - kN(d_1)H_t^* \text{ investi en cash dans l'actif } B(t, T-t) \end{cases}$$

*avec*

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{kH_t^*}{W_0}\right) - \ln(B(t, T-t)) + ((\sigma(T-t)/\gamma)^2 / 2)}{(\sigma(T-t)/\gamma)}$$

*et où les expressions de  $\sigma^2(T-t) \equiv \text{Var}(\text{Ln}(H_T))$ ,  $B(t, T-t)$  et  $H_t^*$  sont définies comme dans le lemme 2.*

PREUVE DU LEMME 5. : expression de la stratégie de réplication d'une option call écrite sur le portefeuille  $H_t^*$  dans le cadre du modèle considéré à deux actifs

risqués et un facteur de taux de type Vasicèk

Par dérivation de l'expression de  $W_t^*$  donnée dans le lemme 4, par rapport à  $H_t$  et à  $B(t, T - t)$ , on en déduit que la stratégie de réplcation de la stratégie optionnelle considérée est celle énoncée dans le lemme 5.

□

#### PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 24.

Les expressions de l'allocation dynamique de la stratégie optimale dans les différents cas de figure considérés qui sont énoncées dans la propriété 24 s'obtiennent par application du lemme 5.

En effet, il suffit de remarquer que les expressions de la valeur intermédiaire de la stratégie optimale, dans les différents cas respectifs, qui sont données dans la propriété 23, correspondent à des sommes de positions élémentaires investies dans des options Call et Put européens dont l'allocation dynamique est celle donnée dans le cadre du lemme 5.

□

## Démonstrations partie 2

PREUVE DU THÉORÈME 4. Le problème de maximisation considéré (P15) peut être vu comme un cas particulier du problème (P19) pour un choix du paramètre d'aversion,  $D$  particulier :  $D = 1$  ; l'expression de la solution optimale du problème (P19) est énoncée dans le chapitre 5 dans le cadre du théorème 8 (cf. démonstration ci-dessous). □

PREUVE DU THÉORÈME 5. Notons tout d'abord que la fonction à maximiser dans le cadre du problème d'optimisation considéré (P16), que l'on notera  $y \rightarrow w(y)$ , admet l'expression suivante :

$$w(y) \equiv u(z(y)) = \begin{cases} u(a + y) & \text{si } y < 0 \\ u(a + \eta + (1 + d)y) & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

avec  $z \rightarrow u(z) \equiv \frac{(z)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  qui désigne la fonction d'utilité de l'asset manager (i.e. investisseur CRRA),  $\gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\}$  son paramètre d'aversion au risque et  $z(y) \equiv a + y + (\eta + (1 + d)y) 1_{y \geq 0}$  sa fonction de frais où les paramètres  $\eta$ ,  $a$  et  $d$  sont des constantes positives ou nulles et  $y$  désigne l'excédent de richesse par rapport au benchmark.

Nous cherchons à montrer que la solution du problème (P16) est donnée par l'expression de  $Y_T^*$  fournie dans le théorème 5. Il suffit pour cela de montrer que le convexe conjugué (ou transformé de Legendre - Fenchel) du problème (P16), noté  $w^*(H_T) \equiv \underset{Y}{Max} \left\{ w(Y) - \frac{k}{H_T} Y \right\}$ , a pour solution "point par point" (i.e. pour chaque valeur de  $H_T$  possible) l'expression de  $Y_T^*$  donnée explicitement dans le cadre du théorème 5.<sup>1</sup>

Le problème statique correspondant au convexe conjugué du problème (P16) peut s'écrire de la façon suivante : déterminer  $y^* = \underset{y}{\arg \max} L(y)$  avec  $L(y) \equiv w(y) - \frac{k}{H_T} y$  ; en considérant séparément le maximum local pour la partie supérieure et pour la partie inférieure au benchmark ( $y < 0$  et  $y \geq 0$ ), on peut appliquer localement les "CPO" (Conditions du Premier Ordre) qui dans le cadre de ce problème s'écrivent  $L'(y) = 0$  :

---

1. En effet  $Y_T^* \equiv \underset{Y}{Argmax} \left\{ w(Y) - \frac{k}{H_T} Y \right\}$  est aussi la solution du problème (P16) puisque pour toute stratégie quelconque admissible vérifiant la contrainte de budget du problème (P16), notée  $Y_T$ , on a  $E[w(Y_T^*)] - E[w(Y_T)] = E[w(Y_T^*)] - E[w(Y_T)] - E(\frac{k}{H_T} Y_T^*) + E(\frac{k}{H_T} Y_T) = E[w^*(H_T)] - (E[w(Y_T)] - E(\frac{k}{H_T} Y_T)) \geq 0$ .

- Pour  $y < 0$ , avec  $L(y) = u(a + y) - \frac{k}{H_T}y$ , les CPO donnent :  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow u'(a + y) = \frac{k}{H_T}$  ou encore  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = I(\frac{k}{H_T}) - a$ , avec  $x \rightarrow I(x)$  qui désigne la fonction inverse de fonction  $x \rightarrow u'(x)$ ; par conséquent, un premier maximum local est

$$y_1^* \equiv \text{Min} \left\{ I\left(\frac{k}{H_T}\right) - a; 0 \right\} = \text{Min} \left\{ (H_T/k)^{1/\gamma} - a; 0 \right\}$$

- De même pour  $y \geq 0$ , on a  $L(y) = u(a + \eta + (1 + d)y) - \frac{k}{H_T}y$ , ce qui implique que  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow u'(a + \eta + (1 + d)y) = 0$ , et après inversion de la fonction  $y \rightarrow u'(y)$ ,  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{1+d} \left\{ I\left(\frac{k}{(1+d)H_T}\right) - (a + \eta) \right\}$ ; on en déduit l'expression du second maximum local :

$$y_2^* \equiv \frac{1}{1+d} \text{Max} \left\{ \left( \frac{(1+d)H_T}{k} \right)^{1/\gamma} - (a + \eta); 0 \right\}$$

Par conséquent il y a deux candidats possibles pour le maximum global cherché; en fonction des valeurs des paramètres  $\eta$ ,  $a$ ,  $d$ , et de celle de  $H_T$ , la valeur finale du portefeuille  $H$ , le maximum global cherché sera ou bien  $y_1^*$  ou bien  $y_2^*$ .

Notons que l'on a  $y_2^* > 0 \Leftrightarrow \Pi_T \equiv \frac{1}{H_T} < \frac{(1+d)}{k} u'(a + \eta) = \frac{(1+d)}{k} (a + \eta)^{-\gamma} \equiv \pi_2$  et  $y_1^* > 0 \Leftrightarrow \Pi_T < \frac{u'(a)}{k} = \frac{(a)^{-\gamma}}{k} \equiv \pi_1$  et par conséquent on a l'équivalence suivante  $\pi_1 \geq \pi_2 \Leftrightarrow \eta/a \geq \left[ (1+d)^{1/\gamma} - 1 \right]$  pour  $a > 0$  et les mêmes valeurs des autres paramètres que celles décrites précédemment.

**Cas 1:**  $a = 0$ ,  $d \geq 0$ ,  $\eta > 0$ <sup>2</sup>

Dans ce cas, on a  $\pi_1 = +\infty$ ,  $y_1^* \equiv \text{Min} \left\{ I\left(\frac{k}{H_T}\right); 0 \right\} = 0$ ,  $\pi_2 = \frac{(1+d)}{k} (\eta)^{-\gamma}$  et  $y_2^* = \text{Max} \left\{ I\left(\frac{k}{(1+d)H_T}\right) - \eta; 0 \right\} / (1+d)$

- Pour  $\Pi_T < \pi_2$ , on a  $y_1^* = 0$  et  $y_2^* > 0$  et donc pour ces deux valeurs, l'expression de la fonction à maximiser est la même :  $L(y) = u(\eta + (1 + d)y) - \frac{k}{H_T}y$ ; de plus, on a  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_2^*$  et  $L'(y) > 0 \Leftrightarrow y < y_2^*$ , par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global.
- Pour  $\Pi_T \geq \pi_2$ , on a  $y_1^* = y_2^* = 0$  et 0 est le maximum global cherché. On en déduit que l'expression de la richesse terminale optimale pour l'asset manager est bien l'expression du cas (1) exposée dans l'énoncé du théorème 5 pour ces mêmes valeurs des paramètres (i.e.  $a = 0$ ,  $d \geq 0$  et  $\eta > 0$ ).

Démontrons maintenant le résultat énoncé dans lemme suivant :

---

2. Cas particulier où l'asset manager ne reçoit pas de frais de gestion fixes ( $a = 0$ ) mais en revanche reçoit, en cas de sur-performance, un bonus fixe ( $\eta > 0$ ) et éventuellement des frais de gestion variables supplémentaires ( $d \geq 0$ ).

LEMME 6.

$\forall (\eta, a, d, \gamma) \in \left\{ (\eta, a, d, \gamma) \in \mathbb{R}^4 \setminus \eta > 0, a > 0, d \geq 0, \gamma > 0, \gamma \neq 1, \eta/a \geq \left[ (1+d)^{1/\gamma} - 1 \right] \right\}$ ,  
 alors la solution du problème (P16) est donnée par l'expression suivante :

$$Y_T^* = \begin{cases} \frac{1}{1+d} \left\{ \left( \frac{1+d}{k} H_T \right)^{1/\gamma} - (a + \eta) \right\} & \text{si } H_T > \bar{H} \\ 0 & \text{si } H^{**} < H_T \leq \bar{H} \\ (H_T/k)^{1/\gamma} - a & \text{si } H_T \leq H^{**} \end{cases}$$

avec  $\bar{H} \equiv \frac{k}{(1+d)} \{(1 + \varepsilon d)a\}^\gamma$ , avec  $H^{**}$  solution implicite de l'équation :  
 $h(k/H^{**}) = 0$  avec  $h(x) \equiv g(x) - u(a + \eta)$ ,  
 et avec  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x) - a] = \frac{-x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} + ax^3$ .

PREUVE DU LEMME 6.

Notons qu'on a  $k\pi_2 \equiv (1+d)(a + \eta)^{-\gamma} \leq a^{-\gamma} \equiv k\pi_1$ . Il y a donc trois cas possibles :

- Pour  $\Pi_T < \pi_2 \leq \pi_1$ , on a  $y_1^* = 0$  et  $y_2^* > 0$  et donc pour ces deux valeurs, l'expression de la fonction à maximiser est la même :  $L(y) = u(a + \eta + (1+d)y) - \frac{k}{H_T}y$  ; de plus, on a  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_2^*$  et  $L'(y) > 0 \Leftrightarrow y < y_2^*$ , par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global.
- Pour  $\pi_1 \geq \Pi_T \geq \pi_2$ , on a  $y_1^* = y_2^* = 0$  et on en déduit que 0 est le maximum.
- Pour  $\Pi_T > \pi_1 \geq \pi_2$ , on a  $y_1^* < 0$ ,  $y_2^* = 0$ ,  $L(y_1^*) = u(a + y_1^*) - \frac{k}{H_T}y_1^*$  et  $L(y_2^*) = u(a + \eta + (1+d)y_2^*) - \frac{k}{H_T}y_2^* = u(a + \eta) = \frac{(a+\eta)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  ; nous cherchons à déterminer le sous-ensemble de  $\Pi_T \in ]\pi_1; +\infty[$  pour lequel  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$ .

On vérifie que  $\Pi_T \in ]\pi_1; +\infty[$  pour lequel  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$  est équivalent à  $x \equiv k\Pi_T \in ]x_1; +\infty[$  vérifiant  $h(x) \equiv L(y_1^*(x)) - L(y_2^*(x)) > 0$

avec  $h(x) \equiv L(y_1^*(x)) - L(y_2^*(x)) = g(x) - u(a + \eta) \equiv ax - \frac{x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} - \frac{(a+\eta)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  et où on a posé  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x) - a] = \frac{-x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} + ax$  et  $x_1 \equiv k\pi_1 = a^{-\gamma}$ .

Or on a  $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_1$  et de plus on a  $h(x_1) < 0$  (on a  $h(x_1) = u(a) - u(a + \eta) < 0$  car  $u$  est une fonction croissante) ; par conséquent il existe dans l'intervalle  $x \in ]x_1; +\infty[$ , une unique racine de l'équation  $h(x) = 0$ , notée  $x_0^*$ .

Donc, en posant  $k\pi_0^* \equiv x_0^*$ , on en déduit que pour  $\Pi_T \in ]\pi_1; \pi_0^*]$ ,  $y_2^* = 0$  est le maximum global cherché et pour  $\Pi_T \in ]\pi_0^*; +\infty[$ ,  $y_1^* < 0$  est le maximum global cherché.

---

3.  $x \rightarrow I(x) = x^{-1/\gamma}$  désigne la fonction inverse de la fonction  $x \rightarrow u'(x) = x^{-\gamma}$



Enfin en posant  $\overline{H} \equiv 1/\pi_2 \equiv \frac{k}{(1+d)} \{(1+\varepsilon d)a\}^\gamma$  et  $H^{**} \equiv 1/\pi_0^* \equiv 1/kx_0^*$  avec  $h(x_0^*) = 0$ , on obtient l'expression de la richesse terminale optimale donnée dans le lemme 6.  $\square$

**Cas 2:**  $a > 0, d = 0, \eta > 0^4$

On obtient l'expression de la stratégie optimale dans ce cas par application directe du lemme 6 dans le cas particulier où  $d = 0$  : il s'agit bien de l'expression du cas (2) de l'énoncé du théorème 5.

**Cas 3a:**  $a > 0, d > 0, \eta \geq 0^5$

Notons tout d'abord que l'on peut supposer que  $\eta > 0$  puisque dans le cas où  $\eta = 0$ , on se ramène à l'expression donnée dans le théorème 4 dans le cas particulier où l'asset manager est CRRA.

De plus dans la suite, afin de simplifier la résolution du problème, nous utiliserons la notation  $\varepsilon \equiv \eta/da > 0$ ; en effet, avec cette notation, on peut ré-écrire l'expression des deux maximums locaux de la façon suivante :

$$y_1^* = \text{Min} \left\{ (H_T/k)^{1/\gamma} - a; 0 \right\}$$

et

$$y_2^* \equiv \frac{1}{1+d} \text{Max} \left\{ \left( \frac{(1+d)H_T}{k} \right)^{1/\gamma} - (1+\varepsilon)a; 0 \right\}$$

et on a  $\pi_1 = \frac{a^{-\gamma}}{k} \geq \pi_2 = \frac{(1+d)}{k} (1+\varepsilon d)^{-\gamma} a^{-\gamma} \Leftrightarrow$

$$\varepsilon \geq \varepsilon^0 \equiv \left[ (1+d)^{1/\gamma} - 1 \right] / d > 0$$

**(i) Sous cas:**  $\varepsilon \geq \varepsilon^0 \equiv \frac{(1+d)^{1/\gamma} - 1}{d} > 0$

L'expression de la stratégie optimale énoncée dans le théorème 5 dans ce cas ( $a > 0, d > 0$  et  $\varepsilon \geq \varepsilon^0 > 0$ ) est obtenue par application directe du lemme 6 en posant  $\eta \equiv \varepsilon da > 0$  : il s'agit de l'expression donnée dans le théorème 5 pour  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$  <sup>6</sup>

**(ii) Sous cas:**  $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$

– Pour  $\Pi_T \leq \pi_1 < \pi_2$ , on a  $y_1^* = 0$  et  $y_2^* > 0$  et donc pour ces deux valeurs, l'expression de la fonction à maximiser est la même :

$$L(y) = u((1+d\varepsilon)a + (1+d)y) - \frac{k}{H_T}y; \text{ de plus, on a } L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_2^* \text{ et } L'(y) > 0 \Leftrightarrow y < y_2^*, \text{ par conséquent } y_2^* \text{ est le maximum global.}$$

4. cas particulier où l'asset manager reçoit des frais de gestion fixe ( $a > 0$ ) et, en cas de sur-performance, un bonus fixe ( $\eta > 0$ ) mais pas de frais de gestion variables supplémentaires ( $d = 0$ ).

5. cas particulier où l'asset manager reçoit à la fois des frais de gestion fixe ( $a > 0$ ) et, en cas de sur-performance, des frais de gestion variables ( $d > 0$ ) plus éventuellement un bonus fixe ( $\eta \geq 0$ )

6. Nous verrons dans la suite de la démonstration que  $\varepsilon^0 > \varepsilon^*$  est bien vérifiée

– Pour  $\pi_2 > \Pi_T > \pi_1$ , on a  $y_1^* = I(k\Pi_T) - a < 0$ ,

$$y_2^* = \frac{1}{1+d} \left\{ \left( \frac{(1+d)H_T}{k} \right)^{1/\gamma} - (1+d\varepsilon)a \right\} > 0,$$

$$L(y_1^*) = u(a + y_1^*) - \frac{k}{H_T} y_1^* \text{ et } L(y_2^*) = u((1+d\varepsilon)a + (1+d)y_2^*) - \frac{k}{H_T} y_2^*.$$

Nous cherchons à déterminer le sous-ensemble de  $\Pi_T \in ]\pi_1; \pi_2[$  pour lequel  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$ .

Pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$ ,  $a > 0$ ,  $d > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $\gamma \neq 1$ , on a le résultat d'équivalence suivant :

$\forall \Pi_T \in ]\pi_1; \pi_2[$  tel que  $L(y_1^*) > L(y_2^*) \Leftrightarrow \forall x \in ]x_1; x_2[$  tel que

$$l(x) \equiv L(y_1^*) - L(y_2^*) = u(a + y_1^*) - \frac{k}{H_T} y_1^* - u((1+d\varepsilon)a + (1+d)y_2^*) + \frac{k}{H_T} y_2^* > 0$$

avec  $y_1^* = I(x) - a < 0$ ,  $y_2^* = \frac{1}{1+d} \{ I(x/(1+d)) - (1+\varepsilon)a \} > 0$ ,

$$x \equiv k\Pi_T \equiv \frac{k}{H_T}, \quad x_1 \equiv k\pi_1 = a^{-\gamma} \text{ et } x_2 \equiv k\pi_2 = (1+d)(1+\varepsilon d)^{-\gamma} a^{-\gamma}.$$

Soit encore,

$$l(x) = u(I(x)) - x(I(x) - a) - u(I(x/(1+d))) + \frac{x}{(1+d)} [I(x/(1+d)) - (1+d\varepsilon)a] > 0.$$

On en déduit que  $\forall \Pi_T \in ]\pi_1; \pi_2[$  tel que  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$ ,  $\Leftrightarrow \forall x \in ]x_1; x_2[$  tel que

$$l(x) \equiv g(x) - g(x/(1+d)) - \frac{\varepsilon da}{1+d} x > 0 \tag{0.1}$$

$$\text{avec } g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x) - a] = \frac{-x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} + ax, \tag{7}$$

Nous démontrons à présent le résultat suivant :

LEMME 7.

$\forall (\varepsilon, a, d, \gamma) \in R^4$  tel que  $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$  avec  $\varepsilon^0 \equiv \frac{(1+d)^{1/\gamma}-1}{d} > 0$ ,  $a > 0$ ,  $d > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $\gamma \neq 1$ ,

(1) Il existe dans l'intervalle  $x \in ]0; +\infty[$ , une racine unique de l'équation  $l(x) = 0$ , notée  $x_0^*$  et donnée par l'expression suivante :

$$x_0^* \equiv \left\{ \frac{a(\varepsilon-1)d}{1+d} \right\}^{-\gamma} \times \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma}-1}{1-1/\gamma} \right\}^{\gamma} \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < \text{Min} \{ \varepsilon^0; 1 \}$$

(2) L'unique racine de l'équation  $l(x) = 0$  est comprise dans l'intervalle  $x \in ]x_1; x_2[$

$$\Leftrightarrow 0 < \varepsilon < \varepsilon^* \equiv \frac{1}{d} \left\{ \frac{(\gamma-1)(1+d)}{\gamma(1+d)^{1-1/\gamma-1}} - 1 \right\}$$

avec  $0 < \varepsilon^* < \text{Min} \{ \varepsilon^0; 1 \}$ ,  $x_1 = a^{-\gamma}$  et  $x_2 = (1+d)(1+\varepsilon d)^{-\gamma} a^{-\gamma}$ .

PREUVE DU LEMME 7.

**Etude de la fonction  $x \rightarrow l(x)$  :**

En utilisant l'équation (Eq. 0.1) ainsi que l'expression de la fonction  $x \rightarrow g(x)$ ,

---

7.  $x \rightarrow I(x) = x^{-1/\gamma}$  désigne la fonction inverse de la fonction  $x \rightarrow u'(x) = x^{-\gamma}$

$g(x) = \frac{-x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} + ax$ , nous en déduisons l'expression de la fonction  $x \rightarrow l(x)$  et par dérivation celle de sa dérivée première  $x \rightarrow l'(x)$  :

$$l(x) = \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma}-1}{1-1/\gamma} \right\} x^{1-1/\gamma} - \frac{a(\varepsilon-1)d}{1+d} x$$

$$\text{et donc } l'(x) = \left[ (1/(1+d))^{1-1/\gamma} - 1 \right] x^{-1/\gamma} - \frac{a(\varepsilon-1)d}{1+d}$$

Par conséquent, on obtient les résultats suivants :

-Pour  $\gamma > 1$ , on a  $0 < \varepsilon^0 \equiv \frac{(1+d)^{1/\gamma}-1}{d} < 1$  et donc pour  $\varepsilon < \varepsilon^0 < 1$ , on peut écrire  $l'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_1^* \equiv \left[ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma}-1}{a(\varepsilon-1)d/(1+d)} \right]^\gamma > 0$ .

On en déduit que la fonction  $x \rightarrow l(x)$  est une fonction monotone et croissante de  $x \Leftrightarrow x > x_1^* > 0$ .

De plus, la résolution de  $l(x) > 0$  donne l'expression de l'unique racine de l'équation  $l(x) = 0$ , que l'on notera  $x_0^*$ ; en effet, on peut écrire :  $l(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_0^* \equiv \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma}-1}{1-1/\gamma} \times \frac{1+d}{a(\varepsilon-1)d} \right\}^\gamma = \frac{x_1^*}{(1-1/\gamma)^\gamma} > x_1^*$

Et comme on a  $\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = 0$ , on en déduit que pour  $x \in ]0; x_0^*]$ , on a  $l(x) < 0$  et pour  $x \in ]x_0^*; +\infty[$  on a  $l(x) > 0$  avec  $l(x_0^*) = 0$ .

-Pour  $0 < \gamma < 1$ , on a  $\varepsilon^0 \equiv \frac{(1+d)^{1/\gamma}-1}{d} > 1$ , et on doit distinguer les deux sous cas suivants :

-pour  $\varepsilon < 1 < \varepsilon^0$ , on a  $l'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$  et on en déduit que la fonction  $x \rightarrow l(x)$  est une fonction croissante de  $x \Leftrightarrow x > 0$ .

De plus, on a l'équivalence :

$l(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_0^* \equiv \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma}-1}{1-1/\gamma} \times \frac{1+d}{a(\varepsilon-1)d} \right\}^\gamma > 0$ . On en déduit que pour  $x \in ]0; x_0^*]$ , on a  $l(x) < 0$  et pour  $x \in ]x_0^*; +\infty[$ , on a  $l(x) > 0$  avec  $l(x_0^*) = 0$

-finalement pour  $1 < \varepsilon < \varepsilon^0$ , on a  $\forall x > 0$ ,  $l(x) < 0$  et donc, il n'existe pas, pour  $x > 0$ , de racine à l'équation  $l(x) = 0$ .

### Etude du signe de $l(x_1)$ :

Montrons que  $l(x_1) < 0$ .

Nous venons de démontrer que, pour  $0 < \varepsilon < \text{Min} \{ \varepsilon^0; 1 \}$ , il existe une unique racine strictement positive à l'équation  $l(x) = 0$ , notée  $x_0^*$ , dont on connaît l'expression ; Il suffit donc, pour montrer que  $l(x_1) < 0$ , de prouver que  $x_1 \equiv a^{-\gamma} < x_0^*$ .

En utilisant l'expression de  $x_0^*$ , on peut écrire :

$$a^{-\gamma} < x_0^* \Leftrightarrow 1 < \frac{1-(1/(1+d))^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} \times \frac{1+d}{(1-\varepsilon)d} \Leftrightarrow \varepsilon > 1 - \frac{(1+d)-(1+d)^{1/\gamma}}{(1-1/\gamma)d} \equiv 1 - A(d, \gamma)$$

où on a posé  $A(\gamma, d) \equiv \frac{(1+d)-(1+d)^{1/\gamma}}{(1-1/\gamma)d}$ .

Montrons à présent que  $A(\gamma, d) > 1$ .

Pour  $\gamma > 1$ , on a  $A(\gamma, d) \equiv \frac{(1+d)-(1+d)^{1/\gamma}}{(1-1/\gamma)d} > 1 \Leftrightarrow \theta/\gamma + (1-1/\gamma) - \theta^{1/\gamma} >$

$0 \Leftrightarrow \theta^{1-1/\gamma} > 1$  avec  $\theta \equiv (1+d) > 1$ , ce qui est vrai par hypothèse.

Pour  $0 < \gamma < 1$ , on a  $A(\gamma, d) \equiv \frac{(1+d)^{1/\gamma} - (1+d)}{(1/\gamma-1)d} > 1 \Leftrightarrow \theta/\gamma + (1-1/\gamma) - \theta^{1/\gamma} < 0 \Leftrightarrow \theta^{1/\gamma-1} < 1$  avec  $\theta \equiv (1+d) > 1$ , ce qui est vrai par hypothèse.

On en déduit que  $1 - A(d, \gamma) = 1 - \frac{(1+d) - (1+d)^{1/\gamma}}{(1-1/\gamma)d} < 0$  et par conséquent on a le résultat cherché :  $\forall \varepsilon > 0, a^{-\gamma} < x_0^*$ .

**Etude du signe de  $l(x_2)$  :**

En partant à nouveau de fait qu'il existe, pour  $0 < \varepsilon < \text{Min}\{\varepsilon^0; 1\}$ , une unique racine strictement positive à l'équation  $l(x) = 0$ , notée  $x_0^*$ , on en déduit l'équivalence suivante :

$$l(x_2) > 0 \Leftrightarrow x_2 \equiv (1+d)(1+\varepsilon d)^{-\gamma} a^{-\gamma} > x_0^*.$$

En utilisant l'expression obtenue ci-dessus de la racine  $x_0^*$ , on a :

$$x_2 \equiv (1+d)(1+\varepsilon d)^{-\gamma} a^{-\gamma} > x_0^* \Leftrightarrow (1+\varepsilon d) < (\varepsilon-1) \times d(1+d)^{1/\gamma-1} / \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma}-1}{1-1/\gamma}.$$

Soit encore, avec la notation

$$B(\gamma, d) \equiv d(1+d)^{1/\gamma-1} / \frac{1-(1/(1+d))^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} > 0,$$

$$x_2 > x_0^* \Leftrightarrow (1-\varepsilon) \times B(\gamma, d) - (1+\varepsilon d) > 0 \Leftrightarrow \varepsilon < (B(\gamma, d) - 1) / (B(\gamma, d) + d) \equiv \varepsilon^* \text{ et après calcul, on trouve } \varepsilon^* = \frac{1}{d} \left\{ \frac{(\gamma-1)(1+d)}{\gamma(1+d)^{1-1/\gamma-1}} - 1 \right\}$$

**Montrons que  $0 < \varepsilon^* < \text{Min}\{\varepsilon^0; 1\}$**

- On a  $\varepsilon^* > 0 \Leftrightarrow \frac{(\gamma-1)\theta}{\gamma\theta^{1-1/\gamma-1}} > 1$  avec  $\theta \equiv (1+d) > 1$ .

Pour  $\gamma > 1$ , on a  $\varepsilon^* > 0 \Leftrightarrow (\gamma-1)\theta < \gamma\theta^{1/\gamma-1} - 1 \Leftrightarrow q(\theta) \equiv (\gamma-1)\theta - \gamma\theta^{1/\gamma-1} + 1 > 0$  avec  $\theta \equiv (1+d) > 1$ ;

en dérivant la fonction  $q$ , on trouve  $q'(\theta) \equiv (\gamma-1)(1-\theta^{1/\gamma}) > 0 \Leftrightarrow \theta > 1$  avec  $q(1) \equiv 0$ ;

ce qui implique que  $\forall \theta > 1, q(\theta) \geq 0$  et prouve donc que  $\varepsilon^* > 0$ .

Pour  $0 < \gamma < 1$ , la démonstration est similaire.

- De plus, on a  $\varepsilon^* < \varepsilon^0 \Leftrightarrow \frac{(\gamma-1)\theta}{\gamma\theta^{1-1/\gamma-1}} < \theta^{1/\gamma}$ .

Dans le cas où  $\gamma > 1$ , on a  $\varepsilon^* < \varepsilon^0 \Leftrightarrow (\gamma-1) < \gamma - \theta^{1/\gamma-1} \Leftrightarrow \theta^{1/\gamma-1} < 1$  avec  $\theta \equiv (1+d) > 1$ ; ce qui est vrai par hypothèse.

Dans le cas où  $0 < \gamma < 1$ , on a  $\varepsilon^* < \varepsilon^0 \Leftrightarrow (1-\gamma) < \theta^{1/\gamma-1} - \gamma \Leftrightarrow \theta^{1/\gamma-1} > 1$ , ce qui est également vrai par hypothèse. Par conséquent, on a bien  $\varepsilon^* < \varepsilon^0$ .

-Il ne reste donc plus qu'à montrer que pour  $0 < \gamma < 1$ , on a  $\varepsilon^* < 1$  (en effet pour  $\gamma > 1$ , on a  $\varepsilon^* < \varepsilon^0 < 1$  puisque  $\varepsilon^0 < 1 \Leftrightarrow \gamma > 1$ ) :

on a  $\varepsilon^* < 1 \Leftrightarrow \frac{(1-\gamma)\theta}{1-\gamma\theta^{1-1/\gamma}} < \theta \Leftrightarrow \theta^{1/\gamma-1} > 1$  ce qui est vrai par hypothèse.

**Conclusion :**

On en déduit le résultat cherché du lemme 7 :

-Pour  $\varepsilon \in [0; \varepsilon^*]$ , avec  $0 < \varepsilon^* < \text{Min}\{\varepsilon^0; 1\}$ , on a  $l(x_2) \geq 0$  et  $l(x_1) < 0$  et il existe dans l'intervalle  $[x_1; x_2]$ , une unique racine à l'équation  $l(x) = 0$  donnée par l'expression suivante :

$$x_0^* \equiv \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma} \times \frac{1+d}{a(\varepsilon-1)d} \right\}^\gamma.$$

-Pour  $\varepsilon \in ]\varepsilon^*; \varepsilon^0[$ , avec  $0 < \varepsilon^* < \text{Min}\{\varepsilon^0; 1\}$ , on a  $l(x_2) < 0$  et  $l(x_1) < 0$  et plus généralement, on a  $\forall x \in [x_1; x_2]$ ,  $l(x) < 0$ ; il n'y a donc pas de racine à l'équation  $l(x) = 0$  dans cet intervalle de  $x$ . □

En utilisant les résultats du lemme précédent, on en déduit l'expression du maximum global cherché selon les deux cas de figure considérés :

-Pour  $\varepsilon \in [0; \varepsilon^*]$ , avec  $0 < \varepsilon^* < \varepsilon^0$ , on a :

$$L(y_1^*) > L(y_2^*) \Leftrightarrow l(k\Pi_T) > 0 \equiv l(k\pi^*) \Leftrightarrow \Pi_T > \pi^*$$

où on a posé  $k\pi^* \equiv k/H^* \equiv x_0^*$  où  $x_0^*$  est la solution de l'équation  $l(x) \equiv g(x) - g(x/(1+d)) - \frac{\varepsilon da}{1+d}x = 0$  donnée par l'expression suivante,  $x_0^* \equiv \left\{ \frac{(1/(1+d))^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma} \times \frac{1+d}{a(\varepsilon-1)d} \right\}^\gamma$ .

Par conséquent,  $\forall \Pi_T \in ]\pi_1; \pi^*[$ , on a  $L(y_1^*) < L(y_2^*)$  et  $y_2^* > 0$  est le maximum global, et  $\forall \Pi_T \in ]\pi^*; \pi_2[$ ,  $y_1^* > 0$  est le maximum global.

-Pour  $\varepsilon \in ]\varepsilon^*; \varepsilon^0[$ , on a,  $\forall \Pi_T \in ]\pi_1; \pi_2[$ ,  $l(k\Pi_T) < 0 \Leftrightarrow L(y_1^*) < L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_2^* > 0$  est le maximum global.

- Pour  $\Pi_T \geq \pi_2 > \pi_1$ , on a  $y_2^* = 0$  et  $y_1^* = I(k\Pi_T) - a < 0$ ,  $L(y_1^*) = u(a + y_1^*) - \frac{k}{H_T} y_1^*$  et  $L(y_2^*) = u((1 + \varepsilon d)a + (1 + d)y_2^*) - \frac{k}{H_T} y_2^* = u((1 + \varepsilon d)a) = \frac{((1 + \varepsilon d)a)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ .

Nous cherchons à déterminer le sous-ensemble de  $\Pi_T \in ]\pi_2; +\infty[$  pour lequel  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$ .

On vérifie qu'il est équivalent d'écrire  $\Pi_T \in ]\pi_2; +\infty[$  tel que  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$  et :

$$x \equiv k\Pi_T \in ]x_2; +\infty[ \text{ vérifie } h(x) \equiv L(y_1^*(x)) - L(y_2^*(x)) > 0,$$

$$\text{avec } h(x) \equiv L(y_1^*(x)) - L(y_2^*(x)) = g(x) - u((1 + \varepsilon d)a) \equiv ax - \frac{x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} - \frac{((1 + \varepsilon d)a)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$\text{et où on a posé } g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x) - a] = \frac{-x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} + ax$$

avec  $x_1 \equiv k\pi_1 = a^{-\gamma}$  et  $x_2 \equiv k\pi_2$ <sup>8</sup>.

Or on a  $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_1$  et  $h(x_1) < 0$  (en effet on a  $h(x_1) = u(a) -$

8.  $x \rightarrow I(x) = x^{-1/\gamma}$  désigne la fonction inverse de la fonction  $x \rightarrow u'(x) = x^{-\gamma}$

$u((1 + \varepsilon d)a) < 0$  car  $u$  est une fonction croissante); par conséquent il existe dans l'intervalle  $x \in ]x_1; +\infty[$ , une unique racine de l'équation  $h(x) = 0$ , notée  $x_0^{**}$ .

On en déduit pour  $x_2 \equiv k\pi_2 \equiv b((1 + \varepsilon d)a)^{-\gamma} \in ]x_1; +\infty[$  l'équivalence suivante :

$$x_2 > x_0^{**} \Leftrightarrow h(x_2) > 0 \Leftrightarrow ab((1 + \varepsilon d)a)^{-\gamma} - \frac{b^{1-1/\gamma}((1+\varepsilon d)a)^{1-\gamma}}{1-1/\gamma} - \frac{((1+\varepsilon d)a)^{1-\gamma}}{1-\gamma} > 0.$$

Après calcul, on trouve dans le cas où  $\gamma > 1$ ,  $h(x_2) > 0 \Leftrightarrow \gamma(1+d)^{1-1/\gamma} - 1 < (\gamma-1)(1+d)/(1+\varepsilon d)$  et on a donc  $h(x_2) > 0 \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{1}{d} \left\{ \frac{(\gamma-1)(1+d)}{\gamma(1+d)^{1-1/\gamma-1}} - 1 \right\} \equiv \varepsilon^*$ ; on aboutit au même résultat dans le cas où  $0 < \gamma < 1$ .

Notons enfin que, comme nous l'avons démontré précédemment, on a  $0 < \varepsilon^* < \text{Max}\{\varepsilon^0; 1\}$ .

Par conséquent, on en déduit qu'il y a deux sous cas de figures possibles dans le cas (ii) :

-Soit  $\varepsilon \in [0; \varepsilon^*]$  et on a,  $\forall \Pi_T \in ]\pi_2; +\infty[$ ,  $h(k\Pi_T) > 0 \Leftrightarrow L(y_1^*) > L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_1^* = I(k\Pi_T) - a < 0$  est le maximum global cherché.

-Soit  $\varepsilon \in ]\varepsilon^*; \varepsilon^0[$  et en posant  $k\pi_0^{**} \equiv x_0^{**}$ , on a pour  $\Pi_T \in ]\pi_2; \pi^{**}[$ ,  $L(y_1^*) < L(y_2^*)$  et donc  $y_2^* = 0$  est le maximum global, et pour  $\Pi_T \in ]\pi^{**}; +\infty[$ ,  $y_1^* = I(k\Pi_T) - a < 0$  est le maximum global cherché.

En agrégeant les résultats obtenus pour les deux sous-cas (i) et (ii), on en conclut que l'expression de la richesse terminale optimale pour l'asset manager dans le cas (3) (a) considéré ( $a > 0$ ,  $d > 0$  et  $\varepsilon \geq 0$ ) est selon que  $\varepsilon \in [0; \varepsilon^*]$  ou que  $\varepsilon \in ]\varepsilon^*; +\infty[$  avec  $0 < \varepsilon^* \equiv \frac{1}{d} \left\{ \frac{(\gamma-1)(1+d)}{\gamma(1+d)^{1-1/\gamma-1}} - 1 \right\} < \text{Min}\{\varepsilon^0; 1\}$  et  $\varepsilon^0 \equiv \frac{(1+d)^{1/\gamma-1}}{d} > 0$  l'une des deux expressions données dans l'énoncé du théorème 5 pour ces mêmes valeurs des paramètres.

### Cas 3b: $a = 0$ ou $d = 0$ et $\eta = 0$ <sup>9</sup>

Puisque  $\eta = 0$ , Il s'agit d'un cas particulier du théorème 4 dans le cas où l'asset manager est CRRRA. L'expression de la richesse terminale optimale est donc un cas particulier de celle énoncée dans le théorème 4 et on vérifie facilement qu'elle correspond bien à l'expression donnée dans le théorème 5 pour  $\varepsilon = 0$  (avec  $a = 0$  ou  $d = 0$ ).

□

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 25. Il s'agit d'un cas particulier des résultats donnés dans les propriétés 26 et 27 dont la démonstration suit.

9. Cas particulier où l'asset manager ne reçoit pas de bonus fixe en cas de sur-performance ( $\eta = 0$ ) et reçoit ou bien des frais de gestion variables supplémentaires en cas de sur-performance mais pas de frais de gestion fixe ou l'inverse ( $a = 0$  ou  $d = 0$ ).

□

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 26 . En notant que pour  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$ , on a  
 $Y_T^*(H_T) = \text{Max}\{Y_2^*(H_T); 0\} - \text{Max}\{Y_1^*(H^{**}) - Y_1^*(H_T); 0\} - Y_1^*(H^{**}) 1_{\{H_T \leq H^{**}\}}$

avec  $Y_1^*(H_T) \equiv (H_T/k)^{1/\gamma} - a$ ,

et avec  $Y_2^*(H_T) \equiv \frac{1}{1+d} \left\{ \left( \frac{(1+d)H_T}{k} \right)^{1/\gamma} - (1+d\varepsilon)a \right\}$ ,

on en déduit la décomposition de la richesse terminale comme une somme de pay-off d'une option call, d'une option put et d'une position investie sur une option put binaire.

En considérant l'espérance par rapport au temps t de  $Y_T^*$ , on trouve l'expression donnée dans la propriété 26 pour  $Y_t^*$ .

L'expression dans le cas où  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$  s'obtient de façon similaire.

□

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 27 .

Par application du lemme d'Itô, on trouve :

$$dY_t^* = \frac{dW_t^*}{dH_t^*} \frac{dH_t^*}{dH_t} dH_t + (\dots) dt = \Delta_t \times \frac{1}{\gamma} H_t^* \frac{dH_t}{H_t} + (\dots) dt = \Delta_t \times H_t^* \times h^* \frac{dM_t}{M_t} + (\dots) dt$$

avec  $h^* \equiv \frac{h}{\gamma}$ , et  $\Delta_t \equiv \frac{dW_t^*}{dH_t^*}$ ,

soit encore  $W_t^* \times w_t^* = B_t \times b + \frac{\Delta_t \times H_t^*}{\gamma} \times h$ , et après dérivation on trouve l'expression de  $\Delta_t \equiv \frac{dW_t^*}{dH_t^*}$  exposée dans la propriété 27.

□

PREUVE DU THÉORÈME 6.

Le problème de maximisation considéré (P17) s'identifie au problème (P21) dans le cas particulier où  $D = 1$ ; l'expression de la solution (plus générale) du problème (P21) est fournie dans le théorème 9 du chapitre 5 (dont la démonstration se trouve ci-dessous). □

PREUVE DES PROPRIÉTÉS 28 ET 29. Même type de démonstration que celles des propriétés 26 & 27.  $\square$

PREUVE DU THÉORÈME 7.

Notons tout d'abord que la fonction à maximiser dans le cadre du problème d'optimisation considéré (P18), que l'on notera  $y \rightarrow w(y)$ , est l'expression suivante :

$$w(y) \equiv u(v(y; b)) = \begin{cases} u(a \times b + y) & \text{si } y < 0 \\ u((a + \eta)b + (1 + d)y) & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

avec  $x \rightarrow u(x) \equiv \frac{(x)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  désignant la fonction d'utilité de l'asset manager (i.e. investisseur CRRA),

où  $\gamma \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\}$  est son paramètre d'aversion au risque,

et avec  $v(y; b) \equiv ab + y + (\eta b + (1 + d)y) 1_{y \geq 0}$  sa fonction de frais qui dépend des paramètres , a et d, des constantes positives ou nulles, et de la variable  $y$ , la valeur finale de l'excédent de richesse par rapport au benchmark, et de celle du benchmark, notée  $b$ .

Nous cherchons à montrer que la solution du problème (P18) s'identifie à l'expression de  $Y_T^*$  donnée dans le théorème 7.

Il suffit pour cela de montrer que le convexe conjugué (ou transformé de Legendre - Fenchel) du problème (P18), noté  $w^*(H_T) \equiv \text{Max}_Y \left\{ w(Y) - \frac{k}{H_T} Y \right\}$ , a pour solution " point par point " (i.e. pour chaque valeur de  $H_T$  possible) l'expression de  $Y_T^*$  donnée explicitement dans le cadre du théorème 7.<sup>10</sup>

Le problème statique correspondant au convexe conjugué du problème (P18) consiste à déterminer l'expression de

$$Y_T^* = \arg \max_Y \left\{ w(Y) - \frac{k}{H_T} Y \right\}$$

avec la fonction  $w$  qui dépend non seulement de la variable  $Y$  mais aussi de  $b = B_T$ , la valeur finale du benchmark.

Suivant la même approche que Basak, Pavlova et Shapiro (2003), nous effectuons un changement de variables afin de simplifier ce problème qui peut se ré-écrire de la façon suivante :

déterminer  $Z_T^* = \arg \max_Z L(Z)$  avec  $L(Z_T) \equiv z(Z_T) - (k/\Pi_T) Z_T$

ou  $Z_T \equiv Y_T/B_T$ ,  $z(Z_T) \equiv w(Z_T)/B_T^{1-\gamma}$  et  $1/\Pi_T \equiv B_T^\gamma/H_T$ .

---

10. En effet  $Y_T^* \equiv \text{Argmax}_Y \left\{ w(Y) - \frac{k}{H_T} Y \right\}$  est aussi la solution du problème (P18) puisque pour toute stratégie quelconque admissible vérifiant la contrainte de budget du problème (P18), notée  $Y_T$ , on a  $E[w(Y_T^*)] - E[w(Y_T)] = E[w(Y_T^*)] - E[w(Y_T)] - E(\frac{k}{H_T} Y_T^*) + E(\frac{k}{H_T} Y_T) = E[w^*(H_T)] - (E[w(Y_T)] - E(\frac{k}{H_T} Y_T)) \geq 0$ .



La fonction  $z(Z)$  ne dépend plus que d'une seule variable,  $Z$  et donc la suite de la démonstration est identique à la démonstration du théorème 5 en considérant les changements de variables suivants :

$Z_T \equiv Y_T/B_T$  au lieu de  $Y_T \equiv W_T - B_T$  comme variable de richesse

et  $1/\Pi_T \equiv B_T^\gamma/H_T$  au lieu de  $1/H_T$  comme variable d'état. □

### PREUVE DE LA PROPRIÉTÉS 30.

Considérons le cas  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$ .

Notons qu'on a  $Z_T^* \equiv \frac{Y_T^*}{B_T} = l(\Pi_T)$

$$\text{avec } l(\Pi_T) \equiv \begin{cases} \frac{1}{1+d} \left\{ \left( \frac{1+d}{k} \Pi_T \right)^{1/\gamma} - (1+d\varepsilon)a \right\} & \text{si } \Pi_T > \bar{\Pi} \\ 0 & \text{si } \Pi^{**} < \Pi_T \leq \bar{\Pi} \\ (\Pi_T/k)^{1/\gamma} - a & \text{si } \Pi_T \leq \Pi^{**} \end{cases}$$

où on a posé  $\Pi_T \equiv \frac{H_T}{B_T^\gamma}$ .

On en déduit que :  $Z_t^* = e^{-r(T-t)} E_t^Q \left( \frac{Y_T^*}{B_t} \right) = e^{-r(T-t)} E_t^Q \left( \frac{B_T}{B_t} l(\Pi_T) \right)$

où  $Q$  désigne la probabilité risque neutre. Considérons le changement de probabilité suivant :  $\frac{dQ^B}{dQ} \equiv \frac{B_T}{e^{rT}} \equiv \xi_T$  où  $Q^B$  désigne la probabilité associée au numéraire  $B$ .

Par conséquent, on peut écrire la valeur de  $Z_t^* = \frac{Y_t^*}{B_t}$  de la façon suivante :

$$Z_t^* = e^{-r(T-t)} E_t^Q \left( \frac{B_T}{B_t} l(\Pi_T) \right) \equiv E_t^Q \left( \frac{\xi_T}{\xi_t} l(\Pi_T) \right) = E_t^{Q^B} (l(\Pi_T)).$$

D'autre part, on a  $\frac{dQ^B}{dQ} \equiv \frac{B_T}{e^{rT}} = e^{\left\{ b^T \sigma W_T - \frac{\|b^T \sigma\|^2 T}{2} \right\}} \xi_T$ , où  $b$  est le vecteur des poids de la richesse totale investie dans les actifs risqués pour le portefeuille benchmark.

On en déduit par application du théorème de Girsanov que le processus  $W_t^{Q^B}$ , avec  $dW_t^{Q^B} \equiv dW_t^Q - \beta dt$  et  $\beta^T = b^T \sigma$  est un  $Q_B$ -mouvement brownien.

$$\text{On a } \Pi_T \equiv \frac{H_T}{B_T^\gamma} = \frac{H_t e^{\left\{ \left( r - \frac{\|K\|^2}{2} \right) (T-t) + K^T (W_t - W_t) \right\}}}{B_t^\gamma e^{\left\{ \gamma \left( r - \frac{\|b^T \sigma\|^2}{2} \right) (T-t) + \gamma b^T \sigma (W_t - W_t) \right\}}} \text{ avec } K \equiv \sigma^{-1} (\mu - r),$$

ou encore après changement de mouvement brownien :

$$\Pi_T^{1/\gamma} \equiv \frac{H_T^{1/\gamma}}{B_T} = \Pi_t^{1/\gamma} e^{\left\{ \left[ \frac{(1-\gamma)r + \frac{\|b^T \sigma\|^2}{2} - \frac{\|K\|^2}{2\gamma} + \left( \frac{K^T}{\gamma} - b^T \sigma \right) \sigma^T b \right] (T-t) + \left( \frac{K^T}{\gamma} - b^T \sigma \right) (W_T^{Q^B} - W_t^{Q^B}) \right\}}$$

En posant  $f(T-t) \equiv \left[ \frac{(1-\gamma)r}{\gamma} + \frac{\|b^T\sigma\|^2}{2} - \frac{\|K\|^2}{2\gamma} + \left( \frac{K^T}{\gamma} - b^T\sigma \right) \sigma^T b \right] (T-t)$

et  $X \equiv \left( \frac{K^T}{\gamma} - b^T\sigma \right) \left( W_T^{Q^B} - W_t^{Q^B} \right) \sim N(0; \sigma^{*2})$

avec  $\sigma^{*2} \equiv Var(X) = Var\{\ln(H_T)/\gamma - \ln(B_T)\}$  soit encore  $\sigma^{*2} = \left\| \frac{K^T}{\gamma} - b^T\sigma \right\|^2 (T-t)$ , on en déduit que  $\Pi_T^{1/\gamma}$  est une variable log-normale :

$$\Pi_T^{1/\gamma} = \Pi_t^{1/\gamma} e^{\{f(T-t)+X\}} \sim \ln N(f(T-t); \sigma^{*2}).$$

En utilisant l'expression de la fonction  $l$ , on en déduit l'écriture suivante de  $Z_t^*$  :

$$Z_t^* = \frac{1}{1+d} \left( \frac{1+d}{k} \right)^{1/\gamma} E_t^{Q^B} \left( \Pi_T^{1/\gamma} 1_{\Pi_T > \bar{\Pi}} \right) + \left( \frac{1}{k} \right)^{1/\gamma} E_t^{Q^B} \left( \Pi_T^{1/\gamma} 1_{\Pi_T \leq \Pi^{**}} \right) - \frac{(1+d\varepsilon)a}{1+d} P_t^{Q^B} \left( \Pi_T > \bar{\Pi} \right) - a P_t^{Q^B} \left( \Pi_T \leq \Pi^{**} \right)$$

Et après calcul, en utilisant la log-normalité de  $\Pi_T^{1/\gamma}$ , on trouve l'expression suivante :

$$Z_t^* = E_t^{Q^B} (l(\Pi_T)) = \Pi_t^{-1/\gamma} e^{(f(T-t)+\sigma_x^2/2)} k^{-1/\gamma} \left\{ N\left(\frac{x_0}{\sigma^*} - \sigma^*\right) + \frac{1}{(1+d)^{1-1/\gamma}} N\left(\sigma^* - \frac{x_2}{\sigma^*}\right) \right\} - \frac{(1+d\varepsilon)a}{1+d} N\left(-\frac{x_2}{\sigma_x}\right) - a N\left(\frac{x_0}{\sigma_x}\right)$$

$$\text{avec } x_0 \equiv \frac{\ln(\Pi^{**}) - \ln(\Pi_t)}{\gamma} - f(T-t), \quad x_2 \equiv \frac{\ln(\bar{\Pi}) - \ln(\Pi_t)}{\gamma} - f(T-t),$$

et où  $x \rightarrow N(x)$  désigne la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite  $N(0; 1)$ .

$$\text{En posant } \Pi_t^* = \frac{H_t^*}{B_t} = E_t^{Q^B} \left( \frac{H_T^{1/\gamma}}{B_T} \right) = E_t^{Q^B} \left( \Pi_T^{1/\gamma} \right) = \Pi_t^{1/\gamma} e^{(f(T-t)+\sigma_x^2/2)}$$

$$\text{on obtient } x_0 = \ln\{(\Pi^{**})^{1/\gamma}/\Pi_t^*\} + \frac{\sigma_x^2}{2} \text{ et } x_2 = \ln\{(\bar{\Pi})^{1/\gamma}/\Pi_t^*\} + \frac{\sigma_x^2}{2}$$

$$\text{et en utilisant les notations suivantes : } d_1^{\Pi^{**}} \equiv \sigma^* - \frac{x_0}{\sigma^*} = \frac{\ln\{\Pi_t^*/(\Pi^{**})^{1/\gamma}\}}{\sigma^*} + \frac{\sigma_x^2}{2},$$

$$d_2^{\Pi^{**}} \equiv -\frac{x_2}{\sigma^*} = d_1^{\Pi^{**}} - \sigma^*, \quad d_1^{\bar{\Pi}} \equiv \sigma^* - \frac{x_2}{\sigma^*} = \frac{\ln\{\Pi_t^*/(\bar{\Pi})^{1/\gamma}\}}{\sigma^*} + \frac{\sigma_x^2}{2},$$

$d_2^{\bar{\Pi}} \equiv -\frac{x_2}{\sigma^*} = d_1^{\bar{\Pi}} - \sigma^*$  et  $y_d \equiv \left( \frac{k}{1+d} \right)^{-1/\gamma}$ , on en déduit l'expression cherchée de  $Y_t^*$  :

$$Y_t^* = B_t \left\{ \frac{y_d}{1+d} C^0(\Pi_t^*, (\bar{\Pi})^{1/\gamma}, T-t) - y_0 P^0(\Pi_t^*, (\Pi^{**})^{1/\gamma}, T-t) \right\} - B_t \left\{ a - y_0 (\Pi^{**})^{1/\gamma} \right\} B^0(\Pi_t^*, (\Pi^{**})^{1/\gamma}, T-t)$$

avec

$$C^0(\Pi_t^*, (\bar{\Pi})^{1/\gamma}, T-t) \equiv \Pi_t^* N(d_1^{\bar{\Pi}}) - (\bar{\Pi})^{1/\gamma} N(d_2^{\bar{\Pi}}),$$

$$P^0(\Pi_t^*, (\Pi^{**})^{1/\gamma}, T-t) \equiv (\Pi^{**})^{1/\gamma} N(-d_2^{\Pi^{**}}) - \Pi_t^* N(-d_1^{\Pi^{**}}),$$

$$\text{et } B^0(\Pi_t^*, (\Pi^{**})^{1/\gamma}, T-t) \equiv N(-d_2^{\Pi^{**}})$$

La valeur de  $Y_t^*$  dans le cas  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$  s'obtient de la même façon que dans le cas  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$  traité précédemment.

□

### PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 31.

Nous pouvons réécrire les expressions données dans le théorème 7 de la manière suivante  $Y_t^* = B_t \times C(\Pi_t^*)$  avec  $x \rightarrow C(x)$  une fonction déterministe différente selon que  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$  ou que  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$ .

Par application du lemme d'Itô, nous en déduisons que :

$$dY_t^* = \left( C(\Pi_t^*) + B_t \frac{\partial C}{\partial \Pi_t^*} \frac{\partial \Pi_t^*}{\partial B_t} \right) dB_t + B_t \frac{\partial C}{\partial \Pi_t^*} \frac{\partial \Pi_t^*}{\partial H_t} dH_t + (\dots) dt$$

Après calcul, on trouve

$$dW_t^* = (B_t + C(\Pi_t^*) B_t - \Delta_t \Pi_t^* B_t) \frac{dB_t}{B_t} + \frac{1}{\gamma} [\Delta_t \Pi_t^* B_t] \frac{dH_t}{H_t} + (\dots) dt$$

$$\text{avec } \Delta_t \equiv \frac{\partial W_t^*}{\partial \Pi_t^*}.$$

Finalement, après avoir noté que

$$W_t^* \equiv B_t + C(\Pi_t^*) B_t \text{ et que } \frac{dH_t^*}{H_t^*} = \frac{1}{\gamma} \frac{dH_t}{H_t} + (1 - \frac{1}{\gamma}) r dt,$$

on en déduit que  $\frac{dW_t^*}{W_t^*} = \left(1 - \frac{\Delta_t H_t^*}{W_t^*}\right) \frac{dB_t}{B_t} + [\Delta_t H_t^*] \frac{dH_t^*}{H_t^*}$ , et par conséquent, on a bien

$$w_t^* W_t^* = \Delta_t H_t^* h^* + (W_t^* - \Delta_t H_t^*) b$$

ou  $w_t^*$  désigne le vecteur des poids investis dans les  $N$  actifs risqués de la stratégie optimale,  $b$  celui du benchmark et  $h^*$  celui du portefeuille  $h^*$ .

Nous obtenons l'expression de  $\Delta_t$  dans le cas  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$  et dans le cas  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$  par simple dérivation de l'expression de  $C(\Pi_t^*)$ .

□

### PREUVE DU THÉORÈME 8.

Le problème de maximisation considéré (P19) étant invariant par transformation linéaire de la fonction à maximiser, nous considérons la forme suivante de la fonction d'utilité à maximiser  $w(y) \equiv v(z'(y))/D$ <sup>11</sup>.

$$11. w(y) \equiv v(z'(y))/D = \begin{cases} u(y) + \left(\frac{1-D}{D}\right)u(0) & \text{si } y < 0 \\ \frac{u(\theta y)}{D} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

avec

$$z'(y) \equiv y \times 1_{y < 0} + \theta y \times 1_{y \geq 0}.$$

Nous cherchons à montrer que la solution du problème (P19) est donnée par l'expression de  $Y_T^*$  donnée dans le théorème 8.

Il suffit pour cela de montrer que le convexe conjugué (ou transformé de Legendre-Fenchel) du problème (P19),  $w^*(H_T) \equiv \text{Max}_Y \left\{ w(Y) - \frac{k}{H_T} Y \right\}$ , a pour solution " point par point " (i.e. pour chaque valeur de  $H_T$  possible) l'expression de  $Y_T^*$  définie explicitement dans le cadre du théorème 8.<sup>12</sup>

Le problème statique correspondant au convexe conjugué du problème (P19) peut donc s'écrire de la façon suivante :

déterminer  $y^* = \arg \max_y L(y)$  avec  $L(y) \equiv w(y) - \frac{k}{H_T} y$ .

En considérant séparément le maximum local pour la partie supérieure et pour la partie inférieure au benchmark ( $y < 0$  et  $y \geq 0$ ), on peut appliquer localement les " CPO " (Conditions du Premier Ordre) qui dans le cadre de ce problème s'écrivent  $L'(y) = 0$  :

-Pour  $y < 0$ , avec  $L(y) = u(y) + \frac{1-D}{D}u(0) - \frac{k}{H_T}y$  les CPO donnent :

$$L'(y) = 0 \Leftrightarrow u'(y) = \frac{k}{H_T} \Leftrightarrow y = I\left(\frac{k}{H_T}\right) \equiv \gamma \left\{ \left( \frac{C_1}{\gamma} \frac{H_T}{k} \right)^{1/\gamma} - A \right\}$$

Donc un premier maximum local est  $y_1^* \equiv \text{Min} \left\{ I\left(\frac{k}{H_T}\right); 0 \right\}$

-De même pour  $y \geq 0$ , on a  $L(y) = \frac{u(\theta y)}{D} - \frac{k}{H_T}y$  et  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{u'(\theta y)}{D} = \frac{k}{H_T} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\theta} I\left(\frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}\right)$  avec  $\theta \equiv (1+d)$ .

On en déduit l'expression du second maximum local :  $y_2^* \equiv \text{Max} \left\{ \frac{1}{\theta} I\left(\frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}\right); 0 \right\}$

Par conséquent il y a deux candidats possibles pour le maximum global cherché; selon les valeurs considérées des paramètres  $D$ ,  $\theta$  et la valeur finale du portefeuille, notée  $H_T$ , le maximum global cherché sera soit  $y_1^*$  soit  $y_2^*$ .

Notons que pour  $C_1 \times \gamma > 0$ , on a  $y_2^* > 0 \Leftrightarrow H_T > \frac{kD}{\theta} u'^{(0)} \equiv \frac{kD}{\theta} \frac{\gamma a^\gamma}{C_1} \equiv \varepsilon_2$  et  $y_1^* > 0 \Leftrightarrow H_T > k u'^{(0)} \equiv k \frac{\gamma A^\gamma}{C_1} \equiv \varepsilon_1$

### Cas 1: $D \geq \theta \geq 1$ <sup>13</sup>

On donne ci-dessous la démonstration dans le cas où  $D > \theta \geq 1$  (le cas où  $D = \theta \geq 1$  se démontre de façon similaire en considérant le fait que  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ ).

-Pour  $H_T > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , on a  $y_1^* = 0$  et  $y_2^* > 0$  et donc pour ces deux valeurs,

12. en effet  $Y_T^* \equiv \text{Argmax}_Y \left\{ w(Y) - \frac{k}{H_T} Y \right\}$  est aussi la solution du problème (P19) puisque pour toute stratégie quelconque admissible vérifiant la contrainte de budget du problème (P19), notée  $Y_T$ , on a  $E[w(Y_T^*)] - E[w(Y_T)] = E[w(Y_T^*)] - E[w(Y_T)] - E\left(\frac{k}{H_T} Y_T^*\right) + E\left(\frac{k}{H_T} Y_T\right) = E[w^*(H_T)] - (E[w(Y_T)] - E\left(\frac{k}{H_T} Y_T\right)) \geq 0$ .

13. Niveau d'aversion  $D$  plus élevé que  $\theta$ , le niveau d'" incitation " dû aux frais de gestion variables.

l'expression de la fonction à maximiser est la même :

$$L(y) \equiv w(y) - \frac{k}{H_T}y = \frac{u(\theta y)}{D} - \frac{k}{H_T}y;$$

de plus, on a  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_2^*$  et  $L'(y) > 0 \Leftrightarrow y < y_2^*$ , par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global.

-Pour  $\varepsilon_2 \geq H_T \geq \varepsilon_1$ , on a  $y_1^* = y_2^* = 0$  et on en déduit que 0 est le maximum. -Pour  $H_T < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , on a  $y_2^* = 0$  et  $y_1^* < 0$  et donc pour ces deux valeurs, l'expression de la fonction à maximiser est la même :

$$L(y) \equiv w(y) - \frac{k}{H_T}y = u(y) + \frac{1-D}{D}u(0) - \frac{k}{H_T}y; \text{ les CPO impliquent que } L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_1^* \text{ donc } y_1^* \text{ est le maximum global.}$$

On en déduit que l'expression de la richesse terminale optimale pour l'asset manager est bien celle exposée dans l'énoncé du théorème 8 pour  $D \geq \theta \geq 1$  C.Q.F.D.

### Cas 2: cas $1 \leq D \leq \theta$ <sup>14</sup>

Sans perte de généralité, nous supposons que  $1 \leq D < \theta$  (le cas  $1 \leq D = \theta$  se démontre de façon similaire en considérant le fait que  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ ).

-Pour  $H_T \geq \varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , on a  $y_1^* = 0$  et  $y_2^* > 0$  et donc pour ces deux valeurs, l'expression de la fonction à maximiser est la même :  $L(y) \equiv \frac{u(\theta y)}{D} - \frac{k}{H_T}y$ ; de plus, on a  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_2^*$  et  $L'(y) > 0 \Leftrightarrow y < y_2^*$ , par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global.

-Pour  $H_T \leq \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , on a  $y_2^* = 0$  et  $y_1^* < 0$  et donc pour ces deux valeurs, l'expression de la fonction à maximiser est la même :  $L(y) \equiv u(y) - \frac{k}{H_T}y$ , et les CPO s'écrivent :  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_1^*$ ; on en déduit que  $y_1^*$  est le maximum global.

-Pour  $\varepsilon_2 > H_T > \varepsilon_1$  on a  $y_1^* < 0$  et  $y_2^* > 0$  et on a  $L(y_1^*) \equiv w(y_1^*) - \frac{k}{H_T}y_1^* = u(y_1^*) + \frac{1-D}{D}u(0) - \frac{k}{H_T}y_1^*$ ,  $L(y_2^*) \equiv \frac{u(\theta y_2^*)}{D} - \frac{k}{H_T}y_2^*$ .

Nous cherchons donc à déterminer la zone de valeur de  $H_T \in ]\varepsilon_2; \varepsilon_1[$  pour laquelle  $y_1^*$  est le maximum global, i.e. le sous-ensemble de  $H_T \in ]\varepsilon_2; \varepsilon_1[$  pour lequel  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$ .

LEMME 8.  $\forall H_T \in ]\varepsilon_1; \varepsilon_2[$  tel que  $L(y_1^*) > L(y_2^*) \Leftrightarrow \forall x \in \left] \frac{D}{\theta} \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}; \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} \right[$  tel que

$$m(x) \equiv \frac{D}{D-1}g\left(\frac{D}{\theta}x\right) - \frac{1}{D-1}g(x) - g\left(\frac{C_1}{\gamma}A^{-\gamma}\right) > 0 \quad (0.2)$$

où on a posé  $x \equiv \frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}$  et  $g(x) \equiv u^0[I^0(x)] - x[I^0(x) - a\gamma]$

---

14. Niveau d'aversion,  $D$  plus faible que  $\theta$ , le paramètre d'incitation financière.

PREUVE DU LEMME 8.

Posons  $u^0(y) \equiv u(y + A\gamma) = \gamma^{1-1/\gamma} C_1^{1/\gamma} \frac{1}{y^{1/\gamma}}$

et  $I^0(y) \equiv I(y) + A\gamma = \gamma^{1-1/\gamma} C_1^{1/\gamma} \frac{1}{y^{1/\gamma}}$

On peut ré-écrire les expressions de  $y_1^*$  et  $y_2^*$  de la façon suivante :

$$y_1^* = I^0\left(\frac{k}{H_T}\right) - A\gamma \text{ et } y_2^* = \frac{1}{\theta} I^0\left(\frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}\right) - \frac{A\gamma}{\theta}$$

et celles de  $L(y_1^*)$  et  $L(y_2^*)$  comme suit :

$$L(y_2^*) = \frac{1}{D} g\left(\frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}\right) \text{ et } L(y_1^*) = g\left(\frac{k}{H_T}\right) + \frac{1-D}{D} u^0(A\gamma)$$

avec  $g(x) \equiv u^0 [I^0(x)] - x [I^0(x) - a\gamma]$ .

Posons  $x \equiv \frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}$  on a donc  $\varepsilon_2 > H_T > \varepsilon_1 \Leftrightarrow \frac{D}{\theta} \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} < x < \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}$

et  $L(y_1^*) > L(y_2^*) \Leftrightarrow g\left(\frac{D}{\theta} x\right) - \frac{1}{D} g(x) - \frac{D-1}{D} u^0(A\gamma) > 0$  et comme par ailleurs nous avons  $u^0(a\gamma) = g\left(\frac{C_1}{\gamma} a^{-\gamma}\right)$ , on en déduit le résultat cherché.

□

**Etude de  $x \rightarrow g(x)$  et de  $x \rightarrow g'(x)$  :**

Après calcul on obtient les expressions suivantes :

$$g(x) = A\gamma x - \gamma^{1-1/\gamma} C_1^{1/\gamma} \frac{x^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} + C_2 \tag{0.3}$$

et  $g'(x) = A\gamma - I^0(x) = A\gamma - \gamma^{1-1/\gamma} C_1^{1/\gamma} x^{-1/\gamma}$

On en déduit que,  $\forall (C_1; \gamma) \in R^2$  tel que  $C_1 \times \gamma > 0$ , on a

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}$$

**Etude de  $x \rightarrow m(x)$  et de  $x \rightarrow m'(x)$  :**

Remarquons que  $m\left(\frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}\right) > 0$  :

en effet on a  $m(x) > 0 \Leftrightarrow D \left[ g\left(x \frac{\theta}{D}\right) - g\left(\frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}\right) \right] > g(x) - g\left(\frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}\right)$ ,

par conséquent  $m\left(\frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}\right) > 0 \Leftrightarrow D \left[ g\left(\frac{\theta}{D} \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}\right) - g\left(\frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}\right) \right] > 0$ , ce qui est vrai par construction puisque  $g$  est une fonction croissante de  $x \Leftrightarrow x > \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}$ .

De même, on montre que  $m\left(\frac{D}{\theta} \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}\right) < 0$ . Par conséquent on en déduit qu'il existe au moins une racine de  $m(x) = 0$  dans l'intervalle  $x \in \left] \frac{D}{\theta} \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}; \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} \right[$ .

Nous allons maintenant montrer dans le Lemme 9 que cette racine est unique.

LEMME 9.

$\forall (C_1; \gamma) \in R^2$  tel que  $C_1 \times \gamma > 0$ , il existe une unique racine de l'équation  $m(x) = 0$  dans l'intervalle  $x \in \left] \frac{D}{\theta} \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}; \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} \right[$

PREUVE DU LEMME 9.

En partant des équations 0.2 et 0.3 et après calcul on obtient les expressions suivantes pour  $x \rightarrow m(x)$  et  $x \rightarrow m'(x)$  :

$$m(x) = \frac{1}{D-1} \left\{ \frac{(1-\theta^{1-1/\gamma} D^{1/\gamma}) \gamma^{1-1/\gamma} C_1^{1/\gamma}}{1-1/\gamma} \right\} x^{1-1/\gamma} + \frac{\theta-1}{D-1} a \gamma x - g \left( \frac{C_1}{\gamma} a^{-\gamma} \right)$$

$$\text{et } m'(x) = \frac{1}{D-1} \left\{ (1-\theta^{1-1/\gamma} D^{1/\gamma}) \gamma^{1-1/\gamma} C_1^{1/\gamma} x^{-1/\gamma} + (\theta-1) a \gamma \right\}$$

-Cas  $\gamma > 1$  et  $C_1 > 0$  :

$$\text{On a } m'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_1^* \equiv \frac{C_1}{\gamma} \left[ \frac{1-\theta^{1-1/\gamma} D^{1-1/\gamma}}{1-\theta} \right]^\gamma A^{-\gamma}.$$

Ainsi  $m$  est une fonction croissante de  $x \Leftrightarrow x > x_1^*$ .

De plus on montre que, pour  $\gamma > 0$ ,  $\frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} > x_1^* \Leftrightarrow 1 > \left[ \frac{1-\theta^{1-1/\gamma} D^{1-1/\gamma}}{1-\theta} \right]^\gamma \Leftrightarrow \frac{\theta}{D} > 1$ , ce qui est vrai par hypothèse.

On en déduit qu'il existe une unique racine de  $m(x) = 0$  pour  $x \in \left] \frac{D}{\theta} \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}; \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} \right[$

-Cas  $0 < \gamma < 1$ ,  $C_1 > 0$  et  $\theta^{1-\gamma} < D < \theta$  : idem cas précédent

$$\text{On a } m'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_1^* \equiv \frac{C_1}{\gamma} \left[ \frac{1-\theta^{1-1/\gamma} D^{1-1/\gamma}}{1-\theta} \right]^\gamma A^{-\gamma}.$$

Ainsi  $m$  est une fonction croissante  $\Leftrightarrow x > x_1^*$  et comme pour  $\gamma > 0$  et  $\theta > D$   $\frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} > x_1^*$ ,

on en déduit qu'il existe une unique racine de  $m(x) = 0$  pour  $x \in \left] \frac{D}{\theta} \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}; \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} \right[$

-Cas  $0 < \gamma < 1$ ,  $C_1 > 0$  et  $D \leq \theta^{1-\gamma} < \theta$  :

On a  $m'(x) > 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ , et on en déduit que, comme dans les deux cas précédents, il existe une unique racine de  $m(x) = 0$  pour  $x \in \left] \frac{D}{\theta} \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}; \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} \right[$ .

-Cas  $\gamma < 0$  et  $C_1 < 0$  :

$$\text{On a } m'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_1^* \equiv \frac{C_1}{\gamma} \left[ \frac{1-\theta^{1-1/\gamma} D^{1-1/\gamma}}{1-\theta} \right]^\gamma A^{-\gamma}.$$

Ainsi  $m$  est une fonction croissante de  $x \Leftrightarrow x > x_1^*$ .

On montre que, pour  $\gamma \equiv -\beta > 0$ ,

$$\frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} > x_1^* \Leftrightarrow 1 > \left[ \frac{\theta-1}{\theta \left( \frac{\theta}{D} \right)^{1/\beta} - 1} \right]^\beta \Leftrightarrow \frac{\theta}{D} > 1, \text{ ce qui est vrai par hypothèse.}$$

On en déduit comme dans les trois autres cas qu'il existe une unique racine de  $m(x) = 0$  pour  $x \in \left] \frac{D}{\theta} \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma}; \frac{C_1}{\gamma} A^{-\gamma} \right[$

□

En utilisant les résultats du Lemme 8 et du Lemme 9 exposés ci-dessus, et en posant  $H_0^* \equiv \frac{D}{\theta} \frac{k}{x_0^*}$  avec  $x_0^*$  défini implicitement par l'équation suivante :

$m(x) \equiv g(\frac{D}{\theta}x) - \frac{1}{D}g(x) - (1 - \frac{1}{D})g(\frac{C_1}{\gamma}A^{-\gamma}) = 0$ , on en déduit le résultat suivant :

Pour  $H_T \in ]\varepsilon_2; H_0^*[$ , on a  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_1^*$  est le maximum global cherché ;

Pour  $H_T \in ]H_0^*; \varepsilon_1[$ , on a  $L(y_1^*) < L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global cherché.

Or comme par ailleurs pour  $H_T \in ]0; \varepsilon_2]$ ,  $y_1^*$  est le maximum global et que, pour  $H_T \in [\varepsilon_1; +\infty[$ ,  $y_2^*$  est le maximum global, on en déduit que l'expression de la richesse terminale optimale pour l'asset manager dans le cas où  $1 \leq D \leq \theta$  est bien celle qui est énoncée dans le cadre du théorème 8.

□

PREUVE DES CONSÉQUENCES 15 ET 16. On obtient les résultats cherchés par application directe du théorème 8.

□

PREUVE DES PROPRIÉTÉS 33 ET 34. On en déduit de l'expression donnée dans la conséquence 15, que la richesse terminale peut se décomposer comme une somme de pay-off de différentes options. En considérant l'espérance par rapport au temps  $t$  de  $Y_T^*$ , on trouve l'expression donnée dans la propriété 33 pour  $Y_t^*$ .

L'expression de la propriété 34 s'obtient par application direct du lemme d'Itô en considérant l'expression de la propriété 33.

□

PREUVE DU THÉORÈME 9.

Nous cherchons à montrer que la solution du problème (P21) est donnée par l'expression de  $Y_T^*$  du théorème 9.

Afin d'alléger l'écriture, et sans perte de généralité nous supposons que  $W^0 \equiv 1$ , ce qui implique que  $Y^0 \equiv \rho - 1$  Il suffit pour cela de montrer que le convexe conjugué du problème (P21),  $w^*(H_T) \equiv \underset{Y \geq \rho - 1}{Max} \left\{ w(Y) - \frac{k}{H_T} Y \right\}$ , avec  $0 \leq \rho < 1$ , a pour solution " point par point " l'expression  $Y_T^*$  définie dans le cadre du théorème 9.<sup>15</sup> où la fonction d'utilité  $y \rightarrow w(y)$  est donnée par l'expression suivante :  $w(y) \equiv$

---

15. En effet  $Y_T^* \equiv \underset{Y \geq \rho - 1}{Argmax} \left\{ w(Y) - \frac{k}{H_T} Y \right\}$  est aussi la solution du problème (P21) puisque pour toute stratégie quelconque admissible vérifiant la contrainte de budget et la contrainte de protection du problème (P21), notée  $Y_T$ , on a  $E[w(Y_T^*)] - E[w(Y_T)] = E[w(Y_T^*)] - E[w(Y_T)] - E(\frac{k}{H_T}Y_T^*) + E(\frac{k}{H_T}Y_T) = E[w^*(H_T)] - (E[w(Y_T)] - E(\frac{k}{H_T}Y_T)) \geq 0$ .



$$v(z'(y)) \begin{cases} u(y) & \text{si } y < 0 \\ \frac{u(\theta y)}{D} & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \text{ avec } u(y) \equiv y - \frac{y^2}{2a} \text{ ou } a \geq 0.$$

Le problème statique correspondant au convexe conjugué du problème (P21) peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$\text{déterminer } y^* = \arg \max_{y \geq \rho-1} L(y) \text{ avec } L(y) \equiv w(y) - \frac{k}{H_T};$$

en considérant séparément le maximum local pour la partie supérieure et pour la partie inférieure au benchmark ( $\rho - 1 \leq y < 0$  et  $y \geq 0$ ), on peut appliquer localement les " CPO " (i.e. conditions de Kuhn et Tucker) :  $L'(y^*) + \lambda = 0$ ;  $y^* \geq (\rho - 1)$ ;  $\lambda \geq 0$ ;  $\lambda \times y^* = 0$  où  $\lambda$  désigne le coefficient de Lagrange associé à la contrainte d'assurance de portefeuille :

-Pour  $y < 0$ , on a  $L(y) \equiv u(y) - \frac{k}{H_T}y$  et deux cas sont possibles :

ou bien  $\lambda = 0$  (la contrainte de protection ne joue pas) et on a  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow u'(y) = \frac{k}{H_T} \Leftrightarrow y = I(\frac{k}{H_T}) \equiv a(1 - \frac{k}{H_T})$ , et le maximum local est donné par  $y_1^* = a(1 - \frac{k}{H_T})$ ,

ou bien  $\lambda > 0$  (la contrainte est saturée) et on a  $y_1^* = \rho - 1$ .

Donc un premier maximum local est  $y_1^* \equiv \text{Min} \left\{ \text{Max} \left\{ a \left( 1 - \frac{k}{H_T} \right); \rho - 1 \right\}; 0 \right\}$

-Pour  $y \geq 0$ , on a  $L(y) = \frac{u(\theta y)}{D} - \frac{k}{H_T}y$  et les C.P.O. donnent

$$L'(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{u'(\theta y)}{D} = \frac{k}{H_T} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\theta} I\left(\frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}\right) \equiv \frac{a}{\theta} \left( 1 - \frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T} \right) \text{ avec } \theta \equiv (1 + d)$$

On en déduit l'expression du second maximum local :  $y_2^* \equiv \text{Max} \left\{ \frac{a}{\theta} \left( 1 - \frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T} \right); 0 \right\}$

Par conséquent il y a deux candidats possibles pour le maximum global cherché; selon les valeurs considérées des paramètres  $D$ ,  $\theta$  et la valeur finale du portefeuille,  $H_T$ , l'expression de la richesse terminale optimale sera  $y_1^*$  ou  $y_2^*$ .

Notons qu'on a  $y_2^* > 0 \Leftrightarrow H_T > \frac{kD}{\theta}$  et  $y_1^* > 0 \Leftrightarrow H_T > k$

### Cas 1: $D \geq \theta \geq 1$ <sup>16</sup>

On expose la démonstration dans le cas où  $D > \theta \geq 1$  (le cas où  $D = \theta \geq 1$  se démontre de façon similaire en ne considérant que trois sous cas :  $H_T \geq k$ ,  $k > H_T > k/(1 + \xi)$  et  $H_T \leq k/(1 + \xi)$ ).

Dans ce cas on a  $\frac{k}{1+\xi} < k < k\frac{D}{\theta}$  car on suppose que  $\xi \equiv \frac{1-\rho}{a} > 0$ .

(1) Pour  $H_T > k\frac{D}{\theta}$

On a  $y_1^* = 0$  et  $y_2^* > 0$  et donc ces deux valeurs vérifient :  $L(y) \equiv \frac{u(\theta y)}{D} - \frac{k}{H_T}y$ ;

16. Niveau d'aversion  $D$  plus élevé que  $\theta$ , la valeur du paramètre d'incitation financière.

par conséquent  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_2^*$  et  $L'(y) > 0 \Leftrightarrow y < y_2^*$ , i.e.  $y_2^*$  est le maximum global cherché.

(2) Pour  $k \frac{D}{\theta} \geq H_T \geq k$

On a  $y_1^* = y_2^* = 0$  et on en déduit que 0 est le maximum.

(3) Pour  $\frac{k}{1+\xi} < H_T < k$

On a  $y_2^* = 0$  et  $\rho - 1 < y_1^* < 0$  et donc pour ces deux valeurs, on a :  $L(y) \equiv u(y) - \frac{k}{H_T}y$ ; les CPO s'écrivent  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = a(1 - \frac{k}{H_T}) \equiv y_1^*$  et par conséquent  $y_1^*$  est le maximum global.

(4) Pour  $H_T \leq \frac{k}{1+\xi} \equiv \underline{H}^*$

On a  $y_2^* = 0$  et  $y_1^* = \rho - 1 < 0$  et donc pour ces deux valeurs, on a  $L(y) \equiv u(y) - \frac{k}{H_T}y$ ; par conséquent  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = a(1 - \frac{k}{H_T})$  et  $L'(y) < 0 \Leftrightarrow y > a(1 - \frac{k}{H_T})$ .

On en déduit comme  $a(1 - \frac{k}{H_T}) \leq y_1^* = \rho - 1 < y_2^* = 0$  que  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$ , i.e.  $y_1^* = \rho - 1$  est le maximum global cherché.

On en déduit que l'expression de la richesse terminale optimale pour l'asset manager exposée est bien celle de l'énoncé du théorème 9 pour  $D \geq \theta \geq 1$

C.Q.F.D.

**Cas 2:**  $1 \leq D < \theta$  et  $\xi \equiv \frac{1-\rho}{a} \geq (\frac{\theta}{D} - 1) > 0$ <sup>17</sup>

Sans perte de généralité, nous supposons que  $\xi > (\frac{\theta}{D} - 1) > 0$  : en effet, le cas  $\xi = (\frac{\theta}{D} - 1) > 0$  se démontre de façon similaire en ne considérant que trois des quatre sous-cas :  $H_T \geq k$ ,  $H_T \leq k/(1+\xi)$  et  $k > H_T > kD/\theta = k/(1+\xi)$  présentés ci-dessous.

Notons que dans l'hypothèse où nous nous plaçons, i.e.  $\xi > (\frac{\theta}{D} - 1) > 0$ , on a :  $\frac{k}{1+\xi} < \frac{kD}{\theta} < k$ .

(1) Pour  $H_T \geq k$

On a  $y_1^* = 0$  et  $y_2^* \geq 0$  et donc pour ces deux valeurs de  $y$ , on a  $L(y) \equiv \frac{u(\theta y)}{D} - \frac{k}{H_T}y$ ; de plus,  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_2^*$  et  $L'(y) > 0 \Leftrightarrow y < y_2^*$ , par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global.

---

17. Niveau d'aversion,  $D$  plus faible que  $\theta$ , le paramètre d'incitation financière et niveau de protection " faible ".

(2) Pour  $\frac{k}{1+\xi} < H_T \leq \frac{kD}{\theta}$

On a  $y_2^* = 0$  et  $\rho - 1 < y_1^* \leq 0$  et donc, pour ces deux valeurs de  $y$ , on a  $L(y) \equiv u(y) - \frac{k}{H_T}y$ <sup>18</sup> et les CPO s'écrivent :  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_1^*$ ; on en déduit que  $y_1^*$  est le maximum global.

(3) Pour  $H_T \leq \frac{k}{1+\xi}$

on a  $y_2^* = 0$  et  $y_1^* = \rho - 1 < 0$  et donc pour ces deux valeurs, on a  $L(y) \equiv u(y) - \frac{k}{H_T}y$ ; par conséquent  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = a(1 - \frac{k}{H_T})$  et  $L'(y) < 0 \Leftrightarrow y > a(1 - \frac{k}{H_T})$ .

On en déduit avec  $a(1 - \frac{k}{H_T}) \leq y_1^* = \rho - 1 < y_2^* = 0$  que  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$ , i.e.  $y_1^* = \rho - 1$  est le maximum global cherché.

(4) Pour  $k > H_T > \frac{kD}{\theta}$

On a  $y_1^* < 0$  et  $y_2^* > 0$  et la fonction à maximiser est pour  $Y_1^*$ , resp. pour  $Y_2^*$ , donnée par  $L(y_1^*) = u(y_1^*) - \frac{k}{H_T}y_1^*$ , resp. par  $L(y_2^*) \equiv \frac{u(\theta y_2^*)}{D} - \frac{k}{H_T}y_2^*$ .

Nous cherchons donc à déterminer la zone de valeur de  $H_T \in ]\frac{kD}{\theta}; k[$  pour laquelle  $y_1^*$  est le maximum global, i.e. le sous-ensemble de  $H_T \in ]\frac{kD}{\theta}; k[$  pour lequel  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$ .

LEMME 10.

$\forall H_T \in ]\frac{kD}{\theta}; k[$  tel que  $L(y_1^*) > L(y_2^*) \Leftrightarrow \forall x \in ]\frac{D}{\theta}; 1[$  tel que

$$m(x) \equiv Dg\left(\frac{D}{\theta}x\right) - g(x) > 0 \quad (0.4)$$

où on a posé  $x \equiv \frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}$  et  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x)]$

PREUVE DU LEMME 10.

En partant des expressions de  $y_1^*$  et  $y_2^*$ , il en découle que les expressions de  $L(y_1^*)$  et  $L(y_2^*)$  peuvent être écrites comme suit :

$$L(y_2^*) = \frac{1}{D}g\left(\frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}\right) \text{ et } L(y_1^*) = g\left(\frac{k}{H_T}\right) \text{ avec } g(x) \equiv u[I(x)] - xI(x).$$

Posons  $x \equiv \frac{D}{\theta} \frac{k}{H_T}$ , on a donc  $k > H_T > \frac{kD}{\theta} \Leftrightarrow \frac{D}{\theta} < x < 1$

et  $L(y_1^*) > L(y_2^*) \Leftrightarrow Dg\left(\frac{D}{\theta}x\right) - g(x) > 0$ . □

18. [car  $L(0) = 0$

**Etude de  $x \rightarrow g(x)$  et de  $x \rightarrow g'(x)$**

Après calcul on obtient les expressions suivantes :

$$g(x) = \frac{a}{2} (1 - x)^2 \tag{0.5}$$

et  $g'(x) = a(x - 1)$ .

On en déduit que  $g(x) \geq 0 \forall x$  et  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$  donc  $x \equiv 1$  est un minimum global pour la fonction  $g$ .

**Etude de  $x \rightarrow m(x)$  et de  $x \rightarrow m'(x)$**

Remarquons que  $m(1) > 0$  puisque  $m(x) > 0 \Leftrightarrow Dg(x \frac{\theta}{D}) > g(x)$ .

Par conséquent  $m(1) > 0 \Leftrightarrow Dg(\frac{\theta}{D}) > g(1) = 0$ , ce qui est vrai par construction puisque  $g$  est une fonction positive pour tout  $x$ .

De même, on montre que  $m(\frac{D}{\theta}) < 0$ .

Par conséquent on en déduit qu'il existe au moins une racine de  $m(x) = 0$  dans l'intervalle  $x \in ]\frac{D}{\theta}; 1[$ .

Nous allons maintenant montrer dans le Lemme 11 que cette racine est unique.

LEMME 11.

*Il existe une unique racine de l'équation  $m(x) = 0$  dans l'intervalle  $x \in ]\frac{D}{\theta}; 1[$  notée  $x_0^*$  et donnée par l'expression suivante :  $x_0^* \equiv \frac{\theta - 1 + (\theta - 1)/\sqrt{D}}{(\theta^2/D - 1)}$*

PREUVE DU LEMME 11.

En partant des équations 0.4 et 0.5 et après calcul on obtient les expressions suivantes :

$$m(x) = \frac{a}{2} \left\{ \left[ \frac{\theta^2}{D} - 1 \right] x^2 + 2(1 - \theta)x + D - 1 \right\} \tag{0.6}$$

et  $m'(x) = a \left( \frac{\theta^2}{D} - 1 \right) x + a(1 - \theta)$

Par conséquent, on a  $m'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_1^* \equiv \frac{\theta - 1}{\frac{\theta^2}{D} - 1}$ . Ainsi  $m$  est une fonction croissante de  $x \Leftrightarrow x > x_1^*$ . De plus on montre que  $x_1^* < \frac{D}{\theta} < 1$ .

On en déduit qu'il existe une unique racine de  $m(x) = 0$  pour  $x \in ]\frac{D}{\theta}; 1[$ , et la résolution de  $m(x) = 0$  avec  $m(x)$  donnée par l'équation 0.6 donne l'expression de  $x_0^*$ .

□

En utilisant les résultats du Lemme 10 et du Lemme 11 exposés ci-dessus, et en

posant  $H_0^* \equiv \frac{D}{\theta} \frac{k}{x_0^*}$  avec  $x_0^*$  défini explicitement par  $x_0^* \equiv \frac{\theta - 1 + (\theta - 1)/\sqrt{D}}{(\theta^2/D - 1)}$ , on obtient  $H_0^* = \frac{k}{1 + \xi^*}$  avec  $\xi^* \equiv \left(\frac{\theta}{D} x_0^* - 1\right) = \frac{(\theta/D - 1)}{(\theta^2/D - 1)} (\theta/\sqrt{D} - 1)$ .

On en déduit le résultat suivant :

Pour  $H_T \in ]\frac{kD}{\theta}; H_0^* [$ , on a  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_1^*$  est le maximum global cherché ;

Pour  $H_T \in ]H_0^*; k [$ , on a  $L(y_1^*) < L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global cherché.

Or comme par ailleurs, pour  $H_T \in ]\frac{k}{1 + \xi}; \frac{kD}{\theta} [$ ,  $y_1^*$  est le maximum global et, pour  $H_T \in [k; +\infty [$ ,  $y_2^*$  est le maximum global, on en déduit, dans les deux cas, que l'expression de la richesse terminale optimale est celle du second cas exposé dans le théorème 9.

C.Q.F.D.

**Cas 3:** cas  $1 \leq D < \theta$  et  $0 < \xi \equiv \frac{1 - \rho}{a} < \left(\frac{\theta}{D} - 1\right)$ <sup>19</sup>

Dans ce cas on a  $\frac{kD}{\theta} < \frac{k}{1 + \xi}$  et  $\frac{k}{1 + \xi} < k$  car par hypothèse  $\xi > 0$

(1) Pour  $H_T \geq k$

On a  $y_1^* = 0$  et  $y_2^* \geq 0$  et donc pour ces deux valeurs de  $y$ , on a  $L(y) \equiv \frac{u(\theta y)}{D} - \frac{k}{H_T} y$ .

De plus,  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_2^*$  et  $L'(y) > 0 \Leftrightarrow y < y_2^*$ , par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global.

(2) Pour  $H_T \leq \frac{kD}{\theta}$

On a  $y_2^* = 0$  et  $y_1^* = \rho - 1 < 0$  et donc pour ces deux valeurs, on a  $L(y) \equiv u(y) - \frac{k}{H_T} y$ .

Par conséquent  $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = a(1 - \frac{k}{H_T})$  et  $L'(y) < 0 \Leftrightarrow y > a(1 - \frac{k}{H_T})$ . On en déduit avec  $a(1 - \frac{k}{H_T}) \leq y_1^* = \rho - 1 < y_2^* = 0$  que  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$ , i.e.  $y_1^* = \rho - 1$  est le maximum global cherché.

(3) Pour  $\frac{kD}{\theta} < H_T < \frac{k}{1 + \xi}$

On a  $y_1^* = \rho - 1 < 0$  et  $y_2^* > 0$  et la fonction à maximiser est pour  $Y_1^*$ , resp. pour  $Y_2^*$ , donnée par  $L(y_1^*) = u(y_1^*) - \frac{k}{H_T} y_1^*$ , resp. par  $L(y_2^*) \equiv \frac{u(\theta y_2^*)}{D} - \frac{k}{H_T} y_2^*$ .

Nous cherchons à déterminer la zone de valeur de  $H_T \in ]\frac{kD}{\theta}; \frac{k}{1 + \xi} [$  pour laquelle

19. Niveau d'aversion,  $D$  plus faible que  $\theta$ , le paramètre d'incitation financière et niveau élevé de protection

$y_1^*$  est le maximum global, i.e. le sous-ensemble de  $H_T \in \left] \frac{kD}{\theta}; \frac{k}{1+\xi} \right[$  pour lequel l'inéquation  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$  est vérifiée.

LEMME 12.

$\forall H_T \in \left] \frac{kD}{\theta}; \frac{k}{1+\xi} \right[$  vérifiant  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$  alors  $\forall y \in ]1 + \xi; \frac{\theta}{D} [$  avec  $y \equiv \frac{k}{H_T}$  et  $\xi \equiv \frac{1-\rho}{a} > 0$  vérifie l'inéquation suivante :

$$l(y) \equiv \frac{1}{D}g\left(\frac{D}{\theta}y\right) + (\rho - 1)y - u(\rho - 1) < 0 \tag{0.7}$$

où on a posé  $g(x) \equiv u[I(x)] - x[I(x)]$  et réciproquement.

PREUVE DU LEMME 12.

En utilisant les expressions de  $y_1^*$  et  $y_2^*$  données précédemment, on peut ré-écrire celles de  $L(y_1^*)$  et de  $L(y_2^*)$  de la manière suivante :

$$L(y_2^*) = \frac{1}{D}g\left(\frac{D}{\theta}\frac{k}{H_T}\right) \text{ et } L(y_1^*) = u(\rho - 1) - \frac{k}{H_T}(\rho - 1)$$

avec  $g(x) \equiv u[I(x)] - xI(x)$ .

Posons  $y \equiv \frac{k}{H_T}$  on en déduit que  $\frac{k}{1+\xi} > H_T > \frac{kD}{\theta} \Leftrightarrow \frac{\theta}{D} > x > 1 + \xi$  et que  $L(y_1^*) > L(y_2^*) \Leftrightarrow l(y) \equiv \frac{1}{D}g\left(\frac{D}{\theta}y\right) + (\rho - 1)y - u(\rho - 1) < 0$

□

Nous allons maintenant montrer, dans le Lemme 13 qui suit, sous quelles conditions il existe dans l'intervalle  $y \in ]1 + \xi; \frac{\theta}{D} [$  une racine à l'équation  $l(y) = 0$  et que, si elle existe, cette racine est unique .

LEMME 13.

a) Il existe une unique racine de l'équation  $l(y) = 0$  dans l'intervalle  $y \in ]1 + \xi; \frac{\theta}{D} [$   
 $\Leftrightarrow \xi \equiv \frac{1-\rho}{a} < \xi^* \equiv \frac{(\theta/D-1)(\theta/\sqrt{D}-1)}{(\theta^2/D-1)}$

b) Si elle existe, cette racine, notée  $y_0^*$ , est donnée par l'expression suivante :  $y_0^* \equiv \frac{\theta}{D} \left[ 1 + \theta\xi - \sqrt{(\theta^2 - D)\xi^2 + 2(\theta - D)\xi} \right]$

PREUVE DU LEMME 13.

**-Etude de  $x \rightarrow g(x)$  et de  $x \rightarrow g'(x)$  :**

Après calcul on obtient les expressions suivantes :

$$g(x) = \frac{a}{2}(1 - x)^2 \tag{0.8}$$

et  $g'(x) = a(x - 1)$  . On en déduit que  $g(x) \geq 0 \forall x$  et que  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$  donc  $x \equiv 1$  est un minimum globale pour la fonction g

**-Signe de  $l(\frac{\theta}{D})$  :**

Montrons que  $l(\frac{\theta}{D}) < 0$ ; en utilisant l'expression de  $l(y)$  donnée par l'équation 0.7, on en déduit que  $l(\frac{\theta}{D}) = \frac{1}{D}g(1) + (\rho - 1)\frac{\theta}{D} - u(\rho - 1) = (\rho - 1)\frac{\theta}{D} - u(\rho - 1) = (\rho - 1)(\frac{\theta}{D} - 1) + \frac{1}{2a}(\rho - 1)^2$

Donc  $l(x) < 0 \Leftrightarrow (\frac{\theta}{D} - 1) + \frac{1}{2a}(\rho - 1) > 0 \Leftrightarrow \xi \equiv \frac{(1-\rho)}{a} < 2(\frac{\theta}{D} - 1)$ , ce qui est vrai puisque par hypothèse  $\xi \equiv \frac{(1-\rho)}{a} < (\frac{\theta}{D} - 1)$ .

**-Etude de la variation de  $l(y)$  :**

En utilisant les équations 0.7 et 0.8 et après calcul on obtient les expressions suivantes pour la fonction  $y \rightarrow l(y)$  et la fonction  $y \rightarrow l'(y)$  :

$$l(y) = \frac{aD}{2\theta^2}y^2 + \left[(\rho - 1) - \frac{a}{\theta}\right]y + \frac{a}{2D} - (\rho - 1) + \frac{1}{2a}(\rho - 1)^2 \quad (0.9)$$

et  $l'(y) = \frac{aD}{\theta^2}y + \left[(\rho - 1) - \frac{a}{\theta}\right]$

Par conséquent, on a  $l'(y) > 0 \Leftrightarrow y < y_1^* \equiv \frac{\theta}{D} - (\rho - 1)\frac{\theta^2}{aD} > \frac{\theta}{D} > 1 + \xi > 1$ .

On en déduit que  $l$  est une fonction décroissante de  $y \Leftrightarrow y < y_1^*$  et que  $y_1^* > \frac{\theta}{D} > 1 + \xi > 1$ .

**-Etude du signe de la fonction  $l(y)$  :**

La résolution de  $l(y) = 0$ , avec  $l(y)$  correspondant à l'expression de 0.9, donne celle de la racine  $y_0^*$  avec  $y_0^* < y_1^*$  :

$y_0^* = y_1^* - \sqrt{\Delta}\frac{\theta^2}{aD} < y_1^*$  avec

$$\Delta \equiv \left(1 - \frac{D}{\theta^2}\right)(1 - \rho)^2 + \frac{2a}{\theta}\left(1 - \frac{D}{\theta}\right)(1 - \rho) \quad (0.10)$$

et  $\Delta > 0$  pour  $-\rho > 0$ .

Par conséquent  $l(y)$  est une fonction positive pour  $y < y_0^*$  et négative pour  $y_0^* < y \leq \frac{\theta}{D}$  avec  $y_0^* < \frac{\theta}{D} < y_1^*$ .

**-Expression de la racine de  $l(y)$  :**

Après calculs en utilisant l'équation 0.10 et l'expression  $\xi \equiv \frac{1-\rho}{a}$ , on en déduit que l'expression de  $y_0^*$  se ré-écrit de la façon suivante :

$$y_0^* \equiv \frac{\theta}{D} \left[ 1 + \theta\xi - \sqrt{(\theta^2 - D)\xi^2 + 2(\theta - D)\xi} \right]$$

**-Etude du signe de  $l(1 + \xi)$  :**

En utilisant l'équation 0.7, on peut écrire :

$$l(1 + \xi) = \frac{1}{D}g\left(\frac{D}{\theta}(1 + \xi)\right) + (\rho - 1)(1 + \xi) - u(\rho - 1)$$

et avec  $g(x) \equiv u[I(x)] - xI(x)$ , on en déduit que

$$l(1 + \xi) = \frac{1}{D}g\left(\frac{D}{\theta}(1 + \xi)\right) + (\rho - 1)(1 + \xi) - [g(1 + \xi) + (1 + \xi)(\rho - 1)] .$$

Par conséquent, on a  $l(1 + \xi) = g\left(\frac{D}{\theta}(1 + \xi)\right)/D - g(1 + \xi)$  et en utilisant l'expression explicite de  $g$  donnée par 0.8, on en déduit après calcul l'écriture suivante de  $l(1 + \xi)$  :

$$l(1 + \xi) = \frac{aD}{2\theta^2} \left\{ (1 - \theta^2/D) \xi^2 + 2(1 - \theta/D) \xi + (1 - \theta/D)^2 \right\}$$

Par conséquent la fonction  $\xi \rightarrow l(1 + \xi)$  est un polynôme du second ordre dont l'unique racine, pour  $\xi > 0$ , a pour expression :

$$\xi^* \equiv \frac{(\theta/D-1)(\theta/\sqrt{D}-1)}{(\theta^2/D-1)} > 0 .$$

De plus, on en déduit l'expression de la fonction dérivée :

$$l'(1 + \xi) = \frac{aD}{\theta^2} \left\{ (1 - \theta^2/D) \xi + (1 - \theta/D) \right\}$$

et donc, on a  $l'(1 + \xi) < 0 \Leftrightarrow \xi > \xi_1^* \equiv \frac{(1-\theta/D)}{(\theta^2/D-1)} < 0$ .

Ce qui implique que, pour  $\xi > 0$ , la fonction  $\xi \rightarrow l(1 + \xi)$  est décroissante.

Par conséquent, la fonction  $\xi \rightarrow l(1 + \xi)$  est positive pour  $\xi \in [0; \xi^*[$  et négative pour  $\xi \in [\xi^*; \theta/D - 1[$ .

**-Conclusion :**

On en déduit le résultat cherché :

-Pour  $\xi \in [0; \xi^*]$ , on a  $l(1 + \xi) \geq 0$  et  $l\left(\frac{\theta}{D}\right) < 0$  et comme  $y \rightarrow l(y)$  est une fonction décroissante de  $y$  sur  $\left[1 + \xi; \frac{\theta}{D}\right]$ , alors il existe dans cet intervalle une unique racine à l'équation  $l(y) = 0$  donnée par l'expression :

$$y_0^* \equiv \frac{\theta}{D} \left[ 1 + \theta\xi - \sqrt{(\theta^2 - D) \xi^2 + 2(\theta - D) \xi} \right] .$$

-Pour  $\xi \in ]\xi^*; \frac{\theta}{D} - 1[$ , on a  $l(1 + \xi) < 0$  et  $l\left(\frac{\theta}{D}\right) < 0$  et comme  $y \rightarrow l(y)$  est une fonction décroissante de  $y$  sur  $\left[1 + \xi; \frac{\theta}{D}\right]$ , alors il n'y a pas de racine à l'équation  $l(y) = 0$  dans cet intervalle puisqu'on a  $l(y) < 0 \forall y \in \left[1 + \xi; \frac{\theta}{D}\right]$ .

□

En utilisant les résultats du Lemme 12 et du Lemme 13 exposés ci-dessus, on en déduit le résultat suivant :

(a) Pour  $\xi \in ]0; \xi^*]$

En posant  $\underline{H}^* \equiv \frac{k}{y_0^*}$  avec  $y_0^*$  défini par :

$$y_0^* \equiv \frac{\theta}{D} \left[ 1 + \theta\xi - \sqrt{(\theta^2 - D) \xi^2 + 2(\theta - D) \xi} \right]$$



on obtient  $\underline{H}^* \equiv \frac{kD}{\theta} \left[ 1 + \theta\xi - \sqrt{(\theta^2 - D)\xi^2 + 2(\theta - D)\xi} \right]^{-1}$ .

Pour  $H_T \in ]\frac{kD}{\theta}; \underline{H}^* [$ , on a  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_1^* \equiv \rho - 1$  est le maximum global cherché;

Pour  $H_T \in ]\underline{H}^*; \frac{k}{1+\xi} [$ , on a  $L(y_1^*) < L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global cherché.

(b) Pour  $\xi \in ]\xi^*; \frac{\theta}{D} - 1 [$

On a  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_1^* \equiv \rho - 1$  est le maximum global cherché.

(4) Pour  $\frac{k}{1+\xi} \leq H_T < k$

On a  $\rho - 1 < y_1^* < 0$  et  $y_2^* > 0$  et la fonction à maximiser est pour  $Y_1^*$ , resp. pour  $Y_2^*$ , donnée par

$$L(y_1^*) = u(y_1^*) - \frac{k}{H_T} y_1^*, \text{ resp. par } L(y_2^*) \equiv \frac{u(\theta y_2^*)}{D} - \frac{k}{H_T} y_2^* .$$

Or nous avons démontré dans le cas 2 précédent que, pour  $k > H_T > \frac{kD}{\theta}$  d'une part, les expressions de  $y_1^* < 0$  et  $y_2^* > 0$  sont identiques à celles du cas traité et que, d'autre part, indépendamment de la valeur considérée pour  $\xi \equiv \frac{1-\rho}{a} > 0$ , le résultat suivant est vérifié :

Pour  $H_T \in ]\frac{kD}{\theta}; H_0^* [$ , on a  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_1^*$  est le maximum global cherché;

Pour  $H_T \in ]H_0^*; k[$ , on a  $L(y_1^*) < L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global cherché.

$$\text{avec } H_0^* \equiv \frac{k}{1+\xi^*} \text{ ou } \xi^* \equiv \frac{(\theta/D-1)}{(\theta^2/D-1)} (\theta/\sqrt{D} - 1) > 0$$

Puisque  $\frac{k}{1+\xi} > \frac{kD}{\theta}$ , il en résulte que, dans le cas présent, les deux sous-cas suivants sont possibles :

-Ou bien  $\underline{H}^* \equiv \frac{k}{1+\xi} > H_0^* \equiv \frac{k}{1+\xi^*} \Leftrightarrow \xi \in ]0; \xi^* [$  et dans ce cas,  $\forall H_T \in [\underline{H}^*; k[$ , on a  $L(y_1^*) < L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global cherché.

-Ou bien  $\underline{H}^* < H_0^* \Leftrightarrow \xi \in ]\xi^*; \frac{\theta}{D} - 1 [$  et dans ce cas, on a le résultat suivant :

Pour  $H_T \in ]k; H_0^* [$ , on a  $L(y_1^*) > L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_1^*$  est le maximum global cherché;

Pour  $H_T \in ]H_0^*; \underline{H}^* [$ , on a  $L(y_1^*) < L(y_2^*)$  et par conséquent  $y_2^*$  est le maximum global cherché.

On en déduit que l'expression de la richesse terminale optimale pour l'asset manager dans le cas 3 où  $1 \leq D < \theta$  et  $0 < \xi \equiv \frac{1-\rho}{a} < (\frac{\theta}{D} - 1)$  est ou bien l'expression (2) du théorème 9 si  $\xi \in ]\xi^*; \frac{\theta}{D} - 1 [$ , ou bien l'expression (3) du théorème 9 si  $\xi \in ]0; \xi^* [$ .

□

PREUVE DE LA CONSÉQUENCE ?? . On obtient le résultat cherché par application directe du théorème 9.

□

PREUVE DES PROPRIÉTÉS 35 ET 36. On en déduit, de l'expression donnée dans le théorème 9, que la stratégie optimale peut se décomposer comme une combinaison de plusieurs positions optionnelles élémentaires. En considérant l'espérance par rapport au temps  $t$  de  $Y_T^*$ , on trouve l'expression donnée dans la propriété 35 pour  $Y_t^*$ .

L'expression de la propriété 36 s'obtient par application directe du lemme d'Itô en partant de l'expression de la propriété 35.

□



## Bibliographie

- [Agarwal *et al.*, 2004] Vikas Agarwal, Naveen D. Daniel, Narayan Y. Naik. Flows, Performance, and Managerial Incentives in Hedge Funds. *SSRN eLibrary*, 2004.
- [Agarwal *et al.*, 2008] Vikas Agarwal, Naveen D. Daniel, Narayan Y. Naik. Role of Managerial Incentives and Discretion in Hedge Fund Performance. *SSRN eLibrary*, 2008.
- [Alexander Baptista, 2001] Gordon J. Alexander Alexandre M. Baptista. A var-constrained mean-variance model : Implications for portfolio selection and the basle capital accord. *SSRN eLibrary*, 2001.
- [Alexander Baptista, 2003] Gordon J. Alexander Alexandre M. Baptista. Cvar as a measure of risk : Implications for portfolio selection. *SSRN eLibrary*, 2003.
- [Alexander Baptista, 2008] Gordon J. Alexander Alexandre M. Baptista. Active portfolio management with benchmarking : Adding a value-at-risk constraint. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(3) :779–820, March 2008.
- [Bajeux-Besnainou Ogunc, 2006] Isabelle Bajeux-Besnainou Kurtay Ogunc. Spending rules for endowment funds. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 27(1) :93–107, August 2006.
- [Bajeux-Besnainou Portait, 1998] Isabelle Bajeux-Besnainou Roland Portait. Dynamic asset allocation in a mean-variance framework. *Management Science*, 44(11) :79–95, 1998.
- [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2003a] I. Bajeux-Besnainou, R. Portait, Tergny G.. Dynamic asset allocation with benchmarking. Outstanding academic paper in investments, eastern finance association meetings, april 2003, 2003.
- [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2001] Isabelle Bajeux-Besnainou, Jordan James V., Portait Roland. An asset allocation puzzle : Comment. *The American Economic Review*, 91(4) :1170–1179, Sep 2001.
- [Bajeux-Besnainou *et al.*, 2003b] Isabelle Bajeux-Besnainou, Jordan James V., Portait Roland. Dynamic asset allocation for stocks, bonds, and cash. *Journal of Business*, 76(2) :263–288, April 2003.
- [Basak, 1995] Suleyman Basak. A general equilibrium model of portfolio insurance. *Review of Financial Studies*, 8(4) :1059–1090, 1995.
- [Basak, 2002] Suleyman Basak. A comparative study of portfolio insurance. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(7-8) :1217 – 1241, 2002.
- [Basak Makarov, 2009] Suleyman Basak Dimitry Makarov. Strategic Asset Allocation in Money Management. *SSRN eLibrary*, 2009.
- [Basak *et al.*, 2008] Suleyman Basak, Anna Pavlova, Alexander Shapiro. Offsetting the implicit incentives : Benefits of benchmarking in money management. *Journal of Banking Finance*, 32(9) :1883 – 1893, 2008.
- [Basak Shapiro, 2001] Suleyman Basak Alex Shapiro. Value-at-risk based risk management : Optimal policies and asset prices. *Review of Financial Studies*, 14(2) :371–405, 2001.
- [Basak Shapiro, 2004] Suleyman Basak Alex Shapiro. A model of credit risk, optimal policies, and asset prices. *SSRN eLibrary*, 2004.
- [Basak *et al.*, 2003] Suleyman Basak, Alex Shapiro, Lucie Tepla. Risk management with benchmarking. *SSRN eLibrary*, 2003.
- [Battocchio *et al.*, 2003] P. Battocchio, F. Menoncin, O. Scaillet. Optimal asset allocation for pension funds under mortality risk during the accumulation and decumulation phases. Discussion Papers (IRES - Institut de Recherches Economiques et Sociales) 2003004, Université catholique de Louvain, Institut de Recherches Economiques et Sociales (IRES), 2003.
- [Bawa, 1975] Vijay S. Bawa. Optimal rules for ordering uncertain prospects. *Journal of Financial Economics*, 2(1) :95–121, 1975.

- [Bawa, 1978] Vijay S. Bawa. Safety first, stochastic dominance and optimal portfolio selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(2) :255–271, 1978.
- [Berkelaar *et al.*, 2002] Arjan Berkelaar, Phornchanok Cumperayot, Roy Kouwenberg. The effect of var based risk management on asset prices and the volatility smile. *European Financial Management*, 8(2) :139–164, 2002.
- [Berkelaar Kouwenberg, 2000] Arjan Berkelaar Roy R. Kouwenberg. Dynamic Asset Allocation and Downside-Risk Aversion. *SSRN eLibrary*, 2000.
- [Berkelaar *et al.*, 2004] Arjan Berkelaar, Roy R. Kouwenberg, Thierry Post. Optimal portfolio choice under loss aversion. *Review of Economics and Statistics*, 86(4) :973–987, 2004.
- [Black Scholes, 1973] Fischer Black Myron S Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–54, May-June 1973.
- [Boulier *et al.*, 2001] Jean-François Boulier, ShaoJuan Huang, Grégory Taillard. Optimal management under stochastic interest rates : the case of a protected defined contribution pension fund. *Insurance : Mathematics and Economics*, 28(2) :173 – 189, 2001.
- [Branger *et al.*, 2008] Nicole Branger, Christian Schlag, Eva Schneider. Optimal portfolios when volatility can jump. *Journal of Banking Finance*, 32(6) :1087–1097, 2008.
- [Brennan Xia, 2000] Michael J. Brennan Yihong Xia. Stochastic Interest Rates and the Bond-Stock Mix. *European Finance Review*, 4(2) :197–210, 2000.
- [Brennan Xia, 2002] Michael J. Brennan Yihong Xia. Dynamic asset allocation under inflation. *Journal of Finance*, 57(3) :1201–1238, Jun 2002.
- [Brennan Xia, 2005] M. J. Brennan Y. Xia. Persistence, predictability, and portfolio planning. Rodney l white center for financial research working papers, 2005.
- [Brennan M. R., 1997] E. Schwartz Brennan M. Lagnado R.. Strategic asset allocation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 :1377–1043, 1997.
- [Cairns, 1996] Andrew J.G. Cairns. Continuous-time pension-fund modelling. *Proceedings of the 6th AFIR Colloquium, Nuremberg*, 1(1) :609–624, 1996.
- [Cairns *et al.*, 2006] Andrew J.G. Cairns, David Blake, Kevin Dowd. Stochastic lifestyling : Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30(5) :843 – 877, 2006.
- [Cairns *et al.*, 2000] Andrew J.G. Cairns, David Blake, Andrew J. G, Kevin Dowd. Optimal dynamic asset allocation for defined-contribution pension plans. , June 2000.
- [Campbell Viceira, 2003] Chan Y. L. Campbell, J. Y. L. M. Viceira. A multivariate model of strategic asset allocation. *Journal of Financial Economics*, 67 :41–80, 2003.
- [Campbell *et al.*, 2002] John Y. Campbell, George Chacko, Jorge F. Rodriguez, Luis M. Viceira. Strategic asset allocation in a continuous-time var model. *SSRN eLibrary*, 2002.
- [Campbell Viceira, 2001] Y. Campbell L. Viceira. Who should buy long-term bonds? *The American Economic Review*, 91(1) :99–127, 2001.
- [Campbell Viceira, 2002] Y. Campbell L. Viceira. *Strategic Asset Allocation*. Oxford Press, 2002.
- [Canner *et al.*, 1997] Niko Canner, N Gregory Mankiw, David N Weil. An asset allocation puzzle. *American Economic Review*, 87(1) :181–91, March 1997.
- [Carpenter, 2000] Jennifer Carpenter. Does option compensation increase managerial risk appetite? *The Journal of Finance*, 55(5) :2311–2331, 2000.
- [Chacko Viceira, 2005] George Chacko Luis M. Viceira. Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets. *Rev. Financ. Stud.*, 18(4) :1369–1402, 2005.
- [Chevalier Ellison, 1995] Judith A. Chevalier Glenn D. Ellison. Risk taking by mutual funds as a response to incentives. *SSRN eLibrary*, 1995.
- [Cox Huang, 1989] John C. Cox Chi-fu Huang. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 49(1) :33–83, October 1989.
- [Cuoco *et al.*, 2008] Domenico Cuoco Hua He, Sergei Isaenko. Optimal dynamic trading strategies with risk limits. *Operations Research*, 56(2) :358–368, 2008.
- [Cvitanic *et al.*, 2003] Jaksa Cvitanic, Levon Goukasian, Fernando Zapatero. Monte carlo computation of optimal portfolios in complete markets. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27(6) :971 – 986, 2003.
- [Dai Singleton, 2000] Qiang Dai Kenneth J. Singleton. Specification analysis of affine term structure models. *Journal of Finance*, 55(5) :1943–1978, 2000.

- [Deelstra *et al.*, 2003] Griselda Deelstra, Martino Grasselli, Pierre-Francois Koehl. Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee. *Insurance : Mathematics and Economics*, 33(1) :189–207, August 2003.
- [Del Guercio Tkac, 2000] Diane Del Guercio Paula A. Tkac. The determinants of the flow of funds of managed portfolios : Mutual funds versus pension funds. (2000-21), 2000.
- [Elton *et al.*, 2003] Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Christopher R. Blake. Incentive fees and mutual funds. *Journal of Finance*, 58 :779–804, April 2003.
- [Fishburn, 1977] Peter C Fishburn. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. *American Economic Review*, 67(2) :116–26, March 1977.
- [Grossman Vila, 1989] Sanford Jay Grossman Jean-Luc Vila. Portfolio insurance in complete markets : A note. *Journal of Business*, 62(4) :473–76, 1989.
- [Grossman Zhou, 1996] Sanford J Grossman Zhongquan Zhou. Equilibrium analysis of portfolio insurance. *Journal of Finance*, 51(4) :1379–1403, 1996.
- [Hainaut, 2009] Donatien Hainaut. Dynamic asset allocation under var constraint with stochastic interest rates. *Annals of Operations Research*, 172(1) :97–117, 2009.
- [Hainaut, 2005] P. (2005) Hainaut, D. Devolder. Management of a pension fund under a var constraint. Working paper, UCL, 2005.
- [Harlow, 1991] W. V. Harlow. Asset allocation in a downside-risk framework. *Financial Analysts Journal*, 47(5) :28–40, 1991.
- [Hodder Jackwerth, 2006] James E. Hodder Jens C. Jackwerth. Incentive contracts and hedge fund management. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, May 2006, 2006.
- [Hoevenaars *et al.*, 2008] Roy P.M.M. Hoevenaars, Roderick D.J. Molenaar, Peter C. Schotman, Tom B.M. Steenkamp. Strategic asset allocation with liabilities : Beyond stocks and bonds. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(9) :2939 – 2970, 2008.
- [Hou, 2002] Yuanfeng Hou. Integrating market risk and credit risk : A dynamic asset allocation perspective. *SSRN eLibrary*, 2002.
- [Hou Jin, 2002] Yuanfeng Hou Xiangrong Jin. Optimal investment with default risk. Fame research paper series, International Center for Financial Asset Management and Engineering, 2002.
- [Jalal, 2007] Amine Jalal. Dynamic option-based strategies under downside loss averse preferences. Swiss Finance Institute Research Paper Series 07-34, Swiss Finance Institute, 2007.
- [Jarrow Zhao, 2006] Robert Jarrow Feng Zhao. Downside loss aversion and portfolio management. *Manage. Sci.*, 52(4) :558–566, 2006.
- [John C. Cox Ross, 1985] Jr. John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll Stephen A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2) :385–407, March 1985.
- [Jorion, 2001] P. Jorion. *Value at Risk*. McGraw-Hill, New York, 2001.
- [Jorion, 2003] Philippe Jorion. Portfolio optimization with tracking-error constraints. *Financial Analysts Journal*, 59(5) :70–82, 2003.
- [Kahneman Tversky, 1979] Daniel Kahneman Amos Tversky. Prospect theory : An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47(2) :263–291, March 1979.
- [Karatzas *et al.*, 1987] Ioannis Karatzas, John P. Lehoczky, Steven E. Shreve. Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon. *SIAM J. Control Optim.*, 25(6) :1557–1586, 1987.
- [Kim Omberg, 1996] Tong Suk Kim Edward Omberg. Dynamic nonmyopic portfolio behavior. *Review of Financial Studies*, 9(1) :141–61, 1996.
- [Kouwenberg Ziemba, 2007] Roy Kouwenberg William T. Ziemba. Incentives and risk taking in hedge funds. *Journal of Banking & Finance*, 31(11) :3291 – 3310, 2007.
- [Lei, 2008] Liu Lei. Optimal asset allocation of pension funds under value-at-risk constraints. Working paper, May 2008.
- [Li Wu, 2008] X. Li Z. Wu. Dynamic downside risk measure and optimal investment behaviors. Presented at the 2008 Financial Management Association Europe Annual Meeting, Prague, Czech Republic., 2008.
- [Li *et al.*, 2007] Z. F. Li, H. Yang, X. T. Deng. Optimal dynamic portfolio selection with earnings-at-risk. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 132(3) :459–473, march 2007.
- [Lim Wong, 2010] Andrew E.B. Lim Bernard Wong. A benchmarking approach to optimal asset allocation for insurers and pension funds. *Insurance : Mathematics and Economics*, 46(2) :317 – 327, 2010.

- [Lioui Poncet, 1996] Abraham Lioui Patrice Poncet. Optimal hedging in a dynamic futures market with a nonnegativity constraint on wealth. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 20(6-7) :1101 – 1113, 1996.
- [Lioui Poncet, 2001] Abraham Lioui Patrice Poncet. On optimal portfolio choice under stochastic interest rates. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(11) :1841 – 1865, 2001.
- [Lioui Poncet, 2006] Abraham Lioui Patrice Poncet. Optimal benchmarking for active portfolio managers. Working papers, 2006.
- [Lioui *et al.*, 1996] Abraham Lioui, Pascal Nguyen Duc Trong, Patrice Poncet. Optimal dynamic hedging in incomplete futures markets. *The Geneva Risk and Insurance Review*, 21(1) :103–122, June 1996.
- [Liu, 2001] Jun Liu. Dynamic choice and risk aversion. *SSRN eLibrary*, 2001.
- [Liu, 2007] Jun Liu. Portfolio selection in stochastic environments. *Rev. Financ. Stud.*, 20(1) :1–39, 2007.
- [Liu Pan, 2003] Jun Liu Jun Pan. Dynamic derivative strategies. *Journal of Financial Economics*, 69 :401–430, 2003.
- [Long, 1990] John Jr. Long. The numeraire portfolio. *Journal of Financial Economics*, 26(1) :29–69, July 1990.
- [Lucas Siegmann, 1999] André Lucas Arjen Siegmann. Continuous-time dynamic programming for alm with risk averse loss functions. Working paper, ASTIN Colloquium International Actuarial Association - Brussels, Belgium, 1999 : Toyko, 1999.
- [Margrabe, 1978] William Margrabe. The value of an option to exchange one asset for another. *Journal of Finance*, 33(1) :177–86, March 1978.
- [Markowitz, 1952] Harry M Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(5) :77–91, 1952.
- [Markowitz, 1959] Harry M Markowitz. *Portfolio Selection*. (First Edition). New York : John Wiley and Sons, 1959.
- [Martellini, 2006] Lionel Martellini. Managing pension assets : From surplus optimization to liability-driven investment. Working paper, Edhec Risk and Asset Management Research Center, 2006.
- [Menoncin, 2003] Francesco Menoncin. Optimal real consumption and asset allocation for a hara investor with labour income. Discussion Papers (IRES - Institut de Recherches Economiques et Sociales) 2003015, Université catholique de Louvain, Institut de Recherches Economiques et Sociales (IRES), 2003.
- [Menoncin Scaillet, 2003] Francesco Menoncin Olivier Scaillet. Mortality risk and real optimal asset allocation for pension funds. Fame research paper series, International Center for Financial Asset Management and Engineering, 2003.
- [Merton, 1971] R. C. Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3 :373–413, 1971.
- [Merton, 1973] R. C. Merton. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, 41(5) :867–887, 1973.
- [Merton, 1990] R. C. Merton. *Continuous-Time Finance*. Basil Blackwell, Inc. 1990 ; Revised Edition 1992, 1990.
- [Munk *et al.*, 2004] Claus Munk, Carsten Sorensen, Tina Nygaard Vinther. Dynamic asset allocation under mean-reverting returns, stochastic interest rates, and inflation uncertainty : Are popular recommendations consistent with rational behavior ? *International Review of Economics & Finance*, 13(2) :141–166, 2004.
- [Nawrocki, 1999] David Nawrocki. A brief history of downside risk measures. *Journal of Investing*, 8(3) :9–25, Fall 1999.
- [Nguyen Portait, 2002] Pascal Nguyen Roland Portait. Dynamic asset allocation with mean variance preferences and a solvency constraint. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(1) :11 – 32, 2002.
- [Omberg, 2000] E. Omberg. Non-myopic asset-allocation with stochastic interest rates. , 2000.
- [Perold Sharpe, 1988] André F. Perold William F. Sharpe. Dynamic strategies for asset allocation. *Financial Analysts Journal*, 44(1) :16–27, 1988.
- [Rockafellar Uryasev, 2000] R. Tyrrell Rockafellar Stanislav Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2 :21–41, 2000.

- [Roll, 1992] R. Roll. A mean-variance analysis of tracking error. *Journal of Portfolio Management*, 13–22, 1992.
- [Romaniuk, 2007] Katarzyna Romaniuk. The optimal asset allocation of the main types of pension funds : a unified framework. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 32(2) :113–128, December 2007.
- [Roy, 1952] A. D. Roy. Safety first and the holding of assets. *Econometrica*, 20(3) :431–449, 1952.
- [Rudolf et al., 1999] Markus Rudolf, Hans-Jürgen Wolter, Heinz Zimmermann. A linear model for tracking error minimization. *Journal of Banking & Finance*, 23(1) :85 – 103, 1999.
- [Runggaldier, 2003] W.J. Runggaldier. On stochastic control in finance. in : *Mathematical systems theory in biology, communication, computation and finance. IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Mathematical Systems Theory in Biology, Communication, Computation and Finance*, 134 :317–344, 2003.
- [Sangvinatsos Wachter, 2003] Antonios A. Sangvinatsos Jessica A. Wachter. Does the failure of the expectations hypothesis matter for long-term investors ? *SSRN eLibrary*, 2003.
- [Sorensen, 1999] Carsten Sorensen. Dynamic asset allocation and fixed income management. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34(04) :513–531, December 1999.
- [Sorensen, 2007] Carsten Sorensen. Interest rate uncertainty and strategic asset allocation with borrowing and short sales constraints. *SSRN eLibrary*, 2007.
- [Sorensen Trolle, 2004] C. Sorensen A. B. Trolle. Dynamic asset allocation and latent variables. Working paper, 2004.
- [Stracca, 2005] Livio Stracca. Delegated portfolio management : A survey of the theoretical literature. *SSRN eLibrary*, 2005.
- [Tepla, 2001] Lucie Tepla. Optimal investment with minimum performance constraints. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(10) :1629–1645, October 2001.
- [Van Binsbergen Brandt, 2007] Jules H. Van Binsbergen Michael W. Brandt. Optimal asset allocation in asset liability management. *SSRN eLibrary*, 2007.
- [Vasicek, 1977] O. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2) :177–188, November 1977.
- [Wachter, 2002] Jessica A. Wachter. Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns : An exact solution for complete markets. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37(1) :63–91, Mar 2002.
- [Wagner, 2002] N Wagner. On a model of portfolio selection with benchmark. *Journal of Asset Management*, 3(1) :55 – 65, 2002.
- [Walder, 2002] Roger Walder. Dynamic allocation of treasury and corporate bond portfolios. FAME Research Paper Series rp64, International Center for Financial Asset Management and Engineering, 2002.
- [Wang, 1999] M. Wang. Multiple-benchmark and multiple-portfolio optimization. *Financial Analyst Journal*, 55(1) :63–72, Jan 1999.
- [Zhao, 2007] Yonggan Zhao. A dynamic model of active portfolio management with benchmark orientation. *Journal of Banking Finance*, 31(11) :3336 – 3356, 2007.
- [Zhao Ziemba, 2000] Yonggan Zhao William T. Ziemba. A dynamic asset allocation model with downside risk control. *Journal of Risk*, 3(8), 2000.