



HAL
open science

Étude mathématique de Trous Noirs et de leurs données initiales en Relativité Générale

Julien Cortier

► **To cite this version:**

Julien Cortier. Étude mathématique de Trous Noirs et de leurs données initiales en Relativité Générale. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2011. Français. NNT: . tel-00629802

HAL Id: tel-00629802

<https://theses.hal.science/tel-00629802>

Submitted on 6 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier

THÈSE

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Montpellier II
Discipline : Mathématiques
École Doctorale : Information, Structures et Systèmes

présentée et soutenue publiquement par

Julien CORTIER

le 6 septembre 2011

**Étude mathématique de Trous Noirs et de leurs
données initiales en Relativité Générale**

Jury :

M. Philippe CASTILLON	Maître de conférences à l'Univ. Montpellier 2	Examineur
M. Piotr T. CHRUSCIEL	Professeur à l'Univ. de Vienne	Directeur de thèse
M. Erwann DELAY	Maître de conférences à l'Univ. d'Avignon	Examineur
M. Marc HERZLICH	Professeur à l'Univ. Montpellier 2	Directeur de thèse
M. James ISENBERG	Professeur à l'Univ. de l'Oregon	Rapporteur
M. Harvey REALL	Professeur à l'Univ. de Cambridge	Rapporteur
M. Abdelghani ZEGHIB	Directeur de recherche CNRS à l'ENS Lyon	Président

Étude mathématique de Trous Noirs et de leurs données initiales en Relativité Générale

Résumé : L'objet de cette thèse est l'étude mathématique de familles d'espaces-temps satisfaisant aux équations d'Einstein de la Relativité Générale. Deux approches sont considérées pour cette étude. La première partie, composée des trois premiers chapitres, examine les propriétés géométriques des espaces-temps d'Empanan-Reall et de Pomeransky-Senkov, de dimension 5. Nous montrons qu'ils contiennent un trou noir, dont l'horizon des événements est à sections compactes non-homéomorphes à la sphère. Nous en construisons une extension analytique, et prouvons que cette extension est maximale, et unique dans une certaine classe d'extensions pour les espaces-temps d'Empanan-Reall. Nous établissons ensuite le diagramme de Carter-Penrose de ces extensions, puis analysons la structure de l'ergosurface des espaces-temps de Pomeransky-Senkov. La deuxième partie est consacrée à l'étude de données initiales, solutions des équations des contraintes, induites par les équations d'Einstein. Nous effectuons un recollement d'une classe de données initiales avec des données initiales d'espaces-temps de Kerr-Kottler-de Sitter, en utilisant la méthode de Corvino. Nous construisons, d'autre part, des métriques asymptotiquement hyperboliques en dimension 3, satisfaisant les hypothèses du théorème de masse positive à l'exception de la complétude, et ayant un vecteur moment-énergie de genre causal arbitraire.

Mots clés : Géométrie Lorentzienne, géométrie riemannienne, espaces-temps, extensions analytiques, données initiales, équations des contraintes, vecteur de moment-énergie.

Mathematical study of Black Hole spacetimes and of their initial data in General Relativity

Summary: The aim of this thesis is the mathematical study of families of spacetimes satisfying the Einstein's equations of General Relativity. Two methods are used in this context. The first part, consisting of the first three chapters of this work, investigates the geometric properties of the Empanan-Reall and Pomeransky-Senkov families of 5-dimensional spacetimes. We show that they contain a black-hole region, whose event horizon has non-spherical compact cross sections. We construct an analytic extension, and show its maximality and its uniqueness within a natural class in the Empanan-Reall case. We further establish the Carter-Penrose diagram for these extensions, and analyse the structure of the ergosurface of the Pomeransky-Senkov spacetimes. The second part focuses on the study of initial data, solutions of the constraint equations induced by the Einstein's equations. We perform a gluing construction between a given family of initial data sets and initial data of Kerr-Kottler-de Sitter spacetimes, using Corvino's method. On the other hand, we construct 3-dimensional asymptotically hyperbolic metrics which satisfy all the assumptions of the positive mass theorem but the completeness, and which display an energy-momentum vector of arbitrary causal type.

Keywords: Lorentzian geometry, Riemannian geometry, spacetimes, analytic extensions, initial data, constraint equations, energy-momentum vector.

Discipline : Mathématiques et Applications

Laboratoire : Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier
CNRS UMR 5149 – Case Courrier 051 – Université Montpellier 2
Place Eugène Bataillon – 34095 Montpellier Cedex 5.

Remerciements

Les trois années qui viennent de s'écouler vont rester gravées longtemps en moi, certes en bonne partie pour leur fort contenu scientifique. Pour plus de détails à ce sujet, je renvoie le lecteur aux 160–et–quelques pages qui suivent. Ces lignes, en revanche, sont dédiées aux personnes qui ont marqué cette période de près ou de loin. Je ne peux malheureusement pas toutes les citer, mais je ne les oublie pas, et c'est aussi grâce à elles que j'ai pu traverser l'étendue de ces trois années de thèse !

C'est un plaisir de commencer ces remerciements en nommant mes deux directeurs de thèse, Piotr Chruściel et Marc Herzlich. Ils m'ont chacun, à leur manière, fait rentrer dans le monde de la Recherche. Je suis particulièrement reconnaissant à Piotr de m'avoir ouvert les portes de la grande famille des mathématiciens relativistes, à l'occasion de nombreuses invitations à des conférences (en Suède, en Allemagne, en Écosse...), et d'avoir facilité mes séjours à Oxford au Mathematical Institute. Il a su me pousser et m'encourager dans mon travail, en me faisant prendre part à des collaborations fructueuses. Marc s'est quant à lui chargé de mon suivi lors de mon retour à Montpellier. Il m'a proposé de nombreuses et passionnantes nouvelles pistes de travail en géométrie et en analyse géométrique. Les échanges que j'ai pu avoir avec Marc vont certainement me donner matière à réflexion sur de nouvelles questions de mathématiques pour longtemps, et j'espère encore avoir de nombreuses occasions d'en discuter avec lui. S'il y a bien une chose qui caractérise Marc et Piotr, c'est de ne pas compter leurs heures de travail, et ils ont su se montrer d'une grande disponibilité malgré un emploi du temps déjà bien chargé. La qualité de la rédaction et les idées présentes dans ce travail leur doivent beaucoup, et je mesure la chance que j'ai eue d'évoluer sous leurs yeux avisés.

Je suis reconnaissant à James Isenberg et à Harvey Reall d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. En plus des pages de calculs, ils ont été confrontés à la difficulté de devoir lire certaines parties en français. Je les en remercie.

Je suis très heureux de compter Philippe Castillon, Erwann Delay et Abdelghani Zeghib parmi les membres de mon jury et les remercie de leur intérêt pour mon travail. J'ai pu tirer parti de l'expertise de Philippe lors de discussions sur des problèmes de surfaces minimales, que cela soit dans un bureau du bâtiment 9 à Montpellier, ou à bord d'un 747 entre Rio et Paris ! Erwann, en tant que spécialiste des équations des Contraintes et de problèmes de recollement, m'a permis de progresser sur ces questions, ce qui a conduit à la rédaction de la deuxième partie de cette thèse. Enfin, j'ai eu la chance de connaître Ghani à l'ENS Lyon en suivant son cours de M2 sur la géométrie lorentzienne et les équations d'Einstein, en 2008.

Cette thèse porte aussi les marques précieuses d'autres personnes non-présentes dans le jury. Je pense en premier lieu à Jacques Lafontaine. Je le remercie pour l'intérêt constant qu'il a manifesté pour mon travail durant ces trois années, pour avoir partagé son regard perçant de géomètre et les anecdotes historiques sur des mathématicien(ne)s, et pour m'avoir débloqué à plusieurs reprises de certaines des plus naïves de mes interrogations.

À Oxford, j'ai eu le bonheur de rencontrer Sir Roger Penrose, qui m'a offert un exemplaire de son livre *The road to reality*. Je le remercie chaleureusement.

Ma thèse s'étant déroulée la plupart du temps à Montpellier ou à Oxford, je remercie les enseignant-chercheurs et les membres du personnel administratif de l'I3M et du Mathematical Institute qui ont facilité les nombreuses démarches nécessaires au bon déroulement de mon travail de recherche et d'enseignement. Lors de mes déplacements en conférence, j'ai pu bénéficier des connaissances et des conseils de la part de nombreuses personnes. J'ai eu ainsi d'enrichissantes discussions avec Rafe Mazzeo lors de son passage à Montpellier, avec Alfonso Garcìa-Parrado à l'occasion d'une collaboration, et bien d'autres que je ne peux tous citer ici. Merci également à Philippe Delanoë pour l'organisation des séminaires communs d'analyse géométrique au CIRM, à Pierre Bérard et à Fernando Codá-Marques pour l'organisation et l'invitation à une conférence à l'IMPA de Rio de Janeiro, ainsi qu'à Juan Antonio Valiente-Kroon et à Emmanuel Hebey pour m'avoir invité au séminaire de leur département respectif.

Je ne sais pas s'ils liront ces lignes un jour, mais je remercie quand même mes étudiants de L1 et L2 qui ont été plutôt sympas ces trois dernières années et ne m'ont pas rendu fou (si ?).

Durant mes études supérieures, certains professeurs m'ont profondément influencé par la qualité de leur enseignement et par leur enthousiasme. Je pense en premier lieu à Renaud Skrzypek et à Marc Venturi, mes professeurs de physique en CPGE au lycée Carnot de Dijon. L'un va rester pour moi un modèle de pédagogie (par exemple en avalant des carrés de chocolat tout en courant dans les escaliers de l'amphi, pour illustrer la conservation de l'énergie!), le deuxième est probablement celui qui, par son enthousiasme et ses légendaires questions (« pourquoi le ciel est bleu ? pourquoi la neige est blanche ? »), a éveillé en moi le goût de la recherche. Je n'oublie pas non plus mes autres professeurs, à Dijon ou à l'ENS Lyon, qui m'ont fait aimer les maths et donné envie d'en savoir toujours plus.

Quant à la SAB (Société Astronomique de Bourgogne), elle n'est sûrement pas étrangère à mon intérêt pour tout ce qui est « là-haut ». Merci à elle et à toute sa joyeuse équipe emmenée par le sage Éric !

Des années passées à l'I3M, je vais garder le souvenir de l'atmosphère très agréable qui règne entre thésards et jeunes chercheurs. Un grand merci d'abord à mes co-bureaux de m'avoir supporté, notamment à David Théret qui m'a également prodigué de bons conseils pour l'enseignement, puis à « Junior » et Thomas pour les fous rires, parfois entrecoupés de silence pour pouvoir travailler un peu ! Un grand merci à Afaf qui a été une co-organisatrice énergique et efficace du séminaire des doctorants... je crois même qu'on a fait un carton pour la journée des doctorants !

Je garde un excellent souvenir du temps passé en coloc avec Chloé, ses petits plats qui m'attendaient quand je revenais de l'entraînement, l'organisation de la soirée « vin qui

pique et fromage qui pue », et même ses blagues sur mon franc-parler bourguignon... Merci à Guillaume et à Chloé pour leur relecture attentive d'une partie de cette thèse, à mon grand-frère de thèse Benoît et à Boris pour leurs conseils. Merci à tous les joyeux drilles du labo, notamment Vanessa, Vincent, Hilde, Camilo, Justine, Gwladys, Ioan (assidus aux Estivales!), et tous les autres pour l'ambiance très agréable qui règne dans les couloirs du bâtiment 9, je souhaite à tous une bonne et heureuse continuation !

Une pensée toute particulière et tendre va à Laurianne (et ses incomparables fondants au chocolat!); on a suivi en commun des formations du CIES, et il semblerait qu'on ait maintenant encore beaucoup de choses à se dire et à partager... :)

J'ai une pensée spéciale pour mes amis anciens dijonnais; les anciens du Pôle Espoir Canoë-Kayak et de l'ASPTT Dijon (la belle époque!); ceux de la géniale section sport-étude du lycée J.M. Boivin que je revois avec plaisir au traditionnel « bal du Chânelet » annuel, notamment Anne et Laurélie qui se souviennent parfois mieux que moi du titre de ma thèse en cours de soirée (hum...), mister Jean-François, et les participants d'une impensable soirée thématique « la petite maison dans la prairie », notamment mon ex-coéquipier Rouquin (zut je ne me souviens plus de son prénom) pour les perfs en K2.

Merci aussi aux ex-carnotiens, à Greg, JB, Lapin, Julien, Sarah, et tous les autres, en particulier à Ptéro qui m'emmène faire un week-end de ski de fond avec d'autres mordus... Même pas mal!!

Un mot aussi pour toute la bande des « trimards » de l'ENS-Lyon : les thésards, les docteurs, les jeunes profs, les jeunes parents, les globe-trotters... et toutes leurs trimardises aux quatre coins de la France ou du monde!

Les personnes qui me connaissent savent à quel point le sport est important pour jouer le rôle de soupape d'échappement; merci donc à Claudia, Thomas et Bruno pour les séances de grimpe sur le mur de l'Odysseum, à Chloé et Denis pour la mémorable ascension de la face nord du Pic Saint-Loup! Merci à la « dream team », Claire, Rémy et Rémi pour les fabuleuses sorties escalade et alpinisme en Suisse ou dans les Écrins (avec parfois un bivouac improvisé au dernier moment...), j'espère qu'on se retrouvera bientôt! J'ai également un grand souvenir de la « HRP team » de l'été 2010, pour une envolée d'une semaine sur les crêtes des Pyrénées, merci à Boris, Chloé et Denis qui m'ont accompagné dans cette belle aventure, et pour d'autres sorties sportives passées tous les quatre. Un peu en vrac, merci à Bruno, Boris, Chloé, Claudia, Astrid, Vanessa, Junior, Gwladys et les deux Guillaume pour les séances de tennis/course à pied/ vélo/rando! Merci au Palavas Kayak de Mer, à l'équipe de l'« Ocean Racing » et en particulier à Mister Arnaud pour les séances du samedi matin à toute saison.

Impossible de ne pas associer ma soeur Céline à ces remerciements (sans oublier Nico et mon p'tit Amaury); plus qu'une grande soeur, elle a été mon coach, ma préparatrice mentale, mon mentor, ma seconde de cordée... sans qui je n'aurais pas été bien loin. Merci enfin à mes parents qui m'ont offert cette vie, qui m'ont toujours soutenu et mis dans les meilleures conditions pour réaliser mes rêves...

Table des matières

Introduction	xi
I Étude des Espaces-temps d’Emparan-Reall et de Pomeransky-Senkov	1
1 Extensions analytiques maximales des espaces-temps d’Emparan-Reall	3
1.1 Introduction	4
1.2 The Emparan-Reall space-time	4
1.3 The extension	5
1.4 Global structure	9
1.4.1 The event horizon has $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ topology	9
1.4.2 Inextendibility at $z = \xi_F$	10
1.4.3 Maximality	11
1.4.4 Global hyperbolicity	12
1.4.5 \mathcal{I}	14
1.4.6 Uniqueness?	16
1.5 Geodesics	20
1.5.1 Geodesics in the domain of outer communications away from the horizon	21
1.5.2 Geodesics in the region $\{\xi_F < z < \xi_3\}$	23
1.5.3 Geodesics in the region $\{\xi_3 < z \leq 2\xi_3\}$	31
1.5.4 The Killing horizon	33
2 Anneaux noirs de Pomeransky-Senkov	35
2.1 Introduction	36
2.2 Generalities	40
2.3 The function H	43
2.3.1 $H(x, y) = 0, H(y, x) = 0$	43
2.3.2 $H(y, x) = 0$	44
2.3.3 $H(x, y) = 0$: formulation of the problem	45
2.3.4 $H(x, y) = 0, y = -1$	46
2.3.5 $H(x, y) = 0, x = -1$	47
2.3.6 Connectedness of \mathcal{A}	47
2.4 Extensions across Killing horizons	53

2.4.1	Degenerate case	60
2.5	Some local and global properties	63
2.5.1	Stable causality of the domain of outer communications?	63
2.5.2	No struts	67
2.5.3	Asymptotics of the Pomeransky & Senkov solution	69
2.5.4	The singular set $\{H(x, y) = 0\}$	73
2.5.5	The Kretschmann scalar	85
2.5.6	The event horizon has $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ topology	88
2.6	An extension across $y = -\infty$	89
2.7	The global structure	92
2.8	The Pomeransky-Senkov metric	93
2.9	Emparan-Reall limit of the Pomeransky & Senkov metric	98
3	Structure de l'ergosurface des anneaux noirs de Pomeransky-Senkov	101
3.1	Introduction	102
3.2	Pomeransky-Senkov black rings	102
3.3	The ergosurface	104
II	Problèmes de Géométrie Riemannienne issus de la Relativité Générale	113
4	Problème de recollement pour les données initiales de Kerr-de Sitter	115
4.1	Introduction	116
4.2	Étude de l'opérateur des contraintes	118
4.3	Espaces-temps de Kerr-Kottler-de Sitter	119
4.3.1	Métrique et extension analytique	119
4.3.2	Données initiales induites	122
4.4	Construction des données perturbées	125
4.5	Résolution de l'équation des contraintes	127
4.5.1	Projection sur le noyau \mathcal{K}_0	127
4.5.2	Calcul des charges globales	128
4.5.3	Calcul des charges dans le cas KKdS	129
4.5.4	Charges des données perturbées	130
A	Construction de métriques asymptotiquement hyperboliques à masse de genre espace	133
A.1	Introduction	134
A.2	Métriques asymptotiquement hyperboliques et moment-énergie	136
A.2.1	Métriques asymptotiquement hyperboliques	136
A.2.2	Masse et Moment-Énergie des variétés asymptotiquement hyperboliques	137
A.3	Théorème d'existence	138
A.4	Une application	142

Introduction

En 1915, la théorie de la Relativité Générale voit le jour grâce aux travaux et à l'intuition d'Albert Einstein. Elle consiste à relier une théorie physique de la gravitation à un objet géométrique appelé *espace-temps* et ce grâce aux équations connues sous le nom *d'équations d'Einstein*. L'Univers à grande échelle, de même que le voisinage d'une étoile comme le Soleil, sont décrits dans le cadre de cette théorie comme de tels espaces-temps, de dimension 4. La Relativité Générale a connu d'importants succès en astrophysique depuis près d'un siècle (explication de la précession du périhélie de Mercure, observations de la déviation de la lumière d'une étoile lointaine lors d'une éclipse de Soleil, détection de mirages gravitationnels, etc). Son cadre mathématique, en parallèle, a été source de nombreux développements au cours du 20ème siècle et encore aujourd'hui. Ceux-ci concernent la compréhension de l'ensemble des espaces-temps solutions des équations d'Einstein.

L'objet de cette thèse est d'aborder différents aspects mathématiques de la théorie de la Relativité Générale, par l'étude géométrique et analytique de certaines de ces familles d'espaces-temps.

Le cadre géométrique est le suivant : on part d'une variété lisse \mathcal{M} de dimension $n + 1$, où $n \geq 1$, et on la suppose munie d'une *métrique lorentzienne* \bar{g} , c'est-à-dire d'un champ \bar{g} de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées, de signature $(n, 1)$ ¹. Cette métrique induit, sur chaque espace tangent $T_p\mathcal{M}$ à \mathcal{M} , un cône isotrope, appelé *cône de lumière*, séparant les vecteurs de l'espace tangent selon leur type causal. Ainsi, sous cette convention de signature, un vecteur v de $T_p\mathcal{M}$ est dit de *genre temps* si $\bar{g}(v, v) < 0$, de *genre lumière* s'il est isotrope, c'est-à-dire si $\bar{g}(v, v) = 0$, et de *genre espace* si $\bar{g}(v, v) > 0$ (voir FIGURE 1 ci-dessous). Un vecteur v est dit *causal* s'il est de genre temps ou lumière, c'est-à-dire si $\bar{g}(v, v) \leq 0$. De même que pour les vecteurs, on définit les notions de genre temps, de genre lumière, ou de genre espace pour une courbe Lipschitz γ suivant le genre du champ de vecteur tangent $\dot{\gamma}$. Enfin, ces notions se généralisent aux sous-variétés de \mathcal{M} : une sous-variété de (\mathcal{M}, \bar{g}) est dite de *genre espace* si tous ses vecteurs tangents sont eux-même de genre espace ; la métrique induite est alors riemannienne.

Comme dans le cas riemannien, on associe à une métrique lorentzienne \bar{g} sa connexion de Levi-Civita, ainsi que son tenseur de courbure de Riemann, et ses contractions comme la courbure de Ricci de \bar{g} et la courbure scalaire de \bar{g} .

Nous pouvons à présent définir la notion géométrique centrale en Relativité Générale.

1. signature aussi notée $(-, +, \dots, +)$.

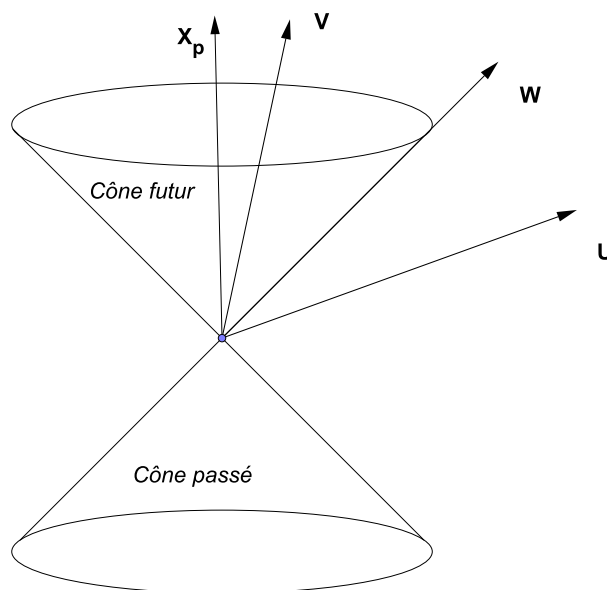


FIGURE 1 – Cône de lumière dans un espace tangent $T_p\mathcal{M}$.

Le vecteur u est de genre *espace*, soit $\bar{g}(u, u) > 0$, le vecteur v est de genre *temps*, $\bar{g}(v, v) < 0$, et w est un vecteur de genre *lumière*, ou isotrope, soit $\bar{g}(w, w) = 0$. Les vecteurs v et w sont de plus *orientés vers le futur*, soit $\bar{g}(X_p, v) < 0$ et $\bar{g}(X_p, w) < 0$.

Définition Une variété lorentzienne (\mathcal{M}, \bar{g}) est appelée *espace-temps* si \mathcal{M} est connexe, orientée et si (\mathcal{M}, \bar{g}) est orientée en temps, c'est-à-dire s'il existe un champ de vecteurs X tangent à \mathcal{M} de genre temps : $\bar{g}(X, X) < 0$.

Cette *orientation en temps* permet de définir globalement sur \mathcal{M} une notion de *futur* et de *passé*. En effet, si X est un champ de vecteurs de genre temps, on dit qu'un vecteur $v \in T_p\mathcal{M}$, causal, est *orienté vers le futur* (resp. *vers le passé*) si $\bar{g}(v, X_p) < 0$ (resp. > 0). Autrement dit, c'est la direction de X_p dans le cône de lumière de $T_p\mathcal{M}$ qui définit le futur (et la direction opposée le passé), c'est-à-dire qu'un vecteur causal v de $T_p\mathcal{M}$ est orienté vers le futur s'il est dans le même demi-cône que X_p (voir la FIGURE 1).

L'exemple le plus simple d'espace-temps est l'espace de *Minkowski*, défini par

$$(\mathcal{M}, \bar{g}) = (\mathbb{R}^4, \eta) ; \eta = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

C'est l'espace-temps de la relativité restreinte. Pour cet exemple, le champ de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial t}$ donne une orientation en temps.

Dans un espace-temps, cette notion d'orientation en temps s'étend aux courbes Lipschitz $s \rightarrow \gamma(s)$, suivant la direction de $\dot{\gamma}$. Ainsi, dans la description relativiste de l'Univers, un signal lumineux ou un objet massif parcourent l'espace-temps selon une courbe causale orientée vers le futur.

Parmi les espaces-temps, on s'intéressera plus particulièrement à la classe des espaces-

temps solutions des *équations d'Einstein*. Celles-ci, portant sur la métrique \bar{g} , s'écrivent

$$\text{Ric}(\bar{g}) - \frac{1}{2}R(\bar{g})\bar{g} + \Lambda\bar{g} = \kappa\mathbb{T}, \quad (1)$$

où $\text{Ric}(\bar{g})$ est le tenseur de Ricci de \bar{g} , $R(\bar{g})$ est sa courbure scalaire, \mathbb{T} est le tenseur d'énergie-impulsion, Λ et κ sont des constantes. Le tenseur \mathbb{T} encode les interactions physiques non-gravitationnelles, telles que les interactions électromagnétiques, les interactions d'un fluide, etc. La constante Λ est la *constante cosmologique*, dont le signe joue un rôle majeur sur la structure des solutions de (1). Physiquement parlant, les équations d'Einstein (1) relient la courbure de l'espace-temps (\mathcal{M}, \bar{g}) (le membre de gauche de (1)) au contenu physique de l'espace-temps.

Plus précisément, les espaces-temps à l'étude dans ce travail seront solutions des *équations d'Einstein du vide*, de dimension $n + 1 \geq 3$, c'est-à-dire solutions des équations d'Einstein dans le cas où $\mathbb{T} = 0$. Dans ce cas, on peut réécrire (1) comme

$$\text{Ric}(\bar{g}) = \frac{2\Lambda}{n-1}\bar{g}. \quad (2)$$

Historiquement, le cas $n = 3$ a été – de loin – le plus étudié, pour des raisons physiques évidentes. En effet, d'un point de vue astrophysique, l'Univers ou encore l'espace-temps au voisinage d'étoiles sont modélisés par des espaces-temps de dimension $n + 1 = 4$. En dépit de nombreux travaux et avancées, l'équation (2) et ses solutions ne sont pas encore totalement comprises d'un point de vue mathématique.

On peut tout de même commencer par citer des solutions « triviales » de (2) suivant le signe de Λ . Pour $\Lambda = 0$, on retrouve l'espace-temps de Minkowski défini par (\mathbb{R}^{n+1}, η) , également noté $\mathbb{R}^{1,n}$ et déjà mentionné ci-dessus en dimension $n + 1 = 4$. En dimension $n + 1$ quelconque, la métrique lorentzienne η s'écrit

$$\eta = -dt^2 + \delta,$$

où δ est la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n . Pour $\Lambda > 0$, l'espace-temps de *de Sitter*, noté dS^{n+1} , est solution de (2). Il est à la géométrie lorentzienne ce que la sphère est à la géométrie euclidienne. En effet, il peut se définir comme étant une hypersurface de \mathbb{R}^{n+2} :

$$dS^{n+1} := \{(x^0, x^1, \dots, x^{n+1}) \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

muni de la métrique induite par la métrique de Minkowski de \mathbb{R}^{n+2} . Pour $\Lambda < 0$, l'espace-temps d'*Anti-de Sitter*, noté AdS^{n+1} , est solution de (2). On peut le voir comme l'analogue lorentzien de l'espace hyperbolique en géométrie euclidienne. En effet, il peut se voir lui aussi comme une hypersurface de \mathbb{R}^{n+2} :

$$AdS^{n+1} := \{(x^0, x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \mid -(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = -1\}$$

muni de la métrique induite par $-(dx^0)^2 - (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^{n+1})^2$.

D'autres familles de solutions sont connues. La plus célèbre famille parmi les « non-triviales » est la famille de *Schwarzschild*, découverte en 1916, solution de (2) dans le

cas $\Lambda = 0$. Dans le cas $n + 1 = 4$, ces solutions modélisent l'espace-temps autour d'un astre immobile, isolé, à symétrie sphérique. Elles sont paramétrées par un nombre $m > 0$, correspondant à la masse de l'astre. En coordonnées locales, elles admettent comme expression :

$$\bar{g}_m = -f^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f^2(r)} + r^2 g_{\mathbb{S}^2} \quad (3)$$

sur $\mathbb{R} \times \{r > 2m\} \times \mathbb{S}^2$, où $f^2(r) = 1 - \frac{2m}{r}$ et où $g_{\mathbb{S}^2}$ est la métrique canonique ronde sur la sphère unité \mathbb{S}^2 . Lorsque Λ est quelconque et si $n \geq 3$, il suffit de remplacer $f^2(r)$ par $1 - \frac{2m}{r^{n-2}} - \frac{2\Lambda}{n(n-1)r^2}$ dans la formule ci-dessus. On obtient alors à nouveau des solutions de (2) définies sur un certain intervalle de r dans lequel $f^2 > 0$. Ces solutions sont dites de *Kottler-(Schwarzschild)-de Sitter* si $\Lambda > 0$ et de *Kottler-(Schwarzschild)-Anti-de Sitter* si $\Lambda < 0$. Une autre famille remarquable de solutions dans le cas $\Lambda = 0$, $n = 3$ est la famille de Kerr, découverte en 1963, paramétrée par deux paramètres m (la masse) et a (le moment angulaire par unité de masse). Elles admettent l'expression suivante en coordonnées locales (dites de Boyer-Lindquist) :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{m,a} = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + d\theta^2 \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} (adt - (r^2 + a^2)d\varphi)^2 \\ - \frac{\Delta_r}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2, \end{aligned} \quad (4)$$

avec

$$\Delta_r = r^2 + a^2 - 2mr, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

et

$$\mathcal{M}_{m,a} = \{(t, r, \theta, \varphi) : t \in \mathbb{R}, r > r_+, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\} = \mathbb{R} \times (r_+, \infty) \times \mathbb{S}^2,$$

où r_+ est la plus grande racine de Δ_r . Elles constituent en astrophysique un modèle précis de l'espace-temps autour d'une étoile en rotation, telle que le Soleil. La condition $m \geq |a|$ préserve la métrique de toute singularité dans $\mathcal{M}_{m,a}$. On retrouve d'ailleurs la famille de Schwarzschild en imposant $a = 0$.

Ces espaces-temps de Schwarzschild et de Kerr admettent plusieurs propriétés remarquables : ainsi, elles appartiennent à la classe des solutions de (2) *asymptotiquement plates*. Par définition, celles-ci contiennent une hypersurface \mathcal{S} , de genre espace, difféomorphe au complémentaire d'une boule de rayon R dans \mathbb{R}^3 , et telle que la métrique riemannienne induite sur \mathcal{S} tende vers la métrique euclidienne quand la coordonnée radiale r tend vers $+\infty$.

Les solutions de Schwarzschild et de Kerr sont de surcroît *stationnaires*. Cela signifie qu'elles admettent un champ de Killing X complet et de genre temps assez loin dans la région asymptotiquement plate (dans le cas des métriques de Schwarzschild (3) et de Kerr (4) écrites ci-dessus en coordonnées locales, $X = \partial_t$ convient).

Elles ont de plus la propriété d'admettre un prolongement, dans un espace-temps strictement plus grand, lui-même solution des équations d'Einstein (2). Dans les deux cas, cette *extension* a la particularité de contenir un *trou noir*, qui, dans ces exemples, est

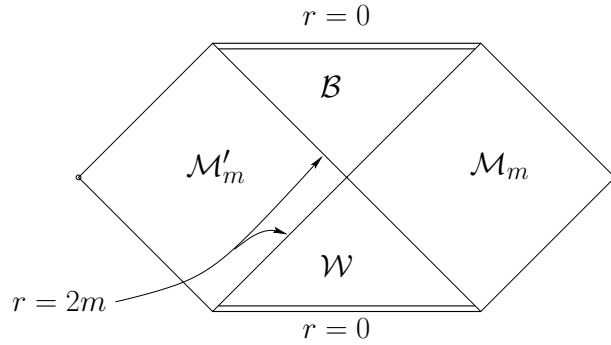


FIGURE 2 – Le diagramme de Carter-Penrose de l’extension $\widehat{\mathcal{M}}_m$ de l’espace-temps de Schwarzschild $\mathcal{M} = \mathcal{M}_m$ à travers l’horizon des événements $\{r = 2m\}$, de *bifurcation*. La région \mathcal{B} est un trou noir, \mathcal{W} est un trou blanc, et \mathcal{M}'_m est une deuxième région asymptotiquement plate, isométrique à \mathcal{M}_m . La frontière signalée par $r = 0$ indique le lieu où la courbure de $\widehat{\mathcal{M}}_m$ devient singulière. On étend ainsi r comme une coordonnée définie globalement sur $\widehat{\mathcal{M}}_m$. Chaque point du diagramme peut être vu comme une sphère de dimension 2 et de rayon r .

une partie de laquelle aucune courbe causale orientée vers le futur ne peut sortir. Dans l’exemple de l’espace-temps de Schwarzschild ci-dessus de paramètre $m > 0$, l’espace-temps initial $\{r > 2m\}$ s’étend en un espace-temps lisse sur un domaine où la coordonnée r est à valeurs dans $(0, +\infty)$, et ce malgré une singularité apparente en $r = 2m$. Cette extension a la propriété d’être *analytique*, ce qui entraîne que la relation (2) est conservée lors de l’extension. La région $\mathcal{B} := \{0 < r < 2m\}$ est un trou noir au sens ci-dessus, sa frontière $\{r = 2m\}$, appelée l’*horizon des événements*, est une hypersurface difféomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ de l’espace-temps étendu $\widehat{\mathcal{M}}_m$ (les sections compactes sont à topologie sphérique).

On peut visualiser à l’aide du *diagramme de Carter-Penrose* (FIGURE 2) l’espace-temps $\widehat{\mathcal{M}}_m$ obtenu comme extension analytique *maximale* de l’espace-temps de Schwarzschild \mathcal{M}_m , aussi appelée extension de *Kruskal-Szekeres*, voir [Kru60]. On trouve sur ce diagramme la région \mathcal{W} , obtenue également comme une région pour laquelle on a $0 < r < 2m$, tout en étant distincte de \mathcal{B} . L’horizon total des événements, repéré par $r = 2m$ sur la FIGURE 2, est dit de *bifurcation*, c’est-à-dire qu’il existe des coordonnées u, v telles que $\{r = 2m\} = \{uv = 0\}$. On peut obtenir ce diagramme comme une compactification conforme du quotient de $\widehat{\mathcal{M}}_m$ par le groupe d’isométries $SO(3)$ (voir [HE73]).

Les espaces-temps de Kerr *non-dégénérés*, c’est-à-dire dont les paramètres m et a vérifient $m > |a|$, admettent également une extension analytique maximale, que l’on peut visualiser par son diagramme de Carter-Penrose de la FIGURE 3 (voir aussi [BL67, Car68]). Il est important de noter que ce diagramme, contrairement à celui de Schwarzschild, ne s’obtient pas par transformation conforme d’un quotient de l’espace-temps de Kerr. Il représente en revanche de manière exacte les relations causales entre les différentes régions de $\widehat{\mathcal{M}}_{m,a}$ et la structure des horizons (ici de bifurcation) entre ces régions.

Il est à noter que dans le cas dit *dégénéré* où $m = |a|$, la structure globale change radicalement, puisque les deux horizons $\{r = r_c\}$ et $\{r = r_h\}$ sont alors confondus.

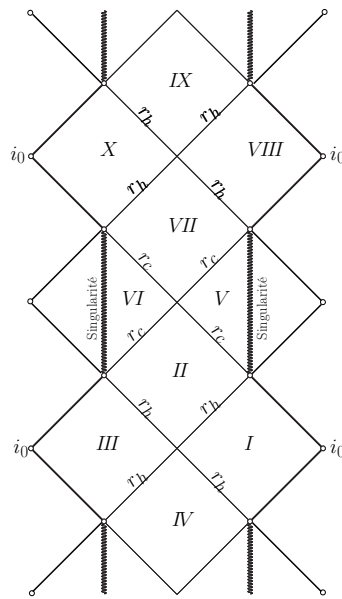


FIGURE 3 – Diagramme de Carter-Penrose de l’extension $\widehat{\mathcal{M}}_{m,a}$ de l’espace-temps de Kerr $\mathcal{M}_{m,a}$, coïncidant avec la région I .

Le point i_0 désigne une région asymptotiquement plate, l’horizon des événements (ici de bifurcation) du trou noir s’écrit $\{r = r_h\}$, alors que $\{r = r_c\}$, où $r_c < r_h$, désigne un second horizon « intérieur ». L’ensemble singulier apparaît dans les régions (isométriques) V et VI .

Dans les espaces-temps stationnaires (\mathcal{M}, \bar{g}) , il est possible de définir les notions de *trou noir*, de *trou blanc* et d'*horizons des événements* sans recours à une écriture de la métrique en coordonnées. Pour ce faire, on définit d'abord $\mathcal{S}_{ext} \subset \mathcal{S}$ une région asymptotiquement plate sur laquelle le champ de vecteurs X est de genre temps, puis \mathcal{M}_{ext} , la région *extérieure* de \mathcal{M} , égale à l'union des orbites selon le flot de X des points de \mathcal{S}_{ext} .

Le *domaine des communications extérieures*, noté $\langle\langle \mathcal{M}_{ext} \rangle\rangle$, est alors défini comme l'ensemble des points de \mathcal{M} reliés à la fois par une courbe de genre temps futur et une courbe de genre temps passé à \mathcal{M}_{ext} . Autrement dit, $\langle\langle \mathcal{M}_{ext} \rangle\rangle$ est l'ensemble des points par lesquels passent des courbes de genre temps pouvant partir à l'infini vers le futur et vers le passé.

Si U est une partie de \mathcal{M} , on définit *le futur de U* , noté $I^+(U)$, comme l'ensemble des points atteints par une courbe de genre temps, orientée vers le futur et partant de U , et *le passé de U* , noté $I^-(U)$, de manière similaire en remplaçant « futur » par « passé ». On a alors

$$\langle\langle \mathcal{M}_{ext} \rangle\rangle = I^+(\mathcal{M}_{ext}) \cap I^-(\mathcal{M}_{ext}) .$$

Le *trou noir* \mathcal{B} de (\mathcal{M}, \bar{g}) est défini comme la partie de \mathcal{M} dont aucun point n'est relié par une courbe de genre temps futur au domaine des communications extérieures, soit

$$\mathcal{B} = \mathcal{M} \setminus I^-(\mathcal{M}_{ext}) = \mathcal{M} \setminus I^-(\langle\langle \mathcal{M}_{ext} \rangle\rangle)$$

et son *horizon des événements* \mathcal{H}^+ comme sa frontière : $\mathcal{H}^+ = \partial\mathcal{B}$. Physiquement parlant, c'est la partie de l'espace-temps de laquelle aucun observateur situé « à l'infini » ne peut recevoir de signal. On définit de la même manière le *trou blanc* \mathcal{W} (parfois appelé *fontaine blanche*) en remplaçant « futur » par « passé », et son horizon des événements $\mathcal{H}^- = \partial\mathcal{W}$. L'*horizon des événements de \mathcal{M}* , noté \mathcal{H} , est l'union des deux horizons précédents, soit $\mathcal{H} := \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$.

Un dernier ensemble remarquable des espaces-temps stationnaires est leur *ergosurface*, notée \mathcal{E} . Celle-ci est par définition le lieu en lequel le champ de vecteur de Killing *stationnaire* X , c'est-à-dire celui de genre temps dans la région asymptotique, devient de genre lumière : on écrit donc $\mathcal{E} = \{\bar{g}(X, X) = 0\}$. Cet ensemble a une importance particulière en astrophysique, puisqu'il est relié à un processus d'extraction d'énergie d'un trou noir (le processus de Penrose) (voir [HE73], p. 327). Pour les solutions de Kerr, une telle ergosurface existe et est distincte de l'horizon des événements ; elle est située dans le domaine des communications extérieures. En des termes plus physiques, aucun corps suivant une courbe causale située en-dessous de l'ergosurface ne peut apparaître immobile pour un observateur à « l'infini ».

Une des grandes questions de la relativité générale mathématique est de savoir si les espaces-temps de Kerr sont les seuls espaces-temps de dimension $n + 1 = 4$, asymptotiquement plats, stationnaires, solutions de (2) avec $\Lambda = 0$. En astrophysique, cela revient à se demander si le stade ultime de l'effondrement d'une étoile sur elle-même produit un trou noir uniquement caractérisé par la masse et le moment angulaire de l'étoile. Des réponses affirmatives ont été données au problème mathématique, sous des hypothèses supplémentaires d'analyticité et de « bon comportement » de l'horizon des événements, par différents auteurs au cours des dernières décennies. On renvoie le lecteur à [CLC08]

pour une description de ces travaux et pour un énoncé précis. Le problème général étant toujours ouvert (notamment en ne supposant que la lisseté au lieu de l'analyticité).

Plus récemment, le besoin de mieux connaître les solutions des équations d'Einstein en dimension plus grande s'est fait sentir, notamment en raison des avancées en gravitation quantique de ces dernières années. Si l'on retrouve bien les analogues des espaces-temps de Schwarzschild (voir ci-dessus avec la formule générale (3)) et de Kerr (les solutions de Myers-Perry, voir [MP86]), il est apparu, en dimension $n + 1 = 5$, de nouvelles familles de solutions. Certaines de celles-ci, découvertes en 2001 par Emparan et Reall ([ER02]), et leurs généralisations découvertes en 2006 par Pomeransky et Senkov ([PS06]), font l'objet de la **première partie**, composée des trois premiers chapitres de cette thèse.

Ces solutions ont avant tout la propriété remarquable de posséder un horizon des événements ayant des sections compactes homéomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, à la différence des solutions de Myers-Perry évoquées ci-dessus, dont les sections compactes de l'horizon des événements sont à topologie sphérique. Ces espaces-temps sont communément appelés *anneaux noirs* en raison de la composante \mathbb{S}^1 dans la topologie de l'horizon des événements. Les espaces-temps d'Emparan-Reall forment ainsi la première famille de solutions de (2) à topologie non-sphérique des sections compactes de l'horizon des événements.

Il est intéressant de noter à ce stade que la seule topologie autorisée pour les sections de l'horizon des événements d'un trou noir d'un espace-temps de dimension $n + 1 = 4$ est la topologie sphérique d'après le théorème de topologie d'Hawking ([Haw72]), alors qu'en dimension $n + 1$, $n \geq 3$, un résultat de Galloway et Schoen ([GS06]), généralisant celui d'Hawking, autorise les topologies de variétés compactes orientables de dimension $n - 1$ de type de Yamabe strictement positif. En particulier, pour $n + 1 = 5$, la topologie de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ est bien autorisée.

D'autre part, ces espaces-temps ont la propriété d'être asymptotiquement plats et stationnaires, tout comme les espaces-temps de Schwarzschild et de Myers-Perry de dimension 5. Ceci empêche donc toute généralisation naïve du théorème d'unicité de Kerr en dimension 4 à un équivalent en dimension 5 avec les solutions de Myers-Perry.

L'objet du **Chapitre 1** de cette thèse, réalisé en collaboration avec Piotr T. Chruściel, est de poursuivre l'étude de la structure des solutions d'Emparan-Reall, formant une famille à deux paramètres d'espaces-temps. Nous montrons que l'on peut prolonger ces métriques sur un espace-temps strictement plus grand, solution de (2) avec $\Lambda = 0$, et contenant un trou noir.

La question qui se pose alors est de savoir si cette extension, analytique, $(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{g})$ de l'espace-temps d'Emparan-Reall (\mathcal{M}, \bar{g}) est *maximale*. Le résultat suivant, que nous démontrons dans le Chapitre 1, y apporte une réponse affirmative :

Théorème A *Toute géodésique causale maximale étendue de $(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{g})$ est soit complète, soit rencontre une singularité de courbure à paramètre affine fini.*

Dans un espace-temps, une géodésique causale vérifiant cette propriété sera dite *s-complète*, et un espace-temps dont toutes les géodésiques causales sont s-complètes sera appelé *s-complet*.

Cette extension a en outre la propriété d'être *globalement hyperbolique*, cela signifiant que $\widehat{\mathcal{M}}$ admet une hypersurface \mathcal{S} , de genre espace, telle que toute courbe causale in-extensible de $\widehat{\mathcal{M}}$ intersecte \mathcal{S} une et une seule fois. Une telle hypersurface \mathcal{S} est dite *hypersurface de Cauchy*.

Cette propriété se reformule en écrivant que $\widehat{\mathcal{M}}$ est égal au *domaine de dépendance* de \mathcal{S} , c'est-à-dire que $\widehat{\mathcal{M}}$ est « complètement déterminée » par \mathcal{S} .

Ces propriétés sont résumées dans le *diagramme de Penrose* de $(\widehat{\mathcal{M}}, \hat{g})$, qui représente les relations causales entre les différentes régions de l'espace-temps ajoutées à l'espace-temps initial, cf FIGURE 4. Il apparaît ainsi que $(\widehat{\mathcal{M}}, \hat{g})$ a une structure analogue à celle de l'extension de Kruskal-Szekeres de l'espace-temps de Schwarzschild représenté sur la FIGURE 2.

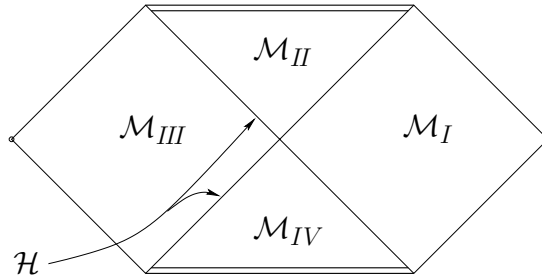


FIGURE 4 – Le diagramme de Carter-Penrose de l'extension $\widehat{\mathcal{M}}$ de l'espace-temps d'Empanan-Reall $\mathcal{M} = \mathcal{M}_I$ à travers l'horizon des événements \mathcal{H} . La région \mathcal{M}_{II} est un trou noir, \mathcal{M}_{IV} est un trou blanc, et \mathcal{M}_{III} est une deuxième région asymptotiquement plate isométrique à \mathcal{M} .

Nous prouvons ensuite le résultat d'unicité suivant (l'unicité s'entendant à isométrie près) :

Théorème B $(\widehat{\mathcal{M}}, \hat{g})$ est unique dans la classe des extensions analytiques de (\mathcal{M}, \bar{g}) qui sont simplement connexes, globalement hyperboliques, et *s-complètes*.

Il est à noter que le résultat ci-dessus est faux si l'on remplace « s-complètes » par « maximales ». Il existe en effet d'autres manières pour un espace-temps d'être maximal, comme discuté à la section 4 du Chapitre 1. La démonstration de ce théorème repose sur le résultat général suivant que nous démontrons également, et qui est une version lorentzienne et généralisée à la *s-complétude* du résultat de [KN63], Théorème 6.3, p. 255 :

Théorème C Soit (\mathcal{M}, g) et (\mathcal{M}', g') deux variétés lorentziennes analytiques de dimension $n + 1$, $n \geq 1$, telles que \mathcal{M} est connexe et simplement connexe et telle que \mathcal{M}' est *s-complète* de genre temps. Alors toute immersion isométrique $f_U : U \hookrightarrow \mathcal{M}'$, d'un ouvert U de \mathcal{M} dans \mathcal{M}' , s'étend de manière unique en une immersion isométrique $f : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}'$.

Après avoir réalisé cette étude pour les espaces-temps d'Empanan-Reall, nous menons dans le **Chapitre 2** un travail similaire pour les métriques de Pomeransky-Senkov, formant une famille à trois paramètres d'espace-temps solutions de (2). Ce travail, présenté

dans cette thèse, a été réalisé en collaboration avec Piotr T. Chruściel et Alfonso García-Parrado Gómez-Lobo. Les solutions de Pomeransky-Senkov décrivent des espaces-temps, possédant eux aussi un horizon des événements homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, avec deux moments angulaires non-nuls autour de deux axes, alors que l'un de ces moments angulaires est nul pour le cas Emparan-Reall. Pour ces raisons, les espaces-temps d'Emparan-Reall sont parfois mentionnés sous le nom d'*anneaux noirs à rotation simple*, alors que ceux de Pomeransky-Senkov sont parfois dénommés *anneaux noirs à rotation double*.

Une partie importante de notre travail sur ces solutions de (2), présenté au Chapitre 2 de cette thèse, consiste d'abord à prouver que ces métriques sont lisses dans les domaines des communications extérieures de ces espaces-temps :

Théorème D *Soit \bar{g} une métrique de Pomeransky-Senkov. Alors \bar{g} est analytique, lorentzienne sur un ouvert \mathcal{M} de \mathbb{R}^5 et (\mathcal{M}, \bar{g}) définit un espace-temps asymptotiquement plat, stationnaire.*

Nous prouvons ensuite que l'on peut étendre analytiquement ces espaces-temps en des espaces-temps strictement plus grand :

Théorème E *Soit (\mathcal{M}, \bar{g}) un espace-temps de Pomeransky-Senkov. Alors (\mathcal{M}, \bar{g}) s'étend analytiquement en un espace-temps $(\widehat{\mathcal{M}}, \hat{g})$ contenant un trou noir, un trou blanc, un horizon des événements et un second horizon interne de bifurcation. Le domaine des communications extérieures $\langle\langle \mathcal{M}_{\text{ext}} \rangle\rangle$ de $\widehat{\mathcal{M}}$ coïncide avec \mathcal{M} .*

Nous démontrons à cette occasion que l'horizon des événements du trou noir d'un espace-temps de Pomeransky-Senkov a la topologie $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, déjà vue dans le Chapitre 1 pour l'horizon des événements d'un espace-temps d'Emparan-Reall.

Comme dans le cas des espaces-temps d'Emparan-Reall, on déduit de ces différentes extensions la structure globale des espaces-temps de Pomeransky-Senkov, résumée dans le diagramme de Penrose de la FIGURE 5, qui est semblable à celui de Kerr ; cela revient à dire que l'extension analytique des solutions de Pomeransky-Senkov réalisée jusqu'ici est partagée, par l'intermédiaire des horizons, en régions dont les liens de causalité sont les mêmes que ceux des différentes régions de l'extension maximale des espaces-temps de Kerr.

Nous étudions ensuite le sous-ensemble de \mathbb{R}^5 , noté Sing , des points correspondants à une singularité de courbure de la métrique \bar{g} . Nous avons prouvé en particulier le résultat suivant, portant sur sa localisation par rapport aux horizons, et sur sa topologie :

Théorème F *L'ensemble singulier Sing d'un espace-temps $(\widehat{\mathcal{M}}, \hat{g})$ de Pomeransky-Senkov est situé « en-deçà » de l'horizon des événements et de l'horizon interne. De plus il est soit homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$, soit homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, soit, dans le cas limite, homéomorphe à un $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ « pincé », suivant les valeurs des paramètres pour cet espace-temps.*

Ainsi, de manière remarquable, la topologie de l'ensemble singulier varie quand on parcourt l'ensemble des métriques de la famille de Pomeransky-Senkov, contrairement à la topologie de l'horizon des événements qui reste égale à celle de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Quant à la localisation de Sing , on la retrouve illustrée dans le diagramme de la FIGURE 5.

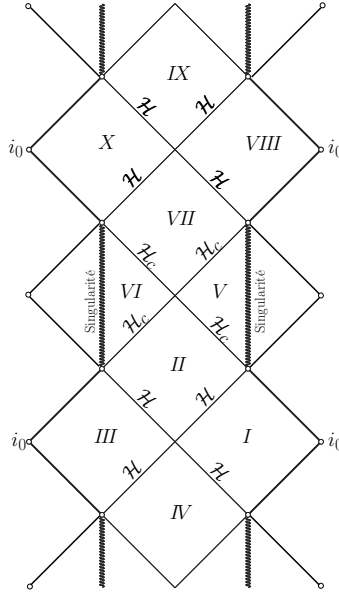


FIGURE 5 – Diagramme de Carter-Penrose de l’extension $\widehat{\mathcal{M}}$ de l’espace-temps de Pomeransky-Senkov \mathcal{M} , coïncidant avec la région I .

Le point i_0 désigne une région asymptotiquement plate, \mathcal{H} l’horizon des événements (de bifurcation) du trou noir, \mathcal{H}_c un second horizon, interne. L’ensemble singulier apparaît dans les régions (isométriques) V et VI .

On prouve finalement que les espaces-temps d’Empanan-Reall du Chapitre 1 sont obtenus comme une limite d’espaces-temps de Pomeransky-Senkov. Ce passage à la limite revient à annuler l’un des deux moments angulaires de l’espace-temps. Pour un espace-temps $(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{g})$ obtenu comme extension analytique d’un espace-temps de Pomeransky-Senkov, la structure causale est différente de celle de l’extension d’un espace-temps d’Empanan-Reall, comme l’illustrent les FIGURES 5 et 4, et ressemble plutôt à la structure causale de l’extension analytique maximale des solutions de Kerr illustré à la FIGURE 3.

Au cours de ce travail, nous avons également traité le cas *dégénéré*. Il s’agit, de manière très vague, d’un régime critique sous lequel la rotation est telle qu’il n’y a plus de « gravité de surface » sur l’horizon des événements. Dans le cas de Kerr, on a vu qu’il est atteint lorsque le paramètre de moment angulaire a prend pour valeur absolue la valeur m du paramètre de masse. Dans le cas de Pomeransky-Senkov, il est atteint pour certaines valeurs limites des paramètres, et comme dans le cas de Kerr, nous réalisons une extension analytique, dont la structure causale est différente de celle du cas *non-dégénéré*. En particulier, l’horizon des événements \mathcal{H} et l’horizon interne \mathcal{H}_c sont alors confondus.

Cette thèse poursuit au **Chapitre 3** l’étude des espaces-temps de Pomeransky-Senkov, plus particulièrement de l’*ergosurface* d’un tel espace-temps. Il est montré dans ce travail que l’ergosurface existe, admet deux composantes, et voit sa topologie varier suivant les valeurs prises par les paramètres de la famille d’espaces-temps, fournissant ainsi une preuve des résultats de Durkee annoncés dans [Dur09].

Théorème G Soit $(\widehat{\mathcal{M}}, \hat{g})$ un espace-temps de Pomeransky-Senkov non-dégénéré et analytiquement étendu. Alors son ergosurface \mathcal{E} existe, et admet deux parties \mathcal{E}^+ et \mathcal{E}^- , où $\mathcal{E}^+ \subset \langle\langle \mathcal{M}_{\text{ext}} \rangle\rangle$ et où \mathcal{E}^- est « en-deçà » de l'horizon interne \mathcal{H}_c .

De plus, \mathcal{E}^- est homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, alors que la topologie de \mathcal{E}^+ est soit $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, soit $\mathbb{R} \times (\mathbb{S}^3 \cup \mathbb{S}^3)$, soit un $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ « pincé ».

Ainsi, comme pour l'ensemble singulier Sing mentionné plus haut, les sections compactes de l'ergosurface externe voient leur topologie varier entre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^3 \cup \mathbb{S}^3$ (union disjointe de deux sphères) lorsque l'on parcourt l'ensemble des valeurs des paramètres de la famille de Pomeransky-Senkov.

Dans tout ce qui précède, il a été question d'étudier certaines familles particulières d'espaces-temps solutions des équations d'Einstein (2). La **deuxième partie** de cette thèse est quant à elle consacrée à une approche analytique du problème d'existence de solutions. Cette approche nous permet dans cette thèse d'établir l'existence de certaines familles de solutions de (2), avec constante cosmologique Λ strictement positive.

L'idée générale de cette approche est de voir les équations d'Einstein comme une *équation d'évolution*, portant sur une variété M de dimension n et sur une métrique riemannienne g sur M . On se pose alors la question suivante : peut-on construire un espace-temps (\mathcal{M}, \bar{g}) de dimension $n + 1$, solution de (2), comme étant la *trajectoire* obtenue après évolution de (M, g) sous cette équation d'évolution ? Si oui, y a-t-il un espace-temps solution maximale de ce problème ? Enfin, y a-t-il unicité ?

Dans un premier temps, il faut se demander quelles sont les conditions que doit satisfaire (M, g) pour pouvoir se plonger en une hypersurface de genre espace d'un espace-temps (\mathcal{M}, \bar{g}) solution de (2). Bien sûr, il est nécessaire pour cela que $g = i^* \bar{g}$ soit la métrique induite sur M par son plongement i dans (\mathcal{M}, \bar{g}) , mais cela ne suffit pas. En effet, g et la seconde forme fondamentale k de M doivent en outre satisfaire les équations suivantes, dites des *contraintes* (voir [BI04, FR00]) :

$$\Phi(g, k) := \begin{pmatrix} R(g) - 2\Lambda - |k|_g^2 + (\text{tr}_g k)^2 \\ 2(\text{div}_g k - d(\text{tr}_g k)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

On remarque que la condition (5) porte uniquement sur (M, g, k) , ne faisant pas intervenir l'espace-temps (\mathcal{M}, \bar{g}) .

Réciproquement, si (M, g) est une variété riemannienne et k un $(0, 2)$ -tenseur symétrique sur M vérifiant (5), alors les théorèmes de Choquet-Bruhat et Choquet-Bruhat-Geroch (voir [FB52] et [CBG69]) assurent qu'il existe un espace-temps (\mathcal{M}, \bar{g}) , solution de (2), et un plongement $i : M \hookrightarrow \mathcal{M}$ tels que g et k sont bien, respectivement, la première et la seconde forme fondamentale sur M induites par ce plongement. De plus, on peut choisir (\mathcal{M}, \bar{g}) et i de sorte que (\mathcal{M}, \bar{g}) soit globalement hyperbolique et que $i(M)$ en soit une hypersurface de Cauchy. (\mathcal{M}, \bar{g}) est en outre unique à plongement isométrique près.

On a ainsi un problème d'évolution *bien posé*, de second ordre sur g . Les conditions initiales sont, à l'ordre 0, le fait que $i^* \bar{g} = g$, et à l'ordre 1 le fait que (g, k) soit solution des équations de contraintes.

Cela nous conduit naturellement à appeler *ensemble de données initiales* un triplet (M, g, k) solution de (5). Les résultats ci-dessus nous incitent donc à chercher des solutions (M, g, k) aux équations des contraintes, puisque cela fournira automatiquement des solutions aux équations d'Einstein.

Une étude d'ensembles de données initiales constitue l'objet du **Chapitre 4**. Différentes méthodes existent pour résoudre (5) sous certaines hypothèses supplémentaires, notamment la *méthode conforme*, développée par Choquet-Bruhat, Lichnerowicz et York. On pourra trouver une introduction claire à cette méthode dans [Hum10], p 84-86, et dans [BI04].

Une autre façon de procéder consiste à examiner les données initiales pour des familles de référence bien connues d'espaces-temps, puis, étant donné un ensemble de données initiales « proches » de l'une d'elles, de les perturber afin de les recoller en des données initiales qui coïncident avec des données initiales de référence dans une région asymptotique.

Les premiers travaux utilisant cette méthode de « recollement » sont dus à Corvino ([Cor00]) en 2000. Il établit ainsi l'existence de données initiales totalement géodésiques ($k = 0$), solutions des équations des contraintes à constante cosmologique nulle (i.e. $R(g) = 0$), asymptotiquement plates et coïncidant avec des données initiales d'un espace-temps de Schwarzschild dans la région asymptotique, mais ne coïncidant pas globalement avec ces données initiales de Schwarzschild.

Ce résultat peut s'interpréter en termes d'espace-temps : il existe des espaces-temps statiques (c'est-à-dire stationnaires et possédant une hypersurface de genre espace en tout point \bar{g} -orthogonale au champ de Killing de genre temps), asymptotiquement plats, solutions des équations d'Einstein (2) avec $\Lambda = 0$, coïncidant avec un espace-temps de Schwarzschild d'une certaine masse m dans la région asymptotique, mais ne coïncidant pas globalement avec cet espace-temps de Schwarzschild.

La méthode utilisée ici a ensuite été reprise par Chruściel-Delay ([CD03]) et Corvino-Schoen ([CS06]) pour aboutir à un résultat analogue pour les espaces-temps de Kerr : si $\Lambda = 0$, et si (g, k) sont des données initiales asymptotiquement plates solutions de (5), on peut déformer (g, k) dans la région asymptotique pour les recoller avec des données initiales d'un espace-temps de Kerr. La déformation est à support compact, et l'on obtient à l'issue du recollement un couple (\tilde{g}, \tilde{k}) qui conserve la propriété d'être solution de (5).

Ces résultats semblent indiquer que les équations d'Einstein autorisent une certaine « flexibilité » de leurs solutions lorsque l'on impose à celles-ci un comportement à l'infini. Toutefois, ceci ne va pas forcément à l'encontre du théorème d'unicité de Kerr évoqué plus haut en dimension 3, puisque l'énoncé de ce théorème impose également des conditions sur l'horizon des événements, qui est « éloigné » de la région asymptotique.

Ces dernières années, des travaux analogues ont été entrepris en ne supposant plus forcément la valeur 0 pour la constante cosmologique Λ . Dans le cas $\Lambda < 0$, Chruściel et Delay ([CD09]) effectuent le recollement de données initiales *asymptotiquement hyperboliques* avec des données initiales d'espaces-temps Kottler-Schwarzschild-Anti de Sitter dans le cas où les données initiales considérées sont de la forme $(M, g, 0)$, c'est-à-dire correspondant à une hypersurface de genre espace totalement géodésique de l'espace-temps. Comme dans le recollement traité par Corvino ([Cor00]), il s'agit donc de déformer la métrique

riemannienne g tout en conservant la courbure scalaire constante, ici $R(g) = 2\Lambda$.

Comme pour le cas asymptotiquement plat, un espace-temps asymptotiquement hyperbolique, ou plutôt *asymptotiquement Anti-de Sitter*, décrit physiquement l'espace-temps autour d'un système isolé, sauf qu'il faut en plus prendre en compte le rôle joué par la constante $\Lambda < 0$. Il contient par définition une hypersurface de genre espace, difféomorphe au complémentaire d'une boule dans \mathbb{R}^n , telle que la métrique g induite par \bar{g} tend vers la métrique hyperbolique lorsque la coordonnée radiale r tend vers l'infini.

L'intérêt d'effectuer de tels recollements apparaît lorsque l'on étudie certains invariants globaux des variétés riemanniennes (ou plus généralement de données initiales) asymptotes à un modèle, tel que l'espace euclidien ou l'espace hyperbolique. Nous revenons plus loin sur la nature de ces invariants, aussi appelés *charges globales*, issus d'une formulation hamiltonienne de la relativité générale. Un problème important et toujours d'actualité est de déduire d'une inégalité satisfaite en tout point des données initiales (correspondant à la positivité de la densité d'énergie), une contrainte, sous forme d'une inégalité, sur la charge globale telle que perçue par un observateur situé à l'infini. La *masse* ou encore le *vecteur de moment-énergie* sont des exemples de charges globales. Ces problèmes sont généralement évoqués sous le nom de *théorèmes de masse positive*.

L'avantage d'effectuer des recollements de données initiales asymptotes à des données initiales « modèles » est d'avoir une expression simple de ces invariants globaux, facilitant ainsi la preuve de l'inégalité voulue. Ainsi, dans les travaux mentionnés précédemment ([Cor00, CS06, CD03]) dans le cadre asymptotiquement plat, le recollement est effectué sur un compact qui peut être choisi arbitrairement loin dans la région asymptotique. La masse des données initiales (g, k) asymptotiquement plates est alors obtenue comme limite des masses des données initiales de référence (de Kerr) utilisées pour le recollement, lorsque l'on fait tendre vers l'infini la zone de recollement.

Dans le cas $\Lambda > 0$, le plus simple espace-temps solution de (2) est l'espace-temps de *de Sitter*. Celui-ci est à sections spatiales compactes sans bord, si bien qu'on ne peut pas identifier de région asymptotique comme pour les espaces-temps de Minkowski ou d'AdS. En revanche, les solutions de Kottler-Schwarzschild-de Sitter (KSdS) de (2) dans le cas $\Lambda > 0$ possèdent bien une région asymptotique. Dans ([CP08]), Chruściel et Pollack effectuent ainsi un recollement de données initiales asymptotiques à des données initiales de KSdS. Plus précisément, ils ne considèrent que des données initiales de la forme $(M, g, 0)$, avec g à courbure scalaire constante $R(g) = 2\Lambda$, et asymptotes à des données initiales $(M_{m_0}, \dot{g}_{m_0}, 0)$ d'un espace-temps de KSdS de paramètre m_0 . Ils parviennent alors à perturber ces données initiales pour en obtenir des nouvelles de la forme $(M', g', 0)$, coïncidant exactement avec les données initiales $(M_m, \dot{g}_m, 0)$ de l'espace-temps KSdS de paramètre m , « proche » de m_0 , dans la région asymptotique, et satisfaisant toujours $R(g') = 2\Lambda$.

Le **Chapitre 4** de cette thèse fournit une généralisation de ce recollement aux données initiales (M, g, k) , asymptotes à des données initiales de KSdS, avec k non nécessairement nul. Comme pour le cas à $\Lambda = 0$ traité dans [CD03] et dans [CS06], nous nous restreignons à la dimension $n + 1 = 4$.

Plus précisément, on montre que l'on peut déformer des données initiales (M, g, k) solutions des équations des contraintes (5) avec constante cosmologique $\Lambda > 0$ et asymptotes aux données initiales $(M_{m_0}, \dot{g}_{m_0}, 0)$ de l'espace-temps de Kottler-Schwarzschild-de Sitter

de masse m_0 . On obtient sur M des nouvelles données initiales (\tilde{g}, \tilde{k}) , toujours solutions de (5) avec la même constante cosmologique $\Lambda > 0$, et ayant la propriété de coïncider exactement avec (g, k) partout sauf dans la région asymptotique d'une part, et avec les données initiales $(M_{m,a}, \dot{g}_{m,a}, \dot{k}_{m,a})$ de l'espace-temps de Kerr-Kottler-de Sitter de paramètres m et a « assez loin » dans la région asymptotique d'autre part. Cette procédure est illustrée sur la FIGURE 6 ci-dessous. Quitte à changer d'échelle, on peut supposer dans

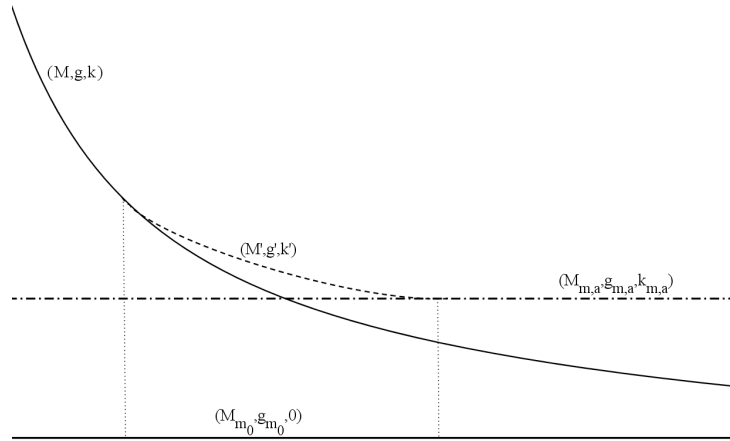


FIGURE 6 – Principe de recollement.

On part de la courbe (M, g, k) , asymptote à la ligne horizontale pleine représentant les données initiales $(M_{m_0}, \dot{g}_{m_0}, 0)$, et on recolle avec les données initiales de $(M_{m,a}, \dot{g}_{m,a}, \dot{k}_{m,a})$, représentées par la ligne horizontale en pointillés, pour obtenir (M', g', k') . La zone de recollement se situe entre les deux segments pointillés verticaux.

la suite que $\Lambda = 3$. On montre alors le résultat suivant :

Théorème H *Soit (M, g, k) un triplet de données initiales, où M contient une région asymptotique $E = [0, +\infty) \times \mathbb{S}^2$ sur laquelle (g, k) est asymptote à un couple de données initiales $(\dot{g}_{m_0}, 0)$ d'un espace-temps de Kottler-Schwarzschild-de Sitter de masse m_0 . Alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, il existe (m, a) avec $|m - m_0| + |a| < \delta$, $R_0 > 0$, et un couple de données initiales (g', k') coïncidant avec (g, k) sur le complémentaire de $[R_0, +\infty) \times \mathbb{S}^2$ dans M , et coïncidant avec les données initiales $(\dot{g}_{m,a}, \dot{k}_{m,a})$ d'un espace-temps de Kerr-Kottler-de Sitter sur le complémentaire d'un compact dans E .*

Comme dans tous les travaux de recollement qui ont été évoqués, le raisonnement consiste en deux étapes ; d'abord l'étude du noyau de l'adjoint formel du linéarisé de l'opérateur Φ évalué en des données de référence (g_0, k_0) , ce que l'on note $\mathcal{K}_0 := \ker D\Phi(g_0, k_0)^*$. Ici, les données de référence sont les données initiales d'un espace-temps de Kottler-Schwarzschild-de Sitter de masse m_0 . Il apparaît que ce noyau est non-trivial et de dimension finie.

La projection du problème sur un orthogonal de \mathcal{K}_0 permet cependant d'« éliminer » ce noyau et d'appliquer des théorèmes d'isomorphisme classiques. On peut ainsi résoudre le problème « modulo noyau », c'est-à-dire trouver (\tilde{g}, \tilde{k}) tel que la projection de $\Phi(\tilde{g}, \tilde{k})$ sur cet orthogonal de \mathcal{K}_0 est nulle.

Ensuite, la dimension du noyau (ici 4) est compensée par le nombre de paramètres indépendants d'une famille d'espaces-temps de référence (ou de leurs données initiales), ici la famille des métriques de Kerr-Kottler-de Sitter à quatre paramètres indépendants. Lorsque ce nombre est égal à la dimension de \mathcal{K}_0 , il existe alors des valeurs de ces paramètres permettant d'éliminer la projection sur le noyau, fournissant ainsi une résolution complète du problème de recollement.

Cette thèse se conclut sur l'**Annexe A**, qui traite d'une question liée à un cas particulier d'un problème de *masse positive*, brièvement évoqué ci-dessus. Ces problèmes se rencontrent dans le cadre de variétés riemanniennes non-compactes (ou plus généralement de triplets de données initiales non-compactes), asymptotes à un modèle comme l'espace euclidien ou l'espace hyperbolique. Dans ce contexte, en suivant les notations de [Mic10], une charge globale d'une variété (M, g) , où g est asymptote à une métrique g_0 , est une quantité de la forme

$$\oint_{S_\infty} \mathbb{U}(g, g_0)(\nu) dS_{g_0} ,$$

où S_∞ est le « bord à l'infini de M », ν est le vecteur normal à S_∞ pour g_0 , dS_{g_0} est la mesure induite par g_0 sur S_∞ et $\mathbb{U}(g, g_0)$ est une 1-forme.

Une formulation de ces problèmes de masse positive est qu'une condition locale de positivité (« densité d'énergie positive ») influe sur une condition globale de positivité d'une charge globale calculée à l'infini. Mieux encore, sous les mêmes conditions, la nullité de cette charge globale entraîne que la variété considérée est le modèle de référence (par exemple l'espace euclidien ou l'espace hyperbolique suivant les cas).

L'exemple le plus connu d'un tel problème est le *Théorème de la masse positive* pour une variété riemannienne asymptotiquement plate. Ce théorème affirme qu'un invariant numérique, la masse, est positive si on suppose qu'en tout point, la courbure scalaire est positive. La masse est ici calculée comme limite d'intégrales sur des sphères de rayon tendant vers l'infini. De plus, la nullité de la masse équivaut au fait que la variété considérée est isométrique à l'espace euclidien. Il a été prouvé par Schoen et Yau en dimension n pour $3 \leq n \leq 7$ ([SY79, SY81, Sch89]), et par Witten ([Wit81]) pour $n = 3$, sa méthode se généralisant en toute dimension $n \geq 3$ sous l'hypothèse supplémentaire que la variété admet une structure *spin*.

Une conséquence immédiate et remarquable illustrant la « rigidité » de ce résultat est la suivante : si (M, g) est une variété riemannienne complète asymptotiquement plate, à courbure scalaire positive, et si g est isométrique à la métrique euclidienne en dehors d'un compact de M , alors (M, g) est isométrique à l'espace euclidien.

Outre le cas asymptotiquement plat, le cas *asymptotiquement hyperbolique* présente lui aussi un intérêt, puisque les espaces asymptotiquement hyperboliques apparaissent naturellement comme des données initiales d'espace-temps asymptotiquement Anti-de Sitter. Comme pour le cas asymptotiquement plat, on peut calculer des charges globales à l'infini. Ces quantités ont la propriété d'être des invariants géométriques d'une telle variété.

On forme ainsi le *vecteur de moment-énergie*, noté \mathbf{p}_g , d'une variété asymptotiquement hyperbolique (M, g) de dimension $n \geq 3$. Dans ce cadre, et si (M, g) est complète, la *conjecture de masse positive* affirme, sous l'hypothèse $R(g) \geq 2\Lambda$, que \mathbf{p}_g est un vecteur causal orienté vers le futur dans l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$, et qu'il est de genre lumière si et seulement si (M, g) est isométrique à un ouvert de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n . Sous hypothèse supplémentaire *spin*, cette conjecture devient un théorème, montré par Wang, [Wan01], et indépendamment par Chruściel et Herzlich, [CH03]. Le problème est encore ouvert sans l'hypothèse supplémentaire spin, excepté en dimension 3 puisque cette condition est alors automatique.

L'Annexe A traite d'un problème dans ce cadre. On construit des données initiales, de la forme $(g, 0)$, solutions de (5) à constante cosmologique $\Lambda = -3$, asymptotiquement hyperboliques et dont le vecteur de moment-énergie est de genre arbitraire dans l'espace-temps de Minkowski. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème I *Soit \mathbf{p} un vecteur de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Alors il existe une métrique riemannienne g asymptotiquement hyperbolique définie sur un voisinage du bord à l'infini de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 , ayant les propriétés d'être conformétement plate, de courbure scalaire -6 , et admettant un vecteur de moment-énergie égal à \mathbf{p} .*

Une conséquence immédiate de ce résultat est que nous pouvons construire des métriques asymptotiquement hyperboliques, satisfaisant la condition $R(g) \geq 2\Lambda$ et telles que le vecteur \mathbf{p}_g est de genre espace. D'après le théorème démontré par Wang, Chruściel et Herzlich, ces métriques sont nécessairement non-complètes.

Première partie

Étude des Espaces-temps d'Emparan-Reall et de Pomeransky-Senkov

Chapitre 1

Extensions analytiques maximales des espaces-temps d'Emparan-Reall

Nous construisons dans ce chapitre (en anglais) une extension analytique des espaces-temps d'Emparan-Reall de manière analogue aux constructions de Kruskal-Szekeres pour l'espace-temps de Schwarzschild, ici en dimension $4 + 1$. Nous montrons ensuite que cette extension est maximale, globalement hyperbolique et unique dans une classe naturelle d'extensions. La preuve de ces résultats repose sur l'étude des géodésiques causales, dont on montre qu'elles sont complètes, ou qu'elles rencontrent une singularité de courbure à paramètre affine fini.

Cette étude, réalisée en collaboration avec Piotr T. Chruściel, a fait l'objet d'une publication ([CC10]) dans le *Journal of Differential Geometry*.

Sommaire

1.1	Introduction	4
1.2	The Emparan-Reall space-time	4
1.3	The extension	5
1.4	Global structure	9
1.4.1	The event horizon has $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ topology	9
1.4.2	Inextendibility at $z = \xi_F$	10
1.4.3	Maximality	11
1.4.4	Global hyperbolicity	12
1.4.5	\mathcal{I}	14
1.4.6	Uniqueness?	16
1.5	Geodesics	20
1.5.1	Geodesics in the domain of outer communications away from the horizon	21
1.5.2	Geodesics in the region $\{\xi_F < z < \xi_3\}$	23
1.5.3	Geodesics in the region $\{\xi_3 < z \leq 2\xi_3\}$	31
1.5.4	The Killing horizon	33

1.1 Introduction

The Empan-Real [ER02] metrics form a remarkable class of vacuum black hole solutions of Einstein equations in dimension $4+1$. Some aspects of their global properties have been studied in [ER02], where it was shown that the solution contains a *Killing horizon* with $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ topology. The aim of this work is to point out that the *event horizon* coincides with the Killing horizon, and therefore also has this topology; and to construct an analytic extension with a bifurcate Killing horizon; and to establish some global properties of the extended space-time. The extension resembles closely the Kruskal-Szekeres extension of the Schwarzschild space-time, with a bifurcate Killing horizon, a black hole singularity, a white hole singularity, and two asymptotically flat regions. We show that causal geodesics in the extended space-time are either complete or reach a singularity in finite time. This implies maximality of our extension. We also show global hyperbolicity, present families of alternative extensions, establish uniqueness of our extension within a natural class, and verify existence of a conformal completion at null infinity.

1.2 The Empan-Real space-time

In local coordinates the Empan-Real metric can be written in the form

$$g = -\frac{F(x)}{F(z)} \left(dt + \sqrt{\frac{\nu}{\xi_F}} \frac{\xi_1 - z}{A} d\psi \right)^2 + \frac{F(z)}{A^2(x-z)^2} \times \left[-F(x) \left(\frac{dz^2}{G(z)} + \frac{G(z)}{F(z)} d\psi^2 \right) + F(z) \left(\frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)} d\varphi^2 \right) \right], \quad (1.1)$$

where $A > 0$, ν et ξ_F are constants, and

$$F(\xi) = 1 - \frac{\xi}{\xi_F}, \quad (1.2)$$

$$G(\xi) = \nu\xi^3 - \xi^2 + 1 = \nu(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3), \quad (1.3)$$

are polynomials, with ν chosen so that $\xi_1 < 0 < \xi_2 < \xi_3$. The study of the coordinate singularities at $x = \xi_1$ and $x = \xi_2$ leads to the determination of ξ_F as :

$$\xi_F = \frac{\xi_1\xi_2 - \xi_3^2}{\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3} \in (\xi_2, \xi_3). \quad (1.4)$$

Empan and Reall have established the asymptotically flat character of (1.1), as well as existence of an analytic extension across an analytic Killing horizon¹ at $z = \xi_3$. The extension given in [ER02] is somewhat similar of the extension of the Schwarzschild metric that one obtains by going to Eddington-Finkelstein coordinates, and is *not* maximal. Now, existence of an analytic extension with a bifurcate horizon, *à la* Kruskal-Szekeres, is guaranteed from this by an analytic version of the analysis of Rácz and Wald in [RW96]. But the global properties of an extension so constructed are not clear. It is therefore of

1. We follow the terminology of [CLC08].

interest to present an explicit extension with good properties. This extension is constructed in Section 1.3, and its global properties are studied in the remaining sections.

As in [ER02] we assume throughout that

$$\xi_1 \leq x \leq \xi_2 . \quad (1.5)$$

As discussed in [ER02], the extremities correspond to a north and south pole of S^2 , with a function θ defined by $d\theta = dx/\sqrt{G(x)}$ providing a latitude on S^2 , except for the limit $x - z \rightarrow 0$, $x \rightarrow \xi_1$, which corresponds to an asymptotically flat region, see [ER02]; a detailed proof of asymptotic flatness can be found in [Chr06]. The surface “ $\{z = \infty\}$ ” can be identified with “ $\{z = -\infty\}$ ” by introducing a coordinate $Y = -1/z$, with the metric extending analytically across $\{Y = 0\}$, see [ER02] for details.

We will denote by $(\mathcal{M}_{I \cup II}, g)$ the space-time constructed by Emparan and Reall, as outlined above, where the coordinate z runs then over $(\xi_F, \infty) \cup [-\infty, \xi_1]$. We will denote by (\mathcal{M}_I, g) the subset of $(\mathcal{M}_{I \cup II}, g)$ in which the coordinate z runs over $(\xi_3, \infty) \cup [-\infty, \xi_1]$; see Figure 1.1.

Strictly speaking, in the definitions of $(\mathcal{M}_{I \cup II}, g)$ and (\mathcal{M}_I, g) we should have used different symbols for the metric g ; we hope that this will not lead to confusions.

1.3 The extension

We start by working in the range $z \in (\xi_3, \infty)$; there we define new coordinates w, v by the formulae

$$dv = dt + \frac{bdz}{(z - \xi_3)(z - \xi_2)} , \quad (1.6)$$

$$dw = dt - \frac{bdz}{(z - \xi_3)(z - \xi_2)} , \quad (1.7)$$

where b is a constant to be chosen shortly. (Our coordinates v and w are closely related to, but not identical, to the coordinates v and w used in [ER02] when extending the metric through the Killing horizon $z = \xi_3$). Similarly to the construction of the extension of the Kerr metric in [Car68, BL67], we define a new angular coordinate $\hat{\psi}$ by :

$$d\hat{\psi} = d\psi - a dt , \quad (1.8)$$

where a is a constant to be chosen later. Let

$$\sigma := \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\nu}{\xi_F}} . \quad (1.9)$$

Using (1.6)–(1.8), we obtain

$$dt = \frac{1}{2}(dv + dw) , \quad (1.10)$$

$$dz = \underbrace{\frac{(z - \xi_3)(z - \xi_2)}{2b}}_{=: H(z)/2} (dv - dw) , \quad (1.11)$$

$$d\psi = d\hat{\psi} + \frac{a}{2}(dv + dw) , \quad (1.12)$$

which leads to

$$g_{vv} = g_{ww} = -\frac{F(x)}{4F(z)} \left(1 + a\sigma(\xi_1 - z)\right)^2 - \frac{F(x)F(z)}{4A^2(x-z)^2} \left(\frac{a^2G(z)}{F(z)} + \frac{H^2(z)}{G(z)}\right), \quad (1.13)$$

$$g_{vw} = -\frac{F(x)}{4F(z)} \left(1 + a\sigma(\xi_1 - z)\right)^2 - \frac{F(x)F(z)}{4A^2(x-z)^2} \left(\frac{a^2G(z)}{F(z)} - \frac{H^2(z)}{G(z)}\right), \quad (1.14)$$

$$g_{v\hat{\psi}} = g_{w\hat{\psi}} = -\frac{F(x)}{2F(z)} \sigma(\xi_1 - z) \left(1 + a\sigma(\xi_1 - z)\right) - \frac{F(x)G(z)a}{2A^2(x-z)^2}, \quad (1.15)$$

$$g_{\hat{\psi}\hat{\psi}} = -\frac{F(x)}{F(z)} \sigma^2(\xi_1 - z) - \frac{F(x)G(z)}{A^2(x-z)^2}. \quad (1.16)$$

The Jacobian of the coordinate transformation is

$$\frac{\partial(w, v, \hat{\psi}, x, \varphi)}{\partial(t, z, \psi, x, \varphi)} = 2 \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2b}{(z - \xi_2)(z - \xi_3)}.$$

In the original coordinates (t, z, ψ, x, φ) the determinant of g was

$$\det(g_{(t,z,\psi,x,\varphi)}) = -\frac{F^2(x)F^4(z)}{A^8(x-z)^8}, \quad (1.17)$$

so that in the new coordinates it reads

$$\det(g_{(w,v,\hat{\psi},x,\varphi)}) = -\frac{F^2(x)F^4(z)(z - \xi_2)^2(z - \xi_3)^2}{4A^8b^2(x-z)^8}. \quad (1.18)$$

This last expression is negative on $(\xi_F, \infty) \setminus \{\xi_3\}$, and has a second order zero at $z = \xi_3$. In order to remove this degeneracy one introduces

$$\hat{v} = \exp(cv), \quad \hat{w} = -\exp(-cw), \quad (1.19)$$

where c is some constant to be chosen. Hence we have

$$d\hat{v} = c\hat{v}dv, \quad d\hat{w} = -c\hat{w}dw, \quad (1.20)$$

and the determinant in the coordinates $(\hat{w}, \hat{v}, \hat{\psi}, x, \varphi)$ reads

$$\det(g_{(\hat{w},\hat{v},\hat{\psi},x,\varphi)}) = -\frac{F^2(x)F^4(z)(z - \xi_2)^2(z - \xi_3)^2}{4A^8b^2(x-z)^8 c^4 \hat{v}^2 \hat{w}^2}. \quad (1.21)$$

But one has $\hat{v}^2 \hat{w}^2 = \exp(2c(v-w))$, so that

$$\begin{aligned} \hat{v}^2 \hat{w}^2 &= \exp\left(4cb \int \frac{1}{(z - \xi_2)(z - \xi_3)} dz\right) \\ &= \exp\left(\frac{4cb}{(\xi_3 - \xi_2)} (\ln(z - \xi_3) - \ln(z - \xi_2))\right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Taking into account (1.22), and the determinant (1.21), we choose the constant c to satisfy :

$$\frac{2cb}{(\xi_3 - \xi_2)} = 1. \quad (1.23)$$

We obtain

$$\hat{v}\hat{w} = -\frac{z - \xi_3}{z - \xi_2}, \quad (1.24)$$

and

$$\det(g_{(\hat{w}, \hat{v}, \hat{\psi}, x, \varphi)}) = -\frac{F^2(x)F^4(z)(z - \xi_2)^4}{4A^8b^2(x - z)^8c^4}. \quad (1.25)$$

With this choice, the determinant of g in the $(\hat{w}, \hat{v}, \hat{\psi}, x, \varphi)$ coordinates extends to a strictly negative analytic function on $\{z \in (\xi_F, \infty)\}$. In fact, z is an analytic function of $\hat{v}\hat{w}$ on $\{\hat{v}\hat{w} \neq -1\}$ (that last set corresponds to $z = \infty \Leftrightarrow Y = 0$, we will return to this shortly) :

$$z = \frac{\xi_3 + \xi_2\hat{v}\hat{w}}{1 + \hat{v}\hat{w}}. \quad (1.26)$$

In the $(\hat{w}, \hat{v}, \hat{\psi}, x, \varphi)$ coordinates, one obtains the coefficients of the metric from (1.20) using

$$\begin{aligned} g_{\hat{v}\hat{v}} &= \frac{1}{c^2\hat{v}^2}g_{vv}, & g_{\hat{w}\hat{w}} &= \frac{1}{c^2\hat{w}^2}g_{ww}, \\ g_{\hat{v}\hat{w}} &= -\frac{1}{c^2\hat{v}\hat{w}}g_{vw}, & g_{\hat{v}\hat{\psi}} &= \frac{1}{c\hat{v}}g_{v\psi}, & g_{\hat{w}\hat{\psi}} &= -\frac{1}{c\hat{w}}g_{w\psi}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

In order to show that the coefficients of the metric are analytic on the set

$$\left\{ \hat{w}, \hat{v} \mid z(\hat{v}\hat{w}) > \xi_F \right\} = \left\{ \hat{w}, \hat{v} \mid -1 < \hat{v}\hat{w} < \frac{\xi_3 - \xi_F}{\xi_F - \xi_2} \right\} \quad (1.28)$$

it is convenient to write

$$\begin{aligned} g_{\hat{v}\hat{v}} &= \frac{1}{c^2\hat{v}^2\hat{w}^2}\hat{w}^2g_{vv}, & g_{\hat{w}\hat{w}} &= \frac{1}{c^2\hat{v}^2\hat{w}^2}\hat{v}^2g_{ww}, \\ g_{\hat{v}\hat{w}} &= -\frac{1}{c^2\hat{v}\hat{w}}g_{vw}, & g_{\hat{v}\hat{\psi}} &= \frac{1}{c\hat{v}\hat{w}}\hat{w}g_{v\psi}, & g_{\hat{w}\hat{\psi}} &= -\frac{1}{c\hat{v}\hat{w}}\hat{v}g_{w\psi}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Hence, to make sure that all the coefficients of metric are well behaved at $\{\hat{w}, \hat{v} \in \mathbb{R} \mid z = \xi_3\}$ (i.e. $\hat{v} = 0$ or $\hat{w} = 0$), it suffices to check that there is a multiplicative factor $(z - \xi_3)^2$ in $g_{vv} = g_{ww}$, as well as a multiplicative factor $(z - \xi_3)$ in g_{vw} and in $g_{v\psi} = g_{w\psi}$. In view of (1.13)–(1.16), one can see that this will be the case if, first, a is chosen so that $1 + a\sigma(\xi_1 - z) = a\sigma(\xi_3 - z)$, that is

$$a = \frac{1}{\sigma(\xi_3 - \xi_1)}, \quad (1.30)$$

and then, if b is chosen such that

$$0 = -\frac{a^2\nu\xi_F(\xi_3 - \xi_1)}{\xi_3 - \xi_F} + \frac{1}{\nu b^2(\xi_3 - \xi_1)}. \quad (1.31)$$

Equation (1.31) will hold if we set

$$b^2 = \frac{(\xi_3 - \xi_F)}{\nu^2 a^2 \xi_F (\xi_3 - \xi_1)^2}. \quad (1.32)$$

So far we have been focussing on the region $z \in (\xi_F, \infty)$, which overlaps only with part of the manifold “ $\{z \in (\xi_3, \infty] \cup [-\infty, \xi_1]\}$ ”. A well behaved coordinate on that last region is $Y = -1/z$. This allows one to go smoothly through $Y = 0$ in (1.24) :

$$\hat{v}\hat{w} = -\frac{1 + \xi_3 Y}{1 + \xi_2 Y} \iff Y = -\frac{1 + \hat{v}\hat{w}}{\xi_3 + \xi_2 \hat{v}\hat{w}}. \quad (1.33)$$

In other words, $\hat{v}\hat{w}$ extends analytically to the region of interest, $0 \leq Y \leq -1/\xi_1$ (and in fact beyond, but this is irrelevant to us). Similarly, the determinant $\det(g_{(\hat{w}, \hat{v}, \hat{\psi}, x, \varphi)})$ extends analytically across $Y = 0$, being the ratio of two polynomials of order eight in z (equivalently, in Y), with limit

$$\det(g_{(\hat{w}, \hat{v}, \hat{\psi}, x, \varphi)}) \rightarrow_{z \rightarrow \infty} -\frac{F^2(x)}{4A^8 b^2 c^4 \xi_F^4}. \quad (1.34)$$

We conclude that the construction so far produces an analytic Lorentzian metric on the set

$$\hat{\Omega} := \left\{ \hat{w}, \hat{v} \mid -\frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \leq \hat{v}\hat{w} < \frac{\xi_3 - \xi_F}{\xi_F - \xi_2} \right\} \times S^1_{\hat{\psi}} \times S^2_{(x, \varphi)}, \quad (1.35)$$

Here a subscript on S^k points to the names of the corresponding local variables.

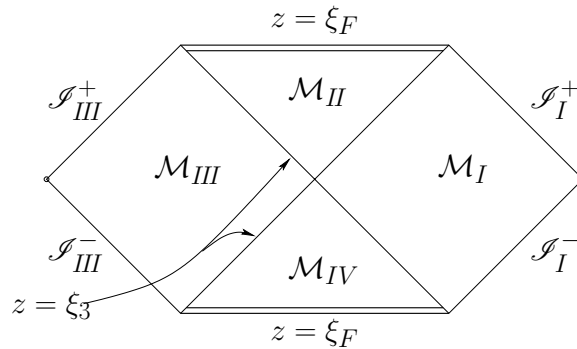


FIGURE 1.1 – $\hat{\mathcal{M}}$ with its various subsets. For example, $\mathcal{M}_{I \cup II}$ is the union of \mathcal{M}_I and of \mathcal{M}_{II} and of that part of $\{z = \xi_3\}$ which lies in the intersection of their closures; this is the manifold constructed in [ER02]. Very roughly speaking, the various \mathcal{S} 's correspond to $x = z = \xi_1$. It should be stressed that this is neither a *conformal* diagram, nor is the space-time a product of the figure times $S^2 \times S^1$: \mathcal{M}_I cannot be the product of the depicted diamond with $S^2 \times S^1$, as this product is not simply connected, while \mathcal{M}_I is. But the diagram represents accurately the causal relations between the various \mathcal{M}_N 's, as well as the geometry near the bifurcate horizon $z = \xi_F$, as the manifold *does have* a product structure there.

The map

$$(\hat{w}, \hat{v}, \hat{\psi}, x, \varphi) \mapsto (-\hat{w}, -\hat{v}, -\hat{\psi}, x, -\varphi) \quad (1.36)$$

is an orientation-preserving analytic isometry of the analytically extended metric on $\hat{\Omega}$. It follows that the manifold

$$\hat{\mathcal{M}}$$

obtained by gluing together $\hat{\Omega}$ and two isometric copies of (\mathcal{M}_I, g) can be equipped with the obvious Lorentzian metric, still be denoted by g , which is furthermore analytic. The second copy of (\mathcal{M}_I, g) will be denoted by (\mathcal{M}_{III}, g) ; compare Figure 1.1. The reader should keep in mind the polar character of the coordinates around the relevant axes of rotation, and the special character of the ‘‘point at infinity’’ $z = \xi_1 = x$.

1.4 Global structure

1.4.1 The event horizon has $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ topology

As shortly reviewed in Section 1.2, it is shown in [ER02] how to extend the metric (1.1) across

$$\mathcal{E} := \{z = \xi_3\}$$

to an analytic metric on $\mathcal{M}_{I \cup II}$. Further, we have shown in Section 1.3 how to extend g to an analytic metric on $\hat{\mathcal{M}}$. Now,

$$g(\nabla z, \nabla z) = g^{zz} = -\frac{A^2(x-z)^2 G(z)}{F(x)F(z)} \quad (1.37)$$

in the region $\{z > \xi_3\}$, and by analyticity this equation remains valid on $\{z > \xi_F\}$. Equation (1.37) shows that \mathcal{E} is a null hypersurface, with z being a time function on $\{\xi_F < z < \xi_3\}$. The usual choice of time orientation implies that z is strictly decreasing along future directed causal curves in the region $\{\hat{v} > 0, \hat{w} > 0\}$, and strictly increasing along such curves in the region $\{\hat{v} < 0, \hat{w} < 0\}$. In particular no causal future directed curve can leave the region $\{\hat{v} > 0, \hat{w} > 0\}$. Hence the space-time contains a black hole region.

However, it is not clear that \mathcal{E} is the *event horizon* within the Emparan-Reall space-time $(\mathcal{M}_{I \cup II}, g)$, because the actual event horizon could be enclosing the region $z < \xi_3$. To show that this is not the case, consider the ‘‘area function’’, defined as the determinant, say W , of the matrix

$$g(K_i, K_j),$$

where the K_i 's, $i = 1, 2, 3$, are the Killing vectors equal to ∂_t , ∂_ψ , and ∂_φ in the asymptotically flat region. In the original coordinates of (1.1) this equals

$$\frac{F(x)G(x)F(z)G(z)}{A^4(x-z)^4}. \quad (1.38)$$

Analyticity implies that this formula is valid throughout $\mathcal{M}_{I \cup II}$, as well as $\hat{\mathcal{M}}$. Now,

$$F(z)G(z) = \frac{\nu}{\xi_F} (\xi_F - z)(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3),$$

and, in view of the range (1.5) of the variable x , the sign of (1.38) depends only upon the values of z . Since $F(z)G(z)$ behaves as $-\nu z^4/\xi_F$ for large z , W is negative both for $z < \xi_1$ and for $z > \xi_3$. Hence, at each point p of those two regions the set of vectors in $T_p\mathcal{M}$ spanned by the Killing vectors is timelike. So, suppose for contradiction, that the event horizon \mathcal{H} intersects the region $\{z \in (\xi_3, \infty]\} \cup \{z \in [-\infty, \xi_1)\}$; here “ $z = \pm\infty$ ” should be understood as $Y = 0$, as already mentioned in the introduction. Since \mathcal{H} is a null hypersurface invariant under isometries, every Killing vector is tangent to \mathcal{H} . However, at each point at which W is negative there exists a linear combination of the Killing vectors which is timelike. This gives a contradiction because no timelike vectors are tangent to a null hypersurface.

We conclude that $\{z = \xi_3\}$ forms indeed the event horizon in the space-time $(\mathcal{M}_{I \cup II}, g)$ (as defined at the end of Section 1.2), with topology $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$.

The argument just given also shows that the domain of outer communications within (\mathcal{M}_I, g) coincides with (\mathcal{M}_I, g) .

Similarly, one finds that the domain of outer communications within $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$, or that within $(\mathcal{M}_{I \cup II}, g)$, associated with an asymptotic region lying in (\mathcal{M}_I, g) , is (\mathcal{M}_I, g) . The boundary of the d.o.c. in $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ is a subset of the set $\{z = \xi_3\}$, which can be found by inspection of Figure 1.1.

1.4.2 Inextendibility at $z = \xi_F$

The obvious place where $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ could be enlarged is at $z = \xi_F$. To show that no extension is possible there, consider² the norm of the Killing vector field ∂_t :

$$g(\partial_t, \partial_t) = -\frac{F(x)}{F(z)} \xrightarrow{\xi_F < z \rightarrow \xi_F} \infty \quad (\text{recall that } F(x) \geq 1 - \frac{\xi_2}{\xi_F} > 0). \quad (1.39)$$

Suppose, for contradiction, that there exists a C^2 extension of the metric through $\{z = \xi_F\}$. Recall that any Killing vector field X satisfies the set of equations

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta X_\sigma = R_{\lambda\alpha\beta\sigma} X^\lambda. \quad (1.40)$$

But the overdetermined set of linear equations (1.40) together with existence of a C^2 extension implies that ∂_t extends, in C^2 , to $\{z = \xi_F\}$, contradicting (1.39).

An alternative way, demanding somewhat more work, of proving that the Empan-Real metric is C^2 -inextendible across $\{z = \xi_F\}$, is to notice that $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ is unbounded along any curve along which z approaches ξ_F . This has been pointed out to us by Harvey Reall (private communication), and has been further verified by Alfonso Garcia-Parrado and José María Martín García using the symbolic algebra package XACT [MG] :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{12A^4\xi_F^4 G(\xi_F)^2 (x-z)^4 (1 + O(z - \xi_F))}{(\xi_F - x)^2 (z - \xi_F)^6}. \quad (1.41)$$

We are grateful to Alfonso and José María for carrying out the calculation.

2. This inextendibility criterion has been introduced in [BCIM97] (see the second part of Proposition 5, p. 139 there).

1.4.3 Maximality

Let $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$. The $(n+1)$ -dimensional space-time $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ is said to be a C^k -extension of an $(n+1)$ -dimensional space-time (\mathcal{M}, g) if there exists a C^k -immersion $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ such that $\psi^*\tilde{g} = g$, and such that $\psi(\mathcal{M}) \neq \tilde{\mathcal{M}}$. A space-time (\mathcal{M}, g) is said to be C^k -maximal, or C^k -inextendible, if no C^k -extensions of (\mathcal{M}, g) exist.

A *scalar invariant* is a function which can be calculated using the geometric objects at hand and which is invariant under isometries. For instance, a function α_g which can be calculated in local coordinates from the metric g and its derivatives will be a scalar invariant if, for any local diffeomorphism ψ we have

$$\alpha_g(p) = \alpha_{\psi^*g}(\psi^{-1}(p)). \quad (1.42)$$

In the application of our Theorem 1.4.6 below to the Emparan-Reall space-time one can use the scalar invariant $g(X, X)$, calculated using a metric g and a Killing vector X . In this case the invariance property (1.42) reads instead

$$\alpha_{g,X}(p) = \alpha_{\psi^*g,(\psi^{-1})^*X}(\psi^{-1}(p)). \quad (1.43)$$

A scalar invariant f on (\mathcal{M}, g) will be called a C^k -compatibility scalar if f satisfies the following property : For every C^k -extension $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ of (\mathcal{M}, g) and for any bounded timelike geodesic segment γ in \mathcal{M} such that $\psi(\gamma)$ accumulates at the boundary $\partial(\psi(\mathcal{M}))$ (where ψ is the immersion map $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$), the function f is bounded along γ .

An example of a C^2 -compatibility scalar is the Kretschmann scalar, which writes $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$. As explained in Section 1.4.2, another example is provided by the norm $g(X, X)$ of a Killing vector X of g . Any constant function is a compatibility scalar in this terminology, albeit not very useful in practice.

We shall need the following generalisation of a maximality criterion of [Chr91, Appendix C] :³

Proposition 1.4.1 *Suppose that every timelike geodesic γ in (\mathcal{M}, g) is either complete, or some C^k -compatibility scalar is unbounded on γ . Then (\mathcal{M}, g) is C^k -inextendible.*

PROOF: Suppose that there exists a C^k -extension $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ of (\mathcal{M}, g) , with immersion $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$. We identify \mathcal{M} with its image $\psi(\mathcal{M})$ in $\tilde{\mathcal{M}}$.

Let $p \in \partial\mathcal{M}$ and let \mathcal{O} be a globally hyperbolic neighborhood of p . Let $q_n \in \mathcal{M}$ be a sequence of points approaching p , thus $q_n \in \mathcal{O}$ for n large enough. Suppose, first, that there exists n such that $q_n \in I^+(p) \cup I^-(p)$. By global hyperbolicity of \mathcal{O} there exists a timelike geodesic segment γ from q_n to p . Then the part of γ which lies within \mathcal{M} is inextendible within \mathcal{M} and has finite affine length. Furthermore every C^k -compatibility scalar is bounded on γ . But there are no such geodesics through q_n by hypothesis. We conclude that

$$(I^+(p) \cup I^-(p)) \cap \mathcal{M} = \emptyset. \quad (1.44)$$

Let $q \in (I^+(p) \cup I^-(p)) \cap \mathcal{O}$, thus $q \notin \mathcal{M}$ by (1.44). Since $I^+(q) \cup I^-(q)$ is open, and $p \in I^+(q) \cup I^-(q)$, we have $q_n \in I^+(q) \cup I^-(q)$ for all n sufficiently large, say $n \geq n_0$.

3. JC acknowledges useful discussions with M. Herzlich concerning the problem at hand.

Let γ be a timelike geodesic segment from q_{n_0} to q . Since q is not in \mathcal{M} , the part of γ that lies within \mathcal{M} is inextendible within \mathcal{M} and has finite affine length, with all C^k -compatibility scalars bounded. This is again incompatible with our hypotheses, and the result is established. \square

In Section 1.5 below (see Theorem 1.5.1) we show that all maximally extended causal geodesics of our extension $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ of the Emparan-Reall space-time are either complete, or reach the singular boundary $\{z = \xi_F\}$ in finite affine time. This, together with Section 1.4.2 and Proposition 1.4.1 gives :

Theorem 1.4.2 $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ is maximal within the class of C^2 Lorentzian manifolds.

1.4.4 Global hyperbolicity

In this section we show that $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ is globally hyperbolic. We shall need the following standard fact (see, e.g., [O'N84, Lemma 13, p.408]) :

Lemma 1.4.3 *Let α be a maximally extended causal curve in a strongly causal space-time (\mathcal{M}, g) meeting a compact set K . Then α eventually leaves K , never to return, both to the future and to the past.*

Recall that in the region \mathcal{M}_I , the time-coordinate t is a time-function since ∇t is timelike; hence $\dot{t} > 0$ along any future-directed causal curve. In terms of the coordinates of Section 1.3 we have :

$$t = \frac{1}{2c} \ln \left(-\frac{\hat{v}}{\hat{w}} \right). \quad (1.45)$$

Letting \hat{v} and \hat{w} be the global coordinates of Section 1.3, we define the hypersurface

$$\mathcal{S} := \{\hat{v} + \hat{w} = 0\}. \quad (1.46)$$

(Thus, \mathcal{S} extends smoothly the hypersurface $\{t = 0\} \subset \mathcal{M}_I$, across the bifurcation surface $\{\hat{w} = \hat{v} = 0\}$, to its image in \mathcal{M}_{III} under the map (1.36).) The hypersurface \mathcal{S} is spacelike, and we wish to show that it is Cauchy. We start by noting that it is achronal : Indeed, on \mathcal{M}_I the function t , as well as its mirror counterpart on \mathcal{M}_{III} , are time functions on $\mathcal{M}_I \cup \mathcal{M}_{III}$, so any connected causal curve through those regions can meet \mathcal{S} at most once. Next, since z is a time function on $\mathcal{M}_{II} \cup \mathcal{M}_{IV}$, any causal curve entering $\mathcal{M}_{II} \cup \mathcal{M}_{IV}$ from $\mathcal{M}_I \cup \mathcal{M}_{III}$ cannot leave $\mathcal{M}_{II} \cup \mathcal{M}_{IV}$, and therefore cannot intersect again. A similar argument applies to those causal curves which enter \mathcal{M}_{II} from \mathcal{M}_{IV} , or vice-versa, and achronality follows.

So, from [Ger70, Property 6], since \mathcal{S} is closed, spacelike, and achronal, it suffices to prove that every inextendible null geodesic in $\widehat{\mathcal{M}}$ intersects \mathcal{S} . For this, let γ be such a geodesic, say future-directed.

Suppose, first, that $\gamma(0) \in \mathcal{M}_I$; the argument in \mathcal{M}_{III} follows from isometry invariance. Choose $\varepsilon > 0$ sufficiently small so that the set K_ε , defined using the coordinates \hat{v}, \hat{w} of Section 1.3",

$$K_\varepsilon := \left\{ \hat{v} \geq \varepsilon, \hat{w} \leq -\varepsilon, \hat{v}\hat{w} \geq -\frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} + \varepsilon \right\} \times S^1 \times S^2, \quad (1.47)$$

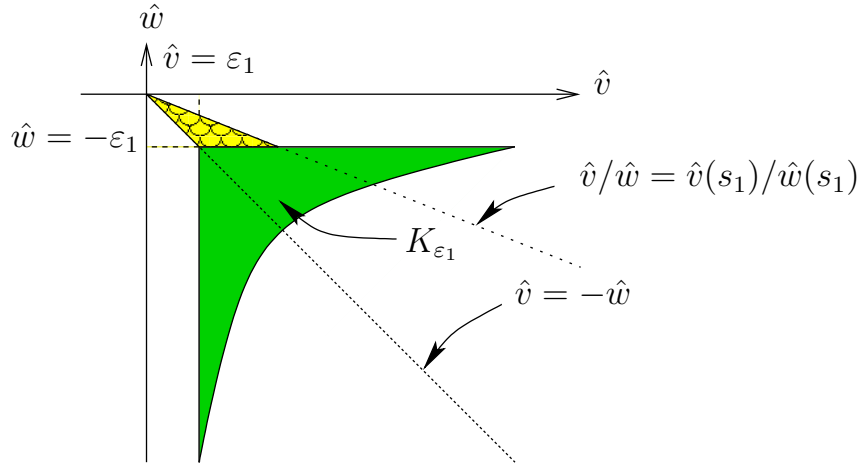


FIGURE 1.2 – The set K_{ε_1} . Here \hat{w} and \hat{v} are the global coordinates of Section 1.3.

contains $\gamma(0)$ (see Figure 1.2). Suppose, moreover, that $t(\gamma(0)) > 0$. Since K_ε is compact, and (\mathcal{M}_I, g) is strongly causal (as it has a time function), Lemma 1.4.3 implies that γ must leave K_ε , and never reenter, except perhaps after exiting from (\mathcal{M}_I, g) and returning again. But we have already seen that γ cannot return to \mathcal{M}_I once it exited, so γ will indeed eventually never reenter K_ε . Choose any sequence ε_i tending to zero, then there exists a decreasing sequence s_i such that γ leaves K_{ε_i} at $\gamma(s_i)$, and never reenters.

Now, the ratio $-\hat{v}/\hat{w}$ is a time function on \mathcal{M}_I , and therefore increasing along γ to the future, and decreasing to the past. If γ crosses the hypersurface $\{-\hat{v}/\hat{w} = 1\}$ we are done. So suppose that γ does not. Then :

1. Either γ definitively leaves $\partial K_{\varepsilon_1}$ at $s = s_1$ through that part of the boundary $\partial K_{\varepsilon_1}$ on which $\hat{w} = -\varepsilon_1$. Then γ remains in the tiled yellow triangle in Figure 1.2 until it leaves \mathcal{M}_I , and thus all subsequent definitive exit points $\gamma(s_i) \in \partial K_{\varepsilon_i}$ lie on $\hat{w} = -\varepsilon_i$. So $\hat{w}(s_i) \rightarrow 0$ and $\hat{v}(s_i) \rightarrow 0$. The argument around equation (1.122) below shows that $\hat{w}(s) \rightarrow 0$ and $\hat{v}(s) \rightarrow 0$ in finite time. By the analysis of Section 1.5, γ smoothly extends through $\{\hat{v} = \hat{w} = 0\}$. But this is impossible since γ is null, while the only null geodesics meeting $\{\hat{v} = \hat{w} = 0\}$ are the generators of the Killing horizon, entirely contained within $\{\hat{v} = \hat{w} = 0\}$.
2. Or γ definitively leaves $\partial K_{\varepsilon_1}$ at $s = s_1$ through that part of the boundary $\partial K_{\varepsilon_1}$ on which

$$\hat{w}\hat{v} = -\frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} + \varepsilon_1 .$$

From what has been said, all subsequent definitive exit points take place on

$$\hat{w}\hat{v} = -\frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} + \varepsilon_i .$$

This implies that $z(s) \rightarrow \xi_1$. We need to consider two cases :

Suppose, first, that the constant of motion c_ψ vanishes. Then $c_t = 0$ is not possible by (1.68) (recall that $\lambda = 0$), while from (1.63)

$$\dot{t}(s) \text{ approaches } -\frac{F(\xi_1)}{F(x(s))}c_t, \quad (1.48)$$

which is strictly bounded away from zero. So \dot{t} is positive and uniformly bounded away from zero sufficiently far to the past. This, together with Theorem 1.5.6, shows that γ crosses $\{-\hat{v} = \hat{w}\} \subset \mathcal{S}$, which contradicts our assumption.

It remains to consider the possibility that $c_\psi \neq 0$. Equation (1.68) implies that $x(s) \rightarrow \xi_1$. Hence γ enters, and remains, within the asymptotically flat region. There γ is forced to cross $\{\frac{-\hat{v}}{\hat{w}} = 1\}$ by arguments known in principle, contradicting again our assumption. \square

We conclude that γ 's intersecting \mathcal{M}_I or \mathcal{M}_{III} , with $t(\gamma(0)) > 0$, meet \mathcal{S} when followed to the past.

The proof that future directed causal geodesics γ intersecting \mathcal{M}_I or \mathcal{M}_{III} , with $t(\gamma(0)) < 0$, meet \mathcal{S} , is identical : one needs instead to follow γ to the future rather than to the past. Alternatively one can invoke the existence of isometries of those regions which map t to $-t$ and ψ to $-\psi$.

Suppose, finally, that $\gamma(0) \in \mathcal{M}_{II} \cup \mathcal{M}_{IV}$. By Proposition 1.5.4, the null geodesic γ exits in finite time through the bifurcate horizon $\{\hat{w}\hat{v} = 0\}$. If γ exits through $\{\hat{w} = \hat{v} = 0\}$ it intersects \mathcal{S} there, and we are done; otherwise it enters $\mathcal{M}_I \cup \mathcal{M}_{III}$. But we have just seen that γ must then intersect \mathcal{S} , and the proof of global hyperbolicity is complete. \square

1.4.5 \mathcal{I}

In this section we address the question of existence of conformal completions at null infinity *à la Penrose*, for a class of higher dimensional stationary space-times that includes the Emparan-Reall metrics; see the Appendix in [DS90] for the 3 + 1 dimensional case.

We start by noting that any stationary asymptotically flat space-time which is vacuum, or electro-vacuum, outside of a spatially compact set is necessarily *asymptotically Schwarzschildian*, in the sense that there exists a coordinate system in which the leading order terms of the metric have the Schwarzschild form, with the error terms falling-off one power of r faster :

$$g = g_m + O(r^{-(n-1)}), \quad (1.49)$$

where g_m is the Schwarzschild metric of mass m , and the size of the decay of the error terms in (1.49) is measured in a manifestly asymptotically Minkowskian coordinate system. The proof of this fact is outlined briefly in [BC07, Section 2]. In that last reference it is also shown that the remainder term has a full asymptotic expansion in terms of inverse powers of r in dimension $2k + 1$, $k \geq 3$, or in dimension $4 + 1$ for static metrics. Otherwise, the remainder is known to have an asymptotic expansion in terms of inverse powers of r and of $\ln r$, and whether or not there will be non-trivial logarithmic terms in the expansion is not known in general.

In higher dimensions, the question of existence of a conformal completion at null infinity is straightforward : We start by writing the $(n + 1)$ -dimensional Minkowski metric as

$$\eta = -dt^2 + dr^2 + r^2h , \quad (1.50)$$

where h is the round unit metric on an $(n - 2)$ -dimensional sphere. Replacing t by the standard retarded time $u = t - r$, one is led to the following form of the metric g :

$$g = -du^2 - 2du dr + r^2h + O(r^{-(n-2)})dx^\mu dx^\nu , \quad (1.51)$$

where the dx^μ 's are the manifestly Minkowskian coordinates (t, x^1, \dots, x^n) coordinates for η . Setting $x = 1/r$ in (1.51) one obtains

$$g = \frac{1}{x^2} \left(-x^2 du^2 + 2du dx + h + O(x^{n-4})dy^\alpha dy^\beta \right) , \quad (1.52)$$

with correction terms in (1.52) which will extend smoothly to $x = 0$ in the coordinate system $(y^\mu) = (u, x, v^A)$, where the v^A 's are local coordinates on S^{n-2} . For example, a term $O(r^{-2})dx^i dx^j$ in g will contribute a term

$$O(r^{-2})dr^2 = O(r^{-2})x^{-4}dx^2 = x^{-2}(O(1)dx^2) ,$$

which is bounded up to $x = 0$ after a rescaling by x^2 . The remaining terms in (1.52) are analyzed similarly.

In dimension $4 + 1$, care has to be taken to make sure that the correction terms do not affect the signature of the metric so extended ; in higher dimension this is already apparent from (1.52).

So, to construct a conformal completion at null infinity for the Emparan Reall metric it suffices to verify that the determinant of the conformally rescaled metric, when expressed in the coordinates described above, does not vanish at $x = 0$. This is indeed the case, and can be seen by calculating the Jacobian of the map

$$(t, z, \psi, x, \varphi) \mapsto (u, x, v^A) ;$$

the result can then be used to calculate the determinant of the metric in the new coordinates, making use of the formula for the determinant of the metric in the original coordinates.

For a general stationary vacuum $4 + 1$ dimensional metric one can always transform to the coordinates, alluded to above, in which the metric is manifestly Schwarzschildian in leading order. Instead of using $(u = t - r, x = 1/r)$ one can use coordinates $(u_m, x = 1/r)$, where u_m is the corresponding null coordinate u for the $4 + 1$ dimensional Schwarzschild metric. This will lead to a conformally rescaled metric with the correct signature on the conformal boundary. Note, however, that this transformation might introduce log terms in the metric, even if there were none to start with ; this is why we did not use this above.

In summary, whenever a stationary, vacuum, asymptotically flat, $(n + 1)$ -dimensional metric, $4 \neq n \geq 3$, has an asymptotic expansion in terms of inverse powers of r , one is led

to a smooth \mathcal{S} . This is the case for any such metric in dimensions $3 + 1$ or $2k + 1$, $k \geq 3$. In the remaining dimensions one always has a polyhomogeneous conformal completion at null infinity, with a conformally rescaled metric which is C^{n-4} up-to-boundary. For the Emparan-Reall metric there exists a completion which has no logarithmic terms, and is thus C^∞ up-to-boundary.

1.4.6 Uniqueness ?

Distinct extensions

We start by noting that maximal analytic extensions of manifolds are not unique. The simplest counterexamples are as follows : remove a subset Ω from a maximally extended manifold \mathcal{M} so that $\mathcal{M} \setminus \Omega$ is not simply connected, and pass to the universal cover ; extend maximally the space-time so obtained, if further needed. This provides a new maximal extension. Whether or not such constructions can be used to classify all maximal analytic extensions remains to be seen.

One can likewise ask the question, whether it is true that $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ is unique within the class of simply connected analytic extensions of (\mathcal{M}_I, g) which are inextendible and globally hyperbolic. The following variation of the construction gives a negative answer, when "inextendible" is meant as "inextendible within the class of globally hyperbolic manifolds" : Let \mathcal{S} be the Cauchy surface $\{t = 0\}$ in $\widehat{\mathcal{M}}$, as described in Section 1.4.4 (see (1.46)), and remove from \mathcal{S} a closed subset Ω so that $\mathcal{S} \setminus \Omega$ is not simply connected. Let $\widetilde{\mathcal{S}}$ be a maximal analytic extension of the universal covering space of $\mathcal{S} \setminus \Omega$, with the obvious Cauchy data inherited from \mathcal{S} , and let $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g})$ be the maximal globally hyperbolic development thereof. Then $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g})$ is a globally hyperbolic analytic extension of (\mathcal{M}_I, g) which is maximal in the class of globally hyperbolic manifolds, and distinct from $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$.

The examples just discussed will exhibit the following undesirable feature : existence of maximally extended geodesics of finite affine length near which the space-time is locally extendible in the sense of [R93]. This does not happen in $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$. It turns out that there exists at least one more maximal extension of the Emparan-Reall space-time (\mathcal{M}_I, g) which does not suffer from this *local extendibility* pathology. This results from a general construction which proceeds as follows :

Consider any spacetime (\mathcal{M}, g) , and let \mathcal{M}_I be an open subset of \mathcal{M} . Suppose that there exists an isometry Ψ of (\mathcal{M}, g) satisfying : a) Ψ has no fixed points ; b) $\Psi(\mathcal{M}_I) \cap \mathcal{M}_I = \emptyset$; and c) Ψ^2 is the identity map. Then, by a) and c), \mathcal{M}/Ψ equipped with the obvious metric (still denoted by g) is a Lorentzian manifold. Furthermore, by b), \mathcal{M}_I embeds diffeomorphically into \mathcal{M}/Ψ in the obvious way. It follows from the results in [Nom60] that $(\mathcal{M}/\Psi, g)$ is analytic if (\mathcal{M}, g) was (compare [Chr96, Appendix A]).

Keeping in mind that a space-time is time-oriented by definition, \mathcal{M}/Ψ will be a space-time if and only if Ψ preserves time-orientation. If \mathcal{M} is simply connected, then $\pi_1(\mathcal{M}/\Psi) = \mathbb{Z}_2$.

As an example of this construction, consider the Kruskal-Szekeres extension (\mathcal{M}, g) of the Schwarzschild space-time (\mathcal{M}_I, g) ; by the latter we mean a connected component of the set $\{r > 2m\}$ within \mathcal{M} . Let (T, X) the global coordinates on \mathcal{M} as defined on p. 153

of [Wal84]. Let $\mathring{\Psi} : S^2 \rightarrow S^2$ be the antipodal map. Consider the four isometries $\Psi_{\pm\pm}$ of the Kruskal-Szekeres space-time defined by the formula, for $p \in S^2$,

$$\Psi_{\pm\pm}(T, X, p) = (\pm T, \pm X, \mathring{\Psi}(p)) .$$

Set $\mathcal{M}_{\pm\pm} := \mathcal{M}/\Psi_{\pm\pm}$. As Ψ_{++} is the identity in (T, X) , $\mathcal{M}_{++} = \mathcal{M}$ is locally asymptotically flat but is not asymptotically flat in the usual sense, and thus irrelevant in our context. Next, both $\mathcal{M}_{-, \pm}$ are smooth maximal analytic Lorentzian extensions of (\mathcal{M}_I, g) , but are not space-times. Finally, \mathcal{M}_{+-} is a maximal globally hyperbolic analytic extension of the Schwarzschild manifold distinct from \mathcal{M} . This is the ‘‘ \mathbb{RP}^3 geon’’, discussed in [FSW93].

Similar examples can be constructed for the black ring solution ; we restrict attention to orientation, and time-orientation, preserving maps. So, let $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ be our extension, as constructed above, of the domain of outer communication (\mathcal{M}_I, g) within the Empanan-Reall space-time $(\mathcal{M}_{I \cup II}, g)$, and let $\Psi : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$ be defined as

$$\Psi(\hat{v}, \hat{w}, \hat{\psi}, x, \varphi) = (\hat{w}, \hat{v}, \hat{\psi} + \pi, x, -\varphi) . \quad (1.53)$$

By inspection of (1.13)-(1.15) and (1.27), the map Ψ is an isometry, and clearly satisfies conditions a), b) and c) above. Then $\widehat{\mathcal{M}}/\Psi$ is a maximal, orientable, time-orientable, analytic extension of \mathcal{M}_I distinct from $\widehat{\mathcal{M}}$.

A uniqueness theorem

Our aim in this section is to prove a uniqueness result for our extension $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ of the Empanan-Reall space-time (\mathcal{M}_I, g) . The examples of the previous section show that the hypotheses are optimal :

Theorem 1.4.4 *$(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ is unique within the class of simply connected analytic extensions of (\mathcal{M}_I, g) which have the property that all maximally extended causal geodesics on which $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ is bounded are complete.*

Uniqueness is understood up to isometry. Theorem 1.4.4 follows immediately from Theorem 1.4.6, which we are about to prove, and from our analysis of causal geodesics of $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ in Section 1.5 below, see Theorem 1.5.1 there.

For the record we state the corresponding result for the Schwarzschild space-time, with identical (but simpler, as in this case the geodesics are simpler to analyse) proof :

Theorem 1.4.5 *The Kruskal-Szekeres space-time is the unique extension, within the class of simply connected analytic extensions of the Schwarzschild region $r > 2m$, with the property that all maximally extended causal geodesics on which $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ is bounded are complete.*

We continue with some terminology. A maximally extended geodesic ray $\gamma : [0, s^+) \rightarrow \mathcal{M}$ will be called *s-complete* if $s_+ = \infty$ unless there exists some polynomial scalar invariant α such that

$$\limsup_{s \rightarrow s_+} |\alpha(\gamma(s))| = \infty .$$

A similar definition applies to maximally extended geodesics $\gamma : (s_-, s^+) \rightarrow \mathcal{M}$, with some polynomial scalar invariant (not necessarily the same) unbounded in the incomplete direction, if any. Here, by a *polynomial scalar invariant* we mean a scalar function which is a polynomial in the metric, its inverse, the Riemann tensor and its derivatives. It should be clear how to include in this notion some other objects of interest, such as the norm $g(X, X)$ of a Killing vector X , or of a Yano-Killing tensor, etc. But care should be taken not to take scalars such as $\ln(R_{ijkl}R^{ijkl})$ which could blow up even though the geometry remains regular ; this is why we restrict attention to polynomials.

A Lorentzian manifold (\mathcal{M}, g) will be said to be *s-complete* if every maximally extended geodesic is *s-complete*. The notions of *timelike s-completeness*, or *causal s-completeness* are defined similarly, by specifying the causal type of the geodesics in the definition above.

We have the following version of [KN63, Theorem 6.3, p. 255] (compare also the *Remark* on p. 256 there), where geodesic completeness is weakened to *timelike s-completeness* :

Theorem 1.4.6 *Let $(\mathcal{M}, g), (\mathcal{M}', g')$ be analytic Lorentzian manifolds of dimension $n+1$, $n \geq 1$, with \mathcal{M} connected and simply connected, and \mathcal{M}' timelike *s-complete*. Then every isometric immersion $f_U : U \subset \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}'$, where U is an open subset of \mathcal{M} , extends uniquely to an isometric immersion $f : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}'$.*

PROOF: We need some preliminary lemmas which are proved as in [KN63], by replacing “*affine mappings*” there by “*isometric immersions*” :

Lemma 1.4.7 [KN63, Lemma 1, p. 252] *Let $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ be analytic manifolds, with \mathcal{M} connected. Let f, g be analytic mappings $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$. If f and g coincide on a nonempty open subset of \mathcal{M} , then they coincide everywhere.*

Lemma 1.4.8 [KN63, Lemma 4, p. 254] *Let (\mathcal{M}, g) and (\mathcal{M}', g') be pseudo-Riemannian manifolds of same dimension, with \mathcal{M} connected, and let f and g be isometric immersions of \mathcal{M} into \mathcal{M}' . If there exists some point $x \in \mathcal{M}$ such that $f(x) = g(x)$ and $f_*(X) = g_*(X)$ for every vector X of $T_x\mathcal{M}$, then $f = g$ on \mathcal{M} .*

We can turn our attention now to the proof of Theorem 1.4.6. Similarly to the proof of Theorem 6.1 in [KN63], we define an *analytic continuation of f_U along a continuous path $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$* to be a set of mappings $f_s, 0 \leq s \leq 1$, together with a family of open subsets $U_s, 0 \leq s \leq 1$, satisfying the properties :

- $f_0 = f_U$ on $U_0 = U$;
- for every $s \in [0, 1]$, U_s is a neighborhood of the point $c(s)$ of the path c , and f_s is an isometric immersion $f_s : U_s \subset \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}'$;
- for every $s \in [0, 1]$, there exists a number $\delta_s > 0$ such that for all $s' \in [0, 1]$, $(|s' - s| < \delta_s) \Rightarrow (c(s') \in U_s \text{ and } f_{s'} = f_s \text{ in a neighborhood of } c(s'))$;

We need to prove that, under the hypothesis of *s-completeness*, such an analytic continuation does exist along any curve c . The argument is simplest for timelike curves, so let us first assume that c is timelike. To do so, we consider the set :

$$A := \{s \in [0, 1] \mid \text{an analytic continuation exists along } c \text{ on } [0, s]\} \quad (1.54)$$

A is nonempty, as it contains a neighborhood of 0. Hence $\bar{s} := \sup A$ exists and is positive. We need to show that in fact, $\bar{s} = 1$ and can be reached. Assume that this is not the case. Let W be a normal convex neighborhood of $c(\bar{s})$ such that every point x in W has a normal neighborhood containing W . (Such a W exists from Theorem 8.7, chapter III of [KN63].) We can choose $s_1 < \bar{s}$ such that $c(s_1) \in W$, and we let V be a normal neighborhood of $c(s_1)$ containing W . Since $s_1 \in A$, f_{s_1} is well defined, and is an isometric immersion of a neighborhood of $c(s_1)$ into \mathcal{M}' ; we will extend it to $V \cap I^\pm(c(s_1))$. To do so, we know that $\exp : V^* \rightarrow V$ is a diffeomorphism, where V^* is a neighborhood of 0 in $T_{c(s_1)}\mathcal{M}$, hence, in particular, for $y \in V \cap I^\pm(c(s_1))$, there exists a unique $X \in V^*$ such that $y = \exp X$. Define $X' := f_{s_1*}X$. Then X' is a vector tangent to \mathcal{M}' at the point $f_{s_1}(c(s_1))$. Since y is in the timelike cone of $c(\bar{s})$, X is timelike, and so is X' , as f_{s_1} is isometric. We now need to prove the following :

Lemma 1.4.9 *The geodesic $s \mapsto \exp(sX')$ of \mathcal{M}' is well defined for $0 \leq s \leq 1$.*

PROOF: Let

$$s^* := \sup\{s \in [0, 1] \mid \exp(s'X') \text{ exists } \forall s' \in [0, s]\}. \quad (1.55)$$

First, such a s^* exists, is positive, and we notice that if $s^* < 1$, then it is not reached. We wish to show that $s^* = 1$ and is reached. Hence, it suffices to show that “ s^* is not reached” leads to a contradiction. Indeed, in such a case the timelike geodesic $s \mapsto \exp(sX')$ ends at finite affine parameter, thus, there exists a scalar invariant φ such that $\varphi(\exp(sX'))$ is unbounded as $s \rightarrow s^*$. Now, for all $s < s^*$, we can define $h(\exp(sX)) := \exp(sX')$, and this gives an extension h of f_{s_1} which is analytic (since it commutes with the exponential maps, which are analytic). By Lemma 1.4.8, h is in fact an isometric immersion. By definition of scalar invariants we have

$$\varphi(\exp(sX')) = \tilde{\varphi}(\exp(sX)) ,$$

where $\tilde{\varphi}$ is the invariant in (\mathcal{M}, g) corresponding to φ . But this is not possible since $\tilde{\varphi}(\exp(sX))$ has a finite limit when $s \rightarrow s^*$, and provides the desired contradiction. \square

>From the last lemma we deduce that there exists a unique element, say $h(y)$, in a normal neighborhood of $f_{s_1}(c(s_1))$ in \mathcal{M}' such that $h(y) = \exp(X')$. Hence, we have extended f_{s_1} to a map h defined on $V \cap I^\pm(c(s_1))$. In fact, h is also an isometric immersion, by the same argument as above, since it commutes with the exponential maps of \mathcal{M} and \mathcal{M}' . Then, since the curve c is timelike, this is sufficient to conclude that we can do the analytic continuation beyond $c(\bar{s})$, since $V \cap I^\pm(c(s_1))$ is an open set, and thus contains a segment of the geodesic $c(s)$, for s in a neighborhood of \bar{s} .

Let us consider now a general, not necessarily timelike, continuous curve $c(s)$, $0 \leq s \leq 1$, with $c(0) \in U$. As before, we consider the set :

$$\{s \in [0, 1] \mid \text{there exists an analytic continuation of } f_U \text{ along } c(s'), 0 \leq s' \leq s\}, \quad (1.56)$$

and its supremum \tilde{s} . Assume that \tilde{s} is not reached. Let again W be a normal neighborhood of $c(\tilde{s})$ such that every point of W contains a normal neighborhood which contains W . Then, let z be an element of the set $I^+(c(\tilde{s})) \cap W$. $I^-(z) \cap W$ is therefore an open set

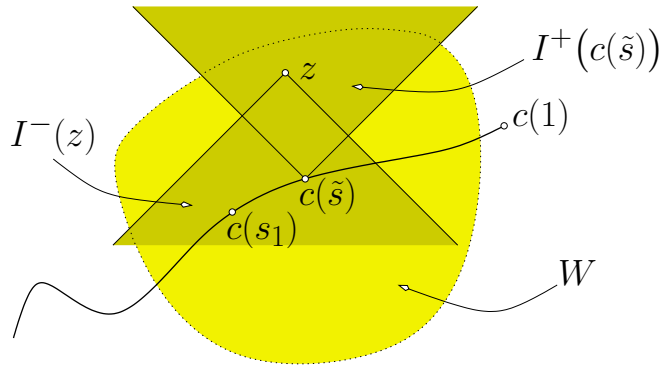


FIGURE 1.3 – The analytic continuation at $c(\tilde{s})$.

in W containing $c(\tilde{s})$. Hence we can choose $s_1 < \tilde{s}$ such that the curve segment $c([s_1, \tilde{s}])$ is included in $I^-(z) \cap W$, see Figure 1.3. In particular, $z \in I^+(c(s_1)) \cap W$. Since there exists an analytic continuation up to $c(s_1)$, we have an isometric immersion f_{s_1} defined on a neighborhood U_{s_1} of $c(s_1)$, which can be assumed to be included in W . Hence, from what has been seen previously, f_{s_1} can be extended as an isometric immersion, ψ_1 , on $U_z := U_{s_1} \cup (I^+(c(s_1)) \cap W)$, which contains z . We now do the same operation for ψ_1 on U_z : we can extend it by analytic continuation to an isometric immersion ψ_2 defined on $U_z \cup (I^-(z) \cap W)$, which is an open set containing the entire segment of the curve x between $c(s_1)$ and $c(\tilde{s})$. In particular, ψ_1 and ψ_2 coincide on U_z , i.e. on their common domain of definition; thus we obtain an analytic continuation of f_{s_1} along the curve $c(s)$, for $s_1 \leq s \leq \tilde{s}$; this continuation also coincides with the continuation f_s , $s \in [s_1, \tilde{s}[$. This is in contradiction with the assumption that \tilde{s} is not reached by any analytic continuation from f_U along x . Hence $\tilde{s} = 1$ and is reached, that is to say we have proved the existence of an analytic continuation of f_U along all the curve x .

The remaining arguments are as in [KN63]. \square

1.5 Geodesics

We continue with a study of geodesics in $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$. Our aim is to prove :

Theorem 1.5.1 *All maximally extended causal geodesics in $(\widehat{\mathcal{M}}, g)$ are either complete, or reach a singular boundary $\{z = \xi_F\}$ in finite affine time.*

The proof of Theorem 1.5.1 will occupy the remainder of this section. We will analyze separately the behavior of the geodesics in various regions of interest, using coordinates suited for the region at hand.

1.5.1 Geodesics in the domain of outer communications away from the horizon

Whether in \mathcal{M}_I or in $\widehat{\mathcal{M}}$, the *domain of outer communications*¹ $\langle\langle \mathcal{M}_{\text{ext}} \rangle\rangle$ coincides with the set

$$\{z \in (\xi_3, \infty] \cup [-\infty, \xi_1]\} .$$

We continue by showing that all geodesic segments in $\langle\langle \mathcal{M}_{\text{ext}} \rangle\rangle$ of finite affine length which do not approach the boundary $\{z = \xi_3\}$ remain within compact sets of \mathcal{M} , with uniform bounds on the velocity vector. This holds regardless of the causal nature of the geodesic. To see this, let $s \mapsto \gamma(s)$ be an affinely parameterized geodesic,

$$\gamma(s) = (t(s), \psi(s), z(s), x(s), \varphi(s)) .$$

We have four constants of motion,

$$\lambda := g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) , \quad c_t := g(\partial_t, \dot{\gamma}) , \quad c_\psi := g(\partial_\psi, \dot{\gamma}) , \quad c_\varphi := g(\partial_\varphi, \dot{\gamma}) . \quad (1.57)$$

Written out in detail, keeping in mind that $\sigma = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\nu}{\xi_F}}$,

$$\lambda = -\frac{F(x)}{F(z)} \left(\dot{t} + \sigma(\xi_1 - z)\dot{\psi} \right)^2 + \frac{F(z)}{A^2(x-z)^2} \left[-F(x) \left(\frac{\dot{z}^2}{G(z)} + \frac{G(z)}{F(z)} \dot{\psi}^2 \right) + F(z) \left(\frac{\dot{x}^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)} \dot{\varphi}^2 \right) \right] ; \quad (1.58)$$

$$c_t = -\frac{F(x)}{F(z)} \left(\dot{t} + \sigma(\xi_1 - z)\dot{\psi} \right) ; \quad (1.59)$$

$$c_\psi = \sigma(\xi_1 - z)c_t - \frac{G(z)F(x)}{A^2(x-z)^2} \dot{\psi} ; \quad (1.60)$$

$$c_\varphi = \frac{F^2(z)G(x)}{A^2(x-z)^2 F(x)} \dot{\varphi} . \quad (1.61)$$

This leads to

$$\dot{\psi} = \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)G(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi) , \quad (1.62)$$

$$\dot{t} = -\frac{F(z)}{F(x)} c_t - \sigma(\xi_1 - z) \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)G(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi) , \quad (1.63)$$

$$G(x)\dot{\varphi} = \frac{A^2(x-z)^2 F(x)}{F(z)^2} c_\varphi , \quad (1.64)$$

$$\lambda = -\frac{F(z)}{F(x)} c_t^2 - \frac{F(z)F(x)}{A^2(x-z)^2 G(z)} \dot{z}^2 - \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)G(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 + \frac{F^2(z)}{A^2(x-z)^2} \frac{\dot{x}^2}{G(x)} + \frac{A^2(x-z)^2 F(x)}{G(x)F^2(z)} c_\varphi^2 . \quad (1.65)$$

We have :

1. Those geodesics for which $\liminf_{s \rightarrow \infty} (x(s) - z(s)) = 0$ can be studied by transforming the metric to explicitly asymptotically flat coordinates as in [ER02], and using known methods (see, e.g., [Chr88, Appendix B] and [Chr04, Appendix]). Such geodesics eventually remain in the asymptotically flat region and are complete in the relevant direction. So, without loss of generality we can assume in the remainder of our analysis that

$$|x - z| \geq \epsilon_0 \quad (1.66)$$

for some $0 < \epsilon_0 < 1$.

2. Consider those geodesic segments for which

$$2\xi_1 \leq z(s) \leq \xi_1 .$$

In this region the functions z and x are related to polar-type coordinates near axes of rotation $G(z) = 0$ and $G(x) = 0$; in fact, well behaved polar-type coordinates (θ, μ) are obtained by introducing

$$d\theta = \frac{dx}{\sqrt{G(x)}}, \quad d\mu = \frac{dz}{\sqrt{|G(z)|}} . \quad (1.67)$$

We then rewrite (1.65) as

$$\begin{aligned} F(x)\dot{\mu}^2 + F(z)\dot{\theta}^2 + \frac{A^4(x-z)^4 F(x)}{G(x)F^3(z)} c_\varphi^2 \\ + \frac{A^4(x-z)^4}{F(x)F(z)|G(z)|} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 = \frac{A^2(x-z)^2}{F(z)} \left[\lambda + \frac{F(z)}{F(x)} c_t^2 \right] . \end{aligned} \quad (1.68)$$

The right-hand-side is bounded by a constant C , while the coefficients $F(x)$ of $\dot{\mu}^2$ and $F(y)$ of $\dot{\theta}^2$ are bounded from above and away from zero, so there exists a constant C_1 such that

$$\dot{\mu}^2 + \dot{\theta}^2 \leq C_1 . \quad (1.69)$$

Inspecting (1.62)-(1.64), and noting that the zero of $G(z)$ in the denominator of the right-hand-side of (1.63) is canceled by the $z - \xi_1$ factor in the numerator, we find that there exists a constant C_2 such that

$$\dot{t}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\mu}^2 + G^2(z)\dot{\psi}^2 + G^2(x)\dot{\varphi}^2 \leq C_2 . \quad (1.70)$$

It follows from (1.68) that a non-zero c_φ prevents x from approaching ξ_1 and ξ_2 unless $x - z \rightarrow 0$, similarly a non-zero c_ψ prevents z from approaching ξ_1 unless $x - z \rightarrow 0$. So, under (1.66), we find a bound on $|\dot{\psi}|$ from (1.62) when c_ψ is zero (since then a factor $z - \xi_1$ in $G(z)$ is cancelled by a similar factor in the numerator), or from (1.70) otherwise. A similar analysis of $\dot{\varphi}$ allows us to conclude that

$$\dot{t}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\mu}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \leq C_3 . \quad (1.71)$$

3. Consider, next, geodesic segments for which

$$-\infty \leq z \leq 2\xi_1 \quad \text{or} \quad \xi_3 + \epsilon \leq z \leq \infty ,$$

where ϵ is some strictly positive number. Introducing $Y = -1/z$, from (1.65) we find

$$\begin{aligned} & \frac{|F(z)|F(x)}{A^2(x-z)^2|G(z)|Y^4} \dot{Y}^2 + \frac{F^2(z)}{A^2(x-z)^2} \dot{\theta}^2 + \frac{A^2(x-z)^2 F(x)}{G(x)F^2(z)} c_\varphi^2 \quad (1.72) \\ & = \lambda + \frac{F(z)}{F(x)} c_t^2 + \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)G(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 . \end{aligned}$$

By an argument similar to the above, but simpler, we obtain

$$\dot{t}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \leq C_4 . \quad (1.73)$$

Here one has to use a cancelation in the coefficient of c_t^2 in (1.72), as well as in the coefficient of c_t in (1.63), keeping in mind that $\sigma = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\nu}{\xi_F}}$; e.g.,

$$t = -\frac{1}{F(x)} \underbrace{\left(\underbrace{\frac{F(z)}{=1/(Y\xi_F)+O(1)}}_{=O(1)} + \underbrace{\sigma^2(\xi_1 - z)^2 \frac{A^2(x-z)^2}{G(z)}}_{=-\sigma^2 A^2/(\nu Y)+O(1)} \right)}_{=O(1)} c_t + O(1) , \quad (1.74)$$

where $O(1)$ denotes terms which are bounded as $Y \rightarrow 0$.

Usual considerations about maximally extended geodesics show now that :

Proposition 1.5.2 *For any $\epsilon > 0$, the geodesics which are maximally extended within the region $z \in [\xi_3 + \epsilon, \infty] \cup [-\infty, \xi_1]$ are either complete, or acquire a smooth end point at $\{z = \xi_3 + \epsilon\}$.*

1.5.2 Geodesics in the region $\{\xi_F < z < \xi_3\}$

In this coordinate range both $F(z)$ and $G(z)$ are negative, and we rewrite (1.65) as

$$\frac{|F(z)|}{|G(z)|} \dot{z}^2 - \frac{F^2(z)}{F(x)} \dot{\theta}^2 = \dot{\chi} + \frac{A^4(x-z)^4}{G(x)F^2(z)} c_\varphi^2 , \quad (1.75)$$

where we have set

$$\dot{\chi} := \frac{A^4(x-z)^4}{F^2(x)(-G(z))} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 + \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)} \left[-\lambda + \frac{|F(z)|}{F(x)} c_t^2 \right] . \quad (1.76)$$

Timelike geodesic incompleteness

The extended space-time will not be geodesically complete if one can find a maximally extended geodesic with finite affine length. Consider, thus any future directed, affinely parameterized timelike geodesic γ entirely contained in the region $\{\xi_F < z < \xi_3\} \cap \{\hat{v} > 0, \hat{w} > 0\}$, and maximally extended there; an identical argument applies to past directed timelike geodesics in the region $\{\xi_F < z < \xi_3\} \cap \{\hat{v} < 0, \hat{w} < 0\}$. Since z is a time function in this region, z is strictly decreasing along γ . From (1.75) we have

$$\frac{F(z)F(x)}{A^2(x-z)^2G(z)}\dot{z}^2 \geq -\lambda,$$

which gives $\sqrt{|F(z)|}|\dot{z}| \geq \epsilon\sqrt{|\lambda|}\sqrt{|G(z)|} > 0$ for some constant ϵ . The proper time parameterization is obtained by choosing $\lambda = -1$. Let $L(\gamma)$ denote the proper length along γ ; keeping in mind that $\dot{z} = dz/ds$ we obtain

$$L(\gamma) = \int_{\xi_F}^{\xi_3} \left| \frac{ds}{dz} \right| dz \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\xi_F}^{\xi_3} \sqrt{\frac{F(z)}{G(z)}} dz < \infty.$$

Hence every such geodesic reaches the singular boundary $\{z = \xi_F\}$ in finite proper time *unless* (\dot{z}, θ) becomes unbounded before reaching that set. We will see shortly that this second possibility cannot occur.

Uniform bounds

We wish, now, to derive uniform bounds on timelike geodesic segments contained in the region $\{\xi_F + \epsilon < z < \xi_3\}$, with any $\epsilon > 0$.

We start by noting that

$$\frac{d\hat{\psi}}{ds} = \frac{A^2(x-z)^2(\xi_3-z)}{F(x)G(z)(\xi_3-\xi_1)} (\sigma(\xi_1-z)c_t - c_\psi) + \frac{F(z)}{\sigma(\xi_3-\xi_1)F(x)} c_t. \quad (1.77)$$

which is well behaved throughout the region of current interest.

In the region $\{\hat{v} > 0, \hat{w} > 0\}$ we can introduce coordinates v and w using the formulae

$$v = \frac{\ln \hat{v}}{c}, \quad w = -\frac{\ln \hat{w}}{c},$$

and then define t and z using (1.10)-(1.11). With those definitions one recovers the form (1.1) of the metric, so that we can use the previous formulae for geodesics :

$$\frac{d\hat{v}}{ds} = c \left\{ -\hat{v} \frac{F(z)}{F(x)} c_t - \frac{\sigma}{\nu \hat{w} (z - \xi_2)^2} \left[\beta(x, z) + \sqrt{-F(\xi_3)} \frac{dz}{ds} \right] \right\}, \quad (1.78)$$

$$\frac{d\hat{w}}{ds} = c \left\{ \frac{F(z)}{F(x)} c_t \hat{w} + \frac{\sigma}{\nu \hat{v} (z - \xi_2)^2} \left[\beta(x, z) - \sqrt{-F(\xi_3)} \frac{dz}{ds} \right] \right\}, \quad (1.79)$$

where

$$\beta(x, z) := \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi) ,$$

and we note that both right-hand-sides have a potential problem at $\{z = \xi_3\}$, where $\hat{v}\hat{w}$ vanishes. Next, from (1.78) and (1.79),

$$\underbrace{\sqrt{-F(z)} \frac{dz}{ds}}_{=: \alpha} = -\sqrt{\left| \frac{F(z)}{F(\xi_3)} \right|} \frac{\nu(z - \xi_2)^2}{2c\sigma} \left(\hat{w} \frac{d\hat{v}}{ds} + \hat{v} \frac{d\hat{w}}{ds} \right) , \quad (1.80)$$

while from (1.78)-(1.79) we further have

$$\hat{w} \frac{d\hat{v}}{ds} - \hat{v} \frac{d\hat{w}}{ds} = -\frac{2cF(z)}{F(x)} c_t \hat{v} \hat{w} - \frac{2c\sigma}{\nu(\xi_2 - z)^2} \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi) . \quad (1.81)$$

We continue by rewriting (1.65) so that the problematic factors in (1.78)-(1.79) are grouped together

$$\begin{aligned} & \frac{F(x)}{|G(z)|A^2(x-z)^2} \left[\underbrace{|F(z)| \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 - \frac{A^4(x-z)^4}{F(x)^2} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2}_{\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)} \right] \\ & = -\lambda + \frac{|F(z)|}{F(x)} c_t^2 + \frac{F^2(z)}{A^2(x-z)^2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \frac{A^2(x-z)^2 F(x)}{G(x) F^2(z)} c_\varphi^2 . \end{aligned} \quad (1.82)$$

By Section 1.5.2 any causal geodesic will either reach $\{z = \xi_3\}$ in finite affine time, say $s = \hat{s}$, or will cease to exist before that time. In what follows we therefore assume $0 \leq s < \hat{s}$.

We continue by writing down the evolution equations for x and z , which can easily be obtained from the Lagrangean $L = g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$, and read

$$\begin{aligned} & 2 \frac{d}{ds} \left(\frac{F^2(z)}{A^2(x-z)^2 G(x)} \frac{dx}{ds} \right) \\ & = -\frac{F'(x)F(z)}{F^2(x)} c_t^2 - \frac{1}{A^2 G(z)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F(x)}{(x-z)^2} \right) \left(F(z) \dot{z}^2 + \frac{A^4(x-z)^4}{F^2(x)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 \right) \\ & \quad + \frac{F^2(z)}{A^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{G(x)(x-z)^2} \right) \dot{x}^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G(x)}{F(x)(x-z)^2} \right) \frac{A^4(x-z)^4 F^2(x)}{F^4(z) G^2(x)} c_\varphi^2 \right] . \end{aligned} \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} & -2 \frac{d}{ds} \left(\frac{F(x)F(z)}{A^2(x-z)^2 G(z)} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{F'(z)}{F(x)} c_t^2 \\ & -2\sigma \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)G(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi) c_t + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^2(z)}{A^2(x-z)^2} \right) \left[\dot{\theta}^2 + \frac{A^4(x-z)^4 F(x)}{F^4(z) G(x)} c_\varphi^2 \right] \\ & - \frac{F(x)}{A^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F(z)}{G(z)(x-z)^2} \right) \dot{z}^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(z)}{(x-z)^2} \right) \frac{A^4(x-z)^4}{F^2(x) G^2(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 \right] . \end{aligned} \quad (1.84)$$

Since z is a time function, the derivative \dot{z} has constant sign. So z can be used as a parameter along γ , and we can view (1.84) as an evolution equation in z for \dot{z} . For this we multiply by ds/dz , obtaining

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{d}{dz} \left(\frac{F(x)F(z)}{A^2(x-z)^2 G(z)} \frac{dz}{ds} \right) \\
&= \left[\frac{F'(z)}{F(x)} c_t^2 - 2\sigma \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)G(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)c_t \right] \frac{ds}{dz} \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^2(z)}{A^2(x-z)^2} \right) \left[\left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \frac{dz}{ds} + \frac{A^4(x-z)^4 F(x)}{F^4(z)G(x)} c_\varphi^2 \frac{ds}{dz} \right] \\
&- \frac{F(x)}{A^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F(z)}{G(z)(x-z)^2} \right) \frac{dz}{ds} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(z)}{(x-z)^2} \right) \frac{A^4(x-z)^4}{F^2(x)G^2(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 \frac{ds}{dz} \right].
\end{aligned} \tag{1.85}$$

Yet another variation on (1.75) reads

$$\frac{|F(z)|}{|G(z)|} = \frac{F^2(z)}{F(x)} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \left(\frac{ds}{dz} \right)^2 \left(\dot{\chi} + \frac{A^4(x-z)^4}{G(x)F^2(z)} c_\varphi^2 \right). \tag{1.86}$$

To obtain uniform bounds as z approaches ξ_3 , one can proceed as follows : Let $f > 0$ be defined by the formula

$$f := \frac{F(x)F(z)}{A^2(x-z)^2 G(z)} \frac{dz}{ds}. \tag{1.87}$$

Using the identity

$$-\frac{2}{\sqrt{-G(z)}} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{-G(z)} f \right) = -2 \frac{df}{dz} - \frac{G'(z)}{G(z)} f \tag{1.88}$$

we rewrite (1.85) as

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\sqrt{-G(z)}} \frac{d}{dz} \left(\frac{F(x)|F(z)|}{A^2(x-z)^2 \sqrt{-G(z)}} \frac{dz}{ds} \right) \\
&= \left[\frac{F'(z)}{F(x)} c_t^2 - 2\sigma \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)G(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)c_t \right] \frac{ds}{dz} \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^2(z)}{A^2(x-z)^2} \right) \left[\left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \frac{dz}{ds} + \frac{A^4(x-z)^4 F(x)}{F^4(z)G(x)} c_\varphi^2 \frac{ds}{dz} \right] \\
&- \frac{F(x)}{A^2 G(z)} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F(z)}{(x-z)^2} \right) \frac{dz}{ds} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(z)}{(x-z)^2} \right) \frac{A^4(x-z)^4}{F^2(x)G^2(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 \frac{ds}{dz} \right].
\end{aligned} \tag{1.89}$$

Equation (1.86) gives

$$\begin{aligned}
& \frac{F(x)}{F^2(z)} \frac{dz}{ds} \left[\frac{F^2(z)}{F(x)} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \left(\frac{ds}{dz} \right)^2 \frac{A^4(x-z)^4}{G(x)F^2(z)} c_\varphi^2 \right] \\
&= \frac{F(x)}{|F(z)G(z)|} \frac{dz}{ds} - \dot{\chi} \frac{F(x)}{F^2(z)} \frac{ds}{dz},
\end{aligned} \tag{1.90}$$

leading to

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{-G(z)}} \frac{d}{dz} \left(\frac{F(x)|F(z)|}{A^2(x-z)^2 \sqrt{-G(z)}} \frac{dz}{ds} \right) \\ &= \frac{F(x)}{A^2 G(z)} \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F(z)}{(x-z)^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^2(z)}{(x-z)^2} \right) \frac{1}{F(z)} \right\}}_{-F'(z)/(x-z)^2} \frac{dz}{ds} - \frac{ds}{dz} \chi, \end{aligned} \quad (1.91)$$

where

$$\begin{aligned} \chi &:= \frac{F'(z)}{F(x)} c_t^2 - 2\sigma \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)G(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)c_t \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(z)}{(x-z)^2} \right) \frac{A^2(x-z)^4}{F(x)G^2(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^2(z)}{A^2(x-z)^2} \right) \left[\frac{A^4(x-z)^4}{F(x)F^2(z)G(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{A^2(x-z)^2}{F^2(z)} \left(\lambda + \frac{F(z)}{F(x)} c_t^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Using an identity similar to (1.88) with G replaced by F , this can also be rewritten as

$$2 \frac{1}{\sqrt{|F(z)G(z)|}} \frac{d}{dz} \left(\frac{F(x)(|F(z)|)^{3/2}}{A^2(x-z)^2 \sqrt{|G(z)|}} \frac{dz}{ds} \right) = -\eta \chi \frac{ds}{dz}; \quad (1.93)$$

here, we have written the general formula which holds whatever the sign of $F(z)G(z)$, with $\eta = \pm 1$ being that sign; in the current context, $\eta = 1$. Setting

$$h := \frac{F(x)(-F(z))^{3/2}}{A^2(x-z)^2 \sqrt{|G(z)|}} \frac{dz}{ds},$$

we obtain

$$2h \frac{dh}{dz} = \frac{dh^2}{dz} = -\frac{F(x)F^2(z)}{A^2(x-z)^2} \eta \chi. \quad (1.94)$$

>From (1.86) one has

$$\left| \frac{d\theta}{dz} \right| \leq \sqrt{\frac{F(x)}{|F(z)G(z)|}}. \quad (1.95)$$

Since the right-hand-side is integrable in z on $[\xi_F, \xi_3]$, we infer that θ has finite limits both as $z \rightarrow \xi_F$ and $z \rightarrow \xi_3$,

$$\theta \xrightarrow{z \rightarrow \xi_3} \theta_3, \quad x \xrightarrow{z \rightarrow \xi_3} x_3, \quad \theta \xrightarrow{z \rightarrow \xi_F} \theta_F, \quad x \xrightarrow{z \rightarrow \xi_F} x_F. \quad (1.96)$$

In everything that follows we choose some small $\epsilon > 0$ and assume that $z \in [\xi_F + \epsilon, \xi_3]$.

Suppose, first, that

$$\sigma(\xi_1 - \xi_3)c_t - c_\psi = 0 \implies \sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi = \sigma(\xi_3 - z)c_t . \quad (1.97)$$

Then the right-hand-side of (1.94) is bounded, which implies that h is bounded, and has a limit as z approaches ξ_3 . From the definition of h we conclude that

$$|\dot{z}| \leq C\sqrt{-G(z)} .$$

Equation (1.75) implies, for z near ξ_3 ,

$$\dot{\theta}^2 + \frac{c_\varphi^2}{G(x)} \leq C . \quad (1.98)$$

We rewrite (1.78)-(1.79) as evolution equations in z :

$$\frac{d\hat{v}}{dz} = c\hat{v} \left\{ -\frac{F(z)}{F(x)}c_t \frac{ds}{dz} + \frac{\sigma(z - \xi_1)}{G(z)} \left[\beta(x, z) \frac{ds}{dz} + \sqrt{-F(\xi_3)} \right] \right\} , \quad (1.99)$$

$$\frac{d\hat{w}}{dz} = c\hat{w} \left\{ \frac{F(z)}{F(x)}c_t \frac{ds}{dz} - \frac{\sigma(z - \xi_1)}{G(z)} \left[\beta(x, z) \frac{ds}{dz} - \sqrt{-F(\xi_3)} \right] \right\} , \quad (1.100)$$

where $\beta(x, z)$ has been defined as :

$$\beta(x, z) := \frac{A^2(x - z)^2}{F(x)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi) .$$

Note that (1.97) implies that all prefactors of $\frac{ds}{dz}$ are bounded near $z = \xi_3$.

Suppose, first, that $c_\psi = 0$, by (1.97) this happens if and only if $c_t = 0$. Comparing (1.99) with (1.100) one finds that

$$\frac{d(\ln \hat{w})}{dz} = \frac{d(\ln \hat{v})}{dz} \iff \frac{d(\ln(\hat{w}/\hat{v}))}{dz} = 0 .$$

Thus there exists a constant ρ , different from 0 since $\hat{v}\hat{w} \neq 0$ in the region of interest, such that

$$\hat{v} = \rho\hat{w} .$$

Inserting back into (1.78) one finds

$$\left| \frac{d\hat{v}}{ds} \right| \leq C \frac{|\dot{z}|}{\hat{w}} \leq C \frac{\sqrt{\hat{v}\hat{w}}}{\hat{w}} = C \frac{\sqrt{\hat{v}}}{\sqrt{\hat{w}}} \leq C ,$$

with a similar calculation for $d\hat{w}/ds$ using (1.79). Thus

$$\left| \frac{d\hat{v}}{ds} \right| + \left| \frac{d\hat{w}}{ds} \right| \leq C . \quad (1.101)$$

>From (1.86), $\dot{\theta}$ is bounded, as well as derivatives of all coordinates functions along γ , and smooth extendibility of the geodesic across $\hat{w} = \hat{v} = 0$ readily follows.

So, still assuming (1.97), we suppose instead that c_t is different from zero. From (1.86), and since $\mathring{\chi}$ is positive, we get

$$\left| \frac{ds}{dz} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{|G(z)|}}. \quad (1.102)$$

Equation (1.99) with (1.100) gives now

$$\left| \frac{d(\ln(\hat{w}/\hat{v}))}{dz} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{|G(z)|}},$$

which is integrable in z , so

$$\hat{v} = \rho(z)\hat{w},$$

for a function ρ which has a finite limit as $z \rightarrow \xi_3$. One concludes as when $c_t = 0$.

We continue with the general case,

$$\sigma(\xi_1 - \xi_3)c_t - c_\psi \neq 0. \quad (1.103)$$

Near ξ_3 , the x -dependence of the most singular terms in (1.94) cancels out, leading to

$$\begin{aligned} \frac{dh^2}{dz} &= \frac{F^2(\xi_3) \left(\sigma(\xi_1 - \xi_3)c_t - c_\psi \right)^2 + O(z - \xi_3)}{\nu(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_1)} \times \frac{1}{(z - \xi_3)^2} \\ &=: \frac{a^2 + O(z - \xi_3)}{(z - \xi_3)^2}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

By integration,

$$h^2 = -\frac{a^2}{z - \xi_3} + O(\ln |z - \xi_3|). \quad (1.105)$$

Then, from the definition of h , we eventually find

$$\frac{dz}{ds} = \underbrace{\frac{A^2(x_3 - \xi_3)^2}{\sqrt{|F(\xi_3)|}F(x_3)} (\sigma(\xi_1 - \xi_3)c_t - c_\psi) + O((z - \xi_3) \ln |z - \xi_3|)}_{=: \hat{a}}. \quad (1.106)$$

Next, we need to know how the x -limit is attained. For this, integration of (1.95) gives

$$|\theta(z) - \theta(\xi_3)| \leq C\sqrt{|z - \xi_3|}.$$

But, by the definition (1.67) of θ , we have, for θ_1 close to θ_2 ,

$$|\theta_1 - \theta_2| \approx \begin{cases} \sqrt{|x_1 - x_2|}, & G(x_2) = 0; \\ |x_1 - x_2|, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence

$$|x(z) - x(\xi_3)| \leq \begin{cases} C|z - \xi_3|, & G(x_3) = 0; \\ C\sqrt{|z - \xi_3|}, & \text{otherwise.} \end{cases}.$$

Inserting this into (1.75), the leading order singularity cancels out :

$$\dot{\theta}^2 + \frac{c_\varphi^2}{G(x)} \leq C|z - \xi_3|^{-1/2}. \quad (1.107)$$

We pass now to the equation satisfied by \dot{x} . In terms of θ , (1.83) can be rewritten as

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{G(x)}} \frac{d}{ds} \left(\frac{F^2(z)}{A^2(x-z)^2} \frac{d\theta}{ds} \right) \\ &= -\frac{F'(x)F(z)}{F^2(x)} c_t^2 - \frac{1}{A^2 G(z)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F(x)}{(x-z)^2} \right) \left(F(z)z^2 + \frac{A^4(x-z)^4}{F^2(x)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 \right) \\ & \quad + \frac{F^2(z)}{A^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(x-z)^2} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G(x)}{F(x)(x-z)^2} \right) \frac{A^4(x-z)^4 F^2(x)}{F^4(z)G^2(x)} c_\varphi^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.108)$$

We can use (1.75) to eliminate \dot{z}^2 from this equation, obtaining

$$\frac{2}{\sqrt{G(x)}} \frac{d}{ds} \left(\frac{F^2(z)}{A^2(x-z)^2} \frac{d\theta}{ds} \right) = \tilde{\chi} - \frac{F'(x)F^2(z)}{A^2 F(x)(x-z)^2} \dot{\theta}^2, \quad (1.109)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} := & \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F(x)}{(x-z)^2} \right) + \frac{F^2(x)}{G(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G(x)}{F(x)(x-z)^2} \right) \right] \frac{A^2(x-z)^4}{G(x)F^2(z)} c_\varphi^2 \\ & - \frac{F'(x)F(z)}{F^2(x)} c_t^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F(x)}{(x-z)^2} \right) \frac{(x-z)^2}{F(x)} \left(\lambda + \frac{F(z)}{F(x)} c_t^2 \right). \end{aligned} \quad (1.110)$$

Equivalently,

$$\frac{2}{\sqrt{F(x)G(x)}} \frac{d}{ds} \left(\frac{F^2(z)\sqrt{F(x)}}{A^2(x-z)^2} \frac{d\theta}{ds} \right) = \tilde{\chi}. \quad (1.111)$$

Multiplying by ds/dz , taking into account that $\dot{a} \neq 0$ by (1.103) and (1.106), from (1.107) we are led to an evolution equation of the form

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{F^2(z)\sqrt{F(x)}}{A^2(x-z)^2} \frac{d\theta}{ds} \right) = O(|z - \xi_3|^{-3/4}). \quad (1.112)$$

We note that the right-hand side of (1.112) is integrable in z near ξ_3 , hence $|\dot{\theta}|$ is bounded near ξ_3 .

Using arguments already given, it is straightforward to obtain now the following :

Theorem 1.5.3 *Causal geodesics maximally extended in the region $\{\xi_F < z < \xi_3\}$ and directed towards $z = \xi_F$ reach this last set in finite affine time.*

In fact the conclusion holds true as well for those spacelike geodesics for which \dot{z} does not change sign.

To get uniformity towards ξ_3 , we first note that, from the integrability of the right-hand-side of (1.112),

$$\lim_{z \rightarrow \xi_3} \dot{\theta} \text{ exists, in particular } |\dot{\theta}| \leq C_\epsilon \text{ on } [\xi_F + \epsilon, \xi_3]. \quad (1.113)$$

We return now to (1.78)-(1.79). From what has been said, the limit $\lim_{z \rightarrow \xi_3} \beta$ exists. By (1.82) multiplied by $|G(z)|$, or otherwise, we find that the limit $\lim_{z \rightarrow \xi_3} \alpha$ exists, and

$$\lim_{z \rightarrow \xi_3} \alpha = \pm \lim_{z \rightarrow \xi_3} \beta. \quad (1.114)$$

We have $\lim_{z \rightarrow \xi_3} \beta \neq 0$ by (1.103). Suppose, first, that (1.114) holds with the plus sign. We write $(\alpha - \beta)/G$ as $[(\alpha^2 - \beta^2)/G]/(\alpha + \beta)$, and use (1.82) to obtain that the limit

$$\lim_{z \rightarrow \xi_3} \frac{\alpha - \beta}{G(z)}$$

exists. This implies that (1.79) can be written in the form

$$\frac{d\hat{w}}{ds} = \phi(s)\hat{w} \quad (1.115)$$

for some continuous function ϕ . By integration \hat{w} has a non-zero limit as $z \rightarrow \xi_3$, and (1.115) implies that $\frac{d\hat{w}}{ds}$ has a limit as well. It follows that \hat{v} tends to be zero, since $\hat{v}\hat{w}$ does. Equation (1.78) shows now that $\frac{d\hat{v}}{ds}$ has a limit. Hence

$$\hat{v} + \hat{w} + \left| \frac{d\hat{w}}{ds} \right| + \left| \frac{d\hat{v}}{ds} \right| + \left| \frac{dz}{ds} \right| + \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \leq C. \quad (1.116)$$

>From what has been said so far we conclude that those geodesics smoothly extend across the Killing horizon $\{\hat{w}\hat{v} = 0\}$.

A similar argument, with \hat{v} interchanged with \hat{w} , applies when the minus sign occurs in (1.114).

Summarising, we have proved :

Proposition 1.5.4 *Causal geodesics in the region $\{\xi_F < z < \xi_3\}$ reach the bifurcate Killing horizon $\{\hat{w}\hat{v} = 0\}$ in finite affine time, and are smoothly extendible there.*

1.5.3 Geodesics in the region $\{\xi_3 < z \leq 2\xi_3\}$

In this coordinate range $F(z)$ is strictly negative and $G(z)$ is positive, so we rewrite (1.65) as

$$\begin{aligned} & \frac{|F(z)|}{G(z)} \dot{z}^2 + \frac{F^2(z)}{F(x)} \dot{\theta}^2 + \frac{A^4(x-z)^4}{G(x)F^2(z)} c_\varphi^2 \\ &= \frac{A^4(x-z)^4}{F^2(x)G(z)} (\sigma(\xi_1 - z)c_t - c_\psi)^2 - \frac{A^2(x-z)^2}{F(x)} \left[-\lambda + \frac{|F(z)|}{F(x)} c_t^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.117)$$

>From this one immediately obtains a uniform bound on \dot{z} , as well as

$$\left| \frac{d\theta}{ds} \right| + \frac{c_\varphi^2}{\sqrt{|G(x)|}} \leq \frac{C}{\sqrt{|G(z)|}}. \quad (1.118)$$

Geodesics on which z stays bounded away from ξ_3 have already been taken care of in Section 1.5.1. So we consider a geodesic segment $\gamma : [0, \mathring{s}) \rightarrow \{\xi_3 < z \leq 2\xi_3\}$, with $\mathring{s} < \infty$, such that there exists a sequence $s_i \rightarrow \mathring{s}$ with $z(s_i) \rightarrow \xi_3$. (If $\mathring{s} = \infty$ there is nothing to prove.) But we have just seen that the function $s \mapsto z(s)$ is uniformly Lipschitz, hence $z(s) \rightarrow \xi_3$ as $s \rightarrow \mathring{s}$.

The Killing vector field

$$X := \frac{\partial}{\partial t} + \frac{A\sqrt{\xi_F}}{\sqrt{\nu}(\xi_3 - \xi_1)} \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (1.119)$$

is tangent to the generators of the Killing horizon \mathcal{E} , thus light-like at \mathcal{E} . As the horizon is non-degenerate, X is timelike near \mathcal{E} for small negative values of $\hat{v}\hat{w}$. But then $g(X, \dot{\gamma}) < 0$ for causal future directed geodesics in the domain of outer communications near \mathcal{E} , which shows that for causal geodesics through the region of current interest we must have

$$g(X, \dot{\gamma}) = c_t + \frac{A\sqrt{\xi_F}}{\sqrt{\nu}(\xi_3 - \xi_1)} c_\psi \neq 0 \iff \sigma(\xi_1 - \xi_3)c_t - c_\psi \neq 0. \quad (1.120)$$

It follows that causal geodesics intersecting $\langle\langle \mathcal{M}_{\text{ext}} \rangle\rangle$ for which (1.120) does *not* hold stay away from a neighborhood of \mathcal{E} , and are therefore complete by the results in Section 1.5.1.

>From what has been said we conclude that :

Proposition 1.5.5 *Causal geodesics crossing the event horizon $\{\hat{v}\hat{w} = 0\}$ and satisfying*

$$\sigma(\xi_1 - \xi_3)c_t - c_\psi = 0$$

are entirely contained within $\{\hat{v}\hat{w} > 0\} \cup \{\hat{v} = 0 = \hat{w}\}$.

We continue by noting that (1.93) remains true with χ as given by (1.92) on every interval of values of s on which \dot{z} does not change sign. We want to show, using a contradiction argument, that \dot{z} will be eventually negative for s close enough to \mathring{s} . So suppose not, then there will be increasing sequences $\{s_i^\pm\}_{i \in \mathbb{N}}$, $s_i^\pm \rightarrow \mathring{s}$, with $s_i^- < s_i^+$, such that

$$\dot{z}(s_i^\pm) = 0, \quad \dot{z}(s) < 0 \text{ on } I_i := (s_i^-, s_i^+), \quad z_i^\pm := z(s_i^\pm) \searrow \xi_3, \quad z_i^- > z_i^+.$$

By inspection of (1.92) and (1.94), there exists $z_* > \xi_3$ and $\epsilon > 0$ such that for all $z \in (\xi_3, z_*)$ we have

$$\frac{dh^2}{dz} \leq -\frac{\epsilon}{(z - \xi_3)^2}. \quad (1.121)$$

Integrating,

$$h^2(z_i^-) - h^2(z_i^+) \leq -\int_{z_i^+}^{z_i^-} \frac{\epsilon}{(z - \xi_3)^2} dz < 0, \quad (1.122)$$

which contradicts the fact that $\dot{z}(s_i^\pm) = 0$, and shows that \dot{z} is indeed strictly negative sufficiently close to the event horizon.

As in Section 1.5.2 we obtain now (1.105). This, together with the definition of h , implies that dz/ds is strictly bounded away from zero; equivalently,

$$\left| \frac{ds}{dz} \right| \leq C .$$

In particular $\{\hat{v}\hat{w} = 0\}$ is reached in finite affine time. Moreover, from (1.118) we now find

$$\left| \frac{d\theta}{dz} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{|G(z)|}} . \quad (1.123)$$

Keeping in mind (1.120), one can now repeat the arguments of Section 1.5.2 (after (1.103), with (1.95) replaced by (1.123)), to conclude that :

Theorem 1.5.6 *All maximally extended causal geodesics through $\langle\langle \mathcal{M}_{\text{ext}} \rangle\rangle$ are either complete, or can be smoothly extended across the horizon $\{\hat{v}\hat{w} = 0\}$.*

1.5.4 The Killing horizon

Consider a causal geodesic γ such that $\gamma(s_0) \in \{\hat{v}\hat{w} = 0\}$. If $d\hat{v}/ds$ or $d\hat{w}/ds$ are both different from zero at s_0 , then γ immediately enters the regions already covered. If γ enters $\{z < \xi_3\}$ it will stay there by monotonicity of z , so Theorem 1.5.3 applies. Otherwise it enters the region $\{z > \xi_3\}$; then either it approaches $z = \xi_3$ again, in which case it crosses back to $\{z < \xi_3\}$ by Theorem 1.5.6, and Theorem 1.5.3 applies; or it stays away from $z = \xi_3$ for all subsequent times, in which case it is complete, again by Theorem 1.5.6.

So it remains to consider geodesics for which

$$\forall s \quad \hat{v}(s)\hat{w}(s) = 0 = \frac{d\hat{v}}{ds}(s)\frac{d\hat{w}}{ds}(s) .$$

Since the bifurcation ring $S := \{\hat{w} = \hat{v} = 0\}$ is spacelike, those causal geodesics which pass through S immediately leave the bifurcate horizon, except for the generators of the latter. But those generators are complete by standard results [Boy69]. Since the only causal curves on a null hypersurface are its generators, the analysis is complete.

This achieves the proof of Theorem 1.5.1. □

Chapitre 2

Anneaux noirs de Pomeransky-Senkov

Ce chapitre, en anglais, prolonge l'étude des anneaux noirs d'Empanan-Reall, en examinant la famille plus générale des espaces-temps de Pomeransky-Senkov. On montre notamment que ces espaces-temps sont asymptotiquement plats, possède des horizons de Killing dont l'un est l'horizon des événement d'un trou noir. On vérifie que la région singulière se trouve en deça de ces horizons, et on établit la topologie de cette région, qui se trouve être dépendante des paramètres correspondant aux deux moments angulaires.

Cette étude a été réalisée en collaboration avec Piotr T. Chruściel et Alfonso García-Parrado, et fait l'objet d'un article ([CCGPGL09]), accepté dans *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*.

Sommaire

2.1	Introduction	36
2.2	Generalities	40
2.3	The function H	43
2.3.1	$H(x, y) = 0, H(y, x) = 0$	43
2.3.2	$H(y, x) = 0$	44
2.3.3	$H(x, y) = 0$: formulation of the problem	45
2.3.4	$H(x, y) = 0, y = -1$	46
2.3.5	$H(x, y) = 0, x = -1$	47
2.3.6	Connectedness of \mathcal{A}	47
2.4	Extensions across Killing horizons	53
2.4.1	Degenerate case	60
2.5	Some local and global properties	63
2.5.1	Stable causality of the domain of outer communications?	63
2.5.2	No struts	67
2.5.3	Asymptotics of the Pomeransky & Senkov solution	69
2.5.4	The singular set $\{H(x, y) = 0\}$	73
2.5.5	The Kretschmann scalar	85
2.5.6	The event horizon has $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ topology	88
2.6	An extension across $y = -\infty$	89
2.7	The global structure	92

2.8	The Pomeransky-Senkov metric	93
2.9	Emparan-Reall limit of the Pomeransky & Senkov metric . .	98

2.1 Introduction

In [PS06] a family of five-dimensional vacuum black-hole-candidate metrics has been presented :¹

$$ds^2 = \frac{2H(x,y)k^2}{(1-\nu)^2(x-y)^2} \left(\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)} \right) - 2\frac{J(x,y)}{H(y,x)}d\varphi d\psi - \frac{H(y,x)}{H(x,y)}(dt + \Omega)^2 - \frac{F(x,y)}{H(y,x)}d\psi^2 + \frac{F(y,x)}{H(y,x)}d\varphi^2, \quad (2.1)$$

where

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \lambda^2 + 2\nu(1-x^2)y\lambda + 2x(1-\nu^2y^2)\lambda - \nu^2 + \nu(-\lambda^2 - \nu^2 + 1)x^2y^2 + 1, \\ F(x,y) &= \frac{2k^2}{(x-y)^2(1-\nu)^2} \left((1-y^2) \left(((1-\nu)^2 - \lambda^2)(\nu+1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y\lambda(-\lambda^2 - 3\nu^2 + 2\nu + 1) \right) G(x) + \right. \\ &\quad \left. + (-(1-\nu)\nu(\lambda^2 + \nu^2 - 1)x^4 + \lambda(2\nu^3 - 3\nu^2 - \lambda^2 + 1)x^3 + ((1-\nu)^2 - \lambda^2)(\nu+1)x^2 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda(\lambda^2 + (1-\nu)^2)x + 2\lambda^2 \right) G(y), \\ J(x,y) &= \frac{2k^2(1-x^2)(1-y^2)\lambda\sqrt{\nu}(\lambda^2 + 2(x+y)\nu\lambda - \nu^2 - xy\nu(-\lambda^2 - \nu^2 + 1) + 1)}{(x-y)(1-\nu)^2}, \\ G(x) &= (1-x^2)(\nu x^2 + \lambda x + 1), \end{aligned}$$

and where Ω is a 1-form given by

$$\Omega = M(x,y)d\psi + P(x,y)d\varphi,$$

with

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \frac{2k\lambda\sqrt{(\nu+1)^2 - \lambda^2}(y+1)(-\lambda + \nu - 2\nu x + \nu x((\lambda + \nu - 1)x + 2)y - 1)}{(1-\lambda + \nu)H(y,x)} \\ &=: \frac{\sqrt{(\nu+1)^2 - \lambda^2}\hat{M}(x,y)}{(1-\lambda + \nu)H(y,x)} \\ P(x,y) &= \frac{2k\lambda\sqrt{\nu}\sqrt{(\nu+1)^2 - \lambda^2}(x^2 - 1)y}{H(y,x)} \\ &=: \frac{2\sqrt{\nu}\hat{P}(x,y)}{H(y,x)}, \end{aligned}$$

where \hat{P} and \hat{M} are polynomials in all variables.

1. We use (ψ, φ) where Pomeransky & Senkov use (φ, ψ) .

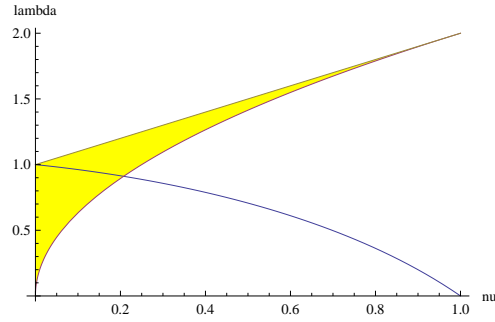


FIGURE 2.1 – The parameters ν and λ belong to the yellow-shaded region bounded by the vertical axis and by the two increasing graphs. The decreasing graph is the function $\lambda_k(\nu)$ of the proof of Proposition 2.3.6.

The parameter k is assumed to be in \mathbb{R}^* , while the parameters λ and ν have been restricted in [PS06] to belong to the set ²

$$\mathcal{U} := \{(\nu, \lambda) : \nu \in (0, 1), 2\sqrt{\nu} \leq \lambda < 1 + \nu\}, \quad (2.2)$$

which is the region between the two increasing curves of Figure 2.1. The coordinates x, y, ϕ, ψ, t vary within the ranges $-1 \leq x \leq 1, -\infty < y < -1, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq 2\pi$ and $-\infty < t < \infty$.

Studies of the properties of the metric (2.1) are available in the literature : some physical properties of this solution can be found in [ER08], and a study of some of its geodesics has been performed in [Dur09]. However, there remain unanswered questions dealing with global properties of the solution : causality, existence and topology of event horizons, absence of naked singularities, and structure of the singular set.

One thus wishes to understand the global structure of the corresponding space-time, and its possible extensions. In particular, one wishes to analyze the zeros of the denominators of the metric functions, and the zeros of the metric functions themselves, and their consequences for the space-time. The zeros of $G(y)$ are obvious, given by $y = \pm 1$ and

$$y_h := -\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\nu}}{2\nu}, \quad y_c := -\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\nu}}{2\nu}.$$

These quantities are real for values of λ, ν belonging to \mathcal{U} and we have $y_c \leq y_h$. All these considerations lead naturally to the definition

$$\Omega_0 \equiv \{(x, y, \nu, \lambda) \in \mathbb{R}^4 ; -1 \leq x \leq 1, y_c \leq y < -1, 0 < \nu < 1, 2\sqrt{\nu} \leq \lambda < 1 + \nu\}, \quad (2.3)$$

see Figure 2.2. One then wishes to know the following :

1. Do the denominators of the metric functions have zeros in Ω_0 ?

2. Strictly speaking, $\nu = 0$ is allowed in [PS06]. It is shown there that this corresponds to Empan-Reall metrics (compare Appendix 2.9), which have already been analysed elsewhere [CC10], and so we only consider $\nu > 0$.

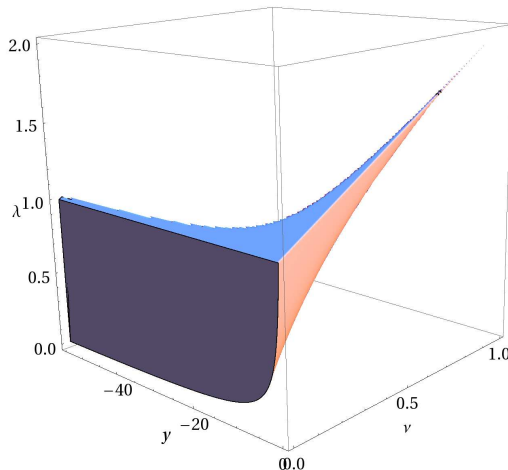


FIGURE 2.2 – Points in Ω_0 with $y_c < y < y_h$; the x variable has been suppressed.

2. One expects that the hypersurface $\{y = y_h\}$ is an event horizon, and that the hypersurface $\{y = y_c\}$ is a Cauchy horizon. Is this the case?
3. Are the space-times so defined extendible?
4. Do they represent suitably regular black-hole spacetimes, as implicit in [PS06], so that e.g. the usual classification theory [HY83, HY08, CLC08] applies?
5. Are the conditions defining the set Ω_0 the only possibility for the existence of regular black hole spacetimes or is it possible to select different values for the parameters and the coordinates such that regular black holes are present too?

The aim of this paper is to answer some of those questions : We show that the metric is smooth and Lorentzian in the range of coordinates and parameters defined by Ω_0 . We show that the non-empty set $\{(x, y, \nu, \lambda) : H(x, y) = 0\}$ does not intersect Ω_0 , and that the metric cannot be C^2 continued across this set. We show that there are always singularities of the Kretschmann scalar somewhere on this set, and report numerical studies that suggest blow up of the Kretschmann scalar everywhere there. We construct Kruskal-Szekeres type extensions of the metric across the Killing horizons $y = y_c$ and $y = y_h$, and we show that the set $\{y = y_h\}$ forms the boundary of the domain of outer communications (d.o.c.) in our extensions. We present numerical evidence for stable causality of the d.o.c.. We construct an extension of the metric across “the set $\{y = -\infty\}$ ”, to a region which contains singularities, causality violations, and another asymptotic end. In the extended space-time the singular set has topology $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$, or $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$, or a “pinched $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ ”, depending upon the values of the parameters. Three representative

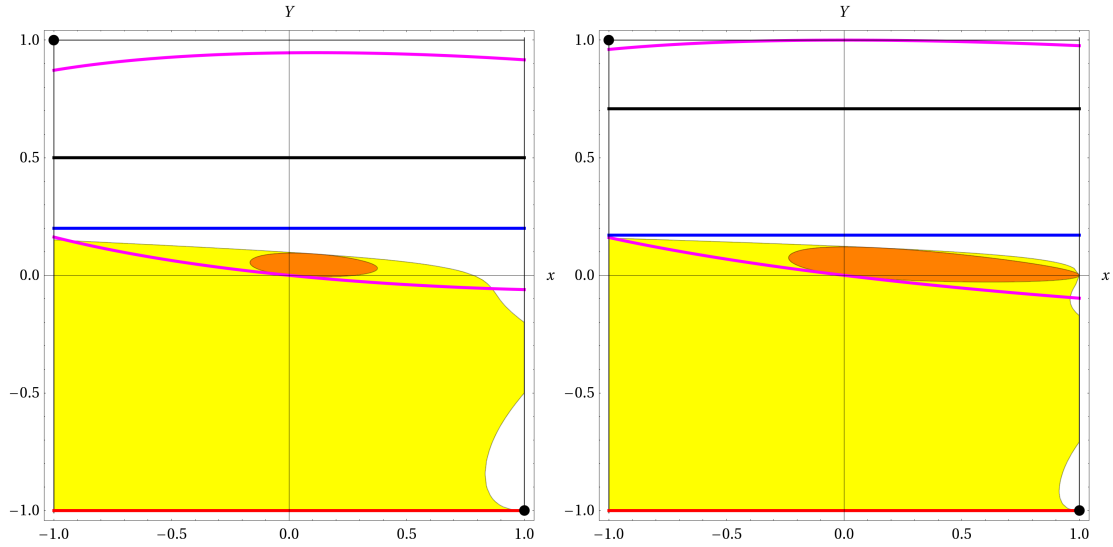


FIGURE 2.3 – Some global features of the solutions in $(x, Y = -1/y)$ coordinates : a) the \mathbb{T}^3 singularity with $\nu = .1$ and $\lambda = .7$; b) the borderline case $\lambda = 1 - \nu$ with $\nu = .121$. The boundaries $x = \pm 1$ and $Y = \pm 1$ are rotation axes for suitable Killing vectors, with a conical singularity at $Y = -1$ for generic values of k , except for the black dot at $(-1, 1)$ which is the infinity of an asymptotically Minkowskian region, and the black dot at $(1, -1)$, which is the infinity of a second, non asymptotically Minkowskian, end. The singular set $\{H(x, y) = 0\}$ is the boundary of the orange (darker shaded) region, where $H(x, y) < 0$. The strong-causality violations occur in the yellow (lightly shaded) region, where $\det g_{AB} < 0$ (see Section 2.5.1). The black (upper) thick horizontal line corresponds to the location of the event horizon, the blue (lower) thick horizontal line corresponds to an interior Killing horizon and the magenta curves to the ergosurface, $\{H(y, x) = 0\}$. These pictures indicate that when $\lambda + \nu < 1$ the ergosurface consists of two disconnected rings $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ (the *inner* ergosurface, intersecting the causality violating region, and the *outer* ergosurface). When $\lambda + \nu = 1$ the *outer* ergosurface becomes a “pinched” $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$.

(x, Y) coordinate plots, where $Y = -1/y$ (see Section 2.6), illustrating the behavior of the metric are presented in Figures 2.3 and 2.4. It should be kept in mind that those figures do *not* provide a representation of the global structure of the associated space-time, as the metric is singular at $Y = -1/y_c$ and $Y = -1/y_h$ in the (x, Y) coordinates : the space-time is constructed from the (x, Y) -coordinates representation by continuation in appropriate new coordinates, across every non-degenerate Killing horizon, to three distinct new regions. The global structure of the resulting analytic extension resembles that of the Kerr space-time, see Section 2.7.

Similarly to the analysis of the Emparan-Reall black rings in [CC10], one would like to prove that the d.o.c. is globally hyperbolic, that it is I^+ -regular in the sense of [CLC08], and that the extensions described in Section 2.7 are maximal. One would also like to understand better the nature of the asymptotic end associated with $(x = 1, Y = -1)$. All those questions require further studies.

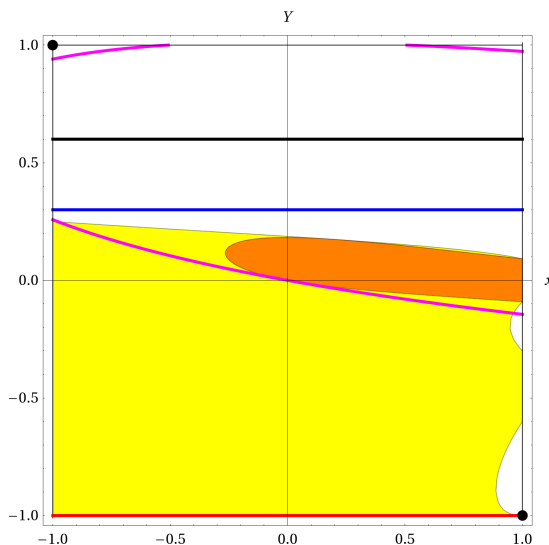


FIGURE 2.4 – The global structure in $(x, Y = -1/y)$ coordinates when $\lambda + \nu > 1$: the $S^1 \times S^2$ singularity with $\nu = .18$ and $\lambda = .9$ and the ergosurface which now has three connected components. The *outer* ergosurface is the union of two $\mathbb{R} \times S^3$'s and the inner ergosurface is a ring $\mathbb{R} \times S^2 \times S^1$. Color-coding as in Figure 2.3.

An essential tool in the research reported on here was the tensor manipulation package xACT [MG].

2.2 Generalities

In this section we establish some generic properties of the PS family of solutions, some of which will be needed in the rest of the paper. First of all, the requirement that the metric (2.1) is real-valued and well-defined enforces

$$0 \leq \nu \neq 1 \quad \text{and} \quad -(\nu + 1) \leq \lambda < \nu + 1. \quad (2.4)$$

Next, we look for the points in the (x, y) plane in which the signature is Lorentzian. It follows from (2.96) that, away from the sets $\{x = y\}$, $\{H(x, y) = 0\}$, $\{H(y, x) = 0\}$, $\{F(y, x) = 0\}$, $\{G(x) = 0\}$ and $\{G(y) = 0\}$, the metric signature is

$$\begin{aligned} & \left(-\text{sign}(H(y, x)H(x, y)), -\text{sign}(G(y)H(x, y)), \right. \\ & \left. -\text{sign}(G(x)H(x, y)F(y, x)G(y)), \text{sign}(F(y, x)H(y, x)), \text{sign}(G(x)H(x, y)) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

However, it follows from (2.94) and (2.100) that the signature of the metric can change at most at $\{G(x) = 0\}$, $\{G(y) = 0\}$, $\{x = y\}$, $\{H(y, x) = 0\}$ and $\{H(x, y) = 0\}$. It has been pointed out to us by H. Elvang (private communication) that the singularity of the metric at $\{H(y, x) = 0\}$ is an artifact of the parameterisation, see Section 2.3.2 for details, and

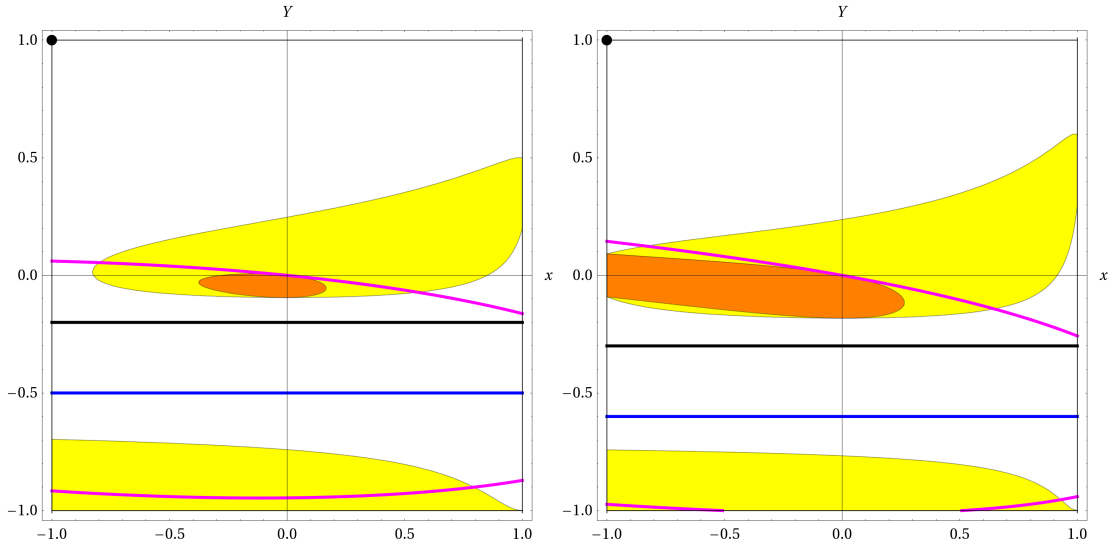


FIGURE 2.5 – Killing horizons, ergosurfaces, causality violating regions, and singularities in spacetimes with ν having the same value as in the spacetimes depicted in the left Figure 2.3 and in Figure 2.4 (color coding as in previous figures), but with λ here equal to $-\lambda$ there. In the current spacetimes the singularity is surrounded by the causality violating region.

therefore no signature change can occur across this set. Similarly, zeros of $F(y, x)$ in (2.5) (if any) are an artifact of the choice of frame in (2.96).

A numerical study of (2.5) indicates that, under the conditions of equation (2.4), the signature is never Lorentzian if either $|x| > 1$, $|y| > 1$ or $|x| < 1$ and $|y| < 1$. Therefore, it is likely that the coordinates x, y must vary within the set \mathcal{D} defined by

$$\mathcal{D} \equiv (\{|x| < 1\} \cap \{|y| > 1\}) \cup (\{|x| > 1\} \cap \{|y| < 1\}) \quad (2.6)$$

including possibly parts of its boundaries, which would e.g. correspond to lower dimensional orbits of the isometry group.

At this stage it is useful to recall the Lichnerowicz theorem, which asserts in space-time dimension four that the only stationary, with one asymptotically flat end, well-behaved solution of the Einstein equations is Minkowski space-time. In retrospect, this theorem can be viewed as a simple consequence of the positive energy theorem, regardless of dimension, on those manifolds, without boundary and with one asymptotically flat end, on which the rigid positivity of mass holds : Indeed, as is well known, the ADM mass equals the Komar mass ; but the latter is zero as the divergence of the Komar boundary integrand is zero. Since the positive energy theorem is true for all manifolds in dimension five [Sch89], there are no non-trivial, five-dimensional, spatially compact asymptotically flat metrics containing only one asymptotic end. As the existence of another asymptotically flat end leads to an event horizon, any non-trivial such solution must either contain event horizons, or regions with non-asymptotically-flat failure of spatial compactness (compare [And00]). If we decide that the latter is undesirable (“naked singularities”), we conclude that the

only solutions of interest are those with horizons. It is known that within the current class of metrics the existence of a horizon implies existence of a Killing prehorizon (cf., e.g., [Car69, CC10]); the existence of a Killing horizon in the interesting solutions follows then from [CG10] under the usual global conditions.

Now, Killing horizons require real zeros of the polynomials $G(x)$ and/or $G(y)$, keeping in mind that the sets $y = \pm 1$ and $x = \pm 1$ are expected to be axes of rotation. One is then led to require that the polynomial

$$p(\xi) \equiv \nu\xi^2 + \lambda\xi + 1, \quad (2.7)$$

where ξ represents either the variable x or y , has real zeros, denoted by $\xi_- \leq \xi_+$; this will be the case if

$$2\sqrt{\nu} \leq |\lambda|$$

holds, which we assume henceforth. We may distinguish now two alternative possibilities : the case with $0 \leq \nu < 1$ and the case with $1 < \nu$. In the first possibility it can be shown that $|\xi_{\pm}| > 1$ whereas the second possibility leads to $|\xi_{\pm}| < 1$ (see Proposition 2.8.2 of Appendix 2.8). Combining this with (2.6) one is led to consider the following coordinate ranges :

- $0 < \nu < 1$, $|x| < 1$, $|y| > 1$. This is the case which we are going to study in this paper, see below for further explanations.
- $0 < \nu < 1$, $|x| > 1$, $|y| < 1$. We have not been able to exclude the possibility of existence of well behaved asymptotically flat solutions in this range of parameters and coordinates.
- $1 < \nu$, $|x| < 1$, $|y| > 1$. The transformation of Proposition 2.8.1 below implies that this case is equivalent to the previous one.
- $1 < \nu$, $|x| > 1$, $|y| < 1$. Again, using the transformation (2.99) we deduce that this case is equivalent to the case of the first bullet point and hence the considerations there also apply here.

Now, as already pointed out by Pomeransky and Senkov in [PS06], and analyzed in detail in Section 2.5.3 below, the point $x = -1$, $y = -1$, corresponds to an asymptotically flat region for any λ , ν such that the PS metric is defined. Anticipating the analysis in Section 2.6, the introduction of the new variable $Y \equiv -1/y$ leads to a polynomial function $Y^2 H(x, -1/Y, \lambda, \nu)$ that vanishes at the point $x = 0$, $Y = 0$, for any λ , ν ; and it turns out that this point corresponds to a naked singularity of the metric for all parameters for which the metric is defined. This, together with the requirement of absence of naked singularities within the domain of outer communications, leads to the condition of existence of a negative root of $G(y)$; equivalently

$$0 < \lambda < 1 + \nu.$$

We have therefore recovered the set (2.2).

We will say that (ν, λ) are *admissible* if $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$. Unless otherwise stated, only admissible values of λ , ν will be considered in this paper.

We finish this section by noting that the PS metrics are C^2 -inextendible across $\{H(x, y) = 0\}$: this can be seen by inspection of the norm $g(\partial_t, \partial_t)$ of the Killing vector ∂_t :

$$g(\partial_t, \partial_t) = g_{tt} = -\frac{H(y, x)}{H(x, y)}.$$

We will see shortly, in Section 2.3.1, that $H(y, x)$ does not vanish on the set $\{H(x, y) = 0\}$. This shows that g_{tt} is unbounded near this set, and standard arguments (see, e.g., [CC10, Section 4.2]) show C^2 -inextendibility of the metric across the zero level set of $H(x, y)$. Evidence of a curvature singularity there will be presented in Section 2.5.5. As already mentioned, points near $x = y = -1$, with $y \leq -1 \leq x$ and $(x, y) \neq (-1, -1)$, belong to an asymptotically flat region, where $H(x, y)$ is positive, and where the signature is Lorentzian. For reasons just explained, in the associated domain of outer communications we must thus have $\{H(x, y) > 0\}$

To summarise, we want to understand the geometry of the PS metric in those connected components of the region

$$\{x \in [-1, 1], y \notin (-1, 1), H(x, y) > 0\} \quad (2.8)$$

which contain $(1, 1)$ and $(-1, -1)$ in their closures and assume admissible values of (ν, λ) . This is the region which shall be considered in this paper.

2.3 The function H

The function H appears in the denominators of (2.1) as $H(x, y)$ and $H(y, x)$. We start by eliminating the possibility that both functions vanish simultaneously.

2.3.1 $H(x, y) = 0, H(y, x) = 0$

First of all note the algebraic property

$$H(x, y) - H(y, x) = 2\lambda(-1 + \nu xy)(x - y)(-1 + \nu). \quad (2.9)$$

If $H(x, y) = 0, H(y, x) = 0$ then (2.9) entails the alternatives

$$\lambda = 0 \quad \text{or} \quad x = y \quad \text{or} \quad y = \frac{1}{\nu x} \quad \text{or} \quad \nu = 1. \quad (2.10)$$

In the region $x \neq y$ only the third alternative is compatible with admissible (λ, ν) . If we impose this condition on $H(x, y) = 0, H(y, x) = 0$ we get

$$\frac{(\nu - 1)((\nu + 1)^2 - \lambda^2)}{\nu} = 0,$$

which is again not compatible with the ranges of λ, ν imposed by Pomeransky and Senkov :

$$0 < \nu < 1, \quad 2\sqrt{\nu} \leq \lambda < 1 + \nu. \quad (2.11)$$

2.3.2 $H(y, x) = 0$

It follows from (2.94) that the zeros of $H(y, x)$ only occur in the denominators of the components of the metric induced on the planes $\text{Span}\{\partial_\varphi, \partial_\psi\}$. It has been pointed out to us by H. Elvang (private communication) that this is an artifact of the parameterization of the metric, as those components can be rewritten in a way which makes it clear that their regularity is not affected by zeros of $H(y, x)$:

$$\begin{aligned} g_{\varphi\varphi} &= \frac{2k^2(1-x^2)\Theta_{\varphi\varphi}(x, y)}{H(x, y)(-1+\nu)^2(x-y)^2}, \\ g_{\varphi\psi} &= \frac{2k^2\lambda\sqrt{\nu}(x^2-1)(1+y)\Theta_{\varphi\psi}(x, y)}{H(x, y)(-1+\nu)^2(x-y)}, \\ g_{\psi\psi} &= \frac{2k^2(1+y)\Theta_{\psi\psi}(x, y)}{(1-\lambda+\nu)(-1+\nu)^2H(x, y)(x-y)^2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

where $\Theta_{\varphi\varphi}(x, y)$, $\Theta_{\psi\psi}(x, y)$ and $\Theta_{\varphi\psi}(x, y)$ are polynomials in x, y, ν and λ :

$$\begin{aligned} \Theta_{\varphi\varphi}(x, y) &= (-1+\nu)^2(1+\nu x^2 y^2)(1+\nu y^2)(1+\nu) + \lambda(-1+\nu) \times \\ &\quad \left((-1+x^2)\nu y(-1+y^2)(-1+\nu) + x(1+\nu y^2)(-3-\nu+\nu y^2(1+3\nu)) \right) - \\ &\quad -\lambda^3 \left(\nu x^2 y(-1+y^2) - x(-1+\nu y^2)^2 + \nu y(1-y^2) \right) + \lambda^2 \left(1+2x^2+ \right. \\ &\quad \left. +\nu(-1+y^2(1-3\nu+x^2(-3+\nu)) + \nu y^4(2\nu+x^2(-1+\nu))) \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{\varphi\psi}(x, y) &= (1-y) \left((-1+\nu xy)(-1+\nu^2) + \lambda^2(1+\nu xy) \right) + \\ &\quad + 2\lambda(-x(1+\nu y(-2+\nu)) + y(1+\nu(-2+\nu y))). \end{aligned} \quad (2.14)$$

The explicit form of $\Theta_{\psi\psi}(x, y)$, calculated with MATHEMATICA and omitted because of its length, is available upon request. Here we only report that near $x = y = 1$ we have

$$\Theta_{\psi\psi}(x, y) = -(y-1)(\nu-1)^2(\lambda-\nu-1)(\lambda+\nu+1)^3 + O((x-1)^2 + (y-1)^2), \quad (2.15)$$

while on $\{y = 1\}$ it holds that

$$\begin{aligned} \Theta_{\psi\psi}(x, 1) &= 4(x-1)^2\lambda^2(\nu-1)^2(x^2\nu(\lambda+\nu-1) - \lambda + \nu - 1) \\ &= -4(x-1)^2\lambda^2(1-\nu)^3(\lambda+\nu+1) + O((x-1)^3). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Since

$$H(1, 1) = (1-\nu)(\lambda+\nu+1)^2 > 0,$$

we see that $g_{\psi\psi}$ is negative for $y = 1 > x$ sufficiently near $x = y = 1$, and hence the periodic Killing vector ∂_ψ is timelike there. This shows existence of causality violations in that region. In fact, the zeros of $\Theta_{\psi\psi}(x, 1)$ are $x = \pm 1$ and

$$x = \pm \frac{\sqrt{\lambda-\nu+1}}{\sqrt{\nu(\lambda+\nu-1)}}.$$

This is real only for $\lambda+\nu > 1$, but then always larger than one in absolute value. We will prove that $H(x, 1)$ is positive for admissible λ , hence causality is violated throughout a neighbourhood of $\{x \in [-1, 1], y = 1\}$.

2.3.3 $H(x, y) = 0$: formulation of the problem

The question of zeros of $H(x, y)$ appears to be considerably more difficult. In this section we wish to prove that the polynomial $H(x, y)$ defined by :

$$H(x, y) := 1 + \lambda^2 - \nu^2 + 2\lambda\nu(1 - x^2)y + 2x\lambda(1 - \nu^2y^2) + x^2y^2\nu(1 - \lambda^2 - \nu^2)$$

does not vanish on the set Ω_0 defined in (2.3). Every slice of Ω_0 at fixed ν and λ corresponds to the region outside the "interior", presumably Cauchy, horizon of the metric with parameters ν and λ . Equivalently, we want to show that the set

$$\mathcal{H} \equiv \{(x, y, \lambda, \nu) \in \mathbb{R}^4 : (\nu, \lambda) \in \mathcal{U}, y_c(\nu, \lambda) \leq y < -1, H(x, y) = 0\} \quad (2.17)$$

does not intersect Ω_0 .

We start by writing H as a polynomial in x ,

$$H(x, y) = (1 + \lambda^2 - \nu^2 + 2\lambda\nu y) + 2\lambda(1 - \nu^2y^2)x + \nu y(y(1 - \lambda^2 - \nu^2) - 2\lambda)x^2,$$

and note that the coefficient of x^2 does not vanish in the ranges of interest :

Lemma 2.3.1 *The highest order coefficient $\nu y(y(1 - \lambda^2 - \nu^2) - 2\lambda)$ of the polynomial in x , $H(x, y)$, does not vanish in the domain of interest $\{(y, \nu, \lambda) : (\nu, \lambda) \in \mathcal{U}, y \in [y_c(\nu, \lambda), -1]\}$.*

PROOF: For $\nu y \neq 0$ the condition $\nu y(y(1 - \lambda^2 - \nu^2) - 2\lambda) = 0$ is equivalent to the condition

$$y = y_0(\nu, \lambda) := \frac{-2\lambda}{\nu^2 + \lambda^2 - 1}.$$

So, for all $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$ such that $\nu^2 + \lambda^2 < 1$, $y_0(\nu, \lambda)$ is positive, hence outside the region of interest for the parameter y . The simultaneous equalities $\nu^2 + \lambda^2 = 1$ and $y = y_0$ are also impossible on Ω_0 . We claim that in the case $\nu^2 + \lambda^2 > 1$ we have the inequality $y_0 < y_c$: Indeed, we first note that

$$y_0(\nu, 1 + \nu) = -\frac{1}{\nu} = y_c(\nu, 1 + \nu).$$

Next, the derivatives of y_0 and y_c with respect to λ read

$$\frac{\partial y_0}{\partial \lambda}(\nu, \lambda) = \frac{2(1 + \lambda^2 - \nu^2)}{(\nu^2 + \lambda^2 - 1)^2}, \quad \frac{\partial y_c}{\partial \lambda}(\nu, \lambda) = -\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\nu} + \lambda}{2\nu\sqrt{\lambda^2 - 4\nu}}.$$

The first expression is positive for all $\{0 < \nu < 1, \nu^2 + \lambda^2 \neq 1\} \subset \mathcal{U}$, thus $\lambda \mapsto y_0(\nu, \lambda)$ is increasing on $(\sqrt{1 - \nu^2}, 1 + \nu)$, while the second expression is negative when $\lambda \in (2\sqrt{\nu}, 1 + \nu)$ so $\lambda \mapsto y_c(\nu, \lambda)$ is decreasing on $(2\sqrt{\nu}, 1 + \nu)$. This enables us to conclude that $y_0(\nu, \lambda)$ is always outside the region $(y_c(\nu, \lambda), -1)$, and therefore that the dominant coefficient of $H(x, y)$ is nonzero for all $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$. \square

Then, the discriminant of the second-order polynomial in x , $H(x, y)$, is the function Δ_x , given by :

$$\Delta_x(y, \nu, \lambda) = 4 [\lambda^2(1 - \nu^2 y^2)^2 - \nu y(1 + \lambda^2 - \nu^2 + 2\lambda\nu y)(y(1 - \lambda^2 - \nu^2) - 2\lambda)] . \quad (2.18)$$

If $\Delta_x(y, \nu, \lambda) \geq 0$ for some values of y, ν, λ , then the equation $H(x, y) = 0$ has two roots (counting multiplicity) $x = x_{\pm}(y, \nu, \lambda)$ which have the expression :

$$x_{\pm}(y, \nu, \lambda) = \frac{-\lambda(1 - \nu^2 y^2) \pm \sqrt{W(y, \nu, \lambda)}}{\nu y(y(1 - \lambda^2 - \nu^2) - 2\lambda)} , \quad (2.19)$$

with

$$W := \frac{1}{4}\Delta_x .$$

Note that the denominator has no zeros in the range of interest by Lemma 2.3.1.

In what follows, we begin with considering the restriction to the particular cases $y = -1$, and $x = -1$. We then pass to a study of the set \mathcal{A} , defined as the collection of all (y, ν, λ) , $y_c \leq y \leq -1$, $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$, such that $W(y, \nu, \lambda)$ is non-negative, in particular its connectedness. We eventually conclude, using the continuity of the functions x_{\pm} on \mathcal{A} , that for all such (y, ν, λ) , the corresponding roots $x_{\pm}(y, \nu, \lambda)$ lie outside the required interval $-1 \leq x \leq 1$.

2.3.4 $H(x, y) = 0$, $y = -1$

Lemma 2.3.2 *There exist values of $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$ such that $x_+(-1, \nu, \lambda) < -1$, and thus $x_-(-1, \nu, \lambda) < -1$ as well.*

PROOF: Let us try values of ν and λ in the allowed ranges such that $\nu^2 + \lambda^2 = 1$. This is possible for ν small enough, namely $\nu \in (0, \sqrt{5} - 2]$. We first have that

$$W(-1, \nu, \sqrt{1 - \nu^2}) = (1 - \nu^2)((1 - \nu^2)^2 + 4\nu(\nu - \sqrt{1 - \nu^2}))$$

is positive. Then we compute x_{\pm} , and we get :

$$x_{\pm}(-1, \nu, \sqrt{1 - \nu^2}) + 1 = \frac{-1 + \nu^2 + 2\nu \pm \sqrt{(1 - \nu^2)^2 + 4\nu(\nu - \sqrt{1 - \nu^2})}}{2\nu} ; \quad (2.20)$$

The numerator of the right-hand side term of the last equality for x_+ is negative, as can be seen from the following equivalent inequalities :

$$\begin{aligned} 1 - \nu^2 - 2\nu &> \sqrt{(1 - \nu^2)^2 + 4\nu(\nu - \sqrt{1 - \nu^2})} \\ \Leftrightarrow (1 - \nu^2)^2 - 4\nu(1 - \nu^2) + 4\nu^2 &> (1 - \nu^2)^2 + 4\nu^2 - 4\nu\sqrt{1 - \nu^2} \\ \Leftrightarrow -4\nu(1 - \nu^2) &> -4\nu\sqrt{1 - \nu^2} \end{aligned}$$

the last one being of course true for $\nu \in (0, 1)$. □

2.3.5 $H(x, y) = 0, x = -1$

Lemma 2.3.3 *There is no solution for $H(x, y) = 0$ when $x = -1$.*

PROOF: We can first write

$$H(-1, y) = (1 + \nu - \lambda)(\nu(1 + \lambda - \nu)y^2 + 1 - \nu - \lambda).$$

The first factor is positive from the definition of \mathcal{U} . We show that the second factor cannot vanish for any value of the parameters y, ν, λ in the allowed ranges. Indeed, this second factor is quadratic in y , the coefficient $\nu(1 + \lambda - \nu)$ is positive, so that the roots are

$$y_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\nu + \lambda - 1}{\nu(1 + \lambda - \nu)}},$$

provided that $\nu + \lambda \geq 1$, otherwise there is no root and $H(-1, y)$ is indeed positive. But the required condition $\lambda < 1 + \nu$ is equivalent, for $\nu \in (0, 1)$, to $\nu + \lambda - 1 < \nu(1 + \lambda - \nu)$, so that both solutions y_{\pm} above are larger than -1 , thus out of the authorized range for the coordinate y . \square

In other words, this lemma expresses that no connected component of the set \mathcal{H} can intersect the hypersurface $\{x = -1\}$ for values of y smaller than -1 .

Recall that \mathcal{A} is the set of points (y, ν, λ) , $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$, $y_c \leq y \leq -1$, such that solutions $x \in \mathbb{R}$ of the equation $H(x, y) = 0$ do exist. We will show shortly that \mathcal{A} is connected. Then, since x_+ and x_- are continuous functions we deduce that $x_+(\mathcal{A})$ and $x_-(\mathcal{A})$ are connected subsets of \mathbb{R} and hence they must be intervals. On the other hand, by Lemma 2.3.3 we have $x_+(\mathcal{A}) \cap \{-1\} = \emptyset$, $x_-(\mathcal{A}) \cap \{-1\} = \emptyset$ and hence either $x_+(\mathcal{A}) \subset (-\infty, -1)$ or $x_+(\mathcal{A}) \subset (-1, \infty)$; and similarly $x_-(\mathcal{A}) \subset (-\infty, -1)$ or $x_-(\mathcal{A}) \subset (-1, \infty)$. The alternatives $x_+(\mathcal{A}) \subset (-1, \infty)$ and $x_-(\mathcal{A}) \subset (-1, \infty)$ can be ruled out because in Lemma 2.3.2 we have proved that, for the particular case of $y = -1$, $\lambda = \sqrt{1 - \nu^2}$, and for ν small enough, both solutions $x_{\pm}(-1, \nu, \sqrt{1 - \nu^2})$ satisfy $x < -1$. Therefore necessarily $x_-(\mathcal{A}) \subset (-\infty, -1)$, $x_+(\mathcal{A}) \subset (-\infty, -1)$ which entails $x_-(\mathcal{A}) \cap (-1, 1) = \emptyset$, $x_+(\mathcal{A}) \cap (-1, 1) = \emptyset$. From this result we conclude that \mathcal{H} does not intersect Ω_0 .

The aim of the next section is to establish the connectedness of \mathcal{A} , needed to complete the proof.

2.3.6 Connectedness of \mathcal{A}

Throughout this section, we assume that $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$. Recall that if $H(x, y) = 0$ then $x = x_{\pm}$, where

$$x_{\pm} = \frac{\lambda - \lambda \nu^2 y^2 \pm \sqrt{W(y, \nu, \lambda)}}{\nu y ((\lambda^2 + \nu^2 - 1)y + 2\lambda)},$$

and where

$$\begin{aligned} W(y, \nu, \lambda) := & \lambda^2 \nu^4 y^4 + 2 \lambda \nu^2 (\lambda^2 + \nu^2 - 1) y^3 \\ & - \nu (1 - 2 \nu \lambda^2 - \lambda^4 + \nu^4 - 2 \nu^2) y^2 + 2 \nu \lambda (1 + \lambda^2 - \nu^2) y + \lambda^2. \end{aligned}$$

For large y , whether positive or negative, W is positive so zeros of $H(x, y)$ exist. Our task here is to prove that the region $\{(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}, x \in [-1, 1], y_c \leq y \leq -1\}$ does not contain any of them. As just explained, this will follow from :

Theorem 2.3.4 *The set*

$$\mathcal{A} := \{(y, \nu, \lambda) : W(y, \lambda, \nu) \geq 0, (\lambda, \nu) \in \mathcal{U}, y_c(\nu, \lambda) \leq y \leq -1\} \quad (2.21)$$

is connected.

PROOF: We show in Lemma 2.3.5 below that $W(-1, \nu, \lambda) > 0$ on \mathcal{U} . Next, Proposition 2.3.6 establishes that for all $(\lambda, \nu) \in \mathcal{U}$, the set $\{y \in [y_c, -1] : W(y, \lambda, \nu) \geq 0\}$ is connected, which readily implies the result. \square

We supply now the details :

Lemma 2.3.5 $W(-1, \nu, \lambda) > 0$ on \mathcal{U} .

PROOF: We have

$$W(-1, \nu, \lambda) = \underbrace{(1 + \nu \lambda^2 - 2\nu \lambda - \nu^2)}_{=:P(\nu, \lambda)} \underbrace{(\nu^3 - \nu - 2\nu \lambda + \lambda^2)}_{=:Q(\nu, \lambda)} .$$

The equation $P = 0$ is solved by

$$\nu_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\lambda^2 - 2\lambda \pm \sqrt{(\lambda^2 - 2\lambda)^2 + 4} \right) .$$

Clearly $\nu_- < 0$ and $\nu_+ > [(\lambda - 1)^2 + 1]/2$. For $\lambda \in [0, 2)$ we have

$$\nu_-(\lambda) < \lambda - 1 < \frac{1}{4}\lambda^2 < \nu_+(\lambda) .$$

Indeed, the first inequality is equivalent to positivity of $3\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 2\lambda^2 + (\lambda - 2)^2$. The second one is always true for $\lambda \neq 2$, while the last inequality follows easily from the already indicated inequality $\nu_+ > [(\lambda - 1)^2 + 1]/2$. Then, we notice that :

$$(\nu, \lambda) \in \mathcal{U} \iff \lambda \in (0, 2), \lambda - 1 < \nu \leq \lambda^2/4 .$$

Hence, for all $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$, we have $\nu_-(\lambda) < \nu < \nu_+(\lambda)$, and we conclude that $P > 0$ on \mathcal{U} .

Next, we have

$$Q = \left(\lambda - \nu + \sqrt{\nu^2 - \nu^3 + \nu} \right) \left(\lambda - \nu - \sqrt{\nu^2 - \nu^3 + \nu} \right) ,$$

and note that the polynomial $\nu^2 - \nu^3 + \nu$ vanishes at 0 and at $(1 \pm \sqrt{5})/2$. We want to show that Q is positive on \mathcal{U} , this proceeds as follows : Straightforward algebra shows that, for $\nu > 0$, the inequality

$$2\sqrt{\nu} > \nu + \sqrt{\nu^2 - \nu^3 + \nu} \quad (2.22)$$

is equivalent to

$$((\nu + 1)^2 + 8)(\nu - 1)^2 > 0.$$

So (2.22) holds for $\nu \in [0, 1)$. But the right-hand-side of (2.22) is the larger root of Q , and we conclude that the roots of Q do not intersect the graph of $\nu \mapsto 2\sqrt{\nu}$ in the range of interest. Next, (2.22) also shows that Q is positive on this graph for small positive ν . Since Q does not change sign on \mathcal{U} , it is positive on \mathcal{U} . \square

We continue with :

Proposition 2.3.6 *For every admissible values of λ and ν , the set $\{y \in [y_c, -1] : W(y, \nu, \lambda) \geq 0, (\nu, \lambda) \in \mathcal{U}\}$ is connected.*

PROOF: We start by a study of the variations of $y \mapsto W(y, \nu, \lambda)$ on $[y_c(\nu, \lambda), -1]$, for all $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$. To do so, we first compute the derivatives of W , with respect to y , up to third order. We have

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial y}(y, \nu, \lambda) &= 2\nu \left(2\nu^3 \lambda^2 y^3 + 3\nu \lambda (\nu^2 + \lambda^2 - 1) y^2 \right. \\ &\quad \left. + (\lambda^4 - \nu^4 - 1 + 2\nu(\nu + \lambda^2)) y + \lambda(1 + \lambda^2 - \nu^2) \right), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(y, \nu, \lambda) &= 2\nu \left(6\nu^3 \lambda^2 y^2 + 6\nu \lambda (\nu^2 + \lambda^2 - 1) y + \lambda^4 - \nu^4 - 1 + 2\nu(\nu + \lambda^2) \right), \\ \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}(y, \nu, \lambda) &= 12\nu^2 \lambda (2\nu^2 \lambda y + \nu^2 + \lambda^2 - 1). \end{aligned}$$

Since $\nu \lambda \neq 0$ for all allowed ν and λ , we see that $\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}(y, \nu, \lambda)$ vanishes at $y = y_3(\nu, \lambda)$, where

$$y_3(\nu, \lambda) := \frac{1 - \nu^2 - \lambda^2}{2\nu^2 \lambda}, \quad (2.23)$$

and therefore the function $y \mapsto \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(y, \nu, \lambda)$ reaches its minimum there, equal to :

$$\min_{y \in \mathbb{R}} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(y, \nu, \lambda) = (1 + \nu + \lambda)(1 + \nu - \lambda) \underbrace{(\lambda^2(3 - 2\nu) - (1 - \nu)^2(3 + 2\nu))}_{k(\nu, \lambda)}. \quad (2.24)$$

The sign of the minimum is determined by the sign of the third factor $k(\nu, \lambda)$ in (2.24), since the first two factors are positive for $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$. We start by supposing that $k(\nu, \lambda) \geq 0$. This corresponds to values of ν and λ such that $\lambda \geq \lambda_k(\nu)$, where

$$\lambda_k(\nu) := (1 - \nu) \sqrt{\frac{3 + 2\nu}{3 - 2\nu}}, \quad (2.25)$$

see Figure 2.1. In this range of parameters the function $y \mapsto W(y, \nu, \lambda)$ is therefore convex. Connectedness of $\{y \in [y_c, -1] : W(y, \nu, \lambda) \geq 0, (\nu, \lambda) \in \mathcal{U}\}$ in the case $k(\nu, \lambda) \geq 0$, will be a consequence of the following :

Lemma 2.3.7 *For all $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$, $W(y_c(\nu, \lambda), \nu, \lambda)$ is negative.*

This result, together with the convexity of $y \mapsto W(y, \nu, \lambda)$ and with the Lemma 2.3.5, shows that the function $y \mapsto W(y, \nu, \lambda)$ is negative on $[y_c, y_*)$, and then positive on $(y_*, -1]$ for some $y_* \in (y_c, -1)$, hence the proposition 2.3.6 is proved for all $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$ such that $k(\nu, \lambda) \geq 0$.

We now turn to the proof of the Lemma :

PROOF: We have

$$\begin{aligned} W(y_c(\nu, \lambda), \nu, \lambda) &= -\frac{1-\nu}{2\nu} \left(\lambda^6 + \lambda^5 \sqrt{\lambda^2 - 4\nu} - 2\lambda^4(1+3\nu) - 2\lambda^3 \sqrt{\lambda^2 - 4\nu}(1+2\nu) \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2(1+7\nu+9\nu^2-\nu^3) + \lambda \sqrt{\lambda^2 - 4\nu}(1+5\nu+3\nu^2-\nu^3) \right. \\ &\quad \left. - 2\nu(1-\nu)(1+\nu)^2 \right). \end{aligned}$$

The occurrence of $\sqrt{\lambda^2 - 4\nu}$ above leads us to introduce a change of variables $(\nu, \lambda) \rightarrow (\nu, \eta)$, with $\eta \geq 0$, defined as

$$\lambda = 2\sqrt{\nu} \cosh \eta .$$

Then the expression simplifies remarkably as a polynomial in e^η :

$$W(y_c(\nu, 2\sqrt{\nu} \cosh \eta), \nu, 2\sqrt{\nu} \cosh \eta) = -(1-\nu)e^{-2\eta}(e^{4\eta} - \nu)(1 - e^{2\eta}\nu)^2 .$$

The factors are all positive for $\nu \in (0, 1)$ and $\eta \geq 0$, except the last factor $(1 - e^{2\eta}\nu)^2$ which can vanish for $\eta = -\ln \nu/2$, which corresponds precisely to $\lambda = 1 + \nu$, hence not for $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$. This finishes the proof of the lemma. \square

We now turn attention to the case $k(\nu, \lambda) < 0$. Equivalently, $\lambda < \lambda_k(\nu)$. Note that

$$\lambda'_k(\nu) = -\frac{3 - 4\nu^2 + 6\nu}{(3 - 2\nu)\sqrt{9 - 4\nu^2}} ,$$

which is negative for $\nu \in (0, 1)$. Since $\lambda_k(0) = 1$ and $\lambda_k(1) = 0$, the inequality $\lambda < \lambda_k(\nu)$ is compatible with the allowed ranges of the parameters ν and λ only when $\nu \in (0, \nu_0)$, where $\nu_0 \approx 0.207$ is the unique solution in $(0, 1)$ of the equation $2\sqrt{\nu} = \lambda_k(\nu)$; see Figure 2.1. In other words, it suffices to consider $0 < \nu \leq \nu_0$. Recall that this case corresponds to a negative minimum for $y \mapsto \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(y, \nu, \lambda)$, obtained for $y = y_3(\nu, \lambda)$ (see equation (2.23)). To analyse the position of y_3 compared to -1 we write :

$$y_3(\nu, \lambda) + 1 = \frac{1 - \nu^2 - \lambda^2 + 2\nu^2\lambda}{2\nu^2\lambda} . \quad (2.26)$$

The numerator is a polynomial in λ of degree-two which has, for all ν , two real roots $\lambda_{\pm}(\nu) = \nu^2 \pm \sqrt{1 - \nu^2 + \nu^4}$.

Now, for all ν in $(0, \nu_0)$, one has the chain of inequalities

$$\lambda_-(\nu) < 0 < 2\sqrt{\nu} < \lambda_k(\nu) < 1 < \lambda_+(\nu) ; \quad (2.27)$$

Indeed, to obtain the first inequality we note that for $\nu \in (0, 1)$ we have $1 - \nu^2 + \nu^4 > \nu^4$, and negativity of $\lambda_-(\nu)$, for all $\nu \in (0, \nu_0)$, follows. The third inequality has already been established, ν_0 being precisely the value at which the inequality is saturated. The fourth

follows from the fact that λ_k is decreasing. The last inequality can be proved by noting that $1 - \nu^2 + \nu^4 = (1 - \nu^2)^2 + \nu^2 > (1 - \nu^2)^2$.

Since $y_3(\nu, \lambda) + 1$ is positive for λ between $\lambda_-(\nu)$ and $\lambda_+(\nu)$, we obtain that $y_3(\nu, \lambda) + 1$ is positive for all $\nu \in (0, \nu_0)$ and $\lambda \in [2\sqrt{\nu}, \lambda_k(\nu)]$. Thus

$$y_3 > -1$$

in the range of parameters of interest. This implies that $y \mapsto \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}(y, \nu, \lambda)$ is negative on $(-\infty, y_3(\nu, \lambda))$, and in particular on $[y_c, -1]$. Hence $y \mapsto \frac{\partial W}{\partial y}(y, \nu, \lambda)$ is concave on $[y_c, -1]$, and therefore lies above its arc. So it reaches its minimum on this interval either at $y = y_c(\nu, \lambda)$, or at $y = -1$. But from Lemma 2.3.8, which will be proved shortly, we get that $\partial_y W(-1, \nu, \lambda)$ is non-negative for $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$, $\lambda < \lambda_k(\nu)$. Then, we have again two cases :

- If $\partial_y W(y_c, \nu, \lambda)$ is non-negative, then $\partial_y W(y, \nu, \lambda)$ is non-negative for all $y \in [y_c, -1]$, therefore $y \mapsto W(y, \nu, \lambda)$ is increasing on this interval, and the set $\{y \in [y_c, -1] : W(y, \nu, \lambda) \geq 0\}$ is connected, and contains -1 .
- If $\partial_y W(y_c, \nu, \lambda)$ is negative, then, since it is concave, the function $y \mapsto \partial_y W(y, \nu, \lambda)$ is negative on $[y_c, y_*)$ and non-negative on $[y_*, -1]$ for some $y_*(\nu, \lambda) \in (-1/\nu, -1]$. Thus, $y \mapsto W(y, \nu, \lambda)$ is decreasing on $[y_c, y_*)$, and increasing on $[y_*, -1]$. From Lemma 2.3.7, this implies that $W(y, \nu, \lambda)$ is negative at least on $[y_c, y_*)$, then increasing on $[y_*, -1]$. We can therefore conclude again that the set $\{y \in [y_c, -1] : W(y, \nu, \lambda) \geq 0\}$ is connected. Thus, in order to finish the proof of the proposition, and hence of the theorem, the following lemma remains to be proved :

Lemma 2.3.8 *For $0 < \nu < \nu_0$ and $2\sqrt{\nu} \leq \lambda \leq \lambda_k(\nu)$ the function $\frac{\partial W}{\partial y}(-1, \nu, \lambda)$ is non-negative.*

PROOF: The result is clear by inspection of the graph in Figure 2.6, a possible formal proof proceeds as follows : At $\lambda = 2\sqrt{\nu}$ we have

$$\frac{\partial W}{\partial y}(-1, \nu, 2\sqrt{\nu}) = 2\nu(1 - \sqrt{\nu})^3(1 + 5\sqrt{\nu} + 12\nu + 24\nu^{3/2} + 15\nu^2 + 7\nu^{5/2}), \quad (2.28)$$

which is clearly positive for all $0 < \nu < 1$. We continue by noting that

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(-1, \nu, \lambda) = 2\nu(1 - 3\nu - \nu^2 + 3\nu^3 - 4\nu(1 + \nu^2)\lambda + 3(1 + 3\nu)\lambda^2 - 4\lambda^3), \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial \lambda^2 \partial y}(-1, \nu, \lambda) = -4\nu(6\lambda^2 - 3(1 + 3\nu)\lambda + 2\nu(1 + \nu^2)). \quad (2.30)$$

For all $0 < \nu < 1$ the right-hand-side of (2.30) has two real roots,

$$\lambda = \frac{1 + 3\nu}{4} \pm \frac{\sqrt{3(27\nu^2 + 2\nu + 3 - 16\nu^3)}}{12} =: \lambda_{0\pm}(\nu). \quad (2.31)$$

Then, we have the inequalities $\lambda_{0-}(\nu) < 2\sqrt{\nu}$, and $\lambda_{0+}(\nu) < \lambda_k(\nu)$ for $0 < \nu < \nu_0$, whereas the difference $2\sqrt{\nu} - \lambda_{0+}(\nu)$ is positive on $(0, \nu_1)$ and negative on (ν_1, ν_0) for some $\nu_1 \in (0, \nu_0)$. Indeed we have, for $\nu \in (0, 1)$,

$$\lambda_{0-}(\nu) = \frac{1 + 3\nu}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{3 + 2\nu + 27\nu^2 - 16\nu^3} < \frac{1 + 3\nu}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{3} = \frac{3\nu}{4} < 2\nu < 2\sqrt{\nu}.$$

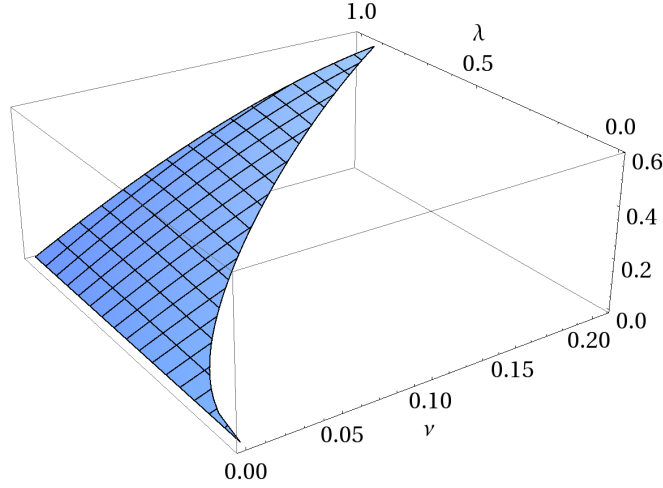


FIGURE 2.6 – The graph of $\partial_y W$ over the set $\{0 < \nu < \nu_0, 2\sqrt{\nu} \leq \lambda \leq \lambda_k(\nu)\}$.

Next, we prove that $\nu \mapsto \lambda_{0+}(\nu) - 2\sqrt{\nu}$ is decreasing on $(0, \nu_0)$. Indeed,

$$\frac{d}{d\nu}(\lambda_{0+}(\nu) - 2\sqrt{\nu}) = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{4}{\sqrt{\nu}} + \frac{1/3 + 9\nu - 8\nu^2}{\sqrt{1 + 2\nu/3 + 9\nu^2 - 16\nu^3/3}} \right) ;$$

For $\nu \in (0, 1)$, we have

$$\frac{1/3 + 9\nu - 8\nu^2}{\sqrt{1 + 2\nu/3 + 9\nu^2 - 16\nu^3/3}} < 1/3 + 9\nu - 8\nu^2 ,$$

so that we obtain :

$$\frac{d}{d\nu}(\lambda_{0+}(\nu) - 2\sqrt{\nu}) < \frac{1}{4} \left(\frac{10}{3} - \frac{4}{\sqrt{\nu}} + 9\nu - 8\nu^2 \right) . \quad (2.32)$$

Moreover, $1/3 + 9\nu - 8\nu^2$ is less than 5 for $\nu \in (0, 1/4)$, while $3 - \frac{4}{\sqrt{\nu}}$ is less than -5 for all $\nu \in (0, 1/4) \supset (0, \nu_0)$. Therefore, $\frac{d}{d\nu}(\lambda_{0+}(\nu) - 2\sqrt{\nu})$ is negative for $\nu \in (0, 1/4)$, in particular for $\nu \in (0, \nu_0)$.

We further note that the function $\nu \mapsto \lambda_{0+}(\nu) - 2\sqrt{\nu}$ takes the value $1/2$ at $\nu = 0$, and that it is negative at $\nu = 1/8 < \nu_0$:

$$\lambda_{0+}(1/8) - 2\sqrt{1/8} = \frac{11}{32} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{233}{192}} < \frac{1}{8} \left(\frac{11}{4} - 4\sqrt{2} + \sqrt{5} \right) < 0 .$$

This proves the existence of $\nu_1 \in (0, \nu_0)$ (and more precisely $\nu_1 \in (0, 1/8)$) such that $\lambda_{0+}(\nu) > 2\sqrt{\nu}$ for $\nu \in (0, \nu_1)$, and $\lambda_{0+}(\nu) < 2\sqrt{\nu}$ for $\nu \in (\nu_1, \nu_0)$. Moreover, integrating the inequality (2.32), we obtain

$$\lambda_{0+}(\nu) < \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\nu + \frac{9}{8}\nu^2 - \frac{2}{3}\nu^3,$$

therefore $\lambda_{0+}(\nu) < 5/8$ for all $\nu \in (0, 1/8)$, whereas $\lambda_k(\nu) > 3/4 > 5/8$ for all $\nu \in (0, 1/4)$. Then, since $2\sqrt{\nu} < \lambda_k(\nu)$ for all $\nu \in (0, \nu_0)$, we obtain, combining the previous remarks, that $\lambda_{0+}(\nu) < \lambda_k(\nu)$ for all $\nu \in (0, \nu_0)$. So we have again two cases :

- if $\nu \in (0, \nu_1)$: then $\lambda \mapsto \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(-1, \nu, \lambda)$ is increasing on $[2\sqrt{\nu}, \lambda_{0+}(\nu)]$, then decreasing on $[\lambda_{0+}(\nu), \lambda_k(\nu)]$;
- if $\nu \in [\nu_1, \nu_0)$: then $\lambda \mapsto \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(-1, \nu, \lambda)$ is decreasing on $[2\sqrt{\nu}, \lambda_k(\nu)]$.

So, to make sure that the function $\lambda \mapsto \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(-1, \nu, \lambda)$ is positive on $[2\sqrt{\nu}, \lambda_k(\nu)]$, we only need to show that it is positive for $\lambda = 2\sqrt{\nu}$ and for $\lambda = \lambda_k(\nu)$, this for all $\nu \in (0, \nu_0)$. We have in fact :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(-1, \nu, 2\sqrt{\nu}) = 2\nu(1 - \sqrt{\nu})^2(1 + 2\sqrt{\nu} + 12\nu - 18\nu^{3/2} - 13\nu^2 - 8\nu^{5/2}),$$

and we can write this, with $\nu = s^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(-1, s^2, 2s) &= 2s^2(1 - s)^2 \times \\ &\left((1 - 8s^3) + (2s - 8s^3) + (s^2 - 2s^3) + (4s^2 - 16s^4) + 7s^2 + 3s^4 - 8s^5 \right), \end{aligned}$$

with each term positive for $s \in (0, 1/2)$, i.e. for $\nu \in (0, 1/4)$. Then we have

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(-1, \nu, \lambda_k(\nu)) = \frac{8\nu}{3 - 2\nu} \left((1 - \nu)(3 + 4\nu - 5\nu^2 - 3\nu^3) + \lambda_k(\nu)(-3 + \nu + 3\nu^2 - 5\nu^3 + 2\nu^4) \right).$$

Since $0 < \lambda_k(\nu) < 1$ on $(0, 1/4)$, and since the factor $3 - \nu - 3\nu^2 + 5\nu^3 - 2\nu^4$ is positive for this range of ν , we have

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(-1, \nu, \lambda_k(\nu)) > \frac{8\nu}{3 - 2\nu} (2\nu - 6\nu^2 - 3\nu^3 + 5\nu^4),$$

still positive for $\nu \in (0, 1/4)$. The plot of $\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(-1, \nu, \lambda_k(\nu))$ can be found in Figure 2.7.

It follows that the function $\lambda \mapsto \frac{\partial W}{\partial y}(-1, \nu, \lambda)$ is increasing on $[2\sqrt{\nu}, \lambda_k(\nu)]$ for all $\nu \in (0, \nu_0)$. This, together with (2.28) above, finishes the proof of Lemma 2.3.8. \square

2.4 Extensions across Killing horizons

In this section, we write H, F, J , etc. to mean, respectively, $H(x, y), F(x, y), J(x, y)$, whereas \hat{H}, \hat{F} refer respectively to $H(y, x), F(y, x)$.

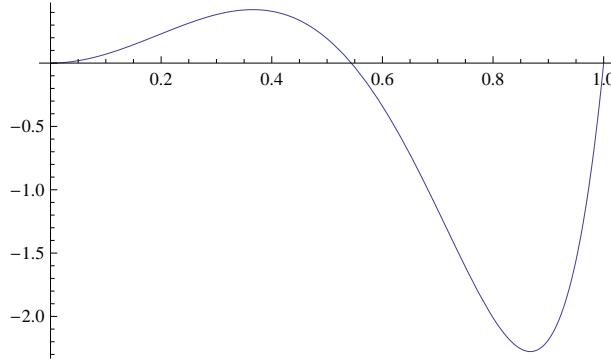


FIGURE 2.7 – The function $\nu \mapsto \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(-1, \nu, \lambda_k(\nu))$; the non-trivial zero is at, approximately, .544.

We write

$$G(y) = \nu(1 - y^2)(y - y_h)(y - y_c) ,$$

and we assume $y_h \neq y_c$. In the calculations that follow we suspend the convention $y_h > y_c$, used elsewhere in this paper, so that the analysis below applies both to the smaller and to the larger roots of G .

We want to construct explicitly a Kruskal-Szekeres-type extension of the metric at $y = y_h$ and $y = y_c$. An identical calculation applies at both values of y , so in the calculations that follow the reader can think of the symbol y_h as representing either y_h or y_c .

We define new coordinates (inspired from the extension of the Kerr metrics, see [Car68], and of the Emparan-Reall metrics, see [CC10]) via the equations

$$\begin{aligned} du &= dt + \frac{\sigma}{y - y_h} dy , \\ dv &= dt - \frac{\sigma}{y - y_h} dy , \end{aligned} \tag{2.33}$$

and new angular coordinates :

$$\begin{aligned} d\hat{\psi} &= d\psi - a dt , \\ d\hat{\varphi} &= d\varphi - b dt , \end{aligned} \tag{2.34}$$

where a, b, σ are (ν - and λ -dependent) constants, to be chosen shortly. In terms of the new coordinates $(u, v, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, x)$ the original coordinate differentials (t, y, ψ, φ, x) read :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{du + dv}{2} , \\ dy &= \frac{y - y_h}{2\sigma} (du - dv) , \\ d\psi &= d\hat{\psi} + a \frac{du + dv}{2} , \\ d\varphi &= d\hat{\varphi} + b \frac{du + dv}{2} . \end{aligned}$$

It is convenient to write

$$\Omega_\psi = \frac{\hat{\Omega}_\psi}{\hat{H}}, \quad \Omega_\varphi = \frac{\hat{\Omega}_\varphi}{\hat{H}},$$

where $\hat{\Omega}_\psi$ and $\hat{\Omega}_\varphi$ are polynomials in x and y , with coefficients which are rational functions of ν and λ . One can now write the coefficients of the metric expressed in the coordinates $(u, v, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, x)$:

$$\begin{aligned} g_{uu} = g_{vv} &= \frac{1}{4} \left(-\frac{\hat{H}}{H} (1 + a\hat{\Omega}_\psi + b\hat{\Omega}_\varphi)^2 - a^2 \frac{F}{\hat{H}} - 2ab \frac{J}{\hat{H}} + b^2 \frac{\hat{F}}{\hat{H}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2k^2 H (y - y_h)}{\sigma^2 \nu (1 - \nu)^2 (1 - y^2) (x - y)^2 (y - y_c)} \right), \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{\hat{H} + 2a\hat{\Omega}_\psi + 2b\hat{\Omega}_\varphi}{H} + a^2 g_{\psi\psi} + 2ab g_{\varphi\psi} + b^2 g_{\varphi\varphi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2k^2 H (y - y_h)}{\sigma^2 \nu (1 - \nu)^2 (1 - y^2) (x - y)^2 (y - y_c)} \right), \\ g_{uv} &= \frac{1}{4} \left(-\frac{\hat{H} + 2a\hat{\Omega}_\psi + 2b\hat{\Omega}_\varphi}{H} + a^2 g_{\psi\psi} + 2ab g_{\varphi\psi} + b^2 g_{\varphi\varphi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2k^2 H (y - y_h)}{\sigma^2 \nu (1 - \nu)^2 (1 - y^2) (x - y)^2 (y - y_c)} \right), \\ g_{u\hat{\psi}} = g_{v\hat{\psi}} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{H}}{H} (1 + a\hat{\Omega}_\psi + b\hat{\Omega}_\varphi) \hat{\Omega}_\psi + a \frac{F}{\hat{H}} + b \frac{J}{\hat{H}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a g_{\psi\psi} + b g_{\varphi\psi} - \frac{\hat{\Omega}_\psi}{H} \right), \\ g_{u\hat{\varphi}} = g_{v\hat{\varphi}} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{H}}{H} (1 + a\hat{\Omega}_\psi + b\hat{\Omega}_\varphi) \hat{\Omega}_\varphi + a \frac{J}{\hat{H}} - b \frac{\hat{F}}{\hat{H}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a g_{\varphi\psi} + b g_{\varphi\varphi} - \frac{\hat{\Omega}_\varphi}{H} \right), \\ g_{\hat{\psi}\hat{\psi}} &= -\frac{\hat{H}}{H} \hat{\Omega}_\psi^2 - \frac{F}{\hat{H}} = g_{\psi\psi}, \\ g_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} &= -\frac{\hat{H}}{H} \hat{\Omega}_\varphi^2 + \frac{\hat{F}}{\hat{H}} = g_{\varphi\varphi}, \\ g_{\hat{\psi}\hat{\varphi}} &= -\frac{\hat{H}}{H} \hat{\Omega}_\psi \hat{\Omega}_\varphi - \frac{J}{\hat{H}} = g_{\psi\varphi}, \\ g_{xx} &= \frac{2k^2 H}{(1 - \nu)^2 (x - y)^2 G(x)}, \end{aligned}$$

whereas the other components vanish. Recall that the potential singularity of the coefficients above at zeros of \hat{H} is an artifact of the parameterization of the metric, as explained

in Section 2.3.2, regardless of the values of a and b , and that we have proved that there are no zeros of H in the region of interest. It should now be clear that in the new coordinate system the metric coefficients are analytic functions of all their arguments near $y = y_h$.

The Jacobian of the transformation relating the two coordinate systems reads

$$\frac{\partial(u, v, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, x)}{\partial(t, y, \psi, \varphi, x)} = -\frac{2\sigma}{y - y_h},$$

so that the determinant of the metric in the coordinates $(u, v, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, x)$ is

$$\det \left(g_{(u,v,\hat{\psi},\hat{\varphi},x)} \right) = -\frac{4k^8 H^2 (y - y_h)^2}{\sigma^2 (1 - \nu)^6 (x - y)^8}.$$

To get rid of the zero of the determinant at $y = y_h$, the usual calculation is to introduce exponential coordinates

$$\hat{u} := e^{\gamma u}, \quad \hat{v} := e^{-\gamma v},$$

hence

$$d\hat{u} = \gamma \hat{u} du, \quad d\hat{v} = -\gamma \hat{v} dv.$$

We then express the metric coefficients in the coordinates $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, x)$. We first notice that, for $y > y_h$,

$$\hat{u}\hat{v} = e^{\gamma(u-v)} = \exp \left(2\gamma \int \frac{\sigma}{y - y_h} dy \right) = e^{2\gamma\sigma \ln(y-y_h)} = (y - y_h)^{2\gamma\sigma},$$

with an appropriate choice of the integration constant for the second equality above. The choice

$$2\gamma\sigma = 1.$$

leads to

$$\hat{u}\hat{v} = y - y_h, \tag{2.35}$$

which can be used to define y as a function of the exponential coordinates \hat{u}, \hat{v} . The Jacobian of the last coordinate transformation is

$$\frac{\partial(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, x)}{\partial(u, v, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, x)} = -\gamma^2 \hat{u}\hat{v} = -\frac{y - y_h}{4\sigma^2},$$

and the determinant of the metric in the exponential coordinates has no zeros near $y = y_h$:

$$\det \left(g_{(\hat{u},\hat{v},\hat{\psi},\hat{\varphi},x)} \right) = -\frac{64k^8 \sigma^2 H^2}{(1 - \nu)^6 (x - y)^8}.$$

The metric coefficient in the exponential coordinates read :

$$g_{\hat{u}\hat{u}} = \frac{g_{uu} \hat{v}^2}{\gamma^2 \hat{u}^2 \hat{v}^2}, \quad g_{\hat{v}\hat{v}} = \frac{g_{vv} \hat{u}^2}{\gamma^2 \hat{u}^2 \hat{v}^2}, \quad g_{\hat{u}\hat{v}} = \frac{g_{uv}}{\gamma^2 \hat{u}\hat{v}}, \quad g_{\hat{u}\hat{\psi}} = \frac{g_{u\hat{\psi}} \hat{v}}{\gamma \hat{u}\hat{v}}, \quad \text{etc.}$$

If we replace \hat{u} , \hat{v} by their values in terms of the original coordinates in the first three expressions we get

$$g_{\hat{u}\hat{u}} = \frac{e^{-2\gamma t} g_{uu}}{\gamma^2(-y_h + y)} = g_{\hat{v}\hat{v}}, \quad g_{\hat{u}\hat{v}} = \frac{g_{uv}}{(-y_h + y)\gamma^2}$$

So, from (2.35), to establish regularity of the new metric coefficients we need to check that

- $g_{uu} = g_{vv}$ have a zero of order 2 at $y = y_h$, and that
- g_{uv} , $g_{u\hat{\psi}} = g_{v\hat{\psi}}$, and $g_{u\hat{\varphi}} = g_{v\hat{\varphi}}$ all vanish at $y = y_h$.

(If we just seek an extension through the future event horizon, then the conditions are

- $g_{uu} = g_{vv}$ and g_{uv} all vanish at $y = y_h$, and that
- $g_{u\hat{\psi}} = g_{v\hat{\psi}}$, and $g_{u\hat{\varphi}} = g_{v\hat{\varphi}}$ all vanish at $y = y_h$.)

More precisely, we wish to determine the parameters a , b and σ so that the conditions required above are fulfilled. We start by solving the linear system in a and b :

$$\begin{aligned} g_{u\hat{\psi}}|_{y=y_h} &= 0 \\ g_{u\hat{\varphi}}|_{y=y_h} &= 0, \end{aligned}$$

which we write as (all functions evaluated at $y = y_h$) :

$$\begin{aligned} a \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\psi^2 - \frac{F}{\hat{H}} \right) + b \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\psi \Omega_\varphi - \frac{J}{\hat{H}} \right) &= \frac{\hat{\Omega}_\psi}{H} \\ a \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\psi \Omega_\varphi - \frac{J}{\hat{H}} \right) + b \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\varphi^2 + \frac{\hat{F}}{\hat{H}} \right) &= \frac{\hat{\Omega}_\varphi}{H}. \end{aligned}$$

The determinant of this system reads

$$\begin{aligned} \Delta_{a,b} &= \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\psi^2 - \frac{F}{\hat{H}} \right) \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\varphi^2 + \frac{\hat{F}}{\hat{H}} \right) - \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\psi \Omega_\varphi - \frac{J}{\hat{H}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{H} \left(F \Omega_\varphi^2 - \hat{F} \Omega_\psi^2 - 2J \Omega_\varphi \Omega_\psi \right) - \frac{F\hat{F} + J^2}{\hat{H}^2}, \end{aligned}$$

Then, from the identity (2.95), at $y = y_h$ we have

$$F\hat{F} = -J^2, \quad (2.36)$$

and so the last term $-F\hat{F} + J^2/\hat{H}^2$ vanishes. Next, if we view the remaining part of $\Delta_{a,b}$ as a second-order polynomial in Ω_φ , it has discriminant $4\Omega_\psi^2(J^2 + \hat{F}F)$, which vanishes again for $y = y_h$. This leads to the simpler expression for the determinant of the system in a, b :

$$\Delta_{a,b} = \frac{F}{H} \left(\Omega_\varphi - \frac{J\Omega_\psi}{F} \right)^2.$$

Next, assuming that $\Delta_{a,b}$ does not vanish at $y = y_h$,³ we can write the expressions of a and b solving the system :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\hat{F}\Omega_\psi + J\Omega_\varphi}{H\Delta_{a,b}}, \\ b &= \frac{J\Omega_\psi - F\Omega_\varphi}{H\Delta_{a,b}}. \end{aligned}$$

Using (2.36), this can be rewritten as

$$\begin{aligned} a &= \frac{J}{F\Omega_\varphi - J\Omega_\psi}, \\ b &= -\frac{F}{F\Omega_\varphi - J\Omega_\psi}. \end{aligned}$$

We insert in this expression the explicit values of Ω_ψ and Ω_φ :

$$\begin{aligned} a &= \frac{H(y_h, x)J(x, y_h)(-1 + \lambda - \nu)}{2k\lambda\sqrt{(1 + \nu)^2 - \lambda^2}} \times \\ &\left(y_h\sqrt{\nu}F(x, y_h)(-1 + x^2)(-1 + \lambda - \nu) + \right. \\ &\left. + J(x, y_h)(1 + y_h)(-1 - \lambda + \nu + 2\nu x(-1 + y_h) + y_h\nu x^2(-1 + \lambda + \nu)) \right)^{-1}, \\ b &= \frac{-F(x, y_h)H(y_h, x)(-1 + \lambda - \nu)}{2k\lambda\sqrt{(1 + \nu)^2 - \lambda^2}} \times \\ &\left(y_h\sqrt{\nu}F(x, y_h)(-1 + x^2)(-1 + \lambda - \nu) + \right. \\ &\left. + J(x, y_h)(1 + y_h)(-1 - \lambda + \nu + 2\nu x(-1 + y_h) + y_h\nu x^2(-1 + \lambda + \nu)) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

We need to check that a and b are x -independent. For this, we found it convenient to replace λ by a parameter $t \in \mathbb{R}$ defined as (we hope that a conflict of notation with the time coordinate t will not confuse the reader)

$$\lambda = 2\sqrt{\nu} \cosh t. \quad (2.37)$$

With this redefinition we have

$$y_h = -\frac{e^{-t}}{\sqrt{\nu}}, \quad y_c = -\frac{e^t}{\sqrt{\nu}}.$$

Thus, the transition from y_h to y_c is obtained by changing t to its negative.

3. In fact, the vanishing or not of this determinant is irrelevant, insofar as we check that the values of a and b that are calculated below give the answer we need.

Using MATHEMATICA, the expressions above, evaluated at $y = y_h$, are indeed x -independent as desired, and take the form

$$\begin{aligned} a &= \frac{(1 - \sqrt{\nu}e^{-t})(1 - \sqrt{\nu}e^t)}{2k\sqrt{1 + \nu^2} - 2\nu \cosh(2t)}, \\ b &= \frac{(\sqrt{\nu} - e^{-t})(\sqrt{\nu} - e^t)(1 + e^{2t}\nu)}{2k\sqrt{\nu}(1 + e^{2t})\sqrt{1 + \nu^2} - 2\nu \cosh(2t)}. \end{aligned}$$

Note that the value of a is the same both for both horizons, but that of b is not.

We continue by checking that the remaining metric coefficients vanish with these values of a and b . First, one finds directly that $1 + a\Omega_\psi + b\Omega_\varphi$ vanishes at $y = y_h$. Next, the last term in $g_{uu}|_{y=y_h}$ vanishes, while the remaining term in the expression of $g_{uu}|_{y=y_h}$ reads

$$-\frac{a^2F + 2abJ - b^2\hat{F}}{4\hat{H}} = \frac{F(J^2 + F\hat{F})}{4\hat{H}(F\Omega_\varphi - J\Omega_\psi)^2}.$$

This vanishes at $y = y_h$ by (2.36). The calculation also shows that both g_{uu} and g_{uv} vanish at $y = y_h$.

Next, a MATHEMATICA calculation shows that g_{uu} will have a second order zero at y_h if and only if the constant σ equals

$$\sigma = \pm \frac{2k\sqrt{\nu}(e^t + \sqrt{\nu}) \coth(t)}{(1 - \nu)(1 - e^t\sqrt{\nu})};$$

Reexpressing everything in terms of the original parameters, our calculations in this section can be summarized as follows : The metric functions g_{uu} and g_{uv} vanish at $y = y_h$ when the parameters a and b take the values

$$a = \frac{1 - \lambda + \nu}{2k\sqrt{(1 + \nu)^2 - \lambda^2}}, \quad (2.38)$$

$$b = \frac{((\nu - 1)\sqrt{\lambda^2 - 4\nu} + \lambda(1 + \nu))(1 + \nu - \lambda)}{4k\lambda\sqrt{\nu}((1 + \nu)^2 - \lambda^2)}. \quad (2.39)$$

With this choice, g_{uu} has a second order zero at $y = y_h$ if and only if σ takes the value

$$\sigma^2 = \frac{2k^2\lambda^2(\lambda^2(\nu^2 + 1) - \lambda(\nu^2 - 1)\sqrt{\lambda^2 - 4\nu} - 2\nu(\nu + 1)^2)}{(\nu - 1)^2(\lambda^2 - 4\nu)(-\lambda + \nu + 1)^2}. \quad (2.40)$$

At $y = y_c$ the analogous analysis leads to the same value of a , while b and σ are now

$$b = \frac{((-\nu + 1)\sqrt{\lambda^2 - 4\nu} + \lambda(1 + \nu))(1 + \nu - \lambda)}{4k\lambda\sqrt{\nu}((1 + \nu)^2 - \lambda^2)}, \quad (2.41)$$

$$\sigma^2 = \frac{2k^2\lambda^2(\lambda^2(\nu^2 + 1) + \lambda(\nu^2 - 1)\sqrt{\lambda^2 - 4\nu} - 2\nu(\nu + 1)^2)}{(\nu - 1)^2(\lambda^2 - 4\nu)(-\lambda + \nu + 1)^2}. \quad (2.42)$$

We note that the values obtained for the constants a , b and σ are all well defined under the assumptions of eq. (2.4) together with $\lambda^2 - 4\nu > 0$ (y_h and y_c real and distinct) and hence the extension through the Killing horizons will remain valid for any member of the PS family of solutions whose parameters meet these requirements.

2.4.1 Degenerate case

It was shown in [KLR07] that the near-horizon limit of the degenerate PS solutions admits smooth extensions. Here we check that the method presented there for extending across a degenerate horizon applies to the PS metrics, and not only their near-horizons limits.

The first step is to define new coordinates $\hat{t}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}$, not to be confused with the hatted coordinates defined previously in this section in the non-degenerate case,

We now follow for our case the method developed in [KLR07]. In the original coordinates (t, y, ψ, x, φ) , the PS metrics do not satisfy the requirement that the coefficients $g_{t\psi}$, $g_{t\varphi}$ and g_{tt} vanish at the degenerate horizon $\{y = y_0 := -\frac{1}{\sqrt{\nu}}\}$, with cancelation at order two for g_{tt} . So the first step is to define new coordinates $\hat{t}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}$, not to be confused with the hatted coordinates defined previously in this section in the non-degenerate case :

$$\hat{t} = t, \quad \hat{\psi} = \psi - a_\psi t, \quad \hat{\varphi} = \varphi - a_\varphi t,$$

where a_ψ and a_φ are constants. Written in these coordinates, the conditions for the metric coefficients $g_{\hat{t}\hat{\psi}}$ and $g_{\hat{t}\hat{\varphi}}$ to vanish at y_0 read again :

$$\begin{aligned} a_\psi \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\psi^2 - \frac{F}{\hat{H}} \right) + a_\varphi \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\psi \Omega_\varphi - \frac{J}{\hat{H}} \right) &= \frac{\hat{\Omega}_\psi}{H} \\ a_\psi \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\psi \Omega_\varphi - \frac{J}{\hat{H}} \right) + a_\varphi \left(-\frac{\hat{H}}{H} \Omega_\varphi^2 + \frac{\hat{F}}{\hat{H}} \right) &= \frac{\hat{\Omega}_\varphi}{H}, \end{aligned}$$

where all the functions are evaluated at $y = y_0 = -\frac{1}{\sqrt{\nu}}$. Here, since $\lambda = 2\sqrt{\nu}$, we obtain that

$$\begin{aligned} a_\psi &= \frac{1 - \nu}{2k(1 + \sqrt{\nu})^2} \\ a_\varphi &= \frac{1 - \nu^2}{4k\sqrt{\nu}(1 + \sqrt{\nu})^2} \end{aligned}$$

are solutions, i.e. make the coefficients $g_{\hat{t}\hat{\psi}}$ and $g_{\hat{t}\hat{\varphi}}$ vanish at y_0 . The metric is then of the form of equation (41) in [KLR07], where R is replaced by $y - y_0$, the indices $i, j = 1, 2$ refer to the angular coordinates $\hat{\psi}$ and $\hat{\varphi}$, and t is replaced by \hat{t} . Explicitely we have :

$$g = g_{\hat{t}\hat{t}} d\hat{t}^2 + 2g_{\hat{t}\hat{i}} d\hat{t} d\hat{\varphi}^i + g_{ij} d\hat{\varphi}^i d\hat{\varphi}^j + g_{yy} dy^2 + g_{xx} dx^2, \quad (2.43)$$

with

$$g_{\hat{t}\hat{t}} = f_t(y, x)(y - y_0)^2, \quad g_{\hat{t}\hat{i}} = f_i(y, x)(y - y_0), \quad g_{yy} = \frac{h(y, x)}{(y - y_0)^2}, \quad (2.44)$$

for some functions f_t, f_ψ, f_φ and h , bounded at $y = y_0$ in their first variable.

Then, in order to remove the singularity at the horizon $y = y_0$, we define new coordinates (v, z, Ψ, Φ) , such that :

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= v - \frac{a_0}{z - y_0} + f(z, x) , \\
y &= z , \\
\hat{\psi} &= \Psi + b^\psi \ln(z - y_0) , \\
\hat{\varphi} &= \Phi + b^\varphi \ln(z - y_0) ,
\end{aligned}$$

where a_0 , b^ψ and b^φ are constants. Our aim is to find values of those constants for which the PS metrics, written in the coordinates (v, z, Ψ, Φ) , are regular at $z = y_0$. In fact, we choose $f(z, x) = a_1 \ln(z - y_0)$, where a_1 is a constant, as in [KLR07]. Thus, the coordinate transformations read

$$\begin{aligned}
d\hat{t} &= dv + \left(\frac{a_0}{(z - y_0)^2} + \frac{a_1}{z - y_0} \right) dz \\
dy &= dz \\
d\hat{\psi} &= d\Psi + \frac{b^\psi}{z - y_0} dz \\
d\hat{\varphi} &= d\Phi + \frac{b^\varphi}{z - y_0} dz .
\end{aligned}$$

Using these coordinate transformations along with the equalities (2.43) and (2.44), we compute the metric coefficients in the new coordinate system (v, z, Ψ, Φ) :

$$g_{vv} = g_{\hat{t}\hat{t}} , \quad g_{vz} = (a_0 + (z - y_0)a_1)f_t + b^i f_i , \quad g_{vi} = g_{\hat{t}i} ,$$

$$g_{zi} = \left((a_0 + (z - y_0)a_1)f_i + g_{ij}b^j \right) \frac{1}{z - y_0} ,$$

for $i = 1, 2$ referring to the variables Ψ and Φ , and

$$g_{zz} = \left((a_0 + (z - y_0)a_1)^2 f_t + 2(a_0 + (z - y_0)a_1)b^i f_i + g_{ij}b^i b^j + h \right) \frac{1}{(z - y_0)^2} .$$

This shows that the metric coefficients, to be smooth at $z = y_0$, must satisfy :

$$(z - y_0)^2 g_{zz}|_{z=y_0} = 0 , \quad \frac{\partial}{\partial z}((z - y_0)^2 g_{zz})|_{z=y_0} = 0 , \quad (z - y_0)g_{zi}|_{z=y_0} = 0$$

for $i = 1, 2$. Therefore we can derive the conditions that the constants a_0 , a_1 , b^ψ and b^φ should satisfy to yield a smooth metric at $z = y_0$. Those read :

$$\begin{aligned}
a_0 f_\psi + g_{\psi i} b^i &= 0 \\
a_0 f_\varphi + g_{\varphi i} b^i &= 0 \\
h + a_0^2 f_t + 2a_0 b^i f_i + g_{ij} b^i b^j &= 0 \\
\partial_z h + a_0^2 \partial_z f_t + 2a_0 b^i \partial_z f_i + \partial_z g_{ij} b^i b^j + 2a_1 a_0 f_t + 2a_1 b^i f_i &= 0 .
\end{aligned}$$

Before making any attempt to solve this system, note that we can slightly simplify it :

$$\begin{aligned} a_0 f_\psi + g_{\psi i} b^i &= 0 \\ a_0 f_\varphi + g_{\varphi i} b^i &= 0 \\ h + a_0^2 f_t + a_0 b^i f_i &= 0 \\ \partial_z h + a_0^2 \partial_z f_t + 2a_0 b^i \partial_z f_i + \partial_z g_{ij} b^i b^j - 2 \frac{a_1}{a_0} h &= 0 . \end{aligned}$$

Then, we start by looking for solutions in (a_0, b^ψ, b^φ) of the first three equations of the system (2.45) above, and we begin with the special case $x = 0$. The calculations are then tractable using MATHEMATICA, and we obtain the following two triplets of solutions :

$$(a_0, b^\psi, b^\varphi) \in \left\{ \left(\frac{4k}{(1-\sqrt{\nu})^2}, 0, -1 \right), \left(-\frac{4k}{(1-\sqrt{\nu})^2}, 0, 1 \right) \right\} .$$

Next, we insert these values in the left-hand side of the three first equalities in (2.45) (this time for any value of x), and we still obtain zero at the corresponding right-hand sides. Moreover, the value of a_1 is imposed by the fourth equation and the values of a_0 , b^ψ and b^φ . Finally, we obtain two solutions :

$$(a_0, b^\psi, b^\varphi, a_1) \in \left\{ \left(\frac{4k}{(1-\sqrt{\nu})^2}, 0, -1, -\frac{4k\sqrt{\nu}(1+\nu)}{(1-\sqrt{\nu})^2(1-\nu)} \right), \left(-\frac{4k}{(1-\sqrt{\nu})^2}, 0, 1, \frac{4k\sqrt{\nu}(1+\nu)}{(1-\sqrt{\nu})^2(1-\nu)} \right) \right\} .$$

It is important to note that these are *not* functions of x but constants, as desired. We may ask whether other solutions exist for this system. But the determinant of the linear system of the first two equations in the variables b^ψ and b^φ , at fixed a_0 , is

$$\det((g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2})|_{y=y_0} = \frac{32k^4 \nu (1 + \sqrt{\nu})(1 - x^2)}{(1 - \sqrt{\nu})^3 (1 + \nu + 4x\sqrt{\nu} + x^2(1 + \nu))} ,$$

and this last expression is always positive for any allowed values of ν and x , except at the axis $x = \pm 1$ where it vanishes. Hence, one can obtain each of b^ψ and b^φ in terms of a_0 from the two first equations. Next, the third equation, when replacing the b^i 's, becomes a quadratic equation in a_0 , hence admitting no more than two solutions. Finally, a_1 is uniquely determined by the fourth equation from a_0 and the b^i 's.

We conclude that, when performing a transformation of the coordinates the way described above, these values of the parameters a_0 , a_1 , b^ψ and b^φ give two coordinate systems in which the metric is smooth at the degenerate horizon $y = y_0$, and we can therefore locally analytically extend the PS metric across the horizon in the degenerate case. One choice corresponds to an extension through the future event horizon, the other through the past event horizon. Note also that the values of the parameters a_0 , a_1 , b^ψ and b^φ are all well-defined away from $\nu = 1$ and hence the computations of this subsection remain valid for any member of the PS family with a degenerate horizon and $\nu \neq 1$.

2.5 Some local and global properties

2.5.1 Stable causality of the domain of outer communications?

There is a well developed theory of black hole uniqueness [HY83, HY08, CLC08] which requires various global regularity conditions. In particular the domain of outer communications should be globally hyperbolic, and the orbits of the group generated by the periodic Killing vectors should be spacelike or trivial. We do not know whether or not these properties hold for the solutions at hand, and we note that the proof of global hyperbolicity for Emparan-Reall metrics [CC10] required a considerable amount of work, including a detailed understanding of causal geodesics. The aim of this section is to give numerical evidence for stable causality of the domain of outer communications. It is likely that a proper understanding of the minimisation algorithms, used in the calculations reported below, can be invoked to rigorously establish the result, at least for a "big" set of parameters, but this lies beyond the scope of our current analysis.

We start with the question of the causal character of the orbits of the Killing vectors ∂_φ and ∂_ψ : should a linear combination of those vectors become null, one would immediately obtain violation of strong causality, or even causality. To analyze this, one needs to know whether the determinant of the two by two matrix obtained by taking the scalar products of the periodic Killing vectors has a sign on the region of interest.

This problem turns out to be closely related to the question of stable causality of the d.o.c. Indeed, from the form of the metric together with (2.100) one finds

$$\begin{aligned} g(\nabla t, \nabla t) = g^{tt} &= \frac{g_{xx}g_{yy}}{\det g_{\mu\nu}} \det \begin{pmatrix} g_{\psi\psi} & g_{\psi\varphi} \\ g_{\psi\varphi} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\nu - 1)^2(x - y)^4}{4k^4G(x)G(y)} \det \begin{pmatrix} g_{\psi\psi} & g_{\psi\varphi} \\ g_{\psi\varphi} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{(1 + y)(1 - x^2)\Theta(x, y, \lambda, \nu)}{(1 - \lambda + \nu)H(x, y)G(x)G(y)}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

where Θ is the *polynomial* defined in (2.105). Recall that $G(y)$ is negative for $y \in (y_h, -1)$ while $G(x)$ is positive for $x \in (-1, 1)$, and note that the zeros of G at $x = \pm 1$ and $y = -1$ are canceled by factors in the numerator. We conclude that t will be a time function on the region $y > y_h$, and thus the d.o.c. will be stably causal, if the polynomial Θ is *strictly negative*. The second line of (2.45) shows that the principal orbits of the group generated by ∂_φ and ∂_ψ will then be spacelike, as desired.⁴

Removing some obvious prefactors, this reduces the study to that of the sign of $\Theta(x, y, \lambda, \nu)$ on the closure of $\Xi_0 \cap \{y > y_h\}$, where

$$\Xi_0 \equiv \{(x, y, \lambda, \nu) \in \mathbb{R}^4; -1 \leq x \leq 1, y_c \leq y < -1, 0 < \nu < 1, 2\sqrt{\nu} \leq \lambda < 1 + \nu\}, \quad (2.46)$$

Visual inspection of various slices of its graph suggests that Θ has no zeros on Ξ_0 , though there are zeros for the borderline values of ν and λ . Since Θ is a continuous

4. The strict negativity of Θ has been established in [CS10] after the research reported on here has been completed.

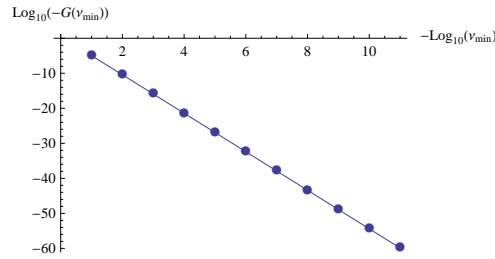


FIGURE 2.8 – Logarithmic graph of $-G(\nu_{\min})$ in terms of $\log_{10} \nu_{\min}$, suggesting very strongly that Θ is strictly negative for admissible ν and λ .

function on $\bar{\Xi}_0$, we thus expect that Θ has a constant sign in $\text{int}(\Xi_0)$, which can be found by picking an arbitrary point in $\text{int}(\Xi_0)$ and computing the value of Θ there. In our case we have, e.g.,

$$\Theta \left(-\frac{1}{2}, \frac{6}{5}, \frac{18}{625} + \sqrt{2}, \frac{1}{2} \right) \approx -23.4 < 0,$$

which in particular proves stable causality at, and near, those values of parameters.

To obtain stronger evidence about the sign throughout the region of interest we proceed as follows : Since $y_c \rightarrow -\infty$ for $\nu \rightarrow 0$, $\bar{\Xi}_0$ is unbounded, and since Θ has zeros at $\lambda = 1 + \nu$ (compare (2.55) below), we introduce a cut-off ν_{\min} and set

$$\Xi_{\nu_{\min}} := \bar{\Xi}_0 \cap \{ \nu \geq \nu_{\min} \} \cap \{ \lambda \leq 1 + \nu - \nu_{\min} \}.$$

Define

$$G(\nu_{\min}) := \max_{\Xi_{\nu_{\min}}} \Theta,$$

We have computed a numeric approximation to the value of the function $G(\nu_{\min})$ for a series of small values of ν_{\min} . The result is shown in Figure 2.8. For example

$$G(1/10) = -0.0000106491106406 \pm 10^{-17}.$$

The calculation has been done within MATHEMATICA using the function `NMaximize`, and the error above is the value given to the option `AccuracyGoal`. The small value obtained is perplexing, but is consistent with our various tests and the remaining calculations. The requirement of convergence of MATHEMATICA's minimisation algorithms forces the values of $G(\nu_{\min})$ to be computed with greater numerical accuracies when ν_{\min} is smaller, to account for the smaller number, and for $\nu_{\min} = 1/100$ the accuracy parameter used was approximately 100 digits after the decimal point. The graph suggests very strongly that Θ is strictly negative away from the extreme vales of ν and λ . We have repeated the computations with accuracy parameter up to 700 digits after the decimal point and there is a clear convergence in the results, but we did not produce graphs to illustrate this claim. One can fit the points of the graph in Figure 2.8 to a straight line defined by the expression

$$\log_{10}(-G(\nu_{\min})) = -A \log_{10} \nu_{\min} + B. \quad (2.47)$$

We have successively fitted the values of A and B to all the points on the graph, then to the last ten points on the graph, etc., with a last fit to the last four points on the graph. The values of A obtained in this way formed an increasing sequence, with increasingly smaller variations, with the fit for the last four points yielding

$$A \approx -5.499993, \quad B \approx 0.601987. \quad (2.48)$$

This suggests very strongly that the correct limiting exponent is -5.5 . This half-integer value is somewhat perplexing, but can probably be explained by the square-root behaviour of the lower bound for λ in terms of ν . The accuracy required to obtain further points on the graph is beyond the capabilities of the computing resources available to us. The values of the *residuals*, say r_i , $i = 8, \dots, 11$, of this linear regression are represented in Figure 2.9. From these residuals, we get the following value for the variance $\sigma = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=8}^{11} r_i^2}$:

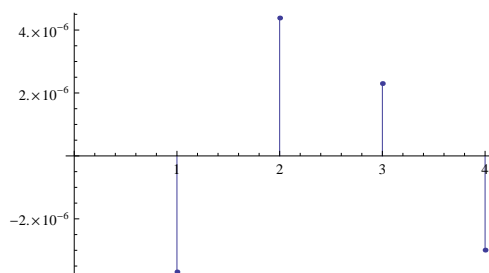


FIGURE 2.9 – Graphical representation of the residuals r_i , $i = 8, \dots, 11$ for the nonlinear regression of the computed values of $G(\nu_{\min})$ to the model shown in (2.47).

$$\sigma \approx 3.43 \times 10^{-6}.$$

The numerical study also indicates that the function Θ does not have any critical points in Ξ_0 (we have not been able to verify this analytically either). This is illustrated in Figure 2.10. If this is indeed the case, then the extrema of Θ lie on the boundary of $\bar{\Xi}_0$, which should be simpler to analyze. Indeed, the polynomial $\Theta(x, y, \lambda, \nu)$ adopts a simpler

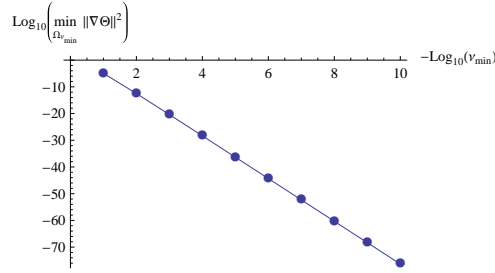


FIGURE 2.10 – A logarithmic graph of $\min_{\Xi_{\nu_{\min}}} \|\nabla\Theta\|^2$ in terms of $-\log_{10} \nu_{\min}$, suggesting very strongly that Θ has no critical points in the region of interest, for admissible values of ν and λ . The accuracy parameter used for the computed values of $\min_{\Xi_{\nu_{\min}}} \|\nabla\Theta\|^2$ was 100 digits after the decimal point for $\nu_{\min} = 10^{-10}$.

form in certain regions of the boundary of $\bar{\Xi}_0$. These are :

$$\Theta(x, y, 1 + \nu, \nu) = -8(\nu + 1)^2(x - y)^2(x\nu + 1)(y\nu + 1) \times \\ (x(y^2\nu^2 - (y^2 + 2y - 1)\nu + 1) + y^2\nu^2 + (y^2 - 2y - 1)\nu + 1), \quad (2.49)$$

$$\Theta(x, y, \lambda, 0) = -(x\lambda + 1) \left((2x^2 - 1)\lambda^3 + (6x^2 - 4x + 1)\lambda^2 + \right. \\ \left. + (4x - 1)\lambda + y^2(\lambda + 1)^3\lambda + 1 + \right. \\ \left. + y(2x^2(\lambda - 1)\lambda^2 - 4x\lambda(2\lambda^2 + \lambda + 1) - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 1) \right), \quad (2.50)$$

$$\Theta(1, y, \lambda, \nu) = -(y - 1)(\lambda + \nu + 1)^3(y^2\nu - y\lambda + 1) \times \\ (\lambda(y^2\nu - 1) + (\nu - 1)(y^2\nu + 1)), \quad (2.51)$$

$$\Theta(-1, y, \lambda, \nu) = ((\nu - 1)(y^2\nu + 1) - \lambda(y^2\nu - 1)) \times \\ (A(\lambda, \nu)y^3 + B(\lambda, \nu)y^2 + C(\lambda, \nu)y + D(\lambda, \nu)), \quad (2.52)$$

$$\Theta(x, -1, \lambda, \nu) = 2 \left(x^2\nu((\lambda - 2)\lambda + \nu^2 - 1) + 2x\lambda(\nu^2 - 1) - \lambda^2 + 2\lambda\nu + \nu^2 - 1 \right) \times \\ \left(x^2((\nu + 2)(\lambda^2 + \nu^2) + \nu) + x\lambda(\lambda^2 + 3(\nu + 1)^2) + \right. \\ \left. + \lambda^2(2\nu + 1) + (\nu + 1)^2 \right), \quad (2.53)$$

$$\Theta(x, y_c, \lambda, \nu) = \frac{\lambda^2(\lambda + \nu + 1)^2(x(x\nu + \lambda) + 1)}{\nu^3} \times \\ \left(\lambda\nu(x^2\nu(\mathcal{D} - 1) - 2x(\mathcal{D} + 3\nu) - 2\mathcal{D} + 3) + \right. \\ \left. + \lambda^2(\nu(x(x\nu + 2\mathcal{D} - 2) - 4) - \mathcal{D}) + \right. \\ \left. + \nu(\mathcal{D} - \nu(x(x\mathcal{D} + 2x\nu + 2\mathcal{D} - 4) - 2)) \right. \\ \left. + \lambda^3(2x\nu + \mathcal{D} - 1) + \lambda^4 \right), \quad (2.54)$$

where

$$\mathcal{D} := \sqrt{\lambda^2 - 4\nu},$$

and where $A(\lambda, \nu), \dots, D(\lambda, \nu)$ are polynomials in λ, ν . We have not been able to find a simple form of $\Theta(x, y, 2\sqrt{\nu}, \nu)$.

From the first of the previous set of relations one finds

$$\Theta(-1, -1, 1 + \nu, \nu) = 0, \quad \Theta\left(x, -\frac{1}{\nu}, 1 + \nu, \nu\right) = 0. \quad (2.55)$$

The above points, at which Θ is zero, lie on the boundary of Ξ_0 . Our numerical analysis suggests that these are the only points of Ξ_0 on which $\Theta(x, y, \lambda, \nu)$ vanishes. Note that the zeros of the factor $y^2\nu - y\lambda + 1$ in $\Theta(1, y, \lambda, \nu)$ are $-y_h$ and $-y_c$, which are positive and therefore do not lead to zeros of Θ on Ξ_0 .

From the expression for $\Theta(1, y, \lambda, \nu)$ we easily deduce

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \Theta(1, y, \lambda, \nu) = (y - 1)(\lambda + 1)^4(1 - y\lambda),$$

and, since $y_c \rightarrow -\infty$ when $\nu \rightarrow 0$, we find

$$\lim_{\nu_{\min} \rightarrow 0} \inf_{\Xi_{\nu_{\min}}} \Theta = -\infty.$$

Inspection of graphs indicates that causality violations are a typical feature of the solutions in the region $y < y_c$, as illustrated by Figures 2.3 and 2.4, and are always present near $y = 1$ in any case.

2.5.2 No struts

In this section we verify the regularity of the metric at the rotation axes.

ψ axis : $y = -1$

First of all, note that

$$g_{\psi\psi}|_{y=-1} = 0.$$

The ψ - y part of the metric can be cast in the form

$$ds^2 = -\frac{2k^2 H(x, y)(y + 1)}{(\nu - 1)^2 G(y)(x - y)^2} \times \quad (2.56)$$

$$\left(\frac{(\nu - 1)^2 G(y)(x - y)^2 \left(\frac{F(x, y)}{H(y, x)} + \frac{H(y, x)M(x, y)^2}{H(x, y)} \right)}{2k^2(y + 1)H(x, y)} d\psi^2 + \frac{dy^2}{y + 1} \right). \quad (2.57)$$

The conformal factor is regular, bounded away from zero, provided that $x \neq y$ and $y_h < y \neq y_c$. On the other hand

$$\lim_{y \rightarrow -1} \frac{(\nu - 1)^2 G(y)(x - y)^2 \left(\frac{F(x, y)}{H(y, x)} + \frac{H(y, x)M(x, y)^2}{H(x, y)} \right)}{2k^2(y + 1)^2 H(x, y)} = 4.$$

This shows that the usual quadratic change of variables, $y + 1 = \rho^2$, leads to a smooth metric near a rotation axis $\rho = 0$ provided that ψ is a 2π -periodic angular coordinate.

φ axis : $x = \pm 1$

Here we are interested in the behaviour of the metric near $x = \pm 1$, where again

$$g_{\varphi\varphi}|_{x=\pm 1} = 0 .$$

Similarly to the analysis in Section 2.5.2, we write

$$ds^2 = \frac{2k^2(x \pm 1)H(x, y)}{(\nu - 1)^2 G(x)(x - y)^2} \left(\frac{dx^2}{x \pm 1} - \frac{(\nu - 1)^2 G(x)(x - y)^2 \left(\frac{H(y, x)P(x, y)^2}{H(x, y)} - \frac{F(y, x)}{H(y, x)} \right)}{2k^2(x \pm 1)H(x, y)} d\varphi^2 \right) .$$

One finds again a well behaved conformal factor on Ω_0 away from $\{x = y\}$, and

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{(\nu - 1)^2 G(x)(x - y)^2 \left(\frac{H(y, x)P(x, y)^2}{H(x, y)} - \frac{F(y, x)}{H(y, x)} \right)}{2k^2(x \pm 1)^2 H(x, y)} = 4 .$$

Imposing 2π -periodicity on φ , we conclude that, as long as one stays away from the set $y \in [-1, 1]$, the coordinates (x, φ) are coordinates on two-spheres.

$\hat{\psi}$ axis : $y = 1$

The Killing vector

$$\hat{\xi} := \frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{\sqrt{(1 + \nu)^2 - \lambda^2}}{4k\lambda}}_{=: \alpha} \frac{\partial}{\partial \psi} . \quad (2.58)$$

is spacelike near $\{y = 1\}$, and lies in the kernel of g at $y = 1$, in the sense that

$$\lim_{y \rightarrow 1} g(\hat{\xi}, \cdot) = 0 . \quad (2.59)$$

If we use a new coordinate system $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{\psi}, \hat{\varphi})$, where

$$\hat{t} = t , \quad \hat{x} = x , \quad \hat{y} = y , \quad \hat{\psi} = \psi - \alpha t , \quad \hat{\varphi} = \varphi ,$$

then (2.59) implies existence of functions $f_{\hat{\mu}}$, smooth near $y = 1$, such that

$$g_{\hat{t}\hat{\mu}} = (y - 1)f_{\hat{\mu}} ,$$

in particular $g_{\hat{t}\hat{t}}$ vanishes at $y = 1$. As in the last two sections, a conical singularity at $y = 1$ will be avoided if and only if

$$\frac{(1 + \nu)^2 - \lambda^2}{4k^2\lambda^2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{g_{\hat{t}\hat{t}}}{g_{\hat{y}\hat{y}}(y - 1)^2} = 4 ,$$

the first equality above resulting from the calculation of the limit. So, there will be a conical singularity unless k is chosen to be equal to

$$k = \frac{\sqrt{(1 + \nu)^2 - \lambda^2}}{4\lambda} . \quad (2.60)$$

It will become clear in Section 2.6 that the axis $y = 1$ lies beyond event horizons, in a region where both causality violations and naked singularities are present anyway, and therefore there does not seem to be any significant reason for imposing (2.60).

2.5.3 Asymptotics of the Pomeransky & Senkov solution

In this section we verify asymptotic flatness. To that end we need to write down the line element in a suitable coordinate system. In [ER06] a coordinate system leading to manifest asymptotic flatness was proposed, related to the *ring coordinates* x, y as follows

$$r_1 := L \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-y}, \quad r_2 := L \frac{\sqrt{y^2-1}}{x-y}, \quad (2.61)$$

where L is a nonzero real constant. If L is positive these relations establish a diffeomorphism between the open region of \mathbb{R}^2 defined by the conditions $-1 < x < 1$, $-\infty < y < -1$, and the open positive quadrant of \mathbb{R}^2 defined as $0 < r_1 < \infty$, $0 < r_2 < \infty$. Indeed the inverse of (2.61) is

$$x = \frac{L^2 - (r_1^2 + r_2^2)}{\Sigma}, \quad y = -\frac{L^2 + r_1^2 + r_2^2}{\Sigma}, \quad (2.62)$$

where

$$\Sigma := \sqrt{L^4 + 2L^2(r_1^2 - r_2^2) + (r_1^2 + r_2^2)^2}.$$

Similarly, for L negative one obtains a diffeomorphism with the region $-1 < x < 1$ and $y > 1$ by changing both signs above

$$x = -\frac{L^2 - (r_1^2 + r_2^2)}{\Sigma}, \quad y = \frac{L^2 + r_1^2 + r_2^2}{\Sigma}, \quad (2.63)$$

with the same function Σ .

Eq. (2.62) adopts a simpler form if we make the transformation

$$r_1 = r \sin \theta, \quad r_2 = r \cos \theta,$$

where $0 < r < \infty$ and $0 < \theta < \pi/2$. In this case we have

$$x = \frac{L^2 - r^2}{\Sigma}, \quad y = -\frac{L^2 + r^2}{\Sigma}, \quad \Sigma = \sqrt{L^4 - 2L^2r^2 \cos 2\theta + r^4}. \quad (2.64)$$

The Jacobian of this transformation is

$$-\frac{8L^4 r^3 \sin(2\theta)}{\Sigma^4},$$

which vanishes at the axes $\theta = 0, \pi/2$, and therefore some care is required there.

We perform the coordinate change (2.64) in (2.1) and study the resulting expression for large values of r . To understand the asymptotic behaviour of the metric it is convenient to choose L as

$$L := \sqrt{\frac{2k^2(1-\lambda+\nu)}{1-\nu}}, \quad \text{or} \quad L := -\sqrt{\frac{2k^2(1+\lambda+\nu)}{1-\nu}},$$

and this choice will be made in what follows. Choosing the positive value (which corresponds to points near $(x = -1, y = -1)$) one then obtains

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= -1 + \frac{8k^2\lambda}{(1-\lambda+\nu)r^2} + O(r^{-4}) , \\
g_{rr} &= 1 - \frac{4k^2\lambda((\lambda-4\nu+\lambda\nu)\cos(2\theta) - (-1+\nu)^2)}{(1-\lambda+\nu)(-1+\nu)^2r^2} + O(r^{-4}) , \\
g_{\theta\theta} &= r^2 \left(1 - \frac{4k^2\cos(2\theta)(-3\lambda\nu^2 + 2((\lambda-1)\lambda-1)\nu + \lambda + 2\nu^3)}{(\nu-1)^2(-\lambda+\nu+1)r^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4k^2\lambda}{(-\lambda+\nu+1)r^2} \right) + O(r^{-2}) , \\
g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2\theta \left(1 + \frac{2k^2((\nu-1)\cos(2\theta)(\lambda-2\nu) + 3\lambda\nu + \lambda - 2(\nu-1)\nu)}{r^2(\nu-1)^2} \right. \\
&\quad \left. + O(r^{-4}) \right) , \\
g_{t\varphi} &= \frac{\sin^2\theta}{r^2} \left(\frac{16k^3\lambda\sqrt{\nu}\sqrt{(\nu+1)^2-\lambda^2}}{(\nu-1)^2(\lambda-\nu-1)} + O(r^{-2}) \right) , \\
g_{t\psi} &= \frac{\cos^2\theta}{r^2} \left(-\frac{8k^3\lambda(\lambda\nu + \lambda + \nu^2 - 6\nu + 1)\sqrt{(\nu+1)^2-\lambda^2}}{(\nu-1)^2(-\lambda+\nu+1)^2} + O(r^{-2}) \right) , \\
g_{\varphi\psi} &= \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta}{r^2} \left(-\frac{32k^4\lambda\sqrt{\nu}(\lambda^2(\nu+1) - 4\lambda\nu + (\nu-1)^2(\nu+1))}{(\nu-1)^4(\lambda-\nu-1)} + O(r^{-2}) \right) , \\
g_{\psi\psi} &= r^2 \cos^2\theta \left(1 + \frac{2k^2(\lambda^2(3\nu+1) - \lambda(\nu(\nu+10) - 3) + 2\nu(\nu^2-1))}{r^2(\nu-1)^2(-\lambda+\nu+1)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2k^2\cos(2\theta)(\lambda-2\nu)}{r^2(\nu-1)} + O(r^{-4}) \right) . \tag{2.65}
\end{aligned}$$

The leading powers of r in the diagonal terms in (2.65) correspond to the metric

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 + \cos^2\theta d\psi^2) , \tag{2.66}$$

which is just the 5-dimensional Minkowski spacetime, as one checks by making the coordinate transformation $x^0 = t$ and

$$\begin{aligned}
x^1 &= r \cos\theta \cos\psi , & x^2 &= r \cos\theta \sin\psi , \\
x^3 &= r \sin\theta \sin\varphi , & x^4 &= r \sin\theta \cos\varphi ,
\end{aligned} \tag{2.67}$$

which leads to

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 .$$

To avoid ambiguities, we will write $\bar{g}_{x^\mu x^\nu}$ for the components of the metric tensor in the manifestly asymptotically flat coordinates (2.67). One can check that the angular prefactors in $g_{\psi\psi}$, etc., have the right structure so that in the coordinates above we have

$$\bar{g}_{x^\mu x^\nu} - \eta_{\mu\nu} = O(r^{-2}) , \quad \partial_{x^\sigma} \bar{g}_{x^\mu x^\nu} = O(r^{-3}) . \tag{2.68}$$

For instance, let us define the functions $h_{\mu\nu}(r, \theta)$ by the equations

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1 + \frac{h_{tt}}{r^2}, & g_{rr} &= 1 + \frac{h_{rr}}{r^2}, & g_{\psi\psi} &= \left(1 + \frac{h_{\psi\psi}}{r^2}\right) r^2 \cos^2 \theta, \\ g_{t\phi} &= \frac{h_{t\phi} \sin^2 \theta}{r^2}, & g_{t\psi} &= \frac{h_{t\psi} \cos^2 \theta}{r^2}, & g_{\varphi\psi} &= \frac{h_{\varphi\psi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2}. \\ g_{\theta\theta} &= r^2 \left(1 + \frac{h_{\theta\theta}}{r^2}\right), & g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{h_{\varphi\varphi}}{r^2}\right), \end{aligned}$$

The prefactors have been chosen so that the functions $h_{\mu\nu}$ are rational functions of x and y , smooth near $\{x = y = -1\}$. One finds

$$\begin{aligned} \bar{g}_{x^1 x^1} &= 1 + \frac{(x^2)^2 r^2 h_{\psi\psi} + (x^1)^2 ((x^1)^2 + (x^2)^2) h_{rr} + (x^1)^2 ((x^3)^2 + (x^4)^2) h_{\theta\theta}}{r^4 ((x^1)^2 + (x^2)^2)} \\ &= 1 + \frac{\sin^2 \psi h_{\psi\psi} + \cos^2 \theta \cos^2 \psi h_{rr} + \sin^2 \theta \cos^2 \psi h_{\theta\theta}}{r^2}, \\ \bar{g}_{x^1 x^2} &= \frac{x^1 x^2 \left(((x^1)^2 + (x^2)^2) h_{rr} + ((x^3)^2 + (x^4)^2) h_{\theta\theta} - r^2 h_{\psi\psi} \right)}{r^4 ((x^1)^2 + (x^2)^2)} \\ &= \frac{\cos \psi \sin \psi (\cos^2 \theta h_{rr} + \sin^2 \theta h_{\theta\theta} - h_{\psi\psi})}{r^2}. \end{aligned}$$

Continuity of $\bar{g}_{x^1 x^1}$ and $\bar{g}_{x^1 x^2}$ at the rotation axis $\theta = \pi/2$ requires

$$h_{\theta\theta}(r, \pi/2) = h_{\psi\psi}(r, \pi/2) \iff g_{\theta\theta}(r, \pi/2) = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{g_{\psi\psi}(r, \theta)}{\cos^2 \theta}, \quad (2.69)$$

which can be checked by direct calculations. To obtain differentiability one writes

$$\begin{aligned} \bar{g}_{x^1 x^1} &= 1 + \frac{(x^2)^2 h_{\psi\psi} + (x^1)^2 h_{rr} + ((x^3)^2 + (x^4)^2) h_{\theta\theta}}{r^4} \\ &\quad + \frac{(x^2)^2 ((x^3)^2 + (x^4)^2) (h_{\psi\psi} - h_{\theta\theta})}{r^4 ((x^1)^2 + (x^2)^2)}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

A MATHEMATICA calculation shows that

$$h_{\psi\psi} - h_{\theta\theta} = \frac{1+y}{x-y} W(x, y, \nu, \lambda),$$

where W is a rational function of its arguments, smooth near $\{x = y = -1\}$, which is precisely what is needed to cancel the factor $(x^1)^2 + (x^2)^2$ in the denominator of the second line of (2.70), and make this term uniformly well behaved as claimed in (2.68); here it is useful to observe that

$$\frac{\partial x}{\partial x^i} = O(x^i r^{-2}), \quad \frac{\partial y}{\partial x^i} = O(x^i r^{-2}).$$

The equality (2.69) similarly guarantees uniform derivative estimates for $\bar{g}_{x^1x^2}$ and $\bar{g}_{x^2x^2}$ at the rotation axis $\theta = \pi/2$.

We continue with

$$\begin{aligned}\bar{g}_{x^3x^3} &= 1 + \frac{h_{rr}(x^3)^2((x^3)^2 + (x^4)^2) + h_{\theta\theta}(x^3)^2((x^1)^2 + (x^2)^2) + h_{\varphi\varphi}(x^4)^2r^2}{r^4((x^3)^2 + (x^4)^2)} \\ &= 1 + \frac{h_{rr}(x^3)^2 + h_{\theta\theta}(r^2 - (x^3)^2)}{r^4} + \frac{(h_{\varphi\varphi} - h_{\theta\theta})(x^4)^2}{r^4((x^3)^2 + (x^4)^2)}.\end{aligned}$$

For continuity of $\bar{g}_{x^3x^3}$ one thus obtains the condition

$$h_{\varphi\varphi}(r, 0) = h_{\theta\theta}(r, 0) \iff g_{\theta\theta}(r, 0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{g_{\varphi\varphi}(r, \theta)}{\sin^2 \theta}, \quad (2.71)$$

while uniform differentiability is equivalent to uniform differentiability of

$$\frac{(x^4)^2(h_{\varphi\varphi} - h_{\theta\theta})}{r^4((x^3)^2 + (x^4)^2)}.$$

This, in turn, requires a factorization of $h_{\varphi\varphi} - h_{\theta\theta}$ by $(x^3)^2 + (x^4)^2$. The required regularity ensues from the identity

$$h_{\varphi\varphi} - h_{\theta\theta} = \frac{(1 - x^2)}{x - y} \hat{W}(x, y),$$

where \hat{W} is a rational function regular near $\{x = y = -1\}$. The same formula takes care of the regularity of $\bar{g}_{x^3x^4}$ and $\bar{g}_{x^4x^4}$.

The remaining components of the metric are manifestly asymptotically flat, e.g.

$$\begin{aligned}\bar{g}_{x^0x^0} &= -1 + \frac{h_{tt}}{r^2}, \\ \bar{g}_{x^0x^1} &= -\frac{x^2 h_{t\psi}}{r^4} = -\frac{\cos \theta \sin \psi h_{t\psi}}{r^3}, \\ \bar{g}_{x^1x^3} &= \frac{(h_{rr} - h_{\theta\theta})r^2 x^1 x^3 - h_{\varphi\psi} x^2 x^4}{r^6},\end{aligned} \quad (2.72)$$

with similar expressions for those non-zero $\bar{g}_{x^\mu x^\nu}$'s that have not been listed so far.

Uniform decay estimates on higher order derivatives follow from (2.68) using elliptic estimates applied to the stationary Einstein equations, which establishes asymptotic flatness of the solutions.

It is well known that the ADM mass m of a stationary solution equals its Komar mass, independently of dimension. One can therefore read the ADM mass from the $1/r^2$ term in g_{tt} and so, perhaps up to normalisation-dependent factors, the mass is

$$\frac{4k^2 \lambda}{(1 - \lambda + \nu)}.$$

For positive λ , positivity of the total mass is then equivalent to

$$\lambda < 1 + \nu. \quad (2.73)$$

This proves that, for λ 's that do not satisfy that constraint, the domain of outer communications associated to this asymptotically flat end contains naked singularities, in the sense that the hypotheses of the positive energy theorem with horizon boundaries are violated. However, this does not necessarily prove that the solutions are nakedly singular for all domains of outer communications for λ 's that do not satisfy (2.73), as the asymptotically flat end obtained as above near $\{x = y = -1\}$ could be shielded from other such ends by a horizon. Equivalently, to show that (2.73) is necessary for regularity, one would need to locate all asymptotically flat regions of all maximal extensions of the metric (2.1), and analyse the associated domains of outer communication.

($x = 1, y = 1$)

Near ($x = 1, y = 1$), the asymptotics of those components of the metric which do not carry a ψ index can be obtained by replacing λ by $-\lambda$ in (2.65). This is due to the fact that the transformation

$$(x, y, \lambda, \nu) \mapsto (-x, -y, -\lambda, \nu)$$

maps all the metric functions into themselves, except for M , and this last function only affects $g(\partial_\psi, \cdot)$. Those last components of the metric read

$$\begin{aligned} g_{\psi\psi} = & r^2 \cos^2 \theta + \frac{k^2}{2(\nu - 1)^2 ((\nu + 1)^2 - \lambda^2)} \times \\ & \left((\lambda - \nu - 1) \left((\nu - 1) \cos(4\theta) (\lambda + \nu + 1) (\lambda + 2\nu) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4\lambda \cos(2\theta) ((\lambda + 6)\nu + \lambda - \nu^2 - 1) \right) + \right. \\ & \left. + \lambda^3 (-5\nu + 3) - 2\lambda^2 (\nu - 1) (13\nu - 12) - \right. \\ & \left. - \lambda (\nu + 1) (3(\nu - 8)\nu + 5) + 2(\nu - 1)\nu(\nu + 1)^2 \right) + O(r^{-1}) , \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$g_{t\psi} = \frac{4k\lambda}{\sqrt{(\nu + 1)^2 - \lambda^2}} + O(\cos^2 \theta r^{-1}) , \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} g_{\psi\phi} = & -\frac{16k^4 \lambda \sqrt{\nu} \sin^2(\theta)}{r^2 (\nu - 1)^4 (\lambda + \nu + 1)} \times \left(\cos(2\theta) (\lambda^2 (\nu + 1) + 4\lambda\nu + (\nu - 1)^2 (\nu + 1)) + \right. \\ & \left. + \lambda^2 (\nu + 1) + 4\lambda (\nu^2 - \nu + 1) + (\nu - 1)^2 (\nu + 1) \right) \\ & + O(\cos^2 \theta \sin^2 \theta r^{-3}) . \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.5.4 The singular set $\{H(x, y) = 0\}$

Throughout this section we restrict attention to admissible pairs (ν, λ) .

In order to understand the geometry of the singular set

$$\text{Sing} := \{H(x, y) = 0\} ,$$

we proceed as follows, keeping in mind the analysis of Section 2.3, which concerned the region $\{x \in [-1, 1], y_c < y < -1\}$: The equation $H(x, y) = 0$ can also be solved as

$$y_{\pm}(x) := \frac{\lambda\nu(1-x^2) \pm \sqrt{\tilde{W}(x)}}{x\nu(2\lambda\nu + x(\lambda^2 + \nu^2 - 1))}, \quad (2.77)$$

where

$$\tilde{W} := \nu \left((x^2 - 1)^2 \nu \lambda^2 + x(\lambda^2 + 2x\lambda - \nu^2 + 1)(2\lambda\nu + x(\lambda^2 + \nu^2 - 1)) \right), \quad (2.78)$$

provided the denominator $x\nu(2\lambda\nu + x(\lambda^2 + \nu^2 - 1))$ of (2.77) is nonzero. So, if this condition holds, at each $x \in \mathbb{R}$ there are either two real values (counting multiplicity) of y for which a solution exists, or none. Each branch y_{\pm} is a smooth function of x near any given point x_0 if and only if the other one is, except at the zeros of denominator.

We are interested in the topology of Sing in the region $x \in [-1, 1]$, and Section 2.3 tells us that the graphs y_{\pm} do *not* meet the region $\{y_c \leq y < -1\}$ there. For reasons that will become clear in Section 2.6 we need to understand both the positive and negative branches of y_{\pm} .

The denominator in (2.77) vanishes at $x = 0$, and at $x = x_*$ if $\nu^2 + \lambda^2 \neq 1$, where

$$x_* := -\frac{2\lambda\nu}{\lambda^2 + \nu^2 - 1}. \quad (2.79)$$

The pole x_* belongs to $(0, 1)$ for allowed ν, λ such that $\nu + \lambda < 1$; we have $x_* > 1$ for $\nu + \lambda > 1$ and $\nu^2 + \lambda^2 < 1$, with $x_* \rightarrow \infty$ when (ν, λ) approaches from inside the unit circle centered at the origin of the (ν, λ) -plane; and finally $x_* < -1$ for allowed ν, λ such that $\nu^2 + \lambda^2 > 1$, see Figure 2.11. At each zero of the denominator in (2.77) the graphs

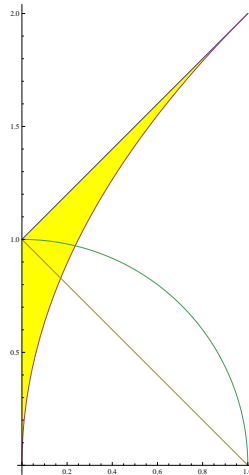


FIGURE 2.11 – The regions of distinct behavior of x_* ; the set of admissible (ν, λ) has been shaded in yellow.

of y_{\pm} split into two components, except if the numerator vanishes there as well. Given

that there are at most two zeros, we conclude that Sing can have up to five connected components.

The identity, in obvious notation,

$$y_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

shows that the numerator of one of the y_{\pm} 's necessarily vanishes at a zero of the denominator. At $x = 0$ the expression under the square root equals $\lambda^2\nu^2 > 0$, so there are always precisely two real valued solutions for $x \neq 0$ small. Near $x = 0$ we have

$$y_- = -\frac{(2x\lambda + \lambda^2 - \nu^2 + 1)}{\lambda\nu(1 - x^2) + \sqrt{\tilde{W}}} = -\frac{\lambda^2 - \nu^2 + 1}{2\lambda\nu} + O(x), \quad y_+ = \frac{1}{x\nu} + O(1),$$

with y_- smaller than y_c for $|x|$ small and for admissible ν and λ ; this follows from the analysis in Section 2.3 in any case, but can also be seen by a direct calculation. So, near $x = 0$, the graph of y_+ splits into two branches, tending to minus infinity at the left, and plus infinity at the right, while the graph of y_- continues smoothly across $x = 0$.

In particular the singular set Sing is never empty.

In the case $\nu^2 + \lambda^2 = 1$, the denominator of (2.77) vanishes only at $x = 0$, with the behavior just described being independent of those particular values of the parameters.

Assuming $\nu^2 + \lambda^2 \neq 1$, we have

$$\tilde{W}(x_*) = \left(\frac{\lambda\nu(\lambda - \nu - 1)(\lambda - \nu + 1)(\lambda + \nu - 1)(\lambda + \nu + 1)}{(\lambda^2 + \nu^2 - 1)^2} \right)^2,$$

which is positive for all allowed ν and λ , except when $\nu + \lambda = 1$, where $\tilde{W}(x_*)$ vanishes. It follows that for $\nu + \lambda \neq 1$, near x_* the branches behave as :

$$y_+ = \frac{(1 - \nu - \lambda)(1 + \nu + \lambda)(1 + \lambda - \nu)(1 + \nu - \lambda)}{\nu(x - x_*)(1 - \nu^2 - \lambda^2)^2} + O(1), \quad y_- = O(1)$$

so that y_- extends smoothly across $x = x_*$, whereas y_+ blows up. The case $\nu + \lambda = 1$ requires separate attention, and will be analyzed shortly.

Next, in order to understand the behaviour of the components of the set Sing, it is useful to study the two branches y_{\pm} for all $x \in \mathbb{R}$. Now, the top order term of the polynomial $\tilde{W}(x)$ is $\nu^2\lambda^2x^4$, and so \tilde{W} is strictly positive for large positive or negative x . This implies that at fixed admissible ν and λ the sets

$$\tilde{\Omega}_{\nu,\lambda} := \{x : \tilde{W}(x) \geq 0\} \tag{2.80}$$

have one, two, or three connected components. Moreover, each branch y_{\pm} , which exists for $|x|$ large enough, has a finite limit at infinity provided that $\nu^2 + \lambda^2 \neq 1$:

$$y_+ \rightarrow 0, \quad y_- \rightarrow \frac{2\lambda}{1 - \nu^2 - \lambda^2},$$

when $x \rightarrow \pm\infty$. In the case $\nu^2 + \lambda^2 = 1$, we obtain instead

$$y_+ \rightarrow 0, \quad y_- = -\frac{x}{\nu} + O(1) \rightarrow \mp\infty$$

when $x \rightarrow \pm\infty$.

We now turn our attention to the roots of \tilde{W} : at those, both branches y_{\pm} meet at that side of the root where \tilde{W} is positive, and stop existing nearby on the side where \tilde{W} is negative, which happens if the order of the root is odd. Such points will be referred to as *turning points*. Note that there are at most four such turning points.

Recall that we have $\tilde{W}(0) = \lambda^2\nu^2 > 0$. Further

$$\tilde{W}(1) = \nu(\lambda - \nu + 1)(\lambda + \nu - 1)(\lambda + \nu + 1)^2,$$

so the sign of \tilde{W} at one is determined by the sign of $\lambda + \nu - 1$. Next,

$$\tilde{W}(-1) = 4\nu(\lambda - \nu - 1)^2(\lambda + (1 - \nu))(\lambda - (1 - \nu)) = 4\nu(\lambda - \nu - 1)^2(\lambda^2 - (1 - \nu)^2),$$

so the sign at minus one is the same as that at plus one, both vanishing for admissible values of parameters if and only if $\lambda = 1 - \nu$:

$$\tilde{W}(-1)\tilde{W}(1) = \nu^2(\lambda - \nu - 1)^2(\lambda - \nu + 1)^2(\lambda + \nu - 1)^2(\lambda + \nu + 1)^2 \geq 0.$$

When $\lambda + \nu \neq 1$, the equations $H(\pm 1, y) = 0$ have the following four solutions

$$x = 1 : \quad y_{\uparrow, \pm} = \pm \sqrt{\frac{1 + \lambda - \nu}{\nu(\lambda + \nu - 1)}}; \quad x = -1 : \quad y_{\downarrow, \pm} = \pm \sqrt{\frac{\lambda + \nu - 1}{\nu(1 + \lambda - \nu)}}.$$

The function under the square root in $y_{\uparrow, \pm}$ is positive for admissible (λ, ν) if and only if $\lambda + \nu > 1$, and then it is larger than one. On the other hand, the function under the square root in $y_{\downarrow, \pm}$ is always smaller than 1 for the parameters of interest, non-negative if and only if

$$\lambda > 1 - \nu.$$

We continue with a Lemma about the number of roots of \tilde{W} :

Lemma 2.5.1 *1. There exists a smooth curve γ , separating the set \mathcal{U} of admissible (ν, λ) into two components, which is a graph of a function $\chi : [0, \nu_*] \rightarrow [0, 1]$, satisfying*

$$1 - \nu \leq \chi \leq 1 - \nu^2, \quad \chi(\nu_*) = 2\sqrt{\nu_*}$$

(see Figure 2.12), such that \tilde{W} has a multiple root, for admissible (ν, λ) , if and only if

$$(\nu, \lambda) \in \gamma \quad \iff \quad \lambda = \chi(\nu).$$

Moreover

(a) In the connected component of $\mathcal{U} \setminus \gamma$ where $\lambda < \chi(\nu)$ the polynomial \tilde{W} has four distinct real roots, and at least one of them is bigger than x_ .*

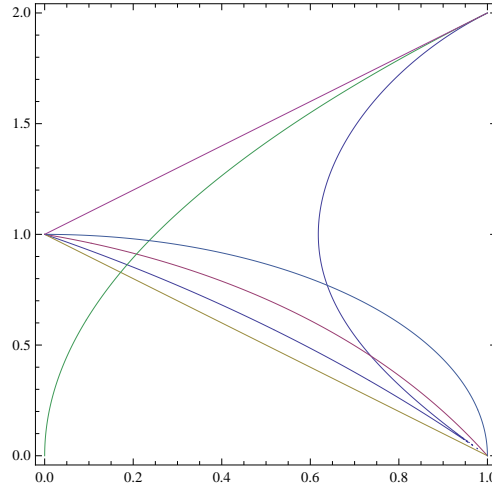


FIGURE 2.12 – The curve of double zeros of \tilde{W} , separating \mathcal{U} in two components, is drawn in dark blue; γ is the intersection of that curve with \mathcal{U} , and is the graph of a function χ . The function λ_k is in magenta, a quarter of the unit circle is in light blue.

(b) In the remaining connected component the polynomial \tilde{W} has two distinct real roots and two distinct roots in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

2. \tilde{W} has no third or fourth order zeros for $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$.

PROOF: 1. A necessary condition for existence of a second order zero of \tilde{W} is the existence of a joint zero for \tilde{W} and its first derivative. This, in turn, is equivalent to the vanishing of the resultant of the polynomials $x \mapsto \tilde{W}$ and $x \mapsto \partial_x \tilde{W}$. This resultant is

$$-2^{18} \lambda^6 (\nu - 1)^2 \nu^9 (\lambda^2 - (\nu + 1)^2)^4 f(\nu, \lambda),$$

where

$$\begin{aligned} f(\nu, \lambda) := & \lambda^8 + 2\lambda^6 (1 - 4\nu + \nu^2) + 15\lambda^4 (-1 + \nu)^2 \nu \\ & - 2\lambda^2 (-1 + \nu)^4 (1 + 4\nu + \nu^2) - (-1 + \nu)^6 (1 + \nu)^2. \end{aligned}$$

Since f is a polynomial of degree four in λ^2 , we can define a polynomial $q(\nu, L) = f(\nu, \lambda)$ where $L = \lambda^2$, and study q . We have

$$\frac{\partial^2 q}{\partial L^2} = 6 (2L^2 + 2(1 - 4\nu + \nu^2)L + 5\nu(1 - \nu)^2),$$

which is obviously positive for $\nu \in [0, 2 - \sqrt{3} \approx 0.26]$ and all L , and so q is convex there. For $\lambda \geq 2\sqrt{\nu}$ we find

$$2L^2 + 2(1 - 4\nu + \nu^2)L \geq 32\nu^2 + 8(1 - 4\nu + \nu^2)\nu = 8(1 + \nu^2)\nu > 0,$$

and so q is always convex in L above the graph of $2\sqrt{\nu}$. Now

$$q(\nu, 0) = -(\nu - 1)^6 (\nu + 1)^2 < 0, \quad \partial_L q(\nu, 0) = -2(\nu - 1)^4 (\nu^2 + 4\nu + 1) < 0,$$

$$q(\nu, (1 + \nu)^2) = 27\nu(1 - \nu)^2(1 + \nu)^4 > 0 .$$

Convexity of $L \mapsto q$ implies that, for $\nu \in [0, 2 - \sqrt{3}]$, the zero-level set of q is a smooth graph.

For $\nu > 1/4$ one can instead argue as follows : We have

$$\partial_L q(\nu, 4\nu) = 2(-\nu^2 + 10\nu - 1)(\nu^4 + 10\nu^3 - 18\nu^2 + 10\nu + 1) .$$

The second factor is positive for $\nu \in [5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6}] \supset [0.102, 1]$. For the last factor, we write

$$10\nu^3 - 18\nu^2 + 10\nu \geq \nu(10\nu^2 - 20\nu + 10) = 10\nu(1 + \nu)^2 > 0$$

and the positivity of $\partial_L q(\nu, 4\nu)$ follows. Convexity gives positivity of q in the admissible region.

To finish the proof of the point 1., we note first that the region

$$\mathcal{U}_1 := \mathcal{U} \cap \{\lambda < \chi(\nu)\}$$

contains the line $\lambda = 1 - \nu$, where all roots are simple and real. Indeed, in this special case the function H equals

$$H(x, y)|_{\lambda=1-\nu} = -2(\nu - 1)(x(y\nu - 1)((x - 1)y\nu - 1) + y\nu + 1) ,$$

and the zeros are

$$\nu y_{\pm} = \frac{x^2 - 1 \pm \sqrt{\tilde{W}}}{2(x - 1)x} , \quad \tilde{W} = \nu^2(1 - \nu)^2(x - 1)(x + 1) \left(x - \sqrt{5} - 2 \right) \left(x + \sqrt{5} - 2 \right) ,$$

see Figure 2.13. In this case we have four simple real roots, independently of ν . Continuity

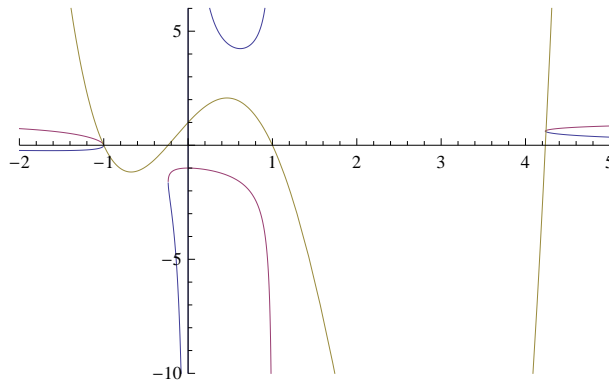


FIGURE 2.13 – The polynomial \tilde{W} (green) and the set $\{H(x, y) = 0\}$ (blue and magenta) when $\lambda = 1 - \nu$. The vertical axis is νy .

implies that all roots of \tilde{W} are simple and real in \mathcal{U}_1 . Moreover, still in the case $\lambda = 1 - \nu$, we have $x_* = 1$, and the biggest root of \tilde{W} equals $2 + \sqrt{5} > 1$. One can conclude the first point again by a continuity argument : both the function $(\nu, \lambda) \mapsto x_*$ (compare (2.79))

and the function which to (ν, λ) assigns the largest root of \tilde{W} are continuous on \mathcal{U}_1 . Since $\tilde{W}(x_*) > 0$ for $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}_1$, the largest root of \tilde{W} cannot become smaller than x_* when moving along paths contained in \mathcal{U}_1 .

Another continuity argument, using the fact that for $\nu = 9/16$ and $\lambda = 7/4$ the zeros of \tilde{W} are, approximately,

$$-1.09746 \pm 0.541984i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad -0.983642, \quad -0.678586,$$

finishes the proof (exact formulae for the roots can be given, but they are not very enlightening). The resulting \tilde{W} and singular set $\{H(x, y) = 0\}$ are plotted in Figure 2.14.

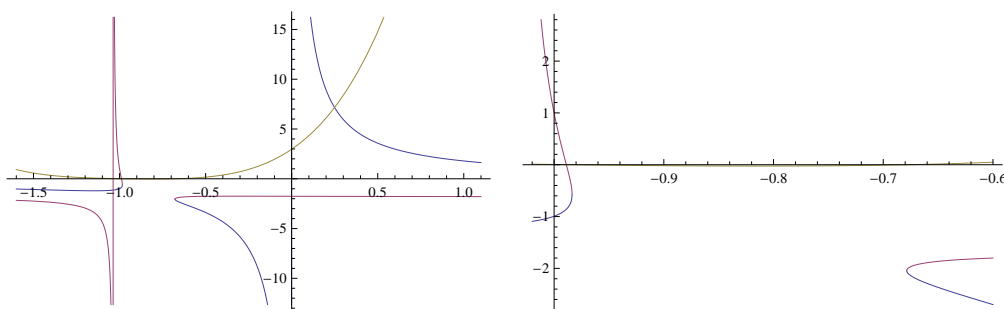


FIGURE 2.14 – The polynomial \tilde{W} (green) and the set $\{H(x, y) = 0\}$ (blue and magenta) when $\nu = 9/16$ and $\lambda = 49/32$, with a zoom to the region where \tilde{W} is negative.

2. A necessary condition for existence of a fourth-order zero is the existence of a joint zero for the second and third derivatives. This, in turn, is equivalent to the vanishing of the resultant of the polynomials $x \mapsto \partial_x^2 \tilde{W}$ and $x \mapsto \partial_x^3 \tilde{W}$. This resultant is

$$2^{12} 3^2 \lambda^4 \nu^4 \left(\lambda^4 (2\nu - 3) - 2\lambda^2 (\nu^2 - 3) - (2\nu + 3) (\nu^2 - 1)^2 \right).$$

The roots of the last factor are $\lambda = \pm(1 + \nu)$ and

$$\lambda_{\pm} = \pm(1 - \nu) \sqrt{\frac{2\nu + 3}{3 - 2\nu}},$$

and so λ_+ is the only value of interest. When substituted into f , we obtain

$$f(\nu, \lambda_+) = \frac{27(\nu - 1)^6 \nu (16\nu^4 - 40\nu^2 + 17)}{(3 - 2\nu)^4}$$

which is clearly positive for $\nu \in (0, \sqrt{17/40}] \approx 0.65] \supset (0, 1/4]$, and so there are no fourth order roots on γ .

To exclude the possibility of third order zeros on γ , we calculate likewise the resultant of $\partial_x \tilde{W}$ and $\partial_x^2 \tilde{W}$, which is

$$2^{16} \lambda^4 \nu^6 (\lambda^2 - (\nu + 1)^2)^2 \hat{f}(\nu, \lambda),$$

where

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu, \lambda) = & \lambda^8(8\nu - 9) + 4\lambda^6\nu(4(\nu - 4)\nu + 13) + 6\lambda^4(\nu - 1)^2(5\nu^2 + 3) \\ & - 4\lambda^2(\nu - 1)^4\nu(4\nu(\nu + 4) + 13) - (\nu - 1)^6(\nu + 1)^2(8\nu + 9). \end{aligned}$$

A necessary condition for a third order zero is the vanishing of the resultant of the polynomials $\lambda \mapsto f$ and $\lambda \mapsto \hat{f}$. That resultant is

$$3^{24}(\nu - 1)^{40}\nu^8(\nu + 1)^8(256\nu^4 - 864\nu^2 + 513)^2,$$

with the last factor vanishing at

$$\pm \frac{1}{4}\sqrt{27 \pm 6\sqrt{6}}$$

The only value in $(0, 1)$ is $\frac{1}{4}\sqrt{27 - 6\sqrt{6}} \approx 0.88$.

Another necessary condition for a third order zero is the vanishing of the resultant of the polynomials $\nu \mapsto f$ and $\nu \mapsto \hat{f}$. That resultant is

$$\begin{aligned} & -3^{24}(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)^2\lambda^{44}(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^2(\lambda^2 + 1)^2 \\ & \times (65536\lambda^8 - 327680\lambda^6 + 526848\lambda^4 - 279296\lambda^2 + 9025), \end{aligned}$$

with the last factor vanishing at approximately

$$\pm 1.06033, \pm 1.51468, \pm 0.185775, \pm 1.24376,$$

the exact values of the positive solutions being

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\sqrt{20 + 3\sqrt{6} - \sqrt{3(39 - 4\sqrt{6})}}, \quad \frac{1}{4}\sqrt{20 - 3\sqrt{6} + \sqrt{3(39 + 4\sqrt{6})}}, \\ & \frac{1}{4}\sqrt{20 + 3\sqrt{6} + \sqrt{3(39 - 4\sqrt{6})}}, \quad \frac{1}{4}\sqrt{20 - 3\sqrt{6} - \sqrt{3(39 + 4\sqrt{6})}}. \end{aligned}$$

One checks that f does not vanish at the above values of ν and λ , except at

$$\left(\frac{1}{4}\sqrt{27 - 6\sqrt{6}}, \frac{1}{4}\sqrt{20 - 3\sqrt{6} - \sqrt{3(39 + 4\sqrt{6})}} \right) \approx (0.88, 0.18).$$

However, $0.19 \approx \lambda < 2\sqrt{\nu} \approx 1.87$ there, which is therefore not admissible. \square

We wish to show, next, that all zeros of \tilde{W} in $[-1, 1]$ are simple. The proof of this requires understanding of the behaviour of the branches y_{\pm} in $[-1, 1]$; this is the purpose of the next lemma :

Lemma 2.5.2 *In the region $\{-1 \leq x \leq 0, y < y_c\}$, the two branches y_{\pm} which exist for small negative values of x meet smoothly at some $\bar{x} \in (-1, 0)$, where \bar{x} is a simple root of \tilde{W} .*

PROOF: The existence of both y_{\pm} at $x = -\varepsilon$, for small enough positive ε , comes from the facts that $\tilde{W}(0)$ is positive, and that their denominator can vanish only at $x = 0$, or $x = x_*$, and x_* lies always outside $[-1, 0]$, for any $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$. Moreover, the asymptotics of these branches studied above shows that they are both below the $\{y = y_c\}$ -level set. One should recall from Section 2.3 that these branches can neither enter the region $\{-1 \leq x \leq 1, y_c \leq y \leq -1\}$, nor cross the $\{x = -1\}$ -axis below y_c . But the functions $x \mapsto y_{\pm}(x)$ are continuous on each connected component of the set $\Omega_{\nu, \lambda} \cap (-1, 0)$, since this set does not intersect the lines $x = 0$ and $x = x_*$. As a consequence, there exists $\bar{x} \in (-1, 0)$ at which \tilde{W} has a change of sign, that is to say an odd-order zero of \tilde{W} . Since \tilde{W} has degree four, the only possibilities for the order are 1 and 3. But the existence of triple-zeros has already been excluded in Lemma 2.5.1. \square

Remark 2.5.3 *From the proof of the lemma above, \bar{x} can be defined as the largest negative root of \tilde{W} , which is also the second lowest root of \tilde{W} . Indeed, if \bar{x} were the biggest (of the four) root of \tilde{W} for some $(\nu_1, \lambda_1) \in U_1$, then by connectedness of the region \mathcal{U}_1 defined earlier, it would be the case for $\lambda = 1 - \nu$. But the biggest root of \tilde{W} in this case is positive (see the proof of Lemma 2.5.1). Moreover, since $\bar{x}(\nu, \lambda)$ is always a simple root for (ν, λ) in \mathcal{U} , \bar{x} is a smooth function of the coefficients of $\tilde{W}(x)$, and therefore the map $(\nu, \lambda) \mapsto \bar{x}(\nu, \lambda)$ defined in \mathcal{U} is continuous.*

We now have :

Proposition 2.5.4 *For all admissible (ν, λ) , those roots of \tilde{W} which belong to $[-1, 1]$ are simple.*

PROOF: We start by a proof based on MATHEMATICA plots, an alternative analytic argument will also be given. Another necessary condition for a double zero of \tilde{W} is the vanishing of the resultant of the polynomials $\lambda \mapsto \tilde{W}$ and $\lambda \mapsto \partial_x \tilde{W}$. This resultant is

$$2^{20} x^4 (x^2 - 1)^4 \nu^{10} (\nu^2 - 1)^5 (x^8 - 4x^6 + 4x^2 \nu^2 - \nu^2) . \quad (2.81)$$

So, zeros of this resultant, with a λ which is a zero of f , provide the only candidates for solutions of the two equations $\tilde{W} = \partial_x \tilde{W} = 0$. The relevant zeros are of course those of the last factor; it is a quadratic polynomial in x^2 , so explicit formulae can be given. MATHEMATICA plots show that, in the relevant range of ν 's, only two out of the eight possible roots are real, and lie outside of the range of interest, as can be seen on the graph in Figure 2.15.

The proof that does not appeal to graphs proceeds as follows :

The study of the resultants in the proof of the Lemma 2.5.1 shows that a non-simple root x_d of \tilde{W} occurs if and only if $f(\nu, \lambda) = 0$, and that in this case, it is exactly a double root. Then, we saw that the admissible values of ν and λ which satisfy $f(\nu, \lambda) = 0$ are such that $\nu + \lambda > 1$. Hence we are in the case $\tilde{W}(-1) > 0$, with $y_{\pm}(-1) \in (-1, 1)$; moreover, the pole $x = x_*$ lies in $(1, +\infty)$. From Lemma 2.5.2, \tilde{W} has to change sign at some $\hat{x} \in (-1, \bar{x})$, since the branches y_{\pm} cannot enter the region $\{-1 \leq x \leq 1, y_c \leq y \leq -1\}$; more precisely \hat{x} is another simple root of \tilde{W} in $(-1, \bar{x})$. So we already have two simple roots of \tilde{W} in $(-1, 0)$. But we know from point 1. of Lemma 2.5.1 that one of the roots

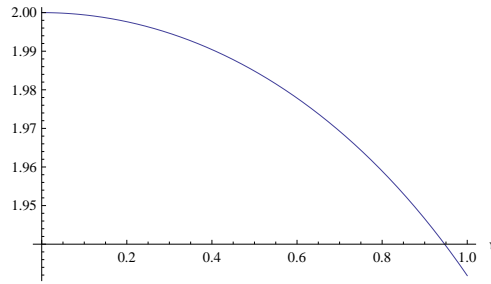


FIGURE 2.15 – One of the real zeros of the last factor in (2.81) as a function of ν ; the other one is the negative of the first.

of \tilde{W} must be greater than x_* whenever $f(\nu, \lambda) < 0$: this still holds by continuity for $f(\nu, \lambda) \leq 0$. Thus so is the double root x_d , which finishes the proof. \square

Now, as announced previously, we show that $H(x, 1)$ does not vanish for any $x \in [-1, 1]$:

Lemma 2.5.5 *No component of the singular set Sing can cross the segment $[-1, 1] \times \{1\}$ in the (x, y) -plane.*

PROOF: Let us go back to the expressions of $y_{\pm}(x)$ in (2.77). If we examine the numerator of $y_{\pm}(x)$, we always have :

$$|y_+(x)| = \frac{\lambda\nu(1-x^2) + \sqrt{\tilde{W}(x)}}{\nu|x||2\nu\lambda x(\lambda^2 + \nu^2 - 1)|} \geq \frac{|\lambda\nu(1-x^2) - \sqrt{\tilde{W}(x)}|}{\nu|x||2\nu\lambda x(\lambda^2 + \nu^2 - 1)|} = |y_-(x)|.$$

Then, from Section 2.3, we know that if $x \in [-1, 1]$ is in the connected component of $\tilde{\Omega}_{\nu, \lambda}$ which contains 0, then we have $y_-(x) < y_c < -1$. Hence, we have $|y_{\pm}(x)| > 1$ for $x \in [-1, 1]$ in that connected component of $\tilde{\Omega}_{\nu, \lambda}$. But from the analysis of the singular set above, we know that for admissible values of the parameters ν, λ such that $\nu + \lambda \geq 1$, we have another connected component of $\tilde{\Omega}_{\nu, \lambda}$ in $[-1, 1]$, which contains -1 , and is contained in $[-1, 0)$. Then, the denominator $\nu x (2\nu\lambda + x(\nu^2 + \lambda^2 - 1))$ of y_{\pm} is always negative for $x \in [-1, 0)$. Indeed :

- if $\nu^2 + \lambda^2 \leq 1$, then $2\nu\lambda + x(\nu^2 + \lambda^2 - 1)$ is obviously positive since $x < 0$, hence the denominator is negative.
- if $\nu^2 + \lambda^2 > 1$, then one has the set of inequalities :

$$2\nu\lambda - (\nu^2 + \lambda^2 - 1) = (1 + \nu - \lambda)(1 + \lambda - \nu) \leq 2\nu\lambda + x(\nu^2 + \lambda^2 - 1) \leq 2\nu\lambda,$$

for any x in $[-1, 0)$. Since the term at the far left is positive for allowed ν and λ , the negativity of the denominator follows.

Therefore, we obtain the inequality $y_+(x) \leq y_-(x)$ for any $x \in [-1, 0)$ as long as they exist. Moreover, at $x = -1$, we already noticed that $y_{\pm}(-1)$ exist and are in $(-1, 1)$. Hence, again from Section 2.3 and by continuity, $y_+(x)$ has to be above -1 for all x in

$[-1, 0)$ and in the connected component of $\tilde{\Omega}_{\nu, \lambda}$ which contains -1 . In conclusion, and from the fact that $|y_+(x)| \geq |y_-(x)|$, we have $-1 < y_+(x) \leq y_-(x) \leq -y_+(x) < 1$ for such x , and the Lemma follows. \square

From what has been said so far we conclude :

Theorem 2.5.6 *For all admissible (ν, λ) let Sing denote the set*

$$\{H(x, y) = 0, x \in [-1, 1]\} .$$

Then

$$\text{Sing} \cap \{y \notin (-1, 1)\} = \gamma_+ \cup \gamma_- .$$

where γ_{\pm} are two connected differentiable curves, with γ_- included within the region $\{y \in (-\infty, y_c)\}$, and γ_+ included in the region $\{y \in (1, \infty)\}$, separating each of those regions in two connected components, such that :

1. for $\lambda + \nu < 1$ the curves γ_{\pm} stay away from the axes $x = \pm 1$ and asymptote, both at plus and minus infinity, to the vertical lines $x = 0$ and $x = x_*$;
2. for $\lambda + \nu > 1$ each of the curves γ_{\pm} intersects the vertical line $\{x = 1\}$ precisely once, stays away from the vertical line $x = -1$, and asymptotes to the axis $x = 0$ as $|y|$ tends to infinity.
3. for $\lambda + \nu = 1$ each of the curves γ_{\pm} stays away from the vertical line $x = -1$, asymptotes to the vertical lines $x = 0$ and $x = 1$ as $|y|$ tends to infinity, without intersecting $\{x = 1\}$.

We finish this section by a short discussion of the special case $\lambda^2 + \nu^2 = 1$, where we set

$$\nu = \cos \alpha, \quad \alpha \in (0, \pi/2) .$$

We then have

$$H(x, z/\nu) = -(x^2 - 1) y \sin(2\alpha) - 2 \cos^2(\alpha) (xy^2 \sin(\alpha) + 1) + 2x \sin(\alpha) + 2 ,$$

$$\tilde{W}(x) = \sin^2(2\alpha) \left((x^2 + 1)^2 + 4x \sin(\alpha) \right) ,$$

and

$$\nu y_{\pm} = \frac{\pm \sqrt{(x^2 + 1)^2 + 4x \sin(\alpha)} - x^2 + 1}{2x} .$$

We have already see that two of the roots are imaginary when $\lambda^2 + \nu^2 = 1$. The two remaining ones are graphed as functions of ν in Figure 2.17.

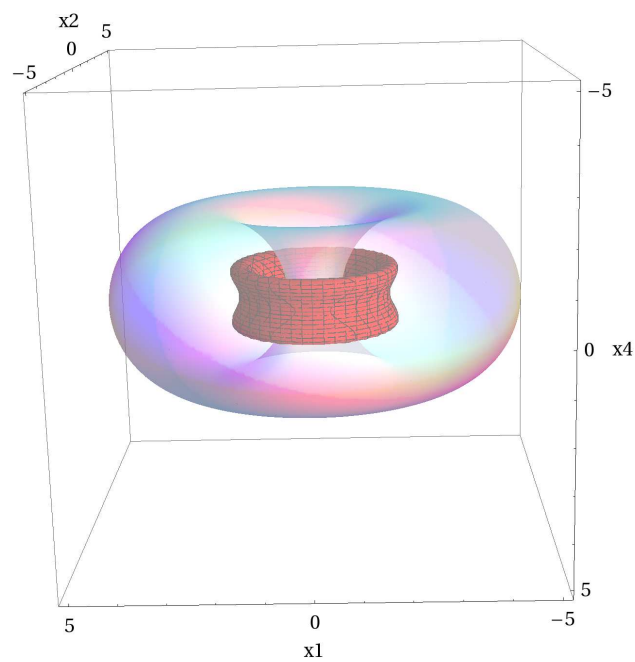


FIGURE 2.16 – 3-dimensional cut of the 4-dimensional set $\{t = \text{const.}, H(x, y) = 0\}$ (red surface) for $\lambda = 1.27$, $\nu = 0.38$, $k = 2.75$ in the asymptotically Euclidean coordinates (x^1, x^2, x^3, x^4) . The corresponding event horizon (in translucent blue) has also been added to the picture.

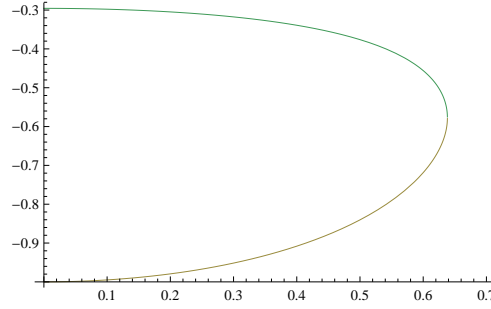


FIGURE 2.17 – The two real roots of \tilde{W} as functions of ν when $\lambda^2 + \nu^2 = 1$, whenever they exist. Admissible ν 's belong to the interval $[0, \sqrt{5} - 2 \approx 0.236]$, the upper bound being determined by the intersection of the circle with the lower limit $\lambda = 2\sqrt{\nu}$, therefore the double root at $\nu = \sqrt{11/27} \approx 0.638$ corresponds to a non-admissible value of (ν, λ) .

2.5.5 The Kretschmann scalar

Now, one expects existence of a curvature singularity on $\{H(x, y) = 0\}$. In order to test this, we consider the Kretschmann scalar

$$K = R_{abcd}R^{abcd}.$$

An xACT [MG] calculation gives⁵

$$K = \frac{3\lambda^2(\nu - 1)^4(x - y)^4\Pi(x, y, \lambda, \nu)}{2k^4H(x, y)^6}, \quad (2.82)$$

where $\Pi(x, y, \lambda, \nu)$ is a huge polynomial, still tractable by computer algebra manipulations. Indeed we can write this polynomial in a shorter form if we introduce the quantities

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x) &:= \frac{G(x)}{1 - x^2}, & \tilde{J}(x, y) &:= \frac{(x - y)(1 - \nu)^2 J(x, y)}{2k^2(1 - x^2)(1 - y^2)\lambda\sqrt{\nu}}, \\ \tilde{F}(x, y) &:= \frac{(-1 + \nu xy)(-1 + \nu)^2(x - y)^2 F(x, y)}{2k^2(-1 + y^2)}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

These quantities are polynomials in x, y, λ, ν as is easily checked and their explicit expressions are

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x) &\equiv \nu x^2 + \lambda x + 1, \\ \tilde{J}(x, y) &\equiv \lambda^2 + 2(x + y)\nu\lambda - \nu^2 - xy\nu(-\lambda^2 - \nu^2 + 1) + 1, \\ \tilde{F}(x, y) &\equiv \lambda\nu x^2(-1 + y^2)(-x + y)(-\lambda^2 + (1 + \nu)^2)(-1 + \nu) + H(x, y) \times \\ &\quad \left(1 + \lambda y + \nu \left(-1 + \lambda x(-1 + \nu x^2 - xy) + x(-1 + \nu)(y + x(-1 + \nu xy)) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.84)$$

5. We are grateful to José M. Martín-García for his assistance in this computation.

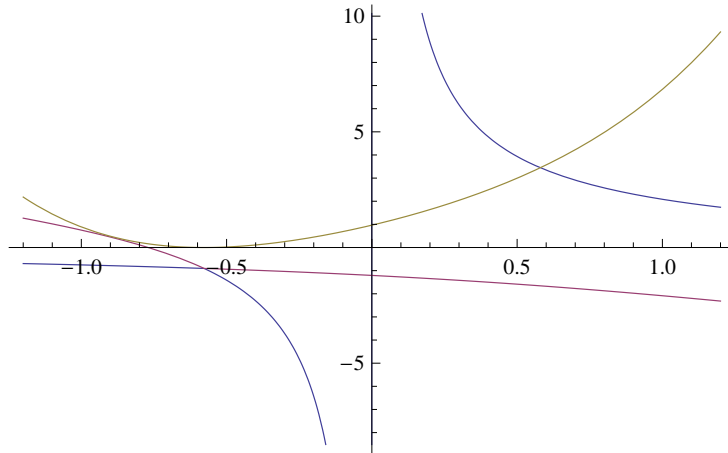


FIGURE 2.18 – The polynomial \tilde{W} (green) and the set $\{H(x, y) = 0\}$ (the blue and the magenta curves), illustrating the behaviour of the singular set at a (non-admissible) double root solution with $\nu = \sqrt{11/27}$ and $\lambda = \sqrt{16/27}$.

To shorten the final form of $\Pi(x, y, \lambda, \nu)$ one computes a Gröbner basis from \tilde{G} , H , \tilde{J} and \tilde{F} and then one uses this basis to show that $\Pi(x, y, \lambda, \nu)$ must take the form

$$\begin{aligned} \Pi(x, y, \lambda, \nu) = & P_1(x, y, \lambda, \nu)H(x, y) + P_2(x, y, \lambda, \nu)\tilde{G}(x) + \\ & + P_3(x, y, \lambda, \nu)\tilde{J}(x, y) + P_4(x, y, \lambda, \nu)\tilde{F}(x, y) \end{aligned} \quad (2.85)$$

for some polynomials P_1, P_2, P_3, P_4 in x, y, λ , and ν . The Kretschmann scalar was computed by simplifying an expression of 120Mb size for about 12 hours on a desktop computer.

The formula for the Kretschmann scalar shows that a curvature singularity is present in those points where the polynomial $H(x, y)$ vanishes (the set of these points is studied in detail in subsection 2.5.4) and $\Pi(x, y, \lambda, \nu)$ is different from zero. We give below necessary and sufficient conditions for this to happen. First of all, we define the polynomial

$$\Phi(x, y, \lambda, \nu) := H(x, y)^2 + \Pi(x, y, \lambda, \nu)^2.$$

Clearly, $\Phi(x, y, \lambda, \nu)$ is non-negative at any point. Next we compute numerically the minimum of $\Phi(x, y, \lambda, \nu)$ in the set

$$\mathcal{N}_\epsilon := \{-1 \leq x \leq 1, 2\sqrt{\nu} \leq \lambda < 1 + \nu - \epsilon, 0 \leq \nu \leq 1, |y| \geq 1\}$$

for different values of ϵ . The results of these computations are represented in Figure 2.19. The graph shown in this picture suggests that the polynomials $H(x, y)$ and $\Pi(x, y, \lambda, \nu)$ do not have common zeros in the set

$$\mathcal{N}_0 := \{-1 \leq x \leq 1, 2\sqrt{\nu} \leq \lambda < 1 + \nu, 0 \leq \nu \leq 1, |y| \geq 1\},$$

and when we consider the closure of this set, the polynomials $H(x, y)$ and $\Pi(x, y, \lambda, \nu)$ will have a common set of zeros if and only if $\lambda = 1 + \nu$ holds. We have not been able

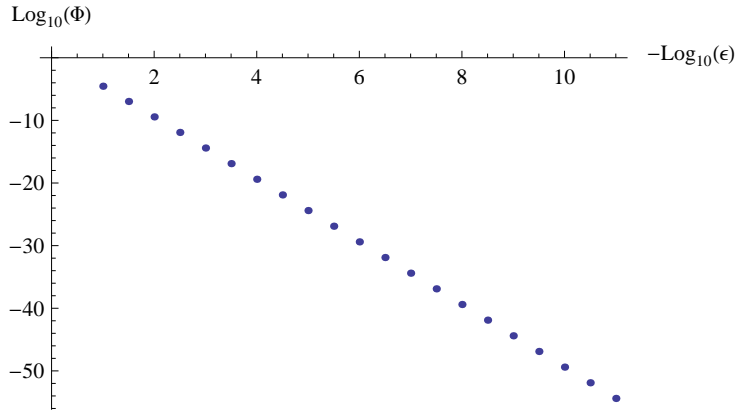


FIGURE 2.19 – Logarithmic representation of the numerically calculated minimum of $\Phi(x, y, \lambda, \nu)$ on \mathcal{N}_ϵ (denoted by Φ_{\min}) against the parameter ϵ . The graph strongly suggests that the Kretschmann scalar is singular everywhere on the set $\{H(x, y) = 0\}$.

to obtain an analytical proof of the necessity of this condition and we only rely on the numerical evidence shown in Figure 2.19 for the claim. However, the sufficiency of the condition $\lambda = 1 + \nu$ is easily proven analytically and to that end we just set $\lambda = 1 + \nu$ in the definition of $H(x, y)$, obtaining

$$H(x, y, 1 + \nu, \nu) = -2(x + 1)(\nu + 1)(y\nu + 1)(xy\nu - 1). \quad (2.86)$$

Therefore, if $H(x, y, 1 + \nu, \nu) = 0$ at some point in $\overline{\mathcal{N}}_0$, then, either $x = -1$, $y = -1/\nu$ or $y = 1/(x\nu)$. We report the formulae

$$\Pi(x, -1/\nu, 1 + \nu, \nu) = 0, \quad \Pi(-1, y, 1 + \nu, \nu) = 0, \quad (2.87)$$

$$\Pi(x, 1/(x\nu), 1 + \nu, \nu) = \frac{64(x + 1)^{10}(\nu + 1)^4(x^3\nu^2 + x^2\nu - x\nu - 1)^2}{x^8\nu^2}. \quad (2.88)$$

The last expression vanishes at some point in $\overline{\mathcal{N}}_0$ when either $x = -1$ or

$$x^3\nu^2 + x^2\nu - x\nu - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\nu}, x = \frac{1}{\sqrt{\nu}}, x = -\frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

These values of x are in $\overline{\mathcal{N}}_0$ only if $\nu = 1$ (and thus $x = \pm 1$).

As a summary, we conclude that the polynomials $\Pi(x, y, \lambda, \nu)$ and $H(x, y)$ both vanish at the following points of $\overline{\mathcal{N}}_0$

$$(x, -1/\nu, 1 + \nu, \nu) = 0, \quad (-1, y, 1 + \nu, \nu) = 0, \quad (1, 1, 2, 1) = 0,$$

and these are probably the only such points.

We conclude this section by a discussion of the behavior of the Kretschmann scalar for large $|y|$. Both the numerator and the denominator of the Kretschmann scalar are

polynomials of order twelve in y . The limit $|y| \rightarrow \infty$ of the Kretschmann scalar is a rational function with denominator

$$2k^4 x^6 \nu^3 (x(\lambda^2 + \nu^2 - 1) + 2\lambda\nu)^6. \quad (2.89)$$

The value of the numerator at $x = 0$ is

$$192\lambda^4(\nu - 1)^4\nu^3(\nu + 1)^2$$

The other zero of the denominator is located at

$$x = -\frac{2\lambda\nu}{\lambda^2 + \nu^2 - 1},$$

and the value of the numerator there reads

$$\frac{192\lambda^4(\nu - 1)^6\nu^3(\lambda - \nu + 1)^2(-\lambda + \nu + 1)^4(\lambda + \nu - 1)^2(\lambda + \nu + 1)^4(\lambda^2(2\nu + 1) + \nu^2 - 1)^2}{(\lambda^2 + \nu^2 - 1)^8}.$$

Continuity implies that the Kretschmann scalar is singular on $\{H(x, y) = 0\}$ for all y sufficiently large positive or negative, except possibly at the zeros of the last factor above, which for admissible parameters occur when

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{\sqrt{2\nu + 1}}. \quad (2.90)$$

The limit when $|y|$ goes to infinity of the Kretschmann scalar for this value of λ is a rational expression whose denominator zero-set coincides with the zero-set of the polynomial shown in (2.89) also when λ is set to the value of (2.90). Therefore the Kretschmann scalar will be singular too for all y sufficiently large positive or negative when λ takes the special value (2.90).

2.5.6 The event horizon has $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ topology

In this Section we wish to prove that the set $\{y = y_h\}$ forms the boundary of the d.o.c., both in the original domain of definition of the metric of [PS06], and in our extension here. The arguments are a (succinct) adaptation to the metric at hand of those in [CC10, Section 4.1], the reader is referred to that last reference for more detailed arguments.

We start by noting that

$$g(\nabla y, \nabla y) = g^{yy} = -\frac{(\nu - 1)^2 G(y)(x - y)^2}{2k^2 H(x, y)}$$

is negative for $y_h < y < y_c$, hence y is a time function there. This implies that y is monotonous along causal curves through this region, and hence points for which $y_h < y < y_c$ lie within a black hole or a white hole region, unless some topological identifications are introduced (for example, consider the manifold consisting of the union of the closures of the blocs *I* to *VII* in Figure 2.20, in which blocs *IV* and *VII* are identified; in this space-time there is no black hole region).

Next, consider the determinant of the three-by-three matrix of scalar products of Killing vectors (compare (2.101)-(2.103))

$$\det(g_{ij}) = \frac{4k^4 G(x)G(y)}{(\nu - 1)^2(x - y)^4} . \quad (2.91)$$

This is negative in the region $\{y > y_h\}$, which implies that neither the black hole event horizon $\partial J^-(\mathcal{M}_{\text{ext}})$, nor the white hole event horizon $\partial J^-(\mathcal{M}_{\text{ext}})$ can intersect this region. We conclude that $\{y = y_h\}$ forms the boundary of the d.o.c., as claimed.

Keeping in mind that x and φ are coordinates on S^2 , and ψ is a coordinate on S^1 as long as one stays away from the rotation axes $y = \pm 1$, we conclude that the topology of cross-sections of the event horizon $\{y = y_h\}$, as well as that of the Killing horizon $\{y = y_c\}$, is $S^2 \times S^1$.

2.6 An extension across $y = -\infty$

We have seen in Section 2.5.5 that there always exist one or two intervals of x 's, say I_a , included in the region for which $H(x, y)$ is positive, such that the metric is defined for all $y \in (-\infty, -1]$. The metric is Lorentzian throughout this region, which follows from (2.100). It turns out that the metric can be analytically extended on those intervals across "the set $\{y = -\infty\}$ " to a Lorentzian metric by introducing a new variable

$$Y = -1/y .$$

To see that this is the case, we start by noting that

$$g_{yy}dy^2 = \frac{1}{Y^4}g_{yy}dY^2 = y^4g_{yy}dY^2 .$$

Since

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} y^4g_{yy} = -\frac{2k^2x(x(\lambda^2 + \nu^2 - 1) + 2\lambda\nu)}{(\nu - 1)^2} ,$$

we see that the function

$$g_{YY}(x, Y) := (y^4g_{yy})(x, y = 1/Y)$$

defined for $x \in I_a$ and for $Y < 1$, is a rational function of Y which analytically extends to negative values across the set $Y = 0$.

Likewise, the remaining metric functions analytically extend across $Y = 0$, except

possibly at $x = 0$ and $x = x_*$ defined by (2.79), which follows immediately from

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow -\infty} g_{tt} &= \frac{2\lambda(\nu - 1)}{x(\lambda^2 + \nu^2 - 1) + 2\lambda\nu} - 1, \\
\lim_{y \rightarrow -\infty} g_{t\psi} &= -\frac{2k\lambda\sqrt{(\nu + 1)^2 - \lambda^2}(x(\lambda + \nu - 1) + 2)}{(\lambda - \nu - 1)(x(\lambda^2 + \nu^2 - 1) + 2\lambda\nu)}, \\
\lim_{y \rightarrow -\infty} g_{t\phi} &= 0, \\
\lim_{y \rightarrow -\infty} g_{xx} &= \frac{2k^2x\nu(x(\lambda^2 + \nu^2 - 1) + 2\lambda\nu)}{(x^2 - 1)(\nu - 1)^2(x(x\nu + \lambda) + 1)}, \\
\lim_{y \rightarrow -\infty} g_{yy} &= 0, \\
\lim_{y \rightarrow -\infty} g_{\psi\psi} &= -\frac{2k^2}{x(\nu - 1)^2(-\lambda + \nu + 1)(x(\lambda^2 + \nu^2 - 1) + 2\lambda\nu)} \times \\
&\quad \left(x^4(\nu - 1)\nu(-\lambda + \nu + 1)(\lambda^2 + \nu^2 - 1) \right. \\
&\quad + x^3\lambda(\lambda - \nu - 1)(\lambda^2 - (\nu - 1)^2(4\nu + 1)) \\
&\quad + x^2 \left(\lambda^3(\nu(2\nu - 1) + 1) + \lambda^2(3\nu - 1)(\nu(2\nu - 5) + 1) \right. \\
&\quad \left. \left. - \lambda(\nu - 1)^2(\nu + 1) + \nu^4 - 2\nu^2 + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + x\lambda(-\lambda^3 + \lambda^2(\nu + 1) + 5\lambda(\nu - 1)^2 + 3(\nu - 1)^2(\nu + 1)) + 2\lambda^2\nu(-\lambda + \nu + 1) \right), \\
\lim_{y \rightarrow -\infty} g_{\psi\phi} &= -\frac{2k^2(x^2 - 1)\lambda\sqrt{\nu}}{x(\nu - 1)^2}, \\
\lim_{y \rightarrow -\infty} g_{\phi\phi} &= \frac{2k^2(x^2 - 1)\nu(x(\nu - 1) + \lambda)}{x(\nu - 1)^2},
\end{aligned}$$

the remaining components of the metric being identically zero.

The signature remains Lorentzian, which can be seen by calculating of the limit of the determinant of the metric in the new coordinates, equal to $y^4 \det g_{\mu\nu}$, where $g_{\mu\nu}$ refers to the original coordinates (t, x, y, ψ, ϕ) :

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} y^4 \det g_{\mu\nu} = -\frac{16k^8 x^2 \nu^2 (x(\lambda^2 + \nu^2 - 1) + 2\lambda\nu)^2}{(\nu - 1)^6}.$$

We also note the limit

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} y g_{t\phi} = \frac{2k(x^2 - 1)\lambda\sqrt{(\nu + 1)^2 - \lambda^2}}{x\sqrt{\nu}(x(\lambda^2 + \nu^2 - 1) + 2\lambda\nu)},$$

which shows that $g_{t\phi}$ has a first order zero at $Y = 0$.

In the region $Y < 0$ one can introduce a new y variable by the formula

$$y = -1/Y,$$

which brings the metric back to the original form (2.1), except that y is positive now.

We have $H(x, -1/Y) = Y^{-2}\hat{H}(x, Y)$, where

$$\hat{H}(x, Y) = 2(x^2 - 1)Y\lambda\nu + Y^2(2x\lambda + \lambda^2 - \nu^2 + 1) - x\nu(x(\lambda^2 + \nu^2 - 1) + 2\lambda\nu) .$$

It follows that the singular set $\{H(x, y) = 0\}$ meets the hypersurface $Y = 0$ at

$$x = 0 \quad \text{and} \quad x_* = -\frac{2\lambda\nu}{\lambda^2 + \nu^2 - 1} .$$

We have

$$\partial_Y \hat{H}(0, 0) = -2\lambda\nu , \quad \partial_x \hat{H}(x_*, 0) = 2\lambda\nu^2 ,$$

which shows that both branches of the singular set $\{H(x, y) = 0\}$ form a manifold when crossing $\{Y = 0\}$.

The set $\{H(x, y) = 0\}$ can be thought as being timelike, in the following sense : For any level set $\{H(x, y) = \epsilon\}$ the norm of the gradient of H is

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu H\partial_\nu H = \frac{(\nu - 1)^2(x - y)^2}{2k^2 H(x, y)} (G(x)(\partial_x H)^2 - G(y)(\partial_y H)^2) .$$

Both for $y < y_c$ and for $y > 1$ the function $G(y)$ is negative, which shows that the normal to the level sets of H is spacelike in that region. Note, however, that this discussion leaves open the possibility of a null limiting hypersurface ; we have not attempt to quantify this any further.

A topological space will be called a *pinched* $S^1 \times S^2$ if it is homeomorphic to the set obtained by rotating, around the z -axis in \mathbb{R}^3 , a disc lying in the (x, z) plane and tangent to the z axis. What has been said so far can now be summarized as follows :

Theorem 2.6.1 *Suppose that*

$$0 < \nu < 1 , \quad 2\sqrt{\nu} \leq \lambda < 1 + \nu .$$

Consider the set Coords obtained by replacing the coordinate $y \leq y_c$ by $Y \in (-1, -1/y_c]$ and smoothly adjoining the hypersurface $Y = 0$, with the remaining coordinates $x \in [-1, 1]$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$, $(x, Y) \neq (-1, 1)$. Set

$$\hat{H}(x, Y) = Y^2 H(x, -1/Y) .$$

Then the Pomeransky-Senkov metric extends analytically from the region $0 < Y < -1/y_c$ to an analytic Lorentzian vacuum metric on

$$\text{Coords} \setminus \{\hat{H}(x, Y) \leq 0\} ,$$

with an asymptotically flat region near $(x = -1, Y = 1)$, and with strong causality violation near $Y = -1$. The boundaries $Y = -1$ and $x = \pm 1$ are rotation axes for suitable Killing vectors with, however, a conical singularity at $Y = -1$ unless

$$k = \frac{\sqrt{(1 + \nu)^2 - \lambda^2}}{4\lambda} . \tag{2.92}$$

The metric has a C^2 -singularity at $\{\hat{H}(x, Y) = 0\}$, and, when viewed as a subset in space-time, the singular set $\{\hat{H}(x, Y) = 0\}$ has precisely one component homeomorphic to :

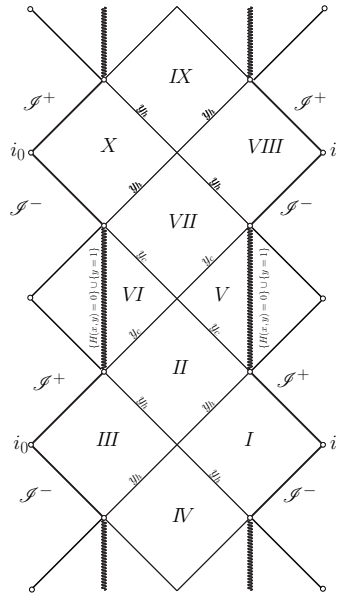


FIGURE 2.20 – A visualisation of the global structure of an extension obtained by iterating our procedure when $\lambda \neq 2\sqrt{\nu}$, very similar to that of the non-extreme Kerr space-time. The singular set in the (isometric) regions V and VI does *not* separate this region in two. This is *neither* a conformal diagram, *nor* is the manifold a topological product of the diagram with some three dimensional manifold. However, the picture depicts correctly the causal relations between various regions, when the light-cones are thought to have forty-five degrees slopes. We are grateful to M. Eckstein for providing the figure.

1. $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1 \times S^1$ when $\lambda + \nu < 1$;
2. a pinched $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ when $\lambda + \nu = 1$;
3. $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ when $\lambda + \nu > 1$.

2.7 The global structure

To pass from Theorem 2.6.1 to an analytic extension of an asymptotically flat region of the PS solution, one needs to keep in mind that every extension across a bifurcate Killing horizon $y = y_h$ or $y = y_c$ as in Section 2.4 leads to three distinct new regions near that horizon. For $\lambda \neq 2\sqrt{\nu}$ one is then led to a space-time with global structure resembling somewhat that of the usual maximal extension of a non-extreme Kerr black hole (cf., e.g., [HE73, Car68]), with the following notable differences : whereas the extended Kerr space-time contains asymptotically Minkowskian regions with naked singularities, in our case the corresponding asymptotic regions are *not* asymptotically Minkowskian, and their exact nature has yet to be analysed. Further, except when k is appropriately chosen, in our case the singular set has two components, corresponding to $\hat{H}(x, Y) = 0$, and to the conical singularity at $Y = -1$, with the topology of the former depending upon the parameters.

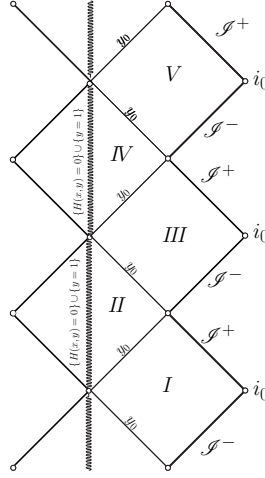


FIGURE 2.21 – Graphical representation of the global structure of the extension for the case $\lambda = 2\sqrt{\nu}$ (extremal case) obtained by iteration of the procedure explained in subsection 2.4.1 (recall that $y_0 = -1/\sqrt{\nu}$). Similar considerations as in Figure 2.20 apply.

2.8 The Pomeransky-Senkov metric

We give here some formulae needed for explicit calculations with the Pomeransky-Senkov (PS) metric (2.1). The expression for $F(x, y)$ can be shortened when written in terms of $H(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \frac{2k^2(-1 + y^2)}{(-1 + \nu xy)(-1 + \nu)^2(x - y)^2} \times \\
 &\left(\lambda \nu x^2(-1 + y^2)(-x + y)(-\lambda^2 + (1 + \nu)^2)(-1 + \nu) + H(x, y) \times \right. \\
 &\left. \left(1 + \lambda y + \nu(-1 + \lambda x(-1 + \nu x^2 - xy) + x(-1 + \nu)(y + x(-1 + \nu xy))) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

The non-zero components of the metric tensor are

$$\begin{aligned}
 g_{tt} &= -\frac{H(y,x)}{H(x,y)} \\
 g_{t\psi} &= -\frac{M(x,y)H(y,x)}{H(x,y)} \\
 g_{t\varphi} &= -\frac{P(x,y)H(y,x)}{H(x,y)} \\
 g_{xx} &= \frac{2k^2H(x,y)}{(\nu-1)^2G(x)(x-y)^2} \\
 g_{yy} &= -\frac{2k^2H(x,y)}{(\nu-1)^2G(y)(x-y)^2} \\
 g_{\psi\psi} &= -\frac{H(y,x)^2M(x,y)^2 - H(x,y)F(x,y)}{H(x,y)H(y,x)} \\
 g_{\varphi\psi} &= -\frac{H(x,y)J(x,y) - H(y,x)^2M(x,y)P(x,y)}{H(x,y)H(y,x)} \\
 g_{\varphi\varphi} &= -\frac{H(y,x)^2P(x,y)^2 + H(x,y)F(y,x)}{H(x,y)H(y,x)}
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

We have the identity

$$-\frac{F(x, y)F(y, x) + J(x, y)^2}{H(x, y)H(y, x)} = -\frac{4k^4 G(x)G(y)}{(\nu - 1)^2(x - y)^4}, \quad (2.95)$$

which allows us to rewrite the metric (2.1) as

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{(F(y, x)d\varphi - J(x, y)d\psi)^2}{H(y, x)F(y, x)} - \frac{4k^4 G(x)G(y)H(x, y)d\psi^2}{(\nu - 1)^2 F(y, x)(x - y)^4} + \\ & + \frac{2k^2 H(x, y)}{(1 - \nu)^2(x - y)^2} \left(\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)} \right) - \frac{H(y, x)(dt - \Omega)^2}{H(x, y)}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

This provides an orthonormal frame, and is in particular convenient for studying the signature of the metric.

There are other interesting identities fulfilled by the rational functions involved in the definition of the PS metric. To write them we need to add to the rational functions the explicit dependencies on the variables λ, ν in addition to x and y . If $\mathcal{Q}(x, y, \lambda, \nu)$ denotes any of the rational functions $H(x, y, \lambda, \nu)$, $F(x, y, \lambda, \nu)$ and $J(x, y, \lambda, \nu)$, then an explicit computation shows the property

$$\mathcal{Q}(x, y, \lambda, \nu) = -x^2 y^2 \nu^3 \mathcal{Q}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{\lambda}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right). \quad (2.97)$$

In addition we also have the relations

$$\begin{aligned} M(x, y, \lambda, \nu) &= M\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{\lambda}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right), \quad P(x, y, \lambda, \nu) = P\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{\lambda}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right), \\ G(x, \lambda, \nu) &= -x^4 G\left(\frac{1}{x}, \frac{\lambda}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right), \end{aligned} \quad (2.98)$$

which again are shown by expanding explicitly all the functions involved. A straightforward consequence of these properties is contained in the following result :

Proposition 2.8.1 *The PS family of metrics is invariant under the transformation*

$$x \mapsto \frac{1}{x}, \quad y \mapsto \frac{1}{y}, \quad \lambda \mapsto \frac{\lambda}{\nu}, \quad \nu \mapsto \frac{1}{\nu}, \quad k \mapsto k\nu. \quad (2.99)$$

A direct consequence of Proposition 2.8.1 is that all the properties of the PS metric which have been proven in this paper under the assumption that $(x, y, \lambda, \nu) \in \Omega_0$ hold *mutatis mutandi* when (x, y, λ, ν) belong to the set $\tilde{\Omega}_0$ defined by

$$\tilde{\Omega}_0 := \{(x, y, \nu, \lambda) \in \mathbb{R}^4 ; |x| \geq 1, -1 \leq y \leq y_h, 1 < \nu, 2\sqrt{\nu} \leq \lambda < 1 + \nu\},$$

which is the image of Ω_0 under the map (2.99). Since $\nu > 1$ then we have $|y_h| < 1$ (see Proposition 2.8.2) and therefore for points in $\tilde{\Omega}_0$ we always have $|y| < 1$. We can now localise the asymptotically flat ends, horizons and so on by just applying the map (2.99)

to the corresponding regions in Ω_0 which were discussed in the paper. In this way we find that the point $(-1, -1, \lambda, \nu) \in \tilde{\Omega}_0$ corresponds to an asymptotically flat end and $(x, y_c, \lambda, \nu) \in \Omega_0$ is the event horizon associated to the d.o.c. of this asymptotically flat end (note that y_c is mapped to y_h , y_h is mapped to y_c under (2.99) and their absolute value is less than unity when $\nu > 1$).

The determinant of the metric reads

$$\det(g_{\mu\nu}) = -\frac{4k^4 H(x, y) (J(x, y)^2 + F(x, y)F(y, x))}{(\nu - 1)^4 G(x)G(y)H(y, x)(x - y)^4}.$$

Using the identity (2.95) one obtains

$$\det(g_{\mu\nu}) = -\frac{16k^8 H(x, y)^2}{(\nu - 1)^6 (x - y)^8}. \quad (2.100)$$

The restriction of the metric to the hyperplanes $\text{Span}\{\partial_t, \partial_\varphi, \partial_\psi\}$ is

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{2d\psi dt M(x, y)H(y, x)}{H(x, y)} - \frac{2d\varphi dt P(x, y)H(y, x)}{H(x, y)} - \frac{dt^2 H(y, x)}{H(x, y)} - \\ & -d\psi^2 \left(\frac{H(y, x)M(x, y)^2}{H(x, y)} + \frac{F(x, y)}{H(y, x)} \right) - \\ & -2d\psi d\varphi \left(\frac{J(x, y)}{H(y, x)} + \frac{H(y, x)M(x, y)P(x, y)}{H(x, y)} \right) - \\ & -d\varphi^2 \left(\frac{H(y, x)P(x, y)^2}{H(x, y)} - \frac{F(y, x)}{H(y, x)} \right). \end{aligned} \quad (2.101)$$

The determinant of the restricted metric is given by

$$\det(g_{ij}) = \frac{J(x, y)^2 + F(x, y)F(y, x)}{H(x, y)H(y, x)}, \quad (2.102)$$

which, after replacing all the functions simplifies to

$$\det(g_{ij}) = \frac{4k^4 G(x)G(y)}{(\nu - 1)^2 (x - y)^4}. \quad (2.103)$$

Clearly $\det(g_{ij}) < 0$ if $y_h < y < -1$ or $1 < y$, where $\{y = y_h\}$ is a Killing horizon with respect to the following Killing vector

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sqrt{(\nu + 1)^2 - \lambda^2}}{2k(\lambda + \nu + 1)} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{(\lambda^2 + (\nu - 1)^2) \sqrt{\nu} \sqrt{(\nu + 1)^2 - \lambda^2}}{k\lambda(\lambda + \nu + 1) (\lambda(\nu + 1) - \sqrt{\lambda^2 - 4\nu(\nu - 1)})} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

and $\{y = y_c\}$ is a Killing horizon with respect to the Killing vector

$$\tilde{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sqrt{(\nu + 1)^2 - \lambda^2}}{2k(\lambda + \nu + 1)} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{(\lambda^2 + (\nu - 1)^2) \sqrt{\nu} \sqrt{(\nu + 1)^2 - \lambda^2}}{k\lambda(\lambda + \nu + 1) (\lambda(\nu + 1) + \sqrt{\lambda^2 - 4\nu(\nu - 1)})} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

From the expression for the restriction of the metric to $\{t, \varphi, \psi\}$ one easily gets the expression from the restriction of the metric to $\{\varphi, \psi\}$. We denote this restricted metric by g_{AB} and its determinant is

$$\begin{aligned} \det g_{AB} = & \frac{1}{H(x, y)(-1 + \lambda - \nu)H(y, x)^2} \times \\ & \left[F(y, x) \left\{ F(x, y)H(x, y)(1 - \lambda + \nu) + \right. \right. \\ & 4k^2\lambda^2(1 + y)^2(1 + \lambda + \nu) \left(1 + \lambda - \nu + 2\nu x - \nu xy(2 + x(-1 + \lambda + \nu)) \right)^2 \left. \right\} + \\ & + (1 - \lambda + \nu) \left\{ H(x, y)J(x, y)^2 + \right. \\ & + 4k^2\lambda^2 y \sqrt{\nu} (-1 + x^2)(1 + \lambda + \nu) \left(y \sqrt{\nu} F(x, y)(-1 + x^2)(-1 + \lambda - \nu) + \right. \\ & \left. \left. \left. + 2J(x, y)(1 + y) \left(-1 - \lambda + \nu - 2\nu x + \nu xy(2 + x(-1 + \lambda + \nu)) \right) \right) \right) \right\} \left. \right], \quad (2.104) \end{aligned}$$

which can be rewritten in the form

$$\det(g_{AB}) = \frac{4k^4(-1 + x^2)(1 + y)}{(-1 + \lambda - \nu)(-1 + \nu)^2(x - y)^4 H(x, y)} \Theta(x, y, \lambda, \nu). \quad (2.105)$$

Clearly $\Theta(x, y, \lambda, \nu)$ is a rational function of x, y, λ and $\sqrt{\nu}$. However, a MATHEMATICA calculation shows that $\Theta(x, y, \lambda, \nu)$ is a polynomial in x, y, λ and ν .

One can give an alternative form for $\det(g_{AB})$ if we use the parameterization of the angular components of the metric tensor given in (2.105) :

$$\begin{aligned} \det(g_{AB}) = & \frac{-4k^4\lambda^2\nu(-1 + x^2)^2(1 + y)^2\Theta_{\phi\psi}(x, y)^2}{(-1 + \nu)^4 H(x, y)^2(x - y)^2} - \\ & \frac{4k^4(1 + y)(-1 + x^2)\Theta_{\phi\phi}(x, y)\Theta_{\psi\psi}(x, y)}{(-1 + \nu)^4(1 - \lambda + \nu)H(x, y)^2(x - y)^4}. \quad (2.106) \end{aligned}$$

Comparing (2.105) and (2.106) we deduce the relation

$$\begin{aligned} (\nu - 1)^2 H(x, y) \Theta(x, y, \lambda, \nu) = & \\ = \lambda^2 \nu (x - y)^2 (1 + y) (1 - x^2) (1 + \nu - \lambda) \Theta_{\phi\psi}(x, y)^2 - \Theta_{\phi\phi}(x, y) \Theta_{\psi\psi}(x, y). & \quad (2.107) \end{aligned}$$

The non-zero components of $g^{\mu\nu}$ read

$$\begin{aligned}
g^{tt} &= -\frac{M(x,y)(F(y,x)M(x,y)+2J(x,y)P(x,y))H(y,x)^2+H(x,y)J(x,y)^2+F(x,y)(F(y,x)H(x,y)-H(y,x)^2P(x,y)^2)}{H(y,x)(J(x,y)^2+F(x,y)F(y,x))} \\
g^{t\psi} &= \frac{H(y,x)(F(y,x)M(x,y)+J(x,y)P(x,y))}{J(x,y)^2+F(x,y)F(y,x)} \\
g^{t\varphi} &= -\frac{H(y,x)(F(x,y)P(x,y)-J(x,y)M(x,y))}{J(x,y)^2+F(x,y)F(y,x)} \\
g^{xx} &= \frac{2k^2H(x,y)}{(\nu-1)^2G(x)(x-y)^2} \\
g^{yy} &= -\frac{(\nu-1)^2G(y)(x-y)^2}{2k^2H(x,y)} \\
g^{\psi\psi} &= -\frac{F(y,x)H(y,x)}{J(x,y)^2+F(x,y)F(y,x)} \\
g^{\psi\varphi} &= -\frac{H(y,x)J(x,y)}{J(x,y)^2+F(x,y)F(y,x)} \\
g^{\varphi\varphi} &= \frac{F(x,y)H(y,x)}{J(x,y)^2+F(x,y)F(y,x)}
\end{aligned}$$

Alternative forms for some of the above can be obtained using the identity (2.95)

$$\begin{aligned}
g^{tt} &= \frac{(\nu-1)^2\left(-\frac{4k^4G(x)G(y)H(x,y)^2}{16H(y,x)(x-y)^4}-F(y,x)M(x,y)^2+F(x,y)P(x,y)^2-2J(x,y)M(x,y)P(x,y)\right)(x-y)^4}{4k^4G(x)G(y)H(x,y)} \\
g^{t\psi} &= \frac{(\nu-1)^2(F(y,x)M(x,y)+J(x,y)P(x,y))(x-y)^4}{4k^4G(x)G(y)H(x,y)} \\
g^{t\varphi} &= -\frac{(\nu-1)^2(F(x,y)P(x,y)-J(x,y)M(x,y))(x-y)^4}{4k^4G(x)G(y)H(x,y)} \\
g^{\psi\psi} &= -\frac{(\nu-1)^2F(y,x)(x-y)^4}{4k^4G(x)G(y)H(x,y)} \\
g^{\psi\varphi} &= -\frac{(\nu-1)^2J(x,y)(x-y)^4}{4k^4G(x)G(y)H(x,y)} \\
g^{\varphi\varphi} &= \frac{(\nu-1)^2F(x,y)(x-y)^4}{4k^4G(x)G(y)H(x,y)}
\end{aligned}$$

The $x - y$ part of the Pomeransky & Senkov metric,

$$ds_{x,y}^2 = \frac{2k^2H(x,y)}{(\nu-1)^2(x-y)^2} \left(\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)} \right),$$

can be written in a form which is conformally flat [PS06] by introducing new coordinates ρ, z defined as

$$\rho^2 = -\frac{4k^4G(x)G(y)}{(-1+\nu)^2(x-y)^4}, \quad z = \frac{k^2(1-xy)(\lambda(x+y)+2xy\nu+2)}{(1-\nu)(x-y)^2}.$$

The line element becomes

$$ds_{\rho,z}^2 = \Lambda(x,y)(d\rho^2 + dz^2),$$

where

$$\begin{aligned}
\Lambda(x,y) &= \frac{2(y-x)H(x,y)}{k^2(xy\lambda + (\nu+1)(x+y) + \lambda)} \times \\
&\frac{1}{(\lambda^2(x^2 - (y^2 - 1)) + 4xy + y^2 - 1) + 4(\nu+1)(x^2y^2\nu + 1) + 4\lambda(x+y)(xy\nu + 1)}.
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Finally, we mention a property of one of the polynomial factors in $G(x)$:

Proposition 2.8.2 *Let $p(\xi) \equiv \nu\xi^2 + \lambda\xi + 1$ and assume that $2\sqrt{\nu} \leq |\lambda| < 1 + \nu$. Then the real roots $\xi_- \leq \xi_+$ of the polynomial $p(\xi)$ fulfill the inequalities $|\xi_{\pm}| > 1$ if $0 < \nu < 1$ and $|\xi_{\pm}| < 1$ if $1 < \nu$.*

PROOF: The roots of $p(\xi)$ are given by

$$\xi_{\pm} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\nu}}{2\nu},$$

and therefore, these are real if and only if $2\sqrt{\nu} \leq |\lambda|$, as assumed. The roots ξ_{\pm} can be regarded as functions of λ and ν and these functions are continuous on the set $\mathcal{Z} := \{(\lambda, \nu) : \nu > 0, 2\sqrt{\nu} \leq |\lambda| < 1 + \nu\}$. Now the equations $\xi_{\pm} = 1$, $\xi_{\pm} = -1$ admit as respective solutions the values $\nu = -1 - \lambda$ and $\nu = \lambda - 1$, and therefore no point lying in \mathcal{Z} has the property that $|\xi_{\pm}| = 1$. The conclusion is then that for any $(\lambda, \nu) \in \mathcal{Z}$ we have that either $|\xi_{\pm}| > 1$ or $|\xi_{\pm}| < 1$ and given the continuity of ξ_{\pm} on \mathcal{Z} as a function of λ, ν only one of these alternatives will hold on each connected component of \mathcal{Z} . These connected components are

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &:= \{(\lambda, \nu) : 0 < \nu < 1, 0 < \lambda, 2\sqrt{\nu} \leq |\lambda| < 1 + \nu\}, \\ \mathcal{Z}_2 &:= \{(\lambda, \nu) : 0 < \nu < 1, 0 > \lambda, 2\sqrt{\nu} \leq |\lambda| < 1 + \nu\}, \\ \mathcal{Z}_3 &:= \{(\lambda, \nu) : 1 < \nu, 0 < \lambda, 2\sqrt{\nu} \leq |\lambda| < 1 + \nu\}, \\ \mathcal{Z}_4 &:= \{(\lambda, \nu) : 1 < \nu, \lambda < 0, 2\sqrt{\nu} \leq |\lambda| < 1 + \nu\}. \end{aligned}$$

Again, by continuity, it is enough to check the values of ξ_{\pm} at particular points of $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3, \mathcal{Z}_4$ to draw the desired conclusions. Our explicit choices are as follows

$$\begin{aligned} \left(\lambda = 1, \nu = \frac{1}{9}\right) \in \mathcal{Z}_1 &\Rightarrow \left|\xi_{\pm}\left(1, \frac{1}{9}\right)\right| > 1, \\ \left(\lambda = \frac{16}{5}, \nu = \frac{9}{4}\right) \in \mathcal{Z}_3 &\Rightarrow \left|\xi_{\pm}\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{4}\right)\right| < 1, \\ \left(\lambda = -\frac{16}{5}, \nu = \frac{9}{4}\right) \in \mathcal{Z}_4 &\Rightarrow \left|\xi_{\pm}\left(-\frac{16}{5}, \frac{9}{4}\right)\right| < 1, \\ \left(\lambda = -1, \nu = \frac{1}{9}\right) \in \mathcal{Z}_2 &\Rightarrow \left|\xi_{\pm}\left(-1, \frac{1}{9}\right)\right| > 1, \end{aligned}$$

Therefore $|\xi_{\pm}| > 1$ on $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ and $|\xi_{\pm}| < 1$ on $\mathcal{Z}_3, \mathcal{Z}_4$, which finishes the proof. \square

2.9 Emparan-Reall limit of the Pomeransky & Senkov metric

In this section we verify that the Emparan-Reall solutions are a special case of the PS metrics. We take the Emparan-Reall metric in the form given in [ER06],

$$ds^2 = \frac{R^2 F(x)}{(x-y)^2} \left(\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)} + \frac{G(x)}{F(x)} d\varphi^2 - \frac{G(y)}{F(y)} d\psi^2 \right) - \frac{F(y)}{F(x)} \left(dt - \frac{CR(1+y)}{F(y)} d\psi \right)^2, \quad (2.109)$$

where

$$F(z) = 1 + \lambda z, \quad G(z) = (1 - z^2)(1 + \nu z), \quad C = \sqrt{\frac{\lambda(1 + \lambda)(\lambda - \nu)}{1 - \lambda}}.$$

The parameters are assumed in that paper to range over

$$0 < \nu \leq \lambda < 1.$$

However, the requirement that there are no struts imposes the supplementary relation

$$\lambda = \frac{2\nu}{1 + \nu^2}.$$

The coordinates of (2.109) are not the ones of the original paper of Emparan & Reall [ER06]. If we denote by $\{\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}\}$ the original coordinates of Emparan & Reall, then we have the relation

$$t = \hat{t}, \quad x = \frac{\hat{\lambda} - \hat{x}}{-1 + \hat{\lambda}\hat{x}}, \quad y = \frac{\hat{\lambda} - \hat{y}}{-1 + \hat{\lambda}\hat{y}}, \quad \varphi = \frac{1 - \hat{\lambda}\hat{\nu}}{\sqrt{1 - \hat{\lambda}^2}}\hat{\varphi}, \quad \psi = \frac{1 - \hat{\lambda}\hat{\nu}}{\sqrt{1 - \hat{\lambda}^2}}\hat{\psi}, \quad (2.110)$$

where

$$\hat{\nu} = \frac{\nu - \lambda}{\lambda\nu - 1}, \quad \hat{\lambda} = \lambda, \quad \nu = \frac{\hat{\nu} - \hat{\lambda}}{\hat{\lambda}\hat{\nu} - 1}.$$

The transformation (2.110) brings the metric (2.109) into the form (as in [ER06] with hats on all the coordinates and functions and R replaced by \hat{A})

$$ds^2 = -\frac{\hat{F}(\hat{x})}{\hat{F}(\hat{y})}(d\hat{t} + \hat{A}\sqrt{\hat{\lambda}\hat{\nu}}(1 + \hat{y})d\hat{\psi})^2 + \frac{\hat{A}^2}{(\hat{x} - \hat{y})^2} \left(\hat{F}(\hat{y})^2 \left(\frac{d\hat{x}^2}{\hat{G}(\hat{x})} + \frac{\hat{G}(\hat{x})}{\hat{F}(\hat{x})}d\hat{\varphi}^2 \right) - \hat{F}(\hat{x}) \left(\frac{\hat{F}(\hat{y})}{\hat{G}(\hat{y})}d\hat{y}^2 + \hat{G}(\hat{y})d\hat{\psi}^2 \right) \right), \quad (2.111)$$

where

$$\hat{F}(z) = 1 - \hat{\lambda}z, \quad \hat{G}(z) = (1 - z^2)(1 - \hat{\nu}z), \quad \hat{A} = -R\sqrt{\frac{(1 - \hat{\lambda}\hat{\nu})}{1 - \hat{\lambda}^2}}.$$

To check the limit as $\nu \rightarrow 0$ of PS metrics, we start by rewriting the Pomeransky & Senkov solution in the form

$$ds^2 = \frac{Q \left(\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)} \right) H(x, y)}{(x - y)^2} - 2 \frac{d\varphi d\psi J(x, y)}{H(y, x)} - \frac{H(y, x)(dt + \Omega)^2}{H(x, y)} - \frac{d\psi^2 F(x, y)}{H(y, x)} + \frac{d\varphi^2 F(y, x)}{H(y, x)}. \quad (2.112)$$

Here $Q > 0$ is a constant which can be eliminated by a rescaling of the metric together with an appropriate rescaling of the coordinates t , ψ , φ . If we set $Q = 2k^2/(1 - \nu)^2$ in (2.112), we recover (2.1). One checks that the metric (2.112) reduces to the Emparan-Reall solution (2.109) if we set $\nu = 0$ and $Q = 2k^2/(1 + \lambda^2)$, and if

$$\nu_e = \lambda, \quad R_e = -\sqrt{2}k$$

where the Emparan-Reall independent parameters are denoted by ν_e and R_e .

Chapitre 3

Structure de l'ergosurface des anneaux noirs de Pomeransky-Senkov

Ce chapitre, en anglais, constitue une suite du précédent, en étudiant l'ergosurface des espaces-temps de Pomeransky-Senkov. On démontre que celle-ci se décompose en deux parties, l'une située « au-dessus » de l'horizon des événements du trou noir, l'autre « en-dessous » de tous les horizons de Killing. La topologie de l'ergosurface « extérieure » possède la propriété de varier en fonction des paramètres liés aux deux moments angulaires.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article, soumis ([Cor10]).

Sommaire

3.1	Introduction	102
3.2	Pomeransky-Senkov black rings	102
3.3	The ergosurface	104

3.1 Introduction

There has been recently a lot of interest in studying higher-dimensional solutions of the vacuum Einstein equations, especially since the discovery, in 2001 by Emparan and Reall in [ER02], of five-dimensional black hole space-times in vacuum, whose sections of the event horizon are not homeomorphic to a sphere. Those space-times are usually referred to as “black rings”, since the topology of these sections is $S^1 \times S^2$ instead.

In this work, we focus on a particular feature, the *ergosurface*, of a family of solutions discovered in 2006 by Pomeransky and Senkov in [PS06], also known as “doubly spinning black rings”. The Emparan-Reall space-times, also called “singly-spinning black rings”, can be seen as a limiting case of this family (see, e.g., the appendix of [CCGPGL09]). It has been shown in [ER02] that they possess an ergosurface homeomorphic to $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$. In the remainder of this paper, we first recall some definitions and facts about the Pomeransky-Senkov family of space-times (Section 3.2) and establish the notations. These follow the material introduced in [CCGPGL09]. Then we study in details the ergosurface (Section 3.3), which turns out to split into two subsets, the first one being the “usual” ergosurface lying outside the black hole, the second lying “under” all the Killing horizons. We finish by proving the results pointed out in [Dur09] about the existence of two distinct regimes for the topological nature of the “upper” ergosurface.

3.2 Pomeransky-Senkov black rings

Here we follow the notations and conventions introduced in [CCGPGL09]. The Pomeransky-Senkov family of metrics is :

$$ds^2 = \frac{2H(x, y)k^2}{(1 - \nu)^2(x - y)^2} \left(\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)} \right) - 2\frac{J(x, y)}{H(y, x)}d\varphi d\psi - \frac{H(y, x)}{H(x, y)}(dt + \Omega)^2 - \frac{F(x, y)}{H(y, x)}d\psi^2 + \frac{F(y, x)}{H(y, x)}d\varphi^2, \quad (2.1) \quad (3.1)$$

where

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \lambda^2 + 2\nu(1 - x^2)y\lambda + 2x(1 - \nu^2y^2)\lambda - \nu^2 + \nu(-\lambda^2 - \nu^2 + 1)x^2y^2 + 1, \\ F(x, y) &= \frac{2k^2}{(x - y)^2(1 - \nu)^2} \left((1 - y^2) \left(((1 - \nu)^2 - \lambda^2)(\nu + 1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y\lambda(-\lambda^2 - 3\nu^2 + 2\nu + 1) \right) G(x) + \right. \\ &\quad \left. + (-(1 - \nu)\nu(\lambda^2 + \nu^2 - 1)x^4 + \lambda(2\nu^3 - 3\nu^2 - \lambda^2 + 1)x^3 + ((1 - \nu)^2 - \lambda^2)(\nu + 1)x^2 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda(\lambda^2 + (1 - \nu)^2)x + 2\lambda^2 \right) G(y) \Big), \\ J(x, y) &= \frac{2k^2(1 - x^2)(1 - y^2)\lambda\sqrt{\nu}(\lambda^2 + 2(x + y)\nu\lambda - \nu^2 - xy\nu(-\lambda^2 - \nu^2 + 1) + 1)}{(x - y)(1 - \nu)^2}, \\ G(x) &= (1 - x^2)(\nu x^2 + \lambda x + 1), \end{aligned}$$

and where Ω is a 1-form given by

$$\Omega = M(x, y)d\psi + P(x, y)d\varphi,$$

with

$$\begin{aligned}
 M(x, y) &= \frac{2k\lambda\sqrt{(\nu+1)^2 - \lambda^2}(y+1)(-\lambda + \nu - 2\nu x + \nu x((\lambda + \nu - 1)x + 2)y - 1)}{(1 - \lambda + \nu)H(y, x)} \\
 &=: \frac{\sqrt{(\nu+1)^2 - \lambda^2}\hat{M}(x, y)}{(1 - \lambda + \nu)H(y, x)} \\
 P(x, y) &= \frac{2k\lambda\sqrt{\nu}\sqrt{(\nu+1)^2 - \lambda^2}(x^2 - 1)y}{H(y, x)} \\
 &=: \frac{2\sqrt{\nu}\hat{P}(x, y)}{H(y, x)},
 \end{aligned}$$

where \hat{P} and \hat{M} are polynomials in all variables.

The parameter k is assumed to be in \mathbb{R}^* , while the parameters λ and ν have been restricted in [PS06] to belong to the set ¹

$$\mathcal{U} := \{(\nu, \lambda) : \nu \in (0, 1), 2\sqrt{\nu} \leq \lambda < 1 + \nu\}. \tag{3.2}$$

The coordinates x, y, ϕ, ψ, t vary within the ranges $-1 \leq x \leq 1, -\infty < y < -1, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq 2\pi$ and $-\infty < t < \infty$.

We also introduce the quantities

$$y_h := -\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\nu}}{2\nu}, \quad y_c := -\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\nu}}{2\nu},$$

In [CCGPGL09], for every $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$, the submanifold delimited by the coordinates above, with the additional condition $y_h < y < -1$, and equipped with the metric (2.1), has been shown to be a regular asymptotically flat space-time, with the asymptotically flat region located at $(x, y) = (-1, -1)$. In fact, the set $\{y = y_h\}$ corresponds to an event horizon, $\{y = y_c\}$ to another Killing horizon, and the space-time has been shown to extend smoothly through these horizons up to the singular set $\text{Sing} := \{H(x, y) = 0\}$, where the curvature tensor blows up at least for some values of the parameters. At this stage, it is convenient to work with a new coordinate Y , defined as

$$Y = -\frac{1}{y},$$

because the singular set has components which blow up to infinity in (x, y) -coordinates. Since $H(x, y)$ is a second-order polynomial in y , we can now write Sing as the union of the graphs of the functions $y_+(x)$ and $y_-(x)$, or, better, we write Sing in (x, Y) -coordinates as the union of the graphs of $Y_+(x)$ and $Y_-(x)$, both defined on a subset of $[-1, 1]$ such that the discriminant of the polynomial $H(x, y)$ is non-negative. Equivalently, if we define $\hat{H}(x, Y) := Y^2 H(x, -1/Y)$, then $Y_{\pm}(x)$ are the roots of the second order polynomial $\hat{H}(x, Y)$ in Y .

1. Strictly speaking, $\nu = 0$ is allowed in [PS06]. It is shown there that this corresponds to Emparan-Reall metrics (compare Appendix in [CCGPGL09]), which have already been analysed elsewhere [CC10], and so we only consider $\nu > 0$.

In fact, we can observe in these coordinates that the analytic extension done so far up to Sing can be performed further across the set $\{Y = 0\}$, since the branches $x \mapsto Y_{\pm}(x)$ are not defined on the whole set $[-1, 1]$, but only on a subinterval of $(-1, 1]$. Following the notations of [CCGPGL09], we have the inequalities (wherever Y_+ and Y_- are defined) :

$$Y_+(x) \leq Y_-(x) < Y_c < Y_h.$$

These confirm that the singular set Sing lies “under” both Killing horizons. On the other hand, the singular set has the remarkable property to have a varying topology, depending on the values of $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$. Indeed, the topology is $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$ when $\nu + \lambda < 1$, $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ when $\nu + \lambda > 1$, and a “pinched” $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ when $\nu + \lambda = 1$. These results are illustrated on Figure 1.3 of [CCGPGL09]. Some other properties of the singular set have been derived (see Theorem 5.6 in [CCGPGL09]). Most of them come from the study of the polynomial \tilde{W} , which is, up to a factor $\frac{1}{4}$, the discriminant of the second-order polynomial in x , $H(x, y)$:

$$\tilde{W} := \nu \left((x^2 - 1)^2 \nu \lambda^2 + x (\lambda^2 + 2x\lambda - \nu^2 + 1) (2\lambda\nu + x (\lambda^2 + \nu^2 - 1)) \right). \quad (3.3)$$

In particular we recall the following result, which turns out to be useful for the next section :

Lemma 3.2.1 *In the region $\{-1 \leq x \leq 0, y < y_c\}$, the two branches y_{\pm} which exist for small negative values of x meet smoothly at some $\bar{x} \in (-1, 0)$, where \bar{x} is a simple root of \tilde{W} .*

We observed in [CCGPGL09], (see Remark 5.3) that the root \bar{x} is simple, and is the largest negative one \tilde{W} , and therefore the function $(\nu, \lambda) \mapsto \bar{x}(\nu, \lambda)$ defined in \mathcal{U} is continuous.

3.3 The ergosurface

The ergosurface of the Pomeransky-Senkov space-time is the set of zeros of

$$g_{tt} = -\frac{H(y, x)}{H(x, y)}.$$

Since this function cannot vanish on the singular set Sing for allowed values of the parameters and variables (see Section 3 of [CCGPGL09]), the ergosurface coincides with the set of zeros of $H(y, x)$. In this section we derive a more precise version of the results of [Dur09] about the topology of the ergosurface, introduced below. Similarly to the singular set $\{H(x, y) = 0\}$, this topology depends upon the values of the parameters ν and λ . In what follows, we prove that the ergosurface exists and splits into two parts which extend over all the region $x \in [-1, 1]$ (Proposition 3.3.1). Next, Proposition 3.3.5 shows that one of these parts, referred to as the *outer* ergosurface, lies above the event horizon $\{y = y_h\}$, while Proposition 3.3.6 shows that the other part, referred to as the *inner* ergosurface, lies under both Killing horizons. Finally Theorem 3.3.7 discusses the topology of the ergosurface for the allowed values of λ and ν .

We start by showing that the ergosurface is globally defined :

Proposition 3.3.1 *The equation $H(y, x) = 0$ has solutions $y_{e\pm}(x)$ in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ for all x in $[-1, 1]$.*

PROOF: In order to see this, we begin by noting the identity

$$H(y, x) = H\left(\nu x, \frac{y}{\nu}\right), \quad (3.4)$$

holding for any $\nu \neq 0$, and which enables us to use some of the properties of the singular set Sing recalled in Section 3.2. Hence, it is sufficient to show that the polynomial $\tilde{W}(x)$, defined by the formula (3.3) above, is nonnegative for $x \in [-\nu, \nu]$. To do so, we write

$$\tilde{W}(x = \nu) = \nu^2(\lambda^2 + 2\nu\lambda + \nu^3 - \nu)(\lambda^2\nu + 1 + 2\nu\lambda - \nu^2), \quad (3.5)$$

$$\tilde{W}(x = -\nu) = \nu^2(\lambda^2 - 2\nu\lambda + \nu^3 - \nu)(\lambda^2\nu + 1 - 2\nu\lambda - \nu^2). \quad (3.6)$$

We need two lemmata :

Lemma 3.3.2 *$\tilde{W}(x = \nu)$ and $\tilde{W}(x = -\nu)$ are positive.*

PROOF OF THE LEMMA 3.3.2. For (3.5), the second factor $(\lambda^2 + 2\nu\lambda + \nu^3 - \nu)$ is positive since we have $\lambda^2 \geq 4\nu > \nu$ for admissible ν and λ , and the third factor $(\lambda^2\nu + 1 + 2\nu\lambda - \nu^2)$ is obviously positive as well there. The proof of the positivity in (3.6) requires some more effort. Let us begin with its second factor,

$$h_1(\nu, \lambda) = \lambda^2 - 2\nu\lambda + \nu^3 - \nu.$$

We have $\partial_\lambda h_1 = 2(\lambda - \nu) > 0$, hence $\lambda \mapsto h_1(\nu, \lambda)$ is increasing on $[2\sqrt{\nu}, 1 + \nu)$, and since

$$h_1(\nu, 2\sqrt{\nu}) = \nu(3 - 4\sqrt{\nu} + \nu^2) = \nu(1 - \sqrt{\nu})^2(3 + 2\sqrt{\nu} + \nu),$$

positive for all ν in $(0, 1)$, therefore h_1 is positive on \mathcal{U} . Then, for the third factor of (3.6) :

$$h_2(\nu, \lambda) = \lambda^2\nu - 2\nu\lambda + 1 - \nu^2,$$

The first derivative reads $\partial_\lambda h_2 = 2\nu(\lambda - 1)$, hence the minimum on the interval $[2\sqrt{\nu}, 1 + \nu)$ of $h_2(\nu, \cdot)$ is reached at $\lambda = \lambda_m := \max(1, 2\sqrt{\nu})$. From the definition above, $\lambda_m = 1$ for $\nu \in (0, 1/4]$ (critical point), and $\lambda_m = 2\sqrt{\nu}$ for $\nu \in [1/4, 1)$ ($h_2(\nu, \cdot)$ is increasing in the whole interval $[2\sqrt{\nu}, 1 + \nu)$ in this case). But on the one hand, we have $h_2(\nu, 1) = 1 - \nu - \nu^2$ positive for all ν in $(0, 1/4]$, and on the other hand,

$$h_2(\nu, 2\sqrt{\nu}) = 3\nu^2 - 4\nu\sqrt{\nu} + 1 = (1 - \sqrt{\nu})^2(3\nu + 2\sqrt{\nu} + 1),$$

positive in particular on $[1/4, 1)$. This finishes to show that all the factors of (3.6) are positive, and hence to prove the lemma. \square

Next, we prove a second lemma :

Lemma 3.3.3 *For the particular values $(\nu, \lambda = 1 - \nu)$ of (ν, λ) in \mathcal{U} , the whole interval $[-\nu, \nu]$ is included in the set $\tilde{\Omega}_{\nu, \lambda} = \{x : \tilde{W}(x) \geq 0\}$, and $\tilde{W}(x)$ has four real valued roots.*

PROOF OF THE LEMMA 3.3.3. In this case (which corresponds to $\nu \in (0, 3 - 2\sqrt{2})$), $\tilde{W}(x)$ takes the form

$$\tilde{W}(x) = \nu^2(1 - \nu)^2(x - 1)(x + 1)(x - (\sqrt{5} + 2))(x + \sqrt{5} - 2).$$

Here, all the factors but the last one of \tilde{W} are positive for x in $[-\nu_0, \nu_0]$, where $\nu_0 := 3 - 2\sqrt{2} < 1$. In order to determine the sign of the last factor $x + \sqrt{5} - 2$, we see that for all x in $[-\nu_0, \nu_0]$, we have

$$x + \sqrt{5} - 2 \geq -\nu_0 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 5,$$

the last term being positive, as can be seen from the inequality

$$(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 4\sqrt{10} > 13 + 4\sqrt{9} = 5^2,$$

and Lemma 3.3.3 is proved. \square

These two lemmata enable us to conclude the proof of Proposition 3.3.1 : Indeed, recall, from the Lemma 3.2.1 and the remark that follows at the end of Section 3.2, that the map \bar{x} is continuous on \mathcal{U} , and so is the map $(\nu, \lambda) \mapsto \bar{x}(\nu, \lambda) + \nu$. The connectedness of \mathcal{U} implies that its image by the map $\bar{x} + \nu$ is a connected subset of \mathbb{R} and hence an interval. Clearly 0 cannot belong to this interval because $\tilde{W}(x = -\nu) > 0$ as shown in Lemma 3.3.2 and thus, either

$$\bar{x}(\nu, \lambda) < -\nu, \quad \forall (\nu, \lambda) \in \mathcal{U},$$

or

$$\bar{x}(\nu, \lambda) > -\nu, \quad \forall (\nu, \lambda) \in \mathcal{U}.$$

But for $\lambda = 1 - \nu$, since \bar{x} is negative by definition, Lemma 3.3.3 entails $\bar{x}(\nu, 1 - \nu) < -\nu$ and hence only the possibility $\bar{x}(\nu, \lambda) < -\nu$ for all $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$ remains.

Then, assume by contradiction that there exists (ν_q, λ_q) in \mathcal{U} and x_q in $[-\nu_q, \nu_q]$ such that $\tilde{W}(x_q)$ is negative. By Lemma 3.3.2, $\tilde{W}(x = \pm\nu_q)$ are both positive and therefore there is an even number of roots (counting multiplicity) of $\tilde{W}(x)$ inside the interval $[-\nu_q, \nu_q]$, and at least two of them or distinct. Since there cannot be four roots in $[-\nu_q, \nu_q]$ (as \bar{x} is outside this interval), there are exactly two distinct ones in $[-\nu_q, \nu_q]$. This implies that, for $(\nu, \lambda) = (\nu_q, \lambda_q)$, the polynomial $\tilde{W}(x)$ has four distinct roots; two are in the interval $[-\nu_q, \nu_q]$, one in the interval $(-\infty, \nu_q)$ and, given that $\tilde{W}(x)$ is positive for $|x|$ large enough, the remaining root must lie also in the interval $(-\infty, -\nu_q)$. Therefore (ν_q, λ_q) belongs to the connected subset $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cap \{\lambda < \chi(\nu)\}$, which was defined in Lemma 5.1 of [CCGPGL09] as the domain where \tilde{W} has four distinct roots, and so does $(\nu, 1 - \nu)$ according to Lemma 3.3.3. The roots of $\tilde{W}(x)$, for values of (ν, λ) in \mathcal{U}_1 , are simple and thus they are smooth functions of (ν, λ) in \mathcal{U}_1 .

Let us denote by $x_4(\nu, \lambda)$ the largest of these roots. Again, $x_4(\mathcal{U}_1) \subset \mathbb{R}$ is a real interval as \mathcal{U}_1 is connected and x_4 is continuous.

The previous considerations imply that the greatest root of $\tilde{W}(x)$ for $(\nu, \lambda) = (\nu_q, \lambda_q)$ fulfills $x_4(\nu_q, \lambda_q) < \nu_q$ and from Lemma 3.3.3 we deduce $x_4(\nu, 1 - \nu) = 2 + \sqrt{5} > \nu$, $\forall \nu \in (0, 1)$. Hence, the continuous map $(\nu, \lambda) \mapsto x_4(\nu, \lambda) - \nu$ changes sign on \mathcal{U}_1 . Therefore, by

the intermediate value theorem, there exists some $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}_1$ such that $x_4(\nu, \lambda) = \nu$. But this is impossible since $\tilde{W}(x_4(\nu, \lambda)) = 0$ by definition of x_4 , whereas $\tilde{W}(\nu) > 0$ as shown in Lemma 3.3.2.

This shows that $\tilde{W}(x) \geq 0$, for x in $[-\nu, \nu]$, and the corresponding solutions $y_{\pm}(x)$ are therefore defined on $[-\nu, \nu]$, except $y_+(x)$ which diverges at $x = 0$. However, Y_{\pm} are both well defined on $[-\nu, \nu]$. The relation (3.4) finishes the proof. \square

We have just shown that $H(y, x) = 0$ has two solutions $y_{e-}(x)$, $y_{e+}(x)$ which are defined $\forall x \in [0, 1]$ (allowing an infinite value for y_+ at $x = 0$). Note that, from (3.4), they are related to the solutions $y_{\pm}(x)$ of $H(x, y)$ by

$$y_{e\pm}(x) = \nu y_{\pm}(\nu x), \quad (3.7)$$

for all x in $[-1, 1]$. Equivalently, we have in (x, Y) -coordinates :

$$Y_{e\pm}(x) = \frac{1}{\nu} Y_{\pm}(\nu x), \quad (3.8)$$

which means that, in the (x, Y) -coordinates, the graphs of $Y_{e\pm}$ are obtained from the graphs of Y_{\pm} by an homothety of center $(0, 0)$, and of ratio $1/\nu$. In particular, we have $Y_{e-}(x) > Y_{e+}(x)$, and we define the *outer ergosurface* as the set $\{y = y_{e-}(x) : x \in [-1, 1]\}$, or, in (x, Y) -coordinates, $\{Y = Y_{e-}(x) : x \in [-1, 1]\}$. We now prove that this last set lies above the event horizon. To that end we need a lemma :

Lemma 3.3.4 $x \mapsto y_{e-}(x)$ reaches its minimum at one of the ends ± 1 .

PROOF: From the equality $y_{e-}(x) = \nu y_-(\nu x)$, it suffices to prove that the function $x \mapsto y_-(x)$ reaches its minimum at one of the ends $-\nu$ or ν in the interval $[-\nu, \nu]$. If not, there would exist a strict local minimum of y_- located at $x = x_m \in (-\nu, \nu)$. Let $y_m := y_-(x_m)$. Then, for $\varepsilon > 0$ small enough, there exist two values x_1 and x_2 such that $y_-(x_i) = y_m + \varepsilon$, with $-\nu < x_1 < x_m < x_2 < \nu$, and such that y_- is strictly decreasing in a neighbourhood of x_1 (see figure 3.1). Furthermore, recall that the graphs of y_+ and y_- join smoothly at $x = \bar{x}$, where \bar{x} (introduced in Lemma 3.2.1) is the greatest negative root of \tilde{W} (in particular we have $-1 < \bar{x} < -\nu$). Hence, in the interval $[\bar{x}, x_1)$, the graphs of y_+ and y_- form a smooth connected curve \mathcal{C} (if $x_1 > 0$, there is another connected component of the graph of y_+ which is not of interest here). Therefore the points of \mathcal{C} can be represented by pairs $(x(s), y(s))$ where $x(s), y(s)$ are smooth functions in the interval $(0, 1)$ fulfilling the relations $x(0) = x_1, x(s) \in [\bar{x}, x_1), \forall s \in (0, 1)$ and

$$y_-(x(s)) = y(s), \quad s \in (0, \bar{s}), \quad y_+(x(s)) = y(s), \quad s \in (\bar{s}, 1), \quad (3.9)$$

where $x(\bar{s}) = \bar{x}$. Also if $x_1 < 0$, one knows from subsection 5.4 of [CCGPGL09] that $y_+(x) < y_-(x)$ for any $x \in (\bar{x}, x_1]$, and if $x_1 \geq 0$, we have $y_+(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow 0^-$. Thus, from (3.9) it follows that there exists a real number $p \in (0, 1)$ such that $y(p) < y_-(x_1) = y(0)$ and $p > \bar{s}$. On the other hand the property $\partial_x y_-(x_1) < 0$ implies that there exists a real number $q \in (0, 1)$, $q < \bar{s}$ such that $\bar{x} \leq x(q) < x_1$ and $y_-(x(q)) > y_-(x_1)$ which according to (3.9) is equivalent to $y(q) > y(0)$. Hence we have the inequalities $y(p) < y(0) < y(q)$ with $q < p$ and given that $y(s)$ is continuous in the interval $[q, p]$ the

these two functions vanish once again in the interval $(-\infty, y_h)$. Hence, we obtain that $y_{e-}(x = \pm 1)$ belongs to the interval $(y_h, -1)$, and $y_{e+}(x = \pm 1)$ belongs to the interval $(-\infty, y_h)$. This entails $y_h < y_{e-}(x = \pm 1)$ and from Lemma 3.3.4 we conclude that $y_h < y_{e-}(x), \forall x \in [-1, 1]$ as desired. We now turn to the proof of the negativity of the quantities $H(y_h, \pm 1)$ written above : $H(y_h, -1)$ has the sign of the second factor, $(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\nu})(\lambda + \nu - 1) - 4\nu$. But we have the inequalities $0 < \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\nu} < \lambda < 2$ and $\lambda + \nu - 1 < 2\nu$ for admissible ν and λ , so the negativity of $H(y_h, -1)$ follows. Then, $H(y_h, 1)$ has the sign of $-u(\nu, \lambda)$, where

$$u(\nu, \lambda) = \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\nu} \right) (\lambda + 1 - \nu) - 4\nu .$$

With the change of variables $\lambda = 2\sqrt{\nu} \cosh(\eta)$, we get

$$u(\nu, \lambda) = 2\sqrt{\nu} \left(\sqrt{\nu} e^{-2\eta} + (1 - \nu)e^{-\eta} - \sqrt{\nu} \right) ;$$

the roots of the right-hand term, which is an order-two polynomial in $e^{-\eta}$, are $-1/\sqrt{\nu}$ and $\sqrt{\nu}$. But the following equivalence holds :

$$e^{-\eta} > \sqrt{\nu} \Leftrightarrow \lambda < 1 + \nu ,$$

thus $u(\nu, \lambda)$ is positive for any admissible (ν, λ) . □

We now turn to the inner part of the ergosurface

$$\{y = y_{e+}(x) : x \in [-1, 1]\} ,$$

or, in (x, Y) -coordinates,

$$\{Y = Y_{e+}(x) : x \in [-1, 1]\} .$$

We wish to prove that the inner ergosurface lies beyond the Killing horizons, and even beyond the singular set $\{H(x, y) = 0\}$, in the sense that

$$Y_{e+} \leq Y_+ \leq Y_- < Y_c < Y_h$$

wherever these functions are defined. This is illustrated in Figures 1.3 and 1.4 of [CCGPGL09]. This inner part reaches and crosses the set $\{y = \pm\infty\} = \{Y = 0\}$ at $x = 0$ only, we therefore make use of the coordinates (x, Y) in the following :

Proposition 3.3.6 *We have the inequality $Y_{e+}(x) < Y_c$, for all x in $[-1, 1]$. Moreover, we have $Y_{e+}(x) \leq Y_+(x)$ for all $x \in \tilde{\Omega}_{\nu, \lambda}$, with equality only at $x = 0$.*

PROOF: Let us first write :

$$H(y_c, -1) = \frac{\lambda(1 + \nu - \lambda)}{2\nu} \left(\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\nu} \right) (\lambda + \nu - 1) - 4\nu \right) ,$$

$$H(y_c, 1) = -\frac{\lambda(1 + \nu + \lambda)}{2\nu} \left(\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\nu} \right) (\lambda + 1 - \nu) - 4\nu \right) .$$

Again, these expressions are both negative. Indeed, we have the inequalities $\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\nu} < 1 + \nu + (1 - \nu) = 2$ for allowed values of λ and ν . Since $\lambda + \nu - 1 < 2\nu$, the whole factor $(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\nu})(\lambda + 1 - \nu) - 4\nu$ is negative, thus $H(y_c, -1)$ is negative. Then, it is straightforward to see that $H(y_c, 1) < H(y_h, 1)$, itself negative, when comparing both expressions. Since we have the limits $H(y, \pm 1) \rightarrow +\infty$ as $y \rightarrow -\infty$, the function $H(y, \pm 1)$ must have a zero in the interval $(-\infty, y_c)$ and therefore we are led to the inequality $y_{e+}(x = \pm 1) < y_c^2$ which in turn entails $Y_{e+}(\pm 1) < Y_c$. Now, we have that the function $Y_{e+}(x)$ does not admit any strict maximum on the interval $(-1, 1)$ (the proof of this fact is similar to the proof of Lemma 3.3.4) from which we conclude that $Y_{e+}(x) < Y_c$, $\forall x \in [-1, 1]$.

In order to show the second part, we first compare Y_{e+} and Y_+ in a neighbourhood of $x = 0$. To do so, we write the asymptotic expansion :

$$Y_+(x) = -\nu x \left(1 - \frac{1 - \nu}{2\nu\lambda} ((1 + \nu)^2 - \lambda^2)x + o(x) \right) ;$$

so that, using the fact that $Y_{e+}(x) = Y_+(\nu x)/\nu$, we obtain

$$Y_{e+}(x) - Y_+(x) = -\frac{(1 - \nu)^2((1 + \nu)^2 - \lambda^2)}{2\nu\lambda} x^2 + o(x^2).$$

The order-two term in the above expansion is negative for allowed values of the parameters ν and λ . Therefore, we get $Y_{e+} \leq Y_+$ in a neighbourhood of $x = 0$, with equality at $x = 0$ only : $Y_{e+}(0) = Y_+(0) = 0$. Furthermore, this inequality extends globally to the set $\tilde{\Omega}_{\nu,\lambda} = \{x : \tilde{W}(x) \geq 0\}$; otherwise, either there would exist some (x, y) , with $x \in \tilde{\Omega}_{\nu,\lambda}$ and $|y| > 1$ such that $H(x, y) = H(y, x) = 0$, which is impossible from the analysis subsequent to Equation (3.1) in Section 3 of [CCGPGL09], or there would be an equality $Y_{e+}(x) = Y_+(x) = 0$ at some $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, which is again impossible. Indeed, the only candidate for such a zero of Y_+ is $x = x_*$, which exists if $\nu^2 + \lambda^2 \neq 1$, and reads (see subsection 5.4 of [CCGPGL09]) :

$$x_* = \frac{-2\nu\lambda}{\nu^2 + \lambda^2 - 1}.$$

But then, it is easy to check that $Y_{e+}(x_*) = Y_+(\nu x_*)/\nu \neq 0$, from the expression of y_{\pm} written in subsection 5.4 of [CCGPGL09]. \square

We now have the main statement :

Theorem 3.3.7 *The ergosurface always has a connected component, diffeomorphic to $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$, lying beyond all Killing horizons, and an "outer part", lying above the event horizon, such that :*

- For $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$ such that $\nu + \lambda < 1$, the outer ergosurface is diffeomorphic to $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$.
- For $(\nu, \lambda) \in \mathcal{U}$ such that $\nu + \lambda > 1$, the outer ergosurface is diffeomorphic to $\mathbb{R} \times (S^3 \cup S^3)$, that is to say the space cross-sections have the topology of two disjoint copies of a 3-sphere.

2. Recall from the proof of proposition 3.3.5 the inequality $y_h < y_{e-}(x = \pm 1)$ which rules out the possibility $y_{e-}(x = \pm 1) < y_c$.

– In the limiting case $\nu + \lambda = 1$, the outer ergosurface is a “pinched” $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$.

PROOF: From the previous results in this section, in particular from Proposition 3.3.6, the inner part of the ergosurface is defined for all allowed values of the parameters, lies under the Killing horizon $\{y = y_c\}$, “under” the singular set, and meets the latter only at $(x, Y) = (0, 0)$. In particular, it is smooth, connected, reaches the axis of rotation $x = \pm 1$ related to the coordinate φ , and is therefore diffeomorphic to $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$.

For the outer part, we study its intersection with the set $\{y = -1\}$. To do so, recall the formula :

$$H(-1, x) = (1 + \nu - \lambda) (\nu(1 + \lambda - \nu)x^2 + 1 - \nu - \lambda) .$$

In particular, we have $H(-1, \pm 1) = (1 - \nu)(1 + \nu - \lambda)^2 > 0$. Since $H(y_h, \pm 1) < 0$, we obtain that $y_{e-}(\pm 1)$ are both in $(y_h, -1)$.

Then, the roots x of $H(-1, x) = 0$ exist if and only if $\nu + \lambda \geq 1$, and read

$$x \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{\nu + \lambda - 1}{\nu(1 + \lambda - \nu)}} \right\} .$$

Those values of the roots are in $(-1, 1)$ for all allowed values of ν and λ such that $\nu + \lambda \geq 1$, as shown in the proof of Lemma 3.3 in Section 3 of [CCGPGL09].

From this, we conclude that if $\nu + \lambda < 1$, the whole graph of y_{e-} forms a connected set in the spacetime, above the event horizon, and since it is smooth and defined for all allowed values of the parameter x , it is again diffeomorphic to $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$.

If $\nu + \lambda > 1$, the intersection of the graph of y_{e-} with the spacetime has two connected components, $\{y_{e-}(x) : x \in [-1, -\sqrt{\frac{\nu + \lambda - 1}{\nu(1 + \lambda - \nu)}}]\}$ and $\{y_{e-}(x) : x \in [\sqrt{\frac{\nu + \lambda - 1}{\nu(1 + \lambda - \nu)}}, 1]\}$. Therefore, after taking into account the rotations along the coordinates φ and ψ , we obtain that the part of the outer ergosurface which lies in the spacetime is diffeomorphic to $\mathbb{R} \times (S^3 \cup S^3)$ (the product of the real line with two disjoint 3-spheres). In particular, it has two connected components.

In the limiting case $\nu + \lambda = 1$, the graph of y_{e-} intersects the set $\{y = -1\}$ exactly once, at $x = 0$. Otherwise, it is located in the spacetime. The ergosurface in this case is therefore diffeomorphic to a “pinched” $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$. \square

Deuxième partie

Problèmes de Géométrie Riemannienne issus de la Relativité Générale

Chapitre 4

Problème de recollement pour les données initiales de Kerr-de Sitter

Ce chapitre est consacré à la construction de données initiales satisfaisant les équations des contraintes du vide avec constante cosmologique strictement positive, coïncidant avec les données initiales des espaces-temps de Kerr-Kottler-de Sitter dans la région asymptotique, mais pas globalement.

Sommaire

4.1	Introduction	116
4.2	Étude de l'opérateur des contraintes	118
4.3	Espaces-temps de Kerr-Kottler-de Sitter	119
4.3.1	Métrique et extension analytique	119
4.3.2	Données initiales induites	122
4.4	Construction des données perturbées	125
4.5	Résolution de l'équation des contraintes	127
4.5.1	Projection sur le noyau \mathcal{K}_0	127
4.5.2	Calcul des charges globales	128
4.5.3	Calcul des charges dans le cas KKdS	129
4.5.4	Charges des données perturbées	130

4.1 Introduction

Dans cette partie, on étudie les équations des contraintes de la relativité générale, pour lesquelles on cherche à construire des familles de solutions. L'intérêt de cette construction, par l'intermédiaire de la formulation de Cauchy de la relativité générale et par les résultats de Choquet-Bruhat ([FB52, CBG69], également décrits dans [BI04]), est qu'elle revient à construire des familles d'espaces-temps solutions des équations d'Einstein. L'objet central de cette étude est l'opérateur Φ des contraintes, défini comme un opérateur géométrique d'une variété lisse M :

$$\Phi : \Gamma(\mathcal{M}_{et} \times S^2T^*M) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{R} \times T^*M) , \quad (4.1)$$

avec

$$\Phi(g, k) := \begin{pmatrix} R(g) - 2\Lambda - |k|_g^2 + (\text{tr}_g k)^2 \\ 2(\text{div}_g k - \hat{d}(\text{tr}_g k)) \end{pmatrix} .$$

Ici, \mathcal{M}_{et} désigne l'espace des métriques riemanniennes sur M , alors que S^2T^*M est le fibré des $(0, 2)$ -formes bilinéaires symétriques.

On s'intéressera ici plus précisément au cas où la constante cosmologique Λ est strictement positive. Au-delà de son intérêt mathématique, ce cas est particulièrement pertinent pour les cosmologistes, puisque des observations récentes suggèrent fortement que l'espace-temps modélisant l'Univers rentre dans ce cadre (voir par exemple [PAG⁺99]) .

Soit (M, g, k) un triplet formé d'une variété lisse M de dimension $n \geq 3$, d'une métrique riemannienne g sur M et d'un $(0,2)$ -tenseur symétrique sur M . On dit que (M, g, k) est un *triplet de données initiales* s'il satisfait à l'équation des contraintes

$$\Phi(g, k) = 0 .$$

On dit aussi que (g, k) est un *couple de données initiales* dans ce cas.

La méthode générale de construction de données initiales, dite *méthode de recollement*, que l'on utilise dans ce travail a été initiée en 2000 par Corvino ([Cor00]). Cette méthode s'appuie sur le caractère « sous-déterminé » des équations d'Einstein : en effet, il est possible de produire de grandes familles de solutions aux équations des contraintes, coïncidant exactement avec les données initiales d'espaces-temps « modèles » en dehors d'un compact, mais pourtant différentes globalement des données induites par ces espaces-temps de référence.

À l'aide de la formulation de Cauchy de la relativité générale, on obtient ainsi des familles d'espaces-temps, coïncidant avec des espace-temps « modèles » en dehors du domaine de dépendance d'un compact, mais étant différents de ces espaces-temps de référence.

Ainsi, Corvino construit, dans le cas statique, des métriques riemanniennes asymptotiquement plates à courbure scalaire nulle, coïncidant avec une donnée initiale de Schwarzschild en dehors d'un compact, mais non-triviales. Plus tard, Corvino et Schoen d'une part dans [CS06] et Chruściel et Delay d'autre part dans [CD03], généralisent le procédé au cas non-statique et construisent des familles de données initiales asymptotiquement plates, solutions des équations des contraintes du vide, coïncidant exactement avec les

données initiales d'espaces-temps de Kerr en dehors d'un compact, et ne coïncidant pas nécessairement de manière globale avec des données initiales de Kerr.

Le procédé, de recollement, pour construire ces familles est le suivant : on part de données initiales solutions des équations des contraintes et asymptotes à des données initiales de référence, puis on les perturbe, en imposant que les équations des contraintes soient toujours satisfaites à l'issu de la perturbation.

Les cas à constante cosmologique non-nulle ont été traités récemment en reprenant cette méthode, par Chruściel et Delay dans le cas $\Lambda < 0$ ([CD09]) et par Chruściel et Pollack dans le cas $\Lambda > 0$ ([CP08]). Dans ce dernier cas, ils ont effectué ce procédé de recollement dans le cas statique, pour des métriques asymptotes à une donnée initiale de Kottler-Schwarzschild-de Sitter (KSdS). Par la suite, Chruściel, Pacard et Pollack ont étendu ce résultat dans [CPP09] pour des métriques génériques à courbure scalaire constante strictement positive.

Le présent travail se propose de généraliser au cas non-statique dans le cas $\Lambda > 0$. Le point de départ est un couple de données initiales (g, k) solution des équations des contraintes et asymptote à des données initiales de KSdS. La première étape consiste alors à considérer une interpolation de (g, k) avec un élément d'une famille de données initiales d'espaces-temps de référence, à l'aide d'une fonction « cut-off ». On veut ensuite corriger les nouvelles données initiales obtenues par une perturbation afin de retrouver des données solutions des équations de contrainte. On est donc amené à étudier la linéarisation $D\Phi_{(g_0, k_0)}$ de l'opérateur des contraintes évalué en les données initiales (g_0, k_0) d'un espace-temps de KSdS. En particulier, on s'intéresse à son co-noyau, que l'on note \mathcal{K}_0 , et qui s'avère être non-trivial et de dimension finie dans les deux cas. Le présent travail est organisé de la manière suivante :

Après un rappel des propriétés de l'opérateur des contraintes à la section 4.2, et notamment l'étude de la dimension du co-noyau de son linéarisé évalué en des données KSdS, la section 4.3 revient sur les propriétés des espaces-temps de Kerr-Kottler-de Sitter (KKdS), en particulier de leurs données initiales (les données initiales de KSdS ont été décrites dans [CP08]).

La section 4.4 est consacrée à la construction d'une solution au problème de perturbation projeté sur un supplémentaire du co-noyau.

La section 4.5, à l'aide des expressions des charges globales, va permettre de réaliser l'ajustement nécessaire sur les paramètres pour obtenir la résolution complète du problème, répondant ainsi au Théorème 4.4.1, énoncé dans la section 4.5. Comme pour les problèmes de recollement déjà effectués ([Cor00], [CD03], [CS06], [CP08]), le point-clef consiste à utiliser une famille de données initiales de références paramétrée par autant de variables indépendantes qu'il y a de dimensions du co-noyau.

Dans [CP08] pour le cas statique, le co-noyau (du linéarisé de la courbure scalaire en une métrique KSdS) est de dimension 1 et la famille de métriques de références choisie est celle des métriques de KSdS, paramétrée par la masse m . Ici, en raison de la dimension plus élevée du co-noyau \mathcal{K}_0 du linéarisé de l'opérateur des contraintes évalué en des données initiales KSdS, on ne peut pas espérer pouvoir effectuer un recollement de données initiales (g, k) asymptotiquement KSdS de paramètre m_0 avec des données initiales exactement

KSdS de paramètre m . On a en effet besoin d'une famille de données initiales, servant de modèles pour le recollement, paramétrée par autant de paramètres indépendants qu'il y a de dimensions dans le co-noyau. Celui-ci étant de dimension 4 (cf. section 4.2), un candidat potentiel pour cette famille est la famille des données initiales des espaces-temps de KKdS, de paramètres m et $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

4.2 Étude de l'opérateur des contraintes

On considère les équations des contraintes du vide, avec constante cosmologique Λ :

$$\Phi(g, k) := \begin{pmatrix} R(g) - 2\Lambda - |k|_g^2 + (\text{tr}_g k)^2 \\ \nabla_i(k^{ij} - (\text{tr}_g k)g^{ij}) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.2)$$

portant sur g , métrique riemannienne sur une variété M de dimension n , et k , $(0,2)$ -tenseur symétrique sur M . Ces équations s'obtiennent à partir des équations de Gauss-Codazzi-Mainardi (voir [BI04]) que doivent satisfaire les quantités induites (première et seconde formes fondamentales) sur une hypersurface de genre espace d'un espace-temps (\mathcal{M}, \bar{g}) satisfaisant les équations d'Einstein du vide (avec constante cosmologique Λ) $\text{Ric}(\bar{g}) = \frac{2\Lambda}{n-1}\bar{g}$.

On va s'intéresser dans la suite au linéarisé de cet opérateur des contraintes évalué en un couple (g_0, k_0) , $D\Phi_{(g_0, k_0)}$, en particulier à $D\Phi_{(g_0, k_0)}^*$, son adjoint formel par rapport à g_0 , qui s'écrit :

$$D\Phi_{(g_0, k_0)}^*(f, Z) = \begin{pmatrix} L_{g_0}^*(f) - \frac{1}{2}\nabla_p(k_0^{pq}Z_q)g_0 + \frac{1}{2}\nabla_p(Z^p k_0) \\ -\frac{1}{2}\mathcal{L}_Z g_0 + (\text{div}_{g_0} Z)g_0 - 2fk_0 + 2f(\text{tr}_{g_0} k_0)g_0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

où $L_{g_0}^*$ est l'adjoint du linéarisé de l'opérateur courbure scalaire R en g_0 :

$$L_{g_0}^* f = -(\Delta_{g_0} f)g_0 + \text{Hess}_{g_0} f - f\text{Ric}_{g_0},$$

les arguments f et Z étant respectivement une fonction et un champ de vecteur sur M . Les données initiales de Killing, ou *KIDs* (pour *Killing Initial Data*) de (g_0, k_0) sont par définition les éléments du noyau de $D\Phi_{(g_0, k_0)}^*$.

On s'intéresse aux données initiales de l'espace-temps de Kottler-Schwarzschild-de Sitter (KSdS).

La métrique d'espace-temps peut s'écrire

$$\bar{g} = -V(r)dt^2 + \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 h_0, \quad (4.4)$$

où $V(r) = f(r)^2 = 1 - \frac{2m}{r} - r^2$ et où h_0 est la métrique ronde canonique sur la sphère unité \mathbb{S}^2 .

Les données initiales induites sur l'hypersurface d'équation $\{t = 0\}$ sont de la forme $(g_0, 0)$ (espace-temps statique), ce qui entraîne que

$$D\Phi_{(g_0, 0)}^*(f, Z) = \begin{pmatrix} L_{g_0}^* f \\ -\frac{1}{2}\mathcal{L}_Z g_0 + (\text{div}_{g_0} Z)g_0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

On veut trouver l'espace des *KIDs* relativement aux données de KSdS, on doit donc calculer le noyau de l'opérateur ci-dessus.

Pour cela, il faut d'une part trouver l'espace des fonctions f sur M telles que $L_{g_0}^* f = 0$: cet espace est de dimension 1 pour le cas où l'espace-temps KSdS est non-trivial (avec masse non-nulle), voir le Lemme 3.3 p 647 de [CP08] pour une preuve de ce résultat. D'autre part, on cherche les champs de vecteurs Z tangents à M tels que $-\frac{1}{2}\mathcal{L}_Z g_0 + (\operatorname{div}_{g_0} Z)g_0 = 0$. On montre que les solutions de cette dernière équation sont exactement les champs de Killing pour g . En effet, rappelons que si Z est un champ de Killing, on a

$$(\mathcal{L}_Z g_0)_{ij} = (\nabla_i Z)_j + (\nabla_j Z)_i = 0 ,$$

ce qui entraîne que Z est à divergence nulle en prenant la trace par rapport à g et donc que Z annule la deuxième ligne de l'équation (4.5). Réciproquement, si Z satisfait cette condition, alors en prenant la trace par rapport à g de la deuxième ligne, on obtient que $2 \operatorname{div}_{g_0} Z = 0$ et finalement que $\mathcal{L}_Z g_0 = 0$, c'est-à-dire que Z est de Killing. Au vu de la métrique \bar{g} , les champs de Killing de g_0 forment un espace de dimension 3 (la dimension du groupe des isométries de la sphère \mathbb{S}^2), on en déduit que la dimension de l'espace des *KIDs* est

$$\dim \ker D\Phi_{(g_0,0)}^* = 4 . \quad (4.6)$$

Dans la suite, on note $\mathcal{K}_0 := \ker D\Phi_{(g_0,0)}^*$. On peut écrire

$$\mathcal{K}_0 = \operatorname{Vect} (V_0, V_1, V_2, V_3) ,$$

avec $V_0 = (f, 0)$, $V_i = (0, Z_i)$, où $f(r) = \sqrt{V(r)}$ et où $Z_i = x^j \frac{\partial}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^j}$, pour (i, j, k) réalisant une permutation circulaire de $(1, 2, 3)$.

Dans la suite, on aimerait donc trouver une famille d'espaces-temps, à 4 paramètres, dans laquelle un représentant pourrait être choisi pour un recollement avec des données initiales solution des équations des contraintes et asymptotiquement Delaunay (i.e. asymptote à une tranche espace d'un espace-temps de KSdS). Un candidat naturel pour cette famille est la famille des espaces-temps de Kerr-Kottler-de Sitter (KKdS).

4.3 Espaces-temps de Kerr-Kottler-de Sitter

4.3.1 Métrique et extension analytique

Les espaces-temps de Kerr-Kottler-de Sitter (KKdS) forment une famille à deux paramètres m et a de solutions des équations d'Einstein du vide avec constante cosmologique strictement positive (ici fixée égale à 3). Dans les coordonnées de Boyer-Lindquist (r, θ, φ) , on a l'écriture de ces métriques :

$$\bar{g}_{m,a} = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{d\theta^2}{\Delta_\theta} \right) + \sin^2 \theta \frac{\Delta_\theta}{\rho^2} \left(\frac{adt - (r^2 + a^2)d\varphi}{1 + \Lambda a^2/3} \right)^2 - \frac{\Delta_r}{\rho^2} \left(\frac{dt - a \sin^2 \theta d\varphi}{1 + \Lambda a^2/3} \right)^2 , \quad (4.7)$$

avec

$$\Delta_r = (r^2 + a^2)\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) - 2mr, \quad \Delta_\theta = 1 + \frac{\Lambda}{3}a^2 \cos^2 \theta, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Dans la suite, on prend des valeurs des paramètres $m > 0$ et a suffisamment petites telles que Δ_r a 4 racines réelles distinctes, que l'on note

$$r_1 < r_2 < r_3 < r_4.$$

Les coordonnées θ et φ ci-dessus sont les coordonnées usuelles sur la sphère unité, alors que r est à valeurs dans l'intervalle (r_3, r_4) , sur lequel $\Delta_r > 0$. Dans cette plage de valeurs de r , la métrique $\bar{g}_{m,a}$ est une métrique lorentzienne, analytique, solution des équations d'Einstein du vide avec constante cosmologique $\Lambda > 0$. L'écriture de la métrique dans les coordonnées (t, r, θ, φ) donne lieu à une singularité apparente en $r = r_3$ et en $r = r_4$. Il est cependant possible de construire une extension analytique de cette solution à travers les horizons $\{r = r_3\}$ (horizon des événements d'un trou noir) et $\{r = r_4\}$ (horizon cosmologique). La construction, déjà discutée sommairement dans [GH77], est la suivante : on définit une nouvelle coordonnée u et une nouvelle coordonnée $\hat{\varphi}$ par :

$$du = dt + \frac{\lambda}{r - r_3} dr, \quad d\hat{\varphi} = d\varphi - \mu dt,$$

où λ et μ sont des constantes à déterminer. En examinant maintenant les coefficients de la métrique $\bar{g}_{m,a}$ dans les coordonnées $(u, r, \theta, \hat{\varphi})$, le coefficient \bar{g}_{rr} en particulier devient :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{rr} = & -\frac{\Delta_r}{A^2 \rho^2} \frac{\lambda^2}{(r - r_3)^2} (1 - a\mu \sin^2 \theta)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r} \\ & + \sin^2 \theta \frac{\Delta_\theta}{A^2 \rho^2} \frac{\lambda^2}{(r - r_3)^2} (a - \mu(r^2 + a^2))^2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

où l'on a introduit $A := 1 + \frac{\Lambda}{3}a^2$ pour simplifier l'écriture. La première ligne de (4.8) admet a priori un pôle d'ordre 1 en $r = r_3$, alors que la deuxième ligne y admet a priori un pôle d'ordre 2. Mais en choisissant

$$\mu = \frac{a}{r_3^2 + a^2}, \quad (4.9)$$

il n'y a plus de partie singulière en $r = r_3$ à la deuxième ligne de (4.8). Quant à l'annulation de la partie singulière de la première ligne en $r = r_3$, elle requiert le choix de λ satisfaisant à :

$$\lambda^2 = \frac{9}{\Lambda^2} \frac{A^2 (r_3^2 + a^2)^2}{(r_4 - r_3)^2 (r_3 - r_2)^2 (r_3 - r_1)^2}. \quad (4.10)$$

On peut vérifier que ces valeurs conviennent également pour assurer que les autres coefficients de la métrique \bar{g} dans les coordonnées $(u, r, \theta, \hat{\varphi})$ sont bornés au voisinage de $\{r = r_3\}$, et c'est ainsi que l'on peut étendre analytiquement \bar{g} en un espace-temps solution des équations d'Einstein avec constante cosmologique $\Lambda > 0$ sur la région $\{r_2 < r < r_4\}$.

On peut voir cette région comme l'union des deux régions **I** et **II** sur le diagramme de la FIGURE 4.1.

On peut faire de même en introduisant une nouvelle coordonnée v par :

$$dv = dt - \frac{\lambda}{r - r_3} dr ,$$

où $\lambda > 0$ est donné par la formule (4.10) ; les coefficients de la métrique sont alors à nouveau bornés en $r = r_3$ lorsque qu'exprimés dans les coordonnées $(v, r, \theta, \hat{\varphi})$ et \bar{g} s'étend analytiquement à travers l'horizon $\{r = r_3\}$ comme dans le cas précédent (régions **I** et **III** de la FIGURE 4.1).

Il serait tentant de se placer maintenant dans les coordonnées $(u, v, \theta, \hat{\varphi})$ pour recouvrir les deux extensions précédentes, mais la métrique \bar{g} devient dégénérée en $\{r = r_3\}$ dans ces coordonnées. Un moyen classique ([Kru60, Car68, HE73]) de contourner cette difficulté est d'introduire les coordonnées exponentielles en posant :

$$\hat{u} := e^{cu} , \quad \hat{v} := -e^{-cv} ,$$

avec c une constante à choisir ultérieurement. Dans les coordonnées $(\hat{u}, \hat{v}, \theta, \hat{\varphi})$, les coefficients de la métrique peuvent s'écrire

$$\bar{g}_{\hat{u}\hat{u}} = \frac{\bar{g}_{uu}}{c^2 \hat{u}^2} = \frac{\bar{g}_{uu} \hat{v}^2}{c^2 \hat{u}^2 \hat{v}^2} , \quad \bar{g}_{\hat{u}\hat{v}} = \frac{\bar{g}_{uv}}{c^2 \hat{u} \hat{v}} , \quad \bar{g}_{\hat{u}\hat{\varphi}} = \frac{\bar{g}_{u\hat{\varphi}}}{c \hat{u} \hat{v}} ,$$

et ainsi de suite. Or, on remarque d'une part l'égalité $\hat{u}\hat{v} = -e^{c(u-v)} = -e^{2c\lambda \ln(r-r_3)}$ et d'autre part que les coefficients $\bar{g}_{uu} = \bar{g}_{vv}$ s'annulent à l'ordre 2 en $r = r_3$, tandis que les coefficients \bar{g}_{uv} , $\bar{g}_{u\hat{\varphi}}$ et $\bar{g}_{v\hat{\varphi}}$ s'y annulent à l'ordre 1 vu les choix précédents de λ et de μ . En prenant

$$c = \frac{1}{2\lambda} , \tag{4.11}$$

on s'assure donc que les coefficients de \bar{g} dans les coordonnées $(\hat{u}, \hat{v}, \theta, \hat{\varphi})$ sont bornés et lisses en $r = r_3$. De plus, r est fonction de \hat{u} et \hat{v} par la relation

$$\hat{u}\hat{v} = -(r - r_3) ,$$

et \bar{g} , initialement définie dans la région $\{\hat{u} > 0, \hat{v} < 0, r_3 < r < r_4\}$, s'étend analytiquement dans la région $\{\hat{u} \in \mathbb{R}, \hat{v} \in \mathbb{R}, r_2 < r < r_4\}$ (en particulier à travers l'horizon de bifurcation $\{\hat{u}\hat{v} = 0\}$) en une solution des équations d'Einstein avec constante cosmologique $\Lambda > 0$. Sur le diagramme de la FIGURE 4.1, cette extension correspond à l'union des quatre régions numérotées de **I** à **IV**.

On peut reproduire le procédé pour étendre à travers l'horizon $\{r = r_4\}$, dit *cosmologique* (voir [GH77]) , la différence venant des valeurs des constantes à choisir

$$\tilde{\mu} = \frac{a}{r_4^2 + a^2} ,$$

et

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{9}{\Lambda^2} \frac{A^2 (r_4^2 + a^2)^2}{(r_4 - r_3)^2 (r_4 - r_2)^2 (r_4 - r_1)^2} ,$$

au lieu de (4.9) et de (4.10) respectivement.

On peut encore procéder de la même manière pour construire des extensions analytiques à travers les horizons $\{r = r_2\}$ (horizon des événements « intérieur » du trou noir, également horizon de Cauchy) et à travers $\{r = r_1\}$ (horizon cosmologique « intérieur »).

En itérant l'opération, on construit ainsi une extension analytique maximale $(\widehat{\mathcal{M}}_{m,a}, \widehat{g}_{m,a})$ de $\bar{g}_{m,a}$, dont on peut visualiser les liens de causalité entre les différentes régions à l'aide du diagramme de Carter-Penrose (voir FIGURE 4.1).

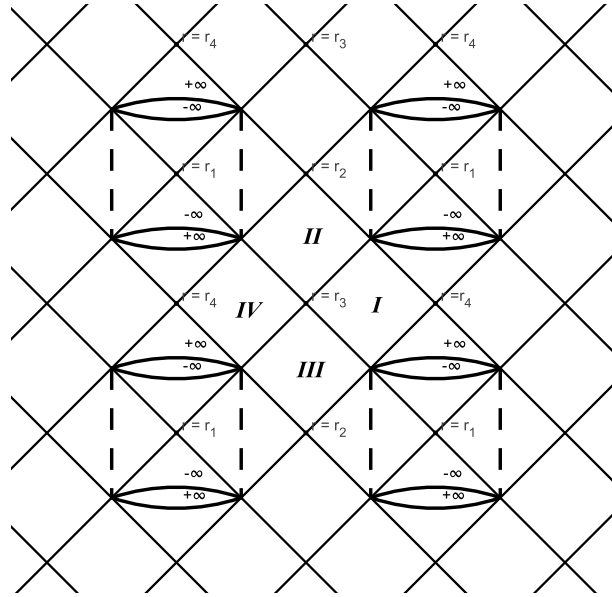


FIGURE 4.1 – Diagramme de Carter-Penrose de l'espace-temps de Kerr-Kottler-de Sitter illustrant les relations causales entre les différentes régions de l'extension analytique.

Les segments en pointillés verticaux représentent l'emplacement de la singularité $\{r = 0, \theta = \pi/2\}$.

4.3.2 Données initiales induites

Il apparaît à la lecture du diagramme ci-dessus que les données initiales sur la tranche $\Sigma := \{t = 0\}$ (ou plus précisément son extension), à savoir la métrique induite $\hat{g}_{m,a}$ et la seconde forme fondamentale $\hat{k}_{m,a}$, sont périodiques; on verra dans la suite qu'il existe effectivement une coordonnée y décrivant \mathbb{R} telle que r est une fonction lisse périodique de y à valeurs dans $[r_3, r_4]$.

Dans la suite, on ne considère que le cas $\Lambda = 3$, le cas général $\Lambda > 0$ pouvant s'en déduire par un changement d'échelle.

Pour calculer les coefficients de $\hat{k}_{m,a}$, on commence par calculer les coordonnées du vecteur normal ν à Σ : on a d'abord $\nu = \nu^t \partial_t + \nu^\varphi \partial_\varphi$ (par les conditions $\bar{g}(\nu, \partial_r) = \bar{g}(\nu, \partial_\theta) = 0$).

La condition $\bar{g}(\nu, \partial_\varphi) = 0$ entraîne qu'il existe une fonction λ telle que $\nu^t = \lambda \bar{g}_{\varphi\varphi}$ et $\nu^\varphi = -\lambda \bar{g}_{t\varphi}$.

Enfin, la condition $\bar{g}(\nu, \nu) = -1$ donne la valeur (au signe près) de λ et détermine ainsi complètement ν , par la formule :

$$\lambda^2 = -\frac{1}{\bar{g}_{\varphi\varphi} \det(\bar{g}_{(t,\varphi)})},$$

où $\bar{g}_{(t,\varphi)}$ est la métrique restreinte aux seules coordonnées t et φ . On trouve en particulier

$$\det(\bar{g}_{(t,\varphi)}) = -\frac{\Delta_r \Delta_\theta \sin^2 \theta}{(1+a^2)^4}.$$

À l'aide ensuite de la formule $k_i^j = (D_i \nu)^j$, on trouve les coefficients de la seconde forme $k = \overset{\circ}{k}_{m,a}$ en calculant l'expression

$$k_{i\varphi} = -\frac{1}{2} (\nu^t \partial_i \bar{g}_{t\varphi} + \nu^\varphi \partial_i \bar{g}_{\varphi\varphi})$$

pour $i = r, \theta, \varphi$. En particulier, $k_{\varphi\varphi} = 0$, de même que tous les coefficients de k à l'exception de $k_{r\varphi}$ et $k_{\theta\varphi}$. On donne ici l'expression de $k_{r\varphi}$ qui sera utile plus tard :

$$k_{r\varphi} = \frac{\sin^3 \theta a m \sqrt{\Delta_\theta} (a^2(a^2 - r^2) \cos^2 \theta - r^2 a^2 - 3r^4)}{\rho^3 (1+a^2) \sqrt{\Delta_r} \sqrt{\Delta_\theta} (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r a^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.12)$$

On souhaite maintenant mettre en évidence la périodicité des données initiales de ces espaces-temps. Dans le cas KSdS, Chruściel et Pollack ont montré dans [CP08] que la donnée initiale

$$b_m = \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 g_{\mathbb{S}^2}$$

est égale à une métrique de Delaunay

$$\overset{\circ}{g}_\varepsilon = u_\varepsilon^4(y) (dy^2 + g_{\mathbb{S}^2}), \quad (4.13)$$

où y est à valeurs sur \mathbb{R} et où u_ε est solution strictement positive de

$$u'' - \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}u^5 = 0, \quad u(0) = \varepsilon = \min u,$$

ε appartenant à l'intervalle $(0, \bar{\varepsilon})$, où $\bar{\varepsilon} = (\frac{1}{3})^{1/4}$. Les solutions positives de cette équation ont été étudiées par Schoen dans [Sch89] et par Mazzeo, Pollack et Uhlenbeck dans [MPU96]. Il en ressort qu'elles sont périodiques, de période dépendant de ε .

Le changement de coordonnées de r à y est le suivant :

$$\frac{dy}{dr} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2mr - r^4}} = \frac{1}{r\sqrt{V(r)}}, \quad (4.14)$$

ce qui définit bien y comme fonction (intégrale elliptique) de r sur tout intervalle où V est strictement positive, en particulier sur (r_b, r_c) , où r_b et r_c sont les deux racines strictement

positives du polynôme $rV(r) = r - 2m - r^3$. D'autre part, r s'exprime en fonction de u_ε comme $r = u_\varepsilon^2$, ce qui en fait bien une fonction de y définie sur \mathbb{R} , lisse, périodique et paire, la période $T(\varepsilon)$ s'obtenant alors par

$$T(\varepsilon) = 2 \int_{r=r_b}^{r_c} \frac{dr}{r \sqrt{V(r)}} .$$

Les paramètres ε et m sont reliés par $\varepsilon^2 = r_b(m)$.

Maintenant si l'on a une autre donnée initiale de KSdS, de masse m' , alors on peut également la caractériser par $\varepsilon' = \sqrt{r_b(m')}$, l'écrire dans les coordonnées (y, θ, φ) comme $u_{\varepsilon'}^4(y - y_0)(dy^2 + g_{\mathbb{S}^2})$ et obtenir la coordonnée r' en utilisant l'analogie de la formule (4.14) ci-dessus, en rajoutant un « ' » aux quantités r et m .

On va maintenant s'inspirer de ces résultats obtenus pour KSdS pour trouver des coordonnées dans lesquelles on peut faire apparaître la périodicité des données initiales des espaces-temps de KKdS. La métrique induite sur $\{t = 0\}$ étant $\mathring{g}_{m,a}$ avec

$$\mathring{g}_{m,a} = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{d\theta^2}{\Delta_\theta} \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2(1+a^2)^2} [\Delta_\theta(r^2 + a^2)^2 - \Delta_r a^2 \sin^2 \theta] d\varphi^2 ,$$

on pose

$$\frac{dy}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_r}} , \quad \rho^2 =: u_a^4(y, \theta) . \quad (4.15)$$

Ce changement de variables permet de définir cette fois y comme fonction lisse de r sur l'intervalle (r_3, r_4) où $\Delta_r > 0$. En rajoutant le choix de l'origine $r(y = 0) = r_3$, on a également r fonction (elliptique)¹ de y , qui se prolonge donc par parité, puis par périodicité en une fonction définie sur \mathbb{R} et qui est lisse car la quantité $\frac{dy}{dr}$ diverge quand r tend vers les racines r_3 ou r_4 de Δ_r , ou de manière équivalente, la quantité $\frac{dr}{dy}$ tend vers 0 quand y tend vers $y(r_3)(= 0)$ ou $y(r_4)$.

Ainsi, la métrique $\mathring{g}_{m,a}$ peut se réécrire dans les coordonnées (y, θ, φ) comme

$$\mathring{g}_{m,a} = u_a^4(y, \theta) \left(dy^2 + \frac{d\theta^2}{\Delta_\theta} \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2(1+a^2)^2} [\Delta_\theta(r^2 + a^2)^2 - \Delta_r a^2 \sin^2 \theta] d\varphi^2 , \quad (4.16)$$

et donc en une métrique périodique en y de période $T(m, a)$ donnée par l'intégrale

$$T(m, a) = 2 \int_{r_3}^{r_4} \frac{dr}{\sqrt{\Delta_r}} . \quad (4.17)$$

Le même changement de variable permet également d'obtenir la seconde forme $\mathring{k}_{m,a}$ comme étant périodique de même période en la coordonnée y .

Pour des données initiales différentes $(\mathring{g}_{m',a'}, \mathring{k}_{m',a'})$, le même procédé permet à nouveau d'exprimer celles-ci comme étant périodiques en y , de période $T(m', a')$ calculée à l'aide de la formule (4.17) où l'on aura pris soin de remplacer m et a par m' et a' .

La formule (4.17) montre par ailleurs que T est fonction continue des paramètres m et a (sur le domaine des paramètres admissibles).

1. L'auteur souhaite remercier Jacques Lafontaine pour une discussion sur les fonctions et intégrales elliptiques

4.4 Construction des données perturbées

L'objectif de cette section et de la suivante est de démontrer le théorème :

Théorème 4.4.1 *Soient $(g, k) \in \Gamma(\mathcal{M}_{et} \times S^2 T^* M)$ un couple de données initiales formé d'une métrique riemannienne et d'un $(0, 2)$ -tenseur symétrique sur une variété lisse M de dimension 3, et solution des équations des contraintes $\Phi(g, k) = 0$. On suppose que M contient une région de la forme $M_\infty = [R_0, \infty) \times \mathbb{S}^2$, sur laquelle les données (g, k) sont asymptotes, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre 4, aux données initiales $(g_0, k_0) = (b_{m_0}, 0)$ d'un espace-temps KSdS de paramètres m_0 . Alors il existe un nombre $m > 0$, un vecteur \vec{a} de \mathbb{R}^3 et un couple de données initiales (\tilde{g}, \tilde{k}) solution de $\Phi(\tilde{g}, \tilde{k}) = 0$, qui est distinct de (g, k) seulement sur le complémentaire d'un compact de M_∞ d'une part et qui coïncide avec les données initiales $(\mathring{g}_{m, \vec{a}}, \mathring{k}_{m, \vec{a}})$ d'un espace-temps de KKdS sur le complémentaire d'un compact dans M_∞ d'autre part.*

Dans cette section, on commence d'abord par projeter le problème sur un supplémentaire orthogonal du co-noyau \mathcal{K}_0 du linéarisé de l'opérateur des contraintes $D\Phi_{(g_0, 0)}$.

Soient (g, k) vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus. On pourra supposer sans perte de généralité dans toute la suite que $R_0 = 0$.

Dans les coordonnées (y, θ, φ) décrites à la section précédente, $T = T(m_0)$ est la période de g_0 suivant la coordonnée y .

Pour $(m, \vec{a}) \in \mathbb{R}^4$ et pour $i \in \mathbb{N}$, $\sigma \in [0, T)$, on commence par faire une interpolation entre (g, k) et $(\mathring{g}_{m, \vec{a}}, \mathring{k}_{m, \vec{a}})$ dans la région $\Omega_{i, \sigma}$ où

$$\Omega_{i, \sigma} = (iT + \sigma + \delta, (i+1)T + \sigma - \delta) \times \mathbb{S}^2,$$

où δ est une constante, $\delta \in (0, T/3)$. $\Omega_{i, \sigma}$ est donc une région correspondant au produit d'un intervalle de longueur $T - 2\delta$ avec \mathbb{S}^2 . Le fait d'avoir introduit cette constante $\delta > 0$ permet de s'assurer que la fonction $f(r) = \sqrt{V(r)}$ reste strictement positive sur $\bar{\Omega}$, ce qui nous sera utile à la section 4.5.

L'interpolation sur cette région s'écrit :

$$\begin{aligned} g_{m, \vec{a}, i, \sigma} &:= (1 - \chi_{i, \sigma})g + \chi_{i, \sigma} \mathring{g}_{m, \vec{a}}, \\ k_{m, \vec{a}, i, \sigma} &:= (1 - \chi_{i, \sigma})k + \chi_{i, \sigma} \mathring{k}_{m, \vec{a}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Elle est illustrée à la FIGURE 4.2. Ici, les fonctions $\chi_{i, \sigma}$ sont des *cut-off* à support compact dans $(iT + \sigma + \delta, (i+1)T + \sigma - \delta)$. Plus précisément, toutes ces fonctions cut-off sont définies à partir d'une seule, dont on translate le support, c'est-à-dire qu'on prend $\chi_{i, \sigma}(y) = \chi(y - iT - \sigma)$, où χ est une fonction lisse, à valeurs dans $[0, 1]$, nulle sur $[0, T/3]$ et valant 1 sur $[2T/3, T]$. On va ainsi pouvoir rendre l'image $\Phi(g', k')$ de (g', k') par l'opérateur des contraintes arbitrairement petite sur les données interpolées $g' = g_{m, \vec{a}, i, \sigma}$ et $k' = k_{m, \vec{a}, i, \sigma}$, cela en prenant i assez grand puis en ajustant les paramètres m, \vec{a}, σ . Le problème est que la zone de recollement n'est pas fixe et dépend de i , ce qui empêche une utilisation directe du Théorème 5.9 de [CD03], où la zone de recollement (compacte à bord) et la fonction définissante doivent être fixées.

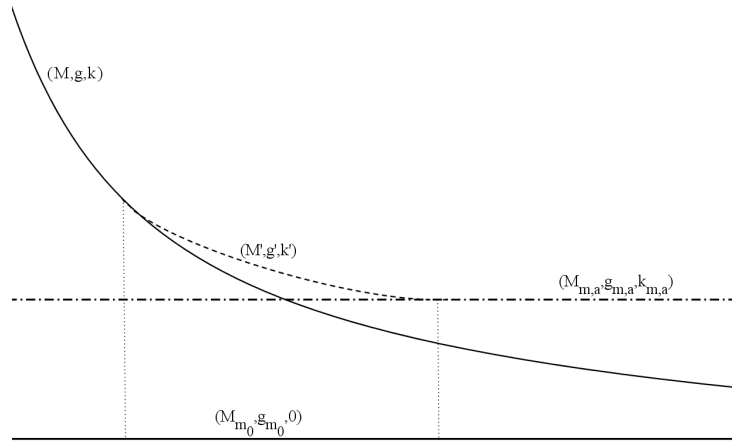


FIGURE 4.2 – Principe de recollement.

On part de la courbe (M, g, k) asymptote à la ligne horizontale pleine représentant les données initiales $(M_{m_0}, \dot{g}_{m_0}, 0)$ et on recolle avec les données initiales de $(M_{m,a}, \dot{g}_{m,a}, \dot{k}_{m,a})$ (ligne horizontale en pointillés) pour obtenir (M', g', k') , la zone de recollement se situant entre les deux segments pointillés verticaux.

On peut contourner cette difficulté en définissant les données obtenues par translation à partir de (g, k) ,

$$g_{i,\sigma}(y, \theta, \varphi) := g(y + iT + \sigma, \theta, \varphi) ; k_{i,\sigma}(y, \theta, \varphi) := k(y + iT + \sigma, \theta, \varphi) .$$

On définit de même $\dot{g}_{m,\vec{a},i,\sigma}$ et $\dot{k}_{m,\vec{a},i,\sigma}$ à partir de $\dot{g}_{m,\vec{a}}$ et de $\dot{k}_{m,\vec{a}}$ respectivement. On fait le choix

$$\sigma := \sigma(i, T, T') := iT' \pmod{T} \in [0, T) ,$$

de sorte que les métriques $\dot{g}_{m,\vec{a},i,\sigma}$ et g_0 , périodiques de périodes respectives T et T' , soient « en phase » en $y = 0$ (voir FIGURE 4.3).

On a alors les expressions (4.16) et (4.13) respectivement pour ces deux métriques sur $\Omega := \Omega_{0,0} = (\delta, T - \delta) \times \mathbb{S}^2$. Ainsi, avec cette condition sur σ , les données initiales $(\dot{g}_{m,\vec{a},i,\sigma}, \dot{k}_{m,\vec{a},i,\sigma})$ ne dépendent pas de i et valent $(\dot{g}_{m,\vec{a}}, \dot{k}_{m,\vec{a}})$ sur Ω .

On remplace ensuite $g_{m,\vec{a},i,\sigma}(y)$ par $g_{m,\vec{a},i,\sigma}(y + iT + \sigma)$ et $k_{m,\vec{a},i,\sigma}(y)$ par $k_{m,\vec{a},i,\sigma}(y + iT + \sigma)$.

La valeur imposée ci-dessus pour σ fait que σ dépend en fait de i, m, \vec{a} . On adopte alors les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} g' &:= g_{m,\vec{a},i} := (1 - \chi)g_{i,\sigma} + \chi\dot{g}_{m,\vec{a}} , \\ k' &:= k_{m,\vec{a},i} := (1 - \chi)k_{i,\sigma} + \chi\dot{k}_{m,\vec{a}} . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Ainsi, la zone de recollement, de même que le cut-off, est à support compact dans Ω . De plus, $\overline{\Omega}$ est une variété lisse et compacte à bord $\partial\Omega = (\{\delta\} \times \mathbb{S}^2) \cup (\{T - \delta\} \times \mathbb{S}^2)$. On fixe

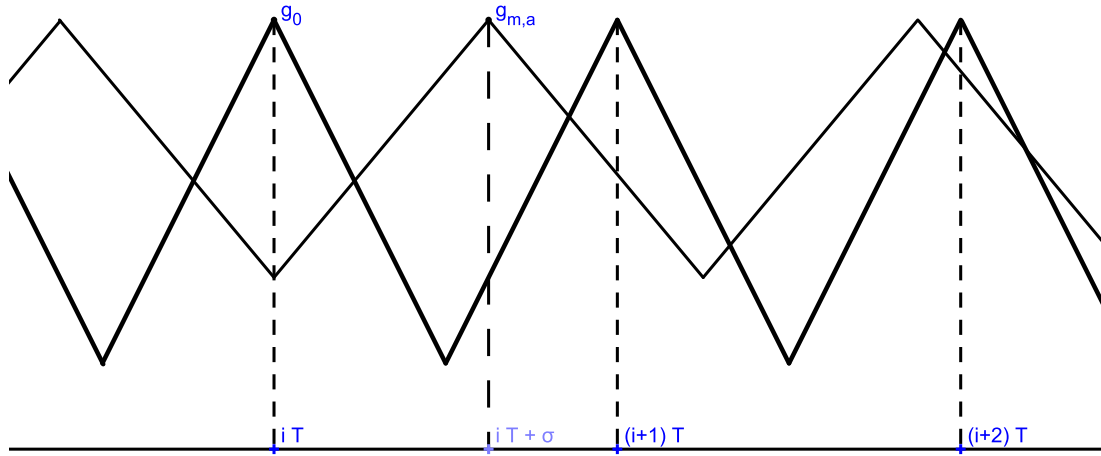


FIGURE 4.3 – Illustration de la définition de $\sigma = \sigma(i, T, T')$.

La ligne brisée en gras représente les données de référence $(g_0, 0)$, de période T en la variable y , alors que la ligne brisée en trait fin représente les données $(\mathring{g}_{m,\vec{a}}, \mathring{k}_{m,\vec{a}})$, de période T' .

une fonction x définissant du bord, par exemple

$$x(y) := \frac{T - 2\delta}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T - 2\delta}(y - \delta)\right).$$

Le Théorème 5.9 de [CD03] nous permet alors, pour des valeurs fixées de i, m, \vec{a} , de trouver une déformation du couple (g', k') ci-dessus, de la forme $(g' + \delta g, k' + \delta k)$ et solution du problème projeté,

$$\Pi_{\mathcal{K}_0^{\perp g'}} e^{-2s/x} \Phi(g' + \delta g, k' + \delta k) = 0, \quad (4.20)$$

où s est une constante strictement positive. Plus précisément, on a le résultat :

Proposition 4.4.2 *Il existe des constantes $i_0 \in \mathbb{N}$ et $\delta_0 > 0$ telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $(m, \vec{a}) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $i \geq i_0$ et $\|(m - m_0, \vec{a})\| < \delta_0$, il existe un couple $(\delta g, \delta k)$ proche de zéro et solution de (4.20).*

Pour un tel triplet (i, m, \vec{a}) , on note désormais $(\tilde{g}_{i,m,\vec{a}}, \tilde{k}_{i,m,\vec{a}})$, ou plus simplement (\tilde{g}, \tilde{k}) la solution du problème projeté ainsi obtenue, c'est-à-dire $(\tilde{g}, \tilde{k}) = (g' + \delta g, k' + \delta k)$.

4.5 Résolution de l'équation des contraintes

4.5.1 Projection sur le noyau \mathcal{K}_0

Nous avons vu à la section 4.4 comment construire un couple (\tilde{g}, \tilde{k}) , coïncidant avec les données initiales de départ (g, k) en dehors d'une région asymptotique, coïncidant

avec des données initiales de Kerr-Kottler-de Sitter $(\mathring{g}_{m,\vec{a}}, \mathring{k}_{m,\vec{a}})$ dans cette région asymptotique, avec une zone intermédiaire où l'on a réalisé une perturbation de l'interpolation initiale (g', k') de sorte que les données perturbées (\tilde{g}, \tilde{k}) vérifient en tout point $\Pi_{\mathcal{K}_0^\perp g'} e^{-2s/x} \Phi(\tilde{g}, \tilde{k}) = 0$.

Notons que si le noyau \mathcal{K}_0 était trivial, alors (\tilde{g}, \tilde{k}) serait bien un couple de données initiales solution des équations de contrainte $\Phi(\tilde{g}, \tilde{k}) = 0$ et on aurait le résultat voulu. Or ici, le noyau \mathcal{K}_0 n'étant pas trivial, considérons les applications

$$F_i : \begin{array}{ccc} B((m_0, \vec{0}), \delta_0) \subset \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (m, \vec{a}) & \longmapsto & \left(\int_{\Omega} \langle \Phi(\tilde{g}, \tilde{k}), V_\mu \rangle d\mu_{g_0} \right)_{\mu=0\dots 3} \end{array}, \quad (4.21)$$

qui sont les applications de projection $L_{e^{s/x}}^2(g_0)$ sur \mathcal{K}_0 de $e^{-2s/x} \Phi(\tilde{g}, \tilde{k})$.

Les applications F_i sont toutes bien définies pour $i \geq i_0$ sur la boule $B((m_0, \vec{0}), \delta_0)$ de \mathbb{R}^4 , où $i_0 \in \mathbb{N}$ et $\delta_0 > 0$ ont été obtenus à la section 4.4.

On veut montrer l'existence, pour tout i assez grand, d'un couple (m, \vec{a}) proche de $(m_0, \vec{0})$ tel que $F_i(m, \vec{a}) = 0$; ceci nous donnera alors des données (\tilde{g}, \tilde{k}) dont la projection sur \mathcal{K}_0 est nulle, ce qui, en combinant avec (4.20), nous permettra de conclure que $\Phi(\tilde{g}, \tilde{k}) = 0$. On veut pour cela appliquer aux F_i le résultat suivant, qui est une application du théorème de point fixe de Brouwer (voir [CD03], Lemme 3.18) :

Proposition 4.5.1 *Soit $G : U \rightarrow V$ un homéomorphisme entre deux ouverts U et V de \mathbb{R}^d et $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ une famille d'applications continues $U \rightarrow \mathbb{R}^d$ convergeant uniformément vers G quand λ tend vers $+\infty$. Alors pour tout $y \in V$, il existe λ_0 tel que si $\lambda \geq \lambda_0$, l'équation $G_\lambda(x) = y$ admet une unique solution x_λ .*

La suite de cette section est consacrée au calcul des F_i , afin de pouvoir utiliser cette proposition, i jouant le rôle du paramètre λ .

4.5.2 Calcul des charges globales

Rappelons d'abord comment on peut faire apparaître des *charges globales*, en suivant les notations de [Mic10]. Si (g_0, k_0) est la donnée du « background » et (g_1, k_1) est « proche » de (g_0, k_0) , alors en notant $e := (g_1 - g_0, k_1 - k_0)$ et en prenant $V \in \mathcal{K}_0$, on peut écrire

$$\int_{\Omega} \langle \Phi(g_1, k_1), V \rangle d\mu_{g_0} - \int_{\Omega} \langle \Phi(g_0, k_0), V \rangle d\mu_{g_0} = \int_{\Omega} \langle D\Phi_{(g_0, k_0)}(e), V \rangle d\mu_{g_0} + Q(V, e),$$

où $Q(V, e) := \int_{\Omega} Q(e) V d\mu_{g_0}$ et où $Q(e)$ est obtenu comme

$$Q(e) = \Phi(g_1, k_1) - \Phi(g_0, k_0) - D\Phi(g_0, k_0)(e). \quad (4.22)$$

Or, $D\Phi_{(g_0, k_0)}^*$ étant l'adjoint formel L^2 de $D\Phi_{(g_0, k_0)}$, on a

$$\langle D\Phi_{(g_0, k_0)}(e), V \rangle = \langle D\Phi_{(g_0, k_0)}^* V, e \rangle + \text{div} \mathbb{U}(V, e), \quad (4.23)$$

et donc, comme $\Phi(g_0, k_0) = 0$ et comme $V \in \mathcal{K}_0$, on a finalement

$$\int_{\Omega} \langle \Phi(g_1, k_1), V \rangle d\mu_{g_0} = \oint_{\partial\Omega} \mathbb{U}(V, e)(\nu) dS + Q(V, e), \quad (4.24)$$

où ν est la normale sortante à $\partial\Omega$ et dS la mesure qui y est induite, le tout par rapport à g_0 . La *charge globale associée à V* est le terme intégral sur le bord $\partial\Omega$ de Ω dans la formule (4.24).

Pour $V = (f, \alpha) \in \mathcal{K}_0$, on a la formule (voir [Mic10])

$$\mathbb{U}(V, e) = f(\operatorname{div} h - d(\operatorname{tr} h)) - \iota_{\nabla f} h + (\operatorname{tr} h)df + 2(\iota_{\alpha} l - (\operatorname{tr} l)\alpha). \quad (4.25)$$

On remarque en particulier que cette dernière expression est linéaire en $V = (f, \alpha)$.

4.5.3 Calcul des charges dans le cas KKdS

Dans le cas présent, $g_0 = b_{m_0}$, $k_0 = 0$ (données initiales de KSdS de masse m_0), $\Omega = (\delta, T - \delta) \times \mathbb{S}^2$. Prenons dans un premier temps $g_1 = \mathring{g}_{m, \vec{a}}$, $k_1 = \mathring{k}_{m, \vec{a}}$ (données initiales de KKdS de paramètres m, \vec{a}), on note $h = g_1 - g_0$, $l = k_1 - k_0$, c'est-à-dire $e = (h, l)$.

Pour $V = V_0 = (f, 0)$, on choisit de calculer $\mathbb{U}(V_0, e)$ dans les coordonnées (r, θ, φ) où g_0 et g_1 sont diagonales :

$$\mathbb{U}(V_0, e)(\nu) = f^2 (g_0^{rr} \partial_r h_{rr} - \partial_r (\operatorname{tr}_0 h)) + f (-f^2 (\partial_r f) h_{rr} + (\operatorname{tr}_0 h) \partial_r f),$$

soit encore :

$$\mathbb{U}(V_0, e)(\nu) = f^2 (-\partial_r (f^2) h_{rr} - \partial_r (g_0^{\theta\theta} h_{\theta\theta} + g_0^{\varphi\varphi} h_{\varphi\varphi})) + f (g_0^{\theta\theta} h_{\theta\theta} + g_0^{\varphi\varphi} h_{\varphi\varphi}) \partial_r f.$$

Or on trouve $h_{rr} = \frac{2(m-m_0)}{rf^4} + O(|(m-m_0, \vec{a})|^2)$ et $g_0^{\theta\theta} h_{\theta\theta} + g_0^{\varphi\varphi} h_{\varphi\varphi} = O(a^2)$, de même que sa dérivée par rapport à r .

On obtient donc

$$\mathbb{U}(V_0, e)(\nu) = \frac{-2\partial_r (f^2)}{rf^2} (m - m_0) + O(|(m - m_0, \vec{a})|^2). \quad (4.26)$$

Pour que les calculs ci-dessus soient valides, on se place en r tel que $f(r) \neq 0$. En intégrant sur la tranche $\{r\} \times \mathbb{S}^2$, on obtient donc

$$\int_{\{r\} \times \mathbb{S}^2} \mathbb{U}(V_0, e)(\nu) dS = -\frac{8\pi r \partial_r (f^2)}{f^2} (m - m_0) + O(|(m - m_0, \vec{a})|^2).$$

Ensuite, on se place dans les coordonnées sphériques choisies telles que $\vec{a} = a\partial_z$. En remarquant que $V_3 = (0, \partial_\varphi)$, on a

$$\mathbb{U}(V_3, e)(\nu) = 2f \mathring{k}_{r\varphi},$$

où \mathring{k} fait référence à $\mathring{k}_{m,\vec{a}}$ et donc d'après (4.12), on a

$$\mathbb{U}(V_3, e)(\nu) = -\frac{6m_0 \sin^2 \theta}{r^2} a + O(|(m - m_0, \vec{a})|^2), \quad (4.27)$$

et donc

$$\int_{\{r\} \times \mathbb{S}^2} \mathbb{U}(V_3, e)(\nu) dS = -16\pi m_0 a + O(|(m - m_0, \vec{a})|^2).$$

D'autre part, les éléments $V_1 = (0, X_1)$ et $V_2 = (0, X_2)$ de \mathcal{K}_0 s'écrivent, dans les coordonnées r, θ, ϕ :

$$X_1 = -\sin \varphi \partial_\theta - \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi,$$

et

$$X_2 = -\cos \varphi \partial_\theta + \cot \theta \sin \varphi \partial_\varphi,$$

ce qui va impliquer, à cause de l'intégration sur une période 2π en φ , que

$$\int_{\{r\} \times \mathbb{S}^2} \mathbb{U}(V_i, e)(\nu) dS = 0,$$

pour $i = 1, 2$.

Les calculs ci-dessus ont été effectués dans les coordonnées sphériques (r, θ, φ) relativement aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) (c'est-à-dire que θ mesure la colatitude, φ le rayon...) et dans le cas où le paramètre \vec{a} est aligné selon ∂_z , $\vec{a} = a\partial_z$.

En notant $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$, on a donc obtenu que

$$\int_{\{r\} \times \mathbb{S}^2} \mathbb{U}(\vec{V}, e)(\nu) dS = -16\pi m_0 \vec{a} + O(|(m - m_0, \vec{a})|^2).$$

Ceci étant vrai pour un choix arbitraire des coordonnées x, y, z , on a donc, pour tout vecteur \vec{a} de \mathbb{R}^3 de norme assez petite, le même résultat,

$$\int_{\{r\} \times \mathbb{S}^2} \mathbb{U}(V_i, e)(\nu) dS = -16\pi m_0 a_i + O(|(m - m_0, \vec{a})|^2)$$

pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

4.5.4 Charges des données perturbées

Revenons maintenant à $g_1 = \tilde{g}$, $k_1 = \tilde{k}$ (dépendant de i, m, \vec{a}). Comme (g_1, k_1) coïncide à tout ordre avec $(\mathring{g}_{m,\vec{a}}, \mathring{k}_{m,\vec{a}})$ en $r = r(y = T - \delta)$, on a toujours les mêmes valeurs que ci-dessus pour les intégrales

$$\int_{\{r\} \times \mathbb{S}^2} \mathbb{U}(V_\mu, e)(\nu) dS,$$

pour $\mu \in \{0, \dots, 3\}$. En particulier, cette expression ne dépend pas de i . D'autre part, on sait aussi que (g_1, k_1) coïncide à tout ordre avec les données initiales de départ (g_i, k_i) en $r = r(y = \delta)$, si bien que pour cette valeur de r , les intégrales

$$\int_{\{r\} \times \mathbb{S}^2} \mathbb{U}(V_\mu, e)(\nu) dS$$

ne dépendent pas de (m, \vec{a}) et convergent vers 0 quand le paramètre i tend vers $+\infty$, puisqu'alors $(g_i, k_i) \rightarrow (g_0, 0)$.

Pour récapituler, on a

$$F_i(m, \vec{a}) = -8\pi \left(\frac{r^2 \partial_r (f^2)}{f^2} (m - m_0), 2m_0 \vec{a} \right) + O(|(m - m_0, \vec{a})|^2) + o(1) + (Q(V_\mu, e))_{\mu=0\dots 3}, \quad (4.28)$$

où $r = r(y = T - \delta)$. Le terme $o(1)$ ci-dessus ne dépend pas de (m, \vec{a}) , donc converge bien uniformément vers 0 quand i tend vers l'infini, alors que le terme $O(|(m - m_0, \vec{a})|^2)$ ne dépend pas de i .

Il reste donc à évaluer les termes $Q(V, e)$, pour $V = V_\mu$, $\mu = 0 \dots 3$. Plus exactement, on souhaite montrer que ces fonctions convergent uniformément par rapport à (m, \vec{a}) quand $i \rightarrow +\infty$ et que la limite soit $o(|(m - m_0, \vec{a})|)$.

Pour ce faire, on considère les données obtenues par interpolation à l'aide de la fonction χ entre les données initiales $(g_0, 0)$ de la référence KSdS, et les données $(\mathring{g}_{m, \vec{a}}, \mathring{k}_{m, \vec{a}})$ de KKdS; on les écrit

$$(g'_\infty, k'_\infty) := (1 - \chi)(g_0, 0) + \chi(\mathring{g}_{m, \vec{a}}, \mathring{k}_{m, \vec{a}}).$$

La notation avec les indices « ∞ » indique que cette interpolation est limite quand $i \rightarrow +\infty$ de l'interpolation (g', k') entre (g_i, k_i) et $(\mathring{g}_{m, \vec{a}}, \mathring{k}_{m, \vec{a}})$ donnée par la formule (4.19). Comme réalisé précédemment dans la section 4.4, on peut également construire, pour chaque $(m, \vec{a}) \in B((m_0, \vec{0}), \delta_0)$, un couple $(\delta g_0, \delta k_0)$ tel que

$$\prod_{\mathcal{K}_0^\perp g'_\infty} e^{-2s/x} \Phi(\tilde{g}_\infty, \tilde{k}_\infty) = 0,$$

où $\tilde{g}_\infty = g'_\infty + \delta g_0$, $\tilde{k}_\infty = k'_\infty + \delta k_0$. Rappelons que ces quantités ne dépendent pas de i , puisque σ a été choisi de sorte que les données $(\mathring{g}_{m, \vec{a}, i, \sigma}, \mathring{k}_{m, \vec{a}, i, \sigma})$ ne dépendent pas de i .

En considérant maintenant (4.24) avec $(g_1, k_1) = (\tilde{g}_\infty, \tilde{k}_\infty)$. En notant $e_0 := (\tilde{g}_\infty - g_0, \tilde{k}_\infty)$ et pour $V \in \mathcal{K}_0$, on a

$$\int_{\Omega} \Phi(\tilde{g}_\infty, \tilde{k}_\infty) V d\mu_{g_0} = \oint_{\partial\Omega} \mathbb{U}(V, e_0)(\nu) dS + Q(V, e_0).$$

De même que le calcul pour le couple (\tilde{g}, \tilde{k}) ci-dessus, on a

$$\left(\oint_{\partial\Omega} \mathbb{U}(V_\mu, e_0)(\nu) dS \right)_{\mu=0\dots 3} = -8\pi \left(\frac{r^2 \partial_r (f^2)}{f^2} (m - m_0), 2m_0 \vec{a} \right) + O(|(m - m_0, \vec{a})|^2),$$

la dépendance en i ayant disparue. D'autre part, le reste $Q(V, e_0)$ ne dépendant pas de i , on veut montrer qu'il est limite de $Q(V, e)$ quand $i \rightarrow +\infty$, la convergence étant uniforme par rapport à $(m, \vec{a}) \in B((m_0, \vec{0}), \delta_0)$. Pour cela, remarquons que

$$e = e_0 + (\tilde{g} - \tilde{g}_\infty, \tilde{k} - \tilde{k}_\infty).$$

Il nous faut évaluer le deuxième terme du membre de droite de cette égalité et ensuite conclure en écrivant :

$$Q(V, e) = Q(V, e_0) + \int_{\Omega} V [Q(e) - Q(e_0)] d\mu_{g_0}. \quad (4.29)$$

L'intérêt d'écrire cette décomposition est d'une part de faire apparaître le terme $Q(V, e_0)$ qui ne dépend pas de i , et d'autre part, par définition de Q (voir (4.22)), et par régularité de Φ , on peut écrire ponctuellement :

$$|Q(e) - Q(e_0)| \leq q|e - e_0|(|e| + |e_0|)$$

pour toute valeur du triplet (i, m, \vec{a}) satisfaisant $i \geq i_0$, $|(m - m_0, \vec{a})| < \delta_0$.

On calcule donc $e - e_0$, ce qui nous donne

$$(\tilde{g} - \tilde{g}_\infty, \tilde{k} - \tilde{k}_\infty) = (\delta g, \delta k) - (\delta g_0, \delta k_0) + (1 - \chi)(g_i - g_0, k_i).$$

Par souci de lisibilité des formules, nous allons noter G_1 le couple (g_1, k_1) . On a donc, sous ces nouvelles notations :

$$e - e_0 = \tilde{G} - \tilde{G}_\infty = \delta G - \delta G_0 + (1 - \chi)(G_i - G_0).$$

En utilisant la propriété sur Q , on a ainsi

$$|Q(e) - Q(e_0)| \leq q_0|\delta G - \delta G_0 + (1 - \chi)(G_i - G_0)|(|e| + |e_0|),$$

avec d'une part :

$$|e| + |e_0| \leq 2|e_0| + |\delta G - \delta G_0| + |(1 - \chi)(G_i - G_0)|.$$

En particulier, le facteur $|e| + |e_0|$ est borné indépendamment de i, m, \vec{a} lorsque $i \geq i_0$ et $|(m - m_0, \vec{a})| < \delta_0$. D'autre part, le terme $|(1 - \chi)(G_i - G_0)|$ est indépendant de (m, \vec{a}) et tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$. Pour déterminer la convergence de $|\delta G - \delta G_0|$, il suffit de remarquer que l'application $G' \mapsto \delta G$ est uniformément continue, en particulier, en faisant apparaître les paramètres i, m, \vec{a} , la suite $i \mapsto \delta G_{i, m, \vec{a}}$ converge vers $\delta G_{\infty, m, \vec{a}}$ uniformément en (m, \vec{a}) avec $|(m - m_0, \vec{a})| < \delta_0$. En effet, cette propriété vient de l'application du Théorème du point fixe de Picard avec paramètre permettant de résoudre le problème projeté (4.20), voir par exemple la Proposition G.1 de [CD03].

En récapitulant, on a majoré $|Q(e) - Q(e_0)|$ par un terme convergeant vers 0 quand i tend vers l'infini de manière uniforme en les paramètres (m, \vec{a}) tels que $|(m - m_0, \vec{a})| < \delta_0$. La formule (4.29) permet alors d'affirmer que, pour $V \in \mathcal{K}_0$ quelconque, $Q(V, e)$ converge vers $Q(V, e_0)$ quand $i \rightarrow +\infty$, uniformément en (m, \vec{a}) pour $(m, \vec{a}) \in B((m_0, \vec{0}), \delta_0)$.

Ainsi, on peut appliquer la proposition 4.5.1 pour la famille de fonctions $(F_i)_{i \geq i_0}$, convergeant uniformément vers une F , qui s'écrit sous la forme :

$$F(m, \vec{a}) = -8\pi \left(\frac{r^2 \partial_r (f^2)}{f^2}(m - m_0), 2m_0 \vec{a} \right) + O(|(m - m_0, \vec{a})|^2).$$

Donc quitte à diminuer δ_0 , en prenant $U = B((m_0, \vec{0}), \delta_0)$ et $V = F(U)$, F est un homéomorphisme entre U et V avec $0 \in V$ puisque $F(m_0, \vec{0}) = 0$ et donc, au besoin en augmentant encore i_0 , on obtient que pour tout $i \geq i_0$, il existe un unique $(m_i, \vec{a}_i) \in U$ tel que $F_i(m_i, \vec{a}_i) = 0$. Le couple (\tilde{g}, \tilde{k}) correspondant aux paramètres (m_i, \vec{a}_i) est solution des équations des contraintes, ce qui termine la preuve du Théorème 4.4.1.

On note que les données initiales obtenues ne sont en général pas triviales (c'est-à-dire ne coïncident avec les données initiales de KKdS que dans la région asymptotique, mais pas globalement), puisqu'elles coïncident avec les données initiales de départ (g, k) , asymptotes à $(g_0, k_0) = (b_{m_0}, 0)$.

Annexe A

Construction de métriques asymptotiquement hyperboliques à masse de genre espace

On construit une famille à un paramètre de variétés riemanniennes de dimension 3, asymptotiquement hyperboliques, définies sur un voisinage de leur bord conforme (ici sphérique) à l'infini, qui sont conformément plates et de courbure scalaire constante strictement négative. Le vecteur de moment-énergie est bien défini pour ces métriques, et peut être de genre temps, de genre lumière ou de genre espace en tant que vecteur de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ suivant la valeur prise par le paramètre.

Sommaire

A.1	Introduction	134
A.2	Métriques asymptotiquement hyperboliques et moment-énergie	136
A.2.1	Métriques asymptotiquement hyperboliques	136
A.2.2	Masse et Moment-Énergie des variétés asymptotiquement hyperboliques	137
A.3	Théorème d'existence	138
A.4	Une application	142

A.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à une certaine classe de variétés riemanniennes non-compactes, dont on étudie certains invariants géométriques, qui apparaîtront de manière récurrente sous les noms de "masse" et de "moment-énergie". Plus précisément, ces invariants exigent que la métrique riemannienne (respectivement le couple formé de la métrique riemannienne et d'un $(0, 2)$ -tenseur symétrique) soient proches d'une métrique de référence (resp. d'un couple de référence). Ces références peuvent être la métrique euclidienne (données initiales de l'espace-temps de Minkowski), ou, ce qui nous intéresse ici, la métrique hyperbolique (données initiales de l'espace-temps d'Anti de Sitter). La particularité et l'intérêt de ces invariants sont qu'ils proviennent d'une formulation hamiltonienne de la relativité générale ([ADM61, BI04]). Si (g_0, k_0) est un couple de données initiales de référence sur une variété M_0 de dimension n , on définit l'espace des *données initiales de Killing*, ou espace des KIDs, par

$$\mathcal{K}_0 := \ker D\Phi_{(g_0, k_0)}^*,$$

où Φ est l'opérateur des contraintes. Si (g, k) est un autre couple formé d'une métrique riemannienne g et d'un $(0, 2)$ -tenseur symétrique k , asymptote à (g_0, k_0) , on note $e = (g - g_0, k - k_0)$ l'écart entre les données (g, k) par rapport à la référence (g_0, k_0) .

Formellement, le *moment-énergie* est une forme linéaire sur \mathcal{K}_0 , calculée par une "intégrale sur le bord à l'infini" S_∞

$$V \in \mathcal{K}_0 \mapsto \oint_{S_\infty} \mathbb{U}(V, e)(\nu) dS =: m(V, e, g_0, k_0), \quad (\text{A.1})$$

où $\mathbb{U}(V, e)$ est définie par (4.23), tandis que son expression est donnée par (4.25).

Le premier cas à avoir été étudié est celui où l'on se restreint à des données de la forme $(g, 0)$, où g est asymptotiquement plate (ce qui revient à considérer l'opérateur courbure scalaire en g à la place de l'opérateur Φ en $(g, 0)$). Il est prouvé dans [Bar86] qu'on obtient bien ainsi un invariant numérique, appelé "masse", que l'on peut retrouver en prenant $V = (1, 0)$ dans la formule (A.1) ci-dessus (et où "l'intégrale à l'infini" est en fait une limite d'intégrales sur des sphères de rayon de plus en plus grand).

Dans le cas où g est asymptotiquement hyperbolique, tout se passe comme si Φ était remplacé par l'opérateur $g \mapsto R(g) - 2\Lambda$, où $\Lambda < 0$. Dans ce cas, le noyau \mathcal{K}_0 est alors de dimension $n+1$, et l'invariant obtenu est le vecteur de moment-énergie $\mathbf{p}_g = (p^0, p^1, \dots, p^n)$, où l'on prend à l'aide de la formule (A.1) $p^i = m(V_{(i)}, e, g_0, 0)$, et où $(V_{(i)})_{0 \leq i \leq n}$ est une base de \mathcal{K}_0 (voir [CH03, Mae06b] pour les définitions précises et les conditions d'existence de \mathbf{p}_g).

Dans les deux cas, les mathématiciens et physiciens, depuis quelques décennies, tentent d'établir des résultats de positivité de ces invariants lorsqu'une hypothèse locale est satisfaite. Le plus célèbre de ce résultat est le *théorème de masse positive* pour les variétés complètes, asymptotiquement plates (M, g) , à courbure scalaire $R(g)$ positive. Il affirme que la masse de (M, g) , si elle existe, est positive, et nulle si et seulement si (M, g) est isométrique à l'espace euclidien. En réalité, il n'est prouvé que pour $3 \leq n \leq 7$ ([SY79, Sch89], et en toute dimension $n \geq 3$ sous hypothèse spin ([Wit81])).

Dans le cas où (M, g) est complète, asymptotiquement hyperbolique, les dix dernières années ont vu l'émergence de tentatives de résolution similaires concernant des énoncés de "moment-énergie positif", sous l'hypothèse $R(g) \geq 2\Lambda$, avec $\Lambda < 0$. Les premiers résultats importants dans ce sens ont été obtenus par Chruściel et Herzlich dans [CH03] et par Wang dans [Wan01]; ils ont prouvé que le vecteur de moment-énergie est bien défini et constitue un invariant géométrique global de la variété (ce qui est confirmé de manière plus algébrique dans [Mic10]), et ils ont montré un résultat de positivité en faisant l'hypothèse topologique supplémentaire que la variété admet une structure spin, (et sous des hypothèses plus contraignantes dans [Wan01]). Cette "positivité" s'exprime par le fait que le vecteur moment-énergie \mathbf{p}_g , vu comme vecteur de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$, est de genre causal, dirigé vers le futur, et est de genre lumière si et seulement si (M, g) est isométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n .

En l'absence de l'hypothèse spin, le problème reste essentiellement ouvert. Un résultat partiel intéressant a cependant été obtenu par Andersson, Cai et Galloway (cf [ACG08]); ils ont ajouté pour cela une hypothèse sur une quantité liée à la masse, appelée *fonction masse-aspect* qui entraîne automatiquement que le vecteur de moment-énergie est de genre temps, ou alors nul dans l'espace-temps de Minkowski. Le résultat obtenu dans [ACG08] est que, sous des hypothèses raisonnables, ce vecteur, s'il est non-nul, est en fait orienté vers le futur.

On aimerait toutefois assouplir les hypothèses sur la métrique asymptotiquement hyperbolique qui n'empêcheraient pas, a priori, le vecteur de moment-énergie d'être de genre lumière ou espace. Ceci est motivé par le fait que dans le contexte asymptotiquement plat, il est particulièrement intéressant de considérer la région asymptotique d'une tranche de genre espace d'une métrique de Schwarzschild de masse négative afin de construire un raisonnement par l'absurde pour le théorème de masse positive; il s'agit bien de cette démarche qui est adoptée dans [SY79].

Dans le cas asymptotiquement hyperbolique, il serait ainsi intéressant de construire des familles de métriques modèles, asymptotiquement hyperboliques, telles que le vecteur d'énergie-moment existe et est de genre espace ou lumière. La construction de telles familles pourrait rendre envisageable un recollement, selon le procédé décrit dans [CD09], entre métriques asymptotiquement hyperboliques de moment-énergie de genre espace d'une part, et un représentant d'une telle famille d'autre part.

Nous construisons dans ce travail des exemples de telles métriques : dans la section A.2, nous rappelons d'abord les définitions de variété asymptotiquement hyperbolique, du vecteur moment-énergie et de la masse. Sans perte de généralité, on supposera que $\Lambda = -n(n-1)/2$.

Le reste de ce travail, à la section A.3, traite uniquement le cas de la dimension 3. Le résultat d'existence est le suivant :

Théorème A.1.1 *Soit \mathbf{p} un vecteur de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^3$ et une métrique riemannienne asymptotiquement hyperbolique g définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus K$, à courbure scalaire $R_g \geq -6$, telle que le vecteur de moment-énergie de g est bien défini, et coïncide avec \mathbf{p} .*

En fait, la métrique g que nous allons construire a la propriété supplémentaire d'être conformément plate, et à courbure scalaire constante -6 . La preuve consiste à construire

des solutions, en particulier non-radiales, à l'équation de Yamabe lorsque la référence est la métrique hyperbolique. Ces solutions sont exprimées en séries entières, dont on montre la stricte positivité du rayon de convergence.

Enfin, nous discuterons d'un exemple d'application de ce théorème, permettant de construire des contre-exemples au Théorème 4.7 de [CH03] lorsqu'une des hypothèses est retirée.

A.2 Métriques asymptotiquement hyperboliques et moment-énergie

A.2.1 Métriques asymptotiquement hyperboliques

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n , éventuellement à bord. On s'intéresse au cas où la variété M possède une région asymptotique dans laquelle g approche la métrique hyperbolique.

Outre leur intérêt propre, ces variétés apparaissent naturellement en Relativité Générale comme des données initiales des espaces-temps *asymptotiquement AdS*, de même que l'espace hyperbolique apparaît comme donnée initiale de l'espace-temps d'Anti-de Sitter (AdS).

On adopte les définitions suivantes (voir [Gic09] par exemple) :

Définition A.2.1 *On dit que (M, g) est conformément compacte s'il existe :*

- une variété compacte \bar{M} lisse, d'intérieur $\overset{\circ}{M}$ et à bord ∂M tel que ∂M est l'union de deux composantes $\partial_0 M$ et $\partial_\infty M$, avec $M = \overset{\circ}{M} \cup \partial_0 M$;
- une fonction définissante, i.e. une fonction lisse $\rho : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant les conditions $\rho \equiv 0$ sur $\partial_\infty M$ et là seulement, la forme $d\rho$ ne s'annule pas sur $\partial_\infty \bar{M}$, et la métrique $\bar{g} := \rho^2 g$ de M s'étend en une métrique lisse sur \bar{M} .

Définition A.2.2 *On dit qu'une variété conformément compacte (M, g) est asymptotiquement hyperbolique (A.H.) si l'on a de plus $|d\rho|_{\bar{g}} = 1$ sur $\partial_\infty M$.*

Remarque A.2.3 - *En suivant les notations ci-dessus, on a en particulier $\sec_g \rightarrow -1$ quand $\rho \rightarrow 0$: la courbure sectionnelle tend vers -1 quand on s'approche du bord à l'infini.*

- *Sous ces mêmes hypothèses, il existe une unique fonction définissante ρ et un voisinage U de $\partial_\infty M$, qui s'écrit comme $(0, \varepsilon] \times \partial_\infty M$ (où le premier facteur est l'intervalle de ρ) tel que, sur U , la métrique s'écrit*

$$g = \frac{d\rho^2 + h_\rho}{(\sinh \rho)^2},$$

où (h_ρ) est une famille de métriques sur $\partial_\infty M$, lisse par rapport à ρ , telle que la limite quand $\rho \rightarrow 0$ est une métrique h_0 sur $\partial_\infty M$ à courbure scalaire constante $R_h = k(n-1)(n-2)$, $k \in \{-1, 0, 1\}$.

Il existe une notion plus forte d'hyperbolicité asymptotique, qui peut être trouvée dans [Wan01, ACG08] :

Définition A.2.4 Une variété asymptotiquement hyperbolique (M, g) est fortement asymptotiquement hyperbolique (F.A.H.) si :

- L'infini conforme $\partial_\infty M$ est la sphère unité de dimension $n - 1$, \mathbb{S}^{n-1} , munie de la métrique ronde h_0 ;
- si ρ est une fonction définissante définie sur un voisinage U de l'infini conforme, et telle que l'on puisse écrire $g = \frac{d\rho^2 + h_\rho}{(\sinh \rho)^2}$, on a alors le développement limité quand $\rho \rightarrow 0$:

$$h_\rho = h_0 + \frac{\rho^n}{n} h + O(\rho^{n+1}) ,$$

où les termes du développement peuvent être dérivés deux fois.

Le tenseur h apparaissant dans la définition ci-dessus est un tenseur d'ordre 2 symétrique sur \mathbb{S}^{n-1} , appelé *tenseur de masse-aspect*.

A.2.2 Masse et Moment-Énergie des variétés asymptotiquement hyperboliques

Comme mentionné dans l'introduction avec la formule (A.1), le vecteur de moment-énergie d'une variété A.H. (M, g) (de bord à l'infini noté $\partial_\infty M$) est par définition le vecteur (p^0, p^1, \dots, p^n) , où pour $0 \leq \mu \leq n$, on a

$$p^\mu = \oint_{\partial_\infty M} \mathbb{U}(V_{(\mu)}, e)(\nu) dS ,$$

où $e = g - g_0$, g_0 est la métrique hyperbolique sur \mathbb{H}^n , dS est la forme volume induite sur $\partial_\infty M$ par g_0 , ν étant la normale unitaire pour g_0 à $\partial_\infty M$. $\mathbb{U}(V, e)$ est alors donné par la formule (4.25) du chapitre précédent, tandis que les $V_{(\mu)}$ sont les coordonnées du plongement isométrique standard de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n dans l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ (voir aussi [Mic10], chapitre 3, ou encore [CH03]).

A noter que lorsqu'on considère des données initiales (g, k) d'un espace-temps asymptotiquement AdS , on peut également définir le vecteur de moment-énergie associé, voir [Mae06a, Mae06b] pour plus de détails.

Une autre approche existe pour définir les notions de masse et de moment-énergie pour une variété F.A.H. (M, g) .

En suivant les notations de la définition (A.2.4) ci-dessus, on définit la notion de *fonction masse-aspect* de g , définie sur l'infini conforme de (M, g) (ici \mathbb{S}^{n-1}), par :

$$\mu_{h_0} := \text{tr}_{h_0}(h) = h_0^{AB} h_{AB} ,$$

où h est le tenseur masse-aspect. On peut maintenant définir le vecteur moment-énergie (voir aussi [Wan01]) \mathbf{p}_g comme le vecteur de $\mathbb{R}^{1,n}$:

$$\mathbf{p}_g := \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{h_0}(x) d\sigma_{h_0}, \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{h_0}(x) x d\sigma_{h_0} \right) ,$$

où $d\sigma_{h_0}$ est la forme volume associée à la métrique ronde h_0 de \mathbb{S}^{n-1} . Cette définition coïncide avec la définition précédente de [CH03] à un facteur constant strictement positif près, ce qui n'affecte pas le genre causal du vecteur dans l'espace-temps de Minkowski.

Wang ([Wan01]) pour les variétés F.A.H., et Chruściel et Herzlich ([CH03]) pour les variétés asymptotiquement hyperboliques en général, ont prouvé de manière indépendante la version suivante du théorème du “moment-énergie positif” :

Théorème A.2.5 *Soit (M, g) une variété riemannienne complète, asymptotiquement hyperbolique et spin, de dimension $n \geq 3$, dont la courbure scalaire vérifie $R_g \geq -n(n-1)$. Alors, le vecteur de moment-énergie \mathbf{p}_g , s'il existe et est non-nul, est de genre temps orienté vers le futur. Il est nul si et seulement si (M, g) est isométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n .*

“ $\mathbf{p}_g = p^\mu$ est de genre temps orienté vers le futur” signifie que $p^0 > 0$ et que $(p^0)^2 - \sum_{i=1}^n (p^i)^2 > 0$. En l'absence de l'hypothèse spin, seuls des résultats partiels sont connus, l'un d'eux est le suivant, de Andersson, Cai and Galloway, voir [ACG08] :

Théorème A.2.6 *Soit (M, g) une variété riemannienne complète, F.A.H., de dimension n avec $3 \leq n \leq 7$, dont la courbure scalaire vérifie $R_g \geq -n(n-1)$. Si de plus la fonction masse-aspect ne change pas de signe (au sens strict) sur le bord conforme à l'infini, alors ce signe est strictement positif, ou nul si et seulement si la variété (M, g) est isométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n .*

Remarque A.2.7 *L'hypothèse sur le signe constant de la fonction masse-aspect impose que le vecteur de moment-énergie soit causal.*

En effet, pour une fonction masse-aspect u_0 de signe strict constant et pour tout i , on a :

$$\left(\int x_i \frac{|u_0| d\sigma_{h_0}}{\int |u_0| d\sigma_{h_0}} \right)^2 \leq \int x_i^2 \frac{|u_0| d\sigma_{h_0}}{\int |u_0| d\sigma_{h_0}},$$

par l'inégalité de Jensen appliquée à la mesure $|u_0| d\sigma_{h_0}$ et à la fonction convexe $X \mapsto X^2$. Les intégrales sont calculées sur la sphère conforme à l'infini $\{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, ce qui entraîne, en faisant la somme sur i , le résultat

$$\sum_{i=1}^n \left(\int x_i u_0(x) d\sigma_{h_0} \right)^2 \leq \left(\int u_0(x) d\sigma_{h_0} \right)^2.$$

Ce résultat nous incite à rechercher une fonction u_0 non-radiale, afin d'espérer construire des métriques A.H. dont le vecteur de moment-énergie est de genre espace, avec pour fonction masse-aspect la fonction u_0 .

A.3 Théorème d'existence

Théorème A.3.1 *Soit \mathbf{p} un vecteur de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^3$ et une métrique riemannienne g , asymptotiquement hyperbolique, conformément plate définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus K$, à courbure scalaire constante $R_g = -6$, tel que le vecteur de moment-énergie de g existe, et coïncide avec \mathbf{p} .*

PREUVE: Remarquons d'abord que si g est une telle métrique, on peut écrire $g = \psi^4 b$ dans un voisinage du bord à l'infini, où b est la métrique hyperbolique. La condition sur la courbure scalaire impose que ψ résolve l'équation :

$$\Delta_b \psi + \frac{3}{4} \psi = \frac{3}{4} \psi^5, \quad (\text{A.2})$$

où Δ_b est l'opérateur de Laplace-Beltrami de b . On choisit de considérer les coordonnées "sphériques" (r, θ, φ) , dans lesquelles on a

$$b = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

et où r est reliée à la fonction définissante ρ par $r^{-1} = \sinh \rho$. On recherche ψ , solution de (A.2) s'écrivant sous forme de série entière en r :

$$\psi = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(\theta, \varphi)}{r^{3+k}}.$$

Ceci est motivé par le fait qu'avec une telle écriture de ψ , si la série converge près du bord conforme à l'infini, la métrique g est alors F.A.H., avec une fonction masse-aspect qui est égale à $u_0(\theta, \varphi)$ à un facteur constant positif près.

On cherche d'abord des coefficients $u_k(\theta)$ ne dépendant pas du paramètre φ . Dans ce cas, le vecteur de moment-énergie de g s'écrit :

$$\mathbf{p}_g = \lambda \left(\int_{\theta=0}^{\pi} u_0(\theta) d\theta, 0, 0, \int_{\theta=0}^{\pi} u_0(\theta) \cos \theta d\theta \right), \quad (\text{A.3})$$

où λ est une constante strictement positive. Lorsque ψ ne dépend que de r et de θ , on a :

$$\Delta_b \psi = (1+r^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2+3r^2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right),$$

ce qui entraîne, en dérivant terme à terme dans la série :

$$\Delta_b \psi = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\theta) r^{-(3+k)},$$

où

$$w_k = (k+1)(k+3)u_k + k(k+1)u_{k-2} + u_{k-2}'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} u_{k-2}', \quad (\text{A.4})$$

pour tout $k \geq 0$, avec la convention $u_{-1} = u_{-2} = 0$, et où les symboles ' et '' indiquent les dérivées première et seconde par rapport à θ . (A.2) peut se réécrire en

$$\Delta_b \psi = \frac{3}{4} (\psi^5 - \psi),$$

et en développant ψ^5 , on peut identifier les coefficients des séries des deux côtés de l'égalité :

$$w_k = 3u_k + \frac{15}{2} \sum_{l_1+l_2+6=k+3} u_{l_1}u_{l_2} + \frac{15}{2} \sum_{l_1+l_2+l_3+9=k+3} u_{l_1}u_{l_2}u_{l_3} \quad (\text{A.5})$$

$$+ \frac{15}{4} \sum_{l_1+l_2+l_3+l_4+12=k+3} u_{l_1}u_{l_2}u_{l_3}u_{l_4} + \frac{3}{4} \sum_{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+15=k+3} u_{l_1}u_{l_2}u_{l_3}u_{l_4}u_{l_5},$$

où les indices l_i sont positifs. (A.5) peut alors se réécrire comme

$$w_k = 3u_k + P_k(u_0, \dots, u_{k-3}). \quad (\text{A.6})$$

Finalement, en comparant (A.4) et (A.6), on obtient

$$k(k+4)u_k = - \left(u''_{k-2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} u'_{k-2} + k(k+1)u_{k-2} \right) + P_k(u_0, \dots, u_{k-3}), \quad (\text{A.7})$$

pour tout $k \geq 0$, avec encore la convention $u_l = 0$ si $l < 0$. En particulier, le choix de u_0 est libre, et on constate que $u_1 = 0$. Pour tout $k \geq 2$, u_k déterminé de manière unique par u_0, \dots, u_{k-2} , d'après (A.7). Dans la suite, on fait le choix

$$u_0(\theta) = \beta + \cos \theta,$$

où $\beta \in \mathbb{R}$. Nous verrons qu'en faisant ce choix, nous allons obtenir des vecteurs de moment-énergie qui sont de genre temps, de genre lumière ou de genre espace suivant les valeurs de β . Nous avons le fait suivant, valable pour tout β :

Lemme A.3.2 *Avec ce choix de u_0 , pour tout $k \geq 1$, $u_k(\theta)$ est un polynôme en $\cos \theta$, de degré inférieur ou égal à $k - 1$.*

PREUVE: Cette propriété est vraie pour $k = 1$; soit $k \geq 2$, tel que $\deg(u_l)|_{\cos \theta} \leq l - 1$, $\forall l \in \{1, \dots, k - 1\}$. Alors $(u''_{k-2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} u'_{k-2} + k(k+1)u_{k-2})$ est un polynôme en $\cos \theta$, de degré $\leq k - 1$ d'après les hypothèses, et car $\deg(u_0)|_{\cos \theta} = 1$.

En ce qui concerne la partie $P_k(u_0, \dots, u_{k-3})$, le terme $\sum_{l_1+l_2+6=k+3} u_{l_1}u_{l_2}$ est constitué de produits $u_{l_1}u_{l_2}$, qui sont, par hypothèse, de degré $\leq (l_1 + 1) + (l_2 + 1) = k - 1$, et ainsi de suite dans les autres termes de la forme $\prod_{i=1}^j u_{l_i}$, avec $\sum_{i=1}^j l_i = k - 3(j - 1)$, et qui sont donc de degré $\leq \sum_{i=1}^j (l_i + 1) = k - 2j + 3 \leq k - 1$ pour tout $2 \leq j \leq 5$. La formule (A.7) permet de conclure la preuve du lemme. □

Dans tout ce qui suit, si $v = \sum_i v_i(\cos \theta)^i$ est un polynôme en $\cos \theta$, on note $|v|_1 = \sum_i |v_i|$.

Lemme A.3.3 *Il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout entier positif k , on a*

$$|u_k|_1 \leq \frac{\alpha^k}{(k+1)^2}. \quad (\text{A.8})$$

PREUVE: Si $v = \sum_i v_i (\cos \theta)^i$ est un polynôme en $\cos \theta$, on a $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} v' = \sum_i -i v_i (\cos \theta)^i$ et $v'' = \sum_i v_i (-i(\cos \theta)^i + i(i-1) \sin^2 \theta (\cos \theta)^{i-2})$.

On obtient ainsi les bornes suivantes sur les normes $|\cdot|_1$ de $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} v'$ et de v'' :

$$\left| \frac{\cos \theta}{\sin \theta} v' \right|_1 \leq d |v|_1$$

et

$$|v''|_1 \leq d(d-1) |v|_1,$$

où d est le degré de v en tant que polynôme en $\cos \theta$.

Supposons maintenant que l'on ait trouvé un α convenable, tel que l'énoncé du lemme soit satisfait aux rangs $l \in \{0, \dots, k-1\}$ (c'est évidemment le cas pour $k=1$). Du résultat sur le degré de u_l obtenu ci-dessus, on déduit :

$$\left| u''_{k-2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} u'_{k-2} + k(k+1)u_{k-2} \right|_1 \leq \frac{\alpha^{k-2}}{(k-1)^2} ((k-1)(k-2) + (k-1) + k(k+1)). \quad (\text{A.9})$$

On a d'autre part :

$$\left| \sum_{l_1+l_2=k-3} u_{l_1} u_{l_2} \right|_1 \leq \alpha^{k-3} \sum_{l_1=0}^{k-3} \frac{1}{(l_1+1)^2} \frac{1}{(k-3-l_1+1)^2} \leq \alpha^{k-3} \frac{C}{(k-1)^2}, \quad (\text{A.10})$$

où $C > 0$ est telle que pour tout $p \geq 0$, on a $\sum_{q=0}^p \frac{1}{(q+1)^2(p-q+1)^2} \leq \frac{C}{p+2}$. De même, on obtient pour $j = 2, \dots, 5$

$$\left| \sum_{l_1+\dots+l_j=k-3(j-1)} u_{l_1} \cdots u_{l_j} \right|_1 \leq \alpha^{k-3(j-1)} \frac{C^{j-1}}{k-2j+3}. \quad (\text{A.11})$$

Ainsi, en utilisant la formule (A.7) et les résultats qui précèdent, on obtient

$$|u_k|_1 \leq \frac{\alpha^k}{k(k+4)} \left[\frac{2k^2 - k + 1}{\alpha^2(k-1)^2} + \frac{15}{2} \frac{C}{\alpha^3(k-1)^2} + \frac{15}{2} \frac{C^2}{\alpha^6(k-3)^2} + \frac{15}{4} \frac{C^3}{\alpha^9(k-5)^2} + \frac{3}{4} \frac{C^4}{\alpha^{12}(k-7)^2} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Ainsi, si on choisit α assez grand (indépendamment de k) on a

$$|u_k|_1 \leq \frac{\alpha^k}{(k+1)^2}, \quad (\text{A.13})$$

ce qui nous permet de conclure la preuve du lemme par récurrence sur k , d'après ce qui précède. □

On déduit de ce résultat que $|u_k|_\infty := \sup_\theta |u_k(\theta)| \leq \frac{\alpha^k}{(k+1)^2}$ pour tout k , puisque les u_k polynômiaux en $\cos \theta$. On a ainsi obtenu $\psi(r, \theta)$, solution de (A.2), s'exprimant comme une série entière en $1/r$, avec un rayon de convergence plus grand que α^{-1} ; en d'autre

termes on a construit une métrique $g = \psi^4 b$ définie sur un voisinage de la sphère conforme à l'infini de la forme

$$M_{ext} = (\alpha, +\infty) \times S^2 ,$$

et ayant les propriétés voulues, et non-radiale.

Pour $\beta = 0$, par la formule (A.3), le vecteur moment-énergie \mathbf{p}_g est de genre espace, alors qu'il est de genre temps pour des valeurs de $|\beta|$ assez grandes. On peut maintenant atteindre tout vecteur \mathbf{p} de $\mathbb{R}^{1,3}$ en utilisant l'action des isométries "à l'infini", c'est-à-dire celles de l'espace-temps de Minkowski.

□

A.4 Une application

Le résultat obtenu dans la section précédente illustre que le Théorème 4.7 de [CH03] est optimal dans un certain sens.

Rappelons d'abord l'énoncé de ce théorème :

Théorème A.4.1 (Chruściel-Herzlich 03) *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n , complète, spin, où g est une métrique \mathcal{C}^2 , où M possède un bord compact non-vide de courbure moyenne*

$$\Theta \leq n - 1 ,$$

et où la courbure scalaire de la métrique g satisfait

$$R_g \geq -n(n - 1) .$$

Sous des hypothèses asymptotiques convenables, et si l'infini conforme est la sphère unité de dimension $(n - 1)$ munie de sa métrique ronde standard, alors le vecteur de moment-énergie \mathbf{p}_g est de genre temps, orienté vers le futur.

Nous allons voir que ce résultat n'est plus valable si l'on supprime l'hypothèse sur la courbure moyenne Θ du bord.

Le premier contre-exemple évident est fourni par l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n , puisque le vecteur moment-énergie est trivial dans ce cas, la courbure scalaire est $-n(n - 1)$ et vérifie donc l'inégalité ci-dessus, mais en revanche, il n'existe pas d'hypersurface compacte de \mathbb{H}^n à bord lisse de courbure moyenne $\Theta \leq n - 1$. En effet, soit K un tel compact \mathbb{H}^n à bord non-vide. Prenons une $n - 1$ sphère contenant K , et tangente à ∂K en au moins un point. Soit p un de ces points. Alors la courbure moyenne de ∂K au point p est supérieure à la courbure moyenne de cette $n - 1$ -sphère, elle-même strictement plus grande que $n - 1$.

De manière plus générale, considérons une variété F.A.H. de dimension n , (M, g) , munie d'une fonction définissante ρ . En-dehors d'un certain compact de M , la métrique peut s'écrire, dans la limite $\rho \rightarrow 0$:

$$g = \sinh^{-2} \rho \left(d\rho^2 + g_0 + \frac{\rho^n}{n} h + o(\rho^n) \right) ,$$

où g_0 est la métrique canonique sur la sphère unité de dimension $(n - 1)$. On souhaite maintenant calculer la courbure moyenne de grandes sphères dans M , centrées à l'origine du système de coordonnées de la carte à l'infini considérée ici.

En définissant la coordonnée s par $\sinh s = \sinh^{-1} \rho$, la métrique s'écrit, quand $s \rightarrow \infty$,

$$g = ds^2 + \sinh^2 s h_s ,$$

où $h_s = h_0 + \frac{2^n}{n} e^{-ns} h + o(e^{-ns})$. La seconde forme fondamentale de la sphère S_s de paramètre s centrée en l'origine de ce système de coordonnées se lit :

$$II_{S_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\sinh^2 s h_s) = 2 \sinh s \cosh s h_s + \sinh^2 s \frac{\partial h_s}{\partial s} ,$$

et sa courbure moyenne est donc

$$\Theta_{S_s} = (\sinh^2 s h_s)^{-1} II_{S_s} = (n - 1) \frac{\cosh s}{\sinh s} + \frac{1}{2} h_s^{-1} \frac{\partial h_s}{\partial s} .$$

Or, on a $\partial_s h_s = -2^n e^{-ns} h + o(e^{-ns})$ quand $s \rightarrow +\infty$, et donc

$$\Theta_{S_s} = (n - 1) \frac{\cosh s}{\sinh s} - 2^{n-1} e^{-ns} \mu_{h_0} + o(e^{-ns}) ,$$

où l'on retrouve la fonction masse-aspect μ_{h_0} ne dépendant pas de s . Ainsi, pour $n \geq 3$, on obtient le comportement suivant de la courbure moyenne des $(n - 1)$ -sphères de grand rayon :

$$\Theta_{S_s} = (n - 1) (1 + 2e^{-2s}) + O(e^{-3s}) ,$$

donc strictement supérieur à $n - 1$ pour s assez grand. On note que le développement ci-dessus est valable pour toute métrique F.A.H., indépendamment des hypothèses sur la courbure scalaire ou sur μ_{h_0} .

En particulier, les métriques construites à la section précédente dans le cas $n = 3$ fournissent des métriques F.A.H. dont le vecteur moment-énergie est de genre espace ou lumière, de courbure scalaire -6 , et telles qu'il existe des ouverts relativement compacts à bord de courbure moyenne strictement plus grande que $n - 1$. D'après le théorème de Chruściel-Herzlich, on sait de plus que ces variétés ne peuvent admettre nulle part un bord à courbure moyenne inférieur à $n - 1$.

Bibliographie

- [ACG08] L. ANDERSSON, M. CAI et G. GALLOWAY – « Rigidity and positivity of mass for asymptotically hyperbolic manifolds », *Ann. Henri Poincaré* **9** (2008), p. 1–33.
- [ADM61] R. ARNOWITT, S. DESER et C. MISNER – « Coordinate invariance and energy expressions in general relativity », *Phys. Rev.* **122** (1961), p. 997–1006.
- [And00] M. ANDERSON – « On stationary vacuum solutions to the Einstein equations », *Annales H. Poincaré* **1** (2000), p. 977–994, arXiv : gr-qc/0001091.
- [Bar86] R. BARTNIK – « The mass of an asymptotically flat manifold », *Commun. Pure Appl. Math.* **39** (1986), p. 661–693.
- [BC07] R. BEIG et P. CHRUŚCIEL – « The asymptotics of stationary electrovacuum metrics in odd space-time dimensions », *Class. Quantum. Grav.* **24** (2007), p. 867–874.
- [BCIM97] B. BERGER, P. CHRUŚCIEL, J. ISENBERG et V. MONCRIEF – « Global foliations of vacuum space-times with t^2 isometry », *Ann. Phys. (NY)* **260** (1997), p. 117–148.
- [BI04] R. BARTNIK et J. ISENBERG – « The Constraint Equations », (2004), arXiv : gr-qc/0405092v1.
- [BL67] R. BOYER et R. LINQUIST – « Maximal analytic extension of the Kerr metric », *Jour. Math. Phys.* **8** (1967), p. 265–281.
- [Boy69] R. BOYER – « Geodesic Killing orbits and bifurcate Killing horizons », *Proc. Roy. Soc. London A* **311** (1969), p. 245–252.
- [Car68] B. CARTER – « Global structure of the Kerr family of gravitational fields », *Phys. Rev.* **174** (1968), p. 1559–1571.
- [Car69] — , « Killing horizons and orthogonally transitive groups in space-time », *Jour. Math. Phys.* **10** (1969), p. 70–81.
- [CBG69] Y. CHOQUET-BRUHAT et R. GEROCH – « Global aspects of the Cauchy problem in general relativity », *Comm. Math. Phys.* **14** (1969), p. 329–335.
- [CC10] P. CHRUŚCIEL et J. CORTIER – « Maximal analytic extensions of the Emparan-Reall black ring », *J. Diff. Geom.* **85** (2010), no. 3, p. 425–459.
- [CCGPGL09] P. CHRUŚCIEL, J. CORTIER et A. GARCÍA-PARRADO GÓMEZ-LOBO – « On the global structure of the Pomeransky-Senkov black holes », (2009), arXiv : 0911.0802 [gr-qc], à paraître dans *Adv. Theor. Math. Phys.*

- [CD03] P. CHRUŚCIEL et E. DELAY – « On mapping properties of the general relativistic constraints operator in weighted function spaces, with applications », *Mém. Soc. Math. Fr.* (2003), no. 94.
- [CD09] — , « Gluing constructions for asymptotically hyperbolic manifolds with constant scalar curvature », *Comm. Anal. Geom.* **17** (2009), no. 2, p. 343–381.
- [CG10] P. CHRUŚCIEL et G. GALLOWAY – « Uniqueness of static black-holes without analyticity », (2010), arXiv : 1004.0513 [gr-qc].
- [CH03] P. CHRUŚCIEL et M. HERZLICH – « The mass of asymptotically hyperbolic riemannian manifolds », *Pacific J. Math* **212** (2003), no. 2, p. 231–264.
- [Chr88] P. CHRUŚCIEL – « On the invariant mass conjecture in general relativity », *Commun. Math. Phys.* **120** (1988), p. 233–248.
- [Chr91] — , *On uniqueness in the large of solutions of Einstein equations (“Strong Cosmic Censorship”)*, Australian National University Press, Canberra, 1991.
- [Chr96] — , « Uniqueness of black holes revisited », *Helv. Phys. Acta* **6** (1996), p. 529–552, Proceedings of Journées Relativistes, Ascona.
- [Chr04] — , « A poor man’s positive energy theorem : II. Null geodesics », *Class. Quantum Grav.* **21** (2004), p. 4399–4416, arXiv : gr-qc/0406077.
- [Chr06] — , « Beijing lecture notes on mathematical relativity », (2006), <http://www.phys.univ-tours.fr/piotr/papers/BeijingAll.pdf>.
- [CLC08] P. CHRUŚCIEL et J. LOPES COSTA – « On uniqueness of stationary black holes », *Astérisque* **321** (2008), p. 195–265, arXiv : 0806.0016v2[gr-qc].
- [Cor00] J. CORVINO – « Scalar curvature deformation and a gluing construction for the Einstein constraint equations », *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), no. 1, p. 137–189.
- [Cor10] J. CORTIER – « On the structure of the ergosurface of Pomeransky-Senkov black rings », (2010), arXiv : 1012.3594 [hep-th], soumis.
- [CP08] P. CHRUŚCIEL et D. POLLACK – « Singular Yamabe metrics and initial data with exactly Kottler-Schwarzschild-de Sitter ends », *Ann. H. Poincaré* **9** (2008).
- [CPP09] P. CHRUŚCIEL, F. PACARD et D. POLLACK – « Singular Yamabe metrics and initial data with exactly Kottler-Schwarzschild-de Sitter ends II », *Math. Res. Lett.* **16** (2009), no. 1, p. 157–164.
- [CS06] J. CORVINO et R. SCHOEN – « On the asymptotics for the vacuum Einstein constraint equations », *J. Diff. Geom.* **73** (2006), no. 2, p. 185–217.
- [CS10] P. CHRUŚCIEL et S. SZYBKA – « Stable causality of the Pomeransky-Senkov black holes », (2010), arXiv : 1010.0213 [hep-th].
- [DS90] T. DAMOUR et B. SCHMIDT – « Reliability of perturbation theory in general relativity », *Jour. Math. Phys.* **31** (1990), p. 2441–2453.

- [Dur09] M. DURKEE – « Geodesics and symmetries of doubly spinning black rings », *Class. Quantum Grav.* **26** (2009), no. 8.
- [ER02] R. EMPARAN et H. REALL – « A rotating black ring in five dimensions », *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), arXiv : hep-th/0110260.
- [ER06] —, « Black rings », *Class. Quantum Grav.* **23** (2006), p. R169–R197, arXiv : hep-th/0608012.
- [ER08] H. ELVANG et M. RODRIGUEZ – « Bicycling black rings », 2008.
- [FB52] Y. FOURÈS-BRUHAT – « Théorèmes d’existence pour certains systèmes d’équations aux dérivées partielles non linéaires », *Acta Math* **88** (1952), p. 141–225.
- [FR00] H. FRIEDRICH et A. RENDALL – « The Cauchy problem for the Einstein equations », (2000), arXiv : gr-qc/0002074v1.
- [FSW93] J. FRIEDMAN, K. SCHLEICH et D. WITT – « Topological censorship », *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993), p. 1486–1489, erratum **75** (1995) 1872.
- [Ger70] R. GEROCH – « Domain of dependence », *Jour. Math. Phys.* **11** (1970), p. 437–449.
- [GH77] G. W. GIBBONS et S. W. HAWKING – « Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation », *Physical Review D* **15** (1977), no. 10, p. 2738–2751.
- [Gic09] R. GICQUAUD – « étude de quelques problèmes d’analyse et de géométrie sur les variétés asymptotiquement hyperboliques », Thèse, Université Montpellier 2, 2009.
- [GS06] G. GALLOWAY et R. SCHOEN – « A generalization of Hawking’s black hole topology theorem to higher dimensions », *Commun. Math. Phys.* **266** (2006), p. 571–576.
- [Haw72] S. HAWKING – « Black holes in general relativity », *Commun. Math. Phys.* **25** (1972), p. 152–166.
- [HE73] S. HAWKING et G. ELLIS – *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, no. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [Hum10] E. HUMBERT – « Relativité générale (d’après M. Vaugon) et quelques problèmes mathématiques qui en sont issus », (2010), arXiv : 1004.2402v4 [math.DG].
- [HY08] S. HOLLANDS et S. YAZADJIEV – « A uniqueness theorem for stationary kaluza-klein black holes », (2008), arXiv : 0812.3036 [gr-qc].
- [HY83] —, « Uniqueness theorem for 5-dimensional black holes with two axial Killing fields », *Commun. Math. Phys.* **2008** (283), p. 749–768, arXiv : 0707.2775 [gr-qc].
- [KLR07] H. KUNDURI, J. LUCIETTI et H. REALL – « Near-horizon symmetries of extremal black holes », *Class. Quantum Grav.* **24** (2007), p. 4169–4190, arXiv : 0705.4214 [hep-th].

- [KN63] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU – *Foundations of differential geometry*, Interscience Publishers, New-York, 1963.
- [Kru60] M. KRUSKAL – « Maximal extension of Schwarzschild metric », *Phys. Rev.* **119** (1960), p. 1743–1745.
- [Mae06a] D. MAERTEN – « Aspects mathématiques du moment-énergie en relativité générale », Thèse, Université Montpellier 2, 2006.
- [Mae06b] —, « Positive energy-momentum theorem in asymptotically anti-de Sitter space-times », *Ann. Henri Poincaré* **7** (2006), p. 975–1011.
- [MG] J. MARTÍN-GARCÍA – « xAct : Efficient tensor computer algebra », <http://metric.iem.csic.es/Martin-Garcia/xAct>.
- [Mic10] B. MICHEL – « Invariants asymptotiques en géométrie conforme et géométrie CR », Thèse, Université Montpellier 2, 2010.
- [MP86] R. MYERS et M. PERRY – « Black holes in higher dimensional space-times », *Ann. Phys.* **172** (1986), p. 304–347.
- [MPU96] R. MAZZEO, D. POLLACK et K. UHLENBECK – « Moduli spaces of singular Yamabe metrics », *Journal of the American Mathematical Society* **9** (1996), no. 2, p. 303–344.
- [Nom60] K. NOMIZU – « On local and global existence of Killing vector fields », *Ann. Math.* **72** (1960), p. 105–120.
- [O’N84] B. O’NEILL – *Semi-riemannian geometry : with application to relativity*, Academic Press, 1984.
- [PAG⁺99] S. PERLMUTTER, G. ALDERING, G. GOLDHABER, R. A. KNOP, P. NUGENT, P. G. CASTRO, S. DEUSTUA, S. FABBRO, A. GOOBAR, D. E. GROOM, I. M. HOOK, A. G. KIM, M. Y. KIM, J. C. LEE, N. J. NUNES, R. PAIN, C. R. PENNYPACKER, R. QUIMBY, C. LIDMAN, R. S. ELLIS, M. IRWIN, R. G. MCMAHON, P. RUIZ-LAPUENTE, N. WALTON, B. SCHAEFER, B. J. BOYLE, A. V. FILIPPENKO, T. MATHESON, A. S. FRUCHTER, N. PANAGIA, H. J. M. NEWBERG, W. J. COUCH et THE SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT – « Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae », *ApJ* **517** (1999), p. 565–586, arXiv : astro-ph/9812133.
- [PS06] A. POMERANSKY et R. SEN’KOV – « Black ring with two angular momenta », (2006), arXiv : hep-th/0612005.
- [R93] I. RÁCZ – « Space-time extensions. I », *Jour. Math. Phys.* **34** (1993), p. 2448–2464.
- [RW96] I. RÁCZ et R. WALD – « Global extensions of space-times describing asymptotic final states of black holes », *Class. Quantum Grav.* **13** (1996), p. 539–552, arXiv : gr-qc/9507055.
- [Sch89] R. SCHOEN – « Variational theory for the total scalar curvature functional for riemannian metrics and related topics », *Topics in Calculus of Variations (Montecatini Terme, 1987)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1365, Springer Berlin / Heidelberg, 1989, p. 120–154.

- [SY79] R. SCHOEN et S. YAU – « On the proof of the positive mass conjecture in general relativity », *Commun. Math. Phys.* **65** (1979), no. 1, p. 45–76.
- [SY81] — , « Proof of the positive mass theorem II », *Commun. Math. Phys.* **79** (1981), p. 231–260.
- [Wal84] R. WALD – *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [Wan01] X. WANG – « The mass of asymptotically hyperbolic manifolds », *J. Diff. Geom* **57** (2001), no. 2, p. 273–279.
- [Wit81] E. WITTEN – « A simple proof of the positive energy theorem », *Commun. Math. Phys.* **80** (1981), p. 381–402.