



HAL
open science

Autour du problème des arcs de Nash pour les singularités isolées d'hypersurfaces

Maximiliano Alexis Leyton-Alvarez

► **To cite this version:**

Maximiliano Alexis Leyton-Alvarez. Autour du problème des arcs de Nash pour les singularités isolées d'hypersurfaces. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENM035 . tel-00630100

HAL Id: tel-00630100

<https://theses.hal.science/tel-00630100>

Submitted on 7 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Maximiliano LEYTON-ALVAREZ

Thèse dirigée par **Gérard GONZALEZ-SPRINBERG**

préparée au sein de l'Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-UJF,
et de l'Ecole doctorale, MSTII-UFR IMAG.

Autour du problème des arcs de Nash pour les singularités isolées d'hypersurfaces

Thèse soutenue publiquement le **16 septembre 2011**,
devant le jury composé de :

M, Ivan PAN

Professeur, Universidad de la Republica, Uruguay, Rapporteur

M, Mark SPIVAKOVSKY

DR CNRS, Université de Toulouse, Rapporteur

M, Marcel MORALES

Professeur, Université de Lyon 1, Examinateur

Mme, Camille PLÉNAT

Maître de Conférences, Université de Provence, Examinatrice

M, Mikhail ZAIDENBERG

Professeur, Université de Grenoble 1, Examinateur

M, Gérard GONZALEZ-SPRINBERG

Professeur, Université de Grenoble 1, Directeur de thèse



A mis padres
y mi gringuita amada

Remerciements

*Además una cosa :
Yo no tengo ningún inconveniente
en meterme en camisa de once varas.*

Extrait d'un poème de Nicanor Parra.

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Gérard Gonzalez-Sprinberg. Tout en m'accordant une grande liberté, il a su me guider et me conseiller dans mon travail. Je lui suis très reconnaissant pour tout le soutien scientifique et personnel dont il a toujours fait preuve, même pendant les dures épreuves qu'il a du affronter ces dernières années. Je le remercie aussi pour ses conseils de rédaction sans lesquels cette thèse ne serait pas ce qu'elle est.

Je remercie vivement Ivan Pan et Mark Spivakovsky d'avoir accepté d'être rapporteurs et membres du jury de ma thèse. Je les remercie beaucoup pour la grande attention qu'ils ont portée à mon travail.

De même, j'exprime ma gratitude aux autres membres de mon jury de thèse, Marcel Morales, Camille Pénat et Mikhail Zaidenberg.

Tous les membres de mon jury se sont montrés toujours disponibles pour répondre à mes questions ou relire mes travaux préliminaires. Honnêtement, je leurs en suis très reconnaissant.

Un grand merci à tout le personnel de l'Institut Fourier pour sa disponibilité et amabilité envers moi ; un remerciement particulier à Dominique Spehner, pour son amitié. Je ne peux bien sûr pas nommer tous mes collègues thésards de l'Institut Fourier, mais que tous trouvent ici mes sincères remerciements pour leur gentillesse.

Je tient également à témoigner ma gratitude envers mes anciens professeurs Rubén Hidalgo et Victor Gonzalez qui m'ont fait aimer les mathématiques et m'ont transmis cette passion si délicieusement contagieuse.

Merci à mes colocataires, Jean Quilbeuf et Thomas Richard, pour la patience qu'ils ont eu envers moi pendant la fin de la rédaction de ma thèse. Je les remercie aussi pour leurs conseils linguistiques.

J'aimerais faire un remerciement spécial à Alvaro Liendo ; même si on est très différents, je le considère comme un de mes plus grands amis. Il a su m'encourager dans une époque où j'avais perdu confiance en moi même. Son soutien a été crucial pour moi avant et après mon arrivé en France.

Je remercie Ximena Colipan pour son amitié vers moi et pour la patience qu'elle a avec Alvaro. Vraiment, je leur souhaite tout le bonheur du monde avec la petite Sofia qui arrivera bientôt.

Enfin, cette thèse ne serait rien sans l'amour et le soutien indéfectible de mes parents, Maximiliano Leyton et Lirian Alvarez, et de ma sœur Carolina Leyton.

Mes parents malgré leurs pauvres moyens, mais avec une grande sagesse, ont lutté, sans vaciller, toute leur vie pour donner un avenir à leurs enfants. Quand je me sens abattu, je pense à leur lutte constante et j'ai honte de me sentir abattu, donc je retrouve la force pour continuer à me battre.

Carolina, je suis fier d'avoir une sœur comme toi et je te remercie pour tout le soutien que tu m'as donné pendant toute ma vie.

Je te remercie, ma petite gringuita, pour l'amour dont tu m'entouras, pour tes encouragements permanents et ta confiance en moi. Depuis que je t'ai connu ma vie est vraiment heureuse.

Pour finir mes remerciements d'une façon moins sentimentale. Merci à tous mes copains d'Eve, surtout à Damien Dupre et Thommy Coula (les caraques), pour m'avoir accueilli et intégré en France, même si je ne savais pas parler français.

De même, je remercie tous les amis que j'ai connu en France, pour tous les barbecues qu'on a fait et tous les litres de bière qu'on a bu ensemble ; je remercie Rodrigo Vargas, pour son amitié et pour le soutien que il m'a donné.

Finalement, merci aux happy hours du Frères Berthom qui m'ont permis de décompresser et de m'amuser pendant toutes ces années à Grenoble.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. Préliminaires	15
1.1. L'espace d'arcs et l'espace de m -jets	15
1.2. Le problème des arcs de Nash	17
1.3. Le problème de relèvement des wedges	21
Chapitre 2. Rappels et notations	25
2.1. Variétés toriques	25
2.2. Éclatement et polyèdre de Newton	28
2.3. Le système générateur minimal et les G -désingularisations	31
2.4. Constellations toriques de points infiniment voisins	33
2.5. Résolution de singularités d'hypersurfaces	36
Chapitre 3. Les vecteurs principaux d'un wedge	41
3.1. Relèvement des wedges et géométrie torique	41
3.2. Le ν -ordre et la ν -partie principale d'une série formelle.	45
3.3. Les vecteurs principaux d'un (K,l) -wedge	49
Chapitre 4. Résolution du problème des arcs de Nash pour une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles de \mathbb{A}_k^3	55
4.1. Préliminaires et rappels	55
4.2. Le problème Nash pour les hypersurfaces quasi-rationnelles $S(p, h_q)$	56
4.2.1. Résolution de la singularité	56
4.2.2. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash	63
4.3. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type \mathbb{E}_6 et \mathbb{E}_7	71
4.3.1. La singularité de type \mathbb{E}_6	71
4.3.2. La singularité de type \mathbb{E}_7	80
4.4. Une nouvelle preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type \mathbb{D}_n	83
Chapitre 5. Résolution du problème des arcs de Nash pour deux familles d'hypersurfaces de \mathbb{A}_k^4	89
5.1. Préliminaires et rappels	89
5.2. Notre première famille d'exemples d'hypersurfaces de \mathbb{A}_k^4 avec l'application de Nash bijective	90
5.2.1. Résolution de la singularité	90
5.2.2. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash	94
5.3. Notre deuxième famille d'exemples d'hypersurfaces de \mathbb{A}_k^4 avec l'application de Nash bijective	97
5.3.1. Résolution de la singularité	98
5.3.2. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash	100

Introduction

L'étude des singularités des variétés constitue un des problèmes importants de la géométrie algébrique. Soit V une variété algébrique sur un corps \mathbf{k} algébriquement clos. Dans le but d'obtenir des informations sur la géométrie du lieu singulier $\text{Sing } V$ de V , plusieurs mathématiciens ont introduit différents types d'objets (algébriques, topologiques, géométriques, etc...) qui sont liés à $\text{Sing } V$. Un de ces objets est *l'espace d'arcs* V_∞ qui donne des informations sur la géométrie locale du lieu singulier de V . Les espaces d'arcs ont été à la base d'importantes avancées en la géométrie algébrique. Par exemple, le développement de la théorie d'intégration motivique.

L'espace d'arcs V_∞ a été introduit, dans le cadre algébrique et analytique complexe, par John Nash dans la prépublication "*Arc structure of singularities*" de 1968, qui n'a été publié qu'en 1995 (voir [Nas95]). Dans cet article Nash a posé une question qui, avec la dénomination actuelle, est connue sous le nom du *problème de Nash*.

Maintenant, on expose de façon informelle le problème de Nash. Dans la suite de cette introduction, on donnera un résumé plus détaillé.

L'espace d'arcs V_∞ peut être interprété comme l'ensemble de tous les arcs $\text{Spec } \mathbf{k}[[t]] \rightarrow V$ sur V , muni d'une structure "naturelle" de schéma sur \mathbf{k} . Une *composante de Nash* C associée à V est une famille d'arcs sur V passant par le lieu singulier de V . Un diviseur essentiel E sur V est grosso modo un diviseur exceptionnel dans une désingularisation de V qui apparaît comme composante irréductible de la fibre exceptionnelle de toute désingularisation possible de V .

La question posée par Nash dans l'article [Nas95] est la suivante :

Est-ce qu'il existe une correspondance bijective entre les composantes de Nash associées à V et les diviseurs essentiels sur V ?

Nash a défini une application de l'ensemble des composantes de Nash associés à V dans l'ensemble des diviseurs essentiels sur V et il a démontré qu'elle est injective ; cette application est connue sous le nom *d'application de Nash*, notée \mathcal{N}_V .

Le problème de Nash consiste à étudier la surjectivité de l'application de Nash \mathcal{N}_V .

La surjectivité de cette application a été prouvée dans plusieurs cas. Par exemple, pour les singularités de type \mathbb{A}_n ([Nas95]), les singularités de type \mathbb{D}_n ([Plé08]), les surfaces sandwiches ([LJRL99]), les variétés toriques ([IK03]), les hypersurfaces quasi-ordinaires ([GP07]), les variétés toriques stables [Pet09]), et d'autres cas qu'on peut trouver dans les articles suivants [Ish05], [Ish06], [GP07], [GSLJ97],[LA11b], [LJ80],[Mor08], [PPP06], [PPP08],

[Reg95].

Dans l'article [IK03], les auteurs montrent que l'application de Nash associée à l'hyper-surface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^5$ donnée par l'équation $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^6 = 0$ n'est pas surjective.

Dans cette thèse, on étudie le problème de Nash et on prouve la bijectivité de l'application de Nash pour certaines familles de singularités isolées d'hyper-surfaces normales des espaces affines $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ et $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$, où \mathbf{k} est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante.

Dans le chapitre 1, on donne les préliminaires et définitions de base sur *l'espace d'arcs* et le *problème de Nash*. D'abord, on introduit les *espaces de m -jets*, $m \geq 1$, et *l'espace d'arcs* et on montre quelques unes de leurs propriétés. Ensuite, on expose le *problème de Nash* et on énonce le *théorème des arcs de Nash*. Finalement, on introduit les *wedges* et le *problème de relèvement des wedges* et on explique le lien entre ce problème et le problème de Nash.

Dans le chapitre 2, on fait quelques rappels sur la théorie des variétés toriques et sur les résolutions de singularités d'hyper-surfaces. On commence par introduire plusieurs notions importantes de la théorie des variétés toriques. On peut citer par exemple, *le polyèdre et l'éclatement de Newton*, les *G -désingularisations* et les *constellations toriques de points infiniment voisins*. Dans la dernière section, on expose quelques résultats sur les désingularisations de singularités isolées d'hyper-surfaces normales.

Dans le chapitre 3, étant donné un wedge ω sur une hypersurface V , on lui associe un ensemble de séries formelles et on établit certains critères (par exemple, l'inversibilité des séries formelles associées à ω) qui nous permettent de prouver que le wedge ω se relève à une désingularisation de V . Ensuite, on définit les *vecteurs principaux d'un wedge*. On utilise cette notion pour pouvoir majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles associés au wedge ω .

Les résultats principaux de cette thèse se trouvent dans les chapitres 4 et 5. Nous démontrons la bijectivité de l'application de Nash pour plusieurs cas d'hyper-surfaces. Le chapitre 4 est une adaptation d'un article qui est accepté pour publication et qui va paraître dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, voir [LA11a].

Les résultats principaux du chapitre 4 sont les suivants.

Théorème. *Soient $p \geq 2$, $q \geq 2$ deux entiers premiers entre eux et $S(p, h_q)$ l'hyper-surface quasi-rationnelles de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $z^p + h_q(x, y) = 0$, où h_q est un polynôme homogène de degré q sans facteur multiple. Alors, l'application de Nash $\mathcal{N}_{S(p, h_q)}$ associée à $S(p, h_q)$ est bijective.*

Une note sur la preuve de ce résultat a été publiée dans [LA11b]. On remarque que si $h_q(x, y) = x^q + y^q$, $S(p, h_q)$ est une surface de Pham-Brieskorn. Dans [FZ03] on montre que les surfaces $S(p, h_q)$ sont toutes quasi-rationnelles (c'est-à-dire les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la résolution minimale sont des courbes rationnelles) et rationnelles si et seulement si $q = 2$ ou $(p, q) = (2, 3)$. On remarque que $S(p, h_2)$ est une singularité de type \mathbb{A}_{p-1} .

Théorème. *Si S est une singularité de type \mathbb{E}_6 ou \mathbb{E}_7 , alors l'application de Nash \mathcal{N}_S associée à S est bijective.*

On donne une preuve détaillée de la bijectivité de l'application de Nash pour la singularité de type \mathbb{E}_6 et un résumé pour la singularité de type \mathbb{E}_7 . Finalement, dans la dernière section du Chapitre 4, on donne une nouvelle preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type \mathbb{D}_n , $n \geq 4$.

Théorème ([Plé08]). *Si S est une singularité de type \mathbb{D}_n , $n \geq 4$, alors l'application de Nash \mathcal{N}_S associée à S est bijective.*

Les résultats principaux du Chapitre 5 sont les suivants :

Théorème. *Soit V une hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ donnée par une équation du type $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4) = 0$, où $p \geq 2$, $q \geq 2$ sont deux entiers et h_q, k_{pq} sont deux polynômes homogènes sans facteurs multiples tel que le degré de h_q (resp. k_{pq}) est égal à q (resp. pq). Alors, l'application de Nash \mathcal{N}_V associée à l'hypersurface V est bijective et le nombre de diviseurs essentiels sur V est égal à $(p-1)q + 1$.*

Par exemple pour le polynôme $f = x_1^q + x_2^q + x_3^{pq} + x_4^{pq}$, $p \geq 2$, $q \geq 2$, qui satisfait les hypothèses du théorème ci-dessus, la variété V est une hypersurface de Pham-Brieskorn.

Théorème. *Soient un entier $q \geq 3$ et V une hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ donnée par une équation du type $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2) = 0$, où h_q et k_q sont deux polynômes homogènes de degré q sans facteur multiple. De plus, on suppose que x_3 et x_4 ne divisent pas $k_q(x_3, x_4^2)$. Alors, l'application de Nash \mathcal{N}_V associée à l'hypersurface V est bijective et le nombre de diviseurs essentiels sur V est égal à 2.*

Par exemple, le polynôme $f = x_1^q + x_2^q + x_3^q + x_4^{2q}$, $q \geq 3$, satisfait les hypothèses du théorème ci-dessus. Dans ce cas, la variété V est une hypersurface de Pham-Brieskorn.

Il est à noter qu'une récente prépublication sur la bijectivité de l'application de Nash pour la singularité de type \mathbb{E}_6 (resp. pour les surfaces quotients, pour les surfaces normales) a été publié sur Arxiv, voir [PS10] (resp. [PP10], [FdBPP11])

Ici, une méthode différente que celles utilisées dans les prépublications citées a été appliquée. Les preuves des théorèmes principaux de cette thèse reposent sur une méthode centrale, qui est adaptée à chaque cas particulier.

On donne ensuite un résumé détaillé du contenu de chaque chapitre.

Chapitre 1

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, V une variété algébrique normale sur \mathbf{k} et $\pi : X \rightarrow V$ une désingularisation divisorielle de V , c'est-à-dire π est une désingularisation de V telle que les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(\text{Sing } V)$ sont de codimension 1 dans X , où $\text{Sing } V$ désigne le lieu singulier de V . De plus, on suppose que les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(\text{Sing } V)$ sont lisses. On sait, d'après le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, qu'une telle désingularisation existe.

Si $\pi' : X' \rightarrow V$ est une autre désingularisation de V , alors $(\pi')^{-1} \circ \pi : X \dashrightarrow X'$ est une application birationnelle. Soit E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π . Comme E est un diviseur et X est une variété algébrique normale (X est une variété lisse), il existe un ouvert E^0 de E sur lequel l'application birationnelle $(\pi')^{-1} \circ \pi$ est bien définie.

Le diviseur E est appelé *diviseur essentiel sur V* si pour toute désingularisation $\pi' : X' \rightarrow V$ de V l'adhérence de $(\pi')^{-1} \circ \pi(E^0)$ dans X' est une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme π' . On note $\text{Ess}(V)$ l'ensemble des diviseurs essentiels sur V .

On remarque que si V est une surface algébrique normale sur \mathbf{k} , alors les diviseurs essentiels sur V sont les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la résolution minimale de V .

Soit K une extension du corps \mathbf{k} . Un morphisme $\text{Spec } K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow V$ (resp. $\text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$) est appelé (K, m) -jet (resp. K -arc). Soit $\mathcal{S}ch/\mathbf{k}$ la catégorie des schémas sur \mathbf{k} et $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles. On considère le foncteur contravariant suivant :

$$F_m : \mathcal{S}ch/\mathbf{k} \longrightarrow \mathcal{E}ns, Y \mapsto \text{Hom}(Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[t]/(t^{m+1}), V).$$

Ce foncteur est représentable de façon canonique par un schéma V_m de type fini sur \mathbf{k} , c'est-à-dire :

$$\text{Hom}(Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[t]/(t^{m+1}), V) \cong \text{Hom}(Y, V_m),$$

où Y est un schéma quelconque sur \mathbf{k} . Le schéma V_m est appelé *l'espace de m -jet sur V* .

L'homomorphisme surjectif canonique $\mathbf{k}[t]/(t^{m+1}) \rightarrow \mathbf{k}[t]/(t^m)$ induit un morphisme affine $p_m : V_m \rightarrow V_{m-1}$ (voir [Ish07] ou [EM09]). Les morphismes $p_{m,n} : V_m \rightarrow V_n$, où $n < m$ et $p_{m,n} := p_{n+1} \circ \dots \circ p_m$, forment un système projectif. Comme les morphismes $p_m : V_m \rightarrow V_{m-1}$ sont affines, la limite projective existe. On note V_∞ cette limite projective, c'est-à-dire $V_\infty := \lim_{\leftarrow m} V_m$. La limite projective V_∞ est un schéma qui n'est pas en général de type fini sur \mathbf{k} . Le schéma V_∞ est appelé *l'espace d'arcs sur V* .

L'espace d'arcs V_∞ a la *propriété fonctorielle* suivante (voir [IK03]) : le foncteur $Y \rightarrow \text{Hom}(Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]], V)$, où Y est un schéma quelconque sur \mathbf{k} et $Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]]$ est le complété formel du schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]]$ le long du sous-schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}$, est représentable par le schéma V_∞ .

D'après la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞ , les K -points de V_∞ sont en correspondance bijective avec les K -arcs sur V . Par abus de notation, pour $\alpha \in V_\infty$, on note α son \mathbf{k}_α -arc correspondant, où \mathbf{k}_α est le corps résiduel du point α .

Soit $p_\infty : V_\infty \rightarrow V$ la projection canonique $\alpha \mapsto \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\text{Spec } \mathbf{k}_\alpha[[t]]$. On note $V_\infty^s := p_\infty^{-1}(\text{Sing } V)$ et $\mathcal{CN}(V)$ l'ensemble des composantes irréductibles de V_∞^s . Nash a démontré que l'application suivante est bien définie et injective (voir [Nas95]) :

$$\mathcal{N}_V : \mathcal{CN}(V) \rightarrow \text{Ess}(V), C \mapsto \overline{\{\widehat{\alpha}(0)\}},$$

où le \mathbf{k}_α -arc α est le point générique de $C \in \mathcal{CN}(V)$, le \mathbf{k}_α -arc $\widehat{\alpha}$ est le relèvement à X du \mathbf{k}_α -arc α (c'est-à-dire $\widehat{\alpha}$ est l'unique morphisme tel que $\pi \circ \widehat{\alpha} = \alpha$) et $\overline{\{\widehat{\alpha}(0)\}}$ est l'adhérence du point $\widehat{\alpha}(0)$. Cette application est appelée *l'application de Nash associée à V* .

On rappelle que le problème de Nash consiste à étudier la surjectivité de l'application de Nash \mathcal{N}_V .

Soit E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : X \rightarrow V$. On note N_E l'adhérence dans V_∞ de l'ensemble $\{\alpha \in V_\infty \setminus (\text{Sing } V)_\infty \mid \widehat{\alpha}(0) \in E\}$, où $(\text{Sing } V)_\infty$ est le sous-ensemble fermé de V_∞ des arcs qui sont concentrés en $\text{Sing } V$. L'ensemble N_E est irréductible et on a :

$$V_\infty^s = \bigcup_{E \in \text{Ess}(V)} N_E,$$

voir [Reg06]. On note α_E le point générique de N_E .

Un morphisme $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ est appelé *K-wedge sur V*. D'après la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞ , les *K-wedges* sont en correspondance bijective avec les $K[[s]]$ -points de V_∞ . L'image du point fermé (resp. du point générique) de $\text{Spec } K[[s]]$ dans V_∞ est appelé le centre (resp. l'arc générique) du *K-wedge* ω .

Un *K-wedge* ω est appelé *K-wedge admissible centré en N_E* si le centre (resp. l'arc générique) de ω est le point générique de N_E (resp. appartient à V_∞^s). On remarque que le corps K est forcément une extension du corps résiduel \mathbf{k}_{α_E} du point α_E .

Dans [Reg06] (pour le cas de surfaces, voir [LJ80]) l'auteur montre qu'un diviseur essentiel E appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V si et seulement si tout *K-wedge* admissible ω centré en N_E se relève à X , où K est une extension quelconque du corps K_{α_E} .

On peut également montrer que si E est une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π qui n'est pas un diviseur essentiel sur V , alors il existe une extension K du corps base \mathbf{k} et un *K-wedge* $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ tel que le centre (resp. l'arc générique) de ω est le point générique de N_E (resp. est un point de \tilde{V}_∞^s) qui ne se relève pas à X .

Chapitre 2

Soient $r \geq 1$ un entier, N un \mathbb{Z} -module libre de rang r et $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ le dual de N . Les \mathbb{R} -espaces vectoriels $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ sont notés respectivement $M_{\mathbb{R}}$ et $N_{\mathbb{R}}$. On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire canonique. On remarque que $T := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbf{k}^*) = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}^*$ est un tore algébrique sur \mathbf{k} de dimension r , c'est-à-dire un groupe algébrique isomorphe à $(\mathbf{k}^*)^r$. Un éventail Σ dans $N_{\mathbb{R}}$ est un ensemble fini de cônes polyédraux fortement convexes dans $N_{\mathbb{R}}$ tel que toute face d'un cône de Σ est dans Σ et tel que l'intersection de deux cônes de Σ est une face de chacun de ces deux cônes.

Étant donné un éventail Σ , la variété torique $X(\Sigma)$ associée à Σ est la variété de dimension r obtenue en recollant les variétés affines $U_\sigma := \text{Spec } \mathbf{k}[\sigma^\vee \cap M]$, où $\sigma^\vee = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid m|_\sigma \geq 0\}$, lorsque σ parcourt Σ le long des ouverts définis par les faces communes, c'est-à-dire si σ_1 et σ_2 appartiennent à Σ , on a $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$. Un résultat intéressant de la théorie de variétés toriques est le suivant : pour toute variété normale X qui contient le tore T comme étant un ouvert dense et qui est munie d'une action de T qui prolonge l'action de T sur lui même, il existe un éventail Σ dans $N_{\mathbb{R}}$ tel que X est isomorphe à $X(\Sigma)$.

Soient Σ, Σ' deux éventails dans $N_{\mathbb{R}}$. Alors, il existe un morphisme $f : X(\Sigma') \rightarrow X(\Sigma)$ qui laisse fixe T si et seulement si, pour chaque $\sigma' \in \Sigma'$, il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma' \subset \sigma$. Un tel morphisme est unique, birationnel et équivariant. De plus, le morphisme f est propre si et seulement si Σ' est une subdivision de Σ .

On appelle *cône régulier* tout cône polyédral fortement convexe dont les vecteurs extrémaux forment une partie d'une base du réseau. On dit qu'un éventail Σ est régulier si tous les cônes de Σ sont réguliers.

On peut vérifier que la variété torique $X(\Sigma)$ est lisse si et seulement si l'éventail Σ est régulier. Étant donné un éventail Σ , on peut montrer qu'il existe une subdivision Σ' régulier de Σ . De plus, le morphisme $f : X(\Sigma') \rightarrow X(\Sigma)$ est une désingularisation équivariante.

Ce chapitre se divise en deux parties.

i) Constellations toriques de points infiniment voisins et théorie de Zariski-Lipman.

Une constellation torique de points infiniment voisins de O est un ensemble fini de points $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, où chaque Q_i , $1 \leq i \leq n$, est une orbite de dimension 0 de la variété torique X_i obtenue par l'éclatement $\varsigma_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ de centre Q_{i-1} . On note $X(\mathcal{C}) = X_{n+1}$ et B_i le diviseur exceptionnel de l'éclatement de Q_i et E_i (resp. E_i^*) le transformé strict (resp. total) de B_i sur $X(\mathcal{C})$.

On dit que Q_j se projette sur Q_i , noté $Q_j \geq Q_i$, si le point $Q_j \in X_j$ est obtenu à partir de $Q_i \in X_i$ par une suite d'éclatements de points. La relation \geq est une relation d'ordre partiel sur les points de \mathcal{C} . Si \geq est un ordre total, on dit que \mathcal{C} est une constellation en chaîne. Par exemple, pour une constellation \mathcal{C} et un point $Q \in \mathcal{C}$ quelconque, l'ensemble $\mathcal{C}^Q := \{P \in \mathcal{C} \mid Q \geq P\}$ est une constellation en chaîne. L'entier $l(Q) := \text{Card}(\mathcal{C}^Q) - 1$ est appelé le niveau de Q .

Soient $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{P}$ trois idéaux. Le \star -produit de \mathcal{I} et \mathcal{J} , noté $\mathcal{I} \star \mathcal{J}$, est la clôture intégrale du produit $\mathcal{I}\mathcal{J}$. On suppose que \mathcal{P} est un idéal complet non-trivial. L'idéal \mathcal{P} est \star -simple si \mathcal{P} n'a pas de \star -factorisation non-triviale, c'est-à-dire si $\mathcal{P} = \mathcal{I} \star \mathcal{J}$, alors $\mathcal{I} = \mathcal{O}_{X_0}$ ou $\mathcal{J} = \mathcal{O}_{X_0}$.

Un idéal \mathcal{I} est à *support fini* s'il existe une constellation \mathcal{C} telle que $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}$ est un faisceau d'idéaux inversible. La constellation minimale (par rapport au nombre de points) avec cette propriété est notée $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$. Les points de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ sont appelés les points base de l'idéal \mathcal{I} .

Soient $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1 \dots Q_n\}$ une constellation torique et \mathcal{J} un idéal non nul de l'anneau local \mathcal{O}_{X_i, Q_i} . L'ordre de \mathcal{J} au point Q_i , noté $\text{Ord}_{Q_i} \mathcal{J}$, est l'ordre d'élément général g de \mathcal{J} au point Q_i .

Soit $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1 \dots Q_n\}$ une constellation torique. On note $\text{ISF}(\mathcal{C})$ l'ensemble des idéaux à support fini qui sont monomiaux, complets, \mathcal{M} -primaires et tels que leur points base sont les points de \mathcal{C} . Pour $\mathcal{I} \in \text{ISF}(\mathcal{C})$, on définit par récurrence le *transformé faible* \mathcal{I}_i et la *multiplicité stricte* m_i de \mathcal{I} au point base Q_i comme suit : $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$, $m_0 = \text{Ord}_{Q_0} \mathcal{I}$, $\mathcal{I}_j = x^{-m_i} \mathcal{I}_i \mathcal{O}_{X_j, Q_j}$ et $m_j = \text{Ord}_{Q_j} \mathcal{I}_j$, où $0 \leq i < j \leq n$, $Q_j \in Q_i^+ := \{R \in \mathcal{C} \mid R > Q_i\}$ et $x = 0$ est l'équation locale de B_i en Q_j . On associe à chaque idéal $\mathcal{I} \in \text{ISF}(\mathcal{C})$ le vecteur $m(\mathcal{I}) = (m_0, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$.

Les résultats principaux de la théorie de Zariski-Lipman ([SZ75], [Lip88]) sur l'unique \star -factorisation peuvent être formulés, dans notre cas, comme suit.

Soit \mathcal{C} une constellation torique. Alors, pour chaque point $Q \in \mathcal{C}$, il existe un unique idéal \mathcal{P}_Q monomial, complet, \mathcal{M} -primaire, \star -simple et à support fini sur \mathcal{C} tel que les points base de \mathcal{P}_Q sont les points de la chaîne \mathcal{C}^Q et le vecteur $m(\mathcal{P}_Q)$ est minimal pour l'ordre lexicographique inverse. Les idéaux \star -simples \mathcal{P}_Q , $Q \in \mathcal{C}$, sont appelés les idéaux \star -simples *spéciaux* associés à \mathcal{C} .

Soit \mathcal{I} un idéal appartenant à $\text{ISF}(\mathcal{C})$. Alors, on peut écrire, d'une façon unique, l'idéal \mathcal{I} comme \star -produit formel (on admet de puissances négatives) d'idéaux \star -simples spéciaux.

Soit $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, $n \geq 1$, une constellation torique. On définit la *relation de proximité linéaire* dans \mathcal{C} comme suit : Q_j est *linéairement proche* de Q_i , noté $j \rightarrow i$, si Q_j

appartient au transformé strict de l'adhérence dans X_{i+1} d'une T -orbite de dimension 1 de B_i .

Étant fixée une base du réseau $N := \mathbb{Z}^d$, à chaque point $Q \in \mathcal{C}$, $l(Q) \geq 1$, on peut associer de façon canonique une suite d'entiers $a_i \in \{1, \dots, d+1\}$, $1 \leq i \leq l(Q)$, qui le caractérisent. Cette association est appelée *codification* de \mathcal{C} , notée $Q = Q_0(a_1, \dots, a_{l(Q)})$.

La proximité linéaire peut être décrite au moyen de la codification. Plus précisément, $j \rightarrow i$, $0 \leq i < j \leq n$, si et seulement s'il existe des entiers a , b et m , tels que $a \neq b$ et $Q_j = Q_i(a, b^{[m]})$, où $b^{[m]}$ est m -fois l'entier b .

En utilisant la codification de \mathcal{C} , on caractérise les idéaux \star -simples spéciaux associés à \mathcal{C} ([CGSLJ96], [CGSM09]). Plus précisément, soient $N := \mathbb{Z}^d$ et $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, $n \geq 1$, une constellation torique en chaîne donnée par la codification $Q_j = Q_0(a_1, \dots, a_j)$, où $1 \leq a_i \leq d$, $1 \leq i, j \leq n$. Alors, le diviseur $D_n = \sum_{i=0}^n m_{in} E_i^*$ associé à l'idéal \star -simple spécial \mathcal{P}_{Q_n} (c'est-à-dire $\mathcal{P}_{Q_n} \mathcal{O}_{X(\mathcal{C})} = \mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(-D_n)$) est donné par la récurrence suivante : $m_{nn} = 1$ et $m_{in} = \sum_{j \rightarrow i} m_{jn}$ pour tout $0 \leq i < n$.

ii) Éclatement de Newton et résolution de singularités d'hypersurfaces.

Soient $N := \mathbb{Z}^{d+1}$ muni de sa base standard $\{e_1, e_2, \dots, e_{d+1}\}$ et $\Delta := \langle e_1, e_2, \dots, e_{d+1} \rangle$. Le dual de N , noté M , est identifié avec \mathbb{Z}^{d+1} au moyen de la forme bilinéaire standard $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq d+1$.

Soit $f \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$, $f := \sum c_e \chi^e$. Posons $\mathcal{E}(f) := \{e \in \Delta^\vee \cap M \mid c_e \neq 0\}$ et définissons successivement les ensembles suivants : le polyèdre de Newton de f , noté $\Gamma_+(f)$, est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\bigcup_{e \in \mathcal{E}(f)} (e + \mathbb{R}_{\geq 0}^{d+1})$ dans \mathbb{R}^{d+1} ; la frontière de Newton de f , notée $\Gamma(f)$, est la réunion des faces compactes de $\Gamma_+(f)$. On définit également la fonction d'appui $h_{\Gamma_+(f)} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ de $\Gamma_+(f)$, par $h_{\Gamma_+(f)}(n) = \inf\{\langle m, n \rangle \mid m \in \Gamma_+(f)\}$, où $n \in \Delta$.

On note $\mathcal{I}(f) \subset \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$ l'idéal engendré par l'ensemble $\{\chi^e \mid e \in \mathcal{E}(f)\}$. L'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé à f est la subdivision de Δ correspondant à l'éclatement normalisé de $\mathbb{A}^{d+1} := \text{Spec } \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$ de centre l'idéal $\mathcal{I}(f)$.

On peut montrer que l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ satisfait la propriété suivante : soient $J \subset \{1, 2, \dots, d+1\}$ et $\sigma_J = \{(n_1, n_2, \dots, n_{d+1}) \in \Delta \mid n_i = 0 \text{ ssi } i \notin J\}$; s'il existe $n \in \sigma_J$ tel que $h_{\Gamma_+(f)}(n) = 0$, alors l'adhérence $\bar{\sigma}_J$ de σ_J dans Δ est un cône de $\Gamma^*(f)$. Une subdivision régulière Σ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ est appelée *subdivision régulière admissible* si Σ contient tous les cônes $\bar{\sigma}_J$ tels qu'il existe $n \in \sigma_J$ où $h_{\Gamma_+(f)}(n) = 0$.

On considère un éventail Σ' dans $N_{\mathbb{R}}$ et un cône σ de Σ' . Nous appellerons *G-subdivision régulière* de σ une subdivision régulière de σ dont les vecteurs extrémaux sont exactement les éléments irréductibles du semi-groupe $\sigma \cap N$. On dit qu'un éventail Σ'_G est une *G-subdivision régulière* de Σ' si chaque cône de Σ'_G est obtenu par une *G-subdivision régulière* d'un cône de Σ' . Le morphisme équivariant associé à une *G-subdivision régulière* de Σ' est appelé *G-désingularisation* de $X(\Sigma')$. Toute variété torique de dimension inférieure ou égale à 3 admet une *G-désingularisation*. Ce résultat ne se maintient pas nécessairement pour les variétés toriques de dimension supérieure ou égale à 4, voir [BGS92].

On remarque que si l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ admet une *G-subdivision régulière* $\Gamma^*(f)_G$, alors $\Gamma^*(f)_G$ est une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$.

On pose $x_j := \chi^{e_j} \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$, $1 \leq j \leq d+1$. Pour $r := (r_1, r_2, \dots, r_{d+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$, on note $x^r = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_{d+1}^{r_{d+1}}$. Soit $f = \sum_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}} c_r x^r$, $c_r \in \mathbf{k}$, un polynôme tel que $\langle r, r \rangle > 1$, pour tout $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$ tel que $c_r \neq 0$. Le polynôme f est *non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton* si pour toute face compacte γ de $\Gamma(f)$, le polynôme $f_\gamma := \sum_{r \in \gamma} c_r x^r$ est non singulier sur le tore $T = \mathbb{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$, c'est-à-dire les polynômes f_γ , $\partial_{x_i} f_\gamma$, $1 \leq i \leq d+1$, n'ont pas de zéro commun en dehors de l'ensemble $\mathbb{A}^{d+1} \setminus T$.

Soit V l'hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} := \text{Spec } \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$ donnée par l'équation $f = 0$, $f \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$. On suppose que f est un polynôme irréductible, non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton. On fixe une subdivision régulière admissible Σ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ et on considère le morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ induit par la subdivision Σ de Δ . Alors, on peut montrer (voir [Var76]) que pour chaque point $p \in \pi^{-1}(O)$, où O est l'orbite de dimension zéro de la variété torique $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$, le diviseur $\pi^{-1}(V)$ est à croisements normaux au point p , que le transformé strict \tilde{V} de V dans $X(\Sigma)$ est non singulier sur $\pi^{-1}(O)$ et que si $\pi(O_\sigma) = O$ et $\dim O_\sigma > 0$, alors l'intersection de O_σ et \tilde{V} est transversale, où O_σ est la T -orbite associée à $\sigma \in \Sigma$. De plus, le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est un isomorphisme en dehors de l'image réciproque par π de V . En particulier, si on suppose que $O \in \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est l'unique point singulier de V et que V ne contient aucune T -orbite de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ de dimension strictement plus grande que zéro, alors le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est une résolution plongée de V .

Chapitre 3

Soient $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} := \text{Spec } \mathbf{k}[x_1, \dots, x_{d+1}]$, $d \geq 2$, muni de sa structure torique naturelle, T le tore algébrique $(\mathbf{k}^*)^{d+1}$ et V une hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$. On suppose que la T -orbite O de dimension zéro est l'unique point singulier de V .

Soit K une extension du corps \mathbf{k} et on considère un K -wedge, $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, tel que le centre α_0 et l'arc générique α_g du K -wedge ω appartiennent à V_∞^s . De plus, on suppose que $\omega(g) \in T$, où g est le point générique de $\text{Spec } K[[s, t]]$.

Étant donnée une désingularisation $\pi : X \rightarrow V$ de V , on se pose la question suivante :

est-ce que le K -wedge ω se relève à X ?

On rappelle que le problème de Nash équivaut à montrer que tous les K -wedges admissibles se relèvent à X .

Dans la première section de ce chapitre, on donne quelques solutions partielles de ce problème.

Dans toute la suite, on suppose que l'hypersurface V de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est donnée par l'équation $f = 0$, où $f \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_{d+1}]$ est un polynôme non dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$.

Soit 0 (resp. g) le point fermé (resp. générique) du schéma $\text{Spec } K[[s, t]]$. On note $\text{Arc}(\omega)$ l'ensemble des arcs $\alpha : \text{Spec } K[[\xi]] \rightarrow \text{Spec } K[[s, t]]$ tels que $\alpha(0) = 0$ et $\omega \circ \alpha(g) \in T$. Par abus de notation, on note 0 (resp. g) le point fermé (resp. le point générique) de $\text{Spec } K[[\xi]]$.

Pour un arc $\alpha \in \text{Arc}(\omega)$, le vecteur $\text{Ord}_\alpha \omega := (\text{Ord}_\xi \alpha^* \circ \omega^*(x_1), \dots, \text{Ord}_\xi \alpha^* \circ \omega^*(x_{d+1}))$ est appelé le α -vecteur principal de ω , où ω^* (resp. α^*) est le comorphisme de ω (resp. α). On rappelle que ω et α sont deux morphismes entre variétés affines, donc les comorphismes ω^* et α^* sont bien définis.

On pose $\text{AVP}(\omega) := \{\text{Ord}_\alpha \omega \mid \alpha \in \text{Arc}(\omega)\}$ l'ensemble des α -vecteurs principaux de ω .

On pose $\Delta := \langle x_1, x_2, \dots, x_{d+1} \rangle$ le cône standard et soit Σ une subdivision de Δ . On rappelle qu'il existe un morphisme équivariant $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ induit par la subdivision Σ de Δ .

Théorème. *Soit Σ une subdivision du cône standard Δ et on suppose que le morphisme équivariant $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est projectif. Soient K une extension algébriquement close du corps \mathbf{k} et $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ un K -wedge sur $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ tel que $\omega(g) \in T$. Alors, le K -wedge ω se relève à $X(\Sigma)$ si et seulement s'il existe un cône $\sigma \in \Sigma$ tel que $\text{AVP}(\omega) \subset \sigma$.*

Dans le corollaire suivant, on considère un K -wedge, $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, tel que $\{\alpha_0, \alpha_g\} \subset V_\infty^s$ et $\omega(g) \in T$.

Corollaire. *On suppose que le corps K est une extension algébriquement close du corps \mathbf{k} et que $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est un morphisme projectif, où Σ est une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$, et on note \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Sigma)$. Alors, le K -wedge ω se relève à \tilde{V} si et seulement s'il existe un cône $\sigma \in \Sigma$ tel que $\text{AVP}(\omega) \subset \sigma$.*

On rappelle que si Σ est une subdivision régulière admissible de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ et si l'hypersurface V ne contient aucune T -orbite de dimension strictement positive, alors le morphisme équivariant $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est une résolution plongée de V .

Dans les résultats suivants, on ne demande ni que le corps K soit algébriquement clos ni que le morphisme équivariant $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ soit projectif, où Σ est une subdivision quelconque de Δ .

Soit $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ un K -wedge tel que $\omega(g) \in T$. On considère le vecteur suivant :

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{d+1}) := (\text{Ord}_t \omega^*(x_1), \text{Ord}_t \omega^*(x_2), \dots, \text{Ord}_t \omega^*(x_{d+1})),$$

On peut écrire le comorphisme ω^* de la façon suivante :

$$\omega^*(x_i) = t^{\eta_i} \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq d+1,$$

où les φ_i sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t .

Théorème. *Soient K une extension du corps \mathbf{k} et $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ un K -wedge sur $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ tel que $\omega(g) \in T$. Si les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq d+1$, sont inversibles, alors le K -wedge ω se relève à $X(\Sigma)$.*

Dans le corollaire suivant, on considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ tel que $\{\alpha_0, \alpha_g\} \subset V_\infty^s$ et $\omega(g) \in T$. Soit Σ est une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$ et on note \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Sigma)$.

Corollaire. *Si les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq d+1$, sont inversibles, alors le K -wedge ω se relève à \tilde{V} .*

Ce corollaire nous motive à étudier les différentes décompositions admissibles en facteurs irréductibles des séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq d+1$. Dans le reste de ce chapitre, on définit

certaines vecteurs qui nous permettent de majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité de ces séries formelles.

Pour une série non nulle $\phi := \sum c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$, où $c_{(e_1, e_2)} \in K$, on définit les applications suivantes :

$$\nu : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, v \mapsto \nu_v \phi := \min\{v \cdot e \mid e \in \mathcal{E}(\phi)\}, \text{ où } \mathcal{E}(\phi) = \{(e_1, e_2) \mid c_{(e_1, e_2)} \neq 0\};$$

$$\text{PPr} : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow K[[s, t]], v \mapsto \phi_v := \sum_{e \cdot v = \nu_v \phi} c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2};$$

$\text{FI} : K[[s, t]] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, où $\text{FI}(\phi)$ est le nombre de facteurs irréductibles de ϕ comptés avec multiplicité.

Soit $\alpha : \text{Spec } \mathbf{k}[[t]] \rightarrow V$ un K -arc tel que $\alpha(0) = O$ et $\alpha(g) \in T$. Par abus de notation, on note 0 (resp. g) le point fermé (resp. le point générique) de $\text{Spec } K[[t]]$. Le vecteur $\mu := (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{d+1}) = (\text{Ord}_t \alpha^*(x_1), \text{Ord}_t \alpha^*(x_2), \dots, \text{Ord}_t \alpha^*(x_{d+1}))$ est appelé le vecteur principal du K -arc α .

Proposition. *Soit $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ un K -wedge sur V tel que $\alpha_0(0) = O$ et $\alpha_0(g) \in T$, où α_0 est le centre du K -wedge ω . On note $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{d+1})$ le vecteur principal de α_0 . Alors, il existe un vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ tel que le v -ordre de φ_i , $1 \leq i \leq d+1$, satisfait la propriété suivante :*

$$\text{FI}(\varphi_i) \leq \nu_v \varphi_i = \deg_t(\varphi_i)_v = \mu_i - \eta_i, \quad 1 \leq i \leq d+1.$$

De plus, φ_i est inversible si et seulement si $\mu_i - \eta_i = 0$.

Ce chapitre se termine sur des résultats faisant un lien entre les vecteurs $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{d+1})$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{d+1})$ et l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$.

Soient $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ un K -wedge tel que $\omega(0) = O$, $\omega(g) \in T$ et $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$. Le vecteur suivant : $\nu_v \omega := (\text{Ord}_v \omega^*(x_1), \text{Ord}_v \omega^*(x_2), \dots, \text{Ord}_v \omega^*(x_{d+1}))$ est appelé le v -vecteur principal du K -wedge ω . On pose $VP(\omega) := \{\text{Ord}_v \omega \mid v \in \mathbb{R}_{>0}^2\}$ l'ensemble de v -vecteurs principaux.

On note $S_d \Gamma^*(f)$ le d -squelette de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ et Δ^0 l'intérieur du cône standard Δ .

Proposition. *Soit α un K -arc (resp. ω un K -wedge) sur V tel que $\alpha(0) = O$, $\alpha(g) \in T$ (resp. $\omega(0) = O$, $\omega(g) \in T$). Alors, le vecteur principal μ du K -arc α (resp. l'ensemble de vecteurs principaux $VP(\omega)$ du K -wedge ω) appartient à (resp. est contenu dans) l'intersection du d -squelette de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ avec l'intérieur du cône standard Δ , c'est-à-dire $\mu \in$ (resp. $VP(\omega) \subset$) $S_d \Gamma^*(f) \cap \Delta^\circ$.*

En utilisant la proposition précédente, on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition. *Soit $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ un K -wedge sur V tel que $\alpha_0(0) = O$, $\alpha_0(g) \in T$ et $\alpha_g \in V_\infty^s$, où α_0 (resp. α_g) est le centre (resp. l'arc générique) du K -wedge ω . Alors, le vecteur $\eta := (\text{Ord}_t \omega^*(x_1), \dots, \text{Ord}_t \omega^*(x_{d+1}))$ appartient à l'intersection $S_d \Gamma^*(f) \cap \Delta^0$.*

Maintenant, on suppose de plus que l'hypersurface V ne contient aucune T -orbite de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ de dimension strictement plus grande que 0 et qu'il existe une G -subdivision régulière $\Gamma^*(f)_G$ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$.

Étant donné un K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$ sur V tel que $\alpha(0) = O$ et $\alpha(g) \in V \setminus \{O\}$, il existe un unique K -arc $\hat{\alpha} : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow \tilde{V}$ sur \tilde{V} tel que $\pi \circ \hat{\alpha} = \alpha$.

Proposition. *Soient E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ et α un K -arc sur V tel que le K -arc $\hat{\alpha}$ est transverse à E et $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E . Alors, le vecteur principal μ du K -arc α appartient au système générateur minimal d'un semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^{d+1}$, où τ est un cône de $\Gamma^*(f)$.*

Chapitres 4 et 5

Les théorèmes principaux démontrés dans ce manuscrit concernent la bijectivité de l'application de Nash pour certains hypersurfaces de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ et $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$. Dans le chapitre 4 (resp. chapitre 5), on traite les cas des hypersurfaces de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ (resp. $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$).

Comme il a été dit précédemment, les preuves des théorèmes principaux de cette thèse reposent sur une méthode centrale, qui est adaptée à chaque cas particulier.

Dans la suite, on esquisse la méthode de démonstration.

Pour chaque hypersurface considérée, on démontre que tous les K -wedges admissibles, où K est une extension du corps \mathbf{k} , se relèvent à une résolution de la singularité. Ce qui équivaut à montrer que l'application de Nash associée à l'hypersurface en question est bijective.

Soit $f \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$, $d \in \{2, 3\}$, un des polynômes considérés dans les théorèmes principaux des chapitres 4 et 5. Dans le cas $d = 2$, on pose $x := x_1$, $y := x_2$ et $z := x_3$. On classe f de la façon suivante :

- on dit que f est un polynôme de type (i), si $f(x, y, z) := z^p + h_q(x, y) = 0$, où $p \geq 2$, $q \geq 2$ sont deux entiers premiers entre eux et h_q est un polynôme homogène de degré q sans facteur multiple ;
- on dit que f est un polynôme de type (ii), si $f(x, y, z) := x^2 + y^3 + z^4$ ou $f(x, y, z) := x^2 + y(y^2 + z^3)$ ou $f(x, y, z) := x^2 + z(y^2 + z^{n-2}) = 0$, $n \geq 4$;
- on dit que f est un polynôme de type (iii), si $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4)$, où $p \geq 2$, $q \geq 2$ sont deux entiers et h_q , (resp. k_{pq}) est un polynôme homogène de degré q (resp. pq) sans facteur multiple ;
- on dit que f est un polynôme de type (iv), $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2)$, où $q \geq 3$ est un entier et h_q , k_q sont deux polynômes homogènes de degré q sans facteur multiple, de plus on suppose que x_3 et x_4 ne divisent pas $k_q(x_3, x_4^2)$.

Soit V l'hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$, $d \in \{2, 3\}$, donnée par l'équation $f = 0$. On considère l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé à f . Dans tous les cas considérés, on démontre qu'il existe une G -subdivision régulière $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^*(f)$. On rappelle que tout éventail de dimension 3 admet une G -subdivision régulière. Pour les polynômes de type (iii) et (iv), on construit explicitement une G -subdivision régulière de l'éventail $\Gamma^*(f)$.

On note $\pi : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ le morphisme équivariant induit par la subdivision $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ du cône standard Δ et \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Gamma^*(f))$. Par abus de notation, on note $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la restriction de π à \tilde{V} . Le morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est une désingularisation de V et la fibre exceptionnelle de π est un diviseur à croisements normaux ([**Var76**]). Dans les Chapitres 4 et 5, on montre les résultats suivants :

- si f est un polynôme de type (i), alors $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est la bonne résolution minimale et π est la résolution minimale si et seulement si $p \not\equiv 1 \pmod{q}$;
- si f est un polynôme de type (ii), alors $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est la résolution minimale de V ;

- si f est un polynôme de type (iii) (resp. (iv)), alors la fibre exceptionnelle est la réunion de $(p-1)q+1$ (resp. 2) composantes irréductibles.

Si le polynôme f est de type (i) ou (ii) , il n'est pas un difficile de reconnaître les diviseurs essentiels dans la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$, car les diviseurs essentiels sont les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la résolution minimale.

Si le polynôme f est de type (iii) ou (iv) , il est nettement plus difficile de savoir quels sont les diviseurs essentiels de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$. Cependant, on rappelle que si une composante irréductible E de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ n'est pas un diviseur essentiel, alors il existe un K -wedge ω tel que K est une extension du corps \mathbf{k} et tel que le centre (resp. arc générique) de ω est le point générique de N_E (resp. est un point qui appartient à V_∞^s) qui ne se relève pas à \tilde{V} . Par conséquent, si on démontre que tous les K -wedges qui satisfont cette propriété se relèvent à \tilde{V} , alors on aura démontré que E est un diviseur essentiel qui appartient à l'image de l'application de Nash.

Soit E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ (si f est de type (i) ou (ii) , on suppose que E est un diviseur essentiel sur V). On considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ tel que son centre est le point générique α_E de N_E et son arc générique appartient à V_∞^s (si f est de type (i) ou (ii) , alors ω est un K -wedge admissible centré en N_E) et les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} (\mu_1, \eta_2, \dots, \mu_{d+1}) &:= (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x_1), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_2), \dots, \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_{d+1})) \in \mathbb{Z}_{>0}^{d+1}; \\ (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{d+1}) &:= (\text{Ord}_t \omega^*(x_1), \text{Ord}_t \omega^*(x_2), \dots, \text{Ord}_t \omega^*(x_{d+1})) \in \mathbb{Z}_{>0}^{d+1}. \end{aligned}$$

On peut donc écrire le comorphisme ω^* de la façon suivante :

$$\omega^*(x_i) = t^{\eta_i} \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq d+1,$$

où les φ_i sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t . Si f est de type (i) ou (ii) , on pose $\chi := \varphi_1$, $\varphi := \varphi_2$, $\psi := \varphi_3$, $\eta_x := \eta_1$, $\mu_x := \mu_1$, $\eta_y := \eta_2$, $\mu_y := \mu_2$, $\eta_z := \eta_3$ et $\mu_z := \mu_3$.

Dans le Chapitre 3, on démontre que si les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq d+1$, sont inversibles, alors le K -wedge ω se relève à \tilde{V} . Notre but est de montrer que dans tous les cas qu'on considère les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq d+1$, sont inversibles. Ce qui achève les preuves des théorèmes principaux des chapitres 4 et 5.

On fixe un entier i tel que $1 \leq i \leq d+1$. On rappelle que dans le chapitre 3, à l'aide des entiers η_i et μ_i , on majore le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité de la série formelle φ_i , c'est-à-dire :

$$\text{FI}(\varphi_i) \leq \mu_i - \eta_i.$$

On rappelle (chapitre 3) que le vecteur $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{d+1})$ (resp. $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{d+1})$) appartient au d -squelette $S_d \Gamma^*(f)$ (resp. appartient à l'intersection du système générateur minimal d'un semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^{d+1}$, où τ est un cône de $\Gamma^*(f)$, avec le d -squelette $S_d \Gamma^*(f)$). En utilisant ces résultats, on trouve de bonnes estimations des différences $\mu_i - \eta_i$. Ainsi, pour chaque type de polynôme f , on établit une liste de décompositions possibles en facteurs irréductibles des séries φ_i .

Comme le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $f(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) = 0$, on obtient la relation suivante :

$$f(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2, \dots, t^{\eta_{d+1}} \varphi_{d+1}) = 0.$$

En raisonnant par l'absurde, on suppose que les séries φ_i ne sont pas simultanément inversibles. En utilisant la relation ci-dessus et la liste de décompositions possibles en facteurs irréductibles des séries φ_i , on obtient une contradiction ; ce qui prouve que les séries formelles φ_i sont simultanément inversibles.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques résultats et notions de base sur l'espace de m -jet, l'espace d'arcs, le problème des arcs de Nash et le problème de relèvement des wedges.

Notre but ici n'est pas de donner un exposé exhaustif de la théorie, mais plutôt de donner un aperçu de celle-ci dans le cadre qui nous intéresse.

1.1. L'espace d'arcs et l'espace de m -jets

Dans cette section, nous emploierons les notations et la terminologie de [IK03] et de [Ish07].

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos et V un schéma de type fini sur \mathbf{k} .

Définition 1.1.1. Soient K une extension du corps \mathbf{k} et m un entier positif. Un morphisme $\text{Spec } K[[t]]/(t^{m+1}) \rightarrow V$, (resp. $\text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$) est appelé (K, m) -jet (resp. K -arc) sur V .

Soit $\mathcal{S}ch/\mathbf{k}$ la catégorie des schémas sur \mathbf{k} et $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles. On considère le foncteur contravariant suivant :

$$F_m : \mathcal{S}ch/\mathbf{k} \longrightarrow \mathcal{E}ns, Y \mapsto \text{Hom}(Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[t]/(t^{m+1}), V).$$

Ce foncteur est représentable de façon canonique par un schéma V_m de type fini sur \mathbf{k} , c'est-à-dire :

$$\text{Hom}(Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[t]/(t^{m+1}), V) \cong \text{Hom}(Y, V_m),$$

où Y est un schéma quelconque sur \mathbf{k} . Le schéma V_m est appelé *l'espace de m -jets sur V* .

L'homomorphisme surjectif canonique $\mathbf{k}[t]/(t^{m+1}) \rightarrow \mathbf{k}[t]/(t^m)$ induit un morphisme affine $p_m : V_m \rightarrow V_{m-1}$. Les morphismes $p_{m\ n} : V_m \rightarrow V_n$, où $n < m$ et $p_{m\ n} := p_{n+1} \circ \dots \circ p_m$, forment un système projectif. Comme les morphismes $p_m : V_m \rightarrow V_{m-1}$ sont affines (voir [Ish07] ou [EM09]), la limite projective existe. On note V_∞ cette limite projective, c'est-à-dire $V_\infty := \lim_{\leftarrow m} V_m$. La limite projective V_∞ est un schéma qui n'est pas en général de type fini sur \mathbf{k} . Le schéma V_∞ est appelé *l'espace d'arcs sur V* .

Soit $p_{\infty\ n} : V_\infty \rightarrow V_n$, $n \geq 0$, le morphisme induit par le système projectif $p_{m\ n} : V_m \rightarrow V_n$, $n < m$. Si $n = 0$, on pose $p_\infty := p_{\infty\ 0}$ ou $p_\infty^V := p_{\infty\ 0}$ si on a besoin de faire référence au schéma V .

L'espace d'arcs V_∞ a la propriété fonctorielle suivante :

Théorème 1.1.2 ([IK03]). *Soit V un schéma de type fini sur \mathbf{k} . Alors, le foncteur $Y \rightarrow \text{Hom}(Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]], V)$, où Y est un schéma quelconque sur \mathbf{k} et $Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]]$ est le complété formel du schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]]$ le long du sous-schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}$, est représentable par le schéma V_∞ .*

D'après la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞ (resp. de l'espace de m -jet V_m , $m \geq 1$), les K -points de V_∞ (resp. de V_m) sont en correspondance bijective avec les K -arcs (resp. (K, m) -jets) sur V . Par abus de notation, pour $\alpha \in V_\infty$ (resp. $\alpha \in V_m$) on note α son \mathbf{k}_α -arc (resp. (\mathbf{k}_α, m) -jet) correspondant, où \mathbf{k}_α est le corps résiduel du point α dans V_∞ .

(resp. V_m). En particulier, le morphisme $p_\infty : V_\infty \rightarrow V$ est la projection $\alpha \mapsto \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\text{Spec } \mathbf{k}_\alpha[[t]]$.

La géométrie des espaces de m -jets V_m , $m \geq 1$, et de l'espace d'arcs V_∞ sur V a une relation étroite avec celle du schéma V . Dans la suite on énonce quelques résultats sur cette relation.

On rappelle que V est un schéma de type fini sur \mathbf{k} . Si de plus, V est un schéma séparé, irréductible et réduit, nous disons que V est une variété algébrique sur \mathbf{k} .

La preuve du théorème suivant se trouve dans [[**Kol173**], Chap I.V, Prop. 10]. Une autre démonstration de ce théorème se trouve dans [**IK03**].

Théorème 1.1.3. *Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et V une variété algébrique sur \mathbf{k} . Alors, l'espace d'arcs V_∞ est irréductible.*

Étant donnée une variété algébrique V sur \mathbf{k} , on note $\text{Sing } V$ le lieu singulier de V .

Remarque 1.1.4. Soient \mathbf{k} est un corps de caractéristique $p > 0$ et V une variété algébrique sur \mathbf{k} . L'espace d'arcs V_∞ n'est pas nécessairement irréductible. Par exemple, l'hypersurface V donnée par l'équation $x^p + y^p z = 0$ a une composante irréductible de $(\text{Sing } V)_\infty$ qui n'est pas dans l'adhérence de $V_\infty \setminus (\text{Sing } V)_\infty$ dans V_∞ .

Dans le cas de variétés toriques, le Théorème 1.1.3 est valable pour un corps base de caractéristique quelconque. Dans la suite, on donne la définition de variétés toriques, pour avoir plus de détails, voir le chapitre 2. Étant donné un entier $n \geq 1$ et un tore algébrique $T \cong (\mathbf{k}^*)^n$, une variété torique V de dimension n est une variété algébrique contenant T comme ouvert de Zariski dense et munie d'une action de T , $T \times V \rightarrow V$, prolongeant $T \times T \rightarrow T$.

Proposition 1.1.5 ([**Ish04**]). *Si V est une variété torique sur un corps \mathbf{k} algébriquement clos de caractéristique quelconque, alors V_∞ est irréductible.*

En général, étant donnée une variété algébrique V , les espaces de m -jets V_m , $m \geq 1$, ne sont ni irréductibles ni réduits. Mais la proposition suivante montre qu'ils sont presque réduits.

Proposition 1.1.6 ([**Mus01**]). *Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et V est une variété sur \mathbf{k} qui est localement intersection complète. On fixe un entier $m \geq 1$. Alors, si l'espace de m -jet V_m est irréductible, alors V_m est réduit.*

Le résultat suivant était une conjecture de D. Eisenbud et E. Frenkel qui a été démontré par M. Mustața dans [**Mus01**].

D'abord, définissons la notion de désingularisation de variétés algébriques et la de singularité rationnelle.

Définition 1.1.7. Soit V une variété algébrique normale sur \mathbf{k} . Un morphisme $\pi : X \rightarrow V$ est appelé *désingularisation* de V , si X est une variété lisse et π est un morphisme propre et birationnel tel que la restriction $\pi|_{X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } V)} : X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } V) \rightarrow V \setminus \text{Sing } V$ est un isomorphisme, où $\text{Sing } V$ est le lieu singulier de V .

Soient V une variété algébrique normale sur \mathbf{k} , où \mathbf{k} est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et $\pi : X \rightarrow V$ une désingularisation de V tel que la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(\text{Sing } V)$ est un diviseur à croisements normaux. En vertu du *théorème de résolution des singularités d'Hironaka*, la désingularisation π existe.

Soit i est un entier positif. On définit le i -ième faisceau image directe $R^i \pi_* \mathcal{O}_X$ de la façon suivante : étant donné un ouvert $U \subset V$, on pose

$$\Gamma(U, R^i \pi_* \mathcal{O}_X) := H^i(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X |_{\pi^{-1}(U)}).$$

Définition 1.1.8. On dit que la variété V a des *singularités rationnelles* si V est une variété singulière normale tel que $R^i \pi_* \mathcal{O}_X = 0$, pour tout $i > 0$.

Théorème 1.1.9 ([Mus01]). *Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos caractéristique nulle et V est une variété singulière sur \mathbf{k} qui est localement intersection complète. Alors V_m est irréductible pour tout $m \geq 1$ si et seulement si V n'a que des singularités rationnelles.*

1.2. Le problème des arcs de Nash

D'abord, on définit les diviseurs essentiels et les composantes de Nash. Ensuite, on énonce le théorème des arcs de Nash.

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque et V une variété normale sur \mathbf{k} .

Dans toute la section, on suppose qu'il existe une désingularisation divisorielle de V . Autrement dit, on suppose qu'il existe une désingularisation de V , notée $\pi : X \rightarrow V$, telle que toutes les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(\text{Sing } V)$ sont de codimension 1 dans X . Dans plusieurs cas l'existence du morphisme π a été prouvé, par exemple :

- si la caractéristique de \mathbf{k} est nulle (théorème de résolution des singularités d'Hironaka) ;
- si V est un variété torique (voir le Théorème 2.1.11) ;
- si la dimension de V est inférieure ou égale à 2 ou si la dimension de V est égale à 3 et caractéristique de \mathbf{k} est supérieure ou égale à 7.

Si $\pi' : X' \rightarrow V$ est une autre désingularisation de V , alors $(\pi')^{-1} \circ \pi : X \dashrightarrow X'$ est une application birationnelle. Soit E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π . Comme E est un diviseur et X est une variété algébrique normale (en fait, X est une variété lisse), il existe un ouvert E^0 de E sur lequel l'application birationnelle $(\pi')^{-1} \circ \pi$ est bien définie.

En utilisant la notation du paragraphe ci-dessus, on a la définition suivante :

Définition 1.2.1. Le diviseur E est appelé *diviseur essentiel sur V* si pour toute désingularisation $\pi' : X' \rightarrow V$ de V l'adhérence de $(\pi')^{-1} \circ \pi(E^0)$ dans X' est une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme π' . On note $\text{Ess}(V)$ l'ensemble de diviseurs essentiels sur V .

Remarque 1.2.2. Si V est une surface algébrique normale sur \mathbf{k} , les diviseurs essentiels sur V sont les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la résolution minimale de V .

Maintenant, on définit les *composantes de Nash*. Mais, d'abord on introduit les notations suivantes :

On rappelle que le morphisme $p_\infty : V_\infty \rightarrow V$ est la projection canonique $\alpha \mapsto \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\text{Spec } \mathbf{k}_\alpha[[t]]$.

On pose $V_\infty^s := p_\infty^{-1}(\text{Sing } V)$. Le fermé V_∞^s , muni de la structure réduite, est un sous-schéma fermé de V_∞ . On peut décomposer le schéma V_∞^s en ses composantes irréductibles :

$$V_\infty^s = (\cup_{i \in I} C_i) \cup (\cup_{j \in J} C'_j),$$

où le point générique α_i (resp. α'_j) de C_i (resp. C'_j) n'appartient pas (resp. appartient) à $(\text{Sing } V)_\infty$ pour tout $i \in I$ (resp. $j \in J$).

Définition 1.2.3. Une composante irréductible C_i , $i \in I$, de V_∞^s (les C_i sont les composantes irréductibles de V_∞^s telles que leurs points génériques n'appartiennent pas à $(\text{Sing } V)_\infty$) est appelée *composante de Nash* de V . On note $\mathcal{CN}(V)$ l'ensemble des composantes Nash de V .

La preuve de la proposition suivante se trouve dans [Nas95], une autre preuve se trouve dans [IK03].

Proposition 1.2.4. *Si \mathbf{k} est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, alors toutes les composantes irréductibles de V_∞^s sont des composantes de Nash de V .*

La preuve de la Proposition 1.2.4 qui se trouve dans [IK03] repose sur la construction, pour chaque point $(\mathbf{k}_\alpha\text{-arc}) \alpha \in V_\infty^s$, d'un point $(\mathbf{k}_{\beta_\alpha}\text{-arc}) \beta_\alpha \in V_\infty^s \setminus (\text{Sing } V)_\infty$ tel que α appartient à l'adhérence $\overline{\{\beta_\alpha\}}$ d'ensemble $\{\beta_\alpha\}$ dans V_∞ . En particulier, cette construction montre que l'espace d'arcs V_∞ est irréductible (voir le Théorème 1.1.3). En effet, étant donnée une désingularisation $\pi : X \rightarrow V$, il existe un morphisme (voir la Définition 1.2.7) $\pi_\infty : X_\infty \rightarrow V_\infty$ induit par la désingularisation. Comme tous les arcs qui appartiennent à $V_\infty \setminus (\text{Sing } V)_\infty$ se relèvent à X , on a $V_\infty \setminus (\text{Sing } V)_\infty \subset \pi_\infty(X_\infty)$. Ceci implique que V_∞ est irréductible, car X_∞ l'est et $V_\infty \setminus (\text{Sing } V)_\infty$ est dense dans V_∞ .

Si la caractéristique du corps \mathbf{k} est strictement positive, la Proposition 1.2.4 n'est pas nécessairement valable, par exemple voir la remarque 1.1.4.

Étant donnée une composante $C \in \mathcal{CN}(V)$, on note α_C le point générique de C . Comme le morphisme π est propre et birationnel et $\alpha_C \notin (\text{Sing } V)_\infty$, α_C se relève à X , c'est-à-dire il existe un \mathbf{k}_{α_C} -arc $\hat{\alpha}_C$ sur X tel que $\pi \circ \hat{\alpha}_C = \alpha_C$. En particulier, comme π est propre et birationnel, ce \mathbf{k}_{α_C} -arc sur X est unique.

Le théorème suivant est connu sous le nom de *théorème des arcs de Nash* et il est dû à John Nash [Nas95].

Théorème 1.2.5. *Soit V une variété algébrique normale sur le corps \mathbf{k} , on suppose qu'il existe une désingularisation divisorielle, $\pi : X \rightarrow V$, de V . Alors, l'application suivante est bien définie et injective :*

$$\mathcal{N}_V : \mathcal{CN}(V) \rightarrow \text{Ess}(V), \quad C \mapsto \overline{\{\hat{\alpha}_C(0)\}},$$

où le \mathbf{k}_{α_C} -arc α_C est le point générique de $C \in \mathcal{CN}(V)$, le \mathbf{k}_{α_C} -arc $\hat{\alpha}_C$ est le relèvement à X du \mathbf{k}_{α_C} -arc α_C et $\{\hat{\alpha}_C(0)\}$ l'adhérence dans X du point $\hat{\alpha}_C(0)$.

Remarque 1.2.6. L'application \mathcal{N}_V est appelée *l'application de Nash associée à V* .

Le problème de Nash consiste à étudier la surjectivité de l'application de Nash \mathcal{N}_V .

Comme nous avons dit dans l'introduction, dans plusieurs cas la surjectivité de cette application a été prouvée. Par exemple pour les singularités de type \mathbb{A}_n ([Nas95]), les singularités de type \mathbb{D}_n ([Plé08]), les surfaces sandwiches ([LJRL99]), les variétés toriques ([IK03]), les hypersurfaces quasi-ordinaires ([GP07]), les variétés toriques stables ([Pet09]), et d'autres cas qu'on peut trouver dans les articles suivants ([Ish05], [Ish06], [GP07], [GSLJ97], [LA11b], [LJ80], [Mor08], [PPP06], [PPP08], [Reg95]).

Or, S. Ishii et J. Kollar dans l'article [IK03] montrent que l'hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^5$, donnée par l'équation suivante :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^6 = 0,$$

où \mathbf{k} est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2 et 3, a deux diviseurs essentiels et une composante de Nash. En particulier, l'application de Nash associée à cette hypersurface n'est pas surjective.

Étant donnée une variété algébrique V trouver l'image de l'application de Nash est un problème difficile qui n'est pas résolu en général.

Dans la suite, on associe à chaque diviseur essentiel E sur une variété V un ensemble fermé N_E de l'espace de arcs V_∞ tel que, si l'application de Nash est bijective, alors le fermé N_E est une composante de Nash et $\mathcal{N}_V(N_E) = E$. Autrement dit, on définit une application qui satisfait des conditions nécessaires pour être l'inverse de l'application de Nash. Pour définir l'ensemble N_E , il faut faire quelques remarques sur la démonstration du théorème 1.2.5.

D'abord, on fixe les notations. Soit Z un schéma de type fini sur \mathbf{k} et on pose

$$F_Z(Y) : \text{Hom}(Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]], Z) \rightarrow \text{Hom}(Y, Z_\infty),$$

où Y est un schéma quelconque sur \mathbf{k} , $Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]]$ est le complété formel du schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]]$ le long du sous-schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}$ et F_Z est l'isomorphisme de foncteurs établi dans le Théorème 1.1.2.

Définition 1.2.7. Soient Z, Z' deux schémas de type fini sur \mathbf{k} et $\psi : Z' \rightarrow Z$ un morphisme de schémas. Le *morphisme d'espaces d'arcs associé à ψ* , noté ψ_∞ , est le morphisme suivant :

$$\psi_\infty := F_Z(Z'_\infty) \circ \psi \circ F_{Z'}(Z'_\infty)^{-1}(i_\infty),$$

où $i_\infty : Z'_\infty \rightarrow Z'_\infty$ est le morphisme identité.

Étant donné un schéma sur Z de type fini sur \mathbf{k} , on rappelle que $p_\infty^Z : Z_\infty \rightarrow Z$ est la projection canonique $\alpha \rightarrow \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\text{Spec } \mathbf{k}_\alpha[[t]]$. En utilisant la propriété fonctorielle des espaces d'arcs, on obtient la proposition suivante :

Proposition 1.2.8. Soient Z, Z' deux schémas de type fini sur \mathbf{k} et $\psi : Z' \rightarrow Z$ un morphisme de schémas. Alors, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Z'_\infty & \xrightarrow{\psi_\infty} & Z_\infty \\ \downarrow p_\infty^{Z'} & & \downarrow p_\infty^Z \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Z \end{array} ,$$

c'est-à-dire $p_\infty^Z \circ \psi_\infty = \psi \circ p_\infty^{Z'}$.

Maintenant, On fait quelques remarques sur la démonstration du Théorème 1.2.5. On reprends les notations de ce théorème.

Soit V une variété algébrique normale sur le corps \mathbf{k} , on suppose qu'il existe une désingularisation divisorielle, $\pi : X \rightarrow V$, de V .

On pose $X_\infty^\pi := (p_\infty^X)^{-1}(\pi^{-1}(\text{Sing } V))$, on remarque que X_∞^π est un fermé de X_∞ . Par restriction du morphisme $\pi_\infty : X_\infty \rightarrow V_\infty$ à X_∞^π , on obtient le morphisme de schémas (avec la structure réduite) suivant :

$$\pi_\infty : X_\infty^\pi \rightarrow V_\infty^s,$$

On note $\text{Exc}(\pi)$ l'ensemble des composantes irréductibles de $\pi^{-1}(\text{Sing } V)$. Pour $E \in \text{Exc}(\pi)$, on pose $M_E := (p_\infty^X)^{-1}(E)$ et $N_E := \overline{\pi_\infty(M_E)}$, c'est-à-dire N_E est l'adhérence de $\pi_\infty(M_E)$ dans V_∞ .

Comme X est une variété lisse, le fermé M_E est une composante irréductible de X_∞^π (voir [Nob91]). Par conséquent, on a la décomposition en composantes irréductibles suivante :

$$X_\infty^\pi = \bigcup_{E \in \text{Exc}(\pi)} M_E.$$

Soient C une composante de Nash de V ($C \in \mathcal{CN}(V)$) et α_C le point générique de C . Comme $\alpha_C \notin (\text{Sing } V)_\infty$ et le morphisme π est un morphisme propre et birationnel, il existe un unique \mathbf{k}_{α_C} -arc $\widehat{\alpha}_C$ sur X tel que $\pi \circ \widehat{\alpha}_C = \alpha_C$.

Un point clé de la démonstration du Théorème 1.2.5 est le suivant :

- ★) le \mathbf{k}_{α_C} -arc $\widehat{\alpha}_C$ est le point générique d'une composante irréductible de X_∞^π , de plus $\pi_\infty(\widehat{\alpha}_C) = \alpha_C$.

Par conséquent, le point $\widehat{\alpha}_C(0)$ est le point générique d'une composante irréductible de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(\text{Sing } V)$. Soit E le diviseur appartenant à $\text{Exc}(\pi)$ tel que $\widehat{\alpha}_C$ est le point générique de M_E . Alors, E est un diviseur essentiel sur V . En effet, si E n'est pas un diviseur essentiel sur V , il existe une désingularisation divisorielle $\pi' : X' \rightarrow V$, où l'image du point générique $\widehat{\alpha}_C(0)$ de E par l'application birationnelle $(\pi')^{-1} \circ \pi : X \dashrightarrow X'$ n'est pas le point générique d'une composante irréductible de la fibre exceptionnelle $(\pi')^{-1}(\text{Sing } V)$. Ce qui rentre en contradiction avec le point ★).

Soit N la réunion de toutes les composantes de Nash de V et on rappelle que $N_E := \overline{\pi_\infty(M_E)}$, $E \in \text{Exc}(\pi)$. Par conséquent, on a :

$$N := \bigcup_{E \in \text{Ess}(V)} N_E.$$

En particulière, l'ensemble fermé N_E est irréductible, pour tout $E \in \text{Ess}(V)$, et ne dépend pas de la désingularisation π .

En général, le morphisme $\pi_\infty : X_\infty \rightarrow V_\infty$ n'est pas fermé. Par conséquent, on ne peut pas affirmer que la réunion ci-dessus est la décomposition en composantes irréductibles de N .

Remarque 1.2.9. Un diviseur essentiel $E \in \text{Ess}(V)$ appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V si et seulement si pour tout diviseur essentiel E' différent de E l'ensemble N_E n'est pas contenu dans l'ensemble $N_{E'}$, c'est-à-dire $E \in \mathcal{N}_V(\mathcal{CN}(V))$ si et seulement si pour tout $E' \in \text{Ess}(V) \setminus \{E\}$ on a $N_E \not\subseteq N_{E'}$.

Pour conclure cette section, on énonce une proposition qui établit une relation entre les arcs qui sont transverses à un diviseur essentiel E sur V et le fermé irréductible N_E défini ci-dessus.

Définition 1.2.10. Soit Y une variété lisse sur \mathbf{k} et Z une hypersurface de Y . On dit qu'un K -arc α sur Y est transverse à Z s'il existe une équation local f de Z tel que $\text{Ord}_t f \circ \alpha = 1$, où K est une extension du corps \mathbf{k} .

On rappelle que V est une variété algébrique normale sur le corps \mathbf{k} et que $\pi : X \rightarrow V$ est une désingularisation divisorielle de V . Étant fixé un diviseur essentiel E sur la variété normale V , on définit l'ensemble suivant :

$$N_E^0(X) := \{\alpha \in N \setminus (\text{Sing } V)_\infty \mid \widehat{\alpha} \text{ est transverse à } E \text{ et } \widehat{\alpha}(0) \notin E' \forall E' \in \text{Ess}(V) \setminus \{E\}\},$$

c'est-à-dire $N_E^0(X)$ est l'ensemble des \mathbf{k}_α -arcs α qui ne sont pas concentrés en $\text{Sing } V$ tels que le relèvement $\widehat{\alpha}$ de α à X est transverse à E et le point $\widehat{\alpha}(0)$ n'appartient à aucun diviseur $E' \in \text{Ess}(V) \setminus \{E\}$.

Proposition 1.2.11. [Reg06] *Pour tout $E \in \text{Ess}(V)$, l'ensemble $N_E^0(X)$ est un ouvert de N_E .*

1.3. Le problème de relèvement des wedges

Soient V une variété algébrique sur un corps \mathbf{k} de caractéristique quelconque et K une extension du corps \mathbf{k} . Comme dans la section précédente, on suppose qu'il existe une désingularisation divisorielle $\pi : X \rightarrow V$ de la variété V .

Définition 1.3.1. Un morphisme $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ est appelé *K -wedge sur V* . On note 0 l'unique point fermé de $\text{Spec } K[[s, t]]$.

D'après la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞ (voir le Théorème 1.1.2), les K -wedges sont en correspondance bijective avec les $K[[s]]$ -points de V_∞ .

Définition 1.3.2. Étant donné un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, on considère son K -arc $\text{Spec } K[[s]] \rightarrow V_\infty$ correspondant. L'image du point fermé (resp. du point générique) de $\text{Spec } K[[s]]$ dans V_∞ est appelé le centre (resp. l'arc générique) du K -wedge ω .

Soit N la réunion des composantes de Nash (voir la Définition 1.2.3). On rappelle que

$$N = \bigcup_{E \in \text{Ess}(V)} N_E.$$

On rappelle que $\text{Ess}(V)$ est l'ensemble de diviseurs essentiels sur V et que N_E est le fermé irréductible obtenu par l'adhérence dans V_∞ de l'ensemble suivant :

$$\{\alpha \in N \setminus (\text{Sing } V)_\infty \mid \pi \circ \widehat{\alpha} = \alpha, \widehat{\alpha}(0) \in E\}.$$

où $(\text{Sing } V)_\infty$ est le sous-ensemble fermé de V_∞ des arcs qui sont concentrés en $\text{Sing } V$. On note α_E le point générique de N_E .

Définition 1.3.3. Soit E un diviseur essentiel sur V . Un K -wedge ω est appelé *K -wedge admissible centré en N_E* si le centre (resp. l'arc générique) de ω est le point générique de N_E (resp. appartient à $V_\infty^s := p_\infty^{-1}(\text{Sing } V)$).

Remarque 1.3.4. Soit ω un K -wedge admissible centré en N_E . Alors, le corps K est forcément une extension du corps résiduel \mathbf{k}_{α_E} du point α_E .

Le K -wedge ω peut être interprété comme une déformation à un paramètre des coefficients du comorphisme α_E^* de l'arc α_E .

M. Lejeune-Jalabert dans [LJ80] a proposé le problème suivant, pour les surfaces complexes, dans le but d'étudier le problème de Nash. A. Reguera dans [Reg06] l'a généralisé aux variétés algébriques en toute dimension, et a caractérisé l'image de l'application de Nash en termes de ce problème.

Soient $E \in \text{Ess}(V)$ un diviseur essentiel et $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ un wedge admissible centré en N_E , où K est une extension du corps \mathbf{k}_{α_E} . On se pose la question suivante :

Est-ce qu'on peut relever ω à X ? Autrement dit, est-ce qu'il existe un K -wedge $\widehat{\omega}$ tel que $\pi \circ \widehat{\omega} = \omega$?

Ce problème est appelé le *problème de relèvement des wedges*.

La propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞ (voir le Théorème 1.1.2) nous permet de lier la géométrie de l'espace d'arcs V_∞ avec celle de la variété V . Comprendre cette relation ce n'est pas un problème simple. On revient au problème de Nash ; en vertu de la Remarque 1.2.9, un diviseur essentiel E sur V appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V si et seulement si pour tout $E' \in \text{Ess}(V) \setminus \{E\}$ on a $N_E \not\subseteq N_{E'}$. La caractérisation de l'image de l'application de Nash en termes du problème de relèvement des wedges est la traduction de cette équivalence. Pour obtenir cette traduction, le résultat clé est la version du *lemme de la sélection de courbes* pour l'espace d'arcs V_∞ (voir le Lemme 1.3.6). Dans le cas où un diviseur essentiel n'appartient pas à l'image de l'application de Nash, ce lemme nous permet de construire un K -wedge admissible qui ne se relève pas à aucune résolution, ce qu'on montrera par la suite.

Dans la suite, on explique avec plus de détails et de façon plus formelle le paragraphe ci-dessus.

Définition 1.3.5. Soit H un sous-ensemble irréductible de V_∞ . L'ensemble H est appelé *génériquement stable* s'il existe un ouvert affine W de V_∞ tel que $H \cap W$ est un fermé irréductible non vide de W et l'idéal de définition de $H \cap W$ est le radical d'un idéal finiment engendré.

Le résultat suivant est appelé le *lemme de la sélection de courbes pour l'espace d'arcs*.

Lemme 1.3.6 ([Reg06]). Soit H, H' deux sous-ensembles irréductibles de l'espace d'arcs V_∞ . On suppose que $H \subsetneq H'$ et que H est un ensemble génériquement stable. On note z le point générique de H et \mathbf{k}_z le corps résiduel du point z . Alors, il existe un morphisme

$$\beta : \text{Spec } K[[s]] \rightarrow H',$$

tel que l'image du point fermé (resp. générique) de $\text{Spec } K[[s]]$ est le point z (resp. appartient à $H' \setminus H$), où K est une extension algébrique finie du corps \mathbf{k}_z .

Proposition 1.3.7 ([Reg06]). Pour tout diviseur essentiel $E \in \text{Ess}(V)$, l'ensemble fermé N_E est génériquement stable.

Remarque 1.3.8. Le Théorème 3.9 de [dFEI08] montre que si E est une composante irréductible et lisse de la fibre exceptionnelle de $\pi : X \rightarrow V$, alors il existe un ouvert W de V_∞ tel que $N_E \cap W$ est un ouvert d'un cylindre C (c'est-à-dire il existe un entier $m > 0$ et un ensemble constructible A de V_m tel que $C = p_{\infty m}^{-1}(A)$). En particulier l'ensemble N_E est génériquement stable.

La proposition suivante caractérise l'image de l'application de Nash en termes des wedges admissibles. Plus précisément :

Théorème 1.3.9 ([Reg06]). Soit V une variété algébrique sur \mathbf{k} telle qu'il existe une désingularisation divisorielle de V . On considère un diviseur essentiel E sur V . Alors, E appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V si et seulement si pour tout K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ admissible centré en N_E , il existe une désingularisation $\pi' : X' \rightarrow V$ tel que ω se relève à X' , où K est une extension quelconque du corps résiduel \mathbf{k}_{α_E} .

On donne une idée de la preuve du Théorème 1.3.9. On considère une désingularisation divisorielle $\pi : X \rightarrow V$. Étant donné un diviseur essentiel $E \in \text{Ess}(V)$, on rappelle que $M_E = (p_\infty^X)^{-1}(E)$ et que $N_E = \overline{\pi_\infty(M_E)}$, où $p_\infty^X : X_\infty \rightarrow X$ est la projection canonique $\alpha \rightarrow \alpha(0)$ et $\pi_\infty : X_\infty \rightarrow V_\infty$ est le morphisme d'espaces d'arcs associé à π (voir la Définition 1.2.7). Par restriction du morphisme π_∞ , on peut définir le morphisme suivant :

$$\pi_\infty : M := \bigcup_{E \in \text{Ess}(V)} M_E \rightarrow N := \bigcup_{E \in \text{Ess}(V)} M_E.$$

Soit α_E le point générique de N_E . Comme le morphisme $\pi : X \rightarrow V$ est propre et birationnel il existe un unique \mathbf{k}_{α_E} -arc $\widehat{\alpha}_E$ sur X tel que $\pi \circ \widehat{\alpha}_E = \alpha_E$. On remarque que si z est le point générique de M_E , alors on a $\pi_\infty(z) = \alpha_E$. En utilisant la propriété fonctorielle des espaces d'arcs (voir le Théorème 1.1.2) et la propriété de π , on obtient que $z = \widehat{\alpha}_E$ (voir le point \star) de la section précédente). En particulier, z est un \mathbf{k}_{α_E} -arc sur X_∞ .

Si on a $N_E \not\subset N_{E'}$ pour tout $E' \in \text{Ess}(V) \setminus \{E\}$, alors pour tout K -wedge admissible ω centré en N_E l'arc générique α_g du K -wedge ω est le centre α_E du wedge, c'est-à-dire $\alpha_g = \alpha_E$. En effet, si on considère un K -wedge admissible ω centré en N_E son K -arc β sur V_∞ correspondant est l'arc constant $\beta(\text{Spec } K[[s]]) = \alpha_E$, car α_E est le point générique de N_E et $N_E \not\subset N_{E'}$ pour tout $E' \in \text{Ess}(V) \setminus \{E\}$. En particulier, tout K -wedge admissible ω centré en N_E se relève à X .

Si il existe un diviseur essentiel $E' \in \text{Ess}(V) \setminus \{E\}$ tel que $N_E \subset N_{E'}$, alors d'après le lemme de sélection de courbes (voir le Lemme 1.3.6) il existe un K -arc sur V_∞ , $\beta : \text{Spec } K[[s]] \rightarrow N_{E'}$, tel que l'image du point fermé de $\text{Spec } K[[s]]$ (resp. point générique) est le point générique de N_E (resp. appartient à $N_{E'} \setminus N_E$) et K est une extension algébrique finie du corps résiduel \mathbf{k}_{α_E} du point générique α_E de N_E . En utilisant la propriété fonctorielle d'espace d'arcs, le K -arc β sur V_∞ correspond à un K -wedge ω admissible centré en N_E . Si ω se relève à X , alors le K -arc β se relève à X_∞ . On suppose que $\widehat{\beta}$ est le relèvement de β à X_∞ (c'est-à-dire $\pi_\infty \circ \widehat{\beta} = \beta$). Mais $\widehat{\beta}(0) = \widehat{\alpha}_E$ et $\widehat{\beta}(g) \in M_{E'} \setminus M_E$, où g (resp. 0) est le point générique (resp. le point fermé) de $\text{Spec } K[[s]]$. Ceci est une contradiction, car $\text{Spec } K[[s]]$ est irréductible et $M_{E'} \cup M_E$ ne l'est pas.

La proposition suivante est obtenue en utilisant le même type d'idées que dans preuve du Théorème 1.3.9. On remarque que si $E \in \text{Exc}(\pi)$ n'est pas un diviseur essentiel sur V , alors il existe un diviseur essentiel E' tel que $N_E \subsetneq N_{E'}$.

Proposition 1.3.10. *Soient $\pi : X \rightarrow V$ une désingularisation divisorielle et E une composante irréductible et lisse de la fibre exceptionnelle de π . Si le diviseur E n'est pas un diviseur essentiel sur V , alors il existe une extension K du corps de base \mathbf{k} et un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ tel que le centre (resp. l'arc générique) de ω est le point générique de N_E (resp. est un point de \widetilde{V}_∞^s) qui ne se relève pas à X .*

Rappels et notations

2.1. Variétés toriques

Dans cette section, on fait quelques rappels sur la théorie des variétés toriques. Les démonstrations des résultats énoncés se trouvent dans [KKMS73].

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque et \mathbf{k}^\star son groupe multiplicatif. Un *tore algébrique* T de dimension d est une variété algébrique affine isomorphe à $(\mathbf{k}^\star)^d$. La structure de groupe multiplicatif produit de $(\mathbf{k}^\star)^d$ induit une structure de groupe sur T .

Définition 2.1.1. Étant donné un tore algébrique T sur \mathbf{k} , une variété torique V est une variété algébrique contenant T , comme ouvert de Zariski dense, et munie d'une action de T , $T \times V \rightarrow V$, prolongeant $T \times T \rightarrow T$.

Remarque 2.1.2. Toutes les variétés toriques que nous considérons dans la suite sont normales.

Les variétés toriques ont une relation étroite avec la géométrie convexe élémentaire. L'opération du tore donne lieu à une décomposition finie d'une telle variété en orbites, toutes isomorphes à des tores, et fournit une correspondance biunivoque entre les orbites et les cônes d'un éventail rationnel dans un espace vectoriel réel. Réciproquement, à partir de cet éventail, objet de géométrie convexe combinatoire, il est possible de reconstruire la variété torique, ce qui en donne une description très explicite. Dans la suite on donne quelques détails de cette description.

Soient $d \geq 1$ un entier, N un \mathbb{Z} -module libre de rang d , c'est-à-dire un réseau isomorphe à \mathbb{Z}^d , et $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ le dual de N . Les \mathbb{R} -espaces vectoriels $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ sont notés respectivement $M_{\mathbb{R}}$ et $N_{\mathbb{R}}$. On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire canonique. On remarque que $T := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbf{k}^\star) = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}^\star$ est un tore algébrique sur \mathbf{k} de dimension d .

Le réseau M s'identifie aux caractères de T en faisant correspondre à $m \in M$ le caractère $\chi^m : T \rightarrow \mathbf{k}^\star; \varphi \mapsto \varphi(m)$. L'algèbre des sections globales $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ du faisceau structural \mathcal{O}_T de T est canoniquement isomorphe à $\mathbf{k}[M] := \bigoplus_{m \in M} \mathbf{k} \chi^m$ l'algèbre du groupe M sur le corps \mathbf{k} . Le réseau N s'identifie aux *sous-groupes à un paramètre* de T en faisant correspondre à $n \in N$, $\lambda_n : \mathbf{k}^\star \rightarrow T$ défini par $\lambda_n(t)(m) = t^{\langle m, n \rangle}$, $t \in \mathbf{k}^\star$, $m \in M$.

Un *cône convexe polyédral* ou plus simplement *cône* est tout ensemble σ de $N_{\mathbb{R}}$ (resp. $M_{\mathbb{R}}$) tel qu'il existe un entier s et des points v_i , $1 \leq i \leq s$ de $N_{\mathbb{R}}$ (resp. $M_{\mathbb{R}}$) tels que σ soit l'ensemble $\langle v_1, \dots, v_s \rangle$ des combinaisons linéaires à coefficients réels non négatifs des v_i , $1 \leq i \leq s$. Le cône σ est fortement convexe s'il admet 0 pour sommet. Son intérieur σ^0 est, par définition, l'ensemble des éléments de σ qui n'appartient à aucune de ses faces strictes. Sa dimension est celle du sous-espace vectoriel de $N_{\mathbb{R}}$ (resp. $M_{\mathbb{R}}$) qu'il engendre.

On dit que v est un *vecteur primitif* du réseau N (resp. M) si v engendre le \mathbb{Z} -module $\mathbb{R}v \cap N$ (resp. $\mathbb{R}v \cap M$). Les vecteurs primitifs des faces de dimension 1 d'un cône sont appelés

les *vecteurs extrémaux* du cône. Si σ est un cône fortement convexe tel que $\sigma \neq \{0\}$, alors il est engendré par ses vecteurs extrémaux.

On appelle *cône simplicial* (resp. régulier) tout cône fortement convexe dont les vecteurs extrémaux sont \mathbb{R} -linéairement indépendants (resp. sont une partie d'une base du réseau).

Un cône σ de $N_{\mathbb{R}}$ détermine un cône σ^{\vee} (resp. un sous-espace vectoriel σ^{\perp}) de $M_{\mathbb{R}}$ en posant σ^{\vee} (resp. σ^{\perp}) = $\{m \in M_{\mathbb{R}} \mid m|_{\sigma} \geq 0$ (resp. = 0) $\}$. La correspondance $\sigma \rightarrow \sigma^{\vee}$ établit une bijection des cônes de $N_{\mathbb{R}}$ dans ceux de $M_{\mathbb{R}}$ puisque $\sigma = \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid n|_{\sigma^{\vee}} \geq 0\}$.

Soit $\mathbf{k}[\sigma^{\vee} \cap M]$ la \mathbf{k} -algèbre du semigroupe $\sigma^{\vee} \cap M$. En vertu du Lemme de Gordan, la \mathbf{k} -algèbre $\mathbf{k}[\sigma^{\vee} \cap M]$ est de type fini. On pose $U_{\sigma} = \text{Spec } \mathbf{k}[\sigma^{\vee} \cap M]$. Le plongement canonique $\mathbf{k}[\sigma^{\vee} \cap M] \hookrightarrow \mathbf{k}[M]$ montre que U_{σ} est une variété torique affine normale sur \mathbf{k} .

Le résultat suivant donne la description des variétés toriques affines.

Théorème 2.1.3. *Soit N un réseau de rang fini et T le tore $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}^*$. La correspondance $\sigma \rightarrow U_{\sigma}$ est une bijection entre l'ensemble de cônes fortement convexes de $N_{\mathbb{R}}$ et celui des variétés toriques affines et normales qui contiennent le tore T comme un ouvert dense, et munis d'une action de T qui prolonge l'action de T sur lui même.*

Proposition 2.1.4. *La variété torique U_{σ} est non singulière si et seulement si le cône σ est régulier. De plus, on a $U_{\sigma} \cong \mathbf{k}^k \times (\mathbf{k}^*)^{d-k}$, où k est la dimension du cône σ .*

Maintenant, on donne la description des variétés toriques générales

Définition 2.1.5. Un éventail Σ est un ensemble fini de cônes fortement convexes dans $N_{\mathbb{R}}$ tel que :

- toute face d'un cône de Σ est dans Σ ;
- l'intersection de deux cônes de Σ est une face de chacun de ces deux cônes.

Étant donné un éventail Σ , on définit une variété torique $X(\Sigma)$ en recollant les variétés affines U_{σ} , quand σ parcourt Σ le long des ouverts définis par les faces communes, c'est-à-dire si σ_1 et σ_2 appartiennent à Σ , on a $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$.

Théorème 2.1.6. *Soit N un réseau de rang d et Σ un éventail dans $N_{\mathbb{R}}$. Alors $X(\Sigma)$ est une variété torique de dimension d . De plus, toute variété torique est obtenue comme la variété torique normale associée à un éventail.*

Un résultat important de la théorie de variétés toriques est la correspondance entre les orbites et les cônes. On rappelle que $\lambda_n(t)(m) = t^{(m,n)}$, où $n \in N$, $t \in \mathbf{k}^*$ et $m \in M$, est un sous-groupe à un paramètre de T .

Théorème 2.1.7. *Soit Σ un éventail dans $N_{\mathbb{R}}$.*

- i) *Soit $n \in N$, $\sigma \in \Sigma$. Alors, le point n appartient à σ si et seulement si $\lambda_n(0) := \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_n(t)$ existe dans U_{σ} .*
- ii) *Si $n, n' \in N$, alors $\lambda_n(0) = \lambda_{n'}(0) \in U_{\sigma}$ si et seulement si n et n' appartiennent à l'intérieur relatif d'une même face τ de σ .*
- iii) *Chaque T -orbite de $X(\Sigma)$ contient un unique point $\lambda_n(0)$.*
- iv) *La correspondance qui à chaque cône $\sigma \in \Sigma$ associe l'orbite O_{σ} de $\lambda_n(0)$, où n est un point quelconque de $\sigma^0 \cap N$, est une bijection de Σ sur l'ensemble des orbites de $X(\Sigma)$. De plus, on a $\dim O_{\sigma} = \text{codim } \sigma$.*
- v) *Pour $\sigma \in \Sigma$, l'ouvert U_{σ} est la réunion disjointe des orbites O_{τ} , τ face de σ .*

Les morphismes équivariants entre variétés toriques, c'est-à-dire compatibles avec les actions des tores, sont décrits par l'énoncé suivant. Le *support* d'un éventail Σ est l'ensemble $|\Sigma| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$.

Théorème 2.1.8. *Soient Σ, Σ' deux éventails dans $N_{\mathbb{R}}$ et $T = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}^*$ le tore qui est ouvert dense de $X(\Sigma)$ et de $X(\Sigma')$.*

- i) *Il existe un morphisme $f : X(\Sigma') \rightarrow X(\Sigma)$ qui laisse fixe T si et seulement si pour chaque $\sigma' \in \Sigma'$ il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma' \subset \sigma$. Un tel morphisme est unique, birationnel et équivariant.*
- ii) *On suppose qu'il existe un morphisme $f : X(\Sigma') \rightarrow X(\Sigma)$ qui laisse fixe T . Alors, Le morphisme f est propre si et seulement si on a $|\Sigma'| = |\Sigma|$, c'est-à-dire si et seulement si Σ' est une subdivision de Σ .*
- iii) *Si Σ' est une subdivision d'éventail Σ , alors la fibre exceptionnelle du morphisme f de i) (le lieu des points de $X(\Sigma')$ où f n'est pas localement un isomorphisme) est la réunion des orbites $O_{\sigma'}$, $\sigma' \in \Sigma' \setminus \Sigma$.*

Soit v un élément de N appartenant à l'intérieur d'un cône simplicial σ , on appelle éclatement élémentaire de U_{σ} de centre v le morphisme équivariant défini par la subdivision minimale de σ qui contient l'arête portant v (subdivision élémentaire centrée en v).

Exemple 2.1.9. Soient $N := \mathbb{Z}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard de N , $\Delta := \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ et Σ l'éventail induit par la subdivision élémentaire centrée en $e_0 := e_1 + e_2 + e_3$ du cône Δ . On remarque que $U_{\Delta} = \mathbf{k}^3$. Alors, le morphisme équivariant $f : X(\Sigma) \rightarrow U_{\Delta}$ est l'éclatement de \mathbf{k}^3 de centre l'orbite de dimension 0 de \mathbf{k}^3 .

Le théorème suivant est la version torique du lemme de Chow (voir [Sum74]).

Théorème 2.1.10. *Soit $X(\Sigma)$ la variété torique associée à un éventail Σ dans $N_{\mathbb{R}}$. Alors, il existe une subdivision Σ' de l'éventail Σ tel que la variété torique $X(\Sigma')$ est quasi-projective. En particulier le morphisme équivariant $f : X(\Sigma') \rightarrow X(\Sigma)$ est projectif.*

Un théorème très intéressant de la théorie de variétés toriques est l'existence d'une désingularisation équivariante en caractéristique quelconque (Une désingularisation ou résolution des singularités d'une variété V est un morphisme propre et birationnel $\pi : X \rightarrow V$ tel que $\pi|_{X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } V)} : X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } V) \rightarrow V \setminus \text{Sing } V$ est un isomorphisme, où X est une variété lisse et $\text{Sing } V$ est le lieu singulier de V).

Théorème 2.1.11. *Soit $X(\Sigma)$ la variété torique associée à un éventail Σ dans $N_{\mathbb{R}}$. Alors, il existe une désingularisation équivariante $f : X(\Sigma') \rightarrow X(\Sigma)$, où Σ' est une subdivision régulière de Σ , c'est-à-dire tous les cônes de Σ sont réguliers.*

Pour finir cette section, on fait quelques rappels sur les diviseurs toriques. Soient Σ un éventail de $N_{\mathbb{R}}$, $X(\Sigma)$ la variété torique associée à un éventail Σ et $T = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}^*$ le tore qui est ouvert dense de $X(\Sigma)$. Notons $\text{Div}_T X(\Sigma)$ l'ensemble de diviseurs de Weil de $X(\Sigma)$ dont le support est stable par T . L'application qui fait correspondre à une arête α de Σ , l'orbite O_{α} est une bijection de l'ensemble $\Sigma(1)$ des arêtes de Σ sur celui des T -orbites de codimension un de la variété $X(\Sigma)$, d'où

$$\text{Div}_T X(\Sigma) = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma(1)} \mathbb{Z}D_{\alpha},$$

où D_{α} est l'adhérence dans $X(\Sigma)$ de l'orbite O_{α} , c'est-à-dire $D_{\alpha} = \overline{O_{\alpha}}$.

Soient $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ et $f = \sum_{m \in M} c_m \chi^m \in \mathbf{k}[M]$, où $c_m \in \mathbf{k}$. On remarque que f est une fonction rationnelle sur $X(\Sigma)$. Étant fixée une arête α de l'éventail Σ , on note g le point générique du diviseur D_{α} . On remarque que l'anneau local $\mathcal{O}_{X(\Sigma), g}$ a une structure naturelle

d'anneau de valuation discrète. On note $\text{Ord}_{D_\alpha} f$ l'ordre de f par rapport à la valuation de $\mathcal{O}_{X(\Sigma),g}$.

Proposition 2.1.12. *On a*

$$\text{Ord}_{D_\alpha} f = \inf_{c_m \neq 0} \langle m, \rho \rangle,$$

où ρ est le générateur du semi-groupe $\alpha \cap \mathbb{N}$.

Corollaire 2.1.13. *Avec les notations précédentes, on a pour tout $m \in M$*

$$\text{Div} \chi^m = \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} \langle m, \rho \rangle D_\alpha.$$

Notons $\text{Cat}_T X(\Sigma)$ l'ensemble des diviseurs de Cartier de $X(\Sigma)$ qui appartiennent à $\text{Div}_T X(\Sigma)$. La proposition suivante permet de décrire le groupe $\text{Cat}_T X(\Sigma)$ en terme de Σ et \mathbb{N} .

Proposition 2.1.14. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *le diviseur $D = \sum_{\alpha} n_{\alpha} D_{\alpha}$ est un diviseur de Cartier ;*
- ii) *pour tout $\sigma \in \Sigma$, la restriction de D à l'ouvert affine U_{σ} de $X(\Sigma)$ est un diviseur principal*
- iii) *pour tout $\sigma \in \Sigma$, il existe $m(\sigma) \in M$ tel que, pour toute arête α de σ , on ait :*

$$\langle m(\sigma), a \rangle = -n_{\alpha},$$
a désignant le générateur du semi-groupe $\alpha \cap \mathbb{N}$.

2.2. Éclatement et polyèdre de Newton

Dans cette section, on fait quelques rappels sur le polyèdre de Newton, la fonction d'appui et l'éclatement de Newton. Les démonstrations des résultats énoncés se trouvent dans [KKMS73] et [Var76].

Soient $d \geq 1$ un entier positif, $\mathbb{N} := \mathbb{Z}^d$ muni de sa base standard $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ et $\Delta := \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$. Le dual de \mathbb{N} , noté M , est identifié avec \mathbb{Z}^d au moyen de la forme bilinéaire standard $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq d$.

Définition 2.2.1. Soit R un sous-ensemble de M . On définit successivement les ensembles suivants :

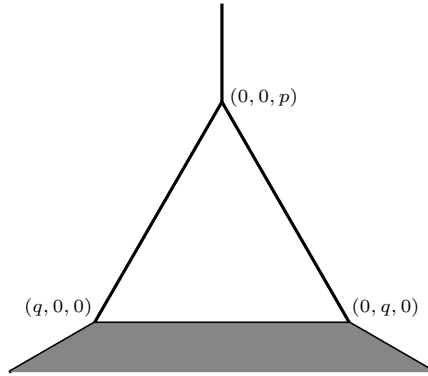
- le polyèdre de Newton de R , noté $\Gamma_+(R)$, est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\bigcup_{r \in R} (r + \mathbb{R}_{\geq 0}^d)$ dans \mathbb{R}^d ;
- la frontière de Newton de R , notée $\Gamma(R)$, est la réunion des faces compactes de $\Gamma_+(R)$.

Dans les sections suivantes, nous nous intéresserons aux polyèdres de Newton associés à certaines hypersurfaces. C'est pour cette raison qu'on introduit la notation suivante :

Soit $f = \sum_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d} c_r x^r \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_d]$, où $c_r \in \mathbf{k}$ et $x^r = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_d^{r_d}$, pour $r = (r_1, r_2, \dots, r_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$. On pose $\mathcal{E}(f) := \{r \in \mathbb{Z}^d \mid c_r \neq 0\}$, $\Gamma_+(f) := \Gamma_+(\mathcal{E}(f))$ et $\Gamma(f) := \Gamma(\mathcal{E}(f))$.
Si $d = 3$, on pose $x := x_1$, $y := x_2$ et $z := x_3$.

Dans l'exemple suivant, on explicite le polyèdre de Newton associé à l'hypersurface de Pham-Brieskorn donnée par l'équation $x^q + y^q + z^p = 0$, où $p \geq 2$, $q \geq 2$ sont deux entiers premiers entre eux.

Exemple 2.2.2. Soient $p \geq 2$, $q \geq 2$ deux entiers premiers entre eux et $f = x^q + y^q + z^p$. Le polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$ (resp. La frontière de Newton $\Gamma(f)$) est l'intersection de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ avec l'ensemble $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (a, b, c), (p, p, q) \rangle \geq (\text{resp. } =) pq\}$. Voir la Figure 1

FIGURE 1. Polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$, $f = x^q + y^q + z^p$.

Dans la suite on suppose que R est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{>0}^d \subset M$. On remarque que pour tout $n \in \Delta$, le polyèdre de Newton $\Gamma_+(R)$ est contenu dans le demi-espace $\{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n \rangle \geq 0\}$. Ceci permet définir l'application suivante.

Définition 2.2.3. Soit R un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{>0}^d \subset M$. On définit sa fonction d'appui $h_{\Gamma_+(R)}(n)$, $n \in \Delta$, par

$$h_{\Gamma_+(R)}(n) = \inf\{\langle m, n \rangle \mid m \in \Gamma_+(R)\}.$$

Proposition 2.2.4. Soient R un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{>0}^d \subset M$ et $h_{\Gamma_+(R)} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction d'appui associée au polyèdre de Newton $\Gamma_+(R)$. On a :

- i) la fonction $h_{\Gamma_+(R)}$ est continue, linéaire par morceaux et convexe supérieurement, c'est-à-dire si $x, y \in \Delta$, alors $h_{\Gamma_+(R)}(x) + h_{\Gamma_+(R)}(y) \leq h_{\Gamma_+(R)}(x + y)$;
- ii) le polyèdre de Newton $\Gamma_+(R)$ est défini par la fonction d'appui $h_{\Gamma_+(R)}$, plus précisément : $\Gamma_+(R) = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n \rangle \geq h_{\Gamma_+(R)}(n), \forall n \in \Delta\}$;
- iii) pour toute face F du polyèdre de Newton $\Gamma_+(R)$, $\sigma_F = \{n \in \Delta \mid \langle m, n \rangle = h_{\Gamma_+(R)}(n), \forall m \in F\}$ est un cône et la famille $\Gamma^*(R) := \{\sigma_F \mid F \text{ face de } \Gamma_+(R)\}$ est une subdivision de Δ . De plus, l'éventail $\Gamma^*(R)$ est la subdivision moins fine de Δ telle que la restriction de $h_{\Gamma_+(R)}$ à chaque cône de $\Gamma^*(R)$ soit linéaire ;
- iv) Soient $J \subset \{1, 2, \dots, d\}$ et $\sigma_J = \{(n_1, n_2, \dots, n_d) \in \Delta \mid n_i = 0 \text{ ssi } i \notin J\}$. S'il existe $n \in \sigma_J$ tel que $h_{\Gamma_+(R)}(n) > 0$, alors $h_{\Gamma_+(R)}(n') > 0$ pour tout $n' \in \sigma_J$. De plus, s'il existe $n \in \sigma_J$ tel que $h_{\Gamma_+(R)}(n) = 0$, alors l'adhérence de σ_J dans Δ est un cône de $\Gamma^*(R)$.

Définition 2.2.5. L'éventail $\Gamma^*(R)$ de la proposition précédente est appelé l'éventail de Newton associé à R . Si $R = \mathcal{E}(f)$, où $f \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$, on note $\Gamma^*(f)$ l'éventail de Newton associé à $\mathcal{E}(f)$. Le morphisme équivariant $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(R)) \rightarrow U_\Delta$ induit par la subdivision $\Gamma^*(R)$ de Δ est appelé l'éclatement de Newton associé à R .

Remarque 2.2.6. L'éclatement de Newton associé à R ne dépend que du polyèdre de Newton de R . Voir l'exemple suivant.

Exemple 2.2.7. Soient $f = x^q + y^q + z^p$ et $g = x^q + y^q + x^{q-1}y + z^p$, où les entiers $p \geq 2$, $q \geq 2$ sont premiers entre eux. Les polynômes f, g sont associés au même polyèdre de Newton

(c'est-à-dire $\Gamma_+(f) = \Gamma_+(g)$) et, par conséquent, f et g sont associés au même éventail de Newton (c'est-à-dire $\Gamma^*(f) = \Gamma^*(g)$). Voir la Figure 1.

Soit H un plan de \mathbb{R}^3 qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^3 et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ soit un ensemble compact. La Figure 2 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec le *vecteur extrémal* correspondant. On note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$) et (p, p, q) .

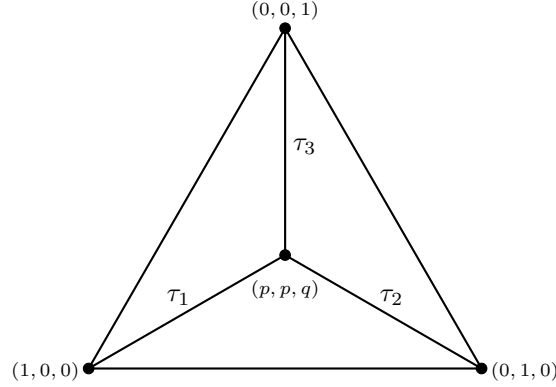


FIGURE 2. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, $f = x^q + y^q + z^p$.

Les idéaux monomiaux intégralement clos sont en relation avec les polyèdres de Newton et les éclatements de Newton. Dans la suite on donne quelques éléments de cette relation.

Définition 2.2.8. Soit $\mathcal{I} \subset \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$ un idéal. On dit qu'un élément $g \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$ est entier (ou satisfait une relation de dépendance intégrale) sur \mathcal{I} s'il existe une relation :

$$g^k + a_1 g^{k-1} + \dots + a_k = 0,$$

où $a_i \in \mathcal{I}^i$ pour $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. L'ensemble des éléments $g \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$ entiers sur \mathcal{I} est un idéal qu'on appelle la clôture intégrale ou complétion de \mathcal{I} dans $\mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$ et qu'on note $\overline{\mathcal{I}}$. on dit que \mathcal{I} est intégralement clos ou complet si $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$.

Pour un idéal monomial $\mathcal{I} \subset \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$, on note $\Gamma_+(\mathcal{I})$ le polyèdre de Newton associé à l'ensemble $\{m \in M \mid \chi^m \in \mathcal{I}\}$.

Proposition 2.2.9. Soit $\mathcal{I} \subset \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$ un idéal monomial. Alors, on a :

$$\overline{\mathcal{I}} = \bigoplus_{m \in \Gamma_+(\mathcal{I}) \cap M} \mathbf{k}\chi^m.$$

En particulier $\Gamma_+(\mathcal{I}) = \Gamma_+(\overline{\mathcal{I}})$.

En utilisant les propositions précédentes, on peut montrer le théorème suivant.

On rappelle que l'éclatement de Newton associé à l'idéal monomial \mathcal{I} est le morphisme équivariant $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(\mathcal{I})) \rightarrow U_{\Delta}$ induit par la subdivision $\Gamma^*(\mathcal{I})$ de Δ .

Théorème 2.2.10. Soient $\mathcal{I} \subset \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$ un idéal monomial et $f : X \rightarrow U_{\Delta}$ l'éclatement normalisé de centre l'idéal \mathcal{I} . Alors, le morphisme f est l'éclatement de Newton $\pi_{\mathcal{N}}$ associé \mathcal{I} .

Remarque 2.2.11. Le morphisme f du théorème précédent est l'éclatement de Newton de U_{Δ} associé à \mathcal{I} .

2.3. Le système générateur minimal et les G-désingularisations

Dans le cas de surfaces toriques, il existe une unique G -désingularisation. De plus, cette désingularisation est la résolution minimale. Dans les cas de variétés toriques de dimension trois la G -désingularisation existe. Mais, en général, elle n'est pas unique. En revanche les différents G -désingularisations sont reliées par une suite de transformations élémentaires.

En dimension plus grande que quatre, une variété torique n'admet pas nécessairement de G -désingularisation.

Dans cette section, on fait quelques rappels sur le système générateur minimal d'un cône fortement convexe et les G -désingularisations. Les démonstrations des résultats énoncés se trouvent dans [BGS92].

Soient $d \geq 1$ un entier, N un \mathbb{Z} -module libre de rang d et M son dual.

Définition 2.3.1. Soit σ un cône fortement convexe dans $N_{\mathbb{R}}$. On appelle *système générateur minimal* de σ l'ensemble $G_{\sigma} := \{x \in \sigma \cap N \mid \forall n_1, n_2 \in \sigma \cap N, x = n_1 + n_2 \Rightarrow n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0\}$ des éléments irréductibles du semi-groupe $\sigma \cap N$.

La proposition suivante justifie le nom de système générateur minimal donné à l'ensemble G_{σ} .

Proposition 2.3.2. *L'ensemble G_{σ} engendre le semi-groupe $\sigma \cap N$ et il est contenu dans tout système générateur de $\sigma \cap N$. En particulier, G_{σ} est fini.*

Étant donné un cône σ fortement convexe de $N_{\mathbb{R}}$, on lui associe l'enveloppe convexe C des points de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ et l'ensemble Λ des points de N appartenant aux faces compactes de C .

Proposition 2.3.3. *Les points de Λ appartiennent au système générateur minimal G_{σ} .*

La proposition suivante établit une relation entre le système générateur minimal d'un cône σ fortement convexe de dimension deux et une désingularisation de U_{σ} .

Proposition 2.3.4. *Si σ est un cône fortement convexe de dimension 2, alors la subdivision Σ de σ dont les points extrémaux sont les points de Λ est régulière et on a $G_{\sigma} = \Lambda$. Le morphisme associé à la subdivision Σ est donc une désingularisation de U_{σ} et si $\dim U_{\sigma} = 2$, alors c'est la désingularisation minimale.*

La proposition précédente motive la définition suivante :

Définition 2.3.5. Soient Σ un éventail dans $N_{\mathbb{R}}$ et σ un cône de Σ . Nous appellerons *G-subdivision régulière* de σ une subdivision régulière de σ dont les vecteurs extrémaux sont exactement les éléments de G_{σ} .

On dit qu'un éventail $\Sigma_{\mathcal{G}}$ est une *G-subdivision régulière* de Σ si chaque cône de $\Sigma_{\mathcal{G}}$ est obtenu par une G -subdivision régulière d'un cône de Σ . Le morphisme équivariant associé à une G -subdivision régulière de Σ est appelé *G-désingularisation* de $X(\Sigma)$.

Le théorème suivant montre l'existence de G -désingularisation en dimension 3.

Soient $N = \mathbb{Z}^3$ et Σ' un éventail régulier dans $N_{\mathbb{R}}$. On suppose que l'éventail Σ' contient un cône de dimension 2, $\tau = \langle v_1, v_2 \rangle$ tel que les vecteurs extrémaux v_1, v_2, v_3, v_4 des deux cônes de dimension 3 qui ont τ pour face vérifient $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$.

Une transformation élémentaire de l'éventail Σ' est un éventail Σ'' obtenu à partir de Σ' en remplaçant les cônes $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \langle v_1, v_2, v_4 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle$ de Σ' par les cônes $\langle v_1, v_3, v_4 \rangle, \langle v_2, v_3, v_4 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle$.

Théorème 2.3.6. Soient $N = \mathbb{Z}^3$ et Σ un éventail dans $N_{\mathbb{R}}$. Alors, il existe une G -subdivision régulière de Σ . De plus, si Σ' et Σ'' sont deux G -subdivisions régulières de Σ , alors Σ' et Σ'' sont reliés par une suite finie de transformations élémentaires.

L'exemple suivant montre un cas où la G -subdivision régulière est unique et un autre cas où elle ne l'est pas.

Exemple 2.3.7. De gauche à droite : la Figure 3 (resp. 4) montre l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé au polynôme $f = x^2 + z(y^2 + z^2)$ (resp. $f = x^4 + y^4 + z^3$) et une G -subdivision régulière $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^*(f)$.

La G -subdivision régulière de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, $f = x^2 + z(y^2 + z^2)$, n'est pas unique. Il suffit de remarquer que $(1, 0, 0) + (2, 1, 2) = (1, 0, 1) + (2, 1, 1)$. On peut donc faire une transformation élémentaire de l'éventail $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$.

La G -subdivision régulière $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, $f = x^4 + y^4 + z^3$, est unique, car on ne peut pas faire de transformations élémentaires.

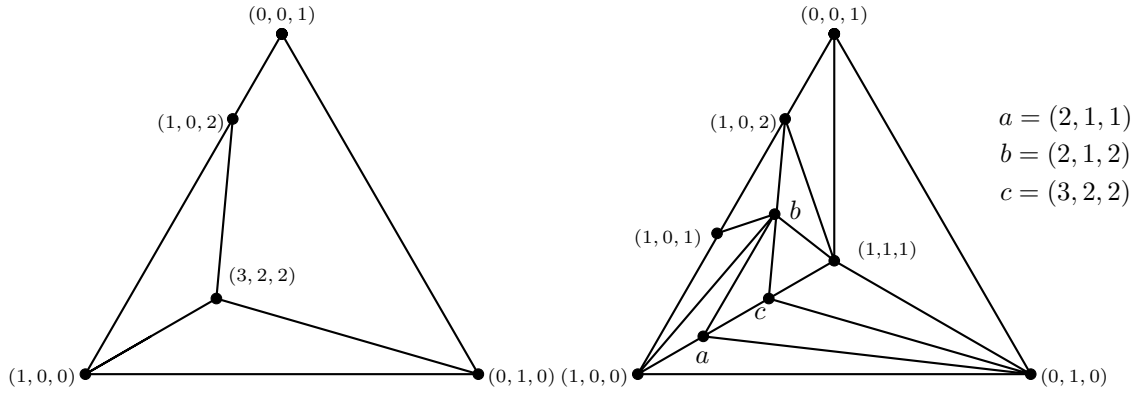


FIGURE 3. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, $f = x^2 + z(y^2 + z^2)$, et une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$.

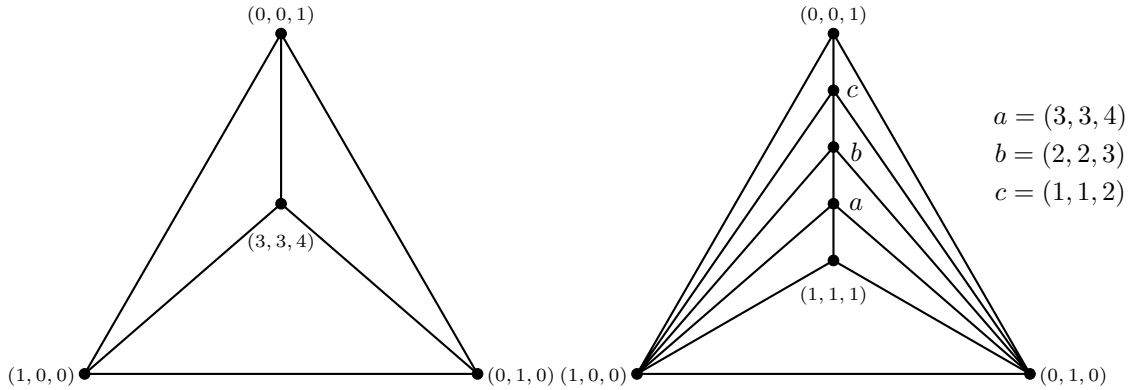


FIGURE 4. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, $f = x^4 + y^4 + z^3$, et la G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$.

L'exemple suivant montre un cône de dimension 4 qui n'admet pas de G -subdivision régulière. La preuve de ce résultat se trouve dans [BGS92].

Exemple 2.3.8. Soient $N = \mathbb{Z}^4$ et σ le cône simplicial de $N_{\mathbb{R}}$ engendré par $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, 0)$, $v_4 = (1, 3, 4, 7)$. Alors, le système générateur minimal est l'ensemble suivant : $G_{\sigma} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 3, 4, 7), (1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, 3), (1, 3, 3, 5), (1, 1, 2, 2), (1, 2, 3, 3), (1, 3, 4, 6)\}$. Le cône σ n'admet pas de G -subdivision régulière.

2.4. Constellations toriques de points infiniment voisins

Dans cette section, on fait quelques rappels sur les constellations toriques de points infiniment voisins, les codifications de constellations toriques et la théorie de Zariski-Lipman ([SZ75], [Lip88]) sur les idéaux complets, dans le cas d'idéaux monomiaux. Les démonstrations des résultats énoncés se trouvent dans [CGSLJ96] et [CGSM09].

Soient $d \geq 1$ un entier, $N := \mathbb{Z}^d$ muni de sa base standard $\{e_1, \dots, e_d\}$, $M := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ le dual de N et T le tore algébrique $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$. On note X_0 la variété torique U_{Δ} , $\Delta = \langle e_1, \dots, e_d \rangle$ et O la T -orbite de dimension 0 de X_0 .

Une constellation torique de points infiniment voisins de O est un ensemble fini de points $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, où chaque Q_i , $1 \leq i \leq n$, est une orbite de dimension 0 de la variété torique X_i obtenue par l'éclatement $\varsigma_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ de centre Q_{i-1} . On note $X(\mathcal{C}) = X_{n+1}$.

On dit que Q_j se projette sur Q_i , noté $Q_j \geq Q_i$, si le point $Q_j \in X_j$ est obtenu à partir de $Q_i \in X_i$ par une suite d'éclatements de points. La relation \geq est une relation d'ordre partiel sur les points de \mathcal{C} . Si \geq est un ordre total, on dit que \mathcal{C} est une constellation en chaîne. Par exemple, pour une constellation \mathcal{C} et un point $Q \in \mathcal{C}$ quelconque, l'ensemble $\mathcal{C}^Q := \{P \in \mathcal{C} \mid Q \geq P\}$ est une constellation en chaîne.

Pour chaque point Q_i d'une constellation $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, on note B_i le diviseur exceptionnel de l'éclatement de Q_i et E_i (resp. E_i^*) le transformé strict (resp. total) de B_i sur $X(\mathcal{C})$.

Définition 2.4.1. Soit $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$ une constellation.

On définit une relation de proximité dans \mathcal{C} comme suit : Q_j est proche de Q_i si $Q_j \in E_i$; on la note $j \rightarrow i$.

On appelle matrice de proximité la matrice $(n+1) \times (n+1)$, $P = (p_{ij})$, avec $p_{ii} = 1$, $p_{ij} = -1$ si $i \rightarrow j$, et $p_{ij} = 0$ dans les autres cas.

Proposition 2.4.2. Soit $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$ une constellation. Alors, pour chaque $Q_i \in \mathcal{C}$ on a : $E_i = E_i^* - \sum_{j \rightarrow i} E_j^*$ pour tout $0 \leq i \leq n$. La matrice de proximité P est donc la matrice de changement de base des E_i aux E_i^* .

Soient $d \geq 2$ un entier et $N = \mathbb{Z}^d$. Étant fixée une base ordonnée $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_d\}$ de N , on peut associer à une constellation torique \mathcal{C} une *codification* naturelle. Dans le paragraphe suivant, on décrit cette codification.

Supposons que $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, $n \geq 1$, soit une constellation torique en chaîne de points infiniment voisins de O . On considère le cône régulier $\Delta = \langle \mathcal{B} \rangle$, engendré par la base ordonnée \mathcal{B} . Notons Σ_i l'éventail associé à la variété torique X_i . L'éventail Σ_1 est obtenu par la subdivision élémentaire de Δ centrée en $u = \sum_{i=1}^d e_i$. Pour chaque entier j , $1 \leq j \leq d$, soit \mathcal{B}_j la base ordonnée de N obtenue en remplaçant e_j par u en la base \mathcal{B} . Soit $\Delta_j := \langle \mathcal{B}_j \rangle$ le cône régulier engendré par \mathcal{B}_j , pour $1 \leq j \leq d$. Le choix du point $Q_1 > Q_0$ équivaut à choisir un entier a_1 , $1 \leq a_1 \leq d$, qui détermine un cône Δ_{a_1} de l'éventail Σ_1 . La subdivision Σ_2 de Σ_1 est obtenue en remplaçant Δ_{a_1} en Σ_1 par les cônes $\Delta_{a_1 j} := \langle \mathcal{B}_{a_1 j} \rangle$, où $\mathcal{B}_{a_1 j}$ est la base ordonnée de N obtenue en remplaçant le j -ième vecteur de \mathcal{B}_{a_1} par $\sum_{u \in \mathcal{B}_{a_1}} u$. Le choix du point $Q_2 > Q_1$ équivaut à choisir un entier a_2 , $1 \leq a_2 \leq d$, qui détermine un cône $\Delta_{a_1 a_2}$ de l'éventail Σ_2 . Par récurrence, on obtient une codification de la constellation en chaîne \mathcal{C} . Cette codification est notée $Q_j = Q_i(a_{i+1}, \dots, a_j)$ pour $0 \leq i < j \leq n$.

Étant donnée une constellation torique \mathcal{C} quelconque, le sous-ensemble $\mathcal{C}^Q = \{P \in \mathcal{C} \mid Q \geq P\}$ est une constellation en chaîne. Par conséquent, chaque point de $Q \in \mathcal{C}$, en utilisant la chaîne \mathcal{C}^Q , est associé à une codification.

La proposition suivante montre que la relation de proximité peut être décrite au moyen de la codification.

Proposition 2.4.3. *Soient \mathcal{C} une constellation torique, $Q \in \mathcal{C}$ et $\{a_1, \dots, a_k\}$ une suite d'entiers telle que $Q(a_1, \dots, a_k) \in \mathcal{C}$. Alors, $Q(a_1, \dots, a_k) \rightarrow Q$ si et seulement si $a_1 \neq a_j$ pour tout $2 \leq j \leq k$.*

Exemple 2.4.4. Soient $N = \mathbb{Z}^3$ et $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, $n \geq 1$, une constellation torique en chaîne donnée par la codification $Q_k = Q_0(1^{[k]})$, $0 \leq k \leq n$ ($1^{[k]}$ est k fois 1).

En vertu de la Proposition 2.4.3, $j \rightarrow i$, $0 \leq i < j \leq n$, si est seulement si $j = i + 1$. D'après la proposition 2.4.2 $E_i = E_i^* - E_{i+1}^*$, pour tout $0 \leq i \leq n - 1$. De plus, $E_i^* = \sum_{j=i}^n E_j$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

Dans le cas des idéaux monomiaux, les constellations toriques donnent de bons outils pour étudier la théorie de Zariski-Lipman sur les idéaux complets à support fini.

Dans toute la suite, tous les idéaux non-triviaux qu'on considère sont monomiaux et \mathcal{M} -primaires par rapport à l'idéal $\mathcal{M} \subset \mathcal{O}_{X_0}$, où \mathcal{M} est l'idéal maximal associé au point $O \in X_0$.

D'abord, on introduit les notions de \star -produit, d'idéal \star -simple et d'idéal \star -simple spécial. Ensuite, on énonce le résultat d'unique \star -factorisation, dans les sens de [Lip88], des idéaux. Finalement, on introduit la notion de proximité linéaire d'une constellation torique \mathcal{C} et on l'utilise pour caractériser les idéaux \star -simples spéciaux associés à \mathcal{C} .

Définition 2.4.5. Soient $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{P}$ trois idéaux. Le \star -produit de \mathcal{I} et \mathcal{J} , noté $\mathcal{I} \star \mathcal{J}$, est la clôture intégrale ou complétion du produit $\mathcal{I}\mathcal{J}$, c'est-à-dire $\mathcal{I} \star \mathcal{J} := \overline{\mathcal{I}\mathcal{J}}$.

On suppose que \mathcal{P} est un idéal complet non-trivial. L'idéal \mathcal{P} est \star -simple si \mathcal{P} n'a pas une \star -factorisation non-triviale, c'est-à-dire si $\mathcal{P} = \mathcal{I} \star \mathcal{J}$, alors $\mathcal{I} = \mathcal{O}_{X_0}$ ou $\mathcal{J} = \mathcal{O}_{X_0}$.

Définition 2.4.6. Un idéal \mathcal{I} est à *support fini* s'il existe une constellation \mathcal{C} telle que $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}$ est un faisceau d'idéaux inversible, la constellation minimale (par rapport au nombre de points) avec cette propriété est notée $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$. Les points de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ sont appelés les points base de l'idéal \mathcal{I} .

Soient $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1 \dots Q_n\}$ une constellation torique et \mathcal{J} un idéal non nul de l'anneau local \mathcal{O}_{X_i, Q_i} . L'ordre de \mathcal{J} au point Q_i , noté $\text{Ord}_{Q_i} \mathcal{J}$, est l'ordre d'élément général g de \mathcal{J} au point Q_i , c'est-à-dire $\text{Ord}_{Q_i} \mathcal{J} = \text{Ord}_{Q_i} g$.

On note $\text{ISF}(\mathcal{C})$ l'ensemble des idéaux à support fini, monomiaux, complets et \mathcal{M} -primaires tels que leur support est la constellation \mathcal{C} , c'est à dire :

$$\text{ISF}(\mathcal{C}) := \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I} \text{ est un idéal à support fini, monomial, complet, } \mathcal{M}\text{-primaire et } \mathcal{C}_{\mathcal{I}} = \mathcal{C}\}.$$

Définition 2.4.7. Soient $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1 \dots Q_n\}$ et $\mathcal{I} \in \text{ISF}(\mathcal{C})$. On définit par récurrence le *transformé faible* \mathcal{I}_i et la *multiplicité stricte* m_i de \mathcal{I} au point base Q_i : $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$, $m_0 = \text{Ord}_{Q_0} \mathcal{I}$, $\mathcal{I}_j = x^{-m_i} \mathcal{I}_i \mathcal{O}_{X_j, Q_j}$ et $m_j = \text{Ord}_{Q_j} \mathcal{I}_j$, où $0 \leq i < j \leq n$, $Q_j \in Q_i^+ := \{R \in \mathcal{C} \mid R > Q_i\}$ et $x = 0$ est l'équation locale de B_i en Q_j .

On associe à chaque idéal $\mathcal{I} \in \text{ISF}(\mathcal{C})$, le vecteur $m(\mathcal{I}) = (m_0, m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$.

Les résultats principaux sur l'unique \star -factorisation peuvent être formulés, dans notre cas, de la façon suivante :

Proposition 2.4.8. *Soit \mathcal{C} une constellation torique. Alors, pour chaque point $Q \in \mathcal{C}$ il existe un unique idéal \mathcal{P}_Q monomial, complet, \mathcal{M} -primaire, \star -simple et à support fini sur \mathcal{C} tel que les points base de \mathcal{P}_Q sont les points de la chaîne \mathcal{C}^Q (c'est-à-dire $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_Q} = \mathcal{C}^Q$) et le vecteur $\mathfrak{m}(\mathcal{P}_Q)$ est minimal pour l'ordre lexicographique inverse $\leq_{l,i}$ (c'est-à-dire $\mathfrak{m}(\mathcal{P}_Q) \leq_{l,i} \mathfrak{m}(\mathcal{I})$ pour tout $\mathcal{I} \in \text{ISF}(\mathcal{C}^Q)$) et $\text{Ord}_Q \mathcal{P}_Q = 1$.*

Définition 2.4.9. Les idéaux \star -simples \mathcal{P}_Q , $Q \in \mathcal{C}$, de la proposition précédente sont appelés les idéaux \star -simples spéciaux associés à \mathcal{C} .

Théorème 2.4.10. *Soient $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$ une constellation et \mathcal{I} un idéal appartenant à $\text{ISF}(\mathcal{C})$. Alors, on peut écrire, d'une façon unique, l'idéal \mathcal{I} comme le \star -produit formel d'idéaux \star -simples spéciaux. Plus précisément, on a*

$$\mathcal{I} = \prod_{0 \leq i \leq n}^{\star} \mathcal{P}_{Q_i}^{r_i}, \quad \mathfrak{r}(\mathcal{I}) := (r_0, r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^{n+1},$$

où ${}^t \mathfrak{r}(\mathcal{I}) = (P^{-1}) \cdot {}^t \mathfrak{m}(\mathcal{I})$, P est la matrice de proximité de \mathcal{C} .

Dans la suite, étant donné une constellation torique \mathcal{C} , on définit une relation sur \mathcal{C} plus fine que celle de proximité et on l'utilise pour décrire les idéaux \star -simples spéciaux.

Définition 2.4.11. Soit $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, $n \geq 1$, une constellation torique. On définit la relation de proximité linéaire dans \mathcal{C} comme suit : Q_j est linéairement proche de Q_i , noté $j \rightarrow i$, si Q_j appartient au transformé strict de l'adhérence dans X_{i+1} d'une T -orbite de dimension 1 de B_i .

La proposition suivante montre que la proximité linéaire peut être décrite au moyen de la codification.

Proposition 2.4.12. *Soient $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, $n \geq 1$ une constellation torique. $j \rightarrow i$, $0 \leq i < j \leq n$, si et seulement s'il existe des entiers a , b et m , tels que $a \neq b$ et $Q_j = Q_i(a, b^{[m]})$, où $b^{[m]}$ est m -fois l'entier b .*

En vertu des Propositions 2.4.3 et 2.4.12, si $j \rightarrow i$ alors $j \rightarrow i$. Or, l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

La proposition suivante caractérise les idéaux \star -simples spéciaux.

Proposition 2.4.13. *Soient $N := \mathbb{Z}^d$ et $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, $n \geq 1$, une constellation torique en chaîne donnée par la codification $Q_j = Q_0(a_1, \dots, a_j)$, où $1 \leq a_i \leq d$, $1 \leq i, j \leq n$. Alors, le diviseur $D_n = \sum_{i=0}^n m_{in} E_i^*$ associé à l'idéal \star -simple spécial \mathcal{P}_{Q_n} (c'est-à-dire $\mathcal{P}_{Q_n} \mathcal{O}_{X(\mathcal{C})} = \mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(-D_n)$) est donné par la récurrence suivante :*

$$m_{nn} = 1, \quad m_{in} = \sum_{j \rightarrow i} m_{jn} \text{ pour } 0 \leq i < n$$

Exemple 2.4.14. Soient $N = \mathbb{Z}^3$ et $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_n\}$, $n \geq 1$, une constellation torique en chaîne donnée par la codification $Q_k = Q_0(1^{[k]})$, $0 \leq k \leq n$.

D'après la proposition 2.4.12, $j \rightarrow i$, $0 \leq i < j \leq n$, si et seulement si $j = i + 1$. En vertu de la proposition 2.4.13, $m_{in} = 1$ pour tout $0 \leq i < n$. Par conséquent, $D_n = \sum_{i=0}^n E_i^*$. Ainsi, on obtient que

$$D_n = \sum_{i=0}^n E_i^* = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n E_j = \sum_{i=0}^n (i+1) E_i,$$

voir l'exemple 2.4.4.

2.5. Résolution de singularités d'hypersurfaces

Dans cette section, on fait quelques rappels sur la désingularisation d'hypersurfaces normales. Les désingularisations qu'on considère sont induites par des subdivisions régulières particulières de l'éventail de Newton associé à l'équation de l'hypersurface.

D'abord, on fixe les notations.

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, $d \geq 2$ un entier, $N := \mathbb{Z}^{d+1}$ muni de sa base standard $\{e_1, e_2, \dots, e_{d+1}\}$, $M := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ le dual de N et $\Delta := \langle e_1, e_2, \dots, e_{d+1} \rangle$ le cône engendré par les vecteurs e_1, e_2, \dots, e_{d+1} . Le \mathbb{Z} -module M est identifié avec \mathbb{Z}^{d+1} au moyen de la forme bilinéaire standard $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq d+1$. On note T le tore $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$ et on pose $x_j := \chi^{e_j} \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$, $1 \leq j \leq d+1$.

Pour $r := (r_1, r_2, \dots, r_{d+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$, on note $x^r = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_{d+1}^{r_{d+1}}$. Soit V une hypersurface normale de la variété torique $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} := \text{Spec } \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$, donnée par l'équation $f = 0$, où $f = \sum_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}} c_r x^r \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$, $c_e \in \mathbf{k}$, est un polynôme irréductible.

On considère l'éclatement de Newton $\pi_N : X(\Gamma^*(f)) \rightarrow U_\Delta$, où $\Gamma^*(f)$ est l'éventail de Newton associé à f (voir la Définition 2.2.5).

Soient $J \subset \{1, 2, \dots, d+1\}$ et $\sigma_J = \{(n_1, n_2, \dots, n_{d+1}) \in \Delta \mid n_i = 0 \text{ ssi } i \notin J\}$. En vertu de la proposition 2.2.4, s'il existe un vecteur $n \in \sigma_J$ où la fonction d'appui $h_{\Gamma^*(f)}$ s'annule (c'est-à-dire $h_{\Gamma^*(f)}(n) = 0$), alors l'adhérence $\bar{\sigma}_J$ de σ_J dans Δ est un cône de $\Gamma^*(f)$, c'est-à-dire $\bar{\sigma}_J \in \Gamma^*(f)$.

Définition 2.5.1. Une subdivision Σ de $\Gamma^*(f)$ est appelée *subdivision régulière admissible* si Σ satisfait les propriétés suivantes :

- Σ est une subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$;
- s'il existe $n \in \sigma_J$, $J \subset \{1, 2, \dots, d+1\}$, tel que $h_{\Gamma^*(f)}(n) = 0$, alors $\bar{\sigma}_J \in \Sigma$.

Remarque 2.5.2. Si la G -subdivision régulière $\Gamma^*(f)_G$ de $\Gamma^*(f)$ existe, par exemple si $d \in \{1, 2\}$, alors $\Gamma^*(f)_G$ est une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$.

Maintenant, on définit la propriété de non-dégénérescence par rapport à la frontière de Newton.

Définition 2.5.3. Soit $f = \sum_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}} c_r x^r \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$, $c_r \in \mathbf{k}$, un polynôme tel que $\langle r, r \rangle > 1$, pour tout $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$ tel que $c_r \neq 0$.

Le polynôme f est *non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton* si pour toute face compacte γ de $\Gamma(f)$, le polynôme $f_\gamma := \sum_{r \in \gamma} c_r x^r$ est non singulier sur le tore $T = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$, c'est-à-dire les polynômes f_γ , $\partial_{x_i} f_\gamma$, $1 \leq i \leq d+1$, n'ont pas de zéro commun en dehors de l'ensemble $\mathbb{A}^{d+1} \setminus T$.

Remarque 2.5.4. Pour un polyèdre de Newton donné la notion de non-dégénérescence est générique.

La proposition suivante se trouve dans l'article [Var76], mais pour avoir plus de détails voir [Mer80]. Une autre preuve de ce résultat peut être obtenue en utilisant les techniques développées dans [GSLJ91].

Proposition 2.5.5. Soit V l'hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} := \text{Spec } \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$ donnée par l'équation $f = 0$, $f \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$. On suppose que f est un polynôme irréductible,

non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton. On fixe une subdivision régulière admissible Σ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ et on considère le morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ induit par la subdivision Σ de Δ . Alors, on a :

- i) Pour chaque point $p \in \pi^{-1}(O)$, où O est l'orbite de dimension zéro de la variété torique $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$, le diviseur $\pi^{-1}(V)$ est à croisements normaux au point p ;
- ii) le transformé strict \tilde{V} de V dans $X(\Sigma)$ est non singulière sur $\pi^{-1}(O)$;
- iii) soit $\sigma \in \Sigma$ et O_σ l'orbite associée à σ . Si $\pi(O_\sigma) = O$ et $\dim O_\sigma > 0$, alors l'intersection de O_σ et \tilde{V} est transversal.

Remarque 2.5.6. La condition de non-dégénérescence par rapport à la frontière de Newton et indispensable dans la preuve du Théorème 2.5.5. En effet, dans [Mer80] on montre que f n'est pas dégénéré par rapport à la frontière de Newton si et seulement si le diviseur $\pi^{-1}(V)$ est à croisements normaux au voisinage de $\pi^{-1}(O)$.

La proposition suivante se trouve dans l'article [Var76], mais pour avoir plus de détails voir [Mer80]

Proposition 2.5.7. On conserve les hypothèses de la Proposition 2.5.5. Le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est un isomorphisme en dehors de l'image réciproque de $f = 0$.

Définition 2.5.8. Soit V une hypersurface normale d'une variété algébrique lisse X . On suppose que V a un unique point singulier $p \in V$. Un morphisme propre et birationnel $\pi : Z \rightarrow X$ est appelé *résolution plongée* de V si π satisfait les propriétés suivantes :

- i) Z est une variété lisse et π induit un isomorphisme de $Z \setminus \pi^{-1}(p)$ sur $X \setminus \{p\}$;
- ii) le transformé total $\pi^{-1}(V)$ de V dans Z est un diviseur à croisements normaux.

Le résultat suivant est un corollaire des Propositions 2.5.5 et 2.5.7.

Corollaire 2.5.9. On conserve les hypothèses de la Proposition 2.5.5. De plus, on suppose que $O \in \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est l'unique point singulier de V et que V ne contient aucune T -orbite de dimension strictement plus grande que zéro de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$. Alors, le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est une résolution plongée de V .

DÉMONSTRATION. Comme l'hypersurface V ne contient aucune T -orbite de dimension strictement plus grande que zéro, le morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est un isomorphisme en dehors de $\pi^{-1}(O)$. Le corollaire résulte des Propositions 2.5.5 et 2.5.7. \square

Dans la suite, on énonce quelques résultats de [Oka87] sur la désingularisation d'hypersurfaces. Ces résultats reposent sur l'existence d'une subdivision régulière admissible Σ de $\Gamma^*(f)$ qui satisfait une construction qui est décrite dans [Oka87]. Cette construction est longue à définir. Mais, si le polynôme f est quasi-homogène et il existe une G -subdivision régulière $\Gamma^*(f)_G$ d'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, alors on peut supposer que Σ est l'éventail $\Gamma^*(f)_G$.

Définition 2.5.10. Soit $f \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$ un polynôme. On dit que f est un polynôme quasi-homogène de type $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{d+1})$ si on a :

- $\rho \in \mathbb{Z}_{>0}^{d+1}$ est le vecteur extrémal du cône $\langle \rho \rangle$;
- f est homogène par rapport à la graduation $\deg_\rho x_i = \rho_i$, où $1 \leq i \leq d+1$.

Soit V une hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ donnée par l'équation $f = 0$, où $f \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$ est un polynôme quasi-homogène de type $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{d+1})$, non dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma^*(f)$. De plus, on suppose qu'il existe une G -subdivision régulière $\Gamma^*(f)_G$ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$. On note $\pi : X(\Gamma^*(f)_G) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ le morphisme induit par la subdivision $\Gamma^*(f)_G$ du cône Δ et \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Gamma^*(f)_G)$.

Pour un vecteur $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$ non nul, on note $\gamma(p)$ la face du polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$ défini de la façon suivante :

$$\gamma(p) := \{m \in \Gamma_+(f) \mid \langle m, p \rangle = h_{\Gamma_+(f)}(p)\}.$$

On rappelle que $h_{\Gamma_+(f)}$ est la fonction d'appui associée au polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$. On remarque que si $p \in \Delta^0$, alors la face $\gamma(p)$ est compacte.

On note $S_k \Gamma^*(f)$ le squelette de dimension $k \leq d+1$ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, c'est-à-dire $S_k \Gamma^*(f)$ est la réunion des cônes de $\Gamma^*(f)$ de dimension inférieure ou égale à k .

Pour un vecteur extrémal p de $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$, notons $D_{\langle p \rangle}$ le diviseur de $X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}})$ associé à p et $E(p)$ l'intersection $D_{\langle p \rangle} \cap \tilde{V}$.

Proposition 2.5.11. *Soit p un vecteur extrémal de $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ tel que $p \in \Delta^0$. Alors, $E(p)$ n'est pas vide si et seulement si $\dim \gamma(p) > 0$.*

Remarque 2.5.12. On remarque que $\dim \gamma(p) > 0$ si et seulement si $p \in S_d \Gamma^*(f)$.

On dit que les vecteurs extrémaux p_1, p_2, \dots, p_n de $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$, $1 \leq n \leq d+1$, sont *adjacents* s'il existe un cône dans $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ de dimension $d+1$ qui contient les vecteurs p_1, p_2, \dots, p_n dans ses arêtes.

Proposition 2.5.13. *Soient p_1, p_2, \dots, p_n , $1 \leq n \leq d+1$, n vecteurs extrémaux de $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$. De plus, on suppose que $p_1 \in \Delta^0$. Alors l'intersection $\bigcap_{i=1}^n E(p_i)$ n'est pas vide si et seulement si les vecteurs p_1, p_2, \dots, p_n sont adjacents et $\dim \cap_i \gamma(p_i) \geq 1$. De plus, $\bigcap_{i=1}^n E(p_i)$ est la réunion de variétés algébriques complètes et lisses de dimension $d-n$.*

Étant donnée une face compacte γ de $\Gamma_+(f)$, soit $r(\gamma)$ le nombre de points entiers contenus dans l'intérieur relatif de γ , c'est-à-dire $r(\gamma)$ est la cardinalité de l'ensemble $\gamma \cap M \cap \Delta^0$.

Proposition 2.5.14. *Soit $p \in \Delta^0$ un vecteur extrémal de $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$. Alors, on a :*

- i) si $\dim \gamma(p) = 1$, alors $E(p)$ a $r(\gamma(p)) + 1$ composantes irréductibles disjointes, de plus, chaque composante est rationnelle ;*
- ii) si $\dim \gamma(p) > 1$, alors $E(p)$ est irréductible.*

Dans la suite on considère le cas $d = 2$. Les faces compactes (resp. non compactes) de $\Gamma_+(f)$ correspondent aux vecteurs extrémaux de $\Gamma^*(f)$ qui appartiennent à l'intérieur (resp. à la réunion des faces strictes) du cône Δ , d'où la proposition suivante :

Proposition 2.5.15. *Soit S une hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $f = 0$, où $f \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$, $\Delta = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, est un polynôme irréductible, quasi-homogène de type $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$. On suppose que $\dim \gamma(\rho) = 2$. Alors on a :*

- i) la face $\gamma(\rho)$ est l'unique face compacte de dimension 2 du polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$;*
- ii) soit τ un cône de dimension 2 de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, qui n'est pas contenu dans une face stricte de Δ , alors il existe un vecteur extrémal ρ' de $\Gamma^*(f)$ tel que $\tau = \langle \rho, \rho' \rangle$. De plus, le vecteur ρ' appartient à une face stricte de Δ .*

D'abord, on fixe quelques notations, ensuite on énonce un théorème sur la désingularisation des hypersurfaces quasi-homogène de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$. Ce théorème est un cas particulier du théorème 6.1 de [Oka87].

Étant donné un polynôme $f \in \mathbf{k}[x_1, x_2, x_3]$ et l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, on note $\text{Sing}_2 \Gamma^*(f)$ l'ensemble des cônes singuliers de dimension 2 qui ne sont pas contenus dans une face stricte

de $\Delta = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

On suppose que f est un polynôme homogène de type $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ tel que $\dim \gamma(\rho) = 2$.

Soit $\tau \in \text{Sing}_2 \Gamma^*(f)$. D'après la proposition précédente, il existe un vecteur extrémal ρ' de $\Gamma^*(f)$ tel que le cône τ est engendré par les vecteurs ρ, ρ' . Comme τ est un cône singulier, l'aire A du trapèze engendré par les vecteurs ρ et ρ' est un entier strictement plus grand que 1, (c'est-à-dire $A > 1$, A entier).

On remarque qu'il existe un unique entier $A_1 \geq 1$ tel que $\frac{\rho' + A_1 \rho}{A}$ soit un vecteur qui appartient à $\mathbb{Z}_{\geq 0}^3$.

On pose $[\tau] = \frac{A}{A_1}$ et soit $r(\tau)$ le nombre de points entiers de l'intérieur de $\gamma(\rho) \cap \gamma(\rho')$, c'est à dire $r(\tau) := r(\gamma(\rho) \cap \gamma(\rho'))$.

Maintenant, on rappelle la notation des fractions continues. Soit k un entier, $k \geq 1$. Pour un ensemble d'entiers $m_i \geq 2$, $1 \leq i \leq k$, on note $[m_1; m_2; \dots; m_k]$ la fraction continue définie de la façon suivante :

$$[m_k] := m_k, [m_{k-1}; m_k] := m_{k-1} - \frac{1}{m_k} \text{ et } [m_1; m_2; \dots; m_k] := m_1 - \frac{1}{[m_2; \dots; m_k]}.$$

Théorème 2.5.16. *Soit S l'hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $f = 0$, $f \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$, $\Delta = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. On suppose que f est un polynôme irréductible, quasi-homogène de type $\rho := (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$, non dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$ et $\dim \gamma(\rho) = 2$. On considère une G -subdivision régulière $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ de l'éventail $\Gamma^*(f)$ et on note $\pi : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow U_{\Delta}$ le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ du cône Δ et \tilde{S} le transformé strict de S dans $X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}})$. Alors, on a*

- i) *Le morphisme $\pi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow S$ est une bonne résolution de S .*
- ii) *ρ est un vecteur extrémal de $\Gamma^*(f)$ et $E_0 := E(\rho)$ est une courbe irréductible de genre $r(\gamma(\rho))$.*
- iii) *Soit p est un vecteur extrémal de $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$, tel que $p \in S_2 \Gamma^*(f)$ et $p \neq \rho$. Alors, $E(p)$ est l'union disjointe de $r(\gamma(p)) + 1$ courbes rationnelles.*
- iv) *Le graphe dual pondéré associé à la bonne résolution $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ est une étoile à $\sum_{\tau \in \text{Sing}_2 \Gamma^*(f)} (r(\tau) + 1)$ branches. Chaque cône $\tau \in \text{Sing}_2 \Gamma^*(f)$ est associé à $r(\tau) + 1$ branches identiques données par le diagramme suivant :*

$$E_0^2 \text{ --- } \bullet \text{ --- } -m_k \text{ --- } \cdots \text{ --- } -m_2 \text{ --- } -m_1,$$

où E_0 est le diviseur associé au sommet central du graphe et les entiers $m_i \geq 2$ (resp. l'entier k) sont définis (resp. est défini) de la façon suivante :

$$[\tau] = [m_1; m_2; \dots; m_k].$$

- v) *Soient q_1, \dots, q_s des vecteurs primitifs de $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ qui appartiennent à $\cap S_2 \Gamma^*(f)$ et qui sont adjacents à ρ . Pour $1 \leq i \leq s$, on note $q_i = (q_{1i}, q_{2i}, q_{3i})$. Alors, l'auto-intersection de E_0 est donné par la formule suivante :*

$$E_0^2 = -\frac{\sum_{i=1}^s (r(\gamma(\rho) \cap \gamma(q_i)) + 1) q_{ji}}{\rho_j},$$

pour n'importe quel $j \in \{1, 2, 3\}$.

CHAPITRE 3

Les vecteurs principaux d'un wedge

D'abord, on fixe les notations. Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos, K une extension du corps \mathbf{k} , V une variété normale et $\text{Sing } V$ le lieu singulier de V . On suppose qu'il existe une désingularisation de V , c'est-à-dire on suppose qu'il existe un morphisme propre et birationnel $\pi : X \rightarrow V$ tel que X est une variété lisse et $\pi|_{X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } V)} : X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } V) \rightarrow V \setminus \text{Sing } V$ est un isomorphisme.

On considère le schéma $W = \text{Spec } K[[s, t]]$ et le fermé W_0 de W donné par l'adhérence de l'ensemble $\{(t)\}$ dans W , où $(t) \subset K[[s, t]]$ est l'idéal premier engendré par t , c'est-à-dire $W_0 = \{p \in W \mid t \in p\}$. On note g le point générique de W .

On rappelle qu'un morphisme $\omega : W \rightarrow V$ est appelé K -wedge sur V . On suppose que $\omega(W_0) \subset \text{Sing } V$, $\omega(g) \in V \setminus \text{Sing } V$ et on se pose la question suivante :

Est-ce que le K -wedge ω se relève à X ? Autrement dit, Est-ce qu'il existe un K -wedge $\widehat{\omega}$ sur X tel que $\pi \circ \widehat{\omega} = \omega$?

Montrer que cette question a une réponse positive ou négative est un problème très difficile et n'est résolu que pour des cas particuliers. On rappelle que le problème de Nash équivaut à montrer que tous les K -wedges admissibles se relèvent à X (voir le Théorème 1.3.9).

Dans la première section de ce chapitre, on donne une réponse partielle à cette question pour les hypersurfaces normales de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^n$ avec un unique point singulier, où $n \geq 3$ et \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Dans les sections suivantes, on donne une série de résultats techniques qui vont nous permettre d'attaquer le problème de Nash dans les cas étudiés dans les chapitres suivants.

3.1. Relèvement des wedges et géométrie torique

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, K une extension du corps \mathbf{k} , $d \geq 2$ un entier, $N := \mathbb{Z}^{d+1}$ muni de sa base standard $\{e_1, e_2, \dots, e_{d+1}\}$, $\Delta := \langle e_1, e_2, \dots, e_{d+1} \rangle$ et Σ une subdivision de Δ . Le dual de N , noté M , est identifié avec \mathbb{Z}^{d+1} au moyen de la forme bilinéaire standard $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq d+1$. On note T le tore $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$ et on pose $x_j := \chi^{e_j} \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$, $1 \leq j \leq d+1$.

On considère le morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} := \text{Spec } \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$ induit par une subdivision Σ du cône Δ . Dans la suite, on donne une condition nécessaire et suffisante pour relever un K -wedge à $X(\Sigma)$.

On pose $W := \text{Spec } K[[s, t]]$ et on note 0 (resp. g) le point fermé (resp. générique) de W . On considère un K -wedge $\omega : W \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ tel que $\omega(g) \in T$. On note $\text{Arc}(\omega)$ l'ensemble des arcs $\alpha : \text{Spec } K[[\xi]] \rightarrow \text{Spec } K[[s, t]]$ tels que $\alpha(0) = 0$ et $\omega \circ \alpha(g) \in T$. Par abus de notation,

on note 0 (resp. g) le point fermé (resp. générique) de $K[[\xi]]$.

Étant donnée une série formelle $\phi \in K[[\xi]]$, on note $\text{Ord}_\xi \phi$ l'ordre en ξ de la série ϕ .

On rappelle que ω et α sont deux morphismes entre variétés affines, donc les comorphismes ω^* et α^* sont bien définis.

Définition 3.1.1. Le α -vecteur principal $\text{Ord}_\alpha \omega$ de ω est le vecteur suivant :

$$\text{Ord}_\alpha \omega := (\text{Ord}_\xi \alpha^* \circ \omega^*(x_1), \dots, \text{Ord}_\xi \alpha^* \circ \omega^*(x_{d+1})),$$

où $\alpha \in \text{Arc}(\omega)$, ω^* (resp. α^*) est le comorphisme de ω (resp. α). On remarque que $\text{Ord}_\alpha \omega$ appartient à $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$.

On pose $\text{AVP}(\omega) := \{\text{Ord}_\alpha \omega \mid \alpha \in \text{Arc}(\omega)\}$ l'ensemble des α -vecteurs principaux de ω .

La théorème suivant donne un critère pour relever un K -wedge.

Théorème 3.1.2. *On suppose que le corps K est une extension algébriquement close de \mathbf{k} . Soit $\omega : W \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ un K -wedge sur $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ tel que $\omega(g) \in T$ et on suppose que le morphisme équivariant $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est projectif. Alors, le K -wedge ω se relève à $X(\Sigma)$ si et seulement si il existe un cône $\sigma \in \Sigma$ tel que $\text{AVP}(\omega) \subset \sigma$.*

DÉMONSTRATION. D'abord, on montre que si le K -wedge ω se relève à $X(\Sigma)$, alors il existe un cône $\sigma \in \Sigma$ tel que $\text{AVP}(\omega) \subset \sigma$.

On suppose qu'il existe un K -wedge $\widehat{\omega}$ sur $X(\Sigma)$ tel que $\pi \circ \widehat{\omega} = \omega$. On pose $p = \widehat{\omega}(0)$. Alors, il existe un cône $\sigma \in \Sigma$ tel que $p \in U_\sigma$. On note $W_\sigma := \widehat{\omega}^{-1}(U_\sigma)$. On remarque que W_σ est un ouvert qui contiennent le point 0 . On considère le fermé suivant : $F = W \setminus W_\sigma$. On remarque que tous les fermés non vides de W contiennent le point 0 . Comme le fermé F ne contient pas le point 0 , F est l'ensemble vide. En particulier, le morphisme $\widehat{\omega} : W \rightarrow U_\sigma$ est bien défini.

On considère un arc $\alpha \in \text{Arc}(\omega)$ et soit $\alpha' = \widehat{\omega} \circ \alpha$. L'arc $\alpha' : \text{Spec } K[[\xi]] \rightarrow U_\sigma$ est un morphisme bien défini et $\alpha'(g) \in T$, où g est le point générique de $\text{Spec } K[[\xi]]$. Par conséquent, le α -vecteur principal $\text{Ord}_\alpha \omega$ appartient au cône σ , d'où $\text{AVP}(\omega) \subset \sigma$.

Maintenant, on montre que si $\text{AVP}(\omega) \subset \sigma$, alors le K -wedge ω se relève à $X(\Sigma)$.

On suppose qu'il existe un cône $\sigma \in \Sigma$ tel que $\text{AVP}(\omega) \subset \sigma$. Le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est une application birationnelle et projective. Alors, il existe un idéal $\mathcal{I} \subset \mathbf{k}[x_1, \dots, x_{d+1}]$ tel que la variété $X(\Sigma)$ est l'éclatement de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ de centre l'idéal \mathcal{I} . Soit Z l'éclatement de W de centre l'idéal $\omega^{-1}\mathcal{I} \cdot K[[s, t]]$ et \widehat{Z} une désingularisation de Z . En vertu de la *propriété universelle de l'éclatement*, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \widehat{Z} & & & & \\
 \searrow & \xrightarrow{\widehat{\omega}} & & & \\
 & Z & \xrightarrow{\quad} & X(\Sigma) & \\
 & \downarrow & & \downarrow \pi & \\
 & W & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} & \\
 \swarrow \rho & & & &
 \end{array}$$

Raisonnons par l'absurde, on suppose que le K -wedge ω ne se relève pas à $X(\Sigma)$. Par conséquent, l'idéal $\omega^{-1}\mathcal{I} \cdot K[[s, t]]$ n'est pas inversible.

D'après le *théorème de contraction de Castelnuovo*, ρ se factorise par une séquence d'éclatements de points fermés, donc la fibre exceptionnelle $E = \rho^{-1}(0)$ du morphisme ρ est une réunion de courbes rationnelles.

Comme l'image par ω du point générique de W appartient au tore T (c'est-à-dire $\omega(g) \in T$), il existe un fermé strict F' de W (c'est-à-dire $F' \subsetneq W$) tel que $F' := \omega^{-1}(\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} \setminus T)$.

Pour chaque point $p \in E$, il existe un arc $\alpha_p : \text{Spec } K[[\xi]] \rightarrow \widehat{Z}$ tel que $\alpha_p(0) = p$ et $\rho \circ \alpha_p(\text{Spec } K[[\xi]]) \not\subset F'$. En particulier, l'image par $\omega \circ \rho \circ \alpha_p$ du point générique de $\text{Spec } K[[\xi]]$ appartient au tore T (c'est-à-dire $\omega \circ \rho \circ \alpha_p(g) \in T$). Par conséquent, l'arc $\rho \circ \alpha_p$ appartient à l'ensemble $\text{Arc}(\omega)$.

Comme π est un morphisme propre et birationnel et $\omega \circ \rho \circ \alpha_p(g) \in T$, il existe un unique morphisme $\omega \circ \widehat{\rho \circ \alpha_p} : \text{Spec } K[[\xi]] \rightarrow X(\Sigma)$ tel que $\pi(\omega \circ \widehat{\rho \circ \alpha_p}) = \omega \circ \rho \circ \alpha_p$, d'où $\omega \circ \widehat{\rho \circ \alpha_p} = \widehat{\omega} \circ \alpha_p$.

On fixe le point $p \in E$. Comme $\text{Ord}_{\rho \circ \alpha_p} \omega \in \sigma$, le morphisme $\widehat{\omega} \circ \alpha_p : \text{Spec } K[[\xi]] \rightarrow U_\sigma \subset X(\Sigma)$ est bien défini (comparer avec le Théorème 2.1.7). Il s'ensuit que $\widehat{\omega}(p) \in U_\sigma$ pour tout $p \in E$, c'est-à-dire $\widehat{\omega}(E) \subset U_\sigma$.

L'ensemble $F'' = \widehat{Z} \setminus \widehat{\omega}^{-1}(U_\sigma)$ est un fermé de \widehat{Z} et le morphisme ρ est propre, donc l'ensemble $\rho(F'')$ est un fermé de W . Comme $E \subset \widehat{\omega}^{-1}(U_\sigma)$, on obtient que $0 \notin \rho(F'')$. Par conséquent, l'ensemble F'' est vide, c'est-à-dire $\widehat{Z} = \widehat{\omega}^{-1}(U_\sigma)$. Ainsi, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\widehat{Z}, \mathcal{O}_{\widehat{Z}}) & \xleftarrow{\widehat{\omega}^*} & \Gamma(U_\sigma, \mathcal{O}_{U_\sigma}) \\ \uparrow \rho^* & & \uparrow \pi^* \\ \Gamma(W, \mathcal{O}_W) & \xleftarrow{\omega^*} & \Gamma(\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}}) \end{array}$$

On rappelle que, étant donné un schéma Y , on note $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ l'algèbre de sections globales du faisceau structurel \mathcal{O}_Y .

Comme W est une variété normale et ρ est un morphisme propre et birationnel, $\Gamma(\widehat{Z}, \mathcal{O}_{\widehat{Z}}) \cong \Gamma(W, \mathcal{O}_W) = K[[s, t]]$. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \Gamma(\widehat{Z}, \mathcal{O}_{\widehat{Z}}) & \longrightarrow & U_\sigma \subset X(\Sigma) \\ \downarrow \cong & & \searrow \pi \\ W & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} \end{array}$$

Le diagramme ci-dessus montre que le K -wedge ω se relève à $X(\Sigma)$, d'où la contradiction. \square

On note O la T -orbite de dimension zéro de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$. Soit V une hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ donnée par l'équation $f = 0$, où $f \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$ est un polynôme irréductible non dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$. De plus, on suppose que le point O est l'unique point singulier de V .

On rappelle la Définition 2.5.1. Soient $J \subset \{1, 2, \dots, d+1\}$ et $\sigma_J = \{(n_1, n_2, \dots, n_{d+1}) \in \Delta \mid n_i = 0 \text{ ssi } i \notin J\}$. Une subdivision régulière Σ de $\Gamma^*(f)$ est appelée *subdivision régulière admissible* si Σ satisfait la propriété suivante : étant donné le sous-ensemble $J \subset \{1, 2, \dots, d+1\}$; s'il existe $n \in \sigma_J$, tel que $h_{\Gamma_+(f)}(n) = 0$, alors $\bar{\sigma}_J \in \Sigma$.

En vertu du Corollaire 2.5.9, si l'hypersurface V ne contient aucune T -orbite de dimension strictement plus grande que zéro, alors le morphisme équivariant $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est une résolution plongée de V .

Corollaire 3.1.3. *On suppose que le corps K est une extension algébriquement close de \mathbf{k} . Soient $W_0 := \{p \in W \mid t \in p\}$ et $\omega : W \rightarrow V$ un K -wedge sur V tel que $\omega(W_0) = O$ et $\omega(g) \in T$. De plus, on suppose que $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est un morphisme projectif, où Σ est une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$, et on note \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Sigma)$. Alors, le K -wedge ω se relève à \tilde{V} si et seulement s'il existe un cône $\sigma \in \Sigma$ tel que $\text{AVP}(\omega) \subset \sigma$.*

Remarque 3.1.4. Si V ne contient aucune T -orbite de dimension strictement plus grande que zéro, alors le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est une résolution plongée de V (voir le Corollaire 2.5.9).

Étant donné un K -wedge ω qui satisfait les hypothèses du Théorème 3.1.2, déterminer l'ensemble des α -vecteurs principaux $\text{Arc}(\omega)$ est un problème difficile. Dans les sections suivantes on va définir, pour chaque vecteur $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$, un vecteur qu'on appelle le *v -vecteur principal* du K -wedge ω . Ces vecteurs, plus simples à calculer que les α -vecteurs, nous donnent de l'information sur le K -wedge ω .

Dans le Théorème suivant, on ne demande ni que le corps K soit algébriquement clos, ni que le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ soit projectif, où Σ est une subdivision quelconque de Δ .

Soit $\omega : W \rightarrow U_\sigma$ un K -wedge et on considère le vecteur suivant :

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{d+1}) := (\text{Ord}_t \omega^*(x_1), \text{Ord}_t \omega^*(x_2), \dots, \text{Ord}_t \omega^*(x_{d+1})),$$

où ω^* est le comorphisme du K -wedge ω . On peut écrire le comorphisme ω^* de la façon suivante :

$$\omega^*(x_i) = t^{\eta_i} \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq d+1,$$

où les φ_i sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t .

On rappelle qu'on note g le point générique de W .

Théorème 3.1.5. *Soient K est une extension du corps \mathbf{k} et $\omega : W \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ un K -wedge sur $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ tel que $\omega(g) \in T$. Si les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq d+1$, sont inversibles, alors le K -wedge ω se relève à $X(\Sigma)$.*

DÉMONSTRATION. En vertu de la *version torique du Lemme de Chow*, il existe une subdivision Σ' d'éventail Σ tel que le morphisme $\pi' : X(\Sigma') \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est un morphisme projectif.

De plus, les variétés $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ et $X(\Sigma')$ sont quasi-projectives et π factorise π' . Par conséquent, il existe un idéal monomial $\mathcal{I} \subset \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$ tel que $X(\Sigma')$ est l'éclatement de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ de centre l'idéal \mathcal{I} .

Comme les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq d+1$, sont inversibles et l'idéal \mathcal{I} est monomial, l'idéal $\omega^{-1}\mathcal{I} \cdot K[[s, t]]$ est inversible. En vertu de la *propriété universelle de l'éclatement*, le morphisme ω se relève à $X(\Sigma')$. Ceci implique que le K -wedge ω se relève à $X(\Sigma)$, car π factorise π' . \square

On rappelle que V est une hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ donnée par l'équation $f = 0$, où $f \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$ est un polynôme irréductible non dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$. On rappelle aussi que le point $O \in \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est l'unique point singulier de V .

On suppose que Σ est une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$ et on note $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ le morphisme torique associé à la subdivision Σ de Δ . Soit \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Sigma)$.

Corollaire 3.1.6. *Soient K une extension du corps \mathbf{k} , $W_0 := \{p \in W \mid t \in p\}$ et $\omega : W \rightarrow V$ un K -wedge sur V tel que $\omega(W_0) = O$ et $\omega(g) \in T$. Si les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq d+1$, sont inversibles, alors le K -wedge ω se relève à \tilde{V} .*

3.2. Le v -ordre et la v -partie principale d'une série formelle.

Soient V et \tilde{V} les variétés du Corollaire 3.1.6. Ce corollaire nous montre que si les séries formelles φ_i , associées au K -wedge ω , sont inversibles, alors ω se relève à \tilde{V} .

On cherche donc à trouver certains critères nous permettant de majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicités de chaque série formelle φ_i .

D'abord, on définit le v -ordre et la v -partie principale pour une série formelle φ qui appartient à $K[[t_1, \dots, t_l]]$, où l est un entier supérieur ou égal à 1 et $v \in \mathbb{R}_{>0}^l$. Ensuite, on considère une série formelle $\varphi \in K[[s, t]]$ et on utilise le v -ordre et la v -partie principale de φ pour majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité de φ (voir la proposition 3.2.5). On analyse également les v -ordres et les v -parties principales de certains types de séries formelles de $K[[s, t]]$ (voir la proposition 3.2.6) qui vont jouer un rôle important dans la démonstration de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités considérées dans les chapitres suivants.

Avec la notation standard des multi-indices (c'est-à-dire on note $t^e = t_1^{e_1} \dots t_l^{e_l}$ pour $e = (e_1, \dots, e_l) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l$), on considère la série formelle suivante :

$$\varphi := \sum_{e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l} c_e t^e,$$

où $c_e \in K$ pour tout $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l$ et l est un entier, $l \geq 1$.

L'ensemble $\mathcal{E}(\varphi) := \{e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l \mid c_e \neq 0\}$ est l'ensemble des exposants de φ . Si la série formelle φ n'est pas nulle, alors l'ensemble $\mathcal{E}(\varphi)$ n'est pas vide.

Définition 3.2.1. Soient $v \in \mathbb{R}_{>0}^l$ et φ une série formelle non nulle, on définit respectivement le v -ordre $\nu_v \varphi$ et la v -partie principale φ_v de φ de la façon suivante :

$$\nu_v \varphi := \min\{v \cdot e \mid e \in \mathcal{E}(\varphi)\} \text{ et } \varphi_v := \sum_{v \cdot e = \nu_v \varphi} c_e t^e.$$

Le v -ordre $\nu_v \varphi$ est bien défini et φ_v est un polynôme de $K[t_1, \dots, t_l]$, parce que l'ensemble $\{e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l \mid v \cdot e \leq k\}$ est fini pour $k \in \mathbb{R}$.

Par cohérence avec les définitions ci-dessus, on pose :

$$\nu_v 0 := \infty \text{ et } 0_v := 0.$$

Remarque 3.2.2. On considère le polyèdre de Newton $\Gamma_+(\mathcal{E}(\varphi))$ associé à l'ensemble $\mathcal{E}(\varphi)$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^l de l'ensemble $\mathcal{E}(\varphi)$. On remarque que :

$$(3.1) \quad h_{\Gamma_+(\mathcal{E}(\varphi))}(v) = \nu_v \varphi, \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}_{>0}^l,$$

d'où $h_{\Gamma_+(\mathcal{E}(\varphi))}$ est la fonction d'appui associée à $\mathcal{E}(\varphi)$ (voir la Définition 2.2.3). Même si on a l'égalité 3.1, dans la pratique, nous utilisons la fonction d'appui et les v -ordres d'une façon différente. D'où la distinction qu'on fait entre la fonction d'appui et les v -ordres.

La proposition suivante résulte de la définition précédente.

Proposition 3.2.3. *Soit $\varphi \in K[[t_1, \dots, t_l]]$ une série formelle non nulle, où l est un entier supérieur ou égal à 1. Alors, il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}_{>0}^l$ tel que $\nu_v \varphi = 0$ si et seulement si la série formelle φ est inversible. De plus, si φ est inversible, alors $\nu_v \varphi = 0$ et $\varphi_v \in K^*$ (c'est-à-dire φ_v est une constante non nulle) pour tout $v \in \mathbb{R}_{>0}^l$.*

Les v -ordres et les v -parties principales satisfont les propriétés multiplicatives suivantes :

Proposition 3.2.4. *Soient $v \in \mathbb{R}_{>0}^l$ et φ, φ' deux séries formelles non nulles qui appartiennent à $K[[t_1, \dots, t_l]]$, $l \geq 1$. Alors, on a :*

i) *la v -partie principale de $\varphi\varphi'$ est égale au produit de la v -partie principale de φ avec celle de φ' , c'est-à-dire*

$$(\varphi\varphi')_v = \varphi_v \varphi'_v;$$

ii) *le v -ordre de $\varphi\varphi'$ est égale à la somme du v -ordre de φ avec celui de φ' , c'est-à-dire*

$$\nu_v \varphi\varphi' = \nu_v \varphi + \nu_v \varphi'.$$

DÉMONSTRATION. Le vecteur $v \in \mathbb{R}_{>0}^l$ définit une graduation positive sur l'anneau $K[[x_1, \dots, x_l]]$, qu'on appelle v -graduation.

Étant donnée une série formelle $\varphi \in K[[t_1, \dots, t_l]]$, la v -partie principale (resp. v -ordre) est la partie principale (resp. l'ordre) de la série formelle φ par rapport à la v -graduation, d'où la proposition. \square

Dans les démonstrations de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités considérées dans les chapitres suivants, on considère certains types de séries formelles à deux variables et leurs possibles décompositions en facteurs irréductibles. Dans la suite, étant fixée une série formelle à deux variable, on utilise ses v -ordres et ses v -parties principales pour majorer le nombre de ses facteurs irréductibles comptés avec multiplicité.

Maintenant, on suppose que $l = 2$. Pour simplifier la notation de l'anneau $K[[t_1, t_2]]$, on change t_1 (resp. t_2) en s (resp. t). On a donc l'anneau $K[[s, t]]$ à la place de l'anneau $K[[t_1, t_2]]$.

Soit $\varphi \in K[[s, t]]$ une série formelle non inversible et non nulle. Comme l'anneau $K[[s, t]]$ est un anneau factoriel et le corps K est algébriquement clos, on peut écrire la série formelle φ de la façon suivante :

$$\varphi = I\varphi_1^{m_1} \cdots \varphi_n^{m_n},$$

où I est une série formelle inversible et les φ_i sont des séries formelles irréductibles deux à deux non associées. L'entier strictement positif n (resp. m_i) dépend de la série formelle φ (resp. des séries formelles φ et φ_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$). D'après la propriété de factorisation unique de $K[[s, t]]$, cette décomposition de φ est unique à permutation et association près.

On rappelle que deux séries formelles, ϕ et ϕ' , non nulles sont associées (resp. non associées) s'il existe (resp. s'il n'existe pas) une série formelle I inversible tel que $\phi = I\phi'$.

Avec les notations ci-dessus, on définit l'application $\text{FI} : K[[s, t]] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de la façon suivante :

$$\text{FI}(\varphi) := \begin{cases} m_1 + \cdots + m_n & \text{si } \varphi \text{ n'est ni inversible ni nulle} \\ 0 & \text{si } \varphi \text{ est inversible} \end{cases}$$

La proposition suivante établit des majorations du nombre facteurs irréductibles comptés avec multiplicité d'une série formelle en termes de ses v -ordres et de ses v -parties principales.

Proposition 3.2.5. *Soit $\varphi \in K[[s, t]]$ une série formelle non nulle. Alors, on a :*

i) le nombre de facteurs irréductibles de φ comptés avec multiplicité est inférieur ou égal au nombre de facteurs irréductibles de φ_v comptés avec multiplicité pour tout $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$, c'est-à-dire

$$\text{FI}(\varphi) \leq \inf_{v \in \mathbb{R}_{>0}^2} \text{FI}(\varphi_v) ;$$

ii) on suppose qu'il existe $u \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\deg_t \varphi_{(u,1)} = \nu_{(u,1)}\varphi$, où $\deg_t \varphi_{(u,1)}$ est le degré en t du polynôme $\varphi_{(u,1)}$, alors pour tout $u' \geq u$ on a :

$$\text{FI}(\varphi) \leq \nu_{(u',1)}\varphi,$$

c'est-à-dire le nombre de facteurs irréductibles de φ comptés avec multiplicité est inférieur ou égal au $(u', 1)$ -ordre de φ pour tout $u' \geq u$.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 3.2.3, si la série formelle φ est inversible, alors, pour chaque $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$, la v -partie principale φ_v , est une constante non nulle (c'est-à-dire $\varphi_v \in K^\star$) et le v -ordre $\nu_v\varphi$ est nul. Ceci achève la démonstration dans ce cas, car $\text{FI}(\varphi) = \text{FI}(\varphi_v) = \nu_v\varphi = 0$, pour tout $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$.

Dans la suite, on suppose que la série formelle φ n'est ni inversible ni nulle.

Le point *i)* résulte de la propriété multiplicative des v -parties principales (voir la Proposition 3.2.4). En effet, on suppose que

$$\varphi = I\varphi_1^{m_1} \cdots \varphi_n^{m_n}, \quad n \geq 1,$$

où les entiers m_i sont strictement positifs, les φ_i sont des séries formelles irréductibles deux à deux non associées et I une série formelle inversible. Alors, on a :

$$\varphi_v = I_v((\varphi_1)_v)^{m_1} \cdots ((\varphi_n)_v)^{m_n}.$$

Par conséquent, $\text{FI}(\varphi) \leq \text{FI}(\varphi_v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$. On remarque que les $(\varphi_i)_v$ ne sont pas nécessairement irréductibles.

Maintenant, on démontre le point *ii)*.

La série formelle $\varphi \in K[[s, t]]$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\varphi = \sum_{(e_1, e_2) \in \mathbb{Z}_{>0}^2} c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2}.$$

On suppose qu'il existe $u \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\deg_t \varphi_{(u,1)} = \nu_{(u,1)} \varphi$ et soit $d := \deg_t \varphi_{(u,1)}$. Comme on a $\deg_t \varphi_{(u,1)} = \nu_{(u,1)} \varphi$, le vecteur $(0, d)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}(\varphi)$ et $d = (0, d) \cdot (u, 1) \leq (e_1, e_2) \cdot (u, 1)$ pour tout $(e_1, e_2) \in \mathcal{E}(\varphi)$. Par conséquent, on a :

$$\varphi_{(u,1)} = c_{(0,d)} t^d + p(s, t),$$

où p est la somme des termes de $\varphi_{(u,1)}$ d'exposante en la variable t strictement plus petit que d .

Alors, on a :

$$\text{FI}(\varphi_{(u,1)}) \leq d = \nu_{(u,1)} \varphi.$$

En vertu du point *i)* de la proposition on a :

$$\text{FI}(\varphi) \leq \nu_{(u,1)} \varphi.$$

Comme on a $d = (0, d) \cdot (u, 1) \leq (e_1, e_2) \cdot (u, 1)$, on a $d = (0, d) \cdot (u', 1) \leq (e_1, e_2) \cdot (u', 1)$ pour tout $u' \geq u$. Ainsi, on obtient que $\deg_t \varphi_{(u',1)} = \nu_{(u',1)} \varphi = d$ pour tout $u' \geq u$, d'où la proposition. \square

Les comorphismes des K -wedges qu'on considère dans les sections suivantes sont définis par des séries formelles comme celles de la proposition suivante.

Proposition 3.2.6. *On considère une série formelle $\varphi \in K[[s, t]]$ non nulle qu'on peut écrire de la façon suivante :*

$$\varphi = \sum_{0 \leq i < \mu} a_i s^{m_i} t^i + \sum_{\mu \leq i} a_i t^i,$$

où les entiers m_i , $0 \leq i \leq \mu - 1$, sont strictement positifs et les a_i , $i \geq 0$, sont des séries formelles qui appartiennent à $K[[s]]$. De plus, on suppose que la série formelle a_i , pour tout $0 \leq i \leq \mu$, est inversible ou nulle (c'est-à-dire $a_i \in K[[s]]^* \cup \{0\}$ pour tout $0 \leq i \leq \mu$) et $a_\mu \neq 0$.

On note a_{i0} le coefficient du terme constant de la série formelle a_i pour $i \geq 0$.

Alors, on a :

i) pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$ la v -partie principale φ_v a la forme suivante :

$$\varphi_v = a'_\mu t^\mu + \sum_{0 \leq i < \mu} a'_i s^{m_i} t^i,$$

où les coefficients a'_i , pour tout $i \leq \mu$, sont définis de la façon suivante :

$$a'_i = \begin{cases} a_{i0} & \text{si } (m_i, i) \cdot v = \nu_v \varphi \\ 0 & \text{si } (m_i, i) \cdot v > \nu_v \varphi \end{cases};$$

ii) il existe $u \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que pour tout $u' \geq u$ on a :

$$\deg_t \varphi_{(u',1)} = \nu_{(u',1)} \varphi,$$

c'est-à-dire le degré en t de $\varphi_{(u',1)}$ est égal au $(u', 1)$ -ordre de φ ;

iii) s'il existe $i < \mu$ tel que $a_i \neq 0$, alors il existe un vecteur $v = (u'', 1) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ tel que la partie principale φ_v n'est pas un monôme et $a'_\mu = a_{\mu 0}$. De plus, on a :

$$\deg_t \varphi_{(u'',1)} = \nu_{(u'',1)} \varphi.$$

Remarque 3.2.7. Le point *ii)* de la Proposition 3.2.6 montre que les séries formelles qu'on considère satisfont les hypothèses du point *ii)* de la proposition 3.2.5.

DÉMONSTRATION. Soient $\mathcal{E}'(\varphi) = \{(m_0, 0), (m_1, 1), \dots, (m_{\mu-1}, \mu-1), (0, \mu)\}$ et $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$. Comme la série formelle a_μ est inversible, l'intersection $\mathcal{E}'(\varphi) \cap \mathcal{E}(\varphi)$ n'est pas vide.

Par simple inspection des éléments de l'ensemble $\mathcal{E}(\varphi)$, on déduit que pour tout $e \in \mathcal{E}(\varphi) \setminus \mathcal{E}'(\varphi)$ il existe $e' \in \mathcal{E}'(\varphi) \cap \mathcal{E}(\varphi)$ tel que $e' \cdot v < e \cdot v$, d'où le point i de la proposition.

On remarque que pour u "assez grand", on a $\varphi_{(u',1)} = a_{\mu 0} t^\mu$, pour tout $u' \geq u$. Par conséquent, on a :

$$\deg_t \varphi_{(u',1)} = \nu_{(u',1)} \varphi = \mu,$$

pour tout $u' \geq u$, d'où le point ii) de la proposition.

Si l'ensemble $\{a_{j0} s^{m_j} t^j \mid j < \mu \text{ et } a_{j0} \neq 0\}$ n'est pas vide, alors pour u "assez petit" la partie principale $\varphi_{(u,1)}$ appartient à $\{a_{j0} s^{m_j} t^j \mid j < \mu \text{ et } a_{j0} \neq 0\}$. Comme l'application $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^3; u \mapsto \nu_{(1,u)} \varphi$ est continue (voir la Proposition 2.2.4 et la Remarque 3.2.2), il existe un vecteur $v = (u'', 1) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ tel que la partie principale φ_v n'est pas un monôme et tel que $\deg_t \varphi_v = \mu$, d'où le point iii) de la proposition. \square

3.3. Les vecteurs principaux d'un (K,l)-wedge

On rappelle quelques notations. Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, K une extension du corps \mathbf{k} , $d \geq 2$ un entier, $N := \mathbb{Z}^{d+1}$ muni de sa base standard $\{e_1, e_2, \dots, e_{d+1}\}$ et $\Delta := \langle e_1, e_2, \dots, e_{d+1} \rangle$ le cône standard. Le dual de N , noté M , est identifié avec \mathbb{Z}^{d+1} au moyen de la forme bilinéaire standard $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq d+1$. On note T le tore $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$ et on pose $x_j := \chi^{e_j} \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$, $1 \leq j \leq d+1$.

Pour $r := (r_1, r_2, \dots, r_{d+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$, on note $x^r = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_{d+1}^{r_{d+1}}$. Soit V une hypersurface normale de la variété torique $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} = \text{Spec } \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$ donnée par l'équation $f = 0$, où $f = \sum_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m} c_r x^r \in \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}]$, $c_r \in \mathbf{k}$, est un polynôme irréductible et non dégénéré par rapport la frontière de Newton $\Gamma(f)$. On note O la T -orbite de dimension zéro de la variété $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ et on suppose que O est l'unique point singulier de V .

D'abord, on définit les (K, l) -wedges sur V , où l est un entier supérieur ou égal à 1, et le v -vecteur principal d'un (K, l) -wedge sur V , où $v \in \mathbb{R}_{>0}^l$. Ensuite, on démontre que l'ensemble des vecteurs principaux de certains (K, l) -wedge sur V est contenu dans l'intersection du d -squelette $S_d \Gamma^*(f)$ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ avec l'intérieur du cône standard Δ . Cette proposition nous donne une information importante sur les vecteurs principaux d'un (K, l) -wedge, information qu'on utilise dans les sections suivantes.

Définition 3.3.1. Un morphisme $\omega : \text{Spec } K[[t_1, t_2, \dots, t_l]] \rightarrow V$, où l est un entier supérieur ou égal à 1, est appelé (K, l) -wedge sur V . On note 0 l'unique point fermé du schéma $\text{Spec } K[[t_1, t_2, \dots, t_l]]$.

Remarque 3.3.2. L'ensemble des $(K, 1)$ -wedges (resp. $(K, 2)$ -wedges) sur V est l'ensemble des K -arcs (resp. K -wedges) sur V .

On rappelle que ω est un morphisme entre variétés affines, donc le comorphisme ω^* est bien défini.

Définition 3.3.3. Soient ω un (K, l) -wedge sur V et v un vecteur qui appartient à $\mathbb{R}_{>0}^l$. On appelle v -vecteur principal de ω le vecteur suivant :

$$\nu_v \omega := (\nu_v \omega^*(x_1), \dots, \nu_v \omega^*(x_{d+1})) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

où ω^* est le comorphisme de ω . On note $VP(\omega) := \{\nu_v\omega \mid v \in \mathbb{R}_{>0}^l\}$ l'ensemble de v -vecteurs principaux de ω .

Remarque 3.3.4. Soit α un K -arc sur V . L'ensemble de v -vecteurs principaux $VP(\alpha)$ de α est un cône de dimension 1 engendré par le vecteur primitif suivant :

$$\mu := (\text{Ord}_t \alpha^*(x_1), \dots, \text{Ord}_t \alpha^*(x_{d+1})) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}.$$

Le vecteur μ est appelé le *vecteur principal* du K -arc.

Définition 3.3.5. Soit ω un (K, l) -wedge sur V , $l \geq 1$. On dit que le (K, l) -wedge ω est un *bon (K, l) -wedge* si ω n'est pas concentré dans $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} \setminus T$, c'est-à-dire $\omega(g) \notin \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1} \setminus T$, où g est le point générique de $\text{Spec } K[[t_1, \dots, t_l]]$.

On remarque que si l'hypersurface V admet un bon (K, l) -wedge ω , alors f n'est pas un monôme.

Proposition 3.3.6. Soit ω un bon (K, l) -wedge sur V tel que $\omega(0) = O$. Alors, l'ensemble de vecteurs principaux $VP(\omega)$ du (K, l) -wedge ω est contenu dans l'intersection du d -squelette de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ avec l'intérieur du cône standard Δ , c'est-à-dire $VP(\omega) \subset S_d \Gamma^*(f) \cap \Delta^\circ$.

DÉMONSTRATION. On fixe un vecteur $v = (v_1, v_2, \dots, v_l) \in \mathbb{R}_{>0}^l$.

Comme ω est un bon (K, l) -wedge sur V et $\omega(0) = O$, le vecteur principal $\nu_v\omega$ définit une graduation strictement positive sur l'anneau $\mathbf{k}[t_1, x_2, \dots, t_{d+1}]$ (on remarque que $\nu_v\omega \in \Delta^\circ$) et $\omega^*f = 0$. Soit f_0 le terme principal de f obtenu au moyen de cette graduation. Comme on a $\omega^*f = 0$, le terme principal f_0 n'est pas un monôme, d'où la proposition. \square

Maintenant, on suppose que $l = 2$. Pour simplifier la notation de l'anneau $K[[t_1, t_2]]$ on change t_1 (resp. t_2) en s (resp. t). On a donc l'anneau $K[[s, t]]$ à la place de l'anneau $K[[t_1, t_2]]$.

Soit Σ est une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$ (voir la Définition 2.5.1). On considère le morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ et on note \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Sigma)$.

On rappelle que l'espace d'arcs V_∞ satisfait la *propriété fonctorielle* suivante (voir le Théorème 1.1.2 ou [IK03]) : le foncteur $Y \rightarrow \text{Hom}(Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]], V)$, où Y est un schéma quelconque sur \mathbf{k} et $Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]]$ est le complété formel du schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[[t]]$ le long du sous-schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}$, est représentable par le schéma V_∞ .

Comme \mathbf{k} est un corps de caractéristique nulle, l'espace d'arcs V_∞ est irréductible (voir le Théorème 1.1.3).

D'après cette propriété fonctorielle, les K -points ($K[[s]]$ -points) de V_∞ sont en correspondance bijective avec les K -arcs (K -wedges) sur V . Par abus de notation, pour $\alpha \in V_\infty$ on note α son \mathbf{k}_α -arc correspondant, où \mathbf{k}_α est le corps résiduel du point α .

On rappelle que le morphisme $p_\infty : V_\infty \rightarrow V$ est la projection canonique $\alpha \mapsto \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\text{Spec } \mathbf{k}_\alpha[[t]]$. On pose $V_\infty^s := p_\infty^{-1}(O)$.

Considérons un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$. On rappelle que l'image du point fermé (resp. du point générique) de $\text{Spec } K[[s]]$ dans V_∞ est appelé le centre (resp. l'arc générique) du K -wedge ω . On note α_0 (resp. α_g) le centre (resp. de l'arc générique) du K -wedge ω .

Le K -wedge ω peut être interprété comme une déformation à un paramètre des coefficients du comorphisme α_0^* de l'arc α_0 .

Dans les sections suivantes, considérons les K -wedges admissibles sur V . On rappelle la définition de K -wedge admissible (voir la Définition 1.3.3). Soit E un diviseur essentiel sur V et N_E l'adhérence dans V_∞ de l'ensemble $\{\alpha \in V_\infty \setminus (\text{Sing } V)_\infty \mid \widehat{\alpha}(0) \in E\}$, où $(\text{Sing } V)_\infty$ est le sous-ensemble fermé de V_∞ des arcs qui sont concentrés en O et $\widehat{\alpha}$ est l'unique \mathbf{k}_α -arc sur \widetilde{V} tel que $\pi \circ \widehat{\alpha} = \alpha$. Un K -wedge ω est appelé K -wedge admissible centré en N_E si le centre α_0 (resp. l'arc générique α_g) de ω est le point générique de N_E (resp. appartient à V_∞^s).

On remarque que un K -wedge admissible ω sur V satisfait la propriété suivante : $\alpha_0(0) = O$, $\alpha_0(g) \in T$, où 0 est le point fermé et g le point générique de $\text{Spec } \mathbf{k}_{\alpha_0}[[t]]$, et $\alpha_g \in V_\infty^s$.

La proposition suivante montre que le comorphisme d'un K -wedge, qui satisfait la propriété ci-dessus, est défini par des séries formelles qui satisfont les hypothèses de la Proposition 3.2.6. On peut donc utiliser les résultats obtenus dans la Section 3.2 pour majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité de ces séries.

Il suffit d'une simple inspection du comorphisme du K -wedge considéré pour en déduire la proposition suivante.

Proposition 3.3.7. *Soit $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ un K -wedge sur V tel $\alpha_0(0) = O$, $\alpha_0(g) \in T$. Alors, on peut écrire le comorphisme du K -wedge ω de la façon suivante :*

$$(3.2) \quad \omega^*(x_i) = \sum_{\eta_i \leq j < \mu_i} a_{ij} s^{l_{ij}} t^j + \sum_{\mu_i \leq j} a_{ij} t^j, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq d+1,$$

où les exposants l_{ij} sont strictement positifs et les a_{ij} sont des séries formelles qui appartiennent à $K[[s]]$. De plus, pour chaque $1 \leq i \leq d+1$, $1 < j < \mu_i$ (resp. $1 \leq i \leq d+1$) les séries formelles a_{ij} (resp. $a_{i\eta_i}$ et $a_{i\mu_i}$) sont inversibles ou nulles (resp. sont inversibles).

La proposition suivante donne une idée de la forme des v -parties principales des K -wedges considérées dans le résultat précédent. La preuve de cette proposition est analogue à celle de la proposition 3.2.6.

Proposition 3.3.8. *Soient $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ un K -wedge sur V tel $\alpha_0(0) = O$, $\alpha_0(g) \in T$ et v un vecteur de $\mathbb{R}_{>0}^2$. On utilise les Formules 3.2 de la Proposition 3.3.7 pour noter le comorphisme ω^* du K -wedge ω . Alors, on a :*

i) les v -parties principales $\omega^*(x_i)_v$, $1 \leq i \leq d+1$ ont la forme suivante :

$$(x_i)_v := \omega^*(x_i)_v = a'_{i\mu_x} t^{\mu_i} + \sum_{\eta_i \leq j < \mu_i} a'_{ij} s^{l_{ij}} t^j,$$

où les coefficients a'_{ij} , pour $1 \leq i \leq d+1$, $\eta_i \leq j \leq \mu_i$, sont définis par :

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij0} & \text{si } (m_i, i) \cdot v = \nu_v \omega^*(x) \\ 0 & \text{si } (m_i, i) \cdot v > \nu_v \omega^*(x) \end{cases},$$

où a_{ij0} est le coefficient du terme constant de la série formelle a_{ij} ;

ii) il existe un réel $u > 0$ tel que :

$\mu = \nu_{(u',1)}\omega = (\deg_t(x_1)_{(u',1)}, \deg_t(x_2)_{(u',1)}, \dots, \deg_t(x_{d+1})_{(u',1)})$, pour tout $u' \geq u$,
où $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{d+1})$;

iii) soit u comme dans le point ii) ; si parmi les séries formelles $a_{ij} \in K[[s]]$ pour $1 \leq i \leq d+1$, $\eta_i \leq j < \mu_i$, il existe au moins une série formelle non nulle, alors on peut supposer que parmi les $(u,1)$ -parties principales $(x_i)_{(u,1)}$, $1 \leq i \leq d+1$, il y en a au moins une qui n'est pas un monôme.

Étant donné un K -wedge ω . On peut écrire son comorphisme ω^* de la façon suivante :

$$\omega^*(x_i) = t^{\eta_i} \varphi_i, \quad \eta_i = \text{Ord}_t \omega^*(x_i), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d+1,$$

où les φ_i sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t .

Corollaire 3.3.9. *On conserve les hypothèses de la proposition 3.3.8. Alors, on a :*

i) il existe un vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ tel que le v -ordre de φ_i , $1 \leq i \leq d+1$, satisfait la propriété suivante :

$$\nu_v \varphi_i = \deg_t(\varphi_i)_v = \mu_i - \eta_i, \quad 1 \leq i \leq d+1,$$

de plus, si parmi les séries formelles φ_i , il y en a au moins une qui n'est pas inversible, alors on peut supposer que parmi les v -parties principales $(\varphi_i)_v$, il y en a au moins une qui n'est pas un monôme.

ii) le nombre de facteurs irréductibles de φ_i comptés avec multiplicité est inférieur ou égal à $\mu_i - \eta_i$, c'est-à-dire

$$\text{FI}(\varphi_i) \leq \mu_i - \eta_i, \quad 1 \leq i \leq d+1,$$

de plus, φ_i est inversible si et seulement si $\mu_i - \eta_i = 0$.

DÉMONSTRATION. La démonstration résulte des Proposition 3.2.5, 3.3.7 et 3.3.8. \square

En vertu des Propositions 3.3.6 et 3.3.8, le vecteur principal μ appartient à l'intersection du d -squelette $S_d \Gamma^*(f)$ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ avec l'intérieur Δ^0 du cône standard Δ . Dans la proposition suivante on montre que si $\alpha_g \in V_\infty^s$, alors le vecteur η appartient aussi à l'intersection $S_d \Gamma^*(f) \cap \Delta^0$.

Proposition 3.3.10. *Soit $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ un K -wedge sur V tel $\alpha_0(0) = O$, $\alpha_0(g) \in T$ et $\alpha_g \in V_\infty^s$. Alors, le vecteur $\eta := (\text{Ord}_t \omega^*(x_1), \dots, \text{Ord}_t \omega^*(x_{d+1}))$, appartient à l'intersection $S_d \Gamma^*(f) \cap \Delta^0$.*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 3.3.6, le vecteur $\nu_{(u,1)}\omega \in S_d \Gamma^*(f) \cap \mathbb{R}_{>0}^{d+1}$ pour tout $u > 0$. On remarque que $\lim_{u \rightarrow 0} \nu_{(u,1)}\omega = \eta$. Soit $n \gg 0$ "assez grand" tel que $\eta_i < n$, pour tout $1 \leq i \leq d+1$. Il existe donc un réel $u_0 > 0$ tel que pour tout $u \geq u_0$, on a :

$$\nu_{(u,1)}\omega \in K_n := S_d \Gamma^*(f) \cap \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{d+1} \mid \lambda_j \leq n \text{ pour } 1 \leq j \leq d+1\}.$$

Comme K_n est compact, on a $\eta \in S_d \Gamma^*(f)$. On remarque que $\eta \in \mathbb{Z}_{>0}^{d+1}$, d'où la proposition. \square

Maintenant, on suppose en plus que l'hypersurface V ne contient aucune T -orbite de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ de dimension strictement plus grande que 0 et qu'il existe une G -subdivision régulière $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$.

On remarque que le morphisme torique $\pi : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est une résolution plongée de V (voir le Corollaire 2.5.9). On note \tilde{V} le transformé strict de V . Par abus de notation,

on note $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la restriction du morphisme $\pi : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ à \tilde{V} .

Étant donné un K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$ sur V tel que $\alpha(0) = O$ et $\alpha(g) \in V \setminus \{O\}$, où 0 (resp. g) est le point fermé (resp. générique) de $\text{Spec } K[[t]]$, il existe un unique K -arc $\hat{\alpha} : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow \tilde{V}$ sur \tilde{V} tel que $\pi \circ \hat{\alpha} = \alpha$.

En utilisant les notations qui sont définies ci-dessus, on a la proposition suivante :

Proposition 3.3.11. *Soient E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ et α un K -arc sur V tel que le K -arc $\hat{\alpha}$ est transverse à E et $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E . Alors, le vecteur principal μ du K -arc α appartient au système générateur minimal d'un semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^{d+1}$, où τ est un cône de $\Gamma^*(f)$.*

DÉMONSTRATION. Comme $\pi : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ est une résolution plongée de V , il existe un vecteur extrémal ρ_1 de $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ tel que E est une composante irréductible de $D_{\rho_1} \cap \tilde{V}$, où D_{ρ_1} est le diviseur torique associé au vecteur extrémal ρ_1 . On remarque que les vecteurs extrémaux de $\Sigma_{\mathcal{G}}$ qui sont contenus dans une face strict de Δ sont les vecteurs extrémaux du cône Δ , car l'hypersurface V ne contient aucune T -orbite de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{d+1}$ de dimension strictement positive. En particulier, le vecteur ρ_1 appartient à l'intérieur relatif Δ^0 du cône Δ .

Pour tout vecteur extrémal ρ de l'éventail $\Sigma_{\mathcal{G}}$ tel que $\rho \neq \rho_1$, le diviseur E n'est pas contenu dans D_{ρ} . En effet, en vertu de la Proposition 2.5.5, pour tout vecteur extrémal $\rho \in \Delta^0$ de l'éventail $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$, si l'intersection $D_{\rho} \cap D_{\rho_1}$ n'est pas vide, alors toutes les T -orbites contenues dans $D_{\rho} \cap D_{\rho_1}$ sont transverse à \tilde{V} .

Soient ρ_i , $2 \leq i \leq d+1$ des vecteurs extrémaux de $\Sigma_{\mathcal{G}}$ adjacents à ρ_1 , c'est-à-dire il existe un cône $\sigma \in \Sigma_{\mathcal{G}}$ de dimension $d+1$ tel que les vecteurs ρ_i , $1 \leq i \leq d+1$, sont vecteurs extrémaux de σ . On remarque que le point générique de E n'est pas contenu dans ρ_i , $2 \leq i \leq d+1$.

Pour un vecteur $m := (a_1, a_2, \dots, a_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$, on note $\chi^m(t_1, t_2, \dots, t_{d+1}) = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_{d+1}^{a_{d+1}}$ le caractère associé à m . Soient U_{σ} l'ouvert torique de $X(\Sigma_{\mathcal{G}})$ associé à σ et χ^{m_i} le caractère qui définit une équation de $D_{\rho_i} \cap U_{\sigma}$, pour $i \in \{1, 2, \dots, d+1\}$. Alors, on a $m_i \cdot \rho_j = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Quitte à remplacer les vecteurs ρ_i , $2 \leq i \leq d+1$, on peut supposer que $U_{\sigma} \cap E \neq \emptyset$.

On considère l'unique relèvement $\hat{\alpha}$ à $X(\Sigma_{\mathcal{G}})$ du K -arc α . Le point $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E et $\text{Ord}_t \hat{\alpha}^*(g) = 1$, où g est une équation locale de E ($\hat{\alpha}$ est transverse à E).

On rappelle que le diviseur $\pi^{-1}(V)$ est à croisements normaux. En particulier, \hat{V} est transverse au diviseur D_{ρ_1} . Comme le K -arc $\hat{\alpha}$ est transverse à E , le K -arc $\hat{\alpha}_E$ est transverse à D_{ρ_1} . Par conséquent, on obtient que $m_i \mu = \delta_{i1}$, $1 \leq i \leq d+1$, car $\hat{\alpha}(0)$ n'est pas contenu dans D_{ρ_i} , $2 \leq i \leq d+1$. Ceci implique que $\mu = \rho_1$, d'où la proposition, car $\Sigma_{\mathcal{G}}$ est une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$. \square

Résolution du problème des arcs de Nash pour une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$

Ce chapitre est une adaptation d'un article qui va paraître dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, voir [LA11a].

4.1. Préliminaires et rappels

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, S une surface algébrique normale sur \mathbf{k} et $\pi : X \rightarrow S$ la résolution minimale de S . Chaque composante irréductible E de la fibre exceptionnelle de π est appelée *diviseur essentiel sur S* . On note $\text{Ess}(S)$ l'ensemble des diviseurs essentiels sur S .

Soit K une extension du corps \mathbf{k} . Un morphisme $\text{Spec } K[[t]] \rightarrow S$ est appelé K -arc. On note S_∞ l'espace d'arcs sur S (voir [Ish07] ou la Section 1.1). Les K -points de S_∞ sont en correspondance bijective avec les K -arcs sur S . Par abus de notation, pour $\alpha \in S_\infty$ on note α son \mathbf{k}_α -arc correspondant, où \mathbf{k}_α est le corps résiduel du point α . Soit $p : S_\infty \rightarrow S$ la projection canonique $\alpha \mapsto \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\text{Spec } \mathbf{k}_\alpha[[t]]$. On note $S_\infty^s := p^{-1}(\text{Sing } S)$, où $\text{Sing } S$ est le lieu singulier de S , et $\mathcal{CN}(S)$ l'ensemble des composantes irréductibles de S_∞^s . Nash a démontré que l'application $\mathcal{N}_S : \mathcal{CN}(S) \rightarrow \text{Ess}(S)$ qui associe à $C \in \mathcal{CN}(S)$ l'adhérence $\overline{\{\hat{\alpha}(0)\}}$ est bien définie et injective, où $\hat{\alpha}$ est le relèvement à X du point générique α de C , c'est-à-dire $\pi \circ \hat{\alpha} = \alpha$. Le problème de Nash consiste à étudier la surjectivité de \mathcal{N}_S .

Soit $E \in \text{Ess}(S)$. On note N_E l'adhérence dans S_∞ de l'ensemble suivant :

$$\{\alpha \in S_\infty \setminus (\text{Sing } S)_\infty \mid \hat{\alpha}(0) \in E\}.$$

On peut montrer que N_E est irréductible et que $S_\infty^s = \bigcup_E N_E$.

Les morphismes $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S$ sont appelés K -wedges sur S . Ils sont en correspondance bijective avec les $K[[s]]$ -points de S_∞ . L'image du point fermé (resp. du point générique) de $\text{Spec } K[[s]]$ dans S_∞ est appelé le centre (resp. l'arc générique) du K -wedge ω .

Un K -wedge ω est appelé *K -wedge admissible centré en N_E* si le centre (resp. l'arc générique) de ω est le point générique de N_E (resp. appartient à S_∞^s). Dans [Reg06] on montre que E appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_S si et seulement si tout K -wedge admissible centré en N_E se relève à X c'est-à-dire il existe un K -wedge $\hat{\omega}$ sur X tel que $\pi \circ \hat{\omega} = \omega$.

On considère l'hypersurface $S(p, h_q)$ de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $z^p + h_q(x, y) = 0$, où h_q est un polynôme homogène de degré q sans facteur multiple, $p \geq 2$, $q \geq 2$ deux entiers premiers entre eux. Par exemple si $h_q(x, y) = x^q + y^q$, $S(p, h_q)$ est une surface de *Pham-Brieskorn*. Dans [FZ03] on montre que les surfaces $S(p, h_q)$ sont toutes quasi-rationnelles (c'est-à-dire les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la résolution minimale sont des courbes rationnelles) et rationnelles si et seulement si $q = 2$ ou $(p, q) = (2, 3)$. On remarque que $S(p, h_2)$ est une singularité du type \mathbb{A}_{p-1} . Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 4.1.1. *Pour tous les entiers $p \geq 2$, $q \geq 2$ premiers entre eux, l'application de Nash $\mathcal{N}_{S(p, h_q)}$ associée à $S(p, h_q)$ est bijective.*

Une note sur la preuve de ce résultat a été publiée dans [LA11b].

On remarque que les critères de [Mor08] et [PPP06] ne s'appliquent pas en général aux familles $S(p, h_q)$.

En utilisant la même méthode que dans la preuve du Théorème 4.1.1 on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.1.2. *Si S est une singularité de type \mathbb{E}_6 ou \mathbb{E}_7 , l'application de Nash \mathcal{N}_S associée à S est bijective.*

On obtient aussi une preuve simple de la bijectivité de l'application de Nash pour plusieurs cas connus, par exemple \mathbb{D}_n , où n est un entier, $n \geq 4$ (voir [Plé08]).

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : dans la première section on introduit quelques notations et on démontre le Théorème 4.1.1 ; le Théorème 4.1.2 est le sujet de la deuxième section, on donne la preuve du cas \mathbb{E}_6 en détails et un résumé pour le cas \mathbb{E}_7 ; dans la dernière section on donne une preuve simple de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités du type \mathbb{D}_n , $n \geq 4$ différente de celle de l'article [Plé08].

4.2. Le problème Nash pour les hypersurfaces quasi-rationnelles $S(p, h_q)$

On rappelle que $S(p, h_q)$ est l'hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $z^p + h_q(x, y) = 0$, où h_q est un polynôme homogène de degré q sans facteur multiple et $p \geq 2$, $q \geq 2$ sont deux entiers premiers entre eux.

Nash a démontré que l'application $\mathcal{N}_{\mathbb{A}_m}$ associée à la surface de type \mathbb{A}_m , $m \geq 2$, est bijective (voir [Nas95]). On suppose donc que $q \geq 3$, car l'hypersurface $S(p, h_2)$ est une singularité du type \mathbb{A}_{p-1} .

4.2.1. Résolution de la singularité. Un système de coordonnées affines $\{x, y, z\}$ de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ étant fixé, notons O l'origine de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$. On décrit la désingularisation de $S(p, h_q)$ en utilisant les constellations toriques de points infiniment voisins de O (voir [CGSLJ96]), les éventails de Newton (voir [GSLJ91]) et les G -désingularisations (voir [BGS95]).

D'abord, on fait quelques rappels. Soient $N = \mathbb{Z}^3$ muni de sa base standard $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ le dual de N . On note $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base duale de $\{e_1, e_2, e_3\}$. On identifie la \mathbf{k} -algèbre $\mathbf{k}[M]$ avec la \mathbf{k} -algèbre $\mathbf{k}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}]$ par l'isomorphisme qui envoie le caractère $\chi^{e_1^*}$ (resp. $\chi^{e_2^*}$, $\chi^{e_3^*}$) sur x (resp. y , z).

Soit Σ un éventail en $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On note $X(\Sigma)$ la variété torique associée à l'éventail Σ et munie de l'action du tore algébrique $(\mathbf{k}^*)^3 = \text{Spec } \mathbf{k}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}]$.

Soit $X_0 = \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$. Une constellation torique de points infiniment voisins de O est un ensemble fini de points $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_m\}$, où chaque Q_i , $1 \leq i \leq m$, est une orbite de dimension 0 de la variété torique X_i obtenue par l'éclatement $\varsigma_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ de centre Q_{i-1} . On note $X(\mathcal{C}) = X_{m+1}$.

On dit que Q_j se projette sur Q_i , noté $Q_j \geq Q_i$, si le point $Q_j \in X_j$ est obtenu à partir de $Q_i \in X_i$ par une suite d'éclatements de points. La relation \geq est une relation d'ordre partiel sur les points de \mathcal{C} . Si \geq est un ordre total, on dit que \mathcal{C} est une constellation en chaîne.

Supposons que \mathcal{C} est une constellation torique en chaîne de points infiniment voisins de O . Soient $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base ordonnée de N et $\Delta := \langle \mathcal{B} \rangle$ le cône régulier engendré par \mathcal{B} . Notons Σ_i l'éventail associé à la variété torique X_i . L'éventail Σ_1 est obtenu par la subdivision élémentaire de Δ centrée en $u = e_1 + e_2 + e_3$. Pour chaque entier j , $1 \leq j \leq 3$, soit \mathcal{B}_j la base ordonnée de N obtenue en remplaçant e_j par u en la base \mathcal{B} . Soit $\Delta_j := \langle \mathcal{B}_j \rangle$ le cône régulier engendré par \mathcal{B}_j , pour $1 \leq j \leq 3$. Le choix du point $Q_1 > Q_0$ équivaut à choisir un entier a_1 , $1 \leq a_1 \leq 3$, qui détermine un cône Δ_{a_1} de l'éventail Σ_1 . La subdivision Σ_2 de Σ_1 est obtenue en remplaçant Δ_{a_1} en Σ_1 par les cônes $\Delta_{a_1 j} := \langle \mathcal{B}_{a_1 j} \rangle$, où $\mathcal{B}_{a_1 j}$ est la base ordonnée de N obtenue en remplaçant le j -ième vecteur de \mathcal{B}_{a_1} par $\sum_{u \in \mathcal{B}_{a_1}} u$. Le choix du point $Q_2 > Q_1$ équivaut à choisir un entier a_2 , $1 \leq a_2 \leq 3$, qui détermine un cône $\Delta_{a_1 a_2}$ de l'éventail Σ_2 . Par récurrence, on obtient une codification de la constellation en chaîne \mathcal{C} . Cette codification est notée $Q_j = Q_0(a_1 a_2 \cdots a_j)$ pour $1 \leq j \leq m$.

Soit b_1, b_2, \dots, b_k une suite d'entiers, où $1 \leq b_i \leq 3$, $1 \leq i \leq k \leq m$, et telle que le cône $\Delta_{b_1 b_2 \cdots b_k}$ appartient à l'éventail Σ_{m+1} . Notons $U_{b_1 b_2 \cdots b_k}$ l'ouvert torique affine qui est en correspondance avec le cône $\Delta_{b_1 b_2 \cdots b_k}$.

Soit $\mathcal{C}_n = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_{n-1}\}$, $n \geq 1$, une chaîne torique de points infiniment voisins de O donnée par la codification $Q_j = Q_0(3^j)$ (j fois l'entier 3) pour $1 \leq j \leq n-1$. On note $\sigma_n : X(\mathcal{C}_n) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ le morphisme torique induit par \mathcal{C}_n et $S_{\mathcal{C}}$ le transformé strict de $S(p, h_q)$.

Proposition 4.2.1. *Soient $p > q$ et $p = nq + r$ la division entière, $1 \leq r < q$. Si $r = 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ est la résolution minimale de $S(p, h_q)$ et la fibre exceptionnelle $\sigma_n^{-1}(O) \cap S_{\mathcal{C}}$ est la réunion de nq courbes rationnelles. Si $r > 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ a un unique point singulier s , et de plus, $(S_{\mathcal{C}}, s)$ est isomorphe au germe $(S(r, h_q), O)$.*

DÉMONSTRATION. La proposition se démontre par récurrence sur l'entier $n \geq 1$. Mais d'abord, démontrons le lemme suivant.

On considère l'éclatement de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ de centre O , $\varsigma_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$. On note x_i, y_i, z_i les coordonnées canoniques de l'ouvert torique affine U_i , pour l'entier $1 \leq i \leq 3$.

Soit S le transformé strict de $S(p, h_q)$ induit par le morphisme $\varsigma_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$. Par abus de notation, on note $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$ la restriction du morphisme $\varsigma_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ à S .

Lemme 4.2.2. *Les ouverts de S , $U_1 \cap S$ et $U_2 \cap S$ sont lisses et $U_3 \cap S = \{(x_3, y_3, z_3) \in U_3 \mid z_3^{p-q} + h_q(x_3, y_3) = 0\}$.*

La fibre exceptionnelle du morphisme $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$ est la réunion de q courbes rationnelles. Les courbes ne s'intersectent qu'au point fermé de U_3 fixé par l'action du tore algébrique $(\mathbf{k}^)^3$.*

Si $p - q = 1$, alors S est la résolution minimale de $S(p, h_q)$.

DÉMONSTRATION. Les restrictions du morphisme $\varsigma_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ aux ouverts U_i sont données de la façon suivante :

$$U_1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3, (x_1, y_1, z_1) \mapsto (x_1, x_1 y_1, x_1 z_1);$$

$$U_2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3, (x_2, y_2, z_2) \mapsto (y_2 x_2, y_2, y_2 z_2);$$

$$U_3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3, (x_3, y_3, z_3) \mapsto (z_3 x_3, z_3 y_3, z_3).$$

Ainsi, on obtient que

$$U_1 \cap S = \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid z_1^p x_1^{p-q} + h_q(1, y_1) = 0\};$$

$$U_2 \cap S = \{(x_2, y_2, z_2) \in U_2 \mid z_2^p y_2^{p-q} + h_q(x_2, 1) = 0\};$$

$$U_3 \cap S = \{(x_3, y_3, z_3) \in U_3 \mid z_3^{p-q} + h_q(x_3, y_3) = 0\}.$$

Par un calcul direct, on montre que $U_1 \cap S$ et $U_2 \cap S$ sont lisses. Ceci achève la preuve de la première partie du lemme.

Soit F la fibre exceptionnelle du morphisme $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$. Alors on a

$$U_3 \cap F = \{(x_3, y_3, z_3) \in U_3 \mid z_3 = 0, h_q(x_3, y_3) = 0\}.$$

Comme h_q est un polynôme homogène de degré q sans facteur multiple, l'ensemble $U_3 \cap F$ est la réunion de q courbes rationnelles qui s'intersectent en l'origine de U_3 .

On remarque que les deux ensembles suivants sont de cardinalité q .

$$(X_1 \setminus U_3) \cap F \cap U_1 = \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid z_1 = 0, x_1 = 0, h_q(1, y_1) = 0\};$$

$$(X_1 \setminus U_3) \cap F \cap U_2 = \{(x_2, y_2, z_2) \in U_2 \mid z_2 = 0, y_2 = 0, h_q(x_2, 1) = 0\}.$$

Par conséquent, la fibre exceptionnelle est la réunion d'exactly q courbes rationnelles qui s'intersectent en l'origine de U_3 . Ceci achève la preuve de la deuxième parti du lemme.

Si $p - q = 1$, S est une surface lisse. On considère la fonction régulière de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$, $g(x, y, z) = x$. Alors $g^* = g \circ \varsigma_1$ est une fonction régulière de X_1 .

Soit C le diviseur principal de $S(p, h_q)$ associé à la restriction de g à $S(p, h_q)$, c'est-à-dire $C := \text{Div } g|_{S(p, h_q)}$. On remarque que C est une courbe (l'intersection schématique de $\text{Div } g$ et $S(p, h_q)$ est irréductible et réduit). Notons C' le transformé strict de C par le morphisme $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$. Par un calcul direct, on peut montrer que C' intersecte F en l'origine de U_3 .

On considère la restriction de g^* à l'ouvert U_3 . Alors, on a

$$g^* = z_3 x_3.$$

Par conséquent, le diviseur principal de S associé à la restriction de g^* à S est le suivant :

$$\text{Div } g^*|_S = C' + \sum_{i=1}^q F_i,$$

où les F_i sont les composantes irréductibles de F . Comme $\text{Div } g^*|_S \cdot F_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, on obtient :

$$F_i \cdot F_i = -C' \cdot F_i - \sum_{j \neq i} F_j \cdot F_i = -q \leq -3.$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Raisonnons par récurrence sur l'entier n .

Si $n = 1$, on a $p = q + r$ et $\mathcal{C}_1 = \{Q_0 = O\}$. La preuve de ce cas résulte du Lemme 4.2.2.

Maintenant, on suppose que $p = nq + r$.

D'après le Lemme 4.2.2, on a $U_3 \cap S = S((n-1)q + r, h_q)$ et la fibre exceptionnelle de $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$ est la réunion de q courbes rationnelles. En appliquant l'hypothèse de récurrence sur $U_3 \cap S$, on montre :

- la fibre exceptionnelle de $\sigma_n : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S(p, h_q)$ est la réunion de nq courbes rationnelles ;
- si $r > 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ a un unique point singulier de type $S(r, h_q)$;
- si $r = 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ est lisse.

Pour achever la preuve de la proposition, il faut montrer que si $r = 1$, alors le morphisme $\sigma_n : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S(p, h_q)$ est la résolution minimale de $S(p, h_q)$.

Soient F la fibre exceptionnelle du morphisme $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$ et F_i une composante irréductible de F , $1 \leq i \leq q$. On note F'_i le transformé strict de F_i dans $S_{\mathcal{C}}$ (on rappelle que le morphisme ς_1 factorise σ_n). En utilisant l'hypothèse de récurrence, pour montrer que $S_{\mathcal{C}}$ est la résolution minimale de $S(p, h_q)$, il suffit de montrer que $F'_i \cdot F'_i \leq -2$ pour tout $1 \leq i \leq q$.

Pour chaque $Q_i \in \mathcal{C}_n$, on note B_i le diviseur exceptionnel $\zeta_i^{-1}(Q_i)$ en X_{i+1} et D_i (resp. D_i^*) le transformé strict (resp. total) de B_i dans $X(\mathcal{C}_n)$.

On rappelle que la constellation \mathcal{C}_n est donnée par la codification $Q_j = Q_0(3^j)$ pour $1 \leq j \leq n-1$. En vertu du lemme 1.3 de [CGSLJ96] (voir la Proposition 2.4.2 et l'Exemple 2.4.4), on a

$$D_i = D_i^* - D_{i+1}^*,$$

d'où $D_i^* = \sum_{j=i}^{n-1} D_j$.

Avant d'achever la preuve de la Proposition 4.2.1, on rappelle les notions suivantes (voir la Proposition 2.4.8 et la Définition 2.4.9).

Soient $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{P}$ trois idéaux. Le \star -produit de \mathcal{I} et \mathcal{J} , noté $\mathcal{I} \star \mathcal{J}$, est la clôture intégrale du produit $\mathcal{I}\mathcal{J}$. On suppose que \mathcal{P} est un idéal complet non-trivial. L'idéal \mathcal{P} est \star -simple si \mathcal{P} n'a pas de \star -factorisation non-triviale.

On suppose que \mathcal{I} est un idéal tel que $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X(\mathcal{C}_n)}$ soit un faisceau d'idéaux inversible. On définit par récurrence le vecteur $m(\mathcal{I}) = (m_0, \dots, m_{n-1})$: $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$, $m_0 = \text{Ord}_{Q_0} \mathcal{I}_0$ et $m_i = \text{Ord}_{Q_i} \mathcal{I}_i$, $1 \leq i \leq n-1$, où $\mathcal{I}_i = x^{-m_{i-1}} \mathcal{I}_{i-1} \mathcal{O}_{X_i, Q_i}$ et $x=0$ est l'équation locale de B_{i-1} en Q_i . Dans [Lip88] l'auteur montre qu'il existe un unique idéal \star -simple, noté $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$, tel que le vecteur $m(\mathcal{P}_{Q_{n-1}})$ est minimal pour l'ordre lexicographique inverse et $m_{n-1} = 1$. L'idéal $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$ est appelé *l'idéal \star -simple spécial* associé à Q_{n-1} .

Reprenons la démonstration de la Proposition 4.2.1.

Soient $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$ l'idéal \star -simple spécial associé à Q_{n-1} et D' le diviseur de $X(\mathcal{C}_n)$ tel que

$$\mathcal{P}_{Q_{n-1}} \mathcal{O}_{X(\mathcal{C}_n)} = \mathcal{O}_{X(\mathcal{C}_n)}(-D').$$

D'après le Lemme 2.16 de [CGSLJ96] (voir la Proposition 2.4.13 et l'Exemple 2.4.14), on a

$$D' = \sum_{i=0}^{n-1} D_i^*.$$

Par conséquent, on a

$$D' = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) D_i.$$

Soit g un élément général de l'idéal $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$. Alors $g^* = g \circ \sigma_n$ est une fonction régulière de $X(\mathcal{C}_n)$. On note C le diviseur associé à g et C' le transformé strict de C dans $X(\mathcal{C}_n)$. Alors, on a :

$$\text{Div } g^* = C' + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) D_i.$$

Pour un diviseur Z de $X(\mathcal{C}_n)$, tel que son support ne contienne pas $S_{\mathcal{C}}$, notons $Z \cdot S_{\mathcal{C}}$ le diviseur de $S_{\mathcal{C}}$ obtenu par la somme formelle des composantes irréductibles de $Z \cap S_{\mathcal{C}}$ pondérées par leurs multiplicités en $S_{\mathcal{C}}$. Comme g est un élément général de $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$ on peut supposer que le support de C' ne contient pas $S_{\mathcal{C}}$. Ainsi, on obtient que

$$\text{Div } g^* |_{S_{\mathcal{C}}} = C' \cdot S_{\mathcal{C}} + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) D_i \cdot S_{\mathcal{C}}.$$

On remarque que $D_0 \cdot S_{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^q F'_i$. En effet, il suffit de considérer l'ouvert affine U_1 . On a donc $U_1 \cap S_{\mathcal{C}} = \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid z_1^p x_1^{p-q} + h_q(1, y_1) = 0\}$ et $D_0 \cap U_1 = \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid x_1 = 0\}$. Par conséquent, $(D_0 \cdot S_{\mathcal{C}}) \cap U_1 = \sum_{i=1}^q (F'_i \cap U_1)$, d'où $D_0 \cdot S_{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^q F'_i$.

On a donc

$$\operatorname{Div} g^*|_{S_C} = C' \cdot S_C + \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) D_i \cdot S_C + \sum_{i=1}^q F'_i.$$

On remarque que l'intersection $\operatorname{Div} g^*|_{S_C} \cdot F'_i$ est nulle pour tout $1 \leq i \leq q$, car $\operatorname{Div} g^*|_{S_C}$ est un diviseur principal. On remarque aussi que $(\sum_{i=1}^{n-1} (i+1) D_i \cdot S_C) \cdot F'_i \geq 2$, car il existe au moins un $1 \leq i \leq n-1$ tel que $((i+1) D_i \cdot S_C) \cdot F'_i \geq (i+1) \geq 2$. Par conséquent, on obtient que $F'_i \cdot F'_i \leq -2$ pour tout $1 \leq i \leq q$, d'où la proposition. \square

Pour un polynôme $g = \sum c_e x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3}$ dans $\mathbf{k}[x, y, z]$, où $e = (e_1, e_2, e_3)$ et $c_e \in \mathbf{k}$, on note $\mathcal{E}(g)$ l'ensemble des exposants $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ dont le coefficient c_e est non nul, c'est-à-dire $\mathcal{E}(g) := \{e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \mid c_e \neq 0\}$. Soient $\Gamma_+(g)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{e + \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \mid e \in \mathcal{E}(g)\}$ et $\Gamma(g)$ la réunion des faces compactes de $\Gamma_+(g)$. On note $\mathcal{I}(g)$ l'idéal monomial de $\mathbf{k}[x, y, z]$ engendré par les monômes $x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3}$ tels que $(e_1, e_2, e_3) \in \Gamma(g) \cap \mathbb{Z}^3$, c'est-à-dire $\mathcal{I}(g) := (\{x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3} \mid (e_1, e_2, e_3) \in \Gamma(g) \cap \mathbb{Z}^3\})$. L'éventail de Newton $\Gamma^*(g)$ associé à g est la subdivision de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ correspondant à l'éclatement normalisé de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ de centre l'idéal $\mathcal{I}(g)$. Pour plus de détails voir [GSLJ91], [KKMS73] ou la Section 2.2.

Remarque 4.2.3. Dans toute la suite, à automorphisme linéaire de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ près, x et y ne divisent pas $h_q(x, y)$.

La Figure 1 représente le polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$ associée à $f := z^p + h_q(x, y)$.

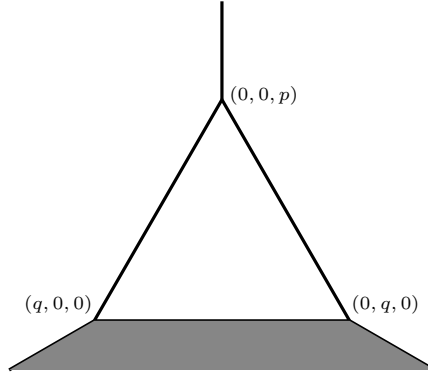


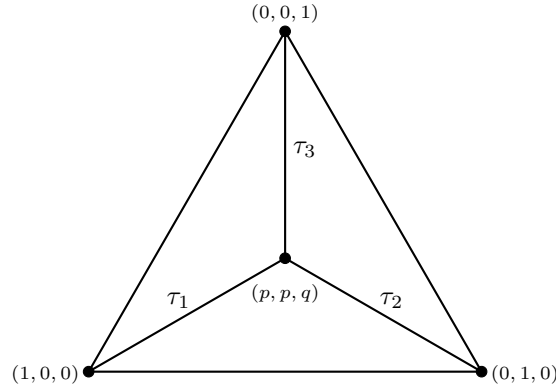
FIGURE 1. Polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$

Soit H un plan de \mathbb{R}^3 qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^3 et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ soit un ensemble compact. La Figure 2 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec la *vecteur extrémal* (autrement dit, vecteur primitif d'un cône de dimension 1 de l'éventail $\Gamma^*(f)$) correspondant. On note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$) et (p, p, q) .

La proposition suivante résulte d'un calcul direct.

Proposition 4.2.4. *Les cônes τ_1 et τ_2 sont réguliers.*

Soit $\Gamma^*(f)_G$ une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$, c'est-à-dire une subdivision régulière de chaque cône $\tau \in \Gamma^*(f)$ n'ayant comme arêtes que celles qui portent les vecteurs du système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$. D'après [BGS95] (voir le Théorème 2.3.6), cette subdivision existe.

FIGURE 2. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$

On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(f)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow X(\Gamma^*(f))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ (resp. $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^*(f)$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de $S(p, h_q)$ associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$. Par abus de notation, on note $\pi : S_{\mathcal{G}} \rightarrow S(p, h_q)$ la restriction du morphisme $\pi : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ à $S_{\mathcal{G}}$.

Soit k , un entier $k \geq 1$. Pour un ensemble d'entiers $m_i \geq 2$, $1 \leq i \leq k$, on note $[m_1; m_2; \dots; m_k]$ la fraction continue définie de la façon suivante :

$$[m_k] := m_k, [m_{k-1}; m_k] := m_{k-1} - \frac{1}{m_k} \text{ et } [m_1; m_2; \dots; m_k] := m_1 - \frac{1}{[m_2; \dots; m_k]}.$$

La proposition suivante est une application directe du Théorème 6.1 de [Oka87] (voir le Théorème 2.5.16).

Proposition 4.2.5. $S_{\mathcal{G}}$ est une bonne résolution de $S(p, h_q)$ et son graphe dual pondéré est une étoile à q branches identiques. Le diagramme de chaque branche est le suivant :

$$E_0^2 \text{---} \overset{\bullet}{-m_k} \text{---} \dots \text{---} \overset{\bullet}{-m_2} \text{---} \overset{\bullet}{-m_1},$$

où E_0 le diviseur associé au sommet central du graphe et les entiers $m_i \geq 2$ (resp. l'entier k) sont définis (resp. est défini) de la façon suivante :

si $q > p$ et $q = np + r$ la division entière, $1 \leq r < p$, alors on a

$$\frac{p}{p-r} = [m_1; m_2; \dots; m_k];$$

si $p > q$ et $p = nq + r$, la division entière $1 \leq r < q$ (resp. $n \geq 1$), alors on a

$$\frac{p}{p-q} = [m_1; m_2; \dots; m_k].$$

De plus, cette résolution est minimale si et seulement si $p \not\equiv 1 \pmod{q}$.

Corollaire 4.2.6. Si $p \equiv 1 \pmod{q}$, seul le diviseur E_0 n'est pas un diviseur essentiel sur $S(p, h_q)$.

DÉMONSTRATION. Soit $n \geq 1$ tel que $p = nq + 1$. En vertu de la Proposition 4.2.5, on a

$$\frac{p}{p-q} = \frac{nq+1}{(n-1)q+1} = 2 - \frac{1}{\dots}.$$

$$2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{q+1}}$$

En particulier l'entier k est égal à n , d'où le graphe dual de la résolution $\pi : S_{\mathcal{G}} \rightarrow S(p, h_q)$ a $nq+1$ sommets. D'après la Proposition 4.2.1, il n'y a qu'un diviseur de la fibre exceptionnelle

de π qui n'est pas un diviseur essentiel. D'après *le critère de contraction de Castelnuovo*, ce diviseur a une auto-intersection égale à -1 .

Comme les branches du graphe dual de la résolution $\pi : S_G \rightarrow S(p, h_q)$ sont identiques, forcément le diviseur E_0 a une auto-intersection égal à -1 , d'où le corollaire. \square

Un polynôme $g = \sum c_e x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3}$, où $e = (e_1, e_2, e_3)$ et $c_e \in \mathbf{k}$, est appelé *non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton* si pour toute face compacte γ de $\Gamma^*(g)$ le polynôme $g_\gamma := \sum_{e \in \gamma} c_e x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3}$ est non singulier sur le tore $T := \mathbb{N} \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$, c'est-à-dire les polynômes g_γ , $\partial_x g_\gamma$, $\partial_y g_\gamma$, $\partial_z g_\gamma$ n'ont pas de zéro commun en dehors de l'ensemble $xyz = 0$.

Dans la remarque suivante, on suppose que S est une hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$, donnée par l'équation $g = 0$, où g est un polynôme irréductible non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(g)$. De plus, on suppose que O est l'unique point singulier de S .

On considère une G -subdivision régulière $\Gamma^*(g)_{\mathcal{G}}$ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(g)$. On note $\pi' : X(\Gamma^*(g)_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(g)_{\mathcal{G}}$ du cône $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ et X le transformé strict de S dans $X(\Gamma^*(g)_{\mathcal{G}})$. Par abus de notation, on note $\pi' : X \rightarrow S$ la restriction du morphisme $\pi' : X(\Gamma^*(g)_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ à X .

Remarque 4.2.7. En vertu des résultats 2.5.5, 2.5.7 et 2.5.9, on a :

- le morphisme $\pi' : X \rightarrow S$ est une désingularisation de S ;
- si l'hypersurface S ne contient pas de T -orbite de dimension 1, alors le morphisme $\pi' : X(\Gamma^*(g)_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ est une résolution plongée de S , c'est-à-dire $\pi' : X(\Gamma^*(g)_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ est un morphisme propre et birationnel, $\pi' : X(\Gamma^*(g)_{\mathcal{G}}) \setminus (\pi')^{-1}(O) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3 \setminus \{O\}$ est un isomorphisme et $(\pi')^{-1}(S)$ est un diviseur à croisements normaux.

On remarque que le polynôme $f := z^p + h_q(x, y)$ est non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton et que l'hypersurface $S(p, h_q)$ ne contient pas de T -orbite de dimension 1 (voir la Remarque 4.2.3).

Corollaire 4.2.8. *le morphisme $\pi : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ est une résolution plongée de $S(p, h_q)$*

La proposition suivante établit une relation entre le morphisme $\pi : S_G \rightarrow S(p, h_q)$ et le morphisme $\sigma_n : S_C \rightarrow S(p, h_q)$ (voir les Propositions 4.2.1 et 4.2.5).

Proposition 4.2.9. *Si $p > q$, le morphisme $\sigma_n : S_C \rightarrow S(p, h_q)$ factorise le morphisme $\pi : S_G \rightarrow S(p, h_q)$, c'est-à-dire il existe un morphisme $\pi_0 : S_G \rightarrow S_C$ tel que $\pi = \sigma_n \circ \pi_0$.*

DÉMONSTRATION. Dans la preuve de cette proposition, on peut appliquer le Lemme 4.2.2 car ses hypothèses sont vérifiées.

On remarque que

$$(1, 1, 1) = \frac{(p, p, q) + (p - q)(0, 0, 1)}{p}$$

et que le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$ est régulier. Par conséquent, le vecteur $(1, 1, 1)$ appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau_3 \cap \mathbb{Z}^3$, où τ_3 est le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et (p, p, q) (voir la Figure 2).

On remarque aussi que l'éventail obtenu par l'éclatement de Newton de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ associé à $f = z^p + h_q(x, y)$ suivi de la subdivision élémentaire centrée en $(1, 1, 1)$, coïncide avec celui obtenu par l'éclatement de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ de centre le point O suivi de l'éclatement de Newton de U_3

associé à $z_3^{p-q} + h_q(x_3, y_3)$ (voir le Lemme 4.2.2).

Soit $p = nq + r$ la division entière, $1 \leq r < q$. En utilisant la remarque ci-dessus et le Lemme 4.2.2, la proposition résulte d'une récurrence sur l'entier $n \geq 1$. \square

Dans la proposition suivante, on suppose que S est une hypersurface quasi-homogène de \mathbb{A}_k^3 donnée par l'équation $g = 0$, où g est un polynôme quasi-homogène et irréductible, que O est l'unique point singulier de l'hypersurface S et que S ne contient pas de T -orbite de dimension 1.

D'après la Remarque 4.2.7, le morphisme $\pi' : X(\Gamma^*(g)_G) \rightarrow \mathbb{A}_k^3$ est une résolution plongée de S . On rappelle que X le transformé strict de S dans $X(\Gamma^*(g)_G)$.

Pour ρ un vecteur extrémal de $\Gamma^*(g)_G$ (c'est-à-dire ρ est un vecteur primitif d'un cône de dimension 1 qui appartient à l'éventail $\Gamma^*(g)_G$), on note D_ρ l'orbite fermée associée à ρ . Notons $E\Gamma^*(f)_G$ l'ensemble des vecteurs extrémaux de $\Gamma^*(g)_G$, et $S_2\Gamma^*(g)$ le 2-squelette de $\Gamma^*(g)$ (c'est-à-dire $S_2\Gamma^*(g)$ est la réunion des cônes de dimension 2 qui appartiennent à l'éventail $S_2\Gamma^*(g)$).

La proposition suivante donne des équations locales pour les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi' : X \rightarrow S$.

Dans le cas $S = S(p, h_q)$, on rappelle que E_0 est le diviseur associé au sommet central du graphe induit par π .

Proposition 4.2.10. *Soit ρ un vecteur extrémal de $\Gamma^*(g)_G$ ($\rho \in E\Gamma^*(g)_G$). Alors, on a :*

- i) l'intersection $D_\rho \cap X$ n'est pas vide si et seulement si ρ appartient au 2-squelette de l'éventail de Newton $\Gamma^*(g)$, c'est-à-dire $\rho \in S^2\Gamma^*(g) \cap E\Gamma^*(g)_G$;*
- ii) les composantes irréductibles de $D_\rho \cap X$ sont diviseurs exceptionnels du morphisme $\pi' : X \rightarrow S$ si et seulement si de plus $\rho \in \mathbb{Z}_{>0}^3$;*
- iii) une composante irréductible E de la fibre exceptionnelle de π' étant donnée, il existe un unique $\rho \in E\Gamma^*(g)_G$ tel que $E \subset D_\rho$;*
- iv) si $S = S(p, h_q)$, alors $E_0 = D(p, p, q) \cap S_G$;*
- v) si $S = S(p, h_q)$, alors l'ensemble formé par le vecteur $(0, 0, 1)$ et les vecteurs $\rho \in E\Gamma^*(f)_G$ tels que les composantes irréductibles de $D_\rho \cap S_G$ sont diviseurs exceptionnels de π est le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et (p, p, q) .*

DÉMONSTRATION. Si ρ est un vecteur extrémal de $\Gamma^*(g)_G$ qui appartient à une face stricte de Δ , alors ρ est un vecteur extrémal de Δ . En particulier, l'intersection de S avec l'adhérence $\overline{O_{\langle \rho \rangle}}$ de l'orbite $O_{\langle \rho \rangle}$ associée au cône $\langle \rho \rangle$ n'est pas vide et $\rho \in S^2\Gamma^*(g)$, d'où $D_\rho \cap S_G \neq \emptyset$. Le point *i)* résulte de la Proposition 2.5.11.

En vertu du point *iii)* de 2.5.5 les orbites de dimension strictement positive contenus dans le lieu exceptionnel du morphisme $\pi : X(\Gamma^*(g)_G) \rightarrow \mathbb{A}_k^3$ sont transverses à S_G . En particulier, si ρ un vecteur extrémal de Δ le transformé strict de $\overline{O_{\langle \rho \rangle}}$ dans $X(\Gamma^*(g)_G)$ ne contient pas de composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi' : X \rightarrow S$. Les points *ii)*, *iii)* et *iv)* de la proposition résultent des Propositions 2.5.11 et 2.5.14.

Le point *v)* résulte des points *i)*, *ii)* et de la Proposition 4.2.4. \square

4.2.2. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash. Dans cette section, on montre la bijectivité de l'application de Nash pour les hypersurfaces quasi-rationnelles $S(p, h_q)$, ce qui équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à la résolution

minimale de $S(p, h_q)$ (voir [Reg06]). Notre but, dans toute la suite de cette section, est de montrer que pour chaque diviseur essentiel E ($E \in \text{Ess}(S(p, h_q))$) tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la résolution minimale de $S(p, h_q)$. De plus, on profite de démontrer quelques résultats qu'on utilise dans toutes les sections de ce chapitre.

Avec le théorème suivant on réduit le nombre de cas à étudier. Une preuve de ce résultat, dans le cas des singularités de surfaces rationnelles, se trouve dans [Plé05].

Théorème 4.2.11. *Soient V une surface algébrique normale sur \mathbf{k} et $\pi : Y \rightarrow V$ la résolution minimale de V . Supposons qu'il existe un morphisme propre et birationnel $\pi' : V' \rightarrow V$, où V' est une surface algébrique normale sur \mathbf{k} , tel que π' factorise π . Alors, si l'application de Nash \mathcal{N}_V associée à V est bijective, l'application de Nash $\mathcal{N}_{V'}$ associée à V' l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. On remarque que Y est la résolution minimale de V' . Si ω est un K -wedge sur V' , alors $\pi' \circ \omega$ est un K -wedge admissible sur V . Par conséquent, $\pi' \circ \omega$ se relève à Y , d'où le Théorème. \square

En vertu des résultats 4.2.1, 4.2.9 et 4.2.11, on a le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.12. *Si l'application de Nash $\mathcal{N}_{S(p, h_q)}$ associée à l'hypersurface $S(p, h_q)$ est bijective pour tous les entiers $p > q \geq 3$, premiers entre eux, alors l'application de Nash $\mathcal{N}_{S(p, h_q)}$ est bijective pour tous les entiers $p \geq 2, q \geq 2$, premiers entre eux.*

Remarque 4.2.13. Dans toute la suite, on suppose que $p > q \geq 3$.

Dans la remarque suivante, S désigne l'hypersurface de la Proposition 4.2.10, E désigne un diviseur essentiel sur S et α_E désigne le point générique de N_E . On pose

$$(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x), \text{Ord}_t \alpha_E^*(y), \text{Ord}_t \alpha_E^*(z)) \in \mathbb{Z}_{>0}^3.$$

On rappelle que α_E est un morphisme entre variétés affines, donc le comorphisme α_E^* est bien défini.

Remarque 4.2.14. En vertu de la Proposition 3.3.11, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'intersection de l'ensemble $E \Gamma^*(g)_{\mathcal{G}}$ des extrémaux de $\Gamma^*(g)_{\mathcal{G}}$ avec le 2-squelette $S_2 \Gamma^*(g)$ de l'éventail de Newton $\Gamma^*(g)$, c'est-à-dire $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in E \Gamma^*(g)_{\mathcal{G}} \cap S_2 \Gamma^*(g)$.

Corollaire 4.2.15. *On conserve les hypothèses et notations de la Remarque 4.2.14 et on suppose que $S = S(p, h_q)$. Alors, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}_{>0}^3$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et (p, p, q) . En particulier, on a $\mu_x = \mu_y \leq p$, $\mu_z \leq q$ et $p\mu_z - q\mu_x \geq 0$.*

DÉMONSTRATION. Le corollaire résulte de la Proposition 4.2.10 et de la Remarque 4.2.14. \square

Remarque 4.2.16. On suppose que S est une hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$, donnée par l'équation $g = 0$, où g est un polynôme irréductible non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(g)$. De plus, on suppose que O est l'unique point singulier de S . On considère un diviseur essentiel E sur S et un K -wedge admissible, $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S$, centré en N_E . On pose

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\text{Ord}_t \omega^*(x), \text{Ord}_t \omega^*(y), \text{Ord}_t \omega^*(z)).$$

On peut donc écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^*(x) = t^{\eta_x} \chi; \omega^*(y) = t^{\eta_y} \varphi; \omega^*(z) = t^{\eta_z} \psi,$$

où χ, φ et ψ sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t .

Alors, en vertu du Corollaire 3.1.6, si les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, alors le K -wedge admissible ω centré en N_E se relève à la résolution minimale de S .

Maintenant, on rappelle quelques notions et résultats techniques qui nous permettent de montrer, dans le cas $S = S(p, h_q)$, que les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles.

Pour une série non nulle $\phi := \sum c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$, où $c_{(e_1, e_2)} \in K$, on définit les applications suivantes :

$$\nu : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, v \mapsto \nu_v \phi := \min\{v \cdot e \mid e \in \mathcal{E}(\phi)\}, \text{ où } \mathcal{E}(\phi) = \{(e_1, e_2) \mid c_{(e_1, e_2)} \neq 0\};$$

$$\text{PPr} : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow K[[s, t]], v \mapsto \phi_v := \sum_{e \cdot v = \nu_v \phi} c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2};$$

$\text{FI} : K[[s, t]] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, où $\text{FI}(\phi)$ est le nombre de facteurs irréductibles de ϕ comptés avec multiplicité.

Un vecteur $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$ définit une graduation positive sur l'anneau $K[[s, t]]$. Cette graduation est appelée *v-graduation*. Pour une série formelle ϕ , le polynôme ϕ_v est la partie principale de ϕ pour la *v-graduation*. Le polynôme ϕ_v est appelé la *v-partie principale* de ϕ .

Soient $\phi, \phi' \in K[[s, t]]$ deux séries formelles non nulles. Les séries formelles ϕ et ϕ' sont associées (resp. non associées) s'il existe (resp. s'il n'existe pas) une série formelle $I \in K[[s, t]]$ inversible tel que $\phi = I\phi'$.

Remarque 4.2.17. On conserve les hypothèses et notations de la Remarque 4.2.16. En vertu du Corollaire 3.3.9, il existe un vecteur $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que :

$$\begin{aligned} \text{FI}(\chi) &\leq \text{Deg}_t \chi_v = \nu_v \chi = \mu_x - \eta_x; \\ \text{FI}(\varphi) &\leq \text{Deg}_t \varphi_v = \nu_v \varphi = \mu_y - \eta_y; \\ \text{FI}(\psi) &\leq \text{Deg}_t \psi_v = \nu_v \psi = \mu_z - \eta_z. \end{aligned}$$

De plus, χ (resp. φ, ψ) est inversible si et seulement si $\mu_x - \eta_x = 0$ (resp. $\mu_y - \eta_y = 0, \mu_z - \eta_z = 0$).

Dans la proposition suivante, on considère l'hypersurface $S(p, h_q)$ et on majore, en termes des entiers p et q , le nombre des facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ, φ et ψ qui sont associées au K -wedge admissible $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S(p, h_q)$ centré en N_E .

Proposition 4.2.18. *On conserve les hypothèses et notations des Remarques 4.2.16 et 4.2.17. De plus, on suppose que $S = S(p, h_q)$. Alors, on a :*

$$\mu_x - \eta_x \leq p - 1, \mu_y - \eta_y \leq p - 1 \text{ et } \mu_z - \eta_z \leq q - 1.$$

En particulier, on a $\text{FI}(\chi) \leq p - 1, \text{FI}(\varphi) \leq p - 1$ et $\text{FI}(\psi) \leq q - 1$.

DÉMONSTRATION. D'après la Remarque 4.2.17, si $\mu_x - \eta_x \leq p - 1, \mu_y - \eta_y \leq p - 1$ et $\mu_z - \eta_z \leq q - 1$, alors $\text{FI}(\chi) \leq p - 1, \text{FI}(\varphi) \leq p - 1$ et $\text{FI}(\psi) \leq q - 1$.

En vertu du Corollaire 4.2.15, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et (p, p, q) . Par conséquent, on a $\mu_x \leq p, \mu_y \leq p$ et $\mu_z \leq q$.

Comme ω est un K -wedge admissible centré en N_E , l'arc générique du K -wedge ω appartient à $S(p, h_q)_\infty^s$. Par conséquent, on obtient que $\eta_x \geq 1, \eta_y \geq 1$ et $\eta_z \geq 1$, d'où $\mu_x - \eta_x \leq p - 1, \mu_y - \eta_y \leq p - 1$ et $\mu_z - \eta_z \leq q - 1$. \square

Remarque 4.2.19. Soit S l'hypersurface de la Remarque 4.2.16, c'est-à-dire S est une hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ ayant O comme unique point singulier et qui est donnée par l'équation

$g = 0$, où g est un polynôme irréductible non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(g)$. On considère un diviseur essentiel E sur S et un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S$ admissible centré en N_E . On note

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\text{Ord}_t \omega^*(x), \text{Ord}_t \omega^*(y), \text{Ord}_t \omega^*(z)).$$

Alors, en vertu du Proposition 3.3.10, le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intersection de $\mathbb{Z}_{>0}^3$ avec le 2-squelette $S_2 \Gamma^*(g)$ de l'éventail $\Gamma^*(g)$.

Corollaire 4.2.20. *On conserve les hypothèses et notations des Remarques 4.2.17 et 4.2.19. De plus, on suppose que $S = S(p, h_q)$. Alors, le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient au semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et (p, p, q) . En particulier $\eta_x = \eta_y$ et $p\eta_z - q\eta_x \geq 0$. De plus, si les séries formelles χ, φ et ψ ne sont pas simultanément inversibles, alors on a $p\eta_z - q\eta_x > 0$.*

DÉMONSTRATION. Soit $S_2 \mathbb{R}_{\geq 0}^3$ le 2-squelette du cône $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$. On rappelle que $\tau_1 \in \Gamma^*(f)$ (resp. $\tau_2 \in \Gamma^*(f)$, $\tau_3 \in \Gamma^*(f)$) est le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$) et (p, p, q) (voir la Figure 2). Remarquons que $S_2 \Gamma^*(f) = \bigcup_{i=1}^3 \tau_i \cup S_2 \mathbb{R}_{\geq 0}^3$. En vertu de la Remarque 4.2.19, on a $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in S_2 \Gamma^*(f) \cap \mathbb{Z}_{>0}^3$. Ce qui implique que le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'ensemble $\bigcup_{i=1}^3 \tau_i$.

D'après la Proposition 4.2.4, le cône τ_1 (resp. τ_3) est régulier. Par conséquent, le semi-groupe $\tau_1 \cap \mathbb{Z}^3$ (resp. $\tau_3 \cap \mathbb{Z}^3$) est engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1, 0)$) et (p, p, q) . En particulier, si $(a, b, c) \in \tau_1 \cap \mathbb{Z}_{>0}^3$ (resp. $(a, b, c) \in \tau_3 \cap \mathbb{Z}_{>0}^3$), alors $p \leq a$, $p \leq b$ et $q \leq c$.

On rappelle que le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau_3 \cap \mathbb{Z}^3$ (voir le Corollaire 4.2.15). Par conséquent, on a $\mu_x \leq p$, $\mu_y \leq p$ et $\mu_z \leq q$. Comme $\eta_x \leq \mu_x \leq p$, $\eta_y \leq \mu_y \leq p$ et $\eta_z \leq \mu_z \leq p$, on obtient que le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient au cône $\tau = \tau_3$.

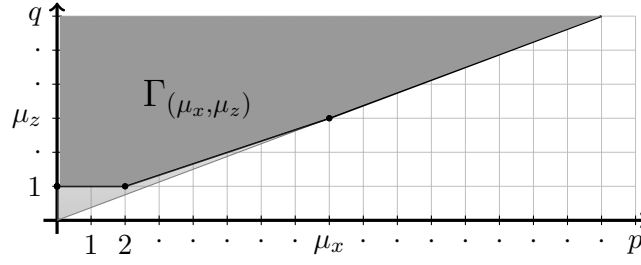
Si les séries formelles χ, φ et ψ ne sont pas simultanément inversibles, alors $p\eta_z - q\eta_x \neq 0$, car si $p\eta_z - q\eta_x = 0$, alors $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p, p, q)$, d'où les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles (voir la Remarque 4.2.17). \square

Dans toute la suite de cette section, on se restreint au cas des hypersurfaces $S(p, h_q)$, où les entiers $p > q \geq 3$ (voir la Remarque 4.2.13) sont premiers entre eux, c'est-à-dire, dans toute la suite, on a :

- E est un diviseur essentiel de $S(p, h_q)$, $p > q \geq 3$;
- $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S(p, h_q)$ est un K -wedge admissible centré en N_E ;
- α_E est le point générique de N_E et $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x), \text{Ord}_t \alpha_E^*(y), \text{Ord}_t \alpha_E^*(z))$;
- $\omega^*(x) = t^{\eta_x} \chi$; $\omega^*(y) = t^{\eta_y} \varphi$; $\omega^*(z) = t^{\eta_z} \psi$, où χ, φ et ψ sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t .

Soit $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ (resp. $\Gamma_{(p, q)}$) l'enveloppe convexe de $\tau' \cap \mathbb{Z}_{>0}^2$, où τ' est le cône engendré par $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z) (resp. $(0, 1)$ et (p, q)). La figure suivante donne une idée intuitive de la forme du polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$.

Proposition 4.2.21. *Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) , $a_1 \leq a_2$, les coordonnées des sommets d'une face compacte du polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ et L la droite qui joint les points (a_1, b_1) et (a_2, b_2) . Alors la pente de la droite L est positive et strictement plus petite que $\frac{q}{p}$. De plus $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)} = \tau' \cap \Gamma_{(p, q)}$, où τ' est le cône engendré par les vecteurs $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z) .*

FIGURE 3. Polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$

DÉMONSTRATION. D'abord, on suppose que $(\mu_x, \mu_z) = (p, q)$. On note $\Gamma = \Gamma_{(p,q)}$. Comme $p > q$, le vecteur $(1, 1)$ appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau'' \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$, où τ'' est le cône engendré par $(0, 1)$ et (p, q) (voir la Figure 3). En particulier le vecteur $(1, 1)$ appartient à une face compacte du polyèdre Γ . Comme la pente de la droite qui joint les points $(0, 1)$ et $(1, 1)$ est nulle et $1 < q$, on obtient que la pente de la droite L est un nombre réel positif, car Γ est convexe.

En raisonnant par l'absurde, on suppose que

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \geq \frac{q}{p},$$

d'où $p(b_2 - b_1) - q(a_2 - a_1) \geq 0$. Ceci implique que le vecteur $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ appartient au cône τ'' . Or $(a_2, b_2) = (a_2 - a_1, b_2 - b_1) + (a_1, b_1)$, d'où une contradiction, car le vecteur (a_2, b_2) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau'' \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$.

On a $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)} = \tau' \cap \Gamma_{(p,q)}$, car la pente de la droite qui joint les points $(0, 0)$ et (μ_x, μ_z) est plus grande que $\frac{q}{p}$ et les pentes des droites qui définissent les faces compactes de $\Gamma_{(p,q)}$ sont strictement plus petites que $\frac{q}{p}$. \square

On définit l'application suivante :

$$m : \Gamma_{(\mu_x, \mu_z)} \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto pv - qu.$$

Proposition 4.2.22. *Il existe un vecteur $(u_0, v_0) \in \Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ tel que*

$$m(u_0, v_0) = \inf\{m(u, v) \mid (u, v) \in \Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}\}.$$

De plus on a :

- i) si $(\mu_x, \mu_z) = (p, q)$, alors (u_0, v_0) appartient au rayon engendré par le vecteur (p, q) ;
- ii) si $(\mu_x, \mu_z) \neq (p, q)$, alors $(u_0, v_0) = (\mu_x, \mu_z)$.

DÉMONSTRATION. Le vecteur (μ_x, μ_z) étant fixé, on note $\Gamma = \Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$.

Géométriquement, lorsque c croît depuis $-\infty$, les droites $L_c := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (-q, p) \cdot (u, v) = c\}$ finissent par toucher le bord du polyèdre Γ en un point (u_0, v_0) . On remarque que $m(u_0, v_0) = \inf\{m(u, v) \mid (u, v) \in \Gamma\}$ et que l'ensemble $M := \{(u, v) \in \Gamma \mid m(u, v) = m(u_0, v_0)\}$ est une face ou un sommet de Γ .

On rappelle que pour tout vecteur $(u, v) \in \Gamma$ on a $pv - qu \geq 0$. Si $(\mu_x, \mu_z) = (p, q)$, alors $L_0 \cap \Gamma$ est la face non compacte engendrée par le vecteur (p, q) , d'où le point i) de la proposition. Maintenant, on suppose que $(\mu_x, \mu_z) \neq (p, q)$. La pente de la droite L' qui joint les points $(0, 0)$ et (μ_x, μ_z) est strictement plus grande que $\frac{q}{p}$, donc toute droite L_c pour $c \in \mathbb{R}$ intersecte en exactement un point la droite L' . Par conséquent, le couple (u_0, v_0) appartient à

une face compacte de Γ . D'après la Proposition 4.2.21, si L est une droite engendrée par une face de Γ , alors la pente de L est strictement plus petite que $\frac{q}{p}$. Comme la pente des droites L_c , $c \in \mathbb{R}$, est $\frac{q}{p}$, on obtient que l'ensemble M est un sommet de Γ .

Soit n_Γ le nombre de faces compactes de Γ . On rappelle que Γ est l'enveloppe convexe de $\tau' \cap \mathbb{Z}_{>0}^2$, où τ' est le cône engendré par les vecteurs $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z) . Alors, il existe deux suites d'entiers

$$0 = a_0 < a_1 \cdots < a_{n_\Gamma} = \mu_x \text{ et } 1 = b_0 < b_1 \cdots < b_{n_\Gamma} = \mu_z,$$

tels que les couples (a_i, b_i) , $0 \leq i \leq n_\Gamma$, sont les coordonnées des sommets consécutifs de Γ .

Pour $1 \leq i \leq n_\Gamma$, on note L_i la droite qui joint les points (a_{i-1}, b_{i-1}) et (a_i, b_i) et posons c_i (resp c_0) le réel tel que la droite L_{c_i} (resp. L_{c_0}) intersecte la droite L_i (resp. L_1) au point (a_i, b_i) (resp. $(0, 1)$).

En vertu de la Proposition 4.2.21, on a $c_i < c_{i-1}$, pour tout $1 \leq i \leq n_\Gamma$ (la pente de la droite L_i , $0 \leq i \leq n_\Gamma$, est positive et strictement plus petite que $\frac{q}{p}$). Comme $m(a_i, b_i) = c_i$, pour tout $0 \leq i \leq n_\Gamma$, on obtient que $m(\mu_x, \mu_z) < m(a_i, b_i)$, pour tout $0 \leq i \leq n_\Gamma - 1$. Ceci achève la preuve de la proposition. \square

Proposition 4.2.23. *Le vecteur (η_x, η_z) appartient au polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$.*

DÉMONSTRATION. En vertu du Corollaire 4.2.20 le vecteur (η_x, η_z) appartient au cône τ'' engendré par les vecteurs $(0, 1)$ et (p, q) . Par conséquent, le vecteur (η_x, η_z) appartient au polyèdre $\Gamma_{(p, q)}$.

En raisonnant par l'absurde si le vecteur (η_x, η_z) n'appartient pas au polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$, alors ce vecteur appartient à l'intersection Ω du cône τ'' et l'intérieur du triangle défini par les vecteurs $(0, 0)$, (μ_x, μ_z) et $(\mu_x, 0)$ car $\eta_x \leq \mu_x$, $\eta_z \leq \mu_z$ et $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ est l'enveloppe convexe de $\tau' \cap \mathbb{Z}_{>0}^2$, où τ' est le cône engendré par les vecteurs $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z) . Mais d'après la Proposition 4.2.21, l'intersection du polyèdre $\Gamma_{(p, q)}$ et l'ensemble Ω est vide, d'où une contradiction. \square

On rappelle qu'on veut montrer que les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles (Remarque 4.2.16). Le résultat suivant est une réduction du problème.

Proposition 4.2.24. *Si χ ou φ est une série formelle inversible, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles*

DÉMONSTRATION. D'après les résultats 4.2.15, 4.2.20 et la Remarque 4.2.17, on obtient que la série χ est inversible si et seulement si φ est inversible. Supposons que χ soit inversible, on a donc $\mu_x = \eta_x$ (Remarque 4.2.17). Comme on a $\eta_z \leq \mu_z$ et $\eta_x = \mu_x$, on a $p\eta_z - q\eta_x \leq p\mu_z - q\mu_x$. En vertu des Propositions 4.2.22 et 4.2.23, on obtient que $\mu_z = \eta_z$. La proposition résulte de la Remarque 4.2.17. \square

Soit $h_q(x, y) = \prod_{i=1}^q (a_i x + b_i y)$ la décomposition en facteurs irréductibles de h_q . Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $z^p = -h_q(x, y)$ donc :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \psi^p = -h_q(\chi, \varphi) = -\prod_{i=1}^q \gamma_i, \text{ où } \gamma_i := a_i \chi + b_i \varphi.$$

Les combinaisons linéaires de χ et φ données par les γ_i plus l'hypothèse sur les facteurs irréductibles de h_q permettent de montrer le lemme suivant.

Lemme 4.2.25. *Soit $\lambda := \text{p.g.c.d}(\gamma_1, \gamma_2)$. Alors $\text{p.g.c.d}(\gamma_i, \gamma_j) = \lambda I_{ij}$, où I_{ij} est inversible pour tous les entiers $1 \leq i < j \leq q$. De plus, si λ est inversible, alors χ , φ et ψ sont inversibles.*

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda_0 := \text{p.g.c.d}(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0})$, où i_0 et j_0 sont deux entiers tels que $1 \leq i_0 < j_0 \leq q$. Si λ_0 n'est pas inversible, alors λ_0 divise χ et φ . Par conséquent, λ_0 divise $\text{p.g.c.d}(\gamma_i, \gamma_j)$ pour tous les entiers i, j tels que $1 \leq i < j \leq q$. Ce qui achève la première

partie du lemme.

Pour la deuxième partie de la proposition on suppose que la série formelle λ est inversible.

Raisonnons par l'absurde. En vertu de la Proposition 4.2.24, les séries χ et φ ne sont pas inversibles. Par conséquent, la série γ_i , $1 \leq i \leq q$, n'est pas inversible. On rappelle que les séries formelles χ , φ et ψ satisfont la relation suivante :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \psi^p = -h_q(\chi, \varphi) = -\prod_{i=1}^q \gamma_i, \text{ où } \gamma_i := a_i \chi + b_i \varphi.$$

Comme χ et φ ne sont pas divisibles par t , t divise γ_i si et seulement si t ne divise pas γ_j pour tout $j \neq i$. Quitte à re-numéroter les γ_i , on peut supposer que $t^{p\eta_z - q\eta_x}$ divise γ_1 . Soit $\gamma_1 = -t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1$.

Comme p. g. c. d(γ_i, γ_j) est inversible pour tout $2 \leq i < j \leq q$, la série formelle $\gamma'_1 \prod_{i=2}^q \gamma_i$ a au moins $q - 1$ facteurs irréductibles deux à deux non associés.

Comme $\psi^p = \gamma'_1 \prod_{i=2}^q \gamma_i$, la série formelle $\gamma'_1 \prod_{i=2}^q \gamma_i$ est le produit de $q - 1$ puissances de séries formelles irréductibles deux à deux non-associées, car $\text{FI}(\psi) \leq q - 1$ (Proposition 4.2.18). Par conséquent, on obtient que γ'_1 est inversible, que la série γ_i , $2 \leq i \leq q$, est une puissance d'une série formelle irréductible et que $\psi = \prod_{i=1}^{q-1} \psi_i$, où les ψ_i sont des séries formelles irréductibles deux à deux non associées. Par conséquent, on peut supposer que $\gamma_{i+1} = \psi_i^p I_i$ pour $1 \leq i \leq q - 1$, où les séries formelles I_i sont inversibles. Comme $\gamma_i = a_i \chi + b_i \varphi$, $1 \leq i \leq q$, et $q \geq 3$, il existe deux constantes $a, b \in K$ telles que

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 = a I_1 \psi_1^p + b I_2 \psi_2^p.$$

On rappelle qu'une série formelle dans $K[[s, t]]$ est inversible si et seulement si elle l'est dans $\overline{K}[[s, t]]$, où \overline{K} est la clôture algébrique de K . Soient J_1 et J_2 deux séries formelles inversibles dans $\overline{K}[[s, t]]$ telles que $J_1^p = a I_1$ et $J_2^p = b I_2$. Ainsi, on obtient que :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 = \prod_{i=1}^p (J_1 \psi_1 + w_i J_2 \psi_2),$$

où les w_i sont les racines p -ièmes de l'unité. Mais γ'_1 est inversible et $p\eta_z - q\eta_x > 0$ (Proposition 4.2.20), donc ψ_1 et ψ_2 sont inversibles ou divisibles par t , ce qui est absurde. \square

La proposition suivante achève la preuve du Théorème 4.1.1 (voir la Remarque 4.2.16).

Proposition 4.2.26. *Les séries formelles χ , φ , ψ sont inversibles.*

DÉMONSTRATION. En raisonnant par l'absurde, on suppose les séries formelles χ , φ et ψ non toutes inversibles. D'après le corollaire 4.2.20, on a $p\eta_z - q\eta_x > 0$.

On rappelle que les séries formelles χ , φ et ψ satisfont la relation suivante :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \psi^p = -h_q(\chi, \varphi) = -\prod_{i=1}^q \gamma_i, \text{ où } \gamma_i := a_i \chi + b_i \varphi.$$

Comme χ et φ ne sont pas divisibles par t , t divise γ_i si et seulement si t ne divise pas γ_j pour tout $j \neq i$. Quitte à re-numéroter les γ_i , on peut supposer que $t^{p\eta_z - q\eta_x}$ divise γ_1 .

D'après le Lemme 4.2.25, il existe des séries formelles γ'_i telles que :

$$\gamma_1 = -t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 \lambda \text{ et } \gamma_i = \gamma'_i \lambda \text{ pour } 2 \leq i \leq q,$$

où λ n'est pas inversible et p. g. c. d(γ'_i, γ'_j) est inversible pour $1 \leq i < j \leq q$.

Le lemme suivant est le résultat clé pour la preuve de la Proposition 4.2.26.

Dans toute la suite v , désigne le vecteur de la Remarque 4.2.17.

Lemme 4.2.27. *Le v -ordre de λ est $\mu_x - \eta_x$, c'est-à-dire $\nu_v \lambda = \mu_x - \eta_x$.*

D'abord, finissons la preuve de la Proposition 4.2.26. On rappelle que $\eta_y = \eta_x \leq \mu_x = \mu_y \leq p$, $\eta_z \leq \mu_z \leq q$ (voir le Corollaire 4.2.15) et que (η_x, η_z) appartient à l'enveloppe convexe $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ (voir la Proposition 4.2.23) de l'ensemble $\tau' \cap \mathbb{Z}_{>0}^2$, où τ' est le cône engendré par $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z) . Soit $\gamma' = \prod_{i=1}^q \gamma'_i$, d'où $\psi^p = \gamma' \lambda^q$. D'après le Lemme 4.2.27, on a $\nu_v \gamma' = p\mu_z - q\mu_x - (p\eta_z - q\eta_x)$. Par définition $\nu_v \gamma' \geq 0$. Or $\nu_v \gamma' \geq 0$ si et seulement si $(\eta_x, \eta_z) = (\mu_x, \mu_z)$ (Proposition 4.2.22), d'où une contradiction. En effet, si $(\eta_x, \eta_z) = (\mu_x, \mu_z)$, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles (voir la Remarque 4.2.17 et la Proposition 4.2.24).

Démonstration du Lemme 4.2.27 On rappelle que $\gamma_i = a_i \chi + b_i \varphi$ pour $1 \leq i \leq q$. Alors, il existe au plus un $1 \leq i_0 \leq q$ tel que les v -parties principales χ_v , φ_v satisfont la relation $a_{i_0} \chi_v + b_{i_0} \varphi_v = 0$. En particulier on a $\nu_v \gamma_i = \mu_x - \eta_x$ pour tout $1 \leq i \leq q$ tel que $i \neq i_0$. Par conséquent, $\nu_v \lambda \leq \mu_x - \eta_x$.

Si $\nu_v \lambda < \mu_x - \eta_x$, alors $\nu_v \gamma'_i > 0$, pour tout $2 \leq i \leq q$. Ceci implique que les γ'_i , pour $2 \leq i \leq q$, ne sont pas inversibles.

Comme p. g. c. d. (γ'_i, γ'_j) est inversible pour tous les entiers i, j tels que $2 \leq i < j \leq q$, la série formelle $\gamma' = \prod_{i=1}^q \gamma'_i$ a au moins $q - 1$ facteurs irréductibles deux à deux non associés. Comme on a $\psi^p = \gamma' \lambda^q$, la série formelle γ' est le produit de $q - 1$ puissances de séries formelles irréductibles non-associées, car $\text{FI}(\psi) \leq q - 1$ (Proposition 4.2.18). Par conséquent, on obtient que γ'_1 est inversible, que la série γ'_i , $2 \leq i \leq q$, est une puissance d'une série formelle irréductible, que $\psi = \prod_{i=1}^{q-1} \psi_i$, où les ψ_i sont des séries formelles irréductibles deux à deux non associées, et que $\mu_z - \eta_z = q - 1$. De plus, on a $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p, p, q)$. Ceci implique que $p \not\equiv 1 \pmod{q}$, car si $p \equiv 1 \pmod{q}$, alors le diviseur $E_0 = D_{(p,p,q)} \cap \mathcal{S}\mathcal{G}$ n'est pas un diviseur essentiel (voir la Proposition 4.2.10 et le Corollaire 4.2.6).

On rappelle qu'une série formelle dans $K[[s, t]]$ est inversible si et seulement si elle est inversible dans $\overline{K}[[s, t]]$, où \overline{K} est la clôture algébrique de K . Dans la suite on suppose que le corps K est algébriquement clos.

On fixe un entier $1 \leq i \leq q - 1$ quelconque. On peut donc supposer que $\psi_i^p = \gamma'_{i+1} \lambda_i^q$, où $\xi \lambda = \prod_{j=1}^{q-1} \lambda_j$, $\xi^q = \gamma'_1$ et p. g. c. d. $(\lambda_j, \lambda_{j'})$ est inversible pour tous les entiers j, j' tels que $1 \leq j < j' \leq q - 1$. Comme ψ_i est irréductible et γ'_{i+1} n'est pas inversible, il existe deux entiers $l_i \geq 1$ et $m_i \geq 0$ tels que $\gamma'_{i+1} = I_i \psi^{l_i}$ et $\lambda_i = I_i^{-1} \psi^{m_i}$, où I_i est une série formelle inversible. Comme $\nu_v \psi_i = 1$, on a $\nu_v \lambda_i = m_i$, $\nu_v \gamma'_{i+1} = l_i$ et $l_i + qm_i = p$.

Comme $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p, p, q)$, on a $t^{p\eta_z - q\eta_x} \psi_v = -h_q(\chi_v, \varphi_v)$ (Remarque 4.2.17), d'où $\nu_v \gamma_j = \mu_x - \eta_x$ pour tout $1 \leq j \leq q$. Par conséquent, pour tout $1 \leq j \leq q - 1$, on a $l_j = \nu_v \gamma'_{j+1} = \nu_v \gamma'_2 = l_1$, car $\gamma_{j+1} = \gamma'_{j+1} \lambda$. En particulier, on a $m_j = m_1$, pour tout $1 \leq j \leq q - 1$, car $l_1 + qm_j = p$. Ainsi, on obtient que $\gamma_{j+1} = I_j \psi_j^{p-m_1q} \lambda$, pour $1 \leq j \leq q - 1$, où les I_j sont inversibles. Comme $q \geq 3$ et $\gamma_j := a_j \chi + b_j \varphi$, il existe deux constantes $a, b \in K$ telles que

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 = a I_1 \psi_1^{p-m_1q} + b I_2 \psi_2^{p-m_1q}.$$

Soient J_1 et J_2 deux séries formelles inversibles telles que $J_1^{p-m_1q} = a I_1$ et $J_2^{p-m_1q} = b I_2$. Ainsi, on obtient que :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 = \prod_{i=1}^{p-m_1q} (J_1 \psi_1 + w_i J_2 \psi_2),$$

où les w_i sont les racines $(p - m_1q)$ -ièmes de l'unité. Mais γ'_1 est inversible, $p\eta_z - q\eta_x > 0$ et $p \not\equiv 1 \pmod{q}$, donc ψ_1 et ψ_2 sont inversibles ou divisibles par t , ce qui est absurde. \square

4.3. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type \mathbb{E}_6 et \mathbb{E}_7

4.3.1. La singularité de type \mathbb{E}_6 . Dans cette section, on démontre la bijectivité de l'application de Nash pour la singularité de type \mathbb{E}_6 , ce qui équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à la résolution minimale de \mathbb{E}_6 (voir [Reg06]).

Soit S l'hypersurface normale de \mathbb{A}_k^3 donnée par l'équation $x^2 + y^3 + z^4 = 0$. L'hypersurface S a un unique point singulier de type \mathbb{E}_6 à l'origine de \mathbb{A}_k^3 .

Notons $f = x^2 + y^3 + z^4$; on considère l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé à f . Soit H un plan de \mathbb{R}^3 qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^3 et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ soit un ensemble compact. La Figure 4 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec le *vecteur extrémal* correspondant. On note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$) et $(6, 4, 3)$.

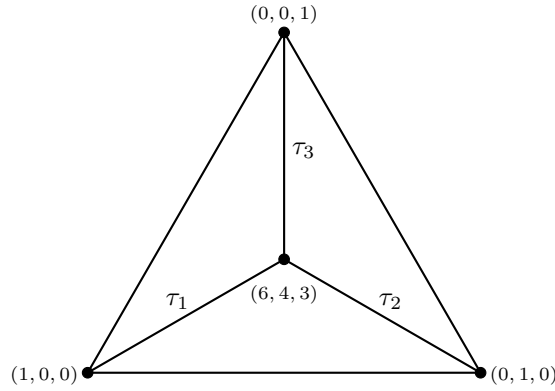


FIGURE 4. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$

Soit $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$. On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(f)) \rightarrow \mathbb{A}_k^3$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow X(\Gamma^*(f))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ (resp. $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^*(f)$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de S associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

La proposition suivante est un analogue de la Proposition 4.2.5.

Proposition 4.3.1. $S_{\mathcal{G}}$ est la résolution minimale de S .

Soient E un diviseur essentiel sur S ($E \in \text{Ess}(S)$) et α_E le point générique de N_E . On note

$$(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x), \text{Ord}_t \alpha_E^*(y), \text{Ord}_t \alpha_E^*(z)),$$

où α_E^* est le comorphisme de α_E .

Pour un cône τ dans $\Gamma^*(f)$ on note $G\tau$ le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$.

La proposition suivante est un analogue du Corollaire 4.2.15.

Proposition 4.3.2. *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'union de $G\tau_2$ et $G\tau_3$, où τ_2 (resp. τ_3) est le cône engendré par les vecteurs $(0, 1, 0)$ (resp. $(0, 0, 1)$) et $(6, 4, 3)$ (voir la figure 4). Autrement dit, $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2, 2, 1), (3, 2, 2), (4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$.*

Dans la suite, on montre que pour chaque diviseur essentiel E tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la résolution minimale de S .

Soit $E \in \text{Ess}(S)$ et on considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S$ admissible centré en N_E . On pose :

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\text{Ord}_t \omega^*(x), \text{Ord}_t \omega^*(y), \text{Ord}_t \omega^*(z)).$$

On peut écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^*(x) = t^{\eta_x} \chi, \quad \omega^*(y) = t^{\eta_y} \varphi, \quad \omega^*(z) = t^{\eta_z} \psi,$$

où les séries formelles χ, φ, ψ ne sont pas divisibles par t . On rappelle que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \mathbb{Z}_{>0}^3$, car ω est un K -wedge admissible.

Remarque 4.3.3. En vertu de la Proposition 4.3.2, on a $\mu_x \leq 6$, $\mu_y \leq 4$ et $\mu_z \leq 3$. En particulier, on a $\eta_x \leq 6$, $\eta_y \leq 4$ et $\eta_z \leq 3$, car $\eta_x \leq \mu_x$, $\eta_y \leq \mu_y$ et $\eta_z \leq \mu_z$.

Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2 + y^3 + z^4 = 0$, d'où la relation suivante :

$$t^{2\eta_x} \chi^2 + t^{3\eta_y} \varphi^3 + t^{4\eta_z} \psi^4 = 0.$$

Ce qui implique que $2 \leq \eta_x \leq 6$, $2 \leq \eta_y \leq 4$ et $1 \leq \eta_z \leq 3$.

Remarque 4.3.4. D'après la Remarque 4.2.16, si les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, alors le K -wedge admissible ω centré en N_E se relève à la résolution minimale de S . En raisonnant par l'absurde, si au moins l'une d'elles n'est pas inversible on obtient deux cas pour le vecteur (η_x, η_y, η_z) (voir la Proposition 4.3.5), ensuite on considère chaque cas séparément pour obtenir des contradictions (voir les Propositions 4.3.9 et 4.3.12), d'où le cas \mathbb{E}_6 du Théorème 4.1.2.

On rappelle les définitions suivantes :

Pour une série non nulle $\phi := \sum c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$, où $c_{(e_1, e_2)} \in K$, on définit les applications suivantes :

$$\nu : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, v \mapsto \nu_v \phi := \min\{v \cdot e \mid e \in \mathcal{E}(\phi)\}, \text{ où } \mathcal{E}(\phi) = \{(e_1, e_2) \mid c_{(e_1, e_2)} \neq 0\};$$

$$\text{PPr} : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow K[[s, t]], v \mapsto \phi_v := \sum_{e \cdot v = \nu_v \phi} c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2};$$

$$\text{FI} : K[[s, t]] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \text{ où } \text{FI}(\phi) \text{ est le nombre de facteurs irréductibles de } \phi \text{ comptés avec multiplicité.}$$

Le réel $\nu_v \phi$ (resp. Le polynôme ϕ_v) est appelé le v -ordre (resp. la v -partie principale) de ϕ .

D'après la Proposition 4.3.2 et la Remarque 4.3.3, on a :

$$\mu_x - \eta_x \leq 4, \quad \mu_y - \eta_y \leq 2 \text{ et } \mu_z - \eta_z \leq 2.$$

En vertu de la Remarque 4.2.17, on peut majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ, φ et ψ à l'aide des v -ordres. Plus précisément, il existe un vecteur $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que :

$$\begin{aligned} \text{FI}(\chi) &\leq \text{Deg}_t \chi_v = \nu_v \chi = \mu_x - \eta_x \leq 4; \\ \text{FI}(\varphi) &\leq \text{Deg}_t \varphi_v = \nu_v \varphi = \mu_y - \eta_y \leq 2; \\ \text{FI}(\psi) &\leq \text{Deg}_t \psi_v = \nu_v \psi = \mu_z - \eta_z \leq 2. \end{aligned}$$

Sauf mention du contraire, dans toute la suite le vecteur $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ satisfait la propriété ci-dessus.

On remarque qu'une série formelle $\phi \in K[[s, t]]$ est inversible dans $K[[s, t]]$ si et seulement si elle est inversible dans $\overline{K}[[s, t]]$, où \overline{K} est la clôture algébrique de K . Dans toute la suite on suppose que le corps K est algébriquement clos.

Maintenant, on prouve la première des trois propositions qu'on a anticipé dans la Remarque 4.3.4.

Proposition 4.3.5. *S'il existe au moins une série formelle parmi les séries χ, φ, ψ qui n'est pas inversible, alors le vecteur $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \mathbb{Z}_{>0}^3$ satisfait une des relations suivantes :*

- i) $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$;
- ii) $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$.

DÉMONSTRATION. Soit $S_2\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ le 2-squelette du cône $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$. On rappelle que $\tau_1 \in \Gamma^*(f)$ (resp. $\tau_2 \in \Gamma^*(f)$, $\tau_3 \in \Gamma^*(f)$) est le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$) et $(6, 4, 3)$ (voir la Figure 4). Remarquons que $S_2\Gamma^*(f) = \bigcup_{i=1}^3 \tau_i \cup S_2\mathbb{R}_{\geq 0}^3$.

En vertu de la Remarque 4.2.19, on a $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in S_2\Gamma^*(f) \cap \mathbb{Z}_{>0}^3$. Ce qui implique que le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'ensemble $\bigcup_{i=1}^3 \tau_i$.

On remarque que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \neq (6, 4, 3)$. En effet, si $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (6, 4, 3)$ alors $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ (voir la Remarque 4.3.3), d'où les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles (Remarque 4.2.17). Ceci rentre en contradiction avec les hypothèses de la Proposition 4.3.5. Par conséquent, le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'ensemble $\bigcup_{i=1}^3 \tau_i^0$, où τ_i^0 est l'intérieur relatif du cône τ_i , $1 \leq i \leq 3$.

Par un calcul direct, on montre que le cône τ_1 est régulier. Par conséquent, le semi-groupe $\tau_1 \cap \mathbb{Z}_{>0}^3$ est engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(6, 4, 3)$. En particulier, si $(a, b, c) \in \tau_1 \cap \mathbb{Z}_{>0}^3$, alors $6 \leq a$, $4 \leq b$ et $3 \leq c$. Ce qui implique que le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'ensemble $\tau_2^0 \cup \tau_3^0$.

Si (η_x, η_y, η_z) appartient à l'ensemble τ_2^0 (resp. τ_3^0), alors $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$ (resp. $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$), d'où la proposition. \square

Maintenant, on démontre quelques résultats techniques.

On rappelle que le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2 + y^3 + z^4 = 0$, d'où la relation suivante :

$$(4.1) \quad t^{2\eta_x} \chi^2 + t^{3\eta_y} \varphi^3 + t^{4\eta_z} \psi^4 = 0.$$

Cette relation est utilisée dans plusieurs endroits de la démonstration du Théorème 4.1.2.

Lemme 4.3.6. *Si le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) est égal au vecteur $(6, 4, 3)$, alors les v -ordres des séries formelles $t^{\eta_x} \chi + it^{2\eta_z} \psi^2$ et $t^{\eta_x} \chi - it^{2\eta_z} \psi^2$ sont égaux à 6, c'est-à-dire :*

$$\nu_v(t^{\eta_x}\chi + it^{2\eta_z}\psi^2) = \nu_v(t^{\eta_x}\chi - it^{2\eta_z}\psi^2) = 6.$$

DÉMONSTRATION. Dans ce cas, on a $\nu_v(t^{2\eta_x}\chi^2) = \nu_v(t^{3\eta_y}\varphi^3) = \nu_v(t^{4\eta_z}\psi^4) = 12$, donc les v -parties principales χ_v , φ_v et ψ_v satisfont la relation suivante (voir la Relation (4.1)) :

$$t^{3\eta_y}\varphi_v^3 + (t^{\eta_x}\chi_v + it^{2\eta_z}\psi_v^2)(t^{\eta_x}\chi_v - it^{2\eta_z}\psi_v^2) = 0.$$

La relation ci-dessus implique que $(t^{\eta_x}\chi_v + it^{2\eta_z}\psi_v^2)(t^{\eta_x}\chi_v - it^{2\eta_z}\psi_v^2) \neq 0$ et par conséquent, on obtient que les v -ordres des séries formelles $t^{\eta_x}\chi + it^{2\eta_z}\psi^2$ et $t^{\eta_x}\chi - it^{2\eta_z}\psi^2$ sont égaux à 6, car les v -parties principales $t^{\eta_x}\chi_v + it^{2\eta_z}\psi_v^2$ et $t^{\eta_x}\chi_v - it^{2\eta_z}\psi_v^2$ sont différentes de zéro et les v -ordres des séries formelles $t^{\eta_x}\chi$ et $t^{2\eta_z}\psi^2$ sont égaux à 6. \square

Lemme 4.3.7. *S'il existe une série formelle irréductible λ qui divise χ, φ , et ψ , alors λ^2 divise φ .*

DÉMONSTRATION. On suppose que λ divise χ , φ , et ψ . Soient $\chi = \lambda\chi_1$, $\varphi = \lambda\varphi_1$ et $\psi = \lambda\psi_1$. Alors au moyen de la Relation (4.1) on obtient la relation suivante :

$$t^{2\eta_x}\chi_1^2 + t^{3\eta_y}\lambda\varphi_1^3 + t^{4\eta_z}\lambda^2\psi_1^4 = 0,$$

ce qui implique que λ divise χ_1 . En particulier λ divise φ_1 . \square

Lemme 4.3.8. *Si la série formelle φ est inversible, alors les séries formelles χ et ψ sont inversibles.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde. On suppose que φ est inversible et que χ ou ψ n'est pas inversible.

D'après la Proposition 4.3.5, on a deux possibilités pour le vecteur (η_x, η_y, η_z) :

- 1) $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$;
- 2) $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$.

Cas 1). On suppose que : $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$.

D'après la Relation (4.1), on a :

$$t^{3\eta_y-2\eta_x}\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi + i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi - i\psi^2$ car t ne divise pas χ et φ . On peut donc sans perte de généralité supposer que $t^{3\eta_y-2\eta_x}$ divise $\chi + i\psi^2$.

Si la série formelle φ est inversible, alors la relation $t^{3\eta_y-2\eta_x}\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut au système de relations suivant :

$$t^{3\eta_y-2\eta_x}I_1 = \chi + i\psi^2, \quad I_2 = -\chi + i\psi^2,$$

où I_1 , et I_2 sont deux séries formelles inversibles de $K[[s, t]]$ telles que $I_1I_2 = \varphi^3$. Alors, les séries formelles χ et ψ sont inversibles, d'où la contradiction.

Cas 2). On suppose que : $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$.

Comme $2\eta_x = 3\eta_y$, on obtient que η_x (resp. η_y) est divisible par 3 (resp. 2). Par conséquent, on a $(\eta_x, \eta_y) = (3, 2)$ et $2 \leq \eta_z \leq 3$, car $2 \leq \eta_x \leq 6$, $2 \leq \eta_y \leq 4$, $1 \leq \eta_z \leq 3$ (voir la Remarque 4.3.3) et $\eta_x < 2\eta_z$.

On rappelle que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2, 2, 1), (3, 2, 2), (4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$. Comme la série formelle χ ou la série formelle ψ n'est pas inversible, le v -ordre $\nu_v \chi$ ou le v -ordre $\nu_v \psi$ n'est pas nul (voir Remarque 4.2.17). Alors, on a $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$, d'où $1 \leq \mu_y - \eta_y \leq 2$. Par conséquent, la série formelle φ n'est pas inversible, ce qui est une contradiction. \square

Maintenant, on considère le cas i) de la Proposition 4.3.5.

Proposition 4.3.9. *On suppose que $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$. Alors, les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 4.3.8 on suppose que φ n'est pas inversible. D'après la Remarque 4.2.17, on a $\mu_y - \eta_y \geq 1$.

Comme $2\eta_x = 3\eta_y$, on obtient que η_x (resp. η_y) est divisible par 3 (resp. 2). Par conséquent, on a $(\eta_x, \eta_y) = (3, 2)$ et $2 \leq \eta_z \leq 3$, car $2 \leq \eta_x \leq 6$, $2 \leq \eta_y \leq 4$, $1 \leq \eta_z \leq 3$ (voir la Remarque 4.3.3) et $\eta_x < 2\eta_z$.

On rappelle que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2, 2, 1), (3, 2, 2), (4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$. Comme $\eta_y = 2$ et $\mu_y - \eta_y \geq 1$, on obtient que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$. En particulier, $1 \leq \mu_y - \eta_y \leq 2$.

D'après la Remarque 4.2.17, le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité de φ est inférieur ou égal à 2.

Au moyen de la Relation (4.1) on obtient la relation suivante :

$$\varphi^3 + (\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2)(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2) = 0.$$

On remarque que la série formelle $\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2$ est inversible si et seulement si la série formelle $\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2$ l'est. Par conséquent, si $\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2$ est inversible, alors φ l'est. On obtient donc que les séries formelles $\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2$ et $\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2$ ne sont pas inversibles.

La série formelle φ n'est pas irréductible, car si φ est irréductible, alors φ divise χ et ψ , ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 4.3.7. On a donc $\mu_y - \eta_y = 2$ (voir la Remarque 4.2.17), ce qui implique que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (6, 4, 3)$, car $\eta_y = 2$. On rappelle que $2 \leq \eta_z \leq 3$ et $\mu_z = 3$, d'où la série formelle ψ est irréductible ou inversible, parce que $\mu_z - \eta_z \leq 1$ (voir la Remarque 4.2.17).

Comme φ n'est pas irréductible, le nombre de facteurs irréductibles de φ est égal à 2. On a donc deux cas :

Cas 1). La série formelle φ est le produit de deux séries formelles irréductibles associées.

Cas 2). La série formelle φ est le produit de deux séries formelles irréductibles non associées.

Maintenant, on va montrer que dans ces deux cas on arrive à des contradictions, ce qui démontre que les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles.

Cas 1). On suppose que $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont deux séries formelles irréductibles associées.

Comme le corps K est algébriquement clos, on peut supposer que $\varphi_1 = \varphi_2$.

D'après la Relation (4.1), on a :

$$\varphi_1^6 + (\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2)(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2) = 0,$$

ce qui équivaut au système de relations suivant :

$$\varphi_1^3 I = -\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2, \quad \varphi_1^3 I^{-1} = \chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2,$$

où I est une série formelle inversible de $K[[s, t]]$. En effet, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) est égal à $(6, 4, 3)$, donc le v -ordre $\nu_v(\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2)$ est égal au v -ordre $\nu_v(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2)$ (voir le Lemme 4.3.6), ce qui implique le système de relations ci-dessus. Par conséquent, on a la relation suivante :

$$2it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2 = -(I + I^{-1})\varphi_1^3.$$

On rappelle que la série formelle ψ est irréductible ou inversible, parce que $\mu_z - \eta_z \leq 1$. Alors, la série formelle irréductible φ_1 divise $t^{2\eta_y - \eta_z}$, d'où une contradiction.

Cas 2). On suppose que $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$ où φ_1 et φ_2 sont séries formelles irréductibles non associées.

D'après la Relation (4.1), on a :

$$\varphi_1^3 \varphi_2^3 + (\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2)(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2) = 0.$$

Au moyen des Lemmes 4.3.6 et 4.3.7 on obtient que cette relation équivaut au système de relations suivant :

$$\varphi_1^3 I_1 = -\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2, \quad \varphi_2^3 I_2 = \chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2,$$

où I_1, I_2 sont deux séries formelles inversibles de $K[[s, t]]$ telles que $I_1 I_2 = 1$, d'où

$$-2it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2 = \varphi_1^3 I_1 + \varphi_2^3 I_2 = \prod_{i=1}^3 (\varphi_1 J_1 + w_i \varphi_2 J_2),$$

où les w_i sont les racines i -ièmes de l'unité et J_1, J_2 sont deux séries formelles inversibles telles que $J_1^3 = I_1$ et $J_2^3 = I_2$.

On rappelle que la série formelle ψ est irréductible ou inversible. Si ψ est inversible, alors les séries formelles φ_1 et φ_2 sont inversibles ou divisibles par t . On a donc une contradiction dans les deux cas. Ainsi, on obtient que la série formelle ψ est irréductible.

Comme t ne divise pas φ_1 et φ_2 , la série formelle ψ divise φ_1 et φ_2 . Par conséquent, la série ψ divise t , d'où une contradiction. Ceci achève la démonstration de la proposition. \square

Les deux lemmes suivants sont très importants dans la démonstration.

Lemme 4.3.10. *On suppose que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (4, 3, 2)$. Alors, les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 4.3.8 on suppose que φ n'est pas inversible. Par conséquent, $\mu_y - \eta_y \geq 1$ (voir la Remarque 4.2.17).

En vertu de la Proposition 4.3.5, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait une des relations suivantes :

$$\eta_x = 2\eta_z \text{ et } 2\eta_x < 3\eta_y; \quad 2\eta_x = 3\eta_y \text{ et } \eta_x < 2\eta_z.$$

D'après la proposition 4.3.9, si on a $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$, alors les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles. Par conséquent, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait la relation $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$. En particulier, 2 divise η_x . Ainsi, on obtient que $\eta_x \in \{2, 4\}$, car $2 \leq \eta_x \leq \mu_x = 4$ (voir la Remarque 4.3.3). On rappelle que $\mu_y - \eta_y \geq 1$. Comme on a $\eta_y \geq 2$ (Remarque 4.3.3) et $\mu_y = 3$, on obtient que $\eta_y = 2$. On a donc $\eta_x < 3$, car $2\eta_x < 3\eta_y$. Ainsi, on obtient que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (2, 2, 1)$. Par conséquent, on a les v -ordres suivants :

$$\nu_v \chi = 2, \nu_v \varphi = 1, \text{ et } \nu_v \psi = 1.$$

Comme les v -ordres $\nu_v \chi$, $\nu_v \varphi$ et $\nu_v \psi$ sont strictement positifs, les séries formelles χ , φ et ψ ne sont pas inversibles. De plus, les séries formelles φ et ψ sont irréductibles (voir la Remarque 4.2.17).

D'après la Relation (4.1), on a :

$$t^2 \varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi + i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi - i\psi^2$, car t ne divise pas χ et φ . On peut donc supposer, sans perte de généralité, que t^2 divise $\chi + i\psi^2$.

Si la série formelle φ divise $\chi + i\psi^2$ et $\chi - i\psi^2$, alors φ divise χ et ψ , ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 4.3.7. Comme les séries formelles χ et ψ ne sont pas inversibles et par hypothèse t^2 divise $\chi + i\psi^2$, la relation $t^2 \varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut au système de relations suivant :

$$t^2 I = \chi + i\psi^2, \varphi^3 I^{-1} = -\chi + i\psi^2,$$

où $I \in K[[s, t]]$ est une série formelle inversible. Ainsi, on obtient la relation suivante :

$$2i\psi^2 = t^2 I + \varphi^3 I^{-1}.$$

Le corps K est algébriquement clos, donc il existe $I_1 \in K[[s, t]]^*$ tel que $I_1^2 = I$. On a donc :

$$(\kappa\psi - tI_1 t)(\kappa\psi + tI_1) = \varphi^3 I^{-1},$$

où $\kappa^2 = 2i$. Comme les séries formelles $\kappa\psi - tI_1$ et $\kappa\psi + tI_1$ ne sont pas inversibles et la série formelle φ est irréductible, φ divise $\kappa\psi - tI_1$ et $\kappa\psi + tI_1$ ce qui implique que φ divise la série formelle tI_1 , d'où une contradiction car φ n'est pas divisible par t . \square

Lemme 4.3.11. *On suppose que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (6, 4, 3)$, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 4.3.8 on suppose que φ n'est pas inversible.

En vertu de la Proposition 4.3.5, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait une des relations suivantes :

$$\eta_x = 2\eta_z \text{ et } 2\eta_x < 3\eta_y; \quad 2\eta_x = 3\eta_y \text{ et } \eta_x < 2\eta_z.$$

D'après la Proposition 4.3.9, si on a $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles. Par conséquent, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait la relation $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$.

On rappelle que $2 \leq \eta_x \leq 6$, $2 \leq \eta_y \leq 4$ et $1 \leq \eta_z \leq 3$ (voir la Remarque 4.3.3). Comme la série formelle φ n'est pas inversible, on a $2 \leq \eta_y \leq 3$, car $\eta_y < \mu_y = 4$ (voir la Remarque 4.2.17).

Si on a $\eta_y = 3$, alors on a $\mu_y - \eta_y = 1$. Par conséquent, la série formelle φ est irréductible.

D'après la Relation (4.1), on a :

$$t^{9-2\eta_x}\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi + i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi - i\psi^2$, car t ne divise pas χ et ψ . On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $t^{9-2\eta_x}$ divise $\chi + i\psi^2$. On a donc le système de relations suivant :

$$t^{9-2\eta_x}\varphi^j I = \chi + i\psi^2, \quad \varphi^{3-j}I^{-1} = \chi - i\psi^2,$$

où $0 \leq j \leq 3$ et I est un élément inversible de $K[[s, t]]$.

Si on a $j = 3$, alors la série formelle $\chi - i\psi^2$ est inversible, d'où on a $\nu_v(\chi - i\psi^2) = 0$. Le Lemme 4.3.6 et la propriété multiplicative du v -ordre montrent que le v -ordre $\nu_v(\chi + i\psi^2)$ est égal à zéro, ce qui implique que le v -ordre de $t^{9-2\eta_x}\varphi^3$ est égal à zéro, d'où une contradiction.

Si on a $1 \leq j \leq 2$, alors φ divise les séries formelles χ et ψ ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 4.3.7. On a donc le système de relations suivant :

$$t^{9-2\eta_x}I = \chi + i\psi^2, \quad \varphi^3I^{-1} = \chi - i\psi^2.$$

Par conséquent, le v -ordre $\nu_v(\chi + i\psi^2)$ (resp. le v -ordre $\nu_v(\chi - i\psi^2)$) est égal à $9 - 2\eta_x$ (resp. est égal à 3). Le Lemme 4.3.6 et la propriété multiplicative du v -ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi + i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $\eta_x = 3$, d'où la contradiction car $\eta_x = 2\eta_z$. Forcément, on a donc $\eta_y = 2$.

Comme on a $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$ et $\eta_y = 2$, on obtient que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (2, 2, 1)$, d'où

$$t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

Comme on a $\nu_v\varphi = \mu_y - \eta_y = 2$, la série formelle φ est au plus le produit de deux séries formelles irréductibles comptés avec multiplicité, voir la Remarque 4.2.17.

Alors, pour la série formelle φ on obtient le trois cas suivants :

- Cas 1). la série formelle φ est irréductible ;
- Cas 2). la série formelle φ est le produit de deux séries formelles non associées ;
- Cas 3). la série formelle φ est le produit de deux séries formelles associées.

Maintenant, on va montrer que dans chaque cas ci-dessus on obtient une contradiction, ce qui implique que φ est inversible, d'où le lemme.

On rappelle que dans le trois cas on a la relation suivante :

$$t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi + i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi - i\psi^2$ car t ne divise pas χ et φ . On peut donc supposer, sans perte de généralité, que t^2 divise $\chi + i\psi^2$.

Cas 1). On suppose que φ est une série formelle irréductible.

Si la série formelle φ est irréductible, alors la relation $t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut au système de relations suivant :

$$-t^2\varphi^j I = \chi + i\psi^2, \quad \varphi^{3-j}I^{-1} = \chi - i\psi^2,$$

où $0 \leq j \leq 3$ et I est une série formelle inversible de $K[[s, t]]$.

Le Lemme 4.3.6 et la propriété multiplicative du v -ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi + i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $2(1 + j) = 2(3 - j)$ (on rappelle que le v -ordre $\nu_v\varphi$ est égal à 2), d'où $j = 1$. Alors, la série formelle φ divise les séries formelles χ et ψ , ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 4.3.7.

Cas 2). On suppose que $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ où φ_1 et φ_2 sont deux séries formelles irréductibles non associées.

Dans ce cas, les v -ordres $\nu_v\varphi_1$ et $\nu_v\varphi_2$ sont égaux à 1, car $\nu_v\varphi = 2$.

De la même façon que dans le cas précédent, on a le système de relations suivant :

$$t^2\varphi_1^j\varphi_2^kI = -(\chi + i\psi^2), \quad \varphi_1^{3-j}\varphi_2^{3-k}I^{-1} = (\chi - i\psi^2),$$

où $0 \leq j \leq 3$, $0 \leq k \leq 3$ et I est un élément inversible de $K[[s, t]]$.

Le Lemme 4.3.6 et la propriété multiplicative du v -ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi + i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $2 + j + k = 6 - j - k$, d'où $j + k = 2$. Pour tous les j et k tels que $j + k = 2$, on rentre en contradiction avec le Lemme 4.3.7.

Cas 3). On suppose que $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont des séries formelles irréductibles associées.

Comme le corps K est algébriquement clos, on peut supposer que $\varphi_1 = \varphi_2$. Dans ce cas, le v -ordre $\nu_v\varphi_1$ est égal à 1.

La relation $t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut à la relation :

$$t^2\varphi_1^6 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0,$$

et par conséquent, on obtient le système de relations suivant :

$$-t^2\varphi_1^jI = \chi + i\psi^2, \quad \varphi_1^{6-j}I^{-1} = \chi - i\psi^2,$$

où $0 \leq j \leq 6$ et I est un élément inversible de $K[[s, t]]$. Le Lemme 4.3.6 et la propriété multiplicative du v -ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi + i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $2 + j = 6 - j$, d'où $j = 2$. On a donc :

$$2i\psi^2 = -(t^2I + \varphi_1^2I^{-1})\varphi_1^2.$$

Comme K est algébriquement clos, il existe une série formelle inversible I_1 appartenant à $K[[s, t]]$ telle que $I_1^2 = I$. Alors, on a :

$$2i\psi^2 = -(tI_1 + i\varphi_1I_1^{-1})(tI_1 - i\varphi_1I_1^{-1})\varphi_1^2.$$

Soient $r := (tI_1 + i\varphi_1I_1^{-1})$ et $q := (tI_1 - i\varphi_1I_1^{-1})$. Les séries formelles r et q ne sont pas inversibles car les séries formelles tI_1 et φ_1 ne le sont pas.

Comme on a $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (2, 2, 1)$ et $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (6, 4, 3)$, le v -ordre $\nu_v\psi$ est égal à 2 (on remarque que $\mu_z - \eta_z = 2$), ce qui implique que ψ est au plus le produit de deux séries formelles irréductibles comptées avec multiplicité (voir la Remarque 4.2.17). Par conséquent, la série formelle ψ^2 est au plus le produit de quatre séries formelles irréductibles comptées

avec multiplicité, ce qui implique que les séries formelles r et q sont irréductibles.

Les séries formelles r et q ne sont pas associées à la série formelle φ_1 parce que t ne divise pas φ_1 .

On obtient donc :

$$(tI_1 + i\varphi_1 I_1^{-1}) = J(tI_1 - i\varphi_1 I_1^{-1}),$$

où J est une série formelle inversible. En effet, la série formelle r divise ψ^2 , alors r divise ψ , d'où r^2 divise ψ^2 . Comme r ne divise pas φ_1 , r divise q . Par conséquent, r et q sont deux séries irréductibles associées.

Ainsi, on obtient la relation suivante :

$$t(J - 1)I_1 = i\varphi_1(J + 1)I_1^{-1}.$$

On remarque que $J - 1$ ou $J + 1$ est inversible. Si $J - 1$ est inversible, alors la série φ_1 est inversible ou t divise φ_1 ; ce qui est absurde. Si $J + 1$ est inversible, alors t divise φ_1 , ce qui est aussi une contradiction. Ceci achève la démonstration du lemme. \square

Maintenant, on considère le cas *ii*) de la proposition 4.3.5.

Proposition 4.3.12. *On suppose que $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$. Alors, les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 4.3.8, on suppose que φ n'est pas inversible.

On rappelle que $2 \leq \eta_x \leq 6$, $2 \leq \eta_y \leq 4$ et $1 \leq \eta_z \leq 3$ (voir la Remarque 4.3.3). Comme on a $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$, on obtient que $(\eta_x, \eta_z) \in \{(2, 1), (4, 2)\}$ et que $2 \leq \eta_y \leq 4$.

On rappelle que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2, 2, 1), (3, 2, 2), (4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$. Comme φ n'est pas inversible et $2 \leq \eta_y \leq 4$, le vecteur $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$. En vertu des Lemmes 4.3.10 et 4.3.11, si le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'ensemble $\{(4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles, d'où une contradiction. \square

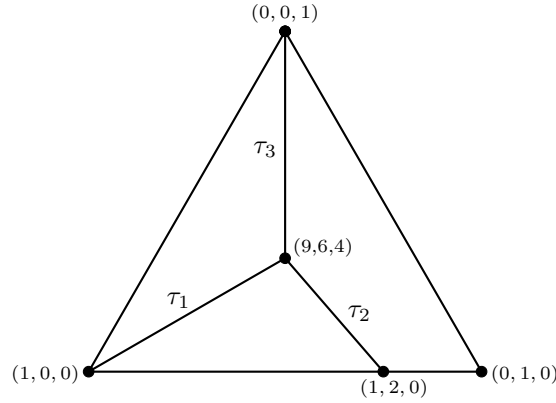
La démonstration de la bijectivité de l'application de Nash pour la singularité de type \mathbb{E}_6 résulte des propositions 4.3.5, 4.3.9, 4.3.12 et la Remarque 4.2.16,.

4.3.2. La singularité de type \mathbb{E}_7 . La preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour le cas de la singularité de type \mathbb{E}_7 (Théorème 4.1.2) repose sur la construction d'une G -désingularisation de l'éventail de Newton et sur des propriétés, pour \mathbb{E}_7 , des séries formelles χ , φ et ψ analogues aux séries définies pour $S(p, h_q)$ ou \mathbb{E}_6 . Dans la suite, on donne un résumé de la preuve.

Soit S l'hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $x^2 + y(y^2 + z^3) = 0$. L'hypersurface S a un unique point singulier de type \mathbb{E}_7 à l'origine de \mathbb{A}^3 .

On considère l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé à $f := x^2 + y(y^2 + z^3)$ et on note τ_1 (resp. τ_2 , τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$) et $(9, 6, 4)$ (voir la Figure 5).

Soit $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$. On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(f)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow X(\Gamma^*(f))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ (resp. $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^*(f)$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de S associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

FIGURE 5. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$

De manière analogue à la Proposition 4.4.2, le morphisme $\pi : S_{\mathcal{G}} \rightarrow S$ est la résolution minimale de S .

Montrer la bijectivité de l'application de Nash \mathcal{N}_S équivaut à montrer que, pour chaque diviseur essentiel E , tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la résolution minimale de S . Dans la suite, on donne une idée de pourquoi un K -wedge admissible centré en N_E se relève à $S_{\mathcal{G}}$.

Soient $E \in \text{Ess}(S)$ et $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S$ un K -wedge admissible centré en N_E . On rappelle que α_E est le point générique de N_E . On considère les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} (\mu_x, \mu_y, \mu_z) &:= (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x), \text{Ord}_t \alpha_E^*(y), \text{Ord}_t \alpha_E^*(z)); \\ (\eta_x, \eta_y, \eta_z) &:= (\text{Ord}_t \omega^*(x), \text{Ord}_t \omega^*(y), \text{Ord}_t \omega^*(z)), \end{aligned}$$

où α_E^* (resp. ω^*) est le comorphisme de α_E (resp. de ω). On peut donc écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^*(x) = t^{\eta_x} \chi, \quad \omega^*(y) = t^{\eta_y} \varphi, \quad \omega^*(z) = t^{\eta_z} \psi,$$

où les séries formelles χ, φ, ψ ne sont pas divisibles par t . Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2 + y(y^2 + z^3) = 0$, d'où la relation suivante :

$$(4.2) \quad t^{2\eta_x} \chi^2 + t^{3\eta_y} \varphi^3 + t^{\eta_y + 3\eta_z} \varphi \psi^3 = 0.$$

Si les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, alors le K -wedge admissible ω centré en N_E se relève à $S_{\mathcal{G}}$ (voir la Remarque 4.2.16).

D'après la Remarque 4.2.17, on peut majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ, φ et ψ à l'aide des v -ordres de la façon suivant :

$$\begin{aligned} \text{FI}(\chi) &\leq \text{Deg}_t \chi_v = \nu_v \chi = \mu_x - \eta_x \leq 6; \\ \text{FI}(\varphi) &\leq \text{Deg}_t \varphi_v = \nu_v \varphi = \mu_y - \eta_y \leq 4; \\ \text{FI}(\psi) &\leq \text{Deg}_t \psi_v = \nu_v \psi = \mu_z - \eta_z \leq 3. \end{aligned}$$

La proposition suivante est une propriété importante du vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) . Pour un cône τ dans $\Gamma^*(f)$, on note $G\tau$ le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$.

Proposition 4.3.13. *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'union $G\tau_1 \cup G\tau_2 \cup G\tau_3$, où τ_1 (resp. τ_2, τ_3) est le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(1, 2, 0), (0, 0, 1)$) et $(9, 6, 4)$ (voir la figure 5). Autrement dit, $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(3, 2, 2), (6, 4, 3), (9, 6, 4), (7, 5, 3), (5, 4, 2), (3, 3, 1), (5, 3, 2)\}$.*

Si on suppose les séries χ , φ et ψ non simultanément inversibles, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.3.14. *S'il existe au moins une série formelle parmi les séries χ , φ , ψ qui n'est pas inversible, alors le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait une des relations suivantes :*

- i) $2\eta_x = \eta_y + 3\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$;
- ii) $2\eta_x = 3\eta_y$ et $2\eta_y < 3\eta_z$;
- iii) $2\eta_y = 3\eta_z$ et $3\eta_y < 2\eta_x$.

La Proposition 4.3.14 donne trois possibilités pour le vecteur (η_x, η_y, η_z) . Dans la suite, on considère chaque cas séparément pour obtenir des contradictions.

Dans chaque cas du vecteur (η_x, η_y, η_z) , on peut simplifier la Relation (4.2) et on peut la récrire comme la somme de deux termes. Ceci permet d'établir des relations entre les facteurs irréductibles des décompositions possibles des séries χ , φ et ψ . L'idée est de trouver des contradictions dans les différents cas de décomposition obtenus.

D'abord, énonçons le lemme suivant qui est obtenu en utilisant la Relation (4.2).

Lemme 4.3.15. *Si on suppose que $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, où φ_1 est une série formelle irréductible, alors la série formelle φ_1 divise la série formelle φ_2 . En particulier, la série formelle φ n'est pas irréductible.*

Maintenant, on considère le premier cas de la Proposition 4.3.14.

Proposition 4.3.16. *On suppose que $2\eta_x = \eta_y + 3\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$. Alors, les séries χ , φ , ψ sont inversibles.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. On remarque que d'après la relation (4.2), on obtient la relation suivante :

$$(4.3) \quad \chi^2 + t^{3\eta_y - 2\eta_x} \varphi^3 + \varphi\psi^3 = 0.$$

D'abord, on montre que la série φ est inversible, ce qui équivaut à montrer que $\mu_y - \eta_y = 0$. En utilisant les relations $2\eta_x = \eta_y + 3\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$, on obtient que $\eta_y \geq 3$. En vertu du Lemme 4.3.15 et la Proposition 4.3.13, on obtient que $\mu_y - \eta_y \in \{0, 2, 3\}$.

Si on suppose que $\mu_y - \eta_y = 2$, on obtient que $3\eta_y - 2\eta_x \in \{2, 3\}$. D'après le lemme 4.3.15, on a $\varphi = \varphi_1^2$, où φ_1 est irréductible.

Dans le cas $3\eta_y - 2\eta_x = 2$, on peut écrire la Relation (4.3) comme la somme de deux termes qui nous permet d'établir des relations entre les facteurs irréductibles des séries χ , φ et ψ et de trouver une contradiction.

Dans le cas $3\eta_y - 2\eta_x = 3$, on ne peut pas écrire de façon évidente la Relation (4.3) comme la somme de deux termes. Cependant, on peut considérer le changement de variable $t = u^2$ et étudier la Relation (4.3) dans l'anneau $K[[s, u]]$. Dans cet anneau, on peut écrire cette relation comme la somme de deux termes et on traite ce cas comme le précédent.

Si on suppose que $\mu_y - \eta_y = 3$, on obtient $3\eta_y - 2\eta_x = 3$. D'après le lemme 4.3.15, on a $\varphi = \varphi_1^3$, où φ_1 est irréductible. Dans ce cas, on peut écrire la Relation (4.3) comme la somme de deux termes et on le traite comme les cas précédents.

D'après la Proposition 4.3.13, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) satisfait une des relations suivantes :

- i) $2\mu_x = 3\mu_y$ et $2\mu_y < 3\mu_z$;
- ii) $2\mu_x = 3\mu_z$ et $3\mu_y < 2\mu_x$;

iii) $2\mu_x = \mu_y + 3\mu_z$ et $2\mu_x \leq 3\mu_y$.

En utilisant que $\mu_y - \eta_y = 0$, on obtient le lemme suivant :

Lemme 4.3.17. *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) ne satisfait pas les relations suivantes :*

i) $2\mu_x = 3\mu_y$ et $2\mu_y < 3\mu_z$;

ii) $2\mu_x = 3\mu_z$ et $3\mu_y < 2\mu_x$.

En vertu du Lemme 4.3.17, on peut supposer que le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) satisfait la relation suivante : $2\mu_x = \mu_y + 3\mu_z$ et $2\mu_x \leq 3\mu_y$.

Maintenant, en raisonnant par l'absurde, on suppose que la série χ ou la série ψ n'est pas inversible. On peut donc établir une liste de cas possibles pour les vecteurs (μ_x, μ_y, μ_z) et (η_x, η_y, η_z) . En utilisant la Relation (4.3), la Proposition 4.3.13 et les majorants du nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ et ψ , on obtient une contradiction dans chaque cas de la liste, d'où la proposition. \square

La preuve des propositions suivantes est analogue à celle de la proposition 4.3.16.

Proposition 4.3.18. *On suppose que $2\eta_x = 3\eta_y$ et $2\eta_y < 3\eta_z$. Alors, les séries χ, φ, ψ sont inversibles.*

Proposition 4.3.19. *On suppose que $2\eta_y = 3\eta_z$ et $3\eta_y < 2\eta_x$. Alors, les séries χ, φ, ψ sont inversibles.*

La démonstration du cas \mathbb{E}_7 du Théorème 4.1.2 résulte des propositions 4.3.14, 4.3.16, 4.3.18 et 4.3.19.

4.4. Une nouvelle preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type \mathbb{D}_n

Dans l'article [Plé08] l'auteur démontre la bijectivité de l'application de Nash $\mathcal{N}_{\mathbb{D}_n}$ associée à une singularité de type \mathbb{D}_n , $n \geq 4$. Dans cette section, en utilisant les mêmes méthodes que dans les preuves des Théorèmes 4.1.1 et 4.1.2, on donne une démonstration de la bijectivité de l'application $\mathcal{N}_{\mathbb{D}_n}$ différente de celle de [Plé08].

L'entier $n \geq 4$ étant fixé, soit S l'hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $x^2 + z(y^2 + z^{n-2}) = 0$. L'hypersurface S a un unique point singulier de type \mathbb{D}_n .

Comme dans la preuve des Théorèmes 4.1.1 ou 4.1.2 pour prouver la bijectivité de l'application de Nash associée à S , on a besoin de quelques résultats sur la résolution minimale de S .

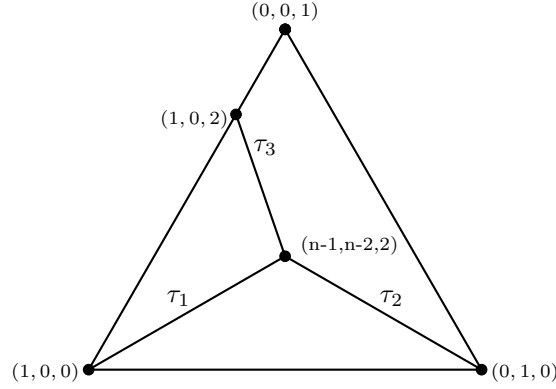
On considère l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé à $f := x^2 + z(y^2 + z^{n-2})$. Soit H un plan de \mathbb{R}^3 qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^3 et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ soit un ensemble compact. La Figure 6 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec le vecteur extrémal correspondant. On note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$) et $(n-1, n-2, 2)$.

Pour un cône τ dans $\Gamma^*(f)$, on note $G\tau$ le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$. Par un calcul direct, on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.4.1. *Le système générateur minimal du semi-groupe $\tau_3 \cap \mathbb{Z}^3$ est l'ensemble $G\tau_3 = \{(j, j-1, 2) \mid j \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$. De plus, soit $k \geq 2$ un entier, on a :*

i) *Si $n = 2k$, alors le système générateur minimal du semi-groupe $\tau_1 \cap \mathbb{Z}^3$ est l'ensemble $G\tau_1 = \{(1, 0, 0), (k, k-1, 1), (n-1, n-2, 2)\}$ et τ_2 est un cône régulier.*

ii) *Si $n = 2k-1$, alors le système générateur minimal du semi-groupe $\tau_2 \cap \mathbb{Z}^3$ est l'ensemble $G\tau_2 = \{(0, 1, 0), (k-1, k-1, 1), (n-1, n-2, 2)\}$ et τ_1 est un cône régulier.*

FIGURE 6. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$

Soit $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$. On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(f)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}) \rightarrow X(\Gamma^*(f))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ (resp. $\Gamma^*(f)_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^*(f)$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de S associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

La proposition suivante est un analogue de la Proposition 4.2.5.

Proposition 4.4.2. $S_{\mathcal{G}}$ est la résolution minimale de S .

Soient E un diviseur essentiel sur S ($E \in \text{Ess}(S)$) et α_E le point générique de N_E . On note

$$(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x), \text{Ord}_t \alpha_E^*(y), \text{Ord}_t \alpha_E^*(z)),$$

où α_E^* est le comorphisme de α_E .

La proposition suivante est un analogue du Corollaire 4.2.15.

Proposition 4.4.3. Soit k un entier, $k \geq 2$.

Si $n = 2k$, alors le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'union de $G\tau_1$ et $G\tau_3$.

Si $n = 2k - 1$, alors le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'union de $G\tau_2$ et $G\tau_3$.

Démontrer que l'application de Nash bijective pour les singularités de type \mathbb{D}_n , $n \geq 4$, équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à la résolution minimale de \mathbb{D}_n (voir [Reg06]). Dans la suite, on montre que pour chaque diviseur essentiel E tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la résolution minimale de S .

Soit $E \in \text{Ess}(S)$ et on considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S$ admissible centré en N_E . On pose :

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\text{Ord}_t \omega^*(x), \text{Ord}_t \omega^*(y), \text{Ord}_t \omega^*(z)).$$

On peut écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^*(x) = t^{\eta_x} \chi, \quad \omega^*(y) = t^{\eta_y} \varphi, \quad \omega^*(z) = t^{\eta_z} \psi,$$

où les séries formelles χ, φ, ψ ne sont pas divisibles par t .

La proposition suivante est un analogue du Corollaire 4.2.20. On note τ^0 l'intérieur du cône $\tau \in \Gamma^*(f)$.

Proposition 4.4.4. Soit k un entier, $k \geq 2$. S'il existe au moins une série formelle parmi les séries χ, φ, ψ qui n'est pas inversible, alors on a :

i) si $n = 2k$, alors le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'union de τ_1^0 et τ_3^0 ;

ii) si $n = 2k - 1$, alors le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'union de τ_2^0 et τ_3^0 .

En vertu de la Proposition 4.4.3, on a $\mu_x \leq n - 1$, $\mu_y \leq n - 2$ et $\mu_z \leq 2$. Comme $\eta_x \geq 1$, $\eta_y \geq 1$ et $\eta_z \geq 1$, on a $\mu_x - \eta_x \leq n - 2$, $\mu_y - \eta_y \leq n - 3$ et $\mu_z - \eta_z \leq 1$.

D'après la Remarque 4.2.16, si les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles, alors le K -wedge admissible ω centré en N_E se relève à la résolution minimale de S .

En vertu de la Remarque 4.2.17, on peut majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ , φ et ψ à l'aide des v -ordres. Plus précisément, il existe un vecteur $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que :

$$\begin{aligned} \text{FI}(\chi) &\leq \text{Deg}_t \chi_v = \nu_v \chi = \mu_x - \eta_x \leq n - 2; \\ \text{FI}(\varphi) &\leq \text{Deg}_t \varphi_v = \nu_v \varphi = \mu_y - \eta_y \leq n - 3; \\ \text{FI}(\psi) &\leq \text{Deg}_t \psi_v = \nu_v \psi = \mu_z - \eta_z \leq 1. \end{aligned}$$

Sauf mention du contraire, dans toute la suite le vecteur $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ satisfait la propriété ci-dessus. Le résultat suivant est un corollaire de la Remarque 4.2.17

Corollaire 4.4.5. *La série formelle ψ est irréductible ou inversible.*

Maintenant, on donne notre preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type \mathbb{D}_n .

Théorème 4.4.6. *L'application de Nash \mathcal{N}_S associée à S est bijective.*

DÉMONSTRATION. En vertu de la Remarque 4.2.16, pour montrer que le K -wedge admissible ω se relève à la résolution minimale de S , il suffit de montrer que les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles. En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il y a au moins l'une d'elles n'est pas inversible.

On remarque qu'une série formelle $\phi \in K[[s, t]]$ est inversible dans $K[[s, t]]$ si et seulement si elle est inversible dans $\overline{K}[[s, t]]$, où \overline{K} est la clôture algébrique de K . Dans toute la suite, on suppose que le corps K est algébriquement clos.

Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2 + z(y^2 + z^{n-2}) = 0$, d'où la relation suivante :

$$(4.4) \quad t^{2\eta_x} \chi^2 + t^{2\eta_y + \eta_z} \varphi^2 \psi + t^{(n-1)\eta_z} \psi^{n-1} = 0$$

En vertu de la Proposition 4.4.4, on a les cas suivants :

- Cas 1). le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur τ_3^0 du cône τ_3 ;
- Cas 2). l'entier n est égal à $2k$, où k est un entier supérieur ou égal à 2, et le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur τ_1^0 du cône τ_1 ;
- Cas 3). l'entier n est égal à $2k - 1$, où k est un entier supérieur ou égal à 2, et le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur τ_2^0 du cône τ_2 .

Dans chaque cas ci-dessus, on va obtenir une contradiction, ce qui achève la preuve du Théorème.

Cas 1). On suppose que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \tau_3^0$. Dans ce cas, on a $\eta_z = 2$ et $\eta_x = \eta_y + 1$. Au moyen de la Relation (4.4), on obtient la relation suivante :

$$\chi^2 + \varphi^2 \psi = -t^{2(n-2-\eta_y)} \psi^{n-1}.$$

On remarque que $n - 2 - \eta_y > 0$, car le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur du cône τ_3 .

D'après les Propositions 4.4.1 et 4.4.3, on a $\mu_z \leq 2$. Par conséquent, $\mu_z - \eta_z = 0$, ce qui implique que la série formelle ψ est inversible (voir la Remarque 4.2.17).

Comme ψ est inversible et K algébriquement clos, il existe une série formelle inversible ψ_0 tel que $\psi = -\psi_0^2$, d'où

$$(\chi + \psi_0\varphi)(\chi - \psi_0\varphi) = (-1)^n t^{2(n-2-\eta_y)} \psi_0^{2(n-1)}.$$

Par conséquent, t divise χ et φ ou χ et φ sont inversibles. Ce sont des contradictions.

Cas 2). On suppose que $n = 2k$, où k est un entier supérieur ou égal à 2 et $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \tau_1^0$.

Comme (η_x, η_y, η_z) appartient à τ_1^0 et $n = 2k$, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait les relations suivantes :

$$(k-1)\eta_z = \eta_y \text{ et } 2\eta_x > (2k-1)\eta_z.$$

Comme $1 \leq \eta_x \leq \mu_x \leq 2k-1$ (voir les Propositions 4.4.1 et 4.4.3), on obtient que $\eta_z = 1$, $\eta_y = 2k-1$ et $\eta_x \geq k$. On a donc $\mu_z = 2$. En effet, si $\mu_z = 1$, alors $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (k, k-1, 1)$. D'après la Remarque 4.2.17, les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles, ce qui est une contradiction, car on a supposé que parmi ces séries formelles il y en a au moins une qui n'est pas inversible.

Au moyen de la Relation (4.4), on obtient la relation suivante :

$$t^{2\eta_x+1-n}\chi^2 + \varphi^2\psi = -\psi^{n-1}.$$

On remarque que ψ est irréductible car $\nu_v\psi = \mu_z - \eta_z = 1$ (voir la Remarque 4.2.17 et le Corollaire 4.4.5) Au moyen de la relation ci-dessus, on obtient que $\chi = \chi_0\psi^k$ et $\varphi = \varphi_0\psi^{k-1}$, où χ_0 et φ_0 sont deux séries formelles qui satisfont la relation suivante :

$$t^{2\eta_x+1-n}\chi_0^2\psi + \varphi_0^2 = -1.$$

Comme $\nu_v\psi = 1$, on obtient que $\nu_v\chi = \nu_v\chi_0\psi^k = \nu_v\chi_0 + k$. Comme $\mu_x \leq 2k-1$ et $\eta_x \geq k$, on a $\nu_v\chi = \mu_x - \eta_x \leq k-1$ (voir la Remarque 4.2.17). Par conséquent, on a $\nu_v\chi_0 \leq -1$, ce qui est une contradiction.

La preuve du Cas 3) est analogue à celle du Cas 2).

Cas 3). On suppose que $n = 2k-1$, où k est un entier supérieur ou égal à 2 et $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \tau_2^0$.

Comme (η_x, η_y, η_z) appartient à τ_2^0 et $n = 2k-1$, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait les relations suivantes :

$$(k-1)\eta_z = \eta_x \text{ et } 2\eta_y > (2k-3)\eta_z.$$

Comme $1 \leq \eta_y \leq \mu_y \leq 2k-3$ (voir les Propositions 4.4.1 et 4.4.3), on obtient que $\eta_z = 1$, $\eta_x = k-1$ et $\eta_y \geq k-1$. On a donc $\mu_z = 2$. En effet, si $\mu_z = 1$, alors $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (k-1, k-1, 1)$. D'après la Remarque 4.2.17, les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles, ce qui est une contradiction car on a supposé que parmi ces séries formelles il y en a au moins une qui n'est pas inversible.

Au moyen de la Relation (4.4), on obtient la relation suivante :

$$\chi^2 + t^{2\eta_y+2-n}\varphi^2\psi = -\psi^{n-1}.$$

On remarque que ψ est irréductible car $\nu_v\psi = \mu_z - \eta_z = 1$ (voir la Remarque 4.2.17 et le Corollaire 4.4.5) Au moyen de la relation ci-dessus, on obtient que $\chi = \chi_0\psi^{k-1}$ et $\varphi = \varphi_0\psi^{k-1}$, où χ_0 et φ_0 sont deux séries formelles qui satisfont la relation suivante :

$$\chi_0^2 + t^{2\eta_y+2-n}\varphi_0^2\psi = -1.$$

Comme $\nu_v\psi = 1$, on obtient que $\nu_v\varphi = \nu_v\varphi_0\psi^{k-1} = \nu_v\varphi_0 + k - 1$. Comme $\mu_y \leq 2k - 3$ et $\eta_y \geq k - 1$, on a $\nu_v\varphi = \mu_y - \eta_y \leq k - 2$ (voir la Remarque 4.2.17). Par conséquent, on a $\nu_v\varphi_0 \leq -1$, ce qui est une contradiction.

Dans le trois cas précédent, on a obtenu une contradiction, d'où le théorème. □

Résolution du problème des arcs de Nash pour deux familles d'hypersurfaces de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$

5.1. Préliminaires et rappels

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, V une variété algébrique normale sur \mathbf{k} et $\pi : X \rightarrow V$ une désingularisation divisorielle de V .

Si $\pi' : X' \rightarrow V$ est une autre désingularisation de V , alors $(\pi')^{-1} \circ \pi : X \dashrightarrow X'$ est une application birationnelle. Soit E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π . Comme E est un diviseur et X est une variété algébrique normale (X est une variété lisse), il existe un ouvert E^0 de E sur lequel l'application birationnelle $(\pi')^{-1} \circ \pi$ est bien définie. Le diviseur E est appelé *diviseur essentiel sur V* si pour toute désingularisation $\pi' : X' \rightarrow V$ de V l'adhérence de $(\pi')^{-1} \circ \pi(E^0)$ dans X' est une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme π' . On note $\text{Ess}(V)$ l'ensemble de diviseurs essentiels sur V .

On note V_∞ l'espace d'arcs sur V (voir [Ish07] ou la Section 1.1). Les K -points de V_∞ sont en correspondance bijective avec les K -arcs sur V . Par abus de notation, pour $\alpha \in V_\infty$, on note α son \mathbf{k}_α -arc correspondant, où \mathbf{k}_α est le corps résiduel du point α . Soit $p : V_\infty \rightarrow V$ la projection canonique $\alpha \mapsto \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\text{Spec } \mathbf{k}_\alpha[[t]]$. On pose $V_\infty^s := p^{-1}(\text{Sing } V)$, où $\text{Sing } V$ est le lieu singulier de V , et on note $\mathcal{CN}(V)$ l'ensemble des composantes irréductibles de V_∞^s . Nash a démontré que l'application $\mathcal{N}_V : \mathcal{CN}(V) \rightarrow \text{Ess}(V)$ qui associe à $C \in \mathcal{CN}(S)$ l'adhérence $\overline{\{\hat{\alpha}(0)\}}$ est bien définie et injective, où $\hat{\alpha}$ est le relèvement à X du point générique α de C , c'est-à-dire $\pi \circ \hat{\alpha} = \alpha$. Le problème de Nash consiste à étudier la surjectivité de \mathcal{N}_V .

Soit E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : X \rightarrow V$. On note N_E l'adhérence dans V_∞ de l'ensemble suivant :

$$\{\alpha \in V_\infty \setminus (\text{Sing } V)_\infty \mid \hat{\alpha}(0) \in E\}.$$

On peut montrer que N_E est irréductible et que $V_\infty^s = \bigcup_{E \in \text{Ess}(V)} N_E$. Les morphismes $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ sont appelés K -wedges sur S . Ils sont en correspondance bijective avec les $K[[s]]$ -points de V_∞ . L'image du point fermé (resp. du point générique) de $\text{Spec } K[[s]]$ dans V_∞ est appelé le centre (resp. l'arc générique) du K -wedge ω .

Soit E un diviseur essentiel sur V . Un K -wedge ω est appelé *K -wedge admissible centré en N_E* si le centre (resp. l'arc générique) de ω est le point générique de N_E (resp. appartient à V_∞^s). Dans [Reg06] on montre que E appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V si et seulement si tout K -wedge admissible centré en N_E se relève à X c'est-à-dire il existe un K -wedge $\hat{\omega}$ sur X tel que $\pi \circ \hat{\omega} = \omega$.

Dans ce chapitre on considère deux familles d'hypersurfaces normales de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ et on montre que pour chaque hypersurface considérée, l'application de Nash qui l'est associée est bijective.

Chaque famille d'hypersurface considérée est le sujet d'une des deux sections suivantes.

5.2. Notre première famille d'exemples d'hypersurfaces de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ avec l'application de Nash bijective

D'abord, on fixe les notations. Soient $N := \mathbb{Z}^4$ muni de sa base standard $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $\Delta := \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ le cône standard. Le dual de N , noté M , est identifié avec \mathbb{Z}^4 au moyen de la forme bilinéaire standard $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 4$.

On note T le tore $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$, $x_j := \chi^{e_j} \in \mathbf{k}[\Delta^\vee \cap M]$, $1 \leq j \leq 4$, et O la T -orbite de dimension zéro de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4 := \text{Spec } \mathbf{k}[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Soit V l'hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ donnée par une équation du type :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4)$$

où $p \geq 2$, $q \geq 2$ sont deux entiers et h_q, k_{pq} sont deux polynômes homogènes sans facteur multiple. De plus, h_q (resp. k_{pq}) est de degré q (resp. pq) et le polynôme f n'est pas dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$ (voir les Définitions 2.2.1 et 2.5.3).

Exemple 5.2.1. Le polynôme $f = x_1^q + x_2^q + x_3^{pq} + x_4^{pq}$, $p \geq 2$, $q \geq 2$, satisfait les hypothèses ci-dessus. Dans ce cas la variété V est une hypersurface de Pham-Brieskorn.

Remarque 5.2.2. À un automorphisme linéaire de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ près, x_1 et x_2 (resp. x_3, x_4) ne divisent pas h_q (resp. k_{pq}).

La proposition suivante résulte d'un calcul direct.

Proposition 5.2.3. *L'hypersurface V est normale et le point O est son unique point singulier. De plus, V ne contient aucune T -orbite de dimension strictement positive.*

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 5.2.4. *L'application de Nash \mathcal{N}_V associée à l'hypersurface V est bijective et le nombre de diviseurs essentiels sur V est égal à $(p-1)q+1$.*

D'abord, on utilise la géométrie torique pour résoudre la singularité de V . Ensuite, on démontre le Théorème 5.2.4

5.2.1. Résolution de la singularité. D'abord, on fait quelques rappels. Soit $g = \sum c_e x^e \in \mathbf{k}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ un polynôme, où $e = (e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4$, $x^e := x_1^{e_1} x_2^{e_2} x_3^{e_3} x_4^{e_4}$ et $c_e \in \mathbf{k}$. On note $\mathcal{E}(g)$ l'ensemble des exposants $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4$, dont le coefficient c_e est non nul, c'est-à-dire $\mathcal{E}(g) := \{e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4 \mid c_e \neq 0\}$.

Le polyèdre de Newton $\Gamma_+(g)$ associé à g est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{e + \mathbb{R}_{\geq 0}^4 \mid e \in \mathcal{E}(g)\}$ et la frontière de Newton $\Gamma(g)$ est la réunion des faces compactes de $\Gamma_+(g)$.

On note $\mathcal{I}(g)$ l'idéal de $\mathbf{k}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ engendré par les monômes x^e , $e \in \Gamma(g) \cap \mathbb{Z}^4$, c'est-à-dire $\mathcal{I}(g) := (\{x^e \mid e \in \Gamma(g) \cap \mathbb{Z}^4\})$.

L'éventail de Newton $\Gamma^*(g)$ associé à g est la subdivision du cône standard Δ correspondant à l'éclatement normalisé de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ de centre l'idéal $\mathcal{I}(g)$ (voir la Définition 2.2.5 et le Théorème 2.2.10). Pour plus de détails, voir la Section 2.2.

En vertu des résultats 2.2.4 et 2.2.10, on obtient que l'éventail de Newton $\Gamma^*(g)$ satisfait la propriété suivante :

- *) Soient $J \subset \{1, 2, \dots, d\}$ et $\sigma_J = \{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \Delta \mid n_i = 0 \text{ ssi } i \notin J\}$. S'il existe $n \in \sigma_J$ tel que $h_{\Gamma_+(g)}(n) = 0$ ($h_{\Gamma_+(g)}$ est la fonction d'appui associée au polyèdre de Newton $\Gamma_+(g)$), alors l'adhérence de σ_J dans Δ est un cône de $\Gamma^*(g)$.

On rappelle qu'une subdivision régulière Σ de $\Gamma^*(g)$ est appelée *subdivision régulière admissible*, si l'éventail Σ satisfait la propriété \star), c'est-à-dire s'il existe $n \in \sigma_J$ tel que $h_{\Gamma_+(g)}(n) = 0$,

alors $\bar{\sigma}_J \in \Sigma$.

Soit V l'hypersurface définie dans la Section 5.2. D'après les résultats 2.5.9 et 5.2.3, si Σ est une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$, alors le morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ associé à la subdivision régulière admissible Σ de $\Gamma^*(f)$ est une résolution plongée de l'hypersurface V .

Maintenant, on montre explicitement une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$.

La Figure 1 représente la face compacte du polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$, c'est-à-dire la frontière de Newton $\Gamma(f)$. On rappelle que $f = h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4)$ et que x_1 et x_2 (resp. x_3, x_4) ne divisent pas h_q (resp. k_{pq}), voir la Remarque 5.2.2.

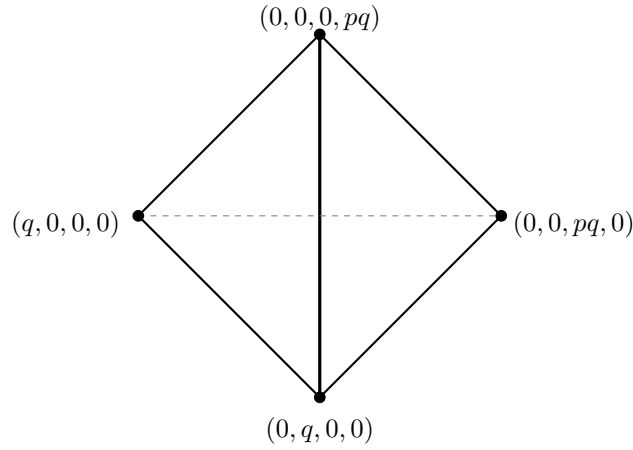


FIGURE 1. La frontière de Newton $\Gamma(f)$, où $f = h_q(x_1, x_2) + h_{2q}(x_3, x_4)$

Soit H un plan de \mathbb{R}^4 qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^4 et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$ soit un ensemble compact. La Figure 2 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec le *vecteur extrémal* (autrement dit, le vecteur primitif d'un cône de dimension 1 de l'éventail $\Gamma^*(f)$) correspondant.

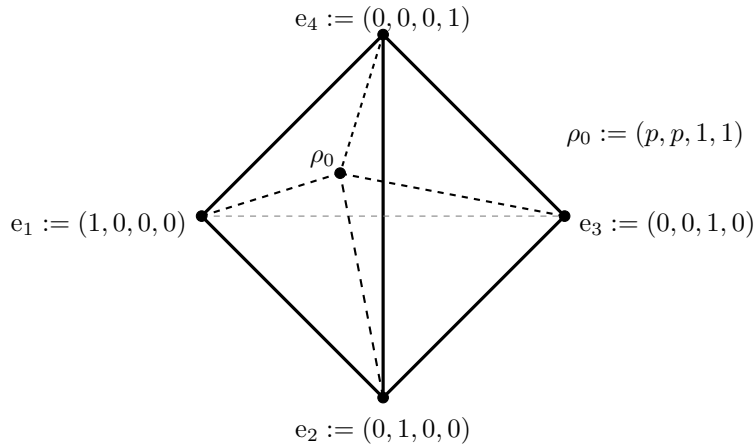


FIGURE 2. Section de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, où $f = h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4)$

On note σ_j , $1 \leq j \leq 4$, le cône de dimension 4 de $\Gamma^*(f)$ engendré par le vecteur $(p, p, 1, 1)$ et l'ensemble $\{e_i \mid 1 \leq i \leq 4, i \neq j\}$.

La proposition suivante résulte d'un simple calcul.

Proposition 5.2.5. *Les cônes σ_3 et σ_4 sont réguliers.*

De gauche à droite : la Figure 3 représente l'intersection du plan H avec une subdivision du cône σ_2 et du cône σ_1 . On rappelle que chaque sommet des diagrammes est identifié avec le vecteur extrémal correspondant.

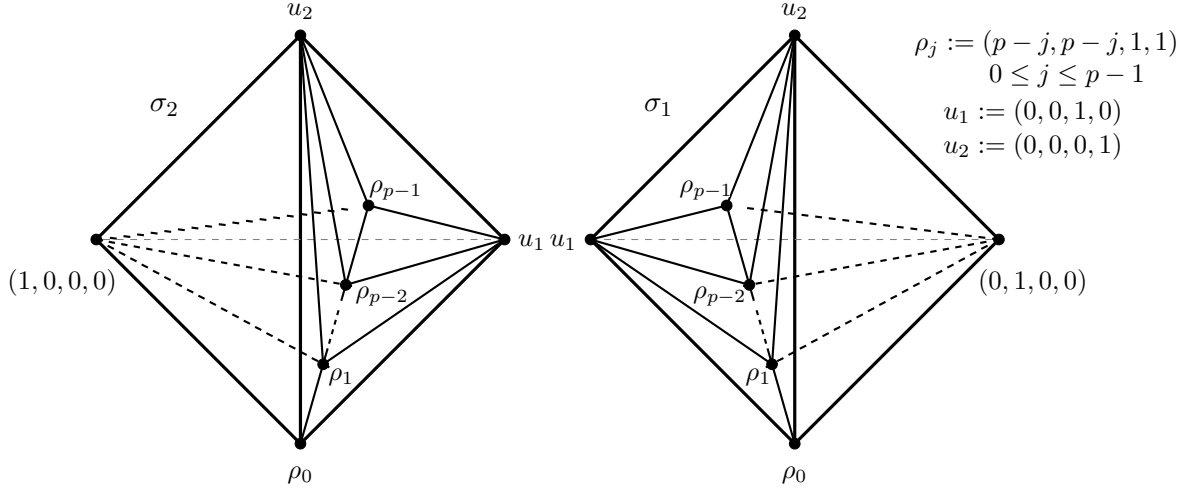


FIGURE 3. Subdivision des cônes σ_1 et σ_2

Pour chaque paire d'entiers $1 \leq j < p-1$ et $1 \leq k \leq 2$, on note σ_{1jk} (resp. σ_{2jk}) le cône de dimension 4 engendré par le vecteur $(0, 1, 0, 0)$ (resp. $(1, 0, 0, 0)$) et l'ensemble $\{\rho_{j-1}, \rho_j, u_k\}$, où $u_1 := (0, 0, 1, 0)$, $u_2 := (0, 0, 0, 1)$ et $\rho_j = (p-j, p-j, 1, 1)$.

On note σ_{1p-1} (resp. σ_{2p-1}) le cône engendré par le vecteur $(0, 1, 0, 0)$ (resp. $(1, 0, 0, 0)$) et l'ensemble $\{u_1, u_2, \rho_{p-1}\}$. On remarque que l'ensemble $\{\sigma_{1jk}, \sigma_{2jk} \mid 1 \leq j < p-1, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{\sigma_{1p-1}, \sigma_{2p-1}, \sigma_3, \sigma_4\}$ engendre un éventail, noté Σ .

On rappelle la définition de G -subdivision régulière d'un éventail. Soient Σ' un éventail dans $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$ et σ un cône de Σ' . Nous appellerons G -subdivision régulière de σ , une subdivision régulière de σ , dont les vecteurs extrémaux sont exactement les éléments irréductibles du semi-groupe $\sigma \cap \mathbb{N}$.

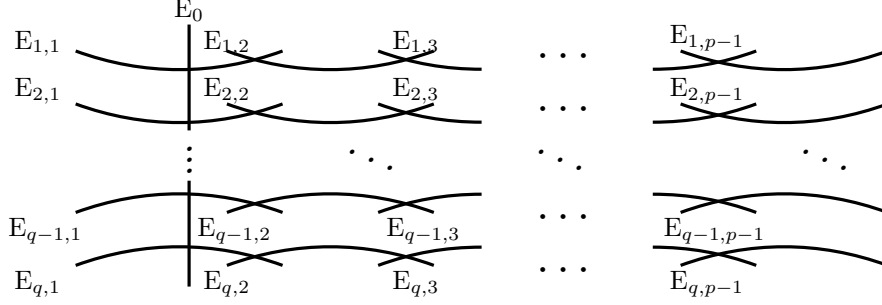
On dit qu'un éventail $\Sigma'_{\mathcal{G}}$ est une G -subdivision régulière de Σ' si chaque cône de $\Sigma'_{\mathcal{G}}$ est obtenu par une G -subdivision régulière d'un cône de Σ' . Le morphisme équivariant associé à une G -subdivision régulière de Σ' est appelé G -désingularisation de $X(\Sigma')$.

Par une simple inspection des cônes de l'éventail Σ , on obtient la proposition suivante :

Proposition 5.2.6. *L'éventail Σ engendré par l'ensemble $\{\sigma_{1jk}, \sigma_{2jk} \mid 1 \leq j < p-1, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{\sigma_{1p-1}, \sigma_{2p-1}, \sigma_3, \sigma_4\}$ est une G -subdivision régulière de l'éventail $\Gamma^*(f)$.*

Soient $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^4$ le morphisme torique induit par l'éventail Σ de la Proposition 5.2.6 et \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Sigma)$. Par abus de notation, on note $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la restriction de π à \tilde{V} .

Proposition 5.2.7. *La fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est un diviseur à croisement normaux qui est la réunion de $(p-1)q+1$ composantes irréductibles. Le diagramme suivant représente la fibre exceptionnelle de π :*



Les intersections $E_0 \cap E_{i,1}$ et $E_{i,j} \cap E_{i,j+1}$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p-2$, sont des courbes lisses et irréductibles. De plus, les diviseurs $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p-1$ sont des variétés rationnelles.

Remarque 5.2.8. Dans les résultats suivants, on montre que les diviseurs essentiels sur V sont exactement les diviseurs exceptionnels de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$

Démonstration de la Proposition 5.2.7. Cette proposition peut être obtenue en utilisant les Propositions 2.5.13 et 2.5.14. Or on va donner une preuve adaptée à notre cas.

On rappelle que le morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ est une résolution plongée de V , d'où la fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est un diviseur à croisement normaux. Par conséquent, les intersections $E_0 \cap E_{i,1}$ et $E_{i,j} \cap E_{i,j+1}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p-2$ sont une réunion de courbes lisses.

On fixe un entier $1 \leq j < p-1$ et on considère le cône $\sigma_{2j2} \in \Sigma$. On rappelle que σ_{2j2} est le cône régulier engendré par les vecteurs $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $\rho_j = (p-j, p-j, 1, 1)$, $\rho_{j-1} = (p-j+1, p-j+1, 1, 1)$. On note $U (\cong \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4)$ l'ouvert torique qui est en correspondance avec le cône σ_{2j2} .

La restriction à U du morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ est définie de la façon suivante :

$$\pi|_U : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4, (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4) := (y_1 y_2^{p-j+1} y_3^{p-j}, y_2^{p-j+1} y_3^{p-j}, y_2 y_3, y_2 y_3 y_4).$$

On remarque que $U \cap \pi^{-1}(O) = \{y_2 = 0\} \cup \{y_3 = 0\}$. La variété $\tilde{V} \cap U$ est donnée par l'équation suivante :

$$h_q(y_1, 1) + y_2^{q(j-1)} y_3^{qj} k_{pq}(1, y_4) = 0.$$

Si $j = 1$, l'intersection $\tilde{V} \cap U \cap \{y_2 = 0\}$ est une variété irréductible et $\tilde{V} \cap U \cap \{y_3 = 0\}$ est donnée par les équations $h_q(y_1, 1) = 0$, $y_3 = 0$. Par conséquent, $\tilde{V} \cap U \cap \{y_3 = 0\}$ est la réunion disjointe de q composantes irréductibles (chaque composante irréductible est associée à une racine du polynôme $h_q(y, 1)$) et chaque composante irréductible est une variété rationnelle. Soient $w \in \mathbf{k}$ une racine du polynôme $h_q(y, 1)$ et F_w la composante irréductible de $\tilde{V} \cap U \cap \{y_3 = 0\}$ associée à w . On remarque que $F_w \cap \{y_2 = 0\}$ est une courbe irréductible.

Si $j \geq 2$, les intersections $\tilde{V} \cap U \cap \{y_2 = 0\}$, $\tilde{V} \cap U \cap \{y_3 = 0\}$ sont la réunion disjointe de q composantes irréductibles et chaque composante est une variété rationnelle. Soit $F_{2,w}$ (resp. $F_{3,w}$) la composante irréductible de $\tilde{V} \cap U \cap \{y_2 = 0\}$ (resp. $\tilde{V} \cap U \cap \{y_3 = 0\}$) associée à w , où $w \in \mathbf{k}$ une racine du polynôme $h_q(y, 1)$. Alors l'intersection $F_{2,w} \cap F_{3,w}$ n'est pas vide si

et seulement si $w = w'$. On remarque que $F_{2,w} \cap F_{3,w}$ est une courbe irréductible.

En procédant de la même manière sur tous les cônes qui contiennent les vecteurs extrémaux ρ_{j-1} et ρ_j , on obtient la proposition. \square

5.2.2. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash. Dans cette section, on démontre le Théorème 5.2.4 sur la bijectivité de l'application de Nash pour l'hypersurface V de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ donnée par une équation du type $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4)$, ce qui équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à une désingularisation de V (voir le Théorème 1.3.9). Notre but, dans toute la suite de cette section, est de montrer que pour chaque diviseur essentiel E ($E \in \text{Ess}(V)$) tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la désingularisation \tilde{V} de la Proposition 5.2.7, où K est une extension du corps \mathbf{k} .

D'abord, on donne quelques résultats techniques. Ensuite, on démontre le Théorème 5.2.4.

On note 0 (resp g) le point fermé (resp. générique) de $\text{Spec } K[[t]]$. Étant donné un K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$, $\alpha(0) = O$, qui n'est pas concentré en un hyperplan $x_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$, on note $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{Z}_{>0}^4$ le *vecteur principal* du K -arc α , c'est-à-dire

$$\mu := (\text{Ord}_t \alpha^*(x_1), \text{Ord}_t \alpha^*(x_2), \text{Ord}_t \alpha^*(x_3), \text{Ord}_t \alpha^*(x_4)).$$

où α^* est le comorphisme du K -arc α . On peut donc écrire le comorphisme α^* de la façon suivante :

$$\alpha^*(x_i) = t^{\mu_i} \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les α_i sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$.

Dans la proposition suivante on utilise la notation ci-dessus et de la Proposition 5.2.7.

On remarque que si un K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$ n'est pas concentré en O , alors α se relève à \tilde{V} , car le morphisme π est une désingularisation de V . De plus, si le point $\tilde{\alpha}(0)$ est le point générique d'une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π , alors le K -arc α n'est pas concentré en une hypersurface de V .

Proposition 5.2.9. *Soient $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la désingularisation de la Proposition 5.2.7, E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π et α un K -arc qui n'est pas concentré en O tel que le relèvement $\hat{\alpha}$ de α à \tilde{V} est transverse à E . De plus, on suppose que $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E . Alors, on a :*

- i) si le diviseur E est le diviseur E_0 , alors le vecteur principal μ du K -arc α est le vecteur $\rho_0 = (p, p, 1, 1)$;*
- ii) si le diviseur E est le diviseur $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p-1$, alors le vecteur principal μ du K -arc α est le vecteur $\rho_j = (p-j, p-j, 1, 1)$;*

DÉMONSTRATION. La proposition résulte de la Proposition 3.3.11. \square

Étant fixé une composante irréductible E de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ (π est la désingularisation de la Proposition 5.2.7), on considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, tel que son centre (resp. son arc générique) est le point générique de N_E , noté α_E , (resp. est un point qui appartient à V_{∞}^s), et on pose

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) := (\text{Ord}_t \omega^*(x_1), \text{Ord}_t \omega^*(x_2), \text{Ord}_t \omega^*(x_3), \text{Ord}_t \omega^*(x_4)) \in \mathbb{Z}_{>0}^4,$$

où ω^* est le comorphisme du K -wedge ω . On peut écrire le comorphisme ω^* de la façon suivante :

$$\omega^*(x_i) = t^{\eta_i} \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les φ_i sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t .

On pose

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x_1), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_2), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_3), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_4)),$$

le vecteur principal du \mathbf{k}_{α_E} -arc α_E , où \mathbf{k}_{α_E} est le corps résiduel du point générique de N_E .

D'après la Proposition 5.2.9, il existe un entier $0 \leq j \leq p-1$, tel que le vecteur principal du \mathbf{k}_{α_E} -arc α_E est le vecteur $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (p-j, p-j, 1, 1)$. La proposition suivante est le résultat clé de la preuve du Théorème 5.2.4

Proposition 5.2.10. *Les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq 4$, sont inversibles.*

D'abord, finissons la preuve du Théorème 5.2.4. En vertu du corollaire 3.1.6 le K -wedge ω se relève à \tilde{V} . On remarque que la Proposition 5.2.10 est valable pour toute composante irréductible E de la fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ et pour tout K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, tel que son centre (resp. son arc générique) est le point générique de N_E (resp. est un point qui appartient à V_∞^s). Par conséquent et d'après la Proposition 1.3.10, on obtient que tout diviseur exceptionnel E de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est un diviseur essentiel sur V . Le théorème 5.2.4 résulte du Théorème 1.3.9.

Démonstration de la proposition 5.2.10. En vertu de la Proposition 3.3.8 et le Corollaire 3.3.9, on a

$$\text{FI}(\varphi_i) \leq \mu_i - \eta_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où $\text{FI}(\varphi_i)$ est le nombre de facteurs irréductibles de φ_i comptés avec multiplicité. De plus, φ_i $1 \leq i \leq 4$ est inversible si et seulement si $\mu_i - \eta_i = 0$.

On rappelle qu'il existe un entier $0 \leq j \leq p-1$, tel que le vecteur principal du \mathbf{k}_{α_E} -arc α_E est le vecteur $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (p-j, p-j, 1, 1)$. Par conséquent, on a $\eta_3 = \eta_4 = \mu_3 = \mu_4 = 1$ et les séries formelles φ_3, φ_4 sont inversibles.

Si $j = p-1$, alors $\mu_1 = \mu_2 = \eta_1 = \eta_2 = 1$. Par conséquent, les séries φ_1 et φ_2 sont inversibles. Ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Dans la suite, on suppose que $j < p-1$.

Le K -wedge ω satisfait l'équation $h_q(x_1, x_2) + k_{pq}(x_3, x_4) = 0$, ainsi on obtient :

$$h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2) + t^{pq} k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4) = 0.$$

Comme $\eta_i \leq \mu_i \leq p$, $i \in \{1, 2\}$, on obtient que $\eta_1 = \eta_2$. Par conséquent, on a :

$$h_q(\varphi_1, \varphi_2) + t^{(p-\eta_1)q} k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4) = 0.$$

Si $\eta_1 = p$, alors les séries formelles φ_1 et φ_2 sont inversibles. On peut donc supposer que $\eta_1 < p$.

On rappelle que $h_q(x_1, x_2)$ est un polynôme sans facteur multiple et que x_1 et x_2 ne le divise pas. On peut donc écrire le polynôme $h_q(x_1, x_2)$ de la façon suivante :

$$h_q(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^q (a_i x_1 + b_i x_2),$$

où $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, pour tout $1 \leq i \leq q$. Ainsi on obtient la relation suivante :

$$\prod_{i=1}^q (a_i \varphi_1 + b_i \varphi_2) = -t^{(p-\eta_1)q} k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4)$$

On remarque que t divise $a_i\varphi_1 + b_i\varphi_i$ si et seulement si t ne divise pas $a_{i'}\varphi_1 + b_{i'}\varphi_2$, pour tout $i' \neq i$. En effet, h_q est un polynôme sans facteur multiple. Donc, s'il existe $1 \leq i, i' \leq q$ tel que t divise $a_i\varphi_1 + b_i\varphi_i$ et $a_{i'}\varphi_1 + b_{i'}\varphi_i$, alors t divise φ_1 et φ_2 . Ce qui est absurde.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_1\varphi_1 + b_1\varphi_2 = \lambda t^{(p-\eta)q}$, où λ est une série formelle qui appartient à $K[[s, t]]$. Ainsi on obtient la relation suivante :

$$\lambda \prod_{i=2}^q (a_i\varphi_1 + b_i\varphi_2) = k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4).$$

Le lemme suivant est le résultat clé pour la preuve de la Proposition 5.2.10

Lemme 5.2.11. *La série formelle $k_{pq}(\varphi_3, \varphi_4)$ est inversible.*

D'abord, finissons la preuve de la Proposition 5.2.10. Comme $\mu_1 - \eta_1 = \mu_2 - \eta_2$, la série formelle φ_1 est inversible si et seulement si φ_2 l'est.

D'après le lemme précédent, la série formelle $h_{pq}(\varphi_3, \varphi_4)$ est inversible. Ce qui implique que la série formelle $\lambda \prod_{i=2}^q (a_i\varphi_1 + b_i\varphi_2)$ est inversible. En particulier $a_2\varphi_1 + b_2\varphi_2$ est inversible, d'où les séries formelles φ_1 et φ_2 sont inversibles.

DÉMONSTRATION. *Démonstration du Lemme 5.2.11.* Soit $\lambda : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow \text{Spec } K[[s, t]]$ le morphisme induit par l'homomorphisme canonique $\lambda^* : K[[s, t]] \rightarrow K[[s, t]]/(s) = K[[t]]$. Alors, le morphisme $\alpha = \omega \circ \lambda$ est un K -arc sur V .

Soit $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la désingularisation de la Proposition 5.2.7. En utilisant la propriété fonctorielle d'espace d'arcs V_∞ (voir le Théorème 1.1.2), on obtient que le relèvement $\hat{\alpha}$ de α à \tilde{V} est transverse au diviseur E et que $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E , car le centre du K -wedge ω est le point générique de N_E . En particulier, le K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$ n'est pas concentré en un hyperplan $x_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$.

On peut écrire le comorphisme α^* du K -arc α de la façon suivante :

$$\alpha^*(x_i) = t^{\mu_i} \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les α_i sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$. On note a_i le terme constant de la série inversible α_i , $1 \leq i \leq 4$.

On remarque que pour $i \in \{3, 4\}$, on a $\varphi_i = a_i + \varphi'_i$, où $\varphi'_i \in K[[s, t]]$, $i \in \{3, 4\}$, est une série formelle non inversible, car les séries formelles φ_3 et φ_4 sont inversibles. Ainsi, on a :

$$h_{pq}(\varphi_3, \varphi_4) = k_{pq}(a_3, a_4) + \psi,$$

où $\psi \in K[[s, t]]$ est une série formelle non inversible. Par conséquent, la série $h_{pq}(\varphi_3, \varphi_4)$ est inversible si et seulement si $k_{pq}(a_3, a_4) \neq 0$.

On rappelle que d'après la Proposition 5.2.9, il existe un entier $0 \leq j < p - 1$, tel que le vecteur principal du K -arc α est le vecteur $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (p - j, p - j, 1, 1)$.

Soit $j' = j + 1$ et on considère le cône $\sigma_{2j'2} \in \Sigma$ (voir la Proposition 5.2.6). On rappelle que $\sigma_{2j'2}$ est le cône régulier engendré par les vecteurs $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $\rho_{j+1} = (p - j - 1, p - j - 1, 1, 1)$ et $\rho_j = (p - j, p - j, 1, 1)$. On note $U (\cong \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4)$ l'ouvert torique qui est en correspondance avec le cône $\sigma_{2j'2}$.

La restriction à U du morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ est définie de la façon suivante :

$$\pi|_U : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4, (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4) := (y_1 y_2^{p-j} y_3^{p-j-1}, y_2^{p-j} y_3^{p-j-1}, y_2 y_3, y_2 y_3 y_4).$$

On remarque que $U \cap \pi^{-1}(O) = \{y_2 = 0\} \cup \{y_3 = 0\}$. La variété $\tilde{V} \cap U$ est donné par l'équation suivante :

$$h_q(y_1, 1) + y_2^{qj} y_3^{q(j+1)} k_{pq}(1, y_4) = 0.$$

Si $j = 0$, le diviseur $E \cap U$ est donnée par les équations suivantes :

$$h_q(y_1, 1) + y_3^q k_{pq}(1, y_4) = 0, y_2 = 0.$$

Si $1 \leq j \leq p - 2$, le diviseur $E \cap U$, $1 \leq i \leq q$, est une composante irréductible de

$$h_q(y_1, 1) = 0, y_2 = 0.$$

Soit $w_i \in \mathbf{k}^*$ la racine de $h_q(y, 1)$, tel que le diviseur $E \cap U$ est donné par les équations

$$y_1 = w_i, y_2 = 0.$$

Comme le K -arc α n'est pas concentré en un hyperplan x_i , $1 \leq i \leq 4$, et $\hat{\alpha}(0) \in U \cap \tilde{V}$, le K -arc $\hat{\alpha} : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow U \cap \tilde{V}$ est un morphisme bien défini. On peut donc écrire le comorphisme $\hat{\alpha}^*$ de la façon suivante :

$$\hat{\alpha}^*(y_i) = t^{r_i} \hat{\alpha}_i, 1 \leq i \leq 4,$$

où les $\hat{\alpha}_i$ sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$ et les r_i sont positifs, pour tout $1 \leq i \leq 4$.

Soit $\hat{a}_i \in K^*$ le terme constant de $\hat{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq 4$. Si $j = 1$ (resp. $j \geq 2$), alors le K -arc $\hat{\alpha}$ est transverse au diviseur E_0 (resp. $E_{i,j}$) et le point $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E_0 (resp. $E_{i,j}$). Par conséquent, on a $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (0, 1, 0, 0)$ et $k_{pq}(1, \hat{a}_4) \neq 0$.

En utilisant le morphisme π , on obtient que :

$$\alpha_3 = \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3 \text{ et } \alpha_4 = \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3 \hat{\alpha}_4.$$

Par conséquent, on a $k_{pq}(a_3, a_4) = (\hat{a}_2 \hat{a}_3)^{pq} k_{pq}(1, \hat{a}_4) \neq 0$, d'où le lemme. \square

Avec la démonstration du Lemme 5.2.11, on achève la preuve de la Proposition 5.2.10. \square

5.3. Notre deuxième famille d'exemples d'hypersurfaces de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ avec l'application de Nash bijective

On utilise les notations de la section 5.2. Soient $N := \mathbb{Z}^4$ muni de sa base standard $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $\Delta := \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ le cône standard. Le dual de N , noté M , est identifié avec \mathbb{Z}^4 au moyen de la forme bilinéaire standard $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 4$.

On note T le tore $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$, $x_j := \chi^{e_j} \in \mathbf{k}[\Delta^{\vee} \cap M]$, $1 \leq j \leq 4$ et O la T -orbite de dimension zéro de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4 := \text{Spec } \mathbf{k}[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Soient un entier $q \geq 3$ et V une hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ donnée par une équation du type :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2),$$

où h_q et k_q sont deux polynômes homogènes de degré q sans facteur multiple. De plus, on suppose que le polynôme f n'est pas dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(f)$ (voir les Définitions 2.2.1 et 2.5.3) et que x_3 et x_4 ne divisent pas $k_q(x_3, x_4^2)$.

Exemple 5.3.1. Le polynôme $f = x_1^q + x_2^q + x_3^q + x_4^{2q}$, $q \geq 3$, satisfait les hypothèses ci-dessus. Dans ce cas la variété V est une hypersurface de Pham-Brieskorn.

Remarque 5.3.2. À un automorphisme linéaire de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^2$ près, x_1 et x_2 ne divisent pas $h_q(x_1, x_2)$.

La proposition suivante résulte d'un calcul direct.

Proposition 5.3.3. *L'hypersurface V est normale et le point O est son unique point singulier. De plus, V ne contient aucune T -orbite de dimension strictement positive.*

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 5.3.4. *L'application de Nash \mathcal{N}_V associée à l'hypersurface V est bijective et le nombre de diviseurs essentiels sur V est égal à 2.*

D'abord, on utilise la géométrie torique pour résoudre la singularité de V . Ensuite, on démontre le Théorème 5.3.4

5.3.1. Résolution de la singularité. Soit V l'hypersurface définie dans la Section 5.3. D'après les résultats 2.5.9 et 5.2.3, si Σ est une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$, alors le morphisme torique $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ associé à la subdivision régulière admissible Σ de $\Gamma^*(f)$ est une résolution plongée de l'hypersurface V .

Maintenant, on montre explicitement une subdivision régulière admissible de $\Gamma^*(f)$.

La Figure 4 représente la face compacte du polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$, c'est-à-dire la frontière de Newton $\Gamma(f)$. On rappelle que $f = h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2)$ et que x_1 et x_2 (resp. x_3, x_4) ne divisent pas $h_q(x_1, x_2)$ (resp. $k_q(x_3, x_4^2)$), voir la Remarque 5.3.2.

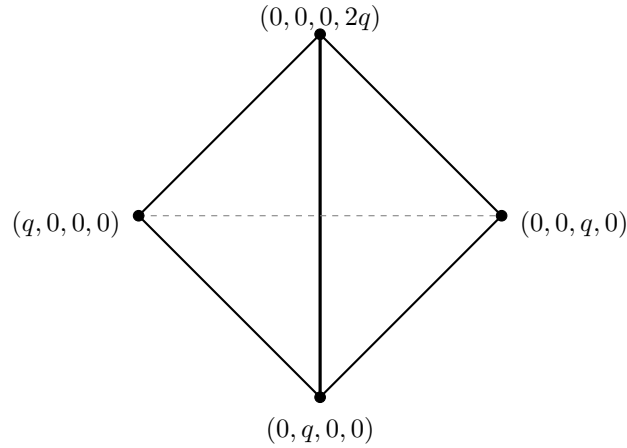


FIGURE 4. La frontière de Newton $\Gamma(f)$, où $f = h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2)$.

Soit H un plan de \mathbb{R}^4 qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^4 et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$ soit un ensemble compact. La Figure 5 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec le *vecteur extrémal* correspondant.

On note σ_j , $1 \leq j \leq 4$, le cône de dimension 4 de $\Gamma^*(f)$ engendré par le vecteur $(2, 2, 2, 1)$ et l'ensemble $\{e_i \mid 1 \leq i \leq 4, i \neq j\}$.

La proposition suivante résulte d'un simple calcul.

Proposition 5.3.5. *Le cône σ_4 est régulier.*

La Figure 6 représente l'intersection du plan H avec une subdivision des cônes σ_1 , σ_2 et σ_3 . Pour chaque entier $1 \leq j \leq 3$, on note σ_{j1} (resp. σ_{j2}) le cône de dimension 4 engendré

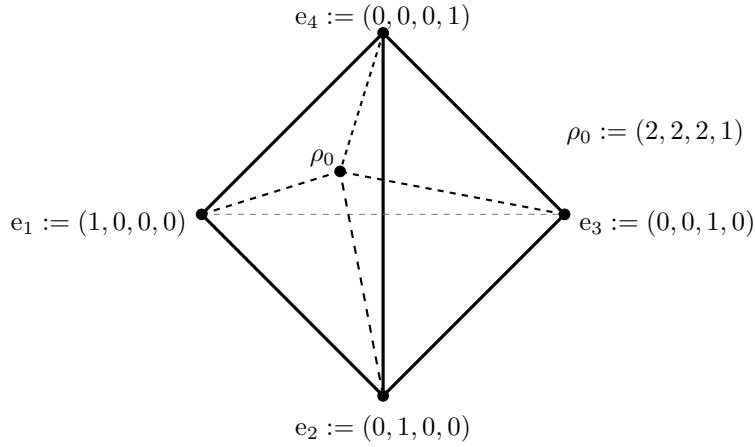


FIGURE 5. Section de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, où $f = h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2)$

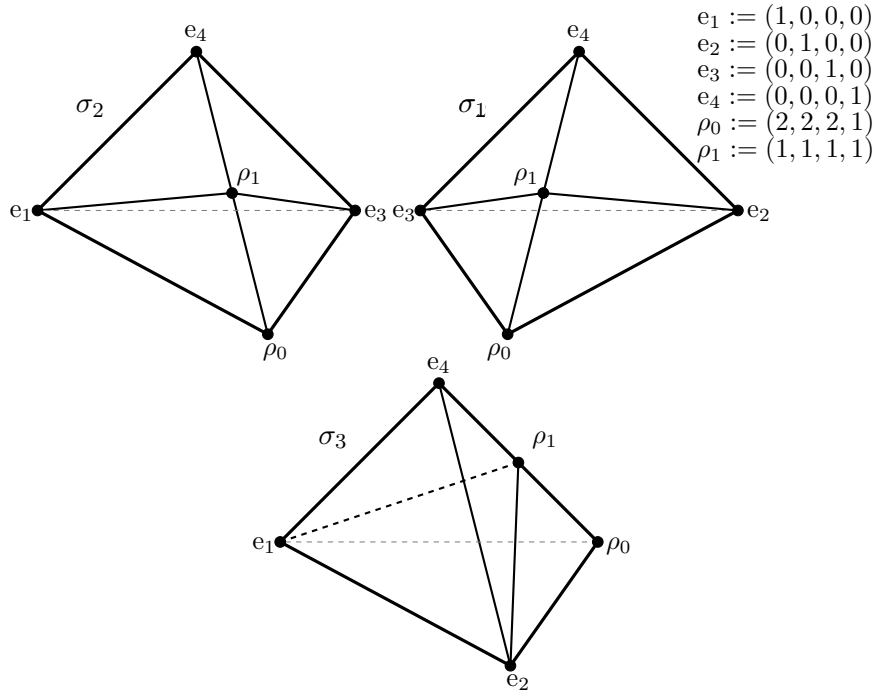


FIGURE 6. Subdivision des cônes σ_1 , σ_2 et σ_3

par le vecteur ρ_1 et l'ensemble $\{\rho_0\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq 3, i \neq j\}$ (resp. $\{e_i \mid i \neq j\}$).

On remarque que l'ensemble $\{\sigma_{jk} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{\sigma_4\}$ engendre un éventail, noté Σ .

Maintenant, on considère la subdivision du cône Δ suivante :

Soient $\mathcal{B} := \{e_1, e_3, e_3, e_4\}$ la base ordonnée canonique de N et Σ_1 la subdivision élémentaire de Δ centrée en $u = \sum_{i=1}^4 e_i$. Pour chaque entier j , $1 \leq j \leq 4$, on note \mathcal{B}_j la base ordonnée de N obtenue en remplaçant e_j par u dans la base \mathcal{B} . Soient $\Delta_j := \langle \mathcal{B}_j \rangle$ le cône régulier engendré par \mathcal{B}_j , pour $1 \leq j \leq 4$, et Σ_2 la subdivision de Σ_1 obtenue en remplaçant

Δ_4 en Σ_1 par les cônes $\Delta_{4j} := \langle \mathcal{B}_{4j} \rangle$, où \mathcal{B}_{4j} est la base ordonnée de \mathbb{N} obtenue en remplaçant le j -ième vecteur de \mathcal{B}_4 par $\sum_{u \in \mathcal{B}_4} u$

On remarque que la suite de morphismes $X(\Sigma_2) \rightarrow X(\Sigma_1) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ est obtenue en éclatant deux points fermés.

Par une simple inspection des cônes des éventails Σ et Σ_2 , on obtient la proposition suivante :

Proposition 5.3.6. *L'éventail Σ engendré par l'ensemble $\{\sigma_{jk} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{\sigma_4\}$ est une G -subdivision régulière de l'éventail $\Gamma^*(f)$. De plus, Σ et Σ_2 sont les mêmes éventails.*

Soit $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ le morphisme torique induit par l'éventail Σ de la Proposition 5.3.6. D'après les résultats 2.5.9 et 5.3.3, le morphisme π est une résolution plongée de V . Soit \tilde{V} le transformé strict de V dans $X(\Sigma)$. Par abus de notation, on note $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la restriction de π à \tilde{V} .

On note Σ_0 l'éventail engendré par le cône Δ et B_i le diviseur exceptionnel de l'éclatement $X(\Sigma_i) \rightarrow X(\Sigma_{i-1})$, $1 \leq i \leq 2$. Par abus de notation, on note B_1 le transformé strict de B_1 dans $X(\Sigma_2)$. On pose $E_i := B_i \cap \tilde{V}$, $1 \leq i \leq 2$.

Proposition 5.3.7. *Les E_i sont des variétés lisses et irréductibles et l'intersection $E_1 \cap E_2$ est une variété lisse et irréductible. De plus, la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$ de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est la réunion de E_1 et E_2 . En particulier $\pi^{-1}(O)$ est un diviseur à croisement normaux.*

Remarque 5.3.8. Dans les résultats suivants, on montre que les diviseurs essentiels sur V sont exactement les diviseurs exceptionnels de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$

Démonstration de la Proposition 5.3.7. Cette proposition est une conséquence directe des résultats 2.5.9, 2.5.13, 2.5.14 et 5.3.6. \square

5.3.2. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash. Dans cette section, on démontre le Théorème 5.3.4 sur la bijectivité de l'application de Nash pour l'hypersurface V de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ donnée par une équation du type $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2)$, ce qui équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à une désingularisation de V (voir le Théorème 1.3.9). Notre but, dans toute la suite de cette section, est de montrer que pour chaque diviseur essentiel E ($E \in \text{Ess}(V)$) tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la désingularisation \tilde{V} de la Proposition 5.3.7, où K est une extension du corps \mathbf{k} .

D'abord, on donne quelques résultats techniques. Ensuite, on démontre le Théorème 5.3.4.

On note 0 (resp g) le point fermé (resp. générique) de $\text{Spec } K[[t]]$. Étant donné un K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$, $\alpha(0) = O$, qui n'est pas concentré en un hyperplan $x_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$, on note $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{Z}_{>0}^4$ le vecteur principal du K -arc α , c'est-à-dire

$$\mu := (\text{Ord}_t \alpha^*(x_1), \text{Ord}_t \alpha^*(x_2), \text{Ord}_t \alpha^*(x_3), \text{Ord}_t \alpha^*(x_4)).$$

où α^* est le comorphisme du K -arc α . On peut donc écrire le comorphisme α^* de la façon suivante :

$$\alpha^*(x_i) = t^{\mu_i} \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les α_i sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$.

Dans les résultats suivants, on utilise la notation ci-dessus et celle de la Proposition 5.3.7.

On remarque que si un K -arc $\alpha : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$ n'est pas concentré en O , alors α se relève à \tilde{V} , car le morphisme π est une désingularisation de V . De plus, si le point $\tilde{\alpha}(0)$ est le point générique d'une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π , alors le K -arc α n'est pas concentré en une hypersurface de V .

Proposition 5.3.9. *Soient $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la désingularisation de la Proposition 5.3.7, E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π et α un K -arc qui n'est pas concentré en O tel que le relèvement $\hat{\alpha}$ de α à \tilde{V} est transverse à E . De plus, on suppose que $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E . Alors, si E est le diviseur E_1 (resp. E_2), alors le vecteur principal μ du K -arc α est le vecteur $\rho_1 = (1, 1, 1, 1)$ (resp. $\rho_0 = (2, 2, 2, 1)$).*

DÉMONSTRATION. La proposition résulte de la Proposition 3.3.11. \square

Étant fixé un composante irréductible E de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ (π est la désingularisation de la Proposition 5.3.7), on considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, tel que son centre (resp. son arc générique) est le point générique de N_E , noté α_E , (resp. est un point qui appartient à V_∞^s), et on pose

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) := (\text{Ord}_t \omega^*(x_1), \text{Ord}_t \omega^*(x_2), \text{Ord}_t \omega^*(x_3), \text{Ord}_t \omega^*(x_4)) \in \mathbb{Z}_{>0}^4,$$

où ω^* est le comorphisme du K -wedge ω . On peut donc écrire le comorphisme ω^* de la façon suivante :

$$\omega^*(x_i) = t^{\eta_i} \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les φ_i sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t .

On pose

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x_1), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_2), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_3), \text{Ord}_t \alpha_E^*(x_4)),$$

le vecteur principal du \mathbf{k}_{α_E} -arc α_E , où \mathbf{k}_{α_E} est le corps résiduel du point générique de N_E .

D'après la Proposition 5.3.9, si E est le diviseur E_1 (resp. E_2), alors le vecteur principal du \mathbf{k}_{α_E} -arc α_E est le vecteur $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (1, 1, 1, 1)$ (resp. $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (2, 2, 2, 1)$). On remarque que $1 \leq \eta_i \leq \mu_i \leq 2$, pour tout $1 \leq i \leq 4$, en particulier $\eta_4 = \mu_4 = 1$.

Soient $\phi \in K[[s, t]]$ une série formelle non nulle et $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$. On rappelle que le vecteur v induit une graduation positive sur l'anneau $K[[s, t]]$, on note $\nu_v \phi$ (resp. ϕ_v) le v -ordre (resp. la v -partie principale) de ϕ (voir la Définition 3.2.1).

Le lemme suivant est un résultat technique qu'on utilise dans la preuve du Théorème 5.3.4.

Lemme 5.3.10. *Si le K -wedge ω est centré en N_{E_2} , alors il existe un vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que*

$$\nu_v h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2) = \text{Deg}_t h_q(t^{\eta_1} (\varphi_1)_v, t^{\eta_2} (\varphi_2)_v) = 2q,$$

$$\nu_v k_q(t^{\eta_3} \varphi_3, t^2 \varphi_4^2) = \text{Deg}_t k_q(t^{\eta_3} (\varphi_3)_v, t^2 (\varphi_4^2)_v) = 2q.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow \text{Spec } K[[s, t]]$ le morphisme induit par l'homomorphisme canonique $\lambda^* : K[[s, t]] \rightarrow K[[s, t]]/(s) = K[[t]]$. Alors, le morphisme $\alpha = \omega \circ \lambda$ est un K -arc sur V .

En utilisant la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞ (voir le Théorème 1.1.2), on obtient que le relèvement $\hat{\alpha}$ de α à \tilde{V} est transverse au diviseur E_2 et que $\hat{\alpha}(0)$ est le point

générique de E_2 , car le centre du K -wedge ω est le point générique de N_{E_2} .

D'après la Proposition 5.3.9, on peut écrire le comorphisme α^* de α de la façon suivante :

$$\alpha^*(x_i) = t^{\mu_i} \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (2, 2, 2, 1),$$

où les α_i sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$. On remarque qu'on a :

$$t^{\mu_i - \eta_i} \alpha_i = \lambda^* \circ \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad \text{et} \quad \alpha_4 = \lambda^* \circ \varphi_4.$$

Soit $a_i \in K^*$ le terme constant de la série formelle α_i . Alors, il existe un vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que

$$(\varphi_i)_v = a_i t^{\mu_i - \eta_i}, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \text{et} \quad (\varphi_4)_v = a_4$$

En effet, il suffit de choisir $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que le nombre u soit "assez grand".

On rappelle que $\sigma_{11} \in \Sigma$ est le cône engendré par les vecteurs $\rho_0 = (2, 2, 2, 1)$, $\rho_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ et que la restriction du morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ à l'ouvert $U := U_{\sigma_{11}}$ est donnée de la façon suivante :

$$\pi : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4, \quad (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (y_1^2 y_4, y_1^2 y_2 y_4, y_1^2 y_3 y_4, y_1 y_4)$$

L'intersection de \tilde{V} (resp. E_2) et U est donnée par l'équation suivante (resp. les équations suivantes) :

$$h_q(1, y_2) + k_q(y_3, y_4) = 0 \quad (\text{resp. } h_q(1, y_2) + k_q(y_3, y_4) = 0 \text{ et } y_1 = 0)$$

Comme le K -arc α n'est pas concentré en un hyperplan $x_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$, et $\hat{\alpha}(0) \in U \cap \tilde{V}$, $\hat{\alpha} : \text{Spec } K[[t]] \rightarrow U \cap \tilde{V}$ est un morphisme bien défini. On peut donc écrire le comorphisme $\hat{\alpha}^*$ de la façon suivante :

$$\hat{\alpha}^*(y_i) = t^{r_i} \hat{\alpha}_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où les $\hat{\alpha}_i$ sont des séries formelles inversibles dans $K[[t]]$ et les r_i sont positifs, pour tout $1 \leq i \leq 4$.

Soit $\hat{a}_i \in K^*$ le terme constant de $\hat{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq 4$. On rappelle que le K -arc $\hat{\alpha}$ est transverse au diviseur E_2 et que $\hat{\alpha}(0)$ est le point générique de E_2 . Par conséquent, on obtient que $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (1, 0, 0, 0)$, car le K -arc $\hat{\alpha}$ est transverse au diviseur E_2 , et que $h_q(1, \hat{a}_2) \neq 0$ et $k_q(\hat{a}_3, \hat{a}_4^2) \neq 0$, car le point $(0, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4)$ est le point générique de E_2 .

En utilisant le morphisme π , on obtient que :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \hat{\alpha}_1^2 \hat{\alpha}_4, & \alpha_2 &= \hat{\alpha}_1^2 \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_4, \\ \alpha_3 &= \hat{\alpha}_1^2 \hat{\alpha}_3 \hat{\alpha}_4, & \alpha_4 &= \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_4. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$h_q(a_1, a_2) = (\hat{a}_1^2 \hat{a}_4)^q h_q(1, \hat{a}_2) \neq 0,$$

$$k_q(a_3, a_4^2) = (\hat{a}_1^2 \hat{a}_4)^q k_q(\hat{a}_3, \hat{a}_4^2) \neq 0.$$

Comme il existe un vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que $(\varphi_i)_v = a_i t^{\mu_i - \eta_i}$, $1 \leq i \leq 3$ et $(\varphi_4)_v = a_4$, on obtient que

$$(h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2))_v = h_q(t^{\eta_1} (\varphi_1)_v, t^{\eta_2} (\varphi_2)_v) = t^{2q} h_q(a_1, a_2),$$

$$(k_q(t^{\eta_3} \varphi_3, t^2 \varphi_4^2))_v = k_q(t^{\eta_3} (\varphi_3)_v, t^2 (\varphi_4^2)_v) = t^{2q} k_q(a_3, a_4^2).$$

Par conséquent, on a.

$$\nu_v h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2) = \text{Deg}_t h_q(t^{\eta_1}(\varphi_1)_v, t^{\eta_2}(\varphi_2)_v) = 2q,$$

$$\nu_v k_q(t^{\eta_3} \varphi_3, t^2 \varphi_4^2) = \text{Deg}_t k_q(t^{\eta_3}(\varphi_3)_v, t^2(\varphi_4^2)_v) = 2q.$$

Ce qui achève la preuve du lemme. \square

La proposition suivante est le résultat clé de la preuve du Théorème 5.3.4

Proposition 5.3.11. *Les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq 4$, sont inversibles.*

D'abord, finissons la preuve du Théorème 5.3.4. En vertu du corollaire 3.1.6 le K -wedge ω se relève à \tilde{V} . On remarque que la Proposition 5.3.11 est valable pour toute composante irréductible E de la fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ et pour tout K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$, tel que son centre (resp. son arc générique) est le point générique de N_E (resp. est un point qui appartient à V_∞^s). Par conséquent et d'après la Proposition 1.3.10, on obtient que tout diviseur exceptionnel E de la désingularisation $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est un diviseur essentiel sur V . Le théorème 5.2.4 résulte du Théorème 1.3.9.

Démonstration de la Proposition 5.3.11. En vertu de la Proposition 3.3.8 et du Corollaire 3.3.9, on a

$$\text{FI}(\varphi_i) \leq \mu_i - \eta_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

où $\text{FI}(\varphi_i)$ est le nombre de facteurs irréductibles de φ_i comptés avec multiplicité. De plus, φ_i $1 \leq i \leq 4$ est inversible si et seulement si $\mu_i - \eta_i = 0$.

Si E est le diviseur E_1 , alors le vecteur principal du \mathbf{k}_{α_E} -arc α_E est le vecteur $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (1, 1, 1, 1)$. Par conséquent, $\text{FI}(\varphi_i) = 0$ (c'est-à-dire φ_i est inversible) pour tout $1 \leq i \leq 4$.

Alors on peut supposer que E est le diviseur E_2 . Ainsi on obtient que $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (2, 2, 2, 1)$.

Comme $\eta_4 = \mu_4 = 1$, la série formelle φ_4 est inversible.

Raisonnons par l'absurde. On suppose que les séries formelles φ_1 , φ_2 et φ_3 ne sont pas simultanément inversibles. Par conséquent, il existe un entier $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\mu_{i_0} - \eta_{i_0} \neq 0$ (voir le Corollaire 3.3.9).

D'après la Proposition 3.3.10, le vecteur $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, 1)$ appartient au 3-squelette $S_3 \Gamma^*(f)$. Comme $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (2, 2, 2, 1)$ et $1 \leq \eta_i \leq \mu_i$, $1 \leq i \leq 4$, les entiers η_1, η_2, η_3 satisfont une des relations suivantes :

- 1) $\eta_1 = \eta_2 = 1$ et $\eta_3 = 2$;
- 2) $\eta_1 = \eta_3 = 1$ et $1 \leq \eta_2 \leq 2$;
- 3) $\eta_2 = \eta_3 = 1$ et $1 \leq \eta_1 \leq 2$.

Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $h_q(x_1, x_2) + k_q(x_3, x_4^2) = 0$, d'où la relation suivante :

$$(5.1) \quad h_q(t^{\eta_1} \varphi_1, t^{\eta_2} \varphi_2) + k_q(t^{\eta_3} \varphi_3, t^2 \varphi_4^2) = 0.$$

On remarque que le cas 2) équivaut au cas 3), quitte à permuter les variables x_1 et x_2 . Il suffit donc de trouver une contradiction dans les Cas 1) et 2) pour achever la preuve de la

Proposition 5.3.7.

Cas 1). on suppose que $\eta_1 = \eta_2 = 1$ et $\eta_3 = 2$.

Comme $\mu_3 = \eta_3 = 2$, on obtient que la série formelle φ_3 est inversible (voir le Corollaire 3.3.9) et que $k_q(t^{\eta_3}\varphi_3, t^2\varphi_4^2) = t^{2q}k_q(\varphi_3, \varphi_4^2)$. En vertu du lemme 5.3.10, on obtient que $\nu_v k_q(\varphi_3, \varphi_4^2) = 0$. Par conséquent, la série formelle $k_q(\varphi_3, \varphi_4^2)$ est inversible (voir la proposition 3.2.3).

D'après la Relation 5.1, on obtient la relation suivante :

$$h_q(\varphi_1, \varphi_2) + t^q k_q(\varphi_3, \varphi_4^2) = 0.$$

On rappelle que h_q est un polynôme homogène de degré $q \geq 3$ sans facteur multiple et que x_1 et x_2 ne divisent pas $h_q(x_1, x_2)$. On peut donc supposer que $h_q(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^q (b_i x_1 + c_i x_2)$, où $b_i, c_i \in \mathbf{k}^*$. Par conséquent, on a :

$$\prod_{i=1}^q (b_i \varphi_1 + c_i \varphi_2) = -t^q k_q(\varphi_3, \varphi_4^2).$$

Comme le polynôme h_q n'a pas de facteur multiple, les séries formelles φ_1 et φ_2 sont inversibles ou divisibles par t , ce qui est absurde.

Cas 2). On suppose que $\eta_1 = \eta_3 = 1$ et $1 \leq \eta_2 \leq 2$.

D'après la Relation 5.1, on obtient la relation suivante :

$$h_q(\varphi_1, t^{\eta_2-1}\varphi_2) + k_q(\varphi_3, t\varphi_4^2) = 0.$$

On rappelle que x_1 et x_2 (resp. x_3 et x_4) ne divisent pas $h_q(x_1, x_2)$ (resp. $k_q(x_3, x_4^2)$). On peut donc supposer que

$$h_q(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^q (b_i x_1 + c_i x_2), \text{ où } b_i, c_i \in \mathbf{k}^*.$$

$$k_q(x_3, x_4^2) = \prod_{i=1}^q (d_i x_3 + f_i x_4^2), \text{ où } d_i, f_i \in \mathbf{k}^*.$$

On pose $\gamma_i := b_i \varphi_1 + c_i \varphi_2 t^{\eta_2-1}$ et $\gamma'_i := d_i \varphi_3 + f_i \varphi_4^2 t$, $1 \leq i \leq q$. Ainsi on obtient la relation suivante :

$$(5.2) \quad \prod_{i=1}^q \gamma_i = - \prod_{i=1}^q \gamma'_i$$

Le lemme suivant nous permettra de construire un système de relations entre les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq 4$

Lemme 5.3.12. *Les séries formelles γ_i et γ'_i , $1 \leq i \leq q$, sont irréductibles.*

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 5.3.10, il existe un vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que $\nu_v(\prod_{i=1}^q \gamma_i) = \text{Deg}_t(\prod_{i=1}^q (\gamma_i)_v) = q$ et $\nu_v(\prod_{i=1}^q \gamma'_i) = \text{Deg}_t(\prod_{i=1}^q (\gamma'_i)_v) = q$.

Pour tout $i \in 1, 2, \dots, q$, les séries formelles γ_i et γ'_i ne sont pas inversibles, car les séries $\varphi_1, t^{\eta_2-1}\varphi_2, \varphi_3$ et $t\varphi_4$ ne le sont pas. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \nu_v \gamma_i &= \text{Deg}_t((\gamma_i)_v) = \text{Deg}_t(b_1(\varphi_1)_v + t^{\eta_2-1}c_i(\varphi_2)_v) = 1 \text{ et} \\ \nu_v \gamma'_i &= \text{Deg}_t((\gamma'_i)_v) = \text{Deg}_t(d_i(\varphi_3)_v + t f_i(\varphi_4^2)_v) = 1, \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq q$. En vertu des Propositions 3.2.3 et 3.2.5, on obtient que les séries γ_i et γ'_i sont irréductibles, pour tout $1 \leq i \leq q$. \square

D'après le Lemme 5.3.12 et la Relation 5.2, on peut supposer, sans perte de généralité, que les γ_i et les γ'_i satisfont les relations suivantes :

$$\gamma_i = I_i \gamma'_i, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq q,$$

où les $I_i \in K[[s, t]]$ sont des séries formelles inversibles telles que $\prod_{i=1}^q I_i = -1$. Autrement dit, on a le système suivant :

$$b_i \varphi_1 + c_i \varphi_2 t^{\eta_2 - 1} - d_i I_i \varphi_3 = f_i I_i \varphi_4^2 t, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq q, \text{ et } \prod_{i=1}^q I_i = -1.$$

Soit M la matrice du système ci-dessus, c'est-à-dire

$$M := \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & -d_1 I_1 \\ b_2 & c_2 & -d_2 I_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_q & c_q & -d_q I_q \end{pmatrix}$$

On pose

$$M_i := \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & -d_1 I_1 \\ b_2 & c_2 & -d_2 I_2 \\ b_i & c_i & -d_i I_i \end{pmatrix},$$

pour $3 \leq i \leq q$. Le lemme suivant achève la démonstration.

Lemme 5.3.13. *Il existe $3 \leq i' \leq q$, tel que le déterminant $\det M_{i'}$ est une série inversible.*

D'abord, en utilisant le Lemme 5.3.13, on montre qu'on arrive aussi à une contradiction dans le Cas 2). Ce qui achève la preuve de la Proposition 5.3.11.

En vertu du Lemme 5.3.13, on peut supposer, quitte à permuter les lignes de la matrice M , que la matrice M_3 est inversible. Comme on a le système

$$b_i \varphi_1 + c_i \varphi_2 t^{\eta_2 - 1} - d_i I_i \varphi_3 = f_i I_i \varphi_4^2 t, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

et que la matrice M_3 est inversible, on obtient que les séries formelles φ_1, φ_3 sont divisibles par t . Ce qui est absurde.

Démonstration du Lemme 5.3.13. Comme le polynôme $h_q(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^q (b_i x_1 + c_i x_2)$, $b_i, c_i \in \mathbf{k}^*$, n'a pas de facteur multiple, on obtient que $A := \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

Raisonnons par l'absurde, on suppose que pour tout $3 \leq i \leq q$ le déterminant $\det M_i$ n'est pas une série inversible. Comme la matrice A est de rang 2, il existe $\lambda_i, \lambda'_i \in \mathbf{k}^*$, $1 \leq i \leq q$, tels que $(b_i, c_i) = \lambda_i (b_1, c_1) + \lambda'_i (b_2, c_2)$. Ainsi on obtient :

$$\det M_i = (b_1 c_2 - b_2 c_1) (d_i I_i - \lambda_i d_1 I_1 + \lambda'_i d_2 I_2),$$

pour tout $3 \leq i \leq q$. En utilisant le système

$$b_i \varphi_1 + c_i \varphi_2 t^{\eta_2 - 1} - d_i I_i \varphi_3 = f_i I_i \varphi_4^2 t, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq q,$$

on obtient les relations suivantes

$$(d_i I_i - \lambda_i d_1 I_1 + \lambda'_i d_2 I_2) \varphi_3 = (f_i I_i - \lambda_i f_1 I_1 + \lambda'_i f_2 I_2) \varphi_4^2 t, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq q.$$

Comme les séries $\det M_i$ ne sont pas inversibles, on obtient les relations suivantes :

$$\lambda_i d_1 j_1 + \lambda'_i d_2 j_2 = d_i j_i,$$

$$\lambda_i f_1 j_1 + \lambda'_i f_2 j_2 = f_i j_i,$$

où j_i est le terme constante de la série inversible I_i , $1 \leq i \leq q$. Comme le polynôme $k_q(x, y) = \prod_{i=1}^q (d_i x + f_i y)$, $b_i, f_i \in \mathbf{k}^*$, n'a pas de facteur multiple, on obtient que la matrice $\begin{pmatrix} d_1 & f_1 \\ d_2 & f_2 \end{pmatrix}$ est inversible. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, il existe $l_i \in \mathbf{k}^*$ tel que

$$j_i = l_i j_1.$$

Comme $\prod_{i=1}^q I_i = -1$, on obtient que $(\prod_{i=1}^q l_i) j_1^q = -1$. Par conséquent, on a $j_1 \in \mathbf{k}^*$.

Soient $\alpha_i, \widehat{\alpha}_i, a_i, \widehat{a}_i$, $i \leq 4$, et λ^* comme dans la démonstration du Lemme 5.3.10.

On rappelle que $\sigma_{11} \in \Sigma$ est le cône engendré par les vecteurs $\rho_0 = (2, 2, 2, 1)$, $\rho_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ et que la restriction du morphisme $\pi : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$ à l'ouvert $U := U_{\sigma_{11}}$ est donnée de la façon suivante :

$$\pi : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4, (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (y_1^2 y_4, y_1^2 y_2 y_4, y_1^2 y_3 y_4, y_1 y_4)$$

L'intersection de \widetilde{V} (resp. E_2) et U est donnée par l'équation suivante (resp. les équations suivantes) :

$$h_q(1, y_2) + k_q(y_3, y_4) = 0 \text{ (resp. } h_q(1, y_2) + k_q(y_3, y_4) = 0 \text{ et } y_1 = 0)$$

En utilisant le morphisme π , on obtient que :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \widehat{\alpha}_1^2 \widehat{\alpha}_4, & \alpha_2 &= \widehat{\alpha}_1^2 \widehat{\alpha}_2 \widehat{\alpha}_4, \\ \alpha_3 &= \widehat{\alpha}_1^2 \widehat{\alpha}_3 \widehat{\alpha}_4, & \alpha_4 &= \widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_4. \end{aligned}$$

Maintenant on considère la relation

$$b_i \varphi_1 + c_i \varphi_2 t^{\eta_2 - 1} - d_1 I_1 \varphi_3 = f_1 I_1 \varphi_4^2 t$$

En utilisant le homomorphisme λ^* on obtient la relation suivante

$$(5.3) \quad b_1 + c_1 \widehat{a}_2 - d_1 j_1 \widehat{a}_3 - f_1 j_1 \widehat{a}_4^2 = 0.$$

Ce qui est absurde. En effet, on considère le polynôme

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = b_1 + c_1 y_2 - d_1 j_1 y_3 - f_1 j_1 y_4.$$

Comme $j_1 \in \mathbf{k}^*$, on a $g \in \mathbf{k}[y_1, y_2, y_3, y_4]$.

Soit S l'adhérence dans \widetilde{V} de l'hypersurface de U donnée l'équation $g = 0$. En vertu de la relation 5.3, on obtient que $\widehat{\alpha}(0)$ appartient à l'hypersurface S , où $\widehat{\alpha}$ est le relèvement de α à \widetilde{V} et 0 est le point fermé de $K[[t]]$.

On remarque que les diviseurs S et E_2 sont transverses. Alors $\widehat{\alpha}(0)$ appartient à l'intersection de S et E_2 ce qui est une contradiction car $\widehat{\alpha}(0)$ est le point générique de E_2 . \square

On a montré que dans les Cas 1) et 2) on trouve une contradiction. C'est donc que l'hypothèse faite est fausse, d'où les séries formelles φ_i , $1 \leq i \leq 4$ sont inversibles. \square

Bibliographie

- [BGS92] C. Bouvier and G. Gonzalez-Sprinberg. G -désingularisations de variétés toriques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 315(7) :817–820, 1992.
- [BGS95] C. Bouvier and G. Gonzalez-Sprinberg. Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G -désingularisations de variétés toriques. *Tohoku Math. J. (2)*, 47(1) :125–149, 1995.
- [CGSLJ96] A. Campillo, G. Gonzalez-Sprinberg, and M. Lejeune-Jalabert. Clusters of infinitely near points. *Math. Ann.*, 306(1) :169–194, 1996.
- [CGSM09] A. Campillo, G. Gonzalez-Sprinberg, and F. Monserrat. Configurations of infinitely near points. *São Paulo J. Math. Sci.*, 3(1) :115–160, 2009.
- [dFEI08] T. de Fernex, L. Ein, and S. Ishii. Divisorial valuations via arcs. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(2) :425–448, 2008.
- [EM09] L. Ein and M. Mustață. Jet schemes and singularities. In *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2*, volume 80 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 505–546. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [FdBPP11] J. Fernandez de Bobadilla and M. Pe-Pereira. Nash problem for surfaces. Preprint, arXiv :1102.2212v4 [math.AG], 2011.
- [FZ03] H. Flenner and M. Zaidenberg. Rational curves and rational singularities. *Math. Z.*, 244(3) :549–575, 2003.
- [GP07] P. D. González Pérez. Bijectiveness of the Nash map for quasi-ordinary hypersurface singularities. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19) :Art. ID rnm076, 13, 2007.
- [GSLJ91] G. Gonzalez-Sprinberg and M. Lejeune-Jalabert. Modèles canoniques plongés. I. *Kodai Math. J.*, 14(2) :194–209, 1991.
- [GSLJ97] G. Gonzalez-Sprinberg and M. Lejeune-Jalabert. Families of smooth curves on surface singularities and wedges. *Ann. Polon. Math.*, 67(2) :179–190, 1997.
- [IK03] S. Ishii and J. Kollár. The Nash problem on arc families of singularities. *Duke Math. J.*, 120(3) :601–620, 2003.
- [Ish04] S. Ishii. The arc space of a toric variety. *J. Algebra*, 278(2) :666–683, 2004.
- [Ish05] S. Ishii. Arcs, valuations and the Nash map. *J. Reine Angew. Math.*, 588 :71–92, 2005.
- [Ish06] S. Ishii. The local Nash problem on arc families of singularities. *Ann. Inst. Fourier*, 56(4) :1207–1224, 2006.
- [Ish07] S. Ishii. Jet schemes, arc spaces and the Nash problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*, 29(1) :1–21, 2007.
- [KKMS73] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat. *Toroidal embeddings. I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [Kol73] E. Kolchin. *Differential algebra and algebraic groups*, volume 54 of *Pure and applied mathematics*. Academic Press, New York, 1973.
- [LA11a] M. Leyton-Alvarez. Résolution du problème des arcs de Nash pour une famille d’hypersurfaces quasi-rationnelles, 2011. À paraître dans *Les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.
- [LA11b] M. Leyton-Alvarez. Une famille d’hypersurfaces quasi-rationnelles avec application de Nash bijective. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 349(5-6) :323–326, 2011.
- [Lip88] J. Lipman. On complete ideals in regular local rings. In *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I*, pages 203–231. Kinokuniya, Tokyo, 1988.
- [LJ80] M. Lejeune-Jalabert. Arcs analytiques et résolution minimale des singularités des surfaces quasi-homogènes. In *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, volume 777 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 303–336. Springer Berlin / Heidelberg, Amsterdam, 1980.

- [LJRL99] M. Lejeune-Jalabert and A. J. Reguera-López. Arcs and wedges on sandwiched surface singularities. *Amer. J. Math.*, 121(6) :1191–1213, 1999.
- [Mer80] M. Merle. Polyèdre de newton, éventails et désingularisation, d’après a. n. varchenko. In *Séminaire sur les Singularités des Surfaces, Palaiseau, France, 1976-1977*, volume 777 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 289–294. Springer Berlin / Heidelberg, Amsterdam, 1980.
- [Mor08] M. Morales. Some numerical criteria for the Nash problem on arcs for surfaces. *Nagoya Math. J.*, 191 :1–19, 2008.
- [Mus01] M. Mustața. Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities. *Invent. Math.*, 145(3) :397–424, 2001. With an appendix by David Eisenbud and Edward Frenkel.
- [Nas95] J. F. Nash. Arc structure of singularities. *Duke Math. J.*, 81(1) :31–38 (1996), 1995. A celebration of John F. Nash, Jr.
- [Nob91] A. Nobile. On Nash theory of arc structure of singularities. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 160 :129–146 (1992), 1991.
- [Oka87] M. Oka. On the resolution of the hypersurface singularities. In *Complex analytic singularities*, volume 8 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 405–436. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [Pet09] P. Petrov. Nash problem for stable toric varieties. *Math. Nachr.*, 282(11) :1575–1583, 2009.
- [Plé05] C. Plénat. À propos du problème des arcs de Nash. *Ann. Inst. Fourier*, 55(3) :805–823, 2005.
- [Plé08] C. Plénat. The Nash problem of arcs and the rational double points D_n . *Ann. Inst. Fourier*, 58(7) :2249–2278, 2008.
- [PP10] M. Pe-Pereira. Nash problem for quotient surface singularities. Preprint, arXiv :1011.3792v1 [math.AG], 2010.
- [PPP06] C. Plénat and P. Popescu-Pampu. A class of non-rational surface singularities with bijective Nash map. *Bull. Soc. Math. France*, 134(3) :383–394, 2006.
- [PPP08] C. Plénat and P. Popescu-Pampu. Families of higher dimensional germs with bijective Nash map. *Kodai Math. J.*, 31(2) :199–218, 2008.
- [PS10] C. Plénat and M. Spivakovsky. The nash problem of arcs and the rational double point \mathbf{E}_6 . Preprint, arXiv :1011.2426v1 [math.AG], 2010.
- [Reg95] A. J. Reguera. Families of arcs on rational surface singularities. *Manuscripta Math.*, 88(3) :321–333, 1995.
- [Reg06] A. J. Reguera. A curve selection lemma in spaces of arcs and the image of the Nash map. *Compos. Math.*, 142(1) :119–130, 2006.
- [Sum74] H. Sumihiro. Equivariant completion. *J. Math. Kyoto Univ.*, 14 :1–28, 1974.
- [SZ75] P. Samuel and O. Zariski. *Commutative algebra. Vol. II*. Springer-Verlag, New York, 1975. Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 29.
- [Var76] A. N. Varchenko. Zeta-function of monodromy and Newton’s diagram. *Invent. Math.*, 37(3) :253–262, 1976.

Résumé

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos et V une variété algébrique sur \mathbf{k} . Dans le but d'étudier la géométrie du lieu singulier de V , John Nash a introduit l'espace d'arcs et les espaces de m -jets, $m \geq 1$, dans une prépublication de 1968 qui a été publiée en 1995. Il a aussi défini une application \mathcal{N}_V actuellement connue sous le nom d'application de Nash, qui associe à chaque famille d'arcs passant par le lieu singulier de V (composante de Nash) un diviseur essentiel sur V . Nash a démontré que cette application est injective.

Le problème de Nash consiste à étudier la surjectivité de l'application de Nash. Dans plusieurs cas de variétés V , la bijectivité de \mathcal{N}_V a été prouvée. Or, un exemple d'une singularité isolée d'hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^5$ avec deux diviseurs essentiels et une composante de Nash a été donné dans un article de 2003. À l'heure actuelle, déterminer l'image de l'application de Nash reste un problème difficile, mêmes dans le cas de singularités bien connues.

Dans cette thèse, on démontre la bijectivité de cette application pour certaines familles de singularités isolées d'hypersurfaces de l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ et $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^4$.

Mots-Clés

Arcs, wedges, espace d'arcs, problème de Nash, singularités d'hypersurfaces, résolution de singularités, G -désingularisations, variétés toriques, éventail de Newton, points infiniment voisins.

Classification mathématique

14B05, 14E15, 14J17, 14M25, 32S25, 52B20.