



**HAL**  
open science

## Outils ensemblistes d'analyse et de synthèse des lois de commande robustes pour des systèmes incertains.

Anamaria Luca

► **To cite this version:**

Anamaria Luca. Outils ensemblistes d'analyse et de synthèse des lois de commande robustes pour des systèmes incertains.. Autre. Supélec, 2011. Français. NNT : 2011SUPL0007 . tel-00630954v2

**HAL Id: tel-00630954**

**<https://theses.hal.science/tel-00630954v2>**

Submitted on 10 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre : 2011-07-TH

# THÈSE DE DOCTORAT

**SPECIALITE : PHYSIQUE**

**Ecole Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information des  
Télécommunications et des Systèmes »**

*Présentée par :*

**Anamaria LUCA**

Sujet :

**Outils ensemblistes d'analyse et de synthèse des lois de commande robustes pour  
des systèmes incertains**

Soutenue le 26 Septembre 2011 devant les membres du jury :

<b>M. Daniel ALAZARD</b>	ISAE	Examineur
<b>M. Didier DUMUR</b>	Supélec	Directeur de thèse
<b>M. Saïd MAMMAR</b>	Université d'Evry	Rapporteur
<b>Mme. Dorothee NORMAND-CYROT</b>	LSS-CNRS-Supélec	Examineur
<b>M. Pedro RODRIGUEZ-AYERBE</b>	Supélec	Co-Encadrant
<b>M. Vincent WERTZ</b>	Université Catholique de Louvain	Rapporteur



# Remerciements

Je souhaiterais adresser mes remerciements à M. Didier Dumur et M. Pedro Rodríguez-Ayerbe, mes co-directeurs de thèse, pour leur disponibilité et toute leur aide au cours de ces trois années de thèse. Un grand merci également pour avoir corrigé attentivement ce mémoire de thèse.

Merci aux personnes qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de mon travail, tout d'abord M. Vincent Wertz, Professeur à l'école polytechnique de Louvain (UCL) et Prorecteur à l'enseignement et à la formation à l'Université catholique de Louvain et M. Said Mammar, Professeur à l'Université d'Evry.

Mes remerciements également à M. Daniel Alazard, Professeur à SUPAERO et Mme Dorothée Normand-Cyrot, Directrice de recherche au L2S, pour avoir accepté d'être examinateurs au sein de mon jury.

Mes remerciements vont enfin à toutes les personnes, nombreuses, avec lesquelles j'ai discuté à l'occasion de différentes conférences ou de certains cours.

Merci à M. Sorin Olaru et M. Silviu Niculescu pour avoir encadré mon stage ERASMUS à Supélec.

Je souhaite remercier tous les membres du Département d'Automatique de Supélec et en particulier M. Patrick Boucher, chef du Département d'Automatique de Supélec. Un grand merci également à Josiane Dartron et à Léon Marquet.

Merci à tous mes collègues, en particulier à Ionela Prodan, Florin Stoican et Warody Claudinei Lombardi.

*As vrea sa multumesc din toata inima parintilor mei pentru toate sacrificiile pe care le-au facut pentru ca eu sa pot deveni ceea ce sunt astazi, pentru ca au fost mereu alaturi de mine si pentru ca pentru ei eu am fost totul.*

*Mami iti multumesc !*

*Multumesc intregii mele familii pentru suportul moral. Un gand special pentru unchiul meu Ion care mi-a inseninat copilaria si m-a ambitionat spre orizonturi mai inalte.*

*Multumesc iubitelui meu Romulus Milu pentru ca ma face fericita si pentru ca ma implieste.*



# Avant-propos

Le travail présenté dans cette thèse a donné lieu à la publication d'un certain nombre d'articles à l'occasion de différents congrès internationaux avec actes, d'un article de revue international et d'une communication nationale sans actes.

## Article de revue international avec comité de lecture

- A. LUCA, P. RODRIGUEZ-AYERBE, D. DUMUR. "Invariant sets techniques for Youla-Kucera parameter synthesis", International journal of control. DOI : 10.1080/00207179.2011.617783

## Conférences internationales avec actes

- A. LUCA, P. RODRIGUEZ-AYERBE, D. DUMUR. "Control of disturbed LPV systems in a LMI setting", 18th IFAC World Congress, Milan, Italy, 28 Août - 2 Septembre 2011
- A. LUCA, P. RODRIGUEZ-AYERBE, D. DUMUR, P. LEFRANC. "Invariant sets techniques for Buck DC-DC converter control", 11th IEEE International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision - ICARCV, Singapour, 7 - 10 Décembre 2010.
- LOMBARDI, A. LUCA, S. OLARU, S-I. NICULESCU, J. CHEONG. "Feedback Stabilization and motion synchronization of systems with time-delay in the communication network", 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Prague, République Tchèque, 7 - 9 Juin 2010.
- A. LUCA, P. RODRIGUEZ-AYERBE, D. DUMUR. "Youla-Kucera parameter synthesis using invariant sets techniques", American Control Conference - ACC Baltimore, Maryland, USA, 30 Juin - 2 Juillet 2010.
- W. LOMBARDI, A. LUCA, S. OLARU, S-I. NICULESCU. "State admissible sets for discrete systems under delay constraints", American Control Conference - ACC Baltimore, Maryland, USA, 30 Juin - 2 Juillet 2010. (Best Presentation in Session Award)
- A. LUCA, P. RODRIGUEZ-AYERBE, D. DUMUR. "Influence de la paramétrisation de Youla-Kucera sur le volume des ensembles invariants", Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique - CIFA, Nancy, France, 2-4 Juin 2010.
- W. LOMBARDI, A. LUCA, S. OLARU, S-I. NICULESCU, P. BOUCHER, J. CHEONG. "Synchronisation de mouvements sous contraintes pour des systèmes à retard" Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique - CIFA, Nancy, France, 2-4 Juin 2010.
- A. LUCA, P. RODRIGUEZ-AYERBE, D. DUMUR, P. LEFRANC. "Buck DC-DC converter control using invariant sets techniques", Anamaria Luca, Pedro Rodriguez-Ayerbe, Didier Dumur, Pierre Lefranc, The 15th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference - MELECON Valletta, Malta 25 - 28 Avril 2010.

- A. LUCA, P. RODRIGUEZ-AYERBE, D. DUMUR. "Invariant sets method for state-feedback control design", 17th Telecommunications Forum - TELFOR, Belgrade, Serbie, 24-26 Novembre 2009.

**Conférences internationales sans actes**

- A. LUCA, P. RODRIGUEZ-AYERBE, D. DUMUR. "Outils ensemblistes pour l'analyse et la synthèse d'une paramétrisation de Youla", Groupe de Travail de Commande Prédictive Non Linéaire, Paris, France, 13 Janvier 2011.

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>i</b>
<b>Liste de Figures</b>	<b>vii</b>
<b>Acronymes</b>	<b>xi</b>
<b>Symboles</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte du problème. Motivations de la thèse . . . . .	1
1.2 Objectifs de la thèse . . . . .	3
1.3 Organisation de la thèse . . . . .	4
<b>2 Outils théoriques</b>	<b>9</b>
2.1 Incertitudes . . . . .	9
2.2 Contraintes . . . . .	10
2.2.1 Contraintes sur l'entrée . . . . .	10
2.2.2 Contraintes sur la sortie . . . . .	10
2.2.3 Contraintes sur l'état . . . . .	11
2.3 Fonction de Lyapunov . . . . .	11
2.4 Ensembles invariants . . . . .	12
2.4.1 Théorème de Nagumo . . . . .	13
2.4.2 Ensemble invariant minimal et maximal . . . . .	15
2.4.3 Approximation des ensembles invariants. Ellipsoïdes . . . . .	17
2.4.3.1 Ellipsoïde invariant maximal et minimal . . . . .	19
2.4.3.2 Intersection ellipsoïdale. Projection ellipsoïdale . . . . .	19
2.5 Input to state stability (ISS-stabilité entrée-état) vis-à-vis d'une perturbation bornée . . . . .	21
2.6 Le paramètre de Youla-Kučera . . . . .	24
2.7 Inégalité matricielle linéaire (LMI) . . . . .	25
2.7.1 Inégalité matricielle bilinéaire (BMI) . . . . .	26
2.7.2 Inégalité matricielle polynomiale (PMI) . . . . .	27
2.8 La S-procédure . . . . .	27
<b>3 Outils ensemblistes pour l'analyse de la stabilité et de la robustesse</b>	<b>29</b>
3.1 Systèmes LTI discrets sous contraintes et affectés par des perturbations bornées	30

3.1.1	Système linéaire à temps invariant . . . . .	31
3.1.1.1	ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée . . . . .	32
3.1.1.2	Ellipsoïde invariant minimal . . . . .	34
3.1.1.3	Ellipsoïde invariant maximal . . . . .	36
3.1.2	Système LTI et observateur . . . . .	38
3.1.2.1	ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée . . . . .	39
3.1.2.2	Intersection ellipsoïdale minimale . . . . .	40
3.1.2.3	Projection ellipsoïdale maximale . . . . .	40
3.1.3	Système LTI avec observateur et paramètre de Youla . . . . .	41
3.1.3.1	ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée . . . . .	43
3.1.3.2	Motivation pour introduire la paramétrisation de Youla . . . . .	43
3.1.3.3	Intersection ellipsoïdale minimale . . . . .	44
3.1.3.4	Projection ellipsoïdale maximale . . . . .	46
3.1.4	Mise en oeuvre en simulation . . . . .	46
3.1.5	Conclusion . . . . .	52
3.2	Systèmes LPV à temps discret, sous contraintes et affectés par une perturbation bornée . . . . .	53
3.2.1	Systèmes LPV à temps discret . . . . .	54
3.2.1.1	ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée . . . . .	56
3.2.1.2	Motivation pour l'introduction des matrices supplémentaires . . . . .	62
3.2.1.3	Ellipsoïde minimal . . . . .	62
3.2.1.4	Ellipsoïde maximal . . . . .	64
3.2.2	Système LPV avec observateur . . . . .	65
3.2.2.1	ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée . . . . .	67
3.2.2.2	Intersection ellipsoïdale minimale . . . . .	68
3.2.2.3	Projection ellipsoïdale maximale . . . . .	68
3.2.3	Systèmes LPV avec observateur et paramètre de Youla . . . . .	69
3.2.3.1	ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée . . . . .	71
3.2.3.2	Intersection ellipsoïdale minimale . . . . .	71
3.2.3.3	Projection ellipsoïdale maximale . . . . .	71
3.2.4	Mise en oeuvre sur un exemple . . . . .	72
3.2.5	Conclusion . . . . .	77
3.3	Systèmes en commutation à temps discret, sous contraintes et affectés par une perturbation bornée . . . . .	78
3.3.1	Systèmes en commutation à temps discret . . . . .	79
3.3.1.1	ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée . . . . .	80
3.3.1.2	Ellipsoïde minimal . . . . .	81
3.3.1.3	Ellipsoïde maximal . . . . .	81
3.3.2	Systèmes en commutation et observateur . . . . .	81
3.3.2.1	ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée. Intersection ellipsoïdale minimale. Projection ellipsoïdale maximale . . . . .	82
3.3.3	Système en commutation avec observateur et paramètre de Youla . . . . .	83
3.3.3.1	ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée. Intersection ellipsoïdale minimale. Projection ellipsoïdale maximale. . . . .	85
3.3.4	Mise en oeuvre sur un exemple . . . . .	85
3.3.5	Conclusion . . . . .	89
3.4	Ellipsoïdes tronqués . . . . .	91

3.4.1	Outils théoriques . . . . .	91
3.4.2	Mise en oeuvre sur un exemple . . . . .	95
3.4.3	Conclusion . . . . .	96
3.5	Conclusions . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Outils ensemblistes pour la synthèse d'une loi de commande robuste</b>	<b>99</b>
4.1	Cas des systèmes linéaires invariants . . . . .	100
4.1.1	Synthèse d'une loi de commande par retour d'état . . . . .	102
4.1.1.1	Synthèse par retour d'état. Ellipsoïde minimal . . . . .	104
4.1.1.2	Mise en oeuvre sur un exemple . . . . .	105
4.1.2	Synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur . . . . .	107
4.1.2.1	Synthèse de la commande . . . . .	108
4.1.2.2	Techniques de placement de pôles . . . . .	113
4.1.2.3	Mise en oeuvre sur un exemple . . . . .	117
4.1.3	La paramétrisation de Youla-Kučera . . . . .	119
4.1.3.1	Synthèse d'un paramètre de Youla-Kučera . . . . .	120
4.1.3.2	Compromis entre la robustesse et la performance . . . . .	123
4.1.3.3	Mise en oeuvre en simulation . . . . .	127
4.1.4	Conclusion . . . . .	132
4.2	Systèmes LPV à temps discret . . . . .	133
4.2.1	Synthèse d'une loi de commande par retour d'état . . . . .	134
4.2.1.1	Mise en oeuvre sur un exemple . . . . .	136
4.2.2	Synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur . . . . .	138
4.2.3	La paramétrisation de Youla-Kučera . . . . .	145
4.2.3.1	Synthèse du paramètre de Youla-Kučera . . . . .	146
4.2.3.2	Compromis entre la robustesse et la performance . . . . .	149
4.2.4	Mise en oeuvre en simulation . . . . .	151
4.2.5	Conclusion . . . . .	155
4.3	Systèmes en commutation à temps discret . . . . .	156
4.3.1	Synthèse d'une loi de commande par retour d'état . . . . .	157
4.3.2	Synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur . . . . .	158
4.3.3	La paramétrisation de Youla-Kučera . . . . .	160
4.3.3.1	Synthèse du paramètre de Youla-Kučera . . . . .	161
4.3.3.2	Compromis entre la robustesse et la performance . . . . .	161
4.3.4	Mise en oeuvre en simulation . . . . .	163
4.3.5	Conclusion . . . . .	168
4.4	Conclusions . . . . .	169
<b>5</b>	<b>Mise en oeuvre sur un convertisseur Buck DC-DC</b>	<b>173</b>
5.1	Convertisseur Buck DC-DC avec charge résistive constante . . . . .	175
5.1.1	Loi de commande par retour d'état . . . . .	178
5.1.1.1	Retour d'état . . . . .	179
5.1.1.2	Retour d'état avec placement de pôles . . . . .	183
5.1.2	Loi de commande par retour d'état et observateur avec contraintes de performance . . . . .	185
5.1.3	Loi de commande avec paramètre de Youla . . . . .	192
5.1.3.1	Maximisation projection ellipsoïdale . . . . .	194

---

5.1.3.2	Paramètre de Youla avec contraintes de performance . . . . .	196
5.2	Convertisseur Buck DC-DC avec charge résistive variable . . . . .	202
5.2.0.3	Retour d'état . . . . .	204
5.2.0.4	Retour d'état avec décroissance de la fonction de Lyapunov . . . . .	205
5.3	Conclusions . . . . .	208
<b>6</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>211</b>
6.1	Originalité du travail et apports scientifiques . . . . .	212
6.2	Perspectives . . . . .	215
<b>A</b>	<b>Théorèmes</b> . . . . .	<b>219</b>
A.1	Théorème associé à la Section 3.1.2.2 . . . . .	219
A.2	Théorème associé à la Section 3.1.3.1 . . . . .	220
A.3	Théorème associé à la Section 3.2.2.2 . . . . .	221
A.4	Théorème associé à la Section 3.2.3.1 . . . . .	221
A.5	Théorème associé à la Section 3.2.3.2 . . . . .	222
<b>B</b>	<b>Démonstrations</b> . . . . .	<b>225</b>
B.1	Démonstration du théorème 3.12. . . . .	225
B.2	Démonstration du théorème 4.29. . . . .	228
B.3	Démonstration du problème 5.1. . . . .	231
B.4	Démonstration du problème 5.3. . . . .	235
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>237</b>

# Table des figures

2.1	Interprétation géométrique du théorème de Nagumo . . . . .	14
2.2	Ensembles invariants. . . . .	17
2.3	Ellipsoïde ( $n_x = 2$ ). . . . .	18
2.4	Approximation des ensembles invariants par des ellipsoïdes : (a) Ellipsoïde minimal ; (b) Ellipsoïde maximal . . . . .	19
2.5	Projection maximale. (a) Ensemble invariant réel (en rose) et ellipsoïde invariant ayant la projection maximale (en bleu) ; (b) Les projections de l'ensemble invariant réel (en rose) et de l'ellipsoïde invariant ayant la projection maximale (en noir) . . . . .	20
2.6	Intersection minimale. (a) Ensemble invariant réel (en bleu), ellipsoïde invariant minimal (en rose) et ellipsoïde invariant ayant l'intersection minimale (en jaune) ; (b) Intersection avec le plan $(x_1, x_2)$ de l'ensemble invariant réel (en bleu), de l'ellipsoïde invariant minimal (en rose) et de l'ellipsoïde invariant ayant l'intersection minimale (en jaune) . . . . .	21
2.7	Ensemble ellipsoïdal minimal pour un système affecté par des perturbations ( <i>reachable set</i> ) et la trajectoire de l'état . . . . .	22
2.8	Correcteur dans l'espace d'état avec le paramètre de Youla. . . . .	24
3.1	Correcteur dans l'espace d'état avec le paramètre de Youla. . . . .	42
3.2	Fonction de sensibilité vis-à-vis d'une incertitude additive. . . . .	49
3.3	Intersection minimale. . . . .	50
3.4	Projection maximale. . . . .	51
3.5	Evolution temporelle de l'entrée. . . . .	52
3.6	Evolution temporelle de la sortie. . . . .	53
3.7	Correcteur dans l'espace d'état avec paramétrisation de Youla à paramètre variant. . . . .	70
3.8	Intersections minimales. . . . .	74
3.9	Projections maximales. . . . .	75
3.10	Evolution temporelle de l'entrée. . . . .	76
3.11	Evolution temporelle de la sortie. . . . .	77
3.12	Correcteur dans l'espace d'état avec paramètre de Youla en commutation. . . . .	84
3.13	Intersections minimales. . . . .	87
3.14	Projections maximales. . . . .	88
3.15	Evolution temporelle de l'entrée. . . . .	89
3.16	Evolution temporelle de la sortie. . . . .	90
3.17	Ellipsoïde tronqué (l'intersection entre l'ensemble polyédral donné par les contraintes et $P_0$ ) et l'ellipsoïde invariant obtenu en appliquant la méthode classique. . . . .	96

4.1	Ellipsoïde maximal. . . . .	106
4.2	Evolution temporelle de l'entrée. . . . .	106
4.3	Evolution temporelle de la sortie. . . . .	107
4.4	Ellipsoïde maximal. . . . .	118
4.5	Evolution temporelle de l'entrée. . . . .	118
4.6	Evolution temporelle de la sortie. . . . .	119
4.7	Projection maximale. . . . .	129
4.8	Fonction de sensibilité. . . . .	129
4.9	Fonction de sensibilité complémentaire. . . . .	130
4.10	Simulation temporelle (partie supérieure : sortie, partie inférieure : commande). . . . .	131
4.11	Ellipsoïde maximal. . . . .	137
4.12	Evolution temporelle de l'entrée. . . . .	138
4.13	Evolution temporelle de la sortie. . . . .	138
4.14	Projections ellipsoïdales maximales. . . . .	153
4.15	Evolution temporelle de l'entrée. . . . .	154
4.16	Evolution temporelle de la sortie. . . . .	155
4.17	Système UPS monophasé. . . . .	163
4.18	Redresseur à pont de Graetz avec filtrage capacitif. . . . .	163
4.19	Projections ellipsoïdales maximales. . . . .	167
4.20	Evolution temporelle du signal de commande. . . . .	168
4.21	Tension de sortie et courant de charge pour le système UPS . . . . .	168
5.1	Schéma de base d'un convertisseur Buck. . . . .	175
5.2	Interrupteur passant. . . . .	175
5.3	Interrupteur bloqué. . . . .	175
5.4	Courant de l'inductance. . . . .	178
5.5	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique. . . . .	180
5.6	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance. . . . .	182
5.7	Evolutions temporelles de la tension de sortie. . . . .	182
5.8	Evolutions temporelles du rapport cyclique. . . . .	183
5.9	Projections sur $\tilde{V}$ et $\tilde{I}$ des ellipsoïdes invariants maximaux. . . . .	185
5.10	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique ( $r = 0, 7$ ). . . . .	186
5.11	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique ( $r = 0, 8$ ). . . . .	187
5.12	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (pour un changement en échelon de $V_{in}$ ). . . . .	190
5.13	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (avec perturbation sur la sortie). . . . .	191
5.14	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique. . . . .	192
5.15	Projection sur $\tilde{V}$ et $\tilde{I}$ des ellipsoïdes invariants. . . . .	194
5.16	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (pour changement en échelon de $V_{in}$ ). . . . .	195
5.17	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (avec perturbation sur la sortie). . . . .	196

---

5.18	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique. . . . .	197
5.19	Projection sur $\tilde{V}$ et $\tilde{I}$ des ellipsoïdes invariants. . . . .	198
5.20	Fonction de sensibilité vis-à-vis d'une incertitude additive. . . . .	199
5.21	Fonction de sensibilité complémentaire vis-à-vis d'une incertitude additive. . .	199
5.22	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique. . . . .	200
5.23	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (avec perturbation sur la sortie). . . . .	201
5.24	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (pour changement en échelon de $V_{in}$ ). . . . .	202
5.25	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique. . . . .	205
5.26	Projection sur $\tilde{V}$ et $\tilde{I}$ des ellipsoïdes invariants maximaux. . . . .	207
5.27	Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique. . . . .	207



# Acronymes

<b>E/S</b>	Entrée/Sortie
<b>LMI</b>	Inégalité matricielle linéaire ( <i>Linear Matrix Inequality</i> )
<b>BMI</b>	Inégalité matricielle bilinéaire ( <i>Bilinear Matrix Inequality</i> )
<b>MIMO</b>	Système Multi Entrées/Multi Sorties ( <i>Multi Input/Multi Output</i> )
<b>MPC</b>	Commande prédictive par modèle ( <i>Model Predictive Control</i> )
<b>QP</b>	Programmation quadratique ( <i>Quadratic Programming</i> )
<b>SDP</b>	Programmation semi-définie ( <i>Semi-Definite Programming</i> )
<b>SISO</b>	Système Une Entrée/Une Sortie ( <i>Single Input/Single Output</i> )
<b>ISS</b>	Stabilité entrée-état ( <i>Input to state stability</i> )
<b>Buck DC-DC</b>	Convertisseur abaisseur.
<b>UPS</b>	Alimentation sans coupure ( <i>Uninterruptible Power Supply</i> )
<b>LPV</b>	Système Linéaire à Paramètres Variant( <i>Linear parameter varying</i> )
<b>LTI</b>	Système Linéaire à Temps Invariant ( <i>Linear time invariant</i> )
<b>PDLF</b>	Fonctions de Lyapunov Dépendantes du Paramètre ( <i>Parameter Dependent Lyapunov Functions</i> )
<b>s.c.</b>	sous contraintes



# Symboles

$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres entiers
$\mathbb{Z}_{\square}$	Intervalle dans l'ensemble des nombres entiers
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}_+^*$	Ensemble des nombres réels strictement positifs
$\mathbb{R}_{n \times m}$	Ensemble des matrices à coefficients réels, de dimension $n \times m$
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{I}_n$	Matrice " identité " de dimension $n \times n$
$\mathbb{I}_{n \times m}$	Matrice " identité " de dimension $n \times m$
$\mathbb{O}_n$	Matrice nulle de dimension $n \times n$
$\mathbb{O}_{n \times m}$	Matrice nulle de dimension $n \times m$
$A^T$	Notation générale pour la transposée d'une matrice
$diag(A_1, \dots, A_n)$	Matrice bloc diagonale
$i = \overline{1, n}$	Notation pour $i \in \mathbb{N}$ , $1 \leq i \leq n$
$T_s$	Période d'échantillonnage
$f(x)  _{x=x_0}$	Valeur de la fonction $f(x)$ pour $x = x_0$
$k$	Incrément en temps discret (pour un signal $x$ , $x(k) = x(t)  _{t=kT_s}$ )
$q^{-1}$	Opérateur retard (pour un signal $x$ , $q^{-1}x(k) = x(k-1)$ )
$m$	Nombre d'entrées d'un système multivariable
$n_x$	Dimension de l'état du système
$p$	Nombre de sorties du système multivariable
$n_w$	Dimension du bruit d'état
$Q$	Paramètre de Youla
$n_q$	Dimension du paramètre de Youla

---

$\min(v)$	Minimum du vecteur $v$
$s$	Variable de Laplace
$\hat{x}$	Valeur estimée de l'état $x(k)$
$\succ$	Notation générale pour une matrice définie positive
$\prec$	Notation générale pour une matrice strictement définie négative
$\preceq$	Notation générale pour une matrice définie négative
$\otimes$	Produit de Kronecker
$Co$	Enveloppe convexe (Couverture convexe)
$\lambda(A)$	Spectre de la matrice $A$
$\  \cdot \ _2$	Norme Euclidienne
$\lambda_{\max}(A)$	Valeur propre maximale de la matrice $A$
$\star$	Raccourci pour la transposée d'une matrice à un emplacement symétrique
$z^*$	Matrice complexe conjuguée
$\partial \mathcal{S}$	Frontière de l'ensemble $\mathcal{S}$
$int\{\mathcal{S}\}$	Intérieur de l'ensemble $\mathcal{S}$

*À ma mère*  
*Mamei mele,*



# Chapitre 1

## Introduction

Le travail de recherche concrétisé par ce mémoire se trouve à l'intersection de deux domaines importants, la commande robuste des systèmes linéaires (LTI, LPV, en commutation) à temps discret affectés par de perturbations bornées et des contraintes et les ensembles invariants ellipsoïdaux maximal ou minimal.

Dans la pratique, les systèmes dynamiques sont très souvent soumis à de perturbations bornées, exprimées par exemple comme des perturbations sur la commande ou comme des erreurs sur les mesures. Le but de ce mémoire est de prendre en compte les perturbations bornées afin d'obtenir une loi de commande (stable au sens entrée-état vis-à-vis de ces perturbations) à la fois robuste et garantissant une dynamique rapide. Ainsi, une relation entre le volume des ensembles invariants (minimal et maximal) et la robustesse ou la performance en boucle fermée du système sera mise en évidence.

### 1.1 Contexte du problème. Motivations de la thèse

La littérature fournit de nombreux exemples de formulations de la commande robuste. Partant de cette constatation, les travaux proposés dans ce mémoire se sont orientés vers la commande robuste sous formalisme d'état, permettant d'avoir une vue d'ensemble intéressante sur les techniques ensemblistes sous une formulation LMI appliquées aux systèmes linéaires LTI, LPV, en commutation affectés par de perturbations bornées. Dans ce cadre, on envisage uniquement le cas des systèmes représentés par des modèles à temps discret.

De nombreux auteurs proposent la synthèse de lois de commande en ligne par des techniques ensemblistes pour des systèmes lents avec contraintes et avec une description polytopique [13, 61, 107] (c.à-d. la synthèse d'une loi de commande fournissant l'ensemble invariant maximal (ou minimal) en présence des contraintes et des perturbations). L'objectif est ici l'utilisation des techniques ensemblistes pour définir une méthodologie hors ligne de synthèse de lois de

commande robustes ou de robustification de lois de commande existantes, vis-à-vis de perturbations bornées et en présence de contraintes, de façon à pouvoir piloter des systèmes rapides.

En présence de contraintes et de perturbations, on verra dans une première partie d'analyse que le volume de l'ensemble minimal ou maximal nous offre une mesure de la robustesse du système. En se basant sur cette information, l'approche abordée dans ce mémoire consiste à rechercher une loi de commande qui maximise (minimise) l'espace ellipsoïdal de l'état pour lequel les contraintes sont satisfaites malgré la présence de perturbations bornées.

Si des perturbations permanentes agissent sur le système, on ne peut plus parler de stabilité asymptotique car l'état ne convergera pas vers l'origine mais vers un ensemble invariant. La notion de stabilité au sens entrée-état (ISS - input to state stability) est alors nécessaire pour désigner la convergence de l'état vers un ensemble invariant dans lequel il restera une fois entrée. Cet ensemble représente en fait l'ensemble invariant minimal et son volume dépend de l'amplitude de la perturbation.

Si l'on se place maintenant dans l'optique de la synthèse d'une loi de commande par retour d'état, dans la pratique, il y a des situations où le vecteur d'état ou une partie des variables d'état ne sont pas toujours disponibles à la mesure ou des situations où l'on souhaite réduire le nombre de capteurs pour diminuer les coûts. Dans ces conditions, un observateur d'état est généralement nécessaire pour reconstruire les variables d'état non mesurables. Pour la synthèse d'une commande par retour d'état et observateur stabilisants, plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature [2, 13, 22, 40, 62] sans qu'aucune d'entre elles ne considère la prise en compte de perturbations, même bornées. Nous proposerons alors une méthode exprimée sous forme d'inégalités matricielles afin d'obtenir un retour d'état et un gain d'observateur (de type LTI, LPV ou en commutation) garantissant un degré de performance satisfaisant vis-à-vis de perturbations permanentes bornées présentes dans le processus.

Enfin, diverses méthodes conduisant à des ensembles invariants maximaux plus grands ont été proposées [16, 28, 53, 60, 61] qui se résument à introduire des degrés de liberté dans la boucle fermée. Nous considérons ici un paramètre de Youla qui introduit à la fois des degrés de liberté dans la boucle fermée et qui, si incorporé d'une manière particulière, améliore la robustesse de la boucle fermée vis-à-vis d'incertitudes ou de perturbations grâce à l'utilisation d'un régulateur à deux degrés de liberté (le suivi de trajectoire et le contrôle en boucle fermée sont ajustés séparément). Il en résultera une projection sur le sous-espace initial de l'ensemble invariant satisfaisant les contraintes plus grande (garantissant de cette manière une robustesse visiblement améliorée).

Des techniques LMI de placement de pôles dans une certaine région ou des méthodes basées sur la vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov seront employées pour atteindre un compromis entre la robustesse et la performance.

## 1.2 Objectifs de la thèse

Les objectifs de ce mémoire sont repartis en deux catégories : des objectifs liés à l'analyse d'une loi de commande et des objectifs liée à la synthèse d'une loi de commande à la fois robuste et performante.

Pour ce qui concerne la partie d'analyse, dès lors que les systèmes LTI, LPV ou en commutation soumis à des contraintes sur l'entrée sont affectés par des incertitudes provenant par exemple de dynamiques négligées lors de la phase de modélisation, il convient de se poser les problèmes suivants :

- analyser la stabilité entrée-état du système par rapport à une perturbation bornée. Pour le cas LPV ou en commutation, on considère des fonctions de Lyapunov dépendantes du paramètre et des matrices supplémentaires sont introduites dans les inégalités matricielles ;
- définir une mesure de la robustesse ;
- analyser la robustesse d'une loi de commande (retour d'état, observateur, observateur et paramètre de Youla) par la technique d'ensembles invariants ellipsoïdaux minimal/maximal ou sous forme d'ellipsoïdes tronqués, pour les contraintes et les perturbations considérées ;
- utiliser ces outils en vue de la synthèse robuste.

Pour ce qui concerne la partie de synthèse, on se fixe comme objectifs :

- la synthèse d'un retour d'état stabilisant au sens entrée-état, robuste vis-à-vis de perturbations bornées, garantissant un ensemble invariant maximal/minimal satisfaisant les contraintes malgré la présence de perturbations bornées ;
- la synthèse d'un retour d'état et d'un gain d'observateur stabilisants au sens entrée-état vis-à-vis de perturbations bornées, garantissant une certaine performance ;
- la robustification d'une loi de commande existante via la paramétrisation de Youla afin de garantir :
  - un ensemble ellipsoïdal invariant ayant la projection maximale sur le sous-espace de l'état initial (la projection obtenue a un volume plus grand que celui obtenu sans le paramètre de Youla - amélioration en termes de robustesse) ;
  - un compromis entre la robustesse et la performance en utilisant des critères basés sur le placement de pôles ou sur la vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov.

Enfin, les lois synthétisées selon les principes ensemblistes sont mise en oeuvre sur un convertisseur DC-DC Buck. L'objectif est alors de montrer que les structures développées permettent de satisfaire le fonctionnement en présence de perturbations et contraintes. Deux cas seront traités : le convertisseur DC-DC Buck avec une charge résistive constante (système de type LTI) et le convertisseur avec une charge résistive variable (système de type LPV).

Le mémoire propose donc des solutions en réponse à ces objectifs, en traitant en priorité les ensembles invariants (en s'appuyant sur leur connexion avec la robustesse) vis-à-vis d'une perturbation bornée et en présence des contraintes sur la commande ou sur la performance.

### 1.3 Organisation de la thèse

Cette thèse est divisée en six chapitres (y compris cette introduction), qui développent les résultats originaux obtenus durant le travail de recherche. La structure du mémoire est conçue de façon à proposer les contributions sous une forme synthétique selon un enchaînement logique qui reflète l'élaboration chronologique des différentes solutions.

#### **Chapitre 2 : Outils théoriques**

Le but de ce chapitre est de donner les principaux outils nécessaires pour un suivi plus facile de ce mémoire. Comme les systèmes considérés tout au long de nos travaux sont des systèmes affectés par des perturbations et soumis à des contraintes, ce deuxième chapitre débute par une courte présentation de ces deux notions. Ensuite quelques notions de base sur la fonction de Lyapunov sont rappelées, suivies d'une description plus détaillée concernant les ensembles invariants. La motivation ayant conduit au choix des ensembles invariants ellipsoïdaux est expliquée ainsi que la définition d'un ellipsoïde invariant minimal ou maximal. Ce chapitre se poursuit avec des notions concernant la théorie de la stabilité au sens entrée-état par rapport à une perturbation bornée puis on introduit le concept de la paramétrisation de Youla. Les résultats proposés dans ce mémoire sont donnés sous la forme d'inégalités matricielles. A cause de la présence de perturbations bornées, les inégalités matricielles ont été obtenues via la S-procédure. Pour cela, on termine ce chapitre par une présentation de ces deux derniers outils fondamentaux tout au long de ce mémoire.

#### **Chapitre 3 : Outils ensemblistes pour l'analyse de la stabilité et de la robustesse**

L'étape d'analyse présentée dans ce troisième chapitre représente la base de nos travaux, les résultats proposés seront ensuite repris, étendus et appliqués lors des chapitres suivants.

Pour un système LTI, LPV ou en commutation à temps discret, ce chapitre énonce les conditions suffisantes garantissant l'ISS globale vis-à-vis d'une perturbation bornée. Comme le test de stabilité par rapport à une perturbation bornée est équivalent à un test d'invariance, les mêmes conditions de type LMI seront proposées afin de rechercher un ensemble ellipsoïdal invariant. En ajoutant des inégalités matricielles garantissant la satisfaction des contraintes et en considérant un critère d'optimisation adéquat, on recherche alors l'ensemble invariant ellipsoïdal maximal ou minimal satisfaisant des contraintes sur la commande malgré la présence de perturbations et pour toute transition. Cette démarche sera proposée tout d'abord pour un système avec retour d'état stabilisant et puis elle sera reprise pour les systèmes dont l'état est estimé au moyen d'un observateur ou dont une certaine robustesse est assurée par l'introduction d'un paramètre de Youla dans la boucle fermée. Dans le cas LPV et en commutation, nous serons amenés à considérer des fonctions de Lyapunov dépendantes du paramètre variant pour montrer l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée.

Au travers d'exemples considérés à la fin de chaque section (moteur à induction, exemples didactiques) nous montrerons que la paramétrisation de Youla fournit des ellipsoïdes invariants

ayant la projection ellipsoïdale maximale sur le sous-espace de l'état plus grande que celle obtenue pour les systèmes avec observateur seul. Le gain en robustesse se traduit par un gain en volume de l'ensemble ellipsoïdal maximal. Pour l'ensemble invariant minimal, dans le cas LTI le paramètre de Youla conduit à une intersection ellipsoïdale plus petite que celle obtenue pour le système avec observateur seul. Dans le cas LPV ou en commutation l'intersection de l'ensemble minimal n'est plus nécessairement plus petite avec le paramètre de Youla, dû aux propriétés d'invariance et à la présence des contraintes.

Pour réduire le conservatisme que la forme ellipsoïdale de l'ensemble invariant peut impliquer, on propose enfin une méthode alternative pour déterminer une approximation de l'ensemble invariant maximal réel. Les ensembles invariants recherchés s'appellent ici "ellipsoïdes-tronqués" et sont obtenus par l'intersection d'un ellipsoïde invariant (qui ne satisfait pas les contraintes) avec les hyperplans délimitant les contraintes. Ces nouveaux ensembles ont un volume plus grand que celui des ellipsoïdes invariants et demandent par ailleurs une charge de calcul inférieure à celle nécessaire pour obtenir un ensemble polyédral.

Les résultats sont exprimés sous forme LMI.

#### **Chapitre 4 : Outils ensemblistes pour la synthèse d'une loi de commande robuste**

Ce chapitre est dédié à la synthèse d'une loi de commande robuste pour des systèmes LTI, LPV ou en commutation à temps discret affectés par de perturbations bornées en utilisant des techniques ensemblistes et obtenue par résolution d'un problème mis sous une forme LMI.

On propose pour commencer une technique de commande utilisant des méthodes ensemblistes afin de calculer un retour d'état stabilisant robuste qui fournit l'ensemble invariant maximal satisfaisant les contraintes sur la commande (et la sortie) malgré la présence de perturbations bornées. Pour les systèmes de type LPV ou en commutation, le retour d'état est également de type LPV ou en commutation, respectivement. Dans ces deux cas, la recherche de l'ellipsoïde invariant maximal impose l'utilisation d'une fonction de Lyapunov unique mais des matrices supplémentaires seront malgré tout introduites afin d'offrir plus de degrés de liberté lorsque les inégalités matricielles sont établies et de réduire le conservatisme.

Dans la pratique, tout l'état du système n'étant généralement pas mesurable, il est nécessaire d'utiliser un observateur en vue d'en estimer l'état. Pour les systèmes décrits ci-dessus, nous recherchons alors le retour d'état et l'observateur garantissant l'ISS vis-à-vis de perturbations bornées en imposant des contraintes sur la performance en boucle fermée. L'obtention des inégalités matricielles a été possible grâce à une augmentation de la taille du vecteur de bruit qui a permis de considérer que le système et l'observateur peuvent être affectés tous les deux par de perturbations a priori différentes.

Pour les systèmes LTI, la performance est réglée en imposant le placement de pôles de la boucle fermée dans une région de l'espace plus petite que le cercle unité. Pour le système LPV affecté par de perturbations bornées, on recherche les retours d'état et les gains d'observateur garantissant la décroissance la plus rapide pour la fonction de Lyapounov dépendante du paramètre

variant, vis-à-vis de la commande et de la sortie. Dans ce cas, il est impossible de considérer la technique basée sur le placement des pôles car le placement de pôles des matrices d'état correspondant aux sommets dans la région de l'espace souhaitée n'implique pas que, pour les matrices d'état correspondant à une variation du paramètre intermédiaire (différente des sommets), ce placement de pôles sera encore satisfait. Pour le système en commutation, on impose comme critère de performance pour chaque mode le placement de pôles dans une région plus restreinte que le cercle unité. Pour ces deux derniers cas des fonctions de Lyapunov dépendantes du paramètre variant ont pu être considérées via l'introduction de matrices supplémentaires introduisant des degrés de liberté et réduisant le conservatisme. Dans tous ces cas, la construction des inégalités matricielles ne permet pas de considérer des contraintes sur la commande, d'où notre désir de synthétiser une loi de commande par retour d'état et observateur garantissant une bonne performance en boucle fermée qui sera ensuite robustifiée via la paramétrisation de Youla en ajoutant des contraintes sur la commande. La synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur prenant en compte la présence des perturbations et satisfaisant des contraintes de performance représente une des nouveautés introduites par ce mémoire.

Un paramètre de Youla sera dès lors inséré dans la boucle fermée afin de garantir une bonne robustesse vis-à-vis de la perturbation bornée. En ajoutant des contraintes, on synthétise un paramètre de Youla en considérant comme critère d'optimisation la maximisation de la projection sur le sous-espace de l'état initial de l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes malgré la présence de perturbations bornées. L'approche ensembliste lors de la synthèse d'un paramètre de Youla et la liaison entre le volume des ensembles invariants et la robustesse apportée via la paramétrisation de Youla représente une autre nouveauté proposée par ce mémoire.

Comme on souhaite maximiser la projection de l'ellipsoïde invariant (satisfaisant les contraintes), pour le cas LPV ou en commutation une fonction de Lyapunov qui ne dépend pas du paramètre variant sera prise en compte. On introduit tout de même une matrice supplémentaire unique afin de réduire le conservatisme.

Le prix à payer pour une bonne robustesse consiste en un ralentissement des performances en boucle fermée. Afin d'établir un compromis entre la robustesse et la performance, des critères sur la performance (une certaine vitesse de décroissance pour la fonction de Lyapunov et/ou le placement de pôles dans une certaine région de l'espace) sont pris en compte lors du calcul du paramètre de Youla afin d'assurer une dynamique plus rapide. On privilégiera alors un critère qui permet de contrôler la performance requise (en imposant une certaine vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov ou en utilisant le placement de pôles) pour pouvoir établir le compromis robustesse-performance en fonction de nos besoins.

## **Chapitre 5 : Mise en oeuvre sur un convertisseur Buck DC-DC**

Afin de valider une partie des résultats théoriques exposés ci-dessus, nous proposons une application sur un convertisseur Buck DC-DC. Deux cas seront considérés : le convertisseur avec une charge résistive constante et le convertisseur avec une charge résistive variable. Les techniques conçues lors de ce mémoire vont servir pour synthétiser des lois de commande à la fois robustes

et performantes en considérant des contraintes sur le rapport cyclique et le courant traversant l'inductance ou des contraintes sur la performance et de perturbations bornées agissant sur le système. Une analyse des résultats sera faite et des conclusions seront tirées.

### **Chapitre 6 : Conclusions**

Pour finir, ce dernier chapitre fait le bilan des solutions élaborées, dresse les conclusions par rapport aux objectifs fixés et propose des perspectives dans la continuité de ce travail.

### **Annexe A**

L'annexe A regroupe une série de théorèmes qui, dû au fait de leur similarité avec les autres théorèmes exposés dans ce mémoire et pour ne pas alourdir la présentation du mémoire, n'ont pas été présentés dans les chapitres appropriés.

### **Annexe B**

L'annexe B regroupe une série de démonstrations qui ont été volontairement omises des chapitres principaux afin de ne pas alourdir la présentation du mémoire.



# Chapitre 2

## Outils théoriques

Ce chapitre présente les outils mathématiques nécessaires permettant une compréhension simplifiée et claire des chapitres suivants. Les définitions données dans ce chapitre seront strictement liées au contexte des autres chapitres et de la thèse. Pour une vision plus large sur les outils théoriques présentés ici, des résultats plus complets peuvent être trouvés dans la littérature [9, 13, 89].

### 2.1 Incertitudes

Dans la pratique, tous les systèmes présentent un certain degré d'incertitude, par l'intermédiaire de perturbations ou par le biais de paramètres incertains [89]. Pour un système à temps discret, ces deux types d'incertitudes sont représentés de la façon suivante :

- Incertitude issue de perturbations (incertitude additive) :

$$x(k+1) = \Psi x(k) + w(k), \quad (2.1)$$

où  $w(k)$  est inconnu mais peut être borné. Dans la suite, le terme "perturbation" (ou "bruit") sera employé pour cet type d'incertitudes.

- Incertitude paramétrique (incertitude multiplicative) :

$$x(k+1) = [\Psi + \Delta\Psi]x(k). \quad (2.2)$$

Dans la suite, le terme "incertitude paramétrique" sera employé pour ce type d'incertitudes. Notons que les incertitudes de modèle (paramétriques) peuvent se représenter de façon équivalente par une perturbation appropriée.

Dans les chapitres suivants, nous aurons besoin de calculer des ellipsoïdes invariants pour ces deux cas d'incertitudes.

## 2.2 Contraintes

Les limitations physiques, technologiques ou de sécurité, qui se modélisent par des contraintes d'amplitude sur les actionneurs et les capteurs, sont inhérentes à presque tout système physique or ne pas prendre en compte des contraintes sur la commande, comme par exemple des saturations lors de la synthèse de lois de commande, peut conduire le système dans un mode de fonctionnement non souhaité avec le risque de ne pas pouvoir revenir à son mode de fonctionnement normal. Par ailleurs, des limitations liées à la sécurité ou à la performance peuvent imposer un fonctionnement sujet à certaines contraintes au niveau de la sortie ou au niveau des variables internes du système.

### 2.2.1 Contraintes sur l'entrée

Une classe de contraintes couramment imposées tout au long de cette thèse sont les contraintes sur l'entrée considérées afin d'éviter la saturation.

- Contraintes sur la norme Euclidienne de la commande :

$$\|u(k)\|_2 \leq u_{max} \quad (2.3)$$

où  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  est la commande du système.

- Contraintes sur chaque élément du vecteur de la commande :

$$|u_i(k)| \leq u_{imax}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.4)$$

Dans ce mémoire on va souvent prendre en compte de contraintes sur la commande.

### 2.2.2 Contraintes sur la sortie

Une autre classe de contraintes présentes dans ce mémoire sont les contraintes sur la sortie.

- Contraintes sur la norme Euclidienne de la sortie :

$$\|y(k)\|_2 \leq y_{max} \quad (2.5)$$

où  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie du système.

- Contraintes sur chaque élément du vecteur de sortie :

$$|y_i(k)| \leq y_{imax}, \quad i = \overline{1, p}. \quad (2.6)$$

### 2.2.3 Contraintes sur l'état

Une dernière classe de contraintes présentes dans ce mémoire sont les contraintes sur l'état.

- Contraintes sur chaque élément du vecteur d'état :

$$|x_i(k)| \leq x_{imax}, \quad i = \overline{1, n_x} \quad (2.7)$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  est l'état du système.

Les contraintes sur l'entrée sont des contraintes dures représentant classiquement des limitations physiques au niveau du processus qui ne peuvent pas être relaxées. Pour donner quelques exemples : des vannes qui présentent une ouverture maximale et une ouverture minimale (la saturation d'une vanne), des amplificateurs électroniques qui doivent opérer dans des plages d'alimentation en tension, des convertisseurs de puissance (électriques) qui ne peuvent pas actionner des machines que dans les limites de puissance pour lesquelles ils ont été conçus, des contraintes sur le couple moteur et la vitesse des machines électriques. D'un autre côté, les contraintes sur la sortie sont plutôt des contraintes sur la performance.

## 2.3 Fonction de Lyapunov

Quelques notions concernant la théorie de Lyapunov seront données dans la suite [9].

**Définition 2.1.** Soit une fonction continue  $V : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour  $k_2 \geq k_1 \geq 0$  on définit l'ensemble  $\mathcal{N}[V, k_1, k_2] = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : k_1 \leq V(x) \leq k_2\}$  et  $\mathcal{N}[V, k] = \mathcal{N}[V, 0, k] = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : 0 \leq V(x) \leq k\}$ .

**Définition 2.2.** Soit  $V(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lipschitz locale telle que  $V(0) = 0$  et  $V(x) > 0$  si  $x \neq 0$ .

Soit un système discret  $x(k+1) = f(x(k), w(k))$  où  $w(k) \in \mathcal{W}$  est une entrée exogène et  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n_w}$  est un ensemble compact. Si :

$$V(f(x, w)) \leq \max\{\lambda V(x), k_1\} \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{N}[V, k_2], w \in \mathcal{W} \quad (2.8)$$

et un  $\lambda < 1$  alors on dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov au sens fort pour l'ensemble  $\mathcal{N}[V, k_1, k_2]$ . Si l'inégalité (2.8) est satisfaite pour  $\lambda = 1$  alors on dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov au sens faible.

Si  $k_1 = 0$  et  $k_2 = \infty$  l'existence d'une fonction de Lyapunov assure la stabilité globale (asymptotique) de  $x(k)$ . Si  $k_1 = 0$  et  $k_2$  est fini, alors l'existence d'une fonction de Lyapunov assure la stabilité locale (asymptotique).

**Nota bene :** En général, la fonction de Lyapunov est associée à une forme quadratique en  $x$  :  $V(x) = x^T P x$  avec  $P$  définie positive ( $P = P^T \succ 0$ ).

Etant données les définitions antérieures, le teste de stabilité globale est facilité s'il existe une fonction  $V(x) \in \mathbb{R}$  (fonction de Lyapunov) ayant les propriétés suivantes :

i)  $V(x)$  est une fonction positif définie : c.à-d.  $V(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ ,  $V(x)$  est une fonction continue ;

ii)  $V(f(x, w)) - V(x) < 0$  pour tout  $V(x) \geq 1$  et  $w \in W$  [37].

## 2.4 Ensembles invariants

Depuis que la théorie de Lyapunov a été introduite dans le cadre des systèmes régis par des équations différentielles ordinaires, la notion d'ensemble invariant a été utilisée dans de nombreux problèmes concernant l'analyse et le contrôle des systèmes dynamiques. Une motivation importante ayant conduit à introduire les ensembles invariants a été le besoin d'analyser l'influence des incertitudes sur le système [9].

Pour commencer nous allons définir la classe des systèmes considérés dans la suite de cette thèse et la notion d'ensemble invariant avec les variantes proposées par [9].

Nous considérons, des systèmes dynamiques à temps discret, invariants, incertains, de la forme :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), w(k)), \\ y(k) &= g(x(k)), \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  est l'état du système,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  est la commande du système,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$ , est la sortie du système,  $w(k) \in W \subset \mathbb{R}^{n_w}$  est une entrée externe et  $W$  est un ensemble compact. On suppose que le système admet une solution  $x(k)$  unique, définie sur  $\mathbb{R}_+$  pour tout  $x(0) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $w$  et  $u$  [9].

**Définition 2.3.** L'ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_x}$  est dit positif invariant pour un système à temps discret :

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad (2.10)$$

si pour tout  $x(0) \in \mathcal{S}$  la solution  $x(k) \in \mathcal{S}$  pour  $k > 0$ . Si  $x(0) \in \mathcal{S}$  implique  $x(k) \in \mathcal{S}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  alors nous disons que  $\mathcal{S}$  est invariant [9].

De façon simple, un *ensemble positif invariant* peut être défini comme un sous-ensemble de l'espace d'état ayant la propriété que, s'il contient l'état du système à un instant donné, alors il le contiendra également à l'avenir. L'état entrant dans cet ensemble n'en sortira donc jamais. Un ensemble est *invariant* si l'inclusion de l'état à un instant donné implique l'inclusion dans le futur et dans le passé.

L'existence d'un ensemble invariant est une étape importante dans la solution de nombreux problèmes de synthèse. Une catégorie de problèmes traités au moyen d'ensembles invariants est celle des systèmes incertains ou perturbés, pour cette classe la notion *d'invariance positive robuste* est utilisée [9]. Dans ce sens, l'objectif est ici de déterminer les ensembles positifs invariants pour des systèmes affectés par de perturbations bornées.

**Définition 2.4.** L'ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_x}$  est dit positif invariant robuste pour un système à temps discret :

$$x(k+1) = f(x(k), w(k)), \quad (2.11)$$

si pour tout  $x(0) \in \mathcal{S}$  et tout  $w(k) \in W$  la solution est telle que  $x(k) \in \mathcal{S}$  pour  $k > 0$  [9].

**Définition 2.5.** L'ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_x}$  est dit invariant (robuste) en boucle fermée pour un système :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)), \\ (x(k+1), u(k)) &= f(x(k), u(k), w(k)), w(k) \in W), \\ y(k) &= g(x(k)), \end{aligned} \quad (2.12)$$

s'il existe une loi de commande  $u(k) = \Theta(y(k))$  qui assure l'existence et l'unicité de la solution dans  $\mathbb{R}_+$  et est telle que  $\mathcal{S}$  est positif invariant (robuste) pour le système en boucle fermée [9].

L'*invariance robuste contrôlée* est l'invariance qui surgit dans un système en boucle fermée affecté par des perturbations et ayant une loi de commande fixe. Une description détaillée et précise sur les principes d'invariance ensembliste est donnée dans [9].

### 2.4.1 Théorème de Nagumo

Avant d'énoncer le théorème de Nagumo, il convient d'introduire la définition de la distance entre un point et un ensemble et la définition du cône tangent à un ensemble, définitions très utiles pour caractériser les ensembles invariants.

**Définition 2.6.** Soit un point  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  et un ensemble  $\mathcal{S}$ , on définit la distance entre  $x$  et  $\mathcal{S}$  par la relation :

$$\text{dist}(x, \mathcal{S}) = \inf_{y \in \mathcal{S}} \|x - y\|. \quad (2.13)$$

**Définition 2.7.** [10] Soit l'ensemble compact  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_x}$  et  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ . Le cône tangent (souvent appelé cône contingent) à  $\mathcal{S}$  en  $x$  est l'ensemble :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{S}}(x) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n_x} : \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{\text{dist}(x + \tau z, \mathcal{S})}{\tau} = 0 \right\}. \quad (2.14)$$

En termes géométriques, le cône tangent est un cône qui contient tous les vecteurs (par exemple le vecteur  $\dot{x}$ ) dont les directions pointent vers l'intérieur ou sont tangentes à l'ensemble  $\mathcal{S}$ .

Le théorème de Nagumo [77] est d'une importance fondamentale dans la caractérisation des ensembles positifs invariants pour des systèmes en temps continu.

**Théorème 2.8.** *Soit le système  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  et supposons que pour chaque condition initiale  $x(0)$  dans un ensemble ouvert  $\mathcal{O}$  il existe une solution (pas nécessairement unique) pour tout  $t \geq 0$ . Soit  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$  un ensemble fermé. Alors,  $\mathcal{S}$  est faiblement positif invariant pour le système si et seulement si le vecteur de vitesse satisfait la condition de Nagumo :*

$$f(x) \in \mathbb{T}_{\mathcal{S}}(x), \text{ pour tout } x \in \mathcal{S}. \quad (2.15)$$

Si la solution est unique l'invariance faible se transforme en invariance positive.

La condition (2.15) est valable seulement pour  $x \in \partial\mathcal{S}$  puisque pour  $x \in \text{int}\{\mathcal{S}\}$ ,  $\mathbb{T}_{\mathcal{S}}(x) = \mathbb{R}^{n_x}$  (pour un  $h \rightarrow 0$  la distance est strictement positive pour tout  $z \in \mathbb{R}^{n_x}$ ) et pour  $x \notin \mathcal{S}$ ,  $\mathbb{T}_{\mathcal{S}}(x) = \emptyset$  (il n'existe pas  $z$  tel que la limite soit nulle). Alors (2.15) peut être remplacée par :

$$f(x) \in \mathbb{T}_{\mathcal{S}}(x), \text{ pour tout } x \in \partial\mathcal{S}. \quad (2.16)$$

Le théorème 2.8 affirme que si le vecteur de vitesse  $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in \partial\mathcal{S}$  pointe à l'intérieur ou est tangent à  $\mathcal{S}$  (voir Figure 2.1), alors la trajectoire reste dans  $\mathcal{S}$  [9]. Le théorème s'applique aussi pour des ensembles qui ne sont pas nécessairement convexes. Pour plus de détails, voir [9].

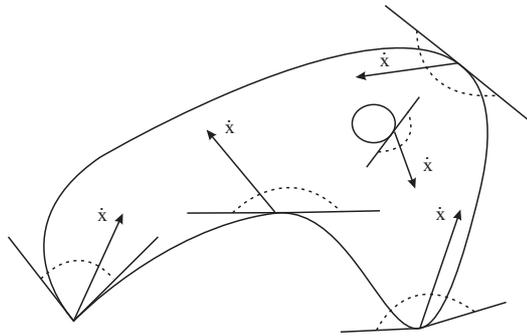


FIGURE 2.1: Interprétation géométrique du théorème de Nagumo

**Définition 2.9.** Un ensemble de type  $\mathcal{C}$  est un ensemble convexe et compact  $\mathbb{R}^{n_x}$  qui inclut l'origine comme point intérieur.

Pour les systèmes en temps discret, on ne peut pas affirmer qu'un ensemble (peu importe sa forme) est invariant si pour tout point sur la frontière sa dérivée pointe vers l'intérieur (ou est tangent). [9] a adapté le théorème de Nagumo pour les systèmes linéaires invariants en temps discret :

**Théorème 2.10.** *Soit le système discret linéaire, invariant dans le temps :*

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (2.17)$$

*et supposons que  $\mathcal{S}$  est un ensemble de type  $\mathcal{C}$ . Alors  $\mathcal{S}$  est invariant en boucle fermée si et seulement si pour tout  $x \in \partial\mathcal{S}$  il existe une commande  $u$  (qui dépend de  $x$ ) telle que :*

$$Ax(k) + Bu(k) \in \mathcal{S}. \quad (2.18)$$

Le théorème 2.10 peut être étendu pour les systèmes discrets avec contraintes sur la commande  $u \in \mathbb{U}$  ( $\mathbb{U}$  est un ensemble de type  $\mathcal{C}$ ), ou pour les systèmes incertains :

$$x(k+1) = A(\theta(k))x(k) + B(\theta(k))u(k) + Ew(k), \quad (2.19)$$

avec  $w \in \mathbb{W}$  et  $\theta \in \Theta$ . La condition devient maintenant : pour tout  $x \in \partial\mathcal{S}$  il existe  $u \in \mathbb{U}$  tel que  $A(\theta(k))x(k) + B(\theta(k))u(k) + Ew(k) \in \mathcal{S}$  pour tout  $w \in \mathbb{W}$  et  $\theta \in \Theta$ .

**Nota bene :** Un ensemble ellipsoïdal est un ensemble de type  $\mathcal{C}$ .

## 2.4.2 Ensemble invariant minimal et maximal

Les systèmes considérés tout au long de ce mémoire sont des systèmes linéaires LTI, LPV ou en commutation avec l'origine comme seul point d'équilibre. Pour ce type de systèmes (et non seulement) les ensembles invariants présentant le plus d'intérêt sont l'ensemble invariant maximal et l'ensemble invariant minimal.

- En l'absence de perturbations l'**ensemble invariant minimal** (s'il existe) est l'origine. Quand le système est affecté par des perturbations (et éventuellement aussi par des incertitudes paramétriques) l'ensemble invariant minimal représente la plus petite région de l'espace d'état assurant l'invariance, la stabilité<sup>1</sup> et la satisfaction des contraintes (si définies) malgré la présence des perturbations (et des incertitudes paramétriques). La dimension de l'ensemble invariant minimal nous donne en effet une mesure de l'influence de la perturbation. Ainsi plus l'ensemble minimal est petit, plus l'effet de la perturbation est faible. Dans la Figure 2.2 l'ensemble ellipsoïdal bleu représente la plus petite région ellipsoïdale où l'invariance est assurée malgré les perturbations. Cet ensemble invariant est appelé **0-reachable set** [9] comme défini ultérieurement.
- Dans le cas des systèmes linéaires sans contraintes, l'**ensemble invariant maximal** (s'il existe) est représenté par l'espace d'état entier. Quand le système linéaire est soumis à des contraintes l'ensemble invariant maximal est donné par la plus grande

1. En présence de perturbations, la notion de stabilité entrée-état (input to state stability-ISS) est utilisée (voir Section 2.5).

région de l'espace d'état où on peut garantir l'invariance (et donc la stabilité) et la satisfaction des contraintes (malgré la présence des perturbations ou des incertitudes paramétriques s'elles existent).

Le volume de l'ensemble invariant maximal dépend des contraintes imposées (plus les contraintes sont dures, plus l'ensemble invariant maximal est petit). Quand, de plus, le système est affecté par des perturbations, le volume de l'ensemble invariant maximal peut devenir encore plus petit. On peut affirmer que plus la perturbation est importante, plus l'ensemble invariant maximal est petit. Dans la Figure 2.2 l'ensemble ellipsoïdal rouge représente la plus grande région ellipsoïdale de l'espace d'état où l'invariance et la satisfaction des contraintes sont assurées malgré la présence de perturbations bornées.

Si les contraintes sont trop rigides par rapport aux perturbations considérées alors l'ensemble invariant minimal (ainsi que l'ensemble invariant maximal) ne peut plus être défini. Dans ce cas il n'existe pas de région dans l'espace d'état satisfaisant l'invariance et les contraintes. Donc, face à des perturbations et des contraintes, les ensembles invariants n'existent que si les contraintes ne sont pas trop fortes par rapport aux perturbations considérées.

**Exemple.** Considérons le système LTI affecté par de perturbations bornées :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_w w(k), \\ u(k) &= -Fx(k) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\text{avec : } A = \begin{bmatrix} 1,1 & 0,1 & 0,5 \\ 0,7 & 0,8 & 0,12 \\ 0,32 & 0,51 & 0,62 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,0787 \\ 0,63 \end{bmatrix}, B_w = 0,1B, F = [0,5736 \ 0,8033 \ - \\ 0,0702] \text{ et } w^T w \leq 1.$$

Le système est soumis à des contraintes sur la commande :

$$\|u\| \leq u_m, \quad u_m = 8, \quad (2.21)$$

et à des contraintes sur chaque élément du vecteur d'état :

$$|x_i| \leq x_{im}, \quad x_{im} = 10, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.22)$$

Pour le système perturbé, sous contraintes (2.21) et (2.22), dans la Figure 2.2 on a représenté l'ensemble défini par les contraintes (l'ensemble jaune), l'ensemble invariant (ellipsoïdal) maximal pour le système sans perturbation (l'ensemble vert), l'ensemble invariant (ellipsoïdal) maximal pour le système affecté par une perturbation bornée (l'ensemble rouge), l'ensemble invariant (ellipsoïdal) minimal pour le système affecté par une perturbation bornée (l'ensemble bleu) et la trajectoire d'état.

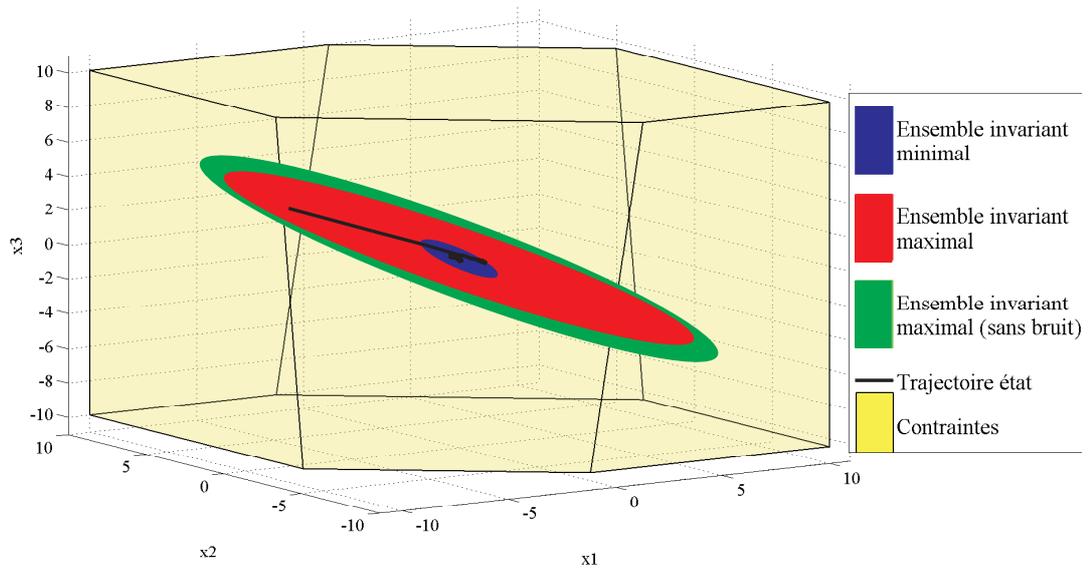


FIGURE 2.2: Ensembles invariants.

La différence de volume entre l'ensemble invariant maximal pour le système perturbé et l'ensemble invariant maximal pour le système sans perturbation ou le volume de l'ensemble invariant minimal nous donne une mesure de l'effet de la perturbation sur le système. On peut aussi voir que pour un état initial ( $x(0)$ ) à l'intérieur de l'ensemble invariant maximal (l'ensemble rouge) la trajectoire converge vers l'ensemble invariant minimal (l'ensemble bleu).

### 2.4.3 Approximation des ensembles invariants. Ellipsoïdes

Les ensembles invariants les plus utilisés pour approcher les ensembles invariants sont de type ellipsoïdal ou polytopique. Dans ce mémoire, on s'est focalisé sur les ensembles ellipsoïdaux car ils peuvent être aisément associés à des outils puissants tels que l'équation de Lyapunov ou les inégalités linéaires matricielles (Linear Matrix Inequalities - LMI - [96], [13]). Les ensembles invariants ellipsoïdaux ont l'avantage d'avoir une définition simple qui permet de réduire la complexité, mais ils ont l'inconvénient d'introduire plus de conservatisme (comparativement aux ensembles invariants polytopiques). D'autre part, les ensembles polytopiques sont souvent des expressions naturelles des contraintes physiques sur les variables d'état et de contrôle. En outre, leur forme est dans un certain sens plus flexible que celle des ellipsoïdes, permettant une plus fidèle approximation des ensembles invariants pour les systèmes dynamiques. Le prix à payer pour cette flexibilité est en général une représentation plus complexe.

La théorie des ensembles invariants ellipsoïdaux a été étudiée dans de nombreux ouvrages. Dans [45], les ensembles ellipsoïdaux (parmi d'autres) sont considérés dans le cadre de la commande sous contraintes. Dans [97], les ellipsoïdes sont utilisés comme zone de confinement pour les systèmes incertains. Des travaux pionniers sur la stabilité quadratique dans le contexte de la stabilisation des systèmes incertains peuvent être trouvés dans [43], [39] ou [4]. Des propriétés concernant les ensembles positifs invariants ellipsoïdaux, en particulier leurs liens avec l'équation de Riccati, peuvent être trouvées dans les ouvrages sur les systèmes linéaires, comme par exemple [13, 84, 97, 113].

Un ensemble ellipsoïdal est défini par la relation :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : (x - x_c)^T P (x - x_c) = (x - x_c)^T G^{-1} (x - x_c) \leq 1, P = P^T = G^{-1} \succ 0\} \quad (2.23)$$

où  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  est une matrice définie positive et  $x_c \in \mathbb{R}^{n_x}$  est le centre de l'ellipsoïde  $E$ .

Dans ce mémoire, on considérera souvent  $x_c = 0$  et donc l'expression (2.23) devient :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T P x = x^T G^{-1} x \leq 1, P = P^T = G^{-1} \succ 0\}. \quad (2.24)$$

Les propriétés suivantes seront utiles pour la suite de l'étude.

**Proposition 2.11.** *La longueur des demi-axes d'un ellipsoïde est  $\sqrt{\lambda_i}$ , où  $\lambda_i$ , ( $i = \overline{1, n_x}$ ) sont les valeurs propres de  $P^{-1}$ . Les directions des demi-axes sont les vecteurs propres de  $P^{-1}$ .*

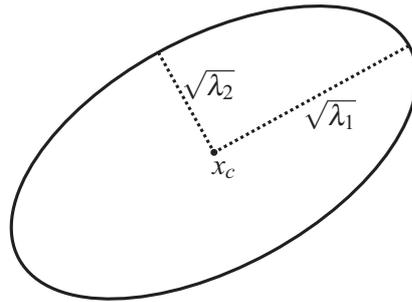


FIGURE 2.3: Ellipsoïde ( $n_x = 2$ ).

**Proposition 2.12.** *Le volume d'un ellipsoïde est inversement proportionnel au produit des valeurs propres de la matrice  $P$  (c'est-à-dire au déterminant).*

Le lecteur est invité à consulter [9] ou [13] pour plus de détails sur les ensembles ellipsoïdaux.

### 2.4.3.1 Ellipsoïde invariant maximal et minimal

Le volume des ellipsoïdes invariants minimal et maximal est corrélé à l'influence des perturbations sur l'évolution d'un système asservi sous contraintes. Ainsi un ellipsoïde minimal de faible volume ou un ellipsoïde maximal de volume important (par rapport à l'ellipsoïde sans perturbations) correspond à un système commandé peu sensible aux perturbations considérées. L'ellipsoïde positif invariant maximal correspond à la plus grande région ellipsoïdale de l'espace pour laquelle les contraintes sont satisfaites malgré l'influence des incertitudes et perturbations considérées. L'ellipsoïde positif invariant minimal est la plus petite région ellipsoïdale autour de l'origine dans laquelle le système initialement à l'équilibre est susceptible d'évoluer à cause des perturbations, en satisfaisant les contraintes.

Dans la Figure 2.4 sont représentés les ensembles invariants réels maximal et minimal et leurs approximations ellipsoïdales. Comme on peut le voir, l'ellipsoïde invariant minimal est le plus petit ellipsoïde contenant l'ensemble invariant minimal et l'ellipsoïde invariant maximal est le plus grand ellipsoïde à l'intérieur de l'ensemble invariant maximal.

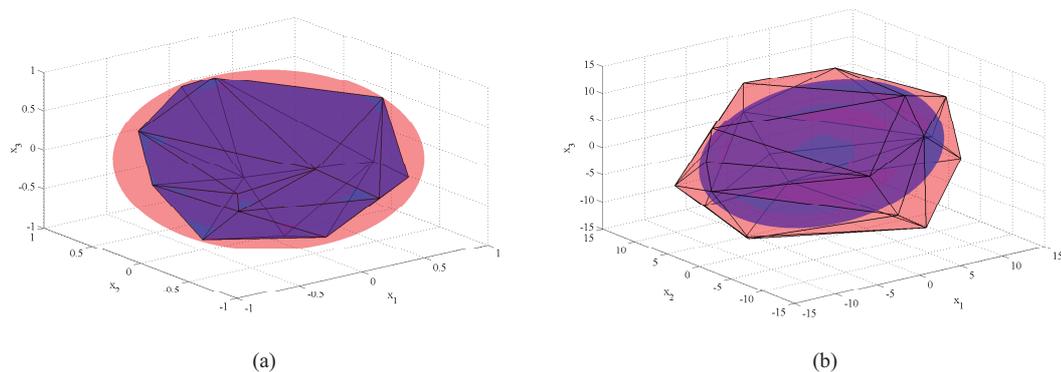


FIGURE 2.4: Approximation des ensembles invariants par des ellipsoïdes : (a) Ellipsoïde minimal ; (b) Ellipsoïde maximal

### 2.4.3.2 Intersection ellipsoïdale. Projection ellipsoïdale

Dans la suite de ce document, on rencontrera souvent des problèmes ayant comme objectif de trouver l'ensemble invariant ellipsoïdal minimal ou maximal qui assure l'invariance robuste. Pour un système structuré de sorte à faire intervenir une représentation d'état augmentée ( $x_a(t)$  représente l'état augmenté), typiquement ce que l'on aura avec un système incluant un observateur, seule une partie de l'état augmenté, correspondant à l'état du système initial, présente de l'intérêt et donc on se pose le problème de la

recherche de l'ellipsoïde invariant ayant la projection maximale ou l'intersection minimale sur/avec l'espace d'état du système initial.

L'intersection de l'ellipsoïde  $E$  avec le sous-espace d'état du système initial,  $x$ , est donnée par :

$$E_i = \{x \mid x^T T P T^T x \leq 1, P = P^T \succ 0, T = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}\} \quad (2.25)$$

où  $x = T x_a$  (si  $x_c = 0$ ).

La projection de l'ellipsoïde  $E$  sur le sous-espace d'état du système initial,  $x$ , est donnée par :

$$E_p = \{x \mid x^T (T G T^T)^{-1} x \leq 1, G = G^T \succ 0, T = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}\} \quad (2.26)$$

où  $x = T x_a$  (si  $x_c = 0$ ).

**Proposition 2.13.** *La projection et l'intersection d'un ellipsoïde sur/avec un sous-espace est un ellipsoïde [9].*

A titre d'exemple, dans la Figure 2.5(a) sont représentés l'ensemble invariant maximal réel satisfaisant les contraintes (malgré les perturbations) et l'ellipsoïde invariant situé à l'intérieur de cet ensemble et ayant la projection maximale sur l'espace de l'état non augmenté (sur les axes  $x_1$  et  $x_2$ ). La Figure 2.5(b) représente les projections sur le plan  $(x_1, x_2)$  de ces deux ensembles. Cette figure montre qu'en effet la projection obtenue est maximale.

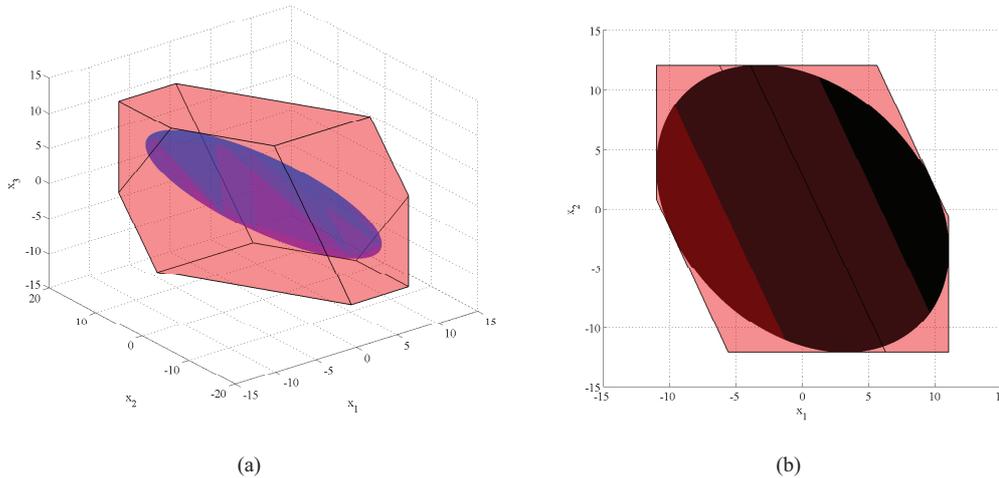


FIGURE 2.5: Projection maximale. (a) Ensemble invariant réel (en rose) et ellipsoïde invariant ayant la projection maximale (en bleu); (b) Les projections de l'ensemble invariant réel (en rose) et de l'ellipsoïde invariant ayant la projection maximale (en noir)

Dans la Figure 2.6(a) sont illustrés l'ensemble minimal réel, l'ellipsoïde invariant minimal situé à l'extérieur de cet ensemble et l'ellipsoïde invariant situé à l'extérieur de cet

ensemble et ayant l'intersection minimale. Dans la Figure 2.6(b) sont représentées les intersections de ces ensembles avec le plan  $(x_1, x_2)$ .

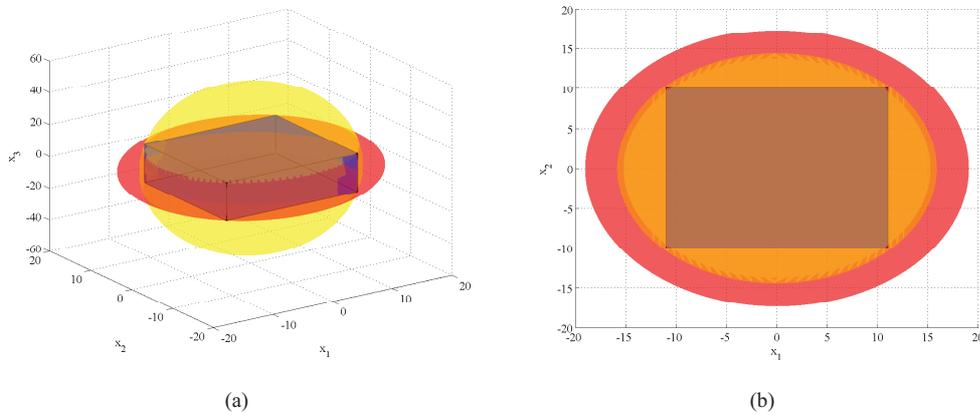


FIGURE 2.6: Intersection minimale. (a) Ensemble invariant réel (en bleu), ellipsoïde invariant minimal (en rose) et ellipsoïde invariant ayant l'intersection minimale (en jaune); (b) Intersection avec le plan  $(x_1, x_2)$  de l'ensemble invariant réel (en bleu), de l'ellipsoïde invariant minimal (en rose) et de l'ellipsoïde invariant ayant l'intersection minimale (en jaune)

Le but de cette dernière figure est de montrer que l'ellipsoïde invariant minimal n'a pas forcément l'intersection minimale avec l'espace d'état initial.

## 2.5 Input to state stability (ISS-stabilité entrée-état) vis-à-vis d'une perturbation bornée

La théorie des ensembles invariants fournit un cadre approprié pour traiter le problème de stabilité. L'existence d'un ensemble invariant (ellipsoïdal ou polytopique) est équivalente à l'existence d'une fonction de Lyapunov et par conséquent est équivalente à une condition suffisante de stabilité [89]. Par exemple, pour les systèmes linéaires, l'ensemble invariant ellipsoïdal (2.24) peut être considéré comme une fonction de Lyapunov  $V = x^T P x$ . Si la condition d'invariance est remplie, alors  $V$  est monotone décroissante. Comme  $P$  est définie positive, cela implique que  $x$  est convergent vers le point d'équilibre.

Puisque le système que nous considérons est affecté par des perturbations, la notion de *input to state stability* (ISS ou stabilité entrée-état) doit être considérée. En présence d'une perturbation, il n'est pas possible de garantir que l'origine est asymptotiquement stable. L'ISS implique que l'origine est un point asymptotiquement stable pour le système non perturbé et que, en présence d'une perturbation, l'état convergera vers une région appelée *0-reachable set* par [9]. Cet ensemble représente en effet, l'ensemble invariant minimal (Figure 2.7).

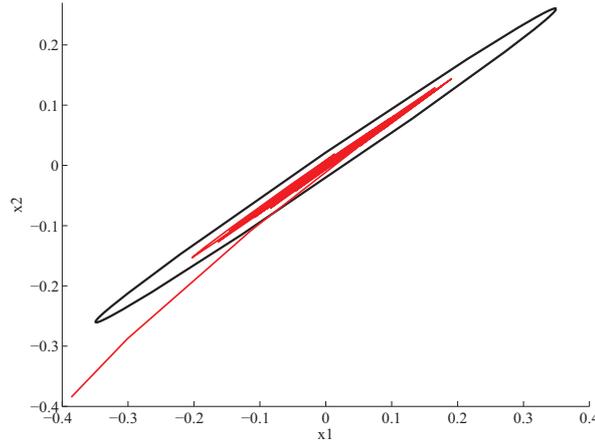


FIGURE 2.7: Ensemble ellipsoïdal minimal pour un système affecté par des perturbations (0 *reachable set*) et la trajectoire de l'état

La notion d'ISS a été initialement proposée par [101, 102] pour les systèmes non-linéaires à temps continu.

Comme les systèmes considérés dans cette thèse sont affectés par de perturbations bornées, dans la suite de ce mémoire la notion de stabilité sera remplacée par la notion de "input-to-state stability" globale vis-à-vis d'une perturbation bornée<sup>2</sup>. Si l'état appartient à un ensemble invariant  $\mathcal{X}$  ( $x \in \mathcal{X}$ ), la notion de "input-to-state stability" locale sera considérée. Pour les systèmes linéaires la notion de stabilité ISS est en quelque sorte similaire avec la notion de stabilité BIBO à la différence que pour cette dernière on regarde la sortie et non l'état.

Soit un système non-linéaire à temps discret :

$$x(k+1) = f(x(k), w(k)) \quad (2.27)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  l'état du système et  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  une perturbation prenant ses valeurs dans l'ensemble compact  $W \subset \mathbb{R}^{n_w}$  qui contient l'origine. On suppose que l'état est mesurable à chaque instant, que  $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  est continue à l'origine et que  $f(0, 0) = 0$ . Compte tenu de l'état  $x$  à l'instant 0 et une perturbation  $w(\cdot)$ , où  $w(k) \in W$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}_{[0, \infty]}$ , la solution de (2.27) à l'instant  $k$  sera notée avec  $\Phi(k, x, w(\cdot))$  [38, 49, 51].

**Définition 2.14.** (Fonctions  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}_\infty$ ) Une fonction continue  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est appelée fonction  $\mathcal{K}$  si elle est strictement croissante et  $\gamma(0) = 0$ . La fonction est appelée fonction  $\mathcal{K}_\infty$  si de plus  $\gamma(s) \rightarrow \infty$  quand  $s \rightarrow \infty$ .

2. Dans la suite de ce mémoire la dénomination ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée sera adoptée pour dénommer l'"input-to-state stability" globale vis-à-vis d'une perturbation bornée.

**Définition 2.15.** (Fonction  $\mathcal{KL}$ ) Une fonction continue  $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est appelée fonction  $\mathcal{KL}$  si, pour tout  $k \geq 0$ , la fonction  $\beta(\cdot, k)$  est une fonction  $\mathcal{K}$  et pour chaque  $s \geq 0$ ,  $\beta(s, \cdot)$  est décroissante avec  $\beta(s, k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

**Définition 2.16.** [38, 66] Le système (2.27) est globalement stable au sens entrée-état (input-to-state stable-ISS) par rapport à une perturbation bornée  $w(k) \in W$  s'il existe une fonction  $\beta(\cdot)$  de type  $\mathcal{KL}$  et une fonction  $\gamma(\cdot)$  de type  $\mathcal{K}$  telle que pour toute perturbation  $w(k) \in W$ ,  $k \geq 0$ , la solution du système satisfait  $\Phi(k, x, w(\cdot)) \in \mathcal{X}$  et

$$\|\Phi(k, x, w(\cdot))\| \leq \beta(\|x\|, k) + \gamma(\sup\{\|w(\tau)\| \mid \tau \in \mathbb{Z}_{[0, k-1]}\}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.28)$$

La stabilité ISS par rapport à une perturbation  $w(k) \in W$  implique que l'origine est un point asymptotiquement stable pour le système nominal  $x(k+1) = f(x(k), w=0)$  avec une région d'attraction  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ , et que toutes les trajectoires de l'état sont bornées pour toutes les séquences de perturbations bornées. De plus, chaque trajectoire  $\Phi(x, k, w(\cdot)) \rightarrow 0$  si  $w(k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ , où  $w(\cdot) \in W$  représente la perturbation affectant le système.

**Lemme 2.17.** (ISS au sens de Lyapunov vis-à-vis d'une perturbation bornée) [38, 49]

Le système (2.27) est ISS par rapport à une perturbation bornée si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) il existe  $\mathcal{X}$  contenant l'origine et positif invariant robuste pour (2.27) (c.-à-d.  $f(x, w) \in \mathcal{X}$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et tout  $w \in W$ );

ii) il existe  $\alpha_1(\cdot)$ ,  $\alpha_2(\cdot)$  et  $\alpha_3(\cdot)$  de type  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $\delta(\cdot)$  de type  $\mathcal{K}$  et une fonction continue  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que pour tout  $x \in \mathcal{X}$  on a :

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (2.29)$$

$$V(f(x, w)) - V(x) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \delta(\|w\|). \quad (2.30)$$

La fonction  $V(\cdot)$  est appelée fonction ISS-Lyapunov.

Donc, la fonction de Lyapunov  $V$  est définie positive, toutes les trajectoires de l'état sont bornées pour toutes les séquences de perturbations bornées et si les perturbations tendent vers zéro, alors le système perturbé converge asymptotiquement vers l'origine. Des relations peuvent être établies entre  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  [49, 51, 58].

L'existence d'un ensemble invariant ellipsoïdal est équivalent à une condition suffisante de stabilité au sens entrée-état. Dans la Figure 2.7 est représentée la trajectoire de l'état d'un système affecté par de perturbations bornées (la ligne rouge) et l'ellipsoïde invariant minimal (le 0-reachable set) vers lequel toutes les trajectoires ISS convergent.

## 2.6 Le paramètre de Youla-Kučera

La paramétrisation de Youla (connue aussi comme le paramètre  $Q$ ) a été utilisée pour la première fois dans les années 1950, mais ce n'est que dans les années 1970 que ces travaux ont été repris par [56] dans le cas discret et par [112] pour le filtrage de Wiener-Hopf. La forme générale de la paramétrisation de Youla a été finalement énoncée par [25] (et les références dedans), en utilisant les représentations fractionnaires co-premières. Le rôle du paramètre de Youla inséré dans la boucle fermée est d'assurer la paramétrisation de tous les correcteurs stabilisants d'un système donné, en garantissant une relation bijective entre l'ensemble des correcteurs stabilisants et l'ensemble de tous les transferts stables. Incorporé d'une manière particulière (ce qui est le cas de la suite de ce document), le paramètre de Youla peut améliorer la robustesse de la boucle fermée vis-à-vis d'incertitudes ou de perturbations grâce à l'utilisation d'un régulateur à deux degrés de liberté (le suivi de trajectoire et le contrôle en boucle fermée sont ajustés séparément) [17, 53, 88, 89, 103]. Cette dernière approche sera adoptée dans la suite de ce document. Le paramètre de Youla sera formulé par sa représentation d'état comme dans [12].

Dans la Figure 2.8 est représenté le schéma bloc du correcteur stabilisant pour un système linéaire en temps discret avec l'état estimé à travers un observateur et un paramètre de Youla assurant un certain degré de robustesse. Le système considéré est affecté par une perturbation d'état  $w$  et une perturbation de mesure  $v$ .

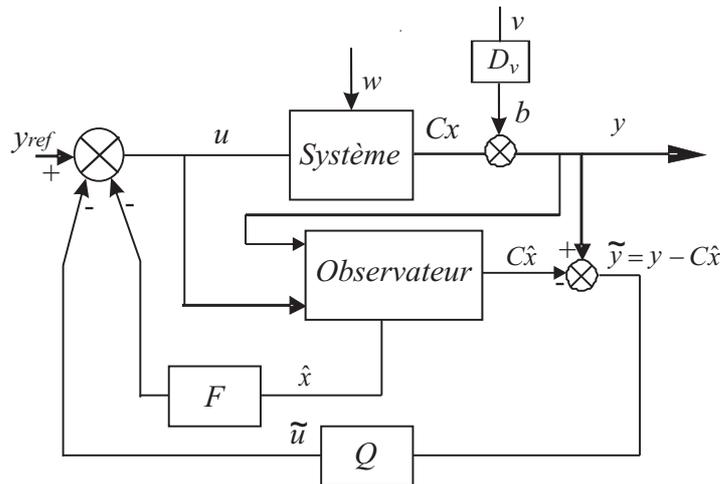


FIGURE 2.8: Correcteur dans l'espace d'état avec le paramètre de Youla.

Les équations de l'état et le reste du mécanisme seront expliqués plus en détail lors des chapitres suivants. Dans une première étape d'analyse nous montrerons que en introduisant la paramétrisation de Youla on augmente le volume de la projection de l'ellipsoïde invariant satisfaisant des contraintes sur la commande (et sur l'état ou sur la sortie) par

rapport au volume de la projection obtenue pour le cas avec observateur seul. Dans une deuxième étape de synthèse nous rechercherons le paramètre de Youla qui maximise la projection de l'ellipsoïde invariant. La différence de volume entre la projection obtenue pour le système avec Youla et la projection obtenue pour le système avec observateur seul va nous donner une mesure du gain en robustesse acquis.

## 2.7 Inégalité matricielle linéaire (LMI)

La plupart des résultats présentés dans cette thèse sont obtenus grâce à la résolution de LMIs (linear matrix inequalities). Dans cette section, nous faisons une brève incursion dans le domaine des inégalités matricielles linéaires. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter [13].

La terminologie des LMIs a été introduite en 1971 par [108]. Les inégalités matricielles linéaires permettent de formuler des problèmes d'optimisation convexes de sorte que, ayant trouvé un optimum local, celui-ci correspond à l'optimum global recherché.

**Définition 2.18.** Une inégalité matricielle linéaire, ou LMI, est une expression de la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i \succeq 0, \quad (2.31)$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  sont les variables de décision,  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  sont données, et  $F(x) \succeq 0$  signifie que le terme  $F(x)$  est défini positif [13]. Cette inégalité matricielle linéaire caractérise un ensemble convexe selon  $x$ .

Plusieurs LMIs  $F_1(x) \succeq 0, \dots, F_k(x) \succeq 0$  peuvent être exprimées sous la forme d'une expression LMI diagonale par bloc :

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(x) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Les inégalités quadratiques convexes sont converties sous forme LMI en utilisant le théorème de Schur :

**Théorème 2.19.** Soit  $Q(x) = Q(x)^T, R(x) = R(x)^T$ , et  $S(x)$  ayant une dépendance affine en  $x$ , alors la LMI :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (2.33)$$

est équivalente aux inégalités matricielles :

$$R(x) \succeq 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \succeq 0 \quad (2.34)$$

ou de façon équivalente :

$$Q(x) \succeq 0, R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1}S(x) \succeq 0. \quad (2.35)$$

Le problème LMI omniprésent dans le cadre de ce mémoire concerne la minimisation d'un critère d'optimisation convexe soumis à des contraintes LMI :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{soumis à} \quad & F(x) \succeq 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

où  $x$  est la variable de décision et  $c$  est un vecteur de dimension appropriée. Les problèmes de type LMI peuvent être résolus en temps polynomial, ce qui signifie qu'ils ont une faible complexité de calcul. D'un point de vue pratique, des algorithmes efficaces et puissants existent pour résoudre ces problèmes (algorithmes qui calculent rapidement l'optimum global, avec des critères d'arrêt non-heuristiques). Pour les simulations effectuées dans ce mémoire, le logiciel Yalmip (dans l'environnement MatLab) a été utilisé avec les solveurs SEDUMI [104] et LMILAB. Les essais numériques montrent que ces algorithmes permettent de résoudre des problèmes LMI avec une bonne efficacité.

### 2.7.1 Inégalité matricielle bilinéaire (BMI)

La plupart des problèmes de contrôle qui ne peuvent pas être écrits en termes de LMIs peuvent être structurés selon une forme plus générale connue sous le nom d'inégalité matricielle bilinéaire (BMI). Ce type d'inégalités est fondamentalement plus difficile que les LMIs car l'ensemble des solutions des BMIs est non-convexe. Les inégalités matricielles bilinéaires ont été introduites par [36, 90] au milieu des années 90.

**Définition 2.20.** Une inégalité matricielle bilinéaire, ou BMI, est une expression de la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j F_{ij} \succeq 0, \quad (2.37)$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  sont les variables de décision,  $F_i = F_i^T$ ,  $F_{ij} = F_{ij}^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  sont données, et  $F(x) \succeq 0$  signifie que le terme  $F(x)$  est défini positif.

Il y a des techniques dans la littérature qui permettent la transformation des BMI en contraintes LMI [13, 93] mais la relaxation en LMI n'est pas toujours possible.

Tout au long de ce mémoire on rencontrera des problèmes BMI avec la particularité qu'une seule des variables de décision ( $\alpha$ ) est multipliée par une autre variable de décision ( $P = P^T = G^{-1} \succ 0$ ). Cela correspond à un produit de type  $\alpha G$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ . Comme  $\alpha$  est un scalaire, alors un  $\alpha_{optim}$  peut être trouvé en exécutant une simple boucle récursive. Pour éviter cette boucle, le problème BMI peut être résolu en utilisant le logiciel Yalmip (dans l'environnement MatLab) avec le solveur PENBMI [52].

### 2.7.2 Inégalité matricielle polynomiale (PMI)

Une classe plus générale d'inégalités matricielles dont le degré peut être supérieur à deux sont les PMIs (inégalités matricielles polynomiales) :

**Définition 2.21.** Une inégalité matricielle polynomiale, ou PMI, est une expression de la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{\rho \leq n_x} x^\rho F_\rho \succeq 0, \quad (2.38)$$

où  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \in \mathbb{R}^{n_x}$  est le vecteur des variables de décision,  $\rho \in \mathbb{N}$  représente la puissance de  $x$ ,  $F_0 = F_0^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  et  $F_\rho = F_\rho^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  sont données et  $F(x) \succeq 0$  signifie que le terme  $F(x)$  est défini positif.

En utilisant des changements de variables appropriés, les problèmes PMI peuvent être réécrits sous la forme d'un problème BMI [42].

## 2.8 La S-procédure

La notion de S-procédure a été employée par les chercheurs de l'ancienne Union soviétique dans l'analyse de la stabilité des systèmes non-linéaires et incertains [70]. L'idée a été depuis développée par de nombreux chercheurs. Plusieurs résultats importants dans l'analyse des systèmes, tels que le critère du cercle, le critère de Popov et le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov, sont étroitement liés à la S-procédure. La S-procédure est en fait une technique de relaxation de Lagrange, utilisée surtout dans des problèmes avec contraintes quadratiques [50]. La S-procédure est devenue populaire dans la communauté de la commande robuste pendant les années 1990, quand [72] a apporté de nouveaux développements dans cette direction.

**Définition 2.22.** Soit  $F_0 = F_0^T, \dots, F_k = F_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . S'ils existent  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}_+$  tel que  $F_0 - \sum_{i=1}^k \alpha_i F_i \succ 0$  alors  $\{\forall z, z^T F_1 z \geq 0, \dots, z^T F_k z \geq 0\}$  il en résulte  $\{\forall z, z^T F_0 z \geq 0\}$  [11].



## Chapitre 3

# Outils ensemblistes pour l'analyse de la stabilité et de la robustesse

Le calcul des ensembles invariants ellipsoïdaux pour des systèmes linéaires sans perturbation est proposé par plusieurs auteurs : [9, 13, 89]. [1] présente une technique pour le calcul des ensembles invariants ellipsoïdaux pour des systèmes linéaires à temps continu contrôlés par une loi de commande linéaire saturante. Dans [57] est décrit le calcul des ensembles atteignables pour des systèmes linéaires à temps discret à coefficients variables dans le temps et des limites ellipsoïdales sur la commande et les conditions initiales. Les algorithmes offrent les approximations ellipsoïdales externes et internes qui touchent la frontière de l'ensemble atteignable de l'extérieur et l'intérieur. [78] propose une approche LMI pour le rejet d'une perturbation exogène bornée en utilisant des méthodes ellipsoïdales. L'ellipsoïde invariant est calculé pour le cas continu et pour le cas discret en utilisant comme critère d'optimisation la trace d'une expression dépendante de la matrice générant l'ellipsoïde. Contrairement à [78] nous proposons ici une technique basée sur des inégalités matricielles linéaires pour calculer les ensembles invariants (voir section 2.4.3) tout en garantissant la stabilité d'un système à temps discret, affecté par des perturbations bornées et considérant comme critère d'optimisation le logarithme du déterminant de la matrice générant l'ellipsoïde. Nous réalisons également la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur et la synthèse d'un paramètre de Youla robustifiant.

Ce chapitre propose la mise en oeuvre des techniques efficaces garantissant les conditions assurant l'ISS par rapport à une perturbation bornée (voir section 2.5) et permettant de déterminer l'ensemble ellipsoïdal positif invariant maximal (ou l'ensemble invariant ayant la projection maximale ou l'ellipsoïde tronqué invariant maximal-défini par la suite) et l'ensemble ellipsoïdal positif invariant minimal (ou l'ensemble invariant ayant l'intersection minimale) pour des systèmes linéaires, LPV ou en commutation à temps discret soumis à des perturbations et contraintes physiques.

Le chapitre est composé de quatre sections : une première section est consacrée aux systèmes linéaires, une deuxième section étudie les systèmes linéaires à paramètres variants (LPV), une section est ensuite destinée aux systèmes en commutation. Les outils présentés lors de ces trois sections font appel à des ensembles ellipsoïdaux et ont donc un certain degré de conservatisme. Afin d'évaluer ce conservatisme, la dernière section propose une technique basée sur des ellipsoïdes tronqués. Cette méthode permet d'obtenir un ensemble invariant comme l'intersection d'un polyèdre (donné par les contraintes) et un ellipsoïde. L'espace obtenu est plus proche de l'espace invariant réel où l'on peut garantir l'invariance malgré la présence d'une perturbation bornée.

Les trois premières sections sont divisées en trois parties : une partie dédiée aux systèmes affectés par des perturbations bornées et soumis à des contraintes, une deuxième partie consacrée aux systèmes pour lesquels l'état est estimé à l'aide d'un observateur et une troisième partie dédiée aux systèmes pour lesquels l'état est estimé à l'aide d'un observateur et la robustesse est garantie grâce à un paramètre de Youla. Chaque partie est elle-même divisée en trois sous-parties : une sous-partie donnant les conditions assurant l'ISS par rapport à une perturbation bornée, une deuxième sous-partie donnant l'ellipsoïde invariant minimal (ou ayant l'intersection minimale, selon le cas) et une dernière partie dédiée au calcul de l'ensemble invariant maximal (ou ayant la projection maximale). L'analyse proposée montre que l'impact positif du paramètre de Youla sur la fonction de sensibilité peut être transposé en termes de diminution du volume de l'ensemble ellipsoïdal minimal ou de l'augmentation du volume de l'ensemble maximal. L'ensemble minimal permet de mesurer l'influence des perturbations et incertitudes sur l'évolution du système et l'ensemble maximal permet de mesurer la région de l'espace dans laquelle les contraintes sont satisfaites.

A la fin de chaque section les résultats présentés sont validés en simulation et des conclusions sont formulées.

### **3.1 Systèmes LTI discrets sous contraintes et affectés par des perturbations bornées**

L'objectif principal de cette section est de calculer les ensembles ellipsoïdaux invariants maximal et minimal pour un système LTI à temps discret sous contraintes et affectés par des perturbations bornées et d'analyser l'influence du paramètre de Youla sur le volume de ces ellipsoïdes. Ces résultats se trouvent dans une forme plus condensée dans [69]. Dans la première partie de cette section, nous donnons le théorème qui caractérise l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée en termes d'inégalités matricielles. Le choix a été fait de se donner les outils d'analyse à partir de la configuration la plus simple (système

seul), puis d'étendre ensuite la démarche à un système avec observateur puis observateur et paramètre de Youla.

### 3.1.1 Système linéaire à temps invariant

Soit le système LTI à temps discret :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_w w(k), \\ y(k) &= Cx(k) + D_v v(k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  est l'état du système,  $u \in \mathbb{R}^m$  la commande,  $y \in \mathbb{R}^p$  la sortie,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  la perturbation d'état et  $v \in \mathbb{R}^{n_v}$  la perturbation de mesure.

La loi de commande supposée connue est donnée par :

$$u(k) = -Fx(k), \quad (3.2)$$

où  $F \in \mathbb{R}^{m \times n_x}$  est un retour d'état donné tel que  $A - BF$  est strictement stable et la performance nominale est adaptée au contexte donné.

On considère également des bornes sur la norme Euclidienne de la commande  $u$  :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}. \quad (3.3)$$

Le vecteur de bruit regroupant les perturbations d'état et de mesure  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est supposé borné :

$$n^T(k)n(k) \leq 1 \quad (\text{d'où } w^T(k)w(k) \leq 1, v^T(k)v(k) \leq 1). \quad (3.4)$$

Le système en boucle fermée peut être décrit par la relation :

$$x(k+1) = A_{bf}x(k) + B_w w(k), \quad (3.5)$$

où  $A_{bf} = A - BF$ .

Définissons un ellipsoïde :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T P x = x^T G^{-1} x \leq 1, P = P^T = G^{-1} \succ 0\}. \quad (3.6)$$

Dans la suite sont énoncés les théorèmes permettant l'analyse des performances du système asservi en termes d'ellipsoïdes invariants minimal et maximal robustes.

### 3.1.1.1 ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée

Dans le théorème suivant sont données les conditions suffisantes assurant l'ISS d'un système linéaire soumis à de perturbations bornées. Ces conditions sont exprimées en termes d'inégalités matricielles.

**Théorème 3.1.** *Soit le système linéaire à temps discret (3.5) affecté par une perturbation bornée  $w$  (3.4). S'il existe  $P = P^T = G^{-1} \succ 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$  tel que :*

$$\begin{bmatrix} A_{bf}^T P A_{bf} - P + \alpha P & A_{bf}^T P B_w \\ B_w^T P A_{bf} & -\beta I + B_w^T P B_w \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.7)$$

ou

$$\begin{bmatrix} G & 0 & \alpha G & G A_{bf}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \\ \alpha G & 0 & \alpha G & 0 \\ A_{bf} G & B_w & 0 & G \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.8)$$

$$\alpha \geq \beta \quad (3.9)$$

le système est ISS vis-à-vis de la perturbation bornée  $w$  (3.4).

*Démonstration.* : Pour détailler comment ont été obtenues les inégalités (3.7), (3.8) et (3.9) qui nous assurent l'ISS par rapport à une perturbation bornée, nous nous servirons de la fonction de Lyapunov  $V(k) = x(k)^T P x(k)$ ,  $P = P^T = G^{-1} \succ 0$ .

Définissons :

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) = x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) = \\ &= x^T(k) (A_{bf}^T P A_{bf} - P) x(k) + x^T(k) A_{bf}^T P B_w w(k) + \\ &+ w^T(k) B_w^T P A_{bf} x(k) + w^T(k) B_w^T P B_w w(k) = \\ &= \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{bf}^T P A_{bf} - P & A_{bf}^T P B_w \\ B_w^T P A_{bf} & B_w^T P B_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dans la section 2.5, le lemme 2.17 nous donne les conditions qui caractérisent l'ISS par rapport à une perturbation bornée. Pour des systèmes linéaires, la condition (2.29) est satisfaite pour  $\alpha_1 = \lambda_{\min}(P) \|x\|$  et  $\alpha_2 = \lambda_{\max}(P) \|x\|$ .

Dans l'étape suivante nous montrons que si :

$$\Delta V(k) < 0, \quad (3.10)$$

pour tout  $x$  et  $w$  satisfaisant :

$$x(k)^T P x(k) \geq 1 \text{ et } w(k)^T w(k) \leq 1 \quad (3.11)$$

la condition (2.30) du lemme 2.17 est satisfaite.

Avec la S-procédure ([11], [13] pp.82-84, Section 2.8), il vient que (3.11) implique (3.10) si il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$  tels que :

$$\Delta V(k) - \alpha(1 - x^T(k)Px(k)) - \beta(w^T(k)w(k) - 1) < 0. \quad (3.12)$$

Pour  $\alpha \geq \beta$  ([13] pp.82-84), à partir de (3.12) la condition (2.30) résulte avec  $\alpha_3 = \alpha\lambda_{\min}(P) \|x\|$  et  $\delta = \beta$ .

En revenant à l'inégalité (3.12) on obtient :

$$x^T(k)(A_{bf}^T PA_{bf} - P)x(k) + x^T(k)A_{bf}^T PB_w w(k) + w^T(k)B_w^T PA_{bf} x(k) + w^T(k)B_w^T PB_w w(k) < \alpha(1 - x(k)^T Px(k)) + \beta(w(k)^T w(k) - 1) \quad (3.13)$$

équivalent à :

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{bf}^T PA_{bf} - P + \alpha P & A_{bf}^T PB_w \\ B_w^T PA_{bf} & -\beta I + B_w^T PB_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} + (\beta - \alpha) < 0 \quad (3.14)$$

et qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{bf}^T PA_{bf} - P + \alpha P & A_{bf}^T PB_w & 0 \\ B_w^T PA_{bf} & -\beta I + B_w^T PB_w & 0 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha \end{bmatrix} < 0. \quad (3.15)$$

Pour  $\alpha \geq \beta$  ([13] pp.82-84) l'inégalité (3.7) découle de (3.15).

Comme dans ([13], pp.82-84), on peut considérer  $\alpha = \beta > 0$ .

L'inégalité (3.8) est obtenue à partir de (3.7). Cette dernière inégalité peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha P & 0 \\ PA_{bf} & PB_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\alpha P)^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha P & 0 \\ PA_{bf} & PB_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & -\beta I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

d'où la nécessité de la condition de positivité stricte pour  $\alpha$ .

En multipliant avec  $-1$  et en appliquant le théorème de Schur nous avons :

$$\begin{bmatrix} P & 0 & \alpha P & A_{bf}^T P \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T P \\ \alpha P & 0 & \alpha P & 0 \\ PA_{bf} & PB_w & 0 & P \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.17)$$

En pré-et post-multipliant cette inégalité par  $\text{diag}(G, I, G, G)$  on obtient l'inégalité (3.8).

La présence des perturbations est facilement prise en compte par la S-procédure. Cette procédure introduit deux variables  $\alpha$  et  $\beta$ . La variable  $\alpha$  multiplie une autre variable,  $P$ , ce qui transforme l'inégalité (3.7) dans une BMI (inégalité matricielle bilinéaire). Mais  $\alpha$  est un scalaire positif qui peut être fixé en exécutant une simple boucle.

A travers la condition  $\Delta V < 0$  pour tout  $x(k)$ ,  $V(k) \geq 1$  et pour toute perturbation  $w$ ,  $w^T(k)w(k) < 1$  on impose l'existence d'une région d'attraction  $\{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T P x = x^T G^{-1} x \leq 1, P = P^T = G^{-1} \succ 0\}$ . A l'extérieur de cette région la fonction de Lyapunov est décroissante pour toute perturbation  $w(k)$ ,  $w^T(k)w(k) < 1$  (l'état va converger vers cette région). A l'intérieur de cette région, la monotonie de  $V$  est inconnue mais l'état ne dépasse pas ses frontières.

Le problème exposé dans le théorème 3.1 peut être résolu avec les solveurs LMI existants. Il est néanmoins conseillé de faire un calcul du nombre de variables scalaires de décision pour avoir une idée de la complexité du problème. En fixant la variable de décision  $\alpha$ , le nombre de variables scalaires de décision est le suivant :

$$N_v = \frac{n_x(n_x + 1)}{2} + 1. \quad (3.18)$$

□

### 3.1.1.2 Ellipsoïde invariant minimal

Le but de cette section est de calculer l'ellipsoïde invariant minimal assurant l'invariance (et donc l'ISS) et la satisfaction de contraintes en présence d'une perturbation bornée. Les ensembles invariants minimaux nous donnent une mesure de l'effet de perturbations sur les systèmes. Plus les perturbations sont importantes plus l'ensemble invariant minimal est grand. Comme nous avons choisi d'approcher l'ensemble invariant minimal par un ellipsoïde, cet ellipsoïde sera en fait le plus petit ellipsoïde contenant l'ensemble invariant minimal réel.

**Théorème 3.2.** *Soit le système linéaire à temps discret (3.1), alors le système s'écrit sous la forme (3.5) avec la loi de commande donnée par (3.2). Le plus petit ellipsoïde garantissant l'invariance en présence d'une perturbation bornée  $w$  (3.4) et assurant la satisfaction des contraintes d'entrée (3.3) est obtenue en résolvant l'optimisation suivante :*

$$\min_{P=P^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det P \quad (3.19)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} A_{bf}^T P A_{bf} - P + \alpha P & A_{bf}^T P B_w \\ B_w^T P A_{bf} & -\beta I + B_w^T P B_w \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.20)$$

$$\alpha \geq \beta \quad (3.21)$$

et

$$\begin{bmatrix} P & F^T \\ F & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.22)$$

*Démonstration.* La condition de stabilité au sens entrée-état vis-à-vis d'une perturbation bornée (3.7) assure aussi l'invariance de l'état dans l'ensemble ellipsoïdal  $E$  3.6. L'inégalité (3.20) est en fait donnée par l'inégalité (3.7).

La condition (3.20) est une conséquence directe du théorème 2.10 (section 2.4.1) et ses implications.

Conformément avec les implications du théorème 2.10 nous recherchons un ellipsoïde  $E$  (3.6) ayant la propriété que pour tout point situé sur sa frontière ( $V(k) = 1$ ) et pour chaque perturbation dans les limites considérées ( $w^T(k)w(k) \leq 1$ ), la fonction de Lyapunov  $V$  est décroissante ( $V(k+1) - V(k) < 0$ ). Cette condition garantit qu'une fois que l'état est dans ou sur la frontière de l'ellipsoïde il ne sortira jamais (c.-à-d.  $E$  est invariant). La condition supplémentaire  $V(k+1) - V(k) < 0$  pour tout  $V(k) > 1$ ,  $w^T(k)w(k) \leq 1$  a été imposée pour garantir que l'ellipsoïde  $E$  est le bassin d'attraction du système à temps discret.

Du fait de la présence des perturbations, nous ne pouvons pas garantir que l'état va converger vers zéro, mais nous pouvons garantir qu'il restera dans l'ellipsoïde invariant. C'est pourquoi à l'intérieur de l'ellipsoïde  $E$  le signe de  $V(k+1) - V(k)$  n'est pas connu. À l'intérieur de l'ellipsoïde invariant  $E$ , la fonction de Lyapunov n'est pas monotone.

Dû à la S-procédure, l'apparition de  $\alpha$  fait que (3.20) devient une BMI (inégalité matricielle bilinéaire). Comme  $\alpha$  est un scalaire positif, un  $\alpha_{optim}$  peut être trouvé en exécutant une simple boucle.  $\alpha_{optim}$  est le  $\alpha$  pour lequel l'ellipsoïde donné par le théorème 3.2 a le plus petit volume.

Pour les LMIs correspondant aux contraintes d'entrée on obtient :

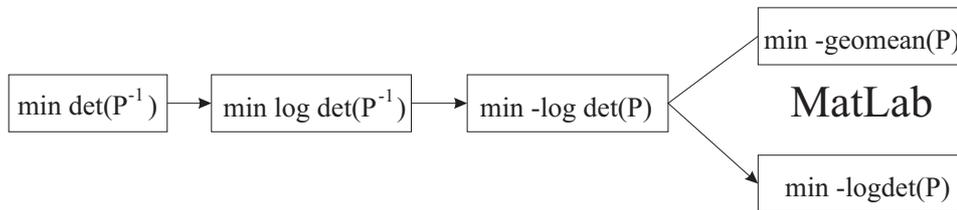
$$\begin{aligned} \|u(k)\|_2^2 &= \|Fx(k)\|_2^2 = \|FP^{-1/2}P^{1/2}x(k)\|_2^2 \leq \|FP^{-1/2}\|_2^2 \|P^{1/2}x(k)\|_2^2 \\ &= \lambda_{max}(FP^{-1}F^T)(x(k)^T Px(k)) \leq \lambda_{max}(FP^{-1}F^T). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Alors, en utilisant le complément de Schur (théorème 2.19) il vient que  $\|u\|_2 \leq u_{max}$  si la LMI (3.22) est faisable.

Si les inégalités (3.20), (3.21) et (3.22) sont faisables on peut affirmer qu'il existe un ellipsoïde  $E$  garantissant l'invariance de l'état et la satisfaction de contraintes, malgré la présence de perturbations bornées.

Pour comprendre le critère d'optimisation il faut rappeler que le volume d'un ellipsoïde est inversement proportionnel au produit des valeurs propres, (c.-à-d. le volume d'un ellipsoïde est directement proportionnel au déterminant de  $G = G^T = P^{-1}$  [14]). Par conséquent, pour trouver l'ellipsoïde minimal il convient de résoudre le problème  $\min \det(P^{-1})$ . Comme le déterminant n'est pas convexe (ni concave d'ailleurs) la fonction "logarithme" est considérée dans un premier temps pour rendre le problème concave :  $\min \log \det(P^{-1})$ . Ensuite la puissance "-1" intervenant devant le logarithme dans (3.19) permet de rendre le critère convexe [89].

Les problèmes d'optimisation sont résolus en utilisant le logiciel Yalmip [67] dans l'environnement MatLab. Si le solveur "Lmilab" est choisi, alors l'opérateur utilisé pour  $-\log \det(P)$  est  $-\text{geomean}(P)$ . Si le solveur "SeDuMi" est employé on peut utiliser les opérateurs  $-\text{logdet}(P)$  ou  $-\text{geomean}(P)$  pour représenter  $-\log \det(P)$ .



En fixant la variable de décision  $\alpha$ , le nombre de variables scalaires de décision est le même que lors du paragraphe précédent 3.1.1.1 :

$$N_v = \frac{n_x(n_x + 1)}{2} + 1. \quad (3.24)$$

□

### 3.1.1.3 Ellipsoïde invariant maximal

Si l'inégalité (3.20) et (3.21) sont faisables le système (3.1) est ISS par rapport à une perturbation bornée. De plus, si la LMI (3.22) est satisfaite il existe un ellipsoïde invariant  $E$  (3.6) pour lequel les contraintes sont satisfaites. Dans la section précédente, on a calculé l'ellipsoïde invariant minimal, dans cette section on se propose de déterminer l'ellipsoïde invariant maximal pour lequel les contraintes sont satisfaites malgré la perturbation bornée.

Le calcul de l'ensemble invariant maximal a un sens quand des contraintes sont prises en compte. Cet ensemble représente la plus grande région de l'espace où les contraintes sont satisfaites et où une fois que l'état y entre il n'en sortira jamais. Quand, de plus, le système est affecté par des perturbations, cet ensemble diminue en volume : plus l'effet des perturbations est important, plus petit est l'ensemble maximal invariant. Dans ce

mémoire, on se propose d'approcher les ensembles invariants par des ellipsoïdes. L'ellipsoïde invariant maximal est le plus grand ellipsoïde situé à l'intérieur de l'ensemble invariant maximal réel.

**Théorème 3.3.** *Soit le système linéaire à temps discret (3.1), alors le système asservi s'écrit sous la forme (3.5) avec la loi de commande donnée par (3.2). L'ellipsoïde invariant maximal  $E$  (3.6) satisfaisant les contraintes d'entrée (3.1) malgré la présence d'une perturbation  $w$  (3.4) est obtenu en résolvant l'optimisation suivante :*

$$\min_{G=G^T, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det G \quad (3.25)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} G & 0 & \alpha G & GA_{bf}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \\ \alpha G & 0 & \alpha G & 0 \\ A_{bf}G & B_w & 0 & G \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.26)$$

$$\alpha \geq \beta \quad (3.27)$$

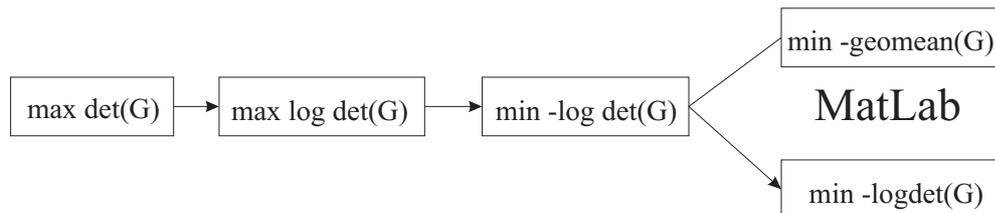
et

$$\begin{bmatrix} G & GF^T \\ FG & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.28)$$

*Démonstration.* Comme déjà dit, la condition de stabilité au sens entrée-état vis-à-vis d'une perturbation bornée (3.8) assure aussi l'invariance de l'état. En conclusion l'inégalité garantissant l'invariance (3.26) est en fait donnée par l'inégalité (3.8).

La LMI (3.28) qui garantit la satisfaction des contraintes est obtenue de l'inégalité (3.22) par congruence avec  $\text{diag}(G, I)$ .

Le volume d'un ensemble ellipsoïdal est inversement proportionnel au produit des valeurs propres (c.-à-d. directement proportionnel au  $\det(P^{-1})$ ). Alors, pour trouver l'ellipsoïde maximal le problème d'optimisation à résoudre est  $\max \det(P^{-1})$ . En introduisant l'opérateur "logarithme" pour rendre le problème concave on obtient :  $\max \log \det(G)$ . Finalement pour transformer le critère d'optimisation en un critère convexe on substitue "max" par "min -" d'où (3.25).



□

En fixant la variable de décision  $\alpha$ , le nombre de variables scalaires de décision est le même que lors du paragraphe 3.1.1.1.

### 3.1.2 Système LTI et observateur

La même démarche que celle mise en oeuvre au paragraphe 3.1.1 est reprise ici dans le cas où un observateur doit être pris en compte.

Soit le système linéaire à temps discret (3.1), l'observateur mis en oeuvre pour reconstruire l'état a la forme suivante :

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k)\end{aligned}\quad (3.29)$$

$\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  l'état estimé,  $L \in \mathbb{R}^{n_x \times p}$  est le gain de l'observateur.

La loi de commande supposée connue est donnée par :

$$u(k) = -F\hat{x}(k) \quad (3.30)$$

où  $F \in \mathbb{R}^{m \times n_x}$  est un retour d'état donné tel que  $A - BF$  est strictement stable et la performance nominale est adaptée au contexte donné.

On considère également des bornes sur la norme Euclidienne de la commande  $u$  :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}. \quad (3.31)$$

Le vecteur de bruit  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est supposé borné :

$$\|n\|_2 \leq 1. \quad (3.32)$$

Pour le système avec observateur, il convient d'introduire la représentation d'état augmentée suivante :

$$x_o(k+1) = A_o x_o(k) + B_o n(k), \quad (3.33)$$

où :

$$\begin{aligned}x_o(k) &= \begin{bmatrix} x(k) \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon(k) = x(k) - \hat{x}(k) \text{ est l'erreur d'estimation, } A_o = \begin{bmatrix} A - BF & BF \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \\ \text{et } B_o &= \begin{bmatrix} B_w & 0 \\ B_w & -LD_v \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.34)$$

La commande  $u(k)$  est alors donnée par :

$$u(k) = -F\hat{x}(k) = -F_o x_o(k), \quad (3.35)$$

où :

$$F_o = \begin{bmatrix} F & -F \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

L'ellipsoïde dans l'espace d'état augmenté a pour expression :

$$E_o = \{x_o(k) \mid x_o^T(k)P_o x_o(k) = x_o^T(k)G_o^{-1}x_o(k) \leq 1, P_o = P_o^T = G_o^{-1} \succ 0\}. \quad (3.37)$$

En présence d'un observateur il convient de minimiser ou de maximiser l'ellipsoïde invariant dans l'espace de l'état non-augmenté. Il est nécessaire donc désormais de rechercher un ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes et ayant une intersection minimale avec l'espace de l'état initial ( $x(k)$ ) ou une projection maximale sur l'espace de l'état initial ( $x(k)$ ).

### 3.1.2.1 ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée

Le théorème suivant nous donne les conditions suffisantes pour garantir l'ISS du système (3.33) vis-à-vis d'une perturbation bornée.

**Théorème 3.4.** *Soit le système linéaire à temps discret avec l'état estimé au moyen d'un observateur (3.33) et avec la loi de commande donnée par (3.35). S'il existe  $P_o = P_o^T = G_o^{-1} \succ 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$  tels que :*

$$\begin{bmatrix} A_o^T P_o A_o - P_o + \alpha P_o & A_o^T P_o B_o \\ B_o^T P_o A_o & -\beta I + B_o^T P_o B_o \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.38)$$

ou

$$\begin{bmatrix} G_o & 0 & \alpha G_o & G_o A_o^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_o^T \\ \alpha G_o & 0 & \alpha G_o & 0 \\ A_o G_o & B_o & 0 & G_o \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.39)$$

et

$$\alpha \geq \beta \quad (3.40)$$

le système est ISS par rapport à une perturbation bornée (3.32).

*Démonstration.* Pour montrer comment les inégalités (3.38), (3.39) et (3.40), responsables de l'invariance, ont été obtenues nous nous servons de la fonction de Lyapunov  $V_o(k) = x_o^T(k)P_o x_o(k)$ ,  $P_o = P_o^T = G_o^{-1} \succ 0$ .

La preuve de ce théorème est similaire à celle mise en oeuvre lors du théorème 3.1 en substituant  $P, G, A_{bf}, B_w$  par  $P_o, G_o, A_o$  et  $B_o$ , respectivement. On la donne quand même ici car elle va servir au chapitre 4 dédié à la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur.

En fixant la variable de décision  $\alpha$ , le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = \frac{2n_x(2n_x + 1)}{2} + 1. \quad (3.41)$$

□

### 3.1.2.2 Intersection ellipsoïdale minimale

Etant donné notre intérêt pour l'espace d'état initial  $x(k)$  et non pour l'espace d'état augmenté  $x_o(k)$ , l'objectif est maintenant de trouver un ensemble invariant ellipsoïdal satisfaisant les contraintes et ayant une intersection minimale avec l'espace de l'état initial ( $x(k)$ ).

De façon générale, l'intersection de  $E_o$  (3.37) avec le sous-espace de  $x$  est donnée par :

$$E_{oi} = \{x \mid x^T Z P_o Z^T x \leq 1, P_o = P_o^T \succ 0, Z = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}\}. \quad (3.42)$$

avec  $Z$  résultant de  $x = Zx_o$  [54].

Comme les inégalités sont similaires avec celles données lors de l'analyse de l'ellipsoïde invariant minimal pour le cas sans observateur, le théorème sera présenté en Annexe A.

### 3.1.2.3 Projection ellipsoïdale maximale

Etant donné que dans l'état augmenté seul  $x(k)$  présente un intérêt, cette section se propose de calculer l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes et ayant une projection maximale sur l'espace de l'état initial ( $x(k)$ ).

De façon générale, la projection de  $E_o$  (3.37) sur le sous-espace de  $x$  est donnée par :

$$E_{op} = \{x \mid x^T (Z G_o Z^T)^{-1} x \leq 1, G_o = G_o^T \succ 0, Z = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}\}. \quad (3.43)$$

avec  $Z$  résultant de  $x = Zx_o$  [54].

**Théorème 3.5.** *Pour le système (3.33) avec la loi de commande (3.35), l'ellipsoïde invariant ayant la projection  $E_{op}$  maximale sur l'espace d'état initial  $x(k)$  et assurant en*

même temps la satisfaction des contraintes sur la commande (3.31) malgré la présence d'une perturbation  $n$  (3.32) est obtenu en résolvant le problème :

$$\min_{G_o=G_o^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det(ZG_oZ^T) \quad (3.44)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} G_o & 0 & \alpha G_o & G_o A_o^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_o^T \\ \alpha G_o & 0 & \alpha G_o & 0 \\ A_o G_o & B_o & 0 & G_o \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.45)$$

$$\alpha \geq \beta \quad (3.46)$$

et

$$\begin{bmatrix} G_o & G_o F_o^T \\ F_o G_o & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.47)$$

*Démonstration.* La condition (3.45) a été obtenue de la même manière que (3.39).

De l'inégalité (A.4) nous dérivons par congruence avec  $\text{diag}(G_o, I)$  la LMI (3.47) assurant la satisfaction des contraintes.

Le critère d'optimisation est obtenu comme en 3.1.1.3 en remplaçant  $G$  par  $ZG_oZ^T$  (représentant la projection).

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est donné par (3.41).  $\square$

### 3.1.3 Système LTI avec observateur et paramètre de Youla

On réitère une dernière fois la même démarche proposée dans les deux sections précédentes, dans le cas plus complexe d'un système LTI avec observateur et paramètre de Youla.

Soit le système linéaire à temps discret (3.1), avec l'état estimé au moyen d'un observateur (3.29). Nous considérons qu'un paramètre de Youla ( $Q$ ) a été préalablement synthétisé [103], afin d'améliorer la robustesse du correcteur initial associé à l'observateur :

$$\begin{aligned} x_Q(k+1) &= A_Q x_Q(k) + B_Q \tilde{y}(k), \\ \tilde{u}(k) &= C_Q x_Q(k) + D_Q \tilde{y}(k), \\ \tilde{y}(k) &= y(k) - \hat{y}(k) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$x_Q \in \mathbb{R}^{n_Q}$  l'état du paramètre de Youla,  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$  la sortie de  $Q$ ,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^p$  l'entrée de  $Q$  et  $A_Q \in \mathbb{R}^{n_Q \times n_Q}$ ,  $B_Q \in \mathbb{R}^{n_Q \times p}$ ,  $C_Q \in \mathbb{R}^{m \times n_Q}$ ,  $D_Q \in \mathbb{R}^{m \times p}$  constituent la représentation d'état du paramètre de Youla. Cette approche pour représenter le paramètre de Youla a été

proposée par [12]. La Figure 3.1 illustre l'architecture mise en oeuvre avec le correcteur, l'observateur et le paramètre de Youla.

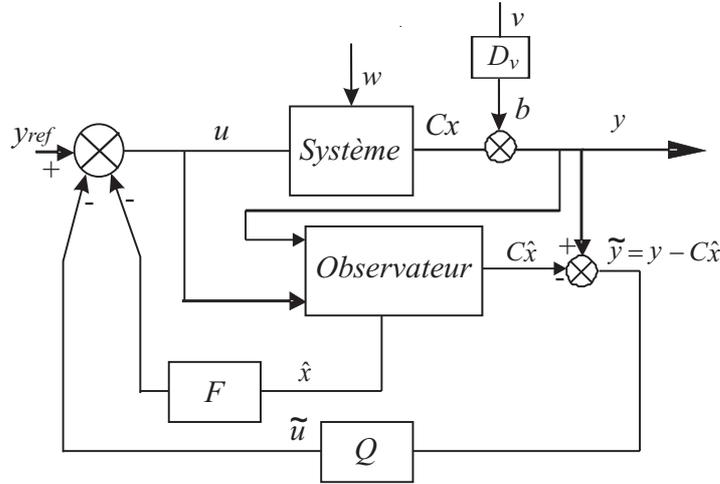


FIGURE 3.1: Correcteur dans l'espace d'état avec le paramètre de Youla.

La loi de commande supposée connue est donnée par :

$$u(k) = -F\hat{x}(k) - \tilde{u}(k) \quad (3.49)$$

où  $F \in \mathbb{R}^{m \times n_x}$  est un retour d'état donné tel que  $A - BF$  est strictement stable.

On considère des bornes sur la norme Euclidienne de la commande  $u(k)$  :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}. \quad (3.50)$$

Le vecteur de bruit  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est supposé borné :

$$\|n\|_2 \leq 1. \quad (3.51)$$

Pour le système avec observateur et paramétrisation de Youla, la représentation d'état augmentée devient :

$$x_y(k+1) = A_y x_y(k) + B_y n(k), \quad (3.52)$$

où

$$x_y(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \varepsilon(k) \\ x_Q(k) \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} A - BF & BF - BD_Q C & -BC_Q \\ 0 & A - LC & 0 \\ 0 & B_Q C & A_Q \end{bmatrix}, \quad B_y = \begin{bmatrix} B_w & -BD_Q D_v \\ B_w & -LD_v \\ 0 & B_Q D_v \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

La commande a alors la forme :

$$u(k) = -F_x \cdot x_y(k) - F_n \cdot n(k), \quad (3.54)$$

avec

$$F_x = \begin{bmatrix} F & -F + D_Q C & C_Q \end{bmatrix} \text{ et } F_n = [0 \ D_Q D_v]. \quad (3.55)$$

De façon générale, l'ellipsoïde dans l'espace de l'état augmenté a maintenant l'expression :

$$E_y = \{x_y \mid x_y^T P_y x_y = x_y^T G_y^{-1} x_y \leq 1, P_y = P_y^T = G_y^{-1} \succ 0\}. \quad (3.56)$$

Comme pour le système avec observateur (section 3.1.2) seul l'état du système initial (3.1) nous intéresse, c'est pour cela que dans les paragraphes suivants sont évaluées l'intersection minimale et la projection maximale avec/sur l'espace d'état initial.

### 3.1.3.1 ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée

Pour un système avec un paramètre de Youla, les conditions assurant l'ISS par rapport à une perturbation bornée sont données par le théorème reporté dans l'Annexe A dû à sa similarité avec les théorèmes précédents.

### 3.1.3.2 Motivation pour introduire la paramétrisation de Youla

Pour le système avec la paramétrisation de Youla la définition de l'ellipsoïde invariant est donnée en (3.56) où  $P_y = G_y^{-1} \in \mathbb{R}^{(2n_x+n_q) \times (2n_x+n_q)}$  est une matrice symétrique positive définie.

**Lemme 3.6.** *S'il existe un ellipsoïde invariant  $E_o$  pour le système avec observateur (3.33) alors il existe au moins un ellipsoïde invariant  $E_y$  pour le système avec la paramétrisation de Youla (3.52).*

*Démonstration.* Considérons  $G_y^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & S \end{bmatrix}$  (et  $x_y = \begin{bmatrix} x_o \\ x_Q \end{bmatrix}$ ) l'inégalité (3.56) devient :

$$x_o^T Y x_o \leq 1 - x_o^T V x_Q - x_Q^T V^T x_o - x_Q^T S x_Q. \quad (3.57)$$

Comme on suppose qu'il existe un ellipsoïde invariant  $E_o$  pour le système avec observateur alors  $x_o^T Y x_o \leq 1$  et donc l'inégalité (3.57) est satisfaite au moins pour tous les

$x_y = \begin{bmatrix} x_o \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $x_o \in E_o$  avec  $Y = P_o$ . □

La projection de l'ensemble invariant ellipsoïdal  $E_y$  (3.56) sur  $x$  est donnée par :

$$E_{xy} = \{x \mid x^T (TG_y T^T)^{-1} x \leq 1, T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}\} \quad (3.58)$$

avec  $T$  résultant de  $x = Tx_y$ .

En faisant une analogie avec les résultats obtenus dans [55] (pour un système à temps discret ayant une boucle fermée augmentée avec un terme supplémentaire afin d'augmenter les degrés de liberté), on peut affirmer que :

**Lemme 3.7.** *En insérant un paramètre de Youla  $x_Q \neq 0$  dans la boucle fermée du système avec observateur, on peut obtenir une projection ellipsoïdale  $E_{xy}$  plus grande que  $E_{x_0}$ . Un agrandissement maximal est obtenu pour  $x_Q = -S^{-1}V^T x_0$  (les RHS "right hand side" maximales de (3.57)) pour lequel (3.58) est équivalente à :*

$$E_{xy} = \{x \mid x^T (ZG_{xy}Z^T)^{-1} x \leq 1, x = Tx_y = Zx_0, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\}$$

avec  $G_{xy} = [Y - VS^{-1}V^T]^{-1}$ .

*Démonstration.* Parce que  $G_{xy}^{-1} \preceq Y$  il en résulte que  $Y = G_o^{-1}$  implique  $G_{xy} - G_o \succeq 0$ . Sachant que toute sous-matrice principale d'une matrice positive définie est positive définie [44] on obtient  $Z(G_{xy} - G_o)Z^T \succeq 0$  et en outre  $(ZG_{xy}Z^T)^{-1} \preceq (ZG_oZ^T)^{-1}$ . La dernière inégalité fait que  $E_{x_0} \subseteq E_{xy}$ . Le gain en robustesse atteint par l'introduction du paramètre de Youla sera donné par la différence de volume entre  $E_{x_0}$  et  $E_{xy}$ .  $\square$

*Remarque 3.8.* Au moyen des deux lemmes présentés ci-dessus on montre que s'il existe un ensemble invariant pour le système avec observateur alors il en existera un pour le système avec observateur et paramétrisation de Youla. On montre également que, en introduisant la paramétrisation de Youla (et donc des degrés de liberté), on agrandit le volume de l'espace invariant. Cette augmentation est due aussi au fait que le paramètre de Youla réduit l'effet de la perturbation bornée qui affecte le système.

### 3.1.3.3 Intersection ellipsoïdale minimale

Pour le système sous la forme (3.52) on recherche l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes et ayant une intersection minimale avec l'espace de l'état initial ( $x(k)$ ).

L'intersection de  $E_y$  (3.56) avec le sous-espace de  $x$  est donnée par :

$$E_{yi} = \{x \mid x^T TP_y T^T x \leq 1, P_y = P_y^T \succ 0, T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}\} \quad (3.59)$$

avec  $T$  provenant de  $x = Tx_y$  [54].

**Théorème 3.9.** Soit le système linéaire à temps discret (3.1). Si la paramétrisation de Youla (3.48) est prise en considération, le système s'écrit sous la forme (3.52) et la loi de commande, soumise à la contrainte d'entrée (3.50), est donnée par (3.54). Dans ce cas la minimisation de  $E_{y_i}$  sujet à des perturbations (3.51) est réalisée en résolvant :

$$\min_{P_y=P_y^T > 0, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det(TP_yT^T) \quad (3.60)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} A_y^T P_y A_y - P_y + \alpha P_y & A_y^T P_y B_y \\ B_y^T P_y A_y & -\beta I + B_y^T P_y B_y \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.61)$$

$$\alpha \geq \beta \quad (3.62)$$

et

$$\begin{bmatrix} P_y & F_x^T & 0 \\ F_x & u_{max}^2 I & F_n \\ 0 & F_n^T & I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.63)$$

*Démonstration.* Comme la stabilité entrée-état vis-à-vis d'une perturbation bornée suppose l'existence d'un ensemble invariant ellipsoïdal, l'inégalité (3.61) est identique à l'inégalité (A.5)

La LMI qui nous assure la satisfaction des contraintes sur la commande est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \|u(k)\|_2^2 &= \|F_x x_y(k) + F_n n(k)\|_2^2 \leq \|F_x x_y(k)\|_2^2 + \|F_n n(k)\|_2^2 \leq \\ &\leq \|F_x P_y^{-1/2}\|_2^2 \|P_y^{1/2} x_y(k)\|_2^2 + \|F_n\|_2^2 \|n(k)\|_2^2 = \\ &= \lambda_{\max}(F_x P_y^{-1} F_x^T) (x_y^T(k) P_y x_y(k)) + \lambda_{\max}(F_n F_n^T) (n(k)^T n(k)) \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(F_x P_y^{-1} F_x^T) + \lambda_{\max}(F_n F_n^T). \end{aligned} \quad (3.64)$$

En appliquant le théorème de Schur 2.19 on obtient que  $\|u\|_2 \leq u_{max}$  si la LMI suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} P_y & F_x^T \\ F_x & u_{max}^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ F_n \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 0 \\ F_n \end{bmatrix}^T \succeq 0. \quad (3.65)$$

Enfin, si l'on utilise de nouveau le théorème de Schur, on obtient la LMI (3.63).

Le critère d'optimisation est obtenu comme dans la Section 3.1.1.2 en remplaçant  $P$  maintenant par  $TP_yT^T$  (représentant l'intersection).

Pour un  $\alpha$  connu, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = \frac{(2n_x + n_Q)(2n_x + n_Q + 1)}{2} + 1. \quad (3.66)$$

□

### 3.1.3.4 Projection ellipsoïdale maximale

Cette section a pour but de calculer l'ellipsoïde invariant robuste dans l'espace d'état augmenté satisfaisant les contraintes et ayant une projection maximale sur l'espace de l'état initial  $x(k)$ .

La projection de  $E_y$  (3.56) sur le sous-espace de  $x$  est donnée par 3.58.

**Théorème 3.10.** *Soit le système sous la forme (3.52), affecté par une perturbation bornée (3.51) et avec la loi de commande correspondante (3.54). L'ellipsoïde invariant garantissant la satisfaction de la contrainte sur la commande (3.50) et ayant la projection maximale  $E_{yp}$  sur l'espace d'état initial  $x(k)$  est obtenu en résolvant le problème :*

$$\min_{G_y=G_y^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det(TG_yT^T) \quad (3.67)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} G_y & 0 & \alpha G_y & G_y A_y^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_y^T \\ \alpha G_y & 0 & \alpha G_y & 0 \\ A_y G_y & B_y & 0 & G_y \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.68)$$

$$\alpha \geq \beta \quad (3.69)$$

et

$$\begin{bmatrix} G_y & G_y F_x^T & 0 \\ F_x G_y & u_{max}^2 I & F_n \\ 0 & F_n^T & I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.70)$$

*Démonstration.* L'inégalité assurant l'invariance (3.68) est donnée par la condition assurant l'ISS par rapport à une perturbation bornée (A.6).

Pour arriver à la LMI qui nous assure la satisfaction des contraintes (3.70) on pré- et post multiplie la LMI (3.63) avec  $\text{diag}(G_y, I, I)$  où  $G_y = G_y^T = P_y^{-1} \succ 0$ .

Le critère d'optimisation est obtenu comme dans 3.1.1.3 en remplaçant  $G$  par  $TG_yT^T$  (représentant la projection).

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est donné par (3.66).  $\square$

### 3.1.4 Mise en oeuvre en simulation

Dans cette section, nous présentons un exemple qui illustre l'influence du paramètre de Youla sur le volume des ellipsoïdes.

Avec cet exemple, nous nous proposons de contrôler la position d'un moteur alternatif asynchrone à induction. Pour ce moteur, le modèle entre le couple et la position est donné dans [88] sous la forme :

$$H_0 = \frac{\theta(s)}{\tau_{ref}(s)} = \frac{1}{s(f + Js)} \quad (3.71)$$

où  $s$  est la variable de Laplace,  $\theta(s)$  la position angulaire de l'arbre moteur et  $\tau_{ref}(s)$  la référence de couple appliquée au moteur.

Il s'agit d'un modèle similaire à celui d'un moteur à courant continu permettant de représenter de façon simple et réaliste le comportement réel en position de la machine asynchrone avec une commande vectorielle interne.

Pour  $f = 0,01Nm(rad/s)^{-1}$ ,  $J = 0,007Kgm^2$  et la période d'échantillonnage  $1,0724 ms$  nous avons comme modèle discrétisé :

$$H(q^{-1}) = \frac{y(k)}{u(k)} = \frac{\theta(k)}{\tau_{ref}(k)} = \frac{10^{-4}(0,821q^{-1} + 0,8206q^{-2})}{(1 - q^{-1})(1 - 0,998q^{-1})}. \quad (3.72)$$

La représentation d'état du système ci-dessus est :

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i \tau(k), \\ y(k) &= C_i x_i(k), \end{aligned} \quad (3.73)$$

avec :

$$A_i = \begin{bmatrix} 1,998 & -0,998 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0,0156 \\ 0 \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 0,0053 & 0,0053 \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Pour annuler les erreurs en régime permanent vis-à-vis d'une perturbation en échelon, une action intégrale est ajoutée :

$$\tau(k) = \tau(k-1) + \Delta\tau(k). \quad (3.75)$$

Le système final a donc la forme (3.1) avec :

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \tau(k-1) \end{bmatrix}, u(k) = \Delta\tau(k), A = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & I \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_i \\ I \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Comme le paramètre de Youla considéré dans cet exemple a été synthétisé pour diminuer l'influence d'une incertitude additive, ce qui peut être considéré comme une perturbation à la sortie du système, on retient par la suite  $B_w = [0 \ 0 \ 0]^T$ . Pour la perturbation de sortie nous prenons en compte une erreur de mesure deux fois plus grande

que la résolution du capteur de position. Puisque le capteur de position a 14400 points par tour, il en résulte  $D_v = 0,001$ .

Le retour d'état a été obtenu avec une méthode MPC (model predictive control [15]) afin d'avoir un comportement entrée/sortie souhaité (40ms pour le temps de réponse et 5% pour le dépassement) :

$$F = \begin{bmatrix} 9,4739 & -8,7277 & 0,9417 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

L'observateur a été calculé afin d'avoir une dynamique plus rapide que la boucle fermée. Les pôles de l'observateur sont placés à  $[0,8 \ 0,81 \ 0,82]$  et le gain correspondant est :

$$L = \begin{bmatrix} 58,9993 & 49,1245 & 41,6667 \end{bmatrix}^T. \quad (3.78)$$

Ce correcteur incluant un observateur a donc été considéré afin de respecter certaines performances initiales spécifiées.

En utilisant les techniques décrites dans [88], nous pouvons synthétiser un paramètre de Youla permettant d'améliorer la robustesse vis-à-vis d'incertitudes additives non structurées :

$$\begin{aligned} A_Q &= \begin{bmatrix} 1,343 & -0,3723 & -0,120 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1250 & 0 \end{bmatrix}, B_Q = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_Q &= \begin{bmatrix} -7,1015 & 2,5361 & -0,3145 \end{bmatrix}, D_Q = 41,9289. \end{aligned} \quad (3.79)$$

La Figure 3.2 montre la fonction de sensibilité vis-à-vis de cette incertitude additive non structurée. Le tracé en pointillé correspond au système avec observateur (3.33) et le tracé en trait continu correspond au système avec observateur et paramètre de Youla (3.52). La norme  $H_\infty$  étant plus petite avec le paramètre de Youla, la robustesse vis-à-vis de ce type d'incertitude a été améliorée.

La contrainte imposée sur la commande est  $\|u(k)\| \leq u_{max} = 5V$ .

Pour le système sans le paramètre de Youla (3.33), le  $\alpha$  optimal pour lequel nous obtenons la plus petite intersection avec le sous-espace d'état  $x$  est  $\alpha_{opt} = \beta = 0,0407$ , pour cette valeur de  $\alpha$  le volume de l'intersection ellipsoïdale minimale est  $V_{PO} = 1,22 \cdot 10^{-2}$ . Pour la projection maximale nous obtenons  $\alpha_{opt} = \beta = 0,011$  et le volume associé est  $V_{GO} = 1,47 \cdot 10^6$ . En introduisant le paramètre de Youla les résultats sont remarquables. En effet, nous obtenons  $\alpha_{opt} = \beta = 0,02935$  pour l'intersection minimale ce qui donne  $V_{PY} = 1,629 \cdot 10^{-4}$  comme volume de l'intersection minimale, et  $\alpha_{opt} = \beta = 0,00091$  pour la projection maximale avec un volume  $V_{GY} = 2,477 \cdot 10^7$ .

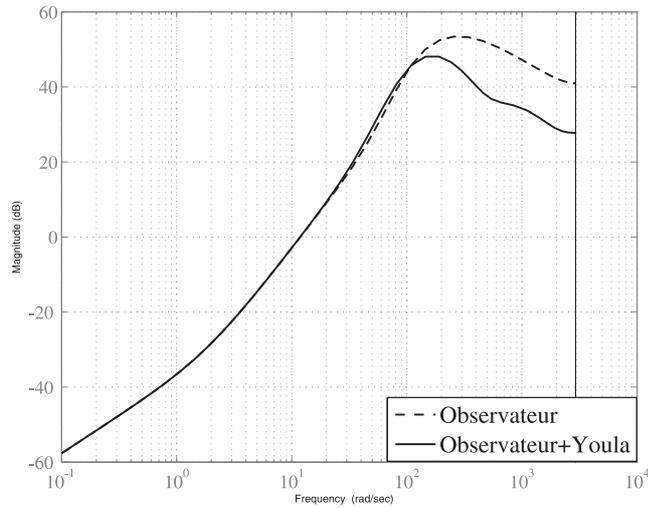


FIGURE 3.2: Fonction de sensibilité vis-à-vis d'une incertitude additive.

La Figure 3.3 illustre l'intersection minimale avec le sous-espace de l'état  $x$  pour le système avec observateur (3.33) (ellipsoïde vert) et pour le système avec observateur et paramètre  $Q$  (3.52) (ellipsoïde magenta). Pour un point initial (choisi au hasard) :

$$x_0 = [0,0538 \quad 0,0532 \quad -0,1715 \quad -0,1495 \quad -0,121 \quad -0,1249 \quad 0,0526 \quad 0,0129 \\ -0,0013]$$

situé à l'intérieur de l'intersection ellipsoïdale minimale correspondant au système avec observateur et Youla, on peut constater que la trajectoire (Trajectoire 1 dans la Figure 3.3) est invariante, c.à-d. elle reste à l'intérieur de l'intersection ellipsoïdale minimale. On a considéré comme perturbation un bruit de mesure prenant des valeurs dans l'intervalle  $[-0,001 \quad 0,001]$  (valeurs correspondant en fait à  $D_v$ ).

De même la Figure 3.4 donne la projection maximale de l'ellipsoïde invariant sur le sous-espace de l'état  $x$  pour le système sans paramètre  $Q$  (3.33) (ellipsoïde vert) et pour le système avec paramètre  $Q$  (3.52) (ellipsoïde magenta). Dans cette figure on a tracé également la trajectoire de l'état pour un point initial :

$$x_0 = [143,8353 \quad 162,8817 \quad 64,6929 \quad 2,7338 \quad 1,8904 \quad -8,3404 \quad 3,0184 \quad 7,8317 \\ 1,1689]$$

situé à l'intérieur de la projection maximale correspondant au système avec observateur (Trajectoire 2), la trajectoire de l'état pour un point initial :

$$x_0 = 10^3[-1,8202 \quad -1,8868 \quad -0,0773 \quad -0,0283 \quad -0,0201 \quad -0,1118 \quad -0,1463 \\ -0,1507 \quad -0,0192]$$

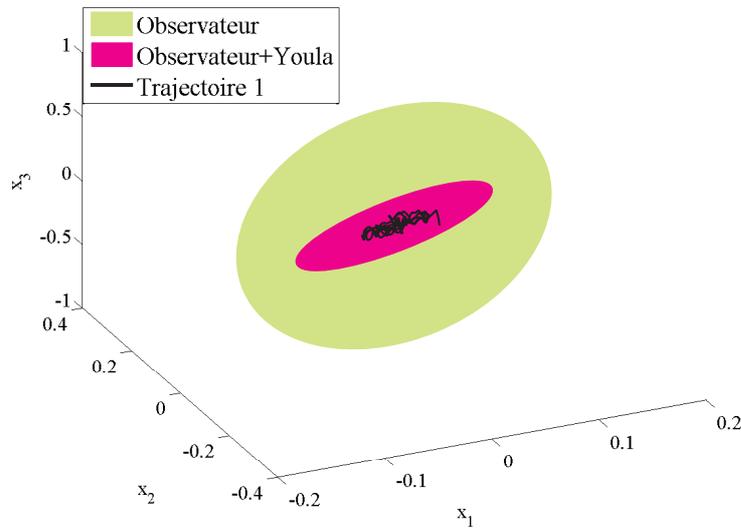


FIGURE 3.3: Intersection minimale.

situé à l'intérieur de la projection maximale correspondant au système avec observateur et Youla (et à l'extérieur de la projection maximale du système avec observateur seulement - Trajectoire 3). Les deux trajectoires sont invariantes, elles restent dans l'ensemble qui leur correspond. On a considéré comme perturbation un échelon d'amplitude 0,08 sur le signal de sortie à l'instant 0,1s et un bruit de mesure prenant des valeurs dans l'intervalle  $[-0,005, 0,005]$  (valeurs correspondant à  $D_v$ ). Ces perturbations sont plus importantes que celles considérées lors du calcul des projections maximales. Ce choix a été fait pour montrer le gain en robustesse obtenu pour le système avec observateur et la paramétrisation de Youla.

On constate effectivement que le paramètre  $Q$  a diminué le volume de l'ellipsoïde minimal et a augmenté celui de l'ellipsoïde maximal. En augmentant l'espace de l'état, le volume de l'ellipsoïde maximal obtenu sera plus grand que (ou au minimum égal à) celui de l'ellipsoïde obtenu pour le système non augmenté. De même, le volume de l'ellipsoïde minimal obtenu pour le système augmenté sera plus petit que (ou au maximum égal à) celui de l'ellipsoïde obtenu pour le système non augmenté.

Les Figures 3.5 et 3.6 représentent l'évolution temporelle de l'entrée et de la sortie pour les trois trajectoires : la première sous-figure correspond à la Trajectoire 1, la deuxième revient à la Trajectoire 2 et finalement la troisième à la Trajectoire 3. Les mêmes perturbations que celles données ci-dessus ont été prises en compte.

On peut observer Figure 3.5, dans les trois cas, que la commande pour le système avec observateur a un transitoire plus court (l'effet de la perturbation est plus faible) que pour le système avec observateur et Youla. Dans la troisième sous-figure on voit que pour le

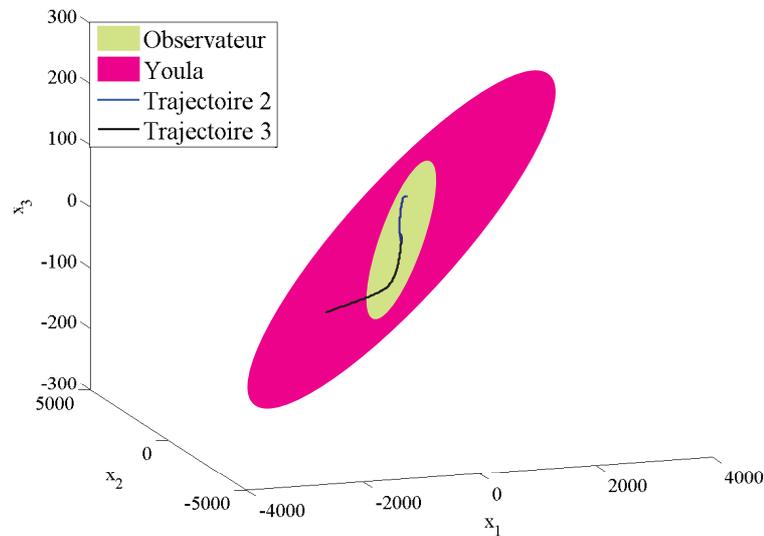


FIGURE 3.4: Projection maximale.

système avec observateur, les contraintes sur la commande ne sont pas satisfaites. Ceci est dû au fait que le point initial de l'état  $x_o(0)$  ne se trouve pas à l'intérieur de la projection correspondant à cette dynamique et donc l'état n'est pas invariant (il peut dépasser les frontières de l'ellipsoïde et arriver dans des points de l'espace d'état où les contraintes ne sont pas satisfaites). Par ailleurs ce point se trouve à l'intérieur de la projection ellipsoïdale obtenue pour le système avec observateur et Youla. Pour cette dynamique, les contraintes sont satisfaites.

La Figure 3.6 illustre les évolutions temporelles de la sortie pour les trois cas. On peut constater que les évolutions temporelles de la sortie (Trajectoire 2 et Trajectoire 3) pour le système avec Youla sont plus lentes en rejet de perturbation que celles obtenues pour le système avec observateur seul. Nous concluons que le gain en robustesse obtenu en introduisant le paramètre de Youla peut avoir comme effet secondaire un ralentissement des performances en boucle fermée. Cette perte en performance est moins visible pour la Trajectoire 1 car les perturbations considérées pour celle-ci sont moins importantes que celles considérées pour la Trajectoire 2 et Trajectoire 3.

Ces résultats ont été obtenus par des simulations effectuées à l'aide du logiciel Yalmip [67] avec les solveurs PENBMI [52] et SeDuMi [104] dans l'environnement MatLab. Les simulations temporelles ont été réalisées sous Simulink.

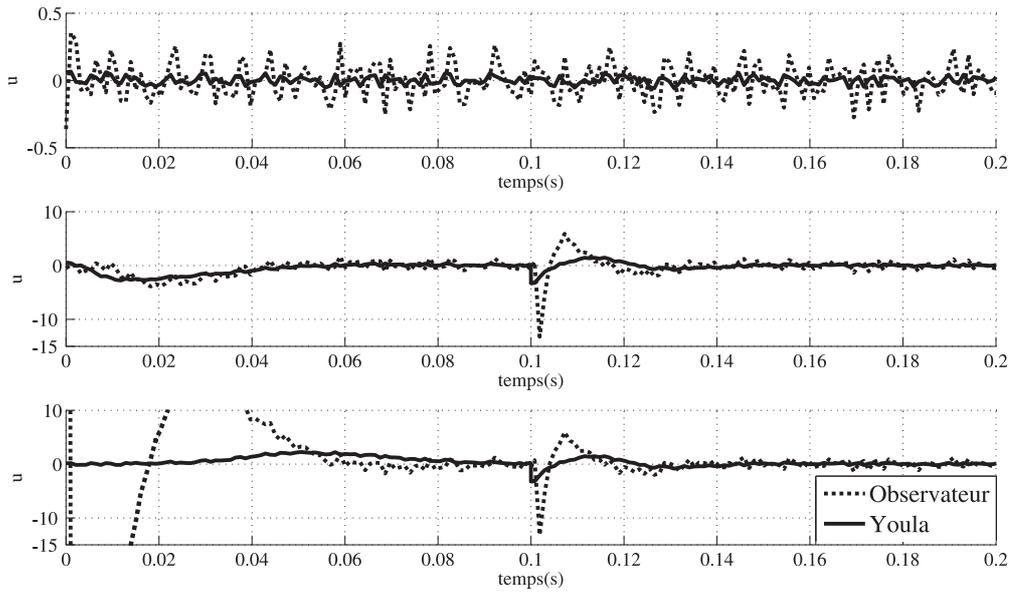


FIGURE 3.5: Evolution temporelle de l'entrée.

### 3.1.5 Conclusion

Nous avons présenté dans cette section une démarche pratique donnant les conditions suffisantes pour garantir l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée et permettant d'élaborer les ellipsoïdes positifs invariants robustes maximal (où ayant la projection maximale) et minimal (où ayant l'intersection minimale). Ces ensembles sont obtenus en utilisant des techniques LMI. Compte tenu de la présence d'une perturbation et des contraintes sur la commande, l'approche proposée est un outil puissant d'analyse en perspective de la synthèse. La recherche de l'ellipsoïde maximal fournit la plus grande région ellipsoïdale de l'espace d'état pour laquelle les contraintes sont satisfaites tout en garantissant la stabilité ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée. L'ellipsoïde minimal nous assure que la trajectoire de l'état sera toujours dans l'ensemble pour toute perturbation  $n$  ( $n^T(k)n(k) \leq 1$ ), que les contraintes seront satisfaites, avec stabilité ISS garantie vis-à-vis d'une perturbation bornée. Enfin nous avons montré que lorsqu'un paramètre de Youla est utilisé pour robustifier un correcteur incluant une partie observateur on obtient un ensemble invariant positif robuste ayant une intersection minimale (projection maximale) plus petite (plus grande) que celle obtenue pour le système avec observateur seul, ce qui signifie que les perturbation ont moins d'influence sur le système asservi.

Les simulations temporelles montrent que le paramètre de Youla offre des résultats avec une commande plus douce. En traçant l'évolution de la commande pour un point initial situé à l'extérieur de l'ellipsoïde invariant correspondant au système avec observateur et à l'intérieur de l'ellipsoïde correspondant au système avec observateur et Youla, on a

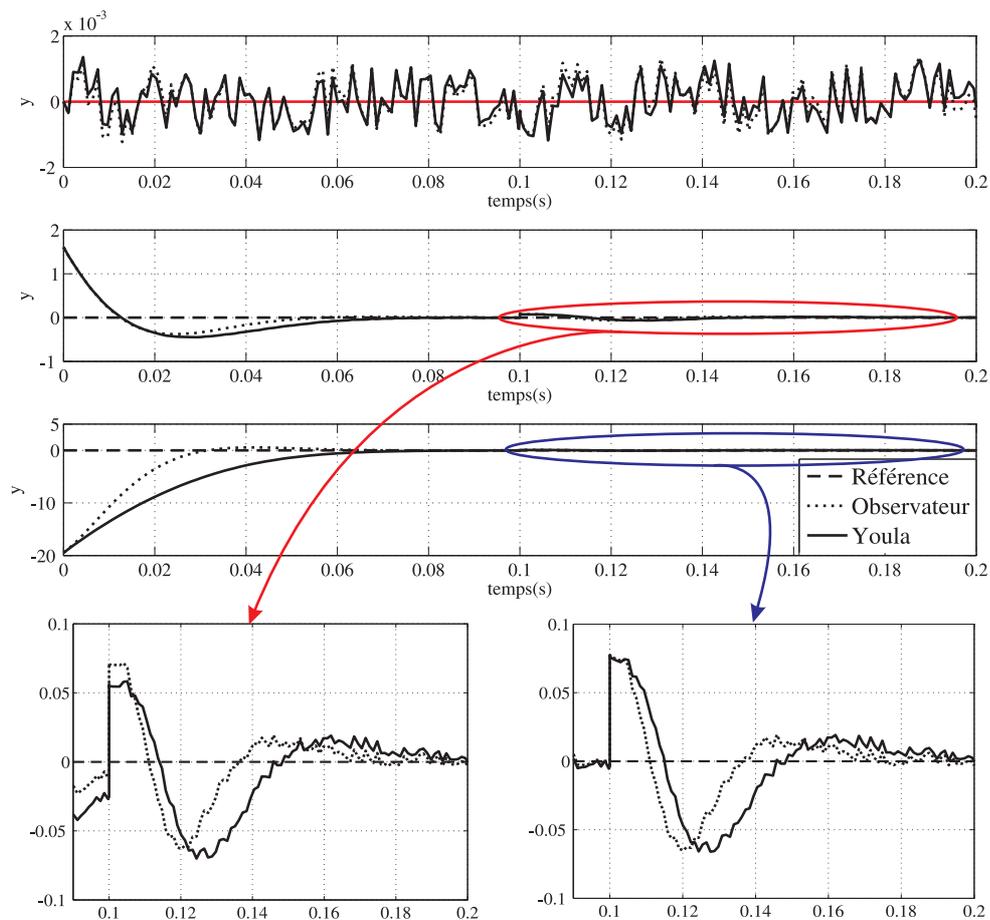


FIGURE 3.6: Evolution temporelle de la sortie.

vu que les contraintes ne sont pas satisfaites pour la dynamique du système avec observateur mais qu'elles sont satisfaites pour la dynamique du système avec observateur et Youla.

Cette constatation est parfaitement en accord avec les espaces invariants trouvés, puisque l'on a vu que pour le système avec le paramètre de Youla, l'espace de l'état dans lequel les contraintes sont satisfaites est plus grand. Tous ces outils développés ici pour l'analyse seront utilisés au chapitre suivant pour synthétiser un paramètre de Youla afin de robustifier un correcteur tenant compte de contraintes sur le processus.

### 3.2 Systèmes LPV à temps discret, sous contraintes et affectés par une perturbation bornée

Apparus au début des années 90 ([99], [100]), les systèmes linéaires à paramètres variables (LPV) ont reçu beaucoup d'attention par leur implication dans le traitement des

problèmes de synthèse non linéaires. Un système linéaire à paramètres variants est un système dont les matrices d'état sont des fonctions d'un certain vecteur de paramètres variant au cours du temps [82, 95, 109]. Si l'on fixe ces paramètres, le système redevient équivalent à un système LTI.

La présence de perturbations bornées permanentes impose l'utilisation de la notion de «stabilité entrée-état» (ISS) globale vis-à-vis d'une perturbation bornée. L'ISS implique que l'origine est un point asymptotiquement stable pour le système nominal, non-perturbé et que l'état converge vers un bassin d'attraction fini pour toute perturbation bornée et pour toutes les variations du paramètre possibles.

En reprenant la démarche et les outils mis en oeuvre au paragraphe 3.1, on considère ici l'analyse de l'ISS et de la robustesse d'un système LPV à temps discret affecté par de perturbations bornées et soumis à des contraintes. Nous donnerons tout d'abord les conditions suffisantes pour garantir l'ISS par rapport à une perturbation bornée puis nous calculerons l'ellipsoïde invariant maximal et minimal pour le système LPV. Ensuite, si l'état est estimé à l'aide d'un observateur la même démarche sera reprise. Nous rechercherons maintenant l'ellipsoïde ayant la projection maximale sur l'espace de l'état initial et l'ellipsoïde ayant l'intersection minimale avec l'espace de l'état initial. Afin d'augmenter la robustesse du système, un paramètre de Youla peut être élaboré. Ce paramètre permet de trouver un ellipsoïde invariant garantissant la satisfaction des contraintes et ayant une projection maximale plus grande par rapport à l'ensemble trouvé pour le système avec observateur.

Par rapport à l'étude des systèmes LTI, même si la démarche reste globalement la même, il convient, on le verra, de faire appel pour le cas LPV à une classe de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres pour montrer l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée.

### 3.2.1 Systèmes LPV à temps discret

Soit le système LPV à temps discret :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\theta(k))x(k) + Bu(k) + B_w w(k), \\ y(k) &= Cx(k) + D_v v(k), \end{aligned} \tag{3.80}$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  est l'état du système,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  est la commande,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie,  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  est la perturbation d'état,  $v(k) \in \mathbb{R}^{n_v}$  est la perturbation de sortie,  $\theta(k)$  est le vecteur de paramètres variables,  $A(\theta(k))$  est la matrice d'état dépendant de façon affine du paramètre variant  $\theta$ . Il est généralement admis que les valeurs des paramètres sont bornées.

Comme on peut l'observer, seule la matrice d'état  $A$  dépend du paramètre,  $B$  et  $C$  sont des matrices constantes. Ce choix a été fait pour éviter le produit non-convexe  $B(\theta(k))F(\theta(k))$  ou  $L(\theta(k))C(\theta(k))$  dans la représentation d'état augmentée du système avec observateur. Les résultats présentés dans ce mémoire peuvent être étendus à des matrices d'entrée et de sortie dépendantes des paramètre  $B(\theta(k))$  et  $C(\theta(k))$  en utilisant les relaxations proposées par [91].

La commande est donnée par :

$$u(k) = -F(\theta(k))x(k), \quad (3.81)$$

où  $F(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{m \times n_x}$  est un retour d'état à paramètre variant stabilisant.

Le paramètre variant  $\theta$  est discret, mesurable en temps réel, situé dans le polytope  $\Theta$  de sommets  $\theta_i, i = \overline{1, N}$  :

$$\theta(k) \in \Theta = Co\{\theta_1, \dots, \theta_N\}, \quad (3.82)$$

où  $Co$  représente l'enveloppe convexe.

En d'autres termes, si  $\theta(k) \in \Theta$  alors pour certains  $\lambda_i(k) \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1$ , on a  $\theta(k) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) \theta_i$ .

Il est clair que les matrices à paramètre variant  $A(\theta(k))$  et  $F(\theta(k))$  résident dans un polytope de matrices dont les sommets sont les images des sommets  $\theta_1, \dots, \theta_N$  :

$$[A(\theta(k)), F(\theta(k))] = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) [A_i, F_i]; [A_i, F_i] = [A(\theta_i), F(\theta_i)], \lambda_i(k) \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1 \right\}. \quad (3.83)$$

Le vecteur de bruits  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est supposé borné :

$$n^T(k)n(k) \leq 1 \quad (\text{d'où } w^T(k)w(k) \leq 1, v^T(k)v(k) \leq 1). \quad (3.84)$$

Le système en boucle fermée devient :

$$x(k+1) = A_{bf}(\theta(k))x(k) + B_w w(k), \quad (3.85)$$

où  $A_{bf}(\theta(k)) = A\theta(k) - BF(\theta(k))$ .

Le système en boucle fermée possède donc une description polytopique avec :

$$A_{bf}(\theta(k)) = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) A_{bf_i}; A_{bf_i} = A_{bf}(\theta_i), \lambda_i(k) \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1 \right\}. \quad (3.86)$$

Des bornes sur la norme Euclidienne de la commande  $u(k)$  sont prises en compte :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}. \quad (3.87)$$

L'ensemble ellipsoïdal a toujours la forme 3.6.

### 3.2.1.1 ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée

Dans cette section, nous donnons les conditions qui caractérisent la stabilité ISS du système LPV à temps discret en présence d'une perturbation bornée.

Bien que l'approche quadratique soit numériquement simple et admette une formulation de type LMI, bien souvent, elle peut mener à des résultats conservatifs, puisque une fonction de Lyapunov unique est employée pour garantir la stabilité en boucle fermée. Des conditions moins conservatrices d'analyse et de synthèse, basées sur des fonctions Lyapunov quadratiques par morceaux, sont présentées dans [26, 73, 86]. En général, l'approche est liée aux systèmes linéaires par morceaux (un mode de fonctionnement linéaire pour chaque région de l'espace d'état).

Parmi les premières contributions dans la construction de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres citons [24, 29, 32]. Des conditions suffisantes de type LMI pour la stabilité et stabilisabilité des systèmes LPV à temps discret utilisant des fonctions de Lyapunov dépendantes du paramètre ont été proposées dans [20].

**Théorème 3.11.** *Soit le système LPV à temps discret (3.85) affecté par des perturbations bornées (3.84). S'il existe  $P_i = P_i^T \succ 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ , et  $Q_{pi}$  (de rang plein) tels que :*

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 & \alpha P_i & A_{bf_i}^T Q_{pi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T Q_{pi}^T \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 \\ Q_{pi} A_{bf_i} & Q_{pi} B_w & 0 & Q_{pi}^T + Q_{pi} - P_j \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N} \quad (3.88)$$

et

$$\alpha \geq \beta, \quad (3.89)$$

le système est stable en termes entrée-état par rapport à la perturbation bornée.

*Démonstration.* Suivant les idées de [20] (voir aussi Section 3.3.1) on choisie une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre :

$$V(k) = x(k)^T P(\theta(k))x(k) \succ 0, \quad (3.90)$$

avec  $P(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k)P_i$ ,  $\sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1$ ,  $\lambda_i(k) \geq 0$ ,  $P_i = P(\theta_i)$ ,  $P_i = P_i^T = G_i^{-1} \succ 0$ .

Nous pouvons définir :

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) = \\ &= x(k+1)^T P(\theta(k+1))x(k+1) - x(k)^T P(\theta(k))x(k) = \\ &= \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T \mathcal{P}_+ \mathcal{A} - \mathcal{P} & \mathcal{A}^T \mathcal{P}_+ B_w \\ B_w^T \mathcal{P}_+ \mathcal{A} & B_w^T \mathcal{P}_+ B_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{A} = A_{bf}(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k)A_{bfi}$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= P(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k)P_i, \\ \mathcal{P}_+ &= P(\theta(k+1)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k+1)P_i = \sum_{j=1}^N \lambda_j(k)P_j \end{aligned} \quad (3.91)$$

où  $\mathcal{P}$  correspond à la fonction de Lyapunov à l'instant  $k$  et  $\mathcal{P}_+$  correspond à la fonction de Lyapunov à l'instant  $k+1$ . En fonction de la dynamique du système,  $\mathcal{P}$  peut être différent ou identique à  $\mathcal{P}_+$ .

Le système LPV est ISS par rapport à une perturbation (3.84) si les conditions stipulées dans la Section 2.5, lemme 2.17 sont satisfaites.

La condition (2.29) est satisfaite pour  $\alpha_1 = \psi \|x\|$  ( $\psi$  un scalaire positif, suffisamment petit) et  $\alpha_2 = \sum_{i=1}^N \lambda_{max}(P_i) \|x\|$ .

Ensuite, nous montrons que si :

$$\Delta V(k) < 0, \quad (3.92)$$

pour tout  $x(k)$  et  $w(k)$  satisfaisant :

$$x(k)^T \mathcal{P}x(k) \geq 1 \text{ et } w^T(k)w(k) \leq 1 \quad (3.93)$$

la condition (2.30) est obtenue.

Avec la S-procédure ([11], [13] pp.82-84, Section 2.8) on obtient que (3.93) implique (3.92) si il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$  tel que :

$$\mathcal{L} = \Delta V(k) - \alpha(1 - x^T \mathcal{P}x) - \beta(w^T(k)w(k) - 1) < 0. \quad (3.94)$$

Pour  $\alpha \geq \beta$  ([13] pp.82-84), (3.94) peut s'écrire comme dans (2.30) avec  $\alpha_3 = \alpha \vartheta \|x\|$  ( $\vartheta$  un scalaire positif, suffisamment petit) et  $\delta = \beta$ .

En revenant à (3.94) on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} - \mathcal{A}^T \mathcal{P}_+ \mathcal{A} & -\mathcal{A}^T \mathcal{P}_+ B_w \\ -B_w^T \mathcal{P}_+ \mathcal{A} & -B_w^T \mathcal{P}_+ B_w \end{bmatrix} \succ \begin{bmatrix} \alpha \mathcal{P} & 0 \\ 0 & -\beta I \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \mathcal{P} & \mathcal{A}^T \mathcal{P}_+ \\ 0 & B_w^T \mathcal{P}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \mathcal{P} & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \mathcal{P} & 0 \\ \mathcal{P}_+ \mathcal{A} & \mathcal{P}_+ B_w \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.96)$$

En appliquant le complément de Schur, (3.96) devient :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 & \alpha \mathcal{P} & \mathcal{A}^T \mathcal{P}_+ \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \mathcal{P}_+ \\ \alpha \mathcal{P} & 0 & \alpha \mathcal{P} & 0 \\ \mathcal{P}_+ \mathcal{A} & \mathcal{P}_+ B_w & 0 & \mathcal{P}_+ \end{bmatrix} = \mathcal{V} \succ 0, \quad (3.97)$$

$$\alpha - \beta \geq 0. \quad (3.98)$$

Ensuite on va montrer que les conditions données lors du théorème 3.11 sont des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction de Lyapunov ayant la forme (3.90).

Pour prouver la suffisance, supposons que la condition (3.88) soit faisable. Alors :

$$Q_{pi} + Q_{pi}^T - P_j \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (3.99)$$

Les matrices  $Q_{pi}$  sont des matrices de rang plein, pas nécessairement symétriques, introduites pour permettre de considérer une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre et réduire le conservatisme (pour relaxer les inégalités matricielles).

Comme  $Q_{pi}$  est une matrice de rang plein et  $P_j = P_j^T \succ 0, j = \overline{1, N}$ , en pré et post-multiplicant  $P_j^{-1}$  avec  $(Q_{pi} - P_j)$  et  $(Q_{pi}^T - P_j)$ , respectivement, nous obtenons :

$$(Q_{pi} - P_j) P_j^{-1} (Q_{pi}^T - P_j) \succeq 0 \quad (3.100)$$

équivalent à :

$$Q_{pi} P_j^{-1} Q_{pi}^T \succeq Q_{pi} + Q_{pi}^T - P_j, \quad (3.101)$$

On voit ici la nécessité de rang plein pour  $Q_{pi}$ .

L'inégalité (3.88) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 & \alpha P_i & A_{bfi}^T Q_{pi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T Q_{pi}^T \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 \\ Q_{pi} A_{bfi} & Q_{pi} B_w & 0 & Q_{pi} P_j^{-1} Q_{pi}^T \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.102)$$

équivalente à :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{pi} P_j^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & 0 & \alpha P_i & A_{bfi}^T P_j \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T P_j \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 \\ P_j A_{bfi} & P_j B_w & 0 & P_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_j^{-1} Q_{pi}^T \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.103)$$

qui revient à :

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 & \alpha P_i & A_{bfi}^T P_j \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T P_j \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 \\ P_j A_{bfi} & P_j B_w & 0 & P_j \end{bmatrix} = Q_{ij} \succ 0, \quad (3.104)$$

pour tout  $i, j = \overline{1, N}$ . Pour chaque  $i$ , il faut multiplier les inégalités correspondant à  $j = \overline{1, N}$  par  $\lambda_j$ , puis sommer. Ensuite, il faut multiplier les  $i = \overline{1, N}$  inégalités résultantes par  $\lambda_i$  et puis sommer pour obtenir (3.97).

Avec ces notations, on a maintenant :

$$\mathcal{V}(k) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) \left( \sum_{j=1}^N \lambda_j(k) Q_{ij} \right), \quad (3.105)$$

qui est une forme quadratique décroissante définie positive selon la positivité des matrices constantes  $Q_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, N}$  et les valeurs du paramètre  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ . Il en résulte que  $\mathcal{L} < 0$  et donc  $\Delta V < 0$  pour tout  $x$ ,  $x^T(k) \mathcal{P} x(k) \geq 1$  et toute perturbation  $w$ ,  $w^T(k) w(k) \leq 1$ .

Pour prouver la nécessité, supposons que la fonction  $\mathcal{L}$  est une fonction décroissante définie négative, alors (3.95) est satisfaite. Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} P_i - A_{bfi}^T P_j A_{bfi} - \alpha P_i & -A_{bfi}^T P_j B_w \\ -B_w^T P_j A_{bfi} & \beta I - B_w^T P_j B_w \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.106)$$

pour tout  $i, j = \overline{1, N}$ .

Cette dernière inégalité peut encore s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} P_i - A_{bfi}^T P_j A_{bfi} & -A_{bfi}^T P_j B_w \\ -B_w^T P_j A_{bfi} & \beta I - B_w^T P_j B_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha P_i \\ 0 \end{bmatrix} (\alpha P_i)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha P_i & 0 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.107)$$

équivalente à :

$$\begin{bmatrix} P_i - A_{bfi}^T P_j A_{bfi} & -A_{bfi}^T P_j B_w & \alpha P_i \\ -B_w^T P_j A_{bfi} & \beta I - B_w^T P_j B_w & 0 \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i \end{bmatrix} = T_{ij} \succ 0 \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (3.108)$$

Comme  $P_j \succ 0$ , pour n'importe quel scalaire positif  $g_i$  on a  $P_j + 2g_i I \succ 0$  et implicitement  $(P_j + 2g_i I)^{-1} \succ 0$ . Sachant que  $A_{bfi}$  sont des matrices Hurwitz, il résulte que :

$$\begin{bmatrix} A_{bfi}^T \\ B_w^T \\ 0 \end{bmatrix} (P_j + 2g_i I)^{-1} \begin{bmatrix} A_{bfi} & B_w & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (3.109)$$

Comme  $T_{ij} \succ 0$ , il existe donc toujours un scalaire  $g_i > 0$  suffisamment petit tel que :

$$T_{ij} \succ \begin{bmatrix} A_{bfi}^T \\ B_w^T \\ 0 \end{bmatrix} g_i (P_j + 2g_i I)^{-1} g_i \begin{bmatrix} A_{bfi} & B_w & 0 \end{bmatrix} \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (3.110)$$

Avec le complément de Schur cela revient à écrire :

$$\begin{bmatrix} P_i - A_{bfi}^T P_j A_{bfi} & -A_{bfi}^T P_j B_w & \alpha P_i & -A_{bfi}^T g_i \\ -B_w^T P_j A_{bfi} & \beta I - B_w^T P_j B_w & 0 & -B_w^T g_i \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 \\ -g_i A_{bfi} & -g_i B_w & 0 & P_j + 2g_i I \end{bmatrix} \succ 0 \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (3.111)$$

Pour  $Q_{pi} = P_j + g_i I$ , (3.111) n'est rien d'autre que :

$$\begin{bmatrix} P_i - A_{bfi}^T P_j A_{bfi} & -A_{bfi}^T P_j B_w & \alpha P_i & -A_{bfi}^T Q_{pi} + A_{bfi}^T P_j \\ -B_w^T P_j A_{bfi} & \beta I - B_w^T P_j B_w & 0 & -B_w^T Q_{pi} + B_w^T P_j \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 \\ -Q_{pj}^T A_{bfi} + P_j A_{bfi} & -Q_{pj}^T B_w + P_j B_w & 0 & Q_{pi} + Q_{pi}^T - P_j \end{bmatrix} \succ 0 \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (3.112)$$

La dernière inégalité est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -A_{bfi}^T \\ 0 & I & 0 & -B_w^T \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & 0 & \alpha P_i & A_{bfi}^T Q_{pj}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T Q_{pj}^T \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 \\ Q_{pi} A_{bfi} & -Q_{pi} B_w & 0 & Q_{pi} + Q_{pi}^T - P_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ -A_{bfi} & B_w^T & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.113)$$

$i, j = \overline{1, N}$ , d'où il résulte (3.88).  $\square$

Un théorème alternatif donnant l'ISS par rapport à une perturbation bornée est le suivant. Ce théorème sera utilisé par la suite, mais pour ne pas alourdir la présentation du chapitre, sa démonstration est donnée en Annexe B.

**Théorème 3.12.** *Soit le système LPV à temps discret (3.85) affecté par de perturbations bornées (3.84). S'il existe  $G_i = G_i^T \succ 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ , et  $Q_{gi}$  tels que :*

$$\begin{bmatrix} Q_{gi}^T + Q_{gi} - G_i & 0 & \alpha Q_{gi}^T & Q_{gi}^T A_{bfi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \\ \alpha Q_{gi} & 0 & \alpha G_i & 0 \\ A_{bfi} Q_{gi} & B_w & 0 & G_j \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N} \quad (3.114)$$

et

$$\alpha \geq \beta. \quad (3.115)$$

le système est stable en termes entrée-état par rapport à la perturbation bornée.

*Démonstration.* Pour ne pas alourdir la lecture la preuve sera donnée en Annexe B.  $\square$

Quelle que soit la façon sous laquelle le problème de stabilisation est formulé, 3.11 ou 3.12, pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = N \frac{(n_x)(n_x + 1)}{2} + N n_x^2 + 1. \quad (3.116)$$

*Remarque 3.13.* Comme prévu, l'introduction des matrices supplémentaires multiplie le nombre de variables scalaires de décision. Pour cela il faut préciser que dans ce mémoire on a donné la forme générale pour les inégalités matricielles garantissant l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée. Une fonction de Lyapunov unique ou une seule matrice supplémentaire peuvent être considérées si souhaité ou si possible (en réalité, il y a des systèmes LPV qui ne peuvent pas être stabilisés à l'aide d'une loi de commande par retour d'état qui ne dépend pas du paramètre).

### 3.2.1.2 Motivation pour l'introduction des matrices supplémentaires

Les matrices supplémentaires  $Q_{pi}$  ou  $Q_{gi}$  permettent de considérer des fonctions de Lyapunov dépendantes du paramètre. Le but de ces matrices supplémentaires est de remplacer les produits  $P_i A_{bfi}$  et  $A_{bfi} G_i$  par  $Q_{pi} A_{bfi}$  et  $A_{bfi} Q_{gi}$ . Les matrices  $P(\theta(k))$  et  $A_{bf}(\theta(k))$  ont la propriété :

$$\begin{aligned} P(\theta(k)) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) P_i, \\ A_{bf}(\theta(k)) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) A_{bfi} \end{aligned} \quad (3.117)$$

propriété que n'implique pas :

$$P(\theta(k)) A_{bf}(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) P_i A_{bfi}, \quad (3.118)$$

d'où la nécessité d'introduire une matrice supplémentaire qui permet à la fois de considérer une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre et introduit des degrés de liberté réduisant le conservatisme.

Les matrices  $Q_{pi}$  ou  $Q_{gi}$  ne dépendent pas du paramètre et elle ne sont même pas symétriques. Cette nouvelle condition fournit de meilleurs résultats que l'ISS classique (fonction de Lyapunov unique).

Sans compter l'utilisation d'une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre, l'introduction des matrices supplémentaires montre une sorte de découplage entre la fonction de Lyapunov et les matrices du système qui peut être exploré pour la synthèse d'une loi de commande.

Pour une vision plus profonde sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendantes du paramètre et l'introduction des matrices supplémentaires nous renvoyons le lecteur vers [80].

### 3.2.1.3 Ellipsoïde minimal

Dans cette section nous recherchons l'ensemble invariant minimal (la plus petite région de l'état où l'invariance est satisfaite malgré la présence de perturbation et le caractère LPV du système). Cet ellipsoïde contiendra les ellipsoïdes minimaux correspondant à tous les variations du paramètre possibles.

**Théorème 3.14.** *Soit le système LPV à temps discret (3.85) soumis à des contraintes sur la commande (3.87) et affecté par de perturbations bornées (3.84). L'ellipsoïde*

invariant minimal pour toute variation du paramètre possible est donné par :

$$\min_{P=P^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0, Q_{pi}} -\log \det(P) \quad (3.119)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} P & 0 & \alpha P & A_{bfi}^T Q_{pi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T Q_{pi}^T \\ \alpha P & 0 & \alpha P & 0 \\ Q_{pi} A_{bfi} & Q_{pi} B_w & 0 & Q_{pi}^T + Q_{pi} - P \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.120)$$

$$\alpha \geq \beta, \quad (3.121)$$

et

$$\begin{bmatrix} P & F_i^T \\ F_i & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.122)$$

*Démonstration.* Comme la condition de stabilité implique l'invariance, l'inégalité (3.120) (responsable avec l'invariance) est en fait donnée par (3.88). La démonstration est donc la même. La seule différence est que dans ce cas nous considérons un  $P_i = P$  unique (qui ne dépend pas du paramètre) car on recherche maintenant le plus petit ellipsoïde contenant l'union des ellipsoïdes invariants minimaux correspondant à chaque variation du paramètre.

Pour minimiser l'ellipsoïde contenant cette union le critère classique  $-\log \det(P)$  est utilisé.

Pour les contraintes sur la commande, nous avons :

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \|F(\theta(k))x(k)\|_2^2 \leq \|F(\theta(k))P^{-1/2}\|_2^2 \|P^{1/2}x(k)\|_2^2 = \\ &= \lambda_{max}(F(\theta(k))P^{-1}F(\theta(k))^T)(x(k)^T P x(k)) \leq \\ &\leq \lambda_{max}(F(\theta(k))P^{-1}F(\theta(k))^T). \end{aligned}$$

En appliquant le complément de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} P & F(\theta(k))^T \\ F(\theta(k)) & u_{max}^2 I \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \begin{bmatrix} P & F_i^T \\ F_i & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.123)$$

qui est satisfaite si la LMI (3.122) est satisfaite pour tout  $i = \overline{1, N}$ .

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = \frac{(n_x)(n_x + 1)}{2} + N n_x^2 + 1. \quad (3.124)$$

□

*Remarque 3.15.* Il peut y avoir des situations où l'ellipsoïde invariant minimal global (pour le système LPV) n'existe pas même si les ellipsoïdes invariants minimaux correspondant à chaque variation du paramètre existent tous. Ces types de situations sont possibles car l'ellipsoïde invariant minimal global est le plus petit ellipsoïde contenant l'union des ellipsoïdes invariants minimaux correspondant à chaque variation du paramètre. Donc si les contraintes sont trop fortes et/ou les perturbations sont trop importantes et/ou le système a une dynamique très rapide un tel ellipsoïde peut ne pas satisfaire les contraintes et donc le problème est infaisable.

Même si on n'est pas obligé à considérer des matrices supplémentaires pour chaque sommet, on le fera comme même afin de réduire le conservatisme.

### 3.2.1.4 Ellipsoïde maximal

La détermination de l'ellipsoïde invariant maximal s'effectue par l'intermédiaire du théorème suivant.

**Théorème 3.16.** *Soit le système LPV à temps discret (3.85), l'ellipsoïde invariant maximal satisfaisant les contraintes sur la commande (3.87) malgré la présence de perturbations bornées (3.84) est donné par :*

$$\min_{G=G^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0, Q_{gi}} -\log \det(G) \quad (3.125)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} Q_{gi}^T + Q_{gi} - G & 0 & \alpha Q_{gi}^T & Q_{gi}^T A_{bfi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \\ \alpha Q_{gi} & 0 & \alpha G & 0 \\ A_{bfi} Q_{gi} & B_w & 0 & G \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.126)$$

$$\alpha \geq \beta \quad (3.127)$$

et

$$\begin{bmatrix} Q_{gi}^T + Q_{gi} - G & Q_{gi}^T F_i^T \\ F_i Q_{gi} & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.128)$$

*Démonstration.* L'inégalité (3.126) est obtenue de la même manière que (3.114) où on considère un  $G_i = G$  invariant unique. L'ellipsoïde recherché donnée par  $G$  est l'ellipsoïde invariant maximal situé à l'intérieur de l'intersection de tous les ellipsoïdes invariants maximaux correspondant à chaque variation du paramètre. Pour maximiser l'ellipsoïde situé à l'intérieur de cette intersection, le critère classique  $\min -\log \det(G)$  est utilisé.

A la différence du cas avec incertitudes paramétriques (sans perturbations) [28] où la décroissance de la fonction de Lyapunov est assurée aussi à l'intérieur des ellipsoïdes

invariants, ici cette décroissance n'est pas assurée (on ne connaît pas la monotonie de la fonction de Lyapunov à l'intérieur des ellipsoïdes invariants), c'est pour cela qu'on doit imposer une fonction de Lyapunov unique  $P = P^T = G^{-1} \succ 0$ . Par contre, les matrices  $Q_{gi}$  sont différentes pour chaque sommet.

La LMI garantissant la satisfaction des contraintes est obtenue en pré- et post-multipliant la LMI (3.122) par  $\text{diag}(Q_{gi}^T, I)$  et  $\text{diag}(Q_{gi}, I)$  respectivement. Comme  $(Q_{gi}^T - P^{-1})P(Q_{gi} - P^{-1}) \succeq 0$  alors la relaxation  $Q_{gi}^T P Q_{gi} \succeq Q_{gi} + Q_{gi}^T - P^{-1}$  peut être faite, conduisant à la LMI (3.128) où  $G = G^T = P^{-1} \succ 0$ .

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est donné par 3.124.  $\square$

### 3.2.2 Système LPV avec observateur

Ce paragraphe a pour but d'étendre les démarches et résultats précédents au cas de systèmes LPV pour lesquels l'état est reconstruit par un observateur.

Soit le système LPV à temps discret (3.80) avec un observateur à paramètre variant introduit pour estimer l'état :

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A(\theta(k))\hat{x}(k) + Bu(k) + L(\theta(k))(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k),\end{aligned}\quad (3.129)$$

$\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  est l'état estimé du système,  $L(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{n_x \times p}$  est le gain à paramètre variant de l'observateur et  $\theta(k) \in \Theta = \text{Co}\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  est le paramètre variant mesurable en temps réel :

$$\theta(k) = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) \theta_i; \lambda_i(k) \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1 \right\}. \quad (3.130)$$

La loi de commande est donnée par :

$$u(k) = -F(\theta(k))\hat{x}(k), \quad (3.131)$$

où  $F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{m \times n_x}$  est un retour d'état à paramètre variant.

Les matrices à paramètre variant ( $A\theta(k)$ ,  $F\theta(k)$ ,  $L\theta(k)$ ) prennent leurs valeurs dans un polytope de matrices ayant comme sommets l'image de sommets de  $\Theta = \text{Co}\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  :

$$[A(\theta(k)), F(\theta(k)), L(\theta(k))] \in \text{Co} \{ [A_i, F_i, L_i] = [A(\theta_i), F(\theta_i), L(\theta_i)] , i = \overline{1, N} \}, \quad (3.132)$$

$$[A(\theta(k)), F(\theta(k)), L(\theta(k))] = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) [A(\theta_i), F(\theta_i), L(\theta_i)]; \lambda_i(k) \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1 \right\}. \quad (3.133)$$

Pour le système avec l'observateur, il faut alors considérer la représentation de l'état augmentée suivante :

$$x_o(k+1) = A_o(\theta(k))x_o(k) + B_o(\theta(k))n(k), \quad (3.134)$$

où :

$$x_o(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon(k) = x(k) - \hat{x}(k) \text{ est l'erreur d'estimation, } n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \text{ le}$$

vecteur qui réunit la perturbation d'état et la perturbation de mesure,  $A_o(\theta(k)) =$

$$= \begin{bmatrix} A(\theta(k)) - BF(\theta(k)) & BF(\theta(k)) \\ 0 & A(\theta(k)) - L(\theta(k))C \end{bmatrix} \text{ et } B_o(\theta(k)) = \begin{bmatrix} B_w & 0 \\ B_w & -L(\theta(k))D_v \end{bmatrix}. \quad (3.135)$$

La loi de commande à paramètre variant peut s'écrire sous la forme :

$$u(k) = -F_o(\theta(k)) \cdot x_o(k) \quad (3.136)$$

avec  $F_o(\theta(k)) = \begin{bmatrix} F(\theta(k)) & -F(\theta(k)) \end{bmatrix}$ .

Le système augmenté admet également une description polytopique avec :

$$[A_o(\theta(k)), B_o(\theta(k)), F_o(\theta(k))] \in \text{Co}\{[A_{oi}, B_{oi}, F_{oi}] = [A_o(\theta_i), B_o(\theta_i), F_o(\theta_i)], i = \overline{1, N}\}, \quad (3.137)$$

$$[A_o(\theta(k)), B_o(\theta(k)), F_o(\theta(k))] = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) [A_o(\theta_i), B_o(\theta_i), F_o(\theta_i)]; \right. \\ \left. \lambda_i(k) \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1 \right\}. \quad (3.138)$$

Le vecteur de bruit est considéré borné :

$$n^T(k)n(k) \leq 1, \quad (3.139)$$

et la loi de commande est soumise aux contraintes :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}. \quad (3.140)$$

L'ensemble ellipsoïdal dans l'espace augmenté est défini par 3.37. L'intersection ellipsoïdale avec le sous-espace  $x$  a l'expression 3.42 et la projection ellipsoïdale sur le sous-espace  $x$  est 3.43.

### 3.2.2.1 ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée

Pour un système LPV avec observateur et affecté par de perturbations d'entrée et de mesure, élaborons ci-dessous les conditions suffisantes pour garantir l'ISS vis-à-vis de ces perturbations.

**Théorème 3.17.** *Soit le système LPV à temps discret avec observateur (3.134) et affecté par de perturbations bornées (3.139). S'il existe  $P_{oi} = P_{oi}^T \succ 0$  ou  $G_{oi} = G_{oi}^T \succ 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ , et  $Q_{poi}$  ou  $Q_{goi}$  tels que :*

$$\begin{bmatrix} P_{oi} & 0 & \alpha P_{oi} & A_{oi}^T Q_{poi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_{oi}^T Q_{poi}^T \\ \alpha P_{oi} & 0 & \alpha P_{oi} & 0 \\ Q_{poi} A_{oi} & Q_{poi} B_{oi} & 0 & Q_{poi}^T + Q_{poi} - P_{oj} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.141)$$

ou

$$\begin{bmatrix} Q_{goi}^T + Q_{goi} - G_{oi} & 0 & \alpha Q_{goi}^T & Q_{goi}^T A_{oi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_{oi}^T \\ \alpha Q_{goi} & 0 & \alpha G_{oi} & 0 \\ A_{oi} Q_{goi} & B_{oi} & 0 & G_{oj} \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N} \quad (3.142)$$

avec

$$\alpha \geq \beta, \quad (3.143)$$

le système est ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée.

*Démonstration.* En considérant une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre  $V_o = x_o^T(k) P_o(\theta(k)) x_o(k)$ , avec  $P_o(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i P_{oi}$ ,  $P_{oi} = P_{oi}^T = G_{oi} \succ 0$ , les inégalités (3.141) et (3.142) sont obtenues d'une manière analogue à (3.88) et (3.114), respectivement, en remplaçant  $A_{bfi}$ ,  $B_w$ ,  $P_i$ ,  $G_i$ ,  $Q_{pi}$  et  $Q_{gi}$  par  $A_{oi}$ ,  $B_{oi}$ ,  $P_{oi}$ ,  $G_{oi}$ ,  $Q_{poi}$  et  $Q_{goi}$ . Les inégalités (3.141), (3.142) et (3.143) sont équivalentes.

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = N \frac{(2n_x)(2n_x + 1)}{2} + 4Nn_x^2 + 1. \quad (3.144)$$

□

Ce théorème sera utilisé par la suite au chapitre 4 pour la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur.

### 3.2.2.2 Intersection ellipsoïdale minimale

Le théorème offrant l'intersection ellipsoïdale minimale est donné en Annexe A. Ce choix a été fait pour ne pas alourdir la lecture de ce mémoire.

*Remarque 3.18.* Comme l'intersection ellipsoïdale minimale est située à l'extérieur de l'union de toutes les intersections correspondant à chaque variation du paramètre, un tel ellipsoïde peut ne pas exister si les contraintes sont trop fortes et/ou les perturbations sont trop importantes et/ou le système a une dynamique très rapide.

### 3.2.2.3 Projection ellipsoïdale maximale

Pour obtenir l'ellipsoïde invariant ayant la projection maximale, considérons le théorème suivant.

**Théorème 3.19.** *Soit le système LPV à temps discret, avec l'état estimé au moyen d'un observateur (3.134) et affecté par de perturbations bornées (3.139). L'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes sur la commande (3.140) et ayant la projection maximale sur le sous-espace de l'état  $x$  est obtenu en résolvant :*

$$\min_{G_o=G_o^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0, Q_{goi}} -\log \det(ZG_oZ^T) \quad (3.145)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} Q_{goi}^T + Q_{goi} - G_o & 0 & \alpha Q_{goi}^T & Q_{goi}^T A_{oi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_{oi}^T \\ \alpha Q_{goi} & 0 & \alpha G_o & 0 \\ A_{oi} Q_{goi} & B_{oi} & 0 & G_o \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.146)$$

$$\alpha \geq \beta \quad (3.147)$$

et

$$\begin{bmatrix} Q_{goi}^T + Q_{goi} - G_o & Q_{goi}^T F_{oi}^T \\ F_{oi} Q_{goi} & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.148)$$

*Démonstration.* Les inégalités (3.146) et (3.148) sont obtenues d'une manière analogue à (3.126) et (3.128), respectivement, en remplaçant  $A_{bfi}$ ,  $B_w$ ,  $Q_{gi}$ ,  $G$  et  $F_i$  par  $A_{oi}$ ,  $B_{oi}$ ,  $Q_{goi}$ ,  $G_o$  et  $F_{oi}$ .

On recherche, comme précédemment, l'ellipsoïde ayant une projection maximale située à l'intérieur de l'intersection de toutes les projections maximales relatives à chaque variation du paramètre.

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = \frac{(2n_x)(2n_x + 1)}{2} + 4Nn_x^2 + 1. \quad (3.149)$$

□

### 3.2.3 Systèmes LPV avec observateur et paramètre de Youla

Soit le système LPV à temps discret avec observateur (3.134). Un paramètre de Youla à paramètre variant est inséré dans la boucle fermée afin d'améliorer la robustesse :

$$\begin{aligned} x_Q(k+1) &= A_Q(\theta(k))x_Q(k) + B_Q(\theta(k))\tilde{y}(k), \\ \tilde{u}(k) &= C_Q(\theta(k))x_Q(k) + D_Q(\theta(k))\tilde{y}(k), \\ \tilde{y}(k) &= y(k) - \hat{y}(k), \end{aligned} \quad (3.150)$$

où  $x_Q \in \mathbb{R}^{n_Q}$  est l'état de Youla,  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$  est la sortie,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^p$  est l'entrée,  $A_Q(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{n_Q \times n_Q}$ ,  $B_Q(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{n_Q \times p}$ ,  $C_Q(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{m \times n_Q}$ ,  $D_Q(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  sont les matrices d'état à paramètre variant et  $\theta(k)$  est le paramètre variant mesurable en temps réel.

La loi de commande a désormais la forme :

$$u(k) = -F(\theta(k))\hat{x}(k) - \tilde{u}(k). \quad (3.151)$$

Pour cette loi de commande nous considérons les contraintes :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}. \quad (3.152)$$

Le vecteur de bruit  $n = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$  est borné :

$$n^T n \leq 1. \quad (3.153)$$

La Figure 3.7 présente la structure par bloc du système avec le paramètre de Youla.

Quand la paramétrisation de Youla est prise en compte, la représentation d'état augmentée suivante est choisie :

$$x_y(k+1) = A_y(\theta(k))x_y(k) + B_y(\theta(k))n(k) \quad (3.154)$$

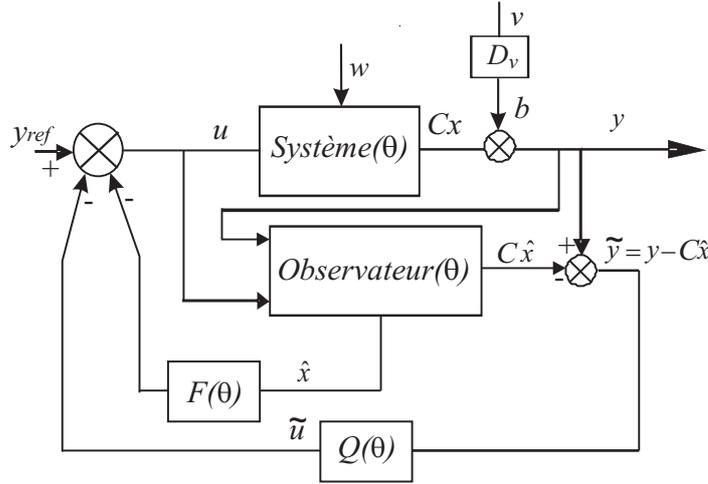


FIGURE 3.7: Correcteur dans l'espace d'état avec paramétrisation de Youla à paramètre variant.

où :

$$x_y(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \varepsilon(k) \\ x_Q(k) \end{bmatrix}, B_y(\theta(k)) = \begin{bmatrix} B_w & -BD_Q(\theta(k))D_v \\ B_w & -L(\theta(k))D_v \\ 0 & B_Q(\theta(k))D_v \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$A_y(\theta(k)) = \begin{bmatrix} A(\theta(k)) - BF(\theta(k)) & BF(\theta(k)) - BD_Q(\theta(k))C & -BC_Q(\theta(k)) \\ 0 & A(\theta(k)) - L(\theta(k))C & 0 \\ 0 & B_Q(\theta(k))C & A_Q(\theta(k)) \end{bmatrix}. \quad (3.155)$$

La commande devient :

$$u(k) = -F_x(\theta(k)) \cdot x_y(k) - F_n \cdot n(k) \quad (3.156)$$

avec :  $F_x(\theta(k)) = \begin{bmatrix} F(\theta(k)) & -F(\theta(k)) + D_Q(\theta(k))C & C_Q(\theta(k)) \\ 0 & D_Q(\theta(k))D_v \end{bmatrix}$  et  $F_n(\theta(k)) =$

Le système augmenté possède alors une description polytopique :

$$[A_y(\theta(k)), B_y(\theta(k)), F_x(\theta(k)), F_n(\theta(k))] \in \text{Co}\{[A_{yi}, B_{yi}, F_{xi}, F_{ni}] =$$

$$= [A_y(\theta_i), B_y(\theta_i), F_x(\theta_i), F_n(\theta_i)], i = \overline{1, N}\},$$

$$[A_y(\theta(k)), B_y(\theta(k)), F_x(\theta(k)), F_n(\theta(k))] = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) [A_y(\theta_i), B_y(\theta_i), F_x(\theta_i), F_n(\theta_i)]; \right.$$

$$\left. \lambda_i(k) \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1 \right\}. \quad (3.157)$$

Pour un ensemble ellipsoïdal donné par la relation 3.56 l'intersection ellipsoïdale avec le sous-espace  $x$  à l'expression 3.59 et la projection sur le sous-espace  $x$  est 3.58

### 3.2.3.1 ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée

Pour un système LPV avec observateur et paramétrisation de Youla, comme les conditions suffisantes garantissant l'ISS par rapport à une perturbation bornée sont obtenues de manière similaire au cas sans paramétrisation de Youla, celles-ci seront données en Annexe A.

### 3.2.3.2 Intersection ellipsoïdale minimale

Suivant toujours le même plan que lors des paragraphes précédents, on se propose de calculer l'intersection minimale de l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes. Comme ce théorème ne sera pas utilisé dans la suite de ce mémoire, il sera donné en Annexe A.

### 3.2.3.3 Projection ellipsoïdale maximale

Pour terminer, examinons enfin le théorème donnant la projection maximale.

**Théorème 3.20.** *Soit le système LPV à temps discret, avec l'état estimé au moyen d'un observateur, la robustesse assurée à travers un paramètre de Youla (3.154) et affecté par de perturbations bornées (3.153). L'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes (3.152) et ayant la projection maximale est donné par l'optimisation :*

$$\min_{G_y = G_y^T > 0, \alpha > 0, \beta \geq 0, Q_{gyi}} -\log \det(TG_y T^T) \quad (3.158)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} Q_{gyi}^T + Q_{gyi} - G_y & 0 & \alpha Q_{gyi}^T & Q_{gyi}^T A_{yi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_{yi}^T \\ \alpha Q_{gyi} & 0 & \alpha G_y & 0 \\ A_{yi} Q_{gyi} & B_{yi} & 0 & G_y \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.159)$$

$$\alpha \geq \beta \quad (3.160)$$

et

$$\begin{bmatrix} Q_{gyi}^T + Q_{gyi} - G_y & Q_{gyi}^T F_{xi}^T & 0 \\ F_{xi} Q_{gyi} & u_{max}^2 I & F_{ni} \\ 0 & F_{ni}^T & I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.161)$$

*Démonstration.* L'inégalité (3.159) est obtenue d'une manière analogue à (3.126) en remplaçant  $A_{bfi}$ ,  $B_w$ ,  $Q_{gi}$  et  $G$  par  $A_{yi}$ ,  $B_{yi}$ ,  $Q_{gyi}$  et  $G_y$ .

La LMI (3.161) est obtenue en pré- et post-multipliant la LMI (A.21) par  $\text{diag}(Q_{gi}^T, I)$  et  $\text{diag}(Q_{gi}, I)$  avec la relaxation  $Q_{gvi}^T P_y Q_{gvi} \succeq Q_{gvi} + Q_{gvi}^T - P_y^{-1}$  et la notation  $G_y = G_y^T = P_y^{-1} \succ 0$ .

Enfin, on recherche toujours l'ellipsoïde ayant une projection maximale située à l'intérieur de l'intersection de toutes les projections maximales relatives à chaque variation du paramètre.

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = \frac{(2n_x + n_Q)(2n_x + n_Q + 1)}{2} + N(2n_x + n_Q)^2 + 1. \quad (3.162)$$

□

### 3.2.4 Mise en oeuvre sur un exemple

Considérons un exemple académique pour valider les résultats théoriques obtenus dans cette section. Soit le système LPV :

$$\begin{aligned} \psi(k+1) &= A_p(\theta(k))\psi(k) + B_p\tau(k), \\ y(k) &= C_p\psi(k), \end{aligned} \quad (3.163)$$

où

$A_p(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,5 \\ -0,4 & 1,1\theta(k) \end{bmatrix}$ ,  $B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,7 \end{bmatrix}$ ,  $C_p = [0 \ 1]$ ,  $\theta \in [-1, 1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . On vérifie aisément que le modèle n'est pas strictement stable.

Pour annuler les erreurs statiques on ajoute une action intégrale :

$$\tau(k) = \tau(k-1) + \Delta\tau(k). \quad (3.164)$$

Le système final a la forme (3.80) avec :

$$\begin{aligned} x(k) &= \begin{bmatrix} \psi(k) \\ \tau(k-1) \end{bmatrix}, \quad u(k) = \Delta\tau(k), \\ A(\theta(k)) &= \begin{bmatrix} A_p(\theta(k)) & B_p \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_p \\ I \end{bmatrix}, \quad C = [C_p \ 0]. \end{aligned} \quad (3.165)$$

Ce système est affecté par une perturbation d'état avec  $B_w = 0,001[1 \ 1 \ 1]^T$  et une perturbation de mesure avec  $D_v = 0,01$ . Le vecteur de bruit  $\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$  est considéré borné  $n^T n \leq 1$ .

Soit le retour d'état stabilisant polytopique ayant les sommets :

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0,5219 & -1,1978 & 1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -0,5217 & 1,2541 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

et un observateur polytopique, calculé afin d'avoir une dynamique plus rapide que la boucle fermée, ayant les sommets :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0,9342 \\ -0,4628 \\ 1,0355 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0,9693 \\ 1,5008 \\ 1,1274 \end{bmatrix}. \quad (3.167)$$

Un paramètre de Youla de taille  $n_Q = n_x$  est introduit pour améliorer la robustesse vis-à-vis d'incertitudes additives :

$$\begin{aligned} A_{Q1} &= \begin{bmatrix} 0,8179 & 0,5501 & -0,0318 \\ -0,2108 & -0,6906 & 0,3593 \\ 0,2531 & 0,5370 & 0,5439 \end{bmatrix}, B_{Q1} = \begin{bmatrix} -0,8045 \\ 0,4002 \\ -0,8984 \end{bmatrix}, \\ A_{Q2} &= \begin{bmatrix} 0,7891 & 0,5303 & 0,0146 \\ -0,2563 & 0,7341 & 0,4242 \\ 0,1863 & -0,4713 & 0,6318 \end{bmatrix}, B_{Q2} = \begin{bmatrix} -0,8039 \\ -0,6380 \\ -0,0186 \end{bmatrix}, \\ C_{Q1} &= \begin{bmatrix} -0,2829 & -0,7001 & 0,5688 \end{bmatrix}, D_{Q1} = -0,2805, \\ C_{Q2} &= \begin{bmatrix} -0,3275 & 0,7602 & 0,6213 \end{bmatrix}, D_{Q2} = 0,5969. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Ce paramètre de Youla a été considéré afin d'avoir un certain compromis entre la robustesse et la performance. Les deux paramètres de Youla ont été obtenus à partir des techniques qui seront présentées au chapitre suivant. Le but ici est uniquement de mettre en évidence en termes d'analyse les propriétés vues précédemment.

Des contraintes sur la norme Euclidienne de la commande sont considérées :  $\|u(k)\| \leq u_{max}$  avec  $u_{max} = 1$ .

Pour ce système LPV à temps discret affecté par des perturbations bornées, soumis à des contraintes et avec l'état estimé via l'observateur (3.134), l'intersection ellipsoïdale minimale a été obtenue pour un  $\alpha_{optim} = 0,2$ . Cette intersection minimale est donnée Figure 3.8 par l'ellipsoïde vert. Le volume de cette intersection est  $V_{PO} = 0,0108$ . Pour le système avec observateur et paramètre de Youla (3.154), l'intersection ellipsoïdale minimale est représentée Figure 3.8 par l'ellipsoïde magenta et a le volume  $V_{PY} = 0,00044$ . Ce volume a été obtenu pour un  $\alpha_{optim} = 0,096$ . Pour le système avec observateur et paramètre de Youla, l'intersection minimale est un peu plus petite et donc l'effet de la perturbation est un peu plus faible.

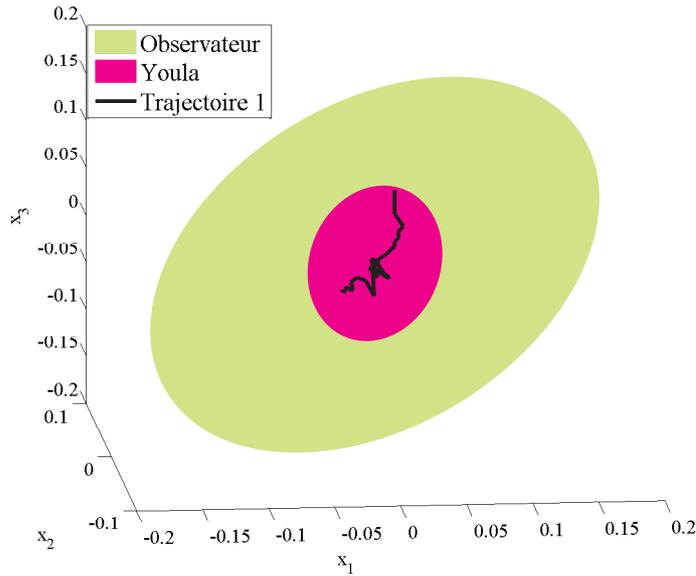


FIGURE 3.8: Intersections minimales.

Pour le système avec observateur (3.134) la projection maximale est obtenue pour un  $\alpha_{optim} = 0,024$ . Cette projection est représentée Figure 3.9 par l'ellipsoïde vert de volume  $V_{GO} = 9,6065$ . Pour le système avec observateur et paramétrisation de Youla (3.154), la projection ellipsoïdale maximale est obtenue pour un  $\alpha_{optim} = 0,01$ . Cette projection maximale est représentée Figure 3.9 par l'ellipsoïde magenta de volume  $V_{PY} = 64,0783$ . Ainsi, avec un paramètre de Youla, la projection ellipsoïdale maximale obtenue est plus grande que celle donnée par le système avec observateur seul. Le gain en volume se traduit par une amélioration en termes de robustesse.

Trois trajectoires de l'état sont tracées Figures 3.8 et 3.9 : la Trajectoire 1 correspond à l'évolution de l'état pour un point initial

$$x_0 = [0,0169 \ 0,0087 \ 0,0703 \ 0,0153 \ 0,0076 \ 0,0154 \ -0,0020 \ 0,0002 \\ -0,0423]$$

situé à l'intérieur de l'intersection ellipsoïdale minimale obtenue pour le système avec observateur et Youla ; la Trajectoire 2 correspond à l'évolution de l'état pour un point initial

$$x_0 = [-4,3617 \ -0,0666 \ -2,9001 \ -0,8073 \ -0,1013 \ -0,6621 \ 2,9159 \\ -0,0762 \ 1,7478]$$

situé à l'intérieur de la projection ellipsoïdale maximale obtenue pour le système avec observateur et la Trajectoire 3 correspond à l'évolution de l'état pour un point initial

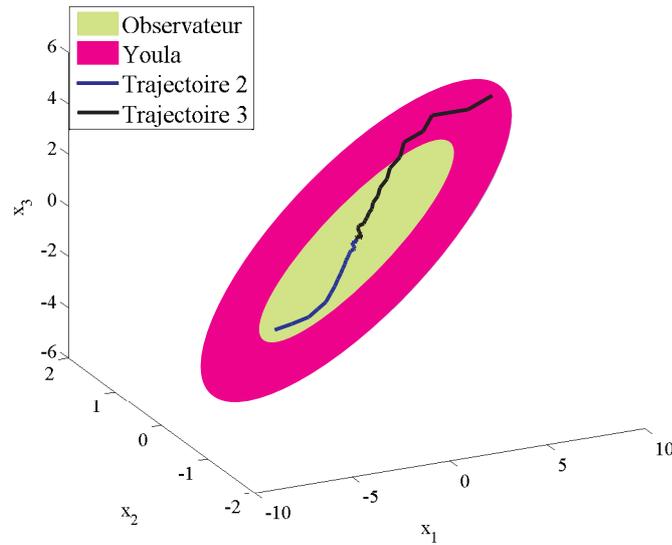


FIGURE 3.9: Projections maximales.

$$x_0 = [7,2970 \ 0,1099 \ 4,6445 \ 0,3184 \ 0,0822 \ 0,3097 \ -6,5974 \ -0,0274 \\ -4,0206]$$

situé à l'intérieur de la projection ellipsoïdale maximale obtenue pour le système avec observateur et Youla (et à l'extérieur de la projection maximale du système avec observateur seul). Pour ces trois cas, on a tracé Figures 3.10 et 3.11 l'évolution temporelle de l'entrée et de la sortie : la première sous figure correspond à la Trajectoire 1, la deuxième à la Trajectoire 2 et finalement la troisième à la Trajectoire 3.

Pour les simulations temporelles, Figures 3.10 et 3.11 on a considéré une perturbation en échelon d'amplitude 0,01 (revenant à  $B_w$ ) sur le signal d'entrée à l'instant 0,0045s, une perturbation en échelon d'amplitude 0,01 sur le signal de sortie à l'instant 0,007s et un bruit de mesure sur le signal de sortie prenant des valeurs aléatoires dans l'intervalle  $[-0,001 \ 0,001]$  (correspondant à  $D_v$ ). A l'instant 0,0015 on commute du système avec une dynamique correspondant à  $\theta(k) = -1$  vers le système avec une dynamique correspondant à  $\theta(k) = 1$ . Le paramètre  $\theta$  peut varier dans l'intervalle  $[-1 \ 1]$ , mais, pour les simulations temporelles, nous considérons seulement le cas particulier où  $\theta$  commute entre  $-1$  et  $1$

On peut observer, Figure 3.10 que la commande est moins oscillante quand le paramètre de Youla est considéré. On observe également que pour un point initial situé à l'extérieur de l'ellipsoïde invariant du système avec observateur et à l'intérieur de l'ellipsoïde invariant du système avec le paramètre de Youla (Trajectoire 3) les contraintes ne sont pas satisfaites pour la dynamique correspondant au système avec observateur, en revanche

elles sont satisfaites pour la dynamique correspondant au système avec observateur et paramètre de Youla.

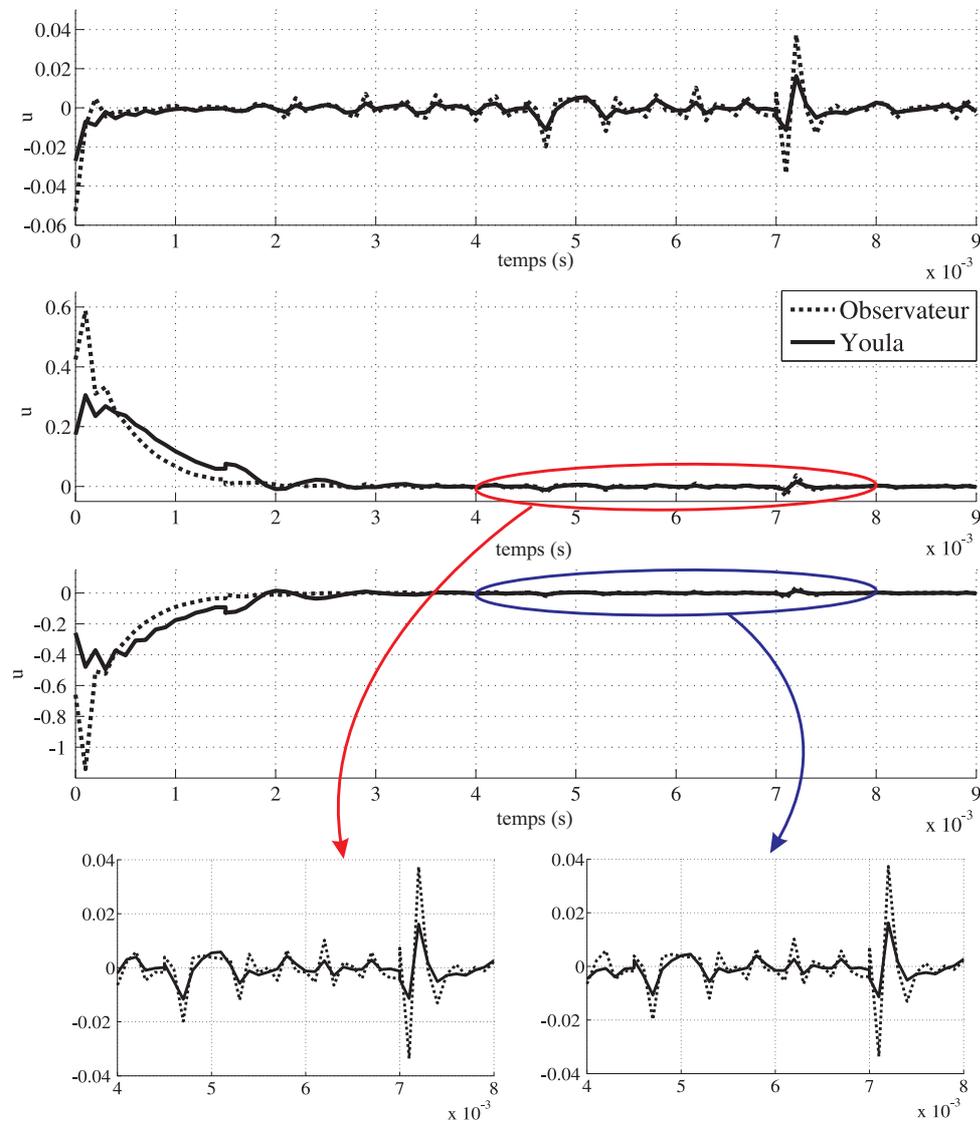


FIGURE 3.10: Evolution temporelle de l'entrée.

La Figure 3.11 illustre les évolutions temporelles de la sortie. On peut voir que pour le système avec paramètre de Youla les performances en boucle fermée sont plus lentes. Donc le prix à payer pour une robustesse plus grande est une performance moindre en rejet de perturbation.

Ces résultats ont été obtenus par des simulations effectuées à l'aide du logiciel Yalmip [67] avec le solveur SeDuMi [104] dans l'environnement MatLab. Les simulations temporelles ont été réalisées dans Simulink.

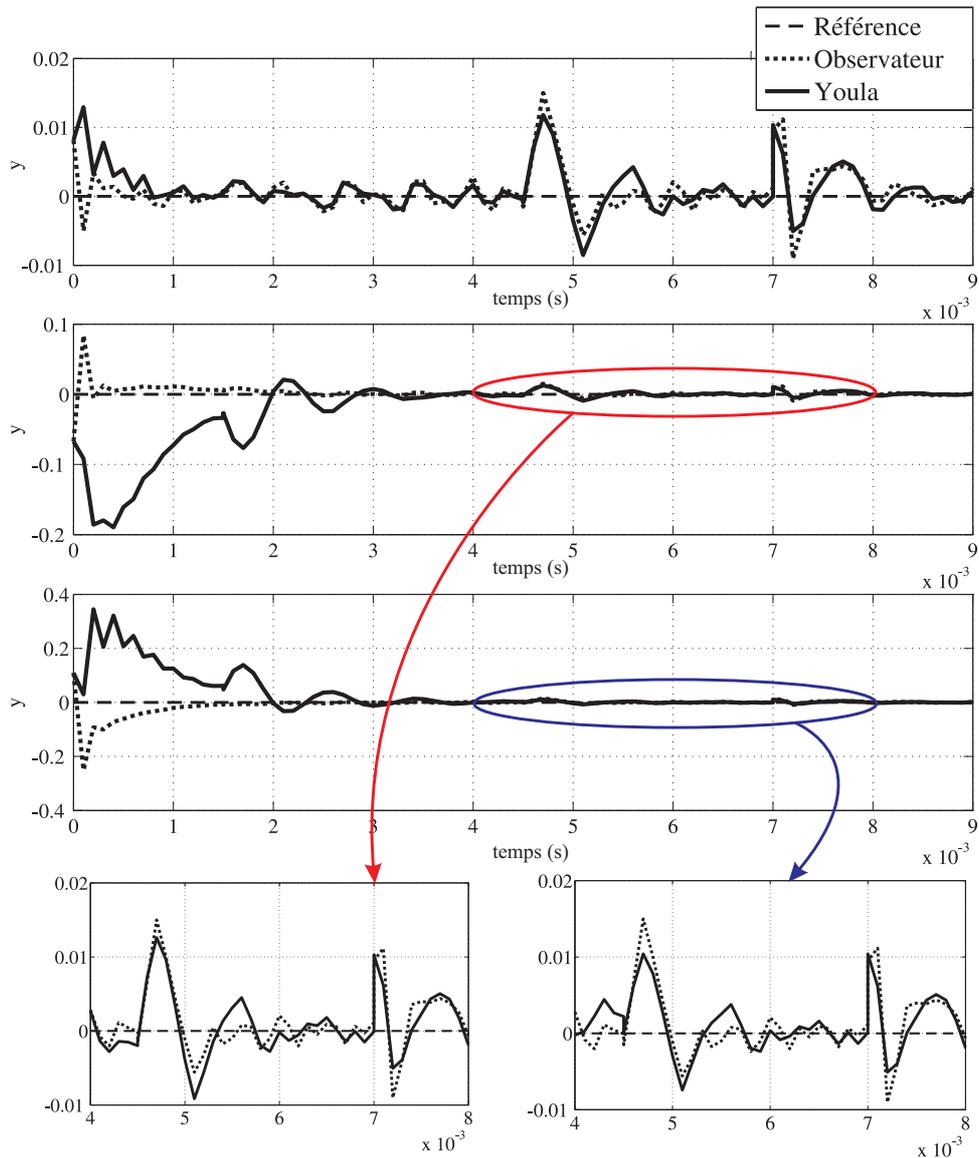


FIGURE 3.11: Evolution temporelle de la sortie.

### 3.2.5 Conclusion

Pour un système LPV à temps discret affecté par des perturbations bornées et soumis à des contraintes sur la commande la démarche mise en oeuvre dans le cas LTI et étendue au cas LPV a permis de donner les conditions suffisantes garantissant l'ISS par rapport à une perturbation bornée et de déterminer l'ellipsoïde invariant minimal (où ayant l'intersection minimale) et l'ellipsoïde invariant maximal (où ayant la projection maximale) satisfaisant les contraintes malgré la présence d'une perturbation bornée. L'ellipsoïde invariant minimal est le plus petit ellipsoïde contenant l'union des ellipsoïdes invariants minimaux correspondant à chaque variation du paramètre. L'ellipsoïde invariant maximal est l'ellipsoïde invariant maximal situé à l'intérieur de l'intersection de tous les

ellipsoïdes invariants maximaux correspondant à chaque variation du paramètre).

L'introduction d'un paramètre de Youla afin d'améliorer la robustesse se traduit par une projection maximale plus grande que celle obtenue pour le système avec observateur seul, illustrant une moindre influence de perturbations et une meilleure robustesse du système asservi. Comme l'intersection ellipsoïdale minimale est située à l'extérieur de l'union de toutes les intersections correspondant à chaque variation du paramètre, on ne peut pas garantir aussi une intersection minimale plus petite.

Les évolutions temporelles tracées dans les deux dernières figures montrent que le gain en volume vis-à-vis des ellipsoïdes revient à une commande moins oscillante et à des performances un peu dégradées pour le système avec observateur et Youla en rejet de perturbations.

### **3.3 Systèmes en commutation à temps discret, sous contraintes et affectés par une perturbation bornée**

Ces dernières années, l'étude des systèmes en commutation a suscité une attention croissante. Un système linéaire en commutation est un système dynamique hybride composé de plusieurs sous-systèmes gouvernés par une loi de commutation. Cette loi de commutation spécifie le sous-système actif à chaque instant de temps (un aperçu sur les principaux problèmes rencontrés avec les systèmes en commutation peut être trouvé dans [64]).

L'intérêt croissant pour cette classe de systèmes est dû à leur importance pratique car ils peuvent être trouvés dans de nombreux secteurs tels que : le contrôle des systèmes mécaniques, des robots manipulateurs [47], l'industrie automobile, le contrôle aérien et l'aéronautique, la gestion du trafic [106], les convertisseurs de puissance en commutation [59].

L'analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes en commutation a été largement étudiée par de nombreux chercheurs : [65] présente les problèmes de base concernant la stabilité des systèmes en commutation (stabilité pour des séquences de commutation arbitraires, la construction des séquences de commutation stabilisantes), [21] adresse le problème de l'analyse de la stabilité et la synthèse d'une loi de commande stabilisante pour des systèmes à temps discret en commutation en utilisant une fonction de Lyapunov en commutation. Les systèmes à temps discret en commutation affectés par des perturbations (bornées) ont été peu traités dans la littérature. Notre contribution réside justement en la prise en compte de perturbations bornées lorsque les conditions de stabilité sont données ou lorsque le calcul des ensembles invariants est réalisé.

Si l'on se rappelle que les systèmes LPV vus précédemment sont des systèmes pour lesquels la matrice dynamique évolue dans un polytope défini par ses sommets, les systèmes en commutation peuvent être considérés comme des systèmes polytopiques avec la particularité que les valeurs admissibles pour la matrice dynamique sont celles qui correspondent uniquement aux sommets du polytope.

Dans le prolongement de la démarche des sections précédentes, ce paragraphe traite des systèmes en commutation à temps discret linéaire affectés par de perturbations bornées. Dans une première étape les conditions suffisantes garantissant l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée seront données. Puis, en considérant des contraintes sur l'entrée, nous recherchons l'ellipsoïde invariant maximal (où ayant la projection maximale sur le sous-espace d'état initial) et l'ellipsoïde invariant minimal (où ayant l'intersection minimale sur le sous-espace d'état initial).

*Remarque 3.21.* Un système en commutation affecté par des perturbations est globalement ISS si chaque mode est ISS pour toutes les transitions possibles [63], [111].

La stabilité du système en commutation doit être assurée pour toutes les transitions possibles, puisque la stabilité ISS pour chaque mode linéaire n'implique pas l'ISS par rapport à une perturbation du système en commutation.

### 3.3.1 Systèmes en commutation à temps discret

Soit le système discret en commutation :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_\sigma x(k) + B_\sigma u(k) + B_w w(k), \\ y(k) &= C_\sigma x(k) + D_v v(k), \end{aligned} \tag{3.169}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  est l'état du système,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  est la commande,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie,  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  est la perturbation d'état et  $v(k) \in \mathbb{R}^{n_v}$  est la perturbation de mesure.

$\sigma$  est une règle de commutation prenant ses valeurs dans l'ensemble fini d'indices  $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ . En d'autres termes, les matrices  $(A_\sigma, B_\sigma, C_\sigma)$  peuvent prendre n'importe quelle valeur dans l'ensemble fini  $\{(A_i, B_i, C_i), i = \overline{1, N}\}$ , à un instant arbitraire. Nous supposons que la règle de commutation est inconnue a priori, mais sa valeur instantanée est disponible en temps réel. Contrairement au cas LPV, pour les systèmes en commutation on peut considérer des matrices d'entrée ou de sortie dépendantes du paramètre,  $B_\sigma$  et  $C_\sigma$  sans faire appel à [91] (le système avec observateur et paramétrisation de Youla reste un système en commutation).

La loi de commande est donnée par :

$$u(k) = -F_\sigma x(k), \tag{3.170}$$

où  $F_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times n_x}$  est la loi de commande en commutation.  $F_\sigma$  prend ses valeurs dans l'ensemble fini  $\{F_i, i = \overline{1, N}\}$ .

Le système en boucle fermée devient :

$$x(k+1) = A_{bf\sigma}x(k) + B_w w(k), \quad (3.171)$$

où  $A_{bf\sigma} = A_\sigma - B_\sigma F_\sigma$ . Selon la loi de commutation  $\sigma$ , les matrices  $(A_{bf\sigma}, F_\sigma)$  prennent des valeurs dans l'ensemble  $\{(A_{bf\sigma} = A_i - B_i F_i, F_i), i = \overline{1, N}\}$ .

Définissons la fonction "indicateur" :

$$\lambda(k) = [\lambda_1(k), \dots, \lambda_N(k)] \quad (3.172)$$

telle que :  $A_{bf\sigma} = (\sum_{i=1}^N \lambda_i(k) A_{bf\sigma i})$  et  $F_\sigma = (\sum_{i=1}^N \lambda_i(k) F_i)$  avec la configuration particulière  $\lambda_i(k) = 1, \lambda_{l \neq i}(k) = 0, \lambda_j(k+1) = 1, \lambda_{l \neq j}(k+1) = 0, i, j = \overline{1, N}$  ( $i$  n'est pas nécessairement différent de  $j$ ). Cette configuration est en fait celle du cas LPV adaptée pour le cas à commutation.

On suppose toujours que le vecteur de perturbation est borné :

$$n^T(k)n(k) \leq 1 \quad (\text{d'où } w^T(k)w(k) \leq 1, v^T(k)v(k) \leq 1). \quad (3.173)$$

On considère également des bornes sur la norme Euclidienne de la commande  $u(k)$  :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}. \quad (3.174)$$

L'ensemble invariant ellipsoïdal a toujours pour expression 3.6.

### 3.3.1.1 ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée

Cette section décrit les conditions suffisantes garantissant l'ISS par rapport à une perturbation bornée. Comme les systèmes en commutations représente en fait un classe de systèmes LPV, les conditions suffisantes garantissant l'ISS par rapport à une perturbation bornée sont données dans le théorème 3.11 ou dans le théorème équivalent 3.12 en remplaçant  $B$  par  $B_i$ .

La condition (2.29) est dans ce cas satisfaite pour  $\alpha_1 = \lambda_{\min}(P_i) > 0$  et  $\alpha_2 = \lambda_{\max}(P_i) > 0, i = \overline{1, N}$ . La condition (2.30) revient à  $\alpha_3 = \alpha \lambda_{\min}(P_i)$  et  $\delta = \beta, i = \overline{1, N}$ .

### 3.3.1.2 Ellipsoïde minimal

Le théorème donnant l'ellipsoïde minimal qui nous garantit que l'état va rester à l'intérieur même en présence de perturbations bornées s'obtient de façon similaire avec le cas LPV 3.14 en remplaçant  $B$  par  $B_i$  et sera omis pour ne pas alourdir la lecture. Rappelons maintenant que l'ellipsoïde invariant minimal est le plus petit ellipsoïde qui contient les ellipsoïdes invariants minimaux associés à chaque mode.

Même si les ellipsoïdes invariants minimaux correspondant à chaque transition existent tous, si les contraintes sont trop fortes et/ou les perturbations sont trop importantes et/ou le système a une dynamique très rapide, alors l'ellipsoïde invariant minimal situé à l'extérieur de l'union des ellipsoïdes invariants minimaux correspondant à chaque transition peut ne pas exister.

### 3.3.1.3 Ellipsoïde maximal

A chaque mode de fonctionnement correspond un ellipsoïde invariant maximal. L'objectif de ce paragraphe est de calculer le plus grand ellipsoïde situé à l'intérieur de l'intersection de tous les ellipsoïdes maximaux correspondant à chaque mode de fonctionnement en tenant compte de toutes les transitions possibles. Comme le théorème offrant cet ellipsoïde est en fait un cas particulier du cas LPV, l'ellipsoïde invariant maximal sera donné par le théorème 3.16 en remplaçant  $B$  par  $B_i$ .

## 3.3.2 Systèmes en commutation et observateur

Soit le système en commutation (3.169) et un observateur en commutation utilisé pour estimer l'état :

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A_\sigma \hat{x}(k) + B_\sigma u(k) + L_\sigma (y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{y}(k) &= C_\sigma \hat{x}(k),\end{aligned}\tag{3.175}$$

où  $L_\sigma \in \mathbb{R}^{n_x \times p}$  est le gain de l'observateur en commutation.

$\sigma$  est la règle de commutation ayant ses valeurs dans l'ensemble d'indices  $\mathcal{S} = \{1, \dots, N\}$ . La matrice  $L_\sigma$  peut prendre une valeur dans l'ensemble fini  $\{L_i, i = \overline{1, N}\}$ . La règle de commutation est inconnue a priori, mais sa valeur instantanée est disponible en temps réel.

La commande est donnée par :

$$u(k) = -F_\sigma \hat{x}(k),\tag{3.176}$$

où  $F_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times n_x}$  est le retour d'état en commutation  $F_\sigma \in \{F_i, i = \overline{1, N}\}$ .

Pour le système (3.169) avec un observateur en commutation (3.175) la représentation d'état augmentée suivante est considérée :

$$x_o(k+1) = A_{o\sigma}x_o(k) + B_{o\sigma}n(k), \quad (3.177)$$

où :

$$x_o(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon(k) = x(k) - \hat{x}(k) \text{ est l'erreur d'estimation, } n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$$

est le vecteur de bruit,  $A_{o\sigma} = \begin{bmatrix} A_\sigma - B_\sigma F_\sigma & B_\sigma F_\sigma \\ 0 & A_\sigma - L_\sigma C_\sigma \end{bmatrix}$  et  $B_{o\sigma} = \begin{bmatrix} B_w & 0 \\ B_w & -L_\sigma D_v \end{bmatrix}$ .

La loi de commande en commutation peut être réécrite sous la forme suivante :

$$u(k) = -F_{o\sigma} \cdot x_o(k) \quad (3.178)$$

avec  $F_{o\sigma} = \begin{bmatrix} F_\sigma & -F_\sigma \end{bmatrix}$ . Selon la loi de commutation  $\sigma$ , les matrices  $(A_{o\sigma}, B_{o\sigma}, F_{o\sigma})$  prennent des valeurs dans l'ensemble  $\{(A_{oi}, B_{oi}, F_{oi}), i = \overline{1, N}\}$ .

Avec la fonction "indicateur"  $\lambda(k)$ , on a :  $A_{o\sigma} = (\sum_{i=1}^N \lambda_i(k) A_{oi})$ ,  $B_{o\sigma} = (\sum_{i=1}^N \lambda_i(k) B_{oi})$  et  $F_{o\sigma} = (\sum_{i=1}^N \lambda_i(k) F_{oi})$  avec la configuration particulière  $\lambda_i(k) = 1, \lambda_{l \neq i}(k) = 0, \lambda_j(k+1) = 1, \lambda_{l \neq j}(k+1) = 0, i, j = \overline{1, N}$  ( $i$  n'est pas nécessairement différent de  $j$ ).

Le vecteur de bruit est considéré borné :

$$n^T(k)n(k) \leq 1. \quad (3.179)$$

Des contraintes sur la norme Euclidienne de la commande sont imposées sous la forme :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}. \quad (3.180)$$

L'ensemble ellipsoïdal est donné par 3.37. L'intersection ellipsoïdale de cet ellipsoïde avec le sous-espace  $x$  est issue de l'expression 3.42 et la projection ellipsoïdale de cet ellipsoïde sur le sous-espace  $x$  est 3.43.

### 3.3.2.1 ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée. Intersection ellipsoïdale minimale. Projection ellipsoïdale maximale

Les théorèmes donnant les conditions suffisantes garantissant l'ISS par rapport à une perturbation bornée, l'intersection ellipsoïdale minimale et la projection ellipsoïdale

maximale sont obtenus de manière similaire avec celles données pour le cas LPV (3.17, A.3 et 3.19 respectivement) en remplaçant  $B$  par  $B_i$  et  $C$  par  $C_i$ . Ils seront donc omis pour ne pas alourdir la lecture. L'intérêt de présenter le cas en commutation est plus évident dans le chapitre suivant dédié à la synthèse. On considère quand même ce cas aussi dans le cadre de l'analyse pour fixer les bases dont on a besoin pour le chapitre suivant et pour garder une ligne logique à ce mémoire.

### 3.3.3 Système en commutation avec observateur et paramètre de Youla

Soit le système en commutation avec observateur (3.177). Afin d'améliorer la robustesse du système un paramètre de Youla en commutation est inséré dans la boucle fermée :

$$\begin{aligned} x_Q(k+1) &= A_{Q\sigma}x_Q(k) + B_{Q\sigma}\tilde{y}(k), \\ \tilde{u}(k) &= C_{Q\sigma}x_Q(k) + D_{Q\sigma}\tilde{y}(k), \\ \tilde{y}(k) &= y(k) - \hat{y}(k), \end{aligned} \quad (3.181)$$

où  $x_Q \in \mathbb{R}^{n_Q}$  est l'état du paramètre de Youla,  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$  est la sortie,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^p$  est l'entrée et  $A_{Q\sigma} \in \mathbb{R}^{n_Q \times n_Q}$ ,  $B_{Q\sigma} \in \mathbb{R}^{n_Q \times p}$ ,  $C_{Q\sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n_Q}$ ,  $D_{Q\sigma} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  sont les matrices d'état.

La loi de commande a la forme :

$$u(k) = -F_\sigma \hat{x}(k) - \tilde{u}(k) \quad (3.182)$$

où  $F_\sigma \in \{F_i, i = \overline{1, N}\}$ .

Pour le système (3.177) avec la paramétrisation de Youla (3.181), la représentation d'état augmentée suivante est choisie :

$$x_y(k+1) = A_{y\sigma}x_y(k) + B_{y\sigma}n(k) \quad (3.183)$$

où :

$$x_y(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \varepsilon(k) \\ x_Q(k) \end{bmatrix}, \quad A_{y\sigma} = \begin{bmatrix} A_\sigma - B_\sigma F_\sigma & B_\sigma F_\sigma - B_\sigma D_{Q\sigma} C_\sigma & -B_\sigma C_{Q\sigma} \\ 0 & A_\sigma - L_\sigma C_\sigma & 0 \\ 0 & B_{Q\sigma} C_\sigma & A_{Q\sigma} \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$B_{y\sigma} = \begin{bmatrix} B_w & -B_\sigma D_{Q\sigma} D_v \\ B_w & -L_\sigma D_v \\ 0 & B_{Q\sigma} D_v \end{bmatrix}.$$

Finalement la commande peut s'écrire sous la forme :

$$u(k) = -F_{x\sigma} \cdot x_y(k) - F_{n\sigma} \cdot n(k) \quad (3.184)$$

avec  $F_{x\sigma} = \begin{bmatrix} F_\sigma & -F_\sigma + D_{Q\sigma}C_\sigma & C_{Q\sigma} \end{bmatrix}$  et  $F_{n\sigma} = [0 \ D_{Q\sigma}D_v]$ .

Le vecteur de bruit  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est toujours considéré borné :

$$n^T(k)n(k) \leq 1. \quad (3.185)$$

Des contraintes sur l'entrée sont également prises en compte :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}. \quad (3.186)$$

La Figure 3.12 donne une vue d'ensemble de la structure par bloc du système augmenté.

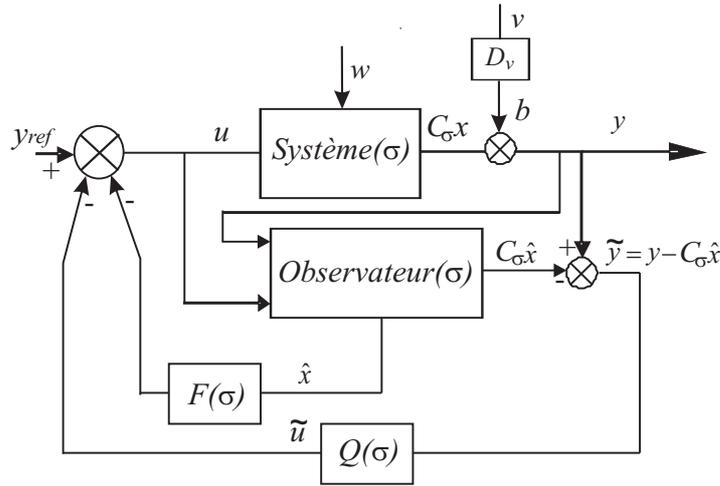


FIGURE 3.12: Correcteur dans l'espace d'état avec paramètre de Youla en commutation.

Conformément à la loi de commutation  $\sigma$ , les matrices  $(A_{Q\sigma}, B_{Q\sigma}, C_{Q\sigma}, D_{Q\sigma}, A_{y\sigma}, B_{y\sigma}, F_{x\sigma}, F_{n\sigma})$  prennent des valeurs dans  $\{(A_{Qi}, B_{Qi}, C_{Qi}, D_{Qi}, A_{yi}, B_{yi}, F_{xi}, F_{ni}), i = \overline{1, N}\}$ .

L'ensemble ellipsoïdal est donné par 3.56. L'intersection ellipsoïdale de cet ellipsoïde avec le sous-espace  $x$  a l'expression 3.59. La projection ellipsoïdale de cet ellipsoïde sur le sous-espace  $x$  est 3.58.

### 3.3.3.1 ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée. Intersection ellipsoïdale minimale. Projection ellipsoïdale maximale.

Pour le système (3.183) le théorème qui permet de garantir la stabilité entrée-état vis-à-vis d'une perturbation bornée est donné par A.4, l'intersection minimale sera obtenue en résolvant le théorème donné par A.5 et la projection maximale sur le sous-espace  $x$  de l'ellipsoïde invariant  $E_y$  pour un système en commutation à temps discret affecté par des contraintes et de perturbations bornées sera donnée par 3.20. Tous ces théorèmes correspondent au cas LPV. Pour le cas en commutations ils seront résolus en remplaçant  $B$  par  $B_i$  et  $C$  par  $C_i$  respectivement.

*Remarque 3.22.* Les théorèmes donnés dans ce chapitre vont servir de base pour la synthèse d'une loi de commande, à la fois robuste et performante, mise en oeuvre lors du chapitre 4.

Les systèmes en commutation sont considérés comme des systèmes LPV avec la particularité que les valeurs admissibles pour la matrice dynamique sont celles qui correspondent uniquement aux sommets du polytope. L'intérêt de considérer ce type de systèmes est mis en valeur plutôt dans le chapitre suivant. Dans ce chapitre on a analysé ces systèmes du point de vue ensembliste pour donner la base nécessaire lors des développements suivants.

### 3.3.4 Mise en oeuvre sur un exemple

Pour valider les résultats théoriques considérons l'exemple académique suivant :

$$\begin{aligned} \psi(k+1) &= A_{pi}\psi(k) + B_{pi}\tau(k), \\ y(k) &= C_{pi}\psi(k), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.187)$$

où

$$A_{p1} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 1,8 & 0,9 \end{bmatrix}, A_{p2} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,4 & 0,9 \end{bmatrix}, B_{p1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{p2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, C_{p1} = C_{p2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le système peut commuter entre deux dynamiques ( $N = 2$ ). Le modèle n'est pas strictement stable, car  $\lambda(A1) = [-0,3367 \quad 1,3367]$  et  $\lambda(A2) = [1,3472 \quad 0,4528]$ .

Pour annuler les erreurs statiques on ajoute, une action intégrale :

$$\tau(k) = \tau(k-1) + \Delta\tau(k). \quad (3.188)$$

On considère que le système final est affecté par une perturbation d'état avec  $B_w = 0,01[1 \quad 1 \quad 1]$  et une perturbation de mesure avec  $D_v = 0,01$ .

Le vecteur de bruit  $\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$  est considéré borné  $n^T n \leq 1$ .

Le système final a la forme (3.169) avec :

$$x(k) = \begin{bmatrix} \psi(k) \\ \tau(k-1) \end{bmatrix}, u(k) = \Delta\tau(k), A_i = \begin{bmatrix} A_{pi} & B_{pi} \\ 0 & I \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} B_{pi} \\ I \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} C_{pi} & 0 \end{bmatrix}.$$

On considère le retour d'état stabilisant en commutation :

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0,2249 & -0,1502 & 0,4491 \end{bmatrix} \text{ et } F_2 = \begin{bmatrix} -0,3613 & -0,3532 & 0,9924 \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

et le gain de l'observateur en commutation :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0,8548 & 1,6665 & -0,7595 \end{bmatrix}^T \text{ et } L_2 = \begin{bmatrix} 1,7686 & 1,3326 & -0,8415 \end{bmatrix}^T. \quad (3.190)$$

La loi de commande par retour d'état et observateur a été synthétisée afin de garantir une bonne performance en boucle fermée.

Le paramètre de Youla en commutation :

$$\begin{aligned} A_{Q1} &= \begin{bmatrix} -0,0593 & 0,1974 & -0,6144 \\ 1,7987 & 0,8990 & 0,0042 \\ 0,1634 & 0,1061 & 0,6019 \end{bmatrix}, B_{Q1} = \begin{bmatrix} 0,4111 \\ -1,8159 \\ -0,2234 \end{bmatrix}, \\ A_{Q2} &= \begin{bmatrix} 0,7999 & 0,3959 & -0,5681 \\ 0,2945 & 0,7908 & -0,5526 \\ 0,1008 & 0,1048 & 0,5661 \end{bmatrix}, B_{Q2} = \begin{bmatrix} -0,4706 \\ -1,2412 \\ -0,2860 \end{bmatrix}, \\ C_{Q1} &= \begin{bmatrix} -0,0636 & -0,0456 & 0,0579 \end{bmatrix}, D_{Q1} = -0,392, \\ C_{Q2} &= \begin{bmatrix} -0,2585 & -0,2465 & 0,5527 \end{bmatrix}, D_{Q2} = -0,361. \end{aligned} \quad (3.191)$$

permet une meilleure robustesse vis-à-vis d'incertitudes additives garantissant tout de même une certaine performance. Les deux paramètres de Youla ont été obtenus en employant des techniques qui seront présentées lors du chapitre suivant.

Des contraintes sont imposées sur la norme Euclidienne de la commande :  $\|u(k)\| \leq u_{max}$  avec  $u_{max} = 5$ .

Pour le système avec observateur (3.177), l'intersection ellipsoïdale minimale a été obtenue pour un  $\alpha_{optim} = 0,069$ . L'intersection minimale est représentée Figure 3.13 par l'ellipsoïde vert. Le volume de cette intersection est  $V_{PO} = 2,0739$ . Pour le système avec observateur et paramètre de Youla (3.183), l'intersection ellipsoïdale minimale est représentée Figure 3.13 par l'ellipsoïde magenta et a un volume  $V_{PY} = 0,5063$  (une perte en volume de 75%). Ce volume a été obtenu pour un  $\alpha_{optim} = 0,032$ . On observe

facilement que la présence du paramètre de Youla diminue le volume de l'intersection minimale, donc l'effet de la perturbation est plus faible.

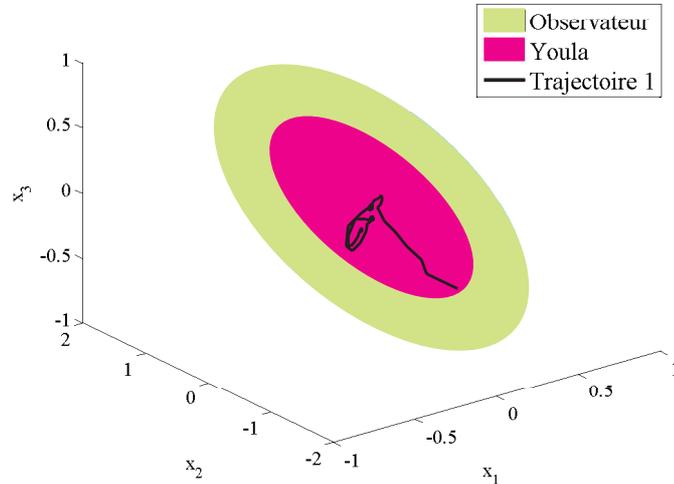


FIGURE 3.13: Intersections minimales.

La projection maximale obtenue pour le système avec observateur (3.177) est représentée Figure 3.14 par l'ellipsoïde magenta et a un volume  $V_{GO} = 3,6035 \cdot 10^3$ . Le paramètre  $\alpha$  pour lequel on a obtenu ces valeurs est  $\alpha_{optim} = 0,0056$ . Pour le système avec observateur et paramétrisation de Youla (3.183), la projection ellipsoïdale maximale a été obtenue pour un  $\alpha_{optim} = 0,0028$ . La projection maximale est représentée Figure 3.14 par l'ellipsoïde vert et a un volume  $V_{PY} = 4,7748 \cdot 10^4$ . En considérant un paramètre de Youla adéquat (offrant un compromis entre la robustesse et la performance), la projection ellipsoïdale maximale s'est élargie par rapport à celle obtenue pour le système avec observateur seul. Le gain en volume se traduit par une amélioration en termes de robustesse.

Les Figures 3.13 et 3.14 reproduisent également trois trajectoires de l'état : la Trajectoire 1 correspond à l'évolution de l'état pour un point initial :

$$x(0) = [0,1118 \quad -1,0528 \quad -0,4115 \quad -0,0101 \quad -0,0516 \quad -0,0047 \quad -0,0589 \\ 0,4647 \quad 0,1998]$$

situé à l'intérieur de l'intersection minimale du système avec observateur et le paramètre de Youla, la Trajectoire 2 correspond à l'évolution de l'état pour un point initial :

$$x(0) = [-29,8376 \quad 63,0219 \quad 9,0988 \quad 1,0395 \quad -0,12 \quad -1,0707 \quad 29,0535 \\ -55,3273 \quad -7,5691]$$

situé à l'intérieur de la projection maximale du système avec observateur seul et la Trajectoire 3 correspond à l'évolution de l'état pour un point initial :

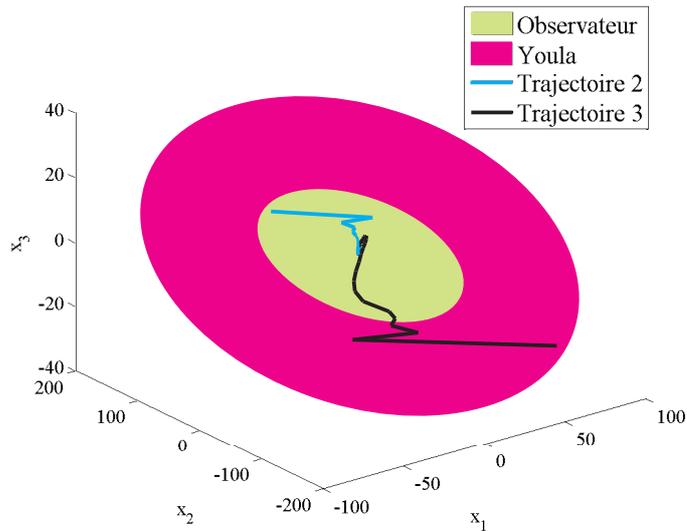


FIGURE 3.14: Projections maximales.

$$x(0) = [57,0736 \quad -159,3767 \quad -23,9431 \quad -0,01 \quad -0,0014 \quad -0,0048 \quad -58,1958 \\ 162,3021 \quad 24,5475]$$

situé à l'intérieur de la projection maximale du système avec observateur et le paramètre de Youla (et à l'extérieur de la projection maximale du système avec observateur seul).

Pour ces trois point initiaux de l'état on a représenté Figures 3.15 et 3.16 les évolutions temporelles de l'entrée et de la sortie. Pour la Trajectoire 1 on considère une perturbation en échelon d'amplitude 0,1 (revenant à  $B_w$ ) sur le signal d'entrée à l'instant 0,005s, une perturbation en échelon d'amplitude 0,1 sur le signal de sortie à l'instant 0,008s et un bruit de mesure sur le signal de sortie prenant des valeurs aléatoires dans l'intervalle  $[-0,01 \quad 0,01]$  (valeurs correspondant à  $D_v$ ). A l'instant 0.0005 on commute du système avec une dynamique correspondant à  $i = 1$  vers le système avec un dynamique correspondant à  $i = 2$ . Pour les trajectoire 2 et 3 des perturbations plus importantes peuvent être considérées : une perturbation en échelon d'amplitude 1 sur le signal d'entrée à l'instant 0,005s, une perturbation en échelon d'amplitude 1 sur le signal de sortie à l'instant 0,008s et un bruit de mesure sur le signal de sortie prenant des valeurs aléatoires dans l'intervalle  $[-0,01 \quad 0,01]$ . A l'instant 0.0005 on commute également entre les deux sommets.

Les Figures 3.15 et 3.16 sont divisée en trois parties : la première pour le point initial revenant à la Trajectoire 1, la deuxième pour le point initial revenant à la Trajectoire 2 et finalement la troisième pour le point initial revenant à la Trajectoire 3.

Comme pour les systèmes LTI ou LPV, l'introduction du paramètre de Youla donne une commande avec moins de transitoires. L'obtention d'une projection ellipsoïdale

plus grande pour le système avec paramètre de Youla se traduit par le fait qu'il existe maintenant plus de points où les contraintes sont satisfaites. On peut voir Figure 3.15 que pour la Trajectoire 3, la commande correspondante dépasse la frontière pour le système avec observateur mais reste à l'intérieur des contraintes pour le système avec observateur et Youla.

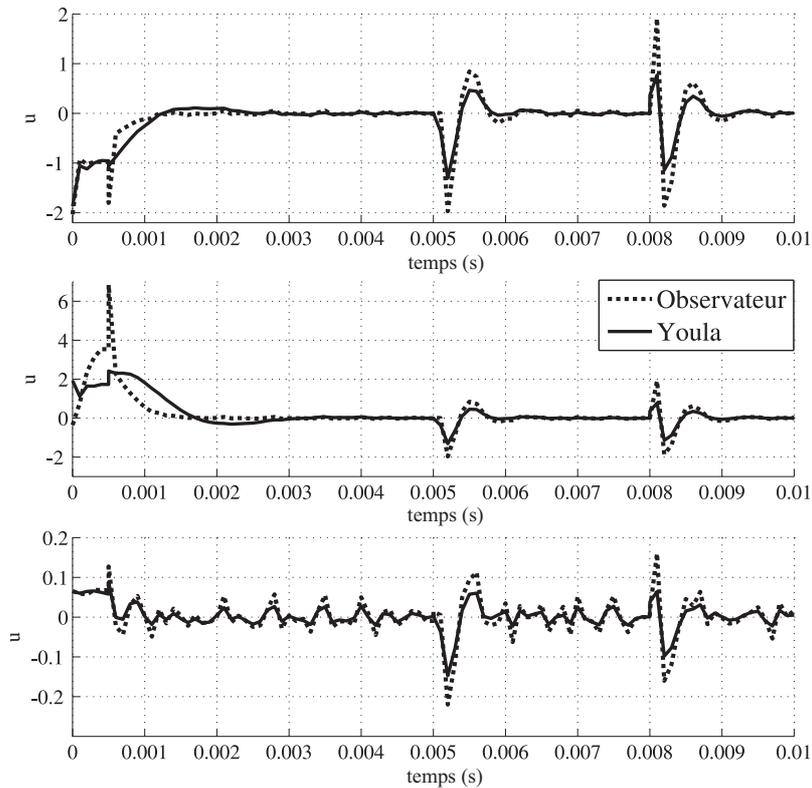


FIGURE 3.15: Evolution temporelle de l'entrée.

Pour l'évolution temporelle de la sortie Figure 3.16, on peut observer que l'introduction du paramètre de Youla diminue légèrement la performance en boucle fermée. On comprend donc qu'un gain en robustesse est souvent accompagné par une perte en performance.

Ces résultats ont été obtenus par des simulations effectuées à l'aide du logiciel Yalmip [67] avec le solveur SeDuMi [104] dans l'environnement MatLab. Les simulations temporelles ont été réalisées sous Simulink.

### 3.3.5 Conclusion

Cette section a permis d'analyser les systèmes en commutation à temps discret et soumis à des contraintes, en termes de stabilité et de robustesse vis-à-vis d'une perturbation

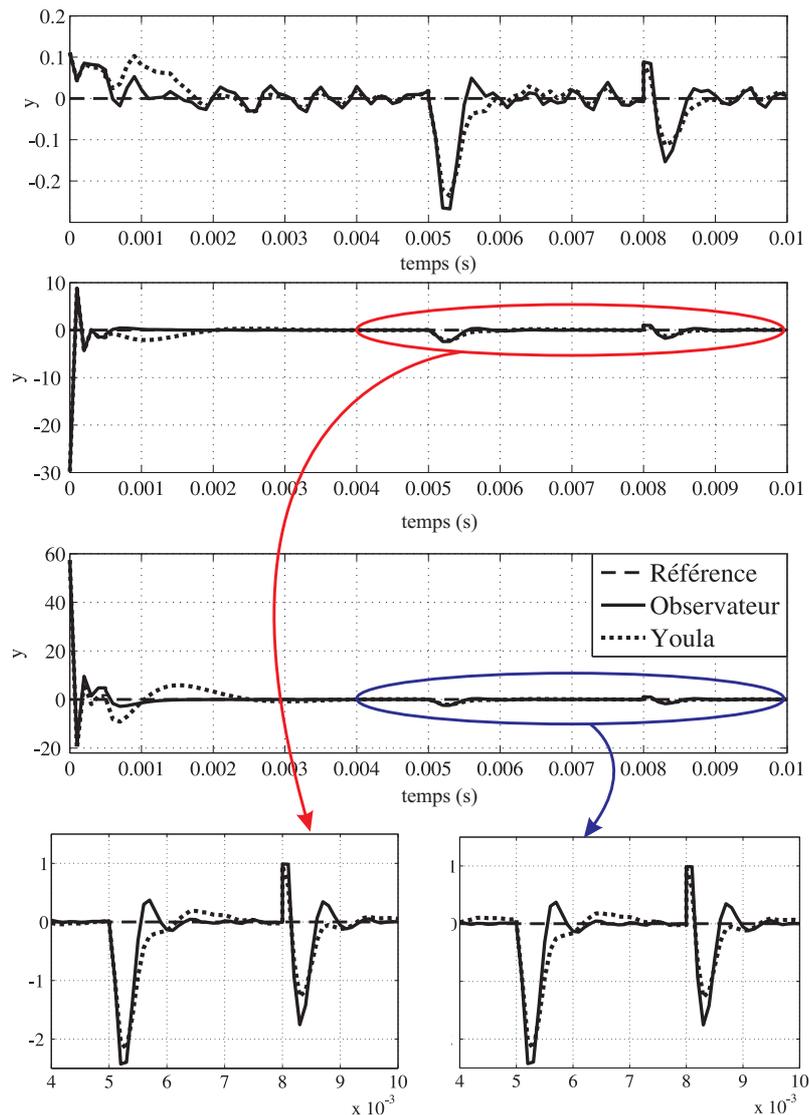


FIGURE 3.16: Evolution temporelle de la sortie.

bornée.

Pour cette catégorie des systèmes on a ainsi donné les conditions suffisantes garantissant l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée et on a pu calculer, par une démarche similaire au cas LTI et LPV, l'ellipsoïde minimal et l'ellipsoïde maximal satisfaisant des contraintes pour toutes les transitions possibles. L'ellipsoïde invariant minimal contient les ellipsoïdes minimaux relatifs à chaque mode. L'ellipsoïde invariant maximal assurant la satisfaction des contraintes est situé à l'intérieur de l'intersection des ellipsoïdes invariants maximaux relatifs à chaque mode.

Lorsque l'état d'un système n'est pas mesurable, on fait appel à un observateur pour estimer l'état. Pour le système augmenté, on calcule de même l'ellipsoïde invariant ayant la projection maximale/l'intersection minimale sur/avec le sous-espace de l'état initial.

Un paramètre de Youla est enfin introduit afin d'augmenter le volume de la projection maximale sur le sous-espace de l'état initial. Cette augmentation se traduit par un gain en robustesse (l'effet de la perturbation a moins d'influence).

On a vu également que la présence de la paramétrisation de Youla fait que la commande est plus douce mais la performance en boucle fermée est diminuée.

### 3.4 Ellipsoïdes tronqués

Pour conclure ce chapitre d'analyse, cette section propose une méthode alternative pour déterminer une approximation de l'ensemble invariant maximal réel. Les approximations ellipsoïdales ou polyédrales sont soit trop conservatives soit trop complexes pour de nombreuses applications. Il est démontré que l'intersection d'un ellipsoïde invariant avec les contraintes d'état, de sortie et d'entrée est elle-même invariante sous certaines conditions. L'ensemble invariant obtenu est appelé "ensemble semi-ellipsoïdal" dans [79] ou "ellipsoïde tronqué" dans [105]. Ce type d'ensembles invariants seront considérés par la suite pour approximer l'ensemble invariant maximal réel.

#### 3.4.1 Outils théoriques

L'ellipsoïde tronqué est en fait l'intersection d'un ellipsoïde et d'un polytope. Donc, une partie de sa frontière est donnée par l'ellipsoïde et le reste par un polytope. En termes de fonction de Lyapunov, l'ellipsoïde tronqué est donné par une fonction de la forme :

$$V(x) = \max(x^T P x, x^T C_1^T C_1 x, \dots, x^T C_p^T C_p x), \quad (3.192)$$

avec  $P = P^T \succ 0$ ,  $C_p$  des hyperplans. Ainsi  $V(x)$  peut être considérée comme la combinaison d'une fonction quadratique ( $x^T P x$ ) et d'une fonction polyédrale pour laquelle les  $C_p$  représentent les hyperplans définissant les contraintes.

Dans [79] un semi-ellipsoïde est obtenu considérant l'intersection de l'ellipsoïde invariant avec plusieurs ensembles polyédraux représentant les contraintes sur l'état. L'ellipsoïde tronqué élargit effectivement la taille du bassin d'attraction par rapport à l'ensemble invariant maximal ellipsoïdal. La méthode est simple mais le volume de l'ensemble invariant augmente uniquement vis-à-vis des contraintes d'état, l'ellipsoïde obtenu étant déjà à l'intérieur de l'ensemble polyédral donné par les contraintes d'entrée. Dans [105] est mise au point une méthode en temps continu qui permet d'élargir l'ensemble invariant vis-à-vis de contraintes d'entrée, d'état et de sortie mais avec un effort de calcul plus important. L'ensemble invariant est alors l'intersection entre un ellipsoïde et tous les hyperplans associés aux contraintes.

Dans la suite de cette section, nous utiliserons l'ellipsoïde tronqué invariant pour trouver un ensemble invariant, aussi grand que possible, associé à un système à temps discret soumis à des contraintes d'état, d'entrée et de sortie et affecté par une perturbation bornée. Le problème d'optimisation qui en résulte implique seulement quelques termes bilinéaires qui peuvent être rendus linéaires en fixant une ou deux variables. La charge de calcul est un peu plus lourde que celle résultant de l'algorithme correspondant aux fonctions quadratiques mais on obtient une amélioration en terme de volume.

Soit le système linéaire à temps discret :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_w w(k), \\ y(k) &= Cx(k), \\ u(k) &= -Fx(k), \end{aligned} \quad (3.193)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  l'état du système,  $u \in \mathbb{R}^m$  la commande du système,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  la perturbation d'état et  $F \in \mathbb{R}^{m \times n_x}$  le retour d'état. Supposons que  $A - BF$  est une matrice Hurwitz et :

$$w(k)^T w(k) \leq 1. \quad (3.194)$$

L'ensemble semi-ellipsoïdal sera donné par l'intersection entre un ellipsoïde et les hyperplans donnés par les contraintes d'état :

$$|\Gamma_i x| \leq 1, \quad i = \overline{1, n_x} \quad (3.195)$$

et les contraintes sur la norme Euclidienne de la commande :

$$\|u\|_2 \leq 1. \quad (3.196)$$

Pour simplifier, supposons que la contrainte sur la commande ou sur chaque élément de l'état est de 1. Dans le cas contraire, il suffira de normaliser les contraintes pour se ramener à cette configuration.

Pour la facilité de l'exposé, nous considérons que :  $P_0 = P_0^T \succ 0$  définit un ellipsoïde  $E = \{x \mid x^T P_0 x \leq 1\}$  et

$$P_1 = F^T F, \quad P_{i+1} = \Gamma_i^T \Gamma_i, \quad i = \overline{1, n_x}, \quad (3.197)$$

définit des ellipsoïdes dégénérés (représentant des paires d'hyperplans sans bornes données par les contraintes). Ceci définit  $p = n_x + 1$  ellipsoïdes dégénérés.

L'intersection des ellipsoïdes (dégénérés et non dégénérés) peut être écrite sous la forme compacte comme la fonction maximale d'une famille de fonctions quadratiques :

$$V(x) = \max\{x^T P_i x, i = \overline{0, p}\}. \quad (3.198)$$

Le 1-niveau de  $V$  est noté :

$$L_v = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_i x \leq 1, i = \overline{0, p}\}. \quad (3.199)$$

La notation utilisée pour la frontière de  $L_v$  est  $\partial L_v$ . L'ensemble  $L_v$  est donné par l'intersection de l'ellipsoïde  $E$  avec les hyperplans sans bornes  $Fx = \pm 1$  et  $\Gamma_i x = \pm 1, i = \overline{1, n_x}$ .

Conformément au théorème de Nagumo ([77], 2.10), l'ensemble  $L_v$  est invariant si  $x(k+1) \in L_v$  pour tout  $x(k) \in \partial L_v$  et pour tout  $w$  borné,  $w^T w \leq 1$  (l'état situé sur la frontière migre dans l'ensemble). Pour décrire cette propriété, il convient d'utiliser l'accroissement de la fonction de Lyapunov :

$$\Delta V(x, w) = V(x(k+1)) - V(x(k)). \quad (3.200)$$

Si l'on définit :

$$I_{max}(x) = \{i : x^T P_i x = V(x)\}, \quad (3.201)$$

alors la différence directionnelle de Lyapunov devient :

$$\Delta V(x, w) = \max\{x^T(k+1)P_j x(k+1) - x(k)^T P_i x(k), i \in I_{max}(x), j = \overline{0, p}\}. \quad (3.202)$$

Le terme  $P_j, j = \overline{0, p}$  correspond à l'ensemble auquel appartiendra l'état  $x$  à l'instant suivant  $k+1$ .

L'ensemble  $L_v$  est invariant si et seulement si :

$$\Delta V(x, w) \leq 0 \quad \forall x \in \partial L_v, w^T w \leq 1. \quad (3.203)$$

**Théorème 3.23.** *Soit le système linéaire à temps discret, stable (3.193) soumis à des contraintes sur l'état (3.195) et sur la norme Euclidienne de l'entrée (3.196). L'ensemble maximal  $L_v$  est obtenu en résolvant :*

$$\max_{P_0 = P_0^T > 0, \eta \geq 0} \eta \quad (3.204)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} A^T P_j A - P_0 + \gamma_{j0} P_0 - \sum_{k=1}^p \beta_{j0k} P_k & A^T P_j B_w \\ B_w^T P_j A & -\alpha_{j0} I + B_w^T P_j B_w \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (3.205)$$

$$\alpha_{j0} = \gamma_{j0} - \sum_{k=1}^p \beta_{j0k} \geq 0, \gamma_{j0} \geq 0, \beta_{j0k} \geq 0, j = \overline{0, p}, k = \overline{1, p}, \quad (3.206)$$

$$\begin{bmatrix} A^T P_0 A - P_i + \alpha_{0i} P_i - \sum_{k=0}^p \beta_{0ik} (P_k - P_i) & A^T P_0 B_w \\ B_w^T P_0 A & -\alpha_{0i} I + B_w^T P_0 B_w \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (3.207)$$

$$\alpha_{0i} \geq 0, \beta_{0ik} \geq 0, k = \overline{0, p}, i = \overline{1, p}, \quad (3.208)$$

$$\left[ \begin{array}{cc} a_{ji}(A^T P_j A - P_i) + \alpha_{ji} P_i + P_i - P_0 - \sum_{k=1}^p \beta_{jik} (P_k - P_i) & a_{ji} A^T P_j B_w \\ a_{ji} B_w^T P_j A & -\alpha_{ji} I + a_{ji} B_w^T P_j B_w \end{array} \right] \preceq 0, \quad (3.209)$$

$$a_{ji} > 0, \alpha_{ji} \geq 0, \beta_{jik} \geq 0, i, j, k = \overline{1, p}, \quad (3.210)$$

$$x_n^T P_m x_n \leq \eta, \quad m = \overline{0, p}, n = \overline{1, s}. \quad (3.211)$$

*Démonstration.* La preuve sera faite en deux étapes : l'invariance sera tout d'abord prouvée et l'on expliquera ensuite la forme du critère de maximisation.

Les conditions (3.205), (3.206), (3.207), (3.208), (3.209) et (3.210) peuvent être écrites sous la forme générale :

$$\left[ \begin{array}{cc} (A - BF)^T P_j (A - BF) - P_i + \alpha_{ji} P_i - \sum_{k=0}^p \beta_{jik} (P_k - P_i) & A^T P_j B_w \\ B_w^T P_j A & -\alpha_{ji} I + B_w^T P_j B_w \end{array} \right] \preceq 0, \quad (3.212)$$

$$\alpha_{ji} \geq 0, \beta_{jik} \geq 0, \quad i, j, k = \overline{0, p}, \quad (3.213)$$

L'inégalité (3.212) est équivalente à :

$$\begin{aligned} ((A - BF)x + B_w w)^T P_j ((A - BF)x + B_w w) - x^T P_i x &\leq \sum_{k=1}^2 \beta_{jik} x^T (P_k - P_i) x \\ &+ \alpha_{ji} (w^T w - x^T P_i x), \quad \forall i, j. \end{aligned} \quad (3.214)$$

Comme dans [105], on considère  $x$  sur la frontière de  $L_v$  ( $x \in \partial L_v$ ). Nous obtenons  $x^T P_i x = 1 = V(x)$  pour  $i \in I_{max}$  et  $x^T P_i x < 1$  pour  $i \notin I_{max}$ . Cela signifie que :

$$\sum_{k=1}^2 \beta_{jik} x^T (P_k - P_i) x \leq 0, \quad \forall i \in I_{max}, \beta_{jik} \geq 0, j = \overline{0, p}, \quad (3.215)$$

et  $w^T w - x^T P_i x \leq 0, \forall i \in I_{max}, w^T w \leq 1$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} ((A - BF)x + B_w w)^T P_j ((A - BF)x + B_w w) - P_i &\leq 0, \\ \forall i \in I_{max}(x), x \in \partial L_v, j = 0, \dots, p, w^T w &\leq 1. \end{aligned} \quad (3.216)$$

Conformément à (3.202) on a :

$$\Delta V(x, w) \leq 0 \quad \forall x \in \partial L_v, w^T w \leq 1. \quad (3.217)$$

Cela confirme que  $L_v$  est invariant. Ce théorème est une conséquence directe de la S-procédure.

L'ensemble invariant  $L_v$  est maximisé par rapport à un ensemble de référence  $X_r$  tel que  $\xi X_r \subset L_v$  pour un paramètre maximal  $\xi$ . En considérant  $X_r$  un polytope  $X_r = co\{x_i : i = \overline{1, s}\}$ , le but est de trouver le plus grand  $\xi$  tel que :

$$x_n^T P_i x_n \leq \frac{1}{\xi^2} = \eta, \quad i \geq 0, n = \overline{1, s}. \quad (3.218)$$

ce qui explique la forme du critère de maximisation.  $\square$

*Remarque 3.24.* La présence des scalaires transforme (3.212) en une BMI. Cette BMI peut être facilement transformée en une LMI si  $\alpha_{ji}$  et  $\beta_{jik}$  sont fixés.

### 3.4.2 Mise en oeuvre sur un exemple

Considérons un système du second ordre affecté par des perturbations bornées (3.194) :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_w w(k), \\ u(k) &= -Fx(k), \end{aligned} \quad (3.219)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,5 \\ -0,4 & 1,1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_w = 0,01 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.220)$$

et le retour d'état :

$$F = \begin{bmatrix} 0,7 & -1,5 \end{bmatrix}. \quad (3.221)$$

L'ensemble des contraintes est :

$$X_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq 1, i = 1, 2, |Fx| \leq 1\}. \quad (3.222)$$

L'ellipsoïde tronqué obtenu en utilisant la méthode décrite ci-dessus est :

$$L_v = X_c \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T P_0 x \leq 1\} \quad (3.223)$$

où :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0,8880 & 0,1884 \\ 0,1884 & 0,5489 \end{bmatrix}. \quad (3.224)$$

Ces résultats ont été obtenus pour :

$$\gamma_{10} = 0,007, \gamma_{20} = 0,7, \gamma_{30} = 0,12, \gamma_{40} = 1,4, \beta_{010} = 1, \beta_{020} = 1,1, \beta_{030} = 0,7$$

valeurs fixées en utilisant PENBMI [52] lors d'une première itération.

L'ensemble invariant  $L_v$  est maximisé par rapport à un ensemble de référence  $X_r$  tel que  $\xi X_r \subset L_v$  pour un paramètre maximal  $\xi$  et  $\frac{1}{\xi^2} = \eta$ . L'ensemble  $X_r$  considéré ici est donné par le polytope de contraintes  $X_c$  ( $X_r = X_c$ ).

Dans la Figure 3.17, on a tracé l'ensemble de contraintes (le polytope représenté en jaune), l'ellipsoïde invariant obtenu par la méthode décrite dans la Section 3.1.1.3, l'ellipsoïde  $P_0$  (l'ellipsoïde en pointillé), l'ellipsoïde tronqué (l'intersection entre l'ensemble de contraintes et  $P_0$ ) et quelques trajectoires pour illustrer l'invariance.

Comme prévu, l'ellipsoïde  $P_0$  dépasse les frontières de  $X_c$  (l'ensemble des contraintes). En utilisant cette approche on obtient un ensemble invariant  $L_v$  ayant un volume plus grand que le volume de l'ellipsoïde invariant obtenu en appliquant la méthode classique.

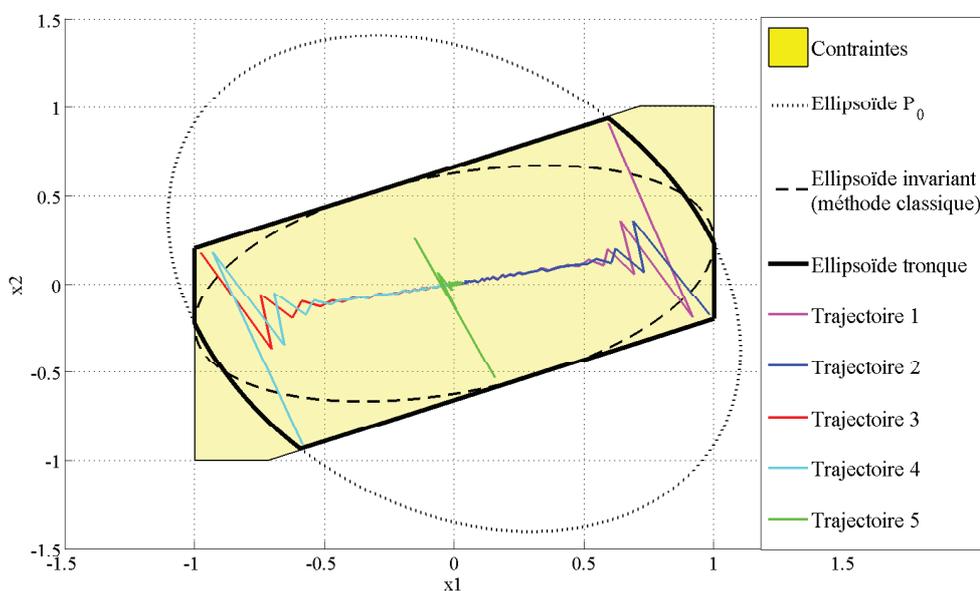


FIGURE 3.17: Ellipsoïde tronqué (l'intersection entre l'ensemble polyédral donné par les contraintes et  $P_0$ ) et l'ellipsoïde invariant obtenu en appliquant la méthode classique.

Ces résultats ont été obtenus par des simulations effectuées à l'aide du logiciel Yalmip [67] avec le solveur SeDuMi [104] dans l'environnement MatLab.

### 3.4.3 Conclusion

Cette section a proposé une autre stratégie aboutissant à la détermination d'ellipsoïdes tronqués, ceux-ci étant en fait de simples outils pour l'analyse en termes de volume du bassin d'attraction pour des systèmes linéaires à temps discret sujets à des perturbations bornées.

Une relaxation importante provient du fait que nous n'exigeons pas que l'ellipsoïde invariant correspondant à  $P_0$  satisfasse les contraintes. Au lieu de cela, nous donnons directement une condition pour l'invariance de  $L_v$ , ensemble obtenu en prenant l'intersection de l'ensemble de contraintes avec  $P_0$ .

L'approche semi-ellipsoïdale proposée est moins conservative (on obtient des ensembles invariants plus grands) que la méthode ellipsoïdale et plus simple que la méthode polyédrale. Elle permet par ailleurs d'avoir une estimation du conservatisme introduit avec la méthode ellipsoïdale. Cette dernière méthode n'a pas été présentée dans ce mémoire, pour se familiariser avec cette méthode le lecteur pourra consulter [8, 9].

Le procédé peut être facilement étendu au cas des systèmes LPV ou en commutation.

### 3.5 Conclusions

Dans cette partie analyse, on a formulé les conditions suffisantes garantissant l'ISS d'un système LTI, LPV ou en commutation à temps discret vis-à-vis de perturbations bornées, puis on a calculé l'ellipsoïde invariant maximal ou minimal (la projection maximale ou l'intersection minimale) où des contraintes sont satisfaites malgré la présence de perturbations. Les résultats présentés ont été mis sous forme d'inégalités matricielles.

Si pour les systèmes LTI à temps discret les conditions garantissant l'ISS par rapport à une perturbation bornée ont été développées en utilisant une fonction de Lyapunov constante, pour les systèmes LPV ou en commutation à temps discret les conditions suffisantes garantissant l'ISS vis-à-vis de perturbations bornées ont été données en utilisant des fonctions de Lyapunov dépendantes du paramètre.

Pour les systèmes LTI à temps discret soumis à des contraintes et affectés par de perturbations bornées, le calcul de l'ellipsoïde invariant maximal ou minimal nous a donné la région de l'état où l'on peut garantir la satisfaction des contraintes malgré la présence de perturbations bornées. Pour les systèmes LPV ou en commutation à temps discret affectés par de perturbations bornées l'ellipsoïde maximal est l'ellipsoïde situé à l'intérieur de l'intersection de tous les ellipsoïdes invariants maximaux correspondant à chaque transition et l'ellipsoïde minimal est l'ellipsoïde qui contient la réunion de tous les ellipsoïdes invariants minimaux correspondant à chaque transition. Ces ellipsoïdes sont invariants malgré la présence de perturbations bornées et pour toute transition. De plus, à l'intérieur de ces ensembles les contraintes sont satisfaites.

Si l'état n'est pas mesurable, un observateur a été considéré afin d'estimer l'état. Pour un système LTI, LPV ou en commutation à temps discret avec l'état estimé au moyen d'un observateur on a donné de même les conditions nécessaires et suffisantes garantissant

l'ISS vis-à-vis de perturbations bornées. En ajoutant des contraintes on a calculé ensuite l'ellipsoïde invariant ayant la projection maximale ou l'intersection minimale sur/avec l'espace de l'état initial.

Afin de robustifier le système, un paramètre de Youla a été ajouté. En suivant la même démarche on a donné les conditions suffisantes garantissant l'ISS vis-à-vis de perturbations bornées pour un système LTI, LPV ou en commutation à temps discret avec observateur et paramétrisation de Youla puis on a calculé l'ellipsoïde ayant la projection maximale ou l'intersection minimale sur/avec l'espace de l'état initial. A travers des exemples, on a vu que l'ajout de la paramétrisation de Youla permet un gain en robustesse. Ce gain s'est traduit par une diminution du volume de l'intersection ellipsoïdale minimale et une augmentation du volume de la projection ellipsoïdale maximale. Les évolutions temporelles ont montré que côté commande on obtient des transitoires moins importants pour le système avec le paramètre de Youla mais côté performance un ralentissement est observé.

Dans la dernière partie de ce chapitre on a donné les outils pour calculer un ellipsoïde tronqué invariant maximal pour un système LTI à temps discret affecté par de perturbations bornées. Cet ensemble a un volume plus grand que celui de l'ellipsoïde invariant maximal et est obtenu considérant l'intersection des hyperplans donnés par les contraintes avec un ensemble ellipsoïdal.

Cette étude nous a permis d'élaborer une technique d'analyse de la robustesse d'un contrôleur vis-à-vis de perturbations bornées. Cette robustification a été obtenue au moyen d'un paramètre de Youla. Dans le chapitre suivant, des techniques de synthèse hors ligne de lois de commande robustes, et la robustification des lois de commande existantes, vis-à-vis de perturbations bornées et en présence de contraintes, vont être abordées.

## Chapitre 4

# Outils ensemblistes pour la synthèse d'une loi de commande robuste

Le chapitre précédent a permis la mise au point d'outils ensemblistes (ensembles invariants minimal et maximal, intersection minimale et projection maximale) adaptés à l'analyse des performances de systèmes soumis à de perturbations bornées, qu'ils soient de type LTI, LPV ou encore à commutation. Ils ont en particulier permis de montrer l'apport d'une robustification via la paramétrisation de Youla.

L'objectif de ce chapitre, dans le prolongement du précédent, est d'utiliser désormais tous ces outils dans un but de synthèse, de façon à élaborer une stratégie de commande robuste à partir de considérations sur les ensembles invariants.

Reprenant la démarche et le plan du chapitre précédent, les développements théoriques mis en oeuvre ci-dessous sont structurés en trois parties : une première section est dédiée aux systèmes linéaires invariants dans le temps affectés par des perturbations bornées, une deuxième section se consacre aux systèmes LPV perturbés et une dernière section envisage le cas aux systèmes en commutation affectés par des perturbations bornées.

Chaque section débute par la synthèse d'une commande par retour d'état qui a pour objectif de maximiser l'ellipsoïde invariant à l'intérieur duquel les contraintes sont satisfaites malgré la présence de perturbations bornées. Dans un deuxième temps, une loi de commande par retour d'état et un observateur est synthétisée en imposant différentes techniques pour améliorer la performance du système. La nouveauté consiste en la prise en compte des perturbations lors de la synthèse de la loi de commande par retour d'état et observateur. Enfin, dans une troisième étape on propose une approche fondée sur les ensembles invariants pour la synthèse d'un paramètre de Youla-Kučera en utilisant des techniques LMI (inégalité matricielle linéaire). Étant donné un système linéaire/LPV/en commutation à temps discret affecté par des perturbations bornées, soumis

à des contraintes et avec l'état estimé au moyen d'un observateur, la technique proposée vise à synthétiser le meilleur paramètre de Youla en termes de recherche d'un ensemble ellipsoïdal invariant satisfaisant les contraintes et ayant la projection ellipsoïdale maximale sur l'espace d'état initial. Cette démarche s'appuie donc sur les conclusions formulées lors du chapitre précédent.

On montrera en particulier dans ce chapitre que, comparée aux résultats obtenus pour le système avec observateur seul, la synthèse d'un paramètre de Youla fournit une plus grande projection ellipsoïdale. Le prix à payer à ce gain en termes de robustesse est classiquement une diminution des performances en boucle fermée. Afin d'obtenir un compromis entre la robustesse et la performance, deux méthodes seront proposées : la première méthode impose une décroissance plus rapide pour la fonction de Lyapunov et la deuxième se réfère au concept de placement des pôles.

La synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur satisfaisant des contraintes sur la performances en présence de perturbations bornées et l'approche ensembliste pour la synthèse d'un paramètre de Youla représentent des nouveautés dans la littérature.

Les approches mentionnées ci-dessus seront finalement validées en simulation.

Il convient aussi de noter que la plupart des relations et notations utiles à ce chapitre ont déjà été décrites au chapitre 3. On y fera donc mention sans les redéfinir.

## 4.1 Cas des systèmes linéaires invariants

L'utilisation des ensembles invariants pour la synthèse des lois de commande robustes a connu un développement significatif au cours des dernières années : [9, 16, 28, 35, 54, 60, 61, 68]. Ainsi, pour les systèmes sous contraintes, de nombreuses techniques utilisant les ensembles invariants ont été proposées : [107] a considéré la commande prédictive sous contraintes pour des systèmes incertains décrits sous forme polytopique ou ayant une incertitude structurée dans la boucle ; [61] a également travaillé avec la commande prédictive sous contraintes et des incertitudes polyédrales mais en utilisant l'invariance périodique ; [13] a traité, entre autres, des systèmes soumis à de perturbations bornées, cet ouvrage présente d'ailleurs une vue d'ensemble intéressante sur les techniques ensemblistes sous une formulation LMI. Nous nous intéressons dans cette partie aux systèmes linéaires discrets soumis à des perturbations bornées. De plus, si l'état est supposé non accessible un observateur doit être impérativement inclus dans le correcteur. Ce type de correcteur peut être ensuite robustifié, généralement hors-ligne, avec un paramètre de Youla (ou paramètre  $Q$ ), comme illustré par plusieurs auteurs ([53], [54], [103]) et comme cela a été le cas au chapitre précédent. Le paramètre de

Youla permet de robustifier le correcteur vis-à-vis des incertitudes ou des perturbations sans modifier le comportement entrée-sortie. La synthèse du paramètre de Youla est réalisée en utilisant des techniques ensemblistes qui permettent d'agrandir l'espace invariant où les contraintes sont satisfaites.

Diverses méthodes conduisant à des ensembles invariants plus grands ont été proposées : [53] a ainsi considéré un système incertain avec une description polytopique et il a montré que l'introduction de degrés de liberté supplémentaires permet d'obtenir un ensemble invariant plus grand. Une généralisation de cette approche peut être trouvée dans [16] et [28], ces deux articles proposent l'insertion d'un certain nombre de variables d'écart afin d'élargir l'ensemble stabilisant obtenu par la méthode de prédiction MPC. Dans [60] et [61] l'invariance périodique est explorée afin d'obtenir un bassin d'attraction ellipsoïdal plus grand pour la méthode MPC.

La première partie de cette section concerne la synthèse d'une loi de commande par retour d'état stabilisant pour le système LTI soumis à des perturbations bornées. Le critère d'optimisation considéré s'intéresse à la maximisation de l'ellipsoïde invariant à l'intérieur duquel les contraintes sur la commande sont satisfaites. Cette démarche reprend à la base les résultats sous forme LMI obtenus par [13] en termes d'analyse des ensembles atteignables pour des systèmes à temps continu affectés par des perturbations bornées. Nous allons ici plus loin et étendons ces résultats à la synthèse d'un retour d'état qui maximise l'ensemble atteignable pour des systèmes à temps discret.

Toutefois, en pratique, les variables d'état ne sont pas toujours disponibles pour être mesurées (impossible ou coûteux), d'où la nécessité d'estimer l'état. Dans la deuxième partie de cette section, une commande à base d'observateur sera donc synthétisée en prenant en compte des contraintes de performance. Dans la littérature il y a plusieurs travaux réalisés sur ce sujet [2, 13, 22, 40, 62] sans considérer tout de même la prise en compte de perturbations bornées. Nous prenons en compte les perturbations bornées et arrivons à construire des inégalités matricielles garantissant l'ISS du système vis-à-vis de perturbations bornées. De plus on impose aussi des contraintes sur la performance en boucle fermée lors de la synthèse de la commande à base d'observateur.

L'un des objectifs de la dernière section est d'élargir la région de l'espace d'état où les contraintes sont satisfaites en réduisant l'effet de perturbations à travers la paramétrisation de Youla. Ce travail a comme point de départ l'analyse de l'effet de la paramétrisation de Youla sur le volume des ensembles invariants, décrite dans le chapitre précédent [69]. On a observé que, pour un système linéaire à temps discret perturbé avec contraintes sur l'entrée, l'introduction d'un paramètre de Youla, obtenu en utilisant des techniques qui améliorent la fonction de sensibilité de la boucle fermée vers la perturbation (considérée bornée), élargit la projection maximale de l'ensemble invariant sur le sous-espace de l'état initial. En allant plus loin dans cette voie on développe des

inégalités matricielles avec comme variables de décisions des combinaisons linéaires du paramètre de Youla. Les variables des décisions sont recherchées afin de trouver l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes et ayant la projection maximale sur l'espace d'état initial. La synthèse d'un paramètre de Youla en utilisant des techniques ensemblistes sous forme LMI n'a jamais été traitée dans la littérature et pourtant le paramètre obtenu de cette façon offre de très bons résultats en termes de robustesse (traduite par une projection maximale plus grande et une fonction de sensibilité meilleure que celle obtenue pour le système avec observateur seul). Ces résultats en termes de robustesse ont comme effet un ralentissement des performances en boucle fermée. Pour arriver à un compromis entre la robustesse et la performance on a examiné deux méthodes : une basée sur la décroissance de la fonction de Lyapunov et une basée sur la technique de placement des pôles. Finalement on montre l'efficacité de ces méthodes en les appliquant sur un moteur à induction.

#### 4.1.1 Synthèse d'une loi de commande par retour d'état

Cette section propose une technique de commande utilisant des méthodes ensemblistes afin de calculer un retour d'état stabilisant robuste qui satisfait les contraintes sur la commande et la sortie malgré la présence de perturbations bornées. Le retour d'état recherché est celui qui procure le plus grand ellipsoïde invariant. On considère des contraintes sur l'entrée, comme par exemple celles données par la saturation des actionneurs, et sur la sortie, comme par exemple sur le niveau de sortie dans un système hydraulique.

Soit le système LTI à temps discret (3.1) avec la loi de commande donnée par (3.2).

On considère des contraintes sur la norme Euclidienne de la commande  $u(k)$  :

$$\|u\|_2 \leq u_{max} \quad (4.1)$$

et sur la norme Euclidienne de la sortie  $y(k)$  :

$$\|y\|_2 \leq y_{max}. \quad (4.2)$$

Le vecteur de bruit regroupant les perturbations d'état et de mesure  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est supposé borné :

$$n^T(k)n(k) \leq 1 \quad (\text{d'où } w^T(k)w(k) \leq 1, v^T(k)v(k) \leq 1). \quad (4.3)$$

Rappelons la relation donnant la structure générale d'un ellipsoïde :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T P x = x^T G^{-1} x \leq 1, P = P^T = G^{-1} \succ 0\}. \quad (4.4)$$

Le théorème suivant donne la loi de commande par retour d'état qui garantit l'ISS (vis-à-vis d'une perturbation bornée) et qui permet de déterminer l'ellipsoïde invariant maximal à l'intérieur duquel les contraintes sur la commande et la sortie sont satisfaites.

**Théorème 4.1.** *Soit le système LTI à temps discret (3.1) avec la structure de commande donnée par (3.2). L'état est affecté par une perturbation bornée (4.3) et des contraintes sont imposées sur la commande et la sortie du système. La maximisation hors-ligne de  $E$  est effectuée en résolvant :*

$$\min_{G=G^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0, Y} -\log \det G \quad (4.5)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} G & 0 & \alpha G & GA^T - Y^T B^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \\ \alpha G & 0 & \alpha G & 0 \\ AG - BY & B_w & 0 & G \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.6)$$

$$\alpha \geq \beta, \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} G & Y^T \\ Y & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (4.8)$$

et

$$\begin{bmatrix} G & GC^T \\ CG & y_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (4.9)$$

Le retour d'état stabilisant qui maximise l'ellipsoïde invariant est donné par la relation  $F = YG^{-1}$ .

*Démonstration.* L'inégalité assurant l'invariance et l'ISS (4.6) provient de l'inégalité (3.8) avec la notation  $Y = FG$  proposée par [107].

La LMI (4.8) est dérivée de (3.28) en employant la notation  $Y = FG$ .

Pour ce qui concerne les contraintes de sortie, on obtient :

$$\begin{aligned} \|y\|_2^2 &= \|Cx(k)\|_2^2 \leq \|CP^{-1/2}\|_2^2 \|P^{1/2}x(k)\|_2^2 \\ &\leq \lambda_{max}\{(CP^{-1}C^T)(x^T(k)Px(k))\} \leq \lambda_{max}[CP^{-1}C^T]. \end{aligned}$$

Par l'application du théorème de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & y_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Il en résulte la LMI (4.9) par congruence avec  $\text{diag}(G, I)$  où  $G = G^T = P^{-1} \succ 0$ .

Pour compléter la preuve, nous devons dire que le retour d'état  $F$  est donné par  $F = YG^{-1}$ .

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = \frac{(n_x)(n_x + 1)}{2} + n_x + 1. \quad (4.10)$$

□

*Remarque 4.2.* Par le théorème ci-dessus on a abouti à la synthèse d'une commande par retour d'état sous contraintes d'entrée et de sortie pour un système LTI à temps discret affecté par des perturbations bornées. La prise en compte des perturbations a été possible grâce à la S-procédure. Avec la notation  $Y = FG$  on arrive à une BMI avec une seule variable de décision multipliant une autre variable de décision. Comme mentionné dans le chapitre précédent, cette variable est un scalaire et le problème peut être facilement résolu par une simple boucle.

Les LMIs correspondant aux contraintes ont été obtenues grâce aux propriétés de la norme euclidienne en se souvenant que  $x^T(k)Px(k) \leq 1$ .

#### 4.1.1.1 Synthèse par retour d'état. Ellipsoïde minimal

Si l'on souhaite synthétiser une loi de commande qui minimise le volume de l'ellipsoïde invariant il suffit de changer le critère d'optimisation. Ce critère devient maintenant  $\min \text{trace}(G)$ . Pour mieux comprendre, montrons l'équivalence entre le critère  $\min -\log \det(P)$  utilisé habituellement pour obtenir l'ellipsoïde minimal et  $\min \text{trace}(G)$ .

$$\begin{aligned} -\log \det(P) &= -\log\left(\prod_{i=1}^{n_x} \lambda_i\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{n_x} \frac{1}{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{n_x} \log\left(\frac{1}{\lambda_i}\right), \\ \text{trace}(G) &= \sum_{i=1}^{n_x} \left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $P$ . Comme le "logarithme" est une fonction monotone, les deux critères sont équivalents.

*Remarque 4.3.* Il faut préciser que ce critère peut être utilisé tout au long de ce mémoire chaque fois qu'on souhaite la minimisation d'un ensemble. Notre choix a été d'utiliser

le critère  $\min -\log \det(P)$  au lieu de  $\min \text{trace}(G)$  car les résultats en simulation sont plus satisfaisants.

Comme on peut le voir, en fonction du critère choisi les inégalités doivent être écrites en  $P$  pour le critère logarithmique et en  $G$  quand la trace est minimisée. Pour la synthèse d'un retour d'état on est obligé d'utiliser le critère  $\min \text{trace}(G)$  étant le seul qui permet de substituer le produit de deux variables de décision par une seule.

#### 4.1.1.2 Mise en oeuvre sur un exemple

Soit le système LTI à temps discret<sup>1</sup> ayant la forme (3.1) avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0,04 \\ 0 & 1 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,3 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_w = 0,01B, D_v = 0. \quad (4.12)$$

Dans le système donné ci-dessus on a considéré une action intégrale afin d'annuler l'erreur statique.

On impose des contraintes sur la norme euclidienne de l'entrée et de la sortie, respectivement :

$$\begin{aligned} \|u\|_2 &\leq u_{max} = 1, \\ \|y\|_2 &\leq y_{max} = 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

En appliquant le théorème 4.1 on recherche le retour d'état qui maximise l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes sur l'entrée et sur la sortie. Le retour d'état offrant l'ellipsoïde maximal est :

$$F = \begin{bmatrix} 0,4561 & 0,6093 & 0,4082 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Dans la Figure 4.1 on a tracé l'ellipsoïde invariant maximal obtenu. Celui-ci est situé à l'intérieur du polyèdre donné par les contraintes (le polyèdre bleu) et a été obtenu pour un  $\alpha = 0,04$ . L'ellipsoïde invariant maximal a le volume  $V = 17,7379$ .

Dans la Figure 4.1 on a également tracé la trajectoire de l'état pour un point initial :

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0,0601 & 1,3689 & -3,3510 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

en considérant que le système est affecté par une perturbation permanente sur le signal d'entrée et une perturbation permanente sur le signal de sortie prenant des valeurs aléatoires dans l'intervalle  $[-0,01 \ 0,01]$ . La trajectoire reste dans l'ensemble invariant.

1. Système pédagogique choisi à titre explicatif

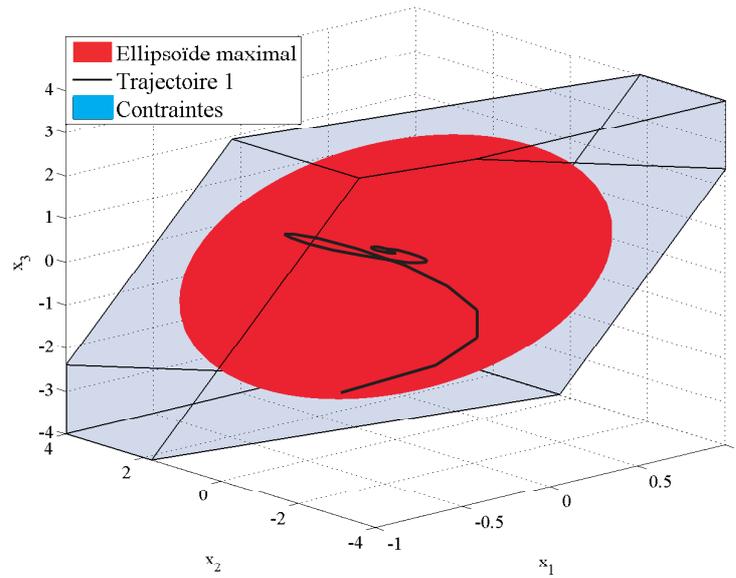


FIGURE 4.1: Ellipsoïde maximal.

Pour ce point initial de l'état on a représenté Figures 4.2 et 4.3 les évolutions temporelles de l'entrée et de la sortie, respectivement. Ces simulations temporelles ont été réalisées en considérant les perturbations données ci-dessus.

La Figure 4.2 montre que les contraintes sur la commande sont satisfaites et que le système en boucle fermée est ISS stable.

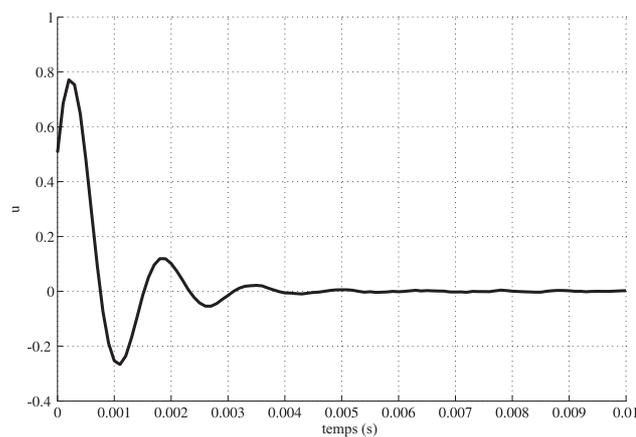


FIGURE 4.2: Evolution temporelle de l'entrée.

Dans la Figure 4.3 on peut voir que les contraintes sur la sortie sont satisfaites même si une perturbation agit sur le système.

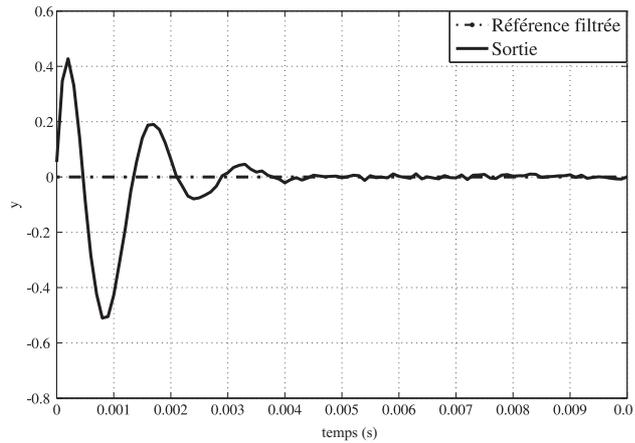


FIGURE 4.3: Evolution temporelle de la sortie.

Le retour d'état et l'ellipsoïde maximal ont été obtenus sous Matlab en utilisant le logiciel Yalmip [67] avec le solveur "SeDuMi" [104]. Les simulations dans le domaine temporel ont été réalisées dans Simulink.

#### 4.1.2 Synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur

Dans la pratique, le vecteur d'état ou une partie des variables d'état ne sont pas toujours accessibles à la mesure. Dès lors, un observateur d'état est généralement utilisé pour reconstruire les variables d'état non mesurables. Le problème d'estimation d'état est également très important lorsque l'on souhaite réduire le nombre de capteurs, c.-à-d. réduire les coûts et améliorer la fiabilité du système.

Soit le système à temps discret affecté par une perturbation bornée (3.1), avec l'état estimé par un observateur (3.29). La représentation de l'état augmenté est donnée par (3.33) et la commande a la forme (3.35). Pour la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur on ne considère pas de contraintes sur la commande. Dans une première étape on va synthétiser une loi de commande par retour d'état et observateur, et puis, en ajoutant de contraintes sur la commande, on va robustifier le système grâce à la paramétrisation de Youla.

Le vecteur de bruit  $n \in \mathbb{R}^{n_w}$  a deux composantes : la perturbation d'état  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  et la perturbation de mesure  $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ . Ce vecteur est supposé borné :

$$n^T n \leq 1. \quad (4.16)$$

L'ensemble ellipsoïdal peut être défini par (3.37), la projection de l'ellipsoïde  $E_o$  sur  $x$  est donnée par (3.43) et l'intersection par (3.42).

Le point de départ de nos développements théoriques est issu des travaux développés dans [13]. Pour un système à temps continu, non perturbé avec l'état estimé au moyen d'un observateur :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \\ \hat{\dot{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(Cx(t) - C\hat{x}(t)), \\ u(t) &= -F\hat{x}(k), \end{aligned} \quad (4.17)$$

[13] propose une méthode LMI pour la synthèse, simultanée, d'un retour d'état et d'un gain d'observateur stabilisants. Ainsi, selon [13] si  $P = P^T \succ 0$ ,  $G = G^T \succ 0$ ,  $Y$  et  $Z$  existent tels que :

$$AG + GA^T - BY - Y^T B^T \prec 0, \quad (4.18)$$

et

$$PA + A^T P - JC - C^T J^T \prec 0 \quad (4.19)$$

alors le système peut être stabilisé avec le retour d'état :

$$F = YG^{-1}, \quad (4.20)$$

et l'observateur :

$$L = P^{-1}J. \quad (4.21)$$

#### 4.1.2.1 Synthèse de la commande

La démarche ci-dessous propose une alternative aux résultats de [13]. Ainsi, pour des systèmes à temps discret affectés par des perturbations bornées, nous recherchons le retour d'état et l'observateur garantissant l'ISS vis-à-vis de perturbations bornées. L'alternative offerte a d'autant plus de sens que des contraintes de performance sont ajoutées. L'idée permettant d'arriver au résultat est d'augmenter le vecteur de bruit. Avec ces extensions, nous considérons que le système et l'observateur peuvent être affectés par des perturbations différentes. Cette augmentation ne modifie pas globalement le problème initial.

**Théorème 4.4.** *Soit le système à temps discret avec observateur (3.33) affecté par une perturbation bornée (4.16). S'il existe  $G = G^T \succ 0$ ,  $P = P^T \succ 0$ ,  $Y$ ,  $J$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$  tels que les inégalités suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} G & 0 & \alpha G & GA^T - Y^T B^T \\ 0 & \beta I & 0 & [B_w \ 0]^T \\ \alpha G & 0 & \alpha G & 0 \\ AG - BY & [B_w \ 0] & 0 & G \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 & \alpha P & A^T P - C^T J^T \\ 0 & \gamma I & 0 & [PB_w - JD_v]^T \\ \alpha P & 0 & \alpha P & 0 \\ PA - JC & [PB_w - JD_v] & 0 & P \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.23)$$

$$\alpha - \gamma \geq 0, \quad \alpha - \beta \geq 0, \quad (4.24)$$

alors le système est ISS par rapport à la perturbation bornée (4.3). Le retour d'état qui stabilise le système est donné par :

$$F = YG^{-1}, \quad (4.25)$$

et le gain de l'observateur est :

$$L = P^{-1}J. \quad (4.26)$$

*Démonstration.* Nous montrerons tout d'abord que si l'inégalité (3.38) a une solution, alors les inégalités (4.22), (4.23) et (4.24) sont faisables. Réciproquement, dans la deuxième partie de la preuve, nous montrerons que pour le gains  $F$  et  $L$  (s'ils existent) obtenus via les LMIs (4.22), (4.23) et (4.24), il existera toujours un  $P_o = P_o^T$  satisfaisant l'inégalité LMI (3.38).

Mais commençons cette preuve en faisant les extensions suivantes :

$$\begin{aligned} B_o &\rightarrow B_o = \begin{bmatrix} B_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_w & -LD_v \end{bmatrix}, \\ n &\rightarrow n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \quad n_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \quad n_2 = \begin{bmatrix} w_2 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad n_1^T n_1 \leq 1, \quad n_2^T n_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Avec ces prolongements, nous considérons que le système et l'observateur peuvent être affectés tous les deux par des perturbations a priori différentes. Cette augmentation ne change pas notre problème et s'avère nécessaire pour la suite de cette démonstration. Avec ce prolongement on peut diviser le problème en deux parties afin d'obtenir les inégalités (4.22), (4.23) et (4.24).

Si dans le chapitre précédent on a considéré que  $n^T(k)n(k) \leq 1$  on étend maintenant cette hypothèse aux perturbations  $n_1$  et  $n_2$ . Cette supposition n'est pas conservatrice.

A partir de cette démarche, la condition d'ISS par rapport à une perturbation bornée :

$$\begin{aligned} \Delta V_o &< 0 \quad \text{pour tout } x_o(k)^T P_o x_o(k) \geq 1 \quad \text{et } n(k)^T n(k) \leq 1 \quad \text{avec} \\ \Delta V_o &= V_o(k+1) - V_o(k), \quad V_o(k) = x_o^T(k) P_o x_o(k), \end{aligned}$$

peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x_o \\ n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_o^T P_o A_o - P_o & A_o^T P_o B_o \\ B_o^T P_o A_o & B_o^T P_o B_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ n \end{bmatrix} - \alpha(1 - x_o^T P_o x_o) - (n_1^T n_1 - \beta) - (n_2^T n_2 - \gamma) < 0. \quad (4.28)$$

Avec la S-procédure, l'inégalité (4.28) (et implicitement l'inégalité (3.38)) devient :

$$\begin{bmatrix} P_o & 0 & \alpha P_o & A_o^T P_o \\ 0 & \begin{bmatrix} \beta I & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} & 0 & B_o^T P_o \\ \alpha P_o & 0 & \alpha P_o & 0 \\ P_o A_o & P_o B_o & 0 & P_o \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.29)$$

et (3.40) devient :

$$\alpha - \beta - \gamma \geq 0. \quad (4.30)$$

Dans la suite de cette démonstration, (4.29) et (4.30) seront les inégalités considérées comme garantissant l'ISS vis-à-vis des perturbations bornées  $n_1$  et  $n_2$ .

Montrons alors tout d'abord que si l'inégalité (4.29) (et implicitement (3.38)) et (4.30) ont une solution, alors les inégalités (4.22), (4.23) et (4.24) sont faisables.

Nous supposons que les inégalités (4.29) et (4.30) ont une solution  $P_o = P_o^T \succ 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$  avec :

$$P_o = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (4.31)$$

A partir de  $P_o$  exprimé comme ci-dessus, nous pré- et post-multiplions l'inégalité (4.29) par, respectivement,  $\Gamma$  et  $\Gamma^T$ .

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Alors, en utilisant le complément de Schur, il est facile de voir que (4.29) implique :

$$\begin{bmatrix} P_{11} & 0 & \alpha P_{11} & (A - BF)^T P_{11} \\ 0 & \beta I & 0 & [B_w \ 0]^T P_{11} \\ \alpha P_{11} & 0 & \alpha P_{11} & 0 \\ P_{11}(A - BF) & P_{11}[B_w \ 0] & 0 & P_{11} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.33)$$

$$\alpha - \beta \geq 0. \quad (4.34)$$

En pré- et post-multipliant l'inégalité (4.33) par  $\text{diag}(P_{11}^{-1}, I, P_{11}^{-1}, P_{11}^{-1})$  et avec les notations  $G = G^T = P_{11}^{-1} \succ 0$  et  $Y = FP_{11}^{-1}$ , il en résulte l'inégalité (4.22).

Pour l'inégalité (4.23), nous pré- et post-multiplions l'inégalité (4.29) par  $\text{diag}(P_o^{-1}, I, P_o^{-1}, P_o^{-1})$  et nous adoptons la notation :

$$G_o = P_o^{-1} \text{ avec } G_o = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12}^T & G_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Par la congruence de cette nouvelle inégalité avec  $\Gamma$  et en utilisant le théorème de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} G_{22} & 0 & \alpha G_{22} & G_{22}(A - LC)^T \\ 0 & \gamma I & 0 & [B_w \ -LD_v]^T \\ \alpha G_{22} & 0 & \alpha G_{22} & 0 \\ (A - LC)G_{22} & [B_w \ -LD_v] & 0 & G_{22} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.36)$$

$$\alpha - \gamma \geq 0. \quad (4.37)$$

Si on pré- et post-multiplie (4.36) par  $\text{diag}(G_{22}^{-1}, I, G_{22}^{-1}, G_{22}^{-1})$  avec les notations  $P = P^T = G_{22}^{-1} \succ 0$  et  $J = G_{22}^{-1}L$ , l'inégalité (4.23) est obtenue.

Montrons maintenant que pour les gains  $F$  et  $L$  obtenus via les LMIs (4.22), (4.23) et (4.24), il existera toujours un  $P_o = P_o^T$  satisfaisant l'inégalité (4.29) (et implicitement (3.38)).

Supposons que  $P, G, Y, J, \alpha, \beta$  et  $\gamma$  satisfont les inégalités (4.22), (4.23) et (4.24) et définissons :  $F = YG^{-1}$  et  $L = P^{-1}J$ . L'objectif est de prouver qu'il existe toujours un  $\lambda > 0$  tel que :

$$P_o = \begin{bmatrix} \lambda G^{-1} & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

qui satisfasse (4.29) et (4.30) assurant ainsi l'ISS. Il est nécessaire d'imposer une forme bloc diagonale à la matrice  $P_o$  afin de pouvoir démontrer la réciproque de ce théorème. L'idée est de montrer qu'il existe au moins une matrice  $P_o$  et un  $\lambda$  qui satisfont les inégalités (4.29) et (4.30) même si  $P_o$  a une forme particulière.

Nous supposons également que  $\beta = \lambda \beta'$ .

Avec ces notations, en pré-et post-multipliant (4.29) avec  $\Gamma$  et  $\Gamma^T$  et en utilisant le théorème de Schur, on obtient que le système avec observateur est ISS vis-à-vis de (4.16) si  $\lambda > 0$  satisfait :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G^{-1} & 0 & \alpha G^{-1} & (A-BF)^T G^{-1} \\ 0 & \beta' I & 0 & [B_w 0]^T G^{-1} \\ \alpha G^{-1} & 0 & \alpha G^{-1} & 0 \\ G^{-1}(A-BF) & G^{-1}[B_w 0] & 0 & G^{-1} \end{bmatrix}}_{LMI_x} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ G^{-1}BF & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 & \alpha P & (A-LC)^T P \\ 0 & \gamma I & 0 & [B_w -LD_v]^T P \\ \alpha P & 0 & \alpha P & 0 \\ P(A-LC) & P[B_w -LD_v] & 0 & P \end{bmatrix}}_{LMI_\varepsilon^{-1}}^{-1} S^T \succ 0, \quad (4.39)$$

$$\alpha - \lambda \beta' - \gamma \geq 0. \quad (4.40)$$

Les inégalités ci-dessus sont satisfaites pour tout  $\lambda > 0$  tel que :

$$\min(\nu) > \lambda \max(\mu) \quad (4.41)$$

$$\alpha - \gamma \geq \lambda \beta' \quad (4.42)$$

où

$$\nu = \lambda_{\min}(LMI_x), \quad \mu = \lambda_{\max}(S \cdot LMI_\varepsilon^{-1} \cdot S^T), \quad (4.43)$$

$\lambda_{\min}$  représente la valeur propre minimale et  $\lambda_{\max}$  représente la valeur propre maximale,  $LMI_x$  correspond à (4.22) et  $LMI_\varepsilon$  correspond à (4.23). Comme (4.22), (4.23) et (4.24) sont faisables, un tel  $\lambda$  existera toujours.

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_\nu = 2 \left( \frac{(n_x)(n_x + 1)}{2} + n_x + 1 \right) = n_x^2 + 3n_x + 2. \quad (4.44)$$

□

*Remarque 4.5.* L'obtention des inégalités présentes dans le théorème 4.4 a été possible grâce à une augmentation qui a permis de considérer que le système et l'observateur peuvent être affectés tous les deux par des perturbations a priori différentes. Ensuite,

en utilisant la S-procédure et le complément du Schur, en considérant une forme particulière pour la matrice correspondant à la fonction de Lyapunov et en manipulant les matrices on arrive à (4.22), (4.23) et (4.24).

Comme il a déjà été mentionné, la méthode que nous proposons pour la synthèse d'une commande par retour d'état et observateur a plus de sens par rapport à la technique donnée par [13] lorsque des contraintes de performance sont ajoutées. Il est en effet pertinent de considérer (comme dans le cas sans observateur) des contraintes sur la commande ou sur l'état. Or ceci n'est pas possible jusqu'ici car la construction (4.22), (4.23) et (4.24) ne le permet pas. En fait, en ajoutant des contraintes sur la commande, au lieu d'obtenir une relation de type  $\min(\star) > \lambda \max(\circ)$  dans la deuxième partie de la démonstration précédente pour les LMIs associées aux contraintes, on obtient l'inverse  $\min(\star) < \lambda \max(\circ)$ .

Pour contourner cette difficulté nous considérons dans la suite la synthèse d'une commande par retour d'état et observateur en prenant en compte des contraintes de performance. Ces contraintes seront en fait des contraintes sur la région dans laquelle les pôles de la boucle fermée peuvent être placés. Cette méthode a comme objectif de réduire les transitoires du signal de sortie garantissant une dynamique plus rapide.

L'idée est, dans une première étape, de concevoir une loi de commande par retour d'état et observateur ayant une bonne performance en boucle fermée et après, dans une deuxième étape, de la robustifier à travers la paramétrisation de Youla en ajoutant des contraintes sur la commande.

#### 4.1.2.2 Techniques de placement de pôles

Une méthode qui conduit à une dynamique plus rapide avec moins de transitoires consiste en effet à placer les pôles en boucle fermée dans une région appropriée du plan complexe lors du calcul de la commande avec observateur. Cette technique est connue sous le nom de placement régional de pôles. Le concept des régions LMI [18, 41] est utilisé afin d'obtenir les objectifs de placement de pôles en termes de LMIs.

**Définition 4.6.** Une région LMI est un sous-ensemble du plan complexe défini par  $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{D}}(s) \prec 0\}$  :

$$f_{\mathcal{D}}(s) = L_p + M_p s + M_p^* s^*, \quad L_p, M_p \in \mathbb{R}^{q \times q}. \quad (4.45)$$

Notre intention est de placer les pôles de la boucle fermée dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r < 1$  (plus le rayon est petit, plus les transitoires sont satisfaisants).

Cette région correspond à  $f_{\mathcal{D}}(s) = ss^* - r^2$ . En utilisant le complément du Schur on a :

$$f_{\mathcal{D}}(s) = \begin{bmatrix} -r & s \\ s^* & -r \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Si toutes les valeurs propres d'une matrice  $A_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se trouvent dans la région LMI  $\mathcal{D}$ , alors  $A_o$  est appelée  $\mathcal{D}$ -stable.

**Lemme 4.7.** *La matrice  $A_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement si il existe  $X_p = X_p^* \succ 0$  tel que :*

$$M_{\mathcal{D}}(X_p, A_o) = L_p \otimes X_p + M_p \otimes (X_p A_o) + M_p^* \otimes (X_p A_o)^* \prec 0. \quad (4.47)$$

En regardant 4.45 et 4.46 les matrices  $L_p$  et  $M_p$  correspondant au cercle de rayon  $r < 1$  peuvent être facilement identifiées.

Afin de faciliter la mise en oeuvre dans un cadre LMI, nous recherchons une matrice de Lyapunov unique  $X_p = P_o = G_o^{-1}$  qui assure l'invariance et le placement des pôles de la boucle fermée dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r < 1$ . La condition (4.47) avec le formalisme 4.46 peut s'écrire maintenant sous une forme LMI :

$$\begin{bmatrix} rP_o & A_o^T P_o \\ P_o A_o & rP_o \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.48)$$

ou

$$\begin{bmatrix} rG_o & G_o A_o^T \\ A_o G_o & rG_o \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.49)$$

obtenue en pré- et post-multipliant (4.48) par  $\text{diag}(G_o, G_o)$  et  $\text{diag}(G_o, G_o)$ , respectivement.

**Théorème 4.8.** *Soit le système à temps discret avec observateur (3.33) affecté par une perturbation bornée (4.16). Pour  $r_i < 1$  donnés, s'il existe  $G = G^T \succ 0$ ,  $P = P^T \succ 0$ ,  $Y$ ,  $J$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$  tels que les inégalités (4.22), (4.23), (4.24) et les LMIs :*

$$\begin{bmatrix} r_1 G & GA^T - Y^T B^T \\ AG - BY & r_1 G \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.50)$$

$$\begin{bmatrix} r_2 P & A^T P - C^T J^T \\ PA - JC & r_2 P \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.51)$$

soient satisfaites, alors le système est ISS par rapport à la perturbation bornée (3.32) et les pôles de la boucle fermée sont placés dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r$ . Le retour d'état qui stabilise le système est donné par (4.25) et le gain de l'observateur est donné par (4.26)

*Démonstration.* Nous montrerons que les LMIs (4.48) ou (4.49) (responsables du placement des pôles) ont une solution si et seulement si les LMIs (4.50) et (4.51) sont faisables.

Supposons que la LMI (4.48) ait une solution  $P_o = P_o^T \succ 0$  avec :

$$P_o = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

et :

$$r = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

On pré- et post-multiplie alors la LMI (4.48) par  $\Sigma$  et  $\Sigma^T$ , respectivement :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Avec la nouvelle LMI (à l'aide du complément de Schur), il est facile de voir que la LMI (4.48) implique :

$$\begin{bmatrix} r_1 P_{11} & (A - BF)^T P_{11} \\ P_{11}(A - BF) & r_1 P_{11} \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (4.55)$$

En pré-et post-multipliant la LMI (4.55) par  $\text{diag}(P_{11}^{-1}, P_{11}^{-1})$  et avec les notations  $G = G^T = P_{11}^{-1} \succ 0$  et  $Y = F P_{11}^{-1}$ , il en résulte la LMI (4.50).

Pour la LMI (4.51), on pré- et post-multiplie la LMI (4.48) par  $\text{diag}(P_o^{-1}, P_o^{-1})$ . Avec les notations :

$$G_o = G_o^T = P_o^{-1} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12}^T & G_{22} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (4.56)$$

et par congruence de cette nouvelle LMI avec  $\Sigma$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} r_2 G_{22} & G_{22}(A - LC)^T \\ (A - LC)G_{22} & r_2 G_{22} \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (4.57)$$

On pré- et post-multiplie enfin la LMI (4.57) par  $\text{diag}(G_{22}^{-1}, G_{22}^{-1})$ . Avec les notations  $P = P^T = G_{22}^{-1} \succ 0$  et  $J = G_{22}^{-1}L$ , il en résulte la LMI (4.51).

Supposons maintenant que  $P$ ,  $G$ ,  $Y$  et  $J$  satisfont les LMIs (4.50) et (4.51), on définit :  $F = YG^{-1}$  et  $L = P^{-1}J$ . L'objectif est de prouver qu'il existe toujours un  $\lambda > 0$  tel que :

$$P_o = P_o^T = \begin{bmatrix} \lambda G^{-1} & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \succ 0 \quad (4.58)$$

satisfasse (4.48), assurant donc le placement de pôles.

En pré-et post-multipliant (4.48) par  $\Sigma$  et  $\Sigma^T$ , respectivement, on obtient (via le complément de Schur) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_1 G^{-1} & (A - BF)^T G^{-1} \\ G^{-1}(A - BF) & r_1 G^{-1} \end{bmatrix}}_{LMI_{px}} - \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G^{-1}BF & 0 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} r_2 P & (A - LC)^T P \\ P(A - LC) & r_2 P \end{bmatrix}^{-1}}_{LMI_{pE}^{-1}} M^T \succeq 0. \quad (4.59)$$

On peut facilement voir que si (4.22), (4.23), (4.24), (4.50) et (4.51) sont satisfaites, il existe toujours un  $\lambda > 0$  tel que les inégalités suivantes (séparément ou toutes ensembles) soient satisfaites :

$$\min \phi > \lambda \max \varphi, \quad (4.60)$$

$$\min(\nu) > \lambda \max(\mu) \quad (4.61)$$

$$\alpha - \gamma \geq \lambda \beta' \quad (4.62)$$

avec :

$$\nu = \lambda_{\min}(LMI_x), \quad \mu = \lambda_{\max}(S \cdot LMI_{\varepsilon}^{-1} \cdot S^T), \quad (4.63)$$

$$\phi = \lambda_{\min}(LMI_{px}), \quad \varphi = \lambda_{\max}(M \cdot LMI_{pE}^{-1} M^T) \quad (4.64)$$

où  $\lambda_{\min}$  représente la valeur propre minimale et  $\lambda_{\max}$  représente la valeur propre maximale,  $LMI_x$  correspond à (4.22),  $LMI_{\varepsilon}$  correspond à (4.23),  $LMI_{px}$  correspond à (4.50) et  $LMI_{pE}$  à (4.51). En conclusion, si (4.22), (4.23), (4.24), (4.50) et (4.51) sont faisables, un tel  $\lambda$  existera toujours.

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est donné par 4.44.  $\square$

*Remarque 4.9.* Une des démarches principales de ce chapitre est de synthétiser une loi de commande par retour d'état et observateur avec une bonne performance et puis

d'améliorer la robustesse du système à travers un paramètre de Youla. Une façon efficace (on présentera d'autres méthodes dans les sections à venir) de garantir une bonne performance en boucle fermée pour le système avec observateur est d'imposer le placement des pôles dans une région plus restreinte que le cercle unité. Dans le théorème 4.8 on a développé des LMIs garantissant le placement de pôles dans la région souhaitée. A travers la démonstration on a montré la compatibilité entre les nouvelles LMIs et les inégalités (4.22), (4.23) et (4.24).

Comme souvent on veut une dynamique plus rapide pour les pôles de l'observateur on a abouti à construire des LMIs qui permettent le placement de pôles de  $A - BF$  et  $A - LC$  dans des cercles de rayons différents.

#### 4.1.2.3 Mise en oeuvre sur un exemple

Soit le même système LTI à temps discret avec une action intégrale donné dans la Section 4.1.1.2.

On impose uniquement des contraintes sur la norme euclidienne de l'entrée :

$$\|u\|_2 \leq u_{max} = 1. \quad (4.65)$$

A travers le théorème 4.8 pour un  $\alpha = 0,2$  on obtient le retour d'état :

$$F = \begin{bmatrix} 0,8155 & 1,4556 & 0,9901 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

et l'observateur :

$$L = \begin{bmatrix} 1,8996 \\ 3,3980 \\ 2,4270 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

garantissant l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée et le placement de pôles de  $A - BF$  dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r = 0,9$  et le placement des pôles de  $A - LC$  dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r = 0,7$ . Les valeurs de  $r_1$  et  $r_2$  ont été considérées afin d'avoir une dynamique plus rapide pour l'observateur que la boucle fermée. Les pôles de  $A - BF$  sont  $[0,7620 + 0,1342i \ 0,7620 - 0,1342i \ 0,0165]$  et les pôles de  $A - LC$  sont  $[-0,0046 \ 0,5525 + 0,1312i \ 0,5525 - 0,1312i]$ .

En appliquant le théorème 3.5 pour cette loi de commande par retour d'état et observateur on obtient la projection maximale représentée Figure 4.4. Cette projection a le volume  $V = 122,3137$  et a été obtenue pour un  $\alpha = 0,19$ . Dans la même figure on a également tracé la trajectoire de l'état pour un point initial :

$$x(0) = \begin{bmatrix} 9,0322 & -5,2546 & 1,8999 & 0,1064 & 0,4733 & 0,8029 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

en considérant que le système est affecté par une perturbation permanente sur le signal de sortie prenant des valeurs aléatoires dans l'intervalle  $[-0,01 \ 0,01]$ , une perturbation en échelon d'amplitude 0,5 sur le signal d'entrée au moment 0,004s et une perturbation en échelon d'amplitude 0,1 sur le signal de sortie au moment 0,007s.

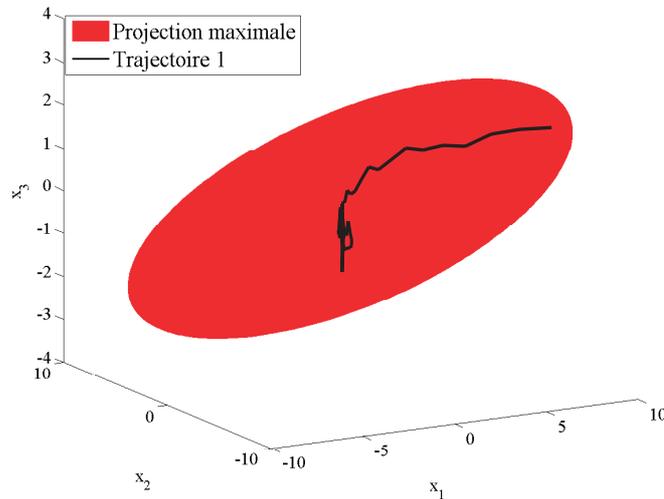


FIGURE 4.4: Ellipsoïde maximal.

Avec ce point initial de l'état et pour les perturbations données ci-dessus on représente dans les figures 4.5 et 4.6 les évolutions temporelles de l'entrée et de la sortie, respectivement.

Dans la Figure 4.5 on voit que les contraintes sur la commande sont satisfaites malgré une présence importante de la perturbation bornée.

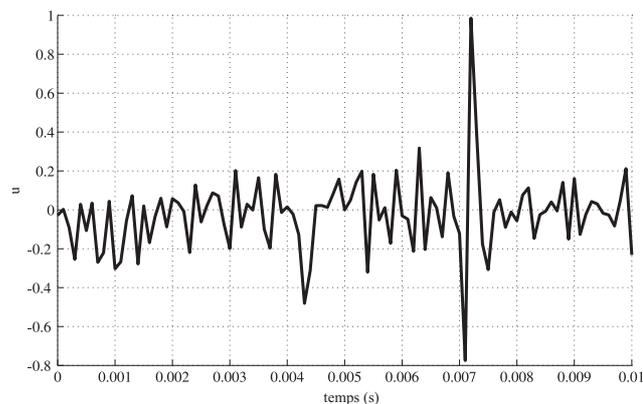


FIGURE 4.5: Evolution temporelle de l'entrée.

Dans la Figure 4.6 on observe l'effet de la perturbation sur le signal de sortie et le suivi de la référence.

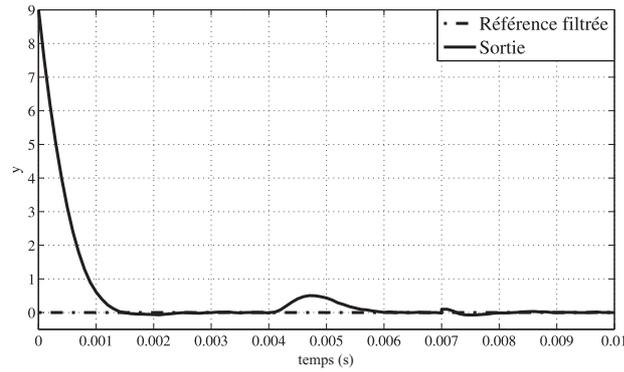


FIGURE 4.6: Evolution temporelle de la sortie.

Le retour d'état et l'ellipsoïde maximal ont été obtenus sous Matlab en utilisant le logiciel Yalmip [67] avec le solveur "SeDuMi" [104]. Les simulations dans le domaine temporel ont été réalisées dans Simulink.

### 4.1.3 La paramétrisation de Youla-Kučera

Dans la littérature traitant de commande robuste et de robustesse, la paramétrisation de tous les correcteurs stabilisants a été exploitée de diverses manières : [19, 71, 76, 89, 94]. Comme on l'a vu au chapitre 3, le rôle du paramètre de Youla (ou Q) inséré dans la boucle fermée est d'assurer la paramétrisation de tous les correcteurs stabilisants. Incorporé d'une manière particulière (ce qui est le cas dans ce document), le paramètre de Youla peut améliorer la robustesse de la boucle fermée vis-à-vis d'incertitudes ou de perturbations grâce à l'utilisation d'un correcteur à deux degrés de liberté (le suivi de trajectoire et le rejet de perturbation sont pilotés séparément) : [17, 53, 88, 89, 103].

Soit le système à temps discret affecté par des perturbations bornées (3.1) et avec l'état estimé par un observateur (3.29). Un paramètre de Youla (3.48) proposé par [12] est inséré dans la boucle fermée afin d'améliorer la robustesse du système :

Sous une représentation d'état augmenté le système a la forme :

$$x_y(k+1) = A_y x_y(k) + B_y n(k) \quad (4.69)$$

où :

$$x_y(k) = \begin{bmatrix} x_o(k) \\ x_Q(k) \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} A_o - B_e D_Q C_e & -B_e C_Q \\ B_Q C_e & A_Q \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, C_e = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}, \\ B_y = \begin{bmatrix} B_{we} & -L_e D_v - B_e D_Q D_v \\ 0 & B_Q D_v \end{bmatrix}, B_{we} = \begin{bmatrix} B_w \\ B_w \end{bmatrix} \text{ et } L_e = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}.$$

La loi de commande est donnée par :

$$u(k) = -F_x \cdot x_y(k) - F_n \cdot n(k) \quad (4.70)$$

avec :

$$F_x = \begin{bmatrix} F_o + D_Q C_e & C_Q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_n = [0 \quad D_Q D_v].$$

Les notations ci-dessus ont été choisies afin de permettre le développement des inégalités matricielles intervenant dans nos résultats théoriques exposés ci-dessous. Avec ces nouvelles notations nous serons en mesure d'obtenir des inégalités affines dans le paramètre de Youla lors de la synthèse de ce paramètre. Sans ces notations la construction des inégalités matricielles données dans la suite ne serait pas possible.

Nous considérons des bornes sur la norme euclidienne de l'entrée (3.50) et le vecteur de perturbation a les mêmes bornes que dans (4.16).

Notre objectif est de synthétiser un paramètre de Youla tout en recherchant un ensemble invariant ellipsoïdal. Cet ensemble invariant ellipsoïdal est recherché de telle sorte que sa projection sur le sous-espace de l'état initial soit maximale. Rappelons que l'ensemble invariant maximal fournit la plus grande région du sous-espace  $x$  pour laquelle, pour un système avec observateur et paramétrisation de Youla, affecté par de perturbations bornées et des contraintes, nous pouvons assurer l'invariance (et évidemment l'ISS vis-à-vis de la perturbation bornée) et la satisfaction des contraintes. Si des conditions de (haute) performance sont exigées, alors des contraintes supplémentaires sont ajoutées lors de la recherche du paramètre de Youla. Les approches mentionnées ci-dessus seront validées en simulation dans le cadre de la commande en position d'un moteur asynchrone.

#### 4.1.3.1 Synthèse d'un paramètre de Youla-Kučera

Le but de cette section est de synthétiser un paramètre de Youla qui procure une projection ellipsoïdale maximale plus grande que celle obtenue pour le système avec observateur, assurant ainsi une meilleure robustesse. Dans la section 3.1.3.4, nous avons présenté les outils permettant de trouver la projection maximale ellipsoïdale lorsque le paramètre de Youla-Kučera est donné. En définissant une transformation de variables similaire à celle utilisée dans [92], notre but est maintenant de calculer la projection maximale ellipsoïdale sur le sous-espace  $x$  et de synthétiser le paramètre de Youla qui maximise cette projection.

Pour montrer cela, nous considérons :

$$G_y = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \bullet \end{bmatrix} \succ 0, \quad G_y^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \bullet \end{bmatrix} \succ 0 \quad (4.71)$$

où  $\bullet$  sont des blocs de  $G_y$  et  $G_y^{-1}$ , uniquement déterminés par  $U, V \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  et les matrices symétriques  $X, Y \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$  sont telles que  $G_y G_y^{-1} = I (XY + UV^T = I)$ . De plus, nous considérons que la taille du paramètre de Youla est  $n_q = 2n_x$ . Pour une paramétrisation de Youla de taille  $n_q = n_x$  les inégalités matricielles obtenues ne seront pas affines dans le paramètre de Youla et donc une taille  $n_q = 2n_x$  s'impose. Après avoir synthétisé le paramètre de Youla on peut facilement réduire sa taille en utilisant la commande "balred" proposée par Matlab.

Avec ces notations, on peut de façon grossière dire que le système plus la partie "observateur" correspond à  $X, Y$  et la partie "Youla" correspond à  $U, V$ . Toutes ces considérations, ainsi que les notations effectuées dans les sections précédentes, nous permettrons de manipuler les calculs matriciels pour obtenir les inégalités finales.

La projection de l'ellipsoïde invariant  $E_y$  (3.56) sur  $x$  est maintenant donnée par :

$$E_{xy} = \{x \mid x^T (T G_y T^T)^{-1} x = x^T (Z X Z^T)^{-1} x \leq 1, x = T x_y = Z x_o, T = [1 \ 0 \ 0], Z = [1 \ 0]\}. \quad (4.72)$$

Dans la suite nous énoncerons le théorème donnant le paramètre de Youla qui maximise  $E_{xy}$ , rappelant que  $E_{x_o} \subseteq E_{xy}$ .

**Théorème 4.10.** *Considérons le système à temps discret avec la paramétrisation de Youla (4.69) soumis à des contraintes sur l'entrée (3.50) et affecté par de perturbations bornées  $n$  ( $n^T n \leq 1$ ). La synthèse du paramètre de Youla qui maximise la projection  $E_{xy}$  est réalisée hors-ligne en résolvant :*

$$\min_{X=X^T \succ 0, Y=Y^T \succ 0, M, N, H, D_Q, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det(Z X Z^T) \quad (4.73)$$

s.c. :

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|cc} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & & * & & * & * \\ & 0 & \beta I & & * & * \\ \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & & 0 & & \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * \\ \left[ \begin{array}{cc} A_o X - B_e M & A_o - B_e D_Q C_e \\ H & Y A_o + N C_e \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} B_{we} & -L_e D_v - B_e D_Q D_v \\ Y B_{we} & -Y L_e D_v + N D_v \end{array} \right] & & 0 & & \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \end{array} \right] \succ 0 \quad (4.74)$$

$$\alpha \geq \beta \quad (4.75)$$

et

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * & * \\ \begin{bmatrix} F_o X + M & F_o + D_Q C_e \\ 0 & \end{bmatrix} & u_{\max}^2 I & * \\ & F_n^T & I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (4.76)$$

En supposant que le problème de maximisation ait une solution, il en résulte les matrices définissant le paramètre de Youla :

$$\begin{cases} B_Q = V^{-1}(N + YB_e D_Q), \\ C_Q = (M - D_Q C_e X)U^{-T}, \\ A_Q = V^{-1}(H - YA_o X + YB_e D_Q C_e X - VB_Q C_e X + YB_e C_Q U^T)U^{-T}, \\ D_Q = D_Q. \end{cases} \quad (4.77)$$

*Démonstration.* Les inégalités ci-dessus sont obtenues par l'intermédiaire d'une matrice de manipulation :

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & V^T \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

L'inégalité assurant l'invariance (et l'ISS par rapport à une perturbation bornée) est donnée dans la section 3.1.3.4 par (3.68).

En pré- et post-multipliant (3.68) par  $\text{diag}(\Pi^T, I, \Pi^T, \Pi^T)$  et  $\text{diag}(\Pi, I, \Pi, \Pi)$  respectivement, et après en considérant ensuite les variables de décision :

$$\begin{cases} M = D_Q C_e X + C_Q U^T, \\ N = -YB_e D_Q + VB_Q, \\ H = YA_o X - YB_e D_Q C_e X + VB_Q C_e X - YB_e C_Q U^T + VA_Q U^T, \end{cases} \quad (4.79)$$

on obtient l'inégalité (4.74).

Sachant que  $G_y G_y^{-1} = I$  (et donc  $XY + UV^T = I$ ), les matrices  $U$  et  $V$  peuvent être déterminées en factorisant :  $I - XY$ .

Comme dans ([13], pp.82-84), on peut considérer  $\alpha = \beta > 0$ .

En utilisant une technique similaire, la LMI (4.76) se déduit de (3.70) par congruence avec  $\text{diag}(\Pi^T, I, I)$ .

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = 2 \frac{(2n_x)(2n_x + 1)}{2} + 4n_x + (2n_x)^2 + 2 = 8n_x^2 + 6n_x + 2. \quad (4.80)$$

□

*Remarque 4.11.* On a vu au chapitre 3 qu'un autre ensemble invariant intéressant est l'ensemble invariant minimal.

Dans notre contexte de synthèse, une autre approche possible serait de rechercher le paramètre de Youla qui minimise l'intersection de l'ellipsoïde invariant avec le sous-espace de l'état initial. L'intersection de l'ellipsoïde  $E_y$  avec l'espace de l'état initial  $x(k)$  est  $E_{in} = \{x \mid x^T (ZY Z^T) x \leq 1, Z = [1 \ 0]\}$ . Afin de minimiser l'intersection  $E_{in}$  lorsque des contraintes d'entrée (3.50) et de perturbations bornées (4.16) sont considérées, le problème d'optimisation suivant doit être résolu :

$$\min_{X=X^T > 0, Y=Y^T > 0, M, N, H, D_Q, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det(ZY Z^T) \quad (4.81)$$

soumis à (4.74) et (4.76).

*Remarque 4.12.* Le théorème 4.10 nous fournit les inégalités matricielles conduisant à une paramétrisation de Youla qui maximise la projection d'un ensemble invariant satisfaisant des contraintes sur le sous-espace d'état. Comme on l'a déjà précisé, la synthèse d'un paramètre de Youla en utilisant des outils ensemblistes n'a jamais été abordée dans la littérature. Le paramètre de Youla synthétisé garantit une projection maximale de l'ensemble invariant plus grande par rapport à celle obtenue pour le système avec observateur. Deux aspects coopèrent à cette réalisation : d'un côté le fait que, en introduisant la paramétrisation de Youla, on introduit des degrés de liberté et d'autre part le fait que le paramètre de Youla réduit l'effet de la perturbation.

#### 4.1.3.2 Compromis entre la robustesse et la performance

La synthèse d'un paramètre de Youla fournit la projection ellipsoïdale la plus grande possible, et améliore la fonction de sensibilité. Le prix à payer face à cette meilleure robustesse est classiquement une perte de performances en boucle fermée avec une fonction de sensibilité complémentaire dégradée. Un compromis entre la robustesse et la performance est alors nécessaire lors du calcul du paramètre de Youla.

La fonction de sensibilité vis-à-vis d'une incertitude additive reflète les propriétés de robustesse tandis que la fonction de sensibilité complémentaire permet de mesurer les performances en rejet de perturbation.

L'idée est de synthétiser un paramètre de Youla qui donne certes une projection ellipsoïdale plus petite (mais toujours plus grande que celle obtenue pour le système avec observateur) et assurant en même temps de meilleurs résultats en termes de performance en boucle fermée. Deux méthodes permettant d'ajuster le compromis sont proposées ci-dessus.

### Méthode basée sur la décroissance de la fonction de Lyapunov

Une première méthode pour parvenir à un compromis entre robustesse et performance est d'imposer une nouvelle borne sur la vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov. Nous recherchons désormais une fonction de Lyapunov  $V_y = x_y^T P_y x_y$  ayant une vitesse de décroissance plus grande que les normes de l'entrée et de la sortie normalisée par  $\frac{1}{\eta}$  (avec  $\eta$  donné) :

$$V_y(k) - V_y(k+1) \geq \frac{1}{\eta} (u(k)^T R u(k) + y(k)^T Q y(k)). \quad (4.82)$$

Ce critère a été conçu en raison de notre volonté d'obtenir des meilleurs résultats en termes des transitoires de la réponse temporelle. Ceci permet à l'état, par exemple, d'entrer dans l'ensemble 0-atteignable avec une certaine vitesse tout en tenant compte de perturbations qui peuvent affecter le système. Les valeurs de  $R$  et  $Q$  peuvent être choisies de la même manière que lors des méthodes MPC ou LQ.

**Théorème 4.13.** *Considérons le système linéaire à temps discret avec l'état estimé au moyen d'un observateur et avec un paramètre de Youla (4.69). Le système est affecté par de perturbations bornées (4.16) et soumis à des contraintes sur la commande (3.50). Pour un scalaire positif donné  $\gamma$ , la synthèse d'un paramètre de Youla qui maximise la projection  $E_{xy}$  garantissant (4.82) est réalisée en résolvant :*

$$\min_{X=X^T > 0, Y=Y^T > 0, M, N, H, D_Q, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det(ZXZ^T) \quad (4.83)$$

s.c. :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * & * & * & * & * \\ 0 & \beta I & * & * & * & * \\ \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & 0 & \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * & * & * \\ \begin{bmatrix} A_o X - B_e M & A_o - B_e D_Q C_e \\ H & Y A_o + N C_e \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{we} & -L_e D_v - B_e D_Q D_v \\ Y B_{we} & -Y L_e D_v + N D_v \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * & * \\ Q^{1/2} \begin{bmatrix} C_f X & C_f \end{bmatrix} & Q^{1/2} \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix} & 0 & 0 & \eta I & * \\ R^{1/2} \begin{bmatrix} F_o X + M & F_o + D_Q C_e \end{bmatrix} & R^{1/2} F_n & 0 & 0 & 0 & \eta I \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (4.84)$$

(4.75) et (4.76), avec  $C_f = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$ .

En supposant que le problème de maximisation ait une solution, le paramètre de Youla est obtenu par (4.77).

*Démonstration.* Avec la notation  $C_z = \begin{bmatrix} C_f & 0 \end{bmatrix}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} u(k)^T R u(k) + y(k)^T Q y(k) &= \\ &= \begin{bmatrix} x_y \\ n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_z^T Q^{1/2} & F_x^T R^{1/2} \\ \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix}^T Q^{1/2} & F_n^T R^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1/2} C_z & Q^{1/2} \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix} \\ R^{1/2} F_x & R^{1/2} F_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y \\ n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Avec la S-procédure, on obtient que (4.82) est satisfaite si il existe un  $\alpha > 0$  et un  $\beta \geq 0$  tel que :

$$\begin{aligned} & - \begin{bmatrix} \alpha P_y & 0 \\ P_y A_y & P_y B_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} P_y^{-1} & 0 \\ 0 & P_y^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha P_y & 0 \\ P_y A_y & P_y B_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_y & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix} - \\ & - \frac{1}{\eta} \begin{bmatrix} C_z^T Q^{1/2} & F_x^T R^{1/2} \\ \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix}^T Q^{1/2} & F_n^T R^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1/2} C_z & Q^{1/2} \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix} \\ R^{1/2} F_x & R^{1/2} F_n \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \quad (4.85)$$

En utilisant le complément du Schur, il vient :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_y & 0 & \alpha P_y & A_y^T P_y \\ 0 & \beta I & 0 & B_y^T P_y \\ \alpha P_y & 0 & \alpha P_y & 0 \\ P_y A_y & P_y B_y & 0 & P_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_z^T Q^{1/2} & F_x^T R^{1/2} \\ \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix}^T Q^{1/2} & F_n^T R^{1/2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta} I \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} Q^{1/2} C_z & Q^{1/2} \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ R^{1/2} F_x & R^{1/2} F_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Après l'application du théorème de Schur, nous pré- et post-multiplions par  $\text{diag}(\Pi^T G_y, I, \Pi^T G_y, \Pi^T G_y, I, I)$  et  $\text{diag}(G_y \Pi, I, G_y \Pi, G_y \Pi, I, I)$ , respectivement. En considérant les mêmes notations que dans (4.79), il en résulte l'inégalité (4.84).

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est donné par 4.80.  $\square$

*Remarque 4.14.* L'amélioration considérable en termes de robustesse a comme conséquence une dégradation de la performance. Afin de résoudre ce problème nous proposons une méthode qui force la dynamique du système à être plus rapide en imposant une certaine vitesse de décroissance pour la fonction de Lyapunov. Des inégalités matricielles garantissant cette décroissance sont formulées. On recherche toujours le paramètre de Youla fournissant la projection maximale sur le sous-espace d'état initial mais garantissant de plus une certaine performance.

### Techniques de placement de pôles

Une autre méthode qui conduit à un compromis robustesse-performance lors du calcul du paramètre de Youla consiste à placer les pôles de la boucle fermée dans une région appropriée du plan complexe. Cette technique est connue sous le nom de placement régional de pôles. La démarche est similaire à celle vue au paragraphe 4.1.2.2 dans le cas sans paramètre de Youla.

**Lemme 4.15.** *La matrice  $A_y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est  $\mathfrak{D}$ -stable si et seulement si il existe  $X_p = X_p^* \succ 0$  tel que :*

$$M_{\mathfrak{D}}(X_p, A_y) = L_p \otimes X_p + M_p \otimes (X_p A_y) + M_p^* \otimes (X_p A_y)^* \prec 0. \quad (4.87)$$

Pour une mise en oeuvre aisée dans le cadre LMI, nous recherchons une seule matrice de Lyapunov  $X_p = P_y = G_y^{-1}$  qui assure l'invariance, la satisfaction des contraintes et le placement des pôles de la boucle fermée dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r < 1$ .

**Théorème 4.16.** *Soit le système linéaire à temps discret avec la paramétrisation de Youla (4.69), affecté par des contraintes sur la commande (3.50) et une perturbation bornée (4.16). Pour un scalaire positif donné  $r < 1$ , la synthèse d'un paramètre de Youla qui maximise la projection  $E_{xy}$  en assurant le placement des pôles de la boucle fermée dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r$  est obtenue par la résolution de :*

$$\min_{X=X^T \succ 0, Y=Y^T \succ 0, M, N, H, D_Q, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det(ZXZ^T) \quad (4.88)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} r \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & & * \\ \begin{bmatrix} A_o X - B_e M & A_o - B_e D_Q C_e \\ H & Y A_o + N C_e \end{bmatrix} & r \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.89)$$

(4.74), (4.75) et (4.76).

En supposant que le problème de maximisation ait une solution, le paramètre de Youla est donné par (4.77).

*Démonstration.* De (4.45) et (4.46), les matrices  $L_p$  et  $M_p$  correspondant au cercle de rayon  $r < 1$  peuvent être facilement identifiées. Ensuite, en appliquant (4.87) et comme pour le lemme 4.7, nous avons que les pôles sont placés dans la région LMI considérée si et seulement si :

$$\begin{bmatrix} -rP_y & P_y A_y \\ A_y^T P_y & -rP_y \end{bmatrix} \prec 0 \text{ équivalent à } \begin{bmatrix} rP_y & P_y A_y \\ A_y^T P_y & rP_y \end{bmatrix} \succ 0. \quad (4.90)$$

Par congruence avec  $\text{diag}(\Pi^T G_y, \Pi^T G_y)$  et en utilisant les notations (4.79), il en résulte l'inégalité (4.89).

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est donné par 4.80.  $\square$

*Remarque 4.17.* En plaçant les pôles du paramètre de Youla dans une région plus restreinte de l'espace d'état on garantit une dynamique plus rapide tout en recherchant le paramètre de Youla fournissant la projection maximale sur le sous-espace d'état.

*Remarque 4.18.* Les deux techniques présentées ci-dessus agissent uniquement sur la paramétrisation de Youla.

*Remarque 4.19.* Le choix de la loi de commande initiale détermine les performances de la boucle fermée vis-à-vis la référence. Le choix de l'observateur modifie la dynamique de la boucle fermée vis-à-vis des perturbations. La paramétrisation de Youla-Kučera préserve les performances vis-à-vis de la référence et modifie les performances vis-à-vis des perturbations. Par ailleurs, la taille de la projection ellipsoïdale obtenue pour le système augmenté lorsque le paramètre de Youla est considéré ne dépend quasiment pas du choix initial de l'observateur.

#### 4.1.3.3 Mise en oeuvre en simulation

Afin de valider les résultats théoriques exposés ci-dessus, nous proposons, à titre d'exemple numérique, une application à la commande en position d'un moteur asynchrone donnée lors de la Section 3.1.4. Le système final a la forme (3.1) avec (3.76).

Si l'on impose à l'actionneur une erreur d'entrée d'au maximum 1%, il résulte  $B_w = 0,01B$ . Pour la perturbation de sortie, nous prenons une erreur de mesure deux fois plus grande que la résolution du capteur de position. Sachant que le capteur de position possède une résolution de 14400 points par tour il en résulte  $B_v = 0,001$ .

Considérons que la loi de commande initiale est donnée par le retour d'état suivant :  $F = \begin{bmatrix} 9,4739 & -8,7277 & 0,9417 \end{bmatrix}$ . Ce retour d'état a été obtenu par une méthode MPC (commande prédictive), afin d'avoir un comportement entrée/sortie souhaité (40 ms de temps de réponse et dépassement de 5%). Pour compléter la conception du système, un observateur a été calculé de sorte que ses pôles soient plus rapides que ceux de la loi de commande. Le gain de l'observateur est alors :  $L = \begin{bmatrix} 58.9993 & 49.1245 & 41.6667 \end{bmatrix}^T$ . Le contrôleur ci-dessus a été synthétisé afin de garantir certaines performances initiales. En introduisant la paramétrisation de Youla ces performances seront dégradées mais cette perte sera surmontée en appliquant les techniques présentées au paragraphe 4.1.3.2.

La contrainte imposée à la loi de commande est :  $\|u\|_2 \leq u_{max} = 5Nm$ .

Dans la suite de cet exemple, on considère  $\alpha = \beta > 0$ .

Afin d'avoir une vue d'ensemble sur les résultats obtenus par application des théorèmes 4.10, 4.13 et 4.16 ceux-ci seront comparés aux résultats obtenus en conformité avec le théorème 3.5 pour des systèmes linéaires à temps discret avec l'état estimé par un observateur. Par conséquent, pour le système avec observateur (sans paramètre de Youla), le  $\alpha$  pour lequel nous obtenons la projection maximale est  $\alpha_{opt} = 0,011$  et le volume de cette projection est  $V_O = 1,4699 \cdot 10^6$ .

En appliquant le théorème 4.10, le  $\alpha$  optimal pour lequel nous avons la plus grande projection ellipsoïdale sur le sous-espace  $x$  est  $\alpha_{opt} = 0,00006$ . Pour cet  $\alpha$ , la projection maximale a un volume  $V_Y = 1,2628 \cdot 10^{10}$ . Les valeurs obtenues pour le paramètre de Youla sont :

$$A_Q = \begin{bmatrix} 1,9977 & -0,9977 & 0,0153 & -0,1518 & -0,1517 & 0 \\ 0,9999 & 0,0001 & 0 & -0,1353 & -0,1353 & 0 \\ -0,0151 & 0,0150 & 0,9850 & -0,0576 & -0,0576 & 0 \\ -0,0001 & 0,0001 & -0,0001 & 1,8461 & -1,1498 & 0,016 \\ -0,0001 & 0,0001 & 0 & 0,8647 & -0,1353 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0621 & -0,0620 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_Q = \begin{bmatrix} -28,888 & -25,755 & -10,965 & 30,097 & 23,369 & 29,857 \end{bmatrix}^T,$$

$$C_Q = \begin{bmatrix} 9,4589 & -8,7128 & 0,9268 & -9,4695 & 8,7321 & -0,9417 \end{bmatrix}, D_Q = 0,8443.$$

La Figure 4.7 montre les projections maximales sur le sous-espace  $x$  pour toutes les situations décrites aux paragraphes 3.1.2.3, 4.1.3.1 et 4.1.3.2. Dans la Figure 4.8 sont tracées les fonctions de sensibilité (correspondant au transfert de  $b$  à  $u$  dans la Figure 3.1) vis-à-vis d'incertitude additive, non structurée, dans la Figure 4.9 sont représentées les fonctions de sensibilité complémentaires (transfert de  $b$  à  $Cx$  dans la Figure 3.1).

En analysant la Figure 4.7, on conclut que le paramètre de Youla (synthétisé via le théorème 4.10) offre une projection ellipsoïdale maximale élargie par rapport à celle obtenue pour le système avec observateur seul. En outre, Figure 4.8, on constate que l'introduction du paramètre de Youla améliore considérablement la robustesse vis-à-vis d'une incertitude non structurée additive.

La fonction de sensibilité tracée Figure 4.8 reflète les propriétés de robustesse tandis que la fonction de sensibilité complémentaire tracée Figure 4.9 fournit une mesure de la performance en rejet de perturbation. Comme on peut le constater, les résultats en termes de fonction de sensibilité complémentaire, obtenus en appliquant le théorème 4.10, imposent la nécessité d'un compromis entre la robustesse et la performance puisque la dynamique en boucle fermée a été considérablement réduite.

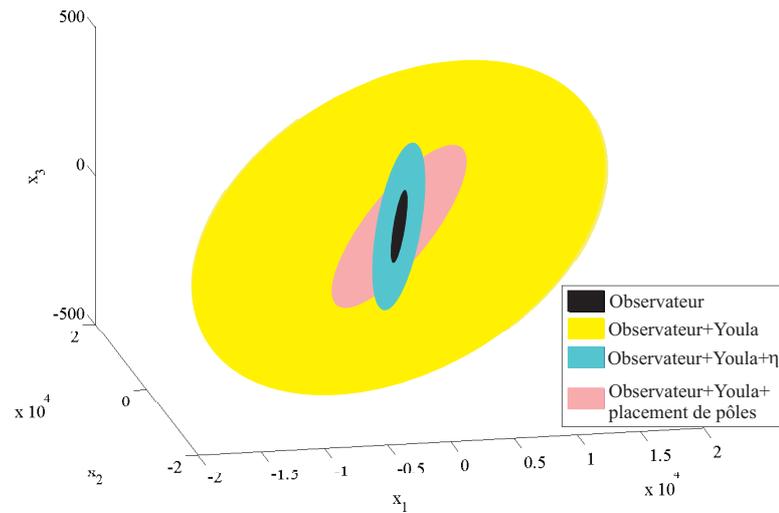


FIGURE 4.7: Projection maximale.

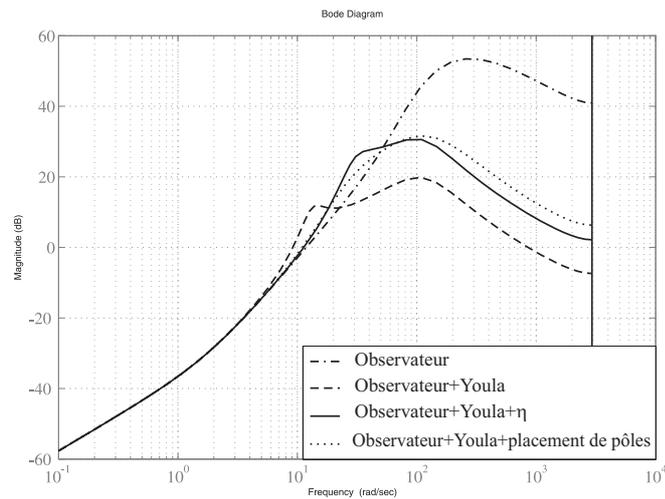


FIGURE 4.8: Fonction de sensibilité.

Pour remédier ce problème, les méthodes décrites en section 4.1.3.2 ont été mises en oeuvre.

Dans un premier temps, en appliquant le théorème 4.13 avec  $Q = R = 1$  (choisies de façon similaire que dans les méthodes MPC ou LQ), le  $\alpha$  optimal qui fournit un paramètre de Youla qui donne une projection maximale tout en assurant l'invariance, la satisfaction des contraintes sur la commande et une certaine performance est  $\alpha_{opt} = 0,00006$ . La projection maximale ellipsoïdale a le volume  $V_{Y\eta} = 1,1005 \cdot 10^8$ . Le théorème 4.13 a été mis en oeuvre pour un  $\eta = 10000$  considéré comme approprié dans le contexte donné. Pour une valeur plus grande  $\eta \rightarrow \infty$ , on a  $\frac{1}{\eta} \rightarrow 0$  et donc le critère de performance (4.82)

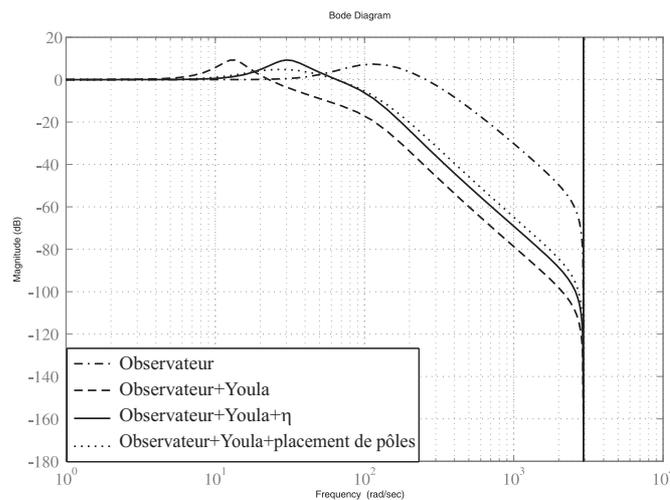


FIGURE 4.9: Fonction de sensibilité complémentaire.

revient au critère initial d'invariance. Le  $\eta$  utilisé a été obtenu à partir d'un  $\eta$  grand, en diminuant sa valeur jusqu'à ce que le meilleur compromis robustesse-performance souhaité ait été atteint.

Nous pouvons observer que, pour ce nouveau paramètre, la projection ellipsoïdale a diminué, mais elle reste malgré tout plus grande que celle obtenue pour le système avec observateur seul. En outre, comme prévu, la fonction de sensibilité s'est détériorée lorsque  $\eta$  a été pris en considération. D'autre part, une amélioration est apparue en termes de fonction de sensibilité complémentaire.

Dans un deuxième temps, la technique de placement des pôles a été mise en application pour un rayon  $r$  choisi de sorte que le volume de la projection obtenue dans ce cas-ci soit approximativement égal à  $V_{Y\eta}$ . En appliquant le théorème 4.16 pour  $r = 0,98$  on obtient que le  $\alpha$  optimal qui fournit un paramètre de Youla donnant la projection maximale est  $\alpha_{opt} = 0,039$  et que la projection ellipsoïdale maximale a le volume  $V_{Yp} = 1,1455 \cdot 10^8$ . Avec ce nouveau paramètre  $Q$ , la fonction de sensibilité est légèrement dégradée par rapport à celle obtenue avec le théorème 4.13, mais en termes de fonction de sensibilité complémentaire une petite amélioration apparaît. Globalement donc, à volume de l'ellipsoïde comparable, les deux techniques donnent des résultats similaires.

Après plusieurs simulations pour différents gains de l'observateur, nous pouvons par ailleurs conclure que le choix du gain de l'observateur a, comme prévu, un impact peu significatif sur le volume des projections ellipsoïdales obtenues pour le système incluant la paramétrisation de Youla.

Pour illustrer l'effet des deux critères de performance, nous donnons Figure 4.10 les évolutions temporelles de la sortie (partie supérieure) et de l'entrée (partie inférieure)

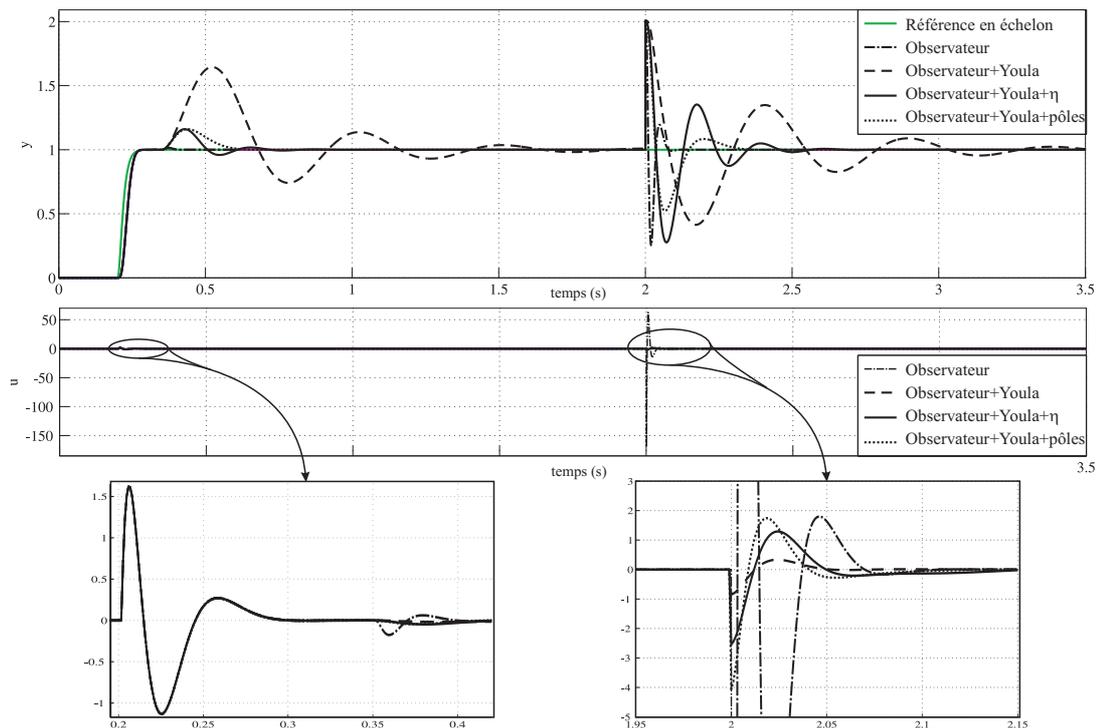


FIGURE 4.10: Simulation temporelle (partie supérieure : sortie, partie inférieure : commande).

pour une perturbation en échelon appliquée sur la commande à l'instant  $0,35s$  et une perturbation en échelon sur la sortie à l'instant  $2s$ .

En analysant l'évolution temporelle de la sortie, on peut voir que, en termes de performance en rejet de perturbation, les meilleurs résultats sont obtenus pour le système avec observateur, suivi par le système avec Youla et placement de pôles et Youla avec des contraintes sur la décroissance de la fonction de Lyapunov. Le paramètre de Youla synthétisé via le théorème 4.10 a la dynamique en boucle fermée la plus lente. Il faut noter que la performance en suivi de trajectoire (qui est en fait la réponse à une référence en échelon en l'absence de perturbation) est la même pour tous les contrôleurs. En fait, la performance en suivi obtenue pour le système avec observateur est préservée, ce qui est en accord avec la théorie.

En analysant l'évolution temporelle de l'entrée, on remarque que le contrôleur avec un observateur dépasse les limites imposées sur la commande. Ceci se produit parce que les perturbations considérées pour la simulation temporelle sont beaucoup plus grandes que celles considérées dans le calcul de l'ensemble invariant. Cependant, le contrôleur avec un paramètre de Youla reste dans les limites imposées (même pour de perturbations plus importantes) montrant que, lorsque la paramétrisation de Youla est insérée dans la boucle fermée, le système devient plus robuste (ceci correspond bien à une augmentation du volume de la projection ellipsoïdale). Les meilleurs résultats en termes de

robustesse sont obtenus pour le système avec Youla (le système le plus robuste) suivi par le système avec Youla et contraintes sur la fonction de Lyapunov et Youla et placement de pôles.

Les ensembles invariants résultants ont été obtenus en simulation en utilisant le logiciel Yalmip [67] dans l'environnement MatLab. Si le solveur "Lmilab" est choisi, alors l'opérateur utilisé pour  $-\logdet(\nabla)$  est  $-geomean(\nabla)$  où  $\nabla$  peut être  $ZG_oZ^T$  ou  $ZXZ^T$  selon le cas. Les simulations dans le domaine temporel ont été réalisées sous Simulink.

#### 4.1.4 Conclusion

Cette section a défini tout d'abord les outils théoriques requis pour la mise en oeuvre d'une méthode efficace de synthèse d'un retour d'état stable au sens ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée. La loi de commande recherchée est celle qui fournit l'ellipsoïde invariant maximal satisfaisant les contraintes sur la commande et sur la sortie malgré la présence d'une perturbation bornée.

Si l'état du système LTI affecté par de perturbations bornées est estimé au moyen d'un observateur, une technique de synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur stable au sens ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée a été présentée. La construction des inégalités matricielles ne permet pas de considérer de contraintes sur la commande, mais de contraintes sur la performance peuvent être prises en compte comme par exemple le placement de pôles de la boucle fermée. Avec cette loi de commande par retour d'état et observateur performante et en ajoutant de contraintes sur la commande, une méthode originale de conception d'un paramètre de Youla en utilisant des techniques basées sur les ensembles ellipsoïdaux invariants a été mise en place. La démarche consiste à rechercher le paramètre de Youla qui maximise le volume de la projection d'un ensemble invariant robuste contrôlé. Le problème est résolu efficacement en utilisant une approche LMI qui conduit à une réduction de la charge de calcul. La projection maximale nous donne en effet la plus grande région de l'espace initial  $x$  pour laquelle, pour un système avec observateur et paramétrisation de Youla, affecté par des perturbations bornées et des contraintes, nous pouvons assurer l'invariance, la satisfaction de contrainte et évidemment l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée. L'idée principale est de trouver une loi de commande par retour d'état et observateur performante qui sera robustifiée ensuite, en ajoutant des contraintes, à travers la paramétrisation de Youla.

Les résultats obtenus sont très intéressants dans le sens où, en les comparant à ceux obtenus pour le système avec observateur, nous constatons que l'ajout d'une paramétrisation de Youla a comme conséquence une projection ellipsoïdale plus grande et une meilleure

fonction de sensibilité. Cependant les résultats en termes de fonction de sensibilité complémentaire sont dégradés. C'est pourquoi nous avons recherché un compromis entre la maximisation de la projection de l'ensemble ellipsoïdal invariant et la dynamique en boucle fermée, afin d'ajuster le compromis entre la robustesse et la performance. Deux approches ont été proposées pour atteindre cet objectif : la première exige une limite plus dure sur la vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov et l'autre impose une nouvelle frontière pour le placement des pôles en boucle fermée. Dans l'application illustrative proposée, ces deux approches ont montré des résultats comparables.

Tous ces outils vont être étendus ci-dessous au cas des systèmes LPV à temps discret affectés par des perturbations bornées.

## 4.2 Systèmes LPV à temps discret

Depuis quelques années, l'apparition de la théorie des systèmes linéaires à paramètres variants (Linear Parameter Varying, LPV) a permis d'étendre considérablement les méthodologies linéaires aux domaines non linéaires et hybrides. La commande LPV permet de synthétiser des lois de commande séquencées par un (des) paramètre(s) afin d'adapter le contrôleur au point de fonctionnement du système ou de faire varier les performances de celui-ci en fonction de l'état du système ou de paramètres externes définis par un utilisateur [30], [33]. La synthèse d'un contrôleur à gains programmés ("gain-scheduled") pour les systèmes non linéaires est proposée dans [3], [5], [98]. Dans [81] sont données les conditions LMI qui fournissent une fonction de Lyapunov dépendante de paramètre assurant la stabilité robuste. Il est considéré que les paramètres variables dans le temps sont à l'intérieur d'un domaine polytopique avec des bornes connues sur leur taux de variation. Un contrôleur avec un observateur est synthétisé dans [40], les paramètres ne sont pas exactement connus et on recherche l'incertitude maximale sur les paramètres permettant de garantir malgré tout la stabilité en boucle fermée. Enfin, dans [110], la factorisation co-prime double et la paramétrisation de Youla sont étendues aux systèmes LPV sans perturbation afin de garantir la stabilité quadratique.

Dans notre travail, la présence de perturbations bornées impose la garantie de la "stabilité entrée-état" (ISS) vis-à-vis d'une perturbation bornée. A ce sujet [63] considère l'atténuation de perturbations au sens ISS et intégral-ISS pour des systèmes non linéaires avec des contraintes sur la commande. L'ISS pour les systèmes non linéaires à temps discret a été étudiée dans [49].

Dans cette direction, nous nous intéressons ici à la commande d'un système LPV à temps discret affecté par des perturbations bornées. On commence avec une section dédiée à la synthèse d'une loi de commande par retour d'état de type LPV qui maximise l'ellipsoïde invariant satisfaisant des contraintes. Comme la fonction de Lyapunov est

celle qui donne l'ellipsoïde invariant, on considère une fonction de Lyapunov unique (qui ne dépend pas du paramètre).

Un contrôleur avec un observateur de type LPV garantissant l'ISS par rapport à une perturbation bornée est synthétisé afin de garantir une performance maximale. La performance est garantie en maximisant la vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov (la vitesse de décroissance n'est pas imposée, elle est maximisée) par rapport à l'entrée et à la sortie. Comme on ne recherche pas à maximiser l'ensemble invariant, on peut considérer une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre. Des matrices supplémentaires seront prises en compte pour permettre d'avoir une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre, introduire des degrés de liberté et réduire le conservatisme.

Afin d'améliorer la robustesse du système (à savoir augmenter le volume de la projection de l'ensemble invariant lorsque les contraintes sont considérées), un paramètre de Youla de type LPV est alors synthétisé. Ce paramètre améliore la robustesse du système, mais ralentit les performances en boucle fermée. Un compromis entre la robustesse et la performance est obtenue en imposant une borne sur la décroissance de la fonction de Lyapunov. Cette fois ci, comme on maximise la projection de l'ellipsoïde invariant maximal, un fonction de Lyapunov unique sera considérée. Les notations faites afin d'arriver à des inégalités matricielles affines dans le paramètre de Youla permettent d'introduire une seule matrice supplémentaire pour réduire le conservatisme.

Les résultats théoriques sont validés en simulation. Cette partie suit le même plan que la section précédente en ajoutant tout de même de nouveaux outils.

#### 4.2.1 Synthèse d'une loi de commande par retour d'état

Les résultats obtenus en simulation montrent que, avec un retour d'état de type LPV, il est possible d'imposer des spécifications de conception plus strictes, conduisant à des performances en boucle fermée qui ne peuvent pas être obtenues au moyen d'un retour d'état constant.

Il s'agit donc de se donner ici les outils permettant de synthétiser une commande par retour d'état de type LPV, ISS stable, pour des systèmes LPV affectés par des perturbations bornées et soumis à des contraintes sur l'état. Le choix de synthétiser un retour d'état de type LPV est justifié par le fait que pour un retour d'état unique (le même pour chaque variation du paramètre) le risque d'être infaisable est plus élevé.

Soit donc le système LPV à temps discret (3.80). Le paramètre variant  $\theta$  est discret, mesurable en temps réel, situé dans le polytope  $\Theta$  des sommets  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

La loi de commande est donnée par (3.81). Les matrices à paramètre variant  $A(\theta(k))$  et  $F(\theta(k))$  résident dans un polytope de matrices dont les sommets sont les images des sommets  $\theta_1, \dots, \theta_N$  (3.83)

Les contraintes sur la norme Euclidienne de la commande  $u(k)$  sont données par (3.87).

Le vecteur de bruit regroupant les perturbations d'état et de mesure  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est supposé borné comme dans (3.84).

L'ellipsoïde général est donné par (3.6).

Le théorème suivant définit la commande par retour d'état de type LPV qui assure l'ISS du système et fournit l'ellipsoïde invariant maximal dans lequel les contraintes sont satisfaites malgré la présence de perturbations.

**Théorème 4.20.** *Soit le système LPV à temps discret (3.80) affecté par une perturbation bornée (3.84), avec la loi de commande donnée par (3.81) et soumis à des contraintes (3.87). La maximisation hors-ligne de  $E$  (3.6) est effectuée en résolvant :*

$$\min_{G=G^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0, Y_i, Q_{gi}} -\log \det(G) \quad (4.91)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} Q_{gi}^T + Q_{gi} - G & 0 & \alpha Q_{gi}^T & Q_{gi}^T A_i^T - Y_i^T B^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \\ \alpha Q_{gi} & 0 & \alpha G & 0 \\ A_i Q_{gi} - B Y_i & B_w & 0 & G \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.92)$$

$$\alpha \geq \beta, \quad (4.93)$$

et

$$\begin{bmatrix} Q_{gi}^T + Q_{gi} - G & Y_i^T \\ Y_i & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.94)$$

Le retour d'état stabilisant qui maximise l'ellipsoïde invariant est  $F(\theta(k)) = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) F_i; F_i = F(\theta_i), \lambda_i(k) \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1, F_i = Y_i Q_{gi}^{-1}, i = \overline{1, N} \right\}$ .

*Démonstration.* L'inégalité assurant l'invariance et l'ISS (4.92) est obtenue de l'inégalité (3.114) avec la notation  $Y_i = F_i Q_{gi}$ .

La LMI (4.94) découle de la LMI (3.128) en employant la notation :  $Y_i = F_i Q_{gi}$ .

Pour compléter la preuve, il convient d'écrire que le retour d'état  $F_i$  est donné par  $F_i = Y_i Q_{gi}^{-1}$ .

Comme dans le chapitre dédié à l'analyse, on recherche l'ellipsoïde ayant une projection maximale située à l'intérieur de l'intersection de toutes les projections maximales associées à chaque transition.

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = \frac{(n_x)(n_x + 1)}{2} + Nn_x + N(n_x)^2 + 1. \quad (4.95)$$

□

*Remarque 4.21.* Le théorème 4.20 nous a donné la commande par retour d'état garantissant l'ISS par rapport à une perturbation bornée et fournissant la plus grande région ellipsoïdale de l'espace où les contraintes sont satisfaites malgré la présence de la perturbation.

On considère une fonction de Lyapunov unique  $V(k) = x^T(k)G^{-1}x(k)$  au lieu de considérer une fonction dépendante du paramètre ( $G_i = G$ ). En effet, supposons que l'on recherche les ellipsoïdes invariants correspondant à chaque sommet  $G_i$ , ayant le volume maximal, puisque l'on recherche l'ellipsoïde  $G \preceq G_i$  (situé à l'intérieur de l'intersection de tous les ellipsoïdes correspondant à chaque sommet). En présence d'une perturbation, la condition d'invariance garantit l'invariance de chaque ellipsoïde correspondant à chaque sommet mais elle ne garantit pas qu'à l'intérieur de ces ellipsoïdes la fonction de Lyapunov soit monotone décroissante. Donc l'ellipsoïde donné par  $G$  (situé à l'intérieur de l'intersection de tous les ellipsoïdes correspondant à chaque sommet) risque de ne pas être invariant.

Pour résoudre ce problème, on considère que la fonction de Lyapunov est constante et on recherche l'ellipsoïde invariant, satisfaisant les contraintes pour toutes les variations du paramètre. Si le retour d'état est synthétisé afin de garantir seulement l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée alors une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre peut être employée.

#### 4.2.1.1 Mise en oeuvre sur un exemple

Soit le système LPV perturbé à temps discret sous la forme (3.80) avec les matrices 3.163 donné dans la Section 3.2.4.

On impose des contraintes sur la norme euclidienne de l'entrée :

$$\|u\|_2 \leq u_{max} = 1. \quad (4.96)$$

Le retour d'état qui maximise l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes sur la commande a été obtenu en appliquant le théorème 4.20 et est donné par :

$$F1 = \begin{bmatrix} -0,1789 & 0,4514 & 0,3505 \end{bmatrix} \quad F2 = \begin{bmatrix} -0,2229 & -0,4596 & 0,4053 \end{bmatrix}. \quad (4.97)$$

Dans la Figure 4.11 on a tracé l'ellipsoïde invariant maximal, le polyèdre donné par les contraintes contenant cet ellipsoïde et la trajectoire de l'état pour un point initial :  $x(0) = \begin{bmatrix} 8,1901 & 0,1760 & 5,2764 \end{bmatrix}$ .

La trajectoire a été obtenue en considérant que le système LPV est affecté par une perturbation permanente sur le signal d'entrée et une perturbation permanente sur le signal de sortie prenant des valeurs aléatoires dans l'intervalle  $[-0,01 \ 0,01]$  (valeurs correspondant à  $B_w$  et  $D_v$ ). On a considéré également qu'une commutation entre le sommet correspondant à  $\theta = -1$  et le sommet correspondant à  $\theta = 1$  se produit à l'instant 0,002 (en fait  $\theta$  peut varier entre  $-1$  et  $1$  mais nous on se limite ici au cas particulier  $\theta = \pm 1$ ).

Le volume de l'ellipsoïde maximal invariant est  $V = 91,7886$  et a été obtenu pour un  $\alpha = 0,0052$ .

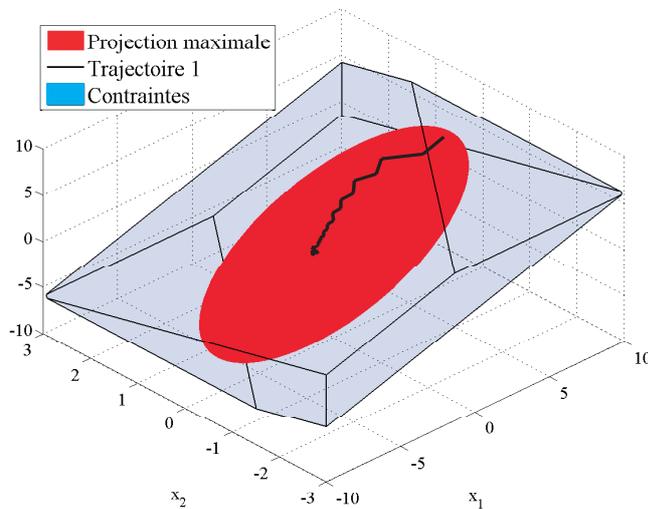


FIGURE 4.11: Ellipsoïde maximal.

Pour le point initial  $x_0$  et les perturbations mentionnées ci-dessus on a représenté dans les figures 4.12 et 4.13 les évolutions temporelles de l'entrée et de la sortie, respectivement.

On observe Figure 4.12 que les contraintes sur l'entrée sont satisfaites et que le système est ISS stable.

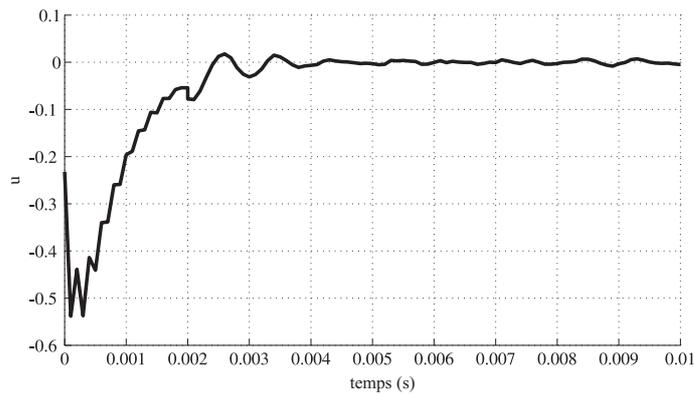


FIGURE 4.12: Evolution temporelle de l'entrée.

L'évolution temporelle de la sortie représentée Figure 4.13 montre une bonne performance en boucle fermée.

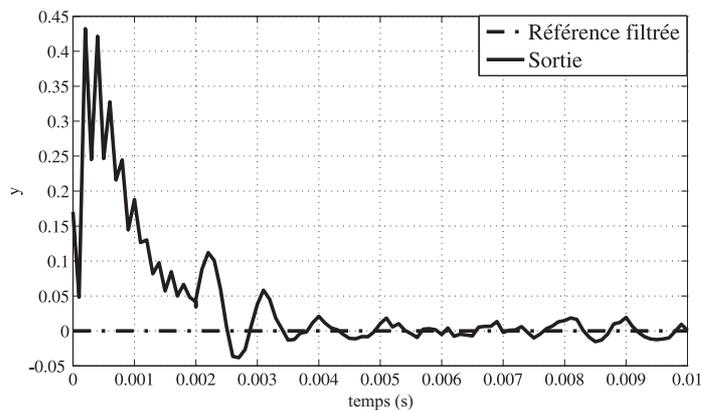


FIGURE 4.13: Evolution temporelle de la sortie.

Le retour d'état et l'ellipsoïde maximal ont été obtenus in Matlab en utilisant le logiciel Yalmip [67] avec le solveur "SeDuMi" [104]. Les simulations dans le domaine temporel ont été réalisées dans Simulink.

#### 4.2.2 Synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur

Quand le vecteur d'état ou une partie des variables de l'état ne sont pas accessibles à la mesure un observateur est employé pour reconstruire les variables d'état non mesurables.

Soit donc le système à temps discret affecté par une perturbation bornée (3.80), avec l'état estimé par un observateur dépendant du paramètre (3.129) et la loi de commande

dépendante du paramètre (3.131). Avec une représentation d'état augmentée, le système prend la forme (3.134) et la commande dépendante du paramètre la forme (3.136). Les matrices à paramètre variant ( $A\theta(k)$ ,  $F\theta(k)$ ,  $L\theta(k)$ ) prennent leurs valeurs dans un polytope de matrices ayant comme sommets l'image des sommets de  $\Theta = \text{Co}\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  :

$$[A(\theta(k)), F(\theta(k)), L(\theta(k))] \in \text{Co} \{[A_i, F_i, L_i] = [A(\theta_i), F(\theta_i), L(\theta_i)] , i = \overline{1, N}\}, \quad (4.98)$$

$$[A(\theta(k)), F(\theta(k)), L(\theta(k))] = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) [A(\theta_i), F(\theta_i), L(\theta_i)]; \lambda_i(k) \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1 \right\}. \quad (4.99)$$

Le vecteur de bruit est considéré borné (3.139).

L'ensemble ellipsoïdal  $E_o$  est défini dans (3.37), la projection de l'ellipsoïde sur  $x$   $E_{op}$  est donnée par (3.42) et l'intersection  $E_{oi}$  par (3.43).

L'objectif de ce paragraphe est de synthétiser un retour d'état et un gain d'observateur dépendants du paramètre, de type LPV garantissant l'ISS du système LPV (3.134) affecté par de perturbations bornées (3.139) et ayant une bonne performance en boucle fermée. Pour améliorer la performance, on impose comme critère d'optimisation que la fonction de Lyapunov dépendante du paramètre ait la décroissance vis-à-vis de l'entrée et de la sortie la plus rapide :

$$\Delta V_o = V_o(k) - V_o(k+1) \geq \frac{1}{\eta_1} u(k)^T Q_1 u(k) + \frac{1}{\eta_2} y(k)^T Q_2 y(k) \quad (4.100)$$

où  $V_o$  est la fonction de Lyapunov dépendante du paramètre,  $Q_1$  et  $Q_2$  sont des matrices de pondération.

Plus les variables  $\eta_1$  et  $\eta_2$  (recherchées) seront petites, plus la performance en boucle fermée sera améliorée.

En considérant une commande de type LPV non-constante et une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre on réduit le conservatisme.

**Théorème 4.22.** *Soit le système LPV avec observateur (3.134), affecté par de perturbations bornées (3.139). S'il existe  $G_i = G_i^T \succ 0$ ,  $P_i = P_i^T \succ 0$ ,  $Q_{G_i}$ ,  $Q_{P_i}$ ,  $Y_i$ ,  $J_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$  obtenus en optimisant :*

$$\min_{Q_{G_i}, Q_{P_i}, \alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, Y_i, J_i, G_i = G_i^T \succ 0, P_i = P_i^T \succ 0} \eta_1 + \eta_2 \quad (4.101)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} Q_{gi}^T + Q_{gi} - G_i & 0 & \alpha Q_{gi}^T & Q_{gi}^T A_i^T - Y_i^T B^T & Y_i^T Q_1^{1/2} \\ 0 & \beta I & 0 & [B_w \ 0]^T & 0 \\ \alpha Q_{gi} & 0 & \alpha G_i & 0 & 0 \\ A_i Q_{gi} - B Y_i & [B_w \ 0] & 0 & G_j & 0 \\ Q_1^{1/2} Y_i & 0 & 0 & 0 & \eta_1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.102)$$

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 & \alpha P_i & A_i^T Q_{pi}^T - C^T J_i^T & 0 \\ 0 & \gamma I & 0 & [Q_{pi} B_w - J_i D_v]^T & D_p^T Q_2^{1/2} \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 & 0 \\ Q_{pi} A_i - J_i C & [Q_{pi} B_w - J_i D_v] & 0 & Q_{pi}^T + Q_{pi} - P_j & 0 \\ 0 & Q_2^{1/2} D_p & 0 & 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.103)$$

et

$$\alpha - \gamma \geq 0, \quad \alpha - \beta \geq 0. \quad (4.104)$$

avec  $D_p = \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix}$ , alors le système est ISS stable vis-à-vis d'une perturbation bornée garantissant une certaine performance en boucle fermée. Les retours d'état qui stabilisent le système au sens entrée-état vis-à-vis d'une perturbation bornée sont donnés par :

$$F(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) F_i, \quad F_i = Y_i Q_{gi}^{-1}, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1, \quad (4.105)$$

et les gains de l'observateur sont donnés par :

$$L(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) L_i, \quad L_i = Q_{pi}^{-1} J_i, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) = 1. \quad (4.106)$$

*Démonstration.* Le critère de performance (4.100) peut s'écrire sous la forme :

$$V_o(k) - V_o(k+1) \geq \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_1} \mathcal{F}_o^T Q_1 \mathcal{F}_o + \frac{1}{\eta_2} C_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_1} C_f^T Q_2 D_f \\ \frac{1}{\eta_2} D_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_2} D_f^T Q_2 D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}$$

où  $C_f = [C \ 0]$ ,  $D_f = [0 \ D_v]$  et  $\mathcal{F}_o = F_o(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) F_{oi}$ .

Nous continuons notre démonstration en définissant les extensions :

$$\begin{aligned} B_{oi} &\rightarrow B_{oi} = \begin{bmatrix} B_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_w & -L_i D_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x & 0 \\ 0 & B_{\epsilon i} \end{bmatrix}, \\ B_f &\rightarrow B_f = \begin{bmatrix} 0 & D_p \end{bmatrix}, \quad D_p = \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix}, \\ n &\rightarrow n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \quad n_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \quad n_2 = \begin{bmatrix} w_2 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad n_1^T n_1 \leq 1, \quad n_2^T n_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (4.107)$$

En définissant ces extensions, nous considérons que le système et l'observateur peuvent être affectés par des perturbations bornées différentes. Cette augmentation ne modifie pas notre problème, et permet d'élaborer la preuve plus facilement. En fait cette approche fait partie de notre apport théorique, nécessaire pour réussir à concevoir des inégalités matricielles garantissant l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée.

Avec cette astuce la condition (4.100) devient :

$$\begin{aligned}
\Delta V_o(k) &= x_o(k)^T P_o(\theta(k)) x_o(k) - x_o(k+1)^T P_o(\theta(k+1)) x_o(k+1) = \\
&= \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_o - \mathcal{A}_o^T \mathcal{P}_{o+} \mathcal{A}_o & -\mathcal{A}_o^T \mathcal{P}_{o+} \mathcal{B}_o \\ -\mathcal{B}_o^T \mathcal{P}_{o+} \mathcal{A}_o & -\mathcal{B}_o^T \mathcal{P}_{o+} \mathcal{B}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix} \geq \\
&\geq \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_1} \mathcal{F}_o^T Q_1 \mathcal{F}_o + \frac{1}{\eta_2} C_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_2} C_f^T Q_2 D_f \\ \frac{1}{\eta_2} D_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_2} D_f^T Q_2 D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.108}$$

pour tout  $x_o(k)$  et  $w(k)$  satisfaisant :

$$x_o(k)^T \mathcal{P}_o x_o(k) \geq 1 \text{ et } n^T(k) n(k) \leq 1 \tag{4.109}$$

avec  $\mathcal{A}_o = A_o(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) A_{oi}$ ,  $\mathcal{B}_o = B_o(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) B_{oi}$  et

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_o &= P_o(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) P_{oi}, \\
\mathcal{P}_{o+} &= P_o(\theta(k+1)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k+1) P_{oi} = \sum_{j=1}^N \lambda_j(k) P_{oj}
\end{aligned} \tag{4.110}$$

où  $\mathcal{P}_o$  correspond à la fonction de Lyapunov à l'instant  $k$  et  $\mathcal{P}_{o+}$  correspond à la fonction de Lyapunov à l'instant  $k+1$ .

Comme il a été déjà montré dans la Section 3.2.1, cette condition est satisfaite si elle est satisfaite pour chaque sommets  $i, j = \overline{1, N}$ .

Avec la S-procédure et prenant en compte l'extension (4.107) la condition (4.108) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} P_{oi} - A_{oi}^T P_{oj} A_{oi} & -A_{oi}^T P_{oj} B_{oi} \\ -B_{oi}^T P_{oj} A_{oi} & -B_{oi}^T P_{oj} B_{oi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_1} F_{oi}^T Q_1 F_{oi} + \frac{1}{\eta_1} C_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_1} C_f^T Q_2 D_f \\ \frac{1}{\eta_2} D_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_2} D_f^T Q_2 D_f \end{bmatrix} \right) \\
&- \begin{bmatrix} \alpha P_{oi} & 0 \\ 0 & -\begin{bmatrix} \beta I & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix} + (\alpha - \beta - \gamma) > 0, \quad i, j = \overline{1, N}
\end{aligned} \tag{4.111}$$

équivalente à :



En utilisant le complément du Schur on peut facilement voir que (4.114) implique :

$$\begin{bmatrix} P_{i,11} & 0 & \alpha P_{i,11} & (A_i - BF_i)^T P_{j,11} & F_i^T Q_1^{1/2} \\ 0 & \beta I & 0 & [B_w \ 0]^T P_{j,11} & 0 \\ \alpha P_{i,11} & 0 & \alpha P_{i,11} & 0 & 0 \\ P_{j,11}(A_i - BF_i) & P_{j,11}[B_w \ 0] & 0 & P_{j,11} & 0 \\ Q_1^{1/2} F_i & 0 & 0 & 0 & \eta_1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (4.118)$$

$$\alpha - \beta \geq 0. \quad (4.119)$$

On pré-et post-multiplie enfin l'inégalité (4.118) par  $\text{diag}(Q_{gi}^T, I, P_{i,11}^{-1}, P_{j,11}^{-1}, I)$ . Comme  $(Q_{gi}^T - P_{i,11}^{-1})P_{i,11}(Q_{gi} - P_{i,11}^{-1}) \succeq 0$  implique  $Q_{gi}^T P_{i,11} Q_{gi} \succeq Q_{gi}^T + Q_{gi} - P_{i,11}^{-1}$ , en posant les notations  $G_i = G_i^T = P_{i,11}^{-1} \succ 0$ ,  $Y_i = F_i Q_{gi}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , il en résulte l'inégalité (4.102).

Pour l'inégalité (4.103), on pre et post-multiplie l'inégalité (4.114) avec  $\text{diag}(P_{oi}^{-1}, I, P_{oi}^{-1}, P_{oj}^{-1})$  et on pose :

$$G_{oi} = G_{oi}^T = P_{oi}^{-1} \text{ avec } G_{oi} = \begin{bmatrix} G_{i,11} & G_{i,12} \\ G_{i,12}^T & G_{i,22} \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.120)$$

Par la congruence de cette nouvelle inégalité avec  $\Lambda$  et en utilisant le théorème de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} G_{i,22} & 0 & \alpha G_{i,22} & G_{j,22}(A_i - L_i C)^T & 0 \\ 0 & \gamma I & 0 & [B_w - L_i D_v]^T & D_p^T Q_2^{1/2} \\ \alpha G_{i,22} & 0 & \alpha G_{i,22} & 0 & 0 \\ (A_i - L_i C)G_{j,22} & [B_w - L_i D_v] & 0 & G_{j,22} & 0 \\ 0 & Q_2^{1/2} D_p & 0 & 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (4.121)$$

$$\alpha - \gamma \geq 0. \quad (4.122)$$

Enfin on pre et post-multiplie (4.121) par  $\text{diag}(G_{i,22}^{-1}, I, G_{i,22}^{-1}, Q_{pi}, I)$ . Comme  $(Q_{pi} - G_{j,22}^{-1})G_{j,22}(Q_{pi}^T - G_{j,22}^{-1}) \succeq 0$  implique  $Q_{pi} G_{j,22} Q_{pi}^T \succeq Q_{pi} + Q_{pi}^T - G_{j,22}^{-1}$  et avec les notations  $P_i = G_{i,22}^{-1}$  et  $J_i = Q_{pi} L_i$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , il en résulte l'inégalité (4.103).

Supposons qu'ils existent  $P_i = P_i^T \succ 0$ ,  $G_i = G_i^T \succ 0$ ,  $Q_{pi}$ ,  $Q_{gi}$ ,  $Y_i$ ,  $J_i$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  satisfaisant les inégalités (4.102), (4.103) et (4.104). Définissons :  $F_i = Y_i Q_{gi}^{-1}$  et  $L_i = Q_{pi}^{-1} J_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . L'objectif est de prouver qu'il existe toujours un  $\lambda > 0$  tel que :

$$P_{oi} = \begin{bmatrix} \lambda G_i^{-1} & 0 \\ 0 & P_i \end{bmatrix}, \quad (4.123)$$

satisfasse (4.114) assurant ainsi la stabilité vis-à-vis d'une perturbation bornée.

Comme  $\beta$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  sont des variables, on peut supposer que  $\beta = \lambda \beta'$  et  $\eta_1 = \lambda \eta'_1$ . Avec ces notations et en pre et post- multipliant (4.114) par  $\Lambda$  et  $\Lambda^T$  4.117, respectivement, on obtient (via le complément de Schur) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G_i^{-1} & 0 & \alpha G_i^{-1} & (A_i - BF_i)^T G_j^{-1} & F_i^T Q_1^{1/2} \\ 0 & \beta' I & 0 & B_x^T G_j^{-1} & 0 \\ \alpha G_i^{-1} & 0 & \alpha G_i^{-1} & 0 & 0 \\ G_j^{-1}(A_i - BF_i) & G_j^{-1} B_x & 0 & G_j^{-1} & 0 \\ Q_1^{1/2} F_i & 0 & 0 & 0 & \eta'_1 \end{bmatrix}}_{LMI_{xij}} - \quad (4.124)$$

$$-\lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C^T Q_2^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_j^{-1} BF_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q_1^{1/2} F_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S_{1ij}} \cdot$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_i & 0 & \alpha P_i & (A_i - L_i C)^T P_j & 0 \\ 0 & \gamma I & 0 & B_{\varepsilon i}^T P_j & D_p^T Q_2^{1/2} \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 & 0 \\ P_j(A_i - L_i C) & P_j B_{\varepsilon i} & 0 & P_j & 0 \\ 0 & Q_2^{1/2} D_p & 0 & 0 & \eta_2 \end{bmatrix}}_{LMI_{\varepsilon ij}^{-1}}^{-1} \quad S_{1ij}^T \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N},$$

et

$$\alpha - \lambda \beta' - \gamma \geq 0. \quad (4.125)$$

On peut facilement voir que si (4.102), (4.103) et (4.104) sont satisfaites alors il existe toujours un  $\lambda > 0$  tel que les inégalités suivantes soient faisables (séparément et toutes ensemble) :

$$\min_{1 \leq i, j \leq N} v_{i,j} > \lambda \max_{1 \leq i, j \leq N} \mu_{i,j}, \quad (4.126)$$

$$\alpha - \gamma \geq \lambda \beta', \quad (4.127)$$

où :

$$v_{i,j} = \lambda_{i,j, \min}(LMI_{xij}), \quad \mu_{i,j} = \lambda_{i,j, \max}(S_{1ij} LMI_{\varepsilon ij}^{-1} S_{1ij}^T),$$

avec  $\lambda_{\min}$  représentant la valeur propre minimale et  $\lambda_{\max}$  la valeur propre maximale,  $LMI_{xij}$  correspondant à (4.102) et  $LMI_{\varepsilon ij}$  à (4.103). En conclusion, comme (4.102),

(4.103) et (4.104) sont faisables, ce  $\lambda$  existera toujours.

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = 2\left(\frac{(n_x)(n_x + 1)}{2} + Nn_x + N(n_x)^2 + 1\right). \quad (4.128)$$

□

*Remarque 4.23.* A travers ce mémoire on a présenté plusieurs méthodes pour améliorer la performance en boucle fermée. L'une des techniques plus intéressantes pour garantir une bonne performance est de rechercher la fonction de Lyapunov (dépendante du paramètre) avec une décroissance la plus rapide vis-à-vis de l'entrée et de la sortie. Pour trouver cette fonction on optimise le critère d'optimisation 4.101 dans le théorème 4.22. La loi de commande par retour d'état et observateur dépendante du paramètre optimal sera celle qui satisfait les inégalités matricielles 4.102, 4.103 et 4.104 tout en minimisant le critère 4.101.

Pour obtenir une performance souhaitée, on peut imposer la vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov en fixant les valeurs de  $\eta_1$  et  $\eta_2$  (voir théorème 4.13) et recherchant la solution faisable. Dans le cas LPV la technique basée sur le placement de pôles n'est pas applicable car imposer le placement de pôles pour les matrices d'état correspondant aux sommets n'implique pas que pour un  $\theta$  à l'intérieur du polytope  $\Theta$  la matrice d'état correspondante ait les pôles dans la région souhaitée.

La prise en compte d'une loi de commande par retour d'état et observateur dépendante du paramètre est possible en introduisant les matrices supplémentaires  $Q_{gi}$  et  $Q_{pi}$ . Ils existent des cas pour lesquels sans ces considérations, la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur ISS stable par rapport à une perturbation bornée est infaisable, comme même ces considérations ne garantissent pas l'existence d'une fonction de Lyapunov. Avec ces considérations on réduit également le conservatisme. Comme meme

### 4.2.3 La paramétrisation de Youla-Kučera

Soit le système LPV à temps discret avec un observateur de type LPV pour estimer l'état (3.134). Afin d'améliorer la robustesse, un paramètre de Youla de type LPV est considéré (3.150). La loi de commande est donnée par (3.151).

Le système sous une représentation augmentée a la forme :

$$x_y(k+1) = A_y(\theta(k))x_y(k) + B_y(\theta(k))n(k) \quad (4.129)$$

où :

$$\begin{aligned} x_y(k) &= \begin{bmatrix} x_o(k) \\ x_Q(k) \end{bmatrix}, A_y(\theta(k)) = \begin{bmatrix} A_o(\theta(k)) - B_e D_Q(\theta(k)) C_e & -B_e C_Q(\theta(k)) \\ B_Q(\theta(k)) C_e & A_Q(\theta(k)) \end{bmatrix}, \\ B_y(\theta(k)) &= \begin{bmatrix} B_{we} & -L_e(\theta(k)) D_v - B_e D_Q(\theta(k)) D_v \\ 0 & B_Q(\theta(k)) D_v \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_e &= \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}, B_{we} = \begin{bmatrix} B_w \\ B_w \end{bmatrix}, L_e(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0 \\ L(\theta(k)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec la loi de commande :

$$u(k) = -F_x(\theta(k))x_y(k) - F_n(\theta(k))n(k) \quad (4.130)$$

où :

$$\begin{aligned} F_x(\theta(k)) &= \begin{bmatrix} F_o(\theta(k)) + D_Q(\theta(k)) C_e & C_Q(\theta(k)) \end{bmatrix}, F_{xi} = F_x(\theta_i), \\ F_n(\theta(k)) &= \begin{bmatrix} 0 & D_Q(\theta(k)) D_v \end{bmatrix} \text{ et } F_{ni} = F_n(\theta_i). \end{aligned}$$

Pour cette loi de commande, nous considérons les contraintes (3.152). Le vecteur de bruit est supposé borné (3.153).

Avec ces notations il sera donc possible d'obtenir les inégalités matricielles fournissant le paramètre de Youla.

Pour le système incluant le paramètre de Youla, l'ellipsoïde  $E_y$  a l'expression (3.56) où :

$$G_y = G_y^T = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12}^T & G_{22} \end{bmatrix} \succ 0, \quad G_{11} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}. \quad (4.131)$$

Sa projection sur  $x$  est (3.58).

#### 4.2.3.1 Synthèse du paramètre de Youla-Kučera

Par rapport à la loi de commande avec observateur synthétisée par le théorème 4.22, en considérant des contraintes sur la commande (3.152), le but ici est d'obtenir une meilleure robustesse vis-à-vis de la perturbation bornée (3.153). Afin d'atteindre cet objectif, un paramètre de Youla de type LPV doit être synthétisé ayant comme critère d'optimisation la maximisation de la projection ellipsoïdale de l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes. Le gain en robustesse sera donné par la différence de volume entre le système avec observateur et le système avec observateur et Youla.

**Théorème 4.24.** *Considérons le système LPV à temps discret avec paramètre de Youla (4.129), soumis à des contraintes sur la commande (3.152) et affecté par de perturbations bornées (3.153). La synthèse du paramètre de Youla qui maximise la projection*

$E_{py}$  (3.58) de l'ellipsoïde invariant  $E_y$  (3.56) satisfaisant les contraintes est réalisée en résolvant :

$$\min_{\substack{X, Y, M_i, N_i, H_i, R, D_{Q_i}, \alpha > 0, \beta \geq 0, \\ Q, G_{11} = G_{11}^T > 0, S, W}} -\log \det(ZG_{11}Z^T) \quad (4.132)$$

s.c. :

$$LMI_i = \begin{bmatrix} \Gamma_Q + \Gamma_Q^T - \Gamma_G & \star & \star & \star \\ 0 & \beta I & \star & \star \\ \alpha \Gamma_Q & 0 & \alpha \Gamma_G & \star \\ \Gamma_{A_i} & \Gamma_{B_i} & 0 & \Gamma_G \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.133)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_Q + \Gamma_Q^T - \Gamma_G & \star & \star \\ \Gamma_{F_i} & u_{max}^2 I & \star \\ 0 & F_{ni}^T & I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, \overline{N}}, \quad (4.134)$$

et

$$\alpha - \beta \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0, \quad (4.135)$$

avec :

$$\Gamma_Q = \begin{bmatrix} X & I \\ R & Y^T \end{bmatrix}, \quad (4.136)$$

$$\Gamma_G = \begin{bmatrix} G_{11} & \star \\ S^T & W \end{bmatrix}, \quad (4.137)$$

$$\Gamma_{A_i} = \begin{bmatrix} A_{oi}X - B_e M_i & A_{oi} - B_e D_{Q_i} C_e \\ H_i & Y A_{oi} + N_i C_e \end{bmatrix}, \quad (4.138)$$

$$\Gamma_{B_i} = \begin{bmatrix} B_{we} & -L_{ei} D_v - B_e D_{Q_i} D_v \\ Y^T B_{we} & -Y^T L_{ei} D_v + N_i D_v \end{bmatrix}, \quad (4.139)$$

$$\Gamma_{F_i} = \begin{bmatrix} F_{oi}X + M_i & F_{oi} + D_{Q_i} C_e \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, \overline{N}}, \quad (4.140)$$

où  $\star$  représente la valeur symétrique.

En supposant que le problème de maximisation ait une solution on obtient la paramétrisation de Youla dépendante du paramètre  $\theta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} U, V \text{ obtenus par factorisation } V^T U = R - Y^T X, \\ B_{Q_i} = V^{-T} (N_i + Y^T B_e D_{Q_i}), \\ C_{Q_i} = (M_i - D_{Q_i} C_e X) U^{-1}, \\ A_{Q_i} = V^{-T} (H_i - Y^T A_{oi} X + Y^T B_e D_{Q_i} C_e X - V^T B_{Q_i} C_e X + Y^T B_e C_{Q_i} U) U^{-1}, \\ D_{Q_i} = D_{Q_i} \quad i = \overline{1, \overline{N}} \end{array} \right. \quad (4.141)$$

$$\text{et } A_Q(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) A_{Q_i}, \quad B_Q(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) B_{Q_i}, \quad C_Q(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) C_{Q_i},$$

$$D_Q(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) D_{Q_i}.$$

*Démonstration.* L'inégalité qui assure l'invariance (et l'ISS par rapport à une perturbation bornée) pour un système LPV à temps discret est donnée par (3.159). La matrice ajoutée pour réduire le conservatisme n'est pas dépendante du paramètre ( $Q_{gy} = Q_{gy}$ ).

Une transformation similaire à celle utilisée dans [92] est considérée :

$$Q_{gy} = \begin{bmatrix} X & U_1 \\ U & \bullet \end{bmatrix}, \quad Q_{gy}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V_1 \\ V & \bullet \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

où  $\bullet$  sont des blocs de  $Q_{gy}$  et  $Q_{gy}^{-1}$ , déterminés uniquement par  $X, Y \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ ,  $U, U_1, V, V_1 \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  tels que  $Q_{gy} Q_{gy}^{-1} = I$ . Nous considérons également que la taille du paramètre de Youla est  $n_q = 2n_x$  (afin d'arriver à des inégalités matricielles affines en le paramètre de Youla). Avec ces notations on peut dire schématiquement que la partie "système plus observateur" correspond à  $X, Y$  et la partie "Youla" à  $U, V, U_1, V_1$ .

En multipliant à gauche et à droite l'inégalité (3.159) par  $\text{diag}(\Pi^T, I, \Pi^T, \Pi^T)$  et  $\text{diag}(\Pi, I, \Pi, \Pi)$  respectivement, où  $\Pi = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & V \end{bmatrix}$  et en considérant les variables de décision :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = Y^T X + V^T U, \\ M_i = D_{Q_i} C_e X + C_{Q_i} U, \\ N_i = -Y^T B_e D_{Q_i} + V^T B_{Q_i}, \\ H_i = Y^T A_{oi} X - Y^T B_e D_{Q_i} C_e X + V^T B_{Q_i} C_e X - Y^T B_e C_{Q_i} U + V^T A_{Q_i} U, \\ S = G_{11} Y + G_{12} V \\ W = Y^T G_{11} Y + V^T G_{12}^T Y + Y^T G_{12} V + V^T G_{22} V, \quad i = \overline{1, N} \end{array} \right. \quad (4.143)$$

l'inégalité (4.133) est obtenue. On peut considérer  $\alpha = \beta > 0$ .

Le critère d'optimisation a été conçu en sachant que  $\Pi^T G_y \Pi = \begin{bmatrix} G_{11} & S \\ S^T & W \end{bmatrix}$ . Et donc la projection  $E_{yp}$  (3.58) sur l'espace d'état initial devient :

$$E_{yp} = \{x \mid x^T (T G_y T^T)^{-1} x \leq 1\} = \{x \mid x^T (Z G_{11} Z^T)^{-1} x \leq 1, Z = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}\}. \quad (4.144)$$

Cette projection est maximisée en minimisant l'expression  $-\log \det(Z G_{11} Z^T)$ .

La LMI assurant la satisfaction des contraintes (4.134) a été obtenue en pré- et post-multipliant la LMI (3.161) par  $\text{diag}(\Pi^T, I, I)$  et  $\text{diag}(\Pi, I, I)$  avec les variables de décision (4.143).

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = 2 \frac{(2n_x)(2n_x + 1)}{2} + 2Nn_x + N(2n_x)^2 + N + 1 = (4N + 1)n_x^2 + (2N + 1)n_x + N + 1. \quad (4.145)$$

□

*Remarque 4.25.* A travers le théorème présenté ci-dessus nous synthétisons le paramètre de Youla dépendant du paramètre  $\theta$ , maximisant la projection ellipsoïdale de l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes sur le sous-espace d'état initial pour un système LPV à temps discret affecté par des perturbations bornées.

Une matrice supplémentaire  $Q_{gy}$  a été introduite. La présence de cette matrice modifie un peu le problème vis-à-vis de celui obtenu dans le cas LTI (les variables de décision ne sont pas toutes les mêmes, le problème de factorisation diffère). Une raison pour ne pas choisir une matrice  $Q_{gy}$  pour chaque sommet ( $Q_{gyi}$ ) et donc une matrice  $\Pi$  pour chaque sommet ( $\Pi_i$ ) vient du fait que dans ce dernier cas le produit  $\Pi_i^T G_y \Pi_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , ne peut pas être mis sous une forme affine.

Comme critère d'optimisation on a choisi (dans le but d'améliorer la robustesse) de maximiser la projection de l'ellipsoïde invariant situé à l'intérieur de tous les ellipsoïdes invariants correspondant à chaque variation du paramètre. L'idée principale pour ne pas considérer une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre et donc un  $G_{yi}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , est expliqué au chapitre 3 et consiste principalement dans le fait que pour un  $G_y \prec G_{yi}$  on ne peut pas assurer l'invariance si on n'impose pas que ce  $G_y$  vérifie les inégalités, fait qui revient à considérer une fonction de Lyapunov unique.

#### 4.2.3.2 Compromis entre la robustesse et la performance

Le paramètre de Youla de type LPV synthétisé en considérant comme critère d'optimisation la maximisation de la projection ellipsoïdale donne de très bons résultats en termes de robustesse mais réduit la performance de la boucle fermée.

Une façon efficace d'améliorer les transitoires de la réponse est de considérer comme précédemment une fonction de Lyapunov  $V_y = x_y^T P_y x_y$  ayant une décroissance plus rapide :

$$V_y(k) - V_y(k+1) \geq \frac{1}{\eta} (u(k)^T Q_1 u(k) + y(k)^T Q_2 y(k)). \quad (4.146)$$

En imposant cette nouvelle contrainte de performance, on obtient une dynamique plus rapide pour le système avec le paramètre de Youla ainsi synthétisé. Plus la valeur de  $\eta$  est grande, meilleures sont les performances en boucle fermée.

**Théorème 4.26.** *Considérons le système LPV à temps discret avec un paramètre de Youla (4.129) affecté par de perturbations bornées (3.153). La conception du paramètre de Youla qui maximise la projection  $E_{py}$  (3.58) de l'ellipsoïde invariant  $E_y$  (3.56) satisfaisant les contraintes sur la commande (3.152) et les contraintes de performance (4.146) est réalisée en résolvant :*

$$\min_{\substack{X, Y, M_i, N_i, H_i, R, D_{Q_i}, \alpha > 0, \beta \geq 0, \\ Q, G_{11} = G_{11}^T > 0, S, W}} -\log \det(ZG_{11}Z^T) \quad (4.147)$$

s.c. :

$$LMI_i = \begin{bmatrix} \Gamma_Q + \Gamma_Q^T - \Gamma_G & * & * & * & * & * \\ 0 & \beta I & * & * & * & * \\ \alpha \Gamma_Q & 0 & \alpha \Gamma_G & * & * & * \\ \Gamma_{A_i} & \Gamma_{B_i} & 0 & \Gamma_G & * & * \\ Q_2^{1/2} \begin{bmatrix} C_f X & C_f \end{bmatrix} & Q_2^{1/2} \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix} & 0 & 0 & \eta I & 0 \\ Q_1^{1/2} \Gamma_{F_i} & Q_1^{1/2} F_{ni} & 0 & 0 & 0 & \eta I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.148)$$

(4.134) et (4.135), avec  $C_f = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$  et  $\Gamma_Q, \Gamma_G, \Gamma_{A_i}, \Gamma_{B_i}$  et  $\Gamma_{F_i}$  donnés par (4.136), (4.137), (4.138), (4.139) et (4.140),  $i = \overline{1, N}$ .

En supposant que le problème de maximisation ait une solution, on obtient la paramétrisation de Youla dépendante du paramètre via (4.141) et  $A_Q(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) A_{Q_i}$ ,

$$B_Q(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) B_{Q_i}, \quad C_Q(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) C_{Q_i}, \quad D_Q(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) D_{Q_i}.$$

*Démonstration.* Définissons  $C_z = \begin{bmatrix} C_f & 0 \end{bmatrix}$ , alors :

$$\begin{aligned} & u(k)^T Q_1 u(k) + y(k)^T Q_2 y(k) = \\ & = \begin{bmatrix} x_y(k) \\ n(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_z^T Q_2^{1/2} & F_{xi}^T Q_1^{1/2} \\ [0 \ D_v]^T Q_2^{1/2} & F_{ni}^T Q_1^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2^{1/2} C_z & Q_2^{1/2} [0 \ D_v] \\ Q_1^{1/2} F_{xi} & Q_1^{1/2} F_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y(k) \\ n(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Grâce à la S-procédure, on obtient que (4.146) est satisfaite si il existe un  $\alpha > 0$  et un  $\beta \geq 0$  t.q. :

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} \alpha P_y & 0 \\ P_y A_{yi} & P_y B_{yi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} P_y^{-1} & 0 \\ 0 & P_y^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha P_y & 0 \\ P_y A_{yi} & P_y B_{yi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_y & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix} - \\
& - \frac{1}{\eta} \begin{bmatrix} C_z^T Q_2^{1/2} & F_{xi}^T Q_1^{1/2} \\ 0 & D_v \end{bmatrix}^T Q_2^{1/2} \begin{bmatrix} Q_2^{1/2} C_z & Q_2^{1/2} \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix} \\ Q_1^{1/2} F_{xi} & Q_1^{1/2} F_{ni} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{4.149}$$

Avec le complément de Schur, on arrive à :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} P_y & 0 & \alpha P_y & A_{yi}^T P_y \\ 0 & \beta I & 0 & B_{yi}^T P_y \\ \alpha P_y & 0 & \alpha P_y & 0 \\ P_y A_{yi} & P_y B_{yi} & 0 & P_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_z^T Q_2^{1/2} & F_{xi}^T Q_1^{1/2} \\ 0 & D_v \end{bmatrix}^T Q_2^{1/2} \begin{bmatrix} F_{xi}^T Q_1^{1/2} \\ F_{ni}^T Q_1^{1/2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta} I \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} Q_2^{1/2} C_z & Q_2^{1/2} \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} F_{xi} & Q_1^{1/2} F_{ni} & 0 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{4.150}$$

Après l'application du complément de Schur, on multiplie à gauche et à droite par  $\text{diag}(\Pi^T Q_{gy}^T, I, \Pi^T G_y, \Pi^T G_y, I, I)$  et  $\text{diag}(Q_{gy} \Pi, I, G_y \Pi, G_y \Pi, I, I)$  avec  $P_y = P_y^T = G_y^{-1} \succ 0$ . La matrice  $Q_{gy}$  est donnée par (4.142). Enfin avec les variables de décision (4.143), il en résulte l'inégalité (4.148). Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est donné par 4.145.  $\square$

*Remarque 4.27.* Dans le théorème donné ci-dessus on a synthétisé un paramètre de Youla dépendant du paramètre  $\theta$  garantissant un certain compromis entre la robustesse et la performance.

Comme précisé précédemment, dans ce mémoire on a présenté plusieurs méthodes ayant comme but une amélioration en performance. Pour le cas LPV il est approprié d'appliquer une technique basée sur la vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov. La raison pour ne pas maximiser la vitesse de décroissance (comme dans le cas LPV avec observateur) mais d'imposer plutôt une certaine décroissance est due au fait que, en appliquant cette démarche, on peut plus facilement régler le compromis souhaité entre la robustesse et la performance.

#### 4.2.4 Mise en oeuvre en simulation

Afin de valider les résultats théoriques exposés ici, nous proposons le même système LPV perturbé sous forme (3.80) avec les matrices (3.163) données dans la Section 3.2.4.

A travers le théorème 4.22, pour un  $\alpha = \beta = \gamma = 0,29$  et les matrices de pondération  $Q_1 = Q_2 = 1$ , on obtient les retours d'état stabilisants :

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0,5219 & -1,1978 & 1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -0,5217 & 1,2541 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

les gains de l'observateur :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0,9342 & -0,4628 & 1,0355 \end{bmatrix}^T, L_2 = \begin{bmatrix} 0,9693 & 1,5008 & 1,1274 \end{bmatrix}^T \quad (4.152)$$

et

$$\eta_1 = 0,004634 \quad \eta_2 = 0,00034483. \quad (4.153)$$

Cette loi de commande a été obtenue en recherchant la fonction de Lyapunov dépendante du paramètre ayant la décroissance la plus rapide : plus  $\eta_1$  et  $\eta_2$  trouvées sont petites, plus la fonction de Lyapunov aura une décroissance rapide et meilleure sera la performance en boucle fermée.

L'étape suivante consiste, avec les retours d'état et les gains de l'observateur synthétisés ci dessus, à rechercher l'ellipsoïde invariant ayant la plus grande projection sur le sous-espace d'état initial ( $x(k)$ ) en assurant la satisfaction des contraintes suivantes :

$$\|u\|_2 \leq u_{max} = 1. \quad (4.154)$$

En appliquant le théorème 3.19, la solution optimale est trouvée pour  $\alpha = \beta = 0,024$ . La projection ellipsoïdale que nous avons obtenue a un volume  $V_O = 9,6065$  et est représentée Figure 4.14 par l'ellipsoïde bleu.

Pour les mêmes contraintes (4.154) nous allons maintenant essayer d'élargir cette projection en introduisant un paramètre de Youla de type LPV afin de réduire l'effet de la perturbation. En appliquant le théorème 4.24, le paramètre de Youla qui agrandit la projection maximale est déduit sous la forme :

$$A_{Q1} = \begin{bmatrix} 0,8025 & 0,5074 & -0,0044 & 0 & -0,7873 & 0 \\ -0,2404 & -0,7651 & 0,4097 & 0 & 0,5194 & 0 \\ 0,2261 & 0,4671 & 0,5890 & 0 & -0,8637 & 0 \\ 0,0025 & 0,0077 & -0,0044 & 0,8 & -0,2787 & 0 \\ 0,0029 & 0,0116 & -0,0051 & -0,4 & -0,4062 & 0,7 \\ 0,0019 & 0,0065 & -0,0034 & 0 & -0,5836 & 1 \\ 0,7987 & 0,5036 & 0,0016 & 0 & -0,7857 & 0 \\ -0,2722 & 0,7762 & 0,4504 & 0 & -0,7775 & 0 \\ 0,1792 & -0,4494 & 0,6480 & 0 & -0,0006 & 0 \\ -0,0013 & 0,0039 & 0,0017 & 0,8 & -0,2770 & 0 \\ 0,0016 & -0,0062 & -0,0023 & -0,4 & -0,0610 & 0,7 \\ -0,0009 & 0,0032 & 0,0011 & 0 & -0,5810 & 1 \end{bmatrix}, B_{Q1} = \begin{bmatrix} -0,7873 \\ 0,5194 \\ -0,8637 \\ 0,1556 \\ 0,2310 \\ 0,4519 \\ -0,7857 \\ -0,7775 \\ -0,0006 \\ 0,1923 \\ 0,3397 \\ 0,5464 \end{bmatrix},$$

$$A_{Q2} = \begin{bmatrix} 0,8025 & 0,5074 & -0,0044 & 0 & -0,7873 & 0 \\ -0,2404 & -0,7651 & 0,4097 & 0 & 0,5194 & 0 \\ 0,2261 & 0,4671 & 0,5890 & 0 & -0,8637 & 0 \\ 0,0025 & 0,0077 & -0,0044 & 0,8 & -0,2787 & 0 \\ 0,0029 & 0,0116 & -0,0051 & -0,4 & -0,4062 & 0,7 \\ 0,0019 & 0,0065 & -0,0034 & 0 & -0,5836 & 1 \\ 0,7987 & 0,5036 & 0,0016 & 0 & -0,7857 & 0 \\ -0,2722 & 0,7762 & 0,4504 & 0 & -0,7775 & 0 \\ 0,1792 & -0,4494 & 0,6480 & 0 & -0,0006 & 0 \\ -0,0013 & 0,0039 & 0,0017 & 0,8 & -0,2770 & 0 \\ 0,0016 & -0,0062 & -0,0023 & -0,4 & -0,0610 & 0,7 \\ -0,0009 & 0,0032 & 0,0011 & 0 & -0,5810 & 1 \end{bmatrix}, B_{Q2} = \begin{bmatrix} -0,7873 \\ 0,5194 \\ -0,8637 \\ 0,1556 \\ 0,2310 \\ 0,4519 \\ -0,7857 \\ -0,7775 \\ -0,0006 \\ 0,1923 \\ 0,3397 \\ 0,5464 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} C_{Q1} &= \begin{bmatrix} -0,2979 & -0,7363 & 0,5926 & 0,5219 & 0,9412 & -1 \end{bmatrix}, \\ C_{Q2} &= \begin{bmatrix} -0,3415 & 0,8006 & 0,6468 & 0,5217 & -0,6999 & -1 \end{bmatrix}, \\ D_{Q1} &= -0,2566, D_{Q2} = 0,5543. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Ce paramètre de Youla offrant la projection maximale a été obtenu pour  $\alpha = \beta = 0,0061$ . La projection ellipsoïdale est donnée Figure 4.14 par l'ellipsoïde vert et a un volume  $V_Y = 90,8139$ . On peut facilement voir que par l'introduction du paramètre de Youla (ce qui apporte plus de degrés de liberté) une amélioration nette a été obtenue en termes de volume de la projection ellipsoïdale. Ce gain en volume est une mesure de l'amélioration en robustesse que nous avons obtenue, la perturbation a un effet plus faible.

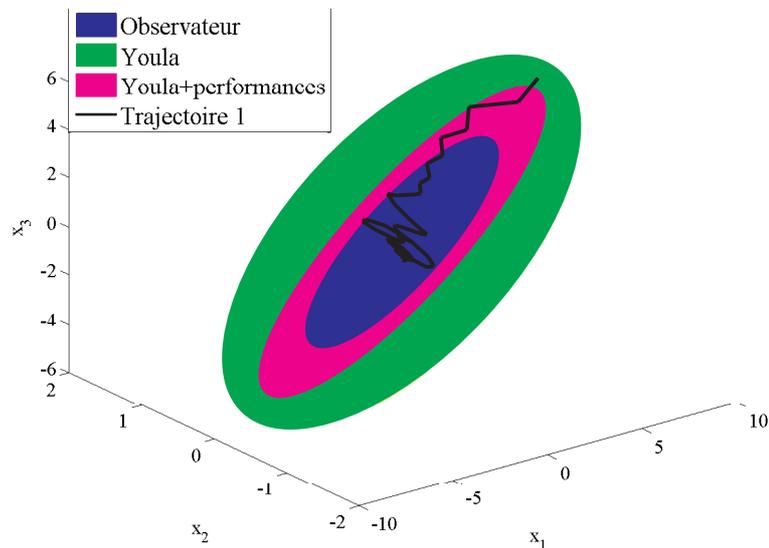


FIGURE 4.14: Projections ellipsoïdales maximales.

Pour obtenir un compromis entre la robustesse et la performance, un nouveau paramètre de Youla a été ensuite synthétisé via le théorème 4.26 pour  $\eta = 3$  et les matrices de pondération  $Q_1 = Q_2 = 1$ .

La projection ellipsoïdale maximale correspondant à ce paramètre est donnée Figure 4.14 par l'ellipsoïde magenta. Cette projection a été obtenue pour  $\alpha = \beta = 0,0091$  et a un volume  $V_{Yp} = 26,9785$ . On peut voir que cet ellipsoïde est plus petit que celui obtenu sans considérer de critères de performance, mais il reste malgré tout supérieur à celui obtenu pour le système avec observateur seul.

On a également tracé Figure 4.14 la trajectoire de l'état pour un point initial :  
 $x_0 = [7,9146 \ 0,1702 \ 5,0997 \ 0,0496 \ 0,0022 \ 0,0294 \ -7,9032 \ -0,1648$   
 $-5,0879 \ -0,0382 \ 0,0032 \ -0,0175]$

situé à l'intérieur de la projection ellipsoïdale obtenue pour le système avec Youla (sans critère de performance) mais à l'extérieur de toutes les autres projections.

Les Figures 4.15 et 4.16 illustrent les évolutions temporelles de la commande et de la sortie pour les trois cas : système avec observateur et critère de performance, système avec observateur et Youla et système avec observateur, Youla et critère de performance.

On a considéré le comportement du système pour une perturbation en échelon d'amplitude 0,5 (revenant à  $B_w$ ) sur le signal de commande à l'instant 0,005s, une perturbation en échelon d'amplitude 0,1 sur le signal de sortie à l'instant 0,013s et une perturbation permanente sur le signal de sortie prenant des valeurs aléatoires dans l'intervalle  $[-0,001 \ 0,001]$  (valeurs correspondant à  $D_v$ ). Pour les simulations temporelles on considère seulement le cas particulier où  $\theta$  commute entre le deux sommets à l'instant 0,001. Les perturbations considérées ici sont plus importantes que celle considérées lors du calcul des ellipsoïdes invariants.

Les évolutions temporelles de la commande nous montrent que pour le système avec Youla (avec/sans critère de performance) les contraintes sont satisfaites. En revanche, pour le système avec observateur seul, ces contraintes ( $u_{max} = 1$ ) ne sont pas satisfaites (ceci est dû au fait que le point initial de l'état est situé à l'extérieur de l'ellipsoïde correspondant à ce cas et au fait que les perturbations sont plus importantes que celles considérées pour le calcul des ellipsoïdes). On peut voir aussi que pour le système avec la paramétrisation de Youla, les transitoires de l'entrée sont plus faibles et donc le système est plus robuste. En ajoutant le critère de performance on obtient un paramètre de Youla moins robuste mais qui satisfait malgré tout les contraintes.

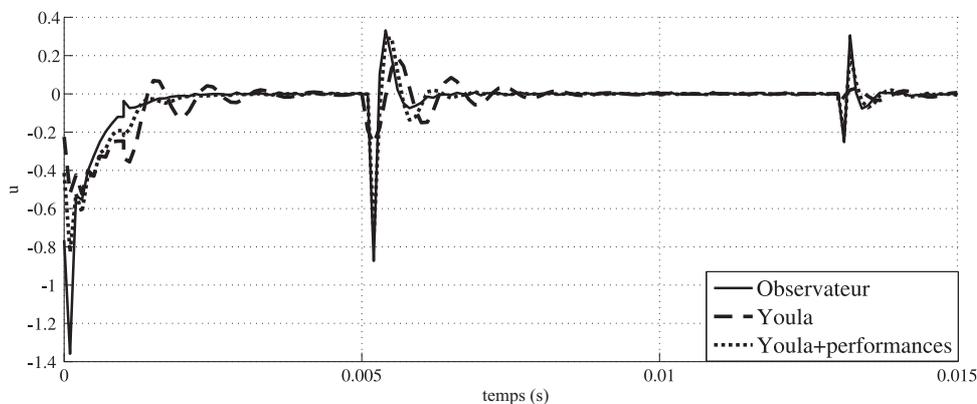


FIGURE 4.15: Evolution temporelle de l'entrée.

Les évolutions temporelles de la sortie nous montrent qu'en ajoutant la paramétrisation de Youla on diminue les performances en boucle fermée. En imposant un critère de performance pour la synthèse du paramètre de Youla ce problème est finalement réglé. Les performances dans ce dernier cas s'approchent visiblement de celles obtenues pour le système avec observateur seul.

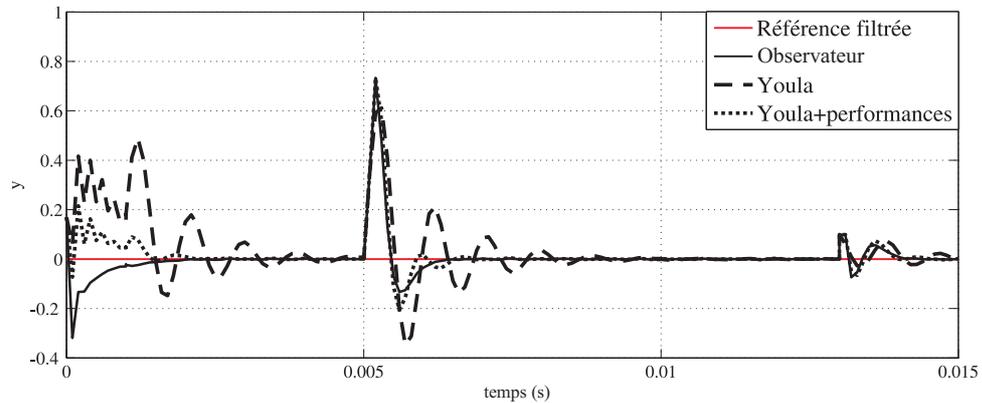


FIGURE 4.16: Evolution temporelle de la sortie.

On voit également l'effet de la commutation entre les deux modes mentionnés précédemment. Malgré cette commutation, le système est ISS stable par rapport à la perturbation bornée. On observe également que le système avec la paramétrisation de Youla est plus sensible à cette commutation, inconvénient qui est réglé en considérant le système avec le paramètre de Youla et contraintes sur la performance.

Ces résultats ont été obtenus par des simulations effectuées à l'aide du logiciel Yalmip [67] avec le solveur SeDuMi [104] dans l'environnement MatLab. Les simulations temporelles ont été réalisées sous Simulink.

#### 4.2.5 Conclusion

Considérant un système LPV à temps discret affecté par de perturbations bornées, cette section a présenté une méthode efficace pour la conception d'une loi de commande par retour d'état ISS stable par rapport à une perturbation bornée fournissant l'ellipsoïde maximal satisfaisant les contraintes. Cette approche a ensuite été étendue à la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur de type LPV stabilisante par rapport à une perturbation bornée, assurant la décroissance la plus rapide de la fonction de Lyapunov dépendante du paramètre vis-à-vis de l'entrée et de la sortie (et donc une bonne performance). Pour cette loi de commande, en ajoutant des contraintes, un paramètre de Youla a enfin été synthétisé afin d'améliorer la robustesse du système,

fournissant donc une projection maximale plus grande que celle obtenue pour le système avec observateur seul. Ce paramètre de Youla offre de bons résultats en termes de robustesse mais conduit à un comportement lent en boucle fermée en rejet de perturbations. Un compromis entre la robustesse et la performance a donc été atteint en imposant un critère de performance (décroissance "calibrée" de la fonction de Lyapunov) lors de la synthèse du paramètre de Youla. Le nouveau paramètre est moins robuste (la commande possède plus de transitoires) mais permet de gagner en performance (la sortie converge plus rapidement en cas de perturbations).

Cette approche a finalement été validée en simulation montrant l'impact positif des techniques exposées dans cette partie, et illustrant l'intérêt des outils théoriques développés dans le cadre de ce travail, non seulement pour les systèmes discrets LTI, mais aussi dans un cadre LPV. Afin de rendre nos résultats les plus exploitables possibles, le paragraphe suivant envisage l'application de nos outils à la classe de systèmes en commutation.

### 4.3 Systèmes en commutation à temps discret

Rappelons qu'un système linéaire en commutation est un système dynamique hybride composé de plusieurs sous-systèmes et d'une loi de commutation. Cette loi de commutation dicte quel sous-système est actif à chaque instant de temps [64].

La synthèse d'une loi de commande avec observateur pour des systèmes en commutation a été étudiée dans la littérature sous différentes formes : [22] propose une méthode pour la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur stabilisante, en commutation, pour des systèmes en commutation à temps discret qui ne sont pas affectés par des perturbations. [62] présente une méthode dite "deep pole assignment" pour étudier la stabilisation des systèmes en commutation avec une dynamique a priori connue pour chaque mode, mais avec les instants de commutation arbitraires. [48] étudie la stabilisation des systèmes en commutation et des systèmes incertains en commutation à temps discret avec une règle de commutation arbitraire pour des contrôleurs avec retour de sortie et observateur statique. [85] synthétise un observateur en commutation (y compris "state jumps") garantissant la convergence de l'erreur d'estimation à l'aide de fonctions de Lyapunov multiples. [21] adresse le problème de l'analyse de la stabilité et la synthèse d'une loi de commande pour des systèmes à temps discret en commutation en utilisant une fonction de Lyapunov en commutation, [27] donne une méthode pour le problème de la stabilisation des systèmes en commutation avec des perturbations bornées.

Lorsque des perturbations permanentes agissent dans le processus, la notion de la "stabilité entrée-état" (ISS) doit intervenir. Chaque sous-système du système en commutation

est ISS si l'origine est un point asymptotiquement stable pour le sous-système LTI non perturbé et si toutes les trajectoires de l'état sont bornées pour toutes les séquences de perturbations bornées. En outre, si la perturbation s'estompe ensuite, le sous-système converge asymptotiquement vers l'origine [66]. L'ISS par rapport à une perturbation bornée pour le système en commutation est assurée si chaque mode est ISS pour toutes les variations du paramètre possibles [63], [111].

Cette section traite des systèmes en commutation à temps discret affectés par des perturbations bornées. Nous proposons, tout d'abord, une technique ensembliste pour la synthèse d'un retour d'état en commutation garantissant l'ISS par rapport à la perturbation bornée et satisfaisant les contraintes sur la commande.

Si l'état n'est pas mesurable, un observateur est inséré dans le modèle. Ensuite une loi de commande par retour d'état et observateur en commutation sera synthétisée en imposant des contraintes sur la performance du système. Contrairement au cas LPV, pour le système en commutation on peut imposer des contraintes sur le placement des pôles en boucle fermée pour chaque mode (les autres méthodes pour améliorer la performance peuvent être appliqués également mais on se restreint ici à cette technique).

Dans une deuxième partie, nous synthétisons un paramètre de Youla en commutation qui maximise la projection de l'ellipsoïde invariant lorsque des contraintes sur l'entrée sont considérées. L'introduction du paramètre de Youla en commutation conduit à une projection maximale plus grande, mais avec des résultats dégradés en termes de transitoires en rejet de perturbations. Un compromis entre la robustesse et la performance est alors réalisé via une méthode de placement de pôles, possible dans ce cas. A la différence du cas LPV, pour les systèmes en commutation, les matrices d'entrée ou de la sortie peuvent elles aussi être en commutation sans faire appel à des méthodes intermédiaires pour traiter les cas avec observateur ou la paramétrisation de Youla.

Afin de valider les résultats théoriques, un système UPS (uninterruptible power supplies - alimentation sans coupure) est considéré.

#### 4.3.1 Synthèse d'une loi de commande par retour d'état

Soit le système discret en commutation (3.169) avec une loi de commande en commutation donnée par (3.170).

$\sigma$  est une règle de commutation prenant ses valeurs dans l'ensemble fini d'indices  $\mathcal{S} = \{1, \dots, N\} : (A_\sigma, B_\sigma, C_\sigma, F_\sigma) \in \{(A_i, B_i, C_i, F_i), i = \overline{1, N}\}$ . La règle de commutation est inconnue a priori, mais sa valeur instantanée est disponible en temps réel.

On suppose toujours que le vecteur de perturbation est borné (3.173). On considère également des contraintes sur la norme Euclidienne de la commande  $u(k)$  (3.174).

L'ensemble ellipsoïdal est donné par (3.6).

Pour un système en commutation à temps discret, on peut donner maintenant les conditions suffisantes garantissant l'ISS par rapport à une perturbation bornée indépendamment de la séquence de commutation. Comme ces conditions sont similaires à celles présentées pour le cas LPV, le théorème associé sera donné 4.20 en remplaçant  $B$  par  $B_i$ . Un critère d'optimisation classique permet d'obtenir l'ellipsoïde invariant maximal satisfaisant les contraintes.

*Remarque 4.28.* En considérant une fonction de Lyapunov unique ( $V(k) = x^T(k)Px(k) = x^T(k)G^{-1}x(k)$ ) et en employant le critère d'optimisation (4.91) on recherche en fait l'ellipsoïde invariant maximal situé à l'intérieur de l'intersection de tous les ellipsoïdes maximaux associés à chaque mode. Le retour d'état synthétisé garantit l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée pour toute transition et indépendamment de la séquence de commutation.

### 4.3.2 Synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur

Cette section examine comme objectif principal la synthèse d'une loi de commande avec observateur pour un système en commutation à temps discret affecté par des perturbations d'entrée et de sortie bornées. Le choix de concevoir une loi de commande avec observateur en commutation s'explique en partie par le fait que, en réalité, il y a des systèmes en commutation qui ne peuvent pas être stabilisés à l'aide d'une loi de commande par retour d'état et observateur unique (qui ne dépend pas du paramètre  $\sigma$ ).

Soit le système en commutation (3.169) avec un observateur en commutation utilisé pour estimer l'état (3.175) et une loi de commande donnée par (3.176). Pour ce système, la représentation d'état augmentée est donnée par (3.177) et la loi de commande correspondante par (3.178). Pour les systèmes en commutation, le système avec observateur et paramétrisation de Youla reste un système en commutation pour des matrices d'entrée ou de sortie dépendantes du paramètre ( $B_\sigma$  et  $C_\sigma$ ).

Selon la loi de commutation  $\sigma$ , les matrices ( $A_{o\sigma}, B_{o\sigma}, F_{o\sigma}$ ) prennent des valeurs dans l'ensemble  $\{(A_{oi}, B_{oi}, F_{oi}), i = \overline{1, N}\}$ .

Le vecteur de bruit est considéré borné (3.179). Des contraintes sur la norme Euclidienne de la commande sont également prises en compte (3.180).

L'ensemble ellipsoïdal a l'expression (3.37). Sa projection ellipsoïdale sur le sous-espace  $x$  est donnée par (3.43).

Dans le théorème suivant, on élabore les outils nécessaires et suffisants permettant de synthétiser une loi de commande par retour d'état et observateur en commutation, stabilisante par rapport à une perturbation bornée indépendamment de la séquence de commutation garantissant le placement des pôles dans une région plus petite que le cercle unité.

**Théorème 4.29.** *Soit le système en commutation avec observateur (3.177), affecté par des perturbations bornées (3.179). S'il existe  $G_i = G_i^T \succ 0$ ,  $P_i = P_i^T \succ 0$ ,  $Q_{G_i}$ ,  $Q_{P_i}$ ,  $Y_i$ ,  $J_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$  tels que :*

$$\begin{bmatrix} Q_{G_i}^T + Q_{G_i} - G_i & 0 & \alpha Q_{G_i}^T & Q_{G_i}^T A_i^T - Y_i^T B_i^T \\ 0 & \beta I & 0 & [B_w \ 0]^T \\ \alpha Q_{G_i} & 0 & \alpha G_i & 0 \\ A_i Q_{G_i} - B_i Y_i & [B_w \ 0] & 0 & G_i \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.156)$$

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 & \alpha P_i & A_i^T Q_{P_i}^T - C_i^T J_i^T \\ 0 & \gamma I & 0 & [Q_{P_i} B_w - J_i D_v]^T \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 \\ Q_{P_i} A_i - J_i C_i & [Q_{P_i} B_w - J_i D_v] & 0 & Q_{P_i}^T + Q_{P_i} - P_i \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.157)$$

$$\alpha - \gamma \geq 0, \quad \alpha - \beta \geq 0, \quad (4.158)$$

$$\begin{bmatrix} r_1(Q_{G_i}^T + Q_{G_i} - G_i) & Q_{G_i}^T A_i^T - Y_i^T B_i^T \\ A_i Q_{G_i} - B_i Y_i & r_1 G_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.159)$$

et

$$\begin{bmatrix} r_2 P_i & A_i^T Q_{P_i}^T - C_i^T J_i^T \\ Q_{P_i} A_i - J_i C_i & r_2(Q_{P_i}^T + Q_{P_i} - P_i) \end{bmatrix} \succeq 0 \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (4.160)$$

alors le système est ISS stable par rapport à une perturbation bornée et les pôles de la boucle fermée sont placés dans le disque centré en  $(0,0)$  et de rayon  $r_i$  ( $r_i < 1$ ). Les retours d'état en commutation qui stabilisent le système au sens entrée-état vis-à-vis d'une perturbation bornée sont donnés par :

$$F_i = Y_i Q_{G_i}^{-1}, \quad (4.161)$$

et les gains de l'observateur en commutation sont donnés par :

$$L_i = Q_{P_i}^{-1} J_i. \quad (4.162)$$

Afin d'alléger la lecture du manuscrit, la démonstration assez longue de ce théorème est donnée en Annexe B.

*Remarque 4.30.* En appliquant le théorème donné ci-dessus on synthétise une loi de commande par retour d'état et observateur en commutation, ISS stable par rapport à une perturbation bornée et satisfaisant des contraintes en performance qui dans ce cas peuvent être imposées via le placement de pôles (les autres méthodes peuvent être considérées également). On considère une fonction de Lyapunov en commutation (possible via les matrices supplémentaires  $Q_{pi}$  et  $Q_{gi}$ ) afin de réduire le conservatisme ou de rendre le problème faisable (il existe des systèmes en commutation qui ne peuvent pas être stabilisés à l'aide d'une loi de commande par retour d'état et observateur unique).

Afin de pouvoir imposer une dynamique plus rapide pour l'observateur on considère que les valeurs propres de  $A_i - B_i F_i$  et de  $A_i - L_i C_i$  peuvent être placées dans des cercles ayant des rayons différents ( $r_1$  et  $r_2$ ). On peut aller encore plus loin et imposer un rayon pour chaque mode ( $r_{1i}$  et  $r_{2i}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ).

### 4.3.3 La paramétrisation de Youla-Kučera

Soit le système en commutation avec observateur (3.177). Afin d'améliorer la robustesse du système, un paramètre de Youla en commutation est inséré dans la boucle fermée (3.181). La loi de commande a la forme (3.182).

Pour le système avec la paramétrisation de Youla, la représentation d'état augmentée choisie est :

$$x_y(k+1) = A_{y\sigma} x_y(k) + B_{y\sigma} n(k) \quad (4.163)$$

où :

$$x_y(k) = \begin{bmatrix} x_o(k) \\ x_Q(k) \end{bmatrix}, A_{y\sigma} = \begin{bmatrix} A_{o\sigma} - B_{e\sigma} D_{Q\sigma} C_{e\sigma} & -B_{e\sigma} C_{Q\sigma} \\ B_{Q\sigma} C_{e\sigma} & A_{Q\sigma} \end{bmatrix}, B_{e\sigma} = \begin{bmatrix} B_\sigma \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{e\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & C_\sigma \end{bmatrix}, B_{y\sigma} = \begin{bmatrix} B_{we} & -L_{e\sigma} D_v - B_{e\sigma} D_{Q\sigma} D_v \\ 0 & B_{Q\sigma} D_v \end{bmatrix}, B_{we} = \begin{bmatrix} B_w \\ B_w \end{bmatrix}, L_{e\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_\sigma \end{bmatrix}$$

avec la loi de commande :

$$u(k) = -F_{x\sigma} x_y(k) - F_{n\sigma} n(k) \quad (4.164)$$

où :

$$F_{x\sigma} = \begin{bmatrix} F_{o\sigma} + D_{Q\sigma} C_{e\sigma} & C_{Q\sigma} \end{bmatrix}, F_{n\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & D_{Q\sigma} D_v \end{bmatrix}.$$

Conformément à la loi de commutation  $\sigma$ , les matrices ( $A_{Q\sigma}, B_{Q\sigma}, C_{Q\sigma}, D_{Q\sigma}, A_{y\sigma}, B_{y\sigma}, F_{x\sigma}, F_{n\sigma}$ ) prennent des valeurs dans  $\{(A_{Qi}, B_{Qi}, C_{Qi}, D_{Qi}, A_{yi}, B_{yi}, F_{xi}, F_{ni}), i = \overline{1, N}\}$ .

Le vecteur de bruit  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est toujours considéré borné (3.185). Des contraintes sur l'entrée sont également prises en compte (3.186).

L'ensemble ellipsoïdal est donné par (3.56) avec  $G_y = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12}^T & G_{22} \end{bmatrix}$ ,  $G_{11} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ . La projection ellipsoïdale de cet ellipsoïde sur le sous-espace  $x$  est donnée par (3.58).

#### 4.3.3.1 Synthèse du paramètre de Youla-Kučera

Dans cette section, nous cherchons à améliorer la robustesse du système en commutation avec observateur par l'introduction d'un paramètre de Youla en commutation. Etant donné le retour d'état et le gain de l'observateur déterminés dans la section précédente, nous synthétisons le paramètre de Youla en commutation fournissant l'ellipsoïde invariant ayant la projection maximale sur le sous-espace d'état initial et satisfaisant les contraintes (3.186). Le gain en robustesse sera donné par la différence de volume entre la projection ellipsoïdale obtenue pour le système avec observateur et la projection ellipsoïdale obtenue pour le système avec observateur et Youla. Dû à la similarité avec le cas LPV, le théorème fournissant le paramètre de Youla et la projection maximale est donné par 4.24 en remplaçant  $B$  par  $B_i$  et  $C$  par  $C_i$  respectivement.

*Remarque 4.31.* Un paramètre de Youla en commutation est synthétisé afin de maximiser la projection d'un ensemble ellipsoïdal invariant satisfaisant des contraintes et de garantir l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée.

Notons que, au lieu de synthétiser un retour d'état, un retour d'état avec observateur ou un retour d'état avec observateur et Youla constants nous avons choisi de concevoir des lois de commandes en commutation et d'introduire une matrice supplémentaire, en réduisant de cette façon le conservatisme.

#### 4.3.3.2 Compromis entre la robustesse et la performance

La synthèse d'un paramètre de Youla en commutation maximisant la projection d'un ellipsoïde invariant offre de très bons résultats en termes de robustesse, mais conduit classiquement à de moins bonnes performances en boucle fermée. Si les intervalles entre les instants de commutation sont assez grands pour garantir en rejet de perturbations l'adaptation de chaque mode, les transitoires du système peuvent être diminués en imposant le placement des pôles de la boucle fermée de chaque mode dans une certaine région de l'espace [74], [23]. Cette technique de placement de pôles affecte uniquement le placement des pôles de la paramétrisation de Youla.

Afin d'obtenir de meilleures performances en boucle fermée, les pôles de la boucle fermée de chaque mode seront placés dans le disque centré en  $(0,0)$  et de rayon  $r_i < 1$  (plus le rayon est petit, plus les transitoires sont rapides).

**Lemme 4.32.** *Pour le système avec le paramètre de Youla, la matrice  $A_{yi}$  a les pôles de la boucle fermée dans le disque centré en  $(0,0)$  et de rayon  $r_i$  ( $r_i < 1$ ) si et seulement s'il existe  $P_y = P_y^T > 0$  tel que :*

$$\begin{bmatrix} r_i P_y & A_{yi}^T P_y \\ P_y A_{yi} & r_i P_y \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.165)$$

Cette LMI est dérivée de (4.90) en remplaçant  $A_y$  par  $A_{yi}$ .

**Théorème 4.33.** *Considérons le système en commutation à temps discret avec un paramètre de Youla (4.163), affecté par de perturbations bornées (3.185). La synthèse du paramètre de Youla qui maximise la projection  $E_{py}$  (3.58) de l'ellipsoïde invariant  $E_y$  (3.56) satisfaisant les contraintes sur la commande (3.186) et garantissant le placement de pôles de la boucle fermée dans le disque centré en  $(0,0)$  et de rayon  $r_i < 1$  est réalisée en résolvant :*

$$\min_{\substack{X, Y, M_i, N_i, H_i, R, D_{Q_i}, \alpha > 0, \beta \geq 0, \\ Q, G_{11} = G_{11}^T > 0, S, W}} -\log \det(ZG_{11}Z^T) \quad (4.166)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} r_i(\Gamma_Q + \Gamma_Q^T - \Gamma_G) & \Gamma_{Ai}^T \\ \Gamma_{Ai} & r_i \Gamma_G \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.167)$$

(4.133), (4.134) et (4.135) avec  $\Gamma_Q$ ,  $\Gamma_G$ ,  $\Gamma_{Ai}$ ,  $\Gamma_{Bi}$  et  $\Gamma_{Fi}$  donnés en (4.136), (4.137), (4.138), (4.139) et (4.140).

En supposant que le problème de maximisation ait une solution, le paramètre de Youla est calculé par (4.141)

*Démonstration.* La LMI (4.167) est obtenue par congruence de (4.165) avec  $\text{diag}(\Pi^T Q_{gy}^T, \Pi^T G_y)$  et  $\text{diag}(Q_{gy} \Pi, G_y \Pi)$ , respectivement, avec les mêmes notations qu'en (4.142), (4.143) et en remplaçant  $B_e$  et  $C_e$  par  $B_{ei}$  et  $C_{ei}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est donné par 4.145.  $\square$

*Remarque 4.34.* Le théorème donné ci-dessus synthétise la paramétrisation de Youla en commutation fournissant un compromis entre la robustesse (maximisation de la projection de l'ensemble invariant satisfaisant les contraintes malgré la présence des perturbations) et la performance (placement des pôles dans un cercle plus petit que le cercle

unité). Contrairement au cas LPV, pour les systèmes en commutation, la technique de placement des pôles est applicable si les intervalles entre les instants de commutation sont assez grands pour garantir en rejet de perturbations l'adaptation de chaque mode. On a montré que des contraintes de placement des pôles peuvent être imposées pour chaque mode. Évidemment cette méthode conçue pour améliorer la performance peut être appliquée simultanément avec les autres méthodes données précédemment.

#### 4.3.4 Mise en oeuvre en simulation

Pour illustrer les méthodes d'analyse et de synthèse exposées dans les sections précédentes, nous considérons un système UPS ("uninterruptible power supply") monophasé [75] dont le circuit est représenté Figure 4.17. Un UPS représente une alimentation d'énergie de secours qui fournit une alimentation d'urgence en cas de panne de courant. Le système UPS garantit aussi une tension de sortie avec un faible niveau de distorsion en présence de charges non linéaires.

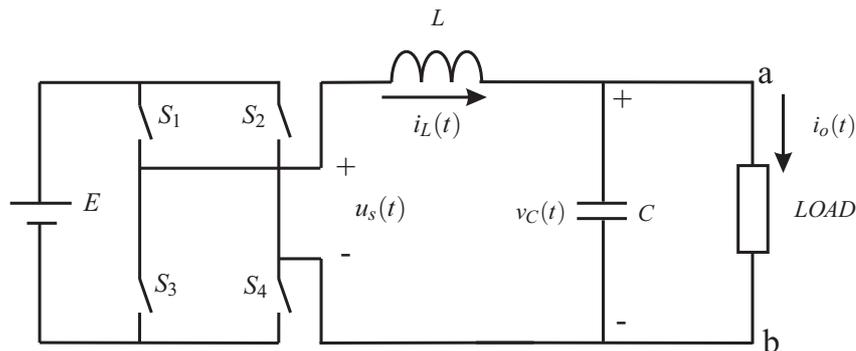


FIGURE 4.17: Système UPS monophasé.

Comme dans [75], nous considérons que la charge (non linéaire) en commutation est un redresseur avec filtrage capacitif, représenté sur la Figure 4.18.

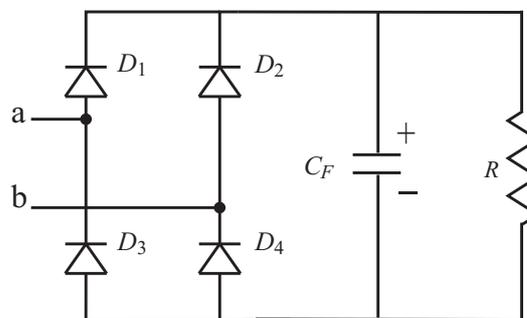


FIGURE 4.18: Redresseur à pont de Graetz avec filtrage capacitif.

Quand le module "charge générique"- "LOAD" (voir Figure 4.17) est remplacé par le redresseur à pont de Graetz avec filtrage capacitif, l'ensemble devient un système en commutation à deux modes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_{ci}x_s(t) + B_{ci}u_s(t) + B_{cw}w(t), \\ y_s(t) &= C_{ci}x_s(t) + B_vv(t), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.168)$$

où  $x_s(t) = [v_C(t) \ i_L(t)]^T$ ,  $y_s(t) = v_C(t)$ ,  $w(t)$  représente la perturbation sur l'état,  $v(t)$  représente la perturbation sur la sortie et

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix}, B_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, C_{c1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } D_1, \dots, D_4 \text{ off;} \\ A_{c2} = \begin{bmatrix} -1 & \\ R(C+C_F) & \frac{1}{C+C_F} \end{bmatrix}, B_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, C_{c2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } D_1, D_4 \text{ on, ou } D_2, D_3 \text{ on.} \end{array} \right.$$

Si le courant de charge  $i_o(t)$  est égal à zéro (décharge du condensateur  $C_F$ ), le système (4.168) fonctionne en mode 1, si le courant de charge est différent de zéro alors le système fonctionne en mode 2.

À titre d'observation, nous mentionnons que la tension aux bornes du condensateur du redresseur à pont  $v_{CF}(t)$  n'est pas contrôlable par l'entrée  $u_s(t)$  et n'est pas incluse dans (4.168). Les interrupteurs  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$  sont commandés par  $u_s(t)$ .

Après discrétisation, à la période d'échantillonnage  $T_s$  et en incluant des convertisseurs numérique-analogique et analogique-numérique, le système (4.168) devient :

$$\begin{aligned} x_s(k+1) &= A_{di}x_s(k) + B_{di}u_s(k) + B_{dw}w(k), \\ y_s(k) &= C_{di}x_s(k) + B_vv(k), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.169)$$

Afin d'annuler les erreurs statiques, une action intégrale est ajoutée :

$$u_s(k) = u_s(k-1) + \Delta u_s(k).$$

Le système final a donc la forme (3.169) avec :

$$\begin{aligned} x(k) &= \begin{bmatrix} x_s(k) \\ u_s(k-1) \end{bmatrix}, \quad u(k) = \Delta u_s(k), \quad y(k) = y_s(k), \quad B_w = \begin{bmatrix} B_{dw} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_i &= \begin{bmatrix} A_{di} & B_{di} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} B_{di} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} C_{di} & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Les valeurs numériques utilisées sont : tension de sortie nominale  $V_o = 110V_{RMS}(60Hz)$ , tension d'entrée  $E = 250V$ , fréquence de commutation  $f_{sw} = 108000Hz$ , période d'échantillonnage  $T_s = 1/108000s$ , inductance du filtre  $L = 1mH$ , capacité du filtre

$C = 100\mu F$ , la charge en commutation (Figure 4.18)  $R = 24\Omega$  et  $C_F = 330\mu F$ , la puissance nominale de sortie est  $0,5kVA$  et le filtre a une fréquence naturelle 20 fois inférieure à la fréquence de commutation [75]. Il est supposé que les diodes  $D_1, \dots, D_4$  sont idéales. Avec ces valeurs et en considérant un actionneur ayant un maximum de 2% d'erreur d'entrée ( $B_w$ ) et un capteur de sortie affecté par une perte d'au maximum 0,2% de la tension de sortie nominale ( $\approx 150V$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} A_{d1} &= \begin{bmatrix} 0,9574 & 0,9128 \\ -0,0913 & 0,9574 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0,9812 & 0,2137 \\ -0,0919 & 0,9901 \end{bmatrix}, \\ B_{d1} &= \begin{bmatrix} 0,0426 & 0,0913 \end{bmatrix}^T, B_{d2} = \begin{bmatrix} 0,0099 & 0,0923 \end{bmatrix}^T, \\ C_{d1} &= C_{d2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, B_{dw} = [0,0002 \ 0,0018]^T, D_v = 0,3. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 4.29 avec  $r_1 = r_2 = 0,96$  (le rayon du cercle où les pôles en boucle fermée sont placés)  $\alpha = 0,001$ ,  $\beta = 0,00089$  et  $\gamma = 0,0009$ , on obtient les retours d'état stabilisants :

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0,3382 & 3,5227 & 1,0001 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0,3440 & 3,1172 & 1,0001 \end{bmatrix} \quad (4.170)$$

et les gains de l'observateur :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0,8062 & 0,1972 & 0,1996 \end{bmatrix}^T, L_2 = \begin{bmatrix} 0,7468 & 0,2730 & 0,2569 \end{bmatrix}^T. \quad (4.171)$$

Il faut rappeler que plus le rayon du cercle incluant les pôles de la boucle fermée est petit, plus on gagne en performance.

Nous considérons la contrainte suivante sur l'entrée

$$|u(k)| = |\Delta u_s(k)| \leq 25V, \quad (4.172)$$

représentant la variation maximale acceptée pour la commande.

Avec cette contrainte on calcule via le théorème 3.19 (en remplaçant  $B$  par  $B_i$ ) l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes malgré la présence d'une perturbation et ayant la projection maximale sur le sous-espace d'état initial. Cette projection maximale ellipsoïdale est donnée Figure 4.19 par l'ellipsoïde bleu et a un volume  $V_O = 2,9839 \cdot 10^5 V^2 A$ . Les valeurs optimales de  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquelles nous avons obtenu la projection maximale sont  $\alpha = \beta = 0,012$ .

Afin d'améliorer le résultat en termes de robustesse, on synthétise via le théorème 4.24 (en remplaçant  $B$  par  $B_i$ ), à partir de 4.170 et 4.171 le paramètre de Youla fournissant l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes (4.172) et ayant la projection maximale sur le sous-espace d'état initial. Ce paramètre est :

$$\begin{aligned}
A_{Q1} &= \begin{bmatrix} 0,9606 & 0,9176 & 0,0388 & -0,5107 & 0 & 0 \\ -0,0844 & 0,9678 & 0,0833 & -0,0813 & 0 & 0 \\ 0,0751 & 0,1139 & 0,9126 & -0,1301 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4503 & 0,9128 & 0,0426 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1648 & 0,9574 & 0,0913 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0457 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
A_{Q2} &= \begin{bmatrix} 0,9821 & 0,2113 & 0,0089 & -0,4177 & 0 & 0 \\ -0,0835 & 0,9689 & 0,0824 & -0,0739 & 0 & 0 \\ 0,0904 & -0,2298 & 0,8934 & -0,0574 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0001 & 0 & 0,5636 & 0,2137 & 0,0099 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1646 & 0,9901 & 0,0923 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0444 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
B_{Q1} &= \begin{bmatrix} -0,5107 & -0,0813 & -0,1301 & 0,2991 & 0,1236 & 0,1539 \end{bmatrix}^T, \\
B_{Q2} &= \begin{bmatrix} -0,4177 & -0,0739 & -0,0574 & 0,3292 & 0,2003 & 0,2125 \end{bmatrix}^T, \\
C_{Q1} &= \begin{bmatrix} 0,4132 & 3,6366 & 0,9127 & -0,4226 & -3,5227 & -1,0001 \end{bmatrix}, \\
C_{Q2} &= \begin{bmatrix} 0,4343 & 2,8875 & 0,8935 & -0,3569 & -3,1172 & -1,0001 \end{bmatrix}, \\
D_{Q1} &= -0,0844, \quad D_{Q2} = -0,013.
\end{aligned} \tag{4.173}$$

Pour le système avec le paramètre de Youla la projection maximale est donnée Figure 4.19 par l'ellipsoïde vert. Elle a été obtenue pour  $\alpha = \beta = 0,025$  et a un volume  $V_Y = 5,6107 \cdot 10^7 V^2 A$ . Le gain en robustesse (la différence de volume entre l'ellipsoïde obtenu pour le système avec observateur et l'ellipsoïde obtenu pour système le avec observateur et Youla) est tout à fait conséquente.

Un compromis entre la robustesse et la performance est obtenu par la technique de placement de pôles (théorème 4.33). Nous cherchons maintenant un paramètre de Youla en commutation tel que les pôles de chaque mode soient placés dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r = 0,965$  (pour le paramètre de Youla précédent, la valeur propre maximale en boucle fermée est de 0,9871). La projection maximale obtenue pour ce nouveau paramètre (l'ellipsoïde rouge Figure 4.19) a un volume  $V_{Yp} = 4,3918 \cdot 10^6 V^2 A$  et il a été obtenu pour  $\alpha = \beta = 0,069$ . On constate que la projection maximale a un volume inférieur à celui obtenu pour le paramètre de Youla précédent, mais plus grand que celui obtenu pour le système avec observateur.

Les Figure 4.20 et 4.21 donnent les évolutions temporelles de la commande et la tension de sortie et le courant de charge pour le système UPS dans les trois cas : système avec observateur et critère de performance, système avec observateur et Youla et système avec observateur, Youla et critère de performance.

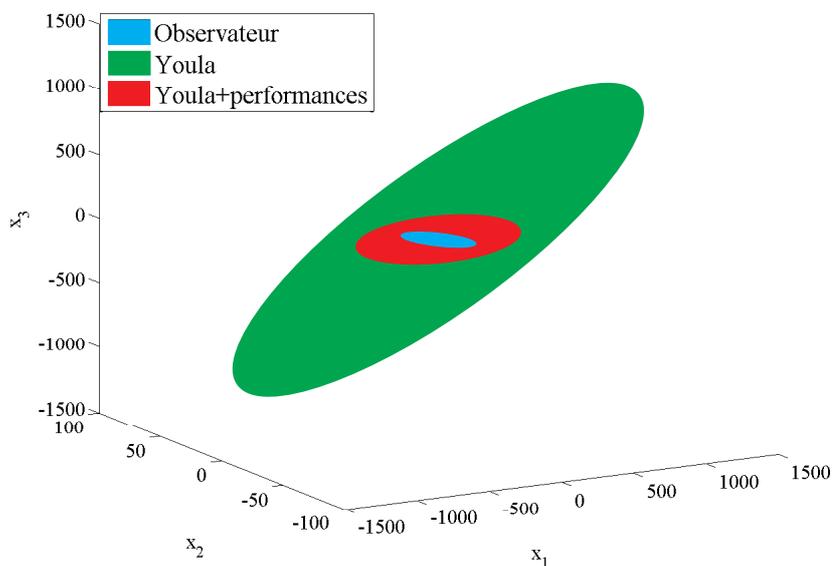


FIGURE 4.19: Projections ellipsoïdales maximales.

Pour ces évolutions dans le domaine temporel, nous avons considéré un signal de référence sinusoïdal, une perturbation en échelon affectant l'état à l'instant  $8ms$  avec une amplitude de  $3V$  et un signal aléatoire sur la sortie prenant des valeurs aléatoires dans l'intervalle  $[-10V \ 10V]$ . L'effet de la perturbation sur l'état est visible plutôt sur la tension de sortie. Les perturbations considérées ici sont plus importantes que celle considérées lors du calcul des ellipsoïdes invariants.

Les évolutions temporelles de la commande (Figure 4.20) nous montrent que, pour le système avec la paramétrisation de Youla (avec/sans critère de performance), l'effet des perturbations sur le signal d'entrée a diminué et donc le système est plus robuste. En revanche, pour le système avec observateur seul on peut noter des transitoires non-négligeables de la commande.

Pour les évolutions temporelles des sorties, on voit que le système avec Youla suit le signal sinusoïdale plus lentement. En considérant des contraintes de performance, on obtient presque les mêmes résultats que ceux constatés pour le système avec observateur seul.

En guise de conclusion, pour le système avec Youla et contraintes sur la performance, les courbes de la tension de sortie et du courant de charge sont très proches à celles obtenues pour le système avec observateur. En outre, l'impact du bruit sur la commande reste faible.

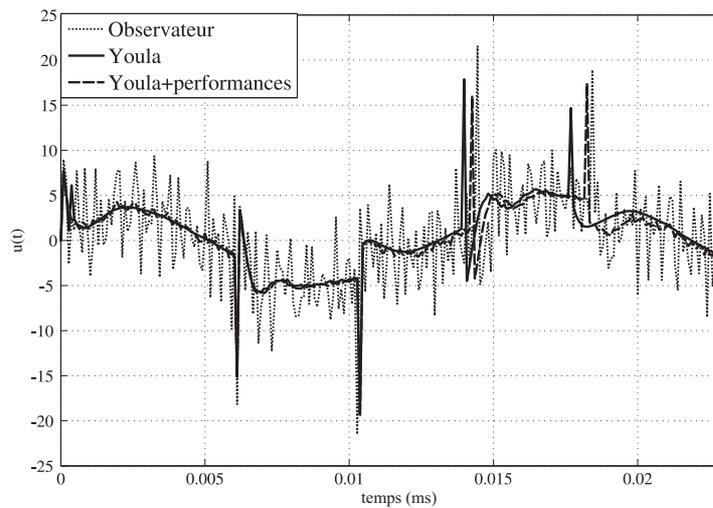


FIGURE 4.20: Evolution temporelle du signal de commande.

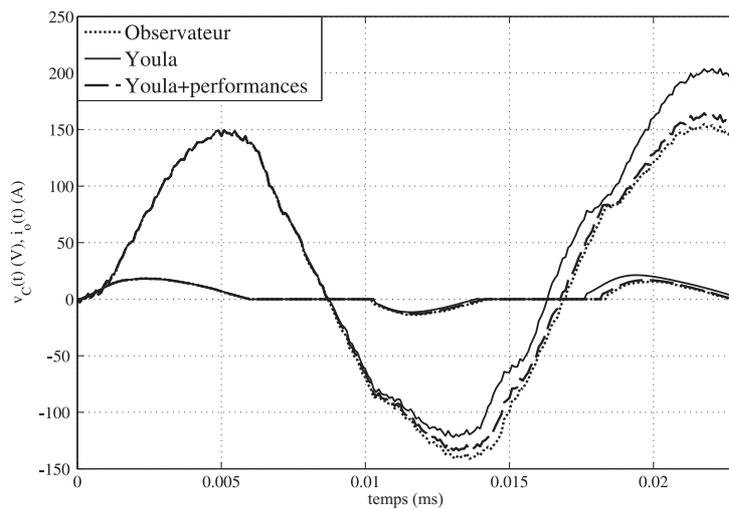


FIGURE 4.21: Tension de sortie et courant de charge pour le système UPS

Ces résultats ont été obtenus par des simulations effectuées à l'aide du logiciel Yalmip [67] avec le solveur SeDuMi [104] dans l'environnement MatLab. Les simulations temporelles ont été réalisées sous Simulink.

### 4.3.5 Conclusion

Étant donné un système linéaire en commutation à temps discret affecté par des perturbations bornées, cette section a permis de mettre en oeuvre des méthodes efficaces pour la synthèse d'une loi de commande par retour d'état satisfaisant des contraintes

sur l'entrée, d'une loi de commande avec observateur satisfaisant des contraintes de performance et enfin d'une loi de commande avec observateur et paramètre de Youla satisfaisant des contraintes sur l'entrée et des contraintes de performance. Le paramètre de Youla est synthétisé en considérant comme critère d'optimisation la maximisation de la projection de l'ellipsoïde invariant sur l'espace de l'état initial. Ce paramètre offre une très bonne robustesse mais peut conduire à un ralentissement des performances en boucle fermée. Afin d'obtenir un compromis entre la robustesse et la performance, on impose lors de la synthèse le placement des pôles de la boucle fermée dans un région restreinte du cercle unité.

## 4.4 Conclusions

Ce chapitre a permis de structurer des lois de commande à la fois robustes et performantes pour des systèmes LTI, LPV ou en commutation à temps discret affectés par des perturbations bornées. Pour chaque classe de systèmes considérés, ont été abordées successivement la synthèse d'un retour d'état classique, d'un retour d'état avec observateur et d'un retour d'état avec observateur et paramétrisation de Youla.

Pour tous ces système à temps discret affectés par des perturbations bornées, une commande par retour d'état robuste stabilisante vis-à-vis de la perturbation bornée a été élaborée. Le critère d'optimisation retenu pour cela a été la maximisation de l'ellipsoïde invariant satisfaisant des contraintes sur la commande. Pour le système LPV (respectivement en commutation), le retour d'état synthétisé est de type LPV (respectivement en commutation). Dans ces deux cas la fonction de Lyapunov n'est pas dépendante du paramètre car, en présence d'une perturbation, la condition d'invariance garantit l'invariance de chaque ellipsoïde correspondant à chaque mode mais elle ne garantit pas qu'à l'intérieur de ces ellipsoïdes la fonction de Lyapunov soit monotone décroissante c'est pour cela qu'une fonction de Lyapunov unique a été employée. Des matrices supplémentaires ( $Q_{gi}$ ) ont été introduites pour réduire le conservatisme. La prise en compte des perturbations a été possible grâce à la S-procédure. Les LMIs correspondantes aux contraintes ont été obtenues via les propriétés de la norme euclidienne. La notation  $Y = FG$  (ou  $Y_i = F_i G$  dans le cas LPV et en commutation) a permis l'obtention de BMIs avec une seule variable scalaire qui multiplie une autre variable de décision (problème qui peut être facilement résolu par une simple boucle).

Par ailleurs, si l'état n'est pas mesurable, un observateur doit être mise en oeuvre. Alors, pour chaque classe de systèmes, il a été synthétisé un retour d'état et un gain d'observateur stabilisants en considérant des contraintes sur la performance et non des contraintes sur l'entrée à cause de l'impossibilité de satisfaire les réciproques des théorèmes donnés pour la synthèse de la loi de commande par retour d'état et observateur. Pour le système

LTI, on a imposé le placement des pôles dans une région plus restreinte que le cercle unité. Pour le système LPV, on recherche le retour d'état et le gain de l'observateur donnant la décroissance la plus rapide de la fonction de Lyapunov vis-à-vis de l'entrée et de la sortie car une méthode basée sur le placement des pôles n'est plus adéquate. Pour le système en commutation, on impose le placement de pôles pour chaque mode dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r_i < 1$ ,  $i = \overline{1, N}$  (afin de pouvoir imposer une dynamique plus rapide pour l'observateur on considère que les valeurs propres du retour d'état et de l'observateur peuvent être placées dans des cercles ayant de rayons différents).

Pour les systèmes LPV ou en commutation, le retour d'état et le gain de l'observateur sont de type LPV ou en commutation, respectivement. En introduisant des matrices supplémentaires on peut considérer que la fonction de Lyapunov est dépendante du paramètre (il existe des systèmes LPV ou en commutation qui ne peuvent pas être stabilisés à l'aide d'une loi de commande par retour d'état et observateur unique).

L'obtention des inégalités présentées lors des théorèmes donnés pour la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur a été possible grâce à une augmentation qui a permis de considérer que le système et l'observateur peuvent être affectés tous les deux par des perturbations a priori différentes. Les différentes techniques de performance peuvent être combinées si souhaité (ou si possible).

Le but est de synthétiser une loi de commande par retour d'état et observateur ayant une bonne performance et de la robustifier à travers la paramétrisation de Youla en ajoutant des contraintes sur la commande. Donc, avec ce retour d'état et ce gain d'observateur, une dernière étape a consisté en la synthèse d'un paramètre de Youla fournissant la projection maximale (pour toute transition dans le cas LPV et en commutation) sur le sous-espace d'état initial. Cette projection est notablement plus grande que celle obtenue pour le système avec observateur seul parce que, en introduisant la paramétrisation de Youla, on introduit des degrés de liberté et parce que le paramètre de Youla réduit l'effet de la perturbation. La synthèse d'un paramètre de Youla en utilisant des outils ensemblistes et la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur pour des systèmes affectés par de perturbations bornées représente des nouveautés dans la littérature.

La paramétrisation de Youla garantit de bons résultats en termes de robustesse mais dégrade les performances en boucle fermée. Cet inconvénient a été surmonté en ajoutant des contraintes sur la performance. Pour le système LTI, on considère des contraintes sur la fonction de Lyapunov ou sur le placement de pôles, pour le système LPV on impose des contraintes sur la décroissance de la fonction de Lyapunov et pour le système en commutation, on adopte des contraintes sur le placement des pôles. Le nouveau

paramètre offre ainsi un bon compromis entre la robustesse et la performance. La raison pour ne pas maximiser la vitesse de décroissance (comme dans le cas LPV avec observateur) mais d'imposer plutôt une certaine décroissance est due au fait que, en appliquant cette démarche, on peut plus facilement régler le compromis souhaité entre la robustesse et la performance.

Pour les systèmes LPV ou en commutation, le paramètre de Youla est de type LPV ou en commutation, respectivement. Les manipulations effectuées sur les inégalités matricielles afin d'obtenir le paramètre de Youla ne permettent pas de considérer une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre mais on peut toujours introduire une matrice supplémentaire afin de réduire le conservatisme.

Les techniques proposées permettent d'obtenir une loi de commande à la fois robuste et performante pour des systèmes à temps discret affectés par des perturbations bornées en utilisant des techniques ensemblistes ayant un degré de complexité réduit. On a abouti dans un premier temps la synthèse d'une loi de commande par retour d'état robuste, qui maximise l'ellipsoïde invariant maximal. Puis si un observateur est considéré pour estimer l'état on s'est proposé de synthétiser une loi de commande par retour d'état et observateur performante qui ensuite sera robustifiée en introduisant un paramètre de Youla recherché afin de maximiser la projection ellipsoïdale. Cet paramètre de Youla offre des très bons résultats en robustesse (la nouvelle projection est significativement plus grande que celle obtenue pour le système avec observateur seul) mais dégrade la performance. Si on souhaite un compromis entre la performance et la robustesse, un nouveau paramètre de Youla peut être synthétisé en ajoutant des contraintes de performance. Avec ce nouveau paramètre on obtient une projection plus petite mais qui restée tout de même supérieure à celle obtenue pour le système avec observateur seul (donc on garde un degré de robustesse) et une dynamique plus rapide en boucle fermée (on gagne en performance).

Pour chaque classe de systèmes considérés, un exemple explicatif a permis de valider en simulation l'ensemble des outils théoriques développés, confortant systématiquement l'intérêt de la structure la plus complète (loi de commande par retour d'état, loi de commande par retour d'état et observateur avec contraintes sur la performance, paramètre de Youla avec/sans critère sur la performance).

Tous ces résultats valident aussi l'attrait de l'utilisation des ensembles invariants dans un but de synthèse d'une loi de commande robuste. Cet aspect constitue avant tout le caractère novateur de nos travaux de recherche.



## Chapitre 5

# Mise en oeuvre sur un convertisseur Buck DC-DC

Les convertisseurs de type DC-DC sont des circuits électroniques de puissance très souvent intégrés dans les équipements d'alimentation d'énergie pour la plupart des produits électroniques (ordinateurs personnels, équipement de bureau, systèmes d'alimentation de vaisseaux spatiaux, ordinateurs portables et équipements de télécommunications), ou dans des applications spécialisées en forte puissance telles que la charge de batterie ainsi que les moteurs à courant continu.

Le choix des méthodes de contrôle joue un rôle décisif pour la performance des convertisseurs DC-DC. Différentes méthodes ont été employées pour la modélisation et la commande des convertisseurs DC-DC. Dans [34], [83], [87], [7] des techniques de commande numériques qui combinent le contrôle direct de la tension avec une dynamique rapide ont été mises en oeuvre, dans [6] une méthode de type RHC explicite a été appliquée à un convertisseur DC-DC. Mais à notre connaissance, aucune approche ensembliste n'a été mise en oeuvre dans la littérature spécialisée afin d'élaborer une stratégie de commande pour ce type de système.

Les convertisseurs DC-DC les plus répandus sont de plusieurs types, parmi lesquels le Buck, Boost ou Buck-Boost. Le Buck diminue et le Boost augmente la tension de sortie par rapport à une tension d'entrée. Le convertisseur Buck-Boost peut fonctionner comme un convertisseur Buck ou comme un convertisseur Boost selon le rapport cyclique d'un ou plusieurs commutateurs dans le convertisseur. Ainsi, un convertisseur Buck est un convertisseur de puissance de type DC-DC, communément appelé "abaisseur" ("Step Down Converter" en anglais) car il permet de transformer la tension présente sur le port d'entrée en une tension inférieure, souvent une tension d'alimentation.

Un convertisseur Buck bien conçu peut être remarquablement efficace (95% ou plus pour les circuits intégrés) ce qui le rend ainsi très utile pour des tâches telles que la

conversion de la tension  $12 - 24 V$  de la batterie d'un ordinateur portable en quelques volts nécessaires pour le processeur.

Le tutoriel [31] montre comment les techniques d'analyse de l'établissement d'un modèle moyen et de linéarisation sont appliquées au convertisseur Buck pour obtenir des équations simples qui pourront ensuite être utilisées pour la synthèse d'une loi de commande.

A partir des démarches mises en oeuvre aux chapitres précédents, ce chapitre propose l'application des techniques ensemblistes pour la synthèse d'une loi de commande robuste, afin de contrôler un convertisseur Buck DC-DC. Pour ce système linéaire à temps discret, soumis à des perturbations et des contraintes, deux cas seront étudiés : le système avec charge résistive fixe et le système avec charge résistive variable.

Pour le système avec charge résistive fixe on commencera par la synthèse d'un retour d'état qui maximise l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes sur la commande et sur le courant dans l'inductance. Afin d'améliorer les résultats en termes de performance, des contraintes sur le placement des pôles sont ajoutées lors de la synthèse de la loi de commande. Si on veut réduire le nombre des capteurs, un observateur est considéré afin d'estimer l'état. On synthétise maintenant la loi de commande par retour d'état et observateur ISS stable garantissant une fonction de Lyapunov ayant la vitesse de décroissance la plus rapide vis-à-vis de la commande et de la sortie, et donc une bonne performance en boucle fermée. Cette loi de commande sera ensuite robustifiée via la paramétrisation de Youla en ajoutant des contraintes sur le rapport cyclique et le courant. Si un compromis entre la robustesse et la performance est souhaité, on ajoute des contraintes sur le placement des pôles lors de la synthèse du paramètre de Youla. Les évolutions temporelles de la tension, du courant et du rapport cyclique sont tracées pour montrer le comportement du convertisseur.

Pour le système avec charge résistive variable, le modèle est mis sous forme LPV et on synthétise un retour d'état maximisant l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes. Pour obtenir des meilleurs résultats en termes de performance, la technique basée sur la décroissance de la fonction de Lyapunov est considérée.

Les objectifs visés par cette association des ensembles invariants avec la synthèse d'un retour d'état pour un convertisseur de type Buck DC-DC sont d'élargir la région de l'espace où les contraintes sont satisfaites en cas de perturbations agissant sur le système, comme cela a toujours été le cas tout au long de ce travail.

## 5.1 Convertisseur Buck DC-DC avec charge résistive constante

Le convertisseur Buck DC-DC est commandé en pilotant un certain rapport cyclique fonction de l'état de l'interrupteur. Le schéma de base d'un convertisseur Buck [31] est donné Figure 5.1.

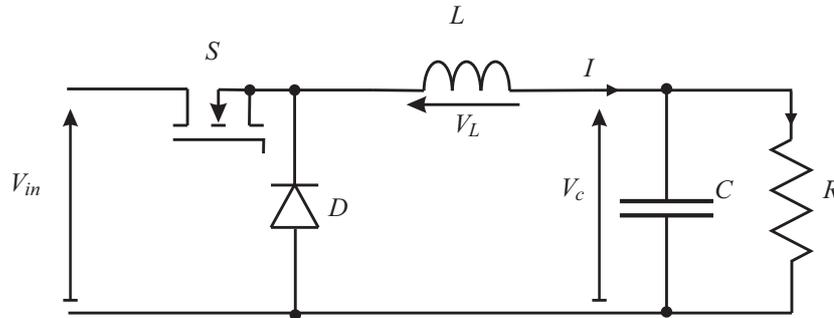


FIGURE 5.1: Schéma de base d'un convertisseur Buck.

Le principe de fonctionnement est le suivant :

- dans l'état passant, lorsque l'interrupteur se ferme, la tension aux bornes de l'inductance vaut  $V_L = V_{in} - V_c$ , le courant  $I$  commence à circuler dans l'inductance en s'amplifiant linéairement. Il traverse aussi le condensateur de filtrage et la charge.

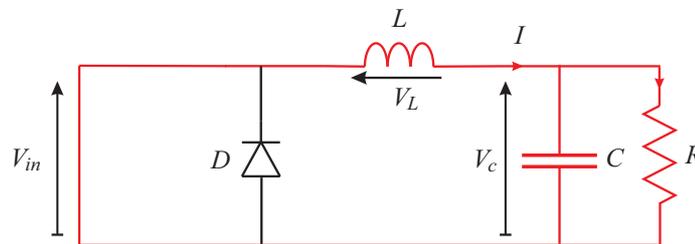


FIGURE 5.2: Interrupteur passant.

- dans l'état bloqué, lorsque l'interrupteur s'ouvre, la tension aux bornes de l'inductance vaut  $V_L = -V_c$ , le courant continue à circuler dans l'inductance via la diode mais il décroît.

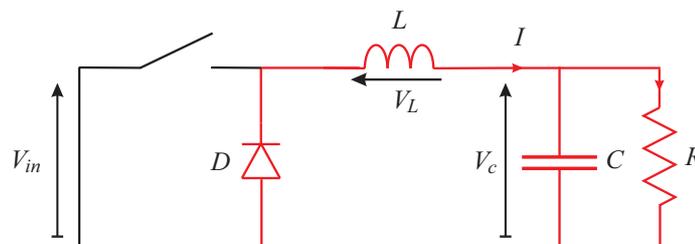


FIGURE 5.3: Interrupteur bloqué.

Le courant traversant l'inductance  $I$  et la tension du condensateur  $V_c$  sont les deux éléments du vecteur d'état  $x_c$ , tandis que la grandeur d'entrée est donnée par  $V_{in}$ . Selon la position de l'interrupteur la représentation d'état en temps continu est :

- diode on (interrupteur fermé) :  $\dot{x}_c = A_{on}x_c + B_{on}V_{in}$ ,
- diode off (interrupteur ouvert) :  $\dot{x}_c = A_{off}x_c + B_{off}V_{in}$

avec :

$$x_c = \begin{bmatrix} I \\ V_c \end{bmatrix}, A_{on} = A_{off} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, B_{on} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, B_{off} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Une seule équation peut être considérée pour décrire approximativement le convertisseur sur un certain nombre de cycles de commutation en prenant simplement une moyenne pondérée linéaire des équations correspondant à chaque variation du paramètre du convertisseur Buck DC-DC.

Le modèle moyen de la représentation d'état du convertisseur est :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \tilde{A}x_c + \tilde{B}V_{in}, \\ y &= C_c x_c + D_{cv}v. \end{aligned} \quad (5.2)$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= dA_{on} + (1-d)A_{off}, \\ \tilde{B} &= dB_{on} + (1-d)B_{off} \end{aligned} \quad (5.3)$$

et  $d$  s'appelle le rapport cyclique du système en commutation.

Dés lors que le rapport cyclique apparaît dans la matrice  $\tilde{B}$ , le modèle moyen est donc variable dans le temps. Pour simplifier le modèle, on linéarise (5.2) en considérant de petites variations pour chaque variable :

$$x_c = x_0 + \tilde{x}, V_{in} = V_{in0} + \tilde{V}_{in} \text{ et } d = d_0 + \tilde{d}$$

avec  $\tilde{x} \ll x_0$ ,  $\tilde{V}_{in} \ll V_{in0}$  et  $\tilde{d} \ll d_0$ .

En négligeant les produits des petits signaux, (5.2) devient :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + B_c\tilde{u} + B_{cw}w \\ y &= C_c\tilde{x} + D_{cv}v \end{aligned} \quad (5.4)$$

où :

$$B_c = \begin{bmatrix} \frac{V_{in0}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, C_c = [0 \ 1], B_{cw} = V_m \begin{bmatrix} \frac{d_0}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, w = \frac{\tilde{V}_{in}}{V_m}, w^T w \leq 1,$$

la commande  $\tilde{u}$  est en fait par  $\tilde{d}$ ,  $\pm V_m$  correspond à la variation maximale admissible de  $V_{in}$  et  $D_{cv}$  représente la perturbation de mesure.

A partir de là, le système associé au convertisseur peut être discrétisé (en incluant des convertisseurs numérique-analogique et analogique-numérique), sous la forme :

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= A_d x_d(k) + B_d u(k) + B_{dw} w(k), \\ y_d(k) &= C_d x_d(k) + D_{dv} v(k) \end{aligned} \quad (5.5)$$

où  $x_d$  représente l'état  $\tilde{x}$  discrétisé, l'entrée  $u$  correspond à  $\tilde{d}$  en temps discret,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  est la perturbation sur l'état correspondant à  $\tilde{V}_{in}$  en temps discret, et  $y_d$  est la tension du condensateur en temps discret.

Pour valider les résultats théoriques, considérons le convertisseur Buck DC-DC Figure 5.1 avec  $L = 220\mu H$ ,  $C = 47\mu F$  et  $R = 6\Omega$ . En suivant les étapes précédentes, le système associé au convertisseur peut s'écrire sous la forme (3.1) avec :

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 0,8882 & -0,2 \\ 0,9361 & 0,7322 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 5,2466 \\ 2,6832 \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D_d = 0, \\ B_{dw} &= \begin{bmatrix} 0,1093 \\ 0,0559 \end{bmatrix}, D_v = D_{dv} = 0,1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Les valeurs utilisées par la suite sont : la période d'échantillonnage  $T = 50 \cdot 10^{-6}s$ , la fréquence de commutation  $1/T$ ,  $d_0 = 0,5$ ,  $V_{in0} = 24V$  et  $V_{c0} = V_0 = 12V$ .

Le rapport cyclique  $d$  réside dans l'intervalle  $[0 \ 1]$ , mais en raison des contraintes physiques, nous considérons qu'il évolue uniquement dans l'intervalle  $[0,1 \ 0,9]$ . Cela signifie que  $(d_0 + \tilde{d}) \in [0,1 \ 0,9]$ , d'où la contrainte sur l'entrée :

$$\boxed{\|\tilde{d}\|_2 \leq d_{max} \text{ où } d_{max} = 0,4.} \quad (5.7)$$

Pour les contraintes sur le courant traversant l'inductance, nous considérons la forme d'onde représentée Figure 5.4 avec :

$$I_{max} = I_{min} + \frac{V_{in} - V}{L} dT \text{ avec } V = dV_{in} \quad (5.8)$$

donc

$$\Delta I = I_{max} - I_{min} = \frac{(1-d)V}{L} T \quad (5.9)$$

et

$$I_{max} = I_m + \frac{\Delta I}{2} = I_m + \frac{(1-d)V}{2L} T \quad (5.10)$$

où  $I_m$  est le courant moyen.

La dernière équation obtenue est variable dans le temps, il convient donc de la linéariser en considérant de petites variations pour chaque variable :

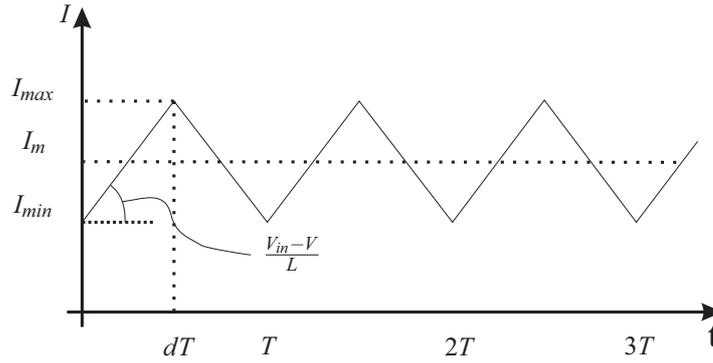


FIGURE 5.4: Courant de l'inductance.

$$\tilde{I}_{max} + I_{max0} = \tilde{I}_m + I_{m0} + \frac{(1-\tilde{d}-d_0)(\tilde{V}+V_0)}{2L}T,$$

où  $I_{max0} = I_{m0}$ ,  $(\tilde{d} \cdot \tilde{V}) \approx 0$

et donc :

$$\tilde{I}_{max} = \tilde{I}_m + \frac{(1-d_0)T}{2L}\tilde{V} - \frac{V_0T}{2L}\tilde{d}. \quad (5.11)$$

Si on impose :

$$I_{max} \leq 2I_{max0} \quad \text{où} \quad I_{max0} = \frac{V_0}{R} + \frac{V_0(1-d_0)T}{2L},$$

la contrainte imposée sur le courant traversant l'inductance devient :

$$\|\tilde{I}_{max}\|_2 \leq I_{max0} = 2,6818A \approx 3A. \quad (5.12)$$

Dans la synthèse on a imposé une contrainte  $I_{max} \leq 6A$ .

### 5.1.1 Loi de commande par retour d'état

Soit le système sous la forme (3.1) avec les matrices (5.6). Afin d'annuler les erreurs statiques, on ajoute une action intégrale en sortie :

$$z(k+1) = z(k) + C_d x_d(k) - \tilde{V}_{ref}, \quad (5.13)$$

où  $V_{ref}$  est la tension de référence et  $z \in \mathbb{R}^p$  est l'action intégrale. On considère  $\tilde{V}_{ref} = 0V$ , c.-à-d.  $V_{ref} = 12V$ , sachant que notre objectif est d'amener le système à l'équilibre.

Le système augmenté s'écrit également sous la forme (3.1) avec :

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_d(k) \\ z(k) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ C & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [C_d \quad 0], \quad D = 0, \quad B_w = \begin{bmatrix} B_{dw} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

La loi de commande a la forme (3.2) :

$$u(k) = -Fx(k). \quad (5.15)$$

Le vecteur de bruit regroupant les perturbations d'état et de mesure  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est supposé borné (4.3).

Nous considérons le pire cas de variation de  $V_{in}$  de  $\pm V_m$ ,  $V_m = 6V$ . Comme  $w$  est une perturbation bornée avec  $w^T w \leq 1$ , la matrice associée à cette perturbation devient  $B_w = 6 \begin{bmatrix} B_{dw} \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $w = \frac{\tilde{V}_{in}}{V_m}$ .

L'expression du courant dans l'inductance (5.11) peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{I}_{max} = M_n x(k) + N_n u(k) = (M_n - N_n F)x(k), \quad (5.16)$$

où

$$M_n = \begin{bmatrix} I & \frac{(1-d_0)T}{2L} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } N_n = -\frac{V_0 T}{2L}. \quad (5.17)$$

Ensuite, pour ce qui concerne les contraintes sur ce courant, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}_{max}\|_2^2 &= \|(M_n - N_n F)x(k)\|_2^2 \leq \|(M_n - N_n F)P^{-1/2}\|_2^2 \|P^{1/2}x(k)\|_2^2 \\ &\leq \lambda_{max}\{((M_n - N_n F)P^{-1}(M_n - N_n F)^T)(x^T(k)Px(k))\} \leq \\ &\leq \lambda_{max}[(M_n - N_n F)P^{-1}(M_n - N_n F)^T]. \end{aligned}$$

Par l'application du théorème de Schur, il vient que  $\|\tilde{I}_{max}\|_2 \leq I_{max0}$  (5.12) si :

$$\begin{bmatrix} P & (M_n - N_n F)^T \\ (M_n - N_n F) & I_{max0}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (5.18)$$

En pré- et post-multipliant la LMI (5.18) par  $\text{diag}(G, I)$  où  $G = G^T = P^{-1} \succ 0$  avec la notation  $Y = FG$  on obtient la LMI :

$$\begin{bmatrix} G & GM_n^T - YN_n^T \\ M_n G - N_n Y & I_{max0}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (5.19)$$

### 5.1.1.1 Retour d'état

Afin de maximiser l'ellipsoïde invariant garantissant l'invariance et la satisfaction des contraintes sur le rapport cyclique et le courant traversant l'inductance, le critère (4.5) soumis à (4.6), (4.7), (4.8) (voir théorème (4.1)) et (5.19) est minimisé. L'ellipsoïde

maximal a un volume  $V = 7,5256 \cdot 10^3 V^2 A$  et a été obtenu pour un  $\alpha = \beta = 0,122$ . La projection sur les deux dimensions les plus importantes de l'espace d'état (la tension et le courant) de l'ellipsoïde invariant maximal est représentée Figure 5.9 (ligne pleine).

Le retour d'état qui en résulte est :

$$F = \begin{bmatrix} 0,0915 & -0,0246 & 0,0018 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Les pôles en boucle fermée sont :  $[0,5346 \ 0,7566 \ 0,9153]$ .

### Résultats en simulation

La figure 5.5 illustre les évolutions temporelles en simulation du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique pour le retour d'état donné par (5.20). Dans les simulations Figure 5.5 nous considérons un changement en échelon de  $12V$  en  $V_{in}$  (de  $18V$  à  $30V$ ) à l'instant  $0,01s$ , ce qui représente en fait, la perturbation la plus importante que l'on peut considérer.

On observe que pour le retour d'état (5.20), les contraintes sur le courant traversant l'inductance (5.12) et sur le rapport cyclique (5.7) sont satisfaites.

On peut voir également que le système atteint l'ISS.

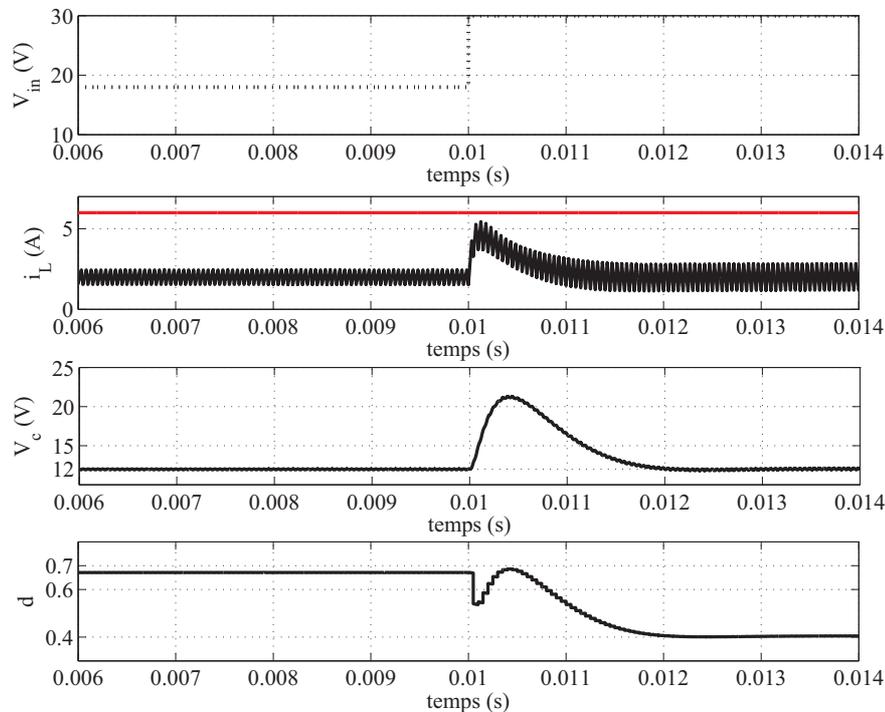


FIGURE 5.5: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique.

Comme on peut le voir le volume de l'ellipsoïde invariant est important, mais les réponses du système  $V_c$  et le courant sont lents. Afin de surmonter cet inconvénient, des techniques de placement des pôles seront employées dans la section suivante.

### Résultats expérimentaux

Les expérimentations ont été effectuées dans un convertisseur Buck, piloté avec une carte dSpace. Les régulateurs PI et retour d'état testés sont réalisés en Simulink, compilés pour la carte dSpace et exécutés en temps réel avec une période d'échantillonnage de  $T = 50 \cdot 10^{-6}s$ .

Les Figures 5.6, 5.7 et 5.8 illustrent les évolutions temporelles du courant, de la tension de sortie et du rapport cyclique, pour le retour d'état donné par (5.20), obtenues en pratique sur un convertisseur Buck DC-DC. A titre de comparaison les courbes pour un contrôleur PI :

$$C(s) = K_{pi} \left( 1 + \frac{1}{T_{pi}s} \right) \quad (5.21)$$

avec  $K_{pi} = 0,015$  et  $T_{pi} = 1/2377s$  obtenues lors des essais expérimentaux, sont tracées. Ce PI a été synthétisé afin d'obtenir un temps de réponse et une dynamique satisfaisantes pour le convertisseur DC-DC Buck utilisé dans le laboratoire.

La source de tension disponible ne permet pas une modification instantanée de la tension, et donc on est dans l'impossibilité de considérer une variation instantanée de la tension  $V_{in}$ . Les résultats expérimentaux montrent seulement le comportement du convertisseur avec retour d'état et avec le PI en suivi de référence. Nous avons considéré un signal de référence en échelon d'amplitude 1 ( $V_{ref}$  passe de  $12V$  à  $13V$ ) à l'instant 0,001.

Les résultats expérimentaux sont comparés avec ceux obtenus par simulation du convertisseur en commutation.

La figure 5.6 montre les évolutions temporelles du courant : la partie gauche illustre les évolutions temporelles du courant pour le système avec PI (en simulation et en pratique) et la partie droite montre les évolutions temporelles du courant pour le système avec retour d'état donné par (5.20) (en simulation et en pratique).

En simulation et aussi en pratique, on voit que le système avec PI a une ondulation plus importante que celle obtenue pour le système avec retour d'état (5.20). Pour les deux cas, PI et retour d'état, le courant a une amplitude plus grande en simulation qu'en pratique.

La partie gauche Figure 5.7 montre les évolutions temporelles de la tension de sortie en suivi de référence pour le contrôleur PI (en simulation et en pratique) et la partie droite Figure 5.7 montre les évolutions temporelles de la tension de sortie en suivi de référence pour le retour d'état donné par (5.20) (en simulation et en pratique).

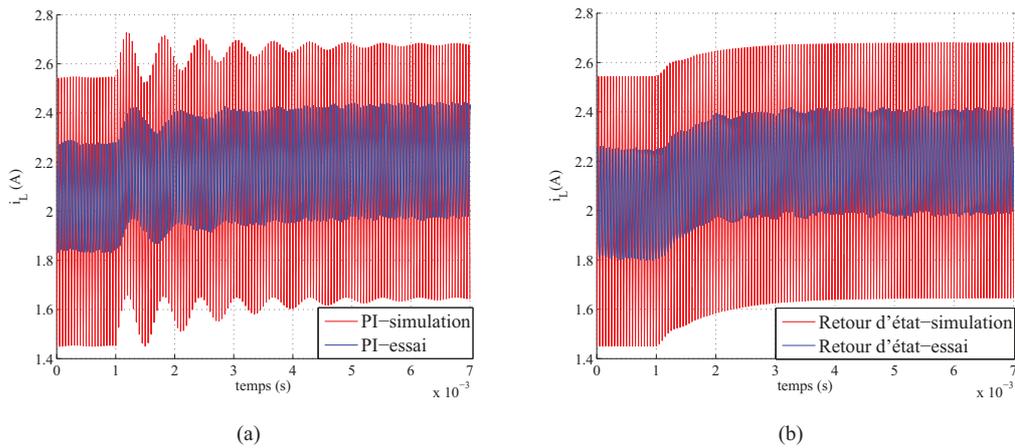


FIGURE 5.6: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance.

Le comportement du PI en simulation présente des oscillations que, à cause des pertes, sont moins importantes lors des essais pratiques. Elles restent tout de même (en pratique et en simulation) plus importantes que celles obtenues pour le système avec retour d'état. En effet dans le modèle on n'a pas considéré la résistance de l'inductance  $L$  ni celle de la capacité  $C$ . Ces résistances font que le comportement système réel soit plus amorti.

Pour le système avec retour d'état (5.20), la tension obtenue lors des essais pratiques présente une dynamique très proche de celle obtenue en simulation.

Pour conclure on observe que le système avec retour d'état (5.20) a une dynamique plus rapide et est moins oscillant que le système avec PI en simulation et également en pratique.

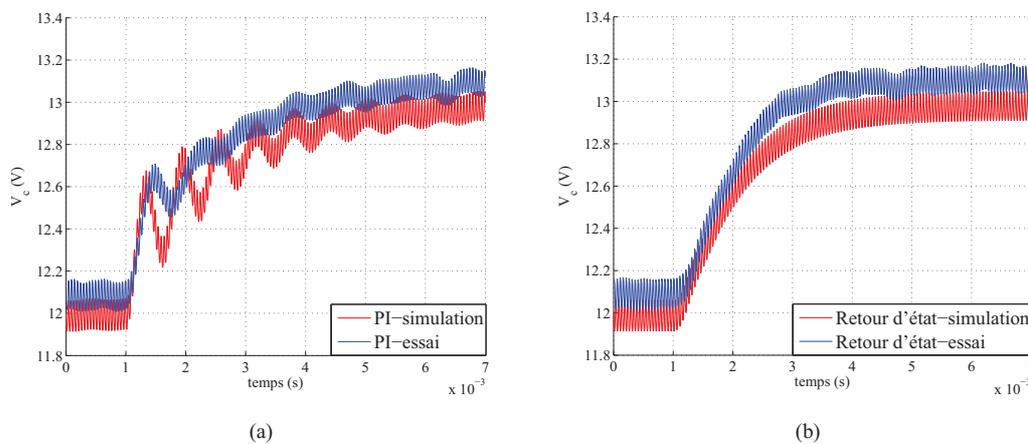


FIGURE 5.7: Evolutions temporelles de la tension de sortie.

La Figure 5.8 illustre le comportement du rapport cyclique pour le système avec PI (en pratique et en simulation) et pour le système avec retour d'état (5.20). On observe un décalage entre les résultats en pratique et les résultats en simulation causé par des pertes qui ont lieu dans le système réel. On observe également que le rapport cyclique obtenu en pratique présente plus de bruit.

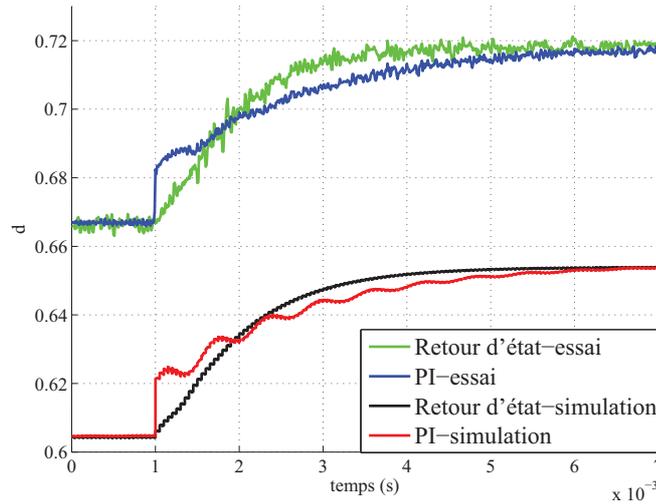


FIGURE 5.8: Evolutions temporelles du rapport cyclique.

On a observé que les résultats en simulation et les résultats en pratique sont relativement proches et donc le modèle considéré en simulation se rapproche considérablement du modèle réel.

### 5.1.1.2 Retour d'état avec placement de pôles

Afin d'améliorer les performances et assurer une réponse satisfaisante, on impose le placement des pôles de la boucle fermée dans un cercle centré à l'origine et de rayon  $r$  ( $r < 1$ ). Cela signifie que maintenant nous recherchons l'ellipsoïde invariant maximal satisfaisant les contraintes et le retour d'état correspondant, tels que les pôles de la boucle fermée soient placés à l'intérieur du cercle centré à l'origine et de rayon  $r < 1$ .

On a vu précédemment (voir Section 4.1.2.2) qu'une matrice  $A - BF$  a ses pôles placés dans la région LMI :

$$f_{\mathcal{D}}(s) = L_p + M_p s + M_p^* s^*, \quad (5.22)$$

si et seulement si il existe  $P = P^T \succ 0$  tel que :

$$M_{\mathcal{D}}(P, A - BF) = L_p \otimes P + M_p \otimes (P(A - BF)) + M_p^* \otimes (P(A - BF))^* \prec 0. \quad (5.23)$$

Pour le cercle centré à l'origine et de rayon  $r$ , on a :

$$f_{\mathcal{D}}(s) = \begin{bmatrix} -r & s \\ s^* & -r \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

d'où découlent les matrices  $L_p$  et  $M_p$ . Avec ces matrices, la condition (5.22) devient :

$$\begin{bmatrix} rP & (A-BF)^T P \\ P(A-BF) & rP \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.25)$$

En pré- et post-multipliant la LMI (5.25) par  $\text{diag}(G, G)$  ( $G = G^T = P^{-1} \succ 0$ ) et avec la notation  $Y = FG$  on arrive à :

$$\begin{bmatrix} rG & AG - BY \\ GA^T - Y^T B^T & rG \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.26)$$

On recherche alors le retour d'état qui fournit l'ellipsoïde invariant maximal satisfaisant les contraintes (sur le rapport cyclique et sur le courant traversant l'inductance) et garantissant le placement de pôles de la boucle fermée dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r = 0,7$  ou  $r = 0,8$ . Ces retours d'état et l'ellipsoïde correspondant sont obtenus en minimisant le critère (4.5) soumis à (4.6), (4.7), (4.8) (voir théorème 4.1), (5.19) et (5.26).

Pour un rayon  $r = 0,7$  l'ellipsoïde maximal a un volume  $V = 489,3158V^2A$  et a été obtenu pour un  $\alpha = \beta = 0,51$ . Pour un rayon  $r = 0,8$  l'ellipsoïde maximal a un volume  $V = 2,0585 \cdot 10^3 V^2A$  et a été obtenu pour un  $\alpha = \beta = 0,34$ .

Les projections sur  $\tilde{V}$  et  $\tilde{I}$  des ellipsoïdes invariants maximaux pour les trois cas, avec/sans placement de pôles ( $r = 0,7$  et  $r = 0,8$ ), sont représentées Figure 5.9.

Les retours d'état obtenus sont :

– pour  $r = 0,7$

$$F = \begin{bmatrix} 0,1583 & 0,0408 & 0,0188 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

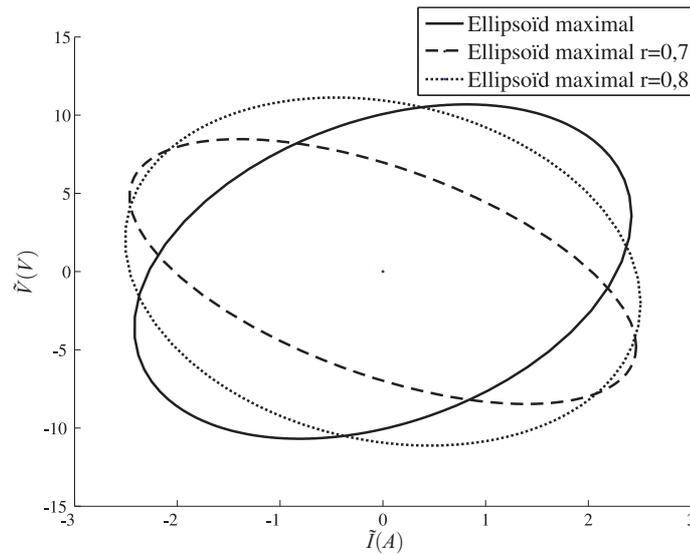
ayant les pôles de la boucle fermée  $[0,5189 + 0,2059i \ 0,5189 - 0,2059i \ 0,6426]$ ,

– pour  $r = 0,8$

$$F = \begin{bmatrix} 0,0999 & 0,0005 & 0,0076 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

ayant les pôles de la boucle fermée  $[0,6638 + 0,2395i \ 0,6638 - 0,2395i \ 0,7677]$ .

On observe que la nouvelle contrainte sur le placement des pôles a comme résultat une diminution en volume pour les ellipsoïdes maximaux invariants satisfaisant les contraintes (plus le rayon est petit, plus le volume diminue). On va montrer dans le prochain paragraphe (sur les évolutions temporelles) que cette perte en volume se traduit par un gain en termes de dynamique en boucle fermée.

FIGURE 5.9: Projections sur  $\tilde{V}$  et  $\tilde{I}$  des ellipsoïdes invariants maximaux.

### Résultats en simulation

Les Figures 5.10 et 5.11 illustrent les évolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique pour les retours d'état donnés par (5.27) et (5.28). Pour ces simulations nous considérons un changement en échelon de  $12V$  en  $V_{in}$  (de  $18V$  à  $30V$ ) à l'instant  $0,01$ , ce qui représente en fait, la perturbation la plus importante admissible.

Avec les retours d'état donnés par (5.27) et (5.28) le courant traversant l'inductance et le rapport cyclique satisfont les contraintes (5.12) et (5.7) et le système atteint l'ISS avec une performance en boucle fermée améliorée.

On observe que plus le rayon est petit plus la performance en boucle fermée est rapide, le courant inducteur et la tension de sortie atteint la valeur d'équilibre plus rapidement et avec moins de transitoires. Parallèlement, plus le rayon est petit plus la robustesse est dégradée (la courbe du rapport cyclique présente des transitoires plus grands) et plus l'ellipsoïde invariant maximal diminue en volume.

#### 5.1.2 Loi de commande par retour d'état et observateur avec contraintes de performance

Considérons le système sous la forme (3.1) avec les matrices (5.6), pour annuler les erreurs statiques on ajoute ici une action intégrale en entrée :

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k). \quad (5.29)$$

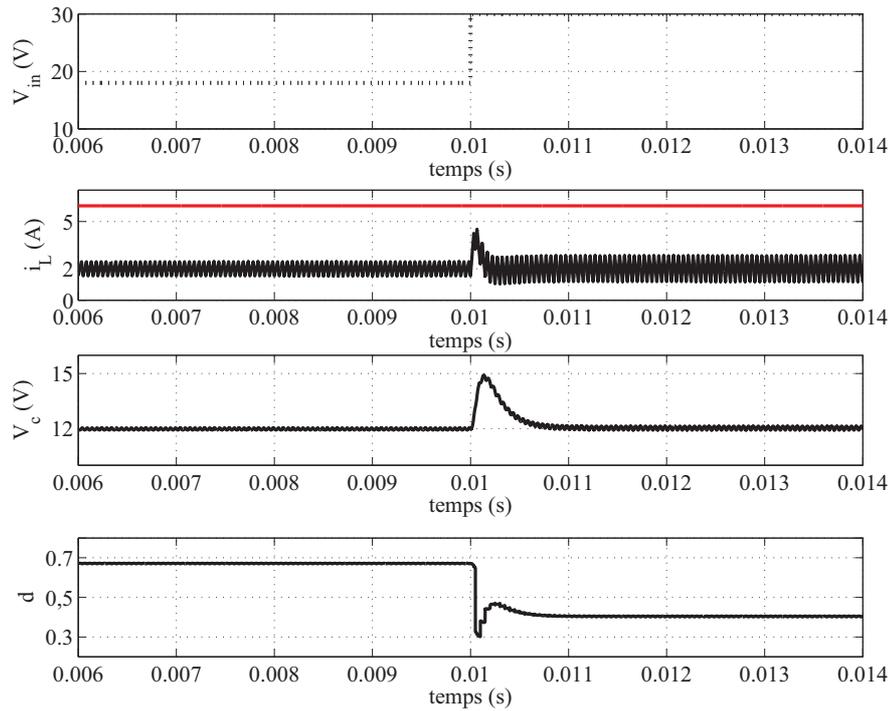


FIGURE 5.10: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique ( $r = 0,7$ ).

L'action intégrale n'a pas été ajoutée en sortie pour ne pas faire appel à un observateur de dimension réduite et pour rester cohérent avec les autres exemples du mémoire.

Ce système augmenté peut s'écrire également sous la forme (3.1) avec :

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_d(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_d & B \\ 0 & I \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_d \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_d & 0 \end{bmatrix}, D = 0, B_w = \begin{bmatrix} B_{dw} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

et le système sera maintenant commandé par  $\Delta u$ .

Le vecteur de bruit regroupant les perturbations d'état et de mesure  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est supposé borné.

Nous considérons la même variation de  $V_{in}$  de  $\pm V_m = \pm 6V$  et donc  $B_w = 6 \begin{bmatrix} B_{dw} \\ 0 \end{bmatrix}$ . Pour la perturbation de mesure nous avons  $D_v = 0, 1$ .

Si le vecteur d'état ou une partie des variables d'état ne sont pas accessibles à la mesure ou si on veut réduire le nombre des capteurs (réduire les coûts et améliorer la fiabilité du système) un observateur d'état est utilisé pour reconstruire les variables d'état non

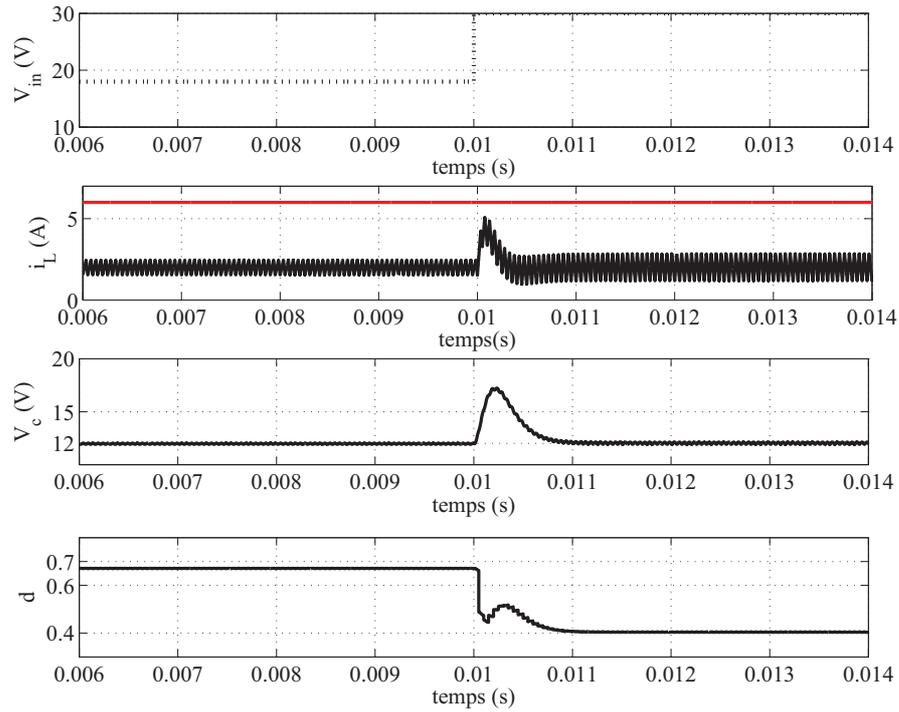


FIGURE 5.11 : Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique ( $r = 0,8$ ).

mesurables. Dans ce cas les variables estimées seront le courant et la tension de sortie  $V_c$  conduisant à un nombre plus réduit de capteurs. Seule la tension  $V_c$  est mesurée.

La représentation de l'état augmenté (système avec observateur) est donnée par (3.33) et la loi de commande a la forme (3.35).

L'expression du courant traversant l'inductance (5.11) peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{I}_{max} = M_n \hat{x}(k) + N_n u(k) = (M_n - N_n F) \hat{x}(k) = H_o x_o(k), \quad (5.31)$$

où :

$$H_o = \begin{bmatrix} (M_n - N_n F) & -(M_n - N_n F) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

avec les matrices  $M_n$  et  $N_n$  données par (5.17).

L'objectif est maintenant de synthétiser une loi de commande par retour d'état et observateur performante qui ensuite sera robustifiée via un paramètre de Youla.

Pour le système Buck DC-DC avec observateur affecté par des perturbations bornées, on se propose maintenant de synthétiser la loi de commande par retour d'état et observateur

fournissant la fonction de Lyapunov avec la vitesse de décroissance la plus rapide vis-à-vis de la commande et de la sortie :

$$\Delta V_o = V_o(k) - V_o(k+1) \geq \frac{1}{\eta_1} u(k)^T Q_1 u(k) + \frac{1}{\eta_2} y(k)^T Q_2 y(k). \quad (5.33)$$

Pour cela le problème à résoudre est formulé de la façon suivante :

**Problème 5.1.** Soit le système à temps discret avec observateur (3.33) affecté par une perturbation bornée (4.16). S'il existe  $G = G^T \succ 0$ ,  $P = P^T \succ 0$ ,  $Y, J, \alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$  obtenus en optimisant :

$$\min_{Y, J, G=G^T \succ 0, P=P^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0} \eta_1 + \eta_2 \quad (5.34)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} G & 0 & \alpha G & GA^T - Y^T B^T & Y^T Q_1^{1/2} \\ 0 & \beta I & 0 & [B_w \ 0]^T & 0 \\ \alpha G & 0 & \alpha G & 0 & 0 \\ AG - BY & [B_w \ 0] & 0 & G & 0 \\ Q_1^{1/2} Y & 0 & 0 & 0 & \eta_1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.35)$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 & \alpha P & A^T P - C^T J^T & 0 \\ 0 & \gamma I & 0 & [PB_w - JD_v]^T & B_p^T Q_2^{1/2} \\ \alpha P & 0 & \alpha P & 0 & 0 \\ PA - JC & [PB_w - JD_v] & 0 & P & 0 \\ 0 & Q_2^{1/2} B_p & 0 & 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.36)$$

$$\alpha - \gamma \geq 0, \quad \alpha - \beta \geq 0, \quad (5.37)$$

avec  $B_p = \begin{bmatrix} 0 & D_v \end{bmatrix}$ , alors le système est ISS stable par rapport à la perturbation bornée (4.16) garantissant une certaine performance en boucle fermée. Le retour d'état qui stabilise le système au sens entrée-état vis-à-vis d'une perturbation bornée est donné par :

$$F = YG^{-1}, \quad (5.38)$$

et le gain de l'observateur est donné par :

$$L = P^{-1}J. \quad (5.39)$$

La manière d'obtenir ces inégalités matricielles est similaire au cas LPV présenté dans la Section 4.2.2, c'est pour cela que la preuve sera donnée en Annexe B.

La LMI garantissant la satisfaction des contraintes sur le courant traversant l'inductance est obtenue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}_{max}\|_2^2 &= \|H_o x_o(k)\|_2^2 \leq \|H_o P_o^{-1/2}\|_2^2 \|P_o^{1/2} x_o(k)\|_2^2 \\ &\leq \lambda_{max}\{(H_o P_o^{-1} H_o^T)(x_o^T(k) P_o x_o(k))\} \leq \\ &\leq \lambda_{max}[H_o P_o^{-1} H_o^T]. \end{aligned}$$

Avec le théorème de Schur, il vient que  $\|\tilde{I}_{max}\|_2 \leq I_{max0}$  (5.12) si :

$$\begin{bmatrix} P_o & H_o^T \\ H_o & I_{max0}^2 I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.40)$$

En pré- et post-multipliant la LMI (5.40) par  $\text{diag}(G_o, I)$  avec  $G_o = G_o^T = P_o^{-1} \succ 0$  on obtient la LMI :

$$\begin{bmatrix} G & GH_o^T \\ H_o G & I_{max0}^2 I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.41)$$

En résolvant le problème 5.1 pour un  $\alpha = \beta = \gamma = 0,64$ ,  $Q_1 = 0,011$  et  $Q_2 = 1$  on obtient le retour d'état :

$$F = \begin{bmatrix} 0,1563 & 0,0015 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

et le gain de l'observateur :

$$L = \begin{bmatrix} 0,8774 & 1,6532 & 0,0612 \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Avec cette loi de commande par retour d'état et observateur on recherche maintenant l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes (5.7) et (5.12) et ayant la projection maximale sur le sous-espace d'état initial. Cet ellipsoïde est obtenu via le théorème 3.5 avec la contrainte supplémentaire (5.41) pour un  $\alpha = \beta = 0,22$ . La projection maximale sur le sous-espace d'état  $x$  a un volume  $V = 105,5744V^2A$ .

Dans la Figure 5.15 on a représenté (en pointillé) la projection de l'ellipsoïde invariant sur les deux dimensions les plus parlantes de l'état  $\tilde{V}$  et  $\tilde{I}$ .

### Résultats en simulation

En reprenant la démarche de la section précédente, la figure 5.12 illustre les évolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique en employant la loi de commande par retour d'état (5.42) et observateur (5.43) synthétisée. Pour ces simulations nous considérons un changement en échelon de  $12V$  de  $V_{in}$  (de  $18V$  à  $30V$ ) à l'instant  $0,004s$ .

On observe que pour le système avec la loi de commande par retour d'état (5.42) et observateur (5.43) les contraintes sur le courant (5.12) et sur le rapport cyclique sont satisfaites.

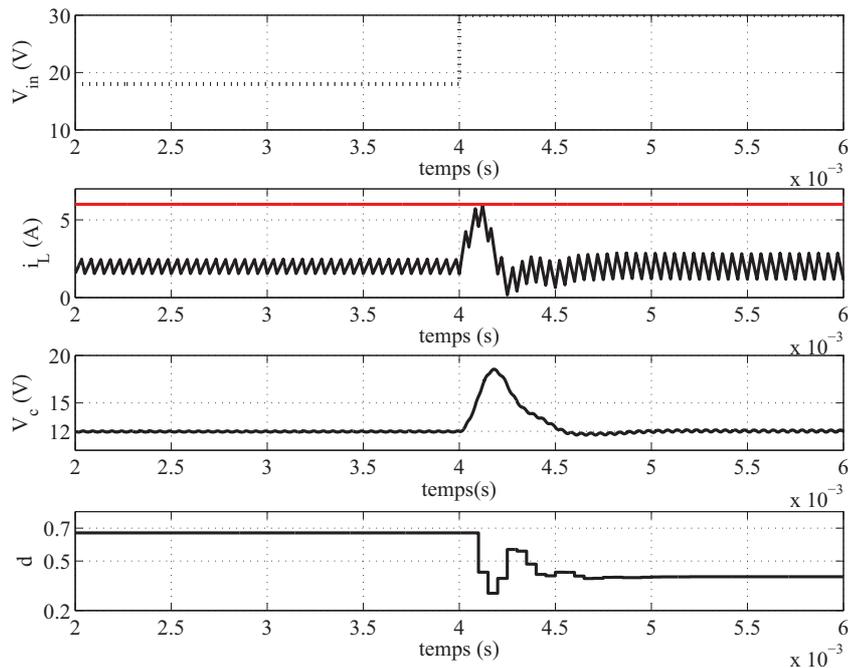


FIGURE 5.12: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (pour un changement en échelon de  $V_{in}$ .)

Pour illustrer l'effet de la perturbation en sortie on montre Figure 5.13 les évolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique en employant la loi de commande par retour d'état et observateur pour une perturbation sur la sortie de  $3V$  à l'instant  $0,005s$ . N'ayant pas la possibilité de tester expérimentalement un changement instantané de la tension d'entrée, on utilise comme signal test une perturbation en échelon dans la mesure. Cette perturbation va permettre de modifier l'état du système et de tester l'invariance et la vérification des contraintes.

La Figure 5.13 montre que pour une perturbation sur la sortie de  $3V$ , le système avec observateur ne satisfait pas les contraintes sur le rapport cyclique.

*Remarque 5.2.* Les simulations montrent que du point de vue performance le système est plus sensible au changement en échelon et du point de vue robustesse le système est plus sensible à la perturbation sur la sortie.

On verra (section suivante) qu'en considérant un paramètre de Youla on arrive à adoucir la commande mais on perd en performance. Un compromis entre la performance et la robustesse est obtenu en ajoutant des contraintes de placement de pôles lors de la synthèse d'un paramètre de Youla (la méthode basée sur la décroissance de la fonction de Lyapunov peut être considérée mais nous on se limité ici seulement à la méthode basée sur le placement de pôles).

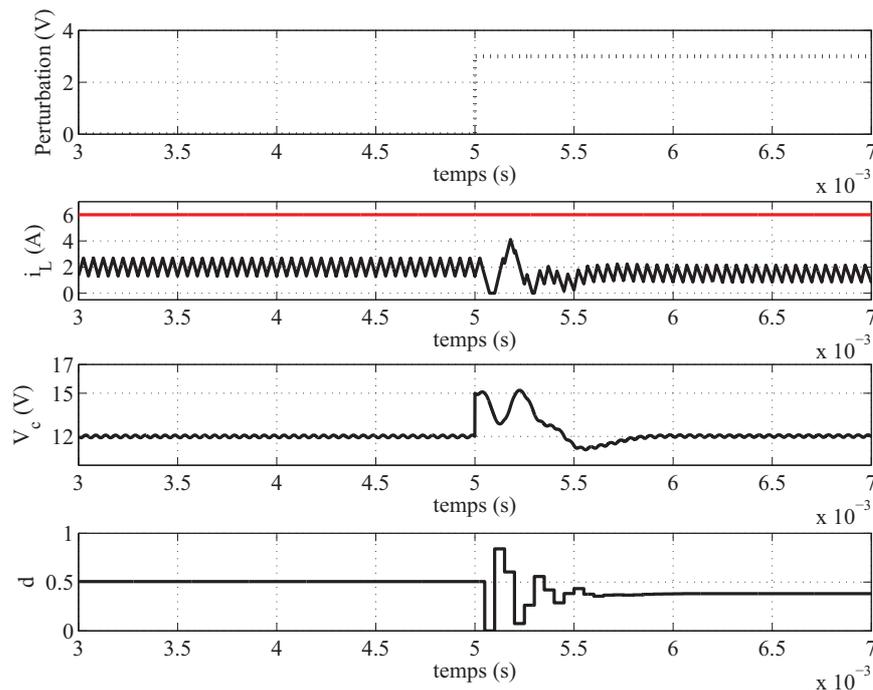


FIGURE 5.13: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (avec perturbation sur la sortie).

### Résultats expérimentaux

La Figure 5.14 illustre les évolutions temporelles du courant, de la tension de sortie et du rapport cyclique, pour la loi de commande par retour d'état et observateur, obtenues en pratique sur un convertisseur Buck DC-DC. A titre de comparaison les courbes pour le contrôleur PI considéré lors de la synthèse d'un retour d'état sont tracées.

Etant dans l'impossibilité de considérer une variation instantané de la tension  $V_{in}$ , les résultats expérimentaux montrent seulement le comportement du convertisseur et du PI pour une perturbation sur la sortie de 3V à l'instant 0,0005s.

On remarque, Figure 5.14, que le rapport cyclique pour le système avec observateur présente des transitoires plus importants que ceux obtenus pour le système avec PI. De la même façon qu'en simulation, le rapport cyclique pour le système avec observateur dépasse légèrement les contraintes ( $d \in [0, 1 - 0,9]$ ) et présente un comportement oscillant vis-à-vis de la perturbation.

Si on continue à comparer les deux systèmes (avec PI et avec la loi de commande par retour d'état et observateur) on observe que le courant présente des transitoires plus faibles pour le système avec PI et la tension de sortie donne des meilleurs résultats en termes de performance pour le système avec observateur (le PI a une dynamique

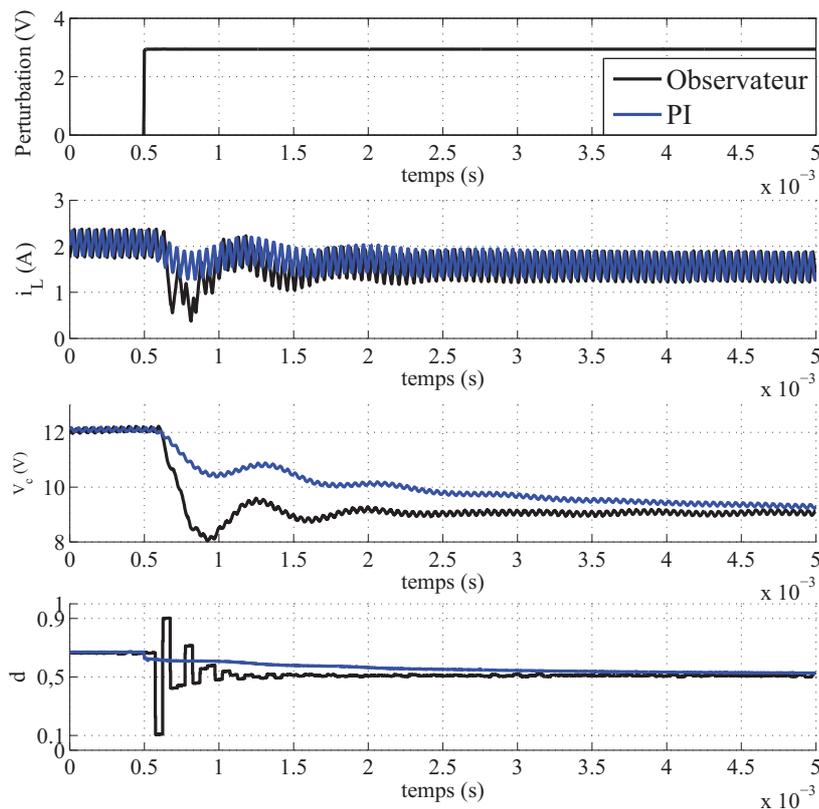


FIGURE 5.14: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique.

lente). La tension de sortie après la perturbation est de  $9V$ , car la perturbation dans l'expérimentation est effectuée après la mesure.

Dans la section suivante, les résultats seront améliorés en synthétisant un paramètre de Youla qui maximise la projection sur l'espace d'état initial de l'ellipsoïde invariant satisfaisant des contraintes sur le courant et le rapport cyclique.

### 5.1.3 Loi de commande avec paramètre de Youla

A partir de la loi de commande par retour d'état (5.42) et observateur (5.43) garantissant une bonne performance en boucle fermée, le but est maintenant d'insérer un paramètre de Youla dans la boucle fermée afin d'améliorer la robustesse.

Nous considérons à ce stade le système Buck DC-DC avec observateur (3.33) décrit dans la section précédente (une action intégrale est ajoutée en entrée pour annuler les erreurs statiques). Un paramètre de Youla (3.48) est inséré dans la boucle fermée afin d'atteindre des objectifs de robustesse.

La représentation d'état augmentée pour le système avec observateur et paramètre de Youla a la forme (4.69) et la loi de commande est donnée par (4.70).

Le vecteur de bruit regroupant les perturbations d'état et de mesure  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est supposé borné. On considère la même variation pour  $V_{in}$  que celle considérée pour le système avec observateur et donc  $B_w = 6 \begin{bmatrix} B_{dw} \\ 0 \end{bmatrix}$ . Pour la perturbation de mesure nous avons  $D_v = 0, 1$ .

L'expression du courant traversant l'inductance (5.11) peut s'écrire maintenant sous la forme :

$$\tilde{I}_{max} = M_n \hat{x}(k) + N_n \tilde{u}(k) = -H_x \cdot x_y(k) - H_n \cdot n(k), \quad (5.44)$$

avec :

$$H_x = \begin{bmatrix} -(M_n - N_n F) & M_n - N_n F + N_n D_Q C & C_Q \end{bmatrix}, \quad H_n = D \begin{bmatrix} 0 & D_Q D_v \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

où les matrices  $M_n$  et  $N_n$  sont données par (5.17).

La LMI qui nous assure la satisfaction des contraintes sur la commande est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}_{max}\|_2^2 &= \|H_x x_y(k) + H_n n(k)\|_2^2 \leq \|H_x x_y(k)\|_2^2 + \|H_n n(k)\|_2^2 \leq \\ &\leq \|H_x P_y^{-1/2}\|_2^2 \|P_y^{1/2} x_y(k)\|_2^2 + \|H_n\|_2^2 \|n(k)\|_2^2 = \\ &= \lambda_{max}(H_x P_y^{-1} H_x^T) (x_y^T(k) P_y x_y(k)) + \lambda_{max}(H_n H_n^T) (n(k)^T n(k)) \leq \\ &\leq \lambda_{max}(H_x P_y^{-1} H_x^T) + \lambda_{max}(H_n H_n^T). \end{aligned} \quad (5.46)$$

En appliquant le théorème de Schur on obtient que  $\|\tilde{I}_{max}\|_2 \leq I_{max0}$  (5.12) si la LMI suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} P_y & H_x^T \\ H_x & I_{max0}^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ H_n \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 0 \\ H_n \end{bmatrix}^T \succeq 0. \quad (5.47)$$

Enfin, si l'on utilise de nouveau le théorème de Schur, et après par congruence avec  $\text{diag}(\Pi^T G_y, I, I)$  on obtient la LMI

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \star & \star \\ \begin{bmatrix} H_o X + N_n M & H_o + N_n D_Q C_e \\ 0 \end{bmatrix} & I_{max0}^2 I & \star \\ & H_n^T & I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (5.48)$$

avec  $G_y = G_Y^T = P_y^{-1} \succ$  et  $\Pi$  donnés par (4.71) et (4.78) respectivement et avec les notations données par (4.79).

### 5.1.3.1 Maximisation projection ellipsoïdale

En appliquant le théorème 4.10 avec la LMI supplémentaire (5.48), le  $\alpha$  et le  $\beta$  optimaux pour lesquels nous avons la plus grande projection ellipsoïdale sur le sous-espace  $x$  sont  $\alpha = \beta = 0,059$ . Pour cet  $\alpha$  et  $\beta$ , la projection maximale a un volume  $V_Y = 7,7746 \cdot 10^3 V^2 A$ . Les valeurs obtenues pour le paramètre de Youla sont :

$$\begin{aligned}
 A_Q &= \begin{bmatrix} 0,6623 & -0,0639 & 1,0122 & -0,2725 & -0,4926 & 3,0167 \\ 0,8083 & 0,8165 & 0,1298 & -0,2317 & -1,5652 & 1,9055 \\ -0,0358 & 0,0175 & 0,4160 & 0,0004 & 0,0189 & 0,3670 \\ -0,0379 & 0,0442 & -1,1663 & 0,6142 & -0,8700 & 6,3339 \\ -0,0317 & 0,0374 & -0,9848 & 0,7036 & -0,9247 & 3,6024 \\ -0,0004 & 0,0005 & -0,0133 & -0,0031 & -0,0107 & 1,0124 \end{bmatrix}, \\
 B_Q &= \begin{bmatrix} -0,5049 & -1,6245 & 0,0465 & 0,0508 & -0,1367 & 0,0487 \end{bmatrix}^T, \\
 C_Q &= \begin{bmatrix} 0,1205 & 0,0191 & 0,4148 & -0,1562 & 0,0325 & -0,6318 \end{bmatrix}, D_Q = 0,0614.
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

La taille du paramètre de Youla peut être réduite à un ordre plus petit afin de réduire la taille du correcteur en utilisant l'opérateur "balred" en Matlab. Des précautions doivent être prises pour garantir que le nouveau paramètre garde ses propriétés vis-à-vis de la robustesse.

Figure 5.15 illustre les projections sur  $\tilde{V}$  et  $\tilde{I}$  des ellipsoïdes invariants ayant la plus grande projection sur le sous-espace d'état initial  $x$  pour le système avec observateur et pour le système avec observateur et paramètre de Youla. En introduisant la paramétrisation de Youla on gagne considérablement en volume.

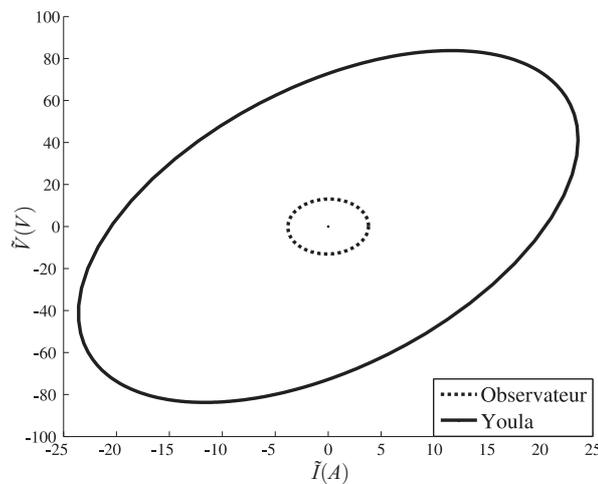


FIGURE 5.15: Projection sur  $\tilde{V}$  et  $\tilde{I}$  des ellipsoïdes invariants.

Dans la suite on montre l'effet que ce gain en volume (et donc un gain en robustesse) a sur les évolutions temporelles.

### Résultats en simulation

La Figure 5.16 illustre les évolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique en considérant le paramètre de Youla (5.49). Les simulations ont été faites pour un changement en échelon de  $12V$  de  $V_{in}$  (de  $18V$  à  $30V$ ) à l'instant  $0,004s$ .

Pour le système avec la paramétrisation de Youla (5.49) on observe que la dynamique en boucle fermée est lente mais la commande est plus douce.

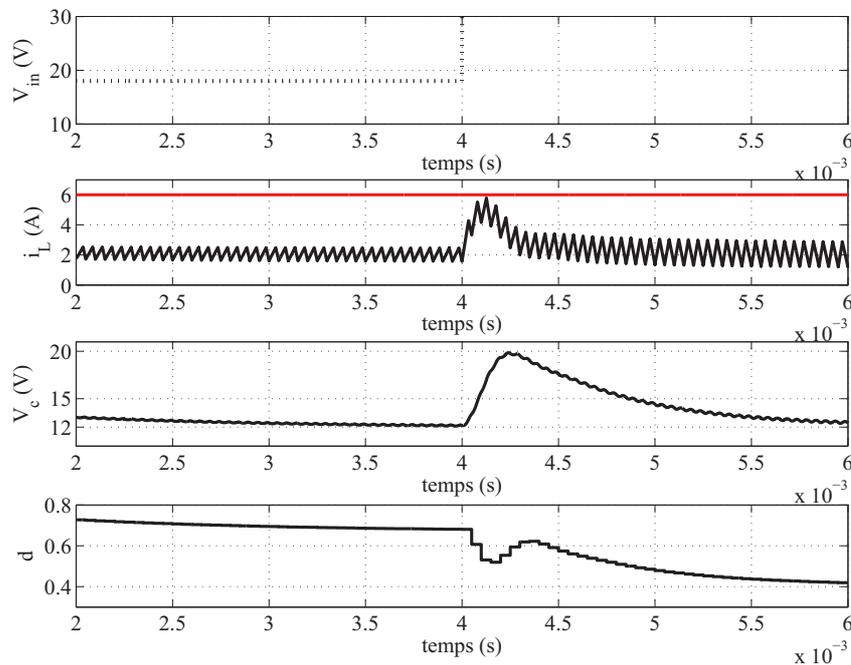


FIGURE 5.16: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (pour changement en échelon de  $V_{in}$ ).

Pour une perturbation sur la sortie de  $3V$  à l'instant  $0,005s$ , on observe Figure 5.17 que le courant et le rapport cyclique satisfont maintenant les contraintes, la performance reste dégradée mais la commande est plus douce.

Dans la section suivante on ajoute des contraintes sur le placement des pôles afin d'obtenir un compromis entre la robustesse et la performance.

### Résultats expérimentaux

La Figure 5.18 illustre les évolutions temporelles du courant, de la tension de sortie et du rapport cyclique, pour la loi de commande avec paramètre de Youla (5.49), obtenues

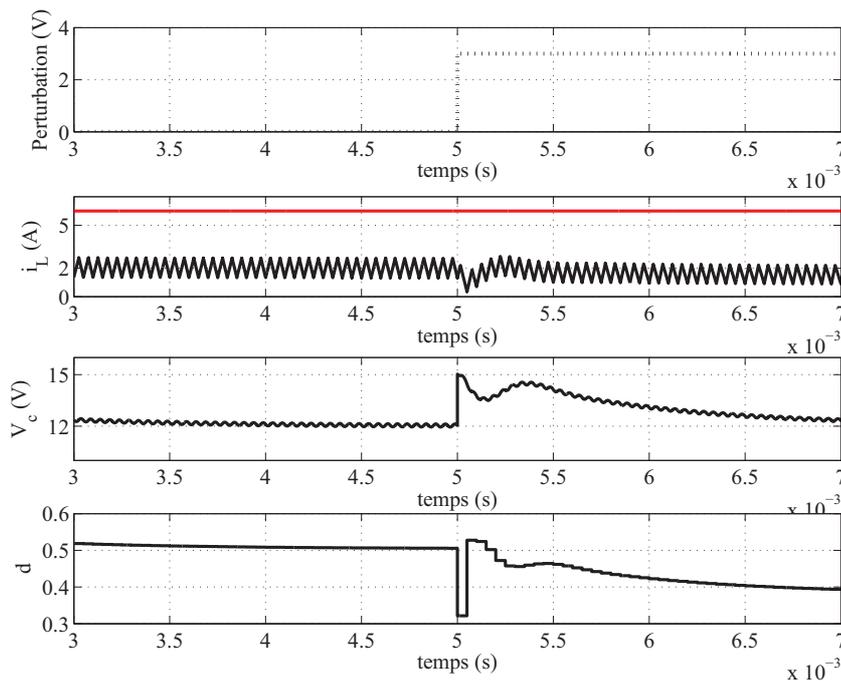


FIGURE 5.17: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (avec perturbation sur la sortie).

en pratique sur un convertisseur Buck DC-DC. A titre de comparaison les courbes pour le contrôleur PI (5.21) sont tracées.

Les évolutions temporelles ont été obtenues en considérant une perturbation sur la sortie de  $3V$  à l'instant  $0,0005s$ .

On observe tout d'abord que le rapport cyclique présente des transitoires visiblement réduits. Les contraintes sont satisfaites, cela veut dire que la perturbation sur la sortie de  $3V$  ne fait pas sortir l'état du système de l'ellipsoïde invariant dont la projection est plus grande dans ce cas. Par contre le système est plus lent.

### 5.1.3.2 Paramètre de Youla avec contraintes de performance

Comme on peut le constater le prix à payer pour une bonne robustesse est généralement une dégradation en performance, imposant la nécessité d'un compromis entre la robustesse et la performance. Ce compromis sera atteint en appliquant le théorème 4.16 avec la LMI supplémentaire (5.48) pour un  $r = 0,82$ . Le  $\alpha$  et le  $\beta$  optimaux pour lesquels nous obtenons la projection ellipsoïdale maximale sur le sous-espace  $x$  sont  $\alpha = \beta = 0,264$ . Pour cet  $\alpha$  et  $\beta$ , la projection maximale a un volume  $V_Y = 970,9605V^2A$ .

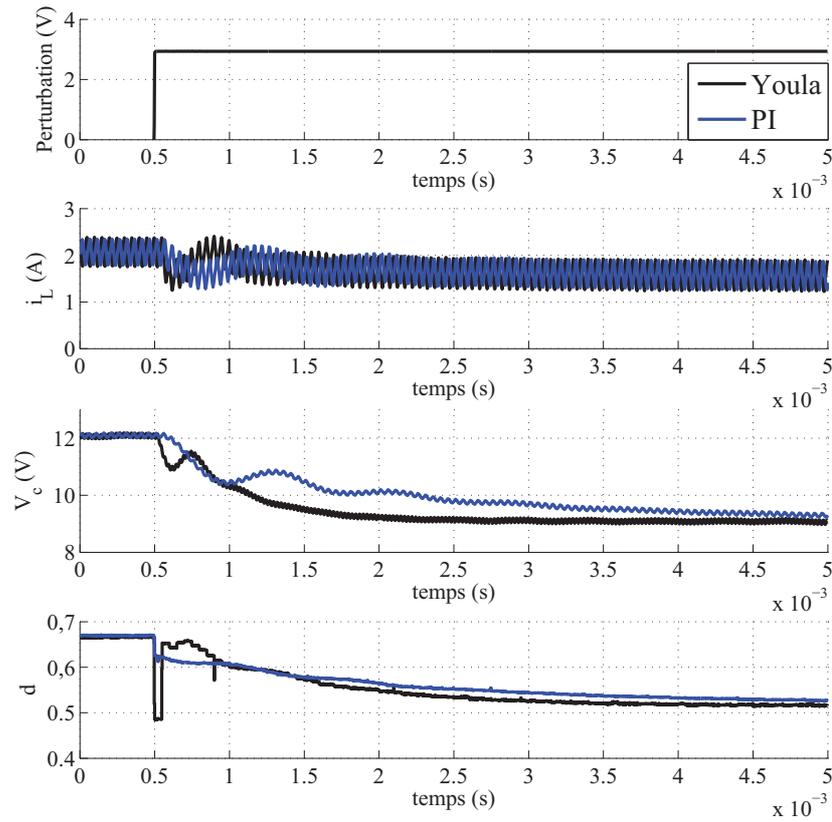


FIGURE 5.18: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique.

Le paramètre de Youla garantissant le placement des pôles dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $r = 0,82$  est :

$$\begin{aligned}
 A_Q &= \begin{bmatrix} 0,6487 & -0,0330 & 0,0930 & -0,6340 & -0,2748 & 3,5506 \\ 0,8022 & 0,8347 & -0,3871 & -0,4725 & -1,4256 & 2,2298 \\ -0,0357 & 0,0204 & 0,3084 & -0,0345 & 0,0200 & 0,4224 \\ -0,0643 & 0,0773 & -1,9639 & 0,2860 & -0,7940 & 7,0008 \\ -0,0445 & 0,0569 & -1,4451 & 0,4780 & -0,8573 & 3,9999 \\ -0,0028 & 0,0039 & -0,0988 & -0,0335 & -0,0341 & 1,0945 \end{bmatrix}, \\
 B_Q &= \begin{bmatrix} -0,5679 & -1,6723 & 0,0200 & -0,1070 & -0,2339 & 0,0052 \end{bmatrix}^T, \\
 C_Q &= \begin{bmatrix} 0,1229 & 0,0186 & 0,3917 & -0,1626 & 0,0596 & -0,6572 \end{bmatrix}, \quad D_Q = 0,00796.
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Figure 5.19 illustre les projections sur  $\tilde{V}$  et  $\tilde{I}$  des ellipsoïdes invariants ayant la plus grande projection sur le sous-espace d'état initial  $x$  pour le système avec observateur,

pour le système avec observateur et paramètre de Youla et pour le système avec observateur, le paramètre de Youla et compromis entre la robustesse et la performance.

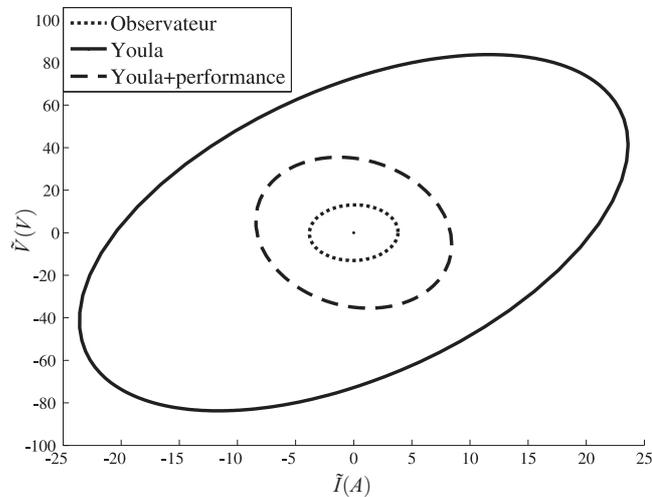


FIGURE 5.19: Projection sur  $\tilde{V}$  et  $\tilde{I}$  des ellipsoïdes invariants.

En introduisant des contraintes sur la performance on obtient un ellipsoïde ayant le volume plus petit que celui obtenu pour le système avec le paramètre de Youla sans contraintes sur la performance. Cet ellipsoïde reste néanmoins plus grand que celui obtenu pour le système avec observateur seul.

Dans les Figures 5.20 et 5.21 sont représentées les fonctions de sensibilité et les fonctions de sensibilité complémentaire pour les trois cas : système avec observateur seul, système avec le paramètre de Youla (5.49) et système avec le paramètre de Youla et contraintes sur la performance.

On observe Figure 5.20 que la meilleure fonction de sensibilité (et donc la meilleure robustesse) est obtenue pour le système avec le paramètre de Youla suivie par le système avec le paramètre de Youla et contraintes sur la performance. La fonction de sensibilité la plus dégradée est obtenue pour le système avec observateur seul.

Figure 5.21 montre qu'en termes de performance les meilleurs résultats sont obtenus pour le système avec observateur seul, suivi par le système avec le paramètre de Youla et contraintes sur la performance. La fonction de sensibilité complémentaire la plus dégradée est obtenue pour le système avec le paramètre de Youla sans contraintes sur la performance.

Dans la suite on verra l'effet que ce compromis entre la robustesse et la performance aura sur les évolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique.

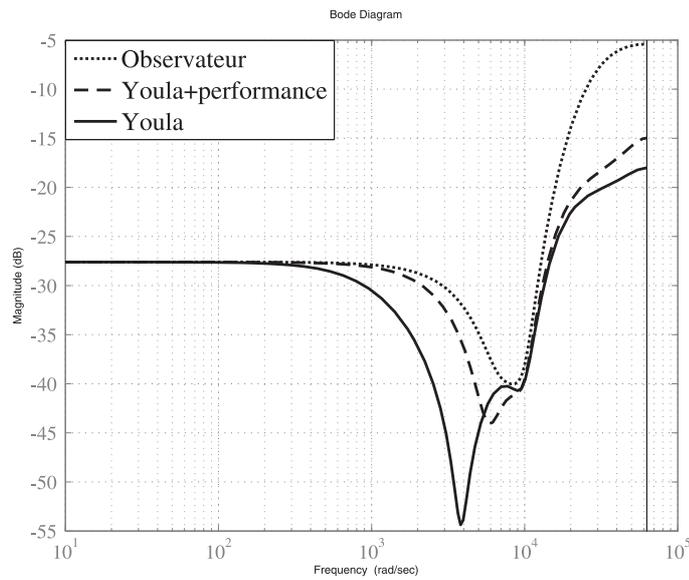


FIGURE 5.20: Fonction de sensibilité vis-à-vis d'une incertitude additive.

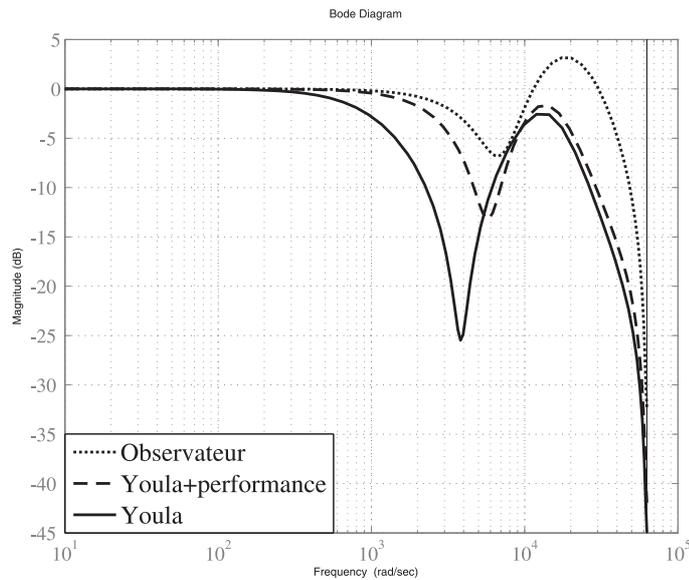


FIGURE 5.21: Fonction de sensibilité complémentaire vis-à-vis d'une incertitude additive.

### Résultats en simulation

En reprenant la démarche de la section précédente, la figure 5.22 illustre les évolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique pour le système avec le paramètre de Youla avec contraintes sur la performance (5.50) en considérant un changement en échelon de 12V en  $V_{in}$  (de 18V à 30V) à l'instant

0,005s.

On observe qu'en considérant ce nouveau paramètre de Youla les contraintes sur le courant et sur le rapport cyclique sont satisfaites. La performance en boucle fermée est légèrement dégradée par rapport à celle obtenue pour le système avec observateur seul. Elle reste tout de même meilleure que celle obtenue pour le système avec Youla sans placement des pôles. En termes de robustesse, la courbe du rapport cyclique est légèrement dégradée vis-à-vis de celle obtenue pour le paramètre de Youla donné par (5.49) mais elle reste tout de même meilleure que celle obtenue pour le système avec observateur seul.

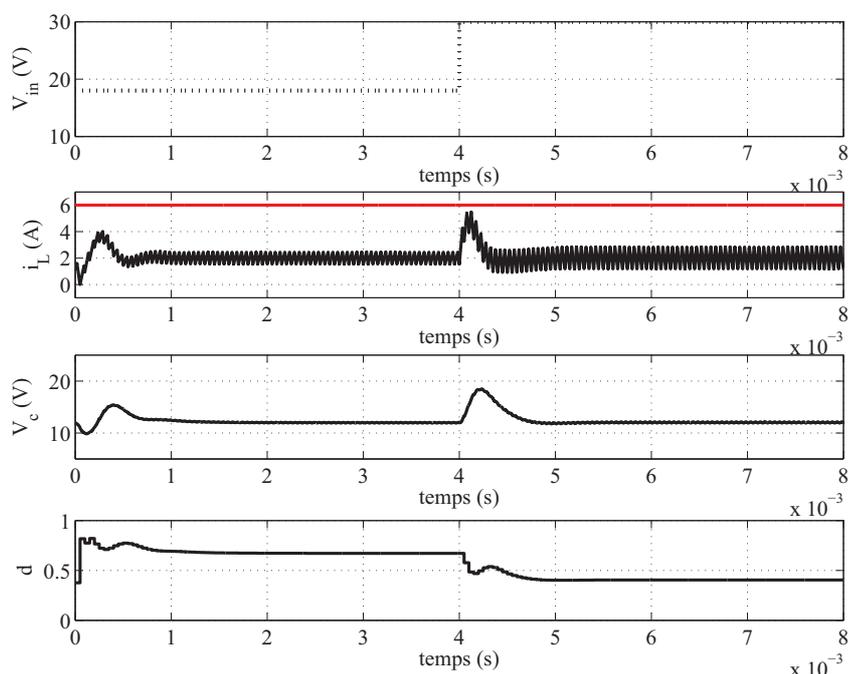


FIGURE 5.22: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique.

La figure 5.23 montre les évolutions temporelles du courant, de la tension de sortie et du rapport cyclique pour une perturbation sur la sortie de 3V à l'instant 0,004s. On observe maintenant que le système est encore plus rapide et que les contraintes sont satisfaites. La commande présente plus de transitoires que celle obtenue pour le système avec Youla (sans contraintes sur la performance) mais, par rapport à celle obtenue pour le système avec observateur seul, les transitoires sont visiblement plus faibles.

### Résultats expérimentaux

La Figure 5.24 illustre les évolutions temporelles du courant, de la tension de sortie et du rapport cyclique obtenues en pratique sur un convertisseur Buck DC-DC contrôlé par

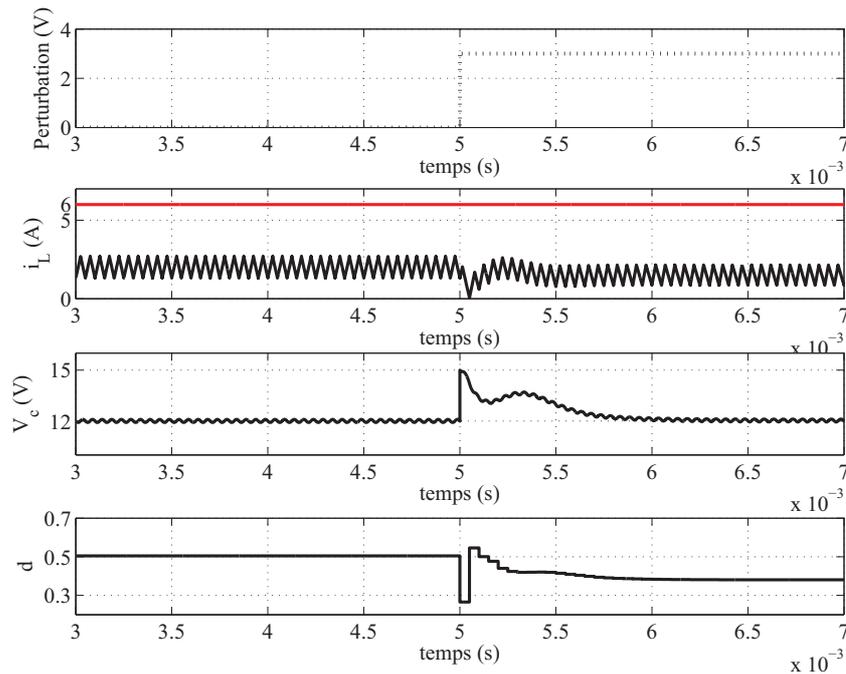


FIGURE 5.23: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (avec perturbation sur la sortie).

la loi de commande avec le nouveau paramètre de Youla (5.50) et par le contrôleur PI (5.21). On considère également une perturbation sur la sortie de 3V à l'instant 0,0005s.

Le nouveau paramètre de Youla offre des bons résultats en termes de performance tout en respectant les contraintes sur le rapport cyclique.

Pour conclure on peut affirmer que, en introduisant un paramètre de Youla soumis à des contraintes sur le placement de pôles, on obtient des résultats meilleurs en termes de robustesse que ceux obtenus pour le système avec observateur seul et en même temps on garde une bonne performance en boucle fermée.

Dans une première étape on a abouti la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur performante mais qui touchait légèrement les contraintes. On a donc synthétisé un paramètre de Youla fournissant la projection maximale de l'ellipsoïde invariant sur l'espace d'état initial. Ce paramètre augmente le volume de la projection ellipsoïdale et un gain en robustesse est observé lors des simulations temporelles. Comme maintenant on perd en performance, on s'est proposé de synthétiser un nouveau paramètre de Youla qui maximise la projection ellipsoïdale mais en ajoutant des contraintes de performance. Même si ce nouveau paramètre est moins robuste (projection ellipsoïdale plus petite, mais plus grande comme même que dans le cas avec observateur seul) ce nouveau paramètre offre des bons résultats tant en robustesse que en performance.

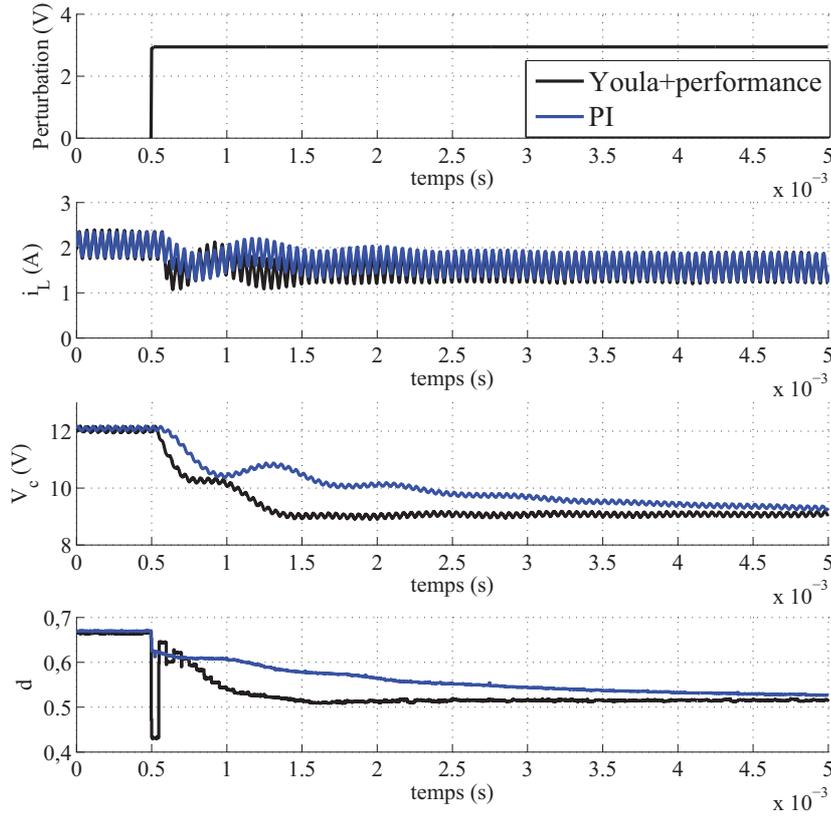


FIGURE 5.24: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique (pour changement en échelon de  $V_{in}$ ).

## 5.2 Convertisseur Buck DC-DC avec charge résistive variable

Soit le convertisseur Buck DC-DC sous la forme (5.4) possédant maintenant une charge résistive  $R$  susceptible de varier, ayant des valeurs comprises dans l'intervalle  $[R_{min}, R_{max}]$ . Par conséquent, la matrice d'état  $A_c(t)$  est considérée comme ayant une description polytopique :

$$\tilde{A}(R(t)) \in \Omega = Co\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}, \quad (5.51)$$

où  $\Omega$  est un polytope avec  $Co$  représentant l'enveloppe convexe et :

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{R_{min}C} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{R_{max}C} \end{bmatrix},$$

les sommets du polytope.

Ainsi, si  $\tilde{A}(R(t)) \in \Omega$  alors pour  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1$ , on obtient  $\tilde{A}(R(t)) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \tilde{A}_i$ .

On discrétise le système associé au convertisseur Buck DC-DC Figure 5.1 en utilisant comme méthode de discrétisation un développement limité au premier ordre (développement en série de Taylor). Le modèle discret obtenu en considérant un bloqueur d'ordre zéro à l'entrée du système a la forme (5.5) (avec les notations faites ci-dessus) et :

$$\begin{aligned} A_d &= e^{\tilde{A}T}, \quad B_d = \int_0^T e^{\tilde{A}\tau} d\tau B_c, \quad C = C_c, \\ D &= D_c. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Une approximation du premier ordre peut être utilisée pour  $e^{\tilde{A}(R(t))T}$ , donnant les expressions suivantes pour  $A_d$  et  $B_d$  :

$$A_d = I + \tilde{A}T, \quad B_d = B_c T. \quad (5.53)$$

La matrice d'état possède elle aussi une description polytopique :

$$A_d \in Co\{A_{d1}, A_{d2}\}. \quad (5.54)$$

Pour  $L = 220\mu H$ ,  $C = 47\mu F$ ,  $R_{min} = 3,44\Omega$ ,  $R_{max} = 8,44\Omega$  et la période d'échantillonnage  $T = 50 \cdot 10^{-6}s$  on obtient les matrices :

$$\begin{aligned} A_{d1} &= \begin{bmatrix} 1 & -0,2273 \\ 1,0638 & 0,6907 \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} 1 & -0,2273 \\ 1,0638 & 0,8740 \end{bmatrix}, \\ B_d &= \begin{bmatrix} 5,4545 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_d = 0, \quad B_{dw} = \begin{bmatrix} 0,109 \\ 0,053 \end{bmatrix}, \quad D_v = 0,1. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Pour annuler les erreurs statiques on ajoute une action intégrale en sortie :

$$z(k+1) = z(k) + Cx_d(k) - V_{ref}, \quad (5.56)$$

où  $V_{ref}$  est la tension de référence et  $z \in \mathbb{R}^p$  est l'action intégrale. Notre objectif est d'amener le système à l'équilibre et donc on considère  $V_{ref} = 0$ .

Le système augmenté a la forme (3.80) avec :

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_d(k) \\ z(k) \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} A_{di} & 0 \\ C & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_d & 0 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} B_{dw} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2. \quad (5.57)$$

La loi de commande a la forme :

$$u(k) = -Fx(k). \quad (5.58)$$

Comme la valeur de la charge résistive n'est pas connue (on connaît seulement les bornes) on considère un retour d'état unique. Le vecteur de bruit regroupant les perturbations d'état et de mesure  $n(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$  est supposé borné (3.84).

Nous considérons le pire cas de variation de  $V_{in}$  de  $\pm V_m$ ,  $V_m = 6V$  et donc  $B_w = 6 \begin{bmatrix} B_{dw} \\ 0 \end{bmatrix}$ .

La contrainte sur le rapport cyclique est celle considérée précédemment (5.7).

En suivant la même démarche que lors du paragraphe précédent, avec les données  $d_0 = 0.5$ ,  $V_{in0} = V_{in} = 24V$  et  $V_0 = 12V$  le courant traversant l'inductance peut s'écrire sous la forme (5.16) avec les notations (5.17) et la contrainte sur le courant est donnée par (5.12) pour une charge résistive nominale  $R = 6\Omega$ .

La LMI garantissant la satisfaction des contraintes sur le courant est donnée par 5.19.

### 5.2.0.3 Retour d'état

On recherche maintenant le retour d'état qui maximise l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes sur le rapport cyclique (5.7) et sur le courant (5.12) pour toute transition  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ . On a choisi de synthétiser un retour d'état unique (qui s'est montré satisfaisant pour le système avec convertisseur) car la valeur de la charge résistive est inconnue (on connaît seulement les bornes entre lesquelles elle varie). Alors, en optimisant le critère (4.5) soumis à (4.6) (en remplaçant  $A$  par  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ ), (4.7), (4.8) et (5.19) pour un  $\alpha = \beta = 0,167$  le retour d'état (unique) qui en résulte est :

$$F = \begin{bmatrix} 0,1659 & -0,0056 & 0,007 \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

L'ellipsoïde invariant maximal a un volume  $V = 2,0022 \cdot 10^3 V^2 A$ . La figure 5.26 (ligne pleine) montre la projection sur les deux dimensions les plus importantes de l'espace d'état (la tension et le courant) de l'ellipsoïde invariant maximal.

Les évolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique pour le retour d'état donné par (5.59) sont illustrées Figure 5.25. Nous considérons un changement en échelon de  $12V$  en  $V_{in}$  (de  $18V$  à  $30V$ ) à l'instant  $0,01s$ , ce qui représente en fait, la perturbation la plus importante que l'on peut considérer. On considère également une variation de  $R_{max}$  à  $R_{min}$  à l'instant  $0,005s$ .

On observe que pour le retour d'état (5.59) la contrainte sur le courant traversant l'inductance (5.12) est légèrement dépassée et que la contrainte sur le rapport cyclique (5.7)

est satisfaite. Ce léger dépassement peut être dû à la méthode de discrétisation considérée. Le système atteint l'ISS avec une dynamique lente (problème qui sera réglé en utilisant une technique basée sur la décroissance de la fonction de Lyapunov).

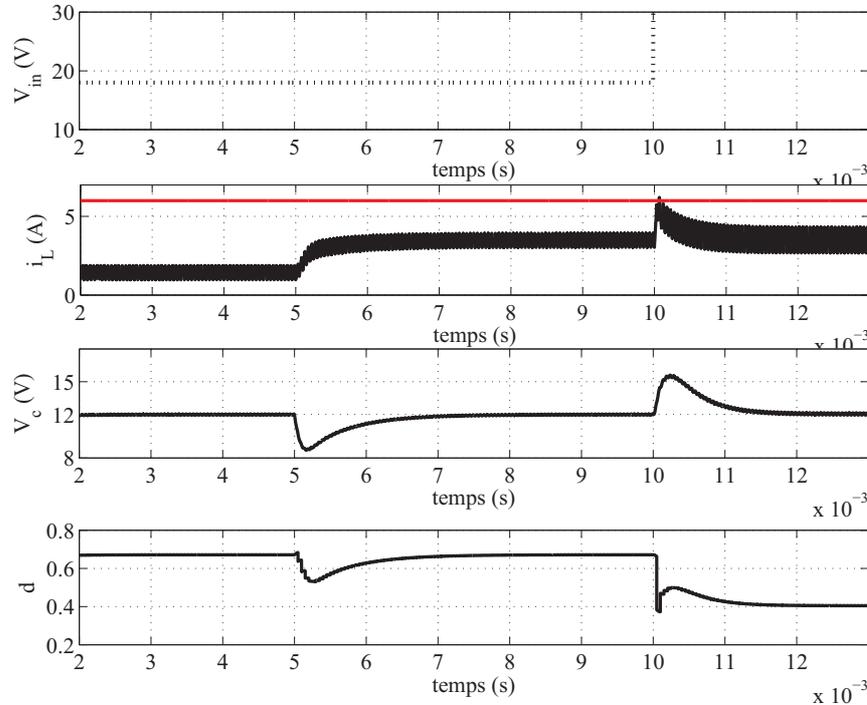


FIGURE 5.25: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique.

#### 5.2.0.4 Retour d'état avec décroissance de la fonction de Lyapunov

Comme on a vu, le retour d'état 5.59 donne de bons résultats en termes de robustesse (ellipsoïde invariant ayant un volume important) mais dégrade la performance. Afin de résoudre ce problème une loi de commande par retour d'état fournissant la fonction de Lyapunov avec une vitesse de décroissance vis-à-vis de la commande et de la sortie normalisé par  $\frac{1}{\eta}$  (avec  $\eta$  donné) :

$$\Delta V = V(k) - V(k+1) \geq \frac{1}{\eta} (u(k)^T Q_1 u(k) + y(k)^T Q_2 y(k)). \quad (5.60)$$

sera synthétisée.

Pour cela le problème à résoudre est formulé de la façon suivante :

**Problème 5.3.** Soit un système à temps discret sous forme LPV (3.80), affecté par une perturbation bornée (3.84), avec la loi de commande donnée par (5.58) et soumis à des

contraintes (5.7) et (5.12). L'ellipsoïde invariant maximal satisfaisant la contrainte sur la performance (5.60) est obtenu en résolvant :

$$\min_{G=G^T \succ 0, Y, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det(G) \quad (5.61)$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} G & 0 & \alpha G & GA_i^T - Y^T B^T & Y^T Q_1^{1/2} & GC^T Q_2^{1/2} \\ 0 & \alpha I & 0 & B_w^T & 0 & 0 \\ \alpha G & 0 & \alpha G & 0 & 0 & 0 \\ A_i G - BY & B_w & 0 & G & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Y & 0 & 0 & 0 & \eta I & 0 \\ Q_2^{1/2} CG & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.62)$$

(4.7), (4.8) et (5.19). Le retour d'état qui stabilise le système au sens entrée-état vis-à-vis d'une perturbation bornée est donné par :

$$F = YG^{-1}. \quad (5.63)$$

La manière d'obtenir ces inégalités matricielles est donnée en Annexe B.

L'ellipsoïde maximal obtenu en résolvant le problème 5.3 en considérant  $Q_1 = 1$ ,  $Q_2 = 0,001$ ,  $\eta = 3,26$  et  $\alpha = \beta = 0,196$  a un volume  $V = 1,0284 \cdot 10^3 V^2 A$ .

Le retour d'état (unique) qui en résulte est :

$$F = \begin{bmatrix} 0,1925 & 0,0103 & 0,0111 \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

La Figure 5.26 montre les projections sur  $\tilde{V}$  et  $\tilde{I}$  des ellipsoïdes invariants maximaux obtenus pour les deux cas sans/avec contraintes sur la performance.

On observe que, en imposant des contraintes sur la performance, on perd en volume.

La Figure 5.27 illustre les évolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique pour le retour d'état donné par (5.64). Nous considérons pour cela un changement en échelon de  $12V$  en  $V_{in}$  (de  $18V$  à  $30V$ ) à l'instant  $0,01s$  et une variation de  $R_{max}$  à  $R_{min}$  à l'instant  $0,005s$ .

Avec le retour d'état donné par (5.64) le courant traversant l'inductance et le rapport cyclique satisfont les contraintes (5.12) et (5.7) et le système atteint l'ISS avec une performance en boucle fermée améliorée (l'amélioration de la performance dépend de  $\eta$ , plus  $\eta$  est grand plus on gagne en performance mais on perd en volume). Le courant et la tension atteignent les valeurs d'équilibre plus rapidement.

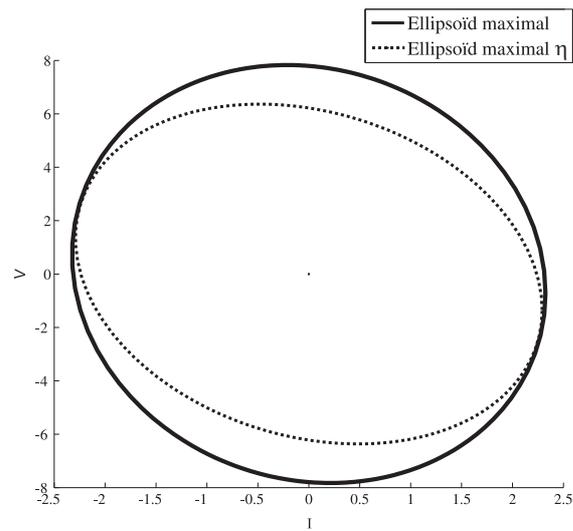
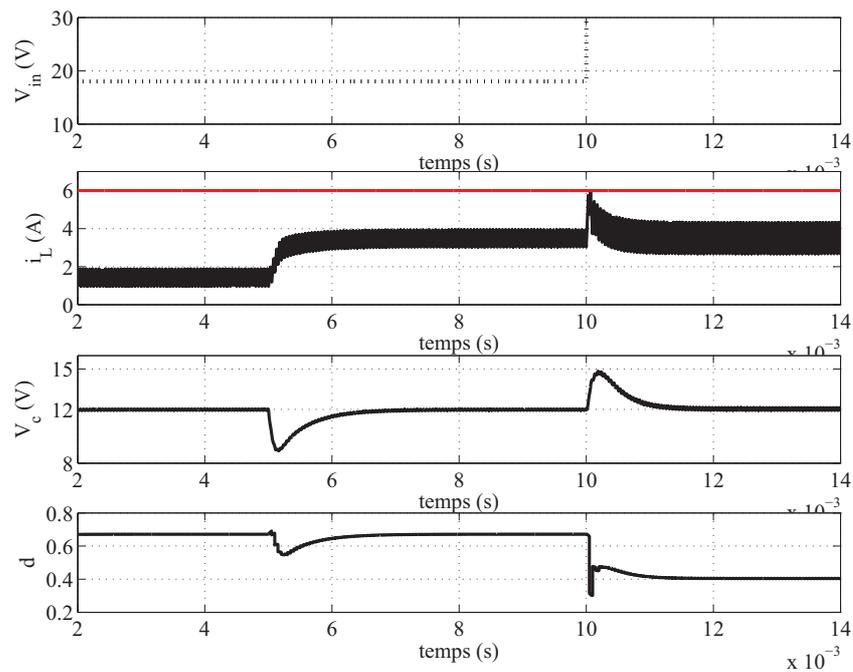
FIGURE 5.26: Projection sur  $\tilde{V}$  et  $\tilde{I}$  des ellipsoïdes invariants maximaux.

FIGURE 5.27: Evolutions temporelles du courant traversant l'inductance, de la tension de sortie et du rapport cyclique.

En appliquant les techniques énoncées dans la section précédente, les résultats obtenus pour le système avec observateur et pour le système avec observateur et Youla ont les caractéristiques décrites tout au long de ce mémoire, c'est pour cela qu'on se limite ici à présenter seulement la synthèse d'une loi de commande par retour d'état.

### 5.3 Conclusions

Ce chapitre est dédié à la mise en oeuvre des techniques développées tout au long de ce mémoire sur un convertisseur Buck DC-DC affecté par des perturbations bornées et soumis à des contraintes sur le rapport cyclique et sur le courant. Après une courte description du système deux cas ont été traités : le convertisseur Buck avec charge résistive constante et le convertisseur Buck avec charge résistive variable. Les résultats expérimentaux sont comparés avec ceux obtenus pour un contrôleur PI.

La section dédiée au cas avec charge résistive constante a été divisée en trois parties : synthèse d'un retour d'état robuste, synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur performante et synthèse d'un paramètre de Youla (à la fois robuste et performant). Le retour d'état a été synthétisé afin de garantir l'ellipsoïde invariant maximal. On a vu que les contraintes sur le courant et sur le rapport cyclique sont satisfaites mais avec une performance légèrement dégradée. En imposant des contraintes sur le placement des pôles on améliore la performance en boucle fermée mais on obtient un ellipsoïde invariant avec un volume réduit et un rapport cyclique avec plus de transitoires. Pour réduire les coûts un observateur a été mis en oeuvre afin de estimer l'état. La loi de commande par retour d'état et observateur est synthétisée afin de garantir la meilleure performance en boucle fermée par rapport à la sortie et à la commande. Les résultats en termes de performance sont bons, les contraintes sur le courant sont satisfaites mais les contraintes sur le rapport cyclique sont légèrement violées (la perturbation considérée est plus importante que celle considérée lors de la synthèse de la loi de commande). Afin d'améliorer la robustesse un paramètre de Youla a été synthétisé en maximisant la projection de l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes. On obtient une projection plus grande que celle obtenue pour le système avec observateur seul, des résultats visiblement meilleurs pour le rapport cyclique mais avec une dynamique très lente en boucle fermée. Le gain en robustesse se traduit par le fait que, maintenant, toutes les contraintes sont satisfaites. Pour obtenir un compromis entre la robustesse et la performance des contraintes sur le placement des pôles ont été considérées lors de la synthèse d'un nouveau paramètre de Youla. La projection résultant est plus petite (mais elle reste plus grande que celle obtenue pour le système avec observateur seul), le rapport cyclique est légèrement dégradé (les contraintes sont satisfaites) et la performance en boucle fermée est améliorée. On arrive donc à un système qui offre des bons résultats tant en robustesse que en performance.

Pour le cas avec charge résistive variable on synthétise un retour d'état garantissant l'ellipsoïde invariant maximal et la satisfaction de contraintes. Pour améliorer la dynamique du système, de contraintes sur la décroissance de la fonction de Lyapunov sont imposées. On obtient maintenant un ellipsoïde avec un volume plus petit mais on gagne en performance.

---

Tous ces résultats ont été validés expérimentalement dans le cas avec charge résistive fixe, et se sont avérés meilleurs que ceux obtenus expérimentalement avec un PI classique. Ceci illustre l'intérêt et le bien fondé des approches proposées successivement dans ce mémoire.



## Chapitre 6

# Conclusions

Cette thèse a examiné de façon approfondie la liaison entre le volume des ensembles invariants et la robustesse/performance des lois de commande pour des systèmes linéaires LTI, LPV ou en commutation à temps discret en prenant en compte la présence de perturbations bornées.

La démarche développée se veut avant tout progressive : on commence par l'analyse d'une loi de commande (par retour d'état, par retour d'état et observateur, par retour d'état, observateur et paramétrisation de Youla) du point de vue ensembliste pour continuer, en utilisant les outils donnés dans cette première étape, par la synthèse hors-ligne d'une loi de commande à la fois robuste et performante pour la classe des systèmes considérés. La représentation sous forme d'état s'avère plus simple et adaptée que le formalisme par fonctions de transfert quand des techniques ensemblistes sont mises en oeuvre, d'autant plus que toute la stratégie se base sur la considération de LMIs.

L'apport théorique de nos travaux réside essentiellement dans l'élaboration d'une stratégie de synthèse d'une loi de commande à la fois robuste et performante, permettant à l'utilisateur de prendre en compte des perturbations bornées présentes dans le processus. Le but est non seulement d'assurer de bonnes propriétés de robustesse par rapport à une perturbation bornée (en recherchant le retour d'état qui maximise l'ellipsoïde invariant ou en introduisant un paramètre de Youla), mais aussi d'assurer un bon niveau de performance nominale pour le rejet de perturbations (la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur performante, synthèse d'un paramètre de Youla en prenant en compte de contraintes sur la performance).

## 6.1 Originalité du travail et apports scientifiques

Notre travail a consisté à étudier des méthodes ensemblistes afin d'analyser et/ou synthétiser des lois de commande à la fois robustes et performantes pour des systèmes linéaires LTI, LPV ou en commutation affectés par des perturbations bornées et/ou soumis à des contraintes sur la performance en boucle fermée. Du point de vue organisation, après une courte présentation des outils théoriques utilisés tout au long de ce document, ce mémoire propose la mise en oeuvre de techniques efficaces garantissant les conditions assurant l'ISS par rapport à une perturbation bornée et permettant de déterminer l'ensemble ellipsoïdal positif invariant minimal et l'ensemble ellipsoïdal positif invariant maximal (ou l'ensemble invariant ayant la projection maximale ou l'ellipsoïde tronqué invariant maximal). Le chapitre 4 consiste en l'utilisation de tous ces outils dans un but de synthèse, une stratégie de commande robuste et performante étant élaborée à partir de considérations sur les ensembles invariants et la dynamique des systèmes en boucle fermée avec une transformation des objectifs et contraintes sous forme LMI. Le mémoire se termine par une application de toutes ces techniques à la commande d'un convertisseur Buck DC-DC.

Le chapitre 3 nous a permis de donner les conditions suffisantes afin de garantir l'ISS par rapport à une perturbation bornée. Pour les systèmes de type LPV ou en commutation, des matrices supplémentaires ont été introduites permettant de considérer des fonctions de Lyapunov dépendantes du paramètre. Egalement dans ce chapitre ont été présentées des techniques LMI pour le calcul de l'ellipsoïde invariant maximal (projection maximale) et de l'ellipsoïde invariant minimal (intersection minimale). Quand des perturbations bornées sont présentes au sein du processus, il est impossible de synthétiser une fonction de Lyapunov décroissante, en revanche, il est possible de synthétiser une fonction de Lyapunov décroissante à l'extérieur de ces ensembles mais avec une monotonie inconnue à l'intérieur. On garantit alors que pour cette fonction de Lyapunov l'état ne franchit pas la frontière. Mais comme on ne connaît pas la monotonie de la fonction de Lyapunov à l'intérieur des ensembles invariants, pour le cas LPV ou en commutation, on est obligé de considérer une fonction de Lyapunov unique lors du calcul des ensembles invariants minimaux et maximaux. Des matrices supplémentaires sont enfin considérées afin de réduire le conservatisme. La conclusion fondamentale de ce chapitre réside dans le fait que l'on montre que le paramètre de Youla a comme effet une diminution/augmentation du volume de l'intersection/projection minimale/-maximale dans le cas LTI et seulement une augmentation du volume de la projection maximale dans le cas LPV ou en commutation. Ce chapitre a également proposé une technique qui permet d'obtenir un ensemble (appelé ellipsoïde tronqué), garantissant l'invariance malgré la présence d'une perturbation bornée, et donné par l'intersection

d'un polyèdre (donné par les contraintes) et un ellipsoïde. L'espace obtenu est généralement plus grand que l'espace ellipsoïdal et nous permet d'évaluer le conservatisme lié à la forme ellipsoïdale.

Le chapitre 4 est ensuite allé plus loin dans notre démarche permettant de synthétiser une loi de commande par retour d'état, une loi de commande par retour d'état et observateur et un paramètre de Youla pour des systèmes linéaires, LPV ou en commutation affectés par une perturbation bornée et soumis à des contraintes sur la commande (ou la sortie) ou sur la performance.

Une loi de commande par retour d'état est synthétisée afin de garantir l'ellipsoïde invariant maximal (projection maximale) satisfaisant des contraintes sur l'entrée malgré la présence des perturbations bornées. Pour le cas LPV ou en commutation, des matrices supplémentaires ont été introduites afin de réduire le conservatisme mais la fonction de Lyapunov est unique (pour la recherche de l'ensemble maximal). Pour ces deux cas, la loi de commande dépend du paramètre variant.

Si l'état n'est pas disponible à la mesure (impossible ou coûteux) un observateur est mis en oeuvre. On synthétise donc une loi de commande par retour d'état et observateur garantissant l'ISS par rapport à la perturbation bornée. Cette démarche a été possible grâce à un artifice considéré lors de la synthèse qui ne change pas notre problème et s'avère nécessaire (nous considérons que le système et l'observateur peuvent être tous les deux affectés par des perturbations a priori différentes). Pour le cas LPV ou en commutation des matrices supplémentaires ont été introduites permettant de considérer des fonctions de Lyapunov dépendantes du paramètre réduisant le conservatisme. Une fonction Lyapunov dépendant du paramètre variant est ici possible car à travers cette méthode de synthèse on ne recherche pas un ensemble invariant. La loi de commande par retour d'état et observateur dépend aussi du paramètre. Comme la prise en compte des contraintes sur la commande est impossible (le développement des inégalités matricielles ne le permet pas) on a synthétisé la loi de commande par retour d'état et observateur en imposant des contraintes sur la performance via des techniques de placement des pôles ou des techniques impliquant une certaine vitesse de décroissance pour la fonction de Lyapunov. Cette loi de commande est ensuite robustifiée via un paramètre de Youla qui maximise la projection sur le sous espace d'état initial en ajoutant des contraintes sur la commande tout en tenant compte de la présence des perturbations bornées. Pour le cas LPV ou en commutation, le paramètre de Youla dépend du paramètre. Avec la paramétrisation de Youla, on obtient un gain considérable en volume pour la projection maximale par rapport à celle obtenue pour le système avec observateur. La différence de volume entre les deux cas (système avec observateur et système avec observateur et Youla) nous donne une mesure du gain en robustesse. On a vu lors des exemples que

ce gain en robustesse se traduit par une perte en performance et donc un nouveau paramètre de Youla est synthétisé afin d'obtenir un compromis entre la robustesse et la performance en imposant des contraintes sur la performance.

Lors de la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur ou lors de la synthèse d'un paramètre de Youla garantissant un compromis entre la robustesse et la performance plusieurs méthodes garantissant une meilleure performance ont été mises en oeuvre. Ces méthodes peuvent être combinées (sauf pour le cas LPV où l'on ne peut pas considérer la méthode basée sur le placement de pôles) pour profiter des avantages de chaque technique.

Les techniques développées sont ensuite mises en oeuvre sur un convertisseur Buck DC-DC affecté par des perturbations bornées et soumis à des contraintes sur le rapport cyclique et le courant. Deux cas sont considérés : le convertisseur Buck DC-DC avec une charge résistive constante et le convertisseur Buck avec une charge résistive variable. Dans le premier cas une loi de commande par retour d'état est synthétisée en utilisant comme critère d'optimisation la maximisation de l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes. Pour obtenir une dynamique plus rapide en boucle fermée des contraintes sur le placement des pôles sont considérées, le système est maintenant plus performant mais l'ellipsoïde invariant maximal est plus petit. Si l'état est estimé via un observateur, on synthétise une loi de commande par retour d'état et observateur garantissant une fonction de Lyapunov ayant la vitesse de décroissance la plus rapide. Cette loi de commande est ensuite robustifiée via la paramétrisation de Youla en considérant des contraintes sur le courant et sur la tension. On recherche maintenant le paramètre de Youla maximisant la projection de l'ellipsoïde invariant sur le sous-espace de l'état initial. La projection obtenue est considérablement plus grande que celle obtenue pour le système avec observateur seul mais les performances sont dégradées. Afin d'arriver à un compromis entre la robustesse et la performance, des contraintes sur le placement des pôles ont été considérées.

Dans la deuxième partie, convertisseur avec charge résistive variable, on se restreint seulement à la synthèse d'un retour d'état en maximisant l'ellipsoïde invariant satisfaisant les contraintes (avec ou sans contraintes sur la performance en fonction du cahier de charges) car les résultats pour le système avec observateur ou le système avec observateur et paramètre de Youla vont dans la même direction que ci-dessus.

Globalement, ce mémoire a fourni un ensemble de techniques et d'outils génériques permettant la synthèse de lois de commande robustes, ou la robustification de lois existantes, par des techniques ensemblistes applicables à de nombreuses classes de systèmes (linéaires discrets). Les lois résultantes, obtenues hors-ligne, s'avèrent de complexité raisonnable, et les outils mis en oeuvre ont permis autant que possible d'en réduire le conservatisme.

Tous ces résultats ont pu être mis en évidence grâce à une manipulation appropriée des LMIs, ce qui constitue également un apport fondamental de notre travail.

Les exemples ainsi que l'application expérimentale considérés dans ce mémoire ont enfin montré ce caractère générique du travail, aisément transposable d'un cas à l'autre.

## 6.2 Perspectives

Plusieurs directions sont envisagées pour des développements futurs en perspective de ces travaux de thèse.

Une première problématique serait de calculer des ensembles invariants à l'intérieur desquels l'erreur entre la consigne et la trajectoire de l'état puisse se situer sans violer les contraintes tout en prenant en compte des perturbations bornées. La difficulté consiste à considérer la forme de la consigne (qui varie dans le temps) lors de la construction des LMIs.

On pourrait également envisagé l'extension de la théorie des ellipsoïdes tronqués pour la synthèse d'un retour d'état.

Une autre voie à suivre serait l'implémentation des techniques développées dans ce mémoire pour la synthèse en-ligne d'une loi de commande à la fois robuste et performante et l'extension de ces techniques dans le cadre de la commande MPC. La présence d'une perturbation bornée introduit une variable de décision supplémentaire qui multiplie une autre variable de décision. Dans le cas de la synthèse hors-ligne. Comme cette nouvelle variable est scalaire, le problème peut être résolu facilement par une boucle itérative. Pour le cas hors-ligne cela ne pose pas de problèmes particuliers, par contre, pour le cas en-ligne la charge et le temps de calcul peuvent devenir importantes. Néanmoins, la technique développée dans ce mémoire permet de calculer les ellipsoïdes invariants minimal et maximal vis-à-vis d'un signal de commande additionnel introduit dans la boucle fermée proportionné par le paramètre de Youla-Kučera. [28, 46, 55] considèrent aussi un signal additionnel dans la boucle fermée calculé en utilisant des techniques ensemblistes afin de satisfaire des contraintes en-ligne pour la commande de type MPC. Le lien entre ce signal et la paramétrisation de Youla sont à explorer.

Pour les systèmes avec observateur, la démarche présentée dans ce mémoire a pour le moment été réalisée en deux temps, une première étape donnant la loi de commande performante, une deuxième fournissant ensuite le paramètre de Youla permettant de robustifier cette structure. Le but ultime serait de développer des techniques LMI capables de synthétiser à la fois une loi de commande par retour d'état et observateur et un paramètre de Youla garantissant la satisfaction des contraintes et un bon compromis entre la robustesse et la performance malgré la présence de perturbations bornées.



# **Annexes**



# Annexe A

## Théorèmes

### A.1 Théorème associé à la Section 3.1.2.2

**Théorème A.1.** *Soit le système linéaire à temps discret (3.1) affecté par de perturbations bornées  $n$  (3.32). Supposons qu'un observateur (3.29) soit utilisé pour estimer l'état, alors le système s'écrit sous la forme (3.33) et la loi de commande, soumise à des contraintes (3.31), est donnée par (3.35). L'ellipsoïde invariant assurant l'invariance et ayant l'intersection minimale avec l'espace d'état initial  $x(k)$ , est obtenu en résolvant la minimisation suivante :*

$$\min_{P_o=P_o^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0} -\log \det(ZP_oZ^T) \quad (\text{A.1})$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} A_o^T P_o A_o - P_o + \alpha P_o & A_o^T P_o B_o \\ B_o^T P_o A_o & -\alpha I + B_o^T P_o B_o \end{bmatrix} \prec 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\alpha \geq \beta \quad (\text{A.3})$$

et

$$\begin{bmatrix} P_o & F_o^T \\ F_o & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (\text{A.4})$$

*Démonstration.* Parce que la condition de stabilité (3.38) nous garantit aussi l'invariance de l'état en présence d'une perturbation bornée, l'inégalité matricielle (A.2) est en fait donnée par (3.38).

La LMI qui nous assure que les contraintes sur la commande sont satisfaites (A.4) est obtenue comme pour (3.22) en remplaçant  $P$  et  $F$  par  $P_o$  et  $F_o$  respectivement.

Pour ce qui concerne l'optimisation, la preuve est similaire à celle donnée à la fin de la Section 3.1.1.2 à la différence que  $P$  est maintenant remplacé par  $ZP_oZ^T$  (représentant l'intersection).

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est donné par (3.41).  $\square$

## A.2 Théorème associé à la Section 3.1.3.1

**Théorème A.2.** *Soit un système linéaire à temps discret avec un paramètre de Youla inséré dans la boucle fermée (3.52) et affecté par de perturbations bornées (3.51). S'il existe  $P_y = P_y^T \succ 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$  tels que :*

$$\begin{bmatrix} A_y^T P_y A_y - P_y + \alpha P_y & A_y^T P_y B_y \\ B_y^T P_y A_y & -\beta I + B_y^T P_y B_y \end{bmatrix} \prec 0, \quad (\text{A.5})$$

ou

$$\begin{bmatrix} G_y & 0 & \alpha G_y & G_y A_y^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_y^T \\ \alpha G_y & 0 & \alpha G_y & 0 \\ A_y G_y & B_y & 0 & G_y \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.6})$$

et

$$\alpha \geq \beta \quad (\text{A.7})$$

le système avec la paramétrisation de Youla est ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée.

*Démonstration.* L'inégalité (A.5) est obtenue de la même manière que (3.7) en remplaçant  $P$ ,  $A_{bf}$  et  $B_w$  par  $P_y$ ,  $A_y$  et  $B_y$ , respectivement. La fonction de Lyapunov est désormais  $V_y(k) = x_y(k)^T P_y x_y(k)$ ,  $P_y = P_y^T \succ 0$ .

Avec le même raisonnement, l'inégalité (A.6) provient de (3.8) en remplaçant  $G$ ,  $A_{bf}$  et  $B_w$  par  $G_y$ ,  $A_y$  et  $B_y$ , respectivement.

Pour un  $\alpha$  connu, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = \frac{(2n_x + n_Q)(2n_x + n_Q + 1)}{2} + 1. \quad (\text{A.8})$$

$\square$

### A.3 Théorème associé à la Section 3.2.2.2

**Théorème A.3.** Soit le système LPV à temps discret, avec l'état estimé au moyen d'un observateur (3.134) et soumis à des contraintes sur la commande (3.140). L'ellipsoïde invariant malgré la présence de perturbations bornées (3.139) et ayant l'intersection minimale avec le sous-espace de l'état  $x$  est obtenu en résolvant :

$$\min_{P_o=P_o^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0, Q_{poi}} -\log \det(ZP_oZ^T) \quad (\text{A.9})$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} P_o & 0 & \alpha P_o & A_{oi}^T Q_{poi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_{oi}^T Q_{poi}^T \\ \alpha P_o & 0 & \alpha P_o & 0 \\ Q_{poi} A_{oi} & Q_{poi} B_{oi} & 0 & Q_{poi}^T + Q_{poi} - P_o \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\alpha \geq \beta \quad (\text{A.11})$$

et

$$\begin{bmatrix} P_o & F_{oi}^T \\ F_{oi} & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (\text{A.12})$$

*Démonstration.* Les inégalités (A.10), (A.11) et (A.12) sont obtenues d'une manière analogue à (3.120), (3.121) et (3.122), respectivement, en remplaçant  $A_{bfi}$ ,  $B_w$ ,  $Q_{pi}$ ,  $P$  et  $F_i$  par  $A_{oi}$ ,  $B_{oi}$ ,  $Q_{poi}$ ,  $P_o$  et  $F_{oi}$ . Le critère d'optimisation est bâti selon le même principe, on recherche l'ellipsoïde ayant une intersection minimale avec le sous-espace  $x(k)$  et contenant l'union de toutes les intersections minimales relatives à chaque variation du paramètre.

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = \frac{(2n_x)(2n_x + 1)}{2} + 4Nn_x^2 + 1. \quad (\text{A.13})$$

□

### A.4 Théorème associé à la Section 3.2.3.1

**Théorème A.4.** Soit le système LPV à temps discret affecté par de perturbations bornées (3.153), avec l'état estimé au moyen d'un observateur et la robustesse assurée à travers un paramètre de Youla (3.154). S'il existe  $P_{yi} = P_{yi}^T \succ 0$  ou  $G_{yi} = G_{yi}^T \succ 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ , et  $Q_{pyi}$  ou  $Q_{gyi}$  tels que :

$$\begin{bmatrix} P_{yi} & 0 & \alpha P_{yi} & A_{yi}^T Q_{pyi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_{yi}^T Q_{pyi}^T \\ \alpha P_{yi} & 0 & \alpha P_{yi} & 0 \\ Q_{pyi} A_{yi} & Q_{pyi} B_{yi} & 0 & Q_{pyi}^T + Q_{pyi} - P_{yj} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.14})$$

ou

$$\begin{bmatrix} Q_{gyi}^T + Q_{gyi} - G_{yi} & 0 & \alpha Q_{gyi}^T & Q_{gyi}^T A_{yi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_{yi}^T \\ \alpha Q_{gyi} & 0 & \alpha G_{yi} & 0 \\ A_{yi} Q_{gyi} & B_{yi} & 0 & G_{yj} \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N} \quad (\text{A.15})$$

avec

$$\alpha \geq \beta, \quad (\text{A.16})$$

le système est stable en termes entrée-état par rapport à la perturbation bornée.

*Démonstration.* En considérant une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre  $V_y = x_y^T(k) P_y(\theta(k)) x_y(k)$ , avec  $P_y(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i P_{yi}$ ,  $P_{yi} = P_{yi}^T = G_{yi}^{-1} \succ 0$ , l'inégalité (A.14) et (A.15) sont obtenues d'une manière analogue à (3.88) et (3.114) en remplaçant  $A_{bfi}$ ,  $B_w$ ,  $P_i$ ,  $G_i$ ,  $Q_{pi}$  et  $Q_{gi}$  par  $A_{yi}$ ,  $B_{yi}$ ,  $P_{yi}$ ,  $G_{yi}$ ,  $Q_{pyi}$  et  $Q_{gyi}$ .

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = N \frac{(2n_x + n_Q)(2n_x + n_Q + 1)}{2} + N(2n_x + n_Q)^2 + 1. \quad (\text{A.17})$$

□

## A.5 Théorème associé à la Section 3.2.3.2

**Théorème A.5.** Soit le système LPV à temps discret, avec l'état estimé au moyen d'un observateur, la robustesse assurée à travers un paramètre de Youla (3.154) et soumis à des contraintes sur l'entrée (3.152). L'ellipsoïde invariant, malgré la présence de perturbations bornées (3.153), ayant l'intersection minimale est donné par l'optimisation :

$$\min_{P_y = P_y^T \succ 0, \alpha > 0, \beta \geq 0, Q_{pyi}} -\log \det(T P_y T^T) \quad (\text{A.18})$$

s.c. :

$$\begin{bmatrix} P_y & 0 & \alpha P_y & A_{yi}^T Q_{pyi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_{yi}^T Q_{pyi}^T \\ \alpha P_y & 0 & \alpha P_y & 0 \\ Q_{pyi} A_{yi} & Q_{pyi} B_{yi} & 0 & Q_{pyi}^T + Q_{pyi} - P_y \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\alpha \geq \beta \quad (\text{A.20})$$

et

$$\begin{bmatrix} P_y & F_{xi}^T & 0 \\ F_{xi} & u_{max}^2 I & F_{ni} \\ 0 & F_{ni}^T & I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (\text{A.21})$$

*Démonstration.* L'inégalité (A.19) est obtenue d'une manière analogue à (3.120) en remplaçant  $A_{bfi}$ ,  $B_w$ ,  $Q_{pi}$  et  $P$  par  $A_{yi}$ ,  $B_{yi}$ ,  $Q_{pyi}$  et  $P_y$ .

Pour la LMI correspondant aux contraintes d'entrée, nous avons :

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \|F_x(\theta(k))x_y + F_n(\theta(k))n\|_2^2 \leq \|F_x(\theta(k))x_y\|_2^2 + \|F_n(\theta(k))n\|_2^2 \leq \\ &\leq \lambda_{max}(F_x(\theta(k))P_y^{-1}F_x^T(\theta(k))) + \lambda_{max}(F_n(\theta(k))F_n^T(\theta(k))). \end{aligned}$$

En utilisant le complément de Schur en deux étapes (voir la démonstration du théorème 3.10), on obtient :

$$\begin{bmatrix} P_y & F_x(\theta(k))^T & 0 \\ F_x(\theta(k)) & u_{max}^2 I & F_n(\theta(k)) \\ 0 & F_n^T(\theta(k)) & I \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \begin{bmatrix} P_y & F_{xi}^T & 0 \\ F_{xi} & u_{max}^2 I & F_{ni} \\ 0 & F_{ni}^T & I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (\text{A.22})$$

qui est satisfaite si la LMI (A.21) est satisfaite pour tout  $i = \overline{1, N}$ .

Comme précédemment, on recherche l'ellipsoïde ayant une intersection minimale et contenant l'union de toutes les intersections minimales relatives à chaque variation du paramètre. Si les contraintes sont trop fortes et/ou les perturbations sont trop importantes et/ou le système a une dynamique très rapide, un tel ellipsoïde peut ne pas exister.

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est :

$$N_v = \frac{(2n_x + n_Q)(2n_x + n_Q + 1)}{2} + N(2n_x + n_Q)^2 + 1. \quad (\text{A.23})$$

□



## Annexe B

# Démonstrations

### B.1 Démonstration du théorème 3.12.

Comme pour le théorème 3.11, si l'on considère une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre  $V(k) = x(k)^T P(\theta(k))x(k) \succ 0$ , avec  $P(\theta(k)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k)P_i$ ,  $P_i = P_i^T = G_i^{-1} \succ 0$ , les conditions stipulées dans la Section 2.5, lemme 2.17 sont satisfaites pour  $\alpha_1 = \psi \|x\|$  ( $\psi$  un scalaire positif, suffisamment petit),  $\alpha_2 = \sum_{i=1}^N \lambda_{\max}(P_i) \|x\|$ ,  $\alpha_3 = \alpha \vartheta \|x\|$  ( $\vartheta$  un scalaire positif, suffisamment petit) et  $\delta = \beta$  où  $\alpha \geq \beta$ .

Pour prouver la condition suffisante, supposons que la condition (3.114) est faisable. Alors :

$$Q_{gi} + Q_{gi}^T - G_i \succ 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (\text{B.1})$$

Les matrices  $Q_{gi}$  de rang plein, non nécessairement symétriques, ont été introduites pour réduire le conservatisme du problème. Ces matrices nous permettent de relaxer les inégalités matricielles.

Comme  $Q_{gi}$  est une matrice de rang plein et  $G_i = G_i^T \succ 0$ , nous avons :

$$(Q_{gi}^T - P_i^{-1})P_i(Q_{gi} - P_i^{-1}) \succeq 0 \quad (\text{B.2})$$

équivalent à :

$$Q_{gi}^T P_i Q_{gi} \succeq Q_{gi} + Q_{gi}^T - P_i^{-1}, \quad (\text{B.3})$$

d'où la nécessité de rang plein pour  $Q_{gi}$ .

L'inégalité (3.114) devient :

$$\begin{bmatrix} Q_{gi}^T P_i Q_{gi} & 0 & \alpha Q_{gi}^T & Q_{gi}^T A_{bfi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \\ \alpha Q_{gi} & 0 & \alpha G_i & 0 \\ A_{bfi} Q_{gi} & B_w & 0 & G_j \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{B.4})$$

équivalente à :

$$\begin{bmatrix} Q_{gi}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_j^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & 0 & \alpha P_i & A_{bfi}^T P_j \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T P_j \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 \\ P_j A_{bfi} & P_j B_w & 0 & P_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{gi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_j^{-1} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{B.5})$$

$i, j = \overline{1, N}$ , qui revient à (3.104). Il faut ensuite pour chaque  $i$ , multiplier les inégalités correspondant à  $j = \overline{1, N}$  par  $\lambda_j$ , puis sommer. Ensuite on multiplie les  $i = \overline{1, N}$  inégalités résultantes par  $\lambda_i$  puis on somme pour obtenir la relation (3.97). On obtient :

$$\mathcal{V}(k) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) \left( \sum_{j=1}^N \lambda_j(k) Q_{ij} \right), \quad (\text{B.6})$$

qui est une forme quadratique décroissante définie positive. En conclusion,  $\mathcal{L} < 0$  (3.94) et donc  $\Delta V < 0$  pour tout  $x, x^T \mathcal{P}x \geq 1$  et toute perturbation  $w(k), w^T(k)w(k) \leq 1$ .

Pour prouver la condition nécessaire, supposons que la fonction  $\mathcal{L} < 0$ , alors (3.95) est satisfaite. Par conséquent (3.106) est satisfaite. Cette inégalité peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & A_{bfi}^T \\ 0 & B_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha P_i & 0 \\ 0 & P_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{bfi} & B_w \end{bmatrix} \succ 0 \quad (\text{B.7})$$

qui est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \alpha P_i & 0 \\ 0 & P_j \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{bfi} & B_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & A_{bfi}^T \\ 0 & B_w^T \end{bmatrix} \succ 0 \quad (\text{B.8})$$

et encore avec :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} G_i - G_i & -G_i A_{bfi}^T \\ -A_{bfi} G_i & G_j - A_{bfi} G_i A_{bfi}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} \frac{1}{\beta} I \begin{bmatrix} 0 & B_w^T \end{bmatrix} \succ 0 \quad (\text{B.9})$$

résultant en la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\beta}I & 0 & B_w^T \\ 0 & \frac{1}{\alpha}G_i - G_i & -G_i A_{bfi}^T \\ B_w & -A_{bfi}G_i & G_j - A_{bfi}G_i A_{bfi}^T \end{bmatrix} = T_{ij} \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (\text{B.10})$$

Comme  $G_i = G_i^T \succ 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ , pour n'importe quel scalaire positif  $g_i$  on a  $G_i + 2g_i I \succ 0$  et implicitement  $(G_i + 2g_i I)^{-1} \succ 0$ . Tenant en compte que  $A_{bfi}$  sont des matrices Hurwitz, il en résulte que :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ A_{bfi} \end{bmatrix} (G_i + 2g_i I)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I & A_{bfi}^T \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (\text{B.11})$$

Sachant que  $T_{ij} \succ 0$ , il existe toujours un scalaire  $g_i > 0$  suffisamment petit tel que :

$$T_{ij} \succ (-g_i) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ A_{bfi} \end{bmatrix} (G_i + 2g_i I)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I & A_{bfi}^T \end{bmatrix} (-g_i), \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (\text{B.12})$$

Avec le théorème de Schur on obtient :

$$\begin{bmatrix} G_i + 2g_i I & 0 & -g_i & -A_{bfi}^T g_i \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \\ -g_i & 0 & \frac{1}{\alpha}G_i - G_i & -G_i A_{bfi}^T \\ -A_{bfi} g_i & B_w & -A_{bfi} G_i & G_j - A_{bfi}^T G_i A_{bfi} \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (\text{B.13})$$

Pour  $Q_{gi} = G_i + g_i I$ , (B.13) n'est rien d'autre que :

$$\begin{bmatrix} Q_{gi} + Q_{gi}^T - G_i & 0 & -Q_{gi} + G_i & -A_{bfi}^T Q_{gi} + A_{bfi}^T G_i \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \\ -Q_{gi}^T - G_i & 0 & \frac{1}{\alpha}G_i - G_i & -G_i A_{bfi}^T \\ -A_{bfi} Q_{gi}^T + A_{bfi} G_i & B_w & -A_{bfi} G_i & G_j - A_{bfi}^T G_i A_{bfi} \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (\text{B.14})$$

La dernière inégalité est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -I & 0 & \frac{1}{\alpha}I & 0 \\ -A_{bfi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{gi} + Q_{gi}^T - G_i & 0 & \alpha Q_{gi}^T & Q_{gi}^T A_{bfi}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_w^T \\ \alpha Q_{gi} & 0 & \alpha G_i & 0 \\ A_{bfi} Q_{gi} & B_w & 0 & G_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -A_{bfi}^T \\ 0 & I & 0 & -B_w^T \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{B.15})$$

$i, j = \overline{1, N}$ , d'où il résulte (3.114).

## B.2 Démonstration du théorème 4.29.

L'inégalité garantissant le placement des pôles dans le disque de centre  $(0,0)$  et de rayon  $r$  ( $r < 1$ ) est :

$$\begin{bmatrix} rP_{oi} & A_{oi}^T P_{oi} \\ P_{oi} A_{oi} & rP_{oi} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{B.16})$$

obtenue de la même manière que (4.48) en remplaçant  $P_o$  et  $A_o$  par  $P_{oi}$  et  $A_{oi}$  avec  $P_{oi} = P_{oi}^T \succ 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ , la matrice dépendante du paramètre correspondant à la fonction de Lyapunov  $V_o(k) = x_o^T(k) P_{o\sigma} x_o(k)$ . On considère que :

$$r = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Dans la suite de cette preuve, les mêmes extensions que celles faites en (4.107) sont considérées.

L'inégalité assurant l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée est obtenue de la même manière que l'inégalité (4.114) (assurant l'ISS dans le cas LPV) pour  $\eta_1 = \eta_2 = \infty$  en se rappelant que dans le cas en commutation les matrices d'entrée ou de sortie sont dépendantes du paramètre  $(B_\sigma, C_\sigma)$ . Cette inégalité est donc :

$$\begin{bmatrix} P_{oi} & 0 & \alpha P_{oi} & A_{oi}^T P_{oj} \\ 0 & \begin{bmatrix} \beta I & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} & 0 & B_{oi}^T P_{oj} \\ \alpha P_{oi} & 0 & \alpha P_{oi} & 0 \\ P_{oj} A_{oi} & P_{oj} B_{oi} & 0 & P_{oj} \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = \overline{1, N} \quad (\text{B.18})$$

avec :

$$\alpha - \beta - \gamma \geq 0. \quad (\text{B.19})$$

Dans la suite de cette démonstration, les inégalités assurant le placement des pôles et l'ISS vis-à-vis d'une perturbation bornée seront celles mentionnées ci-dessus : (B.16), (B.18) et (B.19).

On cherche alors à prouver que ces inégalités ont une solution si et seulement si les inégalités (4.156), (4.157), (4.158), (4.159) et (4.160) sont faisables.

Pour démontrer l'implication, supposons que les inégalités (B.16) et (B.18) aient une solution  $P_{oi} = P_{oi}^T \succ 0$  sous la forme :

$$P_{oi} = P_{oi}^T = \begin{bmatrix} P_{i,11} & P_{i,12} \\ P_{i,12}^T & P_{i,22} \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (\text{B.20})$$

On pré- et post-multiplie alors (B.18) avec  $\Gamma$  (donnée en (4.32)) et  $\Gamma^T$ , respectivement, et (B.16) avec  $\Sigma$  (donnée en (4.54)) et  $\Sigma^T$ , respectivement.

Avec le complément de Schur on peut facilement voir que ces nouvelles inégalités impliquent :

$$\begin{bmatrix} P_{i,11} & 0 & \alpha P_{i,11} & (A_i - B_i F_i)^T P_{j,11} \\ 0 & \beta I & 0 & [B_w \ 0]^T P_{j,11} \\ \alpha P_{i,11} & 0 & \alpha P_{i,11} & 0 \\ P_{j,11}(A_i - B_i F_i) & P_{j,11}[B_w \ 0] & 0 & P_{j,11} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{bmatrix} r_1 P_{i,11} & (A_i - B_i F_i)^T P_{i,11} \\ P_{i,11}(A_i - B_i F_i) & r_1 P_{i,11} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (\text{B.22})$$

et

$$\alpha - \beta \geq 0. \quad (\text{B.23})$$

En multipliant à droite et à gauche l'inégalité (B.21) par  $\text{diag}(Q_{gi}^T, I, P_{i,11}^{-1}, P_{j,11}^{-1})$  et  $\text{diag}(Q_{gi}, I, P_{i,11}^{-1}, P_{j,11}^{-1})$ , respectivement, en tenant compte que  $(Q_{gi}^T - P_{i,11}^{-1})P_{i,11}(Q_{gi} - P_{i,11}^{-1}) \succeq 0$  implique  $Q_{gi}^T P_{i,11} Q_{gi} \succeq Q_{gi}^T + Q_{gi} - P_{i,11}^{-1}$  et avec les notations  $G_i = G_i^T P_{i,11}^{-1} \succ 0$ ,  $Y_i = F_i Q_{gi}$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , l'inégalité (4.156) en résulte. En multipliant à droite et à gauche l'inégalité (B.22) par  $\text{diag}(Q_{gi}^T, P_{i,11}^{-1})$  et  $\text{diag}(Q_{gi}, P_{i,11}^{-1})$ , respectivement, et avec les mêmes notations que ci-dessus, l'inégalité (4.159) en résulte.

Pour l'inégalité (4.157) et (4.160), on pré et post-multiplie l'inégalité LMI (B.18) avec  $\text{diag}(P_{oi}^{-1}, I, P_{oi}^{-1}, P_{oj}^{-1})$  et la LMI (B.16) avec  $\text{diag}(P_{oi}^{-1}, P_{oi}^{-1})$ . On considère  $G_{oi} = P_{oi}^{-1}$  et

$$G_{oi} = G_{oi}^T = \begin{bmatrix} G_{i,11} & G_{i,12} \\ G_{i,12}^T & G_{i,22} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (\text{B.24})$$

On pré- et post-multiplie ensuite (B.18) par  $\Gamma$  (donnée par (4.32)) et  $\Gamma^T$ , respectivement, et (B.16) avec  $\Sigma$  (donnée par (4.54)) et  $\Sigma^T$ , respectivement. Par la congruence de ces nouvelles inégalités avec  $\Gamma$  et  $\Gamma^T$ , respectivement, et  $\Sigma$  et  $\Sigma^T$ , respectivement, on obtient :

$$\begin{bmatrix} G_{i,22} & 0 & \alpha G_{i,22} & G_{j,22}(A_i - L_i C_i)^T \\ 0 & \gamma I & 0 & [B_w \ -L_i D_v]^T \\ \alpha G_{i,22} & 0 & \alpha G_{i,22} & 0 \\ (A_i - L_i C_i)G_{j,22} & [B_w \ -L_i D_v] & 0 & G_{j,22} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{bmatrix} r_2 G_{i,22} & G_{i,22}(A_i - L_i C_i)^T \\ (A_i - L_i C_i)G_{i,22} & r_2 G_{i,22} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (\text{B.26})$$

et

$$\alpha - \gamma \geq 0. \quad (\text{B.27})$$

On pré- et post-multiplie enfin l'inégalité (B.25) par  $\text{diag}(G_{i,22}^{-1}, I, G_{i,22}^{-1}, Q_{pi})$  et  $\text{diag}(G_{i,22}^{-1}, I, G_{i,22}^{-1}, Q_{pi}^T)$ , respectivement, et la LMI (B.26) par  $\text{diag}(G_{i,22}^{-1}, Q_{pi})$  et  $\text{diag}(G_{i,22}^{-1}, Q_{pi}^T)$ , respectivement. En sachant que  $(Q_{pi} - G_{j,22}^{-1})G_{j,22}(Q_{pi}^T - G_{j,22}^{-1}) \succeq 0$  implique  $Q_{pi}G_{j,22}Q_{pi}^T \succeq Q_{pi} + Q_{pi}^T - G_{j,22}^{-1}$  et avec les notations  $P_i = P_i^T = G_{i,22}^{-1} \succ 0$  et  $J_i = Q_{pi}L_i$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , il en résulte les inégalités (4.157) et (4.160).

Pour démontrer la réciproque, supposons qu'ils existent  $P_i = P_i^T \succ 0$ ,  $G_i = G_i^T \succ 0$ ,  $Q_{pi}$ ,  $Q_{gi}$ ,  $Y_i$ ,  $J_i$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  satisfaisant les inégalités (4.156), (4.157), (4.158), (4.159) et (4.160). Définissons :  $F_i = Y_i Q_{gi}^{-1}$  et  $L_i = Q_{pi}^{-1} J_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . L'objectif est de prouver qu'il existe toujours un  $\lambda > 0$  tel que :

$$P_{oi} = P_{oi}^T = \begin{bmatrix} \lambda G_i^{-1} & 0 \\ 0 & P_i \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{B.28})$$

satisfait (B.18) et (B.16), assurant ainsi la stabilité vis-à-vis d'une perturbation bornée et le placement des pôles.

Comme  $\beta$  est une variable, on peut supposer que  $\beta = \lambda \beta'$ . Avec ces notations et en pré et post- multipliant (B.18) par  $\Gamma$  ((4.32)) et  $\Gamma^T$ , respectivement, et (B.16) par  $\Sigma$  ((4.54)) et  $\Sigma^T$ , respectivement, on obtient (via le complément de Schur) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G_i^{-1} & 0 & \alpha G_i^{-1} & (A_i - B_i F_i)^T G_j^{-1} \\ 0 & \beta' I & 0 & [B_w \ 0]^T G_j^{-1} \\ \alpha G_i^{-1} & 0 & \alpha G_i^{-1} & 0 \\ G_j^{-1}(A_i - B_i F_i) & G_j^{-1}[B_w \ 0] & 0 & G_j^{-1} \end{bmatrix}}_{LMI_{xij}} - \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_j^{-1} B_i F_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S_{ij}} \cdot$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_i & 0 & \alpha P_i & (A_i - L_i C_i)^T P_j \\ 0 & \gamma I & 0 & [B_w \ -L_i D_v]^T P_j \\ \alpha P_i & 0 & \alpha P_i & 0 \\ P_j(A_i - L_i C_i) & P_j[B_w \ -L_i D_v] & 0 & P_j \end{bmatrix}}_{LMI_{\varepsilon ij}^{-1}}^{-1} S_{1ij}^T \succ 0, \quad (\text{B.29})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_1 G_i^{-1} & (A_i - B_i F_i)^T G_i^{-1} \\ G_i^{-1}(A_i - B_i F_i) & r_1 G_i^{-1} \end{bmatrix}}_{LMI_{pxi}} - \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_i^{-1} B F_i & 0 \end{bmatrix}}_{S_{2i}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_2 P_i & (A_i - L_i C_i)^T P_i \\ P_i(A_i - L_i C_i) & r_2 P_i \end{bmatrix}}_{LMI_{pei}^{-1}}^{-1} S_{2i}^T \succeq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (\text{B.30})$$

et

$$\alpha - \lambda \beta' - \gamma \geq 0. \quad (\text{B.31})$$

On peut voir que si (4.156), (4.157), (4.158), (4.159) et (4.160) sont satisfaites alors il existe toujours un  $\lambda > 0$  tel que les inégalités suivantes soient faisables (séparément et toutes ensemble) :

$$\min_{1 \leq i, j \leq N} v_{i,j} > \lambda \max_{1 \leq i, j \leq N} \mu_{i,j}, \quad (\text{B.32})$$

$$\min_{1 \leq i \leq N} \phi_i > \lambda \max_{1 \leq i \leq N} \varphi_i, \quad (\text{B.33})$$

$$\alpha - \gamma \geq \lambda \beta', \quad (\text{B.34})$$

où :

$$v_{ij} = v_{i,j} = \lambda_{i,j,\min}(LMI_{xij}), \quad \mu_{ij} = \lambda_{i,j,\max}(S_{1ij} LMI_{\varepsilon ij}^{-1} S_{1ij}^T),$$

$$\phi_i = \lambda_{i,\min}(LMI_{pxi}), \quad \varphi_i = \lambda_{i,\max}(S_{2i} LMI_{p\epsilon i}^{-1} S_{2i}^T)$$

avec  $\lambda_{\min}$  représentant la valeur propre minimale et  $\lambda_{\max}$  la valeur propre maximale,  $LMI_{xij}$  correspondant à (4.156),  $LMI_{\varepsilon ij}$  à (4.157),  $LMI_{pxi}$  à (4.159) et  $LMI_{p\epsilon i}$  à (4.160). En conclusion, comme (4.156), (4.157), (4.158), (4.159) et (4.160) sont faisables, ce  $\lambda$  existera toujours.

Pour un  $\alpha$  fixé, le nombre de variables scalaires de décision est donné par 4.128.

### B.3 Démonstration du problème 5.1.

Pour prouver les inégalités 5.35, 5.36 et 5.37 on suit la même démarche que lors du théorème 4.22 donné dans le

Le critère de performance (5.33) peut s'écrire sous la forme :

$$V_o(k) - V_o(k+1) \geq \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_1} F_o^T Q_1 F_o + \frac{1}{\eta_2} C_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_1} C_f^T Q_2 D_f \\ \frac{1}{\eta_2} D_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_2} D_f^T Q_2 D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

où  $C_f = [C \ 0]$  et  $D_f = [0 \ D_v]$ .

Nous continuons notre démonstration en définissant les extensions (4.107) en remplaçant  $L_i$  par  $L$ . cas LPV.

Avec cette astuce la condition (5.33) devient :

$$\begin{aligned}
\Delta V_o(k) &= x_o(k)^T P_o x_o(k) - x_o(k+1)^T P_o x_o(k+1) = \\
&= \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_o - A_o^T P_o A_o & -A_o^T P_o B_o \\ -B_o^T P_o A_o & -B_o^T P_o B_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix} \geq \\
&\geq \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_1} F_o^T Q_1 F_o + \frac{1}{\eta_2} C_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_2} C_f^T Q_2 D_f \\ \frac{1}{\eta_2} D_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_2} D_f^T Q_2 D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.36}$$

pour tout  $x_o(k)$  et  $w(k)$  satisfaisant :

$$x_o(k)^T P_o x_o(k) \geq 1 \text{ et } n^T(k)n(k) \leq 1. \tag{B.37}$$

Avec la S-procédure et l'extension (4.107) la condition (B.36) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} P_o - A_o^T P_o A_o & -A_o^T P_o B_o \\ -B_o^T P_o A_o & -B_o^T P_o B_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_1} F_o^T Q_1 F_o + \frac{1}{\eta_1} C_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_1} C_f^T Q_2 D_f \\ \frac{1}{\eta_1} D_f^T Q_2 C_f & \frac{1}{\eta_1} D_f^T Q_2 D_f \end{bmatrix} - \right. \\
&\left. - \begin{bmatrix} \alpha P_o & 0 \\ 0 & -\begin{bmatrix} \beta I & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_o(k) \\ n(k) \end{bmatrix} + (\alpha - \beta - \gamma) \succ 0.
\end{aligned} \tag{B.38}$$

Pour  $\alpha - \beta - \gamma \geq 0$  l'application du complément de Schur nous mène à :

$$\begin{bmatrix} P_o & 0 & \alpha P_o & A_o^T P_o & F_o^T Q_1^{1/2} & C_f^T Q_2^{1/2} \\ 0 & \begin{bmatrix} \beta I & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} & 0 & B_o^T P_o & 0 & D_f^T Q_2^{1/2} \\ \alpha P_o & 0 & \alpha P_o & 0 & 0 & 0 \\ P_o A_o & P_o B_o & 0 & P_o & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} F_o & 0 & 0 & 0 & \eta_1 & 0 \\ Q_2^{1/2} C_f & Q_1^{1/2} D_f & 0 & 0 & 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \succ 0. \tag{B.39}$$

Pour montrer l'implication, supposons que l'inégalité (B.39) ait une solution  $P_o = P_o^T \succ 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$  sous la forme (4.31). On pré- et post-multiplie l'inégalité (B.39) avec,

respectivement,  $\Lambda$  et  $\Lambda^T$  :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (\text{B.40})$$

Avec le complément de Schur on voit que (B.39) implique :

$$\begin{bmatrix} P_{11} & 0 & \alpha P_{11} & (A-BF)^T P_{11} & F^T Q_1^{1/2} \\ 0 & \beta I & 0 & [B_w \ 0]^T P_{11} & 0 \\ \alpha P_{11} & 0 & \alpha P_{11} & 0 & 0 \\ P_{11}(A-BF) & P_{11}[B_w \ 0] & 0 & P_{11} & 0 \\ Q_1^{1/2} F_i & 0 & 0 & 0 & \eta_1 \end{bmatrix} \succ 0, \alpha - \beta \geq 0. \quad (\text{B.41})$$

On pré-et post-multiplie enfin l'inégalité (B.41) par  $\text{diag}(P_{11}^{-1}, I, P_{11}^{-1}, P_{11}^{-1}, I)$ . Avec les notations  $G = G^T = P_{11}^{-1} \succ 0$ ,  $Y = FG$ , il en résulte l'inégalité (5.35).

Pour l'inégalité (5.36), on pré et post-multiplie l'inégalité (B.39) avec  $\text{diag}(G_o, I, G_o, G_o)$  où  $G_o$  est donné par (4.35).

Par la congruence de cette nouvelle inégalité avec  $\Lambda$  et en utilisant le théorème de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} G_{22} & 0 & \alpha G_{22} & G_{22}(A-LC)^T & 0 \\ 0 & \gamma I & 0 & [B_w - LD_v]^T & [0 \ D_v]^T Q_2^{1/2} \\ \alpha G_{22} & 0 & \alpha G_{22} & 0 & 0 \\ (A-LC)G_{22} & [B_w - LD_v] & 0 & G_{22} & 0 \\ 0 & Q_2^{1/2}[0 \ D_v] & 0 & 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{B.42})$$

$$\alpha - \gamma \geq 0. \quad (\text{B.43})$$

Enfin on pré et post-multiplie (B.42) par  $\text{diag}(G_{22}^{-1}, I, G_{22}^{-1}, G_{22}^{-1}, I)$ . Avec les notations  $P = G_{22}^{-1} \succ 0$  et  $J = PL$ , il en résulte l'inégalité (5.36).

Pour la réciproque, supposons qu'ils existent  $P = P^T \succ 0$ ,  $G = G^T \succ 0$ ,  $Y, J, \alpha, \beta$  et  $\gamma$  satisfaisant les inégalités (5.35), (5.36) et (5.37). Définissons :  $F = YG^{-1}$  et  $L = P^{-1}Z$ .

L'objectif est de prouver qu'il existe toujours un  $\lambda > 0$  tel que :

$$P_o = P_o^T = \begin{bmatrix} \lambda G^{-1} & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{B.44})$$

satisfasse (B.39) assurant ainsi la stabilité vis-à-vis d'une perturbation bornée.

Comme  $\beta$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  sont des variables, on peut supposer que  $\beta = \lambda \beta'$  et  $\eta_1 = \lambda \eta_1'$ . Avec ces notations et en pré et post- multipliant (B.39) par  $\Lambda$  et  $\Lambda^T$  (B.40), respectivement, on obtient (via le complément de Schur) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G^{-1} & 0 & \alpha G^{-1} & (A - BF)^T G^{-1} & F^T Q_1^{1/2} \\ 0 & \beta' I & 0 & [B_w \ 0]^T G^{-1} & 0 \\ \alpha G^{-1} & 0 & \alpha G^{-1} & 0 & 0 \\ G^{-1}(A - BF) & G^{-1}[B_w \ 0] & 0 & G^{-1} & 0 \\ Q_1^{1/2} F & 0 & 0 & 0 & \eta_1' \end{bmatrix}}_{LMI_x} -$$

$$-\lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C^T Q_2^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G^{-1} BF & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q_1^{1/2} F & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S_1} \cdot$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 & \alpha P & (A - LC)^T P & 0 \\ 0 & \gamma I & 0 & B_\varepsilon^T P & [B_w \ -LD_v]^T Q_2^{1/2} \\ \alpha P & 0 & \alpha P & 0 & 0 \\ P(A - LC) & P[B_w \ -LD_v] & 0 & P & 0 \\ 0 & Q_2^{1/2} D_p & 0 & 0 & \eta_2 \end{bmatrix}}_{LMI_\varepsilon^{-1}}^{-1} S_1^T \succ 0, \quad (\text{B.45})$$

et

$$\alpha - \lambda \beta' - \gamma \geq 0. \quad (\text{B.46})$$

On voit que si (5.35), (5.36) et (5.37) sont satisfaites alors il existe toujours un  $\lambda > 0$  tel que les inégalités suivantes soient faisables (séparément et toutes ensemble) :

$$\min v > \lambda \max \mu, \quad (\text{B.47})$$

$$\alpha - \gamma \geq \lambda \beta', \quad (\text{B.48})$$

où :

$$v = \lambda_{\min}(LMI_x), \mu = \lambda_{\max}(S_1 LMI_\varepsilon^{-1} S_1^T),$$

avec  $\lambda_{\min}$  représentant la valeur propre minimale et  $\lambda_{\max}$  la valeur propre maximale,  $LMI_x$  correspondant à (5.35) et  $LMI_\varepsilon$  à (5.36). En conclusion, comme (5.35), (5.36) et (5.37) sont faisables, ce  $\lambda$  existera toujours.

Les inégalités 4.48 et 4.49 sont obtenues comme dans le théorème 4.8.

## B.4 Démonstration du problème 5.3.

Le contrainte sur la performance (5.60) peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta V = V(k) - V(k+1) \geq \frac{1}{\eta} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F^T Q_1 F + C^T Q_2 C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}. \quad (\text{B.49})$$

Avec la S-procédure, cette inégalité est satisfaite si :

$$- \begin{bmatrix} \alpha P & 0 \\ P(A_i - BF) & PB_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha P & 0 \\ P(A_i - BF) & PB_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix} \preceq \frac{1}{\eta} \begin{bmatrix} F^T Q_1 F + C^T Q_2 C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{B.50})$$

Avec le complément du Schur on arrive à :

$$\begin{bmatrix} P & 0 & \alpha P & (A_i - BF)^T P \\ 0 & \alpha I & 0 & B_w^T P \\ \alpha P & 0 & \alpha P & 0 \\ P(A_i - BF) & B_w & 0 & P \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} F^T Q_1^{1/2} & C^T Q_2^{1/2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^{1/2} F & 0 & 0 & 0 \\ Q_2^{1/2} C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{B.51})$$

En utilisant de nouveau le théorème du Schur et par congruence de l'inégalité résultant avec  $\text{diag}(G, I, G, G, I, I)$ ,  $G = G^T = P^{-1} \succ 0$ ,  $Y = FG$  il en résulte l'inégalité (5.61).



# Bibliographie

- [1] Alamo, T., Cepeda, A., and Limon, D. (2005). *Improved computation of ellipsoidal invariant sets for saturated control systems*. 44th IEEE Conference on Decision and Control European Control Conference Proceedings.
- [2] Anstett, F., Millérioux, G., and Bloch, G. (2009). *Polytopic observer design for LPV systems based on minimal convex polytope finding*. Journal of Algorithms and Computational Technology, Vol. 3, No. 1, pp.23-43.
- [3] Apkarian, P., Gahinet, P., and Becker, G. (1994). *Self-scheduled  $H_\infty$  control of linear parameter-varying systems*. American Control Conference, pp. 856-860.
- [4] Barmish, B., Corless, M., and Leitmann, G. (1983). *A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems*. SIAM J. Control Optim., Vol.21, No.2.
- [5] Becker, G., Packard, A., Philbrick, D., and Balas, G. (1993). *Control of parametrically-dependent linear systems : A single quadratic Lyapunov approach*. American Control Conference, pp. 2795-2799.
- [6] Becutti, A., Papafotiou, G., Frasca, R., and Morari, M. (2007). *Explicit control of the dc-dc boost converter*. In Proceedings of the PESC 2007, pp. 2503-2509.
- [7] Becutti, A., Papafotiou, G., and Morari, M. (2005). *Optimal control of the boost dc-dc converter*. In Proceedings of the CDC-EDC 2005.
- [8] Bitsoris, G. (1988). *On the positive invariance of polyhedral sets for discrete-time systems*. Systems & Control Letters, Vol. 11, No. 3, pp. 243-248.
- [9] Blanchini, F. and Miani, S. (2008). *Set-theoretic methods in control*. Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhauser, Boston–Basel–Berlin.
- [10] Bouligand, G. (1932). *Introduction a la geometrie infinitesimale directe*. Paris, Bourgin : Gauthiers-Villars.
- [11] Boyd, S. (2009). *Linear matrix inequalities and the S-procedure*. Course EE363, Lecture 15, Stanford.

- [12] Boyd, S. and Barratt, C. (1991). *Linear Controller Design : Limits of Performance*. Prentice-Hall, pp.162-165.
- [13] Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia.
- [14] Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2003). *Convex optimization*. University Press, Cambridge.
- [15] Camacho, E. F. and Bordons, C. (2004). *Model predictive control*. Springer-Verlag, London.
- [16] Cannon, M. and Kouvaritakis, B. (2005). *Optimizing prediction Dynamics for Robust MPC*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 50, no.11, pp.1892-1897.
- [17] Cheng, Q., Kouvaritakis, B., Cannon, M., and Rossiter, J. A. (2009). *A Youla parameter approach to robust Constrained Linear Model Predictive Control*. 48th IEEE Conference on Decision and Control.
- [18] Chilali, M., Gahinet, P., and Apkarian, P. (1999). *Robust pole placement in LMI regions*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, no.12, pp.2257-2270.
- [19] Clement, B. and Duc, G. (2000). *A Multiobjective Control via Youla parameterization and LMI optimization : application to a flexible arm*. IFAC Symposium on Robust Control and Design, Prague.
- [20] Daafouz, J. and Bernussou, J. (2001). *Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameters uncertainties*. Systems & Control Letters, Vol. 43, No.5, pp.355-359.
- [21] Daafouz, J., Riedinger, P., and Iung, C. (2002). *Stability analysis and control synthesis for switched systems : A switched Lyapunov function approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, no.11, pp. 1883-1887.
- [22] Daafouz, J., Riedinger, P., and Iung, C. (2003a). *Observer-based switched control design for discrete-time switched systems*. Proceedings of European Control Conference.
- [23] Daafouz, J., Riedinger, P., and Iung, C. (2003b). *Stabilizing switched control design and pole placement*. IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems.
- [24] Dasgupta, S., Chockalingam, G., Anderson, B., and Fu, M. (1994). *Lyapunov functions for uncertain systems with applications to the stability to time varying systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, pp.93-106.

- [25] Desoer, C., Liu, R., Murray, J., and Saeks, R. (1980). *Feedback system design : the fractional representation approach to analysis and synthesis*. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 25, No. 3, pp 399-412.
- [26] Feng, G. (2002). *Stability analysis of piecewise discretetime linear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No.7, pp.1108-1112.
- [27] Feng, L. (2007). *Stabilization of switching linear systems with bounded disturbances and unobservable switchings*. Springer, Vol. 50, no.5, pp.711-718.
- [28] Feng, L., Sui, D., and Hovd, M. (2008). *On further optimizing prediction dynamics for robust model predictive control*. American Control Conference, pp. 3572-3576.
- [29] Feron, E., Apkarian, P., and Gahinet, P. (1996). *Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, pp.1041-1046.
- [30] Fialho, I. and Balas, G. (2002). *Road adaptive active suspension design using linear parameter varying gain scheduling*. IEEE Transaction on Control Systems Technology, Vol.10, No.1, pp.43-54.
- [31] Forsyth, A. and Mollov, S. (1998). *Modeling and control of DC-DC converters*. Power engineering journal, pp.229-236.
- [32] Gahinet, P., Apkarian, P., and Chilaly, M. (1996). *Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, pp.436-442.
- [33] Gaspar, P., Szaszi, I., and Bokor, J. (2004). *Active suspension design using LPV control*. Proceedings of the 1st IFAC Symposium on Advances in Automotive Control, pp.584-589.
- [34] Geyer, T., Papafotiou, G., and Morari, M. (2004). *On the optimal control of switch-mode DC-DC converters*. Hybrid systems : Computation and control, 2993 :342-356.
- [35] Gilbert, E. and Tan, K. (1991). *Linear Systems with State and Control Constraints : The Theory and Application of Maximal Output Admissible Sets*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, no. 9, pp.1008-1020.
- [36] Goh, K., Turan, L., Safonov, M., Papavassilopoulos, G., and Ly, J. (1994). *Biaffine matrix inequality properties and computational methods*. Proceedings of the American Control Conference, pp. 850-855, Baltimore.
- [37] Goodwin, G., Graebe, S., and Salgado, M. (2001). *Control System Design*. Prentice Hall.

- [38] Goulart, P., Kerrigan, E., and Maciejowski, J. (2005). *Optimization over state feedback policies for robust control with constraints*. Automatica, Vol.42, pp.523–533.
- [39] Gutman, S. (1979). *Uncertain dynamical systems - a Lyapunov min-max approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.24, No.3, pp.437-443.
- [40] Heemels, W., Daafouz, J., and Millerioux, G. (2009). *Design of observer-based controllers for LPV systems with unknown parameters*. Proceedings of the 38th IEEE Conference on decision and control.
- [41] Hency, B. and Alleyne, A. (2009). *An anti-windup technique for LMI regions*. Automatica, Vol.45, pp.2344-2349.
- [42] Henrion, D. and Lasserre, J. (2006). *Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback*. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.51, No.2, pp.192-202.
- [43] Horisberger, H. and Belanger, P. (1976). *Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.21, pp.705-708.
- [44] Horn, R. and Johnson, C. (2010). *Matrix analysis*. University Press, Cambridge.
- [45] Hu, T. and Lin, Z. (2001). *Control of systems with actuator saturation*. Birkhauser, Boston.
- [46] Imsland, L., Rossiter, J., Pluymers, B., and J.Suykens (2007). *Robust triple mode MPC*. International Journal of Control, Vol. 81, no.4, pp.679-689.
- [47] Jeon, D. and Tomizuka, M. (1996). *Learning hybrid force and position control of robot manipulators*. IEEE Trans Robot Aut., Vol. 9, pp.423-431.
- [48] Ji, Z., Wang, L., and Xie, G. (2003). *Stabilizing discrete-time switched systems via observer-based static output feedback*. IEEE Int. Conf. SMC, pp. 2545-2550.
- [49] Jiang, Z.-P. and Wang, Y. (2001). *Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems*. Automatica, Vol. 37 (6), pp.857-869.
- [50] Jonsson, U. (2001). *A Lecture on the S-Procedure*. Division of Optimization and Systems Theory Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
- [51] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, USA.
- [52] Koèvara, M. and Stingl, S. (2006). *PENBMI user's guide*. Penopt GbR, version 2.1, available on [www.penopt.com](http://www.penopt.com), Cambridge.

- [53] Kouvaritakis, B., Rossiter, J., and Chang, A. O. T. (1992). *Stable generalized predictive control : an algorithm with guaranteed stability*. IEE proceedings. Part D. Control theory and applications, Vol. 139, no.4, pp.349-362.
- [54] Kouvaritakis, B., Rossiter, J., and Schuurmans, J. (1999). *Efficient robust predictive control*. Proceedings of the American Control Conference, pp. 4283-4287, San Diego, California.
- [55] Kouvaritakis, B., Rossiter, J., and Schuurmans, J. (2000). *Efficient robust predictive control*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, no.8, pp.1545-1549.
- [56] Kucera, V. (1974). *Closed loop stability of discrete linear single variable systems*. Kybernetika, Vol. 10, No. 2, pp 146-171.
- [57] Kurzhanskiy, A. and Varaiya, P. (2007). *Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.52, No. 2, pp.26-38.
- [58] Lazar, M. and Heemels, W. P. M. H. (2008). *Global input-to-state stability and stabilization of discrete-time piece-wise affine systems*. Nonlinear Analysis : Hybrid Systems, Vol.2, pp.721-734.
- [59] Lee, Y. and Kouvaritakis, B. (2009). *Receding horizon control of switching systems*. Automatica, Vol. 45, pp.2307-2311.
- [60] Lee, Y. I., Cannon, M., and Kouvaritakis, B. (2005). *Extended invariance and its use in model predictive control*. Automatica, Vol. 41, pp.2163-2169.
- [61] Lee, Y. I. and Kouvaritakis, B. (2006). *Constrained robust model predictive control based on periodic invariance*. Automatica, Vol. 42, pp.2175-2181.
- [62] Li, Z., Wen, C., and Soh, T. (2003). *Observer-based stabilization of switching linear systems*. Automatica, Vol. 39, pp.517-524.
- [63] Liberzon, D. (1999). *ISS and integral-ISS disturbance attenuation with bounded controls*. Proceedings of the 38th IEEE conference on decision and control, pp.2501-2506.
- [64] Liberzon, D. and Morse, A. (2003). *Switching in systems and control*. Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhauser, Boston–Basel–Berlin.
- [65] Liberzon, D. and Morse, A. (2007). *Basic Problems in stability and design of switched systems*. IEEE Control Syst. Mag., Vol. 19, no.5.
- [66] Limon, D., Alamo, T., Raimondo, D., de la Pena, D. M., Bravo, J., and Camacho, E. (2008). *Input-to-state stability : an unifying framework for robust model predictive control*. Int. Workshop on Assessment and Future Directions of NMPC, Pavia, Italy.

- [67] Lofberg, J. (2004). *YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*. In Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan.
- [68] Lombardi, W., Luca, A., Oлару, S., and Niculescu, S.-I. (2010). *State admissible sets for discrete systems under delay constraints*. American Control Conference, Baltimore.
- [69] Luca, A., Rodriguez-Ayerbe, P., and Dumur, D. (2010). *Influence de la paramétrisation de Youla-Kučera sur le volume des ensembles invariants*. CIFA Proceedings, Nancy.
- [70] Lure, A. I. and Postnikov, V. (1944). *On the theory of stability of control systems*. Prikl. Mat. i Mekh, Vol. 8, pp.3-13.
- [71] Maciejowski, S. (1989). *Multivariable feedback control*. Addison Wesley, Wokingham.
- [72] Megretski, A. and Treil, S. (1993). *Power distribution inequalities in optimization and robustness of uncertain systems*. Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control, Vol. 3, No. 3, pp.301-319.
- [73] Mignone, D., Ferrari-Trecate, G., and Morari, M. (2000). *Stability and stabilization of piecewise affine and hybrid systems : an LMI approach*. 39th IEEE Conference on Decision and Control European Control Conference Proceedings, pp.504-509.
- [74] Montagner, V., Leite, V., and Peres, P. (2003). *Discrete-Time Switched Systems : Pole Location and Structural Constrained Control*. 42nd IEEE Conference on Decision and Control.
- [75] Montagner, V., Leite, V., and Peres, P. (2004). *Design of a switched control with pole location constraints for a UPS system*. International symposium on industrial electronics.
- [76] Morari, M. and Zafiriou, E. (1989). *Robust Process Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [77] Nagumo, M. (1942). *Über die lage der integralkurven gewöhnlicher differentialgleichungen*. Proc. Phys-Math. Soc. Japan, Vol. 24, No. 3, pp 272-559.
- [78] Nazin, S., Polyak, B., and Topunov, M. (2007). *Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids*. Autom. Remote Control., No.3, pp.467-486.
- [79] O'Dell, B. and Misawa, E. (2000). *Semi-Ellipsoidal Controlled Invariant Sets for Constrained Linear Systems*. Proceedings of the American Control Conference, pp. 1779-1783.

- [80] Oliveira, M. C., Bernussou, J., and Geromel, J. (1999). *A new discrete-time robust stability condition*. *Systems and Control Letters*, Vol.37, pp.261-265.
- [81] Oliveira, R. and Peres, P. (2009). *Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation : Stability analysis and control design*. *Automatica*, Vol.45, pp.2620-2626.
- [82] Packard, A. (1994). *Gain scheduling via Linear Fractional Transformations*. *Systems and Control Letters*, Vol. 22, pp. 79-92.
- [83] Papafotiou, G., Geyer, T., and Morari, M. (2004). *Hybrid modeling and optimal control of switch-mode DC-DC converters*. NONE.
- [84] Pena, R. S. and Sznaier, M. (1998). *Robust systems theory and applications*. Wiley, New York.
- [85] Pettersson, S. (2005). *Observer Design for Switched Systems using Multiple Quadratic Lyapunov Functions*. *Proceedings of IEEE International Symposium on Intelligent Control*.
- [86] Rantzer, A. and Johansson, M. (2000). *Piecewise linear quadratic optimal control*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No.4, pp.629-637.
- [87] Rivetta, C. and Williamson, G. (2004). *Large-signal analysis and control of buck converters loaded by DC-DC converters*. In *Proceedings of the PESC 2004*.
- [88] Rodriguez, P. and Dumur, D. (2005). *Generalized Predictive Control Robustification Under Frequency and Time-Domain Constraints*. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol.13, no.4, pp.577-587.
- [89] Rossiter, J. (2003). *Model-Based Predictive Control, A Practical Approach*. CRC Press.
- [90] Safonov, M., Goh, K., and Ly, J. (1994). *Control system synthesis via bilinear matrix inequalities*. *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 45-49, Baltimore.
- [91] Sala, A. and Ariño, C. (2007). *Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of Polya's theorem*. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 158, pp.2671-2686.
- [92] Scherer, C., Gahinet, P., and Chilali, M. (1997). *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.42, no.7, pp.896-911.
- [93] Scherer, C. and Hol, C. (2006). *Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs*. *Mathematical Programming, Series B* 107, pp. 189-211.

- [94] Scherer, C. W. (2000). *An efficient solution to multi-objective control problems with LMI objectives*. Systems and Control Letters, Vol.40, pp.43-57.
- [95] Scherer, C. W. (2001). *LPV control and full-block multipliers*. Automatica, Vol.37, pp.361-375.
- [96] Scherer, C. W. (2004). *Linear Matrix Inequalities in Control*. Delf Center for Systems and Control & Eindhoven University of Technology, Pays-Bas.
- [97] Scheweppe, F. C. (1973). *Uncertain dynamic systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [98] Scorletti, G. and Ghaoui, L. E. (1995). *Improved linear matrix inequality conditions for gain scheduling*. 34th IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 3626-3631.
- [99] Shamma, J. and Athans, M. (1990). *Analysis of nonlinear gain-scheduled control systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, pp.898-907.
- [100] Shamma, J. and Athans, M. (1991). *Guaranteed properties of gain-scheduled control for linear parameter-varying plants*. Automatica, Vol. 27, pp.559-564.
- [101] Sontag, E. D. (1989). *Smooth stabilization implies coprime factorization*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.34, pp.435-443.
- [102] Sontag, E. D. (1990). *Further facts about input to state stabilization*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.35, pp.473-476.
- [103] Stoica, C., Rodriguez-Ayerbe, P., and Dumur, D. (2008). *Off-line Robustification of Model Predictive Control for Uncertain Multivariable Systems*. 17th IFAC World Congress, pp. 7832-7837, Seoul Korea.
- [104] Sturm, J. F. (2006). *SeDuMi version 1.1R3*. IEEE Transactions on Automatic Control, Canada, the Advanced Optimization Laboratory at McMaster l'University.
- [105] Thibodeau, T., Tong, W., and Hu, T. (2009). *Set invariance and performance analysis of linear systems via truncated ellipsoids*. Automatica, vol. 45, pp. 2046-2051.
- [106] Varaiya, P. (1993). *Smart car on smart roads : problems of control*. IEEE Trans Aut Contr., Vol. 32, no.2, pp.195-207.
- [107] Wan, Z. and Kothare, M. (2003). *An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities*. Automatica, Vol. 39, pp 837-846.
- [108] Willems, J. (1971). *Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation*. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 16, No. 6, pp 621-634.

- [109] Wu, F. (2001). *A generalized LPV system analysis and control synthesis framework*. International Journal of Control, Vol.74, pp.745-759.
- [110] Xie, W. and Eisaka, T. (2004). *Design of LPV control systems based on Youla parameterisation*. Control Theory and Applications, IEE Proceedings, Vol. 151, No. 4, pp.465-472.
- [111] Xie, W., Wen, C., and Li, Z. (2001). *Input-to-state stabilization of switched non-linear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 46, pp.1111-1116.
- [112] Youla, D., Jr., J., and Jabr, H. (1976). *Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 21, pp 3-13.
- [113] Zhou, K., Doyle, J., and Glover, K. (1994). *Robust optimal control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

## Résumé

Le travail de recherche concrétisé par ce mémoire de thèse se trouve à l'intersection de deux domaines importants, la commande robuste des systèmes linéaires (LTI, LPV, en commutation) à temps discret affectés par des perturbations permanentes bornées et des contraintes et les ensembles invariants ellipsoïdaux maximal ou minimal.

La première partie de ce mémoire se focalise sur l'analyse de la stabilité entrée-état (en anglais ISS) du système par rapport à une perturbation bornée et le calcul des ensembles invariants ellipsoïdaux minimal ou maximal (ou sous forme d'ellipsoïdes tronqués) satisfaisant les contraintes. La deuxième partie envisage la synthèse d'une commande par retour d'état ISS stable et robuste vis-à-vis de perturbations bornées, garantissant l'ellipsoïde invariant maximal satisfaisant les contraintes ; puis la synthèse d'une loi de commande par retour d'état et observateur ISS stable vis-à-vis de perturbations bornées, garantissant une certaine performance ; enfin la synthèse d'un paramètre de Youla afin de garantir la projection maximale sur le sous-espace de l'état initial. La projection obtenue possède alors un volume plus grand que celui obtenu sans le paramètre de Youla d'où une amélioration en termes de robustesse. Une dernière étape vise à obtenir un compromis entre la robustesse et la performance en utilisant des critères basés sur le placement de pôles ou sur la vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov. Tous les résultats théoriques obtenus sont exprimés sous forme d'inégalités matricielles et sont validés en simulation et de façon expérimentale dans le cadre de la commande d'un convertisseur de puissance.

**Mots clés :** fonction de Lyapunov, invariance, ISS, LMI, S-procédure, LPV, paramètre de Youla, placement de pôles, convertisseurs de puissance.

## Abstract

The research concretized in this memory is located at the intersection of two important fields, the robust control of discrete-time linear systems (LTI, LPV, switched) affected by bounded disturbances and constraints and the ellipsoidal invariant sets theory.

The first part of this memory focuses on the analysis of input-to-state stability (ISS) over a bounded perturbation and the computation of the maximal or minimal invariant ellipsoidal (or truncated ellipsoidal) set satisfying the constraints. The second part is considering the synthesis of a control state feedback law ISS stable and robust over bounded disturbances, ensuring the maximal ellipsoidal invariant set satisfying the constraints, then the synthesis of an observer-based control law ISS stable over bounded disturbances, ensuring a certain performance, and finally the design of a Youla parameter guaranteeing the maximal ellipsoidal projection on the initial state subspace. The resulting projection has a volume greater than the one obtained without the Youla parameter resulting an improvement in terms of robustness. A final step is to obtain a compromise between robustness and performance using criteria based on poles placement or on the Lyapunov function decreasing rate. The theoretical results are expressed as matrix inequalities and are validated in simulation and experimentally on a Buck DC-DC converter.

**Keywords :** Lyapunov function, invariance, ISS, LMI, S-procedure, LPV, Youla parameter, pole placement, DC-DC converters.