Prévision de la rupture des ouvrages en béton sollicités en dynamique rapide

Fabrice Gatuingt

▶ **To cite this version:**

Fabrice Gatuingt. Prévision de la rupture des ouvrages en béton sollicités en dynamique rapide. Matériaux. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 1999. Français. NNT : . tel-00630727

HAL Id: tel-00630727

https://theses.hal.science/tel-00630727

Submitted on 11 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Spécialité :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan
par

Fabrice GATUINGT

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Sujet de la thèse :
PRÉVISION DE LA RUPTURE DES OUVRAGES EN BÉTON SOLLICITÉS EN DYNAMIQUE RAPIDE

Thèse soutenue le 9 Décembre 1999 devant le jury composé de :

M. REYNOUARD	J.M.	Président du Jury
M. BAILLY	P.	Rapporteur
M. SLUYS	L.J.	Rapporteur
M. BOUET	T.	Examinateur
M. GARY	G.	Examinateur
M. IBRAHIMBEGOVIC	A.	Examinateur
M. PIJAUDIER-CABOT	G.	Directeur de thèse
M. ROPARS	H.	Membre invité

LMT CACHAN
(ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6)
61 Avenue Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

En essayant continuellement on finit par réussir.
Donc : plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.
Jacques Rouxel, Les devises Shadok

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan avec le soutient tant scientifique que financier du réseau de laboratoire GEO et de la société TDA.

Quand on débute une thèse on ne sait pas toujours à quoi l'on s'engage. Je dois avouer que pour ma part elle a commencé par la naissance de mon fils, Antoine, ce qui m'a permis de relativiser beaucoup de choses et principalement la juste place que doit prendre le travail dans la vie d'une personne. Néanmoins le résultat est là et ce mémoire en est la parfaite illustration. La première personne que je voudrais donc remercier ici est ma femme, pour Antoine et pour son soutient lors de ces trois années.

Je tiens à remercier Gilles PIJAUDIER-CABOT pour m'avoir proposé ce sujet et dirigé tout au long de cette étude, ainsi que Nicolas BURLION pour m'avoir donné de bonnes bases de travail.

J'exprime ici aussi toute ma gratitude à Jean-Marie REYNOUARD pour l'honneur qu'il m'a fait en étant président du jury, à Patrice BAILLY et Bert SLUYS pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail, ainsi qu'à Thierry BOUET, Gérard GARY et Adnan IBRAHIMBEGOVIC pour avoir été examinateurs de ce mémoire et de sa soutenance. Merci également à Henri ROPARS d'avoir représenté la société TDA lors de la soutenance.

J'en profite pour remercier ici tous ceux (pas toujours du LMT) qui concourent à la bonne ambiance du labo (principalement autours du bar), ce qui permet de faire avancer une thèse de façon très efficace. Merci également à mes deux ex-camarades de bureau, Arno et Fredo, pour m'avoir fait remarquer, dès le lendemain de leur soutenance, qu'ils avaient terminé et qu'un été entier à rédiger était une expérience inoubliable. Sur ce dernier point ils avaient raison. Merci PAB, DD et Sylvain de m'avoir fait profiter de votre grande expérience pour préparer la soutenance. Et enfin, place aux jeunes qui vous poussent toujours un peu plus vers la sortie et auxquels je voudrai dire : " Bruno, Stéphane, Sylvie et les autres, bon courage vous verrez c'est tellement bien quand on a fini ... ".

Table des matières

Préambule **19**

Introduction **21**

1 Dynamique et comportement du béton **25**

1.1 Modèles macroscopiques pour le béton en dynamique 26

1.2 Problème de localisation des déformations 41

1.3 Spécificités liées à la dynamique rapide 45

1.4 Conclusions 50

2 Modèle plastique endommageable **55**

2.1 Introduction 56

2.2 Modèle de comportement 58

2.3 Endommagement de compression et plasticité 61

2.4 Intégration temporelle de la loi de comportement 73

2.5 Conclusions 78

3 Caractérisation expérimentale de la compaction dynamique des bétons **83**

3.1 Données expérimentales 84

3.2 Principe de la compaction dynamique 92

3.3 Résultats expérimentaux obtenus 101

3.4 Comparaison statique–dynamique 114

3.5 Conclusions 116

4 Modèle viscoplastique–visco-endommageable **119**

4.1 Méthodes d'homogénéisation 120

4.2 Modèle visco-endommageable 125

4.3 Modèle viscoplastique 135

4.4 Couplage des modèles viscoplastique et visco-endommageable 142

4.5 Intégration temporelle 146

4.6 Conclusions 146

5 Simulations numériques **149**

5.1 Simulation des essais de compaction dynamique 150

5.2 Simulation d'un essai de traction par écaillage 157

5.3 Simulation d'un essai d'explosion au contact 162

5.4 Perspective : simulation d'un essai de perforation 173

5.5 Conclusions 175

Bibliographie **181**

Annexe 1 : Méthodes d'homogénéisation **191**

Liste des tableaux

1.1 Les variables d'état et leurs variables associées. 30

2.1 Valeurs des paramètres du modèle obtenues pour le MB50. 70

3.1 Composition du MB50 102

5.1 Paramètres de la loi JWL pour le V401 167

Table des figures

1 Chargement impulsionnel et moyens d'essais correspondants (d'après [Georgin 98]) 22

2 Différents phénomènes observés lors d'un impact ([Le Nard 99] d'après [Kennedy 76]) 22

1.1 Visualisation du critère de Drücker-Prager 35

1.2 Visualisation du critère de Willam-Warnke (d'après [Le Nard 99]) 36

1.3 Loi d'état et loi de comportement déviatorique utilisées par Le Vu [Le Vu 98] 47

1.4 Représentation du couplage des critères de Drücker–Prager et Rankine dans l'espace des contraintes (d'après [Georgin 98]) 48

1.5 Évolution des deux critères de rupture dans le plan des deux premiers invariants (d'après [Le Nard 99]) 50

2.1 Représentation du critère de Gurson dans le plan $\sqrt{3J_2}/\sigma_M$ en fonction de I_1/σ_M 63

2.2 Critère de Gurson modifié en fonction de la porosité pour $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ 64

2.3 Influence des paramètres du critère de Gurson modifié 65

2.4 Évolution de f^* en fonction de la trace des déformations plastiques pour différentes valeurs de k 67

2.5 Calibration du modèle pour le MB50 69

2.6 Traction uniaxiale et triaxiale 71

2.7 Évolution du module d'Young en fonction de la déformation volumique dans un cas de compression hydrostatique suivis d'une traction hydrostatique . . 71

2.8 Influence du paramètre k sur le comportement hydrostatique 72

2.9 Réponse du modèle en compression uniaxiale avec une décharge élastique . 72
2.10 Comportement en compression simple pour différents incréments de déformation 77
2.11 Courbes de comportement pression–volume obtenues pour différents incréments de déformation 78

3.1 Schéma de principe des barres de Hopkinson 85
3.2 Augmentation de la résistance à la compression en fonction de la vitesse de déformation (d'après [Bischoff et Perry 91]) 85
3.3 Schéma simplifié des barres de Hopkinson pour les essais de traction directe à haute vitesse (d'après [Toutlemonde 94]) 88
3.4 Schéma de la barre de Hopkinson pour les essais de traction par écaillage (d'après [Brara et Klepaczko 97]) 88
3.5 Augmentation de la résistance à la traction en fonction de la vitesse de déformation (d'après [Brara et Klepaczko 97]) 89
3.6 Influence des effets "inertiels" sur le chargement unidimensionnel 90
3.7 Seuil de rupture en sollicitation biaxiale obtenu expérimentalement par divers auteurs (d'après [Mazars 84]) 91
3.8 Augmentation de la résistance à la compression avec un "faible" confinement (d'après [Gary et Bailly 98]) 91
3.9 Dispositif expérimental pour un essai plaque-plaque (d'après [Le Vu 98]) . 92
3.10 Comportement pression-volume pour un béton (d'après [Le Vu 98]) 93
3.11 Théorie simplifiée des barres de Hopkinson 94
3.12 "Gonflement" dû au coefficient de Poisson lors d'un essai de compression simple 96
3.13 Échantillon de béton confiné 97
3.14 Échantillon de béton confiné mis en place entre les barres 98
3.15 Échantillon de béton confiné avec la jauge de déformation radiale 98
3.16 Déformation radiale de la cellule en acier en fonction du temps 99
3.17 Enregistrement pour un essai type 100

3.18 Mesures de type structure 100
3.19 Géométrie des essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 50$ mm) 102
3.20 Courbes vitesse de déformation axiale en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 50$ mm) 103
3.21 Courbes contrainte-déformation pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 50$ mm) 104
3.22 Courbes déformation radiale de la cellule en acier en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 50$ mm) 105
3.23 Comportement "pression-volume" du MB50 pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 50$ mm) 105
3.24 Comportement "pression-volume" du MB50 pour un essai quasi–œdométrique statique ($\phi = 80$ mm) 106
3.25 Géométrie des essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm) 107
3.26 Courbes vitesse de déformation axiale en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en acier) 108
3.27 Courbes contrainte-déformation pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en acier) 108
3.28 Courbes déformation radiale de la cellule en acier en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en acier) 109
3.29 Comportement "pression-volume" du MB50 pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en acier) 110
3.30 Courbes vitesse de déformation axiale en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en laiton) . . . 111
3.31 Courbes contrainte-déformation pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en laiton) 111
3.32 Courbes déformation radiale de la cellule en acier en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en laiton) 112

3.33 Comportement "pression-volume" du MB50 pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en laiton) 113

3.34 Comparaison des comportements sphériques obtenus pour les différentes géométries 113

3.35 Courbes pression-volume pour le MB50 en statique 114

3.36 Comparaison statique–dynamique pour le comportement sphérique du MB50 115

4.1 Comparaison des différentes méthodes d'homogénéisation lorsque le coefficient de Poisson de la matrice ν_m est égal à 0,2 124

4.2 Influence du paramètre a_t sur le comportement en traction quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $b_t = 1,6$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $m_{D_t} = 0,5.10^{-4}$ et $n_{D_t} = 5$ . . 127

4.3 Influence du paramètre b_t sur le comportement en traction quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_t = 20000$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $m_{D_t} = 0,5.10^{-4}$ et $n_{D_t} = 5$. 128

4.4 Influence du paramètre m_{D_t} sur le comportement en traction quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_t = 20000$, $b_t = 1,6$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$ et $n_{D_t} = 5$ 129

4.5 Influence du paramètre n_{D_t} sur le comportement en traction quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_t = 20000$, $b_t = 1,6$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$ et $m_{D_t} = 0,5.10^{-4}$. 129

4.6 Influence du paramètre a_c sur le comportement en compression quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $b_c = 4$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $m_{D_c} = 0,5.10^{-3}$ et $n_{D_c} = 20$ 131

4.7 Influence du paramètre b_c sur le comportement en compression quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_c = 4000$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $m_{D_c} = 0,5.10^{-3}$ et $n_{D_c} = 20$. 131

4.8 Influence du paramètre m_{D_c} sur le comportement en compression quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_c = 4000$, $b_c = 4$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$ et $n_{D_c} = 20$. 132

4.9 Influence du paramètre n_{D_c} sur le comportement en compression quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_c = 4000$, $b_c = 4$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$ et $m_{D_c} = 0,5.10^{-3}$ 133

4.10 Réponse du modèle de comportement pour une sollicitation de traction à différentes vitesses de déformation 134

4.11 Réponse du modèle de comportement pour une sollicitation de compression à différentes vitesses de déformation 135
4.12 Influence du paramètre d'écrouissage n de la matrice sur la réponse hydrostatique du modèle 137
4.13 Influence de la limite élastique de la matrice σ_y sur la réponse hydrostatique du modèle 138
4.14 Influence du paramètre m_{vp} sur la réponse hydrostatique du modèle ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) 139
4.15 Influence du paramètre n_{vp} sur la réponse hydrostatique du modèle ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) 139
4.16 Influence du paramètre n_{vp} sur la réponse hydrostatique du modèle pour différentes vitesses de chargement 140
4.17 Évolution de la porosité pour différentes vitesses de chargement 141
4.18 Calibration du paramètre de viscosité sur la réponse pression-volume du modèle 142
4.19 Couplage du modèle viscoplastique et visco-endommageable dans le cas d'un chargement de compression simple dynamique 144
4.20 Réponse du modèle couplé dans le cas d'un chargement de compression hydrostatique suivi d'une traction hydrostatique pour un chargement statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) et un chargement dynamique ($\dot{\varepsilon} = 1\ s^{-1}$) 145

5.1 Maillage de l'échantillon de béton confiné 150
5.2 Comparaison des forces sortantes expérimentales et simulées pour le confinement en acier (vitesse de l'impacteur 6 m/s) 152
5.3 Comparaison des forces sortantes expérimentales et simulées pour le confinement en acier (vitesse de l'impacteur 12 m/s) 153
5.4 Comparaison des forces sortantes expérimentales et simulées pour le confinement en acier (vitesse de l'impacteur 20 m/s) 154
5.5 Comparaison des forces sortantes expérimentales et simulées pour le confinement en laiton (vitesse de l'impacteur 6 m/s) 154

5.6 Comparaison des forces sortantes expérimentales et simulées pour le confinement en laiton (vitesse de l'impacteur 12 m/s) 155
5.7 Comparaison des forces sortantes expérimentales pour le confinement en acier (vitesse de l'impacteur 6, 12 et 20 m/s) 156
5.8 Comparaison des forces sortantes simulées pour le confinement en acier (vitesse de l'impacteur 6, 12 et 20 m/s) 156
5.9 Principe expérimental de la traction par écaillage 157
5.10 Maillage Élément Fini de l'échantillon de béton soumis à de la traction par écaillage 157
5.11 Évolution de la contrainte axiale dans l'échantillon pour 2 instants différents159
5.12 Évolution de l'endommagement dans l'échantillon pour 2 instants différents 159
5.13 Influence du critère d'érosion de traction sur la rupture ($D_1 < D_2 < D_3$) . 160
5.14 Influence du critère d'érosion de traction sur la vitesse de la face non impactée161
5.15 Descriptif du dispositif expérimental d'explosion au contact 162
5.16 Maillage "3D" de l'explosion au contact 163
5.17 Maillage "2D" de l'explosion au contact 163
5.18 Maillage "2D" de l'explosion au contact (Vue en plan) 164
5.19 Évolution de l'endommagement dans le béton ($\phi = 32$ mm) 166
5.20 Évolution de la porosité dans le béton ($\phi = 32$ mm) 168
5.21 Évolution de l'endommagement dans le béton ($\phi = 32$ mm) 169
5.22 Évolution de la contrainte axiale sur le plan 1 en fonction du temps 171
5.23 Évolution de la contrainte axiale sur le plan 2 en fonction du temps 171
5.24 Évolution de la contrainte axiale sur le plan 3 en fonction du temps 172
5.25 Comparaison entre la simulation avec le modèle viscoplastique ($k = 15$) et l'expérimentation pour la contrainte axiale sur les 3 plans en fonction du temps 173
5.26 Simulation avec le modèle viscoplastique de la perforation 174
27 Homogénéisation d'un milieu hétérogène 193

28 Champs de déformation et de contraintes moyens dans les différentes phases par la méthode de Mori-Tanaka 196

Préambule

Le document présenté ici n'est qu'une version simplifiée du document que les rapporteurs et les membres du jury ont eu à juger. Ce travail était en effet l'objet d'un contrat entre le LMT Cachan et la société TDA qui n'a pas souhaité que tous les résultats obtenus soient diffusés. Vous ne pourrez donc pas, par exemple, trouver dans ce document les parties concernant l'identification des modèles proposés. Vous ne pourrez également pas trouver la plus grande partie de ce travail qui concernait l'implantation numérique de ceux-ci dans le code de calcul aux éléments finis LS-DYNA3D. Je m'en excuse par avance.

Introduction

Si le béton est un matériau de construction couramment utilisé, son comportement en dynamique rapide est relativement mal connu. Ce problème est d'autant plus important que bon nombre de structures en béton peuvent être soumises à ce type de sollicitation. Nous pouvons par exemple citer : l'impact de véhicule sur des ouvrages d'art, le crash d'avion sur une centrale nucléaire, des explosions liées à des actes accidentels ou terroristes et des applications militaires (voir figure 1).

Nous voyons donc que c'est un sujet de recherche qui intéresse à la fois la communauté scientifique "civile" et "militaire". C'est ainsi que plusieurs industriels et laboratoires de recherche se sont regroupés au sein du réseau de laboratoires GEO (Géomatériaux Environnement Ouvrages) et plus particulièrement au sein du groupe "Comportement des ouvrages en dynamique rapide" dirigé par Patrice Bailly. Ce groupe avait pour objectif de caractériser expérimentalement le comportement dynamique du béton sous différents types de chargement et de proposer des modèles de comportement capables de les représenter. Ce travail de thèse s'intègre dans ce groupe de travail et a été soutenu par la société T.D.A.

Dans une structure en béton soumise à un choc ou à un impact, par exemple une dalle en béton, le matériau est soumis à différents états de contraintes qui conduisent à plusieurs modes de rupture et de déformation (voir figure 2). Près de l'impacteur, un état de forte compression hydrostatique est observé. Cet état de contrainte produit un effet de compaction irréversible du matériau. Lorsque l'on s'éloigne de la zone d'impact, le confinement diminue et le matériau subit une compression avec un état de contrainte faiblement triaxial. Finalement, l'onde de compression peut se refléter sur un bord libre et

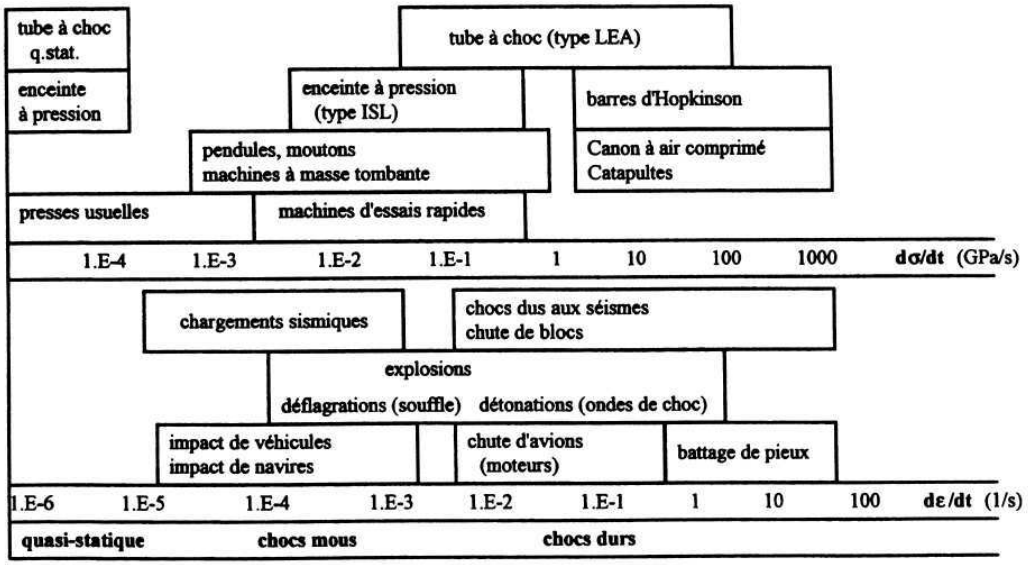


FIG. 1 – *Chargement impulsionnel et moyens d'essais correspondants (d'après [Georgin 98])*

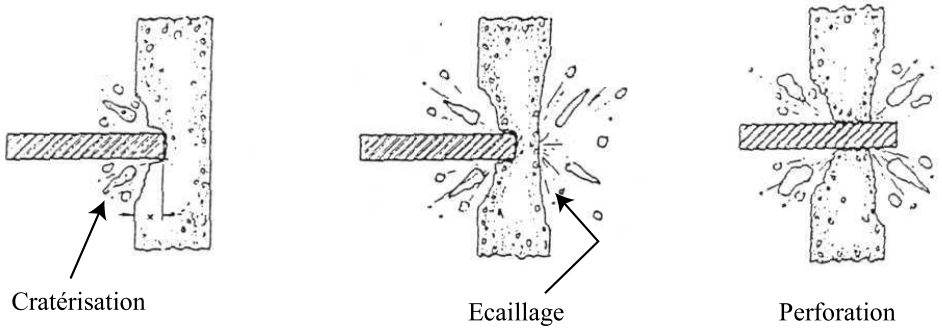


FIG. 2 – *Différents phénomènes observés lors d'un impact ([Le Nard 99] d'après [Kennedy 76])*

devenir une onde de traction qui, par interaction avec l'onde de compression, produit une écaille de béton. Une des difficultés de la modélisation sera d'être capable de représenter tous ces phénomènes.
Nous présenterons et discuterons de plusieurs approches qui permettent de prendre en compte ces divers phénomènes, sans toutefois avoir la prétention d'apporter la solution idéale pour chacun d'eux pris indépendamment des autres.

Pour cela, nous proposons dans ce manuscrit le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous proposerons quelques rappels sur les bases des modèles de comportement, suivis d'une revue de modèles de comportement du béton, dont certains sont particulièrement adaptés aux sollicitations dynamiques. Ensuite, le phénomène de localisation des déformations et les problèmes qu'il engendre dans les simulations numériques, seront présentés. Enfin nous verrons les spécificités liées aux simulations numériques de problèmes de dynamique rapide.

Le deuxième chapitre présente un modèle de comportement issu de la mécanique des milieux poreux. Ce modèle a été présenté pour la première fois par Burlion dans sa thèse [Burlion 97] et nous en présenterons ici une approche simplifiée, ainsi que les développements qui ont été menés afin de réaliser son implantation numérique — fondée sur un schéma d'intégration explicite — dans le code de calcul aux éléments finis LS-DYNA3D.

Le troisième chapitre est consacré au comportement expérimental du béton en dynamique rapide. Différents essais seront présentés, dont certains ont été développés dans le cadre du réseau GEO. Dans ce chapitre sera également présenté un nouvel essai de compaction dynamique, fondé sur les barres de Hopkinson, qui a permis de mettre en évidence un effet de vitesse sur le comportement sphérique du béton.

Le quatrième chapitre présente une modélisation originale qui permet de prendre en compte les observations expérimentales réalisées au sein du réseau de laboratoires. Ainsi, nous allons dans ce chapitre proposer un modèle viscoplastique et visco-endommageable

(prise en compte des effets de vitesse) basé lui aussi sur la mécanique des milieux poreux, mais faisant intervenir la porosité de manière plus classique que dans le chapitre 2 par l'intermédiaire d'une méthode d'homogénéisation. Son implantation numérique — également fondée sur un schéma d'intégration explicite — dans le code de calcul aux éléments finis LS-DYNA3D sera présentée.

Dans le cinquième et dernier chapitre, les modèles de comportement développés aux chapitres précédents vont être testés et validés par différentes simulations numériques. Les premières simulations se rapportent aux essais qui ont permis de caler les paramètres du modèle, ceci afin de tester l'implantation numérique et le domaine de validité des deux modèles. Une autre série de simulations permettra de vérifier sur un calcul de structure plus complexe la validité des modèles de comportement. Nous simulerons pour cela une explosion au contact sur une dalle, ainsi que la perforation d'une dalle en béton par un projectile en acier.

Nous terminerons ce manuscrit par une conclusion et quelques perspectives à ce travail.

Chapitre 1

Dynamique et comportement du béton

1.1 Modèles macroscopiques pour le béton en dynamique 26
1.1.1 Objectifs de la modélisation 26
1.1.2 Modèles de plasticité pour le béton 33
1.1.3 Modèles de viscoplasticité pour le béton en dynamique 37
1.1.4 Modèles d'endommagement, visco–endommagement 39
1.2 Problème de localisation des déformations 41
1.2.1 Localisation des déformations 42
1.2.2 Limiteurs de localisation 43
1.3 Spécificités liées à la dynamique rapide 45
1.3.1 Modèle de comportement "hydrodynamique" 47
1.3.2 Modèles viscoplastiques spécifiques à la dynamique rapide . . . 48
1.4 Conclusions 50

Dans ce chapitre, nous proposons quelques rappels sur les bases des modèles de comportement suivis, d'une revue de modèles de comportement du béton, certains étant adaptés aux sollicitations dynamiques. Ensuite, le phénomène de localisation des déformations et les problèmes qu'il engendre dans les simulations numériques, seront présentés. Enfin nous verrons les spécificités liées aux simulations numériques de problèmes de dynamique rapide. Ce chapitre ne prétend pas être exhaustif, son but est d'introduire des notions et des résultats qui seront utiles pour la suite du document.

1.1 Modèles macroscopiques pour le béton en dynamique

1.1.1 Objectifs de la modélisation

Lorsqu'on soumet un milieu continu à des sollicitations extérieures (mécaniques et/ou thermiques), il en résulte un changement de sa position et de son état thermomécanique. Ces changements diffèrent selon le milieu physique que l'on étudie. Les lois de comportement sont les lois qui régissent la réaction du milieu aux sollicitations extérieures et complètent les équations du mouvement (avec leurs conditions initiales) afin de résoudre le problème posé.

Nous pouvons donc dire que représenter un comportement consiste à traduire, mathématiquement et le plus fidèlement possible, la réponse d'un matériau à une sollicitation mécanique et/ou thermique.

Concernant les lois de comportement s'appliquant à la mécanique, plusieurs approches sont possibles :

- Les modèles analogiques, qui décrivent, sur la base de comportements élémentaires unidimensionnels (ressort, amortisseur, patin), les propriétés uniaxiales des matériaux. Ces modèles sont généralement simples, cependant le passage à un comportement tridimensionnel est délicat, ce qui en restreint l'utilisation.
- Les modèles de comportement provenant de lissage de courbes expérimentales. Ces modèles sont performants dans la description des essais qui ont permis leur "iden-

tification" mais ne permettent malheureusement pas une description générale du comportement d'un matériau. En effet, ces modèles de comportement ne s'appuient sur aucune théorie qui permettrait de les étendre à d'autres chargements que ceux qui ont été utilisés pour leur identification.

– Les modèles phénoménologiques — qui décrivent des phénomènes physiques — qui ont pour objectif, quelque soit le chargement appliqué pourvu que les phénomènes qu'ils modélisent soient actifs, d'être représentatifs du comportement. L'origine physique de ces phénomènes est toujours microscopique (glissement de plans cristallins, fermeture de la porosité, ouverture de micro-fissures, ...), tandis que la description mathématique qui en est faite peut être soit "micro", soit "macro" en considérant le milieu comme un milieu continu. Ces modèles sont performants pour la description de multiples phénomènes mais ont, malheureusement, une complexité accrue à mesure que le nombre de phénomènes décrits augmente.

C'est à ce dernier type de description du comportement que nous allons nous intéresser.

Les modèles phénoménologiques doivent être capables de décrire les mécanismes réversibles (déplacement relatif et réversible d'atomes, de molécules ou de grains : tout relâchement de sollicitation conduit à retrouver la position initiale), les mécanismes irréversibles (glissement de plans cristallins faisant apparaître des déformations permanentes, endommagement par microfissuration), les désordres et les éventuels effets tridimensionnels. Leur formulation s'effectue selon deux formalismes différents :

– Approche "fonctionnelle" : l'état d'un système est déterminé par l'histoire de "variables observables". Chacune des variables est déterminée par son état à l'instant initial et par l'histoire du chargement entre cet état initial et l'état actuel.

– Approche thermodynamique liée à l'utilisation de variables d'état, "observables" ou "internes", qui permettent de définir à tout instant l'état du système à partir de leurs valeurs actuelles.

C'est cette seconde approche que nous utiliserons. Elle est subordonnée à l'utilisation de la méthode de l'état local, qui suppose que l'évolution des quantités strictement thermodynamiques s'effectue de façon quasi-thermostatique (succession d'états d'équilibres)

et ne dépend que du point considéré. Nous nous intéresserons plus particulièrement au cadre thermodynamique [Lemaitre et Chaboche 92] et aux formes physiquement admissibles qui peuvent être données aux modèles de comportement. Les développements qui seront faits ici ne concerneront que les transformations infinitésimales[1]. Deux principes doivent toujours être vérifiés :

Premier principe : il traduit la conservation de l'énergie. Considérons un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ intérieur au milieu continu étudié. La conservation de l'énergie se traduit par l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt}[E_i + K] = \frac{d}{dt}[W_e] + Q \tag{1.1}$$

où t désigne le temps, E_i est l'énergie interne, K est l'énergie cinétique, W_e est le travail des efforts extérieurs, Q est l'énergie calorifique reçue.

L'énergie interne du système considéré peut s'exprimer de la manière suivante :

$$E_i = \int_\Omega \rho e_i dV \tag{1.2}$$

où Ω est le volume du solide, ρ sa masse volumique et e_i l'énergie interne spécifique.

L'énergie cinétique du système considéré peut s'exprimer de la manière suivante :

$$K = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\vec{v}\cdot\vec{v}dV \tag{1.3}$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse.

De même, nous pouvons exprimer la puissance des efforts extérieurs comme la dérivée par rapport au temps du travail des efforts extérieurs :

$$\frac{dW_e}{dt} = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}dV + \int_{\partial\Omega}\vec{T}.\vec{v}dS \tag{1.4}$$

où $\vec{f}$ est le vecteur des actions volumiques, $\vec{T}$ est le vecteur des forces extérieures.

1. Si tel n'était pas le cas nous pouvons envisager une description Eulérienne à l'aide du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma(\vec{x},t)$ et du tenseur taux de déformation $d(\vec{x},t)$, ou une description Lagrangienne en utilisant le tenseur des contraintes de Piola-Kirschoff $\pi(\vec{x},t)$ et le tenseur des déformations de Green-Lagrange $e(\vec{x},t)$ par exemple

Et enfin, Q le taux de chaleur reçu par le domaine Ω qui comprend un terme lié à une production de chaleur interne au domaine Ω et un terme lié à la chaleur reçue par conduction à travers la surface $\partial\Omega$:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\Omega} r dV - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS \tag{1.5}$$

où r est la densité volumique de production de chaleur interne, $\vec{q}$ le vecteur courant de chaleur, $\vec{n}$ le vecteur normal à dS.
En remplaçant toutes ces expressions dans l'équation de conservation de l'énergie (1.1), nous pouvons écrire la forme locale du premier principe :

$$\rho \dot{e}_i = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \mathrm{div}\vec{q} \tag{1.6}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy, $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations défini par la partie symétrique du tenseur du gradient du déplacement $\vec{u}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{grad}\vec{u} + {}^{t}\boldsymbol{grad}\vec{u}\Big)$.

Deuxième principe : il traduit le fait que la variation d'entropie S est supérieure ou égale au taux de chaleur reçu Q, rapporté à la température T.

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{1}{T}\frac{dQ}{dt} \tag{1.7}$$

L'entropie S exprime une variation d'énergie associée à une variation de température**.** Elle est reliée, pour un domaine Ω, à la densité d'entropie spécifique s par la relation :

$$S = \int_{\Omega} \rho s dV \tag{1.8}$$

L'équation 1.7 peut alors se mettre sous la forme suivante, en utilisant le théorème de la divergence ainsi que l'équation 1.5 et l'équation 1.8 :

$$\int_{\Omega} \Big(\rho \frac{ds}{dt} + div\frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T}\Big) dV \geq 0 \tag{1.9}$$

En remplaçant r par son expression tirée de l'équation de conservation de l'énergie (équation 1.6), on peut en déduire la forme locale du deuxième principe :

$$\rho\big(T\dot{s} - \dot{e}_i\big) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \vec{q} \cdot \frac{\vec{\mathrm{grad}}T}{T} \geq 0 \tag{1.10}$$

Variables d'état observables	internes	variables associées
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$		$\boldsymbol{\sigma}$
T		s
	V_i	V_a

TAB. 1.1 – *Les variables d'état et leurs variables associées.*

L'inégalité de Clausius-Duhem s'obtient en introduisant une nouvelle variable, l'énergie libre spécifique Ψ :

$$\Psi = e_i - Ts \tag{1.11}$$

En utilisant la forme locale du deuxième principe (équation 1.10), et en introduisant le potentiel énergie libre spécifique ou potentiel d'état thermodynamique, nous arrivons à l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\Psi} + \dot{T}s) - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\text{grad}}T}{T} \geq 0 \tag{1.12}$$

Cette inéquation, qui doit toujours être vérifiée, traduit la dissipation Φ au sein du matériau ; cette dissipation doit toujours être positive ou nulle pour que les processus définis par ces évolutions soient thermodynamiquement admissibles.

Potentiel thermodynamique : Afin de représenter l'état thermodynamique d'un système, nous postulons que celui-ci peut être représenté par les valeurs locales d'un certain nombre de variables d'état. Les variables d'état que nous allons introduire sont soit des variables observables (température, déformation réversible), soit des variables internes. Les variables internes permettent de prendre en compte l'histoire du chargement lorsque des phénomènes irréversibles sont apparus (endommagement, déformations plastiques) (tableau 1.1). Ayant défini les variables d'état, nous supposons l'existence d'un potentiel thermodynamique sous la forme $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^{rev}, T, V_i)$ où $\boldsymbol{\varepsilon}^{rev}$ est le tenseur des déformations réversibles et V_i les autres variables internes du problème. De l'inégalité de Clausius-Duhem (équation 1.12) on peut déduire :

$$\Big(\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{rev}}\Big) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{rev} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr} - \rho\Big(s + \frac{\partial\Psi}{\partial T}\Big)\dot{T} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial V_i}\dot{V}_i - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{grad}T \geq 0 \tag{1.13}$$

À partir de cette inégalité qui doit être respectée, en ne considérant que les transformations réversibles, on en déduit les lois de la thermoélasticité :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{rev}} \\ s &= -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \\ V_a &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \end{aligned} \tag{1.14}$$

L'ensemble de ces égalités forme les lois d'états. En pratique le potentiel thermodynamique n'est pas une grandeur mesurable, ce sont les variables observables qui le sont et donc, l'expérimentation permettra d'établir directement les lois d'état, le potentiel ne servant que de cadre à l'écriture du modèle.

Potentiel de dissipation : À l'aide des lois d'état (équation 1.14) on peut réécrire l'inégalité de Clausius-Duhem (équation 1.12) en ne conservant que les termes qui ne s'annulent pas :

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \dot{V}_i - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{grad} T \geq 0 \tag{1.15}$$

On admet généralement le découplage entre la dissipation mécanique et la dissipation thermique :

$$\Phi \geq 0 \Longleftarrow \begin{cases} \Phi_m = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \dot{V}_i \geq 0 & \text{dissipation mécanique} \\ \Phi_{th} = -\frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{grad} T \geq 0 & \text{dissipation thermique} \end{cases} \tag{1.16}$$

Pour définir les lois représentatives des processus dissipatifs, il peut s'avérer intéressant de postuler l'existence d'un potentiel de dissipation :

$$\varphi\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr}, \dot{\boldsymbol{V}}_i, \frac{\vec{q}}{T}\right) \tag{1.17}$$

Les lois d'évolution associées à ce potentiel s'expriment alors par la propriété de normalité :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \varphi}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr}} \\ A_i &= -\frac{\partial \varphi}{\dot{\boldsymbol{V}}_i} \\ \vec{g} &= -\frac{\partial \varphi}{\frac{\vec{q}}{T}} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Si on utilise la transformée de Legendre-Fenchel[2], on peut définir le potentiel $\varphi^\star(\boldsymbol{\sigma}, A_i, \vec{g})$ dual de $\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr}, \dot{\boldsymbol{V}}_i, \frac{\vec{q}}{T})$. À partir de l'expression du potentiel dual, on peut obtenir de façon simple les propriétés de normalité qui nous permettent d'écrire les lois complémentaires d'évolution suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr} &= \frac{\partial \varphi^\star}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ -\dot{\boldsymbol{V}}_i &= \frac{\partial \varphi^\star}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ -\frac{\vec{q}}{T} &= \frac{\partial \varphi^\star}{\partial \vec{g}} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Cette règle de normalité est suffisante pour vérifier le second principe, elle n'est cependant pas nécessaire. Les matériaux qui suivent ces règles sont appelés matériaux standards généralisés et ceux ne respectant que la première égalité $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr} = \frac{\partial \phi^\star}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ sont nommés matériaux standards. C'est cette première relation qui conduit aux lois de la plasticité ou de la viscoplasticité, la seconde exprime les lois d'évolution des variables internes, tandis que la troisième conduit à la loi de Fourrier en thermostatique. De façon identique au potentiel thermodynamique, le potentiel de dissipation est quasiment inaccessible à la mesure, les expérimentations qui pourront être menées conduiront donc directement aux évolutions ci-dessus (équation 1.19), le potentiel ne servant que de cadre théorique à l'écriture du modèle.

Nous avons vu au chapitre d'introduction quels étaient les phénomènes physiques et microstructuraux à prendre en compte pour la modélisation (déformations irréversibles, endommagement de traction et compaction). Avant de développer un nouveau modèle de comportement (voir chapitre 2), nous allons présenter quelques modèles de comportement existants. Ces modèles permettent, une fois la phase élastique dépassée, de modéliser les déformations irréversibles par l'intermédiaire de modèles de plasticité, la dégradation en

2. Transformée de Legendre-Fenchel :

$$\varphi^\star(\boldsymbol{\sigma}, A_i, \vec{g}) = Sup_{\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr}, \dot{\boldsymbol{V}}_i, \frac{\vec{q}}{T}\right)} \left(\left[\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \dot{V}_i - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{grad} T \right] - \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{irr}, \dot{\boldsymbol{V}}_i, \frac{\vec{q}}{T}) \right)$$

traction par l'intermédiaire de modèles d'endommagement et de prendre en compte des effets de vitesse par de la viscosité.

1.1.2 Modèles de plasticité pour le béton

Les modèles de plasticité ont été développés, à l'origine, pour représenter le comportement de matériaux présentant des déformations irréversibles importantes devant les déformations élastiques ; les matériaux visés ici sont les métaux.

Pour les modèles de comportement fondés sur un comportement plastique avec possibilité d'écrouissage, l'énergie libre spécifique est définie comme une fonction de la déformation totale ε, de la déformation plastique ε^{irr} et des variables d'écrouissage χ (qui modélisent les évolutions des déformations irréversibles).

$$\Psi\left(\varepsilon, \varepsilon^{irr}, \chi\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{irr}\right) : \boldsymbol{C} : \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{irr}\right) + U(\chi) \tag{1.20}$$

où $\boldsymbol{C}$ représente le tenseur d'élasticité de Hooke et $U(\chi)$ est une fonction d'évolution des variables d'écrouissage. En dérivant l'équation 1.20 selon les lois d'état (équation 1.14) on obtient la relation classique de l'élasto-plasticité :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{irr}) \tag{1.21}$$

Si nous considérons que nous nous trouvons dans un cas isotrope, nous obtenons pour le modèle de comportement la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = K(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{irr})\delta_{ij} + 2G(e_{ij} - e_{ij}^{irr}) \tag{1.22}$$

où K et G sont respectivement le module de compressibilité et le module de cisaillement, δ_{ij} le symbole de Kronecker et $\boldsymbol{e}$ la partie déviatorique du tenseur des déformations définie par :

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{1.23}$$

À partir de là, il ne reste plus qu'à définir les évolutions des déformations irréversibles. Pour cela nous sommes amenés à définir un domaine C_E dans lequel le comportement reste

élastique, la limite d'élasticité est alors définie par un "critère de plasticité". Cette surface $f(\boldsymbol{\sigma}, V_i) = 0$ est appelée surface de charge ou surface d'écoulement et, afin de décrire complètement la possibilité d'écoulement, il faut définir un critère de charge-décharge. L'écoulement se produit si deux conditions sont réunies simultanément :

- le point représentatif de l'état de contrainte est sur la surface, c'est-à-dire $f = 0$
- la condition de consistance est vérifiée $\mathrm{d}f = 0$

Dans le cadre général de la thermodynamique on a postulé l'existence d'un potentiel de dissipation qui permet d'obtenir, pour les matériaux standards généralisés, les évolutions des déformations irréversibles ε_{ij}^{irr} et des variables internes V_i . Dans le cadre de la plasticité associée, l'utilisation de ce potentiel conduit à définir la surface d'écoulement comme une surface équipotentielle. Dans le cas général de la plasticité il faut définir trois potentiels : le potentiel d'énergie libre Ψ, la surface limite d'élasticité $f = 0$ et une surface potentielle $g = cste$ qui donne la direction de l'écoulement plastique.

L'hypothèse de normalité définie à l'équation 1.18 peut être généralisée (voir [Lemaitre et Chaboche 92]) afin d'obtenir la règle d'écoulement suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{irr} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{1.24}$$

où $g(\boldsymbol{\sigma})$ est le potentiel plastique et $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique que l'on calcule à l'aide de la condition de consistance :

$$\mathrm{d}f = 0. \tag{1.25}$$

Lorsque la règle d'écoulement est associée nous avons $g(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma})$ c'est-à-dire que le potentiel plastique est égal à la fonction seuil, la règle d'écoulement est alors normale à la fonction seuil dans l'espace des contraintes. Il est important de noter que dans le cadre de la modélisation des géomatériaux, la plasticité est en générale considérée comme non associée afin de mieux représenter le comportement dilatant de ceux-ci.

Critère de Drücker-Prager [Drücker et Prager 52]

Les modèles de plasticité ayant été initialement développés pour les métaux, les mécanismes microscopiques représentés sont des mécanismes de cisaillement. Par exemple,

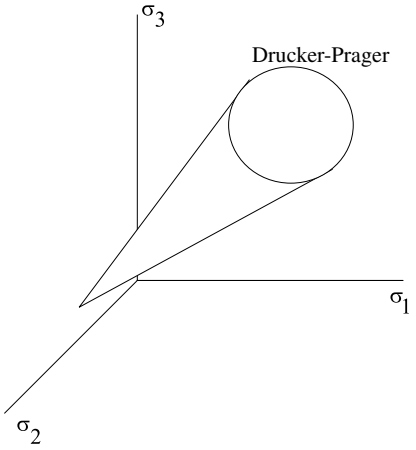


FIG. 1.1 – *Visualisation du critère de Drücker-Prager*

si l'on utilise le critère de Von Mises on obtient un matériau qui est insensible à un chargement hydrostatique (de traction ou de compression). Or, pour un géomatériau, il n'est pas réaliste d'imaginer un chargement de traction hydrostatique sans que le matériau ne subisse aucune transformation. Pour cela, le critère de Von Mises a été modifié afin d'introduire une sensibilité à la pression hydrostatique. On obtient ainsi le critère de Drücker-Prager :

$$f = \sqrt{3J_2} + \alpha I_1 - k = 0 \tag{1.26}$$

où $I_1 = tr\boldsymbol{\sigma}$ est le premier invariant du tenseur des contraintes, $\alpha = \frac{2\sin\phi}{3-\sin\phi}$ et $k = \frac{2c\cos\phi}{3-\sin\phi}$ des paramètres qui dépendent de c la cohésion du matériau et de ϕ son angle de frottement. Une visualisation de ce critère dans l'espace des contraintes principales est donnée en figure 1.1.

On peut trouver dans la littérature d'autres critères de plasticité que ceux classiquement définis pour les métaux. Ces critères, à l'origine des critères de rupture (c'est-à-dire qu'ils représentent un domaine au-delà duquel le matériau est rompu), ont été étendus à la plasticité et sont devenus des surfaces seuils. On peut citer ici, par exemple, la surface seuil de type Ottosen [Ottosen 80] dans laquelle intervient le troisième invariant du déviateur des contraintes (J_3), ou sur le même principe, la surface seuil de type Willam et Warnke [Willam et Warnke 75]. Cette surface seuil est couramment utilisée pour représenter le

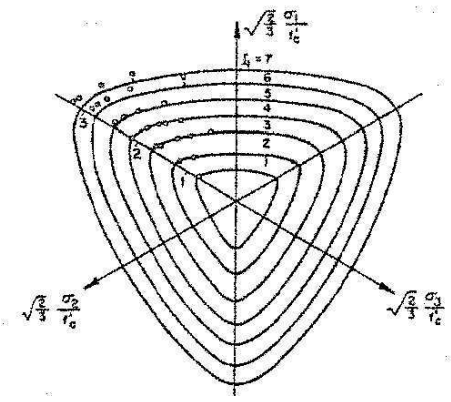


FIG. 1.2 – *Visualisation du critère de Willam-Warnke (d'après [Le Nard 99])*

comportement des bétons sous sollicitations triaxiales.

Critère de Willam–Warnke [Willam et Warnke 75]

Les surfaces de ruptures fondées sur la prise en compte du troisième invariant ont pour formalisme l'équation suivante :

$$r - r_f(\sigma_m - \theta) = 0 \tag{1.27}$$

avec $r = \sqrt{2J_2}$ représente la longueur déviatorique, $\theta = (1/3)cos^{-1}\left(3\sqrt{3}J_3/(2J_2^{1.5})\right)$ est l'angle de Lode et σ_m la contrainte moyenne.

Dans le cas du critère de Willam-Warnke (voir figure 1.2), à cinq paramètres, la fonction $r_f(\sigma_m - \theta)$ prend la forme suivante :

$$r_f(\sigma_m - \theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2)cos\theta + r_c(2r_t - r_c)\Big(4(r_c^2 - r_t^2)cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c\Big)^{1/2}}{4(r_c^2 - r_t^2)cos^2\theta + (r_c - 2r_t)^2} \tag{1.28}$$

où r_c et r_t représentent respectivement les longueurs déviatoriques en compression et en traction pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$. Ces paramètres sont liés à la contrainte moyenne par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2(b_0 - \sigma_m)}}{2b_2} \\ r_t &= \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2(a_0 - \sigma_m)}}{2a_2} \end{aligned} \tag{1.29}$$

où b_0, b_1, b_2, a_0, a_1, a_2 sont des paramètres du matériau avec $a_0 = b_0$.

Les modèles de plasticité, s'ils sont couramment utilisés pour modéliser le béton dans le cadre de sollicitations statiques, sont moins utilisés en dynamique. Dans le cas où l'on souhaite faire intervenir la vitesse de déformation dans la réponse des modèles de comportement, on utilisera plus particulièrement les modèles fondés sur la théorie de la viscoplasticité. En effet, les modèles de viscoplasticité permettent de prendre en compte une influence de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$ dans l'évolution des déformations plastiques, ce qui n'est pas le cas des modèles de plasticité.

1.1.3 Modèles de viscoplasticité pour le béton en dynamique

Dans un modèle de viscoplasticité, l'énergie libre spécifique Ψ, les variables d'état et les surfaces seuils restent définies de façon identique à la théorie de la plasticité. Seules les règles d'écoulement plastiques vont être modifiées. Nous avons vu qu'en théorie de la plasticité un état de contrainte correspondait soit à un état élastique, soit à un état où il reste sur la surface seuil (équations 1.26 et 1.24). Quand on prend en compte l'influence de la vitesse de déformation ceci n'est plus valable car tous les points extérieurs à la surface seuil correspondent au domaine plastique (et non plus uniquement la surface). Nous avons donc la définition suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} \notin C_E \Longleftrightarrow f(\boldsymbol{\sigma}) \geq 0 \tag{1.30}$$

En viscoplasticité, la règle d'écoulement définit l'évolution temporelle des déformations irréversibles $\dot{\varepsilon}^{vp}$ lorsque l'état de contrainte correspond à un état plastique $f(\boldsymbol{\sigma}) \geq 0$. Deux types différents d'écoulement viscoplastique sont couramment utilisés en dynamique : le modèle de Perzyna [Perzyna 66] et le modèle de Duvaut & Lions [Duvaut et Lions 72]. On peut trouver une comparaison de ces deux écoulements dans [Sluys 92].

Viscoplasticité de type Perzyna

Cette théorie présentée par Perzyna en 1966 donne une expression du taux de déformation viscoplastique similaire à celui qu'il aurait été en plasticité[3] :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \text{ avec } \begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{1}{\eta}\Big(\langle f(\boldsymbol{\sigma})\rangle^{+}\Big)^{m} & \text{si } f > 0 \\ \dot{\lambda} = 0 & \text{si } f \leq 0 \end{cases} \tag{1.31}$$

où η, m sont les paramètres de viscosité du matériau et $\dot{\lambda}$ le multiplicateur plastique. Nous pouvons noter que le multiplicateur plastique n'est plus défini par la condition de consistance (équation 1.25) puisque l'état de contrainte n'est plus nécessairement sur la surface seuil. Cette formulation est simple, dans la mesure où elle reste dans l'esprit des formulations plastiques, mais possède néanmoins un inconvénient dans le cas d'un critère de viscoplasticité formé de plusieurs surfaces seuils. Simo *et al.* [Simo *et al.* 88] montrent ainsi que le principe même d'une telle modélisation ne permet pas de distinguer, au début d'un pas de calcul, quelle est la surface seuil active, ce qui s'oppose au bon déroulement de l'intégration numérique de ces modèles.

Viscoplasticité de type Duvaut-Lions

Une approche différente, plus proche dans sa conception de la théorie de la plasticité, a été proposée par Duvaut et Lions [Duvaut et Lions 72] en 1972. Cette théorie est fondée sur la différence qui existe entre les réponses "plastique" et "viscoplastique" du matériau. Le taux de déformation viscoplastique s'exprime alors de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{1}{\eta} C_{ijkl}^{-1}\big(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{p}\big) & \text{si} f > 0 \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = 0 & \text{si} f \leq 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

où C_{ijkl}^{-1} est l'inverse du tenseur d'élasticité, η le paramètre de viscosité et σ_{ij}^{p} représente la projection sur la surface seuil de l'état de contrainte actuel qui vérifie donc la condition de consistance (équation 1.25).

La forme de l'équation 1.32 permet d'associer ce type de viscoplasticité à des surfaces seuils qui présentent des singularités (Drücker-Prager, Mohr-Coulomb, Tresca par exemple) ce qui est impossible avec une viscoplasticité de type Perzyna.

3. La fonction $\langle\rangle^{+}$ est définie par $\langle x\rangle^{+} = \frac{x+|x|}{2}$

1.1.4 Modèles d'endommagement, visco–endommagement

La mécanique de l'endommagement est fondée sur l'introduction d'une nouvelle variable interne D (voir tableau 1.1) représentative de l'état de dégradation du matériau. La mesure de cet état d'endommagement se fait par l'intermédiaire de mesures globales (modification des caractéristiques élastiques par exemple) qui sont plus facilement exploitables en terme de variable d'endommagement [Lemaitre et Chaboche 92]. La mécanique de l'endommagement est couramment utilisée pour décrire de manière continue les phénomènes de rupture qui sont, par nature, discontinus (on peut citer ici les travaux de Kachanov [Kachanov 58], Lemaitre [Lemaitre et Chaboche 78], [Lemaitre 92] et ceux de Ladeveze [Ladevèze 93]) et s'adapte bien à la description du comportement uniaxial du matériau béton [Mazars 84].

Dans la théorie de l'endommagement isotrope le potentiel d'énergie libre spécifique s'écrit sous la forme suivante :

$$\Psi\big(\varepsilon, D\big) = \frac{1}{2}(1-D)\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.33}$$

En dérivant l'équation 1.33 selon les lois d'état (équation 1.14), on obtient les relations classiques de l'endommagement :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \partial\Psi/\partial\varepsilon = \big(1-D\big)C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ Y = -\partial\Psi/\partial D = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\cdot C_{ijkl}\cdot\varepsilon_{kl} \end{cases} \tag{1.34}$$

où Y, qui est la variable associée à l'endommagement D, représente le taux (positif ou nul) de restitution d'énergie.

Afin de vérifier l'inégalité de Clausisus-Duhem (équation 1.12) nous devons respecter l'inégalité suivante :

$$Y\dot{D} \geq 0 \tag{1.35}$$

d'où $\dot{D} \geq 0$ du fait que $Y \geq 0$, ce qui implique que, pour un tel modèle, l'endommagement ne peut pas décroître. De façon identique à la plasticité (équation 1.26), l'évolution de l'endommagement requiert l'utilisation d'une surface seuil qui permet de définir un domaine élastique et un domaine où le comportement est irréversible (croissance de D).

Critère d'endommagement de Mazars

La surface seuil décrite par Mazars [Mazars 84] est une fonction des déformations et est explicite :

$$f(\varepsilon, D) = \tilde{\varepsilon} - \kappa(D) \tag{1.36}$$

où $\tilde{\varepsilon}$ est définie, en fonction des déformations principales ε_i, par[4] $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_i \left(\langle \varepsilon_i \rangle^+\right)^2}$ et $\kappa(D)$ la variable d'histoire liée à l'endommagement. Cette fonction seuil d'endommagement définit le domaine où le comportement est réversible. Tant que $f(\varepsilon, D) \leq 0$, l'endommagement n'augmente pas.

De plus, une des caractéristiques du matériau béton est d'avoir un comportement dissymétrique. Cette constatation expérimentale conduit à adopter une modélisation qui fait intervenir deux types d'endommagement, un endommagement de compression D_c (ayant pour paramètres A_c et B_c) et un endommagement de traction D_t (ayant pour paramètres A_t et B_t). L'endommagement (de traction ou de compression) s'écrit alors en fonction de la déformation équivalente :

$$D_i = 1 - \frac{\varepsilon_{D_0}(1 - A_i)}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{A_i B_i}{exp\left(B_i(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{D_0})\right)} \tag{1.37}$$

où ε_{D_0} représente le seuil des déformations équivalentes et i successivement c ou t.

Afin d'avoir une représentation réaliste du comportement endommageable sous sollicitations multiaxiales, l'endommagement total sera une valeur intermédiaire entre D_c et D_t qui sera fonction de l'intensité des deux sollicitations. Nous aurons :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c \tag{1.38}$$

avec α_t et α_c tels que :

$$\begin{cases} \alpha_c = 0 & \text{pour de la traction pure} \\ \alpha_t = 0 & \text{en compression pure} \\ \alpha_t + \alpha_c = 1 & \text{en cas de combinaison} \end{cases} \tag{1.39}$$

Ce modèle a été amélioré afin de le rendre explicite [Pontiroli 95].

4. La déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$ traduit le fait que l'endommagement n'évoluera que sous des phénomènes d'extensions.

De récents modèles d'endommagement ont été développés afin de prendre en compte des phénomènes tels que l'ouverture et la refermeture de fissures [Laborderie 91] dans le cas de chargements alternés, un effet de la vitesse des déformations en plus de l'unilatéralité [Dubé 94], ou encore le frottement entre les lèvres de fissures [Ragueneau 99] dans une description orthotrope de l'endommagement.

Modèle visco-endommageable [Dubé 94]

Afin d'introduire de la viscosité dans un comportement endommageable, plusieurs possibilités existent dans la littérature. La plus courante est, à l'image du modèle de viscoplasticité de Perzyna [Perzyna 66], de modifier la définition du multiplicateur d'endommagement. Ainsi Dubé [Dubé 94] propose, plutôt que d'utiliser la condition de consistance pour le calculer[5], l'équation suivante :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{m}\left(\frac{\langle f(Y,Z)\rangle^{+}}{Y_0}\right)^{n} \tag{1.40}$$

Si l'on veut être capable de représenter le comportement du béton en traction ou compression simple, il faut pour tous ces modèles locaux introduire un écrouissage négatif en phase post-pic. Cet adoucissement pose des problèmes dans le cadre de calculs aux éléments finis ; car le phénomène engendré est une localisation des déformations.

1.2 Problème de localisation des déformations

Nous venons de voir quelques unes des différentes formes que pouvait prendre la description du comportement des matériaux. Il ne faut cependant pas oublier que ces lois de comportement doivent tout d'abord permettre de résoudre les équations du mouvement. Ainsi nous devons avoir un problème mathématiquement bien posé, c'est-à-dire que nous devons avoir existence de la solution et que cette solution soit unique et régulière. Ces conditions ne sont plus respectées si nous sommes en présence d'un comportement qui présente un régime adoucissant.

5. Le détail des développements est présenté dans Dubé *et al.* [Dubé *et al.* 96]

1.2.1 Localisation des déformations

Considérons, pour simplifier le problème, le cas unidimensionnel. Dans ce cas, nous avons les équations suivantes qui décrivent le milieu :

$$\begin{cases} \partial\sigma/\partial x = \rho\partial^2 u/\partial t^2 & \text{équation du mouvement} \\ \varepsilon = \partial u/\partial x & \text{déformation unidimensionnelle} \\ \sigma = \Re(\varepsilon) & \text{loi de comportement} \end{cases} \tag{1.41}$$

Afin de pouvoir résoudre ce problème, il faut ajouter les conditions aux limites ainsi que les conditions initiales. Le problème sera considéré comme bien posé si ce système d'équations est de nature hyperbolique. Pour savoir si tel est le cas, considérons une linéarisation du comportement au voisinage d'un état initial (ε_0,σ_0) :

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon_0} (\varepsilon - \varepsilon_0) \tag{1.42}$$

L'équations 1.41a peut alors s'écrire sous la forme d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{avec } R = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon_0} \tag{1.43}$$

La nature de cette équation dépend du signe de R. Si R est positif, l'équation est hyperbolique et le problème est bien posé. Cela se traduit physiquement par une vitesse réelle de propagation des ondes, dont la célérité est :

$$c = \sqrt{\frac{R}{\rho}} \tag{1.44}$$

À l'inverse, si R est négatif, l'équation est elliptique et si de plus les conditions aux limites ne sont pas compatibles avec cette équation elliptique, alors le problème devient mal posé. La célérité des ondes est imaginaire. Les informations ne pouvant plus se propager à l'intérieur du solide, la déformation tend à s'accumuler dans une partie arbitrairement petite [Wu et Freund 84]. D'un point de vu pratique, si on effectue des calculs à l'aide de ce type de comportement nous obtiendrions une localisation des déformations dans un seul élément de la structure dès que la partie adoucissante du comportement est atteinte. La réponse globale de la structure dépend ainsi de la taille du maillage élément fini utilisé

[Bažant 76]. Ainsi, si on diminue la taille du maillage, l'énergie nécessaire à la rupture de la structure tend vers zéro, ce qui est aberrant d'un point de vue physique.

Pour éviter de telles difficultés, plusieurs démarches sont possibles. La première approche consiste à restreindre le domaine d'utilisation des lois de comportement présentant un régime adoucissant en décelant l'instant où le problème devient mal posé afin d'arrêter le calcul. Pour cela, il est nécessaire de définir des critères de perte d'unicité (par exemple le critère de Hill [Hill 58]) ou des critères de localisation (par exemple, en élastoplasticité, le critère de Rudnicki et Rice [Rudnicki et Rice 75]).

D'une manière plus générale on peut trouver dans [Benallal *et al.* 91] une discussion sur les conditions qu'il est nécessaire de vérifier pour que le problème mécanique reste bien posé. Dans le cadre de la mécanique de l'endommagement, de tels critères permettent de prédire l'amorçage d'une macro-fissure, ainsi que son orientation, au moment où le problème devient mal posé et où l'on arrête le calcul. On peut trouver des exemples d'utilisation de tels critères dans Ladevèze *et al.* [Ladevèze *et al.* 94] et Hild *et al.* [Hild *et al.* 94]. Ce type d'approche permet donc de détecter l'instant et le lieu à partir desquels l'endommagement et la déformation peuvent se localiser. Cependant, les modèles classiques d'endommagement restent inadaptés lorsque l'on souhaite suivre l'évolution des bandes de localisation et donc prévoir la propagation de fissures.

Une approche plus générale, permettant de poursuivre les calculs, consiste à conserver un problème bien posé lorsque l'on veut suivre le comportement post-pic. Pour cela, différentes techniques de régularisation, appelées "limiteurs de localisation" [Lasry et Belytschko 88], sont proposées dans la littérature. Ces méthodes font intervenir dans le calcul une longueur interne qui permet de poursuivre l'étude au delà du pic.

1.2.2 Limiteurs de localisation

La première technique consiste à choisir la taille des éléments comme un paramètre du problème. Ici la longueur caractéristique n'est pas introduite dans la loi de comportement mais dans la méthode de résolution numérique [Bažant et Oh 83]. On peut, dans une démarche analogue, choisir pour le milieu un pseudo-comportement qui dépend de la

finesse du maillage (méthode de Hillerborg). Ceci sera obtenu en considérant que l'énergie, dissipée dans l'élément où est localisée la déformation, est indépendante de sa taille.

Une seconde technique consiste à prendre en compte des gradients de déformation du second ordre qui peuvent apparaître, par exemple, dans l'expression de la déformation plastique équivalente de la fonction seuil de plasticité [de Borst et Muhlhaus 92]. Cette technique, qui nécessite des conditions aux limites supplémentaires, correspond à une modélisation non-locale dans laquelle les déformations sont déterminées par un développement en séries de Taylor. Cette technique a également été appliquée aux modèles d'endommagement par Peerlings [Peerlings *et al.* 95].

Une extension peut également être faite à cette théorie, en prenant en compte une nouvelle variable cinématique, traduisant les phénomènes responsables de l'endommagement [Frémond et Nedjar 96]. Il est également possible d'obtenir le même type d'équations d'équilibre en introduisant une variable reliée à la variation de fraction volumique de vide du matériau [Pijaudier-Cabot et Burlion 96].

Afin également d'introduire une longueur interne, on peut moyenner la variable contrôlant l'évolution de l'endommagement. On parle alors de modèle d'endommagement non-local [Pijaudier-Cabot et Bažant 87]. Dans ce cas, l'évolution de l'endommagement n'est plus définie de manière locale, mais à partir d'une moyenne pondérée des valeurs locales dans un voisinage du point où la loi de comportement est calculée.

Enfin, la dernière approche consiste à utiliser des modèles de comportement avec des effets de vitesse. Bien que ne faisant pas intervenir directement une longueur interne, l'utilisation d'un paramètre de viscosité en introduit une de façon indirecte [Needleman 88]. Cette méthode, utilisée en élasto-vicoplasticité [Georgin 98] ou en visco-endommagement [Le Nard 99, Dubé 94], permet de régulariser les problèmes dynamiques et statiques. Une analyse unidimensionnelle de ce type de procédure est effectuée par Sluys et de Borst [Sluys et de Borst 92]. Le modèle de comportement proposé, dans lequel la contrainte post-pic est fonction de la vitesse de déformation plastique, représente une démarche simple et efficace pour simuler de façon objective la rupture du béton en dynamique. Cette analyse unidimensionnelle permet également, de par sa simplicité, de déterminer de façon analy-

tique la longueur interne introduite dans le modèle. Elle illustre aussi le caractère dispersif de la propagation d'ondes lors de la rupture.

1.3 Spécificités liées à la dynamique rapide

Les modèles présentés précédemment sont utiles pour appréhender la réponse de structures en béton lorsque le chargement appliqué reste soit statique, soit dans une configuration où la vitesse de déformation est inférieure à environs 1 s^{-1}. Dans le cadre de simulations numériques en dynamique rapide (explosion, perforation de dalle, etc ...), des codes de calculs ont été spécifiquement développés avec leurs propres modèles de comportement. Ces codes de calculs ont tout d'abord été des codes par différences finies afin de simuler des problèmes d'impact à hypervitesse. Puis, certains codes différences finies purement eulériens se sont enrichis afin de permettre la simulation de perforations complexes, mais uniquement dans le cas où le pénétrateur est considéré comme infiniment rigide. Les codes de calcul par éléments finis, qui eux avaient été initialement développés pour traiter des problèmes statiques, ce sont adaptés à la dynamique rapide en étant capables de représenter des problèmes d'ondes de choc, de grandes transformations et d'écoulements fluides. La base de ces différents codes est fondée sur une description spatiale soit Lagrangienne, soit Eulérienne. La méthode Lagrangienne a pour avantage une plus grande précision, une meilleure stabilité et également un traitement numérique moins coûteux en mémoire et en temps de calcul. Cependant, cette méthode ne permet pas d'avoir une description qui autorise des déformations aussi importantes qu'avec une description Eulérienne. Des développements récents permettent d'intégrer dans ces codes de calculs (LS-DYNA3D, RADIOS) une analyse Arbitrairement Euler ou Lagrange (ALE) afin de combiner les avantages de chacune des méthodes. Nous pouvons également trouver dans la littérature d'autres méthodes de représentation d'un matériau où la modélisation n'est plus continue mais discrète. La méthode des éléments discrets a tout d'abord été développée pour des milieux granulaires [Cundall et Strack 79] où les particules sont considérées comme indéformables. Ces particules rigides sont liées entre elles par des éléments de liaisons simples tels que des ressorts, des patins, ... Cette méthode de représentation s'avère très efficace

pour représenter des milieux granulaires (écoulement de grains dans des silos, mécanique des sols, ...) et peut paraître suffisante pour des applications dynamiques sur des matériaux continus [Donze *et al.* 99]. Toutefois des améliorations sensibles à cette modélisation ont été apportées en ne considérant plus les particules comme des éléments indéformables mais déformables [Bicanic *et al.* 95] ce qui permet de mieux appréhender le comportement de matériaux tels que le béton (par exemple la perforation de dalle). Des simulations récentes d'explosion au contact d'une dalle en 2D [Camborde et Mariotti 99], ont montré qu'une telle méthode était capable d'avoir une bonne représentativité quantitative pour des coûts de calculs non prohibitifs.

Le code de calcul utilisé dans le cadre de ce travail est le code hydrodynamique aux éléments finis LS-DYNA3D [Hallquist 91] qui possède des algorithmes numériques spécifiques aux problèmes de propagation de chocs ainsi qu'une modélisation avancée des contacts [Hallquist *et al.* 85]. Les codes de calculs hydrodynamiques s'appuient — dans la modélisation du comportement des matériaux — sur une partition des tenseurs de contraintes et de déformations dans les équations constitutives du modèle. Cette partition revient à aborder de manière distincte le comportement sphérique (variation volumique) et le comportement déviatorique (cisaillement). Ce type de partition a été à l'origine développé pour les métaux, lesquels ont un comportement expérimental qui montre un découplage entre la réponse sphérique et la réponse déviatorique à une sollicitation [Bonnan 96]. Le tenseur de contraintes et le tenseur des déformations se décomposent alors de la manière suivante :

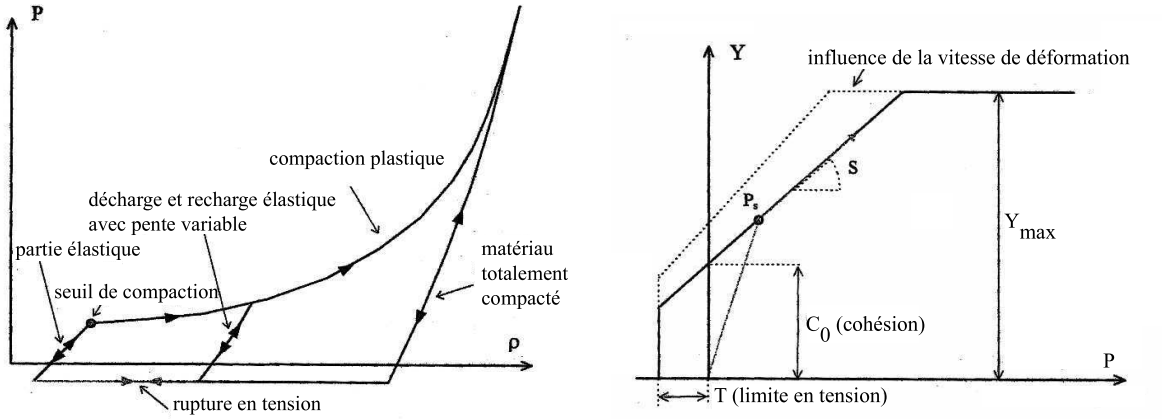
$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= S_{ij} + P\delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + \frac{\Delta V}{V}\delta_{ij} \end{aligned} \tag{1.45}$$

ce qui permet d'écrire en considérant le découplage total entre les deux comportements :

$$P = f(\Delta V/V) \tag{1.46}$$

ce comportement sur la partie sphérique est aussi appelé "Équation d'état" et :

$$S_{ij} = g(e_{ij}) \tag{1.47}$$



(a) Comportement sphérique (b) Comportement déviatorique

FIG. 1.3 – *Loi d'état et loi de comportement déviatorique utilisées par Le Vu [Le Vu 98]*

le comportement déviatorique appelé "Loi de comportement".

Néanmoins, pour les géomatériaux, Burlion a montré dans sa thèse [Burlion 97] que le comportement ne pouvait pas être considéré comme découplé. Pour cela des auteurs ont proposé de coupler les deux relations de comportement [Le Vu 98] tout en conservant une modélisation faisant intervenir une partition sphérique–déviatorique.

1.3.1 Modèle de comportement "hydrodynamique"

Nous présenterons ici le modèle proposé par Le Vu dans sa thèse [Le Vu 98], modèle développé pour simuler la pénétration de missiles dans une dalle de béton dans le code de calcul bidimensionnel euler–lagrange par différences finies AUTODYN. Ce modèle s'appuie sur un comportement déviatorique de type Drücker–Prager modifié prenant en compte la vitesse de déformation (voir figure 1.3b) et sur une loi d'état décrite en figure 1.3a. La plasticité introduite par la prise en compte de la surface seuil de Drücker–Prager modifiée est parfaite, sans écrouissage, avec un écoulement plastique incompressible. Le couplage intervient en considérant que la compaction du béton (caractérisée par la loi d'état), sous conditions d'impact ou de pénétration, n'intervient que comme conséquence de l'apparition de larges déformations de cisaillement. Ceci à pour inconvénient majeur de ne pas prendre en compte – lors d'un chargement purement hydrostatique sans cisaillement – la compaction observée expérimentalement. En effet, la surface seuil de cisaillement n'est

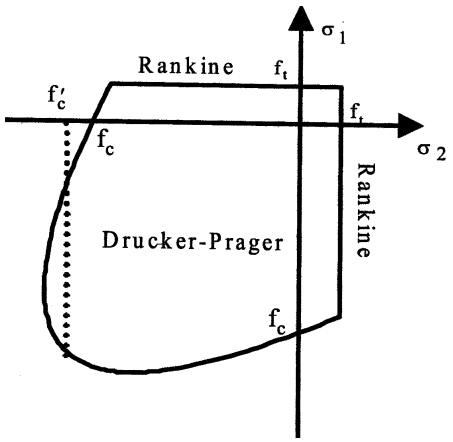


FIG. 1.4 – *Représentation du couplage des critères de Drücker–Prager et Rankine dans l'espace des contraintes (d'après [Georgin 98])*

jamais atteinte pour ce type de chargement ce qui entraîne, à cause du couplage introduit, que les effets irréversibles ne sont jamais activés. Pour remédier à ce problème, il suffirait d'introduire dans la surface seuil de Drücker–Prager modifiée une surface "Cap" (voir paragraphe 1.3.2), afin de refermer celle-ci sur l'axe hydrostatique.

Dans le cadre de la thèse, nous ne considérerons pas de partition des contraintes et des déformations pour développer une loi de comportement capable de représenter les phénomènes présentés en introduction. D'autres auteurs ont également proposé des lois de comportement dédiées à la dynamique rapide sans prendre en compte de partitions [Le Nard 99, Georgin 98] mais s'appuyant sur la théorie de la plasticité.

1.3.2 Modèles viscoplastiques spécifiques à la dynamique rapide

Les modèles présentés dans ce paragraphe s'appuient sur la théorie de la viscoplasticité utilisant plusieurs surfaces seuils pour représenter le comportement du béton en dynamique rapide.

Par exemple Georgin [Georgin 98] propose un modèle fondé sur la surface seuil de Drücker–Prager pour représenter le comportement en compression et sur la surface seuil de Rankine pour le comportement en traction. La surface seuil résultante de ce couplage est représentée en figure 1.4. La viscoplasticité est ensuite introduite en utilisant le modèle de Duvaut–Lions (voir l'équation 1.32). Des simulations d'essais de compression

dynamique réalisés aux barres de Hopkinson, ainsi que la simulation d'une poutre soumise à un impact ont montré qu'un modèle viscoplastique était capable de reproduire le comportement dynamique d'une structure. Néanmoins, tout comme pour le modèle proposé par Le Vu [Le Vu 98], une telle modélisation est incapable de représenter les effets d'une forte compression hydrostatique (pas de surface "Cap" [Lubarda *et al.* 96]).

Une autre approche – qui sera également la nôtre – consiste à considérer que l'on doit être capable de représenter l'ensemble des phénomènes suivants : compaction, rupture par cisaillement et rupture en traction ; sans pour autant avoir la meilleure description possible de ces phénomènes considérés indépendamment les uns des autres. Cet objectif a aussi été celui de la partie modélisation du comportement dynamique du MB50 du groupe "Comportement des ouvrages en dynamique rapide" du réseau GEO. Le modèle qui va maintenant être présenté, a été développé au sein de ce groupe et constitue une partie de la thèse de Le Nard [Le Nard 99]. Ainsi pour représenter les phénomènes de cisaillement, un modèle viscoplastique (Perzyna) est utilisé en considérant une surface seuil de type Drücker–Prager et qui a pour expression :

$$f_1(\boldsymbol{\sigma}, Y_H) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - Y_H \tag{1.48}$$

où α représente l'angle de frottement et Y_H la cohésion du matériau. Cette cohésion diminue linéairement en fonction de l'accumulation de la déformation plastique, afin de prendre en compte le phénomène d'adoucissement. De plus, la loi d'écoulement est une loi non associée qui permet de mieux prendre en compte le caractère dilatant du béton. Cette loi a pour expression :

$$g = \sqrt{3J_2} + \gamma I_1 \tag{1.49}$$

où γ est le terme lié à la dilatance.

L'endommagement en traction est pris en compte par un modèle visco-endommageable (voir paragraphe 1.1.4) avec pour fonction seuil :

$$F = (1 - D) \times \left(\tilde{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_{D_0}}{1 - D} \right) \tag{1.50}$$

où $\tilde{\varepsilon}$ représente la déformation équivalente de Mazars et ε_{D_0} le seuil d'endommagement.

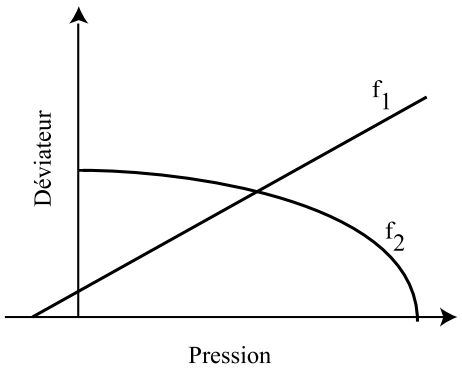


FIG. 1.5 – *Évolution des deux critères de rupture dans le plan des deux premiers invariants (d'après [Le Nard 99])*

Afin de "fermer" la surface de charge de plasticité sur l'axe des compressions hydrostatiques, la surface de Drücker et Prager est complétée par une surface appelée "Cap". Ces "Cap Model" permettent de définir une surface de charge reliée à la pression hydrostatique par un potentiel. Pour modéliser le phénomène de compaction, la théorie des multipotentiels a donc été utilisée dans le cadre de la viscoplasticité en couplant un critère de compaction au critère de cisaillement. Ce critère de compaction a une surface de rupture qui se referme sur l'axe hydrostatique et a pour équation :

$$f_2(\boldsymbol{\sigma}) = J_2 + I_1^2 - R^2 \tag{1.51}$$

avec la variable R qui permet de traduire l'écrouissage. La figure 1.5 montre l'évolution des deux critères de viscoplasticité dans le plan des deux premiers invariants. Ces deux surfaces sont interdépendantes, c'est-à-dire qu'une plastification à partir de l'une des deux surfaces a des conséquences sur l'autre.

Des simulations d'essais de compression dynamique d'un cylindre en béton soumis à de faibles et fortes pressions ont permis de confirmer qu'une telle modélisation permet de représenter correctement les différents phénomènes observés dans la structure.

1.4 Conclusions

Nous venons de développer différentes approches pour modéliser le comportement en dynamique du béton. Ces modèles sont tous fondés sur la théorie de la plasticité (ou

viscoplasticité) multi-critère et permettent de prendre en compte un certain nombre des phénomènes observés lors d'un impact. De plus, pour prendre en compte la dégradation du béton en traction, on peut associer à la plasticité un modèle d'endommagement [Le Nard 99]. Lorsque la description du comportement fait intervenir un écrouissage négatif, une technique de régularisation simple et efficace consiste à rendre le modèle visqueux.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter un modèle proposé par Burlion dans sa thèse [Burlion 97]. Ce modèle s'appuie également sur la théorie de la plasticité associée à de l'endommagement, mais prend en compte de façon originale le phénomène de compaction. Ainsi ce modèle est fondé sur la théorie des matériaux poreux qui permet d'introduire la porosité du matériau comme une nouvelle variable, variable qui intervient explicitement dans la loi d'état. Ainsi le phénomène de compaction (réduction de la porosité) est intégré dans le comportement par un mécanisme plus proche de la physique que par l'adjonction artificielle d'une surface "Cap".

Chapitre 1 : Dynamique et comportement du béton

Résumé

Dans ce chapitre, nous avons présenté dans un premier temps les fondements de la thermodynamique des processus irréversibles. Par la suite, nous avons fait une revue de modèles de comportement qui serviront de bases à la modélisation que nous présentons dans le chapitre qui suit. Les points suivants sont à retenir et nous seront utiles pour la suite :

- Les modèles de plasticité permettent d'avoir une description des déformations irréversibles qui peut s'appliquer au comportement du béton en statique ou en dynamique "lente". Les surfaces seuils les plus utilisées à l'heure actuelle prennent en compte trois invariants ([Willam et Warnke 75, Ottosen 80]) ce qui permet d'avoir une évolution des déformations plastiques réaliste, surtout quand le chargement est multiaxial. Les modèles d'endommagement sont, quant à eux, appropriés aux descriptions ou les phénomènes d'extension sont prépondérants. Ces modèles permettent de décrire le phénomène de perte de rigidité observé expérimentalement.
- Dans le cas où l'on a une description du comportement qui fait intervenir un écrouissage négatif (par l'intermédiaire d'un modèle plastique [Feenstra 93] ou d'un modèle d'endommagement [Mazars 84]), il se pose un problème lié à la localisation des déformations. Plusieurs techniques de régulations ont été rappelées, en retenant qu'un moyen simple et efficace est de prendre en compte la vitesse de déformation dans la description de l'évolution des déformations plastiques ou de l'endommagement dans le cadre de calculs dynamiques.
- Les simulations numériques de phénomènes induits par des chargements de dynamique rapide induisent des spécificités tant sur le point de la modélisation (partition sphérique–déviatorique) que sur le code de calcul utilisé (code hydrodynamique avec une intégration temporelle explicite).

Chapitre 2

Modèle plastique endommageable

2.1 Introduction 56
2.2 Modèle de comportement 58
2.2.1 Modèle d'endommagement 58
2.2.2 Évolution de l'endommagement de traction 61
2.3 Endommagement de compression et plasticité 61
2.3.1 La surface seuil utilisée : Critère de Gurson modifié 62
2.3.2 Évolutions des déformations plastiques 64
2.3.3 Réponse du modèle et calibration 68
2.4 Intégration temporelle de la loi de comportement 73
2.5 Conclusions 78

L'objectif de ce chapitre est de présenter un modèle de comportement du béton qui décrit plus particulièrement les phénomènes de compaction et de traction. La compaction des bétons est physiquement due à l'effondrement des vides contenus dans le matériau. Cet effondrement produit des déformations plastiques au sein du matériau et, dans le même temps, une augmentation du module de compressibilité. Le modèle est fondé sur la mécanique des milieux poreux, la théorie de l'endommagement et la plasticité. Ce modèle a été introduit pour la première fois par Burlion dans sa thèse [Burlion 97] et nous en présenterons ici une approche simplifiée, ainsi que les développements que nous avons menés afin de réaliser son implantation numérique – fondée sur un schéma d'intégration explicite – dans le code de calcul aux éléments finis LS-DYNA3D.

2.1 Introduction

Nous avons vu que le calcul numérique d'éléments en béton et béton armé soumis à un chargement de dynamique rapide, requiert l'implantation d'une loi de comportement capable de prendre en compte : la fissuration de traction, la rupture en compression simple, l'effet du confinement sur la contrainte ultime du matériau et enfin la compaction qui va modifier la raideur tangente et élastique du matériau.

Si l'on regarde d'un point de vue phénoménologique la réponse du matériau, le modèle de comportement devra prendre en compte des déformations irréversibles, une augmentation de la rigidité du matériau due à la compaction du béton et un endommagement dû à l'ouverture de micro-fissures en traction. De plus, Burlion a montré dans sa thèse [Burlion 97] qu'il est impossible de séparer les réponses œdométrique et hydrostatique du matériau, ce qui s'oppose aux hypothèses couramment utilisées pour la plupart des modèles utilisés pour les problèmes d'impact.

Exception faite des modèles micro-plan qui découlent de différents principes de modélisation ([Bažant et Prat 88a, Bažant et Prat 88b]), les modèles fondés sur la mécanique de l'endommagement ou les modèles de plasticité permettent de décrire correctement le comportement du béton si une des déformations principales reste positive [Mazars 84]. La plupart des modèles phénoménologiques ne sont pas capables de représenter les effets de

compaction en raison de deux difficultés :

- L'augmentation des déformations plastiques sous un état de compression hydrostatique et le raidissement du matériau. Cela est dû à la fonction seuil de plasticité couplée à l'endommagement qui doit être fermée sur l'axe des compressions hydrostatiques, par exemple par un "Cap".
- Les difficultés théoriques qui empêchent toute diminution de l'endommagement, donc une augmentation de la raideur élastique. D'un point de vue thermodynamique, l'endommagement ne peut pas diminuer dans un système fermé, à moins qu'un autre mécanisme dissipatif n'apparaisse conjointement et conduise à une dissipation globale positive (qui serait sinon négative).

Nous présentons ici un modèle qui a été développé par Burlion [Burlion 97] en gardant à l'esprit ces deux difficultés. Nous avons simplifié la modélisation en négligeant les effets de gradient et en modifiant l'évolution de l'endommagement, ce qui nous permet d'avoir une meilleure représentation du comportement en compression. L'originalité de ce modèle, comparé à l'approche fondée sur les "cap models" en plasticité, est la description de la variation de la rigidité élastique du matériau et l'utilisation d'une seule surface de plasticité. La dégradation du module d'élasticité est décrite dans le modèle par deux variables scalaires d'endommagement : une variable d'endommagement en traction et une variable d'endommagement de compression. L'endommagement de traction est contrôlé par les déformations élastiques positives. Afin de représenter l'évolution des déformations plastiques, nous utilisons une fonction seuil de Gurson modifiée avec les lois d'écoulement associées ([Gurson 77], [Needleman et Tvergaard 84]). L'évolution de la fraction volumique de vide entrant dans la fonction seuil de Gurson est directement reliée à l'endommagement de compression. Quand elle décroît, elle produit une augmentation de la raideur du matériau, ainsi qu'une diminution de l'endommagement du matériau, alors les évolutions de l'endommagement de compression et les déformations plastiques sont entièrement couplées. Le paragraphe 2.2 présente les équations constitutives du modèle et son calage à partir de résultats expérimentaux. Le paragraphe 2.4 propose l'implantation numérique du modèle dans le code de calcul aux éléments finis LS-DYNA3D.

2.2 Modèle de comportement

Dans ce qui suit, nous utiliserons l'hypothèse classique de partition des déformations en un incrément élastique et un incrément plastique :

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}(x,t) = \mathrm{d}\varepsilon^{e}_{ij}(x,t) + \mathrm{d}\varepsilon^{p}_{ij}(x,t) \tag{2.1}$$

où $\varepsilon_{ij}(x,t)$ sont les composantes de la déformation totale, $\varepsilon^{e}_{ij}(x,t)$ sont les déformations élastiques, et $\varepsilon^{p}_{ij}(x,t)$ sont les composantes irréversibles des déformations. Nous allons dans un premier temps présenter la partie élastique endommageable du modèle. La plasticité sera présentée plus tard et couplée au modèle précité.

2.2.1 Modèle d'endommagement

Nous nous intéresserons dans cette partie à la relation entre le tenseur des déformations élastiques et le tenseur des contraintes. Il y a deux mécanismes qui vont introduire une variation du module d'élasticité du matériau :

- Le premier mécanisme est lié à la micro-fissuration du matériau. En traction, où nous supposerons que les déformations plastiques sont faibles par rapport à celles obtenues en compression, la réponse non-linéaire du matériau est due, quasi uniquement, à l'augmentation des micro-fissures. Comme nous le verrons plus loin, l'endommagement en traction peut être considéré comme contrôlé par une déformation positive [Mazars 84] qui produit l'ouverture des micro-fissures et leur progression.
- En compression, et plus particulièrement dans les états de contraintes où le confinement empêche l'ouverture des micro-fissures, l'autre mécanisme d'endommagement est l'effondrement de la matrice cimentaire du béton. Cela introduit une variation de la fraction volumique de vide qui sera considérée comme pilotée par les déformations irréversibles.

Le problème majeur est maintenant de savoir quel type de variable d'endommagement nous allons choisir ; si l'orientation de la micro-fissuration et de la variation de fraction volumique de vide est importante ou non (endommagement anisotrope ou isotrope). L'endommagement dû à la variation de fraction volumique de vide, appelé plus tard endom-

magement de compression, peut facilement être considéré comme un phénomène isotrope. En effet, l'effondrement de la porosité peut être vu comme la diminution du nombre de pores de géométrie plus ou moins sphérique, sous l'effet d'une pression hydrostatique, ce qui engendrera pas ou peu d'anisotropie. À l'inverse la micro-fissuration de traction peut être considérée comme géométriquement orientée. Les micro-fissures se développent dans un plan perpendiculaire aux extensions. Une approche serait alors de considérer que l'augmentation de l'endommagement de traction induit dans ce cas une anisotropie élastique. De tels modèles existent dans la littérature, citons entre autres [Sidoroff 81], [Chaboche *et al.* 94], [Berthaud *et al.* 90] et [Valanis 91]. Des résultats récents obtenus par Fichant et al. [Fichant *et al.* 98] en statique montrent que dans des situations où la fissuration du matériau est essentiellement contrôlée par une extension unidimensionnelle, un endommagement scalaire donne des résultats numériques, au niveau de la structure, similaires à ceux donnés par des modèles d'endommagement orthotropes (nous ferons l'hypothèse que cela reste vrai pour un chargement dynamique). En fait, l'anisotropie induite par l'endommagement n'est importante que lorsque le matériau est soumis à des extensions multiaxiales, ou quand l'histoire des déformations appliquées au matériau est sévèrement non radiale.

Étant donné la complexité des modèles d'endommagement anisotropes comparés aux modèles isotropes (scalaires) d'endommagement, à la fois du point de vue de la calibration du modèle et de son implantation numérique, nous considérerons que l'endommagement de traction d et l'endommagement de compression δ sont scalaires.

À partir de là, nous pouvons supposer que deux mécanismes indépendants d'endommagement vont avoir une influence similaire sur le module d'élasticité. Il s'ensuit que la variation globale d'endommagement D, qui mesure la variation globale du module d'élasticité du matériau, peut être écrite de la façon suivante :

$$\mathrm{d}D = \mathrm{d}d + \mathrm{d}\delta \tag{2.2}$$

où l'endommagement de traction d et celui de compression δ sont des scalaires. Nous devons souligner ici que les endommagements de compression et de traction naissent de mécanismes totalement différents. Ce sont leurs conséquences sur la réponse élastique du

matériau qui sont réunies dans une seule variable D, qui n'est pas une variable interne au sens thermodynamique [Lemaitre 92]. Les endommagements de traction et de compression sont des variables internes d'état indépendantes, qui sont associées à leurs mécanismes spécifiques de dégradation du point de vue mécanique. Leur évolution est telle que $D \in [0,1]$ de façon à avoir une raideur globale qui varie entre deux bornes : la raideur du matériau sans micro-fissures ni vides et une raideur nulle.

Ce type de superposition de deux variables scalaires d'endommagement a été introduit de façon similaire par Mazars [Mazars 84], avec néanmoins une différence de signification due au fait que c'était une sommation pondérée d'un endommagement uniaxial de traction et d'un endommagement uniaxial de compression où la pondération est une fonction adimensionnelle de l'état de déformation.

La relation contrainte-déformation d'une loi de comportement élasto-endommageable est la suivante :

$$\sigma_{ij} = (1-D)\Big(\lambda \varepsilon^e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon^e_{ij}\Big) \tag{2.3}$$

où σ_{ij} sont les composantes du tenseur des contraintes, et (λ,μ) les coefficients de Lamé. L'hypothèse sous-entendue de l'équation 2.2 est que les modules de cisaillement et de compressibilité se détériorent à la même vitesse et que le matériau reste isotrope. Afin de distinguer l'endommagement de traction et l'endommagement de compression, d'autres possibilités d'évolution peuvent être envisagées (voir par exemple [Ladevèze 93]).

Un autre problème rencontré lors de la description d'une réponse en traction du béton est le phénomène d'adoucissement et de localisation des déformations (voir chapitre 1 paragraphe 1.2.1). Nous n'avons pas l'intention de traiter de ce problème ici, mais une approche de type gradient d'endommagement développée par Frémond et Nedjar [Frémond et Nedjar 96] ou Peerlings et al. [Peerlings *et al.* 96], peut être implantée en vue de résoudre ce problème. Étant donné que nous avons deux variables d'endommagement dans le modèle, l'approche au gradient peut être appliquée à l'endommagement de traction (voir [Pijaudier-Cabot et Burlion 96]) et à l'endommagement de compression. Leblond et al., dans [Leblond *et al.* 94], ont développé une approche non-locale pour un endomma-

gement ductile qui peut être transformée en un modèle au gradient et étendue au modèle d'endommagement de compression développé par la suite.

2.2.2 Évolution de l'endommagement de traction

La fonction seuil et les équations d'évolution de l'endommagement de traction sont définies, de façon un peu différente par rapport au chapitre 1, par les équations suivantes (modèle de Mazars [Mazars 84]) :

$$f\left(\tilde{\varepsilon}^e, \kappa\right) = \tilde{\varepsilon}^e - \kappa \tag{2.4}$$

avec pour évolution :

$$\text{Si } f\left(\tilde{\varepsilon}^e, \kappa\right) = 0 \text{ et } \frac{\partial f\left(\tilde{\varepsilon}^e, \kappa\right)}{\partial \varepsilon^e_{ij}} \mathrm{d}\varepsilon^e_{ij} > 0 \qquad \text{alors } \begin{cases} d = g_1(\kappa) \\ \mathrm{d}\tilde{\varepsilon}^e = \mathrm{d}\kappa \end{cases} \qquad \text{sinon } \mathrm{d}\kappa = 0 \tag{2.5}$$

où $g_1(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0(1-A_t)}{\kappa} + \frac{A_t B_t}{exp\left(B_t(\kappa-\kappa_0)\right)}$, les autres paramètres ayant été définis au chapitre 1. Nous voyons donc ici que nous aurons une seule évolution de l'endommagement. Par rapport au modèle de Mazars (voir chapitre 1 paragraphe 1.1.4) nous ne prenons pas en compte d'endommagement de compression dans l'évolution de la variable d'endommagement d. Pour décrire le comportement en compression simple du matériau, nous aurons une superposition du modèle d'endommagement de traction, que nous venons de décrire, et du modèle de plasticité développé au paragraphe suivant. Ce point particulier de la loi de comportement est développé au paragraphe 2.3.3 et donne la courbe de compression simple représentée en figure 2.9.

2.3 Endommagement de compression et plasticité

Pour décrire les phénomènes de compaction des matériaux à matrice cimentaire sous sollicitations de compressions triaxiales, nous associons au modèle présenté précédemment, une évolution des déformations irréversibles dont la surface de charge est une fonction de type Gurson. Dans notre optique de simplification numérique, le critère de Gurson modifié (fermé sur l'axe de compression hydrostatique) est utilisé afin de reproduire la fermeture de la porosité du matériau, ce qui est intéressant dans le cas de la compaction des bétons. Par

contre, il donne les mêmes seuils pour les contraintes positives et négatives. Le couplage de ce critère avec un modèle d'endommagement nous permettra de décrire à la fois la compaction du béton ainsi que son comportement en traction.

2.3.1 La surface seuil utilisée : Critère de Gurson modifié

Beaucoup d'auteurs ont fait évoluer cette fonction afin de prendre en compte différents mécanismes. Citons principalement Needleman et Tvergaard qui ont étendu ce critère au cas de la rupture ductile des métaux évoluant au cours de la déformation [Needleman et Tvergaard 84], ou encore Mear et Hutchinson qui ont introduit divers écrouissages (isotropes, cinématiques ou mixtes) [Mear et Hutchinson 85]. La version que nous présentons ici et que nous utiliserons dans la suite est une évolution de la fonction à 3 paramètres proposée par Needleman et Tvergaard [Needleman et Tvergaard 84]. Elle est écrite de la manière suivante :

$$F_{NT}(\sigma_{ij}, \sigma_M, f^*) = \frac{3J_2}{\sigma_M^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(q2\frac{I_1}{2\sigma_M}\right) - \left(1 + (q_3 f^*)^2\right) = 0 \qquad (2.6)$$

où f^* représente la porosité du matériau, σ_M est la contrainte dans la matrice si on considère celle-ci sans vide et q_1, q_2, q_3 sont des paramètres scalaires du critère. La figure 2.1 donne une représentation de la surface seuil de Gurson modifiée, $F_{NT}(\sigma_{ij}, \sigma_M, f^*) = 0$, pour $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, qui est la surface exacte de Gurson, dans le plan (I_1/σ_M, $\sqrt{3J_2}/\sigma_M$). Pour des raisons de symétrie, seul un quart de ce plan est représenté. Sur cette figure, nous avons de plus reporté les trajets de sollicitation de la compression simple, de la compression oedométrique et de la compression hydrostatique. Les pentes pour ces différents trajets de chargement sont respectivement ($\sqrt{3}$ pour 1) pour la compression simple, ($\sqrt{3}(1-\nu)/(1+2\nu)$ pour 1) en compression oedométrique et pente nulle pour la compression hydrostatique.

Le critère est une ellipse fermée, centrée sur l'origine. Nous rappelons que f^* croît lorsque le matériau est soumis à de la traction uniaxiale et décroît lors d'une compression triaxiale. Les 3 paramètres q_1, q_2 et q_3, permettent de faire varier la forme de cette demi-ellipse.

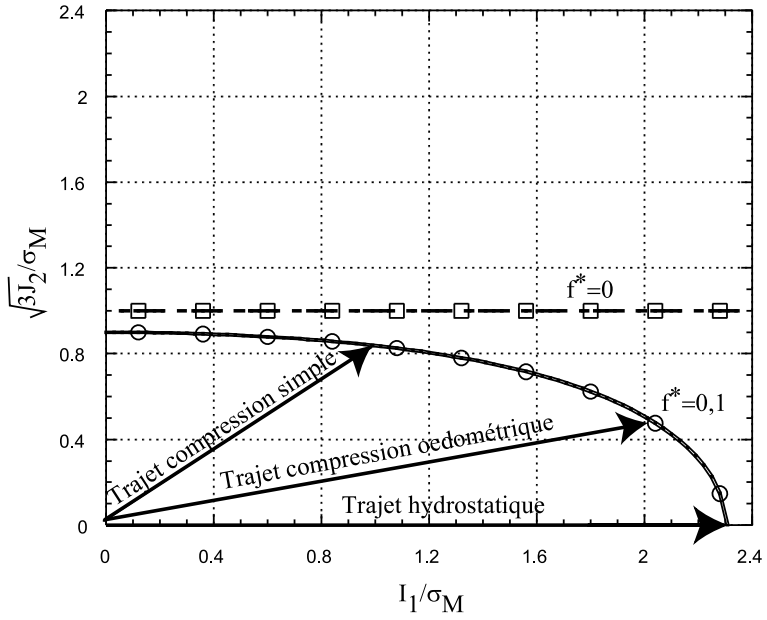


FIG. 2.1 – *Représentation du critère de Gurson dans le plan* $\sqrt{3J_2}/\sigma_M$ *en fonction de* I_1/σ_M

La figure 2.2 montre l'évolution de la surface seuil lorsque la porosité diminue ($q_1 = q_2 = q_3 = 1$). On peut remarquer que le domaine d'élasticité augmente lorsque la porosité diminue. La limite est obtenue lorsque $f^* = 0$ et correspond à la surface seuil de Von-Mises.

L'influence des différents paramètres a été montrée par Burlion dans sa thèse [Burlion 97] et nous allons en rappeler ici les grandes lignes.

La figure 2.3 présente la surface de Gurson modifiée pour différentes valeurs de q_1, q_2 et q_3.

Nous constatons alors que lorsque q_1 diminue, l'ellipse représentant la surface de charge se rétracte vers le centre du plan (I_1/σ_M, $\sqrt{3J_2}/\sigma_M$). À l'inverse, quand q_1 augmente, l'ellipse se dilate en ayant pour asymptote le critère de Von Mises. Ce paramètre nous permettra donc de modifier la surface seuil en fonction de la qualité de la matrice. En effet, plus la matrice sera de "bonne" qualité, plus les limites d'élasticité en compression simple et en compression hydrostatique seront élevées.

Le paramètre q_2 influe sur le grand axe de l'ellipse sans modifier le petit axe. Ce paramètre nous permettra de modifier la surface seuil pour représenter au mieux l'influence

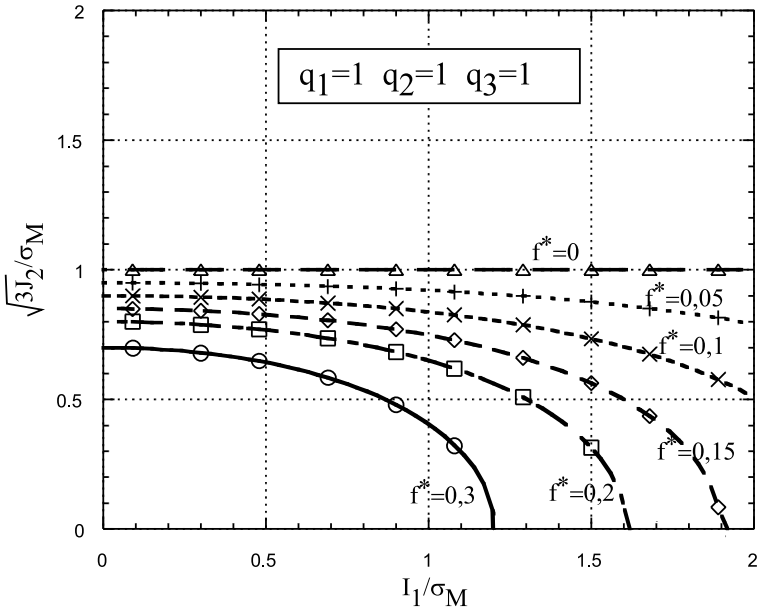


FIG. 2.2 – *Critère de Gurson modifié en fonction de la porosité pour* $q_1 = q_2 = q_3 = 1$

du taux de triaxialité des contraintes. Grâce à ce paramètre, il est possible de modifier le seuil pour représenter l'augmentation de la limite d'élasticité en compression hydrostatique d'un béton.

Le paramètre q_3, associé dans la fonction de Gurson modifiée à f^* , joue pratiquement le même rôle que q_2. D'ailleurs, certains auteurs leur donnent la même valeur.

2.3.2 Évolutions des déformations plastiques

Il est important de noter que la surface seuil de Gurson n'est pas censée contrôler la réponse en traction du matériau. Le seuil en traction et compression est le même selon la surface seuil de Gurson. En traction simple, les déformations plastiques sont nulles car le niveau de déformations (positives) à atteindre pour développer de telles déformations est nettement supérieur aux limites définies par la fonction seuil d'endommagement. Quand la fraction volumique de vide est égale à zéro, la fonction seuil se réduit à une expression classique de Von Mises. Il est néanmoins difficile de savoir à partir de quand l'expression de Von Mises est adéquate ou non. En effet, la disparition de la fraction volumique de vide correspond à un cas limite où le matériau, complètement compacté, a subi en réa-

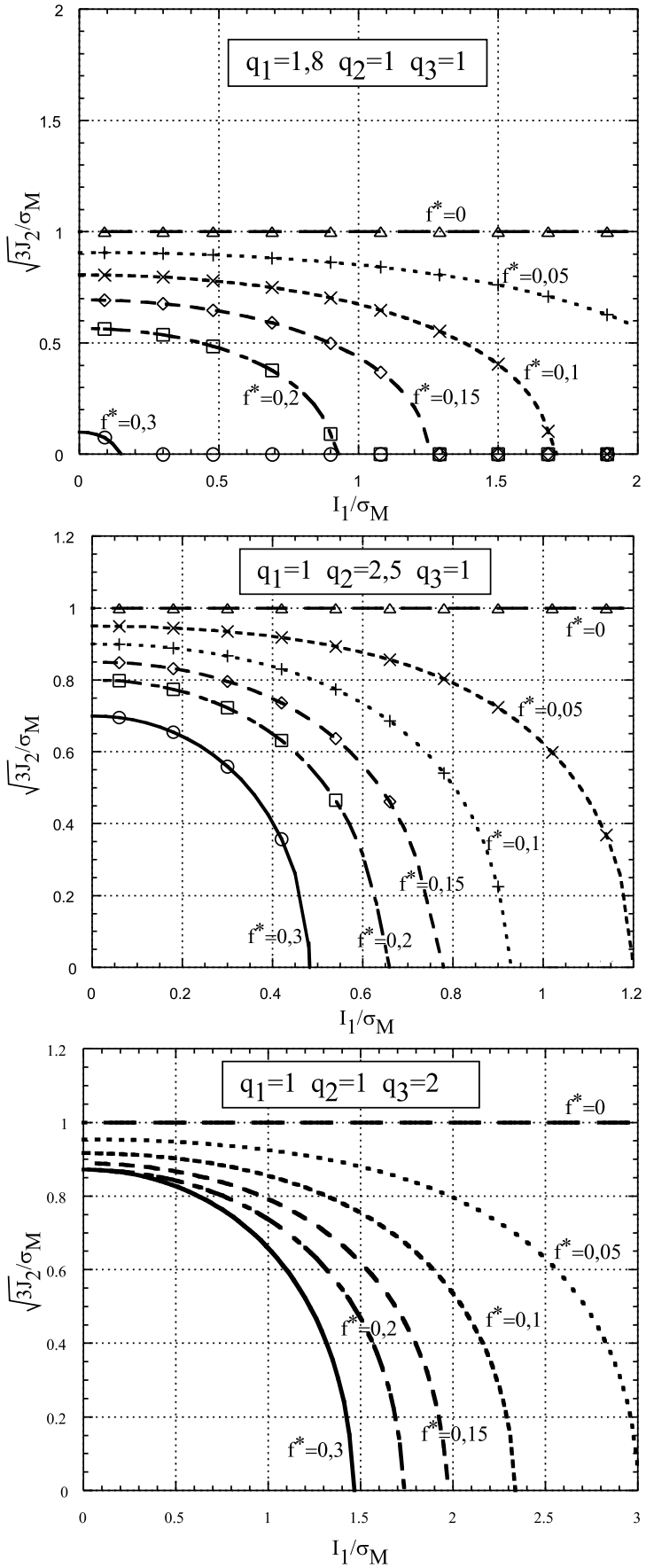


FIG. 2.3 – *Influence des paramètres du critère de Gurson modifié*

lité une sévère réorganisation de sa microstructure due à l'application d'une compression hydrostatique très importante (plusieurs GPa). De plus, de tels états de contraintes induisent des changements de phase à la fois dans le mortier et dans les granulats, ce qui n'est pas pris en compte dans ce modèle dont la limite en compression hydrostatique est de l'ordre de grandeur du GPa. Nous atteignons ici une des limites du modèle qui donne un matériau parfaitement élastique en compression hydrostatique lorsque la porosité est totalement refermée.

Nous allons maintenant définir toutes les équations qui permettent de décrire le comportement. La règle de normalité vue au chapitre 1 (équation 1.18) donne l'expression suivante des déformations irréversibles pour un écoulement associé :

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.7}$$

avec les relations de Kuhn-Tucker :

$$F_{NT} \leq 0,\ \mathrm{d}\lambda \geq 0 \text{ et } F_{NT}\mathrm{d}\lambda = 0 \tag{2.8}$$

où $\mathrm{d}\lambda$ est le multiplicateur plastique. Le principe du travail plastique maximal pour les matériaux avec des vides a été donné par Needleman et Tvergaard [Needleman et Tvergaard 84] :

$$\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = (1 - f^{*})\sigma_{M}\mathrm{d}\varepsilon_{M}^{p} \tag{2.9}$$

où ε_{M}^{p} est la déformation irréversible équivalente dans la matrice (c'est-à-dire le matériau sans vide) associée à la contrainte équivalente dans la matrice σ_{M}. La relation entre la déformation irréversible équivalente et la contrainte équivalente dans la matrice est du type élasto-plastique avec écrouissage isotrope :

$$\begin{cases} \varepsilon_{M} = \frac{\sigma_{M}}{E} & si \sigma_{M} \leq \sigma_{y} \\ \varepsilon_{M} = \frac{\sigma_{y}}{E}\left(\frac{\sigma_{M}}{\sigma_{y}}\right)^{n} & \text{si } \sigma_{M} > \sigma_{y} \end{cases} \tag{2.10}$$

où E est le module d'élasticité de la matrice, σ_{y} la limite élastique de la matrice et n l'exposant d'écrouissage.

La diminution de la fraction volumique de vide f^{*} est contrôlée par l'écoulement plastique. Tout comme dans le modèle de Gurson et le modèle de Burlion [Burlion 97],

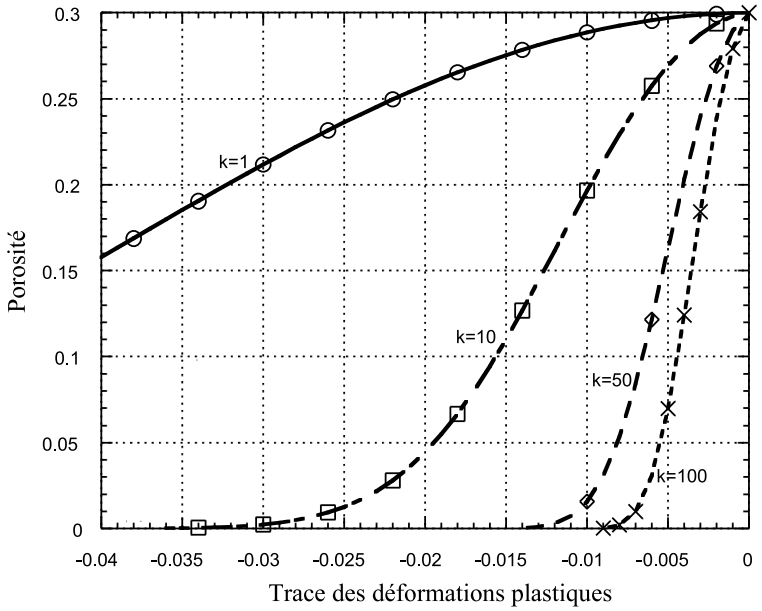


FIG. 2.4 – *Évolution de f^* en fonction de la trace des déformations plastiques pour différentes valeurs de k*

nous supposons que l'évolution des microvides est contrôlée par la déformation volumique irréversible à laquelle on ajoute un paramètre k afin de pouvoir caler la "vitesse" à laquelle la porosité va se refermer. Nous obtenons alors la forme suivante :

$$\mathrm{d}f^* = k(1-f^*)f^*\mathrm{d}\varepsilon^p_{kk} \tag{2.11}$$

Pour un béton standard, la valeur initiale de f^* est approximativement égale à 0.3, ce qui correspond à la porosité initiale attendue du matériau.

La figure 2.4 montre l'évolution de la porosité en fonction de la trace du tenseur des déformations plastiques pour différentes valeurs de k. Celle-ci démarre d'une porosité initiale, ici prise égale à 0.3. Lorsque les déformations irréversibles augmentent, la porosité diminue et tend vers zéro. Parallèlement, le critère de Gurson modifié va tendre vers le critère de Von Mises. Lorsque le matériau durcit au cours de l'écrouissage plastique, il "redevient" donc élastique en compression hydrostatique, ce qui est en accord avec les constatations expérimentales pour la gamme de pressions considérées ici [Burlion 97].

Plusieurs remarques peuvent être faites sur cette fonction d'évolution de la porosité. Si le matériau est initialement sans vide ($f^*_0 = 0$) ou rompu ($f^*_0 = 1$), il ne peut pas y avoir

évolution de la porosité, ce qui n'est physiquement pas réaliste. Dans le cas où f^* atteint 0, le matériau compacté ne pourra plus être décompacté, lors d'un chargement de traction par exemple. Cela signifie qu'en tri-traction le matériau se fissure. Il ne se décompacte pas. Le seuil de décompaction est donc plus élevé que le seuil de fissuration du matériau. Ceci est "acceptable" pour le modèle car $f_0^* = 0$ est une assymptote du comportement et ne sera atteinte que très rarement, mais n'est pas représentatif de la réalité. Pour le cas où f^* vaut 1, le matériau est rompu mais peut se recompacter. Ce cas de figure n'arrivera jamais car le couplage de la fonction seuil de Gurson modifiée avec la fonction seuil de Mazars pour les cas de traction fait intervenir bien avant l'endommagement par microfissurations. La porosité ne peut donc que décroître dans le modèle tel qu'il est utilisé. Ce qui implique que le modèle est incapable de reproduire des effets cycliques alternés de variations de compaction (et d'endommagement).

Afin de mettre en relation la variation de fraction volumique de vide et l'évolution du module d'élasticité du matériau, nous allons utiliser la même approximation que pour le modèle de Burlion :

$$\mathrm{d}f^* = \mathrm{d}\delta \tag{2.12}$$

Dans cette expression, la variation de porosité est couplée à la variation du module d'Young du matériau, ainsi qu'aux phénomènes d'adoucissement et de durcissement, ce qui n'est pas présent dans un modèle standard de Gurson.

2.3.3 Réponse du modèle et calibration

La détermination des paramètres du modèle est relativement aisée car les phénomènes physiques sont bien découplés. En effet, en traction uniaxiale l'endommagement dû à la microfissuration apparaît sans augmentation des déformations plastiques, on peut donc identifier les paramètres de l'endommagement de traction sans se préoccuper de l'évolution de l'endommagement de compression. Réciproquement, dans un régime de compression (avec un confinement suffisant pour supprimer les déformations élastiques positives), une augmentation des déformations plastiques est observée avec la variation de l'endommagement de compression qui lui est associée. Et cela, sans variation de l'endommagement

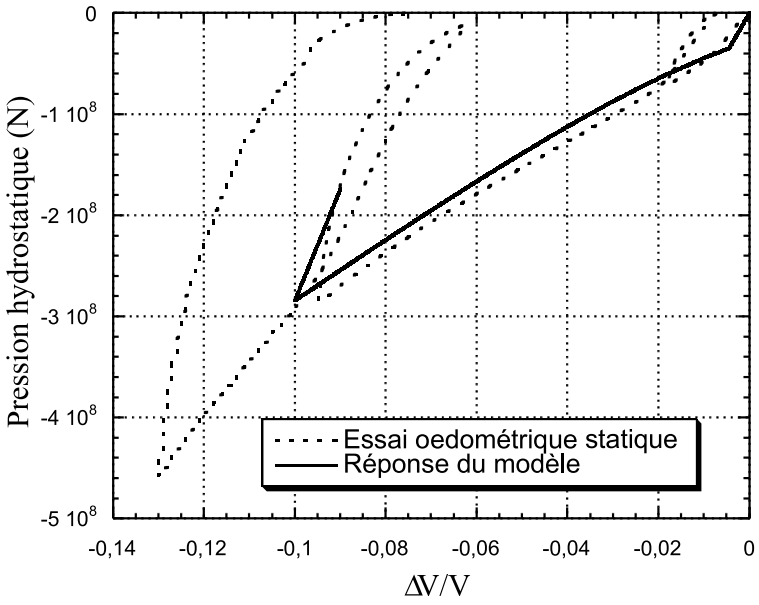


FIG. 2.5 – *Calibration du modèle pour le MB50*

de traction, ce qui facilite la détermination des paramètres d'évolution. L'identification des paramètres du modèle nécessite alors 3 types d'essais: le premier est un essai de traction nécessaire pour calibrer l'évolution de l'endommagement due aux déformations positives. Deux essais de compression sont nécessaires pour calibrer le modèle de plasticité–endommagement de compression. Pour calibrer l'évolution de la porosité avec les déformations plastiques, nous avons besoin d'un essai dans lequel la contrainte de compression hydrostatique est suffisamment importante. Un essai œdométrique et un essai de compression hydrostatique peuvent être utilisés pour la calibration du modèle (voir Burlion *et al.* [Burlion *et al.* 99b]. Nous pouvons remarquer que la calibration du modèle, dans un régime de compression où les micro-fissures n'apparaissent pas, est similaire à celle d'un modèle classique de Gurson. Une difficulté supplémentaire est simplement due à l'évolution de l'endommagement de compression qui nécessite des cycles de charges/décharges dans les expérimentations pour pouvoir calibrer son évolution.

La figure 2.5 montre la calibration du modèle pour le micro-béton MB50. Les valeurs du modèle obtenues sont données dans le Tableau 2.1. Plus de détails sur l'expérimentation peuvent être trouvés dans le Rapport GEO [Burlion *et al.* 99a] concernant les essais oedométriques.

Paramètres	Unités	Valeurs
q_1	-	1,2
q_2	-	1,5
q_3	-	1,5
σ_y	MPa	110
n	-	10
k	-	55
$d_0 = f_0^*$	-	0,3
E	MPa	20 000
ν	-	0,2
A_t	-	0,8
B_t	-	20 000
κ_0	-	1.10^{-4}

TAB. 2.1 – *Valeurs des paramètres du modèle obtenues pour le MB50.*

La figure 2.6 montre des simulations numériques en traction uniaxiale et triaxiale. Les paramètres du modèle sont similaires à ceux utilisés par Mazars [Mazars 84] c'est pourquoi les relations données ici fournissent une réponse identique. Il est clair, à partir d'un cycle de charge-décharge, qu'il n'y a pas de déformations plastiques et que la réponse non linéaire du matériau est entièrement contrôlée par l'endommagement dû à la microfissuration. La figure 2.7 montre la variation du module d'Young en fonction de la déformation volumique en compression hydrostatique suivie d'une traction hydrostatique. Le module d'Young augmente, dû à une compression hydrostatique, et diminue quand le matériau est soumis à une traction hydrostatique. La figure 2.8 montre l'influence du paramètre k dans l'évolution de la porosité. Nous pouvons constater que plus k est important, plus la porosité diminue rapidement, ce qui se traduit en terme de comportement pression–volume par une réponse où le durcissement du matériau est plus rapide.

La figure 2.9 montre la réponse du modèle dans le cas d'une compression uniaxiale. La réponse du modèle à une compression uniaxiale n'est pas des plus usuelles. Néanmoins, les caractéristiques principales sont conservées (résistance à la compression, déformations au pic de contrainte, régime adoucissant, ...).

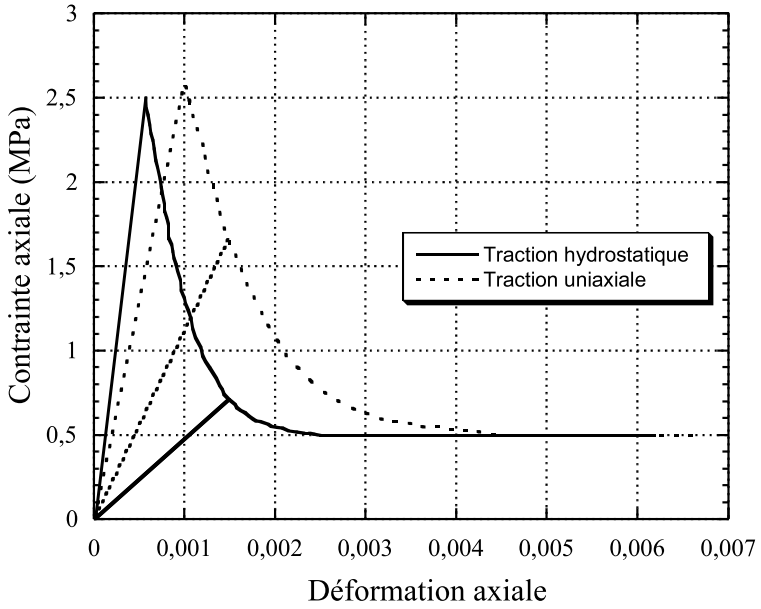


FIG. 2.6 – *Traction uniaxiale et triaxiale*

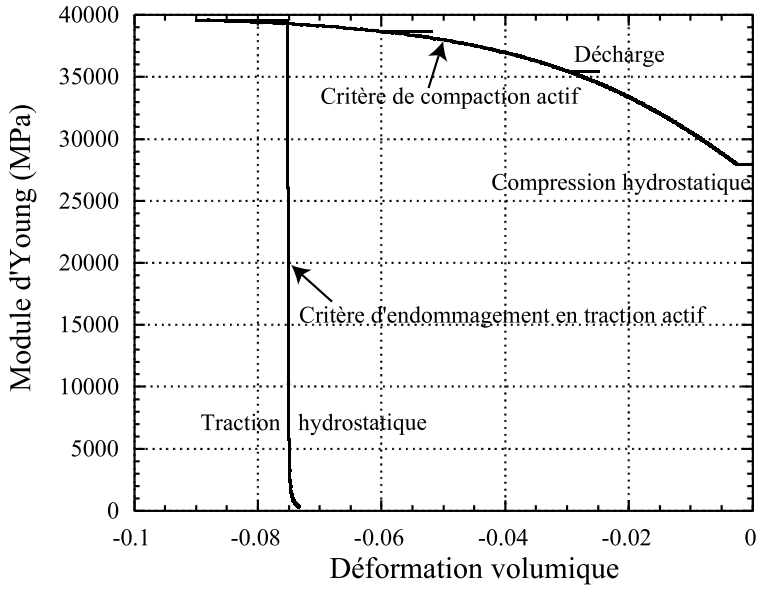


FIG. 2.7 – *Évolution du module d'Young en fonction de la déformation volumique dans un cas de compression hydrostatique suivis d'une traction hydrostatique*

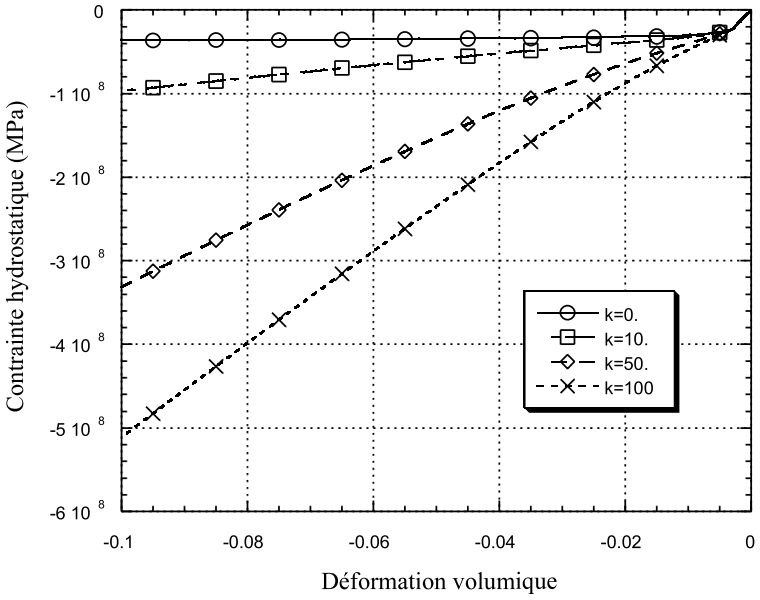


FIG. 2.8 – *Influence du paramètre k sur le comportement hydrostatique*

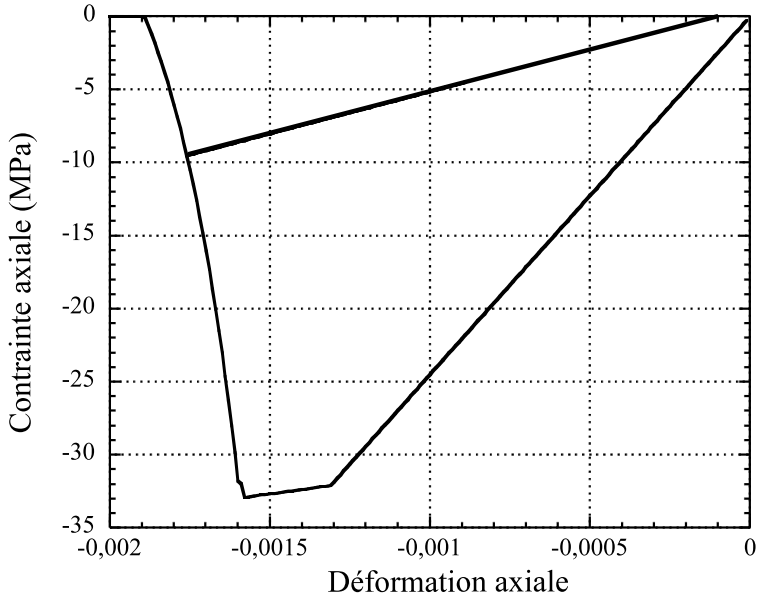


FIG. 2.9 – *Réponse du modèle en compression uniaxiale avec une décharge élastique*

2.4 Intégration temporelle de la loi de comportement

L'objectif principal de la loi de comportement présentée au paragraphe précédent est la description de la réponse du matériau béton sollicité en dynamique rapide. Les relations de comportement ont été implantées dans le code de calcul commercial par éléments finis LS-DYNA3D. Dans ce code, les équations du mouvement sont intégrées avec la méthode des différences centrées qui est une méthode explicite d'intégration temporelle.

Il est nécessaire de rappeler à ce stade la complexité des relations de comportement développées précédemment. Le modèle a deux fonctions seuil définies dans deux espaces différents. La fonction seuil d'endommagement en traction est définie dans l'espace unidimensionnel des déformations équivalentes et la fonction seuil de plasticité est définie dans l'espace des contraintes. Les contraintes dépendent à la fois des déformations plastiques et de la rigidité élastique donc les deux fonctions seuils sont entièrement couplées.

Nous avons choisi ici d'implanter un schéma d'Euler explicite car l'intégration temporelle a besoin d'être rapide dans un code où l'incrément de temps est vraiment très petit et où le nombre de degrés de liberté est très élevé. Clairement, ce schéma d'intégration est moins précis qu'un schéma implicite d'autant que les conditions sur les fonctions seuil d'endommagement ou de traction ne sont jamais vérifiées à la fin de chaque pas de temps de calcul. Un algorithme implicite de type "return mapping" [Ortiz et Simo 86] serait plus approprié pour un calcul en quasi-statique mais moins efficace en rapidité d'exécution pour le genre de calculs qui nous concerne.

Nous allons dans un premier temps exprimer la relation incrémentale contrainte-déformation en faisant l'hypothèse que l'endommagement et les déformations plastiques évoluent. L'équation de consistance de la surface seuil de plasticité donne :

$$\mathrm{d}F_{NT}\left(\sigma_{ij},\sigma_M,f^*\right)=\frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_M}\mathrm{d}\sigma_M+\frac{\partial F_{NT}}{\partial f^*}\mathrm{d}f^*=0. \tag{2.13}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{3}{\sigma_M^2} s_{ij} + \frac{q_1 q_2 f^*}{\sigma_M}\Big(\sinh\big(\frac{q_2 I_1}{2\sigma_M}\big)\Big)\delta_{ij} \\
\frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_M} &= -2\frac{J_2}{\sigma_M^3} - \frac{q_1 q_2 f^* I_1}{\sigma_M^2}\Big(\sinh\big(\frac{q_2 I_1}{2\sigma_M}\big)\Big) \\
\frac{\partial F_{NT}}{\partial f^*} &= 2q_1 \cosh\big(\frac{q_2 I_1}{2\sigma_M}\big) - 2q_3 f^*
\end{aligned} \tag{2.14}$$

L'évolution de la porosité donnée par l'équation 2.11 est réécrite avec l'équation 2.7 :

$$\mathrm{d}f^* = \mathrm{d}\lambda k(1-f^*)f^* \frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}}\delta_{ij} \tag{2.15}$$

La relation entre la déformation équivalente et la contrainte équivalente est déduite de l'équation 2.10 :

$$\mathrm{d}\sigma_M = E_t \mathrm{d}\varepsilon_M \qquad \text{avec } \frac{1}{E_t} = \frac{\partial\left(\frac{\sigma_y}{E}\left(\frac{\sigma_M}{\sigma_y}\right)^n\right)}{\partial \sigma_M} = \frac{n}{E}\Big(\frac{\sigma_M}{\sigma_y}\Big)^{n-1} \tag{2.16}$$

La substitution de cette équation dans l'équation 2.9 donne une expression de l'incrément de contrainte équivalent dans la matrice comme une fonction du module d'écrouissage E^*, la porosité f^*, et le multiplicateur plastique $\mathrm{d}\lambda$:

$$\mathrm{d}\sigma_M = \mathrm{d}\lambda \frac{\sigma_{ij}\frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}} E^*}{(1-f^*)\sigma_M} \qquad \text{avec } \frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \tag{2.17}$$

En substituant les équations 2.14, 2.15, 2.17 dans la condition de consistance (équation 2.13) on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3}{\sigma_M^2} s_{ij} + \frac{q_1 q_2 f^*}{\sigma_M}\Big(\sinh\big(\frac{q_2 I_1}{2\sigma_M}\big)\Big)\delta_{ij}\right)\mathrm{d}\sigma_{ij} - \\
&\left(2\frac{J_2}{\sigma_M^3} + \frac{q_1 q_2 f^* I_1}{\sigma_M^2}\Big(\sinh\big(\frac{q_2 I_1}{2\sigma_M}\big)\Big)\right)\mathrm{d}\lambda \frac{\sigma_{ij}\frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}} E^*}{(1-f^*)\sigma_M} + \\
&\left(2q_1 \cosh\big(\frac{q_2 I_1}{2\sigma_M}\big) - 2q_3 f^*\right)\mathrm{d}\lambda k(1-f^*)f^* \frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}}\delta_{ij} = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Cette équation peut être écrite sous la forme abrégée suivante : $\mathrm{d}\lambda = fct(\mathrm{d}\sigma_{ij})$.

Nous pouvons maintenant considérer la relation incrémentale contrainte-déformation où

le multiplicateur plastique est déterminé à partir de l'équation 2.18 :

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = (1-D)C_{ijkl}\Big(\mathrm{d}\varepsilon_{kl} - \mathrm{d}\lambda\frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{kl}}\Big) - \mathrm{d}DC_{ijkl}\varepsilon^e_{kl} \tag{2.19}$$

où C_{ijkl} est le tenseur d'élasticité. En considérant que l'endommagement de traction, les déformations plastiques et l'endommagement de compression évoluent en même temps, la relation incrémentale contrainte déformation devient :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma_{ij} = (1-D)C_{ijkl}\Big(\mathrm{d}\varepsilon_{kl} - \mathrm{d}\lambda\frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{kl}}\Big) - \\ \left(\frac{\partial d(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon^e_{ij}}\Big(\mathrm{d}\varepsilon_{ij} - \mathrm{d}\lambda\frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{kl}}\Big) + \mathrm{d}\lambda k(1-f^*)f^*\mathrm{d}\frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{ij}}\delta_{ij}\right)C_{ijkl}\varepsilon^e_{kl}\end{aligned} \tag{2.20}$$

La substitution de l'équation 2.18 dans cette expression donne un système de 6 équations à 6 inconnues. À partir de ce système nous pouvons calculer la forme finale de l'incrément de contrainte en fonction de l'incrément de déformation et des quantités relatives à la plasticité et à l'endommagement qui sont connues au début de l'incrément.

Dans un schéma d'intégration par prédiction-correction, un prédicteur élastique est calculé en premier. Pour cela nous allons considérer que la déformation totale au temps $t + \Delta t$ est connue, de même que l'ensemble des variables à l'instant t.

Pour obtenir la déformation élastique au temps $t + \Delta t$ (prédicteur) nous allons utiliser la déformation plastique calculée au temps t :

$$\varepsilon^e_{ij}(t + \Delta t) = \varepsilon_{ij}(t + \Delta t) - \varepsilon^p_{ij}(t) \tag{2.21}$$

À partir de cette déformation élastique, nous pouvons calculer la déformation élastique équivalente prédite correspondant, ainsi qu'une prédiction élastique de la contrainte afin de tester les différentes fonctions seuils.

- Si la déformation équivalente prédite $\tilde{\varepsilon}^e$ conduit à rester à l'intérieur de la surface d'endommagement, nous considérons que l'endommagement de traction n'évolue pas. Alors, la surface seuil de plasticité est testée à partir du prédicteur élastique et une correction explicite est calculée si nécessaire. Cette correction est obtenue de l'équation 2.19 en considérant que l'endommagement reste constant.

– Si la déformation équivalente prédite est en dehors de la surface seuil d'endommagement, l'endommagement sera considéré comme évoluant dans l'équation 2.19. La surface seuil de plasticité est à nouveau testée et si la contrainte prédite est en dehors de la surface seuil, l'équation 2.20 est utilisée pour calculer le nouvel incrément de contrainte. Néanmoins, la fonction seuil d'endommagement est testée quand les déformations élastiques ont été déterminées en fonction du modèle de plasticité.

Étant donné son caractère explicite, l'intégration des lois de comportement peut échouer si l'incrément temporel du calcul élément fini est trop grand. La figure 2.10 et la figure 2.11 montrent deux exemples sur lesquels sont testés l'influence de la taille de l'incrément de déformation. Sur la figure 2.10, l'histoire du chargement est telle que, dans le plan des directions principales des déformations, nous avons $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = -1 : 0,2 : 0,2$. En régime élastique cela correspond à de la compression uniaxiale. En dehors du régime élastique, une contrainte transversale est induite par les déformations plastiques transversales. La figure 2.10a montre la contrainte longitudinale en fonction de la déformation longitudinale et la figure 2.10b montre la contrainte transversale en fonction de la déformation longitudinale. Le second cas test est un calcul de compression hydrostatique où $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = -1 : -1 : -1$ (figure 2.11). Dans les deux cas, l'intégration temporelle converge quand la taille de l'incrément de déformation diminue, l'erreur et son accumulation ne semblent pas être extrêmement importantes. L'erreur la plus grande est observée sur la figure 2.10b où le maximum de la contrainte transversale est surestimé pour de larges incréments de déformation. Quand l'écoulement plastique est activé, il n'y a aucune recherche du contact avec la surface seuil. Cela est probablement la cause, avec la modification de l'interaction entre l'endommagement et la plasticité, des erreurs observées en figure 2.10. Il est intéressant de noter que dans un calcul de structure avec DYNA3D, l'incrément de temps est généralement très faible car il est lié à la taille des éléments qui doit être petite dans les régions où les non-linéarités apparaissent. Par conséquent, l'incrément de déformation reste relativement petit, typiquement beaucoup plus petit que ceux de la figure 2.10 et de la figure 2.11. Par conséquent, nous pouvons considérer que l'intégration temporelle est suffisamment efficace, tout au moins c'est un bon compromis

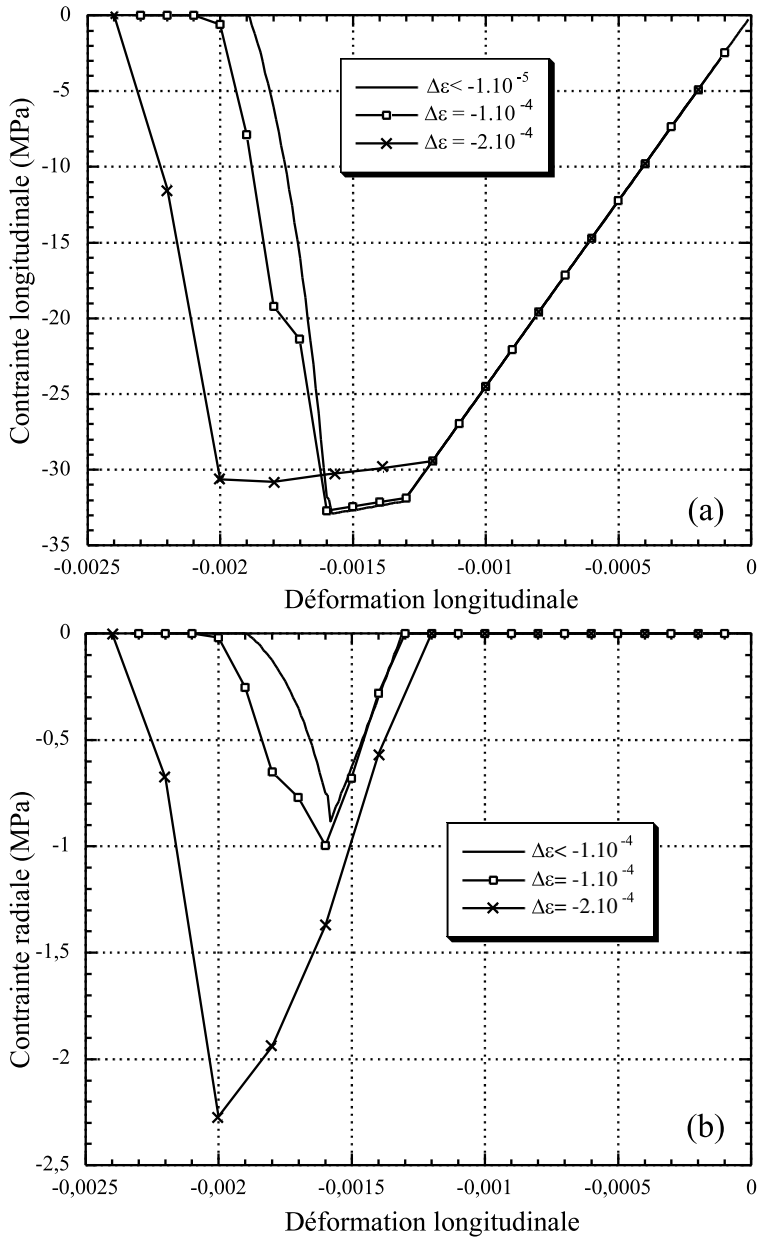


FIG. 2.10 – *Comportement en compression simple pour différents incréments de déformation*

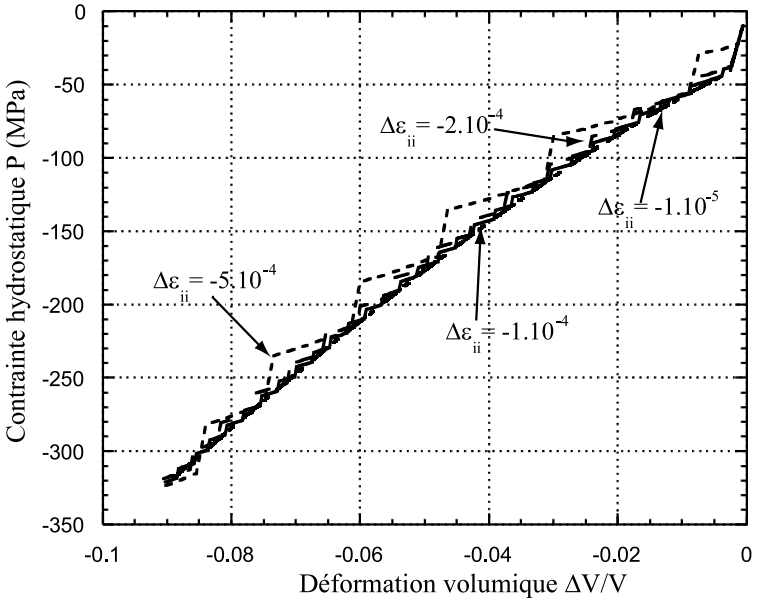


FIG. 2.11 – *Courbes de comportement pression–volume obtenues pour différents incréments de déformation*

entre la précision et la rapidité de calcul.

Ce schéma a été amélioré en subdivisant l'incrément de déformation si celui-ci est trop grand (méthode de "subcycling"). Pour cela, nous calculons la somme (en valeur absolue) des incréments de déformation et on compare cette somme à une valeur maximale d'environs 10^{-5} ("convergence" obtenue sur la courbe 2.11). Si elle est supérieure à 10^{-5} alors nous subdivisons l'incrément de déformation de la manière suivante :

$$\Delta\varepsilon_{ij} = n \times 10^{-5} + \alpha_{ij} \tag{2.22}$$

avec n le nombre de "passages" dans la boucle d'intégration et $\alpha_{ij} < 10^{-5}$. On obtiendra ainsi n nouveaux incréments de déformation qui satisferont aux conditions de "convergence".

2.5 Conclusions

Nous venons de rappeler un modèle de calcul fondé sur la modélisation proposée par Burlion dans sa thèse [Burlion 97]. Cette modélisation s'appuie sur un modèle classique

d'endommagement couplé à un modèle de plasticité basé sur une surface seuil de Gurson modifiée. Les variables liées à ces deux modèles – l'endommagement de traction d et la porosité f^* – ont été associées au sein d'une variable unique d'endommagement scalaire D. Ce couplage permet de rendre compte de l'augmentation du module d'élasticité qui est expérimentalement observée pour un béton lorsque celui-ci est soumis à une compression hydrostatique. En effet, nous avons dans ce cas une diminution de la porosité, ce qui entraîne une diminution de la variable "d'endommagement" D. L'état initial du matériau n'est pas un état non endommagé mais au contraire un état où l'endommagement initial est égal à la porosité du matériau. Les évolutions de d et f^* sont telles que nous conservons toujours $D \in [0, 1]$. Le modèle de comportement obtenu donne des comportements satisfaisants lorsque l'on se trouve dans un état de compression triaxiale (avec des niveaux de contraintes principales comparables) ou lorsque l'on se trouve dans un état de traction. Pour les trajets de chargement où le cisaillement est important, le comportement obtenu n'est pas maîtrisé mais résulte de la combinaison des modèles précédents ce qui explique que nous obtenions une réponse en compression simple inhabituelle pour un béton (voir figure 2.9).

L'implantation numérique qui a été proposée est totalement explicite.

Nous pouvons donc trouver des limites au modèle développé dans ce chapitre. La première est une totale absence de technique de régularisation pour un modèle qui présente un comportement adoucissant en traction et en compression simple. La seconde est le couplage au sein d'une même variable globale des endommagements de compression et de traction qui naissent de mécanismes micromécaniques totalement différents à partir d'un état initial d'endommagement non nul. Enfin, ce modèle, qui doit être capable de représenter des phénomènes de compaction qui interviennent lors de chargements en dynamique rapide, ne permet pas de modéliser un éventuel effet de la vitesse du chargement. Le chapitre suivant, consacré aux essais dynamiques sur le béton, devra nous permettre de persévérer dans cette voie, ou au contraire de modifier le modèle de comportement afin de prendre en compte des effets visqueux dans la modélisation.

Chapitre 2 : Modèle plastique endommageable

Résumé

Un modèle de plasticité couplé à de l'endommagement a été présenté. Les relations de comportement découlant de ce modèle présentent les caractéristiques suivantes :

- Deux mécanismes différents de dégradation du module d'endommagement sont considérés : un endommagement de traction lié aux microfissures et un endommagement de compression dû à l'augmentation ou à la diminution de la fraction volumique de vide. Ces deux types d'endommagement sont décrits par des variables scalaires et leur influence sur le module d'élasticité a été considérée comme étant la superposition des deux, avec l'hypothèse simplificatrice d'un endommagement isotrope.
- L'augmentation de l'endommagement de traction est contrôlé par les déformations élastiques positives. Une surface seuil de Gurson modifiée est utilisée afin de représenter la diminution de porosité au sein du matériau béton due aux déformations plastiques, ce qui a été observé expérimentalement. La porosité du matériau est directement égale à l'endommagement de compression, ce qui est une hypothèse forte. Le modèle décrit bien le phénomène de compaction, néanmoins quelques améliorations pourraient être apportées afin de mieux décrire la compression uniaxiale.
- L'identification du modèle nécessite trois types de résultats expérimentaux : le premier est un essai de traction uniaxiale pour calibrer le modèle en traction, le second et le troisième sont des essais de compression avec des niveaux de confinement différents. Ils sont nécessaires à la détermination des paramètres du modèle liés à la plasticité et ceux correspondant à la diminution de la porosité.

Enfin, la dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'implantation numérique du modèle développé. Cette implantation a été conduite en gardant à l'esprit le code de calcul pour lequel elle allait être utilisée, c'est-à-dire le code LS-DYNA3D. L'implantation est fondée sur une intégration temporelle explicite, ceci dans le but de conserver une certaine efficacité pour un calcul dynamique non-linéaire.

Chapitre 3

Caractérisation expérimentale de la compaction dynamique des bétons

3.1 Données expérimentales 84
3.1.1 Comportement dynamique du béton en compression uniaxiale . 84
3.1.2 Comportement dynamique du béton en traction uniaxiale . . . 87
3.1.3 Données existantes sur le comportement dynamique du béton sous sollicitations multiaxiales 90
3.2 Principe de la compaction dynamique 92
3.2.1 Principe simplifié des barres de Hopkinson 93
3.2.2 Caractérisation expérimentale de la compaction dynamique . . 95
3.2.3 Dépouillement des essais 98
3.3 Résultats expérimentaux obtenus 101
3.3.1 Échantillon de béton de diamètre 50 mm 102
3.3.2 Échantillon de béton de diamètre 30 mm 106
3.3.3 Comparaison des résultats obtenus 112
3.4 Comparaison statique–dynamique 114
3.5 Conclusions 116

L'obtention de données expérimentales sur le comportement du béton en dynamique est un problème ancien puisque les premiers essais de compression dynamique datent de la première guerre mondiale [Abrams 17].
Par opposition aux essais quasi-statiques, pour lesquels la vitesse de déformation uniaxiale $\dot{\varepsilon}$ est de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-4} s^{-1}, nous allons nous intéresser aux essais dynamiques où la vitesse de déformation sera supérieure à 1 s^{-1}.

3.1 Données expérimentales sur le comportement du béton en dynamique

Il est rare de trouver dans la littérature une gamme d'essais, comportant à la fois des essais statiques et des essais dynamiques, pour un même béton. Ceci est dû à la nécessité d'utiliser des moyens expérimentaux qui sont totalement différents si l'on veut faire des essais quasi-statiques ou des essais dynamiques. De plus l'interprétation des données expérimentales d'un essai dynamique pose de nombreux problèmes (réflexions d'ondes, filtrage des signaux électriques, ...). L'ensemble de ces problèmes explique que le comportement quasi-statique d'un béton est à l'heure actuelle bien connu, tandis que le comportement sous sollicitation dynamique d'un même béton reste mal connu. Ces problèmes sont d'autant plus réels que le type de chargement appliqué est complexe.

C'est pourquoi, suite à la campagne expérimentale réalisée par le GRECO-Géomatériaux sur le micro-béton MB50, il a été décidé au sein du groupe "Comportement des ouvrages en dynamique rapide" du réseau GEO de poursuivre la campagne sur ce micro-béton en ajoutant des données expérimentales pour des chargements statiques et dynamiques différents.

3.1.1 Comportement dynamique du béton en compression uniaxiale

Pour réaliser un essai de compression dynamique on utilise généralement les barres de Hopkinson (voir figure 3.1) qui permettent, à l'instar des presses hydrauliques en statique, de réaliser le plus simplement possible un essai dynamique. Le système des barres de

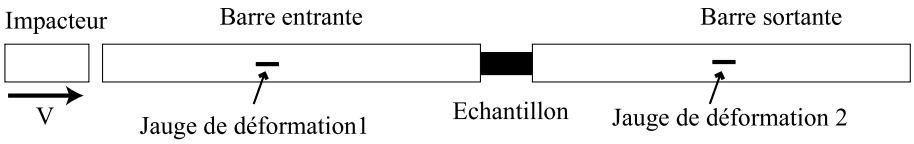


FIG. 3.1 – *Schéma de principe des barres de Hopkinson*

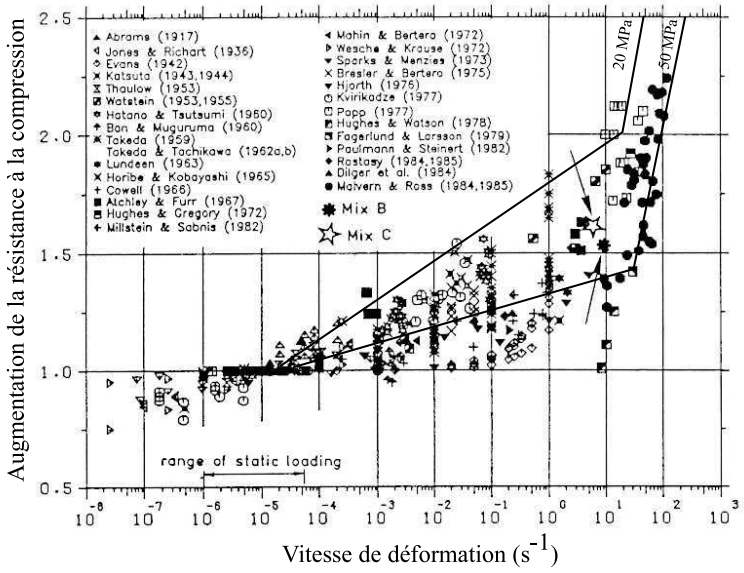


FIG. 3.2 – *Augmentation de la résistance à la compression en fonction de la vitesse de déformation (d'après [Bischoff et Perry 91])*

Hopkinson doit son nom à Beltram Hopkinson [Hopkinson 14] qui, à la suite de son père, a réalisé des mesures dynamiques de pression en utilisant les propriétés de propagation des ondes dans des barres élastiques. Le dispositif, tel qu'il est couramment utilisé, est dû à Kolsky [Kolsky 53]. Ce dispositif expérimental permet de soumettre un matériau à une compression dynamique ($\dot{\varepsilon} = 100\ \mathrm{s}^{-1}$ à $1000\ \mathrm{s}^{-1}$). Il a connu de nombreux développements qui ont permis de réaliser des essais de traction directe (voir figure 3.3), des essais de traction par écaillage (voir figure 3.4), mais également des essais de flexion [Deü 97] ou de cisaillement [Nicholas 82].

De nombreux auteurs se sont ainsi penchés sur ce problème, afin de mieux appréhender le comportement du béton en compression dynamique et de voir quelle pouvait être l'influence de la vitesse de chargement. Nous pouvons, par exemple, citer Bischoff et Perry [Bischoff et Perry 91] qui ont montré, à l'aide d'une importante synthèse bibliographique illustrée en figure 3.2, qu'il existait une augmentation de la résistance en compression du béton lorsque la vitesse de déformation augmentait. Ils ont de plus mis en évidence que l'on pouvait distinguer deux régimes différents (voir figure 3.2) dans l'évolution de l'augmentation relative de résistance en compression (rapport résistance dynamique/résistance statique). L'existence même de ces deux régimes tend à prouver qu'il existe deux types de mécanismes qui entrent en jeu dans ce phénomène :

- Le premier régime correspond à une plage de variations de la vitesse de déformation comprise entre le régime quasi-statique et $\dot{\varepsilon} < 10\ \mathrm{s}^{-1}$. Pour cette plage de variations, on multiplie par $1,5$ la résistance en compression quand on passe de $\dot{\varepsilon} = 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$ à $\dot{\varepsilon} = 10\ \mathrm{s}^{-1}$ (soit 7 décades). La plupart des auteurs sont d'accord pour attribuer cette légère augmentation de résistance à un effet de viscosité liée à la présence d'eau dans les pores du béton [Rossi 91, Toutlemonde 94].
- Le second régime pour lequel la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ est $> 10\ \mathrm{s}^{-1}$. Ici, où il semble que l'on puisse multiplier par quatre la résistance du béton en passant de $\dot{\varepsilon} = 10\ \mathrm{s}^{-1}$ à $\dot{\varepsilon} = 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$ (soit 2 décades), différentes études montrent que cette augmentation de résistance est d'origine structurelle [Bailly 94], [Le Nard et Bailly 96], [Dubé *et al.* 97] (état de contrainte non homogène dans l'éprouvette). En

effet, pour les vitesses de sollicitation importantes, les forces d'inertie génèrent des contraintes radiales non négligeables qui agissent comme une pression de confinement [Kotsovos 83]. On peut également considérer que cette augmentation de la résistance est due à une diminution de la microfissuration [Suaris et Shah 84]. Il semble en effet que l'on retarde l'apparition des micro-fissures [Sercombe 97] lorsqu'on augmente la vitesse de déformation. Des études récentes [Denoual 98], réalisées sur une céramique (comportement élastique fragile), montrent que plus la vitesse de déformation est élevée, plus la fissuration est diffuse (pas de localisation de la fissuration), ce qui augmente la résistance.

En ce qui concerne l'évolution du module d'Young, la difficulté d'obtention d'une bonne mesure de celui-ci en dynamique, fait que peu de résultats sont disponibles. Il est cependant généralement admis que celui-ci reste constant ou augmente légèrement [Bischoff et Perry 91] quand la vitesse de déformation augmente (de l'ordre de quelques pourcents).

3.1.2 Comportement dynamique du béton en traction uniaxiale

Tout comme pour le comportement en compression, les essais de traction ont été adaptés afin de pouvoir tester le matériau en dynamique. La technique utilisée pour ces essais s'appuie essentiellement sur les barres de Hopkinson. La première technique qui s'appuie sur un essai de traction directe a été développée à l'Université de Delft. Elle permet, grâce à l'utilisation de barres de gros diamètre, de tester des échantillons de diamètre suffisamment important pour être représentatif d'un comportement de béton (voir figure 3.3). Cette technologie permet d'atteindre des vitesses de déformation maximales de l'ordre de 1 à 10 s^{-1}.

La seconde est une version modifiée des barres de Hopkinson développée à l'université de Metz (une seule barre est utilisée, voir figure 3.4) et s'appuie sur la réflexion des ondes de compression au bout de l'échantillon qui se transforment en ondes de traction. A l'aide de cette technique Brara et Klepaczko [Brara et Klepaczko 97] ont obtenu des essais dans lesquels la vitesse de déformation est de l'ordre de 100 s^{-1} (voir figure 3.5). Ils ont

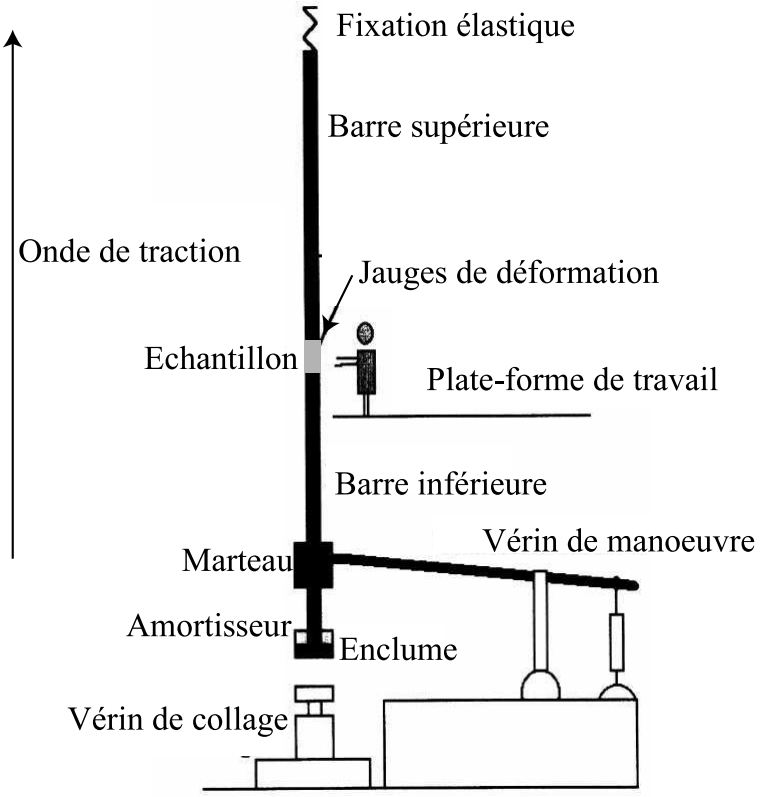


FIG. 3.3 – *Schéma simplifié des barres de Hopkinson pour les essais de traction directe à haute vitesse (d'après [Toutlemonde 94])*

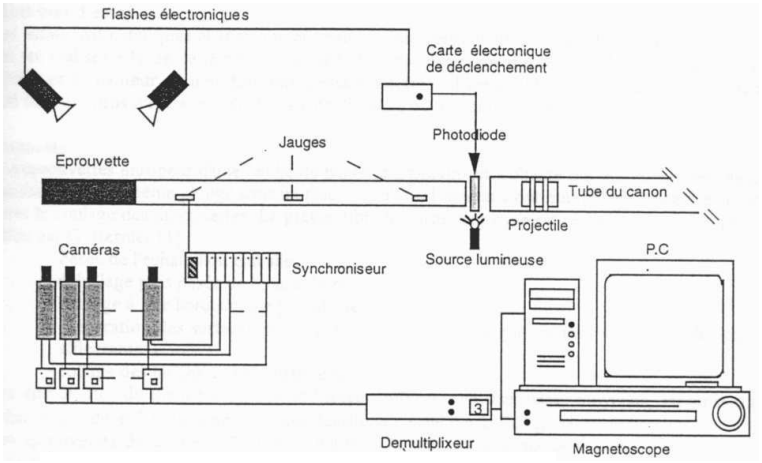


FIG. 3.4 – *Schéma de la barre de Hopkinson pour les essais de traction par écaillage (d'après [Brara et Klepaczko 97])*

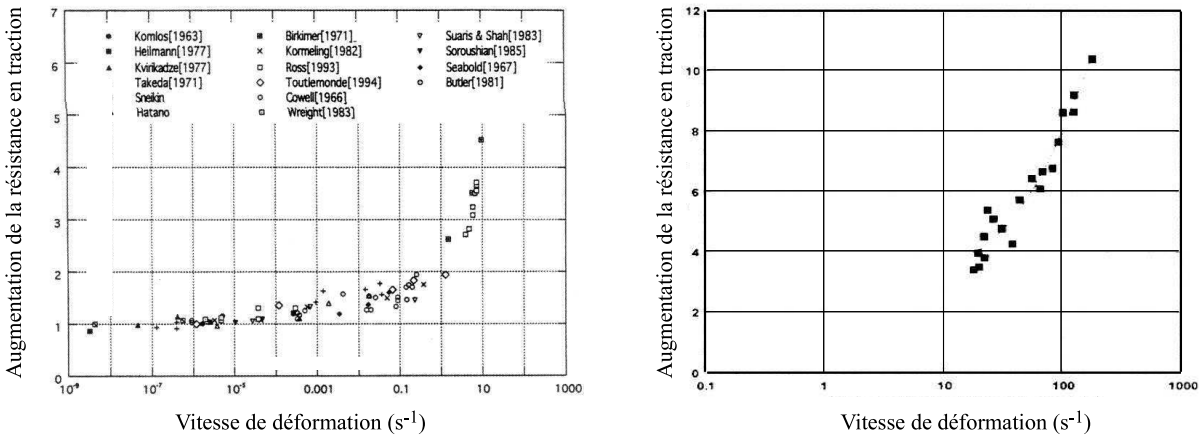


FIG. 3.5 – *Augmentation de la résistance à la traction en fonction de la vitesse de déformation (d'après [Brara et Klepaczko 97])*

également réalisé une synthèse bibliographique des essais de traction réalisés depuis de nombreuses années (voir figure 3.5). Nous pouvons voir sur cette figure que l'on distingue, tout comme en compression, deux régimes distincts dans l'augmentation de la résistance à la traction en fonction de la vitesse de déformation. Dans les deux cas, l'augmentation semble être supérieure à celle obtenue en compression. Nous pouvons ainsi dire que pour une vitesse de déformation de l'ordre de 1 s^{-1} nous avons une résistance à la traction qui est multipliée par deux, tandis que si la vitesse de déformation est de l'ordre de 100 s^{-1} on multiplie la résistance par 10.

Cependant, contrairement à la compression, on ne peut pas aussi bien expliquer les phénomènes qui induisent une telle augmentation de résistance. Si pour le premier régime, il semble que ce soit, comme en compression, dû à la présence d'eau dans le matériau, le second régime ne peut pas s'expliquer aussi facilement. Des simulations numériques [Camborde et Mariotti 99] de ces essais réalisées avec la méthode des éléments distincts, où le modèle de comportement ne présentait aucun effet visqueux, ont montré que l'on était incapable de simuler une augmentation de la résistance en traction, alors qu'en compression cette augmentation a été retrouvée. Il semble donc que les effets "inertiels" n'ont aucune influence en traction (voir figure 3.6) et qu'il faudrait plutôt utiliser la mécanique de la rupture pour comprendre les phénomènes qui interviennent (vitesse de

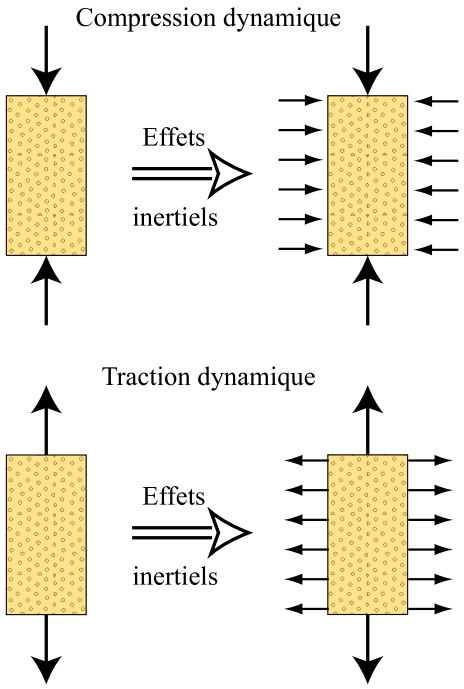


FIG. 3.6 – *Influence des effets "inertiels" sur le chargement unidimensionnel*

fissuration finie). Les effets "inertiels" de traction entraînent un état proche d'un état multiaxial de traction et donc, a priori, pas vraiment d'augmentation de résistance (vérifié expérimentalement en traction bi-axiale).

3.1.3 Données existantes sur le comportement dynamique du béton sous sollicitations multiaxiales

De même que pour le comportement en compression en traction simple, le comportement statique du béton sous sollicitations multiaxiales est de, nos jours, assez bien connu (voir figure 3.7), il l'est beaucoup moins bien en dynamique. Il est en effet très difficile de synchroniser des chargements différents afin de charger de façon multiaxiale une éprouvette en béton. C'est pour cela que se sont principalement développées des techniques expérimentales dans lesquelles une seule composante du chargement est dynamique tandis que les autres sont statiques.

On peut ainsi trouver des essais aux barres de Hopkinson (voir figure 3.8) dans lesquels on applique une contrainte radiale aux éprouvettes par l'intermédiaire d'un gaz sous

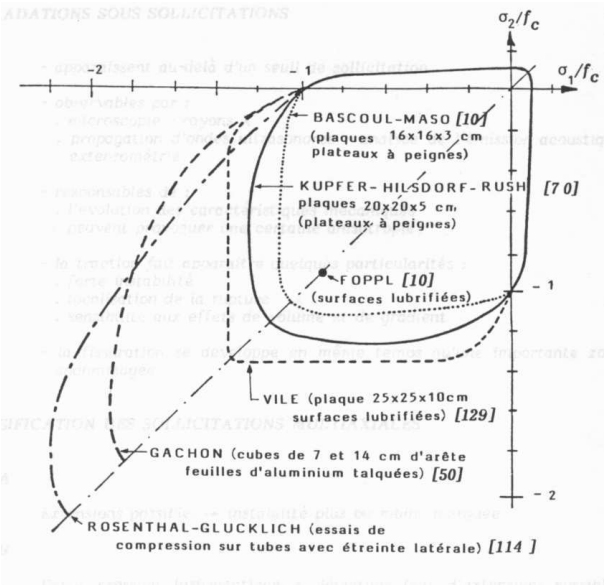


FIG. 3.7 – *Seuil de rupture en sollicitation biaxiale obtenu expérimentalement par divers auteurs (d'après [Mazars 84])*

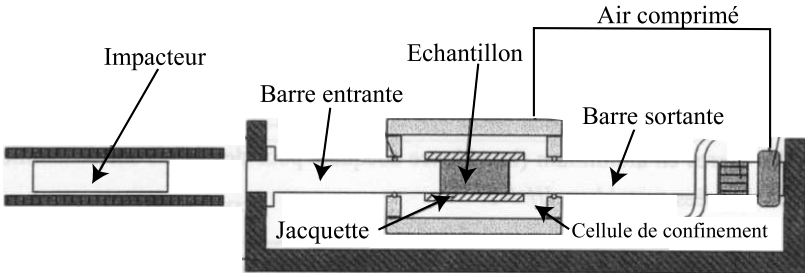


FIG. 3.8 – *Augmentation de la résistance à la compression avec un "faible" confinement (d'après [Gary et Bailly 98])*

pression [Le Vu 98]. Ces essais ont permis de mettre en évidence une influence de la vitesse de déformation sur le comportement du béton. De plus, la présence d'une contrainte radiale sur l'éprouvette de béton permet d'obtenir un comportement post-pic sensiblement différent de celui obtenu en compression simple. Ces essais ont également montré qu'il y avait une augmentation de la résistance en compression avec la pression de confinement [Le Vu 98].

On trouve également, dans la littérature, des essais où le chargement est un chargement en déformation plane. Si l'on suppose que le déviateur est très inférieur à la pression, on

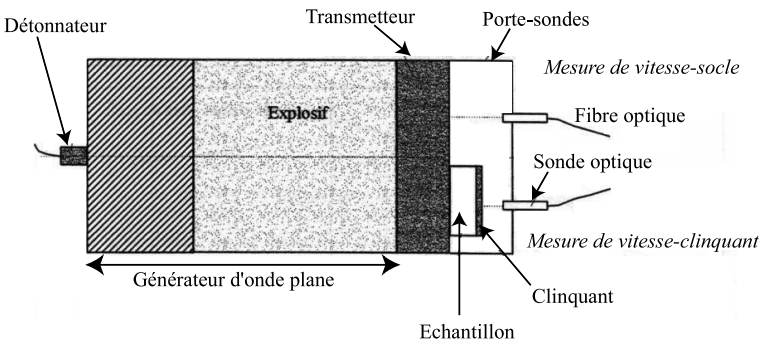


FIG. 3.9 – *Dispositif expérimental pour un essai plaque-plaque (d'après [Le Vu 98])*

obtient alors un chargement hydrostatique dans lequel la vitesse de déformation est élevée avec de fortes pressions (supérieures au GPa). Pour cela on utilise des essais plaque–plaque (voir figure 3.9) qui consistent à envoyer une onde plane dans une éprouvette en béton et d'en déduire un comportement sous pression hydrostatique du matériau à l'aide d'un calcul inverse [Le Vu 98]. Cette technique couramment utilisée pour déterminer le comportement sphérique d'un béton (voir figure 3.10) reste néanmoins très coûteuse dans sa réalisation. On peut également regretter d'avoir peu d'informations sur l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement sphérique d'un même béton.

3.2 Principe de la compaction dynamique

Suite à la campagne expérimentale d'essais uniaxiaux confinés réalisés en statique [Burlion 97], il a été décidé de réaliser des essais de compaction dynamique afin de compléter les données expérimentales existantes. Cependant, les essais menés jusqu'alors étaient, soit des essais statiques (compression hydrostatique, essai uniaxial confiné), soit des essais dynamiques d'un coût très élevé (essais plaque-plaque). Ces considérations économiques nous ont conduit à adapter l'essai uniaxial confiné, développé par Burlion dans sa thèse [Burlion 97], afin de pouvoir réaliser des essais dynamiques sous fortes sollicitations de tri-compression. Pour cela, nous avons utilisé la technologie des barres de Hopkinson développée depuis de nombreuses années au LMS [Gary et Bailly 98], [Zhao *et al.* 93].

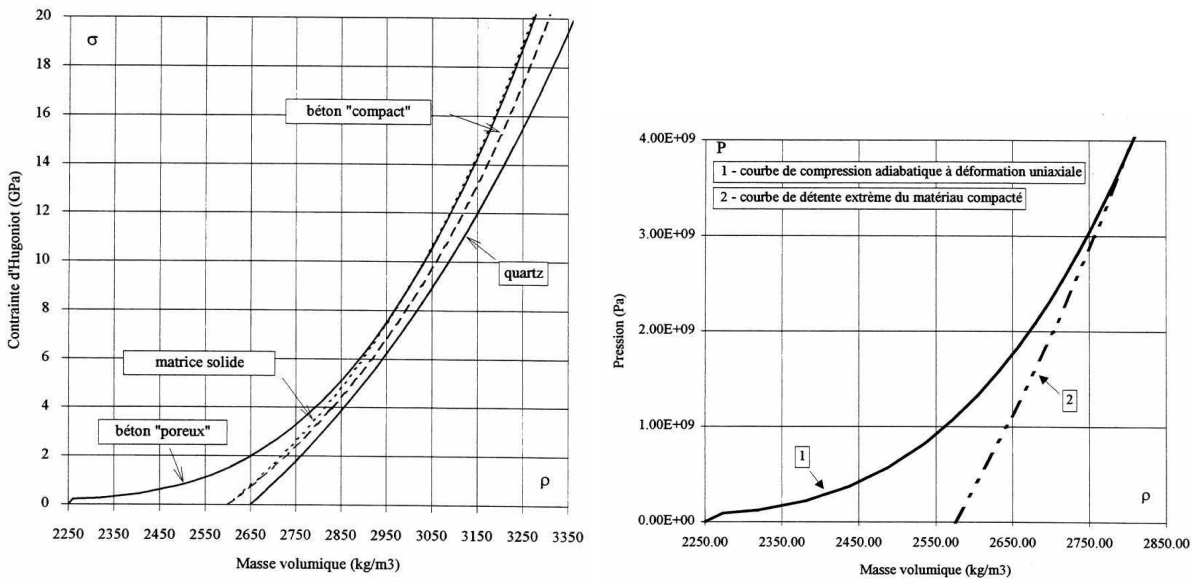


FIG. 3.10 – *Comportement pression-volume pour un béton (d'après [Le Vu 98])*

3.2.1 Principe simplifié des barres de Hopkinson

Pour réaliser un essai de compression dynamique avec des barres de Hopkinson, on place un échantillon entre deux longues barres identiques de limite élastique élevée (ici 1000 MPa) par rapport à celle du matériau testé (figure 3.1). Avec un projectile, on induit une onde longitudinale de compression dans la barre entrante. Une partie de cette onde se réfléchit à l'interface barre-échantillon, une autre partie se transmet à l'échantillon, puis induit une onde dans la barre sortante. Des jauges de déformation sont collées sur les deux barres. Elles permettent d'enregistrer les signaux associés à ces trois ondes. Dans l'hypothèse d'une propagation unidimensionnelle des ondes, déformation, contrainte et vitesse particulaire sont reliées par des relations linéaires simples :

$$\begin{aligned} \sigma &= E \cdot \varepsilon \\ v(x,t) &= -c_0 \cdot \varepsilon \end{aligned} \tag{3.1}$$

où σ est la contrainte, E le module d'Young des barres, c_0 la célérité des ondes dans la barre et v la vitesse particulaire.

Ces relations permettent de calculer les forces et les vitesses appliquées aux deux faces de l'échantillon. Soient U_e, U_s les déplacements respectifs des interfaces entrante et sortante,

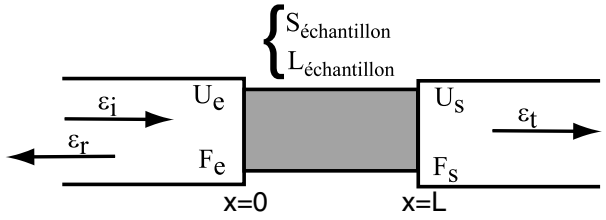


FIG. 3.11 – *Théorie simplifiée des barres de Hopkinson*

ainsi que F_e, F_s les forces et V_e, V_s les vitesses particulaires correspondantes (figure 3.11).

Les vitesses particulaires des deux cotés s'écrivent :

$$\begin{cases} V_e(t) = c_0\Big(\varepsilon_i(x,t)\big|_{x=0} - \varepsilon_r(x,t)\big|_{x=0}\Big) \\ V_s(t) = c_0\varepsilon_t(x,t)\big|_{x=L} \end{cases} \tag{3.2}$$

On peut également calculer les forces aux deux interfaces (en élasticité) :

$$\begin{cases} F_e(t) = S_B E\Big(\varepsilon_i(x,t)\big|_{x=0} + \varepsilon_r(x,t)\big|_{x=0}\Big) \\ F_s(t) = S_B E\varepsilon_t(x,t)\big|_{x=L} \end{cases} \tag{3.3}$$

où S_B est la section des barres.

En supposant que la contrainte ainsi que la déformation sont homogènes dans l'échantillon, nous pouvons calculer la déformation moyenne, la vitesse moyenne et la contrainte dans l'échantillon à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_m(t) = \big(U_s(t) - U_e(t)\big)/l_{\text{échantillon}} \\ \dot{\varepsilon}_m(t) = \big(V_s(t) - V_e(t)\big)/l_{\text{échantillon}} \\ \sigma_m(t) = \big(F_e(t) + F_s(t)\big)/2S_{\text{échantillon}} \end{cases} \tag{3.4}$$

Ces formules correspondent à un dépouillement simplifié de l'essai, ce qui permet d'obtenir les forces entrante et sortante de chaque côté de l'échantillon.

La difficulté principale du dépouillement vient du fait que, dans les équations 3.2 et 3.3, ce sont les déformations de la barre au niveau du contact avec l'échantillon qui interviennent. Or, la mesure des déformations est faite plus loin dans la barre afin d'avoir des signaux distincts pour l'onde incidente et pour l'onde réfléchie. Il faut donc transporter virtuellement les ondes (la déformation incidente dans le futur et les déformations réfléchie et transmise dans le passé) ce qui pose des problèmes liés à la dispersion des ondes et au calage temporel de ces trois ondes :

Dispersion des ondes : Afin de pouvoir tester des échantillons de béton qui soient suffisamment représentatifs, un nouveau système de barres a été développé au LMS. Ces barres ont un diamètre de 80 mm pour une longueur de 6 m pour la barre entrante et de 4 m pour la barre sortante et une limite d'élasticité de 1000 MPa. Il est clair que l'hypothèse unidimensionnelle est difficile à faire ici. Dans le transport des ondes, il est donc important de ne pas négliger la dispersion des ondes (due au caractère tridimensionnel des barres), ce qui est réalisé par une technique de traitement du signal. Le modèle qui permet de réaliser cette correction de dispersion, établi pour des barres élastiques par Pochhammer [Pochhammer 76] et Chree [Chree 89] et appliqué par Davies [Davies 48], est ancien et donc bien maîtrisé à l'heure actuelle.

Calage des ondes : L'origine des trois ondes de déformation utilisées dans les équations 3.2 et 3.3 doit être ramenée de façon précise à l'unique origine des temps correspondant à l'arrivée de l'onde incidente à l'interface entrante barre-échantillon. Ce calage a également pour fonction d'éliminer les sources d'erreurs sur les mesures de temps induites par la présence d'imperfections au niveau du contact barre–échantillon (imperfection du contact géométrique, ...). Pour cela on utilise une technique de recalage des ondes par simulation, fondée sur le caractère initialement élastique de la réponse de l'échantillon. Cette correction est également indispensable à l'obtention de mesures précises pour la zone des petites déformations [Zhao *et al.* 93], [Gary *et al.* 91]

3.2.2 Caractérisation expérimentale de la compaction dynamique

L'objet de cette partie est de présenter une nouvelle technologie expérimentale qui permet d'obtenir le comportement "pression-volume" d'un béton en dynamique. Pour cela, nous utiliserons la technologie des barres de Hopkinson. Nous avons vu précédemment (figure 3.8) qu'il était possible de réaliser des essais avec un confinement radial de l'éprouvette de béton. Cependant, la pression maximale qu'il est envisageable d'appliquer, en dynamique, avec une cellule de confinement traditionnelle peut difficilement excéder 10 MPa [Gary et Bailly 98]. On doit en effet utiliser un gaz comme fluide afin de contrôler la

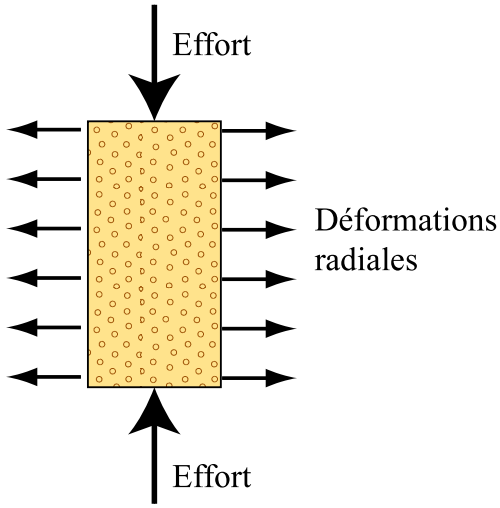


FIG. 3.12 – *"Gonflement" dû au coefficient de Poisson lors d'un essai de compression simple*

pression au cours de l'essai. Il en découle des problèmes techniques liés à l'étanchéité des joints entre les barres et la cellule et des problèmes de sécurité ce qui limite la pression de confinement.

Nous allons, pour éviter ces problèmes, nous inspirer de la technologie développée par Burlion dans sa thèse [Burlion 97]. Le principe de l'essai uniaxial confiné (EUC) est basé sur l'impossibilité laissée aux déformations radiales d'une éprouvette de béton, de se développer lorsque celle-ci est soumise à un chargement axial ("gonflement" dû au coefficient de Poisson, figure 3.12). Ainsi, le confinement de l'éprouvette de béton est assuré par une enveloppe métallique autour de l'éprouvette. Le rôle de cette enveloppe est de réduire les déformations radiales à une valeur quasi-nulle (essai œdométrique en mécanique des sols). On va donc utiliser une méthode simple permettant d'obtenir des pressions de confinement élevées, en réalisant des essais quasi–œdométriques. Une telle méthode a été validée par des essais à plus petite échelle, sur des échantillons de sables [Semblat *et al.* 95]. L'échantillon utilisé est présenté figure 3.13. Tout comme en statique, les contraintes liées à l'utilisation d'une bague en acier pour assurer le confinement étaient nombreuses. Il a fallut ainsi s'affranchir des problèmes suivants : mise en place de l'éprouvette dans la bague, rattrapage du retrait endogène et de dessiccation du béton, frottement acier/béton sous forte contrainte, application uniforme et homogène du confinement et enfin une me-

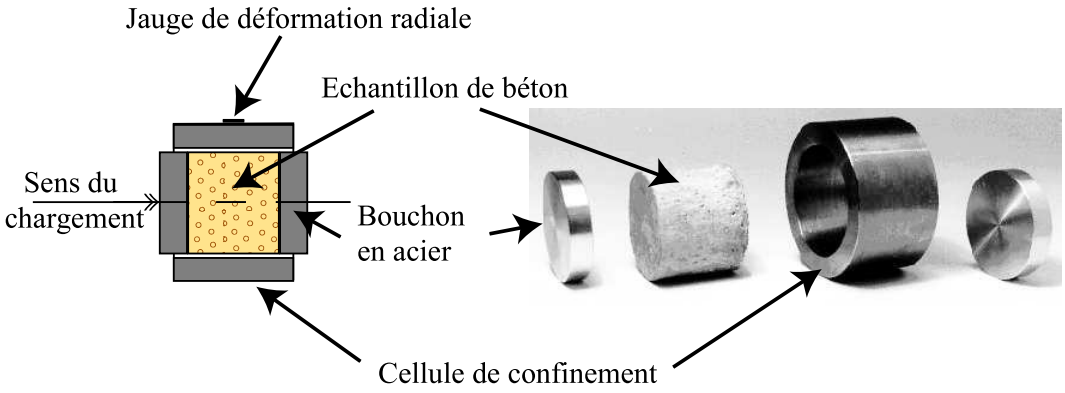


FIG. 3.13 – *Échantillon de béton confiné*

sure réaliste des grandeurs caractéristiques (effort de confinement, variation volumique de l'éprouvette, ...).

Rattrapage du retrait et homogénéité du confinement : Sans dispositif de rattrapage du retrait, il serait délicat d'obtenir un bon confinement des éprouvettes de béton dès le début du chargement. En effet, pour un béton classique une faible contrainte de compression (de l'ordre de quelques MPa) entraîne immédiatement l'endommagement de l'éprouvette. Ce phénomène doit être évité afin d'étudier le comportement du béton non endommagé. Nous avons utilisé le même produit d'interface que pour les essais statiques [Burlion 97]. Le produit d'interface choisi avait alors l'avantage d'être moulable à froid, résistant aux hautes pressions et de présenter une résistance au frottement assez faible avec l'acier. Ce produit est une résine époxydique Chrysor© C6120 qui présente les caractéristique suivantes : résistance à la compression de 100 MPa, à la traction de 20 MPa et au cisaillement de 27 MPa. Pour réduire au maximum l'adhérence de cette résine avec les parois de la cellule de confinement, on pulvérise du Téflon© sur la surface de contact avec l'acier avant l'application de la résine.

Mesure des déformations : Afin d'avoir accès à la pression de confinement, nous utiliserons des jauges de déformation collées à l'extérieur de la cellule de confinement. Le détail du dépouillement est donné dans le paragraphe qui suit.

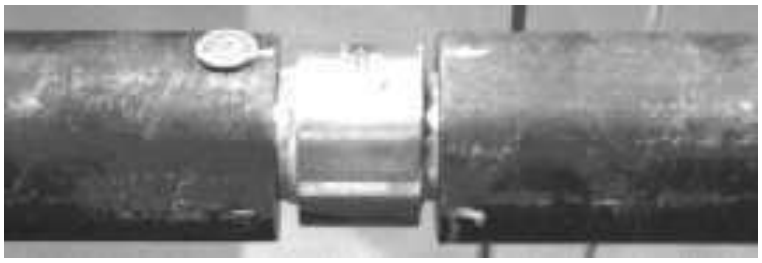


FIG. 3.14 – *Échantillon de béton confiné mis en place entre les barres*

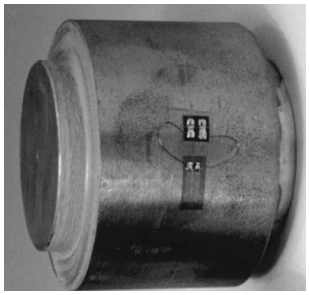


FIG. 3.15 – *Échantillon de béton confiné avec la jauge de déformation radiale*

3.2.3 Dépouillement des essais

La figure 3.14 représente l'échantillon de béton confiné en place entre les barres de Hopkinson. La figure 3.15 montre l'échantillon confiné avec la jauge de déformation qui permet d'avoir accès à la déformation radiale de la cellule de confinement.

Détermination de la pression de confinement

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la détermination de la contrainte radiale appliquée à l'éprouvette de béton à partir de la mesure des déformations. Pour cela, nous allons faire les hypothèses suivantes : le produit d'interface sera considéré comme incompressible [Burlion 97], le confinement est considéré comme homogène sur toute la hauteur de l'éprouvette en béton, la variation de section de l'éprouvette est négligeable et enfin, nous nous intéresserons uniquement pour le dépouillement à la partie élastique du comportement de la cellule en acier. L'hypothèse d'homogénéité du confinement peut être faite car l'onde ne met qu'environ 8 μs pour traverser l'éprouvette. Or, la figure 3.16 montre un résultat obtenu pour un essai et l'échelle des temps observée est nettement plus importante (plusieurs aller-retour de l'onde dans l'éprouvette). On peux donc considérer

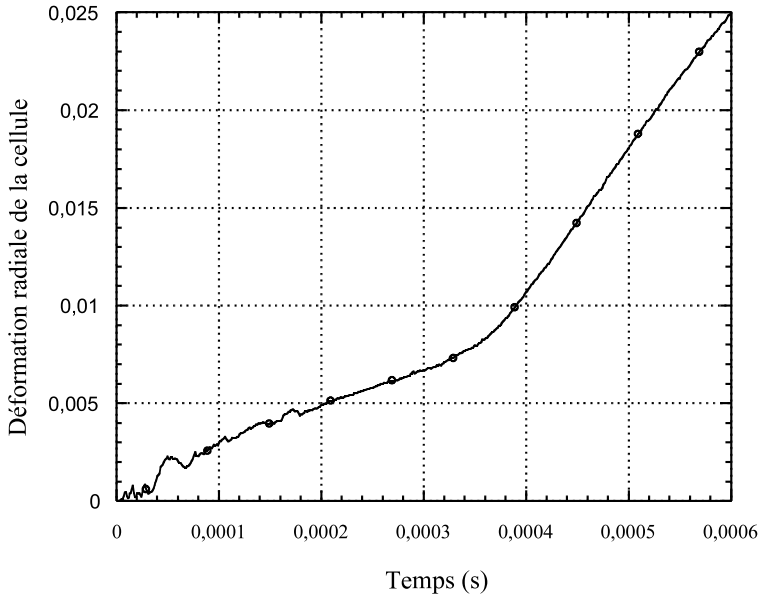


FIG. 3.16 – *Déformation radiale de la cellule en acier en fonction du temps*

que l'on a équilibre de l'éprouvette pour le dépouillement. Sur cette figure on voit apparaître une courbe plus ou moins bi-linéaire, la première pente correspondant au régime élastique de la cellule, tandis que la seconde correspond à la plastification de la bague. À partir de la mesure de la déformation externe de la bague et par un calcul élastique, on peut obtenir la déformation à l'intérieur de la bague (ε_{rr}), donc la contrainte radiale (σ_{rr}) appliquée à l'éprouvette en béton (en n'utilisant que la partie de la courbe qui correspond au comportement élastique de la cellule de confinement).

Si on souhaite dépouiller l'essai en prenant en compte la déformation qui correspond à la plastification de la bague, une difficulté supplémentaire apparaît : il est impossible de connaître la vitesse de déformation de la cellule de confinement pendant l'essai. Des essais de caractérisation de l'acier utilisé ont en effet montré que celui-ci n'était pas insensible à la vitesse de déformation dans le régime plastique. C'est pourquoi nous utiliserons uniquement la partie "élastique" de la déformation.

Détermination de la contrainte et de la déformation axiale

Les signaux classiques de la barre de Hopkinson (ondes incidente, transmise et réfléchie) sont représentés sur la figure 3.17 avec ceux des jauges de déformation, transversale et

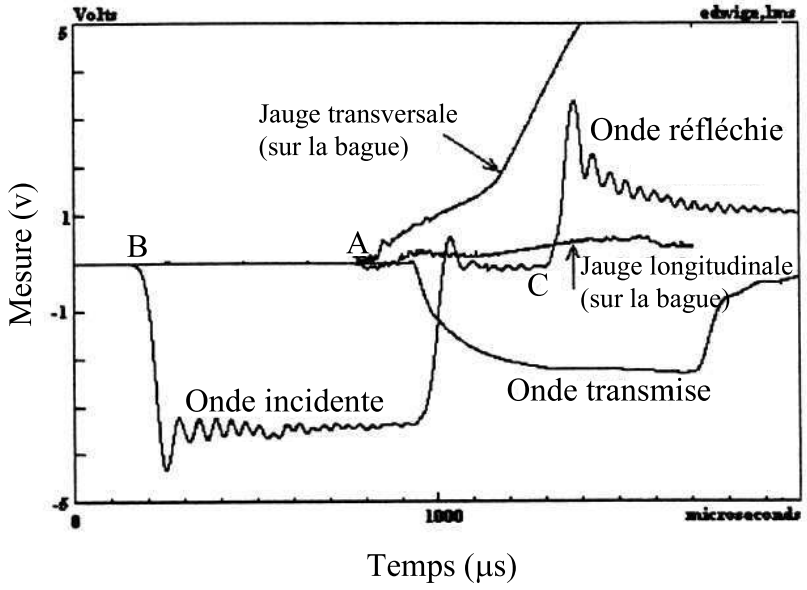


FIG. 3.17 – *Enregistrement pour un essai type*

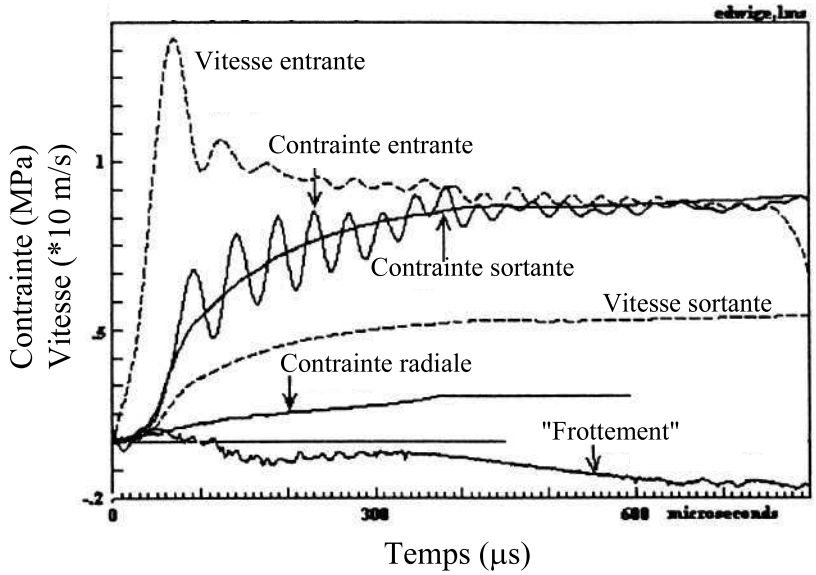


FIG. 3.18 – *Mesures de type structure*

longitudinale[1], du cylindre de confinement. Pour cet essai, la vitesse de l'impacteur est d'environ 15 m/s et ses dimensions induisent une durée de chargement d'environ 800 μs. L'instant où commence l'expansion (point A) est situé au milieu du segment défini par le début de l'onde incidente et le début de l'onde réfléchie (BC). Cet instant est celui auquel l'onde de chargement atteint l'échantillon et correspond au début du chargement. Le traitement des signaux (voir paragraphe 3.2.1) permet de déterminer les forces et les vitesses imposées aux deux faces de l'échantillon.

Les résultats obtenus sont représentés en figure 3.18, sur laquelle les forces, rapportées à la section de béton de l'échantillon, sont converties en contraintes. On observe la quasi égalité des forces entrante et sortante ce qui permet de faire l'hypothèse de l'homogénéité axiale des contraintes et des déformations dans l'échantillon. L'observation de la contrainte longitudinale dans l'anneau, au cours d'une première phase de compression, permet d'estimer la part d'effort reprise par celui-ci à moins de 10 % de la force axiale mesurée. Cette phase est suivie, après environ 100 μs, par une phase d'extension attribuée à une déformation en tonneau de l'échantillon et de la cellule de confinement. Cet effet reste cependant assez faible pendant les 200 μs suivantes. On peut en conclure que le frottement est négligeable par rapport à l'effort axial pendant 300 μs dans cet essai.

A partir de la connaissance de la contrainte axiale (σ_{zz}) et de la déformation associée (ε_{zz}), on peut déduire le comportement "pression-volume" du béton (homogénéité des contraintes et des déformations). La pression étant égale à $p = 1/3(\sigma_{zz} + 2\sigma_{rr})$ et la déformation volumique à $\delta V/V = \varepsilon_{zz} + 2\varepsilon rr$.

3.3 Résultats expérimentaux obtenus

Les résultats présentés ici concernent un micro-béton le MB50 (défini dans le GRECO géomatériaux). La composition de ce micro-béton est donnée dans le tableau 3.1. Nous avons choisi d'utiliser ce matériau car les données expérimentales concernant son compor-

1. Certains essais ont été instrumentés avec une jauge de déformation longitudinale sur la cellule de confinement afin de voir l'influence du frottement. La déformation longitudinale de la cellule est due, dans la phase élastique, à l'effort transmis par frottement à la bague et au coefficient de Poisson de l'acier. Lorsqu'on plastifie la cellule, celle-ci prend une forme de tonneau et génère des déformations longitudinales positives qui n'ont rien avoir avec les déformations dues au frottement qui sont, elles, négatives.

Composant	Proportion massique (kg)
Ciment	400
Sable de Leucat ($D_{max} = 5$ mm)	1783
Superplastifiant (melment 20)	12
Eau	200
Densité totale (kg/m^3)	2395

TAB. 3.1 – *Composition du MB50*

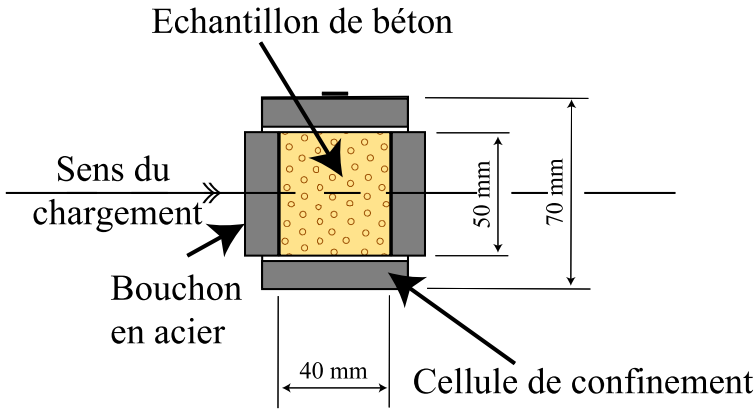


FIG. 3.19 – *Géométrie des essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 50$ mm)*

tement étaient déjà nombreuses. Nous disposions en effet de son comportement en traction et en compression statique, ainsi qu'en compression dynamique [Toutlemonde 94] avec ou sans confinement (faibles pressions de confinement voir figure 3.8) et nous souhaitions compléter cette base de données avec de nouveaux essais.

Trois géométries différentes d'éprouvette ont été testées, ce qui a permis d'obtenir des niveaux de contraintes relativement différents d'un essai à l'autre.

3.3.1 Échantillon de béton de diamètre 50 mm

La figure 3.19 montre la géométrie utilisée ici. Nous avons des échantillons de béton de 50 mm de diamètre, ce qui est bien représentatif du béton utilisé, la cellule de confinement

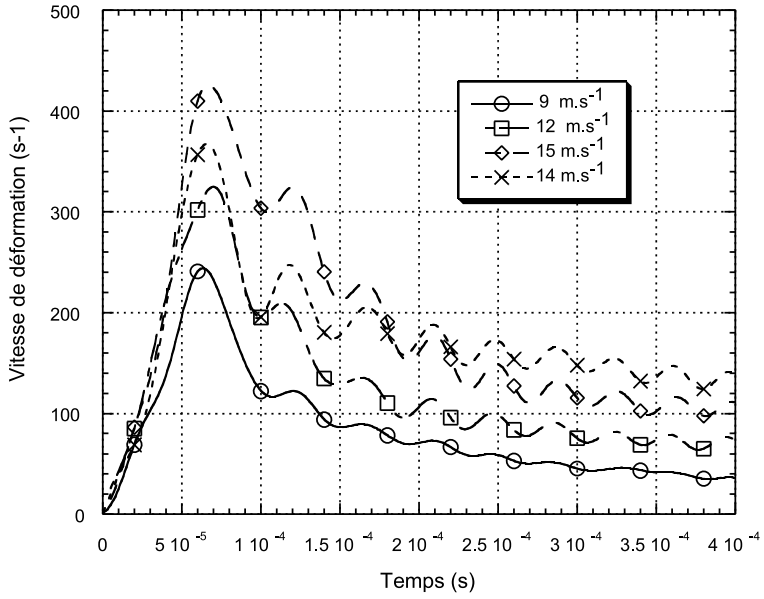


FIG. 3.20 – *Courbes vitesse de déformation axiale en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 50$ mm)*

ayant un diamètre extérieur de 70 mm. Il y avait en outre un jeu entre l'échantillon de béton et le diamètre intérieur de la cellule afin de pouvoir mettre le produit d'interface. Les échantillons réalisés ont été nommés : essais quasi– œdométriques dynamiques ($\phi = 50$ mm) et repérés en fonction de la vitesse de l'impacteur.

La figure 3.20 montre les différentes évolutions des vitesses de déformation en fonction du temps. On peut constater que pour tous les essais cette vitesse n'est pas constante et que l'on atteint pour l'essai où la vitesse de l'impacteur était de 15 m/s la valeur maximale de 600 s^{-1}. Il est important de noter qu'à partir de ces essais il est délicat d'en déduire une loi de comportement sans tenir compte des variations de la vitesse de déformation. C'est pourquoi ces essais ne seront pas utilisés pour identifier la loi de comportement sphérique du MB50.

La figure 3.21 montre les courbes contrainte-déformation obtenues pour les différentes vitesses de chargement (moyenne des $\dot{\varepsilon}$, vitesse de l'impacteur indiquée). La contrainte obtenue ici correspond à la force sortante divisée par la section de béton. Nous pouvons constater que les valeurs de contraintes déduites de ces essais sont nettement plus importantes que celles obtenues en compression simple (jusqu'à 600 MPa pour l'essai où $V = 14$

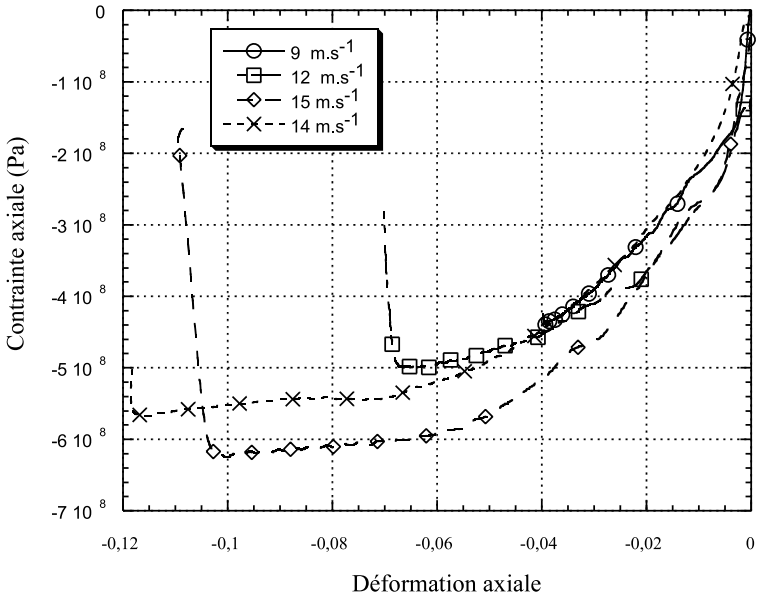


FIG. 3.21 – *Courbes contrainte-déformation pour les essais quasi–œdométriques dynamiques (ϕ = 50 mm)*

m/s). Les déformations axiales atteintes sont également très importantes pour un béton (jusqu'à 12 %).

Pour avoir accès à la réponse sphérique du béton nous avons besoin de la valeur de la déformation radiale de la cellule en acier. La figure 3.22 montre l'évolution de cette déformation pour les différents essais. Nous pouvons constater que nous avons deux régimes distincts sur ces courbes. Le premier correspond à la déformation élastique de la bague, tandis que le second correspond à la plastification de celle-ci. Pour le dépouillement de l'essai nous ne nous intéresserons qu'à la partie des courbes qui correspond à la réponse élastique de la bague. Nous aurions pu à l'aide d'un calcul inverse utiliser la partie de la courbe correspondant à la plastification de la bague, ce qui aurait considérablement compliqué le dépouillement.

A partir de la donnée des jauges de déformation et du dépouillement classique des barres de Hopkinson, on peut obtenir le comportement "pression-volume" en dynamique du béton. Les courbes correspondantes sont tracées en figure 3.23. La courbe pression-volume obtenue ici possède des caractéristiques identiques à celles obtenues en statique (voir figure 3.24), aux ordres de grandeur près. Cependant, les données expérimentales

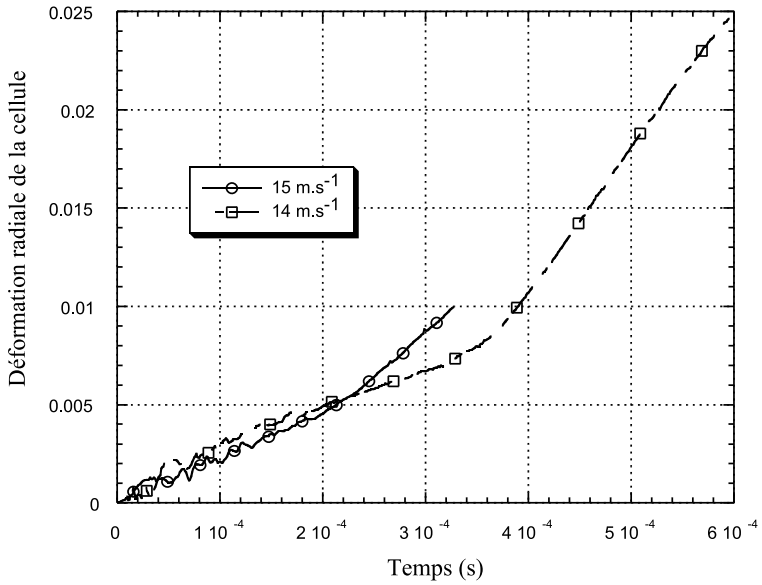


FIG. 3.22 – *Courbes déformation radiale de la cellule en acier en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 50$ mm)*

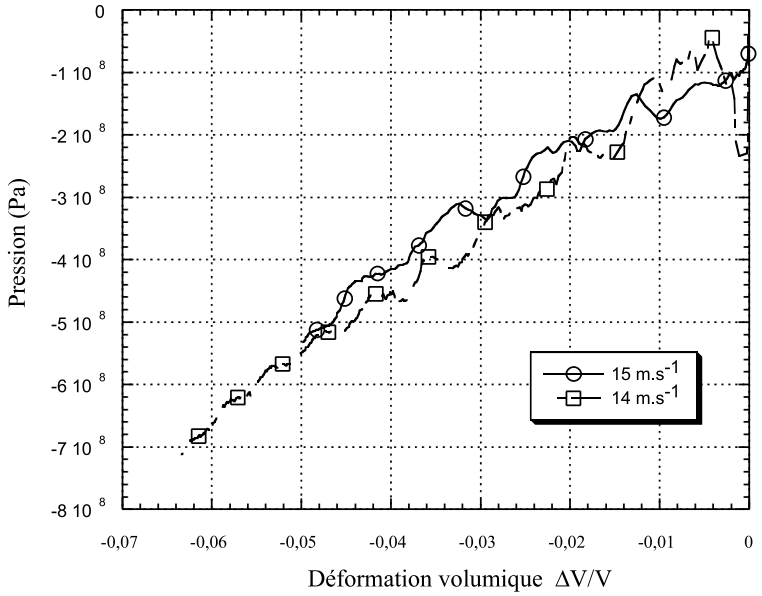


FIG. 3.23 – *Comportement "pression-volume" du MB50 pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 50$ mm)*

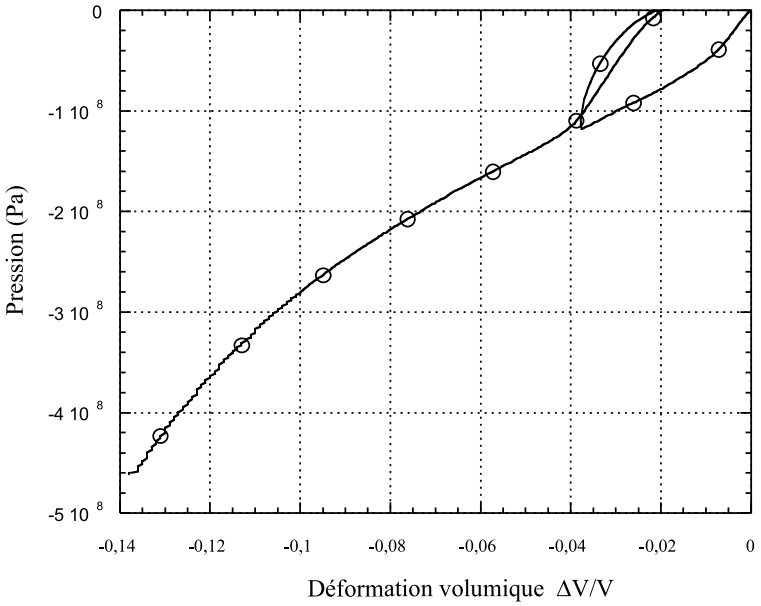


FIG. 3.24 – *Comportement "pression-volume" du MB50 pour un essai quasi–œdométrique statique ($\phi = 80$ mm)*

obtenues à l'aide de la barre de Hopkinson ne permettent pas d'appréhender parfaitement la phase élastique du comportement. Néanmoins, dès que cette phase élastique est dépassée, nous obtenons une courbe présentant un caractère élasto-plastique. Nous verrons par la suite (au paragraphe 3.4) qu'elle a été l'influence de la vitesse de déformation sur la réponse "pression-volume". Néanmoins, les niveaux de contraintes obtenus avec des échantillons de diamètre 50 mm ne permettaient pas d'obtenir un niveau de compaction élevé. Afin d'obtenir une contrainte axiale plus importante tout en conservant la même configuration expérimentale, il a été décidé de diminuer la section des éprouvettes de béton. La pression de 700 MPa n'est, en effet, pas suffisamment élevée pour voir le durcissement du MB50. De plus, le rayon de l'éprouvette est plus faible ce qui laisse supposer que l'on aura plus rapidement un confinement homogène ce qui permettra d'obtenir une loi de comportement "pression–volume".

3.3.2 Échantillon de béton de diamètre 30 mm

La figure 3.25 montre la nouvelle géométrie utilisée. Nous avons des échantillons de béton de 30 mm de diamètre, la cellule de confinement a un diamètre extérieur de 50 mm

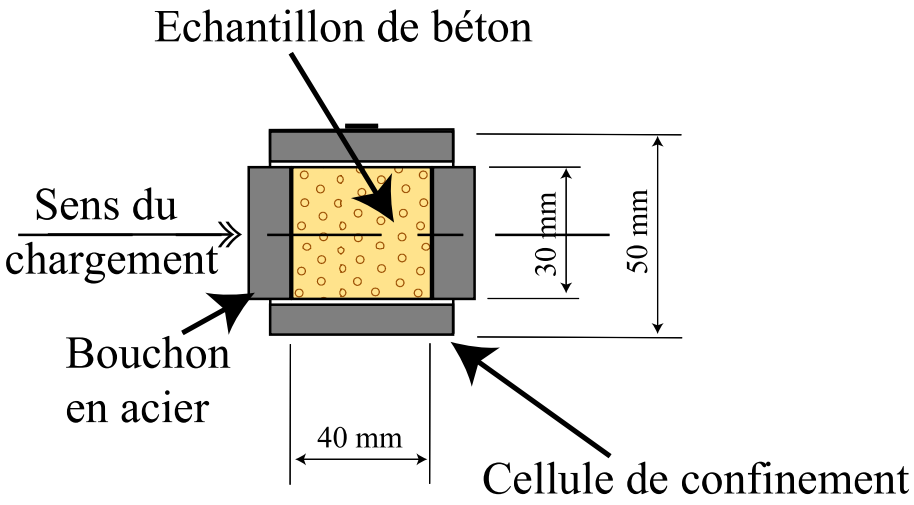


FIG. 3.25 – *Géométrie des essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm)*

(diamètre plus faible que précédemment afin de conserver un niveau de déformation de la cellule quasi–identique). Pour avoir un mélange granulaire identique au précédent et ainsi conserver un échantillon qui soit représentatif du matériau utilisé, les échantillons de béton n'ont pas été coulés dans un moule de 30 mm de diamètre, mais ont été carottés dans les échantillons de 50 mm de diamètre. De plus, afin de voir l'influence du trajet de chargement sur la réponse du matériau, deux cellules différentes ont été testées.

Cellule de confinement en acier

Cette première cellule reprend le principe de base des essais uniaxiaux confinés. Ces essais seront nommés par la suite : essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en acier) et seront également repérés en fonction de la vitesse de l'impacteur. Tout comme pour les essais précédents, plusieurs vitesses de déformation ont été testées. La figure 3.26 montre les évolutions des vitesses de déformation en fonction du temps. Nous pouvons ainsi remarquer que nous avons également une vitesse de déformation qui n'est pas constante au cours du temps avec une vitesse maximale qui varie, d'un essai à l'autre, entre 150 et 500 s^{-1}. Contrairement aux essais où le diamètre des échantillons était de 50 mm, une fois le pic atteint la vitesse de déformation reste quasiment constante, ce qui permet de considérer que l'on peut déduire de ces essais une loi de comportement.

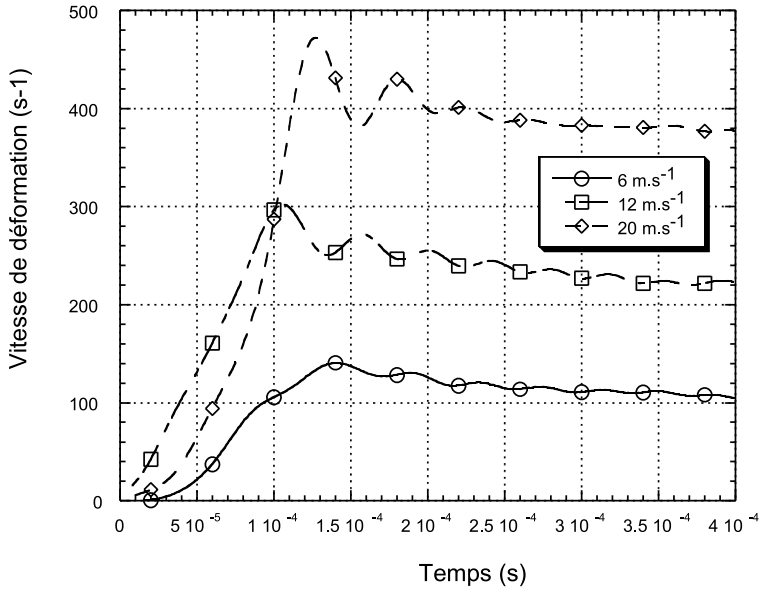


FIG. 3.26 – *Courbes vitesse de déformation axiale en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en acier)*

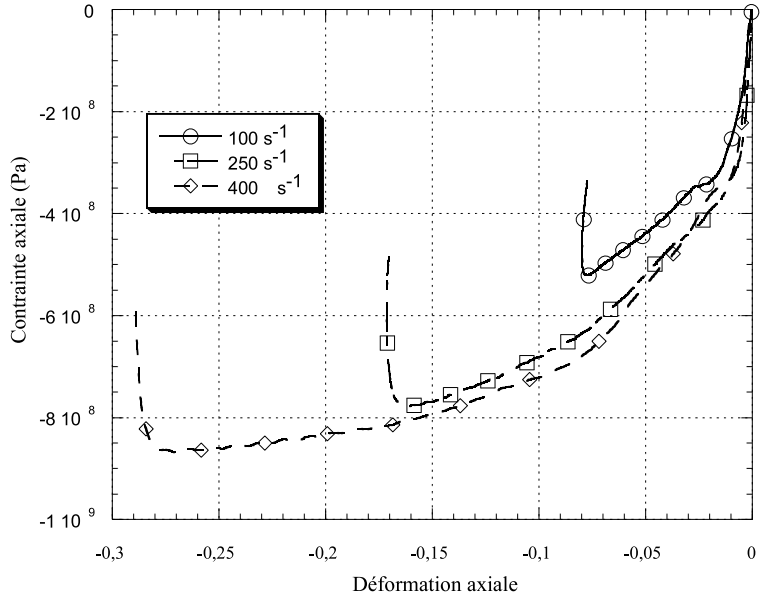


FIG. 3.27 – *Courbes contrainte-déformation pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi =$ 30 mm, confinement en acier)*

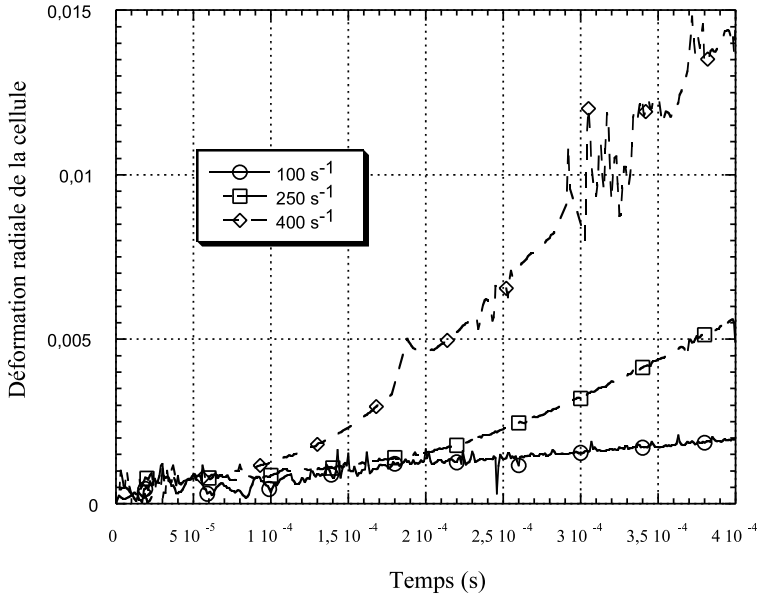


FIG. 3.28 – *Courbes déformation radiale de la cellule en acier en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en acier)*

La figure 3.27 montre les courbes contrainte axiale–déformation axiale obtenues pour les différentes vitesses de déformation. Nous pouvons constater que nous obtenons bien une contrainte axiale plus importante que pour la première série d'essais ($\phi = 50$ mm). La contrainte maximale obtenue est de plus de 800 MPa, tandis que la déformation axiale dépasse les 25 %.

Les dépouillements en courbe de comportement "pression-volume" ont été réalisés. Á partir de la déformation radiale de la cellule de confinement obtenue en figure 3.28, nous pouvons en déduire la courbe de comportement présentée en figure 3.29.

Cellule en laiton

Pour voir l'influence du trajet de chargement sur la réponse du matériau, des cellules de confinement en laiton ont été utilisées. Ces cellules avaient la géométrie présentée en figure 3.25. Le laiton a été utilisé car il présentait plusieurs caractéristiques intéressantes :

– Caractéristiques mécaniques différentes de l'acier : le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du laiton permettent d'avoir une pression de confinement appliquée au béton plus faible que dans le cas d'une cellule en acier.

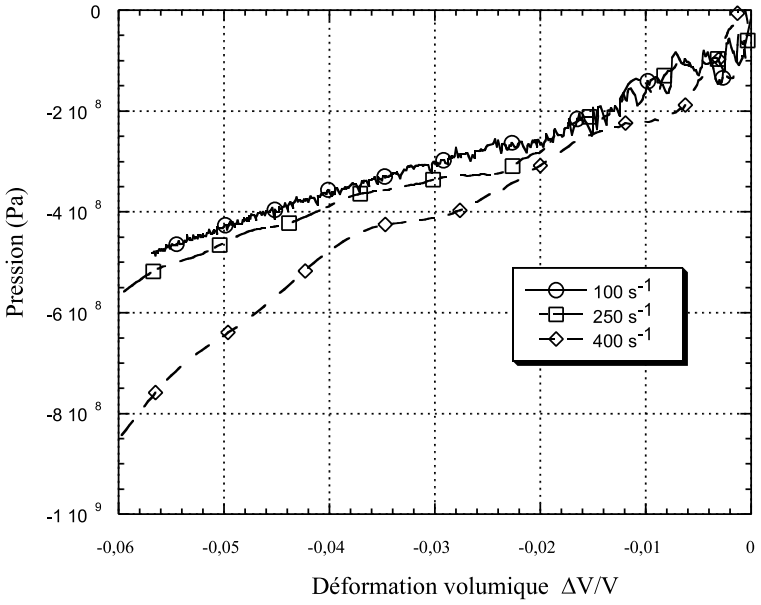


FIG. 3.29 – *Comportement "pression-volume" du MB50 pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en acier)*

- Seuil de plasticité plus faible : permet d'avoir rapidement un trajet ou le déviateur des contraintes est très important. On se retrouve dans cette configuration avec des déformations radiales de l'éprouvette de béton qui commencent à ne plus être négligeables devant les déformations axiales. De plus, le module d'écrouissage étant faible, on obtient une pression de confinement qui reste constante au cours du chargement (ce qui n'est pas vrai lorsque la cellule est élastique, la pression de confinement augmentant en même temps que la contrainte axiale).
- Matériau insensible à la vitesse de déformation : contrairement à l'acier utilisé précédemment, le laiton ne possède pas un comportement visco-plastique ce qui permet de connaître parfaitement ses caractéristiques mécaniques au cours de l'essai pour le dépouillement.

Ces essais seront nommés par la suite : essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en laiton) et repérés par la vitesse de l'impacteur.

La figure 3.30 présente les différentes vitesses de déformation obtenues pour les différentes vitesses d'impacteur testées. La figure 3.31 présente les courbes contrainte axiale—déformation axiale obtenues pour les différentes vitesses de déformation. Nous pouvons

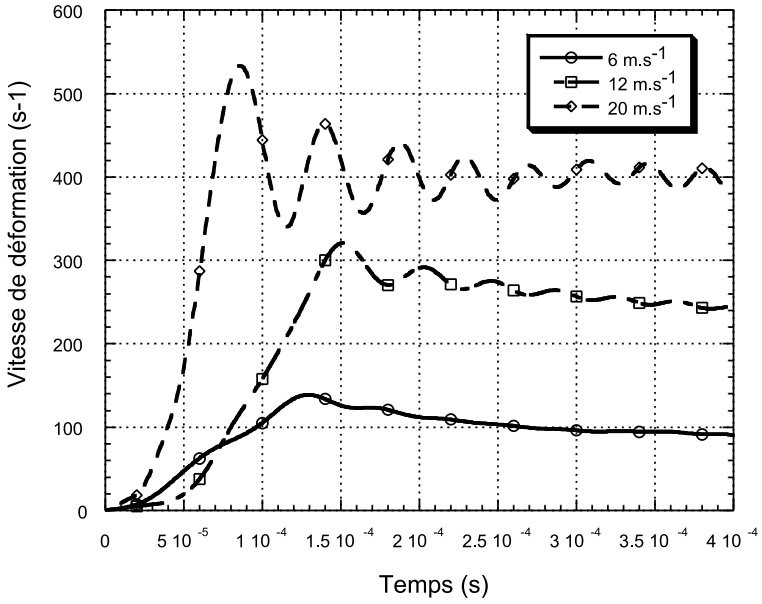


FIG. 3.30 – *Courbes vitesse de déformation axiale en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en laiton)*

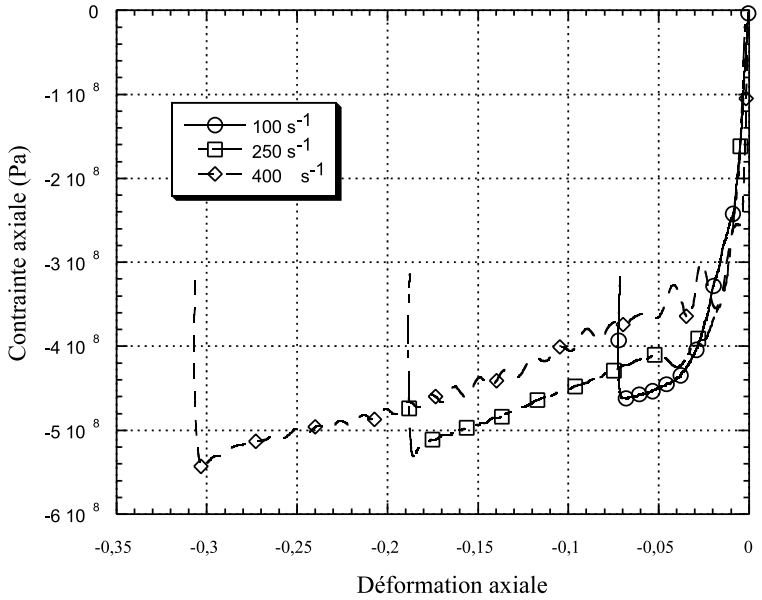


FIG. 3.31 – *Courbes contrainte-déformation pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en laiton)*

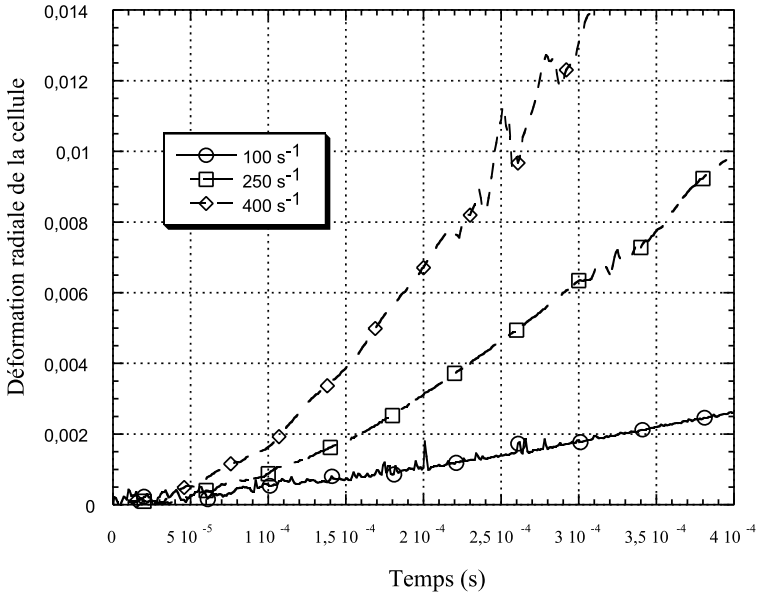


FIG. 3.32 – *Courbes déformation radiale de la cellule en acier en fonction du temps pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en laiton)*

constater que nous avons, contrairement aux essais précédents, une contrainte au pic qui diminue quand la vitesse de déformation augmente. La contrainte maximale obtenue est de plus de 500 Mpa, tandis que la déformation axiale atteint les 30 %.

Le dépouillement en courbe de comportement "pression-volume" a été réalisé. Pour cela nous avons la déformation radiale de la cellule de confinement en figure 3.32, ce qui donne la courbe de comportement présentée en figure 3.33 en n'utilisant que la partie "élastique" de la déformation radiale. Il s'est avéré, après coup, qu'un seuil de plasticité plutôt faible rend le dépouillement des essais délicat à réaliser car la phase d'élasticité de la cellule de confinement est vraiment réduite. Toutefois, ces essais permettront d'avoir des trajets de chargement nettement différents, ce qui permettra d'éprouver les modèles de comportement lors des simulations numériques [Le Nard 99].

3.3.3 Comparaison des résultats obtenus

La figure 3.34 montre l'ensemble des essais réalisés en dynamique. Nous pouvons constater que l'ensemble des résultats est très groupé, ce qui montre la bonne répétabilité de ces essais. Nous pouvons également constater que le dépouillement se faisant

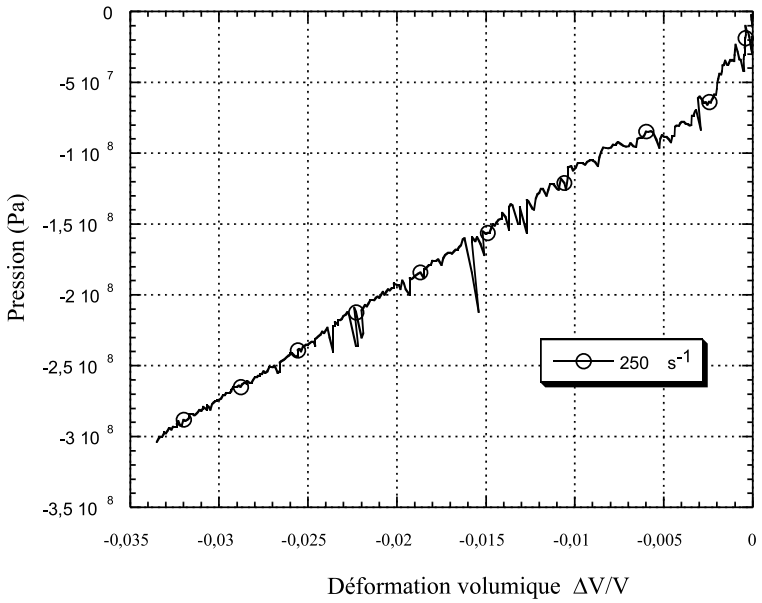


FIG. 3.33 – *Comportement "pression-volume" du MB50 pour les essais quasi–œdométriques dynamiques ($\phi = 30$ mm, confinement en laiton)*

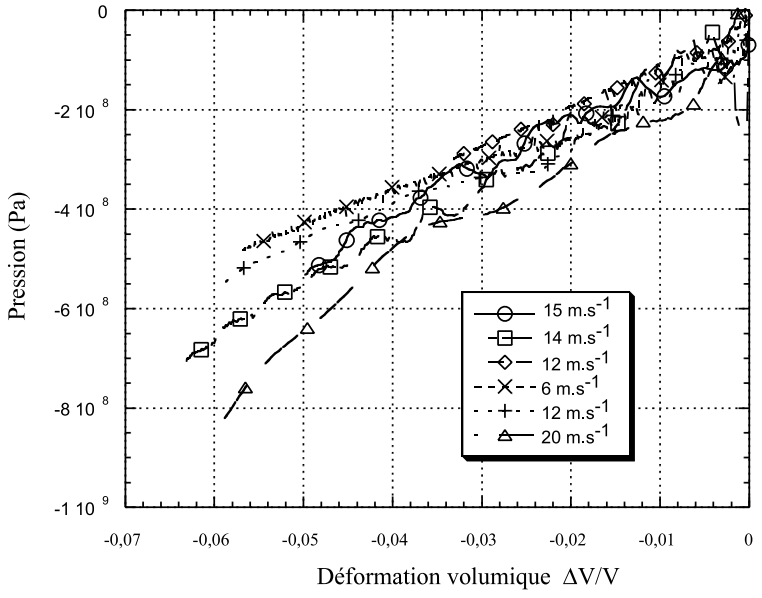


FIG. 3.34 – *Comparaison des comportements sphériques obtenus pour les différentes géométries*

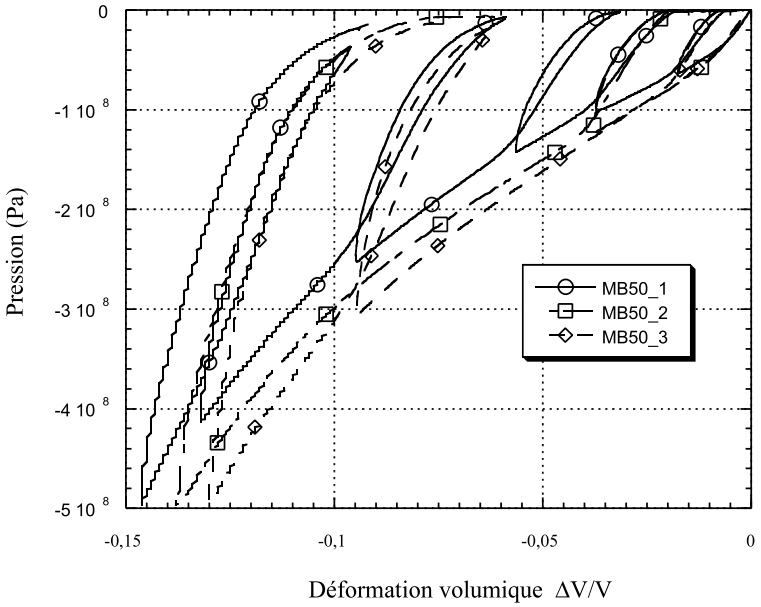


FIG. 3.35 – *Courbes pression-volume pour le MB50 en statique*

uniquement dans la phase élastique du comportement des cellules de confinement, la différence de module d'élasticité entre le laiton et l'acier n'est pas suffisante pour mettre en évidence l'influence du trajet de chargement sur le comportement sphérique du béton. Cette dépendance a été montrée par Burlion dans sa thèse [Burlion 97] et a été confirmée pour le MB50 dans le cadre de la campagne d'essais GEO [Bailly 99].

3.4 Comparaison statique–dynamique

Afin de voir l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement "pression-volume" d'un même béton, des essais de compression œdométrique statiques ont été réalisés sur le MB50 (figure 3.35). Sur cette figure trois essais différents ont été représentés afin de montrer la bonne répétabilité des essais.

Les essais statiques ont été comparés aux essais dynamiques afin de voir l'influence de la vitesse de déformation. Le résultat obtenu est donné en figure 3.36. Sur cette figure ne sont représentés qu'un seul essai statique (MB50_2) et un seul essai dynamique (ϕ = 30 mm, confinement en acier avec une vitesse d'impacteur de 6 m/s) afin de ne pas la surcharger. Nous constatons sur cette figure qu'il y a une très grande influence de

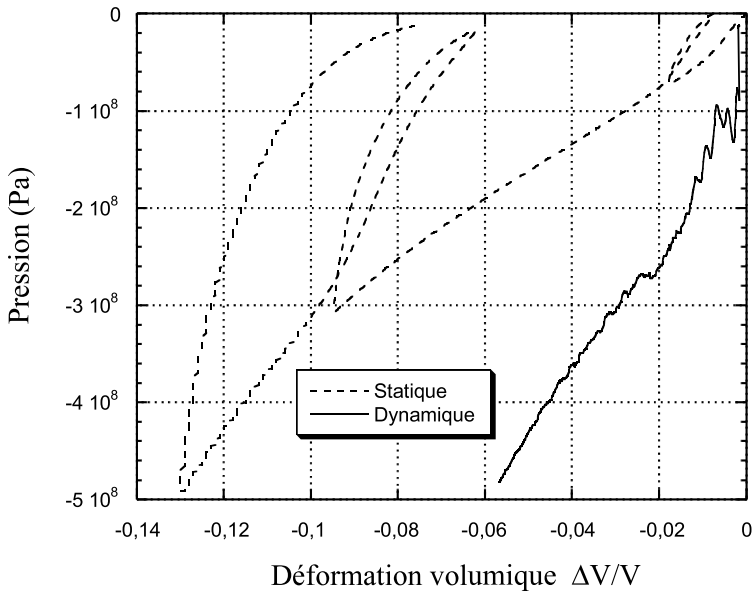


FIG. 3.36 – *Comparaison statique–dynamique pour le comportement sphérique du MB50*

la vitesse de déformation sur le comportement sphérique du MB50. Cet effet, contrairement à la compression simple, ne peut pas être qu'un effet structurel. La géométrie des échantillons de béton utilisés pour caractériser le comportement sphérique en dynamique, permet d'obtenir une bonne homogénéité des contraintes dans une section donnée. En effet, l'utilisation d'un confinement passif (bague bloquant l'effet "inertiel"), impose la contrainte radiale ce qui n'est pas le cas en compression simple.

Les études réalisées à ce jour ne permettent pas d'expliquer parfaitement ce phénomène. On peut toutefois penser que la résistance à l'effondrement de la porosité du béton augmente lorsque la vitesse de déformation devient grande. La présence d'eau libre à l'intérieur de la taille de porosité la plus grosse peut également avoir un rôle non négligeable lorsque la vitesse du chargement augmente (eau piégée à l'intérieur des pores). Des études approfondies devrons montrer l'influence de l'eau (essais sur éprouvettes sèches et saturées) sur le comportement sphérique en dynamique du béton.

3.5 Conclusions

Nous avons présenté à travers ce chapitre différents moyens expérimentaux qui permettent de réaliser des essais dynamiques sur le matériau béton.

Afin de compléter la base de données existante sur le micro-béton MB50, nous avons développé un essai de compaction dynamique qui permet d'obtenir simplement et pour un faible coût le comportement sphérique dynamique du béton. Ces essais ont été comparés à des essais identiques réalisés en statique, ce qui a permis de mettre en évidence une très forte influence de la vitesse de déformation sur le comportement sphérique (dans le cas d'un trajet de chargement quasi–œdométrique).

Maintenant que nous avons pu caractériser le comportement sphérique en dynamique du MB50, nous allons présenter une modélisation originale qui permet de prendre en compte les observations expérimentales.

Chapitre 3 : Caractérisation expérimentale de la compaction dynamique des bétons

Résumé

Une revue bibliographique de résultats expérimentaux obtenus en dynamique sur différents bétons a été effectuée. Ce chapitre a également permis de présenter un nouvel essai de caractérisation du comportement "pression-volume" d'un béton pour des vitesses de déformations uniaxiales comprises entre 200 et 500 s^{-1}. Dans un essai triaxial, $\dot{\varepsilon}$ est un tenseur et il n'y a donc pas une seule vitesse de déformation. Toutefois la géométrie des éprouvettes (échantillon confiné) permet d'avoir un essai qui soit le plus uniaxial possible, ce qui autorise un dépouillement unidimensionnel pour obtenir une loi de comportement.
L'ensemble de ces essais a permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes qu'il va falloir intégrer dans la modélisation proposée au chapitre 2. Ces phénomènes sont les suivants :

- En traction, il y a une forte influence de la vitesse de déformation sur la résistance du béton. Pour la gamme de vitesses qui nous intéresse, environ 100 s^{-1}, la résistance dynamique est dix fois plus importante qu'en statique. Cette augmentation de résistance ne peut pas être simplement expliquée, comme en compression, par un effet inertiel. Le modèle de comportement en traction doit donc être capable de représenter ce phénomène.
- Le comportement "pression-volume" du micro-béton MB50 présente lui aussi un caractère visqueux. En effet, des comparaisons réalisées avec des essais statiques de même type ont montré qu'il y avait une influence de la vitesse de déformation non négligeable sur le comportement sphérique de ce béton. Ce point doit lui aussi être pris en compte dans la nouvelle modélisation.

Chapitre 4

Modèle viscoplastique–visco-endommageable

4.1 Méthodes d'homogénéisation 120
4.1.1 Modèle dilué [Eshelby 57] 121
4.1.2 Méthode de Mori-Tanaka [Mori et Tanaka 73] 121
4.1.3 Méthode par schéma différentiel [Zimmerman 91] 122
4.1.4 Méthode auto-cohérente [Hershey 54] 123
4.2 Modèle visco-endommageable 125
4.2.1 Influence des paramètres d'évolution de l'endommagement de traction 127
4.2.2 Influence des paramètres d'évolution de l'endommagement de compression 130
4.2.3 Calibration du modèle de visco-endommagement 134
4.3 Modèle viscoplastique 135
4.3.1 Influence des paramètres d'évolution sur la réponse du modèle viscoplastique 137
4.3.2 Calibration du modèle de viscoplasticité 142
4.4 Couplage des modèles viscoplastique et visco-endommageable 142
4.5 Intégration temporelle 146
4.6 Conclusions 146

Nous avons vu au chapitre 3 qu'il était important de prendre en compte dans la modélisation une influence de la vitesse de déformation sur le comportement sphérique du béton. Le modèle proposé au chapitre 2 ne permet pas de prendre en compte tous les phénomènes expérimentaux observés au chapitre 3. De plus, il fait intervenir dans une même variable des phénomènes micromécaniques aussi différents que l'effondrement de porosité et l'endommagement dû aux phénomènes de cisaillement ou d'extension ce qui peut sembler un peu simpliste. Pour remédier à l'ensemble de ces problèmes, nous allons dans ce chapitre proposer un modèle viscoplastique et visco-endommageable (prise en compte des effets de vitesse) basé lui aussi sur la mécanique des milieux poreux, mais faisant intervenir la porosité dans le comportement de manière plus classique par l'intermédiaire d'une méthode d'homogénéisation.

4.1 Méthodes d'homogénéisation

La modélisation de milieux hétérogènes tels que le béton peut être appréhendée de deux façons totalement distinctes. La première méthode consiste à considérer le comportement global du matériau sans se préoccuper de sa microstructure. Cette approche a longtemps été utilisée du fait de son apparente simplicité théorique et expérimentale. La seconde méthode consiste à se préoccuper du comportement de chacun des composants du matériau hétérogène pour reconstruire le comportement global. Cette approche, plus proche de la microstructure, permet de mieux représenter la réponse homogénéisée du matériau hétérogène (approche par homogénéisation).

Nous allons par la suite rappeler différentes méthodes d'homogénéisation[1] qui permettront de décrire la porosité du béton comme étant des inclusions sphériques dans une matrice homogène et d'en déduire les propriétés du milieu homogène équivalent. Dans tous les cas de figures, les méthodes proposées ci-après concernent une matrice élastique linéaire contenant des inclusions homogènes. À partir de là, nous calculerons les propriétés du milieu équivalent et plus particulièrement l'évolution du module de cisaillement en fonction

1. Les méthodes présentées ici ont été présentées et comparées dans un rapport interne au LMT [Schmitt 92]

de la porosité, ce qui permettra de comparer les différentes méthodes d'homogénéisation (voir Annexe 1).

4.1.1 Modèle dilué [Eshelby 57]

La méthode d'Eshelby s'applique pour des matériaux où les hétérogénéité sont diluées dans une matrice. Elle s'appuie sur deux hypothèses :

- La présence des hétérogénéités perturbe uniquement les champs de déformations et de contraintes dans la matrice au voisinage de ces inclusions. De plus, on suppose que les champs de déformations et de contraintes dans la matrice sont identiques à ceux qui existeraient s'il n'y avait pas d'inclusion (faible dilution des inclusions dans la matrice).
- On considère que le milieu de comparaison est soumis aux mêmes conditions aux limites que le milieu hétérogène.

Cette méthode donne, dans le cas d'une matrice élastique (de module de cisaillement G_M) avec des pores sphériques, un module cisaillement G pour le matériau équivalent en fonction de la porosité f^* (fraction volumique de vide) :

$$G = G_M \times (1 - 2f^*) \tag{4.1}$$

On obtient ainsi de bonnes estimations lorsque la concentration des hétérogénéités ne dépasse pas la dizaine de pour cents car l'interaction entre les hétérogénéités n'est pas prise en compte. L'extrapolation à des hétérogénéités en plus fortes concentrations n'est donc pas réaliste et donne des résultats erronés (on aura toujours par cette méthode $G = 0$ pour $f^* \geq 0,5$).

4.1.2 Méthode de Mori-Tanaka [Mori et Tanaka 73]

Mori et Tanaka ont amélioré le modèle d'Eshelby en considérant que les champs de contraintes et déformations dans la matrice sont perturbés par la présence des hétérogénéités. En pratique, cela revient à considérer que les caractéristiques du milieu de comparaison sont identiques à celles de la matrice, mais que les interactions entre les hétérogénéités et

la matrice sont évaluées en supposant l'hétérogénéité soumise aux champs moyens dans la matrice et non aux champs macroscopiques.

On obtient alors le module de compressibilité et de cisaillement suivant (toujours pour des pores sphériques dans une matrice élastique) :

$$\begin{aligned} K &= \frac{4K_M G_M (1-f^*)}{4G_M + 3K_M f^*} \\ G &= \frac{G_M (1-f^*)}{1 + \frac{6K_M+12G_M}{9K_M+8G_M} f^*} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Cette méthode est la seule qui permette d'avoir accès au module de compressibilité et de cisaillement du matériau homogénéisé de manière totalement explicite.

Un cas très particulier est celui pour lequel nous avons le coefficient de Poisson égal à 0,2 (ce qui est le cas du béton) et pour lequel on obtient l'expression suivante pour le module de cisaillement :

$$G = G_M \times \frac{1-f^*}{1+f^*} \tag{4.3}$$

Cette méthode donne de bons résultats (pour un matériau à deux phases), néanmoins l'interaction entre les hétérogénéités est prise en compte de manière insuffisante pour être capable de représenter les fortes concentrations. Lorsque la concentration en hétérogénéité est inférieure à 30% cette méthode donne de bons résultats avec pour avantage de donner une expression explicite de G et K en fonction de G_M et K_M.

4.1.3 Méthode par schéma différentiel [Zimmerman 91]

Dans cette méthode les propriétés effectives sont évaluées par des schémas différentiels. Le principe est de considérer que l'on part d'un matériau qui est uniquement composé de matrice et on remplace progressivement une petite partie du matériau par des inclusions. Pour cela, on procède par itération et on utilise à chaque étape la méthode d'Eshelby (voir paragraphe 4.1.1). L'état initial correspond à la matrice seule et l'état final à la concentration totale souhaitée en inclusions.

Un cas particulier peut être résolu de manière explicite : pour cela on considère que l'on a des pores sphériques dans une matrice dont le coefficient de Poisson est égal à 0,2.

Ainsi, on obtient l'expression suivante pour le module de cisaillement :

$$G = G_M \times (1 - f^*)^2 \tag{4.4}$$

Le principal intérêt de cette méthode est qu'elle permet de tenir compte de fortes concentrations en inclusions. Cependant, il n'est pas sûr que la solution obtenue soit unique car elle dépend de l'ordre dans lequel on introduit les inclusions (important si on a des inclusions solide et des pores).

4.1.4 Méthode auto-cohérente [Hershey 54]

Dans cette méthode, on suppose que l'interaction entre une hétérogénéité et l'ensemble des autres hétérogénéités (lointaines) peut être évaluée en calculant l'interaction entre cette hétérogénéité de forme ellipsoïdale et un milieu de comparaison de mêmes caractéristiques que le milieu effectif (milieu homogène équivalent).

[Hill 65] obtient par cette méthode certains résultats remarquables. On peut obtenir, dans le cas de pores sphériques inclus dans une matrice dont le coefficient de Poisson est égal à 0,2, la relation suivante :

$$2\left(\frac{G}{G_M}\right)^2 + (1 + 4f^*)\left(\frac{G}{G_M}\right) - 3(1 - 2f^*) = 0 \tag{4.5}$$

Ce qui donne pour expression du module de cisaillement en résolvant l'équation 4.5 :

$$G = G_M \times (1 - 2f^*) \tag{4.6}$$

On retrouve, dans ce cas très particulier de pores sphériques dans une matrice de coefficient de Poisson égal à 0,2, le résultat de la méthode diluée (équation 4.1) ce qui est remarquable.

Ce modèle néglige les interactions entre l'hétérogénéité et les hétérogénéités proches ce qui n'est pas réaliste. De plus, d'autres problèmes surgissent lorsqu'une des phases possède des caractéristiques élastiques extrêmes (inclusions rigides ou pores).

Afin de comparer les différentes méthodes d'homogénéisation, nous avons tracé sur la figure 4.1 l'évolution du module de cisaillement en fonction de la fraction d'hétérogénéité (ou de la porosité) si nous nous plaçons dans le cas : inclusions sphériques dans une

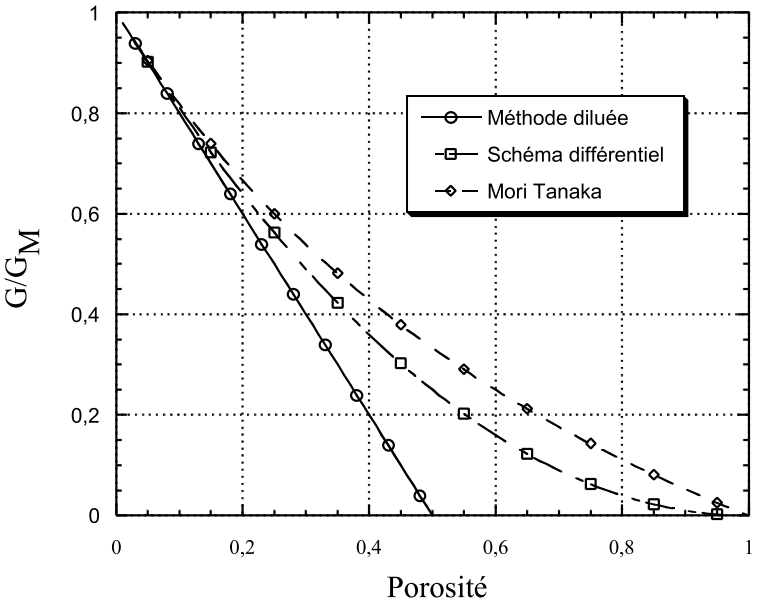


FIG. 4.1 – *Comparaison des différentes méthodes d'homogénéisation lorsque le coefficient de Poisson de la matrice ν_m est égal à 0,2*

matrice de coefficient de Poisson égal à 0,2. Nous pouvons constater que pour une porosité inférieure à 30 % l'ensemble de ces méthodes donnent à peu près le même résultat.

Au vu de ces résultats et sachant que, dans le cas du béton, la porosité reste dans la plupart des cas comprise entre $[0\%, 30\%]$, nous choisirons pour modèle d'homogénéisation le modèle de Mori Tanaka. C'est le seul modèle qui donne des expressions explicites pour l'évolution du module de cisaillement et de compressibilité, tout en donnant des résultats convenables lorsque la porosité est grande (voisine de 30 %).

Dans ce qui suit, nous considérerons donc que notre matériau poreux peut se ramener à un matériau homogène équivalent avec pour caractéristiques élastiques les modules de compressibilité et de cisaillement définis à l'équation 4.2.

Maintenant que nous avons vu comment nous allons prendre en compte la porosité dans le modèle de comportement, nous allons définir le modèle visco-endommageable (paragraphe 4.2), puis le modèle viscoplastique (paragraphe 4.3) en appliquant la méthode d'homogénéisation de Mori-Tanaka et enfin le couplage des deux (paragraphe 4.4).

4.2 Modèle visco-endommageable

Afin d'introduire un effet de vitesse dans l'évolution de l'endommagement nous allons utiliser un modèle visqueux fondé sur les travaux de Dubé [Dubé 94]. Nous utiliserons ici le modèle de comportement élastique visco-endommageable suivant :

$$\sigma_{ij} = (1-D)\big[K_{ijkl}\varepsilon^e_{mm}\delta_{kl} + 2G_{ijkl}(\varepsilon^e_{kl} - \frac{1}{3}\varepsilon^e_{mm}\delta_{kl})\big] \tag{4.7}$$

où K_{ijkl} et G_{ijkl} sont les modules de compressibilité et de cisaillement du matériau. Nous ne prendrons pas en compte dans cette loi de comportement une quelconque influence de la porosité.

Nous aurons la forme suivante pour l'évolution de la vitesse d'endommagement :

$$\dot{D} = \Big(\frac{< F_D(\tilde{\varepsilon}^e) >}{m_D}\Big)^{n_D} \tag{4.8}$$

où $F_D(\tilde{\varepsilon}^e)$ représente la fonction seuil d'endommagement et m_D et n_D sont des paramètres matériaux.

La fonction seuil d'endommagement que nous utiliserons ici découle des travaux de thèse de Laborderie [Laborderie 91] qui relie l'évolution de l'endommagement au taux de dissipation d'énergie de la contrainte (séparée en une partie positive et une partie négative afin de représenter l'unilatéralité). Afin de conserver une évolution de l'endommagement qui soit pilotée par les déformations nous avons modifié la forme de la fonction seuil pour l'écrire en fonction de la déformation équivalente élastique. Nous pouvons alors écrire une nouvelle fonction seuil qui aura la forme suivante (équivalente au seuil défini par Mazars [Mazars 84] lorsque $D = 0$) :

$$F_D(\tilde{\varepsilon}^e) = \tilde{\varepsilon}^e - \varepsilon_{D0} - \frac{1}{a}\Big(\frac{D}{1-D}\Big)^{(1/b)} \tag{4.9}$$

où $\tilde{\varepsilon}^e$ représente la déformation équivalente élastique, ε_{D0} le seuil initial d'endommagement, a et b des paramètres matériaux.

Étant donné la forme de la fonction seuil utilisée ici (équation 4.9), l'endommagement n'évoluera que sous l'effet de déformations positives (c'est-à-dire sous l'effet de déformations d'extension). Cette fonction seuil permet de respecter les lois de la thermodynamique. En effet, nous avons vu pour les modèles d'endommagements (voir chapitre 1) que

la dissipation est caractérisée par :

$$Y\dot{D} \geq 0 \tag{4.10}$$

ce qui revient à avoir $\dot{D} \geq 0$. Dans notre cas, l'équation 4.8 impose à la vitesse d'endommagement d'être positive ou nulle. Nous avons de plus un endommagement qui est compris entre 0 et 1 et nous vérifions qu'à chaque instant Y reste positif, ce qui permet à la dissipation de rester toujours positive.

Nous avons vu au chapitre 2 que si l'on utilise une variable d'endommagement uniquement définie par une évolution de "traction", nous obtenons un comportement en compression simple qui est loin d'être satisfaisant (par couplage simple avec la plasticité). Afin de remédier à cela et pour mieux appréhender la dégradation liée aux mécanismes d'extensions, nous allons utiliser un couplage entre un endommagement de compression et un endommagement de traction [Mazars 84]. Nous aurons alors un endommagement qui sera défini par :

$$D = \alpha_c D_c + \alpha_t D_t \tag{4.11}$$

où D_c et D_t représentent respectivement l'endommagement de compression et l'endommagement de traction tandis que α_c et α_t sont des paramètres tels que :

$$\begin{cases} \text{en cas de traction pure} & \alpha_c = 0 \\ \text{en cas de compression pure} & \alpha_t = 0 \\ \text{en cas de combinaison} & \alpha_t + \alpha_c = 1 \end{cases} \tag{4.12}$$

À partir de là, nous avons à définir deux endommagements différents, un de traction et un de compression, dont les évolutions seront gérées par les équations 4.8 et 4.9. Nous aurons alors les évolutions suivantes :

$$\dot{D}_c = \left(\frac{< \tilde{\varepsilon}^e - \varepsilon_{D0} - \frac{1}{a_c}\left(\frac{D_c}{1-D_c}\right)^{(1/b_c)} >}{m_{D_c}} \right)^{n_{D_c}} \tag{4.13}$$

et

$$\dot{D}_t = \left(\frac{< \tilde{\varepsilon}^e - \varepsilon_{D0} - \frac{1}{a_t}\left(\frac{D_t}{1-D_t}\right)^{(1/b_t)} >}{m_{D_t}} \right)^{n_{D_t}} \tag{4.14}$$

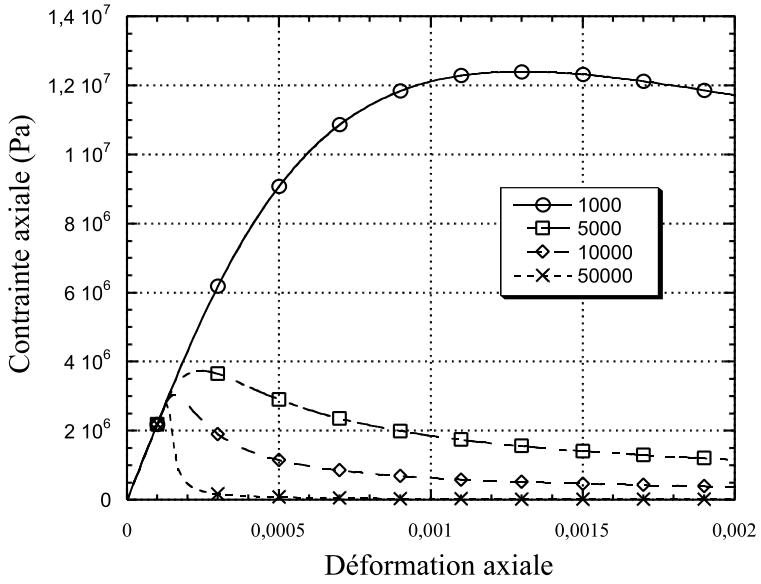


FIG. 4.2 – *Influence du paramètre a_t sur le comportement en traction quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $b_t = 1,6$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $m_{D_t} = 0,5.10^{-4}$ et $n_{D_t} = 5$*

À partir de ces évolutions, nous pouvons calculer un endommagement de traction et un endommagement de compression que nous couplons par l'intermédiaire de l'équation 4.12.

Les équations 4.13 et 4.14 introduisent deux catégories de paramètres. La première concerne les paramètres a_i et b_i qui définissent les courbes de comportement lorsque le chargement sera statique. Les paramètres n_{D_i} et m_{D_i} concernent, quant à eux, l'importance que l'on va donner à la vitesse de déformation. Ainsi pour identifier le comportement, on calera les paramètres a_t,b_t,a_c et b_c sur des essais quasi-statiques, tandis que les paramètres n_{D_t}, m_{D_t}, n_{D_c} et m_{D_c} seront calés en utilisant des essais à différentes vitesses de déformation.

4.2.1 Influence des paramètres d'évolution de l'endommagement de traction

Influence de a_t et b_t

Les paramètres a_t et b_t influent sur la forme de la partie post-pic du comportement en traction.

La figure 4.2 montre l'évolution de la courbe de comportement en traction pour diffé-

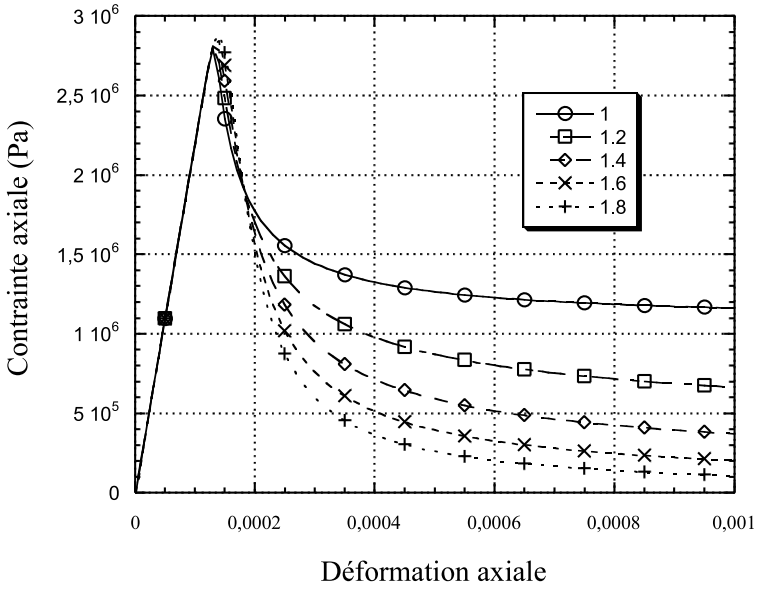


FIG. 4.3 – *Influence du paramètre b_t sur le comportement en traction quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_t = 20000$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $m_{D_t} = 0,5.10^{-4}$ et $n_{D_t} = 5$*

rentes valeurs de a_t, les autres paramètres étant fixes. a_t selon sa valeur peut correspondre à une chute brutale de contrainte ($a_t < 10^4$) ou à une phase préliminaire d'accroissement de contrainte, suivie après passage par un maximum d'une décroissance plus ou moins rapide. Le paramètre a_t permettra alors de donner un comportement post-pic avec une chute plus ou moins rapide de la contrainte.

La figure 4.3 montre l'évolution de la courbe de comportement en traction pour différentes valeurs de b_t, les autres paramètres étant fixes. b_t va influer sur la limite asymptotique du modèle de comportement. Pour une valeur de a_t correspondant à une chute brutale de contrainte ($a_t = 2.10^4$ pour les courbes tracées sur la figure 4.3), nous aurons une plage de variation du paramètre b_t qui sera comprise entre 1 et 2. Plus b_t sera grand, plus la contrainte résiduelle obtenue sera faible.

Les deux paramètres que nous venons de voir sont à caler à partir d'un essai de traction simple statique ou de traction par flexion.

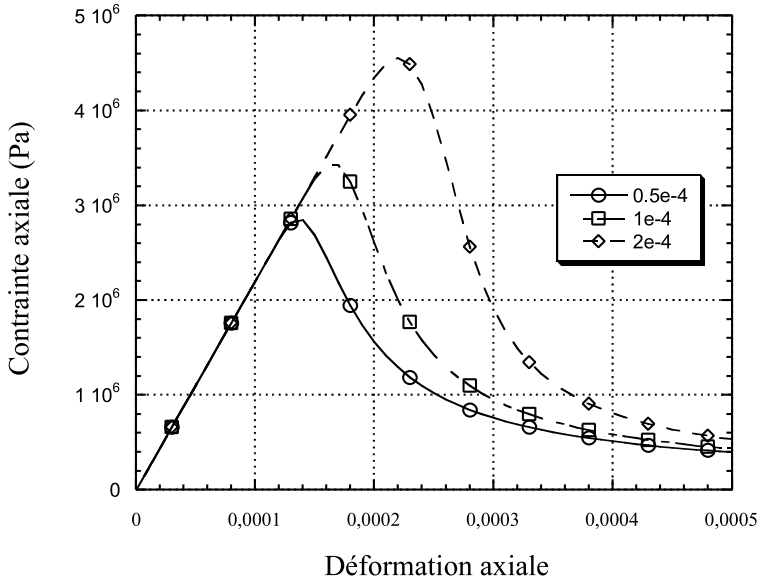


FIG. 4.4 – *Influence du paramètre m_{D_t} sur le comportement en traction quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_t = 20000$, $b_t = 1,6$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$ et $n_{D_t} = 5$*

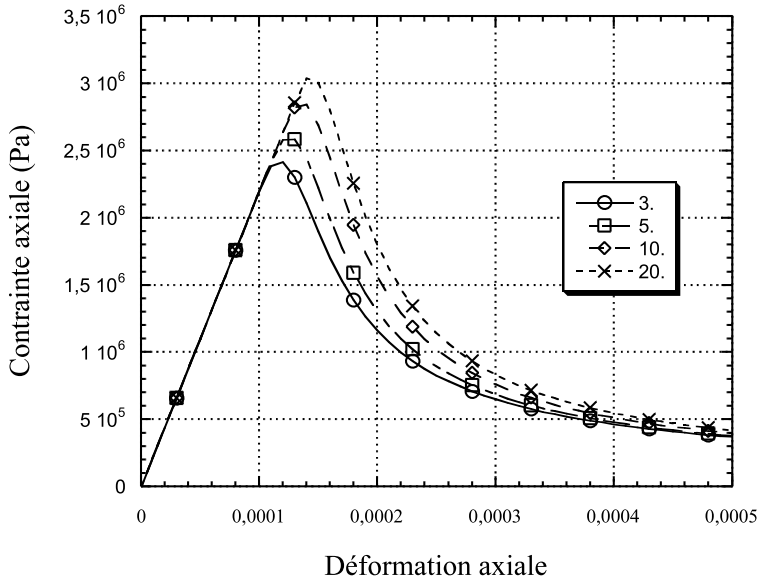


FIG. 4.5 – *Influence du paramètre n_{D_t} sur le comportement en traction quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_t = 20000$, $b_t = 1,6$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$ et $m_{D_t} = 0,5.10^{-4}$*

Influence de m_{D_t} et n_{D_t} en quasi-statique

Les paramètres m_{D_t} et n_{D_t} influent sur la réponse visqueuse du comportement en traction.

Le paramètre m_{D_t} va influer sur le début de l'apparition de l'endommagement. Plus sa valeur sera grande, plus l'endommagement apparaîtra tardivement. Ainsi sur la figure 4.4 le seuil initial d'endommagement ε_{D0} est constant et égal à 1.10^{-4} tandis que m_{D_t} varie entre 5.10^{-5} et 2.10^{-4}. Nous voyons sur cette courbe que pour un chargement où la vitesse de déformation est de 10^{-5} s^{-1} les valeurs de m_{D_t} choisies donneront un endommagement qui arrivera de plus en plus tardivement (lorsque m_{D_t} augmente) ce qui donne une résistance à la traction comprise entre 3 et 4,5 MPa.

La figure 4.5 montre pour un chargement où la vitesse de déformation est également 10^{-5} s^{-1} la réponse du modèle pour différentes valeurs de n_{D_t}. La différence entre les quatre courbes est ici faible car n_{D_t} donnera une importance plus ou moins grande à la vitesse de déformation sur la réponse du modèle. Ainsi, plus n_{D_t} sera petit, plus on aura un comportement qui dépendra de la vitesse de déformation. À l'inverse, plus n_{D_t} sera grand, plus le comportement restera proche du comportement statique même lorsque la vitesse de déformation augmentera significativement.

4.2.2 Influence des paramètres d'évolution de l'endommagement de compression

Il est important de noter qu'à ce stade du modèle de comportement, le modèle de visco-endommagement n'a pas encore été couplé au modèle de plasticité. Le comportement obtenu est donc uniquement dû à l'évolution de l'endommagement de compression sans aucune déformation plastique.

Influence de a_c et b_c

Tout comme a_t et b_t, les paramètres a_c et b_c vont influer sur la forme de la partie post-pic du comportement qui sera ici de la compression.

La figure 4.6 montre l'évolution de la courbe de comportement en compression pour

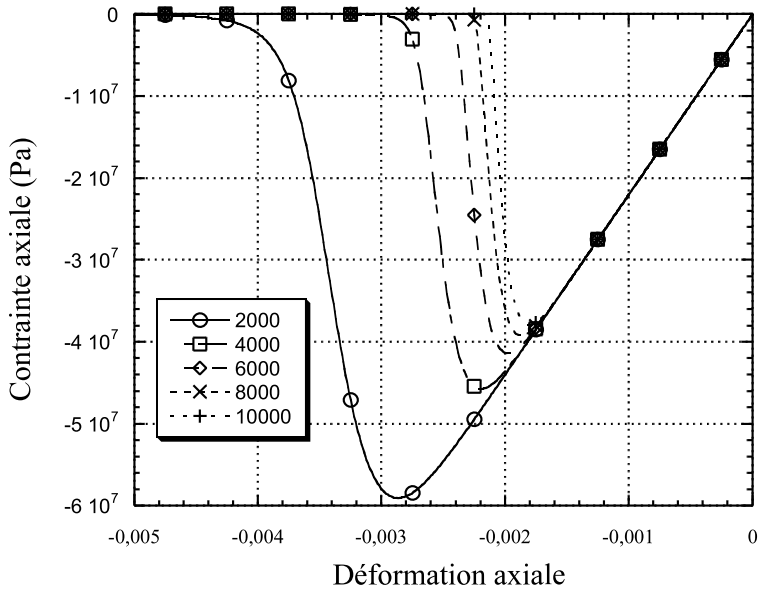


FIG. 4.6 – *Influence du paramètre a_c sur le comportement en compression quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $b_c = 4$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $m_{D_c} = 0,5.10^{-3}$ et $n_{D_c} = 20$*

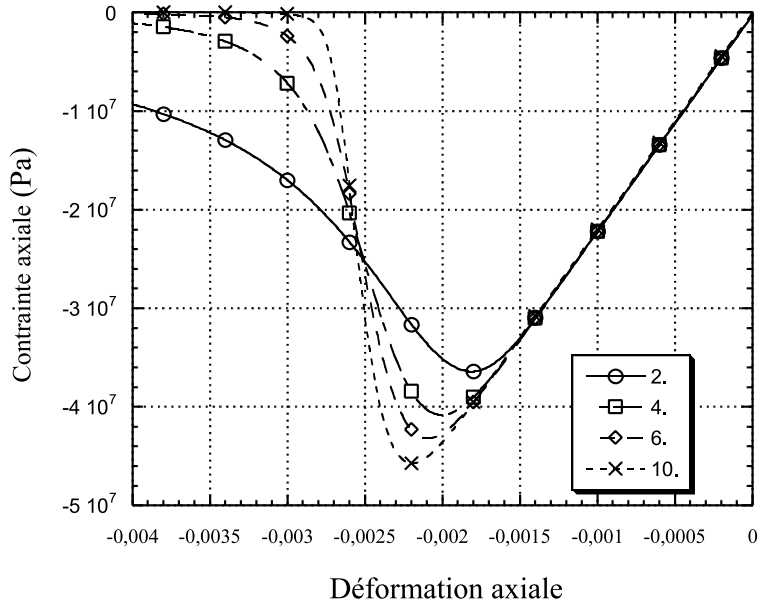


FIG. 4.7 – *Influence du paramètre b_c sur le comportement en compression quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_c = 4000$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $m_{D_c} = 0,5.10^{-3}$ et $n_{D_c} = 20$*

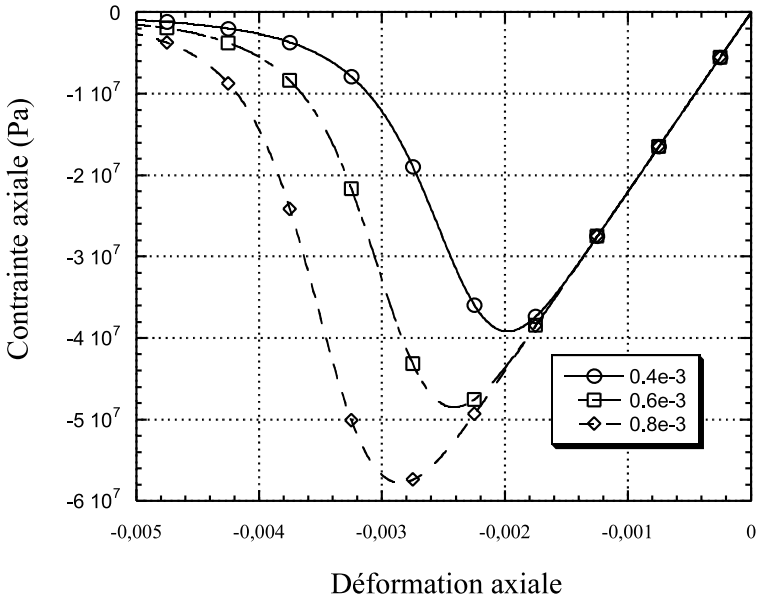


FIG. 4.8 – *Influence du paramètre m_{D_c} sur le comportement en compression quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_c = 4000$, $b_c = 4$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$ et $n_{D_c} = 20$*

différentes valeurs de a_c, les autres paramètres étant fixes. a_c, selon sa valeur, permettra d'obtenir un comportement post-pic qui apparaîtra plus ou moins rapidement. Pour un comportement correspondant à de la compression simple, nous choisirons une valeur de a_c qui sera, dans tous les cas de figure, supérieure à 10^3, afin d'avoir un comportement faiblement décroissant après le pic de contrainte pour représenter au mieux le comportement expérimental.

La figure 4.7 montre l'évolution de la courbe de comportement en compression pour différentes valeurs de b_c, les autres paramètres étant fixes. b_c va influer sur la rapidité de décroissance après le pic de contrainte du modèle, si l'on considère que celui-ci sera toujours supérieur à 2 dans le cadre de la compression. Plus b_c sera grand, plus la décroissance sera rapide après le pic de contrainte ce qui permettra de jouer sur la "fragilité" de comportement post-pic.

Influence de m_{D_c} et n_{D_c}

Les paramètres m_{D_c} et n_{D_c} influent, eux aussi, sur la réponse visqueuse du comportement en compression.

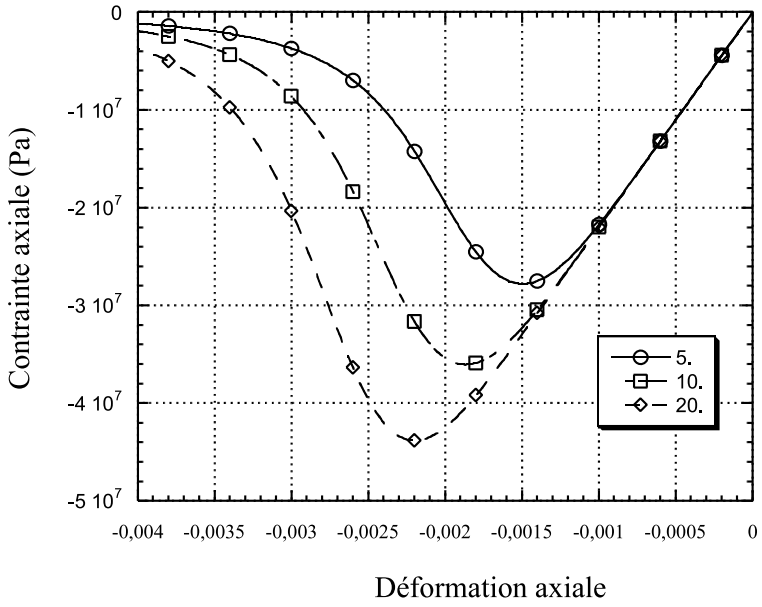


FIG. 4.9 – *Influence du paramètre n_{D_c} sur le comportement en compression quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) pour $a_c = 4000$, $b_c = 4$, $\varepsilon_{D0} = 1.10^{-4}$ et $m_{D_c} = 0,5.10^{-3}$*

Le paramètre m_{D_c} correspondra également à un "retard" dans l'apparition de l'endommagement. Plus sa valeur sera grande, plus l'endommagement apparaîtra tardivement et plus la résistance en compression sera grande. Ainsi sur la figure 4.8 le seuil initial d'endommagement est constant et égal à 1.10^{-4} et m_{D_c} varie entre 4.10^{-4} et 8.10^{-4}. Nous aurons ici une résistance à la compression qui sera comprise entre environs 40 et 60 MPa. Ce paramètre permettra de caler le pic de contrainte en compression statique par rapport aux observations expérimentales.

La figure 4.9 montre pour un chargement quasi-statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}$) la réponse du modèle pour différentes valeurs de n_{D_c}. La différence entre les trois courbes est ici plus importante que celle qui est observée en traction (voir figure 4.5), cependant n_{D_c} donnera quand même une importance plus ou moins grande à la vitesse de déformation sur la réponse du modèle. Ainsi plus n_{D_c} sera grand, moins on aura un comportement qui dépendra de la vitesse de déformation.

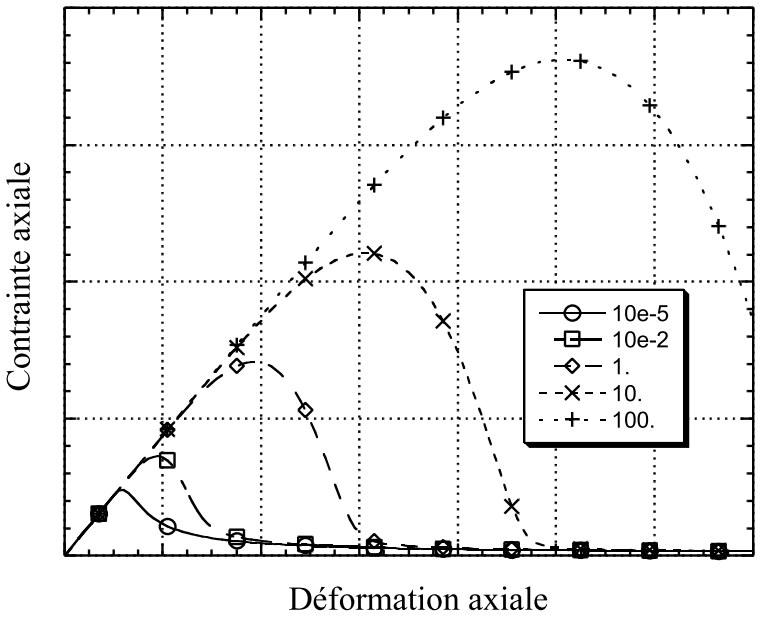


FIG. 4.10 – *Réponse du modèle de comportement pour une sollicitation de traction à différentes vitesses de déformation*

4.2.3 Calibration du modèle de visco-endommagement

La figure 4.10 montre la réponse du modèle de visco-endommagement pour une sollicitation de traction simple réalisée à différentes vitesses de déformation. Nous obtenons un comportement fortement dépendant de la vitesse de chargement ce qui est en accord avec les observations expérimentales (voir chapitre 3).

La figure 4.11 montre la réponse du modèle de visco-endommagement pour une sollicitation de compression simple où les vitesses de chargement sont les mêmes que précédemment. Nous pouvons voir que nous avons choisi d'avoir un comportement en compression qui soit faiblement dépendant de la vitesse de déformation (on ne multiplie que par deux la résistance à la compression quand $\dot{\varepsilon} = 100$) afin de ne pas créer de façon artificielle une dépendance trop grande à $\dot{\varepsilon}$. Il est important de noter que seule la réponse du modèle visco-endommageable est donnée ici. Nous verrons plus loin dans ce chapitre (voir paragraphe 4.4) que la réponse en compression simple du modèle peut être modifiée par combinaison avec le modèle viscoplastique.

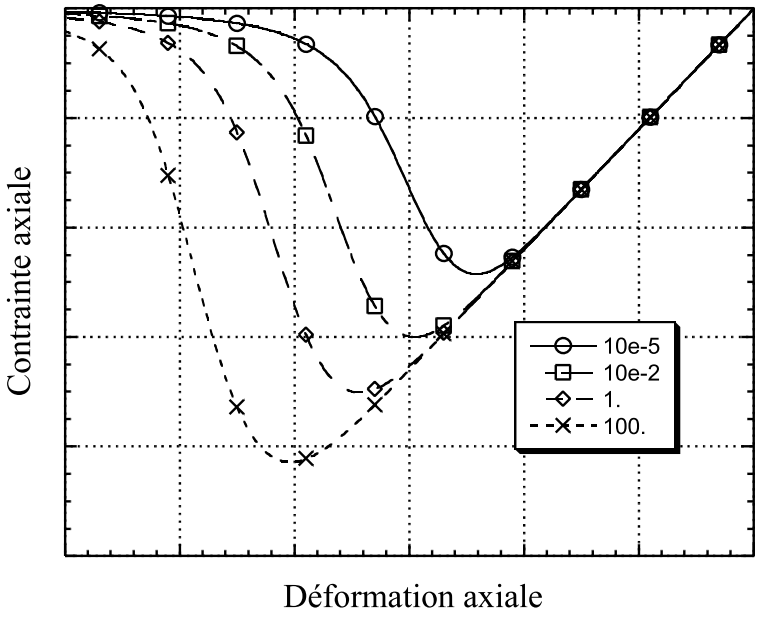


FIG. 4.11 – *Réponse du modèle de comportement pour une sollicitation de compression à différentes vitesses de déformation*

4.3 Modèle viscoplastique

Les expérimentations développées au chapitre 3 ont montré qu'il existait une dépendance à la vitesse de chargement du comportement sphérique du béton. Il est donc important de prendre en compte la vitesse de déformation dans l'évolution des déformations plastiques. Pour cela, nous utiliserons une forme visco-plastique du modèle de Gurson associée au modèle de comportement suivant :

$$\sigma_{ij} = \left[K_{ijkl}\varepsilon^e_{mm}\delta_{kl} + 2G_{ijkl}(\varepsilon^e_{kl} - \frac{1}{3}\varepsilon^e_{mm}\delta_{kl})\right] \tag{4.15}$$

où les modules de cisaillement et de compressibilité sont définis à partir de l'équation 4.2 ce qui permet de prendre en compte la variation de la porosité dans l'évolution de ceux-ci.

Déformations viscoplastiques

Le modèle de viscoplasticité utilisé s'appuiera sur la viscoplasticité de type Perzyna développée au chapitre 1. Pour cela, l'évolution des déformations plastiques sera la sui-

vante :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \dot{\lambda}\frac{\partial F_{NT}}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.16}$$

Colantonio et Stainier [Colantonio et Stainier 96] ont proposé une forme viscoplastique de l'évolution des déformations plastiques équivalentes de la matrice pour la fonction seuil de Gurson modifiée. Cette formulation s'appuie sur une écriture du multiplicateur plastique qui prend en compte l'endommagement de la manière suivante :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{(1-d)}\left\langle \frac{F_{NT}}{m_{vp}} \right\rangle^{n_{vp}} \tag{4.17}$$

où d représente l'endommagement correspondant à la fois à la création de vides, leur augmentation et leur coalescence. S'appuyant sur leurs travaux nous allons écrire le multiplicateur plastique en fonction de la porosité sous la forme originale suivante :

$$\dot{\lambda} = \frac{f^*}{(1-f^*)}\left\langle \frac{F_{NT}}{m_{vp}} \right\rangle^{n_{vp}} \tag{4.18}$$

où f^* représente la porosité, m_{vp} et n_{vp} des paramètres matériaux. Cette forme du multiplicateur plastique permet de retomber sur un comportement élastique lorsque la porosité est totalement refermée ($f^* = 0$, ce qui est une limite) car nous obtenons dans ce cas $\dot{\lambda} = 0$ donc pas d'évolution des déformations plastiques. Ce cas limite peux poser des problèmes lors de simulations numériques où la porosité tend vers zéro. Afin de résoudre ce problème, on peut adopter la forme suivante du multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{(1-f^*)}\left\langle \frac{F_{NT}}{m_{vp}} \right\rangle^{n_{vp}} \tag{4.19}$$

Néanmoins, nous conserverons la première forme du multiplicateur plastique (équation 4.18). Nous allons appliquer ce multiplicateur plastique au modèle de plasticité développé au chapitre 2 pour définir un modèle de comportement qui prenne en compte les effets de vitesse mis en évidence au chapitre 3. Les équations constitutives du modèle n'ont pas changé, nous aurons donc toujours la surface seuil de Gurson (équation 2.6), l'évolution de la contrainte équivalente dans la matrice donnée par l'équation 2.10 et l'évolution de la porosité par l'équation 2.11.

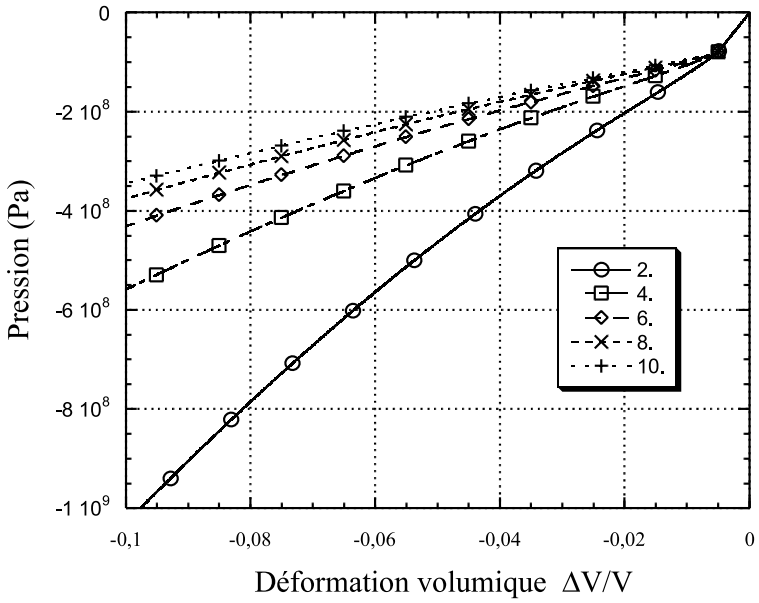


FIG. 4.12 – *Influence du paramètre d'écrouissage n de la matrice sur la réponse hydrostatique du modèle*

4.3.1 Influence des paramètres d'évolution sur la réponse du modèle viscoplastique

Nous allons ici étudier l'influence des divers paramètres sur la réponse du modèle. Nous ne referons pas l'étude paramétrique sur la surface seuil de Gurson (voir chapitre 2) mais nous présenterons l'influence des nouveaux paramètres permettant de prendre en compte la viscoplasticité et ceux influant sur le comportement de la matrice sans les vides. Pour cela nous allons fixer les paramètres q_1, q_2 et q_3 à 1 et nous appliquerons un chargement correspondant à une compression hydrostatique.

Influence de n et σ_y

La figure 4.12 montre l'influence de l'exposant d'écrouissage de la matrice défini dans l'équation 2.10. Nous pouvons voir que cet exposant va jouer sur le module d'écrouissage de la matrice. Plus cet exposant sera élevé, plus le module d'écrouissage sera faible. Cet exposant combiné au paramètre k (voir équation 2.11) permettra de jouer sur le caractère plus ou moins raidissant de la réponse plastique du modèle.

La figure 4.13 montre l'influence de la limite élastique de la matrice sans les vides.

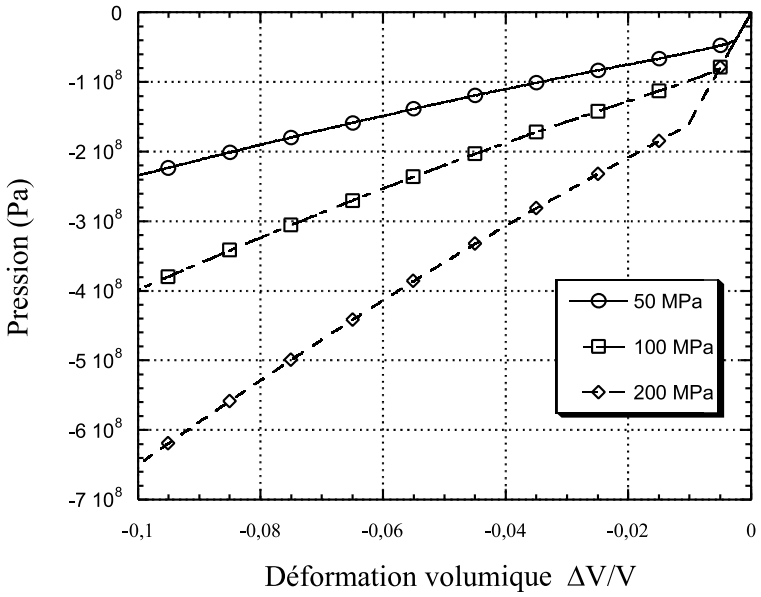


FIG. 4.13 – *Influence de la limite élastique de la matrice σ_y sur la réponse hydrostatique du modèle*

Ainsi plus la limite sera faible, moins le comportement permettra d'atteindre un niveau de pression hydrostatique élevé pour une même déformation volumique.

Influence de m_{vp} et n_{vp}

Les paramètres m_{vp} et n_{vp} vont influer sur la réponse visqueuse du modèle de viscoplasticité.

Le paramètre m_{vp} correspondra à un "retard" dans l'apparition des déformations plastiques. Ceci aura pour conséquence d'avoir des déformations plastiques (pour une même déformation volumique) plus faibles lorsque la valeur de m_{vp} sera plus grande. C'est pourquoi on peut remarquer sur la figure 4.14, que pour $m_{vp} = 100$, la réponse pression–volume est proche de la réponse élastique. À l'inverse, pour $m_{vp} = 10^{-4}$ nous avons une réponse où les déformations plastiques sont plus importantes.

Le paramètre n_{vp} est le paramètre de viscosité qui va permettre de prendre en compte de façon plus ou moins importante l'influence de la vitesse de déformation dans la réponse du modèle. La figure 4.15 montre l'influence de ce paramètre sur la réponse du modèle à un chargement statique. Nous pouvons voir ici que ce paramètre n'a aucune influence

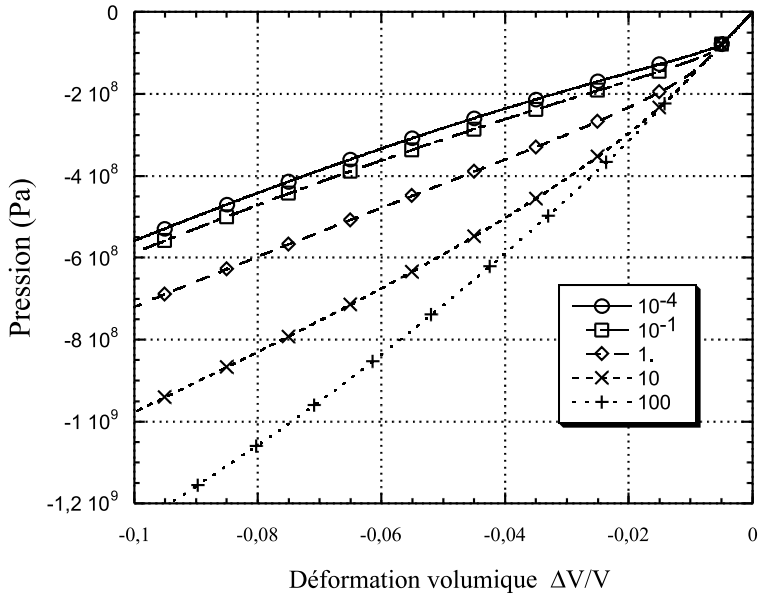


FIG. 4.14 – *Influence du paramètre m_{vp} sur la réponse hydrostatique du modèle ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$)*

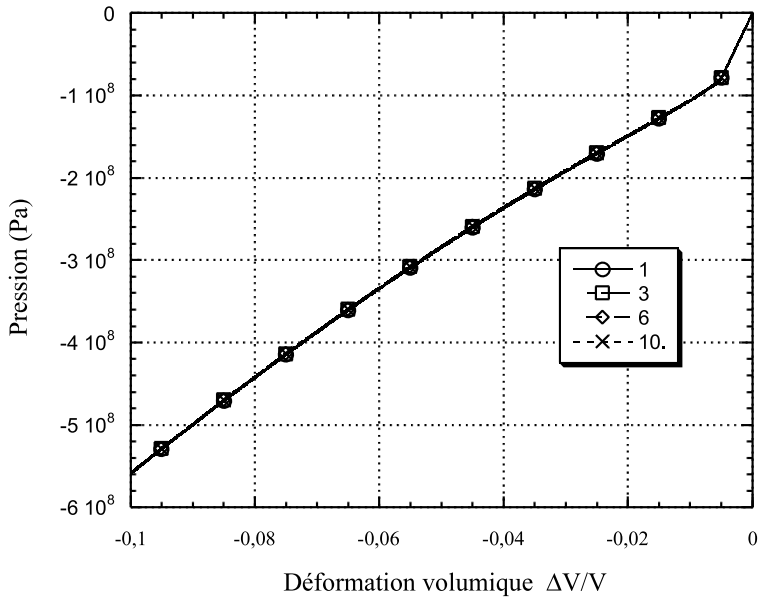


FIG. 4.15 – *Influence du paramètre n_{vp} sur la réponse hydrostatique du modèle ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$)*

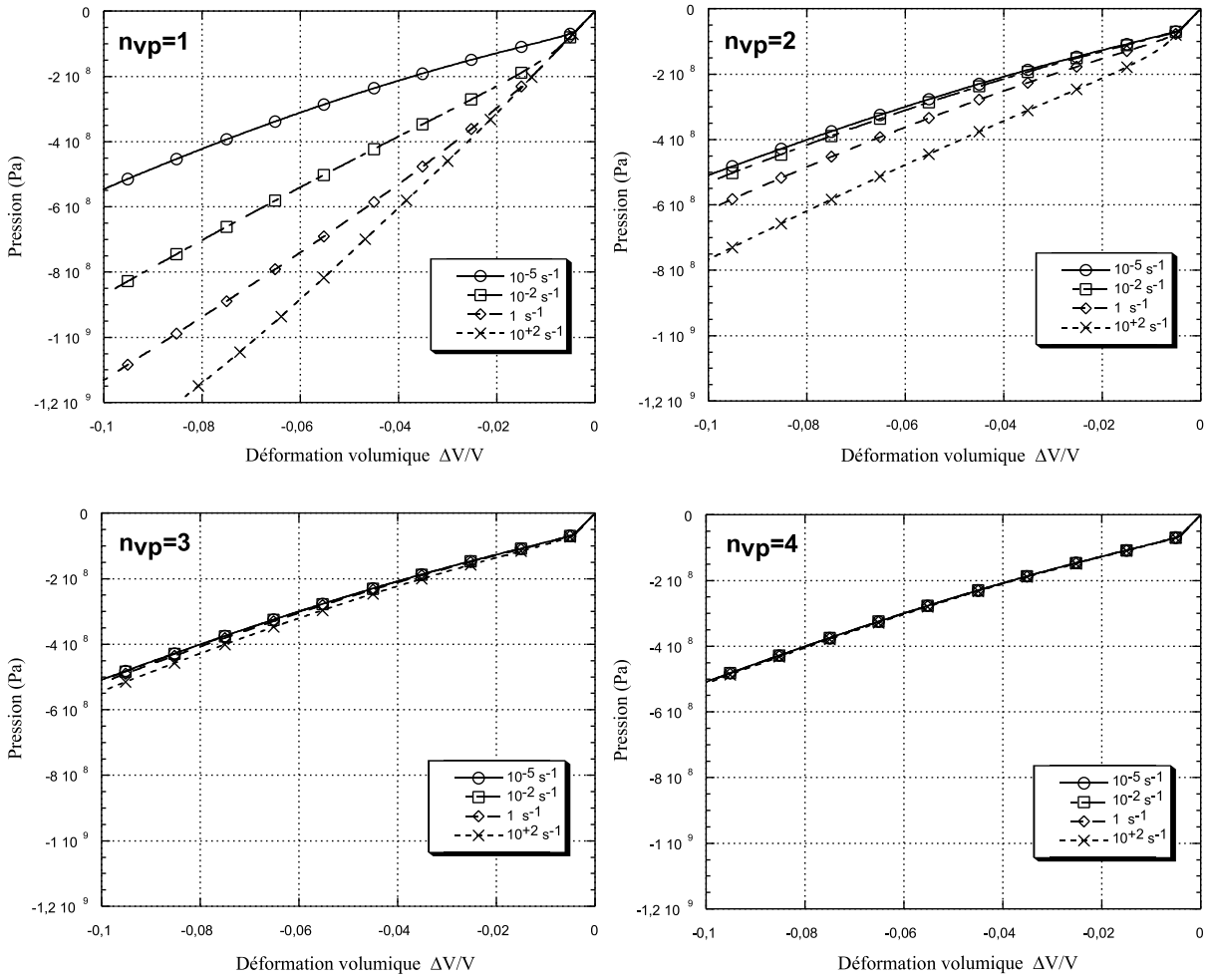


FIG. 4.16 – *Influence du paramètre n_{vp} sur la réponse hydrostatique du modèle pour différentes vitesses de chargement*

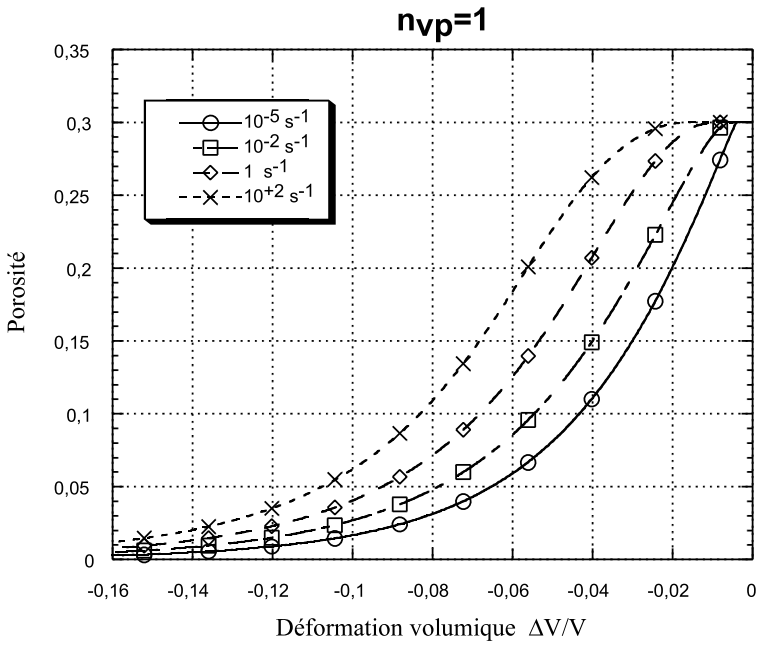


FIG. 4.17 – *Évolution de la porosité pour différentes vitesses de chargement*

sur la réponse statique du modèle. Contrairement au cas du visco-endommagement, ce paramètre peut être calé directement sur les essais dynamiques sans aucune influence sur la réponse quasi-statique.

La figure 4.16 montre la réponse du modèle pour quatre valeurs différentes de n_{vp} lorsque l'on applique un chargement dynamique de compression hydrostatique. Nous pouvons voir, que lorsque n_{vp} diminue, nous avons une influence plus importante de la vitesse de déformation sur la réponse du modèle. Cette influence donne une limite élastique plus importante en dynamique qu'en statique. Cela a pour effet de retarder l'apparition des déformations plastiques et par la même occasion l'évolution de la porosité. La figure 4.17 montre l'évolution de la porosité en fonction de $\Delta V/V$ pour différentes vitesses de chargement dans le cas d'un chargement "hydrostatique" et pour $n_{vp} = 1$. Nous voyons sur cette figure, que plus la vitesse de déformation augmente, plus l'évolution de la porosité apparaît tardivement tout en conservant une déformation volumique quasiment identique d'une vitesse de déformation à l'autre lorsque la porosité est entièrement refermée. Cette particularité dans l'évolution de f^* fait que le comportement sera de plus en plus compactant à mesure que la vitesse de déformation augmentera, ce qui semble être également

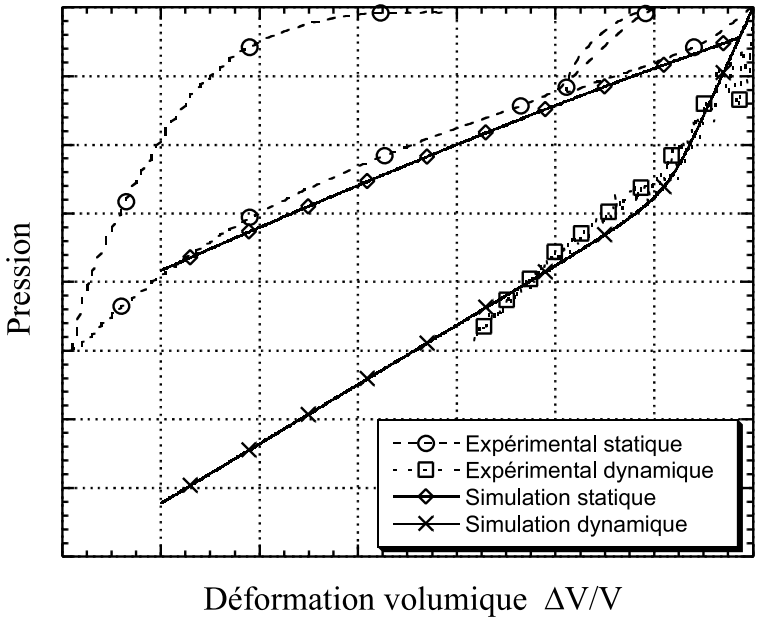


FIG. 4.18 – *Calibration du paramètre de viscosité sur la réponse pression-volume du modèle*

le cas expérimentalement (voir figure 3.36).

4.3.2 Calibration du modèle de viscoplasticité

Le critère de Mazars n'étant pas actif lorsque les contraintes de confinement sont suffisamment élevées, nous pouvons identifier les paramètres d'évolution de la viscoplasticité indépendamment des paramètres d'endommagement.

La figure 4.18 montre une comparaison entre les simulations statiques et dynamiques et les essais correspondants.

4.4 Couplage des modèles viscoplastique et visco-endommageable

Nous avons vu au début de ce chapitre que les phénomènes micro-mécaniques responsables de l'endommagement par cisaillement ou extension étaient totalement différents de ceux correspondant à un effondrement de la porosité incluse dans la matrice. Il devient donc naturel de représenter leur influence dans les lois d'évolution du modèle de comportement de manière à ce qu'ils n'apparaissent pas au sein de la même variable d'évolution,

ce qui était le cas pour le modèle présenté au chapitre 2.

Nous considérerons l'endommagement comme étant celui défini par Mazars [Mazars 84] (endommagement de traction et endommagement de compression), tandis que l'évolution de la porosité interviendra par l'intermédiaire de la méthode d'homogénéisation de Mori-Tanaka dans l'évolution des modules d'élasticité. Nous obtenons ainsi le modèle de comportement suivant :

$$\sigma_{ij} = (1-D)\left[K_{ijkl}\varepsilon^e_{mm}\delta_{kl} + 2G_{ijkl}(\varepsilon^e_{kl} - \frac{1}{3}\varepsilon^e_{mm}\delta_{kl})\right] \tag{4.20}$$

où les modules de cisaillement et de compressibilité sont définis à partir de l'équation 4.2 et peuvent être affectés par l'intermédiaire de la variable d'endommagement scalaire D définie au paragraphe 4.2.

Nous avons vu au chapitre 2 qu'en traction la fonction seuil de Gurson n'était jamais activée car celle de Mazars écrite à partir des déformations équivalentes était beaucoup plus rapidement atteinte. La fonction seuil écrite à l'équation 4.9 donne exactement le même résultat. En effet, quand $D = 0$ nous avons la même fonction seuil que celle décrite par Mazars [Mazars 84]. Il n'y a donc pas de couplage entre le comportement visco-endommageable et le comportement viscoplastique pour les chargements de traction, ce qui donne le modèle décrit au paragraphe 4.2. Par contre, en ce qui concerne le comportement en compression simple, les valeurs des différents paramètres (particulièrement m_{D_t} et σ_{M_0}) donneront un comportement qui sera ou pas couplé.

Par exemple, si nous avons une valeur de σ_{M_0} suffisamment élevée, seule la fonction seuil d'endommagement sera activée. Par contre, si la valeur de σ_{M_0} est faible, nous activerons la fonction seuil de Gurson, puis celle de l'endommagement lorsque les déformations positives seront suffisamment importantes. Ceci souligne l'utilité d'avoir deux évolutions distinctes de l'endommagement, car contrairement au modèle développé au chapitre 2, nous pouvons utiliser ici une valeur de σ_{M_0} élevée tout en conservant un comportement en compression simple qui reste parfaitement acceptable.

Nous aurons dans la plupart des cas un comportement en compression simple qui restera découplé en statique (évolution de l'endommagement sans viscoplasticité). En effet, le comportement décrit plus haut étant dépendant de la vitesse de chargement,

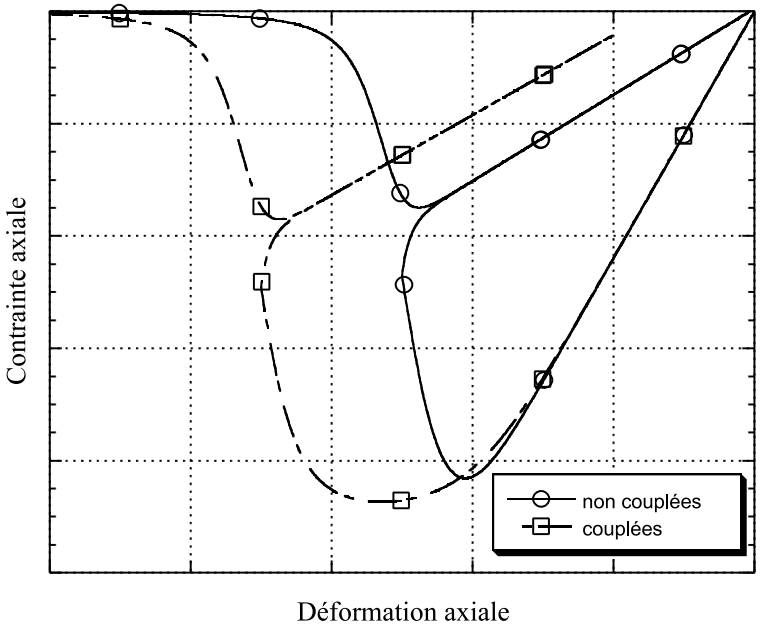


FIG. 4.19 – *Couplage du modèle viscoplastique et visco-endommageable dans le cas d'un chargement de compression simple dynamique*

nous pouvons très bien avoir un comportement en compression simple statique qui soit découplé, tandis qu'en dynamique celui-ci devient couplé (endommagement associé à la viscoplasticité). Si le paramètre de viscosité dans l'évolution de l'endommagement de compression m_{D_c} est faible (voir équation 4.13) le seuil d'endommagement en compression va fortement augmenter avec la vitesse de déformation. Si de plus nous avons un coefficient de viscosité n_{vp} pour les déformations plastiques (voir équation 4.18), qui est plutôt grand (supérieur à 3), alors le seuil de Gurson peut être atteint en premier. Ces deux cas de figure sont représentés sur la figure 4.19. Cette figure montre, dans le cas où le chargement n'est pas statique mais dynamique ($\dot{\varepsilon} = 100\ s^{-1}$), une courbe où les coefficients de viscosité sont tels qu'il n'y a pas de couplage et une courbe où le couplage est activé. Nous voyons que nous pouvons avoir dans le cas où le couplage est actif des déformations plastiques en compression simple qui ne sont pas nulles, ce qui n'est pas le cas lorsque seule la fonction seuil d'endommagement est activée.

Lorsque le chargement donne des déformations positives qui restent constamment nulles (par exemple en compression hydrostatique), alors nous aurons uniquement le cri-

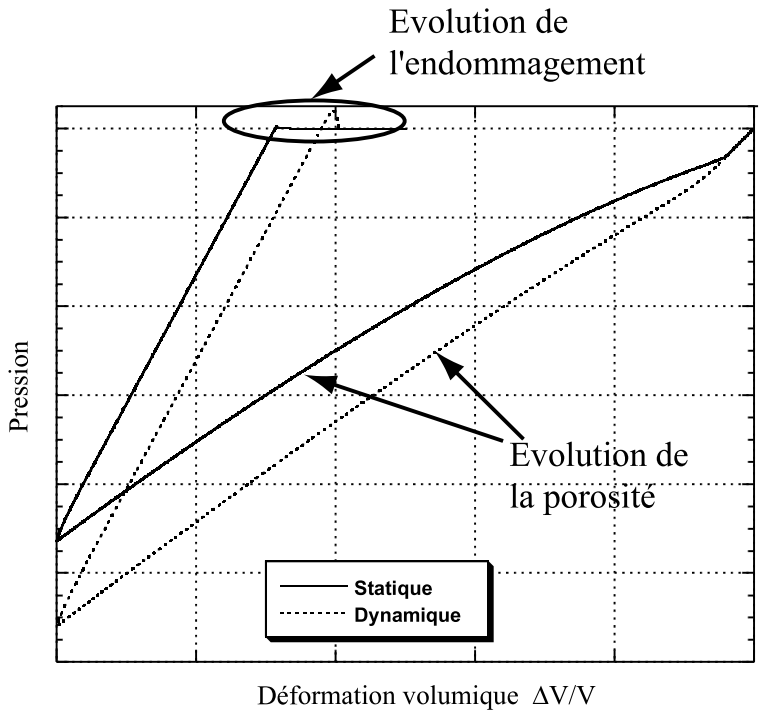


FIG. 4.20 – *Réponse du modèle couplé dans le cas d'un chargement de compression hydrostatique suivi d'une traction hydrostatique pour un chargement statique ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5}\ s^{-1}$) et un chargement dynamique ($\dot{\varepsilon} = 1\ s^{-1}$)*

tère de Gurson qui sera activé et nous retrouverons le modèle décrit au paragraphe 4.3.

La figure 4.20 montre la réponse du modèle lorsque l'on réalise un chargement de compression hydrostatique suivi d'une traction hydrostatique. Nous pouvons voir sur cette courbe que nous retrouvons bien un comportement durcissant lorsque la porosité du matériau diminue. Nous retrouvons également que, lors d'une décharge, le module d'élasticité du matériau est bien supérieur à celui qu'il était au début du chargement (ceci est dû à la diminution de la porosité). Et enfin, lorsque l'on repasse en traction, on retrouve le comportement visco-endommageable. Un chargement statique et un chargement dynamique ont été effectués afin de montrer l'influence de la vitesse de déformation sur la réponse du modèle couplé.

Maintenant que nous avons entièrement décrit le nouveau modèle qui prend en compte des effets de vitesse sur l'évolution de l'endommagement et sur celle des déformations plastiques, il ne reste plus qu'à décrire l'intégration temporelle de celui-ci afin de l'implanter

dans LS-DYNA3D.

4.5 Intégration temporelle du modèle viscoplastique visco-endommageable

Nous avons vu au chapitre 2, paragraphe 2.4 comment l'intégration numérique du modèle plastique endommageable avait été menée afin d'implanter celui-ci dans le code de calcul aux éléments finis LS-DYNA3D. L'utilisation d'un tel code de calcul nous avait conduit à réaliser une intégration temporelle explicite afin de conserver au maximum l'efficacité du code de calcul pour réaliser des simulations numériques non-linéaires en dynamique rapide. Nous avons conservé ici la même philosophie.

4.6 Conclusions

Suite aux observations expérimentales réalisées au chapitre 3, nous avons été amenés à développer un nouveau modèle de comportement qui prenne en compte à la fois des effets de vitesse en traction et des effets de vitesse sur le comportement pression–volume lorsque le chargement est hydrostatique. De plus, l'introduction d'une variable d'endommagement qui évolue de façon visqueuse permet de résoudre les problèmes liés à la localisation des déformations lorsque l'on est en présence de comportements adoucissants (ce qui est le cas en traction simple et en compression simple).

De plus, l'utilisation de la méthode d'homogénéisation de Mori-Tanaka nous a permis de représenter le phénomène d'augmentation de la raideur élastique du matériau lorsque la porosité diminue tout en conservant une définition classique de la variable d'endommagement.

Il nous reste à valider cette loi de comportement à l'aide des simulations numériques présentées au chapitre 5.

Chapitre 4 : Modèle viscoplastique–visco-endommageable

Résumé

Dans ce chapitre, nous avons présenté une loi de comportement originale qui permet de tenir compte des observations expérimentales faites au chapitre 3. De plus, nous avons modifié les influences respectives de la diminution de la porosité et de la variation d'endommagement créée par les déformations équivalentes. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur les points suivants :

- La porosité du matériau béton qui reste inférieure à 30 % est prise en compte par une méthode d'homogénéisation. La méthode choisie a été la méthode de Mori-Tanaka car elle permet d'avoir des expressions explicites des modules de cisaillement et de compressibilité du matériau homogène équivalent (matrice + pores). Nous aurons donc les propriétés élastiques du matériau qui seront affectées par la variation de la porosité du matériau lors de chargements hydrostatiques.
- Introduction d'un modèle de visco-endommagement qui fait intervenir un endommagement de compression et un endommagement de traction afin d'avoir un comportement de compression simple réaliste tout en conservant une bonne description de ce qui se passe en traction. Les effets de vitesse introduits permettent de représenter ce qui se passe expérimentalement (principalement en traction), tout en ayant l'avantage d'apporter une solution numérique au problème de localisation des déformations qui intervient lorsque l'on a un comportement adoucissant (ce qui est le cas en traction et en compression simple).
- Introduction d'un modèle de viscoplasticité fondé sur la surface seuil de Gurson modifiée. Les effets visqueux sont ici nécessaires pour pouvoir rendre compte du phénomène d'augmentation de la résistance en compression triaxiale observé au chapitre 3

Enfin, la dernière partie (non présentée dans ce mémoire) de ce chapitre est consacrée à l'implantation numérique du modèle développé. Cette implantation a été conduite en gardant à l'esprit le code de calcul pour lequel elle allait être utilisée, c'est-à-dire le code LS-DYNA3D. L'implantation est fondée sur une intégration temporelle explicite, ceci dans le but de conserver une certaine efficacité pour un calcul dynamique non-linéaire.

Chapitre 5

Simulations numériques

5.1 Simulation des essais de compaction dynamique 150
5.2 Simulation d'un essai de traction par écaillage 157
5.3 Simulation d'un essai d'explosion au contact 162
5.3.1 Description de l'essai 162
5.3.2 Simulations numériques de l'essai 163
5.4 Perspective : simulation d'un essai de perforation 173
5.5 Conclusions 175

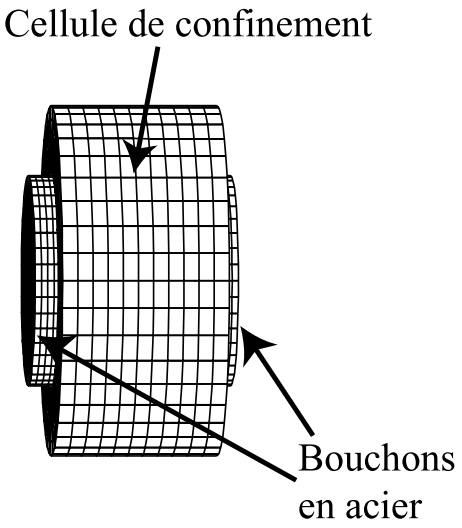


FIG. 5.1 – *Maillage de l'échantillon de béton confiné*

Les modèles de comportement développés aux chapitres 2 et 4 vont être testés et validés par différentes simulations numériques présentées dans ce chapitre. Les premières simulations consistent à simuler les essais qui ont permis de caler les paramètres du modèle (en faisant l'hypothèse d'homogénéité des déformations), ceci afin de tester l'implantation numérique et le domaine de validité des deux modèles. Le calage des modèles a été réalisé à l'aide d'un dépouillement uniaxial des essais de compaction dynamique, tandis que les simulations qui seront présentées ici seront des simulations tridimensionnelles des essais de compaction dynamique et d'un essai de traction par écaillage (ce qui permet de valider la calibration). Une autre série de simulations permettra de vérifier sur un calcul de structure plus complexe la validité des modèles de comportement. Nous simulerons pour cela une explosion au contact sur une dalle, ainsi que la perforation d'une dalle en béton par un projectile en acier.

5.1 Simulation des essais de compaction dynamique

Nous avons vu au chapitre 3 que pour réaliser des essais de compaction dynamique nous avons utilisé la technologie des barres de Hopkinson (voir la figure 3.1). Les dépouillements réalisés, pour obtenir le comportement sphérique du MB50, étaient alors fondés sur

une description unidimensionnelle des essais en prenant en compte les dispersions dues au caractère 3D des barres (l'échantillon est aussi considéré comme unidimensionnel). Dans les simulations numériques présentées ici (simulations 3D), les barres entrante et sortante (figure 3.1), ne sont pas représentées dans le modèle élément fini (figure 5.1). Seul l'échantillon de béton confiné est représenté avec des conditions aux limites qui prennent en compte les transmissions et réflexions d'ondes. Pour cela, les vitesses entrante et sortante obtenues expérimentalement ont été appliquées aux bouchons en acier. Elles représentent le chargement extérieur appliqué pour la simulation numérique. À partir de ces conditions aux limites "axiales", nous avons pu calculer les forces entrante et sortante qui en résultaient. Les conditions aux limites radiales des bouchons en acier sont inconnues expérimentalement et, lors des simulations, leurs déplacements radiaux ont été laissés libres. Nous avons, à l'extérieur de la cellule de confinement, laissé libres la totalité des degrés de liberté de celle-ci. La seule condition de chargement sur celle-ci est la condition de contact entre l'échantillon de béton et l'intérieur de la cellule en acier. Il est important de noter, qu'expérimentalement nous avions observé une très faible influence du frottement entre le béton et la cellule. Nous avons donc considéré dans les simulations qu'il y avait un contact parfaitement glissant. Afin d'avoir des simulations numériques les plus réalistes possibles, nous avons utilisé des essais statiques et dynamiques de caractérisation de l'acier de confinement. Ceci nous a permis de caler la courbe de comportement, élasto-plastique avec un écrouissage cinématique, utilisée pour représenter le comportement de l'acier de confinement.

Les deux modèles de comportement développés précédemment (chapitre 2 et 4) ont été testés ici. Les résultats, en terme de force entrante et force sortante, de ces simulations numériques ont été comparés aux résultats expérimentaux.

Les paramètres utilisés ici sont ceux qui ont été identifiés pour le MB50. Ainsi pour le modèle plastique endommageable, l'identification a été faite pour un essai de compression œdométrique réalisé en statique et non pas en dynamique. Or les résultats expérimentaux ont permis de mettre en évidence une influence de la vitesse de déformation sur la réponse pression-volume du MB50 lors d'un chargement de compression œdométrique. Cet effet

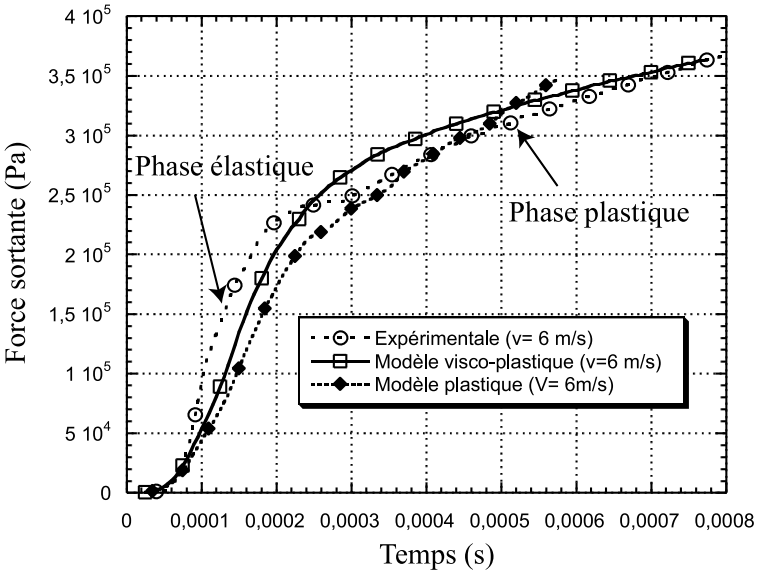


FIG. 5.2 – *Comparaison des forces sortantes expérimentales et simulées pour le confinement en acier (vitesse de l'impacteur 6 m/s)*

n'est pas pris en compte dans cette première modélisation. Les paramètres du modèle viscoplastique visco-endommageable ont quant à eux été identifiés à la fois sur des essais statiques et dynamiques.

La figure 5.2 montre la comparaison entre la force sortante calculée et la force sortante obtenue expérimentalement pour l'essai où la vitesse d'impacteur est 6 m/s, soit une vitesse de déformation maximale, au sein de l'échantillon, d'environ 150 s^{-1}.

Nous pouvons observer que les courbes calculées sont en bon accord avec la courbe expérimentale que se soit pour la raideur initiale ou pour la pente "plastique". La transition entre le domaine élastique et le domaine plastique est elle aussi bien captée par les simulations numériques. Il semble ici que le modèle plastique sans effet de vitesse soit capable de bien appréhender les différentes phases de l'essai, tout comme le modèle viscoplastique. On peut néanmoins remarquer que la viscoplasticité permet d'avoir une transition entre la phase élastique et la phase plastique moins brutale que pour le modèle sans effet de vitesse.

La figure 5.3 montre la comparaison entre la force sortante calculée et la force sortante obtenue expérimentalement pour l'essai où la vitesse d'impacteur est 12 m/s, soit une

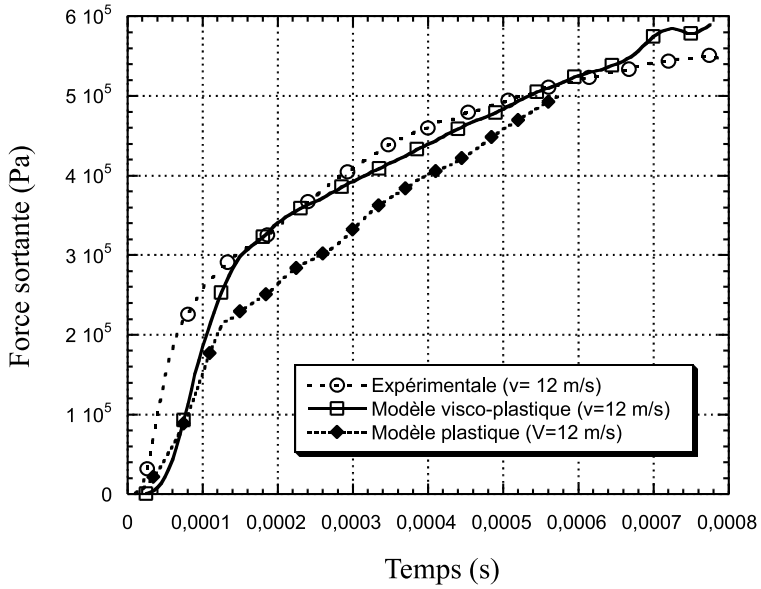


FIG. 5.3 – *Comparaison des forces sortantes expérimentales et simulées pour le confinement en acier (vitesse de l'impacteur 12 m/s)*

vitesse de déformation maximale, au sein de l'échantillon, d'environs 300 s^{-1}.

La figure 5.4 montre la comparaison entre la force sortante calculée et la force sortante obtenue expérimentalement pour l'essai où la vitesse d'impacteur est 20 m/s, soit une vitesse de déformation maximale, au sein de l'échantillon, d'environs 500 s^{-1}.

Pour les figures 5.3 et 5.4 nous pouvons constater qu'il se dégage ici une nette différence entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux pour le modèle plastique. À l'inverse, pour le modèle viscoplastique nous continuons à conserver une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et les simulations numériques.

La figure 5.5 montre la comparaison entre la force sortante calculée et la force sortante obtenue expérimentalement pour l'essai où la vitesse d'impacteur est 6 m/s dans le cas où le confinement est en laiton. La figure 5.6 montre la même comparaison dans le cas où la vitesse de l'impacteur est de 12 m/s.

Nous pouvons voir que, pour ces essais où la partie déviatorique du comportement est plus importante que pour le confinement en acier (cellule moins rigide), nous avons plus de mal à retrouver les résultats expérimentaux. Néanmoins, le fait d'avoir un comportement viscoplastique permet d'obtenir des résultats de meilleure qualité que pour le modèle

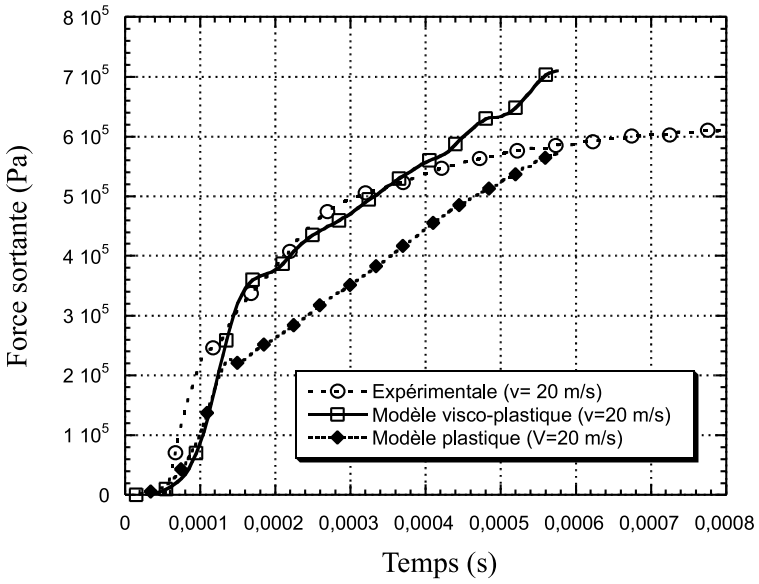


FIG. 5.4 – *Comparaison des forces sortantes expérimentales et simulées pour le confinement en acier (vitesse de l'impacteur 20 m/s)*

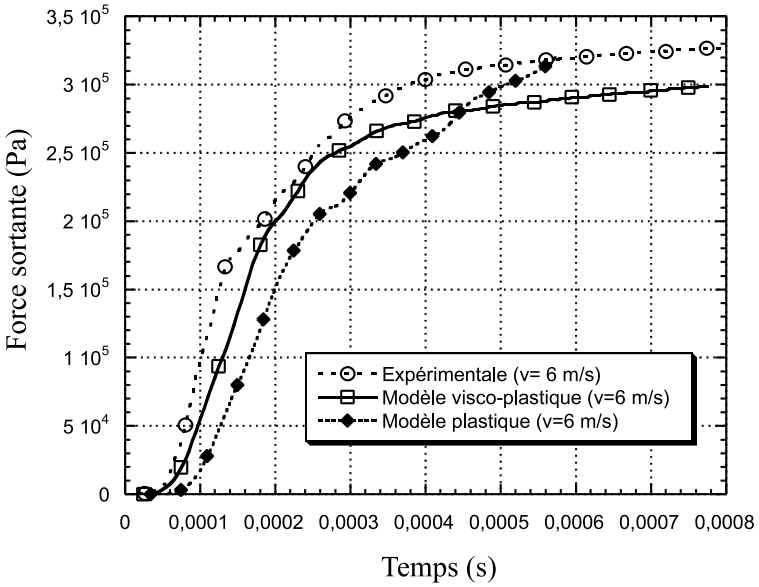


FIG. 5.5 – *Comparaison des forces sortantes expérimentales et simulées pour le confinement en laiton (vitesse de l'impacteur 6 m/s)*

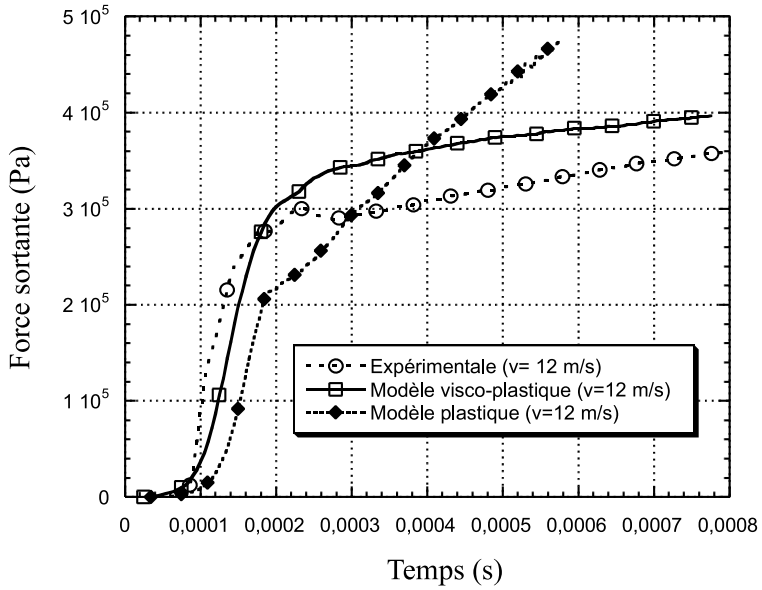


FIG. 5.6 – *Comparaison des forces sortantes expérimentales et simulées pour le confinement en laiton (vitesse de l'impacteur 12 m/s)*

sans effet de vitesse. L'effet de vitesse introduit sur la plasticité permet de mieux gérer le couplage qui existe, entre les modèles visco-endommageable et viscoplastique (voir figure 4.19), lorsque le déviateur des contraintes est plus important que la partie sphérique. C'est pourquoi, dans le cas d'un confinement plus faible (cellule en laiton), le modèle proposé au chapitre 4 donne de meilleurs résultats que le modèle développé au chapitre 2.

Toutes ces simulations montrent que les modèles développés permettent de bien représenter l'essai de compaction dynamique. Toutefois, il se dégage de ces essais une tendance des modèles à obtenir une force calculée plus importante que la force expérimentale en fin d'essai lorsque la cellule plastifie. En effet, lors de la plastification de la cellule, le confinement devient constant et relativement faible ce qui rend prépondérante la partie déviatorique sur la partie sphérique, domaine dans lequel le modèle fondé sur le couplage entre la surface seuil de Mazars et la surface seuil de Gurson n'est pas le plus efficace. Néanmoins, les résultats obtenus sont nettement suffisants lorsque l'on s'intéresse à la simulation de structures complexes dans lesquelles de nombreux phénomènes interviennent.

Afin de mieux voir l'influence de la vitesse de déformation sur la réponse de l'échantillon, nous avons superposé les courbes des forces sortantes expérimentales correspondant

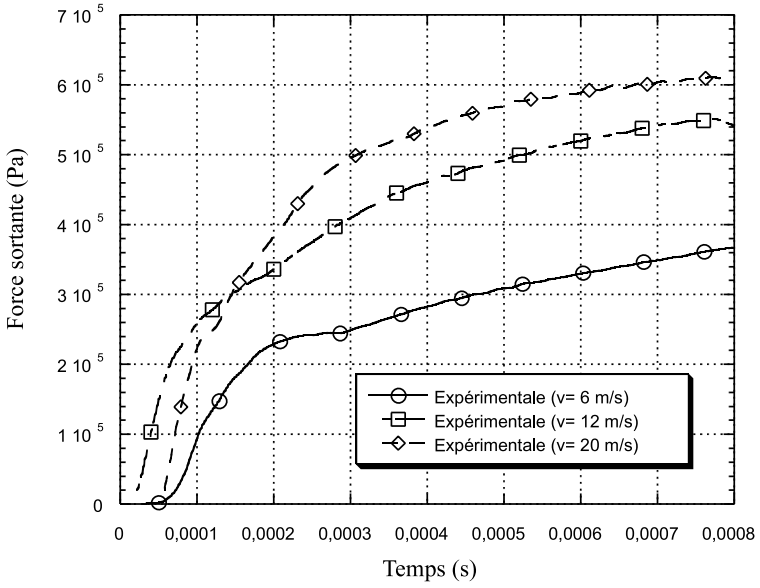


FIG. 5.7 – *Comparaison des forces sortantes expérimentales pour le confinement en acier (vitesse de l'impacteur 6, 12 et 20 m/s)*

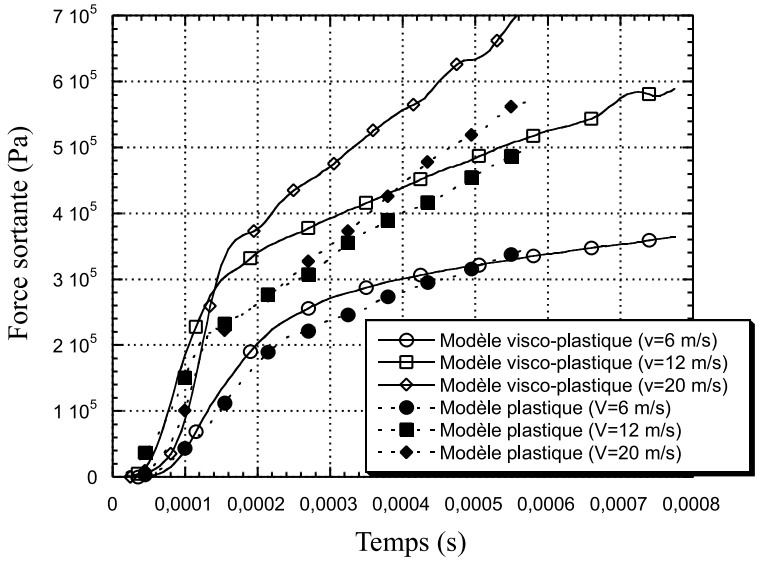


FIG. 5.8 – *Comparaison des forces sortantes simulées pour le confinement en acier (vitesse de l'impacteur 6, 12 et 20 m/s)*

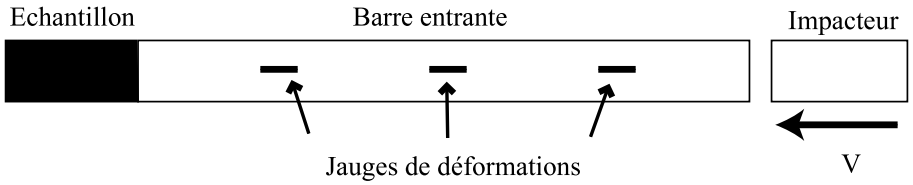


FIG. 5.9 – *Principe expérimental de la traction par écaillage*

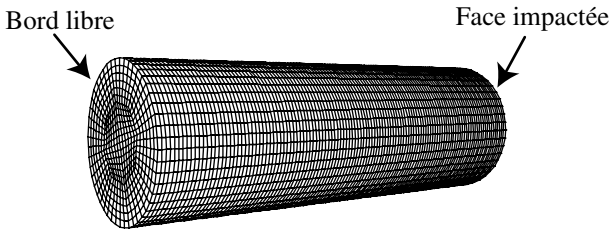


FIG. 5.10 – *Maillage Élément Fini de l'échantillon de béton soumis à de la traction par écaillage*

aux différents essais (figure 5.7). Cette courbe met en évidence une augmentation très nette de la force sortante à mesure que la vitesse de chargement augmente. Nous pouvons aussi remarquer que l'on passe d'un état quasiment élasto-plastique (v=6 m/s) à un état où la transition entre l'élasticité et le comportement non-linéaire est moins évident. La même comparaison a été effectuée pour les forces sortantes calculées (figure 5.8). Nous pouvons constater que lorsque le comportement n'est pas dépendant du temps, les seuils de plasticité restent identiques d'un calcul à l'autre de même que le comportement "compactant". Tandis que dans le cas des simulations réalisées avec le modèle viscoplastique nous retrouvons, sur un calcul de structure, les mêmes effets de vitesse que ceux identifiés sur le comportement sphérique du MB50 (dépouillement unidimensionnel). C'est pourquoi nous retrouvons sur cette figure l'augmentation très nette de la force sortante à mesure que la vitesse de chargement augmente avec toutefois un comportement "compactant" plus important que lors des essais (figure 5.7).

5.2 Simulation d'un essai de traction par écaillage

Afin d'avoir des essais de traction avec des vitesses de déformation très élevées, nous avons vu au chapitre 3 qu'un essai de traction par écaillage a été développé par Brara [Brara et Klepaczko 97]. Le principe de l'essai est rappelé à la figure 5.9. La barre entrante

a un diamètre de 40 mm pour une longueur d'un mètre tandis que l'échantillon de béton a le même diamètre que la barre entrante pour une longueur de 120 mm. Nous considérerons que la condition aux limites de l'éprouvette de béton est de type appui simple (barre–éprouvette : face contre face de mêmes dimensions).

Dans le cadre de l'analyse simplifiée de la propagation des ondes, la contrainte unidimensionnelle σ est reliée linéairement à la vitesse massique V des particules de l'éprouvette, soit :

$$\sigma = \rho_0 C_0 V \tag{5.1}$$

avec C_0 la célérité des ondes longitudinales ($C_0 = 5096$ m/s) et ρ_0 la densité du béton testé ($\rho_0 = 2.346\ gr/cm^3$ pour le MB50). Ayant le signal expérimental en contrainte, il suffit de le diviser par $\rho_0 C_0$ pour l'avoir en vitesse. C'est cette vitesse expérimentale que nous appliquerons au bord de l'éprouvette tout comme pour les simulations des essais de compaction dynamique.

Le maillage élément fini utilisé est donné en figure 5.10. Nous n'avons aucune condition de blocage appliquée au maillage et la vitesse expérimentale est appliquée à une des deux faces de l'échantillon. La simulation de l'essai doit permettre de retrouver la rupture de l'échantillon expérimentalement observée, c'est-à-dire une rupture unique à la distance $X = 65,8$ mm de la face impactée. Il est important de noter que les simulations ont été effectuées à l'aide, uniquement, du modèle visco-endommageable afin qu'elles ne soient pas perturbées par les problèmes liés à la localisation des déformations (voir chapitre 1).

La figure 5.11 montre l'état de contrainte obtenu lors des simulations numériques. Nous pouvons constater que, contrairement aux essais de compressions simples réalisés à l'aide des barres de Hopkinson, nous obtenons un état de contrainte homogène dans une section. La figure 5.12 montre l'état d'endommagement associé à cet état de contrainte. Lorsque nous sommes en compression ($t = 4,8.10^{-5}\ s$) la contrainte imposée n'est pas suffisante pour endommager le matériau. À l'inverse lorsque l'état de traction devient suffisamment grand ($t = 7,2.10^{-5}\ s$) nous obtenons un endommagement qui est proche de 1 dans une section. Cette section, qui représente l'endroit dans lequel la fissuration va se propager,

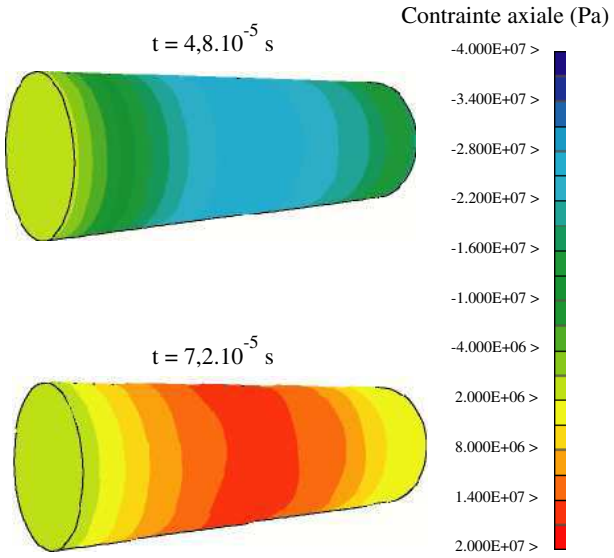


FIG. 5.11 – *Évolution de la contrainte axiale dans l'échantillon pour 2 instants différents*

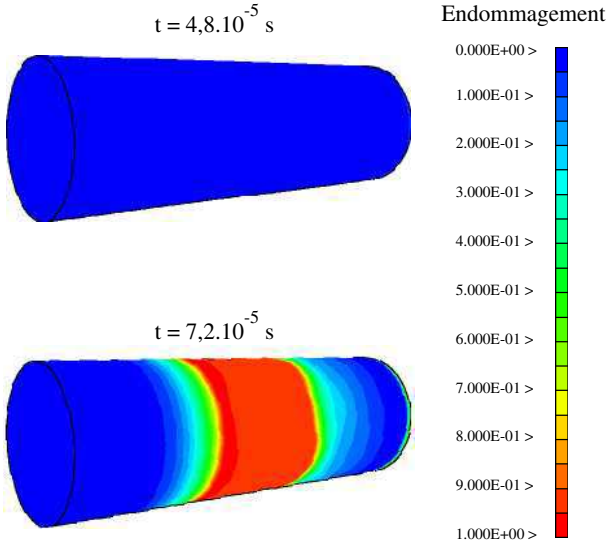


FIG. 5.12 – *Évolution de l'endommagement dans l'échantillon pour 2 instants différents*

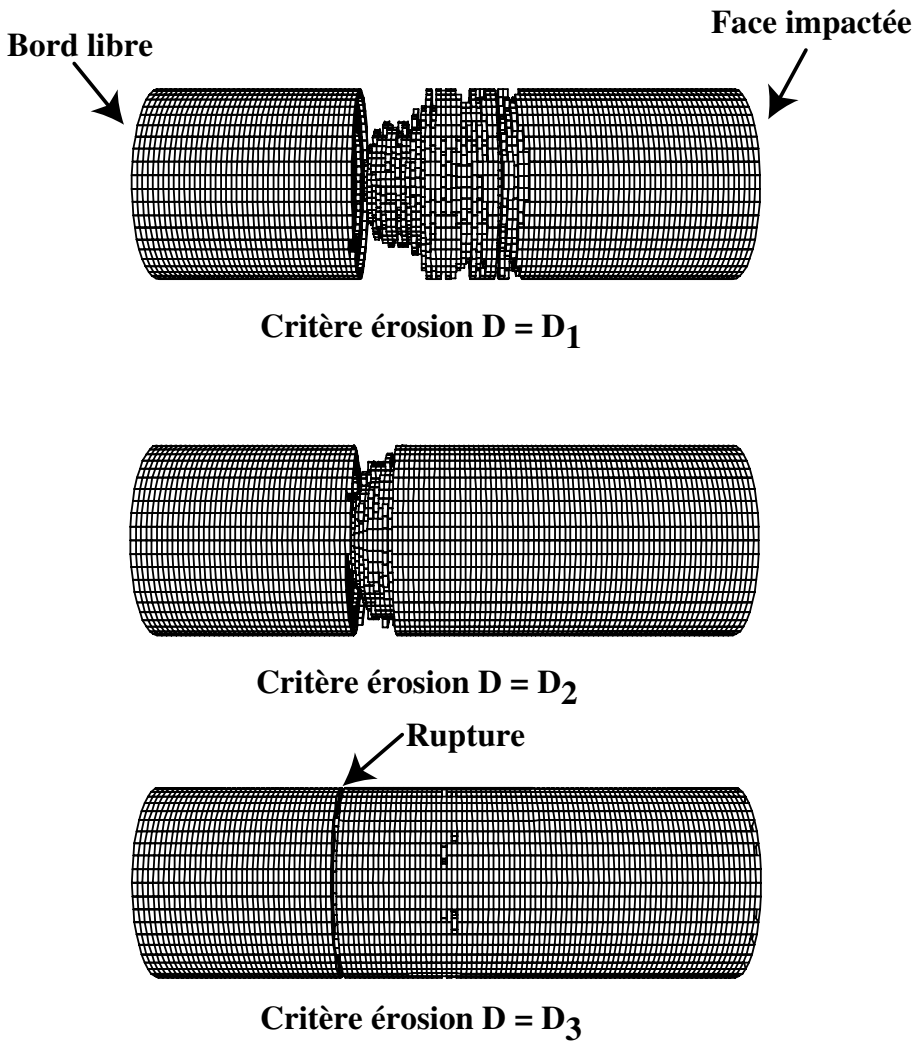


FIG. 5.13 – *Influence du critère d'érosion de traction sur la rupture ($D_1 < D_2 < D_3$)*

est située à une distance comprise entre 64 et 69 mm de la face impactée. Cette mesure est en bonne correspondance avec la mesure faite expérimentalement.

Pour illustrer le phénomène de fissuration, nous pouvons introduire dans la loi de comportement un critère d'érosion. Ce critère permet au code de calcul de supprimer la maille dans laquelle il a été atteint. La figure 5.13 montre le résultat de simulations lorsque le critère d'érosion lié à l'endommagement est activé.

Nous constatons que si le critère d'érosion est basé sur une valeur relativement faible de l'endommagement (par exemple D_1), la rupture obtenue est très diffuse car de nombreuses mailles vont être éliminées par ce critère. À l'inverse, si le critère d'érosion sur D est trop

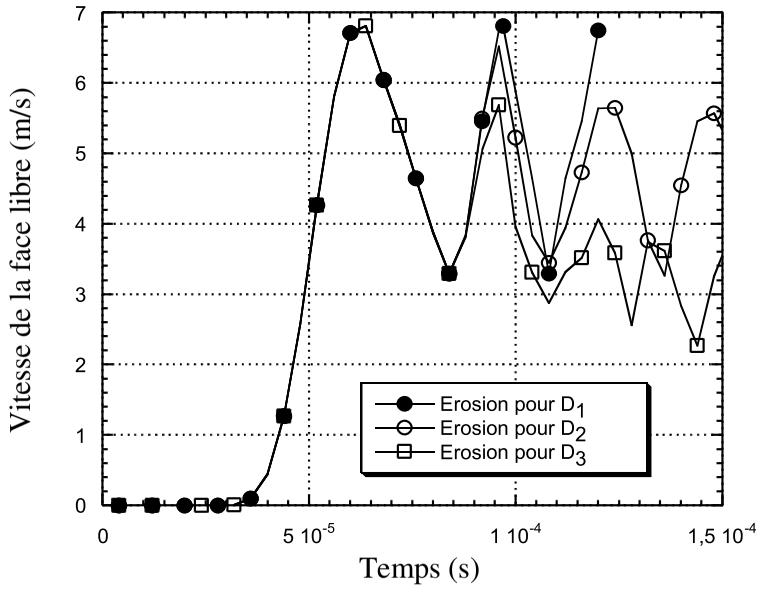


FIG. 5.14 – *Influence du critère d'érosion de traction sur la vitesse de la face non impactée*

grand (par exemple D_3), très peu de mailles seront supprimées par ce critère. Nous avons à l'aide de cet essai une technique qui permet de caler le critère d'érosion de traction. De plus, la figure 5.14 montre l'évolution de la vitesse de la face libre en fonction du temps. Sur cette figure nous pouvons voir que lorsque le critère d'érosion est égal à D_1 nous avons une vitesse d'éjection proche de 6,5 m/s, tandis que si le critère est égal à D_3 nous avons une vitesse d'environ 3 m/s. Une mesure expérimentale de la vitesse d'éjection de l'écaille associée à un critère plutôt physique (largeur de fissure égale à environ 2 fois le diamètre du plus gros granulat), permettrait de donner au critère d'érosion une valeur suffisamment réaliste. Dans la suite des simulations nous adopterons un critère d'érosion qui sera compris entre D_2 et D_3.

Cette simulation a permis de montrer que les phénomènes de rupture par extension étaient bien représentés par un modèle de visco-endommagement et qu'un critère d'érosion s'appuyant sur l'endommagement permettait de représenter une fissuration ce qu'avait déjà montré Raphène [Raphenne 97] pour des simulations de perforation réalisées en 2D à l'aide de LS-DYNA2D.

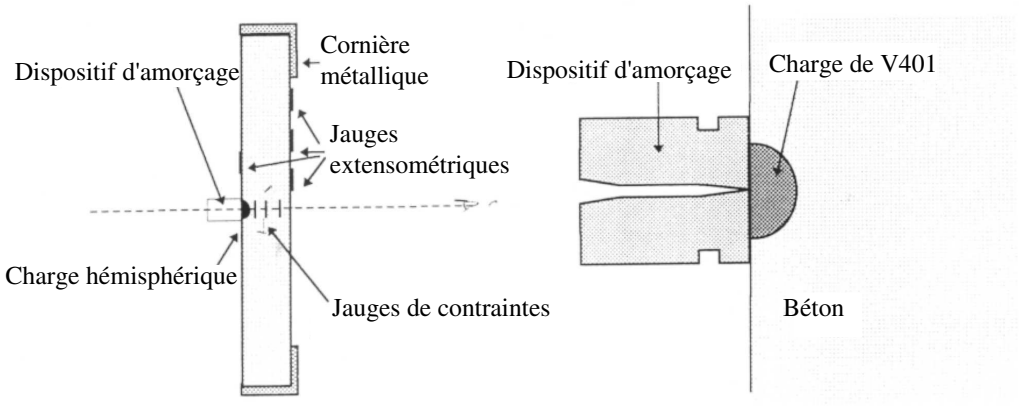


FIG. 5.15 – *Descriptif du dispositif expérimental d'explosion au contact*

5.3 Simulation d'un essai d'explosion au contact

Afin d'évaluer les modèles proposés pour décrire le comportement du béton dans un cas assez complexe mais représentatif d'une application industrielle, un essai dans lequel un explosif détone au contact d'une dalle en béton a été réalisé dans le cadre du réseau GEO.

5.3.1 Description de l'essai

Par souci de simplicité, la charge pyrotechnique ainsi que la dalle en béton (MB50) sont axisymétriques. La dalle circulaire en béton possède un diamètre de 1 mètre et une épaisseur de 20 cm (voir figure 5.15). Ces dimensions permettent de réaliser un essai où les conditions aux limites ne perturbent pas la sollicitation induite pendant un aller et retour de l'onde dans l'épaisseur. Une charge hémisphérique constituée d'un explosif "V401" est placée au centre de la structure (voir figure 5.15). Un dispositif de mise à feu particulier permet de générer au centre de la demi sphère un amorçage aussi ponctuel que possible afin que l'onde de détonation ainsi créée soit sphérique divergente. Le choix de l'explosif (V401) a été dicté par la parfaite connaissance de l'équation d'état qui le caractérise.

Cet essai a été instrumenté par des jauges noyées dans le béton afin d'avoir accès à la contrainte et à la déformation associée. La figure 5.15 et la figure 5.17 montrent les plans sur lesquels ont été mis les jauges, le plan P2 correspondant au milieu de l'épaisseur de la

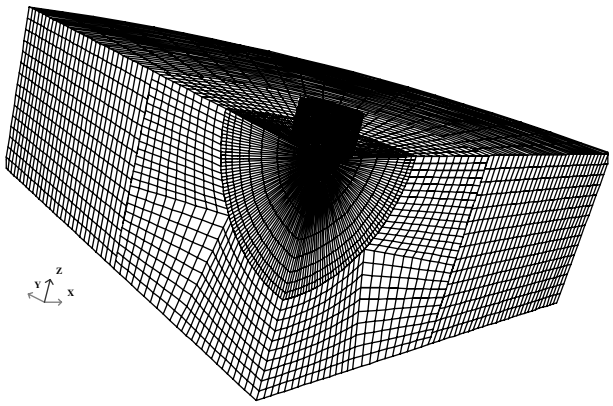


FIG. 5.16 – *Maillage "3D" de l'explosion au contact*

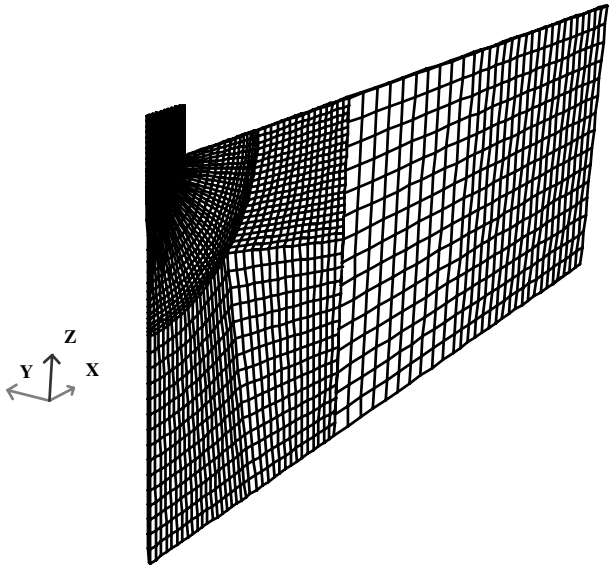


FIG. 5.17 – *Maillage "2D" de l'explosion au contact*

dalle. Un interféromètre est utilisé pour mesurer ponctuellement la vitesse en face arrière. Une caméra vidéo rapide (1000 images / seconde) enregistre le déplacement de la face arrière et permet le suivi des éclats.

5.3.2 Simulations numériques de l'essai

Afin de réaliser les simulations de l'explosion au contact, deux types de modélisations étaient envisageables. La première consiste en une modélisation d'un quart de la structure étant donné les conditions de symétrie (figure 5.16). Par la suite, nous parlerons de la modélisation 3D. Le deuxième type de modélisation que nous pouvions faire, était de

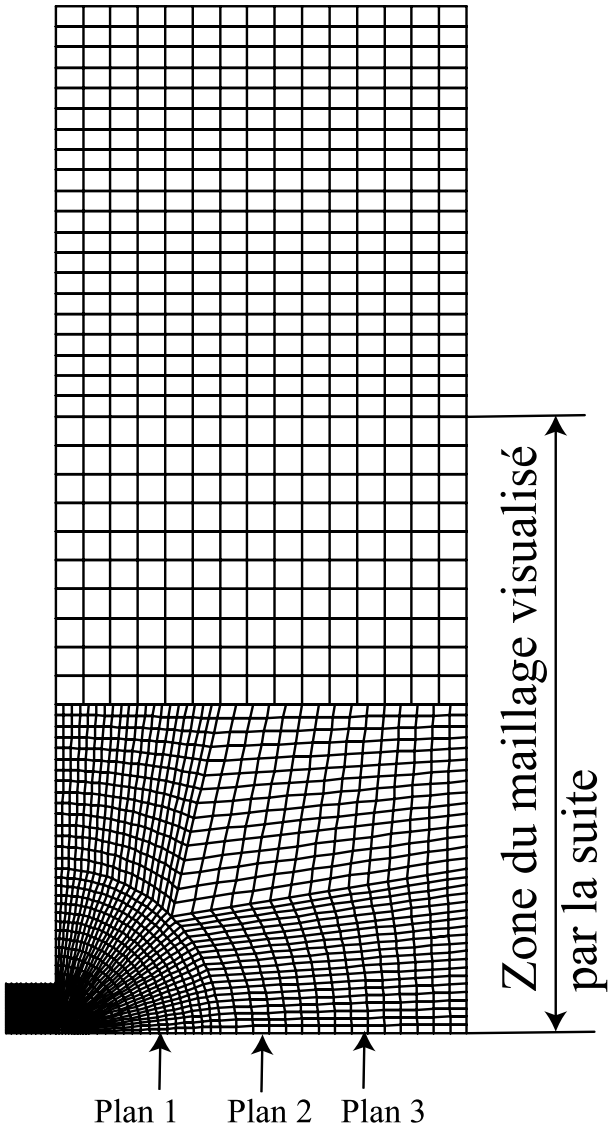


FIG. 5.18 – *Maillage "2D" de l'explosion au contact (Vue en plan)*

modéliser une tranche de la structure et d'appliquer des conditions de blocage particulières aux frontières de la tranche (figure 5.17). Cette modélisation sera par la suite nommée modélisation 2D. L'intérêt de la modélisation 2D par rapport à la modélisation 3D réside principalement dans le gain obtenu en terme de temps de calcul. Les conditions aux limites sur la modélisation 2D sont de type déplacements bloqués suivant l'axe y sur les deux cotés de la tranche (figure 5.17). Ces conditions ne représentent pas tout à fait la symétrie de révolution mais permettent de réaliser des calculs qui ne s'éloignent pas trop des conditions expérimentales (dalle en béton circulaire) tout en gardant un nombre de degrés de liberté acceptable. Cette remarque est d'autant plus importante que nous avons rencontré beaucoup de problèmes dans la représentation numérique du contact entre la dalle en béton et l'explosif. Un moyen de ne pas avoir trop de problèmes numériques a été d'augmenter de façon significative le nombre d'éléments représentant ce contact. Ainsi, une modélisation dans laquelle nous avions le moins de degrés de liberté a été un outil très performant. La figure 5.18 montre le maillage utilisé pour les simulations numériques. La dalle en béton a été séparée en trois parties distinctes afin de pouvoir raffiner le maillage au niveau du contact entre l'explosif et le béton. La condition de contact utilisée ici est un contact de type 14 (erosive two surfaces) ce qui permet de conserver le contact lorsque des mailles sont supprimées par un critère d'érosion, pour le contact entre l'explosif et le dispositif d'amorçage nous avons un contact de type sv (sliding with voids). La loi d'état utilisée pour simuler l'explosif est de type JWL, qui définit la pression p:

$$p = A\Big(1 - \frac{\omega}{R_1 V}\Big)exp(-R_1 V) + B\Big(1 - \frac{\omega}{R_2 V}\Big)exp(-R_2 V) + \frac{\omega E}{V} \tag{5.2}$$

où A, B, R_1, R_2, ω sont des paramètres matériaux, E, V représentent respectivement l'énergie interne et le volume. Les valeurs retenues pour les simulations du V401 sont données dans le tableau 5.1.

Modèle plastique endommageable

La figure 5.19 montre l'évolution de la variable d'endommagement $D = d + f^*$ pour l'essai où le diamètre de l'explosif est de 32 mm. Nous pouvons voir que nous avons bien un endommagement initial qui n'est pas nul mais égal à 0,3 (porosité initiale).

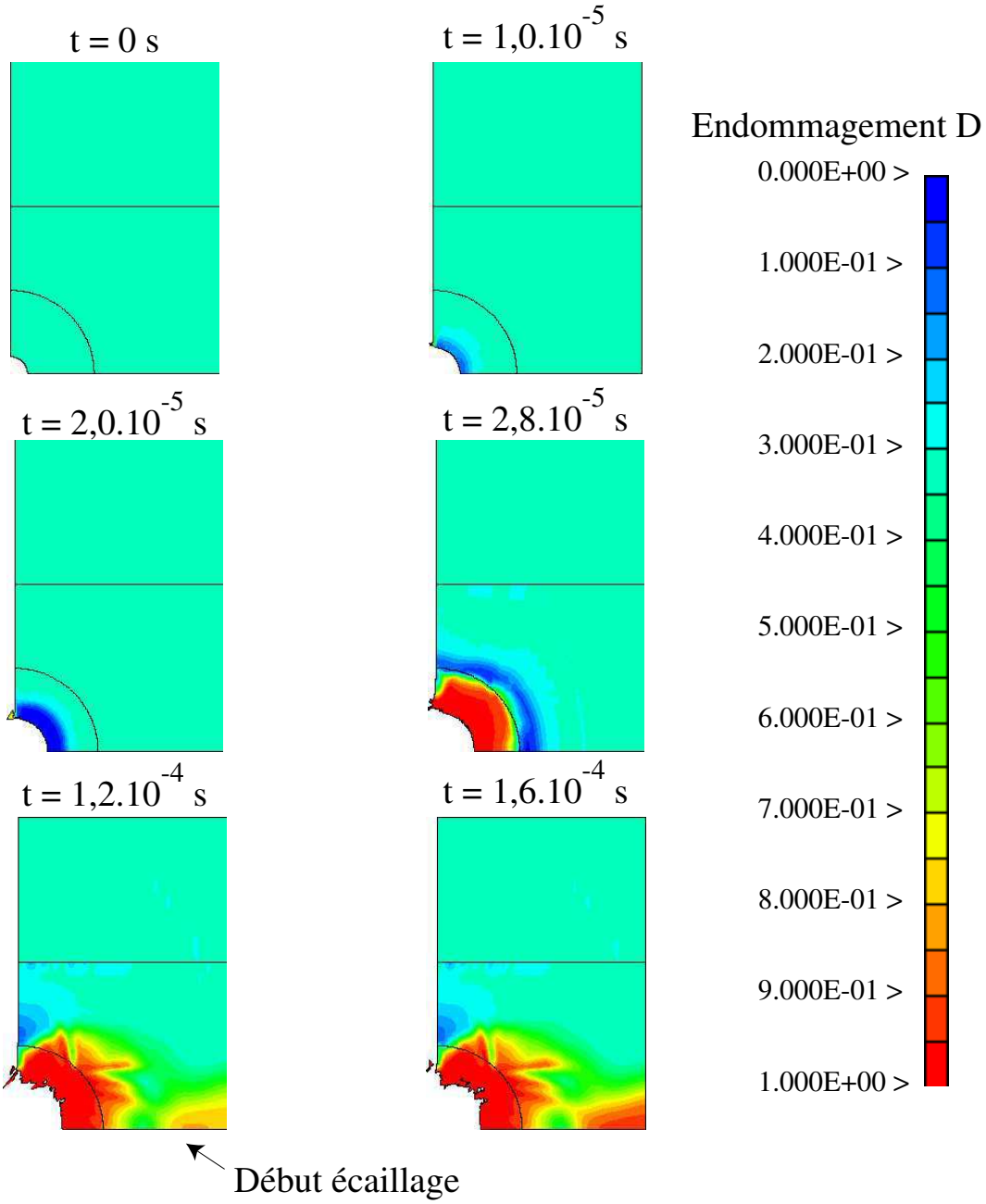


FIG. 5.19 – *Évolution de l'endommagement dans le béton (ϕ = 32 mm)*

A	9.8968e11
B	1.586e10
R_1	4.72
R_2	1.0
ω	0.4
E_0	0.0

TAB. 5.1 – *Paramètres de la loi JWL pour le V401*

D'un point de vue qualitatif, si nous observons l'évolution de l'endommagement de la dalle en béton (figure 5.19) nous pouvons constater que nous avons plusieurs "régimes". Le premier régime ($t = 0$ à $t = 2.10^{-5}$ s) correspond à un état où le matériau se compacte. Il apparaît ensuite que l'endommagement croît au niveau de l'explosif (à partir de $t = 2.10^{-5}$ s) ce qui ne paraît pas être très réaliste. Ceci peut être dû, soit à un problème de gestion de la surface de contact qui subirait une décharge rapide, soit à un effet de maillage qui produirait une réflexion d'onde lorsque celle-ci arrive à la fin du maillage "sphérique". Ce problème n'est néanmoins pas trop gênant dans la mesure où la plus grande partie de l'énergie de l'explosion a déjà été transmise à la dalle en béton. Le troisième régime correspond à la formation de l'écaille en face arrière (à partir de $t = 1,2.10^{-4}$ s). À la fin du calcul nous avons une zone en face arrière où l'endommagement est proche de 1. Cette zone correspond à une écaille d'environs 4 cm de diamètre alors qu'expérimentalement nous avions environ 25 cm pour les dalles instrumentées et pas d'écaille pour la dalle non instrumentée. En face avant nous obtenons un cratère d'environs 3 fois le diamètre de la charge, tandis qu'expérimentalement cette valeur était plus proche de 2,5. Nous voyons donc que le modèle plastique est capable de représenter (qualitativement mais pas trop quantitativement) les différents phénomènes (compaction et écaillage) présents lors d'un essai d'explosion au contact. Nous verrons par la suite les niveaux de contrainte obtenus lors de cette simulation (paragraphe 5.3.2).

Modèle viscoplastique – visco-endommageable

La figure 5.20 montre l'évolution de la porosité dans la dalle à plusieurs instants pour l'essai où le diamètre de l'explosif est également de 32 mm. Nous avons une porosité

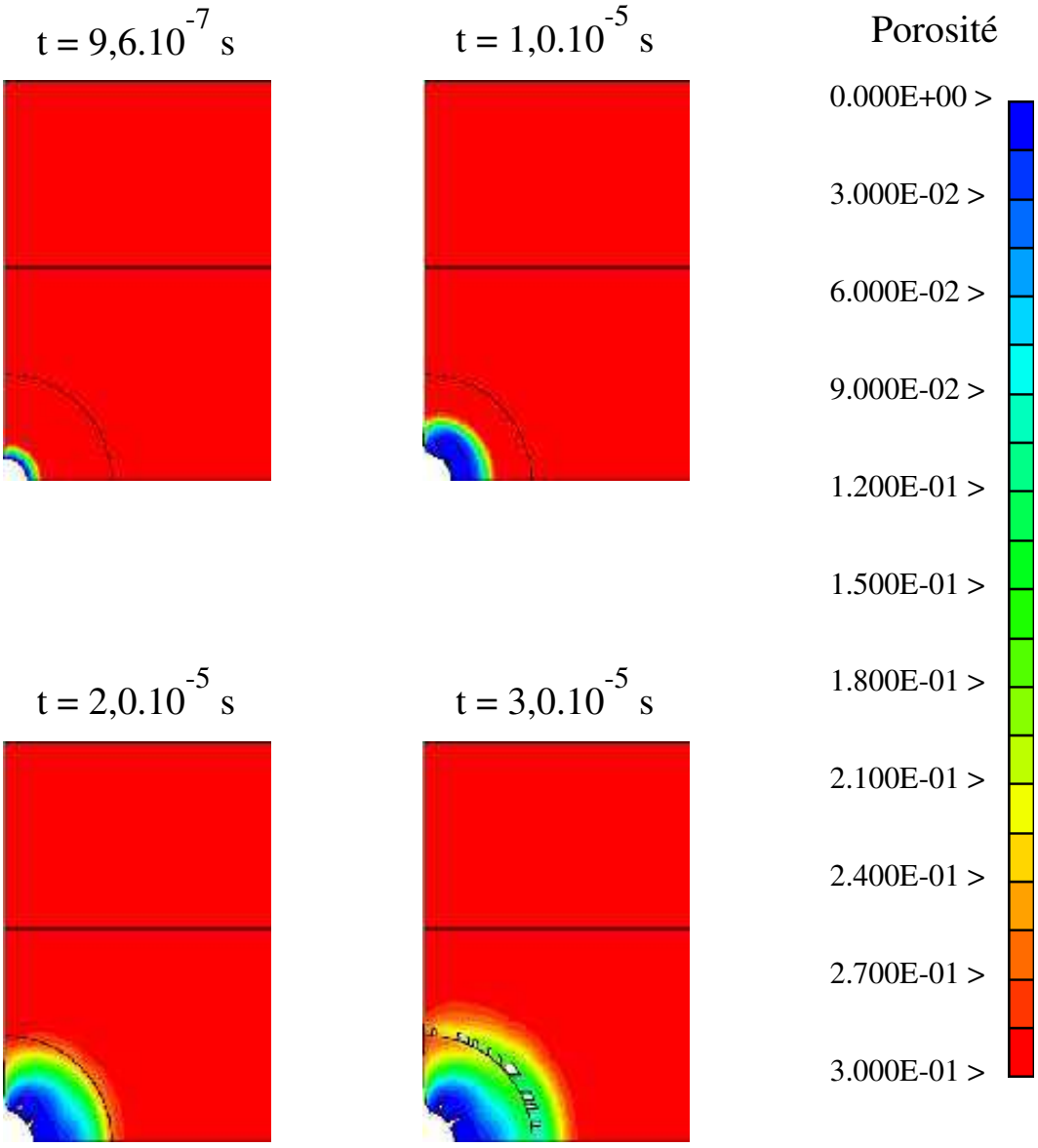


FIG. 5.20 – *Évolution de la porosité dans le béton (ϕ = 32 mm)*

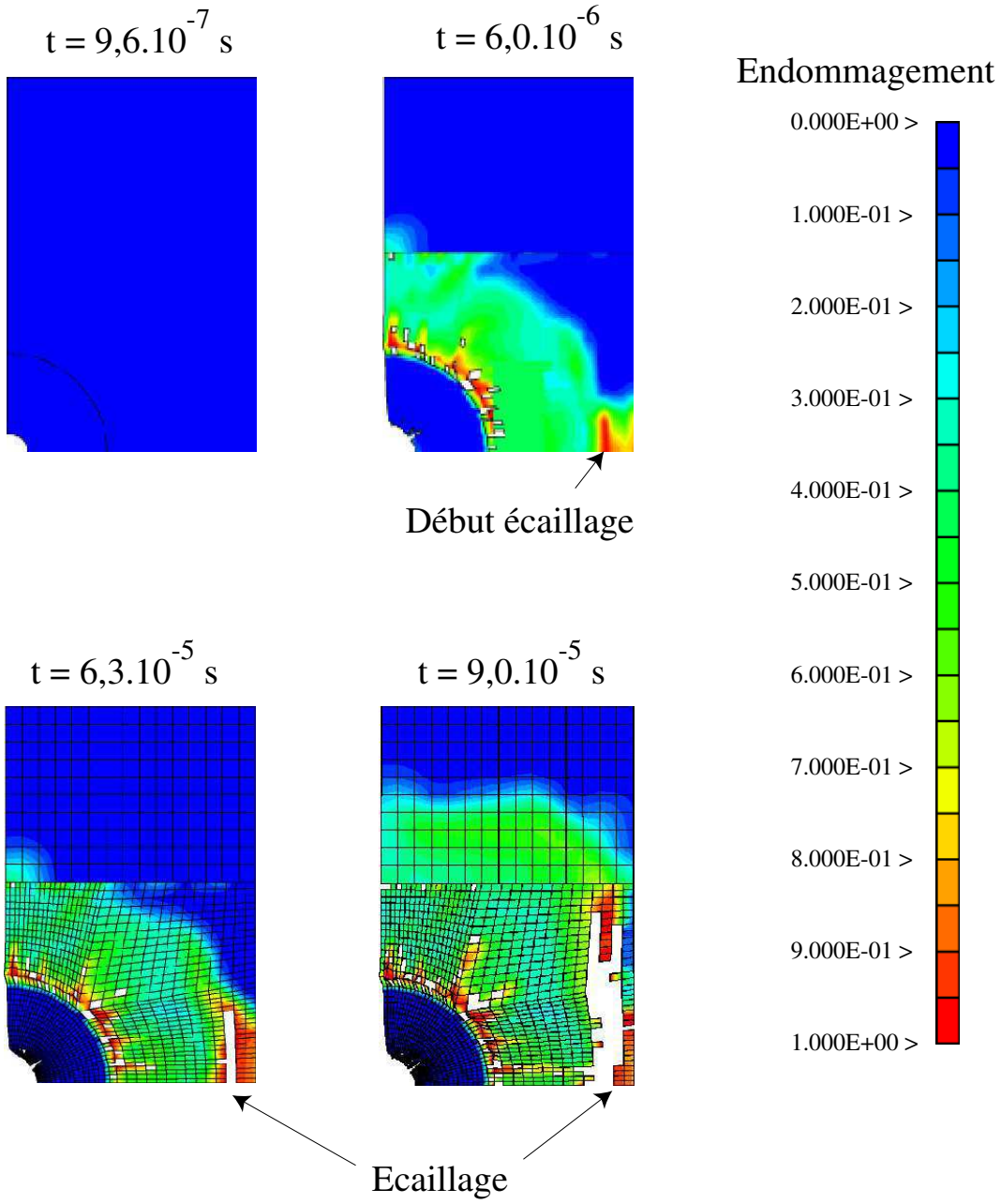


FIG. 5.21 – *Évolution de l'endommagement dans le béton ($\phi = 32$ mm)*

initiale égale à $0,3$ et qui diminue jusqu'à une valeur nulle à proximité de l'explosif. Cette valeur de la porosité initiale est identique à celle du modèle précédent mais contrairement à celui-ci nous avons dans cette simulation un endommagement initial qui est nul (voir figure 5.21).

La figure 5.21 montre l'évolution de l'endommagement pour le même essai. Nous pouvons voir que nous avons bien un endommagement initialement nul et qui croît jusqu'à sa valeur maximale. Dans ce calcul, nous avons également activé le critère d'érosion ($D_{max} = 0,95$) ce qui permet de mieux visualiser l'écaille en face arrière. Tout comme dans les calculs précédents, nous avons des effets de maillage très importants qui provoquent une augmentation de l'endommagement (notamment à la transition entre les différentes zones du maillage) avec par endroit une activation du critère d'érosion. Ce point doit être amélioré afin de mieux représenter les phénomènes physiques actifs lors de l'expérimentation. Néanmoins, la taille de l'écaille obtenue ici est de 26 cm de diamètre pour une profondeur de 4 cm, ce qui est très proche des valeurs expérimentales (dalles instrumentées par les jauges de contraintes noyées). Le paragraphe suivant montre les résultats obtenus en terme d'évolution de la contrainte axiale au sein de la dalle.

Comparaison des niveaux de contraintes

Les essais étant instrumentés par des jauges de contraintes, nous pouvons comparer les résultats obtenus par les simulations numériques avec les résultats expérimentaux obtenus sur les trois plans repérés sur la figure 5.18.

Les figures 5.22, 5.23 et 5.24 représentent les évolutions de la contrainte axiale en fonction du temps pour les plans $P1$, $P2$ et $P3$.

Nous voyons sur la figure 5.22 que le modèle viscoplastique permet de bien capter l'arrivée de l'onde de compression. Cependant la contrainte calculée est nettement supérieure à celle obtenue expérimentalement, ce qui entraîne une compaction du matériau supérieure à la réalité. Ceci a pour conséquence, une onde de compression qui arrive beaucoup trop tôt sur les plans 2 et 3 (figures 5.23 et5.24) avec une fois encore une surestimation de la valeur au pic. De plus, comme le niveau de contrainte qui arrive sur la face arrière est

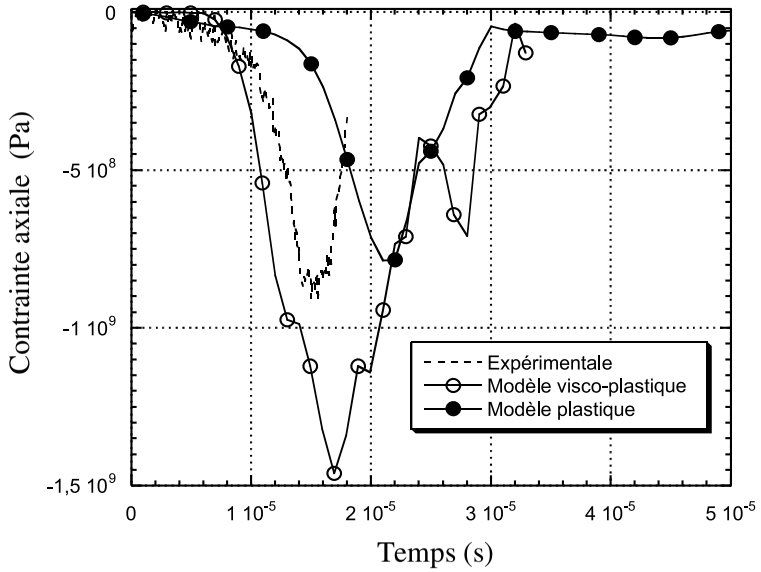


FIG. 5.22 – *Évolution de la contrainte axiale sur le plan 1 en fonction du temps*

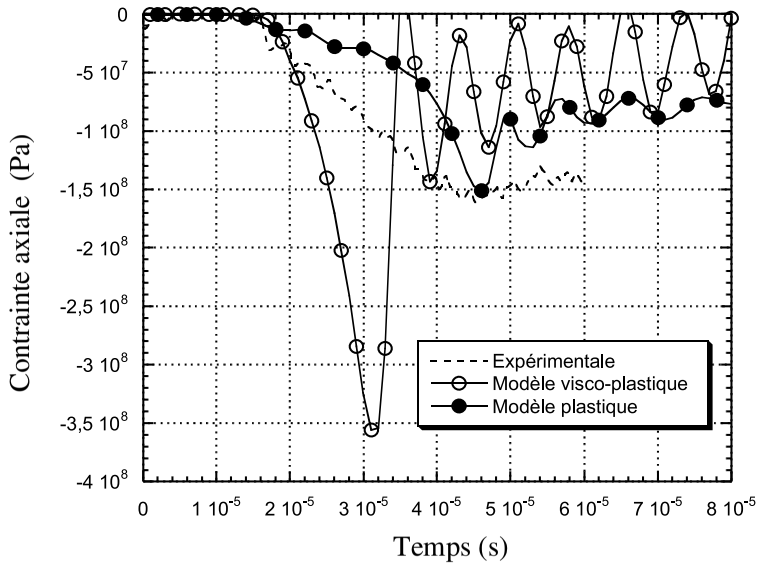


FIG. 5.23 – *Évolution de la contrainte axiale sur le plan 2 en fonction du temps*

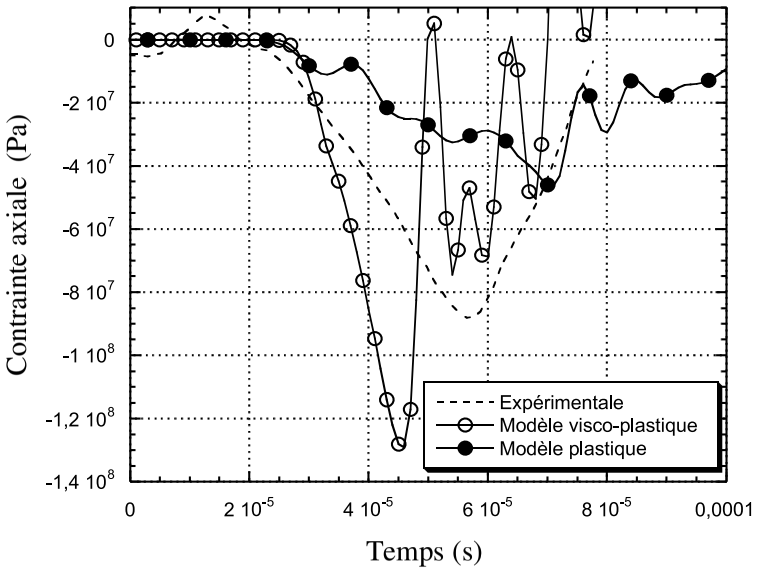


FIG. 5.24 – *Évolution de la contrainte axiale sur le plan 3 en fonction du temps*

important nous avons la formation d'une écaille qui correspond aux essais instrumentés, tandis que pour la dalle non instrumentée il n'y a pas eu d'écaille. Ce problème de calage entre la valeur au pic et les temps d'arrivée des ondes peut être amélioré en modérant le durcissement du matériau et en diminuant l'effet de vitesse. Le modèle plastique quant à lui permet de mieux appréhender les ondes de compression avec toutefois une tendance à être en "retard" par rapport à l'onde expérimentale. Ceci est probablement dû à un module d'élasticité initial trop faible qui est affecté dès le départ de l'endommagement initial (porosité), ajoutée à la non augmentation de la compaction en fonction de la vitesse de déformation. Ces différences entre les simulations numériques et les essais expérimentaux peuvent s'expliquer par la différence notable qu'il existait entre le matériau qui a servi à l'identification des paramètres des modèles et le matériau présent dans la dalle[1]. Toutefois il apparaît réaliste de penser qu'une meilleure identification des paramètres du modèle permettrait d'avoir une meilleure corrélation entre les simulations numériques et

1. Le mode de mise en oeuvre des dalles a produit, de façon inattendue, un volume d'air occlus important (résistance à la compression de l'ordre de 38 MPa) par rapport aux petites éprouvettes qui ont permis le calage du comportement (résistance à la compression supérieure à 60 MPa). Dans l'état de nos connaissances, il n'est pas possible de quantifier l'effet d'une plus faible densité sur le comportement triaxial du MB50, même si des études ont montré la forte influence de ce paramètre sur des mortiers [Burlion 97].

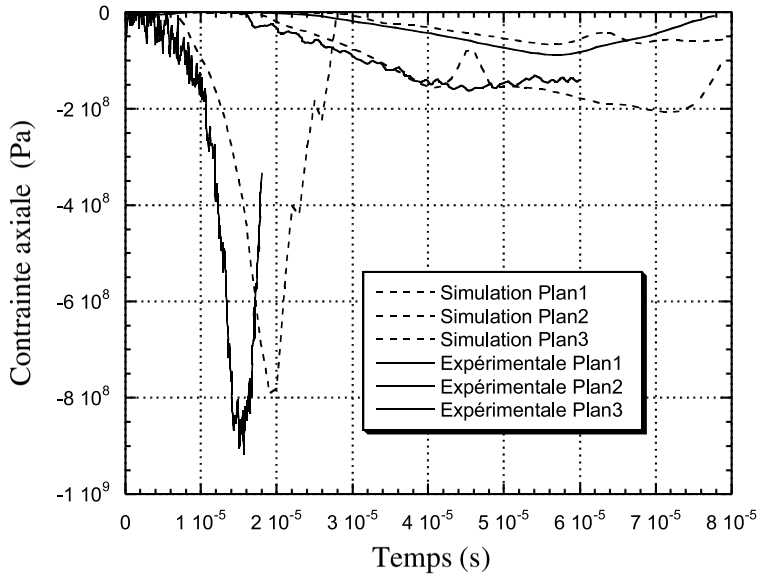


FIG. 5.25 – *Comparaison entre la simulation avec le modèle viscoplastique ($k = 15$) et l'expérimentation pour la contrainte axiale sur les 3 plans en fonction du temps*

les résultats expérimentaux. En diminuant légèrement le paramètre k (en passant de 45 à 15) pour le modèle viscoplastique (voir chapitre 4) on obtient les résultats présentés sur la figure 5.25. Pour cette simulation nous obtenons un écaillage similaire à celui obtenu sur la figure 5.19 ce qui est plus proche des essais sans instrumentations.

5.4 Perspective : simulation d'un essai de perforation

Afin de compléter la base de données concernant le MB50, des essais balistiques ont été effectués au Centre d'Étude de Gramat [Buzaud 98] qui ont permis de réaliser 14 essais de perforation de dalles d'épaisseurs 10 et 20 cm. Ces essais ont été réalisés à l'aide d'un pénétrateur en acier à haute résistance, d'une masse de 500 grammes, animé d'une vitesse comprise entre 200 et 600 m/s.

Dans l'ensemble des essais le projectile s'est comporté en corps rigide et pour l'ensemble des tirs à incidence normale il n'y a aucune corrélation observée entre les dimensions des cratères obtenus (en faces avant et arrière) et la vitesse d'impact.

Lors de l'expérimentation de perforation, le projectile impacte la cible qui se fragmente sous le choc initial, puis elle creuse un tunnel (si la dalle est suffisamment épaisse) et enfin

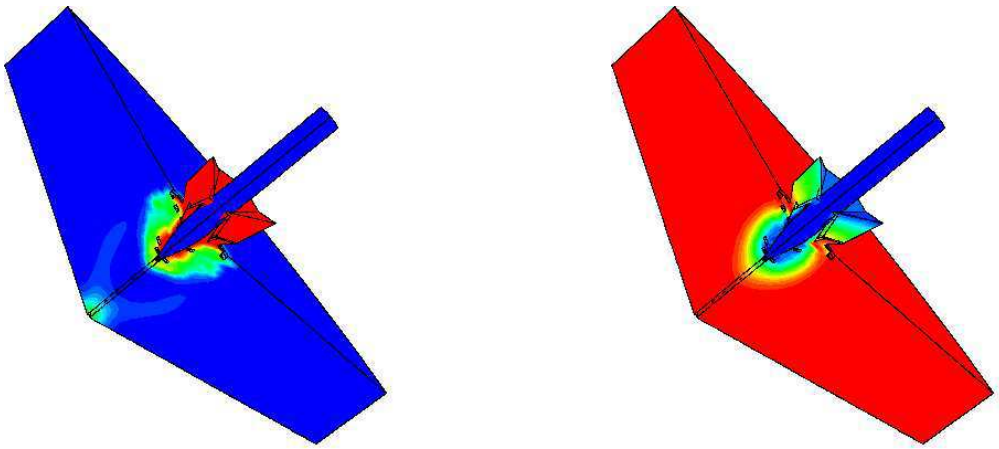


FIG. 5.26 – *Simulation avec le modèle viscoplastique de la perforation*

éjecte de la matière. La résolution numérique lagrangienne par éléments finis ne permet pas à la matière de se détacher. Plusieurs artifices permettent de contourner cette difficulté. La première méthode consiste à réaliser un pré-trou (tunnel de faible diamètre) afin de permettre au projectile de traverser la dalle. Cette solution est bien adaptée au projectile avec un bout conique. Cette méthode peut être associée à un remaillage afin de mieux représenter les mailles fortement déformées au voisinage du tunnel. Une seconde méthode consiste à éliminer certaines mailles lorsqu'elles ont atteint un critère ; on parlera alors d'érosion. Les mailles éliminées permettront au projectile de poursuivre son chemin en perforant la dalle. En fonction des codes, la masse des mailles éliminées est soit répartie sur les mailles adjacentes, soit purement supprimée (ce qui est le cas de LS-DYNA3D). Cette seconde technique a l'avantage de ne pas pré-supposer la trajectoire du projectile à travers la dalle, ce qui est particulièrement important lorsque l'impact n'est pas normal à la cible.

Les éléments de modélisation qui ont été présentés précédemment devrait permettre de simuler une perforation. Dans les simulations nous utiliserons la technique du pré-trou associée à de l'érosion afin d'éliminer les mailles qui pourraient avoir une influence néfaste sur le calcul numérique. Ce critère d'érosion doit permettre de prendre en compte les grandes déformations de cisaillement (calage à réaliser sur un essai de perforation) et la

rupture par extension (calage à partir des essais de traction par écaillage). Un exemple de calcul qui peut être mené est représenté sur la figure 5.26. Nous pouvons voir sur cette figure l'évolution de la porosité dans la dalle, ainsi que l'évolution de l'endommagement.

5.5 Conclusions

Les différentes simulations réalisées ont permis de montrer l'aptitude des deux modèles développés à représenter des chargements complexes.

Le modèle plastique développé au chapitre 2 donne de bons résultats lorsque les phénomènes de traction ne sont pas trop importants (pas de limiteur de localisation) et quand la vitesse de déformation n'est pas trop importante. Le modèle visco-plastique permet quant à lui de mieux appréhender l'ensemble des phénomènes observés expérimentalement (compaction, écaillage et cisaillement). Toutefois, les simulations de l'explosion au contact ont montré l'importance que peut prendre le paramètre de compaction lorsque celui-ci est associé à un comportement dépendant de la vitesse de déformation. De plus, l'ensemble de ces simulations montre qu'une bonne gestion des contacts lorsque les sollicitations sont extrêmes (par exemple lors de l'explosion), pose encore des problèmes, ce qui peut affecter l'ensemble des résultats.

Pour le calcul de perforation, il reste à caler le critère d'érosion sur les déformations plastiques ce qui permettra de mener à terme un calcul complet.

Chapitre 5 : Simulations numériques

Résumé

Dans ce chapitre, nous avons présenté différentes simulations numériques qui ont permis de mettre à l'épreuve les différents modèles de comportement développés au chapitre 2 et au chapitre 4. Ces simulations ont mis en avant les caractéristiques suivantes :

- Lorsque le chargement entraîne un déviateur des contraintes plus important que la partie sphérique, le modèle viscoplastique visco-endommageable permet de mieux représenter les phénomènes grâce au couplage entre l'endommagement de compression et les déformations plastiques.
- S'il n'y a pas de problème de localisation des déformations, ni une trop forte vitesse de déformation, le modèle plastique endommageable donne des résultats très satisfaisants.
- À l'inverse, lorsque les phénomènes de traction sont importants ainsi que la vitesse de déformation, le modèle viscoplastique visco-endommageable est le plus apte à représenter l'ensemble des phénomènes.

Conclusions et Perspectives

Au cours de ce travail nous nous sommes intéressés au comportement du béton soumis à une sollicitation de dynamique rapide. Nous avons proposé plusieurs approches qui permettent de prendre en compte des phénomènes aussi divers que la compaction, la rupture par extensions et les déformations importantes dues au cisaillement. Toutefois, nous n'avons pas la prétention d'avoir apporté la solution idéale pour chacun de ces phénomènes pris indépendamment des autres. L'objectif était clair : être capable de modéliser des problèmes aussi complexes que la perforation de dalle en béton ou que l'explosion au contact.

Pour cela nous avons dans un premier temps utilisé un modèle de comportement introduit pour la première fois par Burlion dans sa thèse [Burlion 97]. Nous avons présenté une approche simplifiée, ainsi que les développements qui ont été menés afin de réaliser son implantation numérique — fondée sur un schéma d'intégration explicite — dans le code de calcul aux éléments finis LS-DYNA3D. Pour répondre à certaines interrogations concernant la sensibilité à la vitesse de déformation du comportement sphérique du béton, nous avons présenté un nouvel essai de compaction dynamique. Cet essai, fondé sur les barres de Hopkinson, a permis de mettre en évidence un important effet de vitesse sur le comportement sphérique du béton.

Suite à cette campagne, nous avons développé une nouvelle modélisation qui permet de prendre en compte les observations expérimentales réalisées au sein du réseau de laboratoires. Ainsi, nous avons proposé un modèle viscoplastique et visco-endommageable (prise en compte des effets de vitesse) basé lui aussi sur la mécanique des milieux poreux, mais faisant intervenir la porosité dans le comportement de manière plus classique par l'intermédiaire d'une méthode d'homogénéisation. Son implantation numérique — également

fondée sur un schéma d'intégration explicite — a été effectuée.

Finalement, les modèles de comportement développés ont été testés et validés par différentes simulations numériques. Les premières simulations consistaient à simuler les essais qui ont permis de caler les paramètres du modèle, ceci afin de tester l'implantation numérique, la calibration et le domaine de validité des deux modèles. Une autre série de simulations a permis de vérifier sur des calculs de structure plus complexes la validité des modèles de comportement. Nous avons, pour cela, simulé une explosion au contact sur une dalle, ainsi que la perforation d'une dalle en béton par un projectile en acier. Ces simulations ont mis en avant les caractéristiques suivantes : lorsque le chargement entraîne un déviateur des contraintes plus important que la partie sphérique, le modèle viscoplastique visco-endommageable permet de mieux représenter les phénomènes grâce au couplage entre l'endommagement de compression et les déformations plastiques ; s'il n'y a pas de problème de localisation des déformations, ni une trop forte vitesse de déformation, le modèle plastique endommageable donne des résultats très satisfaisants ; à l'inverse, lorsque les phénomènes de traction sont importants ainsi que la vitesse de déformation, le modèle viscoplastique visco-endommageable est le plus apte à représenter l'ensemble des phénomènes. Cependant, l'utilisation de ce modèle, où les déformations plastiques dépendent de la vitesse de déformation, donne une importance considérable au paramètre de compaction. Il reste ainsi à faire une étude paramétrique qui permettrait de mieux cerner, sur un calcul de structure, l'influence des différents paramètres de la modélisation. Un effort particulier devra être fait dans l'avenir pour une meilleure représentation des phénomènes de cisaillement.

Enfin, l'ensemble de ces simulations montre qu'une bonne gestion des contacts lorsque les sollicitations sont extrêmes (par exemple lors de l'explosion), pose encore des problèmes, ce qui peut affecter l'ensemble des résultats. Ce point particulier devra faire l'objet de développement futur afin d'avoir une représentation des contacts en dynamique qui permettent de limiter les problèmes numériques. Enfin, les simulations de perforation de dalle devrait permettre de caler le paramètre d'érosion sur les déformations plastiques (à partir des essais expérimentaux).

Bibliographie

[Abrams 17] Abrams A., Effect of rate of application of load on the compressive strength of concrete, *ASTM J.*, vol. 17, 1917, pp. 364–377.

[Bailly 94] Bailly P., Une modélisation d'un matériau fragile avec prise en compte d'effets dynamiques, *Compte Rendu Académie des Sciences, Série II*, 1994, pp. 727–732.

[Bailly 99] Bailly P., Rapport final, première partie, expérimentation, *Comportement des ouvrages en dynamique rapide–Comportement dynamique du béton*, 1999.

[Bažant 76] Bažant Z.P., Instability, ductility and size effect in strain softening concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 102, 1976, pp. 331–344.

[Bažant et Oh 83] Bažant Z.P. et Oh B. H., Crack band theory for fracture of concrete, *RILEM Materials and structures*, vol. 16, 1983, pp. 155–177.

[Bažant et Prat 88a] Bažant Z.P. et Prat P.C., Miroplane model for brittle plastic materials: Part I – Theory, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 10, 1988, pp. 1672–1688.

[Bažant et Prat 88b] Bažant Z.P. et Prat P.C., Miroplane model for brittle plastic materials: Part II – Verification, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, vol. 10, 1988, pp. 1689–1702.

[Benallal *et al.* 91] Benallal A., BIllardon R. et Geymonat G., Localisation phenomena at the boundaries and interfaces of solids, *Proc. Third Int. Conf. Constitutive Laws for Engineering Materials : Theory and Applications*, pp. 387–390, Tuscon, Arizona, 1991.

[Berthaud *et al.* 90] Berthaud Y., Laborderie C. et S. Ramtani, Damage modelling and crack closure effects, *Damage Mechanics in Engrg. Materials*, pp. 263–276, J.W.

Ju et al. Eds., ASME AMD, 1990.

[Bicanic *et al.* 95] Bicanic N., Munjiza A., Owen D.R.J. et Petrinic N., From continua to discontinua- a combined finite element/discrete element modelling in civil engineering, *Developments in Comp. Techn. for Structural Engineering*, 1995, pp. 1–13.

[Bischoff et Perry 91] Bischoff P.H. et Perry S.H., Compressive behaviour of concrete at high strain rates, *Materials and Structures*, vol. 24, 1991, pp. 425–450.

[Bonnan 96] Bonnan S., *Modélisation mésomécanique du comportement sous choc de l'aluminium poreux – Validation expérimentale*, Thèse de Doctorat, Université de Poitier, 1996.

[Brara et Klepaczko 97] Brara A. et Klepaczko J.R., Nouveau dispositif expérimental d'étude de la rupture par écaillage du béton, *Communication–Congrès GEO*, Aussois–France, 1997.

[Burlion 97] Burlion N., *Compaction des bétons: éléments de modélisation et caractérisation expérimentale*, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1997.

[Burlion *et al.* 99a] Burlion N., Gary G. et Gatuingt F., *Comportement expérimental en compaction statique te dynamique du micro-béton MB50*, Rapport de fin de contrat GEO, 1999.

[Burlion *et al.* 99b] Burlion N., Gatuingt F., Pijaudier-Cabot G. et Daudeville L., Compaction and tensile damage in concrete: constitutive modelling and application to dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering, à paraître*, 1999.

[Buzaud 98] Buzaud E., Performances mécaniques et balistiques du microbéton mb50, *Rapport de fin de contrat n° 97.25.022.00470.46.51, Dynalis*, 1998.

[Camborde et Mariotti 99] Camborde F. et Mariotti C.., étude du comportement dynamique des matériaus fragiles par les éléments discrets, *14ème Congrès Français de Mécanique–Toulouse'99*, CD-ROM, 1999.

[Chaboche *et al.* 94] Chaboche J.L., Lesne P.M., et Maire J.F., *Phenomenological Damage Mechanics of Brittle Materials with Description of the Unilateral Damage Effect, in Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, Z.P. Bažant et al. eds., E & FN Spon Pubs, 1994.

[Chree 89] Chree C., Trans. 14, *Cambridge Phil. Soc.*, 1889, p. 155.

[Colantonio et Stainier 96] Colantonio L. et Stainier L., Numerical integration of visoplastic constitutive equations for porous materials, *Numerical Methods in EngineeringŠ96*, pp. 28–34, J.-A. Desideri, P. Le Tallec, E. Onate, J. Periaux, and E. Stein, Wiley Pubs, 1996.

[Cundall et Strack 79] Cundall P.A. et Strack O.D.L., A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, vol. 29, 1979, pp. 47–65.

[Davies 48] Davies R.M., *Phil. Trans. A240*, 1948, p. 155.

[Deü 97] Deü J.F., *Rupture des composites stratifiés sous chargement dynamique : Appoprt des méso-modèles avec endommagement retardé*, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1997.

[de Borst et Muhlhaus 92] de Borst R. et Muhlhaus H.B., Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, 1992, pp. 521–539.

[Denoual 98] Denoual C., *Approche probabiliste du comportement à l'impact du carbure de silicium: application aux blindages moyens*, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1998.

[Donze *et al.* 99] Donze F., Magnier S.A., Daudeville L., Mariotti C. et Davenne L., Study of the behavior of concrete at high strain rate compressions by a discrete element method, *ASCE J. of Eng. Mech, à paraître*, vol. 125, n. 10, 1999, pp. 1154–1163.

[Drücker et Prager 52] Drücker D.C. et Prager W., Soils mechanics and plastic analysis or limit design, *Quartely of Appl. Mech.*, vol. 10, 1952, pp. 157–175.

[Dubé 94] Dubé J.F., *Modélisation simplifiée et comportement visco-endommageable des structures en béton*, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1994.

[Dubé *et al.* 96] Dubé J.F., Pijaudier-Cabot G. et Laborderie C., A rate dependent damage model for concrete in dynamics, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, vol. 122, 1996, pp. 939–947.

[Dubé *et al.* 97] Dubé J.F., Kanji Nanji A. et Wielgosz, Comportement du béton en dynamique rapide, *J. Phys. IV, supplément au journal de physique III d'août 1997*, France, 1997.

[Duvaut et Lions 72] Duvaut G. et Lions J.L., *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod–Paris, 1972.

[Eshelby 57] Eshelby J.D., The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion an related problems, *Proc. Royal Society London, serie A*, n.241, 1957, pp. 376–396.

[Feenstra 93] Feenstra P.H., *Computational Aspects of Biaxial Sress in Plain and Reinforced Concrete*, Doct. Dissertation, Delft University of Technology — The Netherlands, 1993.

[Fichant *et al.* 98] Fichant S., Ch. La Borderie et G. Pijaudier-Cabot, Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures, *Int. J. of Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 1998, pp. 339–359.

[Frémond et Nedjar 96] Frémond M. et Nedjar B., Damage, gradient of damage and principle of virtual power, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, n. 8, 1996, pp. 1083–1103.

[Gary et Bailly 98] Gary G. et Bailly P., Behaviour of quasi-brittle material at high strain rate. experiment and modelling, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 17, n. 3, 1998, pp. 403–420.

[Gary *et al.* 91] Gary G., Klepaczko J.R. et Zhao H., Correction de dispersion pour l'analyse de petites déformations aux barres d'hopkinson., *DYMAT 91*, pp. 403–410, Strasbourg – Ed. Phys, France, 1991.

[Georgin 98] Georgin J.F., *Contibution à la modélisation du béton sous sollicitation de dynamique rapide. La prise en compte de l'effet de vitesse par la viscoplasticité*, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1998.

[Gurson 77] Gurson A.L, Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Engrg. Materials and Technology*, vol. 99, 1977, pp. 2–15.

[Hallquist 91] Hallquist J.O., LS-DYNA3D theoritical manuel, *Livermore Software Technology Corporation*, 1991.

[Hallquist *et al.* 85] Hallquist J.O., Goudreau G.L. et Benson D.J., Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagragian computations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 51, 1985, pp. 107–137.

[Hershey 54] Hershey A.V., The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 7, 1954, p. 236.

[Hild *et al.* 94] Hild F., Larsson P.L. et Leckie F.A., Uncoupled and coupled approaches to predict macrocrack initiation in fiber reinforced ceramic matrix composites, *Composites Structures*, vol. 29, 1994, pp. 365–377.

[Hill 58] Hill R., A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, vol. 6, 1958, pp. 236–249.

[Hill 65] Hill R., A self-consisitent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 13, 1965, p. 213.

[Hopkinson 14] Hopkinson B., A method af measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by the impact of bullets, *Phil. Trans. Roy. Soc. of London, Serie A.213*, 1914, pp. 437–452.

[Kachanov 58] Kachanov L.M., Time of the rupture process under creep conditions, *Izv. Akad. Nauk. S.S.R.*, n.8, 1958, pp. 26–31.

[Kennedy 76] Kennedy R.P., A review of procedures for the analysis and design of concrete strutures to resist missile impact effects, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 37, 1976, pp. 183–203.

[Kolsky 53] Kolsky H., *Stress waves in solids*, Clarenton Press, Oxford, 1953.

[Kotsovos 83] Kotsovos M.D., Effect on testing techniques on the post-ultimate behaviour of concrete in compression, *Materiaux et construction*, vol. 16, n. 91, 1983.

[Laborderie 91] Laborderie C., *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structures en béton*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1991.

[Ladevèze 93] Ladevèze P., Sur une théorie de l'endommagement, *Rapport interne N°34 du LMT Cachan, publié en anglais dans Proc. Failure Criteria of Structure Media*, pp. 355–364, J.P. Boehler, Balkema Pubs, 1993.

[Ladevèze *et al.* 94] Ladevèze P., Gasser A. et Allix O., Damage mechanisms modeling for ceramic composites, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 116, 1994, pp. 331–336.

[Lasry et Belytschko 88] Lasry D. et Belytschko T., Localization limiters in transient problems, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 24, 1988, pp. 581–597.

[Le Nard 99] Le Nard H., *Modélisation du comportement du béton sous impact*, Thèse de Doctorat, Université d'Orleans, 1999.

[Le Nard et Bailly 96] Le Nard H. et Bailly P., Simulation de la compression dynamique de cylindre en béton, *Communication–Congrès GEO*, Aussois–France, 1996.

[Le Vu 98] Le Vu O., *Etude et modélisation du comportement du béton sous sollicitations de grande amplitude–Application au problème de la pénétration dynamique*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 1998.

[Leblond *et al.* 94] Leblond J.B., Perrin G. et Devaux J, Bifurcation effects in dusctile metals with nonlocal damage, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 61, 1994, pp. 236–242.

[Lemaitre 92] Lemaitre J., *A course on Damage Mechanics.*, Springer Pubs, 1992.

[Lemaitre et Chaboche 78] Lemaitre J. et Chaboche J.L., Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement, *Journal de Mécanique Appliquée*, vol. 2, 1978, pp. 317–365.

[Lemaitre et Chaboche 92] Lemaitre J. et Chaboche J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1992.

[Lubarda *et al.* 96] Lubarda V.A., Mastilovic S. et Knap J., Brittle-ductile transition in porous rocks by cap model, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, vol. 122, 1996.

[Mazars 84] Mazars J., *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*, Doctorat d'état de l'Université Paris VI, France, 1984.

[Mear et Hutchinson 85] Mear M.E. et Hutchinson J.W., Influence of yield surface curvature of flow localisation in dilatant plasticity, *Mech. Mater.*, vol. 4, 1985, pp. 395–407.

[Mori et Tanaka 73] Mori T. et Tanaka K., Average stress in matrix and elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica*, vol. 21, 1973, pp. 571–574.

[Needleman 88] Needleman A., Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering*, vol. 67, 1988, pp. 69–85.

[Needleman et Tvergaard 84] Needleman A. et Tvergaard V., An analysis of ductile rupture in notched bars, *Journal of Physics and mechanics of Solids*, vol. 32, 1984, pp. 461–490.

[Nicholas 82] Nicholas T., *Impact Dynamics*, John Wiley & Sons, 1982.

[Ortiz et Simo 86] Ortiz M. et Simo J.C., An analysis of a new class of integration algoriths for elastoplastic constitutive relations, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, 1986, pp. 353–366.

[Ottosen 80] Ottosen N.S., *Non linear finite element analysis*, Ris. National Laboratory, Denmark, 1980.

[Peerlings *et al.* 95] Peerlings R.H.J., de Borst R., Brekelmans W.A.M. et de Vree J.H.P., Computational modelling of gradient-enhanced damage for fracture and fatigue problems, *Proceedings computational Plasticity IV*, 1995, pp. 975–986.

[Peerlings *et al.* 96] Peerlings, R.H.J.and de Borst R., Brekelmans W.A. et De Vree J.H.P., Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, 1996, pp. 3391–3403.

[Perzyna 66] Perzyna P., Fundamental problems in viscoplasticity, *Advances in applied mechanics*, vol. 9, 1966, pp. 935–950.

[Pijaudier-Cabot et Bažant 87] Pijaudier-Cabot G. et Bažant Z., Nonlocal damage theory, *J. Engng Mech. ASCE*, vol. 113, 1987, pp. 1512–1533.

[Pijaudier-Cabot et Burlion 96] Pijaudier-Cabot G. et Burlion N., Damage and localization in elastic materials with voids, *International Journal of Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, vol. 1, 1996, pp. 129–144.

[Pochhammer 76] Pochhammer L., *J. für die Reine und Angewande Mathematic*, vol. 81, 1876, p. 324.

[Pontiroli 95] Pontiroli C., *Comportement au souffle des structures en béton armé*, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1995.

[Ragueneau 99] Ragueneau F., *Fonctionnement dynamique des structures en béton–Influence des comportements hystérétiques locaux*, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1999.

[Raphenne 97] Raphenne T., *Modélisation de l'endomagement d'un explosif agrégataire soumis à l'impact d'un projectile*, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1997.

[Rossi 91] Rossi P., Influence of cracking in the presence of free water on the mechanical behaviour of concrete, *Magazine of concrete research*, vol. 43, n. 154, 1991, pp. 53–57.

[Rudnicki et Rice 75] Rudnicki J.W. et Rice J.R., Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant solids, *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, vol. 23, 1975, pp. 371–394.

[Schmitt 92] Schmitt N., Homogénéisation des matériaux hétérogènes–revue de quelques méthodes pour les milieux élastiques à phases parfaitement dispersée, *Rapport interne N°130*, LMT Cachan, 1992.

[Semblat *et al.* 95] Semblat J.F., Gary G. et Luong M.P., Dynamic response of sand using 3d-hopkinson bar, *Proc. of IS-TOKYO'95, Fisrt Inter. Conf. on Earthquake Geotechnical Engineering*, Tokyo, 1995.

[Sercombe 97] Sercombe J., *Modélisation du comportement du béton en dynamique rapide*, Thèse de Doctorat, École National des Ponts et Chaussées, 1997.

[Sidoroff 81] Sidoroff F., Description of anisotropic damage application to elasticity, *Proc. IUTAM Symp. on Physical Nonlinearites in Structural Mechanics*, pp. 237–244, J. Hult and J. Lemaitre eds., Springer Pubs, Berlin, 1981.

[Simo *et al.* 88] Simo J.C., Kennedy J.G. et S. Govindjee, Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. loading/unloading conditions and numerical algorithms, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, 1988, pp. 2161–2185.

[Sluys 92] Sluys L.J., *Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids*, Doct. Dissertation, Delft University of Technologie–Delft, 1992.

[Sluys et de Borst 92] Sluys L.J. et de Borst R., Wave propagation and localization in a rate-dependant cracked medium: Model formulation and one dimensional examples, *IJSS*, vol. 29, 1992, pp. 2945–2958.

[Suaris et Shah 84] Suaris W. et Shah S., Rate sensitive damage theory for brittle solids, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, n. 6, 1984, pp. 985–997.

[Toutlemonde 94] Toutlemonde F., *Résistance au choc des structures en béton*, Thèse de Doctorat, École National des Ponts et Chaussées, 1994.

[Valanis 91] Valanis K.C., A global damage theory and the hyperbolicity of the wave problem, *Journal of Applied Mechanics ASME*, vol. 58, 1991.

[Willam et Warnke 75] Willam K. et Warnke E., Constitutive model for triaxial behaviour of concrete, *Proc. Concrete Struc. Subjected to Triaxial Stresses*, pp. 1–30, Int. Ass. for Bridge and Structural Engineering, Zurich, 1975.

[Wu et Freund 84] Wu F.H. et Freund L.B., Deformation trapping due to thermoplastic instability in one-dimensional wave propagation, *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, vol. 32, 1984, pp. 119–132.

[Zhao *et al.* 93] Zhao H., Gary G. et Rota L., Utilisation de la barre de hopkinson pour l'étude du comportement dynamique des matériaux fragiles, *Actes du 11^{me} congrès Français de Mécanique*, pp. 413–416, Lille–France, 1993.

[Zimmerman 91] Zimmerman W., Elastic moduli of solid containing spherical inclusions, *Mechanics of Materials*, vol. 12, 1991, pp. 17–24.

ANNEXE 1

Cette annexe présente les calculs nécessaires à l'obtention de l'expression du module de compressibilité et du module de cisaillement donnée au chapitre 4.

Méthodologie pour l'homogénéisation

Le problème posé ici est de relier des grandeurs physiques rattachées à chaque phase du matériau réel (hétérogène) aux grandeurs rattachées à un matériau homogène équivalent. Ceci afin d'avoir des matériaux hétérogène et homogène équivalent qui qui aient à l'échelle macroscopique la même réponse à une même sollicitation.
Pour cela on distingue trois étapes :

L'étape de la représentation

Cette étape représente les bases sur lesquelles repose les modèles d'homogéisations. Il s'agit d'isoler les différentes phases du matériau et d'en identifier les propriétés physiques.

Le choix des différentes phases dépendra de plusieurs points :

- Capacité à décrire les propriétés des différentes phases.
- Précision souhaitée dans le modèle physique qui conditionne le choix du niveau de description des phases.
- Difficultés théoriques soulevées par le choix des phases et du comportement à décrire.

L'étape de la localisation

La modélisation théorique du comportement commence par cette étape. Les différentes phases étant parfaitement décrites, on détermine les relations qui lient les champs locaux

aux grandeurs macroscopiques. Cette étape est spécifique à chaque modèle.

Par exemple, pour un comportement mécanique linéaire, on pourra alors relier par une loi de localisation les contraintes et les déformation locales $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ d'une phase en un point courant $M(x)$ aux grandeurs macroscopiques correspondantes $\boldsymbol{\Sigma}$ et $\boldsymbol{E}$ du matériau homogénéisé :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma(x)} = B(x) : \boldsymbol{\Sigma} \\ \boldsymbol{\varepsilon(x)} = A(x) : \boldsymbol{E} \end{cases} \tag{3}$$

où A et B sont des tenseurs de localisation du 4^{me} ordre.

L'étape d'homogénéisation

À partir des données précisée dans les étapes précédentes, on procède à une moyenne des grandeurs locales additives telles que la contrainte, la déformation, l'énergie interne, l'entropie, la dissipation, ... Cette moyenne peut être, suivant l'approche adoptée, soit une moyenne d'ensemble (approche statistique), soit une moyenne volumique (approche déterministe). Par exemple, on peut écrire qu'une grandeur macroscopique G est reliée à une grandeur microscopique g par :

$$G =< g >= \frac{1}{VER} \int_{VER} g(x) dx \tag{4}$$

où VER représente le volume élémentaire représentatif du milieux homogénéisé.

Méthodes d'homogénéisation déterministes

Contexte général

Considérons un milieu hétérogène composé de n phases homogènes dont $n = 1$ désigne la phase continu (matrice). Supposont que les phases soient dispersées spatialement dans le matériau hétérogène de sorte que celui-ci soit macroscopiquement homogène pour des volumes supérieurs au VER. Il est alors possible de définir un matériau homogène équivalent (MHE) de caractéristiques élastiques C^{eff} et S^{eff} dont le comportement est équivalent au matériau hétérogène à l'échelle globale.

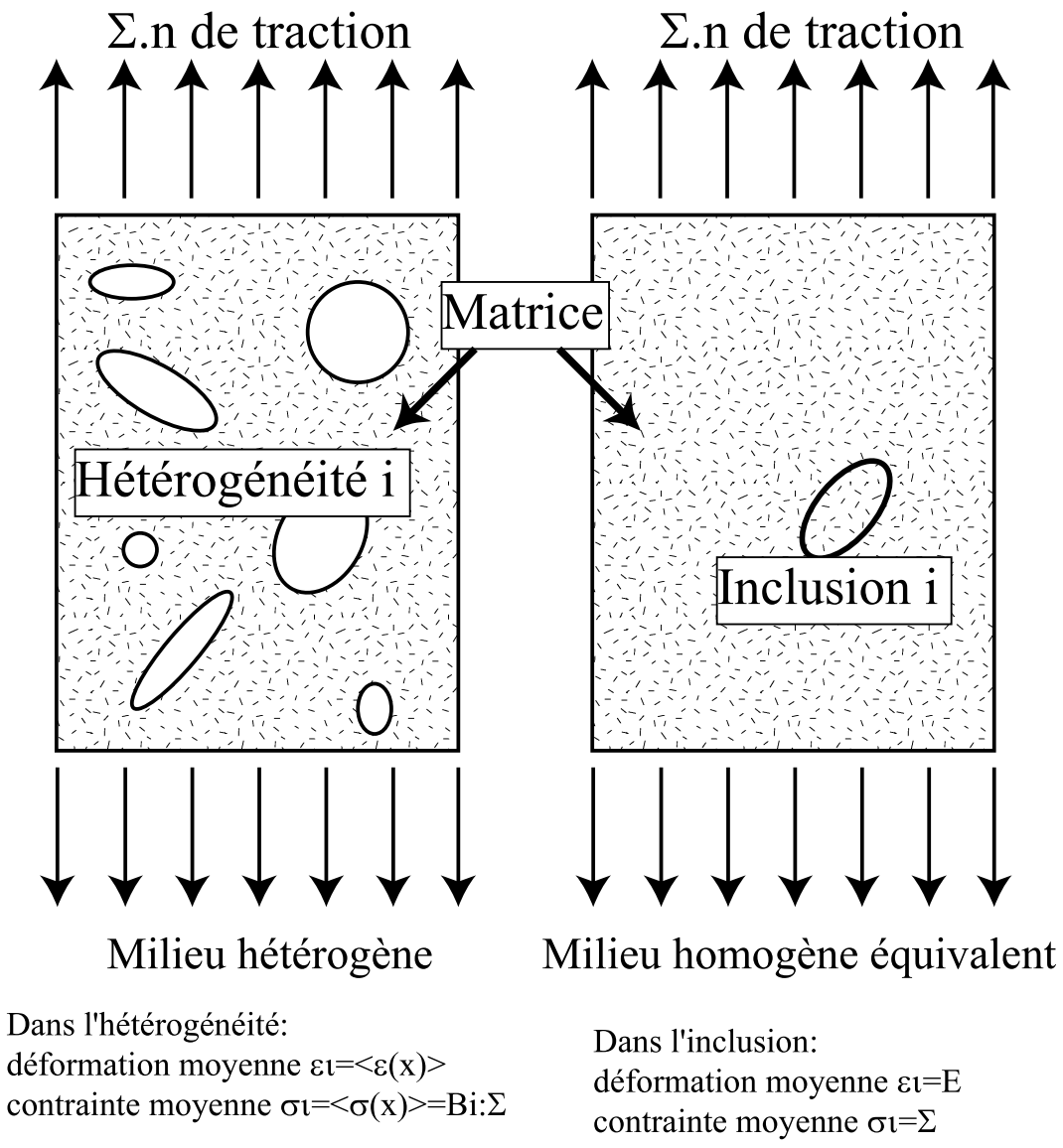


FIG. 27 – *Homogénéisation d'un milieu hétérogène*

Pour déterminer les caractéristiques élastiques S^{eff} du matériau hétérogène, appliquons sur le contour de celui-ci un chargement $\Sigma.\vec{n}$ qui crée dans le MHE des champs de contraintes et de déformations uniformes $\boldsymbol{\Sigma}$ et $\boldsymbol{E}$ (voir figure 27).
Les lois de comportement sur les champs moyens des contraintes et des déformations sur les différentes phases donnent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \sigma^i \rangle &= C^i : \langle \varepsilon^i \rangle \\ \text{ou } \langle \varepsilon^i \rangle &= S^i : \langle \sigma^i \rangle \end{aligned} \tag{5}$$

ou bien sous forme intégrale :

$$\begin{aligned} \langle \sigma^i \rangle &= \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \sigma^i dv_i \\ \text{ou } \langle \varepsilon^i \rangle &= \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \varepsilon^i dv_i \end{aligned} \tag{6}$$

On peut également exprimer la loi de comportement du MHE :

$$E = S^{eff} : \Sigma \tag{7}$$

Si l'on considère que l'on a continuité des champs de déplacements et de contraintes aux interfaces entres les différentes phases, on peux alors relier les champs de contraintes moyens des différentes phases $\langle \sigma^i \rangle$ au champ de contraintes global Σ par l'opérateur concentration de contraintes B^i :

$$\langle \sigma^i \rangle = B^i : \Sigma \tag{8}$$

Pour passer à l'étape d'homogénéisation nous avons besoin d'exprimer que le champ de contraintes global est égal à la moyenne des champs de contraintes locaux :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle = \sum_{i=1}^{i=n} c^i \langle \sigma^i \rangle \tag{9}$$

où c^i représente la concentration de la phase i dans le milieu hétérogène.

En remplaçant $\langle \sigma^i \rangle$ par son expression de l'équation 8, on en déduit que :

$$\sum_{i=1}^{i=n} c^i B^i = I \tag{10}$$

En écrivant que le champ de déformation global est égal à la moyenne des champs de déformations locaux (avec les équations 5 et 8) on obtient :

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} c^i S^i : B^i : \Sigma \tag{11}$$

D'après la relation 7, nous obtenons :

$$S^{eff} = \sum_{i=1}^{i=n} c^i S^i : B^i \tag{12}$$

soit en tenant compte de l'expression 10

$$S^{eff} = S^1 + \sum_{i=2}^{i=n} c^i (S^i - S^1) : B^i \tag{13}$$

De même, si on applique sur le contour du milieux hétérogène un champ de déplacement linéaire $U_i = E_{ij} x_j$ qui induit dans le MHE un champ de déformation uniforme E on peut déterminer C^{eff}. On trouve :

$$C^{eff} = \sum_{i=1}^{i=n} c^i C^i : A^i \tag{14}$$

soit encore :

$$C^{eff} = C^1 + \sum_{i=2}^{i=n} c^i (C^i - C^1) : A^i \tag{15}$$

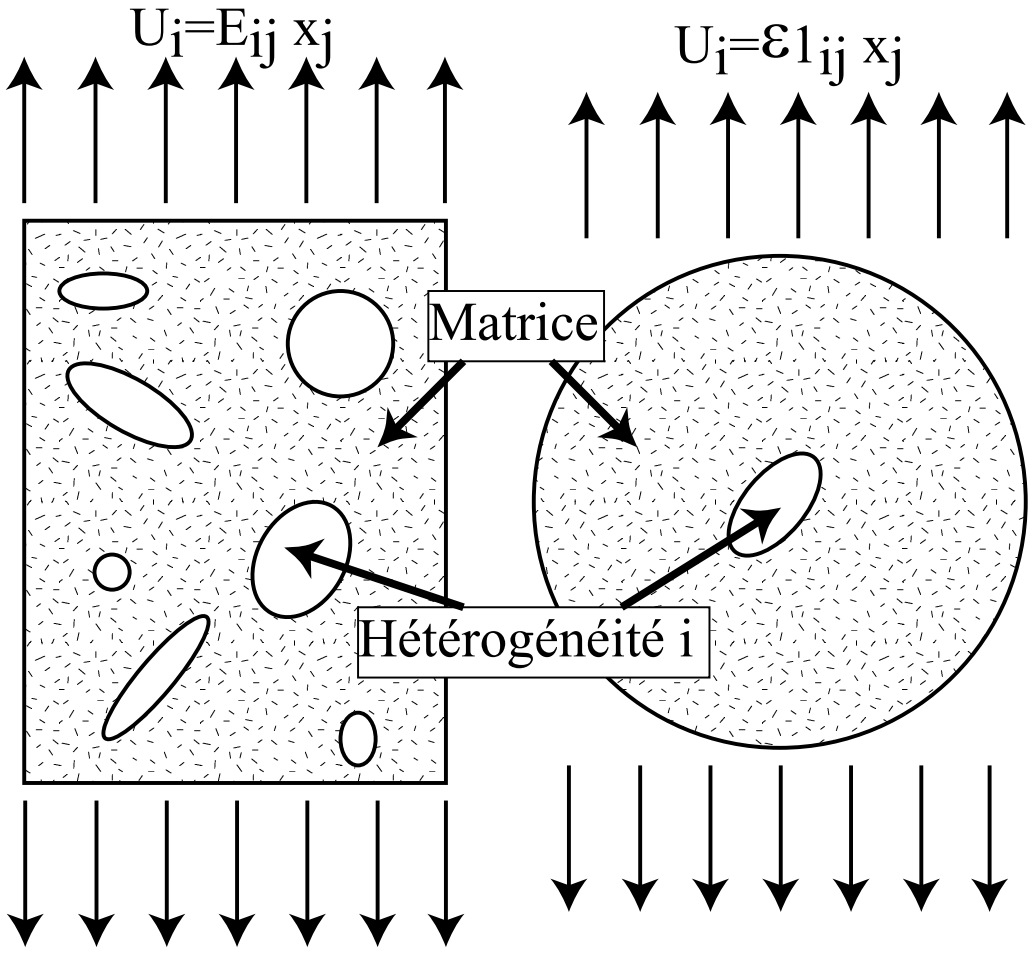
où A^i est le tenseur de concentration de déformation défini par $\langle \varepsilon^i \rangle = A^i : E$ avec $\sum_{i=1}^{i=n} c^i A^i = I$.

Les caractéristiques effectives seront entièrement déterminées si l'on réussit à calculer les tenseurs de concentration de contraintes ou de déformations.

Méthode de Mori-Tanaka

L'idée de base est de considérer que les champs moyens de contraintes et de déformation dans la matrice $\langle \sigma^1 \rangle$ et $\langle \varepsilon^1 \rangle$ sont perturbés par la présence des hétérogénéités et sont de ce fait différents des champs macroscopiques Σ et E.

Pratiquement, on considère que les caractéristiques du milieu de référence sont identiques à celles de la matrice, mais les interactions entre les hétérogénéités et la matrice sont



Dans la matrice:
déformation moyenne ε1=<ε1(x)>
contrainte moyenne σ1=C1:ε1

Dans l'hétérogénéité:
déformation moyenne ει=A1i:ε1
contrainte moyenne σι=Ci:ει

Hétérogénéité ellipsoïdale dans une matrice infinie:
déformation moyenne ει=A1i:ε1

FIG. 28 – *Champs de déformation et de contraintes moyens dans les différentes phases par la méthode de Mori-Tanaka*

évaluées en supposant que l'hétérogénéité est soumise au loin aux champs moyens dans la matrice et non aux champs macroscopiques, ce qui revient à écrire que $\langle \sigma^i \rangle = B^{1i} \langle \sigma^1 \rangle$ dans le problème en contraintes et $\langle \varepsilon^i \rangle = A^{1i} \langle \varepsilon^1 \rangle$ dans le problème en déformations (voir figure 28).

Dans le cas particulier ou les conditions suivantes sont respectées :

- Les phases sont homogènes et isotropes.
- Les phases sont toutes regroupées dans des domaines sphériques.
- Les phases sont parfaitement dispersées dans le milieu hétérogène.
- Le MHE isotrope est caractérisés par K^{eff} et G^{eff}.

le module de compressibilité K^{eff} et le module de cisaillement G^{eff} ont pour expressions :

$$\begin{aligned} K^{eff} &= \Big(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{c^i}{K^{1*} + K^i} \Big)^{-1} - K^{1*} \\ G^{eff} &= \Big(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{c^i}{G^{1*} + G^i} \Big)^{-1} - G^{1*} \end{aligned} \tag{16}$$

avec

$$\begin{aligned} K^{1*} &= \frac{4}{3} G^{1*} \\ G^{1*} &= \frac{G^1 (9K^1 + 8G^1)}{6(K^1 + 2G^1)} \end{aligned} \tag{17}$$